

Tema 13

1. Hidrodinámica de la zona de rompientes

Alejandro López Ruiz

Asignatura: Hidráulica Litoral
Dept. Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica
ETSI Caminos, Canales y Puertos
Universidad de Granada

Diciembre 2013

Índice

Índice	1
1. Introducción	1
2. Tensor de radiación y ecuaciones de conservación	3
3. Ecuación de conservación de masa. Corriente transversal	5
4. Ecuación de conservación de cantidad de movimiento en x . Variaciones del nivel medio	5
4.1. Solución fuera de la zona de rompientes. Setdown	5
4.2. Solución dentro de la zona de rompientes. Setup	6
5. Ecuación de conservación de cantidad de movimiento en y . Corriente longitudinal	7
5.1. Solución fuera de la zona de rompientes	7
5.2. Solución dentro de la zona de rompientes	8
5.3. Solución con términos difusivos	9
Bibliografía	10

1. Introducción

Durante los primeros temas del curso se ha estudiado teoría lineal de oleaje truncando las ecuaciones de gobierno al orden $\mathcal{O}(Ak)$, siendo A la amplitud del oleaje y k en número de onda. De esta forma, se obtenía que la trayectoria de las partículas sometidas al movimiento ondulatorio del oleaje era una elipse cerrada, con lo que la partícula no sufre ningún desplazamiento neto tras el

paso de una ola completa. Esto se traduce en que no existe transporte neto de masa ni de cantidad de movimiento en la dirección de propagación del oleaje.

Sin embargo, cerca de la costa los términos no lineales (orden $\mathcal{O}(A^2k^2)$) se hacen importantes al aumentar k debido al asomeramiento del oleaje. Si se considera esta no-linealidad, la trayectoria de las partículas pasa a ser una elipse abierta (figura 1), produciéndose un desplazamiento neto de la partícula en la dirección de propagación del oleaje, y por tanto, un transporte de masa y cantidad de movimiento. Esto se debe a que la celeridad a la que está sometida la partícula es $c \sim \sqrt{g(h + \eta)}$, siendo h el nivel medio del mar en ese punto y η la sobreelevación de la superficie libre en un instante determinado. Cuando pasa la cresta de la ola ($\eta > 0$) la celeridad es mayor que cuando pasa el seno ($\eta < 0$) y por tanto recorre más espacio (figura 1) en el mismo intervalo de tiempo.

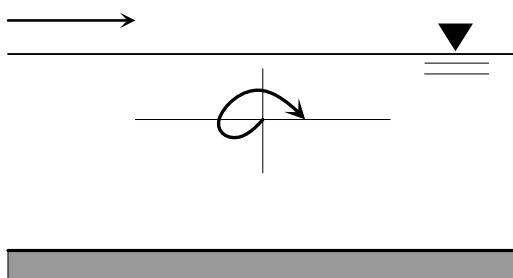


Figura 1: Trayectoria de las partículas si se consideran términos no lineales

Aunque se consideren no-linealidades durante la propagación del oleaje cerca de la costa (en concreto, en la zona de rompientes), las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento deben seguir cumpliéndose. Por tanto, deben aparecer ciertos mecanismos para compensar el exceso de masa y cantidad de movimiento que se produce en las inmediaciones del punto de rotura del oleaje. Estos mecanismos son fundamentalmente tres, de entre los que nos centraremos en los dos primeros:

- **Variaciones del nivel medio del mar** ($\bar{\eta}$): subida o bajada del nivel medio sobre el que oscila el oleaje. Hay que diferenciar bien entre nivel medio y superficie libre.
- **Generación de corrientes** (U, V): el exceso de masa y cantidad de movimiento se desplaza a través de la generación de corrientes.
- **Undertow**: corriente sumergida en dirección hacia el mar que se distribuye desde el fondo hasta cierta profundidad.

En esta sección nos centraremos en el estudio de estos mecanismos, que se hacen tanto más intensos cuanto más cerca del punto de rotura del oleaje nos encontremos. Para ello, se define el sistema de coordenadas de la figura 2 y se considerarán las **ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento promediadas** (integradas en vertical y promediadas en el periodo del oleaje).

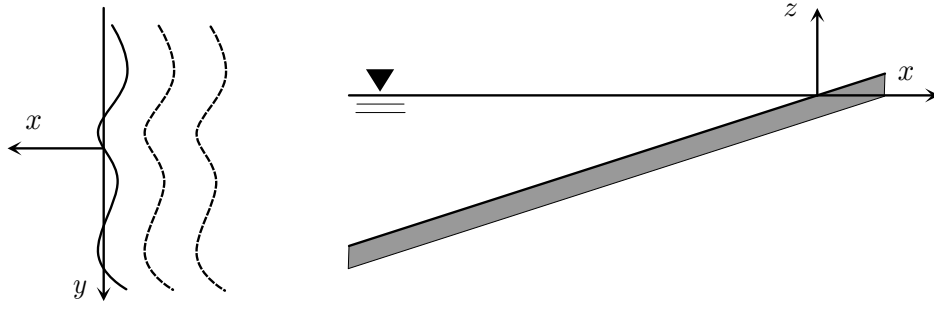


Figura 2: Sistema de referencia definido en planta (izquierda) y perfil (derecha)

2. Tensor de radiación y ecuaciones de conservación

Para cuantificar estos procesos de compensación de masa y cantidad de movimiento, Longuet-Higgins (1970) definió el **tensor de radiación** a partir del flujo de cantidad de movimiento debido únicamente a la acción del oleaje promediado en el periodo del oleaje y en la vertical. Este tensor de radiación se puede definir como: “flujo medio de cantidad de movimiento (o fuerza media) producido sólo por el oleaje al que se ve sometido un volumen de fluido”. Por tanto, este tensor tendrá sus componentes en x y en y (figura 3).

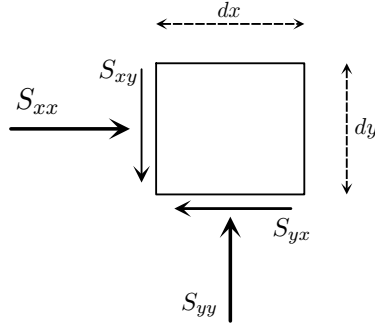


Figura 3: Componentes del tensor de radiación

Los valores de cada una de sus componentes dependen de cantidades medias como la energía del oleaje E :

$$\begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} n \cos^2 \theta + n - \frac{1}{2} & n \sin \theta \cos \theta \\ n \sin \theta \cos \theta & n \sin^2 \theta + n - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (1)$$

donde $E = \rho g H^2 / 8$ y $n = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \right)$. Si existen gradientes de estas cantidades, se inducirán fuerzas adicionales que generarán a su vez corrientes o variaciones del nivel medio. Por tanto, estos gradientes deberán aparecer en las ecuaciones de gobierno (ecuaciones de Navier-Stokes promediadas) como términos forzadores:

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \bar{\eta})U] + \frac{\partial}{\partial y} [(h + \bar{\eta})V] = 0 \quad (2)$$

$$\rho(h + \bar{\eta}) \frac{DU}{Dt} = T_x + R_x - \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial S'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S'_{xy}}{\partial y} \right) \quad (3)$$

$$\rho(h + \bar{\eta}) \frac{DV}{Dt} = T_y + R_y - \left(\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial S'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S'_{yy}}{\partial y} \right) \quad (4)$$

donde los términos R_x y R_y son términos de fricción (con el fondo o debida al viento en superficie) y los términos T_x y T_y corresponden a fuerzas horizontales generadas por cambios en el nivel medio:

$$T_x = \rho g(h + \bar{\eta}) \frac{d\bar{\eta}}{dx} \quad (5)$$

$$T_y = \rho g(h + \bar{\eta}) \frac{d\bar{\eta}}{dy} \quad (6)$$

Los términos S'_{xx} , S'_{xy} , S'_{yx} y S'_{yy} son términos difusivos. Las incógnitas de este sistema de ecuaciones son U , V y $\bar{\eta}$. De esta forma, las variaciones en el flujo (términos a la izquierda del igual) se deben a variaciones de nivel, fricción, variaciones en el tensor de radiación y a términos difusivos.

En principio, este sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas es difícil de resolver. Para encontrar una solución sencilla, se hacen ciertas simplificaciones:

- Batimetría recta y paralela, lo que implica que $\left(\frac{\partial}{\partial y} = 0 \right)$.
- Tren de ondas monocromático, por lo que $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0 \right)$.
- Términos convectivos y difusivos despreciables $\left(\frac{\partial S'_{ij}}{\partial x_i} = 0 \right)$.
- Playa con pendiente suave y rotura en decrecimiento.

Con estas simplificaciones, las ecuaciones quedan:

$$\frac{\partial}{\partial x} [(h + \bar{\eta})U] = 0 \quad (7)$$

$$0 = R_x - \rho g(h + \bar{\eta}) \frac{d\bar{\eta}}{dx} - \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} \right) \quad (8)$$

$$0 = R_y - \left(\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} \right) \quad (9)$$

En las siguientes secciones se irán resolviendo cada una de estas ecuaciones para obtener cada una de las tres incógnitas de partida (U , V , $\bar{\eta}$).

3. Ecuación de conservación de masa. Corriente transversal

La ecuación de conservación de masa relaciona las variaciones transversales (dirección x) de nivel con las corriente media en esa dirección, que es la incógnita que queremos obtener:

$$\frac{\partial}{\partial x} [(h + \bar{\eta})U] = 0 \Rightarrow (h + \bar{\eta})U = K_1 \quad (10)$$

siendo K_1 una constante. Para obtener el valor de U , se aplica la condición de contorno de corriente nula en la línea de costa $U(x = 0) = 0$, por lo que:

$$U = 0 \quad (11)$$

Esto implica que el sistema circulatorio que se genera en la zona de rompientes con las simplificaciones adoptadas tiene sólo una corriente longitudinal.

4. Ecuación de conservación de cantidad de movimiento en x . Variaciones del nivel medio

La ecuación de conservación de cantidad de movimiento en la dirección transversal a la costa relaciona gradientes del tensor de radiación con variaciones del nivel medio y términos de fricción. Si despreciamos éstos últimos:

$$-\rho g(h + \bar{\eta}) \frac{d\bar{\eta}}{dx} = \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} \quad (12)$$

Para resolver esta ecuación diferencial ordinaria de primer orden no lineal, se impone como condición de contorno que la variación del nivel medio $\bar{\eta}$ es nula en profundidades indefinidas ($kh \rightarrow \infty$) y se resuelve en dos zonas distintas: fuera y dentro de la zona de rompientes.

4.1. Solución fuera de la zona de rompientes. Setdown

Para obtener el valor de la variación del nivel medio $\bar{\eta}$ antes de que el oleaje llegue a la rotura, es necesario añadir otra simplificación más. Se asume que las variaciones del nivel medio en esta zona son muy pequeñas respecto de la profundidad ($\bar{\eta} \ll h$):

$$-\rho g(h + \bar{\eta}) \frac{d\bar{\eta}}{dx} \simeq -\rho g h \frac{d\bar{\eta}}{dx} = -\rho g \left[\frac{d(h\bar{\eta})}{dx} - \bar{\eta} \frac{dh}{dx} \right] \simeq -\rho g \frac{d(h\bar{\eta})}{dx} \quad (13)$$

La ecuación queda:

$$-\rho g \frac{d(h\bar{\eta})}{dx} = \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} \quad (14)$$

Integrando:

$$\bar{\eta} = -\frac{1}{\rho g h} (S_{xx} + K_2) \quad (15)$$

siendo K_2 una constante. Si se impone la condición de contorno, $K_2 = -S_{xx}^0$, siendo S_{xx}^0 el valor de la componente paralela al eje x del tensor de radiación en profundidades indefinidas. Por tanto, la variación del nivel medio fuera de la zona de rompientes es una curva con la siguiente expresión:

$$\bar{\eta} = \frac{1}{\rho g h} (S_{xx}^0 - S_{xx}) \quad x < x_b \quad (16)$$

Si se representa esta expresión sobre el perfil de playa (figura 4), se observa que describe una curva que decrece hasta alcanzar un valor mínimo en el punto de rotura ($\bar{\eta}(x = x_b) = \bar{\eta}_b$). A esta variación del nivel medio fuera de la zona de rompientes se le denomina **setdown**.

4.2. Solución dentro de la zona de rompientes. Setup

Dentro de la zona de rompientes habrá que resolver la ecuación (12) imponiendo esta vez la condición de contorno en el punto de rotura $\bar{\eta}(x = x_b) = \bar{\eta}_b$ y utilizando la expresión para S_{xx} :

$$S_{xx} = E \left[\frac{C_g}{C} (1 + \cos^2 \theta) - \frac{1}{2} \right] \quad (17)$$

De nuevo, para resolver el problema de forma sencilla habrá que considerar ciertas simplificaciones:

- Se asume que el oleaje se refracta lo suficiente como para que llegue aproximadamente normal a la costa dentro de la zona de rompientes. Esto implica que $\cos \theta \simeq 1$.
- En profundidades reducidas, $C_g \simeq C$
- Al estar la zona de rompientes saturada y considerar rotura por decrecimiento, $H = \gamma(h + \bar{\eta})$, siendo γ el índice de rotura.

Por tanto, S_{xx} queda como:

$$S_{xx} \simeq \frac{3}{2}E = \frac{3}{2} \frac{1}{8} \rho g H^2 = \frac{3}{2} \frac{1}{8} \rho g \gamma^2 (h + \bar{\eta})^2 \quad (18)$$

Sustituyendo en la ecuación (12):

$$\begin{aligned} -\rho g (h + \bar{\eta}) \frac{d\bar{\eta}}{dx} &= \frac{3}{16} \rho g \gamma^2 2(h + \bar{\eta}) \left(\frac{dh}{dx} + \frac{d\bar{\eta}}{dx} \right) \Rightarrow \\ -\frac{d\bar{\eta}}{dx} &= \frac{3}{8} \gamma^2 \left(\frac{dh}{dx} + \frac{d\bar{\eta}}{dx} \right) \Rightarrow \\ \frac{d\bar{\eta}}{dx} &= \left(\frac{-3/8\gamma^2}{1 + 3/8\gamma^2} \right) \frac{dh}{dx} = K \frac{dh}{dx} \end{aligned} \quad (19)$$

Integrando esta última expresión:

$$\bar{\eta} = Kh + K_3 \quad (20)$$

siendo K_3 la constante de integración. Aplicando la condición de contorno en el punto de rotura $\bar{\eta}(x = x_b) = \bar{\eta}_b$, se obtiene que $K_3 = \bar{\eta}_b - Kh_b$, siendo $h_b = h(x_b)$ la profundidad de rotura. Por tanto, la variación del nivel medio dentro de la zona de rompientes, que se define como **setup** queda como:

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}_b + K(h - h_b) \quad x_b < x < 0 \quad (21)$$

Al ser $(h - h_b)$ negativo dentro de la zona de rompientes, y $K > 0$, el setup es una recta que crece linealmente conforme nos acercamos a la costa, y tendrá su valor máximo en la intersección de $\bar{\eta}$ y la playa seca (figura 4).

La expresión para la variación del nivel medio $\bar{\eta}$ considerando tanto el setup como el setdown queda:

$$\bar{\eta} = \begin{cases} \frac{1}{\rho g h} (S_{xx}^0 - S_{xx}) & x < x_b \\ \bar{\eta}_b + K(h - h_b) & x_b < x < 0 \end{cases} \quad (22)$$

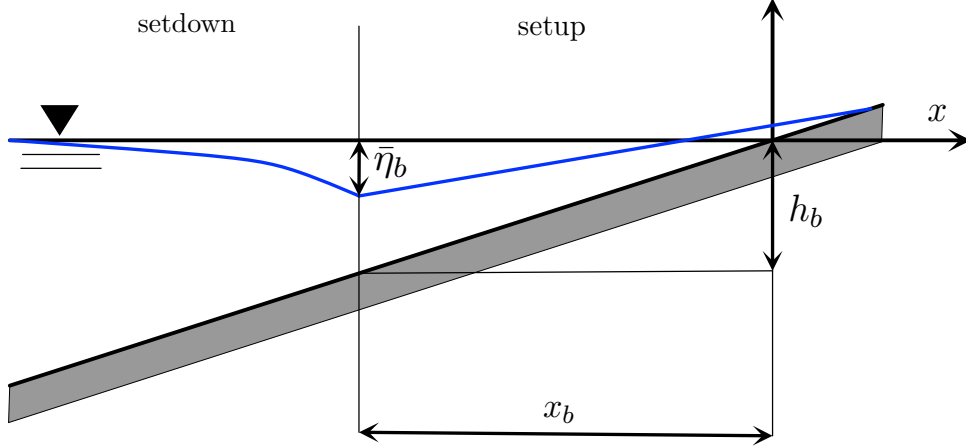


Figura 4: Setup y setdown obtenido

5. Ecuación de conservación de cantidad de movimiento en y . Corriente longitudinal

La ecuación de conservación de cantidad de movimiento en la dirección paralela a la costa relaciona términos de fricción en esa dirección con gradientes del tensor de radiación:

$$R_y = \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{C_g}{C} \sin \theta \cos \theta \right) \quad (23)$$

Si se expresa el término de fricción en función de la corriente longitudinal promediada V , se podrá obtener una expresión para ésta resolviendo la ecuación (23). De nuevo, el problema se resuelve por separado dentro y fuera de la zona de rompientes utilizando una serie de simplificaciones.

5.1. Solución fuera de la zona de rompientes

Para resolver la ecuación (23) en $x < x_b$, se utiliza la expresión para propagar oleaje desde profundidades indefinidas. De teoría lineal sabemos que:

$$H = H_0 \left(\frac{C_{g0}}{C_g} \right)^{1/2} \left(\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta} \right)^{1/2} \quad (24)$$

siendo H_0 la altura de ola en profundidades indefinidas. Ahora, con el tensor de radiación:

$$S_{xy} = E \frac{C_g}{C} \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{8} \rho g H_0^2 \left(\frac{C_{g0}}{C_g} \right) \left(\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta} \right) \frac{C_g}{C} \sin \theta \cos \theta \quad (25)$$

Si además se utiliza la ley de Snell $\sin \theta / C = \sin \theta_0 / C_0$, la ecuación (25) queda:

$$S_{xy} = \frac{1}{8} \rho g H_0^2 C_{g0} \cos \theta_0 \frac{\sin \theta_0}{C_0} \quad (26)$$

lo que es una cantidad constante para todo $x < x_b$, ya que sólo depende de parámetros del oleaje en profundidades indefinidas. Por tanto:

$$R_y = \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (27)$$

Por lo que fuera de la zona de rompientes los términos de fricción sería nulos, y por tanto, la corriente longitudinal promediada V sería nula:

$$V = 0 \quad (28)$$

5.2. Solución dentro de la zona de rompientes

Dentro de la zona de rompientes, Longuet-Higgins (1970) definió una expresión que relaciona los términos de fricción con la corriente longitudinal promediada:

$$R_y = -\frac{2}{\pi} \rho c_r u_m V \quad (29)$$

donde:

- c_r es un coeficiente de fricción que depende del lecho ($c_r \simeq 0,01$).
- u_m es la velocidad orbital máxima de las partículas en el fondo, y considerando profundidades indefinidas y rotura pro decrestamiento se expresa como $u_m = \frac{\sqrt{gh}}{2} \gamma$.
- V es la corriente longitudinal (incógnita que queremos resolver).

En cuanto a la componente del tensor de radiación, si se vuelve a considerar que el oleaje se refracta mucho antes de llegar a la zona de rompientes ($\cos \theta \simeq 1$), que se está en profundidades reducidas ($C_g = \sqrt{gh}$), la ley de Snell y rotura en decrestamiento despreciando esta vez las variaciones del nivel medio ($H = \gamma h$):

$$S_{xy} = E \frac{C_g}{C} \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{8} \rho g (\gamma h)^2 \sqrt{gh} \frac{\sin \theta_0}{C_0} \quad (30)$$

Derivando respecto de x :

$$\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} = \frac{1}{8} \rho g^{3/2} (\gamma)^2 \frac{\sin \theta_0}{C_0} \frac{\partial h^{5/2}}{\partial x} = \frac{5}{16} \rho g^{3/2} (\gamma)^2 \frac{\sin \theta_0}{C_0} h^{3/2} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (31)$$

Sustituyendo (31) y (29) en (23) y despejando V queda:

$$V = -\frac{5}{16} \frac{\pi}{c_r} g \frac{\sin \theta_0}{C_0} \gamma h \frac{dh}{dx} \quad (32)$$

Si se considera un perfil de playa lineal $h = \tan \beta x$, la corriente longitudinal se puede expresar como:

$$V = -\frac{5}{16} \frac{\pi}{c_r} g \frac{\sin \theta_0}{C_0} \gamma \tan^2 \beta x \quad (33)$$

que es la expresión de una recta. Por tanto, la corriente longitudinal es una función cuyo valor absoluto crece desde la línea de costa hasta alcanzar el punto de rotura. Desde ese punto su valor el nulo (figura 5). El signo de V dependerá del ángulo del oleaje ($\sin \theta_0$). Para el caso de oleaje

normal, $\sin \theta_0 = 0$ y no se generaría una corriente longitudinal ni dentro ni fuera de la zona de rompientes. La expresión general de V sería (figura 5):

$$V = \begin{cases} 0 & x < x_b \\ -\frac{5}{16} \frac{\pi}{c_r} g \frac{\sin \theta_0}{C_0} \gamma h \frac{dh}{dx} & x_b < x < 0 \end{cases} \quad (34)$$

5.3. Solución con términos difusivos

La solución obtenida anteriormente para V considerando un perfil de pendiente constante (ecuación 33) presenta una discontinuidad en $x = x_b$. En ese punto, del lado de la zona de rompientes V tiene su máximo valor absoluto, mientras que del otro lado su valor es nulo (figura 5). En realidad no ocurre esto: si se consideran términos difusivos y tensiones de Reynolds, la solución que se obtiene presenta una transición suave entre una zona y otra. Longuet-Higgins (1970) obtuvo también esta solución, que se expresa como:

$$V^* = \begin{cases} B_1 X^{p_1} + AX & X < 1 \\ B_2 X^{p_2} & X > 1 \end{cases} \quad (35)$$

siendo el primer caso dentro de la zona de rompientes y el segundo fuera, ya que $X = x/x_b$, y donde V_b es la velocidad que se obtuvo anteriormente sin considerar tensiones de Reynolds evaluada en el punto de rotura. El resto de parámetros son:

$$p_1 = -\frac{3}{4} + \left(\frac{9}{16} + \frac{1}{p} \right)^{1/2}$$

$$p_2 = -\frac{3}{4} - \left(\frac{9}{16} + \frac{1}{p} \right)^{1/2}$$

$$A = (1 - 2,5p)^{-1}$$

$$B_1 = [p(1 - p_1)(p_1 - p_2)]^{-1}$$

$$B_2 = [p(1 - p_2)(p_1 - p_2)]^{-1}$$

$$p = \frac{\pi n \tan \beta}{\gamma C_f}$$

El parámetro p representa el valor relativo de mezcla lateral respecto a la fricción por fondo. $p = 0$ indica que no existe mezcla lateral y, por lo tanto, se obtiene la distribución de velocidades que se obtuvo para el caso de no considerar tensiones de Reynolds. Conforme el valor de p aumenta, disminuye el máximo de la corriente longitudinal y ésta se adentra cada vez más fuera de la zona de rompientes.

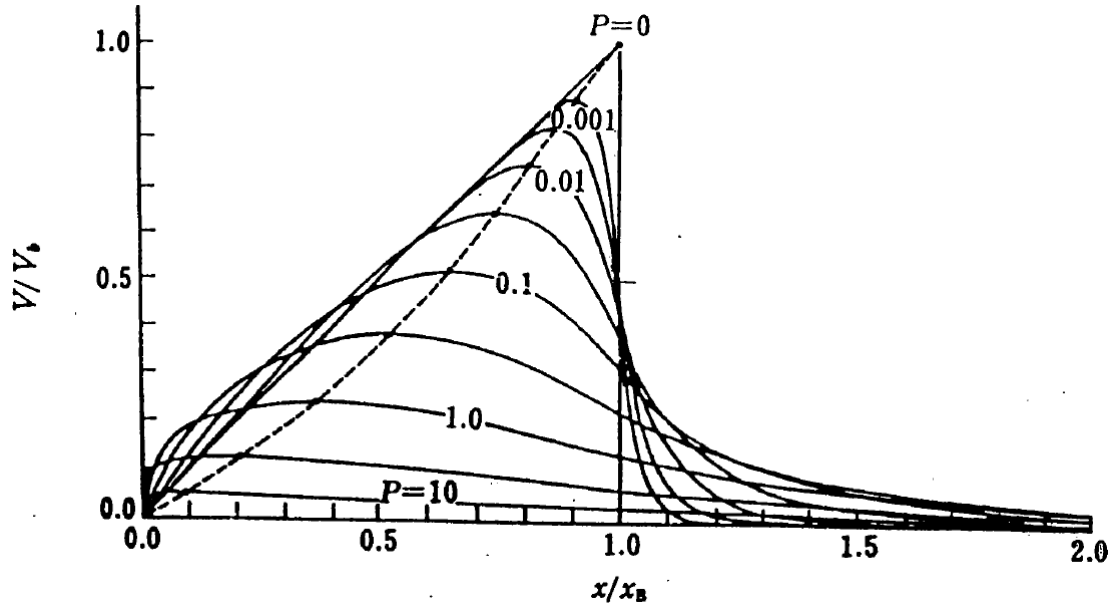


Figura 5: Perfil de la corriente longitudinal.

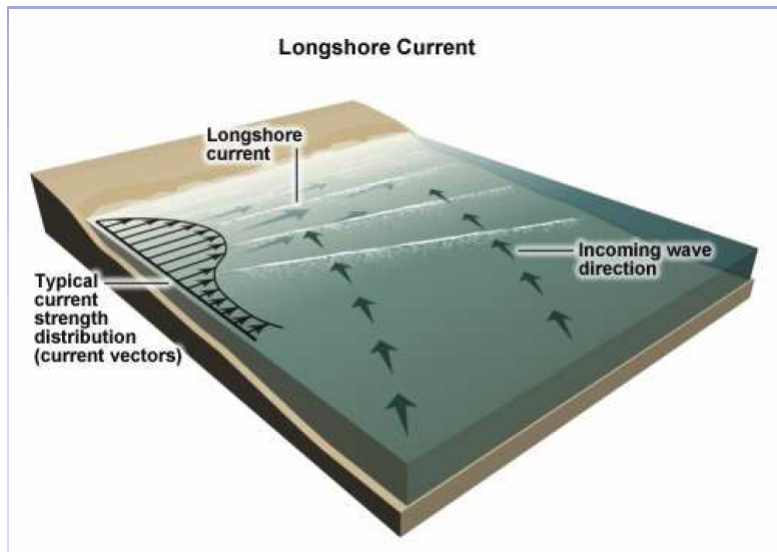


Figura 6: Incidencia oblicua del oleaje sobre un tramo de costa y generación de la corriente longitudinal.

Bibliografía

Longuet-Higgins, M. S. (1970). Longshore current generated by obliquely incident sea waves. 1. *Journal of Geophysical Research*, 75(33):6778–6789.

Tema 13

2. Transporte de sedimentos. Regeneración de playas

Alejandro López Ruiz

Asignatura: Hidráulica Litoral
Dept. Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica
ETSI Caminos, Canales y Puertos
Universidad de Granada

Diciembre 2013

Índice

Índice	1
1. Introducción	2
1.1. Definición e importancia	2
1.2. Contexto dentro del estudio de la dinámica litoral	2
1.3. Incertidumbre asociada	3
2. Inicio de movimiento	4
2.1. Capa límite y rugosidad de lecho	4
2.2. Fuerzas que actúan sobre la partícula e inicio del movimiento	5
2.2.1. Balance de fuerzas sobre la partícula	6
2.2.2. Inicio de movimiento	7
3. Modos de transporte	7
4. Formas de lecho	8
5. Cálculo de tasas de transporte	8
5.1. Transporte longitudinal de sedimentos	9
5.2. Transporte transversal de sedimentos	10
6. Regeneración de playas	13
6.1. Perfil con intersección	14
6.2. Perfil sin intersección	14
6.3. Perfil sumergido	14
Bibliografía	15

1. Introducción

1.1. Definición e importancia

El transporte de sedimentos puede definirse como “el movimiento de las partículas de sedimento debido a la acción del flujo sobre ellas”. Este flujo ejercerá unas tensiones sobre el fondo τ_0 que si superan un cierto umbral $\tau_0 > \tau_c$ provocarán el inicio de movimiento de las partículas. Este umbral depende de las características del sedimento. Para conocer cuándo se produce la movilización del material y la cantidad de éste que se transporta, es necesario conocer τ_0 y τ_c . Físicamente, el volumen de sedimento que se transporta seguirá una expresión del tipo:

$$Q \sim A(\tau_0 - \tau_c)^B \quad (1)$$

donde A y B serían parámetros a determinar. En este caso, vamos a estudiar solamente el movimiento de sedimentos no cohesivos.

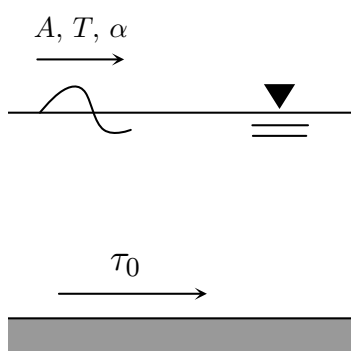


Figura 1: Oleaje incidente de amplitud A , periodo T y dirección α y tensión tangencial originada en el fondo τ_0

El cálculo del transporte de sedimentos tiene una importancia práctica muy importante en la Ingeniería de Costas, ya que se utiliza en muchas aplicaciones:

- Evolución morfológica de un tramo de costa, tanto en planta como en perfil.
- Estudio de erosión y aterramiento de tuberías y emisarios submarinos.
- Análisis del impacto de obras marítimas, tanto en la operatividad de las mismas como el gestión de la costa (figura 2).
- Erosión en pilas o estructuras.

1.2. Contexto dentro del estudio de la dinámica litoral

En cierta medida, se puede asemejar el estudio de la dinámica litoral a un estudio general de Ingeniería de Costas. Las sucesivas fases que lo componen son:

1. Descripción física de la zona de estudio.
2. Clima marítimo (régimen medio y extremal).
3. Propagación de oleaje, que se puede realizar con teoría lineal o utilizando modelos numéricos.
4. Evolución histórica de la línea de costa mediante el uso de mapas o fotografía aéreas.

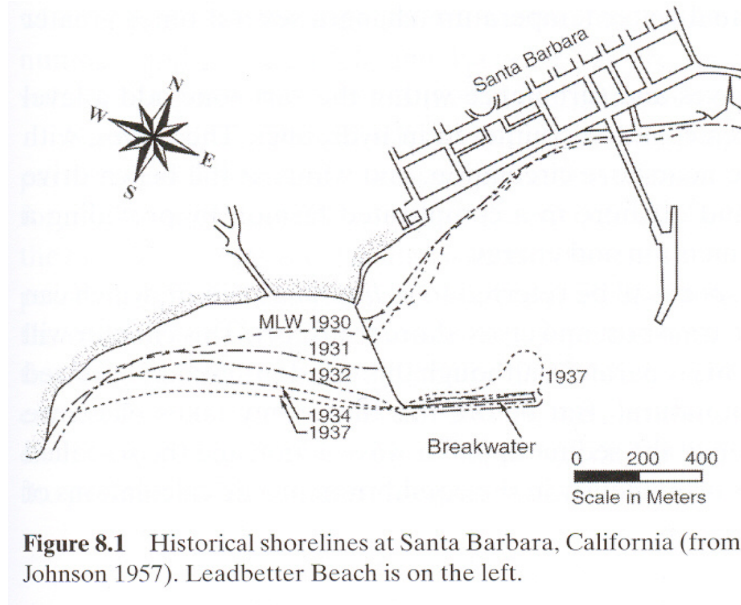


Figura 2: Impacto de una obra marítima en la forma en planta de un tramo de costa

5. Transporte de sedimentos. En este punto es en el que nos fijaremos en esta sección, en la que se estudian las herramientas necesarias para obtener la dinámica sedimentaria de un tramo de costa. El objetivo final es conocer el balance de sedimentos, identificando los flujos de entrada y salida en la zona de estudio (figura 3).

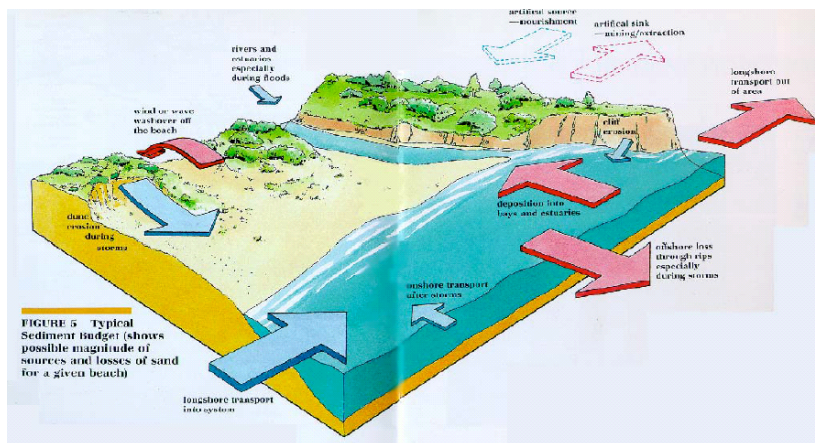


Figura 3: Balance sedimentario de un tramo de costa

6. Diagnóstico de la situación: erosión, sedimentación, equilibrio.
7. Propuesta de soluciones.
8. Predicción de la evolución morfológica del sistema. Tendencia del sistema.

1.3. Incertidumbre asociada

El concepto de transporte de sedimentos hace referencia al movimiento de partículas de sedimento causado principalmente por la acción que ejerce un fluido sobre ellas. Su estudio plantea

similitudes con el transporte de sedimentos para el caso de un flujo unidireccional, aunque en este caso la complejidad es mayor por las razones que se exponen a continuación.

En general, las formulaciones tradicionales que se emplean para el transporte de sedimentos asumen flujo uniforme y estacionario, condiciones bajo las cuales la acción del flujo sobre los granos de sedimento alcanza su desarrollo total, y de igual forma lo hace la respuesta del lecho. Se produce, por tanto, un acoplamiento entre los movimientos de los granos y las partículas de agua. Hasta el momento hemos admitido que no existe desfase entre ambos movimientos, es decir, que la velocidad del agua y del sedimento es la misma. Pero esto **no** es cierto para el caso de flujo oscilatorio.

Para el caso de flujo oscilatorio existe una variación temporal de la velocidad con inversión del sentido de movimiento según el paso del seno o de la cresta de la onda, e incluyendo por ello dos puntos de velocidad nula en un periodo, por lo que el criterio de acoplamiento de los movimientos es discutible.

Además, el hecho de que el transporte de sedimentos se produzca en sentidos alternativos según el ciclo de la onda no hace sino incrementar la complejidad del problema. En concreto, en la zona de rompientes:

- El campo de velocidades es oscilatorio, lo que hace que las velocidades sean más complejas desde el punto de vista del transporte de sedimentos en comparación con un flujo unidireccional.
- Es frecuente que se superpongan olas con distinta dirección, periodo y amplitud y corrientes unidireccionales no estacionarias, lo que no hace sino aumentar la complejidad del problema.
- La respuesta de las partículas de sedimento a la acción del oleaje y las corrientes bajo estas condiciones está todavía poco entendida (incluso para el caso de corrientes unidireccionales sigue habiendo grandes lagunas en el conocimiento).
- Por este motivo existe una gran fuente de incertidumbre y mucho empirismo a la hora de estudiar este tipo de procesos.

2. Inicio de movimiento

2.1. Capa límite y rugosidad de lecho

Con respecto al transporte de sedimentos, la parte más importante del flujo es la capa límite, ya que se puede decir que es la zona a través de la cual el fluido interactúa con el fondo. En el caso de un fluido con movimiento oscilatorio, la capa límite se puede definir como “una delgada capa de transición entre el fondo, donde la velocidad es nula, y la capa superior del flujo oscilatorio irrotacional”. De forma intuitiva sería una zona cercana al fondo en la cual el movimiento del fluido se encuentra afectado por la fricción con el contorno (fondo). La velocidad es nula en el fondo y aumenta a medida que nos alejamos del mismo.

El espesor de esta capa es proporcional al periodo del movimiento oscilatorio, a mayor periodo más grande será la capa límite (de transición de velocidades) y por tanto menores los gradientes verticales de velocidades. Al ser los esfuerzos tangenciales sobre el fondo τ_0 proporcionales a estos gradientes, el oleaje provocará mayores tensiones y por tanto mayor transporte de sedimentos que oscilaciones de mayor periodo, como las debidas a la marea (figura 4).

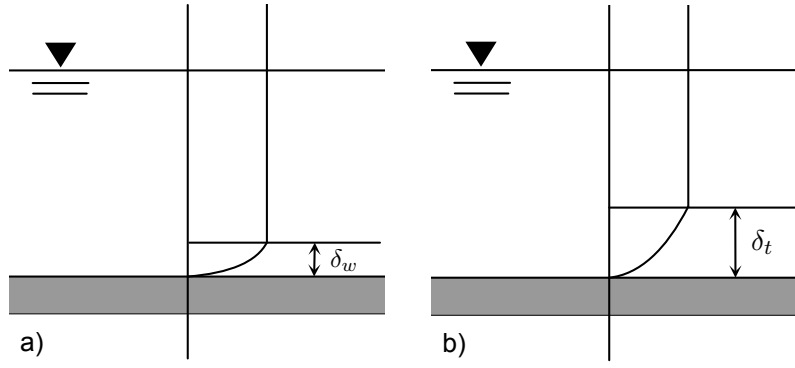


Figura 4: Perfil de velocidades y espesor de capa límite para a) oleaje y b) marea

Para la tensión tangencial que ejerce el fluido sobre el lecho, se utiliza la siguiente expresión:

$$\tau_0 = \rho u_*^2 = \frac{1}{2} \rho f_w u^2 \quad (2)$$

donde u es la velocidad orbital en una profundidad igual a la altura de la capa límite. En el caso de movimiento oscilatorio de una onda con amplitud A y periodo T , se asume que:

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \rho f_w \left(\frac{2\pi A}{T} \right)^2 \quad (3)$$

El parámetro f_w es un coeficiente de fricción que depende de la rugosidad del lecho:

$$f_w = \begin{cases} \exp(5,213(k_s/A)^{0,194} - 5,977) & k_s/A < 0,63 \\ 0,30 & k_s/A > 0,63 \end{cases} \quad (4)$$

donde k_s es un coeficiente de rugosidad que tiene una componente debida a la rugosidad del grano (k_d) y otra debida a la rugosidad del lecho (k_r):

$$k_s = k_d + k_r = (2,5D_{50}) + \left(\frac{8a_r^2}{\lambda_r} + 170D_{50}(\theta - 0,05)^{1/2} \right) \quad (5)$$

siendo a_r la altura de las formas de lecho, λ_r su espaciamiento horizontal y θ el parámetro de Shields, cuya interpretación física se verá más adelante y que viene dado por:

$$\theta = \frac{\tau_0}{(\rho_s - \rho)gD} \quad (6)$$

Por tanto, la obtención de τ_0 mediante la ecuación (3) requiere de un proceso iterativo, ya que esta ecuación depende de f_w que a su vez depende de τ_0 .

2.2. Fuerzas que actúan sobre la partícula e inicio del movimiento

El análisis de la estabilidad de un lecho se basa en el estudio de las condiciones bajo las cuales, las partículas que lo forman, comienzan a moverse ante la acción que ejerce el fluido sobre ellas. Ejemplos de aplicación son el aseguramiento contra la erosión del lecho de un cauce aguas abajo de una presa, el diseño de canales estables ante la erosión, o la protección contra la erosión de obras civiles tales como pilas de puentes u obras de abrigo.

Los estudios realizados hasta ahora intentan determinar de forma cuantitativa las condiciones necesarias para las que comienzan a moverse las partículas. Este punto representa una transición

entre un lecho estable y uno inestable. En este sentido cabe destacar que lo importante es definir cómo o cuándo se produce el inicio de movimiento de los granos.

El concepto de inicio de transporte de sedimentos está sujeto a consideraciones subjetivas. Existen varias formulaciones, la mayoría empíricas, en las que el autor considera el inicio del movimiento de forma distinta. Unas veces es el punto de transición de un lecho totalmente inmóvil al movimiento de alguna partícula aislada de forma intermitente, el movimiento de varias partículas de forma intermitente, o el movimiento de varias partículas de forma continua. De todas maneras, esto pone de manifiesto que es preciso definir lo que se entiende como inicio de transporte de sedimentos.

A continuación se plantea el problema como la interacción fluido-partícula, realizando un balance de las fuerzas que intervienen, haciendo referencia a los trabajos clásicos realizados en este campo.

2.2.1. Balance de fuerzas sobre la partícula

Se considera un lecho plano de material granular no cohesivo y uniforme, de diámetro D , sobre el que fluye un fluido de densidad ρ (flujo unidireccional). Vamos a determinar las fuerzas que actúan sobre una partícula realizando un equilibrio entre las fuerzas desestabilizadoras ejercidas por el fluido, y las fuerzas que tienden a estabilizar la partícula. En el estado límite, los dos tipos de fuerzas son iguales y definen el momento en el que la partícula se pone en movimiento. Las fuerzas que actúan están representadas en la figura 5.

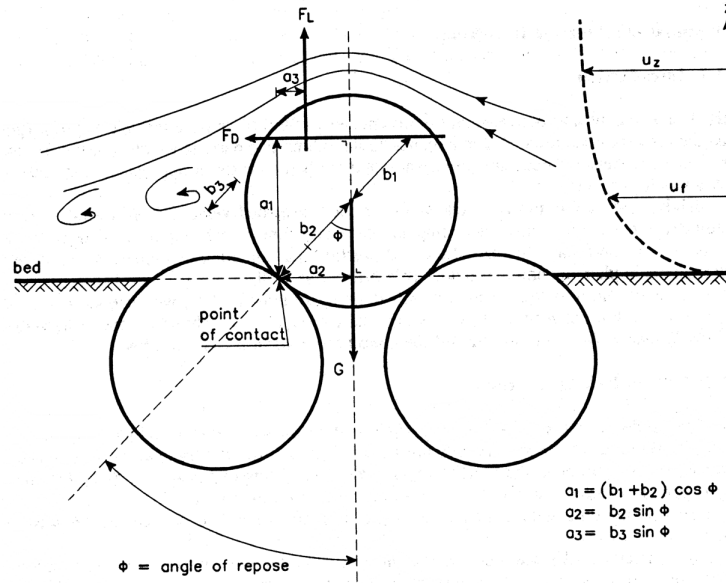


Figura 5: Fuerzas que actúan sobre una partícula sometida a la acción del flujo.

La **fuerza de arrastre** del fluido sobre la partícula se puede expresar como:

$$F_D = \frac{1}{2} C_D A \rho u(z_a)^2 \sim \rho D^2 u_*^2 \quad (7)$$

siendo, C_D el coeficiente de arrastre, A el área de la partícula proyectada en la dirección del flujo, $u(z_a)$ la velocidad del flujo a la altura z_a (correspondiente al centro de la partícula) y u_* la velocidad de corte. La **fuerza estabilizadora** que se opone a esta fuerza de arrastre depende del peso de la partícula G :

$$F_E = G \tan \phi \sim (\rho_s - \rho) g D^3 \quad (8)$$

donde $\tan \phi$ es el ángulo de rozamiento interno del material. Teniendo en cuenta que en el punto de equilibrio las dos fuerzas son iguales, se puede escribir la siguiente relación:

$$\frac{F_D}{F_E} \sim \frac{\rho D^2 u_*^2}{(\rho_s - \rho) g D^3} = \frac{\rho u_*^2}{(\rho_s - \rho) g D} = \frac{\tau_0}{(\rho_s - \rho) g D} = \theta \quad (9)$$

obteniendo una relación adimensional conocida como **parámetro de Shields** θ que se define como el balance de fuerzas estabilizadoras y desestabilizadoras que ejerce el flujo sobre las partículas.

2.2.2. Inicio de movimiento

El inicio del movimiento de las partículas se produce cuando $\theta > \theta_{cr}$, siendo θ_{cr} lo que se conoce como **parámetro de Shields crítico** y que depende del tamaño de la partícula:

$$\theta_{cr} = \frac{0,3}{1 + 1,2D_*} + 0,055 [1 - \exp(-0,02D_*)] \quad (10)$$

siendo D_* el diámetro adimensional de las partículas:

$$D_* = \left[\frac{g - \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right)}{\nu^2} \right]^{1/3} D \quad (11)$$

donde $\nu \simeq 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ es la viscosidad del fluido.

En resumen, para saber si existe movimiento de partículas y por tanto transporte de sedimentos, hay que obtener el valor del parámetro de Shields (ecuación 9) calculando el valor de τ_0 mediante la ecuación (5) mediante un proceso iterativo que depende del movimiento oscilatorio. Después, el valor obtenido de θ debe ser comparado con el valor de θ_{cr} obtenido mediante la expresión (10) y que depende fundamentalmente de las características de las partículas.

3. Modos de transporte

En cuanto se supera la tensión tangencial crítica en el fondo τ_c los sedimentos comienzan a moverse. Es común diferenciar los modos de transporte de sedimentos en 3 partes:

- **Transporte de sedimentos por fondo:** las partículas permanecen en contacto con el lecho de forma continua o intermitente y están limitados por el efecto de la gravedad: rodadura, deslizamiento o saltación. Se produce como consecuencia del efecto de la tensión tangencial ejercida por el fluido directamente sobre los granos.
- **Transporte de sedimentos en suspensión:** las partículas son transportadas en el lecho del fluido por efecto de las fuerzas turbulentas.
- **Carga de lavado (“wash load”):** consiste en partículas muy finas transportadas en la columna de agua que no están presentes en el lecho.

En la práctica es difícil distinguir entre transporte por fondo y suspensión. Sin embargo, Bagnold (1956, 1966) sugiere que el modo de transporte en suspensión es dominante cuando:

$$\frac{u_*}{\omega_s} \geq 0,8 \quad (12)$$

donde el denominador es la velocidad de caída, que se puede definir como:

$$\omega_s = \sqrt{\frac{4(\rho_s - \rho)gD_{50}}{3\rho C_D}} \quad (13)$$

Es decir, si la velocidad de corte es lo suficientemente grande en relación a la de caída, habrá transporte en suspensión; en caso contrario, no.

4. Formas de lecho

Cuando las tensiones tangenciales en el fondo superan el umbral de inicio de movimiento, el lecho se deforma y tienden a aparecer distintas formas de lecho. El proceso de formación de estas formas se puede resumir en las siguientes fases, en las que sucesivamente van aumentando tanto el transporte de sedimentos como el número de Shields θ :

1. **Lecho plano:** es la morfología de partida cuando $\tau_0 < \tau_c$ y no hay transporte de sedimentos.
2. **Ripples:** Inicialmente se forman ripples o rizaduras con longitudes de onda del orden de 10 cm y amplitudes del orden de cm.
3. **Megaripples:** si sigue aumentando la velocidad del fluido, se tienden a formar megaripples con longitudes de onda del orden de 100 cm y amplitudes del orden de 10 cm.
4. **Lecho plano:** si la velocidad sigue aumentando desaparecen las formas de lecho, el fondo se vuelve plano y se da lo que se denomina transporte en flujo de lámina (“sheet flow”).

La generación de formas de lecho es una manera de compensar con fricción el aumento de τ_b y la pérdida de sedimento. El estudio de las formas de lecho es interesante desde el punto de vista ingenieril debido fundamentalmente a:

- Aumentan las tensiones tangenciales en el fondo, resultando en un aumento de la concentración de sedimentos en suspensión.
- Aumentan la rugosidad del lecho, influyendo en la forma del perfil de velocidades.

5. Cálculo de tasas de transporte

Como ya se ha visto en el tema de hidrodinámica de la zona de rompientes, a lo largo del perfil de playa pueden distinguirse dos zonas. En el área en el que el oleaje todavía no ha roto, los agentes principales que actúan son el oleaje y las corrientes debidas a la acción del viento o la marea. Éstas corrientes son mucho más débiles, por lo general, que las generadas por el oleaje. Sin embargo, dentro de la zona de rompientes interactúan estos agentes y además las corrientes provocadas por la rotura del oleaje, principalmente la corriente longitudinal V . Por ello, dentro de la zona de rompientes el transporte de sedimentos es mayor, y de nuevo, va a ser la zona donde nos centremos a la hora de calcular las tasas de transporte.

La tasa de transporte de sedimentos puede definirse como “el volumen de sedimento por unidad de tiempo que pasa por un plano de anchura unidad”, y por tanto, tendrá unidades de $\left[\frac{\text{m}^3}{\text{ms}}\right]$. En general, puede clasificarse según dos criterios:

- Según a qué profundidad se mueva el sedimento: se distingue entre **transporte por fondo** (q_b) y **transporte por suspensión** (q_s). El primero es la cantidad de material que se desplaza a lo largo de una capa relativamente pequeña en la que las partículas se mueven por saltación, rodadura y desplazamiento. El primero es la cantidad de material q se desplaza en la parte superior de la lámina de agua y que se ve menos afectado por las fuerzas gravitatorias.

- Según su dirección: normalmente se obtienen la componente paralela (**transporte longitudinal**, Q_L) y perpendicular (**transporte transversal**, Q_T) al tramo de costa.

De entre estas dos clasificaciones, la segunda es la de más interés en ingeniería y la que se estudiará en este tema.

5.1. Transporte longitudinal de sedimentos

El el transporte longitudinal paralelo a la costa, y por tanto, el mayor responsable de los cambios en la forma en planta de la costa. Por ello, la escala temporal bajo la que se suele estudiar es del orden de años. Existen varios métodos para su cálculo:

- **Adopción de tasas vecinas:** asignar el transporte de sedimentos conocido en un tramo de costa a otro que se encuentre relativamente cerca. Es un método muy poco preciso debido a la gran variabilidad espacial que presentan los distintos tramos de costa y los agentes que intervienen en ellos.
- **Cálculo con distintas batimetrías:** ya que el transporte longitudinal es el mayor responsable de los cambios en la forma en planta de la línea de costa, es posible obtener el volumen de sedimentos que se ha movilizado en un intervalo de tiempo si se conoce la pérdida o ganancia de volumen de un tramo de costa. La tasa media de transporte entre dos instantes en los que se ha obtenido la batimetría será la diferencia de volumen entre el intervalo de tiempo entre la toma de datos batimétricos. Su precisión depende mucho del tiempo que pase entre medidas y por ello suele ser un método muy costoso.
- **Medidas de campo:** requieren instrumentación específica y mucha mano de obra. Las muestras se toman con una “trampa de sedimentos” que acumula el material transportado en una sección transversal. Sus principales inconvenientes son el tiempo de medida (normalmente se suelen tomar medidas durante un periodo relativamente corto de tiempo) y que los datos son representativos de una zona relativamente limitada.
- **Fórmulas de cálculo:** relacionan parámetros del oleaje con el transporte de sedimentos. Es el método más extendido por su sencillez.

En este tema nos centraremos en las fórmulas de cálculo. La fórmula más extendida es la del CERC (Coastal Engineering Research Center), que relaciona la energía del oleaje con el transporte de sedimentos a través de la teoría lineal. Al utilizar la energía del oleaje, da un valor del transporte que potencialmente puede provocar el oleaje. El transporte final que haya depende de la disponibilidad de material en la playa. Es relativamente precisa, sobre todo para estudios preliminares. Su expresión se deduce de la siguiente forma:

1. Se obtiene el flujo de energía por unidad de longitud de cresta de una ola en su dirección de avance (figura 7):

$$Pdl = EC_g dl = \frac{1}{8} \rho g H^2 C_g \cos \alpha dx \quad (14)$$

2. Se considera el flujo de energía por unidad de longitud de la costa, por lo que $dx = 1$:

$$Pdl = \frac{1}{8} \rho g H^2 C_g \cos \alpha \quad (15)$$

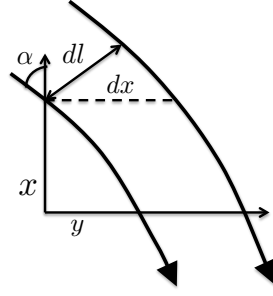


Figura 6: Esquema para la obtención de la fórmula del CERC

3. Se obtiene la componente longitudinal multiplicando por el ángulo que forma el oleaje con la normal a la costa:

$$P_L = \frac{1}{8} \rho g H^2 C_g \cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{16} \rho g H^2 C_g \sin (2\alpha) \quad (16)$$

4. Se obtiene este flujo de energía en el punto de rotura. Para ello será necesario conocer los parámetros del oleaje en este punto. Además, se considera que, al estar en profundidades reducidas, $C_{gb} \simeq \sqrt{gh_b}$. Además, si hay rotura en decrestamiento $H_b = \gamma h_b$, por lo que:

$$P_{Lb} = \frac{1}{16} \rho g H_b^2 C_{gb} \sin (2\alpha_b) = \frac{1}{16} \rho g^{3/2} H_b^{5/2} \gamma^{-1/2} \sin (2\alpha_b) \quad (17)$$

5. Ahora queda relacionar este flujo de energía con el transporte de sedimentos. Para ello, Komar and Inman (1970) comprobaron experimentalmente que:

$$Q_L = \frac{K}{(\rho_s - \rho)g(1 - p)} P_{Lb} \quad (18)$$

siendo ρ_s y ρ la densidad de las partículas sólidas y del agua, respectivamente, p la porosidad del material y K una constante cuyo valor depende del tamaño del sedimento (del Valle et al. (1993) establecieron que $K = 1,6e^{-2,5D_{50}}$). El transporte queda:

$$Q_L = \frac{K\sqrt{g}}{16\sqrt{\gamma}(\rho_s - \rho)(1 - p)} H_b^{5/2} \sin (2\alpha_b) \quad (19)$$

con lo que conocido el material de la playa, el transporte longitudinal de sedimentos potencial en una sección únicamente depende de la altura de ola y el ángulo del oleaje en el punto de rotura de esa sección.

5.2. Transporte transversal de sedimentos

Es el volumen de sedimentos que se transporta en la dirección perpendicular a la costa por unidad de tiempo. Por tanto, es el principal responsable de los cambios en el perfil. Como ya se ha visto en el tema anterior, la morfología del perfil varía normalmente de invierno a verano, por lo que la escala temporal en la que se considera este transporte es de meses o estaciones, a diferencia del transporte longitudinal.

En realidad este transporte no es muy interesante desde el punto de vista de la ingeniería, es más importante poder determinar el **perfil de equilibrio dinámico**. Este perfil se define como el

perfil medio que no se mueve en la dirección transversal, que siguiendo el esquema definido para el estudio de la hidrodinámica de la zona de rompientes sería x .

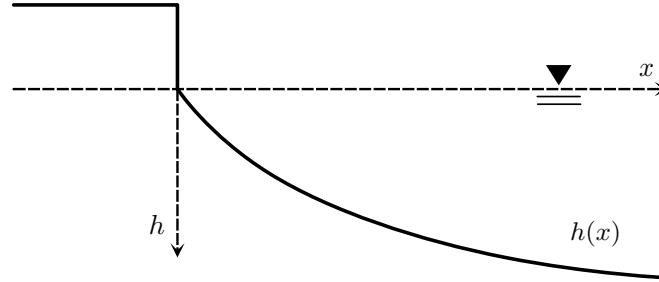


Figura 7: Perfil de equilibrio dinámico

El perfil de playa es capaz de soportar una cierta tasa de disipación de energía “crítica” sin modificarse. Si el oleaje que llega al perfil contiene un flujo de energía P menor que esa disipación crítica D_{cr} , no se producen cambios en el perfil. Sin embargo, si $P > D_{cr}$, el perfil variará su forma tendiendo a adquirir una configuración en la que su D_{cr} sea mayor. Matemáticamente, esta disipación crítica se expresa como:

$$D_{cr} = \frac{1}{h} \frac{dP}{dx} \quad (20)$$

Si se consideran profundidades reducidas y rotura por decrestamiento:

$$D_{cr} = \frac{1}{h} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{8} \rho g^{3/2} \gamma^2 h^{5/2} \right] = \frac{1}{h} \frac{1}{8} \rho g^{3/2} \gamma^2 h^{3/2} \frac{dh}{dx} \quad (21)$$

Reordenando:

$$D_{cr} dx = \frac{5}{16} \rho g^{3/2} \gamma^2 h^{1/2} dh \quad (22)$$

Integrando:

$$D_{cr} x = \frac{5}{24} \rho g^{3/2} \gamma^2 h^{3/2} \quad (23)$$

de donde se puede despejar el valor de la profundidad $h(x)$:

$$h(x) = \left(\frac{24}{5 \rho g^{3/2} \gamma^2} D_{cr} \right)^{2/3} x^{2/3} = Ax^{2/3} \quad (24)$$

donde A es el **factor de escala del perfil**. Para obtener su valor se utiliza una expresión empírica:

$$A = 0,5 \omega_s^{0,44} \quad (25)$$

siendo ω_s la velocidad de caída del sedimento definida por:

$$\omega_s = \sqrt{\frac{4(\rho_s - \rho)gD_{50}}{3\rho C_D}} \quad (26)$$

donde C_D es un coeficiente de arrastre. Si se analizan las ecuaciones (24), (25) y (26) se observa que cuanto mayor sea el tamaño del sedimento, más pendiente es el perfil. Por tanto, condiciones más severas de oleaje provocarán que las partículas de sedimento de menos tamaño desaparezcan,

aumentando el tamaño medio de las mismas en el perfil y aumentando también la pendiente media.

Este perfil de equilibrio definido por (24), se extiende hasta una profundidad denominada **profundidad de cierre**, a partir de la cual el oleaje no tiene influencia sobre la forma del perfil de playa. Esta profundidad de cierre h_* se define como:

$$h_* = 1,57H_{s,12} \quad (27)$$

siendo $H_{s,12}$ la altura de ola significativa superada sólo 12 horas al año. La zona de perfil que va desde la línea de costa hasta esta profundidad se llama **zona de perfil activo**.

El concepto de perfil de equilibrio, que es la respuesta media de la playa a las acciones del medio, hace posible determinar distintas respuestas de la playa a cambios en los agentes, como por ejemplo a una subida del nivel del mar. En los últimos tiempos, uno de las cuestiones que más ha centrado la atención dentro de la Ingeniería de Costas ha sido el cálculo del retroceso de playa que se produce por una subida del nivel del mar.

Bruun estudió este problema mediante un planteamiento sencillo, utilizando el concepto de perfil de equilibrio. La hipótesis básica es que el volumen que hace falta para mantener la forma del perfil después de una subida del nivel de mar S es el mismo que se pierde por el hecho de tener un retroceso de playa R (figura 8). Al igualar estos dos volúmenes:

$$R = \frac{S}{\tan \theta} \quad (28)$$

siendo θ la pendiente media del perfil activo.

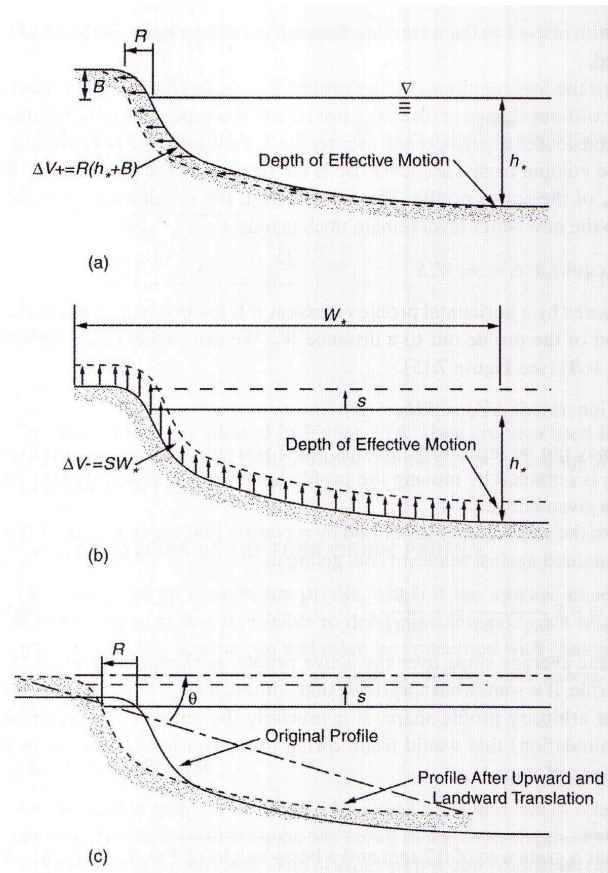


Figura 8: Respuesta del perfil de equilibrio ante la subida del nivel del mar: Regla de Bruun

6. Regeneración de playas

La regeneración de playas es un aporte artificial de sedimento con dos fines:

- Ganar playa seca en una zona que ha sufrido erosión, principalmente para uso recreativo.
- Proteger un tramo de costa frente al paso de temporales.

Las ventajas más importantes de esta solución es que sus resultados son prácticamente inmediatos y que constituyen una solución más respetuosa con zonas adyacentes, comparado con la construcción de diques. El principal inconveniente es que suelen tener una vida útil muy reducida. Durante esta vida útil, la regeneración para por distintas fases:

1. Se realiza la regeneración con una pendiente superior a la del perfil de equilibrio para las condiciones medias de la playa.
2. La pendiente disminuye y se acerca a la de equilibrio.
3. Se llega a la situación original.

Lo ideal es que las fases 1 y 2 duren mucho (normalmente unos 2 o 3 años). Para ello hay que calcular bien:

- El material de aportación a emplear, fundamentalmente su tamaño de grano.
- El volumen de sedimento a emplear.

Para estudiar una regeneración se utilizan los valores del factor de escala del perfil correspondiente el sedimento nativo A_N (el que había antes de la regeneración) y del sedimento de aportación A_F . Éstos valores se pueden obtener de tablas (figura 9) a partir del D_{50} de cada material.

D(mm)	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.1	0.063	0.0672	0.0714	0.0756	0.0798	0.084	0.0872	0.0904	0.0936	0.0968
0.2	0.100	0.103	0.106	0.109	0.112	0.115	0.117	0.119	0.121	0.123
0.3	0.125	0.127	0.129	0.131	0.133	0.135	0.137	0.139	0.141	0.143
0.4	0.145	0.1466	0.1482	0.1498	0.1514	0.153	0.1546	0.1562	0.1578	0.1594
0.5	0.161	0.1622	0.1634	0.1646	0.1658	0.167	0.1682	0.1694	0.1706	0.1718
0.6	0.173	0.1742	0.1754	0.1766	0.1778	0.179	0.1802	0.1814	0.1826	0.1838
0.7	0.185	0.1859	0.1868	0.1877	0.1886	0.1895	0.1904	0.1913	0.1922	0.1931
0.8	0.194	0.1948	0.1956	0.1964	0.1972	0.198	0.1988	0.1996	0.2004	0.2012
0.9	0.202	0.2028	0.2036	0.2044	0.2052	0.206	0.2068	0.2076	0.2084	0.2092
1.0	0.210	0.2108	0.2116	0.2124	0.2132	0.2140	0.2148	0.2156	0.2164	0.2172

Notes:
 (1) The A values above, some to four places, are not intended to suggest that they are known to that accuracy, but rather are presented for consistency and sensitivity tests of the effects of variation in grain size.
 (2) As an example of use of the values in the table, the A value for a median sand size of 0.24 mm is: $A = 0.112 m^{1/3}$. To convert A values to feet^{1/3} units, multiply by $(3.28)^{1/3} = 1.49$.

Figura 9: Tabla para obtener el factor de escala a partir del diámetro medio del sedimento

Además, se define el **factor de relleno** K como el número de m^3 de aportación necesarios para que se retenga un m^3 en la playa. Este valor se mira en tablas y depende de la granulometría del material de aportación y el nativo.

Según la relación entre los valores del factor de escala de los materiales A_F , A_N , se distinguen tres casos que se estudiarán en los siguientes apartados.

6.1. Perfil con intersección

En este caso $A_F > A_N$ y el perfil que se adopta tras la regeneración es tal que el punto de intersección entre el perfil natural y el nuevo se produce antes de la profundidad de cierre. El resultado es una ganancia significativa de playa seca. Ya que el material que se utiliza para las regeneraciones viene determinado por la disponibilidad del mismo, es interesante obtener el volumen de material de aportación necesario para ganar una determinada anchura de playa seca Δx_0 (figura 10). Este volumen se obtiene como la suma de la parte correspondiente el perfil emergido más la diferencia de área de las curvas del perfil nativo y el de aportación:

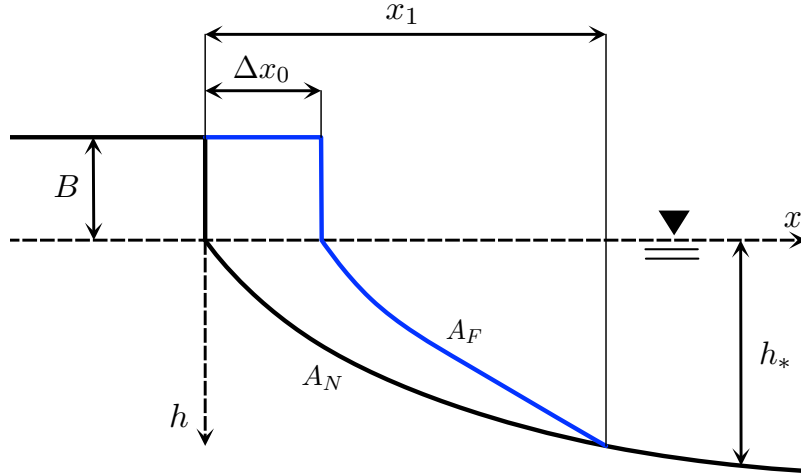


Figura 10: Perfil con intersección

$$\text{Vol} = B\Delta x_0 + \left(\int_0^{x_1} A_N x^{2/3} dx - \int_{\Delta x_0}^{x_1} A_F x^{2/3} dx \right) = B\Delta x_0 + \frac{3}{5} A_N x_1^{5/3} - \frac{3}{5} A_F (x_1 - \Delta x_0)^{5/3} \quad (29)$$

siendo B la altura de la berma y x_1 el punto de intersección de los dos perfiles. Este punto se obtiene igualando los dos perfiles:

$$A_N x_1^{2/3} = A_F (x_1 - \Delta x_0)^{2/3} \Rightarrow x_1 = \frac{\Delta x_0}{1 - \left(\frac{A_N}{A_F} \right)^{3/2}} \quad (30)$$

6.2. Perfil sin intersección

Este perfil se produce cuando $A_F \simeq A_N$. En este caso la intersección se produce a una profundidad similar a la de cierre y la playa seca obtenida es menor, ya que gran parte del volumen vertido es necesario para rellenar el perfil con pendiente más tendida que el anterior (figura 11).

6.3. Perfil sumergido

en este caso $A_F < A_N$, por lo que se genera un perfil diferente, en tanto que se pierde playa seca y casi todo el material se dispone en la zona sumergida. La mayoría del volumen vertido se usa para formar un perfil con pendiente más tendida (figura 12).

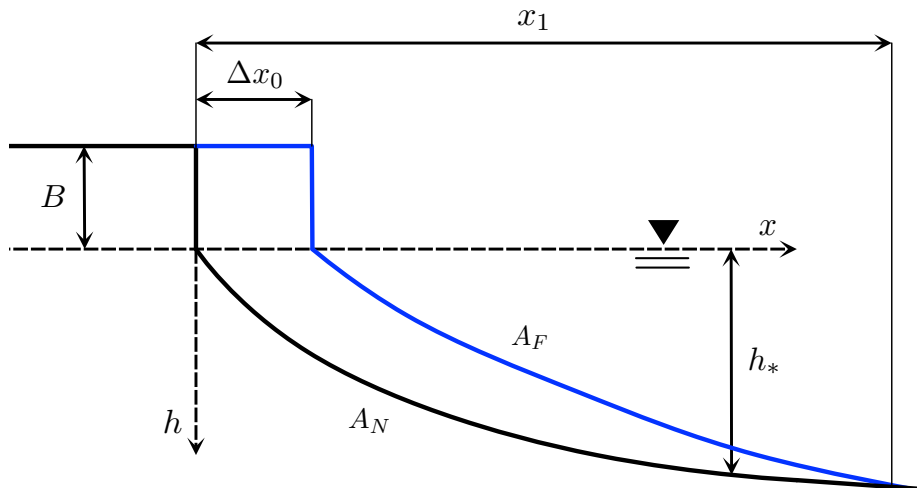


Figura 11: Perfil sin intersección

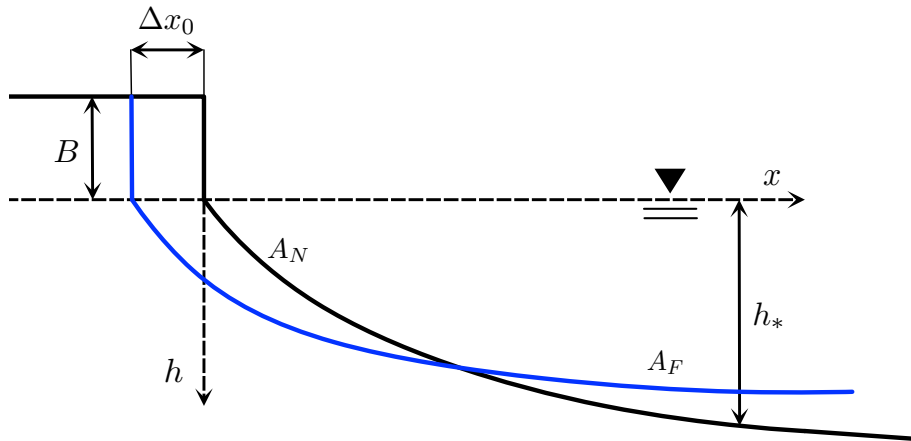


Figura 12: Perfil sumergido

Bibliografía

del Valle, R., Medina, R., and Losada, M. (1993). Dependence of coefficient k on grain size. *J. Waterw. Port Coast. Ocean Eng.*, 5:568–574.

Komar, P. D. and Inman, D. L. (1970). Longshore sand transport on beaches. *Journal of Geophysical Research*, 75:5914–5927.

Tema 13

3. Forma en planta: modelos de una línea y playas encajadas

Alejandro López Ruiz

Asignatura: Hidráulica Litoral
Dept. Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica
ETSI Caminos, Canales y Puertos
Universidad de Granada

Diciembre 2013

Índice

Índice	1
1. Modelos de una línea	2
1.1. Modelo de una línea: formulación del problema	2
1.2. Soluciones analíticas	5
1.2.1. Solución estacionaria	5
1.2.2. Playa periódica	6
1.2.3. Regeneración puntual	6
1.2.4. Relleno o vertido rectangular	7
1.2.5. Barreras litorales	8
1.3. Respuesta de la forma en planta de la línea de costa	10
2. Playas encajadas	11
2.1. Introducción	11
2.1.1. Playas en equilibrio	12
2.1.2. Equilibrios estático y dinámico	12
2.2. Formulaciones existentes	12
2.3. Modelos de forma en planta en equilibrio	13
2.3.1. Espirales logarítmicas (Silvester, 1960)	13
2.3.2. Modelo de González and Medina (2001)	13
Bibliografía	17

Uno de los objetivos fundamentales de la ingeniería de costas es **desarrollar modelos para predecir tanto a corta como a gran escala la evolución de la línea de costa**. De forma ideal estos modelos, dada la información necesaria referente tanto al sedimento como a los agentes que intervienen, deberían ser capaces de predecir el comportamiento de la batimetría y de la línea de costa pasado un cierto tiempo. Asimismo, estos modelos podrían ser usados por los encargados de la gestión de la costa.

1. Modelos de una línea

1.1. Modelo de una línea: formulación del problema

El modelo de una línea, en sus diferentes modalidades, es uno de los modelos más sencillos para estudiar la evolución de la línea de costa.

El primer modelo de una línea fue presentado por Pelnard-Considère (1956), que examinó el comportamiento de los diques en una playa. Desde ese momento, la ecuación de la difusión que el derivó ha sido aplicada a numerosas situaciones.

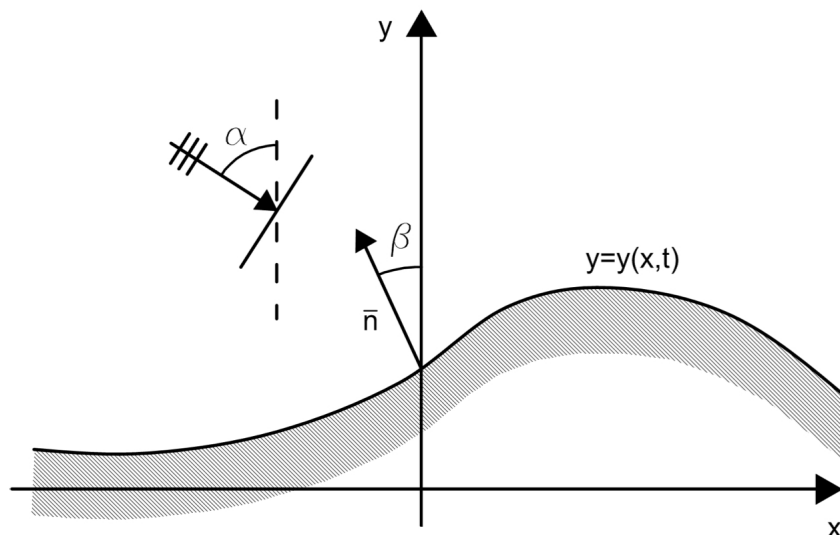


Figura 1: Esquema del perfil y la planta para el modelo de una línea.

La posición de la línea de costa viene dada en la figura 1, donde el eje x se orienta en la dirección longitudinal y el eje y en la dirección transversal a la línea de costa. Así, la posición de la línea de costa viene dada por

$$y = y(x, t)$$

Por tanto, nuestro **objetivo es obtener el valor de $y = y(x, t)$** , es decir, buscamos una expresión que nos proporcione la evolución temporal de la forma de la línea de costa a lo largo de un tramo de costa. Para ello vamos a seguir la secuencia que se describe a continuación.

Teniendo en cuenta las irregularidades de la línea de costa, la perpendicular a dicha línea de costa no estará orientada siempre paralela al eje y , sino que con frecuencia tendrá una cierta oblicuidad. Así, se define la dirección normal mediante el vector:

$$\mathbf{n} = \frac{-\frac{\partial y}{\partial x} \mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}$$

Los vectores \mathbf{i} y \mathbf{j} son vectores unitarios en la dirección de los ejes x e y . El ángulo que forma la normal a la playa en un punto dado vendrá dado por

$$\beta = \cos^{-1}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{j})$$

Una de las primeras hipótesis o consideraciones más importantes que se hace en el modelo de una línea es que para el transporte de sedimentos longitudinal se usa la fórmula del CERC. Conviene

recordar que la fórmula del CERC considera el ángulo entre el oleaje y la normal a la playa; por ello, para el esquema que se ha representado, la fórmula se puede escribir de la forma:

$$Q = K_1 \left(\frac{\rho g^{1/2}}{16\gamma^{1/2}(\rho_s - \rho)(1 - n)} \right) H_b^{5/2} \sin 2(\alpha_b - \beta) = C_q \sin 2(\alpha_b - \beta)$$

Una vez que se tienen las consideraciones anteriores, este modelo se basa en **aplicar la ley de conservación de la masa**, que proporciona la ecuación de conservación de la masa.

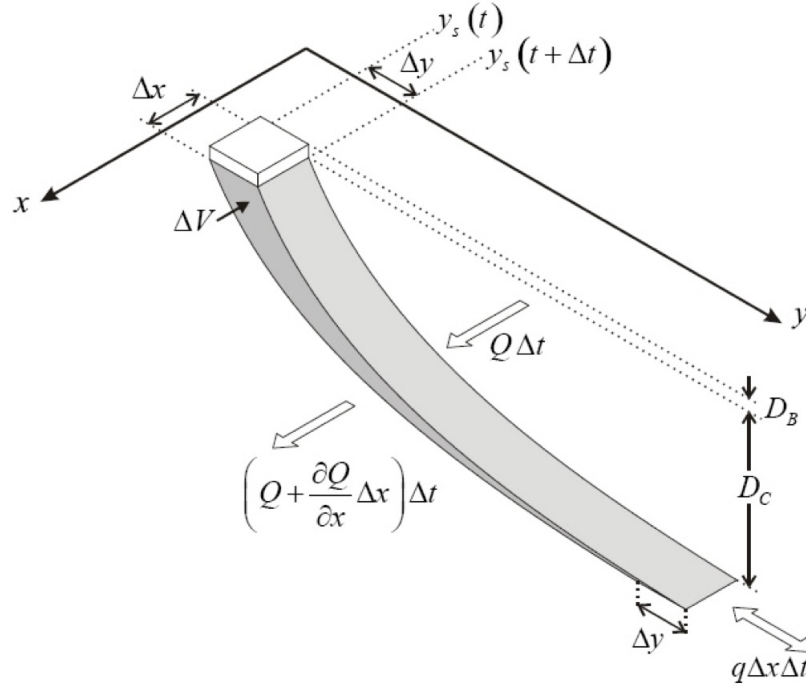


Figura 2: Esquema del perfil y la planta para el modelo de una línea. La variable D_c se corresponde con la profundidad de cierre h_* , y la variable D_B con la altura de la berma B .

- Sea una sección o tramo de costa de longitud Δx , como se muestra en la figura 2.
- Se asume que el perfil de playa está en equilibrio en todos sus puntos, siendo ésta otras de las hipótesis fundamentales que se aplican en los modelos de una línea: *con independencia de la orientación de la línea de costa, se asume que el perfil es el de equilibrio en todos los puntos.*
- Con las consideraciones anteriores, si la tasa de sedimentación que entra al tramo es mayor que la cantidad de sedimento que sale, se producirá una acumulación de sedimento, lo que producirá un avance de la línea de costa; en caso contrario se producirá un retroceso de la misma.
- Siendo h_* la profundidad de cierre y B la altura de la berma (en la figura 2 $D_C = h_*$ y $B = D_B$), el volumen de arena necesario para mover el perfil aguas adentro o hacia la costa se puede obtener multiplicando lo que avanza o retrocede la línea de costa por la suma de la profundidad de cierre y la altura de la berma.
- Teniendo en cuenta que el desequilibrio en lo que entra y sale en el volumen de control se traduce en un depósito o erosión, se obtiene la siguiente ecuación

$$\Delta t [Q(x) - Q(x + \Delta x)] = [y(t + \Delta t) - y(t)](h_* + B)\Delta x$$

que establece **el equilibrio**: lo que entra menos lo que sale debe ser igual a lo que varía.

- Si se desarrollan los términos en serie de Taylor¹, se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{h_* + B} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

- Sólo quedaría sustituir la expresión del transporte de sedimentos. En caso de que se resuelva la ecuación mediante métodos numéricos, se opera directamente con la ecuación anterior. Sin embargo, para obtener soluciones analíticas es necesario llevar a cabo algunas simplificaciones.
- Dado que lo que buscamos es determinar el valor de y , lo primero que vamos a hacer es operar con el término del transporte, Q , con objeto de simplificarlo. Dicho término contiene un seno, que se puede descomponer trigonométricamente usando las relaciones

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

obteniendo

$$Q = C_q \sin 2(\alpha_b - \beta) = C_q [\sin 2\alpha_b (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) - 2 \cos 2\alpha_b \sin \beta \cos \beta]$$

- Teniendo en cuenta la definición que se hizo previamente del vector normal a la línea de costa, se tiene que el coseno y el seno se pueden relacionar con la posición de la línea de costa mediante:

$$\begin{aligned} \sin \beta &= -\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} \\ \cos \beta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} \\ \tan \beta &= \frac{\partial y}{\partial x} \end{aligned}$$

- Si se asume que la variación de la línea de costa es **suave**, es decir, que no se producen cambios bruscos de alineación (y cambia de forma suave), en ese caso se puede despreciar el término $\partial y / \partial x \ll 1$, de donde la cantidad $(\partial y / \partial x)^2$ será aún más pequeña, lo que permite despreciarla, de donde el denominador de las expresiones del $\sin \beta$ y del $\cos \beta$ vale 1, obteniendo que

$$\cos \beta \simeq 1 \quad \sin \beta \simeq \frac{\partial y}{\partial x}$$

- Sustituyendo en la expresión del transporte que se obtuvo anteriormente, se obtiene

$$Q = C_q \sin 2\alpha_b - 2C_q \cos 2\alpha_b \frac{\partial y}{\partial x} = Q_0 - G(h_* + B) \frac{\partial y}{\partial x}$$

siendo $G = 2C_q \cos 2\alpha_b / (h_* + B)$ y donde se ha realizado la aproximación $1 - (\partial y / \partial x)^2 \simeq 1$.

El primer sumando, Q_0 , representa la tasa de transporte para una línea de costa paralela al eje x : si la línea de costa es paralela al eje x , el término $\partial y / \partial x$ es nulo, por lo que $Q = Q_0$.

El segundo sumando representa el transporte inducido como consecuencia de la desviación de la línea de costa respecto al eje x , es decir, cuando $\partial y / \partial x \neq 0$.

¹ $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \dots$

- Una vez que se ha expresado convenientemente el término del transporte, se calcula su derivada y se sustituye en la ecuación original:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \approx -G(h_* + B) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- Sustituyendo en la ecuación diferencial, se obtiene la ecuación de la difusión que fue derivada por Pelnard-Considère

$$\frac{\partial y}{\partial t} = G \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- Se trata de la ecuación de la difusión unidimensional de la que existen soluciones analíticas conocidas. El parámetro G se conoce con el nombre de *difusividad longitudinal*. Para pequeños ángulos de incidencia ($\alpha_b \ll 1$), el valor de G se simplifica a $G = 2C_q/(h_* + B)$. El parámetro de difusividad tiene unidades de $[L^2]/[T]$.

Bajo las hipótesis iniciales se concluye que la forma en planta de la línea de costa está controlada por la ecuación de la difusión.

1.2. Soluciones analíticas

A continuación se van a resolver casos simples.

1.2.1. Solución estacionaria

En primer lugar se va a considerar el caso en el que las condiciones permanecen constantes en el tiempo. En ese caso el término $\partial y/\partial t = 0$, por lo que la posición de la línea de costa solamente depende de x . Así, la ecuación de la difusión se reduce a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

cuya solución es de la forma $y(x) = ax + b$.

Se trata, por tanto, de una línea recta, es decir, en el caso estacionario la línea de costa, bajo todas las hipótesis consideradas, adoptaría la forma de una línea recta. La solución depende de dos parámetros, a y b , que tendrían que ser determinadas. El valor de a se puede relacionar con la orientación de la playa, es decir, con el ángulo β . De hecho, de la expresión que se obtuvo anteriormente, el valor de la tangente de ese ángulo coincide con la primera derivada de la línea de costa respecto de x , por lo que $a = \tan \beta$. La constante b se correspondería con la posición de la línea de costa en $x = 0$.

La solución que se acaba de obtener muestra que *cualquier línea de costa que tenga una forma rectilínea se encuentra en equilibrio con el oleaje incidente no porque no se produzca transporte de sedimentos, sino porque la cantidad de material que se transporta es uniforme (la cantidad de material que entra en una sección es la misma que la que sale)*.

En este caso se tiene lo que se llama un **equilibrio dinámico**, que es diferente del equilibrio que se alcanza cuando la línea de costa se posiciona perpendicular a la dirección principal de incidencia del oleaje.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \rightarrow Q = \text{cte}$$

Es decir, el que la línea de costa sea rectilínea no implica que no haya transporte de sedimentos, pero sí que no haya gradientes, siendo constante el valor del transporte.

Así pues, en el equilibrio dinámico la playa está en equilibrio pese a haber transporte, mientras que en el equilibrio estático no habría transporte de sedimentos.

1.2.2. Playa periódica

En este caso particular se considera que la playa tiene inicialmente una forma sinusoidal. Por ello, la forma inicial ($t = 0$) vendría dada por la expresión

$$y(x, 0) = B \cos \lambda x$$

donde B es la amplitud inicial de las perturbaciones o formas presentes en la línea de costa, y sea λ el número de onda longitudinal. Así, el espaciamento entre las formas vendrá dado por $L_p = 2\pi/\lambda$. La posición media de la línea de costa se encuentra en $y = 0$.

Teniendo en cuenta lo anterior, a continuación se va a suponer que la línea de costa varía también de forma periódica en x , por lo que la solución o variación de la posición de la línea de costa con x y t se puede expresar como

$$y(x, t) = f(t) \cos \lambda x$$

Para calcular $f(t)$ se impone que la expresión anterior sea solución de la ecuación diferencial. Operando

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= \cos \lambda x \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= f \lambda^2 (-\cos \lambda x) \end{aligned}$$

y tras sustituir todo la ecuación diferencial queda

$$\frac{df}{dt} = -G\lambda^2 f$$

Si se resuelve esta ecuación, se obtiene que el valor de f es

$$\frac{df}{f} = -G\lambda^2 dt \rightarrow \ln f = -G\lambda^2 t + A \rightarrow f = B e^{-G\lambda^2 t}$$

de donde la solución completa sería

$$y(x, t) = B e^{-G\lambda^2 t} \cos \lambda x$$

siendo B una constante de integración.

Lo primero que conviene apreciar es que *la amplitud decrece con el tiempo*, tendiendo a ser cero para tiempos grandes. Por otro lado, cuanto mayor sea el espaciamento entre las formas (lo que implica que el valor de λ es menor), más tiempo es necesario para que la línea de playa tienda a ser rectilínea.

Hay que destacar de forma significativa un resultado, y este es el comportamiento del sistema cuando el ángulo de incidencia es mayor de 45° , es decir, si $\alpha_b > 45^\circ$, en este caso el signo de G cambia. En ese caso, al cambiar el signo, lo que se produciría es un incremento exponencial de las formas de lecho. Esta puede ser una de las justificaciones de la formación y crecimiento de formas arqueadas en playas. Los resultados se muestran en la figura 3.

1.2.3. Regeneración puntual

Se va a suponer un relleno que se dispone en la posición $x = 0$, y tal que el área en planta ocupada por el terreno es M , aunque de forma matemática se va a asumir que la descarga o deposición de material es puntual. Esto desde un punto de vista matemático se representa con la

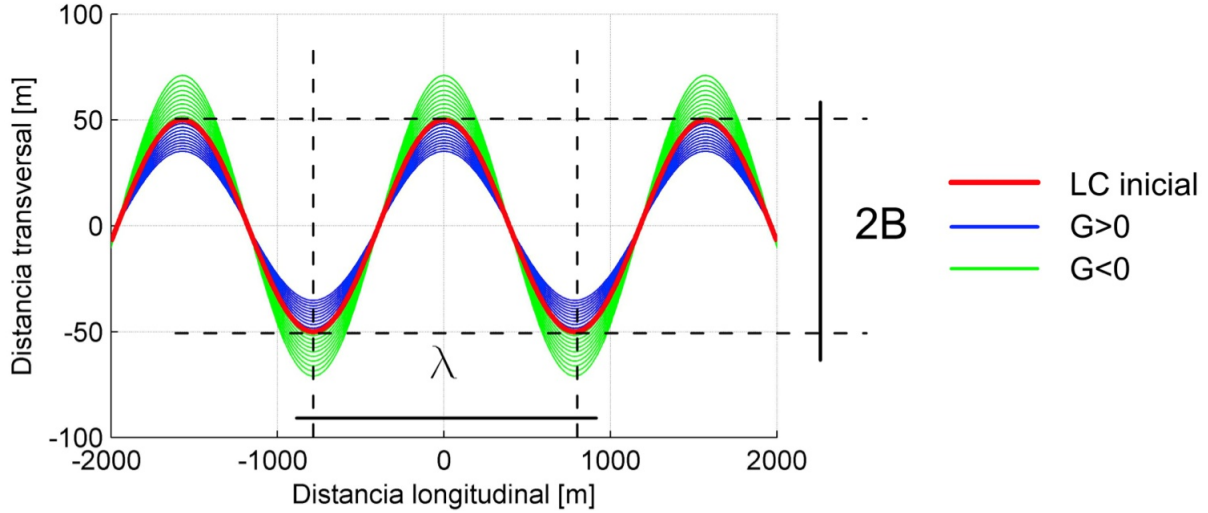


Figura 3: Línea de costa con formas rítmicas según el valor de la difusividad longitudinal.

función delta de Kronecker. Así pues, teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, la línea de costa inicial será

$$y(x, 0) = M\delta(x)$$

donde la función $\delta(x)$ vale 1 en ese punto y cero en el resto del dominio. La solución se puede obtener mediante series de Fourier, o también mediante soluciones de semejanza. Utilizando semejanza se puede obtener la solución:

$$y(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Gt}} e^{-(x/\sqrt{4Gt})^2}$$

Esta es la misma solución que se obtiene para un vertido uni-dimensional. La solución indica que *el vertido se difundirá con el tiempo en la dirección longitudinal, y que lo hará de forma simétrica, sin que dependa del ángulo de incidencia del oleaje*. La posición de la línea de costa en el origen vendrá dada por

$$y(0, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Gt}}$$

que decrece proporcionalmente con $t^{-1/2}$. Conviene resaltar que el área total del relleno se mantiene constante, y de valor

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(x, t) dx = M$$

Para hacer la integrar anterior nos apoyamos en la expresión genérica de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$$

1.2.4. Relleno o vertido rectangular

La mayoría de las regeneraciones de playas que se realizan se pueden aproximar como un relleno con forma rectangular.

La solución a este problema se puede obtener simplemente como la superposición lineal de rellenos puntuales y tales que se distribuyen a lo largo de la línea de costa para representar la forma rectangular. La solución se expresa como:

$$y(x, t) = \frac{Y}{2} \left[\operatorname{erf} \left[\frac{l}{4\sqrt{Gt}} \left(\frac{2x}{l} + 1 \right) \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{l}{4\sqrt{Gt}} \left(\frac{2x}{l} - 1 \right) \right] \right]$$

donde l e Y son la longitud y anchura iniciales. La función error se define como

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du$$

Esta función se encuentra implementada en los software matemáticos. La ecuación solución que se ha expuesto anteriormente aparece representada gráficamente en la figura 4.

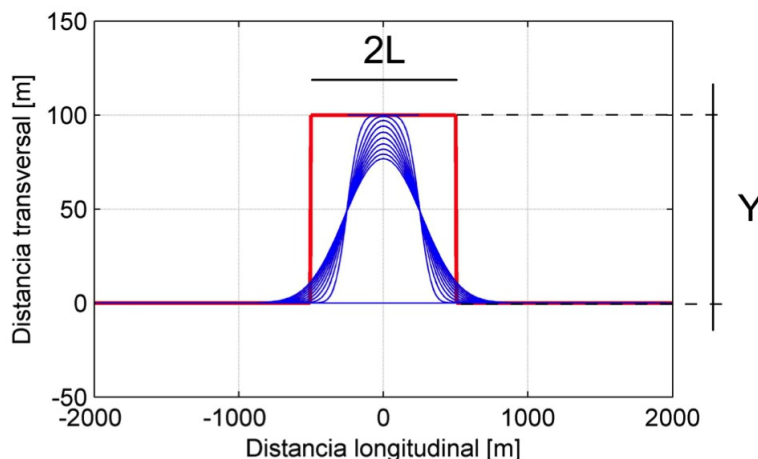


Figura 4: Solución para un relleno rectangular.

Es interesante observar que conforme evoluciona el tiempo hay una tendencia a que la línea de costa vuelva a su posición inicial. Este tiempo proporciona un orden de magnitud del tiempo que tardará la regeneración en dejar de ser útil, i.e., su vida útil.

El desplazamiento de la línea de costa en el centro del relleno viene dado por

$$y(0, t) = Y \operatorname{erf} \left[\frac{l}{4\sqrt{Gt}} \right]$$

Este desplazamiento es más suave que para un relleno puntual, es decir, la erosión que se produce en el caso de un relleno rectangular es más suave que en el caso de un relleno puntual. La función error toma un valor aproximadamente igual a la unidad para argumentos mayores que 2, por lo que la línea de costa original decrece de forma significativa (excepto para un perfil de equilibrio) hasta que $t > l^2/(64G)$, momento en el que el desplazamiento o erosión empieza a ser mayor. La forma de la solución permite comprobar que el 57.7 por ciento del relleno se encuentra en una distancia no superior a una desviación estándar del origen. Con el tiempo esta cantidad va variando.

1.2.5. Barreras litorales

Este modelo de evolución de la línea de costa basado en la ecuación de la difusión se puede aplicar también para estudiar la evolución de la línea de costa junto a un cabo o espigón, cuyo efecto fundamental es impedir el paso de la arena, que queda retenida en uno de sus lados.

Sea una barrera de longitud l que impide el paso de la arena, la línea de costa tenderá a situarse en una posición tal que no haya transporte de sedimentos. La línea de costa tenderá a modificar su forma para ser perpendicular al oleaje en cualquier instante de tiempo, de forma que

$$\frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = -\tan \alpha_b$$

Esta idea se puede expresar diciendo que $\beta = \alpha_b$, lo que implica que el oleaje y la costa son paralelos. Conforme nos alejamos de la barrera, la derivada anterior pasa a ser cero y la playa se dispone nuevamente uniforme o rectilínea. La solución para este caso es:

$$y(x, t) = \pm \left[\sqrt{\frac{4Gt}{\pi}} e^{-x^2/(4Gt)} - |x| \operatorname{erfc} \left(|x|/\sqrt{4Gt} \right) \right] \tan \alpha_b$$

La función error complementaria se define como 1 menos la función error para el argumento dado. Los valores de \pm se aplican para las soluciones en el lado aguas arriba y aguas abajo de la barrera: $x < 0$ y $x > 0$, respectivamente.

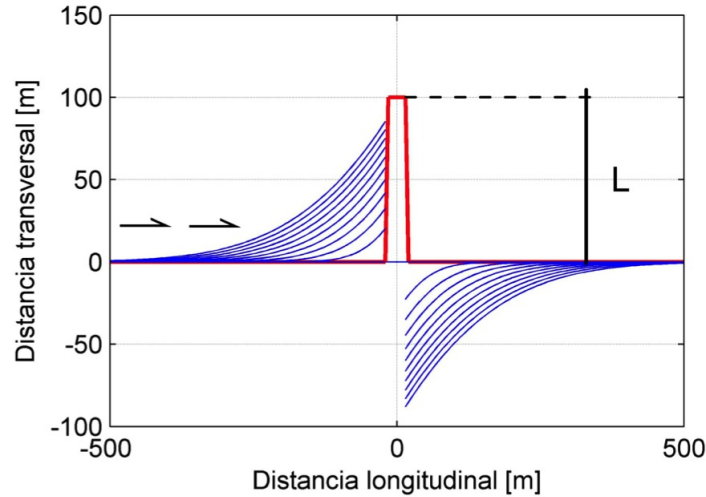


Figura 5: Solución para la evolución de la línea de costa con presencia de una barrera.

Aguas arriba del obstáculo se satisface que $x < 0$, en cuyo caso la solución tendría delante un signo más, que indica acumulación. Aguas abajo sucede justo lo contrario. Diversos experimentos y datos de campo han demostrado la validez de la solución, mostrando que el comportamiento real es similar al que se muestra en la figura 5.

En la barrera u obstáculo el crecimiento de la playa, $y(0, t)$, para $x < 0$, será

$$y(0, t) = \sqrt{\frac{4Gt}{\pi}} \tan \alpha_b$$

El área de playa que se ha generado por sedimentación será

$$A(t) = \int_0^\infty y dx = Gt \tan \alpha_b$$

mostrando que el área generada crece linealmente con el tiempo. El volumen de arena depositado se obtendrá multiplicando el valor de A por $(B + h_*)$.

Conforme la playa cerca de la barrera crece y va ganando terreno al mar, puede darse el caso de que llegue a alcanzar el extremo del obstáculo. El tiempo en el que se producirá este fenómeno se puede obtener fácilmente a partir del valor del crecimiento de la playa en el obstáculo que se ha calculado anteriormente: si se impone que este crecimiento sea l , y se despeja el valor del tiempo (que llamaremos t^*), se llega a

$$y(0, t) = \sqrt{\frac{4Gt}{\pi}} \tan \alpha_b = l \rightarrow t^* = \frac{\pi l^2}{4G \tan^2 \alpha_b}$$

El área que en ese instante se habrá rellenado será

$$A(t^*) = Gt^* \tan \alpha_b = \frac{\pi l^2}{4 \tan \alpha_b}$$

Este área es justamente $\pi/2$ veces mayor que el área que se obtiene si se une la punta del obstáculo con la línea de costa mediante una recta cuya alineación sea justo normal a la dirección del oleaje incidente. El volumen de arena que se habrá acumulado en ese momento será $V(t^*)$

$$V(t^*) = (B + h_*) \frac{\pi l^2}{4 \tan \alpha_b}$$

1.3. Respuesta de la forma en planta de la línea de costa

Tal y como se ha descrito anteriormente, el modelo de una línea permite obtener información útil para el planeamiento de las regeneraciones de playa, ya que nos permite estimar cómo evolucionará la forma en planta de la regeneración. Supóngase que se lleve a cabo una regeneración rectangular con una dimensional longitudinal l y transversal Δy_0 . Según la solución analítica descrita anteriormente

$$y(x, t) = \frac{\Delta y_0}{2} \left[\operatorname{erf} \left[\frac{l}{4\sqrt{Gt}} \left(\frac{2x}{l} + 1 \right) \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{l}{4\sqrt{Gt}} \left(\frac{2x}{l} - 1 \right) \right] \right]$$

Anteriormente se mostró una representación gráfica de la ecuación anterior y como evoluciona en el tiempo. Además de los ya expuestos, del análisis de la ecuación anterior se pueden obtener más resultados interesantes.

Influencia del parámetro \sqrt{Gt}/l : cuanto mayor sea el valor de este parámetro, mayores serán los cambios que se producirán en la línea de costa. Si esa cantidad toma el mismo valor para dos situaciones diferentes, es claro que la evolución de las formas en planta de la costa serán geoméricamente similares. La mejor forma de visualizar estos efectos es dibujando la solución en Matlab, y jugando con los diferentes parámetros.

Ejemplo: si se consideran dos regeneraciones con distinta longitud que se ven sometidas al mismo oleaje, la regeneración que tenga la mayor longitud será la que dure más tiempo. En particular, la duración de la regeneración depende del cuadrado de la longitud. Como ejemplo: (1) una regeneración A en el que la longitud del relleno mide 1 km perderá un 50% del material de la regeneración en 2 años; (2) por el contrario, una regeneración B tiene una longitud de relleno de 4kms, la pérdida del 50% del material se producirá al cabo de 32 años.

Influencia de la altura de ola (contenido energético del oleaje): considérense ahora dos regeneraciones que se ven sometidas a diferentes condiciones de oleaje. El coeficiente G (difusidad) que aparece en la solución depende de la altura de ola elevada a $5/2$. Así, si el proyecto A está en una zona sometida a una altura de ola de 1 m y el 50% perdura durante 2 años, en el caso de un proyecto B sometido a una altura de ola de 0.25 m el 50% perdurará durante 64 años.

Pero la proporción de material que permanece en la regeneración se pueden obtener no sólo de forma gráfica sino también analíticamente. Ese valor $M(t)$ se puede obtener como

$$M(t) = \frac{1}{\Delta y_0 l} \int_{-l/2}^{l/2} y(x, t) dy$$

o también

$$M(t) = \frac{\sqrt{4Gt}}{l\sqrt{\pi}} (e^{-(l/\sqrt{4Gt})^2} - 1) + \operatorname{erf}(l/\sqrt{4Gt})$$

A la cantidad Gt/l^2 se le denomina **tiempo adimensional**. Para valores grandes de este parámetro se tiene

$$M(t) \simeq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} l \sqrt{Gt}$$

Con la expresión anterior se puede obtener la **vida media** de la regeneración. Si $M = 0,5$, se obtiene que $\sqrt{Gt}/l \simeq 0,46$, de donde la vida media será

$$t_{50} = 0,46^2 \frac{l^2}{G} = 0,21 \frac{l^2}{G}$$

Es interesante apreciar que este tiempo no depende del volumen de la regeneración, pero sí de su longitud. Dados los siguientes valores:

$$h_* + B = 8 \text{ m}; \quad \gamma = 0,78; \quad s - 1 = 1,65; \quad n = 0,35$$

si se sustituye en la expresión de G , se obtiene $G = 0,052 H_b^{5/2}$. Así, la vida media será

$$t_{50} = 4,1 \frac{l^2}{H_b^{5/2}} \text{ segundos}$$

Si la longitud de la regeneración son 10kms, se tendrá que $t_{50} = 13/H_b^{5/2}$ años, de donde para una altura de ola de 0.5 m se tendrá que la vida media será 73 años. Por el contrario, para 1 m de altura de ola será sólo de 13 años.

2. Playas encajadas

2.1. Introducción

La planta de una playa se puede definir como la línea que une los puntos de igual elevación en la cota de pleamar (límite playa seca). Dicha línea se puede definir mediante un sistema de ejes cartesianos, o bien mediante unos ejes en coordenadas polares con respecto a un punto y eje arbitrarios.

Se define playa encajada como aquella unidad fisiográfica en la cual su forma en planta y perfil se encuentran confinadas lateralmente por contornos impermeables naturales o artificiales y el fondo cubierto en su mayor parte por arena. Dicho confinamiento actúa directamente sobre la hidrodinámica y el transporte de sedimentos, elementos que interactúan mutuamente definiendo así la forma en planta y el perfil.

La presencia de los contornos laterales influyen en la propagación del oleaje redistribuyendo de forma diferencial la energía de los frentes a lo largo de la playa. La propagación del oleaje dentro de la playa encajada sufre dos efectos: el primero es la difracción, que supone una redistribución lateral de la energía debida a la diferencia de altura de ola en la playa. Este efecto es generado por la presencia de los contornos laterales. En segundo lugar, la refracción a lo largo de la playa debido al efecto de la topografía influye en la orientación de los frentes a lo largo de la playa.

En playas encajadas se trabaja con la hipótesis de que las corrientes longitudinales, motor fundamental del transporte de sedimentos en playas encajadas, se debe principalmente a la oblicuidad del oleaje con respecto a la orientación de la playa en la zona de rompientes y a la existencia de un gradiente de altura de ola, longitudinal a la playa, que no es común encontrar en playas rectas.

Si las playas encajada son muy extensas, se disipa el efecto de los contornos y pasan casi a comportarse como playas rectas. Por ello, sus extensiones suelen ser de cientos de metros hasta como mucho pocos kilómetros,

2.1.1. Playas en equilibrio

Se define como el estado morfodinámico que alcanza una playa en planta y perfil bajo la acción del oleaje incidente, constante en el tiempo, actuando sobre una geometría de playa inicial. Se alcanza ese estado cuando no cambia la forma en planta ni el perfil. En laboratorio se pueden reproducir esas condiciones, si bien en la naturaleza es más complejo, aunque tanto la variación de los agentes como los de la geometría están acotados. Por eso, de la misma forma que vimos con el perfil, se asume que existe una forma de equilibrio de la playa que sufre variaciones en función del clima marítimo existente. Para las playas encajadas se asume que los transportes transversal y longitudinal son independientes entre sí.

2.1.2. Equilibrios estático y dinámico

Se define como forma en planta en equilibrio estático de una playa encajada aquella que se alcanza cuando su forma permanece constante en el tiempo y el transporte litoral es nulo. Para ello, las corrientes longitudinales deben ser nulas, siendo necesario que los efectos difracción-refracción queden compensados. Esto se suele alcanzar en regiones en las que el oleaje suele venir de una dirección muy marcada.

Se define como equilibrio dinámica de la forma en planta de una playa encajada, a la forma invariable que ésta adquiere, bajo la presencia de transporte longitudinal de arena sin cambio en el volumen global de arena dentro de la unidad fisográfica.

Como se describirá en detalle posteriormente, la forma en planta viene definida principalmente por la oblicuidad del oleaje incidente, y en mucha menor medida por la altura de ola y el periodo.

2.2. Formulaciones existentes

Los geólogos y geógrafos han sido los primeros en estudiar las formas de las Bahías, sobre todo teniendo en cuenta que desde siempre se ha considerado que con formas muy estables. Así, ya desde los sesenta se derivaron y ajustaron expresiones sencillas que ajustaban los datos de las formas en planta de las Bahías y que se aproximaban a espirales logarítmicas. El interés de analizar estas formas creció debido a su estabilidad. Silvester (1960) realizó los primeros ensayos que, desde un punto de vista ingenieril, analizaban las formas en planta de playas al resguardo de obstáculos. Ese estudio y otros realizados durante la década de los 60 y 70 puso de manifiesto la importancia de la difracción y la refracción del oleaje en la forma final de la playa. El fenómeno de la difracción al rebasar los salientes se ve complementado por el de la refracción al encontrarse en su avance con pequeñas profundidades. Silvester en el 70 demostró que la constante en la ecuación de la espiral logarítmica se aproxima a un valor óptimo para la forma de equilibrio de la bahía, siendo función directa de la oblicuidad del oleaje incidente. Así, llegó a la conclusión de que la línea de costa tenía 3 zonas de curvaturas distintas:

- Un arco circular a resguardo del punto de control situado aguas arriba en el sentido del transporte.
- Una zona intermedia cuya forma es la de la espiral logarítmica.
- Un segmento tangente al interior que se prolonga en forma recta en el sentido del transporte, hacia el siguiente saliente.

También observaron que las playas encajadas se encontraban en equilibrio estable cuando la parte final de la playa era paralela al frente del oleaje en el punto de control, rompiendo las olas simultáneamente a lo largo de la costa y siendo el transporte de sedimentos prácticamente nulo. A partir de todo lo anterior, Silvester propuso su modelo de forma en espiral logarítmica para la planta en equilibrio, aunque algunos aspectos seguían sin poder precisarse en detalle.

Tras avances y diversos estudios, Hsu et al. (1987) basándose en nuevos ensayos de laboratorio plantearon un modelo parabólico cuyo origen se localizaba en el punto de control aguas arriba, donde se genera la difracción del oleaje. Posteriormente, Hsu y Evans (1989) propusieron el modelo que sigue siendo el más utilizado en el campo de la ingeniería de costas, sobre todo por su simplicidad. Así, hasta el propio Silvester aconseja seguir este método en vez del suyo de la espiral logarítmica. La aplicación de estas herramientas en playas naturales no tiene muchos problemas porque se busca el centro de la parábola o espiral logarítmica por prueba y error hasta que ajuste; el problema surge cuando se quiere predecir el comportamiento de la planta en equilibrio de una playa que se quiere diseñar.

2.3. Modelos de forma en planta en equilibrio

2.3.1. Espirales logarítmicas (Silvester, 1960)

Se basan en que la curva de la forma en planta de una playa encajada puede ser definida por una espiral logarítmica. Un esquema se muestra en la siguiente figura, lo que matemáticamente se puede expresar como

$$\frac{R_2}{R_1} = e^{\theta \cot \alpha} \quad (1)$$

donde θ es el ángulo entre los radios R_1 y R_2 y α es el ángulo constante entre cada radio y la tangente a la curva.

El centro de la espiral no se encuentra en el punto donde se genera la difracción, sino que cambiaba según la Bahía se iba erosionando. Las figuras 6 y 7 resumen el proceso necesario para calcular la forma en planta en equilibrio.

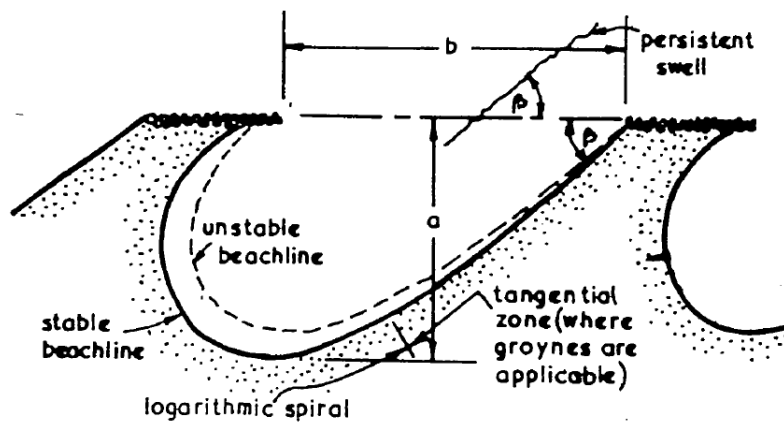


Figura 6: Esquema de una playa encajada *crenulated shaped bay*.

2.3.2. Modelo de González and Medina (2001)

González and Medina (2001) desarrollaron un modelo para la obtención de la forma en planta de equilibrio de playas encajadas. Su modelo es una modificación del definido por Hsu and Evans (1989), al que incorporaron un método para encontrar en punto en el que empieza a ser válida la expresión elíptica de Hsu and Evans (1989).

La metodología se basa en la figura 8, y consta de los siguientes pasos:

1. Identificación del punto de control: asumir que la tangente de la playa que pasa por el límite aguas abajo de la bahía es normal a la ortogonal del oleaje predominante en el área. Llevar

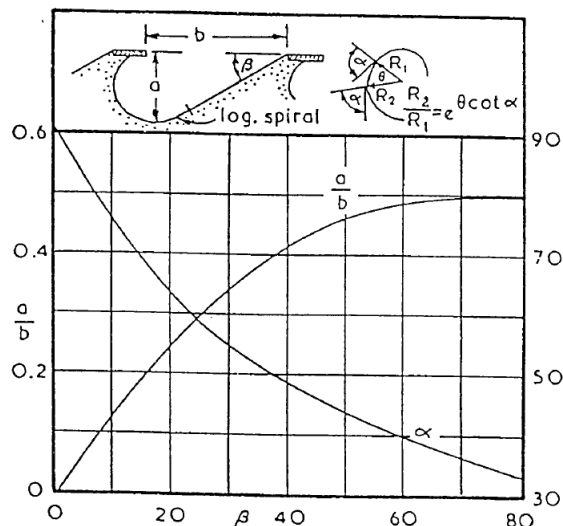


Figura 7: Relación entre α y la oblicuidad β .

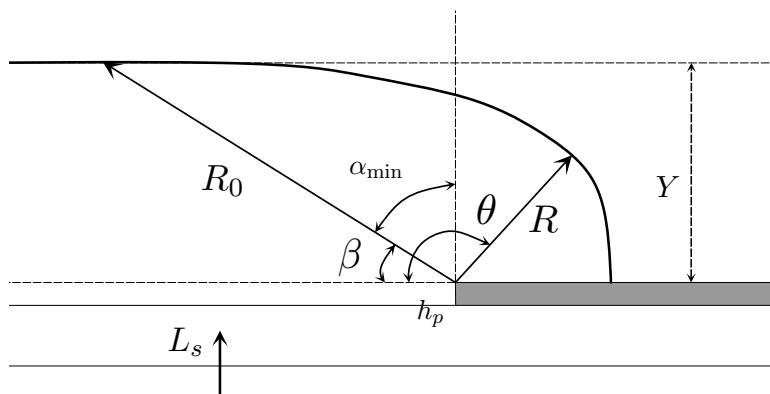


Figura 8: Esquema de la metodología de González and Medina (2001)

esta tangente hasta el límite aguas arriba de la bahía. El punto de intersección define el punto de control donde tiene lugar la difracción. En el caso de que se conozca u observe que debido a variaciones en la dirección del oleaje dicha tangente no es normal a la ortogonal, deberán realizarse pequeños ajustes en la tangente y consecuentemente en la ortogonal.

2. En el punto de control se dibuja el frente, normal a la ortogonal en ese punto o paralelo a la tangente a la playa trazada aguas abajo, realizando algún ajuste si fuese necesario según lo expuesto anteriormente. A partir de esta línea se medirán los ángulos β y θ . Con ello se asume que las profundidades entre los dos extremos de la bahía, a partir de la línea de control en dirección a la playa son razonablemente uniformes y que, por tanto, la propagación del oleaje es también uniforme. Cualquier bajo o irregularidad en el área puede generar extraños procesos de refracción y difracción que pueden dar lugar a divergencias entre la forma real y la obtenida en el modelo.
3. Una vez definido el punto de control y el frente que pasa por él, obtener:
 - h_p : la profundidad media a lo largo del frente de ola que pasa por el punto de control.

- $T_{S,12}$: periodo del oleaje asociado a la altura de ola significativa que sólo es superada 12 horas al año.
4. Obtener la distancia entre la tangente de la playa que pasa por el límite aguas abajo de la bahía y el punto de control (Y), midiéndola gráficamente sobre el plano.
 5. Calcular el valor de α_{\min} mediante la ecuación:

$$\alpha_{\min} = \arctan \left[\frac{\left(\frac{\beta_r^4}{16} + \frac{\beta_r^4 Y}{2L_s} \right)^{1/2}}{\frac{Y}{L_s}} \right] \quad (2)$$

siendo $\beta_r = 2,13$, Y la distancia de la costa rectilínea al punto de refracción (expuesta anteriormente) y L_s la longitud de onda del oleaje calculada a partir de la altura de ola significativa que sólo es superada 12 horas al año (H_{s12}) a la profundidad del punto de refracción.

6. Obtener el valor de β como $90 - \alpha_{\min}$ y el del radio hasta el punto de intersección de la elipse con la tangente de la playa R_0 :

$$R_0 = \frac{Y}{\cos \alpha_{\min}} \quad (3)$$

7. Sacar los valores de los coeficientes C_0 , C_1 y C_2 utilizando el valor de β obtenido y la tabla de la figura 9.

TABLA 3.1

β°	Coeficientes			Valores de R/R_0 para $\theta^\circ =$							
	C_0	C_1	C_2	30	45	60	75	90	120	150	180
20	0.054	1.040	-0.094	0.705	0.497	0.39	0.324	0.280	0.225	0.191	0.168
22	0.054	1.053	-0.109	0.768	0.543	0.426	0.354	0.305	0.244	0.206	0.181
24	0.054	1.069	-0.125	0.829	0.588	0.461	0.383	0.330	0.263	0.222	0.194
26	0.052	1.088	-0.144	0.887	0.633	0.497	0.412	0.355	0.281	0.237	0.207
28	0.050	1.110	-0.164	0.944	0.677	0.532	0.442	0.379	0.300	0.251	0.219
30	0.046	1.136	-0.186	1.000	0.721	0.568	0.471	0.404	0.319	0.266	0.230
32	0.041	1.166	-0.210		0.763	0.603	0.500	0.429	0.337	0.280	0.242
34	0.034	1.199	-0.237		0.805	0.638	0.529	0.453	0.355	0.294	0.252
36	0.026	1.236	-0.265		0.845	0.672	0.558	0.478	0.373	0.307	0.262
38	0.015	1.277	-0.296		0.883	0.706	0.586	0.502	0.390	0.320	0.272
40	0.003	1.322	-0.328		0.919	0.739	0.615	0.526	0.407	0.332	0.281
42	-0.011	1.370	-0.362		0.953	0.771	0.643	0.550	0.424	0.344	0.289
44	-0.027	1.422	-0.398		0.983	0.802	0.670	0.573	0.441	0.356	0.297
46	-0.045	1.478	-0.435			0.832	0.698	0.596	0.457	0.367	0.304
48	-0.066	1.537	-0.473			0.861	0.724	0.619	0.473	0.378	0.311
50	-0.088	1.598	-0.512			0.888	0.750	0.642	0.489	0.388	0.317
52	-0.112	1.662	-0.552			0.914	0.775	0.664	0.505	0.398	0.322
54	-0.138	1.729	-0.592			0.938	0.800	0.686	0.520	0.408	0.327
56	-0.166	1.797	-0.632			0.960	0.823	0.707	0.535	0.417	0.332
58	-0.196	1.866	-0.671			0.981	0.846	0.728	0.549	0.425	0.336
60	-0.227	1.936	-0.710			1.000	0.867	0.748	0.563	0.434	0.339
62	-0.260	2.006	-0.746				0.888	0.768	0.577	0.441	0.342
64	-0.295	2.076	-0.781				0.908	0.787	0.590	0.449	0.345
66	-0.331	2.145	-0.813				0.927	0.805	0.603	0.456	0.346
68	-0.368	2.212	-0.842				0.945	0.823	0.615	0.462	0.348
70	-0.405	2.276	-0.867				0.963	0.840	0.627	0.468	0.349
72	-0.444	2.336	-0.888				0.981	0.857	0.638	0.473	0.349
74	-0.483	2.393	-0.903				1.000	0.874	0.649	0.478	0.348
76	-0.522	2.444	-0.912					0.891	0.660	0.482	0.347
78	-0.561	2.489	-0.915					0.909	0.670	0.486	0.346
80	-0.600	2.526	-0.910					0.927	0.680	0.489	0.343

Figura 9: Relación de β con los coeficientes (II).

8. Construir desde el punto de control aguas arriba los radios que forman ángulos varios $\theta > \beta$ con la línea de control. Se recomienda utilizar los valores de, al menos, 30° , 45° , 60° , 75° , 90° , 120° y 150° , aunque a veces puede ser recomendable y necesario usar más valores. La longitud de cada uno de los radios, es decir, la distancia hasta la curva que define la forma de la bahía en equilibrio estático se obtiene de la expresión:

$$R = R_0 \left(C_0 + C_1 \frac{\beta}{\theta} + C_2 \frac{\beta^2}{\theta^2} \right) \quad (4)$$

Comparando la situación teórica con la inicial se puede obtener o conocer el estado de erosión/acreción en que se encuentra el tramo de costa.

9. Finalmente, resulta recomendable realizar variaciones en el frente para analizar los posibles cambios en la forma en planta si se supone que se producen cambios en el oleaje cuya duración sea lo suficientemente larga en el tiempo.

Bibliografía

- González, M. and Medina, R. (2001). On the application of static equilibrium bay formulations to natural and man-made beaches. *Coastal Engineering*, 43(3-4):209–225.
- Hsu, J. and Evans, C. (1989). Parabolic bay shapes and applications. *Proceedings - Institution of Civil Engineers. Part 2. Research and theory*, 87:557–570.
- Pelnard-Considère (1956). Essai de theorie de lévolution des formes de rivage en plages de sable et de galets. *4th Journees de l'Hydraulique, Les Energies de la Mer, III*, pages 289–298.
- Silvester, R. (1960). Stabilization of sedimentary coastlines. *Nature*, 188(4749):467–469.