

Prov T.

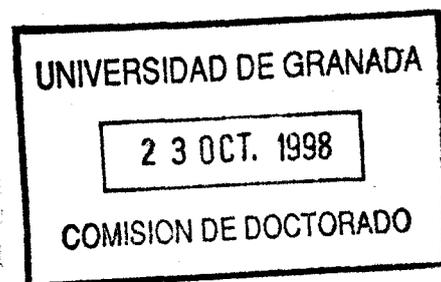
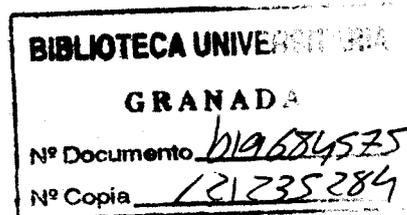
22/71

T
16
73



Instituto Carlos I de Física Teórica y Computacional
y Departamento de Física Moderna
Universidad de Granada

NUEVA DESCRIPCIÓN CONTINUA DE GASES RETICULARES CON ARRASTRE



TESIS DOCTORAL
FRANCISCO DE LOS SANTOS FERNÁNDEZ
GRANADA, 19 de octubre de 1998

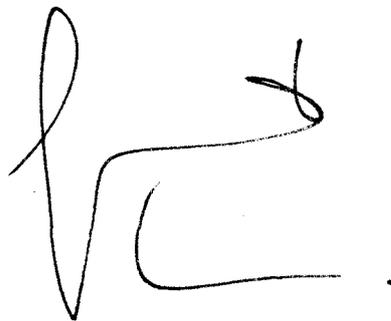
Fdo. Francisco de los Santos Fernández

F. de los Santos

Pedro L. Garrido Galera, Profesor Titular del Departamento de Física Moderna de la Universidad de Granada,

CERTIFICA que la presente memoria ha sido realizada bajo su dirección, y constituye la tesis doctoral de D. Francisco de los Santos Fernández.

Granada, 19 de octubre de 1998.

A handwritten signature in black ink, consisting of a large, stylized 'P' followed by a horizontal line and a small flourish.

Fdo.: Pedro L. Garrido Galera.

Agradecimientos

Todo lo que de bueno contenga este trabajo es obra de Pedro L. Garrido, mi director de tesis, de cuyo estilo perspicuo he aprendido todo lo que sé. Dudo mucho que con el tiempo pueda llegar a aprender todo lo que sabe él, pero afortunadamente para seguir cultivando nuestra amistad no tengo limitaciones.

También agradezco a Joaquín Marro, mi tutor, las facilidades que me ha dado en todo momento y su permanente buena disposición.

Hago extensivo mi agradecimiento a mis amigos de promoción, Joaquín y Elvira, a mis compañeros de doctorado, Cristóbal, José Antonio (por iniciarme en los arcanos de la informática) y Miguel Ángel, a Jesús Sánchez-Dehesa, y a los amigos de siempre, Tello y Julio.

A Carmen le debo muchas horas, más atenciones y conversaciones también más amenas.

Pero, sin lugar a dudas, mi mayor deuda de gratitud es para con mis padres, por una lista inacabable que comienza por su confianza temeraria en mí. Tengo la certeza de que en el futuro mentes más lúcidas corregirán buena parte de lo escrito en esta tesis, si no todo. Pero me alegra decir que, asubido de esa tormenta, quedará siempre inalterable este último párrafo.

Contenidos

Introducción	2
1 Gases reticulares con arrastre	6
1.1 Definición y generalidades	7
1.2 Resumen de algunos resultados previos	11
1.2.1 Simulaciones Monte Carlo	11
1.2.2 Campo medio dinámico	17
1.2.3 Teoría de campos	19
1.3 Modelos de fenómenos naturales	33
1.4 Discusión	37
2 La ecuación de Langevin	43
2.1 La ecuación maestra	45
2.2 De Fokker-Planck a Langevin	48
2.3 Recuento dimensional	53
Apéndice 2	43
3 Campo medio	64
3.1 Morfología	65
3.2 Asimetría durante la segregación de fases	69
3.3 El factor de estructura	74
4 Criticalidad	78
4.1 El funcional generador	79

4.2	Desarrollos perturbativos	83
4.2.1	La teoría libre	84
4.2.2	Reglas de Feynman	88
4.2.3	Desarrollos a un <i>loop</i>	95
4.2.4	Divergencias en teoría de perturbaciones	95
4.3	Los exponentes críticos	99
	Apéndice 4	78
5	Modelos relacionados	114
5.1	El DLG con campo aleatorio	115
5.2	El modelo de dos temperaturas	118
5.3	El modelo de los dos planos	122
	Apéndice 5	114
	Resumen y conclusiones	135
	Bibliografía	141

Introducción

La confirmación de la estructura discreta de la materia data de principios de siglo, tras la creación por Einstein en 1905 de la teoría del movimiento browniano y su confirmación experimental por Perrin entre los años 1908 y 1909. Hasta no mucho antes de esas fechas las propiedades de la materia se estudiaban desde un punto de vista empírico, y las leyes resultantes consistían en relaciones entre parámetros macroscópicos que caracterizaban a los sistemas como un todo, *v.g.* volúmenes, presiones, conductividades térmicas, momentos magnéticos, etc. Hubo que esperar, pues, hasta finales del siglo pasado, cuando la hipótesis atomística empezó a ganar aceptación general, para que los sistemas macroscópicos se empezaran a analizar desde un punto de vista “microscópico”, como sistemas compuestos por muchos átomos o moléculas. Este enfoque atomístico a problemas macroscópicos comenzó con la teoría cinética de los gases diluidos, embrión de lo que después sería la mecánica estadística. Posteriormente, con el advenimiento de la mecánica cuántica, se abrió el camino a una descripción de los sistemas compuestos por muchas partículas basada en conceptos microscópicos más realistas.

Explicar las propiedades de la materia a partir de las leyes que satisfacen sus constituyentes elementales es el problema central de la mecánica estadística. Pero incluso en los casos más sencillos, cuando las interacciones entre átomos individuales son simples y bien conocidas, esta tarea dista de ser trivial. Por lo tanto, no es de extrañar que la primera formulación de la mecánica estadística con cuerpo de doctrina ¹ se restringiera

¹Debida a W. Gibbs en 1902, aunque desarrollada también por Einstein de forma independiente. Véase [Nav] para una comparación entre ambas formulaciones.

a un caso particular: el del equilibrio termodinámico. Aunque no existen verdaderos estados de equilibrio termodinámico en la Naturaleza, dado que requerirían de tiempos infinitos y aislantes perfectos, o fuentes de calor también infinitas, sin embargo, en muchas circunstancias es posible establecer condiciones en las que las predicciones de la mecánica estadística del equilibrio constituyan una excelente aproximación. Así lo acreditan muchos de los logros de la revolución industrial del siglo pasado. Una situación similar se presenta en la mecánica del punto material, donde el movimiento en campos de fuerzas conservativos está mucho más presente en los libros que en la Naturaleza. Pero la mayoría de los fenómenos naturales caen en la categoría de *fuera del equilibrio*. Dada la enorme amplitud y la gran complejidad de este tipo de sistemas, no ha sido posible todavía fundamentar la mecánica estadística de los sistemas fuera del equilibrio con el mismo grado de rigor que la del equilibrio. Para aquéllos sometidos a una perturbación débil en algún sentido, de tal manera que permanezcan “cerca del equilibrio” existen esquemas teóricos (respuesta lineal, etc., [dGr, Pat]). En esta memoria nos ocuparemos exclusivamente de sistemas *lejos del equilibrio*, entendiendo por esto aquellos modelos para los que dichos esquemas fallan.

Un método útil para abordar este tipo de sistemas consiste en estudiar aquéllos que, a la vez que manteniendo las dificultades propias de los alejados del equilibrio, sean tan simples como sea posible. La situación más sencilla fuera del equilibrio la constituyen los *estados estacionarios lejos del equilibrio*, situación que se consigue relajando las condiciones que definen el estado de equilibrio termodinámico hasta el punto de que sólo se exige que sus propiedades macroscópicas no varíen con el tiempo. Así pues, un sistema en un estado estacionario lejos del equilibrio no tiene necesariamente que estar aislado, y permite la existencia de flujos de energía o materia entre él y su entorno. También puede depender el estado estacionario de la evolución previa del sistema porque la condición de ausencia de histéresis no rige para ellos. O sufrir inestabilidades, conocidas con el nombre genérico de *cambios de fase lejos del equilibrio*. La transiciones de fase ocuparán una parte importante de este trabajo, en concreto las de segundo orden o continuas. Se caracterizan éstas por carecer de una escala de longitud típica, lo que obliga para su estudio al uso de los métodos del *grupo de renormalización* [Wil71, Wil74, Wil83, Wil79].

En esta memoria se analizarán las propiedades de algunos sistemas difusivos con arrastre, esto es, sistemas en contacto con un baño térmico, bajo la acción de un campo externo y sujetos a una ley de conservación de partículas. Estudiaremos sus estados lejos del equilibrio, aunque por simplicidad mantendremos dos de las condiciones que caracterizan al equilibrio: la invariancia bajo traslaciones y en el tiempo. En el capítulo primero introduciremos un modelo que, debido en parte a la simplicidad de sus especificaciones microscópicas y en parte también a sus antecedentes históricos, ha disfrutado de cierta atención en la pasada década, por encima de otras variantes de sistemas difusivos con arrastre. No referimos al *gas reticular con arrastre* (DLG por sus siglas en inglés²). Resumiremos en dicho capítulo los resultados más importantes ya existentes, tanto los obtenidos mediante simulación Monte Carlo como por teoría de campos. Trataremos de justificar posteriormente la necesidad de un nuevo tratamiento, habida cuenta del número de cuestiones abiertas y la existencia de contradicciones. El capítulo dos contiene la derivación de una nueva ecuación de Langevin para el DLG mediante un formalismo propio. En el tercer capítulo analizaremos la nueva ecuación en campo medio. Aunque por los asuntos que se tratan en él esta es su posición lógica, es el que deja un mayor número de cuestiones abiertas y líneas de estudio para trabajos futuros. El cuarto capítulo está dedicado a la región crítica, especialmente al cálculo de los exponentes críticos. Por último, en el quinto capítulo se comprueba la aplicabilidad del formalismo introducido en el capítulo dos al estudio de otros sistemas difusivos con arrastre. Estos modelos no se han seleccionado de forma caprichosa. Muy al contrario, guardan una estrecha relación con el DLG y permiten establecer una clasificación general en *clases de universalidad* [Sta]. Aquellas cuestiones que rompen injustificadamente la continuidad de la lectura se relegan a apéndices. En su mayoría no son recopilaciones de teoría, sino que forman parte indisoluble de este trabajo y como tales se añaden al final del capítulo al que corresponden. Por último, un resumen y nuestras conclusiones finales se recogen al final de la memoria.

²En lo que sigue daremos la versión en inglés, debidamente entrecomillada, de aquellos términos que no tenga traducción al español unánimemente aceptada.

Capítulo 1

Gases reticulares con arrastre

De entre la enorme clase de sistemas que presentan estados estacionarios alejados del equilibrio destacan los gases reticulares con arrastre. Desde el punto de vista teórico, es uno de los modelos más sencillos que presenta propiedades que serían del todo imposibles bajo las condiciones del equilibrio y, en consecuencia, paradigmático por su simpleza de las situaciones en las que no se da el equilibrio termodinámico. En el aspecto experimental, están contenidos de una u otra forma en la descripción de varios fenómenos naturales de muy diversa índole. En este capítulo revisaremos los ingredientes esenciales que definen este modelo. Comenzaremos por las definiciones básicas, para pasar en la segunda sección a comentar la información obtenida por medio de simulaciones Monte Carlo y profundizar en los aspectos teóricos. En la tercera sección se recogen de manera somera algunas aplicaciones prácticas. En la cuarta y última se discuten los resultados más importantes, tras lo cual se justifica la necesidad de introducir un nuevo enfoque. El lector interesado podrá encontrar información exhaustiva sobre este modelo y otros afines en [Mar98b, Sch95].

En lo que sigue nos referiremos al gas reticular con arrastre por sus siglas en inglés, DLG (*Driven Lattice Gas*), siguiendo el criterio que ya indicamos en la introducción.

1.1 Definición y generalidades

Consideremos un fluido compuesto por partículas idénticas confinadas en un volumen V . Dividamos ahora dicho volumen en celdas iguales de tal manera que los centros de dos partículas no puedan ocupar simultáneamente la misma celda. Diremos entonces que una celda está ocupada o vacía dependiendo de si contiene o no el centro de alguna partícula. La distribución espacial de partículas puede entonces caracterizarse asociando a cada celda una variable de ocupación, $n_{\mathbf{r}}$, que tomará los valores 0 ó 1 en función de que la celda esté vacía u ocupada, siendo \mathbf{r} es el vector de posición de cada celda. Por simplicidad, escogeremos la unidad de longitud tal que el volumen de las celdas sea 1. Todas estas consideraciones permiten ahora describir de manera sencilla la configuración del fluido en un espacio de d dimensiones sin más que dar el conjunto de números de ocupación, $C \equiv \{n_{\mathbf{r}}\}$, con \mathbf{r} en una red $\sigma \in Z^d$.

En cuanto al potencial de interacción, la limitación de los valores de $n_{\mathbf{r}}$ refleja que las partículas son rígidas e impenetrables. Además, supondremos una energía de interacción a vecinos próximos dada por

$$H(C) = -J \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} n_{\mathbf{x}} n_{\mathbf{y}}, \quad (1.1)$$

donde la sumatoria está restringida a todas las parejas de nudos de la red tales que $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1$. Un valor positivo de J modela una interacción atractiva, mientras que un J negativo implica interacciones interparticulares repulsivas. Hasta ahora no tenemos más que el modelo de *gas reticular* [Yan]. Como es bien sabido, si se sustituyen los números de ocupación por variables de espín, $s_{\mathbf{r}} = \pm 1$, con $s_{\mathbf{r}} = 2n_{\mathbf{r}} - 1$, el gas reticular se transforma en el modelo Ising en el sentido de que la función de partición macrocanónica del primero coincide con la canónica del segundo [Sta]. Se puede hablar entonces de antiferromagnetismo o ferromagnetismo según que J sea negativo o positivo, y de magnetización como equivalente a número total de partículas.

Un baño térmico a temperatura T , que simula fundamentalmente la interacción

del fluido con el gas de fonones asociado a las vibraciones térmicas de la red, induce la evolución en el tiempo de las configuraciones. Para dar cuenta de esta evolución hay que especificar cómo una configuración dada, C , evoluciona a una nueva, C' . Escogeremos una dinámica de Kawasaki [Kaw], de manera que C y C' se diferencian a lo sumo en el intercambio de una partícula con un hueco vecino próximo. Este mecanismo de evolución garantiza que el número total de partículas, $n = \sum_{\mathbf{r} \in \lambda} n_{\mathbf{r}}$, sea constante en el tiempo o, equivalentemente, que la densidad del sistema, $\rho = n/V$, se conserve. La dinámica queda finalmente especificada después de fijar la probabilidad de transición por unidad de tiempo de una configuración C a otra C' , $W[C \rightarrow C']$, en una ecuación maestra en tiempo continuo (o una ecuación de balance equivalente en tiempo discreto) [vKa]:

$$\partial_t P_t(C) = \sum_{C'} \{W[C' \rightarrow C]P_t(C') - W[C \rightarrow C']P_t(C)\}. \quad (1.2)$$

$P_t(C)$ es la densidad de probabilidad de la configuración C en el tiempo t , que en el límite $t \rightarrow \infty$ caracteriza el estado estacionario, $P^*(C) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_t(C)$. Para los sistemas en equilibrio conviene restringir la forma de las probabilidades de transición con objeto de garantizar que la distribución estacionaria coincida con la de equilibrio. Para ello es suficiente que se satisfaga la condición de microrreversibilidad

$$\frac{W[C' \rightarrow C]}{W[C \rightarrow C']} = \frac{P_{eq}(C)}{P_{eq}(C')}, \quad (1.3)$$

también llamada de balance detallado. Dado que las distribuciones de equilibrio vienen dadas por el peso de Boltzmann, $P_{eq} \propto \exp(-\beta H(C))$ con $\beta \equiv (k_B T)^{-1}$, basta con escoger las probabilidades de transición como una función de la diferencia de energía entre configuraciones, $W[C \rightarrow C'] = D(\beta \Delta H)$, donde $\Delta H = H(C') - H(C)$, de tal manera que

$$D(-x) = D(x) e^x, \quad (1.4)$$

para que (1.3) se satisfaga. Diferentes elecciones para las D que cumplen con esta propiedad son la de Metropolis $D(x) = \min\{1, e^{-x}\}$ [Met], Kawasaki $D(x) = 2(1 + e^x)^{-1}$ [Kaw] o la de van Beijeren y Shulman $D(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$ [vBe]. Como

es bien sabido, cuando $d = 2$ y $\varrho = 1/2$, este modelo presenta un cambio de fase de segundo orden a $T_c = 0.4407J/k_B$ [Ons]. Los exponentes críticos asociados a esta transición forman la clase de universalidad de Ising, y son independientes de la probabilidad de transición D escogida.

Finalmente, exponemos el sistema a la acción de un campo eléctrico uniforme y constante en el tiempo, \mathbf{E} , suponiendo que las partículas se comportan como iones positivos sólo con respecto al campo, es decir, no hay interacción electrostática entre partículas. Por conveniencia, supondremos que \mathbf{E} está dirigido en una de las direcciones principales de la red. El campo favorece el salto de partículas en su sentido, reduce el número de saltos en su contra y no afecta a los intercambios partícula-hueco en las direcciones perpendiculares a él. En el caso de tener condiciones de contorno rígidas (las partículas no puede atravesar los límites de la red), los efectos del campo serían indistinguibles de los que causaría un campo gravitatorio si suponemos partículas con masa. El único efecto del campo sería entonces añadir un término de energía potencial al hamiltoniano, y el estado estacionario lo sería de equilibrio y estaría caracterizado por $\exp\{-\beta[H(C) + E \sum_{\mathbf{r}} n_{\mathbf{r}} r_z]\}$, donde r_z es la componente de \mathbf{r} en la dirección de \mathbf{E} . Para conseguir un estado estacionario alejado del equilibrio, Katz *et al.* impusieron condiciones de contorno periódicas. De esta forma, el efecto del campo ya no es derivable de un potencial. Piénsese, por ejemplo, que el trabajo necesario para transportar una partícula de un punto a otro de la red depende de la trayectoria escogida. Con todo, se puede incorporar el trabajo hecho localmente por el campo a las probabilidades de transición de la siguiente manera:

$$W[C \rightarrow C'] = D(\beta(\Delta H(C) + \ell E)). \quad (1.5)$$

$E = |\mathbf{E}|$ y $\ell = -1, 0, 1$ dependiendo de que el salto sea a favor, transversal o en contra de \mathbf{E} respectivamente. Las probabilidades de transición $D(x)$ siguen satisfaciendo la condición de balance detallado, con lo que se garantiza que el caso $E = 0$ quede descrito correctamente por una medida de Gibbs.

Otra diferencia con el caso de equilibrio es que la distribución estacionaria del DLG depende de la elección de las probabilidades de transición, que por lo tanto jugarán un

papel importante en el análisis de las propiedades universales. Estas últimas dependen también de las simetrías del modelo, que es invariante bajo las siguientes operaciones:

1. Traslaciones módulo la periodicidad de la red.
2. Conjugación de carga e inversión del campo: $\mathbf{E} \Leftrightarrow -\mathbf{E}$ y $n_{\mathbf{r}} \Leftrightarrow 1 - n_{\mathbf{r}}$, es decir, sustitución de partículas (“cargas positivas”) por huecos (“cargas negativas”).
3. Reflexión en las coordenadas en la dirección de \mathbf{E} e inversión del campo: $\mathbf{E} \Leftrightarrow -\mathbf{E}$ y $r_z \Leftrightarrow -r_z$.

Una vez que el modelo ha sido definido sólo hay, en principio, que resolver la ecuación maestra para hallar la distribución estacionaria, P^* , y a partir de ésta las magnitudes de no equilibrio de interés. En la práctica esto es inviable salvo dos excepciones. La primera son los sistemas con $J = 0$, es decir, los que presentan difusión anisótropa de partículas sin otra interacción que la exclusión de volumen. A esta categoría pertenece el *modelo de exclusión asimétrica*, en esencia una red unidimensional en la que las partículas se muevan hacia la derecha con probabilidad $(1 + p)/2$ y hacia a la izquierda con probabilidad $(1 - p)/2$ [Der, Spi]. A parte de ser el prototipo más simple de sistema con arrastre, este modelo es equivalente a uno de crecimiento de superficies [Kru] cuyo límite hidrodinámico conduce a un perfil de densidad que obedece la ecuación de Burgers unidimensional. En alguna de sus múltiples variantes comparte algunas propiedades de la ecuación KPZ [Kar, Sch95]. En general, puede demostrarse que la distribución estacionaria para sistemas con $J = 0$ es $P^* = 1$ y que no hay cambio de fase a menos que se modifiquen de manera adecuada las condiciones de contorno o las probabilidades de transición [Spi].

La segunda excepción la constituyen los sistemas pequeños, con redes del orden de diez nudos [Zha]. Aunque no se puede concluir nada sobre las propiedades colectivas de un sistema con redes tan pequeñas, la solución exacta de dichos modelos sí que apunta grandes diferencias con respecto a los casos de equilibrio. Un ejemplo ilustrativo puede encontrarse en [Zia], donde se estudia la relación entre las fluctuaciones de la energía interna y el calor específico en un DLG definido sobre una red 2×3 en los casos $E = 0$ y $E = \infty$. La igualdad propia de los sistemas en equilibrio, $k_B T^2 C_v = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2$,

se satisface en el caso $E = 0$, mientras que para $E = \infty$ la diferencia entre estas dos magnitudes, lejos de anularse, crece monótonamente con T .

1.2 Resumen de algunos resultados previos

Extraer información sobre las propiedades colectivas de un sistema es, en general, una tarea ardua. La introducción de métodos aproximados se hace pues necesaria. De entre éstos destacan las simulaciones Monte Carlo, las teorías de campo medio y los enfoques mesoscópicos en términos de ecuaciones de Langevin. Cada uno de ellos presenta ventajas e inconvenientes pero, al complementarse en cierta forma, proporcionan en conjunto una imagen completa del modelo a estudiar. En esta sección revisamos los resultados concernientes al DLG que se obtienen con cada uno de estos tres métodos. Posponemos la discusión de los mismos a la última sección de este capítulo.

1.2.1 Simulaciones Monte Carlo

Resumimos aquí lo esencial de las simulaciones Monte Carlo del DLG en una, dos y tres dimensiones. Como punto de partida se consideran configuraciones iniciales aleatorias, que posteriormente evolucionan en el tiempo de acuerdo con (1.1)-(1.2), es decir, a partir de una distribución de partículas el sistema se actualiza seleccionando una al azar uno de sus vecinos próximos. Si el vecino es un hueco, entonces se calcula $x = \Delta H + \ell E$. A menos que se indique otra cosa, las probabilidades de transición por unidad de tiempo son las de Metropolis, de manera que se efectúa el intercambio partícula-hueco con probabilidad $\min\{1, e^{-x}\}$. Un paso Monte Carlo se define como N de tales intentos, donde N es el número total de partículas. Para una recopilación completa de procedimientos y resultados se puede acudir a [Mar98b] y a las referencias allí contenidas.

En una dimensión se han empleado anillos de hasta 200 nudos. Sólo existen cuatro

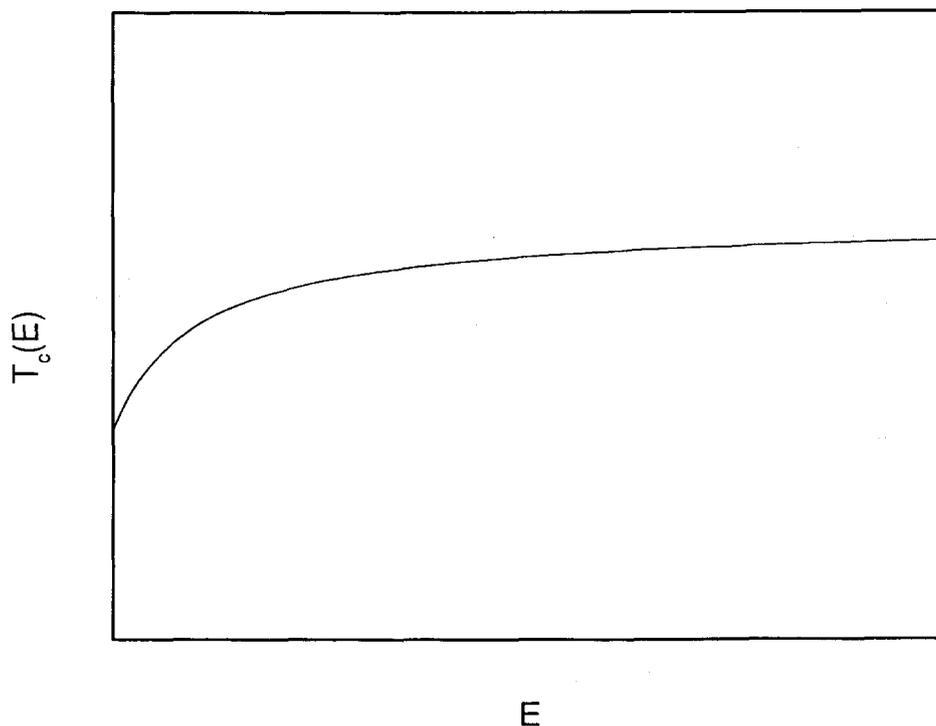


Figura 1.1: Diagrama de las fases.

probabilidades de transición independientes, en virtud de que sólo hay cuatro configuraciones posibles de vecinos próximos de un par dado partícula-hueco [Kat84]. Las conclusiones principales son la ausencia de cambio de fase y el decaimiento exponencial de las correlaciones como en el equilibrio.

El DLG bidimensional es con mucho el más estudiado. Para ello se usan redes de entre cien y 1 millón de nudos, tanto cuadradas como rectangulares. Como en el caso del gas reticular de equilibrio, se encuentra una transición de una fase desordenada a otra ordenada. En concreto, a altas temperaturas y para cualquier valor de densidad ρ y campo E , existe una fase homogénea y anisótropa caracterizada por presentar unas correlaciones espaciales que siguen una ley de potencia¹. Debido a la conservación de

¹Al contrario que en el equilibrio, donde las correlaciones son de corto alcance (decaimiento exponencial) excepto en situaciones especiales, *v.g.* puntos críticos, lejos del equilibrio no es extraño encontrar correlaciones con decaimiento algebraico [Gar90b].

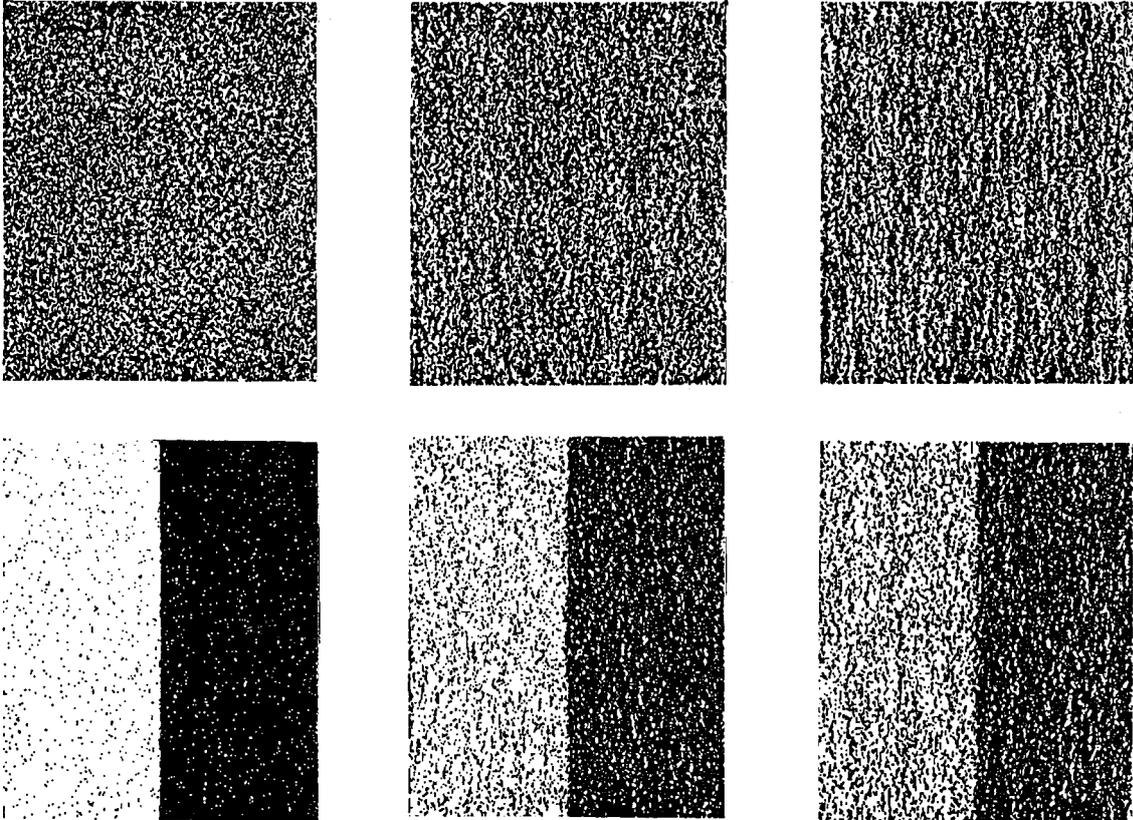


Figura 1.2: Estados estacionarios Monte Carlo típicos correspondientes al DLG bidimensional en una red 300×300 bajo la acción de un campo eléctrico vertical infinito. En el sentido de las agujas de reloj y a partir de la figura superior izquierda, las configuraciones corresponden a $\varrho = 1/2$ y temperaturas (en unidades de la de Onsager $T_c(0)$) $T = 4$, $T = 2$, $T = 1.45$, $T = 1.3$, $T = 1.2$ y $T = 0.8$ respectivamente. Tomado de [Mar98b].

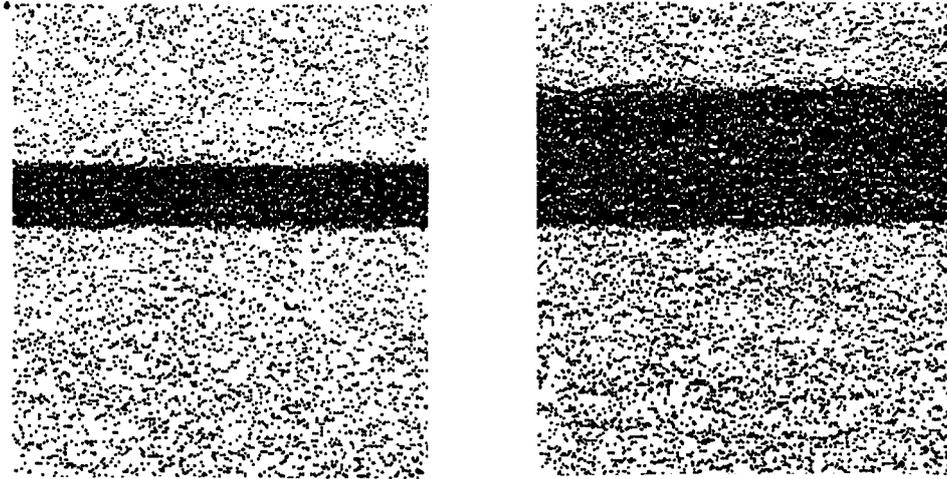


Figura 1.3: Configuraciones Monte Carlo características de un DLG bidimensional en una red 300×300 con campo eléctrico horizontal infinito para, a la izquierda, $\rho = 0.2$ y $T = 1.13$ y, a la derecha, $\rho = 0.35$ y $T = 1.2$ (la temperatura en unidades de la de Onsager $T_c(0)$). Tomado de [Mar98b].

partículas, el ordenamiento se realiza mediante una segregación de fases, anisotrópica, que sucede por debajo de una cierta temperatura $T(E, \rho)$. La temperatura de transición aumenta de forma monótona con E y tiende hacia un valor máximo cuando $E \rightarrow \infty$, lo que implica que el campo eléctrico facilita el ordenamiento. En cuanto a la naturaleza de la transición, ésta depende de ρ . Para la densidad $\rho = 0.5$ es continua, mientras que para valores bajos, $\rho < 0.2$ (ó $\rho > 0.8$, recuérdese la simetría partícula-hueco), es claramente discontinua. Es difícil determinar el orden de la transición en la región intermedia. Con muy pocas excepciones las simulaciones se realizan con la red medio llena porque se espera que la densidad crítica siga siendo $1/2$. También, debido al efecto de saturación que se produce para campos grandes, en la inmensa mayoría de los casos se considera $E = \infty$. En la práctica esto quiere decir que los saltos contrarios al campo se prohíben. En la figura (1.1) se muestra el diagrama de las fases para el caso $\rho = 1/2$. La temperatura de transición $T_c(E) = T^*(E, 0.5)$, comienza con el valor de Onsager para $E = 0$ y encuentra el valor de saturación aproximadamente a $1.4T_c(0)$.

El estado ordenado consiste en una región de *vapor*, o pobre en partículas, sepa-

rada de otra *líquida*, o rica en partículas, por una interfase paralela al campo eléctrico. En favor de la estabilidad de esta configuración, se puede argumentar que los saltos en la fase líquida son necesariamente poco frecuentes debido a la escasez de huecos, e igual consideración se puede hacer en la región de vapor. Por otro lado, los intercambios a través de la interfase suponen un alto coste energético aunque, estrictamente hablando, la minimización de la energía superficial sólo tiene un sentido preciso en el equilibrio. Nunca se han observado interfaces estables ortogonales al campo. En la figuras (1.2) y (1.3) se muestran las configuraciones más representativas. Posponemos al tercer capítulo el resumen sobre los mecanismos de evolución hacia el estado estacionario.

Una cuestión primordial a la hora de estudiar un cambio de fase continuo es identificar un parámetro de orden. En el modelo de Ising de equilibrio, sin conservación de magnetización, el principio de la transición lo marca la aparición de magnetización espontánea. En el DLG, debido a la ley de conservación y a la anisotropía, la elección del parámetro de orden es un asunto que requiere algo más de atención. Para empezar, recordemos que el punto crítico sólo es accesible si $\varrho = 1/2$. En este caso, buscando reflejar la anisotropía de la segregación de fases, Katz *et al.* [Kat84] introdujeron el siguiente parámetro de orden:

$$m = \frac{1}{2\sqrt{\varrho(1-\varrho)}} \sqrt{|\langle M_{\perp} \rangle - \langle M_{\parallel} \rangle|}. \quad (1.6)$$

M_{\perp} y M_{\parallel} son las *magnetizaciones* cuadráticas transversales y longitudinales respectivamente, que vienen dadas por

$$M_{\perp(\parallel)} = \frac{1}{L_{\perp} \times L_{\parallel} \times L_{\perp(\parallel)}} \sum_{\parallel(\perp)} \left[\sum_{\perp(\parallel)} (1 - 2n_{\mathbf{x}}) \right]^2, \quad (1.7)$$

donde L_{\perp} y L_{\parallel} son las dimensiones de la red. m mide la diferencia de densidades entre la fase líquida y la gaseosa basándose en la geometría de la segregación. A temperatura infinita y en el límite termodinámico, $\langle M_{\perp} \rangle = \langle M_{\parallel} \rangle$, y por lo tanto $m = 0$. Por otro lado, cuando la temperatura tiende a cero, $\langle M_{\perp} \rangle \rightarrow 0$ y $\langle M_{\parallel} \rangle \rightarrow 1$, por lo que $m \rightarrow 1$.

Otras elecciones de parámetros de orden están relacionadas con ciertas compo-

mentos del factor de estructura estático,

$$S(\mathbf{k}) = (L_{\perp} \times L_{\parallel})^{-1} \left\langle \left| \sum_{\mathbf{x}} (1 - 2n_{\mathbf{x}}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right|^2 \right\rangle, \quad (1.8)$$

siendo $k_{\perp} = 2\pi n_{\perp}/L_{\perp}$ y $k_{\parallel} = 2\pi n_{\parallel}/L_{\parallel}$, con $n_{\perp, \parallel}$ enteros de $[0, L_{\perp, \parallel} - 1]$. Otro ejemplo se introduce en [Bin]

$$m' = \sqrt{\langle M_{\perp}^{\sin} \rangle^2 + \langle M_{\perp}^{\cos} \rangle^2 + \langle M_{\parallel}^{\sin} \rangle^2 + \langle M_{\parallel}^{\cos} \rangle^2}, \quad (1.9)$$

donde

$$M_{\perp}^{\sin} \equiv \frac{\pi}{2L_{\perp}L_{\parallel}} \sum_{\perp} \sum_{\parallel} (1 - 2n_{\mathbf{x}}) \sin\left(\frac{2\pi x_{\perp}}{L_{\perp}}\right), \quad (1.10)$$

y el resto de términos se define de forma equivalente. Más reciente es la elección de

$$m'' = \frac{\sin(\pi/L_{\perp})}{2L_{\parallel}} \left| \sum_{\mathbf{x}} (1 - 2n_{\mathbf{x}}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right|; \quad \mathbf{k} = (2\pi/L_{\perp}, 0), \quad (1.11)$$

que está directamente relacionada con $S(\mathbf{k}_{\perp}, k_{\parallel}) = S(1, 0)$.

Como cabía esperar, m, m' y m'' reflejan esencialmente las mismas propiedades del estado estacionario en la fase condensada. En concreto, y siguiendo los métodos familiares del equilibrio, se puede tratar de ajustar el parámetro de orden por una ley de potencia de la temperatura en las proximidades del punto crítico,

$$m \sim |T - T_c(\infty)|^{\beta}, \quad T \rightarrow T_c(\infty)^-. \quad (1.12)$$

Tal ajuste es posible y se concluye que el valor de β , usando m como parámetro de orden, es $\beta \approx 0.3$ [Val87]. Las estimaciones hechas con m' o m'' son coherentes con $1/4 < \beta < 1/3$ y, en todo caso, son claramente distintas del valor de equilibrio $1/8$.

Dada la discrepancia entre los valores de β que acabamos de mostrar y el predicho por la teoría de campos (véase en la siguiente sección), se ha argumentado que es necesario incluir la fuerte anisotropía del DLG en los análisis de tamaño finito (*finite size scaling*) [Leu91]. Ello implica, entre otras cosas, descomponer algunos exponentes críticos en dos, paralelos y longitudinales. Cada grupo es carac-

terístico del subespacio al que representa, aunque no son independientes completamente. Por ejemplo, del exponente η , que caracteriza la divergencia del factor de estructura cerca del origen en el espacio de momentos y en la región crítica, $S(\mathbf{k}, t = 0) \sim |\mathbf{k}|^{-(2-\eta)}$ cuando $\mathbf{k} \rightarrow 0$, se pueden definir dos variantes vía modificaciones del tipo, $S(\mathbf{k}_\perp, k_\parallel = 0, t = 0) \sim |\mathbf{k}_\perp|^{-(2-\eta_\perp)}$ para $k_\perp \rightarrow 0$, etc. En general, los exponentes asociados al subespacio transversal, *v.g.* $\eta_\perp, z_\perp, \nu_\perp$, coinciden con los genéricos η, z, ν , mientras que los correspondientes al subespacio longitudinal están relacionados con aquéllos mediante leyes de escala en las que interviene un nuevo exponente, Δ , llamado exponente de anisotropía que tiene un valor aproximadamente igual a 2. Por ejemplo, se tiene que $\nu_\perp = \nu$ y $\nu_\parallel = \nu(1 + \Delta)$ [Sch95].

Finalmente, resumimos brevemente algunos resultados en tres dimensiones. Como es habitual, nos restringimos a campos infinitos, densidad 0.5 e interacciones atractivas en redes cúbicas simples. Se han ensayado diferentes probabilidades de transición, fundamentalmente la de Metropolis, Kawasaki y el caso en el que $W = 1$ para saltos en la dirección del campo, $W = 0$ para saltos en la dirección opuesta y $W = \exp(-\Delta H/2k_B T)$ para cualquier intercambio transversal. Un ajuste de los datos con (1.12) parece indicar $\beta = 0.4 \pm 0.1$, por lo que no se puede discernir claramente entre el valor de equilibrio, $\beta \approx 0.3$, y el obtenido con teoría de campos, $\beta = 1/2$ [Mar98b].

1.2.2 Campo medio dinámico

Aparte de los métodos Monte Carlo, otra gran herramienta para extraer información sobre las propiedades colectivas de un sistema son las teorías de campo medio, que suelen ser el punto de partida de muchos enfoques analíticos. Sin embargo, aunque proporcionan con cierta precisión el diagrama de las fases, la descripción de otras muchas propiedades dista mucho de ser correcta, especialmente en sistemas con interacciones locales y bajas dimensiones. No obstante, se han ideado refinamientos que permiten tratar las teorías de campo medio como una secuencia de aproximaciones que conducen a resultados cada vez más precisos. De hecho, en los desarrollos más

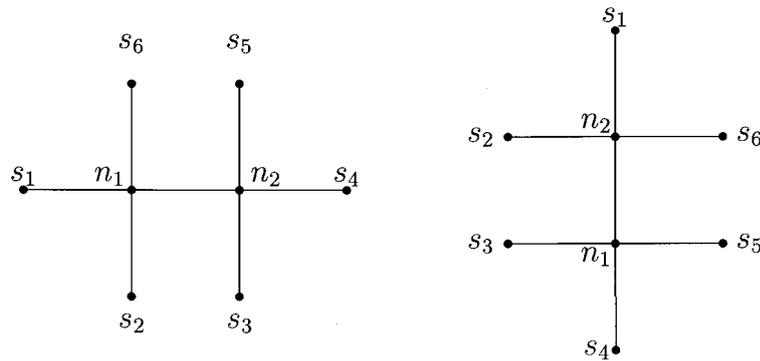


Figura 1.4: Dominios usados en la aproximación de pares en teorías de campo medio dinámicas. Se señalan las variables de ocupación interiores, n_1 y n_2 , y las exteriores s_i .

recientes, que incorporan ideas de *finite size scaling*, los exponentes críticos se pueden estimar con errores inferiores al 10 por ciento [Suz]. Estos mismos métodos se han adaptado de forma específica para estudiar el DLG [Dic]. El procedimiento consiste en considerar un conjunto de partículas, que se tratan de forma exacta, y suprimir las correlaciones entre estas partículas y el resto del sistema. El dominio de partículas debe ser lo bastante grande para que puede tener lugar en él el proceso dinámico que hace evolucionar al sistema. En el caso del DLG, la conservación del número de partículas fuerza a que el dominio mínimo lo formen dos nudos. Éstos, junto con su frontera, se muestran en la figura (1.4). La razón de que haya dos se debe a que es necesario considerar las dos orientaciones posibles con respecto al campo eléctrico. En estas condiciones se puede escribir una ecuación de evolución para la distribución de probabilidad de las configuraciones dentro del dominio, ecuación que se integra numéricamente en un paso posterior. Para que esta distribución sea representativa es condición necesaria que el sistema esté en una fase homogénea, de ahí que el método sólo se pueda aplicar por encima de la temperatura de transición. Hay que decir que el grado de complejidad aumenta enormemente con el tamaño del dominio y que incluso para grupos pequeños de partículas el trabajo puede ser muy laborioso.

En el caso del DLG se han considerado dominios formados por dos y cuatro partículas [Dic]. En el primer nivel de aproximación, hay un acuerdo razonable con

las simulaciones a densidad $\rho = 0.5$, acuerdo que mejora cuando se usan dominios cuadrados. La temperatura de transición crece de forma monótona con el campo, aunque en general la sobrestima. Por el contrario, en tres dimensiones se encuentra que $T_c(E)$ disminuye con E , un resultado que contradice a los datos Monte Carlo. En el caso $d = 2$, todo apunta a que la dependencia monótona de T_c con E es consecuencia de la anisotropía de las correlaciones. Igualmente interesante es el hecho de que los resultados dependen en gran medida de las probabilidades de transición utilizadas, algo irrelevante en situaciones de equilibrio pero un factor esencial a tener en cuenta cuando de sistemas alejados del equilibrio se trata.

1.2.3 Teoría de campos

La ecuación de Langevin

La estructura reticular de muchos modelos, entre ellos el DLG, dificulta de manera extraordinaria el tratamiento analítico. Para salvar estos inconvenientes uno se puede beneficiar de los enfoques mesoscópicos en términos de ecuaciones de Langevin. Son procedimientos a medio camino entre la descripción microscópica y la macroscópica, que se concentran en las propiedades a largas escalas temporales y espaciales y que tratan de eliminar la red transformando el parámetro de orden en un campo continuo. Para ello hay que identificar aquellas variables que tengan una evolución lenta comparada con la evolución del resto de grados de libertad microscópicos (variables rápidas) que se modelan con un ruido conveniente. En principio, se puede llegar a una descripción mesoscópica mediante un promedio adecuado a partir de una ecuación maestra para las variables de ocupación microscópicas [Spo]. Sin embargo, en la práctica, las dificultades que presenta este camino son infranqueables y sólo en contadas ocasiones se ha llevado a cabo de forma rigurosa². En el caso del DLG, puede encontrarse un esfuerzo en este sentido en [Eyk], aunque, como advierten los autores, limitado a la región de altas temperaturas y muy alejados del punto crítico y de la

²Véase, por ejemplo, la deducción de una ecuación de reacción-difusión continua a partir de un modelo estocástico microscópico en [dMa].

zona de coexistencia de fases.

El método habitual para construir ecuaciones de Langevin es postularlas basándose en las simetrías del modelo. Para el DLG esto se hizo por primera vez por Leung y Cardy [Leu86]. Vamos a resumir aquí las líneas principales del trabajo de Leung *et al.* Para los detalles remitimos al lector a las referencias [Sch95, Leu86, Jan86].

Comencemos con el caso más sencillo $E = 0$, con lo que quedarán más claras las diferencias entre equilibrio y no equilibrio. El campo mesoscópico adecuado es en este caso la densidad local de partículas, $\varrho(\mathbf{x}, t)$, cuya relación precisa con las variables de ocupación $n_{\mathbf{x}}$, aunque desconocida, se supone irrelevante. La principal simetría del DLG es la ley de conservación de partículas. Así pues, la ecuación de movimiento para el campo densidad $\varrho(\mathbf{r}, t)$ tendrá la forma de una ecuación de continuidad

$$\partial_t \varrho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (1.13)$$

donde \mathbf{J} es la corriente de partículas. Dicha corriente puede considerarse el resultado de dos contribuciones, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_D + \mathbf{J}_L$. La primera de ellas, que llamaremos determinista, tiene su origen en los gradientes de potencial químico, μ , que es el mecanismo principal de relajación en los sistemas difusivos. Entonces, por aplicación directa de la ley de Fick, postulamos $\mathbf{J}_D = -\lambda \nabla \mu$, donde λ es un coeficiente de transporte. El potencial químico viene dado por $\mu = \nabla \delta \mathcal{H}(\varrho) / \delta \varrho$, donde $\mathcal{H}(\varrho)$ es el hamiltoniano mesoscópico y la notación $\delta / \delta \varrho$ indica derivada funcional con respecto a ϱ . En lo que sigue nos restringiremos a $\varrho = 1/2$, que es con mucho el caso más estudiado en simulación y con lo que esperamos tener acceso además al punto crítico de equilibrio. Además, por reflejar mejor las simetrías del sistema, trabajaremos con $\phi(\mathbf{r}, t) = 2\varrho(\mathbf{r}, t) - 1$, es decir, con la magnetización local y no con la de partículas. Finalmente, cogeremos para $\mathcal{H}(\phi)$ la forma del hamiltoniano de Landau-Ginzburg

$$H(\phi) = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{\tau}{2} \phi^2 + \frac{g}{4!} \phi^4 \right], \quad (1.14)$$

donde el parámetro $\tau \propto T - T_c$ mide la distancia al punto crítico y $g > 0$ para garantizar la estabilidad de la teoría por debajo de T_c y asegurar la aparición de magnetización espontánea.

La segunda contribución a la corriente, denominada de Langevin, modela los efectos relevantes de los grados de libertad microscópicos rápidos que sobreviven al promedio, es decir, constituyen un ruido térmico. Como en la mayoría de las ocasiones, supondremos que el ruido está sujeto a una distribución gaussiana. Así pues, la ecuación de movimiento (1.13) adopta la siguiente forma concreta,

$$\partial_t \phi = \nabla \cdot \left(\lambda \nabla \frac{\delta \mathcal{H}(\phi)}{\delta \phi} + \boldsymbol{\xi} \right), \quad (1.15)$$

donde $\boldsymbol{\xi}$ es un ruido blanco gaussiano:

$$\begin{aligned} \langle \xi_i(\mathbf{x}, t) \rangle &= 0 \\ \langle \xi_i(\mathbf{x}, t) \xi_j(\mathbf{x}', t') \rangle &= N_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (1.16)$$

N_{ij} es la matriz de las correlaciones del ruido. De igual manera que hay que imponer ciertas condiciones a las probabilidades de transición para asegurarse de que la distribución estacionaria coincida con la del equilibrio, hay que escoger N_{ij} de forma que se satisfaga el teorema de fluctuación-disipación [Kub]. En general, si la estructura de una ecuación de Langevin es $\partial_t \phi = F(\phi, \nabla \phi, \dots) + \zeta$, con correlaciones del ruido $\langle \zeta_i(\mathbf{x}, t) \zeta_j(\mathbf{x}', t') \rangle = N_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t')$, entonces la distribución estacionaria $P^*(C)$ es simplemente proporcional al peso de Boltzmann, $e^{-\beta \mathcal{H}}$, en el supuesto de que $F = N_{ij} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi}$ ³. Este es el caso, sin más que tomar

$$N_{ij} = 2\lambda \delta_{ij} / \beta. \quad (1.17)$$

El sistema hasta ahora definido es el llamado Modelo B en la terminología de Hohenberg y Halperin [Hoh]. Las propiedades críticas, tanto estáticas como dinámicas, se siguen tras aplicar los métodos usuales de la teoría de campos [Bau, Jan79]. En concreto, de un tratamiento perturbativo junto con la renormalización de la teoría se deduce que la dimensión crítica superior, aquella por encima de la cual los exponentes

³La mejor forma de ver la relación entre F , N_{ij} y P_t es trabajando con la ecuación de Fokker-Planck equivalente a la de Langevin [Ris].

críticos coinciden con los de campo medio, es $d_c = 4$. Se puede entonces hacer un desarrollo alrededor de d_c , obteniéndose el punto fijo de Wilson-Fisher y los exponentes críticos como serie de potencias en $\varepsilon \equiv d_c - d$. No abundamos más en las propiedades del Modelo B. Simplemente resaltamos que se usa de forma extensiva en el estudio de fenómenos críticos dinámicos en sistemas tipo Ising en equilibrio y que constituye el equivalente continuo a estos modelos. Para más detalles puede consultarse [Hoh, Wil74].

Veamos ahora cómo se modifica el Modelo B después de introducir el campo eléctrico. Hay dos efectos principales: 1) añadir un nuevo término de corriente a la ecuación de continuidad, término que es proporcional al campo (ley de Ohm); 2) romper la simetría entre las direcciones porque el eje sobre el que actúa el campo es distinto de los transversales a él. De nuevo, resulta imposible calcular la nueva corriente como promedio sobre la dinámica microscópica, así que se postula una con base en las simetrías del modelo. En primer lugar, notamos que la nueva corriente \mathbf{J}_E es proporcional a \mathbf{E} y que la constante de proporcionalidad tiene que ser par en ϕ y en \mathbf{E} debido a la simetría $\phi \leftrightarrow -\phi, \mathbf{E} \leftrightarrow -\mathbf{E}$. En segundo lugar, si localmente no hay partículas o huecos ($\varrho = 0$ ó $1 - \varrho = 0$), la corriente debe ser nula. La elección más simple que satisface estas condiciones es $\varrho(1 - \varrho)\mathcal{E}$. \mathcal{E} es el equivalente mesoscópico a \mathbf{E} , cuya dependencia explícita en los parámetros microscópicos se desconoce aunque se espera que no sea esencial en lo que respecta a las propiedades críticas del sistema ni a las cualitativas. Así pues, notando que $\phi = 2\varrho - 1$, escogemos

$$\mathbf{J}_E = (1 - \phi^2)\mathcal{E}. \quad (1.18)$$

Para la región en la que estamos interesados, $T \approx T_c$, puede demostrarse que las correcciones de orden superior en ϕ a \mathbf{J}_E son irrelevantes en un sentido técnico. La segunda modificación importante tiene que ver con la anisotropía. Claramente, el campo \mathbf{E} distingue una dirección privilegiada. Cabe esperar entonces que su presencia genere anisotropías que afecten a todos los operadores ∇^2 , desdoblándolos en dos componentes, la paralela al campo, (∇_{\parallel}^2) , y las transversales a \mathbf{E} , (∇_{\perp}^2) , acompañadas ambas por diferentes coeficientes. La ecuación de Langevin resultante es

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(\mathbf{x}, t) = \lambda \{ & (\tau_{\perp} - \alpha_{\perp} \nabla_{\perp}^2) \nabla_{\perp}^2 \phi + (\tau_{\parallel} - \alpha_{\parallel} \nabla_{\parallel}^2) \nabla_{\parallel}^2 \phi - 2\alpha_{\times} \nabla_{\parallel}^2 \nabla_{\perp}^2 \phi + \\ & + \frac{g}{3!} (\kappa_{\perp} \nabla_{\perp}^2 \phi^3 + \kappa_{\parallel} \nabla_{\parallel}^2 \phi^3) + \mathcal{E} \nabla_{\parallel} \phi^2 \} - (\nabla_{\perp} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp} + \nabla_{\parallel} \xi_{\parallel}), \end{aligned} \quad (1.19)$$

más conocida en la literatura como *driven diffusive system* (DDS). La anisotropía también afecta a la matriz de las correlaciones del ruido que, aunque sigue siendo diagonal, sólo es isótropa en el espacio transversal. Más en concreto, el funcional F que mencionamos cuando hicimos referencia al teorema de fluctuación-disipación, es justo la expresión entre corchetes en (1.19), mientras que la matriz del ruido es fácil comprobar que es de la forma $N_{ij} = n_{\perp} \nabla_{\perp}^2 + n_{\parallel} \nabla_{\parallel}^2$. $n_{\perp, \parallel}$ son parámetros que dependen de \mathbf{E} , J y T . Claramente, el teorema de fluctuación-disipación no se cumple en este caso, señal de que estamos tratando con un fenómeno alejado del equilibrio⁴.

Abundando aún más en las diferencias entre el DLG y un sistema en equilibrio, es de resaltar que aunque este último fuese anisótropo, el cumplimiento del teorema de fluctuación-disipación acarrearía que tanto τ_{\perp} como τ_{\parallel} han de ser proporcionales a la susceptibilidad estática. Por lo tanto, ambos se anulan a la temperatura de transición, T_c , y dan lugar al mismo exponente crítico γ , si bien con amplitudes, en general, diferentes. En el caso de equilibrio, pues, $\tau_{\perp} = \tau_{\parallel} = 0$ marca la transición de segundo orden. En el DLG, la misma cuestión no puede resolverse analizando simplemente las simetrías y, en consecuencia, la región crítica puede estar caracterizada por las siguientes tres posibilidades:

1. $\tau_{\perp} \rightarrow 0$ y $\tau_{\parallel} > 0$.
2. $\tau_{\perp} > 0$ y $\tau_{\parallel} \rightarrow 0$.
3. $\tau_{\perp} \rightarrow 0$ y $\tau_{\parallel} \rightarrow 0$.

⁴Existen sistemas que aun no satisfaciendo el teorema de fluctuación-disipación a escala microscópica, sí que lo hacen a escalas suficientemente grandes [Sch93]. En general, el teorema de fluctuación disipación se puede deducir a partir de la condición de balance detallado para la distribución estacionaria. Puede ocurrir que esta se cumpla a nivel macroscópico incluso aunque se viole en el microscópico. Para profundizar en estas asuntos se puede acudir a [Sch95, Gra].

La elección de una de ellas debe buscar reproducir lo que se observa en las simulaciones. Como vimos en la sección previa, las configuraciones típicas de la fase ordenada consisten en una banda alineada con \mathbf{E} . Esto es un indicio de que para temperaturas inferiores a la crítica domina la “antidifusión” en las direcciones transversales, es decir, $\tau_{\perp} < 0$. Otro razonamiento intuitivo nos lleva a pensar que, dado que el campo actúa como un ruido extra en la dirección paralela, se puede hablar de una disminución efectiva de las interacciones interparticulares en esa dirección. Eso implica que en general $\tau_{\parallel} > \tau_{\perp}$, así que la región crítica está marcada por τ_{\perp} tendiendo a cero con τ_{\parallel} positivo. Todo esto nos lleva a escoger la primera opción como la adecuada para estudiar las propiedades críticas del DDS. Aún es posible otro argumento más, en este caso analítico, sobre el que volveremos después de tratar la renormalización de (1.19).

Límites de altas y bajas temperaturas

Una de las diferencias más notables entre sistemas en equilibrio y los alejados de él se muestra en las funciones de correlación y en el factor de estructura. En los sistemas en equilibrio con interacciones de corto alcance, las funciones de correlación presentan en general un decaimiento exponencial, a menos que se esté en un punto crítico. Por el contrario, lejos del equilibrio, los sistemas muestran factores de estructura singulares y funciones de correlación a dos cuerpos con decaimiento algebraico genérico, es decir, sin necesidad de que haya cambio de fase de segundo orden. En esta sección veremos cómo aparecen estas propiedades en la descripción mesoscópica del DDS.

Vamos a considerar primero la función de correlación a dos cuerpos, $G(\mathbf{r} = (x, y))$, y su transformada de Fourier, el factor de estructura $S(\mathbf{k})$. A temperaturas muy por encima de T_c , el parámetro de orden sólo presenta pequeñas fluctuaciones alrededor de cero, esto es, $\phi(\mathbf{r}, t)$ es pequeño. Por lo tanto se puede suponer que los términos de orden ϕ^2 o superior son irrelevantes comparados con los términos lineales. Esto permite simplificar en gran medida (1.19), tras lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_t \phi = & \lambda \left\{ (\tau_{\perp} - \alpha_{\perp} \nabla_{\perp}^2) \nabla_{\perp}^2 + (\tau_{\parallel} - \alpha_{\parallel} \nabla_{\parallel}^2) \nabla_{\parallel}^2 - 2\alpha_{\times} \Delta_{\perp}^2 \Delta_{\parallel}^2 \right\} \phi + \\ & - (\nabla_{\perp} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp} + \nabla_{\parallel} \xi_{\parallel}). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Ahora, con ayuda de una transformada de Fourier, se puede encontrar fácilmente $\phi(\mathbf{k}, t)$ para cualquier realización de $\boldsymbol{\xi}$, y entonces calcular los promedios sobre el ruido. Este método constituye el punto de partida para los análisis de la fase desordenada. El factor de estructura se obtiene ahora sin más que calcular $\langle \phi(\mathbf{k}) \phi(-\mathbf{k}) \rangle$. Se obtiene

$$S(\mathbf{k}) = \frac{n_{\perp} k_{\perp}^2 + n_{\parallel} k_{\parallel}^2}{2\lambda (\tau_{\perp} k_{\perp}^2 + \tau_{\parallel} k_{\parallel}^2 + O(k_{\perp}^4, k_{\parallel}^4, k_{\perp}^2 k_{\parallel}^2))}. \quad (1.21)$$

El factor de estructura en un puente importante entre la teoría y el experimento, dado que los experimentos de dispersión de radiación miden $S(\mathbf{k})$ como la intensidad de la radiación dispersada.

Dado que lo que nos interesan son las propiedades a grandes distancias, estudiamos el límite del factor de estructura para $|\mathbf{k}|$ pequeño. Hay dos posibilidades para hacer este límite,

$$\begin{aligned} \lim_{k_{\perp} \rightarrow 0} S(k_{\perp}, k_{\parallel} = 0) &= \frac{n_{\perp}}{2\lambda \tau_{\perp}}, \\ \lim_{k_{\parallel} \rightarrow 0} S(k_{\perp} = 0, k_{\parallel}) &= \frac{n_{\parallel}}{2\lambda \tau_{\parallel}}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Si el teorema de fluctuación-disipación se satisficiera, los dos límites darían el mismo resultado. Dado que no es así, no es de extrañar que $S(\mathbf{k})$ tenga una discontinuidad singular en el origen. De forma más precisa, podemos definir

$$R \equiv \frac{\lim_{\kappa_{\parallel} \rightarrow 0} S(0, k_{\parallel})}{\lim_{k_{\perp} \rightarrow 0} S(k_{\perp}, 0)}, \quad (1.23)$$

y medir dicha discontinuidad mediante $R - 1$. En equilibrio, claramente $R = 1$, pero en nuestro caso R diverge cuando $T \rightarrow T_c$ debido a que $\tau_{\perp} \rightarrow 0$ y $\tau_{\parallel} > 0$. La principal consecuencia de $R \neq 1$ se muestra en la función de correlación a dos cuerpos, $G(\mathbf{r})$. Tras un cálculo breve puede demostrarse que $\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} G(\mathbf{r})$ cumple que:

1. Es proporcional a $R - 1$.
2. $G(\mathbf{r}) \sim |\mathbf{r}|^{-2}$.
3. G es anisotrópica; cambia de signo con el ángulo que forman \mathbf{r} y la dirección del campo.

La segunda propiedad era esperable en virtud de un argumento de Grinstein [Gri] según el cual la ley de conservación de partículas da lugar a las autocorrelaciones $G(0, t) \sim t^{-d/2}$. Si a esto se le añade que, por ser un sistema difusivo, $\mathbf{r} \sim \sqrt{t}$, entonces $G(\mathbf{r}) \sim |\mathbf{r}|^{-d}$. Es decir, el decaimiento a largas distancias de las correlaciones no es exponencial sino que sigue una ley de potencia. Recordemos, finalmente, que en el equilibrio esto sólo es posible en un punto crítico, mientras que aquí estamos muy por encima de T_c .

Seguidamente tratamos el caso $T \ll T_c$. Nuevamente, presentamos las propiedades del DLG por comparación con las del modelo de Ising, que son bien conocidas. Debido a la ley de conservación, el sistema muestra coexistencia de fases. Las fluctuaciones dominantes son entonces las asociadas con la interfase. Si pensamos que ésta está alineada con el eje de las y , entonces se puede especificar su configuración dando su posición en el eje de las x mediante la función altura $h(y)$. El factor de estructura asociado, $S(q) = \langle h(q)h(-q) \rangle$, diverge como q^{-2} si se trata del modelo de Ising. Esta propiedad es la manifestación en el espacio de Fourier de que la anchura de la interfase diverge como \sqrt{L} , siendo L , como es habitual, el tamaño de la red. Las interfases con anchuras divergentes se conocen como *rugosas*; sólo para $d > 2$ se puede presentar en modelos tipo Ising transiciones de fases rugosas a suaves.

Simulaciones detalladas del DLG [Leu93] demuestran que $S(q) \sim q^{-2}$ para valores de q grandes, con un cambio a $q^{-0.67}$ para q pequeños. Aunque 0.67 es prácticamente el número racional $2/3$, no existe hasta ahora ninguna teoría viable que explique esta supresión de rugosidad.

Criticalidad

Finalmente, nos centramos en la región crítica, caracterizada por $\tau_{\perp} \simeq 0$ en (1.19). En este régimen de temperaturas las fluctuaciones en todas las escalas posibles dominan las propiedades del sistema, que carece de una escala de longitud característica. Esta invariancia de escala está asociada a una longitud de correlación divergente, como consecuencia de la cual existe un número, en teoría infinito, de grados de libertad acoplados entre sí. En estas circunstancias, los métodos tipo *grupo de renormalización* son esenciales para poder analizar el modelo de forma cuantitativa. Para ello, se somete al sistema a una serie de transformaciones que permiten expresar sus propiedades en función de un conjunto de parámetros efectivos expresados en una escala de longitud diferente de la original. Los puntos fijos de estas transformaciones se identifican con sistemas con invariancia de escala y del análisis de los observables típicos, *v.g.* las funciones de correlación, en el entorno de dichos puntos se determinan los exponentes críticos. Las clases de universalidad surgen entonces cuando distintos modelos dan lugar al mismo punto fijo bajo estas transformaciones. Para encontrar los puntos fijos se pueden usar tanto métodos numéricos como analíticos. Para el DLG, sólo estos últimos se han llevado a la práctica en forma de un desarrollo perturbativo en $\varepsilon \equiv d_c - d$, donde d_c es la dimensión crítica superior.

Para llevar a cabo los cálculos perturbativos los métodos de la *teoría de campos* se muestran muy convenientes. Con este término denotamos cualquier modelo o sistema capaz de ser descrito por una integral funcional. Las integrales funcionales, también llamadas integrales de camino, fueron introducidas por Wiener [Wie] y posteriormente por Feynman [Fey] en contextos diferentes. En mecánica estadística, a partir de un hamiltoniano, \mathcal{H} , expresado como funcional de un parámetro de orden $\phi(\mathbf{r})$, los promedios térmicos en la colectividad canónica vienen dados por una integral funcional con peso de Boltzmann $e^{-\beta\mathcal{H}}/Z$ [Ami, Bnn, ZJ]. Cuando de estudiar un fenómeno dinámico se trata, el punto de partida es una ecuación de Langevin para el campo $\phi(\mathbf{r}, t)$ donde las fluctuaciones térmicas vienen dadas por un ruido. Son los promedios de varias funciones ϕ con respecto a la distribución del ruido las magnitudes

que nos interesa calcular. Desde un punto de vista técnico, es recomendable introducir como representación de estos promedios los llamados campos respuesta $\tilde{\phi}(\mathbf{r}, t)$, o de Martin-Siggia-Rose [Mrt], que dan cuenta del ruido y permiten escribir los promedios sobre el él como

$$\langle \cdot \rangle = \int \mathcal{D}\tilde{\phi} \mathcal{D}\phi \cdot \exp(-\mathcal{L}(\tilde{\phi}, \phi)), \quad (1.24)$$

donde $\mathcal{L}(\tilde{\phi}, \phi)$ es el llamado funcional generador dinámico asociado a la ecuación de Langevin. \mathcal{L} juega un papel análogo al hamiltoniano de la mecánica estadística del equilibrio y $e^{-\mathcal{L}}$ al del factor de Boltzmann. Esta analogía con las teorías de campos del equilibrio se mantiene en lo que respecta a los métodos diagramáticos, lo que permite calcular de manera económica las funciones de correlación, que involucran sólo promedios sobre distintas ϕ , o las funciones respuesta, compuestas por variables de ambos tipos, ϕ y $\tilde{\phi}$. Como en el equilibrio, las magnitudes físicamente interesantes son las *funciones de Green conectadas*, $G_{\tilde{n}n}$, es decir, los cumulantes de los momentos del funcional generador compuestos por promedios con \tilde{n} campos $\tilde{\phi}$ y n del tipo ϕ . La transformada de Legendre de éstas da lugar a las funciones vértice, $\Gamma_{\tilde{n}n}$, que contienen toda la información del sistema.

Concretando para el caso del DDS, el funcional dinámico puede demostrarse que viene dado por [Leu86, Jan86]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tilde{\phi}, \phi) = \int d^d x dt \lambda \left\{ \tilde{\phi} \left[\frac{\partial}{\lambda \partial t} - (\tau_{\perp} - \alpha_{\perp} \nabla_{\perp}^2) \nabla_{\perp}^2 \phi - (\tau_{\parallel} - \alpha_{\parallel} \nabla_{\parallel}^2) \nabla_{\parallel}^2 \phi + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\alpha_{\times} \nabla_{\parallel}^2 \nabla_{\perp}^2 \phi \right] - \frac{g}{3!} \tilde{\phi} (\kappa_{\perp} \nabla_{\perp}^2 + \kappa_{\parallel} \nabla_{\parallel}^2) \phi^3 + \mathcal{E}(\nabla_{\parallel} \tilde{\phi}) \phi^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\lambda} \tilde{\phi} (n_{\parallel} \nabla_{\parallel}^2 + n_{\perp} \nabla_{\perp}^2) \tilde{\phi} \right\}. \quad (1.25) \end{aligned}$$

Se puede simplificar (1.25) eliminando los términos irrelevantes en el sentido de grupo de renormalización. Siguiendo los métodos usuales de la teoría de campos, introducimos una escala de momento externa, b , y procedemos a hacer las siguientes transformaciones de escala: en primer lugar y dado que $\tau_{\perp} = 0$, los términos principales en gradientes son ∇_{\perp}^2 y ∇_{\parallel}^2 , de ahí que por simple recuento dimensional —*naive power*

counting— $k_{\perp} \sim b$ y $k_{\parallel} \sim b^2$; en segundo lugar, como en el Modelo B $t \sim b^{-4}$. Con estos ingredientes es posible calcular la dimensión asociada a cada término del lagrangiano. En concreto, $\mathcal{E} \sim b^{(5-2)/2}$ y $g \sim b^{3-d}$, de manera que conforme $b \rightarrow \infty$ el término más relevante es el asociado con \mathcal{E} , mientras que la constante de acoplamiento g es un operador peligrosamente irrelevante, es decir, aunque dimensionalmente se puede descartar, es necesario incluirlo para estabilizar la teoría por debajo de la temperatura crítica. La dimensión crítica superior, por encima de la cual los exponentes críticos coinciden con los de campo medio, es $d_c = 5$, como se puede comprobar notando que es la que hace marginal a la no linealidad más relevante. Los términos despreciables comparados con los que se mantienen en el límite de longitudes largas son $\alpha_{\parallel}, \alpha_{\times}, \kappa_{\parallel}$ y n_{\parallel} . Después se proceder a la simplificación se obtiene

$$\mathcal{L}(\tilde{\phi}, \phi) = \int d^d x dt \lambda \left\{ \tilde{\phi} \left[\lambda^{-1} \partial_t + \nabla^4 - \tau_{\parallel} \nabla_{\parallel}^2 \right] \phi + \mathcal{E} (\nabla \tilde{\phi}) \phi^2 + \tilde{\phi} \nabla^2 \tilde{\phi} \right\}, \quad (1.26)$$

donde se ha hecho $n_{\perp} = 2\lambda$ mediante un rescalamiento adecuado. Conviene señalar que para estudiar las propiedades cerca de la zona crítica, pero no exactamente en el punto crítico, se puede añadir a (1.26) el término $\lambda \tau_{\perp} \tilde{\phi} (-\nabla_{\perp}^2) \phi$. También es importante comentar que, además de las simetrías que se mostraron en la sección 1.1, el funcional \mathcal{L} es invariante bajo las siguientes transformaciones:

1. $\phi \rightarrow \alpha \phi, \quad \tilde{\phi} \rightarrow \alpha \tilde{\phi}, \quad x_{\parallel} \rightarrow \alpha^{-2} x_{\parallel}, \quad \tau_{\parallel} \rightarrow \alpha^{-4} \tau_{\parallel}, \quad \mathcal{E} \rightarrow \alpha^{-3} \mathcal{E}.$
2. $\phi \rightarrow \beta \phi, \quad \tilde{\phi} \rightarrow \beta^{-1} \tilde{\phi}, \quad \mathcal{E} \rightarrow \beta^{-1} \mathcal{E}.$
3. $x_{\parallel} \rightarrow x_{\parallel} + 2\lambda \mathcal{E} a t, \quad \phi \rightarrow \phi + a, \quad \tilde{\phi} \rightarrow \tilde{\phi}.$

Damos ahora un nuevo argumento, antes anunciado, que lleva a la elección de $\tau_{\perp} = 0$ y τ_{\parallel} como la correspondiente a la teoría crítica. Incluso partiendo del punto usual de equilibrio del Modelo B, Leung *et al.* [Leu86] han demostrado que un cálculo perturbativo conduce a τ anisotrópicas. En concreto, los efectos de \mathcal{E} sobre la función respuesta isotropa, $S_{11}(\mathbf{k}, w, \tau)$, dan lugar a $\tau_{\perp} = \tau$ y $\tau_{\parallel} = \tau + C_d \mathcal{E}^2$, donde C_d es un coeficiente positivo para todas las dimensiones de interés. Así pues, cuando $T \rightarrow T_c$,

$\tau \rightarrow 0$, lo que conduce a $\tau_{\perp} = 0$ y $\tau_{\parallel} = C_d \mathcal{E}^2 > 0$. Esto refuerza aún más la hipótesis de que se ha adoptado la teoría crítica correcta.

La principal herramienta para trabajar con una teoría de campos es un desarrollo en una serie de potencias en $\varepsilon = d_c - d$ alrededor de una forma cuadrática que se puede resolver exactamente. En el caso que nos ocupa, dicha forma cuadrática coincide con la parte gaussiana de (1.26), que llamaremos \mathcal{L}_0 , y que puede escribirse en el espacio de Fourier como

$$\mathcal{L}_0(\tilde{\phi}, \phi) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{dw}{2\pi} \frac{1}{2} (\tilde{\phi}(-\mathbf{k}, -w), \phi(-\mathbf{k}, -w)) \mathbf{G}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}(\mathbf{k}, w) \\ \phi(\mathbf{k}, w) \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

siendo

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{pmatrix} -2\lambda k_{\perp}^2 & iw + \lambda(k_{\perp}^4 + \tau_{\parallel} k_{\parallel}^2) \\ -iw + \lambda(k_{\perp}^4 + \tau_{\perp} k_{\parallel}^2) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

\mathcal{L}_0 da lugar a lo que se conoce como *teoría libre* y constituye el orden más bajo de aproximación posible, también conocido como *aproximación árbol* o a *cero "loops"*. Esta aproximación es una teoría de campo medio y proporciona muchos resultados exactos por encima de d_c . Además, permite identificar los elementos que intervienen en el desarrollo perturbativo, tales como los propagadores y vértices. Éstos se pueden obtener por inversión de \mathbf{G}^{-1} , lo que conduce a

$$\begin{aligned} G_{11}(\mathbf{k}, w) &= \langle \tilde{\phi}(\mathbf{k}, w) \phi(-\mathbf{k}, -w) \rangle = \frac{1}{iw + \lambda(k_{\perp}^4 + \tau_{\parallel} k_{\parallel}^2)}, \\ G_{02}(\mathbf{k}, w) &= \langle \phi(\mathbf{k}, w) \phi(-\mathbf{k}, -w) \rangle = \frac{2\lambda k_{\perp}^2}{w^2 + \lambda^2(k_{\perp}^4 + \tau_{\parallel} k_{\parallel}^2)^2}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Por integración en el plano complejo se puede pasar al dominio en el tiempo, donde las condiciones de causalidad se aprecian más claramente:

$$\begin{aligned} G_{11}(\mathbf{k}, t) &= \langle \tilde{\phi}(\mathbf{k}, t) \phi(-\mathbf{k}, 0) \rangle = \theta(t) \exp\{-\lambda(k_{\perp}^4 + \tau_{\parallel} k_{\parallel}^2)t\}, \\ G_{02}(\mathbf{k}, t) &= \langle \phi(\mathbf{k}, t) \phi(-\mathbf{k}, 0) \rangle = \frac{k_{\perp}^2}{k_{\perp}^4 + \tau_{\parallel} k_{\parallel}^2} \exp\{-\lambda(k_{\perp}^4 + \tau_{\parallel} k_{\parallel}^2)|t|\}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

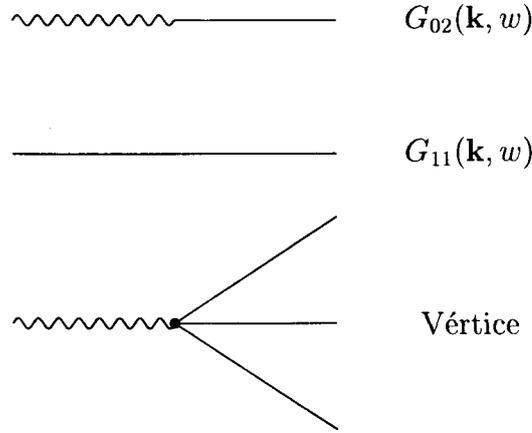


Figura 1.5: Elementos de la teoría de perturbaciones para el DDS.

Nótese que $G_{02}(\mathbf{k}, w)$ no es otra cosa que el factor de estructura dinámico, $S(\mathbf{k}, w)$. En ausencia de anisotropía, este último obedecería la ley de escala

$$S(\mathbf{k}, t, \tau) = b^{-2+\eta} S(\mathbf{k}/b, tb^z, \tau/b^{1/\nu}), \quad (1.31)$$

relación que también puede considerarse como definición de los exponentes η , z y ν . La presencia de la anisotropía obliga a modificar la ley de escala del factor de estructura mediante la introducción de un nuevo exponente, Δ :

$$S(\mathbf{k}_{\perp}, k_{\parallel}, t, \tau) = b^{-2+\eta} S(\mathbf{k}_{\perp}/b, k_{\parallel}/b^{1+\Delta}, tb^z, \tau/b^{1/\nu}). \quad (1.32)$$

Los exponentes críticos se identifican simplemente por comparación con G_{02} . Se sigue inmediatamente que $\Delta = 1$, $\nu = 1/2$ y $z = 4$. En la tabla (1.1) se recogen los valores de los exponentes desdoblados en longitudinales y transversales.

El siguiente orden de aproximación que consideramos es el desarrollo a un "loop". Omitiendo los detalles, para los cuales remitimos al lector a la literatura original [Jan86. Leu86], diremos que sólo dos funciones vértice presentan divergencias primiti-

vas, a saber, Γ_{11} y Γ_{12} . Gracias a la invariancia galileana es posible hallar una identidad de Ward-Takahashi que relacione las dos,

$$\Gamma_{12}(\mathbf{k}, w; 0, 0) = 2\lambda\mathcal{E}k_{\perp}\frac{\partial}{\partial w}\Gamma_{11}(\mathbf{k}, w). \quad (1.33)$$

Gracias a ella, sólo es necesario hacer finita Γ_{11} para que automáticamente Γ_{12} lo sea también.

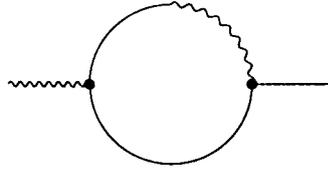
En la tabla (1.2) se muestran los valores que se obtienen para los distintos exponentes críticos. Es importante señalar que del cálculo se deriva que estos exponentes son exactos, es decir, que los términos de orden superior en ε son idénticamente nulos. Por otro lado, conviene hacer hincapié en la importancia del término

$$\frac{g}{3!}\tilde{\phi}\nabla_{\perp}^2\phi. \quad (1.34)$$

Aunque irrelevante en el sentido del grupo de renormalización, no se puede prescindir de él por debajo de T_c , donde garantiza la estabilidad de la fase ordenada. Juega, por lo tanto, un papel similar a $g\phi^4$ del modelo de Ising y es, pues, un *operador peligrosamente irrelevante*.

Exponentes	
$\eta_{\perp} = 0$	$\eta_{\parallel} = 1$
$z_{\perp} = 4$	$z_{\parallel} = 2$
$\nu_{\perp} = 1/2$	$\nu_{\parallel} = 1$
$\tilde{\gamma} = 1$	$\beta = 1/2$

Tabla 1.1: Exponentes críticos en campo medio.

Figura 1.6: Contribución a 1 "loop" de Γ_{11} .

1.3 Modelos de fenómenos naturales

Se conoce con el nombre de *superconductores iónicos* a ciertos sólidos que presentan conductividades iónicas comparables a las de las disoluciones electrolíticas. En concreto, mientras que la mayoría de los sólidos salinos tienen conductividades iónicas del orden de $10^{-8}\Omega^{-1}\text{cm}^{-1}$ a temperaturas moderadas (tal es el caso, por ejemplo, del NaCl a 200 °C), los superconductores iónicos puede llegar a alcanzar valores del orden de $1\Omega^{-1}\text{cm}^{-1}$. El número de portadores de carga se puede estimar en 10^{22} partículas/ cm^3 , es decir, del orden del número de Avogadro. Algunos ejemplos de materiales de este tipo incluyen sólidos cristalinos (AgI), vidrios (0.75 AgI-0.25 Ag_2MoO_4) y polímeros (óxido de polietileno con NaBF_4). En el caso del AgI, por ejemplo, la conductividad por debajo de una cierta temperatura es del orden de $1\Omega^{-1}\text{cm}^{-1}$, lo que se justifica gracias a que los iones Ag^+ disfrutan de una gran movilidad a través de la red que com-

Exponentes	
$\eta_{\perp} = 0$	$\eta_{\parallel} = (6 + 2\varepsilon)/(6 + \varepsilon)$
$z_{\perp} = 4$	$z_{\parallel} = 12/(6 + \varepsilon)$
$\nu_{\perp} = 1/2$	$\nu_{\parallel} = 1 + \varepsilon/6$
$\tilde{\gamma} = 1$	$\beta = 1/2$

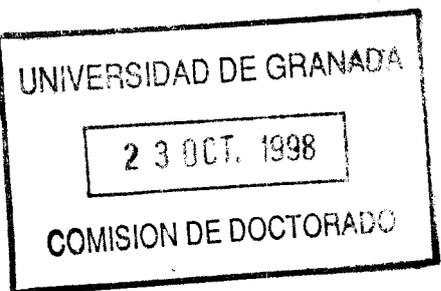


Tabla 1.2: Exponentes críticos a un "loop".

ponen los iones I^- . Para los vidrios y polímeros las conductividades suelen ser bastante inferiores, pero sin embargo compensan esta disminución con propiedades mecánicas que les confieren ventajas prácticas adicionales. Los superconductores iónicos son objeto de estudio intenso desde hace más de una década [Boy, Bat, Gel], lo que ha dado lugar a la aparición de múltiples aplicaciones técnicas sobre todo entre los dispositivos electroquímicos. Caben destacar las baterías de alta temperatura, membranas selectivas, sensores de gas, por mencionar sólo algunos ejemplos [Bat]. Desde un punto de vista más básico, los superconductores iónicos involucran problemas fundamentales dentro de la física estadística y del estado sólido relacionados con la difusión, mecanismos atómicos de migración, estados estacionarios fuera del equilibrio y transiciones de fase.

Se observa experimentalmente en los superconductores iónicos una fuerte dependencia en la temperatura de las conductividades que es característica de transiciones de fase. Es decir, los superconductores iónicos presentan una fase a baja temperatura con conductividad iónica pequeña, y otra a alta temperatura caracterizada por una gran conductividad. Ésta y otras observaciones indican que los superconductores iónicos sufren un cambio de fase alejado del equilibrio. El carácter de no-equilibrio de la transición se debe a la presencia de un campo eléctrico externo que es el que genera la corriente disipativa de iones. Los distintos comportamientos al pasar de la fase aislante a la superconductora clasifican a los superconductores iónicos en tres grandes grupos [Boy]: En los materiales *tipo I* se encuentra un cambio de fase de primer orden bien definido. Entre ellos, el AgI es un buen ejemplo que presenta una variación de cuatro órdenes de magnitud a la temperatura de transición. Esta movilidad de los iones conductores, tan inusualmente alta, requiere de un gran número de vacantes. Existe la creencia de que éstas se originan por la “fusión” de una de las subredes a la temperatura de transición. Esta opinión viene reforzada por el hecho de que el cambio de entropía que se mide en esta transición es comparable a la entropía de fusión del material, ambos en general del orden de 10JK^{-1} por mol [Oke]. Los materiales de *tipo II* presentan una curva continua de conductividad frente a temperatura con un cambio de pendiente a la temperatura de transición. En algunos materiales este cambio es

gradual (PbF_2) mientras que en otros es más brusco (AgCrS_2). Un pico en el calor específico en forma de λ induce a pensar en un cambio de fase de segundo orden, aunque una transición de primer orden *débil* no se puede descartar según qué materiales. Finalmente, los materiales del *tipo III* muestran un crecimiento exponencial en la conductividad a lo largo de un amplio rango de temperaturas ($\text{Na-}\beta\text{-Al}_2\text{O}_3$). En este caso no se observa ningún pico en el calor específico y la presencia de un cambio de fase no está garantizada.

En los modelos reticulares más simples de superconductores iónicos las interacciones se reducen a un volumen de exclusión y la difusión de los iones a un camino aleatorio. De esta forma se pueden reproducir cualitativamente los datos experimentales concernientes a algunos materiales, *v.g.* la β -alúmina, pero en general se necesita un tratamiento de las interacciones más detallado para dar cuenta de las propiedades estáticas y dinámicas. Debido a los efectos de apantallamiento, las interacciones coulombianas se reducen en la práctica a un volumen de exclusión más una interacción de corto alcance que puede despreciarse más allá de los vecinos próximos. La mejor manera, pues, de tener en cuenta la influencia de las interacciones entre los iones en las propiedades del conductor, es considerar el sistema de iones como un gas reticular e introducir los efectos del campo eléctrico externo mediante la modificación adecuada de las probabilidades de transición. Este fue el camino seguido originariamente en [Kat83, Kat84], donde se investigó por primera vez en una y dos dimensiones la posibilidad de estados estacionarios y su dependencia del campo eléctrico. En concreto, Katz *et al.* realizaron simulaciones Monte Carlo en redes pequeñas (30×30) con densidad $1/2$ y constantes de acoplamiento tanto positivas como negativas⁵. Aunque a primera vista pueda pensarse que las interacciones se han de representar con $J < 0$ (repulsión de partículas o antiferromagnetismo) debido a la igualdad en el signo de la carga de los iones, se ha demostrado que un $J > 0$ es suficiente para entender mucho del comportamiento de los superconductores iónicos. Se puede argumentar que

⁵Recuérdese que el modelo de Ising ferromagnético y el antiferromagnético comparten las mismas propiedades termodinámicas. Ello se debe a que las redes (hiper)cúbicas se pueden dividir en dos subredes equivalentes que se interpenetran [Gol]. En el DLG la presencia del campo externo rompe esta equivalencia y, por lo tanto, los casos $J > 0$ y $J < 0$ son muy distintos [Leu89].

esto se debe a la presencia de deformaciones en la red que producen fuerzas elásticas que finalmente llevan a una interacción efectiva [Die]. Con estos ingredientes, existe un acuerdo aceptable entre las propiedades del DLG con $\varrho < 0.5$ y los datos experimentales de materiales *tipo I*. La situación $\varrho = 0.5$ es comparable a la de los *tipo II* (con las reservas antes apuntadas en lo que respecta al orden de la transición) y, finalmente, los de *tipo III* presentan similitudes con un DLG unidimensional. Surge aquí la cuestión interesante del papel que juega la dimensión espacial. El DLG tridimensional [Mar85] presenta algunas dificultades añadidas de carácter numérico que han hecho que se estudie de forma menos sistemática que sus análogos unidimensional y bidimensional. Sin embargo, la estructura interna de los superconductores iónicos sugiere que la conducción está restringida a canales de una o dos dimensiones, lo que posibilita la comparación con el DLG de dimensiones inferiores. Por ejemplo, los iones de plata del AgCrS_2 permanecen prácticamente en planos de la red. Un caso similar es el de la holandita potásica, donde la conducción se realiza a través de canales casi unidimensionales. Otros muchos otros materiales presentan también conductividades fuertemente anisotrópicas.

El éxito del DLG como modelo de superconductor iónico es una manifestación de que muchas propiedades observables de origen cooperativo, *v.g.* cambios de fase, fenómenos críticos o leyes hidrodinámicas, dependen sólo de características muy generales del sistema, como pueden ser la dimensión espacial, el parámetro de orden, el rango y la simetrías de las interacciones, o la presencia de escalas espaciales y temporales macroscópicas y microscópicas bien definidas. Esta es la causa de que modelos microscópicos, caricaturas de situaciones realistas, puedan de hecho reproducir las propiedades macroscópicas observables de situaciones complejas. Lo único que hace falta es que el modelo en cuestión recoja los ingredientes básicos responsables del fenómeno de interés.

El DLG, con las modificaciones oportunas, también es relevante en el estudio de otros sistemas con arrastre. Valgan como ejemplo algunas formas de crecimiento de superficies, de sedimentación y electroforesis, flujos granulares y tráfico, e incluso algunos sistemas geológicos y biológicos. No abundamos más en estos asuntos y remitimos al

lector a [Mar98b], donde se puede encontrar amplia información sobre éstas y otras facetas del DLG.

Terminamos esta sección con unos comentarios acerca de la posible realización experimental del DLG. Ésta es de una gran dificultad debido esencialmente a las condiciones de contorno periódicas y a la uniformidad espacial y temporal del campo eléctrico. En efecto, para establecer una situación experimental análoga al DLG bidimensional sería necesario suponer que la red está situada sobre la superficie de un cilindro y aplicar un campo magnético creciente en el tiempo de forma lineal y orientado en la dirección del eje del cilindro. De esta forma, si las partículas estuvieran cargadas, se crearía una corriente alrededor del cilindro. Si embargo, campos linealmente crecientes en el tiempo sólo se pueden mantener durante tiempos relativamente cortos, por no hablar de la longitud del cilindro que debería ser lo suficientemente grande como para enmascarar que las condiciones de contorno no son en realidad toroidales.

1.4 **Discusión**

Debido en parte a la simplicidad de su formulación, una modificación en apariencia menor al modelo de Ising, y a que es uno de los pocos sistemas alejados del equilibrio que presenta un cambio de fase similar a los que se encuentran en la mecánica estadística del equilibrio, el DLG ha sido objeto de estudio preferente durante la última década. Sin embargo, no obstante el esfuerzo invertido y la proliferación de resultados, abundan las cuestiones abiertas. Vamos, pues, a dedicar esta última sección a justificar por qué muchos de los resultados concernientes al DLG son insatisfactorios o, cuando menos, poco concluyentes.

No existe hasta la fecha ningún argumento que permita predecir el signo de $T_c(E) - T(0)$, menos aún su amplitud. Recuérdense que de la dependencia de la temperatura crítica del campo se deduce inopinadamente que la presencia del campo externo favorece el ordenamiento. Por una parte, se puede razonar que las correlaciones a ve-

cinos próximos se ven reducidas por la presencia de campo eléctrico [Val87], lo que es coherente con la imagen de que el campo actúa como un ruido extra que reduce de forma efectiva el acoplamiento entre vecinos próximos. Esta observación, por sí sola, daría lugar a una $T_c(E)$ decreciente con E . Por otro lado, ya hemos comentado que $G(\mathbf{r})$, la función de correlación a dos cuerpos, decae a grandes distancias como r^{-d} con una amplitud que depende del ángulo entre \mathbf{r} y el campo [Gar90b]. En concreto, el signo de la amplitud varía conforme el ángulo aumenta de 0 a $\pi/2$, de tal manera que las correlaciones paralelas a \mathbf{E} son positivas y viceversa. En cualquier caso, la magnitud de G se ve fuertemente aumentada comparada con su equivalente en equilibrio, que decae exponencialmente. Las acrecentadas correlaciones negativas para grandes distancias transversales se espera que “fuerzen” a las partículas a situarse en franjas paralelas al campo, mientras que las correlaciones longitudinales positivas también deberían favorecer este ordenamiento. En consecuencia, cabría esperar que $T_c(E)$ fuera mayor que $T_c(0)$. Claramente, los efectos de largo y corto alcance de las correlaciones transversales compiten el uno con el otro y no es fácil predecir cuál es el dominante.

Existe un desacuerdo persistente entre el valor Monte Carlo del exponente crítico asociado al parámetro de orden, $\beta \approx 0.3$, y el predicho por la teoría de campos, $\beta = 1/2$. Se ha argumentado que la causa de esta discrepancia está en la anisotropía intrínseca del DLG, que hace necesario analizar los datos Monte Carlo con técnicas de tamaño finito anisotrópicas [Leu91]. A tal efecto, se requieren redes rectangulares de longitudes L_\perp y L_\parallel , relacionadas por $L_\parallel \propto L_\perp^{1+\Delta}$. Nótese que esto supone introducir un nuevo exponente crítico, Δ , que da cuenta de la anisotropía del modelo. No obstante, los trabajos en este sentido no son en absoluto concluyentes por cuanto, por un lado, se ha afirmado que los datos Monte Carlo, convenientemente analizados con *finite size scaling* anisotrópico, son coherentes con $\beta = 1/2$ y $\Delta = 2$ [Leu91], mientras que, por otro lado, persiste $\beta \approx 1/3$ en otros trabajos [Ach95, Mar96]. Recientemente [Leu98], en un intento de evitar las sutilezas que introduce el operador peligrosamente irrelevante, se ha tratado el caso $d = 3$. En efecto, las correcciones logarítmicas asociadas a dicho operador se pueden calcular si $d > 2$, mientras que en dos dimensiones se desconoce tanto su existencia como su posible forma. En [Leu98] se baraja la hipótesis

de que son estas correcciones, impredecibles en $d = 2$, las que justifican las diferencias entre la teoría de campos y las simulaciones. El resultado de este nuevo análisis parece invalidar las propuestas de escalamiento anisotrópicas originales de [Bin], a la vez que refuerza las de [Leu91].

El problema de la anisotropía del DLG se traduce, a un nivel más básico, en la discusión de si existen dos escalas de longitud independientes o, por el contrario, sólo hay una. La primera postura es la que prevalece en teoría de campos y en los análisis de tamaño finito anisotrópicos, que adoptan las condiciones equivalentes $k_{\parallel} \sim k_{\perp}^{1+\Delta}$ y $L_{\parallel} \propto L_{\perp}^{1+\Delta}$ respectivamente. Ello implica la existencia de dos longitudes de correlación que divergen con distinto exponente según se trate de la dirección paralela al campo o de la perpendicular a él:

$$\xi_{\perp} \propto \tau^{-\nu_{\perp}}, \quad \xi_{\parallel} \propto \tau^{-\nu_{\parallel}}, \quad (1.35)$$

donde $\tau = T - T_c$. Sin embargo, se han observado, tanto por encima de T_c y cualquier E como por debajo de T_c y valores del campo pequeños, agregados de partículas anisotrópicas que se pueden caracterizar por dos longitudes, ℓ_{\perp} y ℓ_{\parallel} [Val87, Ach95, Val87, Ach95]. Dado un valor de E , se encuentra que existe una relación entre ℓ_{\perp} y ℓ_{\parallel} que se mantiene en un cierto rango de temperaturas. Este hecho se puede interpretar como que ambas longitudes no son independientes la una de la otra y, en consecuencia, uno podría esperar una única longitud de correlación [Mar98b].

Dada la controversia existente, parece natural acudir al estudio de modelos análogos al DLG, como medio para encontrar una relación más directa entre las especificaciones microscópicas y las propiedades macroscópicas colectivas. Señalamos de entre ellos el *modelo de dos temperaturas* [Gar90b], el DLG con campo eléctrico aleatorio [Sch91] y el DLG en dos planos [Ach95]. Anticipándonos al capítulo quinto de esta memoria, donde se analizarán por separado, hacemos notar que los tres muestran grandes similitudes con el DLG: cambio de fase de segundo orden a un estado ordenado y segregación de fases en la dirección “transversal” exclusivamente [Che, Sch91, Ach92]⁶. Además, el

⁶El DLG en dos planos presenta dos transiciones de fase. Aquí hacemos referencia sólo a una de ellas. Véase el capítulo quinto de la presente memoria para una exposición detallada.

acuerdo entre la teoría de campos y las simulaciones es excelente para los dos primeros: $\beta = 0.33$. Para el DLG en dos planos no existe predicción teórica del valor de β , aunque de los datos Monte Carlo se desprende nuevamente $\beta \approx 1/3$. Estas similitudes a escala microscópica no se ven acompañadas por una teoría continua que de cuenta de ellas de forma general. Finalmente, el análisis del modelo de los dos planos parece indicar que es la existencia de una interfase lineal, y no la presencia del campo eléctrico, el punto relevante para la comprensión del DLG [Mar96]. Este resultado, claramente, choca de lleno con las teorías continuas actuales.

Con objeto de ganar perspectiva y dado que la clase de universalidad del DLG parece ser amplia, Marro *et al.* han estudiado gases reticulares sujetos a una dinámica que conserva el número de partículas y que pretende recoger los mecanismos esenciales comunes al DLG y sus variantes. El modelo involucra dos parámetros principales [Mar98a]. Los valores límite del primero de ellos corresponden a los casos de campo constante saturante, que induce una corriente positiva de partículas, y a un campo aleatorio (corriente nula) respectivamente. La variación del segundo parámetro induce atracción o repulsión entre partículas en la dirección perpendicular al campo simulado. La evolución se produce mediante intercambios partícula-hueco en el que, mediante la regulación de los dos parámetros antes indicados, se superponen un proceso térmico transversal y un mecanismo longitudinal de efectos análogos a los del campo eléctrico. El ordenamiento en dos dimensiones y bajo interacciones atractivas, consiste en una segregación de fases separadas por una interfase lineal, y resulta ser independiente del parámetro asociado al campo y coherente con $\beta = 1/3$. Sólo existe, además, una longitud de correlación independiente. Nuevamente, parece ser la existencia de la interfase lineal en una de las direcciones principales de la red la responsable última de las propiedades del DLG.

Recientemente se han confrontado los datos Monte Carlo del DLG en dos dimensiones con los obtenidos de una ecuación tipo Cahn-Hilliard modificada adecuadamente para que recoga los efectos de un campo externo [Ale]. Aunque este asunto será objeto de parte del capítulo tercero, adelantamos aquí que se han encontrado discrepancias notables entre ambos métodos. En efecto, las simulaciones microscópicas y la solución

numérica de (1.19) presentan ambos dominios triangulares de partículas que, en el primer caso, apuntan en la dirección opuesta al campo, mientras que, por el contrario, en el segundo los triángulos apuntan mayoritariamente en el sentido del campo. Hasta la fecha no existe explicación alguna que justifique esta diferencia.

En resumen, creemos que la situación actual del DLG adolece de contradicciones. Todos los intentos por superarlas pasan por *reinterpretar* los datos Monte Carlo, respetando los resultados de la teoría de campos. Posiblemente la causa de esta actitud esté en que en pocas ocasiones la teoría de campos da un resultado tan *limpio* —el desarrollo en ε es exacto— y a que en general los enfoques empíricos para construir ecuaciones de Langevin suelen dar buenos resultados. Por otro lado, el análisis de datos Monte Carlo goza siempre de cierta *holgura*. Con todo, nuestra postura va en sentido contrario. Creemos que la naturaleza de no equilibrio del modelo resta fuerza al enfoque empírico mesoscópico. De hecho, hemos presentado pruebas que apuntan a una fuerte influencia de la dinámica microscópica en los estados estacionarios. En todo caso, si la dinámica no fuese relevante, sería deseable que este resultado fuera una consecuencia del cálculo y no una hipótesis. Por ello, y dado que en nuestra opinión las discrepancias que se observan son consecuencia de que la teoría de campos actual no es el equivalente continuo del DLG, presentamos en los capítulos que siguen una descripción basada en nuevo enfoque mesoscópico. Pretendemos que en el paso al continuo no se pierda la dinámica microscópica original, y ser capaces de concluir si introducir dos escalas de longitud independientes es necesario o superfluo. Además, sería deseable poder establecer la existencia de una clase de universalidad fuera del equilibrio de la que formen parte el DLG junto con otros modelos íntimamente relacionados con él.

Terminamos esta sección con una propuesta para aclarar la validez del DDS como versión continua del DLG. Se trata de deducir una identidad de Ward-Takahashi para las correlaciones espaciales a partir de la simetría galileana presente en el DDS. De si es posible o no comprobar en simulaciones Monte Carlo las propiedades predichas por la identidad de Ward-Takahashi depende en gran medida aceptar el DDS como contrapartida continua del DLG. Consideremos, pues, la ecuación de Langevin de Leung y Cardy una vez que se han despreciado los términos irrelevantes,

$$\begin{aligned}\partial_t \phi &= \lambda \left[-\Delta^2 \phi + \tau_{\perp} \nabla_{\perp}^2 \phi + \tau_{\parallel} \nabla_{\parallel}^2 \phi + \mathcal{E} \nabla_{\perp} \phi^2 \right] + \text{ruido} = \\ &= \lambda F(\phi) + \text{ruido},\end{aligned}\tag{1.36}$$

y su funcional generador asociado,

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \int d^d x dt \frac{1}{2} (\partial_t \phi - \lambda F(\phi))^2 + \int d^d x dt j(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t) \right\}.\tag{1.37}$$

Como se indicó en la sección (1.2.3), $Z(J)$ es invariante bajo la transformación $t \rightarrow t$, $x_{\parallel} \rightarrow x_{\parallel} + 2\lambda \mathcal{E} a t$, $x_{\perp} \rightarrow x_{\perp}$, $\phi \rightarrow \phi + a$. Se puede entonces hallar una relación de Ward-Takahashi asociada a esta simetría expresando la invariancia de la integral funcional bajo el cambio de variable infinitesimal $\phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \phi(x_{\perp}, x_{\parallel} + 2\lambda \mathcal{E} a t, t)$ [ZJ]. El jacobiano de la transformación es la unidad y, en virtud de la simetría galileana, la única variación proviene de la fuente, $j(\mathbf{x}, t)$. Un cálculo directo conduce entonces a

$$\int d^d x dt \left[2\lambda \mathcal{E} j(\mathbf{x}, t) \nabla_{\parallel} \frac{\delta Z(J)}{\delta j(\mathbf{x}, t)} + Z(J) j(\mathbf{x}, t) \right] = 0.\tag{1.38}$$

Por derivación funcional con respecto a $j(\mathbf{x}, t)$ y evaluando en $j = 0$, se pueden entonces hallar una jerarquía de identidades que han de satisfacer las funciones de correlación espaciales que describen las implicaciones físicas de la simetría de la ecuación de Langevin. En particular, para las correlaciones a uno y dos cuerpos se tiene

$$\begin{aligned}\nabla_{\parallel} G^{(1)}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{2\lambda \mathcal{E} t}, \\ 2\lambda \mathcal{E} t_1 \nabla_{\mathbf{x}_1} G^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + 2\lambda \mathcal{E} t_2 \nabla_{\mathbf{x}_2} G^{(2)}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) + G^{(1)}(\mathbf{x}_1, t_1) + G^{(1)}(\mathbf{x}_2, t_2) &= 0,\end{aligned}\tag{1.39}$$

cuya verificación mediante simulaciones proponemos como comprobación de la relación del DDS con el DLG.

Capítulo 2

La ecuación de Langevin

Como ya hemos dicho antes, dada la complejidad que presentan los sistemas alejados del equilibrio, se suele adoptar la actitud simplificadora de centrarse en el estudio de aquellos sistemas que alcanzan un estado estacionario. Así, aunque la distribución sobre el espacio de las fases no sea hamiltoniana, por lo menos es independiente del tiempo. Con todo, los estados estacionarios de sistemas que están alejados del equilibrio presentan una sensibilidad extrema a la dinámica microscópica. Por eso, al contrario que en los sistemas en equilibrio, donde la elección de las probabilidades de transición por unidad de tiempo sólo afecta a la velocidad con la que se alcanza el estado de equilibrio y no influye en éste, lejos del equilibrio las probabilidades de transición no son simplemente un asunto de conveniencia. Por ejemplo, y concretando para el caso del DLG, las teorías de campo medio dinámicas ponen de manifiesto la presencia de anomalías en las funciones termodinámicas que son consecuencia de la dependencia concreta del campo eléctrico E de la dinámica de Metropolis [Dic]. En este mismo orden de cosas y sin abandonar las aproximaciones de campo medio, se encuentran diferencias notables con respecto a la dinámica de Metropolis cuando la que se usa es la de van Beijeren y Shulman [Gar90a, Pes]. Más aún, del estudio de un modelo afín al DLG, el modelo de los dos planos (véase el capítulo quinto de la presente memoria), se desprende que, tanto en simulaciones Monte Carlo [Mar96] como en campo medio dinámico [Alo], el mismo orden de la transición depende de la “rate” escogida

hasta tal punto que se puede observar la existencia o ausencia de un punto tricrítico dependiendo de la elección de una u otra dinámica microscópica.

En este capítulo presentamos una nueva formulación mesoscópica del DLG en términos de una ecuación de Langevin. Nuestro propósito es que esta ecuación contenga la información microscópica original del modelo. Como ya hemos comentado antes, consideramos que esta información es valiosa y determinante para las propiedades colectivas del sistema. Al contrario que en el capítulo anterior, donde la ecuación de Langevin se postulaba basándose en la elección de un parámetro de orden y en las simetrías subyacentes, nuestro punto de partida aquí será una ecuación maestra en el continuo. El plan a seguir consiste en hacer un desarrollo de Kramers-Moyal de la ecuación maestra, hallar la ecuación de Langevin estocásticamente equivalente a la Fokker-Planck resultado de cortar dicho desarrollo y, finalmente, dar los criterios de relevancia para los distintos términos de la ecuación en la región crítica. Esperamos que esta derivación “cuidadosa” soslaye algunos de los inconvenientes que presenta el enfoque tradicional. Nos referimos, en concreto, a la falta de referencias en el proceso de construcción de la ecuación de Leung y Cardy a la dinámica microscópica y a su asunción de hecho de ciertas hipótesis de aditividad en el término de corriente. Volveremos sobre estos asuntos en la tercera sección de este capítulo.

Creemos que sería perfectamente legítimo comenzar la exposición partiendo directamente de la ecuación maestra continua o de la Fokker-Planck obviando su justificación microscópica. Incluso la nueva ecuación de Langevin que propondremos para el DLG al final de este capítulo se podría introducir en forma de postulado, argumentando simplemente que tiene todas las simetrías necesarias para ser considerada un DLG o, de forma más purista, justificándola en función de los resultados que de ella se obtienen. Preferimos, sin embargo, una actitud más ecléctica, considerando que las consecuencias de una ecuación postulada no son del todo independientes de las ideas que la han inspirado. Por eso dedicaremos la primera sección de este capítulo a mostrar las ideas que nos han llevado a la ecuación maestra continua en su forma final. A pesar de que no se trata de un paso al continuo riguroso, ayudará a precisar y justificar algunos pasos del cálculo posterior.

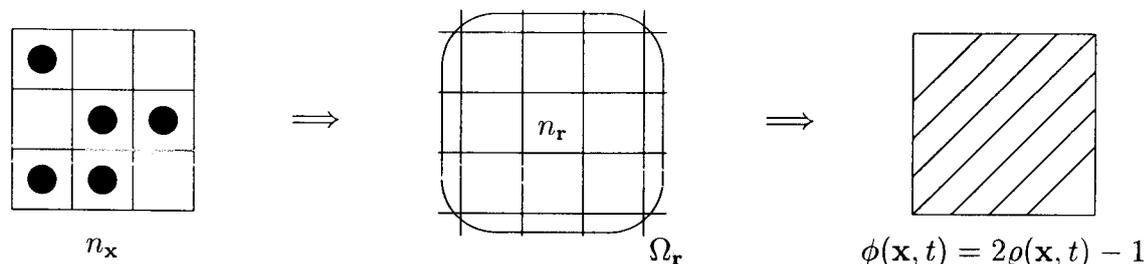


Figura 2.1: Representación esquemática del paso al continuo con un ejemplo de construcción de una caja en una red bidimensional.

2.1 La ecuación maestra

Consideremos un modelo DLG definido en una región $\mathfrak{R} \subset Z^d$ con condiciones de contorno periódicas. En primer lugar, vamos a plantear una ecuación maestra en el continuo, análoga a (1.2). Para ello, es necesario sustituir las variables de ocupación $n_{\mathbf{x}}$ por un campo continuo adecuado, en este caso la densidad de partículas $\varrho(\mathbf{x}, t)$. Con este propósito, se construye alrededor de cada uno de los nudos de la red una caja centrada en dicho nudo que contenga Ω^d espines. Definimos entonces una nueva variable asociada a cada nudo, $\varrho_{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \in \mathfrak{R}$, tal que

$$\varrho_{\mathbf{r}} = \frac{1}{\Omega^d} \sum_{\mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{r}}} n_{\mathbf{x}}, \quad (2.1)$$

donde $\Omega_{\mathbf{r}}$ es la caja centrada en \mathbf{r} (véase la figura 1.1). Postulamos ahora la evolución temporal de las nuevas variables de densidad inspirándonos en la dinámica a la que estaban sometidas las variables de ocupación originales $n_{\mathbf{x}}$. Consideremos el salto de una partícula desde el punto \mathbf{r} de la red al hueco vecino $\mathbf{r} + \mathbf{a}$. Si $\{n_{\mathbf{x}}\}$ es la configuración previa al salto, entonces un proceso de este tipo da lugar a una nueva configuración, $\{n'_{\mathbf{x}}\}$, relacionada con la original mediante

$$\{n'_{\mathbf{x}}\} = \{n_{\mathbf{x}} + \delta_{\mathbf{x}, \mathbf{r} + \mathbf{a}} - \delta_{\mathbf{x}, \mathbf{r}}\}_{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}}. \quad (1.2)$$

En términos de las nuevas variables de densidad, $\varrho_{\mathbf{r}}$, el salto se traduce en que aquellas $\varrho_{\mathbf{r}}$ que se vean afectadas por el intercambio sufrirán una variación de módulo Ω^{-d} . Así pues, llamando $C^{\mathbf{r}a}$ a la configuración después del intercambio partícula-hueco, tendremos

$$C^{\mathbf{r}a} = \{\varrho_{\mathbf{x}} + \Omega^{-d}(\delta_{\mathbf{x},\mathbf{r}+\mathbf{a}} - \delta_{\mathbf{x},\mathbf{r}})\}_{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}}, \quad (2.3)$$

donde el superíndice a hace referencia a la dirección \mathbf{a} de la red. De manera más general, consideraremos intercambios de magnitud $\eta\Omega^{-d}$ sujetos a una distribución de probabilidad $f(\eta)$ que supondremos par en η y analítica en torno a $\eta = 0$. Por ejemplo, una elección particularmente sencilla para $f(\eta)$ es la bimodal $f(\eta) = [\delta(\eta+1) + \delta(\eta-1)]/2$. La introducción del grado de libertad extra η es algo natural porque conviene, en ausencia del conocimiento preciso de la forma del término de intercambio infinitesimal en el continuo, buscar una situación lo más general posible.

Ni que decir tiene que $\varrho_{\mathbf{r}}$ ya no está restringida a los valores 0,1, y que cuando Ω es lo suficientemente grande el rango de valores para $\varrho_{\mathbf{r}}$ es prácticamente continuo. De forma más precisa, el límite al continuo consiste en la operación simultánea $\Omega \rightarrow \infty$ y $L \rightarrow \infty$, donde L es la dimensión lineal de \mathfrak{R} . Por lo tanto

$$C^{\eta\mathbf{r}a} = \{\varrho(\mathbf{x}) + \eta\Omega^{-d}\nabla_{\mathbf{x}_a}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r})\}_{\mathbf{x} \in T^d}, \quad (2.4)$$

siendo T^d un toro d -dimensional.

Finalmente, con objeto de reflejar mejor las simetrías del modelo, trabajaremos con la magnetización local en vez de con densidades de partículas, es decir, $\phi(\mathbf{x}, t) = 2\varrho(\mathbf{x}, t) - 1$. No obstante, y dado que ambos “lenguajes” son equivalentes, hablaremos en términos de partículas si la claridad en la exposición así lo requiere. En cuanto al análogo mesoscópico a la energía interna (1.1) adoptaremos como tal la forma del hamiltoniano de Ginzburg-Landau

$$H(C) = \Omega^d \int d^d x \left[\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{\tau}{2}\phi^2 + \frac{g}{4!}\phi^4 \right]. \quad (2.5)$$

Aquí, $C \equiv \phi(\mathbf{x}, t)$ es una configuración cualquiera, y la presencia del factor Ω^d se puede justificar, aunque heurísticamente, de la siguiente manera: sea ξ la longitud

de correlación del sistema. Entonces, si $1 \ll \Omega < \xi$, la densidad promedio $\varrho_{\mathbf{r}}$ será aproximadamente constante en distancias menores o iguales a ξ . El factor Ω^d surge después de realizar sumas parciales sobre regiones disjuntas de \mathfrak{R} de tamaño lineal ξ . Demostraremos más adelante que este Ω^d es esencial para mantener la presencia de las reglas de evolución microscópicas en el equivalente continuo del DLG. Por eso, aun en ausencia del argumento que acabamos de exponer, este hecho hubiera bastado de por sí para introducir Ω^d en el hamiltoniano en forma de postulado.

Por último, asociamos un peso estadístico dependiente del tiempo a cada configuración, $P_t(C)$, que evoluciona en el tiempo de acuerdo con la siguiente ecuación maestra

$$\begin{aligned} \partial_t P_t(C) = & \sum_a \int_R d\eta f(\eta) \int d\mathbf{x} \times \\ & \times \left\{ W[C^{\eta ra} \rightarrow C] P_t(C^{\eta ra}) - W[C \rightarrow C^{\eta ra}] P_t(C) \right\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Escogeremos las probabilidades de transición por unidad de tiempo, $W[C \rightarrow C']$ de tal manera que

$$W[C \rightarrow C^{\eta ra}] = D \left(H(C^{\eta ra}) - H(C) + H_E(C \rightarrow C^{\eta ra}) \right), \quad (2.7)$$

con

$$H_E(C \rightarrow C^{\eta ra}) = \eta \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \left(1 - \phi(\mathbf{r})^2 \right) + O(\varepsilon), \quad (2.8)$$

donde $\varepsilon \equiv \Omega^{-d}$. Aquí estamos conservando la notación del capítulo anterior, de manera que $D(x)$ son funciones sujetas a la condición de balance detallado. Con esta elección las probabilidades de transición dependen de la diferencia de energía entre las configuraciones inicial y final, más un término cuya parte dominante en ε da cuenta del incremento local de energía debido al campo externo. Además, la elección (2.8) está fuertemente fundamentada en resultados rigurosos sobre el proceso simple de exclusión asimétrica [Spo], del cual ya tuvimos ocasión de hablar en el capítulo primero. Fijaremos las correcciones de orden superior en ε más adelante.

Insistimos de nuevo en que el proceso que hemos presentado en esta sección carece del rigor necesario para considerarlo un *paso al continuo*. En buena lógica, este capítulo podía haber empezado con la introducción de (2.6) con las especificaciones (2.7)-(2.8) en forma de postulado, dado que por simetrías *son* un DLG. Sin embargo, hemos preferido incluir la línea argumental que lleva a (2.6)-(2.7)-(2.8) porque, de no hacerlo así, muchas de las hipótesis pudieran haber parecido arbitrarias.

2.2 De Fokker-Planck a Langevin

Sólo en casos muy especiales es posible resolver la ecuación maestra explícitamente. Por lo tanto, las aproximaciones son necesarias. La más conocida es la de *Fokker-Planck* [Ris], resultado de cortar el desarrollo de *Kramers-Moyal* de la ecuación maestra en segundo orden [vKa]. Para ello, primero hay que seleccionar un parámetro adecuado con respecto al cual desarrollar las probabilidades de transición por unidad de tiempo, $W[C \rightarrow C']$. Dicho parámetro debe ser pequeño en algún sentido y gobernar el tamaño de las fluctuaciones. Este papel lo cumple de forma natural ε . Así pues, en esta sección vamos a desarrollar la ecuación maestra en serie de potencias de ε . El resultado será una expresión formalmente idéntica a la ecuación maestra y, por lo tanto, igualmente difícil de tratar. No obstante, truncando la serie a orden ε^2 se obtiene una ecuación de Fokker-Planck para el DLG. A falta de otro criterio sobre la importancia relativa de los términos del desarrollo, nos basamos en el teorema de Pawula, según el cual si el orden de las derivadas que se incluyen en el desarrollo de Kramers-Moyal es superior a 2 y finito, no se puede garantizar la positividad de la solución [Paw]. Posteriormente, y puesto que un mismo proceso estocástico se puede describir indistintamente por una ecuación de Langevin o de Fokker-Planck, hallaremos la ecuación de Langevin asociada al DLG. De momento, por claridad en la exposición, trataremos primero el caso $E = 0$, para volver inmediatamente a $E \neq 0$ que es el que nos ocupa.

Comenzamos, pues, desarrollando en primer lugar los funcionales $H(C^{\eta ra})$ y $P_t(C^{\eta ra})$ de (2.7) y (2.6) alrededor de C . Para los detalles del cálculo remitimos al lector a la primera sección del apéndice de este capítulo, de cuyas conclusiones es

inmediato que

$$\begin{aligned} H(C^{\eta r_a}) &= H(C) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\eta)^n \varepsilon^{n-1}}{n!} \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{r})} \right)^n H(C), \\ P_t(C^{\eta r_a}) &= P_t(C) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\eta \varepsilon)^n}{n!} \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{r})} \right)^n P_t(C). \end{aligned} \quad (2.9)$$

El significado del operador $(\nabla_{\mathbf{r}_a} \delta / \delta \phi)$ quedó precisado en (A.1.5). Nótese también que los desarrollos en ε de $H(C^{\eta r_a})$ y $P_t(C^{\eta r_a})$ son distintos. Ello se debe a que se ha sacado el factor ε^{-1} del hamiltoniano, y que por lo tanto $H(C)$ queda redefinido como el hamiltoniano ϕ^4 habitual. Así pues, si $\Delta H \equiv H(C^{\eta r_a}) - H(C)$, la ecuación maestra queda

$$\begin{aligned} \partial_t P_t(C) = \sum_a \int d\mathbf{r} d\eta f(\eta) & \left\{ (D(-\Delta H) - D(\Delta H)) P_t(C) + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\eta \varepsilon)^n}{n!} \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{r})} \right)^n P_t(C) D(-\Delta H) \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Llegados a este punto, aún es necesario desarrollar las probabilidades de transición por unidad de tiempo para que la expansión en ε se complete. Con este fin, la notación

$$\lambda_a \equiv -\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta H}{\delta \phi(\mathbf{r})} \quad (2.11)$$

se mostrará conveniente. Por ejemplo, por simple inspección se puede comprobar que

$$\Delta H = \eta \lambda_a - \frac{\eta^2 \varepsilon}{2} \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta \phi} \right) \lambda_a + O(\varepsilon^2), \quad (2.12)$$

con lo que resulta que el desarrollo de las funciones D lo es alrededor de λ_a . Finalmente, como aplicación directa de los resultados del apéndice A2.1 y notando que la integración de términos impares en η da lugar a la simplificación de varios términos, podemos escribir la siguiente ecuación de Fokker-Planck

$$\partial_t P_t(C) = \sum_a \int d\mathbf{r} \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{r})} \right) \left\{ \varepsilon h(\lambda_a) P_t(C) + \frac{\varepsilon^2}{2} e(\lambda_a) \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{r})} \right) P_t(C) \right\}, \quad (2.13)$$

donde

$$\begin{aligned} h(\lambda_a) &= \int_R d\eta f(\eta) \eta D(\eta\lambda_a), \\ e(\lambda_a) &= \int_R d\eta f(\eta) \eta^2 D(\eta\lambda_a). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Antes de continuar con el caso $E \neq 0$ debemos resaltar que λ_a es de orden 1 y no de orden ε . Esto se debe al factor Ω^d de (2.5), que asegura que la expansión de D no lo es alrededor de cero. Este hecho es de la mayor importancia porque es lo que confiere dependencia de la dinámica a la ecuación (2.13). Como ejemplo de lo que acabamos de decir, vamos a hacer un inciso con objeto de demostrar que la ausencia del factor Ω^d en (2.5) hubiera llevado a una situación bien distinta. En efecto, omitiendo el factor ε^{-1} se tiene inmediatamente $\Delta H = \eta\lambda_a\varepsilon + O(\varepsilon^2)$. Es decir, el desarrollo de las funciones D es alrededor de cero. Explícitamente

$$\begin{aligned} D(\Delta H) &= D(0) + D'(0) \left[-\eta\varepsilon \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta\phi} \right) + \frac{\eta^2\varepsilon^2}{2} \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta\phi} \right)^2 \right] H, \\ D(-\Delta H) &= D(0) - D'(0) \left[-\eta\varepsilon \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta\phi} \right) + \frac{\eta^2\varepsilon^2}{2} \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta\phi} \right)^2 \right] H. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ahora, dado que $D(0) = 1$ por convenio y $D'(0) = -1/2$ para cualquier $D(x)$ que satisfaga $D(-x) = D(x)e^x$, un cálculo elemental conduce a

$$\partial_t P_t(C) = \frac{\varepsilon^2 e(0)}{2} \int d\mathbf{r} \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta\phi} \right) \left[\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta P_t}{\delta\phi} + P_t \nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta H}{\delta\phi} \right], \quad (2.16)$$

que salvo por un rescalamiento trivial del tiempo concide con el llamado Modelo B de la conocida taxonomía de Hohenberg y Halperin [Hoh]. La ecuación (2.16) es la más simple que se puede construir con variables continuas para un campo escalar que pertenezca a la clase de universalidad dinámica del modelo de Ising de equilibrio con parámetro de orden conservado. Como ejemplo de su relevancia en el campo de los fenómenos críticos dinámicos baste citar su uso en el estudio de separación de fases en aleaciones binarias, mezclas de polímeros, etc, contexto en el que es más conocida por ecuación de Cahn-Hilliard-Cook [Cah, Co]. Pero queremos hacer notar que en (2.16)

cualquier dependencia de la forma de la función D se pierde por completo. De hecho en el desarrollo de D alrededor de cero sólo intervienen los dos primeros términos, que son comunes a cualquier probabilidad de transición que satisfaga la condición de balance detallado. Lejos del equilibrio, sin embargo, sería deseable conservar la forma funcional de las probabilidades de transición. A esta situación es a la que nos dedicamos seguidamente.

Consideremos ahora el caso $E \neq 0$ y escojamos H_E en (2.8) tal que

$$H_E(C \rightarrow C^{\eta r a}) = \eta \lambda_a^{(E)} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-\eta)^{l+1} \varepsilon^l}{(l+1)!} \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta \phi} \right)^l \lambda_a^{(E)}, \quad (2.17)$$

con $\lambda_a^{(E)} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E}(1 - \phi(\mathbf{r})^2)$. Esta elección de H_E es conveniente desde un punto de vista técnico. A orden cero en ε coincide con (2.8), mientras que la forma de los términos de orden superior permite que el desarrollo de Kramers-Moyal sea trivial. Esto es, sólo hay que sustituir en (2.13) y (2.14) λ_a por $\Lambda_a \equiv \lambda_a + \lambda_a^{(E)}$. De esta forma, podemos escribir finalmente la siguiente ecuación de Fokker-Planck para el DLG

$$\begin{aligned} \partial_t P_t(C) = \sum_a \int d\mathbf{r} \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{r})} \right) \left\{ \varepsilon h(\Lambda_a) P_t(C) + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^2}{2} e(\Lambda_a) \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{r})} \right) P_t(C) \right\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Una vez que hemos hallado la ecuación de Fokker-Planck del DLG vamos a formular el problema en términos de una ecuación de Langevin, es decir, una ecuación diferencial para la evolución temporal del campo $\phi(\mathbf{r}, t)$ con coeficientes aleatorios y propiedades estocásticas dadas [vKa, Gad, Wio]. Como es bien sabido, dado un sistema caracterizado por una ecuación de Fokker-Planck, es posible describir el mismo fenómeno mediante una ecuación de Langevin. Sin embargo, para que esta equivalencia esté exenta de ambigüedad es necesario fijar un convenio, problema que se conoce en la literatura como dilema de Ito-Stratonovich [vKa, Ito, Str]. Precisaremos estos conceptos en la segunda sección del apéndice de este capítulo. Aquí nos limitamos a recurrir al principal resultado de dicho apéndice, en virtud del cual la ecuación de

Fokker-Planck

$$\begin{aligned} \partial_t P_t(C) = & \sum_a \int d\mathbf{r} \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{r})} \right) \times \\ & \times \left\{ f_a(\phi; \mathbf{r}) P_t(C) + \frac{1}{2} \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{r})} \right) g_a(\phi; \mathbf{r})^2 P_t(C) \right\}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

es equivalente a la ecuación de Langevin

$$\partial_t \phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{a=1}^d \nabla_{\mathbf{r}_a} \left[f_a(\phi; \mathbf{r}) + g_a(\phi; \mathbf{r}) \zeta_a(\mathbf{r}, t) \right], \quad (2.20)$$

usando el convenio de Ito y con $\zeta_a(\mathbf{r}, t)$ un ruido blanco gaussiano, es decir, $\langle \zeta_a(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$ y $\langle \zeta_a(\mathbf{r}, t) \zeta_{a'}(\mathbf{r}', t') \rangle = \delta_{a,a'} \delta(t - t') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Entonces, en nuestro caso es inmediato obtener la siguiente correspondencia:

$$\begin{aligned} f_a &= \varepsilon h(\Lambda_a) - \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{r})} \right) e(\Lambda_a), \\ g_a &= \varepsilon e_a(\Lambda_a)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

No obstante, el segundo sumando de f_a es idénticamente nulo como se demuestra en la primera sección del apéndice. Por lo tanto, la ecuación de Langevin estocásticamente equivalente a (2.18) es

$$\partial_t \phi(\mathbf{r}, t) = \sum_a \nabla_{\mathbf{r}_a} \left[h(\Lambda_a) + e(\Lambda_a)^{1/2} \zeta_a(\mathbf{r}, t) \right], \quad (2.22)$$

donde el tiempo se ha rescalado por un factor ε , y finalmente ε se ha hecho igual a uno dado que no se van a considerar más desarrollos perturbativos en ε .

Antes de proseguir, conviene hacer notar que las simetrías básicas del DLG están presentes en la ecuación (2.22): es invariante bajo el cambio simultáneo de $E \rightarrow -E$ y $\phi \rightarrow -\phi$ así como por traslaciones en el espacio y en el tiempo. Es también de reseñar que (2.22) depende de la dinámica microscópica a través de las funciones $h(\Lambda_a)$ y $e(\Lambda_a)$, un resultado que va más allá de los enfoques mesoscópicos tradicionales y del cual sacaremos provecho en la próxima sección.

2.3 Recuento dimensional

Se puede simplificar la forma general (2.22) en función del régimen de temperaturas considerado. En concreto, aquí nos vamos a centrar en la región crítica, donde dominan las fluctuaciones en todas las escalas posibles. Siguiendo el método estándar de la teoría de campos, vamos a eliminar los términos irrelevantes en el sentido del grupo de renormalización. Para ello introducimos una escala de momento externa b y hacemos las siguientes transformaciones de escala anisotrópicas:

$$\begin{aligned}
 t &\rightarrow b^{-z}t, \\
 r_{\perp} &\rightarrow b^{-1}r_{\perp}, \\
 r_{\parallel} &\rightarrow b^{-\sigma}r_{\parallel}, \\
 \phi &\rightarrow b^{\delta}\phi,
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

donde \parallel representa a la dirección paralela al campo eléctrico \mathbf{E} , y \perp a aquellas direcciones perpendiculares a él. A partir de las correlaciones puede verse si dificultad que el ruido escala según $\zeta_a \rightarrow b^{(z+d+\sigma-1)/2}\zeta_a$. Seguidamente, desarrollamos la ecuación de Langevin (2.22) en serie de potencias en b alrededor de $b = 0$, manteniendo sólo los términos principales. La idea que subyace a estas manipulaciones es la de invariancia de escala del modelo en el punto crítico.

$$\begin{aligned}
 b^{z+\delta}\partial_t\phi = b \sum_{\perp} \nabla_{\perp} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} \lambda_{\perp}^{2n+1} - \frac{\varepsilon}{2} b^{1-\delta} \left(\nabla_{\perp} \frac{\delta}{\delta\phi} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{(2n)}(0)}{(2n)!} \lambda_{\perp}^{(2n)} + \right. \\
 \left. + b^{\frac{\sigma+d+z-1}{2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{(2n)}(0)}{n!} \lambda_{\perp}^{(2n)} \right]^{1/2} \xi_{\perp} \right] + \\
 + b^{\sigma} \nabla_{\parallel} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(\eta E)}{n!} \lambda_{\parallel}^n - \frac{\varepsilon}{2} b^{\sigma-\delta} \left(\nabla_{\parallel} \frac{\delta}{\delta\phi} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{(n)}(\eta E)}{n!} \lambda_{\parallel}^n + \right. \\
 \left. + b^{\frac{\sigma+d+z-1}{2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{(n)}(\eta E)}{n!} \lambda_{\parallel}^n \right]^{1/2} \xi_{\parallel} \right], \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

Forzamos a que la derivada temporal, el ruido transversal y la interacción espacial transversal sean invariantes de la transformación. Esta elección se justifica plenamente porque, en primer lugar, es necesario conservar el término de evolución temporal y, en

segundo lugar, guiados por los resultados de la simulación Monte Carlo hay que buscar una escala que permita “ver” estructura en la dirección transversal, que es donde se produce la segregación de fases. Por otro lado, el mantenimiento del ruido es un requerimiento estándar que permite situarse en la escala natural de las fluctuaciones y sin el cual la ecuación final podría resultar determinista perdiendo su carácter estocástico. De esta forma, los valores de z y δ se pueden determinar, obteniéndose $z = 4$ y $\delta = (\sigma + d - 3)/2$. Los términos más representativos del desarrollo son entonces

$$\begin{aligned} \partial_t \phi = & -\frac{e(0)}{2} \left[\Delta_{\perp}^2 \phi + b^{2\sigma-2} \Delta_{\perp} \Delta_{\parallel} \phi - b^{-2} \tau \Delta_{\perp} \phi - b^{\sigma+d-5} \frac{g}{6} \Delta_{\perp} \phi^3 \right] + \\ & + h'(E) \left[b^{2\sigma+2} \Delta_{\perp} \Delta_{\parallel} \phi + b^{4\sigma-4} \Delta_{\parallel}^2 \phi - b^{2\sigma-4} \tau \Delta_{\parallel} \phi - b^{3\sigma+d-7} \Delta_{\parallel} \phi^3 - \right. \\ & \quad \left. - b^{(3\sigma+d-11)/2} E \nabla_{\parallel} \phi^2 \right] + \\ & + e(0)^{1/2} \sum_{\perp} \nabla_{\perp} \zeta_{\perp} + b^{\sigma-1} e(E)^{1/2} \nabla_{\parallel} \zeta_{\parallel}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Diferentes elecciones de σ pueden dar lugar ahora a distintas situaciones. Una de ellas es $\sigma = 2$, con lo que los coeficientes de ∇_{\perp}^4 y ∇_{\parallel}^2 escalarían de la misma manera. Así ocurre en el recuento dimensional de la ecuación de Leung y Cardy, como tuvimos ocasión de ver en el capítulo uno de la presente memoria. En nuestro contexto, después de sustituir $\sigma = 2$ y de hacer el límite $b \rightarrow 0$, suponiendo $d > 3$, se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(\mathbf{r}) = & \frac{e(0)}{2} \left[- \sum_{\perp} \Delta_{\perp}^2 \phi + \tau \Delta_{\perp} \phi + \frac{g}{6} \Delta_{\perp} \phi^3 \right] - \\ & - \tau h'(E) \nabla_{\parallel}^2 \phi - E h'(E) \nabla_{\parallel} \phi^2 + \sqrt{e(0)} \sum_{\perp} \nabla_{\perp} \zeta_{\perp}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

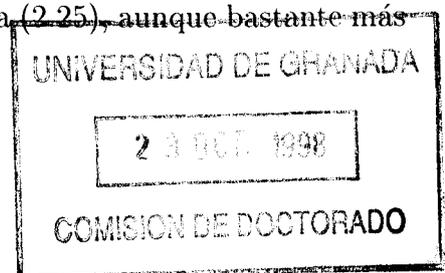
Aquí h' es la derivada de la función $h(\Lambda_a)$, que está íntimamente relacionada con la primera derivada de las probabilidades de transición D .

Observemos detenidamente la estructura de la ecuación (2.26). Como se puede comprobar fácilmente, coincide con la ecuación de Langevin que Leung y Cardy postularon para el DLG. Pero en acusado contraste con [Leu86], la ecuación (2.26) muestra la forma precisa en cómo la descripción mesoscópica del DLG depende de la dinámica microscópica. En términos más precisos, las dos temperaturas críticas diferentes intro-

ducidas por Leung y Cardy para el ordenamiento transversal y longitudinal, se identifican aquí como $\tau h'(E)$ y τ respectivamente, mientras que la versión mesoscópica del campo \mathbf{E} es $-E'h'(E)$. Como ya se ha comentado, todas las simulaciones Monte Carlo del DLG se han hecho con campo externo infinito casi sin excepción. Originariamente se supuso que un campo eléctrico microscópico infinito se correspondía con un campo eléctrico mesoscópico finito y distinto de cero. En la ecuación (2.26) mostramos explícitamente que éste no es el caso. De hecho, resulta que cuando $E \rightarrow \infty$ el término de corriente desaparece. Creemos que esta es la razón de la discrepancia entre los resultados de las simulaciones y el análisis de la ecuación de Langevin (2.26). Esta última no es la adecuada para comparar con las simulaciones de ordenador porque éstas se realizan siempre con campo eléctrico infinito y en la ecuación (2.26) hay presente un término de corriente no nulo. Pero llevemos el cálculo un paso más adelante y hagamos $E = \infty$ en (2.26). Entonces, todos los términos dependientes del campo eléctrico desaparecen, como se puede comprobar independientemente de la ecuación que se considere, (2.22) antes del recuento dimensional, o bien en (2.26), después del rescalamiento. De esta forma, (2.26) se simplifica a

$$\partial_t \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} e(0) \left[-\Delta_{\perp}^2 \phi + \tau \Delta_{\perp} \phi + \frac{g}{6} \Delta_{\perp} \phi^3 \right] + \sqrt{e(0)} \sum_{\perp} \nabla_{\perp} \zeta_{\perp}(\mathbf{r}, t). \quad (2.27)$$

Esta última ecuación constituye un modelo B [Hoh] en las direcciones transversales al campo y carece de estructura en la paralela. Por lo tanto, el cambio de escala $\sigma = 2$ para $E = \infty$ da lugar a un comportamiento trivial. Además, uno se da cuenta de que imponer que ∇_{\perp}^4 y ∇_{\parallel}^2 escalen de la misma manera no tiene sentido por cuanto no existe el término de gradiente paralelo en la ecuación de Langevin. No obstante, tenemos la libertad de escoger otros valores de σ , lo que dará lugar a teorías críticas diferentes. Recordemos que esta libertad no existía en [Leu86] donde la elección $\sigma = 2$ era obligada por cuanto la elección “natural” $\sigma = 1$ borraría todo efecto del campo eléctrico, dando lugar a una ecuación manifiestamente incapaz de describir nada nuevo. De la elección $\sigma = 1$, coherente con la hipótesis de que sólo existe una longitud de correlación independiente, resulta una ecuación análoga a (2.25), aunque bastante más complicada:



$$\begin{aligned}
\partial_t \phi = & -\frac{e(0)}{2} \left[\Delta_{\perp}^2 \phi + \Delta_{\perp} \Delta_{\parallel} \phi - b^{-2} \tau \Delta_{\perp} \phi - b^{d-4} \frac{g}{6} \Delta_{\perp} \phi^3 \right] + \\
& + h'(E) \left[\Delta_{\perp} \Delta_{\parallel} \phi + \Delta_{\parallel}^2 \phi - b^{-2} \tau \Delta_{\parallel} \phi - b^{d-4} \frac{g}{6} \Delta_{\parallel} \phi^3 - b^{(d-8)/2} E \nabla_{\parallel} \phi^2 \right] + \\
& + h''(E) \left[b^{(d-4)/2} \tau^2 \nabla_{\parallel} (\nabla_{\parallel} \phi)^2 + b^{d-4} \frac{2}{3} \tau E \Delta_{\parallel} \phi^3 + b^{3(d-4)/2} E^2 \nabla_{\parallel} \phi^4 \right] - \\
& - b^{(5d-16)/2} E^3 \frac{h'''(E)}{6} \nabla_{\parallel} \phi^6 + e(0)^{1/2} \sum_{\perp} \nabla_{\perp} \zeta_{\perp} + e(E)^{1/2} \nabla_{\parallel} \zeta_{\parallel}. \quad (2.28)
\end{aligned}$$

En particular, cuando $E = 0$ se recupera la teoría de equilibrio (Modelo B). Para campos E finitos la dimensión crítica es $d_c = 8$, pero algún término peligrosamente irrelevante se podría tener que tener en cuenta por debajo de la temperatura crítica. De hecho, siguiendo un razonamiento análogo al presentado en [Jan86] para justificar la presencia de un operador peligrosamente irrelevante en la renormalización de DDS, el término $\Delta_{\perp} \phi^3$ es claramente necesario para estabilizar la teoría en las direcciones transversales cuando $\tau < 0$. En principio, dado que la dimensión marginal de $\Delta_{\perp} \phi^3$ es 4, no se puede descartar el acoplamiento de dicho operador con otros con la misma dimensión marginal¹. Por eso no hemos eliminado los términos trivialmente irrelevantes en la ecuación (2.28).

Cuando $E = \infty$ se obtiene una ecuación mucho más sencilla:

$$\begin{aligned}
\partial_t \phi = & \frac{1}{2} e(0) \left[-\Delta_{\perp} \Delta_{\parallel} \phi - \Delta_{\perp}^2 \phi + \tau \Delta_{\perp} \phi + \frac{g}{6} \Delta_{\perp} \phi^3 \right] + \\
& + \sqrt{e(0)} \sum_{\perp} \nabla_{\perp} \zeta_{\perp}(\mathbf{r}, t) + \sqrt{\frac{e(0)}{2}} \nabla_{\parallel} \zeta_{\parallel}(\mathbf{r}, t). \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Esta ecuación carece de estructura en la dirección paralela, así que corresponde a un gas reticular en el que las partículas se intercambian al azar en la dirección del campo mientras que los saltos en las direcciones transversales están condicionados por los incrementos de energía. La diferencia más notable entre los casos E finito e infinito reside en el término de corriente estacionaria. Éste no aparece en (2.29). Naturalmente,

¹Véase [Ami], capítulo 2 de la segunda parte y la discusión que allí se sigue acerca de las correcciones debidas a la presencia de operadores peligrosamente irrelevantes.

dicha corriente existe, pero resulta ser una constante que aun pudiendo depender de la densidad global del sistema no influye en las fluctuaciones ni afecta a las propiedades críticas y por eso la ecuación (2.29) no la recoge.

Es sorprendente encontrar un cambio tan drástico entre las ecuaciones de Langevin que caracterizan los casos E finito e infinito. Este resultado hubiera sido difícil de descubrir mediante consideraciones de simetría exclusivamente. Al hilo de este comentario, queremos mostrar que si se despreciaran los términos irrelevantes de (2.28), el resultado sería la ecuación de Leung y Cardy para el DDS con “scaling” $\sigma = 1$. Esto nos induce a pensar que para campos eléctricos suficientemente pequeños la construcción fenomenológica de la ecuación de Langevin en [Leu86] es correcta salvo por las correcciones —que pueden llegar a ser muy importantes— que se muestran en (2.28). Sin embargo, en el límite $E \rightarrow \infty$ dicha construcción es discutible porque se basa en suponer que la contribución a la corriente se puede desdoblar en un término térmico más otro de arrastre. Esta propiedad de aditividad difícilmente se puede asumir como hipótesis de partida en una situación tan fuertemente no lineal como la del DLG. Por nuestra parte no ha sido necesaria ninguna hipótesis de esta naturaleza. Nuestros resultados son consecuencia directa de un cálculo cuyo ingrediente esencial es la presencia de la dinámica microscópica. De ésta dependen directamente las propiedades de (2.28) a través de las funciones h y e . No así en (2.29), donde la dinámica no está presente. Sin embargo, hemos encontrado que la presencia de las funciones D , que definen la probabilidad de transición, es esencial para los resultados que se obtienen en el límite $E \rightarrow \infty$, aunque su forma precisa es irrelevante.

También es digno de señalar la ausencia de la simetría galileana [Jan86] tan útil en la renormalización de la teoría de Leung y Cardy. Anticipándonos a la renormalización de (2.29) (el cálculo de los exponentes críticos se presentará en el capítulo cuatro de esta memoria), hacemos notar que la dimensión crítica es ahora $d_c = 4$ y que dará lugar a una clase de universalidad distinta de la obtenida para campos finitos. Por lo tanto, se espera un valor de β distinto de $1/2$. Para finalizar, remarcamos el hecho de que la ecuación (2.29) es renormalizable, mientras que para valores finitos del campo la renormalización se prevé ardua debido a la plétora de operadores peligrosamente

irrelevantes que, en principio, puede que haya que considerar.

Finalmente, comentamos el carácter aditivo del ruido en (2.29), gracias al cual el dilema de Ito-Stratonovich no entrará en el análisis que de (2.29) haremos en el capítulo cuatro, reduciéndose la cuestión simplemente a un asunto de conveniencia.

Apéndice 2

A2.1 Desarrollos formales

Sea F un funcional de $\phi(\mathbf{x})$. Entonces, ante cambios arbitrarios $\delta\phi$ en ϕ , se puede escribir el siguiente desarrollo formal en serie de Taylor para F

$$\begin{aligned}
 F(\phi + \delta\phi) &= F(\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^d \mathbf{x}_1 \dots d^d \mathbf{x}_n \frac{\delta^n F}{\delta\phi(\mathbf{x}_1) \dots \delta\phi(\mathbf{x}_n)} \delta\phi(\mathbf{x}_1) \dots \delta\phi(\mathbf{x}_n) = \\
 &= F(\phi) + \int d\mathbf{x}_1 \frac{\delta F}{\delta\phi(\mathbf{x}_1)} \delta\phi(\mathbf{x}_1) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \frac{\delta^2 F}{\delta\phi(\mathbf{x}_1) \delta\phi(\mathbf{x}_2)} \delta\phi(\mathbf{x}_1) \delta\phi(\mathbf{x}_2) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{A2.1}$$

donde $\delta F/\delta\phi$ quiere decir derivada funcional de $F(\phi)$ con respecto a $\phi(\mathbf{x})$. Seguidamente tratamos de forma explícita el caso que nos ocupa, a saber

$$\delta\phi = \epsilon \nabla_{x_a} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}).
 \tag{A2.2}$$

Por aplicación directa de (A2.1) se sigue inmediatamente que

$$\begin{aligned}
 F(\phi + \delta\phi) &= F(\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n \frac{\delta^n F(\phi)}{\delta\phi(\mathbf{x}_1) \dots \delta\phi(\mathbf{x}_n)} \times \\
 &\quad \times \epsilon^n \nabla_{x_{1,a}} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{r}) \dots \nabla_{x_{n,a}} \delta(\mathbf{x}_n - \mathbf{r}) = \\
 &= F(\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \left\{ \prod_{k=1}^n \int d\mathbf{x}_k \nabla_{x_{k,a}} \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{r}) \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x}_k)} \right\} F(\phi).
 \end{aligned}$$

(A2.3)

Y sin más que integrar por partes se llega a

$$F(\phi + \delta\phi) = F(\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\epsilon)^n}{n!} \left(\nabla_{r_a} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{r})} \right)^n F(\phi). \quad (\text{A2.4})$$

El operador $(\nabla_{r_a} \frac{\delta}{\delta\phi})$ viene dado por

$$\left(\nabla_{r_a} \frac{\delta}{\delta\phi} \right) F(\phi) = \nabla_{r_a} \left(\frac{\delta F(\phi)}{\delta\phi(\mathbf{r})} \right) - \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{r})} \left(\nabla_{r_a} F(\phi) \right). \quad (\text{A2.5})$$

Para demostrar esta última identidad conviene trabajar en un retículo, sustituyendo la derivada funcional por su versión discreta y el operador ∇ por diferencias finitas.

Esto es,

$$\begin{aligned} \nabla_{r_a} \frac{\delta F}{\delta\phi} - \frac{\delta}{\delta\phi} \nabla_{r_a} F &= \frac{\partial F(\phi_{\mathbf{r}+\mathbf{a}})}{\partial\phi_{\mathbf{r}+\mathbf{a}}} - \frac{\partial F(\phi_{\mathbf{r}})}{\partial\phi_{\mathbf{r}}} - \frac{\partial F(\phi_{\mathbf{r}+\mathbf{a}})}{\partial\phi_{\mathbf{r}}} + \frac{\partial F(\phi_{\mathbf{r}})}{\partial\phi_{\mathbf{r}}} = \\ &= \frac{\partial F(\phi_{\mathbf{r}+\mathbf{a}})}{\partial\phi_{\mathbf{r}+\mathbf{a}}} - \frac{\partial F(\phi_{\mathbf{r}+\mathbf{a}})}{\partial\phi_{\mathbf{r}}} = \left[\frac{\partial}{\partial\phi_{\mathbf{r}+\mathbf{a}}} - \frac{\partial}{\partial\phi_{\mathbf{r}}} \right] F(\phi_{\mathbf{r}+\mathbf{a}}) = \\ &= \left(\nabla_{\mathbf{r}} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{r})} \right) F(\phi(\mathbf{r})). \end{aligned} \quad (\text{A2.6})$$

Finalmente, hacemos notar que el operador $(\nabla_{r_a} \frac{\delta}{\delta\phi})$ satisface las propiedades típicas de un operador diferencial. En concreto, una que resulta de utilidad es

$$\left(\nabla_{r_a} \frac{\delta}{\delta\phi} \right) (F_1(\phi)F_2(\phi)) = F_1(\phi) \left(\nabla_{r_a} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{r})} \right) F_2(\phi) + F_2(\phi) \left(\nabla_{r_a} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{r})} \right) F_1(\phi). \quad (\text{A2.7})$$

Finalmente vamos a demostrar una propiedad interesante del operador $(\nabla_{r_a} \frac{\delta}{\delta\phi})$ porque permite cierta simplificación en los cálculos. Consideremos una función u de ϕ y sus derivadas, $u(\phi, \phi', \dots, \phi^n)$. En ese caso tendremos

$$\begin{aligned} \frac{\delta u}{\delta\phi} = \sum_{k=0}^n \frac{\partial u}{\partial\phi^k} \delta^n &\Rightarrow \nabla_r \left(\frac{\delta u}{\delta\phi} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\nabla_r \frac{\partial u}{\partial\phi^k} \right) \delta^n + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial\phi^k} \delta^{n+1}, \\ \nabla_r u = \sum_{k=0}^n \frac{\partial u}{\partial\phi^k} \phi^{k+1} &\Rightarrow \frac{\delta}{\delta\phi} \nabla_r u = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\delta}{\delta\phi} \frac{\partial u}{\partial\phi^k} \right) \phi^{k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial\phi^k} \delta^{n+1}, \end{aligned}$$

$$(A2.8)$$

donde hemos omitido deliberadamente los argumentos de las funciones para aligerar la notación y, con el mismo fin pero sin pérdida de generalidad, nos hemos restringido a un espacio unidimensional. Como se puede comprobar ahora sin más que desarrollar los paréntesis de las sumatorias de (A2.8), resulta que

$$\left(\nabla \frac{\delta}{\delta\phi}\right)u = 0. \quad (A2.9)$$

A2.2 Ecuaciones de Fokker-Planck y Langevin para sistemas con parámetro de orden conservado

Presentamos ahora una deducción formal, aunque no completamente rigurosa desde un punto de vista matemático, de la relación entre las ecuaciones diferenciales estocásticas de tipo Langevin y Fokker-Planck. Comenzamos considerando una ecuación de Langevin con parámetro de orden conservado de aspecto general

$$\partial_t \phi(\mathbf{x}, t) = \sum_a \nabla_{x_a} [f_a(\phi, \mathbf{x}) + g_a(\phi, \mathbf{x}) \zeta_a(\mathbf{x}, t)]. \quad (A2.10)$$

Supondremos que ζ_a es un ruido con distribución gaussiana:

$$P(\zeta(\mathbf{x}, t)) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^d x dt \zeta^2(\mathbf{x}, t) \right], \quad (A2.11)$$

donde la constante de proporcionalidad es igual formalmente al inverso de la integral funcional

$$\int \mathcal{D}\zeta \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^d x dt \zeta^2(\mathbf{x}, t) \right]. \quad (A2.12)$$

La solución de la ecuación (A2.10) describirá la evolución estocástica de la variable ϕ . Otra forma de descripción del mismo fenómeno pasa por una ecuación cuya solución sea la evolución de la probabilidad de tener una cierta configuración ϕ en el tiempo

t , $P_t(\phi)$. Para conectar ambas descripciones es necesario discretizar en el tiempo la ecuación de Langevin (A2.10). Así pues, sustituyamos la variable continua $t \in [t_0, t_N]$ por una sucesión de valores discretos, t_n , de tal manera que $t_n = t_0 + n\epsilon$ con $N \geq n \geq 0$ y $\epsilon = (t_N - t_0)/N$. En este proceso hay una gran libertad para construir versiones discretas de la misma ecuación de Langevin que coincidan con la original en el límite $\epsilon \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$ a $\epsilon N = cte$. Para dar cuenta de esta degeneración introducimos un parámetro α , con $0 \leq \alpha \leq 1$, que junto con la notación $\phi_n = \phi(\mathbf{x}, t_n)$, $\zeta_{a,n} = \zeta_a(\mathbf{x}, t_n)$, nos permite escribir

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \epsilon \sum_a \nabla_{x_a} \left[f_a(\alpha\phi_n + (1-\alpha)\phi_{n+1}, \mathbf{x}) + g_a(\alpha\phi_n + (1-\alpha)\phi_{n+1}, \mathbf{x}) \zeta_{a,n} \right], \quad (\text{A2.13})$$

En particular, si $\alpha = 1$ se habla del *cálculo de Ito*, mientras que $\alpha = 1/2$ da lugar al de *Stratonovich*. La elección de un valor concreto para α implica una forma de discretización distinta de la cual depende la ecuación de Fokker-Planck final. Nosostros adoptaremos la elección de Ito. El motivo no es otro que la economía en el cálculo.

Para aligerar la notación definimos $\xi_{a,n} \equiv \epsilon_{a,n} \zeta_n$, con lo con lo que $\xi_{a,n}$ sigue siendo un ruido blanco gaussiano, es decir, con todos los cumulantes asociados nulos excepto $\langle \xi_n \xi_{n'}' \rangle = \epsilon \delta_{n,n'} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, y donde el promedio es con respecto al ruido ξ . La probabilidad de que el sistema esté en la configuración $\phi_{n+1}(\mathbf{r})$ en el tiempo t_{n+1} viene entonces dada por

$$P_{n+1}(\phi_{n+1}) = \left\langle \int d\phi_n P_n(\phi_n) \delta(S_n) \right\rangle_{\xi}, \quad (\text{A2.14})$$

siendo $S_n = \phi_{n+1} - \phi_n - \epsilon \sum_a \nabla_{x_a} [f_a + g_a]$

$$\begin{aligned} \delta(S_n) \approx & \delta(\phi_{n+1} - \phi_n) + \int dx_1 \frac{\delta\delta(\phi_{n+1} - \phi_n)}{\delta\phi_n} \left[-\epsilon \sum_a \nabla_{x_a} [f_a + g_a \zeta_a] \right] + \\ & + \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 \frac{\delta^2\delta(\phi_{n+1} - \phi_n)}{\delta\phi_n(x_1)\delta\phi_n(x_2)} \left[-\epsilon \sum_a \nabla_{x_{1,a}} \dots \right] \left[-\epsilon \sum_a \nabla_{x_{2,a}} \dots \right] + \dots \end{aligned} \quad (\text{A2.15})$$

El cálculo se reduce ahora a promedios sobre el ruido. Sustituyendo (A2.15) en (A2.14) se obtiene

$$\begin{aligned} \epsilon^{-1}(P_{n+1} - P_n) = & - \sum_a \int d\mathbf{x}_1 \frac{\delta}{\delta\phi} [P_n \nabla_{x_a} f_a] + \\ & + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \frac{\delta^2}{\delta\phi(\mathbf{x}_1)\delta\phi(\mathbf{x}_2)} \left[P_n \sum_a \nabla_{x_{1,a}} \nabla_{x_{2,a}} (g_a^2 \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A2.16})$$

El primer sumando del segundo miembro de la ecuación superior es simplemente igual a

$$\sum_a \int d\mathbf{x} \left(\frac{\delta}{\delta\phi} \right) (P_t f_a), \quad (\text{A2.17})$$

mientras que el segundo conduce a

$$\frac{1}{2} \sum_a \int d\mathbf{x} \frac{\delta}{\delta\phi} \nabla_{x_a} \frac{\delta P_n \nabla_{x_a} e_a^2}{\delta\phi} - \frac{1}{2} \sum_a \int d\mathbf{x} \left(\frac{\delta}{\delta\phi} \right) \nabla_{x_a}^2 \frac{\delta P_n e_a^2}{\delta\phi}. \quad (\text{A2.18})$$

Por último, de la reordenación de términos y en el límite $\epsilon \rightarrow 0$ se obtiene el resultado final

$$\partial_t P_t(\phi) = \sum_a \int d\mathbf{x} \left(\nabla_{x_a} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})} \right) \left[P_t f_a + \frac{1}{2} \left(\nabla_{x_a} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})} \right) (P_t g_a^2) \right]. \quad (\text{A2.19})$$

La generalización al caso $\alpha \neq 1$ hubiera desembocado en

$$\begin{aligned} \partial_t P_t(\phi) = \sum_a \int d\mathbf{x} \left(\nabla_{x_a} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})} \right) \left[P_t f_a + \frac{1}{2} \left(\nabla_{x_a} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})} \right) (P_t g_a^2) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (1 - \alpha) \left(\nabla_{y_a} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{y})} g_a^2 \right)_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} P_t(\phi) \right], \end{aligned} \quad (\text{A2.20})$$

es decir, hubiera que haber considerado un término extra.

Capítulo 3

Campo medio

El estudio de la segregación de fases cuando una aleación binaria se enfría por debajo de su temperatura crítica es un asunto que tiene y ha disfrutado de gran interés tanto teórico como práctico [Gun]. Las investigaciones teóricas normalmente siguen dos caminos diferentes: simulación por ordenador del modelo microscópico o integración numérica de la ecuación continua para las densidades mesoscópicas. Mientras que el punto de partida para el primer método suele ser el modelo de gas reticular con dinámica de Kawasaki [Kaw], el segundo suele explotar la ecuación de Cahn-Hilliard [Cah] o su versión estocástica [Coo]. En este caso parece estar claro que los modelos macroscópico y microscópico describen el mismo fenómeno [Rog]. Pretendemos en este capítulo empezar a estudiar si esta equivalencia se mantiene en el DLG. La segregación de fases en presencia de campos externos se aborda normalmente mediante una modificación adecuada de la ecuación de Cahn-Hilliard. Este es el método que se ha seguido en el estudio numérico del “driven diffusive system”, la contrapartida continua al DLG en la formulación de Leung y Cardy [Yeu91, Yeu92, Ale]. Más en concreto, la modificación más simple a la ecuación de Cahn-Hilliard para describir la descomposición espinodal en un gas reticular con arrastre es

$$\partial_t \phi = -\nabla^2 [\phi - \phi^3 + \nabla^2 \phi] + \mathbf{E} \cdot \nabla \phi^2, \quad (3.1)$$

que no es otra cosa que la ecuación de Leung y Cardy [Leu86] para el DLG antes del

recuento dimensional y sin el ruido. Compararemos nuestros resultados con los que se obtienen de esta ecuación y los que se hallan directamente por simulación Monte Carlo.

En este capítulo se acomete la integración numérica de la ecuación de Langevin (2.22),

$$\partial_t \phi(\mathbf{r}, t) = \sum_a \nabla_{\mathbf{r}_a} \left[h(\Lambda_a) + e(\Lambda_a)^{1/2} \zeta_a(\mathbf{r}, t) \right].$$

Por simplicidad no consideraremos en lo sucesivo el ruido. El carácter determinista de la ecuación resultante no elimina ninguna situación de interés físico y sí reduce sustancialmente el tiempo de cómputo. Cuando $0 < E < \infty$, (2.22) depende explícitamente de la dinámica que se considere. En esos casos, para ilustrar la posible dependencia de las probabilidades de transición, utilizaremos $D(x) = \min\{1, e^{-x}\}$ y $D(x) = e^{-x/2}$, que corresponden a las dinámicas de Metropolis [Met] y van Beijeren [vBe] respectivamente.

La primera sección está dedicada simplemente a mostrar el proceso de segregación de fases y la evolución hacia el estado estacionario. En la segunda sección se estudia si nuestra nueva ecuación resuelve una importante discrepancia existente entre (3.1) y la simulación Monte Carlo. Finalmente, en la tercera y última estudiamos el “cross-over” entre los regímenes $0 < E < \infty$ y $E = \infty$ desde el punto de vista de las correlaciones.

3.1 Morfología

Cuando se enfría de forma súbita un DLG a partir del estado homogéneo aparecen pequeñas inhomogeneidades en el parámetro de orden que evolucionan hacia dominios macroscópicos de los que, finalmente, resulta una segregación de fases. En esta sección realizamos la simulación numérica de este proceso, resolviendo para ello la ecuación (2.22) sin ruido. Adoptaremos un esquema de diferencias finitas, para lo cual comenzamos por considerar una red discreta de tamaño $L \times L$ y definiendo ϕ en cada nudo de

la red. Usaremos el método de Euler para discretizar el tiempo, con un paso temporal Δt , y una aproximación a vecinos próximos para el laplaciano,

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \sum_i \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} - \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} \right]. \quad (3.2)$$

La elección de los pasos temporal y espacial, Δt y Δx requiere algunos comentarios. En principio lo ideal sería considerar Δx lo más pequeños posibles y Δt grandes. Sin embargo, las limitaciones del ordenador requieren un enfoque más práctico y otras cuestiones de carácter numérico obligan a tomar ciertas precauciones. Por ejemplo, el máximo valor de Δx está restringido a la menor escala de longitud presente en el sistema, que en este caso es la anchura de la interfase [Eld]. Esta elección de Δx impone un límite al máximo valor de Δt que se puede escoger. Una estimación de la relación entre estos dos parámetros se puede obtener linealizando la fórmula de recurrencia que resulta de discretizar la ecuación en derivadas parciales. Es posible entonces, en espacio de Fourier, hacer un análisis de estabilidad y localizar la presencia de inestabilidades. Un caso sencillo lo constituye la ecuación (2.22) en el límite $E \rightarrow \infty$, porque la dependencia de la dinámica desaparece y, como vimos en el capítulo anterior, resulta simplemente

$$\partial_t \phi = \frac{e_0}{2} \Delta_{\perp} \left[-\Delta \phi + \tau \phi + \frac{g}{3!} \phi^3 \right], \quad (3.3)$$

donde $e_0 = e(0)$. No se ha considerado el ruido. Después de discretizar

$$\phi_{t+\Delta t} = \phi_t + \frac{\Delta t e_0}{2(\Delta x)^2} \sum_n \left[\tau \phi_t + \frac{g}{3!} \phi_t^3 - \frac{1}{(\Delta x)^2} \sum_{nn} \phi_t \right], \quad (3.4)$$

donde

$$\sum_n f(\phi_t) = \phi_t(x + \Delta x, y) + \phi_t(x - \Delta x, y) - 2\phi_t(x, y), \quad (3.5)$$

$$\sum_{nn} f(\phi_t) = \phi_t(x + \Delta x, y) + \phi_t(x - \Delta x, y) + \phi_t(x, y + \Delta) + \phi_t(x, y - \Delta) - 4\phi_t(x, y).$$

Pasando a Fourier mediante

$$\phi_t(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{L\Delta x} \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \right\} \phi_t(\mathbf{k}), \quad (3.6)$$

se llega a

$$\phi_{\Delta t} = \left[1 + \frac{e_0}{2} \tau \Delta t \Gamma(k_x, 0) - \frac{e_0}{2} \Delta t \Gamma(k_x, 0) \Gamma(k_x, k_y) \right] \phi_t = H_{\mathbf{k}} \phi_t, \quad (3.7)$$

siendo $\Gamma(\mathbf{k}) = 2 \cos\left(\frac{2\pi k_x}{L}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi k_y}{L}\right) - 4$. Las inestabilidades ocurren cuando $H_{\mathbf{k}} < -1$ o bien $H_{\mathbf{k}} > 1$. La segunda situación corresponde a la situación de inestabilidad física, esto es, la creación inicial de dominios. La primera es una inestabilidad de tipo numérico o bifurcación subarmónica [Eld, Rog]. Un cálculo directo indica que para evitarlas hay que tomar Δt tal que

$$\Delta t < \frac{(\Delta x)^4}{e_0(8 + \tau(\Delta x)^2)}. \quad (3.8)$$

Valores mayores de Δt serían posibles, pero entonces habría que considerar más vecinos en la discretización del laplaciano y sería necesario más cálculo por cada iteración.

En situaciones menos favorables para este tipo de análisis, como la que se da cuando $0 < E < \infty$, nos hemos guiado por los valores adecuados para el caso $E = \infty$ y chequeado mediante simulaciones breves que Δt y Δx no afecten a las magnitudes que vamos a estudiar. Finalmente, comentamos que las condiciones de contorno periódicas se imponen simplemente mediante $\phi_n((L+1)\Delta x, y) = \phi_n(\Delta x, y)$, donde $n = t/\Delta t$. El estado inicial se ha preparado asignando a cada nudo de la red un número aleatorio de una distribución de media 0 (equivalente a $\rho = 0.5$). Se han considerado diversas condiciones iniciales. La siguiente figura muestra una secuencia temporal de la estructura de los dominios cuando $E = \infty$, $\tau = -1$ y $g = 1$, tomando $\Delta x = 1.7$ y $\Delta t = 0.25$. A tiempos pequeños los patrones son isótropos y muy similares a los que se obtienen cuando $E = 0$. Sin embargo, rápidamente aparece una clara anisotropía en la estructura de los dominios, que crecen mucho más deprisa en la dirección del campo eléctrico. Cuando un dominio pequeño se acerca a uno mayor es absorbido por éste, dando lugar a un estado final formado por una fase densa separada de otra enrarecida por una interfase paralela al campo, semejante al que se mostró en la figura (1.2) del capítulo primero. Todo esto lo mostramos en la figura (3.1), que corresponde a $E = \infty$. Si $0 < E < \infty$, y considerando dinámicas de Metropolis y van Beijeren, los resultados son indistinguibles a la vista de los que ya se muestran. En la figura (3.2) de

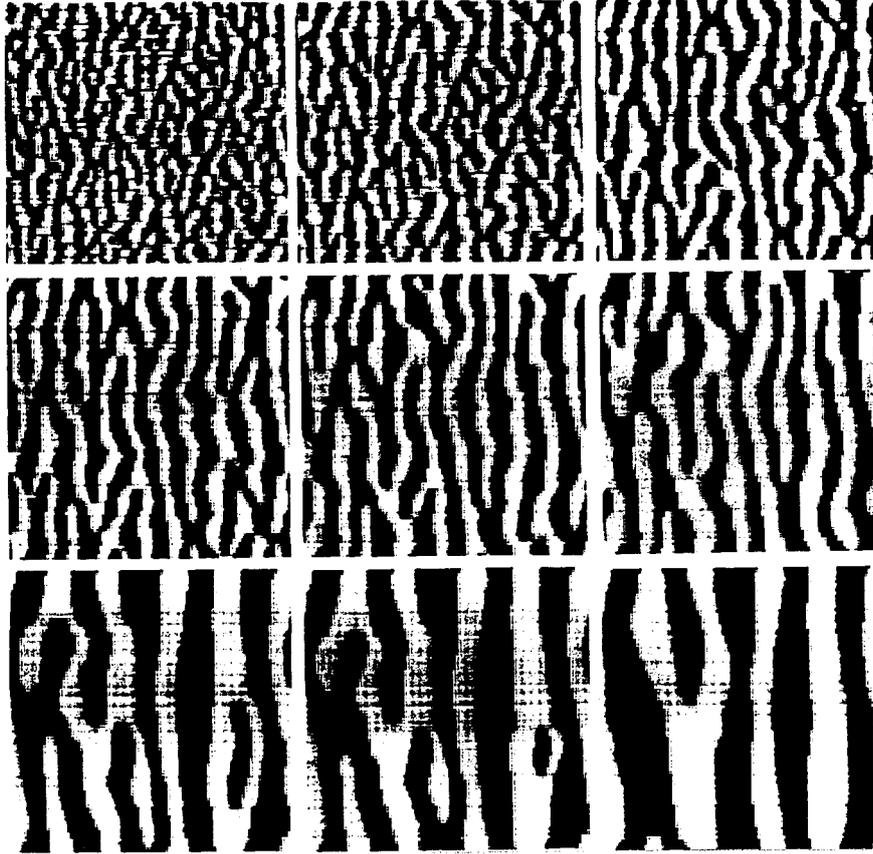


Figura 3.1: Estados intermedios en la evolución hacia el estado estacionario según la ecuación (2.29) (caso $E = \infty$). La densidad es $\varrho = 0.5$, $\tau = -1$, $g = 1$, $L = 100$, $\Delta x = 1.7$ y $\Delta t = 0.25$. De izquierda a derecha y de arriba abajo, los tiempos son $t = 25, 50, 125, 250, 500, 1000, 6250, 10000$ y 100.000 . Las partículas en negro.

la tercera sección de este mismo capítulo se pueden ver algunos pasos intermedios de la evolución hacia el estado estacionario según resultan de simulación Monte Carlo, en buen acuerdo cualitativo con las que se muestran aquí. Patrones idénticos se obtienen de la integración de la ecuación de Cahn-Hilliard modificada [Yeu91].

En cuanto a los estados estacionarios, puede comprobarse que (2.22) admite, entre otras muchas, las soluciones estacionarias $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$ y $\phi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\frac{-6\tau}{g}} \tanh\left(\sqrt{\frac{-\tau}{2}} \mathbf{x}_\perp\right)$. En este análisis de tipo campo medio, la primera de ellas debería ser la correspondiente a la fase desordenada, y la segunda a la ordenada. Dejamos abierta para el futuro la

cuestión del análisis de estabilidad de estas soluciones, que permitiría hallar la curva de descomposición espinodal de nuestra versión continua del DLG.

3.2 Asimetría durante la segregación de fases

Obsérvese la figura (3.2) que recoge tres estados intermedios en la evolución Monte Carlo hacia el estado estacionario de un DLG (véase el pie de figura para más detalles). Como se ve claramente, existe una tendencia hacia la formación de dominios triangulares que apuntan en la dirección opuesta al campo. Por el contrario, en el modelo macrosocópico (3.1) los triángulos tienden a alinearse a favor del campo, como puede observarse en la figura (3.3). Esta discrepancia se ha comprobado más allá de la simple inspección visual en [Ale]. Para ello se han definido diversos factores de asimetría (para un amplio rango de valores tanto de densidades como de campos eléctricos) de cuyo signo se deduce la dirección hacia la que tienden a apuntar los triángulos. En la siguiente figura, la (3.4), se pueden observar los mismos agregados triangulares, pero en este caso corresponden a nuestra ecuación con $E = 0.4$, dinámica de van Beijeren y densidad 0.3 para que la separación entre dominios sea más clara. Otros patrones con intensidades del campo distintas y otras dinámicas son similares. En todos ellos los triángulos apuntan en la dirección del campo eléctrico, y se repite el desacuerdo con lo que se observa en simulación Monte Carlo.

Para analizar un poco más a fondo esta cuestión se pueden variar las condiciones iniciales y ver cómo afecta esto a la evolución posterior. Así pues, hemos ensayado con configuraciones triangulares, cuadradas y circulares. Puede apreciarse en la figura (3.5) la deformación que sufre un dominio circular con el paso del tiempo con simulación Monte Carlo. Por comparación mostramos a continuación (figura (3.6)) la evolución temporal de un dominio circular que hemos obtenido según la ecuación de Cahn-Hilliard modificada (3.1). Los parámetros son $E = 0.4$, $L = 100$, $\Delta t = 0.5$, y $\Delta x = 1.7$, y de izquierda a derecha y de abajo a arriba $t = 0, 25, 50, 100, 200$ y 300 . Y seguidamente el mismo fenómeno según nuestra ecuación (2.22) en las figura (3.7) La primera línea corresponde a dinámica de Metropolis a $t = 125, 250$ y 375 , y la inferior

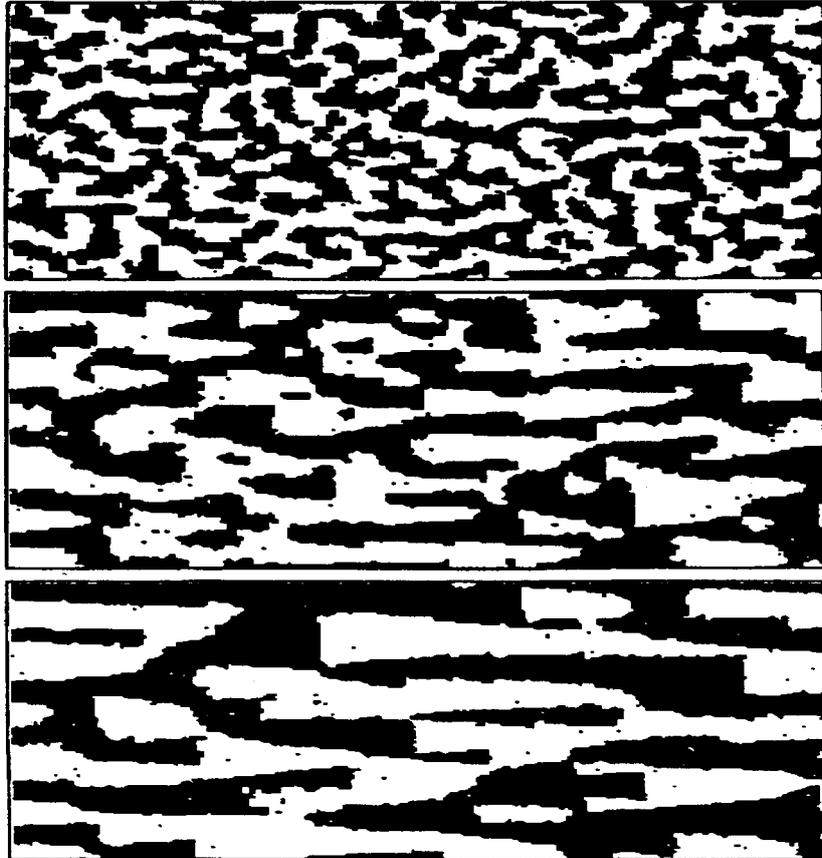


Figura 3.2: Configuraciones típicas de simulaciones Monte Carlo después de enfriar a partir de un estado desordenado tras $t = 1000, 5000, 10.000$ pasos Monte Carlo (de arriba a abajo) con $E = 0.5$, $T = 0.6T_c$ y $\varrho = 1/2$. Se muestran secciones 256×128 de una red 1024×512 . El campo apunta hacia la derecha y los agregados de partículas están dibujados en negro Tomado de [Ale].

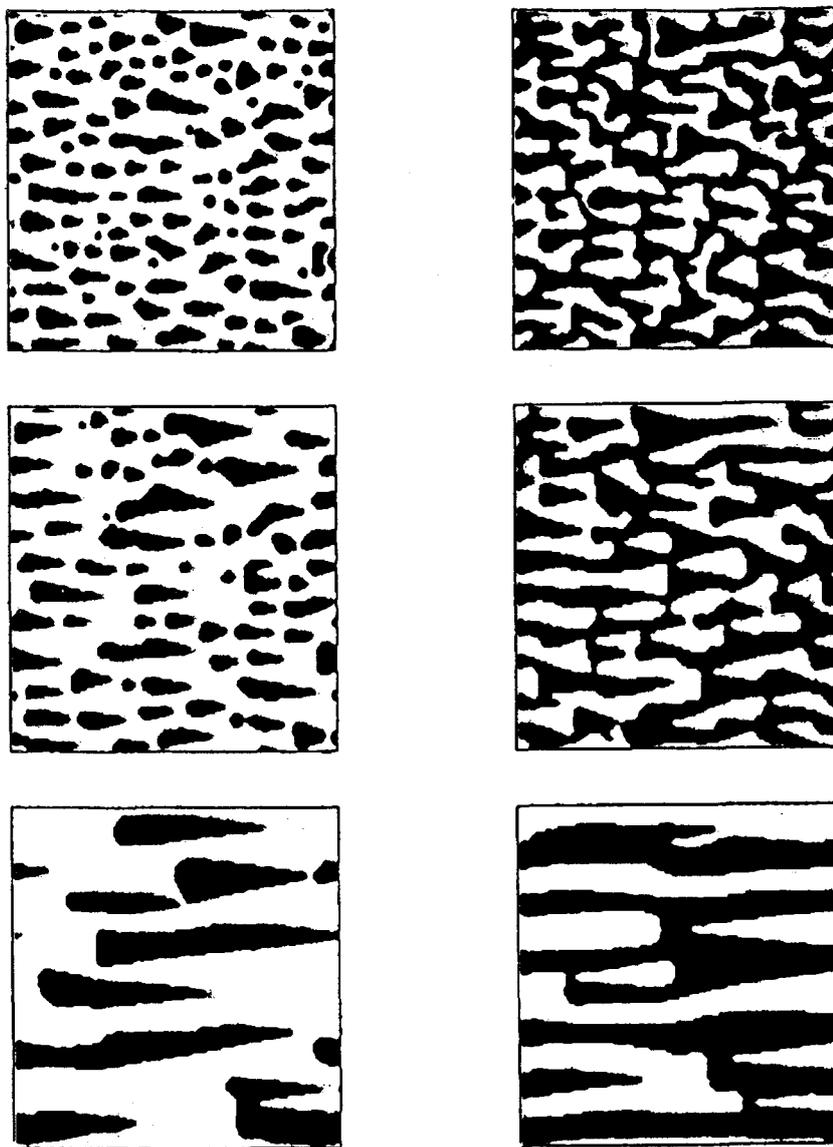


Figura 3.3: Configuraciones típicas obtenidas después de resolver numéricamente la ecuación de Cahn-Hilliard modificada (3.1) en una red 128×128 con condiciones de contorno periódicas. Los tiempos mostrados son, de arriba a abajo, $t = 500, 1000$ y 5000 . La columna de la izquierda corresponde a $\rho = 0.3$ y la de la derecha a $\rho = 1/2$. El campo apunta hacia la derecha y las regiones negras corresponden a agregados de partículas. Tomado de [Ale].

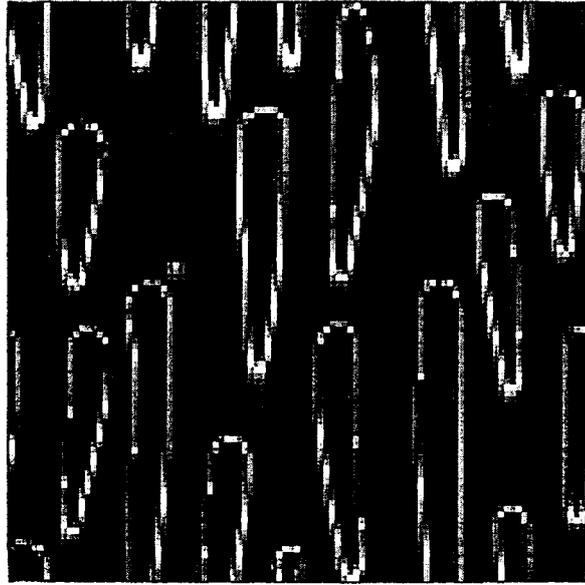


Figura 3.4: Configuración tras resolver (2.22) con dinámica de van Beijeren, $\tau = -1$, $g = 1$, $E = 0.4$ y $\rho = 0.3$. Se ha usado $\Delta x = 1.7$ y $\Delta t = 0.5$ y $t = 1500$.

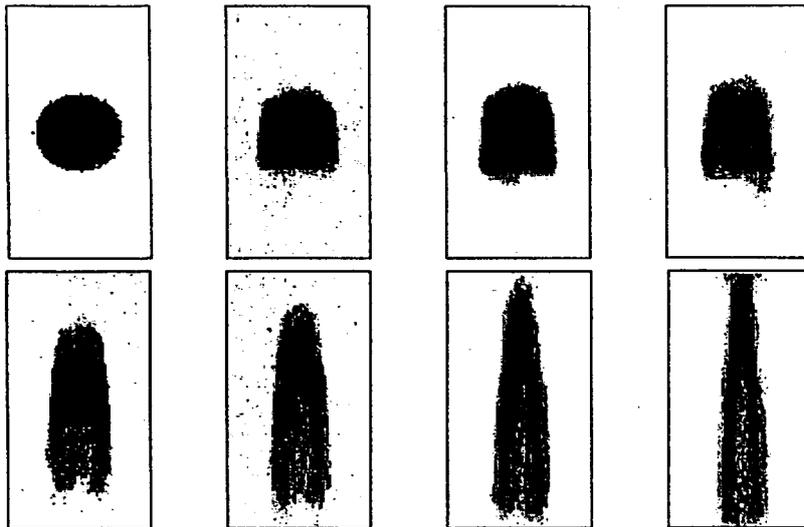


Figura 3.5: Evolución temporal según simulación Monte Carlo de un dominio circular. $E = 0.5$ y se muestran secciones de una red 128×128 a los tiempos (en miles de pasos Monte Carlo) 0, 0.5, 1, 2, 4, 6, 8 y 10, de izquierda a derecha y de arriba a abajo. (R.K.P. Zia, sin publicar)

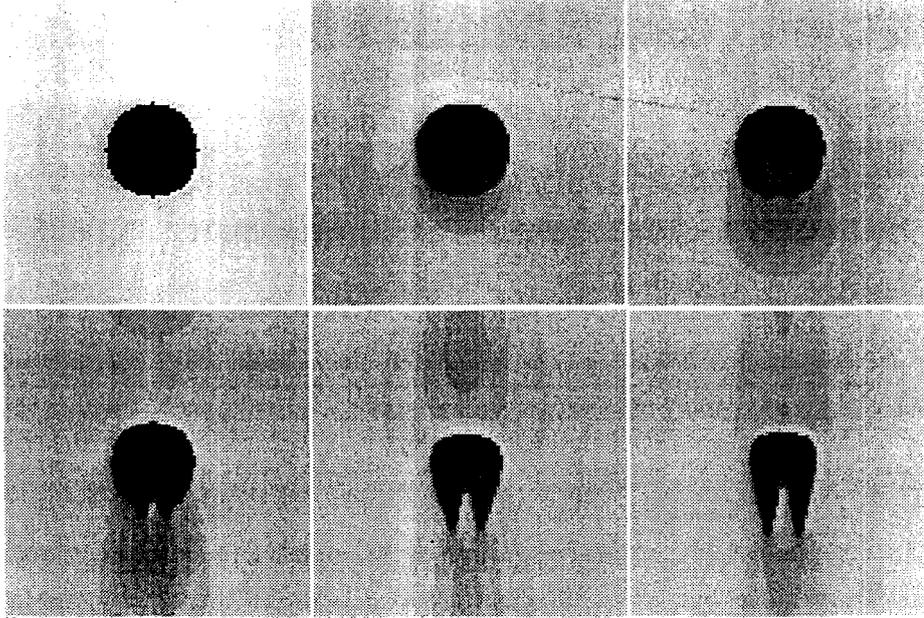


Figura 3.6: Deformación en el tiempo de un dominio circular a partir de la ecuación de Cahn-Hilliard modificada (3.1).

a van Beijeren con $t = 250, 500$ y 1000 . Los parámetros $E = 0.4, \tau = -1, g = 1, L = 100, \Delta t = 0.25$ y $\Delta x = 1.7$ son comunes. Se observa claramente que los patrones que se obtiene con nuestra ecuación son similares, si no idénticos, a los que resultan de (3.1). En ambos casos la evolución es opuesta a la que se muestra en la figura (3.5). Las condiciones iniciales triangulares y cuadradas no aportan nada nuevo y por eso no incluimos figuras de ellas.

En conclusión, podemos afirmar que la ecuación (2.22) no resuelve el problema de la asimetría durante la segregación. Hemos encontrado, no obstante, que cambiando las condiciones de contorno periódicas en la dirección del campo por unas fijas, la formación de triángulos se produce de la misma forma que en simulación Monte Carlo. Sin embargo, consideramos este resultado como meramente preliminar y no descartamos cualesquiera otras causas, por ejemplo cuestiones relativas a la discretización. Pensamos que cualquier esfuerzo en este sentido pasa por analizar previamente más a fondo la formación de dominios con simulación Monte Carlo. Por ejemplo, en una configuración inicial circular se pueden representar con distintos colores las partículas del semicírculo superior y las del inferior. De esta forma se quedaría al descubierto

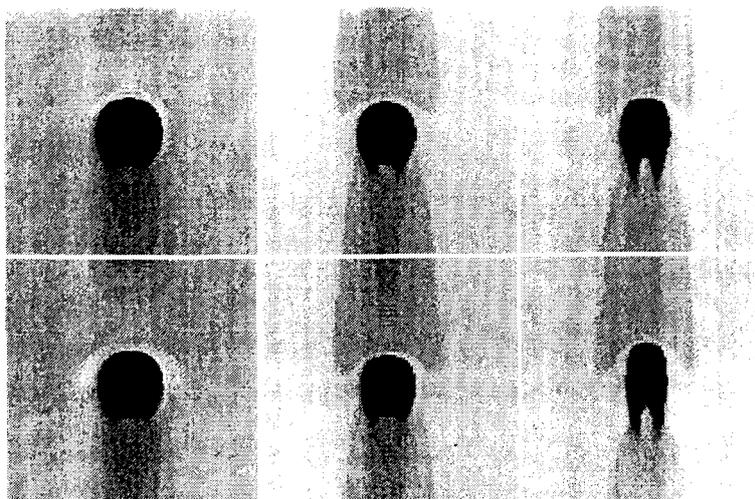


Figura 3.7: Deformación de dominios circulares a partir de (2.22). Véase el texto para más detalles.

qué mecanismo es el responsable de la construcción del triángulo, porque no está claro que la punta del mismo se forme a partir de las partículas del semicírculo inferior, que pueden seguir fácilmente el sentido del campo eléctrico y aprovechar a las condiciones de contorno periódicas. Otra posibilidad es que lo formen las del semicírculo superior, que pueden encontrar dificultades para seguir el sentido del campo porque chocan con una zona de alta densidad.

3.3 El factor de estructura

Uno de los resultados más importantes de la capítulo anterior es que el DLG con arrastre finito e infinito deben tratarse por separado. Surge así la cuestión de la conexión entre ambos regímenes (“cross-over”) y por qué no se aprecia esta distinción en las simulaciones. Para responder a estas preguntas vamos a analizar la naturaleza de las correlaciones, mediante el factor de estructura estacionario, según el valor de E . Consideremos, pues, la ecuación (2.22)

$$\partial_t \phi(\mathbf{r}, t) = \sum_a \nabla_{\mathbf{r}_a} \left[h(\Lambda_a) + e(\Lambda_a)^{1/2} \zeta_a(\mathbf{r}, t) \right],$$

que caracteriza nuestra versión continua del DLG para campos eléctricos arbitrarios, y la que resulta del recuento dimensional con $\sigma = 1$,

$$\begin{aligned} \partial_t \phi = & -\frac{e(0)}{2} \left[\Delta_{\perp}^2 \phi + \Delta_{\perp} \Delta_{\parallel} \phi - b^{-2} \tau \Delta_{\perp} \phi - b^{d-4} \frac{g}{6} \Delta_{\perp} \phi^3 \right] + \\ & + h'(E) \left[\Delta_{\perp} \Delta_{\parallel} \phi + \Delta_{\parallel}^2 \phi - b^{-2} \tau \Delta_{\parallel} \phi - b^{d-4} \frac{g}{6} \Delta_{\parallel} \phi^3 - b^{(d-8)/2} E \nabla_{\parallel} \phi^2 \right] + \\ & + h''(E) \left[b^{(d-4)/2} \tau^2 \nabla_{\parallel} (\nabla_{\parallel} \phi)^2 + b^{d-4} \frac{2}{3} \tau E \Delta_{\parallel} \phi^3 + b^{3(d-4)/2} E^2 \nabla_{\parallel} \phi^4 \right] - \\ & - b^{(5d-16)/2} E^3 \frac{h'''(E)}{6} \nabla_{\parallel} \phi^6 + e(0)^{1/2} \sum_{\perp} \nabla_{\perp} \zeta_{\perp} + e(E)^{1/2} \nabla_{\parallel} \zeta_{\parallel}, \end{aligned}$$

Cuando la dimensión espacial es alta pueden desprejarse la mayor parte de las no linealidades. De hecho, se pueden eliminar todas si d es lo suficientemente grande, resultando una aproximación lineal a la ecuación de Langevin original. Esta aproximación se consigue en (2.28) sin más que tomar $d > 8$, luego es equivalente a una teoría de tipo campo medio porque se trabaja por encima de la dimensión crítica. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \partial_t \phi = & -\frac{e_0}{2} \left[\Delta_{\perp}^2 + \Delta_{\perp} \Delta_{\parallel} - \tau \Delta_{\perp} \right] \phi + h'(E) \left[\Delta_{\perp} \Delta_{\parallel} + \Delta_{\parallel}^2 - \tau \Delta_{\parallel} \right] \phi + \\ & + e_0^{1/2} \nabla_{\perp} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp} + e(E)^{1/2} \nabla_{\parallel} \xi_{\parallel}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Esta ecuación puede resolverse con la ayuda de una transformada de Fourier para cualquier realización de $\boldsymbol{\xi}$, y entonces efectuar los promedios sobre el ruido. Así pues, definiendo las transformadas de Fourier según

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t)} \phi(\mathbf{k}, \omega), \quad (3.10)$$

es inmediato obtener

$$i\omega \phi(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{e_0}{2} (k_{\perp}^2 + h'(E) k_{\parallel}^2) (k^2 + \tau) \phi(\mathbf{k}, \omega) + i (e_0^{1/2} \mathbf{k}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp} + e(E)^{1/2} k_{\parallel} \xi_{\parallel}). \quad (3.11)$$

Se puede ahora, despejando $\phi(\mathbf{k}, \omega)$, calcular el factor de estructura a partir de su definición

$$S(\mathbf{k}, \omega) = \langle \phi(\mathbf{k}, \omega) \phi(-\mathbf{k}, -\omega) \rangle, \quad (3.12)$$

con ayuda de los segundos momentos de la distribución del ruido:

$$\begin{aligned} \langle \xi_{\perp, a}(\mathbf{k}, \omega) \xi_{\perp, a'}(\mathbf{k}', \omega') \rangle &= (2\pi)^{d+1} \delta_{a, a'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega'), \\ \langle \xi_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) \xi'_{\parallel}(\mathbf{k}', \omega') \rangle &= (2\pi)^{d+1} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega'). \end{aligned} \quad (3.13)$$

La integración de $S(\mathbf{k}, \omega)$ sobre ω proporciona el factor de estructura estacionario, análogo al factor de estructura estático de los sistemas en equilibrio y definido como el promedio a tiempos iguales de la transformada de la función de correlación a dos cuerpos:

$$S(\mathbf{k}) \equiv \langle \phi^*(\mathbf{k}, t) \phi(\mathbf{k}, t) \rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} S(\mathbf{k}, \omega). \quad (3.14)$$

El resultado final es

$$S(\mathbf{k}_{\perp}, k_{\parallel}) = \frac{k_{\perp}^2 + \frac{e(E)}{e(0)} k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2 - \frac{2h'(E)}{e(0)} k_{\parallel}^2} \frac{1}{k^2 + \tau}. \quad (3.15)$$

Obsérvese que si $E = 0$ (3.15) adopta la forma de Orstein-Zernike $S(\mathbf{k}) \propto (k^2 + \tau)^{-1}$ [Sta]. Por otro lado, en el límite $E \rightarrow \infty$ (3.15) se transforma en

$$S(\mathbf{k}_{\perp}, k_{\parallel}) = \frac{k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2/2}{k_{\perp}^2 (k^2 + \tau)}. \quad (3.16)$$

Estas expresiones ayudan a entender mejor a través de las correlaciones las diferencias cualitativas entre los casos correspondientes a campos finitos e infinitos, y las dificultades para apreciarlas plenamente en simulación. La función $h'(E)$ presenta típicamente un decaimiento exponencial con el campo eléctrico, como resultado del cual $S(\mathbf{k}_{\perp}, k_{\parallel})$ adopta rápidamente la forma del factor de estructura asociado a $E = \infty$. Por consiguiente, las correlaciones son, de forma efectiva, las correspondientes a arrastre infinito incluso para valores del campo eléctrico no excesivamente altos. Una situación similar se da entre los casos de equilibrio, $E = 0$, y E finito. En lo que respecta a las simulaciones, esto puede entrañar una gran dificultad para observar con claridad el

comportamiento característico del DLG con E finito, oscurecido porque el rango de valores del campo propios de esta situación es muy estrecho, derivando rápidamente hacia cualquiera de los otros dos casos.

Las singularidades en el origen del factor de estructura vienen asociadas con decaimientos potenciales de las correlaciones en el espacio real. En este caso, además, se da la circunstancia de que también existe una discontinuidad, lo que tiene implicaciones añadidas en las funciones de correlación. Investigando la dependencia del factor de estructura de los valores pequeños de $|\mathbf{k}|$ (este es el límite interesante dado que se corresponde con las propiedades a largas distancias) se encuentran dos posibilidades, a saber,

$$\begin{aligned}\lim_{k_{\parallel} \rightarrow 0} S(0, k_{\parallel}) &= -\frac{1}{2} \frac{e(E)}{h'(E)} \tau^{-1}, \\ \lim_{k_{\perp} \rightarrow 0} S(k_{\perp}, 0) &= \tau^{-1}.\end{aligned}\tag{3.17}$$

El que los dos límites den resultados distintos puede considerarse como una consecuencia de la violación del teorema de fluctuación-disipación. Como ya hemos comentado todas estas particularidades se manifiestan en las funciones de correlación. Por ejemplo, en el caso de $E = \infty$ y en el punto crítico, $\tau = 0$, el más sencillo de analizar, la función de correlación a dos cuerpos es

$$G \propto x_{\perp}^{-1} \frac{\Gamma(d-3)}{x^{d-3}} \sin\left((d-3) \arctan \frac{x_{\perp}}{x_{\parallel}}\right),\tag{3.18}$$

es decir, es una ley de potencia asimétrica y modulada en amplitud de una forma peculiar.

Capítulo 4

Criticalidad

En el segundo capítulo de esta memoria se presentó una nueva ecuación de Langevin para el DLG (2.22) cuyas propiedades deterministas (morfología, diagrama de las fases, etc.) se analizaron en el capítulo tres. Vamos ahora a concentrarnos en la región crítica, en concreto en el cálculo de los exponentes asociados a la transición de fase de segundo orden presente en el DLG cuando $\varrho = 1/2$. Recordemos que del análisis de (2.22) cuando $T \simeq T_c(E)$ se concluyó la necesidad de discernir entre los casos $0 < E < \infty$ y $E = \infty$, caracterizados por las ecuaciones (2.28) y (2.29) respectivamente. Esta última de ellas, la correspondiente a campos infinitos, es la que va a ser objeto de estudio en el presente capítulo. El motivo fundamental de esta elección es que buscamos la comparación con las simulaciones Monte Carlo y que éstas se reducen, casi sin excepción, al caso $E = \infty$. Por otro lado, la presencia de un gran número de operadores peligrosamente irrelevantes en (2.28) permite aventurar un tratamiento especialmente complicado en el caso $0 < E < \infty$.

Así pues, en lo que sigue vamos a considerar la ecuación (2.29) característica del DLG con campo eléctrico infinito y $T \simeq T_c(\infty)$. En este régimen de temperaturas grandes fluctuaciones de todas las escalas posibles dominan las propiedades del sistema, así que los métodos del *grupo de renormalización* [Wil74, Jan79] son indispensables. En estos tratamientos los resultados analíticos exactos son escasos, y normalmente sólo se progresa mediante algún tipo de desarrollo perturbativo. Por ejemplo, se puede

resolver la parte lineal de la ecuación (2.29) y considerar los efectos de las no linealidades de forma sistemática iterando la ecuación integral asociada [Bar]. Desde un punto de vista estrictamente técnico, es quizás más adecuado formular el problema en términos de una *integral de camino* e introducir un *funcional generador* del cual extraer de forma sistemática la información física de interés. De esta forma se pueden explotar los métodos de la teoría de campos con un formalismo análogo al que se aplica en las situaciones de equilibrio porque el funcional generador juega el papel del hamiltoniano y su exponencial es, desde el punto de vista del cálculo, equivalente al peso de Boltzmann. Cuál es el funcional generador asociado a (2.29) es el objeto de la primera sección de este capítulo. En la segunda estableceremos un esquema perturbativo que permita calcular los exponentes críticos con el grado de aproximación que se desee. Para ello se comienza por identificar la *teoría libre*, válida para dimensiones superiores a $d_c = 4$ y que permite obtener al valor de los exponentes críticos dentro de una aproximación de campo medio o a orden cero en $\varepsilon = 4 - d$. Especificaremos posteriormente el conjunto de *reglas de Feynman* de la teoría, mediante las cuales se simplifica de manera notable la consecución del desarrollo en el *número de "loops"*. Ya en el contexto de la aproximación a un "loop", hallaremos un punto fijo no trivial responsable de que los exponentes críticos adopten valores distintos de los clásicos. Finalizamos con una sección donde, a modo de resumen, se comentan los resultados obtenidos a la vez que especula sobre posibles trabajos futuros.

4.1 El funcional generador

Consideremos un sistema gobernado por la siguiente ecuación de Langevin

$$\partial_t \phi(\mathbf{x}, t) = K(\phi, \mathbf{x}) + \xi(\mathbf{x}, t), \quad (4.1)$$

donde $\phi(\mathbf{x}, t)$ es un parámetro de orden o un campo que se conserva y $\xi(\mathbf{x}, t)$ una variable estocástica caracterizada por una distribución de probabilidad $P(\xi)$ tal que

$$\begin{aligned}\langle \xi(\mathbf{x}, t) \rangle &= 0, \\ \langle \xi(\mathbf{x}, t) \xi(\mathbf{x}', t') \rangle &= L(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \delta(t - t'),\end{aligned}\quad (4.2)$$

donde la notación $\langle \cdot \rangle$ indica promedio con respecto a ξ , es decir,

$$\langle \cdot \rangle = \int d\xi \cdot P(\xi). \quad (4.3)$$

Estamos interesados en calcular las funciones de correlación asociadas a (4.1). Con este objetivo se puede resolver la ecuación (4.1) para ϕ y entonces computar las correlaciones como promedios de productos de $\phi(\mathbf{x}, t)$ con respecto al peso $P(\xi)$. Sin embargo, es técnicamente más conveniente introducir una acción que genere exactamente las mismas funciones de correlación. Definimos para ello el funcional generador como

$$Z_\xi(J) \equiv \exp \int d^d x dt J(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t), \quad (4.4)$$

donde $\phi(\mathbf{x}, t)$ es solución de (4.1). De la definición de $Z_\xi(J)$ es inmediato que

$$\begin{aligned}\langle \phi(\mathbf{x}_1, t_1) \phi(\mathbf{x}_2, t_2) \dots \phi(\mathbf{x}_n, t_n) \rangle &= \left\langle \frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}_1, t_1)} \frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}_2, t_2)} \dots \frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}_n, t_n)} Z_\xi(J) \Big|_{J=0} \right\rangle = \\ &= \frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}_1, t_1)} \frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}_2, t_2)} \dots \frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}_n, t_n)} \left\langle Z_\xi(J) \right\rangle \Big|_{J=0},\end{aligned}\quad (4.5)$$

por lo que de $Z(J) \equiv \langle Z_\xi(J) \rangle$, también llamado funcional generador, se obtienen las funciones de correlación mediante derivación con respecto a la fuente $J(\mathbf{x}, t)$. Existen varios procedimientos para calcular $Z(J)$. Es posible, por ejemplo, reemplazar $\xi = \partial_t \phi - K$ por ϕ en $P(\xi)$ y luego escribir las expresiones para las funciones de correlación en términos de integrales de camino. Se obtiene de esta forma un lagrangiano estocástico, también llamado *funcional de Onsager-Machlup* [Lan, Bau]. La forma de este lagrangiano es por lo general muy complicada, pero se puede simplificar sustancialmente mediante una transformación gaussiana [Ami, Bnn], operación que introduce

unas nuevas variables conocidas como *campos respuesta* o de Martin-Siggia-Rose [Mrt]. El camino que vamos seguir nosotros está basado en [dDo] y es algo más directo y, por supuesto, totalmente equivalente. El lector podrá encontrar los detalles del cálculo en el apéndice de este capítulo, cuyo resultado nos limitamos a copiar ahora:

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\tilde{\phi} \exp \int d^d x dt \left\{ J(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t) + i\tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) [\partial_t \phi - K(\phi, \mathbf{x})] - (1 - \alpha) \frac{\delta K(\phi, \mathbf{x})}{\delta \phi} - \int d^d y \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\phi}(\mathbf{y}, t) \right\}, \quad (4.6)$$

que como se puede observar tiene la estructura de

$$\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\tilde{\phi} \exp \left(- \mathcal{L}(\tilde{\phi}, \phi) \right). \quad (4.7)$$

\mathcal{L} es el llamado *funcional dinámico* y las nuevas variables $\tilde{\phi}$ son los campos de Martin-Siggia-Rose que dan cuenta del ruido, también llamados campos respuesta porque en ciertas circunstancias se pueden interpretar como la reacción de la ecuación de Langevin ante la inclusión de un término adicional dependiente del tiempo [Ma76]. Por ejemplo, si añadiéramos un campo externo dependiente del tiempo \tilde{J} al miembro derecho de (4.1), esto daría lugar a la aparición del término $\tilde{J}\tilde{\phi}$ en (4.6). Derivando ahora con respecto a \tilde{J} se halla como “responde” el sistema ante la inclusión de este campo adicional. Vemos pues que las fuentes $\tilde{J}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})$ y $J(\mathbf{x}, t)$ juegan un papel doble: por un lado muestran cómo estudiar el modelo en presencia de campos externos y, por otro lado, nos permiten calcular las funciones de correlación y de respuesta por diferenciación. En lo que sigue, añadiremos a (4.6) la fuente \tilde{J} del campo $\tilde{\phi}$. En cuanto al parámetro α , es resultado del proceso de discretización de la ecuación de Langevin necesario en un momento del cálculo. Al igual que en capítulo segundo, optaremos por el convenio de Ito, $\alpha = 1$, que simplifica en gran medida los cálculos posteriores¹. La naturaleza aditiva del ruido en (4.1) garantiza que ambas opciones son equivalentes [vKa].

¹En el formalismo de operadores, por ejemplo via la fórmula de Trotter, el problema de la discretización se transforma en uno de ordenamiento de operadores. No obstante, el resultado debe ser el mismo.

En este formalismo los promedios dinámicos vienen dados por

$$\langle \cdot \rangle = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\tilde{\phi} \cdot \exp\left(-\mathcal{L}(\tilde{\phi}, \phi)\right), \quad (4.8)$$

lo que permite usar las técnicas de la teoría de campos del equilibrio, *v.g.* los métodos diagramáticos o las consecuencias de las simetrías continuas en la forma de identidades de Ward. Las magnitudes físicamente interesantes son las funciones de correlación, que son promedios de productos de funciones ϕ solamente, y las funciones respuesta, que involucran a ambas ϕ y $\tilde{\phi}$. Con la notación que vamos a usar, denotaremos por $G_{\tilde{n}n}$ al promedio de \tilde{n} campos $\tilde{\phi}$ y n del tipo ϕ :

$$\begin{aligned} G_{\tilde{n}n}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{n}}, \tilde{t}_{\tilde{n}}, \mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) &= \left\langle \prod_{j=1}^{\tilde{n}} \tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{x}}_j, \tilde{t}_j) \prod_{i=1}^n \phi(\mathbf{x}_i, t_i) \right\rangle = \\ &= \prod_{j=1}^{\tilde{n}} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}(\tilde{\mathbf{x}}_j, \tilde{t}_j)} \prod_{i=1}^n \frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}_i, t_i)} Z(\tilde{J}, J) \Big|_{\tilde{J}=J=0} \end{aligned} \quad (4.9)$$

con la normalización $Z(0, 0) = 1$. La naturaleza causal de las funciones respuesta implica que $G_{\tilde{n}n}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{t}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) = 0$ si $\exists \tilde{t}_i / \tilde{t}_i > t_j \forall j \leq n$. En otras palabras, las funciones de correlación a tiempos t_1, \dots, t_n no se ven alteradas por la inclusión de un campo externo en un tiempo posterior. Como caso particular, $G_{\tilde{n}0} = 0 \forall \tilde{n} \geq 1$.

Ya sólo queda aplicar este resultado general a nuestro caso particular. Recordemos que la ecuación de Langevin a estudiar es

$$\begin{aligned} \partial_t \phi = \frac{e_0}{2} \left[-\Delta_{\parallel} \Delta_{\perp} \phi - \Delta_{\perp}^2 \phi + \tau \Delta_{\perp} \phi + \frac{g}{3!} \nabla_{\perp} \phi^3 \right] + \\ + \sqrt{e_0} \nabla_{\perp} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp} + \sqrt{\frac{e_0}{2}} \nabla_{\parallel} \xi_{\parallel}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

en la que el ruido está caracterizado mediante

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) \rangle &= 0, \\ \langle \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla' \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}', t') \rangle &= -\nabla^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t'), \end{aligned} \quad (4.11)$$

Para ayudar a la identificación con (4.1) vamos a redefinir el ruido mediante,

$$\begin{aligned}\zeta_{\perp} &\equiv \sqrt{e_0} \boldsymbol{\xi}_{\perp}, \\ \zeta_{\parallel} &\equiv \sqrt{\frac{e_0}{2}} \xi_{\parallel}.\end{aligned}\quad (4.12)$$

En estas condiciones se satisface que

$$\begin{aligned}\langle \zeta(\mathbf{x}, t) \rangle &= 0, \\ \langle \nabla \cdot \zeta(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla' \cdot \zeta(\mathbf{x}', t') \rangle &= -e_0 \left(\nabla_{\perp}^2 + \frac{1}{2} \nabla_{\parallel}^2 \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t'),\end{aligned}\quad (4.13)$$

$K(\phi, \mathbf{x})$ coincide con la expresión entre corchetes de (4.10) (aparte del factor $-e_0/2$) y $L(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -e_0(\nabla_{\perp}^2 + \frac{1}{2}\nabla_{\parallel}^2)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. Ahora, por aplicación directa de (4.6) y el cambio de variable simple $\tilde{\phi} \rightarrow i\tilde{\phi}$, obtenemos finalmente el resultado buscado,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\tilde{\phi}, \phi) = \int d^d x dt \left\{ \tilde{\phi} \left[\partial_t - \frac{e_0}{2} (\Delta_{\parallel} \Delta_{\perp} - \Delta_{\perp}^2 + \tau \Delta_{\perp}) \right] \phi - \frac{e_0}{2} \frac{g}{3!} \tilde{\phi} \Delta_{\perp} \phi^3 - \right. \\ \left. - \frac{e_0}{2} \tilde{\phi} (\nabla_{\perp}^2 + \frac{1}{2} \nabla_{\parallel}^2) \tilde{\phi} \right\}.\end{aligned}\quad (4.14)$$

Nótese que se han omitido las fuentes. El coeficiente lineal de $\tilde{\phi}$ lleva la información sobre la parte determinista de la ecuación de Langevin, mientras que el de $\tilde{\phi}^2$ coincide con los elementos de la matriz del ruido. Por otro lado, la naturaleza gaussiana del ruido asegura que no haya términos en $\tilde{\phi}$ superiores a los cuadráticos.

4.2 Desarrollos perturbativos

La principal herramienta para trabajar con una teoría de campos es un desarrollo en serie de potencias de una constante de acoplamiento² alrededor de una forma cuadrática que se puede resolver exactamente [Ami, Bnn, LBe, Par, ZJ]. Por ejemplo, si $e^{-\mathcal{L}}$ fuera puramente gaussiano, esto es, si se pudiera despreciar el término no

²Éste y otros términos provienen de la teoría cuántica de campos, pero son de uso corriente en mecánica estadística.

cuadrático $g\tilde{\phi}\Delta_{\perp}\phi^3$ en (4.14), entonces las integrales de (4.8) se podrían hacer de forma exacta. Sin embargo, cuando T disminuye acercándose a T_c , esta aproximación no es válida por cuanto τ se hace indefinidamente pequeño lo que da lugar a la aparición de singularidades infrarrojas. Tomando en cuenta los términos de orden superior y tratándolos como si fueran una perturbación a la teoría gaussiana, se puede demostrar que los efectos de estas singularidades sólo son dominantes por debajo de una cierta dimensión espacial d_c , la dimensión crítica. Ya hemos visto en el capítulo dos que $d_c = 4$ para el DLG con campo infinito, por lo que la aproximación gaussiana proporcionará una imagen correcta para dimensiones superiores a cuatro (si el operador que se desprecia fuera peligrosamente irrelevante, entonces entonces habría que considerarlo incluso por encima de $d > d_c$ para estabilizar la teoría). Si $d < 4$ entonces es necesario tener en cuenta el término $g\tilde{\phi}\Delta_{\perp}\phi^3$, pero aun así la aproximación gaussiana no carece de utilidad porque las funciones de correlación del modelo se pueden calcular a partir de las de la teoría gaussiana. Seguidamente vamos a analizar el DLG con $E = \infty$ dentro de esta aproximación. Después incluiremos los efectos del término no cuadrático.

4.2.1 La teoría libre

Bajo el nombre de *teoría libre* o aproximación gaussiana se entiende la aproximación que resulta de hacer $g = 0$ en (4.14). En términos más generales, recibe este nombre el orden de aproximación en el que se desprecien los términos más allá de los cuadráticos en un lagrangiano o en una ecuación de Langevin. Es una aproximación cruda que prescinde todo aquello que impide tratar matemáticamente el problema de forma exacta pero, como ya hemos visto, proporciona buenos resultados en dimensiones suficientemente altas. Consideremos pues (4.14), que con $g = 0$ denotaremos \mathcal{L}_o . Usaremos la siguiente prescripción para las transformadas de Fourier,

$$f(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \omega t)} f(\mathbf{k}, \omega), \quad (4.15)$$

con lo que tenemos para \mathcal{L}_o

$$\mathcal{L}_o(\tilde{\phi}, \phi) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega}{2\pi} \left\{ \tilde{\phi}(\mathbf{k}, \omega) \left[-i\omega + \frac{e_0}{2} (k_\perp^4 + \tau k_\perp^2 + k_\perp^2 k_\parallel^2) \right] \phi(-\mathbf{k}, -\omega) + \frac{e_0}{2} \tilde{\phi}(\mathbf{k}, \omega) \left(k_\perp^2 + \frac{1}{2} k_\parallel^2 \right) \tilde{\phi}(-\mathbf{k}, -\omega) \right\}. \quad (4.16)$$

expresión esta última que es conveniente escribir en forma matricial

$$\mathcal{L}_o(\tilde{\phi}, \phi) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{2} \left(\tilde{\phi}(-\mathbf{k}, -\omega), \phi(-\mathbf{k}, -\omega) \right) \mathbf{G}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}(\mathbf{k}, \omega) \\ \phi(\mathbf{k}, \omega) \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

donde

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{pmatrix} e_0(k_\perp^2 + \frac{1}{2}k_\parallel^2) & i\omega + \frac{e_0}{2}k_\perp^2(k^2 + \tau) \\ -i\omega + \frac{e_0}{2}k_\perp^2(k^2 + \tau) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Introduzcamos ahora una fuente para cada tipo de campo con lo que podemos escribir el funcional generador como

$$Z_0(\tilde{J}, J) = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\tilde{\phi} e^{-\mathcal{L}_o - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega}{2\pi} (\tilde{J}(-\mathbf{k}, -\omega)\tilde{\phi}(\mathbf{k}, \omega) + J(-\mathbf{k}, -\omega)\phi(\mathbf{k}, \omega))}. \quad (4.19)$$

La notación

$$\phi \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\phi}(\mathbf{k}, \omega) \\ \phi(\mathbf{k}, \omega) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{J}(\mathbf{k}, \omega) \\ J(\mathbf{k}, \omega) \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

permite escribir (4.19) de forma más compacta

$$Z_0(\mathbf{J}) = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega}{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \phi^\dagger \mathbf{G}^{-1} \phi + \mathbf{J}^\dagger \phi \right) \right], \quad (4.21)$$

donde el símbolo \dagger quiere decir traspuesto y complejo conjugado (recuérdese que al ser los campos reales $\phi^*(\mathbf{k}, \omega) = \phi(-\mathbf{k}, \omega)$). Para calcular (4.21) hacemos el siguiente cambio de variable, $\varphi \rightarrow \varphi + \mathbf{G}\mathbf{J}$. Gracias a la hermiticidad de \mathbf{G}^{-1} tenemos

$$Z_0(\mathbf{J}) = Z_0(0) \exp \left(\frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega}{2\pi} \mathbf{J}^\dagger \mathbf{G}\mathbf{J} \right), \quad (4.22)$$

donde

$$Z_0(0) = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\tilde{\phi} \exp \left(-\frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega}{2\pi} \phi^\dagger \mathbf{G}^{-1} \phi \right), \quad (4.23)$$

y

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{-i\omega + \frac{e_0}{2} k_\perp^2 (k^2 + \tau)} \\ \frac{1}{i\omega + \frac{e_0}{2} k_\perp^2 (k^2 + \tau)} & \frac{-e_0(k_\perp^2 + \frac{1}{2} k_\parallel^2)}{\omega^2 + (\frac{e_0}{2})^2 k_\perp^4 (k^2 + \tau)^2} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

De esta forma hemos conseguido factorizar $Z(\mathbf{J})$ de tal manera que una de las partes contiene la dependencia en las fuentes \mathbf{J} y dará las funciones de correlación por diferenciación funcional. La otra parte es independiente de las fuentes, no contribuye por lo tanto a las funciones de correlación y no es necesario calcularla. En concreto,

$$\begin{aligned} G_{20}^0(\mathbf{k}, \omega) &= \langle \tilde{\phi}(\mathbf{k}, \omega) \tilde{\phi}(\mathbf{k}', \omega') \rangle = \frac{1}{Z_0} \frac{\delta^2 Z_0}{\delta \tilde{J}(-\mathbf{k}, -\omega) \delta \tilde{J}(-\mathbf{k}, -\omega)} \Big|_{\mathbf{J}=0}, \\ G_{02}^0(\mathbf{k}, \omega) &= \langle \phi(\mathbf{k}, \omega) \phi(\mathbf{k}', \omega') \rangle = \frac{1}{Z_0} \frac{\delta^2 Z_0}{\delta J(-\mathbf{k}, -\omega) \delta J(-\mathbf{k}, -\omega)} \Big|_{\mathbf{J}=0}, \\ G_{11}^0(\mathbf{k}, \omega) &= \langle \tilde{\phi}(\mathbf{k}, \omega) \phi(\mathbf{k}', \omega') \rangle = \frac{1}{Z_0} \frac{\delta^2 Z_0}{\delta \tilde{J}(-\mathbf{k}, -\omega) \delta J(-\mathbf{k}, -\omega)} \Big|_{\mathbf{J}=0}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

cuyos valores coinciden con los elementos de la matriz \mathbf{G} , esto es,

$$\begin{aligned} G_{02}^0(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{-e_0(k_\perp^2 + \frac{1}{2} k_\parallel^2)}{\omega^2 + (\frac{e_0}{2})^2 k_\perp^4 (k^2 + \tau)^2}, \\ G_{20}^0(\mathbf{k}, \omega) &= 0 \\ G_{11}^0(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{1}{i\omega + \frac{e_0}{2} k_\perp^2 (k^2 + \tau)} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Las condiciones de causalidad se aprecian mejor expresando los propagadores en el dominio del tiempo. Para ello basta con integrar en frecuencias siguiendo los contornos en el plano complejo que se muestran en la figura (4.2.1) y aplicar el teorema del residuo. Se obtiene para $\langle \phi(\mathbf{k}, t) \tilde{\phi}(-\mathbf{k}, 0) \rangle$ y $\langle \phi(\mathbf{k}, t) \phi(-\mathbf{k}, 0) \rangle$ respectivamente

$$G_{11}^0(\mathbf{k}, t) = \theta(t) \exp \left\{ -\frac{e_0}{2} k_\perp^2 (k^2 + \tau) t \right\},$$

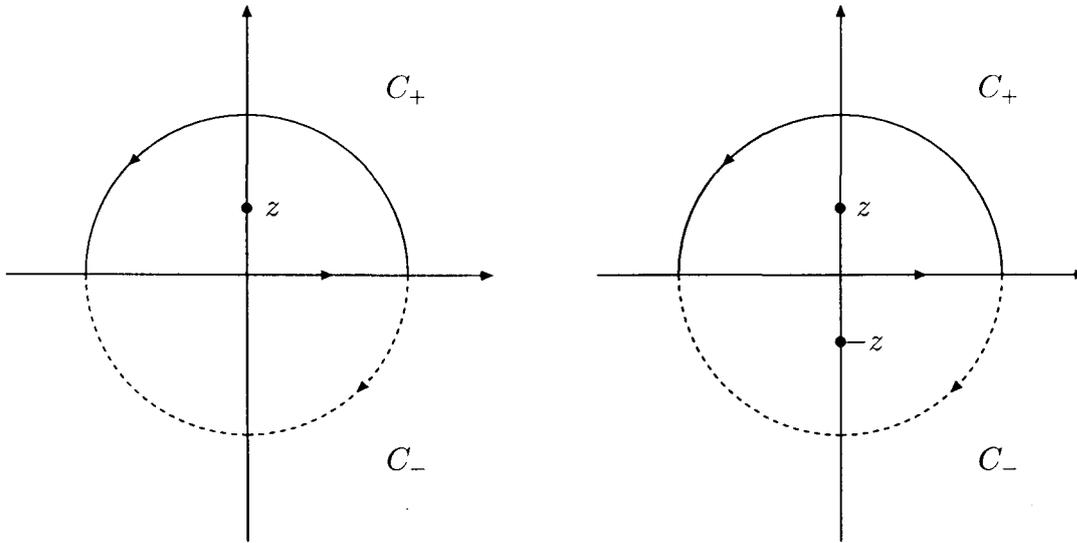


Figura 4.1: Contornos de integración y polos: a la izquierda, C_+ y C_- corresponden a G_{11}^0 con $t > 0$ y $t < 0$ respectivamente. A la derecha, C_+ y C_- son los contornos de integración adecuados para G_{02}^0 si $t > 0$ y $t < 0$ respectivamente.

$$G_{02}^0(\mathbf{k}, t) = \frac{k_{\perp}^2 + \frac{1}{2}k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^4(k^2 + \tau)^2} \exp \left\{ -\frac{e_0}{2} k_{\perp}^2 (k^2 + \tau) |t| \right\}. \quad (4.27)$$

Obsérvese que la función paso θ muestra la naturaleza causal de G_{11} . Nótese también que de acuerdo con las condiciones de causalidad $G_{20} = 0$.

Concluimos esta sección dando el valor de los exponentes críticos dentro de esta aproximación. Esto puede hacerse sin más que identificar $G_{02}(\mathbf{k}, \omega)$ con el factor de estructura dinámico $S(\mathbf{k}, \omega)$ definido en el apartado de criticalidad del capítulo primero. Allí vimos que, haciendo explícita la dependencia en τ , el factor de estructura debe presentar las siguientes propiedades de escala

$$S(\mathbf{k}, t, \tau) = G_{02}(\mathbf{k}, t, \tau) = b^{-2+\eta} G_{02}(\mathbf{k}/b, tb^z, \tau/b^{\nu}). \quad (4.28)$$

Por simple comparación es posible identificar los siguientes exponentes críticos:

$$\eta = 0, \quad \nu = 1/2, \quad z = 4, \quad (4.29)$$

que coinciden con los que resultan de campo medio en equilibrio para el Modelo B. Por leyes de escala se calcula el resto de exponentes [Sta]. Por ejemplo, para el exponente β se tiene que $\beta = 1/2$. Naturalmente, estos valores están de acuerdo con los que se siguen del análisis dimensional.

4.2.2 Reglas de Feynman

La teoría libre, como cualquier aproximación de campo medio, desprecia las fluctuaciones del parámetro de orden. Hemos visto que por encima de la dimensión crítica dichas fluctuaciones no son relevantes. Sin embargo, por debajo de d_c juegan un papel dominante. Esto hace necesario tener en cuenta los términos que se despreciaron en la aproximación gaussiana si lo que se pretende es analizar la teoría cuando $d < d_c$. Pero la inclusión de estos términos, equivalente a incorporar las fluctuaciones, acarrea diversos problemas. Por ejemplo, el tratamiento analítico exacto se vuelve imposible. Para resolver esta cuestión se tratan los términos no cuadráticos añadidos como una perturbación, es decir, se considera que son pequeños en algún sentido y se desarrollan en serie. Lamentablemente este desarrollo perturbativo no está exento de complicaciones ya que deja de ser válido en las proximidades del punto crítico porque, conforme $T \rightarrow T_c^+$, el parámetro del desarrollo, la constante de acoplamiento, diverge. Esto es una manifestación de la divergencia de las fluctuaciones en el punto crítico. Veremos en el siguiente apartado cómo sacar provecho de los métodos de renormalización en teoría cuántica de campos para superar estas dificultades. Ahora estableceremos el esquema perturbativo que permita tener en cuenta los términos que se despreciaron en la sección anterior.

Consideremos el funcional dinámico completo (4.14) y escribamos el funcional generador asociado,

$$Z(\tilde{J}, J) = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\tilde{\phi} e^{-\mathcal{L}_o + \int d^d x dt (\tilde{J}\tilde{\phi} + J\phi)} e^{\frac{c_0}{2} \frac{g}{6} \int d^d x dt \tilde{\phi} \Delta_{\perp} \phi^3}, \quad (4.30)$$

donde hemos separado explícitamente el término no cuadrático. Después de pasar de posiciones a momentos,

$$Z(\tilde{J}, J) = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\tilde{\phi} e^{-\mathcal{L}_o + \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d\omega}{2\pi} (\tilde{J}\tilde{\phi} + J\phi)} \exp \left\{ \frac{e_o g}{2} \frac{1}{3!} \int \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d} \frac{d\omega_1}{2\pi} \cdots \frac{d^d q_4}{(2\pi)^d} \frac{d\omega_4}{2\pi} \times \right. \\ \left. \times \left(\sum_{i=2}^4 \mathbf{q}_{\perp, i} \right)^2 \delta \left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{q}_i \right) \delta \left(\sum_{i=1}^4 \omega_i \right) \tilde{\phi}(\mathbf{q}_1, \omega_1) \cdots \phi(\mathbf{q}_4, \omega_4) \right\}, \quad (4.31)$$

que, usando la propiedad $\delta/\delta J(-\mathbf{k}) \exp(f J\phi) = \phi(\mathbf{k}) \exp(f J\phi)$, se puede escribir en función de $Z_0(\tilde{J}, J)$ como

$$Z(\tilde{J}, J) = \exp \left\{ \frac{e_o g}{2} \frac{1}{3!} \int \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d} \frac{d\omega_1}{2\pi} \cdots \frac{d^d q_4}{(2\pi)^d} \frac{d\omega_4}{2\pi} \left(\sum_{i=2}^4 \mathbf{q}_{\perp, i} \right)^2 \delta \left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{q}_i \right) \delta \left(\sum_{i=1}^4 \omega_i \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{\delta}{\tilde{J}(-\mathbf{q}_1, -\omega_1)} \cdots \frac{\delta}{J(-\mathbf{q}_4, -\omega_4)} \right\} Z_0(\tilde{J}, J). \quad (4.32)$$

La expresión superior permite, desarrollando la exponencial en serie de potencias de la constante de acoplamiento g , calcular con el grado de aproximación que se desee el funcional generador. A partir de aquí, las funciones de correlación se calculan derivando con respecto a las fuentes e igualando posteriormente las fuentes a cero. La fórmula análoga a (4.9) en espacio de momentos es

$$G_{\tilde{n}n}(\tilde{\mathbf{k}}_1, \tilde{\omega}_1, \dots, \mathbf{k}_n, \omega_n) = \prod_{j=1}^{\tilde{n}} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}(-\tilde{\mathbf{q}}_j, -\tilde{\omega}_j)} \prod_{i=1}^n \frac{\delta}{\delta J(-\mathbf{q}_i, -\omega_i)} Z(\tilde{J}, J) \Big|_{\tilde{J}=J=0}, \quad (4.33)$$

que conjuntamente con la forma de Z_0 ,

$$Z_0(\mathbf{J}) = Z_0(0) \exp \left(\frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d\omega}{2\pi} \mathbf{J}^\dagger \mathbf{G} \mathbf{J} \right), \quad (4.34)$$

reduce todo al cálculo de muchas derivadas de tipo gaussiano evaluadas en el origen.

Explícitamente

$$G_{\tilde{n}n} = \prod_{j=1}^{\tilde{n}} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}(-\tilde{\mathbf{k}}_j, -\tilde{\omega}_j)} \prod_{i=1}^n \frac{\delta}{\delta J(-\mathbf{k}_i, -\omega_i)} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{e_o g}{2} \frac{1}{3!} \int \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d} \cdots \frac{d\omega_4}{2\pi} \left(\sum_{i=2}^4 \mathbf{q}_{\perp, i} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times \delta \left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{k}_i \right) \delta \left(\sum_{i=1}^4 \omega_i \right) \frac{\delta}{\tilde{J}(-\mathbf{q}_1, -\omega_1)} \cdots \frac{\delta}{J(-\mathbf{q}_4, -\omega_4)} \right]^l Z_0(\tilde{J}, J) \Big|_{\tilde{J}=J=0}. \quad (4.35)$$

Cada derivada funcional actuando sobre Z_0 genera un factor \tilde{J} o J . Dado que al final se hace $\mathbf{J} = 0$, para que el resultado total no sea idénticamente nulo alguna otra derivada debe actuar eliminando este factor. Por lo tanto, las derivadas se agrupan por parejas de todas las formas posibles. Estas consideraciones acerca de la forma de actuación de las derivadas constituye esencialmente el enunciado y la demostración del teorema de Wick. Por cada una de estas parejas aparece un elemento de matriz de \mathbf{G} , es decir, uno de los propagadores G_{11}^0 o G_{02}^0 . Así pues, la expresión típica de los términos del desarrollo de $G_{\tilde{n}n}$ en potencias de la constante de acoplamiento g , consiste en una integral sobre las variables \mathbf{q}_i y ω_i de un producto de propagadores con las variables \mathbf{k}_i y ϖ_i —que llamaremos momentos y frecuencias externos— sin integrar.

Claramente, este proceso es tedioso e implica manipular expresiones largas y complicadas. Para evitarlo se introduce una notación simple constituida por un conjunto de diagramas conocidos como *diagramas de Feynman*. Las *reglas de Feynman* especifican cómo asignar diagramas a cada expresión algebraica del desarrollo, el cual se lleva entonces a cabo simplemente mediante la combinación de gráficos. Como paso final, los diagramas se vuelven a traducir en fórmulas. Damos ahora los elementos básicos para la construcción de dichos diagramas en términos de momentos y frecuencias³.

Elementos para la construcción de diagramas

- Representaremos los dos tipos de propagadores mediante

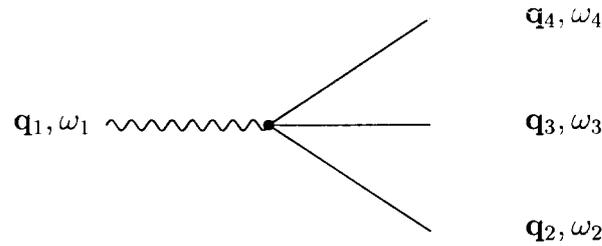
$$G_{11}^0(\mathbf{q}, \omega) \equiv \text{~~~~~}$$

$$G_{02}^0(\mathbf{q}, \omega) \equiv \text{—————}$$

Al primero de ellos lo llamaremos irreversible y al segundo reversible.

- Un vértice que proviene del término de interacción $\tilde{\phi}\Delta_{\perp}\phi^3$:

³Cualquier otra opción, esto es, espacio de posiciones/momentos y tiempos/frecuencias, es factible.



Reglas de Feynman para las correlaciones

Para hallar la contribución de orden $O(g^N)$ a $G_{\tilde{n}n}(\tilde{\mathbf{q}}_1, \tilde{\omega}_1, \dots, \mathbf{q}_n, \omega_n)$:

- Dibujar todos los posibles diagramas distintos que contengan N vértices y $\tilde{n} + n$ puntos externos, uniendo estos últimos a los vértices mediante cualquiera de los dos tipos de propagadores, de tal forma que \tilde{n} de los puntos externos emane una línea ondulada y del resto, n , una lisa. Unir también los vértices entre sí hasta que de cada uno de ellos salga una línea ondulada y tres lisas, como en la figura superior. Dos diagramas son distintos si no se pueden deformar el uno en el otro moviendo los vértices o los puntos externos sin cortar ningún propagador.
- Etiquetar cada uno de los puntos externos con un par momento-frecuencia (\mathbf{k}_i, ϖ_i) y cada propagador con (\mathbf{q}_i, ω_i) . Los propagadores conectados a un punto externo llevan la etiqueta del punto externo.
- Asociar a cada propagador su expresión correspondiente, G_{11}^0 o G_{02}^0 según sea reversible o irreversible.
- Asignar a cada vértice los factores $e_0/2g/3!$, \mathbf{q}_1^2 , siendo \mathbf{q} el momento asociado a la pata ondulada del vértice, y una delta de conservación para los momentos entrantes y las frecuencias.
- Integrar sobre todos los momentos y frecuencias internos.
- Multiplicar por $(N!)^{-1}$ y por un factor de simetría que dé cuenta del número de formas en las que las líneas se pueden conectar respetando la primera regla y dando lugar a un diagrama con la misma estructura topológica.

- Sumar las expresiones resultantes para cada uno de estos diagramas.

A pesar de que la introducción de los diagramas de Feynman suponen una gran economía de cálculo, es posible reducir el número de diagramas a tener en cuenta y, consiguientemente, simplificar aún más el desarrollo perturbativo. Para ello conviene notar que, según las reglas que acabamos de enunciar, cabe la presencia de diagramas desconectados, es decir, aquéllos compuestos por dos o más piezas disjuntas. En ellos no todos los puntos externos son accesibles siguiendo las líneas internas partiendo de otro dado. Naturalmente, las propiedades de un diagrama desconexo son idénticas al producto de sus partes disjuntas. Por eso cabe pensar en reconstruir una función de correlación completa a partir sólo de sus partes conectadas. A esta cuestión se refiere el resultado que exponemos a continuación.

Reglas de Feynman para los cumulantes

Si en vez de calcular los momentos del funcional generador $Z(\tilde{J}, J)$ calculamos sus cumulantes, es decir, los momentos de $W = \log Z$, entonces en el desarrollo de W , y manteniendo las reglas anteriores, sólo intervienen diagrams conexos. A partir de los cumulantes se pueden reconstruir las funciones de correlación de forma sistemática [Ami, Bnn, LBe, ZJ].

$W(\tilde{J}, J)$ es el análogo a la energía libre de Helmholtz. Su transformada de Legendre será, pues, el equivalente a la energía libre de Gibbs. Sin necesidad de recurrir a estas analogías formales, se puede explotar el hecho de que la expresión algebraica de un diagrama compuesto por dos partes unidas por una única línea —es decir, que amputando esa línea interna el gráfico dejaría de ser conexo— resulta ser igual al producto de dichas partes. No hay integraciones que las ligen; sólo hay que incluir la expresión del propagador que hace de nexo entre ambas partes. Por lo tanto, el número de diagramas a considerar se ve reducido nuevamente. Sirvan estos comentarios para introducir el siguiente resultado, que precisa y amplía lo expuesto hasta ahora.

Reglas de Feynman para las funciones vértice

Consideremos el funcional generador de los cumulantes de $Z(\tilde{J}, J)$ y su transformada de Legendre con respecto a sus dos fuentes:

$$\Gamma(\tilde{\varphi}, \varphi) \equiv -\log Z(\tilde{J}, J) + \int \frac{\delta^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega}{2\pi} [\tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \omega) \tilde{J}(-\mathbf{k}, -\omega) + \varphi(\mathbf{k}, \omega) \tilde{J}(-\mathbf{k}, -\omega)], \quad (4.36)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \omega) &\equiv (2\pi)^{d+1} \frac{\delta \log Z / \tilde{J}, J}{\delta \tilde{J}(-\mathbf{k}, -\omega)} = \langle \tilde{\phi}(\mathbf{k}, \omega), \rangle \\ \varphi(\mathbf{k}, \omega) &\equiv (2\pi)^{d+1} \frac{\delta \log Z / \tilde{J}, J}{\delta J(-\mathbf{k}, -\omega)} = \langle \phi(\mathbf{k}, \omega) \rangle. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Definimos además las *funciones vértice* como

$$\Gamma_{\tilde{n}n}(\mathbf{k}_1, \omega_1, \dots, \mathbf{k}_{\tilde{n}+n}, \omega_{\tilde{n}+n}) \equiv (2\pi)^{(d+1)(\tilde{n}+n)} \frac{\delta^{\tilde{n}+n} \Gamma(\tilde{\varphi}, \varphi)}{\delta \tilde{\varphi}(-\mathbf{k}_1, -\omega_1) \dots \delta \varphi(-\mathbf{k}_{\tilde{n}+n}, -\omega_{\tilde{n}+n})} \Big|_0 \quad (4.38)$$

con lo que se tiene entonces el siguiente desarrollo:

$$\Gamma(\tilde{\varphi}, \varphi) = \sum_{\tilde{n}, n} \frac{1}{\tilde{n}! n!} \int d^d k_1 d\omega_1 \dots d^d k_{\tilde{n}+n} d\omega_{\tilde{n}+n} \tilde{\varphi}(-\mathbf{k}_1, -\omega_1) \dots \varphi(-\mathbf{k}_{\tilde{n}+n}, -\omega_{\tilde{n}+n}) \Gamma_{\tilde{n}n}. \quad (4.39)$$

En estas condiciones es fácil demostrar que $\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{\Gamma}$, es decir, la matriz de las funciones a dos cuerpos coincide con la inversa de la matriz de las correlaciones a dos cuerpos. \mathbf{G}^{-1} ya fue calculada en (4.18) dentro de la teoría libre, de manera que en el marco de dicha aproximación se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0(\mathbf{k}, \omega) &= \left(G_{11}^0(\mathbf{k}, \omega) \right)^{-1} = i\omega + \frac{\varepsilon_0}{2} k_{\perp}^2 (k^2 + \tau), \\ \Gamma_{02}^0(\mathbf{k}, \omega) &= -\frac{G_{02}^0(\mathbf{k}, \omega)}{|G_{11}^0(\mathbf{k}, \omega)|^2} = e_0 \left(k_{\perp}^2 + \frac{1}{2} k_{\parallel}^2 \right), \\ \Gamma_{20}^0(\mathbf{k}, \omega) &= 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

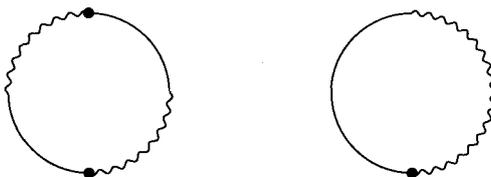
Puede demostrarse [Ami, Bnn, LBe, ZJ] que las reglas de Feynman para calcular las funciones vértice coinciden con las de las correlaciones salvo por las siguientes modificaciones:

- La aparición de un signo menos global.
- No hay que considerar aquellos diagramas tales que si se les cortara alguna línea interna dejarían de ser conexos.
- No aparecen los propagadores asociados a líneas externas, aquellas que enlazan puntos externos y vértices. Se habla en este caso de em diagramas amputados.

Finalmente, vamos a comentar brevemente cómo se manifiestan las condiciones de causalidad en forma de reglas diagramáticas. Para apreciar mejor dichas condiciones es preferible trabajar en espacio de momentos y tiempos, en vez de momentos y frecuencias. En ese caso cada línea tiene asociados los tiempos del propagador que representa. No existe ninguna ligadura cronológica en el orden temporal para el caso de los propagadores reversibles. En cambio, en los irreversibles, se da la circunstancia de que la elección de tiempos no es arbitraria:

$$\begin{array}{c} \text{~~~~~} \text{-----} \\ t' \qquad \qquad \qquad t \end{array} \qquad t' < t.$$

Esto es simplemente consecuencia de la función θ que aparece en (4.27). Debido a que en la elección de Ito $\theta(0) = 0$, entonces es evidente que cualquier diagrama que contenga algún elemento como los siguientes será idénticamente nulo:



La elección $\alpha = 1/2$, coincidente con el esquema de Stratonovich, contiene un término extra en el lagrangiano que genera diagramas que no aparecerían si se usa

el cálculo de Ito (en general, en cualquier esquema con $\alpha \neq 1$ se dará este caso). Tales diagramas se cancelan con otras contribuciones que tienen su origen en que en el cálculo de Stratonovich $\theta(0) = 1/2$, mientras que para Ito $\theta(0) = 0$. Por lo tanto, ambos esquemas son equivalentes. Véase al respecto, por ejemplo, [Bau, Jan79].

4.2.3 Desarrollos a un *loop*

Hemos calculado las funciones de correlación y las funciones vértice como serie de potencias de la constante de acoplamiento g . Existen, no obstante, otros tipos de aproximación, también sistemáticos, en los que el parámetro de la expansión no es la constante de acoplamiento. Aquí vamos a seguir el desarrollo en el *número de loops*, que organiza los diagramas de acuerdo con el número de “loops” (o integraciones internas) que contienen. Puede demostrarse que si $\mathcal{L} \rightarrow a^{-1}\mathcal{L}$, donde a es un parámetro pequeño, entonces el desarrollo en el número de “loops” es una expansión en potencias de a . [Ami, Bnn]. En teoría cuántica de campos \hbar juega el papel de a , y por lo tanto el desarrollo en el número de “loops” es un desarrollo en potencias de \hbar alrededor de la teoría clásica. El orden más bajo de aproximación lo constituye la aproximación árbol⁴, que involucra diagramas que no contienen ningún “loop” y que puede demostrarse que es equivalente a campo medio [Ami, ZJ]. En la figura (4.2) se muestra el desarrollo de las funciones vértice Γ_{11} y Γ_{13} hasta orden un “loop”, que es el orden de aproximación que vamos a considerar en los cálculos.

4.2.4 Divergencias en teoría de perturbaciones

Hemos visto en las secciones previas que es conveniente centrarse en las funciones vértice, dado que son relativamente fáciles de calcular y una vez que son conocidas se pueden evaluar las funciones de correlación rápidamente. Pero cuando la dimensión del espacio es suficientemente grande, tanto unas como otras pueden sufrir de *divergencias*

⁴También es conocida como aproximación de fase aleatoria, “steepest descent”, método del punto de silla, aproximación de Landau, etc, según preferencias y el contexto.

$$\Gamma_{11} = \left(\text{---} \right)^{-1} + \text{---} \circlearrowleft$$

$$\Gamma_{13} = \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \circlearrowleft \text{---} \text{---}$$

Figura 4.2: Arriba, la función vértice Γ_{11} a orden un “loop”, que incluye la primera corrección al propagador irreversible. Abajo, también la primera corrección, en este caso al vértice.

ultravioletas cuando el momento q asociado a alguna integración interna tiende a infinito. Es el objetivo de esta sección hallar qué funciones vértice son las que presentan este problema, de cuya solución nos ocuparemos en las próximas.

Para determinar si un cierto gráfico correspondiente al desarrollo de una función vértice diverge en el límite ultravioleta, hay que estudiar las propiedades asintóticas del integrando. Esquemáticamente, la integral sobre \mathbf{q} se comporta como $\int^\Lambda dq q^\delta$; si $\delta + 1 > 0$ entonces la integral diverge como $\Lambda^{\delta+1}(\ln \Lambda)^p$, donde p es un número entero; si $\delta + 1 = 0$, la integral diverge como $(\ln \Lambda)^p$; y si $\delta + 1 < 0$, entonces la integral converge en el ultravioleta. δ es el número de potencias de momento del numerador del integrando menos el número de potencias del denominador, también llamado grado de divergencia superficial de diagrama. Cuando hay más de un “loop” la situación es más compleja y δ es función tanto del número de “loops”, como del de líneas internas, vértices, etc., del diagrama. Para calcularlo se puede recurrir a argumentos de carácter topológico, o bien, como será nuestro caso, de tipo dimensional.

Dimensiones

Ofrecemos ahora la recopilación de las dimensiones de las principales magnitudes presentes, según se deducen de la naturaleza adimensional de \mathcal{L} . Como base dimensional se ha cogido la inversa de la longitud, $b = L^{-1}$.

$$\begin{aligned} [\mathbf{k}] &= b, & [\phi] &= b^{-\frac{d+10}{2}}, & [g] &= b^{4-d}, \\ [\omega] &= b^4, & [\tilde{\phi}] &= b^{-\frac{d+6}{2}}, & [\Gamma_{\tilde{n}n}] &= b^{d\tilde{n}n} = b^{-\frac{d}{2}(\tilde{n}+n-2)+n-\tilde{n}+4}. \end{aligned}$$

Con ayuda de las dimensiones que acabamos de mostrar se puede calcular el grado de divergencia de un diagrama. Como se puede comprobar fácilmente, $\delta_{\tilde{n}n}$, que así lo llamaremos a partir de ahora para hacer explícito que es el asociado a un diagrama de \tilde{n} patas onduladas externas y n lisas externas, es igual a

$$\delta_{\tilde{n}n} = d_{\tilde{n}n} - 2\tilde{N}_g - \nu(4 - d). \quad (4.41)$$

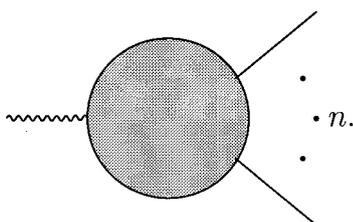
ν es el número de vértices y \tilde{N}_g el número de líneas onduladas externas conectadas a un vértice. Como $\Gamma_{\tilde{n}n}$ es proporcional a g^ν por la integral, entonces la dimensión de

esta última debe ser igual a la de $\Gamma_{\tilde{n}n}$ dividida por la de g^ν . El término \tilde{N}_g surge por la integración de algunas δ de Dirac que eliminan variables [Bau].

Como observación importante, resaltamos que $\delta_{\tilde{n}n}$ depende del orden teoría de perturbaciones a través del término $\nu(4-d)$. Por lo tanto, existe una dimensión especial, en este caso $d_c = 4$, para la cual el número de divergencias es independiente de ν . Nótese que para $d > 4$ las divergencias son cada vez más severas conforme se incrementa el orden de la teoría de perturbaciones. Para estas situaciones se dice que la teoría *no es renormalizable*. Será *super-renormalizable* si $d < 4$ y *renormalizable* si $d = 4$. Como resultado general se tiene que la condición necesaria y suficiente para que las divergencias de las funciones vértice sean independientes del orden de la teoría de perturbaciones es trabajar en una dimensión tal que la constante de acoplamiento sea adimensional.

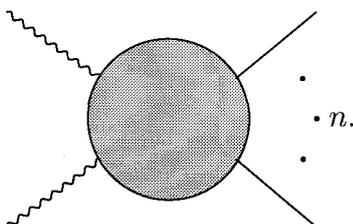
La aplicación de (4.41) trabajando en 4 dimensiones nos permite hallar las funciones vértice divergentes. Procediendo sistemáticamente:

- Si $\tilde{n} = 0$, $\Gamma_{0n} = 0$ por causalidad.
- Si $\tilde{n} = 1$, entonces el diagrama es de la forma



Por lo tanto, $\tilde{N}_g = 1$ y $\delta_{1n} = 3 - n$, que sólo es positivo cuando $n \geq 3$.

- Si $\tilde{n} = 2$, entonces se tiene



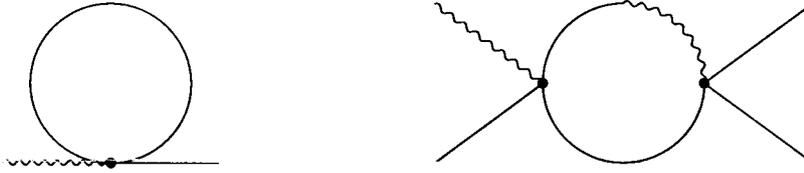


Figura 4.3: Diagramas divergentes a 1 “loop”: a la derecha el correspondiente a Γ_{31} y a la izquierda el de Γ_{11} .

Así pues, $\tilde{N}_g = 2$ y no existe n tal que $d_{2n} \geq 0$.

Es inmediato comprobar que si $\tilde{n} > 2$ el caso $\tilde{n} = 2$ se repite.

De forma que, como $\Gamma_{10} = 0$, las únicas divergencias están en Γ_{11} , Γ_{12} y Γ_{13} . Pero como Γ_{12} no existe, como se deduce fácilmente de la fórmula de origen topológico $4\nu - (\tilde{n} + n) = 2I$, siendo I el número de líneas internas, concluimos que las divergencias se muestran exclusivamente en Γ_{11} y Γ_{13} . Los diagramas correspondientes a orden un “loop” se muestran en la figura (4.3).

Como última precisión antes de pasar a la siguiente sección, comentaremos que si $\delta_{\tilde{n}n}$ recibe el nombre de grado “superficial” de divergencia es porque aunque un diagrama pudiera ser superficialmente convergente, debido a subintegraciones podría diverger. Los diagramas que son divergentes sin que contengan un subgráfico divergente se llaman *primitivamente divergentes*, o que presentan *divergencias primitivas*. Son, naturalmente, las divergencias primitivas las que interesa localizar. En el caso de los diagramas de la figura (4.3), debido a su estructura simple, puede comprobarse sin dificultad que son primitivamente divergentes.

4.3 Los exponentes críticos

Las divergencias que acabamos de encontrar demuestran que la teoría de campos

que queremos construir no se puede definir directamente a partir del desarrollo perturbativo sin hacer algún cambio. Es posible eliminar estas divergencias absorbiendo los infinitos mediante una redefinición de la masa, la constante de acoplamiento y los campos. La estrategia a seguir consiste, pues, en modificar la teoría para momentos grandes (distancias cortas) de tal manera que los nuevos diagramas de Feynman sean cantidades finitas y bien definidas y tal que, cuando un cierto parámetro de control se aproxime a un cierto límite, se recupere formalmente la teoría de perturbaciones original. A este procedimiento se le denomina *regularización*. Existen muchos métodos de regularización, cada uno de ellos con sus ventajas e inconvenientes. El más sencillo es la introducción de una cota superior en el espacio de momentos o “cutoff”, con lo que se restringe las integrales sobre q a $|\mathbf{q}| < \Lambda$. Aunque útil en argumentos heurísticos, este procedimiento es impracticable salvo para casos particularmente sencillos. Otras opciones son la regularización de Schwinger, Pauli-Villars, la regularización dimensional o la regularización en una red. En general, la *regularización dimensional* es la que da lugar a los cálculos perturbativos más simples [Ami, ZJ]. Dicho brevemente, en regularización dimensional se prolonga analíticamente el valor de la dimensión espacial, d , a valores complejos arbitrarios en los diagramas de Feynman. Para ello se aprovecha el hecho de que los términos del desarrollo perturbativo convergen en dimensiones suficientemente bajas. Las integrales, consideradas dependientes del valor complejo d , son funciones analíticas dentro de un cierto círculo en el plano complejo, circunstancia que se usa para prolongarlas analíticamente a todo el plano. En el dominio en el que la integral converge es igual a su expresión regularizada, mientras que el hecho de que para alguna dimensión la integral diverga se traduce en la aparición de *polos dimensionales*. Es decir, la función obtenida por continuación analítica es meromorfa.

El papel de la renormalización es eliminar las singularidades en d , y hacer la teoría finita. En nuestro caso son los polos en $d = 4$ los que hay que considerar, motivo por el cual introducimos la notación $\varepsilon \equiv 4 - d$, en el número de dimensiones en que es renormalizable [Ami]. Para ello empezamos por definir una constante de acoplamiento adimensional

$$u \equiv A_\varepsilon \tau^{-\varepsilon/2} g, \quad (4.42)$$

donde A_ε es un factor numérico conveniente que se fijará más adelante. En segundo lugar introducimos unos nuevos parámetros renormalizados τ_R y u_R , relacionados con los originales o desnudos mediante

$$\begin{aligned} \tau_R &= Z_\tau \tau, \\ u_R &= Z_u u. \end{aligned} \quad (4.43)$$

La relación entre funciones vértice desnudas y renormalizadas es

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tilde{n}n}^R(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\tilde{n}}, \mathbf{k}_{\tilde{n}+1}, \dots, \mathbf{k}_{\tilde{n}+n}; u_R, \tau_R) &= \\ &= \tilde{Z}^{\tilde{n}/2} Z^{n/2} \Gamma_{\tilde{n}n}((\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\tilde{n}}, \mathbf{k}_{\tilde{n}+1}, \dots, \mathbf{k}_{\tilde{n}+n}; u, \tau). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Las constantes de renormalización Z se calculan orden a orden en el desarrollo en el número de “loops”, absorbiendo la parte singular del desarrollo de Laurent en ε de las funciones vértice divergentes. Para ello recurrimos a las siguientes *condiciones de normalización*:

$$\begin{aligned} \partial_{k_\perp^2} \Gamma_{11}^R|_0 &= \frac{e_0}{2} \tau_R, \\ \partial_{k_\perp^2} \Gamma_{13}^R|_0 &= \frac{e_0}{2} \tau^{\varepsilon/2} A_\varepsilon^{-1} u_R. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Por conveniencia el punto de normalización es $\mathbf{k}_i = \omega_i = 0$ y $\tau = \mu^2$, donde μ es una escala de momento arbitraria. Las funciones vértice divergentes a orden uno son

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= i\omega + \frac{e_0}{2} k_\perp^2 (k^2 + \tau) + D_1, \\ \Gamma_{13} &= +\frac{e_0}{2} k_\perp^2 g + D_2, \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde D_1 y D_2 corresponden a los diagramas izquierdo y derecho respectivamente de la figura (4.3). El valor de las integrales asociadas a cada uno de los diagramas, I_1 e

I_2 , se calcula explícitamente en los apéndices (A4.3) y (A4.4). Gracias a la elección del punto de renormalización, la segunda de ellas, I_2 , puede hacerse a momentos y frecuencias externas nulas, lo que facilita extraordinariamente su cálculo. I_1 no presenta este problema. Por otra parte, los factores de simetría son 3 para D_1 y $2^3 3^2$ para D_2 . Todo esto nos permite escribir

$$\begin{aligned} D_1 &= 3 \frac{g}{3!} \frac{e_0}{2} k_\perp^2 \frac{5}{32\pi^2} \tau^{1-\varepsilon/2} \frac{1}{\varepsilon}, \\ D_2 &= \frac{2^3 3^2}{2!} \left(\frac{g}{3!} \frac{e_0}{2} \right) \frac{5}{32\pi^2} \frac{\tau^{-\varepsilon/2}}{e_0} \frac{1}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

con lo que, escogiendo $A_\varepsilon = 5/64\pi^2$, tendremos

$$\begin{aligned} \partial_{k_\perp^2} \Gamma_{11}|_0 &= \frac{e_0}{2} \tau + \frac{g e_0}{4} \frac{5}{32\pi^2} \tau^{1-\varepsilon/2} \frac{1}{\varepsilon} = \frac{e_0}{2} \tau \left[1 + \frac{5\tau^{-\varepsilon/2} g}{64\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \right] = \frac{e_0}{2} \tau \left[1 + \frac{u}{\varepsilon} \right], \\ \partial_{k_\perp^2} \Gamma_{13}|_0 &= \frac{e_0}{2} A_\varepsilon^{-1} \tau^{\varepsilon/2} u \left[1 - \frac{u}{\varepsilon} \right]. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Por lo tanto, los factores Z desarrollados en serie de potencias de la constante de acoplamiento son

$$\begin{aligned} Z_\tau &= 1 + \frac{u}{\varepsilon} + O(u^2), \\ Z_u &= 1 - \frac{u}{\varepsilon} + O(u^2). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Escribimos ahora las *ecuaciones del grupo de renormalización*, que reflejan que las funciones vértice desnudas, consideradas como funciones de los parámetros desnudos, son independientes de μ :

$$\mu \partial_\mu \Gamma_{\bar{n}n} = 0, \quad (4.50)$$

donde la derivada se toma con τ y u constantes. Sustituyendo (4.45) en (4.50) y notando la dependencia implícita de $\Gamma_{\bar{n}n}^R$ de μ a través de u_R y τ_R se obtiene la siguiente expresión:

$$\left[\mu \partial_\mu + \beta \partial_{u_R} + \zeta \partial_{\tau_R} \right] \Gamma_{\bar{n}n}^R = 0. \quad (4.51)$$

Los coeficientes β y ζ , llamados funciones flujo porque muestran cómo cambian las magnitudes u_R y τ_R cuando la escala μ varía, vienen dados por su definición usual [Ami, ZJ]

$$\begin{aligned}\beta(u_R) &\equiv \mu \partial_\mu u_R, \\ \zeta(u_R) &\equiv \mu \partial_\mu (\ln \tau_R),\end{aligned}\tag{4.52}$$

Tras un cálculo breve se llega a

$$\begin{aligned}\beta(u_R) &= -\varepsilon u_R + u_R^2 + O(u_R^3), \\ \zeta(u_R) &= 2 - u_R + O(u_R^2).\end{aligned}\tag{4.53}$$

La variación de las funciones vértice, y por lo tanto de las funciones de correlación, bajo cambios en la escala de los momentos permite la identificación de muchos exponentes críticos. Esto se debe a que las funciones vértice sólo dependen en realidad de una combinación particular de las variables básicas. Lamentablemente, puede demostrarse (normalmente resolviendo las ecuaciones del grupo de renormalización por el método de las características [Ami, Bnn]) que dichas propiedades de escala son complicadas y muy alejadas del comportamiento tipo ley de potencia que se observa en los experimentos. No obstante, existe un caso especial en el que se recupera ese comportamiento simple, cuando la constante de acoplamiento alcanza un valor tal que no se ve afectada por cambios adicionales en la escala. Dicha situación viene caracterizada por $\beta(u_R) = 0$, y a los ceros de esta ecuación, u_R^* , se les denomina *puntos fijos*. Dependiendo del valor de la derivada de la función β en u_R^* , la constante de acoplamiento renormalizada fluirá, partiendo de un entorno de u_R^* , hacia su valor en el punto fijo en límite de momentos altos o bajos (nunca en ambos). En el primer caso se dice que el punto fijo es *estable en el ultravioleta*, de lo contrario es *estable en el infrarrojo* [Ami]. Son estos últimos los que controlan las propiedades macroscópicas. Resolviendo pues $\beta(u_R) = 0$ es inmediato hallar

$$u_R^* = 0,$$

$$u_R^* = \varepsilon. \quad (4.54)$$

El primero de ellos es estable en el infrarrojo si $d > 4$; las funciones de correlación a largas distancias vienen caracterizadas entonces por $u_R = 0$, lo que da lugar a un comportamiento tipo campo medio, cosa que por lo demás ya habíamos deducido con anterioridad. Por otro lado, cuando $d < 4$, se vuelve estable en el ultravioleta y es el otro cero es que se transforma en estable en el infrarrojo y controla las propiedades a largas distancias de la teoría. Así pues, estamos ya en disposición de calcular los exponentes críticos para dimensiones inferiores a d_c . Por ejemplo, el exponente η , la dimensión anómala del campo, es $\eta = 0$ dado que a un “loop” no ha habido necesidad de renormalizar el campo. Para el exponente ν , que controla la divergencia de la longitud de correlación con la temperatura, tenemos $\nu^{-1} = \zeta^* = \zeta(u_R^*)$ [Ami], lo que da lugar a

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + O(\varepsilon^2) \quad (4.55)$$

Compárese este valor con el obtenido en [Jan86], $\nu = 1/2$, de donde se comprueba que la versión continua del DLG con campo infinito pertenece a una clase de universalidad distinta tanto de la de campo medio, como de la de Janssen *et al.* Otros exponentes pueden deducirse a partir de leyes de escala. Por ejemplo, para el exponente β se tiene

$$\beta = \frac{\nu}{2}(d - 2 + \eta), \quad (4.56)$$

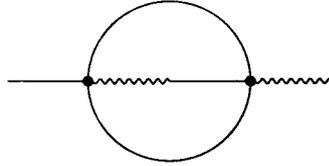
que en este caso es equivalente a

$$\beta = \frac{1}{2}, \quad (4.57)$$

o bien, según la definición del exponente crítico dinámico [Bau], $z = 4 - \zeta^* = 4 - \varepsilon$.

Comentarios

Recogemos en la tabla (4.1) los valores de los exponentes críticos ν , η , β y z en las aproximaciones de cero “loops” (4.29) y un “loop”. El siguiente orden de aproximación, a 2 “loops”, acarrea modificaciones en los valores calculados previamente. Es importante

Figura 4.4: Contribución a orden 2 “loops” a Γ_{11} .

destacar que estas modificaciones no son sólo cuantitativas, sino también cualitativas. En efecto, la corrección a dos “loops” al propagador, cuyo diagrama se muestra en la figura (4.3), al contrario que la corrección a 1 “loop”, depende de momentos y frecuencias externas. A dos “loops” habrá pues que renormalizar los campos y el coeficiente e_0 . Además, este diagrama depende de las frecuencias y las componentes paralela y perpendicular de los momentos externos de forma asimétrica. Ello implica que es en este orden de aproximación cuando se introduce la anisotropía en el valor de los exponentes. Por ejemplo, la relación (4.56) deja de ser válida en situaciones anisotrópicas, en cuyo caso hay que recurrir a métodos similares a los expuestos en el capítulo primero referentes a la renormalización de la teoría de Leung *et al.* En cuanto al cálculo de integrales, es fácil ver que la asociada al diagrama (a) de la figura (4.3) es simplemente I_1^2 y la del diagrama (b) y la de (c) son a su vez iguales. Por lo tanto, para obtener resultados a dos “loops” hay que evaluar 5 nuevas integrales.

	ν	η	β	z
Campo medio	1/2	0	1/2	4
Orden 1 “loop”	$1/2 + \varepsilon/4$	0	1/2	$4 - \varepsilon$

Tabla 4.1: Valores de algunos exponentes críticos en campo medio y la primera corrección a 1 “loop”.

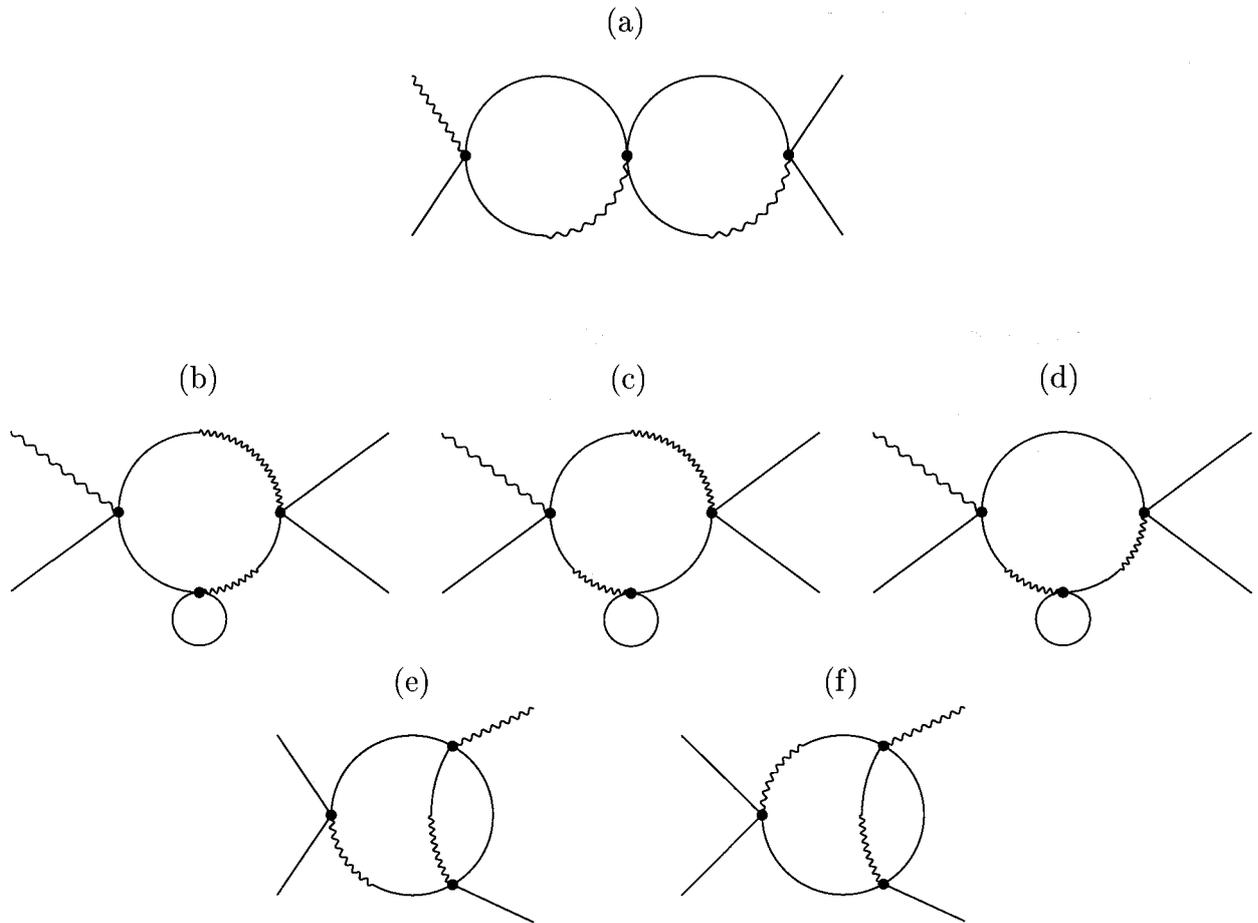


Figura 4.5: Contribución a orden 2 “loops” a Γ_{13} .

Apéndice 4

A4.1 Cálculo del funcional generador

Consideremos una ecuación de Langevin de forma general

$$\partial_t \phi(\mathbf{x}, t) = K(\phi, \mathbf{x}) + \xi(\mathbf{x}, t), \quad (\text{A4.1})$$

donde el ruido está caracterizado por

$$\begin{aligned} \langle \xi(\mathbf{x}, t) \rangle &= 0, \\ \langle \xi(\mathbf{x}, t) \xi(\mathbf{x}', t') \rangle &= L(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (\text{A4.2})$$

Para calcular $Z_\xi(J)$, según fue definido en (4.4), nos valemos de la identidad

$$1 = \int \mathcal{D}S \left[\prod_{\mathbf{x}, t} \delta(S(\mathbf{x}, t)) \right], \quad (\text{A4.3})$$

donde δ es la delta de Dirac y $\mathcal{D}S$ es una medida de integración que indica “suma sobre todas las posibles configuraciones de la función $S(\mathbf{x}, t)$ ” y que, de forma más precisa, se puede definir en una red de espaciado a y N nudos como la expresión continua de un producto discreto de diferenciales:

$$\mathcal{D}S = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{N}(a) \prod_{i=1}^N dS_i. \quad (\text{A4.4})$$

El factor $\mathcal{N}(a)$ se escoge para que el límite exista al menos en los casos más comunes y su valor concreto no es necesario precisarlo. Está claro que la definición (A4.4) es puramente formal y que su existencia como medida de integración requiere un estudio mucho más profundo. Un tratamiento riguroso se puede encontrar en [Gli], aunque para nuestros propósitos la exposición dada es suficiente. Hagamos pues uso de (A4.3) con

$$S(\mathbf{x}, t) = \partial_t \phi(\mathbf{x}, t) - K(\phi, \mathbf{x}) - \xi(\mathbf{x}, t), \quad (\text{A4.5})$$

para implementar la ecuación de Langevin. Tendremos,

$$\langle Z_\xi(J) \rangle = \left\langle \int \mathcal{D}S \left[\prod_{\mathbf{x}, t} \delta S(\mathbf{x}, t) \right] \exp \int d^d x dt J(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t) \right\rangle, \quad (\text{A4.6})$$

que mediante un cambio de variable es posible expresar como

$$\langle Z_\xi(J) \rangle = \left\langle \int \mathcal{D}\phi \left| \frac{\delta S}{\delta \phi} \right| \left[\prod_{\mathbf{x}, t} \delta(\partial_t \phi - K - \xi) \right] \exp \int d^d x dt J(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t) \right\rangle. \quad (\text{A4.7})$$

El cálculo del jacobiano de la transformación conduce a

$$\left| \frac{\delta S}{\delta \phi} \right| = \exp \left(- (1 - \alpha) \int d^d x dt \frac{\delta}{\delta \phi} K(\phi, \mathbf{x}) \right). \quad (\text{A4.8})$$

El parámetro α , $0 \leq \alpha \leq 1$, es el resultado de la discretización de la ecuación de Langevin, un proceso necesario para calcular el jacobiano. Aunque el valor de α es arbitrario, las elecciones más corrientes son $\alpha = 1$ y $\alpha = 1/2$, que corresponden a los cálculos de Ito y de Stratonovich respectivamente. Como tuvimos ocasión de ver en el capítulo dos, el resultado depende en primera instancia del esquema de discretización escogido.

Es conveniente recurrir ahora a otra identidad,

$$\prod_{\mathbf{x}, t} \delta(f(\mathbf{x}, t)) = \int \mathcal{D}\tilde{\phi} \exp \left\{ i \int d^d x dt \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) \right\}, \quad (\text{A4.9})$$

que junto con (A4.8) nos permite escribir

$$\begin{aligned} \langle Z_\xi(J) \rangle = \left\langle \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\tilde{\phi} \exp \int d^d x dt \left[J(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t) - (1 - \alpha) \frac{\delta K(\mathbf{x}, t)}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)} + \right. \right. \\ \left. \left. + i\tilde{\phi}(\partial_t \phi - K(\mathbf{x}, t) - \xi(\mathbf{x}, t)) \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A4.10})$$

Finalmente, el promedio sobre el ruido se puede efectuar explícitamente recurriendo a (A4.2). En última instancia se tiene

$$\begin{aligned} \langle Z_\xi(J) \rangle = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\tilde{\phi} \exp \int d^d x dt \left\{ J(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t) + i\tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) [\partial_t \phi - K(\phi, \mathbf{x})] - \right. \\ \left. - (1 - \alpha) \frac{\delta K(\phi, \mathbf{x})}{\delta \phi} - \int d^d y \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\phi}(\mathbf{y}, t) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A4.11})$$

A4.2 Identidades útiles

Recogemos en la primera sección de este apéndice algunas identidades útiles para resolver las integrales que aparecen en el capítulo cuatro. Casi todas ellas pueden encontrarse en la bibliografía básica sobre teoría de campos [Ami, Bnn, Itz, LBe, ZJ] o bien en [Grd]. En las dos secciones subsiguientes se hace el cálculo explícito de dichas integrales.

- **La función Γ de Euler:**

Por definición

$$\Gamma(\alpha + 1) \equiv \int_0^\infty dx e^{-x} x^\alpha. \quad (\text{A4.12})$$

Se cumple entonces que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ y además se tienen los siguientes desarrollos de Laurent alrededor de 0 y -1 que son necesarios en el desarrollo en

ε :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} - \gamma + \frac{1}{2} \left[\gamma^2 + \frac{1}{6} \pi^2 \right] \alpha + O(\alpha^2), \\ \Gamma(\alpha - 1) &= -\frac{1}{\alpha} - (1 - \gamma) - \frac{1}{2} \left[(1 - \gamma)^2 + \frac{1}{6} \pi^2 + 1 \right] \alpha + O(\alpha^2).\end{aligned}\tag{A4.13}$$

Los desarrollos son válidos en $-1 < \alpha < 1$ y γ es la constante de Euler, definida por $\gamma \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} [\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \log n] = 0,57721 \dots$

- **La función Beta:**

$$B(\alpha, \beta) \equiv \int_0^1 dt t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.\tag{A4.14}$$

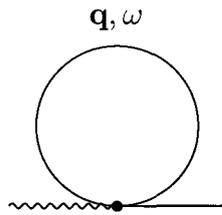
- **Parametrización de Feynman:**

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{a_i^{\alpha_i}} = \frac{\Gamma(\sum_i \alpha_i)}{\prod_i \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta\left(\sum_i x_i - 1\right) \frac{\prod_i x_i^{\alpha_i-1}}{(\sum_i a_i x_i)^{\sum_i \alpha_i}}.\tag{A4.15}$$

- **Una integral útil:**

$$\int_0^\infty \frac{d^d x}{(x^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} + c^2)^\alpha} = \pi^{d/2} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{1}{2}d)}{\Gamma(\alpha)} (c^2 - p^2)^{d/2-\alpha}.\tag{A4.16}$$

A4.3 La integral I_1



$$I_1 = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{-e_0(q_\perp^2 + \frac{1}{2}q_\parallel^2)}{\omega^2 + \frac{e_0^2}{4}q_\perp^4 (q^2 + \tau)^2}$$

La integración en frecuencias es inmediata y da lugar a

$$I_1 = - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + \tau} - \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\parallel^2}{q_\perp^2 (q^2 + \tau)^2} = I_{1a} + I_{1b}.\tag{A4.17}$$

I_{1a} se puede calcular por aplicación directa de (A4.16). Se tiene

$$I_{1a} = -\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(1 - d/2) \tau^{d/2-1}. \quad (\text{A4.18})$$

En cuanto a I_{1b} , realizaremos primero la integral sobre q_{\perp} usando la parametrización de Feynman:

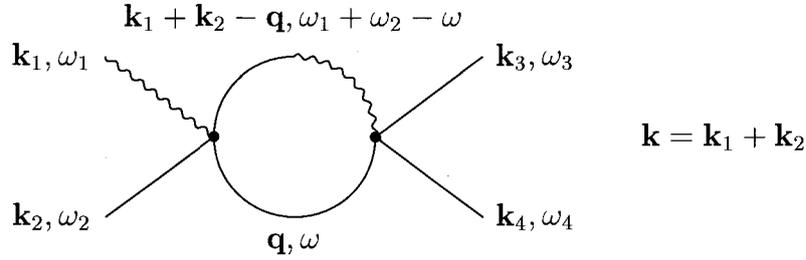
$$\begin{aligned} \int \frac{d^{d-1}q_{\perp}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{q_{\perp}^2 (q_{\perp}^2 + \underbrace{q_{\parallel}^2 + \tau}_{m^2})} &= \left[\text{Parametrización de Feynman} \right] = \\ &= \frac{2\Gamma(\frac{5-d}{2})}{(d-3)(4\pi)^{\frac{d-1}{2}}} (m^2)^{\frac{d-5}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{A4.19})$$

Para la integración de (A4.19) sobre q_{\parallel} conviene hacer el siguiente cambio de variable

$$\int \frac{dq}{2\pi} q_{\parallel}^2 (q_{\parallel}^2 + \tau)^{d-5/2} = \left[q_{\parallel}^2 = \frac{\tau t}{1-t} \right] = B(3/2, 1 - d/2), \quad (\text{A4.20})$$

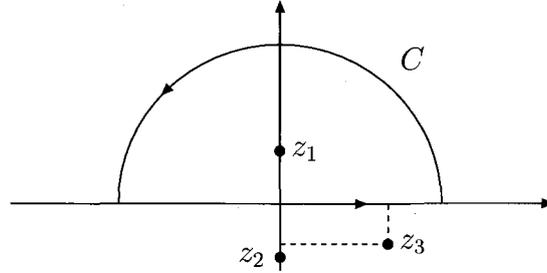
donde se han obviado los factores numéricos. Finalmente, llamando como es habitual $\varepsilon = 4 - d$ y haciendo uso de (A4.13) y (A4.14), se tiene

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b} = \frac{5\tau^{1-\varepsilon/2}}{32\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{A4.21})$$

A4.4 La integral I_2 

$$I_2 = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{-e_0(q_\perp^2 + \frac{1}{2}q_\parallel^2)}{\omega^2 + \frac{e_0^2}{4}q_\perp^2(q^2 + \tau)^2} \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{q})_\perp^2}{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega) + \frac{e_0}{2}(\mathbf{k} - \mathbf{q})_\perp^2[(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + \tau]}.$$

La integración en frecuencias es un ejercicio simple de integración en el plano complejo y de aplicación del teorema del residuo:



Contorno y polos para la integración en frecuencias de I_2 .

$$I_2 = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{-(q_\perp^2 + \frac{1}{2}q_\parallel^2)}{q_\perp^2(q^2 + \tau)} \frac{(k - q)_\perp^2}{i(\omega_1 + \omega_2) + \frac{e_0}{2}q_\perp^2(q^2 + \tau) + \frac{e_0}{2}(k - q)_\perp^2[(k - q)^2 + \tau]} \quad (\text{A4.22})$$

Como ya se ha comentado en la sección correspondiente, es suficiente evaluar I_2 en momentos y frecuencias externas nulas:

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\perp^2 + \frac{1}{2}q_\parallel^2}{e_0 q_\perp^2 (q^2 + \tau)^2} = \\ &= - \frac{1}{e_0} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + \tau)^2} - \frac{1}{2e_0} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\perp^2}{q_\perp^2 (q^2 + \tau)^2} = I_{2a} + I_{2b}. \end{aligned}$$

$$(A4.23)$$

I_{2a} se puede calcular por aplicación directa de (A4.16),

$$I_{2a} = -\frac{\Gamma(2 - d/2)}{(4\pi)^{d/2} e_0} \tau^{d/2-2}. \quad (A4.24)$$

En I_{2b} se hace uso de la parametrización de Feynman para la integración en el subespacio que hemos llamado perpendicular:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{d-1} q_{\perp}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{q_{\perp}^2 \underbrace{(q_{\perp}^2 + q_{\parallel}^2 + \tau)^2}_{m^2}} &= \left[\text{Parametrización de Feynman} \right] = \\ &= \frac{2\Gamma(\frac{7-d}{2})}{(d-3)(4\pi)^{\frac{d-1}{2}}} (m^2)^{\frac{d-7}{2}}. \end{aligned} \quad (A4.25)$$

La integración sobre q_{\parallel} requiere del siguiente cambio de variable

$$\int \frac{dq}{2\pi} q_{\parallel}^2 (q_{\parallel}^2 + \tau)^{d-7/2} = \left[q_{\parallel}^2 = \frac{\tau t}{1-t} \right] = B(3/2, 2 - d/2), \quad (A4.26)$$

que permite obtener, tras la aplicación nuevamente de (A4.13) y (A4.14), el resultado final

$$I_2 = I_{2a} + I_{2b} = -\frac{5\tau^{-\epsilon/2}}{32\pi^2} \frac{1}{\epsilon}. \quad (A4.27)$$

Capítulo 5

Modelos relacionados

En los capítulos precedentes nos hemos centrado en un modelo muy concreto: el gas reticular con arrastre y sus estados estacionarios. Aunque rico en estructura, las especificaciones que definen el DLG son muy simples, y es esta combinación de simplicidad en el modelo y riqueza en la fenomenología la que ha impulsado el interés en el estudio de otras variantes del DLG. Es natural, pues, considerar modificaciones del “modelo estándar” con objeto de indagar más a fondo en la relación entre las especificaciones microscópicas del modelo y sus propiedades macroscópicas colectivas. Las posibles variaciones a considerar incluyen condiciones de contorno distintas de las periódicas [Val89], campos externos aleatorios [Sch91, Sch93], interacciones repulsivas [Leu89], interacciones anisotrópicas [Sha], impurezas distribuidas por la red [Sch96], etc. En este capítulo analizaremos tres de ellas: el DLG con campo aleatorio, el modelo de dos temperaturas y el DLG en dos planos. Entre los criterios que justifican esta elección prima el de la comprobación de la aplicabilidad del formalismo introducido en el segundo capítulo. Pero además, las variantes que hemos elegido pueden ayudar a dilucidar algunas de las cuestiones abiertas sobre el DLG, en especial la influencia de la corriente (DLG aleatorio) y de la interfase (DLG en dos planos).

5.1 El DLG con campo aleatorio

El DLG con campo aleatorio [Sch91] (RDLG a partir de ahora) en un gas reticular con arrastre sometido a la acción de un campo eléctrico que fluctúa en intensidad en el tiempo de acuerdo con una distribución $p[E(\mathbf{x}, t)]$ con correlaciones espacio-temporales tipo δ . Por hipótesis, $p[E]$ es una función par. Por ejemplo, una de las más simples es la bimodal, $\frac{1}{2}[\delta(E + E_o) + \delta(E - E_o)]$, que es además la más empleada en simulación con E_o infinito de forma efectiva. Otra distribución fácilmente implementable la gaussiana. En general se espera que todas las distribuciones pares y con correlaciones espacio-temporales de corto alcance den las mismas propiedades colectivas en el límite de tiempos y distancias grandes.

El RDLG es más sencillo de realizar en el laboratorio que el DLG puesto que, como ya hemos comentado, un campo toroidal espacialmente uniforme y constante en el tiempo requiere un flujo magnético creciente linealmente en el tiempo. Pero, además, también presenta una mayor simplicidad analítica que el DLG por cuanto que no se induce ninguna corriente estacionaria y se respeta la simetría partícula-hueco. Sin embargo, el sistema no alcanzará el estado de equilibrio y compartirá muchas de las propiedades interesantes del DLG. En particular, ambos sistemas ganan energía del campo externo cuando se producen saltos en la dirección del campo, mientras que la ceden al baño térmico vía saltos transversales. Abundando más en las similitudes entre ambos modelos, diremos que RDLG también muestra un cambio de fase de segundo orden cuando $\rho = 0.5$ desde un estado desordenado a otro ordenado caracterizado por una banda de alta densidad, paralela a la dirección del campo, embebida en un medio enrarecido. De hecho, las configuraciones típicas de las fases ordenadas de ambos modelos son indistinguibles [Che].

Consideremos la descripción mesoscópica del RDLG. Como en el caso del DLG, se puede proponer una ecuación de Langevin basándose en criterios de simetría exclusivamente. Siendo la única diferencia con el DLG la ausencia de una corriente promedio, el resultado debe ser simplemente la ecuación de Leung y Cardy [Leu86] expuesta en el capítulo primero pero sin la presencia del término óhmico $\mathcal{E}\nabla_{\parallel}\phi^2$:

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(\mathbf{x}, t) = \lambda \{ & (\tau_{\perp} - \alpha_{\perp} \nabla_{\perp}^2) \nabla_{\perp}^2 \phi + (\tau_{\parallel} - \alpha_{\parallel} \nabla_{\parallel}^2) \nabla_{\parallel}^2 \phi - 2\alpha_{\times} \nabla_{\parallel}^2 \nabla_{\perp}^2 \phi + \\ & + \frac{g}{3!} (\kappa_{\perp} \nabla_{\perp}^2 \phi^3 + \kappa_{\parallel} \nabla_{\parallel}^2 \phi^3) \} - (\nabla_{\perp} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp} + \nabla_{\parallel} \xi_{\parallel}). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Hay que recordar que aunque los términos lineales de (5.1) y las correlaciones del ruido son idénticas a las de (1.19), los parámetros mesoscópicos son función de los microscópicos mediante un promedio adecuado. De manera que, aunque representados por los mismos símbolos, los coeficientes de la ecuación de Langevin del DLG y el RDLG deben considerarse distintos. De hecho, no hay ninguna razón para esperar que las funciones de correlación a dos cuerpos medidas en simulación del RDLG se parezcan a las del DLG, excepto en algunos aspectos genéricos tales como el decaimiento algebraico, etc. No obstante, para campos grandes no se aprecian diferencias [Hwa91, Hwa93]. Por lo demás, los ingredientes más importantes del RDLG están presentes en su equivalente de campo constante: la constante de difusión, o temperatura efectiva, es mayor en el subespacio paralelo; la matriz de las correlaciones del ruido no es proporcional a la matriz de difusión como consecuencia de la violación del teorema de fluctuación-disipación. Sin embargo, en el análisis de las propiedades universales la diferencia clave entre ambas ecuaciones estriba en que en la Langevin del RDLG el término $g \nabla_{\perp}^2 \phi^2$ sustituye a $\mathcal{E} \nabla_{\parallel} \phi^2$ como la no linealidad más relevante. Omitiendo los detalles del cálculo, que pueden encontrarse en [Sch91, Sch93], simplemente comentamos los resultados de dicho análisis. La dimensión crítica pasa a ser $d_c = 3$, y las predicciones del cálculo tipo grupo de renormalización a orden de 2 “loops” dan lugar a los siguientes valores de los exponentes críticos: $\beta = 0.32$, $\nu = 0.63$ y $\eta = 0.04$ [Sch93]. Por razones que quedarán claras más adelante, no comentamos ahora los resultados de simulación y los retrasamos hasta la próxima sección.

La construcción de una teoría de campos para el RDLG tal y como la acabamos de exponer, presenta los mismos inconvenientes que ya discutimos al hilo del estudio del DLG. En definitiva, este método de proceder supone que sólo las simetrías globales y las leyes de conservación determinan las propiedades macroscópicas, hipótesis que se puede ver afectada por las sutilezas propias de los modelos alejados del equilibrio. Creemos que la afinidad entre el RDLG y el DLG permitirá reconocer en el primero

las misma influencias dinámicas que ya hemos hallado en el segundo. Por lo tanto, vamos ahora a abordar dicho análisis mediante el formalismo del capítulo segundo.

Consideremos nuevamente la ecuación maestra en el continuo que caracteriza la evolución temporal de la probabilidad asociada a una configuración C ,

$$\begin{aligned} \partial_t P_t(C) = & \sum_a \int_R d\eta f(\eta) \int d\mathbf{r} \\ & \times \{W[C^{\eta ra} \rightarrow C]P_t(C^{\eta ra}) - W[C \rightarrow C^{\eta ra}]P_t(C)\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Recordemos que

$$C^{\eta ra} = \{\phi(\mathbf{x}) + \eta\varepsilon \nabla_{\mathbf{x}_a} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r})\}_{\mathbf{x} \in T^d}, \quad (5.3)$$

y que las probabilidades de transición son tales que

$$W[C \rightarrow C^{\eta ra}] = D(H(C^{\eta ra}) - H(C) + H_E(C \rightarrow C^{\eta ra})), \quad (5.4)$$

con

$$H_E(C \rightarrow C^{\eta ra}) = \eta \mathbf{a} \cdot \mathbf{E}(1 - \phi(\mathbf{r})^2) + O(\varepsilon). \quad (5.5)$$

El cálculo se repite ahora de forma idéntica a la del capítulo dos hasta (2.28), después del recuento dimensional con $\sigma = 1$:

$$\begin{aligned} \partial_t \phi = & -\frac{e(0)}{2} \left[\Delta_{\perp}^2 \phi + \Delta_{\perp} \Delta_{\parallel} \phi - b^{-2} \tau \Delta_{\perp} \phi - b^{d-4} \frac{g}{6} \Delta_{\perp} \phi^3 \right] + \\ & + h'(E) \left[\Delta_{\perp} \Delta_{\parallel} \phi + \Delta_{\parallel}^2 \phi - b^{-2} \tau \Delta_{\parallel} \phi - b^{d-4} \frac{g}{6} \Delta_{\parallel} \phi^3 - b^{(d-8)/2} E \nabla_{\parallel} \phi^2 \right] + \\ & + h''(E) \left[b^{(d-4)/2} \tau^2 \nabla_{\parallel} (\nabla_{\parallel} \phi)^2 + b^{d-4} \frac{2}{3} \tau E \Delta_{\parallel} \phi^3 + b^{3(d-4)/2} E^2 \nabla_{\parallel} \phi^4 \right] - \\ & - b^{(5d-16)/2} E^3 \frac{h'''(E)}{6} \nabla_{\parallel} \phi^6 + e(0)^{1/2} \sum_{\perp} \nabla_{\perp} \zeta_{\perp} + e(E)^{1/2} \nabla_{\parallel} \zeta_{\parallel}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Es a partir de este momento cuando hay que realizar los promedios sobre el campo eléctrico, del tipo $E^m h^{(n)}$ además de $\sqrt{\varepsilon(E)}$. Como consecuencia de la simetría de $p[E(\mathbf{x}, t)]$ y de las integraciones sobre η , los promedios con $m + n$ par son nulos, mientras que el resto da lugar a los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &\equiv \int dE p[E] h'(E), \\
\gamma_2 &\equiv \int dE p[E] E h''(E), \\
\gamma_3 &\equiv \int dE p[E] \sqrt{e(E)}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

La ecuación de Langevin se puede entonces escribir como

$$\begin{aligned}
\partial_t \phi = & -\frac{e(0)}{2} \sum_{\perp} \nabla_{\perp}^4 \phi + \gamma_1 \Delta_{\parallel}^2 \phi + \left(\gamma_1 - \frac{e(0)}{2}\right) \Delta_{\perp} \Delta_{\parallel} \phi + \frac{e(0)}{2} \tau \Delta_{\perp} \phi - \tau \gamma_1 \Delta_{\parallel} \phi \\
& + \frac{e(0)}{2} \frac{g}{3!} \Delta_{\perp} \phi^3 + \frac{2}{3} \tau (\gamma_2 - \gamma_1) D_{\parallel} \phi^3 + \sqrt{e(0)} \sum_{\perp} \nabla_{\perp} \zeta_{\perp} + \gamma_3 \nabla_{\parallel} \zeta_{\parallel}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Hemos derivado, por lo tanto, en una ecuación completamente anisotrópica, es decir, con todos los operadores gradientes descompuestos en componentes paralelas y transversales a \mathbf{E} . Hay que advertir que (5.8) es la ecuación de Langevin asociada al RDLG con campo externo finito. Como en el DLG, la situación es totalmente distinta si consideramos campos eléctricos infinitos. En efecto, pensemos en la distribución $p[E]$ más simple, a saber, la bimodal $\frac{1}{2}[\delta(E + E_o) + \delta(E - E_o)]$, y hagamos el límite $E_o \rightarrow \infty$. En estas circunstancias se comprueba fácilmente que los coeficientes γ_i se anulan, de resultas de lo cual (5.8) se simplifica hasta coincidir con (2.29), la ecuación de Langevin asociada al DLG con campo infinito. En conclusión, podemos afirmar que el RDLG y el DLG, sometidos ambos a la acción de un campo eléctrico infinito, pertenecen a la misma clase de universalidad. No debería sorprender este resultado porque en el caso $E = \infty$ ya hemos comprobado que en el DLG la corriente no contribuye a las propiedades críticas. En el RDLG, dicha corriente no existe siquiera.

5.2 El modelo de dos temperaturas

El modelo de *dos temperaturas* [Gar90b, Che] consiste en un gas reticular con condiciones de contorno periódicas. Las configuraciones evolucionan en el tiempo mediante mecanismos de intercambio tipo partícula-hueco de acuerdo con las siguientes reglas:

si el vector \mathbf{a} con origen en la partícula y extremo en el hueco pertenece a un cierto espacio n -dimensional, digamos el subespacio *paralelo*, entonces el intercambio está controlado por la probabilidad de transición por unidad de tiempo $D(\Delta H/T_{\parallel})$. Por otro lado, si \mathbf{a} pertenece al subespacio *transversal*, entonces el intercambio se produce a temperatura T_{\perp} . Naturalmente, en última instancia cogeremos $n = 1$. Si $T_{\parallel} = T_{\perp}$, entonces el modelo se reduce al gas reticular de equilibrio. En tanto que $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$, el equilibrio termodinámico es imposible porque se crea un flujo constante de energía desde la fuente a temperatura más alta hacia el baño de menor temperatura. Se sabe que para densidad $1/2$ este sistema presenta un cambio de fase de segundo orden desde un estado desordenado a otro con segregación de fases. Las configuraciones ordenadas características son visualmente indistinguibles de las del DLG y el RDLG. La conexión con el RDLG se puede comprobar que es estrecha porque comparten exactamente las mismas simetrías. Es más, con la elección $T_{\parallel} = \infty$, que corresponde a saltos de partículas completamente al azar en el subespacio paralelo y sujetos sólo a la ligadura de la exclusión de volumen, se obtiene una situación idéntica a un RDLG con $E_o = \infty$. La única diferencia es un factor global, dado que los saltos contra el campo sólo se intentan la mitad de las veces. Queda ahora claro por qué omitimos la discusión de los resultados de simulación del RDLG en su momento. La inmensa mayoría de las simulaciones Monte Carlo del RDLG y del modelo de dos temperaturas se han re-alizado con E_o y T_{\parallel} ambos infinitos, y los resultados de uno se suponen válidos para el otro. En cuanto a la construcción de una ecuación de Langevin para el modelo de dos temperaturas, todos los argumentos que se usaron para el RDLG se pueden aplicar aquí sin variación y con idéntico resultado. La presencia de $\tau_{\parallel} \neq \tau_{\perp}$ se interpreta aquí como la consecuencia natural de $T_{\parallel} \neq T_{\perp}$. Finalmente, dado que en dichos argumentos no influye que E_o o T_{\parallel} sean finitos o infinitos, se considera que su magnitud no influye en el problema.

Así pues, los resultados teóricos para el modelo de dos temperaturas predicen un exponente $\beta \approx 1/3$. Los estudios de simulación de las propiedades críticas muestran $\beta = 0.235$ [Che], de donde los autores concluyeron que el dos temperaturas pertenecía a la clase de universalidad del gas reticular en equilibrio ($\beta = 1/8$). Un análisis posterior

[Pra] ha sugerido la necesidad de analizar los datos Monte Carlo con métodos de tamaño finito anisotrópicos, y cuyos resultados son coherentes con $\beta = 0.33$, $\nu = 0.60$ y $\eta = 0.2$ y se ajustan razonablemente bien con los teóricos.

Procedemos ahora a elaborar una teoría continua para el modelo de dos temperaturas siguiendo las líneas maestras de la derivación de la ecuación de Langevin del DLG o del RDLG. El punto de partida es nuevamente la ecuación maestra en el continuo (5.3) junto con (5.3). Pero las probabilidades de transición son ahora $W[C \rightarrow C'] = D(H(C') - H(C))$, donde $H(C)$ es el hamiltoniano de Landau-Ginzburg con el coeficiente de ϕ^2 , τ , dependiente de \mathbf{a} . Si \mathbf{a} pertenece al espacio transversal entonces $\tau = \tau_{\perp}$, y $\tau = \tau_{\parallel}$ en caso contrario. Dado que estamos interesados inicialmente en el caso $\tau_{\parallel} \rightarrow \infty$, supondremos que los intercambios partícula-hueco en el subespacio paralelo están regidos por

$$H = \Omega^d \frac{\tau_{\parallel}}{2} \int d\mathbf{x} \phi^2(\mathbf{x}). \quad (5.9)$$

La evolución en el subespacio transversal está sujeta simplemente a

$$H(C) = \Omega^d \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{\tau_{\perp}}{2} \phi^2 + \frac{g}{4!} \phi^4 \right], \quad (5.10)$$

De forma que es conveniente separar (5.3) en dos partes, cada una de ellas una suma sobre cada uno de los subespacios. Después se siguen los mismos pasos que en el capítulo dos, esto es, el desarrollo de ΔH y $P_t(C^{\eta \mathbf{r}^a})$ alrededor de C . El cálculo es directo: el caso $a \in \perp$ (en notación simbólica) lleva al mismo resultado que en el capítulo dos, mientras que si $a \in \parallel$ se obtiene $\Delta H = -\eta \tau_{\parallel} \nabla_{\mathbf{r}_a}$. Seguidamente, se puede hallar fácilmente la siguiente ecuación de Fokker-Planck:

$$\begin{aligned} \partial_t P_t(C) = & \sum_{a \in \perp} \int d\mathbf{r} \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{r})} \right) \left\{ \varepsilon h(\lambda_a) P_t(C) + \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon^2}{2} e(\lambda_a) \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{r})} \right) P_t(C) \right\} + \\ & + \sum_{a \in \parallel} \int \frac{\varepsilon^2}{2} e(\tau_{\parallel} \nabla_{\mathbf{r}_a} \phi) \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{r})} \right)^2 P_t(C). \end{aligned} \quad (5.11)$$

En el caso límite $\tau_{\parallel} \rightarrow \infty$ su ecuación de Langevin estocásticamente equivalente es

$$\partial_t \phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{a \in \perp} \nabla_{\mathbf{r}_a} \left[h(\lambda_a) + e(\lambda_a)^{1/2} \zeta_a(\mathbf{r}, t) \right] + \frac{\sqrt{e(0)}}{2} \sum_{a \in \parallel} \nabla_{\mathbf{r}_a} \zeta_a. \quad (5.12)$$

Finalmente, mediante análisis dimensional y después de restringirnos a un espacio paralelo unidimensional, suponiendo nuevamente que $\sigma = 1$ porque sólo es necesario considerar una longitud de correlación, se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned} \partial_t \phi = & \frac{1}{2} e(0) \left[-\Delta_{\perp} \Delta_{\parallel} \phi - \Delta_{\perp}^2 \phi + \tau \Delta_{\perp} \phi + \frac{g}{6} \Delta_{\perp} \phi^3 \right] + \\ & + \sqrt{e(0)} \sum_{\perp} \nabla_{\perp} \zeta_{\perp}(\mathbf{r}, t) + \sqrt{\frac{e(0)}{2}} \nabla_{\parallel} \zeta_{\parallel}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (5.13)$$

en definitiva, la ecuación del DLG con campo infinito.

No se requiere esfuerzo adicional alguno para estudiar el caso T_{\parallel} finito. De nuevo se separa (5.3) en dos partes, pero ahora consideramos la expresión completa del hamiltoniano y no (5.9). El resto del cálculo se repite de forma exacta. Recordando que en el recuento dimensional $z = 4$, $\sigma = 1$ y $\delta = (d - 2)/2$, la expresión resultante es

$$\partial_t \phi = \frac{e(0)}{2} \left[\Delta^2 \phi + (\tau_{\perp} \Delta_{\perp} + \tau_{\parallel} \Delta_{\parallel}) \phi + \frac{g}{3!} \Delta \phi^3 \right] + \sqrt{e(0)} \sum_a \nabla_{\mathbf{r}_a} \zeta_a(\mathbf{r}, t). \quad (5.14)$$

A pesar del hecho de que la anisotropía sólo está presente en las masas, cabe esperar anisotropías más generales. Un argumento que apoya esta idea es el siguiente: la elección $\sigma = 1$ implica isotropía simplemente en campo medio. Ya hemos visto en la renormalización de la nueva ecuación del DLG con arrastre infinito que, a pesar de que el “scaling” es isotrópico inicialmente, a orden de 2 “loops” se generan anisotropías en la renormalización. De igual manera, no se puede descartar que el modelo de dos temperaturas quedase mejor descrito mediante una extensión de (5.14) con anisotropía en todos los coeficientes. Esto nos lleva a la ecuación de Langevin que acabamos de deducir en la sección anterior para el RDLG en presencia de un campo finito.

En resumen, el RDLG con campo eléctrico infinito, el DLG también con $E = \infty$ y el modelo de dos temperaturas con $T_{\parallel} = \infty$ pertenecen los tres a la misma clase de

universalidad. Por otro lado, el RDLG con E finito y el modelo de dos temperaturas con $T_{\parallel} < \infty$ pertenecen a su vez a la misma clase de universalidad, distinta en principio de la del DLG con arrastre finito.

5.3 El modelo de los dos planos

Dirigimos ahora nuestra atención hacia una generalización del DLG. Consideremos un par de redes bidimensionales, cuadradas, disjuntas y adyacentes, es decir, una de ellas situada “encima” de la otra. Cada red es una copia de un DLG y ambas están acopladas al mismo baño térmico y al mismo campo eléctrico externo. No hay interacción entre partículas situadas en distintas redes, de manera que los intercambios dentro de una misma red se producen como si la otra no existiera. Sin embargo, supondremos que las partículas pueden saltar a la posición vecina próxima de la red adyacente, con probabilidades de transición exclusivamente determinadas por las energías locales de cada plano.

Las motivaciones para estudiar el modelo de los dos planos son de diversa índole. Por una parte, el modelo muestra interés práctico por su utilidad en la física de conductores iónicos rápidos y compuestos con capas intercaladas [Rub]. Desde un punto de vista estrictamente teórico las razones son varias. Por un lado permite estudiar la influencia de la dimensión en las propiedades críticas, considerando que el modelo de los dos planos es una interpolación entre un sistema bidimensional y otro tridimensional. Por otro lado, para estudiar las propiedades críticas del DLG es necesario fijar la densidad global a $1/2$, como consecuencia de lo cual aparecen dos interfases por debajo de la temperatura crítica. Estas interfases presentan propiedades muy diferentes a la de las fases puras, y condicionan fuertemente el comportamiento del sistema a la vez que complican seriamente su análisis. Motivaciones aparte, el modelo es interesante de por sí, como tendremos ocasión de comprobar seguidamente, tras recopilar los resultados de simulación.

Comenzamos resumiendo el caso de equilibrio, $\mathbf{E} = 0$. Usando redes 100×100 , se

demuestra en [Ach96] que, cuando $\rho = 1/2$, se produce un cambio de fase de segundo orden de la clase de universalidad de Ising. Debido a que no hay interacción entre los dos planos, la fase ordenada consiste en una segregación entre redes; un plano contiene una fase rica en partículas mientras que la del otro está enrarecida. En el caso límite $T = 0$, un plano está completamente lleno y el otro vacío. Claramente, esta configuración minimiza la energía libre porque no existen interfases. Cuando la densidad global no es 0.5, en uno de los planos se forma un agregado denso en equilibrio con una fase enrarecida —una gota líquida en un medio gaseoso, digamos— mientras que el otro plano sólo contiene gas. En este caso el cambio de fase es de primer orden. Ejemplos de lo que acabamos de decir se pueden ver en la figura (5.1). Antes de pasar a resumir el caso de no-equilibrio $E \neq 0$, comentamos la particularidad de que el mecanismo de evolución de este sistema no es el lento proceso de difusión. El grado de libertad extra que supone que una partícula pueda pasar a la red adyacente permite que los tiempos de simulación necesarios para alcanzar el estado de equilibrio sean significativamente más cortos que los de los gases reticulares.

Cuando se conecta el campo, sorprendentemente aparecen dos cambios de fase en estudios de simulación con campo infinito [Ach95]. Primeramente, al disminuir la temperatura el sistema se ordena dando lugar a una fase con una banda rica en partículas en cada plano. Obsérvese en las figuras (5.2) y (5.3) que los dos planos presentan el mismo aspecto, y que a su vez cada uno de ellos por separado parece haber sufrido la transición propia de un DLG. Llamaremos $T'(\rho)$ a la temperatura asociada a esta transición, que es de primer orden si $\rho \neq 1/2$ y de segundo si $\rho = 1/2$, con los mismos exponentes en este último caso que los propios del la del DLG. Nótese que la existencia de planos inhomogéneos implica que el coste energético propio de las interfases parece no jugar ningún papel en el estado ordenado. Disminuyendo aún más la temperatura surge una segunda transición por debajo de $T''(\rho)$. El estado con bandas ricas en partículas se vuelve inestable y da lugar a dos planos homogéneos con diferente densidad cuando $\rho = 0.5$. Es decir, reaparece la fase característica del modelo de dos planos en equilibrio. Cuando $\rho \neq 0.5$, uno de los dos planos queda lleno homogéneamente de gas mientras que el otro contiene una banda líquida en equilibrio

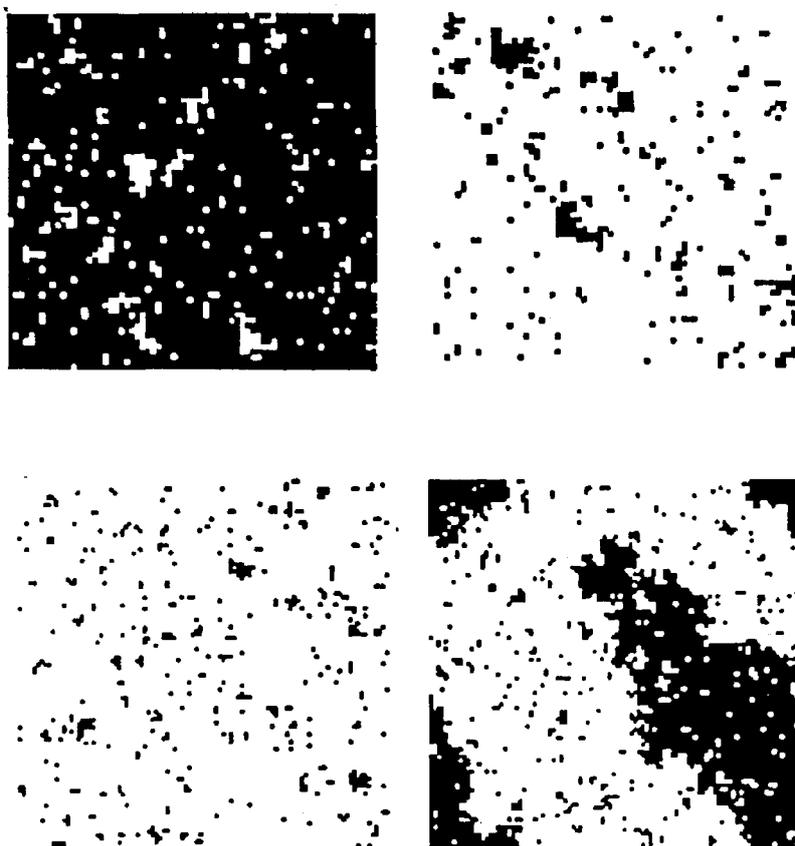


Figura 5.1: Configuraciones Monte Carlo típicas del modelo de los dos planos con $E = 0$ (equilibrio). A la izquierda, $\rho = 1/2$ y $T < T_c$. A la derecha $\rho = 0.2$ y T por debajo de la temperatura de segregación a esa densidad. Tomado de [Mar98b].

con gas, como puede apreciarse en las figuras (5.3) y (5.3). La naturaleza de esta segunda transición depende de la dinámica que se escoja y del valor del campo E . Esto se ha comprobado tanto en campo medio dinámico [Alo] como en Monte Carlo [Mar96]. En concreto se encuentra un punto tricrítico cuando $E = E_c \approx 2$ y la dinámica es la de Metropolis. Esto implica que la transición de fase es discontinua para campos eléctricos lo suficientemente grandes, como se observa en simulación Monte Carlo), pero continua para lo suficientemente pequeños. Además, todo parece indicar que este cambio de fase cuando $E < E_c$ pertenece a la clase de universalidad de Ising. Sin embargo, no existe dicho punto tricrítico cuando la dinámica es la de Kawasaki, por

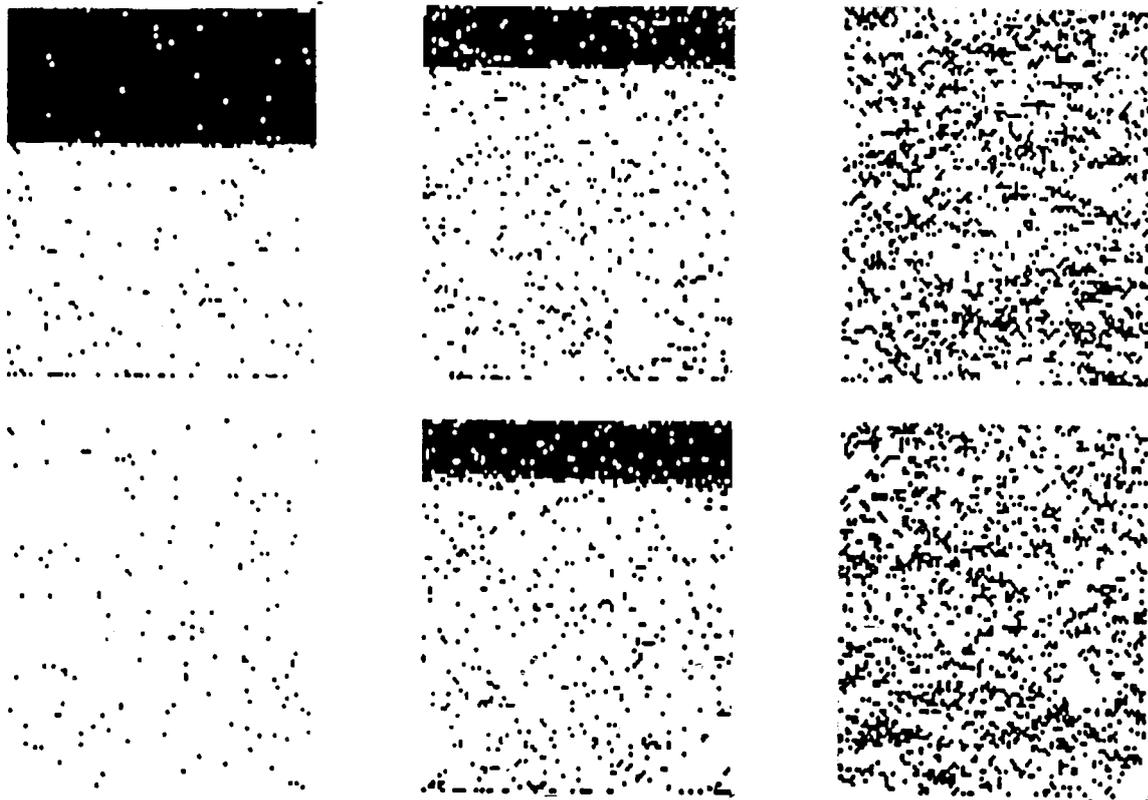
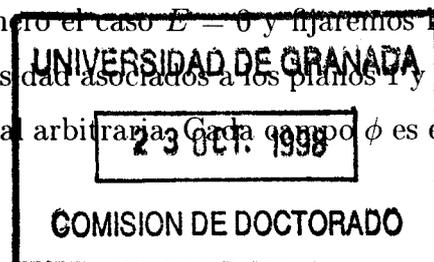


Figura 5.2: Estados estacionarios Monte Carlo típicos del modelo de los dos planos. El campo actúa horizontalmente y es de magnitud infinita. La densidad es $\varrho = 0.2$ y las temperaturas, de izquierda a derecha, se corresponden a $T > T'(0.2)$, $T'(0,2) > T > T''(0.2)$ y $T < T''(0.2)$ respectivamente. Tomado de [Mar98b].

ejemplo, caso éste en el que el segundo cambio de fase es de primer orden para cualquier valor del campo externo.

Antes de pasar a la descripción continua del modelo de los dos planos remitimos al lector interesado a [Hil], donde podrá encontrar una discusión acerca del origen de estas dos transiciones extendiendo el modelo de manera que incluya interacciones entre planos.

Como en ocasiones anteriores, consideramos primero el caso $E = 0$ y fijaremos la notación. Llamaremos $\phi_1(\mathbf{r})$ y $\phi_2(\mathbf{r})$ a los campos de densidad asociados a los planos 1 y 2 respectivamente, y $C \equiv \{\phi_1, \phi_2\}$ a una densidad global arbitraria. Cada campo ϕ es el



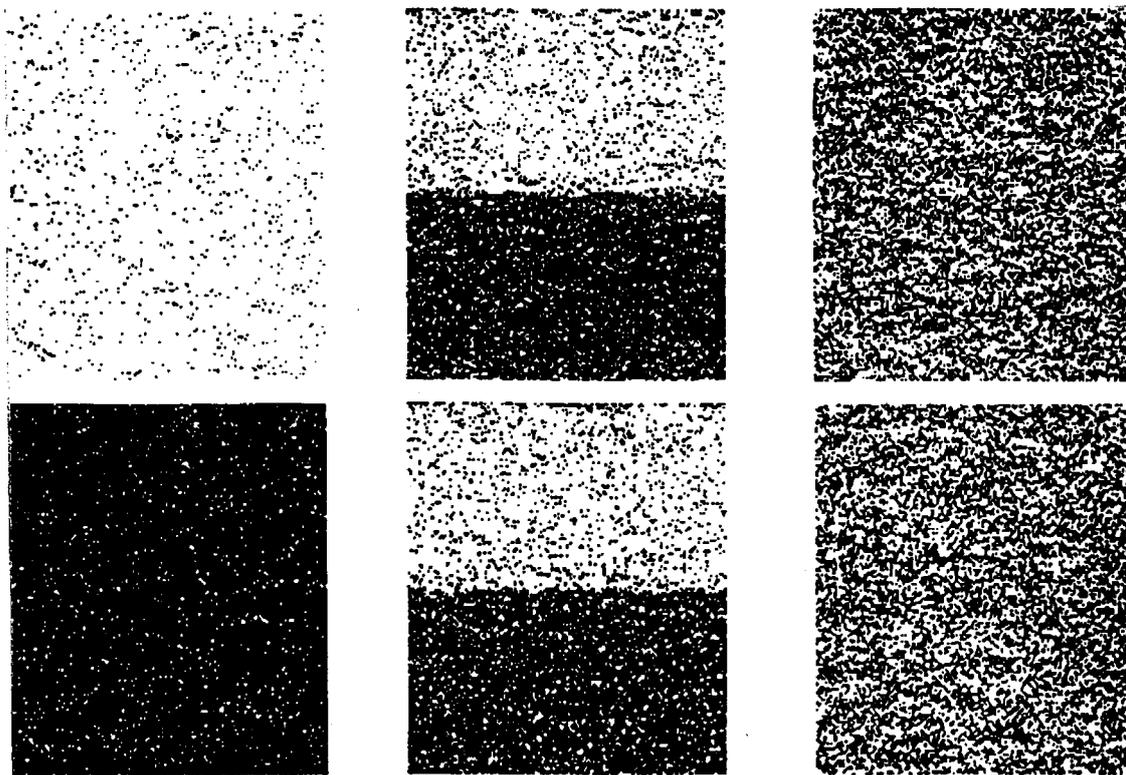


Figura 5.3: Estados estacionarios Monte Carlo típicos del modelo de los dos planos. El campo actúa horizontalmente y es de magnitud infinita. La densidad es 0.5 y las temperaturas, de izquierda a derecha, son $T > T'(0.5)$, $T'(0.5) > T > T''(0.5)$ y $T < T''(0.5)$ respectivamente. Tomado de [Mar98b].

resultado de un proceso de promedio sobre cajas análogo al descrito en el capítulo dos. Mediante $C_i^{\eta\mathbf{r}\mathbf{a}}$ denotaremos a la configuración que se obtiene después de efectuar un intercambio de magnitud $\eta\varepsilon$ con un “vecino infinitesimal” en la dirección \mathbf{a} en el plano i . Los símbolos η y ε tienen el mismo significado que en el capítulo dos, y el intercambio con un vecino infinitesimal el mismo sentido que allí se le dio. Los intercambios entre planos, que darán lugar a configuraciones que llamaremos $C^{\eta\mathbf{r}}$, provocan un incremento de densidad $\eta\varepsilon$ en el punto \mathbf{r} de una de las redes y una disminución de igual magnitud en el punto equivalente de la otra. En concreto,

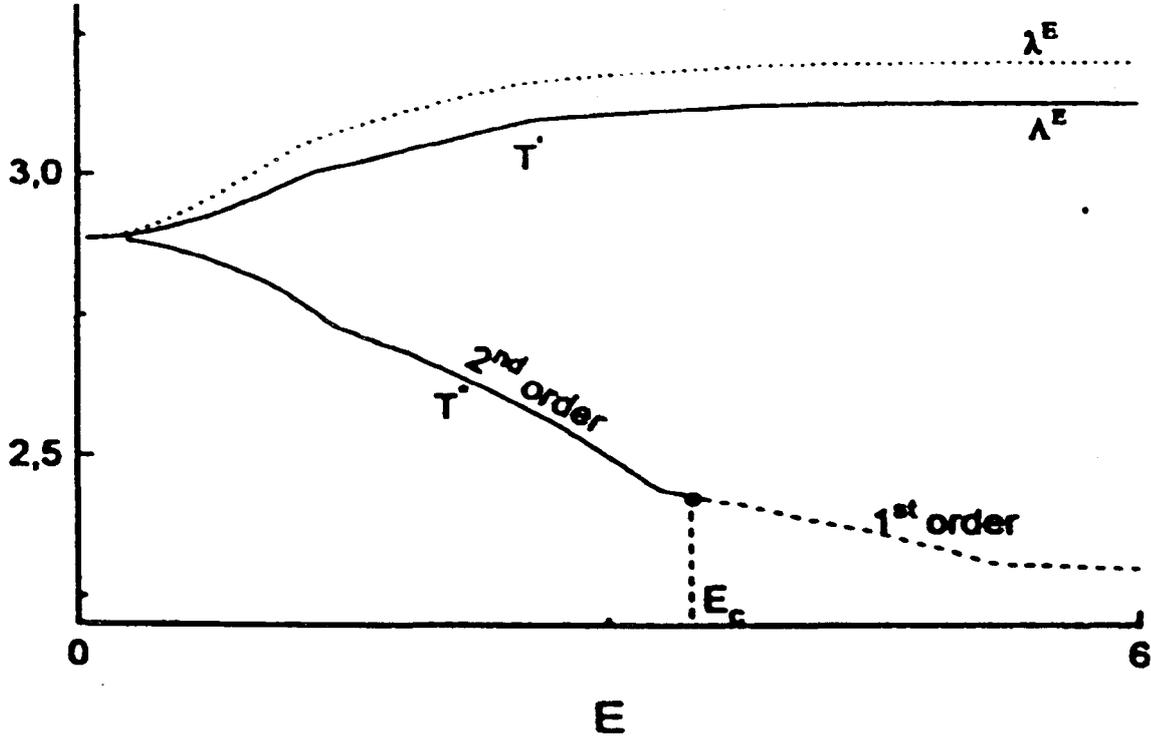


Figura 5.4: Diagrama de las fases del modelo de los dos planos según se desprende de una aproximación de campo medio dinámico con dinámica de Metropolis. La curva de puntos llamada λ_E es la del DLG, y la inmediatamente inferior a la primera transición del modelo de los dos planos. Tomado de [Alo].

$$\begin{aligned}
 C_1^{\eta ra} &= \{ \phi_1(\mathbf{x}) + \varepsilon \eta \nabla_{\mathbf{x}_a} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}), \phi_2(\mathbf{x}) \}, \\
 C_2^{\eta ra} &= \{ \phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}) + \varepsilon \eta \nabla_{\mathbf{x}_a} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \}, \\
 C^{\eta r} &= \{ \phi_1(\mathbf{x}) + \varepsilon \eta \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}), \phi_2(\mathbf{x}) - \varepsilon \eta \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \}.
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Postulamos a continuación la ecuación maestra en el continuo, separando los procesos de intercambio entre planos de los que suceden en una misma red:

$$\partial_t P_t(C) = \sum_a \int d\mathbf{r} d\eta f(\eta) \{ W[C_1^{\eta ra} \rightarrow C] P_t(C_1^{\eta ra}) - W[C \rightarrow C_1^{\eta ra}] P_t(C) +$$

$$\begin{aligned}
& +W[C_2^{\eta_{ra}} \rightarrow C]P_t(C_2^{\eta_{ra}}) - W[C \rightarrow C_2^{\eta_{ra}}]P_t(C) \} + \\
& + \int d\mathbf{r} d\eta f(\eta) \{W[C^{\eta,r} \rightarrow C]P_t(C^{\eta,r}) - W[C \rightarrow C^{\eta,r}]P_t(C)\}.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

La notación aquí coincide con la que se empleó en el segundo capítulo, es decir, $W[C \rightarrow C'] = D(H(C') - H(C))$; como las dos redes están desacopladas, el hamiltoniano $H(C)$ es la suma de hamiltonianos tipo Landau-Ginzburg de cada plano,

$$H(C) = \varepsilon^{-1} \sum_{i=1}^2 \int d\mathbf{r} \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi_i(\mathbf{r}))^2 + \frac{\tau}{2} \phi_i^2 + \frac{g}{4!} \phi_i^4 \right]. \tag{5.17}$$

El cálculo conducente a una ecuación de Fokker-Planck se lleva ahora a cabo como ya es habitual, desarrollando $H(C_i^{\eta_{ra}})$, $H(C^{\eta,r})$, $P_t(C_i^{\eta_{ra}})$ y $P_t(C^{\eta,r})$ alrededor de C , y posteriormente las funciones D hasta orden ε . La única novedad está en el término de evolución *entre* planos. El resultado final es

$$\begin{aligned}
\partial_t P_t(C) = & \sum_{i=1}^2 \sum_a \int d\mathbf{r} \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta \phi_i(\mathbf{r})} \right) \left\{ \varepsilon h(\lambda_a^{(i)}) P_t(C) + \right. \\
& \left. + \frac{\varepsilon^2}{2} e(\lambda_a^{(i)}) \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta \phi_i(\mathbf{r})} \right) P_t(C) \right\} + \\
& + \int d\mathbf{r} \left(\nabla_{12} \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{r})} \right) \left\{ \varepsilon h(\lambda_{12}) P_t(C) + \frac{\varepsilon^2}{2} e(\lambda_{12}) \left(\nabla_{12} \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{r})} \right) P_t(C) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

El primer término de esta ecuación modela dos gases reticulares desacoplados, mientras que el segundo es una versión “discreta” del primero que refleja los intercambios entre planos. Por lo tanto, $\lambda_a^{(i)}$ tiene el mismo significado que en el capítulo dos pero restringido al plano i , es decir,

$$\lambda_a^{(i)} = -\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta H}{\delta \phi_i(\mathbf{r})}.$$

Asimismo, las funciones h y e también se definen de forma idéntica, a saber:

$$\begin{aligned}
h(x) &= \int_R d\eta f(\eta) \eta D(\eta x), \\
e(x) &= \int_R d\eta f(\eta) \eta^2 D(\eta x).
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Con $\nabla_{12} \frac{\delta}{\delta\phi}$ simplemente denotamos al operador

$$\frac{\delta}{\delta\phi_1(\mathbf{r})} - \frac{\delta}{\delta\phi_2(\mathbf{r})},$$

Nuevamente, la ecuación de Fokker-Planck contiene información dinámica a través de las funciones h y e , información que se hubiera perdido de no anteponer el factor ε^{-1} delante del hamiltoniano. Puede comprobarse que de haberlo hecho así la ecuación de Fokker-Planck hubiera resultado ser

$$\begin{aligned} \partial_t P_t(C) &= \sum_{i=1}^2 \sum_a \int d\mathbf{r} \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta\phi_i(\mathbf{r})} \right) \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta P_t(C)}{\delta\phi_i(\mathbf{r})} + P_t(C) \nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta H(C)}{\delta\phi_i(\mathbf{r})} \right\} + \\ &+ \int d\mathbf{r} \left(\nabla_{12} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{r})} \right) \left\{ \left(\nabla_{12} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{r})} \right) P_t(C) + P_t(C) \left(\nabla_{12} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{r})} \right) H(C) \right\}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

esto es, la suma de dos modelos B más un término de intercambio entre planos.

Añadiendo un campo eléctrico ahora, sólo hay que sustituir $\lambda_a^{(i)}$ por $\Lambda_a^{(i)}$ para tener en cuenta sus efectos. Por otro lado, en el apéndice al final de este capítulo se demuestra que la ecuación de Langevin equivalente a la Fokker-Planck

$$\begin{aligned} \partial_t P_t &= \sum_{a,i} \int d\mathbf{r} \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta\phi_i} \right) \left[P_t f_a^{(i)} + \frac{1}{2} \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta\phi_i} \right) (P_t e_a^{(i)}) \right] + \\ &+ \int d\mathbf{r} \left(\nabla_{12} \frac{\delta}{\delta\phi_i} \right) \left[P_t f_{12} + \frac{1}{2} \left(\nabla_{12} \frac{\delta}{\delta\phi_i} \right) (P_t e_{12}^2) \right] \end{aligned} \quad (5.21)$$

es

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_1 &= -f_{12}(\phi) - e_{12}(\phi, \mathbf{x}) \zeta(\mathbf{x}, t) + \sum_a \nabla_{\mathbf{r}_a} \left[f_a^{(1)}(\mathbf{x}, \phi) + e_a^{(1)}(\mathbf{x}, \phi) \zeta_a^{(1)}(\mathbf{x}, t) \right], \\ \partial_t \phi_2 &= +f_{12}(\phi) + e_{12}(\phi, \mathbf{x}) \zeta(\mathbf{x}, t) + \sum_a \nabla_{\mathbf{r}_a} \left[f_a^{(2)}(\mathbf{x}, \phi) + e_a^{(2)}(\mathbf{x}, \phi) \zeta_a^{(2)}(\mathbf{x}, t) \right] \end{aligned} \quad (5.22)$$

La identificación de términos es inmediata y la ecuación de Langevin resultante es igual a

$$\begin{aligned}
\partial_t \phi_1(\mathbf{r}) &= -\Gamma \lambda_{12} - \Gamma e(\lambda_{12})^{1/2} \zeta(\mathbf{r}, t) + \sum_a \nabla_{\mathbf{r}_a} \left[h(\Lambda_a^{(1)}) + e(\Lambda_a^{(1)})^{1/2} \zeta_a(\mathbf{r}, t) \right], \\
\partial_t \phi_2(\mathbf{r}) &= \Gamma \lambda_{12} + \Gamma e(\lambda_{12})^{1/2} \zeta(\mathbf{r}, t) + \sum_a \nabla_{\mathbf{r}_a} \left[h(\Lambda_a^{(2)}) + e(\Lambda_a^{(2)})^{1/2} \zeta_a(\mathbf{r}, t) \right].
\end{aligned}
\tag{5.23}$$

ζ y ζ_a son ruidos blancos gaussianos, y Γ es un coeficiente de transporte, que no resulta del cálculo, y que se introduce para modular la velocidad del mecanismo de evolución entre planos. Pretendemos reproducir a partir de (5.23) el diagrama de las fases que se obtiene en simulación para el modelo de los dos planos (5.4). Para ello, teniendo en cuenta la conservación de densidad, definimos los siguientes nuevos campos

$$m(\mathbf{x}) \equiv (\phi_1 + \phi_2)/2, \quad \varphi(\mathbf{x}) \equiv (\phi_1 - \phi_2)/2. \tag{5.24}$$

La ecuación (5.23) se puede expresar fácilmente en términos de los campos m y φ . A partir de aquí el proceso a seguir consiste en hacer un recuento dimensional para simplificar las ecuaciones y mantener sólo aquellos términos que son relevantes para las propiedades críticas. Pero dado que hay presentes dos transiciones de fase y cada una de ellas tendrá su escala de observación característica, vamos a proceder a efectuar dos transformaciones de escala distintas. Escogidas adecuadamente, las ecuaciones resultantes deben describir un DLG y una transición de fase tipo Ising con un punto tricrítico, respectivamente. Consideremos pues las siguientes transformaciones de escala: $t \rightarrow \mu^{-z}$, $r \rightarrow r^{-\sigma}$, $\varphi \rightarrow \mu^\delta \varphi$ y $m \rightarrow \mu^\gamma m$. Antes de proseguir hay que identificar qué campo hay que considerar como parámetro de orden en cada caso. Para la rama superior del diagrama de las fases (5.4), la que corresponde a la transición tipo DLG, escogeremos $m(\mathbf{x})$ como el campo que se ordena. El motivo no es otro que escoger un campo conservado. El campo $\varphi(\mathbf{r})$, aunque fluctúa, no se ordena. Dicho esto, concretamos los valores de la transformación: $z = 4$, $\sigma = 1$, $\delta = d/2$ y $\gamma = (d - 2)/2$. Con estos valores de los exponentes, después de desprestigiar los términos irrelevantes en el sentido del grupo de renormalización, se puede comprobar que se llega simplemente a la ecuación (2.29) del capítulo dos. Por lo tanto, en esta escala, se recupera el comportamiento propio del DLG.

En lo que respecta a la segunda transición, consideraremos $\varphi(\mathbf{r})$ como un parámetro de orden que no se conserva. Proponemos entonces una teoría coherente en primera aproximación con $z = 2, \sigma = 1, \delta = (d - 2)/2$ y $\gamma = d/2$. Suprimiendo los términos que den una contribución despreciable en el límite $\mu \rightarrow 0$ resulta el siguiente par de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\partial_t \varphi &= \left(1 - \frac{\tau h'(0)}{2\Gamma}\right) \Delta_{\perp} \varphi + \left(1 - \frac{\tau h'(E)}{2\Gamma}\right) \Delta_{\parallel} \varphi - \mu^{-2} \tau \varphi - \mu^{d-4} \frac{g}{6} \varphi^3 \\
&\quad - \mu^{d-2} \frac{g}{2} \varphi m^2 - \sqrt{e(0)} \zeta, \\
\partial_t m &= \tau \left(h'(0) \Delta_{\perp} + h'(E) \Delta_{\parallel}\right) m - \mu^{d-2} \frac{g}{2} \left(h'(0) \Delta_{\perp} + h'(E) \Delta_{\parallel}\right) (\varphi^2 m) \\
&\quad - \mu^{(d-2)/2} E h'(E) \nabla_{\parallel} m^2 - \mu^{(d-6)/2} E h'(E) \nabla_{\parallel} \varphi^2 \\
&\quad + \sqrt{e(0)} \sum_{\perp} \nabla_{\perp} (\zeta_{\perp}^{(1)} + \zeta_{\perp}^{(2)}) + \sqrt{e(E)} \nabla_{\parallel} (\zeta_{\parallel}^{(1)} + \zeta_{\parallel}^{(2)}). \tag{5.25}
\end{aligned}$$

Debido a la presencia del campo eléctrico, que particulariza una de las direcciones de la red, todos los términos con gradiente resultan ser anisotrópicos. Existe un campo eléctrico \mathbf{E} que influye en el cambio de fase sólo a través de un campo auxiliar, $m(\mathbf{r})$, que no se ordena. La dimensión de E es en primera aproximación $(d-2)/2r$, a comparar con $(d-8)/2$ que se obtuvo en la sección 3 del capítulo dos. Por lo tanto, este término es ahora irrelevante comparado con $g\varphi^3$ que lo sustituye como vértice de la teoría. Es de destacar que esencialmente se obtiene el mismo conjunto de ecuaciones que en el estudio por medio de teoría de campos de los gases reticulares con arrastre e interacciones repulsivas ([Leu89]), así que nuestro análisis seguirá las mismas líneas que esta referencia. En concreto, se tiene que \mathbf{E} es irrelevante para el punto fijo gaussiano hasta que la dimensión es inferior a 2. Suponemos además que \mathbf{E} tampoco es relevante para el punto fijo de Wilson en tanto que $d < 4$, así que el único efecto del campo eléctrico es generar anisotropías. Conviene hacer notar que el campo $m(\mathbf{r})$ no se ordena, así que no es necesario tenerlo en consideración. Por lo tanto, las propiedades críticas del modelo de los dos planos vienen dadas por la ecuación de Langevin para el campo $\varphi(\mathbf{r})$ y caen en la clase de universalidad del modelo de Ising. Sin embargo, correcciones a orden $O(E^2)$ demuestran que g y τ decrecen hasta un cierto valor que depende de E . En última instancia, ambas pudieran anularse simultáneamente, mecanismo este que sería

el responsable de la aparición de un punto tricrítico. Así pues, en acuerdo cualitativo con las simulaciones, la transición sería tipo Ising hasta que el campo E alcanzase un valor umbral más allá del cual el cambio de fase sería discontinuo o de primer orden. Es interesante notar que este resultado está sujeto a las especificaciones dinámicas a través de las funciones h y e , tal y como se observa en simulación ([Alo, Mar96]).

Apéndice 5

A5.1 La ecuación de Langevin para el modelo de los dos planos

Sea una ecuación de Langevin de aspecto general

$$\begin{aligned}\partial_t \phi_1 &= -f_{12}(\phi) - e_{12}(\phi, \mathbf{x})\zeta(\mathbf{x}, t) + \sum_a \nabla_{\mathbf{r}_a} \left[f_a^{(1)}(\mathbf{x}, \phi) + e_a^{(1)}(\mathbf{x}, \phi)\zeta_a^{(1)}(\mathbf{x}, t) \right], \\ \partial_t \phi_2 &= +f_{12}(\phi) + e_{12}(\phi, \mathbf{x})\zeta(\mathbf{x}, t) + \sum_a \nabla_{\mathbf{r}_a} \left[f_a^{(2)}(\mathbf{x}, \phi) + e_a^{(2)}(\mathbf{x}, \phi)\zeta_a^{(2)}(\mathbf{x}, t) \right].\end{aligned}\tag{A5.1}$$

ζ y $\zeta_a^{(i)}$ son ruidos blancos gaussianos, y $\phi(\mathbf{x}, t) \equiv (\phi_1(\mathbf{x}, t), \phi_2(\mathbf{x}, t))$. Al igual que el apéndice del capítulo segundo, discretizamos en el tiempo la ecuación precedente y definimos $\epsilon = (t_N - t_0)/N$, donde t_N y t_0 son los valores inicial y final que se consideran. Nuevamente escogemos el cálculo de Ito ([Ito]) y escribimos

$$\begin{aligned}\phi_{n+1}^{(1)} &= \phi_n^{(1)} - \epsilon \left(-f_{12} + \sum_a \nabla_{\mathbf{r}_a} f_a^{(1)} \right) - e_{12}\zeta_n - \sum_a \nabla_{\mathbf{r}_a} \left(e_a^{(1)}\zeta_a^{(1)} \right), \\ \phi_{n+1}^{(2)} &= \phi_n^{(2)} - \epsilon \left(+f_{12} + \sum_a \nabla_{\mathbf{r}_a} f_a^{(2)} \right) + e_{12}\zeta_n - \sum_a \nabla_{\mathbf{r}_a} \left(e_a^{(2)}\zeta_a^{(2)} \right),\end{aligned}\tag{A5.2}$$

con el entendido de que las funciones $f_{12}, e_{12}, f_a^{(i)}, e_a^{(i)}$ y los ruidos están evaluados en valores discretos del tiempo. Nótese que además se ha absorbido un factor ϵ en los

ruidos. La probabilidad de que el sistema esté en la configuración $\phi_{n+1}(\mathbf{r})$ en el tiempo t_{n+1} viene entonces dada por el siguiente promedio

$$P_{n+1}(\phi_{n+1}) = \left\langle \int d\phi_n P_n(\phi_n) \delta(\mathbf{S}_n) \right\rangle_{(\zeta, \zeta)}. \quad (\text{A5.3})$$

Aquí las componentes del vector \mathbf{S}_n están definidas mediante

$$\begin{aligned} S_n^{(1)} &= \phi_{n+1}^{(1)} - \phi_n^{(1)} - \epsilon \left(-f_{12} + \sum_a \nabla_{\mathbf{r}_a} f_a^{(1)} \right) - e_{12} \zeta_n - \sum_a \nabla_{\mathbf{r}_a} \left(e_a^{(1)} \zeta_a^{(1)} \right), \\ S_n^{(2)} &= \underbrace{\phi_{n+1}^{(2)} - \phi_n^{(2)}}_{S_n^{(2)*}} - \underbrace{\epsilon \left(+f_{12} + \sum_a \nabla_{\mathbf{r}_a} f_a^{(2)} \right) + e_{12} \zeta_n - \sum_a \nabla_{\mathbf{r}_a} \left(e_a^{(2)} \zeta_a^{(2)} \right)}_{\Delta S_n^{(2)}} \end{aligned} \quad (\text{A5.4})$$

y $\delta(\mathbf{S}_n)$ es la delta de Dirac que implementa la ecuación de Langevin. Desarrollando,

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{S}_n) &= \delta(\mathbf{S}_n^*) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{1}{k!} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_k \times \\ &\quad \times \frac{\delta^k \delta(\mathbf{S}_n^*)}{\delta \phi_n^{(1)}(\mathbf{x}_1) \dots \delta \phi_n^{(1)}(\mathbf{x}_l) \delta \phi_n^{(2)}(\mathbf{x}_{l+1}) \dots \delta \phi_n^{(2)}(\mathbf{x}_k)} \Delta S_n^{(1)}(\mathbf{x}_1) \dots \Delta S_n^{(2)}(\mathbf{x}_k). \end{aligned}$$

Se completa el desarrollo hasta orden ϵ , tras lo cual, después de agrupar los términos adecuadamente, se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \partial_t P_t &= \sum_{a,i} \int d\mathbf{r} \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta \phi_i} \right) \left[P_t f_a^{(i)} + \frac{1}{2} \left(\nabla_{\mathbf{r}_a} \frac{\delta}{\delta \phi_i} \right) (P_t e_a^{(i)}) \right] + \\ &\quad + \int d\mathbf{r} \left(\nabla_{12} \frac{\delta}{\delta \phi_i} \right) \left[P_t f_{12} + \frac{1}{2} \left(\nabla_{12} \frac{\delta}{\delta \phi_i} \right) (P_t e_{12}^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A5.5})$$

Resumen y conclusiones

En esta memoria se ha presentado una nueva descripción continua de un modelo reticular fuera del equilibrio, el gas reticular con arrastre (DLG), y de otros tres modelos afines. A saber, el modelo de dos temperaturas, el DLG con campo eléctrico aleatorio y el DLG en dos planos. Todos ellos muestran transiciones de fase lejos del equilibrio, cuyo estudio es el principal objetivo de este trabajo.

En el primer capítulo se han introducido las especificaciones básicas que definen el DLG, así como las motivaciones de índole teórico-práctico que justifican su estudio. Posteriormente hemos ofrecido un resumen de resultados previos sobre el particular. En concreto, hemos sustanciado los que hacen referencia a simulaciones Monte Carlo para temperaturas por encima, debajo y alrededor de la temperatura crítica. En la región crítica, de particular interés para nosotros, hemos puesto de manifiesto la existencia de distintas corrientes de opinión acerca de la necesidad de considerar una o dos longitudes de correlación independientes, o acerca de si es el campo o la interfase el elemento relevante para entender las propiedades del sistema. No hay unanimidad a la hora de analizar los efectos de tamaño finito y, en consecuencia, se obtienen distintos valores de los exponentes críticos. En particular, $\beta \approx 1/3$ o $\beta = 1/2$ según se consideren una o dos longitudes características y, en cualquier caso, suponiendo campos eléctricos infinitos. También hemos comentado que en este punto existe confusión en la literatura, y que hay autores que afirman no reproducir los resultados de otros utilizando sus mismos métodos. El enfoque del DLG en términos de teoría de campos ocupa la segunda parte del primer capítulo. Hemos resumido con cierta extensión la propuesta de ecuación de Langevin de Leung y Cardy [Leu86], y de forma somera el análisis

de sus propiedades universales de Janssen y Schmittmann [Jan86]. Con la asunción de que hay dos longitudes características independientes y gracias a la presencia de una nueva simetría galileana, [Jan86] obtienen como resultado más representativo que $\beta = 1/2$. Este valor es exacto, es decir, no hay correcciones en el desarrollo en ε . La discusión siguiente justifica la necesidad buscar descripciones continuas diferentes de las actuales. A las discrepancias sobre el valor de los exponentes críticos o acerca de qué mecanismo es en realidad los responsable último de las características macroscópicas del sistema se añaden otras cuestiones de carácter más fundamental. Nos referimos al papel determinante que pueden jugar las probabilidades de transición por unidad de tiempo en el estado estacionario. Por otro lado, en la ecuación de Langevin postulada en [Leu86] se acepta tácitamente que a la suma de causas —la dinámica está controlada por (i) diferencias de energía interna determinadas por un hamiltoniano local y (ii) el campo eléctrico— le corresponde la suma de sus efectos —(i) Modelo B más (ii) término de corriente—. Es esta una hipótesis de linealidad en un escenario fuertemente no lineal. Finalmente, hemos concluido el capítulo proponiendo un método parcial para comprobar la equivalencia entre la teoría continua de [Leu86] y el DLG. Para ello hemos calculado la relación de Ward-Takahshi para las correlaciones asociada la simetría galileana, porque esta simetría es extraña al modelo microscópico. Queda para el futuro comprobar computacionalmente si dicha relación se satisface.

El segundo capítulo contiene el formalismo a emplear en nuestra derivación de una ecuación de Langevin para el DLG y los otros tres modelos relacionados antes comentados. En esencia, lo que se pretende es introducir los elementos básicos que marcan la evolución dinámica del DLG —las diferencias de energía entre configuraciones y el campo eléctrico— en la ecuación maestra y que sea el cálculo posterior el que dictamine sus consecuencias en la ecuación de Langevin y no antes. A tal efecto hemos postulado una ecuación maestra en el continuo y deducido a partir de ella una ecuación de Fokker-Planck tras un desarrollo de Kramers-Moyal. Un punto a destacar es la presencia en el hamiltoniano de Landau-Ginzburg de un factor residual del “coarse-graining” gracias al cual la dependencia en la dinámica no se pierde. De hecho, se mantiene en la ecuación de Langevin final. En el análisis de dicha ecuación en la región crítica,

despreciando los términos irrelevantes en primera aproximación (“power counting”), existe una gran libertad para escoger la escala de observación. Optando por transformaciones de escala anisotrópicas ($\sigma = 2$) hemos podido reproducir la ecuación de Langevin de [Leu86] pero con el valor añadido de que los coeficientes ya no son parámetros empíricos. Muy al contrario, tienen una dependencia clara en la dinámica original, gracias a lo cual es posible efectuar el límite $E \rightarrow \infty$ de forma exacta. Se puede demostrar que en este límite el equivalente mesoscópico del campo eléctrico, \mathcal{E} , se anula. Esto marca una diferencia notable con [Leu86, Jan86], donde se presupone que \mathcal{E} es no nulo cuando $E \rightarrow \infty$ y que la dependencia de \mathcal{E} en E es insustancial. El límite de campo externo infinito acarrea además otras consecuencias. Una de ellas es la aparición de incoherencias en las transformaciones de escala. Pero lo principal es que la ecuación de Langevin final que se obtiene es trivial, lejos de cualquier descripción realista del DLG. Esto induce a escoger la otra opción natural, $\sigma = 1$ o, equivalentemente, transformaciones de escala isotrópicas. Nuevamente es posible diferenciar varias situaciones: $E = 0$, $0 < E < \infty$ y $E = \infty$. En la primera de ellas se recupera el modelo B. La segunda y la tercera originan dos nuevas clases de universalidad caracterizadas por las dimensiones críticas $d_c = 8$ y $d_c = 4$ respectivamente. La conclusión fundamental es que hay que distinguir entre los casos $0 < E < \infty$ y $E = \infty$.

El capítulo tercero está dedicado al análisis numérico de la nueva ecuación de Langevin (2.22). En primer lugar hemos resuelto la ecuación determinista (sin ruido) en cada uno de los dos regímenes posibles, a saber, con campo eléctrico finito e infinito. Se muestran los estados estacionarios típicos y algunas configuraciones intermedias de la evolución, todas ellas similares a las que se tienen en simulación Monte Carlo. Nos hemos ocupado del problema de los triángulos. Recordemos que la evolución hacia el estado estacionario se produce por la fusión de dominios triangulares que, finalmente, conforman una banda de partículas paralela al campo. Estos triángulos apuntan en la dirección de \mathbf{E} o en la contraria según que la descripción se haga resolviendo la ecuación de Cahn-Hilliard modificada o mediante simulación Monte Carlo. No hemos conseguido dirimir la cuestión, por cuanto la orientación de los agregados triangulares que se muestran sigue también la dirección del campo eléctrico. No obstante, apuntamos

como factor importante las condiciones de contorno periódicas, si bien es claro que se hace necesario un estudio Monte Carlo cuidadoso de la formación de dichos dominios para abordar el problema con mayores posibilidades de éxito. Concluye este capítulo con un análisis breve de la conexión entre los tres regímenes, $E = 0$, $0 < E < \infty$ y $E = \infty$ (“cross over”). Hemos calculado el factor de estructura estacionario en dimensiones altas con el propósito de apreciar, desde el punto de vista de las correlaciones, las diferencias cualitativas que existen entre los casos de arrastre finito en infinito. Estas diferencias distan mucho de ser evidentes en simulación, debido posiblemente a que la diferencia entre $S(\mathbf{k}, E)$ y $S(\mathbf{k}, E = \infty)$ tiende a cero rápidamente con E . Es decir, las correlaciones son, de forma efectiva, las propias del caso $E = \infty$ incluso para valores del campo eléctrico no muy altos.

En el capítulo cuarto se aborda el cálculo de los exponentes críticos en el caso del DLG con $E = \infty$, que es la situación más interesante porque permite la comparación con las simulaciones. Para valores finitos del campo este cálculo tiene complicaciones extraordinarias como consecuencia de la presencia de un grupo de operadores peligrosamente irrelevantes en la ecuación de Langevin (2.28). Así pues, hemos hallado el funcional generador asociado a (2.29) e identificado las reglas de Feynman de la teoría. Después de localizar y eliminar las divergencias que aparecen en la teoría de perturbaciones, hemos calculado los exponentes críticos hasta orden uno en el desarrollo en el número de “loops”. El resultado a destacar es que $\beta = 1/2 + O(\varepsilon^2)$, pero con la siguiente puntualización. Es necesario ir hasta dos “loops” para que la anisotropía se muestre en los exponentes. De manera que en el siguiente orden de aproximación se espera no sólo un refinamiento de los valores numéricos de los exponentes, sino diferencias cualitativas importantes. Se muestran igualmente las líneas generales que debe seguir el cálculo a dos “loops”.

En el quinto y último capítulo se extiende la aplicación del formalismo del capítulo dos a tres modelos afines al DLG: el DLG con campo eléctrico aleatorio (RDLG), el modelo de dos temperaturas y el DLG en dos planos. La derivación de una ecuación de Langevin para los dos primeros modelos sigue fielmente la del capítulo dos para el DLG. Hemos obtenido que, nuevamente, hay que distinguir dos situaciones. Campos

eléctricos finitos en infinitos en el RDLG dan lugar a ecuaciones diferentes. Lo mismo ocurre en el modelo de dos temperaturas, donde hay que distinguir entre que la temperatura asociada a una de las direcciones de la red, pongamos por caso la paralela a un cierto eje, sea infinita o finita. Surge entonces el siguiente esquema de clasificación. El DLG con arrastre infinito, el RDLG con campo infinito y el modelo de dos temperaturas con $T_{\parallel} = \infty$ pertenecen a la misma clase de universalidad. El RDLG con campo finito y el modelo de dos temperaturas con $T_{\parallel} < \infty$ son miembros de una misma clase de universalidad, distinta de la anterior. El DLG con $0 < E < \infty$ es a su vez de otra clase diferente. Todo ello está en consonancia con los datos de simulación si se tiene en cuenta que, en su inmensa mayoría, sólo hacen referencia a campos y temperaturas infinitas, en cuyo caso $\beta \approx 1/3$ para el RDLG y el dos temperaturas, mientras que para el DLG con arrastre infinito también cabe $\beta = 1/3$ con los criterios que se apuntan en el capítulo uno. El DLG en dos planos, que carece de una teoría de campos establecida, permite estudiar la influencia de la geometría del sistema en las propiedades macroscópicas emergentes. Además, hace posible que la segregación de fases se produzca sin la presencia de interfase, lo que simplifica la situación y facilita la identificación de los factores relevantes. Hemos conseguido llegar a un par de ecuaciones de Langevin acopladas que caracterizan la evolución del sistema a partir de una ecuación maestra continua. El análisis de estas ecuaciones da cuenta de las dos transiciones de fase consecutivas por las que pasa el sistema al bajar la temperatura y que se obtienen en simulación: la primera de ellas tipo DLG, y la segunda de tipo Ising hasta un valor umbral del campo eléctrico por encima del cual es de primer orden. Este valor umbral depende de la dinámica microscópica. Comentamos, finalmente, que en principio se puede aplicar nuestro formalismo a otros muchos modelos, no necesariamente del mismo tipo de los tratados en este último capítulo.

Las contribuciones originales de esta memoria pueden encontrarse en:

- “A Langevin Equation for Driven Diffusive Systmes”, *Phys. Rev. E* 57, 752 (1998). Contiene esencialmente el capítulo dos.
- “Continuum Field Description of Driven Lattice Gases”, remitido a *J. Stat. Phys.* Capítulos 2 y 5.

- Los resultados correspondientes a los capítulos tercero y cuarto están en fase de redacción.

Bibliografía

- [Ach92] A. Achahbar, P.L. Garrido y J. Marro, *Phys. Lett. A* **172**, 29 (1992).
- [Ach95] A. Achahbar y J. Marro, *J. Stat. Phys.* **78**, 1493 (1995).
- [Ach96] A. Achahbar, P.L. Garrido y J. Marro, *Mol. Phys.* **88**, 1157 (1996).
- [Ale] F.J. Alexander, C.A. Laberge, J.L. Lebowitz y R.K.P. Zia, *J. Stat. Phys.* **82**, 1133 (1996).
- [Alo] J.J. Alonso, P.L. Garrido, J. Marro y A. Achahbar, *J. Phys. A* **28**, 4669 (1995).
- [Ami] D.J. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena*, World Scientific (1984).
- [Bar] A.L. Barabasi y H.E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth*, Cambridge University Press (1995).
- [Bat] J.B. Bates, J. Wang y N.J. Dudley, *Phys. Today*, julio (1982).
- [Bau] R. Bausch, H.K. Janssen y H. Wagner, *Z. Phys. B* **24**, 113 (1996).
- [vBe] H. van Beijeren y L.S. Shulman, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 806 (1984).
- [Bin] K. Binder y J.S. Wang, *J. Stat. Phys.* **55**, 87 (1989).
- [Bnn] J.J. Binney, N.J. Dowrick, A.J. Fisher y M.E.J. Newman, *The Theory of Critical Phenomena*, Oxford Science Publications (1992).
- [Boy] J.B. Boyce y B.A. Huberman, *Phys. Rep.* **51**, 189 (1979).

- [Bru] S.G. Brush, *Rev. Mod. Phys.* **39**, 883 (1967).
- [Cah] J.W. Cahn y J.E. Hilliard, *J. Chem. Phys.* **28**, 258 (1958).
- [Coo] H.E. Cook, *Acta Metall.* **18**, 297 (1970).
- [Che] Z. Cheng, P.L. Garrido, J.L. Lebowitz y J.L. Vallés, *Europhys. Lett.* **14**, 507 (1991).
- [Der] B. Derrida, M.R. Evans y D. Mukamel, *J. Stat. Phys.* **69**, 667 (1992).
- [Dic] R. Dickman, *Phys. Rev. A* **38**, 2588 (1988).
- [Die] W. Dieterich, P. Fulde y I. Peschel, *Adv. Phys.* **29**, 527 (1980).
- [dDo] C. de Dominicis y L. Peliti, *Phys. Rev. B* **18**, 353 (1978).
- [Dre] M.S. Dresselhaus y G. Dresselhaus, *Adv. Phys.* **30**, 139 (1981).
- [Eld] K. Elder, *Computers in Physics* . **7**, 27 (1993).
- [Eyk] G.L. Eyink, J. Lebowitz y H. Spohn, *J. Stat. Phys.* **83**, 385 (1996).
- [Fey] R.P. Feynman y A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, Nueva York (1965).
- [Gad] C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, Springer-Verlag, Berlín (1985).
- [Gar90a] P.L. Garrido, J. Marro y R. Dickman, *Ann. Phys.* **199**, 366 (1990).
- [Gar90b] P.L. Garrido, J.L. Lewowitz, C. Maes y H. Spohn, *Phys. Rev. A* **42**, 1954 (1990).
- [Gar98] P.L. Garrido, F. de los Santos y M. A. Muñoz, *Phys. Rev. E* **57**, 752 (1998).
- [Gel] S. Geller, *Solid Electrolytes, Topics in Applied Physics*, vol. 21, Springer, Heidelberg (1977); J. W. Perrman, *The Physics of Superionic Conductors and Electrode Materials*, Plenum, Nueva York (1983); M.B. Salamon, *Physics of Superionic Conductors*, Springer-Verlag, Berlín (1979).

- [Gla] R.J. Galuber, *J. Math. Phys.* **4**, 294 (1963).
- [Gli] J. Glimm y A. Jaffe, *Quantum Physics*, Springer-Verlag, Berlín (1987).
- [Gol] N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*, Addison-Wesley (1992).
- [Gra] R. Graham, *Z. Phys. B* **40**, 149 (1980).
- [Gri] G. Grinstein, J. Jayaprakash y Y. He, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2527 (1985).
- [Grd] I.S. Gradshteyn y I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press (1980).
- [dGr] S.R. de Groot y P. Mazur, *Non-equilibrium Thermodynamics*, Dover, Nueva York (1984).
- [Gun] J.D. Gunton, M. San Miguel y P.S. Sahni, en *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol. 8, editores C. Domb y J.L. Lebowitz, Academic Press, Nueva York (1985).
- [Hil] C.C. Hill, R.K.P. Zia y B. Schmittmann, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 514 (1996).
- [Hoh] P.C. Hohenberg y B.J. Halperin, *Rev. Mod. Phys.* **49**, 435 (1977).
- [Hwa91] K. Hwang, B. Schmittmann y R.K.P. Zia, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 326 (1991).
- [Hwa93] K. Hwang, B. Schmittmann y R.K.P. Zia, *Phys. Rev. E* **48**, 800 (1993).
- [Ito] K. Ito, *Mem. Amer. Math. Soc.* **4**, 288 (1951).
- [Itz] C. Itzykson y J.M. Drouffe, *Statistical Field Theory*, Cambridge University Press (1989).
- [Jae] H.M. Jaeger, S.R. Nagel y R.P. Behringer, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 1259 (1997).
- [Jan79] H.K. Janssen, *Dynamical Critical Phenomena and Related Topics*, Lectures Notes in Physics 104, pág. 25, Springer-Verlag (1979).

- [Jan86] H.K. Janssen y B. Schmittmann, *Z. Phys. B* **64**, 503 (1986).
- [Kad] L.P. Kadanoff, *Physics* **2**, 263 (1966).
- [vKa] N.G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North Holland (1981).
- [Kar] M. Kardar, G. Parisi y Y.C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 889 (1986).
- [Kat83] S. Katz, J.L. Lebowitz y H. Spohn, *Phys. Rev.* **B28**, 1655 (1983).
- [Kat84] S. Katz, J.L. Lebowitz y H. Spohn, *J. Stat. Phys.* **34**, 497 (1984).
- [Kaw] K. Kawasaki, en *Phase Transition and Critical Phenomena*, editores C. Domb y M.S. Green, volumen 2, Academic Press (1972).
- [Kor] G. Korniss, B. Schmittmann y R.K.P. Zia, *Europhys. Lett.* **32**, 49 (1995).
- [Kru] J. Krug y H. Spohn, *Solids far from Equilibrium: Growth, Morphology and Defects*, (ed. Godrèche), Cambridge University Press, Cambridge (1991).
- [Kub] R. Kubo, *Rep. Prog. Phys.* **29**, 255 (1966).
- [Lan] F. Langouche, D. Roekaerts y E. Tirapegui, *Functional Integration and Semi-classical Expansions*, D. Reidel Pub. Co., Dordrecht (1982).
- [LBe] M. Le Bellac, *Quantum and Statistical Field Theory*, Oxford Science Publications (1991).
- [Leu86] K.-t. Leung y J. Cardy, *J. Stat. Phys.* **44**, 567 (1986).
- [Leu88] K.-t. Leung, *J. Stat. Phys.* **50**, 405 (1988).
- [Leu89] K.-t. Leung, B. Schmittmann y R.K.P. Zia, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1772 (1989).
- [Leu90] K.-t. Leung, *J. Stat. Phys.* **61**, 345 (1990).
- [Leu91] K.-t. Leung, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 453 (1991)
- [Leu93] K.-t. Leung y R.K.P. Zia, *J. Phys. A* **26**, 1737 (1993).

- [Leu98] K.-t. Leung y J.S. Wang, *cond-mat//9805285*, 20 de mayo de 1998.
- [Ma73] S.-k Ma, *Rev. Mod. Phys.* **45**, 589 (1973).
- [Ma76] S.-k Ma, *The Modern Theory of Critical Phenomena*, Addison-Wesley (1976).
- [Mar85] J. Marro, J.L. Lebowitz, H. Spohn y M.H. Kalos, *J. Stat. Phys.* **38**, 725 (1985).
- [Mar87] J. Marro y J.L. Vallés, *J. Stat. Phys.* **49**, 121 (1987).
- [Mar96] J. Marro, A. Achahbar, P.L. Garrido y J.J. Alonso, *Phys. Rev. E* **53**, 6038 (1996).
- [Mar98a] J. Marro y A. Achahbar. *J. Stat. Phys.* **90**, 817 (1998).
- [Mar98b] J. Marro y R. Dickman, *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models*, Cambridge University Press, Cambridge (1998).
- [Mrt] P.C. Martin, E.D. Siggia y H.A. Rose, *Phys. Rev. A* **8**, 423 (1973).
- [dMa] A. de Masi, P. Ferrari y J. Lebowitz, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1947 (1985).
- [McW] B.M. McCoy y T.T. Wu, *The Two-Dimensional Ising Model*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts (1973).
- [Met] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller y E. Teller, *J. Chem. Phys.* **21**, 1087 (1953).
- [Nav] L. Navarro Veguillas, *Einstein, profeta y hereje*, Tusquets editores, Metatemas 21 (1990).
- [Oke] M. O'keeffe y B.G. Hyde, *Phil. Mag.* **33**, 219 (1976).
- [Ons] L. Onsager, *Phys. Rev.* **65**, 117 (1944).
- [Par] G. Parisi, *Statistical Field Theory*, Addison-Wesley (1988).
- [Pat] R.K. Pathria, *Statistical Mechanics*, Pergamon Press (1972).

- [Paw] R.F. Pawula, *Phys. Rev.* **162**, 186 (1967).
- [Pes] N.C. Pesheva, Y. Schnidman y R.K.P. Zia, *J. Stat. Phys.* **70**, 737 (1993).
- [Pra] E. Praestgaard, H. Larsen y R.K.P. Zia, *Europhys. Lett.*, **25** 447 (1994).
- [Ris] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*, Springer, Heidelberg (1989).
- [Rog] T.M. Rogers, K.R. Elder y R.C. Desai, *Phys. Rev. B* **37**, 9638 (1988).
- [Rub] M. Rubinstein, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1946 (1987).
- [dIS98a] F. de los Santos y P.L. Garrido, remitido a *J. Stat. Phys.*
- [Sal] M.B. Salomon, *Physics of Superionic Conductors*, Springer-Verlag, Berlín (1979).
- [Sch91] B. Schmittmann y R.K.P. Zia, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 357 (1991).
- [Sch92] B. Schmittmann, K. Hwang y R.K.P. Zia, *Europhys. Lett.* **19**, 19 (1992).
- [Sch93] B. Schmittmann, *Europhys. Lett.* **24**, 103 (1993).
- [Sch95] B. Schmittmann y R. K. P. Zia, *Statistical Mechanics of Driven Diffusive Systems, Phase Transitions and Critical Phenomena*, eds. C. Domb and J. Lebowitz, Academic, Londres (1995).
- [Sch96] B. Schmittmann y K.E. Bassler, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3581 (1996).
- [Sha] L.B. Shaw, B. Schmittmann y R.K.P. Zia, *cond-mat/9807057*.
- [Spi] F. Spitzer, *Adv. Math.* **5**, 246 (1970).
- [Spo] H. Spohn, *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*, Springer-Verlag, Berlín (1991).
- [Sta] H.E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, Oxford Science Publications (1971).

- [Str] R.L. Stratonovich, en *Topics in the Theory of Random Noise*, vol. 1, 16, Cambridge University Press (1989).
- [Suz] M. Suzuki, M. Katori y X. Hu, *J. Phys. Soc. Jpn.* **56**, 3092 (1987).
- [Val87] J.L. Vallés y J. Marro, *J. Stat. Phys.* **49**, 89 (1987).
- [Val89] J.L. Vallés, K.-t. Leung y R.K.P. Zia, *J. Stat. Phys.* **56**, 43 (1989).
- [Wan] J.S. Wang, *J. Stat. Phys.* **82**, 1409 (1996).
- [Wie] N. Wiener, *J. Math. and Phys.* **2**, 131 (1923); *Proc. London Math. Soc. Ser. 2* **2**, 454 (1924).
- [Wid] B. Widom, *J. Chem. Phys.* **43**, 3892 y 3898 (1965).
- [Wil71] K. Wilson, *Phys. Rev. B* **4**, 3174 (1971).
- [Wil74] K. Wilson y J. Kogut, *Phys. Rep. C* **5**, 75 (1974).
- [Wil83] K. Wilson, *Rev. Mod. Phys.* **55**, 583 (1983).
- [Wil79] K. Wilson, *Investigación y Ciencia*, número 37, octubre 1979.
- [Wio] H.S. Wio, *An Introduction to Stochastic Processes and Nonequilibrium Statistical Physics*, World Scientific (1994).
- [Yeu91] C. Yeung, T. Rogers, A. Hernández-Machado y D. Jasnow, *J. Stat. Phys.* **66**, 1071 (1992).
- [Yeu92] C. Yeung, J.L. Mozos, A. Hernández-Machado y D. Jasnow, *J. Stat. Phys.* **70**, 1149 (1993).
- [Yan] C.N. Yang y T.D. Lee, *Phys. Rev.* **87**, 404 (1952).
- [Zha] M.Q. Zhang, *Phys. Rev. A* **35**, 2266 (1987).
- [Zia] R.K.P. Zia y T. Blum, *Scale Invariance, Interfaces, and Non-Equilibrium Dynamics*, Plenum Press, Nueva York (1995).

- [ZJ] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford Science Publications (1991).