UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE DIDACTICA DE LAS
CIENCIAS EXPERIMENTALES

INGENIERIA DIDACTICA EN FISICA MATEMATICA

Josefina Marta Marcolini Bernardi
TESIS DOCTORAL

GRANADA, 2003

I-TM-646

Depósito

Tess

0352

Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales

INGENIERÍA DIDÁCTICA EN FÍSICA MATEMÁTICA

Josefina Marta Marcolini Bernardi

TESIS DOCTORAL

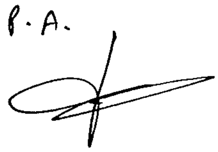
Granada, 2003

INGENIERÍA DIDÁCTICA EN FÍSICA MATEMÁTICA

Memoria presentada para
optar al grado de Doctor
en Física
por J. Marta Marcolini Bernardi.

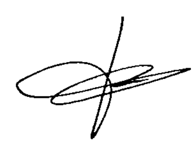
V° B°
Director de Tesis:

P.A.



Prof. Dr. D.
Ricardo Cantoral Uriza

V° B°
Director de Tesis:



Prof. Dr. D.
Francisco Javier Perales Palacios

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

UNIVERSIDAD DE GRANADA

A la memoria de mi padre.

A mi madre.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento:

A los Drs. D. Ricardo Cantoral Uriza y D. Francisco Javier Perales Palacios, directores de esta investigación, por su dedicación, ayuda y colaboración en el desarrollo de todo el trabajo.

A todos mis compañeros de la Universidad de Jaén que me han prestado su apoyo, y especialmente a la Doctora Dña. Carmen Sánchez Gómez por la atención con la que ha leído este trabajo así como por sus valiosas sugerencias.

A los alumnos de la Universidad de Jaén que colaboraron en la investigación.

A Miguel, Alejandro, Pablo y Carla por su ayuda, paciencia y colaboración incondicional.

Índice

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En primer lugar hacemos un breve recorrido de las circunstancias personales que nos condujeron a esta investigación. Ellas dieron comienzo con la docencia en una Escuela Normal dependiente de la Universidad Nacional de San Luis (Argentina). En esos momentos se trataba de innovar, en cuanto a la enseñanza de la Física, y nos metimos de lleno en el estudio y desarrollo de la experiencia diseñada por el *Physical Science Study Committee* (PSSC). Le siguen años de docencia universitaria en Matemáticas y Física formando, además, parte del Programa sobre Investigaciones Interdisciplinarias en el Aprendizaje de las Ciencias.

Esta larga experiencia docente, compartida entre la Matemática y la Física, nos llevó pronto a tomar conciencia de algunas peculiaridades de estas dos disciplinas. Observamos que el Cálculo Diferencial y la Física son, a partir de los cursos de Bachillerato, las asignaturas que más problemas presentan en su enseñanza-aprendizaje. A sus dificultades intrínsecas debe añadirse la manipulación de objetos matemáticos que no siempre hallan justificación satisfactoria en ambas o bien su uso no está suficientemente potenciado; como ejemplos, ya que de algunos de ellos nos ocuparemos más adelante, podemos considerar los casos de $\frac{dy}{dx}$, dy, $\int f(x)dx$ o la misma serie de Taylor.

Consideramos que un nuevo planteamiento o una investigación no puede surgir sólo de los años y de la experiencia, sino que necesitaba de nuevas fuentes. Ellas llegaron a través de la toma de contacto y conocimiento del programa de investigación "*Pensamiento y Lenguaje Variacional*" que es desarrollado por el Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional en México. Sobre las bases de esta línea de investigación nos referiremos en el capítulo 2.

Nuestra investigación sigue las pautas de la metodología de la "*Ingeniería Didáctica*", fundamentándose en las teorías de Situaciones Didácticas y de Transposición Didáctica, para la cual se diseñó e implementó una particular situación didáctica dirigida a los alumnos de primer curso de universidad. Una de las finalidades de este diseño fue la de resignificar[1] al concepto de derivada de una función a través de las derivadas sucesivas situándonos en el marco gráfico. A partir de aquí, se considera la derivada, en un sentido genérico, como la organización de las derivadas sucesivas en relación con la Serie de Taylor, para tratar con problemas planteados desde el contexto de las Ciencias Experimentales. Situándonos de este modo en el paradigma pre-cauchiano para el Cálculo, la serie de Taylor será la herramienta para predecir los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza.

Este trabajo se estructura en seis capítulos, en el primero se presenta el interés y la motivación que da origen a nuestra investigación, así como los objetivos que se pretende lograr basados en las hipótesis planteadas.

En el segundo capítulo se hace una revisión sobre los distintos acercamientos a la problemática de la enseñanza-aprendizaje de las Ciencias Experimentales y del Cálculo Infinitesimal, y se describe el marco teórico con el cual se fundamenta la investigación.

En el tercer capítulo se expone el método utilizado en la investigación, el cual se basa en la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación; a quién está dirigida la investigación, el contexto donde se realizó y las características del grupo de estudiantes que participaron en la misma. A continuación se presenta el diseño de la Situación Didáctica que se aplicará, conjuntamente con el análisis a priori. Por último, se muestra la experiencia piloto llevada a cabo con alumnos de Ingeniería Técnica Industrial y de la Licenciatura en Química.

En el cuarto capítulo se presenta el análisis de resultados y los episodios de aprendizaje[2] para la primera experiencia realizada con los alumnos, de primer año, de la licenciatura en Biología en el curso académico 1999-2000.

---

[1] Con el termino *resignificar* queremos destacar que el concepto de derivada adquiere significaciones que evolucionan con el progreso del alumno en su estudio. Así, al principio, puede reducirse a la aplicación de una regla, después puede entenderse como razón de cambio y, más tarde, como un factor en la serie de Taylor. También, en otras ocasiones, habrá que entenderlo conjuntamente con sus derivadas sucesivas.

[2] Entendemos como *episodios de aprendizajes* aquellos momentos de interacción donde se proponen y discuten diferentes estrategias utilizando conocimientos previos y distintas representaciones para la obtención de resultados, así como también dificultades y obstáculos.

En el quinto capítulo se presenta el análisis de resultados y los episodios de aprendizaje correspondientes a la segunda experiencia con alumnos, de primer año, de la licenciatura de Biología del curso académico 2002-2003.

En el capítulo sexto se muestran los resultados obtenidos, las conclusiones y propuestas de nuestra investigación.

Finalmente se incluyen los anexos y la bibliografía.

A modo de resumen, presentamos un organigrama donde se secuencian las distintas etapas de la investigación:

- Comenzamos realizando una exhaustiva revisión sobre los estudios socioepistemológicos llevados a cabo dentro del grupo de investigación (Cantoral, 1990, 2001).
- Como segundo paso hacemos un análisis de manuales escolares de nivel medio y universitarios.
- Siguiendo las líneas de investigación del grupo, se plantean los supuestos y se diseña una secuencia didáctica que se implementa con dos grupos de estudiantes de diferentes titulaciones a modo de experiencias piloto, en el curso académico 1998-1999.
- Tras el análisis de los resultados de las experiencias anteriores diseñamos una secuencia didáctica previa para solventar algunas de las deficiencias detectadas en los conocimientos de los alumnos.
- Se organiza e implementa la primera experiencia con alumnos pertenecientes a la titulación en Biología, en el curso académico 1999-2000.
- Para dotar de garantías a nuestro trabajo sometimos la secuencia didáctica diseñada para realizar la experiencia a las opiniones de expertos, profesores de la Universidad de Jaén, que nos observaron algunas cuestiones y señalaron algunas sugerencias.
- En el curso académico 2002-2003 se lleva a cabo una segunda experiencia con alumnos de la licenciatura en Biología con el fin de controlar algunas variables, como el tiempo, y con ello poder corroborar y ampliar los resultados y conclusiones a los que arribamos en la primera experiencia.

- Por último, elaboramos las conclusiones y propuestas.

CAPÍTULO 1

PRESENTACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.0.- INTRODUCCIÓN

En este capítulo se muestra la naturaleza de la problemática que da origen a nuestra investigación. Se describen cuáles han sido los motivos que nos llevaron a realizar este trabajo y se presenta el planteamiento del problema objeto de estudio, así como la razón por la cual creemos que este problema es importante en el momento de buscar mejoras para el funcionamiento del sistema educativo. Además, se exponen los objetivos que se pretenden lograr, así como los supuestos sobre los que basamos nuestro trabajo.

1.1.- INTERÉS DE LA INVESTIGACIÓN

Los problemas que provienen de la práctica educativa son los que inspiran gran parte de las investigaciones que se realizan en didáctica de las distintas disciplinas científicas. Su resolución es el objetivo último de los proyectos de investigación en nuestro campo. Pero, a pesar de los esfuerzos y del gran número de resultados empíricos desarrollados hasta el momento, no hay evidencia histórica de una metodología plenamente exitosa ni de ningún acercamiento teórico que dé explicación de la naturaleza del tránsito entre los resultados de la investigación didáctica y su puesta en escena en el sistema de enseñanza, como ya se ha señalado ampliamente en la literatura (Farfán, 1995).

Éste es uno de los grandes problemas abiertos de nuestra comunidad, en algún sentido señalado en la ya célebre conferencia de Hans Freudenthal en Berkeley en 1980, y en múltiples producciones internacionales en la disciplina (Biehler et al., 1994; Nesher et al., 1992; Johsua & Dupin, 1993). Dicho problema se pone de manifiesto en las actividades cotidianas de los propios protagonistas del hecho educativo: estudiantes, profesores, padres, investigadores y un largo etcétera del conjunto de nuestra sociedad.

Entre los aspectos que caracterizan a la enseñanza de la Matemática y de los procesos de matematización de las ciencias, consideramos en particular la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Infinitesimal, dado que ocupa un lugar preeminente en la educación superior, al ser una de sus ramas más relevantes. Los vínculos que guarda, tanto con la Matemática elemental como con la Matemática avanzada, y el papel que desempeña en el resto de las ciencias lo convierten en un conjunto de conocimientos con valor teórico y empírico considerables, sin lugar a dudas, indispensable en la educación superior.

En nuestra opinión, el Cálculo no debe ser entendido como un curso terminal, sino que debe preparar a los estudiantes en las áreas de Ingeniería, Ciencias Experimentales y Matemáticas para abordar satisfactoriamente los contenidos de cursos más avanzados que, naturalmente, necesitan. Tampoco creemos que debe ser entendido como la enseñanza de una colección de objetos matemáticos preestablecidos, sino como una poderosa herramienta que nos permita abordar los problemas que desde otras ciencias se planteen y que requieran de él.

Tradicionalmente, la enseñanza de las ciencias básicas en los primeros cursos del nivel superior asigna un papel formativo puramente teórico a asignaturas como Matemática y Física en titulaciones como Ingenierías Técnicas, Licenciaturas en Ciencias Experimentales u otros estudios científico-técnicos. Por ello la metodología docente consistía en la explicación de un largo temario mediante clases magistrales, donde el estudiante era considerado un sujeto pasivo que asimila las ideas de "forma natural", mediante el estudio de sus apuntes de clase y de los textos recomendados.

Aunque los problemas de la educación matemática son muchos y muy dispares, la enseñanza del Cálculo ha sido reconocida como una de las fallas mayores en la educación superior (Steen, 1988). Internacionalmente, las investigaciones realizadas sobre la didáctica del Cálculo han abarcado un amplio espectro. Haciendo una revisión extensa de las fuentes observamos que en su mayoría no consideran que el discurso matemático escolar[1] sea susceptible de modificaciones pertinentes, confiriéndole en

[1] Entendemos por discurso matemático escolar al discurso que marca el inicio de una enseñanza. No se reduce naturalmente a la organización temática de los contenidos, ni a la profundidad expositiva, sino que se preocupa de la formación de consensos entre todos aquellos que forman lo que se ha llamado la noosfera (editores, autores, profesores, matemáticos, estudiantes, padres de familia, etc.)

consecuencia un cierto carácter de inmutabilidad a los conceptos y procesos matemáticos en cuestión.

Por otra parte, existe una creencia generalizada de que su aprendizaje último debe hacer énfasis en los aspectos tradicionalmente formales de la disciplina, marginando la intuición y los aspectos heurísticos que, en conjunto, generan la construcción del conocimiento (Tall y Vinner, 1981). Estos autores han investigado fundamentalmente los procesos de aprendizaje de los alumnos, que consisten, según ellos, en la construcción y en la evolución de estructuras mentales asociadas a cada concepto matemático, llamadas "*concept image*". En su trabajo sobre límite, "*consideran que las contradicciones entre diversos elementos del concept image de límite pueden favorecer un conflicto cognitivo que implica una acomodación de la estructura inicial que restablece el equilibrio. Por el contrario, los elementos del concept image que sólo están en contradicción con la definición formal de límite pueden no provocar nunca un conflicto cognitivo y, por tanto, pueden ser un factor que obstaculice el aprendizaje de la teoría formal, ya que los alumnos no necesitan otras interpretaciones del concepto y consideran que la teoría formal es inútil e inoperante*" (citado en Azcárate, 1990, p. 23).

La enseñanza de las Matemáticas, especialmente en el nivel universitario, se caracteriza por un deductivismo exagerado, un exceso de formalización y generalización, y una presentación centradas sobre ellas mismas, sin referencia a otras ciencias (Núñez y Font, 1995). Sin embargo, gran parte de los descubrimientos en Matemáticas han sido el resultado del desarrollo de determinadas técnicas en un contexto concreto, generalmente relacionado con otras ciencias, como es el caso del Cálculo Infinitesimal asociado a la Mecánica en el trabajo de Newton. Por otra parte, la desaparición de la enseñanza de las conexiones de las Matemáticas con otras disciplinas puede privarla de sus características básicas, desde el punto de vista científico, haciendo más difícil su comprensión para los estudiantes (Sánchez, García, Sánchez, 1999).

Otros problemas en la comprensión de los conceptos y teorías científicas es la descontextualización, que gran parte de los investigadores en didáctica de las ciencias reconoce como uno de los problemas en la enseñanza en los primeros cursos de la universidades españolas (Núñez y Font, 1995; Gil et al., 1991; Sánchez, García, Sánchez, 1999).

En nuestra investigación diferimos de un gran número de investigadores porque partimos de la base de que aquello que actualmente se le enseña a los alumnos en el aula no logra transmitirles las ideas matemáticas necesarias para hacer frente a los problemas que se le plantean en el campo de las Ciencias Experimentales. Esto nos ha llevado a realizar una propuesta diferente, apoyada en la recuperación de los significados inherentes al concepto y las intuiciones primarias del sujeto que le permitan acceder al concepto, aunque provengan éstas de diversas fuentes de referencia.

La historia de la enseñanza del Cálculo en particular, y de las Matemáticas en general, ha estado marcada por la reiterada ignorancia sobre la forma en la cual aquéllos que van a aprender adquieren conciencia de su relación con los saberes y de cómo miran e interiorizan el saber los que aprenden. En definitiva, creemos que es necesario conocer cuáles son los procesos y fenómenos subyacentes a la construcción del conocimiento matemático y al desarrollo del pensamiento matemático, sin los cuales no pueden formarse en el individuo las habilidades mentales que le posibiliten generar nuevos conocimientos.

Queremos rescatar en algún sentido la idea básica que propuso hace unos años el Grup Zero, expuesta en Azcárate (1990), según la cual la enseñanza de las Matemáticas debería fundamentarse en la relación dialéctica existente entre las Matemáticas como "instrumento de conocimiento" y las Matemáticas como "objeto de conocimiento". Dado que, como continúa diciendo dicha autora, el carácter de los programas vigentes, exhaustivos, excesivamente formales y totalmente separados de la vida cotidiana y de los programas de otras materias, así como la propia estructura de los estudios, ha inducido una enseñanza de las Matemáticas en la que se ha descuidado su papel de "instrumento de conocimiento". Asimismo, una enseñanza de las Matemáticas como "objeto de conocimiento" ha resultado también distorsionada por el carácter de estos mismos programas, pensados casi exclusivamente en función de las necesidades de los niveles de enseñanza superior, dejando poco espacio para la reflexión sobre las propias Matemáticas, sobre su contenido, sus métodos y su evolución.

Estas reflexiones hechas por expertos en la enseñanza para el nivel medio tienen mucho en común con aquéllas a las que nosotros hemos llegado, y por lo tanto perfectamente aplicables en la actualidad y a nuestro contexto. El análisis del estado actual de la enseñanza, en los primeros cursos universitarios de la Facultad de Ciencias Experimentales y de la Escuela Politécnica Superior, lo realizamos a través de los programas, de los manuales y de nuestra propia experiencia docente.

Esta investigación propone también, en lugar de estudiar cómo llevar al alumno hacia un discurso teórico inmóvil caracterizado por el excesivo formalismo y rigor, una forma diferente de plantear el saber enseñado, a partir de las intuiciones que dieron origen a los diversos conceptos del Cálculo. Para ello nos apoyamos en un estudio realizado por Cantoral (1995) sobre el desarrollo de la Serie de Taylor. En él se parte del antecedente inmediato a dicha serie, que es el binomio de Newton con exponentes racionales, según la forma en que originalmente la concibió el mismo Newton. (La importancia que tiene en este caso el teorema del binomio es como herramienta de conocimiento para construir la serie de Taylor). Posteriormente presenta las contribuciones que, relacionadas con la serie de Taylor, hiciera L'Hôspital en su texto de Cálculo. De esa contribución interesa la identificación gráfica de los diferenciales sucesivos de una variable continua, pues con ello es posible concebir a la serie de Taylor en una variable como una expresión que se presenta en el problema de estimar el valor de una ordenada próxima a otra conocida. A continuación se presentan los trabajos de Taylor y de MacLaurin en los que desarrollan la serie y las condiciones para la localización de máximos y mínimos. Estas son las razones que permiten afirmar que de este modo se tiene a la serie de Taylor para una variable construida mediante procedimientos ausentes en los textos actuales.

Por todo ello, haremos uso de elementos tales como la visualización, la predicción, el reconocimiento de patrones, el recurso de la analogía, la inducción, los diversos modos de validación, y todo aquello que permitió, en algún momento de la elaboración del conocimiento, construir y transmitir información socialmente útil, y que hoy puede estar ausente en la enseñanza. Es decir, queremos reconocer y utilizar aquellas *ideas germinales*[2] relevantes para poder utilizarlas en nuestra labor educativa adaptadas al momento histórico presente.

Un recorrido por la Historia de las Ciencias muestra la estrecha relación que ha existido entre las Ciencias Experimentales y las Matemáticas. A través de esta relación se puede observar cómo aquéllas han servido de motor para el desarrollo de una parte de las Matemáticas. Podemos afirmar que al desarrollo tecnológico, en la historia de la humanidad, ha contribuido enormemente el conocimiento de la naturaleza realizado a través de las Ciencias Experimentales y por ende el desarrollo de su lenguaje, que es naturalmente el de las Matemáticas.

En este mundo, consideramos los fenómenos de cambio como un hecho cotidiano para todos nosotros. Los físicos, por ejemplo, usan las Matemáticas para investigar fenómenos como el movimiento de los planetas, la desintegración de sustancias radiactivas, la velocidad de las reacciones químicas, las corrientes oceánicas, los patrones meteorológicos y un largo etcétera. Los ecólogos por su parte, exploran los patrones de contaminación y los cambios en las poblaciones que implican complejas relaciones entre las especies. En áreas como la economía, la medicina o la política se usan modelos matemáticos en los que la clave del estudio está puesta en la noción de cambio. El estudio del cambio nos conduce a la noción de variación y el estudio de ésta se realiza por medio del cálculo diferencial e integral.

1.2.- MOTIVACIÓN QUE DIO LUGAR A LA INVESTIGACIÓN

Expondremos ahora algunas de las consideraciones generales que guiaron la elección de este trabajo:

- La fragilidad que se advierte en el aprendizaje del Cálculo Diferencial entre los estudiantes.
- La dicotomía en la enseñanza de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales como Física, Química o Biología.

[2] Idea germinal: es el motor central en la construcción del conocimiento, y a partir de la cual tanto procedimientos como significaciones se construyen paulatinamente y adquieren así su completa significación espistémica. (Cantoral, 1990)

- El poco éxito que suelen lograr los estudiantes cuando deben utilizar los conceptos básicos del Cálculo para abordar problemas del dominio específico de las ciencias como la Física, la Biología o la Química.
- La visión de que, a través de una reconstrucción del discurso escolar vigente, las disciplinas que forman las Ciencias Experimentales pueden ser utilizadas como complementarias en la construcción de los conceptos del Cálculo Infinitesimal, aún en el nivel superior.

Las investigaciones llevadas a cabo por diversos autores, entre los que podemos citar a Pulido (1997) y Artigue (1982, 1983), nos han parecido especialmente relevantes en relación con nuestro trabajo. Ellos plantean que los enfoques dados a la representación de funciones en las clases de Física y en las clases de Matemáticas, en vez de ser complementarios, son totalmente divergentes.

Según Artigue, la representación gráfica de una función en Física es un instrumento que permite conocer sus propiedades generales, deducir su ecuación, estudiar ciertas propiedades de las derivadas primera y segunda, de su primitiva,... Por el contrario, el estudio de las representaciones gráficas de funciones en Matemáticas está ligado al estudio de la continuidad y de la derivabilidad, así como de curvas, lo cual suele ocupar los capítulos finales como resumen de una serie de propiedades que sirven como ilustración de todo el curso de Cálculo. Por tanto, se trata no ya de un instrumento sino de un objeto de estudio.

Otras investigaciones llevadas a cabo en el nivel medio nos dicen:

"Después de llevar a cabo unos tests en las últimas clases de Bachillerato acerca de los temas de derivadas y de integrales planteados a partir de representaciones gráficas, los resultados han demostrado un nivel de éxito muy bajo. La mayoría de los estudiantes utilizan la gráfica para hallar una expresión algebraica que, luego derivaban o integraban, pero olvidaban totalmente la gráfica inicial. Poniéndose de manifiesto la diferencia de estatus de la representaciones gráficas en Física y en Matemáticas, y la absoluta separación entre ambos enfoques" (Azcárate,1990, p. 27).

Según la tesis sostenida en una investigación llevada a cabo por Espinoza (Espinoza, 1994, pp. 48, 79) hay un modelo implícito de función en el sistema de enseñanza secundario, *"el modelo implícito que hay en este sistema sobre las* *funciones es que éstas son simples expresiones algebraicas y por tanto las complicaciones en el estudio de las mismas radican en el propio derivado de las manipulaciones algebraicas. De ahí que una función sea distinta de una gráfica y distinta también de una situación real."* Y continúa diciendo *"La relación entre función y gráfica es de consecuencia y no de definición. Esto es, dada una función (expresión algebraica) se puede obtener su gráfica, pero dado un gráfico éste no representa ni tiene asociado un comportamiento funcional."*

Con esto ponemos de manifiesto sólo algunas de las tantas diferencias que tenemos a la hora de abordar y de utilizar los mismos conceptos en diferentes disciplinas. Por lo tanto creemos que es imprescindible tener en cuenta hacia quién va dirigida nuestra enseñanza intentando contextualizar los conocimientos impartidos. Esta importancia es aún mayor en el nivel universitario por el carácter más especifico que adquieren las titulaciones. Nuestra atención estará dirigida a los estudiantes de ciencias e ingeniería. Para conocer cómo viven los conceptos que queremos abordar en la enseñanza actual, y su tratamiento a partir de los textos de Cálculo y de Física, se realizó una revisión sobre manuales de BUP, COU, Bachillerato-Logse y algunos de los más utilizados en los primeros cursos universitarios. Dicha revisión puede verse en el Anexo 1.

Queremos a continuación transcribir algunas citas que creemos ponen de manifiesto la importancia conferida a las Matemáticas dentro del campo de las Ciencias Experimentales y la Ingeniería.

W. Dale Compton, de la "National Academy of Engineering" (EE.UU.), dijo en el "National Colloquium on Calculus for a New Century" (1987): la Ingeniería es, en palabras del Comité de Acreditación de Ingenieros y Técnicos, "*la profesión en la cual el conocimiento de matemáticas y ciencias naturales que se adquiere mediante el estudio, la experiencia y la práctica, se aplica juiciosamente para desarrollar maneras de utilizar económicamente los materiales y fuerzas de la naturaleza para beneficio de la humanidad*".

Eugene Paul Wigner, físico estadounidense, premio Nóbel de Física 1963, en su artículo titulado "La irrazonable efectividad de la matemática en las ciencias naturales" dice: "*El milagro de la adecuación del lenguaje de la matemática para la formulación de las leyes físicas es un don maravilloso que ni entendemos ni* *merecemos. Deberíamos mostrarnos agradecidos por él y esperar que permanecerá siendo válido en la investigación futura y que se extenderá, para bien o para mal, para placer nuestro aunque también tal vez para nuestra perplejidad, a ramas más amplias del saber*" (Colera, de Guzmán, 1994, p. 211).

Por otra parte, es evidente la inquietud puesta de manifiesto por educadores e investigadores para la integración de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales en el desarrollo de su enseñanza-aprendizaje y esto se hace evidente a través de las publicaciones donde se da cuenta de los proyectos e investigaciones que se vienen desarrollando en esta línea. Entre dichas investigaciones podemos destacar (Lewis, 2002) la llevada a cabo con un grupo de profesores de enseñanza elemental, y que tiene por objeto iniciarles en el desarrollo de métodos para apoyar el uso de las herramientas matemáticas en las Ciencias. Además, en esta experiencia se hace un análisis de los errores más comunes que se ponen de manifiesto cuando los alumnos resuelven un problema. Dichos errores surgen al utilizar las herramientas matemáticas con las que pretenden determinar las relaciones entre las variables involucradas en el problema.

1.3.- PROBLEMA DIDÁCTICO

Nuestra investigación trata de estudiar las causas de las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Infinitesimal cuando se enseña a estudiantes universitarios de Ciencias e Ingeniería, buscando las causas no sólo en la forma en que transmitimos ese conocimiento, sino también en la manera en que se ha articulado el contenido matemático que se enseña. Digámoslo de otro modo, pensemos también como un problema didáctico la determinación del *qué* enseñar y no sólo el de *cómo* enseñar.

Este cambio de perspectiva plantea de entrada una serie de interrogantes que permiten hacer una construcción racional de la enseñanza del Cálculo: ¿por qué enseñamos lo que enseñamos?, ¿de dónde procede esta matemática?, ¿cuál fue su motivación?, ¿cómo se construyó?, ¿cuáles fueron sus éxitos y cuáles sus fracasos?, ¿qué debe esta Matemática a otras ciencias, a la experiencia y al experimento?, ¿cómo contribuyó a su vez al enriquecimiento general de éstas? Finalmente, en las circunstancias en que hoy nos encontramos, ¿qué parte de todo ese saber acumulado debe procesarse y pasar a ser saber enseñado[3]?... ¿Cómo hacerlo? (Cantoral, 1995).

De acuerdo con la tesis anterior uno de los objetivos será "*hacer fácil lo que, en principio, se plantea como difícil*". El camino para lograrlo lo buscamos en el momento de la creación del conocimiento, analizando las distintas maneras de transmisión, examinando las circunstancias que posibilitaron su construcción y precisando cuáles son factibles de asimilarse a las prácticas escolares actuales.

Esta búsqueda nos ha permitido formular la conjetura de que es posible reconstruir el discurso didáctico de una parte del Cálculo tomando como idea central la serie de Taylor. En otro sentido, dicha hipótesis señala que es posible rediseñar el currículum y su discurso didáctico en torno de aquello que, consideramos, resultó epistemológicamente indispensable en su génesis. Para ello nos basamos en la etapa concerniente al campo conceptual de los inicios del Análisis Matemático clásico.

Nos ocuparemos de las derivadas sucesivas y de la serie de Taylor, sus antecedentes, motivaciones, situaciones contextuales, evoluciones temporales, presentaciones en textos clásicos y posibilidades de uso, algunas aún inexploradas, en los textos actuales.

Para ello, partimos de la noción de cambio en el Cálculo Infinitesimal. Esta noción da lugar al concepto de variación, describiendo las cualidades del cambio y proporcionando elementos para saber cómo es que cambia eso que cambia. En este sentido consideramos la variación como una medida de los cambios.

Existen muchas cosas a nuestro alrededor que están cambiando constantemente, la forma de nuestros cuerpos, la temperatura de algunos materiales, el movimiento del mar, el movimiento de electrones a través de un conductor, la economía, en fin, podríamos citar infinidad de procesos en los cuales están implicados los cambios. En este sentido, consideramos como estrategias variacionales: la estimación, la comparación, la aproximación, la predicción, la acotación, etc.

Creemos sin embargo que la enseñanza de las Matemáticas en general y del Cálculo en particular inhibe las ideas variacionales en los alumnos. Por lo tanto, con esta visión podremos replantear el estudio de algunos de los elementos de esta

---

[3] Objeto de enseñanza. Según Chevallard (1991), la noción de saber a enseñar no se reduce sólo al texto que aparece en los programas y cuestionarios, sino también a sus posibles interpretaciones.

disciplina y de esta manera contribuir a la reconstrucción del discurso matemático de una manera integradora.

El sistema de enseñanza en el que se encuentran nuestros alumnos no promueve el estudio y análisis de la variabilidad de fenómenos sujetos al cambio, donde la *función* encontraría una especial significación estrechamente ligada a sus orígenes epistemológicos (Ruiz, 1994).

De los manuales de Cálculo analizados (ver Anexo 1) se desprende que la serie se estudia más como un asunto de convergencia, ya se trate de residuo, de orden de magnitud o de error. Esto pone de relieve que la noción de *predicción,* que originalmente era descrita por la serie, ha sido desplazada de la enseñanza actual. Se opera una especie de "predación" de una idea, la *convergencia*, por sobre otra, la *predicción*. Ello obedece a un fenómeno de Transposición Didáctica[4] (Cantoral, 1990).

Esta consideración en cuanto a la idea de *predicción* y de la noción de convergencia, en su relación con la serie de Taylor, se presenta como una dificultad de naturaleza didáctica. Esto se pone de manifiesto cuando se pretende trabajar una didáctica sustentada en los fenómenos, como sería deseable, en la formación que se les imparte a los estudiantes de las licenciaturas de las distintas disciplinas, enmarcadas dentro de las ciencias experimentales e ingenierías.

Debemos tener en cuenta también que la noción de predicción resulta ser una de las características esenciales de las teorías físicas (Holton, 1979, pp.51-53).

Para centrar nuestra atención en el movimiento en la naturaleza debemos planteamos estrategias que nos permitan describir su evolución, entendida ésta como el pasaje sucesivo entre estados primarios y secundarios. Esto precisa de la determinación de los aspectos que caracterizan tanto a los estados sucesivos como a los tránsitos sucesivos. Lo anterior plantea la necesidad de establecer el conjunto de variables que en una mutua dependencia se relacionan en el fenómeno. Esto no es suficiente, ya que precisa además del reconocimiento de aquellos aspectos invariables asociados a los fenómenos de movimiento en la naturaleza. Estos aspectos suelen descansar en la

[4] La palabra transponer significa poner una cosa más allá, en un sitio distinto del lugar que ocupaba. El término *transposición didáctica* se refiere así, en lo general, al proceso mediante el cual tiene lugar la acción de transponer un saber hacia un sitio didáctico, digámoslo así: llevar el saber al ámbito escolar (Cantoral, 1995, p. 60).

naturaleza misma del movimiento, en la manera en que varían las variables. Efectivamente, este fue el mérito de las estrategias de estudio del movimiento: *la constantificación*. Esto permite que al analizar los cambios sucesivos de las variables asociadas al fenómeno, se las identifique como constantes. Ello permite buscar la relación de dependencia funcional, ya no entre las variables en sí, lo cual es el objetivo del estudio, sino entre sus sucesivas variaciones instantáneas, pues sólo mediante esas ecuaciones habremos de recobrar la primera relación entre las variables. Si deseamos conocer la variación que sufre la variable $f(x)$, es decir, $f(x+h)$, el problema se centra en conocer el desarrollo en serie que tiene esta expresión.

En términos de modelo didáctico para la enseñanza de la Física y las Matemáticas, este estudio exhibe la aproximación sugerida desde los trabajos de Newton, donde la serie es un recurso de simplificación, y al mismo tiempo un método de descubrimiento aplicable al estudio de los fenómenos que fluyen continuamente con el transcurso del tiempo. De ahí que Newton reflexionara en la velocidad de cambio de las magnitudes estudiadas y denominara "mi método" a la asociación entre el manejo de las series infinitas, series de potencias, con el estudio de la velocidad de cambio, de las que a su vez se sirve para determinar la propia cantidad que fluye en el transcurso del tiempo. Del mismo modo encontramos en el éxito del cálculo diferencial de L'Hôspital la idea de diferencial en que aumenta o disminuye la variable. Y así, buscando la relación entre los aumentos o disminuciones sucesivas de la variable, se aproxima a la expresión en serie que años más tarde Taylor utilizara de nuevo. Centrándonos un poco en la presentación que Taylor hiciera de su serie, vemos expresada sutilmente la noción de la serie como instrumento de *predicción*. Esto es, si conocemos el estado inicial de la magnitud a estudiar, es decir, si se conoce la ordenada y sus variaciones sucesivas, es posible predecir el comportamiento del estado vecino con la ayuda del método de los incrementos finitos (Cantoral, 1995).

Esta presentación, en la que la expresión de la serie contiene intrínsecamente un significado propio de las Ciencias Físicas, es lo que la hace una construcción natural en una vasta diversidad de fenómenos. Este esquema está en uso en diversos contextos; así, es usual encontrar argumentos como el siguiente: "si q representa un cierto parámetro físico en un instante dado de tiempo t, un instante después $t+dt$ este parámetro será $q+dq$". Sin embargo, está ausente en los tópicos transmitidos en la enseñanza escolar del Cálculo.

Este acercamiento al estudio de la serie de Taylor se caracteriza por una idea principal que es la *predicción*. A esta presentación la ubicaremos dentro de lo que llamaremos paradigma newtoniano, que se apoya en los fenómenos de naturaleza física de flujo.

La idea de *predicción* se refiere al estudio de la cuantificación de las "formas" variables en la naturaleza: partículas móviles, cuerpos terrestres y celestes y naturalmente los fenómenos de flujo continuo. En este ambiente la pregunta planteada indaga sobre el comportamiento del estado vecino sobre la base de los datos que da el estado de hecho (Cantoral, 1990, p. 200, V. 2).

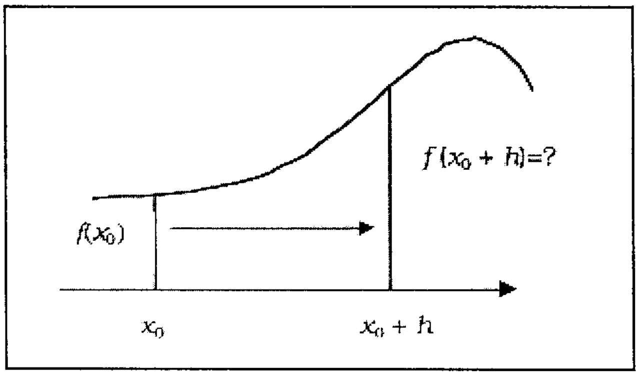


Figura 1.1. Planteamiento del problema de predicción.

Este planteamiento lleva como respuesta una expresión para la serie de Taylor de la forma

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + f''(x_0)\, h^2/2! + f'''(x_0)\, h^3/3! + \ldots,$$

donde se conocen los datos iniciales x_0, h, $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$, ... y se precisa encontrar el valor de $f(x_0+h)$, como se ilustra en la figura 1.1. Con estas consideraciones, la serie de Taylor se expresa de la siguiente forma:

- Si p representa cierto parámetro físico en el instante t, un momento después dt dicho parámetro será $p + dp$.
- Si se conoce el estado inicial del fenómeno, esto es $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ... se tiene que un instante después

$$f(t) = f(0) + f'(0)\, t + f''(0)\, t^2/2! + f'''(0)\, t^3/3! + \ldots\ .$$

En los textos de Física e Ingeniería es frecuente encontrar este tipo de argumentos. Estas ideas están estrechamente vinculadas a las nociones pre-cauchianas de la serie de Taylor, que requieren para su conceptualización el pensar en la serie como un instrumento de predicción y no como un objeto de convergencia como aparece en los manuales de Matemáticas. Vamos a trabajar sobre un ejemplo: sabemos que las ecuaciones de la cinemática para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado tienen la forma siguiente

$$s(t) = s_0 + v_0 t + 1/2at^2$$

$$v(t) = v_0 + at$$

$$a(t) = a.$$

Para deducir estas ecuaciones, según hemos visto en distintos manuales (Anexo 1) se recurre a argumentos típicos como el geométrico, el algebraico y el de cálculo integral. Este acercamiento convencional posee el defecto de concebirse como un mero recurso aislado sin conexión con el resto de los problemas, ni en concepción ni en ejecución. Nuestra propuesta es plantearlo teniendo en cuenta que pretendemos encontrar una relación que permita determinar la dependencia entre las variables asociadas en su estado inicial, esto es, establecer

$$s = s(s_0, v_0, a, t_0, t).$$

En tanto que se trata de un problema de *predicción*, pensamos en el fenómeno de movimiento y lo representamos por su instrumento natural de conocimiento, la serie de Taylor. Así, el valor futuro de la posición estará dado por

$$s(t) = s(0) + s'(0)\, t + s''(0)\, t^2/2! + s'''(0)\, t^3/3! + \dots .$$

Pero $s(0) = s_0$, $s'(0) = v_0$, $s''(0) = a$, $s'''(0) = 0$ y como suponemos que esta última igualdad se da para cualquier tiempo, es decir, la aceleración es una constante, entonces $s'''(0) = 0$, $s^{iv}(0) = 0, \dots = 0$, de ahí que

$$s(t) = s_0 + v_0 t + a\, t^2/2.$$

De la misma manera se procede para determinar $v(t)$ y $a(t)$, es decir:

$$v(t) = v_0 + a_0 t \qquad \text{y} \qquad a(t) = a_0 .$$

Para estudiar el caso del movimiento con aceleración variable tenemos

$$s(t) = s(0) + s'(0)\, t + s''(0)\, t^2/2! + s'''(0)\, t^3/3! + \dots .$$

Pero $s(0) = s_0$, $s'(0) = v_0$, $s''(0) = a_0$, $s'''(0) = a_1$ y como suponemos que esta última igualdad se da para cualquier tiempo, es decir la a_1 es una constante, entonces $s^{iv}(0) = 0$, $s^{v}(0) = 0$, ... $= 0$. De ahí que

$$s(t) = s_0 + v_0\, t + a_0\, t^2/2 + a_1\, t^3/6.$$

Centremos ahora nuestra atención sobre otro problema de la Física que tiene innumerables aplicaciones, como es el *movimiento armónico simple.* A través de un movimiento armónico se puede describir una corriente en un circuito eléctrico, la concentración de iones en un plasma, la temperatura de un cuerpo, etc.

Consideremos el caso de un cuerpo, de masa m, que cuelga de un muelle vertical, como se muestra en la figura 1.2.

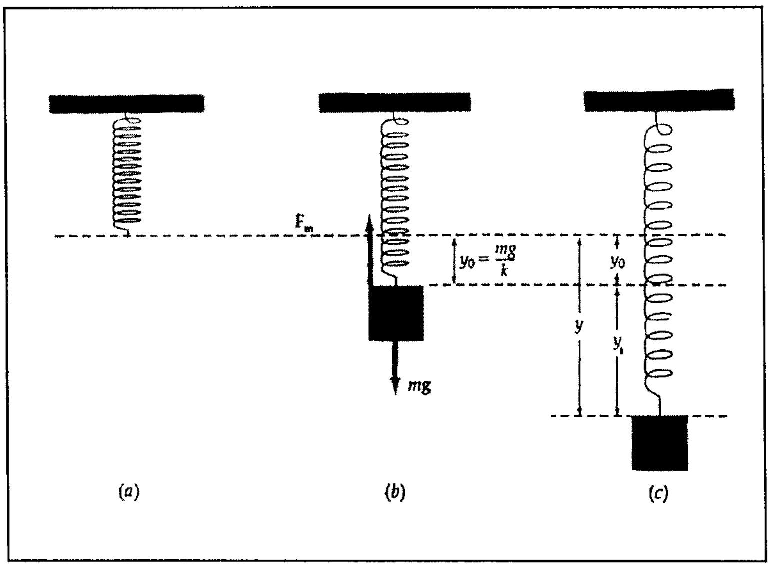


Figura 1.2 (extraída de Tipler, 1995, p. 380)

En dicha figura se observa lo siguiente: (a) Muelle vertical sin deformar. (b) El muelle se alarga una cantidad $y_0 = mg/k$ cuando cuelga de él en equilibrio un objeto de masa m. (c) Éste oscila alrededor de su posición de equilibrio $y = y_0$ con un desplazamiento $y_1 = y - y_0$.

En la posición de equilibrio las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo son

$$ky_0 = mg. \qquad (1)$$

Para hallar la ecuación que regula los cambios sucesivos entre las variables, utilizamos la segunda ley de Newton, $ma = F$.

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky + mg\,, \qquad (2)$$

donde y se mide hacia abajo, desde la posición sin deformar del muelle.

Podemos reescribir la ecuación tomando como origen la posición de equilibrio, $y = y_0$.

Como y_1 e y difieren sólo en una constante, sigue que $\frac{dy_1}{dt} = \frac{dy}{dt}$.

Reemplazando en (2), tenemos

$$m\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -k(y_1 + y_0) + mg = -ky_1 - ky_0 + mg\,.$$

Utilizando (1), obtenemos la ecuación diferencial deseada:

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\frac{k}{m} y_1\,.$$

A partir de esta ecuación es posible obtener algunos valores de las derivadas sucesivas de la función en puntos particulares. Para ello es necesario conocer algunos valores iniciales como $y_1(0)$, $(\frac{dy_1}{dt})_{t=0}$, $(\frac{d^2 y_1}{dt^2})_{t=0}$.

Consideremos que se separa el cuerpo de su posición de equilibrio en un valor A, es decir, el desplazamiento toma su valor máximo, $y_1(0) = A$ para el instante t=0. En ese momento el objeto está en reposo, por lo que $(\frac{dy_1}{dt})_{t=0} = 0$ y $(\frac{d^2 y_1}{dt^2})_{t=0} = -\frac{kA}{m}$.

Como la idea de predicción permite enunciar el valor futuro de un parámetro sólo con los valores de la variable y de sus variaciones en un inicio, usaremos la serie de Taylor en términos de los valores iniciales:

$$y_1(t) = y_1(0) + (\frac{dy_1}{dt})_{t=0} t + (\frac{d^2 y_1}{dt^2})_{t=0} \frac{t^2}{2!} + (\frac{d^3 y_1}{dt^3})_{t=0} \frac{t^3}{3!} + \cdots,$$

con lo que obtenemos

$$y_1(t) = A - A\frac{kt^2}{m2!} + A\frac{k^2 t^4}{m^2 4!} - A\frac{k^3 t^6}{m^3 6!} + \cdots\,.$$

Sustituyendo $k/m = w^2$, se obtiene[5]

$$y_1(t) = A(1 - w^2 \frac{t^2}{2!} + w^4 \frac{t^4}{4!} - w^6 \frac{t^6}{6!} + \cdots).$$

Observando que la expresión entre paréntesis es el desarrollo en serie de $cos(wt)$, se puede escribir

$$y_1(t) = A\cos(wt)\,.$$

[5] La relación k/m es positiva y, por lo tanto, es razonable sustituirla por el cuadrado de cierta magnitud.

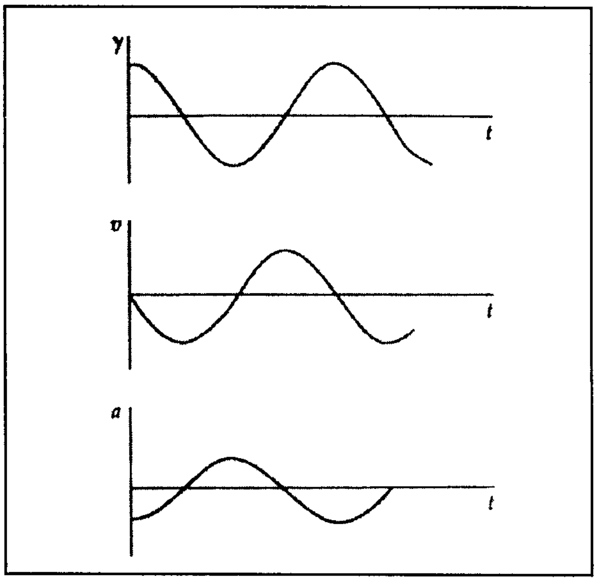


Figura 1.3. El desplazamiento y_1, la velocidad v y la aceleración a en función del tiempo t.

En la figura 1.3 se observa que la aceleración es proporcional y de sentido opuesto al desplazamiento. Es importante determinar algunas regularidades en las gráficas de las derivadas sucesivas, y que creemos nos ayudarán en la construcción del concepto de la serie de Taylor como elemento predictor.

Con este ejemplo hemos puesto de manifiesto la posibilidad de obtener, con cierta naturalidad, el planteamiento y resolución del problema que en los manuales escolares, de este nivel, se presenta como algo muy complejo y fuera del alcance del texto. Es evidente que, de esta manera, la determinación de las condiciones iniciales y la resolución misma del problema sigue una lógica de solución explícita y, eventualmente, bajo el control del alumno.

1.4.- DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La noción de derivada no se constituye en objeto estable del saber en un primer curso de Cálculo. Nosotros hemos observado que los alumnos asimilan la técnica pero no reconocen, por ejemplo, las derivadas sucesivas como nuevas funciones. Esto ocurre por diversas causas entre las que podemos destacar:

- La falta de estudio y de análisis de la variabilidad de fenómenos sujetos al cambio.
- El no haber logrado articular la noción de derivada con la noción de derivadas sucesivas.

Estas razones nos llevan a sostener que la derivada no se debe entender sólo como la primera derivada, sino que es algo que permite organizar las derivadas sucesivas, porque las nociones matemáticas no pueden reducirse a su definición. Esto es, debería entenderse a las derivadas no como un algoritmo ni una simple iteración, como suele ser considerada en la mayoría de los textos de Cálculo, sino como una "sucesión" de funciones donde cada una provee de información muy rica en significaciones, especialmente en el contexto de las Ciencias Experimentales. De esta manera, conjeturamos que sólo entonces adquieren significación propia los términos de la serie de Taylor. Así surge el concepto de función analítica, asociado con la noción de predicción, para predecir el estado ulterior de un sistema físico donde se conoce su estado inicial, que es la idea germinal (Cantoral, 2000).

Con esta idea proponemos discutir con cuidado el proceso de reconocimiento de la Matemática en los fenómenos físicos y no sólo aplicar la Matemática en la Física.

1.5.- OBJETIVOS Y SUPUESTOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.5.1.- OBJETIVOS

El objetivo general de nuestra investigación *es estudiar las causas de las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Infinitesimal cuando se enseña a estudiantes universitarios de Ciencias e Ingeniería*, buscando dichas causas no sólo en las formas en que trasmitimos el conocimiento sino fundamentalmente en la manera en que se articula el contenido matemático que se enseña. Para ello nos proponemos los siguientes **objetivos específicos**:

A. *Favorecer en el alumno el pensamiento y el lenguaje variacional que le posibilite abordar con éxito los problemas propios de las Ciencias Experimentales.*

B. *Desarrollar en los estudiantes los mecanismos que permitan transitar desde la predicción, noción propia de las ciencias experimentales, a lo analítico, noción propia de las Matemáticas, utilizando para ello estrategias del pensamiento y el lenguaje variacional.*

Para lograr estos objetivos partimos de los supuestos que exponemos a continuación.

1.5.2.- SUPUESTOS DE PARTIDA

1. *En la actualidad, en la enseñanza de las derivadas sucesivas de una función f se realiza una argumentación matemática que* ***no le da entidad propia*** *pues la* *liga, mediante un algoritmo, a la noción de derivada primera, es decir* $(((f)')')'...)'$. *Entendemos que ello se podría lograr si al presentar las derivadas sucesivas de una función se les da significado a cada una y a su conjunto, mostrándolas como una "sucesión" o una "n-upla" de derivadas, es decir* $(f, f', f'', f''', \ldots, f^{n)}, \ldots)$.

2. *En la enseñanza de la Física y las Matemáticas que se realiza en la actualidad las series de Taylor se utilizan básicamente como instrumento para la aproximación. Pensamos que para abordar, a través de funciones analíticas, los problemas que requieren de la noción de predicción en fenómenos de flujo continuo en la naturaleza, noción ésta propia de las ciencias experimentales, es más propicia la concepción sobre derivadas sucesivas antes indicada.*

CAPÍTULO 2

ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

2.0.- INTRODUCCIÓN

Dedicamos la primera parte de este capítulo a hacer un breve recorrido por las principales líneas de investigación en Didáctica de las Ciencias y las Matemáticas; para ésta última, nos centraremos en el Cálculo Diferencial. A continuación se presenta un esquema sobre la epistemología de los objetos involucrados en nuestra investigación. Por último, indagamos sobre los fundamentos teóricos que hemos considerado básicos para el desarrollo de este trabajo como es la *teoría de las situaciones didácticas,* que es el marco para la elaboración de una *ingeniería didáctica,* la cual hemos tomado como metodología de investigación y a la que nos referiremos en el capítulo siguiente.

2.1.- REVISIÓN DE DISTINTOS ACERCAMIENTOS A LA PROBLEMÁTICA DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES.

A lo largo de las dos últimas décadas se ha producido un desarrollo de la didáctica de las ciencias tan pujante que ha sido calificado de auténtica revolución (White, 1999), dando lugar a la emergencia de una nueva disciplina científica.

Algunas de las dificultades que ha tenido, y a las que tendrá que enfrentarse esta nueva disciplina, derivan de los vínculos existentes entre la didáctica de las ciencias y la psicología de la educación o ciencias de la educación ya que, para algunos, la didáctica de las ciencias sigue teniendo una dimensión meramente práctica de aplicación de los conocimientos teóricos elaborados por las ciencias de la educación. Es la existencia misma del cuerpo de conocimientos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias lo que hace posible una integración efectiva de las aportaciones de la psicología de la educación (Gil, 1993a).

Conviene también tener presente que la didáctica de las ciencias posee relaciones privilegiadas, no sólo con la psicología educativa, sino también con la historia y la filosofía de la ciencia. La atención cuidadosa a las implicaciones de estas últimas es relativamente reciente (Matthews, 1994) y responde a necesidades del propio desarrollo teórico de la didáctica (Gil, 1993b).

"*Llamamos la atención contra una concepción de la didáctica de las ciencias como mera aplicación práctica de la psicología del aprendizaje. Se trata, insistimos, de una seria dificultad para su desarrollo. Pero mayor es, si cabe, la dificultad que representa la creencia - todavía muy extendida - de que enseñar es una actividad simple para la que bastan los conocimientos científicos y algo de práctica. Mientras esta concepción persista - en la sociedad, en las autoridades académicas y en los mismos docentes - la didáctica de las ciencias verá muy limitada su influencia sobre la actividad en el aula, lo que, a su vez, se convierte en un serio obstáculo para el desarrollo del nuevo cuerpo de conocimientos*" (Gil, Carrascosa y Martínez, 2000, p. 21).

A continuación haremos una breve revisión de las principales líneas de trabajo que han centrado el interés de los investigadores a lo largo de estas dos últimas décadas y que han influido en nuestro trabajo.

2.1.1.- CONCEPCIONES ALTERNATIVAS

En Gil, Carrascosa y Martínez (2000, p. 23) hay una importante relación de trabajos e investigadores que destacan en esta línea de investigación, que es una de las más fructíferas en España, y donde más tesis doctorales se recogen.

La investigación sobre concepciones alternativas sirvió para cuestionar la eficacia de la enseñanza por transmisión de conocimientos ya elaborados, o la idea de que enseñar ciencias es una actividad simple para lo cual basta con conocer el material y tener algo de experiencia.

Estudios rigurosos como las tesis de Driver (1973) y Viennot (1976) cuestionaban la efectividad de la enseñanza allí donde los resultados eran considerados más aceptables, ya que los estudiantes parecían tener menos dificultades en responder una pregunta "teórica" que en resolver un problema. Por lo tanto, la utilización de sencillas cuestiones cualitativas son suficientes para mostrar graves problemas de comprensión. Es preciso resaltar esa capacidad de cuestionar de la investigación sobre preconcepciones, puesto que ha contribuido más que cualquier otro estudio a problematizar el estudio y aprendizaje de las ciencias y a romper con la inercia tradicional asumida acríticamente (Gil, 1994).

Hay un gran número de denominaciones que se han utilizado para referirse a las ideas previas de los alumnos sobre fenómenos científicos. Los más comunes son: ideas previas, concepciones alternativas, preconcepciones, esquemas de los alumnos, constructos, modelos mentales, representaciones e ideas intuitivas, etc.

Las características más importantes de las ideas previas de los alumnos son (de Posada, 2000, p. 369):

- *El individuo moviliza ciertas nociones o esquemas en el transcurso de la actividad representativa a partir de las cuales podemos inferir una concepción, pero ésta no es explícita.*
- *La concepción alternativa es un modelo explicativo. Éste puede evolucionar a medida que se construye el conocimiento. A menudo el sujeto no es consciente de que posee representaciones. Los individuos utilizan sus esquemas con un grado de consistencia y estabilidad variable aunque significativo* (Oliva, 1999).
- *Las concepciones tienen una génesis al mismo tiempo individual y social. Las representaciones se elaboran a lo largo de la vida del individuo a través de la acción cultural de los padres y familiares, la escuela, medios de comunicación y más tarde por la actividad social y profesional en el adulto.*
- *Estas concepciones se presentan asociadas a una metodología, denominada de la superficialidad, que se caracteriza por respuestas rápidas, seguras y no sometidas a ningún tipo de análisis (al menos científico)* (Gil y Carrascosa, 1990).
- *Se ha encontrado paralelismo entre la evolución de determinado conceptos en la historia de las ciencias y las ideas que los alumnos mantienen sobre ellas en su propio desarrollo cognitivo. Esto puede interpretarse como modos peculiares abordados por la mente para resolver problemas en los que los alumnos hacen uso del sentido común para analizar las situaciones que encuentran.*

Existen diferentes posiciones que abordan la construcción y evolución de las ideas previas de formas muy diferentes; éstas son:

- Posiciones epistemológicas e históricas
- Posiciones psicológicas:
    1. Piaget y las concepciones previas.
    2. Ideas previas y el aprendizaje según Vygotsky.
    3. Las ideas previas y el aprendizaje significativo de Ausubel.

Es sabido que las concepciones previas que traen los estudiantes influyen en el aprendizaje de los conceptos científicos en el aula. Un buen conocimiento de esas concepciones por parte de los investigadores y profesores ayudaría a determinar qué actividades son necesarias para la adecuada asimilación de ciertos conceptos. Sin embargo esta tarea es muy compleja, entre otras cosas porque las concepciones de los alumnos suele tener una lógica interna diferente a la de la ciencia; también ocurre que en un determinado grupo de alumnos puede haber numerosas concepciones alternativas coexistiendo. Para hacer frente a las dificultades que presentan las ideas previas los investigadores han diseñado numerosas estrategias entre las que destacan algunos modelos a los que nos referiremos brevemente.

- Modelo de cambio conceptual

El método se debe a Posner et al. (1982) y ha sido revisado por Strike y Posner (1992). Se han realizado numerosas experiencias didácticas en áreas de conocimiento muy dispares, entre las que podemos citar: dinámica física (Hewson y Beeth, 1995), teoría de la evolución (Demastes et al., 1996), enseñanza de las disoluciones (Sánchez et al. 1997), óptica geométrica (Perales y Nievas, 1995) y la teoría de la relatividad (Toledo et al., 1997), entre otras.

Los autores del modelo de cambio conceptual indican que se trata de un modelo de aprendizaje y que por tanto no determina un tipo concreto de enseñanza.

Los diferentes modelos de enseñanza mediante cambio conceptual parten de un punto común, las ideas previas que traen consigo los estudiantes. Plantean cuestiones o actividades para que exterioricen sus concepciones aplicándolas en las actividades concretas. A continuación son introducidas otras cuestiones en las que los estudiantes, al utilizar dichas ideas, llegan a situaciones imposibles o claramente erróneas. Se les hace percibir a los alumnos la existencia de conflictos para que puedan aceptar las concepciones científicas que el profesor va a impartir a continuación. Por último se aplica el esquema científico a nuevas situaciones con resultados coherentes.

- Utilización de la historia de las ciencias

El conocimiento de la historia de las ciencias muestra la gran dificultad que la comunidad científica ha tenido para avanzar y aceptar nuevos hechos y teorías. Este conocimiento puede mejorar la actitud de los alumnos hacia la ciencia y facilitar la comprensión de cómo se hace y evoluciona ésta. La hipótesis de que la mente de los alumnos funciona básicamente como la de los investigadores se ve apoyada por el hecho de que se han encontrado paralelismos entre la evolución de algunos conceptos en la historia de las ciencias y los mismos conceptos en el desarrollo cognitivo de los alumnos. Al respecto encontramos trabajos sobre la estructura interna de la materia (Furió, et al., 1987) y la electrostática y electrodinámica (Benseghir y Closset, 1996), entre otros.

2.1.2.- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En nuestro ámbito son numerosas las Tesis Doctorales dedicadas a la resolución de problemas y se ha publicado abundante bibliografía al respecto. Cabe destacar también que en el *Handbook of Research on Science Teaching and Learning* se hace referencia a la relevante aportación de un equipo español en este campo (Maloney 1994, p. 344).

Haremos una clarificación sobre los vocablos más comunes implicados en esta temática siguiendo a Perales (2000, p. 291). El concepto genérico de *problema* lo define como "*una situación incierta que provoca en quien la padece una conducta tendiente a hallar la solución y reducir de esta forma la tensión inherente a dicha incertidumbre*". Podemos distinguir entre *problemas cotidianos y problemas académicos*. Estos últimos contemplan habitualmente los siguientes elementos (Dumas-Carré, 1987):

- La descripción de un dispositivo y su funcionamiento, eventualmente acompañado de un esquema.
- Las condiciones experimentales a que está sometido.
- Unas simplificaciones o modificaciones parciales que inscriben el fenómeno estudiado en un marco teórico simple.

- Unos datos o valores tomados por ciertas magnitudes físicas que se llaman a menudo "condiciones iniciales".
- Unas consignas de respuesta, más o menos implícitas, interviniendo en la formulación de la pregunta.

Las nuevas tendencias pedagógicas recomiendan la necesidad de utilizar en el aula la resolución de problemas abiertos. La clasificación en problemas abiertos y cerrados hace referencia a la solución, esto es, si el resultado es único el problema es cerrado y si son posibles varios resultados el problema es abierto.

De acuerdo con dichas tendencias la resolución de problemas podría permitir:

- Diagnosticar las ideas previas de los alumnos y ayudarles a construir sus nuevos conocimientos a partir de las mismas.
- Adquirir habilidades de distinto rango cognitivo.
- Promover actitudes positivas hacia la Ciencia y actitudes científicas.
- Acercar los ámbitos de conocimiento científico y cotidiano, capacitando al alumno para resolver situaciones problemáticas en este último.
- Evaluar el aprendizaje científico de los alumnos y el propio currículum.

Los modelos de investigación en resolución de problemas los agrupamos según Perales (2000) en:

La solución de problemas como un problema de muchas variables. Se considera la solución de problemas como una tarea compleja en la que interviene un gran número de variables. Corresponde a los investigadores hacer explícitas tales variables e incidir sobre ellas con el fin de mejorar la eficiencia de tal actividad. Los supuestos que se asumen con este enfoque giran en torno a la enseñanza tradicional de las Ciencias y de la Psicología Conductista.

La resolución de problemas por expertos y por novatos. Se trata de poner de manifiesto de una forma rigurosa cómo abordan la resolución de problemas los expertos para tratar de enseñar a los novatos los procesos utilizados por los primeros. El origen de este modelo de investigación se sitúa en la Psicología del Procesamiento de la Información y en la Inteligencia Artificial. Algunas consecuencias genéricas de esta línea de investigación se mencionan en Perales (2000, p. 297).

La enseñanza de estrategias heurísticas. Se pretende enseñar a los alumnos estrategias de resolución de problemas que les permitan resolverlos con mayor acierto. Tales estrategias fueron enunciadas por Polya (1945), a partir de su trabajo sobre los modos de resolución de problemas por parte de los individuos:

- ❑ Definición del problema: selección de la información pertinente.
- ❑ Planificación del problema: elaboración del esquema de resolución.
- ❑ Ejecución: resolución propiamente dicha.
- ❑ Retroacción: revisión del proceso.

Del importante papel desempeñado por la resolución de problemas en los modelos más influyentes en la Didáctica de las Ciencias se hace referencia en Perales (2000, p. 298). A continuación, transcribimos las características del modelo que más se adecua a nuestro trabajo.

- Modelo constructivista

- Los problemas deben jugar un papel esencial en el aprendizaje conceptual.
- Su enunciado y resolución deben estar conectados con la experiencia previa del sujeto.
- El objetivo fundamental del problema será facilitar el cambio conceptual:
  - Articulando el propio alumno sus ideas previas (el problema como "diagnóstico").
  - Contrastando sus ideas previas con las explicaciones científicas (el problema como actividad para el "cambio conceptual").
  - Aplicando las nuevas ideas (el problema como "consolidación del cambio conceptual").
- En una extensión de la noción de cambio conceptual, también debería servir la resolución de problemas para un cambio de estrategias (o metodológico), desde las espontáneas puestas de manifiesto habitualmente por los alumnos, a las heurísticas más propias del ámbito de resolución científica.

Otras líneas de investigación de similar importancia se han desarrollado sobre cuestiones como:

- Prácticas de Laboratorio (Gil et al., 1991, cap. I; Lazarowitz y Tamir, 1994; Caamaño, Carrascosa y Oñorbe, 1994; Luneta, 1998).

- **Diseño curricular** (Gil et al., 1991, caps. VIII, IX y X; Bybee y DeBoer, 1994; Del Carmen, 1996; García, 1998; Van Den Akker, 1998; Wallace y Louden, 1998; Bybee y Ben-Zvi, 1998)
- **Relaciones ciencias/tecnología/sociedad** y el **papel del medio** (García, 1987; Solbes y Vilches, 1989 y 1997; Jiménez y Otero, 1990; Gilbert, 1992; Jiménez, 1995; Catalán y Catany, 1996; Gil, et al., 1999).
- **Evaluación** (Geli, 1986; Gutiérrez et al., 1990, 4ª parte; Gil et al., 1991, cap. VII; Alonso, 1994; Del Carmen, 1995; Jorba y Sanmartí, 1995; Tamir, 1998).
- **Formación del profesorado** (Porlán, 1989 y 1993; Gil y Pessoa, 1994; Anderson y Mitchener, 1994; Carnicer, 1998; Mumby y Rusell, 1998; Porlán y Rivero, 1998).
- **Cuestiones axiológicas** que plantean las diferencias de género, la creciente diversidad cultural, etc., (Fraser, 1994; Kahle y Mece, 1994; Atwater, 1994; Baker, 1998; Nichols et al., 1998).

Por último, podemos decir que dichas líneas de investigación aparecen cada vez más integradas, lo que muestra que se ha llegado a comprender la imposibilidad de introducir innovaciones eficientes en algunos aspectos de la enseñanza-aprendizaje de las ciencias si no se tiene en cuenta a las restantes. Esta atención a la globalidad se está traduciendo en la ruptura de barreras tradicionales en la enseñanza de las ciencias, que aparecen ahora sin fundamento; ejemplo de esto puede ser la diferenciación entre enseñanza y evaluación. Como se señala en (Gil, Carrascosa y Martínez, 2000, p. 25), "*se trata de lograr la total confluencia entre las situaciones de aprendizaje y de evaluación, explotando el potencial evaluador de las primeras y diseñando las segundas como verdadera situaciones de aprendizaje*".

2.1.3.- ORIENTACIONES CONSTRUCTIVISTAS COMO MARCO TEÓRICO

Podemos distinguir tres niveles de análisis en relación con los postulados constructivistas: el epistemológico, el psicológico y el educativo. Una posición epistemológica que ha tenido importantes implicaciones para otros niveles de análisis, como el psicológico y el educativo, considera que "*puesto que el conocimiento es una construcción subjetiva, la realidad deja de ser una entidad absoluta: el constructivismo asume que el conocimiento supone una perspectiva relativa sobre la realidad*" (Pozo, Pérez y Mateos, 1997). Sin embargo, cuando nos referimos al análisis psicológico y al educativo hablaremos de concepciones constructivistas, ya que existen distintos modelos y teorías de constructivismo (Luque, Ortega y Cubero, 1994). La perspectiva constructivista en psicología se refiere a las relaciones entre la actividad del sujeto y su evolución psicológica. "*Como tal es una herramienta fundamental para la comprensión de los procesos de enseñanza aprendizaje en el aula, pero no es suficiente, ni es la única*" (Rodrigo y Cubero, 2000, p. 89).

La perspectiva constructivista de los procesos de enseñanza y aprendizaje, según la propuesta de Coll (1996, p. 164), consiste en tomar en consideración "*la naturaleza y funciones de la educación escolar y de las características propias y especificas de las actividades escolares de enseñanza y aprendizaje*" para elaborar una concepción integrada, situada en la educación escolar. En el ámbito de la didáctica de las ciencias los planteamientos constructivistas han sido desarrollados no sólo en relación con las estrategias de enseñanza, el cómo enseñar, sino también con la formulación de los propios contenidos educativos, el qué enseñar (Rodrigo y Cubero, 2000, p. 90).

Es necesario clarificar qué aspectos del proceso de enseñanza- aprendizaje se pueden enfrentar desde una perspectiva constructivista. Ésta no puede dar cuenta de todos los problemas educativos ni puede explicar todos los problemas del aprendizaje. En este sentido, por un lado, encontramos el debate sobre si todo aprendizaje puede ser considerado como una construcción y, por otro lado, se encuentra el debate en torno a si todo aprendizaje constructivista es un aprendizaje en el que se produce un cambio conceptual.

Los estudios sobre el aprendizaje de las Ciencias Experimentales han planteado si la comprensión, dentro de un dominio, implica ampliar la comprensión conceptual añadiendo nueva información a la que ya dispone el alumno, o en qué medida consiste en integrar nueva información de manera que el estudiante reestructure lo que ya sabía. El cambio conceptual, como proceso de adquisición de conocimiento, ha sido interpretado por la mayoría de los autores como un proceso de estructuración o de reestructuración, aunque la terminología utilizada y las descripciones varíen de unos autores a otros (Rodrigo y Cubero, 2000, p. 91).

La propuesta de organizar el aprendizaje de los alumnos como una construcción de conocimientos responde a la situación de una investigación dirigida, en dominios completamente conocidos por el profesor y en la que los resultados parciales, embrionarios, obtenidos por los alumnos, pueden ser reforzados, matizados o puestos en cuestión, por los obtenidos por los científicos que les han precedido, (Gil, Carrascosa y Martínez, 2000, p. 31). "*Las situaciones problemáticas abiertas, el trabajo científico en equipo y la interacción entre los equipos se convierten así en tres elementos esenciales de una orientación que hemos denominado constructivista radical del aprendizaje de las ciencias*" (Gil, 1993). Lo que se ha dado en llamar una orientación radicalmente constructivista, "*es una propuesta que contempla una participación efectiva de los estudiantes en la construcción de los conocimientos*" (Gil, Carrascosa y Martínez, 2000, p. 32).

Dentro de las distintas propuestas que se autodefinen como constructivistas presentamos aquí un análisis, realizado por Jiménez (2000), sobre algunos de los rasgos en que parece existir acuerdo. Entre los argumentos de relevancia podemos distinguir

- **Fundamentos empíricos**

Aparecen relacionados con las investigaciones sobre ideas alternativas (Driver et al. 1989, Giordan 1982, Osborne y Freyberg 1991). Según éstas, los estudiantes mantienen sus interpretaciones de los fenómenos naturales a pesar de la instrucción. Se recomienda que se preste atención a sus concepciones que, según Driver (1988), constituyen esquemas activos que actúan dinámicamente como "modelos de ver" la realidad y que, a su vez, son utilizados por el alumno para construir un conocimiento posterior.

- **Fundamentos psicológicos y epistemológicos**

Los enfoques cognitivos consideran al aprendizaje como un cambio en las estructuras de conocimiento. Piaget menciona la actividad constructiva de la mente. Para él, cuando el sujeto realiza una percepción, ésta es asimilada necesariamente a un esquema o estructura más o menos compleja, siendo esto precisamente lo que permite dar una significación a lo que es percibido o concebido (Piaget, 1980, p. 7). En tanto que para Kelly, las personas se explican a sí mismas y a su entorno construyendo modelos hipotéticos y evaluándolos. Tampoco hay que olvidar a Ausubel (Ausubel et al., 1986) por su concepción del aprendizaje significativo. Según el autor, éste se da cuando el contenido a enseñar está relacionado de modo sustancial con lo que el alumno ya sabe, de modo que la nueva información es asimilada en la estructura cognoscitiva.

La epistemología de la ciencia como proceso de interpretación de la realidad mediante la construcción de modelos que pueden ser sustituidos por otros se basa, fundamentalmente, en la perspectiva de Kuhn.

- **Principios**

Aprender ciencias es reconstruir los conocimientos partiendo de las ideas propias de cada individuo. Es decir, el aprendizaje no es una reproducción del contenido a aprender, sino que implica un proceso de construcción individual. Por lo tanto, enseñar ciencias es mediar en este proceso de aprendizaje en todas las tareas implicadas en esta actividad.

- **Modelo de acción**

Se toma como base las ideas de los estudiantes, ya sea para desarrollar otras más acordes con la ciencia o para confrontarlas con éstas y sustituirlas. Es importante que el docente las conozca pero que también los alumnos se den cuenta de que las usan en la interpretación de fenómenos (Jiménez, 1991).

El currículum se configura como un programa de actividades, de situaciones de aprendizaje en las que los estudiantes construyen sus propios significados. Como ejemplo podemos tomar los programas-guía de Física y Química (Calatayud et al. 1990).

- **Sistema social**

La responsabilidad del proceso de aprendizaje recae en el estudiante, es él el que construye significados, atribuye sentido a lo que aprende y nadie, ni siquiera el profesor, puede sustituirlo en ese cometido. El papel del docente debe ser flexible, en tanto que la participación del estudiante deber ser activa. Las interacciones son múltiples, tanto entre profesor y estudiantes, como entre éstos. El clima que requiere este aprendizaje es de diálogo, donde todos puedan exponer sus ideas sin el temor de equivocarse.

Creemos que el constructivismo ofrece más un marco donde trabajar que una solución "lista para usar". Teniendo en cuenta algunas críticas recientes a diversos aspectos de este modelo, podemos señalar la relación del constructivismo con otros modelos anteriores de aprendizaje y aceptar que muchas prácticas docentes, vinculadas a los modelos anteriores, son eficaces y deben ser incorporadas a la nueva perspectiva, reconstruyendo sobre lo anterior (Jiménez, 2000).

2.1.4.- INTERACCIÓN ENTRE IGUALES Y APRENDIZAJE DE CONCEPTOS CIENTÍFICOS

En esta aproximación nos encontramos ante un cambio en las concepciones acerca del aprendizaje que transita desde el modelo de aprendiz individual, noción de claro origen piagetiano, a la representación del sujeto que actúa como un ser social en un determinado contexto histórico y cultural, de influencia vygotskiana. Este último punto de vista subraya que dicho contexto es parte integral, no un simple soporte accesorio, de modo que las decisiones relativas a la organización de la enseñanza debiera centrarse esencialmente en cómo se va a considerar esa dimensión social, más que en si ha de tenerse en cuenta o no (Kutnick y Rogers, 1994).

Bajo el término cooperación en el aula se pueden encontrar diversas aproximaciones: aprendizaje cooperativo (Kempa y Ayob, 1995), colaboración entre iguales (Alexopoulou y Driver, 1996) y la tutoría entre iguales (Thorley y Treagust,1987).

En cuanto a los modelos teóricos que suelen guiar estas investigaciones destaca la perspectiva de cohesión social y el constructivismo social de raíz vygotskiana. En cuanto a los métodos de investigación, se aprecia una elevada proporción de diseño experimentales puros, en general de dos grupos, tratamiento y control, con pretest y postest y, en crecimiento, un enfoque cercano al análisis del discurso. Este desplazamiento del foco de interés resulta fundamental para abordar de lleno el estudio de los procesos grupales, de los intercambios verbales que conducen al aprendizaje. (Rodríguez y Escudero, 2000).

Si, como dice Lemke (1990), aprender ciencia significa hablar de ciencia, la interacción entre iguales se convierte en una herramienta poderosa. "*El acto de verbalizar argumentos a un compañero y el de recibir explicaciones proporciona a los estudiantes la oportunidad de ensayar a expresarse en términos científicos, libre de las presiones, reales o imaginarias, debida a la presencia de los profesores*" (Rodríguez y Escudero, 2000).

2.2.- REVISIÓN DE DISTINTOS ACERCAMIENTOS A LA PROBLEMÁTICA DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

La investigación en los problemas de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas como una disciplina científica se inicia en la década de los setenta.

"En esta época se acepta como una premisa funcional el que esta disciplina estudia los procesos de construcción, transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar. No se reduce a la búsqueda de una "buena manera" de enseñar una cierta noción fijada previamente, sino que permite tomar como objeto de estudio, por ejemplo, la organización de una actividad cuya intención declarada sea el aprendizaje de un cierto saber aunque este objetivo no sea alcanzado" (Cantoral, 1998, p. 354).

La investigación en este campo se propone incidir sobre el sistema educativo en un sentido positivo, mejorando los métodos y los contenidos de la enseñanza, proponiendo las condiciones para un funcionamiento estable de los sistemas didácticos, asegurando entre los alumnos la construcción de un saber viviente, susceptible de evolución, y funcional, que permita resolver problemas y plantear verdaderas preguntas.

2.2.1.- UN PARADIGMA: PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO

En su inmensa mayoría, las investigaciones en didáctica se han ocupado de estudiar y documentar las dificultades de los estudiantes cuando se enfrentan al aprendizaje de las ideas del Cálculo Infinitesimal. Se ha tratado de obtener toda clase de evidencia empírica susceptible de explicar el origen de las dificultades entre los alumnos.

Existen diferentes acercamientos y resultados de investigaciones cognitivas sobre procesos de pensamiento matemático avanzado. Dreyfus (1990) comenta sobre la ambigüedad de la frase "pensamiento matemático avanzado" que la palabra "avanzado" puede referirse a matemáticas, a procesos o a ambos. Especifica también que los procesos de pensamiento matemático avanzado incluyen:

- Pensamientos acerca de tópicos en matemáticas avanzadas.
- Procesos avanzados de pensamiento matemático como abstracción, prueba y razonamiento bajo hipótesis.

En general, podemos decir que la mayoría de las investigaciones en esa dirección se centran en tópicos de Cálculo Infinitesimal, se ocupan de estudiar las nociones de número real, función, límite, continuidad, diferenciación, integración y ecuaciones diferenciales. Aunque se reconoce que no existen diferencias claras que separen los conceptos de la matemática avanzada de los de la llamada matemática elemental, dado que cada concepto avanzado se basa en conceptos más elementales, se acepta que los conceptos de la matemática avanzada poseen una complejidad intrínseca.

Los estudiantes, aparentemente, no pueden comprender el significado de una ecuación diferencial a menos que hayan entendido los conceptos de diferenciación, ni pueden comprender las ideas detrás de los métodos de solución sin un entendimiento de integración ligado a ideas visuales y numéricas. Similarmente, la diferenciación e integración suponen una comprensión del concepto de función, y éste supone la comprensión de la noción de variable, la cual presupone el concepto de número. Cada concepto tiene un alto grado de complejidad y solamente puede ser comprendido dentro de una red simultánea de otros conceptos.

En estas revisiones se suelen hacer diversas clasificaciones, unas temáticas y otras relativas a los procesos involucrados. Por ejemplo, se dice que la investigación sobre pensamiento matemático avanzado se ha centrado en la abstracción, prueba y resolución de problemas, pero también se señala que la investigación trata principalmente del cálculo infinitesimal, las ecuaciones diferenciales, la inducción matemática, el tratamiento matemático del infinito y del álgebra lineal.

La investigación cognitiva sobre el pensamiento matemático avanzado tiene, según señala Dreyfus, dos clases de precursores:

1- Una clase es presentada en trabajos de matemáticos con un interés en la educación, entre ellos Lebesgue, Poincaré, Hadamard, Halmos, Hilton y Tom. Ellos tomaron el contenido matemático y su estructura como base de sus pensamientos. No tuvieron en cuenta al estudiante involucrado en el aprendizaje de las Matemáticas o en los detalles de su comprensión ni cómo es que éste se logra. No investigaron los procesos de pensamiento de los estudiantes. Una de las razones de la presente crisis en la enseñanza de la

Matemática es precisamente que ésta no considera los procesos cognitivos, sino solamente el contenido matemático.

2- La segunda clase de precursores analiza la investigación cognitiva en el aprendizaje de las Matemáticas tratando con tópicos elementales, principalmente en la adquisición temprana del concepto de número. Estos investigadores forman el "Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática" (PME), el cual desarrolló sus trabajos hasta la mitad de los ochenta y fue un intento interdisciplinario de Psicólogos y Matemáticos. En 1985 un nuevo grupo comienza a trabajar sobre *pensamiento matemático avanzado*. Su trabajo se ha centrado sobre construcciones psicológicas tales como representaciones y la descripción de procesos que ocurren en el aprendizaje de tópicos matemáticos avanzados.

El creciente interés de los matemáticos profesionales en los asuntos de la enseñanza y el aprendizaje, así como la estabilidad y madurez alcanzada por comunidades de investigación que se organizan en torno de grupos académicos con paradigmas propios, como son los casos de los grupos "Psichology of Mathematics Education", el "Comité Latinoamericano de Matemática Educativa" o los IREM (Instituto para la investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas) entre otros, consideramos que son factores que han dado lugar a un crecimiento vertiginoso de investigaciones que se ocupan de los procesos de pensamiento, llamados avanzados, en los temas matemáticos de la educación superior.

Dentro de las distintas corrientes del pensamiento citaremos a continuación algunos de los mas destacados acercamientos en nuestro medio. Los tres primeros comparten una fuerte inclinación cognitiva, desatendiendo aspectos culturales y sociales o la vida de las instituciones escolares y científicas.

2.2.1.1.- Los acercamientos estadísticos

Prueba objetiva.

Entre las primeras investigaciones que fueron objeto de algunas revisiones referidas anteriormente, encontramos los acercamientos estadísticos de corte operativo. Los investigadores representativos de esta aproximación son Anderson y Orton.

Sus trabajos se fundamentan en la Estadística y sus muestras incluyen un gran número de estudiantes de los niveles medio y superior. El mensaje general que envían estos autores es que mediante una enseñanza más persistente, más localizada en aliviar dificultades, se podrían remediar los problemas detectados en sus estudios; es decir, si supiéramos que ciertos errores son factibles, entonces se podrían eliminar atendiéndoles con más cuidado en su enseñanza.

Por ejemplo, en Anderson (1979) se desarrolla un curso enfatizando la dimensión que condiciona la certeza de los resultados del Cálculo y, al mismo tiempo, desalienta a los estudiantes de ciertas intuiciones, conduciéndolos, según se dice, a la necesidad de la demostración. Se afirma que el método de la prueba objetiva produce información acerca de las concepciones erróneas de los estudiantes en el Cálculo y en esa medida se podría estar en mejores condiciones de producir aprendizajes.

Orton, por su parte, investigó ya sobre algunos aspectos de la comprensión en el cálculo elemental entre estudiantes de Matemáticas. Su muestra constó de 110 alumnos (55 hombres y 55 mujeres) y las tareas fueron agrupadas en 38 preguntas, tratando cada una de ellas diferentes aspectos (Orton, 1980).

Las tareas usadas estuvieron relacionadas con: la comprensión del límite en el caso de sucesiones numéricas y de algunas situaciones geométricas, la idea de integración como medida del área bajo una curva usando rectángulos, la idea de tasa de cambio usando gráficas y tablas de diferencias que conducen a diferenciación, así como con algunas de sus aplicaciones tanto para la diferenciación como para la integración. En sus escritos se concluye o se recomienda que en la enseñanza inicial del Cálculo Infinitesimal se requiere de un mayor vínculo con las ilustraciones apropiadas, incluyendo diagramas y gráficas.

2.2.1.2.- La dicotomía

Imagen del concepto - definición del concepto.

Quizá el primer acercamiento con un cierto nivel de influencia en distintas escuelas del pensamiento fue la construcción teórica del profesor Vinner en Israel. Al inicio de los años ochenta señala que los estudiantes no usan necesariamente la definición cuando deciden si un objeto matemático dado es o no un ejemplo del concepto en cuestión. En muchos casos deciden sobre la base de una imagen del concepto que han podido construir con su accionar sobre los objetos matemáticos; es decir, en su accionar sobre el conjunto de todas las imágenes mentales asociadas en sus mentes y vinculadas con el nombre del concepto, conjuntamente con todas las propiedades con que ellos las caracterizan. La imagen de los estudiantes es un resultado de su experiencia con ejemplos y contraejemplos del concepto. El conjunto de objetos matemáticos considerado por el estudiante es ejemplo del concepto y no necesariamente es igual al conjunto de objetos matemáticos determinados por la definición. Si estos dos conjuntos no son iguales, el comportamiento de los estudiantes puede ser diferente del esperado por el profesor.

Los ejemplos de este acercamiento, ya clásicos, fueron desarrollados por Tall; así es posible aún hoy encontrar en distintos sitios del orbe estudios en esa misma dirección. En términos generales dichos estudios tienen una estructura que proviene de la respuesta a la siguiente cuestión: ¿Cuál es la imagen del concepto x que tienen los estudiantes del nivel escolar y en el sistema educativo z? Este acercamiento permitió sin duda durante estos años construir una explicación plausible de las dislexias escolares.

En la obra de Tall y Vinner (1981) aparecen por primera vez los términos "*imagen del concepto*" y "*definición del concepto*". En ella se dice: "*Usaremos el término imagen del concepto para describir la estructura cognitiva total que está asociada con el concepto, la cual incluye todas las imágenes mentales y propiedades asociadas y procesos ... todos los atributos mentales asociados con un concepto, sean conscientes o inconscientes, serán incluidos en la imagen del concepto; ellos pueden contener el germen de futuros conflictos ... llamaremos a una parte de la imagen del concepto o de la definición del concepto que puede entrar en conflicto con otra parte de la imagen del concepto o de la definición del concepto, un factor potencial del conflicto ... solamente cuando los aspectos del conflicto sean evocados simultáneamente en cualquier sentido del conflicto o confusión*".

2.2.1.3.- La dialéctica

Proceso y objeto.

Unos años después, a partir de investigaciones de Thompson (1985), se propuso un sistema teórico un poco más elaborado que el anterior según el cual el conocimiento matemático es caracterizado en términos de procesos y objetos. Estas ideas están basadas en el trabajo de Piaget, principalmente en la noción de abstracción reflexiva; es decir, los números, las variables, las funciones y otros conceptos matemáticos pueden ser considerados como objetos. Estos objetos están conectados por relaciones, pues ellos forman parte de estructuras de objetos. Los procesos están compuestos de operaciones sobre estos objetos. Ellos por lo tanto transforman a los objetos. Las estructuras pueden o no preservarse bajo estas transformaciones.

Una razón para la complejidad del conocimiento matemático, según esta aproximación teórica, radica en que muchas nociones pueden tomar el papel de procesos o de objetos, dependiendo de la situación problema y de la concepción del estudiante. Típicamente, el aprendizaje en torno de un concepto incluye varios estados, empezando por efectuar las operaciones de un proceso en términos concretos. Cuando el estudiante se familiariza con un proceso y éste toma la forma de una serie de operaciones que se pueden efectuar mentalmente, el estudiante entonces ha alcanzado un *pensamiento operacional* respecto a este concepto. Un estado posterior, el bosquejo mental de este proceso, cristaliza en una entidad única, un nuevo objeto. En este momento el estudiante es capaz de pensar respecto a esta noción, ya sea dinámicamente como un proceso, o estáticamente como un objeto. Esto le permite al estudiante pensar en términos de posibilidades: ¿qué sucedería si efectúo o no cierta operación? En estos términos, uno de los pasos más esenciales en el aprendizaje de las Matemáticas es la formación de objetos: hacer un objeto de un proceso. Uno de los objetivos es desarrollar un pensamiento operacional, pensamiento acerca de procesos en términos de operaciones sobre objetos.

En esta dirección es posible encontrar estudios recientes que pretenden construir modelizaciones de los procesos del pensamiento cuando se quiere que los alumnos accedan a ideas avanzadas, como pueden ser, Álgebra Abstracta, Matemática Discreta, Análisis Matemático o Cálculo Elemental.

Este intento por describir el aprendizaje de las Matemáticas en términos de la construcción de objetos y procesos mentales por un estudiante es sistemático, pero da lugar a varias preguntas, tales como: ¿puede el aprendizaje y el desarrollo de la comprensión describirse sistemáticamente? ¿Es la descripción demasiado rígida? ¿El contenido matemático se está perdiendo detrás de los procesos y objetos, o son ellos el contenido matemático mismo? (Dreyfus, 1990)

2.2.1.4.- Obstáculos epistemológicos

El conocimiento fruto de la lucha.

La introducción de la noción de obstáculo epistemológico en didáctica se dio como medio para cambiar el estatus del error; así fue posible mostrar que "*el error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre o del azar, como lo conciben las teorías conductistas, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, que incluso habiendo sido exitoso se presenta como falso o inadaptado*" (Brousseau, 1976)

Puede afirmarse que las principales dificultades del desarrollo científico no han consistido en aquello que se ignoraba sino en lo que se creía saber, en lo que aparecía como evidente y por tanto no se cuestionaba, convirtiéndose en auténtico obstáculo epistemológico (Bachelard, 1981). Con ello se origina un nuevo paradigma del cual surge la didáctica como disciplina científica, desterrando al conductismo.

Distinguimos tres tipos fundamentales de obstáculos en la enseñanza: uno de origen *ontológico,* ligado a las capacidades cognitivas de los estudiantes engarzados en un proceso de enseñanza; otro de origen *didáctico,* relacionado con el modo de enseñar los conocimientos y que son consecuencia del sistema de enseñanza y uno de origen *epistemológico,* ligado al propio conocimiento y que se puede hallar en la evolución histórica de los conceptos.

Bachelard (1981), en su obra "La formation du esprit scientifique", que trata sobre el aprendizaje de la Física, dice: "*Cuando buscamos las condiciones psicológicas de los procesos de la ciencia, llegamos pronto a la convicción de que es en términos de obstáculos como es preciso exponer el problema del conocimiento científico ... Se conoce contra un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal hechos, superándolos*".

En diversas investigaciones en Didáctica del Cálculo, como las desarrolladas por Cornu (1983) y Sierpinska (1984), se bosquejan algunos de los obstáculos principales para la comprensión de la noción de límite (límite de sucesiones numéricas en el primero y noción topológica de límite en el segundo) y se busca establecer una especie de paralelismo con las dificultades encontradas en la historia. Esta investigadora considera que "*un obstáculo tiene carácter de inevitable y se repite en la filogénesis y ontogénesis de los conceptos*", por lo que "*la noción de obstáculo epistemológico puede ser estudiada en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la practica de la educación*"; afirma que "*un obstáculo epistemológico es un obstáculo para comprender*" y considera en él esencialmente que es específico de un concepto y sólo de él y que su toma de conciencia es indispensable para el desarrollo de dicho concepto.

Los investigadores, a los que se hace referencia, informan de resultados como los siguientes:

a) El aspecto metafísico de la idea: "Las matemáticas no se reducen a cálculos y propiedades algebraicas simples; interviene el infinito y está rodeado de misterio".
b) El infinitamente pequeño y el infinitamente grande: "Existen números reales muy pequeños pero diferentes de cero".
c) ¿Se alcanza el límite? La expresión *tiende a* se reserva para el caso donde no se alcanza el límite.
d) El paso al límite: otro obstáculo que parece importante es el paso de finito a infinito.

Los *obstáculos epistemológicos* relativos a la noción de limite son examinados por Sierpinska (1985); ella aborda una experiencia en la que participan cuatro jóvenes estudiantes, después de analizar sus reacciones a los problemas que les plantea (construir una representación de la tangente a una curva y la obtención de su ecuación, si la curva es $y = \text{sen}(x)$ en $x = 0$). En dicho estudio, por su parte, se daría a conocer los siguientes obstáculos relativos a la adquisición de la noción de límite.

I.- Horror del infinito.

El primer grupo de obstáculos incluye: 1. La persona rehúsa admitir que el paso al límite es una operación matemática. 2. Eliminar el problema del infinito tomando tantos términos como sean necesarios (método de exhaución). 3. Razonamiento basado en la inducción (físico, opuesto al matemático), pensamiento inductivo basado en cálculos numéricos. 4. Transfiriendo propiedades de los términos de la sucesión a su límite. 5. Transfiriendo métodos del Álgebra propios para manipular magnitudes de tamaño finito a magnitudes infinitas.

II.- Obstáculos restringidos a la noción de función.

Fijan su atención en funciones monótonas y en la fórmula $y = f(x)$, más que en su dominio y contra dominio.

III.- Obstáculos geométricos.

Se basan esencialmente en la idea geométrica de la diferencia entre una magnitud variable y una magnitud constante, la cual es su límite (método de exhaución).

IV.- Obstáculos lógicos.

Relacionados con el orden de los cuantificadores y los símbolos de operación usados en el paso al límite (los estudiantes usan lenguaje natural más que símbolos).

2.2.1.5.- Cálculo gráfico

"Cálculo gráfico" es una aproximación al Cálculo desarrollada por Tall (1991), quien reconoce los obstáculos conceptuales conocidos en el concepto de límite y propone una secuencia de aprendizaje construida sobre la visualización de la "linealidad local" de las gráficas. Usa las posibilidades gráficas y dinámicas del ordenador para dar una base cognitiva a las nociones de derivada e integral en educación secundaria, que puede conducirnos más tarde a formalizaciones en Análisis estándar o no-estándar (Artigue, 1991).

Para alcanzar este objetivo se le proporciona al estudiante un medio ambiente computacional (micro-mundo) diseñado para fomentar la exploración de ejemplos de procesos y conceptos matemáticos específicos. Esto requiere de una clase especial de software.

Tall reconoce que un organizador genérico no garantiza al estudiante ser una herramienta de abstracción por el solo hecho de usarlo y sugiere la necesidad de un "agente organizador" (guía de un profesor, un libro de texto o un material computacional apropiado).

2.2.1.6.- Fenomenología

Este acercamiento se basa en la fenomenología de las nociones matemáticas consideradas. Daremos a continuación la definición de la palabra según Freudenthal (1983):

"La fenomenología de una idea matemática es su descripción en relación con el fenómeno por el cual fue creado, y por el cual ha sido extendido en los procesos de aprendizaje del hombre. Dentro del contexto del proceso de aprendizaje de los niños, se convierte en fenomenología didáctica".

Vemos que Farfán (1989) y Cantoral (1989b) tratan de construir una aproximación didáctica para el tema de series infinitas y la serie de Taylor, examinando aspectos históricos evidentes en la fenomenología física. En esos artículos se describe solamente la primera etapa del estudio, es decir, la caracterización de la fenomenología de los conceptos. Farfán menciona que Fourier, pensando en el estado permanente de temperatura alcanzada por un cierto sistema, verifica la convergencia de la serie, la cual representa la temperatura en un tiempo dado. El problema de calcular sumas de serie infinitas se transfiere al estudio de su convergencia.

En el artículo de Cantoral se pone de manifiesto un contraste entre dos posibles aproximaciones didácticas hacia la serie de Taylor. Una se basa en consideraciones físicas de trabajos de Newton, Euler, Laplace, etc., que según el autor es casi ignorada; la otra, que es predominante, se basa originalmente en el trabajo de Cauchy, donde la serie de Taylor se obtiene en forma abstracta del concepto de límite y del teorema del Valor Medio.

2.2.1.7.- Una aproximación sistémica sociocultural

El acercamiento socioepistemológico.

Estos acercamientos se han conformado más recientemente. Sus primeras publicaciones se encuentran a principios de la década de los 90. Han desarrollado, desde el punto de vista de la construcción social del conocimiento, estrategias de investigación de naturaleza epistemológica que no se reducen a la búsqueda de obstáculos epistemológicos ni a su eventual clasificación, sino más bien se ocupan de la epistemología en otro sentido. La entienden como el estudio de las circunstancias que permiten construir conocimiento, por ello es que incluyen entre los aspectos o circunstancias que favorecen la construcción del conocimiento los aspectos sociales y culturales, de manera que en esta visión se pretende desvelar el origen social del conocimiento, sus diversos usos sociales y su evolución en el seno de las instituciones, como la escuela, la academia o los servicios, entre otros (Cantoral, 1999).

Este último autor representa la aproximación teórica del grupo en el que se desarrolla parte de este trabajo, desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas.

Dentro de dicho grupo, en un Programa de Investigación encaminado al reconocimiento y construcción de las nociones más significativas del Cálculo, se hallan los trabajos de Cantoral y Farfán. Por el momento, dicho programa consta de dos estudios: "La construcción de la noción de analiticidad" y "La construcción de la noción de convergencia".

Estos investigadores, que tienen a su cargo la formación y actualización de profesores de Matemáticas de nivel superior en diversas especialidades de Ingeniería, están plenamente convencidos de la unidad del pensamiento humano y, por lo tanto, también de que la construcción de los conceptos y procesos matemáticos se ve favorecida en los ámbitos que adquirieron progresivamente significación propia.

Su problema central de investigación consiste en analizar los procesos de construcción del conocimiento matemático cuando éste se orienta a través del pensamiento físico; especialmente por el que se nutre de las peculiaridades de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza. Por ello, en lo que concierne al estudio de *analiticidad*, Cantoral reconoce y examina los mecanismos funcionales que operan la relación dialéctica entre la noción de *predicción* propia de las Ciencias Físicas y de la Ingeniería, y de lo *analítico,* peculiar de la Matemática. Por otra parte, Farfán en su estudio de convergencia identifica la noción de estado estacionario relativo a un sistema de temperaturas con el concepto de convergencia de series infinitas. El problema que enfrentan, por su naturaleza, les llevó a analizar los siguientes puntos (Cantoral y Farfan, 1989), que son elementos para la acción, sin pretender constituirlos en un algoritmo conductor de la investigación:

a) La génesis histórica.
b) La didáctica de antaño.
c) La fenomenología intrínseca.

d) Los constructos característicos.

e) La reconstrucción de significados asociados.

f) La praxis educativa.

En la primera parte de su acercamiento se centran en la localización y el análisis de lo que ellos llaman la *idea germinal*, entendiéndose esto como aquella idea que en sus primeras formulaciones reside en la intuición y las vivencias cotidianas de los sujetos, y que con el desarrollo de los cuerpos teóricos, aun cuando conservan su nivel primario de intuición en la mayoría de los individuos, evoluciona hasta convertirse en argumento base de resultados teóricos. El hecho educativo opera con tales resultados teóricos, ignorando la relación de la naturaleza simbiótica y predadora que se establece entre las distintas formulaciones de la idea germinal. En la perspectiva didáctica, como estudiosos del problema educativo, buscan la construcción de una didáctica más cercana a la intuición y vivencias cotidianas de los profesores. Para ello, se intenta un rediseño del discurso educativo donde resulta imprescindible establecer la fenomenología intrínseca de los conceptos matemáticos en estudio, así como el análisis de la didáctica de antaño a fin de obtener los elementos que posibiliten tal construcción. Estas consideraciones se apoyan en los estudios acerca de la Fenomenología Didáctica y de la Transposición Didáctica. Por ejemplo, en Cantoral (1989b) se presenta un estudio sobre cómo la didáctica de antaño se asimila a una didáctica actual. En el trabajo se establece un contraste entre dos paradigmas asociados con la Serie de Taylor, uno estrechamente vinculado a la idea de predicción en los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza (hidrodinámica, aerodinámica, desintegración radiactiva, propagación del calor, etc.) y el otro asociado a la idea de convergencia en el cálculo infinitesimal. Cantoral señala que el segundo de estos modelos es absolutamente predominante en el discurso matemático escolar contemporáneo, en tanto que el modelo asociado a la idea de predicción, escasamente tratado en los textos de Física, se encuentra ausente en las actuales aproximaciones didácticas.

El trabajo de Cantoral (1989b) constituye un primer acercamiento a la fenomenología de las funciones analíticas. Centra su atención en los distintos fenómenos en los que la serie de Taylor adquiere su significación primera. Se señalan modelos de representación que van de lo discreto a lo continuo, de lo físico a lo matemático, de lo intuitivo a lo formal. En términos generales los resultados se pueden resumir en lo siguiente:

1.- El discurso matemático escolar actual, en cuanto a la enseñanza del Cálculo, coloca en franca contradicción al sujeto epistémico con los objetos de conocimiento.

2.- Los procesos de Transposición Didáctica, entre las dos grandes concepciones didácticas del cálculo: paradigma newtoniano y paradigma cauchiano, operan directamente sobre las significaciones de los conceptos y procesos involucrados.

3.- La expresión más nítida de los procesos de "simbiosis" y "predación" entre conceptos y procesos matemáticos se da en el terreno didáctico, particularmente como elemento subyacente del discurso matemático escolar.

4.- Existen evidencias empíricas que permiten reconocer la presencia de líneas de pensamiento que, partiendo de estados elementales, conducen mediante un proceso didáctico fenoménico a estados superiores de construcción.

En el terreno de la construcción del conocimiento matemático, en aquellas situaciones ambientales fuertemente sustentadas en los fenómenos físicos de flujo continuo en la naturaleza se apunta principalmente lo siguiente: existen mecanismos idénticos entre los niveles psico y ontogenético de la construcción del saber, cuyo sustento parte del pensamiento físico y es de carácter tanto teórico como empírico.

2.2.1.8.- Pensamiento y lenguaje variacional

Como parte del Pensamiento Matemático Avanzado, el Pensamiento y Lenguaje Variacional trata sobre las relaciones entre la matemática de la variación y el cambio, por un lado, y con los procesos complejos del pensamiento, por otro.

El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con los que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales. Es una línea de investigación que posee una triple orientación. Por un lado, se ocupa de estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático y epistemológico; en segundo término, estudia las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades matemáticas del cambio; en tercer lugar, tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y resuelven en el terreno de lo social mediante las estructuras variacionales consideradas en la escuela, el laboratorio y la vida cotidiana.

Se ha encontrado que la enseñanza y el aprendizaje de situaciones variacionales plantean un gran número de problemas no triviales. Cada concepto avanzado que se desea enseñar suele apoyarse en conceptos más elementales y se resiste al aprendizaje si no se antecede por una sólida comprensión de los conceptos previos. Este paso de la investigación fundamental en el diseño de ingenierías didácticas toca tres preguntas de investigación que, según Cantoral y Farfán (1998), ocupa, por el momento, la atención del grupo:

1. ¿Cuáles son las leyes que regulan las situaciones de enseñanza del pensamiento variacional en nuestro sistema educativo y en el sistema social?
2. ¿De qué naturaleza son las regularidades en los actos de comprensión, ante situaciones que precisan del pensamiento variacional?
3. ¿Cuáles son las formas de articulación de los saberes matemáticos de modo que la aprehensión de situaciones variacionales sea alcanzada por la mayoría de los estudiantes en situación escolar?

Dentro de este programa de investigación se describen algunas situaciones donde interviene el *pensamiento y lenguaje variacional*, entendiendo el término *situación* en el sentido que suele dársele en psicología, a saber, *los procesos del pensamiento y las situaciones cognitivas están en función de las circunstancias a las que el individuo ha sido expuesto*. Luego se busca entender cómo el pensamiento y lenguaje variacional se construye progresivamente en los estudiantes y en los grupos escolares. Particularmente, el interés se centra en localizar y analizar las etapas por las que transita, esperanzados en dotar de enfoques alternativos a las realizaciones didácticas que atiendan seriamente al paradigma del aprendizaje (Cantoral, 1998).

2.3.- HACIA UNA METODOLOGÍA DIDÁCTICA

Teniendo en cuenta nuestro perfil académico, es de esperar que esta investigación trate de utilizar las distintas posturas y puntos de vista entre la Didáctica de las Ciencias y la Didáctica de las Matemáticas, prestando especial atención entre otras a metodologías didácticas como *La enseñanza para un cambio conceptual* (Duschl, 1995; Hewson y Beeth, 1995), *Interacción entre iguales* (Rodríguez y Escudero, 2000) y *Pensamiento y lenguaje variacional* (Cantoral y Farfán, 1998). Con ello queremos colaborar, aunando esfuerzos, para que la enseñanza-aprendizaje de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas, estrechamente vinculada a ellas, se realice sobre las bases científicas que han ido creando los investigadores en estas disciplinas, y que hemos puesto de manifiesto en la revisión que hemos presentado.

Queremos insistir una vez más que, en el terreno didáctico, nuestra investigación apunta hacia la construcción de una didáctica basada en las intuiciones y vivencias cotidianas de los individuos involucrados (profesores y alumnos), inspirada en un acercamiento francamente fenoménico, en su relación con el concepto matemático, y no el concepto en sí mismo.

2.3.1.- LA EPISTEMOLOGÍA DE ALGUNOS OBJETOS INVOLUCRADOS EN LA INVESTIGACIÓN

En primer lugar, en la perspectiva de la construcción social del conocimiento, diremos que la naturaleza del concepto de función es en extremo complejo. Su desarrollo se ha hecho casi a la par del humano, es decir, encontramos vestigios del uso de correspondencias en la antigüedad, y actualmente se debate sobre la vigencia, en el ámbito de las matemáticas, del paradigma de la función como un objeto analítico.

Sin embargo, el concepto de función adquirió todo su protagonismo en el momento que se le concibe como una fórmula. Es decir, cuando se logró la integración entre dos dominios de representación: el Álgebra y la Geometría.

La complejidad del concepto de función se refleja en las diversas concepciones y representaciones con las que se enfrentan los estudiantes y profesores. Una lista exhaustiva de obstáculos epistemológicos del concepto de función se encuentra en Sierpinska (1992).

Desde el punto de vista de las funciones cognitivas, los objetos inmersos en el campo conceptual del Cálculo son particularmente complejos a este nivel pues, como en el caso que nos ocupa, la presentación habitual de la noción de función se presenta como un procedimiento que se aplica a unos ciertos objetos llamados números; este mismo concepto, el de función, se transforma en objeto al ser operado bajo otro proceso como la diferenciación o la integración y así se sigue hasta nociones aún más avanzadas.

Estamos convencidos de que la introducción al Cálculo precisa de la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite la transferencia de campos conceptuales inexistentes a causa de las enseñanzas tradicionales. De esta manera, se presenta la posibilidad de construir un universo amplio de funciones a partir de sus derivadas sucesivas, ya que el manejo simultáneo y coordinado de las derivadas sucesivas parece ser una condición necesaria sin la cual la formación de la idea de las nociones de *variación* y *predicción* queda inevitablemente frágil. Por lo tanto, creemos que uno de los problemas didácticos estriba en la dificultad para adquirir maestría en el contexto gráfico.

Por otra parte, consideremos el binomio de Newton, que se escribe por vez primera como $(P+PQ)^{\frac{m}{n}}$ y no como $(a+b)^n$; según Cantoral (1998), las expresiones, aunque equivalentes matemáticamente, son conceptualmente distintas. Ello obedece a una concepción alternativa que se apoya en una epistemología sensiblemente diferente de la que hoy enseñamos en clase. De hecho, sostiene que ella obedece a un programa emergente en aquella época, un programa alternativo en el campo de las ciencias, en el que se busca modelar, anticipar, predecir fenómenos naturales con el respaldo matemático. En ciertas situaciones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud B con el paso del tiempo. Sabemos, por ejemplo, que B depende a su vez de otra magnitud P que fluye incesantemente. De modo que si P evoluciona de una cierta manera, la cuestión central consiste en saber cómo será $B(P)$ si conocemos el inicio de P, el cambio que sufre P, el cambio del cambio de P, etc. El caso de mayor interés se presenta naturalmente cuando no se dispone en forma explícita de la relación entre B y P. En ese caso habrá que hacer emerger progresivamente una nueva noción, una noción que permita de algún modo la generación de la solución, considerando tanto la diversidad de contextos en los que puede suceder la variación como la variedad de fenómenos estudiados con estrategias similares. En su momento, este programa newtoniano de investigación llevó al surgimiento de una progresiva cadena de elaboraciones teóricas, cada vez más abstractas, que culmina, por así decirlo, con el programa lagrangiano, donde emerge la noción de función analítica. Los detalles de este estudio pueden consultarse en Cantoral (1990).

Esa nueva noción, la *predicción*, se construye socialmente a partir de las vivencias cotidianas de los individuos, pues en ciertas situaciones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud con el paso del tiempo. Se requiere determinar entonces el valor que tomará la variable dependiente antes de que la independiente pase del estado uno al estado dos. Pero a causa de nuestra imposibilidad de adelantar el tiempo a voluntad, debemos predecir. En tal caso, no disponemos de razones para creer que el verdadero valor buscado esté distante de las expectativas que nos generan los valores en un inicio, de la forma en que ellos cambian y cambian sus cambios, y así sucesivamente.

Por ejemplo, el flujo de agua se induce por la presencia de una diferencia de presión en sitios vecinos $p(x + dx) - p(x)$ que, en caso de ser nula, indicará equilibrio y, por lo tanto, ausencia de movimiento; naturalmente, en caso contrario anuncia la presencia del flujo, el cual habrá de darse en alguna dirección preferencial. Análogamente, la propagación del calor se determina por la presencia de una diferencia efectiva de temperaturas en puntos próximos $T(x + dx) - T(x)$. La transferencia de calor a un cuerpo obedece a la acción de la diferencia neta de la variación de la temperatura en puntos vecinos.

La naturaleza de los fenómenos de flujo señala la necesidad de estudiar expresiones del tipo $f(x + dx) - f(x)$, donde f puede representar una amplia gama de parámetros físicos particulares. De este modo, esta diferencia fundamental es el instrumento cognitivo por excelencia y participa de la naturaleza del fenómeno; la manera de anunciar su valor es proporcionada por el ambiente físico en el que tiene lugar el fenómeno, y estará completamente determinada por el comportamiento de sus variaciones en el punto x:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2!} + \frac{f'''(x)h^3}{3!} + \ldots$$

En nuestra opinión, estos hallazgos favorecen la discusión y elaboración de propuestas de enseñanza que traten sobre el qué enseñar y no, como ha sido habitual, sólo sobre el cómo enseñar. En síntesis, nuestra línea de investigación toma como objeto de estudio la socioepistemología de los saberes matemáticos e incluye las intuiciones primarias del alumno con el fin de rediseñar el discurso matemático escolar (Cantoral y Farfán, 1998).

2.3.1.1.- La idea germinal relativa a la noción de función analítica

Al iniciar esta investigación tuvimos en cuenta una revisión de las ideas en la historia que nos permite establecer la fenomenología intrínseca del concepto de serie de Taylor en su génesis (Cantoral, 1989) y en cuanto a la Didáctica de antaño (Cantoral, 1995). En dicha revisión se encuentra que la noción de predicción en los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza se ubicó como la base de significación primaria para el concepto matemático de serie de Taylor. Un proceso de naturaleza simbiótica permitió el tránsito de una noción a otra entre dominios científicos contiguos, como son la *predicción* propia de las Ciencias Experimentales y lo *analítico* de la Matemática. Esta significación de naturaleza física sufre un proceso predador de transposición didáctica que oculta su significación primera. El nuevo paradigma del Cálculo asigna a la serie la significación propia de un resultado matemático, es decir, aquél que se nutre de la relación con otros objetos matemáticos (Cantoral, 1991).

Este análisis permitió reconocer la existencia de dos modelos didácticos para la enseñanza del Cálculo que, en cierto sentido, coexisten en el discurso escolar contemporáneo, uno sugerido por los trabajos de Newton, Euler y Laplace, entre otros, donde la expresión de la serie lleva consigo un significado perteneciente a las Ciencias Experimentales, y que es introducido por una construcción natural para una gran variedad de problemas, y el otro, propuesto por los trabajos desarrollados por Cauchy, donde las series son un resultado más de la teoría, una consecuencia del concepto de límite y del teorema fundamental del Cálculo. Como sabemos bien, el último esquema es el que está presente en los cursos del Cálculo actual, y el otro, aunque usado en varios contextos, está ausente de los temas impartidos en la enseñanza secundaria y universitaria.

A continuación, consideremos el siguiente problema matemático planteado históricamente hacia el último decenio del siglo XVIII y resuelto en el primer tercio del siglo XIX: ¿Es posible representar cualquier función real de variable real mediante una serie de potencias? Es decir, dada una función f, ¿existen coeficientes a_i reales tales que: $f(x) = \sum a_i x^i \quad i = 0,1,\cdots$?

La respuesta argumentada por Lagrange fue positiva, mientras que Cauchy mostró que no era posible.

Hacia el ocaso del siglo XVIII se generalizó la discusión sobre los principios del Cálculo Diferencial o, como era habitual entonces, sobre la metafísica del Cálculo Infinitesimal. En esta atmósfera surgieron las propuestas de D`Alembert con su definición de límite y el estudio de los coeficientes finitos de los elementos infinitesimales; la de Carnot sobre la idea de la compensación de errores; y la de Lagrange sustentada en el desarrollo en series de potencias de las funciones. Esta última es en la que nos detenemos por el uso que hace de la serie de Taylor. Ya que, desde la perspectiva de nuestro trabajo resulta indispensable desentrañar los argumentos que hicieron posible el programa de Lagrange (Lagrange, 1797).

En su primer capítulo explica la forma en que se obtiene el desarrollo en series de potencias de una función. Tomando a la función $f(x)$, e incrementando de x a $x + h$, donde h es una cantidad cualquiera indeterminada, la función devendrá en $f(x + h)$ y por la teoría de series se tendría: $f(x + h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 +$ etc., en la que $f(x)$ es la función primitiva y p, q, r, etc., las funciones derivadas de la primitiva. A continuación argumenta cómo es que excluye los términos de la forma $uh^{m/n}$ en la serie, dado que darían n distintos valores para el sumando del que forman parte, que al combinarlo con aquellos valores de $f(x)$ tendría una contradicción. En el siguiente artículo del mismo capítulo observa que $f(x + h)$ tendrá por valor a $f(x)$ para el valor particular $h = 0$, de ahí que $f(x + h)$ deba ser de la forma:

$$f(x + h) = f(x) + hP\,,$$

donde P es una función tanto de x como de h, que no tiende a infinito cuando $h = 0$. Lo mismo ocurre para P, pues $P = p + hQ$, donde hQ se anula cuando $h = 0$ y Q es función de x y h; así sucesivamente, se tendrá

$$f(x+ h) = f(x) + hP = f(x) + hp + h^2\,Q = f(x) + hp + h^2q + h^3R,\ \ etc.$$

Del desarrollo anterior comenta que para cada caso se proporciona el valor exacto del residuo (Ph, Qh^2, Rh^3, etc.) y sólo el número de sumandos que se quieran. Este comentario, así como el párrafo siguiente en el escrito original, describen por sí solos su concepción en cuanto al uso que se espera tener de la serie y, por ende, del papel que en ella desempeña el residuo. Consideramos que esta observación arroja una información distinta sobre la evolución de las concepciones asociadas a la serie de potencias. En el artículo 6 del mismo capítulo desarrolla lo que él considera la principal ventaja de su método (Lagrange, 1797, p.14), a saber, que los primeros términos de las series, para valores pequeños de las variables, dominan al resto de los términos de la serie.

En los siguientes capítulos muestra la relación que guardan *p*, *q*, *r*, etc., con la función *f*(*x*), adquiriendo entonces la forma en derivadas:

$$f'(x), \frac{f''(x)}{2!}, \frac{f'''(x)}{3!}, \dots .$$

Finaliza su libro con una gama de aplicaciones en las que, efectivamente, se observa la serie truncada en algún sumando. Estos argumentos, que vivieron en los textos de la época, fueron impugnados por otros investigadores. A continuación presentamos, a efectos de contraste, el acercamiento que hace Cauchy de la serie de Taylor y de su convergencia. En este acercamiento, Cauchy precedió al estudio de las series infinitas el análisis de su convergencia, de tal suerte que las series de Taylor serán entonces un ejemplo del estudio de series. Las series numéricas infinitas son el cuerpo del que se desprenderán, entre otras, las series de potencias. Cauchy rechazó la propuesta lagrangiana de fundamentación del Cálculo Diferencial, para lo cual muestra la existencia de funciones que, aunque su serie de Taylor converge, no tienen por límite a la función propuesta (Cauchy, 1829, p. 398). Las siguientes son ejemplos de tales funciones:

$$f(x) = e^{-(\frac{1}{x})^2} \quad , \quad f(x) = e^{-x^2} + e^{-(\frac{1}{x})^2}$$

En Cauchy se aprecia su preocupación por la convergencia, o dicho de otro modo, por la garantía del acoplamiento de las gráficas del polinomio de Taylor y de la función en todo el intervalo centrado en el punto de contacto.

En el Cálculo diferencial de Cauchy, como ya apuntamos, las series de Taylor se presentan principalmente en el contexto de un teorema, un resultado de la teoría. Mientras en la Teoría de las Funciones Analíticas de Lagrange, éstas son el punto de partida de todo el desarrollo ulterior.

Cauchy inaugura con su teoría el discurso matemático escolar vigente en nuestros días. Sin embargo, a pesar de su gran influencia, los libros de texto (Lacroix, 1797) continuaron suponiendo, durante algunos años después de sus trabajos, que toda función era susceptible de desarrollarse en serie.

Un análisis profundo sobre los trabajos originales de Lagrange y Cauchy, realizado por Cantoral (1990, 1995), ha proporcionado los elementos para un posible rediseño del discurso matemático escolar, pues lejos de calificar a Lagrange de algebrizante o limitado, se vio que detrás de su epistemología existe un robusto cuerpo conceptual que podría dar lugar a nuevos acercamientos didácticos, que sólo serán adecuados a sus fines si muestran que efectivamente pueden vivir entre los estudiantes en situación escolar. En dicho cuerpo conceptual encontramos que la noción de predicción de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza se ubicó como la base de significación primaria para el concepto matemático de serie de Taylor.

Cuando se pone la atención en el fenómeno por encima del concepto se trata de buscar la predicción de la posición vecina (futura) que se tendrá una vez que transcurra el tiempo, siempre que se tenga información del estado inicial del movimiento. Es decir, si se conoce la posición inicial y la forma en que varía con el tiempo, entonces el objetivo es claramente predecir el estado vecino con los datos que inicialmente se poseen. Así se tiene

$$s(t) \to s(t+h)$$

$$s(t+h) = s(t) + s'(t)h + s''(t)\frac{h^2}{2!} + \cdots$$

Queda claro que se precisa observar la variación en su conjunto. Este proceso necesariamente debe involucrar un mecanismo que nos permita decidir qué parte de la información total es suficiente para la descripción satisfactoria del fenómeno. Sin lugar a dudas, esto exige aceptar la posibilidad de predecir, de reconocer que el comportamiento del fenómeno, siempre que mantenga cierta regularidad, posee herencia: bastará conocer cómo varía en un inicio para indicar cómo lo hará posteriormente. Queremos señalar que si se trabaja sobre fenómenos con el soporte exclusivo de las clases de las funciones analíticas, no se pierde nada de lo que el discurso matemático escolar logra actualmente; por el contrario, se enriquece sobremanera al tomar como objeto de estudio la base fenomenológica de los significados de los entes matemáticos a partir de las intuiciones primarias del sujeto (Cantoral, 1991).

La incesante relación entre el pensamiento físico y el pensamiento matemático brinda la oportunidad de contar con elementos ausentes en la Matemática escolar, pero presentes en la Matemática del período histórico correspondiente. El objetivo es el de explorar e investigar la posibilidad de beneficiar las prácticas escolares a partir del conocimiento de la naturaleza y funcionamiento de esas relaciones:

- Responder, por ejemplo, el por qué Lagrange creyó en la posibilidad de representar a toda función como una serie de Taylor y por qué, aun cuando Cauchy probó su imposibilidad, los textos de Matemáticas y las práctica de los científicos no excluían de sus cuerpos teóricos los acercamientos precauchianos.
- Modificar las prácticas sociales de enseñanza tomando como elementos los hallazgos de una cierta epistemología que permite asumir que las razones de Lagrange para creer que toda función podría expresarse como serie de Taylor fueron más profundas que el sólo señalamiento de su "obsesiva" visión algebraica, como se aprecia de la opinión dada por Grattan-Guinness (1970).

Esta búsqueda permitió formular la hipótesis de que es posible reconstruir el discurso didáctico del Cálculo tomando como idea central de su desarrollo a la serie de Taylor. En otro sentido, dicha hipótesis señala que es posible rediseñar el currículum y su discurso didáctico en torno a aquello que, consideramos, resultó epistemológicamente indispensable en su génesis.

Cabe esperar, por otra parte, de acuerdo con las concepciones constructivistas del aprendizaje (Resnick, 1983), que las dificultades en la construcción de las ciencias tengan su correlato en el proceso de aprendizaje.

En esta investigación se examinan los mecanismos de construcción de conceptos y procesos matemáticos del Cálculo Infinitesimal, orientados por los aspectos del pensamiento físico de la *predicción* en los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza. Es decir, se estudian aquellos mecanismos que operan el tránsito entre las nociones de predicción y lo analítico en dominios científicos contiguos: la *predicción* propia de las Ciencias Experimentales y la *función analítica* peculiar de las Matemáticas. Para dicho estudio nos basamos en el análisis del concepto de serie de Taylor en su génesis histórica realizado por Cantoral (1990).

Siguiendo la metodología que hemos reseñado anteriormente, analizaremos a continuación dos problemas típicos de las ecuaciones diferenciales.

Problema 1: *Desde la terraza de un edificio de altura s_0 se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial v_0. La razón de cambio de la velocidad se mantiene constante, es decir $s'' = -g$, donde g es la aceleración de la gravedad. Predecir su posición para cualquier instante t.*

Usando la idea de predicción expuesta anteriormente, el problema consiste en hallar el valor posterior en términos de los datos iniciales: t_0, $s(t_0)$, $s'(t_0)$, $s''(t_0)$, $s'''(t_0)$, etc. Es evidente que como la serie de Taylor puede ser expresada de la forma

$$s(t_0+h) = s(t) = s(t_0) + s'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!}s''(t_0)(t-t_0)^2 + \cdots,$$

ella es el instrumento idóneo para conocer el estado posterior de nuestro parámetro.

A partir de la ecuación diferencial que regula el comportamiento entre las variables tenemos que $s(t_0)=s_0$, $s'(t_0)=v_0$, $s''(t_0)=-g$, $s'''(t_0)=0$, ... Reemplazando en la serie, se obtiene

$$s(t_0+h) = s(t) = s_0 + v_0(t-t_0) - \frac{1}{2}(t-t_0)^2 + 0 + 0 + \cdots .$$

Si $t_0 = 0$, entonces adquiere el aspecto

$$s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 .$$

Problema 2: *Supongamos que una cierta población crece de forma que la razón de crecimiento especifico permanece constante, es decir,* $\frac{N'}{N} = k$. *Sea N_0 el número de individuos en el instante t_0. Predecir el tamaño de la población para un instante posterior t.*

Utilizando la serie de Taylor como instrumento de predicción vamos a hallar el tamaño de la población después de un cierto tiempo t:

$$N(t) = N(t_0) + N'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!}N''(t_0)(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}N'''(t_0)(t-t_0)^3 + \cdots .$$

Utilizando la ecuación diferencial que nos muestra la relación entre las variables tenemos que $N(t_0) = N_0$, $N'(t_0) = kN_0$, $N''(t_0) = k^2 N_0$, $N'''(t_0) = k^3 N_0, \cdots$.

Reemplazando en la serie anterior se obtiene

$$N(t) = N_0 + kN_0(t-t_0) + \frac{1}{2!}k^2 N_0 (t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}k^3 N_0 (t-t_0)^3 + \cdots .$$

$$N(t) = N_0(1 + k(t - t_0) + \frac{1}{2!}k^2(t - t_0)^2 + \frac{1}{3!}k^3(t - t_0)^3 + \cdots)$$

$$N(t) = N_0 e^{k(t-t_0)}$$

Con estos sencillos problemas se pone de manifiesto que el estado ulterior del fenómeno de variación depende completamente de las circunstancias que caracterizan el estado de hecho; la evolución de un sistema está determinada completamente por sus variaciones primeras, por ello hablamos del carácter hereditario del cambio.

Creemos que con esta nueva perspectiva hemos dotado de una cierta naturalidad al planteamiento y a la resolución del problema. Este proceso se revela vivo también si analizamos las producciones originales de los científicos de otros siglos y los manuales escolares de otras épocas. Además, como se señala en Cantoral (1998, p. 368): "*Se reproduce también en la producción de los estudiantes y profesores contemporáneos cuando ellos forman parte del diseño y ejecución de las ingenierías didácticas, aun en el caso de que ellos no hayan sido sometidos a una enseñanza explícita de tales pasajes originales. Este hallazgo refuerza nuestra visión de la unidad del pensamiento humano*".

2.4.- FUNDAMENTOS DIDÁCTICOS INVOLUCRADOS

En este apartado presentamos y comentamos el *marco conceptual* en el que se sustenta la investigación realizada. Si tenemos en cuenta que se efectúa una investigación tanto desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas como de la Didáctica de las Ciencias Experimentales, dicho marco teórico no puede quedar determinado por una única teoría o paradigma (Kuhn, 1987), sino que en él han de conjugarse distintas tendencias y teorías propias de cada disciplina involucrada. Tales teorías, creadas por distintos investigadores y movimientos que los apoyan, dan lugar a unos modelos teóricos que incluyen ciertos términos no suficientemente diferenciados. Es decir, se trata de un *modelo teórico mixto*, de tal modo que aspectos teóricos de distintas tendencias pueden ser utilizados conjuntamente (Lakatos, 1970).

2.4.1.- EPISTEMOLOGÍA GENÉTICA

La *epistemología genética*, desarrollada por Piaget, *busca comprender cómo se construyen y se desarrollan los conocimientos en el pensamiento del sujeto*. Considera que la naturaleza de los conocimientos depende de su modo de formación y que su desarrollo se efectúa por niveles de organización sucesivos. Sitúa al sujeto en el centro de su aprendizaje. El sujeto aprende a través de fases de rupturas y de reequilibrios por asimilación y acomodación.

Piaget consideró el problema del conocimiento (epistemología) como el problema de las relaciones entre el sujeto y el objeto. Como biólogo, tradujo este problema al estudio de la adaptación del organismo humano al medio intelectual. Como epistemólogo, las preguntas a las que él trataba de responder eran: ¿qué es el conocimiento? y ¿cómo aprendemos?. Piaget estudió el desarrollo del niño porque estaba convencido de que éste era el mejor medio para responder a las cuestiones epistemológicas acerca de la naturaleza del conocimiento en los adultos y de la historia del conocimiento humano.

Los filósofos han discutido durante largo tiempo acerca de cómo llegamos a alcanzar el conocimiento. Dos corrientes epistemológicas, el racionalismo y el empirismo, se han desarrollado principalmente como respuestas a esta cuestión.

Los empiristas (Locke, Berkeley, Hume) insistían en que el conocimiento viene primero de la información sensorial que llega desde fuera del individuo hasta su interior a través de sus sentidos. Ellos consideraban al individuo como una tabla rasa en la que se inscribían las experiencias. Los racionalistas (Descartes, Kant) rechazaban la información sensorial como el principal origen de la verdad e insistían en que la mejor forma de alcanzar el conocimiento era la razón pura. Los racionalistas apuntaban al hecho de que nuestros sentidos a menudo nos conducen erróneamente a ilusiones perceptivas, argumentando así la desconfianza que se debe tener respecto a la información sensorial como fuente de conocimiento. Los racionalistas mantenían también sus argumentos apoyándose en la certeza y la claridad del conocimiento matemático que está basado en la razón pura.

La aportación de Piaget es una síntesis del empirismo y del racionalismo, pero con un predominio de la tendencia racionalista. Piaget y sus colaboradores reconocen fuentes exteriores e interiores de conocimiento. El conocimiento de objetos y de personas tiene orígenes que son principalmente exteriores al individuo. El conocimiento lógico matemático, sin embargo, está basado en fuentes que son principalmente internas. Una de las distinciones que Piaget hace es entre el conocimiento físico y el conocimiento lógico-matemático. Mientras que el origen del conocimiento físico está, al menos parcialmente, en los objetos, el origen del conocimiento lógico-matemático está en el sujeto.

La idea de que la experiencia, no en un sentido empírico de repetición, sino de actividad e interacción con el medio, juega un papel preponderante en el aprendizaje, constituye uno de los fundamentos de la teoría cognitivista de Piaget. La acción es pues primordial para la génesis de los conceptos, cuya construcción es la fuente del saber. Es de la acción de la que procede el pensamiento en su mecanismo esencial, que es el sistema de operaciones lógicas y matemáticas, y es el análisis de las acciones elementales y su interiorización o mentalización progresivas lo que nos revelará el secreto de la génesis de estas nociones (Piaget, 1973, p. 26).

El aprendizaje, en este proceso, se adapta a la realidad del entorno a través de dos procesos: *asimilación* y *acomodación.*

La *asimilación* designa la incorporación por el sujeto de datos exteriores a través de su acción, algunos de ellos se integran en esquemas o en conceptos ya preconstruidos, otros serán inconscientemente dejados al margen, mientras que no sea urgente resolver las contradicciones que resulten, cuando estos datos no encuentren un cuadro conceptual apropiado para encajarlos y admitirlos.

La *acomodación* comienza cuando el alumno no soporta más el desequilibrio engendrado por las contradicciones precedentes y busca integrar y clasificar las informaciones que dejó anteriormente al margen en la fase de acomodación. Trata de modificar su campo conceptual intentando explicar, así, las informaciones asimiladas.

En suma, la asimilación sería la adopción de nuevos datos a las estructuras ya existentes, la aceptación de nuevas ideas; la acomodación consistiría en la modificación y enmienda de las estructuras existentes para hacer posible la asimilación.

Existen, pues, discontinuidades en las adquisiciones del saber, hay desequilibrios en los cuales el alumno trata de reconciliar las perturbaciones existentes (conflictos, contradicciones, rupturas, etc.) con la estabilidad de su estado mental. Esta reacción que actúa como "contrapeso" ante la perturbación es lo que Piaget denominó *equilibración*.

Desde la perspectiva de la equilibración una de las fuentes del progreso en el desarrollo de los conocimientos es buscar en los desequilibrios como tales, lo que obliga al sujeto a pasar de su estado actual para tratar de buscar en cualquier otra dirección nueva (Piaget, 1975b, p. 17).

Este proceso no puede ser inmediato, sino que en la mayoría de las ocasiones provoca, en principio, una regresión, a la cual sucederá una fase de reorganización de los conocimientos, conduciendo a la constitución de un nuevo equilibrio. Para este investigador, la equilibración es el proceso fundamental del desarrollo cognitivo.

Los sucesores de Piaget han demostrado que la apropiación colectiva de conocimientos puede favorecer las adquisiciones individuales y han puesto en evidencia la función de los conflictos cognitivos y los conflictos de comunicación (conflictos colectivos) en el seno de una clase. Los resultados que obtienen en sus investigaciones les llevan a afirmar que el intercambio colectivo no sólo puede facilitar el trabajo cognitivo, sino que en ocasiones, y bajo ciertas condiciones, el conflicto socio-cognitivo fomenta la formación de las operaciones, ya que pone en marcha los desequilibrios necesarios para el desarrollo de nuevos conocimientos.

Estas hipótesis teóricas también han influido particularmente en los estudios de "Didáctica de la Matemática e Interacciones sociales" que, desde principio de los 80, se llevan a cabo en la Universidad de Ginebra (Suiza). A propósito de estos últimos, Schubauer-Leoni (1986), afirma:

"En los resultados de nuestra investigación intentamos mostrar, por una parte, que las interacciones sociales, y el contexto cultural en el que los alumnos se sitúan, juegan una función esencial en la elaboración del pensamiento del individuo, y por otra, que el propio sujeto está también activamente implicado en el desarrollo de sus instrumentos de comprensión. La actividad del niño es el origen de la elaboración de sus posibilidades cognitivas, pero esta actividad pasa siempre, en ciertas etapas de su desarrollo, por una coordinación con la del "otro". El individuo no es más el co-autor del desarrollo de su inteligencia. Sus colaboradores son las personas (adultos o niños) con los que se integra" (Schubauer-Leoni, 1986, p. 69).

Bajo esta óptica las adquisiciones de cualquier competencia por los alumnos han de considerarse como fruto de una dinámica psicológica, social y cultural. Estas manifestaciones individuales de competencias (niveles operatorios, estrategias de resolución de problemas, razonamientos, etc.) deben ser comprendidas como respuestas activas de una persona que, entre otras y junto a ellas, completa sus acciones y sus respuestas en función de su historia personal, en el interior de un campo social y de un contexto institucional preciso, en torno de una tarea particular, en una situación relacional a la que asigna determinadas significaciones.

2.4.2.-TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

La teoría de situaciones didácticas, introducida por Brousseau (1983), se basa en una hipótesis acerca de la construcción del significado de una noción. Una noción aprendida no es utilizable sino en la medida en la que ella es relacionada con otra; esas relaciones constituyen su significación, su etiqueta, su método de activación. Pero no es aprendida si no es utilizable y utilizada efectivamente, es decir, sólo si es una solución de un problema. Tales problemas, junto con las restricciones a las que la noción responde, constituyen la significación de la noción (op.cit., pp.169-171). De lo que se infiere que el significado de una noción no puede dársele al alumno; él debe construirlo a partir de un conjunto de problemas en donde tal noción funciona de manera más o menos local. En consecuencia, el profesor, en vez de proporcionarle al estudiante el conocimiento, debe proponerle una situación diseñada en forma tal que este conocimiento sea necesario para la solución óptima. El alumno aprende adaptándose a un medio, factor de dificultades y desequilibrios (Farfán, 1997, p. 13).

Brousseau (1986) entiende el aprendizaje por adaptación del siguiente modo: el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (p. 49).

Si el alumno se adapta a la situación y llega a la solución, estará proporcionando evidencias de haberse apropiado del saber en cuestión, es decir, aprendió. En síntesis, la teoría de situaciones provee de una explicación en donde la construcción del significado de un concepto pasa por su movilidad dentro de un espacio limitado del problema y donde su puesta en escena es necesaria para la solución óptima o única.

Por otra parte, la investigación de los fenómenos relativos a la enseñanza de las Matemáticas tampoco puede reducirse a la observación y análisis de los procesos que tienen lugar cotidianamente en el aula, puesto que su objetivo es la determinación de las condiciones en la que se produce la apropiación del saber por los alumnos, y por esto necesita ejercer un cierto grado de control sobre ellas, lo que implica que el investigador debe participar en la producción de las situaciones didácticas que analiza. De aquí la necesidad de construir montajes experimentales o, en la terminología de Chevallard (1982), de desarrollar una "*ingeniería didáctica*", subordinada a la investigación en Didáctica de las Matemáticas (Gálvez, 1998).

Brousseau (1982b) define la *situación didáctica* como:

"Un conjunto de relaciones establecidas explicita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vía de constitución"

Estas relaciones se establecen a través de una negociación entre maestro y alumno cuyo resultado ha sido designado como *contrato didáctico.*

Esta concepción del aprendizaje, según Margolinas (1993), está en muchos aspectos muy próxima a la de Piaget: el alumno construye su propio conocimiento y actúa en un medio fuente de desequilibrios. Es precisamente la constitución y organización de este medio el objeto principal de una enseñanza que quiere provocar un aprendizaje por adaptación (Ruiz, 1994).

Así lo expresa Brousseau: "*la concepción moderna de la enseñanza va a demandar del maestro provocar en el alumno las adaptaciones deseadas, por una elección juiciosa de los problemas que le propone. Estos problemas, elegidos de forma que el alumno pueda aceptarlos, deben hacerle actuar, hablar, reflexionar, evolucionar por su propia cuenta. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y el momento en que produce su respuesta, el maestro rehúsa intervenir como comunicador de los conocimientos que él quiere ver aparecer*" (Brousseau, 1986, p. 49).

El aprendizaje por adaptación da una importancia fundamental a la génesis de los conocimientos para la constitución del sentido de éstos: "*admitimos que el sentido* *de un conocimiento proviene, en buena parte, del hecho de que el alumno lo adquiere adaptándose a las situaciones didácticas que le son propuestas (devueltas)*" (Brousseau, 1986, p. 67).

Para el diseño de estas situaciones fundamentales (que contemplan todos los aspectos fundamentales de un concepto), Brousseau (1986) define tres tipos de situaciones a-didácticas (ibid., pp.75-85) que inducen a los alumnos a transitar por diversas etapas propias de la actividad matemática: la acción, la formulación y la validación. Posteriormente se completó con una cuarta fase, que la constituyen las situaciones de institucionalización.

1) *Situaciones de Acción.*

Consiste en poner al alumno ante una actividad o problema llamada "situación de acción", cuya solución, en las condiciones propuestas, constituye el conocimiento a enseñar. Debe además permitir al alumno actuar sobre ella, de tal manera que pueda recibir información sobre su acción.

Así, el propio alumno abandona o mejora su modelo para crear otro por medio de modificaciones o refuerzos de su acción; la situación provoca un aprendizaje por adaptación, conforme a la teoría de Piaget.

La serie de "situaciones de acción" constituye el proceso por el cual el alumno va a fabricar estrategias, es decir, a construir un método de resolución de su problema. Se instaura un verdadero diálogo a elaborar entre el alumno y la situación. Esta sucesión de interacciones entre el alumno y el medio constituye la llamada "dialéctica de la acción": "*se trata de la asociación de ciertos estímulos a ciertas respuestas*" (Brousseau, 1972, p. 431).

Esta fase no supone la aparición de un saber definitivo; lo importante es el trabajo durante el cual el sujeto va poco a poco modificando su representación de la situación. Se construye un modelo implícito de la acción en el curso de múltiples interacciones con el medio.

2) *Situaciones de Formulación.*

Brousseau considera necesario, no solamente que el alumno trate de modificar su modelo, sino que construya una descripción o una representación de este modelo: el alumno puede obtener de la situación cierta información, pero no alcanza por su sola acción a obtener el resultado pedido. Busca entonces la colaboración de otras personas con quien intercambiar información; éstos son los mensajes establecidos entre "*emisor y receptor*". Se instaura así una "dialéctica de la formulación".

El emisor quiere obtener un resultado, utiliza un lenguaje que debe permitir al receptor dominar la situación. El receptor construye el conocimiento de la misma en función del mensaje. Si el resultado es negativo, el problema no se ha resuelto o el mensaje simplemente no se ha entendido. En esos casos el emisor puede corregir su formulación enviando otros mensajes. De este modo, debe poner a prueba, controlar y corregir el vocabulario empleado.

Según Brousseau, la dialéctica de la formulación consiste en "*poner a punto progresivamente un lenguaje, que todo el mundo comprenda, y que tenga en cuenta las relaciones establecidas en la situación de forma adecuada, permitiendo los razonamientos útiles y las acciones coherentes*".

3) *Situaciones de Validación.*

El conocimiento matemático no consiste solamente en explicar los saberes a través de mensajes apropiados; hace falta poder afirmar que es verdadero lo que se dice. No se trata sólo de describir, sino de probar. Es decir, hay que justificar que aquello que se cree es la verdad del modelo propuesto.

Los alumnos no están ahora en posición de "*emisor*" y "*receptor*", sino de "*proponente*" y "*oponente*".

Para Brousseau, esta "*dialéctica de la validación*" supone la "*manifestación del repertorio lógico y matemático del cual se sirven los alumnos para establecer sus convicciones y para tratar de elaborar una teoría matemática axiomática de forma diferente según su edad y el tipo de situaciones a la que han estado enfrentados*" (Brousseau, 1972).

De las tres situaciones, la de validación parece la más compleja y difícil de llevar a la práctica. Las estrategias del profesor parecen aquí determinantes.

4) *Situación de Institucionalización.*

Una vez construido y validado, el nuevo conocimiento va a formar parte del conocimiento matemático del conjunto de los alumnos. Las situaciones de esta fase son llamadas "*situaciones de institucionalización*", y son "*aquéllas por las que se fija convencionalmente y explícitamente el estado cognitivo de un conocimiento o de un saber. La institucionalización es interna si un grupo fija libremente sus convenciones* *según un proceso cualquiera. Es externa si toma sus convenciones de una cultura: es la situación más frecuente en la didáctica clásica*" (Brousseau, 1981, p.113).

Es conveniente señalar que "*los tres primeros tipos de situaciones (acción, formulación y validación) no son totalmente distintos, son casos particulares los unos de los otros. Una situación de formulación es un caso particular de una situación de acción, donde la acción debe ser acompañada de una formulación. Una situación de validación es un caso particular de una situación de formulación (y en consecuencia, de una situación de acción también), donde la formulación no es aceptada si no está suficientemente validada*" (El Bouazzoui, 1982).

La teorización de las situaciones didácticas ha tenido también consecuencias metodológicas. Es así como ella ha conducido a desarrollar una metodología especifica: la *ingeniería didáctica*, en oposición con los paradigmas comparativos clásicos de experimentación en clase.

La construcción de situaciones problema en las que se introduzcan variables didácticas que, controladas por el profesor, permitan a los alumnos realizar elecciones y anticipaciones, tomar decisiones, llevar a cabo acciones, comunicaciones y formulaciones que posteriormente puedan probar y validar, es pues una tarea compleja, fruto de un serio análisis didáctico y de una elaborada ingeniería didáctica.

2.4.3.- LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA

La palabra transponer significa poner una cosa más allá, en lugar diferente del que ocupaba. La *transposición didáctica* se refiere así *al proceso mediante el cual es llevado el saber al ámbito escolar.*

En el sentido clásico, como se presenta por ejemplo en Dupin y Joshua (1993), la transposición didáctica designa el proceso que sufre el saber especializado, saber aceptado por la comunidad matemática o física, según sea el caso, al pasar a la enseñanza.

La pedagogía tradicional ha creído en la posibilidad de introducir los saberes en juego hacia el interior de una relación didáctica de una manera simple y transparente. De manera que los saberes aparecen como un "dato", un objetivo previamente fijado, de modo que se pueden definir las características de su introducción mediante ciertas elecciones externas a los actos didácticos propiamente dichos, como si se tratara de un simple "resumen" de los saberes mas desarrollados en la ciencia.

En 1975, Halbawachs señaló la necesidad de una *"física del maestro"*, cualitativamente distinta tanto de aquella del "físico" como de la del "alumno". De hecho, reconoció que la presencia en clase de un objeto a enseñar es la consecuencia de una historia particular, el resultado de un tratamiento didáctico que obedece a limitaciones precisas. Son esos mecanismos generales los que permiten pasar de un objeto de saber a un objeto de enseñanza. Chevallard (1982) desarrolló los primeros estudios en ese sentido para el campo de las matemáticas y los reagrupó bajo el nombre de *transposición didáctica.*

De los estudios se ha desprendido que los objetos destinados para enseñar no pueden en ningún caso analizarse como simplificaciones de objetos más complejos, proporcionados por la sociedad científica. Ellos son, por el contrario, el resultado de ajustes didácticos, de una construcción que les hace diferir cualitativamente de sus saberes de referencia.

"El objeto de saber" es definible en el dominio del *"saber erudito"*, es decir aquél que es reconocido como tal por una comunidad científica determinada, aunque no es enseñado bajo esa forma. Son mecanismos precisos los que deben asegurar su extracción del dominio *"culto"* y su inserción en un discurso didáctico. Una vez que este tratamiento se ha realizado, el saber didáctico es intrínsecamente diferente del saber erudito que le ha servido de referencia. Su ambiente epistemológico en particular es diferente.

El saber que debe ser enseñado se presenta como *"un texto de saber"*. Los procesos reales que han conducido a la elaboración de los saberes son borrados. Las indecisiones y la subjetividad del investigador son dejadas de lado. El texto sigue un orden *"lógico"* que tiene poco que ver con los problemas que han estado presentes en la obra del investigador. Este es el coste para que el saber abandone a su productor y a la esfera estrictamente privada para llegar a ser público; en este proceso el saber es extraído del ambiente epistemológico en el que se halla inicialmente.

Una distinción capital se impone entonces entre la *"ciencia que se hace"* y la *"ciencia que se enseña"*. Por naturaleza, la primera tiene pocos dominios claramente delimitados, donde los contenidos y los métodos empleados son previstos por la comunidad científica.

El dominio a transponer tiene una fuerte tendencia a presentarse como "*cerrado*", aunque esa presentación ha perdido la viva complejidad que ha precedido a su elaboración, y el saber erudito (la cosa a transponer) se presenta con un marcado aspecto sintético.

2.4.4.- LAS CONCEPCIONES

Los investigadores utilizan normalmente términos tales como concepción, imagen conceptual, modelo, representación, etc., como recursos que le permiten explicar y dar cuenta del grado de conocimiento que tienen los alumnos de una determinada noción. Con estos términos tratan de "*modelizar*" los aprendizajes de los alumnos. Así es frecuente encontrar expresiones del tipo: la concepción de una función que encontramos con más frecuencia en los alumnos es la de fórmula algebraica.

Aunque se utilizan términos diferentes (representación, modelo,...), no obstante, la palabra más extendida en la literatura didáctica de todas las "*escuelas*" es la de *concepción*. Con ella se intenta *describir el estado de los conocimientos de los alumnos con el fin de establecer una distinción entre el objeto matemático que es único y las significaciones variadas que le pueden asociar nuestros alumnos*.

Artigue (1989) hace una reflexión sistemática sobre la importancia y la significación de la noción de concepción en Didáctica de la Matemática. Para ella la noción de concepción responde a dos necesidades distintas:

1. Poner en evidencia la pluralidad de los puntos de vista posibles sobre un mismo objeto matemático, diferenciar las representaciones y modelos de tratamiento que le son asociados, poner en evidencia su adaptación más o menos buena en la resolución de diferentes tipos de problemas.
2. Ayudar al didacta a luchar contra la ilusión de transparencia de la comunicación didáctica inducida por la epistemología escolar y los conocimientos efectivamente construidos por el alumno (p. 14).

Además, la uniformidad de las definiciones y ejercicios propuestos en los manuales oculta la riqueza y la complejidad de las concepciones que los alumnos le pueden asociar.

Por su parte Brousseau (1983) indica que el objeto de la didáctica es justamente estudiar las condiciones que deben cumplir las situaciones o los problemas propuestos al alumno para favorecer la aparición, el funcionamiento y el rechazo de concepciones sucesivas.

Siguiendo los trabajos de Vergnaud (1982) y Artigue (1989), consideramos que la noción de *concepción* del sujeto debemos caracterizarla por:

- Los invariantes que el sujeto reconoce como notas esenciales que determinan el objeto matemático;
- El conjunto de representaciones simbólicas que le asocia y utiliza para resolver las situaciones y problemas ligados al concepto;
- El conjunto de situaciones, problemas, etc. que el sujeto asocia al objeto, es decir, para las cuales encuentra apropiado su uso como herramienta.

También se utiliza el término *concepción* (*concepción institucional*) para referirnos a las concepciones que han sido asociadas a un objeto matemático a lo largo de su evolución histórica, o bien a las que se manifiestan en los programas oficiales o en los manuales escolares. Así, en la noción de concepción cabe señalar una doble vertiente, la cognitiva (concepción del sujeto) y epistemológica (concepción en la Matemática o transmitida en la enseñanza.)

2.4.5.- TEOREMA FACTUAL

Es posible formarse una imagen de los conocimientos y representaciones de los estudiantes a partir de los observables de que disponen, es decir, de las acciones del sujeto en una situación–problema y de los testimonios simbólicos que éste proporciona de su actividad (formulaciones verbales, gráficos, etc.). Las diferentes respuestas y soluciones aportadas por los estudiantes pueden ser consideradas como concebidas por reglas de producción o procedimientos. Metodológicamente, es necesario identificar éstas para poder comprender su significado, teniendo en cuenta las relaciones a las que ellas se aplican. Es fundamental considerarlas como teoremas implícitos, a los que se llamará *teorema factual.*

Así, Albert (1996, p. 46) señala que el concepto de teorema factual denota las propiedades de las relaciones percibidas y utilizadas por el sujeto en situación de resolución de un problema, sin dar por hecho que el sujeto sea capaz de explicitarlas o justificarlas. Raramente está manifiesto, es una producción de los estudiantes inventada por ellos, pues tal problema nunca se les ha enseñado, es producto directo de la conceptualización de los alumnos en un campo; podría hablarse incluso de cierta "teoría implícita".

En resumen, en este capítulo hemos delimitado los objetos matemáticos que están implicados en esta investigación a través de un estudio epistemológico de los mismos. Mostrando, además, cómo se hallan integrados en diferentes situaciones problemas que se plantean desde las Ciencias Experimentales.

En el modelo constructivista, aunque con características propias diferenciadoras, inscribimos la *teoría de las situaciones didácticas*; dicha teoría constituye el marco teórico de referencia para elaborar y desarrollar las propuestas metodológicas que se formulan en *ingeniería didáctica*, cuyas características serán analizadas en el capítulo siguiente, puesto que servirán de guía para la presente investigación.

Con la descripción del concepto de *teorema factual* completamos la determinación del marco teórico en el que sustenta nuestra investigación y que, como ya señalábamos al comienzo de esta sección, conjuga elementos teóricos de distintas tendencias.

CAPITULO 3

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

3. 0.- INTRODUCCIÓN

Para llevar a cabo los objetivos de la enseñanza de las ciencias, nosotros los docentes tomamos una serie de decisiones sobre qué enseñar y cómo hacerlo. Estas decisiones y estrategias responden a un modelo que todos los profesores poseemos, ya sea en forma implícita o explícita.

Los modelos didácticos tratan tanto de los aspectos del aprendizaje como de los de enseñanza. Para algunos autores no existe una relación lineal entre un modelo de aprendizaje y uno de enseñanza; para Ausubel, Novak y Hanesian (1986) "*enseñar es sólo una de las condiciones que pueden influir en el aprendizaje*". Otros autores como Gil (1993c), escriben enseñanza / aprendizaje para subrayar la estrecha vinculación entre ambos aspectos. En nuestra investigación tendremos en cuenta que en la realidad del aula los modelos raramente se practican de forma absoluta, siendo frecuente que las estrategias de un modelo aparezcan combinadas con las de otros.

Nuestro estudio lo situamos en el nivel universitario inicial de las carreras de Ingeniería Técnica y Licenciatura en Química y Biología. Todos nuestros alumnos han tenido al menos un curso de Cálculo en su Bachillerato.

Basamos este estudio en:

- La resignificación del concepto de derivada a través de las derivadas sucesivas, éstas como medidas del cambio o variaciones.
- La serie de Taylor, como organización de las derivadas sucesivas, como herramienta de predicción.

Para ello nos limitamos a trabajar con **funciones analíticas**, fundamentalmente polinómicas, en el contexto de las Ciencias Experimentales y en el marco gráfico. Diseñamos para esto unas secuencias de enseñanza que presentan situaciones didácticas donde se interrelacionan los saberes matemático y físico con el alumno, el profesor y el medio. Así pues, hemos utilizado como metodología de investigación la *ingeniería didáctica* ya que consideramos que es una metodología que tiene en cuenta las realizaciones didácticas en clase y nos permite tener un mejor control de ellas, de su diseño y de su análisis.

3.1.- INGENIERÍA DIDÁCTICA

"*La noción de ingeniería didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas a comienzos de los años ochenta. Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero, que para realizar un proyecto determinado se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo*" (Artigue 1995, p. 34).

Por lo tanto, la ingeniería didáctica es una metodología de investigación que se aplica a los productos de enseñanza basados o derivados de ella, y también es una metodología de investigación para guiar las experimentaciones en clase.

"*El término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos. En el transcurso de la interacción entre el profesor y los estudiantes, los proyectos evolucionan bajo las reacciones de los estudiantes y en función de las selecciones y decisiones del profesor. De esta forma, la ingeniería didáctica es a la vez un producto, resultado de un análisis "a priori", y un proceso en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo, si se presenta el caso, a la dinámica de la clase*" (Douady, 1995).

Su sustento teórico proviene de la teoría de la **transposición didáctica** y de la teoría de las **situaciones didácticas**.

Diversos estudios han mostrado los obstáculos que se oponen a la transmisión correcta de las ingenierías didácticas (Artigue & Perrin, 1991). Estos obstáculos están ligados a diferentes factores:

- La falta de adecuación entre las concepciones sobre el aprendizaje de quienes reciben los resultados y aquéllas que subyacen a la teoría de las situaciones didácticas sobre las que se basan las ingenierías.
- La complejidad de los productos de la ingeniería y el nivel de conocimiento y experiencia que se requiere para su gestión apropiada (tanto en el plano pedagógico, como en el plano matemático).
- La ruptura entre las características de estos productos y el funcionamiento usual de la enseñanza (por ejemplo, actividades abiertas concebidas a lo largo de varias sesiones).
- El nivel mismo de la descripción de los productos que ponen el énfasis sobre los puntos claves de la ingeniería y sobre las rupturas cognitivas, que tiende a dar menos importancia a aquellos aspectos que corresponden al funcionamiento más continuo y común del aprendizaje.

Esta orientación también tiene implicaciones sobre la concepción misma de lo que es importante transmitir en una formación. Esto se expresa, de manera evidente, en la importancia que se le da a lo que proviene de la teoría de las situaciones didácticas y, en particular, a las herramientas conceptuales y a las técnicas de análisis "a priori" de las situaciones didácticas: nociones de variables didácticas, de devolución e institucionalización, de contrato didáctico, la distinción entre situaciones adidácticas y didácticas, entre status útil y status objeto de los conceptos matemáticos, entre los cuadros de funcionamiento de un mismo concepto, etc. (Artigue,1995).

3.1.1.- METODOLOGÍA DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

En la metodología de la ingeniería didáctica se pueden distinguir cuatro fases:

1.- *Análisis preliminar.*

2.- *Concepción y análisis "a priori" de las situaciones didácticas de la ingeniería.*

3.- *Experimentación.*

4.- *Análisis "a posteriori" y evaluación.*

A continuación se describe cómo se aplican las distintas fases en nuestro problema de estudio.

3.1.2.- ANÁLISIS PRELIMINAR

Un análisis preliminar de la situación a abordar debe tener en cuenta:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos (didáctica).
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución (cognitiva).
- El análisis del campo de restricciones donde se va a efectuar la secuencia de enseñanza.

En este análisis hay dos componentes que no son propiamente didácticas pero sí indispensables para el diseño de una ingeniería: la componente epistemológica y la cognitiva.

El análisis epistemológico provee de historicidad a los conceptos que la enseñanza usual tiende a presentarlos como objetos universales, tanto en tiempo como en espacio, perdiendo esa categoría de verdades en sí mismos.

Igualmente provee de historicidad a las nociones metamatemáticas y protomatemáticas, tales como el rigor, y con ello contribuye a mostrar que la concepción de un rigor eterno y perfecto de las Matemáticas es sólo una ficción.

También permite conocer la disparidad que hay entre el saber científico y el enseñado y con ello contribuye a desterrar otra de las ficciones de la escuela, como es la concepción de que los objetos de enseñanza dan copias simplificadas, pero fieles a los objetos de la ciencia. El análisis epistemológico nos permite, por una parte, comprender qué es lo que gobierna la evolución del saber científico, y por otra, tomar conciencia de la distancia que separa a esos dos sistemas. La noción de transposición didáctica da cuenta de ello.

La epistemología juega también un papel protagonista en el nivel teórico y metodológico de la disciplina, a partir de la consideración de la noción de obstáculo epistemológico (Farfán, 1997, pp. 13-25).

Atendiendo a lo anterior, se escogieron una serie de situaciones-problemas para llevar a cabo una experiencia piloto con alumnos de Ingeniería Técnica y de Licenciatura en Química (ver Anexo 3).

A la vista de los resultados obtenidos con la experiencia piloto se diseñó e implementó un trabajo previo, consistente en la discusión y resolución de un grupo de problemas (ver Anexo 2) con alumnos de la Licenciatura en Biología, con la finalidad de familiarizar a los estudiantes en los aspectos necesarios para el desarrollo de la experiencia. Para tal selección se tuvo en cuenta:

a) Hacer un tratamiento matemático de problemas que conducen a modelos que describen variación y cambio en diferentes contextos.
b) Familiarizarse con el lenguaje variacional en los distintos contextos que se van a utilizar.
c) Reconocer la derivada como una nueva función, anticipando sus características gráficas como crecimiento, concavidad, máximos y mínimos, etc., de manera que a través de su estudio se puedan predecir fenómenos de variación.
d) Presentar al estudiante la serie de Taylor no sólo como una herramienta de aproximación sino como la organización de las derivadas sucesivas con un fin predictivo. Se quiere dar una nueva visión de esta serie que nos acerque a una nueva metodología, de manera tal que nos permita hallar los valores de un parámetro, conocido éste en un único sitio temporal o espacial, en un estado posterior. De esta manera, la serie de Taylor se presenta como la herramienta que nos permite matematizar un conjunto de intuiciones y vivencias cotidianas sobre el cambio en la naturaleza.
e) También tendremos en cuenta los conceptos y teoremas pertinentes.

En principio, desde el punto de vista de la matemática de la situación, se pretende tratar fundamentalmente las cuestiones principales siguientes:

- Dado un fenómeno de variación, analizar la gráfica que lo describe y hallar los elementos que permiten anticipar y analizar la evolución del fenómeno.
- Dotar a las funciones derivadas de significación a través de los distintos contextos de la ciencia de manera que sean entendidas como nuevas funciones. Estas nuevas funciones van a describir, a su vez, el comportamiento y la evolución del fenómeno.
- De la misma forma, conocida la gráfica de la función derivada de algún orden que describe el fenómeno planteado, se busca anticipar gráficamente la función derivada del orden anterior.

- Cómo organizar las derivadas sucesivas a través de la serie de Taylor de manera que nos permita resolver ecuaciones diferenciales.

Nos basamos en que los fenómenos físicos, sobre todo fenómenos de la naturaleza, deben ayudarnos a construir las derivadas sucesivas, trabajando con la interacción de diferentes marcos como el geométrico, gráfico, algebraico, analítico y numérico a partir de un contexto físico.

Hemos buscado problemas donde se planteen situaciones que sirvan para introducirnos en el tema, y lo hacemos a través del trabajo individual y de discusión en grupo. Nos situamos en contextos físico y biológico fundamentalmente .

3.1.3.- DISEÑO DE LA SITUACIÓN

En esta fase de la ingeniería didáctica se consideraron diversas situaciones-problemas (Anexo 3); entre ellas se hizo una selección para construir las situaciones didácticas para llevar a cabo las experiencias piloto. Esto nos ayudó a reestructurar algunas preguntas y obtener la nueva situación didáctica con la que hemos trabajado con alumnos de la Licenciatura en Biología.

Con ella hemos tratado de que los alumnos desarrollen progresivamente el pensamiento variacional. Nos hemos apoyado en problemas que describen variación y cambio en el ámbito de la Cinemática para resignificar el concepto de derivada. Para ello hemos utilizado las derivadas sucesivas, primera, segunda y tercera con significación en la Cinemática, concebidas como una sucesión de derivadas en lugar de una iteración, es decir como $f, f', f''\ldots$ y no como $(((f)')')'\ldots$ que es justamente a lo que nos referimos cuando hablamos de resignificación. Con lo cual el alumno no necesita de una derivada para poder interpretar la de orden superior siguiente. Esto nos lleva, en los dos últimos problemas, a trabajar con la derivada como una organización de las derivadas sucesivas, en la serie de Taylor, y con ella resolver problemas de predicción propios de la Física y de la Biología.

3.1.4.- ANÁLISIS A PRIORI

Una vez diseñada la secuencia didáctica nos abocamos a analizar las características de ésta, las posibilidades de acción, de decisión y de control de los estudiantes en cada situación- problema, así como sus posibles comportamientos. En el siguiente capítulo se presenta el estudio pormenorizado de este análisis.

3.1.5.- PUESTA EN ESCENA

Tras el diseño de la situación didáctica, se procedió a su implementación. Se recopilaron los datos y se realizó el análisis de resultados con los que se efectuó una confrontación entre el análisis **a priori** y el análisis **a posteriori**. Justamente, una de las originalidades de la ingeniería didáctica es su modo de validación, que es esencialmente interno.

Para la puesta en escena de la situación didáctica se implementaron las cuatro etapas que contempla la teoría, esto es:

- *Acción.*
- *Formulación.*
- *Validación.*
- *Institucionalización.*

En la ***etapa de acción***, los alumnos trabajaron de forma individual. La situación didáctica se realizó en una sesión de tres horas y al finalizar los alumnos entregaron sus informes escritos.

En la ***etapa de formulación***, se formaron cuatro equipos, de tres integrantes cada uno, los cuales nuevamente trabajaron la misma situación. La finalidad de esta etapa fue la discusión, en grupo, con base en las soluciones individuales que cada alumno había obtenido en la etapa anterior. Al finalizar, cada equipo entregó un informe escrito. A lo largo de esta etapa se realizaron grabaciones para analizar cómo fue construyendo cada grupo su propio conocimiento y cómo algunos alumnos lograron superar lo realizado en la etapa anterior.

En la ***etapa de validación***, la discusión fue entre equipos.

En la ***etapa de institucionalización***, la totalidad de los alumnos, junto con el profesor, discutieron la situación didáctica, dejando claro cuáles fueron sus objetivos. La sesión tuvo una duración de dos horas y fue grabada.

3.1.6.- ANÁLISIS A POSTERIORI

A la fase de experimentación le sigue una de análisis “a posteriori”. Para ello hemos recopilado los datos obtenidos en la fase anterior y algunos trabajos realizados por estos alumnos después de transcurrido un mes de la fase de experimentación. Una vez elaborado este análisis se confronta con el análisis "a priori" efectuado.

En la confrontación de estos dos análisis se fundamenta, en esencia, la validación de las hipótesis formuladas en la investigación (Artigue, 1995, pp. 36-48).

Queda claro que la *ingeniería didáctica* está basada en una metodología constructivista donde la creación y desarrollo de la situación didáctica son fundamentales a fin de que el alumno pueda construir, reconstruir o avanzar en sus conocimientos.

3.2.- REVISIÓN DE MANUALES ESCOLARES

A través de este estudio se pretende analizar cómo los autores elegidos, entre los más consultados por los estudiantes en su momento, presentan los conocimientos involucrados en nuestra investigación.

Teniendo en cuenta que el texto es precisamente uno de los elementos que determina la practica docente, en él se manifiesta no sólo la concepción de los autores y el sentir didáctico de una época determinada, sino también las distintas concepciones que se transmiten en el proceso de enseñanza a los estudiantes, una vez que se ha optado por un determinado texto (El Bouazzoui, 1988).

3.2.1.- CRITERIO DE SELECCIÓN

Se consideraron libros de texto, unos dirigidos a alumnos de Enseñanza Media y otros a estudiantes de Enseñanza Universitaria. La selección de los manuales se ha realizado a partir de ediciones de los años 90.

En Enseñanza Universitaria se seleccionaron manuales de primer curso, elegidos de entre los que aparecen en la bibliografía de los programas de las asignaturas correspondientes, tanto para la Escuela Politécnica Superior como para la Facultad de Ciencias de la Universidad de Jaén.

3.2.2.- TAMAÑO DE LA MUESTRA

Se analizó un total de 8 textos, de los cuales cuatro corresponden a Enseñanza Universitaria, dos de Cálculo y dos de Física, y cuatro a Enseñanza Media, siendo dos de Matemáticas y dos de Física.

Se reseñan a continuación el autor, año de publicación, título y editorial.

1) Granero, Francisco. (1990). "*Cálculo*". Ed. Mc Graw-Hill.
2) Larson, R.; Hostetler, R. y Edwards, B. (1995). "*Cálculo y Geometría Analítica*". Ed. McGraw-Hill.
3) Tipler, P. A. (1995). "*Física*", Vol. 1. Ed. Reverté, S.A., 3ª Edición.
4) Alonso, M. y Finn, E. J. (1995). "*Física*". Ed. Addison – Wesley Iberoamericana.
5) De Guzmán, M.; Colera, J. y Salvador, A. (1991). *Matemáticas*. Bachillerato 2 (BUP). Ed. Anaya.
6) Colera, J.; Oliveira, M. J. y García, R. (2001). *Matemáticas II*. Grupo Anaya S.A.
7) Candel, A.; Satoca, J.; Soler, J. B. y Tent, J. J. (1991). "*Física y Química*". Bachillerato 2 (BUP). Ed. Anaya.
8) Candel, A.; Satoca, J.; Soler, J. B. y Tent, J. J. (1992). "*Física y Química*". Bachillerato 3 (BUP). Ed. Anaya.

3.2.3.- TEMAS A REVISAR

Los temas que hemos analizado sobre conocimientos matemáticos son:

- *Derivadas,* en especial *derivadas sucesivas.*
- *Polinomios de Taylor,* en especial *teorema de Taylor, series de Taylor.*

Sobre los conocimientos físicos nos hemos centrado en:

- *Cinemática,* observando especialmente el uso de gráficas y demás herramientas matemáticas utilizadas en el desarrollo del tema, como el concepto de derivada y derivadas sucesivas
- *Movimiento Armónico Simple,* desde el punto de vista de las herramientas matemáticas utilizadas para describir tal movimiento y resolver la ecuación correspondiente. Esto es, qué conceptos matemáticos se hallan involucrados, qué marcos utiliza para describir el modelo, etc.

3.2.4.- CONCLUSIONES SOBRE LA REVISIÓN DE MANUALES

Las variables consideradas para la revisión de manuales y el análisis en detalle puede verse en el Anexo 1. En cuanto al conocimiento matemático revisado, a modo de resumen, podemos decir:

- En general, los gráficos se reservan para aclaraciones intuitivas de ciertos conceptos, resultados o demostraciones de los mismos, pero a nivel de problemas y ejercicios la primacía de las preguntas, a partir de expresiones algebraicas de funciones, es prácticamente exclusiva.
- Se dedica escasa atención a potenciar la interconexión entre el marco analítico y el gráfico. Se detecta una fuerte tendencia hacia el primero en detrimento del segundo.
- Se brinda muy escasa oportunidad para que los alumnos puedan explorar, en situaciones que deben modelar gráficamente, las consecuencias de sus decisiones. Por ejemplo, incluir en un problema de cinemática una aceleración negativa en un tramo donde la función posición es creciente y observar que la velocidad no puede aumentar en dicho tramo.
- En la resolución de problemas y ejercicios, se pone de manifiesto una primacía total en la transferencia de resultados teóricos, formulados en términos algebraicos-analíticos.
- La Matemática, en la enseñanza de la Física, es usada casi exclusivamente en forma algorítmica.
- La serie de Taylor en los manuales de Cálculo se presenta como una parte del tema de convergencia de series infinitas, ya sea en el sentido de la aproximación en intervalos o en vecindades infinitesimales, o propiamente en ámbito de la convergencia. Esta situación se caracteriza muy nítidamente cuando estudiamos el papel que se le asigna al residuo de la serie de Taylor.
- La predicción, concepto inherente a las ciencias experimentales, está ausente en forma explícita en los manuales escolares. Así, vemos como un resultado relativamente sencillo, a saber la solución de la ecuación del movimiento armónico simple, se muestra como complejo al estar ausente de los textos de física universitaria a nivel inicial.

3.3.- SELECCIÓN Y CARATERÍSTICAS DE LOS ALUMNOS

Para llevar a cabo la parte experimental del proyecto era indispensable contar con alumnos que dispusieran al menos de doce horas extra-escolares. Esto es bastante difícil por la cantidad de asignaturas, horas de clases y prácticas que tienen los alumnos universitarios durante el curso. La elección recayó en el primer curso de la licenciatura de Biología porque en dicho curso la persona que lleva a cabo este trabajo es responsable de la asignatura de Matemáticas. Se han desarrollado dos experiencias, la primera en el curso 1999-2000 y la segunda en el curso 2002-2003; el análisis de las mismas se presenta en los capítulos 4 y 5, respectivamente.

En la primera experiencia participaron once alumnos (ocho mujeres y tres hombres), de los cuales diez han cursado COU y uno Bachillerato-LOGSE y todos ingresan a la Universidad a través del examen de selectividad en el curso 1999-2000. En la segunda experiencia participan once alumnos, ocho mujeres y tres varones, de los cuales nueve han cursado el Bachillerato-LOGSE y dos el COU. Ingresan a la universidad ocho en el curso 2002-2003, dos en el curso 2001-2002 y uno en 1998-1999. Los alumnos que participaron en las experiencias lo hicieron de forma voluntaria.

Matemáticas se cursa en el primer cuatrimestre; en el momento que se desarrolló la primera experiencia contaba con cuatro créditos. La segunda experiencia se lleva a cabo en el curso 2002-2003, donde las Matemáticas tienen asignados 6 créditos. Por otra parte, estos alumnos cursan en el segundo cuatrimestre la asignatura Física de los Procesos Biológicos, con cuatro créditos.

Los contenidos de dichas asignaturas en los cursos académicos considerados no han variado, dichos contenidos se detallan a continuación:

Matemáticas

Tema 1. *Sistema de ecuaciones lineales. Matrices y determinantes.*

Tema 2. *Espacios vectoriales y transformaciones lineales.*

Tema 3. *Diagonalización.*

Tema 4. *Continuidad y derivabilidad de funciones reales de una variable.*

Tema 5. *Integración de funciones reales de una variable.*

Tema 6. *Funciones reales de varias variables.*

Tema 7. *Ecuaciones diferenciales.*

Física de los Procesos Biológicos

Tema 1. *Aspectos generales de la mecánica.*

Tema 2. *Estática. Estabilidad y equilibrio.*

Tema 3. *Propiedades elásticas de los materiales.*

Tema 4. *Mecánica de fluidos ideales.*

Tema 5. *Flujo de fluido viscoso.*

Tema 6. *Difusión y ósmosis.*

Tema 7. *Campo eléctrico y corriente eléctrica.*

Tema 8. *Propiedades eléctricas de muestras biológicas.*

Tema 9. *Potenciales bioeléctricos.*

Tema 10. *Campo magnético e inducción electromagnética.*

Tema 11. *Óptica geométrica.*

Tema 12. *Sistemas ópticos centrados. El ojo humano.*

Tema 13. *Introducción a la física atómica y nuclear.*

Tema 14. *Radiación ionizante. Dosimetría.*

A continuación se realiza el análisis de cada una de las situaciones-problemas con las que han trabajado los alumnos en las diferentes etapas de la ingeniería didáctica (Apartados 3.5 y 3.6). También, se presenta un estudio de las experiencias piloto que contribuye a estructurar los trabajos posteriores (Apartado 3.6).

3.4.- ANÁLISIS DE LAS SITUACIONES-PROBLEMAS. ANÁLISIS A PRIORI

En esta sección haremos un análisis de la secuencia didáctica que hemos desarrollado a partir de nuestros supuestos y que consta de situaciones-problemas. Para cada situación-problema mostramos:

a) Las razones de su elección.
b) Importancia de la situación-problema para los alumnos.
c) Los comportamientos que se quieren provocar.
d) Medios de que disponen los alumnos.
e) Los marcos utilizados.
f) Variables del problema y elecciones didácticas.
g) Algunas preguntas interesantes para analizar la situación-problema.

Con esto ponemos de relieve los criterios y necesidades para las que han sido seleccionadas y sus características, además de las posibilidades de acción, de decisión y de control de los estudiantes en cada situación-problema, así como sus posibles comportamientos, es decir, un *análisis a priori* de las mismas. También, una vez revisadas las producciones de los estudiantes en la etapa de *acción*, preparamos algunas preguntas realizadas a partir del análisis efectuado al *estudio piloto*. Estas preguntas son interesantes ya que, formuladas en las sucesivas etapas (*validación e institucionalización*), nos ayudarán a poder indagar en la forma en que los alumnos van construyendo sus respuestas

En las situaciones 1, 2, 3, 4, 5, y 8 tomamos como *objeto de conocimiento* el concepto de *variación* (la medida del cambio) y, como instrumento de conocimiento, las derivadas sucesivas. El concepto de variación, descrito matemáticamente por la derivada conjuntamente con sus derivadas sucesivas, se estudia ligado a situaciones físicas, muy especialmente a la velocidad, aceleración y la noción de "tirón", ésta última como lo hacen Alonso y Finn (1992, p. 31), para el movimiento rectilíneo. La ventaja de apoyar nuestro estudio en esta parte de la cinemática se debe principalmente a que aparecen las derivadas sucesivas con nombres propios y además por su proximidad al alumno, ya que están relacionadas con experiencias extra escolares de cada día.

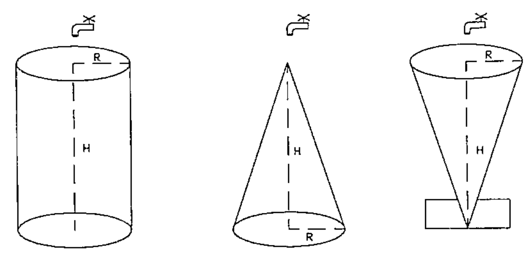
Para las situaciones restantes (6, 7, 9 y 10) nuestro *objeto de conocimiento* es la *predicción*, desarrollada matemáticamente por la serie de Taylor, y el *instrumento de conocimiento* son las ecuaciones diferenciales ordinarias que describen fenómenos físicos o biológicos.

El planteamiento de estas situaciones-problemas es original en cuanto hemos tenido en cuenta, como ya hemos señalado (Apdo. 1.5), que el objetivo de nuestra investigación es estudiar las causas de las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Infinitesimal cuando se enseña a estudiantes universitarios de Ciencias e Ingeniería, buscando dichas causas no sólo en las formas en que trasmitimos el conocimiento sino principalmente en la manera en que se articula el contenido matemático que se enseña.

Los *procesos* que hemos querido privilegiar con estas situaciones-problemas son: la abstracción, la observación, el análisis y la reflexión. A continuación pasaremos a analizar cada una.

❑ SITUACIÓN 1

Consideremos dos tanques, uno cilíndrico y el otro con forma de cono circular recto con vértice hacia arriba (como se muestra en la figura); ambos tienen igual radio y altura. En ellos se vierte agua a un ritmo constante, comenzando al mismo tiempo.



a) *Bosqueja, en los mismos ejes, una gráfica h(t) (altura en función del tiempo) asociada con el llenado de los dos recipientes, en las condiciones descritas anteriormente. Compara las gráficas y escribe todo lo que puedas concluir sobre ellas.*
b) *¿Cambian las gráficas si invertimos la posición de los recipientes? (ver figura). ¿De qué manera? Haz un bosquejo como en el apartado anterior.*
c) *Bosqueja, en los mismo ejes, la tasa de variación o velocidad de cambio de $h(t)$, para cada uno de los casos anteriores. Compáralas y describe su comportamiento en relación con las gráficas de $h(t)$ obtenidas en a) y b).*

a) Las razones de su elección.

Se trata de comenzar con un problema cuyo enunciado consideramos que es de fácil comprensión para cualquier alumno de ciencias o ingeniería. Fundamentalmente se trata de presentar un problema elemental de variación.

b) Importancia de la situación-problema para los alumnos.

La importancia que tiene esta situación para el alumno es que, a través de un problema sencillo que requiere sólo conocimientos básicos, aprendidos por ellos en otros niveles de enseñanza, puedan reflexionar sobre lo que varía, respecto a qué y cómo varía. Esto es, que distingan, contextualmente, lo que en Matemáticas serán $h(t)$ y $h'(t)$.

c) Los comportamientos que se quieren provocar.

- Tratamos de provocar en el alumno una búsqueda de la coherencia y el desarrollo del espíritu crítico respecto a sus conclusiones y resultados.
- Además, queremos poner a prueba la iniciativa para utilizar la idea intuitiva sobre la variación y el cambio y su capacidad para traducirlo en una gráfica.
- Pretendemos desarrollar un comportamiento reflexivo sobre los elementos de la gráfica que describen la variación que da cuenta de los cambios que ocurren en el fenómeno observado.
- Que diferencien claramente los valores de la función de los valores de la variación.

d) Medios de que disponen los alumnos.

- Los conocimientos que han adquirido en el nivel secundario.
- La derivada en sus dos concepciones, como razón de cambio y como pendiente de la recta tangente.

e) Los marcos utilizados.

Hemos escogido un contexto físico para describir un fenómeno de cambio. Para analizarlo es necesario hacer interactuar distintos marcos como:

- El geométrico, a través de las formas de los recipientes y relación entre sus dimensiones.
- El algebraico, en tanto que se puede calcular y comparar sus volúmenes.
- El analítico, al determinar los parámetros que varían y de qué manera lo hacen.
- El gráfico, una práctica de representaciones en coordenadas cartesianas de las relaciones entre dos variables relacionadas para describir el fenómeno observado.

f) Variables del problema y elecciones didácticas.

- Forma y dimensión de los recipientes.
- Número de recipientes.
- Posición de los recipientes.
- Entrada de igual caudal de agua para ambos recipientes.
- El caudal es constante en el tiempo a lo largo de la experiencia.

g) Algunas preguntas interesantes para analizar la situación-problema.

1. ¿Qué parámetros permanecen constantes y cómo ellos se reflejan en las gráficas?
2. ¿Se llenan los dos recipientes al mismo tiempo? ¿por qué?
3. ¿En el tiempo $t = 0$ el valor de h es el mismo para los dos recipientes?
4. En el caso del recipiente cilíndrico, tomemos dos intervalos de tiempos iguales, ¿ha variado h en la misma cantidad para los dos intervalos considerados?
5. La misma pregunta nos hacemos para el otro recipiente.
6. Si $h(t)$ es una función que para intervalos de tiempos iguales experimenta variaciones iguales, ¿qué gráfica representa esta situación?
7. ¿Qué tipo de gráfica puede describir aproximadamente lo que ocurre con $h(t)$ para el recipiente cónico?
8. ¿Qué valor toma en $t = 0$ la función que han considerado?
9. ¿Cuál es la forma de crecimiento de dicha función en los puntos próximos al origen?
10. ¿Aumenta la altura del líquido en la misma cantidad al comienzo que al final?

- **SITUACIÓN 2**

Un móvil se desplaza con movimiento rectilíneo no uniforme. En la siguiente tabla se muestran las posiciones (en metros, desde el origen de coordenadas) en ciertos instantes.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	3	2	5	-2	0	3

a) A partir de estos datos, determina (razonando tu respuesta) para cuántos valores de t, como mínimo, el móvil tiene velocidad instantánea cero.

b) ¿Para cuántos valores de t, como mínimo, la aceleración es cero?¿por qué?

c) ¿Se puede asegurar que la variación instantánea de la aceleración $s'''(t)$, conocida como tirón, toma el valor cero en algún instante dentro del intervalo considerado? Explica con detalle los motivos y razones de tu respuesta.

a) Las razones de su elección.

Se pretende que el alumno prediga ciertas características de un fenómeno de la cinemática donde el comportamiento de las variables viene dado a través de una tabla. Por ejemplo, los cambios de crecimiento o decrecimiento de la primera derivada provocan cambios de signo en la aceleración y aparición de instantes donde la aceleración es nula. Tales puntos se corresponden con los puntos de inflexión de la gráfica.

b) Importancia de la situación-problema para los alumnos.

- Se trata de familiarizar a los alumnos en el análisis de una situación de cambio donde la relación de las variables se conoce sólo a través de una tabla.
- En este caso, es a partir del marco numérico que se trata de predecir y cuantificar el cambio.
- Se espera que los alumnos lleguen a tabular datos y puedan, a partir de ellos, bosquejar una gráfica teniendo en cuenta y dando sentido a los conceptos que están en juego: movimiento rectilíneo y gráfica de una función derivable.

c) Los comportamientos que se quieren provocar.

- La observación de los valores dados en la tabla, en cuanto a los signos, debería ayudarles a determinar la cantidad mínima de ceros de la función en ese intervalo.
- La observación del comportamiento de los valores dados en la tabla, en cuanto a crecimiento y decrecimiento, debería facilitarles la determinación de la cantidad mínima de extremos que presenta la función en ese intervalo.
- Pretendemos que evolucione su concepción de que la derivada es un concepto dinámico que nos sirva para cuantificar el cambio.

- A partir de los datos de la tabla queremos que reconozcan algunas características de la función y de sus derivadas como el número mínimo de extremos relativos que presentan.
- A partir de los datos recogidos en una tabla queremos que sean capaces de predecir y explicar alguna s características del fenómeno físico de la Cinemática que aquélla describe.

d) Medios de que disponen los alumnos.

Los medios de que ellos disponen son:

- Función continua, teorema de Bolzano.
- Crecimiento y decrecimiento de la función.
- Interpretación geométrica de la derivada.
- Teorema de Rolle y corolario.
- Ejemplos donde se analiza la velocidad de cambio o tasa de variación de una variable respecto de otra.

e) Los marcos utilizados.

- Nos situamos en el marco numérico, a través de una tabla que da las coordenadas de algunos puntos de la función que representa el fenómeno.
- El problema se sitúa en el contexto de la Cinemática, para un movimiento rectilíneo.
- El marco analítico.
- El marco gráfico, por cuanto para visualizar el problema les resulta indispensable representar los puntos en el plano y tratar de bosquejar una gráfica con ellos.
- Este ejercicio favorece la interrelación entre los marcos numérico (a través de tablas), el gráfico (al representar los puntos en el plano) y el analítico.

f) Variables del problema y elecciones didácticas.

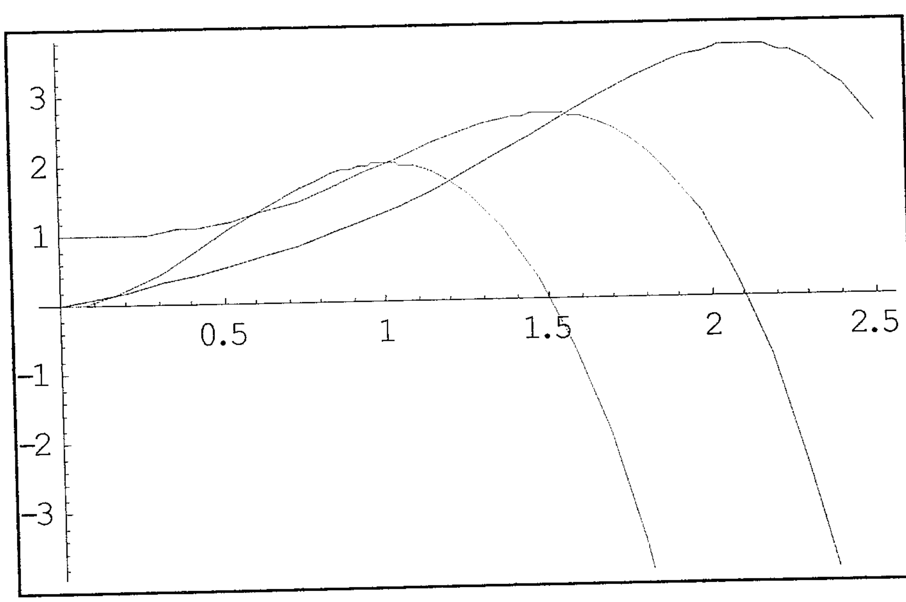
- El número de puntos escogidos para confeccionar la tabla.
- Los valores que toman las variables.
- El número de ceros de la función.

g) Algunas preguntas interesantes para analizar la situación-problema.

1. Explique lo que ocurre en $t = 4$.
2. Entre $t = 2$ y $t = 3$ la función tiene un cero. ¿Por qué crees que se puede realizar esta afirmación?
3. ¿Entre $t = 0$ y $t = 1$ cómo debería ser la función, creciente o decreciente?
4. ¿Entre $t = 1$ y $t = 2$ cómo debería ser la función, creciente o decreciente?
5. La función pasa de creciente a decreciente o viceversa en un punto que llamamos crítico, ¿qué valor tiene la pendiente de la recta tangente en ese punto?
6. El punto donde cambia el crecimiento de la función es un punto que tiene una característica particular en la función derivada, ¿puedes indicar cuál es esa característica?

❑ SITUACIÓN 3

En la siguiente gráfica se representan la función de movimiento, s(t), la velocidad, s'(t), y la aceleración, s''(t), de un móvil.



a) *¿Puedes identificar cada una? ¿cómo?*

b) *Determina aproximadamente los intervalos donde s'''(t) es positiva.*

c) *Describe cuáles son las características de la función que, a tu juicio, son más relevantes a la hora de trazar las gráficas de su primera, segunda y tercera derivada.*

a) Las razones de su elección.

- Se trata de un problema donde se presentan tres gráficas. Una representa la posición de un móvil a lo largo de un cierto tiempo, que se mueve con movimiento rectilíneo. Otra representa la tasa de variación de la posición respecto del tiempo, es decir, la velocidad. La última es la tasa de variación de la velocidad respecto del tiempo, la aceleración.
- Nuestro propósito es que puedan describir el movimiento a través de las gráficas que representan el desplazamiento $s(t)$, la velocidad $v(t)$ y la aceleración $a(t)$ del mismo.
- Este enunciado puede ser comprendido aun por alumnos del último curso de bachillerato, pero creemos que reviste importancia para alumnos que están en el nivel básico universitario ya que han adquirido ciertos conocimientos que, por tanto, les permiten abordarlo desde una perspectiva diferente.

b) Importancia de la situación-problema para los alumnos.

- Les permite visualizar las situaciones de cambio a través de las derivadas sucesivas.
- Se trata además de familiarizar a los alumnos en el análisis de una situación de cambio donde la relación de las variables se conoce sólo a través de gráficos.
- Sintetizar los conocimientos adquiridos a través de los problemas anteriores.
- Ayudarles a sistematizar conceptos aprendidos por separado y dentro de otros contextos.
- Permite visualizar dentro de un contexto gráfico la tasa de variación o velocidad de cambio de la variable independiente respecto de la variable dependiente para el caso de derivadas sucesivas.
- Permite observar las derivadas sucesivas imprimiéndole un significado fácil de comprender para el alumno, ya que representan fenómenos con los que están familiarizados.

c) Los comportamientos que se quieren provocar.

- A través del problema escogido queremos que el alumno reconstruya el concepto de derivada.

- Que logre visualizar el comportamiento de las derivadas sucesivas y hallar sus regularidades a través de los signos de $v(t)$ y $a(t)$.
- Que observen los alcances y las limitaciones que proporciona el marco gráfico.

d) Medios de que disponen los alumnos.

Los medios de que ellos disponen son:

- Ejemplos donde se analiza la velocidad de cambio o tasa de variación de una variable respecto de otra, así como ejemplos de la vida cotidiana.
- La adquisición de conocimientos que las dos situaciones que han trabajado anteriormente les hayan aportado.
- El comportamiento de las variables s, v, a para un movimiento rectilíneo.

e) Marcos utilizados.

- Nos situamos fundamentalmente en el marco gráfico.
- También está presente el marco numérico, ya que, al presentarse los ejes graduados, les permite comparar cuantitativamente los valores que toman los parámetros en distintos instantes.
- El marco analítico también juega un papel relevante cuando se analiza la variación del parámetro a lo largo del tiempo, pero además es importante desde el punto de vista analítico comparar los valores de las variables independientes para un mismo valor de t.

f) Variables del problema y elecciones didácticas.

- Presentación, en el mismo par de ejes, de las gráficas de las tres funciones.
- Las funciones en el intervalo [0, 2.2] muestran valores máximos y puntos de inflexión.
- Presentar los ejes graduados de manera que sea posible comparar los valores que toman las gráficas para un mismo valor del tiempo.
- La gráfica de la función primitiva presenta un sólo cambio de concavidad.

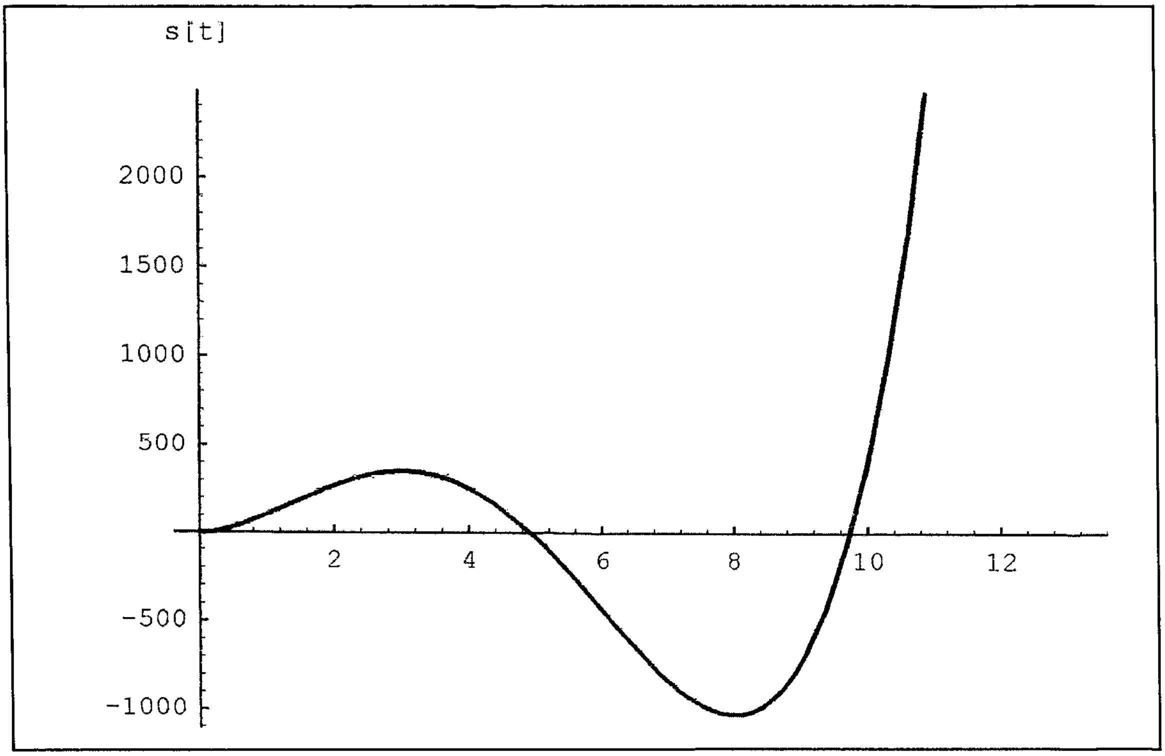
g) Algunas preguntas interesantes para analizar la situación-problema.

1. ¿Para un movimiento rectilíneo la función $s(t)$ puede tomar en $t = 0$ valores diferentes de cero?
2. Una vez identificados los puntos críticos de cada gráfica, ¿cuál es el siguiente elemento que has observado para poder identificarlas?
3. El criterio de la Cinemática que dice: el valor absoluto de la velocidad crece (decrece) cuando la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo (distinto signo) ¿crees que se cumple también entre s y v?
4. ¿Has observado alguna característica de las funciones derivadas que puedan deducirse de la concavidad de la función primitiva?

El análisis que acabamos de presentar es válido también para la situación 8 ya que son estructural y conceptualmente análogas.

- **SITUACIÓN 4**

La función posición s(t) del movimiento de una locomotora que se desplaza sobre una vía recta viene descrita por la gráfica que se muestra.



1. *Indica en qué intervalo o intervalos de tiempo va marcha atrás.*
2. *En forma aproximada da los intervalos de tiempo donde la velocidad es positiva y donde es negativa.*
3. *Indica los intervalos de tiempo donde la aceleración es positiva y donde es negativa.*
4. *La tercera derivada da la variación instantánea de la aceleración. ¿Toma el valor cero en algún instante? ¿En cuántos?¿Por qué?*

a) Las razones de su elección.

- Percibir y trabajar la noción de cambio a través de las variaciones presentadas por la gráfica que representa $s(t)$.
- Hallar los elementos de la gráfica $s(t)$ que permitan determinar los signos de $v(t)$, $a(t)$ y $T(t)$.
- Estimular al alumno para que sea capaz de bosquejar las situaciones de cambio que se plantean en un problema de cinemática, trabajando con las distintas concepciones de la derivada que lleva implícito.

b) Importancia de la situación-problema para los alumnos.

Es el análisis de una situación de variación donde las relaciones de las variables se conocen sólo a través de un gráfico. Además, la gráfica que representa la tasa de variación o velocidad de cambio de la variable independiente respecto de la variable dependiente deben construirla para cada caso dentro de un contexto gráfico.

Esta situación en parte es nueva, aunque se trata de utilizar conceptos ya aprendidos que obligan a un cierto grado de abstracción como:

- Si la gráfica de la función es creciente, la gráfica de su derivada tendrá valores positivos.
- Si la gráfica de la función es decreciente, la gráfica de su derivada tendrá valores negativos.
- Donde la gráfica de la función alcance un máximo, la gráfica de su derivada tendrá un valor cero.
- Donde la gráfica original tenga un punto de inflexión, la gráfica de su derivada tendrá un mínimo si en la original pasamos de cóncava hacia abajo a cóncava hacia

arriba. Si pasamos de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, la función derivada tendrá un máximo.

- Donde la gráfica original tenga un punto de inflexión, la gráfica que represente la segunda derivada tendrá un cero.
- En el intervalo donde la función original es cóncava hacia abajo, la función derivada es decreciente, y donde es cóncava hacia arriba, la función derivada es creciente.
- Dos cambios de signos consecutivos en la función, $s(t)$, (+ - + ó - + -) obliga a un cero en la tercera derivada, $s'''(t)$.

c) Los comportamientos que se quieren provocar.

A través del problema escogido queremos reconstruir en el alumno el concepto de función derivada, no sólo como un objeto, sino principalmente como una herramienta que les sirva para estudiar los cambios. Para ello se propone utilizarla como tasa de variación o velocidad de cambio, pendiente de la curva en un punto y conjuntamente con sus derivadas sucesivas, todo dentro de un contexto gráfico. Para esto consideramos importante que vayan creando estrategias que les permitan relacionar los distintos elementos de las gráficas.

d) Medios de que disponen los alumnos.

Los medios de que ellos disponen son:

- El concepto de función continua.
- Recta tangente.
- Interpretación geométrica de la derivada.
- Ejemplos donde se analiza la velocidad de cambio o tasa de variación de una variable respecto de otra.

e) Los marcos utilizados.

- Nos situamos en el marco gráfico, donde se presenta la función que describe el problema y es en el mismo marco donde deben mostrar sus resultados al bosquejar las funciones derivadas.

- El marco numérico también está presente, ya que los ejes, al estar graduados, les permiten operar numéricamente.
- El marco analítico, ya que a través de la gráfica de la función y de los bosquejos de algunas de sus funciones derivadas se analiza la relación entre las variables involucradas.

f) Variables del problema y elecciones didácticas.

Las variables didácticas que hemos escogido en este problema son:

- Una función continua en el intervalo [0,10].
- La función presenta dos mínimos y un máximo relativo.
- La función, que es un polinomio de cuarto grado, presenta dos puntos de inflexión en el intervalo escogido.
- Se presentan los ejes graduados de manera que sea posible obtener los valores de las pendientes de las rectas tangentes en varios puntos de la gráfica.

g) Algunas preguntas interesantes para analizar la situación-problema.

1. ¿Se podría hallar una expresión analítica para la función, sabiendo que se trata de una expresión polinómica, a partir de la gráfica dada?
2. ¿Cuántos ceros tendrán como mínimo las gráficas de $v(t)$ y $a(t)$?
3. Indicar algunos puntos sobre la gráfica de $s(t)$ donde la velocidad tenga los mismos signos.
4. Indicar algunos puntos sobre la gráfica de $s(t)$ donde la aceleración tenga los mismos signos.
5. ¿Puede aumentar la velocidad si la aceleración está disminuyendo?
6. ¿En qué instante se alcanza la máxima aceleración?
7. Indicar algunos puntos sobre $s(t)$ donde la velocidad y la aceleración tengan el mismo signo.
8. Indicar algunos puntos sobre $s(t)$ donde la velocidad y la aceleración tengan signos opuestos.
9. ¿Cuántas derivadas no nulas puede aceptar una función polinómica de grado n?
10. ¿La concavidad da información sobre el crecimiento y decrecimiento de la función derivada?

11. ¿El número de veces que cambia la concavidad nos da el número mínimo de ceros de la función derivada segunda?
12. Indicar, sobre la gráfica dada, los puntos donde se hallan los máximos de $s(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ y estudiar a ambos lados de dichos puntos los signos que tendrá la función correspondiente.
13. ¿Cuántos ceros tiene como mínimo la función derivada tercera?
14. ¿Cuántas veces debe cambiar la concavidad de la función para concluir que la función derivada tercera tiene al menos un cero?

❑ SITUACIÓN 5

Un coche que parte del reposo alcanza la velocidad de 100 km/h en 10 segundos; a partir de ese instante continúa con esa velocidad. Suponiendo que los cambios en la aceleración se han realizado en forma suave:

a) Dar gráficos realistas del espacio, velocidad, aceleración y variación instantánea de la aceleración en función del tiempo para los primeros 20 *segundos.*

b) Se puede seguir cualquier orden para dibujar las gráficas pero, una vez que se haya establecido, se debe indicar qué criterios se han seguido para ello.

c) ¿Qué crees que debes tener en cuenta para que las gráficas representen un fenómeno real?

a) Las razones de su elección.

Para esta elección primó el contexto donde se situaba el enunciado del problema. También consideramos importante que sean capaces de discernir el tipo de gráfica y las características que debe cumplir para que represente distintos fenómenos que se presentan en la naturaleza. Además, pretendemos captar el significado que a nivel del marco gráfico le atribuyen los estudiantes al concepto de función continua y derivable en un punto, con aportaciones de argumentaciones físicas asociadas a estos conceptos.

b) Importancia de la situación-problema para los alumnos.

Adquirir destreza para plasmar en el marco gráfico un fenómeno observable. Además, lograr identificar, a partir del Teorema del Valor Medio, cuáles son las condiciones suficientes que se derivan del signo de la función derivada de una función dada para analizar el comportamiento de la función primitiva.

c) Los comportamientos que se quieren provocar.

Aquellos en que sea posible observar cómo utilizan los recursos gráficos para expresar la idea de mayor o menor variación, además de los conceptos que emplean para relacionar, por ejemplo, la forma de la curva $v(t)$ y la variación de la aceleración.

d) Medios de que disponen los alumnos.

Los conocimientos adquiridos de los cursos de COU y primero de Universidad que ya hemos mencionado anteriormente. En particular, pensamos que facilita el problema la asociación del concepto de derivada con el de pendiente de la recta tangente.

e) Los marcos utilizados.

Una vez interpretado el problema se espera que se sitúen en el marco gráfico, además interactúan los marcos analítico y algebraico.

f) Variables del problema y elecciones didácticas.

- Se conoce el comportamiento de la velocidad en el intervalo a analizar.
- Las gráficas deben representar funciones continuas y derivables en todo el intervalo.

g) Algunas preguntas interesantes para analizar la situación-problema.

- Representar un movimiento donde la velocidad sea cero en $t = 0$ y la aceleración en ese mismo instante también tome el valor cero.
- Representar un movimiento donde la velocidad sea cero en $t = 0$ pero la aceleración para ese instante tome un valor diferente de cero.

A continuación enunciaremos las situaciones 6 y 7 y seguidamente haremos un análisis conjunto, que es válido también para la situación 9, ya que son análogas estructuralmente. Con ellas se persigue construir una solución para problemas variacionales descritos a través de ecuaciones diferenciales. Se trata, pues, de que los alumnos se familiaricen con la herramienta de predicción alrededor de la que hemos desarrollado esta investigación, *la serie de Taylor*.

SITUACIÓN 6

Desde la terraza de un edificio de altura s_0 se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Esta situación viene descrita por la siguiente ecuación diferencial:

$s'' = -g$, *donde g es la aceleración de la gravedad.*

Predecir la posición de la pelota para cualquier instante t, es decir, hallar la expresión de s(t). Utilizar como herramienta de predicción la serie de Taylor.

SITUACIÓN 7

Desintegración de elementos radiactivos. *El radio se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad presente, es decir:*

$$R' = -kR(t)$$

donde k es una constante positiva llamada constante de desintegración. El signo negativo indica que dicha velocidad es cada vez menor, al haber menos cantidad de elemento a medida que transcurre el tiempo.

Supongamos que en $t_0 = 0$ se tiene R_0 gramos de radio. Se desea predecir la cantidad de radio presente en cualquier instante posterior t, es decir R(t). Utilizar como herramienta de predicción la serie de Taylor.

a) Las razones de su elección.

Presentar situaciones que aparecen a menudo en las Ciencias Experimentales, donde es necesario predecir el valor de un parámetro.

b) Importancia de la situación-problema para los alumnos.

Poder interpretar y resolver con éxito innumerables problemas que se presentan en las distintas disciplinas en los estudios de las Ciencias Experimentales. Ello, mucho antes del estudio de la teoría de las ecuaciones diferenciales.

c) Los comportamientos que se quieren provocar.

- Que sean capaces de determinar el parámetro que se va a predecir y su dependencia temporal o espacial.

- Que sean capaces de plantear las condiciones de inicio del problema y usarlas para fines predictivos.
- Que adquieran destrezas para reconocer o plantear ecuaciones que describan situaciones variacionales.
- Adquirir destreza para utilizar la serie de Taylor como herramienta para resolver un problema variacional.

d) Medios de que disponen los alumnos.

Los instrumentos de que disponen los alumnos, además de sus conocimientos previos adquiridos en la enseñanza secundaria que ya hemos mencionado anteriormente, son los de la etapa que llamamos de la enseñanza preparatoria (Anexo 2), ya que se imparte a los alumnos antes de comenzar con el desarrollo de la experiencia, con objeto de unificar sus conocimientos mínimos, el lenguaje que se va a utilizar, etc. En ella se desarrollan, entre otros, los siguientes contenidos:

- Noción sobre series de potencias.
- La concepción de función como una suma infinita de términos.
- La conciencia de que no todas las funciones son desarrollables en serie.
- La serie de Taylor como instrumento de aproximación y como instrumento de predicción.

e) Los marcos utilizados.

- El marco analítico de las funciones.
- El marco algebraico.
- El marco numérico.

f) Variables del problema y las elecciones didácticas.

- El tipo de situación variacional, que lleva a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en el caso del problema 6, y de primer orden para los problemas 7 y 9.
- Las condiciones de inicio del problema.

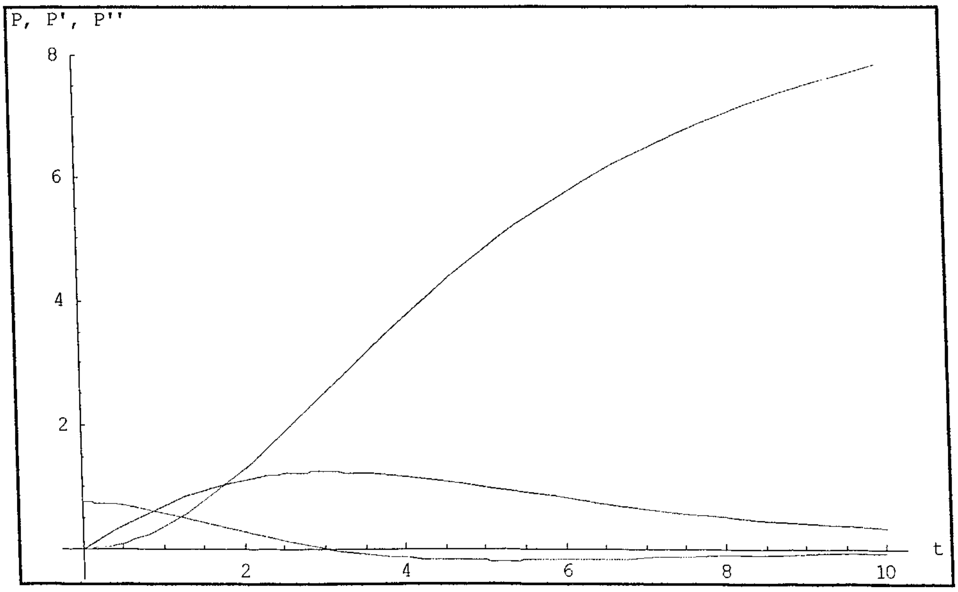
g) Algunas preguntas interesantes para analizar la situación-problema.

1. Dar una descripción física o biológica del problema e interpretar el significado del parámetro a predecir.
2. ¿Cuáles son las diferencias entre una ecuación algebraica y una ecuación diferencial?
3. ¿Qué se entiende por hallar la solución de una ecuación? ¿Esta respuesta es válida para cualquier tipo de ecuaciones?
4. En el caso de que se haya utilizado un procedimiento diferente para resolver el problema, ¿cómo se espera que sean los resultados? Analizar las diferencias, si las hay.

❑ SITUACIÓN 8

Un estudiante tiene ocho problemas para realizar en casa. Ha reservado diez horas de trabajo ininterrumpido. La producción del estudiante viene dada por la función $P(t)$ *que corresponde a una de las curvas que se muestran en la gráfica, donde* t *es el tiempo (en horas). Las otras dos curvas corresponden a la primera y segunda derivadas de dicha función. Analizar la figura y, con los elementos del problema y las herramientas matemáticas que posees, identifica la función* $P(t)$ *y sus derivadas. Numéralas de la siguiente forma:* $1 = P(t)$, $2 = P'(t)$, $3 = P''(t)$. *En todos los casos explica detalladamente cuáles han sido las razones para tu elección. A continuación, y siempre utilizando la figura, halla:*

a. *Una interpretación para* $P'(t)$ *y* $P''(t)$.
b. *El instante en que la producción del estudiante es máxima.*
c. *¿Cómo varía la velocidad de producción del estudiante a lo largo de las diez horas de trabajo? Descríbelo de forma detallada.*
d. *¿A qué hora el número de problemas que resuelve es menor que los resueltos en la hora anterior?*



❑ SITUACIÓN 9

Ciertos parásitos se reproducen a gran velocidad; para exterminarlos se está empleando un medicamento nuevo. De forma experimental se halla que la velocidad de cambio en el número de parásitos vivos con respecto al tiempo t (en semanas) puede expresarse como

$$N' = 6000t^2 - 75t^4.$$

Predecir, utilizando la serie de Taylor, cuántos parásitos habría en el tiempo t, si originalmente hay 3000. (Mett y Smith, 1991, p. 330)

Su análisis es análogo al de las situaciones 6 y 7.

❑ SITUACIÓN 10

Una masa sujeta a un resorte se estira hasta que se halla a diez unidades debajo de la posición de equilibrio, en ese momento se suelta partiendo del reposo. En ese instante comenzamos a contar el tiempo. El movimiento que realiza la masa, alrededor de su posición de equilibrio, viene descrito por la siguiente ecuación:

$$y'' = -16y.$$

a) Predice, utilizando la serie de Taylor, la posición de la masa para cualquier instante t.

b) *¿Dónde se halla la masa transcurridos $\frac{\pi}{8}$ segundos?*

a) Las razones de su elección.

Por su relevancia este problema se halla totalmente desarrollado en el apartado 1.3. Como es sabido, el *movimiento armónico simple* se halla en todos los manuales de Física, del nivel que nos ocupa, ya que constituye la base conceptual que permite dar explicación a un gran número de fenómenos dentro de las Ciencias Experimentales. Algunos ejemplos que nos son más familiares los representa un sistema mecánico como el reloj, o sistemas biológicos como el corazón y los pulmones (Rémizov, 1991, p. 148).

b) Importancia de la situación-problema para los alumnos.

En los manuales consultados (Sears, 1971; Alonso y Finn, 1995 y Tipler, 1995) no resuelven la ecuación diferencial; se ensaya como solución una función trigonométrica. Con el acercamiento que proponemos contamos con una herramienta sencilla que nos permite hallar la solución del problema. Partiendo de la ecuación diferencial que regula los cambios sucesivos entre las variables es posible obtener valores de algunas de sus derivadas sucesivas en puntos particulares; para ello debemos conocer algunos valores de inicio. Esto, como ya hemos señalado, es otra diferencia que encontramos con la forma de presentarlo en la mayoría de los manuales escolares, donde los valores iniciales y de frontera suelen introducirse un tanto súbitamente, sin justificación y sin control del alumno. En nuestro acercamiento, en cambio, se permite reconocer cuáles habrían de ser las restricciones a fin de poder utilizar la estrategia de resolución del problema. Dichos valores, para este caso, serán la posición que se separa el cuerpo de su posición de equilibrio, $y(0) = A$, y la velocidad con que inicia su oscilación, $y'(0) = 0$.

c) Los comportamientos que se quieren provocar.

- Que sean capaces de determinar el parámetro que se va a predecir y su dependencia temporal o espacial.
- Que sean capaces de plantear las condiciones de inicio del problema y usarlas para fines predictivos.
- Que adquieran destrezas para reconocer o plantear ecuaciones que describan situaciones variacionales.

- Adquirir destreza para utilizar la serie de Taylor como herramienta para resolver un problema variacional.

d) Medios de que disponen los alumnos.

Los instrumentos de que disponen los alumnos, además de sus conocimientos previos, que ya hemos mencionado anteriormente, son los de la etapa de la enseñanza preparatoria (Anexo 2) y los que han ido desarrollando a través de la secuencia didáctica propuesta.

e) Los marcos utilizados.

- El marco analítico de las funciones.
- El marco algebraico.
- El marco numérico.

f) Variables del problema y elecciones didácticas.

- El tipo de situación variacional, que lleva a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.
- Las condiciones de inicio del problema.

g) Algunas preguntas interesantes para analizar la situación-problema.

1. Dar una descripción física del problema e interpretar el significado del parámetro a predecir.
2. Realizar un bosquejo del desplazamiento, la velocidad y la aceleración del objeto en estudio y describir las regularidades observadas.
3. En el caso de que se haya utilizado un procedimiento diferente del propuesto para resolver el problema ¿cómo se espera que sean los resultados? Analizar las diferencias, si las hay.

Por último, queremos dejar claro que los medios de base pueden estar más o menos instalados en las respuestas de los alumnos pero no esperamos que sean, estrictamente hablando, usados a plenitud en sus respuestas.

Acabamos de presentar las situaciones-problemas en su versión final. En las experiencias piloto se presentan con ligeras modificaciones ya que hemos preferido mantener el enunciado original con el que, en su momento, han trabajado los alumnos.

3.5.- VALORACIÓN DE LAS SITUACIONES-PROBLEMAS A JUICIO DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Hemos creído necesario recabar la opinión de los profesores universitarios de Matemáticas y Física, especialmente de aquellos que desarrollan la docencia en las titulaciones cuyos alumnos participan en esta investigación. Para ello hemos considerado la opinión de una muestra de profesores consultados sobre las situaciones–problemas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 9. Teniendo en cuenta que los problemas 8 y 10 no añadían nuevas herramientas matemáticas de las ya utilizadas en los problemas anteriores, no se incluyeron en las situaciones a evaluar por los profesores. Con esta valoración queremos obtener información relevante sobre su interés intrínseco, la validez de formulación y presentación, y el grado de dificultad que puede plantearle cada ítem del problema a los alumnos universitarios. Para ello les hemos pedido que resuelvan cada situación-problema y luego nos hicieran una valoración de las mismas, siempre teniendo en cuenta que los destinatarios son los estudiantes.

Creemos que este juicio nos dará una pauta para estimar si estas cuestiones facilitarán la resignificación y construcción de conceptos básicos en Matemáticas y Ciencias Experimentales, desde el punto de vista de *qué enseñar,* que es uno de los pilares de nuestra investigación.

La muestra considerada está formada por siete profesores de la Universidad de Jaén y un alumno del tercer ciclo de la Escuela Politécnica Superior de la misma Universidad. Los profesores se distribuyen de la siguiente manera:

Profesor	Departamento	Titulación o grado	Función
1	Física	Doctor	Catedrático de Universidad
2	Física	Doctor	Asociado
3	Matemáticas	Licenciado en Física	Titular de Escuela Universitaria

4	Matemáticas	Doctor	Catedrático de Universidad
5	Matemáticas	Doctor	Titular de Universidad
6	Matemáticas	Doctor	Catedrático de Escuela Universitaria
7	Matemáticas	Doctor	Catedrático de Escuela Universitaria
8	-	Ingeniero	Alumno del Tercer Ciclo de Ingeniería

Tabla 3.1. Participantes en la valoración de las situaciones-problemas.

A continuación presentamos en una tabla la valoración que hacen los profesores de cada situación. Las categorías que hemos establecido para dicha valoración son las siguientes:

1. Inadecuado (I)
2. Muy difícil (MD)
3. Difícil (D)
4. Adecuado (A)
5. Fácil (F)

A los profesores le asignamos un número y los agrupamos por departamento.

		Situaciones							
Profesor	**Departamento**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	Física Aplicada	MD	A	A	MD	A	I	A	A
2	Física Aplicada	MD	A	A	MD	F	I	A	A
3	Matemáticas	A	A	D	D	A	A	A	A
4	Matemáticas	MD	D	A	F	D	F	D	F
5	Matemáticas	F	D	F	F	D	F	F	F
6	Matemáticas	F	F	F	F	F	F	M D	MD
7	Matemáticas	D	F	F	F	D	A	A	A
8	Alumno del 3er ciclo de Ingeniería	A	A	A	A	D	D	D	A

Tabla 3.2. Valoración de las situaciones-problemas.

Podemos destacar, dentro de las sugerencias realizadas, las siguientes:

- En el caso de la situación 6, el profesor 1 la califica de inadecuada y nos hace una muy oportuna aportación que hemos tenido en cuenta a la hora de la redacción final. Señala que puede llegarse a una expresión errónea de $s(t)$ al no haber considerado en el enunciado el carácter vectorial de la aceleración de la gravedad.
- El profesor 3 nos hace algunas sugerencias en cuanto a la terminología empleada, como por ejemplo "*razón de cambio*" y "*tirón*"; en el caso del problema 9 piensa que sería más adecuado hablar de velocidad de exterminio. Por otra parte, califica de muy interesante la situación 4.
- El profesor 4 nos hace interesantes sugerencias en cuanto a la redacción de los enunciados de los problemas 1, 2, 3, y 7, como por ejemplo, que se debería aclarar que nos estamos refiriendo a una distancia orientada para el caso de las situaciones 2 y 4 . Opina además que las situaciones 4 y 5 son más adecuadas para los alumnos de Ingeniería.
- El profesor 5, refiriéndose a los problemas 2 y 4, nos hace el siguiente comentario: "*resulta complicado interpretar gráficamente la tercera derivada. Puede deducirse que dos cambios de signo consecutivos de la función* $s(t)$ (+ - + *ó* - + -) *obliga a un cero en* $s'''(t)$".
- Los profesores 4, 5 y 7 resuelven detalladamente cada una de las situaciones-problema como se les había pedido. El profesor 6 lo hace para las primeras cinco situaciones y los profesores 1, 2 y 3 no muestran resolución alguna en los folios que se les había dado para tal fin.
- El alumno del tercer ciclo resuelve todas las cuestiones dando sus respectivas valoraciones; sugiere que en el problema 7 se aclare explícitamente el método de resolución que se quiere utilizar.

Del análisis de la valoración realizada, y que aparece en la tabla, se observa que: la *situación 1* es considerada como muy difícil por el 38 % de la población encuestada, el 25 % la considera adecuada, otro 25 % como fácil y es considerada difícil por el 13 %. En el caso de la *situación 2*, el 50 % la considera adecuada, el 25 % la considera difícil y por el otro 25 % es considerada como fácil. La *situación 3* es calificada como adecuada por el 50 %, de fácil por el 38 % y como difícil en el 13%.

Del análisis de la *situación 4*, se desprende que para el 50 % es fácil, es muy difícil para el 25 %, difícil para el 13 % y adecuada para otro 13%. La *situación 5* es considerada como difícil en un 50 %, fácil en un 25 % y adecuada para el otro 25 %. En el caso de la *situación 6*, el 38 % la considera fácil, el 25 % adecuada, para otro 25 % es inadecuada y difícil en el 13 %. Continuando con la *situación 7*, nos encontramos que el 50 % la considera adecuada, el 25 % difícil, un 13 % fácil y el otro 13 % la califica de muy difícil. Por ultimo, la *situación 8* es valorada de adecuada por el 63 %, de fácil por el 25 % y como muy difícil por el 13 %. Esto se muestra esquemáticamente en la siguiente tabla:

	Valoración				
Situaciones	**Inadecuada %**	**Muy difícil %**	**Difícil %**	**Adecuada %**	**Fácil %**
1	0	38	13	25	25
2	0	0	25	50	25
3	0	0	13	50	38
4	0	25	13	13	50
5	0	0	50	25	25
6	25	0	13	25	38
7	0	13	25	50	13
9	0	13	0	63	25

Tabla 3.3. Distribución porcentual según la valoración.

Podemos decir que se observa una cierta unanimidad entre la opinión de los profesores de Física, en tanto que es más variada para el resto.

3.6.- EXPERIENCIAS PILOTO

3.6.1.- ENFOQUE METODOLÓGICO EMPLEADO

En una primera aproximación, a modo de estudio piloto, nos propusimos realizar un sondeo previo de la situación cognitiva de dos grupos de alumnos antes de abordar el posterior trabajo de investigación que nos ocupa. Este estudio es fundamentalmente metodológico, y los aspectos generales que se quieren lograr, con referencia a destrezas de la investigadora, se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Práctica de la investigadora en el análisis de la situación de un grupo de alumnos desconocidos, en cuanto a su dominio de unos determinados procedimientos y habilidades considerados como requisitos previos.
- Introducción y familiarización de la investigadora con las técnicas de preparación y realización de una Ingeniería Didáctica como método de obtención de información acerca de las estructuras cognitivas de los alumnos relativas a unos determinados conceptos, prescindiendo totalmente de objetivos docentes.
- Introducción y práctica de la investigadora en los métodos de análisis de datos cualitativos obtenidos de la metodología empleada.

3.6.2.- POBLACIÓN Y MUESTRA PARA LAS EXPERIENCIAS PILOTO

Los estudios piloto se llevaron a cabo con alumnos universitarios, de primer curso, pertenecientes a la Escuela Politécnica Superior y a la Facultad de Ciencias Experimentales de la Universidad de Jaén.

Nuestras sesiones de trabajo, tanto con el grupo de Química como con los de Ingeniería, se efectuaron en la segunda mitad del segundo cuatrimestre del curso 1998-1999. Dichos alumnos pertenecían, en ambos casos, a un grupo de Prácticas de las correspondientes asignaturas de Matemáticas; dichas Prácticas no tienen carácter de obligatorias. Durante ese curso lectivo el número de grupos en que se dividió el total de alumnos de Química fue de seis, y fueron doce en el caso de los alumnos de las Ingenierías Técnicas en las tres especialidades. La elección de los dos grupos con los que se trabajó se hizo en función del horario y la disponibilidad de sus profesores para ceder sus alumnos y su hora de clase semanal. Queremos hacer notar que es casi imposible, por la gran cantidad de horas de clases teóricas y prácticas, que los estudiantes dispongan de tiempo extra.

En la **Escuela Politécnica Superior** participaron los alumnos de un grupo de Prácticas del primer curso de las Ingenierías Técnicas en las distintas especialidades. De entre ellos se seleccionaron diez estudiantes, seis de Mecánica y cuatro de Electricidad. La selección se hizo atendiendo a que estos alumnos habían asistido a todas las sesiones. El tiempo empleado para llevar a cabo esta experiencia fue de tres sesiones de una hora de duración cada una.

- Estos alumnos están bajo el Plan de Estudios 95 publicado en el B.O.E. de 03/02/96, que tiene una carga lectiva global de 225 créditos. Acceden a la carrera con algunos de los estudios siguientes: C.O.U., 2º curso de Bachillerato regulado en la ley orgánica 1/1990 (LOGSE), F.P. 2º grado y Módulos Profesionales postsecundarios nivel III correspondientes.

La distribución de las asignaturas, por especialidad, en el primer curso de Ingeniería Técnica es la siguiente:

Especialidad en Electricidad	
Primer cuatrimestre	**Segundo cuatrimestre**
Expresión Gráfica. Fundamentos de Informática. Física Eléctrica. Matemáticas I. Fundamentos de Química. Ciencia de Materiales.	Circuitos. Electrometría. Física Mecánica. Matemáticas II. Métodos Estadísticos. Dibujo Industrial en Electricidad. Materiales Eléctricos y Magnéticos.
Especialidad en Electrónica Industrial	
Primer cuatrimestre	**Segundo cuatrimestre**
Expresión Gráfica. Física Eléctrica. Matemáticas I. Fundamentos de Informática. Fundamentos de Química. Ciencias de Materiales.	Física Mecánica. Matemáticas II. Instrumentación Electrónica I. Métodos Estadísticos. Teoría de Circuitos. Dibujo Industrial en Electrónica Industrial.
Especialidad en Mecánica	
Primer cuatrimestre	**Segundo cuatrimestre**
Expresión Gráfica. Ciencia de Materiales. Fundamentos de Informática. Física Mecánica. Matemáticas I. Fundamentos de Química.	Diseño asistido por Ordenador. Física Eléctrica. Matemáticas II. Ingeniería Fluidomecánica. Mecánica General. Métodos Estadísticos.

Tabla 3.3. Asignaturas del primer curso de Ingeniería Técnica Industrial para las distintas titulaciones.

Si nos fijamos en los cuadros anteriores, se observa que las asignaturas del primer cuatrimestre difieren, en las tres titulaciones, en los contenidos de las físicas. En el caso de las dos primeras especialidades se cursa la Física Eléctrica en el primer cuatrimestre y la Mecánica en el segundo cuatrimestre, en tanto que en la última especialidad se cursa la Física Eléctrica en el segundo cuatrimestre.

Consultados los programas vemos que éstos son los mismos para las tres titulaciones.

En cuanto a la asignatura Matemáticas I, a través de la observación de los programas se deduce que es común para las tres titulaciones.

- En la **Facultad de Ciencias Experimentales** la experiencia piloto se llevó a cabo con alumnos de la licenciatura de Química. Participaron los veintiún alumnos integrantes de un grupo de Prácticas de Matemáticas del primer curso de la licenciatura. Los alumnos realizaron el trabajo en tres sesiones de una hora cada una.

Estos alumnos están bajo el plan de estudios de 1995, publicado en el B.O.E. de 03/02/96. La titulación tiene una carga lectiva global de 330 créditos y el acceso se realiza a través de C.O.U. y Selectividad.

La titulación está dividida en dos ciclos y el primer curso comprende las asignaturas siguientes:

<table>
<tr><th colspan="2">1º Curso de la Licenciatura en Ciencias Químicas</th></tr>
<tr><th colspan="2">Asignaturas anuales</th></tr>
<tr><td colspan="2">Física.
Matemáticas.
Ingeniería Química.
Bioquímica.
Fundamentos de Química Inorgánica.</td></tr>
<tr><th>Primer cuatrimestre</th><th>Segundo cuatrimestre</th></tr>
<tr><td>Enlace químico y estructura de la materia.
Introducción a la Experimentación en Química Orgánica.</td><td>Introducción a la Experimentación en Química Analítica.
Introducción a la Experimentación en Química Física.
Introducción a la Experimentación en Química Inorgánica.
Química Física Básica.</td></tr>
</table>

Tabla 3.4. Asignaturas del primer curso de la Licenciatura en Química.

Por lo tanto, según se desprende del cuadro anterior, en el momento de la experiencia estos alumnos han desarrollado más de la mitad del programa de Matemáticas y de Física.

3.6.3.- INSTRUMENTO DE RECOGIDA DE DATOS Y ANÁLISIS DE LOS MISMOS

En estos estudios piloto se desarrolló la etapa de acción, que consistió en resolver en forma individual las situaciones-problema propuestas. Por lo tanto, el instrumento para la recogida de datos consistió en un trabajo escrito. Las situaciones-problemas las hemos diseñado sobre las bases de la Ingeniería Didáctica con la finalidad de que podamos observar, indagar y predecir las estrategias que ponen en juego los alumnos para resolver problemas planteados desde el contexto[1] de las Ciencias Experimentales. Es decir, queremos estudiar los mecanismos funcionales que permitan construir conocimientos matemáticos avanzados, específicamente referidos a la matemática de la variación y el cambio, fundamentales para el aprendizaje de las ciencias. Justamente, una de las características de estas situaciones-problemas es la de presentar las Matemáticas en el contexto de las Ciencias Experimentales, utilizando fundamentalmente para su presentación el marco[2] gráfico.

Queremos remarcar que dichas situaciones-problemas han sido diseñadas como situaciones de aprendizaje, de manera que los alumnos puedan poner en juego todos los conceptos aprendidos para dar respuestas a nuevos planteamientos y que éstos, a su vez, le sirvan para avanzar y resolver nuevas situaciones problemas. De esta forma tratamos de que se produzcan situaciones novedosas en el discurso e interpretación de los conocimientos que les han sido impartidos. Los principios que hemos utilizado para el diseño de las situaciones problemas pueden verse más ampliamente en Cantoral y Marcolini (2000).

En la aproximación teórica que utilizamos se busca investigar aquellos aspectos que ayuden en la reconstrucción de una didáctica para el Cálculo, que se base más en la intuición y las vivencias diarias de los estudiantes que en las reglas de inferencia de la lógica formal aplicadas a sucesivos encadenamientos de operaciones simbólicas.

---

[1] Contexto: conjunto de circunstancias en que se sitúa un hecho (Enciclopedia del Siglo XXI, 1992, p. 348). Nosotros lo usamos para referirnos a las ciencias involucradas en las situaciones-problemas. Por ello nos referimos a un contexto Físico, Matemático, Biológico, etc.

[2] Marco: límite en que se encuadra un problema, cuestión, etapa histórica, etc. (Diccionario de la lengua Española, 1994, p.1322). Nosotros usamos la palabra para referirnos a los distintos dominios de una misma disciplina. En el caso de las Matemáticas los marcos serían: geométrico, numérico, algebraico, gráfico, analítico, etc.

Nos situamos en los fenómenos de variación, cambio y predicción en la naturaleza, descritos matemáticamente por derivadas sucesivas y la serie de Taylor. Este discurso es un tanto distinto a la visión generalizada que se tiene de la serie de Taylor en las Ciencias, especialmente en las Matemáticas, ya que para éstas constituye sobre todo un instrumento para la aproximación.

3.6.4.- VALORACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON LA MUESTRA DE ALUMNOS DE 1er CURSO DE LA LICENCIATURA DE QUÍMICA

A continuación se analizan las respuestas dadas por los alumnos de la Licenciatura en Química a cada una de las situaciones problemas. Con esta experiencia nos propusimos fundamentalmente adquirir habilidad en el análisis de datos. Nos centramos en conocer los marcos en los que se apoyan los alumnos para trabajar y elaborar sus respuestas ya que, por las características de esta investigación que toma como base la Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales y la interdisciplinaridad, es importante conocer cuál ejerce mayor influencia.

En primer lugar hemos agrupado respuestas semejantes y obtenido el porcentaje de alumnos que han respondido en esa línea.

Posteriormente presentamos un cuadro donde se reflejan los diferentes marcos en que los alumnos se han situado para elaborar su respuesta. Cada alumno puede responder un ítem desde varios marcos. Damos en cada caso el porcentaje de alumnos que han respondido desde cada uno, haciendo de nuevo la salvedad de que pueden haber utilizado varios, es decir, los marcos son complementarios.

Un análisis completo de las situaciones-problemas así como los objetivos de cada una de ellas se han presentado en el apartado 3.4. A continuación se analizan las respuestas de los alumnos a las situaciones-problemas. Hemos utilizado dos números para enumerar las situaciones-problemas en estas experiencias; el primero corresponde al orden en que se han propuesto y el segundo, que aparece entre paréntesis, al lugar en que se encuentra dicho problema en el apartado 3.4.

❑ SITUACIÓN 1 (1)

Consideremos dos tanques, uno de forma de cono circular recto con vértice hacia arriba, y el otro de forma cilíndrica con el mismo radio y la misma altura, en los que se vierte agua a un ritmo constante.

Construye una gráfica cartesiana (altura en función del tiempo) asociada con el llenado de cada uno de los recipientes.

Esta situación la han trabajado 21 alumnos. Comenzamos agrupando respuestas equivalentes.

%	**Respuestas alumnos**
43 %	Un análisis de la geometría de los recipientes les lleva a las gráficas correctas.
10 %	Calculan el volumen de los dos recipientes por integración. Dicen que, como $\Delta V/\Delta t$ = cte., concluyen que en ambos casos las gráficas son rectas. La pendiente de la recta que representa la variación de la altura con el tiempo para el caso del cono es de mayor pendiente.
5%	Hace el análisis de la geometría de los cuerpos y de la variación de altura con el tiempo, correctos. Representa $t(h)$ en vez de $h(t)$.
5 %	Representa $h(t)$ para el caso del cilindro en forma correcta. En el caso del cono, después de varios intentos dibuja una parábola, pero la corta antes del llegar al (0,0).
5 %	Después de consideraciones geométricas dice que el cono no se puede llenar por la posición en que se encuentra. Dibuja la gráfica $h(t)$, para el cilindro, correcta.
5 %	Hace un análisis de $h(t)$ dando algunos valores numéricos, compara lo que debería suceder para el caso del cilindro y para el caso del cono. Las gráficas están mal.
5 %	Compara el volumen de los dos cuerpos concluyendo que se llena antes el cono. Las gráficas las dibuja como rectas que en ambos casos acaba antes del (0,0), y la del cono tiene mayor pendiente.
5 %	Ídem al anterior pero en este caso las rectas toman el (0,0).
5 %	De acuerdo al volumen el cono se llena antes del cilindro. Luego dibuja dos rectas con, aparentemente, igual pendiente y a las que corta antes de llegar al (0,0).

5 %	Los dos tanques se llenan a la misma vez. Representa *t*(*h*) a través de dos rectas que se cortan, en el mismo par de ejes, una pasa por el (0,0) y la otra por (0,*t*). Luego, dice, se siguen llenando a tiempos diferentes.
5 %	Hace un análisis de la geometría de los cuerpos, correcta. La curva correspondiente al llenado del cilindro, bien. La que corresponde al cono está mal.

Tabla 3.5. Respuestas de los alumnos a la situación 1.

A continuación, en la figura 3.1, se muestran algunas gráficas significativas realizadas por los alumnos.

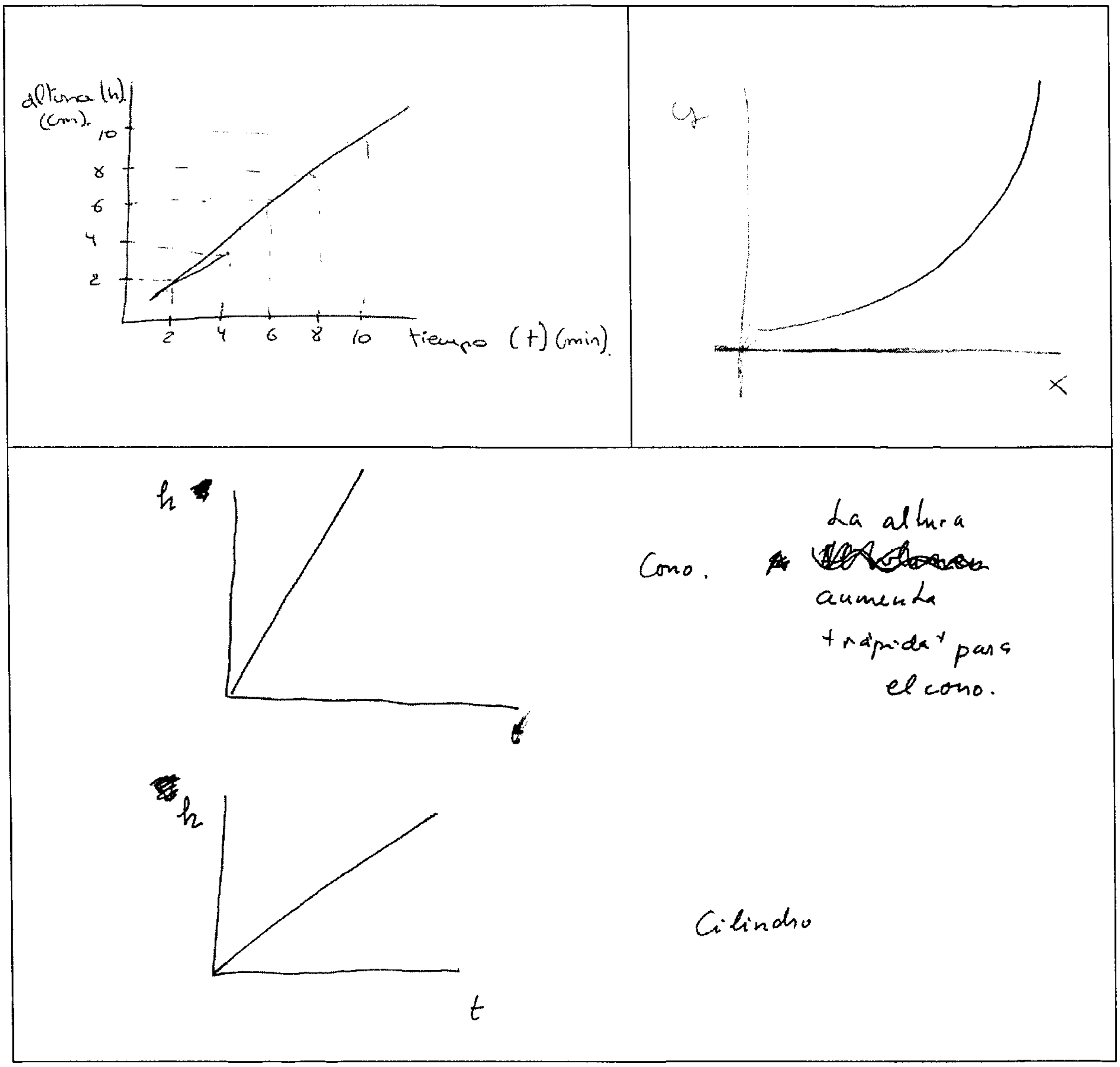


Figura 3.1. Muestra de las gráficas realizadas por los alumnos.

Una de las características a destacar es que, geométricamente, no se representa el hecho de que en el tiempo cero, la altura es cero (no hay agua), es decir las gráficas deben comenzar en (0,0) (20 %).

El análisis geométrico, que en casi todos los casos es cuantitativo e intuitivo, tiene en cuenta en la mayoría de los casos el volumen de los recipientes. Éste puede ser uno de los motivos de que a la hora de hacer las gráficas las dos son rectas, con pendientes diferentes, con lo que quieren reflejar que uno se llena antes que el otro.

Los alumnos están acostumbrados a tener, en forma explícita, la ley que rige tales cambios; ésta ha sido otra de las dificultades que se pone de manifiesto. El análisis de lo que varía y respecto de qué es algo a lo que no están familiarizados; se nota que no saben cómo determinar tal dependencia, lo que se pone de manifiesto al bosquejar gráficas de $t(h)$ (10%).

Realizamos una exploración para detectar en qué marcos se sitúan los alumnos para analizar el problema planteado; ellos pueden ser:

- *Marco analítico* si los alumnos utilizan herramientas propias del Cálculo (límites, derivadas, etc.). De forma intuitiva o con la definición formal.
- *Marco gráfico* si en sus respuestas se ayudan con gráficos, ya sea con un esbozo o con la descripción completa.
- *Marco numérico* cuando hay cálculos, es decir, resuelven utilizando valores numéricos estimando o realizando las operaciones.
- *Marco geométrico* si se utiliza la geometría de los elementos involucrados en el problema (fórmulas del volumen, área, etc.) de manera intuitiva u obteniéndolos con sus fórmulas.

Dentro de cada marco tratamos de determinar si utilizan argumentos correctos (C) o incorrectos (I) para llegar a la solución que exponen. A través de la siguiente tabla se observa, en porcentaje, los resultados.

		Cuestiones	
Marco Analítico	Intuitivo	5 % C	5 % C
	Formal	5 % C 5 % I	5 % C 5 % I

Marco Gráfico	Esbozo	43 % C 41 % I	76 % C 14 % I
	Descriptivo		
Marco Numérico	Estimación	5 % C 5 % I	5 % C 5 % I
	Aritmético		
Marco Geométrico	Intuitivo	48 % C 5 % I	33 % C
	Formal	0 % C 5 % I	19 % C

Tabla 3.6. Categorización de los argumentos utilizados por los alumnos.

La mayoría de los alumnos, como se puede apreciar por la tabla anterior, se sitúa en un marco geométrico; esto lo hacen al comparar la forma de los recipientes, los volúmenes y en algunos casos el área.

Como puede verse, el porcentaje de alumnos que logra bosquejar una gráfica correcta de $h(t)$ para el caso del cilindro es bastante satisfactorio (76%).

En el caso del cono, el análisis que realizan y la posterior gráfica de $h(t)$ tienen un menor porcentaje de aciertos (43 %), frente a un porcentaje del 41 % de intentos fallidos. Esto se puede deber a que no tuvieron en cuenta, en muchos casos, cuál es el parámetro que varía y de qué manera, ya que la gran mayoría comienza comparando el volumen de ambos recipientes. En el caso de que no determinen la variable, lo anterior no da suficiente información para hallar la representación pedida.

- **SITUACIÓN 2 (2)**

La siguiente tabla da los valores de la posición (distancia desde un punto arbitrario O, escogido como origen del sistema de coordenadas) en ciertos tiempos para un móvil que se mueve con movimiento rectilíneo no uniforme.

***t** (segundos)*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
***s(t)** (metros)*	*3*	*2*	*5*	*-2*	*0*

a) ¿Puedes decir a partir de estos datos en cuántos valores de t, como mínimo, el móvil tiene velocidad instantánea cero?

b) ¿En cuántos instantes, como mínimo, la aceleración es cero?

c) ¿Se puede asegurar que la variación instantánea de la aceleración, s'''(t), toma el valor cero en algún punto?

Para un total de 21 alumnos hemos agrupado las respuestas para cada apartado y sus porcentajes en los siguientes cuadros.

❑ Apartado a)

%	**Respuestas alumnos**
33%	Los instantes donde $v = 0$ son en $t = 4$ y/o en $t = 0$.
24%	Representan los puntos y los unen con líneas quebradas. A partir de esta gráfica responden que hay tres instantes donde $v = 0$.
19%	Representan los puntos y los unen con líneas quebradas. Los instantes donde $v = 0$ son aquellos donde la gráfica intercepta al eje t. Como justificación se dice, $v = e/t$, $v = 0$ donde $e = 0$.
10 %	Representan los puntos en un plano t-s y los unen con una curva suave, es decir derivable. Estiman aproximadamente tres valores de t para los que $v = 0$.
10%	Les faltan datos para responder.
5 %	La representación de los puntos y la gráfica no es correcta pero a través de un análisis de los valores dados en la tabla, correcto, llegan a la respuesta y hallan tres instantes donde $v = 0$.

Tabla 3.7. Respuestas de los alumnos a la situación 2a.

A continuación, en la figura 3.2 se muestra la gráfica más representativa trazada por los alumnos.

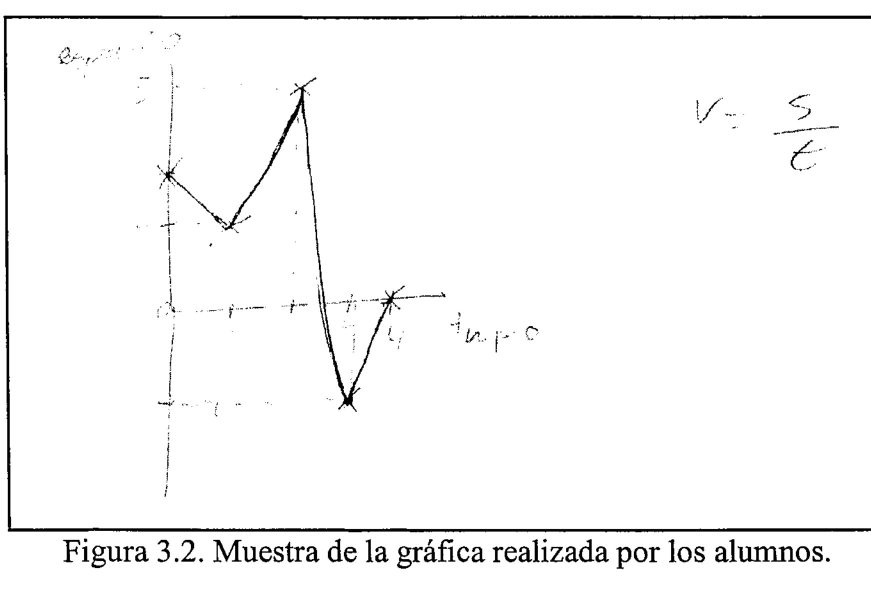


Figura 3.2. Muestra de la gráfica realizada por los alumnos.

❑ Apartado b)

%	**Respuestas alumnos**
43 %	La aceleración es cero en los mismos instantes en que $v = 0$, ya que $a = v/t2$.
24 %	$a = 0$ en los instantes en que comienza el movimiento y donde el móvil se detiene.
14 %	Llega, después de un análisis correcto, a responder que son dos los instantes en que como mínimo $a = 0$.
14 %	En ningún instante $a = 0$, o creen no poder asegurar nada.
5%	Responde que en dos instantes $a = 0$ (el análisis no es correcto).

Tabla 3.8. Respuestas de los alumnos a la situación 2b.

❑ Apartado c)

%	**Respuestas alumnos**
29%	No sabe
29%	No contesta
24%	No
14 %	Cuando a = 0.
5 %	Donde hay un punto de inflexión.

Tabla 3.9. Respuestas de los alumnos a la situación 2c.

A la vista de los porcentajes persiste fuertemente la idea de que, como $v = e/t$, luego $v = 0$ donde $e = 0$, ya que, dicen, $0/t = 0$. De la misma manera, como $a = v/t$, entonces $a = 0$ donde $v = 0$.

Otras de las peculiaridades observadas es la forma de unir los puntos para dibujar la gráfica. El hecho de que la gráfica represente un movimiento rectilíneo parece que los lleva a representar la curva de la ecuación del movimiento, $s(t)$, con trozos de líneas rectas. No tienen en cuenta la variación que conlleva el concepto de cinemática. Esto se hace más patente en la imagen conceptual que tienen de velocidad y aceleración y que aquí han utilizado. Este es un error al que se le debería prestar mas atención e indagar algunos trabajos de investigación realizados sobre el tema.

En la siguiente tabla hacemos un análisis de los diferentes contextos y marcos que han utilizado los alumnos para elaborar sus respuestas. Las respuestas pueden ser correctas (C) o incorrectas (I), dadas a partir de cada contexto y marco utilizado.

		Apartados		
		a	**b**	**c**
Contexto Físico	Intuitivo	14 % C 61 % I	5 % C 86 % I	5 % C 48 % I
	Formal	5 % C		
Marco gráfico	Esbozo	24 % C 48 % I	10 % C 24 % I	14 % I
	Descriptivo			
No sabe o no contesta				43 %

Tabla 3.10. Contextos y marcos utilizados en las respuestas a la situación 2.

A partir de esta tabla y para cada apartado podemos decir:

Apartado a)

- Se refieren en la mayoría de los casos al espacio recorrido.
- No consideran como tal la función de movimiento o desplazamiento.
- No utilizan el Cálculo Infinitesimal como herramienta para abordar el problema.
- El concepto dinámico de función, de variación, tasa de variación, razón de cambio, etc., está ausente del análisis de los alumnos.

Apartado b)

- Desde el contexto físico hay un 86 % que piensa que la aceleración es cero en los instantes donde la velocidad es cero, además de los instantes iniciales y finales del movimiento.
- Un 24 % da su respuesta a partir de la gráfica dibujada en el apartado a) y, por lo tanto, con las características ya analizadas.
- Sólo entre un cinco y un diez por ciento se sitúan en el contexto físico, en el marco gráfico o en ambos para dar una respuesta satisfactoria.

Apartado c)

- El 43 % dice que no sabe.
- El 48 % que se sitúa en el contexto físico y parte de una premisa falsa en el apartado a), utiliza la misma para responder en c).

▫ SITUACIÓN 3 (5)

Un coche que parte del reposo alcanza la velocidad de 100 km/h en 10 segundos; a partir de ese instante continúa con esa velocidad. Suponiendo que los cambios en la aceleración se han realizado en forma suave:

a) Dar gráficos realistas de la posición, velocidad, aceleración y variación instantánea de la aceleración en función del tiempo para los primeros 20 segundos.

b) Puedes seguir cualquier orden para dibujar las gráficas pero una vez que lo hayas establecido debes decirnos qué criterios has seguido para ello.

c) ¿Qué crees que debes tener en cuenta para que las gráficas representen un fenómeno real?

Esta situación la han trabajado 18 alumnos.

%	**Respuestas alumnos**
22%	Explican con dibujos y luego hacen los gráficos pero son incorrectos.
17%	Grafica $v(t)$, $s(t)$ y $a(t)$, las dos últimas en forma incorrecta.
11 %	Hacen las gráficas de $s(t)$, $v(t)$ y $a(t)$. Las han resuelto en este orden pero teniendo siempre presente $a(t)$. Los modelos representan fenómenos reales.
6 %	Dibuja $v(t)$ y $a(t)$, pero esta última sólo donde es diferente de cero. Como dice que $da/dt = 0$, no la dibuja. Las gráficas no representan fenómenos reales.
6 %	Representa $v(t)$, $a(t)$, $s(t)$, pero $v(t)$ es incorrecta. Las gráficas son aproximaciones de los fenómenos reales.
6 %	Representa $s(t)$ en forma incorrecta, $v(t)$ y $a(t)$ pero esta última sólo en el intervalo en que es diferente de cero. Para que el fenómeno fuera real la gráfica de $a(t)$ no debería pararse en seco a los 10 s.

6 %	Dibuja $s(t)$ en forma incorrecta, $v(t)$ y $a(t)$. Para que las gráficas representen fenómenos reales hay que tener en cuenta la aceleración y la velocidad.
6 %	Dibuja $s(t)$ en forma incorrecta, $v(t)$ y $a(t)$, esta última también incorrecta. No sabe qué tener en cuenta para que las gráficas representen fenómenos reales.
6 %	A través de un dibujo explica el enunciado. En los intervalos donde la aceleración es cero dice que no hay aceleración. No hace gráficas. Para representar fenómenos reales hay que dibujar en forma clara y usar símbolos correctos.
6 %	Representa $v(t)$, $a(t)$ y $s(t)$. Muestra cómo deben ser las gráficas que representan fenómenos reales; para ello dibuja nuevamente la gráfica de $a(t)$ haciéndola derivable en $t = 10$.
6 %	Grafica $v(t)$ y $a(t)$, esta última en forma incorrecta. Para representar fenómenos reales hay que tener en cuenta la física.
6 %	Representa $s(t)$, $v(t)$ y $a(t)$, esta última en forma incorrecta.

Tabla 3.11. Respuestas de los alumnos a la situación 3.

Se muestran a continuación, figura 3.3, las gráficas más representativas trazadas por los alumnos.

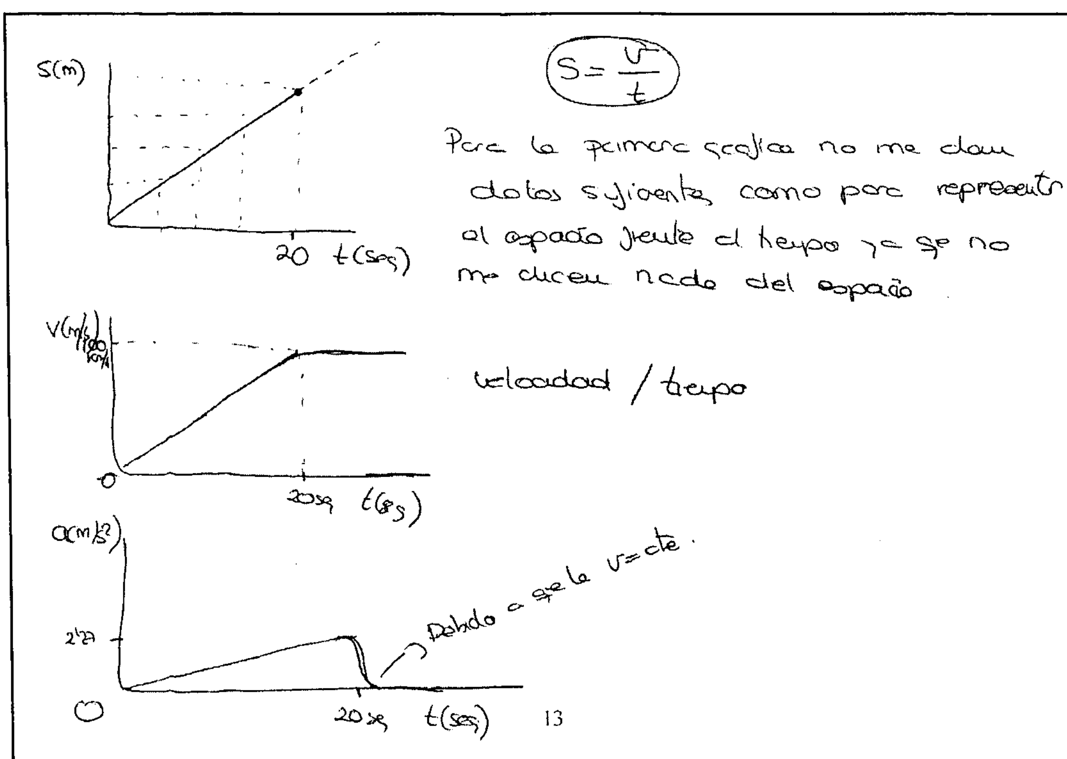


Figura 3.3. Muestra de las gráficas trazadas por los alumnos.

Respecto al orden en que realizan las gráficas, explícitamente sólo lo indican dos alumnos (11 %), aunque sí podemos agruparlos de acuerdo al orden en que presentan los dibujos:

%	**Respuestas alumnos**
33 %	$s(t)$, $v(t)$, $a(t)$.
17%	$v(t)$, $s(t)$, $a(t)$.
11 %	$v(t)$, $a(t)$, $s(t)$.
11 %	$v(t)$, $a(t)$.

Tabla 3.12. Orden en que los alumnos presentan las gráficas en la situación 3.

El orden $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$, que se da en un 33 %, puede estar influenciado por la formulación del enunciado.

Ha sido muy difícil agrupar respuestas semejantes, que no fueran por el orden de las gráficas, ya que existen todas las combinaciones posibles al analizar cuáles de éstas son correctas. Esto último podemos verlo en la siguiente tabla.

Porcentaje %	**Gráficas correctas**
28	$s(t)$
67	$v(t)$
28	$a(t)$
0	da/dt

Tabla 3.13. Gráficas correctas trazadas por los alumnos en la situación 3

Algunas de las peculiaridades a destacar en este análisis son las siguientes:

- Sólo un alumno (6 %) se refiere a la variación instantánea de la aceleración (da/dt), diciendo que es cero, pero no hace la gráfica.
- Tres alumnos (17 %) dibujan $a(t)$ en el intervalo donde es diferente de cero, luego dicen que es cero o que en ese intervalo no hay aceleración.
- Respecto a la última pregunta, que la gráfica represente un fenómeno real (F.R.), refiriéndonos obviamente a que sea continua y derivable, sólo un alumno (6 %)

dibuja una gráfica de tales características para $a(t)$ en $t = 0$. Otro alumno hace referencia a ello pero no lo plasma en gráficos.

A continuación presentamos otro análisis del problema a la luz de los marcos y contextos utilizados.

		Apartados				
		$s(t)$ (%)	v(t) (%)	$a(t)$ (%)	da/dt (%)	F.R. (%)
Contexto Físico	Intuitivo	17-C 22-I	17-C 22-I	6-C 33-I	6-C 11-I	17-C 50-I
	Formal	6-C	6-C	6-C		
Marco Analítico	Intuitivo	6-I	6-I	6-I	6-I	17-C
	Formal					
Marco Gráfico	Esbozo	22-C 61-I	78-C 17-I	17-C 72-I	6-I	
	Descriptivo					6-I
Marco Numérico	Estimación	6-C 6-I				
	Aritmético					
No sabe o no contesta.					72	17

Tabla 3.14. Contextos y marcos utilizados en las respuestas a la situación 3.

A la última pregunta, "¿Qué debes tener en cuenta para que las gráficas representen un fenómeno real?", el 17 % que se coloca en el contexto físico intuitivo o en el analítico intuitivo (7 %) esboza alguna idea que no llega luego a plasmar en el trazado de la gráfica. El 50 % trata de explicarlo desde el contexto físico pero lo hace en forma poco satisfactoria.

A simple vista estos resultados nos permiten afirmar que el 78 % de los alumnos han interpretado el problema, por cuanto resuelven satisfactoriamente la gráfica de $v(t)$; sin embargo sólo el 22 % llega a la gráfica de $s(t)$.

Esto se debe, a nuestro entender, a que el hallar la gráfica de la función primitiva se trabaja menos en clase que el hallar la función derivada; además es más intuitivo imaginar esta última. El orden en que presentan las gráficas es el de $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ en un 33 %, lo que puede deberse, como ya hemos apuntado, a que se ha dado en el enunciado del problema o porque, como dicen algunos alumnos, es el orden que se sigue en Física.

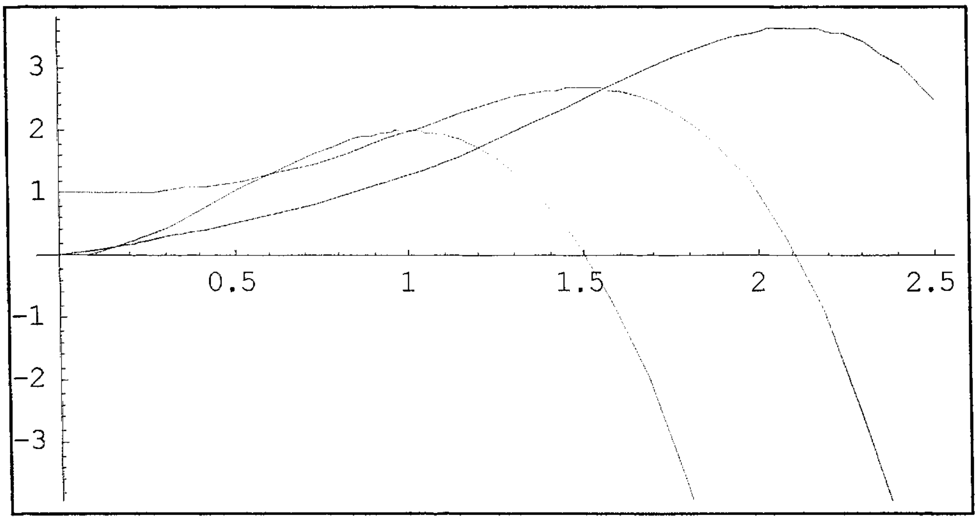
Se observa que el 72 % de gráficos de $a(t)$ son incorrectos; de esto nos llama la atención que cuando $a = 0$, concluyen que no hay aceleración y por lo tanto no hay gráfico en ese intervalo.

Hay un 72 % de los alumnos que no sabe o no contesta cuando deben hacer la gráfica de la variación instantánea de la aceleración; esto lo explicamos a la luz de que no tiene significación para ellos en el estudio de la cinemática.

De acuerdo a lo que han manifestado, cuando $a = 0$, "no hay aceleración", por tanto no pueden hacer la gráfica. Podemos intuir que les ocurre lo mismo con da/dt y no saben dibujarla.

❑ SITUACIÓN 4 (3)

Las siguientes gráficas representan la ecuación del movimiento rectilíneo s(t), la velocidad s'(t) y la aceleración s''(t) de un móvil. ¿Puedes identificar cada una?



En la tabla 3.16 se refleja en porcentaje, sobre un total de 14 alumnos, los marcos y contextos que han utilizado para elaborar la respuesta. Hacemos la salvedad de que pueden situarse en más de uno para tal fin.

Contexto Físico	*Marco Gráfico*	*Marcos Numérico / Algebraico*	*Marco Analítico*	*otros*
79% I	7% C 7% I	14% I	7% C 7% I	14% I

Tabla 3.16. Contextos y marcos utilizados en las respuestas a la situación 4.

Las concepciones que predominan son:

- Si el movimiento es rectilíneo debe estar representado por rectas. Esta concepción es la que les conduce a la elección de $s(t)$ en forma correcta, pero sólo porque es la que más se aproxima a una recta.
- Otra concepción es que $s(t) > v(t) > a(t)$. Esto podría estar detrás de afirmaciones del tipo: la gráfica de $s(t)$ es la primera porque el espacio siempre está aumentando.
- Si $s(0) = 0$ entonces $v(0) = 0$, esto les lleva a afirmar que "la velocidad inicial debería ser cero ya que el móvil se encuentra parado, en estado de reposo".

Hay un porcentaje de 43 % de alumnos que dice no tener conocimientos físicos o datos suficientes para resolver el problema.

❑ SITUACIÓN 5 (4)

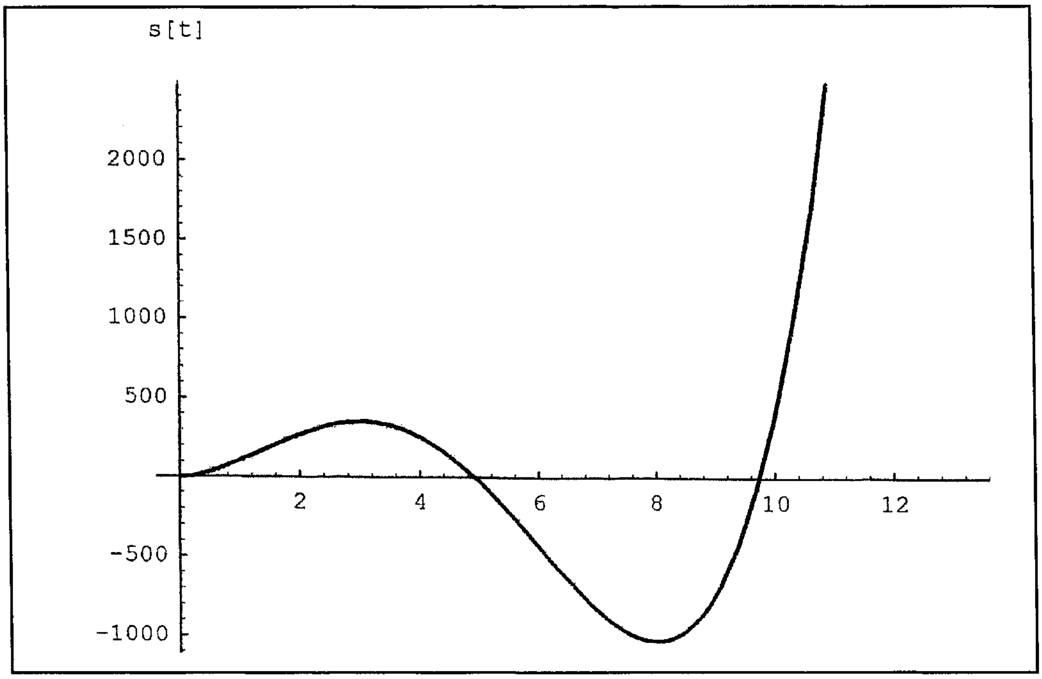
La distancia de una locomotora desde un punto fijo sobre una vía recta en el instante t viene descrita por la gráfica que se muestra.

a) ¿Podrías indicar en qué intervalo o intervalos de tiempo va marcha atrás?.

b) ¿Podrías escribir, en forma aproximada, los intervalos de tiempo donde la velocidad es positiva y donde es negativa?

c) Indica los intervalos de tiempo donde la aceleración es positiva y donde es negativa.

d) La tercera derivada da la variación instantánea de la aceleración. ¿Podrías decirnos, en forma aproximada, en qué intervalos de tiempo la tercera derivada es positiva y en cuáles es negativa? ¿Por qué?



Trabajan con este problema 14 alumnos.

❑ Respuestas del apartado a).

Para el análisis comenzamos agrupando las respuestas semejantes en el primer apartado.

%	**Respuestas alumnos**
57%	Iría hacia atrás en el intervalo de tiempo (5, 9.9), ya que en este intervalo el espacio toma valores negativos.
29%	Va marcha atrás cuando disminuye la distancia con el tiempo, esto es entre 2.5 y 8.1 segundos (la curva es decreciente).
7%	Va marcha atrás entre 3 y 8 segundos. Esto es porque la derivada es negativa, luego la velocidad es negativa, $v = s'(t)$. Si la velocidad es positiva es que está avanzando en una dirección. Cuando la velocidad es negativa significa que va en retroceso, en sentido contrario. La velocidad es una magnitud vectorial.
7%	Va marcha atrás durante el intervalo 5-8 pues la distancia es negativa.

Tabla 3.17. Respuestas de los alumnos a la situación 5a.

A continuación mostramos los marcos y contextos que ha utilizado cada alumno. Hemos colocado una S cuando la respuesta ha sido satisfactoria y PS para el caso que haya sido poco satisfactoria.

	Alumno													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Contexto Físico	S	PS	S	PS	PS	PS	PS	PS	S	PS	-	-	PS	-
Marco Gráfico	S	PS	S	-	PS	-	-	PS	S	PS	S	S	PS	PS
Marco Analítico	S	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 3.18. Contextos y marcos utilizados en las respuestas a la situación 5a.

Podemos concluir que un 7% se sitúa en ambos marcos y en el contexto físico elaborando una respuesta correcta. El 14% utiliza el contexto físico y el marco gráfico para elaborar una respuesta correcta. En tanto que otro 14% elabora una respuesta satisfactoria a partir del marco gráfico. Hay un 36% que, utilizando el contexto físico y el marco gráfico, su respuesta es poco satisfactoria. Otro 21% sólo a partir de la física da una respuesta poco satisfactoria. En tanto que un 7% responde en forma incorrecta a partir del marco gráfico.

Debemos remarcar que hay un porcentaje muy elevado (64%) que cree que el móvil va marcha atrás cuando la gráfica es negativa, frente a un 36% que habla de intervalo donde la función es decreciente.

Es interesante destacar que no se habla de desplazamiento ni de función posición, sino de espacio en todos los casos.

❑ Analizamos ahora las respuestas para el apartado b).

Comenzamos agrupando respuestas semejantes:

%	**Respuestas alumnos**
29%	La velocidad es positiva en los intervalos (0, 5) y (9.5, ∞) y es negativa en (5, 9.9). Como $v = \frac{s}{t}$, concluye que la velocidad sería negativa cuando el espacio o el tiempo lo fueran y como el espacio es negativo en un solo intervalo, la velocidad es negativa también sólo en ese intervalo; en los otros sería positiva.

21%	En los intervalos (0, 3) y (8, ∞) la velocidad es positiva. En tanto que, en el intervalo (3, 8) la velocidad es negativa. La derivada de $s(t)$ se corresponde con la tangente a la curva. Cuando la pendiente de la recta tangente es positiva, la derivada es positiva.
21%	Desde (0, 3) la velocidad es positiva. Desde (3, 8) la velocidad es negativa. Desde (8, 12) la velocidad vuelve a ser positiva.
14%	Siempre que el cuerpo recorra un espacio positivo, es decir se mueva hacia delante, su velocidad va a ser positiva, mientras que si se mueve hacia atrás será negativa. Por esto los intervalos donde la velocidad es positiva serán (0, 4.8) y a partir de 8.7 en adelante.
7%	Calculan la velocidad media para diferentes intervalos y obtienen que en (0, 3), (8, 9) y (9, ∞) es positiva y en (3, 5), y (5, 8) es negativa.
7%	Entre (0, 5), (9.8, 12).

Tabla 3.19. Respuestas de los alumnos a la situación 5b.

La mitad de los alumnos (50%) tienen una idea "estática" de la velocidad, es decir, sólo la conciben como el cociente entre el espacio y el tiempo.

Veamos a continuación cuáles son los marcos y contexto utilizados.

	Alumnos													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Contexto Físico	S	S	S	PS	PS	PS	-	PS	S	S	S	-	PS	-
Marco Gráfico	S	S	S	PS	PS	PS	PS	PS	S	S	S	S	PS	PS
Marco Analítico	S	S	S	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Marco Numérico	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	S	-	-	-

Tabla 3.20. Contextos y marcos utilizados en las respuestas a la situación 5b.

Aquí se pone de manifiesto un obstáculo que trataremos de clarificar analizando la distinta literatura que tienen disponible los alumnos, desde el nivel secundario hasta el universitario, referente a los términos *distancia, espacio y desplazamiento.*

- Las respuestas del apartado c se muestran en la tabla siguiente.

%	**Respuestas alumnos**
50%	Siempre hay aceleración porque no hay ningún tramo con velocidad fija. Los signos de la aceleración serían como los de la velocidad: positiva en los intervalos (0, 2.5) y (8.1, 11). Es negativa en (2.5, 8.1).
7%	La curva es convexa, entonces $s''>0$. La curva es cóncava, entonces $s''<0$. La curva tiene dos puntos de inflexión. Por lo tanto en (0, 1) la curva es convexa, la aceleración es positiva. En (1, 6) la curva es cóncava, la aceleración es negativa. En (6, ∞) la curva es convexa, la aceleración es positiva.
7%	La aceleración ha de ser positiva en los intervalos de crecimiento de la velocidad y negativa en los intervalos de decrecimiento.
7%	Donde sea el espacio negativo la aceleración será negativa.
7%	En una gráfica de espacio-tiempo, según mi razonamiento, nunca podría saber las características de la aceleración, ni tampoco imaginármela. Este apartado, según yo, no lo podría contestar. Falta precisión a la hora de plantear el problema.
7%	La aceleración sería siempre positiva ya que creo que el signo de ésta no influye, pues aunque se mueva hacia delante o hacia atrás siempre tiene que ser positiva.
7%	En (0, 1) y (7.5, 8.5) hay aceleración positiva. En (2.5, 3.5) hay aceleración negativa. En el resto la aceleración es cero y la velocidad constante.
7%	Tendría que derivar la velocidad respecto del tiempo, aunque donde la velocidad es positiva, también lo es su aceleración, por lo tanto tiene el mismo signo que la velocidad.

Tabla 3.21. Respuestas de los alumnos a la situación 5c.

Observemos que hay un 64% (50% + 7% + 7%) de los alumnos que piensan que el signo de la aceleración debe ser el mismo que el de la velocidad. Esto es a causa de que la concepción que ellos tienen de la aceleración es "estática", por la fórmula $a=\frac{v}{t}$, llegando a decir explícitamente que los signos se conservan ya que en la expresión anterior, el tiempo no puede ser negativo. Esta concepción es predominante, ya que, algunos tienen en mente que la aceleración se obtiene derivando la función velocidad, como vemos en el último apartado de la tabla 3.21.

En las respuestas analizadas se detectan los marcos y contextos siguientes:

	Alumnos													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Contexto Físico	-	-	PS	PS	PS	-	PS	PS	-	PS	PS	PS	PS	PS
Marco Gráfico	S	S	S	-	-	PS	-	-	PS	-	-	-	-	-
Marco Analítico	S	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	PS

Tabla 3.22. Contextos y marcos utilizados en las respuestas a la situación 5c.

Este cuadro nos muestra que un 71% de los alumnos elabora la respuesta situándose, además, en el contexto físico. En tanto que el 50% parece que sólo tiene en cuenta el contexto físico.

❑ Consideramos ahora las respuestas dadas al apartado d)

%	Respuestas alumnos
43%	No contestan / No saben.
7%	Hace un bosquejo de la gráfica de la función derivada segunda y, fijándose en la pendiente de la recta tangente a la curva, responde: la tercera derivada es positiva en (0, 0.5) y (3.5, ∞), es negativa en (0.5, 3.5), que son los intervalos de crecimiento y decrecimiento, respectivamente, de la función que ha bosquejado.
7%	No consigue imaginarse la tercera derivada ni los intervalos.
7%	Los signos son los mismos que en los dos últimos apartados.
7%	Con la gráfica de espacio-tiempo no puede determinar dónde la aceleración es positiva, por lo tanto tampoco donde lo es su derivada.
7%	Como la aceleración es siempre positiva, supone que su derivada no varía.
7%	La derivada de la aceleración sería positiva en aquel intervalo en que crece la aceleración y negativa en el que decrece, pero no sabría decir con esa información en qué intervalos de tiempo se encontraría.

7%	Dice no entender la pregunta, ya que cómo va a calcular la derivada tercera si la aceleración ya es la segunda derivada de una ecuación de segundo grado, y pone como ejemplo, $y = x^2$, $y' = 2x$, $y'' = 2$. Tendría que ser la ecuación del espacio de tercer grado, por lo menos.
7%	Su respuesta es negativa, porque no recuerda que en COU le pidieran una derivada tercera. Pero además dice que cree que vale cero, porque si deriva la aceleración respecto al tiempo tiene la velocidad, al derivar la velocidad respecto del tiempo cree que tiene el espacio y de aquí al hacer la tercera derivada tiene como resultado nada (0).

Tabla 3.23. Respuestas de los alumnos a la situación 5 d)

En la siguiente figura se muestra la única gráfica que trazó un alumno.

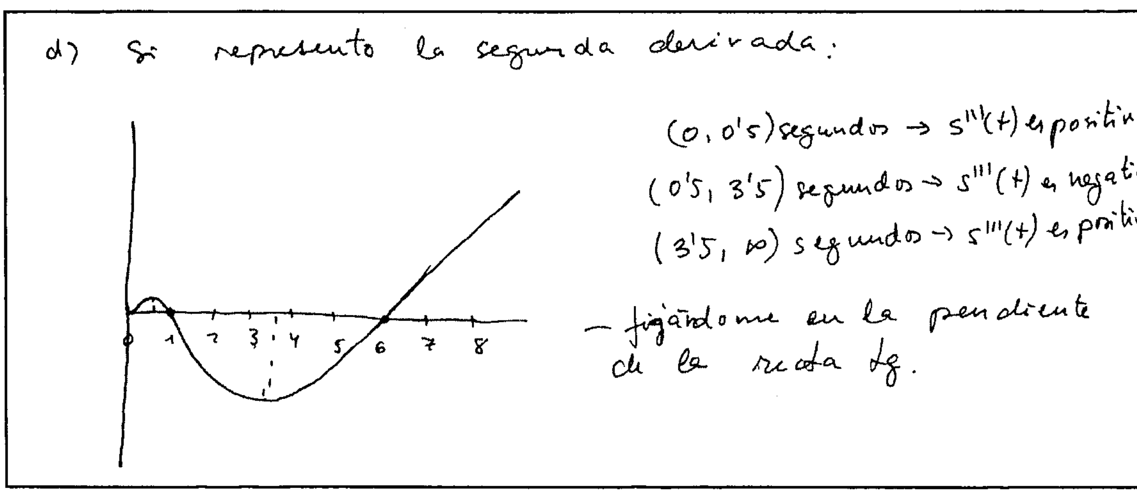


Figura 3.4. Muestra de la gráfica realizada por los alumnos.

Aquí se pone en evidencia que hay dificultad con el concepto de una función cuyo valor es cero en todo su dominio (14%). Si observamos la última respuesta, el alumno hace la equivalencia entre “nada” y “cero”.

Aparece de forma implícita la dificultad y la limitación en obtener fiablemente, en forma gráfica y con las herramientas utilizadas, mas allá de la segunda derivada (28%). Hay que destacar la iniciativa muy positiva de una alumna al intentar bosquejar la gráfica de la segunda derivada, si bien entre cero y uno no logró trazarla adecuadamente.

La gráfica de $s(t)$ corresponde a un polinomio de cuarto grado que presenta dos mínimos, en 0 y 8, y un máximo en 3. Su ecuación es la siguiente:

$$s(t) = 3t^4 - 44t^3 + 144t^2 .$$

Hay un 50% que no contesta o dice no saber qué contestar.

En cuanto a los marcos y contextos los más utilizados han sido los siguientes.

	Alumnos													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Contexto Físico	-	-	PS	-	-	-	PS	-	-	-	-	-	-	PS
Marco Gráfico	PS	PS	PS	-	-	PS	-	-	-	S	-	-	-	-
Marco Analítico	S	-	-	-	-	-	-	-	-	-	PS	-	-	PS

Tabla 3.24. Contextos y marcos utilizados en las respuestas a la situación 5d.

❑ SITUACIÓN 6 (6)

Desde la terraza de un edificio de altura s_0 *se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial* v_0. *Esta situación viene descripta por la siguiente ecuación diferencial:*

$s''(t) = -g$, *donde g es la aceleración de la gravedad.*

Resolver esta ecuación es encontrar la función s(t) que describe el movimiento. Te proponemos intentarlo utilizando el desarrollo de la fórmula de Taylor para s(t) en $t_0 = 0$. *Para ello recordemos el desarrollo de Taylor para la función s(t)*

$$s(t) = s(t_0) + s'(t_0)\,(t-t_0) + s''(t_0)\,(t-t_0)^2 / 2! + s'''(t_0)\,(t-t_0)^3 / 3! + \ldots$$

Una vez que hallas utilizado los datos proporcionados en el enunciado habrás hallado una solución particular del problema. Como en toda ecuación, una vez hallada la solución hay que ver si satisface la ecuación. ¿Puedes verificar la que tú haz hallado? ¿Cómo?

Trabajan este problema 14 alumnos. Hemos agrupado las respuestas semejantes, siendo las más significativas las que se presentan en la tabla siguiente, junto con el porcentaje de las mismas.

%	Respuestas alumnos
21%	"Creo que no podré resolverlo ya que no me dan ningún dato de espacio ni de tiempo."
14%	"Sólo puedo aproximar hasta s'' porque $s'''= 0$."

7%	"Pero es más fácil hacerlo por Taylor, ya que me están dando s''(t) = -g, me dicen que $s'(t_0) = v_0$ y que $s(t_0) = s_0$. Luego es más rápido y se llega a lo mismo.
7%	"Echando mano de lo aprendido en física y como me dan los datos para calcular las constantes de integración no me hace falta Taylor".

Tabla 3.25. Respuestas de los alumnos a la situación 6.

En la siguiente tabla vemos, en forma sucinta, las respuestas dadas por cada alumno.

Alumno	Por integración	Por Taylor
1	C	C
2	C	C
3		C
4	Integra pero no halla las constantes.	No sabe.
5	Escribe la fórmula de la velocidad.	No recuerda.
6		No entiende el enunciado.
7		No sabe hallar los datos.
8	No sabe.	No sabe.
9		No sabe.
10	Ídem a 4.	Utiliza lo anterior en la serie.
11	No sabe.	
12		No sabe.
13	Ídem a 4.	
14		Utiliza $t_0 = 0$ y obtiene $s(t) = 0$.

Tabla 3.26. Categoría de respuestas dadas por los alumnos.

Analizando las respuestas hemos advertido también que:

- Tratan de verificar el resultado obtenido por el método propuesto utilizando, según algunos manifiestan, lo que le han enseñado en Física, es decir integrando. No atienden a la sugerencia que se hace en el último párrafo del enunciado.
- Hay dificultad a la hora de extraer las condiciones iniciales del enunciado del problema.

- Que los términos de la serie, a partir del tercero, sean nulos lo interpretan como "hasta allí se puede llegar".

En cuanto al contenido y organización de los problemas planteados, durante la revisión y el análisis del material recogido pudimos hacer una serie de consideraciones que nos ayudaron a plantear mejor el trabajo posterior objeto de la investigación que nos ocupa. Las observaciones más relevantes son las siguientes:

- La importancia del conocimiento de los alumnos para poder preparar un adiestramiento previo. Esto se puso de manifiesto especialmente en la dificultad que manifestaban tener a la hora de enfrentarse a una tarea desconocida, que les obligaba a desarrollar un cierto trabajo intelectual. Además, es fundamental acordar el lenguaje, ya que nos encontramos con algunos casos que desconocían cierta terminología especifica, lo que dificultó la comprensión del problema.
- La medida del tiempo estaba mal establecida y es fundamental para este tipo de trabajo.

3.6.5.- VALORACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON LA MUESTRA DE ALUMNOS DE 1ER CURSO DE LAS INGENIERÍAS TÉCNICAS

Con el objetivo de avanzar en nuestra experiencia como investigadores y con base en el trabajo realizado con los alumnos de la Licenciatura en Química organizamos una nueva experiencia piloto con alumnos de primer curso de las Ingenierías Técnicas. En ésta, fundamentalmente, lo que hemos variado respecto de la anterior ha sido el modo de analizar la producción de los estudiantes. Seleccionamos el trabajo de diez alumnos de un grupo de Prácticas de Matemáticas porque ellos participaron en las tres sesiones.

Los análisis de las experiencias piloto tienen además como objetivo conocer la situación cognitiva en que se hallan los alumnos. Con ello queremos obtener una imagen actual y realista de las concepciones de los estudiantes sobre lo que consideramos los aspectos claves de nuestro estudio. Aquí propondremos un análisis cualitativo y cuantitativo de la producción de los estudiantes. Todo esto también será utilizado para diagramar y organizar una sesión (Anexo 2) para la puesta en marcha de los diferentes aspectos de la experiencia. Las concepciones sobre las que estamos indagando son:

- El concepto de variación y su medida a través del cambio dado por la derivada.
- La noción de derivada sucesiva.
- La noción de predicción con base en la serie de Taylor.

Aquí también las situaciones-problemas llevan dos números, el primero indica el orden en que se han propuesto a los estudiantes y el segundo (que se halla entre paréntesis) es el que tienen asignado en el apartado 3.4.

En relación con los aspectos cualitativos de las respuestas de los alumnos, debemos categorizar las diferentes argumentaciones, interpretaciones y conclusiones que aparecen en las respuestas de los estudiantes. Con este objetivo analizamos por separado cada uno de los ítems del problema.

Para evaluar en forma cuantitativa el resultado de esta prueba piloto hemos seguido a Cajaraville (1996, p. 110), sobre estos criterios:

CATALOGACIÓN DE LA RESPUESTA	PUNTAJE
En blanco o totalmente errónea.	1
Uso de conceptos o procedimientos próximos sin éxito.	2
Uso de conceptos y procedimientos próximos y/o adecuados, con éxito limitado o con lagunas en la argumentación.	3
Respuesta correcta.	4

Tabla 3.27. Formas de catalogar las respuestas.

❑ SITUACIÓN 1 (2)

La siguiente tabla da los valores de la posición (distancia desde un punto arbitrario O, escogido como origen del sistema de coordenadas) en ciertos tiempos para un móvil que se mueve con movimiento rectilíneo no uniforme.

***t** (segundos)*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
***s(t)** (metros)*	*3*	*2*	*5*	*-2*	*0*

a) ¿Puedes decir, a partir de estos datos, en cuántos valores de t, como mínimo, el móvil tiene velocidad instantánea cero?

b) ¿En cuántos instantes, como mínimo, la aceleración es cero?

c) ¿Se puede asegurar que la variación instantánea de la aceleración, $s'''(t)$, toma el valor cero en algún punto?

Categorización de las respuestas al ítem a)

CATEGORÍA	PORCENTAJE
La velocidad instantánea vale cero cuando el valor de s(metros) es cero, ya que $v = ds/dt$.	70 %
Bosqueja una gráfica continua y derivable en todo el intervalo utilizando los valores de la tabla, de la que deduce que la velocidad es cero en los tres puntos donde la pendiente de la recta tangente es cero. (resp. correcta)	10 %
Argumentación física correcta, bosqueja una gráfica uniendo los puntos por segmentos.	10 %
La velocidad toma el valor cero en cinco instantes. Ellos son los tres instantes donde ha bosquejado la gráfica con esquinas y los dos puntos donde, según ésta, s es cero.	10 %

Tabla 3.28. Categorización de las respuestas al ítem a.

Aquí observamos primero la dificultad que tienen los alumnos de analizar datos a partir de una tabla, lo que se manifiesta ante la necesidad de bosquejar la gráfica, y luego aparece la dificultad para analizar dicha gráfica. Respecto a la forma de unir los puntos a través de segmentos, indagaciones posteriores realizadas a través de entrevistas personales nos confirman que el motivo que esgrimen es de que se trata de un movimiento rectilíneo. Esto, a nuestro modo de ver, aparece como un obstáculo que puede tener un aspecto cognitivo (en cuanto confunde la trayectoria del móvil, que es rectilínea, con la función posición, $s(t)$), pero también un origen didáctico (influenciado por la manera en la que los manuales introducen el concepto, ver Anexo 1). Otra observación importante es que el 70 % de los alumnos participantes no interpretan el significado de pendiente en un contexto de variación de $s(t)$. Confunden velocidad cero con los ceros de $s(t)$. Este error es calificado por Azcárate (1990) como "error típico" y consiste en confundir los puntos de velocidad máxima, velocidad mínima y velocidad nula con el máximo, mínimo y puntos de ordenada nula de la gráfica que representa $s(t)$.

A la vista de los puntos escogidos en la tabla era de esperar que los alumnos se ayudaran, entre otras cosas, del teorema de Rolle; sin embargo nadie lo utiliza. Esto nos hace pensar que, a pesar de que aparece repetidas veces en los distintos niveles de enseñanza, su descontextualización y aplicabilidad, ya que *s*ólo se contempla desde sus consecuencias para el teorema del Valor Medio, aparecen como primera dificultad.

Catalogación de las respuestas del ítem a):

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	7	1	1	1	1.6

Tabla 3.29. Catalogación de las respuestas del ítem a.

Categorización de las respuestas al ítem b)

CATEGORÍA	PORCENTAJE
Donde la velocidad instantánea es cero, pues como $a = vt$, si $v = 0$ entonces $a = 0$.	60 %
La aceleración instantánea es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo. Si $a = 0$ quiere decir que el móvil lleva velocidad constante; como se ve por la gráfica, la velocidad no es constante en ningún instante. Luego la aceleración instantánea no es cero en ningún instante.	10 %
Cuando la velocidad es constante o cuando es cero.	10 %
En tres puntos que son de inflexión (toma los tres puntos donde, según su gráfica, hay un cambio de sentido).	10 %
La aceleración será cero en los instantes en los que la velocidad no sea constante, es decir, que varíe con el tiempo.	10 %

Tabla 3.30. Categorización de las respuestas del ítem b.

Un 60 % de los alumnos encuestados no asocia el enunciado a fenómenos de cambio, ya que hacen una descripción del movimiento a través de la expresión $v = at$.

Además, podemos concluir que un 20 % (10% + 10%) de los alumnos encuestados tiene la idea de que $f(x)$ = cte., si y sólo si $f'(x) = 0$. Pero no advierten que $f'(x)$ puede anularse en un punto sin ser constante $f(x)$.

El 70 % (60% + 10%) de los estudiantes mantienen que v y a tienen ceros comunes. Si esto se analiza desde el punto de vista de la Física, pensamos que existe un obstáculo proveniente de la descripción de este fenómeno mediante expresiones del tipo $v = e/t$, $a = v/t$, conceptos previos al de velocidad y aceleración instantáneos y, por ende, al de derivada. Hay un alumno que hace referencia a los puntos de inflexión, es decir, asocia la aceleración con la segunda derivada y con el estudio de gráficas, si bien en su dibujo no es capaz de mostrar adecuadamente dónde se sitúan los puntos de inflexión.

Catalogación de las repuestas del ítem b)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	7	2	1	0	1.4

Tabla 3.31. Catalogación de las respuestas del ítem b.

Categorización de las respuestas al ítem c)

CATEGORÍA	PORCENTAJE
Sí, en los valores donde $v = 0$.	50 %
Sí.	10 %
Sí, debido a que para que cambie la aceleración de positiva a negativa debe pasar por cero.	10 %
No puede asegurar nada con los datos que tiene.	20 %
No contesta.	10 %

Tabla 3.32. Categorización de las respuestas al ítem c.

Se confirma lo ya visto en el ítem anterior, con el 50 % de respuestas en las que se hace evidente que la concepción de los alumnos es que $v = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow a' = 0$.

Un considerable porcentaje, el 30 %, no puede responder a esta pregunta, lo que pone de manifiesto las grandes dificultades que tiene el alumno para analizar la información dada por una tabla.

Posteriormente, los estudiantes que salvan esta dificultad, cuando vuelcan los datos en un gráfico, se centran solamente en el contexto físico, olvidando las herramientas que les proporciona el Cálculo y que les permitiría, apoyándose en ellas, avanzar con éxito sobre la situación planteada. Aquí se observa claramente la dicotomía que se mantiene en la enseñanza-aprendizaje de las diferentes disciplinas; para el alumno se está en el contexto de la Física o de la Matemáticas.

En esta situación se ponen de manifiesto varias dificultades:

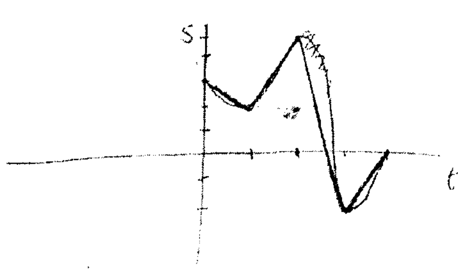
- Se debe analizar un movimiento a través de valores dados en una tabla sin conocer la expresión analítica ni la forma gráfica.
- Hay que pensar y relacionar diferentes marcos y contextos.
- Identificar, a partir del teorema de Rolle y sus corolarios, los ceros de la función derivada.
- Poder captar los signos de la función derivada a partir de la tabla.

Catalogación de las respuestas del ítem c)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	8	0	2	0	1.4

Tabla 3.33. Catalogación de las respuestas del ítem c.

A continuación ilustramos una de las producciones más representativas dadas por los alumnos.



La velocidad instantánea vale cero cuando el valor de x (metros) es cero, ya que, si aplicamos la fórmula de la velocidad instantánea en un punto $dV = \frac{dx}{dt}$.

Si lo analizamos por otra parte, por cada punto que nos dan le corresponde una t en segundos, y entonces la velocidad sería $V = \frac{s}{t}$

$dV = 0 \Rightarrow dx = 0$

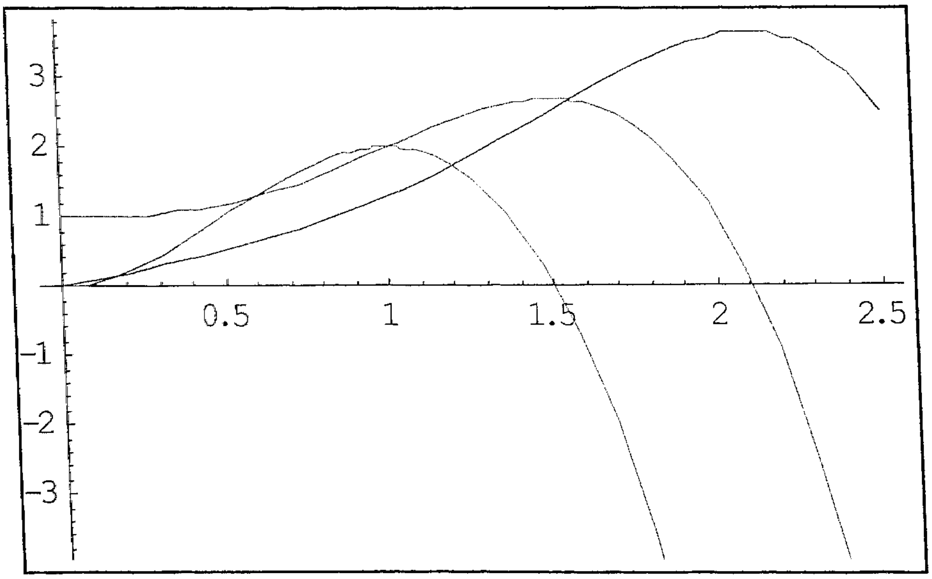
b) La aceleración será cero en los instantes en los que la velocidad no sea constante, es decir, que varíe en el transcurso del tiempo.

c) Con los datos que nos dan no, ya que la velocidad va variando en cada valor de t.

Figura 3.5. Muestra de la respuesta dada por los alumnos.

❑ SITUACIÓN 2 (3)

Las siguientes gráficas representan la ecuación del movimiento rectilíneo s(t), la velocidad s'(t) y la aceleración s''(t) de un móvil. ¿Puedes identificar cada una?



Para analizar las respuestas asignamos un número a las curvas, de la siguiente manera: 1 = $s(t)$, 2 = $s'(t)$ y 3 = $s''(t)$.

Categorización de respuestas:

CATEGORÍA	PORCENTAJE
Las curvas están bien escogidas. La razón por la que toma 1 como *s(t)* es que el espacio no puede disminuir, siempre debe aumentar.	40 %
No responde.	20 %
Toma bien las curvas; la razón de la elección la basa sobre el análisis de los puntos críticos.	10 %
Escoge las curvas de la siguiente manera: 1 = $s'(t)$, 2 = $s''(t)$ y 3 = $s(t)$. La elección de las dos primeras la explicaría por la relación que, según dice, deberían guardar $s'(t)$ y $s''(t)$.	10 %
Toma bien las curvas y trata de explicarlo, con poco éxito, analizando los puntos críticos.	10 %
Toma bien las curvas. La elección de $s(t)$ se debe al análisis de las gráficas en el origen.	10 %

Tabla 3.34. Categorización de las respuestas.

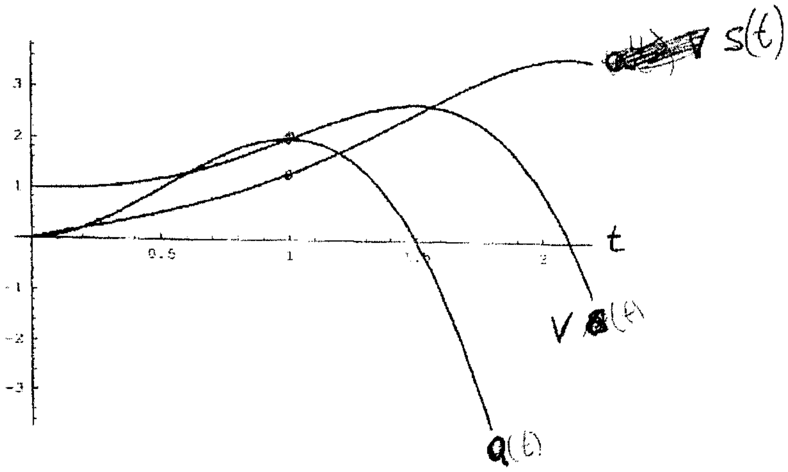
Se observa que un 20 % de alumnos no responden, lo que evidencia las dificultades que manifiestan para establecer relaciones entre diferentes conceptos, proporcionados a través de un marco gráfico en un contexto físico. Detectamos también un posible obstáculo didáctico que les lleva a afirmar, en un 40 %, que $s(t)$ debe ser una función creciente. Este obstáculo didáctico se origina cuando se utiliza con carácter casi exclusivo un modelo concreto para ejemplificar determinado resultado físico (véase Anexo 1). Pensamos que si se utilizan ejemplos variados, los alumnos serán capaces también de argumentar de manera alternativa.

Catalogación de la respuesta:

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	2	1	6	1	2.6

Tabla 3.35. Catalogación de la respuesta.

A continuación ilustramos una de las producciones más representativas dadas por los alumnos.



Explica lo mas ampliamente posible tus juicios y decisiones

No tengo ni idea de mis juicios lo unico que se es que el movimiento siempre es ascendente y el movimiento es decelerado a partir del instante (t=1) en el que empieza a ser decreciente la aceleracion y empieza a disminuir la velocidad hasta ~~t~~ que se frene el movil.

Figura 3.6. Muestra del trabajo realizado por los alumnos.

❑ SITUACIÓN 3 (4)

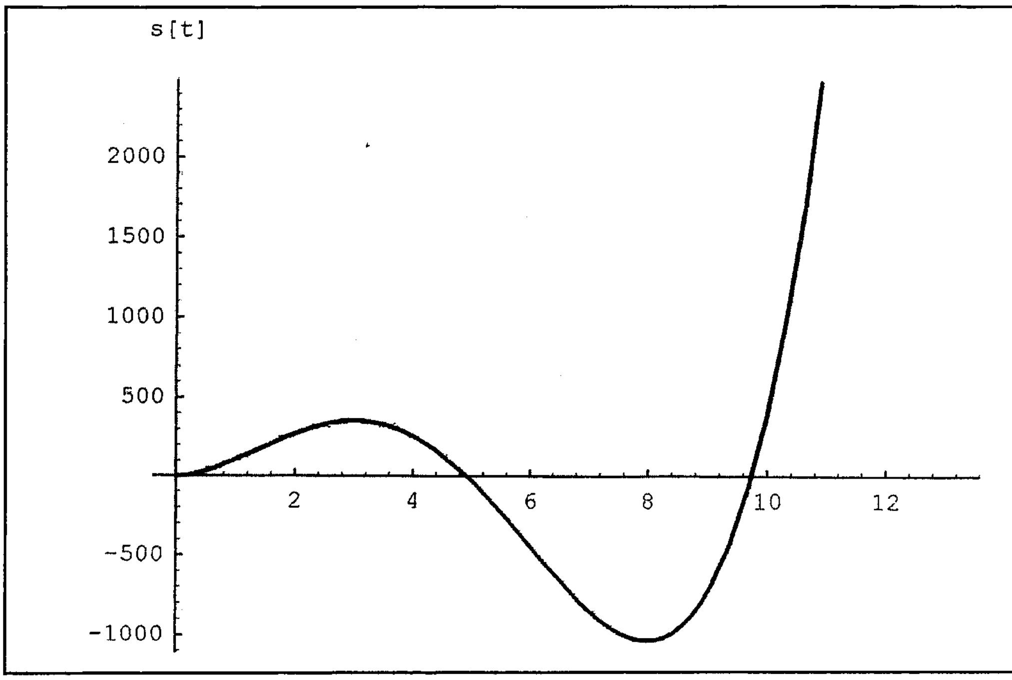
La distancia de una locomotora desde un punto fijo sobre una vía recta en el instante t viene descripta por la gráfica que se muestra.

a) ¿Podrías indicar en qué intervalo o intervalos de tiempo va marcha atrás?

b) ¿Podrías escribir, en forma aproximada, los intervalos de tiempo donde la velocidad es positiva y donde es negativa?

c) Indica los intervalos de tiempo donde la aceleración es positiva y donde es negativa.

d) La tercera derivada da la variación instantánea de la aceleración. ¿Podrías decirnos, en forma aproximada, en qué intervalos de tiempo la tercera derivada es positiva y en cuáles es negativa? ¿Por qué?



Categorización de las respuestas al ítem a)

CATEGORÍA	PORCENTAJE
Va marcha atrás en el intervalo (3, 8), ya que en ese intervalo la función $s(t)$ es decreciente (respuesta correcta).	60 %
Donde la gráfica de $s(t)$ es negativa.	40 %

Tabla 3.36. Categorización de las respuestas al ítem a.

Catalogación de las respuestas al ítem a)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	4	0	0	6	2.8

Tabla 3.37. Catalogación de las respuestas al ítem a.

Categorización de las respuestas al ítem b)

CATEGORÍA	PORCENTAJE
La velocidad es negativa en el intervalo donde $s(t)$ es decreciente, es decir, en el intervalo (3, 8). En el resto, es positiva (resp. correcta).	80 %
Utilizando que $v = e/t$, concluye que los intervalos positivos son (0, 5), (9.75, 11), y que el negativo es (5, 9.75).	10 %
Es negativa en los intervalos (3, 5) y (8, 9.7).	10 %

Tabla 3.38. Categorización de las respuestas al ítem b.

Como vemos, hay un alumno que al situarse sólo en el contexto físico y utilizar mal las fórmulas, llega a una respuesta errónea que le induce a pensar que la velocidad es negativa cuando $s(t)$ es negativo.

Catalogación de las respuestas al ítem b)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	3.5
NÚMERO DE ALUMNOS	1	1	0	8	

Tabla 3.39. Catalogación de las respuestas al ítem b.

Categorización de las respuestas al ítem c)

CATEGORÍA	PORCENTAJE
Utilizando que $a = v/t$, la aceleración es negativa donde lo es la velocidad, es decir, en los intervalos decrecientes de $s(t)$.	70 %
La aceleración es positiva en (0, 1.6), aproximadamente en $t = 1.6$ es donde se halla el primer punto de inflexión de $s(t)$. Es positiva aproximadamente en el intervalo (1.6, 6), es decir, hasta donde se halla el segundo punto de inflexión. Por último, de $t = 6$ en adelante vuelve a ser positiva. (resp. correcta)	10 %
Es negativa donde la gráfica de $s(t)$ es negativa y positiva donde lo es $s(t)$. Escribe las formulas: $e = av$, $a = v/t$, $v = at$.	10 %
Al ser curva la gráfica del espacio, sé que la velocidad no será uniforme, luego se podrá derivar y por lo tanto existirá aceleración. La aceleración será negativa cuando se oponga al movimiento, o sea cuando el tren esté frenando, es decir, en (2, 3) y (7, 8), y será positiva en el resto.	10 %

Tabla 3.40. Categorización de las respuestas al ítem c.

Pensamos que estamos frente a un *obstáculo* que proviene de creer que, en el movimiento rectilíneo, el valor absoluto de la velocidad crece cuando la aceleración es positiva y decrece cuando es negativa (70 %). Es decir, el alumno es incapaz de relacionar la aceleración con la segunda derivada y, luego, analizar los intervalos de concavidad de la gráfica. En los manuales de Matemáticas consultados observamos que los argumentos conceptuales y estrategias que se manejan en los mismos tienen como objetivo que el alumno sea capaz de representar funciones a partir de su expresión algebraica, y la obtención del signo de las derivadas se realiza desde el marco algebraico. Todo esto viene a explicar la frágil visión geométrica y gráfica que los estudiantes muestran en sus producciones. Además se pone de manifiesto, entre otras cosas, que los alumnos siguen estrategias basadas en patrones instruccionales y que las asignaturas son compartimentos estancos.

Catalogación de las respuestas al ítem c)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	1	7	1	1	2.2

Tabla 3.41. Catalogación de las respuestas al ítem c.

Categorización de las respuestas al ítem d)

CATEGORÍA	PORCENTAJE
Utilizando que $a = v/t$, esta tercera derivada es negativa cuando lo es la velocidad.	10 %
No responde.	60 %
Será negativa cuando la aceleración esté disminuyendo, pero ya no puede decir en qué intervalo ocurre eso.	10 %
En los mismos intervalos (abiertos) donde la aceleración es positiva o negativa.	10 %
Es negativa en (0, 9.7), ya que $-a > a$.	10 %

Tabla 3.42. Categorización de las respuestas al ítem d.

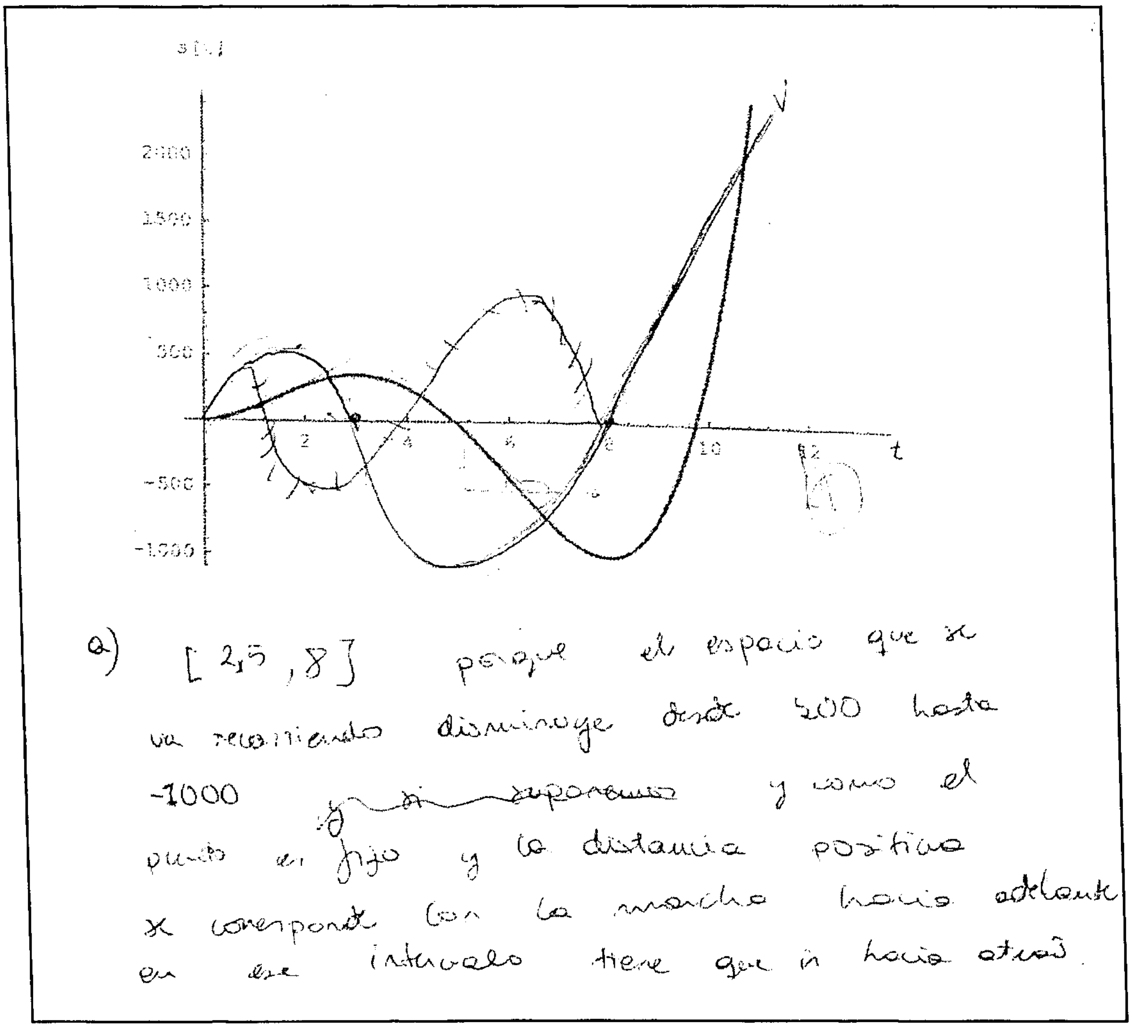
Catalogación de las respuestas al ítem d)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	7	2	1	0	1.4

Tabla 3.43. Catalogación de las respuestas al ítem d.

En los apartados c) y d) hay un bajísimo porcentaje de éxitos alcanzados. Consultados otros trabajos (Cajaraville, 1996) para similares problemas, pero donde la función se conoce algebraicamente, el porcentaje de éxitos supera el 50 %. Esto pone una vez más de manifiesto la necesidad de profundizar didácticamente sobre la fenomenología del concepto de derivada apoyada por las derivadas sucesivas y su capacidad explicativa en diferentes contextos.

A continuación ilustramos una de las producciones de los alumnos más representativas.



b) La velocidad será negativa cuando
la tangente geométrica a la curva
de una pendiente negativa,
~~esto~~ o cuando el espacio recorrido
sea decreciente, esto es: [2'5, 8]]

y será positiva en [0,2'5], (8,11)

(Lo he deducido pensando que el
espacio era decreciente, ~~y~~ el otro
razonamiento es la comprobación)

c) ~~Coincidirá con los intervalos de
la velocidad puesto que el movimiento
es acelerado por ser la gráfica curva~~

Al ser la gráfica del espacio curva, se
que la velocidad no será uniforme y
al no ser uniforme se podrá derivar y
por tanto existirá aceleración. Lo que
no se es si la aceleración será distinta
de de. ~~Pero aparte se que será positiva
cuando el movimiento lo sea.~~
La aceleración será negativa cuando
oponga al movimiento, o sea, cuando
el tren esté frenando: [2,3] y (7,8] y positi

... c)

en el resto.

Esto lo he deducido porque me he dado cuenta q. la aceleración no tiene q. ver con el sistema de referencia y depende directamente de que la velocidad vaya aumentando o disminuyendo

d) Será negativa cuando la aceleración ~~empieza~~ esté disminuyendo pero yo no se decir en qué intervalos será eso.

Figura 3.7. Muestra de la respuesta elaborada por los alumnos.

❑ SITUACIÓN 4 (5)

Un coche que parte del reposo alcanza la velocidad de 100 km/h en 10 segundos; a partir de ese instante continúa con esa velocidad. Suponiendo que los cambios en la aceleración se han realizado en forma suave:

a) Dar gráficos realistas de la posición, velocidad, aceleración y variación instantánea de la aceleración en función del tiempo para los primeros 20 segundos.

b) Puedes seguir cualquier orden para dibujar las gráficas pero una vez que lo hayas establecido debes decirnos qué criterios has seguido para ello.

c) ¿Qué crees que debes tener en cuenta para que las gráficas representen un fenómeno real?

Categorización de las respuestas:

CATEGORÍA	PORCENTAJE
Lo que hace está mal o no hace nada.	20 %
El orden que sigue es *v*(*t*), *a(t), s(t)* y *a'(t)*. La primera y la tercera son satisfactorias. La segunda gráfica está mal, pues dibuja una parábola hasta los 10 segundos. Para *a'* (*t*) sólo aparecen dibujados los ejes.	10 %
Dibuja las gráficas en el orden *x*(*t*), *v*(*t*), *a*(*t*). La segunda y la tercera son satisfactorias. Para la primera traza una parábola con eje horizontal hasta los 10 segundos y a partir de allí una línea oblicua. No hace ninguna referencia a la cuarta. Escribe explícitamente $v_0 =$ 0, pero no le da significado al dibujar *s*(*t*). También escribe algunas fórmulas físicas que utilizan diferenciales e integrales.	10 %
Traza *s*(*t*), *v*(*t*), *a*(*t*), *a'*(*t*). La primera, después de rectificarla, y la segunda son satisfactorias. En la tercera dibuja una parábola con eje horizontal. Para la cuarta sólo traza los ejes.	10 %
Las presenta en este orden: *v*(*t*), *a*(*t*), *e*(*t*). La primera es satisfactoria. La segunda sólo logra el éxito hasta los 10 segundos, a partir de allí no continúa con el dibujo. Para la tercera traza una recta del tipo $e(t) = t$. Sobre la cuarta no dice nada.	10 %
Se presentan en este orden *s*(*t*), *v*(*t*), *a*(*t*). La primera y la tercera son satisfactorias. En la segunda dibuja hasta los 10 segundos una parábola, igual que lo hace para *s*(*t*), pero a partir de los 10 y hasta los 20 segundos traza una línea horizontal. No hace referencia a *a'*(*t*).	10 %
El orden dado es *s*(*t*), *v*(*t*), *a*(*t*). En la primera dibuja dos rectas quebradas con distinta pendiente. La segunda y la tercera son satisfactorias. No hace referencias a *a'*(*t*).	10 %
Dibuja *v*(*t*) y *a*(*t*) en forma satisfactoria. De *s*(*t*) y de *a'*(*t*) no dice nada.	10 %
Traza sólo *v*(*t*). Sobre unos ejes graduados dibuja puntos que corresponden a $v = 10t$ que une formando una línea recta de 0 a 10 segundos. No hace nada más.	10 %

Tabla 3.44. Categorización de las respuestas.

Cuando la aceleración vale cero no la dibujan, responden que no hay aceleración; éste es el motivo por el que el 20 % no resuelve con éxito la situación. Esto nos hace pensar que para estos alumnos el estatus de una recta horizontal, $y(x) =$

k, es diferente en el caso de que $k = 0$. El 30 % dibuja los intervalos donde $a = 0$ o cte. El 80% no puede bosquejar nada para el caso de $a'(t)$.

El orden en que realizan las gráficas es importante para nuestro análisis porque con ello esperamos que se pongan de manifiesto algunas de las estrategias utilizadas por los alumnos; el 50 % comienza graficando $v(t)$.

Para que la gráfica represente un fenómeno real, no tienen respuesta el 80 % de los encuestados. El 20 % dice que debe ser el resultado de una experimentación con datos reales. Con esta pregunta se pretende hacer reflexionar sobre algunas de las condiciones que deben cumplir las gráficas que representan la mayoría de los fenómenos reales, como es la continuidad y la derivabilidad. En todos los casos las gráficas son dibujadas con puntos angulosos. Los alumnos desarrollan el problema situándose en el marco de la Física. No hay referencias explicitas al marco analítico-gráfico que encierra implícitamente este problema. Por lo tanto, no se realizan estudios en puntos particulares, como el origen, ni referencias a la razón de cambio que conlleva esta situación. Teniendo en cuenta lo anterior, podemos decir que logran una gráfica aceptable para $s(t)$ en un 30 %, para $v(t)$ en un 60 %, para $a(t)$ en un 40 % y el 0 % para $a'(t)$.

No se han detectado estrategias matemáticas para pasar de $v(t)$ a $s(t)$.

Catalogación de las respuestas:

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	2.2
NÚMERO DE ALUMNOS	2	4	4	0	

Tabla 3.45. Catalogación de las respuestas.

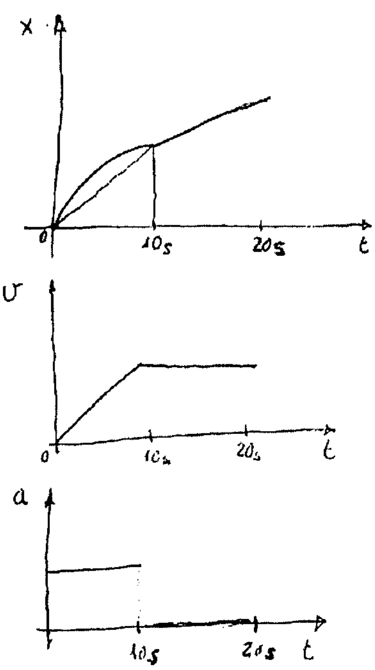
A continuación ilustramos una de las producciones más representativas dadas por los alumnos.

Para que las gráficas representen un fenómeno real, lo que se debe tener en cuenta es que los datos reflejados en las mismas sean reales, es decir, que sean resultados de una experimentación.

$t_1 = 10\,s$; $v_1 = 100\,km/h$

$t_0 = 0\,s$, $v_0 = 0\,km/h \to x_0 = 0$

$x = v.t \to x_1 = v_1 . t_1 = 100\frac{km}{h} \cdot \frac{1h}{60s} \cdot 10s = \frac{100}{6}\,km$ (No, al comienzo, el móvil lleva cierta aceleración; después la velocidad permanece cte.)



$\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{\cancel{dx}} \to \cancel{x} = \int dv\,dt = \int at\,dt = \frac{1}{2}a$

$a = \frac{dv}{dt} \to v = \int a\,dt = at\Big]_{t_0}^{t_1}$

$x = \frac{1}{2}a t_1^2 - \frac{1}{2}a t_0^2 = \frac{1}{2}a \cdot 10^2$

$v = a t_1 - a t_0$

13

Figura 3.8. Muestra del trabajo elaborado por los alumnos.

❑ SITUACIÓN 5 (6)

Desde la terraza de un edificio de altura s_0 *se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial* v_0*. Esta situación viene descripta por la siguiente ecuación diferencial:*

$s''(t) = -g$, *donde g es la aceleración de la gravedad.*

Resolver esta ecuación es encontrar la función s(t) que describe el movimiento. Te proponemos intentarlo utilizando el desarrollo de la fórmula de Taylor para s(t) en $t_0 = 0$*. Para ello recordemos el desarrollo de Taylor para la función s(t)*

$$s(t) = s(t_0) + s'(t_0)\,(t-t_0) + s''(t_0)\,(t-t_0)^2 / 2! + s'''(t_0)\,(t-t_0)^3 / 3! + \dots .$$

Una vez que hayas utilizado los datos proporcionados en el enunciado habrás hallado una solución particular del problema. Como en toda ecuación, una vez hallada la solución hay que ver si satisface la ecuación. ¿Puedes verificar la que tú has hallado? ¿Cómo?

Cuando propusimos esta cuestión a los alumnos de Ingeniería, en el enunciado les recordamos la expresión de la serie de Taylor y además le pedíamos que, una vez hallada la solución, la verificaran.

Categorización de las respuestas:

CATEGORÍA	PORCENTAJE
No responde.	40 %
Desconoce la serie, ya que al pedirle el desarrollo en $t_0 = 0$, reemplaza por cero el factor $(t - t_0)$.	20 %
Utiliza bien la serie llegando a la expresión $s(t) = s_0 + v_0 t - gt^2/2$ (resp. correcta). Para verificar el resultado parte del enunciado e integra dos veces.	10 %
No utiliza la fórmula pero intenta algunos artificios para llegar a una expresión que le resulta familiar en física.	10 %
Reemplaza los dos primeros términos de la serie por cero con lo cual halla que $s(t) = -gt^2/2$. Verifica, en forma correcta, derivando dos veces $s(t)$.	10 %
Resuelve en forma tradicional integrando y utilizando las condiciones iniciales.	10 %

Tabla 3.46. Categorización de las respuestas.

Hay un porcentaje muy elevado, 70 %, que no es capaz de abordar el problema, poniéndose de manifiesto el desconocimiento que tienen los estudiantes sobre la serie de Taylor. Esto nos lleva a pensar que existen obstáculos epistemológicos que dificultan la conceptualización de las ideas que encierra tal serie, incluso a nivel operativo. Podemos decir que incluso los que han intentado resolver el problema utilizando la herramienta propuesta no pudieron llegar a un resultado satisfactorio. Esto último a pesar de que los manuales analizados incluyen ejemplificaciones practicas de cómo determinar valores aproximados de funciones a través de los polinomios de Taylor. Sólo un alumno, que había cursado Matemáticas y Física para la carrera de Física el año anterior, logró utilizar con éxito la herramienta propuesta.

El método tradicional de integrar, que aparece en los libros de COU consultados, es la herramienta que utilizan para intentar resolver el problema un 30 % de ellos.

Catalogación de las respuestas:

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	5	4	0	1	1.7

Tabla 3.47. Catalogación de las respuestas.

A continuación ilustramos una de las producciones más representativas dadas por los alumnos.

$$s(t) = 0 + 0 + \frac{-g\cdot t^2}{2} = \boxed{-\frac{gt^2}{2}}$$

$$s(t) = -\frac{gt^2}{2}$$

$$s'(t) = -\frac{2gt\cdot 2}{4} = -gt$$

$$s''(t) = -g$$

Si se puede verificar, haciendo las sucesivas derivadas de s(t), hasta llegar a s''(t), y si sale el mismo resultado pues es que la funcion s(t) encontrada es la correcta

Figura 3.9. Muestra del trabajo elaborado por los alumnos.

CAPÍTULO 4

PRIMERA EXPERIENCIA: DESARROLLO Y ANÁLISIS DE LAS ETAPAS DE APRENDIZAJE

4.0.- INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos la experiencia correspondiente al curso 1999-2000; participaron en ella once estudiantes de primer año de la Licenciatura en Biología. Los alumnos emplearon aproximadamente 12 horas de trabajo, que se desarrollaron en las aulas de la Universidad de Jaén en horarios extraescolares.

Este estudio esta basado en un **acercamiento socioepistemológico,** ya que él nos permite un mejor control del efecto de nuestros diseños didácticos en los aprendizajes de los alumnos. Las cuatro componentes de este acercamiento fueron incorporadas en el análisis preliminar, el cual forma parte de la metodología empleada para el diseño de la secuencia didáctica. Como ya hemos señalado, la teoría de las situaciones didácticas es básica en dicha metodología.

Una situación didáctica comprende las relaciones establecidas explícita o implícitamente entre los alumnos, un cierto medio (que incluye instrumentos y objetos) y el profesor, con el objetivo de que los alumnos se apropien de un cierto conocimiento.

Dentro de esta teoría se dice que aprender un cierto conocimiento significa adaptarse a una o a un conjunto de situaciones adidácticas específicas de dicho conocimiento. Esto se pone de manifiesto mediante un cambio de actitud del alumno que le lleva a poner en práctica una estrategia que resuelve el problema planteado en la situación, de manera que ésta sea estable en el tiempo y estable respecto a los diferentes valores de las variables didácticas.

Desde el punto de vista social se deben considerar dos hechos fundamentales, que rigen todo proceso de aprendizaje:

1.- Aunque el aprendizaje se pueda considerar como un logro individual, no debemos olvidar que es el resultado de un proceso colectivo. Es decir, el proceso de estudio se desarrolla en el interior de una comunidad, en nuestro caso, en el aula.

2.- El aprendizaje debe ser algo compartido dentro del grupo para que el estudio sea efectivo. Esto es, para que el individuo aprenda es necesario que el grupo aprenda.

Realizaremos un análisis del trabajo de los alumnos a través de las distintas etapas de aprendizaje que contempla la Ingeniería Didáctica. Para ello, tendremos en cuenta todas las interacciones de los estudiantes con el medio. En la primera etapa sus producciones fueron individuales y escritas, en las siguientes la información fue captada en cintas de audio.

La actividad planteada consta de cinco situaciones-problemas. Con posterioridad, para estudiar la evolución de los significados personales se trabajó sobre otras tres situaciones-problemas. Dichas situaciones-problemas se hallan descritas en el apartado 3.4.

De forma general, el análisis lo enfocamos de la siguiente manera:

1. Nos centramos en los esquemas conceptuales de los alumnos sobre los conceptos que hemos clasificado como claves. Para ello, analizamos las respuestas dadas por los estudiantes en forma individual.
2. Observamos, además, los procedimientos que utilizan los alumnos en el tratamiento de dichos conceptos.
3. Por último, se hace un estudio de la evolución de los esquemas conceptuales y procedimientos de los alumnos a lo largo de las diferentes etapas de aprendizaje.

La metodología de la *Ingeniería Didáctica* es de preeminencia cualitativa; sin embargo, a lo largo del análisis realizado en esta investigación trataremos de obtener datos cuantitativos en la medida que esto sea posible, dado el reducido número de alumnos con los que hemos trabajado.

4.1.- ETAPA DE ACCIÓN

Primero planteamos lo más relevante en cuanto a la construcción realizada por los alumnos en la etapa individual. A continuación construimos categorías de las diferentes argumentaciones, interpretaciones y conclusiones que aparecen en las respuestas de los estudiantes. Con este objetivo analizamos por separado cada uno de los ítems del problema. Por último catalogamos las respuestas, obteniendo así una puntuación media. Esta forma dc evaluar la producción de los estudiantes es la misma que hemos adoptado para la valoración de la muestra piloto de los alumnos de Ingeniería Técnica (apartado 3.6.5).

Por lo tanto, el estudio y análisis de esta etapa queda ordenada, por situación-problema, de la siguiente manera:

1.- Producción de los alumnos.

2.- Conclusiones.

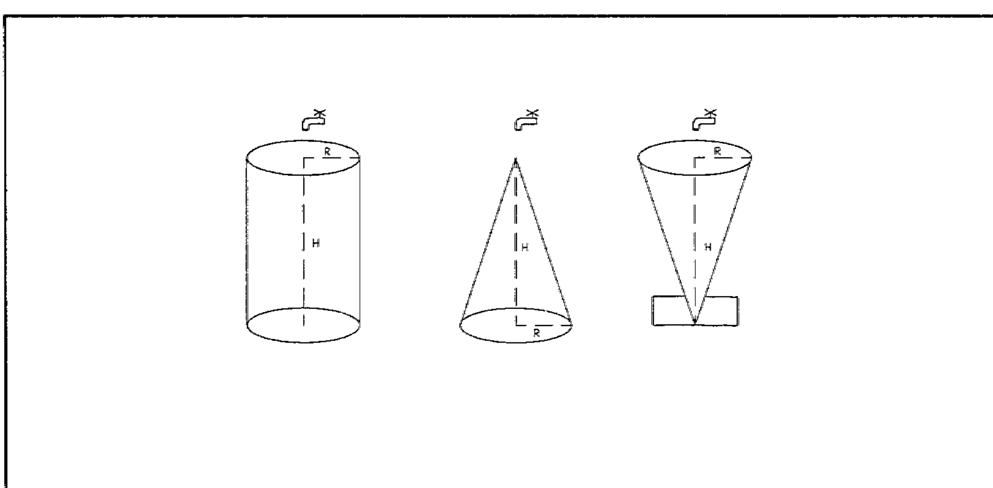
3.- Categorización y catalogación de las respuestas.

4.- Muestra representativa de la producción de los alumnos.

Participan en esta experiencia once alumnos, salvo en la situación 1, que lo hacen diez; nos referiremos a ellos por sus nombres.

❑ SITUACIÓN 1(1)

Consideremos dos tanques, uno cilíndrico y el otro con forma de cono circular recto con vértice hacia arriba (como se muestra en la figura); ambos tienen igual radio y altura. En ellos se vierte agua a un ritmo constante, comenzando al mismo tiempo.



a) Bosqueja una gráfica h(t) (altura en función del tiempo) asociada con el llenado de los dos recipientes, en las condiciones descritas anteriormente. Compara las gráficas y escribe todo lo que puedas concluir sobre ellas.

b) ¿Cambian las gráficas si invertimos la posición de los recipientes? (ver figura). ¿De qué manera? Haz un bosquejo como en el apartado anterior.

1.- Producción de los alumnos

Alicia

A través de un análisis de la geometría de los recipientes concluye que el cono tiene menor volumen, por lo que se llena antes. En el siguiente paso analiza la variación de la altura del agua a medida que se va llenando el recipiente cónico, con lo que concluye que "*en principio lo hace más despacio, pero conforme va subiendo cada vez tarda menos tiempo en subir*". Acaba diciendo que la gráfica es exponencial.

Para el caso del recipiente cilíndrico dice que el ritmo de llenado es constante, por lo que la gráfica es una recta. Trata de dar algunos valores numéricos para corroborar lo que ha pensado, realizando gráficas a escala para el caso de los dos recipientes.

Cuando considera los recipientes en la posición invertida dibuja, para el caso del recipiente cónico, la gráfica de una función irracional del tipo $y = \sqrt[n]{x}$. A fin de realizar el bosquejo toma una escala.

Observaciones

Podemos concluir diciendo que logra en forma muy satisfactoria representar gráficamente el fenómeno, si bien le falta el análisis en los instantes inicial y final del mismo.

Penélope

Comienza observando los elementos físicos y geométricos del problema. Luego hace una descripción del fenómeno que le lleva a concluir para el caso del recipiente cónico que éste viene descrito por una gráfica de tipo potencial, en tanto que para el recipiente cilíndrico la gráfica es una recta. Ambas gráficas pasan por (0, 0) y por (t, h), pero no compara los tiempos que se necesitan en cada caso para alcanzar la altura total.

Cuando cambia la posición de los recipientes, en el caso del cilíndrico dice "*no ocurre nada*"; para el recipiente cónico "*la gráfica sería al revés que la otra*" y dibuja la rama correspondiente a una función del tipo $y = \sqrt[n]{x}$.

Observaciones

Podemos concluir diciendo que establece una acertada observación y descripción de los fenómenos en forma independiente, ya que en ningún momento hace referencia a los tiempos que tardan en llenarse en forma comparativa. Realiza los gráficos sin utilizar escala.

Inma

Dibuja los dos recipientes observando sus características geométricas. El fenómeno, en el caso del recipiente cónico, lo representa aproximadamente por una parábola y sobre el mismo par de ejes dibuja la recta que describe el fenómeno que ocurre en el recipiente cilíndrico. Hace notar, ya que los gráficos los realiza a escala, que el tiempo que tarde en llenarse el primer recipiente es menor que el del segundo. Refiriéndose al recipiente cilíndrico dice "*la gráfica del cilindro sigue una altura de llenado a un ritmo constante de tiempo, por tanto es continuo*".

Al invertir los recipientes dibuja, para el recipiente cilíndrico, la misma gráfica tomando una escala en el eje del tiempo. Mientras que para el recipiente cónico dice " *la cosa cambia a la inversa*" y dibuja en el mismo par de ejes la rama aproximada de una parábola con eje x. La particularidad de esta gráfica es que todos los puntos de la parábola están por debajo de los de la recta.

Observaciones

Para concluir, podemos decir que realiza el análisis de los fenómenos adecuadamente, pero no advierte que el tiempo que tarda en llenarse el recipiente cónico debe ser el mismo en cualquier posición en que se encuentre. Por lo tanto, hay dos puntos en ambas gráficas que deben coincidir, que son justamente los instantes inicial y final. Es de resaltar que en el eje del tiempo toma una escala en todas las gráficas.

Susana

Hace una descripción de cómo concibe el fenómeno. Para el caso del recipiente cónico, dice "*empieza llenándose lentamente porque su espacio en la base es grande pero cada vez va aumentando la rapidez de llenado ya que va disminuyendo su espacio según va tomando altura*". Dibuja una gráfica del tipo potencial.

Para el caso del recipiente cilíndrico, dice "*la velocidad es siempre la misma ya que el espacio es el mismo en todo el recipiente*". Dibuja una recta bisectriz en el primer cuadrante.

Al invertirse los recipientes el fenómeno lo describe por gráficas en un mismo par de ejes. La que corresponde al recipiente cilíndrico la mantiene igual, en tanto que para el otro recipiente muestra una gráfica del tipo $y = \sqrt[n]{x}$, que crece muy rápidamente casi hasta la altura total y luego la continúa casi constante con el valor h.

Observaciones

En conclusión, no utiliza ninguna escala para realizar las gráficas; sin embargo es evidente que considera que el recipiente cónico tarda menos tiempo en llenarse que el otro. Tampoco considera explícitamente la dimensión de los recipientes.

Rosario

Dibuja los dos recipientes teniendo en cuenta sus dimensiones. Representa los fenómenos a través de rectas sobre ejes cartesianos donde toma en el eje de las x la altura y en el eje de las ordenadas el tiempo. La recta con la que representa el fenómeno en el recipiente cilíndrico es de mayor pendiente que la otra. Además, dice "*El cilindro se llena en el doble de tiempo que el cono, ya que el volumen de éste es la mitad que el del cilindro*".

"*Las gráficas no cambian al variar la posición de los recipientes*", después de hacer esta afirmación vuelve sobre sus pasos porque parece darse cuenta de que lo que ha hecho para el caso del recipiente cónico no está bien. En la nueva gráfica retoma las variables sobre los ejes de la misma forma que hizo anteriormente y nos explica "*la función es una curva ya que el tiempo es constante, pero no lo es la altura, la altura aumenta más rápidamente en el mismo tiempo*". Dibuja para un caso una función del tipo $y = x^n$ y en el otro $y = \sqrt[n]{x}$.

Observaciones

Para concluir podemos decir que no nos parece que haya entendido físicamente los fenómenos que tiene que modelizar. Nos llama la atención que no repare que la variable independiente es el tiempo. No justifica el motivo que le llevó a pensar en las nuevas gráficas.

Lydia

Dibuja los dos recipientes teniendo en cuenta sus dimensiones. Luego escribe las fórmulas del volumen: $V_1 = \frac{\pi}{3} r^2 h$, $V_2 = \pi r^2 h$ para el recipiente cónico y cilíndrico respectivamente. A partir de ellas infiere que el primero se llena más rápido porque es $\frac{1}{3}$ menor que el segundo. La gráfica con la que representa el fenómeno para el primer recipiente es una función potencial; la dibuja tomando una escala en los ejes. En el caso del segundo recipiente el fenómeno es modelado por una recta de pendiente positiv; para su trazado no utiliza escala.

Cuando invierte los recipientes dice "*la gráfica del primer tanque pasa de ser parabólica a exponencial debido a que el tanque se llena antes con el vértice abajo*", se retracta de esa afirmación y concluye que el tiempo que tarda en llenarse es el mismo. Dibuja las gráficas que corresponden al recipiente cónico en las dos posiciones mostrando que se llena en el mismo tiempo. La gráfica para el segundo recipiente permanece igual que en la primera posición.

Observaciones

Concluyendo, podemos decir que analiza el volumen de ambos recipientes llegando acertadamente a que el primero se llena antes que el segundo, pero no explica por qué el fenómeno lo representa en un caso por una función potencial y en el otro por una recta. Cuando cambia la posición de los recipientes habla de una función exponencial sin ahondar en la forma de ésta en el origen.

María del Carmen

Dibuja los dos cuerpos teniendo en cuenta sus dimensiones. Construye las gráficas teniendo en cuenta una escala sobre los ejes. La gráfica que modeliza el fenómeno en el recipiente cónico es una función potencial, en tanto que para el segundo recipiente lo modeliza con una función lineal. Puede observarse que considera que el primer recipiente tarda menos tiempo en llenarse.

Al cambiar la posición de los recipientes cambia la gráfica del primero por una función del tipo $y = \sqrt[n]{x}$ y la segunda la mantiene igual, haciendo una descripción del fenómeno.

Observaciones

Logra hacer una buena descripción de los fenómenos físicos y de su modelización a través de gráficas.

Rafael

Dibuja ambos recipientes y luego traza las gráficas en un mismo par de ejes tomando una escala sobre ellos. Con esto nos muestra sus ideas de los modelos comparativamente. Para explicarlas dice "*la gráfica A es una gráfica uniforme que muestra que al principio tarda lo mismo en llenarse los dos recipientes, pero luego A empieza a ganarle terreno y acaba antes, debido a que tiene menor volumen que B, es una gráfica uniforme y rectilínea*".

Al invertir la posición de los recipientes mantiene la del tanque cilíndrico como una función lineal, en tanto que para el otro cuerpo dibuja una curva que se aproxima a una función del tipo $y = \sqrt[n]{x}$. Lo explica diciendo "*Ahora A se llena rápido al principio, pero va perdiendo velocidad de llenado, es decir, cada vez tarda más en llenar cada cm^3 debido a que cada vez es mayor el volumen. B no cambia debido a las propiedades de un cilindro*".

Observaciones

Ha logrado entender el fenómeno y ha creado un modelo gráfico para visualizarlo.

David

Dibuja los recipientes teniendo en cuenta sus dimensiones. Dibuja las gráficas en un mismo par de ejes, con escala sobre ellos. En el caso del recipiente cilíndrico la gráfica es una recta y en el caso del recipiente cónico una función potencial. Además realiza un cálculo aproximado del tiempo que tardan en llenarse.

Al invertir la posición de los recipientes mantiene la gráfica del cilindro, en tanto que para el otro cuerpo dice "*se obtiene una gráfica del tipo exponencial que es la inversa de la parábola anterior*". Parece que el tiempo que tardan en llenarse ambos recipientes lo considera igual.

Observaciones

En general logra un modelo gráfico bastante aproximado para describir los fenómenos.

Mari Carmen

Dibuja los recipientes llamando A al cilíndrico y B al cónico. Para el primero dibuja sobre ejes graduados una recta. En el caso del segundo aproxima la curva con una función potencial mediante trazos rectilíneos; esto lo explica diciendo "*Sin embargo, en la gráfica B observamos una recta creciente debido a que el cilindro es distinto en cuanto a estructura, es decir, es más ancho por una parte que por otra, lo que conlleva a que en un determinado tiempo, al estar en la superficie más ancha, el cilindro se llena menos rápidamente que con la superficie más estrecha sobre la cual, en un mismo intervalo de tiempo, va a coger más altura*".

Cuando se invierten los recipientes mantiene la recta para representar el fenómeno que ocurre en el cilindro y, para el caso del cono, dibuja sobre ejes graduados una curva que aproxima por segmentos rectilíneos a una función del tipo $y = \sqrt[n]{x}$.

Se refiere a gráfica uniforme para el caso del cilindro. Además hace un análisis aislado para cada situación y no compara el tiempo que tardan en llenarse ambos recipientes.

Observaciones

Para concluir podemos decir que logra expresar, a través de un modelo gráfico, la variación de $h(t)$.

2.- Conclusiones

Podemos concluir diciendo que logran en forma muy satisfactoria representar gráficamente el fenómeno. Sin embargo creemos conveniente remarcar las observaciones siguientes:

- Deberían realizar un análisis más exhaustivo del fenómeno en los instantes iniciales y finales.
- Falta una referencia explícita a los tiempos que tardan en llenarse en forma comparativa ambos recipientes o el mismo recipiente en dos posiciones diferentes.
- En algún caso se habla de una función exponencial sin ahondar en la forma de ésta en el origen.

3.- Categorización y catalogación de las respuestas

Para la categorización de las respuestas dadas a esta situación la dividimos en dos ítems, dependiendo de la posición de los recipientes. Trabajaron esta cuestión, como ya hemos señalado, diez alumnos.

Categorización de respuestas al ítem a)

CATEGORÍA	PORCENTAJE
El fenómeno, para el caso del recipiente cónico, se representa por una función irracional cúbica (o aproximadamente por una parábola) y para el recipiente cilíndrico por una función lineal (respuesta satisfactoria).	80 %
Toma en el eje horizontal los valores de *h* y en el eje vertical *t*. En el caso del recipiente cilíndrico dibuja una recta y para el otro recipiente, aproximadamente, una parábola con eje vertical.	10 %
El fenómeno, para el caso del recipiente cónico, puede representarse por una función del tipo exponencial y para el recipiente cilindro por una recta.	10 %

Tabla 4.1. Categorización de las respuestas a la situación 1a.

Catalogación de las respuestas al ítem a)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	3,8
NÚMERO DE ALUMNOS	0	0	2	8	

Tabla 4.2. Catalogación de las respuestas a la situación 1 a.

Categorización de respuestas al ítem b)

CATEGORÍA	PORCENTAJE
La gráfica para el recipiente cilíndrico no cambia. En el caso del otro recipiente, la gráfica que representa el fenómeno corresponde a una función irracional cúbica (resp. satisfactoria).	80 %
Representa la altura sobre el eje horizontal y el tiempo sobre el eje vertical. La gráfica para el caso del recipiente cilíndrico no varía y para el caso del recipiente cónico la parábola tiene ahora eje horizontal.	10 %
En el caso del recipiente cilíndrico la gráfica permanece igual. Para el recipiente cónico la gráfica varía a una exponencial.	10 %

Tabla 4.3. Categorización de las respuestas a la situación 1 b.

Catalogación de las respuestas al ítem b)

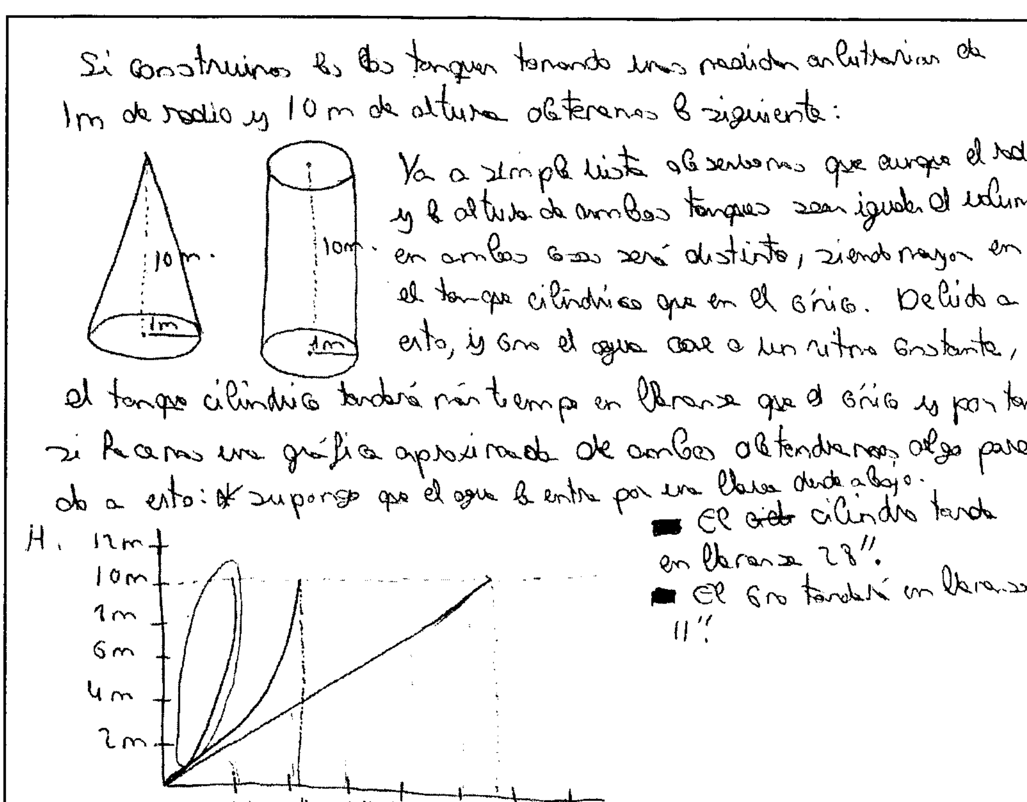
	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	3,8
NÚMERO DE ALUMNOS	0	0	2	8	

Tabla 4.4. Catalogación de las respuestas a la situación 1 b.

En general, las estrategias utilizadas explícita o implícitamente son las de comparar volúmenes y luego la forma de los recipientes. Notamos la falta de observación sobre lo que sucede en los instantes inicial y final. Podemos decir, y se ve por la puntuación media obtenida, que todos los alumnos han logrado expresar satisfactoriamente a través de un modelo gráfico la variación de $h(t)$, que era el objetivo de esta situación.

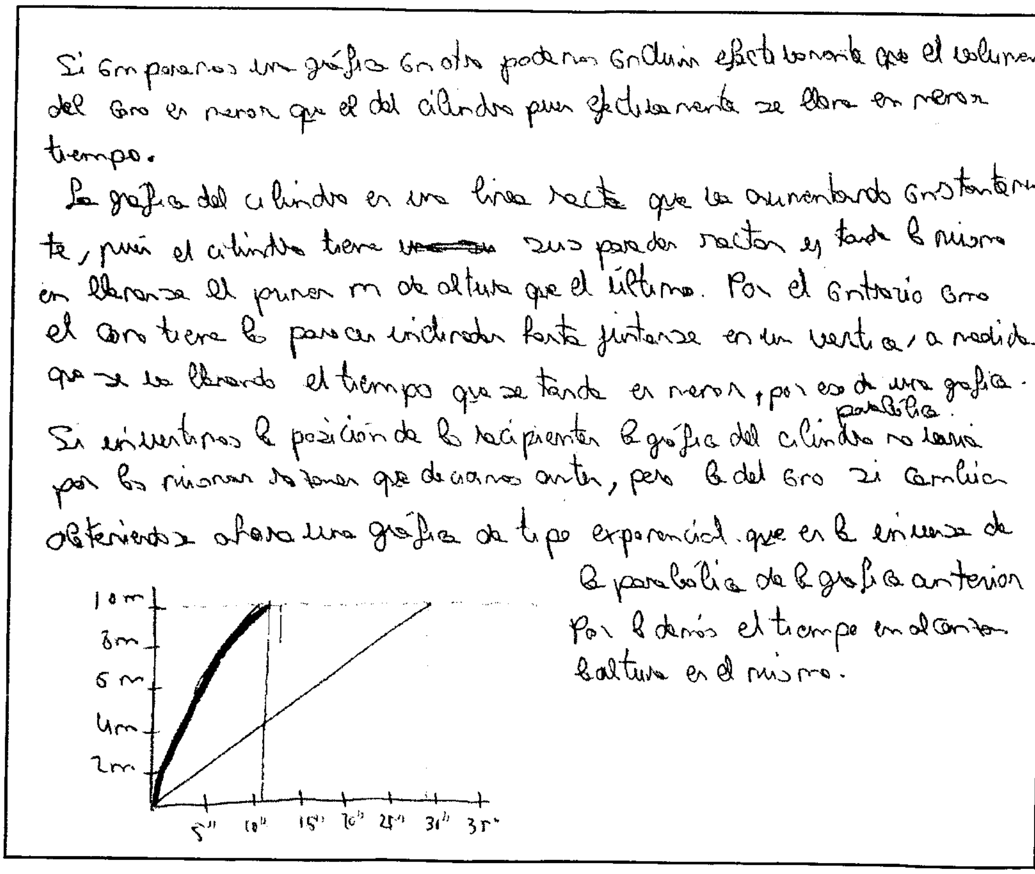
4.- Muestra representativa de la producción de los alumnos

Presentamos a continuación una muestra significativa de la producción de los estudiantes.


Si construimos los dos tanques tomando unas medidas arbitrarias de 1m de radio y 10 m de altura obtenemos lo siguiente:

Ya a simple vista observamos que aunque el radio y la altura de ambos tanques sean iguales el volumen en ambos casos será distinto, siendo mayor en el tanque cilíndrico que en el cónico. Debido a esto, y como el agua cae a un ritmo constante, el tanque cilíndrico tardará más tiempo en llenarse que el cónico y por tanto si hacemos una gráfica aproximada de ambos obtendremos algo parecido a esto: *supongo que el agua la entra por una llave desde abajo.

- El cilindro tarda en llenarse 28''.
- El cono tardará en llenarse 11''.



Si comparamos un gráfica con otra podemos concluir efectivamente que el volumen del cono es menor que el del cilindro pues efectivamente se llena en menor tiempo.

La gráfica del cilindro es una línea recta que va aumentando constantemente, pues el cilindro tiene sus paredes rectas y tarda lo mismo en llenarse el primer m de altura que el último. Por el contrario el cono tiene las paredes inclinadas hasta juntarse en un vértice, a medida que se va llenando el tiempo que se tarda es menor, por eso da una gráfica parabólica.

Si invertimos la posición de los recipientes la gráfica del cilindro no variará por las mismas razones que dábamos antes, pero la del cono sí cambia obteniendo ahora una gráfica de tipo exponencial que es la inversa de la parabólica de la gráfica anterior. Por lo demás el tiempo en alcanzar la altura es el mismo.

Figura 4.1. Muestra de la producción de los estudiantes en la situación 1.

❑ SITUACIÓN 2(2)

Un móvil se desplaza con movimiento rectilíneo no uniforme. En la siguiente tabla se muestran las posiciones (en metros, desde el origen de coordenadas) en ciertos instantes.

t (segundos)	0	1	2	3	4
s (metros)	3	2	5	-2	0

a) *A partir de estos datos, determina (razonando tu respuesta) para cuántos valores de t, como mínimo, el móvil tiene velocidad instantánea cero.*

b) *¿Para cuántos valores de t, como mínimo, la aceleración es cero?¿por qué?*

c) *¿Se puede asegurar que la variación instantánea de la aceleración s'''(t), conocida como tirón, toma el valor cero en algún instante dentro del intervalo considerado? Explica con detalle los motivos y razones de tu respuesta.*

1.- Producción de los alumnos

Alicia

Comienza dibujando los puntos en un par de ejes donde representa el tiempo en las abscisas. Une dichos puntos con segmentos, pero suaviza los vértices. Luego trata de recordar las fórmulas de la Cinemática diciendo "*la fórmula de la velocidad era la derivada del espacio*" y con esto concluye que en $t = 0$, $v = 0$ y también en $t = 1$, $v = 0$; después de esto advierte que hay algo raro y lo deja.

En el apartado b) dice "*la aceleración era igual a la* $\frac{v_f - v_i}{t}$" con lo cual concluye que todo es cero. En este momento se da cuenta de que no puede seguir.

Observaciones

En conclusión, trata de enfocar el problema haciendo una gráfica cartesiana con los puntos dados en la tabla. También intenta recordar las fórmulas de la cinemática con poco éxito. Por último, se da cuenta de que no puede abordar el problema.

Penélope

Construye dos gráficas, la gráfica *t-s* la hace uniendo los puntos con segmentos. Luego toma un camino, que más tarde abandona, teniendo en cuenta que $v = \frac{ds}{dt}$ con lo cual concluye que $v(4) = 0$. Prosigue diciendo $v = \frac{s}{t}$, $v = 0$ cuando $s = 0$, pero advierte que el móvil se mueve alejándose y acercándose a un punto fijo, lo que le lleva a decir "*el móvil en los instantes en que cambia de sentido tendrá velocidad cero, además de en el último segundo, porque supuestamente se para*".

En el apartado b) escribe "$a = \frac{v}{t}$, *entonces la aceleración sería cero en los puntos o instantes donde la velocidad fuese cero, en los que el móvil se para*".

En el apartado c) después de escribir $\Delta a = a_1 - a_2$, no puede continuar.

Observaciones

Para concluir, podemos decir que estamos frente a un teorema factual del tipo: $v(t_i) = 0 \rightarrow a(t_i) = 0$. El análisis gráfico que realiza a partir de la Cinemática le lleva a obtener para el apartado a) buenos resultados. El punto $t = 4$ es conflictivo.

Inma

Dibuja una gráfica cartesiana tomando el tiempo en el eje de las ordenadas. De acuerdo con esta gráfica dice "*el móvil tiene velocidad instantánea cero en los puntos donde cambia el crecimiento de la función, concretamente aquéllos que son máximos y mínimos relativos*", por lo tanto, para $t = 0$, $t = 4$. Luego, continúa diciendo "*son también puntos donde la función pasa de cóncava a convexa y viceversa y además la derivada de la función en ese punto es cero*".

En el apartado b) los instantes donde $a(t) = 0$ se hallan en $(t, s) = (4, 0)$ y $(1, 2)$ porque, según ella, es en el tramo no creciente, ya que la velocidad disminuye.

En el apartado c) escribe lo siguiente $s'''(t) = 0$ para $t = 0$, $s(t) = 3$. Pero no lo justifica.

Observaciones

Podemos concluir diciendo que en algunos casos utiliza con bastante eficacia las herramientas y conceptos matemáticos que conoce, como lo hace en el apartado a), llegando a resultados satisfactorios.

Susana

Al dibujar los puntos en un sistema de ejes coordenados toma el tiempo en el eje de las ordenadas; a dichos puntos los une con trazos rectos. Luego calcula la velocidad media para cuatro intervalos y lo explica de esta forma "*en el intervalo de t = 2 a t = 4 el móvil sale con una velocidad de 2 pero justo en el segundo 4 la velocidad es cero y su recorrido también es cero, pero en ese momento no es la velocidad instantánea*".

En el apartado b) hace el siguiente razonamiento, en $t = 4$, $\frac{s}{t} = \frac{0}{4} = 0$; por lo tanto $a = \frac{0}{t} = 0$.

En el apartado c) calcula la velocidad media en los diferentes intervalos y en todos los casos obtiene valores diferentes de cero, lo que le lleva a afirmar "*el móvil lleva una aceleración determinada igual que ocurría en la velocidad instantánea*".

Observaciones

Para concluir, lo primero que podemos observar es que no tiene en cuenta cuál es la variable independiente y cuál la dependiente. Además, une los puntos con una poligonal formando una gráfica que no es derivable en todo el intervalo donde debe considerarla. Otra cosa a destacar es que prima en ella la idea de que si $v = 0$ entonces $a = 0$ para un instante determinado. No tiene claro el concepto de velocidad media y velocidad instantánea, lo mismo que para el caso de la aceleración media e instantánea.

Rosario

No realiza gráficos cartesianos. En el apartado a) afirma que en ningún instante la velocidad es cero y lo justifica de la siguiente manera: "*En ninguno porque el móvil no se para en todo el tiempo*".

Para el apartado b) dice "*En ninguno porque cambia de velocidad en todos los instantes*".

Contesta al apartado c) diciendo "*No, porque en todos los instantes cambia de velocidad* ".

Observaciones

Como conclusión podemos destacar que hace un dibujo donde quiere reflejar el movimiento de un móvil. Creemos que no entendió el enunciado, pues no intenta abordar con argumentos válidos el problema.

Manuel

Dibuja los puntos en un par de ejes *t-s* y los une a través de una poligonal. Luego determina los intervalos donde el móvil retrocede y donde avanza. Los instantes en que $v = 0$ son para $t = 1, 2, 3$ porque en esos instantes, dice, *el movimiento cambia de dirección*. Asegura que la derivada del vector velocidad será cero.

En el apartado b) los instantes donde se anula la aceleración son $t = 1, 2$ y 3 lo justifica de la siguiente manera: "*Para que un móvil detenga su desplazamiento en cualquiera de los dos sentidos debe haber una aceleración positiva y una desaceleración negativa*". A continuación utiliza una versión del teorema de Bolzano para mostrar que en esos puntos el valor de la aceleración es cero porque, dice, *la aceleración toma valores de signos opuestos en los extremos del intervalo*.

El apartado c) no lo responde.

Observaciones

Como conclusión, hacemos notar que aparece el teorema $v = 0 \rightarrow a = 0$ para

$t = t_i$. También podemos destacar que trata de usar argumentos tanto físicos como matemáticos para justificar sus respuestas.

Lydia

Representa los puntos en un par de ejes coordenados *t-s* y los une formando una gráfica con derivadas en todos sus puntos. A continuación dice que $v = \frac{s}{t}$ y por lo tanto $v = 0$ donde $s = 0$; esto ocurre para t entre 2 y 3 y en $t = 4$.

En el apartado b), siguiendo el razonamiento anterior, dice "*si* $a = \frac{s}{t^2}$ *cuando lo fuera la superficie* $t = (2, 3)$ *y para* $t = 4$".

En el apartado c) no hace nada.

Observaciones

Como conclusión podemos destacar que aparece el teorema factual, si $v = \frac{s}{t}$, $s = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow a = 0$ para $t = t_i$. Hace referencia a la superficie, creemos que la confusión se debe al nombre con el que hemos indicado el desplazamiento. No identifica en la gráfica que construye ninguna herramienta ni concepto matemático que sea capaz de asociar a los conceptos físicos y le ayuden a avanzar en el problema planteado.

María del Carmen

Dibuja, en un par de ejes *s-t*, los puntos dados en la tabla del enunciado, tomando como variable independiente *s*, y los une con una poligonal. Luego, tratando de recordar las fórmulas de la Cinemática, escribe $v_{inst} = v_0 + \frac{1}{2}at^2$; de esta toma $v_0 = 0$ porque dice "*la gráfica no empieza desde el eje de coordenadas*" y luego concluye que $v = 0$ cuando $t = 0$.

En el segundo apartado dice "*la aceleración es cero cuando t = 0, al ser no uniforme quiere decir que va cambiando la velocidad, por lo tanto debe haber aceleración salvo que t = 0 y cuando* $v_{inst} = 0 \rightarrow a = 0$". A continuación repite la primera gráfica para *s*, y hace otra para *s'* pero ahora cambiando el crecimiento de la función para los mismos intervalos. Para s'', sólo dibuja los ejes. Concluye que cuando $s=0 \rightarrow v=0 \rightarrow a=0$.

En el tercer apartado no hace nada.

Observaciones

En resumen, se ve claramente la presencia del teorema factual $s=0 \rightarrow v=0 \rightarrow a=0$. En la representación gráfica toma como variable independiente a s. Recuerda que si la velocidad varía existe una aceleración diferente de cero, pero luego basa su análisis en el teorema factual que le lleva a conclusiones falsas.

Rafael

No hace gráficos. Hay un sólo instante donde afirma que la velocidad toma el valor cero, en $t = 4$. Además habla de un choque que debe haberse producido para que el móvil se desplace 2m en sentido contrario, luego reflexiona "*sin embargo, para invertir el sentido ha tenido en algún momento que pararse*".

La aceleración es cero en el instante inicial, es decir en el punto (0, 3) porque va a velocidad constante. En el resto no, afirma, porque el móvil acelera y desacelera.

En el tercer apartado asegura que en algún instante $s'''(t) = 0$ y justifica diciendo *"ya que cuando el móvil choca $v = 0$, por lo que en ese instante $a = 0$"*.

Observaciones

Aquí podemos destacar que trata de buscar las causas del movimiento al hablar de choque y del principio de acción y reacción. Se nota la presencia del teorema factual $v = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow a' = 0$, aunque no haga referencia a esta última en forma explícita. No realiza ninguna representación gráfica.

David

Representa los puntos en un par de ejes *t-s* y los une formando una gráfica derivable en todo el intervalo. Luego considera los instante donde se anula la velocidad, $t = 3.5$ y $t = 4$ y agrega, por la fórmula $v = \frac{s}{t}$, si $s = 0$ entonces $v = 0$.

En el apartado b) responde que a será cero en los mismos instantes en que $v = 0$.

El apartado c) no lo responde.

Observaciones

Como conclusión podemos destacar que no utiliza la gráfica que traza con bastante acierto y en la que, en principio, creímos que se iba a apoyar para analizar y progresar en el problema. Más bien pensamos que ésta actuó en él como un obstáculo ya que a través de ella y de la relación $v = \frac{s}{t}$, infiere que en los puntos $(t, 0)$ la velocidad es cero.

Mari Carmen

Construye la gráfica de una función derivable que pasa por todos los puntos dados. Luego da los valores donde $v = 0$, que son $t = 2.5$ y $t = 4$.
En el apartado b) infiere que $a = 0$ donde $v = 0$, es decir, en $t = 2.5$ y $t = 4$.

En el apartado c) dice "*No, porque la aceleración en el medio va a ser constante, si nos referimos concretamente a un tipo de aceleración, entonces podemos decir que sí, puede que tenga valores diferentes e incluso el valor cero*".

Observaciones

Podemos concluir diciendo que se nota la presencia del teorema factual. No hace un uso correcto de la gráfica y de todos los elementos que ésta le ofrece para analizar el problema; más bien, infiere conclusiones erróneas.

2.- Conclusiones

A la luz de este análisis debemos tener presentes las siguientes observaciones realizadas sobre la producción de los estudiantes.

- La parte algebraica, es decir, la búsqueda de la fórmula que pueda manipularse algebraicamente es lo que prima, en un alto porcentaje: 64% de los casos.
- La tasa de variación de la aceleración o variación instantánea de la aceleración, que además se ha indicado como la derivada tercera, $s'''(t)$, no logra significación alguna en un 45% de los casos.
- Las afirmaciones que hacen a partir de la Cinemática como son: a) donde hay variación de velocidad hay una aceleración diferente de cero; b) la variación de posición indica la existencia de una velocidad diferente de cero, etc., son afirmaciones que no se reconocen en la gráfica; luego, nos hace pensar que

ésta no les ayuda a evolucionar en el problema, más bien parece que les lleva a donde el teorema factual está muy presente, en un 82% de los casos.

- En esta primera etapa se nota la necesidad de apoyarse en lo algebraico, como las fórmulas de la cinemática, para avanzar en la resolución de un problema físico. Visualizar el problema a través de una gráfica ofrece una herramienta poderosa para las ciencias experimentales, ya que permite predecir la evolución del fenómeno sin la necesidad de apoyarse exclusivamente en el modelo algebraico. Esto creemos que está poco explotado en nuestro sistema de enseñanza.

A continuación presentamos un cuadro donde se resumen, para cada estudiante, las características relevantes observadas en su producción. Dichas características las podemos englobar así:

1. Busca una fórmula algebraica que le ayude a resolver el problema.
2. Observa alguna característica, en la gráfica de la función que ha construido, que le permita reconocer los puntos notables de la gráfica de la función derivada primera.
3. Ídem para el caso de la función derivada segunda.
4. ¿La aceleración es una función derivable?
5. ¿La gráfica, que construye con los puntos dados en la tabla, es derivable en todo el intervalo?
6. Aparece el teorema factual: $s = 0 \to v = 0 \to a = 0$.

En el cuadro que mostramos a continuación consideramos estas seis características para resaltar cómo se ponen de manifiesto en la producción individual de los estudiantes; para ello utilizamos la siguiente simbología:

+	Cuando a través de su producción se infiere una resolución satisfactoria o positiva de la situación planteada.
-	Cuando la producción del estudiante es poco satisfactoria o negativa para poder resolver la situación planteada.
O	No contesta
/	Aborda el problema en forma positiva aunque no llega a una resolución satisfactoria del mismo.

ALUMNOS	CARACTERÍSTICAS RELEVANTES					
	1	2	3	4	5	6
ALICIA	+	O	O	O	+	+
PENÉLOPE	+	+	_	/	_	+
INMA	_	+	+	+	_	_
SUSANA	+	_	_	+	_	+
ROSARIO	_	_	_	_	O	_
MANUEL	_	+	_	O	_	+
LIDIA	+	_	_	O	+	+
M. DEL CARMEN	+	_	_	O	_	+
RAFAEL	_	_	_	+	O	+
DAVID	+	_	_	O	+	+
M. CARMEN R.S.	+	_	_	/	+	+

Tabla 4.5. Características relevantes en la producción individual de los estudiantes en la situación 2.

A continuación realizamos un análisis cualitativo y cuantitativo de cada ítem de esta segunda situación-problema.

3.- Categorización y catalogación de las respuestas

Categorización de respuestas para el ítem a)

CATEGORÍA	PORCENTAJE
La velocidad es cero en los instantes en que el móvil cambia de sentido; además en $t = 4$ porque se detiene.	36 %
La velocidad es cero donde s toma el valor cero.	27 %
Toma t en el eje de las ordenadas y s en el eje de las abscisas. Utilizan las ecuaciones de la Cinemática para el M.R.U. y M.R.U.A.	18 %

Dibuja el tiempo en el eje de las ordenadas y *s* en el eje de las abscisas. La velocidad instantánea es cero en los máximos y mínimos de la función.	9 %
No toma nunca el valor cero ya que el móvil está siempre en movimiento.	9 %

Tabla 4.6. Categorización de las respuestas a la situación 2 a.

Catalogación de las respuestas para el ítem a)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	2,2
NÚMERO DE ALUMNOS	3	3	5	0	

Tabla 4.7. Catalogación de las respuestas a la situación 2 a.

Categorización de respuestas para el ítem b)

CATEGORÍA	PORCENTAJE
La aceleración es cero donde $v = 0$.	64 %
La aceleración nunca toma el valor cero porque la velocidad cambia en todos los instantes	18 %
La aceleración es cero donde la velocidad disminuye.	9 %
La aceleración se anula donde el tiempo es cero.	9 %

Tabla 4.8. Categorización de las respuestas a la situación 2 b.

Catalogación de las respuestas para el ítem b)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	1.3
NÚMERO DE ALUMNOS	8	3	0	0	

Tabla 4.9. Catalogación de las respuestas a la situación 2 b.

Categorización de respuestas para el ítem c)

CATEGORÍA	PORCENTAJE
No sabe o no contesta.	46 %
No toma el valor cero o no puede asegurar que tome el valor cero en algún punto del intervalo.	27 %
La variación de la aceleración, $s'''(t)$, toma el valor cero donde $s(t) = 0$.	18 %
Sí, donde $v = 0$.	9 %

Tabla 4.10. Categorización de las respuestas a la situación 2 c.

Catalogación de las respuestas para el ítem c)

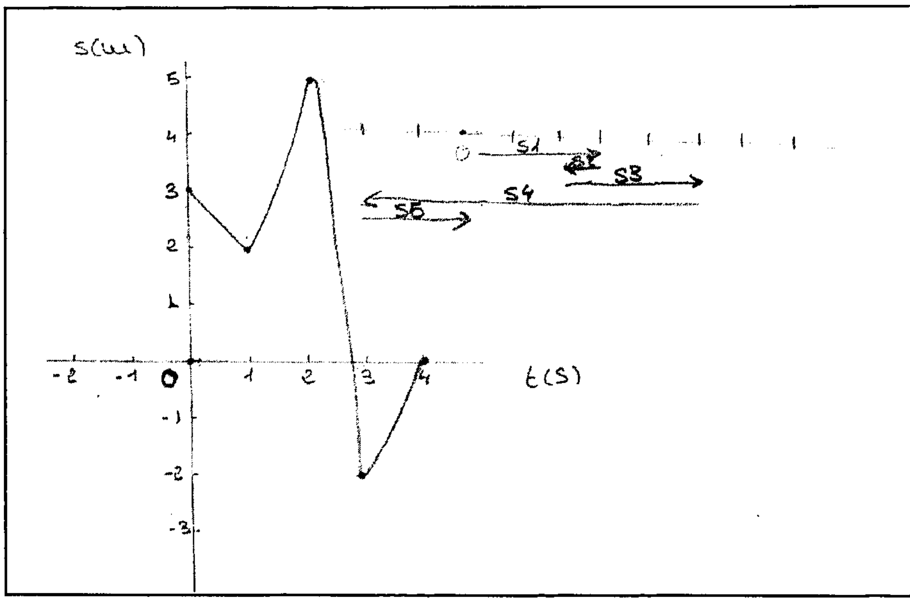
	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	1.2
NÚMERO DE ALUMNOS	9	2	0	0	

Tabla 4.11. Catalogación de las respuestas a la situación 2 c.

Hay un porcentaje del 27 % que utiliza s como variable independiente en lugar del tiempo. Podemos afirmar que el contexto es fundamental porque, como vemos, se centran en él y no utilizan como herramientas los conceptos estudiados en otros contextos y disciplinas.

4.- Muestra representativa de la producción de los alumnos

A continuación presentamos una muestra representativa de la producción de los estudiantes.



a) la velocidad es la derivada de la posición con respecto del tiempo. Al ser la velocidad instantanea debe de ser en un instante dado.

$v = \frac{ds}{dt}$

$s(0) = 3\cdot t$ $\qquad v(0) = \frac{ds(0)}{dt} = 3$

$s(1) = 2t$ $\qquad v(1) = \frac{ds(1)}{dt} = 2$

$s(2) = 5t$ $\qquad v(2) = \frac{ds(2)}{dt} = 5$

$s(3) = -2t$ $\qquad v(3) = \frac{ds(3)}{dt} = -2$

$s(4) = 0t$ $\qquad v(4) = \frac{ds(4)}{dt} = 0$

la velocidad instantanea toma el valor 0 para $t = 4$

b) la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto del tiempo.

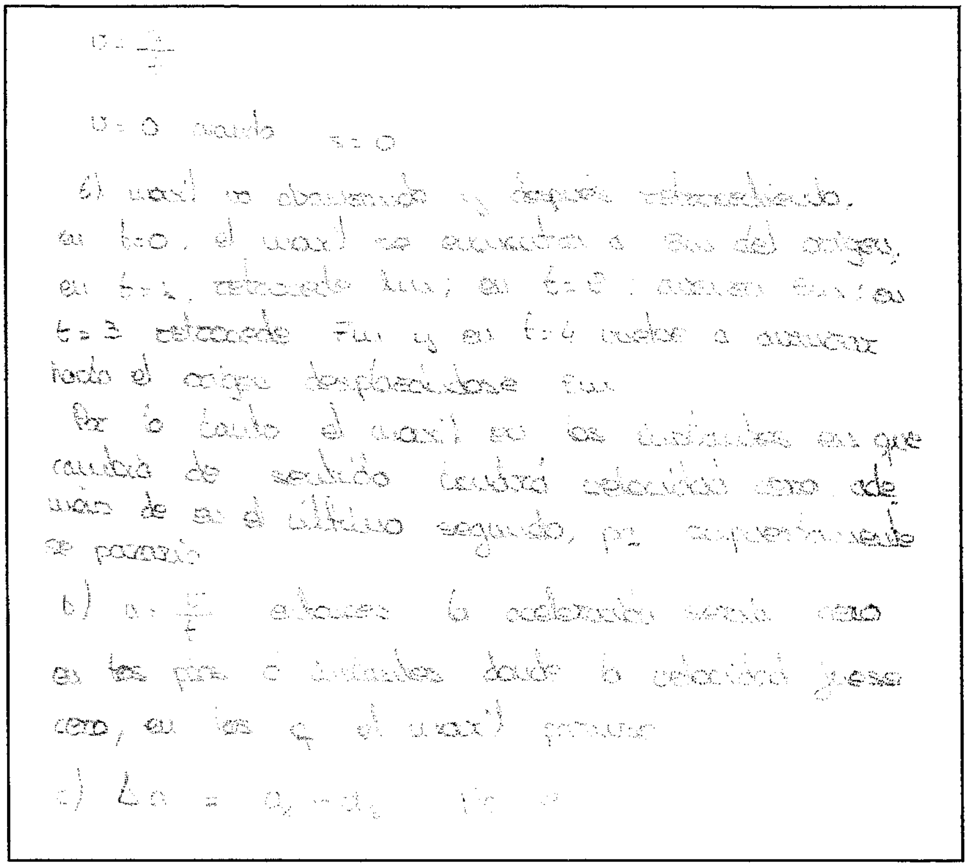
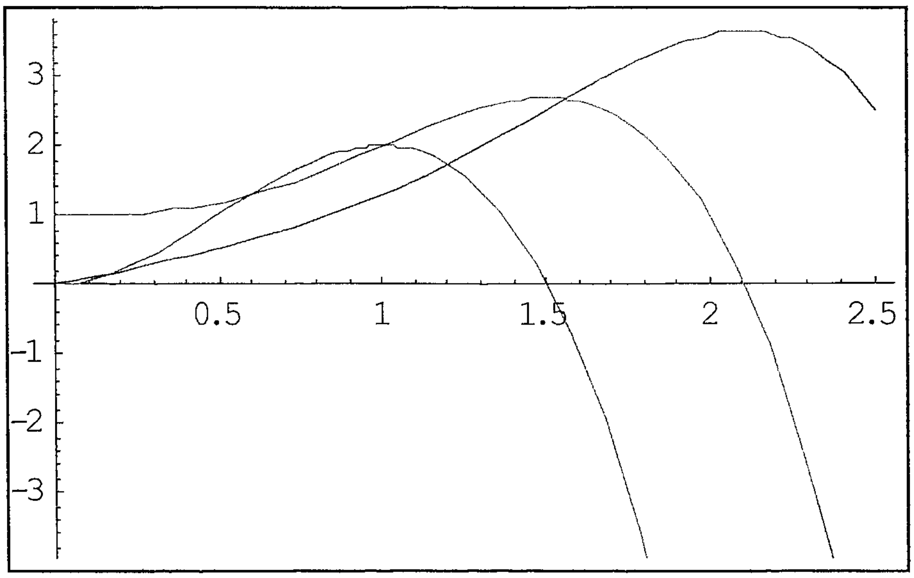


Figura 4.2. Muestra de la producción de los estudiantes a la situación 2.

❑ SITUACIÓN 3(3)

En la siguiente gráfica se representan la función de movimiento, s(t), la velocidad, s'(t), y la aceleración, s''(t), de un móvil.



¿Puedes identificar cada una?¿cómo?

1.- Producción de los alumnos

Alicia

Toma como gráfica de $s(t)$ la correcta, pero como explicación a esta elección dice *"porque describe un movimiento rectilíneo"*. El motivo que le lleva a elegir la gráfica correspondiente a $s'(t)$ es observar la parte final de la gráfica anterior, ésta presenta un máximo, por lo que dice que el movimiento disminuye, por lo tanto debe disminuir la velocidad. Al disminuir la velocidad disminuye también la aceleración, por lo tanto la tercera es la de la aceleración.

Observaciones

Intenta utilizar argumentos de la Cinemática para justificar su elección. No hace referencia a ninguna característica geométrica, ni puntos críticos de las curvas. Llega al resultado correcto pero no parece que modifique o construya nuevos conocimientos.

Penélope

Comienza tomando una escala en los ejes, lo que le permite hallar valores numéricos. Habla de rectas al referirse a las curvas. El criterio que utiliza para elegir la curva $s(t)$ es que es la única que en el instante inicial no pasa por el origen. Dice que la velocidad y la aceleración en el instante que se inicia el movimiento deben ser cero.

Observaciones

No utiliza ningún argumento del Cálculo para auxiliarse, y los de la cinemática sobre los que pretende apoyarse no son correctos.

Inma

Elige como gráfica de $s(t)$ la que pasa por el punto (0, 1), pero sin argumentos válidos, *"porque es la gráfica principal, y porque cuando hagamos su derivada se encontrará en el punto* (0, 0) *que serían las otras dos"*. Observa las formas de las gráficas y encuentra que la que llama A, que corresponde a $s'(t)$, y B, que corresponde a $s''(t)$, son similares de forma; dice que *"B es derivada primera de la A"*. En la realidad estas gráficas son una la derivada de la otra. Por último se plantea una pregunta *"¿por qué las gráficas A y B decrecen y C crece?"*

Observaciones

Habla de funciones derivadas pero le faltan argumentos para compararlas y reconocerlas.

Susana

Elige con acierto las gráficas y trata de dar una explicación cinemática que resulta muy intuitiva y poco rigurosa. Habla de rectas de la velocidad y aceleración cuando dice que deben ser parecidas, ya que la velocidad depende de la aceleración.

Observaciones

No utiliza en ningún momento las herramientas del Cálculo para explicar el problema. Intuye que hay una relación entre la velocidad y la aceleración pero no dice cuál. La derivada no la nombra.

Rosario

Hace varias elecciones que no justifica, salvo la que creemos que es la última. Ésta queda así, a la gráfica $s(t)$ la toma como tal, esto porque comienza desde cero y es creciente. En dos elecciones anteriores aparecen como $s(t)$ y $s''(t)$, respectivamente. A la gráfica correspondiente a la función velocidad dice que es $s''(t)$ porque "*la aceleración no tiene por qué partir de cero, en la posición 1 es cuando se produce el primer cambio de velocidad*". Anteriormente pensó en ella como $s'''(t)$ y $s(t)$. Por último dice que la gráfica de la aceleración es $s'(t)$ ya que la velocidad pasa por (0, 0).

Observaciones

Creemos que no ha pensado en la Matemática como una herramienta que le podría ayudar para avanzar en el problema. Se basa sólo en creencias pseudofísicas, tales como que la velocidad en el instante inicial siempre debe ser cero o que la función de posición debe iniciar en (0, 0) y ser creciente.

Manuel

En primer lugar propone elegir una de las gráficas como función original y luego tener en cuenta las relaciones que hay entre la gráfica de una función y las de sus funciones derivadas. No da la razón que le lleva a elegir como función de posición la que corresponde a la función derivada. Luego toma como $s'(t)$ a $s''(t)$ y a $s(t)$ como $s''(t)$. Cuando analiza los intervalos de crecimiento de la función ve que coinciden con el signo que debe tener la derivada de ésta en dichos intervalos. Esto va bien, ya que, en este caso una es la derivada de la otra. Para justificar la elección de la gráfica de la derivada segunda habla de sustituir los posibles puntos de inflexión en la gráfica de la segunda derivada y de esa manera, dice, nos confirmarán si estos valores son realmente valores extremos. Esto lo aplica para $t = 1.5$, en ese punto el valor de la función y el de su derivada segunda toman el valor 2. Esto, dice, nos demuestra que $s(t)$ tiene en ese punto un extremo. Plantea una duda, ¿por qué no se cumplen estas propiedades si considera a $s'(t)$ como función original y a $s''(t)$ como primera derivada de $s'(t)$?.

Observaciones

Utiliza las herramientas matemáticas aunque no con todo el potencial que ellas brindan. En la elección de la función de posición no sabemos qué criterios ha utilizado. Luego justifica la elección de la segunda derivada con una afirmación que es falsa, que es pensar que donde la función derivada segunda tiene un punto de inflexión la función presenta un extremo.

Lydia

Realiza la elección de las gráficas justificando de la siguiente manera, $s(t)$ "*es la línea de movimiento constante*"; toma la gráfica de $s''(t)$ como $s'(t)$ y dice "*es aquella que parte del mismo punto que el movimiento*", y por último toma como $s''(t)$ a la gráfica de $s'(t)$ porque un móvil puede partir de una aceleración dada, dice, y además la velocidad y la aceleración están relacionadas y por ello disminuyen ambas.

Observaciones

Se nota la ausencia de elementos matemáticos que le permitan hacer un análisis más profundo. En cuanto a la Física parece difícil pensar que un móvil tenga velocidad inicial; la relación entre velocidad y aceleración está presente, pero no muy clara con la función de posición.

María del Carmen

No explica explícitamente cuál es la razón de su elección. Observamos en sus respuestas que dicha elección está basada en algunas características de la función y de sus derivadas, que no en todos los casos son correctas. Toma como función, en la primera elección, la que corresponde a la derivada primera, como derivada primera a la gráfica de la derivada segunda y como derivada segunda a la gráfica de la función.

Luego hace una segunda elección que en ese caso es correcta. Dice a modo de justificación "*la función cuando es creciente, la derivada de dicha función decrece, cuando la función decrece la derivada de la función crece*". Y continúa "*cuando hay puntos máximos en la función, entonces la pendiente es cero, entonces en la derivada puede haber un máximo o un mínimo y segunda derivada punto de inflexión*".

Observaciones

No creemos que los argumentos que da le hayan ayudado a cambiar la elección, mas bien se nota que le parecen cosas que no las tiene demasiado interiorizadas.

Rafael

Su elección es tomar la gráfica de la velocidad como la del movimiento y viceversa, la gráfica del movimiento como la de la velocidad. La aceleración es correcta.

Argumenta lo siguiente para el caso de la velocidad "*es la velocidad del móvil debido a que aunque deje de acelerar sigue avanzando, por eso llega a 3 y se mantiene más tiempo que la aceleración y el movimiento*"; se refiere a la forma de estas dos últimas gráficas alrededor del tiempo $t = 2$. También habla de la inercia, pero luego se desdice. Analizando lo que ocurre en el origen dice "*además en cuanto acelera toma velocidad en forma paulatina, mientras que 2* (se refiere a la gráfica que ha escogido como la representación del movimiento) *empieza en la posición 1 directamente*".

Observaciones

Tiene una idea intuitiva del movimiento y trata con ella de explicar las gráficas.

David

Hace varias elecciones para decidir que la gráfica del movimiento es la de la velocidad y la velocidad la del movimiento, tomando al final acertadamente la aceleración. Da argumentos de los que luego se arrepiente y dice que no se le ocurre nada lógico. Trata de argumentar con ideas intuitivas del movimiento.

Observaciones

Aparece la idea de que una variación de velocidad indica una aceleración pero no aparecen los elementos matemáticos que modelicen el fenómeno.

<u>**Mari Carmen**</u>

Sobre las gráficas hace una elección pero cuando argumenta la cambia. La gráfica del desplazamiento que acaba tomando como la de la aceleración lo hace porque, dice, tiene poca variación y con el transcurso del tiempo tiende a ser constante. A la gráfica de la velocidad la toma como la del movimiento rectilíneo, "*debido a que al principio va recto pero conforme varía la aceleración y transcurre el tiempo junto con los metros, sufre algunas variaciones, además parte de un punto*". Por último a la gráfica de la aceleración la toma como la gráfica de la velocidad porque, dice, aumenta cuando se pone en marcha el automóvil pero disminuye conforme disminuyen los metros recorridos por un determinado tiempo.

Observaciones

Pone en juego los elementos intuitivos que tiene de la Cinemática para encontrar argumentos que le permitan resolver el problema. La Matemática está ausente.

2.- Conclusiones

Para finalizar diremos que, como desde el punto de vista de la Cinemática, el móvil para $t = 0$ puede hallarse en cualquier sitio, la mayoría piensa que debe hallarse en la posición (0, 1). También cabe pensar que tal movimiento puede tener velocidad inicial, pero el teorema factual, si $v = 0$ entonces $a = 0$, que está presente en la mayoría de los estudiantes y es una de las razones que les lleva a elegir las dos gráficas que pasan por (0, 0) como la representación de la velocidad y aceleración respectivamente, les lleva a concluir que hay una posición privilegiada.

Al pensar la derivada sólo como un proceso algebraico, los estudiantes no encuentran una correspondencia entre lo que hallan al derivar una función, dada en forma analítica, y el trabajo que supone reconocer estas gráficas. Aun en los casos que intentan pensar en ellas como las gráficas de las derivadas sucesivas, les faltan elementos y no acaban de construirlos en esta primera fase de la experiencia. En la mayoría de los alumnos, creemos que no se ha logrado elaborar o construir la relación que existe entre el fenómeno físico y los elementos matemáticos que les permitan modelizar tal fenómeno.

3.- Categorización y catalogación de las respuestas

Para hacer un análisis cualitativo y cuantitativo de las respuestas vamos a asignarle un número a cada una de las funciones, de la siguiente manera: 1 = $s(t)$, 2 = $v(t)$ y 3 = $a(t)$. Consideramos, en todos los casos, el siguiente orden *s-v-a,* que con los números asignados sería 1-2-3. El orden y el número indican la gráfica que los alumnos consideran que representa cada función.

En el siguiente cuadro presentamos la categorización de las respuestas:

CATEGORÍA	PORCENTAJE
2-1-3	36 %
1-2-3 (respuesta correcta)	27 %
2-3-1	27 %
1-3-2	9 %

Tabla 4.12. Categorización de las respuestas a la situación 3.

En el siguiente cuadro se muestra la catalogación de las respuestas:

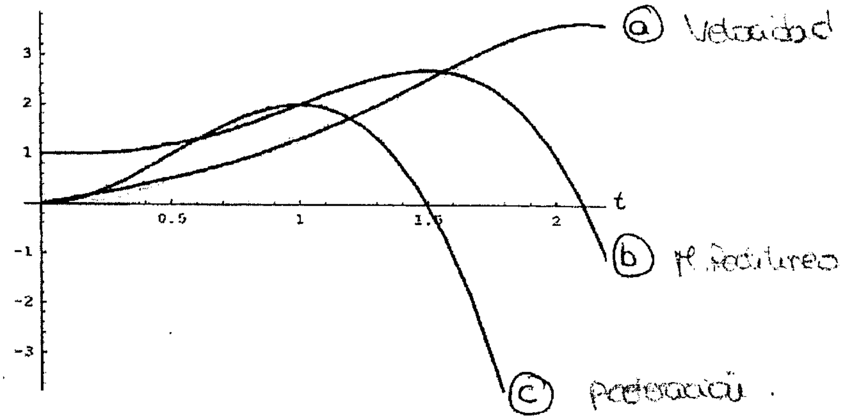
<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="4">PUNTOS</td><td>PUNTUACIÓN MEDIA</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td rowspan="2">2.2</td></tr>
<tr><td>NÚMERO DE ALUMNOS</td><td>1</td><td>7</td><td>3</td><td>0</td></tr>
</table>

Tabla 4.13. Catalogación de las respuestas a la situación 3.

A la luz de estos resultados creemos que en las etapas sucesivas de aprendizaje serán capaces de construir los elementos necesarios que les permitan, a partir de la gráfica de la función, reconocer algunas características de las gráficas de sus funciones derivadas.

4.- Muestra representativa de la producción de los alumnos

A continuación presentamos una muestra representativa de la producción de los estudiantes.



(a) Creo que corresponde a la aceleración porque tiene pocas variaciones, tiende ser, con el transcurso del tiempo y los metros recorridos, constante. Velocidad

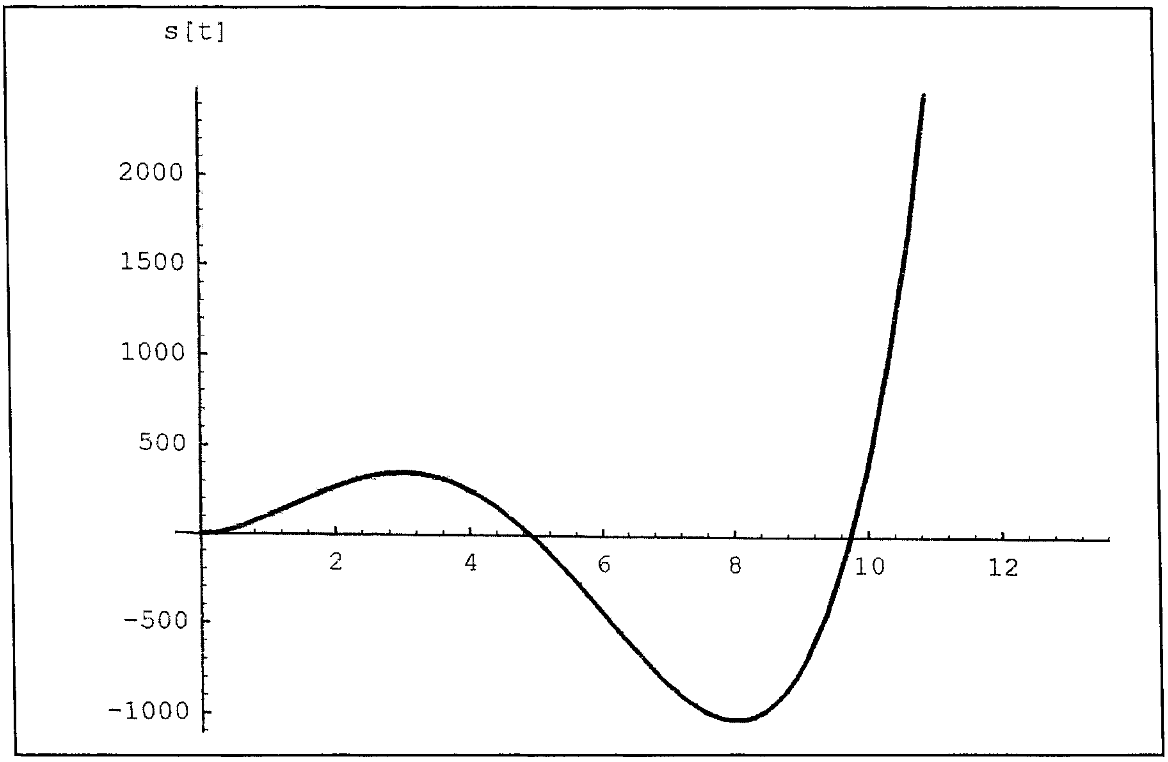
(b) Es el movimiento rectilíneo debido a que al principio uc recto pero conforme varía la aceleración y transcurra el tiempo junto a los metros, sufre algunas variaciones, además parte de un punto.

(c) Por lo tanto es la velocidad que aumenta cuando se pone en marcha el automóvil pero disminuye conforme disminuimos los metros recorridos por un determinado tiempo.

Figura 4.3. Muestra de la producción de los estudiantes en la situación 3.

❑ SITUACIÓN 4(4)

La función posición s(t) del movimiento de una locomotora que se desplaza sobre una vía recta viene descrita por la gráfica que se muestra.



a) *Indicar en qué intervalo o intervalos de tiempo va marcha atrás.*
b) *En forma aproximada dar los intervalos de tiempo donde la velocidad es positiva y donde es negativa.*
c) *Indica los intervalos de tiempo donde la aceleración es positiva y donde es negativa.*
d) *La tercera derivada da la variación instantánea de la aceleración. ¿Toma el valor cero en algún instante? ¿En cuántos?¿Por qué?*

1.- Producción de los alumnos

Alicia

a) En principio cree que la locomotora va marcha atrás cuando el desplazamiento es negativo pero luego rectifica diciendo, "*Acabo de darme cuenta que me he equivocado, creo que cuando va marcha atrás es simplemente cuando la curva desciende, respecto de las unidades de espacio ya que mide la distancia de la locomotora al punto de partida* (esto es lo que antes no tenía claro), *así que va marcha atrás del* $t = 3$ *al* $t = 8$".

b) Para indicar los intervalos donde la velocidad es positiva o negativa, considera $v = \frac{e}{t}$ y con ello infiere que como el tiempo es siempre positivo la velocidad será positiva donde el espacio sea positivo, es decir, de $t = 0$ a $t = 5$ y de $t = 10$ en adelante. Esto luego lo rectifica para decir "*la velocidad será negativa siempre que se retroceda, por lo tanto será de* 3 *a* 8 *segundos*".

c) Dice para el tercer apartado, "*la aceleración será negativa cuando la velocidad disminuya, por lo tanto, en el mismo intervalo en que la velocidad es negativa, de* 3 *a* 8 *segundos* ".

d) En el último apartado, al considerar los signos de la tercera derivada, dice que será negativa cuando la gráfica es negativa, es decir, de 5 a 10 segundos y positiva de 0 a 5 y de 10 para adelante.

Observaciones

El poco éxito alcanzado es evidente que se debe a que en ningún momento considera las herramientas matemáticas involucradas en el problema, como el concepto geométrico de la derivada y la tasa de variación.

Penélope

a) Considera el intervalo [3, 8] donde la locomotora va marcha atrás y lo ilustra dibujando la gráfica en ese intervalo.

b) Toma la velocidad como $\frac{s}{t}$ y de allí deduce que la velocidad es negativa o positiva según el signo de s. Entonces tiene en los intervalos [0, 5] y [9.5, 11] velocidad positiva. En el intervalo [5, 9.5], velocidad negativa. En todos los casos realiza la gráfica en los intervalos que ha elegido.

c) En el tercer apartado considera la aceleración como $\frac{v_f - v_0}{t}$, luego dice que la aceleración dependerá de los valores de la velocidad en dos puntos, es decir de la v_f y la v_0. Por tanto, la aceleración será negativa en (5, 9.5) y los intervalos de aceleración positiva son [0, 5] y [9.5, 11].

d) Este apartado no lo contesta porque dice que no lo sabe.

Observaciones

En el primer apartado hizo un buen razonamiento sobre la gráfica, sin embargo no pudo utilizar las herramientas matemáticas. Ello se debe, en parte, a un obstáculo cognitivo que se detecta en las definiciones de las magnitudes físicas $s(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ que utiliza.

<u>Inma</u>

a) El intervalo donde la locomotora va marcha atrás lo obtiene observando los puntos máximo y mínimo, y lo justifica diciendo que va desde el máximo, donde comienza a decrecer, hasta el mínimo, donde empieza a crecer. Para ilustrar dibuja el trozo de curva entre los dos extremos relativos.

b) En el segundo apartado da unos intervalos donde la velocidad es positiva y donde es negativa, luego los cambia. No justifica dicha elección ni el motivo del cambio. Dibuja una gráfica a la que llama "*gráfico velocidad*", donde excluye el intervalo entre los dos extremos relativos. A continuación transcribimos los intervalos que considera: velocidad positiva en (0, 5) y ($\approx$10, ∞); velocidad negativa en (5,$\approx$10). Luego los cambia por: velocidad positiva entre 0 y 3 y $\approx$10 a $+\infty$; velocidad negativa entre 8 y $\approx$10.

c) El intervalo donde dice que la aceleración es positiva es (3, 5), y negativa en (5, 8). Elige estos intervalos sin justificación.

d) Este último apartado no lo contesta.

Observaciones

Por su respuesta parece que el primer criterio que adopta para la elección de los intervalos en el apartado b) es que la velocidad es positiva donde la gráfica de $s(t)$ es positiva. Luego, cambia con acierto el primer intervalo, dando la sensación de que ha advertido el error; sin embargo esto no ocurre en el segundo intervalo, que lo deja inalterado. Para el caso de la velocidad negativa, cuando cambia el intervalo lo reduce considerando ahora como negativa la parte positiva. Por todo esto y por las respuestas dadas en el apartado c) nos resulta difícil, por el momento, obtener mayores conclusiones.

<u>Susana</u>

a) Considera que el intervalo donde la locomotora va marcha atrás es de $t = 3$ a $t = 8$ donde, dice, la $s(t)$ empieza a disminuir.

b) Responde a este apartado de la siguiente manera "*Aproximadamente, la velocidad es positiva en los intervalos de tiempo 0-2-4 y 10, y es negativa en los intervalos 6-8*".

c) Para la aceleración los intervalos positivos y negativos, dice, son los mismos que para la velocidad.
d) No responde.

Observaciones

Ante las respuestas dadas en los dos primeros apartados y la falta de argumentos, no nos es posible determinar en forma clara, por ahora, conclusiones.

Rosario

a) El intervalo de tiempo en que la locomotora va marcha atrás es (3, 8). Además hace una descripción de cómo ve el movimiento a lo largo de la gráfica
b) Los intervalos donde la velocidad es positiva son (1, 3) y (8, $+\infty$). La velocidad es negativa en (3, 8). No analiza lo que ocurre desde $t = 0$ a $t = 3$. Tampoco justifica las respuestas.
c) En este apartado da una primera respuesta tomando como negativa la velocidad en el intervalo (5, 8) porque, dice, en él la velocidad varía retrocediendo. El intervalo donde la aceleración es positiva es (8, $+\infty$) ya que, dice, "*varia la velocidad y lo que hace es avanzar de posición*". Sin embargo abandona estos criterios para concluir que la aceleración es positiva y negativa en los mismos intervalos donde lo es la velocidad. En este caso toma como positiva la aceleración en (0, 3).
d) Para este último apartado los intervalos positivos, dice, son (0, 5) y (9.75,$+\infty$), y el negativo (5, 9.75) "*ya que nos encontramos con un mínimo en el punto* (8,-1000)".

Observaciones

Para concluir, podemos decir que prima la idea de que los signos de la aceleración deben ser los mismos que los de la velocidad. Asocia la velocidad positiva y negativa con la tasa positiva y negativa, respectivamente, de la variación de $s(t)$ aunque no ha analizado qué sucede en las proximidades del cero. En el caso de la tercera derivada ha elegido los intervalos donde la función es positiva; esto nos hace pensar que la tercera derivada no tiene significación, para ella, dentro de la cinemática.

Manuel

a) La locomotora va hacia atrás en el intervalo (2.4, 8) porque la función es decreciente, entendiendo por hacia atrás el desplazamiento en sentido hacia abajo respecto del centro de coordenadas.

b) Para determinar los intervalos donde la velocidad es positiva y negativa estudia los intervalos de crecimiento de la función ya que éstos le ayudan a determinar, en forma aproximada, los signos en los diferentes intervalos de la gráfica de la primera derivada. Dice a continuación, "*como la función primera derivada es la expresión del vector velocidad, se puede determinar los intervalos en la cual ésta es positiva o negativa*". Para el primer caso considera los intervalos (0, 2.4) y $(8,+\infty)$, y es negativa en (2.4, 8).

c) En este apartado propone considerar como la función a analizar la función velocidad, luego la aceleración será la derivada de ésta. Por lo tanto estudiando la monotonía de la función velocidad hallará los intervalos aproximados donde la aceleración es positiva o negativa, con lo que determina que la aceleración es positiva en los intervalos (0, 2) y $(4.6, \infty)$, y es negativa en (2, 4.6). Dice además, "*hay que tener en cuenta que cuando partimos de v = 0 con sentido de desplazamiento negativo la aceleración es negativa, no porque desacelera la velocidad sino por el sentido del movimiento. Por el mismo razonamiento una aceleración positiva cuando el móvil se desplaza en sentido negativo actuará como desaceleradora de la velocidad*".

d) Así nos explica su postura respecto de este apartado "*No existe la variación instantánea de la aceleración en un intervalo de tiempo, pues ésta se halla por definición en un valor concreto de t, luego a cada valor de t corresponde una sola imagen, es decir un solo valor de la aceleración, no comprendo la posibilidad de una variación*".

Observaciones

Resumiendo, podemos decir que con este análisis obtiene buenas aproximaciones. Con las gráficas correspondientes corrobora sus resultados. Creemos que le faltó un análisis más profundo alrededor del cero.

Lydia

a) Toma como intervalo en el que la locomotora va marcha atrás $(5,\approx 9.75)$ porque en él "*la gráfica se vuelve*".

b) Los intervalos positivos son (0, 5) y $(9.75,+\infty)$ y negativo en (5, 9.75). Justifica esto diciendo: "*Este razonamiento lo hacemos fijándonos en la definición de* *velocidad que dice que* $v = \frac{s}{t}$*, es decir, la superficie por unidad de tiempo. Para que la velocidad sea positiva, la superficie ha de serlo, ya que, el tiempo no puede ser negativo. Por tanto la velocidad sería negativa cuando lo fuera la superficie*".

c) Con el mismo razonamiento y definiendo la aceleración como $a = \frac{s}{t^2}$, llega a la conclusión de que los signos de ésta y la velocidad deben ser los mismos.

d) La variación instantánea de la aceleración, dice, tiene los mismos signos que la velocidad porque ambas están relacionadas.

Observaciones

De nuevo tenemos aquí un claro ejemplo de la presencia del teorema factual.

<u>María del Carmen</u>

a) El intervalo de tiempo que va marcha atrás es el (3, 8) y lo justifica porque $s(t)$ en ese intervalo es decreciente.

b) En este apartado considera que $v = \frac{s}{t}$ y que por lo tanto cuando s es negativo la velocidad es negativa.

c) Con aceleración positiva toma los intervalos (3, 0), (8, 11) y es negativa en (3, 8) "*porque el móvil va frenando*".

d) No responde.

Observaciones

Como en ocasiones anteriores creemos que está muy presente el teorema factual.

<u>Rafael</u>

a) Primero, considera el intervalo (5, 10) justificándolo de la siguiente forma, "*este intervalo está en la posición por debajo del eje de ordenadas que indica que la locomotora esta retrocediendo, ya que el signo (-) nos indica un cambio de 180 grados en el sentido del movimiento, y es solo en este intervalo*". Luego rectifica considerando el (3, 8) y ahora lo justifica diciendo "*la gráfica muestra un descenso en el eje de abscisas que implica un cambio de sentido temporal de* 180 *grados*".

b) Considera los intervalos donde la velocidad es positiva en [0, 3] y [8, 11], "*porque el móvil avanza por el sentido positivo del eje vertical, avanzando kilómetros*". Es negativa en [3, 8], "*porque el móvil avanza en el sentido negativo del eje vertical, o sea, de abscisas*".

c) Lo mismo que para la velocidad.

d) Idem.

Observaciones

Para resumir diremos que no está suficientemente clara la justificación del apartado a). Las respuestas a los apartados c) y d) muestran la presencia del teorema factual.

<u>David</u>

a) El intervalo en que la locomotora va marcha atrás es [5, 9.75], "*ya que en este intervalo de tiempo el espacio que recorre es negativo y como la fórmula de la velocidad es* $v = \frac{e}{t}$ *y el tiempo es siempre positivo, cuando el espacio recorrido sea negativo la velocidad será negativa, y si es negativa la locomotora irá marcha atrás*".

b) Por la misma razón que ha expuesto en el apartado a) dice que los intervalos donde la velocidad es positiva son, [0, 5] y [9.75, +∞). Luego añade, "*la velocidad la indica la derivada primera de la función*".

c) Los intervalos donde la aceleración es positiva los considera igual que los de la velocidad ya que la aceleración la define por la fórmula $a = \frac{e}{t^2}$. Por último dice "*la aceleración la indica la derivada segunda de la función*".

d) Mantiene el mismo criterio para este apartado.

Observaciones

Aquí, además del teorema factual, está presente un obstáculo cognitivo que se detecta en la definición de las magnitudes físicas $v(t)$ y $a(t)$ que utiliza.

<u>Mari Carmen</u>

a) El intervalo de tiempo, por su respuesta, en que considera que la locomotora va marcha atrás es desde $t = 5$ a $t = 10$. Parece que toma la gráfica del desplazamiento como la de la velocidad ya que dice que de $t = 3$ a $t = 5$ "*la locomotora disminuye su ritmo y llega un momento en el que se para, no aumenta (t = 5)*".

b) En este apartado se confirma nuestra sospecha, ya que, al preguntarle en qué intervalos la velocidad es positiva y donde negativa, contesta que es positiva de $t = 0$ a $t = 5$ y de $t = 10$ en adelante, y es negativa de $t = 5$ a $t = 10$.

c) Al responder sobre la aceleración, considera los intervalos positivos donde la gráfica *s(t)*, que ella supone una *v(t)*, es creciente y es negativa donde dicha gráfica es decreciente. Es decir, positiva de $t = 0$ a $t = 5$ y de $t = 8$ en adelante. Es negativa de $t = 3$ a $t = 8$.

d) Este apartado no lo contesta.

Observaciones

Resumiendo, podemos decir que confunde las gráficas de $s(t)$ con $v(t)$. Además, no realiza ningún análisis en $t = 0$.

2.- Conclusiones

El poco éxito alcanzado es evidente que se debe, entre otras cosas, a que se centran en el contexto físico, casi exclusivamente, olvidando las herramientas matemáticas involucradas en el problema, como:

- el concepto de tasa de variación.
- el concepto geométrico de la derivada.
- las características de la gráfica de la función y cómo ellas se reflejan en las funciones derivadas.

En el contexto físico observamos un obstáculo cognitivo en el concepto de las magnitudes físicas $s(t)$, $v(t)$ y $a(t)$, por cuanto es evidente por sus respuestas que en ellos priman las siguientes definiciones: $v = s/t$, $a = v/t$.

Como consecuencia, observamos que:

- Se ha instalado en ellos el *teorema factual*: $s = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow a' = 0$.
- La idea de que en todos los casos los signos de la aceleración deben ser los mismos que los de la velocidad.

3.- Categorización y catalogación y de las respuestas

Realizamos a continuación un estudio cualitativo y cuantitativo de las respuestas dadas a esta situación-problema. Consideramos este estudio por ítems.

Categorización de respuestas al ítem a)

CATEGORÍA	PORCENTAJE
En el intervalo donde la función $s(t)$ es decreciente (3, 8) (respuesta correcta).	73 %
Donde $s(t)$ es negativa (5, 9.7).	27 %

Tabla 4.14. Categorización de las respuestas a la situación 4 a.

Catalogación de respuestas al ítem a)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	3,4
NÚMERO DE ALUMNOS	0	3	1	7	

Tabla 4.15. Catalogación de las respuestas a la situación 4 a.

Categorización de respuestas al ítem b)

CATEGORÍA	PORCENTAJE
La velocidad tiene los mismos signos que s.	46 %
La velocidad es positiva en los intervalos (0, 3), (8, 12) y es negativa en (3, 8) (respuesta correcta).	36 %
Otros intervalos.	18 %

Tabla 4.16. Categorización de las respuestas a la situación 4 b.

Catalogación de las respuestas al ítem b)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	1,8
NÚMERO DE ALUMNOS	7	1	1	2	

Tabla 4.17. Catalogación de las respuestas a la situación 4 b.

Categorización de respuestas al ítem c)

CATEGORÍA	PORCENTAJE
La aceleración tiene el mismo signo que la velocidad.	73 %
Otros intervalos.	18 %
La aceleración es positiva aproximadamente en los intervalos (0,1.4), (6,12) y negativa en (1.4,6) (respuesta correcta).	9 %

Tabla 4.18. Categorización de las respuestas a la situación 4 c.

Catalogación de las respuestas al ítem c)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	1.3
NÚMERO DE ALUMNOS	9	1	1	0	

Tabla 4.19. Catalogación de las respuestas a la situación 4 c.

Categorización de respuestas al ítem d)

CATEGORÍA	PORCENTAJE
No contesta o no sabe.	46 %
Tiene los mismos signos que la aceleración.	27 %
Otros intervalos.	27 %
El tirón es positivo en (3.6, 12) y negativo en (0, 3.6) (respuesta correcta).	0 %

Tabla 4.20. Categorización de las respuestas a la situación 4 d.

Catalogación de las respuestas al ítem d)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	1.2
NÚMERO DE ALUMNOS	9	2	0	0	

Tabla 4.21. Catalogación de las respuestas a la situación 4 d.

4.- Muestra representativa de la producción de los alumnos

A continuación presentamos una de las producciones representativas del trabajo realizado por los alumnos.

a) La locomotora irá marcha atrás en el intervalo (5, 19'75), ya que la gráfica se vuelve negativa indicando un retroceso de unas 1000 unidades en la superficie.

b) Aproximadamente, la velocidad es positiva en los intervalos (0, 5) y (9'75, +∞) y negativa en (5, 9'75)
Este razonamiento lo hacemos fijándonos en la definición de velocidad que dice que la $v = s/t$, es decir, la superficie por unidad de tiempo.
Para que la velocidad sea positiva, la superficie ha de serlo, ya que, el tiempo no puede ser negativo. Para la velocidad sería negativa cuando lo fuera la superficie

c) Siguiendo con el razonamiento anterior, la aceleración está definida como la velocidad entre unidad de tiempo ($a = \frac{v}{t}$)
sustituyendo la velocidad, obtendríamos:

$$a = \frac{s\cancel{t}}{\cancel{t}} \; ; \; a = s \quad \text{NO} \qquad a = \frac{s}{t^2}$$

Según esto, la aceleración sería positiva cuando lo fuera la superficie [(0,5) y (9'75, +∞)] y negativa cuando lo fuera la superficie (5, 9'75).

d) La ~~aceleración~~ variación instantánea ~~de~~ ~~en~~ de la aceleración es positiva cuando lo es la velocidad porque ambas están relacionadas. Sería positiva de (0,5) y (9'75, +∞) y negativa en (5,9'75). Para el razona

Figura 4.4. Muestras de la producción de los estudiantes en la situación 4.

SITUACIÓN 5(6)

Desde la terraza de un edificio de altura s_0 se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Esta situación viene descrita por la siguiente ecuación diferencial:

$s'' = -g$, *donde g es la aceleración de la gravedad.*

Predecir la posición de la pelota para cualquier instante t, es decir, hallar la expresión de s(t). Utilizar como herramienta de predicción la serie de Taylor.

1.- Producción de los alumnos

Alicia

Lo primero que hace es tratar de resolver la ecuación diferencial propuesta integrando dos veces. Cuando integra no tiene en cuenta las constantes de integración, ni las condiciones iniciales dadas en el enunciado, por lo que llega a la siguiente expresión: $s(t) = -g\frac{x^2}{2}$. Este resultado lo sustituye en la fórmula de Taylor y llega a la expresión anterior, ya que considera "$s'(t_0) = s'(0) = -g0 = 0$".

Observaciones

En este momento le resulta más familiar el paso inverso de la derivada, que es la integral. No utiliza bien las condiciones iniciales en ninguno de los dos casos; de hacerlo para el caso de Taylor se hubiera sorprendido con el resultado y seguramente hubiera intentado encontrar alguna explicación. Creemos que utilizó Taylor para verificar el resultado hallado a través de las integrales.

Penélope

Para situarse hace un dibujo que ilustra el enunciado del problema. Luego, reemplaza la notación por otra más comúnmente utilizada para estas magnitudes físicas. Al sustituir en el primer término, $s(t_0)$, lo hace por cero sin tener en cuenta que es una condición inicial del problema, s_0. Después de efectuar algunas operaciones llega a la expresión $s(t) = v_0 - g + a_i \dots$.

Observaciones

Al final se nota la necesidad de apoyarse en lo que para ella tiene mayor significación, que es la relación $a = \frac{v}{t}$.

Inma

Utiliza un dibujo para situarse en el enunciado del problema. A continuación, transcribe la fórmula cometiendo un error. Por último llega a que $s(t) = -gt^2$ sin más que reemplazar $t_0 = 0$.

Observaciones

El error que comete al transcribir la fórmula nos muestra la escasa significación que para ella tiene.

Susana

En la serie, que se le presenta en el enunciado, toma el primer término igual a cero y luego, sin más, despeja $s''(t_0)$.

Rosario

Esboza un dibujo ilustrando la situación planteada y a continuación escribe la fórmula: $s(t) = s_0 + v_0 t - gt^2$.

Manuel

Hace una gráfica de la situación del problema. En ella sitúa el origen del sistema de coordenadas a una distancia s_0 del suelo. Considera algunas magnitudes físicas con los siguientes valores:

$$g = 9.8\frac{m}{s^2},\quad v_0 = 0\frac{m}{s},\quad v_f = 0\frac{m}{s},\quad e_0 = 0m,\quad e_f = (s_0 + x)m,\ t_0 = 0s.$$

Con estos valores reemplaza en la fórmula de Taylor y obtiene como resultado $s(t) = s_0$, del que dice que no es un resultado con sentido. Luego, continúa considerando que $s''(t) = -g \rightarrow s''(0) = -9.8$; con esto vuelve a reemplazar en la fórmula de Taylor que, al igual que en el caso anterior, sólo considera hasta el término de segundo grado. Ahora obtiene como resultado $s(t) = \dfrac{-9.8t^2}{2}$, ya que consideró que $s(0) = 0$ y que $s'(0) = v_0 = 0$.

Para verificar, calcula las derivadas primera y segunda de $s(t)$ y, por último, halla los valores de $s(0)$, $s'(0)$ y $s''(0)$.

Lydia

Lo primero que se le ocurre es integrar dos veces, con lo que halla que $s(t) = -g\frac{x^2}{2}$. Vemos que se equivoca al considerar la variable, pero lo que llama más la atención es que no considera las constantes de integración. A continuación trabaja con la fórmula de Taylor, donde considera el espacio inicial y la velocidad inicial cero, con lo cual el resultado que obtiene es el mismo que integrando.

Para verificar, primero iguala $s(t)$ a cero, con lo que halla para $t = 0$, $s(t) = 0$. Creemos que este resultado no le satisface porque lo rechaza y concluye diciendo: "*Para verificarlo damos valores a t dando la variación del movimiento en el intervalo*".

María del Carmen

Comienza con un pequeño dibujo, luego reemplaza en la serie de Taylor t_0 por cero. Vuelve a escribir la serie, pero ahora, salvo el primer término que lo sigue considerando en $t_0 = 0$, los restantes los vuelve a escribir en función de t_0. En la misma, reemplaza $s''(0)$ por $-g(t_0)$.

Rafael

No responde sobre esta situación.

David

Comienza diciendo, "*La integral es la inversa de la derivada, por lo tanto para conseguir s(t) basta con integrar la s''(t) = -g hasta conseguir s(t)*". Así es como integra dos veces y halla $s(t) = \frac{-gx^2}{2}$; notamos que hay una confusión en las variables. Pero lo que realmente llama la atención es que no se percate de que en los dos casos la integral es indefinida, luego hay dos constantes de integración que tendrá que determinar y por lo tanto será necesario considerar otros elementos que, en este caso, son parte del problema.

A continuación trabaja con Taylor y llega al resultado anterior, ya que considera los dos primeros términos del desarrollo iguales a cero. Para ver si satisface la ecuación, dice que se le dan valores a t.

Mari Carmen

Realiza una gráfica cartesiana de $s(t)$, que es aproximadamente una parábola que corta al eje y en s_0.

2.- Conclusiones

Resumiendo, sobre esta situación queremos resaltar que la mayoría de los alumnos habían visto, en forma sucinta, el concepto de la *fórmula y serie de Taylor* en una etapa que hemos dado en llamar **etapa de la enseñanza preparatoria** (Anexo 2). A pesar de que en todos los manuales de COU consultados aparece el concepto de polinomios de Taylor, desde comienzos de los años 90 no se incluye en los programas de enseñanza secundaria. Aquellos alumnos que saben, de sus clases de Bachillerato, que la integración es la operación inversa de la derivación se sienten muy satisfechos al encontrar resultados aproximados al resolver por ambos caminos.

Podemos señalar algunas causas que creemos que han influido negativamente a la hora de resolver con éxito este problema.

- No son interpretadas ni física ni matemáticamente las condiciones iniciales; pensamos que una de las causas puede deberse a la notación utilizada.
- La integral se ha visto como una operación inversa a la derivada, por lo que prima este concepto sobre el nuevo, Teorema de Taylor, al que por razones de programación se le ha dedicado poco tiempo.
- Ningún alumno tiene en cuenta las constantes de integración.
- Los que han utilizado los dos métodos llegan al mismo resultado, como consecuencia de lo dicho anteriormente; por lo tanto son incorrectos.

3.- Categorización y catalogación de las respuestas

A continuación realizamos un estudio cualitativo y cuantitativo de las respuestas dadas por los estudiantes a esta situación problema.

Categorización de las respuestas:

CATEGORÍA	PORCENTAJE
Utiliza la serie de Taylor pero no logra calcular con éxito todos sus términos.	64 %
No sabe o no contesta.	27 %

Utilizan la serie de Taylor para verificar el valor de $s(t)$ que previamente han hallado integrando dos veces.	9 %

Tabla 4.22. Categorización de las respuestas a la situación 5.

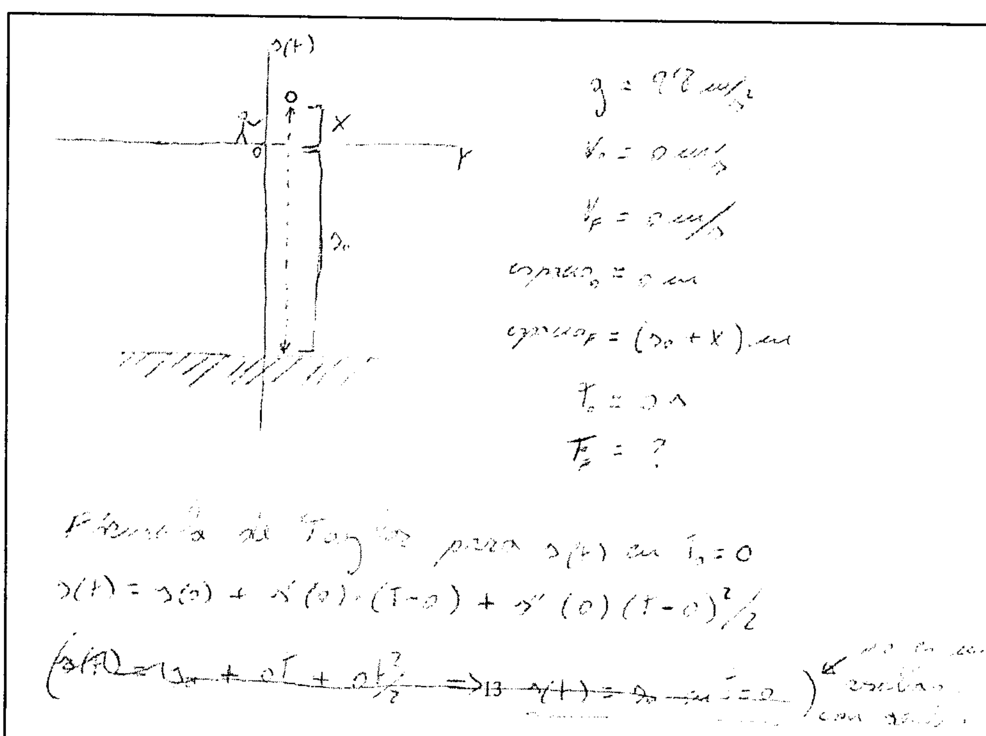
Catalogación de las respuestas:

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	3	1	7	0	2.4

Tabla 4.23. Catalogación de las respuestas a la situación 5.

4.- Muestra representativa de la producción de los alumnos

Presentamos, a continuación, una producción representativa del trabajo de los estudiantes.



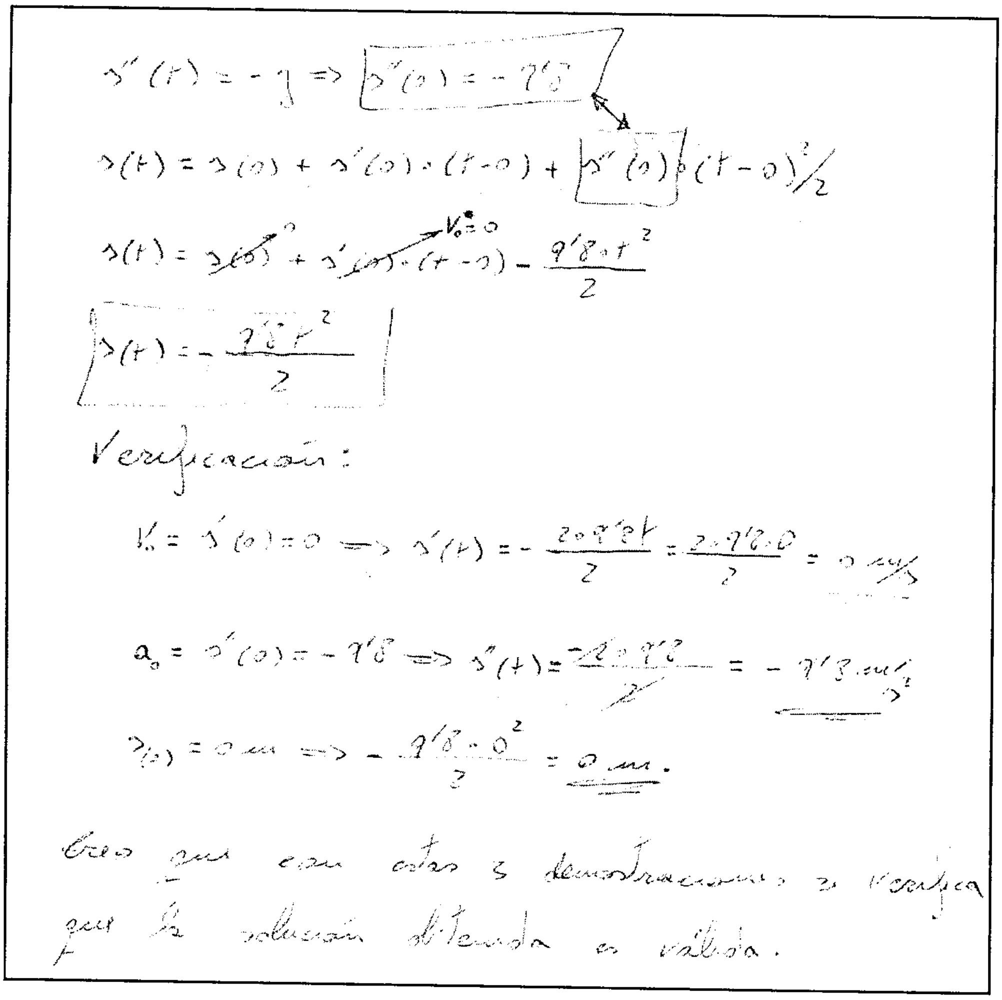


Figura 4.5. Muestras de la producción de los estudiantes en la situación 5.

4.2 - ETAPAS DE FORMULACIÓN Y VALIDACIÓN

En este apartado analizaremos el trabajo realizado por cada uno de los tres equipos que se formaron durante la actividad. Nuestro objetivo es, con base en el análisis a priori, que mediante el trabajo en equipo se logre un avance con respecto a lo que cada uno de los alumnos logró construir en la etapa previa, denominada de acción. En las etapas de formulación y validación se emplearon aproximadamente 3 horas.

Al igual que en la **etapa de acción**, el análisis se realiza para cada una de las situaciones-problemas, presentándose a continuación las evidencias más relevantes que se encontraron en la discusión realizada por cada grupo de alumnos. En esta etapa se grabó en cinta de audio el desarrollo de la situación didáctica; aquí se transcriben la mayoría de los episodios de aprendizaje. En la trascripción de los diálogos producidos en el seno de los distintos equipos, hemos utilizado algunos símbolos con el siguiente significado:

- // se produce un silencio.
- ... frase inconclusa.
- ... cuando se encuentran solos en un renglón significan que continúan los intercambios verbales entre los componentes del grupo, sin relevancia para el aprendizaje.

Para realizar un análisis cuantitativo de estas etapas, una vez que hemos trascrito el material grabado en audio, estudiamos las relaciones entre los intercambios verbales que se producen, dentro y entre los equipos de estudiantes, en los episodios de aprendizaje seleccionados. Esto nos dará una medida del aprendizaje que sus miembros experimentan colectiva e individualmente.

Para un análisis más exhaustivo de los intercambios verbales que se producen dentro de cada equipo hemos utilizado parcialmente las categorías de interacción, según las investigaciones de Cohen (1994), Webb, Troper y Fall (1995) y Rodríguez y Escudero (2000). Hemos adaptado a nuestra investigación algunas de las categorías que ahí se señalan en la siguiente forma:

- **Carácter cognitivo**, si las interacciones verbales están relacionadas con la tarea que están realizando.

  En ella, consideramos tres subcategorías:

  - *Emisiones*, debidas a locuciones verbales emitidas en las que se da ayuda, se pide ayuda, se cometen errores.
  - *Recepciones*, debidas a locuciones verbales recibidas cuando se ha pedido ayuda o se contesta uno a sí mismo.
  - *Práctica posterior*, debidas a locuciones verbales en las que se pone en práctica la ayuda recibida o simplemente se expresa aprobación.

- **Carácter organizativo**, cuando no se corresponden con la tarea en sí misma sino más bien con su organización.

  Dentro de ésta distinguimos dos subcategorías:

  - *Integradoras*, cuando se invita a participar en la tarea.
  - *Directivas*, cuando se dan instrucciones.

Nuestra participación, en estas etapas, ha sido casi exclusivamente de carácter organizativo.

Hemos asignado un puntaje a cada tipo de locución considerada en las distintas subcategorías. Para la asignación de este puntaje (0 o 1) nos hemos basado en la existencia de una correlación positiva y significativa entre algunas de estas interacciones y el aprendizaje (Cohen, 1994; Webb, Troper y Fall, 1995 y Rodríguez y Escudero, 2000). Todo lo anterior lo hemos esquematizado en la siguiente tabla:

DE CARÁCTER COGNITIVO			DE CARÁCTER ORGANIZATIVO
Emisiones	*Recepciones*	*Práctica posterior*	Integradoras (I)(0)
Dar ayuda (DA), (1) Pedir ayuda (PA), (0) Cometer errores (E), (0)	Recibir ayuda con petición (RA), (1) Contestarse a sí mismo (AR), (0)	Poner en práctica la ayuda recibida (UAR), (1) Expresar aprobación (EA), (0)	Directivas (D)(0)

Tabla 4.24. Sistema de categorías y puntaje para el análisis del habla.

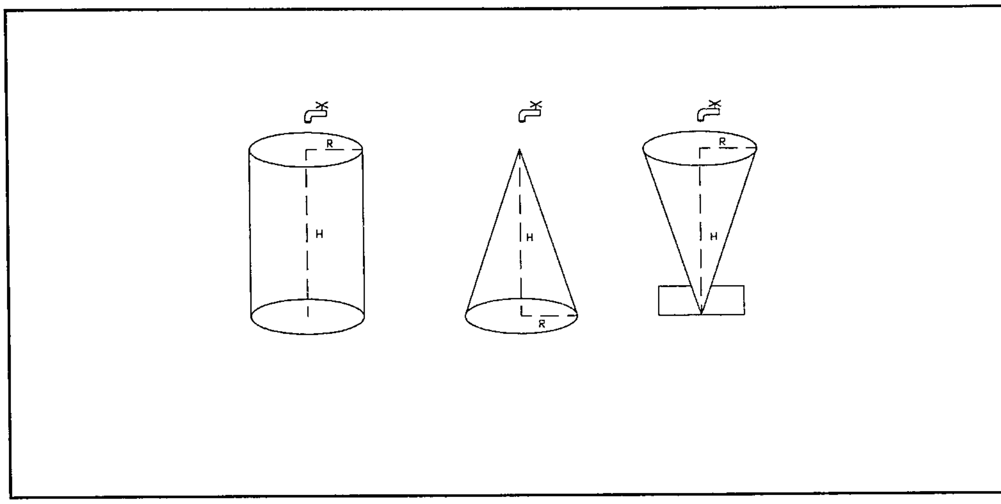
Estas etapas de aprendizaje son las previstas dentro de la ingeniería didáctica que estamos desarrollando. Por lo tanto, el grupo de alumnos es el mismo que ha trabajado la etapa de acción, analizada en el apartado anterior, y que cursaban el primer año de la Licenciatura en Biología. La composición de los equipos ha sido heterogénea; para ello nos hemos basado en el trabajo de los estudiantes en la etapa anterior, quedando constituidos de la siguiente manera:

EQUIPO A1 (E-A1): Alicia (A), Penélope (P), Inma (I), y Susana(S).
EQUIPO A2 (E-A2): Rosario (R), Manuel (M), Lydia (L) y María del Carmen (M del C).
EQUIPO A3 (E-A3): Rafael (R), David (D) y Mari Carmen (MC).

Pasamos a transcribir desde las cintas de audio algunos episodios de aprendizaje que se han producido en esta etapa. Los intercambios verbales entre los componentes del grupo serán enumerados en forma secuencial. Dicha enumeración será utilizada posteriormente en el cuadro donde se califica cada elocución.

❑ SITUACIÓN 1(1)

Consideremos dos tanques, uno cilíndrico y el otro con forma de cono circular recto con vértice hacia arriba (como se muestra en la figura); ambos tienen igual radio y altura. En ellos se vierte agua a un ritmo constante, comenzando al mismo tiempo.



a) Bosqueja, en los mismos ejes, una gráfica h(t) (altura en función del tiempo) asociada con el llenado de los dos recipientes, en las condiciones descritas anteriormente. Compara las gráficas y escribe todo lo que puedas concluir sobre ellas.

b) ¿Cambian las gráficas si invertimos la posición de los recipientes? (ver figura). ¿De qué manera? Haz un bosquejo como en el apartado anterior.

c) Bosqueja, en los mismo ejes, la tasa de variación de h(t). Compáralas.

En esta actividad, al comenzar la etapa de formulación, hemos agregado el último ítem.

- **E-A1**

Episodio de aprendizaje

Comienzan la discusión tratando de aclarar cuál es la diferencia entre dibujar $h(t)$ para cada uno de los recipientes y la tasa de variación de la altura con el tiempo. Llegan a concluir que es lo mismo que se les pedía antes, sólo que ahora deben dibujarlas en un mismo par de ejes. Surge también, a lo largo de la discusión, que el pedir que se dibujen juntas debe ser para poder compararlas. Esto les lleva a concluir que al principio las gráficas coinciden, pero rápidamente se alejan estando la del cono por encima del cilindro.

Con todo, vuelven a repetirse lo de "*tasa de variación*", notándose claramente que carece de significación para el grupo. Es Alicia quien para concluir dice:

A: *Esto debe ser, más tiempo, más altura; en cambio en el cilindro, igual tiempo, igual altura.*

Para acabar de convencerse prueban con algunos valores numéricos.

Aquí no hay un episodio de aprendizaje relevante, si bien sería Alicia, en este caso, quien al verbalizar las conclusiones obtiene más beneficio en el intercambio. Por lo tanto no haremos en este caso un análisis verbal.

Lo positivo de esta discusión es que acabó creando un conflicto que en principio es de lenguaje. Una terminología análoga se había utilizado, en otro contexto, en una pre-etapa de la experiencia (Anexo 2).

- **E-A2**

Manuel, en esta primera hora de trabajo, está ausente.

Episodio de aprendizaje

Comienzan revisando las gráficas que han obtenido, en cuanto a sus formas. Se hallan de acuerdo en que para el caso del recipiente cónico es una curva y en el otro caso el fenómeno viene descrito por una recta.

Cuando se invierten los recipientes, están las tres de acuerdo en que la gráfica del recipiente cilíndrico no varía; en cuanto al cónico, dicen:

1 -**R**: *Se llenan al mismo tiempo.*

2 -**L**: *No, el tiempo de llenado es la tercera parte que la del cilindro.*

3 -**R**: *No, me refiero al mismo recipiente.*

4 -**M del C**: *¿Pero no se llena antes?*

5 -**R**: *Se llenan al mismo tiempo, es el mismo volumen. Es al contrario la posición.*

6 -**M del C**: *Sí, se llena al mismo tiempo.*

Pasan al último ítem y allí las tres están de acuerdo en que lo que se les pide es dibujar las gráficas del cono y del cilindro en el mismo par de ejes. Centran la discusión en las formas de las gráficas en los instantes iniciales. La expresión tasa de variación sigue sin lograr significación para ellas.

7 -**L**: *Al comienzo, como las bases son iguales, las gráficas coinciden, pero después el cono se va llenando en menos tiempo. La curvatura debería ser grande.*

8 -**M del C**: *Es que, como no lo hagas con cuadritos* (se refiere a la escala).

9 -**R**: *Yo he representado el tiempo en función de la altura. Me hice un lío con eso.*

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos las verbalizaciones producidas en el episodio de aprendizaje del equipo A2 en la situación 1.

Verbalización	Rosario	Lydia	María del C.
1	DA(1)		
2		UAR(1)	
3			
4			PA(0)
5	DAP(1)		RA(1)
6			EA(0)
7		DA(1)	
8			EA(0)
9	EA(0)		
$\bar{x}$	0.2	0.2	0.1

Tabla 4.25. Análisis del habla, equipo A2, situación 1.

De este intercambio verbal el mayor aprovechamiento cognitivo corresponde a Rosario y Lydia.

- **E-A3**

Mantienen muy poca discusión porque parece que todos coinciden. Lleva la voz Daniel y los demás asienten.

Episodio de aprendizaje

1 -**D**: *Lo he sacado por el volumen, el volumen del cono es menor que el del cilindro. Los tomo de altura 10 y de radio 1. Entonces la gráfica del cono es media parábola y el cilindro es una recta, ya que aumenta progresivamente y siempre igual.*

El resto del grupo está de acuerdo, dice haber llegado a la misma conclusión.

2 -**D**: *Al invertir los recipientes cambia la gráfica del cono, la del cilindro permanece igual. Cambia de una parábola a una exponencial. Justamente la inversa.*

Aquí vuelven a estar de acuerdo, aun cuando Daniel parece decir que la inversa de la función potencial es la exponencial.

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos los intercambios verbales del equipo A3 en la situación 1.

Verbalización	Rafael	David	Mari Carmen
1		DA(1)	
2	EA(0)	E(0)	EA(0)
$\bar{x}$	0	0.5	0

Tabla 4.26. Análisis del habla, equipo A3, situación 1.

En este episodio de aprendizaje es David el que lleva la voz cantante y los otros asienten. En su segunda intervención comete un error; por tanto, ésta no actúa positivamente.

Al final, no sabemos si con la comparación de los tiempos quieren responder a la última pregunta. Ellos afirman que el tiempo que tardan en llenarse es el mismo. Suponemos que se refieren al mismo recipiente cuyos tiempos comparan en las dos posiciones.

- **SITUACIÓN 2(2)**

Un móvil se desplaza con movimiento rectilíneo no uniforme. En la siguiente tabla se muestran las posiciones (en metros, desde el origen de coordenadas) en ciertos instantes.

T (segundos)	0	1	2	3	4
s (metros)	3	2	5	-2	0

A partir de estos datos, determina (razonando tu respuesta) para cuántos valores de t, como mínimo, el móvil tiene velocidad instantánea cero.
¿Para cuántos valores de t, como mínimo, la aceleración es cero?¿por qué?
¿Se puede asegurar que la variación instantánea de la aceleración s'''(t), conocida como tirón, toma el valor cero en algún instante dentro del intervalo considerado? Explica con detalle los motivos y razones de tu respuesta.

- **E-A1**

Comienzan haciendo una larga discusión sobre el significado de los datos que se dan en la tabla y sobre qué ejes representar cada variable.

Se les aclara, ante sus preguntas, cómo pueden realizar la gráfica con los puntos de la tabla.

Recogemos algunas de sus ideas y afirmaciones.

Episodio de aprendizaje

1 -**P**: *En el tiempo cero el móvil ha recorrido 3m, en un segundo ha recorrido 2m, y así siguiendo.*

2 -**A**: *No, la tabla nos da la posición. En el tiempo cero el móvil se halla a tres metros del origen; cuando ha transcurrido un segundo se halla a dos metros del origen, y así siguiendo.*

La discusión se centra, a continuación, sobre la trayectoria que sigue el móvil. En este tema se detecta un obstáculo didáctico al confundir la curva que representa la función de posición con la trayectoria que sigue el móvil, que en este caso es rectilínea.

Tratan de explicar cómo el móvil pasa de la posición 3 a la posición 2 Recogemos algunas de sus razones.

3 -**P**: *Si estoy sobre una calle recta y en el tiempo cero estoy en tres, para pasar al dos tengo que retroceder.*

4 -**S**: *La gráfica me muestra el recorrido, ¿quién dice que es una línea recta?* Se dan cuenta de que el enunciado del problema lo dice, luego Penélope reafirma su idea.

5 -**P**: *Yo entiendo que va para atrás cuando estando en tres va al dos.*

6 -**I**: *Es que yo no entiendo.*

A continuación vuelven sobre el problema de determinar los puntos donde la velocidad es cero. Aparece la idea de que si se les da el espacio en función del tiempo, entonces ésa es la gráfica de la velocidad. Para confirmar esto me preguntan:

7 -**S**: *¿Yo puedo pensar que la velocidad es cero cuando la gráfica corta al eje x?*

Aquí se les dan algunos criterios para que puedan avanzar, como que observen la gráfica que ellas han trazado, con los valores de la tabla, para que determinen qué información pueden extraer de ella, es decir, que lo que tienen es $s = s(t)$. Que recuerden la relación entre $s(t)$ y $v(t)$, observando los máximos, mínimos y los intervalos de crecimiento. Se les pregunta por la razón que les lleva a unir los puntos con trazos rectos, y lo que sacamos como conclusión es que, en su mayoría, lo hacen así porque es la forma en que les resulta más fácil. Veamos cómo llegan a determinar en cuántos puntos la velocidad es cero.

8 -**A**: *¿La derivada es cero? Eso era algo de máximos y mínimos.*

9 -**I**: *Tenía algo que ver con el crecimiento y decrecimiento de la función.*

10 -**S**: *En los máximos y mínimos la velocidad es cero.*

11 -**A**: *Cuando hay un máximo o un mínimo la derivada es cero, por lo tanto, cuando hay un máximo o un mínimo la función que representa la velocidad va a ser cero. Luego, eso ocurre en* $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$.

12 -**P**: *Donde cambia el sentido de la marcha, allí están los máximos y los mínimos.*

Hasta aquí parece que están todas de acuerdo. Sin embargo, el concepto de velocidad instantánea no está para todos claro. Se quedan con la idea de que es la velocidad en un instante, sin más.

En el siguiente ítem se les pide determinar en cuántos puntos la aceleración es cero. Aquí parece casi unánime la idea de que donde la velocidad es cero la aceleración es cero. Veamos lo que ellas dicen.

13 -**P**: *Si tenemos que la velocidad para estos tiempos es cero, también es cero la aceleración, en los mismos en que el coche se detiene para cambiar el sentido de la marcha.*

14 -**I**: *En los mismos puntos, máximos y mínimos.*

15 -**A**: *Se supone eso, que la aceleración va ligada con la velocidad.*

16 -**S**: *Según esto, donde la velocidad es cero, la aceleración es cero, pero ¿y por cuentas?*

Esto abre una discusión sobre el tipo de movimiento de que se trata, llegando a la conclusión de que, si bien no recuerdan ninguna fórmula, aquí no podrían aplicarse ya que se trata de un tipo de movimiento que no han estudiado.

17 -**A**: *De cualquier manera estamos lo mismo que antes, la aceleración es la segunda derivada y la segunda derivada de algo que vale cero, es cero.*

18 -**P**: *Cuando la velocidad es cero la aceleración es cero. Una cosa que no tiene velocidad no puede tener aceleración, por lo tanto en esos puntos es seguro.*

Sobre estas afirmaciones parece que están todas de acuerdo; a partir de allí tratan de encontrar si hay más puntos donde la aceleración se anula. Observan el primero y el último punto, llegando a descartar cualquier afirmación sobre éste, ya que en él no saben si el móvil se para ni cómo sigue luego.

Hasta este momento han acordado que en los puntos donde hay máximos y mínimos, en la gráfica de posición, la velocidad y la aceleración son cero. Consideran también los puntos de corte con los ejes; el movimiento que lleva el móvil en ellos lo explican así:

19 -**P**: *En los puntos de corte con el eje el móvil ha vuelto al punto de origen o referencia y en esos puntos tiene velocidad.*

Acuerdan estudiar la gráfica en distintos intervalos y hacer un dibujo. La discusión vuelve sobre el estudio de funciones, cómo se hallan los extremos relativos y los puntos de inflexión.

20 -**P**: *Cuando la segunda derivada es cero hay un punto de inflexión, y en un punto de inflexión ¿qué pasaba?*

Piensan que la forma de avanzar en el problema es a través del estudio de funciones, pero como la discusión no avanza, porque no pueden recordar el método aprendido para tal fin, preguntan cómo hacerlo. A esta pregunta se les contesta que no deben utilizar métodos analíticos ni algebraicos. Se les recuerda que solamente deben avanzar utilizando el dibujo que han construido con los puntos de la tabla. Se les sugiere utilizar un criterio de la Física que les permita determinar los signos de la aceleración a partir de la gráfica de la velocidad y de esa manera, en forma aproximada, determinar el número mínimo de puntos donde la aceleración se anula.

21 -**P**: *Aquí, que la aceleración es negativa, no lo entiendo.*

22 -**S**: *En el momento en que se está parando, la aceleración es negativa.*

Una creencia muy generalizada es que, en el movimiento rectilíneo, el valor absoluto de la velocidad crece cuando la aceleración es positiva y decrece cuando es negativa, pero eso no es cierto. Este puede ser un obstáculo.

Este resultado parece que les reafirma en sus creencias, es decir, que donde la velocidad es cero la aceleración también se anula y en ningún otro instante.

Pasan al apartado siguiente.

23 -**A**: *Yo no sé ni lo que es la derivada tercera.*

24 -**I**: *La derivada de la derivada segunda.*

25 -**P**: *No, pero la variación instantánea de la aceleración ¿qué significa? ¿La variación entre el instante* 1 *y* 2 *por ejemplo?*

Hacen la analogía con lo que ocurre cuando sale un coche (el de la madre de Inma); por ello tratan de analizar el problema, en principio, en el origen. Se van haciendo las siguientes conjeturas:

26 -**P**: *¿Sería la aceleración que toma al salir entre* 0 *y* 0.1*?*

27 -**S**: *Te puedes tomar el intervalo que quieras.*

28 -**P**: *Si es conocido como tirón es porque hay algo que lo mueve.*

29 -**I**: *Para que haya tirón debe haber aceleración. Si fuera cero en algún sitio no habría tirón.*

30 -**A**: *Como es una variación se puede tomar el valor final menos el valor inicial.*

31 -**S**: *Yo lo hice por cuentas y me sale que en ningún punto se anula. Pero las cuentas no valen.*

32 -**P**: *La aceleración de tirón es la que llevamos al salir, y la variación de la aceleración es la final, que nunca es cero, menos la inicial, que puede ser cero. Entonces la variación de la aceleración sería negativa, pero nunca cero.*

Aquí se ve claramente que les cuesta desprenderse de las herramientas algebraicas. Dejan de lado la tabla y la gráfica que han construido para tratar de apoyarse en el trabajo algebraico, que lo sienten más fiable.

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos los intercambios verbales que se producen en el equipo A1 en la situación 2.

Verbalizaciones	Alicia	Penélope	Inma	Susana
1		E(0)		
2	DA(1)			
3		DA(1)		
4				PA(0)
5		DA(1)		RA(1)
6			PA(0)	
7				PA(0)
8	PA(0)			
9	RA(1)		DA(1)	
10				DA(1)
11	UAR(1)			
12		UAR(1)		
13		E(0)		
14			EA(0)	
15	EA(0)			
16				PA(0)
17	E(0)			
18		E(0)		
19		DA(1)		
20		PA(0)		
21		PA(0)		
22		RA(1)		DA(1)
23	PA(0)			
24	RA(1)		DA(1)	

25		PA(1)		
26		PA(0)		
27		RA(1)		DA(1)
28		DA(1)		
29			E(0)	
30	E(0)			
31				E(0)
32		E(0)		
$\bar{x}$	0.1	0.2	0.1	0.1

Tabla 4.27. Análisis del habla, equipo A1, situación2.

Penélope, que es la que más dialoga, es también la que logra mejor puntaje y, por lo tanto, la que más avances logra a nivel cognitivo.

Aquí está claro que no logran superar el teorema factual, $v = 0 \rightarrow a = 0$.

- **E-A2**

Episodio de aprendizaje

Para analizar el problema propuesto, dos de las alumnas representan en ejes cartesianos los datos de la tabla. Cuando comparan dicha representación surgen dos diferencias fundamentales. La primera es la forma de unir los puntos para formar una curva continua; la razón la explican de esta manera:

1 -**L**: *¿Por qué unes los trazos formando picos?*

2 -**M del C**: *No lo sé.*

3 -**L**: *Yo pensé que al ser un movimiento rectilíneo no uniforme debía unirlos con curvas porque en los picos no existe la derivada.*

La otra cuestión es qué variable tomar sobre cada eje coordenado. Ésta no queda resuelta ya que Lydia, que toma el tiempo sobre el eje de las abscisas, reconoce que primero lo hace al revés, que es como lo presenta María del Carmen. No entran a discutir esto, si bien reconocen que alguna lo tiene mal.

En el apartado a) cada alumna expone lo que previamente ha elaborado en la etapa anterior. Para llegar a un consenso tratan de determinar dónde la velocidad es positiva y dónde negativa; esto no lo logran porque interpretan mal la gráfica. Al final se ve que prevalece el teorema factual: $v = 0$ donde $s = 0$.

4 -**L**: *Yo pensé que la velocidad es cero cuando cruza al eje del tiempo, cuando lo corta, porque el tiempo es cero y no hay movimiento.*

5 -**R**: *Yo pienso que en ningún instante, porque el móvil no se para en todo el tiempo.*

6 -**M del C**: *Yo pensé que cuando el tiempo es cero.*

7 -**R**: *Si* $s = 0$ *no tiene por qué estar parado.*

Aquí se desencadena la discusión que lleva a Lydia a decir lo siguiente:

8 -**L**: *Es que* $v = \frac{e}{t}$, *esta gráfica es la de la velocidad en función de sus coordenadas. Por lo tanto la velocidad es cero en dos instantes, que son los puntos donde corta al eje x.*

9 -**M del C**: *¿Cuándo* $s = 0$, *no es* $v = 0$*?*

Y con esto parece que se ha llegado al consenso.

Se continúa con el apartado b); se hacen las siguientes afirmaciones:

10 -**L**: *Donde no hay velocidad no puede haber aceleración.*

11 -**R**: *En ningún punto la aceleración es cero porque cambia el móvil de velocidad en todos los instantes.*

12 -**M del C**: *Entonces* $a = 0$ *cuando* $v = 0$.

De la discusión sobre el apartado c) podemos remarcar lo siguiente:

13 -**L**: *Yo la derivada tercera la he usado sólo para hallar los puntos de inflexión en el estudio de la curvatura de la función.*

14 -**M del C**: *No sé por qué sigues hablando de derivadas.*

15 -**L**: *Porque la velocidad es la derivada primera, la aceleración la segunda.*

...

16 -**L**: *Yo lo que sé es que si la derivada primera es positiva la segunda es positiva y la tercera tiene que ser positiva, no tienen por qué cambiar de signo.*

...

17 -**R**: *La aceleración es cambio de velocidad ¿entonces, cómo dices que aumentas la aceleración? La aceleración no se puede aumentar. Cambiará la velocidad para que haya aceleración, la aceleración en sí no cambia. //*

18 -**R**: *Lo que quieres decir es que donde la aceleración es constante el tirón toma el valor cero.*

19 -**L**: *Lo que quiere decir es que la derivada tercera es igual a cero cuando lo es la segunda ¿no?*

...

20 -L: *La derivada tercera es cero cuando la derivada segunda es un valor k, constante.*

21 -**M**: *Tendríamos que ver en qué puntos la aceleración es constante. //*

22 -**M**: *Si es una función constante es una recta paralela al eje y.*

Analizan esta propuesta y llegan a la conclusión de que en todo punto la función $s(t)$ y su derivada $v(t)$ van variando en cada instante, tomando distintos valores numéricos.

Todavía discuten si la gráfica $s(t)$ muestra en cada punto la velocidad. Uno de los obstáculos didácticos que les impide comprender dicha gráfica es la definición de velocidad como $\frac{e}{t}$.

23 -**R**: *Hemos dicho que la aceleración es constante en toda la función, por lo tanto no hay tirón.*

24 -**L**: *Como la derivada segunda toma valores constantes. //*

...

25 -**M**: *Hemos concluido que la función es de segundo grado, su derivada (v) de primer grado, su segunda derivada es constante, por lo tanto la derivada tercera, que es la derivada de la aceleración, es siempre cero y no hay tirón.*

Han utilizado sólo algunos recursos matemáticos elementales que ya poseen, pero no han sabido combinarlos con los elementos que se les proporciona en la tabla, por lo que sus conclusiones no son en nuestra opinión demasiado satisfactorias.

Respecto a la tercera derivada, llegan al resultado que ellos esperaban, ya que les resulta difícil concebir una tercera derivada con significación específica.

Análisis de las verbalizaciones

Analizaremos las verbalizaciones producidas en el episodio de aprendizaje del equipo A2 en la situación 2.

Verbalizaciones	Rosario	Manuel	Lidia	María del C.
1	DA(1)			
2				PA(0)
3	DA(1)			RA(1)
4			E(0)	
5	E(0)			
6				E(0)
7	DA(1)			
8			E(0)	
9				PA(0)
10			E(0)	
11	E(0)			
12				E(0)
13			DA(1)	
14				PA(0)
15			DA(1)	RA(1)
16			E(0)	
17	DA(1)			
18	UAR(1)			
19			E(0)	
20			DA(1)	
21		EA(0)		
22		DA(1)		
23	E(0)			
24			EA(0)	

25		UAR(1)		
$\bar{x}$	0.2	0.1	0.1	0.1

Tabla 4.28. Análisis del habla, equipo A2, situación 2.

De acuerdo a las verbalizaciones producidas, han aparecido dos teoremas factuales, $v = 0 \rightarrow a = 0$ y $f'(x) > 0 \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f'''(x) > 0$, sin que se haya logrado superarlos; lo mismo podemos decir del obstáculo didáctico $v = e/t$.

- **E-A3**

Como había entre ellos muchas coincidencias sobre el trabajo que elaboraron en la etapa anterior, preguntan si van por buen camino. Aprovechando la pregunta se les hacen algunas sugerencias para que puedan avanzar en el problema.

Se les recuerda el concepto de velocidad instantánea y se les sugiere que, a la luz de ello, reconozcan cuáles son los instantes donde se anula. También se les hace mención de un criterio de la Física que permite determinar los signos de la aceleración a partir de la gráfica de la velocidad para diferentes intervalos.

Es evidente aquí que ellos han considerado los valores de la tabla como el espacio recorrido y el tiempo empleado para ello respectivamente. Lo que prevalece del movimiento rectilíneo es que $v = \frac{e}{t}$. Esto hace difícil que puedan extraer conclusiones directamente a partir de la tabla, observando simplemente cómo evoluciona la posición del móvil. Dificultad que persiste, aun trabajando con la gráfica, y que atribuimos al obstáculo cognitivo que supone el concepto de velocidad instantánea.

Discuten y analizan dónde crece la gráfica y dónde decrece, dónde y cuántos máximos y mínimos hay, tratando de hallar y dar una razón por la que en esos puntos la velocidad instantánea es cero.

1 -**R**: *En los máximos y mínimos ocurre algo como un choque que lo hace cambiar de dirección, por lo tanto en ese momento la velocidad es cero.*

2 -**D**: *¿Estamos de acuerdo con que la velocidad es cero en los máximos y mínimos?*

3 -**R**: *Claro porque, si lo piensas, cuando choca hay un momento en que para.*

4 -**D**: *No es que choca, es que aquí cambia la aceleración, o sea, que aquí va disminuyendo, aquí aumenta. // Al cambiar la aceleración quiere decir que el móvil se para y vuelve a empezar. Llega un momento en que la velocidad es cero y la aceleración es cero. Luego cambia, puede ser positiva o negativa, depende de lo que haga.*

5 -**R**: *Ya, ya.*

Pasan a discutir el apartado b)

6 -**D**: *La aceleración tiene que ser cero en los mismos // no, la aceleración es cero en los puntos de inflexión cuando la derivada segunda sea cero.*

Rafael y Mari Carmen indican puntos sobre la gráfica, diciendo aquí y aquí... Nos parece que tienen dificultades en identificar los puntos de inflexión y en aceptar que la aceleración sea distinta de cero en los puntos donde la velocidad se anula, porque acaban indicando los ya señalados como máximos y mínimos. Como esta conclusión parece conformar a los tres, pasan al siguiente ítem.

7 -**R**: *Al pasar del* 2 *al* 3 *hay un choque, y claro donde hay un choque tiene que parar un poquito para cambiar la dirección de la velocidad. Es decir, hay un momento en que se detiene para poder cambiar la dirección de la velocidad, entre* 2 *y* 3 *segundos.*

8 -**D**: *Yo no entiendo, no sé lo que significa la variación instantánea de la aceleración.*

9 -**R**: *Es un cambio brusco de la aceleración en un punto.*

10 -**D**: *Aquí cambia y aquí también.*

11 -**R**: *No es instantánea, el tirón es una cosa progresiva.*

12 -**MC**: *Yo creo que instantánea es en todos los cambios que se producen, de aquí a aquí y así siguiendo.*

13 -**R**: *Entonces también serían en otros puntos.*

14 -**MC**: *Es que si aquí hay un cambio de dirección, aquí a la fuerza tiene que haber otro.*

15 -**R**: *No, porque no hay ningún signo negativo.*

16 -**D**: *Si la aceleración en este punto es cero aquí es positiva y aquí negativa.*

17 -**R**: *Hay un cambio de la aceleración, quiere decir que ha habido un momento que ha sido cero.// Que toma el valor cero en ese punto, claro que también*

toma el valor cero. // Yo, que en los máximos y mínimos era cero no lo sabía. Yo lo había tomado como un choque.

18 -**MC**: *Esos puntos tienen velocidad cero y aceleración cero, ¿no?*

19 -**D**: *No tiene por qué, // bueno, la velocidad y la aceleración están relacionadas.*

20 -**R**: *Si la derivada de la velocidad es cero, entonces aceleración no hay y la derivada de la aceleración te va a salir cero.*

21 -**D**: *Yo lo saco por la fórmula de la aceleración, que es velocidad final menos velocidad inicial partido por el tiempo. Si la velocidad es cero la aceleración es cero también.*

Discuten dónde avanza y dónde retrocede el móvil y, por último, llegan a la conclusión de que en todos los puntos hay un cambio de aceleración, pero no pueden responder en cuántos, como mínimo, será cero.

Aquí, aparecen los obstáculos ya observados y que dificultan la interpretación de los fenómenos de variación y cambio. Éstos estamos tratando de superarlos a través de modelos matemáticos sencillos. Además, nos encontramos con cierta resistencia a interpretar la tercera derivada. Esta resistencia se torna tan fuerte que podría comparase con la que se produce al pasar del estudio espacial de tres a cuatro dimensiones.

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos cuantitativamente las verbalizaciones que se han producido en el equipo A3 en la situación 2.

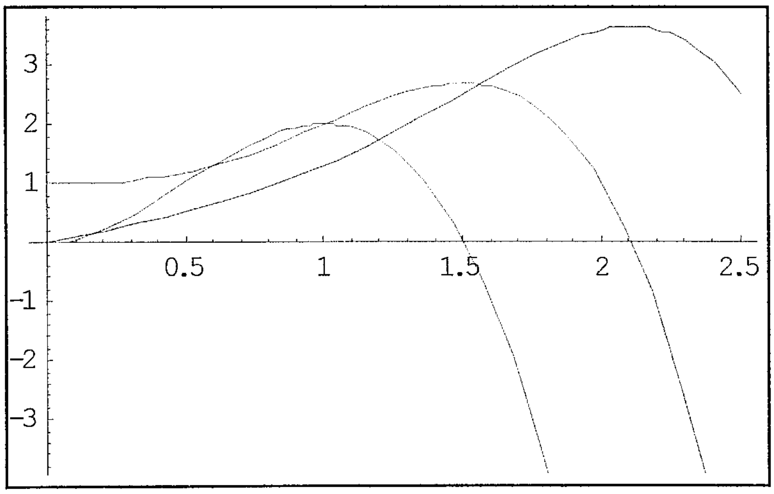
Verbalizaciones	Rafael	David	Mari Carmen
1	DA(1)		
2		UAR(1)	
3			EA(0)
4		E(0)	
5	EA(0)		
6		DA(1)	
7	DA(1)		

8		PA(0)	
9	DA(1)		
10		EA(0)	
11	E(0)		
12			DA(1)
13	EA(0)		
14			DA(1)
15	E(0)		
16		DA(1)	
17	E(0)		
18			PA(0)
19		DA(1)	
20	E(0)		
21		E(0)	
$\bar{x}$	0.1	0.2	0.1

Tabla 4.29. Análisis del habla, equipo A3, situación 2.

❑ SITUACIÓN 3(3)

En la siguiente gráfica se representan la función de movimiento, s(t), la velocidad, s'(t), y la aceleración, s''(t), de un móvil.



¿Puedes identificar cada una?¿cómo?

Determina aproximadamente los intervalos donde s'''(t) es positiva.

Describe cuáles son las características de la función que, a tu juicio, son más relevantes a la hora de trazar las gráficas de su primera, segunda y tercera derivada.

A esta situación, en esta etapa, le hemos agregado los ítems b) y c) con el fin de poder determinar claramente si han logrado crear alguna estrategia que les permita reconocer las gráficas de la función y de sus derivadas, y también que sean capaces de anticipar los signos de la tercera derivada. Además, queremos conocer cuáles han sido los elementos (geométricos, físicos, algebraicos, etc.) que ellos reconocen como más relevantes a la hora de elaborar tales estrategias.

Con el fin de facilitar la identificación de las gráficas en sus conversaciones, les hemos asignado un número: 1 = $s(t)$, 2 = $v(t)$ y 3 = $a(t)$.

- **E-A1**

El criterio que prima en este grupo desde el principio es que la velocidad y la aceleración "*deben ser parecidas*". Fundamentalmente, utilizan esta expresión para referirse al valor que, según ellas, deberían tomar en t = 0, como veremos a continuación.

Episodio de aprendizaje

1 -**I**: *Tomo ésta* (1) *como la velocidad.*

2 -**A**: *La velocidad y la aceleración, que es la derivada de aquélla, nunca va a ser uno.*

3 -**P**: *Tengo que partir del espacio igual a uno pues la velocidad y la aceleración deben empezar por cero.*

4 -**I**: *Cuando hagas la derivada de la velocidad en el punto cero nunca dará uno.*

En este momento el grupo se divide en dos por un motivo de horarios. Lo que aquí se transcribe corresponde al trabajo de una hora realizado por Alicia e Inma.

1 -**A**: *La que parte de uno es s*(t), *es decir, está midiendo un espacio // claro, pero es que la velocidad y la aceleración son las que van a empezar en cero. Es que no encajaría porque si fuera la del espacio...*

2 -**I**: *Siempre es positiva la velocidad, ¿no?*

3 -**A**: *Ésta está midiendo el espacio en función del tiempo. Si ésta fuera la del espacio* (2), *en el segundo cero está a un metro, en el segundo uno a casi dos metros, en el segundo dos está a menos metros, es que a partir de aquí* (máximo) *va para atrás. Esto va desde cero así, llega hasta el máximo // fíjate en una cosa, la primera derivada tiene que ser cero cuando hay un máximo o un mínimo. Entonces, como ésta* (2) *es el espacio y tenemos un máximo en casi* 1.6, *ahí la velocidad tiene que ser cero.*

4 -**A**: *Entonces la roja* (2) *es el espacio y como su máximo coincide con el cero de la azul* (3), *ésta es la velocidad // Entonces, me he equivocado yo.*

...

5 -**A**: *Entonces ésta debe ser la de la velocidad* (3) *y ésta* (1) *debe ser la de la aceleración.*

6 -**I**: *También debe haber alguna causa para decir que ésta* (1) *debe ser la de la aceleración.*

7 -**A**: *Lo vamos a pensar ahora.*

Hasta aquí están asumiendo lo que ha construido Inma en la etapa de acción. Además, viene a corroborar lo que ellas piensan, que la velocidad y la aceleración en cero deben ser cero. Sin embargo, van a tratar de justificar esta elección recurriendo a un criterio de la Cinemática.

8 -**A**: *Se supone que ésta* (3) *es la velocidad y ésta* (1) *la aceleración. Desde cero hasta uno la velocidad // la velocidad crece y es positiva y la aceleración* (1) *es positiva, hasta aquí bien. Ahora de uno a* 1.5 *la velocidad es positiva, pero disminuye en módulo, luego la aceleración debería ser negativa. // Entonces, ésta* (1) *tampoco puede ser la aceleración.*

9 -**I**: *La velocidad no puede partir de uno, porque llegué a pensar que la del movimiento rectilíneo podía ser la verde* (1).

10 -**A**: *Ésa es la que puse yo.*

11 -**I**: *Yo llegué a pensarlo de las tres formas y me quedé con ésta, porque al comenzar en uno su derivada va a ser cero en el punto cero, que es la velocidad, y la aceleración es cero donde la velocidad es cero, pero ya me he liado.*

En este momento a Inma se le ha creado un conflicto que es lo que creemos le va a ayudar a superar algunos obstáculos y avanzar en el problema.

...

12 -**A**: *No sabemos el concepto de aceleración negativa, a lo mejor lo de la aceleración negativa es que va para atrás.*

13 -**I**: *Mira, velocidad positiva, aceleración negativa, disminuye // la velocidad.*

...

A continuación intentan ver si por ese camino pueden avanzar y responder al siguiente apartado. Proponen bosquejar la derivada tercera; para ello parten de la gráfica (1) que ellas suponen representa la aceleración, es decir, la derivada segunda.

14 -**I**: *La derivada tercera sería cero en cero y siempre sería positiva, ¿no?*

15 -**A**: *No siempre, porque a veces donde la velocidad es positiva la aceleración es negativa. // Es que este punto es muy crítico, lo dice todo. Lo dice para esta gráfica* (?) *y para ésta* (?).

16 -**A**: *Ésta* (2) *que parte de uno // aquí que se hace cero coincide con un máximo y donde se hace cero su derivada debe ser... no sé //*

...

17 -**A**: *Yo la he cogido por iluminación. El caso es que ésta* (?) *es la derivada de ésta* (?).

Al llegar a este punto están casi convencidas de que la que parte de uno (2) es $s(t)$. Sin embargo, preguntan si están en lo cierto. Se les recomienda tener en cuenta los puntos críticos o notables de las gráficas y analizar lo que debe ocurrir en esos puntos en la función derivada.

18 -**I**: *Vamos a ver cuáles son los puntos notables. Yo he estado observando y me he dado cuenta, mientras hablábamos con ella, lo bien que se ve y antes no veíamos nada.*

19 -**A**: *Vamos a estudiarlo como antes, con los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Lo que es seguro es que la azul* (3) *es la derivada de la roja* (2) *y ésta la derivada de la verde* (1). *Entonces la que llega más arriba es la ecuación principal, o sea la ecuación del movimiento rectilíneo.*

Tratan de explicar, con los elementos y conocimientos que tienen y que se les ha inducido a utilizar, las razones del cambio en la elección. Con todo se dan cuenta de que todavía no logran resolver satisfactoriamente el problema. Por ello avanzamos con más elementos y explicaciones.

Por fin parece que llegan a un acuerdo sobre que el móvil tiene velocidad inicial, diferente de cero, en el instante en que se comienza a contar el tiempo, es decir en $t = 0$.

20 -**A**: *Derivada del espacio en el punto cero, que va a ser la velocidad, vale uno. // Bueno, sustituyendo en la ecuación pero como no la conocemos no tenemos ni idea de cómo va. Entonces la aceleración también es cero ¡esa es otra cosa!*

21 -**I**: *No hay ni aceleración ni velocidad.*

Aquí se pone de manifiesto que la información que consideran fiable la obtienen conociendo la expresión analítica de la función y a través de operaciones algebraicas. Si bien han encontrado como satisfactorio para explicar el fenómeno en el instante inicial el uso de la cinemática, prima en ellas el teorema factual del que hasta aquí no pueden desprenderse.

22 -**A**: *Velocidad sí, lo que no hay es aceleración. El espacio es el punto cero, pero ¿cómo explicas eso de que no haya aceleración para que la aceleración sea cero? // Lo que puede ser es que viniéramos con un movimiento uniforme, sin aceleración // y a partir del punto cero del espacio comenzamos a acelerar, a disminuir o a aumentar la velocidad.*

23 -**I**: *Sí, pero eso no lo sabemos.*

24-**A**: *Pero es lo más lógico, como estamos dando todo por supuesto... estamos suponiendo cosas, pues es la única manera de que encaje. Suponemos que tenemos una velocidad constante // por lo tanto no tenemos aceleración y a partir de $t = 0$ vamos a tener aceleración. Por eso la gráfica del espacio tiene un máximo al final de todo, aproximadamente en 2.1. Si bajamos una vertical a partir de ese punto vemos que corta.*

25 -**I**: *Que su derivada primera tiene un cero, que coincide con la gráfica de la velocidad.*

26 -**A**: *Exactamente y ésa* (2) *es la velocidad.*

27 -**I**: *Ahora estudiemos la gráfica de la velocidad, que es la que comienza en uno.*

28 -**A**: *Exactamente, entonces nosotros llevamos una velocidad. Vemos que conforme el movimiento nosotros vamos de cero metros hasta tres metros, en ese espacio nuestra velocidad va aumentando al principio y luego disminuye y es lógico*

porque desde cero hasta 1.5, *más o menos, donde se cortan las dos gráficas // hasta allí el recorrido va aumentando.*

29 -**I**: *Y en ese punto comienza a disminuir.*

Es evidente que no se han percatado de que están en presencia de un punto de inflexión.

30 -**A**: *La del espacio desde aquí hasta aquí aumenta, pero si te das cuenta en el mismo tiempo aumenta mucho menos. Es decir, el espacio aumenta cada vez un poquito menos, por lo que la velocidad va disminuyendo un poco. // Por eso disminuye la velocidad. Y entonces de aquí lo más seguro es que se hiciera a lo mejor constante o a lo mejor...*

31 -**I**: *A disminuir.*

32 -**A**: *Eso es lo que se supone. Entonces en el espacio lo que estamos haciendo es retrocediendo porque si tomamos éste* (?) *como punto arbitrario, si nosotros hemos llegado hasta el tres entonces lo que estamos haciendo a partir de aquí es volver hacia atrás. Entonces, al volver hacia atrás ¿la gráfica de la velocidad qué hará? Pues disminuir, ir hacia abajo, hasta que se hará incluso negativa. Y luego está la aceleración porque en el uno, más o menos //*

33 -**I**: *En el 1.5 tiene el máximo la gráfica de la velocidad y su derivada allí se hace cero.*

34 -**A**: *Claro, y eso significa que la gráfica de la aceleración es la tercera* (3), *la que más se dobla, que es la derivada de la otra* (2).

A continuación analizan la gráfica de la aceleración para dar respuesta al siguiente ítem.

35 -**I**: *Tenemos un máximo en uno.*

36 -**A**: *En el uno tenemos un máximo, entonces pasará por allí la tercera derivada.*

37 -**I**: *También hará otra curva pero ¿ahora por dónde pasará, por el origen también, igual que la otra?*

...

38 -**I**: *Es positiva desde cero hasta uno, en el punto uno comienza a decrecer porque luego se hace cero. La derivada tercera debe ser cero en el punto uno. Desde cero hasta uno es positiva pero, aquí tiene que alcanzar otra cota ¿no?*

39 -**A**: *¿Por qué? //*

40 -**A**: *No, no tiene que alcanzar ninguna cota porque no sabemos si la cuarta derivada es cero ahí. Si supiéramos que la cuarta derivada toma el valor cero entre 0.5 y 1 entonces sí que tiene que haber a la fuerza un máximo, pero como no sabemos cómo es la cuarta derivada...*

41 -**I**: *Entonces se supone que es positiva.*

42 -**A**: *No ¿porqué la vamos a dar positiva?*

43 -**I**: *Porque debe pasar por el uno.*

44 -**A**: *Sí, pero puede ser que venga por aquí.*

45 -**I**: *¿Por qué? Si comienza por el cero. Todas comienzan por el cero y a partir de cero son todas positivas.*

Esta afirmación nos hace pensar que dan por supuesto que si $s < 0$, $v < 0$ y $a < 0$, entonces $\frac{da}{dt} \geq 0$.

46 -**I**: *No entiendo por qué. ¿Por qué, por ejemplo, la derivada tercera va a ser negativa?*

47 -**A**: *¿Y por qué va a ser positiva? //*

48 -**I**: *Vamos a estudiar, por ejemplo, el intervalo de la gráfica que va desde cero hasta uno. Como es creciente, la velocidad es positiva ¿no? //*

49 -**A**: *Bueno, la aceleración. De cero hasta uno la aceleración es positiva.*

50 -**I**: *Por lo tanto su derivada debe ser positiva también.*

Aquí se preguntan si el criterio de la cinemática que les permitió deducir los signos de la aceleración, a partir de la gráfica de la velocidad, será válido. Es decir, si es posible utilizarlo para deducir a partir de la gráfica de la segunda derivada los signos de la tercera.

51 -**A**: *Si vale ese criterio entonces la derivada tercera será positiva. La derivada tercera es la conocida como tirón ¿no?*

52 -**I**: *No, aquí no tiene nada que ver. //*

53 -**I**: *¿Y dónde pegaría el coche el tirón?*

54 -**A**: *Los tironcitos en todo caso empiezan desde aquí, entonces ese tirón // es que la variación de la aceleración instantánea...*

Aquí preguntan sobre la variación instantánea de la aceleración, su concepto. Se nota que hay cierta dificultad en conceptualizar la derivada tercera a partir de la cinemática.

55 -**A**: *En fin, que tenemos que suponer eso ¿no? Bueno, es que lo más lógico es lo que tú dices.*

56 -**I**: *Si la derivada segunda crece y es positiva en ese intervalo, la derivada tercera también debe ser positiva.*

57 -**A**: *Por lo tanto de aquí para acá es negativa, entonces sería una cosa así.*

De esta manera logran determinar el signo de la tercera derivada como se les había pedido. Para acabar responden al último apartado diciendo:

58 -**A**: *Los máximos, los mínimos, los puntos de corte... Cuando lo leí dije ¡Qué cosa más difícil! ¡Es que no tengo ni idea! Y mira las cosas que hemos sacado.*

A continuación se transcribe el trabajo de una hora realizado por Penélope y Susana sobre la misma cuestión y que ya había iniciado el equipo completo.

1 -**S**: *Habíamos quedado en que éstas dos, al ser paralelas, como son más o menos parecidas, deben ser la velocidad y la aceleración.*

2 -**P**: *También decíamos que ésta otra no puede ser la de la posición porque la derivada... ¿o cómo era? // Que ésta no puede ser la de la velocidad porque la derivada de la posición, s', si esto es cero, no podía ser uno.*

...

3 -**P**: *¿Cómo es esto, en los máximos?*

4 -**S**: *La derivada va a ser cero, la velocidad va a ser cero.*

5 -**P**: *Los máximos, ¿como se miraban?, con la primera derivada, ¿no? Entonces donde hay un máximo, si la derivada es cero sería la velocidad. Si tenemos un máximo, hacemos la derivada y nos da cero, sería con... la de la posición.*

6 -**S**: *Sería la aceleración.*

7 -**P**: *¿La aceleración o la velocidad?*

8 -**S**: *Esa es la velocidad, la derivada de la velocidad es la aceleración.*

9 -**P**: *¿Cómo sabes tú que...?*

10 -**S**: *Porque el máximo al hacer la derivada da cero.*

11 -**P**: *Entonces, cuando hay un máximo la derivada // ¿la derivada de qué?*

12 -**S**: *De este punto, va a dar cero.*

...

13 -**P**: *¿Entonces ésta es la posición* (1), *ésta la velocidad* (2) *y la aceleración* (3)?

14 -**S**: *Yo creo que sí.*

15 -**P**: *Porque ésta corta a ésta // si tenemos un máximo... en los puntos máximos la primera derivada es cero. Entonces si aquí tenemos un máximo, la derivada es cero, entonces sería la aceleración.*

16 -**S**: *En este punto va a ser cero porque después empieza a bajar.// Entonces es como si se para y vuelve.*

...

17 -**P**: *Entonces si lo miramos así sería, mirando desde arriba, la primera sería la de la posición, la segunda la velocidad y la tercera la aceleración.*

18 -**S**: *Sí.*

19 -**P**: *Entonces, a ver, a medida que el móvil va andando comienza con una velocidad. El móvil tiene posición constante ¿entonces, por qué disminuye la velocidad?*

20 -**S**: *Al disminuir la velocidad y la aceleración ya no sube más, se quedaría constante.*

21 -**P**: *¿Y no comenzaría a bajar también?*

22 -**S**: *No, no, sube.*

23 -**P**: *Si disminuye la velocidad ¿cómo?*

24 -**S**: *Ah, ya.*

25 -**P**: *¿Lo dejamos así, entonces?*

26 -**S**: *Es que yo lo puedo hacer por las derivadas, lo que pasa que para decir por qué la velocidad empieza en cero...*

27 -**P**: *Podríamos decir que tiene una velocidad inicial, no tiene por qué ser la velocidad inicial igual a cero, ¿o no? // ¿Entonces, puede salir con una velocidad inicial y una aceleración cero?*

28 -**S**: *Se supone que sí, no sé.*

29 -**P**: *Es que si no estamos como antes, debería ser ésta la de la velocidad* (1) *y ésta la de la posición* (2), *pero // ¿Cómo ésta va a seguir aumentando y la de la posición va a bajar?*

...

30 -**S**: *¿Cómo había que enfocar lo de la velocidad? ¿Disminuye cuando son contrarios? ¿No?*

3 1 -**P**: *Claro, si disminuye tiene que ser de distinto signo.*

32 -**S**: *Tiene que ser contrario el signo de la velocidad y el de la aceleración. En este caso éste es positivo y éste negativo... si no, no daría esto.*

33 -**P**: *La primera es la del espacio, la segunda la de la velocidad y la tercera es la aceleración. Porque en el punto donde la velocidad es máxima // la aceleración es cero, // ¿y mirando la recta de la velocidad?*

34 -**S**: *Es máxima y la aceleración toma el valor cero.*

35 -**P**: *Y mirando la recta de la velocidad, la velocidad disminuye cuando la aceleración aumenta.*

36 -**S**: *El módulo.*

37 -**P**: *Cuando el módulo de la velocidad es positivo y la aceleración es negativa, entonces mirando la recta de la velocidad vemos que cuando disminuye la velocidad la aceleración comienza a aumentar.*

38 -**S**: *La aceleración comienza a aumentar en sus módulos. // La aceleración engloba todo.*

39 -**P**: *La aceleración comenzaría a aumentar tomando valores negativos, ¿no?... La aceleración disminuye...*

40 -**S**: *Aumentaría, aumenta en módulo, pero tiene signo negativo.*

41 -**P**: *¿Entonces así es como nos ha dicho?*

42 -**S**: *Sí, la velocidad es máxima cuando la aceleración es cero.*

43 -**P**: *Velocidad máxima, la derivada de esa velocidad va a ser la aceleración y va a ser cero. Vamos a ver si lo hemos puesto bien porque en el punto donde s es máximo, la velocidad es máxima y la aceleración es cero. Mirando la recta, cuando la velocidad disminuye, la aceleración aumentaría en módulo desde este punto aquí, hasta aquí. Entonces lo hemos puesto bien.*

44 -**S**: *Ahora, a su vez, cuando tú lo realices matemáticamente la derivada de la velocidad máxima es cero, que es la aceleración.*

45 -**P**: *La otra recta, que es la de la posición, ¿qué está indicando?*

46 -**P**: *Cuando aumenta la velocidad aumenta la aceleración.*

47 -**S**: *Cuando ya no aumenta más se queda constante.*

Ahora van a abordar el apartado donde deben determinar los intervalos en que s''' es positiva.

48 -**P**: *Ésta era la aceleración cuando tenemos una velocidad inicial cero, luego al salir tenía esa aceleración.*

49 -**S**: *Pero ¿cómo consideramos el tirón de la aceleración?*

50 -**P**: *Para que saliese dijimos que era la variación de la aceleración, es decir, la aceleración final menos la aceleración inicial. Si la aceleración inicial es cero, la aceleración final puede ser un número cualquiera.*

51 -**S**: *¿Cuándo tendrá signo positivo?*

52 -**P**: *Cuando la aceleración inicial es menor que la final o cuando la aceleración inicial sea menor o igual a cero, // no.*

53 -**S**: *Tiene que ser menor que la final, o igual a cero.*

54 -**P**: *O igual a cero. Entonces sería en el punto donde la aceleración corta al eje de las x.*

55 -**S**: *Pero si la aceleración inicial es negativa también nos va a dar.*

56 -**P**: *Ah, claro. Un sitio sería donde la aceleración corta al eje de las x y donde la aceleración se considera negativa.*

57 -**S**: *No, pero ahí es positiva.*

58 -**P**: *Aquí, en este trozo, como la velocidad disminuye pero es positiva, la aceleración tiene que ser positiva.*

Es evidente que aunque matemáticamente han logrado determinar las curvas, no han logrado construir en forma aceptable una caracterización del concepto. Desde el punto de vista de la Física tampoco han logrado interiorizar el criterio pertinente.

Hasta aquí llegó el trabajo de estas alumnas; en la siguiente sección continúa el equipo completo.

A continuación el equipo (E-A1) hace una puesta en común sobre los resultados obtenidos al trabajar en dos grupos separados. La enumeración de las verbalizaciones continúa a partir de donde se ha dividido el equipo en dos grupos.

Penélope se apresta a explicar el análisis que han realizado para escoger cada una de las gráficas.

5 -**P**: *Donde era la velocidad máxima, la derivada de la velocidad debe ser la aceleración. Entonces, cuando la velocidad es máxima su derivada es cero. Entonces, justo en el punto donde la velocidad es máxima, que es éste* (¿), *la derivada es cero, que es la aceleración.*

6 -**A**: *¿Por qué ésta* (1) *es la del espacio?*

7 -**P**: *En el momento en que la velocidad comienza a disminuir, la posición se empieza a mantener constante, no aumenta ni disminuye.*

8 -**I**: *Porque aquí observamos que hace como una especie de curva y por eso nosotros pensamos que no es recta como tú piensas, ¿no? Y dijimos que posiblemente puede haber un máximo, que al hacer su derivada que es cero, coincide con esta gráfica que pasa justo por ese punto.*

9 -**A**: *Es que lo más seguro es que aquí haya un máximo.*

10 -**P**: *Sí, yo lo entiendo, es lo mismo que si éste* $(t = 1.5)$ *fuera el máximo de la velocidad y éste* $(t = 1)$ *el de la aceleración.*

11 -**A**: *Pero es que ésta* (2) *también puede ser la del espacio y ésta* (3) *la de la velocidad. Porque la velocidad es la derivada del espacio.*

12 -**P**: *Claro, pero luego tú al hacer la derivada de la velocidad no te va a dar la otra.*

13 -**I**: *Sí, eso sí.*

14 -**A**: *Pero tampoco lo sabemos.*

15 -**P**: *Cómo te va a dar, si ésta* (2) *es la de la velocidad, cómo te va a dar su derivada.*

16 -**A**: *Está claro que ésta* (1) *es la del movimiento. Pero lo mismo que da una parábola y luego la derivada es una línea recta, quién sabe si la derivada de ésta no puede ser ésta* (¿).

Pasan a discutir los signos de la derivada tercera.

17 -**P**: *Nosotros pusimos que la derivada tercera era positiva cuando la aceleración final es mayor que la aceleración inicial o cuando la aceleración inicial es cero; entonces sería donde corta al eje de las x.*

18 -**A**: *Nosotros consideramos que de cero a uno es positiva.*

19 -**P**: *¿Por qué?*

20 -**I**: *Porque aquí la gráfica es creciente y luego...*

21 -**P**: *Sí, pero es que luego aquí la gráfica disminuye pero la aceleración aumenta, entonces tenemos aceleración positiva y velocidad negativa.*

22 -**A**: *Entonces, hemos dicho que de cero a uno es positiva porque al crecer la gráfica la función y su derivada van a tener el mismo signo.*

23 -**P**: *Yo he puesto primero donde la aceleración corta al eje de las x. ¿Por qué en este punto sería positiva? Ya no me acuerdo. También donde la aceleración fuese negativa.*

24 -**S**: *Porque en este punto es cero* (la aceleración). *Como da cero y el otro es positivo da positivo.*

25 -**P**: *¿Cómo? Al final eso de la variación ...*

26 -**A**: *Lo de final menos inicial no era así. Más bien debemos guiarnos por los puntos notables.*

27 -**P**: *¿Puntos notables? Bueno, los que cortan al eje x.*

28 -**A**: *Aunque aquí la ecuación de la aceleración, imaginaros que éste es el punto* x_0 *y que* $f(x_0)=0$, *eso no quiere decir que* $f'(x_0)=0$. *Es decir que la tercera derivada no tiene que ser cero. No es cero, puede tener cualquier valor.*

Parece que Alicia convence con sus argumentos a Penélope, que desecha su hipótesis inicial en la que usaba $a'=\dfrac{a_f - a_i}{t_f - t_i}$ para hallar los signos de la derivada tercera. Al utilizar esta definición están calculando un valor promedio y lo que se les pide son los valores instantáneos. El valor instantáneo es un límite y aquí se encuentran con un obstáculo didáctico que creemos actúa negativamente, si no es superado, sobre la construcción y comprensión del valor instantáneo de estas magnitudes físicas y, por ende, sobre el concepto de derivabilidad.

28 -**A**: *Es lo que hemos dicho siempre, en este intervalo la gráfica crece, la aceleración es positiva, por lo tanto su derivada es positiva. De aquí a aquí la aceleración es positiva pero, como decrece, la variación de la aceleración es negativa, o sea que aquí nada. A partir de 1.5 decíamos que en módulo aumentaba.*

29 -**P**: *Es que de aquí* (¿) *a aquí* (¿) *tendría velocidad negativa, movimiento que disminuye y aceleración negativa.*

30 -**A**: *Pero como en módulo aumenta se supone que está creciendo, la variación de la aceleración va a ser positiva. Entonces se supone que el intervalo donde es positiva va a ser de 0 a 1 y de 1.5 a... // hasta que termina.*

31 -**I**: *Yo lo del 1.5 no lo veo.*

32 -**A**: *Porque de aquí* (0) *a aquí* (1) *crece, como tiene el mismo signo es positiva su derivada también. De aquí* (1) *a aquí* (1.5) *es positiva pero como está decreciendo la otra será negativa. De aquí* (1.5) *en adelante decrece, por lo tanto van a ser de distinto signo, como ésta es negativa la otra será positiva.*

Análisis de las verbalizaciones

Vamos a analizar seguidamente los intercambios verbales que se han producido, en la situación 3, con los dos grupos del equipo A1 y a continuación lo haremos con el equipo completo.

Verbalizaciones	GRUPO I		GRUPO II	
	Alicia	Inma	Penélope	Susana
1	E(0)			E(0)
2		PA(0)	E(0)	
3	E(0)		PA(0)	
4	E(0)		RA(1)	DA(1)
5	E(0)		PA(0)	
6		PA(0)		E(0)
7	I(0)		PA(0)	
8	DA(1)			DA(1)
9		PA(0)	PA(0)	
10	EA(0)		RA(1)	DA(1)
11		E(0)	PA(0)	
12	PA(0)		RA(1)	DA(1)
13	RA(1)	DA(1)	PA(0)	

14		PA(0)		EA(0)
15	DA(1)	RA(1)	UAR(1)	
16	PA(0)			DA(1)
17	E(0)		UAR(1)	
18		I(0)		EA(0)
19	DA(1)		PA(0)	
20	DA(1)			E(0)
21		E(0)	PA(0)	
22	DA(1)			E(0)
23		EA(0)	PA(0)	
24	DA(1)			EA(0)
25		UAR(1)	PA(0)	
26	EA(0)			PA(0)
27		I(0)	DA(1)	
28	DA(1)			EA(0)
29		DA(1)	PA(0)	
30	DA(1)			PA(0)
31		EA(0)	DA(1)	RA(1)
32	E(0)			UAR(1)
33		DA(1)	DA(1)	
34	UAR(1)			RA(1)
35		DA(1)	E(0)	
36	UAR(1)			EA(0)
37		PA(0)	E(0)	
38		DA(1)		E(0)

39	PA(0)		PA(0)	
40	AR(0)			DA(1)
41		DA(1)	EA(0)	
42	PA(0)			DA(1)
43		DA(1)	E(0)	
44	E(0)			DA(1)
45		E(0)	PA(0)	
46		PA(0)	AR(0)	
47	PA(0)			E(0)
48		I(0)	E(0)	
49	DA(1)			PA(0)
50		UAR(1)	E(0)	
51	DA(1)			PA(0)
52		E(0)	E(0)	
53		PA(0)		EA(0)
54	E(0)		E(0)	
55	I(0)			E(0)
56		DA(1)	E(0)	
57	UAR(1)			E(0)
58	I(0)		E(0)	
$\bar{x}$	0.2	0.2	0.1	0.2

Tabla 4.30. Análisis del habla, equipo A1 subdividido, situación 3.

Continuamos con el análisis verbal del equipo completo.

Verbalizaciones	Alicia	Penélope	Inma	Susana
1			E(0)	
2	E(0)			
3		E(0)		
4			E(0)	
5		DA(1)		
6	PA(0)			
7		E(0)		
8	RA(1)		DA(1)	
9	EA(0)			
10		DA(1)		
11	E(0)			
12		DA(1)		
13			EA(0)	
14	PA(0)			
15		DA(1)		
16	EA(0)			
17		E(0)		
18	DA(0)			
19		PA(0)		
20			DA(1)	
21		E(0)		
22	DA(1)			
23		E(0)		

24				E(0)
25		PA(0)		
26	DA(1)			
27		PA(0)		
28	DA(1)			
29	DA(1)			
30		E(0)		
31	E(0)			
32			PA(0)	
33	E(0)			
$\bar{x}$	0.2	0.1	0.1	0

Tabla 4.31. Análisis del habla, equipo A1 completo, situación 3.

- **E-A2**

Hacen una puesta en común sobre los resultados que ha elaborado cada uno en la etapa de acción. Hay varias posturas, por lo que intentan llegar a un consenso.

Episodio de aprendizaje

1 -**L**: *Yo tenía considerado que las derivadas no cambiaban de signo. Si la derivada segunda es positiva, la derivada tercera también es positiva. // Pero es que depende del intervalo donde lo estás valorando, que es lo que tú me preguntas.*

2 -**M**: *Yo lo tengo claro en este tema. Cuando la función es creciente la derivada primera está por arriba del eje y cuando la función es decreciente la derivada primera está por debajo del eje de las x. Y en los máximos y mínimos la derivada corta al eje x.*

3 -**L**: *Puede que lleves razón ¿pero entonces, por qué has puesto aquí que la derivada segunda es siempre positiva?*

Se refiere a que Manuel ha elegido como la curva de la aceleración la (1).

4 -**R**: *La aceleración parte de uno porque cuando está en la posición uno es cuando se ha dado un cambio de velocidad.*

5 -**M del C**: *Podríamos considerar cada gráfica e ir estudiando la derivada de cada una.*

Aquí, primero se ponen de acuerdo dónde consideran que la función es positiva y dónde negativa, cuándo creciente o decreciente y qué significa que la velocidad aumente en valor absoluto.

Hay una idea que se repite "*la aceleración y la velocidad siempre van relacionadas*". La jerarquía de esta relación, para ellos, es más fuerte que las otras que aquí se encuentran implicadas.

6 -**M del C**: *¿Cómo una derivada va a salir de uno?*

7 -**L**: *Yo pienso que la velocidad y la aceleración tienen que estar relacionadas.*

No hay acuerdo en cuál tomar como la curva que da la posición ni en los criterios para analizar y poder reconocer cada curva. Hablan de máximos de crecimiento, pero parece que no saben cómo utilizar todos estos conceptos.

8 -**R**: *Es según como las mires porque ésta* (?) *puede ser la velocidad y ésta* (?) *la aceleración porque sigue siendo ésta* (?) *la derivada de ésta* (?).

9 -**L**: *Nada, porque entonces la función no tendría máximo, porque aquí se estabiliza. No tiene máximo, entonces no tiene derivada.*

En una primera aproximación el grupo elige la (2) como s, la (3) como v y la (1) como a. Luego vuelven a analizar la (3) para ver si realmente su derivada cumple con el criterio que están utilizando.

10 -**M**: *Si tomamos la* (3) *como la velocidad y la analizamos como si fuera una función corriente encontramos que tiene un máximo aquí, entonces su derivada debe cortar al eje en uno.*

11 -**L**: *No tiene porqué.*

12- **M del C**: *Tiene que cortarlo. Cuando hay un máximo aquí la siguiente derivada tiene que pasar por aquí, tiene que cortar al eje x en ese valor.*

13 -**M**: *Igual que ocurre con las otras dos.*

14 -**L**: *Entonces, ¿en qué quedamos?*

15 -**M**: *Estas dos están bien porque coinciden, las que no coinciden son ésta* (3) *con ésta* (1).

...

16 -**M del C**: *¿Y si consideramos como la posición ésta* (1)*?*

Aquí queda la propuesta de María del Carmen; como se sienten un poco agobiados al no poder avanzar pasan a ocuparse del último ítem de la cuestión anterior que les había quedado por concluir.

...

17 -**L**: *Déjame ver una cosa, // ¿Por qué tienen que decirte que la velocidad comienza en cero? ¿Quién te dice a ti que debe comenzar con velocidad cero?*

18 -**R**: *¿Entonces, tú quieres decir que la velocidad es la que parte de uno?*

19 -**L**: *Quiero decir que cualquiera puede ser la gráfica del movimiento, de la velocidad o de la aceleración, depende de cómo corta. //*

20 -**L**: *Yo pienso que ésta, por la forma puede ser una función de cuarto grado. Entonces la derivada de ésta, que es la más parecida...*

Este camino parece que no les resulta exitoso. Entonces vuelven a pensar por dónde debe pasar la función derivada cuando la función tiene un extremo. Insisten en la elección que habían hecho anteriormente, ya que es evidente que la (3) es la derivada de la (2) y eso lo tienen claro.

María del Carmen vuelve a insistir con la idea que había planteado anteriormente y que no llegaron a considerar.

21 -**M del C**: *Si ésta* (1) *hace así, se vuelve otra vez.*

22- **R**: *Si consideramos que ésta* (1) *hace así* (quieren decir que en aproximadamente 2 tiene un máximo) *su derivada para ese valor debe pasar por aquí* (cortar al eje x en el valor dos). *// Yo creo que aquí, ésta* (1) *tiene un máximo.*

23 -**L**: *Descartando que se vuelva constante ¿no?*

24 -**M del C**: *Así es como lo traje yo el primer día.*

Lydia sigue pensando en el grado de las funciones; no ha conseguido superar algunos obstáculos que ha puesto de manifiesto desde el comienzo.

Pasan a responder el siguiente ítem.

25 -**M**: *Donde es creciente la segunda derivada será positiva la tercera derivada.*

26 -**L**: *¿Entonces, será creciente por aquí* (?)*?*

27 -**R**: *No, porque es que por aquí // bueno podría cortar así también.*

28 -**M del C**: *De cero a uno sería positiva. Porque donde la segunda derivada es creciente la tercera debe ser creciente, positiva ¿no?*

29 -**L**: *Entonces el intervalo donde es positiva sería entre* 0 *y* 1.6 *¿no?*

30 -**M del C**: *No llega al uno // bueno, al uno aproximadamente.*

A la última pregunta responden que lo más relevante, para ellos, han sido los máximos, la monotonía, crecimiento y decrecimiento de las funciones.

Análisis de las verbalizaciones

A continuación, analizamos los intercambios verbales que han ocurrido en los episodios de aprendizaje que acabamos de presentar en el seno del equipo A2 sobre la situación 3.

Verbalización	Rosario	Manuel	Lidia	María del C.
1			E(0)	
2		DA(1)		
3			PA(0)	
4	E(0)			
5				D(0)
6				PA(0)
7			DA(1)	
8	DA(1)			
9			E(0)	
10		DA(1)		
11			E(0)	
12				UAR(1)
13		DA(1)		
14			PA(0)	
15		DA(1)		
16				UAR(1)

17			DA(1)	
18	PA(0)			
19			DA(1)	
20			E(0)	
21				DA(1)
22	UAR(1)			
23			E(0)	
24				EA(0)
25		DA(1)		
26			PA(0)	
27	EA(0)			
28				E(0)
29			E(0)	
30				DA(1)
$\overline{x}$	0.1	0.2	0.1	0.1

Tabla 4.32. Análisis del habla, equipo A2, situación 3.

- **E-A3**

Episodio de aprendizaje

1 -**MC**: *Yo he puesto que la aceleración es la primera, ésta* (3).

2 -**D**: *Es que yo de este ejercicio no tenía ni idea. Había pensado que la segunda* (2) *era la del movimiento rectilíneo.*

Cuando le toca el turno a Rafael dice no recordar por qué su elección recayó sobre la (1) como la gráfica del movimiento rectilíneo. Pero está claro que los argumentos de Daniel le parecen válidos porque los asume enseguida.

3 -**D**: *Yo pensé que ésta* (2) *es la del movimiento rectilíneo, que parte de uno. Es decir, parte a lo mejor desde una altura de* 100 *metros sobre el nivel del mar.*

4 -**D**: *No, yo creo que es igual que el anterior, se refiere al desplazamiento, que empieza ya desde un cierto valor.*

Concluyen tomando la (1) como la velocidad, la (2) como la gráfica de la función posición y la (3) como la aceleración, sin ahondar más en el tema.

Análisis de las verbalizaciones

Realizamos el análisis de las verbalizaciones del equipo A3 en la situación 3.

Verbalización	Rafael	David	Mari Carmen
1			E(0)
2		E(0)	
3		E(0)	
4		E(0)	
$\bar{x}$	0	0	0

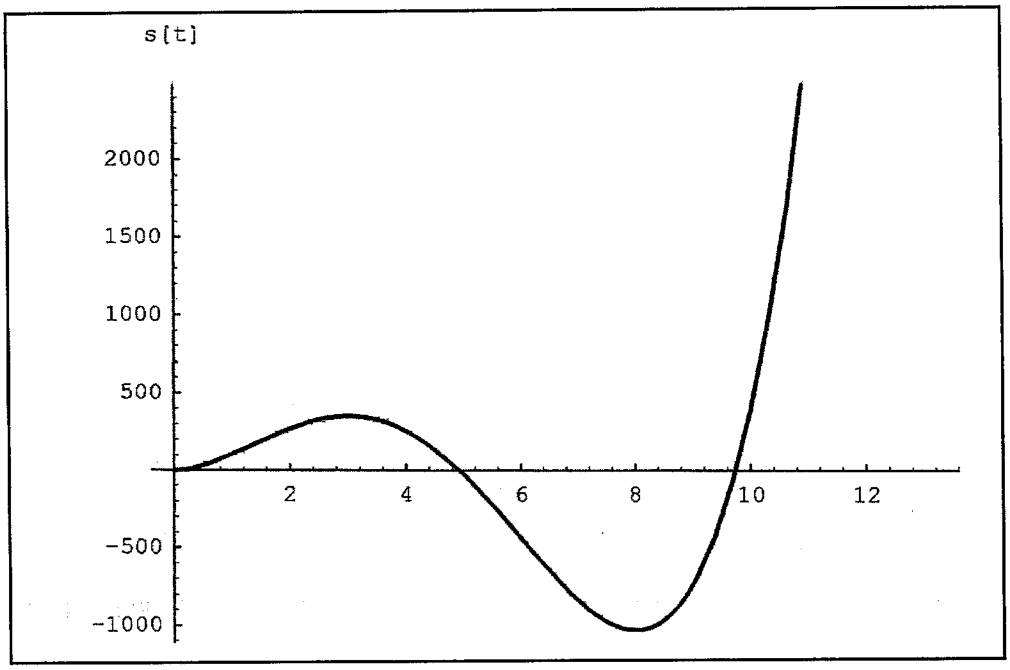
Tabla 4.32. Análisis del habla, equipo A3, situación 3.

La discusión fue tan pobre que no hay episodios de aprendizaje relevantes y el aprendizaje individual y de grupo se puede considerar nulo.

❑ SITUACIÓN 4(4)

La función posición s(t) del movimiento de una locomotora que se desplaza sobre una vía recta viene descrita por la gráfica que se muestra.

a) *Indicar en qué intervalo o intervalos de tiempo va marcha atrás.*
b) *En forma aproximada dar los intervalos de tiempo donde la velocidad es positiva y donde es negativa.*
c) *Indica los intervalos de tiempo donde la aceleración es positiva y donde es negativa.*
d) *La tercera derivada da la variación instantánea de la aceleración. ¿Toma el valor cero en algún instante? ¿En cuántos?¿Por qué?*



- **E-A1**

Abordan esta situación Alicia e Inma.

Episodio de aprendizaje

1 -**I**: *Va marcha atrás de los* 3 *a los* 8 *segundos, es decir, desde el máximo hasta el mínimo relativo.*

2 -**A**: *Yo también lo he puesto así.*

3 -**I**: *Porque la función empieza a decrecer, por lo tanto, he supuesto lo de antes // la aceleración se hace negativa y la velocidad sigue siendo positiva.*

4 -**A**: *Pero es que esta gráfica no es la de la velocidad, ésta es la gráfica del movimiento. Es que estamos midiendo el espacio que ha recorrido un móvil partiendo desde un punto cero. Entonces a los tres segundos la posición, vamos a suponer, es de unos trescientos o cuatrocientos metros. El móvil ha recorrido desde esta silla hasta aquella en tres segundos. Pero luego resulta que a los cinco segundos está otra vez aquí, es decir, está otra vez en cero. Entonces eso nos hace suponer que vuelve para atrás. Es lo más lógico, porque aquí estamos midiendo el espacio. Puede disminuir o puede aumentar la velocidad, porque puede ser que cuando vuelva para atrás venga mucho más rápido y es así porque de cero hasta tres, en tres segundos, ha recorrido la misma distancia que recorre luego en dos segundos, porque ha subido y ha bajado. Entonces en dos segundos al ir para atrás viene con más velocidad. Es como si yo voy*

para allá a cincuenta kilómetros por hora, en coche, y luego vuelvo a cien kilómetros por hora, // es que tardo aproximadamente un tercio. Y luego de cinco a ocho segundos ha ido de cero hasta la pared, allá atrás, hasta menos 1000. *Entonces, como estamos midiendo el espacio, ha retrocedido también. Si nos están diciendo que se mueve sobre una línea recta, no puede ser de otra manera.*

5 -**I**: *Estamos de acuerdo.*

Pasan a desarrollar el siguiente ítem.

6 -**I**: *Considero la velocidad positiva en el intervalo que va desde cero hasta tres, donde alcanza la gráfica un máximo relativo. También es positiva la velocidad, porque la gráfica es creciente, desde los ocho segundos, donde está el mínimo relativo, hasta aproximadamente once segundos.*

...

Alicia intenta hallar los intervalos donde la velocidad es positiva utilizando un criterio de la cinemática.

7 -**A**: *Yo creo que desde cero hasta cinco segundos la gráfica de la velocidad es positiva.*

8 -**I**: *Pero, cuando decrece...*

9 -**A**: *Bueno, ésta es la gráfica del espacio, ¿no? Entonces sabemos que en (3) la velocidad pasa por cero.*

10 -**I**: *Entonces tiene que ser así.*

11 -**A**: *No sabemos si es positiva ahí.*

Parece que la duda radica en saber si la gráfica, cuando corta al eje a los tres segundos, viene por arriba o por abajo del eje del tiempo. Para encontrar una justificación a lo que defiende Inma continúan analizando lo que ocurre en el siguiente intervalo.

12 -**I**: *Ahora, entre cuatro y cinco, al haber un punto de inflexión ¿qué puede ocurrir? La segunda derivada cuando hay un punto de inflexión se hace cero ¿no?*

13 -**A**: *¿Cuándo qué?*

14 -**I**: *Cuando la segunda derivada se hace cero hay un punto de inflexión. Porque los puntos que hay que estudiar son los dos extremos, máximo y mínimo y los de corte con el eje del tiempo.*

15 -**A**: *La concavidad y la convexidad.*

16 -**I**: *Bueno, vamos a estudiar los extremos, luego ya veremos los otros. En el máximo ya hemos dicho que pasa por tres. En el mínimo tiene que pasar aproximadamente por ocho, o sea, que no sabemos si va a crecer o va a decrecer.*

17 -**A**: *Hemos dicho antes que del tres al ocho va para atrás, esto está midiendo solamente el espacio. Pero si va para atrás y luego vuelve otra vez para adelante, la velocidad tiene que aumentar, al empezar a venir para atrás, porque ha tenido primero que parar. Si tú vas para adelante, luego al ir para atrás, a los tres segundos, tienes que parar aunque sea un momento.*

18 -**I**: *Entonces es así, es cóncava. De cero a tres es cóncava.*

19 -**I**: *Vamos a estudiarlo por partes. Desde tres hasta cero, creo que es positiva. ¡Es a la fuerza positiva!*

20 -**A**: *¿Por qué? // La velocidad es positiva... ah, sí claro, espérate, sí.*

21 -**I**: *La velocidad es positiva, tiene que ir por arriba.*

22 -**A**: *Yo todavía no me entero. Lo que sé es que tiene que aumentar la velocidad, porque recorre espacio, por lo tanto hay velocidad y aumenta.*

23 -**I**: *Porque en tres se para.*

24 -**A**: *Sí, pero también puede ser que venga con una velocidad negativa. // Sí, ¿sabes por qué? Porque es imposible que una gráfica... no claro pero puedes tener velocidad. // es imposible que en tres pares...*

25 -**I**: *Y vengas de un espacio negativo.*

26 -**A**: *¡Es que tienes que tener velocidad!, de cero a tres tienes que tener velocidad, que esté aumentando o que esté disminuyendo...*

27 -**I**: *Es positiva.*

28 -**A**: *Es que es imposible que venga de menos mil creciendo, porque lo que está haciendo en módulo la velocidad es disminuir, ¿qué pasa?... es que la velocidad disminuye. No ves que en tres te paras. La velocidad tiene que disminuir, ¿o no?. Si vas andando y cuando llegas a la raya te paras, la velocidad ha tenido que ir disminuyendo // entonces puede ser que vaya así, no así. No parte de cero sino que siempre decrece. No que crezca primero hasta aquí y luego decrezca, o que venga de abajo.*

29 -**I**: *No, de abajo no puede venir, digo yo.*

30 -**A**: *Sí puede porque está disminuyendo. En módulo la velocidad está disminuyendo.*

Aquí hacen una pausa para preguntar si van bien encaminadas. Se les sugiere que recuerden la interpretación geométrica de la derivada, ya que la velocidad se obtiene derivando la función desplazamiento. Por lo tanto, les será de ayuda para analizar el comportamiento de la velocidad observar cómo varía la pendiente de la recta tangente en distintos punto de la gráfica $s(t)$.

31 -**I**: *Trazando la recta tangente en el punto cero tiene una inclinación levemente para arriba, entonces es positiva.*

32 -**A**: *Es muy poca pendiente la que tiene.*

33 -**I**: *Es muy poca inclinación.*

34 -**A**: *Es muy poquita inclinación y es positiva porque va para arriba. Entonces, según lo que hemos dicho, el criterio de una función para llegar a su derivada cuando la función crece los dos signos son iguales, de la función y de la derivada y cuando decrece son distintos. Pues si de cero a tres lo que hace es crecer el espacio, y el espacio es positivo, la velocidad es positiva. Por tanto de cero a tres la velocidad es positiva. Y luego también...*

35 -**I**: *De tres a ocho.*

36 -**A**: *Y de tres a cinco, ¿qué pasa?*

37 -**I**: *La función decrece, luego la velocidad es positiva.*

38 -**A**: *No, el espacio es positivo, entonces si decrece, la velocidad es negativa.*

39 -**I**: *Porque disminuye. // Entonces, también tiene que ser la derivada negativa ¿no? Porque a mí todavía no me queda muy claro.*

40 -**A**: *Claro, la derivada es negativa porque si está disminuyendo y aquí es positiva, como tiene que ser de signo contrario entonces la velocidad es negativa.*

41 -**I**: *Entonces de tres a cinco es negativa. Hasta que llega a cinco decrece // ahora de cinco a ocho... Podemos llegar a la conclusión de que el punto de inflexión que hay en cinco puede ser un máximo o un mínimo en la función de la velocidad. ¿Por qué he pensado eso? Porque tiene que pasar a la fuerza por ocho. No sé por qué, pero de cinco a ocho la función, en módulo, va a ser decreciente.*

42 -**A**: *La gráfica crece. Pero lo que tú dices es que, en módulo, la velocidad disminuye porque va de menos quinientos a cero.*

43 -**I**: *Eso es lo que quiero decir y no sabía cómo explicarlo. Y en cinco habrá un mínimo. Cinco será un punto de inflexión en la derivada segunda, pero la velocidad es la derivada primera. Si en cinco hay un mínimo, quiero decir que la función velocidad toma un valor mínimo en cinco.*

44 -**A**: *En cinco el espacio da cero. Por lo tanto, si sustituyes cinco aquí* (?) *va a dar distinto de cero, por lo que habrá un mínimo.*

45 -**I**: *Exactamente, lo que quiero es llegar a una conclusión para saber por qué este punto es un mínimo. Porque si la segunda derivada es cero, entonces se forma un punto de inflexión, que es por lo que llegamos a esta conclusión.*

46 -**A**: *La segunda derivada es cero.*

47 -**I**: *Yo quiero concluir...*

48 -**A**: *O sea que en cinco tiene que ser la segunda derivada cero.*

49 -**I**: *Claro, para que sea un mínimo en la primera derivada. Para que sea un mínimo la segunda derivada tiene que dar cero, y da cero.*

50 -**A**: *Pero ésta no es la segunda derivada.*

51 -**I**: *Es un punto de inflexión.*

52 -**A**: *Sí, pero ésta es la primera derivada. Lo que pasa entonces es que si aquí* (en cinco) *hubiera un mínimo* (en la primera derivada), *la segunda derivada tiene que pasar también por aquí* (por cinco), *al igual que su gráfica primitiva, s*(*t*).

53 -**I**: *Por eso creo yo que el cinco sería un mínimo de esta función.*

54 -**A**: *Pero yo no lo termino de tener claro. Empecemos de cinco a ocho a ver lo que pasa.*

55 -**I**: *En módulo la función crece, pero la velocidad es negativa.*

56 -**A**: *No, el espacio es negativo, pero como va de cero a menos cien, en módulo crece y al ser creciente son los dos del mismo signo. Por eso la velocidad es positiva.*

57 -**I**: *Y por eso crece la función* (velocidad).

58 -**A**: *Es que simplemente creo que la explicación está en que si nosotros estamos tomando el intervalo de cinco a ocho pues en cinco va a cambiar. Porque de tres a cinco la velocidad es negativa, entonces de cinco a ocho la velocidad va a ser positiva.*

59 -**I**: *No, va a ser negativa la velocidad.*

60 -**A**: *Positiva.*

61 -**I**: *Lo que es positivo es el desplazamiento, pero el módulo no.*

62 -**A**: *Es verdad.*

63 -**I**: *La velocidad será negativa, pero el desplazamiento es positivo.*

64 -**A**: *Sí, como está creciendo en módulo, tiene que tener el mismo signo y el espacio es negativo, por lo que la velocidad es negativa. // Entonces, ¿qué pasa? es negativa pero no sabemos si va para acá o va para abajo. Pero de cinco a ocho no quiere decir que la velocidad crezca, eso se sabe con la segunda derivada ¿no? // Bueno sí, como en ocho tiene que ser cero porque hay un mínimo, pues uní esto* (?) *y esto* (?).

65 -**I**: *Sí, éste es un mínimo.*

66 -**A**: *Sí, esto tiene que ser cero.*

67 -**I**: *Tiene que pasar por aquí* (por ocho) *y tiene que crecer. Ahora vamos a estudiarlo de ocho hasta arriba.*

68 -**A**: *De ocho hasta diez.*

69 -**I**: *En módulo la velocidad, o sea, el módulo del desplazamiento disminuye.*

70 -**A**: *Por tanto van a ser de signo contrario.*

71 -**I**: *La velocidad es positiva.*

72 -**A**: *La aceleración es negativa y la velocidad es positiva.*

73 -**I**: *Pues crece. Y ya desde diez hasta once en módulo es positivo, la velocidad es positiva y la aceleración es positiva, porque es creciente, coinciden.*

74 -**A**: *El desplazamiento es positivo, como está creciendo la velocidad es positiva.*

Comienzan aquí la puesta en común del equipo completo. Como en el apartado a) hay coincidencia, pasan a analizar el b). Alicia explica cómo han utilizado la recta tangente para determinar los signos de la velocidad.

1 -**I**: *Nosotros hemos supuesto, con el cálculo de la pendiente, que la gráfica de la velocidad comienza aproximadamente en cero.*

2 -**P**: *¿Pero, cómo hacéis el calculo de la pendiente?*

3 -**A**: *La recta tangente a un punto de la gráfica da el signo positivo o negativo de la derivada en ese punto. En el principio, más o menos, la recta tangente no va*

para abajo, sube. Entonces se supone que la velocidad es positiva. Por lo tanto, se supone que la velocidad de cero a tres es positiva.

4 -**P**: *¿Cuál sería la derivada?*

5 -**A**: *La pendiente de la tangente. La recta tiene distintas pendientes uno, dos, tres, cuatro...*

6 -**P**: *¿Entonces, ésa va a ser la derivada, la pendiente de la tangente?*

7 -**A**: *No, eso era sólo para el principio para saber cómo era la gráfica de la velocidad en cero.*

8 -**I**: *Para saber si la gráfica* (se supone la de la velocidad) *es positiva o negativa.*

9 -**P**: *Sí, nosotros también dudamos en la velocidad, por ahí no sabíamos si venía de arriba o por debajo.*

10 -**A**: *Exactamente, pues entonces la velocidad es positiva ahí.*

11 -**P**: *¿Positiva dónde sería?*

12 -**I**: *Lo mismo que antes, de cero a tres, que hay un máximo. De cero a tres es creciente, la velocidad es positiva, el espacio...*

13 -**P**: *¿Entonces hay que hacerlo con la gráfica ésta?*

14 -**A**: *Hay que hacerlo comparándolo, aquí utilizando si crece o decrece y el signo que tiene y ya con eso sacamos la derivada por unas reglillas que hay* (se refiere al criterio de la cinemática). *En esta gráfica, que es el espacio, aquí el espacio es positivo y como crece su derivada va a ser del mismo signo, cuando aumenta tiene el mismo signo, cuando disminuye era de signo diferente. Entonces de aquí* (3) *a aquí* (5) *la velocidad va a ser positiva.*

15 -**I**: *Va a ser negativa.*

16 -**A**: *La velocidad negativa.*

17 -**P**: *Más o menos es hacerlo con la recta que nos da ella, con...*

18 -**A**: *Sí, con la gráfica que nos da ella sabremos cómo es la derivada.*

19 -**P**: *Entonces, sí lo tenemos y lo tenemos ahí puesto. Y de cinco a ocho también es negativa.*

20 -**A**: *También era negativa, ¿por qué?*

21 -**I**: *Yo tengo aquí velocidad negativa.*

22 -**S**: *¿Pero aquí, qué? ¿Que ésta es negativa o que disminuye?*

23 -**A**: *La velocidad es negativa.*

24 -**S**: *Pero si está de esta parte, que es positiva.*

25 -**A**: *No, está en esta parte que es así pero la gráfica de la derivada no sabemos cómo es. Es que la gráfica de la derivada sería una cosa así, bajaría por aquí.*

26 -**I**: *¿Es que el estudio de la velocidad se hace sobre esta gráfica, sobre la azul?*

27 -**A**: *Sí, pero como no sabemos cómo es, nos la vamos imaginando, es que la conoceremos a partir de la que tenemos. Más o menos creemos que sería así, y creemos que aquí tendría un mínimo porque al hacer su derivada sale cero y pasa por el punto. Entonces por aquí, en cinco, hay un mínimo, en la velocidad.*

28 -**I**: *De cinco a ocho crece.*

29 -**A**: *Vamos a fijarnos en ésta, s*(*t*)*, en módulo se supone que aumenta ¿no?*

30 -**I**: *Pero bueno, es la gráfica de la velocidad, no la del desplazamiento.*

31 -**A**: *Pero aquí tenemos que fijarnos para sacarla como lo hicimos con la velocidad. Bueno vamos a controlar si eso estaba bien. Yo qué sé. De cinco a ocho disminuye, si disminuye los signos van a ser diferentes.*

32 -**I**: *Sí, pero hay que verlo en módulo.*

33 -**A**: *Aumenta, en módulo aumenta, por lo tanto los signos van a ser iguales. Como el espacio es negativo, la velocidad va a ser negativa. Por eso dijimos que la gráfica tiene que estar todavía por aquí abajo. De cinco a ocho la velocidad es negativa.*

34 -**P**: *Yo no entiendo por qué es negativa.*

35 -**A**: *Porque aquí lo tenemos que sacar de la negra* (se refiere a la gráfica dada en el enunciado del problema). *Esto es cosa nuestra, no nos ha dicho ella que esté bien, a lo mejor está fatal. Nosotros nos tenemos que fijar en la negra y a partir de ella tenemos que concluir. La gráfica la pintamos para que nos ayudara. // Entonces de cinco a ocho en módulo el espacio está aumentando.*

36 -**P**: *Sí, eso lo entiendo.*

37 -**A**: *Entiendes por qué sale la gráfica negativa ¿no?, entonces ya está.*

38 -**P**: *Bueno, de cinco a ocho la velocidad es negativa y luego de ocho a diez es positiva.*

39 -**A**: *No, no de ocho a diez sería negativa, o sea que sería... En módulo ¿qué está haciendo? ¿Disminuye o aumenta? En módulo está disminuyendo, entonces los signos van a ser contrarios. La gráfica que nos dan en ese intervalo es negativa, luego la velocidad va a ser positiva. Además no hay más que ver lo que hace, del menos mil vuelve al punto cero, por lo tanto está aumentando la velocidad y es positiva, ¿pero, entiendes por qué?*

En nuestra opinión, Penélope y Susana aún no llegan a comprender lo que las otras dos compañeras quieren hacerles ver, a pesar de los esfuerzos de éstas. Lo que están haciendo es una ejercitación de provecho, ya que a medida que tratan de buscar razones para convencer a las compañeras de lo bien que han resuelto el problema, se encuentran con que ellas aún no han logrado una construcción eficiente de los conceptos que están en juego.

40 -**P**: *Bueno, pues el espacio aumenta en módulo, o sea que es positivo. No, es negativo y como aumenta, la velocidad es negativa. Vale, aquí aumenta en módulo, no, disminuye en módulo...*

41 -**A**: *En módulo disminuye.*

42 -**P**: *Sí, sí, vale.*

43 -**A**: *Entonces, al final es positiva porque está en la parte positiva, por lo tanto la velocidad también va a ser positiva, o sea que de ocho hasta el final va a ser positiva.*

Aparentemente han llegado a un consenso sobre los signos de la velocidad, a continuación pasan a discutir los signos de la aceleración. Penélope y Susana habían llegado a discutir hasta este punto.

44 -**I**: *¿La aceleración era la derivada de la velocidad?*

45 -**A**: *Es la segunda derivada.*

46 -**P**: *Vamos a hacerlo según la recta que tenemos y ya está. Si aquí tenemos una velocidad positiva y la gráfica del espacio aumenta, la velocidad también aumentaría, ¿no? Entonces la de la aceleración deberíamos suponer que aumenta. Si tenemos que la aceleración en módulo aumenta y la velocidad es positiva, la aceleración en ese trozo debería ser positiva también.*

47 -**S**: *Pero no en todo el intervalo.*

48 -**A**: *Si nos basamos en ese criterio ¿no sería en todo el intervalo? Es que si nos basamos sólo en lo que nos da ella, que es lo más prudente, de aquí* (?) *a aquí* (?) *tendríamos que definir un signo, pero de todo, y sin embargo no podemos.*

49 -**P**: *Pero lo mismo nos pasaría con la velocidad, porque la velocidad en este trozo hemos dicho que es positiva y aquí ...*

50 -**I**: *Sigue siendo positiva.*

51 -**P**: *Claro, sí, no lo había pensado.*

52 -**A**: *Bueno, entonces la aceleración, al disminuir la velocidad...*

53 -**P**: *Tiene que ser negativa ¿sabes?*

54 -**A**: *Es que tiene que ser negativa, es que cuando la velocidad...*

55 -**P**: *Vamos a ver si está bien. Decimos que tenemos que empezar desde cero, luego el espacio aumenta hasta el punto donde hay un máximo. En el máximo la derivada tiene que ser cero. En ese punto justo tiene que pasar por aquí, y recta no creo que vaya, entonces hacemos una curva. Luego tiene que disminuir porque el espacio también esta disminuyendo.*

56 -**I**: *¿Y aquí* (?) *qué hay, un punto de inflexión?*

57 -**P**: *Aquí hemos dicho que tenemos velocidad negativa, entonces la velocidad disminuye hasta aquí* (?) *que empieza ... no, no me hagan caso. ¡Ah claro! velocidad negativa, simplemente que de aquí* (?) *a aquí* (?) *la gráfica es negativa. Entonces por aquí, no sabemos exactamente dónde, hay un mínimo.*

58 -**I**: *En el cinco, que es donde la otra gráfica corta al eje.*

59 -**A**: *Es un seis.*

60 -**P**: *¿Por qué habéis puesto aquí esto si luego tiene que aumentar la velocidad a partir de ocho?*

61 -**A**: *En el ocho pasa también por aquí porque hay un mínimo, es decir, pasa por cero. Esta gráfica está bien porque de aquí* (?) *a aquí* (?) *la velocidad es positiva. Luego de aquí* (?) *hasta ocho la velocidad es negativa, la tenemos por la parte negativa, y a partir de ahí la velocidad es positiva.*

62 -**P**: *Ahora vamos a sacar la gráfica de la aceleración.*

63 -**A**: *Hacemos otra gráfica que comienza en cero.*

64 -**I**: *Pero si ya está hecha.*

65 -**A**: *Pero de la segunda derivada.*

66 -**P**: *Sí, empieza en el punto cero y sólo nos está pidiendo dónde la aceleración es positiva y dónde es negativa.*

67 -**I**: *Entonces tenemos que comenzar estudiando el intervalo entre cero y tres, luego de tres a ocho y de ocho al final, como antes ¿no?*

68 -**P**: *No, porque aquí, entre cero y dos, aumenta y aquí, entre dos y tres, disminuye.*

69 -**A**: *Es que si nos fijamos en la gráfica que nos han dado primero, nosotros hemos dividido y salían signos distintos. Entonces aquí habrá que dividir también.*

70 -**P**: *Entonces sería hasta aproximadamente dos, la gráfica aumenta, la velocidad es positiva, por lo tanto la aceleración será positiva. Luego analizamos de dos a tres, la velocidad disminuye en módulo y es positiva, entonces la aceleración tiene que ser negativa.*

71 -**A**: *A que está teniendo lógica ¿no?*

72 -**I**: *Luego de tres a cinco, que alcanza el mínimo, en módulo crece //*

73 -**P**: *Si en módulo la velocidad crece y es negativa, entonces al disminuir la aceleración será negativa.*

74 -**A**: *Aumenta en módulo, la velocidad es negativa, por lo tanto la aceleración es negativa.*

75 -**I**: *De cinco a ocho//*

76 -**P**: *Este no es un cinco, yo tengo seis.*

77 -**I**: *Pues entonces lo tienes mal.*

78 -**P**: *¿Y por qué?*

79 -**I**: *Porque aquí, en cinco, hay un punto de inflexión. Entonces de cinco a ocho la velocidad sigue siendo negativa, en módulo decrece, por lo tanto la aceleración tiene que ser positiva.*

80 -**A**: *Es que no es más que mirar la gráfica de la velocidad. Lo que estamos haciendo otra vez es acelerar.*

81 -**P**: *De ocho hasta el final ...*

82 -**I**: *Va a ser positiva.*

Han llegado hasta aquí utilizando un criterio que aparentemente está consensuado por todo el grupo y que a decir de ellos el problema se resuelve en forma "*bastante lógica*". Esto les da confianza para abordar el ultimo ítem "*con un nivel que no veas*".

83 -**I**: *Tenemos que derivar, otra vez, la aceleración.*

84 -**A**: *Sí, pero es muy fácil. Aquí* (0) *va a pasar por cero, aquí* (?) *va a pasar por cero y allí* (?) *va a pasar por cero.*

85 -**I**: *Va a ser una línea recta ¿no?*

86 -**A**: *No, una línea recta no.*

87 -**P**: *¿Entonces, saldría de cero?*

88 -**I**: *¡Claro!*

89 -**A**: *Lo difícil está en saber si aquí es positiva o sale de aquí positiva.*

90 -**P**: *Es que no vamos más que disminuyendo. Los intervalos que tenemos los vamos haciendo más pequeños, más pequeños. Los vamos cogiendo más pequeños y cambiándoles el signo, el que es positivo pasa a negativo, el que es negativo pasa a positivo y así siguiendo. // Ahora va a ser esto hasta el dos ¿dónde tenemos un mínimo?*

91 -**I**: *Hasta el cinco. // Oye, en tres puede alcanzar un mínimo.*

92 -**P**: *Tiene un mínimo aquí y luego sube ¿no?*

93 -**A**: *¿Tú has hecho la gráfica de la aceleración? ¿Dónde está la gráfica de la aceleración?*

Aquí parece que han perdido el control de los papeles porque se dan cuenta de que no es la gráfica de la aceleración sobre la que están trabajando. Discuten un poco hasta encontrarla y luego hacen un control de los signos de la misma en los cuatro intervalos que han escogido. En el primero es positiva, en el segundo y tercero negativa y en el cuarto positiva. Después de ese análisis están de acuerdo en que ésa es la gráfica de la aceleración que habían construido.

94 -**I**: *Ves cómo lo tenemos dominado.*

95 -**P**: *De cero a uno la tercera derivada sería positiva. Del uno al dos disminuye, sería negativa, como la aceleración es positiva su derivada es negativa. Del dos al tres, donde hay un mínimo, aumenta en módulo, la aceleración es negativa, su derivada debe ser positiva.*

96 -**I**: *No, yo pienso que es negativa.*

97 -**P**: *De dos a tres aumenta en módulo, como la aceleración es negativa su derivada es negativa.*

98 -**I**: *¡Claro!*

99 -**P**: *Del tres al cinco en módulo disminuye, como además la aceleración es negativa, su derivada es positiva. De aquí al final aumentaría, la aceleración es positiva y como aumenta su derivada es positiva. Nos va quedando que cada vez son más grandes los valores positivos del final. Mira, a partir de aquí* (?) *la velocidad es positiva y a partir de aquí* (?) *la aceleración es positiva y la tercera derivada a partir de aquí* (?) *es positiva.*

100 -**I**: *Bueno, entonces en el primer intervalo sería positiva, en el segundo y tercero negativa y el cuarto positiva. Tendría dos mínimos ¿verdad?*

Está claro que en este análisis les ha faltado un estudio más profundo de lo que sucede en cero. Sin embargo creemos que han logrado acercarse a un criterio que les facilita ver la integración entre la cinemática y el cálculo diferencial a partir de un contexto gráfico.

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos primero los intercambios verbales ocurridos en algunos episodios de aprendizaje, de la situación 4, entre Alicia e Inma y a continuación el equipo A1 completo.

Verbalización	Alicia	Inma	Verbalización	Alicia	Inma
1		DA(1)	2	EA(0)	
3		E(0)	4	DA(1)	
5		EA(0)	6		DA(1)
7	E(0)		8		PA(0)
9	DA(1)		10		DA(1)
11	E(0)		12		DA(1)
13	PA(0)		14		DA(1)
15	DA(0)		16		PA(0)
17	E(0)		18		E(0)

19		DA(1)	20	EA(0)	
21		DA(1)	22	PA(0)	
23		DA(1)	24	E(0)	
25		EA(0)	26	PA(0)	
27		DA(1)	28	PA(0)	
29		DA(0)	30	E(0)	
31		DA(1)	32	EA(0)	
33		EA(0)	34	DA(1)	
35		E(0)	36	PA(0)	
37		E(0)	38	DA(1)	
39		PA(0)	40	DA(1)	
41		UAR(1)	42	EA(0)	
43		DA(1)	44	EA(0)	
45		DA(1)	46	EA(0)	
47		I(0)	48	PA(0)	
49		DA(0)	50	PA(0)	
51		DA(1)	52	UAR(1)	
53		EA(0)	54	D(0)	
55		DA(1)	56	E(0)	
57		DA(1)	58	E(0)	
59		DA(1)	60	E(0)	
61		E(0)	62	EA(0)	
63		E(0)	64	DA(0)	
65		EA(0)	66	EA(0)	
67		D(0)	68	EA(0)	

69		DA(1)	70	DA(1)	
71		DA(1)	72	E(0)	
73		DA(1)	74	UAR(1)	
$\bar{x}$				0.1	0.3

Tabla 4.33. Análisis del habla, equipo A1 subdividido, situación 4.

Es interesante observar cómo se mezclan, en el discurso, los dos contextos, el matemático y el físico. Inma, en el contexto matemático, obtiene mejores resultados que Alicia. Sin embargo, y a pesar de la larga discusión, no logran encontrar el paralelismo que hay entre las concepciones en los dos contextos. Pensamos que, si bien los resultados son positivos, deben acabar de construir los conceptos involucrados.

Análisis de las verbalizaciones

Veamos, a continuación, cuáles son los resultados del intercambio verbal del equipo A1 completo para la situación 4.

Verbalización	Alicia	Penélope	Inma	Susana
1			DA(1)	
2		PA(0)		
3	DA(1)			
4		PA(0)		
5	DA(1)			
6		UAR(1)		
7	E(0)			
8			DA(1)	
9		EA(0)		
10	EA(0)			
11		PA(0)		
12			DA(1)	

13		PA(0)		
14	E(0)			
15			DA(1)	
16	EA(0)			
17		EA(0)		
18	DA(1)			
19		UAR(1)		
20	PA(0)			
21			EA(0)	
22				PA(0)
23	DA(1)			
24				PA(0)
25	DA(1)			
26			PA(0)	
27	DA(1)			
28			UAR(1)	
29	PA(0)			
30			E(0)	
31	E(0)			
32			DA(1)	
33	UAR(1)			
34		PA(0)		
35	DA(1)			
36		EA(0)		
37	I(0)			

38		UAR(1)		
39	DA(1)			
40		UAR(1)		
41	EA(0)			
42		EA(0)		
43	DA(1)			
44			PA(0)	
45	DA(1)			
46		E(0)		
47				DA(1)
48	PA(0)			
49		PA(0)		
50		RA(1)	DA(1)	
51		EA(0)		
52	PA(0)			
53		DA(1)		
54	PA(0)			
55		DA(1)		
56			PA(0)	
57		PA(0)		
58			E(0)	
59	EA(0)			
60		PA(0)		
61	DA(1)			
62		D(0)		

63	E(0)			
64			E(0)	
65	EA(0)			
66		EA(0)		
67			PA(0)	
68		DA(1)		
69	DA(1)			
70		DA(1)		
71	EA(0)			
72			DA(1)	
73		DA(1)		
74	EA(0)			
75			PA(0)	
76		E(0)		
77			E(0)	
78		PA(0)		
79			DA(1)	
80	EA(0)			
81		EA(0)		
82			EA(0)	
83			DA(1)	
84	E(0)			
85			PA(0)	
86	E(0)			
87		PA(0)		

88			E(0)	
89	PA(0)			
90		E(0)		
91			E(0)	
92		E(0)		
93	PA(0)			
94			I(0)	
95		E(0)		
96			DA(0)	
97		UAR(1)		
98			EA(0)	
99		DA(1)		
100			E(0)	
$\bar{x}$	0.1	0.1	0.1	0

Tabla 4.34. Análisis del habla, equipo A1 completo, situación 4.

- **E-A2**

El grupo comienza discutiendo cuáles son los datos que tienen a través de la gráfica que se les presenta. La primera duda, como ya veremos, es si la gráfica representa posición-tiempo o espacio-tiempo.

Episodio de aprendizaje

1 -**M del C**: *La derivada de la posición da la velocidad, no la gráfica del espacio.*

2 -**L**: *¿Y espacio partido de tiempo da velocidad también?*

3 -**M del C**: *El espacio partido por el tiempo representa la velocidad.*

Se les sugiere que lean en forma comprensiva los dos primeros renglones del enunciado. Sin embargo, como veremos a continuación, persiste la dificultad en entender cómo si el movimiento se produce sobre una trayectoria rectilínea, se le está representando con una curva. Por lo que se trató de mostrarles, con un ejemplo práctico, qué representa la gráfica de la función posición.

4 -**R**: *Pero es una vía recta y esto es curvo.*

5 -**L**: *Lo que dice, y que a ti te ha confundido, es que el tren se desplaza sobre una recta, pero eso no significa que su movimiento sea recto porque es uniforme, es rectilíneo y no uniformado, porque si no, no tendría aceleración.*

6 -**R**: *Ni velocidad. Bueno, sí tendría velocidad pero...*

7 -**M del C**: *Ésta es la vía del tren, es una vía recta. En el segundo tres está a cuatrocientos metros...*

8 -**L**: *Lo que está representando la línea recta es el tiempo. Tú vas en el tren, la vía es recta, sin embargo tiene un movimiento que puede ir para adelante y para atrás y eso se representa todo en una curva.*

...

9 -**R**: *Entonces yo he puesto que va marcha atrás entre tres y ocho segundos porque va retrocediendo en el espacio.*

10 -**M**: *Aquí está el punto cero, en este eje que son los metros, ves que los metros aumentan y a partir de aquí* (3s) *va para atrás.*

11 -**L**: *Va para atrás, pero aquí sigue recorriendo espacio negativo. Yo pienso que se para cuando llega aquí* (5s).

12 -**R**: *Es que no estamos hablando de parar.*

13 -**L**: *Sí, pero es que aquí luego tiene espacio negativo.*

14 -**M del C**: *Sí, pero luego desde aquí* (8s) *ya va para arriba.*

15 -**R**: *Es que te vuelves y en cinco llegas al punto de partida, donde empezaste, y continúas ¿entiendes?, a los ocho segundos te vuelves otra vez, vas para adelante, pasas por el punto de partida, aproximadamente a los diez segundos, y continúas así.*

16 -**L**: *El espacio que está recorriendo es negativo.*

17 -**R**: *Sí, pero no te están preguntando si es negativo, te están preguntando dónde está retrocediendo.*

18 -**L**: *¿Entonces el espacio que retrocede es de tres a ocho?*

...

19 -**L**: *Yo no estoy de acuerdo si parte de aquí* (3) *o de aquí* (5), *porque aquí* (5) *la velocidad también sería cero.*

20 -**R**: *Ése sería un punto de inflexión donde cambia de positiva a negativa* (suponemos que se refiere a 5 segundos).

Lydia no se convence, como veremos en el resto del debate, pero asume, con el resto del grupo, que el intervalo que va marcha atrás es entre los tres y ocho segundos. Pasan al segundo apartado sobre el que, en principio, apenas discuten.

21 -**L**: *Entonces la velocidad es positiva de cero a tres, es negativa de tres a ocho y de ocho en adelante sería positiva ¿no?*

Continúan con el tercer ítem.

22 -**L**: *Ése sí lo sé, donde la velocidad es positiva la aceleración es positiva.*

23 -**M**: *De cero a tres, en tres se para.*

24 -**L**: *Me parece que cuando la gráfica de la velocidad es creciente, la aceleración tiene el mismo signo que la velocidad. Cuando es decreciente tiene signo contrario. De aquí* (0s) *a aquí* (3s) *es creciente, la velocidad es positiva...*

...

Después de algunas disquisiciones, Lydia hace un resumen del trabajo realizado hasta el momento, de esta forma:

25 -**L**: *La locomotora daba marcha atrás en el intervalo de tres a ocho segundos, porque el intervalo era decreciente. En el segundo apartado es positiva la velocidad, en función de la derivada, en el intervalo cero a tres y ocho a infinito. En el intervalo de tres a ocho era negativa. El tercer apartado lo vamos a discutir ahora.*

26 -**M**: *De tres a ocho, parte de cero y vuelve a cero otra vez. La aceleración tiene que ser positiva en uno y negativa en otro.*

...

27 -**L**: *Si tú tienes una velocidad negativa, la aceleración no tiene porqué ser negativa. Yo tengo entendido, visto matemáticamente, que cuando la gráfica es decreciente la aceleración lleva signo contrario a la velocidad. O sea, la segunda derivada en la gráfica del espacio tiene signo contrario a la primera.*

28 -**M**: *La gráfica es decreciente, la derivada está por debajo del eje, o sea, es negativa.*

...

29 -**L**: *Entonces me das la razón, si la velocidad en todo este espacio es negativa, la aceleración aquí es negativa.*

30 -**M**: *Si tú haces la derivada de aquí a aquí hasta donde sea, va a ser un intervalo que es decreciente ¿no?. La aceleración, que es la derivada de ésta, va a estar por debajo.*

31 -**L**: *Eso no tiene nada que ver para que sea positiva o negativa. Vamos a ver, si viene un coche, esto es cuesta arriba, y va subiendo la cuesta, la aceleración tiene que disminuir ¿no?*

32 -**M**: *Veamos, lo cierto que aquí, en la gráfica del movimiento, es cero. Tiene que haber una aceleración a partir de un punto, que sea contraria a la velocidad, para que el móvil se detenga.*

33 -**L**: *Yo lo tengo muy claro, si la velocidad es negativa, de tres a ocho, la aceleración en ese intervalo es positiva. La aceleración es positiva de cero a tres y la aceleración sería ... La aceleración sería positiva en toda la gráfica.*

34 -**M**: *De aquí partimos con velocidad cero. Aquí va avanzando y aquí retrocediendo, llega un momento que es éste* (3) *cuando se para. Aquí tiene que haber una aceleración a favor de la velocidad para que avance y luego cuando el móvil...*

35 -**L**: *No tiene por qué. Porque el móvil va marcha atrás, la aceleración será negativa ¿no?, tú estás desacelerando.*

36 -**M**: *Tú aquí estás parada, pero la aceleración es como tú dices. Si la velocidad es negativa la aceleración será negativa. Irás avanzando, avanzando hasta que la aceleración cambiará de signo, y el móvil se irá parando.*

37 -**L**: *Yo lo que tengo puesto es que la aceleración, cuando la velocidad es decreciente, será de signo contrario. Eso fue lo que me explicaron en Matemáticas, en la derivada. Entonces aquí la aceleración sería negativa igual que está, entonces aquí sería de signo contrario.*

38 -**M**: *La aceleración es negativa, porque es decreciente la gráfica de tres a cinco. A partir de cinco vuelve a subir.*

39 -**L**: *La aceleración no, tiene que pasar sólo por el mínimo, vamos a poner que lo corta aquí, entonces puede ser una cosa así. Entonces la aceleración sería constante por lo que hemos estado hablando, si hacemos la supuesta segunda derivada. // Aunque se pare no tiene por qué cambiar de signo la aceleración. // Yo*

digo que si la gráfica es creciente, la velocidad es mayor que cero, en este intervalo es positiva, entonces la aceleración tenía que tener el mismo signo. Al ser decreciente la gráfica, la velocidad es negativa. Por lo tanto, de tres a ocho como es decreciente, la aceleración tiene que tomar signo contrario a la velocidad. Y ahora aquí (?), *que es lo que yo pienso, al ser creciente la gráfica, la velocidad es positiva y la aceleración tiene el mismo signo que la velocidad. Entonces, la aceleración es constante.*

40 -**M**: *Esto apoya lo que yo te decía. No importa dónde tenga el mínimo, ésta es una función parabólica, al hacer la derivada va a tener un grado menos, entonces aquí* (?) *será una recta. Ahora matemáticamente estoy de acuerdo contigo. Pero físicamente ...*

41 -**L**: *Teniendo en cuenta que física no he dado en mi vida... Es que tú vas y te detienes y vuelves marcha atrás, pero estás acelerando para ir marcha atrás, y te vuelves a detener y ahora, en lugar de ir marcha atrás te vuelves para adelante //*

42 -**M**: *Pasa por un estado cero de velocidad y aceleración.*

43 -**L**: *Que serían las derivadas, los puntos de máximo y mínimo, y ahora sigues hacia delante y vuelves a acelerar, entonces en todo el intervalo es positiva. Tú pierdes el movimiento cuando llegas al punto máximo.*

Cuando llega el momento de sintetizar, para responder a la pregunta del tercer apartado, Lydia deja constancia de las diferencias en esta discusión de la manera siguiente:

44 -**L**: *A menos que yo tenga razón y la velocidad fuera marcha atrás donde el espacio es negativo. Entonces habría cambios de velocidad y aceleración.*

...

45 -**L**: *Entonces la aceleración la consideramos constante en todo el intervalo, ¿y el tirón?*

46 -**M**: *Si la aceleración es constante su derivada sería cero.*

...

Lydia no se muestra satisfecha con las conclusiones a que han llegado; Manuel trata de convencerla dándole más argumentos.

47 -**M**: *En la primera función, $s(t)$, tienes un máximo y un mínimo, por lo tanto la gráfica de la primera derivada debe cortar al eje en dos puntos.*

48 -**L**: *Claro.*

49 -**M**: *La gráfica de la tercera derivada solamente va a cortar al eje en un punto porque la segunda derivada tiene solamente un mínimo.*

50 -**L**: *Eso sí que lo entiendo, estoy convencida. Entonces, es constante e igual a cero, por lo tanto no hay intervalos positivos ni negativos ¿no?*

Manuel está mostrando tener unas concepciones, desde el contexto de las Matemáticas, bastante claras y que además reafirma, pero sus concepciones sobre la Cinemática y los argumentos de Lydia nos parece que no le han permiten avanzar todo lo que hubiera podido.

Análisis de las verbalizaciones

Hacemos un análisis sobre los intercambios verbales que se han producido en el equipo A2 para la situación 4.

Verbalización	Rosario	Manuel	Lidia	María del C.
1				DA(1)
2			PA(0)	
3				DA(1)
4	E(0)			
5			DA(1)	
6	EA(0)			
7				DA(1)
8			DA(1)	
9	DA(1)			
10		DA(1)		
11			E(0)	
12	I(0)			
13			E(0)	
14				DA(1)
15	DA(1)			

16			E(0)	
17	I(0)			
18			PA(0)	
19			PA(0)	
20	E(0)			
21			UAR(1)	
22			E(0)	
23		DA(1)		
24			E(0)	
25			UAR(1)	
26		DA(1)		
27			E(0)	
28		DA(1)		
29			E(0)	
30		DA(1)		
31			E(0)	
32		DA(1)		
33			E(0)	
34		DA(1)		
35			E(0)	
36		DA(1)		
37			E(0)	
38		E(0)		
39			E(0)	
40		E(0)		

41			E(0)	
42		E(0)		
43			E(0)	
44			E(0)	
45			PA(0)	
46		DA(1)		
47		DA(1)		
48			EA(0)	
49		DA(1)		
50			E(0)	
$\bar{x}$	0	0.2	0.1	0.1

Tabla 4.35. Análisis del habla, equipo A2, situación 4.

- **E-A3**

Episodio de aprendizaje

Veamos cómo se desarrollan algunos diálogos.

1 -**D**: *Llegamos a la conclusión que va marcha atrás cuando la velocidad disminuye, o sea cuando va por debajo de cero. Pero ahora hay que saber cuándo va por debajo de cero.*

2 -**R**: *Cuando está por debajo del eje de las x.*

3 -**D**: *Eso sí, pero la velocidad va aumentando aunque es negativa y al ser negativa el movimiento va marcha atrás. // Entonces desde cinco hasta 9.75 es el intervalo en que la velocidad es negativa. O sea que el móvil va hacia atrás.*

Continúan con el segundo ítem.

4 -**M C**: *De cero hasta cinco...*

5 -**D**: *Cuando la velocidad sea cero la incluimos como positiva ¿no? // Aquí* (3), *aplicando lo que nos dijo, sería cero la velocidad porque hay un máximo, aquí* (5) *también sería cero ...*

6 -**M C**: *¿Pero entonces de aquí* (0) *a aquí* (3) *sería positiva y de aquí* (3) *a aquí* (5) *sería negativa?*

7 -**D**: *Yo creo que nos hemos equivocado en el primer ítem, el intervalo sería hasta ocho.*

8 -**M C**: *¡Exactamente!*

9 -**D**: *Porque si aquí es cero, a partir de aquí empieza a ir para arriba, // aquí en ocho empieza a aumentar. // Como sabemos, la derivada primera da la velocidad. Donde la derivada primera vale cero existe un máximo o un mínimo. // Entonces la velocidad es negativa de cinco a ocho.*

10 -**R**: *Hay un cambio de dirección, de tres hasta ocho sería ... Desde cero, es decir desde aquí* (3) *hasta aquí* (8) *... aquí también la velocidad sería cero.*

11 -**M C**: *¡Claro!*

12 -**R**: *¿Cuándo cambia de sentido el coche? ¿aquí cambia de sentido?*

13 -**M C**: *En los máximos y en los mínimos.*

...

14 -**R**: *¿Entonces en cinco va marcha atrás?*

15 -**M C**: *Yo creo que es del tres hasta el ocho.*

16 -**D**: *¡Llevas razón!*

17 -**R**: *En tres es cuando cambia de sentido ¿no?*

18 -**D**: *De cero hasta tres es positiva, de tres a ocho, como decrece, la velocidad es negativa. // Porque en tres y en ocho es cero. // De tres a ocho decrece y luego vuelve a aumentar. // Ya está. // Hemos llegado a la conclusión por la derivada. Cuando la derivada es cero es porque hay un máximo o un mínimo y desde ahí hasta ahí es donde hay un cambio de dirección.*

Pasan al apartado c).

19 -**D**: *Eso es lo que estuvo explicando la otra vez, sabemos que si ... Desde cero hasta el máximo la aceleración es positiva, la gráfica es creciente // La velocidad es positiva, por lo tanto la aceleración es positiva. // De aquí* (3) *hasta aquí* (8) *la gráfica decrece ...*

20 -**M C**: *La velocidad es positiva pero la aceleración es negativa.*

21 -**D**: *Pero ella tomaba también, como valor para analizar, los puntos de corte con los ejes. // Entonces, de tres a cinco tenemos que estudiar la aceleración, porque aquí la gráfica decrece, la velocidad es positiva y la aceleración también.*

22 -**M C**: *Igual que de aquí* (5) *a aquí* (8). *¡Vamos! La aceleración es negativa, la velocidad es positiva.*

23 -**D**: *Aquí, como la gráfica decrece y en módulo la velocidad es positiva // no, la velocidad es negativa entonces la aceleración es positiva. Es siempre lo contrario, cuando decrece, la velocidad y la aceleración son de signo contrario. // Como en módulo la velocidad es positiva la aceleraron es negativa, no por otra cosa.*

24 -**M C**: *¡Claro! Es lo que decía, exactamente. Y ahora de ocho hasta arriba la aceleración es positiva y la velocidad es negativa.*

...

25 -**D**: *Aquí* (?) *el módulo de la velocidad es negativo, se acerca a cero y ya de aquí* (?) a *aquí* (?) *la gráfica crece, la velocidad es positiva, por lo tanto la aceleración es positiva. // Entonces yo creo que hemos entendido esta gráfica también.*

Pasan al último apartado.

26 -**R**: *La tercera derivada ¿qué es? La aceleración ¿no?*

27 -**M C**: *Es la variación instantánea de la aceleración.*

28 -**R**: *Entonces es en estos puntos. Son variaciones instantáneas de la aceleración.*

29 -**D**: *¿Dónde haya un cambio de aceleración? ¿En los máximos o mínimos?*

30 -**R**: *Eso es lo que yo quería decir.*

...

31 -**M C**: *¿Dónde hay un cambio de aceleración?*

32 -**D**: *Porque una cosa aquí es positiva y aquí es negativa, entonces para que haya un cambio el incremento de aceleración se mide por aceleración final menos aceleración inicial, ¿no?*

33 -**R**: *¡Claro, claro!*

34 -**D**: *Entonces aquí* (3) *y aquí* (8) *es donde hay un punto de cambio en la aceleración.*

35 -**M C**: *En los máximos y en los mínimos.*

36 -**D**: *Como la pregunta dice en qué intervalos de tiempo ... Entonces de cero a tres es positiva luego de tres a ocho es negativa y de ocho en adelante sería positiva.*

Aquí se les aconseja que revisen y reflexionen sobre sus conclusiones, indicándoles que bosquejen, en lo posible, las distintas gráficas.

37 -**R**: *Tenemos que hacer la derivada de esta gráfica. Hay que tener claro la velocidad absoluta que hay aquí* (?). *Sabemos que aquí* (?) *la velocidad era positiva, la absoluta, porque la velocidad y la aceleración eran positivas ¿no? Entonces en la gráfica de la velocidad, en este intervalo, es positiva.*

38 -**D**: *Sí, pero primero vamos a distinguir que hay dos puntos en los que sabemos que la velocidad vale cero, en esos dos puntos. Esos puntos son tres y ocho. Entonces cuando hagamos la nueva gráfica de la velocidad sabemos que en el punto tres y en el punto ocho va a cortar con los ejes x. Ahora tenemos que averiguar cómo va la gráfica a la izquierda y a la derecha de esos dos puntos. Cómo es la velocidad. Nos guiamos por el módulo de esa velocidad. Sabemos que desde tres, a la izquierda, al ser la gráfica creciente la velocidad es positiva. Entonces lo que quiere decir es que la gráfica vendría por aquí ¿no? Una cosa así. De tres hasta cinco //*

39 -**M C**: *La gráfica decrece, la velocidad sigue aumentando, lo que pasa es que la aceleración es negativa.*

40 -**R**: *Porque los dos, posición y velocidad coinciden, es negativa.*

...

41 -**M C**: *La velocidad es positiva hasta que llega a cero, pero sigue siendo positiva ahora.*

42 -**D**: *Desde cinco hasta ocho la gráfica decrece. El módulo de la velocidad sigue siendo positivo, aunque la velocidad es negativa.*

43 -**M C**: *¡Exactamente!*

44 -**R**: *¿Pero el módulo de la velocidad es positivo o negativo?*

45 -**D**: *Es positivo, sigue aumentando, hasta ocho sigue aumentando y a partir de ocho llega y disminuye hasta llegar a cero.*

46 -**R**: *¿No dijimos que tiene que cortar en el punto ocho?*

...

47 -**M C**: *Es que en el punto ocho la velocidad tiene que ser cero ... entonces la velocidad no puede estar aquí* (primer cuadrante), *tiene que estar aquí* (cuarto cuadrante).

48 -**D**: *Pues entonces sería así y esto a partir de aquí* (5) *decrece, aquí la velocidad es negativa.*

...

49 -**M C**: *Es que desde aquí* (8) *hasta aquí* (10) *es negativa, luego desde aquí* (10) *ya hasta arriba es positiva. Desde el ocho al diez //*

50 -**D**: *Es negativa. Entonces esto vendría ... Aquí estaría el tres, aquí estaría el ocho, entonces esto vendría por aquí* (?).

51 -**M C**: *Abajo hasta el tres, luego del tres //*

52 -**R**: *Al ocho // y después del ocho // Ahí va. Bueno, ¿a partir de aquí entonces qué sería? ¿La aceleración sería positiva?*

53 -**M C**: *Hay que hacer otra gráfica con la aceleración.*

54 -**D**: *Lo que no me cuadra es que aquí* (3) *haya un mínimo. Porque aquí debería haber un ...*

55 -**M C**: *Pero aquí* (8) *hay otro, en esos puntos la velocidad es cero.*

56 -**D**: *No, porque eso nos indica que es un punto de inflexión. Fijándonos aquí podemos sacar la derivada segunda.*

57 -**R**: *¡Ah! Y a partir de esto nos damos cuenta que aquí hay un cambio de la aceleración porque los puntos de inflexión ¿te acuerdas qué eran? //*

58 -**D**: *Los puntos de inflexión se sacan con la derivada segunda. Entonces ya sabemos que con la derivada segunda // Aquí la derivada segunda vale cero.*

59 -**R**: *Pero, vamos a ver, esto es lo que yo quiero dejar claro. Entonces hemos quedado que del ocho hasta el diez la velocidad era negativa.*

60 -**M C**: *Es negativa y la aceleración es positiva, pero del diez para arriba la velocidad es positiva //*

61 -**D**: *La aceleración también es negativa, si crece tienen que ser las dos del mismo signo.*

...

62 -**D**: *Entonces estamos de acuerdo ya en esto ¿no?, Sabemos que la gráfica aproximada de la velocidad podría ser ésta, y fijándonos bien vemos que aquí //*

63 -**R**: *Hay dos puntos de inflexión.*

64 -**D**: *No, sólo hay uno ¿no?*

65 -**R**: *¿Y éste?*

66 -**D**: *La verdad, aquí* (8) *cambia también de //*

67 -**R**: *Claro, porque son los dos sitios donde hay un cambio de la aceleración.*

68 -**M C**: *Pero aquí* (10) *hay otro cambio.*

...

69 -**D**: *Entonces haciendo una gráfica de la aceleración sabemos que en el punto tres la aceleración debería ser cero, o sea aquí* (3), *aquí pasaría por el eje x, también en tres, y en ocho pasaría por el eje x, sería cero. Y fijándonos en la gráfica del movimiento, hemos pensado que desde cero hasta tres la aceleración sería positiva, o sea que vendría por aquí también. Desde tres hasta cinco la aceleración sería negativa, o sea que bajaría por aquí y desde cinco hasta ocho sería la aceleración positiva.*

70 -**M C**: *Es negativa.*

71 -**D**: *Sigue siendo negativa hasta ocho ¿no?*

72 -**M C**: *Hasta ocho y luego de ocho a diez sería positiva.*

73 -**D**: *Ahora sí es positiva aquí* (10), *pues aquí ha habido otro cambio.*

74 -**M C**: *Otro cambio y ahora de diez para arriba otra vez positiva.*

75 -**R**: *Todavía no me queda claro del tres al ocho. En el intervalo del tres al ocho la aceleración es negativa. Tiene que tocar el ocho, pero ¿cómo va a tocar el ocho siendo la aceleración negativa?, entonces quiere decir que aquí hemos subido ¿a cuento de qué?*

76 -**D**: *Porque en el punto ocho sabemos que la aceleración tiene que ser cero.*

77 -**R**: *Sí, ya sé por qué, porque nosotros sabemos que tiene que pasar por ahí. Ahora me estoy preguntando ¿por qué hacemos nosotros esto?*

78 -**D**: *Porque es aproximada. Puede hacer esto, o puede hacer esto o puede hacer cualquier cosa. El caso es que tiene que pasar por ahí.*

79 -**M C**: *Ahora hacemos la variación de la aceleración.*

80 -**D**: *Tenemos que ver dónde la derivada tercera va a ser cero. ¿Dónde es cero? Tiene que ser aquí* (entre 3 y 8) *sólo.*

...

81 -**D**: *Hay que hacer la tercera gráfica, de la derivada tercera. Sabemos que aquí* (0-3) *la aceleración es positiva, aquí* (3-8) *es negativa y aquí* (de 8 en adelante) *positiva.*

82 -**M C**: *¿El cambio, dónde se produce? ¿en el punto ocho?*

83 -**D**: *En el tres, en el ocho //*

...

84 -**M C**: *¿Qué se representa? ¿Sobre qué?*

85 -**R**: *Sobre el tiempo. Entonces esta gráfica nos sirve para ver los puntos donde hay un cambio en la variación de la aceleración. Entonces //*

86 -**D**: *Esta gráfica lo que da es la variación instantánea de la aceleración.*

87 -**R**: *Entonces tenemos que poner aquí los puntos donde cambia la variación.*

88 -**D**: *Es que lo que entendemos nosotros por variación no es lo que piden aquí. Si la variación instantánea de la aceleración es la variación de la aceleración en cada instante, miramos en la gráfica que hemos dibujado de la aceleración y nos fijamos en cada uno de los instantes //*

89 -**M C**: *Va variando siempre, la aceleración siempre varía.*

...

90 -**R**: *¿Y sobre la aceleración, qué sería? ¿la aceleración media? Entonces esta sería la instantánea. Entonces es la misma.*

91 -**D**: *No puede ser la misma gráfica de la aceleración que la de la variación instantánea de la aceleración. No es lo mismo la aceleración instantánea que la variación instantánea de la aceleración ¿no?*

...

92 -**R**: *Tendría un punto en el eje x.*

93 -**D**: *Cortaría el aje x en el mínimo.*

94 -**R**: *Ahí donde es el mínimo, hay un punto ahí.*

95 -**D**: *Sería una línea recta.*

96 -**R**: *¡Eso es!*

Persisten, sin apenas modificaciones, sus concepciones. A pesar de la larga discusión no se advierte un avance positivo que les permita arribar a una solución aceptable del problema.

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos a continuación en forma cuantitativa las verbalizaciones que se han producidos en los episodios de aprendizajes seleccionados en el equipo A3 para la situación 4.

Verbalización	Rafael	David	Mari Carmen
1		E(0)	
2	EA(0)		
3		E(0)	
4			PA(0)
5		E(0)	
6			DA(1)
7		UAR(1)	
8			EA(0)
9		DA(1)	
10	UAR(1)		
11			EA(0)
12	PA(0)		
13			DA(1)
14	PA(0)		
15			DA(1)
16		EA(0)	
17	PA(0)		
18		DA(1)	
19		E(0)	
20			E(0)
21		E(0)	

22			E(0)
23		E(0)	
24			E(0)
25		E(0)	
26	PA(0)		
27			DA(1)
28	PA(0)		
29		E(0)	
30	EA(0)		
31			PA(0)
32		E(0)	
33	EA(0)		
34		E(0)	
35			E(0)
36		E(0)	
37	E(0)		
38		DA(1)	
39			E(0)
40	E(0)		
41			E(0)
42		DA(1)	
43			EA(0)
44	PA(0)		
45		E(0)	
46	DA(1)		

47			DA(1)
48		UAR(1)	
49			E(0)
50		E(0)	
51			EA(0)
52	PA(0)		
53			D(0)
54		PA(0)	
55			DA(1)
56		DA(1)	
57	PA(0)		
58		DA(1)	
59	E(0)		
60			E(0)
61		E(0)	
62		I(0)	
63	E(0)		
64		PA(0)	
65	PA(0)		
66		E(0)	
67	E(0)		
68			E(0)
69		E(0)	
70			E(0)
71		PA(0)	

72			E(0)
73		E(0)	
74			E(0)
75	PA(0)		
76		E(0)	
77	PA(0)		
79		E(0)	
79			D(0)
80		DA(1)	
81		E(0)	
81			PA(0)
82		E(0)	
84			PA(0)
85	E(0)		
86		DA(1)	
87	E(0)		
88		DA(1)	
89			UAR(1)
90	PA(0)		
91		DA(1)	
92	DA(1)		
93		UAR(1)	
94	EA(0)		
95		DA(1)	

96	EA(0)		
$\bar{x}$	0	0.1	0.1

Tabla 4.36. Análisis del habla, equipo A3, situación 4.

La puntuación obtenida confirmar lo que observamos respecto a los argumentos poco sólidos utilizados por Rafael y al escaso uso que le da a las ayudas recibidas.

❑ SITUACIÓN 5(6)

Desde la terraza de un edificio de altura s_0 se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Esta situación viene descrita por la siguiente ecuación diferencial:

$s'' = -g$, donde g es la aceleración de la gravedad.

Predecir la posición de la pelota para cualquier instante t, es decir, hallar la expresión de s(t). Utilizar como herramienta de predicción la serie de Taylor.

Debemos destacar que el primer contacto que tuvieron estos alumnos con los temas sobre ecuaciones diferenciales, series de funciones y, en particular, polinomio y serie de Taylor, fue a través de la etapa de la Enseñanza Preparatoria (Anexo 2).

▪ E-A1

De este equipo, para este problema, por un fallo técnico en el aparato de audio no disponemos de la discusión que realizó para defender y demostrar sus afirmaciones. Nos vamos a basar para el análisis en las conclusiones a que han llegado, después de una puesta en común, y que han documentado en forma escrita.

Consideran la serie con la notación adecuada para el problema. Entre las cosas que podemos destacar es que solamente se ha considerado hasta la segunda derivada, como si allí se "*acabaran*". Al calcular la función y sus derivadas en el punto cero suponen que $s(0) = 0$ y que $s'(0) = 0$. La condición inicial $v(0) = v_0$ no se ha utilizado correctamente porque, como se ve, no han sabido interpretar la notación.

Llegan al resultado $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2$ que, según declaran, no saben verificar.

- **E-A2**

Episodio de aprendizaje

1 -**M**: *En el polinomio de Taylor voy sustituyendo los valores, como* $s_0 = 0$, *y luego en la segunda derivada en el polinomio de Taylor en vez de poner s'' pongo* $-g$*. Simplifico y sustituyo* $-g$ *por* 9,8 .

2 -**L**: *Estamos de acuerdo, yo lo hice por integración y hallé la función. Ahora lo que me quedaría //*

3 -**M**: *¿Qué relación matemática hay entre el polinomio de Taylor y la integración?*

4 -**L**: *Es lo mismo. Utilicé integración para hallar la función. El polinomio de Taylor tiene que ver con la aproximación en un intervalo de esa función. Entonces utilizas los polinomios para, en ese intervalo, aproximar la función a un determinado valor.*

5 -**M**: *Al final obtenemos la función.*

6 -**L**: *Yo he utilizado lo que sabía, que al hacer la integral me daba la derivada.*

7 -**M**: *Como si tú partes de cero y sumas dos, luego sumas otros dos y luego otros dos.*

8 -**L**: *¡Claro!*

9 -**M**: *Luego tú has quitado dos, dos y dos y te da otra vez cero.*

10 -**L**: *Pues así es, y luego lo que explicó esta mañana Marta, que da lo mismo. Yo encuentro que* $s(t) = \frac{-gt^2}{2}$ *y utilizando polinomios, como explicó, nos da* $s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$*. Es decir, que nosotros lo que hemos hallado es nada más que esta parte de la gráfica.*

11 -**M**: *Porque los primeros valores son cero.*

12 -**L**: *No, porque a ti te dicen que desde una terraza de altura tal se lanza una pelota con velocidad inicial tal. Que sí, que pueden ser cero y que nos haya dado concretamente ese resultado //*

13 -**M**: *El espacio inicial como es un eje de coordenadas, tú lo puedes poner donde quieras. Si lo planteas cero, arriba en la azotea el espacio inicial es cero.*

14 -**L**: *Igual que la velocidad, si yo lo tengo cogido en la mano la velocidad que tiene ahora mismo es cero, cuando lo suelto ... Lo hemos hallado medianamente bien, pues se supone que deberíamos haber hallado esto ¿no?*

...

15 -**M**: *Bueno, ahora la verificación.*

16 -**L**: *Dándole valores ¿no? Depende del incremento de tiempo que le quieras meter.*

17 -**M**: *Si tú consideras aceleración cero // no, tú consideras la aceleración inicial, inicialmente tiene esa aceleración,* 9.8.

18 -**L**: *Sí, aceleración* $-g$.

19 -**M**: *Tú haces la derivada segunda de la función que hemos hallado, que es la aceleración, y te tiene que dar* 9.8.

20 -**L**: *Entonces sería hacer otra vez lo mismo pero para atrás.*

21 -**M**: *¡Claro! Por ejemplo aquí la velocidad es la primera derivada, en el punto cero la velocidad es cero.*

22 -**L**: *Bueno, por métodos distintos pero hemos hallado lo mismo. Concluimos que* $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2$.

En la situación física que deben resolver se enfrentan con dos problemas que son, por un lado, el sistema de referencia y el de las condiciones iniciales. Vemos cómo en el desarrollo de Taylor estas condiciones aparecen en forma natural pero los alumnos, que están en la construcción de este concepto, sienten cierta inseguridad al tener que usar una herramienta nueva. Es por ello que se esfuerzan en buscar una justificación donde se vea una equivalencia entre los resultados, ya que el concepto de que la integración es una operación inversa de la derivación prima en ellos.

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos los intercambios verbales que se han producido en los episodios de aprendizaje del equipo A2 en la situación 5.

Verbalización	Rosario	Manuel	Lydia	María del C.
1		DA(1)		
2			EA(0)	

3		PA(0)		
4			DA(0)	
5		EA(0)		
6			E(0)	
7		PA(0)		
8			EA(0)	
9		PA(0)		
10			DA(1)	
11		PA(0)		
12			DA(0)	
13		DA(0)		
14			E(0)	
15		D(0)		
16			PA(0)	
17		E(0)		
18			EA(0)	
19		DA(1)		
20			UAR(1)	
21		E(0)		
22			I(0)	
$\bar{x}$	0	0.1	0.1	0

Tabla 4.37. Análisis del habla, equipo A2, situación 5.

- **E-A3**

De los tres alumnos que forman este equipo, sólo uno, David, había trabajado sobre el problema en la etapa de acción, integrando dos veces. Con ellos se vuelve a repetir lo que habíamos observado con el equipo anterior. Utilizan el concepto de la integración como una antiderivada, pero a pesar de la larga discusión en ningún momento se hace referencia a la familia de curvas, solución de una integral indefinida. Esto representa una dificultad a la hora de comparar los resultados.

Episodio de aprendizaje

...

1 -**D**: *Pero no hace falta que lo tires en forma parabólica. Se tira recto. En general cuando se tira algo te subes a la azotea y lo tiras para arriba y la gravedad no lo desplaza hacia un lado, le hace que caiga otra vez. // Es que yo ni hice una gráfica ni nada, yo me basé en integrales. Como ésta es la derivada segunda y te dice la aceleración, pues hice la integral de ésta. La integral es la inversa de la derivada. Basta integrar dos veces para conseguir* $s(t)$.

2 -**R**: *¿Qué resultado te dio?*

3 -**D**: $s(t) = -\frac{1}{2}gx^2$.

4 -**R**: *Donde x, ¿qué sería?*

5 -**D**: *Esta sería la ecuación del movimiento, que es lo que te piden. He encontrado la ecuación.*

6 -**MC**: *Vamos a ver, ¿ésta es la inversa de qué?*

7 -**D**: *Yo dije que como la integral es la inversa de la derivada, aquí nos dan la derivada segunda, haciendo la integral de la derivada segunda consigo la derivada primera y haciendo la derivada de ésta consigo la ecuación de* $s(t)$, *que es lo que nos piden. // Luego dice, te proponemos intentarlo utilizando el desarrollo de Taylor para ... Bueno, después lo he hecho desarrollando por Taylor y sustituyendo adecuadamente, teniendo en cuenta que para* $t = 0$ *tenemos esto. Cogiendo esta gráfica, que es* $s(t)$ *en cero, pues coge* $s(0)$, *la derivada primera que es* $-g$ *...*

...

8 -**R**: *Sustituiste, sería como dos maneras de hacer el ejercicio ¿no?*

9 -**D**: *No porque tú utilizas Taylor una vez que has conseguido la ecuación.*

10 -**R**: *¿Para comprobarlo, dices tú?*

11 -**D**: *No, porque te pide que lo desarrolles. Después, una vez que has conseguido* $s(t)$ *por integración desarrollas Taylor. Utilizando la derivada primera*

que has conseguido antes, lo que tienes que hacer es sustituir en el punto cero, $t_0 = 0$, *y ya te sale por Taylor.*

Llegado a este punto preguntan si están bien encaminados, en principio se les remite a la explicación y a los ejemplos que sobre el tema se les dio en la Etapa de la Enseñanza Preparatoria ya que daban muestras de no haberlo tenido en cuenta.

12 -**D**: *Bueno, ha dicho Marta que hallemos esa ecuación por Taylor. Nosotros sabemos solamente que* $s''(t) = -g$. *Es lo único que conocemos y que* $t = t_0 = 0$.

...

13 -**R**: *Tú sabes la derivada segunda, entonces es hacer sustituciones y ya está, ¿no? Ahora haces la derivada de éste y consigues la derivada tercera.*

14 -**D**: *No te hace falta la derivada tercera. El polinomio de Taylor llegaría hasta la segunda derivada porque es la que conocemos. Entonces aquí sustituimos la* t_0 *que es cero en todo el polinomio. Vamos a intentar hacerlo.*

15 -**MC**: *¿*$s(t)$ *lo conocemos?*

16 -**R**: *No, pero conocemos su segunda derivada.*

17 -**D**: *Eso es la que tenemos que averiguar, pero como pone* $s(t_0)$ *pues vamos sustituyendo, ¿entiendes? Entonces tenemos que*

$$s(t) = s(0) + s'(0)(t-0) + \frac{1}{2}s''(0)(t-0)^2.$$

Operando aquí sería

$$s(t) = s(0) + s'(0)t - \frac{1}{2}gt^2,$$

y si te das cuenta, $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$, *es decir, desarrollando por Taylor conseguimos el mismo resultado ya que los otros dos términos tienen que ser cero a la fuerza, porque si no, no resultaría. Seguro que al sustituir en una función //*

...

18 -**D**: *No, porque aquí entonces si es* $s(0)$ *y se supone que es un polinomio // Si es un polinomio* $s(0)$ *va a ser siempre cero. // No, no tiene por qué. Porque si es un término independiente no tendría por qué ser cero.*

19 -**R**: *Pero* $s(0)$ *es la posición cero, por lo tanto siempre va a ser cero estando en el origen de coordenadas ¿no? Y cuando le haces la derivada te sale cero por eso mismo ¿no?*

20 -**D**: *Estos dos términos tienen que ser cero. De esta manera la fórmula del movimiento sería la misma que yo he calculado.*

...

21 -**D**: *A mí me queda la duda de si* $s(0)$ *vale cero y la derivada es cero. Yo recuerdo que en clase hicimos un ejercicio, que ella sacó la ecuación y dijo, esto es cero y esto es cero. Pero claro, yo tampoco sabía por dónde venían los ceros.*

22 -**R**: *Yo creo que es por eso ¿no? Porque la posición cero va a ser cero, ya siempre. Eso lo sabes tú del tirón ¿no?*

23 -**D**: *No, porque si tú tienes una gráfica cuya ecuación es* $y = x^2 + 2$, en x = 0 *va a ser dos.*

24 -**MC**: *¡Exactamente!*

25 -**D**: *Puede darse el caso de que este móvil tenga //*

26 -**R**: *Pero claro, tú dices que está a una altura determinada.*

27 -**MC**: *Entonces no es cero, es* $v(0)$, *no //*

28 -**D**: *Dice que tiene una velocidad inicial y que está situado a una determinada altura. Entonces tendríamos esta situación, estaría aquí // si suponemos v //*

Acaban aquí con una sesión de trabajo en la que han encontrado grandes dificultades para avanzar, al querer hacer coincidir los dos resultados que han hallado. Retoman el tema en la siguiente hora.

29 -**D**: *Por integrales respaldamos el valor de* $s(t)$. *Por Taylor nos da el mismo valor pero tenemos que explicar por qué* $s(0) = 0$ *y también por qué* $s'(0)t = 0$.

30 -**R**: *También verificamos el valor hallado haciendo las dos derivadas y nos da la función inicial.*

31 -**D**: *En principio vamos a pensar que* $s(0) = 0$ *porque al sustituir* t *en* $s(t)$ *da cero. Pero también, me acaba de decir Marta, que cuando te dan el valor, el punto* $t_0 = 0$, *quiere decir que tomamos el valor* t *también como cero. Entonces lo tenemos más fácil todavía, porque* $s'(0)t$ *se nos eliminaría, porque si* t *es cero se elimina. Entonces sólo nos queda* $s(0)$.

32 -**R**: *Claro, si ésta es una derivada, al integrar una cosa que es cero, la integral de esto que es cero, va a salir cero.*

33 -**D**: *Pero de todas formas ya tendríamos aquí* $s(t) = s(0) - \frac{1}{2}gt^2$, *si despejásemos ... nada, qué vamos a despejar.*

34 -**R**: *Es que no hace falta, si sabes el valor de la derivada, sabes el valor de la anterior. Porque nada más tienes que ... ¿sabes lo que te quiero decir? Sabes que esto vale cero, pues integras esto y como es cero, ya es cero lo otro.*

35 -**MC**: *¿No se considera el espacio inicial para nada?*

36 -**D**: *Tiene un* s_0 *que no sabemos cuál es.*

37 -**MC**: *¿s(t) es la velocidad?*

38 -**D**: *s(t) es la ecuación del móvil, la ecuación que rige ese móvil, s'(t) da la velocidad y s''(t) da la aceleración.*

...

39 -**MC**: *¿Pero la ecuación que relaciona el espacio con la velocidad? ... Velocidad inicial por // algo que relaciona la velocidad, el tiempo y el espacio desde donde se tira. Es que para algo nos da* s_0 *¿no?*

40 -**R**: *¡Hombre!* s_0 *es la posición inicial ¿no?*

41 -**D**: *Tenemos esta situación, estamos aquí a un* s_0 *y desde aquí le imprimimos una velocidad inicial. Nosotros nos encontramos aquí, en este punto* s_0. *Éste sería el punto cero. Desde aquí hasta aquí vamos a poner que hay diez metros y desde ahí hacia arriba se le imprime una velocidad inicial de diez metros por segundo.*

...

42 -**D**: *Entonces aquí sería* $t_0 = 0$ *y en el momento que le damos esa velocidad inicial para arriba ya comienza a contar el tiempo. Pero es que no sé.*

43 -**MC**: *¿Y te vas a acordar de las tres ecuaciones que había en Física? La* v_0, *luego la del recorrido y la de ... es que no me acuerdo.*

44 -**D**: *La de la aceleración era velocidad final menos velocidad inicial partido por tiempo, o la de la posición. Es que con esas fórmulas puedes sacar, en vez de poner eso pones* $g = \frac{v_f - v_i}{t}$. *Entonces aquí conoces la gravedad, conoces la*

velocidad inicial, que se supone que te la tienen que dar, y conoces el tiempo. En estos casos siempre te piden la velocidad final. Pero la velocidad final aquí no tendría sentido, porque la velocidad final que alcanzaría sería cero, pues llegaría un momento en que se pararía y comenzaría a bajar. Pero es que no sé, eso no tiene sentido. Es que no se me ocurren más cosas sobre esto. Sabemos que hemos llegado al resultado correcto pero no sabemos //

45 -**MC**: *¿Este es el movimiento que realiza?*

46 -**D**: *Sí, ésa es la ecuación del movimiento, pero lo más gracioso es que hemos llegado al resultado correcto pero no sabemos aplicarlo en la forma en que nos piden.*

47 -**R**: *Sí, lo hemos hecho por Taylor.*

48 -**D**: *Sí, se supone que lo hemos hecho por Taylor pero no sabemos explicar todavía por qué* $s(0)$ *es cero. A menos que supongamos que* $s(0)$ *se sustituye en lo que nosotros creemos que es la ecuación de movimiento y entonces sí tiene la explicación de que es cero.*

...

49 -**D**: *¡No!* s_0 *no,* $s(0)$ *pensamos que debe ser cero para que //* s_0 *y* $s(0)$ *no tienen por qué ser lo mismo ¿no?*

Tratamos de sacarlos del "círculo" en que se han metido, ya que vemos que no logran avanzar. Aquí otra vez se nota que se está priorizando el resultado obtenido por integración, que además no es el correcto, frente a una nueva propuesta. Además se les aclara sobre la interpretación de t_0, que parece que no se había logrado adecuadamente. Primero comenzamos haciéndoles reflexionar sobre el resultado que se obtiene de una integral indefinida, preguntando cómo y dónde han tenido en cuenta las constantes de integración. Luego les inducimos a determinar dichas constantes con los datos del problema.

50 -**D**: *¡Entonces ya está!*

51 -**R**: *Entonces hemos llegado al mismo resultado.*

52 -**D**: *Sí, sí, pues ya está. Como no sabemos ese espacio inicial lo que vale, pues ya está. Sólo decir que tenemos esa función más* $s(0)$ *que no sabemos.*

Nuevamente se les llama la atención para hacerles observar que han realizado dos integrales, luego tienen dos constantes de integración, y que hay más condiciones iniciales en el enunciado del problema que deberían utilizar para determinarlas.

53 -**D**: *Se refiere a cuando integramos la primera vez, que tenemos $-gt + C$ y luego integramos de nuevo y es* $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C$ *y la suma de esas dos C // son esas dos la suma de* $s'(0)t + s(0)$ *que no conocíamos del Polinomio de Taylor. Ahora sí que hemos llegado al mismo resultado. Tenemos que considerar que* $s(0)$ *es la constante de la segunda vez que integramos y* $s'(0)t$ *es la constante que resulta de la primera vez que integramos.*

54 -**R**: *Es que lo que hace el teorema de Taylor es darte //*

55 -**D**: *¡Exactamente! Te la da más exacta que una integral porque la integral siempre te da la función integral pero tienes que sumarle una constante C, que es la constante de integración.*

56 -**MC**: *Podríamos averiguar las dos constantes, ¿las otras no?*

57 -**D**: *Cada una de ellas tienen que ser ésas. Las que hemos obtenido por integración son ésas. O sea, ésta es la función integral y éstas son las dos constantes de integración que hemos obtenido.*

58 -**MC**: *¿Y qué representan? ... Una, el espacio inicial //*

59 -**D**: *Y la otra la velocidad inicial. Bueno, tendremos que machacarlo más, seguro.*

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos los intercambios verbales producidos en el equipo A3 para la situación 5.

Verbalización	Rafael	David	Mari Carmen
1		DA(1)	
2	PA(0)		
3		E(0)	
4	PA(0)		
5		DA(1)	

6			PA(0)
7		DA(1)	
8	PA(0)		
9		E(0)	
10	PA(0)		
11		E(0)	
12		I(0)	
13	DA(1)		
14		E(0)	
15			PA(0)
16	DA(1)		
17		E(0)	
18		AR(0)	
19	E(0)		
20		AR(0)	
21		AR(0)	
22	E(0)		
23		DA(1)	
24			EA(0)
25		DA(1)	
26	DA(1)		
27			DA(1)
28		DA(1)	
29		I(0)	
30	I(0)		

31		E(0)	
32	EA(0)		
33		AR(0)	
34	E(0)		
35			Da(1)
36		Da(1)	
37			PA(0)
38		DA(1)	
39			DA(1)
40	DA(1)		
41		DA(1)	
42		DA(1)	
43			PA(0)
44		DA(1)	
45			PA(0)
46		EA(0)	
47	EA(0)		
48		E(0)	
49		E(0)	
50		I(0)	
51	I(0)		
52		EA(0)	
53		DA(1)	
54	DA(1)		
55		EA(0)	

56			PA(0)
57		I(0)	
58			DA(1)
59		DA(1)	
$\overline{x}$	0.1	0.2	0.1

Tabla 4.38. Análisis del habla, equipo A3, situación 5.

Después de trabajar sobre la **situación 5**, en esta etapa de formulación presentamos a los alumnos una nueva situación; con ella se pretende que realicen una síntesis de los conceptos construidos con la anterior. Además, en esta situación se les propone un trabajo un poco diferente al realizado en la situación anterior que consiste en la elaboración de un informe conjunto, por grupos, sobre los resultados a los que lleguen. A continuación pasamos a analizar éstos para los diferentes equipos.

❑ SITUACIÓN 6(7)

Desintegración de elementos radiactivos. *El radio se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad presente, es decir:*

$$R' = -kR(t)$$

donde k es una constante positiva llamada constante de desintegración. El signo negativo indica que dicha velocidad es cada vez menor, al haber menos cantidad de elemento a medida que transcurre el tiempo.

Supongamos que en $t_0 = 0$ *se tiene* R_0 *gramos de radio. Se desea predecir la cantidad de radio presente en cualquier instante posterior t, es decir R(t). Utilizar como herramienta de predicción la serie de Taylor.*

▪ E-A1

Lo más significativo es que consideran las condiciones de inicio del problema de la siguiente manera: $t_0 = 0$, $R_0 = 0$.

A continuación escriben correctamente la forma general de la serie que corresponde a la situación planteada, desarrollando hasta el término de orden tres y colocando a continuación los puntos suspensivos. Calculan las primeras derivadas, pero no reemplazan en la serie esos valores.

- **E-A2**

En el caso de este equipo vuelve a repetirse la forma en la que escriben las condiciones iniciales: $t = t_0 = 0$, $R = R_0 = 0$; sin embargo, a la hora de reemplazar R_0 en las distintas derivadas no lo consideran cero. Consideran el valor, equivocado, que le han dado a la cantidad de radio inicial, $R(0) = 0$, al reemplazar en el primer término de la serie, pues escriben lo siguiente:

$$R(t) = 0 + (-k\,R_0)t + k^2\,R_0\,t^2/2! - k^3\,R_0\,t^3/3!.$$

Se observa que sólo han tomado $R_0 = 0$ en el primer término y consideran sólo hasta el término de tercer orden sin indicar que continúa.

- **E-A3**

Consideran las condiciones iniciales de la misma forma que los dos equipos anteriores.

Escriben correctamente la serie para el caso del problema propuesto y calculan la primera y segunda derivada en el punto, pero no reemplazan luego éstas en la serie.

Observaciones

Creemos que, aunque se nota un avance respecto a los resultados de la situación anterior, no han logrado construir conceptualmente la serie de Taylor ni como un objeto matemático, que no es nuestro objetivo, ni como una herramienta de predicción y esto puede deberse a varias razones, entre las que podríamos citar:

- Problemas de notación, que se evidencian entre otras cosas cuando deben expresar las condiciones de inicio del problema.
- Saber determinar el punto donde se desarrolla la serie y, por tanto, donde se calculan la función y sus derivadas.
- La dificultad para discernir dentro del contexto del problema los datos (condiciones de inicio, de contorno y relación entre las variables) que permiten calcular las derivadas sucesivas en función de ellos.
- Tener en cuenta que la serie de Taylor tiene infinitos términos y que, por lo tanto, hay que efectuar todas las derivadas posibles. De esta manera se podrá hallar alguna regularidad en las derivadas sucesivas que permita reconocer las series correspondientes a las funciones más elementales.

- El error que se manifiesta cuando dicen que no hay más derivadas porque éstas valen todas cero.
- El enfrentarse por primera vez a una manera diferente de trabajar tanto en las Ciencias Experimentales como en Matemáticas.

Conclusiones

A modo de resumen y como conclusión de las etapas de aprendizaje colaborativo presentamos la siguiente tabla, que muestra los aprovechamientos individuales.

Situaciones/Alumnos	1	2	3	4	5	Resultados
Alicia	-	0.1	0.2	0.1	-	0.1
Penélope	-	0.2	0.1	0.1	-	0.1
Inma	-	0.1	0.2	0.2	-	0.2
Susana	-	0.1	0.1	0	-	0.1
Rosario	0.2	0.2	0.1	0	0	0.1
Manuel	-	0.1	0.2	0.2	0.1	0.2
Lydia	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
María del C.	0.1	0.1	0.1	0.1	0	0.1
Rafael	0.1	0.1	0	0	0.1	0
David	0.5	0.2	0	0.1	0.2	0.2
Mari Carmen	0	0.1	0	0.1	0.1	0.1

Tabla 4.39. Resultados por alumno en el trabajo colaborativo.

4.3 - ETAPA DE INSTITUCIONALIZACIÓN

En esta etapa se ha realizado una discusión con todos los alumnos que tomaron parte en el trabajo. Es aquí donde el docente ha jugado un papel más activo, aclarando algunos aspectos de las situaciones de aprendizaje. Además es en esta etapa donde se han utilizado, a modo de ayuda para institucionalizar los saberes involucrados en esta investigación, las **preguntas interesantes** que hemos formulado en el apartado 3.5.

Esta etapa está documentada en cinta de audio; a continuación presentamos un resumen de las partes más relevantes que se han producido.

- **SITUACIÓN 1(1)**

En este problema, cuando se les propone dibujar la gráfica correspondiente al recipiente cónico con el vértice hacia abajo, David (E-A3) expone que ellos lo hicieron a través de una exponencial. Se le formulan algunas preguntas, de entre las que aparecen en el apartado 3.5, para provocarle una situación de conflicto frente al modelo que han escogido y que los incentive para superarlo. Se acuerda que una posible gráfica que describe la experiencia es la rama positiva de una parábola con eje x y vértice en el origen.

En el caso del recipiente cilíndrico la representación es una recta "*que pasa por el origen, que va creciendo proporcionalmente altura con tiempo*" dice David (E-A3). A lo que Lydia (E-A2) apostilla "$y = x$, *la gráfica forma un ángulo de* 45 *grados*". Esta idea es compartida por el grupo.

Aquí evidentemente se detecta una dificultad en el concepto de proporcionalidad, que se pone de manifiesto al suponer que la constante de proporcionalidad vale uno.

El último ítem se trabajó poco dentro de los equipos porque se añadió al final. Se tomó un poco de tiempo para la discusión hasta llegar a algunas conclusiones; entre ellas destacamos la siguiente: la tasa de variación de la altura respecto del tiempo representa físicamente la velocidad con que se llenan los recipientes. Para el caso del recipiente cilíndrico, la velocidad con que se llena es siempre la misma; por lo tanto, dicen, estará representada por una recta horizontal. También concluyen que las gráficas de la velocidad corresponderán a las gráficas de las derivadas, que para el caso del recipiente cónico son rectas oblicuas.

Llegado a este punto tratamos de advertirles que han caído en algunas contradicciones con el modelo escogido.

Una vez que han llegado a un acuerdo sobre las gráficas que representan las tasas de variación para cada modelo realizan un análisis. Utilizan para ello valores del tiempo muy próximos al comienzo y al final del fenómeno y observan si ellas describen el fenómeno. Concluyen que, en el caso del recipiente cónico con vértice hacia arriba, para el instante $t = 0$ la velocidad con que se llena tiende a cero, ya que el radio es máximo. En el caso del recipiente cónico con vértice hacia abajo, la velocidad en el entorno de $t = 0$ es muy grande ya que el radio del recipiente tiende a cero.

❑ SITUACIÓN 2(2)

Cuando representan los datos de la tabla en un par de ejes t- s unen los puntos a través de líneas rectas. La explicación es siempre la misma "*el movimiento es rectilíneo*"; claro está que confunden la función posición con la trayectoria del móvil. Nos encontramos aquí con un obstáculo didáctico.

El aspecto que hemos trabajado de este obstáculo se centra principalmente en el hecho de que la gráfica que representa la posición, que no la trayectoria del móvil, debe ser derivable. Hemos tenido en cuenta que, en la naturaleza, un gran número de fenómenos de variación y cambio son descritos por este tipo de curvas.

Otro obstáculo que hemos detectado se centra en una elaboración particular del concepto de espacio y posición, lo que consideramos dificultó la interpretación de los valores dados en la tabla. Este obstáculo, en cierto sentido, se extiende a la definición de velocidad, que se interpreta, según la mayoría de los estudiantes, como "*el espacio dividido por el tiempo*".

También se ha detectado un teorema factual que a lo largo de las diferentes etapas no todos han logrado superar. Para eso, en esta etapa, se les recomendó que analizaran una experiencia simplificada con la que estuvieran familiarizados en la vida cotidiana. A la par, se ponía énfasis en que observaran el comportamiento en los instantes en que cambia el sentido de la trayectoria, así como en instantes anteriores y posteriores. También se les sugiere que observen, en la gráfica $s(t)$, el comportamiento de la pendiente de la recta tangente en tales puntos y un entorno de los mismos.

A preguntas tales como ¿qué representa la función derivada en la situación real que ha elegido?, la mayoría responde que representa la velocidad. Acto seguido se les pide que analicen lo que sucede con los valores de la velocidad en la vecindad de los puntos donde ellos han determinado que la velocidad vale cero y donde toma los valores máximos y mínimos. ¿Tiene ésta el mismo valor para todos los puntos del entorno? Luego se les pide que observen cómo varían las pendientes de las rectas tangentes para puntos del entorno.

Una vez que hayan obtenido y discutido algunas conclusiones se les sugiere que vuelvan sobre los mismos puntos, pero que analicen cómo cambia la posición al aumentar t en $t+h$, cuando $h\rightarrow 0$. Es decir, se pretende que lleguen a las mismas conclusiones pero ahora utilizando la derivada, ya no en su concepción geométrica sino como tasa de variación o razón de cambio, es decir $\frac{ds}{dt} = s' = v$. Lo mismo se les pide para la gráfica de la velocidad.

De esta manera, utilizando la derivada en su concepción geométrica y además como tasa de variación, conjuntamente con el criterio de la cinemática, se pretende ayudarles a superar el teorema factual: $s = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow a = 0$.

El criterio de la cinemática al que hacemos referencia y que hemos utilizado como herramienta dice lo siguiente:

- El valor absoluto de la velocidad crece (esto es, el móvil va más rápido) cuando la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo.
- El valor absoluto de la velocidad decrece (esto es, el móvil va más lento) cuando la velocidad y la aceleración tienen distinto signo (Bradley y Smith, 1998, p.136).

Para analizar y construir los gráficos han observado sus características geométricas como son los máximos, mínimos y puntos de inflexión, además del crecimiento y decrecimiento. También han tenido en cuenta la variación de la pendiente de la recta tangente a lo largo de la curva y el valor de la pendiente en puntos notables como son los máximos, mínimos y de inflexión.

A través del bosquejo de las sucesivas gráficas

$$s(t) \rightarrow v(t) \rightarrow a(t) \rightarrow da/dt,$$

se logran los objetivos propuestos para esta situación, si bien hay que destacar que a partir de los datos de la tabla ningún alumno logró responder a los ítems propuestos.

Creemos que las primeras limitaciones se encuentran en los obstáculos enumerados anteriormente y en el nivel de abstracción necesario para inferir resultados a partir de tablas.

❑ SITUACIÓN 3(3)

El trabajo, que consistió básicamente en individualizar las gráficas, apoyándose en la situación anterior, fue realizado con éxito por la mayoría de los alumnos. La dificultad se les presentó para determinar el máximo de la gráfica que corresponde a $s(t)$.

❑ SITUACIÓN 4(4)

Este problema ya es abordado por los alumnos con cierta soltura. Esto se nota cuando, entre otras cosas, hablan de determinar los valores donde la aceleración se anula y para ello tratan de individualizar los puntos de inflexión.

Donde hemos observado que necesita realizarse un análisis más profundo es en (0, $s(0)$). Allí el eje horizontal es tangente a la gráfica; esto parece que no es fácil de deducir a partir de la mera observación.

Es por ello que hemos centrado nuestra discusión en el intervalo (0, 3), y le hemos preguntado, entre otras cosas: ¿qué pendiente aproximada creen que tiene la recta tangente en el origen? ¿la curva mantiene en el intervalo (0, 3) la misma concavidad?. Lo primero que ha aparecido, por sus comentarios, es el punto de inflexión. Dicho punto les ha permitido afirmar que la aceleración toma el valor cero allí. Además de que la velocidad en dicho punto toma un valor extremo. "*Donde hay un punto de inflexión hay un extremo en la primera derivada, ya que la gráfica de la segunda derivada tiene un cero para ese valor*" (Alicia E-A1).

Además se observó que cuando la curva pasa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo el punto de inflexión es un máximo para la función derivada y, viceversa, si la curva pasa de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba el punto de inflexión es un mínimo en la función derivada.

Las gráficas, una vez superadas estas dificultades, las bosquejan utilizando las propiedades geométricas y el criterio de la cinemática que venimos utilizando. Es a partir de ellas que dan los valores aproximados de los intervalos donde son positivas y donde son negativas.

Hemos de remarcar que es en esta etapa donde se supera, en parte, el teorema factual. Éste llevó a Penelope (E-A1) y Lydia (E-A2), en su momento, a afirmar que "*todas las gráficas*, es decir $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ y da/dt, *serían iguales en forma salvo que los intervalos serían más pequeños*".

❑ SITUACIÓN 5(6)

Para abordar eficazmente este problema los alumnos deben conocer la serie de Taylor, tanto a nivel de su notación como de su concepción. Éste fue el principal escollo que tuvimos que salvar en esta etapa ya que, por razones de programación, los temas Polinomios y Serie de Taylor se presentaron a los alumnos casi a la par de esta experiencia.

Sin embargo, creemos que en la mayoría de los casos que se presenta en la enseñanza a este nivel es suficiente conocer la forma del desarrollo de la serie y algunos desarrollos elementales como, por ejemplo, el de $e^{-\lambda t}$, $cos(wt)$, etc., para obtener resultados sorprendentes.

La concepción que tienen los alumnos de la integral como inversa de la derivada les lleva a integrar dos veces para hallar la expresión de la función. Aquí, como las operaciones son extremadamente sencillas, el principal obstáculo lo presentan las constantes de integración.

Se insiste en que deben trabajar con la serie y luego comparar los resultados; creemos que la resistencia a utilizar esta herramienta es por lo expuesto anteriormente.

Este ejercicio nos sirve, además, para crear una situación de desequilibrio sobre los conocimientos previos.

Animamos a los alumnos a utilizar los datos del problema y la notación usual de la cinemática para obtener un resultado reconocible.

El mayor esfuerzo se realizó al comparar los resultados obtenidos por los dos métodos y tratar de discernir cuál representaba el modelo para nuestra experiencia. Esta tarea se realizó tanto desde el contexto de la Física como del Cálculo Diferencial e Integral, utilizando las estrategias variacionales como la idea de predicción aquí involucradas.

- **SITUACIÓN 6(7)**

Por último, para acabar de institucionalizar el concepto involucrado se hace una extensa discusión entre todos los alumnos participantes sobre la **situación 6(7)**. Teniendo en cuenta ésta y el análisis que se hizo del problema, en la etapa anterior, el docente acaba con una amplia exposición integradora.

4.4.- EVOLUCION DE LOS SIGNIFICADOS PERSONALES

Para finalizar la investigación, transcurridos cinco meses de las etapas anteriores, se le entregó a los estudiantes tres situaciones-problemas para que las desarrollaran en forma personal y por escrito. Con esto queremos medir cuál ha sido la evolución personal, y además:

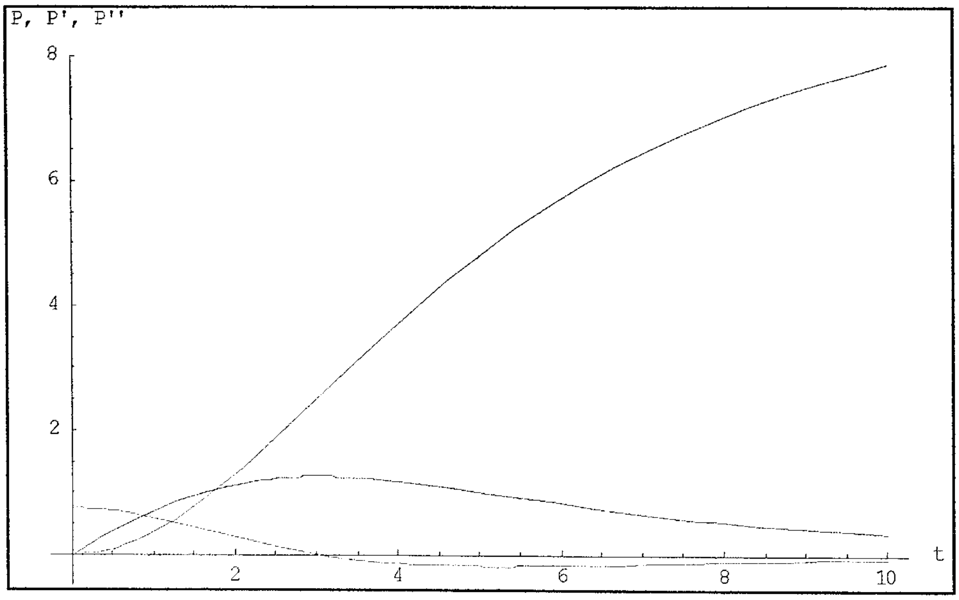
- En qué medida han superado el teorema factual.
- Cómo han construido los conocimientos necesarios para reconocer la serie de Taylor como herramienta de predicción.
- Cómo y en qué medida han adquirido las destrezas necesarias para trabajar con las derivadas sucesivas y la serie de Taylor.

Las situaciones-problemas propuestas son las siguientes:

❑ SITUACIÓN 7(8)

Un estudiante tiene ocho problemas para realizar en casa. Ha reservado diez horas de trabajo ininterrumpido. La producción del estudiante viene dada por la función P(t) que corresponde a una de las curvas que se muestran en la gráfica, donde t es el tiempo (en horas). Las otras dos curvas corresponden a la primera y segunda derivadas de dicha función. Analizar la figura y, con los elementos del problema y las herramientas matemáticas que posees, identifica la función P(t) y sus derivadas. Numéralas de la siguiente forma: 1 = $P(t)$, 2 = $P'(t)$, 3 = $P''(t)$. *En todos los casos explica detalladamente cuáles han sido las razones para tu elección. A continuación y siempre utilizando la figura halla:*

a. *Una interpretación para P'(t) y P''(t).*
b. *El instante en que la producción del estudiante es máxima.*
c. *¿Cómo varía la velocidad de producción del estudiante a lo largo de las diez horas de trabajo? Descríbelo de forma detallada.*
d. *¿A qué hora el número de problemas que resuelve es menor que los resueltos en la hora anterior?*



❑ SITUACIÓN 8(9)

Ciertos parásitos se reproducen a gran velocidad; para exterminarlos se está empleando un medicamento nuevo. De forma experimental se halla que la velocidad de cambio en el número de parásitos vivos con respecto al tiempo t (en semanas) puede expresarse como

$$N' = 6000t^2 - 75t^4.$$

Predecir, utilizando la serie de Taylor, cuántos parásitos habría en el tiempo t si originalmente hay 3000.

❑ SITUACIÓN 9(10)

Una masa sujeta a un resorte se estira hasta que se halla a diez unidades debajo de la posición de equilibrio; en ese momento se suelta partiendo del reposo. En ese instante comenzamos a contar el tiempo. El movimiento que realiza la masa, alrededor de su posición de equilibrio, viene descrito por la siguiente ecuación:

$$y'' = -16y.$$

a) *Predice, utilizando la serie de Taylor, la posición de la masa para cualquier instante t.*

b) *¿Dónde se halla la masa transcurridos $\frac{\pi}{8}$ segundos?*

Pasamos a analizar el trabajo de cada alumno y, por último, en el capítulo 6 haremos el análisis comparativo de la evolución conceptual de cada estudiante al pasar por las distintas etapas de aprendizaje, extrayendo las conclusiones pertinentes.

Para el análisis observaremos algunos comportamientos específicos para cada situación-problema. En el caso de la primera serán:

a- Identificación de cada gráfica.

b- Análisis e interpretación de las mismas.

c- Elaboración de respuestas y resultados.

Para el caso de la segunda y tercera situaciones-problemas observaremos los siguientes comportamientos:

d- Interpretación y determinación de los valores de inicio del sistema.

e- Reconocimiento de la serie de Taylor como herramienta para resolver el problema.

f- Destreza en el manejo de las derivadas sucesivas y la serie.

A cada uno de estos comportamientos le asignaremos un puntaje que va del cero al uno.

A continuación volcamos estos datos en una tabla.

Alumnos	Situación 7(8)			Situación 8(9)			Situación 9(10)			Puntuación %
	a	b	c	d	e	f	d	e	f	
Alicia	1	0.6	0.5	0	0.5	0.4	0.3	1	0.8	60
Penélope	1	0.6	0.7	0	0	0	0	0	0	30
Inma	1	0.7	1	1	1	0.8	0	0	0	60
Susana	1	0.7	0.5	1	1	0.8	0	0	0	60
Rosario	0.8	0.3	0	0	0	0	0.3	1	0.8	40
Manuel	1	0.7	0.3	1	1	0.8	0.4	1	0.5	70
Lydia	1	0.6	0.5	1	1	0.8	0	0	0	50
María del C.	1	0.7	0.7	0	0	0	0.3	0	0.8	40
Rafael	0.5	0.4	0.7	0	0	0	0.3	0	0.8	30
David	1	1	1	1	1	0.8	0	0	0	60
Mari C.	1	0.2	0.4	1	1	0.8	0	0	0	50
%	90	60	60	50	60	50	10	30	30	

Tabla 4.40. Resultados de la producción de los estudiantes a las situaciones 7(8), 8(9) y 9(10).

El puntaje que obtiene cada alumno en forma individual aparece en la columna de la derecha; podemos decir que son satisfactorios, ya que rondan el 50%. En la última fila tenemos el porcentaje de respuestas satisfactorias de acuerdo a los comportamientos que nos propusimos observar:

- Desde el punto de vista matemático creemos superado el teorema factual en un 70 % de los casos, de acuerdo a los puntajes obtenidos en los tres primeros ítems de la tabla.
- Respecto a los porcentajes que corresponden a la situación 9(10), vemos que son significativamente inferiores a los anteriores. Lo ocurrido puede deberse a varios factores.
    - Algunos pueden encontrarse en la física del problema, por ejemplo al presentar serias dificultades para interpretar y reconocer las condiciones de

inicio del problema, como se observa por los resultados de la séptima columna.

- También se encuentra que un 50 % escribe la función del movimiento de la masa, $y(t)$, memorísticamente, y utilizando los valores dados en la situación-problema determinan los restantes parámetros de dicha función; por último reemplazan la expresión de y en y''.
- Otra razón se halla en sus preconcepciones, ya que los conceptos de derivación e integración se presentan como operaciones inversas una de la otra, según vemos en los manuales escolares analizados (Anexo 1). Éste es uno de los motivos que les lleva a integrar dos veces y'' para hallar el valor de la función deseada, $y(t)$; sin embargo, no son capaces de hallar la solución particular del problema (70 %). El método, utilizado como un algoritmo, lo detectamos como un obstáculo a la hora de reconocer cuáles habrían de ser las restricciones a fin de poder utilizar la estrategia de resolución del problema. Naturalmente, dichos valores serán la posición inicial de la masa, $y(0)$, la velocidad de la misma en el momento que inicia su oscilación, $y'(0)$, y su aceleración, $y''(0) = -16\, y(0)$.
- Por último, creemos que otra razón se encuentra en que sigue predominando el pensamiento algebraico por encima del pensamiento físico y analítico. Sólo un 30 %, a pesar de no utilizar correctamente todas las condiciones de inicio del problema, reconoce en la serie de Taylor la herramienta idónea para hallar la solución.

CAPÍTULO 5

SEGUNDA EXPERIENCIA: DESARROLLO Y ANÁLISIS DE LAS ETAPAS DE APRENDIZAJE

5.0 - INTRODUCCIÓN

Esta parte del estudio se ha planteado con la intención de indagar con mayor profundidad sobre los obstáculos y dificultades en el aprendizaje detectadas en el estudio preliminar. La experiencia fue diseñada siguiendo la metodología de la Ingeniería Didáctica. Para ello hemos diseñado y utilizado una secuencia didáctica compuesta por nueve situaciones-problemas, escogidas entre aquéllas que fueron desarrolladas y analizadas en el apartado 3.4 del capítulo tercero de esta tesis.

Como trabajo preliminar se discutió con los alumnos el contenido del anexo 2; para ello empleamos dos horas. A continuación los alumnos trabajaron, en forma individual, siete situaciones-problemas, presentando por escrito sus producciones. El tiempo que dispusieron para la *etapa de acción* fue de 8 horas, distribuidas en dos semanas con cuatro horas de trabajo cada una.

Se constituyeron pequeños grupos de trabajo a fin de llevar adelante las siguientes etapas de aprendizaje, etapas de *formulación* y *validación*; observando sus primeras producciones, intentamos que los grupos fueran heterogéneos. Las producciones de ambas etapas fueron registradas en cintas de audio.

La etapa de *institucionalización*, etapa final de la experiencia educativa, se llevó a cabo de manera individual a través de entrevistas personales entre alumno e investigadora.

Formaron parte de la experiencia once estudiantes de primer año de la Licenciatura en Biología del curso académico 2002-2003. La participación fue voluntaria entre los alumnos que habían cursado Matemáticas en el último curso del Bachillerato. De esta manera, en esta segunda experiencia controlamos una variable más, y es que todos los estudiantes habían recibido un curso de Matemáticas en el último año de secundaria.

A continuación, analizamos el material obtenido siguiendo las diferentes *etapas* y atendiendo, dentro de ellas, a las situaciones-problemas.

5.1 - ETAPA DE ACCIÓN

Siguiendo el modelo de análisis desarrollado en la primera experiencia, agrupamos por categorías las respuestas de los alumnos y, con base en ellas, las catalogamos como se muestra a continuación:

CATALOGACIÓN DE LA RESPUESTA	PUNTAJE
En blanco, totalmente erróneo o no es interpretado el problema.	1
Uso de conceptos o procedimientos próximos sin éxito.	2
Uso de conceptos y procedimientos próximos y/o adecuados, con éxito limitado o con lagunas en la argumentación.	3
Respuesta correcta.	4

Tabla 5.1. Formas de catalogar las respuestas.

El estudio y análisis de esta etapa queda ordenada de la siguiente manera:

1.- Producción de los alumnos

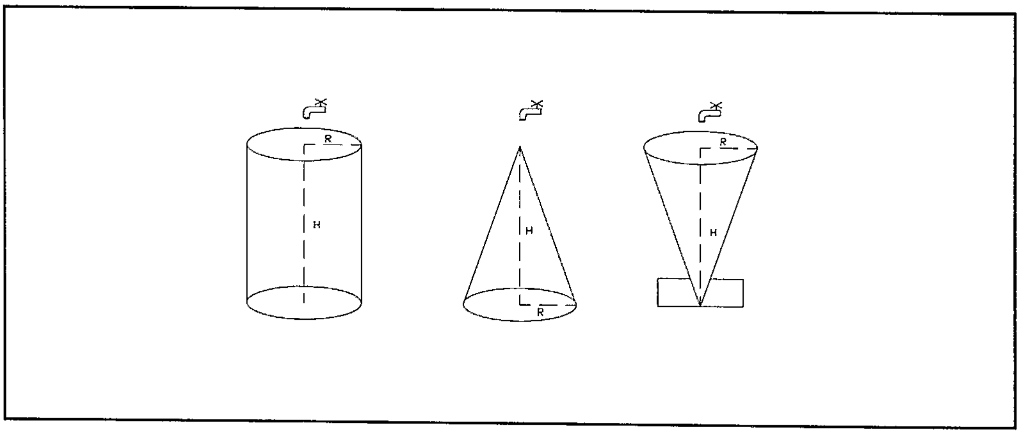
2.- Observaciones

3.- Categorización y catalogación de las respuestas

4.- Conclusiones

❑ SITUACIÓN 1(1)

Consideremos dos tanques, uno cilíndrico y el otro con forma de cono circular recto con vértice hacia arriba (como se muestra en la figura); ambos tienen igual radio y altura. En ellos se vierte agua a un ritmo constante, comenzando al mismo tiempo.



a) *Bosqueja, en los mismos ejes, una gráfica $h(t)$ (altura en función del tiempo) asociada con el llenado de los dos recipientes, en las condiciones descritas anteriormente. Compara las gráficas y escribe todo lo que puedas concluir sobre ellas.*

b) *¿Cambian las gráficas si invertimos la posición de los recipientes? (ver figura). ¿De qué manera? Haz un bosquejo como en el apartado anterior.*

c) Bosqueja, en los mismos ejes, la tasa de variación o velocidad de cambio de $h(t)$, para cada uno de los casos anteriores. Compáralas y describe su comportamiento en relación con las gráficas de $h(t)$ obtenidas en a) y b).

1.- Categorización de la producción de los estudiantes

De las gráficas bosquejadas en los ítems a) y b) observaremos las siguientes características:

a) En todos los casos $h(0) = 0$.

b) Las gráficas que representan el recipiente cónico, en las dos posiciones, coinciden en los primeros instantes con la gráfica del otro recipiente, pero luego se ubican por arriba de la gráfica de aquél.

c) El tiempo que tarda en llenarse el recipiente cónico es menor que en el otro recipiente, aunque en ambos el líquido alcanza la misma altura.

El bosquejo de las gráficas, realizadas por los estudiantes en los ítems a) y b), serán consideradas:

- Satisfactorias (S), si se observa a), b) y c).
- Medianamente satisfactorias (MS), si cumplen con a) y c) o a) y b)
- Poco satisfactorias (PS), si sólo se observa a).

El bosquejo de las gráficas realizadas por los estudiantes en el item c) serán consideradas:

- Satisfactorias (S), si resultan ser las derivadas de las gráficas bosquejadas en los ítems a) y b).
- Medianamente satisfactorias (MS), si sólo dos de ellas resultan ser las derivadas de las gráficas bosquejadas en los ítems a) y b).
- Poco satisfactorias (PS), en el caso en que sólo una coincida con la derivada de las gráficas de los items a) y b).
- En el caso, evidente, de que no se haya interpretado el problema lo indicaremos con (NI).

Para facilitar la escritura utilizaremos las abreviaturas siguientes:

- Recipiente cilíndrico (C1).
- Recipiente cónico con la base hacia abajo (C2).
- Recipiente cónico con la base hacia arriba (C3).

Los marcos que utilizan para argumentar sus respuestas pueden ser:

- Geométrico: distinguimos entre las referencias sólo a las formas de los recipientes (gtf) y las dirigidas a las fórmulas del volumen (gt).
- Gráfico (gf).
- Analítico (an).

Vamos a estructurar el trabajo de los alumnos, para categorizar sus respuestas, en la Tabla siguiente:

Alumno	Ítem a)	Marcos utilizados	Ítem b)	Marcos utilizados	Ítem c)	Marcos utilizados
Alicia	S	gt	S	gt	PS	gt
Carlos	PS	gtf	MS	gt	PS	gt – an
Mercedes	S	gt	S	gt	-	-
María J.	S	gtf	PS	gt	NI	-
Águeda	S	gtf	PS	gt	NI	-
Francisco	PS	gt	MS	gt	MS	gt –an
Josefa	PS	gt	MS	gt	NI	-
Daniel	PS	gt	PS	gt	-	-
Purificación	PS	gt	PS	gt	MS	an
Marta	S	gt	S	gt	MS	an
Elena	MS	gt	MS	gt	-	-

Tabla 5.2. Categorización de las respuestas a la situación 1(1).

2.- Observaciones

- La recta que representa $h(t)$ para el recipiente cilíndrico, en la mayoría de los casos, es dibujada como la recta bisectriz.
- Se observa dificultad para comprender la terminología "tasa de variación o velocidad de cambio de $h(t)$".
- Tres de once (27 %) recurren a la ecuación del volumen, aunque no siempre con éxito.

- En el último ítem nos encontramos con que el 36 % utiliza cl marco analítico.
- Hay un 27 % que da muestras evidentes de no interpretar el ítem y otro tanto que no responde.

3.- Catalogación de las respuestas

La adaptación de la nomenclatura utilizada para la categorización de las respuestas, en la Tabla 5.2, y la puntuación para la catalogación de las mismas serán las siguientes:

- NI (no se interpreta la consigna) o en blanco → 1 punto
- PS (poco satisfactoria) → 2 puntos
- MS (medianamente satisfactoria) → 3 puntos
- S (satisfactoria) → 4 puntos

Catalogación de las respuestas del ítem a)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	0	5	1	5	3

Tabla 5.3. Catalogación de las respuestas del ítem a.

Catalogación de las respuestas del ítem b)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	0	4	4	3	3

Tabla 5.4. Catalogación de las respuestas del ítem b.

Catalogación de las respuestas del ítem c)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	6	2	3	0	1.7

Tabla 5.5. Catalogación de las respuestas del ítem c.

4.- Conclusiones

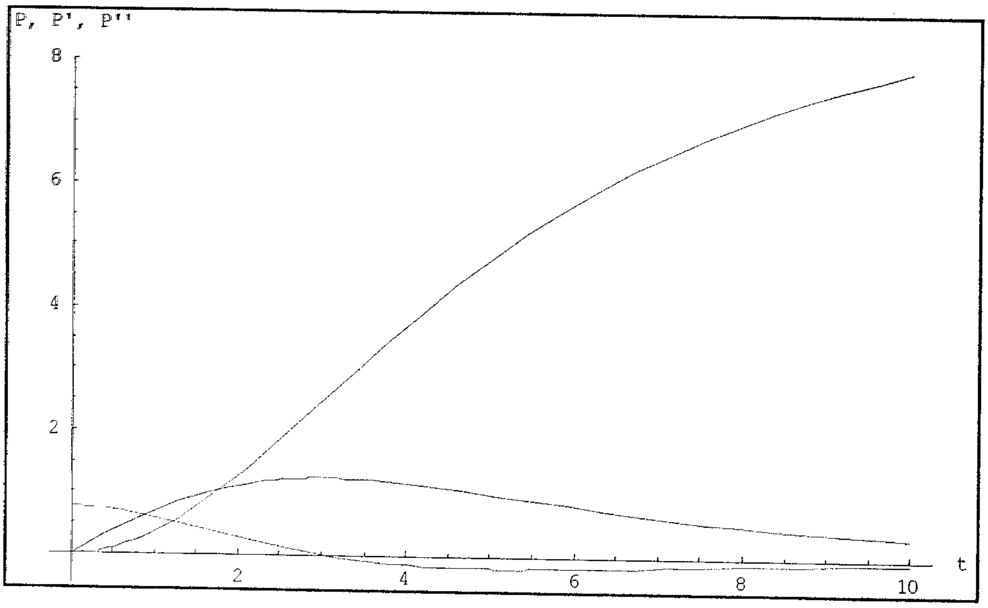
- La primera diferencia observada con respecto a la experiencia anterior es que aquí se hacen evidentes las variables que han debido tener en cuenta en el momento de bosquejar las gráficas, como el tiempo y la altura máxima.

- Hemos añadido el ítem c), donde de acuerdo a los resultados que muestra la Tabla 5.5, es evidente que no se interpreta la propuesta. Nosotros pensamos que se debe a la falta de conceptualización de la primera variación y al limitado lenguaje científico que manejan.

SITUACIÓN 2(8)

Un estudiante tiene ocho problemas para realizar en casa. Ha reservado diez horas de trabajo ininterrumpido. La producción del estudiante viene dada por la función P(t) que corresponde a una de las curvas que se muestran en la gráfica, donde t es el tiempo (en horas). Las otras dos curvas corresponden a la primera y segunda derivadas de dicha función. Analizar la figura y, con los elementos del problema y las herramientas matemáticas que posees, identifica la función P(t) y sus derivadas. Numéralas de la siguiente forma: $1 = P(t)$, $2 = P'(t)$, $3 = P''(t)$. *En todos los casos explica detalladamente cuáles han sido las razones para tu elección. A continuación y siempre utilizando la figura halla:*

a. *Una interpretación para P'(t) y P''(t).*
b. *El instante en que la producción del estudiante es máxima.*
c. *¿Cómo varía la velocidad de producción del estudiante a lo largo de las diez horas de trabajo? Descríbelo de forma detallada.*
d. *¿A qué hora el número de problemas que resuelve es menor que los resueltos en la hora anterior?*



1.- Catalogación de la producción de los estudiantes

La producción de los estudiantes se ha considerado de la forma siguiente:

- Satisfactoria (S), si responde y argumenta satisfactoriamente.

- Medianamente satisfactoria (MS), si respondc satisfactoriamente pero los argumentos son poco satisfactorios o no argumenta.
- Poco satisfactoria (PS), si responde y argumenta en forma poco satisfactoria.
- No interpreta (NI), si muestra evidencias de no haber comprendido el problema.

Nota: Daniel y Elena no trabajaron esta situación-problema; por lo tanto, aquí tenemos nueve alumnos.

Alumnos	Identificar funciones	Ítem a)	Ítem b)	Ítem c)	Ítem d)
Alicia	MS	-	PS	MS	PS
Carlos	S	S	S	S	S
Mercedes	S	-	PS	MS	PS
María J.	MS	-	PS	MS	MS
Águeda	MS	-	PS	PS	PS
Francisco	S	-	PS	S	S
Josefa	S	-	S	MS	MS
Purificación	MS	-	S	S	S
Marta	MS	-	PS	PS	PS

Tabla 5.6. Categorización de las respuestas a la situación 2(8).

2.- Observaciones

- Identifican las gráficas en forma satisfactoria el 44 %, en tanto que el 56 % lo hace en forma medianamente satisfactoria.
- En el ítem a) nos encontramos que el 11 % lo responde en forma satisfactoria mientras que el 89 % no responde.
- El ítem b) es respondido en forma satisfactoria por un 33 % y en forma poco satisfactoria por el otro 67 %.
- En el caso del ítem c) el 33 % da una respuesta satisfactoria, el 44 % medianamente satisfactoria y el 22 % poco satisfactoria.
- Por último, el ítem d) lo responde el 33 % en forma satisfactoria, el 22 % medianamente satisfactoria y el 44 % poco satisfactoria.

3.- Catalogación de las respuestas

Adaptamos la nomenclatura utilizada para la categorización de esta situación a la forma de catalogar las respuestas presentada en la Tabla 5.1 y con la misma puntuación que lo hemos hecho en el análisis de la situación 1(1), es decir:

Categoría	S	MS	PS	NI
Puntaje	4	3	2	1

Tabla 5.7. Puntaje utilizado para la catalogación de respuestas.

Catalogación de las respuestas a la identificación de funciones:

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	0	0	5	4	3.4

Tabla 5.8. Catalogación de las respuestas para identificar funciones.

Catalogación de las respuestas del ítem a)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	8	0	0	1	1.3

Tabla 5.9. Catalogación de las respuestas del ítem a.

Catalogación de las respuestas del ítem b)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	0	6	0	3	2.7

Tabla 5.10. Catalogación de las respuestas del ítem b.

Catalogación de las respuestas del ítem c)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	0	2	4	3	3.1

Tabla 5.11. Catalogación de las respuestas del ítem c.

Catalogación de las respuestas del ítem d)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	0	4	2	3	2.9

Tabla 5.12. Catalogación de las respuestas del ítem d.

4.- Conclusiones

A la vista de los resultados es evidente que la primera y segunda derivadas carecen de significado para los alumnos. Hemos presentado la matematización, en forma gráfica, de un problema de la "vida real" donde la primera y segunda variaciones tienen especial relevancia a la hora de describirlo. Creemos que la dificultad de tales interpretaciones responde a un problema de origen didáctico. Al observar las aplicaciones que se presentan en los manuales escolares (Anexo 1) se echan de menos actividades diferentes al cálculo de una velocidad o aceleración, que en todos los casos se realiza algorítmicamente utilizando la forma analítica de la función.

- **SITUACIÓN 3(2)**

Un móvil se desplaza con movimiento rectilíneo no uniforme. En la siguiente tabla se muestran las posiciones (en metros, desde el origen de coordenadas) en ciertos instantes.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	3	2	5	-2	0	3

a) A partir de estos datos, determina (razonando tu respuesta) para cuántos valores de t, como mínimo, el móvil tiene velocidad instantánea cero.

b) ¿Para cuántos valores de t, como mínimo, la aceleración es cero?¿por qué?

c) ¿Se puede asegurar que la variación instantánea de la aceleración s'''(t), conocida como tirón, toma el valor cero en algún instante dentro del intervalo considerado? Explica con detalle los motivos y razones de tu respuesta.

1.- Categorización de la producción de los estudiantes

Las respuestas serán consideradas:

- Satisfactorias (S), si se da el número de veces que como mínimo v, a y a' toman el valor cero, razonando la respuesta en forma satisfactoria.

- Medianamente satisfactoria (MS), si es capaz de terminar el número de veces con un razonamiento medianamente satisfactorio.
- Poco satisfactoria (PS), si con el razonamiento que utiliza no logra determinar el número mínimo de veces que ocurren tales eventos.
- No interpreta el problema (NI), si no es interpretado el problema o está totalmente erróneo.

Los contextos que utilizan para elaborar las respuestas pueden ser: contexto físico (CF) y/o el contexto matemático (CM). Dentro de ellos consideramos los marcos siguientes:

- Gráfico (MG), se basan en el bosquejo de una gráfica.
- Numérico (MN), se basan en fórmulas y realizan operaciones numéricas.
- Analítico (MA), se basan en el razonamiento del Cálculo Infinitesimal.

Alumno	**Ítem a)**	**Contextos Marcos**	**Ítem b)**	**Contextos Marcos**	**Ítem c)**	**Contextos Marcos**
Alicia	PS	CF MG-MN	PS	CF MG-MN	PS	CF MG
Carlos	NI	CF MN-MA	PS	CF MN	PS	CF MN
Mercedes	NI	CF MG-MN	PS	CF MN	PS	CF MG-MN
María J.	NI	CF MG-MN	PS	CF MN	PS	CF MN
Águeda	NI	CF MG-MN	PS	CF MN	PS	CF MN
Francisco	MS	CF-CM MA	PS	CF MN	MS	CM MG
Josefa	NI	CF MN	PS	CF MN	PS	CF MN
Daniel	PS	CF MN	PS	CF MN	PS	CF MN
Purificación	S	CM MG-MA	S	CM MG-MA	S	CM MA

Marta	PS	CF MG-MN	PS	CF MG-MN	PS	CF MG-MN
Elena	MS	CF MA	PS	CF MN	-	-

Tabla 5.13. Categorización de las respuestas a la situación 3(2).

2.- Observaciones

Los porcentajes de las respuestas al ítem a) son los siguientes: 9 %, satisfactorias; 18 %, medianamente satisfactorias; 27 %, poco satisfactorias y 45 %, totalmente erróneas. En tanto que en el 82 % de las veces se sitúan en el contexto físico para elaborar las respuestas, el 9 % lo hace en el matemático y el 9 % se ha situado en los dos contextos.

Para el ítem b) tenemos los resultados siguientes: el 9 % responde en forma satisfactoria y el 91 % restante lo hace en forma poco satisfactoria. Para elaborar las respuestas el 91 % se sitúan en el contexto físico y el 9 % en el contexto matemático.

El ítem c) arroja los porcentajes siguientes: en forma satisfactoria y medianamente satisfactoria responden el 9 %, en tanto que un 73 % es poco satisfactorio y otro 9 % está en blanco.

3.- Catalogación de las respuestas

Utilizamos los mismos criterios y puntuaciones que en las situaciones anteriores.

Catalogación de las respuestas al ítem a)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	5	3	2	1	1.9

Tabla 5.14. Catalogación de las respuestas a la situación 3(2), a.

Catalogación de las respuestas del ítem b)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	0	10	0	1	2.2

Tabla 5.15. Catalogación de las respuestas a la situación 3(2), b.

Catalogación de las respuestas del ítem c)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	1	8	1	1	2.2

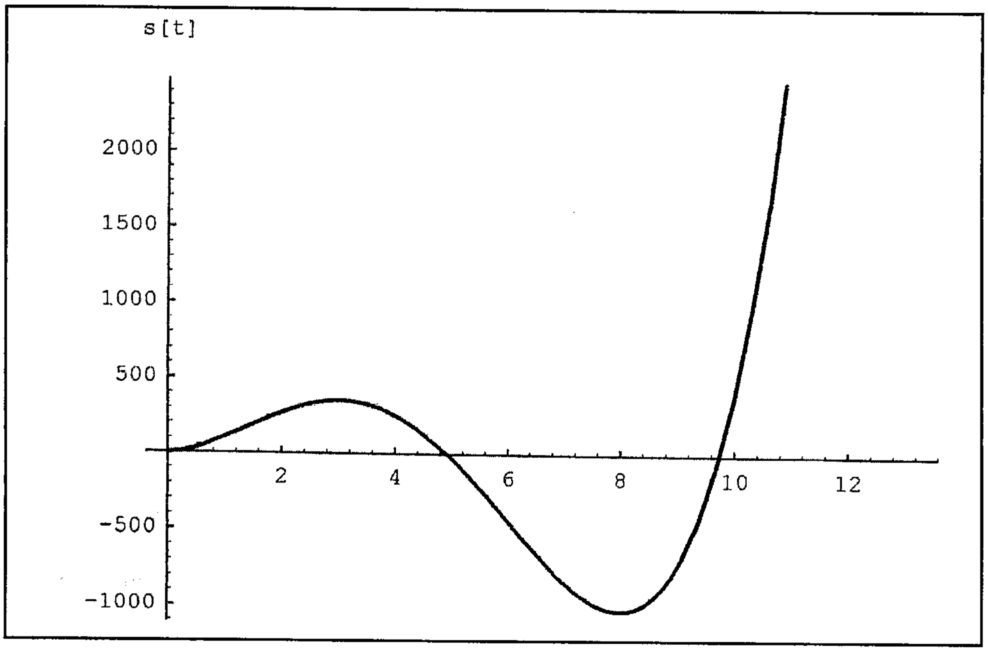
Tabla 5.16. Catalogación de las respuestas a la situación 3(2), c.

4.- Conclusiones

- Se presenta en el 73 % el teorema factual: si $s = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow a' = 0$ que ya habíamos observado en las experiencias anteriores. Pensamos que éste se deriva de un obstáculo de naturaleza epistemológica en el aprendizaje de los conceptos de velocidad, velocidad media y velocidad instantánea.
- "*La velocidad es igual al espacio dividido por el tiempo*" es una frase que forma parte de una especie de saber universal, que nadie discute y que permite dar una solución aparentemente convincente a todas estas situaciones. Por tanto, actúa como un obstáculo de naturaleza múltiple, epistemológico y didáctico de origen epistemológico.
- En los manuales de Matemáticas revisados (Anexo 1) se observa que se aplican las derivadas sucesivas para el estudio y construcción de gráficas. A nuestro criterio, esto se realiza en forma completamente algorítmica porque en ningún momento se presentan f, f', f'',..., simultáneamente para favorecer la comparación y análisis de las características que, de cada una, se traslada o se refleja en las siguientes.
- El 36 % de los alumnos bosqueja una gráfica a partir de los datos de la tabla uniendo los puntos con líneas quebradas. Un 18 % lo hace a través de una curva suave y derivable en todos sus puntos. Esta última no es una característica que tengan en cuenta los manuales de Física; sin embargo, pensamos que se observa en muchos fenómenos reales descritos por gráficas posición-tiempo.
- A nuestro criterio es importante tener en cuenta los contextos y marcos en los que se sitúan los alumnos para construir y argumentar sus respuestas. Creemos que un mismo problema observado desde diferentes puntos de vista facilita la elección de estrategias adecuadas para avanzar sobre su solución.

❑ SITUACIÓN 4(4)

La función posición s(t) del movimiento de una locomotora que se desplaza sobre una vía recta viene descrita por la gráfica que se muestra.



1. *Indica en qué intervalo o intervalos de tiempo va marcha atrás.*
2. *En forma aproximada da los intervalos de tiempo donde la velocidad es positiva y donde es negativa.*
3. *Indica los intervalos de tiempo donde la aceleración es positiva y donde es negativa.*
4. *La tercera derivada da la variación instantánea de la aceleración. ¿Toma el valor cero en algún instante? ¿En cuántos?¿Por qué?*

1.- Categorización de la producción de los estudiantes

Las respuestas a esta situación-problema serán consideradas:

- Satisfactorias (S), si indica bien los intervalos y justifica en forma satisfactoria.
- Medianamente satisfactoria (MS), si indica bien los intervalos pero justifica utilizando argumentos poco satisfactorios o no justifica.
- Poco satisfactoria (PS), si los intervalos no están bien determinados pero utiliza argumentos bastante próximos.
- No interpreta el problema (NI), si no es interpretado el problema o está totalmente erróneo.

Vamos a mostrar los contextos utilizados por los alumnos al elaborar sus respuestas; para ello las abreviaturas serán las mismas que en la situación anterior.

Estructuramos el trabajo de los alumnos, para categorizar sus respuestas, en el cuadro siguiente:

Alumno	Ítem 1)	Cont.	Ítem 2)	Cont.	Ítem 3)	Cont.	Ítem 4)	Cont.
Alicia	MS	-	MS	-	NI	-	NI	-
Carlos	S	CM-CF	S	CM-CF	S	CM-CF	PS	CF
Mercedes	PS	CF	PS	CF	PS	CF	NI	CF
María J.	PS	-	S	CM	PS	CM	NI	CM-CF
Águeda	PS	CM	S	CM	PS	CM-CF	NI	CF
Francisco	MS	-	S	CM-CF	S	CM-CF	NI	CM-CF
Josefa	S	CM	MS	-	PS	CM-CF	PS	CM-CF
Daniel	S	CF	S	CM-CF	PS	CF	NI	CM-CF
Purificación	PS	CM-CF	MS	-	NI	-	NI	CM-CF
Marta	PS	CM-CF	NI	CM-CF	NI	CM-CF	NI	CM-CF
Elena	S	CF	S	CM-CF	-	-	-	-

Tabla 5.17. Categorización de las respuestas a la situación 4(4).

2.- Observaciones

Los porcentajes de las respuestas al ítem 1) son los siguientes: El 36 % es satisfactorio, el 18 % medianamente satisfactorio y el 45 % son poco satisfactorias. En tanto que en el 27 % de las veces se sitúan en el contexto físico para elaborar las respuestas, el 18 % lo hace en el matemático, el 27 % se ha situado en los dos contextos y otro 27 % no nos ha sido posible identificarlo.

Para el ítem 2) tenemos los resultados siguientes: el 55 % responde en forma satisfactoria, el 27 % medianamente satisfactoria, el 9 % poco satisfactoria y el restante 9 % da una respuesta totalmente errónea. Para elaborar las respuestas el 9 % se sitúa en el contexto físico, el 18 % en el contexto matemático, el 45 % utiliza ambos contextos y en un 27 % no ha sido posible identificarlo.

El ítem 3) arroja los porcentajes siguientes: responden en forma satisfactoria el 18 %, poco satisfactoria el 45 %, en forma totalmente errónea el 27 %, en tanto que un 9 % está en blanco. Para elaborar las respuestas el 18 % se sitúa en el contexto físico, el 9 % en el contexto matemático, el 45 % utiliza ambos contextos y en un 27 % no ha sido posible identificarlo.

Para el ítem 4) tenemos los resultados siguientes: el 18 % responde en forma poco satisfactoria, el restante 73 % da una respuesta totalmente errónea y el 9 % no responde. Para elaborar las respuestas el 27 % se sitúa en el contexto físico, el 55 % utiliza ambos contextos y en un 18 % no ha sido posible identificarlo.

3.- Catalogación de las respuestas

Utilizamos los mismos criterios y puntuaciones que en las situaciones anteriores.

Catalogación de las respuestas al ítem 1)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	0	5	2	4	2.9

Tabla 5.18. Catalogación de las respuestas a la situación 4(4), 1.

Catalogación de las respuestas al ítem 2)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	1	1	3	6	3.3

Tabla 5.19. Catalogación de las respuestas a la situación 4(4), 2.

Catalogación de las respuestas al ítem 3)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	4	5	0	2	2

Tabla 5.20. Catalogación de las respuestas a la situación 4(4), 3.

Catalogación de las respuestas al ítem 4)

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	9	2	0	0	1.2

Tabla 5.21. Catalogación de las respuestas a la situación 4(4), 4.

4.- Conclusiones

- La creencia de que la velocidad es positiva cuando la aceleración es positiva es un obstáculo que ya habíamos observado en la experiencia anterior.
- Hemos observado que no se asocia la velocidad instantánea con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $s(t)$.
- Para poder responder al ítem 4) hay que utilizar esencialmente estrategias variacionales; de ahí el escaso éxito.
- La mayoría de las respuestas al ítem 4) son del tipo, donde $a = 0 \rightarrow a' = 0$, poniendo en evidencia la presencia del teorema factual.

❑ SITUACIÓN 5(9)

Ciertos parásitos se reproducen a gran velocidad; para exterminarlos se está empleando un medicamento nuevo. De forma experimental se halla que la velocidad de cambio en el número de parásitos vivos con respecto al tiempo t (en semanas) puede expresarse como:

$$N' = 6000t^2 - 75t^4.$$

Predecir, utilizando la serie de Taylor, cuántos parásitos habría en el tiempo t si originalmente hay 3000.

1.-Categorización de la producción de los estudiantes

Para su categorización, la producción de los estudiantes, en esta situación-problema y en las dos siguientes, será considerada de la manera siguiente:

- Satisfactoria (S), si en ella se atiende satisfactoriamente a los siguientes elementos:
    1. Determinación de los parámetros constantes y variables.
    2. Condiciones iniciales.
    3. Relación que liga las variables.
    4. Cálculo de las variaciones.
    5. Planteo de la serie.
    6. Análisis de las regularidades que se presentan en las variaciones.
    7. Presentación del modelo buscado.
- Medianamente satisfactoria (MS), si se observan sólo los primeros cinco elementos enunciados arriba.
- Poco satisfactoria (PS), si se observan los cuatro primeros elementos.

- No interpreta el problema o es totalmente erróneo (NI).

Estructuramos el trabajo de los alumnos, para categorizar sus respuestas, en el cuadro siguiente:

Alumno	Categoría
Alicia	S
Carlos	S
Mercedes	S
María J.	S
Águeda	NI
Francisco	S
Josefa	S
Daniel	NI
Purificación	PS
Marta	NI
Elena	PS

Tabla 5.22. Categorización de la situación 5(9).

2.- Observaciones

El 55 % interpreta el problema como una predicción y llega a una respuesta satisfactoria. Hay un 18 % que lo hace en forma poco satisfactoria y un 27 % no interpreta el problema.

3.- Catalogación de las respuestas

Utilizamos los mismos criterios y puntuaciones que en las situaciones anteriores.

Catalogación de las respuestas:

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	2	2	0	6	2.7

Tabla 5.23. Catalogación de la situación 5(9).

4.- Conclusiones

Creemos que se han obtenido resultados alentadores en cuanto al uso de la herramienta de predicción, si bien debemos tener en cuenta que esta situación no ha presentado para el alumno más problemas de interpretación que la expresión *velocidad de cambio.*

❑ SITUACIÓN 6(6)

Desde la terraza de un edificio de altura s_0 se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Esta situación viene descrita por la siguiente ecuación diferencial:

$s'' = -g$, *donde g es la aceleración de la gravedad.*

Predecir la posición de la pelota para cualquier instante t, es decir, hallar la expresión de s(t). Utilizar como herramienta de predicción la serie de Taylor.

1.- Categorización de la producción de los estudiantes

Usando las categorías escogidas en la situación-problema anterior estructuramos el trabajo de los alumnos en el cuadro siguiente:

Alumno	Categoría
Alicia	MS
Carlos	S
María J.	S
Águeda	NI
Francisco	S
Josefa	S
Daniel	NI
Purificación	S
Marta	NI
Elena	NI

Tabla 5.24. Categorización de la situación 6(6).

2.- Observaciones

Se presenta la producción de 10 estudiantes, donde el 50 % responde de forma satisfactoria, el 10 % medianamente satisfactoria y el 40 % no interpreta el problema.

3.- Catalogación de las respuestas

Para catalogar las respuestas, utilizamos los mismos criterios y puntuaciones que en las situaciones anteriores.

Catalogación de las respuestas:

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	
NÚMERO DE ALUMNOS	4	0	1	5	2.7

Tabla 5.25. Catalogación de las respuestas a la situación 6(6).

4.- Conclusiones

A diferencia de la situación-problema anterior, ésta requiere de una mayor abstracción para su interpretación. Sin embargo, pensamos que a la vista de los resultados se avanza en la construcción de la idea de predicción.

- **SITUACIÓN 7(7)**

Desintegración de elementos radiactivos*. El radio se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad presente, es decir:*

$$R' = -kR(t)$$

donde k es una constante positiva llamada constante de desintegración. El signo negativo indica que dicha velocidad es cada vez menor, al haber menos cantidad de elemento a medida que transcurre el tiempo.

Supongamos que en $t_0 = 0$ *se tiene* R_0 *gramos de radio. Se desea predecir la cantidad de radio presente en cualquier instante posterior t, es decir R(t). Utilizar como herramienta de predicción la serie de Taylor.*

1.- Categorización de la producción de los estudiantes

Alumno	Categoría
Alicia	S
Carlos	S
Mercedes	S
María J.	MS
Águeda	S
Francisco	PS
Josefa	MS
Daniel	NI
Purificación	S

Marta	NI
Elena	NI

Tabla 5.26. Categorización de las respuestas a la situación 6(6).

2.- Observaciones

Se observan que el 45 % responde en forma satisfactoria, el 18 % medianamente satisfactoria, el 9 % poco satisfactoria y el 27 % no interpreta el problema.

3.- Catalogación de las respuestas

Para catalogar las respuestas, utilizamos los mismos criterios y puntuaciones que en las situaciones anteriores.

Catalogación de las respuestas:

	PUNTOS				PUNTUACIÓN MEDIA
	1	2	3	4	2.8
NÚMERO DE ALUMNOS	3	1	2	5	

Tabla 5.27. Catalogación de las respuestas a la situación 7(7).

4.- Conclusiones

Esperamos que en la nueva etapa de aprendizaje se superen las dificultades observadas y expuestas y se logre una mayor conceptualización de la idea de predicción, ya que alrededor del 30 % no lo ha superado en esta etapa.

5.2 - ETAPAS DE FORMULACIÓN Y VALIDACIÓN

Estas etapas en el diseño de las actividades para el aprendizaje de los alumnos partícipes en la experiencia son las previstas dentro de la Ingeniería Didáctica que estamos desarrollando. Por esa razón, el grupo de alumnos es el mismo que ha trabajado en la **etapa de acción**. La composición de los equipos ha sido heterogénea; para ello nos hemos basado en los trabajos de los alumnos en la etapa anterior. Se agruparon en tres equipos de la manera siguiente:

EQUIPO B1 (E-B1): Alicia (A), Carlos (C) y Mercedes (M).
EQUIPO B2 (E-B2): María José (MJ), Águeda (ÁG), Francisco (F) y Josefa (J).
EQUIPO B3 (E-B3): Daniel (DR), Purificación (P), Marta (M) y Elena (E).

En las etapas de formulación y validación se emplearon en su realización aproximadamente 4 horas. Nuestra participación ha sido exclusivamente de carácter organizativo.

En estas etapas se grabó en cintas de audio el desarrollo de la situación didáctica, y aquí se transcriben la mayoría de los episodios de aprendizaje. Vamos a recordar el significado de algunos símbolos que hemos utilizado en la trascripción de los diálogos producidos en el seno de los distintos equipos.

- // se produce un silencio.
- ... frase inconclusa.
- ... cuando se encuentran solos en un renglón significan que continúan los intercambios verbales entre los componentes del grupo, sin relevancia, en nuestra opinión, para el aprendizaje.

Al igual que lo hemos hecho en el capítulo anterior con la primera experiencia, para realizar un análisis cuantitativo de estas etapas, una vez que hemos transcrito el material grabado en audio, estudiamos las relaciones entre intercambios verbales que se producen en los episodios de aprendizaje seleccionados entre los equipos de estudiantes. Esto nos dará una información del aprendizaje que sus miembros experimentan colectiva e individualmente.

En la siguiente tabla recordamos las categorías, subcategorías y puntuación que vamos a utilizar para el análisis de las verbalizaciones de los estudiantes en los distintos episodios de aprendizaje.

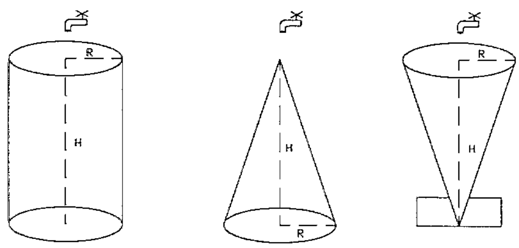
DE CARÁCTER COGNITIVO			DE CARÁCTER ORGANIZATIVO
Emisiones	*Recepciones*	*Práctica posterior*	Integradoras (I)(0)
Dar ayuda (DA), (1) Pedir ayuda (PA), (0)	Recibir ayuda con petición (RA), (1)	Poner en práctica la ayuda recibida (UAR), (1)	Directivas (D)(0)
Cometer errores (E), (0)	Contestarse a sí mismo (AR), (0)	Expresar aprobación (EA), (0)	

Tabla 5.28. Categorías, subcategorías y puntaje para las verbalizaciones.

A continuación damos comienzo al análisis de cada situación, por equipos.

❑ SITUACIÓN 1(1)

Consideremos dos tanques, uno cilíndrico y el otro con forma de cono circular recto con vértice hacia arriba (como se muestra en la figura); ambos tienen igual radio y altura. En ellos se vierte agua a un ritmo constante, comenzando al mismo tiempo.



a) *Bosqueja, en los mismos ejes, una gráfica h(t) (altura en función del tiempo) asociada con el llenado de los dos recipientes, en las condiciones descritas anteriormente. Compara las gráficas y escribe todo lo que puedas concluir sobre ellas.*

b) *¿Cambian las gráficas si invertimos la posición de los recipientes? (ver figura). ¿De qué manera? Haz un bosquejo como en el apartado anterior.*

c) *Bosqueja, en los mismo ejes, la tasa de variación o velocidad de cambio de h(t), para cada uno de los casos anteriores. Compáralas y describe su comportamiento en relación con las gráficas de h(t) obtenidas en a) y b).*

▪ E-B1

Episodio de aprendizaje

Apartado a)

1 -**C**: *Las gráficas ¿cómo creéis que serán? la del cilindro, sabemos que ...*

2 -**M**: *La del cilindro constante, una recta vamos ...*

3 -**C**: *Pero por qué? que tenemos que razonarlo ...*

4 -**M**: *Porque siempre es igual, esa figura no ...*

5 -**C**: *Exactamente ... , la superficie del cilindro que se tiene que ir ocupando por un volumen es siempre constante.*

6 -**M**: *Y el cono no, porque termina en pico y la superficie es redonda* (se refiere a cónica), *y por lo tanto una curva* (se refiere a la gráfica).

7 -**C**: *Muy bien; ahora tenemos que ver si el cono está hacia arriba* (el vértice hacia arriba), *si el pico está hacia arriba, exactamente, es exponencial* (la gráfica)...

8 -**M**: *Y si está hacia abajo pues al revés // se invierte la curva y ya ...*

9 -**C**: *Exactamente, las características. Luego, aparte, vemos los volúmenes. El del cilindro hemos dicho que es el área de la base, que es un círculo, ¿no?*

...

10 -**M**: *No se, creo que es* $2\pi r$.

11 -**C**: *Yo creo que no, si es* $2 \pi r$ *porque sería la longitud, el área* $2 \pi r^2$ *y el volumen* πr^2 *por la altura. Y el cono como es una figura que termina en pico y es semejante, la base es semejante a la del cilindro y la altura es la misma, sería...*

12 -**M**: *Pues, el área de la base y dividido entre 3.*

...

13 -**C**: *Claro, pero quiere decir entonces que sería el volumen del cilindro partido por 3. O un tercio del volumen del cilindro, o sea lo mismo. Bueno, pues yo creo que es todo lo que habría que buscar de las gráficas, ¿no? Luego también como la altura es la misma alcanzarán un mismo valor en el eje de las // ordenadas, ¿no? Pero el tiempo obviamente será un tercio. Va a alcanzar un mismo valor en el eje de las Y, ¿pero qué va a pasar en el eje de las X?, que es el tiempo.*

14 -**A**: *Pues, el cono va a ser un tercio del tiempo del cilindro.*

Apartado b)

15 -**M**: *Pues ya lo hemos dicho antes que la del cilindro no cambia y la del cono, sí. Porque ahora la base está arriba, entonces la curva ahora es sigmoidea en vez de exponencial.*

Apartado c)

16 -**A**: *Pues en el cilindro, como es constante se va a ir llenado constantemente, pues la velocidad va a ser constante, entonces va a ser una recta //*

17 -**C**: *Una recta horizontal.*

18 -**A**: *Exactamente. Y // el cono pues no va a ser constante ¿no?*

19 -**C**: *Exactamente, el cono empezará desde cero y luego al principio la velocidad será muy lenta y luego aumentará.*

...

20 -**M**: *¿Por qué?*

21 -**C**: *Porque ... de la curva exponencial para la velocidad, porque al principio la velocidad es muy pequeñita porque la superficie es mayor y a medida que va disminuyendo la superficie, la velocidad es más rápida por lo cual va aumentando. Pero la altura es al revés, la altura al principio del tiempo ... la gráfica sigue siendo exponencial para la gráfica del cono hacia arriba, y con el cono hacia abajo supongo que también será igual. Al principio la altura irá ... digo el caso primero, en el apartado a), la altura irá creciendo a una velocidad mayor y la velocidad de llenado también, porque al principio el espacio de llenado fíjate, es una cosita así, un puntito, un vértice, recordad, hablo del cono con el vértice hacia abajo, con lo cual la velocidad va a ser igual; al principio va a ser muy rápida y después ...*

22 -**M**: *Después más lenta, sí.*

...

23 -**C**: *La velocidad, la gráfica de la velocidad de los conos, coincidirá con la gráfica de altura partido tiempo.*

24 -**A**: *Sí*

25 -**C**: *Ya lo hemos visto, la del cilindro no, la del cilindro en un primer momento, la gráfica de la altura con el tiempo será constante porque // siempre va aumentando la altura constantemente. Sin embargo, la velocidad no aumenta, se mantiene, con lo cual la gráfica de la velocidad de llenado será constante; diferirá de la de la altura ¿entendéis? ¿bien? Repítemelo tú, Alicia.*

26 -**A**: *Sí, la de la altura va a ir aumentando ¿no? y la de ...*

27 -**C**: *¿Cómo aumentará?*

28 -**A**: *Pues constantemente, y la de la velocidad va a ser siempre igual será una recta horizontal.*

29 -**C**: *mmmm muy bien. ¿Y la de los conos era ...?*

30 -**A**: *Van a ser iguales, las dos.*

31 -**M**: *Las dos.*

32 -**C**: *Las dos, perfecto, cosa que yo creo que en mis ejercicios puse mal.*

...

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos las verbalizaciones producidas en el episodio de aprendizaje del equipo B1 en la situación 1.

Verbalización	Alicia	Carlos	Mercedes
1		I(0)	
2			E(0)
3		I(0)	
4			DA(1)
5		UAR(1)	
6			DA(1)
7		UAR(1)	
8			E(0)
9		PA(0)	
10			E(0)
11		DA(0)	
12			E(0)
13		DA(0)	
14	DA(1)		
15			E(0)
16	DA(1)		
17		UAR(1)	
18	PA(0)		
19		DA(1)	

20			PA(0)
21		DA(1)	
22			RA(1)
23		E(0)	
24	EA(0)		
25		DA(1)	
26	EA(0)		
27		I(0)	
28	UAR(1)		
29		I(0)	
30	E(0)		
31			EA(0)
32		EA(0)	
$\bar{x}$	0.1	0.2	0.1

Tabla 5.29. Verbalizaciones producidas por el equipo B1 en la situación 1.

Quien obtiene mayor provecho de la discusión es Carlos, ya que continuamente trata de explicar el fenómeno a sus compañeras. En esa búsqueda entra en contradicciones con su producción anterior, lo que le hace reflexionar aunque no llegue siempre a respuestas satisfactorias. Mostramos, textualmente, una frase emitida en esta discusión e ilustrativa de sus concepciones " *la gráfica de la velocidad, en los conos, coincidirá con la gráfica de altura partido tiempo*".

- **E-B2**

1 -**F**: *En las gráficas que vamos a bosquejar, representamos el tiempo(t) en el eje X y la altura(h) en el eje Y. La gráfica que representa el cilindro es una recta, esto se debe a que el radio del cilindro es constante en toda su altura, por lo tanto el llenado de agua que se produce en el cilindro es el mismo en cada unidad de tiempo.*

2 -**ÁG**: *Sí, porque la forma que posee el cilindro es uniforme, por eso el radio es igual en toda la gráfica.*

3 -**MJ**: *Pues yo pienso que en el cono ocurre todo lo contrario porque ...*

4 -**J**: *No, no es exactamente lo contrario, sino que la gráfica que describe el llenado del cono es una parábola ya que // en una unidad de tiempo el cono se llena mas rápido que en la unidad anterior.*

5 -**MJ**: *¿Y qué pensáis que ocurre en el apartado b? ¿Creéis que cambian las gráficas si invertimos la posición de los recipientes?*

6 -**F**: *Pues yo creo que la gráfica del cilindro no va a cambiar porque la forma de éste va a ser la misma aunque le demos la vuelta, por lo tanto la función seguirá siendo la misma recta que en el caso anterior.*

...

7 -**ÁG**: *Claro, llevas razón, pero en el cono no ocurre eso, porque su forma no es constante, ya que el radio aumenta, por lo tanto la gráfica que obtenemos es más ...*

8 -**J**: *Aquí lo que ocurre es que en una unidad de tiempo el cono se llena menos que en la unidad de tiempo anterior.*

9 -**F**: *Bueno, pues vamos con el apartado c).*

10 -**ÁG**: *Yo, es que el apartado c) no lo entendía muy bien, y no lo hice.*

11 -**F**: *Yo lo que creo que pasa en el apartado c) es que hay que representar las derivadas de las funciones anteriores. En el eje X representamos el tiempo, y en el eje Y representamos como varía la altura en función del tiempo. Creo que la derivada que representa la gráfica del cilindro es una recta, y ésta es paralela al eje X, porque como hemos dicho antes, la velocidad de llenado es constante a lo largo de toda la función. Sin embargo, la gráfica que representa cómo varía la velocidad de la altura con respecto al tiempo de los dos conos van a ser también dos rectas, pero no perpendiculares al eje X, sino que la gráfica del cono va a tener mayor pendiente que la gráfica del cono invertido, porque como dijimos, en el cono, conforme aumenta la altura, el llenado es mas rápido, por eso tiene mayor pendiente; sin embargo, en el cono invertido pasa todo lo contrario, cuando aumenta la altura, el radio va aumentando, por esto el llenado del cilindro va a ser más lento, entonces esto quiere decir que la función derivada va a tener una pendiente menor.*

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos las verbalizaciones producidas en el episodio de aprendizaje del equipo B2 en la situación 1.

Verbalizaciones	María J.	Águeda	Francisco	Josefa
1			DA(1)	
2		UAR(1)		
3	PA(0)			
4				DA(1)
5	I(0)			
6			DA(1)	
7		PA(0)		
8				DA(1)
9			D(0)	
10		PA(0)		
11			E(0)	
$\bar{x}$	0	0.1	0.2	0.2

Tabla 5.30. Verbalizaciones producidas por el equipo B2 en la situación 1.

Se observa que, en esta discusión, el mayor provecho es para Francisco y Josefa porque explican y argumentan sus posturas; en cambio María José y Águeda se limitan a pedir ayuda pero luego no la utilizan para ir construyendo conocimientos.

- **E-B3**

...

1 -**DR**: *Más o menos hemos llegado los cuatro a la misma conclusión. Que el primero y el segundo se van a llenar de distinta forma. La gráfica del primero es una recta constante. ¿Y por qué has dicho tú que es constante?*

2 -**M**: *Porque conforme avanza la altura de forma proporcional avanza el tiempo. Según avanza el tiempo la altura va a subir.*

3 -**DR**: *Hemos puesto los tres lo mismo, las mismas gráficas. ¿Y el cono?*

4 -**M**: *Al principio empieza igual que el cilindro, ya que tienen el mismo radio pero luego cuando pasa poco tiempo ...*

5 -**E**: *En un espacio de tiempo muy corto aumenta mucho el volumen porque el radio es más pequeño.*

6 -**DR**: *Y el apartado ... a ver que más hay que poner. Compara las gráficas ... esto lo hemos puesto. Bueno, pero la tercera gráfica es ya comparando si lo invertimos.*

Apartado b)

...

7 -**P**: *Si cambian, el cilindro es igual porque tienen las bases iguales.*

8 -**DR**: *Da igual si lo invertimos.*

9 -**P**: *Y en el cono la parábola sería al revés* (se refiere a una parábola con eje X). *Se llenaría al principio muy rápido y luego ya ...*

10 -**M**: *Más o menos igual que el cilindro.*

11 -**DR**: *La velocidad de llenado disminuye conforme aumenta la altura.*

Apartado c)

...

12 -**M**: *Yo en el primer caso, que es el cilindro, me sale una recta perpendicular al eje Y porque si aquí hemos puesto esta gráfica que es y = x hacemos la derivada de x nos sale que para todo valor de la altura que es y, x siempre va a 1.*

13 -**DR**: *A ver, repítemelo, ¿cómo es eso?*

...

14 -**M**: *Entonces esta gráfica es x = y. Para todo valor de x la y te vale 1. Entonces si derivas esto te da la tasa de variación y sale que y = 1, entonces para todo valor de y, x siempre vale 1...*

15 -**P**: *Pues yo en vez de ponerla perpendicular la he puesto horizontal.*

16 -**E**: *En vez de la derivada de x es la derivada de y. Eso es por que has invertido los ejes también, no?*

17 -**DR**: *Pero yo creo que es lo que tú dices, que en vez de derivar una cosa ha derivado la otra.*

18 -**E**: *Bueno, pero entonces es lo mismo.*

19 -**M**: *Yo he puesto que la altura se mantiene constante conforme va avanzando el tiempo y ella ha puesto que el tiempo va pasando conforme va aumentando la altura.*

20 -**P**: *Yo he puesto que la variación de altura es siempre la misma conforme va pasando el tiempo. Siempre aumenta lo mismo.*

21 -**M**: *Y yo es que he puesto que el tiempo es el que se mantiene constante.*

22 -**P**: *El tiempo no se puede mantener constante, el tiempo va variando.*

23 -**DR**: *El tiempo varía siempre. Es que es lo que dice ella que el tiempo no se puede mantener constante. El tiempo transcurre y lo que puede variar es la otra variable.*

24 -**M**: *No, no, no. Yo también lo he dicho bien, porque por ejemplo si representas un momento (0,1) lo representamos aquí. Esto sería la altura, entonces sería aquí. La altura sería 0 y el tiempo sería 1. Entonces conforme vaya avanzando aquí, en 0 ...*

25 -**DR**: *Entonces éste sería el tiempo y ésta la altura.*

26 -**M**: *Claro // es una parábola. Le doy valores a este ... porque esto es una parábola cuadrada.*

27 -**P**: *Yo lo que he hecho es coger una parábola de la representación de los conos y como la derivada de la parábola es una recta pues yo he puesto una recta. Lo que pasa es que no se sabe cuál es la pendiente ni en qué punto cortará al eje de las X porque no sabemos cuál es la ecuación de la parábola. Entonces dependería de la ecuación que nos den ... es una recta.*

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos los intercambios verbales que se producen en el equipo B3 en la situación 1(1).

Verbalizaciones	Daniel	Purificación	Marta	Elena
1	I(0)			
2			DA(1)	

3	I(0)			
4			PA(0)	
5				DA(1)
6	I(0)			
7		DA(1)		
8	EA(0)			
9		DA(1)		
10			DA(1)	
11	UAR(1)			
12			DA(1)	
13	PA(0)			
14			DA(1)	
15		E(0)		
16				DA(1)
17	EA(0)			
18				EA(0)
19			E(0)	
20		DA(1)		
21			E(0)	
22		DA(1)		
23	EA(0)			
24			PA(0)	
25	I(0)			
26			E(0)	

27		DA(1)		
$\bar{x}$	0	0.2	0.1	0.1

Tabla 5.31. Verbalizaciones producidas por el equipo B3 en la situación 1.

Purificación es quien obtiene mayor provecho de esta discusión, en el sentido de ser ella quien, en la mayoría de los casos, argumenta sus emisiones en forma satisfactoria. En cambio Daniel es el menos beneficiado pues se limita a asentir sin utilizar apenas la ayuda recibida por sus compañeros.

❑ SITUACIÓN 2(8)

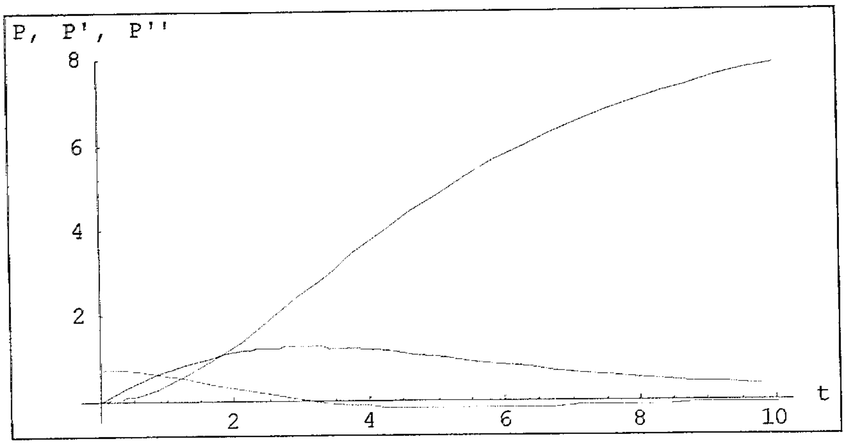
Un estudiante tiene ocho problemas para realizar en casa. Ha reservado diez horas de trabajo ininterrumpido. La producción del estudiante viene dada por la función P(t) que corresponde a una de las curvas que se muestran en la gráfica, donde t es el tiempo (en horas). Las otras dos curvas corresponden a la primera y segunda derivadas de dicha función. Analizar la figura y, con los elementos del problema y las herramientas matemáticas que posees, identifica la función P(t) y sus derivadas. Numéralas de la siguiente forma: 1 = $P(t)$, 2 = $P'(t)$, 3 = $P''(t)$. *En todos los casos explica detalladamente cuáles han sido las razones para tu elección. A continuación y siempre utilizando la figura halla:*

a. Una interpretación para P'(t) y P''(t).

b. El instante en que la producción del estudiante es máxima.

c. ¿Cómo varía la velocidad de producción del estudiante a lo largo de las diez horas de trabajo? Descríbelo de forma detallada.

d. ¿A qué hora el número de problemas que resuelve es menor que los resueltos en la hora anterior?



A continuación analizamos las verbalizaciones producidas por los equipos en la situación 2(8).

- **E-B1**

Episodio de aprendizaje

...

1 -**C**: *Vamos a ver, hemos dicho que se interpretan los ejercicios que va resolviendo el estudiante en función del tiempo. La que crece continuamente es la gráfica de ...*

2 -**M**: *De la función.*

3 -**C**: *De la función, pero ¿por qué?. Porque los problemas siempre van aumentando, es decir siempre va resolviendo los problemas, independientemente de que lo haga más deprisa o más despacio siempre va resolviendo problemas, aunque borre alguno porque esté mal lo vuelve a repetir.*

4 -**M**: *Es la función. Ésta es ...*

...

5 -**C**: *¿La primera derivada qué significa?, la velocidad de ... en la que va resolviendo los problemas. No hace falta que lo mires. La primera derivada es la velocidad y la segunda la aceleración que supongo que sería el rendimiento, cómo está rindiendo el muchacho.*

6 -**M**: *Ea pues entonces ... ésta es la primera.*

7 -**C**: *La primera derivada sería ésta. Además, ¿por qué? Por lo de los infinitos y los límites. Empieza de cero, cuando esté yendo a infinito está yendo a cero, es decir, sabes lo que estoy diciendo, haciéndolo matemáticamente, es decir, de cara a las Matemáticas, de cara a la Geometría, por los límites. Cuando la gráfica tiende a infinito ... tiende a cero. Entonces aquí hay un máximo. ¿Qué quiere decir este máximo? Que aquí ha llegado el valor máximo de la velocidad, es decir, que hasta ahí ha alcanzado la velocidad mayor de hacer los problemas.*

8 -**M**: *Y aquí, ¿esto sería un mínimo?*

9 -**C**: *Es decir, que hasta aquí va más rápido haciendo los problemas y a partir de ahí ya ha bajado el rendimiento, es decir, ha seguido resolviendo los problemas pero a velocidad cada vez menor, se ha ido durmiendo en los laureles. El rendimiento*

por tanto, que sería la última, la que baja incluso por debajo de cero, empieza a rendir mucho al principio, realmente empieza en un valor de rendimiento, supongo que luego va bajando, va bajando, va bajando ¿Por qué? Porque el estudiante desde el primer día se va cansando, empieza con muchas ganas pero se cansa.

10 -**M**: *Pero después se cansa, sí, suele pasar.*

11 -**C**: *¿Qué quiere decir que esto baje a cero?*

12 -**M**: *Eso ya sería, sería nada, negativos todos.*

13 -**C**: *Sí. Pero que la gráfica baje hasta cero tiene que tener una explicación. Incluso baja de cero y luego se va acercando otra vez a cero.*

14 -**M**: *Es que ya se acerca del todo a cero ¿no? Mira.*

15 -**C**: *Si os dais cuenta coincide más o menos con el máximo, el máximo de la velocidad, lógico. Cuando éste alcanza el máximo, el otro el mínimo, la derivada, quiero decir.*

16 -**M**: *Eso es lo que te he dicho antes, que aquí hay un mínimo.*

17 -**C**: *Exactamente. Entonces, bueno ya hemos interpretado. Interpretación para P' y P'': ya hemos dicho que P' sería la velocidad, como va resolviendo el estudiante; y la segunda, la aceleración. Que por lo visto al principio la aceleración se mantiene ... La primera hora, fíjate, hay un mantenimiento, una aceleración constante, es decir, ¿por qué? Porque si os dais cuenta que al principio la velocidad crece, por eso es constante, es decir, nos está diciendo que cada vez más deprisa. Entonces si la velocidad crece la aceleración se mantiene, la aceleración es constante, está acelerando cada vez más. Pero, a partir de un cierto punto que es el máximo ...*

...

18 -**M**: *El instante en que la producción del estudiante es máxima* (enunciado). *Pues donde está el máximo, ¿no?*

19 -**A**: *El máximo de la gráfica de la velocidad.*

20 -**M**: *Sí, de la primera derivada.*

21 -**C**: *Sería donde la velocidad es mayor, ¿no? Pregunto*

22 -**M**: *Aquí dice, la producción del estudiante es máxima, pues en el máximo, que tiene en la ...*

...

23 -**C**: *La producción del estudiante ¿qué sería? ¿En qué se mide la producción del estudiante? ¿En velocidad tiempo o en ejercicios resueltos-tiempo?*

24 -**A**: *Claro.*

25 -**C**: *En ejercicios resueltos-tiempo. A lo mejor se ha tirado cinco horas u ocho horas tal, pero ha llegado a su producción máxima ¿cuándo va a ser? Creo yo, yo estoy dando mi opinión, ¿no?*

26 -**M**: *Sí.*

27 -**C**: *Va a ser cuando termine con todos los problemas. Otra cosa es en qué momento está rindiendo más, en qué momento la velocidad es mayor. Pero la producción yo creo que sería cuando ha terminado totalmente todos los problemas. ¿No? ¿Qué opináis vosotras?*

28 -**M**: *Yo creía desde el principio que era donde estaba el máximo, en la gráfica de la velocidad, pero ... viendo lo que me dices, pues ya ...*

29 -**C**: *Claro, es que una cosa es que si el estudiante está aprovechando el tiempo, por decirlo de alguna manera, es decir, si los está resolviendo a un buen ritmo, que sería la velocidad, o la aceleración, no estoy muy seguro, creo que la velocidad. Y otra cosa es la producción independientemente de cuanto tarde. Yo cuando más he producido ha sido cuando he hecho todos los ejercicios. Si al final de hacerlos todos hay uno que realmente no he podido hacer porque no, la producción ahí no es ...*

30 -**M**: *No es máxima.*

...

31 -**C**: *Entonces, bajo mi punto de vista, sería cuando la primera gráfica, la gráfica de producción de ejercicios resueltos-tiempo, el máximo, es decir, cuando llega hasta las diez horas esas de producción, o sea, cuando haya resuelto los ocho ejercicios.*

32 -**M**: *Cuando ha resuelto todos los ejercicios.*

33 -**C**: *¿Tú te convences o sigues pensando lo otro? Que también puede ser, o sea, ya no te digo que esté bien, digo que es lo que yo creo. ¿Tú qué piensas, Alicia?*

34 -**A**: *Es eso, es lo de los ejercicios por tiempo pero no tiene por qué ser cuando ha resuelto los ocho ejercicios, ¿no?. Porque ha resuelto los ocho en, ¿qué son? días, en diez días o en diez horas .*

35 -**C**: *Pero eso sería la velocidad, yo cuando me dicen la producción me fijo exclusivamente en el eje de las ordenadas, es decir, ¿cuándo están todos los ejercicios resueltos? Porque yo, repito, en la producción, creo que a mí no me interesa, es que claro, hay un matiz, para mí es cuando los ejercicios estén todos resueltos, pero a lo mejor la producción se refiere a los ejercicios comparados con el tiempo, es decir, esa sería la velocidad. Ahí está el matiz. Para mí es eso, no sé cómo.*

36 -**M**: *Yo pensaba que era ...*

37 -**C**: *Bueno, bueno, pues lo sigues pensando, no te digo que no. Yo creo que es eso vamos. // ¿Cómo varía la producción del estudiante a lo largo de las diez horas de trabajo?* (enunciado). *La velocidad de producción, entonces ahora sí que es la velocidad.*

38 -**M**: *Ahora sí que es esa.*

39 -**C**: *La velocidad cómo varía. Al principio la velocidad aumenta porque puede ser que el estudiante lo haya cogido, sería una hipótesis para apoyar la gráfica, el estudiante ha cogido el ejercicio con muchas ganas o que el primero que es ... es cuando más aumenta la velocidad. Si os dais cuenta a mediados del segundo // ya es cuando se estabiliza. Entonces el primer ejercicio o ha sido fácil o lo ha cogido con ganas o lo que sea, pero el caso es que ha ido aumentando la velocidad, ha ido yendo más deprisa. En el ... cuando ha terminado el primero en el segundo ha tenido que ser más difícil o algo porque la velocidad se estabiliza; ya sigue una línea un poco recta y a partir ya de ese segundo e incluso antes de terminar el segundo la velocidad es baja, es decir, que va cada vez más despacio, bien porque el problema será más difícil o bien porque no tendrá tantas ganas o lo que sea, pero el caso es que va bajando la producción, la velocidad de producción.*

40 -**M**: *Sí, de todas maneras se ve clarísimo.*

41 -**C**: *Entonces, diríamos que durante la primera hora, las primeras dos horas aquí pone un dos ¿no?*

42 -**M**: *Sí.*

43 -**C**: *Aquí llega hasta un máximo si te das cuenta, la velocidad aumenta ...*

44 -**M**: *Después empieza a disminuir ...*

45 -**C**: *Se estabiliza y a partir yo creo de la tercera hora, es que este intervalo es recto o creciente casi, pero vamos que no se ve muy bien, a partir de la tercera hora*

fijo, bueno es que además fíjate justo a partir de la tercera justo cuando baja, os dais cuenta de lo que os decía antes.

46 -**M**: *Sí. Empieza a bajar pero después se mantiene ...*

47 -**C**: *En la segunda, es que es curioso, en la segunda ... derivada justo donde la velocidad empieza a decrecer, empieza a ir cuesta abajo, es cuando la aceleración, si teóricamente hemos dicho que sea la aceleración, pasa por debajo de cero, lo cual es lógico porque si os dais cuenta la aceleración en un primer momento se mantenía puesto que la velocidad ¿qué pasaba? Que aumentaba.*

48 -**M**: *Que aumenta.*

49 -**C**: *// ¿Cómo será la aceleración? Cero. Porque ya no hay aceleración ni buena ni mala, simplemente no hay aceleración, con lo cual esto explica los valores que le hemos dado a las ... o sea las asociaciones que hemos dado a cada gráfica. Ésta es la general, ésta es la derivada y ésta tal. Y a partir de ese momento que teóricamente la velocidad empieza a decrecer, la aceleración es menor que cero.*

50 -**M**: *Claro.*

51 -**C**: *¿Por qué?*

52 -**M**: *Porque no hay.*

53 -**C**: *Todavía no. No. No hay justamente porque es negativa. No empieza a acelerar ya empieza a frenarse, es decir, hay una aceleración pero es negativa. Ahora el estudiante no está acelerando, está frenando, por decirlo de alguna manera, porque la velocidad está bajando. Hasta que llega un valor mínimo cero. Veis lo que quiero decir con la aceleración, ahora sí que se empieza a aplicar las interpretaciones. Porque la primera todo el rato está aumentando, es la gráfica de la producción, // , primero supuestamente y teóricamente que esto está apoyando lo que nosotros estamos diciendo, aumenta y luego disminuye, es decir primero acelera, acelera, acelera y luego se mantiene porque hay algunas dificultades, y luego ya baja, es decir, va frenándose. Entonces la aceleración al principio es constante puesto que la velocidad va aumentando, en un determinado momento, a las dos horas o así, se estabiliza la velocidad y si se estabiliza la velocidad, ¿qué pasa con la aceleración?*

54 -**A**: *Que es cero.*

55 -**C**: *Que es cero // Que es cero la aceleración. Y cuando la velocidad ya empieza a disminuir, es decir se va frenando, la aceleración es negativa. Hasta que ya*

se aproxima a un valor cero porque la velocidad ya se está quedando en cero. Entonces por eso después la aceleración se va acercando al eje de las ... de las abscisas. Estoy hablando yo todo el rato, explicádmelo vosotras.

56 -**M**: *No vamos a pasar ya ...*

57 -**C**: *Que luego Marta me dice que estoy hablando mucho. Bueno ...* (enunciado) *¿Cómo lo veríais? Pues // que el número de problemas es menor que el que ha resuelto en la hora anterior.*

58 -**A**: *La velocidad.*

...

59 -**C**: *La velocidad. Fijaros la velocidad nos relaciona la relación de problemas que va resolviendo respecto al tiempo. No es la producción en sí, si no la producción con respecto al tiempo. Hasta este tiempo, un momentito, con lo cual al principio aumenta la velocidad de producción ¿no? Hasta llegar a 1.5 más o menos y ahí empezaría. Entonces a las dos y media más o menos cuando empieza a bajar. A las tres aproximadamente la producción de problemas empieza a bajar. A las tres hay casi unos dos problemas resueltos, bueno uno y medio más o menos. Y a partir de las tres a las cuatro ya hay menos de lo que había a las tres. Y a las ocho ya hay muchísimos menos. ¿Qué quiere decir? ¿qué los va borrando?, no, porque es la velocidad de producción.*

60 -**A**: *O sea, este eje cuando haces la derivada ya no sería el número de ejercicios, sería la velocidad. Entonces aquí no puedes mirar los problemas.*

61 -**C**: *Por eso aquí mismo, aquí arriba no han puesto valores. Éste siempre es tiempo pero éste no. Entonces para esta gráfica la que siempre crece, ésta es la producción de ejercicios. En el caso de la segunda gráfica es la velocidad y en el caso de la segunda derivada es la aceleración. Entonces nos fijaríamos en la gráfica de la velocidad y sería a partir de las tres, las tres y las cuatro. Conclusión, el estudiante empieza a buen pie, se estaciona y empieza a bajar. Con lo cual la velocidad empieza aumentando, se mantiene y baja; con lo cual la aceleración al principio es constante, baja por debajo de cero y después es negativa porque va frenando hasta ya que se termina la cosa y ya está.*

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos los intercambios verbales que se producen en el equipo B1 en la situación 2(8).

Verbalizaciones	Alicia	Carlos	Mercedes
1		DA(1)	
2			EA(0)
3		DA(1)	
4			EA(0)
5		DA(1)	
6			UAR(1)
7		DA(1)	
8			PA(0)
9		DA(1)	
10			EA(0)
11		I(0)	
12			E(0)
13		PA(0)	
14			EA(0)
15		E(0)	
16			EA(0)
17		DA(1)	
18			E(0)
19	E(0)		
20			E(0)
21		PA(0)	
22			I(0)

23		I(0)	
24	EA(0)		
25		DA(1)	
26			EA(0)
27		DA(1)	
28			EA(0)
29		DA(1)	
30			EA(0)
31		DA(1)	
32			EA(0)
33		I(0)	
34	E(0)		
35		DA(1)	
36			E(0)
37		DA(1)	
38			EA(0)
39		DA(1)	
40			EA(0)
41		DA(1)	
42			EA(0)
43		DA(1)	
44			UAR(1)
45		DA(1)	
46			UAR(1)
47		DA(1)	

48			EA(0)
49		DA(1)	
50			EA(0)
51		I(0)	
52			EA(0)
53		DA(1)	
54	DA(1)		
55		DA(1)	
56			D(0)
57		I(0)	
58	DA(1)		
59		DA(1)	
60	UAR(1)		
61		DA(1)	
$\bar{x}$	0	0.4	0

Tabla 5.32. Verbalizaciones producidas por el equipo B1 en al situación 2(8).

Evidentemente es Carlos quien con un gran número de verbalizaciones ha salido beneficiado en esta discusión, ya que en cada una de sus intervenciones busca argumentos para explicarse y explicar a sus compañeras el problema, lo que le permite avanzar en forma satisfactoria en la solución del mismo.

- **E-B2**

Episodio de aprendizaje

1 -**MJ**: *Tenemos una gráfica con tres funciones: la primera es la que más se aleja del eje de las X, y, es la que muestra el trabajo realizado por el estudiante durante las ocho horas. La segunda función es la primera derivada y tiene un máximo en el punto de inflexión de la función, por eso, vemos que tiene menos pendiente. Y la*

tercera función es la segunda derivada que muestra como ha disminuido el trabajo del estudiante durante las ocho horas porque pasa ...

2 -**F**: *¿Qué interpretación le dais a la primera y segunda derivada?*

3 -**ÁG**: *En la primera derivada se ve cómo varía la velocidad // y la segunda derivada es la ...*

4 -**F**: *¿Y el instante en que la producción del estudiantes es máxima? // No, pero es lo que he dicho antes, en el punto de inflexión de la función, la derivada va a tener un máximo, y es ese máximo el que representa ... Tiene un máximo la derivada.*

5 -**ÁG**: *¿Cómo varía la velocidad de producción del estudiante?*

6 -**F**: *¿Que cómo varía la producción del estudiante? Ahí, nos tenemos que fijar en la primera derivada. // Claro, al principio va aumentando, y luego ... Aumenta, llega hasta el punto tres, que es un máximo y luego va ... Eso significa que al principio va realizando más ejercicios hasta que llega a la hora tres, donde es la producción máxima, y a partir de esa hora empieza a disminuir. // Viendo la otra gráfica, que era el número de problemas que resuelve en la hora anterior que son menos.*

7 -**J**: *Es donde se produce el cambio ...*

8 -**F**: *Claro, el cambio de la primera derivada en el intervalo que va de las tres a las cuatro. Además, // la segunda derivada ...*

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos los intercambios verbales que se producen en el equipo B2 en la situación 2(8).

Verbalizaciones	María J.	Águeda	Francisco	Josefa
1	DA(1)			
2			I(0)	
3		DA(1)		
4			E(0)	
5		I(0)		
6			DA(1)	
7				DA(1)

8			DA(1)	
$\bar{x}$	0.1	0.1	0.3	0.1

Tabla 5.33. Verbalización producida por el equipo B2 en la situación 2(8).

Este equipo ha producido un escaso número de verbalizaciones, viéndose beneficiado de ellas Francisco, pues da argumentos satisfactorios en sus emisiones más veces que sus compañeras.

- **E-B3**

Episodio de aprendizaje

1 -**P**: *Primero vamos a decir cuáles son las gráficas,¿no?*

2 -**DR**: *La que tiene el punto de inflexión*

3 -**M**: *La que alcanza más problemas.*

4 -**P**: *La que tiene un máximo en 8. El máximo de la función lo tiene en ocho problemas.*

5 -**DR**: *Que al final es lo que supongo que quiere decir que hace al final los ocho problemas aunque no lleve el ritmo de trabajo que sea constante. La segunda es la que tiene el punto máximo en uno y pico y medio o por ahí, ¿no? Esa es la primera derivada y la otra la que va por debajo del eje X. La segunda derivada es la que va por debajo del eje X. Y ahora lo que nos pide ¿qué era?*

6 -**P**: *El rendimiento máximo que sería sobre las tres horas.*

7 -**DR**: *Igual que en Física esto lo que marca es la velocidad. Es el rendimiento del estudiante, entonces llega un punto que está estudiando mejor y luego va descendiendo el ritmo de trabajo. Y la segunda derivada? Es esto de aquí.*

8 -**P**: *Que va aumentando su rendimiento hasta un punto en que ya lo hace máximo y a partir de ese punto va decreciendo su producción, que lo podemos ver porque una parte es positiva.*

9 -**M**: *Ahí la producción es máxima. No va aumentando, va bajando. Vemos que la producción es máxima y luego va bajando pero luego vemos que en aproximadamente nueve, no nueve no.*

...

10 -**DR**: *La segunda derivada lo que representaría sería la ...*

11 -**M**: *A partir de tres o de cuatro va aumentando otra vez su producción.*

12 -**DR**: *Claro, pero lo que representa es número de problemas con respecto al tiempo. Es el número de ejercicios, al ritmo que va trabajando pero en función del tiempo. Entonces lo que va ...*

13 -**E**: *Pero si está por debajo.*

14 -**DR**: *Lo que va haciendo es que siempre va decreciendo, o sea que siempre no, hasta por aquí que tiene un punto mínimo. Hasta el cuatro y poco.*

15 -**E**: *Pero bueno, si está en negativo, ¿qué quiere decir?, que no hay problema, ¿no?*

16 -**DR**: *Que va trabajando a menor... a un ritmo...*

17 -**P**: *Yo creo que cuando va positivo es que va aumentando su producción, que va aumentado progresivamente hasta alcanzar un máximo. Porque no parte de la producción máxima, porque si nos fijamos en la primera derivada parte de cero, entonces va aumentando la producción hasta que alcanza un mínimo, que se ve representado por un punto cero en la segunda derivada.*

18 -**M**: *Pero aquí no se ve ningún punto de inflexión, se ve que empieza en cero y va bajando. Es el número de problemas que hace y va bajando conforme pasa el tiempo. Pero no es que aumente la producción.*

19 -**P**: *Es que aumenta la producción hasta un punto y luego a partir de ese punto va bajando.*

20 -**M**: *Pero si es que desde que empieza va bajando.*

21 -**DR**: *Bueno, ¿y qué diríais que pasa entonces cuando corta el eje X?*

22 -**P**: *Pues que alcanza el punto máximo y a partir de ese punto va disminuyendo la producción*

23 -**DR**: *¿El punto máximo?*

24 -**P**. *El punto máximo de producción que es cuando más problemas ha hecho por tiempo.*

25 -**DR**: *¿Y eso no sería al principio?*

26 -**M**: *Tú estás diciendo que cuando el tiempo es igual a menos tres los problemas son máximos, si los problemas son cero.*

27 -**P**: *No, pero es máximo la producción.*

28 -**M**: *Si aquí es cero.*

29 -**P**: *Y como hay un máximo en la primera derivada pues eso corresponde a cero en la segunda. Al ser un máximo la pendiente sería horizontal, sería cero.*

30 -**M**: *Entonces la producción es cero.*

31 -**P**: *No, la producción no es cero, la producción es máxima.*

32 -**M**: *Pero si el máximo es en la primera derivada.*

33 -**P**: *Ya, porque la primera derivada es la producción y la segunda derivada no sé lo que es pero no es la producción.*

34 -**E**: *Mira, yo lo que creo que quiere decir es que es como en el espacio que hace la primera derivada y representa la velocidad y hace la segunda derivada y representa la aceleración. Entonces quiere decir que la primera derivada es una cosa y la segunda es otra cosa.*

35 –**DR**: *Claro, yo lo que no entiendo muy bien es por qué parte de uno o por ahí y lo que no entiendo es qué pasa aquí, en el punto que corta al eje X.*

36 -**P**: *Como hay un máximo se supone que la pendiente sería horizontal y sería un punto cero. Como en la primera tenemos un punto de inflexión, en la primera, en la normal tenemos un punto de inflexión, eso deriva a un máximo y ese máximo deriva en la segunda derivada a un punto de corte, en relación con la primera.*

37 -**DR**: *Apartado b), el instante en que la producción del estudiante es máxima. Pues ya lo hemos dicho, en t = 3.*

38 -**P**: *¿Cómo varía la producción del estudiante a lo largo de las diez horas de trabajo? Pues la velocidad de producción sería la segunda derivada.*

39 -**DR**: *No, la velocidad de producción sería la primera.*

40 -**P**: *c) ¿A qué hora el numero de problemas que resuelve es menor que los resueltos en horas anteriores?*

41 -**E**: *A la hora o por ahí, no?*

42 -**P**: *Pues será justo después de pasar el máximo porque el máximo es...*

43 -**E**: *Dice la velocidad, pues justo en el momento en que es más baja. Será un momento en que ya no hace ... es el punto más bajo.*

44 -**P**: *Lo que yo digo es que no te dice cuál es el menor, dice que es menor que el que ha hecho antes.*

45 -**P**: *Es cuando pasa el punto de inflexión.*

46 -**DR**: *Ahí está. Cuando pasa el punto de inflexión es cuando cambia el ritmo de trabajo.*

47 -**P**: *Ya va disminuyendo, entonces es menor.*

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos los intercambios verbales que se producen en el equipo B3 en la situación 2(8).

Verbalizaciones	Daniel	Purificación	Marta	Elena
1		I(0)		
2	E(0)			
3			DA(1)	
4		UAR(1)		
5	DA(1)			
6		DA(1)		
7	DA(1)			
8		EA(0)		
9			E(0)	
10	I(0)			
11			E(0)	
12	E(0)			
13				PA(0)
14	DA(1)			
15				PA(0)
16	DA(1)			
17		E(0)		
18			PA(0)	
19		DA(1)		

20			PA(0)	
21	I(0)			
22		E(0)		
23	PA(0)			
24		E(0)		
25	PA(0)			
26			E(0)	
27		E(0)		
28			E(0)	
29		DA(1)		
30			E(0)	
31		E(0)		
32			PA(0)	
33		E(0)		
34				DA(1)
35	PA(0)			
36		DA(1)		
37	E(0)			
38		E(0)		
39	DA(0)			
40		I(0)		
41				E(0)
42		DA(1)		
43				E(0)
44		I(0)		

45		DA(1)		
46	UAR(1)			
47		UAR(1)		
$\bar{x}$	0.1	0.2	0	0

Tabla 5.34. Verbalizaciones producidas por el equipo B3 en la situación 2(8).

En esta discusión se han producido abundantes verbalizaciones. Es Purificación quien más se ha beneficiado de ellas, pues a lo largo de la misma trata de buscar argumentos que le permitan avanzar en la solución del problema, pero además utiliza adecuadamente la ayuda recibida por sus compañeros. Se nota una cierta falta de precisión en el lenguaje utilizado a lo largo de toda la discusión, como puede verse por ejemplo en el siguiente párrafo: "*Va aumentando su rendimiento hasta un punto en que ya lo hace máximo y a partir de ese punto va decreciendo su producción*".

❑ SITUACIÓN 3(2)

Un móvil se desplaza con movimiento rectilíneo no uniforme. En la siguiente tabla se muestran las posiciones (en metros, desde el origen de coordenadas) en ciertos instantes.

t (seg)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	3	2	5	-2	0	3

a) *A partir de estos datos, determina (razonando tu respuesta) para cuántos valores de t, como mínimo, el móvil tiene velocidad instantánea cero.*

b) *¿Para cuántos valores de t, como mínimo, la aceleración es cero?¿por qué?*

c) *¿Se puede asegurar que la variación instantánea de la aceleración s'''(t), conocida como tirón, toma el valor cero en algún instante dentro del intervalo considerado? Explica con detalle los motivos y razones de tu respuesta.*

▪ E-B1

Episodio de aprendizaje

1 **-C**: *En el tiempo 0 hay 3 metros, empieza en 3 metros. En un segundo, dos, esto quiere decir que va bajando en 2 hay 5. En 3, -2. Esto se representaría más o menos así, supongo. Claro es que aquí se utilizan varios términos y yo siempre me*

hago un lío con eso: el término de la posición, de la distancia y de los metros, del espacio. Bueno hagámoslo con el bolígrafo. El bolígrafo arranca en este punto, entonces corre el tiempo y esto va avanzando. Aquí lleva por ejemplo 2 metros, aquí lleva 5 metros recorridos. Con lo cual ésta es la distancia y éste es el espacio, que es diferente. Ahora veréis, porque coinciden. Ahora éste coge, frena y va marcha atrás, entonces los metros que ha recorrido irán aumentando, es decir, aquí había 5 metros o algo así, ¿no? y ha recorrido otros 3 más, en sentido contrario hacia el origen, pero va recorriendo, no se está quieto, con lo cual el espacio que está recorriendo aumenta, pero la posición disminuye, porque la posición se rige desde el punto de origen hasta la posición final, es decir, posición inicial-posición final; con lo cual el espacio aumenta pero la distancia no va aumentando, incluso llega a tomar valores negativos que nos indica que ha pasado ya el punto donde empezó a andar y se ha ido para atrás. Pero el espacio recorrido sigue aumentando. ¿Entiendes lo que te quiero decir? Entonces esto se refiere supongo a la posición, no al espacio que ha recorrido en total. Porque aparece el signo negativo, y el espacio que alguien recorre siempre es positivo, siempre. La distancia no, porque la posición puede ser positiva o puede ser negativa cuando pase del otro lado del origen desde el que ha empezado.

2 -**M**: *Bueno de todas maneras ahí pone espacio. ¿Para cuantos valores de t como mínimo, el móvil tiene velocidad instantánea 0?*

3 -**C**: *¿La velocidad cómo se define...?*

4 -**M**: *Espacio igual velocidad por tiempo. Pues ahora despeja.*

5 -**C**: *La velocidad es la derivada del espacio partido por el tiempo. La derivada quiere decir el aumento de ... partido por el tiempo, entonces en el momento que no se recorra ...*

6 -**M**: *Espérate, espérate. A ver ...*

7 -**C**: *Claro en el tiempo 0 obviamente la velocidad es 0, porque el móvil no se ha empezado a mover, está fijo. Ahora nos está preguntando si hay otro valor en el tiempo en que la velocidad sea 0. Entonces pues muy fácil, es la derivada de la posición partido por el tiempo. Entonces en el tiempo en que la posición sea 0 la velocidad también es 0. Es que a mi es como me lo explicaban; hacíamos un cuadrado en un vértice y poníamos al móvil, entonces la velocidad media, media no instantánea, se define como el espacio recorrido total, es decir, esto más esto, más esto, entre el*

tiempo empleado. Pero la velocidad instantánea es la posición que lleva en un determinado momento entre el tiempo. Aquí llevará una velocidad instantánea v_1, aquí llevará una velocidad instantánea v_2, aquí llevará una velocidad instantánea v_3., pero ¿cómo será aquí la velocidad? Habrá recorrido todos los metros que tú quieras pero ha llegado al origen. Ha salido de aquí y ha llegado ahí. Con lo cual realmente la distancia que ha recorrido ha sido 0. Aunque haya recorrido 4000 Km andando la distancia ha sido 0, porque ha llegado a la misma posición inicial. Entonces, en el punto en que la posición sea 0 independientemente del espacio que haya recorrido anteriormente la velocidad instantánea es 0. Entonces, la velocidad instantánea será 0 en el primer instante, puesto que aquí no se ha empezado a mover y en t = 4 en el que la distancia es 0, la posición, vamos, es 0. Bueno, yo lo que dije fue el espacio recorrido y la distancia; pero la distancia y la posición confundo porque esos términos tampoco son iguales pero los confundo. El caso es que distingamos bien lo que es la posición y lo que es el espacio pues ahí es donde está el quid de la cuestión. Si ha recorrido muchísimos Km pues bien, pero si vuelve al mismo origen, por mucho que haya recorrido la velocidad es 0. Bueno, entonces ¿para cuántos valores de t como mínimo la aceleración es 0? ¿Por qué? Pues entonces en cual será sin mirar la gráfica, o sea, en qué valores ... no quiero valores específicos sino dónde podría ser ¿cuándo habrá una aceleración?

8 -**A**: *Cuando la velocidad sea 0.*

9 -**C**: *No, cuando habrá una aceleración, ¿cuándo la habrá? Cuando haya una variación de la velocidad, ¿no?*

10 -**M**: *Claro.*

11 -**C**: *Cuando la velocidad varíe. Entonces, pues como mínimo en los tiempos que hemos dicho antes, porque sí pasa del reposo a un movimiento.*

12 -**M**: *Eso es ya aceleración.*

13 -**C**: *Exactamente, aunque luego el movimiento sea rectilíneo, sea uniforme, tiene que haber habido alguna aceleración para que adquiera esa velocidad. Y lo mismo en este tiempo, si hemos dicho que la velocidad ha vuelto a ser 0, aquí también ha tenido que haber una variación de la velocidad. Para arrancar por así decirlo ha tenido que haber una aceleración. En t = 4 está un poco más confuso. Yo esto lo interpreto como que el móvil ha salido de aquí, ha dado la vuelta y ha vuelto al sitio*

inicial. Entonces si yo me desplazo linealmente porque aquí te dice algo de que ... ¿es un movimiento rectilíneo, uniforme?

14 -**M**: *No uniforme.*

15 -**C**: *Exactamente eso se refiere a que hay velocidad y hay aceleración. Por eso no me servía el del cuadro, porque es rectilíneo. Entonces pongamos esta recta, si el móvil ha ido hasta aquí pero el espacio en t = 4 es 0, va marcha atrás; luego obligatoriamente ha habido un punto en el que ha tenido que parar, frenar por así decirlo, y dar marcha atrás. Por lo tanto ahí también ha tenido que haber una aceleración negativa, porque ha frenado. Entonces en este tiempo también, ¿no? Lo que me preocupa es el –2, porque esto quería decir que ha recorrido 3 metros, luego 2, ha dado la vuelta ...*

16 -**M**: *Que ha recorrido 3 metros no, que en tres segundos el espacio ...*

17 -**C**: *No, los segundos son los de aquí arriba. En cero segundos empieza en 3 metros, es decir, esto son los metros, no. Entonces aquí con el tiempo 0 habría empezado aquí en los 3 metros. Desde aquí empieza el móvil a moverse, 3 y va hasta el 2, es decir, la dirección es para allá, es negativa por así decirlo.*

18 -**M**: *Claro.*

19 -**C**: *Luego va hasta 5, es decir, 3, 2 y 5, luego da otra vez aquí la vuelta.*

20 -**A**: *Entonces ahí la aceleración sería 0 ¿ no?*

21 -**C**: *Claro, eso es lo que estoy pensando ahí también. Entonces hay más puntos donde la velocidad puede ser 0, más de los que hemos dicho antes. Luego 5 y llega después hasta –2. Es decir, vuelve otra vez hasta aquí, hasta –2. Luego va hasta 0 otra vez y luego hasta 3, es decir, bueno esto ya seguirá aquí así // hasta 3. Entonces supongo, no estoy seguro, pero supongo que ha debido haber varios cambios de velocidad. Porque si aquí ha dado la vuelta, es decir, se ha tenido que parar y ha dado la vuelta. Aquí también y aquí también, y suponiendo que aquí se pare, eso no lo dice el problema, aquí también. Éste es el que no sabemos si se para o sigue adelante. Entonces hay más de los que nosotros pensábamos, antes, posiblemente.*

22 -**A**: *Hay 3.*

23 -**C**: *Claro pues entonces en el momento que ... de 3 a 2 va bajando, de 2 a 5 ya ha aumentado. Entonces sería 3, 2, 1, pero no sería 3, 2, 5. Es decir, que aquí ha tenido que dar la vuelta. Y de 5 a –2 también ha tenido que dar la vuelta. Es decir, que*

ha habido por lo menos 4 cambios; bueno 3, si suponemos que en el último instante ha frenado ya y se ha parado habría 4, porque ahí también tenía que haber frenado, pero como el problema no lo dice, como mínimo 3.

24 -**A**: *Cuando cambia de marcha atrás a marcha adelante.*

25 -**C**: ... *Entonces ¿para qué valores de t como mínimo la aceleración es 0? Pues para los valores en que la velocidad también es cero o aquellos valores en los que la velocidad se mantenga.*

26 -**M**: *Claro, que no se acelera, o es cero o se mantiene la velocidad.*

27 -**C**: *Sería 0 en este tramo por ejemplo. Sería 0 en t = 4.*

28 -**M**: *En el mismo que en el apartado a) en 0, en 4 y en 3.*

29 -**C**: *Serían en t = 4, de t = 4 a t = 5, en ese intervalo es cero la aceleración.*

30 -**M**: *No, yo no entiendo lo que dices.*

31 -**C**: *Aquí hemos dicho. Tú misma lo has dicho. Que como sabíamos en cuantos valores de t, como mínimo, la aceleración es 0. Pues hemos dicho o la velocidad es 0 o es constante. En esos dos casos la aceleración es 0, si la velocidad es 0 seguro que la aceleración es 0. Y también si es constante, como es constante no hay aceleración. Pues aquí es el mismo caso, porque ¿qué es la aceleración? La derivada de la velocidad. Y ¿qué es el tirón? La derivada de la aceleración. Entonces es el mismo caso.*

32 -**M**: *Es que no. Que no entiendo la pregunta, ése es mi problema.*

...

33 -**C**: *En el apartado b) nos preguntaban ... bueno las tres preguntas son las mismas, sólo que la primera como no hay derivada. Nos preguntan en el apartado a) cuándo la velocidad es 0; y hemos dicho o bien cuando la posición inicial es 0, es decir en el primer instante, en el que arranca, o bien cada vez que el móvil cambia de posición, porque para cambiar de posición tiene que frenar entre comillas, ¿no? Bien. ¿Hasta ahí lo entendemos?*

34 -**M**: *Sí, la ...*

35 -**C**: *La b) nos pregunta exactamente lo mismo. ¿Cuándo es 0?*

36 -**M**: *Cuando la velocidad es 0 o cuando es constante.*

37 -**C**: *Exactamente. Y ahora nos dice la tercera, que es el tirón, que es la derivada de la segunda.*

38 -**M**: *Pues lo mismo que en el segundo ...*

39 -**C**: *Pues lo mismo que el segundo caso cuando la aceleración ...*

40 -**M**: *Es cero.*

41 -**C**: *... O cuando la aceleración ...*

42 -**M**: *Es constante.*

Análisis de las verbalizaciones

A continuación, analizamos los intercambios verbales que han ocurrido en los episodios de aprendizaje que acabamos de presentar en el seno del equipo B1 de la situación 3(2).

Verbalizaciones	Alicia	Carlos	Mercedes
1		DA(1)	
2			I(0)
3		I(0)	
4			E(0)
5		E(0)	
6			PA(0)
7		E(0)	
8	EA(0)		
9		DA(1)	
10			EA(0)
11		E(0)	
12			EA(0)
13		E(0)	
14			I(0)
15		DA(1)	
16			E(0)
17		DA(0)	

18			EA(0)
19		DA(1)	
20	E(0)		
21		DA(1)	
22	UAR(1)		
23		DA(1)	
24	UAR(1)		
25		E(0)	
26			EA(0)
27		E(0)	
28			E(0)
29		E(0)	
30			PA(0)
31		E(0)	
32			PA(0)
33		DA(1)	
34			EA(0)
35		I(0)	
36			E(0)
37		I(0)	
38			E(0)
39		I(0)	
40			E(0)
41		I(0)	

42			UAR(1)
$\bar{x}$	0	0.2	0

Tabla 5.35. Verbalizaciones producidas por el equipo B1 en la situación 3(2).

Se han producido un buen número de verbalizaciones, pero en ellas hay largos monólogos por parte de Carlos y muchas expresiones de asentimiento por parte de sus compañeras que no favorecen, en nuestra opinión, la construcción compartida del conocimiento.

A continuación hemos querido resaltar algunos párrafos textuales que se han dado en el grupo B1 y que confirman lo que hemos venido observando.

- *"Es que aquí se utilizan varios términos y yo siempre me hago un lío con eso: el término de la posición, de la distancia y de los metros, del espacio".*
- *"La derivada quiere decir el aumento de ... partido por el tiempo, entonces en el momento que no se recorra ..."*
- *"La velocidad media, media, no instantánea, se define como el espacio recorrido total, es decir, esto más esto, más esto, entre el tiempo empleado. Pero la velocidad instantánea es la posición que lleva en un determinado momento entre el tiempo".*

- **E-B2**

Episodio de aprendizaje

1 -**MJ**: *Yo creo que la velocidad instantánea es cero en tres puntos de la función. Uno es un máximo y los otros dos, mínimos, que representan la función de la posición.*

2 -**F**: *¿Y no podría ser en vez de la función posición, en los máximos y mínimos que representa la función derivada que sería la velocidad? En los máximos y mínimos de la derivada que sea la velocidad instantánea cero.*

3 -**MJ**: *No, no porque es cero en los puntos que corta al eje de las X.*

4 -**F**: *Claro, entonces, si ésta es la función velocidad, es la derivada de la posición en esto punto, que pasa por cero, y es cuando vale cero.*

5 -**J**: *¿Para cuántos valores de t, como mínimo, la aceleración es cero?*

6 -**ÁG**: *Pues yo pienso que es para tres, porque son los puntos de inflexión, y es donde corresponde a los máximos y mínimos de la primera derivada.*

7 -**MJ**: *¿Y cómo puedes asegurar que la variación instantánea de la aceleración, que se conoce como tirón, toma el valor cero en algún instante dentro del intervalo?*

8 -**F**: *Teniendo en cuenta lo que hemos dicho antes // la tercera derivada tomará el valor cero en los máximos y mínimos de la aceleración y entonces la función que representa el tirón, cuando la aceleración tenga un máximo, éste pasará por cero. Entonces, podemos asegurar que tomará el valor cero, que se tomará en el punto que corresponda al máximo o al mínimo de la función posición, y también en ese punto vemos que la aceleración pasa de negativa a positiva y de positiva a negativa // y tiene que pasar por cero.*

9 -**MJ**: *Y no sería cero //*

10 -**F**: *Yo creo que no. Sería cero en los máximos y mínimos de la función aceleración, porque si tú haces la derivada de ésta, ves que en los máximos y los mínimos el tirón pasa por cero y además también, cuando una función cambia de positiva a negativa, en el punto máximo, la derivada es cero. Entonces, cuando la aceleración cambia de signo, en ese punto, el tirón va a ser cero, y eso se corresponde con el máximo //*

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos los intercambios verbales que han ocurrido en los episodios de aprendizaje del equipo B2 en la situación 3(2).

Verbalizaciones	María José	Águeda	Francisco	Josefa
1	DA(1)			
2			PA(0)	
3	DA(1)			
4			UAR(1)	
5				I(0)
6		E(0)		
7	PA(0)			
8			E(0)	

9	PA(0)			
10			E(0)	
$\bar{x}$	0.2	0	0.1	0

Tabla 5.36. Verbalizaciones producidas por el equipo B2 en la situación 3(2).

En esta discusión es María José la que sale beneficiada ya que logra argumentar sus conocimientos en forma satisfactoria. La ayuda que brinda es aprovechada por Francisco ya que creemos que con ella modifica en cierta medida sus concepciones.

- **E-B3**

Episodio de aprendizaje

...

1 -**E**: *Pensamos que para que el móvil tenga velocidad cero el espacio debe ser constante durante un rato, el móvil tiene que estar en el mismo sitio mientras transcurre el tiempo. Y en esta gráfica que nos da pues yo creo que para que el móvil pare un momento, por ejemplo, empieza en tres y retrocede hasta dos y luego tiene que parar un momento para después continuar avanzando ¿no? Entonces los puntos donde ... serían lo que tú has dicho.*

2 -**P**: *Los máximos y los mínimos serían los puntos donde cambia la dirección.*

3 -**E**: *Serían los puntos (1,2), (2,5), (3,-2).*

4 -**DR**: *Estoy pensándolo porque vosotros decís que en cada punto, aquí en cada punto va a ser la velocidad cero, ¿no?*

5 -**E**: *Claro, porque yo estoy en tres y da marcha atrás hasta dos pero luego vuelve a recorrer el espacio que había recorrido antes y hace un espacio nuevo y es porque el móvil ha hecho así. Ha ido para atrás y aquí ha ido para adelante, y para eso tiene que parar.*

6 -**DR**: *Sí, sí.*

7 -**P**: *Esto es del desplazamiento, pero ..., pero ...*

Apartado b)

8 -**DR**: *Yo he pensado que igual que en Física. Si la aceleración es la derivada de la velocidad, si le haces la derivada en el punto en que nos sale la velocidad cero*

va a salir que la aceleración es cero también ¿no? Y en el apartado c) pues lo mismo de antes. Si tú derivas la aceleración te va a salir la aceleración instantánea, que es el tirón y si derivas los puntos donde la aceleración es cero te da también la aceleración cero. Coinciden los puntos de la aceleración con la velocidad.

9 -**P**: *Nos dice que le demos un número mínimo de valores. Cuántos creemos que pueden salir.*

10 -**DR**: *La velocidad cero te salía uno, dos y tres.*

11 -**M**: *Pues la aceleración otros tres y el tirón uno.*

12 -**DR**: *Que yo pienso que todas las veces que la velocidad se te haga cero, la aceleración se va a hacer cero y la aceleración instantánea llamada también tirón también se te va a hacer cero. Y como la velocidad nos salía al principio que se hacía tres veces cero que era en los puntos, que?*

13 -**P**: *(1, 2), (2, 5) y (3, -2).*

14 -**DR**: *Entonces la aceleración en esos tres puntos también va a ser cero y la aceleración instantánea también va a ser cero en esos puntos ¿no?*

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos los intercambios verbales que han ocurrido en los episodios de aprendizaje del equipo B3 en la situación 3(2).

Verbalizaciones	Daniel	Purificación	Marta	Elena
1				PA(0)
2		DA(1)		
3				UAR(1)
4	PA(0)			
5				DA(1)
6	EA(0)			
7		E(0)		
8	E(0)			
9		I(0)		
10	E(0)			

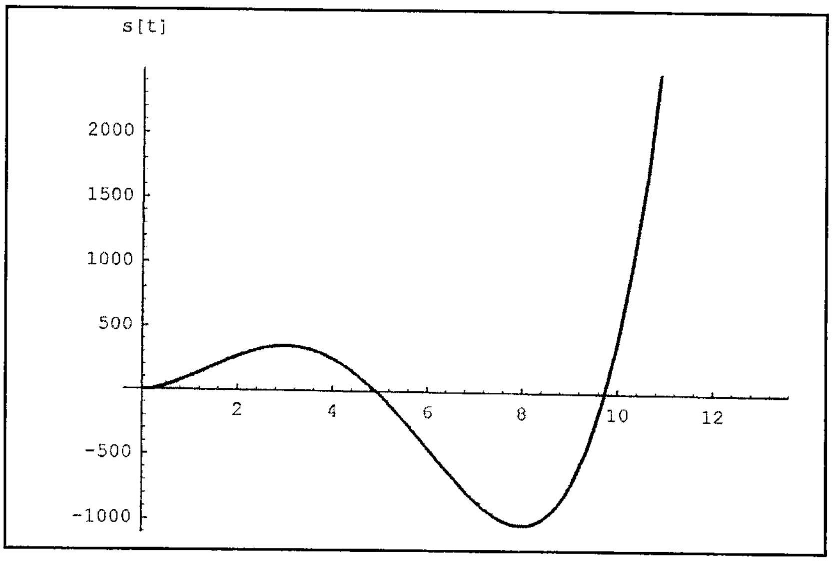
11			E(0)	
12	E(0)			
13		I(0)		
14	E(0)			
$\bar{x}$	0	0.1	0	0.1

Tabla 5.37. Verbalizaciones producidas por el equipo B3 en la situación 3(2).

La mejor puntuación, aun siendo baja, la han obtenido Purificación y Elena. Creemos que como el liderazgo del grupo lo mantiene Daniel, sus fuertes convicciones basadas en el *teorema factual* no han sido propicias para generar una mayor discusión de manera que se expusieran argumentos que permitieran al grupo modificar algunas de sus concepciones.

❑ SITUACIÓN 4(4)

La función posición s(t) del movimiento de una locomotora que se desplaza sobre una vía recta viene descrita por la gráfica que se muestra.



1. *Indica en qué intervalo o intervalos de tiempo va marcha atrás.*
2. *En forma aproximada da los intervalos de tiempo donde la velocidad es positiva y donde es negativa.*
3. *Indica los intervalos de tiempo donde la aceleración es positiva y donde es negativa.*
4. *La tercera derivada da la variación instantánea de la aceleración. ¿Toma el valor cero en algún instante? ¿En cuántos?¿Por qué?*

- **E-B1**

Episodio de aprendizaje

...

1 -**M**: *Yo, creía desde un principio que va marcha atrás aquí, de 6 a 8, porque es negativo, ese es el razonamiento que yo he hecho: que al ser negativo va marcha atrás. Pero no tiene por qué, ¿no?*

2 -**A**: *Pues yo creo que va marcha atrás cuando decrece ¿no? O sea de ...*

3 -**M**: *Así mientras va decreciendo, ya. Es que estaba pensando pero si yo decía, si esto lo razoné yo después de otra manera en el ejercicio. Que sí, cuando va así, y cuando empieza a crecer ya no.*

4 -**C**: *Claro, es que es mejor dibujar la línea en un papel. Como suelen ser movimientos rectilíneos, es el eje de coordenadas y suponemos que el móvil sale de aquí. Aquí va siendo positivo porque date cuenta que éste es el espacio aunque se dice espacio se hace normalmente referencia a la posición porque el móvil puede recorrer mucho pero la posición no es lo mismo ¿eh? Es decir aunque el móvil haya recorrido cuatro mil kilómetros a lo mejor la posición es cero porque haya empezado en la posición que ha empezado. Entonces eso es en lo que nos tenemos que fijar. Que en el momento que crezca va hacia delante porque la posición va aumentando.*

5 -**M**: *Y cuando disminuye va hacia atrás.*

6 -**C**: *Cuando la posición va disminuyendo es que el móvil ha tenido que dar la vuelta.*

7 -**M**: *Y cuando empieza a aumentar otra vez ya va otra vez para adelante*

8 -**C**: *Entonces, ¿en qué intervalo de tiempo? Pues en el intervalo más o menos ... a 8 exactamente, es decir, en el intervalo en el que la curva decrece. En el que la pendiente por así decirlo es menor.*

9 -**M**: *Ahora vamos a hacer el apartado dos.* (Enunciado)

10 -**C**: *Ahora no tiene nada que ver que vaya para atrás, porque para atrás a lo mejor, yendo para atrás la velocidad es positiva, porque está ... Entonces // Pues simplemente ver las pendientes. Donde la pendiente sea positiva la velocidad es la primera derivada. La primera derivada gráfica se ve con la pendiente. Entonces donde la pendiente sea positiva supongo ...*

11 -**M**: *La velocidad es positiva también, claro.*

...

12 -**C**: *Cuando, está claro, cuando arranca. Luego entonces, uf ¡que lío! Sería más o menos cuando la curva es exponencial. La curva es exponencial cuando el espacio va aumentando, dice cuando crece, ¿no? ¿Dónde la velocidad es positiva y dónde negativa?, entonces ... cuando crece y cuando decrece.*

13 -**M**: *Entonces sería igual que antes ¿no?, aquí y aquí es positiva.*

14 -**C**: *Sería de 0 a 2, puesto que de 0 a 2, más o menos, está acelerando. Cuando llega a donde hemos dicho antes del punto 3, más o menos, se ha parado. Entonces, de 3 a 6, también será positiva. Es decir, de 0 a 2 la locomotora arranca y va para adelante. Como hemos dicho que a los 3 cambia de dirección, a partir de los 2 o por ahí, tiene que empezar a frenar para poder pararse y cambiar de dirección. Entonces el primer instante acelera o tiene una velocidad, es positiva, a partir de los 3 como ha dado la vuelta, ha pasado del reposo otra vez a la velocidad, a un movimiento, con lo cual en el intervalo 3-6, la velocidad es también positiva, ¿por qué 6?, porque después otra vez hacia la mitad más o menos, ha tenido que empezar otra vez a frenar, para que ... En los mil metros para otra vez y vuelve a hacer lo mismo que antes da la vuelta y va otra vez para adelante, ¿entiendes? Además, esa es la explicación, gráficamente sería lo de las curvas, aquí es así, aquí es aquí, entonces si aquí hemos dicho que acelera, aquí frena, sería hacia la mitad, por eso ¿sabes por qué te digo que no es aquí ni aquí?, hacia la mitad me refiero del intervalo de la gráfica en el tiempo igual a seis, porque aquí otra vez empezaría a frenar para pararse. En el tiempo igual a ocho y volver otra vez a comenzar el movimiento hacia delante. Entonces al empezar el movimiento, la velocidad es positiva, aumenta. En el intervalo 3-6 de tiempo, también aumentaría porque ha pasado del reposo otra vez a ir para atrás. Ir para atrás, irá pero acelera. Después a los ocho segundos, ya se ha parado, con lo cual a partir de los ocho segundos otra vez tiene que empezar a acelerar y de ahí, ya hasta donde llegue, es decir esos son los intervalos de velocidad. Luego, donde es negativa, pues, donde no sea positiva. Aquí todo menos en la parte justamente en el punto tres, alrededor del intervalo 3, y alrededor del intervalo 8 que, mas o menos es un poquito así suave, como las curvas no son picos, son suaves, hay un espacio/tiempo que a lo mejor son diez minutos que la velocidad es constante ¿no?, pero bueno, vamos a poner todo para facilitarlo que, o bien crece o bien decrece, es decir, o bien*

acelera o bien decelera. Ya está. Entonces donde no sea creciente, es decreciente. ¿Dónde es decreciente?, pues donde está frenado, es decir, de 2 a 3 más o menos, o de 1,5 a 3. Aquí, hasta que ya se frena. De 6 a 8 que vuelve a frenar.

15 -**M**: *Y ya está. Indicar los intervalos de tiempo donde la aceleración es positiva y donde es negativa.*

16 -**A**: *Claro, donde la velocidad ... Es la aceleración también positiva.*

17 -**C**: *Donde la velocidad varíe, ¿entonces dónde varía?. Cuando pasa del reposo al movimiento o al revés, cuando pasa del movimiento al reposo, porque o bien tiene que acelerar o bien tiene que frenar. Entonces en aquellos instantes donde eso. Es decir, estamos más o menos igual que en lo de antes, porque como hemos tomado todo que o bien acelera o bien frena, es decir que no se mantenga constante en el espacio, pero bueno. Sería entonces en el primer instante acelera, en el instante justo antes de 3, más o menos, frena para pararse. Otra vez de 3 a 4, más o menos, empieza a acelerar otra vez alrededor de 5 a 6, más o menos frena.*

18 -**M**: *Y después acelera otra vez.*

19 -**C**: *Exactamente aquí está acelerando. Sería de 6 a 8 estaría frenando. La velocidad sería negativa y además estaba frenando para pararse en el 8, en el tiempo igual a ocho. Entonces, a partir de tiempo igual a 8, aceleraría. Que luego ya, una vez por ejemplo a partir de 10, sigue acelerando, pues no lo sabemos, bueno sí que lo sabemos porque si aquí el movimiento, la aceleración ya sería constante, esta gráfica sería así. Es decir la gráfica a partir de tiempo igual a 10, ya sería una recta, como no es una recta teóricamente, es una curva exponencial, sabemos que está acelerando en todo momento porque la velocidad no es constante, si fuera constante nos daba una recta y en los otros casos, pues lo mismo. Entonces, la tercera derivada punto cuatro; la tercera derivada de la variación instantánea de la aceleración, la tercera derivada que era el tirón, ¿os acordáis?, es decir la derivada de la aceleración. ¿Tenía el valor 0 en algún instante?, ¿en cuántos?, ¿por qué?, ¿qué hemos dicho antes?, ¿dónde es la tercera derivada si el tirón o como se llama cuando la tercera derivada es 0?.*

20 -**M**: *Donde la segunda y la ...*

21 -**C**: *La segunda, lo otro ya son consecuencias. Donde la segunda es cero, es decir donde la aceleración, lo que hemos dicho antes, es cero.*

22 -**M**: *O donde la velocidad es 0, ¿no?*

23 -**C**: *Exactamente. Claro, eso era por esto. O cuando la aceleración es 0 que sí que sí se cumple lo que tú dices, que cuando la aceleración es 0 es por que la velocidad es 0 o es constante. Pero nos quedamos solamente aquí. O cuando la aceleración es 0 o cuando la deceleración es constante. Es decir la aceleración sabemos que es constante, seguro, seguro, porque los otros no lo sabemos muy bien, porque como no es una gráfica muy larga. A partir de 10, seguro que la aceleración es constante. Porque aquí, ya no se vuelve a parar ni se vuelve a hacer nada ¿y cuando es 0?, pues cuando el movimiento está a 0 que sería en tiempo igual a 0.*

24 -**A**: *En los puntos de ...*

25 -**C**: *Justo, exactamente, en los máximos y en los mínimos.*

26 -**A**: *No, en los máximos y en los mínimos no.*

27 -**M**: *En 8 en 0.*

28 -**C**: *Sí, justo en el máximo y en el mínimo, quiere decir que ahí se ha parado totalmente. No que se está parando, sino que se ha parado entonces.*

29 -**M**: *En el 8 también es 0.*

30 -**C**: *Exactamente, entonces en tiempo igual a cero, tiempo igual a tres, tiempo igual a ocho y a partir de tiempo igual a diez, suponemos que la aceleración es constante entonces también. Bueno eso ya suponemos, no podemos asegurarlo. En los otros tres puntos, sí lo podemos asegurar, ¿vale? ¿en cuántos? ¿por qué? Ya lo hemos dicho, ¿por qué?, porque la aceleración es 0 o se mantiene constante o lo que es lo mismo, la segunda derivada es 0, la segunda derivada es 0, cuando se mantiene constante o cuando la velocidad es 0, la aceleración, perdón. Y ya está.*

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos los intercambios verbales que han ocurrido en los episodios de aprendizaje del equipo B1 en la situación 4(4).

Verbalizaciones	Alicia	Carlos	Mercedes
1			E(0)
2	DA(1)		
3			EA(0)
4		DA(1)	

5			PA(0)
6		DA(1)	
7			UAR(1)
8		DA(1)	
9			I(0)
10		E(0)	
11			DA(1)
12		DA(1)	
13			PA(0)
14		E(0)	
15			I(0)
16	E(0)		
17		E(0)	
18			EA(0)
19		E(0)	
20			E(0)
21		E(0)	
22			E(0)
23		E(0)	
24	PA(0)		
25		E(0)	
26	DA(1)		
27			E(0)
28		E(0)	
29			EA(0)

30		E(0)	
$\bar{x}$	0.1	0.1	0.1

Tabla 5.38. Verbalizaciones producidas por el equipo B1 en la situación 4(4).

La discusión ha producido los mismos beneficios para todos los integrantes del equipo. Observamos que Carlos cae en largas emisiones donde en muchos casos se va contestando a si mismo, esto no parece producir ningún beneficio hasta que no sea capaz de entrar en conflicto con sus concepciones. Dentro de estas emisiones hay una frase significativa que se repite, "*La curva es exponencial cuando el espacio va aumentando, cuando crece*" (asocia la gráfica de la función exponencial con las gráficas de las funciones crecientes, o al menos un cierto aspecto del crecimiento).

- **E-B2**

Episodio de aprendizaje

...

1 -**J**: *Yo creo que va marcha atrás en los intervalos donde decrece, por ejemplo, del 3 hasta el 8.*

2 -**MJ**: *¿Y por qué no puede ser de 5 a 8?*

3 -**J**: *Porque el 5 desde antes ya ha empezado a decrecer, o sea desde el 3, entonces tiene que ser en el 3.*

4 -**F**: *¿Y los intervalos, cuales serían? ¿Los intervalos donde la velocidad es positiva serian ...?*

5 -**J**: *De 0 a 3.*

6 -**F**: *Y de 8 a 10, entonces negativa sería ...?*

7 -**J**: *Y negativa de 3 a 8 porque es donde la función decrece.*

8 -**F**: *Los intervalos donde la aceleración es positiva y donde es negativa.*

9 -**J**: *Será positiva donde la derivada de la función va creciendo y será negativa donde la derivada de la función va decreciendo.*

10 -**F**: *La aceleración es la derivada de la velocidad ¿no? // Será positiva donde la función velocidad crece, y negativa en los intervalos donde la función velocidad decrece.*

11 -**MJ**: *¿Entonces sería igual al intervalo anterior?*

12 -**F**: *No, sería positiva de cero a dos porque la función velocidad crece y también de seis a diez porque la velocidad también crece. Sería negativa de dos hasta seis más o menos, donde la velocidad va decreciendo.*

13 -**MJ**: *¿Creéis que toma el valor cero en algún instante la tercera derivada de la aceleración?*

14 -**J**: *En los máximos y los mínimos de la función aceleración ¿no?*

15 –**MJ**: *Sí, porque la función crece y decrece ...*

16 -**F**: *Donde cambia de positiva a negativa* (se refiere a la tercera derivada). *Tiene que pasar por el eje de las X.*

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos las verbalizaciones producidas en el episodio de aprendizaje del grupo B3.

Verbalizaciones	María José	Águeda	Francisco	Josefa
1				DA(1)
2	PA(0)			
3				DA(1)
4			I(0)	
5				DA(1)
6			UAR(1)	
7				DA(1)
8			I(0)	
9				DA(1)
10			UAR(1)	
11	E(0)			
12			DA(1)	
13	I(0)			
14				DA(1)
15	UAR(1)			

16			DA(1)	
$\bar{x}$	0.1	0	0.3	0.4

Tabla 5.39. Verbalizaciones producidas por el equipo B2 en la situación 4(4).

Josefa es quien obtiene mayor provecho de esta discusión, en el sentido de ser ella quien, en la mayoría de los casos, argumenta en forma satisfactoria más número de emisiones. Francisco, por su parte, utiliza las ayudas recibidas por Josefa y avanza en forma positiva en la solución del problema consiguiendo una buena puntuación. En tanto que Águeda permanece, claramente, ajena a la discusión.

- **E-B3**

Episodio de aprendizaje

...

1 -**E**: *Creemos que llega hasta el tiempo tres, avanzando, y recorre unos cuatrocientos metros y en el punto tres empieza marcha atrás porque empieza a desandar el camino recorrido hasta llegar a cero y sigue marcha atrás recorriendo un espacio negativo hasta –1000 m, que es el punto ocho, el momento ocho y en el momento ocho vuelve a ir hacia delante porque recorre otra vez el camino desandado hasta llegar a cero y comienza un camino nuevo.*
Sobre el apartado 2, tenemos dos teorías. Una es que pensamos que la velocidad será negativa en todos los puntos en que el coche vaya marcha atrás, siempre que el coche vaya marcha atrás será la velocidad negativa y cuando vaya hacia delante pues la velocidad es positiva.

2 -**DR**: *Y la otra teoría es que aquí en el punto tres, el punto que tiene un máximo hasta el ... cinco. En ese primer intervalo pasa por encima de X, al hacerle la derivada a la ecuación de la posición la velocidad va a salir positiva y ... Por debajo del eje X, cuando el espacio es negativo, el desplazamiento es negativo, al hacer la derivada se sabe si la velocidad es negativa, ¿no?*

3 -**M**: *Entonces tú dices que en el tiempo ¿diez? La velocidad es negativa*

4 -**DR**: *Ahí está.*

5 -**M**: *Y, ¿por qué?. Pero de ocho a diez, ¿por qué es negativa?*

6 -**E**: *Porque está por debajo de la X.*

7 -**DR**: *Claro, y al hacerle la derivada a la ecuación de la posición también te va a salir negativa, ¿no?*

8 -**P**: *Yo creo que es positiva en los puntos donde crece y negativa donde decrece. La derivada de la velocidad sabemos que tiene puntos cero en los máximos de la posición... donde crece es positiva, donde decrece es negativa y así sucesivamente. Aunque también la otra...*

9 -**E**: *Es que también al ser la derivada negativa, pues ...*

10 -**DR**: *Puede ser que se nos esté escapando algo, no lo sé.*

11 -**P**: *A lo mejor.*

Apartado 3)

12 -**DR**: *Pues lo mismo que dijimos antes, ¿no?*

13 -**E**: *Digo yo que será lo mismo.*

14 -**M**: *Cuando la velocidad es negativa la aceleración también será negativa, ¿no?*

15 -**DR**: *Mantienes la teoría de antes, ¿no? Sí //*

Apartado 4)

16 -**M**: *Donde la posición es cero lógicamente tiene que ser cero. Es lo mismo que hemos dicho antes. Teníamos dos máximos, ¿no? Y si eran cero, pues luego en la ¿posición? Y en la derivada también tienen que ser cero, aunque no hubiera máximos. Entonces aquí es cero ... Donde la velocidad sea cero.*

17 -**E**: *... por que la posición no es cero, la posición pasa por cero.*

18 -**P**: *Sí, pasa por un punto ...*

19 -**E**: *Y en un instante es cero pero no para ... aunque la aceleración pase negativamente.*

20 -**P**: *Sí, yo creo que en posición cero la velocidad es cero.*

21 -**E**: *Claro.*

22 -**DR**: *Eso es seguro. Cuando la velocidad es cero, la aceleración será cero.*

Análisis de las verbalizaciones

A continuación, analizamos los intercambios verbales que han ocurrido en los episodios de *aprendizaje* del equipo B3 de la situación 4(4).

Verbalizaciones	Daniel	Purificación	Marta	Elena
1				DA(1)
2	E(0)			
3			PA(0)	
4	E(0)			
5			PA(0)	
6				E(0)
7	E(0)			
8		DA(1)		
9				PA(0)
10	PA(0)			
11		EA(0)		
12	E(0)			
13				EA(0)
14			PA(0)	
15	I(0)			
16			E(0)	
17				PA(0)
18		EA(0)		
19				DA(1)
20		E(0)		
21				EA(0)
22	E(0)			
$\bar{x}$	0	0	0	0.1

Tabla 5.40. Verbalizaciones producidas por el equipo B3 en la situación 4(4).

Notamos, a lo largo de la discusión, falta de precisión en el lenguaje, lo cual consideramos como una dificultad adicional a la hora de avanzar en las interacciones verbales. Además, percibimos poca convicción al momento de argumentar y defender sus propias posturas, como resulta evidente en el caso de Purificación, quien al tratar con el teorema factual no logra superar una de las causas. Sólo Elena obtiene una puntuación mínima.

- **SITUACIÓN 5(9)**

Ciertos parásitos se reproducen a gran velocidad; para exterminarlos se está empleando un medicamento nuevo. De forma experimental se halla que la velocidad de cambio en el número de parásitos vivos con respecto al tiempo t (en semanas) puede expresarse como:

$$N' = 6000t^2 - 75t^4.$$

Predecir, utilizando la serie de Taylor, cuántos parásitos habría en el tiempo t si originalmente hay 3000.

- **E-B1**

Episodio de aprendizaje

1 -**C**: *Tenemos tres datos que son: N', que ya nos la han dado, N en el tiempo 0, que es 3000, y N', porque nos han dado N' en el tiempo 0, que es N'(0) = 0.*

2 -**A**: *Sí, y yo tengo otro dato también, que es t_0 que es 0.*

3 -**C**: *Claro,... a ver... ¡Ah! Pues yo creo que tu lo has sacado diferente de como lo he sacado yo... bueno, es igual; entonces,... hallaríamos la primera derivada, que ya la tenemos, y la calculamos en 0, que ya la tenemos: es N'(0) = 0; luego la segunda a partir de la primera, que sería 12000t - 300t^3. Cuya segunda derivada en cero N''(0) es 0; la tercera, igual, que sería 12000 – 900t^2, y N'''(0) , 1200 ...*

4 -**A**: *12000.*

5 -**C**: *¿12000?*

6 -**A**: *Sí, sí, se está calculando en 0.*

7 -**C**: *¡Ah! Claro, sí, perdón. $N^{(4)}$ = -1800t, ¿no?, y calculada en 0, $N^{(4)}(0) = 0$, y $N^{(5)}$ = -1800, y sería $N^{(5)}(0)$ = -1800.*

8 -**A**: *Exactamente.*

9 -**C**: *Bien, entonces ya sustituimos directamente en la serie de Taylor, y sería: $f(0)+f'(0)(t-0)+f''(0)(t-0)^2/2!+$ ... , y sustituyendo nos da que ...*

10 -**A**: *Bueno los 0 los quitamos, y nos da: $N(t) = 3000 + 12000t^3 / 3! - 1800t^5 / 5!$.*

11 -**C**: *Me he comido un 0, sí...pero bueno, sale bien* (el resto de la expresión), *... $+12000t^3$, serían 2000 ...,12000/3! que es 12000/6=2000. Bien, la situación cinco era fácil.*

12 -**A**: *Bueno... pero ahora, haciendo las cuentas, sale $2000t^3 - 15t^5 + 3000$.*

13 -**C**: *Exactamente, si derivamos para ver si nos sale, sería exactamente $6000t^2 - 75t^4$, justo la primera derivada que nos han dado. Esto entonces representa ... ¿qué es lo que representaba?, la velocidad de cambio en el número de parásitos.*

Análisis de las verbalizaciones

A continuación analizamos las verbalizaciones que se han producido en el equipo B1 para la situación 5(9).

Verbalizaciones	Alicia	Carlos	Mercedes
1		DA(1)	
2	DA(1)		
3		DA(1)	
4	DA(1)		
5		PA(0)	
6	DA(1)		
7		DA(1)	
8	EA(0)		
9		DA(1)	
10	DA(1)		
11		DA(1)	

12	DA(1)		
13		DA	
$\bar{x}$	0.4	0.4	0

Tabla 5.41. Verbalizaciones producidas por el equipo B1 en la situación 5(9).

Notamos que Mercedes se ha mantenido al margen del trabajo que fueron llevando adelante Alicia y Carlos. Estos últimos, con un diálogo muy fluido y mucha colaboración, como se observa de los resultados, fueron resolviendo en forma satisfactoria la situación-problema planteada.

- **E-B2**

Episodio de aprendizaje

1 -**ÁG**: *Tendremos que calcular la función N(t) sabiendo que N' =* $6000t^2$*-*$75t^4$ *y que la función sustituida por cero es igual a tres mil.*

2 -**MJ**: *Para hacer este ejercicio usamos el Teorema de Taylor que dice:*

$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)/1!+f''(a)(b-a)/2!+...+f\ (a)(b-a)/n!+f\ (c)(b-a)/(n+1)!.$

*Consideramos b variable, que es el tiempo, y desarrollamos la serie en a=*0.

3 -**F**: *Pues, para desarrollar la serie, el primer término que tenemos es N igual a cero y lo tenemos como dato en el ejercicio que es igual a tres mil, por lo tanto, el primer término de la serie será tres mil.*

4 -**J**: *La primera derivada será* $6000t^2$*-*$75t^4$ *y sustituyendo por cero da cero, y la segunda derivada de t es igual a12000t-*$300t^3$ *, y si lo sustituimos por cero también nos da cero.*

5 -**MJ**: *La tercera derivada es 12000-*$900t^2$ *y si lo sustituimos por cero nos da 12000.*

6 -**F**: *La cuarta derivada es -1800t, que si sustituimos por cero ésta derivada nos da cero.*

7 -**J**: *Y la quinta derivada es –1800, que sustituyendo por cero da –1800.*

8 -**ÁG**: *Ya, a partir de aquí, no podemos seguir derivando.*

9 -**F**: *Bueno, pues ya la tenemos, pues ahora lo único que tenemos que hacer es sustituir los datos que tenemos en la fórmula y obtendremos N(t) que será igual a*

$N(t) = 3000+0/1!+0t^2/2!+12000t^3/3!+0/t^4/4!-1800t^5/5!$.

10 -**MJ**: *En total es* $N(t) = 3000+2000t^3-15t^5$.

11 -**F**: *Pues ya, sustituyendo cualquier valor de t en la función que hemos obtenido al final, sabemos el número de parásitos que hay en cada tiempo.*

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos a continuación las verbalizaciones producidas por el equipo B2 para la situación 5(9).

Verbalizaciones	María José	Águeda	Francisco	Josefa
1		DA(1)		
2	DA(1)			
3			DA(1)	
4				DA(1)
5	DA(1)			
6			DA(1)	
7				DA(1)
8		E(0)		
9			DA(1)	
10	DA(1)			
11			DA(1)	
$\bar{x}$	0.3	0.1	0.4	0.2

Tabla 5.42. Verbalizaciones producidas por el equipo B2 en la situación 5(9).

La discusión ha sido bastante participativa. Observamos que es Francisco el que más verbalizaciones con aciertos ha producido; por lo tanto, es el que obtiene mejores resultados. Águeda, con dos verbalizaciones, de las cuales una ha sido emitida con poco acierto, obtiene menor puntaje. Observamos su emisión tomada textualmente ya que es bastante ilustrativa: *"Ya, a partir de aquí, no podemos seguir derivando"* (las derivadas toman el valor cero).

- **E-B3**

Episodios de aprendizaje

1 -**M**: *Como nos da la primera derivada y nos dice que cuántos parásitos habrá en un tiempo t si al principio había 3000, pues he sacado la función sin derivar que es:* $2000t^3-15t^5+3000$ *y a partir de ahí de la primera derivada ya sacas todas hasta que llegas a* $N^{(5)} = -1800$ *que ya su derivada es cero y ya para la serie de Taylor no te sirve.*

2 -**DR**: *No se puede seguir derivando.*

3 -**M**: *Yo planteo la serie de Taylor y ya no sigo. Ya no he seguido porque ya tienes dos incógnitas, x, que es el número de parásitos y t que es el tiempo, pero como no tienes un tiempo determinado entonces no lo puedes calcular.*

4 -**E**: *Yo he puesto como función inicial* $N(t_0) = 3000N_0$.

5 -**M**: *Que* N_0 *sería la primera derivada y luego 3000.*

6 -**E**: *¿Pero cómo* N_0 *va a ser la primera derivada?*

7 -**M**: *Lo que dijimos ayer.*

8 -**E**: *Bueno; luego hacemos la primera derivada y ya se incluye en la serie de Taylor.*

9 -**DR**: *Creo que se ha quedado muy claro eso.*

10 -**P**: *Bueno, pues hemos hecho la primitiva de la función N' y hemos tenido que la función sin derivar sería* $2000t^3-15t^5+3000$*; luego hemos ido sacando las derivadas que nos dan:* $N' = 6000t^2 - 75t^4$; $N'' = 12000t - 300t^3$; $N''' = 12000-900t^2$; $N^{(4)} = -1800t$ *y* $N^{(5)} = -1800$*; luego ya la sexta derivada valdría cero y ya no se incluiría en la serie de Taylor. Y una vez que tenemos estos datos los incluimos en la serie de Taylor y tendríamos la función polinómica de N en cualquier tiempo.*

11 -**M**: *Eso nos queda:*

$$N = (2000t^3-15t^5+3000)+(6000t^2-75t^4)(x-t)/1+(12000t-300t^3)(x-t)^2/2!+$$
$$(12000-900t^2)(x-t)^3/3!+(-1800t)(x-t)^4/4!+(-1800)(x-t)^5/5!$$

y $N^{(6)}$ *no la hemos puesto porque es cero y ya ...*

Análisis de las verbalizaciones

Verbalizaciones	Daniel	Purificación	Marta	Elena
1				E(0)
2	E(0)			
3			E(0)	
4				E(0)
5			E(0)	
6				PA(0)
7			I(0)	
8				E(0)
9	EA(0)			
10		E(0)		
11			E(0)	
$\bar{x}$	0	0	0	0

Tabla 5.43. Verbalizaciones producidas por el equipo B3 en la situación 5(9).

Las verbalizaciones que se han producido en este grupo han sido evidentemente poco satisfactorias a los fines de construir un nuevo conocimiento, según lo hemos explicitado a lo largo de la tesis. Se han encerrado en la idea de "*hallar la primitiva, ya que la integral es la operación inversa a la derivada*". Creemos pues, que no se ha interpretado el problema por cuanto tampoco han logrado dar un sentido al resultado que han obtenido y por cierto no han desarrollado o utilizado con sus propios medios la noción de predicción.

❑ SITUACIÓN 6(6)

Desde la terraza de un edificio de altura s_0 se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Esta situación viene descrita por la siguiente ecuación diferencial:

$$s'' = -g, \qquad \text{donde } g \text{ es la aceleración de la gravedad.}$$

Predecir la posición de la pelota para cualquier instante t, es decir, hallar la expresión de s(t). Utilizar como herramienta de predicción la serie de Taylor.

- **E-B1**

Episodio de aprendizaje

1 -**C**: *Tenemos la segunda derivada, s'' = –g, s en* t_0*, es decir s en el primer instante, que es* s_0*, y s'(0), que nos la da el problema porque el problema nos dice que la velocidad en* t_0 *es igual a* v_0*, y como la velocidad es la primera derivada de la ecuación s(t), que es lo que nos piden, pues directamente ya s'(0) es* v_0*, independientemente de lo que sea s' en cualquier instante (s'(t)), luego hallando la tercera derivada en 0 (s'''(0)), sería igual a 0, ¿por qué? puesto que no hay ninguna variable, y por tanto se nos va a quedar 0 al derivar; es el último término que necesitamos saber ya para hacer la serie de Taylor ..., como s'' nos dicen que es –g, s''(0) será 0, porque como no hay ninguna variable t, es decir, -g es una constante, y ya directamente sería 0* (al derivar). *No, en esto me he equivocado, a ver...*

2 -**A**: *Es que esto sería una constante...*

3 -**C**: *No, está bien, sí, es que he hecho la tercera primero y luego la segunda... Luego ya directamente con todo esto, sustituimos y obtenemos la serie de Taylor, que sería:* $s(t) = f(a) + f'(a)(t\text{-}a) / 1! + f''(a)(t\text{-}a)^2 / 2! + f'''(a)(t\text{-}a)^3/3! + \ldots$ *etc., siendo a = 0. Entonces ya sustituimos y obtenemos:* $s(t) = f(0) + f'(0)t + f''(0)t^2/2 + \ldots$ *etc., que en nuestro caso:* $s(t) = s_0+v_0\, t–1/2gt^2$ *y ya está. La dificultad que tenía este problema era que no nos daban información suficiente como para hallar las derivadas genéricas, esto es, las derivadas en cualquier tiempo, derivadas en función de t, pero como nos daban directamente la derivada que nosotros queríamos, que era la derivada segunda, en* t_0*, y la primera, también en* t_0*, que era la* v_0*, además del primer termino,* s_0*, pues con eso ya hallaríamos la serie de Taylor; como la derivada segunda era una constante, con eso ya sabemos que la derivada tercera es 0, único término que teníamos que hallar para completar la serie de Taylor. El primer término es igual a* s_0*, el segundo término, la primera derivada en* t_0*, que es igual a* v_0*, y el tercer término, la tercera derivada en* t_0*, que es igual a -g.*

4 -**A**: *Además fíjate que esto es un ..., una ecuación de éstas de física.*

5 -**C**: *Exactamente, sería ...*

6 -**A**: *Espacio más ...*

7 -**C**: *Sí, sí, la ecuación de un movimiento rectilíneo y acelerado ¿no? Bueno, no sé seguro si será rectilíneo pero aceleración sí que tiene porque tiene* t^2 *...*

8 -**A**: *Sí, eso es.*

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos las verbalizaciones producidas por el equipo B1 para la situación 6(6).

Verbalizaciones	Alicia	Carlos	Mercedes
1		DA(1)	
2	DA(1)		
3		DA(1)	
4	DA(1)		
5		EA(0)	
6	PA(0)		
7		DA(1)	
8	EA(0)		
$\bar{x}$	0.3	0.4	0

Tabla 5.44. Verbalizaciones producidas por el equipo B1 en la situación 6(6).

Observamos que Mercedes no toma parte en esta discusión, en tanto que Alicia y Carlos van construyendo de forma satisfactoria la solución al problema. Al final, nos parece que con sorpresa y alegría se dan cuenta de que han obtenido una ecuación conocida de las clases de Física.

- **E-B2**

Episodios de aprendizaje

...

1 -**ÁG**: *Primero tenemos que calcular la función posición de la pelota y para ello lo que el problema nos da es la segunda derivada que es igual a -g que es la aceleración de la gravedad y también podemos saber v y s a partir del enunciado.*

2 -**MJ**: *Entonces tenemos que la segunda derivada es la aceleración, que es –g (la gravedad) y al sustituirla por cero da –g. La primera derivada es la velocidad y al*

sustituirla por cero da la velocidad inicial, v_0. La función posición, al sustituirla por cero da la posición inicial que es s_0.

3 -**F**: *La tercera derivada de s(t) es igual a cero, y todas las demás derivadas que siguen también serían iguales a cero. Entonces tenemos que al sustituir en la serie de Taylor $s(t)= s(0)+s'(0)/t/1!+s''(0)t^2 /2!$.*

4 -**MJ**: *Entonces el resultado final sería que $s(t) = s_0+ v_0 t-1/2gt^2$.*

5 -**F**: *Y sustituyendo cualquier valor de t en la función posición podemos saber la posición de la pelota en cada instante.*

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos los intercambios verbales que se producen en el equipo B2 en la situación 6(6).

Verbalizaciones	María José	Águeda	Francisco	Josefa
1		DA(1)		
2	DA(1)			
3			DA(1)	
4	DA(1)			
5			DA(1)	
$\bar{x}$	0.4	0.2	0.4	0

Tabla 5.45. Verbalizaciones producidas por el equipo B2 en la situación 6(6).

En este caso es Josefa quien se mantiene al margen de la discusión. Sus compañeros, cuyas emisiones en todos los casos son satisfactorias, obtienen un buen puntaje, aunque son María José y Francisco los más favorecidos pues son los que más participan en un cierto sentido.

- **E-B3**

Episodios de aprendizaje

...

1 -**DR**: *Bueno, aquí es lo que dijimos de lo de la ecuación de física ... aquélla que era: $s(t) = s_0+v_0t-1/2at^2$, que al derivarla quedaba: $s'(t) = v_0-at$. Y al hacer la*

segunda derivada ya quedaba la aceleración negativa, lo mismo que nos da en el problema.

2 -**E**: *Entonces en la serie de Taylor incluimos la función primitiva inicial, la fórmula del espacio, la primera derivada y la segunda derivada ya no se podría derivar, ¿no? Sería una serie de Taylor de tres ...*

3 -**P**: *De tercer grado.*

4 -**DR**: *¿Entonces, más o menos, cómo quedaría la serie de Taylor? //*

5 -**M**: *Quedaría* $s(t) = s_0+v_0t-1/2at^2+ v_0-at$ *por ...*

6 -**E**: *Por x-t creo yo que sería.*

7 -**M**: *¿x aquí qué sería?*

8 -**P**: *Porque en el otro ejercicio era el número de parásitos // En el otro ejercicio x sería el número de parásitos pero aquí en este problema ¿qué es lo que sería x? ¿qué es lo que nos daría? Eso es lo que no sé. Si nos daría la altura, o la velocidad o qué.*

9 -**E**: *Esa x que no sabemos cuál ... ¿qué valor sería en esta función?*

10 -**DR**: *Pero es que aquí creo que no tendríamos por qué poner x. Tenemos que las incógnitas son* s_0 *y la s.*

11 -**M**: *Yo creo que puse* s_o *y t.*

12 -**DR**: *Claro, yo creo que x tampoco hay que ponerlo, yo creo que hay que poner a t que es una de las incógnitas que dependiendo del tiempo pueden tener un ... y la posición va a ser la otra incógnita que es* s_o *o s.*

13 -**E**: *Pero tú piensas que x es una función. Tú cuando pones f(x), x es una función, no es un número como a. Y aquí* s_o *y* v_o *son números.*

14 -**DR**: s_o *tú lo puedes poner como* x_o*, también, y* s_o *también es una función. ¿Entiendes lo que te digo?*

15 -**E**: *No es una función porque tú cuando derivas te queda, se te va entero, se te va* s_o*. Se queda 0 ahí.*

16 -**P**: *Pero eso se te va porque no está en función del tiempo.*

17 -**E**: *Pues eso, pero es un número, no es una función. Es que aquí en cambio si derivas se queda 1. Si tú tienes x, aquí derivas y se queda 1.*

18 -**M**: *Tenemos que buscar un número ... Lo que no sabemos es el número ése que tiene que ser.*

19 -**E**: *Claro, si estamos de acuerdo, si es lo que yo he dicho. Sería cualquier número menos t.*

20 -**P**: *No sabemos si va a dar la posición, o va a dar la velocidad o qué es lo que se va a tomar para ponerlo ahí.*

21 -**E**: *Bueno, pues ponemos a, porque si no lo sabemos ponemos como si fuera a. Tenemos a ... Bueno, pues sigue.*

22 -**M**: *A ver, quedaría lo siguiente:*

$$s(t) = s_0+v_0t-1/2at^2+v_0-gt(t-x)/1!+(-g)(t-x)^2/2!.$$

Y luego ya no se puede seguir porque ya es –g.

23 -**DR**: *Y es una constante y al hacer la derivada queda 0, ¿no?*

24 -**P**: *Bueno, pues la g se queda 0 porque creemos ...*

25 -**DR**: *Cero no, negativa.*

26 -**P**: *Es negativa, perdón, porque creemos va en contra del movimiento, que lo impide, ¿no?*

27 -**DR**: *Depende también de cómo tomemos el origen del movimiento.*

28 -**P**: *Sí.*

29 -**DR**: *Que aquí al ser la aceleración 0 quiere decir que la ..., el punto de origen es el suelo.*

30 -**E**: *Claro.*

31 -**DR**: *¿No? Que depende también de si tomamos, por ejemplo, el punto de origen a 20 metros del suelo, entonces ahí varía ...*

32 -**P**: *Y, porque si tomamos como punto de origen la velocidad que alcanza la pelota, pues a partir de ese punto, en el que se para, ya la aceleración sería positiva porque facilitas el movimiento. Va cayendo, entonces sería positiva.*

33 -**DR**: *Eso depende de donde se tome el punto de ...*

34 -**P**: *El origen.*

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos los intercambios verbales que se producen en el equipo B3 en la situación 6(6).

Verbalizaciones	Daniel	Purificación	Marta	Elena
1	DA(1)			
2				E(0)
3		EA(0)		
4	PA(0)			
5			E(0)	
6				E(0)
7			PA(0)	
8		PA(0)		
9				PA(0)
10	E(0)			
11			E(0)	
12	DA(0)			
13				DA(1)
14	E(0)			
15				E(0)
16		DA(1)		
17				E(0)
18			PA(0)	
19				E(0)
20		E(0)		
21				I(0)
22			E(0)	
23	EA(0)			
24		EA(0)		

25	PA(0)			
26		E(0)		
27	E(0)			
28		EA(0)		
29	E(0)			
30				EA(0)
31	PA(0)			
32		E(0)		
33	E(0)			
34		EA(0)		
$\bar{x}$	0	0	0	0

Tabla 5.46. Verbalizaciones producidas por el equipo B3 en la situación 6(6).

La larga discusión mantenida por este equipo no nos ha arrojado resultados positivos. Creemos que ello se debe a que tienen dificultades para reconocer las condiciones iniciales del problema, pero más aún, al parecer no pueden determinar las variables que intervienen en la solución. Observamos, por ejemplo, alguna de las expresiones textuales que creemos son muy significativas: "*Tú cuando pones f(x), x es una función, no es un número como a*".

❑ SITUACIÓN 7(7)

Desintegración de elementos radiactivos. *El radio se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad presente, es decir:*

$$R' = -kR(t)$$

, donde k es una constante positiva llamada constante de desintegración. El signo negativo indica que dicha velocidad es cada vez menor, al haber menos cantidad de elemento a medida que transcurre el tiempo.

Supongamos que en $t_0 = 0$ *se tiene* R_0 *gramos de radio. Se desea predecir la cantidad de radio presente en cualquier instante posterior t, es decir R(t). Utilizar como herramienta de predicción la serie de Taylor.*

- **E-B1**

Episodio de Aprendizaje

1 -**C**: (Lee la situación 7). *Entonces, Alicia has hecho el desarrollo matemático, o sea, como hay que hacerlo, sacando las derivadas, y haciendo la serie de Taylor, y yo como en la segunda derivada ya me perdía un poco lo he ido haciendo un poco en función del significado de esta ecuación. Explícamelo tu primero porque yo te puedo explicar lo que significa la ecuación final.*

2 -**A**: *Bueno, pues tenemos R'(t) que es igual a –kR(t) y luego también sabemos que R en* t_0 *es 0, como dice ahí ¿no?; entonces vamos a hacer las derivadas, la R'' sería –k por R'.*

3 -**C**: *R'(t), sí, éste es el paso en el que me pierdo precisamente, de la R' a la R'', porque si a mí me dan como antes una ecuación normal, o sea, una derivada que sea un polinomio normal de grado lo que sea, puedo ir haciéndolo, pero cuando en el ... , en la ecuación de la primera derivada me sale la expresión de la primera ecuación, sin ningún termino en concreto //, ahí es donde me pierdo.*

...

4 -**A**: *Sí, porque la derivada de R(t) sería R', pero a su vez la R' es –kR(t), entonces sería* $k^2R(t)$*; y así ya todas, y todas elevadas a su ..., subiendo un grado a la k.*

5 -**C**: *O sea R''* k^2*, R'''* k^3*, porque se iría multiplicando al anterior por -kR(t) otra vez.*

6 -**A**: *Exactamente.*

7 -**C**: *¿Pero no sería entonces –kR(t) todo elevado al cuadrado? ¡Ah! no es verdad, sería (–k)(–kR(t)), y la otra sería (–k)(–k)(–kR(t)), sí ya te entiendo, es que multiplicas -k no -kR(t) otra vez.*

8 -**A**: *Exactamente, y luego ya R'(*t_0*), pues -kR(*t_0*) pero R(*t_0*) hemos dicho que es* R_0*, y así ya todos.*

9 -**C**: *Ah ... ya vale, y a partir de ahí entonces ya sacaríamos la ecuación de Taylor.*

10 -**A**: *Sí, ya sustituimos en la serie, entonces sería:* $R_0 - kR_0(t-t_0) + k^2R_0(t-t_0)^2/2!$ *... , bueno y vas cambiando el signo y ...*

11 -**C**: *Pero al final la ecuación que tienes es diferente.*

12 -**A**: *Sí, sí, sacamos factor común* R_0 *y sale* $R_0(1-k(t-t_0)+(k^2(t-t_0)^2/2\,!))$ *... y eso, lo que multiplica a* R_0 *es* $e^{-k(t-to)}$.

13 -**C**: *O sea, que la última función que obtenemos responde al patrón del desarrollo de la exponencial, ¿no?*

14 -**A**: *Exactamente.*

15 -**C**: *Yo lo que había hecho era tomar la primera,* $-kR(t)$*, y que* $R(0) = R_0$*, desde ahí he empezado a hacerlo, pero obviamente ... , o sea, me he perdido en algo, he pensado que era, en vez de* $-kR'(t)$*,* $-kR(t)R'(t)$*, entonces era lo que a mí no me salía, o sea me perdía, y luego sustituyendo* R_0*, me da* $-kR_0R'(0)$ *y salía 0, y luego la tercera también me salía 0, porque hacía mal ese paso. Entonces lo que yo intenté fue deducir un poco en función de qué era lo que significaba aquello; sabemos que la ecuación lo que nos mide es lo que nos va quedando de un elemento que se va desintegrando, por tanto la ecuación tiene que responder a una gráfica que sea ... , que tienda a ... , cuando la x tienda a infinito, la función tendrá que tender a 0; y cuando x tienda a 0, la función tiende a un valor en concreto, porque partimos de un valor concreto y ese valor va disminuyendo, puesto que tendremos ... Yo fui dibujándolo un poco, ¿no?, tenía que si esto era el Radio, al cabo de un periodo de semidesintegración T , pues tendríamos la mitad de Radio, y la otra mitad que correspondería a lo que se ha desintegrado* (a la vez que lo explica, elabora un sencillo esquema en el que representa las proporciones de elemento nativo o "elemento padre", y el elemento al que ha quedado desintegrado o "elemento hijo")*; y al cabo de otro periodo, tendríamos, la mitad del radio que antes se ha desintegrado, más la mitad del radio anterior que nos había quedado libre, y así sucesivamente, cada vez que pasara un periodo; entonces yo sabía que esto iba disminuyendo cada vez más, e iría tendiendo a 0. Entonces de aquí ya deduje que tenía que ser una serie de Taylor que fuera infinita, es decir, que no fuera como la de los anteriores ejercicios que se nos cortaba en la segunda o la tercera y ahí ya la teníamos, sino que siguiera hasta el*

infinito, puesto que cada vez se te iba la mitad, de ahí la mitad, y de ahí de nuevo la mitad y así sucesivamente.

Entonces dije, pues esto tiene que responder obligatoriamente a una función que ya habríamos desarrollado antes, es decir, Seno, Coseno, Logaritmo o Exponencial. Entonces fui eliminando: la del Seno no puede ser, porque tanto la del seno como la del coseno son periódicas, lo cual indicaría que siempre se mantendrá la misma cantidad de Radio, y eso es imposible, o sea, que se desintegre del todo y luego vuelva a regenerarse todo eso, como que no; entonces seno y coseno eliminados.

La del logaritmo, el logaritmo positivo es tal que así (lo va dibujando)*; tiende a infinito cuando x tiende a infinito. Y la del logaritmo negativo, también tiende a infinito, por la izquierda , o sea, a –infinito, pero sigue siendo infinito, lo cual tampoco nos vale.*

Entonces me fijo en la de la exponencial; la normal, o sea, la exponencial positiva e^x*, tampoco me valdría puesto que también tiende a infinito, cuando x tiende a infinito, la función también tiende a infinito; ahora, pensé, pero* e^{-x}*, sería justamente la contraria, la que yo estoy buscando; entonces, teóricamente en el eje de las x, que sería t, o sea que representaría a t, en* t_0 *tendríamos obviamente un valor, a partir del cual va disminuyendo la mitad, y de ahí la mitad, hasta que tiende a 0; entonces de aquí di por supuesto que era* e^{-x} *la gráfica que yo buscaba. Claro, todo esto después de hacer muchos cálculos y dibujos representando el enunciado del problema, viendo si podría responder o no a la primera derivada que nos dan. Entonces, de todo esto ya saqué que era* $e^{-k(t-to)}$*, ¿a ver cómo te sale a ti? ¡Ah! Pues yo he tenido un fallo, que he omitido el término* R_0*, claro, como el término* R_0*, cuando derivamos la primera vez se nos va porque sería 0 ... Bueno, yo saqué entonces en conclusión que sería* e^{-kt}*.*

16 -**A**: *Sí, bueno más o menos.*

17 -**C**: *Es decir yo voy razonando en función de qué es lo que significa esa gráfica* (esa ecuación)*; y ahora es más, ya una vez viendo la gráfica, que es* $R(t) = R_0\, e^{-k(t-to)}$*, pienso que podríamos sacar también, incluso a cuanto equivale la k, si damos un valor a* R_0*, para este caso en el que* $T = 100$ *años, puesto que cada elemento posee un T diferente.*

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos los intercambios verbales que se producen en el equipo B1 en la situación 7(7).

Verbalizaciones	Alicia	Carlos	Mercedes
1		I(0)	
2	DA(1)		
3		PA(0)	
4	DA(1)		
5		UAR(1)	
6	EA(0)		
7		UAR(1)	
8	DA(1)		
9		EA(0)	
10	DA(1)		
11		PA(0)	
12	DA(1)		
13		UAR(1)	
14	EA(0)		
15		DA(1)	
16	EA(0)		
17		DA(1)	
$\bar{x}$	0.3	0.3	0

Tabla 5.47. Verbalizaciones producidas por el equipo B1 en la situación 7(7).

Nos parece que la discusión entre Alicia y Carlos es muy productiva, ya que ambos dan argumentos satisfactorios a fin de ir avanzando sobre la solución del problema, planteado en principio desde diferentes puntos de vista. Mercedes no participa en la discusión.

- **E-B2**

Episodio de aprendizaje

...

1 -**J**: *En el momento inicial* $t_0 = 0$, *entonces la cantidad del radio será* $R(0) = R_0$. *El desarrollo de la serie de Taylor es:*

$$R(t) = R(0)+R'(0)t/1!+R''(0)t^2/2!+ \dots + R^{(n)}(0)t^n/n!+ R^{(n+1)}(c)(t-c)^{n+1}/(n+1)!.$$

2 -**F**: *Bueno, para empezar a sustituir en la serie de Taylor tenemos que ir haciendo las demás derivadas. La primera derivada en t es la que nos da el enunciado del problema, que es* $R'(t) = -kR(t)$, *sustituyendo t por cero obtenemos que la primera derivada en cero es* $- k\, R(0)$. *Siguiendo así, la segunda derivada sería* $-kR'(t)$ *y esto igual a* $(-k)(-k)R(t)$ *e igual a* $k^2R(t)$. *Si sustituimos esto en cero, obtenemos que la segunda derivada en cero sería* $k^2R(0)$.

3 -**MJ**: *La tercera derivada en t sería* $k^2R'(t) = -k^3R(t)$ *y al sustituirlo por cero sería,* $R'''(0) = k^3R(0)$. *Luego, siguiendo con las derivadas sucesivas, hasta llegar al término general, que sería* $R^{(n)}(t) = (-1)^nk^nR(t)$.

4 -**ÁG**: Y *después sustituyendo todo esto en la serie de Taylor, obtenemos que*

$$R(t)=R_0-kR_0t/1!+k^2R_0t^2/2!-k^3R_0t^3/3!+\dots+(-1)^nk^nR_0t^n/n!+(-1)^{n+1}k^{n+1}R(c)(t-c)^{n+1}/(n+1)!.$$

Y esto último es el desarrollo de la serie de Taylor.

5 –**F**: *Bueno, pues ya hemos obtenido la fórmula de R(t). Si sustituimos t por el valor de tiempo que queramos podemos saber la cantidad de radio ... pues sustituimos t por el número y sabemos la cantidad de radio que hay en ese momento.*

Análisis de las verbalizaciones

Verbalizaciones	María José	Águeda	Francisco	Josefa
1				DA(1)
2			DA(1)	
3	DA(1)			
4		DA(1)		

5			I(0)	
$\bar{x}$	0.2	0.2	0.2	0.2

Tabla 5.48. Verbalizaciones producidas por el equipo B2 en la situación 7(7).

En este caso no se ha producido una verdadera discusión del problema; parece que hubo coincidencia en cuanto a los conceptos, herramientas y métodos que debían usar y por lo tanto sólo se limitaron brevemente a exponerlos.

- **E-B3**

Episodio de aprendizaje

1 -**E**: *En R de ... Como función inicial en t_0 tenemos R_0. La primera derivada sería la que nos da, pero en R ... la primera derivada en t_0 quedaría $R(t_0) = -kR_0$. La segunda derivada en t quedaría $R''(t) = kR'$, y en t_0 quedaría $R''(t_0) = k^2R_0$. Y la tercera derivada en t sería $R'''(t) = -k^2R'$ o $-k^3R$. Y la tercera derivada en t_0 quedaría $R'''(t_0) = -k^3R_0$.*

2 -**DR**: *Y aquí nunca sabemos cuando parar de derivar, ¿no?*

3 -**E**: *No, aquí no. Aquí hasta que tú quieras. Porque como los términos tienen esta forma y lo único que va aumentando es el exponente... Luego reemplazamos todo en la serie de Taylor y quedaría $R(t) = R_0+kR_0(t-t_0)+k^2R_0(t-t_0)^2/2!+k^3R_0(t-t_0)^3/3!$ Y podríamos continuar...*

4 -**DR**: *Que lo único que hacemos de derivada a derivada es poner el ... aumentar el exponente de la constante y multiplicarla por la R_0 que es la ...*

5 -**P**: *Entonces aquí, ¿cuándo se pararía de ...? ¿De qué grado sería la serie de Taylor?*

6 -**E**: *Yo no sé qué grado, sé que la puedes derivar hasta donde quieras. Vas aumentando el exponente ...*

7 -**DR**: *Entonces no se puede saber cuando termina, ¿no? Si tú no sabes el grado que tiene la función inicial.*

8 -**P**: *No sabes cuando va a comenzar a dar cero la derivada.*

9 -**DR**: *No sabes cuántas derivadas tiene.*

10 -**E**: *Claro, como la función inicial no es un valor, pues no lo sabes.*

Análisis de las verbalizaciones

Analizamos los intercambios verbales que se producen en el equipo B3 en la situación 7(7).

Verbalizaciones	Daniel	Purificación	Marta	Elena
1				DA(1)
2	PA(0)			
3				DA(1)
4	UAR(1)			
5		PA(0)		
6				DA(1)
7	PA(0)			
8		E(0)		
9	E(0)			
10				E(0)
$\bar{x}$	0.1	0	0	0.3

Tabla 5.49. Verbalizaciones producidas por el equipo B3 en la situación 7(7).

Observamos que es Elena la que produce argumentos que permiten al grupo avanzar en la solución del problema. Podemos señalar la falta de precisión en el lenguaje, por ejemplo, cuando dice *"como la función inicial no es un valor"* al referirse a la condición inicial. También podemos destacar que tratan de determinar en qué momento los términos de la serie comienzan a ser constantes. Hacen la analogía con las anteriores situaciones-problemas donde las series a partir de un cierto término toman el valor cero. En esta discusión Marta no interviene.

5.3 - ETAPA DE INSTITUCIONALIZACIÓN

La **etapa de institucionalización** fue trabajada, como dijimos anteriormente, por medio de entrevistas personales. En ella se empleó una hora de trabajo con cada alumno. Nos basamos en las producciones personales y en equipo obtenidas por los estudiantes en las **etapas** anteriores. De manera que se indagó y discutió básicamente sobre aquellas ideas y conceptos que a nuestro juicio no se habían logrado construir adecuadamente. A continuación hacemos una exposición de las mismas:

- La gráfica que representa el fenómeno presentado en la primera situación-problema es $y = x$, "*la gráfica forma un ángulo de* 45 *grados*". Esta idea es compartida por todos los alumnos. Aquí evidentemente se detecta una dificultad en el concepto de proporcionalidad, que se pone de manifiesto al suponer que la constante de proporcionalidad vale uno. Se discutió sobre cuáles son los parámetros que tienen influencia sobre la pendiente de la recta y de qué manera deben cambiar para que varíe dicha pendiente. Este hecho no fue planteado ni tomado en cuenta por los estudiantes en ninguna de las etapas anteriores.
- Cuando representan los datos de la tabla en un par de ejes $t - s$ unen los puntos a través de segmentos de líneas rectas. La explicación es siempre la misma "*el movimiento es rectilíneo*"; evidentemente confunden la función posición con la trayectoria del móvil y el espacio recorrido. Este hecho es expuesto explícitamente por Carlos durante el trabajo en equipo (B1) sobre la situación 3(2).
- Otro obstáculo se manifiesta con el tratamiento del concepto de velocidad, el cual se interpreta, según la mayoría de los estudiantes, simplemente como "*el espacio dividido por el tiempo*" y que es consecuencia de los dos teoremas factuales que hemos detectado anteriormente. Por otro lado, creemos que lo anterior se debe a que las nociones de variación y cambio no se hallan suficientemente desarrolladas, limitando con ello la construcción de la idea de predicción que, como dijimos, es básica en la Física y en general en las Ciencias Experimentales.

Superar el teorema factual es básico para lograr apropiarse de la idea de que la derivada, cualquiera que sea el orden, es otra función con entidad propia y que mide una variación. Cuando dicen: $v(t_0) = 0 \rightarrow v'(t_0) = 0$ no están pensando en $v'(t)$ como una función, ni mucho menos en qué representa cada punto de esa función respecto de la anterior. Ésta es una dificultad que creemos proviene de presentar las derivadas sucesivas como $(((f')')'\ldots)'$ en lugar de $f, f', f'', \ldots f^{(n)}$.

Una forma de ayudarles a superar el teorema factual fue presentando la misma situación–problema a través de diferentes representaciones: gráfica, numérica (mediante tablas), por esquemas o dibujos, etc. Cuando intentan explicar el problema en cada una de estas representaciones entran en contradicciones y esto les permite reflexionar sobre sus conocimientos y reconstruirlos.

- En lo que respecta a la idea de predicción, básicamente se indagó y discutió sobre el reconocimiento de los parámetros que describen el sistema en el estado inicial. Nos centramos en la forma de la serie que más ilustra la idea que queremos desarrollar:

$$f(x)=f(x_0+h)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{\infty} C_i ,$$

donde las C_i son las variaciones.

Es decir,

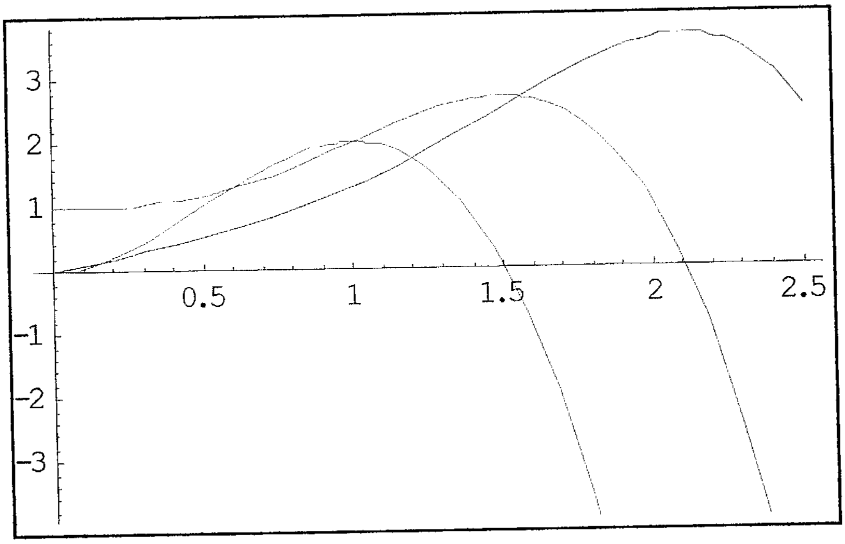
- $C_1 = f'(x_0)\, h$ es la primera variación de la función.
- $C_2 = f''(x_0)\, h^2/2!$ es la segunda variación de la función o, lo que es lo mismo, la variación de la variación.
- $C_3 = f'''(x_0)\, h^3/3!$ es la tercera variación, y así sucesivamente.

A partir de ella se trabajó también sobre el significado de las distintas variaciones, así como la forma de obtener las mismas y sus regularidades. La mayor dificultad se encontró, como se había puesto de manifiesto en las etapas anteriores, a la hora de determinar los parámetros que describen el sistema en el estado inicial. Creemos, sin embargo, que han superado esta dificultad.

Esta etapa de aprendizaje concluye con un trabajo individual de los alumnos. Para ello se les hizo entrega de dos situaciones–problemas, del mismo tipo que las anteriores, sobre las que debieron trabajar en una sesión de dos horas. Dicho trabajo se desarrolló, como el resto, en las instalaciones de la Universidad de Jaén. Las situaciones–problemas fueron las siguientes:

❑ SITUACIÓN 8(3)

En la siguiente gráfica se representan la función de movimiento, s(t), la velocidad, s'(t), y la aceleración, s''(t), de un móvil.



a) *¿Puedes identificar cada una?¿cómo?*

b) *Determina aproximadamente los intervalos donde s'''(t) es positiva.*

c) *Describe cuáles son las características de la función que, a tu juicio, son más relevantes a la hora de trazar las gráficas de su primera, segunda y tercera derivada.*

❑ SITUACIÓN 2(8)

Una masa sujeta a un resorte se estira hasta que se halla a diez unidades debajo de la posición de equilibrio; en ese momento se suelta partiendo del reposo. En ese instante comenzamos a contar el tiempo. El movimiento que realiza la masa, alrededor de su posición de equilibrio, viene descrito por la siguiente ecuación:

$$y'' = -16\,y.$$

a) *Predice, utilizando la serie de Taylor, la posición de la masa para cualquier instante t.*

b) *¿Dónde se halla la masa transcurridos* $\frac{\pi}{8}$ *segundos?*

A través de la producción presentada por los estudiantes en estas dos situaciones queremos indagar sobre los siguientes comportamientos generales, ya que nos ayudaran a observar en qué medida se cumplen los objetivos y supuestos que nos hemos planteado en el apartado 1.5.

- En qué medida han superado el teorema factual.
- Cómo han construido los conocimientos necesarios para reconocer la serie de Taylor como herramienta de predicción.
- Cómo y en qué medida han adquirido las destrezas necesarias para trabajar con las derivadas sucesivas y la serie de Taylor.

Para el análisis observaremos algunos comportamientos específicos para cada situación–problema. En el caso de la 8(3) serán:

a- Identificación de cada gráfica.
b- Análisis e interpretación de las mismas.
c- Elaboración de respuestas y resultados.

Para el caso de la situación-problema 9(10) los comportamientos específicos serán:

d- Interpretación y determinación de los valores iniciales del sistema.
e- Reconocimiento de la serie de Taylor como herramienta para resolver el problema.
f- Destreza en el manejo de las derivadas sucesivas y la serie.

A cada uno de estos comportamientos le asignaremos un puntaje que va del cero al uno.

Los resultados obtenidos del análisis de la producción de los estudiantes en las situaciones 8(3) y 9(10) se muestran en la tabla siguiente.

Alumno	Situación 8(3)			Situación 9(10)			Puntuación %
	a	b	c	d	e	f	
Alicia	1	0.8	0.7	0.7	0.8	1	83
Carlos	1	1	1	1	0.5	0.5	83
Mercedes	1	0.3	0.3	0.8	0.8	0.6	63
María José	1	0.6	0.5	0.5	0.6	0.6	63
Águeda	1	0.5	0.5	0.8	0.5	0.5	63
Francisco	1	1	1	1	1	1	100
Josefa	1	0.6	0.6	0.6	0.8	0.5	68
Daniel	1	0.8	0.8	1	1	0.5	85
Purificación	1	0.8	1	1	1	1	97

Marta	1	1	0.8	1	1	1	97
Elena	0.2	0.2	0.2	0.6	0.8	0.6	43
%	93	69	67	82	80	71	

Tabla 5.50. Análisis de la producción de los estudiantes en las situaciones 8(3) y 9(10).

El puntaje que obtiene cada alumno en forma individual aparece en la columna de la derecha. El resultado es muy satisfactorio, ya que podemos destacar que diez de once alumnos superan la media y que tres de once estudiantes obtienen un puntaje superior al 95 %. En la última fila tenemos el puntaje (%) correspondiente a cada uno de los comportamientos que nos propusimos observar en estas dos situaciones. Con estos resultados podemos inferir que estos comportamientos se han superado en tres cuartas partes de los casos.

Queremos destacar que aunque no se hayan hecho evidentes grandes avances en la construcción de conocimientos en las etapas de aprendizaje donde se desarrollaron las discusiones por equipo, ellas fueron fundamentales en cuanto que:

- Contribuyeron a interpretar y mejorar el lenguaje que se utiliza en cada área de conocimiento.
- Facilitaron el reconocimiento de saberes mal adaptados y su posterior resignificación.
- Favorecieron la apropiación de conocimientos, ya que ésta es una de las tantas actividades sociales del individuo.
- Permitieron la construcción de un lenguaje de base que les permite el intercambio de ideas propias de la Matemática avanzada.

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS GLOBAL DE RESULTADOS, CONCLUSIONES Y PROPUESTAS

6.0 - INTRODUCCIÓN

Las Matemáticas y las Ciencias Experimentales han planteado a través de su historia y de la historia particular de su enseñanza, retos impresionantes al intelecto humano. Las problemáticas ligadas al aprendizaje de estas ciencias: de su contenido, sus métodos y sus procesos, han sido recientemente abordadas desde múltiples perspectivas, aunque sus efectos no han provocado todavía los suficientes cambios. Si bien habría que reconocer la producción de numerosos trabajos que aportan conocimientos sobre las concepciones que los estudiantes y sus profesores tienen de ellas, faltan aún estudios que localicen y analicen los obstáculos de naturaleza didáctica o epistemológica que se tienen que enfrentar en todo proceso educativo y que nos permitan intervenir en el proceso de aprendizaje de una cierta noción, de un dominio del conocimiento o de un modo particular de funcionamiento dado. A pesar de ello, en general, en la mayoría de las aulas se sigue optando por seguir una ruta bastante limitada: que los estudiantes solucionen ejercicios de manera mecánica y seleccionados bajo el criterio de una resolución inmediata, mediante los algoritmos enseñados en clase y evitar así, aparentemente, el tratamiento de obstáculos.

La enseñanza tradicional, en el ámbito de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, se centra en evaluar los conocimientos adquiridos en cada uno de esos campos del saber ciñéndose, en la mayoría de los casos, a un rígido temario tácitamente aceptado en el ambiente escolar sin cuestionarse apenas el qué enseñar. En contraste, nuestra investigación se ha centrado en la búsqueda de "*qué enseñar*", en lugar de sólo "*cómo enseñar*", apoyándonos en el contexto que nos brinda la visión interdisciplinaria de las Ciencias Experimentales, donde, en nuestra opinión, las Matemáticas han tenido su mayor motor de desarrollo.

Para llevar a cabo nuestra investigación, nos hemos basado en un exhaustivo estudio de corte epistemológico realizado por nuestro grupo de investigación durante algunos años y que ha dado lugar a diversos estudios en el terreno educativo (Cantoral, 1990, 1998). Como consecuencia de tales estudios, al analizar los orígenes de la serie de Taylor, se identificaron dos aspectos centrales que caracterizaron las imágenes conceptuales[1], en un sentido amplio, propias del siglo XVII.

1 – El reconocimiento de las aplicaciones e influencias de la serie en el desarrollo de algoritmos y patrones numérico–algebraicos.

2 – El estudio puntual de los fenómenos de movimientos de cuerpos rígidos y del análisis de las curvas.

La segunda es la idea que habrá de ser germinal, en el sentido de producir diversos y novedosos resultados, para el desarrollo ulterior del Cálculo y que sigue vigente en diversas ramas de las ciencias Físico–Matemáticas y de la Ingeniería. Dicha idea se conforma sobre la base de la acción y efecto de predecir el estado posterior conociendo el estado actual del sistema, acción que acontece con el reconocimiento de patrones de regularidad que permiten conocer al todo sólo con mirar la parte.

En ese estudio se presentan diversos esquemas o paradigmas asociados con el instrumento de conocimiento, la serie de Taylor, en diversos contextos y momentos históricos, clasificándolos en ocho modelos. La investigación que ahora reportamos se acerca más al modelo que ha sido dado en llamar **modelo de predicción paramétrica**.

Como hemos descrito ampliamente en el cuerpo de la tesis, el presente trabajo se basó en un diseño experimental sofisticado apoyado en la metodología de la Ingeniería Didáctica, la cual se fundamenta en un sentido general en la teoría constructivista del aprendizaje de Piaget, y más específicamente en la teoría de situaciones didácticas y la teoría de la transposición didáctica. Aplicar estas teorías al conocimiento interdisciplinario de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales llevó, en un intento por captar la complejidad del proceso de enseñanza–aprendizaje dentro del aula, a considerar las situaciones–problemas presentadas a los alumnos como un factor importante para hacer evolucionar sus representaciones y sus procedimientos. De esta manera es conveniente conocer los problemas, los obstáculos y concepciones personales de los estudiantes ante un contenido dado. La situación didáctica implicó una interacción dialéctica del alumno con situaciones-problemas

[1] Se refiere a la noción de imagen conceptual según Tall (1981), "Usaremos el término *concept image* para describir la estructura cognitiva total que se asocia al concepto y que incluye todas las imágenes mentales, propiedades asociadas y todos los procesos"

específicas, donde debe anticipar y finalizar sus acciones, comprometer sus conocimientos anteriores, someterlos a revisión, modificarlos, complementarlos o en su caso rechazarlos para formar concepciones nuevas, es decir, para favorecer el aprendizaje. La noción de obstáculo y problema son entonces fundamentales en este proceso de investigación.

En nuestro caso, a través de una situación relacionada con la enseñanza del Cálculo en el contexto de las Ciencias Experimentales, se exploró a un nivel cognitivo la construcción entre los estudiantes de las nociones de variación y cambio en un ambiente escolar determinado. Para ello se construyeron situaciones-problemas donde se hallan involucradas las derivadas sucesivas en los contextos de la Cinemática y de la Biología en ambiente escolar, mediante el apoyo de secuencias didácticas que permitieron a los estudiantes construir nociones y procedimientos en el momento de interactuar entre ellos por medio de problemas no rutinarios que además les llevaron a reconocer la necesidad de nuevos conocimientos.

Dado que la Ingeniería Didáctica, como metodología de investigación, se interesa por los procesos que suceden en situación escolar, de ahí que se base en un análisis cualitativo y en la validación interna, fue la elección que juzgamos adecuada para nuestra investigación.

Con relación a la revisión de manuales escolares, realizada sobre cuatro manuales de nivel universitario y cuatro de nivel medio, observamos que en la mayoría de ellos se presenta la teoría con más o menos demostraciones, dependiendo de la época o del estilo didáctico del autor, para luego dar paso a ejercicios de tipo algorítmico. De modo que los alumnos, por lo general, no entienden en profundidad la teoría y por lo tanto se muestran frágiles al momento de interpretar, discutir o construir conocimientos.

Es importante, en nuestra opinión, el mencionar también que los autores de los libros de texto más usuales en el ámbito universitario, al juzgar el desarrollo de sus exposiciones, no prevén la interacción de los alumnos con los conocimientos, es decir, no se deja bajo la responsabilidad del alumno la tarea de reconstruir con sus propias palabras las ideas o los procedimientos, sino que su acción se reduce a la parte operativa de la teoría. De este modo, los alumnos, en realidad, se encuentran en dificultades al momento de intentar construir el conocimiento en un sentido pleno y, por tanto, no puede lograrse un aprendizaje significativo. A menudo se piensa en la práctica educativa, que desglosando paso por paso un tema se garantiza por sí mismo el aprendizaje. Por eso, a los autores les basta con que el estudiante entienda su exposición y luego resuelva los ejercicios propuestos.

Ahora bien, dado que los autores enfatizan la algoritmización en la presentación de sus lecciones, se procuró con base en nuestra aproximación teórica, que el diseño de las secuencias didácticas permitiera a los estudiantes interactuar y, si fuera posible, lograsen construir o reconstruir conceptos a través de problemas no rutinarios a fin de explorar la naturaleza y posibilidad del aprendizaje de la noción de variación y cambio, además de llevar a los alumnos a reconocer la necesidad de nuevos conocimientos.

En las *experiencias piloto* intervinieron dos grupos de estudiantes pertenecientes a diferentes titulaciones, en un caso cursaban las asignaturas de Matemáticas y Física simultáneamente y en el otro sólo Matemáticas. Nuestro propósito fue explorar sus producciones orales y escritas con relación a las nociones implicadas en este estudio.

A la vista de los resultados obtenidos se diseñó una secuencia didáctica preliminar para proporcionar a los alumnos las ayudas necesarias a fin de reforzar las nociones básicas relativas a nuestro estudio y, al final de la secuencia, determinar el estado de conocimientos actuales del tema sujeto a situación escolar. Dicha secuencia se trabajó con los grupos de estudiantes de la Licenciatura de Biología en las dos experiencias posteriores.

El trabajo realizado por los alumnos se aprecia claramente al analizar sus producciones y se describe, con mayor precisión, en los episodios de aprendizaje respectivos donde se muestra la evolución de sus estrategias al mostrar sus acciones, ideas y percepciones en que se basan para formular y justificar las respuestas que nos fueron proporcionando a lo largo del estudio.

6.1 - DIFICULTADES Y OBSTÁCULOS

El análisis realizado de sus producciones nos permitió identificar algunas dificultades de naturaleza diversa y ciertos obstáculos para el aprendizaje. A fin de facilitar su exposición, hemos agrupado en los dos bloques siguientes la exposición de este asunto:

1) Sobre el papel de las derivadas sucesivas en el contexto de la Cinemática.
2) Acerca de la organización de las derivadas sucesivas: Serie de Taylor, en el contexto de las Ciencias Experimentales.

A continuación pasamos a enunciarlos detenidamente.

1) Las derivadas sucesivas en el contexto de la Cinemática

En cuanto a los conocimientos de Física se ha observado que:

- Cuando los alumnos se refieren a la velocidad de un móvil en un punto de la gráfica posición–tiempo, utilizan con frecuencia la siguiente expresión "*la velocidad es igual al espacio partido por el tiempo*", y con ello emplean la conocida "fórmula" cuando les es requerida:

$$v = \frac{e}{t}$$

- Al momento de presentarles las gráficas posición–tiempo referidas a trayectorias rectilíneas, en la mayoría de los casos los alumnos esperan encontrar las gráficas formadas por segmentos rectos. Este obstáculo de naturaleza didáctica proviene, pensamos que en parte, de la forma en que se presenta e ilustra el tema en los manuales escolares y como se prolonga en las clases. Ello les dificulta obtener las variaciones que tienen lugar justamente en los instantes en los que la velocidad toma el valor cero pues, de acuerdo al concepto matemático de derivada, ésta no existe en esos puntos.
- Rara vez se presenta al alumno, en el marco gráfico, los casos en que la posición es negativa o que la posición inicial sea negativa o que $s(t)$ responda a una ecuación de tercer grado, lo que se traduce en una dificultad a la hora de desarrollar en forma más amplia su noción y por lo tanto se muestra incapacitado para abordarlos.
- En el caso de la representación de una magnitud en cuestión que pasa por el origen, hemos observado que no realizan ningún estudio para conocer su posterior evolución en dicho punto.
- Confunden con frecuencia los puntos donde la gráfica de la función $s(t)$ tiene un máximo relativo con los puntos de velocidad máxima, los puntos donde dicha

gráfica tiene un mínimo relativo con los puntos de velocidad mínima y los puntos donde la gráfica tiene una ordenada nula con los puntos de velocidad nula.

- Rara vez se les muestran o se les pide que grafiquen las funciones $s(t)$, $v(t)$ y $a(t)$; sin embargo las consideramos muy útiles a la hora de construir la noción de derivada en forma estable.
- Se han detectado dos teoremas factuales que consideramos importantes:

  Primero - $s = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow a' = 0$.
  Segundo - $f' > 0 \rightarrow f'' > 0 \rightarrow f''' > 0 \ldots$
- Dificultad para interpretar y concebir a la tercera variación en problemas de Cinemática.
- Problemas en el lenguaje específico de la asignatura como espacio, posición, desplazamiento o las expresiones "velocidad de cambio" y "tasa instantánea de variación".
- Hemos observado la dificultad que representa para el alumno la dicotomía entre el discurso matemático escolar que se mantiene en la clase de Matemáticas, y las Matemáticas que se utilizan en la clase de Física, incluso a nivel del lenguaje.
- En cuanto a las gráficas de $s(t)$, nos encontramos con que la mayoría de los alumnos no lograron interpretarlas. Ellas son tomadas como gráficas de las trayectorias del movimiento.

En cuanto a los conocimientos de Matemáticas se ha observado que:

- La notación de Leibniz $\frac{dy}{dx}$ causa serios problemas conceptuales pues es tratada simultáneamente como razón de diferenciales y como un simple símbolo cuyos componentes son indisociables.
- En sus producciones prima el marco algebraico en detrimento del marco gráfico.
- Tienen dificultades para interpretar y manipular con datos presentados en tablas y gráficas.
- No utilizan ni reconocen, como herramientas útiles para resolver las situaciones-problemas planteadas, tanto el teorema de Rolle como el del Valor Medio. Creemos que esto viene a mostrar la escasa relación que tienen para los alumnos los conocimientos aprendidos en las distintas asignaturas de una misma titulación.

Estaremos entonces dando prueba de la existencia de un hecho didáctico que puede enunciarse así: las dificultades que manifiestan los estudiantes ante cierto tipo de problemas, tienen como fuente principal el escaso desarrollo del *pensamiento variacional* relacionado con la variación y su medida del cambio. Es decir, independientemente de la situación cognitiva, los estudiantes revelarán dificultades en ciertas clases de problemas, atribuibles al aspecto didáctico de la derivada como variación. Las interpretaciones que (tal como se muestra en este trabajo) hacen los estudiantes, dan cuenta de las dificultades para discutir cuestiones de cambio y variación, fuera de los códigos algorítmicos que son usuales en sus clases.

2) La organización de las derivadas sucesivas: series de Taylor, en el contexto de problemas de las Ciencias Experimentales

- Dificultades en interpretar las derivadas sucesivas, esto se manifestó claramente en la situación-problema 2(8). Sólo dos, de once alumnos, lograron dar una interpretación medianamente satisfactoria a la primera y segunda variación para el caso de la función de producción.
- Tienen problemas cuando interpretan los parámetros que intervienen en el fenómeno físico o biológico para distinguir las variables del problema.
- Muestran dificultades en el momento de interpretar las condiciones iniciales.
- Cada vez que tratan con cuestiones del infinito, al igual que informan otros estudios sobre el tema, muestran serias dificultades cognitivas. Por ejemplo los relacionados con la concepción de convergencia de sumas infinitas.
- La reducida interpretación de la integral como operación inversa de la derivada. Esta idea, por lo tanto, opera como obstáculo a la hora de considerar la integral como una suma infinita o como un proceso de acumulación.

6.2 - CONCLUSIONES GENERALES

- En el aspecto metodológico, esta investigación aporta en dos direcciones. Por un lado, al usar la metodología de la ingeniería didáctica en un contexto interdisciplinario, logramos extender su margen de aplicabilidad. Por otro, nos permitió analizar informaciones cualitativas características al estudiar un número reducido de casos y sin abandonar el ámbito escolar, cuya representatividad no se plantea, pero que nos permiten interpretar y comprender ciertos aspectos de la forma de razonar de los alumnos ante tareas específicas. Otra característica es la validación interna.

- Se estima que es necesario que los alumnos construyan esquemas conceptuales con lenguaje preciso, unas imágenes gráficas adecuadas y unos recursos propios que les permitan comprender y describir situaciones puntuales de un movimiento variado.
- La *fórmula*: "la velocidad es igual al espacio dividido por el tiempo", que caracteriza el esquema conceptual de la mayoría de los alumnos, resulta ser tan estable que dificulta e incluso impide la construcción del esquema conceptual de la noción de velocidad instantánea, actuando como un obstáculo epistemológico.
- Por los resultados obtenidos en las Experiencias Piloto podemos decir que los estudiantes tienden a abordar los problemas a partir del contexto que se les plantea sin explorar en otros contextos y marcos. Esta situación plantea un nuevo reto a saber, el problema de la transferencia del conocimiento escolar. El hecho de observar el fenómeno desde diferentes puntos de vista creemos que es beneficioso a la hora de discernir sobre las herramientas que resultan más eficaces para solucionar los problemas.
- El marco gráfico por sí sólo es insatisfactorio, pero provee de una intuición global cualitativa que es fundamental para lograr un movimiento versátil entre distintos marcos y contextos.
- El presentar los conceptos involucrados en la Cinemática, para el caso del movimiento rectilíneo con aceleración variable, desde diferentes marcos, ha favorecido en el alumno un desarrollo más amplio de la noción de velocidad, aceleración y tirón. Esto, a la luz de los resultados que hemos mostrado, clarifica los conceptos de la Cinemática, además de ampliar la noción de función derivada que en la mayoría de los casos se restringía a un mero algoritmo.

En relación con los supuestos formulados (Apartado 1.5.2) podemos concluir que nuestro trabajo aporta datos experimentales suficientes en apoyo de los mismos. Respecto al primero, que hacía referencia a la resignificación del concepto de derivada, se han tenido datos positivos según se recoge del análisis de las producciones de los estudiantes en las dos experiencias llevadas a cabo (Capítulos 4 y 5).

En referencia al segundo, hemos mostrado cómo a partir del supuesto anterior, era posible desarrollar en el alumno la noción de predicción y, usando como herramienta la serie de Taylor, lograr resultados positivos como se desprende del análisis de resultados de las experiencias (Capítulos 4 y 5).

Por último cabe decir que, si bien en la segunda experiencia hemos superado los resultados de la primera, éstos se mantienen bastante estables en cuanto a las dificultades y obstáculos observados.

6.4 - PROPUESTAS

En nuestra opinión, estos hallazgos favorecen la discusión y elaboración de propuestas de enseñanza que traten sobre el *qué enseñar* y no sólo, como ha sido habitual, sobre el *cómo enseñar*. En síntesis, nuestra línea de investigación tomó como objeto de estudio la socioepistemología, es decir la epistemología de las prácticas, de los saberes propios de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales e incluyó a las intuiciones primarias del alumno con el fin de rediseñar el discurso escolar.

Proponemos nuestro trabajo como un modelo didáctico interdisciplinario, donde interactúan la Didáctica de las Ciencias Experimentales y la Didáctica de las Matemáticas, las dos respetando sus peculiaridades pero compartiendo una nueva propuesta de enseñanza-aprendizaje.

Sin embargo, somos conscientes de que nuestra investigación se ha limitado sólo a una pequeña parte de la fenomenología asociada a la noción de predicción. Esta limitación hace necesario la continuidad de trabajos de investigación que aborden otros modelos.

A lo largo de nuestra investigación que busca "*qué enseñar*", nos hemos encontrado con que es necesario profundizar en las dificultades de aprendizaje que esto conlleva. Por ello, sería relevante como campo de investigación el realizar estudios sobre:

- Estudio de la influencia en el aprendizaje en una experiencia interdisciplinar entre Matemáticas y Ciencias de la Naturaleza sobre la noción de variación y cambio, tomando como base la noción de derivadas sucesivas como una sucesión de derivadas, es decir $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}$, en lugar de la forma tradicional $(((f)')' \ldots)'$ en Bachillerato.
- Estudio de la influencia en el aprendizaje a través de una experiencia interdisciplinar entre Matemáticas y Ciencias Experimentales, especialmente

dirigida a la noción de predicción para fenómenos de flujos continuos con estudiantes de Bachillerato y Universidad.

- Estudio, por medio de Ingenierías Didácticas especificas, de las concepciones de los alumnos y la superación de obstáculos tanto didácticos como epistemológicos en el aprendizaje de la noción de predicción.

A pesar de haber clarificado cómo el estudiante construye ideas matemáticas con soporte en las ciencias experimentales, creemos que esta investigación ha dejado abiertos una serie de interrogantes nuevos que quizá alguien esté interesado en continuar.

Anexos

ANEXO 1

REVISIÓN DE MANUALES ESCOLARES

Con el fin de analizar el tratamiento que los autores de manuales escolares dan a los procedimiento, nociones, y conocimientos en un sentido amplio, hemos escogido un conjunto de textos y en ellos hemos seleccionado algunas variables de análisis a fin de apoyar nuestra revisión . Ésta nos ha ayudado en la construcción de las secuencias didácticas que esta tesis reporta.

1.- VARIABLES CONSIDERADAS PARA LA REVISIÓN DE TEXTOS MATEMÁTICOS

La revisión de textos matemáticos se conforma a partir de las siguientes variables:

1.- Características generales del texto:

a) Presentación

b) Notas históricas

c) Tecnología utilizada o propuesta (calculadora, ordenador, etc.)

d) Gráficos y figuras

e) Ubicación de los ejercicios y problemas propuestos (final de epígrafe, de capítulo, etc.).

f) Características especiales.

2.- Organización de contenidos (bloques temáticos, lecciones, capítulos, etc.). Se consideraron los índices de contenidos de todos los manuales utilizados, ya que en ellos se refleja la situación y relevancia que el autor da a los conceptos que estamos estudiando respecto de otros contenidos del Cálculo.

3.- Estructura general del tema.

3.1. Secciones, Epígrafes, etc.

3.2. Ubicación y extensión que ocupa el tema en la exposición general del texto.

4.- Tratamiento dado al tema (derivadas sucesivas - teorema de Taylor)

4.1. Formas de introducirlo (a través de ejemplos, dando la definición, etc.)

4.2. Tipos de ejemplos:

a) Algorítmicos o de comprensión.

b) Marcos en los que se plantean (analítico, algebraico, gráfico, numérico).

c) Contextos en los que se sitúan (físico, matemático, biológico, etc.).

4.3. Tipos de ejercicios y problemas propuestos al final de la sección (las mismas consideraciones que en 4.2).

4.4. Tipos de ejercicios y problemas propuestos al final del capítulo (las mismas consideraciones que en 4.2).

2.- VARIABLES CONSIDERADAS PARA LA REVISIÓN DE TEXTOS DE FÍSICA

La revisión de textos físicos se conforma a partir de las siguientes variables:

1.- Características generales del texto:

a) Presentación.

b) Notas históricas.

c) Tecnología utilizada o propuesta (calculadora, ordenador, etc).

d) Gráficos y figuras.

e) Ubicación de los ejercicios y problemas propuestos (final de sección, de capítulo, etc.).

f) Apartado o anexo donde se repasa los conceptos matemáticos que va a utilizar.

2.- Organización de contenidos (bloques temáticos, lecciones, capítulos, etc.). Se consideraron los índices de contenidos de todos los manuales utilizados, ya que en ellos se refleja la situación y relevancia que el autor da a los conceptos que estamos estudiando respecto de otros contenidos de la Física.

3.- Estructura general del tema

3.1 Secciones, Epígrafes, etc.

3.2 Ubicación y extensión que ocupa el tema en la exposición general del texto.

4.- Tratamiento dado al tema (cinemática / movimiento armónico simple)

4.1. Forma de introducirlo (a través de ejemplos, fórmulas, definiciones, etc.)

4.2. Conceptos matemáticos utilizados en el desarrollo del tema (trigonometría, funciones, límites, derivadas, ecuaciones diferenciales, etc.)

- Si repasan, a la vez que se desarrollan, los conceptos físicos.
- Sólo se utilizan como herramientas.

4.3. Tipos de ejemplos o ejercicios de aplicación

a) Aplicación directa de fórmulas.

b) Situación próxima a la realidad.

c) Marcos en los que se plantean (gráfico, algebraico, analítico, numérico a través de tablas, etc.)

d) Conceptos matemáticos involucrados.

e) Procedimientos matemáticos utilizados para resolverlos (algebraicos, algorítmicos, etc).

4.4. Tipo de ejercicios y problemas propuestos al final de la sección (las mismas consideraciones que en 4.3)

4.5. Tipo de ejercicios y problemas propuestos al final del capítulo (las mismas consideraciones que en 4.3)

4.6. Cuestiones (ubicación donde se plantean, si versan sobre contenidos teóricos o prácticos, conceptos matemáticos involucrados)

3.- REVISIÓN DE LOS TEXTOS ESCOLARES

3.1.- TEXTOS DE MATEMÁTICAS DE NIVEL UNIVERSITARIO

GRANERO, F. (1990). "Cálculo". Mc Graw-Hill.

1.- Características generales del texto

a) Presentación: Consta de un sólo volumen con 736 páginas y tapas flexibles.

b) Notas históricas: En el prólogo hace una reseña histórica con la intención de que el lector tenga una visión panorámica del cálculo. Comienza con los orígenes del cálculo integral con Arquímedes (287-212 a. de C.) para hallar el área de figuras planas hasta llegar a nuestros días con la aplicación de la teoría de integración a la teoría de la probabilidad, medida de Haar, teoría espectral y análisis armónico.

c) Tecnología: No propone ejercicios ni problemas para utilizar tecnología como, por ejemplo, la informática.

d) Gráficos y figuras: Hay un numero limitado a lo largo del texto para ayudar a visualizar los conceptos.

e) Ubicación de los ejercicios y problemas: Respecto a los problemas, debemos destacar que al acabar cada una de las dos partes en que se divide el texto, propone varios con su solución. En la primera parte hay veinte problemas, en su mayoría originales, propuestos en exámenes de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería. Sus características son similares a las de final de capitulo.

f) Características especiales: Presenta la bibliografía, considerando también libros de problemas. La estructura de los contenidos es la menos frecuente en textos de este nivel, tratando en cada tema los conceptos para el caso de una variable y a continuación su extensión a dos o mas variables.

2.- Organización de contenidos

El libro está dividido en dos partes, con 28 capítulos en total. Conforman la primera parte los primeros 18 capítulos y la segunda los 8 capítulos restantes. Cada capítulo está dividido en temas y éstos a su vez en subtemas.

Los temas están expuestos en el siguiente orden:

1.- Los números.

2.- Potencia de conjuntos.

3.- Espacios métricos.

4.- Espacios topológicos.

5.- El conjunto de los números complejos.

6.- Sucesiones numéricas.

7.- Series numéricas.

8.- Suma de series.

9.- Límites y continuidad de funciones.

10.- Derivabilidad y diferenciabilidad de funciones.

11.- Generalizaciones.

12.- Funciones compuestas.

13.- Funciones implícitas.

14.- Cambio de variables.

15.- Determinantes funcionales.

16.- Funciones homogéneas.

17.- Desarrollo en serie de funciones.

18.- Extremos de funciones.

19.- Curvas en el plano.

20.- Representación y estudio de las funciones trigonométricas e hiperbólicas.

21.- Integrales indefinidas.

22.- Integrales definidas.

23.- Generalización del concepto de integral definida según Riemann.

24.- Integrales paramétricas.

25.- Integrales Eulerianas.

26.- Integrales numéricas.

27.- Medida de conjuntos. Integral de Lebesgue.

28.- Aplicaciones de la integral definida.

3.- Estructura general de los temas

Los temas específicos a revisar se presentan en los capítulos 10 (p. 175-217) y 17 (p. 303-347), con el siguiente itinerario didáctico:

10.- DERIVABILIDAD Y DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES.

10.1. Introducción.

10.2. Derivadas de funciones de una variable.

10.3. Interpretación geométrica de la derivada.

10.4. Relación entre la continuidad y la derivabilidad.

10.5. Diferenciales de funciones de una variable

10.6. Definición formal de la diferencial de la función $y = f(x)$: Propiedades.

10.7. Derivadas de funciones de dos variables. Derivada parcial.

10.8. Interpretación geométrica de la derivada parcial.

10.9. Teorema del valor medio o de los incrementos finitos para funciones de dos variables.

10.10. Derivada en una dirección o derivada direccional: Gradiente.

10.11. Derivadas sucesivas de funciones de dos variables.

10.12. Teorema de Schwarz relativo a las derivadas cruzadas.

10.13. Diferenciales de funciones de dos variables.

10.14. Definición formal de la diferencial de la función $z = f(x,y)$: Propiedades.

10.15. Interpretación geométrica de la diferencial de la función $z = f(x,y)$. Ejercicios.

17.- DESARROLLOS EN SERIE DE FUNCIONES.

17.1. Presentación del problema en el caso de una variable.

17.2. Polinomio de Taylor de grado n.

17.3. Fórmula de Taylor Lagrange.

17.4. Forma diferencial de la fórmula de Taylor.

17.5. Fórmula de Maclaurin.

17.6. Acotación del error cometido al tomar como valor de $y = f(x)$ el polinomio de Taylor $p(x)$.

17.7. Desarrollo en serie de funciones de varias variables.

17.8. Desarrollos limitados de funciones.

17.9. Sucesión y serie de funciones. Convergencia y convergencia uniforme.

17.10. Series de potencias o series potenciales.

4.- Tratamiento dado a los temas

El itinerario que sigue para los temas derivadas y derivadas sucesivas es el siguiente:

A continuación del estudio del Límite y Continuidad de Funciones, en el Tema 10, se centra en la Derivabilidad y Diferenciabilidad de Funciones. Comienza el desarrollo del tema dando una tabla de "*derivadas de una función*".

Seguidamente define formalmente a la derivada en el punto x a través del límite del cociente incremental. Después define derivadas laterales y da una interpretación geométrica.

Luego muestra dos ejemplos con respecto a la relación entre continuidad y derivabilidad. En el primero se ve que $f(x)$ puede ser continua aunque no derivable, pues sus derivadas laterales existen pero no son iguales entre sí en el punto en cuestión. En el segundo ejemplo se trata de una derivada lateral que no existe aunque la función es continua.

A continuación introduce el concepto de diferenciabilidad, las propiedades que ligan la derivabilidad y diferenciabilidad de funciones, Teorema de Rolle, Teorema del Valor Medio generalizado de Cauchy. Las derivadas de orden superior sólo las da dentro del apartado de un ejemplo que resuelve en el tema de diferenciabilidad, p. 184.

El ejemplo es el siguiente:

" *Sea la función*:

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\, x}{x} & \text{para todo } (x, y) \neq 0 \\ 1 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

a) *Hallar* $f'(0)$.

b) *Obtener para* $x = 0$, *con* $dx = 0.1$, *la diferencial en el caso de que exista.*

c) *Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva* $y = f(x)$ *en el punto* $x = 0$.

d) *Recordando que las derivadas de orden superior al primero se obtienen derivando sucesivamente* $f(x)$, *e igualmente que* $d(dy) = d^2y = d(f'(x)\, dx) = (f'(x)\, dx)'dx = (f''(x)\, dx + 0\cdot f'(x))dx$ $(dx = cte.)$, *de donde* $d^2y = f''(x)\, dx^2$, *y en general* $d^{(n)}y = f^{(n)}(x)\, dx^n$, *hallar (si existe) la diferencial segunda* (d^2y) *en el punto* $x = 0$."

En el apartado 10-11 se considera una función $f(x, y)$; si sus derivadas primeras son derivables entonces halla, derivando las dos derivadas parciales de primer orden, las cuatro derivadas segundas. Del mismo modo, si dichas derivadas segundas son a su vez derivables, podrán obtenerse las derivadas terceras y así sucesivamente. Esto se ilustra con el siguiente ejemplo:

"*Dada la función*:

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x+y} & \forall(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad \text{para } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

calcular en el punto (0, 0) el valor de f_{xy} *y* f_{yx} *(derivadas cruzadas).*"

Los ejercicios que se presentan al final del capítulo son del mismo tipo que los ejemplos que aquí se reflejan. De entre ellos podemos destacar el problema 8, apartado 2, que da una función (polinómica) de distribución de energía y pide hallar su derivada en el punto P y en el sentido del vector (0, 0, -1). En el inciso 4 del mismo problema define la función $g = \dfrac{4\pi^2 l}{T^2}$ a partir de la formula del periodo de un péndulo y pide se estudie su diferenciabilidad y hace una aplicación al cálculo de error.

El itinerario que sigue para el caso de serie de Taylor es el siguiente:

En el capítulo 17 hace el desarrollo en Serie de Funciones. Comienza diciendo: "*considérese una función y = f(x), que verifica unas ciertas condiciones, las cuales inmediatamente estudiaremos. La fórmula de Taylor es una generalización muy interesante del Teorema de los incrementos finitos, que permite expresar con una aproximación deseada el valor de f(x) mediante un polinomio p(x) que recibe el nombre de Polinomio de Taylor de grado n*".

Luego toma una función polinomial $f(x)$ de la forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n; \ a_i \in \boldsymbol{R},$$

para demostrar que es posible expresarla como

$f(x) = b_0 + b_1(x\text{-}a) + b_2(x\text{-}a)^2 + \ldots + b_n(x\text{-}a)^n; \quad b_i, a \in \boldsymbol{R},$

y que esta forma es única. Considerando a $f(x)$ como un vector del espacio vectorial sobre $\boldsymbol{R}$ de los polinomios de grado $\leq n$, y como la dimensión de dicho espacio es

$n + 1$, siendo la base usual $(1, x, x^2, ..., x^n)$, se ve rápidamente que $(1, (x\text{-}a), (x\text{-}a)^2, ..., (x\text{-}a)^n)$ constituye también otra base, y por tanto que el vector $f(x)$ se puede expresar unívocamente en esta base.

A partir de aquí obtiene las coordenadas b_i en dicha referencia, con lo que llega a escribir el polinomio de Taylor de grado n de la forma:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Luego dice: *"Taylor lo generaliza a todo tipo de funciones que cumplan ciertas condiciones. Para ello sumó a su polinomio un término complementario, llamado resto (nulo si f(x) es polinomio), que mide el error cometido cuando se toma el polinomio de Taylor p(x) como valor de la función f(x)"*.

Da a continuación las expresiones de los errores según Lagrange, Young y Cauchy. Más adelante presenta el Teorema de Taylor y la forma diferencial de la Fórmula de Taylor.

De acuerdo al itinerario dado más arriba, las series de potencias se desarrollan en el capítulo 17, en el tema 17.10, con los siguientes subtemas: Teorema de Abel relativo a la convergencia absoluta. Clasificación de las series potenciales. Cálculo del radio de convergencia de una serie potencial. Estudio de la convergencia uniforme de series potenciales mediante el criterio de suficiencia de Weierstrass. Teorema de Abel relativo a la convergencia uniforme de series potenciales. Operaciones con series de potencias. Diferentes formas de obtener el desarrollo en serie de potencias.

Los ejemplos y ejercicios propuestos al final del capítulo están planteados en un contexto analítico y son de tipo calculatorio; algunos enunciados tipo de los que aparecen son: "*Obtener el desarrollo en serie potencial de…*", "*Hallar el desarrollo…*".

LARSON, R., HOSTETLER, R. y EDWARDS, B. (1995).
"Cálculo y Geometría Analítica". McGraw-Hill.

1.- Características generales del texto

a) Presentación: Consta de dos volúmenes, con tapas flexibles, de 770 paginas el primero y 576 el segundo.

b) Notas históricas: Presenta breves biografías de matemáticos ilustres, con objeto, entre otras cosas, de mostrar la naturaleza de los problemas para cuya resolución fue inventado el Cálculo.

c) Tecnología: Utiliza recursos gráficos y programas de álgebra simbólica, tanto en el texto como en los ejercicios.

d) Gráficos: Contiene un buen número de ellos, generados por ordenador.

e) Ubicación de los ejercicios y problemas: Los capítulos están divididos en secciones; al final de cada sección se propone un buen número de ejercicios. Estos ejercicios tienen características muy similares a los presentados al final del capítulo. Entre ellos se incluyen de tipo calculatorio, de aplicaciones a la Física principalmente y a la Biología y Economía, y otros planteados desde un contexto gráfico. Dichos ejercicios están graduados según su dificultad; algunos requieren de calculadoras u ordenadores.

2.- Organización de contenidos

El primer volumen está conformado por los siguientes capítulos:

1. El plano cartesiano. Funciones.
2. Límites y sus propiedades.
3. Derivación.
4. Aplicaciones de la derivada.
5. Integración.
6. Aplicación de la integración.
7. Funciones logarítmicas y exponenciales.
8. Funciones trigonométricas y sus inversas.
9. Técnicas de integración. Integrales impropias.
10. Series infinitas.

Los siguientes capítulos están contenidos en el segundo volumen:

11. Cónicas.
12. Curvas en el plano, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares.
13. Vectores y curvas en el plano.
14. Geometría analítica y vectores en el espacio.
15. Funciones de varias variables.

16. Integración múltiple.
17. Análisis vectorial.
18. Ecuaciones diferenciales.

3.- Estructura general de los temas

Los temas que vamos a analizar son derivadas sucesivas y series de Taylor.

Las derivadas sucesivas aparecen en el capítulo 3, cuyo contenido es:

3.1.- La derivada y el problema de la recta tangente.
3.2.- Velocidad, aceleración y otras razones de cambio.
3.3.- Reglas de derivación de potencias, múltiplos constantes y sumas.
3.4.- Reglas de derivación de productos y cocientes.
3.5.- La regla de la cadena.
3.6.- Derivación implícita.
3.7.- Razones relacionadas.

El siguiente tema de nuestro interés es polinomios y series de Taylor, que se presenta en el capítulo 10 con el siguiente itinerario didáctico:

10.1.- Sucesiones.
10.2.- Series y convergencia.
10.3.- El criterio integral y las p-series.
10.4.- Comparación de series.
10.5.- Series alternadas.
10-6.- Los criterios del cociente y de la raíz.
10.7.- Polinomios de Taylor y aproximación.
10.8.- Series de potencias.
10.9.- Representación de funciones por series de potencias.
10.10.- Series de Taylor y de Maclaurin.

4.- Tratamiento dado a los temas

- DERIVADAS SUCESIVAS:

Como se observa, introduce la derivada a través del problema de la recta tangente. Considera también el caso de la recta vertical tangente. A continuación se define la derivada de una función *f* en *x* como

$$f'(x) = lím_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

supuesto que exista tal límite.

Con ejemplos calcula las derivadas de tres funciones utilizando la definición. A continuación, a través de un teorema, da la derivada de una función en un punto y define las derivadas laterales para concluir con el teorema que muestra que la derivabilidad implica continuidad.

El tema que nos interesa analizar se encuentra en la sección 3.2; aquí el itinerario didáctico seguido es el siguiente: Movimiento rectilíneo. Velocidad media. Velocidad instantánea. Aceleración. Derivación de orden superior. Otras razones de cambio.

Con mucho detalle comienza explicando el movimiento rectilíneo, la convención de signos (positivo hacia arriba o hacia la derecha), la función posición $s(t)$ que da la posición respecto del origen del móvil como función del tiempo y la razón media de cambio $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, que es la velocidad media.

El ejemplo que presenta es un interesante ejercicio donde, a partir de la función posición $s(t) = -16t^2 + 100$, se pide hallar la razón media de cambio de la altura para tres intervalos de tiempo. En él muestra en una figura la posición en un eje horizontal en que se halla el cuerpo para los tiempos indicados. Esto lo refleja en una tabla *s/t.* A partir de la tabla obtiene los datos necesarios para calcular las razones medias de cambio.

Con esto se aspira a que el alumno adquiera destreza en la codificación de los registros gráficos a los numéricos.

A partir del ejemplo anterior introduce, primero numéricamente y luego con la definición, el concepto de velocidad instantánea como:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t).$$

De la misma manera, así como la velocidad es la derivada de la función posición, la aceleración es la derivada de la función velocidad.

Hay otro ejemplo que merece especial atención; a partir de la función

$$v = \frac{80t}{t+5},$$

se pide comparar en una tabla su velocidad y su aceleración cuando $t = 0, 5, 10$.

Calcula la aceleración utilizando la definición de derivada y luego construye la tabla. De esta tabla es importante que los alumnos analicen lo que sucede en $t = 0$ con la velocidad y la aceleración y lo que sucede con la aceleración cuando la velocidad se estabiliza (para $t > 50$).

Pasa a tratar las derivadas de orden superior diciendo que la segunda derivada es un ejemplo de derivada de orden superior, la tercera derivada es la derivada de la segunda derivada y así sucesivamente. A continuación se da la notación hasta el orden n.

Al analizar los ejercicios que presenta al final de la sección, los hemos agrupado de la siguiente forma:

- ❑ **1-6**: Aquí se da la función y se pide que se calcule la razón de cambio para un intervalo y la razón de cambio instantáneo para los extremos del mismo.
- ❑ **7-14, 25-30**: En su mayoría son aplicaciones a la cinemática; estos problemas no difieren de los presentados en los textos de Física en los mismos temas.
- ❑ **15-18**: Son ejercicios planteados en un contexto gráfico del tipo siguiente:
  - Dada la gráfica de la función posición, esbozar la gráfica de su correspondiente función velocidad.
  - Dada la gráfica de la función velocidad, esbozar la de su correspondiente función posición.
- ❑ **19-24**: Se da la expresión de la función derivada de un determinado orden y se pide hallar la función derivada de algunos órdenes superiores.
- ❑ **31**: En un contexto gráfico se pide que se comparen razones medias e instantáneas de cambio.

Los ejercicios de repaso del final del capítulo son del mismo tipo.

- SERIES DE TAYLOR:

Veamos la sección 10.7. En ella se comienza presentando una imagen algebraica y gráfica de cómo ciertos polinomios se pueden utilizar para aproximar, en un punto y su entorno, otras funciones elementales. Para ello construye un polinomio de primer grado con la condición de que su valor y su pendiente coincidan con los de la función a aproximar en $x = 0$. El siguicnte polinomio lo construye agregando a las condiciones anteriores una más, a saber que los valores de la segunda derivada del polinomio y la función coincidan en $x = 0$. El polinomio de menor grado que satisface las tres condiciones conjuntamente aproxima mejor la función en el punto y su entorno.

El método se extiende a través del ejemplo a polinomios de tercer grado y por último se generaliza para hallar polinomios de grado n, en $x = c$, donde c es arbitrario.

A continuación se define el enésimo polinomio de Taylor y de Maclaurin.

A través de varios ejemplos va presentando los polinomios aproximantes, de diferente grado, para funciones elementales tales como las trigonométricas y logarítmicas. Incluye en algunos ejemplos tablas cuyos elementos se han hallado con calculadora gráfica y ordenador.

Define el resto según Lagrange y demuestra el Teorema de Taylor.

Las aplicaciones que presenta a este teorema son las de determinar la precisión de una aproximación y aproximar un valor funcional con precisión prefijada.

Utiliza en esta sección, entre otros, el concepto de derivada sucesiva como herramienta.

Los ejercicios del final de la sección los podemos agrupar de la siguiente manera:

- ❑ **1-4**: Hacer una correspondencia entre polinomios de Taylor de distintos grados, dados en un contexto analítico con su representación en un contexto gráfico.
- ❑ **5-20**: Hallar polinomios de Taylor o Maclaurin.
- ❑ **21-24**: Se trabaja en un contexto analítico determinando polinomios de distintos grados; luego se pide determinar tablas que permitan comparar los valores de la función en varios puntos con el de los polinomios de distintos grados en dichos puntos. También en el contexto gráfico se pide comparar la función y sus polinomios aproximantes.
- ❑ **25-28**: Calculatorios.
- ❑ **31-34**: Estos problemas están planteados para trabajar con el resto.
- ❑ **29,30,34-37**: Proponen pequeñas demostraciones o cuestiones teóricas.

En la sección 10.10 trata sobre series de Taylor y de Maclaurin.

Como en secciones anteriores el autor abordó el tema de series de potencias; aquí comienza dando un teorema sobre la forma que debe tener una serie de potencias convergente. Indica que como los coeficientes de esta serie de potencias son precisamente los coeficientes de los polinomios de Taylor, la serie se llama serie de Taylor:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c)+f'(c)(x-c)+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots .$$

En el primer ejemplo muestra cómo formar una serie de potencias y resalta el problema de la convergencia que, si bien es un punto sutil, es muy importante; para ilustrarlo da un ejemplo. En una nota hace hincapié en el resultado de un teorema que ha dado anteriormente, que decía que si una serie de potencias converge a $f(x)$, la serie tiene que ser una serie de Taylor. El teorema NO dice que toda serie formada por los coeficientes de Taylor converja a $f(x)$. Se da el teorema que garantiza esa convergencia.

"Si una función f tiene derivadas de todo orden en un intervalo I centrado en c, entonces la igualdad

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

se cumple si y sólo si

$$\text{lím}_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

en todo x de I".

Hace un ejemplo para la función $f(x) = \text{sen}\, x$. En el contexto gráfico muestra tal convergencia utilizando los polinomios de Taylor. Además resalta cuál es la estrategia para hallar una serie de Taylor y da una lista con las series de potencias para varias funciones elementales, ya que ellas facilitan la deducción de una serie nueva. En el último ejemplo hace la siguiente aplicación: Utiliza una serie de potencias para aproximar el valor de una integral con un error menor a un valor prefijado.

Siguiendo la línea de los ejemplos presentados a lo largo del desarrollo, se muestran los ejercicios del final de la sección; éstos ponen claramente de manifiesto la jerarquía del concepto dentro de este curso.

En los ejercicios 1-30 se pide hallar las series de Taylor o Maclaurin para diferentes funciones.

- **31-36, 53-56:** Hay que hallar una aproximación polinómica de una función dada y representar ambas con el ordenador.
- **37-44:** Mediante series de potencias se pide aproximar una integral.
- **57-58:** Se sitúa en un contexto físico, dando la función que describe la trayectoria de un proyectil y pide reescribirla utilizando el desarrollo en serie.

Observamos que en cuanto al tratamiento sobre el Polinomio de Taylor, básicamente los textos revisados siguen la misma secuencia. Primero señalan la importancia del mismo, ya que permiten desarrollar a cierta clase de funciones como polinomios. Construyen el Polinomio y prueban el Teorema de Taylor, que en síntesis significa demostrar que es posible expresar una función con propiedades especiales, como la suma de un Polinomio de Taylor más un resto. Ello se logra en la mayoría de los casos mediante una serie de artificios que, sin duda, restan naturalidad al desarrollo del tema.

En cuanto a la Serie de Taylor en los manuales de Cálculo se presenta como una parte del tema de convergencia de Series Infinitas, ya lo sea en el sentido de la aproximación en intervalos o en vecindades infinitesimales, o propiamente en el ámbito de la convergencia. Esta situación se caracteriza muy nítidamente cuando estudiamos el papel que se le asigna al resto de la fórmula de Taylor.

3.2.- TEXTOS DE FÍSICA DE NIVEL UNIVERSITARIO

TIPLER, P. A. (1995). Física", Vol. 1. Reverté, 3ª Edición.

1.-Características generales del texto

a) Presentación: Consta de dos tomos con una encuadernación en tapas blandas y dimensiones de 21x27 cm^2.

b) Notas históricas : Presenta 18 ensayos, con los cuales trata de proporcionar una visión de las aplicaciones e importancia de la física. Por ejemplo, en el capítulo 7 Ralph Llewellyn relata cómo las leyes de conservación desempeñan un papel crucial en el descubrimiento del neutrino.

c) Tecnología: En el capítulo 5 se incluye una sección sobre métodos numéricos para poder resolver problemas mediante ordenador. Una serie de tales problemas se incluyen al final de cada capítulo.

d) Gráficos: Hay un gran número de gráficos y fotografías, casi todas en color, que a la par de producir un gran impacto visual mejoran la eficacia pedagógica de la ilustración.

e) Ubicación de los ejercicios y problemas: Los problemas planteados al final de cada capítulo se agrupan en tres niveles de dificultad. Los problemas del nivel 1 siguen el orden en que se han desarrollado las secciones en el capítulo y son muy similares a los ejemplos dados. Los problemas del nivel 2 no están divididos por secciones, por lo que requieren una comprensión más profunda. Los problemas del nivel 3 son para los alumnos más avanzados, de esta manera han tratado de que todos los estudiantes encuentren un reto y un estímulo al nivel apropiado de su capacidad o conocimientos.

2.-Organización de contenidos

El primer tomo se divide en tres partes. Parte 1, Mecánica, que consta de los capítulos 2-11. Parte 2, Oscilaciones y ondas, en los capítulos 12, 13 y 14. Parte 3, Termodinámica, subdividida en los capítulos 15, 16 y 17. El capítulo 1 es Sistemas de medida.

Cada capítulo concluye con un resumen, una lista de sugerencias bibliográficas, la revisión y los problemas. La revisión contiene: a) unos objetivos que establecen una lista de conocimientos; b) una relación de términos que el estudiante debe saber identificar y definir; c) un conjunto de cuestiones sobre las que hay que decidir si son verdaderas o falsas.

En un apéndice se expone una revisión general de conceptos matemáticos. A lo largo del texto el tratamiento matemático requerido se incrementa gradualmente. Los conceptos y métodos matemáticos nuevos, motivados por la Física, son aclarados con ejemplos.

3.- Estructura general de los temas

Los temas a analizar se encuentran en el capítulo 2 (p. 20-40) con el siguiente itinerario didáctico:

2.- MOVIMIENTO EN UNA DIMENSIÓN.

2.1. Módulo de velocidad, desplazamiento y velocidad vectorial.

2.2. Velocidad instantánea.

2.3. Aceleración.

2.4. Movimiento con aceleración constante.

2.5. Integración.

Resumen.

Sugerencias bibliográficas, revisión, problemas.

4.- Tratamiento dado al tema

Comienza con una breve introducción sobre lo que trata la cinemática y el método utilizado para su estudio.

A continuación define la velocidad vectorial media de una partícula como

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Se dan ejemplos de tipo numérico que ilustran esta definición. Se presenta una gráfica de $x(t)$ para un movimiento rectilíneo arbitrario, con la que se explica que al considerar los puntos inicial y final p_1 y p_2, respectivamente, y unirlos mediante un segmento, la pendiente de dicho segmento representa la velocidad media $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, dependiendo del tipo elegido.

Se plantean tres cuestiones:

1. ¿Qué sentido hay que dar, si es que lo hay, a la siguiente afirmación?: "La velocidad media del coche a las nueve de la mañana era de 60 km/h".
2. ¿Es posible que la velocidad media de un determinado intervalo sea nula aunque la velocidad media correspondiente a un intervalo más corto incluido en el primero no sea nula? Razonar la respuesta.
3. ¿Cuál es la velocidad media aproximada de los coches de carrera en las pruebas de Indianápolis 500?

La velocidad instantánea se presenta planteando una paradoja.

Nuevamente usando la gráfica de la trayectoria se disminuye el intervalo de tiempo que comienza en t_1 y dice que la velocidad media para este intervalo tiende hacia la pendiente de la recta tangente a la curva en el instante t_1, para concluir que la velocidad instantánea se define como la pendiente de esta recta:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} (derivada).$$

Se hace un breve comentario sobre los signos y acaba diciendo que la magnitud del vector velocidad instantánea se denomina velocidad instantánea, y es un escalar.

Se resuelven dos ejemplos. En el primero se dibuja la trayectoria $x = x(t)$ en cuadrículas y se pide hallar la velocidad instantánea en $t = 2s$. ¿Cuándo es mayor la velocidad? ¿Cuándo es nula? ¿Es negativa alguna vez?

El segundo ejemplo dice: "*La posición de una piedra que a partir del reposo se deja caer desde un acantilado viene dada por $x = 5t^2$, donde x se mide en metros y hacia abajo desde la posición inicial cuando $t = 0$, y t se expresa en segundos. Hallar la velocidad en un instante t cualquiera (Se omite la indicación explícita de las unidades para simplificar la notación)*".

Se muestra la representación gráfica de $x(t) = 5t^2$, donde se han trazado las tangentes correspondientes a los instantes t_1, t_2, t_3. Las pendientes de dichas rectas tangentes van aumentando constantemente, lo que indica que la velocidad instantánea aumenta constantemente en el tiempo. Como se considera instructivo el examen numérico del paso al límite, construye una tabla de desplazamiento y velocidad media para diversos intervalos de tiempo Δt, empezando en $t = 2s$. Se ve que a medida que los intervalos de tiempo disminuyen la velocidad media se aproxima a la velocidad instantánea.

Las cuestiones que se plantean aquí son las siguientes:

1. Si la velocidad instantánea no varía de un instante a otro, ¿diferirán las velocidades medias correspondientes a distintos intervalos?
2. Si $v_m = 0$ durante cierto intervalo de tiempo Δt, ¿debe ser la velocidad instantánea v nula en algún momento del intervalo? Razonar sobre un esquema de una curva posible de x en función de t que tenga $\Delta x = 0$ para algún intervalo Δt.

En el siguiente parágrafo se estudia la aceleración. Define

$$\text{Aceleración media} = a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

cuyas dimensiones son: $[\frac{\text{longitud}}{\text{tiempo}^2}]$.

$$\text{Aceleración instantánea} = a = \lim_{\Delta t \to} \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

pendiente de la recta tangente a la curva $v(t)$.

"*La aceleración es, por tanto, la derivada de la velocidad respecto al tiempo*".

"*Como la velocidad es también la derivada de la posición x respecto a t, la aceleración es la segunda derivada de x respecto a t*":

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\frac{dx}{dt}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Se hace un breve comentario para los casos en que $a = 0$ o $a =$ cte.

Los dos ejemplos y el ejercicio propuesto son de tipo calculatorio y de aplicación de la definición dada anteriormente. Halla las derivadas calculando el límite, por lo que a continuación dice que para calcular rápidamente estas derivadas se usan reglas que se dan en una tabla incluida en el primer apéndice. Recuerda, porque indica que la va a usar muchas veces, la derivada de la función potencial $x(t) = c\, t^2$.

Las ecuaciones importantes, las leyes y las tablas se destacan mediante un fondo de color. Las palabras claves se han impreso en letras negritas. Al final de cada sección del capítulo se incluyen preguntas de reflexión o cuestiones. Algunas de estas cuestiones son de fácil respuesta a partir del texto que las precede, otras pueden servir para la discusión en clase.

Las cuestiones que se plantean a continuación de esta sección son las siguientes:

1. Dar un ejemplo del movimiento en el que la velocidad sea negativa pero la aceleración positiva; por ejemplo, dibujar una gráfica de v en función de t.
2. Dar un ejemplo de movimiento en el que tanto la aceleración como la velocidad sean negativas.
3. ¿Es posible que un cuerpo tenga velocidad nula y aceleración no nula?

Luego se pasa a la sección siguiente: Movimiento con aceleración constante.

"*Una aceleración constante significa que la pendiente de la curva v, función de t, es constante; es decir, la velocidad varía linealmente con el tiempo. Si la velocidad es v_0 en el tiempo $t = 0$, su valor v en un tiempo posterior viene dado por $v = v_0 + at$.*"

A través de consideraciones algebraicas obtiene las siguientes ecuaciones:

$$v_m = \tfrac{1}{2}\,(v_0+v),$$

velocidad media para un movimiento con aceleración constante.

El desplazamiento para un movimiento con aceleración constante es, por tanto,

$$\Delta x = v_m\, t = \tfrac{1}{2}\,(v_0+v)t.$$

Sustituyendo $v = v_0 + at$ en la ecuación anterior, la función posición para un movimiento con aceleración constante queda

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}\, at^2.$$

Trabajando algebraicamente con las ecuaciones anteriores el autor llega a una ecuación de la velocidad en función de x para el mismo movimiento,

$$v^2 = v_0^{\,2} + 2a\, \Delta x.$$

Se resalta la importancia de elegir convenientemente el sistema de coordenadas.

Transcribimos a continuación dos ejemplos:

- Se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 30 m/s. Si está sometida hacia abajo a una aceleración de 10 m/s^2 , ¿cuánto tiempo tardará en alcanzar el punto más alto de su trayectoria? ¿Cuál es la altura máxima?
- ¿Cuál es el tiempo total que permanecerá la pelota del ejemplo anterior en el aire?

Se hace notar a través de las gráficas de $x(t)$ y $v(t)$ en los ejemplos anteriores que para la altura máxima que se alcanza a los tres segundos, la velocidad de la pelota es cero, pero el valor de la pendiente de la curva $v(t)$ no lo es.

A continuación siguen ejemplos de distancia de frenado, ejemplos de problemas de encuentro y las cuestiones siguientes:

- Dos muchachos que están juntos encima de un puente tiran piedras verticalmente contra el agua que pasa por debajo. Tiran dos piedras simultáneamente, pero una choca contra el agua antes que la otra. ¿Cómo puede ser esto si las piedras están sometidas a la misma aceleración
- Se lanza verticalmente una pelota. ¿Cuál es su velocidad en la parte más alta de su trayectoria? ¿Cuál es su aceleración en dicho punto?

En la sección 2-5 se trata la *integración* como el problema inverso a la *derivación*. Se considera el problema de determinar la velocidad y la posición a partir de una aceleración conocida, como se muestra a continuación:

Sea $dv/dt = a$, (a = cte.); por lo tanto, la función más general cuya derivada nos da esta aceleración es $v = at+v_0$ (v_0 = cte.). La función posición, $x(t)$, es aquélla cuya derivada da la velocidad, $dx/dt = at+v_0$, con lo cual: $x(t) = at^2/2 + v_0t + x_0$.

Las constantes que se han añadido reciben el nombre de condiciones iniciales y el problema de "*dado a(t), hallar x(t)*" se denomina problema de valor inicial.

A continuación dice que el problema de la integración está relacionado con el de la obtención del área bajo una curva.

Se considera una gráfica de $v(t)$ en función de t, y en ella una partición de t entre t_1 y t_2, con lo que visualiza la afirmación de que el recorrido total desde t_1 hasta t_2 es el área bajo la curva en este intervalo, que puede obtenerse aproximadamente sumando las áreas de los rectángulos. Matemáticamente escribe esto de la forma siguiente:

Para intervalos de tiempo cada vez más pequeños,

$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i v_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v\, dt$. De la misma forma,

$$\Delta v = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i a_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} a\, dt .$$

Para concluir se hace un resumen de todo lo expuesto en el capítulo mostrando las fórmulas principales. También hay una sugerencia bibliográfica de artículos de físicos destacados y de temas de interés como distancia de frenado, etc.

En el apartado de revisión se da lo siguiente:

A. Objetivos.

B. Definir, explicar o simplemente identificar (a continuación da una lista de palabras clave).

C. Verdadero o falso. Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es. Si es falsa dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación:

- La ecuación $\Delta x = v_0\, t + \frac{1}{2} at^2$ es válida para todo movimiento en una dimensión.
- Si la velocidad es cero en un instante, la aceleración será cero también en ese instante.
- Si la velocidad es cero, la partícula no puede estar moviéndose.
- Si la aceleración es cero, la curva x en función de t es una línea recta.
- La ecuación $\Delta x = v_m\, \Delta t$ es válida para cualquier movimiento unidimensional.

Se plantean 76 problemas con tres niveles de dificultad. Los problemas del Nivel I son relativamente fáciles. Están ajustados a las secciones correspondientes del capítulo. Los problemas del Nivel II requieren mayor comprensión y no están divididos por secciones. Los problemas del Nivel III son los más complejos pensados para los alumnos más avanzados.

ALONSO, M y FINN, E. J. (1995). "Física". Addison – Wesley Iberoamericana.

1.- Características generales del texto

a) Presentación: Es un texto con unas dimensiones de 20 x 25 cm^2, encuadernado en tapas flexibles, que consta de 957 paginas.

b) Notas históricas: Hace una breve referencia al trabajo más notable del científico al comienzo del capítulo donde se desarrolla el tema, incluyendo fotografía.

c) Tecnología: En cuanto a la informática, no propone ejercicios o problemas donde sea especialmente necesaria o recomiende su utilización.

d) Gráficos: Se utilizan muchos gráficos a lo largo del texto. Con ellos se quiere facilitar la comprensión de los conceptos físicos, y en algunos casos minimizar los requisitos matemáticos al alumno.

e) Ubicación de los ejercicios y problemas. Los podemos agrupar de la siguiente manera:

- Aplicación de las fórmulas, de tipo calculatorio: 1, 2, 3, 6, 8, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21-31.
- Resolución en un contexto gráfico o interacción de varios contextos: 4, 5, 9, 10, 12.
- Demostrativo: 7.
- Problema de condiciones iniciales: 11.

2.- Organización de contenidos

El texto se divide en 41 capítulos, abarcando los siguientes contenidos:

1. La estructura de la materia.
2. Mediciones y unidades.
3. Movimiento rectilíneo.
4. Movimiento curvilíneo.
5. Movimiento circular.
6. Fuerza y momentum.
7. Aplicaciones de las leyes del movimiento.
8. Torque y momentum angular.
9. Trabajo y energía.
10. Movimiento oscilatorio.
11. Interacción gravitatoria.
12. Exploración del espacio.
13. Sistemas de partículas: momentum lineal y momentum angular.
14. Sistemas de partículas: Energía.
15. Gases.
16. Termodinámica.
17. Mecánica estadística.
18. Fenómenos de transporte.
19. La teoría de la relatividad.
20. Procesos de alta energía.
21. Interacción eléctrica.
22. Interacción magnética.

23. Estructura eléctrica de la materia.
24. Corrientes eléctricas.
25. El campo eléctrico.
26. El campo magnético.
27. El campo electromagnético.
28. Movimiento ondulatorio.
29. Ondas electromagnéticas.
30. Interacción de la radiación electromagnética con la materia: fotones.
31. Transiciones radiactivas.
32. Reflexión, refracción y polarización.
33. Geometría de las ondas.
34. Interferencia.
35. Difracción.
36. Mecánica cuántica: fundamentos.
37. Mecánica cuántica: aplicaciones.
38. Átomos, moléculas y sólidos.
39. Estructura nuclear.
40. Procesos nucleares.
41. La estructura fundamental de la materia.

3.- Estructura general del tema

Analizamos el capítulo 3, Movimiento rectilíneo, con el siguiente itinerario didáctico:

3.1 Mecánica.
3.2 Sistemas de referencia.
3.3 Movimiento rectilíneo: velocidad.
3.4 Movimiento rectilíneo: aceleración.
3.5 Algunos movimientos especiales.
3.6 Movimiento vertical libre bajo la acción de la gravedad.
3.7 Representación vectorial de la velocidad y la aceleración en el movimiento rectilíneo.
3.8 Composición de velocidades y aceleraciones.

3.9 Movimiento relativo.

4.- Tratamiento dado al tema

En su introducción explica cuál es la parte de la Física que constituye la mecánica y presenta a los científicos que en su época contribuyeron al desarrollo de la misma.

A continuación aclara que reposo y movimiento son conceptos relativos e introduce los sistemas de referencia para describir el movimiento.

Para describir la trayectoria de un objeto considera una relación funcional del tipo $x = x(t)$ y muestra una gráfica del desplazamiento como función del tiempo.

Define velocidad media como

$$v_{\text{med}} = \frac{x'-x}{t'-t} = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

donde $\Delta x = x\text{-}x'$ es el desplazamiento del cuerpo y $\Delta t = t'\text{-}t$ es el tiempo transcurrido.

$$\text{Velocidad instantánea} = v = \text{lím}_{\,\Delta t\text{->}0}\, v_{\text{med}} = \text{lím}_{\,\Delta t\text{->}0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

"Pero ésta es la definición matemática de la derivada temporal de x, es decir,

$$v = \frac{dx}{dt},$$

de modo que la velocidad instantánea es igual a la tasa de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo".

En general, $v = v(t)$. En el caso de que la velocidad permanezca constante, el movimiento es uniforme.

La velocidad también puede determinarse fácilmente a partir de una gráfica de la posición como función del tiempo, es decir, $x = x(t)$. La velocidad media, geométricamente, es la pendiente de la recta secante a la gráfica $x = x(t)$ que pasa por los puntos considerados.

Si deseamos medir la velocidad instantánea en el tiempo t, debemos hallar la pendiente de la tangente a la curva en el punto.

Dada la gráfica de $v = v(t)$ se halla el desplazamiento como el área bajo la curva desde t_0 a t. Para ello se considera una partición de t en intervalos sucesivos pequeños dt_0, dt_1, ... Entonces el desplazamiento total del cuerpo se obtiene de la suma de todos los desplazamientos pequeños, como

$$\text{Desplazamiento} = x\text{-}x_0 = v_0\, dt_0 + v_1\, dt_1 + \ldots = \Sigma_I\, v_I\, dt_I.$$

Si los dt son muy pequeños la sumatoria es equivalente a la integración

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\, dt\,.$$

Se recuerda el signo y las unidades de la velocidad.

A continuación se presentan tres ejemplos. En el primero los datos se dan en una tabla (tiempo-kilometraje); se pide calcular la velocidad media en cada uno de los intervalos. En el segundo ejemplo se da la tabla de datos tiempo-velocidad y la gráfica correspondiente a $v = v(t)$. En ella se han dibujado los rectángulos cuya suma (por defecto) da una estimación de la distancia total desplazada entre la primera observación y la última; esta estimación se mejora si se calcula la velocidad media en cada intervalo.

En el ejemplo 3 se da la ecuación de posición $x = x(t)$ y se pide calcular la velocidad media para intervalos cada vez más pequeños. Esto tiene como objetivo mostrar que a medida que Δt disminuye, la velocidad media se aproxima a la velocidad instantánea.

Movimiento rectilíneo: aceleración.

La aceleración media la define como la pendiente de la recta secante a la gráfica correspondiente a $v = v(t)$,

$$a_{\text{med}} = \frac{v'\text{-}v}{t'\text{-}t}\,.$$

La aceleración instantánea es el límite de la aceleración media cuando el intervalo de tiempo, $\Delta t = t'\text{-}t$, se hace muy pequeño. Esto es,

$$a = \text{lím}_{\Delta t\text{->}0}\, a_{\text{med}} = \text{lím}_{\Delta t\text{->}0}\, \frac{\Delta x}{\Delta t}\,,$$

lo que da como resultado

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{o} \quad a = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

"*La aceleración instantánea es igual a la tasa de cambio de la velocidad con respecto al tiempo*". Luego se hace mención a los signos de la aceleración.

Conocida la aceleración como función del tiempo se calcula el cambio de velocidad, v-v_0, a través de la integral

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt.$$

Esto se ilustra con una gráfica $a = a(t)$, donde se ha considerado una partición en el intervalo de tiempo t-t_0, haciendo la salvedad de que dt_i debe ser muy pequeño y que la sumatoria $\sum a_i dt_i$ es equivalente a la integral $\int_{t_0}^{t} a dt$.

En caso de que la aceleración varíe rápidamente, como en el caso de un cohete, se define la rapidez de cambio de la aceleración con respecto al tiempo, conocida como "*tirón*".

En los ejemplos siguientes se calcula, en el primero, la aceleración media con los datos presentados en la tabla de un ejemplo anterior, y en el segundo, los valores de $v(t)$ y $a(t)$ en cualquier instante y para dos instantes determinados, además de los valores medios para un Δt, todo ello a partir de una función de posición $x(t)$ dada.

A continuación hace mención a algunos movimientos especiales:

a) **Movimiento rectilíneo uniforme.**

$$a = \frac{dv}{dt} = 0.$$

Cuando $v = \text{cte}$, $\quad x = x_0 + \int_{t0}^{t} v\,dt = x_0 + v \int_{t0}^{t} dt.$

Luego representa las gráficas de $v(t)$ y $x(t)$ para el movimiento rectilíneo uniforme.

b) **Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.**

Si $a = \text{cte}$, entonces $v = v_0 + \int_{t0}^{t} a\,dt = v_0 + a \int_{t0}^{t} dt,$

$$x = x_0 + \int_{t0}^{t} [v_0 + a\,(t-t_0)]\,dt = x_0 + v_0 \int_{t0}^{t} dt + a \int_{t0}^{t} (t-t_0)\,dt.$$

Se presentan a continuación las gráficas de $v(t)$ y $x(t)$ para el movimiento uniformemente acelerado.

La relación $x = x_0 + v_0\,(t\text{-}t_0) + \frac{1}{2}\,a\,(t\text{-}t_0)^2$ se puede deducir también calculando el área bajo la gráfica de la velocidad para un cuerpo que se mueve con aceleración uniforme. Esto se ilustra en una gráfica y la deducción se hace geométricamente.

Para finalizar se hace un resumen de las ecuaciones del movimiento rectilíneo.

En el ejemplo siguiente se dan como datos la velocidad y la desaceleración (que permanece constante) y se calcula la distancia a la que deben aplicarse los frenos para que un tren se detenga en la estación, y el tiempo que tarda en detenerse.

c) **Movimiento vertical libre bajo la acción de la gravedad.**

Hace las consideraciones sobre la aceleración que experimentan los cuerpos al caer bajo la acción de la gravedad, dando su valor y la convención de signos que adopta:

$a = -g = -\,9.8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, tomando como sentido convencional positivo hacia arriba.

$a = g = 9.8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, si se toma como sentido positivo hacia abajo.

Para los dos casos se consideran las ecuaciones para el movimiento uniformemente acelerado y se resuelven los dos ejercicios que a continuación se transcriben:

- Ej. 3.7 – *Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 98 m s^{-1} desde la cima de un edificio de 100 m de altura. Hallar el tiempo necesario para que la pelota alcance su altura máxima sobre el piso, el valor de la altura, el tiempo total transcurrido antes de que la pelota llegue al suelo y su velocidad en ese instante.*
- Ej. 3.8 – *Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 50 m s^{-1}. Dos segundos después se lanza otra pelota hacia arriba con la misma velocidad. ¿A qué altura y en qué tiempo se encontrarán? ¿Cuál será su velocidad cuando se encuentren?*

El último ejemplo muestra la importancia de mantener una orientación consistente de los ejes a lo largo de todo el problema.

Representación vectorial de la velocidad y la aceleración en el movimiento rectilíneo.

Se considera el movimiento rectilíneo horizontal y vertical y las relaciones vectoriales entre velocidad y aceleración en todos los casos, a través de diagramas vectoriales.

Composición de velocidades y aceleraciones

Trata el tema ilustrándolo con un móvil sujeto a distintos agentes, donde cada uno de ellos le imprime una velocidad y/o aceleración diferente, como es el caso de un bote que se mueve con una cierta velocidad y donde el agua a su vez fluye con cierta rapidez.

Se desarrollan dos ejemplos sobre el mismo fenómeno y un tercer ejemplo sobre la aceleración de un cuerpo que se desliza a lo largo de un plano inclinado.

Por último se desarrolla el tema del movimiento relativo. Se da el caso de dos objetos que se mueven con velocidad v_A y v_B respecto de un origen de coordenadas y sus velocidades relativas:

$$v_{BA} = v_B - v_A \text{ y } v_{AB} = v_A - v_B.$$

De manera parecida sucede con las aceleraciones.

Hay un ejemplo con dos aviones donde, conocidas sus velocidades relativas al suelo, hay que hallar las velocidades relativas de uno respecto al otro.

Para cerrar hay una nota sobre la edad del universo; estas notas que se suceden a lo largo del texto son explicaciones más detalladas o extensiones del mismo.

Siguen ocho preguntas que son del tipo siguiente:

-*¿Qué se quiere decir con "el movimiento es relativo"*?

-*¿Por qué la velocidad y la aceleración son cantidades vectoriales*?

Se proponen 32 problemas, y al final del texto se dan los resultados de los números impares.

Los problemas siguen el orden en que se desarrollan los contenidos y su nivel de dificultad está de acuerdo a los mismos.

3.3.- TEXTOS DE MATEMÁTICAS DE NIVEL MEDIO

DE GUZMÁN, M.; COLERA, J. y SALVADOR, A. (1990).
"Matemáticas". Bachillerato 2 (BUP). Anaya.

1.- Características generales del texto

a) Presentación: es un libro de texto con mucho colorido. Cada tema comienza con una página inicial que sirve de introducción y al final aparece la "Revista", cuya finalidad, en palabras de los autores, es motivar, interesar, entretener y, en algunas ocasiones, completar las visiones históricas de las introducciones.

b) Notas históricas: Las notas históricas y la biografía de los matemáticos más relevantes aparecen, de forma amena, en la Introducción y la Revista.

c) Tecnología: Propone el uso de la calculadora para realizar operaciones.

d) Gráficos: El texto se encuentra ilustrado por un buen número de gráficos, con color y tamaño adecuado.

f) Ubicación de los ejercicios y problemas: Aproximadamente un 20% de los ejercicios que presenta al final de cada tema analizado se sitúan en el contexto físico, predominando el marco algebraico. El resto se plantean en el contexto matemático, donde se hallan representados fundamentalmente los marcos algebraico, numérico y geométrico.

2.-Organización de contenidos

El texto contiene siete bloques temáticos: Sucesiones, Trigonometría, Funciones, Derivadas, Integrales, Funciones exponenciales y logarítmicas y Geometría. Cada bloque incluye una Introducción, y dos, tres o cuatro temas, cada uno seguido de la correspondiente Revista.

3.- Estructura general de los temas

Nos ocuparemos del cuarto bloque: Derivadas, que contiene los temas 10 y 11.

Tema 10. Concepto de derivada.

Tasa de variación media.

Derivada de una función en un punto.

Ejercicios del tema.

Revista matemática.

Tema 11. Función derivada.

La derivada como función.

Algunas reglas para el cálculo de derivadas.

Funciones derivables y no derivables.

Ejercicios del tema.

Revista matemática.

4.- Tratamiento dado a los temas

Queremos destacar una situación que plantea en la introducción que nos parece muy interesante, tanto como motivación para el concepto correspondiente en la asignatura de Matemáticas como el que corresponde al de Física.

"*Al lanzar un cohete de verbena verticalmente hacia arriba, su altura siguió la ecuación*

$$h = t^3 - 9t^2 + 24t$$

durante un vuelo que duró 10 s. Debido a un fallo de la pólvora, el cohete que estaba subiendo pierde altura, luego se recupera y sube de nuevo. ¿En qué instante el cohete cambia el sentido de su marcha?"

El tema 10 comienza presentando el gráfico de una función sobre una cuadrícula donde los ejes están graduados. Esto le permite calcular las pendientes de las rectas tangentes en varios puntos. Continúa con el estudio de la tasa de variación media utilizando el cálculo de la velocidad media para su introducción; a continuación la define y resuelve tres ejemplos.

Se proponen siete ejercicios que podemos clasificar de la siguiente manera: el primero y el cuarto están planteados a partir de un marco gráfico, el tercero a partir de una tabla. En el problema 6 se trata de describir una experiencia real. En los restantes el marco utilizado es el algebraico, y a partir de la expresión analítica de la función llega al cálculo de la tasa de variación media.

Para entrar en el estudio de la derivada de una función en un punto utiliza como motivación el movimiento uniformemente acelerado a través de la siguiente situación:

"*Un tenista da un fuerte raquetazo a una pelota verticalmente hacia arriba. La altura de la bola, en función del tiempo obedece a la ecuación*

$$a = 30t - 5t^2$$

y queremos saber la velocidad que lleva 2 segundos después del golpe."

Resuelve primero el problema de forma gráfica y luego lo generaliza a partir de la expresión analítica de la función; acaba dando la regla de los cuatro pasos.

Los tres ejemplos que plantea a continuación son aplicación de la regla anterior.

Se plantean doce ejercicios, que clasificamos de la siguiente manera: cuatro son para aplicar la definición de derivada, siendo conocida la función en forma analítica; en otros dos se pide hallar la tangente para valores determinados y dentro del mismo marco que los anteriores; cinco están planteados desde el marco gráfico y otro desde el contexto físico.

Los catorce ejercicios que se plantean al final del tema son del mismo tipo que los anteriores. Entre ellos aparecen dos planteados desde un marco geométrico, uno desde la Biología, cuatro desde la Física. En otro se pide completar un cuadro con el cálculo de los cocientes finitos. En los restantes se deben hallar rectas tangentes, secantes y tasa de variación media para funciones, cuyas expresiones vienen dadas en forma analítica y en puntos predeterminados.

En el tema 11 halla, para una función polinómica de segundo grado y a partir de la definición de derivada en un punto, la ecuación de la recta derivada de aquella. Por último, aplica la regla de los cuatro pasos en un punto cualquiera para mostrar que se obtiene la ecuación de una función que para este caso es la ecuación de la recta. Con esto resuelve la cuestión planteada inicialmente, que nos pareció muy motivadora.

Continúa con el segundo punto dando las reglas para el cálculo de derivadas; se refiere siempre a derivadas de primer orden. Entre los ejercicios propuestos, hay uno planteado en el contexto físico y otro en el biológico. Haremos referencia al primero, su enunciado dice:

"El espacio y, en metros, recorrido por una moto (que acaba de arrancar) en un tiempo t, en segundos, viene dado por la formula $y = 2t^2 + 5t$.

a) *Calcular lo que indica el velocímetro cuando t = 2 segundos.*
b) *Encuentre la función velocidad (ayuda: se trata de derivar la función espacio respecto a la variable tiempo).*
c) *Calcular la velocidad cuando ha recorrido 3 metros."*

Queremos hacer notar, una vez más, que en Física la terminología de *espacio*, *posición*, *desplazamiento*, *trayectoria*, *ecuación de movimiento,* que conceptualmente son diferentes pero que en algunas circunstancias pueden coincidir (para algunos intervalos y bajo algunas condiciones), constituyen un obstáculo para el alumno y, por lo tanto, hay que ser cuidadosos con la precisión en el lenguaje.

Se acaba desarrollando el tema pero en ningún momento se habla de derivadas sucesivas ni se llega mas allá de la función derivada primera.

COLERA, J.; OLIVEIRA, M. J. y GARCÍA, R. (2001). "Matemáticas II". Anaya

1.- Características generales del texto

a) Presentación: El texto consta de 415 páginas con una encuadernación en tapas blandas. Tiene varios tipos de letras; los conceptos más importantes quedan resaltados en letra negrita o dentro de cuadros de color amarillo y el resto del texto tiene el mismo tamaño y tipo de letra.

b) Notas históricas: Contiene una doble página de notas históricas al comienzo de cada bloque de unidades y alguna pequeña referencia histórica en los márgenes de las páginas.

c) Tecnología utilizada: Para resolver los ejercicios propuestos es necesario el uso de calculadora, aunque el libro no hace referencia a ello. No se requiere el uso de sistemas informáticos para la resolución de los problemas matemáticos que contiene este texto.

d) Gráficos y figuras: Contiene abundantes tablas, gráficos y dibujos para facilitar la compresión de los conceptos y el manejo adecuado de los conocimientos.

e) Ubicación de los ejercicios y problemas propuestos: A continuación de la teoría y al final de cada unidad hay ejercicios propuestos para valorar si el alumno es capaz de aplicar los conceptos estudiados con anterioridad. En el último apartado de la unidad y junto a los ejercicios propuestos aparecen ejercicios resueltos, destacados con un cuadro verde, que facilitan la asimilación de la teoría expuesta.

2.- Organización de contenidos

El manual se inicia con unas páginas dedicadas a la resolución de problemas, donde aparecen técnicas con la finalidad de facilitar esta tarea.

El texto queda dividido en 14 unidades agrupadas en tres bloques temáticos. Las unidades, a su vez, se subdividen en apartados. Los temas a tratar en cada unidad son:

Bloque I. Álgebra

Unidad 1. Sistemas de ecuaciones. Método de Gauss.

Unidad 2. Matrices.

Unidad 3. Determinantes.

Unidad 4. Resolución de sistemas mediante determinantes.

Bloque II. Geometría

Unidad 5. Vectores en el espacio.

Unidad 6. Rectas y planos en el espacio.

Unidad 7. Problemas métricos en el espacio.

Unidad 8. Lugares geométricos en el plano y en el espacio. Cónicas.

Bloque III. Funciones

Unidad 9. Límites de funciones. Continuidad.

Unidad 10. Derivadas. Técnicas de derivación.

Unidad 11. Aplicaciones de las derivadas.

Unidad 12. Representación de funciones.

Unidad 13. Cálculo de primitivas.

Unidad 14. La integral definida. Aplicaciones.

3.- Estructura general del tema.

El tema que se quiere analizar ocupa dos unidades del texto, que corresponden a las unidades 10 y 11. Los apartados que las conforman son:

Unidad 10. Derivadas. Técnicas de derivación.

10.1. Derivada de una función en un punto.

10.2. Función derivada.

10.3. Reglas de derivación.

10.4. Estudio de la derivabilidad utilizando las reglas de derivación.

10.5. Derivada de la función inversa o recíproca de otra.

10.6. Nuevas técnicas de derivación.

10.7. Demostración de las fórmulas de derivación.

Unidad 11. Aplicaciones de las derivadas.

11.1. Recta tangente a una curva en uno de sus puntos.

11.2. Información extraída de la primera derivada.

11.3. Información extraída de la segunda derivada.

11.4. Optimización de funciones.

11.5. La derivada para el cálculo de límites: Regla de l'Hôpital.

11.6. Dos importantes teoremas.

11.7. Aplicaciones teóricas del teorema del valor medio.

Ubicación y extensión que ocupa el tema en la exposición general del texto: Los apartados que se va a analizar de forma más específica son el 10.2 y el 10.3 y del 10.2 derivan dos apartados que aparecen en la unidad 11:

10.2. Función derivada.

10.3. Reglas de derivación.

11.2. Información extraída de la primera derivada:

- Crecimiento y decrecimiento de funciones.
- Relación del crecimiento de una función con el valor de su derivada.
- Criterio para identificar tramos crecientes o decrecientes a partir del signo de la derivada.
- Máximos y mínimos relativos. Definición.
- Condición necesaria de máximo o mínimo relativo en funciones derivables.
- Regla para identificar extremos relativos.

11.3. Información extraída de la segunda derivada.

- Definición de concavidad, convexidad y punto de inflexión.
- Relación de la curvatura con la segunda derivada.
- Criterio para detectar el tipo de curvatura.
- Aplicación a la identificación de máximos y mínimos.

El primer apartado (10.2) ocupa una página, mientras que de los apartados del tema 11, el primero ocupa 3 páginas y el segundo 2 .

4.- Tratamiento dado al tema (derivadas sucesivas)

- Forma de introducirlo.

La unidad 10 comienza dando la definición de la derivada de una función en un punto:

"El límite $\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, *si existe y es finito, se llama* ***derivada de la función f en*** x_0 *y se designa* $f'(x_0)$*"*

Este apartado presenta una gráfica que ilustra la ecuación anterior, luego continúa exponiendo:

$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$; *$f'(x_0)$ significa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$, en el punto de abscisas x_0.* ***Si existe $f'(x_0)$ se dice que f es derivable en x_0.***

Salvo alguna excepción, las funciones conocidas son derivables en todos los puntos en los que están definidas.

Para introducir las derivadas sucesivas da las siguientes definiciones:

"Si una función, f, es derivable en todos los puntos de un intervalo, I, la función $f': x \to f'(x)$ *definida en I, se llama* ***función derivada*** *de f."*

"Si f' es derivable, su derivada se llama f'' (se lee ***f segunda****). Así, sucesivamente, se definen* f''', f^{IV}, ... f^{n} *(f tercera, f cuarta, f n-ésima)."*

"La función derivada, $f'(x)$, puede obtenerse directamente de $f(x)$ aplicando la definición:

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, *es la derivada en un punto x que permanece variable."*

En el apartado 10.3, se exponen las reglas de derivación.

En el apartado 11.2 (p. 301) se muestra la información que nos proporciona la primera derivada sobre las características de la función como son: crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos. En la mayoría de los casos se conoce la forma analítica de la función.

En el apartado 11.3 (p. 304) se estudian las características de las funciones extraídas de la segunda derivada como la concavidad y los puntos de inflexión. En la mayoría de los casos se conoce la expresión analítica de la función.

- Tipos de ejemplos:

Incluye ejemplos que se plantean en un marco numérico y se sitúan en un contexto puramente matemático; presenta abundantes gráficas.

Tras hablar del concepto de derivadas, en el apartado 10.1 (p. 276) se plantean dos ejercicios, que son de aplicación de una fórmula y, por tanto, algorítmicos. El mismo tipo de ejercicios ilustran las secciones 10.2, 11.2 y 11.3. A modo de ejemplo presentamos algunos.

- Ejercicios (p. 276)

1) Si $f(x) = x^2$, *hallar su derivada en* $x_0 = 1$.

2) Si $f(x) = \sqrt[3]{x}$, *hallar su derivada en* $x_0 = 0$.

- Ejercicio 1 (p. 278)

Dada la función $f(x) = 5x - x^2$,

a) Hallar su función derivada, $f'(x)$, *mediante el límite del cociente incremental.*

...

e) Hallar las derivadas sucesivas $f''(x), f'''(x),...$

- Ejercicio 1 (p. 305)

Estudiar la curvatura de la función $f(x) = x^3+3x^2$.

- Tipos de ejercicios y problemas propuestos al final de la sección.

Al final de la sección 10.3 presenta 5 *ejercicios propuestos*. Todos estos ejercicios son de tipo algorítmicos, que consisten en calcular derivadas utilizando las reglas de derivación. En la sección 11.2 hay 3 ejercicios propuestos y en la 11.3 hay dos. Son del mismo tipo; presentamos a continuación un enunciado.

- Ejercicio 1 (p. 305)

Estudiar la curvatura de la función $y = 3x^4 - 8x^3+5$.

- Tipo de ejercicios y problemas propuestos al final del capítulo.

La mayoría son del mismo tipo que los anteriores. Hay dos apartados, uno con ejercicios resueltos y otro con ejercicios propuestos. En la unidad 10 los ejercicios propuestos son 79 y están divididos en 36 ejercicios *para practicar*, 26 ejercicios *para resolver*, 7 *cuestiones teóricas*, 9 *para profundizar* y 1 *para pensar un poco más*.

A continuación mostramos algunos enunciados.

- Ejercicio 7 (p. 291, resuelto)

Prueba que existe un punto de la curva $y = arc\,tg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ *en el que la tangente a esa curva es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.*

- Ejercicio 33 (p. 294, propuesto)

Dada la función $f(x) = e^{senx}$, *halla* $f'(x), f''(x)$ *y* $f'''(x)$.

- Ejercicio 36 (p. 294, propuesto)

Calcula las derivadas primera, segunda y tercera de la función $f(x) = 4\ln x - x^3 + 1$ *en el punto* $x = 1$.

En la unidad 11 presenta 15 problemas resueltos y 94 ejercicios y problemas propuestos; estos últimos se dividen en 12 *para practicar*, 46 *para resolver*, 28 *cuestiones teóricas*, 6 *para profundizar* y 2 *para pensar*.

La mayoría son de tipo algorítmico, dados en el contexto matemático y en el marco analítico. Seleccionamos uno para transcribir, dentro de los clasificados para profundizar, porque está planteado en el marco gráfico.

- Ejercicio 92 (p. 327)

De la función f(x) definida en $[-3,3]$ *se conoce su gráfica.*

a) Estudiar la continuidad de la función.

b) Estudiar la derivabilidad de la función.

c) Dibujar razonadamente la gráfica de f'(x).

3.4- REVISIÓN DE TEXTOS DE FÍSICA DE NIVEL MEDIO

CANDEL, A.; SATOCA, J.; SOLER, J, B. y TENT, J. J. (1991).
"Física y Química". Bachillerato 2 (BUP). Anaya.

1.- Características generales del texto

a) Presentación: Se trata de un libro lleno de colorido con un buen numero de figuras, gráficos y diagramas. El texto se ha estructurado en nueve unidades; en cada unidad se distinguen tres partes:

1- Una doble página de presentación del tema.

2- Temas que se desarrollan en la unidad.

3- Práctica de laboratorio.

b) Notas históricas: Cada tema se cierra con una doble página denominada "complementos", donde se presentan breves notas históricas y bibliográficas sobre los temas y personajes más relevantes tratados en él. Además, en el mismo se ofrecen comentarios de textos científicos, libros comentados, prácticas sencillas, pasatiempos y ejercicios de mayor nivel.

c) Tecnología: Al final de cada unidad el autor propone una PRÁCTICA. En ella se describen todos los pasos a seguir y el material empleado, que en su mayoría es de tipo casero. No se proponen tareas en las que sea necesario el uso de calculadora u ordenador.

d) Gráficos: Los temas se ilustran a través de figuras y gráficos con mucho color.

e) Ubicación de los ejercicios y problemas: Hay un número elevado de ejercicios que se resuelven a través de cálculos después de aplicar las fórmulas correspondientes a los conceptos estudiados.

2.- Organización de contenidos

El libro presenta 23 temas agrupados en nueve unidades, las seis primeras corresponden a Física y las restantes a Química. Las unidades son las siguientes:

Unidad I. La ciencia y su método. El proceso de medida.

Unidad II. La cinemática.

Unidad III. La dinámica.

Unidad IV. El trabajo y la energía.

Unidad V. Las ondas.

Unidad VI. Electromagnetismo.

Unidad VII. La materia. El átomo. Los enlaces.

Unidad VIII. La reacción química.

Unidad IX. La química del carbono

3.- Estructura general de los temas

Analizaremos la unidad II, que está dividida en dos temas que abarcan los siguientes títulos:

Tema 3. Magnitudes de movimiento

- ¿Qué es el movimiento?
- Medimos la rapidez del movimiento: la velocidad.
- La velocidad en un instante y la velocidad media.
- Mejorando la presentación: gráfica *v-t*
- Aceleración.

Tema 4. Tipos de movimiento

- El movimiento rectilíneo uniforme.
- El movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.
- Como medir distancias en el M.R.U.A.
- Caída libre: un ejemplo de M.R.U.A.
- El movimiento circular uniforme.
- Práctica.

4.- Tratamiento dado a los temas

La cinemática está dividida en dos temas. En el primero comienza dando definiciones intuitivas de movimiento, movimiento relativo, sistema de referencia, desplazamiento y distancia recorrida. No se utilizan vectores, sólo una breve referencia para señalar que para especificar el cambio de posición de un cuerpo no basta con indicar la distancia recorrida, sino que debe indicarse también la dirección y el sentido en que se produce el desplazamiento. Si bien se ilustra todo esto con una figura, hay que destacar que a la palabra **desplazamiento** se la ha utilizado con dos significados.

Como ejemplo se presenta una gráfica posición-tiempo a través de una líneas rectas quebradas que forman cuatro vértices. Destaca con letra más oscura que la gráfica no debe confundirse con la trayectoria del móvil.

A continuación propone como ejercicio construir la gráfica posición-tiempo para el caso de un tren que se acerca a una estación, se detiene y luego sigue su camino.

Continúa definiendo **la velocidad como el espacio recorrido por unidad de tiempo.**

Como primer ejercicio se propone hallar la velocidad de tres vehículos a través de tres gráficas posición-tiempo. Las gráficas corresponden a rectas con distintas pendientes. En el segundo ejercicio la gráfica es una parábola; se intenta que el alumno vea que en este caso la velocidad varía cuando lo hace el intervalo de tiempo escogido.

Más adelante se introduce la definición de velocidad media y de velocidad instantánea (siempre intuitiva y sólo considerando magnitudes escalares). Para esta última dice:

"*Para determinar la velocidad en un instante, iremos calculando la velocidad media, que corresponde a intervalos de tiempo cada vez menores, procurando que estos intervalos incluyan el instante que se considera*".

"*A este proceso en matemática se le llama paso al límite. Por lo tanto la velocidad instantánea es* $v = lím_{t->0} v_m$".

Presenta el gráfico velocidad-tiempo compuesto por cuatro tramos, los tres primeros son líneas quebradas y el último una curva.

Se proponen tres ejercicios, el primero consiste en dibujar el gráfico velocidad-tiempo de un autobús que se acerca a un peatón situado en la parada del autobús. El segundo ejercicio pide dibujar la grafica velocidad-tiempo a partir de una gráfica posición-tiempo. Y por último, dada la gráfica velocidad-tiempo se pide dibujar la posición-tiempo correspondiente.

A continuación explica e ilustra el carácter vectorial de la velocidad.

La aceleración se define como $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{\Delta t}$, remarcando que al igual que la velocidad, la aceleración es una magnitud vectorial. Distingue entre aceleración tangencial y aceleración normal o centrípeta.

Los ejercicios propuestos aquí son, el primero de carácter gráfico, determinar la aceleración para distintos intervalos de tiempo en un gráfico velocidad-tiempo. El segundo, de carácter numérico, cuyo resultado es una aceleración negativa y se le pide al lector interpretar el signo. Y el último es una cuestión.

Al final del tema se proponen 10 ejercicios de revisión. Cuatro de ellos están planteados desde un contexto gráfico, otro desde un contexto numérico a través de una tabla y los restantes desde un contexto predominantemente físico.

Los únicos conceptos matemáticos de los que hacen uso explícito los autores, son las operaciones matemáticas elementales.

En el siguiente tema el autor muestra los diferentes tipos de movimientos. Comienza haciendo referencia al movimiento rectilíneo y uniforme, definiendo la velocidad como $v = \frac{(s - s_0)}{(t - t_0)}$; de aquí obtiene $s - s_0 = v(t - t_0)$, que proporciona la distancia recorrida en el intervalo de tiempo considerado.

En el ejemplo que sigue proporciona los datos a través de una tabla tiempo/posición. ¿Se trata de un movimiento uniforme?. Responde a esta pregunta diciendo que al ser un movimiento rectilíneo basta con comprobar que el módulo de la velocidad no varía. En una tabla presenta para distintos intervalos de tiempo la distancia recorrida y la velocidad correspondiente, en la que puede verse que ésta toma para todos los intervalos calculados el mismo valor. A continuación presenta los dos gráficos, la velocidad en función del tiempo y la posición en función del tiempo.

En los ejemplos que le siguen se pretende hacer reflexionar al alumno a la hora de aplicar las fórmulas y construir las gráficas.

Por último propone tres cuestiones y un ejercicio, donde los datos están dados en una tabla.

Sigue con el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, diciendo: *"la ecuación que nos define este movimiento es a* = cte."

Con un ejemplo, a través de las tablas tiempo/velocidad, intervalo de tiempo/cambio de velocidad/aceleración, muestra que en todos los intervalos de tiempo el valor de la aceleración es el mismo.

Sobre la relación entre la velocidad y el tiempo dice "*no tiene sentido hablar de la velocidad del movimiento, sino de la velocidad en cada instante*"; luego, a partir de la definición de aceleración, $a = \frac{(v - v_0)}{(t - t_0)}$, deduce la fórmula que da la velocidad en un instante t, $v = v_0 + a(t - t_0)$. A continuación representa el gráfico *v-t* para el ejemplo anterior. El ejemplo que sigue sirve como entrenamiento para utilizar las fórmulas. Hay ocho ejercicios propuestos, de los cuales tres se resuelven aplicando las fórmulas y en los restantes están presentes para su resolución los contextos físico, gráfico y aritmético.

Para hallar la distancia recorrida en el M.R.U.A. parte de la gráfica *v-t* y halla el área de la misma manera como lo hizo para el M.R.U., llegando a que la posición en cualquier instante viene dada por

$$s = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 .$$

Tomando los datos de un ejemplo anterior obtiene la gráfica de $s(t)$, que viene representada por una parábola. Aquí, en la pagina 47 del texto, se desliza un error al decir: "*Puesto que todo M.R.U.A. responde a esta ecuación, el gráfico s-t de estos movimientos será siempre una parábola cuyo eje de simetría será el de ordenadas(eje vertical), o el de abcisas (eje horizontal), según que la aceleración sea positiva o negativa (movimiento de frenado)*". En realidad siempre tendremos una parábola con eje vertical, abierta hacia los valores positivos o negativos según sea el signo de la aceleración.

El ejemplo y el ejercicio que hay a continuación son de aplicación de fórmulas. Siguen 5 cuestiones. Como aplicación de este último movimiento considera el caso de la caída libre. Termina el tema 4 con el movimiento circular uniforme.

Los trece problemas presentados al final del tema como ejercicios de revisión son del mismo tenor que los planteados al desarrollar el mismo. Se nota la preocupación por presentar enunciados que planteen situaciones reales.

CANDEL, A.; SATOCA, J.; SOLER, J, B. y TENT, J. J. (1992). "Física y Química". Bachillerato 3 (BUP). Anaya.

1.- Características generales del texto

a) Presentación: Este manual es de los mismos autores que el analizado para el curso anterior; por lo tanto, mantiene sus mismas características y estructura organizativa.

2.- Organización de contenidos

Consta de 22 unidades, que a su vez se dividen en temas; en total hay 23 temas.

3.- Estructura general de los temas

Haremos una descripción de la primera unidad, que es donde se desarrollan los temas de nuestro interés.

Unidad I. Cinemática.

Tema 1. Magnitudes cinemáticas.

- A qué llamamos vector.
- Operaciones básicas con vectores.
- ¿A qué llamamos movimientos? Sistema de referencia.
- A qué llamamos velocidad.
- ¿Qué es la aceleración?

Tema 2. Estudio del movimiento.

- Cuándo el movimiento es rectilíneo y uniforme.
- Cuándo el movimiento rectilíneo se acelera.
- Composición de movimientos.
- Movimiento armónico simple.
- Práctica.

4.- Tratamiento dado a los temas

El primer tema comienza definiendo vector, operaciones básicas, momento de un vector respecto de un punto y derivada de un vector; esta última lo hace de la siguiente manera:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = lím_{\Delta t -> 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \cdots = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}.$$

A continuación se dan las reglas de derivación más importantes.

El desarrollo del resto de los temas se efectúa formalmente con la notación vectorial, siguiendo el orden previsto. Al definir la velocidad instantánea como

$\vec{v} = lím_{\Delta t \to 0}\vec{v}_m$, dice *"Este proceso es el cálculo de la derivada del vector posición con respecto al tiempo,* $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$*".*

En el ejemplo que sigue se pide calcular la velocidad media, módulo, velocidad instantánea dada la ecuación de movimiento de un objeto en forma vectorial. Luego se propone un ejercicio con los mismos ítems, donde la ecuación de movimiento está expresada a través de sus funciones componentes. Por último hay tres cuestiones.

Para el caso de la aceleración procede de la misma manera, concluyendo que la aceleración es la derivada del vector velocidad, y por tanto resulta ser la segunda derivada respecto al tiempo del vector posición. El ejemplo siguiente consiste en calcular la aceleración media e instantánea y su módulo cuando se conoce la ecuación vectorial del movimiento. El ejercicio propuesto es igual, pero en este caso lo que se da son las componentes de la velocidad. Siguen dos cuestiones.

Los ejercicios de revisión están planteados desde un contexto físico, siendo su resolución de tipo operatorio en la mayoría de los casos.

En el segundo tema se estudian los tipos de movimiento. Se sigue el mismo esquema del texto anterior formalizando a través de la notación vectorial. Se revisan los gráficos posición-tiempo y velocidad-tiempo. El ejemplo que sigue es un caso de encuentro; a continuación se plantea un ejercicio y cuatro cuestiones. En la última cuestión se pide señalar el tipo de movimiento que corresponde a un gráfico posición-tiempo y velocidad-tiempo. Para el primer caso aparece una recta de pendiente negativa, para el segundo la recta es horizontal cortando al eje de las ordenadas en un valor negativo. Esta es la primera gráfica donde la velocidad es negativa.

Para el caso del movimiento rectilíneo acelerado, simplifica los cálculos haciendo coincidir uno de los ejes con la dirección del movimiento y siguiendo un tratamiento escalar del problema.

Para determinar la ecuación del movimiento parte de la definición de aceleración, $a = \frac{dv}{dt}$, que según dice se puede escribir como $dv = adt$. Se les presenta aquí un conflicto con lo estudiado en Cálculo, ya que en aquél se les dice que este cociente es una notación en su conjunto que no tiene sentido separarlo. Continúa diciendo *"integrando entre los instantes* t_0 *(en que la velocidad es* v_0*) y t (en que la velocidad es v), resulta* $v - v_0 = a.(t - t_0)$*."*

Sigue el mismo camino a partir de la definición de velocidad, $v = \frac{d}{t}$.

Escribe $dr = v\, dt$; reemplaza v por la expresión obtenida anteriormente y dice *"integrando de nuevo entre los mismos límites, resulta* $r\text{-}r_0 = v(t\text{-}t_0)+1/2\ a(t\text{-}t_0)^2$*"* Como r, v, y a tienen la misma dirección escribe la última ecuación en notación vectorial.

Los límites de integración aparecen un tanto súbitos; esto explicaría por qué los alumnos integran pero no consideran los límites de integración, ni hacen referencia a las condiciones iniciales del problema; todo esto carece de significación para ellos.

Revisa los gráficos posición-tiempo y velocidad-tiempo. En el primero presenta una parábola con vértice en el origen, que se abre hacia el eje positivo de las ordenadas.

En el segundo la recta tiene pendiente positiva con una ordenada al origen también positiva. Los gráficos presentan pocas variaciones.

El ejemplo siguiente es de encuentro para el caso del movimiento vertical. Propone luego, como ejercicio, lo mismo que el anterior pero ahora cambiando el sistema de referencia y llevándolo al punto desde donde se deja caer la segunda pelota. Se dan cinco ejercicios más. El último presenta, en un gráfico posición tiempo, una parábola con eje paralelo al de ordenadas, con vértice en un punto del primer cuadrante, que se abre hacia los valores negativos del eje de ordenadas. El segundo gráfico es velocidad-tiempo y en él se dibuja un segmento de recta con pendiente negativa que va desde (0, v) hasta (t, $-v$); se pide describir el movimiento e indicar un movimiento real que corresponda con estos gráficos.

Continúa con composición de movimientos y, por último, con el *movimiento armónico simple.* Este movimiento queda claramente ilustrado en el texto por una figura que muestra un objeto colgado de un muelle que oscila alrededor de la posición de equilibrio, al separarlo de ésta y dejarlo en libertad. Destaca una característica de este movimiento y es que *"la aceleración del mismo no es constante"*. Para hallar la ecuación de movimiento utiliza como recurso el movimiento circular uniforme, con lo que llega a determinar que la ecuación de movimiento de un objeto, que describe un movimiento armónico simple de periodo T y amplitud A, tiene como expresión

$$y = A \text{ sen } (\frac{2\pi}{T}t).$$

La velocidad y la aceleración las obtiene derivando.

Destacamos que una vez que ha conseguido la fórmula, muestra la gráfica correspondiente.

En el ejemplo que sigue se dan los valores de la amplitud, el periodo y la posición del objeto en el instante inicial y con ello se pide determinar:

a) La ecuación de movimiento.
b) La posición que ocupará el objeto transcurridos 10 s. desde que se inició la oscilación.
c) La velocidad y la aceleración en ese instante.
d) Demostrar que la máxima velocidad se alcanza cuando el móvil pasa por la posición de equilibrio.

En el problema que plantea a continuación, conocida la ecuación de movimiento, pide que se determine la amplitud, periodo, frecuencia, posición inicial del objeto y punto en que la aceleración es máxima.

También se plantea una cuestión, a saber, demostrar que la velocidad es nula en los puntos en que la elongación es máxima.

Aquí se observa, de forma evidente, la falta de utilización del recurso gráfico, sobre todo en el planteo de ejercicios y problemas.

Los ejercicios de revisión son doce y están planteados desde el mismo contexto que los ejemplos. Su resolución gira en torno a la aplicación de las fórmulas.

Debemos aclarar que el tema "Fórmula de Taylor", que aparece en los libros de COU, se eliminó de los programas de enseñanza en la Comunidad de Andalucía a comienzo de los años noventa.

Para concluir, podemos decir que en la revisión de los textos de matemáticas se nota que el razonamiento que se sigue enriquece ciertamente la matemática como estructura científica, pero el discurso educativo se ve empobrecido.

ANEXO 2

ETAPA DE LA ENSEÑANZA PREPARATORIA

Para los fines de nuestra experiencia fue necesario construir una secuencia didáctica previa donde se discutieran con los alumnos algunos conceptos del Cálculo Infinitesimal referidos al estado primitivo y al estado de flujo caracterizados por el elemento fenomenológico "Serie de Taylor". Para ello creímos necesario hacer hincapié en las derivadas como tasas de variación y el estudio de los gráficos de las funciones analíticas y de sus derivadas en algunos órdenes. La característica fundamental de este diseño fue la presentación de la Matemática en contexto, centrando la discusión sobre diferentes problemas propios de las disciplinas que se imparten en el primer curso de la carrera de Biología, como Física, Química, Bioquímica, Zoología o Botánica. Seguimos con el estudio de los Polinomios de Taylor, el Teorema de Taylor y la Serie de Taylor para construir la noción de predicción en la Serie de Taylor. Esta base de significación se construye sobre la idea intuitiva de los fluidos en la naturaleza y principalmente en la concepción y diseño de los dispositivos, tanto teóricos como empíricos que a menudo se utilizan para concebir explicar, medir y modelar su flujo (Cantoral, 2001).

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Hacer un tratamiento matemático de problemas que conducen a modelos que describen variación y cambio en diferentes contextos.

Familiarizarse con el lenguaje variacional en los distintos contextos que se van a utilizar.

Reconocer la derivada como una nueva función, anticipando sus características gráficas como crecimiento, concavidad, máximos y mínimos, etc., de manera que a través de su estudio sean capaces de describir fenómenos de variación.

Presentar al estudiante la serie de Taylor, no sólo como una herramienta de aproximación sino como una forma de lograr la organización de las derivadas sucesivas con fines predictivos, propia de las ciencias. Se quiere dar una nueva visión de esta serie que nos acerque a una nueva metodología, de manera tal que nos permita hallar el valor de un parámetro, conocido éste, en un único sitio temporal o espacial, en un estado posterior. De esta manera, la serie de Taylor se presenta como la herramienta de predicción que nos permite matematizar un conjunto de intuiciones y vivencias cotidianas sobre el cambio en la naturaleza.

También tendremos en cuenta los conceptos y teoremas pertinentes, como el Teorema de Rolle y el Teorema del Valor Medio.

En principio, se pretende tratar fundamentalmente las cuestiones principales siguientes:

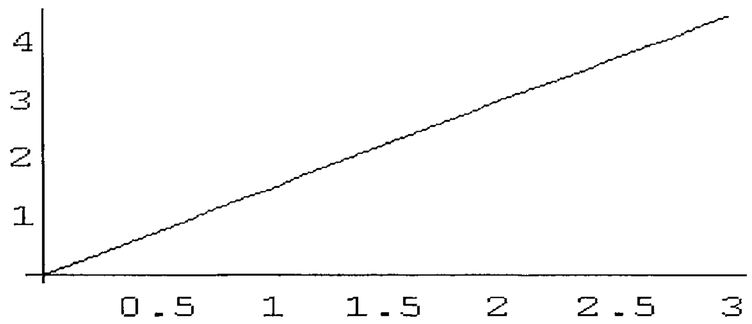
- Dado un fenómeno de variación, analizar la gráfica que lo describe y hallar los elementos que permiten anticipar y analizar la evolución del fenómeno.
- Dotar a las funciones derivadas de significación a través de distintos contextos de la ciencia, de manera que estas nuevas funciones describan, a su vez, el comportamiento y la evolución del fenómeno de variación.
- De la misma forma, conocida la gráfica de la función derivada de algún orden que describe aspectos del fenómeno planteado, se busca anticipar gráficamente la función derivada del orden anterior.
- Reconocer algún patrón de construcción en el establecimiento de las ecuaciones que rigen el comportamiento de un sistema, por ejemplo en el movimiento de medios continuos.
- Cómo organizar las derivadas sucesivas, a través de la serie de Taylor, de modo que nos permita plantear y resolver ecuaciones diferenciales que describan situaciones de flujo en la naturaleza.

1 - LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

Nos basamos en que el examen de fenómenos de la naturaleza deben ayudarnos fundamentalmente a construir las derivadas sucesivas, trabajando con la interacción de diferentes marcos, como el verbal, gráfico, algebraico, analítico y numérico, a partir de un contexto de las ciencias experimentales.

Hemos buscado ejercicios y ejemplos donde se planteen situaciones que sirvan para introducirnos en el tema y aunar, entre otras cosas, el vocabulario necesario para llevar adelante la experiencia. Esta secuencia se desarrolla en tres sesiones de una hora cada una con el grupo de alumnos de primer año de la Licenciatura en Biología que toman parte de esta experiencia de investigación. El trabajo se realiza en forma grupal, siempre bajo la supervisión y dirección del docente investigador. A continuación presentamos algunos de tales problemas.

Problema 1.- (Mett, 1991, p.52). Los biólogos encontraron que el crecimiento de las células de levadura puede indicarse por $y = 1.5\,t + 0.01$, donde t representa el tiempo (en horas) e y el tamaño (en miles de células) de la población de levadura. Trace una gráfica que muestre esta relación y determine el aumento del número de células de levadura por hora.



Aquí tratamos de que se discutan algunos conceptos que vamos a utilizar como la ecuación general de la recta, que sabemos que viene dada por $y = m\,x + b$, donde m es la pendiente. Ella da geométricamente la inclinación de la recta, pero además a los científicos les revela una valiosa información; por ejemplo, en este caso nos dice cómo varía el número de células por unidad de tiempo:

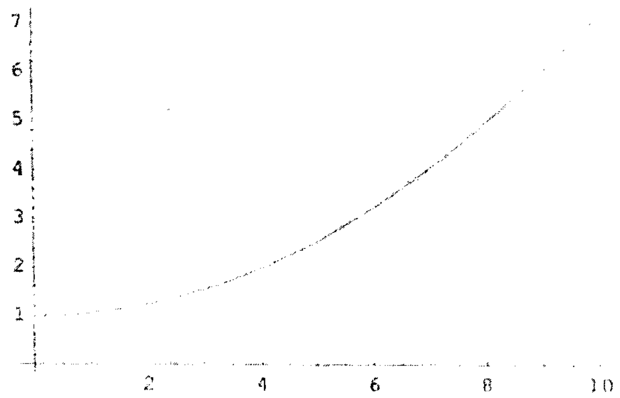
$$m = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = 1.5 \text{ unidades/h.}$$

Observando que la inclinación de la recta es constante, se concluye que la población de levadura se incrementa o eleva en 1.500 células/h.

Problema 2.- (Mett, 1991, p. 80). Los fisiólogos han medido el consumo de oxígeno $C(v)$ de un corredor como una función de su velocidad:

$$y = C(v) = \frac{5}{81}v^2 + 1, \qquad 0 \le v \le 10.$$

La función es creciente. A medida que la velocidad aumenta, aumenta el consumo de oxígeno, como puede observarse también en la gráfica correspondiente:



Nos preguntamos por las siguientes cuestiones:

a) ¿Se incrementa el consumo de oxígeno siempre en la misma cantidad?

b) ¿Cómo se puede medir el incremento medio del consumo de oxígeno entre 0 y 3 km/h y entre 3 y 6 km/h?

c) Comparemos con el incremento medio sufrido entre 6 y 9 km/h.

d) ¿En cuál de los tres intervalos la variación de oxígeno por km/h es mayor?

e) ¿Qué elemento geométrico nos permite visualizar la circunstancia anterior?

Se espera también que el alumno lo relacione con la pendiente de la recta secante. Aquí se puede hablar de la velocidad media del consumo de oxígeno. Los valores que se obtienen de los apartados b) y c) se presentan a continuación:

$$\bar{v}_{(0,3)} = \frac{C(3)-C(0)}{3-0} = \frac{1.5-1}{3} = 0.17$$

$$\bar{v}_{(3,6)} = \frac{C(6)-C(3)}{6-3} = \frac{3.2-1.5}{3} = 0.57$$

$$\bar{v}_{(6,9)} = \frac{C(9)-C(6)}{9-6} = \frac{6-3.2}{3} = 0.93\,.$$

Recordamos que la pendiente de la recta se mide por la tangente del ángulo que forma con la horizontal, es decir,

$$\text{tg }\alpha = \text{pendiente } m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\textit{elevación}}{\textit{desplazamiento}}\,.$$

Consideremos una función $f(x)$; diremos que $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ es la razón promedio de cambio de $f(x)$ con respecto a x.

Considerando incrementos cada vez más pequeños en Δx, se tiene

$$lím_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = lím_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

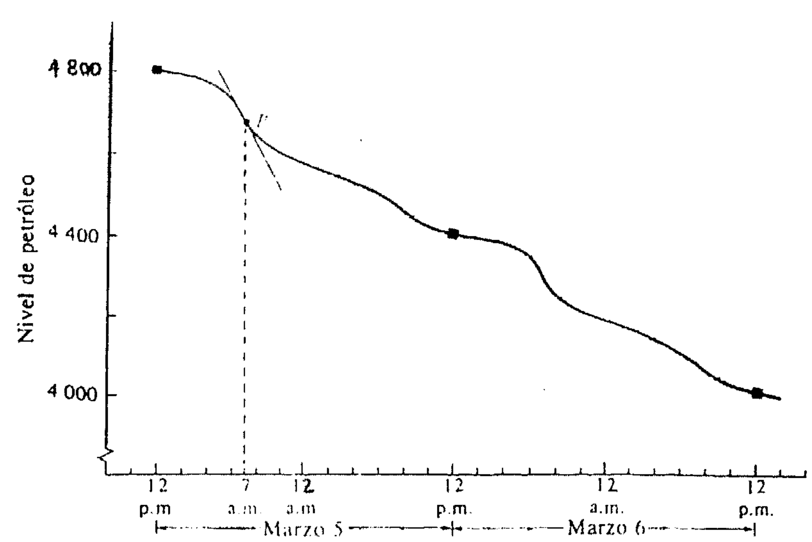
Esta razón instantánea de cambio en $f(x)$ con respecto a x se llama derivada de la función $f(x)$, que simbolizamos como $f'(x)$.

Si f está definida en un intervalo (a, b) y es derivable en todo punto de él, la función que a cada x de (a, b) le asigna $f'(x)$ se llama la función derivada de f en (a, b).

2 - LA RECTA TANGENTE

La recta tangente en un punto a una curva, de modo intuitivo, se puede considerar como la "trayectoria de escape" de un objeto acelerado. Esto se puede ilustrar considerando una bolita que se acelera a lo largo de una curva y luego súbitamente se deja en libertad. Entonces la bolita se movería a lo largo de una recta en la misma dirección en que se movía en el instante en que se suelta. Esa trayectoria es la "recta tangente" a la curva en el punto. Se define la pendiente de una curva en un punto P como la pendiente de la tangente a la curva en P. La porción de la curva cercana a P puede, por lo menos dentro de cierta aproximación, sustituirse por la tangente. Por lo tanto, la pendiente de la curva en P, es decir, la pendiente de la tangente en P, mide la razón de incremento o disminución de la curva al pasar por P.

Problema 3.- (Goldstein, 1990, p.55). Supongamos que llevamos un registro continuo del nivel de petróleo de un tanque de almacenamiento que utiliza un conjunto habitacional. La gráfica de un período típico de un día es la siguiente:

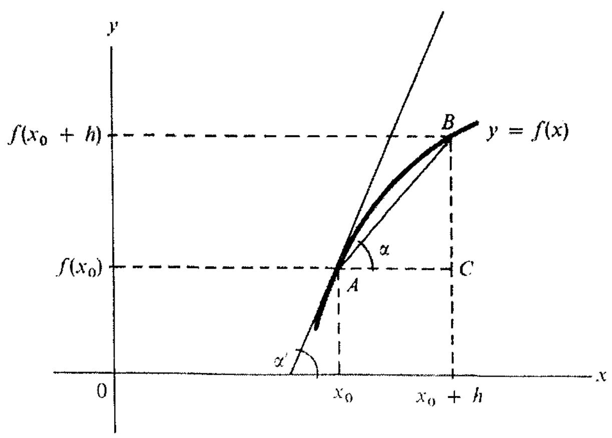


Podemos trazar una recta tangente en cada punto de la curva, pero si observamos un poco la recta tangente en el punto P, veremos que es la de mayor pendiente.

La pendiente de la recta en P nos da la tasa de disminución del nivel de petróleo a las 7 horas. En realidad, la pendiente en cualquier punto da la tasa de variación del petróleo en el instante considerado; observemos que dicha pendiente es, en casi todo punto, negativa. Que tenga la mayor inclinación a las 7 horas tiene su explicación, ya que la mayor parte de las personas despierta alrededor de esa hora, enciende su calefacción, se baña, etc. Por lo tanto, en este caso, la pendiente nos está midiendo la velocidad de consumo de petróleo.

3 - INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA.

Sea $y = f(x)$ una función que supondremos derivable en $x = x_0$, y consideremos los puntos A y B de abscisas x y $x_0 + h$, respectivamente.



Observemos que $tg\,\alpha = \dfrac{B-C}{C-A} = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

En consecuencia, cuando h se aproxima a cero, A y B son cada vez más próximos. Por lo tanto, la recta secante tiende a la recta tangente en el punto A (éste es el punto de vista de D'Alembert sobre la concepción de recta tangente); esto se expresa como

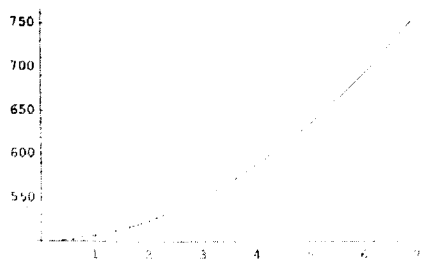
$tg\,\alpha' = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$, que llamamos derivada de la función f en $x = x_0$.

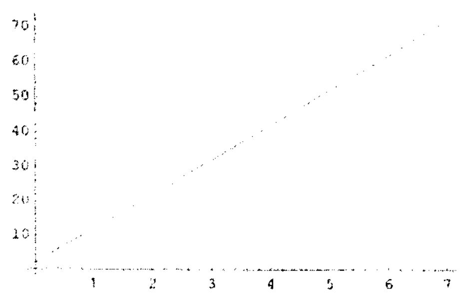
Si consideramos un punto genérico $(x, f(x))$ de la gráfica de f, la pendiente viene dada por $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$, que llamamos *función derivada.*

Problema 4.- Un biólogo estima que el número de bacterias presentes en el instante t está dado por $N(t) = 500 + 2t + 5t^2$.

1. Obtener $N'(t)$ utilizando las reglas de derivación, e interpretar esta nueva función.
2. Estimar la razón instantánea de cambio del número de bacterias en *a*) $t = 1$, *b*) t = 3 y *c*) $t = 5$.
3. Representar las dos funciones y compararlas respecto a crecimiento, signo, concavidad, periodicidad, etc.

Se representan las dos gráficas; esto nos permite comparar cómo varía el número de bacterias en un intervalo de tiempo y la velocidad de cambio del número de bacterias en el mismo intervalo.





Gráfica de $N(t)$ **Gráfica de $N'(t)$**

Los valores requeridos en 2) son los siguientes:

a) N'(1) = 2+10 = 12, incremento del número de bacterias en $t = 1$.

b) $N'(3) = 32$, incremento en $t = 3$.

c) $N'(5) = 52$, incremento en $t = 5$.

Se discute la interpretación de estos valores.

Problema 5.-(Goldstein, 1990, p. 97) Los funcionarios de salud pública de una ciudad, donde se ha desencadenado una epidemia de gripe, estiman que el número de personas enfermas en el tiempo t (medido en días a partir del inicio de la epidemia) es aproximadamente

$$P(t)=60\,t^2-t^3 \quad \text{con } 0 \le t \le 40$$

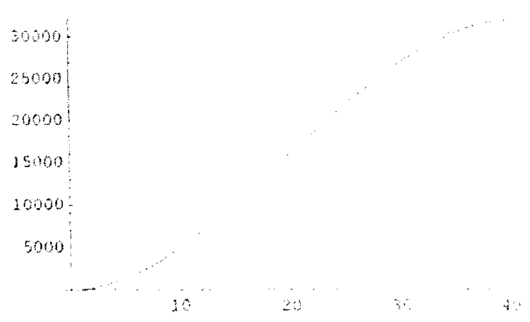
Se plantean las siguientes cuestiones:

a) ¿A qué razón se propaga la gripe cuando $t = 0, 10, 20, 30, 40$ días?

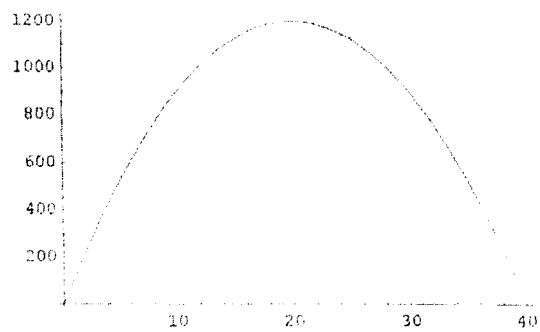
b) Bosquejar una gráfica donde se muestre la razón o velocidad con que se propaga la gripe en los primeros cuarenta días.

c) Bosqueje la gráficas de la función $P(t)$ y compare con la obtenida en el apartado b).

Sabemos que la razón a la que se propaga la gripe está dada por la razón de cambio de $P(t)$, es decir, por la derivada $P'(t) = 120t-3t^2$ $(0 \le t \le 40)$; cuando $t = 0$, $P'(0) = 0$; para $t = 20$, $P'(20) = 120\ 20-3\ (20)^2 = 1200\,p/d$. Así que 20 días después del inicio de la epidemia, la gripe se propaga a razón de 1200 personas por día. Para $t = 10$ o $t = 30$ la gripe se propaga a razón de 900 personas por día.



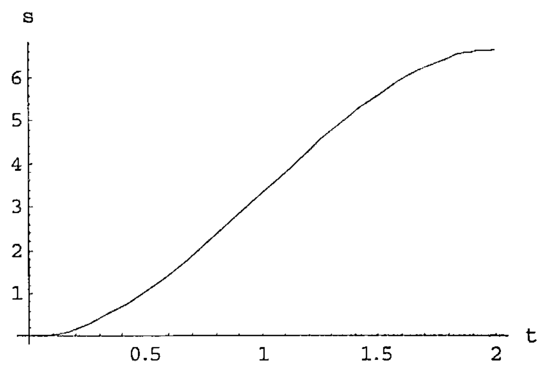
Gráfica de $P(t)$



Gráfica de $P'(t)$

Tenemos que hacer notar las particularidades de estas gráficas. La primera tiene en el intervalo considerado un máximo y un mínimo absolutos, y además un punto de inflexión. La curva es cóncava hacia arriba en su primera parte, hasta el punto de inflexión, y luego cambia a cóncava hacia abajo. A continuación hay que hacer un análisis y discusión donde se ponga de relieve cómo influyen estas características en la forma de la gráfica de $P'(t)$.

Problema 6.- Sobre unas vías rectas un tren subterráneo viaja de la estación A a la estación B en dos minutos, alcanzando su velocidad máxima en $t = 1$ m. Su posición, cn función del tiempo, a la estación A puede verse en la siguiente gráfica. A partir de ella vamos a analizar las siguientes cuestiones.



a) Los signos de la velocidad a lo largo de todo el recorrido.
b) Los intervalos de crecimiento de la velocidad.
c) Bosquejar la gráfica de $v(t)$.
d) ¿Cuál será la razón de cambio de la velocidad en $t = 1$ m? ¿Qué interpretación tiene este resultado?.
e) ¿En qué intervalos la aceleración es positiva y en cuáles negativa?
f) Analizar todo lo que pueda sobre la razón de cambio de la aceleración $a'(t)$, a lo largo del recorrido, y exponer las conclusiones.
g) Bosquejar las gráficas de las funciones $a(t)$ y $a'(t)$, enumerar y analizar los obstáculos hallados para ello.

Uno de los objetivos de este problema es dar cuenta de las ventajas que tiene el método gráfico pero también sus limitaciones.

Para abordarlo es importante que recordemos que la función velocidad, $v(t) = s'(t)$, representa matemáticamente la razón de cambio de la posición $s(t)$ de un móvil. Análogamente, la aceleración representa la razón de cambio de la velocidad. La función aceleración se expresa por $a = v'(t) = s''(t)$. Luego la razón de cambio de la aceleración, conocida como tirón, estará dada por $a'(t) = s'''(t)$.

Un error que se comete con frecuencia en el movimiento rectilíneo es creer que el valor absoluto de la velocidad crece cuando la aceleración es positiva y decrece cuando es negativa. Lo que ocurre en realidad es lo siguiente:

- El valor absoluto de la velocidad crece (esto es, el móvil va más rápido) cuando la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo.
- El valor absoluto de la velocidad decrece (esto es, el móvil va más lento) cuando la velocidad y la aceleración tienen distinto signo (Bradley, 1997, p.136).

4 - APROXIMACIÓN DEL CAMBIO DE UNA FUNCIÓN

Como ya se ha visto, cuando h está cerca de cero tenemos la siguiente relación:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \approx f'(a).$$

Supongamos, por ejemplo, que $a = 2$ y $f'(a) = 5$. Entonces, para valores pequeños de h se tendría $f(2+h)-f(2) \approx 5h$. Esto nos dice que si x se incrementa de 2 a $2 + h$, el cambio en el valor de $f(x)$ (es decir, $f(2+h)-f(2)$) es aproximadamente $5\ h$. Es decir, cuando x varía cerca del 2, el valor de $f(x)$ varía a una razón igual a 5 veces el cambio en x. Se puede generalizar esta observación para llegar al siguiente importante resultado. Si h es pequeña, entonces

$$f(a+h)-f(a) \approx f'(a)\,h\,.$$

5 - ¿EXISTE SIEMPRE LA DERIVADA?

Decimos que la derivada de f en un punto no existe si no existe el límite del cociente incremental. Hay tres ejemplos típicos en que la derivada en el punto no existe.

- Un punto en que la recta tangente a la gráfica sea vertical.
- Un punto en el que la gráfica tenga una esquina.
- Un punto de discontinuidad.

6 - DERIVABILIDAD IMPLICA CONTINUIDAD

Si la función f es derivable en un punto c de su dominio, entonces la función es continua en dicho punto.

Los teoremas que enunciamos a continuación son de fundamental importancia dentro del cálculo diferencial. Ellos permiten analizar con detalle el comportamiento local de la gráfica de una función suficientemente regular, aportando herramientas poderosas ligadas al concepto de derivadas sucesivas para dicho estudio.

7 - TEOREMA DE ROLLE

"Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$".

Como consecuencia del teorema de Rolle se puede enunciar el siguiente resultado que relaciona el número de raíces de f y de su derivada f'.

Sea $f: A \to \Re$ una función derivable. Entonces

a) Si f tiene n raíces reales, f' tendrá al menos $n - 1$ raíces reales.

b) Si f' tiene n raíces reales, f tendrá a lo sumo $n + 1$ raíces reales.

Problema 7.- (Bradley y Smith, 1998, p. 201) Probar que, si un móvil que sigue un movimiento rectilíneo tiene la misma velocidad en dos instantes diferentes (esto es, $v(t_1) = v(t_2)$ cuando $t_1 \neq t_2$), entonces hay un instante intermedio en que la aceleración es cero.

8 - TEOREMA DEL VALOR MEDIO (DE LAGRANGE)

"Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), existe un número c en (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}."$$

Discutiremos en todos los casos las interpretaciones gráficas y geométricas de los teoremas.

9 - LA PREDICCIÓN Y LA SERIE DE TAYLOR

Si los valores de un parámetro son conocidos en un único sitio espacial o temporal, digamos que para un valor $x = a$, ¿cómo podremos conocer, con estos datos, el estado posterior de dicho parámetro, es decir, en un valor $a + h$? Un primer intento de solución a este problema lo hallamos en el apartado 2.3; éste constituye un primer intento de aproximación lineal de una función en el entorno de un punto. Posteriormente consideramos el teorema 1.7 (Teorema del Valor Medio) por el que se verifica la igualdad siguiente:

$$f(b) = f(a) + f'(c)\,(b - a), \qquad a < c < b.$$

Considerando variable el extremo superior del intervalo, es decir $b = x$, se tiene

$$f(x) = f(a) + f'(c)\,(x - a), \qquad a < c < x.$$

La generalización de este polinomio a polinomios de cualquier grado viene dada por el teorema siguiente (Valderrama, p. 152):

TEOREMA DE TAYLOR: Sea f: $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una función n-derivable en $[a, b]$ y tal que existe derivada de orden $n + 1$ en (a, b). Entonces existe al menos un punto c perteneciente (a, b) tal que:

$$f(b)=f(a)+f'(a)\frac{b-a}{1!}+f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!}+\ldots+f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!}+f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Si en el teorema de Taylor consideramos $b = x$, y la función f es infinitamente derivable en el intervalo considerado, entonces la anterior fórmula nos sugiere el siguiente desarrollo:

$$f(x)=f(a)+f'(a)\frac{x-a}{1!}+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\ldots+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}+\ldots.$$

Esta expresión se denomina desarrollo en serie de Taylor de $f(x)$.

Por lo tanto, se puede ver a la derivada en $x = a$ de la función f como el coeficiente del segundo termino en la expansión en serie de f alrededor de a, según el punto de vista de Lagrange. De esta forma, apoyándonos en éste, la segunda derivada puede verse como el coeficiente del tercer término de dicho desarrollo y de la misma manera el resto de las derivadas, en $x = a$.

Definición: Las funciones expresables a través de la serie de Taylor se llaman *analíticas*.

Problema 8.- Dada la función polinómica $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1$, a) escribir directamente y sin hacer ningún cálculo el polinomio de Taylor de grado 3, relativo a $f(x)$ y al punto $a = 0$; b) utilizando el polinomio de Taylor y sin realizar ninguna derivada dar el valor de $f^{(IV)}(0)$; c) analizar las características que presenta $f(0)$.

10 - DESARROLLO EN SERIE DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

A continuación daremos el desarrollo en serie, en $a = 0$, de algunas funciones elementales:

$f(x) = e^x$

$$e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + \ldots$$

$f(x) = e^{-kx}$

$$e^{-kx} = 1 - kx/1! + (kx)^2/2! - (kx)^3/3! + (kx)^4/4! - (kx)^5/5! + \ldots$$

$f(x) = \ln(x)$ (en a=1)

$$\ln(x) = (x\text{-}1)/1 - (x\text{-}1)^2/2 + (x\text{-}1)^3/3 - (x\text{-}1)^4/4 + \ldots$$

$f(x) = \cos x$

$$\cos x = 1\text{-}\ x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \ldots$$

11 - NUESTRA HERRAMIENTA DE PREDICCIÓN

Ahora estamos en condiciones de responder a la pregunta que nos formulamos al comienzo del apartado 2, para ello consideremos la siguiente expresión:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{\infty} C_i\,,$$

donde las C_i son las variaciones.

Es decir,

$C_1 = f'(a)\ h$ es la primera variación de la función.

$C_2 = f''(a)\ h^2/2!$ es la segunda variación de la función o, lo que es lo mismo, la variación de la variación.

$C_3 = f'''(a)\ h^3/3!$ es la tercera variación, y así siguiendo.

Si al estado inicial le sumamos las infinitas variaciones tenemos un valor del estado posterior del sistema. Para hallar la expresión analítica de la función que modela el fenómeno debemos además hallar, si las hay, las regularidades en las variaciones o cuando las variaciones comienzan a tomar valores constantes o cuasi-constantes.

Por lo tanto si reescribimos la serie de Taylor, presentada en el apartado 2.1, considerando $x - a = h$, queda

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\ h + f''(a)\ h^2/2! + f'''(a)\ h^3/3! + \ldots + f^{(n)}(a)\ h^n/n! + \ldots,$$

de modo que, al conocer los valores de inicio, a, h, $f(a)$, $f'(a)$, etc., se podrá anunciar el valor posterior del parámetro en cuestión; en este caso se trata del valor de $f(a+h)$.

Aquí se hace evidente que la serie de Taylor es el instrumento idóneo para predecir el estado posterior del parámetro en fenómenos de flujo continuo en la naturaleza.

A modo de ejemplo vamos a obtener la derivada en el sentido de Lagrange, para el caso en que se conoce la función; sea $f(x) = x^3 - x^2$. Entonces

$$f(x+h) = (x+h)^3 - (x+h)^2 = x^3 + 3\,x^2\,h + 3\,x\,h^2 + h^3 - x^2 - 2\,x\,h - h^2$$
$$= (x^3 - x^2) + (3\,x^2 - 2x)\,h + (3\,x - 1)\,h^2 + h^3.$$

Por cierto, el caso de mayor interés se presenta cuando no conocemos en forma explícita la relación entre las variables. Estudiemos a continuación un tema típico de la Física para las Ciencias Biológicas donde aparece la forma más elemental de ecuación diferencial, y el resultado que se obtiene con el auxilio de la Serie de Taylor.

Problema 9.- FLUJO EN TUBERIAS – LEY DE POISEUILLE

Consideremos una situación como la de la figura que se presenta a continuación (Rémizov, p. 178).

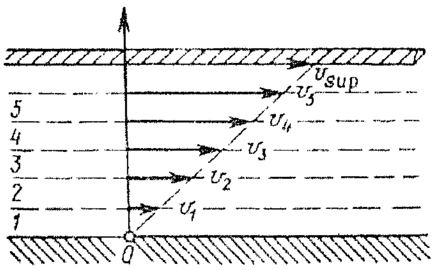


Figura 2.1

Analizamos aquí el flujo de un fluido viscoso comprendido entre dos placas paralelas de área S. La placa inferior tiene una velocidad $v_0 = 0$ y la superior $v = v_{sup}$. El líquido que hay entre ellas está dividido en capas que se desplazan unas sobre otras; las adyacentes a las placas están adheridas a ellas y se desplazan con su misma velocidad. La capa que se mueve con una velocidad mayor imprime a la capa que tiene menor velocidad una fuerza que acelera el movimiento de ésta, y viceversa, de parte de la capa más lenta se imprime una fuerza sobre la más rápida que retarda su movimiento. Estas fuerzas, que se denominan fuerzas de rozamiento interno, van dirigidas tangencialmente a la superficie de las capas. La fuerza de rozamiento interno es proporcional al área S de las capas de interacción y será tanto mayor cuanto mayor sea su velocidad relativa. Por cuanto la separación en capas es convencional, la fuerza suele expresarse en dependencia de la variación de la velocidad referida a la longitud en la dirección perpendicular a la velocidad, o sea, en dependencia de dv/dx, que es el gradiente de velocidad (velocidad de desplazamiento):

$$F_{roz} = \eta \frac{dv}{dx} S.$$

Ésta es la ccuación de Newton. Aquí η es el coeficiente de proporcionalidad, que se conoce como *viscosidad*. La viscosidad depende del estado y de las propiedades moleculares del fluido.

Debido a la simetría queda claro que en un tubo las partículas del fluido equidistantes respecto al eje tienen igual velocidad. La mayor velocidad la poseen las partículas que se mueven a lo largo del eje del tubo; la capa de líquido más próxima al tubo está inmóvil.

Para determinar la dependencia de $v = v\ (r)$ separemos imaginariamente un volumen cilíndrico de líquido con cierto radio r y cierta longitud l, como puede verse en la figura que sigue (Timoreva, p.176):

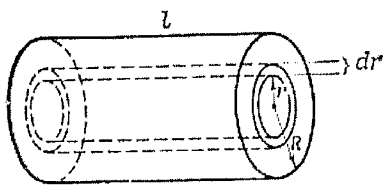


Figura 2.2

Este pequeño cilindro se halla en equilibrio (moviéndose con velocidad constante) accionado por la fuerza debido a la diferencia de presión entre sus extremos, menos la fuerza retardadora de viscosidad que actúa en su superficie exterior. La primera de dichas fuerzas vale

$$F = p_1\pi r^2 - p_2\pi r^2 = (p_1 - p_2)\pi r^2 .$$

La fuerza de viscosidad, en virtud de la ecuación de Newton, es

$$F_{roz} = \eta\frac{dv}{dr}S = \eta\frac{dv}{dr}2\pi rl ,$$

donde $S = 2\pi rl$ es el área de la superficie lateral del cilindro.

Igualando ambas fuerzas, se obtiene

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = -\eta\frac{dv}{dr}2\pi rl .$$

El signo menos en el segundo miembro de la ecuación se debe a que $\frac{dv}{dr} < 0$ (la velocidad disminuye con el aumento de r).

Por lo tanto la variación de v con r viene dada por

$$\frac{dv}{dr} = -Nr \text{ , donde } \quad N = \frac{(p_1 - p_2)}{2l\eta}.$$

Teniendo en cuenta los valores de frontera ya considerados, $v(0) = v_{máx}$ y $v(R)$=0, podemos predecir el valor de $v(r)$, a través de la serie de Taylor, de la siguiente manera:

$$v(r) = v(0) + v'(0)\, r + v''(0)\, r^2/2! + v'''(0)\, r^3/3! + ... = v_{máx} - Nr^2/2.$$

Cómo $v(R) = v_{máx} - \frac{NR^2}{2}$, de aquí obtenemos $v_{máx} = (p_1 - p_2)\frac{R^2}{4l\eta}$, y por lo tanto,

$$v(r) = (R^2 - r^2)\frac{(p_1 - p_2)}{4l\eta}.$$

Hemos hallado la velocidad de la corriente del líquido en función de la distancia al eje del tubo. Es decir, esta ecuación muestra la dependencia parabólica de la velocidad con el radio, que presentamos en la siguiente figura (Rémizov, p. 180):

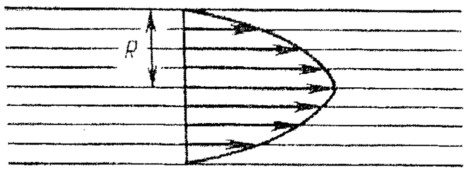


Figura 2.3

Ahora determinemos el volumen V de líquido que sale del tubo en un tiempo determinado t. Para ello es necesario establecer de qué factores depende el volumen del líquido que fluye por un tubo horizontal. Con este fin, consideremos una capa cilíndrica de radio r y espesor dr (fig. 2.2); por cuanto la capa es delgada, se puede considerar que ésta se desplaza con igual velocidad, v. En el tiempo t la capa transporta el siguiente volumen de líquido:

$$dV = vt2\pi r dr.$$

Sustituyendo v por su valor, obtenemos la ley de variación del volumen con el radio:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{\pi(p_1 - p_2)t}{2l\pi}(R^2 r - r^3).$$

La reescribimos como

$$\frac{dV}{dr} = M(R^2 r - r^3)\ , \quad \text{donde} \quad M = \frac{(p_1 - p_2)}{2l\eta} t\pi .$$

Teniendo en cuenta que $V(0) = 0$, podemos predecir el volumen de líquido que pasa por un tubo de longitud l y radio r, utilizando la serie de Taylor, de la siguiente manera:

$$V(r) = V(0) + V'(0)r + V''(0)\frac{r^2}{2!} + V'''(0)\frac{r^3}{3!} + V^{(IV)}(0)\frac{r^4}{4!} + V^{(V)}(0)\frac{r^5}{5!} + \ldots$$

$$V(r) = \frac{1}{2}MR^2 r^2 - \frac{1}{4}Mr^4 = \frac{1}{4}Mr^2(2R^2 - r^2) = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8\eta l}(2R^2 r^2 - r^4)t.$$

El volumen de líquido en la unidad de tiempo, para $r = R$, nos da el caudal

$$Q = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8\eta l} R^4 \qquad \text{(Ley de Poiseuille).}$$

Como se advierte por esta fórmula, para las condiciones externas prefijadas (p_1 y p_2), por el tubo fluye tanta mayor cantidad de líquido cuanto menor sea su viscosidad y mayor el radio del tubo. La fuerte dependencia de Q respecto al radio viene condicionada por la variación, no solamente del volumen, sino también por la parte relativa de las capas dispuestas cerca de la superficie del tubo.

Referencias bibliográficas

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Albert, J. A. (1996). "*La convergencia de series en el nivel superior. Una aproximación sistémica*". Tesis doctoral. Centro de Investigación y de estudios avanzados del IPN. Departamento de Matemática Educativa. México.

- Alexopoulou, E. y Driver, R. (1996). "*Small group discussion in physics: peer interaction modes in pairs and fours*". Journal of Research in Science Teaching, 33 (10), pp. 1099-1114.

- Alonso, M. (1994). "*La evaluación en la enseñanza de la Física como instrumento de aprendizaje*". Tesis doctoral. Universidad de Valencia.

- Alonso, M. y Finn E. J. (1995). "*Física*". Addison-Wesley Iberoamericana. U.S.A.

- Anderson, J. (1979). "*Objective Testing in Elementary Analysis*". Educational Studies in Mathematics, 10, pp. 227-243.

- Anderson, R. D. y Mitchener, C. P. (1994). "*Research on science teacher education*". En Gabel D. L. (Ed), 1994, Handbook of Research on Science Teaching and Learning. MacMillan. N. Y.

- Artigue, M. (1982). "*Une Expérience de coordination de l'enseignement des Mathématiques et de la Physique en DEUG SSM*". Séminaire de Didactique et Pédagogie. Publications de l'Université de Grenoble, 28.

- Artigue, M. (1983). "*Représentations graphiques de fonctions en Mathématiques et en Physique*". En "*Queis types de recherches pour rénover l'education en Sciences Expérimentales*". 5èmes Journées Internationales sur l'education Scientifique. Chamonix.

- Artigue, M. (1987). "*Ingénierie didactique a propos d'equations différentielles*". Proceedings of PME 11, Montreal, pp. 236-242.

- Artigue, M. (1991). "*Análisis*". En Tall D. (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Press. Dordrech, pp. 167-198.

- Artigue, M. (1995). "*Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*". Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.

- Artigue, M. (1998). "*L'Evolution d'une problematique en didactique de l'analyse*". Recherches en Didactique des Mathématiques, 18(2), pp. 231-262.

- Atwater, M. M. (1994). "*Research on cultural diversity in the classroom*". En Gabel D. L. (ed), 1994, "*Handbook of Research on Science Theaching and Learning*". MacMillan Pub Co. N.Y.

- Ausubel, D. P., Novak, J. D. y Hanesian, H. (1986). "*Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*". Trillas, México.

- Azcárate, C. (1990). "*La velocidad: Introducción al concepto de derivada*". Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

- Azcárate, C. (1991). "*Instantaneous speed: concept images at college students level, and its evolution in a learning experience*", Proceedings Fifteenth PME Conference. Assisi, pp. 96-103.

- Bachelard, G. (1938). "*La formation de l'esprit scientifique*". Francia: PUF.

- Bachelard, G. (1981). "*La Formación del Espíritu Científico*". Ed. Siglo XXI. Madrid.

- Baker D. R. (1998). "*Equity Issues in Science Education*". En Fraser B. J., Tobin, K. G. (Eds). "*International Handbook of Science Education*". Kluwer Academic Publishers. London.

- Beth, E. W. (1961). "*Epistémologie mathemátique et psychologie*". PUF, pp. 3-140.

- Benseghir, A. y Closset, J. L. (1996). "*The electrostatics-electrokinetics transition: historical and educational difficulties*". International Journal of Science Education. 18(2), pp. 179-191.

- Bradley, G. y Smith, K. (1997). "*Cálculo de una variable*". Vol. 1. Ed. Prentice Hall. España.

- Brousseau, G. (1972). "*Processus de mathématisation*". Bulletin de l' A.P.M.E.P., Núm. Especial, pp. 428-457.

- Brousseau, G. (1976). "*La problématique et l'enseignement des mathématiques*". XXVIIIéme Rencontre de la CIEAEM. Louvain la Neuve.

- Brousseau, G. (1981). "*Problémes de didactique des décimaux*" . Recherches en Didactique des Mathématiques, 2(3), pp. 37-127.

- Brousseau, G. (1983). "*Les obstacles épistémologiques et les problémes en mathematiques*". Recherches en Didactique des Mathematiques 4(2), pp. 165-198.

- Brousseau, G. (1986). "*Théorisation des phénomenes d'enseignement des mathématiques*". Thèse de Doctorat d'Etat. Université de Bordeaux.

- Bybee, R. W. y Deboer, G. E. (1994). "*Research on goals for the science curriculum*". En Gabel D. L. (ed). (1994). "*Handbook of Research on Science Teaching and Learning*". MacMillan Pub Co. N. Y.

- Bybee, R. W. y Ben Zvi, N. (1998). "*Science Curriculum: transforming goals to practices*". En Fraser B, J. y Tobin K. G. (Eds). "*International Handbook of Science Education*". Kluwer Academic Publishers. London.

- Caamaño, A., Carrascosa, J. y Oñorbe, A. (1994). "*Los trabajos prácticos en las Ciencias Experimentales*". Alambique, 2, pp. 4-5.

- Calatayud et al. (1990). "*La construcción de las Ciencias Físico-Químicas*". Programas-Guía de trabajo y comentarios para el profesor. La Nau Llibres. Valencia.

- Candel, A., Satoca, J., Soler, J, B. y Tent, J. J. (1991). "*Física y Química*". Bachillerato 2 (BUP). Grupo Anaya.

- Candel, A., Satoca, J., Soler, J, B. y Tent, J. J. (1992). "*Física y Química*". Bachillerato 3 (BUP). Grupo Anaya.

- Cantoral, R. (1988). "*La Heurística y Arquímedes de Siracusa*". Revista Matemática de la UAG, México, pp. 13-19.

- Cantoral, R. (1989). "*Concept image in its origins with particular reference to Taylor's Series*". Proceedings of International Conference of Psychology of Mathematics Education. North American, Chapter 11, pp. 50-60.

- Cantoral, R. (1990). "*Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la Teoría elemental de las funciones analíticas*". Tesis doctoral. Centro de investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN. México.

- Cantoral, R. (1991). "*Proyecto de Investigación: Formación de la noción de función analítica*". Mathesis 7, pp. 223-239.

- Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R. e Imaz, C. (1991). "*Cálculo – Análisis*". Ediciones de la Universidad Autónoma del Estado de México.

- Cantoral, R. (1995). "*Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: El caso de la Serie de Taylor*". Mathesis 11(1), pp. 55-101.

- Cantoral, R. (1997). "*Pensamiento y lenguaje variacional*". Cuadernos del Seminario de Investigación del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN. México.

- Cantoral, R. (1998 a). "*Pensamiento Matemático Avanzado: Una revisión de los enfoques a la investigación sobre Didáctica del Análisis*". CRM – Notes. Centre de Recerca Matemàtica del Institut D'Estudis Catalans. Barcelona. España.

- Cantoral, R. (1998 b). "*La Aproximación socioepistemológica en matemática educativa*". Conferencia de clausura de las VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "THALES". Jaén, septiembre de 1998.

- Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). "*Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al Análisis*". Epsilon, Nº 42, V. 14(3), número monográfico. Sevilla, pp. 353-369.

- Cantoral, R. y Marcolini, J. M. (1999). "*Diseño y construcción de situaciones para una ingeniería didáctica de resignificación: el caso de la matemática*". 9ª Jaem, Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Ciencias. Lugo, septiembre 1999. Actas, pp. 464-466.

- Cantoral, R. (2001). "*Matemática Educativa. Un estudio de la forma social de la analiticidad*". México: Grupo Editorial Iberoamérica.

- Carnicer, J. (1998). "*El cambio didáctico en el profesorado de ciencias mediante tutorías en equipos cooperativos*". Tesis doctoral. Universidad de Valencia.

- Catalán, A. y Catany, M. (1996). "*Educación ambiental en la Enseñanza Secundaria*". Miraguano Ediciones. Madrid.

- Cauchy, A. L. (1829). "*Leçons sur le calcul différentiel*". Oeuvres completes. Paris.

- Cohen, E. G. (1994). "*Restructuring the classroom: conditions for productive small groups*". Review of Educational Research, 64(1), pp. 1-35.

- Colera J. y De Guzmán, M. (1994). "*Matemáticas 2, Bachillerato*". Grupo Anaya. Madrid.

- Colera, J., Oliveira, M. J. y García, R. (2001). "*Matemáticas II, Bachillerato*". Grupo Anaya. Madrid.

- Coll, C. (1996). "*Constructivismo y educación escolar: ni hablamos siempre de lo mismo ni lo hacemos siempre desde la misma perspectiva epistemológica*". Anuario de Psicología, 69, pp. 153-178.

- Cornu, B. (1983). "*Apprentissage de la notion de limite: Conception et Obstacles*". Tesis Doctoral. Universidad de Grenoble. Francia.

- Chevallard, Y. y Johsua, M. A. (1982). "*Un exemple d'Analyse de la trasposition didactique- la notion de distance*". Recherches en didactique des mathématiques, 3 (2), pp. 157-239.

- Chevallard, Y. (1991). "*La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné*". La Penseé Sauvage. Grenoble.

- Davis, R. y Vinner, S. (1986). "*The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages*". Journal of Mathematical Behavior 5(3), pp. 281-303.

- De Guzmán, M., Colera, J. y Salvador, A. (1990). "*Matemáticas, Bachillerato 2*". Grupo Anaya. Madrid.

- De Posada, J. M. (2000). "*El estudio didáctico de las ideas previas*". En Perales, F. J. y Cañal de Leon, P. (2000). "*Didáctica de las Ciencias Experimentales*". Ed. Marfil, cap. 16, pp. 363-388.

- Del Carmen, L. (1995). Presentación de la monografía "*La evaluación de los aprendizajes*". Alambique, 4, pp. 4-5.

- Del Carmen, L. (1996). "*El análisis y secuenciación de los contenidos educativos*". Horsori. Barcelona.

- Demastes, S. S., Good, R.G. y Peebles, P. (1996). "*Patterns of Conceptual Change in Evolution*". Journal of Research in Science Education, 33(4), pp. 407-431.

- Diccionario de la Lengua Española. (1994). Ed. Espasa Calpe, Tomo II, p. 1322.

- Douady, R. (1995). En Artigue, M. "*Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*". Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá, p. 62.

- Douady, R. y Barbin, E. (1996). "*Publications des I.R.E.M. La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencia entre los saberes, los programas y la práctica*". Topiques éditions.

- Dreyfus, T. et. al. (1990). "*Advanced Mathematical Thinking*". ICMI Studies Series. Cambridge, pp. 113-134.

- Driver, R. (1973). "*The representations of conceptual frameworks in young adolescents science students*". Tesis Doctoral, University of Illinois. Urbana, Illinois.

- Driver, R. (1988). "*Un enfoque constructivista para el desarrollo del curriculum en Ciencias*". Enseñanza de las Ciencias, 2(6), pp. 109-120.

- Driver, R., Guesne, E. y Tiberghien, A. (EDS) (1989). "*Ideas científicas en la infancia y la adolescencia*". Madrid, MEC / Morata.

- Dubinsky, E. (1992). "*A Learning Theory Approach to Calculus*". En Z.A. Karian (Editor). "*Simbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education*". MAA Notes 24, pp. 43-55.

- Dubinsky, E. (1996). "*Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria*". Educación Matemática (México), 8(3), pp. 24-41.

- Dumas-Carré, A. (1987). "*La resolution de problemes en Physique au Lycée*". Tesis doctoral. Universidad de París VII.

- Dupin, J. y Johsua, S. (1993). "*Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*". Presses Universitaires de France.

- Duschl, R. A. (1995). "*Mas allá del conocimiento: los desafíos epistemológicos y sociales de la enseñanza mediante el cambio conceptual*". Enseñanza de las Ciencias, 13(1), pp. 3-14.

- El Bouazzoui, H. (1982). "*Etudes de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numeration. Relations entre divers caractères de ces situations et le sens, la compréhension de l'apprentissage de ces notions*". Thèse. Université de Bordeaux I, p. 136.

- El Bouazzoui, H. (1988). "*Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction*". PHD. Université de Bordeaux I.

- Enciclopedia del Siglo XXI. (1992). El Mundo del Siglo XXI, p. 348.

- Espinoza Salfate, L. (1994). "*Un estudio del sistema de enseñanza de las matemáticas del secundario en torno del concepto de límite*". Trabajo de Investigación. Universidad Autónoma de Barcelona.

- Farfán, R. M. (1989). "*Methodological elements for the reconstruction of an Analysis Didactics: the Case Study of Convergence*", Proceeding PME-NA 11, pp. 49-54.

- Farfán, R. (1990). "*La noción de convergencia en profesores de nivel superior. Un estudio de casos*". Acta latinoamericana de Matemática Educativa 4(1). México.

- Farfán, R. y Hitt, F. (1990). "*Intuitive processes, mental image, analytical and graphic representations of the stationary state. A case study*". Proceeding of the 14th International meeting of the Group for the Psychology of Mathematics Education. México.

- Farfán, R. (1992). "*¿Matemática Educativa en el Nivel Superior? Seis años de investigación en la Reunión Centroamericana y del Caribe*". Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 6(2), pp. 236-253.

- Farfán, R. M. (1995). "*Ingeniería Didáctica, Pedagogía*". Tercera época, Vol. 10, Núm. 5. Revista de la Universidad Pedagógica Nacional. México, pp. 14-23.

- Farfán, R. (1997). "*Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*". México: Grupo Editorial Iberoamérica.

- Fraser, B. J. (1994). "*Research on classroom and school climate*". En Gabel D. L. (ed). (1994). "*Handbook of Research on Science Teaching and Learning*". MacMillan Pub Co. Nueva York.

- Freudenthal, H. (1983). "*Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*". Dordrecht, The Netherlands.

- Frish, S. y Timoreva, A. (1973). "*Curso de Física General*". Tomo I. Editorial Mir. Moscú.

- Furió, C., Hernández, J. y Harris, H. (1987). "*Parallels between adolescents' conception of gases and the history of Chemistry*". Journal of Chemical Education. 64(7), pp. 617-618.

- Gálvez, G. y otros. En Parra, C. y Saiz, I. (comps.) (1998). "*Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*". Ed. Paidós Educador.

- García, D. (1998). "*Un estudio sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos en el aprendizaje del cálculo*". Tesis de Maestría. Cinvestav. México.

- García, J. E. (1987). "*La interacción con el medio en relación con la investigación en la escuela*". Investigación en la Escuela, 1, pp. 58-62.

- García, J. E. (1998). "*Hacia una teoría alternativa sobre los contenidos escolares*". Diada. Sevilla.

- García, R. y Piaget, J. (1982). "*Psicogénesis e historia de la ciencia*". Siglo XXI editores. México.

- Geli, A. M. (1986). "*L'evaluació de la Biologia en la segona etapa d'EGB*". Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

- Gil, D. y Carrascosa, J. (1990). "*What to do about science misconceptions?*" Science Education, 74(4).

- Gil, D., Carrascosa, J., Furió, C. y Martínez Torregrosa, J. (1991). "*La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria*". Barcelona: ICE/Horsori.

- Gil, D. (1993). "*Psicología Educativa y Didáctica de las Ciencias: los procesos de enseñanza/aprendizaje de las ciencias como lugar de encuentro*". Infancia y Aprendizaje, pp. 62-63.

- Gil, D. (1993 a). "*Psicología Educativa y Didáctica de las Ciencias: los procesos de enseñanza-aprendizaje de las ciencias como lugar de encuentro*". Infancia y Aprendizaje, pp. 62-63.

- Gil, D. y col. (1993 b). "*Vamos a atravesar una calle de circulación rápida y vemos venir un coche: ¿pasamos o nos esperamos? (Un ejemplo de tratamiento de situaciones problemáticas abiertas*)". Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales 7, pp.71-80.

- Gil, D. (1993 c). "*Contribución de la historia y de la filosofía de las ciencias al desarrollo de un modelo de enseñanza / aprendizaje*". Enseñanza de las Ciencias, 11(2), pp. 197-212.

- Gil, D. (1994). "*Diez años de investigación en didáctica de las ciencias: realizaciones y perspectivas*". Enseñanza de las Ciencias, 12(2), pp. 154-164.

- Gil, D. y Pessoa, A. (1994). "*Formación del profesorado de las ciencias*". Editorial Popular. Madrid.

- Gil, D., Vilches, A., Astaburuaga, R. y Edwards, M. (1999). "*La transformación de las concepciones docentes sobre la situación del mundo: un problema educativo de primera magnitud*". Revista Pensamiento Educativo, 24, pp. 131-164.

- Gil, D., Carrascosa, J. y Martínez, F. (2000). "*Una disciplina emergente y un campo específico de* investigación". En Perales, F. J. y Cañal de León, P. (2000). "*Didáctica de las Ciencias Experimentales*". Ed. Marfil, cap. 1, pp. 11-34.

- Gilbert, J. K. (1992). "*The interface between science education and technology education*". International Journal of Science Education, 14(5), pp. 563-578.

- Giordan, A. (1982). "*La enseñanza de las ciencias*". Ed. Siglo XXI. Madrid.

- Granero, F. (1990). "*Cálculo*". McGraw-Hill. Madrid.

- Grattan-Guinness, I. (1970). "*The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*". Cambridge, Massachusetts, USA.

- Grenier, D. (1988). "*Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*". Thèse, Université de Grenoble I.

- Gutiérrez, R. et al. (1990). "*La enseñanza de las Ciencias en la educación intermedia*". Narcea. Madrid.

- Howson, A. y Kahane, J. P. (1990). "*Mathematics and Cognition: a research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*". Cambridge University Press.

- Hewson, P. W. y Beeth, M. E. (1995). "*La enseñanza para un cambio conceptual: ejemplos de fuerza y de movimiento*". Enseñanza de las Ciencias, 13(1), pp. 25-35.

- Holton, S. (1979). "*Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas*". Ed. Reverté. Barcelona, pp. 51-53.

- Imaz C. (1987). "*¿Qué es la Matemática Educativa?*". En Bonilla, Figueras e Hitt (Eds) "*Publicaciones Centroamericanas*" 1(1), pp. 267-272.

- Jiménez, M. P. y Otero, L. (1990). "*La ciencia como construcción social*". Cuadernos de Pedagogía, 180, pp. 20-22.

- Jiménez, M. P. (1991). "*Cambiando las ideas sobre el cambio biológico*". Enseñanza de las Ciencias, 9(3), pp. 248-256.

- Jiménez, M. P. (1995). "*La educación ambiental en los 90*". Presentación de un número monográfico. Alambique, 6, pp. 7-8.

- Jiménez, M. P. (2000). "*Modelos didácticos*". En Perales, F. J. y Cañal de León, P. (2000). "*Didáctica de las Ciencias Experimentales*". Ed. Marfil, cap. 7, pp. 165-186.

- Jorba, J. y Sanmartí, N. (1995). "*Autorregulación de los procesos de aprendizaje y construcción de conocimientos*". Alambique, 4, pp. 59-77.

- Kahle, J. B. y Meece, J. (1994). "*Research on gender issues in the classroom*". En Gabel, D. L. (ed). (1994). "*Handbook of Research on Science Teaching and Learning*". MacMillan Pub Co. N. Y.

- Kempa, R. F. y Ayob, A. (1995). "*Learning from group work in science*". International Journal of Science Education, 17(6), pp. 743-754.

- Kuhn, T. S. (1987). "*La estructura de las revoluciones científicas*". Fondo de Cultura Económica. Madrid.

- Kutnick, P. y Rogers, C. (eds.) (1994). "*Groups in schools*". Cassell. Londres.

- Lacroix, S. F. (1797). "*Traité Elementaire de Calcul Differentiel et de Calcul Intégral*". Paris.

- Lagrange, J. L. (1797). "*Theorie des fonctions analityques*". Imprimeur Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, No 57. Francia.

- Lakatos, Y. (1970). "*Criticism and the growth of knowledge. Falsification and the methodology of scientific research programs, 91-196*". In Y. Lakatos & A. Musgrave. Cambridge University Press.

- Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (1995). "*Cálculo y Geometría Analítica*". McGraw-Hill. Madrid.

- Lazarowitz, R. y Tamir, P. (1994). "*Research on using laboratory instruction in science*". En Gabel D. L (ed). (1994). "*Handbook of Research on Science Teaching and Learning*". MacMillan Pub Co. N.Y.

- Lemke, J. L. (1990). "*Talking science: Language, learning and values*". Ablex Publishing. Norwood, Nueva Jersey.

- Lewis, S., Alacaci, C., O'Brien, G. y Jiang, Z. (2002). "*Preservice Elementary Teachers. Use of Mathematics in a Project-Based Science Approach*". School Science and Mathematics, 104(4), pp. 172-180.

- L'Hôspital, G. (1696). "*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*". París.

- Lunetta, V. N. (1998). "*The School Science Laboratory: Historical Perspectives and Contexts for Contemporary Teaching*". En Fraser B. J. y Tobin K. G. (Eds) "*International Handbook of Science Education*". Kluwer. London.

- Luque, A., Otega, R y Cubero, R. (1994). "*Concepciones constructivistas y prácticas escolares*" Comunicación presentada en el II Seminario sobre constructivismo y Educación. Puerto de la Cruz (Tenerife), 16-18 de noviembre. Publicado en M. J. Rodríguez y J. Arnay (Comps.) (1997). "*La construcción del conocimiento escolar*". Paidós. Barcelona.

- Maloney, D. P. (1994). "*Research on problem solving: Physics*". En Gabel D. L. (ed). (1994). "*Handbook of Research on Science Teaching and Learning*". MacMillan Pub Co. N.Y.

- Margolinas, C. (1993). "*De L'importance du vrai et du faux dans la classe de Mathématiques*". La Pensée Sauvage. Grenoble.

- Matthews, M. R. (1994). "*Vino viejo en botellas nuevas: un problema con la epistemología constructivista*". Enseñanza de las *Ciencias*, 12(1), pp. 79-88.

- Mett, C. y Smith, J. (1991). " *Cálculo con aplicaciones*". Ed. Noricga-Limusa. México.

- Mirón, H. G. (2000). "*Naturaleza y Posibilidades de Aprendizaje en un Ambiente Tecnológico*". Tesis Doctoral. Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN. Departamento de Matemática educativa. México.

- Mumby, H. y Rusell, T. (1998). "*Epistemology and context in research on learning to teach*". En Fraser B. J. y Tobin K. (eds). "*International Handbook of Science Education*". Kluwer A. Publishers. Dordrecht, pp. 643-665.

- Nichols, S. E., et al. (1998). "*Women in Science: expanding the vision*". En Fraser B. J. y Tobin K. G. (Eds). "*International Handbook of Science Education*". Kluwer Academic Publishers. London.

- Núñez Espallargas, J. M. y Font Moll, V. (1995). "*Aspectos ideológicos en la contextualización de las matemáticas: una aproximación histórica*". Revista de Educación, 3016, pp. 239-314.

- Oliva, J. M. (1999). "*Algunas reflexiones sobre las concepciones alternativas y el cambio conceptual*". Enseñanza de las Ciencias, 17(1), pp. 93-107.

- Orton, A. (1980). "*A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults*". Tesis doctoral. University of Leeds. Reino Unido.

- Osborne, R. y Freyberg, P. (1991). "*El aprendizaje de las Ciencias. Implicaciones de la Ciencia de los alumnos*". Narcea. Madrid.

- Perales, F. J. y Nievas, F. (1995). "*Teaching geometric optics: research, results and educational implications*". Research in Science and Technological Education, 13(2), pp. 187-203.

- Perales, F. J. y Cañal de León, P. (2000). "*Didáctica de las Ciencias Experimentales*". Ed. Marfil. Alcoy.

- Piaget, J. (1973). "*Introduction à l'épistemologie génétique*". Biblioteque de philosophie contemporaine. PUF. París.

- Piaget, J. (1975). "*Psicología y epistemología*". Ed. Ariel. Barcelona.

- Piaget, J. (1980). "*Biología y Conocimiento*". Siglo XXI. México.

- Polya, G. (1945). "*How to solve it*". Princeton University Press. New Jersey. Traducción española: "*Cómo plantear y resolver problemas*". México: Trillas, 1965.

- Porlán, R. (1989). "*Teoría del conocimiento, teoría de la enseñanza y desarrollo profesional. Las concepciones epistemológicas de los profesores*". Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.

- Porlán, R. (1993). "*Constructivismo y Escuela. Hacia un modelo de enseñanza-aprendizaje basado en la investigación*". Diada. Sevilla.

- Porlán, R. y Rivero, A. (1998). "*El conocimiento de los profesores*". Diada. Sevilla.

- Posner, G. J., Strike, Hewson y Gertzog (1982) "*Accomodation of a scientific conception: towards a theory of conceptual change*". Science Education, 66, pp. 211-227.

- Pozo, J., Pérez, M. y Mateos, M. (1997). "*¿Son constructivistas los alumnos? ¿Y sus profesores? ¿Y los investigadores?* Comunicación presentada en el III Seminario sobre Constructivismo y Educación. Sevilla, 20-22 de noviembre.

- Pulido, R. (1998). "*Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en la física y la* *matemática escolar*". Tesis doctoral. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN. México.

- Rémizov, A. (1991). "*Física Médica y Biológica*". Editorial Mir Moscú.

- Resnick, L.B. (1983). "*Mathematics and science learning: A new conception*". Science, 220, pp. 447-448.

- Robert, A. (1982). "*L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'Ensignement Superior*". Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris VII.

- Rodrigo, M. J. y Cubero, R. (2000). "*Constructivismo y enseñanza de las ciencias*". En Perales, F. J. y Cañal de León, P. (2000). "*Didáctica de las Ciencias Experimentales*". Ed. Marfil. Cap. 4, pp. 85-108.

- Rodríguez Barreiro, L. M. y Escudero Escorza, T. (2000). "*Interacción entre iguales y aprendizaje de conceptos científicos*". Enseñanza de las Ciencias, 18(2), pp. 255-274.

- Rodriguez, J.L. y Ruíz, L. (1989). "*El proceso de aprendizaje en matemáticas y la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau*". Revista Epsilon, 13, pp. 27-42.

- Ruiz, L. (1994). "*Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico*". Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

- Sánchez, G., de Pro, A. y Valcárcel, M. V. (1997). "*La utilización de un modelo de planificación de unidades didácticas: El estudio de la disolución en la educación secundaria*". Enseñanza de las Ciencias, 15(1), pp. 35-50.

- Sánchez-Pérez, E. A., García Raffi, L. M. y Sánchez-Pérez J. V. (1999). "*Introducción de las técnicas de modelización para el estudio de la física y de las* *matemáticas en los primeros cursos de las carreras técnicas*". Enseñanza de las Ciencias, 17(1), pp. 119-129.

- Sears, F. (1971). "*Fundamentos de física I. Mecánica, Calor y Sonido*". Ed. Aguilar. Madrid.

- Sierpinska, A. (1992). "*On understanding the concept of function. The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*". Dubinsky, E. y G. Harel (Eds.) Notes 25, MAA, pp. 23-58.

- Sierpinska, A. (1985). "*Obstacles Epistemologiques Relatif à la Notion de Limite*". Recherches en Didactiques des Mathématiques, 6(1), pp. 5-67.

- Solbes, J. y Vilches, A. (1989). "*Interacciones ciencia/técnica/sociedad: un instrumento de cambio actitudinal*". Enseñanza de las Ciencias, 7(1), pp. 14-20.

- Solbes, J. y Vilches, A. (1997). "*STS interactions and the teaching of Physics and Chemistry*". Science Education, 81(4), pp. 377-386.

- Steen, A. (1987). "*Calculus for a new century: A pump, not a filter*". Mathematical Association of America, MAA Notes, 8.

- Strike, G. y Posner, G. (1992). "*A revisionist theory of conceptual change*". En Duschl, R. A. y Hamilton, R. J. (Eds). "*Philosophy of science, cognitive psychology and educational theory and practice*". State University of New York Press, Albany, NY, pp. 147-176.

- Tall D. y Vinner S. (1981). "*Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*". Educational Studies in Mathematics, 12, pp. 151-169.

- Tall, D. (1986 a). "*Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using Computer Graphics*", PhD Thesis. Mathematics Education Research Center, University of Warwick.

- Tall, D. (1986 b). "*Lies, Damn Lies and Differential Equations*", Mathematics Teaching, 114, pp. 54-57.

- Tall, D. (1991 a). "*Advanced Mathematical Thinking*". Kluwer, Dordrecht.

- Tall, D. (1991 b). "*Recent Developments in the Use of Computers to Visualize and Symbolize Calculus Concept*". MAA Notes Number 20, pp. 15-25.

- Tamir, P. (1998). "*Assessment and evaluation in science education: opportunities to learn and outcomes*". En Fraser B. J. y Tobin K. G. (Eds). "*International Handbook of Science Education*". Kluwer Academic Publishers. London.

- Thompson, P. (1985). "*Experience, problem solving and learning mathematics: considerations in developing mathematics curricula*". En Silver E. (Ed.). "*Teaching and Learning Mathematical Problem Solving*" Earlbaum, Hillsdale N.J., pp. 189-236.

- Thorley, N. R. y Treagust, D. F. (1987). "*Conflict within dyadic interactions as a stimulant for conceptual change in physics*". International Journal of Science Education, 9(2), pp. 203-216.

- Tipler, P. A. (1995). "*Física*". Ed. Reverté. Barcelona.

- Toledo, B., Arriasseco, I. y Santos, G. (1997). "*Análisis de la transición de la física clásica a la relativista desde la perspectiva del cambio conceptual*". Enseñanza de las Ciencias, 15(1), pp. 79-90.

- Valderrama Bonnet, M. J. (1989). "*Métodos Matemáticos Aplicados a las Ciencias Experimentales*". Ediciones Pirámide, S.A. Madrid.

- Van Den Akker, J. (1998). "*The Science Curriculum: Between ideals and outcomes*". En Fraser B. J. y Tobin K. G. (Eds). "*International Handbook of Science Education*". Kluwer. London.

- Viennot, L. (1976). "*Le Raisonnement Spontané en Dynamique Élémentaire*". Tesis Doctoral. Université París VII. Publicada en 1979 por Hermann. París.

- Wallace, J. y Louden, W. (1998). "*Curriculum change in science: riding the waves of Reform*". En Fraser B. J. y Tobin K. G. (Eds). "*International Handbook of Science Education*". Kluwer Academic Publishers. London.

- Webb, N. M., Troper, J. D. y Fall, R. (1995). "*Constructive activity and learning in collaborative small groups*". Journal of Educational Psychology, 87(3), pp. 406-423.

- White, R. (1999). "*The revolution in research on Science Teaching*". En Richardson V (Ed). "*Handbook of Research on Teaching*". 4° edición.