S. MORENO REY Y J. CERUELO

ARITMÉTICA

Y

ALGEBRA

ELEMENTOS
DE
MATEMÁTICAS.

ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS

POR

D. SANTIAGO MORENO REY

Y

D. JOSÉ CERUELO Y OBISPO,

CATEDRÁTICOS DE ESTA ASIGNATURA.

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS.

ARITMÉTICA.

Tercera edición.

Al Sr. D. Eduardo García Solá
su atto. subordinado y afmo. amigo
Santiago Moreno Rey

MADRID.
IMPRENTA DE LA VIUDA É HIJA DE FUENTENEBRO.
Bordadores, 10.

1890.

Precio de cada ejemplar, en rústica.

En la Península, Baleares y Canarias. . . . . *Ptas.* 3,50.
En Ultramar, el correspondiente al anterior, según el cambio.

INTRODUCCIÓN

AL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS.

INTRODUCCION
AL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS.

1. Todas las cosas que nos rodean y áun las sensaciones que experimentamos tienen, entre otros, dos caracteres esenciales, el *cualitativo* y el *cuantitativo:* el primero marca la naturaleza ó especie propia de cada cosa y el segundo, su magnitud ó tamaño.

2. Dos ó más cosas, comparadas cualitativamente, pueden ser *homogéneas* ó *heterogéneas:* son **homogéneas** *las de la misma especie*, como el largo de una cuerda y el largo de una calle, y son **heterogéneas,** *las de distinta especie*, como el largo de una barra y el peso de la misma.

3. Dos ó más cosas no pueden compararse cuantitativamente á no ser homogéneas, en el concepto en que se las considere; en este supuesto, la comparación cuantitativa puede ser *aritmética* ó *geométrica.*

4. La comparación aritmética de dos magnitudes se limita á establecer su *igualdad* ó *desigualdad.*

Magnitudes iguales *son las homogéneas que pueden sustituirse mutua y totalmente*, como una pesa de un kilógramo y el peso de un litro de agua pura.

Igualdad *es la expresión de que dos magnitudes son iguales.* Una igualdad se indica por este signo =, que se lee, *es igual á,* colocado entre las magnitudes comparadas, y éstas reciben los nombres de primero ó segundo miembro de la igualdad, según que precedan ó sigan al signo.

Así, la expresión $A = B$ es una igualdad cuyo primer miembro es A y el segundo B.

En toda igualdad se pueden permutar los miembros ó sea enunciarlos en orden inverso, pues es evidente que si $A = B$, también $B = A$ (*).

(*) Si de una cantidad A se sabe únicamente que no es igual á otra B, se expresará $A \neq B$.

Si tres ó más magnitudes son iguales constituyen una *serie de igualdades* que se expresa escribiendo dichas magnitudes una á continuación de otra y poniendo entre cada dos de ellas el signo de igualdad.

Así, la igualdad de las magnitudes A, B, C y D se expresa $A = B = C = D$.

Es evidente que, en toda serie de igualdades, cualquiera de las magnitudes que comprende es igual á cada una de las demás y que los miembros de ella se pueden poner en cualquier orden.

Magnitudes desiguales *son las homogéneas tales que una de ellas no puede sustituir más que á parte de la otra*, como el peso de un kilógramo de plomo y el de un metro cúbico de agua pura, pues éste pesa mil kilógramos.

Desigualdad *es la expresión de que dos magnitudes son desiguales.*

La desigualdad de dos magnitudes puede ser por *superioridad* ó por *inferioridad* de la primera respecto de la segunda: en el primer caso se indica por medio de este signo $>$, que se lee, *es mayor que*, y en el segundo por éste $<$, que se lee, *es menor que*, colocados entre las magnitudes comparadas, y éstas reciben respectivamente los nombres de primero y segundo miembro de la desigualdad.

Así, la expresión $A > B$ es una desigualdad por superioridad del primer miembro respecto del segundo y la expresión $C < D$ lo es por inferioridad de aquél respecto de éste (*).

En una desigualdad no se pueden permutar los miembros sino invirtiendo al mismo tiempo el signo, lo que equivale á enunciarle á la inversa.

Así, si se tiene $A > B$ y $C < D$, se tendrá evidentemente $B < A$ y $D > C$.

Se llama **limitación** *á la expresión de que una magnitud, comparada con otras dos, es menor que una de ellas y mayor que la otra.*

Así, si B es menor que A y mayor que C, se tendrá una limitación que se expresa en esta forma: $A > B > C$, y se lee, A *mayor que* B, *mayor que* C, ó, enunciando primeramente la magnitud limitada, B *menor que* A *y mayor que* C.

(*) Si de una cantidad A se sabe únicamente que no es mayor ó que no es menor que otra B se indica, respectivamente, $A \not> B$ ó $A \not< B$.

5. La comparación geométrica de dos magnitudes completa su relación cuantitativa por la determinación de una de ellas.

Determinar cuantitativamente una magnitud *es hallar las veces que contiene á otra homogénea con ella.*

La condición indispensable para que una magnitud sea cuantitativamente determinable es que real ó mentalmente pueda descomponerse en partes iguales (*).

6. Cantidad *es toda magnitud determinable.*

Unidad *es toda magnitud tomada arbitrariamente para determinar otra.*

Toda unidad se puede considerar en dos conceptos, *absoluto* y *relativo:* en el concepto absoluto se llama *entera* y es única: del concepto relativo resulta la *unidad fraccionaria*, que es cualquiera de las partes iguales en que se divida ó suponga dividida la unidad entera.

Medida de una cantidad *es su relación geométrica con la unidad.*

La medida de una cantidad se representa gráficamente escribiendo ésta y debajo la unidad, separada de aquélla por una raya: así, la medida de la cantidad C con la unidad U se representa $\frac{C}{U}$, y se lee, *medida de* C *con la unidad* U, ó simplemente, *medida de* C.

Unidad común de medida *ó* **medida común de dos cantidades homogéneas** *es toda cantidad homogénea con ellas contenida exactamente en ámbas.*

Se llaman cantidades *conmensurables* á las que tienen una medida común é *inconmensurables* á las que no la tienen. La comparación material de dos cantidades no revela en la práctica la existencia de cantidades inconmensurables, pues si de dos cantidades A y B, por ejemplo, se toma ésta como unidad y no está contenida exactamente en aquélla, siempre podremos dividir la cantidad B en partes iguales y, suponiendo que una de ellas sea C, es evidente que ésta estará contenida exactamente en B, por lo que, si también lo está en A, será la medida común de A y B; pero si suponemos que C, por muy pequeña que sea, no esté contenida exactamente en la cantidad A, ésta y la B serán inconmensurables.

(*) No todas las magnitudes son determinables, pues hay algunas como la intensidad de los colores, las sensaciones y otras que, por su especial y propia naturaleza, no son divisibles en partes iguales.

7. Matemáticas ó Matemática (*) *es la ciencia que tiene por objeto el estudio de la cantidad determinada en el tiempo ó en el espacio.*

Las partes en que pueden dividirse las Matemáticas son tantas como los diversos aspectos en que podamos considerar la cantidad, pero las elementales son tres, llamadas *Aritmética*, *Algebra* y *Geometría*.

8. En la investigación y exposición de la ciencia matemática se emplean diversas proposiciones, llamadas *Definición*, *Axioma*, *Postulado*, *Teorema*, *Corolario* y *Escolio*.

Definición *es la explicación de la esencia y naturaleza de una cosa.*

Axioma *es una verdad evidente por sí misma.*

Postulado *es una verdad racionalmente admisible y convencionalmente admitida.*

Teorema *es una proposición cuya verdad no se desprende naturalmente de su enunciado, sinó que exige una demostración.* Si un teorema tiene por fin establecer sencillos antecedentes destinados especialmente á facilitar la demostración de otro teorema, recibe el nombre particular de **Lema.**

En el enunciado de todo teorema se distinguen dos partes: *hipótesis* ó suposición, y *tésis* ó conclusión. La *hipótesis* es lo que se afirma ó supone como cierto, y la *tésis* lo que, como consecuencia inmediata de la hipótesis, se pretende hacer patente.

Dos teoremas son *contrarios*, uno de otro, cuando sobre un mismo objeto se hace una hipótesis y se sienta una tésis, afirmativas en el primero (directo) y negativas en el segundo: así, por ejemplo, si en un teorema decimos que si a es b, c será d, en su contrario diremos que si a no es b, c no será d.

Dos teoremas son *mutuamente recíprocos* cuando la hipótesis y tésis del uno (directo) son respectivamente la tésis y la hipótesis del otro: así, por ejemplo, si en un teorema decimos que si a es b, c será d, en su recíproco diremos que si c es d, a será b.

(*) La palabra *Matemáticas* se deriva de la griega μαθησις (mathesis) *la ciencia*. En los principios de la formación de la ciencia matemática, principalmente cultivada por los antiguos, no estaban bien determinadas las relaciones entre sus distintas ramas, y todas recibían la denominación común de *ciencia*; pero, en el estado actual de los conocimientos humanos, puede considerarse cada una de ellas como subordinada á las leyes generales de la matemática, por lo que algunos autores la definen: *Ciencia de las leyes del tiempo y del espacio*, porque toda cantidad se determina en el tiempo y en el espacio.

La demostración de los teoremas recíprocos es generalmente *indirecta* ó *ad absurdum* (por reducción al absurdo) y se funda en que de la negación de la conclusión se siga necesariamente la de la hipótesis. Esta demostración es, sin embargo, innecesaria, cuando se han demostrado el teorema directo y su contrario en todas las hipótesis que puedan hacerse sobre el mismo objeto.

Corolario *es una verdad deducida naturalmente de otra evidente ó admitida ó de una proposición ya demostrada.*

Escolio *es una advertencia por la que se aclara ó simplifica una proposición demostrada ó se expone alguna deducción ó regla útil y frecuentemente aplicable.*

9. Problema *es toda cuestión de carácter práctico en que se trata de hallar una ó más cantidades desconocidas, llamadas incógnitas, por medio de relaciones dadas entre ellas y otras conocidas, llamadas datos.*

Los problemas son *aritméticos*, *algebráicos* ó *geométricos*, según la rama de la ciencia matemática que se aplique á su resolución.

En todo problema hay que considerar su *planteo* y su *resolución* y, en algunos, su *discusión*.

Plantear un problema es indicar la serie de operaciones que, según las condiciones del enunciado, son necesarias para obtener las incógnitas.

Resolver un problema es ejecutar las operaciones indicadas por su planteo. El resultado de la resolución se llama *solución del problema*.

Discutir un problema es interpretar sus soluciones en armonía con las hipótesis que puedan hacerse sobre las condiciones del enunciado.

10. Las ciencias matemáticas reciben la denominación de *exactas* y son el modelo de toda ciencia, porque sus fundamentos son los axiomas, sus proposiciones naturalmente derivadas de ellos y cumplidamente demostradas, sus procedimientos rigurosamente lógicos y sus resultados absolutamente ciertos.

ARITMÉTICA.

ARITMÉTICA.

PRELIMINARES.

11. **Número** *es el resultado de la comparación geométrica de una cantidad con su unidad* y, en tal concepto, se dice que *el número es la expresión genuina de la cantidad.*

Los números, bajo el punto de vista cualitativo de la cantidad á que se refieren, se dividen en *abstractos* y *concretos*, según que al enunciarlos se haga ó nó mención de la especie de dicha cantidad. Dos ó más números concretos pueden ser, como las cantidades que expresan, *homogéneos* ó *heterogéneos*.

Bajo el punto de vista de la conmensurabilidad ó inconmensurabilidad de la cantidad que expresan se clasifican los números en *conmensurables* ó *inconmensurables*, según que sean lo uno ó lo otro las cantidades á que se refieren (*).

Finalmente, con relación á la unidad de que están formados, se clasifican los números en *enteros* y *fraccionarios*.

Número entero *es una totalidad de unidades enteras*, y **número fraccionario** *una totalidad de unidades fraccionarias*.

(*) La clasificación de los números en *abstractos* y *concretos* y en *conmensurables* é *inconmensurables* es reconocidamente impropia, pues el número es esencialmente abstracto y la cantidad es siempre concreta, por lo que ésta y no aquél puede ser conmensurable ó inconmensnrable. Sin embargo, tomando la expresión de la cosa por la cosa misma y recíprocamente, se ha convenido en atribuir al número el concepto cualitativo de la cantidad que representa, lo que se acepta por razón de método, en cuanto facilita la exposición de las teorías de la Aritmética.

Los números fraccionarios se clasifican en *fracciones propias*, *fracciones impropias* y *números mixtos*. **Fraccion propia** *ó* **quebrado** *es una totalidad de unidades fraccionarias, menor que una unidad entera;* **fracción impropia** *es una totalidad de unidades fraccionarias, suficientes ó más que suficientes para formar una ó más unidades enteras, y* **número mixto** *es el compuesto de un entero y un quebrado.*

12. Los números enteros y los fraccionarios son conmensurables, puesto que contienen una totalidad de unidades y, en tal concepto, se les puede suponer formados por la agregación sucesiva de ellas, *una* á *una*, ya enteras, ya fraccionarias, de donde se deduce:

1.° Que el número de números, así enteros como fraccionarios, es ilimitado.

2.° Que entre dos números consecutivos hay infinito número de números, mayores que el menor y menores que el mayor.

13. **Aritmética** *es la parte de la ciencia matemática que tiene por objeto los números y por fin la investigación de las leyes que rigen á sus combinaciones.*

La Aritmética comprende la *Numeración*, el *Cálculo* y la *Comparación* de los números.

PRIMERA PARTE.

DE LOS NÚMEROS ABSTRACTOS.

LIBRO PRIMERO.

DE LA NUMERACIÓN DE NÚMEROS ABSTRACTOS.

CAPÍTULO ÚNICO.

DE LA NUMERACIÓN DE ENTEROS Y FRACCIONES.

14. **Numeración** *es todo procedimiento empleado para expresar los números.* Si en él se sigue una ley general y sistemática recibe el nombre de *Sistema de numeración.*

La numeración puede ser *verbal* ó *gráfica*, según tenga por fin la expresión hablada (enunciación) ó la escrita (escritura) de los números.

La numeración de toda clase de números se refiere á la de los abstractos enteros y la de éstos obedece, en todo sistema, á los siguientes principios fundamentales:

1.° Se llama *cero* y se representa con este signo, 0, la carencia de toda unidad.

2.° Se dan nombres y signos propios á ciertos grupos de unidades, llamadas de *primer órden* ó *simples*, cuyo número es variable según el sistema.

3.° Se establece que un cierto número de unidades de primer órden forme una de *segundo:* el mismo número de éstas, una de *tercero* y así sucesivamente. El número, constantemente igual, de unidades de un órden cualquiera que forma una unidad del órden inmediato superior se llama *base* del sistema de numeración.

15. Numeración de enteros.

El sistema de numeración de enteros, adoptado por los pueblos civilizados, es el siguiente:

Las unidades simples se expresan con los nombres y signos, llamados *cifras significativas*, que se exponen en el siguiente

Cuadro de unidades de primer órden ó unidades simples.

Una sola unidad se denomina	**uno** y se representa con el signo		1
La reunión de *uno* y *uno*	**dos**	»	2
La de *dos* y *uno*	**tres**	»	3
La de *tres* y *uno*	**cuatro**	»	4
La de *cuatro* y *uno*	**cinco**	»	5
La de *cinco* y *uno*	**seis**	»	6
La de *seis* y *uno*	**siete**	»	7
La de *siete* y *uno*	**ocho**	»	8
La de *ocho* y *uno*	**nueve**	»	9

Agregando una unidad al último número de este grupo se forma el número **diez**, base del sistema, por lo que éste recibe el nombre de *décuplo*.

Diez unidades simples forman una unidad de *segundo órden*, llamada **decena**, y se cuenta por decenas lo mismo que por unidades, dándoles las mismas denominaciones y representándolas con los mismos signos, colocados en la escritura *en segundo lugar,* contando de derecha á izquierda, para lo cual se ocupa el primero con el signo 0, lo que origina el siguiente

Cuadro de unidades de segundo órden ó decenas.

Una decena, que se denomina	**diez** y se representa		10
Dos decenas	**veinte** (*)	»	20
Tres decenas	**treinta**	»	30
Cuatro decenas	**cuarenta**	»	40
Cinco decenas	**cincuenta**	»	50
Seis decenas	**sesenta**	»	60
Siete decenas	**setenta**	»	70
Ocho decenas	**ochenta**	»	80
Nueve decenas	**noventa**	»	90

(*) Rigurosamente debiera decirse *dos dieces, tres dieces*, etc... *nueve dieces*, á lo que, por derivación de la lengua latina, llamamos *veinte, treinta*, etc... *noventa*.

Diez decenas forman una unidad de *tercer órden* llamada **centena**, y se cuenta por centenas lo mismo que por unidades, dándoles las mismas denominaciones y representándolas con los mismos signos, colocados en la escritura en *tercer lugar*, para lo cual se ocupan el primero y segundo con ceros, lo que origina el siguiente

Cuadro de unidades de tercer órden ó centenas.

Una centena, que se denomina	**ciento** y se representa		100
Dos centenas	**doscientos**	»	200
Tres centenas	**trescientos**	»	300
Cuatro centenas	**cuatrocientos**	»	400
Cinco centenas	**quinientos** (*)	»	500
Seis centenas	**seiscientos**	»	600
Siete centenas	**setecientos**	»	700
Ocho centenas	**ochocientos**	»	800
Nueve centenas	**novecientos**	»	900

Diez centenas forman una unidad de *cuarto órden*, llamada **unidad de millar** ó simplemente **millar**, y se cuenta por millares lo mismo que por unidades simples, dándoles los mismos nombres y signos, aunque colocados en *cuarto lugar*, mediante el uso ya indicado de los ceros.

Así como el conjunto de diez unidades forma una decena y el de diez decenas una centena, de la misma manera diez millares forman una unidad de *quinto órden* ó **decena de millar**, y diez decenas de millar forman una unidad de *sexto órden* ó **centena de millar.** Diez centenas de millar forman una unidad de *séptimo órden*, llamada **unidad de millón** ó simplemente **millón.**

A partir del millón, y de una manera análoga á la anteriormente expuesta, se forman la **decena, centena, millar, decena de millar** y **centena de millar de millón.** Diez centenas de millar de millón forman una nueva unidad, llamada **millon de millones** ó **billón;** con un millón de billones se forma el **trillón**, y así sucesivamente (**).

(*) Por origen, también latino, se dice *quinientos, setecientos, novecientos*, en vez de *cincocientos, sietecientos, nuevecientos*.

(**) En algunos países al millar de millones se le llama *billón*; al millar de billones, *trillón*; al millar de trillones, *cuatrillón*, etc.; es decir, que así como nosotros hacemos constantemente agrupaciones de *seis* en *seis* órdenes, subdividiéndolas en otras de *tres* en *tres*, en tales países forman con la agrupación de seis órdenes el *millón*, y las siguientes á éste las cuentan de tres órdenes cada una.

La ordenación, colocación, clasificación y denominación de las distintas unidades de nuestro sistema de numeración es la que, hasta el límite más frecuentemente usado, se indica en el siguiente

Resúmen del sistema décuplo de numeración de enteros.

ÓRDENES.	LUGARES.									CLASIFICACIÓN.		DENOMINACIÓN.
	9.º	8.º	7.º	6.º	5.º	4.º	3.º	2.º	1.º			
1.º	.	.	.	.	.	.	.	.	1	**Unidad**......		Uno.
2.º	.	.	.	.	.	.	.	1	0	Decena		Diez.
3.º	.	.	.	.	.	.	1	0	0	Centena.......		Ciento (ó cien).
4.º	.	.	.	.	.	1	0	0	0	Unidad	de millar	Mil.
5.º	.	.	.	.	1	0	0	0	0	Decena	de millar	Diez mil.
6.º	.	.	.	1	0	0	0	0	0	Centena	de millar	Cien mil.
7.º	.	.	1	0	0	0	0	0	0	Unidad	de millón	Millón.
8.º	.	1	0	0	0	0	0	0	0	Decena	de millón	Diez millones.
9.º	1	0	0	0	0	0	0	0	0	Centena	de millón	Cien millones.

16. Para expresar verbal y gráficamente cualquier entero, que no sea unidad del sistema, se han admitido convencionalmente estos principios:

1.º *Que el nombre de cada entero se forme con los de las unidades de distintos órdenes que contenga.*

2.º *Que toda cifra represente unidades del órden inmediato superior al de la colocada á su derecha y unidades del órden inmediato inferior al de la colocada á su izquierda.*

Conforme á estos principios resulta:

1.º Que todo entero comprendido entre dos consecutivos del cuadro de decenas ó entre el último de los de éste y el primero del de centenas se compondrá de decenas y unidades, siendo necesariamente unas y otras ménos de diez; su nombre se compondrá, pues, de uno de los del cuadro segundo y otro de los del primero, y su expresión gráfica, del signo correspondiente al número de sus decenas, antepuesto al de sus unidades; así se tendrá:

Diez y uno 11	Veintiuno 21	....	Noventa y uno. . 91
Diez y dos...... 12	Veinte y dos...... 22	....	Noventa y dos... 92
Diez y tres 13	Veinte y tres..... 23	....	Noventa y tres .. 93
Diez y cuatro... 14	....	....	....
Diez y cinco (*) . 15	....	....	....
Diez y seis. 16	....	....	....
Diez y siete 17	....	....	....
Diez y ocho..... 18	....	....	....
Diez y nueve... 19	Veinte y nueve (**) 29	....	Noventa y nueve. 99

2.º Que todo entero comprendido entre dos consecutivos del cuadro de centenas ó entre el último de los de éste y el primero del de millares se compondrá de centenas, decenas y unidades, ó de centenas y unidades, siendo en uno y otro caso el número de unidades de cada órden menor que diez; su nombre se compondrá, pues, de uno de los del cuadro tercero, otro de los del segundo, si tiene decenas, y otro de los del primero, y su expresión gráfica de los signos correspondientes á sus unidades de cada órden, ó del cero en defecto de las decenas, colocados en sus respectivos lugares: así, el número compuesto de *tres* centenas, *seis* decenas y *ocho* unidades se denominará *trescientos sesenta* y *ocho* y se escribirá 368 y el compuesto de *siete* centenas y *seis* unidades se denominará *setecientos seis* y se escribirá 706.

3.º Que sabiendo expresar verbal y gráficamente un entero compuesto de unidades de los tres primeros órdenes se podrá expresar cualquier otro, formando su *nombre* con los de las unidades de cada uno de sus órdenes, enunciados de superior á inferior, y su *expresión gráfica* con los respectivos signos, colocados en los lugares correspondientes á sus órdenes, conforme á las siguientes reglas prácticas.

(*) Los números *diez* y *uno*, *diez* y *dos*, *diez* y *tres*, *diez* y *cuatro*, *diez* y *cinco* reciben los nombres de *once*, *doce*, *trece*, *catorce* y *quince*, procedentes del latín, y compuestos del nombre de la primera decena, pospuesto á la respectiva unidad.

(**) Por abreviatura se dice *veintiuno*, *veintidos*, *veintitres*, etc , suprimiendo la copulativa, *y*.

1.ª *Para enunciar un entero se enuncian sucesivamente, y en órden de superior á inferior, las distintas unidades que contiene.*

2.ª *Para escribir un entero se colocan sucesivamente de izquierda á derecha, y en su lugar correspondiente, las cifras que expresan sus unidades de cada órden.*

3.ª *Para leer un entero se empieza por prepararlo, dividiéndole en grupos de á seis cifras, de derecha á izquierda, y marcando, para mayor fijeza y claridad, la de los millones con un $_1$, la de los billones con un $_2$, etc., y hecho esto, se enuncian sus cifras de izquierda á derecha;* así, el número 7426531468052 se prepara $7_2426531_1468052$, y se lee siete *billones*, cuatrocientos veintiseis *mil*, quinientos treinta y un *millones*, cuatrocientos sesenta y ocho *mil*, cincuenta y dos.

Ejemplos.

1.º El número que tenga

cuatro decenas. siete unidades.	de millón	se enunciará	cuarenta y siete *millones*	y se escribirá 47592836
cinco centenas nueve decenas.. dos unidades..	de millar		quinientos noventa y dos *mil*	
ocho centenas.......... tres decenas........... y seis unidades.........			ochocientos treinta y seis	

2.º El número que tenga

siete decenas.. cuatro unidades	de millar	se enunciará	setenta y cuatro *mil*	y se escribirá 74059
cinco decenas.. .... y nueve unidades........			cincuenta y nueve	

3.º El número que tenga

ocho centenas.. tres unidades..	de millar	se enunciará	ochocientos tres *mil*	y se escribirá 803003
y tres unidades.........			tres	

17. Numeración de fracciones.

Para expresar una fracción se emplean dos enteros, llamados *numerador* y *denominador:* el primero *numera* la totalidad de unidades fraccionarias y el segundo las *denomina*, expresando el número de partes iguales en que, para obtenerlas, se ha dividido la unidad entera. El numerador y el denominador reciben el nombre común de *términos* de la fracción.

Las fracciones se clasifican en *ordinarias* y *decimales*. Son **decimales** *las fracciones que tienen por denominador la unidad seguida de ceros*, y **ordinarias** *las que tienen un denominador cualquiera que no sea de esta forma.*

18. La numeración de las fracciones ordinarias consiste:

1.º En dar á las diversas unidades fraccionarias la denominacion propia del número de partes iguales en que se haya dividido la unidad entera, seguida de la terminación partitiva *avos*; así, por ejemplo, las partes iguales que resultan de dividir la unidad en 11, 35, 86 partes iguales se denominan, respectivamente, *onceavos*, *treinta y cincoavos*, *ochenta y seisavos*. Se exceptúan de esta regla las partes de la unidad dividida en 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, que se denominan, respectivamente, *medios*, *tercios*, *cuartos*, *quintos*, *sextos*, *séptimos*, *octavos* y *novenos*.

2.º En enunciar una totalidad de unidades fraccionarias por el mismo sistema empleado para los enteros, aplicado separadamente al numerador y al denominador.

3.º En escribir el numerador encima del denominador, separándolos por una raya; así, por ejemplo,

tres unidades fraccionarias de la especie de *quintos*, se escribirán $\frac{3}{5}$

y se leerán *tres quintos:*

quince unidades fraccionarias de la especie de *treinta y seisavos*, se escribirán $\frac{15}{36}$

y se leerán *quince treinta y seisavos:*

setecientas cuarenta y seis unidades fraccionarias de la especie de *tres mil ochocientos cincuenta y nueveavos*, se escribirán $\frac{746}{3859}$

y se leerán *setecientos cuarenta y seis, tres mil ochocientos cincuenta y nueveavos.*

19. La numeración de las fracciones decimales consiste:

1.º En dar á las diversas unidades fraccionarias denominaciones adecuadas al número de partes iguales en que se haya dividido la unidad entera; así, si ésta se divide en 10, 100, 1000, etc. partes iguales, las respectivas unidades decimales se llaman *décimas*, *centésimas*, *milésimas*, etc.

2.º En clasificar estas unidades por órdenes, llamando de segundo órden á las décimas; de tercero á las centésimas; de cuarto á las milésimas; etc.

3.º En asignar á cada unidad decimal, á la derecha de las enteras simples, el lugar correspondiente á su órden.

De lo dicho se desprende que cada unidad decimal de un órden dado contiene diez de las del inmediato inferior y que la ordenación, colocación, clasificación y denominación de las diversas unidades fraccionarias decimales será la del siguiente

Resúmen del sistema de numeración de decimales.

Órdenes.	LUGARES. 1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	Clasificación y denominación.
1.º	1	.	.	.	.	.	.	.	.	**Unidad.**
2.º	0	1	.	.	.	.	.	.	.	Décima.
3.º	0	0	1	.	.	.	.	.	.	Centésima.
4.º	0	0	0	1	.	.	.	.	.	Milésima.
5.º	0	0	0	0	1	.	.	.	.	Diezmilésima.
6.º	0	0	0	0	0	1	.	.	.	Cienmilésima.
7.º	0	0	0	0	0	0	1	.	.	Millonésima.
8.º	0	0	0	0	0	0	0	1	.	Diezmillonésima.
9.º	0	0	0	0	0	0	0	0	1	Cienmillonésima.

donde se ve que las unidades decimales están sometidas, en su formación, á la misma ley que las enteras y vienen con ellas á completar un sistema regular y uniforme de numeración de enteros y decimales cuyo mecanismo se indica en el siguiente cuadro, comprensivo del anterior y del expuesto al tratar de los enteros (15).

UNIDADES DÉCUPLAS.		ÓRDENES Ó LUGARES.													UNIDADES DECIMALES.	
RELACIÓN con la unidad.	Clasificación.	7.º	6.º	5.º	4.º	3.º	2.º	**1.º**	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	Clasificación.	RELACIÓN con la unidad.
	Unidad..........	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	**Unidad**	
Diez veces mayor....	Decena..........	.	.	.	.	.	1	0	1	.	.	.	.	.	Décima..........	Diez veces menor.
Cien veces mayor....	Centena..........	.	.	.	.	1	0	0	0	1	.	.	.	.	Centésima......	Cien veces menor.
Mil veces mayor....	Millar..........	.	.	.	1	0	0	0	0	0	1	.	.	.	Milésima......	Mil veces menor.
Diez mil veces mayor	Decena de millar...	.	.	1	0	0	0	0	0	0	0	1	.	.	Diezmilésima......	Diez mil veces menor
Cien mil veces mayor	Centena de millar...	.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	.	Cienmilésima......	Cien mil veces menor
Un millón de veces mayor.	Millón..........	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	Millonésima......	Un millón de veces menor.

20. Se llama **número decimal** ó simplemente **decimal** *á todo número formado por unidades decimales ó por enteras y decimales.*

21. Todo número decimal es en realidad una fracción cuyo denominador es la unidad seguida de ceros, pero se puede omitir la escritura de éste, en virtud de la analogía que existe entre la formación de las unidades decimales de cada órden y las décuplas, aplicando á los números decimales los principios consignados en la numeración de enteros (**16**), asignando á cada cifra el lugar que la corresponda y cuidando de separar la parte entera de la decimal, conforme á las siguientes reglas prácticas:

1.ª *Para enunciar un decimal se enuncia primeramente la parte entera y después la decimal, como si fuese también entera, pero dándole la denominación de su última cifra.*

2.ª *Para escribir un decimal se escribe primeramente la parte entera y, en su defecto, un cero: se la separa con una coma de la parte decimal y en seguida se escribe ésta, como si fuese entera.*

Ejemplos.

1.º El número que tenga

cuatro centenas..... seis decenas........ tres unidades....... nueve décimas...... cinco centésimas... y siete milésimas...	se enunciará	cuatrocientos sesenta y tres *enteros*, novecientas cincuenta y siete *milésimas*	y se escribirá 463,957

2.º El número que tenga

seis decenas... .... tres unidades........ cuatrocienmilésimas y siete millonésimas	se enunciará	sesenta y tres *enteros*, cuarenta y siete *millonésimas*	y se escribirá 63,000047

3.º El número que tenga

tres milésimas...... y ocho diezmilésimas	se enunciará	treinta y ocho *diezmilésimas*	y se escribirá 0,0038

3.ª *Para leer un decimal se preparan su parte entera y su parte decimal, como si ambas fuesen enteras, y se leen sucesiva y separadamente;* así, el número 45263412,7549328 se prepara 45,263412,7,549328 y se lee cuarenta y cinco *millones*, doscientos sesenta y tres *mil*, cuatrocientos doce *enteros*, siete *millones*, quinientas cuarenta y nueve *mil*, trescientas veintiocho *diezmillonésimas*.

22. De la numeración de números fraccionarios y de lo dicho acerca de su clasificación se deduce:

1.º Que toda fracción cuyo numerador es menor que el denominador es un *quebrado*, pues expresa ménos unidades fraccionarias que las necesarias para formar una unidad entera: tales son, por ejemplo, $\frac{3}{5}$ y 0,7.

2.º Que toda fracción cuyo numerador es igual ó mayor que el denominador es *impropia* (igual en el primer caso, y mayor en el segundo, que la unidad entera) pues expresa respectivamente tantas ó más unidades fraccionarias que las necesarias para formar una unidad entera: tales son

$$\frac{3}{3} \text{ y } \frac{10}{10};\ \frac{7}{3} \text{ y } \frac{38}{10}.$$

3.º Que de dos fracciones del mismo denominador es mayor la que tiene mayor numerador, puesto que, siendo la unidad la misma en ambas fracciones, expresa ésta mayor número de ellas que la otra: así se tiene que

$$\frac{7}{9} > \frac{5}{9} \text{ y } 0{,}8 > 0{,}5.$$

4.º Que de dos fracciones del mismo numerador es mayor la que tiene menor denominador, pues es evidente que cada una de las unidades fraccionarias de ésta será mayor que cada una de las de la otra, y como ambas fracciones expresan el mismo número de unidades, será mayor aquella cuya unidad sea mayor: así se tiene que

$$\frac{7}{5} > \frac{7}{9} \text{ y } 0{,}8 > 0{,}08.$$

5.º Que un decimal no varía, colocando ceros á su derecha ó supriméndolos si los tiene, pues cada una de sus cifras conserva el mismo lugar respecto á las unidades simples: así, 7,54 = 7,540 = 7,5400, etc., etc.

23. Numeración de los números inconmensurables.

Los números inconmensurables carecen de numeración propia, pues, como se verá más adelante, todo número inconmensurable se expresa por una limitación entre dos conmensurables.

24. Representación general de los números. Los números se representan, en general, por medio de las letras de nuestro alfabeto ó del alfabeto griego (*), de modo que una letra debemos suponerla como la representación de un número, ya entero, ya fraccionario, ya inconmensurable.

Para poder representar, sin confusión, con una misma letra dos números distintos, dos valores diferentes de una misma cantidad ó dos cantidades homogéneas, en cualquier concepto, se ha convenido en marcarla con una numeración correlativa en su parte superior ó en la inferior, expresada en caracteres romanos, en el primer caso, y en arábigos, en el segundo. Así se tendrá, por ejemplo,
a', a'', a^{VI}, que se leen, *a prima, a segunda*, *a sexta:* a_1, a_2, a_6, que se leen, *a sub-uno, a sub-dos, a sub-seis.*

(*) Las letras mayúsculas y minúsculas del alfabeto griego son:

Α. α	*Alpha.*	Ι. ι	*Iota.*	Ρ. ρ	*Rho.*
Β. β	*Vita ó beta.*	Κ. κ	*Kappa.*	Σ. σ	*Sigma.*
Γ. γ	*Gámma.*	Λ. λ	*Lambda.*	Τ τ	*Taü.*
Δ. δ	*Delta.*	Μ. μ	*Mu.*	Υ. υ	*Ypsilon.*
Ε. ε	*Epsilon.*	Ν. ν	*Nu.*	Φ. φ	*Phi.*
Ζ. ζ	*Zeta.*	Ξ. ξ	*Xi.*	Χ. χ	*Chi* ó *Ji.*
Η η	*Eta.*	Ο. ο	*Omicron.*	Ψ. ψ	*Psi.*
Θ. θ	*Theta.*	Π. π	*Pi.*	Ω. ω	*Oméga.*

LIBRO II.

DEL CÁLCULO DE NÚMEROS ABSTRACTOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

PRELIMINARES.

25. Calcular *es practicar una ó más operaciones.*

Operación *es toda combinación numérica que tiene por objeto formar un número, llamado resultado, por medio de otros, llamados datos ó términos de la operación.*

Operación *inversa de otra* (directa) es una nueva operación cuyos datos son el resultado y uno de los datos de la primera y cuyo resultado es otro dato de aquélla.

Las operaciones que constituyen el cálculo aritmético son seis, llamadas *adición, sustracción, multiplicación, división, elevación á potencias* ó *potenciación* y *extracción de raíces* ó *radicación.*

Estas operaciones se clasifican en *grados* y cada uno de ellos comprende dos operaciones recíprocamente inversas: así, son operaciones de primer grado la adición y la sustracción; de segundo la multiplicación y la división ; y de tercero la elevación á potencias y la extracción de raíces. Las cuatro primeras reciben la denominación común de *operaciones fundamentales.*

Cada operación se indica con un signo especial que se coloca entre los datos. Cuando una operación indicada es término de otra, ésta se llama *compuesta* y se indica encerrando en un paréntesis la indicación de la primera. Con los datos de una operación, ligados por el signo correspondiente, y el resultado de ella se forma una igualdad que puede recibir muchas y variadas transformaciones, en virtud del principio general y casi axiomático de que «*operaciones iguales, hechas con cantidades iguales, dan resultados iguales.*»

Prueba de una operación *es todo medio empleado para cerciorarse de su exactitud.* Las operaciones recíprocamente inversas pueden servirse mutuamente de prueba.

CAPÍTULO II.

DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

ARTÍCULO PRIMERO.

DE LA ADICIÓN

26. La adición *tiene por objeto reunir en un solo número las unidades de otros.*

Los datos de esta operación se llaman *sumandos* y el resultado *suma* (*). El signo de la adición es este $+$, que se lee *más*, de modo que la adición de los números a, b y c se indicará $a+b+c$, y si la suma es s, se tendrá $a+b+c=s$.

De la definición de la adición se deduce:

1.° Que si los sumandos son dos y uno de ellos es *cero*, la suma es el otro sumando, es decir, que $a+0=a$ y $0+b=b$.

2.° Que si ambos sumandos son *cero*, la suma será *cero*, es decir, que $0+0=0$.

3.° Que para obtener el resultado de una adición de varios sumandos a, b, c y d, por ejemplo, se suman los dos primeros a y b, lo que dará la suma $a+b$, á ésta, considerada como un sumando, se agrega el tercero c, lo que dará la suma $a+b+c$, y agregando á esta nueva suma, considerada como un sumando, el último d, se obtendrá la suma $a+b+c+d=s$.

27. Teorema. *La suma de dos ó más enteros es independiente del orden de los sumandos* (**).

En efecto, si los sumandos son a, b y c, se puede representar la suma $a+b+c$ por una fila de a unidades, seguida de otra de b unidades y de otra de c unidades, en esta forma:

$$\underbrace{1+1+1+1+\ldots.+1}_{a \text{ unidades}}+\underbrace{1+1+1+\ldots.+1}_{b \text{ unidades}}+\underbrace{1+1+\ldots.+1}_{c \text{ unidades}}$$

donde, evidentemente, el número total de unidades será el mismo, sea cualquiera el orden en que se consideren los grupos de ellas.

(*) De aquí procede el que vulgarmente se llame á la adición *operación de sumar*.

(**) Este teorema se enuncia comunmente, para más brevedad, diciendo que *el órden de los sumandos no altera la suma*.

28. El procedimiento natural para sumar enteros consiste en agregar á uno de los sumandos, una á una, las unidades de cada uno de los otros, pero como esto se haría muy pesado y expuesto á errores cuando fuesen muchos los sumandos, para facilitar y metodizar el estudio de la adición de enteros conviene considerar en ella tres casos.

1.° *Sumar dos enteros de una cifra.*

2.° *Sumar un entero de varias cifras y otro de una.*

3.° *Sumar dos ó más enteros de varias cifras.*

Primer caso. La suma de dos enteros de una cifra se obtendría fácilmente teniendo á la vista un cuadro que contuviese las sumas de dos de ellos cualesquiera. Este cuadro, llamado *Tabla de sumar*, se construye fácilmente en la forma expuesta al margen. Para hacer uso de él se busca uno de los sumandos en la primera fila y el otro en la primera columna y su suma se hallará en la intersección de la fila correspondiente al uno con la columna correspondiente al otro. Así, la suma de 8 y 7 es 15, que se encuentra en la casilla común á la fila del 8 y á la columna del 7, ó á la fila del 7 y á la columna del 8 (*).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Escolio. La suma de dos enteros de una cifra es siempre menor que dos decenas, pues la mayor de tales sumas es $9+9=18$, que contiene una decena y ocho unidades.

Segundo caso. La suma de un entero de varias cifras y otro de una sola contendrá necesariamente las decenas del uno más las unidades simples de ambos, las que, podrán formar una decena y aumentar, por consiguiente, en una, las decenas del primer sumando.

(*) Como no es fácil llevar siempre consigo una tabla de sumar, conviene retenerla en la memoria, lo que se consigue con repetidos ejercicios.

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:
Para sumar un entero de varias cifras con otro de una se suman las unidades de ambos y se aumentan en una las decenas del primero, si las unidades suman más de 9.

Así, $45+3=48$; $73+9=82$; $3523+6=3529$; $2728+7=2735$.

Tercer caso. La suma de dos ó más enteros de varias cifras se obtiene por las siguientes consideraciones, que, para mayor claridad, aplicaremos á un ejemplo.

Sean los sumandos, 796, 283 y 645. Descomponiendo cada uno de ellos en sus unidades de distintos órdenes é indicando por u las unidades, por d las decenas y por c las centenas, se tendrá:

$$796=6^u+9^d+7^c\ ;\ 283=3^u+8^d+2^c\ ;\ 645=5^u+4^d+6^c\ ;$$

luego, $796+283+645=6^u+3^u+5^u+9^d+8^d+4^d+7^c+2^c+6^c$
$$=14^u+21^d+15^c=4^u+22^d+15^c$$
$$=4^u+2^d+17^c=1724.$$

Escolio. De lo expuesto se deduce la siguiente regla:
Para sumar dos ó más enteros de varias cifras se suman separada y sucesivamente las unidades de cada órden, empezando por las del inferior: se escriben en su lugar correspondiente las de cada suma parcial y se agregan las decenas al primer sumando del órden inmediato superior.

Observación. Para facilitar la operación y evitar equivocaciones, cuando los sumandos son más de dos, conviene colocarlos uno debajo de otro, de modo que se correspondan en columna las unidades del mismo órden, y separar los datos, del resultado, por una raya.

Ejemplo. *Sumar* $345+52580+637+19248$.

Se dispone la operación en la forma expuesta al márgen, y al verificarla se dice:

345	5 y 7, 12; y 8, 20 (escribo 0) y llevo 2
52580	2 y 4, 6; y 8, 14; y 3, 17; y 4, 21 (escribo 1) y llevo 2
637	2 y 3, 5; y 5, 10; y 6, 16; y 2, 18 (escribo 8) y llevo 1
19248	1 y 2, 3; y 9, 12 (escribo 2) y llevo 1
	1 y 5, 6; y 1, 7 (que escribo),
72810	

con lo que se tiene la suma 72810.

29. Prueba de la adición.

Para comprobar una adición se repite en sentido inverso, es decir, de abajo á arriba si se hizo de arriba á abajo, y si la nueva suma es igual á la que antes se obtuviera se tendrá una gran probabilidad de su exactitud (27).

ARTÍCULO II.

DE LA SUSTRACCIÓN.

30. **La sustracción**, operación inversa de la adición, *tiene por objeto hallar un sumando, dado otro y la suma de ámbos.*

Los datos de esta operación son: la suma dada, que recibe el nombre de *minuendo*, y el sumando conocido, que se denomina *sustraendo*; el resultado ó término que se busca se llama *diferencia* (*). El signo de la sustracción es este —, que se lee *menos*, de modo que la sustracción de los números a y b se indicará $a-b$, y si su diferencia es d, se tendrá $a-b=d$.

De la definición de la sustracción se deduce:

1.° Que el minuendo es la suma del sustraendo y la diferencia, es decir, que de $a-b=d$ se obtiene, $a=b+d$.

2.° Que si el sustraendo es *cero*, la diferencia es igual al minuendo, es decir, que $a-0=a$.

3.° Que si el sustraendo es igual al minuendo, la diferencia es *cero*, es decir, que $a-a=0$.

4.° Que si el sustraendo es mayor que el minuendo es aritméticamente imposible la sustracción, pues es absurdo suponer que la suma sea menor que uno de los sumandos.

5.° Que la diferencia contiene las unidades del minuendo, menos las del sustraendo, ó sea las unidades en que aquél excede á éste; lo que justifica otra definición de la *sustracción*, diciendo *que es una operación que tiene por objeto hallar las unidades en que un número excede á otro.*

31. **Teorema.** *La diferencia entre el minuendo y la diferencia de una sustracción es igual al sustraendo.*

En efecto, si tenemos una suma, $b+d=a$, se verifica que así como d es el término suficiente para que, sumado con b, dé por suma a, también b es el término suficiente para que, sumado con d, se obtenga la misma suma, a; luego si se tiene que $a-b=d$, también se tendrá que $a-d=b$.

(*) También recibe el nombre de *exceso* del minuendo sobre el sustraendo y el de *resto*, de donde procede el que vulgarmente se llame á la sustracción, *operación de restar*.

32. El procedimiento natural para restar un entero de otro consiste en rebajar del minuendo, una á una, las unidades del sustraendo, pero como esto se haría muy pesad y expuesto á errores cuando el sustraendo contuviese muchas unidades, para facilitar y metodizar el estudio de la sustracción de enteros conviene considerar en ella los casos que puedan deducirse de los de la adición de dos sumandos, que son los siguientes:

Que el sustraendo sea de una cifra y la diferencia también de una.

Que el sustraendo sea de una cifra y la diferencia de varias.

Que el sustraendo sea de varias cifras y la diferencia de una.

Que el sustraendo sea de varias cifras y la diferencia también de varias.

Mas como, por otra parte, es evidente que la diferencia de dos enteros será de una sola cifra, siempre que agregando diez unidades al sustraendo resulte un número mayor que el minuendo, los cuatro casos expuestos se reducen á los dos siguientes:

1.° *Que la diferencia sea de una cifra.*
2.° *Que la diferencia sea de varias cifras.*

Primer caso. La diferencia de dos enteros tales que el minuendo exceda al sustraendo en menos de diez unidades se obtendrá, desde luego, agregando á éste mentalmente el número de unidades necesarias para formar el minuendo: así, la diferencia de los números 15 y 8 es 7, la de 592 y 584 es 8 y la de 4987 y 4978 es 9.

Segundo caso. La diferencia de dos enteros tales que el minuendo exceda al sustraendo en diez ó más unidades se obtiene por las consideraciones siguientes que, para mayor claridad, aplicaremos á dos ejemplos.

1.° Sean 7968 y 1243 los números cuya diferencia se quiere hallar.

Como la diferencia ha de contener las unidades de distintos órdenes del minuendo, menos las de los correspondientes del sustraendo, es evidente que se obtendrá aquella, restando de cada una de las cifras del número 7968 la correspondiente del número 1243, con lo que, indicando por *u* las unidades, por *d* las decenas, por *c* las centenas y por *m* los millares se tendrá:

$$7968 - 1243 = 8^u - 3^u + 6^d - 4^d + 9^c - 2^c + 7^m - 1^m$$
$$= 5^u + 2^d + 7^c + 6^m = 6725.$$

2.° Sean 7968 y 1273 los números cuya diferencia se quiere hallar.

Por iguales consideraciones que en el ejemplo anterior, se tendrá:

$$7968 - 1273 = 8^u - 3^u + 6^d - 7^d + 9^c - 2^c + 7^m - 1^m;$$

pero, como la sustracción $6^d - 7^d$ es imposible, agregaremos diez decenas á las 6 del minuendo, tomando una de sus 9 centenas, con lo que se tendrá

$$7968 - 1273 = 8^u - 3^u + 16^d - 7^d + 8^c - 2^c + 7^m - 1^m.$$

Mas como la sustracción parcial $8^c - 2^c$ dá el mismo resultado 6^c, que $9^c - 3^c$, se tendrá

$$7968 - 1273 = 8^u - 3^u + 16^d - 7^d + 9^c - 3^c + 7^m - 1^m$$
$$= 5^u + 9^d + 6^c + 6^m = 6695.$$

Escolio. De lo expuesto se deduce la siguiente regla: *Para restar dos enteros cualesquiera se resta cada cifra del sustraendo de la del mismo órden del minuendo, empezando por el inferior. Si alguna cifra del sustraendo fuese mayor que la del mismo órden del minuendo, se agregan á ésta mentalmente diez unidades de su órden y se efectúa la sustracción, cuidando de agregar, también mentalmente, una unidad á la cifra inmediata del sustraendo.*

Observación. Para facilitar la operación y evitar equivocaciones conviene colocar el minuendo y el sustraendo, uno debajo de otro, de modo que se correspondan en columna las unidades del mismo órden y separar los datos del resultado, por una raya.

Ejemplo. Restar 8543—5738.

La operación se dispone en la forma expuesta al márgen y al verificarla se dice:

8543	De 8 á 13, 5 (que escribo) y llevo 1
5738	1 y 3, 4 á 4, 0 (que escribo)
2805	De 7 á 15, 8 (que escribo) y llevo 1
	1 y 5, 6 á 8, 2 (que escribo)

con lo que se tiene la diferencia 2805.

33. Prueba de la sustracción.

Para comprobar una sustracción se suma la diferencia con el sustraendo y, si la suma es igual al minuendo, será muy probable la exactitud de la operación (**30**-1.°).

También se comprueba una sustracción restando del minuendo la diferencia y, si la nueva diferencia es igual al sustraendo de la sustracción comprobada, se tendrá una gran probabilidad de su exactitud (**31**).

ARTÍCULO III.

ALTERACIONES DE LOS RESULTADOS DE LAS OPERACIONES DE PRIMER GRADO, POR LAS QUE SUFRAN SUS DATOS.

OPERACIONES COMPUESTAS DE DOS DE PRIMER GRADO.

34. Teorema. *Si en una adición se aumenta ó disminuye uno de los sumandos, en un número cualquiera, la suma aumenta ó disminuye, respectivamente, en dicho número.*

En efecto, el número en que se aumenta ó disminuye un sumando es un nuevo término cuyas unidades deberán aparecer de más ó de menos, respectivamente, en la nueva suma; luego ésta se compondrá de la primitiva más ó menos dicho número.

Escolio 1.º Si en la adición, $a+b=s$, se aumenta el sumando a, en c unidades, se tendrá la expresión

$$(a+c)+b=s+c=a+b+c=a+c+b=\text{etc. (27)},$$

cuyo primer miembro expresa la suma de la suma $a+c$ y el número b, de donde se deduce la siguiente regla:

Para sumar una suma y un número, ó viceversa, se suman todos los sumandos, en un órden cualquiera (*).

Así $(4+8)+3=4+8+3=$ etc.

Escolio 2.º Si en la adición, $a+b=s$, se disminuye el sumando a, en c unidades, se tendrá la expresión

$$(a-c)+b=s-c=a+b-c,$$

cuyo primer miembro expresa la suma de la diferencia $a-c$ y el número b, de donde se desprende la siguiente regla:

Para sumar una diferencia y un número, ó viceversa, se agrega éste al minuendo y del resultado se resta el sustraendo.

Así, $(9-2)+5=9+5-2$.

(*) Esta regla y las sucesivas que obtendremos para verificar operaciones compuestas no tienen un fin preceptivo sino el de hacer ver que, así como es indiferente el órden en que se enuncian los dos miembros de una igualdad, lo es también seguir el procedimiento operativo indicado en la operación compuesta ó el desarrollado en el enunciado de la regla.

35. Teorema. *Si en una adición se aumenta ó disminuye cada uno de los sumandos, en un número cualquiera, la suma aumenta ó disminuye en la suma de dichos números.*

En efecto, si hacemos estos aumentos ó disminuciones sucesivamente la suma irá aumentando ó disminuyendo en lo que aumente ó disminuya cada sumando; luego, al final, resultará la nueva suma igual á la primitiva más ó ménos la suma de los indicados aumentos ó disminuciones.

Escolio 1.º Si en la adición, $a+b=s$, se aumenta, en c unidades, el sumando a y, en d, el sumando b, se tendrá

$$(a+c)+(b+d)=s+c+d=a+b+c+d$$
$$=a+c+d+b=\text{etc. (27)},$$

de donde se desprende la siguiente regla:

Para sumar dos sumas se suman todos los sumandos de ambas, en un órden cualquiera.

Así, $(4+8)+(3+7)=4+8+3+7=$ etc.

Escolio 2.º Si en la adición, $a+b=s$, se disminuye, en c unidades, el sumando a y, en d, el sumando b, se tendrá

$$(a-c)+(b-d)=s-c-d=s-(c+d)=a+b-(c+d),$$

de donde se desprende la siguiente regla:

Para sumar dos diferencias se resta de la suma de los minuendos, la de los sustraendos.

Así, $(13-6)+(24-8)=13+24-(6+8)$.

36. Teorema. *Si en una sustracción se aumenta ó disminuye el minuendo, en un número cualquiera, la diferencia aumenta ó disminuye en el mismo número.*

En efecto, no variando el sustraendo, que es uno de los dos sumandos componentes del minuendo, toda variación de éste exige necesariamente otra igual en la diferencia, que es el otro sumando.

Escolio 1.º Si en la sustracción, $a-b=d$, se aumenta, en c unidades, el minuendo a, se tendrá

$$(a+c)-b=d+c=a-b+c=a+c-b \text{ (34-Esc. 2.º)},$$

de donde se desprende la siguiente regla:

Para restar de una suma un número se resta éste de cualquiera de los sumandos (mayor que él) y al resultado se agrega el otro.

Así, $(17+9)-5=17-5+9=17+9-5$.

Escolio 2.º Si en la sustracción, $a - b = d$, se disminuye, en c unidades, el minuendo a, se tendrá

$$(a-c)-b=d-c=a-b-c=a-(b+c),$$

de donde se desprende la siguiente regla:

Para restar de una diferencia un número se resta del minuendo la suma del sustraendo y el número.

Así, $(38-6)-7=38-(6+7)$.

37. Teorema. *Si en una sustracción se aumenta ó disminuye el sustraendo, en un número cualquiera, la diferencia disminuye ó aumenta en el mismo número.*

En efecto, no variando el minuendo, que es la suma de la diferencia y el sustraendo, toda variación de éste exige necesariamente otra igual y contraria en aquél.

Escolio 1.º Si en la sustracción, $a-b=d$, se aumenta, en c unidades, el sustraendo b, se tendrá

$$a-(b+c)=d-c=a-b-c,$$

de donde se desprende la siguiente regla:

Para restar de un número una suma se restan de él, sucesivamente, los sumandos de ésta.

Así, $38-(16+5)=38-16-5$.

Escolio 2.º Si en la sustracción, $a-b=d$, se disminuye, en c unidades, el sustraendo b, se tendrá

$$a-(b-c)=d+c=a-b+c,$$

de donde se desprende la siguiente regla:

Para restar de un número una diferencia se le resta el minuendo y se le agrega el sustraendo.

Así, $49-(14-8)=49-14+8$.

38. Teorema. *Si en una sustracción se aumentan ó disminuyen el minuendo y el sustraendo, en un mismo número, la diferencia no varía.*

En efecto, el aumento ó disminución que sufre la diferencia por la alteración del minuendo se destruye con la correspondiente disminución ó aumento que lleva consigo la alteración del sustraendo.

Escolio. Esta propiedad permite que, al hacer la sustracción de dos enteros, se pueda aumentar al minuendo cualquier número de unidades de un órden, con tal que se aumenten las mismas al sustraendo.

ARTÍCULO IV.

DE LA MULTIPLICACIÓN.

39. La multiplicación *tiene por objeto, en general, dados dos números, hallar un tercero que sea respecto al primero lo que el segundo sea respecto á la unidad entera.*

Los datos de esta operación se llaman *factores*, dándose la denominación particular de *multiplicando* á aquel con que se compara el resultado y el de *multiplicador* al que se compara con la unidad entera: el resultado se llama *producto* (*). El signo de la multiplicación es, indistintamente, este $\times$ ó este $.$, que se leen *multiplicado por*; de modo que la multiplicación de a por b se escribirá, $a\times b$ ó $a\,.\,b$, y, si su producto es p, se tendrá, $a\times b=p$ ó $a\,.\,b=p$ (**).

De la definición de la multiplicación se deduce:

1.º Que, según que uno de los factores sea mayor, igual ó menor que la unidad entera, el producto será mayor, igual ó menor que el otro factor.

2.º Que si uno de los factores es *cero*, el producto es cero.

3.º Que una multiplicación de enteros equivale á una adición de tantos sumandos, iguales al multiplicando, como unidades tenga el multiplicador; por lo que podemos decir que *multiplicar dos enteros es hallar un número tantas veces mayor que uno dado, como unidades tenga otro, también dado.*

40. Teorema. *El producto de dos enteros es independiente del órden de los factores.*

En efecto, si se dispone un cuadro compuesto, por ejemplo, de *tres* filas de á *cuatro* unidades, cada una, se ve que la totalidad de sus unidades será el producto de 4×3; mas si consideramos el cuadro compuesto de *cuatro* columnas de á *tres* unidades, cada una, la totalidad de sus unidades, que es la misma, será el producto de 3×4; luego $4\times3=3\times4$.

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

(*) El producto recibe el nombre particular de *duplo*, *triplo*, *cuádruplo*, etc., de uno de los factores, cuando el otro es 2, 3, 4, etc., respectivamente.

(**) Cuando el multiplicando y el multiplicador ó éste solamente, están representados por letras se puede suprimir el signo; así la multiplicación de a por b se indica ab, y la de 7 por c se indica $7c$.

41. El procedimiento natural para multiplicar dos enteros consiste en hallar la suma de tantos sumandos, iguales á uno de ellos, como unidades tenga el otro; pero como se haría pesado y expuesto á errores cuando el multiplicador tuviera muchas unidades, para facilitar y metodizar el estudio de la multiplicación de enteros conviene considerar en ella los casos siguientes:

1.° *Multiplicar dos enteros de una cifra.*

2.° *Multiplicar un entero de varias cifras por otro de una.*

3.° *Multiplicar dos enteros de varias cifras.*

Primer caso. El producto de dos enteros de una cifra se obtendría fácilmente, teniendo á la vista un cuadro que contuviese los productos de dos de ellos cualesquiera. Este cuadro, llamado *Tabla de multiplicar*, se construye fácilmente en la forma expuesta al márgen. Para hacer uso de él, se busca uno de los factores en la primera fila y el otro en la primera columna y su producto se hallará en la intersección de la fila correspondiente á uno de los factores con la columna correspondiente al otro. Así, el producto de 7×5 es 35, que se encuentra en la casilla común á la fila del 7 y á la columna del 5 y también en la casilla común á la fila del 5 y á la columna del 7 (*).

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Segundo caso. El producto de un entero de varias cifras por otro de una sola se obtiene por las siguientes consideraciones que, para mayor claridad, aplicaremos á un ejemplo.

(*) Como no es fácil llevar siempre consigo una tabla de multiplicar, conviene retenerla en la memoria, lo que se consigue con repetidos ejercicios.

Sean 4873 y 8 los factores.

Su producto se obtendría, haciendo, como se ve al márgen, la suma de ocho sumandos iguales al multiplicando 4873, lo que da por resultado 38984; pero como al ejecutar esta suma se toman ocho veces las 3 unidades del multiplicando, más ocho veces las 7 decenas, más ocho veces las 8 centenas, más ocho veces los 4 millares, dedúcese, de aquí, la siguiente regla:

4873
4873
4873
4873
4873
4873
4873
4873
―――
38984

Para multiplicar un entero de varias cifras por otro de una se multiplica cada una de las cifras del multiplicando por el multiplicador y se escriben en su lugar correspondiente las unidades de cada producto parcial, cuidando de añadir las decenas al siguiente.

Ejemplo. Multiplicar 38754 por 9.

La operación se dispone en la forma expuesta al márgen y al verificarla se dice:

$38754 \times 9 = 348786$

4 por 9, 36 (escribo 6) y llevo 3
5 por 9, 45 y 3, 48 (escribo 8) y llevo 4
7 por 9, 63 y 4, 67 (escribo 7) y llevo 6
8 por 9, 72 y 6, 78 (escribo 8) y llevo 7
3 por 9, 27 y 7, 34 (que escribo),

con lo que se tiene el producto 348786.

Tercer caso. En la multiplicación de dos enteros de varias cifras conviene considerar los casos particulares en que el multiplicador sea la unidad ó una cifra significativa, seguida de ceros, antes de ocuparse del caso general en que dicho factor sea un entero cualquiera.

I. El producto de un entero por la unidad, seguida de ceros, se obtiene fácilmente considerando que si, á la derecha de un entero cualquiera, se escribe uno, dos, tres, etc., ceros, cada una de sus cifras pasará á expresar unidades diez, cien, mil, etc., veces mayor, respectivamente, que las que antes expresaba y, por tanto, el número propuesto se habrá hecho diez, ciento, mil veces mayor, de donde se deduce la siguiente regla:

Para multiplicar un entero por la unidad seguida de ceros se escriben á su derecha tantos ceros como tenga el multiplicador.

Así, $386 \times 1000 = 386000$.

II. El producto de un entero cualquiera por una cifra significativa, seguida de ceros, se obtiene por las siguientes consideraciones que, para mayor claridad, aplicaremos á un ejemplo.

Sea éste 798×600.

798	El producto se obtendría, haciendo, como se
798	indica al márgen, la suma de seiscientos sumandos
798	iguales al multiplicando 798; pero esta suma se
798	puede facilitar descomponiéndola en cien sumas
798	parciales de á seis sumandos iguales á 798, cada
798	una de las cuales será igual á $798 \times 6 = 4788$, luego
...	las cien sumas equivaldrán á $4788 \times 100 = 478800$;
———	de donde se deduce la siguiente regla:

Para multiplicar un entero cualquiera por una cifra significativa, seguida de ceros, se multiplica por el valor absoluto de dicha cifra y á la derecha del producto se escriben tantos ceros como tenga el multiplicador.

Así, $3856 \times 7000 = 26992000$.

III. El producto de dos enteros de varias cifras ó sea el del caso general de la multiplicación de enteros, se obtiene por las siguientes consideraciones que, para mayor claridad, aplicaremos á un ejemplo.

Sea éste 3792×486.

Como $486 = 6 + 80 + 400$ y es evidente que un todo se hace tantas veces mayor cuantas se hagan las partes que lo componen, se tendrá desde luego:

$$\begin{aligned} 3792 \times 486 &= 3792 \times 6 + 3792 \times 80 + 3792 \times 400 \\ &= 22752 + 303360 + 1516800 = 1842912, \end{aligned}$$

de donde se deduce la siguiente regla:

Para multiplicar dos enteros de varias cifras se multiplica el multiplicando por cada una de las cifras del multiplicador: se suman los productos parciales y la suma será el producto pedido ó producto total.

Observación. Para facilitar la operación y evitar equivocaciones se elige como multiplicador el factor de menos cifras significativas y se escribe debajo del multiplicando: se traza una raya para separar los factores de los productos parciales: se obtiene cada uno de éstos y se escriben unos debajo de otros, de modo que la primera cifra de la derecha de cada uno esté directamente debajo de la del multiplicador que le produce: se traza una nueva raya y se escribe debajo la suma de los productos parciales.

Así, la operación anterior se dispone en cualquiera de estas dos formas, de las que la primera es la más usada.

$$\begin{array}{r} 3792 \\ 486 \\ \hline 22752 \\ 30336 \\ 15168 \\ \hline 1842912 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3792 \\ 486 \\ \hline 15168 \\ 30336 \\ 22752 \\ \hline 1842912 \end{array}$$

con lo que se tiene el producto 1842912.

42. Caso de abreviación. La práctica de la multiplicación se abrevia, cuando uno de los factores ó ámbos terminan en ceros, pues como los productos que de éstos se obtengan serán también ceros, se podrá aplicar la siguiente regla:

Para multiplicar un entero por otro cualquiera, terminado en ceros, se prescinde de éstos: se multiplican los números que resultan y, á la derecha del producto, se escriben tantos ceros como haya á la derecha de los factores.

Ejemplos.

Multiplicar 876 por 4300; 876000 por 43; y 876000 por 4300. Se tendrá:

$$\begin{array}{r} 876 \\ 4300 \\ \hline 2628 \\ 3504 \\ \hline 3766800 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 876000 \\ 43 \\ \hline 2628 \\ 3504 \\ \hline 37668000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 876000 \\ 4300 \\ \hline 2628 \\ 3504 \\ \hline 3766800000 \end{array}$$

43. Prueba de la multiplicación. Para comprobar una multiplicación se repite ésta en órden inverso, es decir, tomando el multiplicando por multiplicador y éste por multiplicando y, si el nuevo producto es igual al primitivamente obtenido, se tendrá una gran probabilidad de la exactitud de la operación (**40**).

ARTÍCULO V.

DE LA DIVISIÓN.

44. La **división**, operación inversa de la multiplicación, *tiene por objeto, en general, hallar un factor, dado otro y el producto de ambos.*

Los datos de esta operación son: el producto de dos factores, que recibe el nombre de *dividendo,* y un factor conocido, que recibe el de *divisor:* el resultado ó factor que se busca se llama *cociente.* El signo de la división es este :, que se lee *dividido por;* de modo que la división de dos números, a y b, se indica $a : b$, y si el cociente es c, se tendrá, $a : b = c$.

De la definición de la división se deduce:

1.º Que, según que el dividendo sea mayor, igual ó menor que el divisor, el cociente será mayor, igual ó menor que la unidad entera.

2.º Que, según que el divisor sea mayor, igual ó menor que la unidad entera, el cociente será menor, igual ó mayor que el dividendo.

3.º Que si el dividendo es *cero* y no lo es el divisor, el cociente es *cero.*

4.º Que el cociente tendrá tantas unidades como veces contenga el dividendo al divisor, lo que justifica una definición particular de la *división de enteros,* diciendo que es *una operación que tiene por objeto hallar el número de veces que un número dado, llamado dividendo, contiene á otro también dado llamado, divisor.* De aquí se deduce naturalmente que, si el dividendo aumenta ó disminuye, el cociente aumentará ó disminuirá y que, si el divisor aumenta ó disminuye, el cociente disminuirá ó aumentará.

45. Teorema. *El cociente del dividendo por el cociente de una división es igual al divisor.*

En efecto, si tenemos un producto, $bc = a$, se verifica que así como c es el término suficiente para que, multiplicado por b, dé por producto a, también b es el término suficiente para que, multiplicado por c, dé el mismo producto, a; luego si se tiene que $a : b = c$, también se tendrá que $a : c = b$.

46. El procedimiento natural para dividir un entero por otro es restar éste de aquél sucesivamente todas las veces que sea posible y el número de sustracciones realizadas será el cociente (**44**-4.º).

Así, para dividir 78 por 13, y 83 por 13, se efectuarán las sucesivas sustracciones, expuestas al márgen, de las que resulta que el dividendo 78 contiene seis veces exactamente al divisor 13, por lo que el cociente es 6 y que el dividendo 83 contiene también seis veces al divisor 13, pero quedan sobrantes 5 unidades, de las que no se puede restar el divisor; luego el cociente de ésta es mayor que 6 y menor que 7.

78	83
13	13
65	70
13	13
52	57
13	13
39	44
13	13
26	31
13	13
13	18
13	13
0	5

Este procedimiento, que sería muy pesado cuando el divisor fuese muy pequeño con relación al dividendo, nos revela que la división de enteros puede ser de dos especies: exacta é inexacta.

La división de dos enteros es *exacta,* cuando el dividendo contiene exactamente al divisor, como, por ejemplo, la de 78 por 13, en que aquél contiene á éste 6 veces, y en este caso, se dice que el cociente es una *parte alícuota* del dividendo (*).

En toda división exacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente; así se tiene $78 = 13 \times 6$.

La división de dos enteros es *inexacta,* cuando el dividendo no contiene exactamente al divisor, como la de 83 por 13, en que aquél contiene á éste más de seis y menos de siete veces, pues $13 \times 6 = 78 < 83$ y $13 \times 7 = 91 > 83$. El cociente de una división inexacta está, pues, comprendido entre dos enteros consecutivos y será, por consiguiente, igual al menor de ellos, más un quebrado, ó al mayor, menos otro quebrado.

Se llama *cociente entero* de una división inexacta á la parte entera del cociente. El cociente entero puede ser por defecto ó por exceso: el *cociente por defecto* expresa el mayor número de veces que el dividendo contiene al divisor y el *cociente por exceso* es igual al cociente por defecto, más una unidad.

(*) Esta parte alícuota recibe los nombres particulares de *mitad, tercio, cuarto,* etc., cuando el divisor es 2, 3, 4, etc., respectivamente.

Se llama *resto* de una división inexacta á la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente entero. El resto es *aditivo* ó *sustractivo*, según que el dividendo sea mayor ó menor que dicho producto.

En toda división inexacta, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, por defecto, más el resto aditivo ó al producto del divisor por el cociente, por exceso, menos el resto sustractivo; así, por ser $83 - 13 \times 6 = 5$ y $13 \times 7 - 83 = 8$, se tiene, $83 = 13 \times 6 + 5$ y $83 = 13 \times 7 - 8$ (*).

47. Teorema. *La suma de los restos, aditivo y sustractivo, de una división inexacta es igual al divisor.*

En efecto, como el cociente por exceso es superior en una unidad al cociente por defecto, su producto por el divisor contendrá á éste una vez más que el del divisor por el cociente por defecto, de modo que si en la división de un entero a por otro d, llamamos c al cociente por defecto, r al resto aditivo y r' al sustractivo, se tendrá:

$$a = dc + r \text{ y } a = dc + d - r',$$

de donde axiomáticamente se deduce que

$$dc + r = dc + d - r',$$

y suprimiendo el sumando, dc, en ambos miembros,

$$r = d - r'.$$

de donde resulta, $r + r' = d$. (30-1.°).

Escolio 1.° De la igualdad $r + r' = d$ se obtiene, $r' = d - r$, de donde se deduce la siguiente regla:

Para hallar el resto sustractivo de una división inexacta se resta del divisor, el resto aditivo.

Escolio 2.° De la misma igualdad, $r + r' = d$, se deduce que si r es mayor que la mitad de d, será r', por compensación, menor que dicha mitad y, por tanto, el cociente por exceso será más aproximado al verdadero que el cociente por defecto, lo que justifica el siguiente precepto de aplicación práctica:

Para obtener el cociente de una división inexacta más aproximado al verdadero, cuando el resto es mayor que la mitad del divisor, se aumenta en una unidad el cociente obtenido, á lo que se llama, *forzar la unidad* del cociente.

(*) En la práctica se obtiene el cociente por *defecto* y el correspondiente resto *aditivo* y á tales cociente y resto nos referiremos en lo sucesivo, mientras no se exprese lo contrario.

48. Para facilitar y metodizar el estudio de la división de enteros conviene considerar en ella los casos que puedan deducirse de los de la multiplicación, tomando uno de los factores como divisor, lo que dará por cociente el otro.

Para obtenerlos basta observar que de una multiplicación del *primer caso*, tal como $8 \times 5 = 40$, se obtienen las divisiones $40 : 8 = 5$ y $40 : 5 = 8$, en las que el divisor y el cociente son de una cifra; de una multiplicación del *segundo caso*, tal como $37 \times 6 = 222$, se obtiene la división $222 : 6 = 37$, en la que el divisor es de una cifra y el cociente de varias, así como también la división $222 : 37 = 6$, en la que el divisor es de varias cifras y el cociente de una y, finalmente, de una multiplicación del *tercer caso*, tal como la de $56 \times 67 = 3752$, se obtienen las divisiones $3752 : 56 = 67$ y $3752 : 67 = 56$, en las que el divisor y el cociente tienen varias cifras.

Según esto, los casos de la división de enteros son los cuatro siguientes:

1.° *Que el divisor y el cociente sean de una cifra.*

2.° *Que el divisor sea de una cifra y el cociente de varias.*

3.° *Que el divisor sea de varias cifras y el cociente de una.*

4.° *Que el divisor y el cociente sean de varias cifras.*

Observación. Si se tiene en cuenta que el cociente de dos enteros será evidentemente de dos, tres, etc., cifras, siempre que, multiplicando el divisor por 10, 100, 1000, etc. (lo que se hace mentalmente, agregándole uno, dos, tres, etc. ceros) resulte un número mayor que el dividendo, se deduce que, á la simple vista de los datos de una división, se puede asegurar cuál será el número de cifras del cociente.

Primer caso. Cuando el divisor es de una cifra y el cociente haya de ser también de una, se obtiene ésta, desde luego, multiplicando mentalmente el divisor por el factor necesario para obtener el mayor producto contenido en el dividendo. Dicho factor será el cociente, exacto ó por defecto, según que la división sea exacta ó inexacta.

Así, el cociente de 35 por 7 es 5 (exacto), lo que dá, $35 = 7 \times 5$; el de 58 por 8 es 7 (por defecto), con un resto aditivo igual á 2, lo que dá, $58 = 8 \times 7 + 2$, y el de 69 por 9 es 7 (por defecto), con un resto aditivo igual á 6, lo que dá, $69 = 9 \times 7 + 6$ y, mejor, (47. Esc. 2.°) 8 (por exceso), con un resto sustractivo igual á 3, lo que dá $69 = 9 \times 8 - 3$.

Segundo caso. Cuando el divisor es de una cifra y el cociente haya de ser de varias se obtiene éste por las consideraciones siguientes que, para mayor claridad, aplicaremos á un ejemplo, presentando en la forma expuesta al márgen la serie de operaciones conducentes á nuestro fin.

Sean 4798 y 7 los números cuyo cociente queremos hallar y que será de tres cifras, puesto que 700 es menor y 7000 es mayor que el dividendo 4798.

Debiendo ser el dividendo igual ó mayor que el producto del divisor por el cociente y debiendo este contener centenas, las 47 centenas del dividendo deben contener al producto del divisor, 7, por las centenas del cociente; luego dividiendo 47 por 7 se obtienen éstas, que son 6, cuyo producto por el divisor es 42 centenas, que están contenidas en las 47, dejando aún un resto de 5 centenas.

```
          4798 : 7 = 685
7.600..   42
          ——
           59
7.80....   56
          ——
            38
7.5.....    35
          ——
             3
```

Agregadas éstas á las 9 decenas del dividendo, se tienen 59 decenas que, por un razonamiento análogo al anterior, dan para las decenas del cociente la cifra 8, cuyo producto por el divisor es 56 decenas, que están contenidas en las 59, dejando aún un resto de 3 decenas.

Agregadas éstas á las 8 unidades del dividendo se tienen 38 unidades que, por un razonamiento análogo al expuesto, dan para las unidades del cociente la cifra 5, cuyo producto por el divisor es 35 unidades, que están contenidas en las 38, dejando aún un resto de 3 unidades, que es el resto de la división.

De este análisis se deduce la siguiente regla:

Para dividir un entero por otro de una cifra, cuando el cociente haya de tener varias, se divide por el divisor la primera cifra de la izquierda del dividendo ó el número formado por las dos primeras, si aquélla es menor que el divisor, y se tendrá la primera cifra del cociente: se multiplica ésta por el divisor y el producto se resta del primer dividendo parcial: el resto se antepone mentalmente á la cifra siguiente del dividendo, con lo que se forma el segundo dividendo parcial, que se divide por el divisor, y se tendrá la segunda cifra del cociente, y así se continúa hasta hallar la última. El último resto será el resto de la división.

Ejemplo. Dividir 39572 por 6.

La operación se dispone en la forma expuesta al márgen y al verificarla se dice:

```
39572 : 6=6595 | 39 entre 6, á 6 (que escribo); 6 por 6, 36 á 39, 3
    2          | 35 entre 6, á 5 (que escribo); 6 por 5, 30 á 35, 5
               | 57 entre 6, á 9 (que escribo); 6 por 9, 54 á 57, 3
               | 32 entre 6, á 5 (que escribo); 6 por 5, 30 á 32, 2,
```

con lo que se tiene el cociente entero 6595 y el resto 2.

Tercer caso. Cuando el divisor es de varias cifras y el cociente haya de ser de una se obtiene ésta y el resto, por las consideraciones siguientes que, para mayor claridad, aplicaremos á un ejemplo, presentado en la forma expuesta al márgen.

Sean 9532 y 2895 los números cuyo cociente queremos hallar y que será de una cifra, puesto que 28950 es mayor que el dividendo 9532 (**Observ.** anterior).

Obtención del cociente.

Debiendo ser el dividendo igual ó mayor que el producto del divisor por el cociente y siendo éste de una cifra, los 9 millares del dividendo contendrán al producto de los del divisor por el cociente, más los que hayan podido provenir de la multiplicación de éste por las 8 centenas del divisor; luego dividiendo los 9 millares del dividendo por los 2 del divisor, el cociente 4 no será menor que el verdadero, pero podría ser mayor, lo que se hará patente si las centenas que queden en el dividendo, después de rebajar de él el producto de los 2 millares del divisor por 4, contuviesen menos de cuatro veces á las centenas del divisor; así sucede en este caso, puesto que las 15 centenas que quedan no contienen cuatro veces á las 8 del divisor.

```
          9532 : 2895 = 4
2000.4... 8
          ——
          15
```

Disminuiremos, pues, el cociente en una unidad y tendremos 3, cuyo producto por 2 millares es 6 millares que, restados de los 9 del dividendo, dejan un resto 3, que no es mayor que el divisor, por lo que ya puede asegurarse que la cifra 3 es el cociente, pues aunque las cifras del dividendo, siguientes á los millares, fuesen ceros, se tendrían en él 3000 unidades, y como las cifras siguientes á los millares del divisor formarán necesariamente menos de 1000, su producto por 3 será menor que 3000 y estará contenido en el dividendo.

```
          9532 : 2895 = 3
2000.3... 6
          ——
          3
```

Obtención del resto.

Siendo el resto la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente, para hallarle, se multiplicará aquél por éste y el producto se restará del dividendo.

```
         9532 : 2895 = 3
2895×3.. 8685
         ----
          847
```

Sin embargo, una vez conocida la cifra del cociente, pueden hacerse simultáneamente la multiplicación y la sustracción, para lo cual basta agregar, en caso necesario, á las unidades de cada órden del dividendo, las del órden inmediato superior, suficientes para que sea posible la sustracción del correspondiente producto parcial, teniendo cuidado de agregarlas al siguiente, lo que no alterará la diferencia (**38-Esc.**).

De este análisis se deduce la siguiente regla:

Para dividir dos enteros de varias cifras, cuando el cociente haya de tener una, se dividen por las unidades de órden superior del divisor, las del mismo órden del dividendo, lo que dará la primera cifra del cociente, y después se dividen sucesivamente, por cada una de las cifras siguientes del divisor, las unidades de igual órden del dividendo, precedidas del resto de la división anterior; pero si alguno de los cocientes parciales es menor que el primero, se rebaja éste en una unidad y se repite el mismo tanteo hasta que se halle un resto igual ó mayor que el cociente ó hasta llegar á la división parcial por las unidades del divisor. Obtenida la cifra del cociente se multiplica por el divisor: el producto, á medida que se va obteniendo, se resta del dividendo y la diferencia será el resto de la división.

Ejemplo. Dividir 74568 por 9743.

La operación se dispone en la forma expuesta al márgen y al verificarla se dice:

```
74568 : 9743 = 7
 6367
```

Para hallar el cociente.

74 entre 9 á 8; 8 por 9, 72 á 74, 2
25 entre 7, á menos de 8.

74 entre 9 á 7; 7 por 9, 63 á 74, 11 (mayor que 7); luego éste es el cociente, que escribo.

Para hallar el resto.

7 por 3, 21 á 28, 7 (que escribo) y llevo 2
7 por 4, 28 y 2, 30 á 36, 6 (que escribo) y llevo 3
7 por 7, 49 y 3, 52 á 55, 3 (que escribo) y llevo 5
7 por 9, 63 y 5, 68 á 74, 6 (que escribo),
con lo que se tiene el resto 6367.

Cuarto caso. Cuando el divisor es de varias cifras y el cociente haya de ser también de varias cifras se obtiene éste y el resto, si le hay, por las consideraciones siguientes que, para mayor claridad, aplicaremos á un ejemplo, presentado en la forma expuesta al márgen.

Sean 2583862 y 4758 los números cuyo cociente se quiere hallar y que será de tres cifras, puesto que 475800 es menor y 4758000 mayor, que el dividendo 2583862 (**Obser.** anterior); luego contendrá centenas, decenas y unidades.

```
2583862 : 4758 = 543
 20486
  14542
    268
```

El producto del divisor por las centenas del cociente será un número de centenas que deberá hallarse en las 25838 centenas del dividendo: luego si, considerando á éstas como un dividendo parcial, se las divide por el divisor 4758, el cociente 5 (hallado según la regla del caso anterior) será la cifra de las centenas del cociente que se busca, quedando un resto de 2048 centenas que, agregadas á las 6 decenas del dividendo, forman 20486 decenas.

Por análogas consideraciones, estas 20486 decenas, consideradas como segundo dividendo parcial, divididas por el divisor 4758, dan la cifra 4 para las decenas del cociente, quedando un resto de 1454 decenas que, agregadas á las 2 unidades del dividendo forman 14542 unidades; éstas, consideradas como tercer dividendo parcial, divididas por el divisor 4758, dan la cifra 3 para las unidades del cociente, quedando un resto de 268 unidades, que es el resto de la división.

De este análisis se deduce la siguiente regla:

Para dividir dos enteros de varias cifras, cuando el cociente haya de tener también varias, se separan de la izquierda del dividendo las cifras suficientes para formar el menor número que contenga al divisor; se divide aquél por éste y se tendrá la primera cifra del cociente; se multiplica ésta por el divisor y el producto se resta del primer dividendo parcial: á la derecha del resto se escribe la cifra siguiente del dividendo dado: el número que resulte, que será el segundo dividendo parcial, se divide por el divisor y se tendrá la segunda cifra del cociente y así se continúa hasta emplear la última cifra del dividendo.

Observación. Para evitar equivocaciones y facilitar la operación se separa por una raya vertical el dividendo del divisor, y éste, por una horizontal, del cociente, que se escribe debajo de ella.

Ejemplo. Dividir 964959 por 2476.

La operación se dispone en la forma expuesta al márgen, procediendo de este modo:

964959	2476
22215	389
24079	
1795	

Se toma como primer dividendo parcial 9649 y se divide por 2476, lo que dá un cociente 3 y un resto 2221.

Se escribe á la derecha de éste la cifra 5 del dividendo dado, y el segundo dividendo parcial, 22215, se divide por 2476, lo que dá un cociente 8 y un resto 2407.

Se escribe á la derecha de éste la cifra 9 del dividendo dado, y el tercer dividendo parcial, 24079, se divide por 2476, lo que dá un cociente 9 y un resto 1795, que es el de la división propuesta.

49. Caso de abreviación. La práctica de la división se abrevia cuando el divisor termina en ceros, pues como es evidente que a millares, por ejemplo, contienen á b millares tantas veces como a unidades contienen á b unidades, con la única diferencia de que el resto será millares, en el primer caso, y unidades, en el segundo, se podrá aplicar la siguiente regla:

Para dividir un entero por otro terminado en ceros se prescinde de éstos y de igual número de cifras de la derecha del dividendo; se halla el cociente de los números que resultan y, á la derecha del resto de esta división, se escriben las cifras omitidas del dividendo.

Ejemplos.

Dividir, por 27000, los números 6798000, 6798400 y 6798495.

Las operaciones se disponen en la forma siguiente:

6798(000	27(000	6798(400	27(000	6798(495	27(000
139	251	139	251	139	251
48		48		48	
21000		21400		21495	

50. Prueba de la división.

Para comprobar una división se multiplica el cociente por el divisor, al producto se agrega el resto y, si resulta una suma igual al dividendo, se tendrá una gran probabilidad de la exactitud de la operación comprobada (**46**).

También se comprueba, restando del dividendo el resto y dividiendo la diferencia por el cociente entero y, si resulta por cociente exacto el anterior divisor, se tendrá una gran probabilidad de la exactitud de la operación (**45** y **46**).

ARTÍCULO VI.

ALTERACIONES DE LOS RESULTADOS DE LAS OPERACIONES DE SEGUNDO GRADO, POR LAS QUE SUFRAN SUS DATOS. OPERACIONES COMPUESTAS DE UNA DE PRIMER GRADO Y OTRA DE SEGUNDO Ó DE DOS DE SEGUNDO.

51. Teorema. *Si en una multiplicación se aumenta ó disminuye uno de los factores, en un número cualquiera, el producto aumenta ó disminuye, respectivamente, en el producto del otro factor por dicho número.*

En efecto, el producto se compone de tantas veces un factor como unidades tenga el otro; luego por cada unidad en que éste aumente ó disminuya, aumentará ó disminuirá el producto en una vez el primer factor: por consiguiente el producto aumentará ó disminuirá en tantas veces el factor constante, como unidades se aumenten ó disminuyan al otro.

Escolio 1.º Si en la multiplicación, $ab=p$, se aumenta, en c unidades, el factor a, se tendrá

$$(a+c)\,b=p+cb=ab+cb,$$

en cuya expresión, el primer miembro expresa la multiplicación de la suma, $a+b$, por el número c; de donde se desprende la siguiente regla:

Para multiplicar una suma indicada, por un número, ó viceversa, se multiplica cada sumando por dicho número y se suman los productos parciales.

$$\text{Así, } (7+5)\times 3=7\times 3+5\times 3.$$

Escolio 2.º Si en la multiplicación, $ab=p$, se disminuye, en c unidades, el factor a, se tendrá

$$(a-c)\,b=p-cb=ab-cb,$$

en cuya expresión, el primer miembro expresa la multiplicación de la diferencia, $a-b$, por el número c; de donde se desprende la siguiente regla:

Para multiplicar una diferencia indicada por un número se multiplican el minuendo y el sustraendo por dicho número y se restan los productos parciales.

$$\text{Así, } (19-8)\times 4=19\times 4-8\times 4.$$

Escolio 3.º La suma ó diferencia de productos indicados, que tengan un factor común, es igual, respectivamente, al producto, por éste, de la suma ó diferencia indicadas de los otros factores: pues si en las expresiones

$$an+bn+cn \text{ y } an+bn-cn$$

se supone $a+b=s$, se tendrá

$an+bn+cn=(a+b)\,n+cn=sn+cn=(s+c)\,n=(a+b+c)\,n$
y $an+bn-cn=(a+b)n-cn=sn-cn=(s-c)n=(a+b-c)n$.

La transformación de los primeros miembros de estas series de igualdades, en los últimos, recibe el nombre de *separación de un factor común*, y de ella se deduce la siguiente regla:

Para separar un factor común á varios productos indicados se encierran dentro de un paréntesis, precedidos de sus signos, los números á que afecta el factor común y éste se escribe fuera, precedido del signo de multiplicar.

Ejemplos.

1.º La separación del factor común en la expresión

$$3\times 7+5\times 7+9\times 7, \text{ da, } (3+5+9)\times 7.$$

2.º La separación del factor común en la expresión

$$8\times 4+3\times 4+4, \text{ da, } (8+3+1)\times 4.$$

3.º La separación del factor común en la expresión

$$5\times 2+9\times 2-4\times 2, \text{ da, } (5+9-4)\times 2.$$

52. Producto de varios factores *es el resultado de multiplicar un número por otro, el producto resultante por un tercer número, el nuevo producto por un cuarto número y así sucesivamente.*

Un producto de varios factores se indica por la indicación de las sucesivas multiplicaciones, y también escribiendo los factores uno á continuación de otro y poniendo el signo de multiplicar entre cada dos consecutivos.

Así, el producto de los factores 3, 8, 5 y 4 se indica $((3\times 8)\times 5)\times 4$ y también $3\times 8\times 5\times 4$, cuyo valor es $24\times 5\times 4=120\times 4=480$;
y el producto de los factores a, b, c y d se indica $((ab)\,c)\,d$, y también, $abcd$.

53. Teorema. *El producto de varios factores es independiente del órden de éstos* (*).

En efecto, si en el producto de tres factores 7, 4 y 9 se considera solamente el de los dos primeros 7 y 4, se tendrá

$$7\times 4=7+7+7+7,$$

de donde se deduce

$$7\,.\,4\,.\,9=(7+7+7+7)\times 9=7\,.\,9+7\,.\,9+7\,.\,9+7\,.\,9=7\,.\,9\,.\,4;$$

lo que indica que *un producto de tres factores no varía aunque se permuten los dos últimos.*

Si en el producto de más de tres factores

$$6\times 5\times 8\times 3\times 7$$

se reemplaza el producto indicado de los dos primeros por su valor 30, se transformará en

$$30\times 8\times 3\times 7;$$

pero como $30\times 8\times 3=30\times 3\times 8$, según acabamos de demostrar, se tendrá

$$30\times 8\times 3\times 7=30\times 3\times 8\times 7,$$

y restableciendo 6×5 en vez de 30, resulta

$$6\times 5\times 8\times 3\times 7=6\times 5\times 3\times 8\times 7;$$

lo que indica que *un producto de más de tres factores no varía aunque se permuten dos consecutivos.*

Ahora bien, si en un producto se hacen todas las permutaciones de dos términos consecutivos, necesarias para que un determinado factor ocupe el lugar que se desee, se podrá hacer que cualquiera de los factores dados ocupe cualquier lugar en el producto, sin alterarse éste.

Corolario. *En todo producto indicado de varios factores se puede sustituir, en vez de un número cualquiera de ellos, su producto efectuado y recíprocamente;* pues siempre se puede hacer que dichos factores sean los primeros del producto; así,

$$\begin{aligned}3\times 8\times 5\times 2\times 7 &= 8\times 2\times 3\times 5\times 7=16\times 3\times 5\times 7\\ &= 5\times 7\times 3\times 8\times 2=35\times 3\times 8\times 2\\ &= \text{etc.}\end{aligned}$$

Escolio. Todo producto indicado de varios factores se puede reducir á un producto de dos, uno de los cuales sea uno de los factores ó el producto de varios de ellos, y el otro el producto de los restantes.

(*) Este teorema y el particular del número 40 se enuncian comunmente, para más brevedad, diciendo que *el órden de los factores no altera el producto.*

54. Teorema. *Si en un producto indicado se multiplica uno de los factores, por un número, el producto queda multiplicado por dicho número.*

En efecto, si en el producto, $abcde$, se multiplica el factor c, por un número n, se tiene

$$ab(cn)de = abcnde = abcden = (abcde)\,n.$$

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para multiplicar un producto indicado, por un número, se multiplica por éste, uno cualquiera de los factores.

Ejemplo. $(6\times7\times5)\times4=6\,.\,4\times7\times5=24\times7\times5$
$=6\times7\,.\,4\times5=6\times28\times5$
$=6\times7\times5\,.\,4=6\times7\times20.$

55. Teorema. *Si en un producto indicado se multiplican todos los factores ó algunos de ellos, por un número, cada uno, el producto queda multiplicado por el producto de estos números.*

En efecto, si en el producto, $abcde$, se multiplica el factor a por m, el c por n, y el d por p, se tendrá

$$(am)b(cn)(dp)e=ab(cn)(dp)em=abc(dp)emn=abcdemnp$$
$$=(abcde)(mnp).$$

Escolio. De la igualdad $(abcde)\,(mnp) = abcdemnp$ y del **Teorema 53** se deduce la siguiente regla:

Para multiplicar dos ó más productos indicados se multiplican todos sus factores en cualquier órden.

Ejemplo. $(2\times8\times5)\,(4\times3)=2\times8\times5\times4\times3=$ etc.

56. Teorema. *Si en un producto indicado se divide uno de los factores, por un número, el producto queda dividido por dicho número.*

En efecto, si en el producto, abc, se divide el factor b por n, se tendrá $a(b:n)c$, que, multiplicado por n, da $(a(b:n)c)n=a((b:n)n)c$, y como es evidente que, al multiplicar y dividir por n el número b, se destruyen mútuamente los efectos de estas operaciones, se tendrá $(b:n)n=b$ y, por tanto, $(a(b:n)c)n=abc$, lo que indica que $a(b:n)c$ es el cociente de dividir, por n, el producto abc.

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para dividir un producto indicado, por un número, se divide por él, uno de los factores, y el cociente se multiplica por los demás.

Ejemplo. $(15\times7\times20):5=15:5\times7\times20=3\times7\times20$
$=15\times7\times20:5=15\times7\times4.$

57. Teorema. *El cociente de un número por un producto indicado es igual al último cociente que resulta de dividirle por uno de los factores, el cociente por otro y así sucesivamente, hasta dividir por el último de éstos.*

En efecto, si c es el cociente del número a, por el producto indicado mnp, se tendrá la igualdad

$$a:mnp = c\ (\alpha)\ \text{y, de aquí, la}\ a = (mnp)c.$$

Dividiendo los dos miembros de ésta por m, n y p, sucesivamente, se obtiene

$$a:m=(np)c \quad ; \quad (a:m):n=pc$$

y finalmente

$$((a:m):n):p=c$$

y de esta igualdad y de la (α), que tienen iguales sus segundos miembros, resulta

$$a:mnp = ((a:m):n):p.$$

Escolio. De aquí se deducen las siguientes reglas:

Para dividir un número, por un producto indicado, se le divide sucesivamente por cada uno de los factores y, recíprocamente, *para dividir un número, sucesivamente, por otros varios, se le divide por el producto de éstos.*

Ejemplos. $420:(3\times5\times7)=((420:3):5):7$
$((2310:7):5):11=2310:(7\times5\times11)=2310:385.$

58. Teorema. *El cociente de una suma indicada, por un número, es igual á la suma de los cocientes de cada sumando por dicho número.*

En efecto, si la suma de los cocientes $a:n+b:n+c:n$ se multiplica por el divisor n, se tendrá

$$(a:n+b:n+c:n)n=(a:n)n+(b:n)n+(c:n)n\quad \textbf{(51-Esc. 1.º)}$$
$$=a+b+c;$$

luego $a:n+b:n+c:n$ es el cociente de dividir, por n, la suma $a+b+c$.

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para dividir una suma indicada, por un número, se divide cada sumando por el número y se suman los cocientes parciales.

Ejemplo. $(12+20+36):4=12:4+20:4+36:4=3+5+9.$

59. Teorema. *El cociente de una diferencia indicada, por un número, es igual á la diferencia de los cocientes del minuendo y del sustraendo por dicho número.*

En efecto, de la diferencia, $a-b=c$, se deduce, $a=b+c$, y por tanto

$$a:n=(b+c):n=b:n+c:n,$$

de donde, restando $b:n$ de ambos miembros, resulta

$$a:n-b:n=c:n, \text{ ó sea, } a:n-b:n=(a-b):n.$$

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para dividir una diferencia indicada, por un número, se divide el minuendo y el sustraendo por dicho número y el segundo cociente se resta del primero.

Ejemplo. $(72-45):9=72:9-45:9=8-5.$

60. Teorema. *Si el dividendo y el divisor de una división se multiplican ó dividen, por un mismo número, el cociente no varía, pero el resto queda multiplicado ó dividido por dicho número.*

En efecto, de la división de un número, a, por otro, d, cuyo cociente sea, c, y el resto, r, se obtiene, $a=dc+r$.

Multiplicando ó dividiendo los dos miembros de esta igualdad por el número n, se tendrá

$$an=(dc+r)n=dcn+rn=dn \cdot c+rn$$
$$\text{y } a:n=(dc+r):n=dc:n+r:n=(d:n)c+r:n,$$

donde se vé que rn y $r:n$, menores respectivamente que dn y $d:n$, son los restos de las divisiones de an por dn y de $a:n$ por $d:n$, cuyos cocientes son iguales al cociente c de la división de a por d.

ARTÍCULO VII.

DE LA ELEVACIÓN Á POTENCIAS (*).

61. La elevación á potencias ó potenciación *es una operación que tiene por objeto hallar el producto de tantos factores iguales á un número dado, como unidades tiene otro también dado.*

Los datos de esta operación son: el número que se toma por factor, al que se llama *base*, y el número de veces que ésta entra como factor, al que se llama *exponente*: el resultado es el producto, al que se llama *potencia*.

Las potencias se clasifican por *grados*, segundo, tercero, cuarto y, en general, enésimo, según que el exponente sea 2, 3, 4..... n, aunque á las de segundo y tercer grado, que son las más usuales, se las dá, respectivamente, las denominaciones de *cuadrado* y *cubo*.

Una elevación á potencias se indica escribiendo la base y sobre ella, un poco á su derecha y de menor tamaño, el exponente. Así se tiene $a^m=\text{P}$, que se lee, *potencia emésima de a, igual á* P, ó *a elevado á m, igual á* P.

De lo expuesto se deduce:

1.° Que una elevación á potencia equivale á un producto de tantos factores, iguales á la base, como unidades tiene el exponente; así, $7^4=7\times7\times7\times7$ y $a^5=aaaaa$ (**).

2.° Que las sucesivas potencias de un número dado se obtienen, multiplicando por él la potencia anterior; así, $6^2=6\times6=36$; $6^3=6^2\times6=36\times6=216$; $a^m=a^{m-1}a$.

3.° Que toda potencia de la unidad es la unidad, y las de otro entero van creciendo á medida que crece el grado.

4.° Que toda potencia de 10 es igual á la unidad, seguida de tantos ceros como unidades tenga el exponente; así, $10^2=100$; $10^3=1000$; $10^m=100...0$ (m ceros).

5.° Que todo entero, que no sea potencia de 10, está comprendido entre dos potencias consecutivas de 10, de las que la mayor tiene un exponente de tantas unidades como cifras tenga el número, y la menor de tantas como sean éstas, menos una; así, $1000>587>100$ ó sea $10^3>587>10^2$ y, en general, si A tiene n cifras, será $10^n>\text{A}>10^{n-1}$.

(*) *Potenciación* la llama el insigne matemático Baltzer, profesor de la Universidad de Giessen.

(**) Todo número se puede considerar afectado del exponente 1; así, $a=a^1$.

62. Teorema. *El producto de dos ó más potencias indicadas, de una misma base, es otra potencia de ésta, cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores.*

En efecto, $a^m = aa\ldots\ldots a$ (m factores)
$a^n = aaa\ldots\ldots a$ (n factores)
$a^p = aaaa\ldots. a$ (p factores),

luego, multiplicando ordenadamente estas igualdades, se tendrá

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = aaa\ldots a.aaa.. a.aaaa.. a = a^{m+n+p}.$$

Corolario. *El cociente de dos potencias indicadas, de una misma base, es otra potencia de ésta, cuyo exponente es igual al del dividendo menos el del divisor;* pues de la igualdad, $a^n \cdot a^{m-n} = a^{n+m-n} = a^m$, se deduce que a^{m-n} es el factor que, multiplicado por a^n, dá por producto a^m; luego a^{m-n} es el cociente de la división $a^m : a^n$ y, por tanto, se tendrá

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Escolio 1.º De aqui se deducen las siguientes reglas:

1.ª *Para multiplicar dos ó más potencias, de una misma base, se suman sus exponentes.*

Ejemplo. $7^3 \times 7^5 \times 7 = 7^{3+5+1} = 7^9$.

2.ª *Para dividir dos potencias, de una misma base, se restan sus exponentes.*

Ejemplo. $13^8 : 13^3 = 13^{8-3} = 13^5$.

Escolio 2.º Si en la igualdad, $a^m : a^n = a^{m-n}$, se supone, $n = m$, resulta la expresión, $a^{m-m} = a^0$, que no tiene realización posible, dada la idea que tenemos de potencia: mas si se tiene presente que $a^m : a^m = 1$, por expresar una división cuyo dividendo es igual al divisor (44-1.º), se deducirá que $a^0 = 1$, lo que autoriza á establecer que *todo número con exponente cero representa la unidad.*

63. Teorema. *Toda potencia de un producto indicado es igual al producto de las potencias del mismo grado de sus factores.*

En efecto, si el producto, abc, se eleva á la potencia del grado m se tendrá

$$(abc)^m = (abc)(abc)(abc)\ldots.. (m \text{ veces})$$
$$= abcabcabc\ldots.. = aaa\ldots bbb\ldots ccc\ldots = a^m b^m c^m.$$

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para elevar un producto indicado á una potencia se multiplican las potencias, del mismo grado, de sus factores.

Ejemplo. $(2.4.7)^3 = 2^3.4^3.7^3 = 8.216.343 = 592704.$

64. Teorema. *Toda potencia de un cociente indicado es igual al cociente de las potencias del mismo grado del dividendo y del divisor.*

En efecto, si designamos por c el cociente de, a por b, se tendrá, $a : b = c$, y de aquí, $bc = a$.

Elevando á la potencia del grado m los dos miembros de esta igualdad, resulta $(bc)^m = a^m$ ó sea $b^m c^m = a^m$, y dividiendo por b^m los dos miembros de ésta, se tiene $c^m = a^m : b^m$, que, poniendo en vez de c su igual $a : b$, se transforma en $(a : b)^m = a^m : b^m$.

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para elevar un cociente indicado á una potencia se divide la potencia, del mismo grado, del dividendo por la del divisor.

Ejemplo. $(15 : 5)^3 = 15^3 : 5^3 = 3375 : 125 = 27.$

65. Teorema. *Toda potencia de una potencia indicada es otra potencia, de la misma base, cuyo exponente es el producto de los dos exponentes.*

En efecto, si elevamos á la potencia del grado n la potencia indicada a^m, se tendrá

$$(a^m)^n = (a^m)(a^m)(a^m)\ldots(a^m) \quad (n \text{ factores})$$
$$= a^{m+m+m+\ldots..+m} = a^{mn}.$$

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para elevar una potencia indicada, á otra potencia, se multiplican los exponentes.

Ejemplo. $(5^3)^2 = 5^{3\times 2} = 5^6 = 15625.$

66. Las potencias cuadrada y cúbica de los enteros menores que 10 son las que se exponen en la siguiente TABLA que, por sus frecuentes aplicaciones, conviene conservar en la memoria.

Números . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cuadrados. .	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubos.	1	8	27	64	125	216	343	512	729.

67. Teorema. *El cuadrado de la suma indicada de dos números es igual al cuadrado del primero, más el duplo del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.*

En efecto, sea $a+b$ la suma de los números a y b, cuyo cuadrado será

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)\,a + (a+b)\,b \qquad \text{(51-Esc. 1.º)}$$
$$= aa+ab+ab+bb = a^2+ab+ab+b^2$$
$$= a^2+2ab+b^2.$$

Ejemplo. $(7+5)^2 = 7^2+2.7.5+5^2 = 49+70+25 = 144.$

Corolario. *La diferencia de los cuadrados de dos enteros consecutivos es igual al duplo del menor, más 1*: pues si los dos enteros consecutivos son a y $a+1$, se tiene

$$(a+1)^2 = a^2+2a+1,$$

de donde, restando a^2 de ámbos miembros, resulta

$$(a+1)^2 - a^2 = 2a+1.$$

68. Teorema. *El cubo de la suma indicada de dos números es igual al cubo del primero, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.*

En efecto, sea $a+b$ la suma de dos números a y b, cuyo cubo será

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b)$$
$$= (a^2+2ab+b^2)\,a + (a^2+2ab+b^2)\,b$$
$$= a^2a+2aba+ab^2+a^2b+2abb+b^2b$$
$$= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$$
$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Ejemplo. $(9+4)^3 = 9^3+3.9^2.4+3.9.4^2+4^3 = 729+972+432+64$
$= 2197.$

Corolario. *La diferencia de los cubos de dos enteros consecutivos es igual al triplo del producto de éstos, más 1*: pues si los dos enteros consecutivos son a y $a+1$, se tiene

$$(a+1)^3 = a^3+3a^2+3a+1,$$

de donde, restando a^3 de ambos miembros, resulta

$$(a+1)^3 - a^3 = 3a^2+3a+1 = 3a\,(a+1)+1.$$

ARTÍCULO VIII.

DE LA EXTRACCIÓN DE RAÍCES (*).

§ 1.º—Generalidades.

69. La extracción de raices ó radicación, operación inversa de la elevación á potencias, *tiene por objeto hallar un número que, elevado á la potencia de un grado dado, produzca un número igual á otro dado*: así, 7 es una raíz de 343, pues este es la tercera potencia de 7.

Los datos de esta operación son : el número dado como potencia, al que se llama *radicando*, y el que expresa el grado de aquella potencia, al que se llama *índice*: el resultado, que se llama *raíz*, es el número cuya potencia del grado expresado por el índice es igual al radicando.

Las raíces, como las potencias, se clasifican por *grados*, segundo, tercero, cuarto y, en general, enésimo, según que el índice sea 2, 3, 4..... n, aunque á las de segundo y tercer grado, que son las más usuales y las únicas de que se ocupa la Aritmética, se las dá, respectivamente, las denominaciones de *cuadradas y cúbicas*.

Se dice que *un número entero es potencia perfecta de cierto grado, cuando su raiz del mismo grado es otro número entero*. A las potencias perfectas de segundo y tercer grado se las llama cuadrados y cubos perfectos.

Una extracción de raíces se indica por medio de este signo $\sqrt{}$, llamado *radical*, escribiendo debajo de él el radicando y entre sus brazos el índice, excepto en la indicación de la raiz cuadrada, en la que se omite el índice 2. Así se tiene $\sqrt[m]{a} = r$, que se lee, *raiz emésima ó raiz del grado m de a, igual á r*, de donde se obtiene, necesariamente, $r^m = a$.

De lo expuesto se deduce:

1.º Que toda raíz de la unidad es la unidad.

2.º Que cada una de las sucesivas raíces de un entero es menor que la anterior.

3.º Que, de dos raíces del mismo grado, es mayor la de mayor radicando.

(*) *Radicación* pudiera llamarse, para mayor brevedad.

§ 2.º—De la raíz cuadrada.

70. Raíz cuadrada *de un número es otro número que, elevado al cuadrado, reproduce el propuesto;* así, 7 es la raíz cuadrada de 49.

Al extraer la raíz cuadrada de un entero, puede suceder que éste sea ó nó un cuadrado perfecto.

Si el radicando es cuadrado perfecto, su raíz cuadrada es *exacta* é igual al entero de que aquél es cuadrado.

Si el radicando no es cuadrado perfecto, se encontrará necesariamente comprendido entre los cuadrados de dos enteros consecutivos, y su raíz cuadrada lo estará entre las raíces cuadradas de éstos. Así, la raíz cuadrada de 70 está comprendida entre 8 y 9, raíces cuadradas de 64 y 81, respectivamente.

A la parte entera de la raíz cuadrada de un número que no es cuadrado perfecto se la llama *raíz cuadrada entera,* que puede ser por defecto ó por exceso, con un error menor que una unidad: la primera expresa la raíz cuadrada del mayor cuadrado contenido en el número propuesto y la segunda es igual á la primera, más una unidad.

Residuo de la raíz cuadrada *de un número es la diferencia entre éste y el cuadrado de su raíz cuadrada entera.* Este residuo es aditivo ó sustractivo, según que la raíz cuadrada entera sea por defecto ó por exceso. Todo número que no sea cuadrado perfecto es igual al cuadrado de su raíz cuadrada entera, por defecto, más el residuo aditivo, ó al cuadrado de su raíz cuadrada entera, por exceso, ménos el residuo sustractivo.

Así se tiene, $70=8^2+6$ y $70=9^2-11$, por ser $9>\sqrt{70}>8$ (*).

71. Teorema. *El residuo de la raíz cuadrada de un entero no puede ser mayor que el duplo de dicha raíz.*

En efecto, sea N un entero cuya raíz cuadrada, por defecto, sea a, y r el residuo de ella, lo que dará, $r=N-a^2$.

Como $N<(a+1)^2$, se tendrá $N-a^2<(a+1)^2-a^2$, ó sea, $r<2a+1$ (**67-Cor.**); luego el mayor valor del residuo, r, será $2a$.

(*) En la práctica se obtiene la raíz cuadrada por defecto y el residuo es, por consiguiente, aditivo y á tales raíces y residuos nos referiremos en lo sucesivo, mientras no se advierta lo contrario.

72. En la extracción de la raíz cuadrada de los enteros se consideran dos casos:

1.º *Que el número no sea mayor que* 100.

2.º *Que sea mayor que* 100.

Primer caso. *Hallar la raíz cuadrada de un entero que no sea mayor que* 100.

Si el número dado es uno de los cuadrados perfectos contenidos en la 2.ª fila de la Tabla de potencias (**66**), será un cuadrado perfecto y su raíz cuadrada, *exacta,* será el número correspondiente de la fila 1.ª; mas, si no se encuentra en dicha Tabla, no será cuadrado perfecto, pero se hallará comprendido entre dos cuadrados perfectos; su raíz cuadrada *entera* será, por consiguiente, la del menor de ellos y el residuo será la diferencia entre éste y el número propuesto.

Así, $\sqrt{49}=7$ (exacta)

$\sqrt{31}=5$ (con el residuo $31-25=6$).

Segundo caso. *Hallar la raíz cuadrada de un entero mayor que* 100.

Para facilitar la marcha del razonamiento que conduce á la investigación de la raíz, apliquémosle primeramente á un número mayor que 100 y menor que 10000 y después á otro mayor que 10000.

1.º Sea 7539 el entero cuya raíz cuadrada queremos hallar, la que, por ser mayor que 10, contendrá decenas y unidades, y como se podrá considerar como la suma de aquéllas y éstas, su cuadrado se compondrá del cuadrado de las decenas, más el duplo de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades (**67**).

Presentando, en la forma expuesta al márgen, la série de consideraciones conducentes á nuestro fin, diremos:

	$\sqrt{7539}$	87
80^2...	64	
	113,9	160 = 2.80
87^2...	756 9	

El cuadrado de las decenas de la raíz será un número de centenas que deberá estar contenido en las 75 centenas del número propuesto; luego, si se extrae la raíz cuadrada de 75, que es 8, se tendrá la cifra de las decenas de la raíz: elevando dicha cifra al cuadrado, se obtienen 64 centenas que, restadas de 7539, dan por diferencia 1139 unidades, en cuyo número se hallarán contenidas las demás partes del cuadrado de la raíz y el residuo, si le hubiere.

El duplo del producto de las decenas por las unidades de la raiz será un número de decenas que deberá estar contenido en las 113 del número 1139; luego si se dividen éstas 113 decenas por el duplo de las decenas de la raiz, que es 16 decenas (ó 160 unidades), el cociente será la cifra de las unidades de la raiz ó un número mayor que ella. De esta división resulta el cociente 7 unidades que, con las 8 decenas obtenidas, forman el número 87, cuyo cuadrado debe estar contenido en el número propuesto 7539; mas al formarle se halla el número 7569, mayor que aquél, lo que indica que la cifra 7 es grande.

Disminuyéndola en una unidad y sometiendo la cifra 6 á la misma comprobación, se halla el cuadrado de 86, que es 7396, el que, restado de 7539, dá 143 para residuo de la raiz; luego ésta es 86.

	$\sqrt{7539}$	86
80^2...	64	
	113.9	160 = 2.80
86^2...	739 6	
	14 3	

Apesar de lo dicho, si se tiene en cuenta que en la diferencia, 1139, se han de hallar contenidos el duplo de las decenas por las unidades de la raiz, más el cuadrado de las unidades, más el resíduo, si le hubiere, podemos restar simultáneamente las dos primeras partes y la diferencia será la tercera, pues la suma de dichas dos partes será $2.80.7 + 7^2 = (2.80 + 7).7 = (160 + 7).7$ que, como se vé, se obtiene agregando al divisor, 160, la cifra de las unidades de la raiz y multiplicando la suma por esta misma cifra. Restando, pues, de 1139, el producto resultante, á medida que se vaya obteniendo, la imposibilidad de esta sustracción indica que la cifra 7 es grande.

Disminuyéndola en una unidad y sometiendo la cifra 6 á la misma comprobación, dá 143 para residuo de la raiz; luego ésta es 86.

$\sqrt{7539}$	86
64	
113.9	160 = 2.80
14 3	

2.° Sea 65437198 el entero cuya raiz cuadrada queremos hallar. Si ésta la suponemos descompuesta en sus decenas y unidades y repetimos el razonamiento empleado en el ejemplo anterior, las decenas de la raiz pedida se hallarán, extrayendo la raiz cuadrada de las 654371 centenas del número propuesto: pero esta raiz constará de decenas que se hallarán, por igual razón, extrayendo la raiz cuadrada de las 6543 centenas de este último número; de modo que la extracción de la raiz cuadrada del propuesto dependerá de la de un número mayor que 100 y menor que 10000.

Si se extrae, pues, la raiz cuadrada de 6543, se habrán hallado las decenas de la raiz de 654371, y si de éste número restamos el cuadrado de dichas decenas, las decenas de la diferencia contendrán al duplo del producto de ellas por las unidades de la raiz; de modo que, repitiendo el razonamiento empleado en el ejemplo anterior, dividiendo las decenas de dicha diferencia por el duplo de las decenas de la raiz, que ahora constará de dos cifras, se tendrá la de las unidades de la raiz de 654371.

Obtenida la raiz cuadrada de este número, se habrán hallado las decenas de la raiz de 65437198 y, repitiendo las mismas consideraciones, se obtendrán las unidades y, por tanto, la raiz cuadrada del número propuesto y ademas el residuo.

De todo lo expuesto se deduce la siguiente regla:

Para extraer la raiz cuadrada de un entero mayor que 100 *se le divide en grupos de á dos cifras, de derecha á izquierda, aunque el primero de la izquierda tenga una sola. Se extrae la raiz cuadrada de éste grupo y se tendrá la primera cifra de la raiz; el cuadrado de ésta se resta del primer grupo y á la derecha de la diferencia se escribe el segundo; las decenas del número que resulta se dividen por el duplo de la raiz obtenida y la cifra del cociente, sin escribirla en la raiz, se somete á la siguiente comprobación: se la multiplica por el divisor, seguido de ella, y el producto se resta del dividendo que la produjo, seguido de la cifra omitida, pero, si la sustracción no es posible, se vá disminuyendo dicho cociente, de unidad en unidad, hasta que lo sea, con lo que se tendrá la segunda cifra de la raiz.*

Obtenidas ya las dos primeras y la diferencia resultante de la comprobación definitiva de la segunda, se escribe el tercer grupo á la derecha de dicha diferencia; las decenas del número que resulta se dividen por el duplo de la raiz hallada y se tendrá la tercera cifra de la raiz, que se someterá á análoga comprobación, y así se continúa hasta operar con el último grupo del radicando propuesto. La última diferencia será el residuo de la raiz.

Ejemplo. *Hallar la raíz cuadrada de* 12936939.

La operación se dispone en la forma expuesta al márgen y se procede del modo siguiente:

$\sqrt{12.93.69.39}$	3596
39.3	6
686.9	70
4883.9	718
5723	

La raíz cuadrada de 12 es 3, que escribo en el lugar destinado á la raíz; su cuadrado, 9, restado de 12 da una diferencia 3, que escribo en su lugar correspondiente. A su derecha pongo el segundo grupo, 93; separo sus 3 unidades y divido las 39 decenas por 6, duplo de la cifra 3 de la raíz; el cociente 6, sin escribirlo, lo multiplico mentalmente por 66, que es el divisor seguido de él y, al mismo tiempo, resto el producto, de 393; pero al ver que esta sustracción no es posible, rebajo el cociente á 5 que, multiplicado por 65 y restado el producto, de 393, da una diferencia 68. A la derecha de ésta pongo el tercer grupo, 69; separo sus 9 unidades y divido las 686 decenas por 70, duplo de 35, obtenido en la raíz; el cociente, 9, lo multiplico mentalmente por 709 y, al mismo tiempo, resto el producto, de 6869, lo que da una diferencia 488. A la derecha de ésta pongo el cuarto grupo, 39, separo sus 9 unidades y divido las 4883 decenas por 718, duplo de 359, obtenido en la raíz; el cociente, 6, lo multiplico mentalmente por 7186 y, al mismo tiempo, resto el producto, de 48839, lo que da una diferencia 5723, que es el residuo de la raíz; luego ésta, por defecto, es 3596.

73. Prueba de la extracción de la raíz cuadrada.

Para comprobar una raíz cuadrada se la eleva al cuadrado, se agrega el residuo y, si resulta una suma igual al radicando, se tendrá una gran probabilidad de que la operación está bien hecha.

§ 3.°—De la raíz cúbica.

74. Raíz cúbica *de un número es otro número que, elevado al cubo, produce el número propuesto*: así, 6 es la raíz cúbica de 216 y 17 es la raíz cúbica de 4913.

Al extraer la raíz cúbica de un entero puede suceder que éste sea ó nó un cubo perfecto.

Si el radicando es cubo perfecto, su raíz cúbica es *exacta* é igual al entero de que aquél es cubo.

Si el radicando no es cubo perfecto, se encontrará necesariamente comprendido entre los cubos de dos enteros consecutivos, y su raíz cúbica lo estará entre las raíces cúbicas de éstos. Así, la raíz cúbica de 600 está comprendida entre 8 y 9, raíces cúbicas de 512 y 729, respectivamente.

A la parte entera de la raíz cúbica de un número que no es cubo perfecto se la llama *raíz cúbica entera*, que puede ser por defecto ó por exceso, con un error menor que una unidad: la primera expresa la raíz cúbica del mayor cubo contenido en el número propuesto y la segunda es igual á la primera, más una unidad.

Residuo de la raíz cúbica *de un número es la diferencia entre éste y el cubo de su raíz cubica entera.* Este residuo es aditivo ó sustractivo, según que la raíz cúbica entera sea por defecto ó por exceso. Todo número que no sea cubo perfecto es igual al cubo de su raíz cúbica entera, por defecto, más el residuo aditivo, ó al cubo de su raíz cúbica entera, por exceso, ménos el residuo sustractivo.

Así se tiene, $600 = 8^3 + 88$ y $600 = 9^3 - 129$

por ser $9 > \sqrt[3]{600} > 8$ (*).

75. Teorema. *El residuo de la raíz cúbica de un entero no puede ser mayor que el triplo del producto de sus raíces cúbicas por defecto y por exceso.*

En efecto, sea N un entero cuya raíz cúbica, por defecto, sea a, y r el residuo de ella, lo que dará, $r = N - a^3$. Como $N < (a+1)^3$, se tendrá $N - a^3 < (a+1)^3 - a^3$, ó sea, $r < 3a(a+1) + 1$ (68-Cor.); luego el mayor valor del residuo, r, será $3a(a+1)$.

(*) En la práctica se obtiene la raíz cúbica por defecto y el residuo es, por consiguiente, *aditivo*, y á tales raíces y residuos nos referiremos en lo sucesivo, mientras no se exprese lo contrario.

76. En la extracción de la raíz cúbica de los enteros se consideran dos casos:

1.° *Que el número no sea mayor que* 1000.

2.° *Que el numero sea mayor que* 1000.

Primer caso. *Hallar la raíz cúbica de un entero que no sea mayor que* 1000.

Si el número dado es uno de los cubos perfectos contenidos en la 3.ª fila de la TABLA de potencias (**66**), será un cubo perfecto y su raíz cúbica, *exacta*, será el número correspondiente de la fila 1.ª; mas, si no se encuentra en dicha TABLA, no será cubo perfecto, pero se hallará comprendido entre dos cubos perfectos; su raíz cúbica *entera* será, por consiguiente, la del menor de ellos y el residuo será la diferencia entre éste y el número propuesto.

Así, $\sqrt[3]{343} = 7$ (exacta)

$\sqrt[3]{148} = 5$ (con el residuo $148 - 125 = 23$).

Segundo caso. *Hallar la raíz cúbica de un entero mayor que* 1000.

Para facilitar la marcha del razonamiento que conduce á la investigación de la raíz, apliquémosle primeramente á un número mayor que 1000 y menor que 1000000 y después á otro mayor que 1000000.

1.° Sea 431643 el entero cuya raíz cúbica queremos hallar, la que, por ser mayor que 10, contendrá decenas y unidades, y como se podrá considerar como la suma de aquéllas y éstas, su cubo se compondrá del cubo de las decenas, más el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, más el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades (**68**).

Presentando, en la forma expuesta al márgen, la serie de consideraciones conducentes á nuestro fin, diremos:

El cubo de las decenas de la raíz será un número de millares que deberá estar contenido en los 431 millares del número propuesto; luego si se extrae la raíz cúbica de 431, que es 7, se tendrá la cifra de las decenas de la raíz: elevando dicha cifra al cubo, se obtienen 343 millares que, restados de 431643, dan por diferencia 88643 unidades, en cuyo número se hallarán contenidas las demás partes del cubo de la raíz y el residuo, si le hubiere.

	$\sqrt[3]{431643}$	76
70^3...	343	
	886.43	$14700 = 3.70^2$
76^3...	4389 76	

El triplo del cuadrado de las decenas por las unidades de la raíz será un número de centenas que deberá estar contenido en las 886 del número 88643; luego si se dividen éstas 886 centenas por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, que es 147 centenas (ó 14700 unidades), el cociente será la cifra de las unidades de la raíz ó un número mayor que ella. De esta división resulta el cociente 6 unidades que, con las 7 decenas obtenidas, forman el número 76, cuyo cubo debe estar contenido en el número propuesto 431643; más al formarle se halla el número 438976, mayor que aquél, lo que indica que la cifra 6 es grande. Disminuyéndola en una unidad y sometiendo la cifra 5 á la misma comprobación, se halla el cubo de 75, que es 421875, el que, restado de 431643, da 9768 para residuo de la raíz; luego ésta es 75.

	$\sqrt[3]{4316\ 43}$	75
70^3...	343	
	886.43	$14700 = 3.70^2$
75^3...	4218 75	
	97 68	

A pesar de lo dicho, si se tiene en cuenta que en la diferencia, 88643, se han de hallar contenidos el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades de la raíz, más el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades, más el residuo, si le hubiere, podemos restar simultáneamente las tres primeras partes y la diferencia será la cuarta, pues la suma de dichas partes será

$$3.70^2.6 + 3.70.6^2 + 6^3 = (3\,.\,70^2 + 3\,.\,70\,.\,6 + 6^2)\,.\,6$$
$$= (14700 + 3.70\,.\,6 + 6^2)\,.\,6,$$

que, como se vé, se obtiene agregando al divisor 14700, el producto $3\,.\,70\,.\,6 = 1260$ (triplo de la primera cifra de la raíz por la segunda, seguida de un cero) y $6^2 = 36$ (cuadrado de la misma segunda) y multiplicando la suma por esta cifra.

Restando, pues, de 88643, este resultado, la imposibilidad de esta sustracción indicará que la cifra 6 es grande. Disminuyéndola en una unidad y sometiendo la cifra 5 á la misma comprobación, dá 9768 para residuo de la raíz; luego ésta es 75.

$\sqrt[3]{4316\ 43}$	75
343	
886.43	$14700 = 3.70^2$
97 68	

2.° Sea 984368723465 el entero cuya raíz cúbica queremos hallar. Si ésta la suponemos descompuesta en sus decenas y unidades y repetimos el razonamiento empleado en el ejemplo anterior, las decenas de la raíz pedida se hallarán, extrayendo la raíz cúbica de los 984368723 millares del número propuesto: pero esta raíz constará de decenas que se hallarán, por igual razón, extrayendo la raíz cúbica de los 984368 millares de este último número; de modo que la extracción de la raíz cúbica del número propuesto dependerá de la de un número mayor que 1000 y menor que 1000000.

Si se extrae, pues, la raíz cúbica de 984368, se habrán hallado las decenas de la raíz de 984368723, y si de este número restamos el cubo de dichas decenas, las centenas de la diferencia contendrán al triplo del producto del cuadrado de ellas por las unidades de la raíz; de modo que, repitiendo el razonamiento empleado en el ejemplo anterior, dividiendo las centenas de dicha diferencia por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, que ahora constará de dos cifras, se tendrá la de las unidades de la raíz de 984368723.

Obtenida la raíz cúbica de este número, se habrán hallado las decenas de la raíz de 984368723465 y, repitiendo las mismas consideraciones, se obtendrán las unidades y, por tanto, la raíz cubica del número propuesto y además el residuo.

Observación. Como para hallar cualquier cifra de la raíz, después de la primera, hay que tomar como divisor el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz hallada, se puede aprovechar para ello el cálculo ya hecho, pues basta tener en cuenta que si llamamos b á la última cifra hallada y a al número formado por las anteriores, la suma que se ha multiplicado por aquélla para hacer su comprobación se podrá expresar por

$$3a^2+3ab+b^2,$$

y el triplo del cuadrado de la raiz hallada, ó sea dicho divisor, lo estará por

$$3(a+b)^2=3(a^2+2ab+b^2)=3a^2+6ab+3b^2$$
$$=(3a^2+3ab+b^2)+3ab+2b^2,$$

es decir, que será igual á la suma hecha para la comprobación definitiva de la cifra b, más el segundo de sus sumandos, más el duplo del tercero.

De todo lo expuesto se deduce la siguiente regla:

Para extraer la raíz cúbica de un entero mayor que 1000 se le divide en grupos de á tres cifras, de derecha á izquierda, aunque el primero de la izquierda tenga una ó dos. Se extrae la raíz cúbica de éste grupo y se tendrá la primera cifra de la raíz; el cubo de ésta se resta del primer grupo y á la derecha de la diferencia se escribe el segundo; las centenas del número que resulta se dividen por el triplo del cuadrado de la raíz obtenida y la cifra del cociente, sin escribirla en la raíz, se somete á la siguiente comprobación: se agrega al divisor, seguido de dos ceros, el triplo del producto de la primera cifra de la raíz por dicho cociente, seguido de un cero, y el cuadrado de éste; la suma de estos tres sumandos se multiplica por el mismo cociente y el producto se resta del dividendo que le produjo, seguido de las cifras omitidas, pero, si la sustracción no es posible, se va disminuyendo dicho cociente, de unidad en unidad, hasta que lo sea, con lo que se tendrá la segunda cifra de la raíz.

Obtenidas ya las dos primeras y la diferencia resultante de la comprobación definitiva de la segunda, se escribe el tercer grupo á la derecha de dicha diferencia; las centenas del número que resulta se dividen por la suma formada para dicha comprobación, más el segundo de sus sumandos, más el duplo del tercero y se tendrá la tercera cifra de la raíz, que se someterá á análoga comprobación, y así se continúa hasta operar con el último grupo del radicando propuesto. La última diferencia será el residuo de la raíz.

Ejemplo. *Hallar la raíz cúbica de 14832556571.*

La operación se dispone en la forma expuesta al márgen y se procede del modo siguiente:

```
3 ________________
√ 14.832.556.571    |  2457
  8                 |  ------
  ---               |
  6 8.32            |  12
  1 0 08 5.56       |  1728
    1 26 4 31 5.71  |  180075
            18 5 78 |

Comprobación de la segunda cifra.
   5        4
  1200     1200
   300      240
    25       16
  -----    -----
  1525     1456     1456
   ×5       ×4       240
  -----    -----      32
  7625     5824     -----
  segundo divisor   1728

Comprobación de la tercera cifra.
   5
  172800
    3600
      25
  -------
  176425          176425
      ×5            3600
  -------             50
  882125          -------
  tercer divisor   180075

Comprobación de la cuarta cifra.
          7
   18007500
      51450
         49
  ---------
   18058999
         ×7
  ---------
  126412993
```

La raíz cúbica de 14 es 2, que escribo en el lugar destinado á la raíz; su cubo, 8, restado de 14, dá una diferencia, 6, que escribo en su lugar correspondiente. A su derecha pongo el segundo grupo, 832; separo sus decenas y unidades, 32, y divido las 68 centenas por 12, triplo del cuadrado de la cifra 2 de la raíz; el cociente, 5, sin escribirlo, lo compruebo, sumando el divisor, 12, seguido de dos ceros, el triplo, 30, del producto de 2 por 5, seguido de un cero, y el cuadrado, 25, de 5, y multiplicando la suma, 1525, por 5; pero al ver que el producto 7625 no se puede restar de 6832, rebajo el cociente á 4, que, por una comprobación análoga, dá un número, 5824, que, restado de 6832, dá una diferencia 1008. A la derecha de ésta pongo el tercer grupo 556, separo sus decenas y unidades, 56, y divido las 10085 centenas por el triplo del cuadrado de 24, obtenido en la raíz, cuyo divisor lo hallo, agregando á la suma 1456, obtenida de la comprobación de la cifra 4, el segundo de sus sumandos, 240, y el duplo, 32, del tercero, 16, lo que dá 1728. Aplicando al cociente de esta división una comprobación análoga á la empleada en la de la cifra anterior y continuando la serie de operaciones análogas, se llega á obtener la raíz 2457 y el residuo 18578.

77. Prueba de la extracción de la raíz cúbica. Para comprobar una raíz cúbica se la eleva al cubo, se agrega el residuo y, si resulta una suma igual al radicando, se tendrá una gran probabilidad de que la operación está bien hecha.

ARTÍCULO IX.

PRINCIPALES PROPIEDADES DE LOS ENTEROS.

§ 1.°—Divisibilidad

78. Se dice que *un entero es* **divisible** *por otro* ó **múltiplo** *de otro y que éste es* **divisor, factor** *ó* **submúltiplo** *de aquél, cuando es exacta la división del primero por el segundo:* así 12 es divisible por 3 ó múltiplo de 3 y éste es divisor, factor ó submúltiplo de 12.

Todos los números de la forma hn, siendo enteros h y n, son divisibles por h y por n ó múltiplos de h y de n; así $2n$ es la expresión general de todos los números divisibles por 2 ó múltiplos de 2, á los que se llama *números pares*.

Se dice que varios números son *equimúltiplos* de otros, cuando cada uno de los primeros es igual al producto de cada uno de los segundos por un mismo número; así, si $A = A'n$, $B = B'n$, y $C = C'n$, los números A, B y C son equimúltiplos de A', B' y C'.

79. Se llama **teoría de la divisibilidad** al conjunto de proposiciones que tienen por fin determinar los caracteres especiales por los que se conoce, *á priori*, si un entero es ó nó divisible por otro dado.

80. Teorema. *Si varios números son divisibles por otro, también lo es su suma,* ó de otro modo, *si un número es divisor de otros varios, también lo es de su suma.*

En efecto, sean A, B, C y F números divisibles por h, y q, q', q'' y q''' los cocientes de las respectivas divisiones, de las que se deducirán las igualdades

$$A = hq;\ B = hq';\ C = hq'';\ F = hq''',$$

que, sumadas miembro á miembro, darán:

$$A + B + C + F = hq + hq' + hq'' + hq''' = h\,(q + q' + q'' + q'''),$$

cuya igualdad revela que el número h es divisor de la suma $A + B + C + F$ y que el cociente de ésta por aquél es la suma, $q + q' + q'' + q'''$, de los cocientes de dividir, por h, cada uno de los números dados.

Corolario. *Si un número es divisible por otro, lo es también por cualquiera divisor de éste,* ó de otro modo, *si un número es divisor de otro, lo es también de cualquier múltiplo de éste;* pues si A es divisible por h, lo será la suma $A + A + A \ldots$ de m sumandos iguales á A, ó sea, mA, que es un múltiplo de A.

81. Teorema. *Si dos números son divisibles por otro, también lo es su diferencia*, ó de otro modo, *si un número es divisor de otros dos, también lo es de su diferencia.*

En efecto, sean A y B dos números divisibles por h, y q y q' los cocientes de las respectivas divisiones, de las que se deducirán las igualdades $A = hq$ y $B = hq'$, que, restadas miembro á miembro, darán:

$$A - B = hq - hq' = h(q - q'),$$

cuya igualdad revela que el número h es divisor de la diferencia $A - B$ y que el cociente de ésta por aquél es la diferencia, $q - q'$, de los cocientes de dividir, por h, cada uno de los números dados.

Corolario. *Si un número* A *es divisible por otro, y un número* B *no lo es, no lo será su suma ni su diferencia;* pues si lo fuera la suma $A+B$, lo sería B, diferencia entre aquélla y A, y si lo fuera la diferencia $A - B$, lo sería también B, diferencia entre aquélla y A, lo que, en ambos casos, es contra lo ya demostrado.

Escolio. La forma general de todos los números no divisibles por 2, á los que se llama *números impares*, es $2n+1$ ó $2n-1$, pues $2n$ es divisible por 2, pero 1 no lo es.

82. Teorema. *Todo número se puede descomponer en dos partes tales que una de ellas, por lo ménos, sea divisible por otro número dado y la otra exprese el carácter de divisibilidad del primero por el segundo.*

En efecto, sea N un número cuya cifra de las unidades sea a, la de las decenas b, la de las centenas c, la de los millares d, etc, con lo que se tendrá

$$N = a + 10\,b + 100\,c + 1000\,d + \ldots. \quad (\alpha).$$

Dividamos sucesivamente por un número cualquiera, h, una unidad de los sucesivos órdenes décuplos, mientras se obtengan restos diferentes (pues en cuanto aparezca uno de los ya obtenidos se repetirán los sucesivos á éste en el mismo orden), y puesto que el cociente de 1 por h es cero y el resto 1, designando por q, q', q'', etc., los cocientes de las divisiones de 10, 100, 1000, etc., por h, ya por defecto ya por exceso, según convenga para que los respectivos restos r, r', r'', etc., sean los menores posibles, se tendrán las igualdades

$$\left.\begin{array}{l} 10=hq\ \pm r \\ 100=hq'\ \pm r' \\ 1000=hq''\pm r'' \end{array}\right\} \text{ de las que se deduce } \left\{\begin{array}{l} 10b=hqb\pm rb \\ 100c=hq'c\pm r'c \\ 1000d=hq''d\pm r''d \end{array}\right.$$

por lo que, la igualdad (α) se transforma en

$$\begin{aligned} N&=a+hqb\pm rb+hq'c\pm r'c+hq''d\pm r''d+\ldots\ldots\ldots \\ &=h(qb+q'c+q''d+\ldots\ldots)+a\pm rb\pm r'c\pm r''d\pm\ldots, \end{aligned}$$

que, suponiendo á $qb + q'c + q''d + \ldots = Q$, dará

$$N = hQ + (a \pm rb \pm r'c \pm r''d \pm \ldots.),$$

en cuya igualdad el término hQ es, evidentemente, divisible por h, y el segundo $a \pm rb \pm r'c \pm r''d \pm \ldots..$ indica que si él lo es, lo será también el número N.

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para hallar el carácter de divisibilidad de un entero por otro, h, *hállense los menores restos, ya aditivos, ya sustractivos, de dividir por* h *las sucesivas unidades décuplas; multiplíquense estos restos por las respectivas cifras del número dado y, si la diferencia entre la suma de los productos aditivos y la de los sustractivos es divisible por* h, *lo será el número propuesto.*

83. La aplicación de esta regla á cualquier divisor dará el correspondiente carácter de divisibilidad, pero estos sólo son fáciles de retener en los casos siguientes:

1.° Si el divisor es 2, todos los restos r, r', r'', etc. son iguales á *cero* y $N=2Q+a$: lo que indica que *un número es divisible por* 2 *cuando lo es la cifra de sus unidades.*

2.° Si el divisor es 5, todos los restos r, r', r'' etc. son iguales á cero y $N = 5Q + a$: lo que indica que *un número es divisible por* 5 *cuando lo es la cifra de sus unidades.*

3.° Si el divisor es 3 ó 9, todos los restos r, r', r'' etc. son iguales á 1 y $N = 3Q + (a + b + c + d + \ldots)$

ó $N = 9Q + (a + b + c + d + \ldots)$

lo que indica que *un número es divisible por* 3 *ó por* 9 *cuando lo es la suma de los valores absolutos de sus cifras.*

4.° Si el divisor es 11, los restos r, r'', r^{IV}, son iguales á -1 y los restos r', r''', r^{V}, etc. son iguales á 1 y, por tanto, $N = 11Q + (a - b + c - d + \ldots)$

ó sea $N = 11Q + (a + c + \ldots) - (b + d \ldots)$

de donde, designando por Y la suma de las cifras de lugar impar y por P la suma de las de lugar par,

si $Y>P$, será $N=11Q+Y-P=11Q+(Y-P)$

y si $Y<P$, será $N=11Q+Y-P=11Q-(P-Y)$ (**37-Esc. 2.°**)

lo cual indica que *un número es divisible por* 11 *cuando lo es la diferencia entre la suma de las cifras de lugar impar y la suma de las de lugar par.*

84. **Número simple, primo ó primo absoluto** *es el que solamente es divisible por sí mismo y y por la unidad:* tal es el 17. En contraposición, se llama **compuesto** *al que no es primo;* tal es el 15, divisible por 5 y por 3 (*).

Todo número entero es, pues, igual al producto de otros dos enteros que, si es primo, son la unidad y él mismo y, si es compuesto, son, uno de sus divisores y el cociente de la división de aquél por éste.

85. **Teorema** *Todo entero nó divisible por los enteros cuyos cuadrados no le excedan es número primo.*

En efecto, si N es un entero y p^2 el mayor de los cuadrados contenidos en él, se tendrá $N < (p+1)^2$ ó sea $N < (p+1)(p+1)$: más como siempre se puede considerar á N como el producto de dos factores a y b, se tendrá también, $N = ab$, y, por lo tanto, $ab < (p+1)(p+1)$.

De esta desigualdad se desprende que, si a es mayor que $p+1$, será necesariamente b menor que $p+1$, es decir, igual á p ó menor que p; luego el número N no puede tener un factor mayor que p sin tener otro igual ó menor que p y, por consiguiente, si no es divisible por p ni por ningún entero menor que p, no lo será por ninguno mayor y será necesariamente número primo.

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para averiguar si un entero dado es ó nó primo se halla su raíz cuadrada y, si ésta es exacta, no será número primo, pero, si es inexacta, se le divide sucesivamente por cada uno de los números primos consecutivos, menores que ella, y si ninguna de las divisiones es exacta, el número dado será primo (**).

Ejemplo. *Averiguar si el número 179 es primo ó compuesto.*

La raíz cuadrada de 179 es 13, y como 179 no es divisible por ninguno de los números primos 2, 3, 5, 7, 11 y 13, cuyos cuadrados no le exceden, se puede asegurar que es primo.

(*) Los números primos menores que 100 son 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, y 97, fáciles de retener en la memoria ó de obtener mentalmente.

(**) A esta regla se apela cuando no se dispone de una TABLA DE NÚMEROS PRIMOS, en la que se contienen los que lo son, hasta el límite que aquélla alcance.

§ 2.° — Máximo común divisor.

A. — *Definiciones.*

86. **Divisor común** *de dos ó más números es todo número factor ó divisor de todos ellos:* así, 2 y 3 son divisores comunes de 18, 42 y 738, puesto que éstos son divisibles por 2 y por 3.

Al mayor de los divisores comunes de varios números se le llama su *máximo común divisor*, y se le indica abreviadamente *m. c. d.*; así, el máximo común divisor de A, B y C se indica *m. c. d.* (A, B, C).

Números primos entre sí *son dos ó más números cuyo máximo común divisor es la unidad,* ó lo que es lo mismo, *que no tienen más divisor común que la unidad:* tales son 8 y 21, así como también, 14, 48 y 55.

Números primos dos á dos *son tres ó más números de los que cada uno es primo con cada uno de los otros:* tales son los números 8, 15, 19 y 77.

De las precedentes definiciones se deduce:

1.° Que el máximo común divisor de varios números no puede ser mayor que el menor de ellos.

2.° Que si uno de dos ó más números dados divide á los demás, será el máximo común divisor de todos ellos.

3.° Que varios números pueden no ser primos absolutos y, sin embargo, ser primos entre sí; como, por ejemplo, 8, 15 y 77.

4.° Que si un número primo absoluto no es divisor de otro, será primo con él; pues el primero no tiene más factores que él mismo y la unidad y como, por hipótesis, no es divisor del segundo, no tendrán ámbos más divisor común que la unidad.

5.° Que dos enteros consecutivos son primos entre sí; pues todo factor común ó ámbos lo sería de su diferencia, que por ser la unidad, solamente es divisible por sí misma.

6.° Que varios números pueden ser primos entre sí y no serlo dos á dos; como, por ejemplo, 14, 48 y 69.

7.° Que si varios números son primos dos á dos serán primos entre sí.

8.° Que todos los números primos absolutos son primos dos á dos.

B.—*Máximo común divisor de dos números.*

87. Teorema. *En toda división inexacta se verifica que todo divisor común al divisor y al resto es divisor del dividendo,* y que *todo divisor común al dividendo y al divisor es divisor del resto.*

En efecto, si A y B son el dividendo y el divisor de una división inexacta cuyo cociente es q y el resto r, se tendrá, $A = Bq + r$, de cuya igualdad se deduce:

1.° Que si B y r son divisibles por un número h, también lo será el producto Bq (**80**-**Cor.**) y, por tanto, la suma $Bq + r$ (**80**), que es el dividendo.

2.° Que si A y B son divisibles por h, también lo será Bq y, por tanto, la diferencia $A—Bq$ (**81**), que es el resto r.

Corolario. *El máximo común divisor de dos números es el mismo que el del menor de ellos y el resto de su división;* pues si suponemos que D es el máximo común de A y B y D′ es el máximo común divivisor de B y r, por el 2.° de los puntos demostrados en el Teorema, D será divisor de r y como también lo es de B, se tendrá que $D \ngtr D'$: por otra parte, por el 1.° de los puntos demostrados en el Teorema, D′ será divisor de A y como también lo es de B, se tendrá que $D' \ngtr D$; luego si $D \ngtr D'$ y $D' \ngtr D$, será $D = D'$.

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para hallar el máximo común divisor de dos números se divide el mayor por el menor y éste será el máximo común divisor pedido, si la division es exacta; mas, si no lo fuere, se divide el divisor por el resto, el resto de la división primera por el de la segunda, el de ésta por el de la tercera y así sucesivamente hasta obtener un cociente exacto. El último divisor será el máximo común divisor pedido.

Ejemplo. *Hallar el máximo común divisor* de 23688 y 7575.

Para mayor claridad, se disponen las sucesivas divisiones escribiendo los cocientes encima de sus respectivos divisores, en la forma siguiente:

	3	7	1	6	2	6	1	2
23688	7575	963	834	129	60	9	6	3
963	834	129	60	9	6	3	0	

luego 3 es el máximo común divisor pedido.

88. Teorema. *El máximo común divisor de dos números es el mismo que el del mayor de ellos y su diferencia con el otro.*

En efecto, sean A y B dos números, C, su diferencia, D el máximo común divisor de A y B, y D′ el máximo común divisor de A y C. De la igualdad $A—B=C$ ó $A—C=B$ se deduce que D, por ser divisor común de A y B, lo será de C (**81**) y se tendrá que $D \ngtr D'$; por otra parte, D′, por ser divisor común de A y C, lo será de B, diferencia de A y C, y se tendrá que $D' \ngtr D$. Luego si $D \ngtr D'$ y $D' \ngtr D$, necesariamente se tendrá, $D = D'$.

Escolio. En virtud de este teorema se puede disminuir el número de divisiones necesarias para obtener el máximo común divisor de dos números, pues, cuando aparezca un resto mayor que la mitad del divisor respectivo, se podrá tomar por nuevo divisor la diferencia entre éste y el resto.

Aplicando esta abreviación al ejemplo anterior, se tendrá que el máximo común divisor de 23688 y 7575 se hallará más brevemente en esta forma:

	3	7	7	2	6	3
23688	7575	963	129	60	9	3
963	834	60	9	6	0	

en cuyas divisiones tercera y sexta se han puesto como divisores la diferencia entre el divisor y el resto de la anterior, por ser estos restos mayores que la mitad de los respectivos divisores.

C.—*Máximo común divisor de tres ó más números.*

89. Teorema. *Todo divisor común de dos números es divisor de su máximo común divisor* y, recíprocamente, *todo divisor de éste lo es también de aquéllos.*

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & C & C' & C'' & C''' \\ \hline A & B & R & R' & R'' \\ R & R' & R'' & 0 & \end{array}$$

En efecto, si A y B son dos números, C, C′, C″, C‴ los cocientes, y R, R′, R″ los restos de las divisiones sucesivas, indicadas al márgen, para hallar su máximo común divisor, R″, se tendrá:

1.° Que todo divisor común de A y B será divisor de R (**87**-2.°) y, siéndolo de B y R, lo será de R′ y, siéndolo de R y R′, lo será de R″.

2.° Que todo divisor de R″ lo será de su múltiplo R′ (**80-Cor.**) y, siéndolo de R′ y R″, divisor y resto de la tercera división, lo será de R (**87**-1.°) y, siéndolo de R y R′, lo será de B y, siéndolo de B y R, lo será de A.

Corolario. *El máximo común divisor de varios números es el mismo que el de todos ellos, excepto dos, y el máximo común divisor de estos dos.*

En efecto, sean los números A, B, C, F y G; D su máximo común divisor; D′ el de A y B; y D″ el de D′, C, F y G.

$$D\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A\\ B\end{array}\right\}D'\\ C\\ F\\ G\end{array}\right\}D''$$

El número D, por ser divisor de A y B lo será de D′, de modo que será divisor común de D′, C, F y G y, por tanto, $D \not> D''$: por otra parte, el número D″, por ser divisor de D′, lo será de A y B y, por tanto, será divisor común de A, B, C, F y G, de donde se desprende que $D'' \not> D$. Luego si $D \not> D''$ y $D'' \not> D$, necesariamente se tendrá $D = D''$.

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para hallar el máximo común divisor de varios números se prescinde de los que conocidamente sean múltiplos de otros: se halla el máximo común divisor de dos de los restantes: después el de este máximo común divisor y otro de ellos y así sucesivamente hasta haber operado con todos los números propuestos. El último máximo común divisor será el pedido.

Ejemplo. *Hallar el máximo común divisor de* 11088, 7560, 5544, 3080, 2520 y 2184.

Prescindiendo de 11088, duplo de 5544, y de 7560, triplo de 2520, y operando con los demás, se tendrá:

m. c. d. (5544, 3080) = 616; m. c. d. (616, 2520) = 56;
m. c. d. (56, 2184) = 56, que es el máximo común divisor pedido.

90. Teorema. *Si dos ó más números se multiplican ó dividen por un mismo número, su máximo común divisor quedará multiplicado ó dividido por dicho número.*

En efecto: 1.° Sean A y B dos números y R, R′, R″ los restos obtenidos para hallar el máximo común divisor, R″.

Multiplicando por un entero, n, el dividendo y el divisor de la primera división, se convertirán, respectivamente, en An y Bn, de cuya división se obtendrá el resto Rn (**60**): por igual razón, el resto de la división de Bn por Rn será R′n; el de la división de Rn por R′n será R″n, y el de la división de R′n por R″n será $0 \times n = 0$; luego R″n será el máximo común divisor de An y Bn.

De una manera análoga se demuestra que R″:n es el máximo comun divisor de A : n y B : n.

2.° Sean A, B, C, F, y G varios números, D el máximo común divisor de A y B, D′ el de D y C, D″ el de D′ y F, y D‴ el de D″ y G, ó sea, el de A, B, C, F y G.

Si se multiplican los números A, B, C, F y G por n, según el caso anterior, Dn será el máximo comun divisor de An y Bn; D′n el de Dn y Cn; D″n el de D′n y Fn: y D‴n el de D″n y Gn, ó sea, el de An, Bn, Cn, Fn y Gn.

De una manera análoga se demuestra que el máximo comun divisor de A : n, B : n, C : n, F : n y G : n es D‴: n.

Escolio. En virtud de este teorema se puede facilitar la investigación del máximo común divisor de varios números que conocidamente tengan algún divisor común, dividiéndolos por él, hallando el máximo común divisor de los cocientes y multiplicándole por dicho factor.

Así, en el ejemplo anterior, se tendrá:

5544	3080	2520	2184	2
2772	1540	1260	1092	2
1386	770	630	546	2
693	385	315	273	

y como el máximo común divisor de los últimos números es 7, el de los propuestos será $7 \times 2 \times 2 \times 2 = 56$.

Corolario. *Si dos ó más números se dividen por su máximo común divisor, los cocientes son primos entre sí:* pues si los números son A, B, C, F y G, y A′, B′, C′, F′ y G′ son los cocientes respectivos de las divisiones de aquéllos por su máximo común divisor, D, al dividir por éste los números dados queda él también dividido por D, y como D:D=1, el máximo común divisor de los cocientes será 1 y, por tanto, los números A′, B′, C′ y G′ serán primos entre sí.

91. Teorema. *Todo divisor de un producto de dos factores, que sea primo con uno de ellos, es divisor del otro.*

En efecto, sea AB un producto de dos factores y sea C un divisor del producto AB y primo con el factor A.

Por ser A y C primos entre sí, su máximo común divisor es 1, de modo que, si multiplicamos ambos números por B, el máximo común divisor de los productos AB y CB será $1 \times B = B$; mas, como, por otra parte, el número C es evidentemente divisor del producto CB y, por hipótesis, también lo es de AB, lo será de B (89).

92. Teorema. *Todo número primo, divisor de un producto de varios factores, es divisor de uno, por lo menos, de estos factores.*

En efecto, si n es un número primo, divisor del producto ABCF y no lo es de A, será primo con él y, por tanto, dividirá al producto BCF, que se puede considerar como un factor del ABCF; por idéntica razón, si n no es divisor de B, factor del producto BCF, lo será del producto CF y, si también es primo con el factor C, será divisor de F.

Corolario 1.º *Si un número primo es divisor de un producto de números primos, será igual á uno de éstos;* pues dicho número tiene que ser divisor de uno de los factores y como, por hipótesis, todos son primos, alguno de ellos será, necesariamente, igual á él.

Corolario 2.º *Todo número primo, divisor de cualquier potencia de un número, es divisor de éste;* pues la potencia A^m es el producto de m factores, iguales á A.

Corolario 3.º *Dos potencias cualesquiera de dos números primos entre sí, son también números primos entre sí;* pues si las potencias A^m y B^n de dos números A y B, primos entre sí, tuviesen algún factor común, distinto de la unidad, éste sería divisor de A y B, contra lo supuesto.

93. Teorema. *Todo número, primo con cada uno de los factores de un producto, es primo con el producto,* y, recíprocamente, *todo número, primo con un producto, lo es con cada uno de sus factores.*

En efecto, si n es primo con cada uno de los factores del producto ABCF, aquél y éste no podrán tener ningún factor primo común, distinto de la unidad, porque dividiría á n y á uno de los factores contra lo supuesto.

Recíprocamente, si n y el producto ABCF son primos entre sí, no habrá ningún divisor común á n y á uno de los factores, porque si así fuera, dicho divisor lo sería del producto y, por tanto, éste y n no serían primos entre sí.

§ 3.º—Mínimo común múltiplo.

A.—*Definiciones.*

94. Múltiplo común de dos ó más números *es todo número divisible por ellos:* así 330 es múltiplo de 2, 3, 5 y 11. Al menor múltiplo común de dos ó más números se le llama su *mínimo común múltiplo* y se indica abreviadamente *m. c. m.*: así, el mínimo común múltiplo de A, B y C se indica m. c. m. (A, B, C).

De estas definiciones se deduce:

1.º Que el mínimo común múltiplo de varios números no puede ser menor que el mayor de ellos.

2.º Que si uno de varios números dados es divisible por los demás, él será el mínimo común múltiplo de todos ellos.

B.—*Mínimo común múltiplo de dos números.*

95. Teorema. *Todo múltiplo común de dos números es igual al producto de tres factores, que son: uno de los números, el cociente de dividir el otro por el máximo común divisor de ámbos y un entero cualquiera.*

En efecto, si A y B son dos números cuyo máximo común divisor es D, y A′ y B′ los cocientes respectivos de dividir los números dados por D, se tendrá $A = DA'$ y $B = DB'$.

Si llamamos M á un múltiplo común de A y B, y p y q á los cocientes de M por A y B, respectivamente, se tendrá

$$M = Ap = DA'p \text{ y } M = Bq = DB'q,$$

de donde se deduce, $DA'p = DB'q$, y, dividiendo por D los dos miembros de esta igualdad, $A'p = B'q$.

Ahora bien, por ser A′ divisor del primer miembro, lo será también del segundo; mas como es primo con B′, será divisor de q y se tendrá, $q : A' = n$, y, por tanto, $q = A'n$.

Sustituyendo este valor de q en la igualdad $M = DB'q$, se transforma en la igualdad $M = DB'A'n$, de la que, por ser $DA' = A$ y $DB' = B$, se obtienen las expresiones

$$M = AB'n \text{ y } M = BA'n,$$

cualquiera de las cuales representa un múltiplo común de A y B.

Corolario. *El mínimo común múltiplo de dos números es el producto de uno de ellos, por el cociente de dividir el otro por el máximo común divisor de ambos;* pues el menor valor de los productos obtenidos, $AB'n$ y $BA'n$, se obtiene haciendo $n=1$, lo que los convierte, respectivamente, en AB' y BA'.

Escolio 1.° De aquí se deduce la siguiente regla:

Para hallar el mínimo común múltiplo de dos números se halla su máximo común divisor: se divide por él uno de los números dados y el cociente se multiplica por el otro.

Ejemplo. *Hallar el mínimo común múltiplo de 504 y 108.* El m. c. d. de 504 y 108 es 36, luego su m. c. m. será

$$(504 : 36) \times 108 = 14 \times 108 = 1512$$
$$\text{ó } (108 : 36) \times 504 = 3 \times 504 = 1512.$$

Escolio 2.° El mínimo común múltiplo de dos números, primos entre sí, es su producto; pues como su máximo común divisor es 1 y el cociente de dividir cualquiera de ellos por la unidad será el mismo dividendo, el producto que exprese el mínimo común múltiplo de dichos números será igual al producto de éstos.

Así, el mínimo común múltiplo de 8 y 15, primos entre sí, es $8 \times 15 = 120$.

C.—*Mínimo común múltiplo de tres ó más números.*

96. Teorema. *Todo múltiplo común de dos números es múltiplo de su mínimo común múltiplo,* y, recíprocamente, *todo múltiplo del mínimo común múltiplo de dos números es múltiplo de éstos.*

En efecto:

1.° Todo múltiplo común de dos números A y B, cuyos cocientes por su máximo común divisor sean, respectivamente, A' y B', se puede representar por

$$M = DB'A'n;$$

pero como $DB'A' = AB' = BA'$ expresa el mínimo común múltiplo de A y B (**95-Cor.**), se tiene que

$$M = AB'n = BA'n;$$

donde se vé que M es múltiplo del mínimo común múltiplo de A y B.

2.° Es evidente que, $M=AB'n=BA'n$, es múltiplo de los dos números A y B.

Corolario. *El mínimo común múltiplo de varios números es el mismo que el de todos ellos, excepto dos, y el mínimo común múltiplo de estos dos.*

En efecto, sean los números A, B, C, F y G y sea m su mínimo común múltiplo, m' el de A y B, y m'' el de m' C, F y G.

$$m\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A\\B\end{array}\right\}m'\\C\\F\\G\end{array}\right\}m''$$

El número m, por ser múltiplo de A y B, lo será de m', de modo que será múltiplo común de los números m', C, F, y G, por lo que se tendrá que $m \nless m''$; por otra parte, m'', por ser múltiplo de m', lo será de sus divisores A y B, (**80-Cor.**) y, por tanto, será múltiplo común de A, B, C, F y G, por lo que se tendrá que $m'' \nless m$. Luego si $m \nless m''$ y $m'' \nless m$, será necesariamente $m=m''$.

Escolio 1.° De aquí se deduce la siguiente regla:

Para hallar el mínimo común múltiplo de varios números se prescinde de los que conocidamente sean factores de otros: se halla el mínimo común múltiplo de dos de los restantes: después el de este mínimo común múltiplo y otro de ellos y así sucesivamente, hasta haber operado con todos los números propuestos. El último mínimo común múltiplo será el pedido.

Ejemplo. *Hallar el mínimo común múltiplo de los números* 2, 3, 4, 6, 9, 15, 38 y 70.

Prescindiendo de 2 y 3, por ser, respectivamente, factores de 4 y 6, y operando con los demás, se tendrá:

m. c. d.	4 y 6 = 2	6 : 2 = 3...	3 × 4 =	12	(*m.c.m.* (4 y 6))
m. c. d.	12 y 9 = 3	12 : 3 = 4...	4 × 9 =	36	(*m.c.m.* (4, 6 y 9))
m. c. d.	36 y 15 = 3	36 : 3 = 12...	12 × 15 =	180	(*m.c.m.* (4, 6, 9 y 15))
m. c. d.	180 y 38 = 2	180 : 2 = 90...	90 × 38 =	3420	(*m.c.m.* (4, 6, 9, 15 y 38))
m. c. d.	3420 y 70 = 10	3420 : 10 = 342...	342 × 70 =	23940	(*m.c.m.* pedido).

Escolio 2.° *El mínimo común múltiplo de varios números, primos dos á dos, es su producto;* pues el de dos de ellos es su producto (95-Esc. 2.°), que será primo con cada uno de los demás; luego el mínimo común múltiplo de tres de los números dados será también su producto y así sucesivamente.

Así, el mínimo común múltiplo de 4, 27, 35 y 143, primos dos á dos, es

$$4 \times 27 \times 35 \times 143 = 540540.$$

§ 4.°—Factores de los números.

A.—*Descomposición de un número en sus factores primos.*

97. Teorema. *Todo número compuesto es igual al producto de un número limitado de factores primos.*

En efecto, sea N un número compuesto y d un divisor suyo, distinto de N y de 1. Dividiendo N por d se tendrá un cociente exacto, q, y, por tanto, la igualdad, $N = dq$ (α).

Si d y q fuesen números primos, quedaría demostrado el teorema; pero, si no lo fuesen, suponiendo que sea a un factor de d y que sea b un factor de q, llamando q' y q'' á los cocientes respectivos de d por a y de q por b, se tendrían las igualdades $d = aq'$ y $q = bq''$, cuyos segundos miembros, sustituidos en la igualdad (α), darían $N = aq'bq''$.

Si a, b, q' y q'' fuesen números primos, quedaría demostrado el teorema; pero si no lo fuesen, procediendo de una manera análoga, es evidente que llegaríamos á obtener un producto de factores primos, pues cada descomposición produce dos números menores que el descompuesto.

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para descomponer un entero en factores primos se le divide por su menor factor primo, distinto de la unidad: se hace la misma operación con el cociente que resulte y así se continúa, hasta obtener el cociente 1. *Los sucesivos divisores son los factores primos del número dado.*

Ejemplo. *Descomponer en factores primos el número* 504.

$$\begin{array}{r|l} 504 & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Para mayor claridad, se dispone la colocación de los divisores y cocientes de las sucesivas divisiones en la forma expuesta al márgen, de donde se obtiene que los factores primos de 504 son 2, 3 y 7, entrando en él, el factor 2, tres veces, el 3, dos veces, y el 7, una vez; de modo que se tendrá: $504 = 2.2.2.3.3\,7 = 2^3.3^2.7.$

98. Teorema. *Un número no admite más que una descomposición en factores primos.*

En efecto, si el número N admitiera dos descomposiciones en factores primos diferentes, a, b, c, d y a', b', c', d', se tendría la igualdad $abcd = a'b'c'd'$, cuyo segundo miembro sería divisible por a, por serlo el primero; pero como a', b', c' y d' son números primos, alguno de ellos, tal como el a', sería igual á a, de donde se obtendría, $bcd = b'c'd'$, y de aquí, por análogos razonamientos, $b = b'$, $c = c'$ y $d = d'$.

B.—*Obtención de todos los divisores de un número.*

99. Teorema. *Todo número divisible por otros, primos dos á dos, es divisible por su producto.*

En efecto, sea N un número divisible por cada uno de los números a, b y c, primos dos á dos.

Llamando q al cociente de N por a, se tiene, $N = aq$ (α).

Por ser N divisible por b, lo será el producto aq; pero como b es primo con a, según la hipótesis, será divisor de q (**91**), y llamando q' al cociente de q por b, se tendrá $q = bq'$, cuyo valor, sustituido en la igualdad (α), dará, $N = abq'$ (β).

Por ser N divisible por c, lo será el producto abq'; pero como c es primo con a y b, será divisor de q' (**92**), y llamando q'' al cociente de q' por c, se tendrá $q' = cq''$, cuyo valor, sustituido en la igualdad (β), dará, $N = abcq''$; lo que indica que el número N es divisible por el producto abc.

Escolio. Si los factores primos de un número se multiplican dos á dos, tres á tres, cuatro á cuatro, etc., los productos serán también divisores del número propuesto, lo que origina la siguiente regla:

Para hallar todos los factores de un entero se le descompone en sus factores primos: se forman las potencias sucesivas de cada uno de éstos y se multiplica cada una de las del primero, por cada una de las del segundo: los productos anteriores, por cada una de las del tercero, y así sucesivamente, hasta multiplicar por las del último.

Ejemplo. *Hallar todos los factores del número 504.*

Se le descompone en sus factores primos y, para mayor claridad y fijeza en la marcha de la operación, se escriben en una fila la unidad y las potencias sucesivas del primer factor primo: se traza una raya debajo de dicha fila y se separan también unos de otros, por otra raya, los productos de las potencias sucesivas de cada uno de los demás factores por cada uno de los números anteriormente obtenidos, lo que se dispone en la forma siguiente:

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$$504 = 2^5 \times 3^2 \times 7$$

1	2	4	8
3	6	12	24
9	18	36	72
7	14	28	56
21	42	84	168
63	126	252	504

C. — *Aplicación de la descomposición de los números en factores primos, á la investigación del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo.*

100. Teorema. *Para que un número sea divisor de otro es necesario y suficiente que no contenga factores distintos de los de éste, ni los comunes á ámbos, con mayor exponente.*

En efecto, si un número D es divisor de otro N, se hallará contenido en éste; luego los factores primos de D lo estarán en N.

Por otra parte, si así se verifica, el número N se podrá descomponer en el producto de dos factores, uno de los cuales será D y el otro el cociente, q, de la división, en el que se hallarán los factores de N que no estén en D.

Corolario 1.° *El máximo común divisor de varios números es el producto de las menores potencias de sus factores primos, comunes;* pues este producto será divisor de cada uno de los números dados y será su máximo común divisor, porque cualquiera otro, mayor que él, contendría algún factor de que careciese alguno de ellos y, por tanto, no sería divisor suyo.

Escolio. De aquí se origina la siguiente regla:

Para hallar el máximo común divisor de varios números se prescinde de los que conocidamente sean múltiplos de otros de los dados: se descomponen los restantes en sus factores primos y se forma el producto de las menores potencias de los factores primos, comunes á todos ellos.

Ejemplo. *Hallar el máximo común divisor de*
11088, 7560, 5544, 3080, 2520 y 2184.

Prescindiendo de 11088, duplo de 5544, y de 7560, triplo de 2520, y descomponiendo los demás de sus factores primos, resulta:

$$5544 = 2^3 . 3^2 . 7 . 11 \quad | \quad 2520 = 2^3 . 3^2 . 5 . 7$$
$$3080 = 2^3 . 5 . 7 . 11 \quad | \quad 2184 = 2^3 . 3 . 7 . 13;$$

luego *m. c. d.* (11088, 7560, 5544, 3080, 2520, 2184) $= 2^3 . 7 = 56$.

Corolario 2.° *El mínimo común múltiplo de varios números es el producto de las mayores potencias de sus factores primos distintos;* pues cada uno de los números dados será divisor de dicho producto y éste será su mínimo común múltiplo, porque cualquiera otro número, menor que él, carecería de algunos de los factores contenidos en alguno de los propuestos y, por tanto no sería múltiplo suyo.

Escolio. De aquí se origina la siguiente regla:

Para hallar el mínimo común múltiplo de varios números se prescinde de los que conocidamente sean factores de otros de los dados: se descomponen los restantes en sus factores primos y se forma el producto de las mayores potencias de los factores primos, distintos.

Ejemplo. *Hallar el mínimo común múltiplo de* 2, 3, 4, 6, 9, 15, 38 y 70.

Prescindiendo de 2 y 3, factores, respectivamente, de 4 y 9 y descomponiendo los demás en sus factores primos, resulta:

$$4 = 2^2 \quad | \quad 9 = 3^2 \quad | \quad 38 = 2 \,.\, 19$$
$$6 = 2.3 \quad | \quad 15 = 3.5 \quad | \quad 70 = 2 \times 5 \times 7;$$

luego $m.\ c.\ m.(2, 3, 4, 6, 9, 15, 38, 70) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 19 = 23940$.

D. — *Aplicación de la descomposición de un número en factores primos, á la extracción de raíces.*

101. Teorema. *Para que un entero sea potencia perfecta de cualquier grado es necesario y suficiente que los exponentes de sus factores primos sean múltiplos del de la potencia.*

En efecto, si el entero N es potencia del grado m de r, será $N = r^m$, y si $r = a^p b^q c^s$, se tendrá $N = (a^p b^q c^s)^m = a^{mp} b^{mq} c^{ms}$ (**63**).

Por otra parte, si se verifica esta igualdad y la $r = a^p b^q c^s$, se tendrá $N = a^{mp} b^{mq} c^{ms} = (a^p b^q c^s)^m = r^m$.

Corolario 1.º *Todo entero cuyos factores primos aparezcan en su descomposición con exponentes pares es un cuadrado perfecto cuya raiz cuadrada es el producto de dichos factores, elevados á una potencia, mitad de la que cada uno tenga en la descomposición del número propuesto;* pues siempre que se tenga $N = a^{2p} b^{2q} c^{2s}$, será necesariamente $\sqrt{N} = a^p b^q c^s = r$.

Corolario 2.º *Todo entero cuyos factores primos aparezcan en su descomposición con exponentes múltiplos de 3 es un cubo perfecto cuya raiz cúbica es el producto de dichos factores, elevados á una potencia, tercio de la que cada uno tenga en la descomposición del número propuesto;* pues siempre que se tenga $N = a^{3p} b^{3q} c^{3s}$, será necesariamente $\sqrt[3]{N} = a^p b^q c^s = r$.

CAPÍTULO III.

DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

ARTÍCULO PRIMERO.

TRANSFORMACIONES DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

102. Teorema. *El cociente de toda división equivale á una fracción cuyo numerador es el dividendo y cuyo denominador es el divisor*, y, recíprocamente, *toda fracción equivale al cociente de su numerador por su denominador.*

En efecto, el cociente de 3 : 7 se puede obtener, hallando los séptimos de unidad que contiene el dividendo 3 y dividiéndolos por el divisor 7 y, como tres unidades enteras contienen, evidentemente, 3×7 *séptimos*, su división por 7 dá por cociente 3; pero este número no expresará unidades enteras, sino *séptimos* de unidad entera, los que, como ya sabemos (**18**), se indican $\frac{3}{7}$; luego se tendrá la igualdad $3 : 7 = \frac{3}{7}$ y, recíprocamente, $\frac{3}{7} = 3 : 7$ y, en general, $a : b = \frac{a}{b}$ y, recíprocamente, $\frac{a}{b} = a : b$.

Corolario 1.º *Todo número entero es igual á una fracción, de denominador arbitrario, cuyo numerador sea igual al producto de éste por el entero*; pues, si en la igualdad, $ab : b = a$, se dá forma fraccionaria al primer miembro, se obtiene, $\frac{ab}{b} = a$.

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para expresar un entero en forma de quebrado, de denominador dado, se le multiplica por éste.

Ejemplo. *Expresar el entero 5 en forma de quebrado, cuyo denominador sea 7.*

Se tendrá, $5 = \frac{5 \times 7}{7} = \frac{35}{7}$.

Corolario 2.º *El cociente completo de toda división inexacta es un número mixto, compuesto del cociente entero y un quebrado cuyo numerador es el resto y cuyo denominador es el divisor*; pues la división inexacta 13 : 5, por ejemplo, cuyo cociente entero es 2 y cuyo resto es 3, da la igualdad $13 = 2 \times 5 + 3$, de la que, dividiendo ambos miembros por 5, se obtiene

$$13 : 5 = (2 \times 5 + 3) : 5 = (2 \times 5) : 5 + 3 : 5 = 2 + 3 : 5$$

ó sea $\frac{13}{5} = \frac{2 \times 5 + 3}{5} = 2 + \frac{3}{5} = 2\frac{3}{5}$.

Escolio 1.º De aquí se deducen las siguientes reglas:

1.ª *Para hallar los enteros de una fracción se divide su numerador por su denominador.*

Ejemplo. *Hallar los enteros de la fracción* $\frac{43}{9}$.

Se tendrá, $\frac{43}{9} = 4 + \frac{7}{9} = 4\frac{7}{9}$.

2.ª *Para convertir en fracción un número mixto, se multiplica el entero por el denominador del quebrado: al producto se agrega el numerador y á la suma se la pone por denominador, el del quebrado.*

Ejemplo. *Convertir en fracción el mixto* $4\frac{7}{9}$.

Se tendrá, $4\frac{7}{9} = \frac{4.9 + 7}{9} = \frac{36 + 7}{9} = \frac{43}{9}$.

Escolio 2.º Como toda fracción equivale al cociente indicado de su numerador por su denominador, se deduce:

1.º Que las fracciones $\frac{3}{7}$ y $\frac{a}{b}$, por ejemplo, se pueden leer indistintamente, *tres*, séptimos y *a*, *b* avos, ó *tres*, dividido por *siete* y *a*, dividido por *b*.

2.º Que entre los términos de una fracción y el valor de ella existen las mismas relaciones que entre los datos y el resultado de una división y, por consiguiente, se pueden aplicar á toda fracción las proposiciones referentes á una división, considerando al numerador como dividendo, al denominador como divisor y á la fracción como cociente.

Así, por ejemplo, la proposición demostrada en el número **60** se puede enunciar, diciendo que *una fracción no varía multiplicando ó dividiendo su numerador y su denominador por un mismo número.*

103. Fracciones equivalentes *son las del mismo valor y distinta forma.*

Simplificar una fracción *es transformarla en otra equivalente, de menores términos.*

Fracción irreducible *es la de menores términos que todas sus equivalentes.*

Transformar una fracción en irreducible *es hallar la fracción irreducible equivalente á ella.*

104. Teorema. *Toda fracción equivalente á otra, cuyos términos sean primos entre sí, tiene sus términos equimúltiplos de los de ésta.*

En efecto, si $\frac{a}{b}$ es una fracción equivalente á otra $\frac{a'}{b'}$, cuyos términos, a' y b', sean primos entre sí, se tendrá, por hipótesis,

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \text{ ó sea, } a : b = a' : b'.$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por b, se tiene

$$a = (a' : b')b = a'b : b'$$

y, multiplicando los de ésta por b', resulta

$$ab' = a'b.$$

El primer miembro de esta igualdad es, evidentemente, divisible por b', luego también lo será el segundo; pero como b' es, por hipótesis, primo con a', será divisor de b, y llamando m al cociente de b por b', se tendrá

$$b = b'm$$

y, por tanto, $ab' = a'b'm$, de donde, dividiendo ambos miembros por b', resulta

$$a = a'm.$$

Corolario 1.º *Toda fracción cuyos términos son primos entre sí es irreducible*; pues todas sus equivalentes tendrán necesariamente sus términos mayores que los de ella.

Corolario 2.º *Una fracción irreducible no puede ser igual á un entero;* pues, siendo sus dos términos, primos entre sí, no puede ser el numerador divisible por el denominador.

Corolario 3.º *Dos fracciones irreducibles iguales tienen sus términos respectivamente iguales:* pues los de cada una de ellas han de ser equimúltiplos de los de la otra, lo que exige necesariamente que sean respectivamente iguales.

Escolio. De lo anteriormente expuesto y de lo ya demostrado anteriormente (90-Cor.) se desprende la siguiente regla:

Para transformar una fracción, en irreducible, se dividen sus dos términos por su máximo común divisor.

Ejemplo. Transformar, en irreducible, la fracción $\frac{2160}{2520}$.

Hallando el máximo común divisor de 2520 y 2160 y los cocientes de estos números por él, se tendrá:

	1	6
2520	2160	360=*m. c. d.* (2520 y 2160)
360	000	

$$\begin{cases} 2160 : 360 = 6 \\ 2520 : 360 = 7. \end{cases}$$

Luego, $\frac{2160}{2520} = \frac{6}{7}$.

Observación 1.ª En la práctica se sigue también otro procedimiento, llamado de las *simplificaciones sucesivas*, que consiste en dividir sucesivamente ambos términos de la fracción propuesta y de sus equivalentes, que vayan resultando, por los factores primos que, por las reglas de divisibilidad, se conozca, á primera vista, que les son comunes, hasta llegar á una fracción cuyos términos sean primos entre sí; pero como las reglas de divisibilidad, fáciles de retener, son en corto número, las más de las veces habrá que recurrir al procedimiento de la regla general.

Así se tendrá $\frac{2160}{2520} = \frac{216}{252} = \frac{108}{126} = \frac{54}{63} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$,

cuyo resultado se ha obtenido, dividiendo por 10, los dos términos de la fracción propuesta; por 2, los de la segunda; por 2, los de la tercera; por 3, los de la cuarta; y por 3, los de la quinta, lo que da la irreducible $\frac{6}{7}$.

Observación 2.ª La transformación de fracciones en sus equivalentes irreducibles debe preceder á toda operación con números fraccionarios y es siempre útil, pues, por medio de ella, nos formamos más acabada idea de la cantidad expresada, porque más fácilmente nos damos cuenta de la fracción irreducible $\frac{2}{3}$, por ejemplo, que de su equivalente $\frac{166}{249}$.

105. Fracciones homogéneas *son las del mismo denominador y* **heterogéneas** *las de distinto denominador.*

Reducir fracciones á un común denominador *es transformarlas en sus equivalentes homogéneas.*

Reducir fracciones al menor denominador común *es transformarlas en sus equivalentes homogéneas del menor denominador común posible.*

106. Teorema. *El menor denominador común de varias fracciones irreducibles es el mínimo común múltiplo de sus denominadores.*

En efecto, si las fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ son irreducibles, todo denominador común de ellas habrá de ser múltiplo común de sus denominadores y, por tanto, de su mínimo común múltiplo; luego éste será su menor denominador común.

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para reducir varias fracciones al menor denominador común se las transforma en sus equivalentes irreducibles: se halla el mínimo común múltiplo de los denominadores de las nuevas fracciones, que será el denominador común, y se multiplica el numerador de cada una, por el cociente de dividir por su denominador, dicho mínimo común múltiplo.

Ejemplo. *Reducir al menor denominador común las fracciones*

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{20}, \frac{5}{6}, \frac{14}{24}, \frac{77}{126} \text{ y } \frac{3}{35}.$$

Convirtiendo en irreducibles las fracciones $\frac{5}{20}$, $\frac{14}{24}$ y $\frac{77}{126}$, se opera con las fracciones, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{18}$ y $\frac{3}{35}$, hallando el mínimo común múltiplo de sus denominadores, que es 1260, dividiéndole por cada uno de ellos, lo que dá los respectivos cocientes 420, 315, 210, 105, 70 y 36, y multiplicando por cada uno de éstos, el respectivo numerador, con lo que se obtienen las fracciones homogéneas

$$\frac{840}{1260}, \frac{315}{1260}, \frac{1050}{1260}, \frac{735}{1260}, \frac{770}{1260} \text{ y } \frac{108}{1260},$$

equivalentes á las propuestas.

Observación 1.ª Si las fracciones dadas son irreducibles y sus denominadores, primos dos á dos, el mínimo común múltiplo de éstos será su producto (**96**-Esc. **2.º**) y, por tanto, éste será el menor denominador común, y los nuevos numeradores serán los respectivos productos de multiplicar el numerador de cada una de las fracciones dadas, por el producto de los denominadores de las demás.

Ejemplo. *Reducir al menor denominador común las fracciones*

$$\frac{2}{3},\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{7}\ \text{y}\ \frac{5}{8}.$$

Puesto que los denominadores 3, 5, 7 y 8 son primos dos á dos, su *m. c. m.* es $3.5.7.8 = 840$, y como los cocientes de éste por cada uno de aquéllos son, respectivamente, $5.7.8 = 280$, $3.7.8 = 168$, $3.5.8 = 120$ y $3.5.7 = 105$, las fracciones homogéneas pedidas serán

$$\frac{560}{840},\ \frac{672}{840},\ \frac{360}{840}\ \text{y}\ \frac{525}{840}.$$

Observación 2.ª La reducción de fracciones á un común denominador, necesaria en muchos casos, es siempre útil, pues, por medio de ella, se pueden comparar fácilmente fracciones ordinarias de términos diferentes; así de las fracciones $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{7}$ no se puede asegurar, desde luego, cuál es mayor, pero sí de sus equivalentes homogéneas $\frac{21}{35}$ y $\frac{20}{35}$, de las que la primera es mayor que la segunda (**22**-3.º).

ARTÍCULO II.

DE LA ADICIÓN DE NÚMEROS FRACCIONARIOS.

107. La definición de esta operación es la misma que la de la adición de enteros (**26**), pero hay que tener presente que las unidades de los sumandos pueden ser fraccionarias ó unas enteras y otras fraccionarias y que, por tanto, la suma ha de ser una totalidad de unidades de la misma especie que las de los sumandos, lo que exige necesariamente que éstas sean homogéneas.

§ 1.º—Adición de fracciones ordinarias (*).

108. Caso general. *Para sumar fracciones ordinarias se reducen al mínimo denominador común, si son heterogéneas, y se divide por él la suma de los nuevos numeradores;* pues, como la suma ha de contener la totalidad de unidades de los sumandos, es evidente que cuando éstos estén referidos á la misma unidad fraccionaria, la suma resultará expresada en ella.

Ejemplos.

1.º *Sumar* $\frac{3}{8}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{5}{8}$ y $\frac{13}{8}$.

Como estas fracciones son homogéneas, se tendrá desde luego

$$\frac{3}{8}+\frac{9}{8}+\frac{5}{8}+\frac{13}{8}=\frac{3+9+5+13}{8}=\frac{30}{8}.$$

2.º *Sumar* $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{9}$ y $\frac{7}{12}$.

Todas estas fracciones son irreducibles; el *m. c. m.* de sus denominadores es 180; los cocientes de éste por cada uno de ellos son 45, 36, 20 y 15;

luego la suma será $\frac{45}{180}+\frac{108}{180}+\frac{80}{180}+\frac{105}{180}=\frac{338}{180}=\frac{169}{90}=1\frac{79}{90}.$

(*) Bajo el epígrafe de *Adición, Sustracción*, etc., de *fracciones ordinarias*, comprenderemos, para mayor brevedad, estas operaciones, cuando uno, por lo menos, de sus términos sea fraccionario.

109. Casos particulares. Si entre los datos de una adición hubiese algunos enteros ó mixtos se podrían reducir á fracciones y verificar la operación por la regla del caso general; pero teniendo en cuenta que un número mixto es, por su naturaleza, la suma de un entero y un quebrado, todos los casos particulares de la adición de números fraccionarios se reducen al de la adición de dos ó más sumandos, unos enteros y otros fraccionarios, que se ejecuta por la siguiente regla:

Para verificar una adición cuyos datos sean unos enteros y otros fraccionarios, se suman primeramente las fracciones, después los enteros y á la suma de éstos se agrega la de aquéllas; pues el resultado ha de contener las unidades fraccionarias de los términos fraccionarios y las enteras de los enteros.

Ejemplo. *Sumar* $7\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$, 11, $\frac{4}{9}$ y $6\frac{7}{12}$.

La serie de operaciones necesarias para esta adición se puede, para mayor claridad, disponer en la siguiente forma, procurando hacer mentalmente el mayor número posible de ellas, teniendo en cuenta que el mínimo común múltiplo de los denominadores es 180, obtenido al márgen.

$$\begin{array}{l|l} 5 = 5 & 7\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+11+\frac{4}{9}+6\frac{7}{12} \\ 9 = 3^2 & \\ 12 = 2^2.3 & =7+11+6+\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{4}{9}+\frac{7}{12} \\ \hline m.\ c.\ m. = 2^2.3^2.5 = 180 & \end{array}$$

Suma de quebrados:

$$\frac{45}{180}+\frac{108}{180}+\frac{80}{180}+\frac{105}{180}=\frac{338}{180}=\frac{169}{90}=1\frac{79}{90}.$$

Suma de enteros: $7+11+6=24$.

Suma pedida: $24+1\frac{79}{90}=25\frac{79}{90}$.

§ 2.°—Adición de decimales.

110. Caso general. *Para sumar decimales se hace que todos los sumandos tengan el mismo número de cifras decimales, para lo cual se colocan los ceros necesarios á la derecha de los que tengan ménos que otro; se suman como enteros y, á la derecha de la suma, se separan, con una coma, tantas cifras como decimales haya en cualquiera de los sumandos*; pues la agregación de ceros á la derecha de un decimal no altera su valor (**22**-5.°) y, por otra parte, los sumandos del mismo número de cifras decimales son fracciones del mismo denominador (**21**).

Así se tiene que

$$3{,}845+7{,}96=3{,}845+7{,}960=\frac{3845}{1000}+\frac{7960}{1000}=\frac{11805}{1000}=11{,}805.$$

Ejemplos.

1.° *Sumar* 2,7536; 9,8307 y 12,3619.

2.° *Sumar* 2,753; 9,8307 y 12,36.

Por las razones expuestas al tratar de la adición de enteros, se disponen estas operaciones en la forma expuesta al márgen, omitiendo la escritura de los ceros, que en nada han de influir en el resultado, y colocando los sumandos en columna, de modo que se correspondan las comas que marcan los enteros, con lo cual se corresponderán las unidades de los diversos órdenes, tanto enteras como decimales.

$$\begin{array}{r|r} 2{,}7536 & 2{,}753 \\ 9{,}8307 & 9{,}8307 \\ 12{,}3619 & 12{,}36 \\ \hline 24{,}9462 & 24{,}9437 \end{array}$$

111. Caso particular. *Para sumar enteros y decimales se suman como enteros y, á la derecha de la suma, se separan, con una coma, tantas cifras como decimales haya en el sumando que tenga mayor número de ellas*; pues los enteros se pueden considerar como decimales cuya parte fraccionaria es cero.

Ejemplo. *Sumar* 3,578; 48; 5,96; 319 y 14,7893.

Se tendrá $3{,}578+48+5{,}96+319+14{,}7893=391{,}3273$.

ARTÍCULO III.

DE LA SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS FRACCIONARIOS.

112. La definición de esta operación es la misma que la de la sustracción de enteros (**30**), pero hay que tener presente que las unidades del minuendo y del sustraendo pueden ser fraccionarias ó unas enteras y otras fraccionarias y que, por tanto, la diferencia ha de ser una totalidad de unidades de la misma especie que las del minuendo y sustraendo, lo que exige necesariamente que éstas sean homogéneas.

§ 1.°—Sustracción de fracciones ordinarias.

113. Caso general. *Para restar fracciones ordinarias se reducen al mínimo denominador común, si son heterogéneas, y se divide por él la diferencia de los nuevos numeradores;* pues, como la diferencia ha de contener la totalidad de unidades del minuendo, menos las del sustraendo, es evidente que cuando éstos estén referidos á la misma unidad fraccionaria, la diferencia resultará expresada en ella.

Ejemplos.

1.° *Restar* $\frac{2}{13}$ de $\frac{7}{13}$.

Como estas fracciones son homogéneas, se tendrá desde luego

$$\frac{7}{13}-\frac{2}{13}=\frac{5}{13}.$$

2.° *Restar* $\frac{2}{21}$ de $\frac{9}{14}$.

Ambas fracciones son irreducibles; el *m. c. m.* de sus denominadores es 42; los cocientes de éste por cada uno de ellos son, respectivamente, 3 y 2; luego la diferencia pedida será

$$\frac{9}{14}-\frac{2}{21}=\frac{27}{42}-\frac{4}{42}=\frac{23}{42}.$$

114. Casos particulares. Si entre los datos de una sustracción hubiese algunos enteros ó mixtos se podrían reducir á fracciones y verificar la operación por la regla del caso general; pero en la práctica se consideran los siguientes casos particulares de la sustracción de fracciones ordinarias que, por su frecuente aplicación, se resuelven por procedimientos abreviados.

1.° Restar de un entero un quebrado.
2.° Restar de un mixto un entero.
3.° Restar dos mixtos.

1.° *Para restar de un entero, un quebrado, se disminuye el entero en una unidad, y al resultado se agrega un quebrado del mismo denominador que el del sustraendo y cuyo numerador sea el exceso del denominador sobre el numerador de éste;* pues, si de 13 se resta $\frac{4}{7}$, se tendrá

$$13-\frac{4}{7}=12+1-\frac{4}{7}=12+\frac{7}{7}-\frac{4}{7}=12+\frac{3}{7}=12\frac{3}{7}.$$

2.° *Para restar de un mixto, un entero, se resta el sustraendo, del entero del minuendo, y á la diferencia se añade el quebrado de éste;* pues, si de $19\frac{3}{8}$ se resta 6, se tendrá

$$19\frac{3}{8}-6=19+\frac{3}{8}-6=19-6+\frac{3}{8}=13+\frac{3}{8}=13\frac{3}{8}.$$

3.° *Para restar dos mixtos se resta del quebrado del minuendo, el quebrado del sustraendo, y del entero de aquél, el entero de éste; pero, si el quebrado del sustraendo es mayor que el del minuendo, se le agrega á este quebrado una unidad, tomada del entero, que se rebaja de éste al hacer la sustracción de los enteros;* pues, si de $34\frac{7}{8}$ se resta $5\frac{2}{3}$, se tendrá

$$34\frac{7}{8}-5\frac{2}{3}=34-5+\frac{7}{8}-\frac{2}{3}=34-5+\frac{21}{24}-\frac{16}{24}=29\frac{5}{24}$$

y, si de $47\frac{3}{8}$ se resta $12\frac{9}{11}$, se tendrá

$$47\frac{3}{8}-12\frac{9}{11}=47-12+\frac{3}{8}-\frac{9}{11}=47-12+\frac{33}{88}-\frac{72}{88}$$
$$=46-12+\frac{88}{88}+\frac{33}{88}-\frac{72}{88}=34+\frac{121}{88}-\frac{72}{88}=34\frac{49}{88}.$$

§ 2.°—Sustracción de decimales.

115. Caso general. *Para restar decimales se hace que minuendo y sustraendo tengan el mismo número de cifras decimales, para lo cual se escriben los ceros necesarios á la derecha del que tenga menos; se restan después como enteros y, á la derecha de la diferencia, se separan, con una coma, tantas cifras como decimales haya en cualquiera de los datos de la operación;* pues la agregación de ceros á la derecha de un decimal no altera su valor (**22**-5.°) y, por otra parte, los términos de igual número de cifras decimales son fracciones del mismo denominador.

Así se tiene que

$$8{,}743-3{,}48=8{,}743-3{,}480=\frac{8743}{1000}-\frac{3480}{1000}=\frac{5263}{1000}=5{,}263.$$

Ejemplos.

1.° *Restar* 342,7864 *de* 496,5328.
2.° *Restar* 437,6854 *de* 785,79.
3.° *Restar* 342,78 *de* 496,5328.

Por las razones expuestas al tratar de la sustracción de enteros, se disponen estas operaciones en la forma expuesta al márgen, omitiendo la escritura de los ceros, que en nada han de influir en el resultado, y colocando el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las comas que marcan los enteros, con lo cual se corresponderán las unidades de los diversos órdenes, tanto enteros como decimales.

496,5328	785,79	496,5328
342,7864	437,6854	342,78
153,7464	348,1046	153,7528

116. Casos particulares. *Para restar de un entero un decimal ó un decimal de un entero, se restan como enteros y, á la derecha de la diferencia, se separan, con una coma, tantas cifras como decimales haya en el término decimal;* pues el entero se puede considerar como un decimal cuya parte fraccionaria es cero.

Ejemplos. *Restar* 285 *de* 439,6853 *y* 98,275 *de* 536.

Se tendrá 439,6853—285=154,6853 y 536—98,275=437,725.

ARTÍCULO IV.

DE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS FRACCIONARIOS.

117. La definición de esta operación, dada, en general, al tratar de los números enteros (**39**), conviene, por consiguiente, á la de números fraccionarios, pero hay que tener presente que, cuando el multiplicador es una unidad fraccionaria, el producto deberá ser una parte alícuota del multiplicando, pues multiplicar un número, n, por $\frac{1}{5}$, por ejemplo, es hallar la quinta parte de n ó sea el cociente de dividir n por 5 y, cuando el multiplicador es una fracción, el producto deberá ser una totalidad de partes iguales del multiplicando, pues multiplicar un número, n, por $\frac{3}{5}$, por ejemplo, es tomar tres veces la quinta parte de n.

118. Teorema. *Si el numerador de una fracción se multiplica por un número entero, la fracción se multiplica por el mismo número.*

En efecto, el número de unidades de la fracción resultante es un cierto número de veces mayor que el de la propuesta; luego aquélla será el mismo número de veces mayor que ésta.

$$\text{Así, } \frac{3\times4}{7}=\frac{3}{7}\times4=3\times\frac{4}{7}.$$

119. Teorema. *Si el denominador de una fracción se multiplica por un número entero, la fracción se divide por el mismo número.*

En efecto, cada una de las unidades fraccionarias de la fracción resultante es un cierto número de veces menor que cada una de las de la propuesta; luego aquélla será el mismo número de veces menor que ésta.

$$\text{Así, } \frac{3}{7\times4}=\frac{3}{7}:4=\frac{3}{4}:7.$$

§ 1.°—Multiplicación de fracciones ordinarias.

120. Caso general. *Para multiplicar dos fracciones ordinarias se divide el producto de los numeradores por el de los denominadores;* pues multiplicar $\frac{5}{9}$ por $\frac{7}{8}$, por ejemplo, es hallar las siete octavas partes de la fracción $\frac{5}{9}$, y como una octava parte es $\frac{5}{9} : 8 = \frac{5}{9 \times 8}$ (**119**), se tiene que $\frac{5}{9} \times \frac{7}{8} = \frac{5}{9 \times 8} \times 7 = \frac{5 \times 7}{9 \times 8}$ (**118**).

Escolio. Si un numerador y un denominador de los factores tienen un factor común, se suprime previamente en ámbos; pues $\frac{am}{b} \times \frac{c}{dm} = \frac{amc}{bdm} = \frac{ac}{bd}$.

Ejemplo. $\frac{12}{19} \times \frac{7}{15} = \frac{4}{19} \times \frac{7}{5} = \frac{28}{95}$.

121. Caso particular. Si entre los datos de una multiplicación hubiese algún entero ó mixto se reduce á fracción y se verifica la operación por la regla del caso general; pero, por su frecuente aplicación, se usa un procedimiento abreviado en el caso siguiente:

Para multiplicar una fracción por un entero se multiplica el numerador por el entero, y el producto se divide por el denominador (**118**).

Ejemplo. $\frac{3}{17} \times 4 = \frac{3 \times 4}{17} = \frac{12}{17}$.

Escolio. Si el entero y el denominador tienen algún factor común, se suprime previamente en ámbos; pues $\frac{a}{bm} \times cm = \frac{acm}{bm} = \frac{ac}{b}$.

Ejemplos.

$\frac{5}{8} \times 6 = \frac{5}{4} \times 3 = \frac{15}{4}$; $\frac{2}{15} \times 5 = \frac{2}{3}$; $\frac{3}{7} \times 35 = 3 \times 5 = 15$.

Observación. Es digna de notarse la expresión $\frac{a}{b} \times b = a$, que indica que *el producto de una fracción por su denominador es igual al numerador.*

§ 2.°—Multiplicación de decimales.

122. Caso general. *Para multiplicar dos decimales se multiplican como enteros y, á la derecha del producto, se separan, con una coma, tantas cifras como decimales haya en ambos factores, anteponiendo al producto, en caso necesario, los ceros suficientes para esta separación;* pues si los factores son, por ejemplo, 3,74 y 2,8 se tendrá

$$3{,}74 \times 2{,}8 = \frac{374}{100} \times \frac{28}{10} = \frac{374 \times 28}{100 \times 10} = \frac{10472}{1000} = 10{,}472.$$

Ejemplos.

Multiplicar 4,78532 *por* 2,63 y 4,37864 *por* 0,00024.

Estas operaciones se disponen en la forma expuesta al márgen y como de la segunda resulta un producto de *ocho* cifras y de él hay que separar *diez*, que es el número de las decimales de los factores, se hace necesario anteponerle tres ceros, para expresar, con el primero de ellos, la parte entera.

4,785 32	
2,63	4,37864
14 355 96	0,00024
2 87 119 2	17 51456
9 57 064	87 5728
12,58 539 16	0,00105 08736

123. Casos particulares.

1.° *Para multiplicar un decimal por la unidad seguida de ceros se corre la coma tantos lugares, á la derecha, como ceros sigan á la unidad;* pues el multiplicando se hace diez veces mayor por cada lugar que se corra la coma á la derecha, porque cada una de sus cifras pasa á expresar unidades del órden inmediato superior al que expresaba.

Ejemplo. *Multiplicar* 7,45926 *por* 1000.
Se tendrá $7{,}45926 \times 1000 = 7459{,}26$.

2.° *Para multiplicar un decimal por un entero se multiplican como enteros y, á la derecha del producto, se separan, con una coma, tantas cifras como decimales tenga el factor decimal;* pues al entero se le puede considerar como un decimal cuya parte fraccionaria es cero.

Ejemplo. *Multiplicar* 18,364 *por* 9.
Se tendrá $18{,}364 \times 9 = 165{,}276$.

§ 3.º—Producto de varios factores fraccionarios.

124. Producto de varios factores fraccionarios ó unos enteros y otros fraccionarios es, como el de enteros (**52**), el resultado de multiplicar el primer factor por el segundo, el producto por el tercero, el nuevo producto por el cuarto y así sucesivamente.

125. El producto de varios factores se obtiene por la siguiente regla:

Para multiplicar varios números fraccionarios, ó unos enteros y otros fraccionarios, se reducen á fracción los mixtos, si los hay; se multiplican entre sí los numeradores y los enteros y el producto se divide por el producto de los denominadores, pues se tendrá, en general,

$$a\times\frac{b}{c}\times f\frac{g}{e}=\frac{ab}{c}\times f\frac{g}{e}=\frac{ab}{c}\times\frac{fe+g}{e}=\frac{ab(fe+g)}{ce}.$$

Ejemplo. *Multiplicar* 3 *por* $\frac{2}{5}$, *por* $\frac{7}{11}$, *por* 13 y *por* $\frac{4}{85}$.

Se tendrá $3\times\frac{2}{5}\times\frac{7}{11}\times 13\times\frac{4}{85}=\frac{3\times2\times7\times13\times4}{5\times11\times85}=\frac{2184}{4675}$.

126. Teorema. *El producto de varios factores fraccionarios ó unos enteros y otros fraccionarios es independiente del órden de éstos*; es decir, que

$$a\times\frac{b}{c}\times\frac{d}{e}\times f\times\frac{g}{h}=\frac{d}{e}\times a\times\frac{g}{h}\times\frac{b}{c}\times f \text{ (*)}.$$

En efecto, $a\times\frac{b}{c}\times\frac{d}{e}\times f\times\frac{g}{h}=\frac{abdfg}{ceh}$

y $\frac{d}{e}\times a\times\frac{g}{h}\times\frac{b}{c}\times f=\frac{dagbf}{ehc}$;

pero, como $\frac{abdfg}{ceh}=\frac{dagbf}{ehc}$ (**53**), se deduce que

$$a\times\frac{b}{c}\times\frac{d}{e}\times f\times\frac{g}{h}=\frac{d}{e}\times a\times\frac{g}{h}\times\frac{b}{c}\times f.$$

(*) La verdad de este teorema, demostrada ya (**53**) para el caso en que todos los factores sean enteros, se demuestra ahora para el caso en que todos ó algunos sean fraccionarios.

ARTÍCULO V.

DE LA DIVISIÓN DE NÚMEROS FRACCIONARIOS.

127. La definición de esta operación es la misma que la de la división de enteros (**44**), pero hay que tener presente que, cuando el divisor es una unidad fraccionaria, el cociente será un múltiplo del dividendo, pues dividir n por $\frac{1}{5}$, por ejemplo, es hallar un número del que n sea la quinta parte, el cual, necesariamente, ha de ser $5n$, y cuando el divisor es una fracción ó sea un múltiplo de una parte alícuota de la unidad entera, el dividendo será el equimúltiplo de la misma parte alícuota del cociente, pues dividir n por $\frac{3}{5}$, por ejemplo, es hallar un número del que n sea los tres quintos.

§ 1.—División de fracciones ordinarias.

128. Caso general. *Para dividir dos fracciones ordinarias se multiplica la fracción dividendo por la fracción divisor invertida*; pues, designando por c el cociente de la división de $\frac{7}{8}$ por $\frac{3}{5}$, por ejemplo, se tiene la igualdad $\frac{7}{8}:\frac{3}{5}=c$, ó sea, $\frac{7}{8}=\frac{3}{5}\times c$, de donde, multiplicando ambos miembros por 5, se obtiene $\frac{7}{8}\times5=3\times c$ (**121-Obs.**) y, dividiendo los de ésta por 3, resulta

$\frac{7}{8}\times\frac{5}{3}=c$ (**56-Esc**);

luego $\frac{7}{8}:\frac{3}{5}=\frac{7}{8}\times\frac{5}{3}=\frac{7\times5}{8\times3}=\frac{35}{24}$.

(*) Vulgarmente se dice que *para dividir dos fracciones se multiplican sus términos en cruz*, expresión que, aunque no muy precisa, sirve para recordar fácilmente el procedimiento operativo.

Escolio. Si los numeradores ó los denominadores tienen algún factor común, se suprimen previamente en ámbos; pues $\frac{am}{b} : \frac{cm}{d} = \frac{amd}{bcm} = \frac{ad}{bc}$ y $\frac{a}{bm} : \frac{c}{dm} = \frac{adm}{bmc} = \frac{ad}{bc}$.

Ejemplos.

$$\frac{8}{9} : \frac{10}{13} = \frac{4}{9} : \frac{5}{13} = \frac{52}{45}; \frac{7}{15} : \frac{11}{24} = \frac{7}{5} : \frac{11}{8} = \frac{56}{55}.$$

Observación. Son dignas de notarse las expresiones $\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{a}{c}$ y $\frac{a}{b} : \frac{a}{d} = \frac{d}{b}$ que, respectivamente, indican que *el cociente de dos fracciones del mismo denominador es el del numerador del dividendo por el del divisor*, y que *el cociente de dos fracciones del mismo numerador es el del denominador del divisor por el del dividendo.*

129. Casos particulares. Si entre los datos de una división hubiese alguno entero ó mixto se reduce á fracción y se verifica la operación por la regla del caso general; pero, por sus frecuentes aplicaciones, se emplean procedimientos abreviados en los siguientes casos particulares:

1.° Dividir una fracción por un entero.

2.° Dividir un entero por una fracción.

1.° *Para dividir una fracción por un entero se multiplica el denominador por el entero* (**119**).

Ejemplo. $\frac{7}{8} : 5 = \frac{7}{40}.$

Escolio. Si el entero y el numerador tienen algún factor común, se suprime previamente en ámbos; pues $\frac{am}{b} : cm = \frac{am}{bcm} = \frac{a}{bc}.$

Ejemplos.

$$\frac{8}{9} : 14 = \frac{4}{9} : 7 = \frac{4}{63}; \frac{12}{19} : 4 = \frac{3}{19}; \frac{4}{7} : 12 = \frac{1}{7.3} = \frac{1}{21}.$$

Observación. Es digna de notarse la expresión $\frac{a}{b} : a = \frac{1}{b}$, que indica que *el cociente de una fracción por su numerador es la unidad fraccionaria del dividendo.*

2.° *Para dividir un entero por una fracción se multiplica el entero por el denominador, y el producto se divide por el numerador;* pues se tiene, en general,

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}.$$

Ejemplo. $7 : \frac{3}{5} = \frac{35}{3}.$

Escolio. Si el entero y el numerador tienen algun factor común, se suprime previamente en ámbos; pues $am : \frac{bm}{c} = \frac{amc}{bm} = \frac{ac}{b}.$

Ejemplos.

$$15 : \frac{6}{7} = 5 : \frac{2}{7} = \frac{35}{2}; 5 : \frac{15}{19} = \frac{19}{15 : 5} = \frac{19}{3};$$

$$15 : \frac{5}{7} = 7 \times (15 : 5) = 7 \times 3 = 21.$$

Observación. Son dignas de notarse las expresiones $a : \frac{a}{b} = b$ y $1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, que, respectivamente, indican que *el cociente de un entero por una fracción de numerador, igual á él, es el denominador de ésta*, y que *el cociente de la unidad por una fracción es la misma fracción invertida.*

§ 2.°—División de decimales.

130. Caso general. *Para dividir un decimal por otro se hace que dividendo y divisor tengan el mismo número de cifras decimales, escribiendo á la derecha del que tenga menos, el número de ceros suficiente, y se dividen como enteros;* pues si el dividendo y el divisor son, por ejemplo, 103,95 y 3,87 respectivamente, se tendrá

$$103{,}95 : 3{,}87 = \frac{10395}{100} : \frac{387}{100} = \frac{10395 \times 100}{387 \times 100} = \frac{10395}{387}.$$

Ejemplos.

Dividir 576,37 *por* 38,76; 756,25 *por* 32,6954 y 291,753 *por* 4,7.

Estas operaciones se disponen en la forma expuesta á continuación:

576,37	38,76	756,2500	32,6954	291,753	4,700
188 77	14	102 3420	23	9 753	62
33,73		4,2558		3,53	

131. Casos particulares.

1.° *Para dividir un número entero ó un decimal por la unidad seguida de ceros se corre la coma tantos lugares, á la izquierda, como ceros sigan á la unidad;* pues el dividendo se hace diez veces menor por cada lugar que se corra la coma á la izquierda, porque cada una de sus cifras pasa á expresar unidades del órden inmediato inferior al que expresaba.

Ejemplos.

Dividir 3548 *por* 10; 749,52 *por* 100 y 8,5 *por* 1000.

Se tendrá 3548:10=354,8; 749,52:100=7,4952; 8,5:1000=0,0085.

2.° *Para dividir un entero por un decimal ó un decimal por un entero se agregan al entero tantos ceros como cifras decimales tenga el otro término y se dividen como enteros;* pues al entero se le puede considerar como un decimal cuya parte fraccionaria es cero.

Ejemplos.

Dividir 387 *por* 5,328 y 752,93 *por* 13.

Estas operaciones se disponen en la forma siguiente:

387 000	5,328	752,93	1300
14 040	72	102 93	57
3,384		11,93	

132. Teorema. *El cociente de toda división inexacta se puede expresar siempre en fracción decimal.*

En efecto, sea, por ejemplo, 29 : 7, la división cuyo cociente queremos obtener. Considerando al entero, 29, como un decimal cuya parte fraccionaria es cero y efectuando la división en la forma ordinaria, expuesta al márgen, se obtiene desde luego un cociente de 4 enteros y un resto de 1, ó sean 10 décimas, que divididas por 7, dan un cociente de 1 décima y un resto de 3, ó sean 30 centésimas, que divididas por 7, dan un cociente de 4 centésimas y un resto de 2 y así sucesivamente, de modo que, deteniéndonos en cualquiera de las divisiones parciales, se puede afirmar que se ha obtenido el cociente, expresado en unidades decimales del órden de la última cifra hallada.

29,000	7
1 0	4,14
30	
2	

Por otra parte, como este procedimiento no tiene otro límite que el del número de ceros que se escriban, ó se supongan escritos, á la derecha del dividendo, puede asegurarse que el cociente de toda división inexacta se podrá expresar siempre en fracción decimal del órden que se quiera.

Escolio. Al resultado obtenido por este procedimiento se llama **aproximación del cociente en decimales,** y de él se desprende la siguiente regla:

Para aproximar el cociente de una división inexacta, en menos de una unidad decimal de determinado órden, se halla el cociente entero; se pone después de él una coma y se continúa la división, agregando previamente un cero á cada resto parcial, hasta obtener en el cociente la cifra del órden que se desea.

Ejemplo. *Aproximar hasta milésimas el cociente de la división de* 387 *por* 23.

Esta operación se dispone, para mayor claridad, en esta forma:

387	23
157	16,826
190	
60	
140	
2	

Luego, 387:23 = 16,826.

ARTÍCULO VI.

DE LA ELEVACIÓN Á POTENCIAS, DE NÚMEROS FRACCIONARIOS.

133. La definición de esta operación es la misma que la de la potenciación de enteros (**61**), de la que, además de las deducciones ya expuestas al tratar de aquéllos, se obtiene que cada una de las potencias sucesivas de un quebrado es menor que la anterior, ó lo que es lo mismo, que las potencias de un quebrado van disminuyendo á medida que crece el exponente.

La elevación de un número fraccionario á una potencia se indica, poniéndole dentro de un paréntesis y, fuera de éste, el exponente; así, la elevación á la *enésima* potencia de los números fraccionarios $\frac{a}{b}$ y $c+\frac{d}{e}$ se indica $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ y $\left(c+\frac{d}{e}\right)^n$.

§ 1.°—Elevación á potencias, de fracciones ordinarias.

134. Teorema. *La potencia de cualquier grado de una fracción es igual á la potencia del mismo grado del numerador, dividida por la del denominador.*

En efecto, según la definición de potencia, se tiene

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\ldots\times\frac{a}{b}=\frac{aa\ldots a}{bb\ldots b}=\frac{a^m}{b^m}.$$

Corolario. *Toda potencia de una fracción irreducible es otra fracción irreducible;* pues sus términos serán primos entre sí (**92-Corol. 3.°** y **104-Corol. 1.°**).

Escolio. De aquí se deducen las siguientes reglas:

1.ª *Para elevar una fracción á una potencia se elevan á dicha potencia el numerador y el denominador y se divide la del primero por la del segundo.*

2.ª *Para elevar un número mixto á una potencia se reduce á fracción y se eleva ésta á la potencia propuesta.*

Ejemplos.

1.° $\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{3^3}{5^3}=\frac{27}{125}.$

2.° $\left(6\frac{5}{8}\right)^3=\left(\frac{53}{8}\right)^3=\frac{53^3}{8^3}=\frac{148877}{512}=290\frac{397}{512}.$

§ 2.°—Elevación á potencias, de decimales.

135. *Para elevar á una potencia un decimal se procede como si fuese entero y, de la derecha del resultado, se separan, con una coma, tantas cifras como unidades tenga el producto del exponente por el número de cifras decimales del número propuesto, anteponiendo, en caso necesario, los ceros suficientes para esta separación;* pues si el decimal dado fuese, por ejemplo, 7,623, se tendría

$$(7{,}623)^2=\left(\frac{7623}{1000}\right)^2=\frac{7623^2}{1000^2}=\frac{7623^2}{(10^3)^2}=\frac{7623^2}{10^{3\times 2}}\ (\mathbf{65}),$$

donde se ve que la última fracción indica que el cuadrado del entero, 7623, se ha de dividir por $10^{3\times 2}$, que es la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el producto del exponente, 2, por el número de cifras decimales del número propuesto, 7,623.

Ejemplos.

1.° *Hallar el cuadrado de 4,075.*

Disponiendo la operación en la forma expuesta al márgen, se obtiene que $(4{,}075)^2=16{,}605625$.

$$\begin{array}{r}
4075\\
4075\\
\hline
20375\\
28525\\
16\,300\\
\hline
16{,}605625
\end{array}$$

2.° *Hallar el cubo de 0,27.*

Disponiendo la operación, en la forma expuesta al márgen, resulta un producto, 19683, de cinco cifras, y como hay que separar, *seis*, producto del exponente, 3, por el número, 2, de cifras decimales de 0,17, se hace necesario anteponer á aquél dos ceros, para expresar, con el primero de ellos, la parte entera, lo que da $(0{,}27)^3=0{,}019683$.

$$\begin{array}{r|r}
27 & 729\\
27 & 27\\
\hline
189 & 5103\\
54 & 1458\\
\hline
729 & 19683
\end{array}$$

ARTÍCULO VII.

DE LA EXTRACCIÓN DE RAÍCES, DE NÚMEROS FRACCIONARIOS.

---

§ 1.°—Generalidades.

136. La definición de esta operación es la misma que la de la radicación de enteros (69), pero hay que tener presente que cada una de las sucesivas raíces de un quebrado es mayor que la anterior, ó lo que es lo mismo, que las raíces de los quebrados van aumentando á medida que crece el índice.

137. Teorema. *La raíz de cualquier grado de una fracción es igual á la raíz del mismo grado del numerador, dividida por la del denominador;* es decir, que

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

En efecto, elevando á la potencia del grado m la fracción $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$, se tiene $\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m=\frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m}=\frac{a}{b}$;

luego $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$ es la raíz del grado m de $\frac{a}{b}$.

Escolio 1.° Como todo número mixto se puede transformar en una fracción, la raíz de cualquier grado de un número mixto es la de la fracción equivalente á él.

Así se tendrá $\sqrt[m]{a\frac{b}{c}}=\sqrt[m]{\frac{ac+b}{c}}$, y suponiendo $ac+b=s$,

$$\sqrt[m]{a\frac{b}{c}}=\sqrt[m]{\frac{s}{c}}.$$

Escolio 2.° Si el numerador y el denominador de una fracción son potencias perfectas de cierto grado, se dice que la fracción es *potencia perfecta* de dicho grado.

§ 2.°—De la raíz cuadrada de números fraccionarios.

A.—*Preliminares.*

138. Teorema. *Toda fracción cuyo denominador no es cuadrado perfecto es equivalente á otra cuyo denominador lo sea.*

En efecto, si $\frac{M}{N}$ es una fracción cuyo denominador no sea cuadrado perfecto, multiplicando sus dos términos por N, se tendrá la fracción equivalente, $\frac{MN}{N^2}$, cuyo denominador lo es evidentemente. Sin embargo, puede lograrse que el denominador, cuadrado perfecto, sea lo menor posible, en virtud de las consideraciones siguientes.

Si descomponemos N en sus factores primos y resulta $N=a^{2p}b^{2q-1}c^{2r-1}$, se tendrá $\frac{M}{N}=\frac{M}{a^{2p}b^{2q-1}c^{2r-1}}$.

Multiplicando los dos términos de la fracción del segundo miembro de esta igualdad por el producto, bc, resultará

$$\frac{M}{N}=\frac{Mbc}{a^{2p}b^{2q-1}c^{2r-1}bc}=\frac{Mbc}{a^{2p}b^{2q}c^{2r}};$$

donde se ve que á la fracción propuesta es equivalente otra cuyo denominador es un cuadrado perfecto (101-Corol. 1.°), menor que N^2.

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para transformar una fracción en su equivalente del menor denominador cuadrado perfecto se transforma en irreducible; se descompone el denominador de ésta en sus factores primos y se multiplican los dos términos de ella por los factores que, en esta descomposición, tengan exponente impar.

Ejemplo. *Transformar en otra equivalente, de denominador cuadrado perfecto, la fracción* $\frac{67}{504}$.

Descompuesto el denominador en sus factores primos, se tiene $504=2^3\times3^2\times7$ y, por tanto,

$$\frac{67}{504}=\frac{67}{2^3\times3^2\times7}=\frac{67\times2\times7}{2^3\times3^2\times7\times2\times7}=\frac{938}{2^4\times3^2\times7^2}.$$

B.—*Extracción de la raiz cuadrada, de fracciones ordinarias.*

139. Del Teorema anterior y de su Escolio se deduce la siguiente regla:

Para extraer la raiz cuadrada de una fracción se transforma en su equivalente del menor denominador cuadrado perfecto, si el de la dada no lo es, y se divide la raiz cuadrada, exacta ó entera, del nuevo numerador por la exacta del nuevo denominador.

Para extraer la raiz cuadrada de un número mixto se convierte en fracción y se opera con ésta.

Ejemplos.

1.° *Extraer la raiz cuadrada de* $\frac{169}{625}$.

Como la descomposición del denominador, expuesta al márgen, dá $625=5^4$, que es el cuadrado de 5^2, se tendrá

625	5
125	5
25	5
5	5
1	

$$\sqrt{\frac{169}{625}}=\sqrt{\frac{169}{5^4}}=\frac{\sqrt{169}}{\sqrt{5^4}}=\frac{13}{5^2}=\frac{13}{25}.$$

2.° *Extraer la raiz cuadrada de* $\frac{197}{216}$.

Como la descomposición del denominador, expuesta al márgen, dá $216=2^3\times3^3$, que no es cuadrado perfecto, se tendrá

216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$$\sqrt{\frac{197}{216}}=\sqrt{\frac{197}{2^3\times3^3}}=\sqrt{\frac{197\times2\times3}{2^4\times3^4}}=\sqrt{\frac{1182}{6^4}}$$
$$=\frac{\sqrt{1182}}{\sqrt{6^4}}=\frac{34}{6^2}=\frac{34}{36}.$$

Observación. La raiz cuadrada de $\frac{1182}{6^4}$ está comprendida entre $\frac{34}{36}$ y $\frac{35}{36}$, por estarlo entre 34 y 35 la de 1182, de donde se deduce que *la raiz cuadrada de una fracción cuyo numerador no es cuadrado perfecto, pero sí el denominador, se obtiene en menos de una unidad fraccionaria de la especie indicada por la raiz cuadrada de éste.*

C.—*Extracción de la raiz cuadrada de decimales.*

140. *Para extraer la raiz cuadrada de un decimal se hace par, si no lo es, el número de sus cifras decimales, colocando á su derecha un cero; se extrae la raiz cuadrada del decimal, como si fuese entero, y de la derecha de ella, se separa, con una coma, un número de cifras, mitad del de decimales del radicando*, pues éste es una fracción cuyo denominador es una potencia de grado par de 10 (61-4.°) y, por tanto, de sus factores 2 y 5; luego la raiz cuadrada de dicha fracción será la de su numerador, dividida por la unidad seguida de un número de ceros, mitad del de cifras decimales del radicando.

Así, $\sqrt{22,4892}=4,74$ y $\sqrt{38,527}=\sqrt{38,5270}=6,20$.

141. Teorema. *La raiz cuadrada de un entero, que no sea cuadrado perfecto, se puede expresar siempre en fracción decimal.*

En efecto, sea, por ejemplo, 43, el entero cuya raiz cuadrada queremos obtener. Considerando á este número como un decimal cuya parte fraccionaria es cero y efectuando la extracción de la raiz cuadrada en la forma ordinaria, expuesta al márgen, se obtiene que 6,55 es la raiz pedida, con un error, por defecto, menor que una centésima.

$\sqrt{43,00.00}$	6,55
7 0.0	12
7 5 0.0	130
9 7 5	

Por otra parte, como este procedimiento no tiene otro límite que el número de pares de ceros que se escriban, ó se supongan escritos, á la derecha del radicando, puede asegurarse que la raiz cuadrada de un entero, que no sea cuadrado perfecto, se podrá expresar siempre en fracción decimal, con un error menor que una unidad del órden que se quiera.

Escolio. Al resultado obtenido por este procedimiento se llama **aproximación de la raiz cuadrada en decimales**, y de él se desprende la siguiente regla:

Para aproximar la raiz cuadrada de un entero, en menos de una unidad decimal de determinado órden, se obtiene la raiz entera: se pone después de ella una coma y se continúa la operación, agregando previamente dos ceros á cada residuo parcial, hasta obtener en la raiz la cifra del órden que se desea.

§ 3.° — De la raíz cúbica de los números fraccionarios.

A. — *Preliminares.*

142. Teorema. *Toda fracción cuyo denominador no es cubo perfecto es equivalente á otra cuyo denominador lo sea.*

En efecto, si $\frac{M}{N}$ es una fracción cuyo denominador no sea cubo perfecto, multiplicando sus dos términos por N^2, se tendrá la fracción equivalente, $\frac{MN^2}{N^3}$, cuyo denominador lo es evidentemente. Sin embargo, puede lograrse que el denominador, cubo perfecto, sea lo menor posible, en virtud de las consideraciones siguientes.

Si descomponemos N en sus factores primos y resulta $N = a^{3p}b^{3q-1}c^{3r-2}$, se tendrá $\frac{M}{N} = \frac{M}{a^{3p}b^{3q-1}c^{3r-2}}$.

Multiplicando los dos términos de la fracción del segundo miembro de esta igualdad por el producto, bc^2, resultará

$$\frac{M}{N} = \frac{Mbc^2}{a^{3p}b^{3q-1}c^{3r-2}bc^2} = \frac{Mbc^2}{a^{3p}b^{3q}c^{3r}};$$

donde se ve que á la fracción propuesta es equivalente otra cuyo denominador es un cubo perfecto (**101-Corol. 2.°**), menor que N^3.

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla: *Para transformar una fracción en su equivalente del menor denominador cubo perfecto se transforma en irreducible; se descompone el denominador de ésta en sus factores primos y se multiplican los dos términos de ella por los factores suficientes para que los del denominador tengan exponentes múltiplos de 3.*

Ejemplo. *Transformar en otra equivalente, de denominador cubo perfecto, la fracción* $\frac{67}{504}$.

Descompuesto el denominador en sus factores primos, se tiene $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$ y, por tanto,

$$\frac{67}{504} = \frac{67}{2^3\times3^2\times7} = \frac{67\times3\times7^2}{2^3\times3^2\times7\times3\times7^2} = \frac{9849}{2^3\times3^3\times7^3}.$$

B. — *Extracción de la raíz cúbica de fracciones ordinarias.*

143. Del Teorema anterior y de su Escolio se deduce la siguiente regla:

Para extraer la raíz cúbica de una fracción se transforma en su equivalente del menor denominador cubo perfecto, si el de la dada no lo es, y se divide la raíz cúbica, exacta ó entera, del nuevo numerador por la exacta del nuevo denominador. Para extraer la raíz cúbica de un número mixto se convierte en fracción y se opera con ésta.

Ejemplos.

1.° *Extraer la raíz cúbica de* $\frac{2197}{15625}$.

Como la descomposición del denominador, expuesta al margen, dá $15625 = 5^6$, que es el cubo de 5^2, se tendrá

15625	5
3125	5
625	5
125	5
25	5
5	5
1	

$$\sqrt[3]{\frac{2197}{15625}} = \sqrt[3]{\frac{2197}{5^6}} = \frac{\sqrt[3]{2197}}{\sqrt[3]{5^6}} = \frac{13}{5^2} = \frac{13}{25}.$$

2.° *Extraer la raíz cúbica de* $\frac{1345}{3888}$.

Como la descomposición del denominador, expuesta al margen, dá $3888 = 2^4 \times 3^5$, que no es cubo perfecto, se tendrá

3888	2
1944	2
972	2
486	2
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$$\sqrt[3]{\frac{1345}{3888}} = \sqrt[3]{\frac{1345}{2^4\times3^5}} = \sqrt[3]{\frac{1345\times2^2\times3}{2^6\times3^6}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{16140}{6^6}} = \frac{\sqrt[3]{16140}}{\sqrt[3]{6^6}} = \frac{25}{6^2} = \frac{25}{36}.$$

Observación. La raíz cúbica de $\frac{16140}{6^6}$ está comprendida entre $\frac{25}{36}$ y $\frac{26}{36}$, por estarlo entre 25 y 26 la de 16140, de donde se deduce que *la raíz cúbica de una fracción cuyo numerador no es cubo perfecto, pero sí el denominador, se obtiene en menos de una unidad fraccionaria de la especie indicada por la raíz cúbica de éste.*

C.—*Extracción de la raiz cúbica de decimales.*

144. *Para extraer la raiz cúbica de un decimal se hace múltiplo de 3 el número de sus cifras decimales, colocando á su derecha los ceros suficientes; se extrae la raiz cúbica del decimal, como si fuese entero, y de la derecha de ella, se separa, con una coma, un número de cifras, tercio del de decimales del radicando;* pues éste es una fraccion cuyo denominador es una potencia de grado múltiplo de 3, de 10, (**61**-4.°) y, por tanto, de sus factores 2 y 5; luego la raiz cúbica de dicha fraccion será la de su numerador, dividida por la unidad seguida de un número de ceros, tercio del de cifras decimales del radicando.

Así, $\sqrt[3]{56{,}492538}=3{,}83$ y $\sqrt[3]{23{,}6854}=\sqrt[3]{23{,}685400}=2{,}87$.

145. Teorema. *La raiz cúbica de un entero, que no sea cubo perfecto, se puede expresar siempre en fraccion decimal.*

En efecto, sea, por ejemplo, 78, el entero cuya raiz cúbica queremos obtener. Considerando á éste como un decimal cuya parte fraccionaria es cero y efectuando la extraccion de la raiz cúbica en la forma ordinaria, expuesta al márgen, se obtiene que 4,27 es la raiz pedida, con un error, por defecto, menor que una centésima.

$\sqrt[3]{78.000.000}$	4,27
64	
140.00	48
39 120.00	5292
1 455 17	

Por otra parte, como este procedimiento no tiene otro límite que el número de periodos de á tres ceros que se escriban, ó se supongan escritos, á la derecha del radicando, puede asegurarse que la raiz cúbica de un entero, que no sea cubo perfecto, se podrá expresar siempre en fraccion decimal, con un error menor que una unidad del órden que se quiera.

Escolio. Al resultado obtenido por este procedimiento se llama **aproximacion de la raiz cúbica en decimales**, y de él se desprende la siguiente regla:

Para aproximar la raiz cúbica de un entero, en menos de una unidad decimal de determinado órden, se obtiene la raiz entera; se pone despues de ella una coma y se continúa la operacion, agregando previamente tres ceros á cada residuo parcial, hasta obtener en la raiz la cifra del órden que se desea.

ARTÍCULO VIII.

TRANSFORMACIONES RECÍPROCAS DE LAS FRACCIONES ORDINARIAS Y DECIMALES.

§ 1.°—Clasificacion de las fracciones decimales.

146. Las fracciones decimales se clasifican en *exactas* é *inexactas*.

Fraccion decimal exacta *es la que consta de un número limitado de cifras;* como 0,28.

Fraccion decimal inexacta *es la que tiene un número ilimitado de cifras.*

Las fracciones decimales inexactas pueden ser *periódicas* ó *nó periódicas*.

Fraccion decimal periódica *es toda inexacta en que un grupo de cifras, llamado* PERIODO, *se repite en el mismo órden, sucesiva é indefinidamente.*

Las fracciones decimales periódicas pueden ser *puras* ó *mixtas*.

Fraccion decimal periódica pura *es aquella cuyo período empieza desde las décimas;* como 0,2727...., en la que el período es 27.

Fraccion decimal periódica mixta *es aquella á cuyo período preceden algunas cifras que forman una parte irregular ó nó periódica;* tal es la fraccion 0,1607171..., cuya parte irregular es 160 y el período 71.

Fraccion decimal inexacta, nó periódica, *es toda fraccion decimal inexacta en que no hay repeticion ordenada de cifras.*

§ 2.° — Conversión de fracciones ordinarias, en decimales.

147. Teorema. *Toda fracción ordinaria se puede convertir en decimal.*

En efecto, como toda fracción ordinaria es equivalente al cociente de su numerador por su denominador (**102**) y el cociente de toda división inexacta se puede expresar en fracción decimal (**132**), si efectuamos dicha división y expresamos el cociente en decimales, éste será la fracción decimal equivalente á la propuesta.

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para convertir una fracción ordinaria, en decimal, se divide el numerador por el denominador, aproximando el cociente hasta el órden decimal que se desee.

Ejemplos. *Convertir en decimales las fracciones* $\frac{7}{25}$, $\frac{3}{11}$ y $\frac{5}{6}$.

Disponiendo las operaciones en la forma expuesta á continuación, se tendrá

70	25	30	11	50	6
200	0,28	80	0,27...	20	0,833...
00		3		20	
				2	

y, por tanto, $\frac{7}{25}=0{,}28$; $\frac{3}{11}=0{,}2727...$ y $\frac{5}{6}=0{,}833...$

148. Teorema. *De la conversión de una fracción ordinaria, en decimal, resulta necesariamente una decimal exacta ó periódica.*

En efecto, al hacer las sucesivas divisiones necesarias para transformar en decimal la fracción $\frac{a}{b}$, se puede llegar ó nó á un resto *cero*. En el primer caso el cociente obtenido será la decimal equivalente á la fracción propuesta; pero en el segundo, como todos los restos han de ser menores que el divisor, b, al cabo de $b-1$ divisiones, á lo más, se repetirá alguno de los restos obtenidos anteriormente y por tanto, se repetirá también la cifra que aquél produjo en el cociente, el cual será una fracción *periódica pura*, si dicho resto es igual al primero, y *periódica mixta*, si lo es á alguno de los posteriores.

149. Teorema. *Para que una fracción irreducible sea equivalente á una decimal exacta es necesario y suficiente que su denominador no contenga más factores primos que 2 y 5 ó uno de éstos.*

En efecto, el procedimiento seguido para la conversión de una fracción ordinaria en decimal equivale á multiplicar el numerador por una potencia de 10, dividir este producto por el denominador y separar, con una coma, á la derecha del cociente, tantas cifras como unidades tenga el exponente de dicha potencia; luego la conversión de la fracción, $\frac{a}{b}$, á decimal, se obtiene por la división $\frac{a\times 10^m}{b}$.

Ahora bien, para que esta división sea exacta, es necesario que b sea divisor del producto $a\times 10^m$, y como es primo con a, deberá ser divisor de 10^m (**91**) y, por tanto, lo será de 10 (**92-Cor. 2.°**), para lo cual es necesario que no contenga ningún factor primo distinto de los de 10, que son 2 y 5 (**100**).

Corolario. *Para que una fracción cualquiera sea equivalente á una decimal exacta es necesario y suficiente que los factores primos, distintos de 2 y 5, que contenga uno de sus términos estén también contenidos en el otro;* pues, al transformarla en irreducible, no quedarán en el denominador más que los factores primos, 2 ó 5.

150. La transformación de fracciones ordinarias en decimales contribuye á facilitar las operaciones con aquéllas, reemplazándolas por otras con decimales.

Si las fracciones ordinarias son equivalentes á decimales exactas, los resultados de las operaciones que se hagan con éstas serán equivalentes á los resultados de las que se hiciesen con aquéllas; pero si las fracciones ordinarias, transformadas en decimales, dan decimales periódicas, como éstas, sea cualquiera el órden á que las aproximemos, no expresarán nunca el verdadero valor de aquéllas, no se operará con fracciones decimales equivalentes á las ordinarias dadas, sinó con otras aproximadas, y, por tanto, los resultados que se obtengan del cálculo con aquéllas no serán absolutamente equivalentes á los del cálculo con éstas, sinó que serán también aproximados.

151. Se llama **error absoluto**, ó simplemente **error**, en la valuación de una cantidad *la diferencia entre los valores exacto y aproximado de dicha cantidad.* El error puede ser *por exceso* ó *por defecto*, según que el valor aproximado sea *mayor* ó *menor* que el exacto.

El valor aproximado de todo decimal puede darse con un error, por defecto, menor que una unidad decimal del órden que se quiera; pues si se tiene, por ejemplo,

$$A = 13{,}5624628$$

y se omiten las cifras siguientes á las milésimas, se tendrá

$$A = 13{,}562$$

con un error, por defecto, igual á $13{,}5624628 - 13{,}562 = 0{,}0004628$, que es menor que diez diezmilésimas ó *una* milésima.

También podrá hacerse que el error sea, por defecto ó por exceso, menor que media unidad decimal del órden que se quiera, omitiendo todas las cifras siguientes á las de aquel órden, si la primera de ellas es menor que 5, como en el ejemplo propuesto, en que el error, 0,0004628, es menor que cinco diezmilésimas ó *media* milésima; mas si la primera de las cifras omitidas no fuese menor que 5, convendrá aumentar en una unidad la última de las que se aprecian. Así, por ejemplo, si la cantidad $A = 13{,}5627628$ se expresa por.......................... $A = 13{,}562$ se comete un error, por defecto, igual á $13{,}5627628 - 13{,}562 = 0{,}0007628$, mayor que *media* milésima, pero si se expresa por................ $A = 13{,}563$ se comete un error, por exceso, igual á $13{,}563 - 13{,}5627628 = 0{,}0002372$, menor que *media* milésima.

De aquí se deducen las siguientes reglas:

1.ª *Para valuar un número con un error menor que una unidad de un órden dado, se suprimen las cifras siguientes á la de este órden.*

2.ª *Para valuar un número con un error menor que media unidad de un órden dado, se suprimen las cifras siguientes á la de este órden, si la primera de ellas es menor que 5; pero, si no lo es, se aumenta aquélla en una unidad y se suprimen las restantes.*

§ 3.º—Conversión de fracciones decimales en ordinarias.

152. La conversión de una fracción decimal, en ordinaria, tiene por objeto hallar una fracción ordinaria, llamada *generatriz* de la decimal, equivalente á ésta, y comprende cuatro casos, según que la fracción decimal sea exacta, periódica pura, periódica mixta ó inexacta no periódica.

Primer caso. *Conversión de una fracción decimal exacta, en ordinaria.*

Sea $0{,}mnpq$ una fracción decimal exacta y f su generatriz, con lo que se tendrá $f = 0{,}mnpq$.

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene la fracción dada, se obtiene $10000f = mnpq$, y, dividiendo por 10000 é indicando el cociente en forma de fracción ordinaria, $f = \frac{mnpq}{10000}$; de donde se deduce la siguiente regla:

Para convertir una fracción decimal exacta, en fracción ordinaria, se pone por numerador la decimal, considerada como entero, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga.

Ejemplos. $0{,}984 = \frac{984}{1000} = \frac{123}{125}$; $5{,}28 = 5\frac{28}{100} = 5\frac{7}{25}$.

Segundo caso. *Conversión de una fracción decimal periódica pura, en ordinaria.*

Sea $0{,}mnpmnp...$ una fracción decimal periódica pura y f su generatriz, con lo que se tendrá $f = 0{,}mnpmnp...$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene el periodo, se obtiene la igualdad $1000f = mnp{,}mnpmnp...$ (*), de la que, restando ordenadamente la anterior, se obtiene $999f = mnp{,}mnpmnp... - 0{,}mnpmnp... = mnp$, y dividiendo por 999, $f = \frac{mnp}{999}$, de donde se deduce la siguiente regla:

Para convertir una fracción decimal periódica pura, en fracción ordinaria, se pone por numerador el periodo y por denominador tantos nueves como cifras tiene éste.

Ejemplos. $0{,}4545... = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$; $6{,}2727... = 6\frac{27}{99} = 6\frac{3}{11}$.

(*) Puesto que es infinito el número de periodos de la decimal dada, se puede suponer que la parte decimal de f y de $1000f$ es la misma.

Tercer caso. *Conversión de una fracción decimal periódica mixta, en ordinaria.*

Sea $0,mnpqrqr...$ una fracción decimal periódica mixta y f su generatriz, con lo que se tendrá $f=0,mnpqrqr...$ Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tienen la parte irregular y el periodo y, separadamente, por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene la parte irregular, se obtienen las igualdades

$$100000\, f = mnpqr,qrqr...$$
$$1000\, f = mnp,qrqr...$$

de las que, restadas ordenadamente, se obtiene la igualdad $99000f = mnpqr - mnp$ y, dividiendo por 99000,

$f = \frac{mnpqr - mnp}{99000}$, de donde se deduce la siguiente regla:

Para convertir una fracción decimal periódica mixta, en ordinaria, se pone por numerador la parte irregular seguida del periodo, ménos la misma parte irregular, y por denominador tantos nueves como cifras tiene el periodo, seguidos de tantos ceros como cifras tiene la parte irregular.

Ejemplos. $0,3571428571428... = \frac{3571428-3}{9999990} = \frac{3571425}{9999990} = \frac{5}{14}$

$$15,833... = 15\,\frac{83-8}{90} = 15\,\frac{75}{90} = 15\,\frac{5}{6}.$$

Observación. La fracción que se obtiene al convertir, en ordinaria, una fracción periódica no es equivalente á ésta sino en cuanto en ella se consideren todos sus períodos; mas como éstos son en número infinito, la generatriz obtenida expresará el valor á que se aproxima la decimal, tanto más, cuanto mayor sea el número de períodos que en ella se consideren.

Cuarto caso. *Conversión de una fracción decimal inexacta nó periódica, en ordinaria.*

Esta transformación se hace aproximadamente, tomando un número limitado de cifras de la fracción decimal y considerándola como exacta.

Así, de 0,5374926... se obtiene

$$f = \frac{537}{1000};\ f' = \frac{5374}{10000};\ f'' = \frac{53749}{100000}\ \text{etc.}$$

CAPÍTULO IV.

DE LOS NÚMEROS INCONMENSURABLES.

ARTÍCULO PRIMERO.

ORÍGEN Y EXPRESIÓN DE LOS NÚMEROS INCONMENSURABLES.

153. La medida práctica de una cantidad no produce nunca un número inconmensurable, pues al llegar á cierto grado de pequeñez en la unidad de medida, no es posible apreciar las veces que está contenida en la cantidad que se mide, ni aun si lo está ó nó exactamente, ya por la insuficiencia de los medios materiales de medir, ya por el limitado alcance de nuestros sentidos, pareciéndonos, por lo tanto, que la cantidad dada es medible y que la expresión es exactamente una totalidad de unidades de las últimas apreciables.

De aquí se deduce que ninguna medida se hace con exactitud y que es racional presumir que los números inconmensurables tienen su origen en el cálculo, como así es en efecto, según se hace patente en la siguiente proposición.

154. Teorema. *La raíz de un grado cualquiera de un número, que no sea potencia perfecta del mismo grado, es un número inconmensurable.*

En efecto: 1.° Si el radicando es un número entero, A, su raíz del grado m no puede ser un número entero, porque A no es, según la hipótesis, potencia perfecta del grado m, y tampoco puede ser un número fraccionario porque, convertido en fracción irreducible, si no lo fuese, su potencia del grado m sería otra fracción irreducible (**134-Cor.**) y no el entero A (**104-Cor. 2.°**); luego si la raíz de A no puede ser un número entero ni uno fraccionario, será necesariamente un número inconmensurable.

2.° Si el radicando es un número fraccionario de la forma $\frac{p}{q}$, después de convertido en su equivalente, $\frac{p'}{q'}$, irreducible, si aquél no lo fuese, la raíz del grado m de la fracción $\frac{p'}{q'}$ no puede ser un número entero, porque cualquier potencia de un número entero es necesariamente otro número entero, y tampoco puede ser un número fraccionario, tal como $\frac{a}{b}$, porque, si así fuera, se tendría $\frac{p'}{q'}=\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$, lo que daría $p'=a^m$ y $q'=b^m$ y, por tanto, la fracción $\frac{p'}{q'}$ sería una potencia perfecta del grado m, contra lo supuesto; luego si la raíz de $\frac{p}{q}$ no puede ser un número entero ni un número fraccionario, será, necesariamente, un número inconmensurable.

Escolio. La extracción de raíces es, pues, la única operación aritmética que, con datos conmensurables, produce resultados inconmensurables, de donde se deduce que la fracción decimal resultante de la aproximación de una raíz es necesariamente inexacta, nó periódica, pues toda decimal exacta ó periódica es equivalente al número conmensurable expresado por su generatriz (**152**).

Los números inconmensurables que resultan de la extracción de raíces inexactas reciben el nombre particular de *irracionales*.

155. Teorema. *Todo número inconmensurable está comprendido entre otros dos conmensurables cuya diferencia puede ser menor que cualquier cantidad por pequeña que sea.*

En efecto, sea A un número inconmensurable y $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \dots \frac{l}{n}, \frac{l+1}{n}$ una série de números, en la que, representando l y n dos enteros cualesquiera y dando á l el valor conveniente, puede ser el último todo lo grande que se quiera.

El número A que, por su naturaleza, no puede ser ninguno de los de la serie, que son todos conmensurables, estará necesariamente comprendido entre dos consecutivos, por ejemplo, $\frac{l}{n}$ y $\frac{l+1}{n}$, cuya diferencia, $\frac{1}{n}$, puede ser todo lo pequeña que se quiera, dando á n el valor suficientemente grande.

Escolio. Todo número inconmensurable se puede expresar aproximadamente por cualquiera de dos conmensurables que le comprendan.

ARTÍCULO II.

DEL CÁLCULO DE NÚMEROS INCONMENSURABLES.

156. Llámase **cantidad variable** *á la que, referida siempre á la misma unidad, puede admitir diferentes valores:* tales son la fracción decimal periódica, equivalente á una ordinaria, y la expresión decimal de una raíz inconmensurable; y llámase **cantidad constante** *á la que, referida á la misma unidad, conserva siempre el mismo valor.*

Límite de una cantidad variable *es toda cantidad constante á la que se van aproximando cuanto se quiera los valores sucesivos de la variable, pero sin llegar nunca á igualarse á aquélla:* tales son una fracción ordinaria generatriz de una decimal periódica, respecto á las distintas valuaciones de ésta, y una raíz inconmensurable, respecto á su expresión aproximada en decimales.

El límite es *superior* ó *inferior*, según que la constante sea siempre mayor ó siempre menor que los sucesivos valores de la variable.

157. Teorema. *Una cantidad variable no puede tener dos límites diferentes.*

En efecto, si se supone que la cantidad variable, V, tiene dos límites superiores diferentes L y L′, siendo, por ejemplo, $L' > L$, designando por D la diferencia de éstos, se tendrá $L' - L = D$, y como V es siempre menor que L, designando por α su diferencia, que puede llegar á ser menor que cualquier cantidad por pequeña que sea, se tendrá también $L - V = \alpha$ ó $V = L - \alpha$ y, por tanto,

$$L' - V = L' - (L - \alpha) = L' - L + \alpha.$$

Sustituyendo, en esta igualdad, en vez de $L' - L$ su valor D, se transforma en

$$L' - V = D + \alpha,$$

lo que indica que la diferencia $L' - V$, compuesta de una cantidad constante, D, y del valor, α, no alcanzará nunca el grado de pequeñez necesario para que L′ sea límite superior de V.

De una manera análoga se demostraría esta proposición, suponiendo que l y l' fuesen dos límites inferiores, diferentes, de una variable V.

158. Teorema (llamado de los límites). *Si dos cantidades variables son constantemente iguales, sus límites son iguales.*

En efecto, si dos variables V y V′ van pasando simultáneamente por los mismos valores, se irán aproximando igualmente á sus respectivos límites, L y L′; luego el de la primera lo será también de la segunda y recíprocamente, y como cada una de ellas no puede tener más que uno, será necesariamente $L = L'$.

159. Teorema. *El límite del resultado de efectuar una operación con cantidades variables es igual al resultado de verificar la misma operación con los límites de dichas variables, es decir, que el límite de una suma, diferencia, producto, etc. de cantidades variables es igual á la suma, diferencia, producto, etc. de sus límites.*

En efecto, si A y B son dos variables cuyos límites son A′ y B′, y A y B se acercan cuanto se quiera á A′ y B′, la suma, $A+B$, la diferencia, $A-B$, el producto, AB, etc. se acercarán, respectivamente, á $A'+B'$, $A'-B'$, $A'B'$ etc. tanto como se quiera.

160. De lo expuesto se deduce:

1.° Que el cálculo de números inconmensurables se reduce al de los conmensurables que expresen valores aproximados de aquéllos, entendiéndose que los resultados de las operaciones con los inconmensurables son los límites de las operaciones hechas con sus valores aproximados.

2.° Que los resultados de éstas son tanto más aproximados á los de aquéllas cuanto más lo estén los datos á sus respectivos límites.

3.° Que se pueden *generalizar* ó hacer extensivas á los números inconmensurables las propiedades de los conmensurables, con sólo aplicar la que se trata de generalizar á los valores aproximados de los números inconmensurables propuestos y sustituir en el resultado, cada uno de dichos valores por su límite respectivo.

Así, para generalizar el teorema de que *el valor de un producto es independiente del órden de los factores*, diremos: sean a, b, c, d varias cantidades variables cuyos respectivos límites sean los números inconmensurables a', b', c', d'.

Desde luego sabemos que $abcd=cadb$ (**53** y **126**), y como el límite de $abcd$ es $a'b'c'd'$ y el de $cadb$ es $c'a'd'b'$ (**159**), se tendrá $a'b'c'd' = c'a'd'b'$ (**158**).

APÉNDICE AL LIBRO II.

BREVES IDEAS SOBRE LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NÚMEROS APROXIMADOS.

161. Como muchos números conmensurables y todos los inconmensurables se expresan aproximadamente en decimales, hay que operar frecuentemente con valores aproximados de otros exactos, lo que produce en el resultado un error cuya magnitud depende de los errores de los datos.

De aquí procede la necesidad de determinar el error del resultado de una operación, conocidos los de los datos, para prefijar el límite del error de éstos cuando se desea que el de aquél no exceda de un límite dado, lo que origina el Cálculo de números aproximados que, en la imposibilidad de exponerlo elementalmente en toda su extensión, limitaremos á los casos más sencillos y de aplicación más frecuente.

I.—Adición.

162. Teorema. *El error de la suma de dos ó más números aproximados, por defecto, es, también por defecto, igual á la suma de los errores de los sumandos.*

En efecto, sean $a, b, c, \ldots$ varios sumandos, $a', b', c', \ldots$ sus valores aproximados, por defecto, y e_a, e_b, e_c .... los respectivos errores de éstos, con lo que se tendrá

$$a = a' + e_a \,;\; b = b' + e_b \,;\; c = c' + e_c \,.$$

Sumando, miembro á miembro, estas igualdades, resulta

$$\begin{aligned} a+b+c+\ldots &= (a'+e_a)+(b'+e_b)+(c'+e_c)+\ldots \\ &= (a'+b'+c'+\ldots)+(e_a+e_b+e_c+\ldots), \end{aligned}$$

de donde se obtiene la igualdad

$$a+b+c+\ldots-(a'+b'+c'+\ldots)=e_a+e_b+e_c+\ldots$$

ó sea, llamando E_s al error de la suma, expresado por el primer miembro,

$$E_s = e_a + e_b + e_c + \ldots$$

Corolario. *Para que el error, por defecto, de la suma de números aproximados, por defecto, sea menor que una unidad de determinado órden, basta que el error de cada sumando sea menor que una unidad inferior en uno, dos, etc., órdenes al de la prefijada, según que los sumandos sean ménos de diez, más de diez y ménos de ciento y así sucesivamente;* pues para que el error de la suma sea menor que $\frac{1}{10^n}$ basta que, si los sumandos son ménos de diez, el error de cada uno sea menor que $\frac{1}{10^{n+1}}$, porque así se tendrá $E_s < \frac{1}{10^{n+1}} \times 10$, ó sea, $E_s < \frac{1}{10^n}$; y que, si los sumandos son más de diez, pero ménos de cien, el error de cada uno sea menor que $\frac{1}{10^{n+2}}$, porque así se tendrá $E_s < \frac{1}{10^{n+2}} \times 100$, ó sea, $E_s < \frac{1}{10^n}$, y así sucesivamente.

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para obtener, con un error por defecto, menor que una unidad de determinado órden, la suma de varios números aproximados, si éstos no son más de diez, se valúan todos por defecto, con un error menor que la unidad inferior en un órden á la prefijada; se suman estos valores; se tacha en la suma la última cifra de la derecha y se agrega una unidad á la anterior. Si los sumandos son más de diez y ménos de cien, se valúan todos por defecto, con un error menor que la unidad inferior en dos órdenes á la prefijada; se suman estos valores; se tachan en la suma las dos últimas cifras de la derecha y se agrega una unidad á la anterior, y así sucesivamente.

Ejemplo. *Hallar, con un error menor que una milésima, la suma* 7,5493685+2,365967967...+9,2835376+3,853853...

7,5493 2,3659 9,2835 3,8538 23,0525	La operación se dispone en la forma, expuesta al márgen, y la suma pedida será 23,053.

II. Sustracción.

163. Teorema. *El error de la diferencia de dos números aproximados, por defecto, es, por defecto ó por exceso, igual á la diferencia de los errores de dichos números.*

En efecto, sean a y b dos números exactos, a' y b' sus valores aproximados, por defecto, y e_a, e_b los respectivos errores de éstos, con lo que se tendrá

$$a = a' + e_a \,;\; b = b' + e_b.$$

Restando, miembro á miembro, estas igualdades, resulta $a-b=(a'+e_a)-(b'+e_b)=a'+e_a-b'-e_b$ (37-Esc. 1.º) que, si $e_a>e_b$, se podrá expresar $a-b=(a'-b')+(e_a-e_b)$ y, si $e_a<e_b$, se podrá expresar $a-b=(a'-b')-(e_b-e_a)$.

Designando por E_d el error de la diferencia, se tendrá

$E_d=(a-b)-(a'-b')=e_a-e_b$ (por defecto, si $e_a>e_b$)

$E_d=(a'-b')-(a-b)=e_b-e_a$ (por exceso, si $e_a<e_b$).

Corolario. *Para que el error de la diferencia de dos números aproximados, por defecto, sea menor que una unidad de determinado órden, basta que el error de cada número sea menor que dicha unidad;* pues siendo el error de cada número menor que $\frac{1}{10^n}$, la diferencia E_d de estos errores será, con mayor razón, menor que $\frac{1}{10^n}$.

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para obtener, con un error menor que una unidad de determinado órden, la diferencia de dos números aproximados, se valúan ámbos por defecto, con un error menor que la unidad prefijada y se restan estos valores, debiendo tener presente que el error de la diferencia será por defecto ó por exceso, según que el del minuendo sea mayor ó menor que el del sustraendo.

Ejemplos.

Hallar, con un error menor que 0,001, *las diferencias* 9,1857362—5,2432626....., y 18,64923493—12,436715715.....

Las operaciones se dispone en la forma, expuesta al márgen, y de ellas se obtiene:

9,185 5,243 3,942	18,649 12,436 6,213	de la primera, la diferencia 3,942, con error por defecto, y de la segunda, la diferencia 6,213, con error por exceso.

III. Multiplicación.

164. Teorema. *El error del producto de un número aproximado, por defecto, por uno exacto, es, también por defecto, igual al producto de éste por el error del primero.*

En efecto, sea a un número y a' su valor aproximado, por defecto, con un error e_a, y sea m un número exacto, con lo que se tendrá

$$a = a' + e_a \text{ y } am = (a' + e_a)m = a'm + e_a m, \quad \text{(51-Esc. 1.°)},$$

de donde resulta la igualdad $am - a'm = e_a m$, ó sea, llamando E_p al error del producto, expresado por el primer miembro, $E_p = e_a m$.

Corolario 1.° *Para que el error del producto de un número aproximado, por defecto, por uno exacto que consta de un solo órden de unidades, sea menor que una unidad de determinado órden, basta que, si el factor exacto consta sólo de unidades ó de decenas ó de centenas, etc., el error del aproximado sea, respectivamente, menor que una unidad inferior en uno, dos, tres, etc., órdenes al de la prefijada y, si el factor exacto consta sólo de décimas ó de centésimas ó de milésimas, etc. el error del aproximado sea, respectivamente, igual á la unidad prefijada ó inferior á ella en uno, dos, etc., órdenes;* pues para que se verifique la condición $E_p = e_a m < \frac{1}{10^n}$ basta tener

$$e_a < \frac{1}{10^n} : m \quad \text{ó sea} \quad e_a < \frac{1}{m \cdot 10^n}.$$

Como m representa ménos de diez unidades de un órden, es evidente que dicha condición se cumplirá sobradamente, haciendo

$$e_a < \frac{1}{10.10^n} \text{ ó sea } e_a < \frac{1}{10^{n+1}}, \text{ si las } m \text{ son unidades simples.}$$

$$e_a < \frac{1}{10^2.10^n} \text{ ó sea } e_a < \frac{1}{10^{n+2}}, \text{ si las } m \text{ son decenas,}$$

.... etc. ....

$$e_a < \frac{1}{1.10^n} \text{ ó sea } e_a < \frac{1}{10^n}, \text{ si las } m \text{ son décimas,}$$

$$e_a < \frac{1}{\frac{1}{10} . 10^n} \text{ ó sea } e_a < \frac{1}{10^{n-1}}, \text{ si las } m \text{ son centésimas,}$$

.... etc. ....

Corolario 2.° *Para que el error del producto de un número aproximado por cualquier número exacto sea menor que una unidad de determinado órden, basta que, si la suma de los valores absolutos de las cifras de éste es mayor que diez y menor que ciento, el error de cada producto parcial sea menor que una unidad inferior en dos órdenes á la prefijada* (*); pues designando por s la suma de dichos valores absolutos, si cada producto parcial tiene un error menor que el producto de la cifra que le origina por una unidad de un órden dado, la suma de todos ellos tendrá un error menor que s veces dicha unidad; luego, si s es mayor que 10, pero menor que 100, se deberá llevar la valuación de cada uno de los productos parciales al órden inferior al pedido, en dos lugares.

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para obtener, con un error menor que una unidad de determinado órden, el producto de un número aproximado, por defecto, por uno exacto, se coloca la cifra de las unidades de primer órden de éste, debajo de la que, en el aproximado, sea del órden inferior en dos órdenes al de la aproximación prefijada; á la derecha se colocan, en órden inverso, las demás cifras de la parte entera del multiplicador y á la izquierda, también en órden inverso, las de la parte decimal, si la hubiere; se efectúan las multiplicaciones parciales de las cifras del multiplicador por el multiplicando, empezando cada una por la cifra de éste que se halle sobre la respectiva del multiplicador y se escriben los productos unos debajo de otros, correspondiéndose en columna sus primeras cifras de la derecha; se suman los productos parciales; se tachan las dos últimas cifras de la derecha de la suma y se aumenta la anterior en una unidad.

Ejemplo. *Hallar, con un error menor que una centésima, el producto de* 4,35926571 *por* 68,47.

La operacion se dispone en la forma, expuesta al márgen, y de ella se obtiene el producto pedido 298,48.

```
4,3 5926571
       7486
-----------
  261 5556
   34 8736
    1 7436
      3045
----------
 298,4773
```

(*) No consideramos los casos en que la suma de los valores absolutos de las cifras del factor exacto sea menor que 10 ni mayor que 100, porque rara vez se presentan en la práctica corriente.

IV. División.

165. Teorema. *El error del cociente de un número aproximado, por defecto, por uno exacto es igual al cociente del error del dividendo por el divisor.*

En efecto, sea a un número y a' su valor aproximado por defecto, con un error e_a, y sea m un número exacto, con lo que se tendrá

$a = a' + e_a$ y $a : m = (a' + e_a) : m = a' : m + e_a : m$ (58-Esc.), de donde resulta la igualdad $a : m - a' : m = e_a : m$, ó sea, llamando E_c al error del cociente, expresado por el primer miembro, $E_c = e_a : m$.

Corolario. *Para que el error del cociente de un número aproximado, por defecto, por uno exacto sea menor que una unidad de determinado orden, basta que el error del dividendo sea menor que el producto del divisor por la unidad prefijada;* pues, para que se verifique la condición

$E_c = e_a : m < \frac{1}{10^n}$, basta tener $e_a < \frac{1}{10^n} \times m$.

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para obtener, con un error menor que una unidad de determinado orden, el cociente de un número aproximado por uno exacto, se multiplica el divisor por la unidad prefijada; se valúa el dividendo, por defecto, con un error menor que la mayor unidad contenida en este producto; se verifica la división por el procedimiento ordinario y se aumenta en una unidad la última cifra de la derecha del cociente.

Ejemplo. *Hallar, con un error menor que una diezmilésima, el cociente de* 7,68549321 *por* 0,83.

Debiendo ser el error del dividendo menor que el producto $0,83 \times 0,001 = 0,00083$, para que esto se verifique basta que dicho error sea menor que 0,00010, ó sea, 0,0001 y, por tanto, disponiendo la operación en la forma expuesta al márgen, el cociente pedido será 9,260.

```
7,6854 |0,83
0 215   9,259
  494
   790
    430
```


LIBRO III.

DE LA COMPARACIÓN DE NÚMEROS ABSTRACTOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

DEFINICIONES.

166. Razón de dos números *es el resultado de su comparación.* La razón de dos números puede ser *aritmética* ó *geométrica.*

Razón aritmética de dos números *es su diferencia,* y **razón geométrica** *su cociente;* así, la razón aritmética de 12 y 4 es $12 - 4 = 8$ y la geométrica $\frac{12}{4} = 3$.

En toda razón hay necesariamente dos términos, á los que se dan los nombres de *antecedente* y *consecuente;* así, tanto en la razón aritmética, $a - b$, como en la geométrica, $\frac{a}{b}$, el antecedente es a y el consecuente es b.

Toda razón aritmética es una sustracción indicada cuyo minuendo es el antecedente, el sustraendo el consecuente y la diferencia la razón; luego, por lo expuesto al tratar de la sustracción, en toda razón aritmética, el antecedente es igual al consecuente más la razón, y el consecuente es igual al antecedente menos la razón.

Toda razón geométrica es una división indicada cuyo dividendo es el antecedente, el divisor el consecuente y el cociente la razón, ó también una fracción cuyo numerador es el antecedente, el denominador el consecuente y la fracción misma la razón; luego, por lo expuesto al tratar de la división y de las fracciones, en toda razón geométrica, el antecedente es igual al consecuente multiplicado por la razón, y el consecuente es igual al antecedente dividido por la razón.

Dos razones son inversas, una de otra, *cuando una de ellas es igual á la otra invertida.*

Así, $a - b$ y $b - a$ son dos razones **aritméticas** inversas, y $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$ son dos razones **geométricas** inversas.

167. Proporción *es la igualdad de dos razones:* si éstas son aritméticas, tales como $a - b$ y $c - d$, la proporción recibe el nombre particular de *equidiferencia* y se expresa en la forma $a - b = c - d$ y, si son geométricas, tales como $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, la proporción se llama también *igualdad fraccionaria* y se expresa en la forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, que ordinariamente se lee, a es á b como c es á d (*).

Dos proporciones son inversas, una de otra, *cuando las razones de cada una de ellas son las inversas de las de la otra.*

Términos opuestos de una proporción *son el antecedente de una razón y el consecuente de la otra.* Estos se clasifican en *extremos* y *medios*, según su posición en la proporción: así, tanto en la proporción aritmética, $a - b = c - d$, como en la geométrica, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, son términos opuestos los extremos a y d y los medios b y c.

Cuarto proporcional á tres números dados *es cualquiera de los términos de una proporción, con relación á los otros tres.* Si la proporción es aritmética, el cuarto proporcional recibe el nombre particular de *cuarto diferencial.*

Proporción continua *es aquella cuyos términos opuestos son iguales:* tales son las *aritméticas,* $a - b = b - c$ y $m - n = p - m$,
y las *geométricas*, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ y $\frac{m}{n} = \frac{p}{m}$.

Medio proporcional entre dos números dados *es cualquiera de los opuestos iguales de una proporción continua.* Si esta es aritmética, el medio proporcional recibe el nombre particular de *medio diferencial.*

(*) Antiguamente se escribía la proporción aritmética entre los números a, b, c y d en esta forma, $a \,.\, b :: c \,.\, d$
y la geométrica entre los mismos números, $a : b :: c : d$.
que se leían, respectivamente, a es aritméticamente á b, como c es á d, y a es geométricamente á b, como c es á d.

CAPÍTULO II.

PROPORCIONES.

ARTÍCULO PRIMERO.

DE LAS EQUIDIFERENCIAS Ó PROPORCIONES ARITMÉTICAS

168. Teorema. *En toda equidiferencia, son iguales las sumas de los términos opuestos.*

En efecto, sea la equidiferencia $a - b = c - d$.

Agregando á ambos miembros de esta igualdad, la suma, $b + d$, de los consecuentes, se tendrá

$$a - b + b + d = c - d + b + d,$$

ó sea, $a + d = c + b$.

Corolario 1.° *Un término cualquiera de una equidiferencia es igual á la diferencia entre su opuesto y la suma de los otros dos;* pues, de la equidiferencia $a - b = c - d$, se obtiene $a + d = b + c$, de donde resulta

$a = b + c - d$; $d = b + c - a$; $b = a + d - c$ y $c = a + d - b$

Corolario 2.° *El medio diferencial entre dos números dados es igual á su semisuma;* pues, de la equidiferencia continua, $a - b = b - c$, se obtiene $2b = a + c$, y dividiendo por 2 ambos miembros de esta igualdad,

$$b = \frac{a + c}{2}.$$

Escolio. De aquí se deducen las siguientes reglas:

1.ª *Para hallar un término desconocido de una equidiferencia, conocidos los otros tres, se resta su opuesto, de la suma de los otros dos;* así, de la equidiferencia $13 - 8 = 30 - x$, se obtiene $x = 8 + 30 - 13 = 38 - 13 = 25$.

2.ª *Para hallar el medio diferencial entre dos números dados, se divide su suma por 2;* así, el medio diferencial entre 37 y 6, es $\frac{37 + 6}{2} = \frac{43}{2} = 21{,}5$.

169. Teorema (recíproco del anterior). *Si la suma de dos números es igual á la de otros dos, los cuatro números forman una equidiferencia cuyos términos opuestos son los dos sumandos de cada suma.*

En efecto, sea $a + d = b + c$.

Restando de ambos miembros de esta igualdad la suma de uno de los términos del primero y otro de los del segundo, tal como $b + d$, se tendrá

$$a + d - (b + d) = b + c - (b + d)$$
ó sea $$a + d - b - d = b + c - b - d$$
ó sea $$a - b = c - d.$$

Corolario. *Una equidiferencia puede sufrir todas las transformaciones que no alteren la igualdad de las sumas de los términos opuestos;* pues ésta es la condición esencial para que subsista la equidiferencia, de donde se deduce:

1.° Que se puede agregar ó restar un mismo número á dos términos no opuestos, ya sean los dos de una razón, los antecedentes ó los consecuentes, porque dicho número aparecerá agregado ó restado de los dos miembros de la igualdad de las sumas de los términos opuestos.

2.° Que de una equidiferencia dada pueden obtenerse otras, mediante la *permutación* ó cambio mútuo de lugar de dos términos opuestos, ó mediante la *inversión* de las razones, porque subsistirán siempre, como opuestos, los mismos valores.

Así, la equidiferencia, $a - b = c - d$, da lugar á *ocho* equidiferencias, reducibles á una misma forma, que son:

la propuesta..............................	$a - b = c - d$
y, permutando sus medios, las..........	$a - c = b - d$
y, permutando los extremos en las dos anteriores, las.........................	$d - b = c - a$
	$d - c = b - a$.

é, invirtiendo las cuatro anteriores, las

$$b - a = d - c;\ c - a = d - b;\ b - d = a - c;\ c - d = a - b.$$

ARTÍCULO II.

DE LAS IGUALDADES FRACCIONARIAS, PROPORCIONES GEOMÉTRICAS ó, simplemente, PROPORCIONES.

170. Teorema. *En toda proporción, son iguales los productos de los términos opuestos.*

En efecto, sea la proporcion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por el producto, bd, de los consecuentes, se tendrá

$\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd$, ó sea, $ad = cb$.

Corolario 1.° *Un término cualquiera de una proporción es igual al cociente de dividir, por su opuesto, el producto de los otros dos;* pues, de la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se obtiene $ad = bc$, de donde resulta

$a = bc : d;\ d = bc : a;\ b = ad : c;\ c = ad : b.$

Corolario 2.° *El medio proporcional entre dos números dados es igual á la raíz cuadrada de su producto;* pues, de la proporción continua, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, se obtiene $b^2 = ac$, y extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros de esta igualdad, $b = \sqrt{ac}$.

Escolio. De aquí se deducen las siguientes reglas:

1.ª *Para hallar un término desconocido de una proporción, conocidos los otros tres, se divide, por su opuesto, el producto de los otros dos:* así, de la proporción, $\frac{7}{x} = \frac{5}{8}$, se obtiene $x = (7 \times 8) : 5 = 56 : 5 = 11\frac{1}{5}$.

2.° *Para hallar el medio proporcional entre dos números dados, se extrae la raíz cuadrada de su producto;* así, el medio proporcional entre los números 9 y 4, es

$$\sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} = 6.$$

171. Teorema (recíproco del anterior). *Si el producto de dos números es igual al de otros dos, los cuatro números forman una proporción cuyos términos opuestos son los dos factores de cada producto.*

En efecto, sea $ad = bc$.

Dividiendo ambos miembros de esta igualdad por el producto de uno de los factores del primero y otro de los del segundo, tal como bd, se tendrá

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}, \text{ ó sea, } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Corolario. *Una proporción puede sufrir todas las transformaciones que no alteren la igualdad de los productos de los términos opuestos*; pues ésta es la condición esencial para que subsista la proporción, de donde se deduce:

1.° Que se pueden multiplicar ó dividir por un mismo número dos términos no opuestos, ya sean los dos de una razón, los antecedentes ó los consecuentes, porque dicho número aparecerá como factor ó divisor común de los dos miembros de la igualdad de los productos de los términos opuestos.

2.° Que de una proporción dada pueden obtenerse otras, mediante la *permutación* ó cambio mútuo de lugar de dos términos opuestos, ó mediante la *inversión* de las razones, porque subsistirán siempre, como opuestos, los mismos valores.

Así, la proporción, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, da lugar á *ocho* proporciones, reducibles á una misma forma, que son:

la propuesta .... $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

y, permutando sus medios, la .... $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

y, permutando los extremos en las dos anteriores, las .... $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

é, invirtiendo las cuatro anteriores, las

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c};\ \frac{c}{a} = \frac{d}{b};\ \frac{b}{d} = \frac{a}{c};\ \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$$

172. Teorema. *Si dos proporciones tienen comunes dos términos no opuestos, las razones de los otros, respectivamente homólogos, son iguales* (*).

En efecto: 1.° Si los términos comunes son los de una razón, cómo en las proporciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, se tiene evidentemente que $\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$.

2.° Si los términos comunes son los antecedentes, cómo en las proporciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{a}{m} = \frac{c}{n}$, permutando los términos medios en ámbas, se obtienen las proporciones $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ y $\frac{a}{c} = \frac{m}{n}$, de las que resulta $\frac{b}{d} = \frac{m}{n}$.

3.° Si los términos comunes son los consecuentes, cómo en las proporciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{m}{b} = \frac{n}{d}$, permutando los términos medios en ámbas, se obtienen las proporciones $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ y $\frac{m}{n} = \frac{b}{d}$, de las que resulta $\frac{a}{c} = \frac{m}{n}$.

Escolio. La propiedad anterior se enuncia también en esta forma:

Si dos proporciones tienen una razón común, las otras dos razones forman una proporción; si tienen comunes los antecedentes, la forman los consecuentes; y si tienen comunes los consecuentes, la forman los antecedentes.

173. Teorema. *Si dos proporciones tienen comunes dos términos opuestos, las razones de los otros, respectivamente homólogos, son inversas.*

En efecto, de las dos proporciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{a}{m} = \frac{n}{d}$ se obtienen las igualdades $ad = bc$ y $ad = mn$, de donde se deduce la igualdad $bc = mn$, de la que resulta la proporción $\frac{b}{m} = \frac{n}{c}$.

(*) Se llaman términos *homólogos* ú *homólogamente dispuestos* en dos proporciones á los que ocupan en ellas los mismos lugares: tales son, en las proporciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, los a y m, b y n, c y p, d y q.

174. Teorema. *Si se multiplican ordenadamente dos ó más proporciones, los productos forman proporción.*

En efecto, de las proporciones ó igualdades fraccionarias, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'}$; $\frac{a''}{b''}=\frac{c''}{d''}$, multiplicándolas miembro á miembro, resulta $\frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'}\times\frac{a''}{b''}=\frac{c}{d}\times\frac{c'}{d'}\times\frac{c''}{d''}$ ó sea la proporción $\frac{aa'a''}{bb'b''}=\frac{cc'c''}{dd'd''}$.

La razón de la nueva proporción es el producto de las razones de las propuestas.

Corolario. *Las potencias ó las raíces del mismo grado de los términos de una proporción, forman proporción;* pues, si se multiplican ordenadamente los términos de m igualdades idénticas á la $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, resulta la proporción $\frac{a^m}{b^m}=\frac{c^m}{d^m}$ y, recíprocamente, si se elevan á la potencia del grado m los dos miembros de la igualdad $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}}$, resulta la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Las razones de las nuevas proporciones son, respectivamente, la potencia y la raíz del mismo grado, de la razón de la propuesta.

175. Teorema. *Si se dividen ordenadamente dos proporciones, los cocientes forman proporción.*

En efecto, de las proporciones $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'}$ se obtienen las igualdades, $ad=bc$ y $a'd'=b'c'$, que, divididas miembro á miembro, dan la igualdad $\frac{ad}{a'd'}=\frac{bc}{b'c'}$ ó sea $\frac{a}{a'}\times\frac{d}{d'}=\frac{b}{b'}\times\frac{c}{c'}$ (120), de la que, dividiendo sucesivamente por $\frac{b}{b'}$ y por $\frac{d}{d'}$, resulta $\frac{a}{a'}:\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}:\frac{d'}{d}$ ó sea $\frac{a:a'}{b:b'}=\frac{c:c'}{d:d'}$.

La razón de la nueva proporción es el cociente de la razón de la primera por la de la segunda de las propuestas.

176. Teorema. *En toda proporción, la suma ó diferencia de los términos de una razón es á la suma ó diferencia de los de la otra, como el antecedente de la primera es al de la segunda, ó como el consecuente de aquélla es al de ésta.*

En efecto, de la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se obtiene la igualdad $ad=bc$, de la que, añadiendo ó restando en sus dos miembros el producto, ac, de los antecedentes ó el, bd, de los consecuentes, resulta

$ac\pm ad=ac\pm bc$ ó sea $a(c\pm d)=c(a\pm b)$, de donde $\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{a}{c}$

y $ad\pm bd=bc\pm bd$ ó sea $d(a\pm b)=b(c\pm d)$, de donde $\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{b}{d}$

proporciones, que, presentadas separadamente, serán

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c};\ \frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{c}\ \text{y}\ \frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d};\ \frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d}.$$

Si a y c fuesen, respectivamente, menores que b y d, se tendría $\frac{b-a}{d-c}=\frac{a}{c}$ y $\frac{b-a}{d-c}=\frac{b}{d}$.

Ejemplo. *De la proporción* $\frac{55}{30}=\frac{11}{6}$ *se obtiene*

$$\frac{85}{17}=\frac{55}{11};\ \frac{85}{17}=\frac{30}{6}\ \text{y}\ \frac{25}{5}=\frac{55}{11};\ \frac{25}{5}=\frac{30}{6}.$$

Corolario 1.º *En toda proporción, la suma ó diferencia de los términos de una razón es á su antecedente ó á su consecuente, como la suma ó diferencia de los términos de la otra es á su antecedente ó á su consecuente;* pues de las proporciones $\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{a}{c}$ y $\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{b}{d}$, permutando los medios, resulta $\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}$ y $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$, proporciones que, presentadas separadamente, serán

$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c};\ \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}\ \text{y}\ \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d};\ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

Ejemplo. *De la proporción* $\frac{55}{30}=\frac{11}{6}$ *se obtiene*

$$\frac{85}{55}=\frac{17}{11};\ \frac{25}{55}=\frac{5}{11}\ \text{y}\ \frac{85}{30}=\frac{17}{6};\ \frac{25}{30}=\frac{5}{6}.$$

Corolario 2.° *En toda proporción, la suma de los términos de una razón es á la suma de los de la otra, como la diferencia de aquéllos es á la de éstos;* pues de las proporciones $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}$ y $\frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{c}$ resulta $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}$.

Ejemplo. *De la proporción* $\frac{55}{30}=\frac{11}{6}$ *se obtiene* $\frac{85}{17}=\frac{44}{24}$.

Corolario 3.° *En toda proporción, la suma de los términos de una razón es á su diferencia, como la suma de los de la otra es á su diferencia;* pues de la proporción $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}$, permutando medios, resulta $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

Ejemplo. *De la proporción* $\frac{55}{30}=\frac{11}{6}$ *se obtiene* $\frac{85}{25}=\frac{17}{5}$.

177. Teorema. *En toda proporción, la suma ó diferencia de los antecedentes es á la suma ó diferencia de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

En efecto, de la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se obtiene la igualdad $ad=bc$, de la que, añadiendo ó restando en sus dos miembros el producto, ab, de los términos de la primera razón ó el, cd, de los de la segunda, resulta $ab\pm ad=ab\pm bc$ ó sea $a(b\pm d)=b(a\pm c)$, de donde

$$\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a}{b}$$

y $ad\pm cd=bc\pm cd$ ó sea $d(a\pm c)=c(b\pm d)$, de donde

$$\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{c}{d}.$$

proporciones que, presentadas separadamente, serán

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b};\ \frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}\ \text{y}\ \frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d};\ \frac{a-c}{b-d}=\frac{c}{d}.$$

Si a y b fuesen, respectivamente, menores que c y d, se tendría $\frac{c-a}{d-b}=\frac{a}{b}$ y $\frac{c-a}{d-b}=\frac{c}{d}$.

Ejemplo. *De la proporción* $\frac{55}{30}=\frac{11}{6}$ *se obtiene*

$$\frac{66}{36}=\frac{55}{30};\ \frac{44}{24}=\frac{55}{30}\ \text{y}\ \frac{66}{36}=\frac{11}{6};\ \frac{44}{24}=\frac{11}{6}.$$

Corolario 1.° *En toda proporción, la suma ó diferencia de los antecedentes es á uno de ellos, como la suma ó diferencia de los consecuentes es al respectivo consecuente;* pues de las proporciones $\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a}{b}$ y $\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{c}{d}$, permutando los medios, resultan las proporciones $\frac{a\pm c}{a}=\frac{b\pm d}{b}$ y $\frac{a\pm c}{c}=\frac{b\pm d}{d}$, que, presentadas separadamente, serán

$$\frac{a+c}{a}=\frac{b+d}{b};\ \frac{a-c}{a}=\frac{b-d}{b}\ \text{y}\ \frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d};\ \frac{a-c}{c}=\frac{b-d}{d}.$$

Ejemplo. *De la proporción* $\frac{55}{30}=\frac{11}{6}$ *se obtiene*

$$\frac{66}{55}=\frac{36}{30};\ \frac{44}{55}=\frac{24}{30}\ \text{y}\ \frac{66}{11}=\frac{36}{6};\ \frac{44}{11}=\frac{24}{6}.$$

Corolario 2.° *En toda proporción, la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como la diferencia de aquéllos es á la de éstos;* pues de las proporciones $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$ y $\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}$ ó de las $\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$ y $\frac{a-c}{b-d}=\frac{c}{d}$ resulta la proporción $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$.

Ejemplo. *De la proporción* $\frac{55}{30}=\frac{11}{6}$ *se obtiene* $\frac{66}{36}=\frac{44}{24}$.

Corolario 3.° *En toda proporción, la suma de los antecedentes es á su diferencia, como la suma de los consecuentes es á su diferencia;* pues de la proporción $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$, permutando medios, resulta $\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$.

Ejemplo. *De la proporción* $\frac{55}{30}=\frac{11}{6}$ *se obtiene* $\frac{66}{44}=\frac{36}{24}$.

CAPÍTULO III.

DE LAS SERIES DE RAZONES IGUALES.

178. Llámase **serie de razones iguales** *á la expresión de la igualdad de más de dos razones*, y **razón de la serie** *á cualquiera de las razones que entran en ella.*

179. Teorema. *En toda serie de razones iguales, la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

En efecto, sea la serie de razones iguales $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}$.

De la proporción $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ se deduce $\frac{a+a'}{b+b'}=\frac{a'}{b'}$ (177), pero, como $\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}$, se tendrá $\frac{a+a'}{b+b'}=\frac{a''}{b''}$, de donde resulta $\frac{a+a'+a''}{b+b'+b''}=\frac{a''}{b''}=\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b}$.

180. Teorema. *Si dos series de razones iguales tienen comunes todos los antecedentes y uno de los consecuentes, los demás consecuentes serán iguales.*

En efecto, de las dos series de razones iguales

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f} \text{ y } \frac{a}{b}=\frac{c}{d'}=\frac{e}{f'}$$

se forman las proporciones $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{a}{b}=\frac{c}{d'}$, de las que se obtiene $bc : a=d=d'$,

y las proporciones $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$ y $\frac{a}{b}=\frac{e}{f'}$, de las que se obtiene $be : a=f=f'$.

Corolario. *Si dos series de razones iguales tienen comunes todos los consecuentes y uno de los antecedentes, los demás antecedentes serán iguales*; pues, invirtiendo las razones, se obtendrán otras dos series de razones iguales, cuyos antecedentes serán los consecuentes de la primera.

SEGUNDA PARTE.

DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

LIBRO PRIMERO.

DE LA NUMERACIÓN DE NÚMEROS CONCRETOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

DE LAS UNIDADES CONCRETAS.

ARTÍCULO PRIMERO.

GENERALIDADES.

181. Las cantidades concretas se clasifican en *continuas* y *discontinuas*.

Cantidad continua *es toda cantidad concreta, susceptible de aumentar ó disminuir por incrementos ó decrementos de magnitud arbitraria ;* y **cantidad discontinua** *es toda cantidad concreta cuyos aumentos ó decrementos no pueden ser más que en una de las unidades que componen su totalidad;* como, por ejemplo, una arboleda, un ganado, en los que el aumento ó disminución se verifica, necesariamente, en un árbol ó en una res.

Las cantidades contínuas, más comunmente usadas, son de estas especies: *lineales, superficiales, volumétricas, de capacidad, ponderales, monetarias y de tiempo.*

Las diversas unidades lineales, superficiales, volumétricas y de capacidad se llaman *medidas ;* las ponderales, *pesas;* las monetarias, *monedas;* y las de tiempo, *cronométricas.*

El conjunto de medidas y pesas se llama *sistema de medidas y pesas*, el de monedas, *sistema monetario*, y el de unidades de tiempo, *sistema cronométrico.*

ARTÍCULO II.

SISTEMAS DE MEDIDAS Y PESAS, MONETARIO Y CRONOMÉTRICO. (*).

§ 1.°—Sistemas españoles.

A.—*Sistema métrico decimal de medidas y pesas* (**)

182. El sistema legal español de medidas y pesas es el *métrico decimal,* llamado así, porque la unidad fundamental, de la que se derivan las principales de cada especie de medidas, es el METRO, y porque toda unidad de un órden cualquiera, en cada especie de medidas, es 10, 100 ó 1000 veces mayor que la de su órden inmediato inferior.

Las unidades principales del sistema métrico decimal son las siguientes:

De longitud, el **metro**, que se escribe abreviadamente.......	**m.**
De superficie, el **metro cuadrado**........................	**m²**
De volumen, el **metro cúbico**............................	**m³**
De capacidad, el **litro**.................................	**l**
De peso, el **gramo**.....................................	**g.**

La nomenclatura de este sistema consiste, en anteponer al nombre de cada unidad principal, para designar sus *múltiplos,* las voces griegas,

	deca,	*hecto,*	*kilo,*	*miria,*
que abreviadamente se escriben	D.	h.	k.	µ.
y significan, respectivamente,	diez,	ciento,	mil,	diez mil,

y, para designar sus *divisores,*

las voces latinas............	*deci,*	*centi,*	*mili,*
que abreviadamente se escriben	d.	c.	m.
y significan, respectivamente,	décima de,	centésima de,	milésima de,

(*) Las leyes de cada país establecen el sistema nacional de medidas y pesas y el monetario, pero como su uniformidad es altamente conveniente para facilitar las relaciones mercantiles, se procura, por medio de tratados internacionales, llegar á la adopción de sistemas comunes á todos los pueblos civilizados, ya que en ellos se emplea, con ligeras excepciones, el mismo sistema cronométrico.

(**) Este sistema, establecido primeramente en Francia, se ha adoptado sucesivamente en los reinos de Bélgica é Italia y en el imperio de Alemania, estándolo *legalmente* en España desde 19 de Julio de 1849 y, como obligatorio, desde 1.° de Enero de 1860.

183. **Medidas lineales ó de longitud.**

Son las que sirven para medir la distancia de un punto á otro y el largo de las cosas, como telas, cintas, etc.

La unidad principal de longitud es el METRO, diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano de París.

Cada una de las diversas unidades lineales tiene *diez* de la de su órden inmediato inferior, y sus nombres, designación abreviada y usos son los siguientes:

Múltiplos.........	Miriámetro.	(µm.)	En *Miriámetros* y *Kilómetros* se expresan las grandes distancias. Las fraccciones de kilómetro se expresan en *metros*, pues el hectómetro y decámetro no se usan.
	Kilómetro..	(km.)	
	Hectómetro.	(hm.)	
	Decámetro..	(Dm.)	
Unidad principal..	**Metro**.....	(m.)	El *metro* se emplea para las medidas de uso común. Las fracciones de metro se expresan ordinariamente en *centimetros*.
Divisores.........	Decímetro..	(dm.)	
	Centímetro.	(cm.)	El *centímetro* y *milimetro* se aplican á la medida de pequeñas longitudes.
	Milímetro..	(mm.)	
	Micron (*)..	(µ.)	El *micron* es la milésima de milímetro y se aplica á observaciones delicadas con el auxilio de unos tornillos, llamados micrométricos.

Una colección de medidas de longitud se compone de las siguientes:

De hierro. Una cadena de diez, veinte ó veinticinco metros, generalmente dividida en metros, que se marcan con medallas de numeración.

De latón ó de encina. Una regla de un metro, dividido en decímetros, centímetros y milímetros.

De boj, hueso ó marfil. Una regla de dos decímetros (doble decímetro), divididos en centímetros y milímetros.

(*) Unidad acordada por la Comisión internacional de Pesas y Medidas. (*Real orden de* 16 *de Diciembre de* 1880).

184. Medidas superficiales.

Son las que sirven para medir la extensión de tableros, suelos, campos, territorios, etc. y reciben también el nombre de *unidades cuadradas*, por ser cuadrados cuyo lado es una unidad lineal.

La unidad principal de superficie es el *metro cuadrado*, que se forma construyendo un cuadrado que tenga de lado un metro.

Toda unidad de superficie contiene *cien* de las de su órden inmediato inferior. Para demostrarlo basta considerar que si cada uno de los lados de un cuadrado, que sea una unidad superficial, se divide en diez partes iguales y se unen los puntos de división de los lados opuestos, se tendrán diez fajas de á diez cuadrados cada una, de donde resultarán, en total, *cien* unidades superficiales del órden inmediato inferior al de la propuesta.

Los nombres de las diversas unidades superficiales, su designación abreviada y usos son los siguientes:

Múltiplos..	Miriámetro cuadrado..........	(μm^2.)
	Kilómetro cuadrado..........	(km^2.)
	Hectómetro cuadrado ó Hectárea	(hm^2) ó (ha.)
	Decámetro cuadrado ó área...	(Dm^2) ó (a.)
Unidad principal.	Metro cuadrado ó centiárea..	(m^2) ó (ca)
Divisores..	Decímetro cuadrado..........	(dm^2.)
	Centímetro cuadrado.........	(cm^2.)
	Milímetro cuadrado...........	(mm^2.)

En *Miriámetros* y *Kilómetros cuadrados* se expresan las grandes extensiones, como la de una nación, provincia, etc.

En *hectáreas*, *áreas* y *centiáreas* (llamadas MEDIDAS AGRARIAS), se expresa la medida de tierras.

En *metros* y *decímetros cuadrados*, la de los solares, pavimentos, etc.

En *centímetros* y *milímetros cuadrados*, la de pequeñas superficies.

No se construyen unidades superficiales, pues la determinacion de las medidas de esta especie se obtiene por procedimientos que son objeto de la Geometría.

Observación. No deben confundirse la décima y milésima de metro cuadrado con el decímetro y milímetro cuadrado, pues la décima contiene diez decímetros cuadrados, la centésima es el mismo decímetro cuadrado, que contiene cien centímetros cuadrados, y la milésima diez de éstos, ó sea mil milímetros cuadrados.

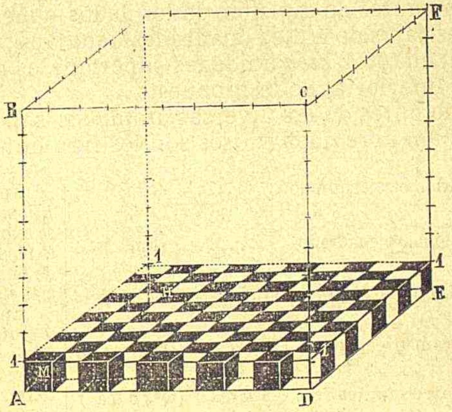
185. Medidas volumétricas.

Son las que sirven para medir el tamaño de los cuerpos, la cabida de locales, vasijas, etc., y reciben también la denominación de *unidades cúbicas*, porque son cubos cuyo lado es una unidad lineal (*).

La unidad principal de volúmen es el *metro cúbico*, que se forma construyendo un cubo que tenga de lado un metro.

Toda unidad de volúmen contiene *mil* de las de su órden inmediato inferior.

Para demostrarlo basta considerar que si el cubo ABCDEFGH



representa una de ellas, todos los lados representarán la correspondiente unidad lineal, y, por tanto, cada una de las diez partes iguales en que se divide cada lado representará la unidad lineal del órden inmediato inferior.

Ahora bien, si se unen por medio de un plano los puntos de división 1111, correspondientes á lados opuestos, en dirección de la altura del cubo dado, y, por medio de otros planos, los correspondientes en lados opuestos de las bases, se tendrá una capa ADEH1111 de *cien* cubos iguales al M, que representará una unidad volumétrica del orden inmediato inferior al representado por el cubo ABCDEFGH, y como éste contendrá *diez* de dichas capas, resultarán, en total, *mil* cubos iguales al M.

Así, si el cubo ABCDEFGH representa un metro cúbico, por ejemplo, el M representará un decimetro cúbico.

(*) Se llama CUBO al cuerpo limitado por seis cuadrados iguales, que se llaman *caras del cubo*.

Los nombres de las diversas unidades volumétricas, su designación abreviada y usos son los siguientes:

Unidad principal.	Metro cúbico ó esterio	(m^3.)	No se usa ninguna medida de volúmen superior al metro cúbico.
Divisores..	Decímetro cúbico.......	(dm^3.)	En *metros cúbicos*, con el nombre de *toneladas de arqueo*, se expresa la cabida de buques y otros grandes volúmenes.
	Centímetro cúbico......	(cm^3.)	En *metros*, *decímetros* y *centímetros cúbicos* se expresan los volúmenes de los objetos comunes.
	Milímetro cúbico	(mm^3.)	En *milímetros cúbicos*, los de los muy pequeños.

No se construyen unidades volumétricas, pues la determinación de las medidas de esta especie se obtiene por procedimientos que son objeto de la Geometría.

Observación. No deben confundirse la décima y centésima de metro cúbico con el decímetro y centímetro cúbico, pues la décima contiene cien decímetros cúbicos, y la centésima, diez mil centímetros cúbicos.

186. Medidas de capacidad. Las medidas de volúmen tienen el inconveniente de no poderse aplicar á la medida de los áridos y líquidos, por ser unas muy grandes y de difícil manejo y otras muy pequeñas, por lo cual ha sido necesario formar, para estos usos, unas medidas, llamadas *de capacidad.*

La unidad principal de capacidad es el *decímetro cúbico*, con el nombre de *litro.*

Cada una de las diversas unidades de capacidad tiene *diez* de las de su órden inmediato inferior, y sus nombres, designación abreviada y usos son los siguientes:

Múltiplos........	Kilólitro..	(kl.) ó m^3	El *kilólitro* no se usa. En *Hectólitros* y *Decálitros* se expresan las grandes partidas de áridos y líquidos.
	Hectólitro.	(hl.)	
	Decálitro .	(Dl.)	
Unidad principal.	Litro....	(l.) ó dm^3	El *litro* y sus divisores se usan en las ventas al por menor.
Divisores........	Decilitro..	(dl.)	
	Centílitro.	(cl.)	
	Mililitro.	(ml.) ó cm^3	El *mililitro* no se usa.

Una colección de medidas de capacidad consta de las siguientes:

Para áridos. De 1 hectólitro; de 5, 2 y 1 decálitros; de 5, 2 y 1 litros; de 5, 2 y 1 decílitros; de 5, 2 y 1 centílitros.

Para líquidos. De 1 decálitro; de 5, 2 y 1 litros; de 5, 2 y 1 decílitros; de 5, 2 y 1 centílitros.

187. Unidades ponderales ó de peso.

Son las que sirven para apreciar el peso de los cuerpos.

La unidad principal es el *gramo*, que se obtiene, pesando en el vacío y á una temperatura de 4 grados centígrados, el agua destilada contenida en un centímetro cúbico.

Cada una de las diversas unidades de peso tiene *diez* de las de su órden inmediato inferior, y sus nombres, designación abreviada y usos son los siguientes:

Múltiplos..	Tonelada métrica.	(t.)	Peso del m^3 ó *kl* de agua destilada	En *toneladas* y *quintales métricos* se expresan las grandes pesadas. Las fracciones de tonelada y de quintal se expresan en *kilógramos*.
	Quintal métrico..	(q.)		
	Miriágramo......	(μg.)		
	Kilógramo.......	(kg.)	Peso del dm^3 ó *l* de idem.	El *kilógramo*, con el nombre vulgar de *kilo*, se emplea como unidad usual. Las fracciones de kilógramo se expresan en *gramos*.
	Hectógramo	(hg.)		
	Decágramo	(Dg.)		
Unidad principal.	Gramo.........	(g.)	Peso del cm^3 ó *ml* de idem.	El *gramo* y sus divisores se usan para pequeños pesos, como los apreciados en farmacia, platería, etc.
Divisores ..	Decígramo	(dg.)		
	Centígramo......	(cg.)		
	Milígramo.	(mg)	Peso del mm^3 de idem.	

Una colección de pesas consta de las siguientes:

De hierro. De 50, 20, 10, 5, 2 y 1 kilógramos; de 500, 200, 100 y 50 gramos.

De latón. De 1 kilógramo; de 500, 200, 100, 50, 20, 10, 5, 2 y 1 gramos; de 5, 2 y 1 decígramos; de 5, 2 y 1 centígramos; de 5, 2 y 1 milígramos.

188. El sistema métrico decimal se resume en el siguiente cuadro que expresa el conjunto de sus medidas y el enlace que existe entre unas y otras.

Cuadro del sistema métrico decimal.

MEDIDAS Y PESAS.

LINEALES.	SUPERFICIALES.	VOLUMÉTRICAS.	DE CAPACIDAD PARA ÁRIDOS Y LÍQUIDOS.	PONDERALES.
Miriámetro.	Miriámetro cuadrado			
Kilómetro.	Kilómetro cuadrado.			
Hectómetro.	Hectómetro cuadrado ó hectárea			
Decámetro.	Decámetro cuadrado ó *área*.			
Metro.	*Metro cuadrado ó centiárea*.	*Metro cúbico ó estéreo*	Kilólitro.	Tonelada.
			Hectólitro.	Quintal.
			Decálitro.	Miriágramo.
Decímetro.	Decímetro cuadrado.	Decímetro cúbico.	*Litro*.	Kilógramo.
			Decilitro.	Hectógramo.
			Centilitro.	Decágramo.
Centímetro.	Centímetro cuadrado	Centímetro cúbico.	Mililitro.	*Gramo*.
				Decigramo.
				Centigramo.
Milímetro.	Milímetro cuadrado.	Milímetro cúbico.		Miligramo.
Micron.				

B.—*Sistema monetario.*

189. En todo sistema monetario, hay que tener en cuenta no sólo las diversas monedas que conviene poner en circulación para facilitar los cambios, sino también las clases de metales con que se fabriquen, la proporción en que éstos han de estar, y el peso y tamaño de cada moneda.

Se llama ALEACIÓN *la combinación de dos ó más metales distintos*. Las monedas son aleaciones de oro ó plata con cobre, ó de este metal con estaño y zinc.

Se llama *fino*, en las monedas de oro y plata, al metal más valioso de que están fabricadas, y *liga* al aleado con el fino.

Ley de la moneda es la cantidad de fino contenida en mil unidades de la aleación.

Permiso, en ley ó en peso, es la cantidad máxima en que puede estar falta una moneda, sin que deje de considerarse como legal y admisible. La moneda cuya falta en ley ó en peso excede del *permiso* se considera falsa ó no circulable.

La unidad principal, en el sistema monetario español, es la *peseta*, y las distintas monedas de este sistema, su valor con relación á la principal, su ley, peso, permisos y tamaño se expresan en el siguiente cuadro, en que las monedas auxiliares, para facilitar los cambios, se marcan con *letra cursiva* (*).

(*) Por medio de algunas monedas de las que se indican en el cuadro de la página siguiente se puede obtener el *metro*, colocando en línea recta y tocándose por los bordes,

40 monedas de 5 céntimos,
ó 50 » de 2 céntimos.

También se puede obtener el *kilógramo*, con

40 monedas de plata de 5 pesetas.
ó 100 » » de 2 pesetas ó de bronce de 10 céntimos.
ó 200 » » de 1 peseta ó de bronce de 5 céntimos.
ó 400 » » de 50 céntimos.
ó 500 » de bronce de 2 céntimos.
ó 1000 » de plata de 20 céntimos ó de bronce de 1 céntimo.

Cuadro del sistema monetario español.

	NOMBRES VULGARES.	Valor en *Ptas. Cénts.*	LEY.	Permiso en la ley....	Peso, en gramos.	Permiso en el peso, en gramos.	Diámetro en milímetros.
De oro......	Doblón de á 100.....	**100**	0,900	0,002	32,258	0,032	35
	Doblón de á 50......	50	»	»	16,129	0,016	28
	Doblón de á 20....	20	»	»	6,451	0,012	21
	Doblilla..........	**10**	»	»	3,225	0,006	19
	Escudito..........	5	»	»	1,612	0,007	17
De plata.....	*Duro*..........	5	»	»	25	0,075	37
	Doble peseta......	2	0,835	0,003	10	0,050	27
	PESETA...........	1=100	»	»	5	0,025	23
	Media peseta........	50	»	»	2,50	0,017	18
	Doble décima......	20	»	»	1	0,010	16
De bronce...	Décima..........	**10**	0,950 cobre.	0,010	10	0,100	30
	Media décima.......	5	0,040 estaño.		5	0,050	25
	Doble céntimo.....	2	0,010 zinc.	0,005	2	0,030	20
	Céntimo..........	**1**			1	0,015	15

C.—*Sistema cronométrico.*

190. La medida del tiempo se deriva de los movimientos de traslación y rotación de la Tierra, que producen dos unidades naturales, el *año* y el *día*.

AÑO *es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta completa alrededor del sol, y* DÍA *el que tarda en dar una vuelta completa sobre su eje.*

Las diversas unidades de tiempo son las siguientes:

Múltiplos del año.....	Siglo (S) = 100 años.
	Decenio = 10 años.
Unidades principales.	**Año** (A) = 365,24222 días.
	Día (d) = 24 horas.
Divisores del día.....	Hora (h) = 60 minutos.
	Minuto (m.°) = 60 segundos.
	Segundo (s).

La relación entre el año y el día no es, como se vé, un número entero; luego, si se considera al año de 365 días se comete en cada uno un error, *por defecto*, de 0,24222 de día que, al cabo de cuatro años, forma 0,96888 días ó sea un día, menos 0,03112 días. Esto motivó la reforma Gregoriana, por la que se cuenta cada cuatro años, uno de 366 días, al que se llama *bisiesto;* mas, por esta corrección, se comete en cada año bisiesto un error, *por exceso,* de 0,03112 de día que, al cabo de 400 años ó 100 bisiestos, forma 3,112 días ó sea algo más de 3 días.

Para compensar en gran parte este error, se deja de considerar como bisiesto, uno de cada 100 años, y áun así queda una causa de error que, en el transcurso de los siglos (hacia el LII), hará necesaria una nueva reforma.

191. Los años se cuentan por numeración correlativa, á partir de la venida de Jesucristo (1.° de la Era cristiana), llamándose *seculares* á aquéllos cuyo número de órden es múltiplo de 100, y siendo *bisiestos* los seculares terminados en 000, 400 y 800 y los nó seculares, divisibles por 4.

El año se divide en 12 meses de distinto nombre, entre los cuales se distribuyen los días del año, en esta forma: Enero, 31 días; Febrero, 28 (29 si el año es bisiesto); Marzo, 31; Abril, 30; Mayo, 31; Junio, 30; Julio, 31; Agosto, 31; Septiembre, 30; Octubre, 31; Noviembre, 30; y Diciembre, 31. Los días de cada mes se numeran correlativamente á partir del 1.°

Para los asuntos que no exijan una perfecta exactitud se consideran todos los meses como de 30 días y el año de 360. Por consiguiente, las relaciones entre el año y las unidades de tiempo, inferiores á él, y de éstas entre sí, serán las que se expresan en el siguiente cuadro.

Año.	Meses.	Días.	Horas.	Minutos.	Segundos.
1	12	360 365	8640 8760	518400 525600	31104000 31536000
	1	30	720	43200	2592000
		1	24	1440	86400
			1	60	3600
				1	60

192. Además de estas unidades de tiempo se usan: El *decenio*, período de 10 años; el *quinquenio ó lustro*, de 5; el *trienio*, de 3; y *el bienio*, de 2.

El *semestre*, período de 6 meses; el *cuatrimestre*, de 4; y el *trimestre*, de 3.

La *quincena*, periodo de 15 días; la *década*, de 10; y la *semana*, de 7, que reciben los nombres particulares de *Lunes*, *Martes*, *Miércoles*, *Jueves*, *Viernes*, *Sábado* y *Domingo* y se repiten sucesiva y continuamente.

D.—*Otras medidas*.

193. Además de las medidas que constituyen los sistemas *métrico*, *monetario* y *cronométrico* se usan en las ciencias y en el comercio las siguientes:

En geometria: Circunferencia=360 grados; Grado (°)=60 minutos; Minuto (′)=60 segundos; y Segundo (″).

En el comercio: Gruesa =12 docenas; Docena =12 objetos.

En la venta del papel: Bala = 32 resmas; Resma = 20 manos=500 pliegos (*); Mano=5 cuadernillos; Cuadernillo=5 pliegos; Pliego=4 cuartillas; Cuartilla.

(*) También hay resmas de 480 pliegos.

194. E.—*Sistema de medidas y pesas de Castilla* (*).

MEDIDAS.	Equivalencias aproximadas.
Lineales.	
Legua = 20000 pies	5,573 km
Vara = 3 pies	0,836 m
Pié = 12 pulgadas	2,786 dm
Pulgada = 12 líneas	2,322 cm
Línea	1,935 mm
Superficiales.	
Comunes.	
Legua cuadrada = 400000000 pies cuadrados	31,055 km²
Vara cuadrada = 9 pies cuadrados	0,699 m²
Pié cuadrado = 144 pulgadas cuadradas	7,764 dm²
Pulgada cuadrada = 144 líneas cuadradas	5,391 cm²
Línea cuadrada	3,744 mm²
Agrarias.	
Fanega = 12 celemines (9216 varas cuadradas)	0,644 ha
Celemín	5,366 a
Volumétricas.	
Vara cúbica = 27 pies cúbicos	0,584 m³
Pié cúbico = 1728 pulgadas cúbicas	21,633 dm³
Pulgada cúbica = 1728 líneas cúbicas	12,513 cm³
De capacidad.	
Para áridos.	
Fanega = 12 celemines	5,550 Dl
Celemín = 4 cuartillos	4,625 l
Cuartillo	1,156 l
Para líquidos.	
Cántara ó arroba = 8 azumbres = 32 cuartillos	1,613 Dl
Azumbre = 4 cuartillos	2,017 l
Cuartillo = 4 copas	0,504 l
Copa	1,260 dl
Para aceite.	
Arroba = 25 libras (peso)	1,256 Dl
Libra = 16 onzas	0,503 l
Onza	3,140 cl

(*) Aunque prohibido por la ley el uso de este sistema, su conocimiento es aún conveniente por la frecuencia con que hay que reducir unidades de él, al métrico decimal.

PESAS.	Equivalencias aproximadas.
Tonelada = 20 quintales	920 kg
Quintal = 4 arrobas	46 kg
Arroba = 25 libras	11,502 kg
Libra = 16 onzas	460 g
Onza = 16 adarmes	28,756 g
Adarme = 36 granos	1,797 g
Grano	50 mg

§ 2.º— Principales unidades métricas, ponderales y monetarias extranjeras.

195. A.—*Medidas y pesas* (*).

AUSTRIA.

Lineales	Klafter (toesa)	1,897 m
Ponderales	Stein (arroba) = 20 pfund	11,200 kg
	Pfund (libra)	560 g

INGLATERRA.

Lineales	Yard = 3 foots	0,914 m
	Foot (pié) = 12 ynchs	3,048 md
	Ynch (pulgada)	2,540 cm
De áridos	Sack = 3 bushels	1,090 hl
De líquidos	Gallon = 8 pints	4,543 l
Ponderales	Quintal = 112 pounds	50,802 kg
	Pound (libra comercial)	454 g
	Pound (Troy)	373 g

RUSIA.

Lineales	Archina (vara)	0,711 m
De áridos	Kull = 10 tschetwericks	2,622 hl
De líquidos	Wedro	1,230 Dl
Ponderales	Pud = 40 funtas	16,376 kg
	Funta (libra)	409 g

ESTADOS UNIDOS.

Lineales	Las de Inglaterra.	
De áridos	Quarter = 8 bushels	2,819 hl
De líquidos	Gallon = 8 pintas	3,785 l
Ponderales	Las comerciales de Inglaterra.	

(*) En esta relación se comprenden solamente las de aquellos Estados con los que España tiene relaciones comerciales más frecuentes, y cuyo sistema no es el decimal.

196. B.—*Unidades monetarias de cambio.* (*)

ESTADOS.	MONEDAS.	Cambio fijo. *Ptas. Cénts.*
Alemania	Reich-marc	1,23
América inglesa	Dollar	5,25
Austria-Hungría	Florín	2,47
Bélgica	Franco	1
Brasil	Mil reis	2,83
Cochinchina francesa	Piastra	5,40
Colombia	Peso de oro	5
Colonias inglesas	Veinte céntimos de plata.	0,95
Chile	Peso	5
Dinamarca	Krone	1,39
Egipto	Piastra	0,26
Estados Unidos	Dollar	5,18
Finlandia (Rusia)	Markka	1
Francia	Franco	1
Grecia	Drachma	1
Haití	Gourdo	4,96
India inglesa	Roupia	2,38
Inglaterra	Libra esterlina	25,20
Italia	Lira	1
Isla de San Mauricio	Veinte céntimos de peso	0,41
Japón	Yen	5,17
Méjico	Peso	5,43
Mónaco	Franco	1
Noruega	Krone	1,39
Países Bajos	Florín	2,10
Persia	Thoman	11,83
Perú	Sol	5
Portugal	Mil reis	5,60
República argentiua	Peso	5
Romanía	Ley	5,60
Rusia	Rublo	4
Servia	Dinsar	1
Suecia	Krone	1,39
Túnez	Piastra	0,62
Turquía	Piastra	0,23
Uruguay	Peso	5
Venezuela	Venezolano	5

(*) CAMBIO *es la cantidad que se da en una plaza en equivalencia de una moneda fija de otra.* La equivalencia entre el valor intrínseco de dos monedas de distinto país se llama *par legal* ó *monetario* ó *cambio fijo*.

En las transacciones mercantiles no se abonan generalmente las cantidades al cambio fijo, que es constante, sino calculadas al *cambio corriente*, que es variable por diversas circunstancias.

CAPÍTULO II.

CLASIFICACIÓN Y EXPRESIÓN DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

197. Número concreto *es el que expresa una totalidad de unidades concretas.*

Los números concretos se clasifican en *incomplejos* y *complejos.*

Número incomplejo *es el concreto que expresa unidades de un solo órden.*

Todo incomplejo se expresa por el número de sus unidades, seguido de la abreviatura correspondiente: tales son 7^{m}, 39^{m^2}, 20^{dm^3}, 14^{h}, etc.

Número complejo *es el concreto, compuesto de incomplejos de distintos órdenes de la misma especie.*

Todo complejo se expresa por los incomplejos que lo constituyen, ordenados según su magnitud decreciente: tales son

$$7^{m}, 5^{dm}, 9^{cm}; 39^{m^2}, 86^{dm^2}, 97^{cm^2}; 20^{dm^3}, 784^{cm^3}; 14^{h}, 32^{ms}, 26^{s}.$$

Cada uno de los órdenes de un complejo debe contener ménos unidades de las necesarias para formar una del órden inmediato superior: así, 8^{Dl}, 17^{l}, tienen más apropiada expresión en 9^{Dl}, 7^{l}, y 3^{h}, 89^{ms}, la tienen en 4^{h}, 29^{ms}.

Exceptúanse de esta prescripción las fracciones de kilómetro, que se expresan en metros hasta 999; las de metro, que se expresan en centímetros hasta 99; las de tonelada, que se expresan en kilógramos hasta 999; las de quintal métrico, que se expresan también en kilógramos hasta 99; y las de kilógramo, que se expresan en gramos hasta 999.

LIBRO II.

DEL CÁLCULO DE NÚMEROS CONCRETOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

TRANSFORMACIONES DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

198. Llámanse **cantidades equivalentes** *á las del mismo valor, en un concepto dado;* así, 2 cajas de petróleo de 40 litros, cada una, y 80 frascos de á litro son equivalentes *en capacidad;* las dichas dos cajas de petróleo, cuyo peso específico es 0,80 (*), y 64 litros de agua destilada son equivalentes en *peso;* 5 litros de vino, á $0{,}72^{p}$ el litro y 9 kilógramos de cualquiera otra sustancia, á $0{,}40^{p}$ el kilógramo, son equivalentes *en dinero.*

Equivalencia *es la expresión de que dos cantidades son equivalentes.* La equivalencia de dos cantidades se expresa por este signo <>, colocado entre ellas; pero si, prescindiendo de la distinta especie de las cantidades equivalentes, se atiende á la cualidad esencial de su igualdad en el concepto en que se las considere, se puede emplear y se emplea más frecuentemente, el signo de igualdad.

(*) PESO ESPECÍFICO DE UN CUERPO *es el peso, en kilógramos, de un decímetro cúbico de él.*

El peso específico del agua destilada, que es al que se refieren los de los cuerpos sólidos y líquidos, es 1, y los de otros de los más usuales son los siguientes:

Platino forjado........	21,30	Alabastro calizo.	2,76
Oro....	19,36	Mármol de Carrara....	2,72
Mercurio á 0°	13,60	Granito	2,70
Plomo fundido.........	11,35	Piedra calcárea........	2,41
Plata fundida..	10,47	Piedra yesosa.........	2,20
Bronce...	8,64	Pizarra...............	2,11
Cobre fundido..... ...	8,85	Ladrillo recocido.....	1,56
Nikel forjado...	8,66	Leche...............	1,03
Latón fundido........	8,39	Vino..	0,99
Hierro forjado........	7,89	Aceite de olivas.......	0,92
Estaño fundido.......	7,29	Petróleo..............	0,80
Zinc fundido.	6,86	Alcóhol absoluto......	0,81

199. Transformar un número concreto *es expresarle en otro equivalente.*

Las transformaciones de los números concretos, convenientes en muchos casos y áun en algunos necesarias, como se verá más adelante, pueden tener uno de estos dos fines:

1.° *Transformar un número concreto en otro equivalente de su misma especie y sistema.*

2.° *Transformar un número concreto en otro equivalente de distinta especie ó sistema.*

200. Transformar un número concreto en otro equivalente de su misma especie y sistema.

Esta transformación tiene por objeto resolver uno de estos tres problemas:

1.° *Reducir un incomplejo á distinto órden.*
2.° *Convertir un complejo en incomplejo.*
3.° *Desarrollar un incomplejo.*

201. Reducción de un incomplejo á distinto órden.

Sea A un incomplejo del órden m y B otro del órden n, y sea p el número de veces que una unidad del primero contiene á una del segundo, con lo que se tendrá

$$m = pn.$$

Por otra parte, si A unidades del órden m son iguales á B unidades del órden n, se tendrá

$$m\mathrm{A_m} = n\mathrm{B_n}\,,$$

de donde, reemplazando m por su igual pn, resulta

$$pn\mathrm{A_m} = n\mathrm{B_n}\,.$$

Dividiendo por n los dos miembros de esta igualdad, se obtiene

$$p\mathrm{A_m} = \mathrm{B_n} \text{ ó } \mathrm{B_n} = p\mathrm{A_m}\ (\alpha),$$

y dividiendo por p los dos miembros de ésta, resulta

$$\mathrm{A_m} = \mathrm{B_n} : p\ (\varepsilon).$$

De las igualdades (α) y (ε) se deduce la siguiente regla:

Para reducir un número incomplejo á un órden inferior ó superior se le multiplica, en el primer caso, ó se le divide, en el segundo, por el número de veces que la unidad del órden superior contiene á la del inferior.

Ejemplos.

1.° *Reducir 27 dias á segundos.*

Como $1^{\mathrm{d}} = 86400^{\mathrm{s}}$, se tendrá $27^{\mathrm{d}} = (86400 \times 27)^{\mathrm{s}} = 2332800^{\mathrm{s}}$.

2.° *Reducir 18720 minutos á dias.*

Como $1^{\mathrm{d}} = 1440^{\mathrm{ms}}$, se tendrá $18720^{\mathrm{ms}} = \left(\dfrac{18720}{1440}\right)^{\mathrm{d}} = 13^{\mathrm{d}}$.

3.° *Reducir 38,596 metros á centímetros.*

Como $1^{\mathrm{m}} = 100^{\mathrm{cm}}$, se tendrá $38{,}596^{\mathrm{m}} = (38{,}596 \times 100)^{\mathrm{cm}} = 3859{,}6^{\mathrm{cm}}$.

4.° *Reducir 3796 milímetros á metros.*

Como $1^{\mathrm{m}} = 1000^{\mathrm{mm}}$, se tendrá $3796^{\mathrm{mm}} = (3796 : 1000)^{\mathrm{m}} = 3{,}796^{\mathrm{m}}$.

5.° *Reducir 49,579268 hectáreas á metros cuadrados.*

Como $1^{\mathrm{ha}} = 10000^{\mathrm{m^2}}$, se tendrá $49{,}579268^{\mathrm{ha}} = (49{,}579268 \times 10000)^{\mathrm{m^2}} = 495792{,}68^{\mathrm{m^2}}$.

6.° *Reducir 24835 decímetros cuadrados á áreas.*

Como $1^{\mathrm{a}} = 10000^{\mathrm{dm^2}}$, se tendrá $24835^{\mathrm{dm^2}} = (24835 : 10000)^{\mathrm{a}} = 2{,}4835^{\mathrm{a}}$.

7.° *Reducir 72,8543 metros cúbicos á decímetros cúbicos.*

Como $1^{\mathrm{m^3}} = 1000^{\mathrm{dm^3}}$, se tendrá $72{,}8543^{\mathrm{m^3}} = (72{,}8543 \times 1000)^{\mathrm{dm^3}} = 72854{,}3^{\mathrm{dm^3}}$.

8.° *Reducir 37 decímetros cúbicos á metros cúbicos.*

Como $1^{\mathrm{m^3}} = 1000^{\mathrm{dm^3}}$, se tendrá $37^{\mathrm{dm^3}} = (37 : 1000)^{\mathrm{m^3}} = 0{,}037^{\mathrm{m^3}}$.

Observación. De la práctica de la reducción de un incomplejo á distinto órden se desprende, naturalmente, la siguiente regla de abreviación:

Para reducir un incomplejo métrico decimal á un órden inferior ó superior basta correr la coma á la derecha, en el primer caso, y á la izquierda, en el segundo, un número de lugares igual, en los concretos de longitud, capacidad y peso, *al de órdenes comprendidos entre los dos enunciados, en los de* superficie, *al duplo, y en los de* volúmen, *al triplo, de dichos órdenes.*

202. Conversión de un complejo en incomplejo.

Como todo número complejo está compuesto de incomplejos de distintos órdenes, evidentemente será igual á la suma de los incomplejos que resulten de reducir á un órden dado cada uno de sus componentes, lo que, en la práctica, se obtiene por la siguiente regla:

Para convertir un complejo en incomplejo de determinado órden, se reduce el incomplejo de órden superior al inmediato inferior; se agregan al resultado las unidades que haya de este órden; se reduce esta suma al órden inmediato inferior; se agregan las unidades que haya de éste; se continúa así hasta operar con el último de los órdenes del complejo dado, y el incomplejo que resulte se reduce al órden pedido.

Ejemplos.

1.° *Convertir* $7^d, 5^h, 9^{ms}$ *en incomplejo de minutos.*

La operación se dispone en la forma, expuesta al márgen, y de ella se obtiene. $7^d, 5^h, 9^{ms} = 10389^{ms}$.

$$\begin{array}{r} 7 \\ 24 \\ \hline 168 \\ 5 \\ \hline 173^h \\ 60 \\ \hline 10380 \\ 9 \\ \hline 10389^{ms} \end{array}$$

2.° *Convertir* $7^d, 5^h, 9^{ms}$ *en incomplejo de dias.*

Para ello se convertirá el complejo dado en incomplejo de minutos, lo que, según el cálculo anterior, dá 10389^{ms}, que reducidos á días, son $\frac{10389}{1440}$ días; luego, $7^d, 5^h, 9^{ms} = \frac{10389}{1440} = 7\frac{103}{480}d.$

3.° *Convertir* $13^{hl}, 6^{Dl}, 4^l, 9^{dl}$ *en incomplejo de litros.*

Se tendrá: $13^{hl}, 6^{Dl}, 4^l, 9^{dl} = 136^{Dl}, 4^l, 9^{dl} = 1364^l, 9^{dl} = 1364,9^l$.

4.° *Convertir* $3^{km^2}, 79^{ha}, 46^a, 19^{m^2}$ *en incomplejo de áreas.*

Se tendrá: $3^{km^2}, 79^{ha}, 46^a, 19^{m^2} = 379^{ha}, 46^a, 19^{m^2}$

$= 37946^a, 19^{m^2} = 37946,19^a.$

5.° *Convertir* $7^{m^3}, 436^{dm^3}, 524^{cm^3}$ *en incomplejo de decímetros cúbicos.*

Se tendrá: $7^{m^3}, 436^{dm^3}, 524^{cm^3} = 7436^{dm^3}, 524^{cm^3} = 7436,524^{dm^3}.$

Observación. Como al convertir un complejo en incomplejo resulta éste entero ó fraccionario, según que el órden pedido sea ó nó anterior al último de los del complejo dado, se desprenden naturalmente las siguientes reglas particulares de abreviación.

1.ª *Para convertir un complejo en incomplejo de un órden anterior al último, se convierten, separadamente, en incomplejos del órden pedido, el complejo formado por los órdenes anteriores y el formado por los posteriores y se suman los resultados.*

Ejemplo. *Convertir* $9^d, 17^h, 26^{ms}, 8^s$ *en incomplejo de hora.*

Se tendrá: $9^d, 17^h = (9 \times 24)^h + 17^h = 216^h + 17^h = 233^h.$

$26^{ms}, 8^s = (26 \times 60)^s + 8^s = 1560^s + 8^s = 1568^s,$

luego $9^d, 17^h, 26^{ms}, 8^s = 233\frac{1568}{3600}h = 233\frac{98}{225}h.$

2.ª *Para convertir un complejo métrico decimal en incomplejo de cualquier órden, se hace que cada uno de sus órdenes esté expresado por un número de una cifra, en los complejos de* longitud, capacidad *y* peso, *de dos, en los de* superficie, *y de tres, en los de* volúmen *(para lo cual se suplen con los ceros necesarios las cifras que falten), y después se coloca la coma en el lugar correspondiente al órden pedido.*

Ejemplos.

1.° *Convertir* $4^t, 7^{kg}, 6^{Dg}, 5^g$ *en incomplejo de kilógramos.*

Se tendrá: $4^t, 7^{kg}, 6^{Dg}, 5^g = 4^t, 0^q, 0^{Mg}, 7^{kg}, 0^{hg}, 6^{Dg}, 5^g$

$= 4007,065^{kg}.$

2.° *Convertir* $9^{km^2}, 26^a, 7^{m^2}$ *en incomplejo de hectáreas.*

Se tendrá: $9^{km^2}, 26^a, 7^{m^2} = 9^{km^2}, 00^{ha}, 26^a, 07^{m^2} = 900,2607^{ha}.$

3.° *Convertir* $36^{m^3}, 8^{cm^3}, 73^{mm^3}$ *en incomplejo de metros cúbicos.*

Se tendrá: $36^{m^3}, 8^{cm^3}, 73^{mm^3} = 36^{m^3}, 000^{dm^3}, 008^{cm^3}, 073^{mm^3}$

$= 36,000008073^{m^3}.$

203. Desarrollo de un incomplejo. Todo incomplejo de más unidades que las necesarias para formar una del órden inmediato superior contendrá alguna ó algunas de éstas, que se obtendrán por la división correspondiente (**201**), pudiendo quedar ó nó un sobrante de las del órden dado: si sucediese lo mismo en las que del nuevo orden resultan en el cociente, se obtendrían de igual manera las unidades del órden inmediato, y continuando este razonamiento, el conjunto de los sucesivos restos y el último cociente sería el complejo equivalente al incomplejo propuesto.

De este aquí se deduce la siguiente regla:

Para desarrollar un incomplejo se reduce á su órden inmediato superior; el cociente al inmediato superior, y así sucesivamente; el último cociente y los restos sucesivos forman el complejo pedido.

Ejemplos.

1.° *Desarrollar el incomplejo* 36598 *segundos.*

La operación se dispone en la forma, expuesta al márgen, de la que se obtiene

$$\begin{array}{l|ll} 36598 & 60 & \\ 0059 & 609^{ms} & \lvert\ 60 \\ 058^{s} & 009^{ms} & \ \ 10^{h} \end{array}$$

$$36598^{s} = 10^{h},\ 9^{ms},\ 58^{s}.$$

2.° *Desarrollar el incomplejo* 348796 *centímetros.*

Se tendrá:

$$348796^{cm} = 34879^{dm},\ 6^{cm} = 3487^{m},\ 9^{dm},\ 6^{cm} = 348^{Dm},\ 7^{m},\ 9^{dm},\ 6^{cm}$$
$$= 34^{hm},\ 8^{Dm},\ 7^{m},\ 9^{dm},\ 6^{cm} = 3^{Km},\ 4^{hm},\ 8^{Dm},\ 7^{m},\ 9^{dm},\ 6^{cm}$$
$$= 3^{Km},\ 487^{m},\ 96^{cm} \text{ (mas usual).}$$

3.° *Desarrollar el incomplejo* 2572653,4 *decímetros cuadrados.*

Se tendrá

$$2572653{,}4^{dm^2} = 2572653^{dm^2},40^{cm^2} = 25726^{m^2},53^{dm^2},40^{cm^2}$$
$$= 257^{a},26^{m^2},53^{dm^2},40^{cm^2} = 2^{ha},57^{a},26^{m^2},53^{dm^2},40^{cm^2}.$$

4.° *Desarrollar el incomplejo* 79264581,3 *centímetros cúbicos.*

Se tendrá

$$79264581{,}3^{cm^3} = 79264581^{cm^3},300^{mm^3} = 79264^{dm^3},581^{cm^3},300^{mm^3}$$
$$= 79^{m^3},264^{dm^3},581^{cm^3},300^{mm^3}.$$

Observación. De la práctica del desarrollo de un incomplejo se desprende la siguiente regla de abreviación:

Para desarrollar un incomplejo métrico decimal, se hace, por medio de ceros, que el número de sus cifras decimales sea par, en los de superficie y monedas, y múltiplo de 3, *en los de volúmen; se separan sus cifras, á partir de la coma, de derecha á izquierda, de una en una, en los de* longitud, capacidad y peso, *de dos en dos, en los de* superficie y monedas, *y de tres en tres, en los de* volúmen, *dando á cada grupo la denominación que le corresponda.*

Así, de los ejemplos anteriores 2.°, 3.° y 4.°, se obtiene desde luego:

$$348796^{cm} = 3^{km},4^{hm},8^{Dm},7^{m},9^{dm},\ 6^{cm} = 3^{km},487^{m},96^{cm}.$$
$$2572653{,}4^{dm^2} = 2572653{,}40^{dm^2} = 2^{ha},57^{a},26^{m^2},53^{dm^2},40^{cm^2}.$$
$$79264581{,}3^{cm^3} = 79264581{,}300^{cm^3} = 79^{m^3},264^{dm^3},581^{cm^3},300^{mm^3}.$$

204. Caso particular. *Valuar una fracción.* Como toda fracción es una división indicada, es evidente que el cociente del numerador, reducido á su órden inmediato inferior, por el denominador, expresará las unidades del órden dado que contenga la fracción, de donde se deduce la siguiente regla:

Para valuar una fracción se divide el numerador por el denominador; se reduce el resto al órden inmediato inferior; el resultado se divide por el mismo denominador y así sucesivamente.

Ejemplo. *Valuar la fracción* $\frac{5}{9}$ *de día.*

La operación se dispone en la forma, expuesta al márgen, y de ella se obtiene:

$$\begin{array}{r|l} 5^{d} & 9 \\ \hline 24 & 0^{d},\ 13^{h},\ 20^{ms} \\ \hline 120^{h} & \\ 30 & \\ 3^{h} & \\ 60 & \\ \hline 180^{ms} & \\ 00 & \end{array}$$

$$\frac{5}{9} \text{ de día} = 13^{h},\ 20^{ms}.$$

Observación. Si la fracción dada es decimal, su valuación se reduce á desarrollarla en complejo; así,

$$0{,}32^{d} = (0{,}32 \times 24)^{h} = 7{,}68^{h} = 7^{h} + (0{,}68 \times 60)^{ms}$$
$$= 7^{h},\ 40{,}80^{ms} = 7^{h},\ 40^{ms} + (0{,}80 \times 60)^{s}$$
$$= 7^{h},\ 40^{ms},\ 48^{s}.$$

205. Transformar un número concreto en otro equivalente de distinta especie ó sistema.

Esta transformación exige el conocimiento de una equivalencia entre unidades del concreto dado y de aquel en que se quiere transformar, y se funda en el siguiente

Teorema. *Si se multiplican ordenadamente varias equivalencias, dispuestas de modo que el primer miembro de cada una sea del mismo orden que el segundo de la anterior, resulta otra equivalencia cuyo primer miembro es del órden del primero de la primera y el segundo de el del segundo de la última.*

$$A_m = B_n \quad C_n = D_p \quad E_p = F_q \quad G_q = H_r$$

En efecto, sea la serie de equivalencias del márgen, en las que cada uno de los subíndices m, n, p, q y r, representa el órden de las unidades A, B y C, D y E, F, G y H, por lo que dichas equivalencias se leerán: A unidades del órden m son equivalentes á B del órden n; C unidades del órden n son equivalentes á D del órden p; E unidades del órden p son equivalentes á F del órden q; G unidades del órden q son equivalentes á H unidades del órden r.

Desde luego el teorema se verifica para las dos primeras equivalencias, pues multiplicando por el número abstracto C los dos miembros de la equivalencia, $A_m = B_n$, y por B los de la $C_n = D_p$, resulta

$$\left.\begin{array}{l} AC_m = BC_n \\ BC_n = BD_p \end{array}\right\} \text{de donde se deduce, } AC_m = BD_p.$$

Por análoga consideración, de las equivalencias

$$\left.\begin{array}{l} AC_m = BD_p \\ E_p = F_q \end{array}\right\} \text{se obtiene } ACE_m = BDF_q,$$

y por la misma razón, de las equivalencias

$$\left.\begin{array}{l} ACE_m = BDF_q \\ G_q = H_r \end{array}\right\} \text{se obtiene } ACEG_m = BDFH_r.$$

Este razonamiento, aplicable á todo sistema de equivalencias, sea cualquiera el número de las que le formen, nos induce á afirmar la generalidad de la tesis propuesta en el teorema.

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla: *Para transformar un número concreto en otro equivalente de distinta especie ó sistema, ligado con éste por medio de las necesarias equivalencias, se escribe la equivalencia entre el número que se busca (que generalmente se designa con la letra x) y su equivalente y debajo de ella, las demás equivalencias dadas, dispuestas de modo que el primer miembro de cada una sea del mismo órden que el segundo de la anterior, y el segundo de la última del mismo órden que el primero de la primera, y se divide el producto de los segundos miembros por el de los primeros, conocidos* (*).

Ejemplos.

1.º *¿Á cuantos metros equivalen 785 varas de Castilla, sabiendo que 51 metros equivalen á 61 varas?*

Se tendrá

$$x^m = 785 \text{ varas}$$
$$61 \text{ varas} = 51^m$$
$$x = \frac{785 \times 51}{61} = \frac{40035}{61} = 656{,}31^m.$$

2.º *¿Cuántos rublos deberán dar en San Petersburgo por 8000 pesetas, entregadas en Madrid, siendo el cambio de Madrid y París de 1 peseta por 1,02 francos; el de París y Londres, de 25,30 francos por 1 libra esterlina; el de Londres y Viena, de 1 libra esterlina por 9,75 florines; el de Viena y Berlín, de 7 florines por 5 thalers, y el de Berlín y San Petersburgo, de 53 thalers por 50 rublos?*

Se tendrá,

$$x \text{ rublos} = 8000 \text{ pesetas}$$
$$1 \text{ peseta} = 1{,}02 \text{ francos}$$
$$25{,}30 \text{ francos} = 1 \text{ libra esterlina}$$
$$1 \text{ libra esterlina} = 9{,}75 \text{ florines}$$
$$7 \text{ florines} = 5 \text{ thalers}$$
$$53 \text{ thalers} = 50 \text{ rublos}$$
$$x = \frac{8000 \times 1{,}02 \times 1 \times 9{,}75 \times 5 \times 50}{1 \times 25{,}30 \times 1 \times 7 \times 53} = 2119{,}04 \text{ rublos.}$$

Observación. En la práctica se abrevian las operaciones, suprimiendo los factores comunes á los primeros y segundos miembros de las equivalencias, ántes de multiplicarlas.

(*) Esta Regla recibe la denominación de *conjunta* y también la de *Regla de cambio* cuando se aplica á la conversión de monedas de un país en las de otro.

CAPÍTULO II.

DE LAS OPERACIONES CON NÚMEROS CONCRETOS.

ARTÍCULO PRIMERO.

DE LA ADICIÓN DE CONCRETOS.

206. El fin práctico de esta operación es hallar una totalidad de unidades concretas formada por la agregación de otras dadas, de donde se deduce que, cómo no sería posible formar esa totalidad con unidades de distinta especie, es necesario que los sumandos sean homogéneos.

207. En la adición de concretos conviene distinguir dos casos:

1.º *Que todos los sumandos sean incomplejos.*

2.º *Que todos, ó algunos, sean complejos.*

Primer caso. *Para sumar incomplejos se reducen á su último órden, si no son del mismo, y se suman como abstractos.*

Ejemplos.

1.º $46^{t}+579^{q}+624^{kg}=46000^{kg}+57900^{kg}+624^{kg}=104524^{kg}$
$=104^{t},\ 5^{q},\ 24^{kg}.$

2.º $15^{d}+286^{h}+542^{ms}=21600^{ms}+17160^{ms}+542^{ms}=39302^{ms}$
$=27^{d},\ 7^{h},\ 2^{ms}.$

Segundo caso. *Para sumar complejos, si son métrico-decimales, se convierten en incomplejos del mismo órden y se suman como abstractos; pero, si no son métrico decimales, es preferible sumar separadamente las unidades del mismo órden de todos los sumandos, empezando por las del inferior, cuidando de extraer de cada suma parcial las unidades que se formen del órden inmediato superior y agregarlas á las de éste.*

Ejemplos.

1.º $7^{hl},\ 6^{l},\ 8^{dl}+5^{hl},\ 4^{Dl},\ 7^{l},\ 5^{dl}+2^{hl},\ 4^{Dl},\ 3^{dl}.$

Se tendrá: $7068^{dl}+5475^{dl}+2403^{dl}=14946^{dl}=149^{Dl},\ 4^{l},\ 6^{dl}.$

2.º $8^{d},\ 13^{h},\ 36^{ms}+4^{d},\ 19^{h},\ 54^{ms}+7^{d},\ 11^{h},\ 20^{ms}.$

$$\text{Se tendrá:}\quad \begin{array}{rrrr} \overbrace{}^{1} & \overbrace{}^{1} & & \\ 8^{d} & 13^{h} & & 36^{ms} \\ 4 & 19 & & 54 \\ 7 & 11 & & 20 \\ \hline 20^{d} & 44^{h} & \underline{|\ 24} & 110^{ms}\ \underline{|\ 60} \\ & 20^{h} & 1^{d} & 50^{ms}\quad 1^{h} \end{array}$$

Suma $=20^{d},\ 20^{h},\ 50^{ms}.$

ARTÍCULO II.

SUSTRACCIÓN DE CONCRETOS.

208. El fin práctico de esta operación es hallar una totalidad de unidades concretas que, sumadas con otras dadas, produzcan una totalidad dada; de donde se deduce que es necesario que los datos sean homogéneos.

209. En la sustracción de números concretos conviene distinguir dos casos:

1.º *Que el minuendo y el sustraendo sean incomplejos.*

2.º *Que uno de los dos, ó ámbos, sean complejos.*

Primer caso. *Para restar dos incomplejos se convierten al mismo órden, si no lo son, y se restan como abstractos.*

Ejemplos.

1.º $927^{hl}-4753^{l}=92700^{l}-4753^{l}=87947^{l}.$

2.º $28^{d}-119^{h}=672^{h}-119^{h}=553^{h}.$

Segundo caso. *Para restar dos complejos, si son métrico decimales, se convierten en incomplejos del mismo órden y se restan como abstractos; pero, si no son métrico decimales, es preferible restar separadamente de las unidades de cada órden del minuendo las del mismo órden del sustraendo, empezando por las del inferior. Si algún minuendo parcial es menor que su respectivo sustraendo, se le agrega una unidad del órden inmediato superior, reducida previamente á su órden, se efectúa la sustracción y se añade una unidad al siguiente sustraendo parcial.*

Ejemplos.

1.º $24^{ha},\ 39^{a},\ 7^{m^2}-19^{ha},\ 6^{a},\ 45^{dm^2}.$

Se tendrá: $2439{,}07^{a}-1906{,}0045^{a}=533{,}0655^{a}$

2.º $20^{d},\ 7^{h},\ 25^{ms}-8^{d},\ 13^{h},\ 9^{ms}.$

$$\text{Se tendrá:}\quad \begin{array}{rrr} \overbrace{20^{d}}^{19} & \overbrace{7^{h}}^{31} & 25^{ms} \\ 8 & 13 & 9 \\ \hline 11^{d} & 18^{h} & 16^{ms} \end{array}$$

3.º *¿Qué tiempo ha trascurrido desde el 17 de Agosto de 1846 al 25 de Junio de 1885?*

Tomando como punto de partida el principio del siglo, como Junio y Agosto son el 6.º y 8.º mes del año, el minuendo será 85 años, 6 meses y 25 días, y el sustraendo 46 años, 8 meses y 17 días, y por tanto, el tiempo pedido será $38^{A},\ 10^{M},\ 8^{d}$.

$$\begin{array}{rrr} \overbrace{85^{A}}^{84} & \overbrace{6^{M}}^{18} & 25^{d} \\ 46 & 8 & 17 \\ \hline 38^{A} & 10^{M} & 8^{d} \end{array}$$

ARTÍCULO III.

MULTIPLICACIÓN DE CONCRETOS.

210. El fin práctico de esta operación es hallar, en una especie determinada, el valor de un número dado, conociendo, en la misma especie, el valor de una unidad homogénea con dicho número.

Por la multiplicación de concretos se podrá, pues, hallar el valor de varias unidades (producto), conocido el valor de una (multiplicando) y el número de ellas (multiplicador) (*), mediante la siguiente regla:

Para multiplicar dos números concretos se reduce el multiplicador, si ya no lo estuviese, al órden de la unidad cuyo valor es el multiplicando, y éste, si es complejo, al último de sus órdenes y se multiplican como abstractos.

Ejemplos.

1.° *¿Cuánto pesan* 5^{dm^3} *de aleación monetaria de plata, cuyo peso específico es 10,12?*

El multiplicando es $10{,}12^{kg}$ (peso de 1^{dm^3}) y el multiplicador es 5^{dm^3}; luego el producto es $(10{,}12 \times 5)^{kg} = 50{,}60^{kg}$.

2.° *¿Cuánto pesan* 5^{m^3} *de aleación monetaria de plata, cuyo peso específico es 10,12?*

El multiplicando es $10{,}12^{kg}$ (peso de 1^{dm^3}) y el multiplicador es 5000^{dm^3}, equivalentes á 5^{m^3}; luego el producto es $(10{,}12 \times 5000)^{kg} = 50600^{kg}$.

3.° *¿Cuánto tardará en recorrer un arco de 15°, un móvil que tarda* 2^h *en recorrer un arco de 1°?*

El multiplicando es 2^h (tiempo empleado en recorrer 1°) y el multiplicador 15°; luego el producto es $(2 \times 15)^h = 30^h = 1^d, 6^h$.

4.° *¿Cuánto tardará en recorrer un arco de 15°, un móvil que tarda* 2^h *en recorrer un arco de 1''?*

El multiplicando es 2^h (tiempo empleado en recorrer un arco de 1'') y el multiplicador es 54000'', equivalentes á 15°; luego el producto es $(2 \times 54000)^h = 108000^h = 12^A, 6^M$.

(*) Más adelante (**216-Escolio 3.°**) se expone el caso en qué, para conseguir ésto, se emplea una división.

5.° *¿Cuánto tardará en recorrer un arco de 6°, 14', 20'', un movil que tarda* $2^h, 7^{ms}, 9^s$ *en recorrer un arco de 1''?*

El multiplicando es 7629^s, equivalentes á $2^h, 7^{ms}, 9^s$ (tiempo empleado en recorrer un arco de 1'') y el multiplicador 22460'', equivalente á 6°, 14', 20'', y verificando la operación, se tiene:

```
       7629
      22460
   --------
      45774
     30516
    15258
   15258
   ---------
   171347340ˢ |60
     51        ---------
      33       2855789ᵐˢ |60
       34        45       ---------
        47         35     47596ʰ |24
         53          57    235    ---------
          54           38    199   1983ᵈ |30
           0         29ᵐˢ     76    18    -----
                               4ʰ    03ᵈ  66ᴹ |12
                                           6ᴹ  ----
                                               5ᴬ
```

Luego el producto es $5^A, 6^M, 3^d, 4^h, 29^{ms}$.

6.° *¿Cuánto tardará en recorrer un arco de 6°, 14', 20'', un móvil que tarda* $2^h, 7^{ms}, 9^s$ *en recorrer un arco de 1°?*

El multiplicando es 7629^s, equivalentes á $2^h, 7^{ms}, 9^s$ (tiempo empleado en recorrer un arco de 1°) y el multiplicador es $\frac{22460}{3600}$°, equivalente á 6°, 14', 20'', y verificando la operación, se tiene:

$$7629 \times \frac{22460}{3600} = 7629 \times \frac{1123}{180}$$

```
      7629
      1123
    ------
     22887
    15258
    7629
   7629
   -------
   8567367 |180
   136      -----------
    107     47596,48ˢ |60
     173      55       --------
      116       19     793ᵐˢ |60
        87       16,48ˢ 19    -----
        150              13ᵐˢ  13ʰ
         06
```

Luego el producto es $13^h, 13^{ms}, 16{,}48^s$.

Observaciones.

1.ª Cuando el multiplicando es complejo, no métrico decimal, y el multiplicador resulta entero se puede emplear también el procedimiento de MULTIPLICACIONES PARCIALES, que consiste *en multiplicar separadamente cada uno de los órdenes del multiplicando, por el multiplicador, y sumar los productos parciales.*

Así, en el ejemplo 5.º se procederá de este modo :

2^h		7^{ms}		9^s	
				22460	
44920		157220^{ms}		202140^s	60
2676		3369		22	3369^{ms}
47596^h	24	160589^{ms}	60	41	
235	1983^d | 30	40	2676^h	54	
199	18 | 66^M	45		00	
76	03^d | 6^M | 12	38			
4^h	5^A	29^{ms}			

cuyo producto es, como ántes, 5^A, 6^M, 3^d, 4^h, 29^{ms}.

2.ª Cuando el multiplicando es complejo, nó métrico decimal, y el multiplicador resulta fraccionario se puede emplear el procedimiento de MULTIPLICACIÓN POR PARTES ALÍCUOTAS, que consiste *en descomponer el multiplicador en unidades del órden de aquella cuyo valor es el multiplicando y en partes alícuotas de ella; hallar los valores correspondientes á cada una de las partes del multiplicador y sumar estos valores.*

Así, en el ejemplo 6.º se procederá de este modo :

	2^h	7^{ms}	9^s
	6^o	$14'$	$20''$
	1	2	
En recorrer 6^o	12^h	42^{ms}	54^s
$12'\left(\frac{1}{5}\text{ de }1^o\right)$	0	25	25,80
$2'\left(\frac{1}{6}\text{ de }12'\right)$		4	14,30
$20''\left(\frac{1}{6}\text{ de }2'\right)$		0	42,38
	13^h	73^{ms} | 60	$136,48^s$ | 60
		13^{ms} | 1^h	$16,48^s$, 2^{ms}

cuyo producto es, como antes, 13^h, 13^{ms}, $16,48^s$.

ARTÍCULO IV.

DIVISIÓN DE CONCRETOS.

211. El fin práctico de esta operación es hallar, en una especie determinada, el valor de una unidad concreta, conociendo, en la misma especie, el valor de un número homogéneo con dicha unidad, ó hallar las veces que un número concreto contiene á otro de la misma especie. En el primer caso, el dividendo y el divisor son heterogéneos, y en el segundo, homogéneos.

212. División de concretos heterogéneos.

Por la división de concretos heterogéneos se podrá, pues, hallar el valor de una unidad (cociente), conocido el de varias (dividendo) y el número de ellas (divisor) (*), mediante la siguiente regla:

Para dividir dos números concretos heterogéneos se reduce el divisor, si ya no lo estuviese, al órden de la unidad cuyo valor es el dividendo, y éste, si es complejo, al último de sus órdenes y se dividen como abstractos.

Ejemplos.

1.º *¿Cuál es el peso de* 1^{dm^3}, *ó peso específico, de la aleación monetaria de plata de la que* 5^{dm^3} *pesan* $50,60^{kg}$?

El dividendo es $50,60^{kg}$ (peso de la totalidad de unidades) y el divisor es 5^{dm^3} ; luego el cociente es $(50,60 : 5)^{kg} = 10,12$.

2.º *¿Cuál es el peso de* 1^{dm^3}, *ó peso específico, de la aleación monetaria de plata de la que* 5^{m^3} *pesan* 50600^{kg}?

El dividendo es 50600^{kg} (peso de la totalidad de unidades) y el divisor es 5000^{dm^3}, equivalentes á 5^{m^3} ; luego el cociente es $(50600 : 5000)^{kg} = 10,12$.

3.º *¿Cuánto tardará en recorrer un arco de* 1^o, *un móvil que en* 30^h, *recorre un arco de* 15^o?

El dividendo es 30^h (tiempo empleado en la totalidad de grados) y el divisor es 15 ; luego el cociente es $(30 : 15)^h = 2^h$.

4.º *¿Cuánto tardará en recorrer un arco de* $1''$, *un móvil que en* 108000^h, *recorre un arco de* 15^o?

El dividendo es 108000^h (tiempo empleado en la totalidad de grados) y el divisor es $54000''$, equivalentes á 15^o ; luego el cociente es $(108000 : 54000)^h = 2^h$.

(*) Más adelante **(216-Escolio 3.º)** se expone el caso en qué, para conseguir este objeto, se emplea una multiplicación.

5.° *¿Cuánto tardará en recorrer un arco de 1'', un móvil que, en* 5^A, 6^M, 3^d, 4^h, 29^{ms}, *recorre un arco de* 6°, 14', 20''?

El dividendo es 2855789^{ms}, equivalentes á 5^A, 6^M, 3^d, 4^h, 29^{ms}, (tiempo empleado en recorrer la totalidad de unidades) y el divisor es 22460'', equivalentes á 6°, 14', 20'', y verificando la operación, se tiene:

```
2855789ms |22460
 6097      ------
 16058      127ms |60
  3369ms      7ms  ---
    60             2h
---------
 202140s  |22460
 00000     -----
            9s
```

Luego el cociente es 2^h, 7^{ms}, 9^s.

6.° *¿Cuánto tardará en recorrer un arco de 1°, un móvil que, en* 13^h, 13^{ms}, $16{,}48^s$, *recorre un arco de* 6°, 14', 20''?

El dividendo es $47596{,}48^s$ equivalentes á 13^h, 13^{ms}, $16{,}48^s$ (tiempo empleado en recorrer la totalidad del arco) y el divisor es $\frac{22460}{3600}$°, equivalente á 6°, 14', 20'', y verificando la operación, se tiene: $47596{,}48 : \frac{22460}{3600} = 47596{,}48 : \frac{1123}{180}$.

```
   47596,48
       1 80
  ----------
  3807718 4
  4759648
  ----------
  8567366,40 |1123
   7063       --------
    3256      7628,99s|60
   10106      16       ------
    11224      42      127ms |60
     11170      08,99s 07ms   ---
      1063                    2h
```

Luego el cociente es 2^h, 7^{ms}, $8{,}99^s$ ó sea 2^h, 7^{ms}, 9^s.

Observación. Cuando el dividendo es complejo, no métrico decimal, y el divisor resulta entero se puede emplear también el procedimiento de DIVISIONES PARCIALES, que consiste *en dividir separadamente cada uno de los órdenes del dividendo por el divisor, reduciendo préviamente al órden inmediato inferior cada uno de los restos y agregando al resultado las unidades de este órden.*

Así, en el ejemplo 5.° se procederá de este modo:

```
 5A      6M      3d       4h        29ms|22460
12      60     1980     47592     160560 ------------------------------
---    -----   -----    -------   ------- 0A, 0M, 0d, 2h, 7ms, 9s.
60      66M    1983d    47596h    160589ms
        30       24      2676h      3369ms
      -----    -----      60          60
      1980d    7932     --------   --------
               3966     160560ms   202140s
              ------               000000
              47592h
```

cuyo cociente es, como antes, 2^h, 7^{ms}, 9^s.

213. División de concretos homogéneos.

Por la división de concretos homogéneos se puede hallar el número de unidades (cociente), conocido su valor (dividendo) y el de una de ellas (divisor) (*), mediante la siguiente regla:

Para dividir dos números concretos homogéneos se convierten en incomplejos del mismo órden, si no lo son, y se dividen como abstractos.

Ejemplos.

1.° *¿Cuántos decímetros cúbicos ocupará una aleación monetaria de plata que pesa* $50{,}60^{kg}$, *sabiendo que su peso específico es 10,12?*

El dividendo es $50{,}60^{kg}$ (peso de la totalidad de unidades) y el divisor es $10{,}12^{kg}$ (peso de una unidad); luego el cociente es $(50{,}60 : 10{,}12)^{dm^3} = 5^{dm^3}$.

2.° *¿Cuántos decímetros cúbicos ocupará una aleación monetaria de plata que pesa* 50600^{kg}, *sabiendo que su peso específico es 10,12?*

El dividendo es 50600^{kg} (peso de la totalidad de unidades) y el divisor es $10{,}12^{kg}$ (peso de una unidad); luego el cociente es $(50600 : 10{,}12)^{dm^3} = 5000^{dm^3} = 5^{m^3}$.

3.° *¿Cuántos grados recorrerá en* 30^h, *un móvil que, en* 2^h, *recorre* 1°?

El dividendo es 30^h (tiempo empleado en la totalidad del arco) y el divisor es 2^h (tiempo empleado en una unidad); luego el cociente es $(30 : 2)^o = 15^o$.

(*) Más adelante (**216.-Escolio 3.°**) se expone el caso en qué, para conseguir esto, se hace la división inversa.

4.º *¿Cuántos grados recorrerá, en* 108000^{h}, *un móvil que, en* 2^{h} *recorre* $1''$?

El dividendo es 108000^{h} (tiempo empleado en la totalidad del arco) y el divisor es 2^{h} (tiempo empleado en una unidad); luego el cociente es $(108000 : 2)'' = 54000'' = 15^{o}$.

5.º *¿Qué arco recorrerá, en* 5^{A}, 6^{M}, 3^{d}, 4^{h}, 29^{ms}, *un móvil que, en* 2^{h}, 7^{ms}, 9^{s}, *recorre un arco de* $1''$?

El dividendo es 171347340^{s}, equivalentes á los 5^{A}, 6^{M}, 3^{d}, 4^{h}, 29^{ms} (tiempo empleado en la totalidad del arco) y el divisor es 7629^{s} equivalentes á las 2^{h}, 7^{ms}, 9^{s} (tiempo empleado en una unidad); luego el cociente es $(171347340:7629)''=22460''=6^{o}, 14', 20''$.

6.º *¿Qué arco recorrerá, en* 13^{h}, 13^{ms}, $16{,}48^{s}$, *un móvil que, en* 2^{h}, 7^{ms}, 9^{s}, *recorre un arco de* 1^{o}?

El dividendo es $47596{,}48^{s}$ equivalentes á las 13^{h}, 13^{ms}, $16{,}48^{s}$ (tiempo empleado en la totalidad del arco) y el divisor es 7629^{s} equivalentes á las 2^{h}, 7^{ms}, 9^{s} (tiempo empleado en una unidad); luego el cociente es $(47596{,}48 : 7629)^{o} = 6^{o}, 14', 20''$.

LIBRO III.

DE LA COMPARACIÓN DE NÚMEROS CONCRETOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

DE LA PROPORCIONALIDAD DE CANTIDADES CONCRETAS.

214. Llámanse *cantidades relativas* á dos cantidades tales que á cada valor de una de ellas corresponde uno de la otra; como, por ejemplo, el tiempo que un cuerpo está en movimiento uniforme y el espacio que recorre en ese tiempo (*).

Cantidades proporcionales *son dos cantidades relativas tales que con dos valores de una de ellas y sus correspondientes de la otra se puede formar una proporción.*

La proporcionalidad entre dos cantidades puede ser real ó convenida: es real, cuando por la naturaleza propia de ellas existe precisa y necesariamente su proporcionalidad; como, por ejemplo, entre el peso de una sustancia y su valor en dinero, y es convenida, cuando se admite prescindiendo de condiciones que se consideran accesorias; como, por ejemplo, el número de metros de una labor y los obreros que la ejecuten, suponiendo que la dificultad de la labor es constantemente la misma, así como también la actividad de los obreros, duración del trabajo, etc. etc.

En el fondo de toda proporcionalidad, áun de las que se consideran como reales, hay siempre algo de hipotético.

(*) Llámase *movimiento uniforme* á aquel por el que un cuerpo recorre espacios iguales en tiempos iguales, y *velocidad de un movimiento* al espacio recorrido en una unidad de tiempo.

215. Teorema. *La proporcionalidad entre dos cantidades puede ser de tres clases.*

En efecto, si a y a' son los valores de una cantidad y b y b' los respectivamente correspondientes de otra, proporcional á ella, y multiplicamos dichos valores, dos á dos, de todos los modos posibles, se obtienen las tres igualdades $ab'=a'b$, $ab=a'b'$ y $aa'=bb'$, de las que resultan las tres proporciones distintas $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$; $\frac{a}{a'}=\frac{b'}{b}$ y $\frac{a}{b}=\frac{b'}{a'}$.

Escolio. La proporcionalidad revelada por la primera se llama *directa* y expresa que la razón de dos valores de la primera cantidad es igual á la de sus correspondientes de la segunda; la revelada por la segunda proporción se llama *inversa* y expresa que la razón de dos valores de la primera cantidad es igual á la inversa de sus correspondientes de la segunda; la revelada por la tercera se llama *recíproca* y expresa que la razón entre un valor de una cantidad y su correspondiente de otra es igual á la razón inversa entre otro valor de la primera y su correspondiente de la segunda, por lo que tiene muy poco uso, pues cuando exista entre dos valores de una cantidad y sus correspondientes de otra, se la puede considerar como una proporcionalidad inversa entre dos valores heterogéneos y sus correspondientes respectivos.

216. Teorema. *Si multiplicando el valor de una cantidad por un número cualquiera, el de su relativa queda multiplicado por el mismo número, dichas cantidades son directamente proporcionales, y si queda dividido, lo son inversamente.*

En efecto, si a y a' son los valores de una cantidad y b y b' los correspondientes de su relativa, se tendrá:

1.º Que si $a'=am$, al mismo tiempo que $b'=bm$, de la primera igualdad se deducirá, $\frac{a'}{a}=m$, y de la segunda, $\frac{b'}{b}=m$; luego $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}$ ó, invirtiendo, $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$.

2.º Que si $a'=am$, al mismo tiempo que $b'=b:m$, de la primera igualdad se deducirá, $\frac{a'}{a}=m$, y de la segunda, $\frac{b}{b'}=m$; luego $\frac{a'}{a}=\frac{b}{b'}$ ó, invirtiendo, $\frac{a}{a'}=\frac{b'}{b}$.

Escolio 1.º En la práctica, para conocer si dos cantidades heterogéneas dadas son proporcionales y en qué concepto, se supone que se duplica un valor cualquiera de la primera y si, por la índole de la cuestión, se debe duplicar su correspondiente, lo serán *directamente*, y si debe quedar reducido á la mitad, lo serán *inversamente*.

Escolio 2.º Si entre un número n de unidades y su valor v existe proporcionalidad directa, y llamamos u al valor de una unidad, se tendrá la proporción $\frac{n}{1}=\frac{v}{u}$, de la que se deduce, $v=un$; $u=\frac{v}{n}$; $n=\frac{v}{u}$, lo que indica que, cuando dos cantidades son *directamente* proporcionales:

El valor de varias unidades es igual al de una, multiplicado por el número de unidades (*).

El valor de una unidad es igual al de varias, dividido por el número de unidades (**).

El número de unidades es igual á su valor, dividido por el de una unidad (***).

Escolio 3.º Si entre un número n de unidades y su valor v existe proporcionalidad inversa, y llamamos u al valor de una unidad, se tendrá la proporción $\frac{n}{1}=\frac{u}{v}$, de la que se deduce, $v=\frac{u}{n}$; $u=vn$; $n=\frac{u}{v}$, lo que indica que, cuando dos cantidades son *inversamente* proporcionales:

El valor de varias unidades es igual al de una, dividido por el número de unidades (****).

El valor de una unidad es igual al de varias, multiplicado por el número de unidades (*****).

El número de unidades es igual al valor de una, dividido por el de todas (******).

(*) Véase lo expuesto sobre el fin práctico de la multiplicación de concretos (**210**).

(**) Véase lo expuesto sobre los fines prácticos de la división de concretos (**211**).

(***) Véase lo expuesto sobre el fin práctico de la división de concretos homogéneos (**213**).

(****) Véase, pág. 178, Nota (*).

(*****) Véase, pág. 181, Nota (*).

(******) Véase, pág. 183, Nota (*).

CAPÍTULO II.

APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD DE CANTIDADES CONCRETAS.

217. En extremo variadas son las cuestiones que se resuelven por medio de la proporcionalidad, pero todas ellas pueden reducirse á tres grupos de reglas, conocidos con los nombres de *Regla de tres*, de *repartimientos proporcionales* y de *aligación*.

ARTÍCULO PRIMERO.

REGLA DE TRES.

§ 1.º—Generalidades.

218. La Regla de tres *tiene por objeto hallar el valor de varias unidades, conociendo el de otras homogéneas con ellas, siempre que exista proporcionalidad real ó supuesta, entre dichos valores y las condiciones de que dependan.*

En la Regla de tres, hay que distinguir dos casos:

1.º *Que el valor que se busca dependa únicamente del número de unidades:* cómo, por ejemplo, si se tratase de averiguar cuánto valdrá un número dado de kilógramos de una sustancia, conociendo el valor de otro número de kilógramos de la misma.

2.º *Que el valor que se busca dependa de otras condiciones, además de la del número de unidades:* cómo, por ejemplo, si se tratase de averiguar cuántos días tardaría en hacer una zanja de tal largo, tal ancho y tal profundidad, cierto número de obreros, conociéndose lo que otro número de éstos ha tardado en hacer otra zanja de distinto largo, ancho y profundidad.

En el primer caso, la Regla de tres se llama *simple* y en el segundo, *compuesta*.

219. Regla de tres simple.

El fin práctico de la Regla de tres simple es hallar el valor de varias unidades, conociendo el de otras varias, homogéneas con ellas.

Para plantear una Regla de tres simple basta hacer el siguiente razonamiento:

Llamando x al valor desconocido de a' unidades y v al conocido de a unidades, se tiene

1.º Que, si v y x son directamente proporcionales á a y a', se formará la proporción $\frac{a}{a'} = \frac{v}{x}$ ó $\frac{x}{v} = \frac{a'}{a}$, de la que se obtiene $x = \frac{va'}{a}$.

2.º Que, si v y x son inversamente proporcionales á a y a', se formará la proporción $\frac{a}{a'} = \frac{x}{v}$ ó $\frac{x}{v} = \frac{a}{a'}$, de la que se obtiene $x = \frac{va}{a'}$.

De aquí se deduce la siguiente regla:

Para resolver una Regla de tres simple se forma una igualdad fraccionaria cuyo primer miembro sea la razón del valor desconocido y su homogéneo, y el segundo la razón de sus unidades correspondientes, directa ó inversa, según que aquéllos sean directa ó inversamente proporcionales á éstas, y se halla en ella el término desconocido.

Observación. La Regla de tres simple se resuelve también *por reducción á la unidad*, mediante el siguiente razonamiento:

1.º Si v y x son directamente proporcionales á a y a', se tendrá que, si a unidades valen v, una valdrá $\frac{v}{a}$, y las a' valdrán $\frac{v}{a}\, a' = \frac{va'}{a}$ **(216-Escolio 2.º)**.

2.º Si v y x son inversamente proporcionales á a y a', se tendrá que, si a unidades valen v, una valdrá va, y las a' valdrán $\frac{va}{a'}$ **(216-Escolio 3.º)**.

Ejemplos.

1.° *¿Cuántos kilómetros recorrerá en 9 horas, con movimiento uniforme, un móvil que, en 5 horas, recorre 37 kilómetros?*

En este ejemplo, el tiempo y el espacio recorrido son *directamente* proporcionales, y se tendrá:

Por medio de una proporción.

Disponiendo los datos en la forma, expuesta al márgen, para hacer más visible su mutua relación, se forma la proporción $\frac{x}{37} = \frac{9}{5}$, de la que resulta

x^{km}. . . . . 9^h
37 5

$$x = \frac{9 \times 37}{5} \text{ km}.$$

Por reducción á la unidad.

Si en 5^h recorre 37^{km}, en una hora recorrerá $\frac{37}{5}$ km.

Si en una hora recorre $\frac{37}{5}$ km, en 9^h recorrerá $\frac{9 \times 37}{5}$ km $= x$.

2.° *¿Cuántas horas tardará un móvil en recorrer, con una velocidad de 40 kilómetros por hora, un espacio dado, sabiendo que con la velocidad de 30^{km} por hora, lo recorre en 6 horas?*

En este ejemplo, el tiempo y la velocidad son *inversamente* proporcionales, y se tendrá:

Por medio de una proporción.

Disponiendo los datos en la forma, expuesta al márgen, se forma la proporción $\frac{x}{6} = \frac{30}{40}$, de la que resulta $x = \frac{6 \times 30}{40}$h.

x^h . . . . . 40^{km}
6 30

Por reducción a la unidad.

Si con la velocidad de 30 km tarda 6^h, con la de 1^{km} tardará 6×30^h.

Si con la velocidad de 1^{km} tarda 6×30^h, con la de 40^{km} tardará $\frac{6 \times 30}{40}$ h. $= x$.

220. Regla de tres compuesta.

El fin práctico de la Regla de tres compuesta es hallar el valor de varias unidades, conocido el de otras homogéneas con ellas, dependiendo ambos valores de otras cantidades homogéneas dos á dos.

Para plantear una Regla de tres compuesta basta hacer el siguiente razonamiento.

Llamando x al valor desconocido de a' unidades, v al conocido de a unidades, b y b' á otro par de valores homogéneos de que respectivamente dependan v y x, si suponemos que éstos son directamente proporcionales á a y a' é inversamente á b y b', se tendrá que

siendo v un valor dependiente de. . . . . a y b
si llamamos y á uno dependiente de. . . . . a' y b
como x es dependiente de. a' y b'

se tendrán las proporciones $\frac{y}{v} = \frac{a'}{a}$, $\frac{x}{y} = \frac{b}{b'}$

que, multiplicadas ordenadamente y suprimiendo el factor común, y, del primer miembro, dan la igualdad

$$\frac{x}{v} = \frac{a'}{a} \cdot \frac{b}{b'} \text{ ó } \frac{x}{v} = \frac{a'b}{ab'}, \text{ de donde resulta } x = \frac{va'b}{ab'}.$$

De aquí se deduce la siguiente regla:

Para resolver una Regla de tres compuesta se forma una igualdad fraccionaria cuyo primer miembro sea la razón entre el valor desconocido y su homogéneo, y el segundo sea el producto de las razones directas de sus correspondientes que sean directamente proporcionales con aquéllos y las inversas de los que lo sean inversamente, y se halla el término desconocido.

Observación. La Regla de tres compuesta se resuelve también *por reducción á la unidad*, mediante el siguiente razonamiento.

Si los valores v y x son proporcionales directamente á a y a' é inversamente á b y b', se tendrá que, considerando primeramente las a y a' unidades, si a valen v, *una* valdrá $\frac{v}{a}$ y las a' valdrán $\frac{va'}{a}$, y considerando después el par de valores homogéneos b y b', si a' unidades con la condición b valen $\frac{va'}{a}$, *una* valdrá $\frac{va'b}{a}$, y con la condición b' valdrán $\frac{va'b}{ab'} = x$.

Ejemplo. *¿Si 6 hombres han empleado 12 jornales de á 8 horas en hacer un muro de 7 metros de largo y 3 de alto, ¿cuántos jornales de á 10 horas emplearán 9 hombres para hacer otro muro, del mismo espesor, de 15 metros de largo y 4 de alto?*

Jornales.	Hombres.	Horas.	Largo.	Alto.
x	9	10	15	4
12	6	8	7	3

Disponiendo los datos, en la forma expuesta al márgen, para hacer mas visible su mutua dependencia, como el número de jornales es proporcional *directamente* al largo y alto del muro é *inversamente* al número de hombres y á la duración de los jornales, se tendrá:

Por medio de una igualdad fraccionaria.

$$\frac{x}{12} = \frac{6}{9} \times \frac{8}{10} \times \frac{15}{7} \times \frac{4}{3} = \frac{6.8.15.4}{9.10.7.3},$$

de donde resulta $x = \dfrac{12.6.8.15.4}{9.10.7.3} = 18{,}29$ jornales.

Por reducción á la unidad.

Si 6 hombres emplean 12 jornales, *uno*, empleará 12.6

y 9 emplearán $\dfrac{12.6}{9}$.

Si, siendo de 8 horas, emplean $\dfrac{12.6}{9}$, de *una*, emplearán $\dfrac{12.6.8}{9}$

y de 10 emplearán $\dfrac{12.6.8}{9.10}$.

Si de un largo de 7^m emplean $\dfrac{12.6.8}{9.10}$, de *uno*, emplearán $\dfrac{12.6.8}{9.10.7}$

y de 15 emplearán $\dfrac{12.6.8.15}{9.10.7}$.

Si de un alto de 3^m emplean $\dfrac{12.6.8.15}{9.10.7}$, de *uno*, emplearán $\dfrac{12.6.8.15}{9.10.7.3}$

y de 4 emplearán $\dfrac{12.6.8.15.4}{9.10.7.3} = 18{,}29$ jornales $= x$.

§ 2.°—Aplicaciones de la Regla de tres.

221. Numerosas son las aplicaciones de la Regla de tres, pero las más frecuentes son las conocidas con el nombre genérico de *Regla de percentajes* y las de *Interés* y *Descuento*.

A.—*Regla de percentajes ó del tanto por ciento.*

222. **Percentaje** *es el valor que corresponde á varias unidades, según el que corresponda á cien de ellas, llamado tasa.*

La regla de percentaje tiene por objeto resolver todas las cuestiones, dependientes de la relación que ligue á estos cuatro valores, homogéneos, dos á dos: 100 unidades; la tasa, que se indica $r\,^0/_0$; un número, n, de unidades, homogéneas con aquéllas; y el percentaje, p, homogéneo con la tasa.

El percentaje y la tasa son directamente proporcionales al número de unidades, de modo que, por una Regla de tres simple, se tendrá la proporción $\dfrac{p}{r} = \dfrac{n}{100}$ ó $\dfrac{100}{r} = \dfrac{n}{p}$, llamada *fórmula del percentaje*, por la que se halla fácilmente cada uno de los valores p, r ó n, conocidos los otros dos (*).

223. Análogas á la Regla de percentajes ó del tanto por ciento, son las del *tanto por mil*, *por gruesa*, *por docena* y, en general, *por cuanto*, por las qué, conocido el valor r, correspondiente á 1000, 144, 12, y, en general, c, se trata de hallar el correspondiente á un número, n.

En ellas, por razonamientos análogos al empleado en la de percentajes, se obtienen las fórmulas

$$\frac{p}{r} = \frac{n}{1000};\quad \frac{p}{r} = \frac{n}{144};\quad \frac{p}{r} = \frac{n}{12};\quad \frac{p}{r} = \frac{n}{c}.$$

(*) La palabra *fórmula*, muy usada en Matemáticas y otras ciencias, significa *regla*, *patrón*, y expresa, en general, las operaciones que hay que hacer con cantidades conocidas para hallar el valor de otra desconocida ó *incógnita* dependiente de ellas.

224. Las cuestiones que en el comercio se resuelven por la Regla de percentajes son, más comunmente, las referentes á *comisiones, corretajes, taras, derechos de aduanas (ad valorem), seguros á prima fija, fondos públicos, etc.*

225. Comisión ó corretaje *es un percentaje del importe de géneros ó valores, que se abona a un comisionista ó corredor por su intervención en la compra ó venta.*

226. Tara, al tanto por ciento, *es un percentaje del peso* bruto *de una mercancía, que se rebaja de él, para obtener el peso* neto.

227. Derecho de aduanas (ad valorem) *es un percentaje del valor de géneros, que se abona por su introducción en un país ó por su exportación á otro.*

228. Seguro, á prima fija, *es un percentaje del valor de una propiedad, que se abona á un individuo ó Sociedad, obligados á indemnizar por las pérdidas ó deterioros (siniestros ó averías) que ocurran en ella.*

Ejemplos.

1.° *¿Cuánto importa la comisión, al 0,75 %, de una operación de 33746 pesetas?*

$$p = \frac{nr}{100} = \frac{33746.0,75}{100} = 253,10 \text{ pesetas.}$$

2.° *¿Cuáles son la tara y peso neto de una mercadería de 380 q (peso bruto), tarada al 9 %?*

$$p = \frac{nr}{100} = \frac{380 \times 9}{100} = 34,20 \text{ q};$$

luego, *peso neto* $= 380 - 34,20 = 345,80$ q.

3.° *¿Cuánto adeuda en Aduana una partida de 8000 pesetas, al 0,32 %?*

$$p = \frac{nr}{100} = \frac{8000.0,32}{100} = 25,60 \text{ pesetas.}$$

4.° *¿Qué prima hay que pagar por asegurar, contra incendios, al 0,75 %, una finca tasada en 75000 duros?*

$$p = \frac{nr}{100} = \frac{75000 \times 0,75}{100} = 562,50 \text{ duros} = 2813 \text{ pesetas.}$$

229. Fondos públicos. El Gobierno, cuando necesita fondos para satisfacer atenciones del Estado, los obtiene por préstamo de los particulares, emitiendo TÍTULOS, llamados de la DEUDA PÚBLICA, que expresan la cantidad prestada ó *capital nominal*, y acreditan el derecho de su poseedor á percibir anualmente un interés, calculado á tanto por ciento, previamente estipulado, que se llama *interés del papel.* (*).

Estos títulos son negociables con arreglo á una ley, que se llama de BOLSA, y se adquieren por un valor efectivo inferior, generalmente, á su valor nominal.

Se llama *cambio* al valor de cien unidades nominales; *capital efectivo* al valor que, según el cambio, corresponde á un capital nominal; *tanto por ciento efectivo* al interés anual de cien unidades efectivas, y *renta del papel* al interés anual del capital efectivo empleado en su adquisición.

El tanto por ciento efectivo es variable y dependiente de las alteraciones del cambio, así como también lo es la renta del papel.

Las cuestiones más frecuentes sobre fondos públicos, que se resuelven por un sencillo percentaje, son las siguientes:

Primera. Hallar el valor efectivo, e, *el nominal,* n, *ó el cambio,* c ; pues se tiene la proporción $\frac{100}{c} = \frac{n}{e}$.

Ejemplos.

1.° *¿Cuánto costarán 50000 pesetas nominales de Deuda española, al cambio de 59?*

$$e = \frac{nc}{100} = \frac{50000.59}{100} = 500 \times 59 = 29500 \text{ pesetas efectivas.}$$

2.° *¿Qué valor nominal en títulos de la Deuda española, al cambio de 59, se puede comprar con 29500 pesetas?*

$$n = \frac{100\,e}{c} = \frac{100 \times 29500}{59} = \frac{2950000}{59} = 50000 \text{ pesetas nominales.}$$

3.° *¿A qué cambio se pueden comprar 50000 pesetas nominales de Deuda española, con 29500 pesetas efectivas?*

$$c = \frac{100\,e}{n} = \frac{100 \times 29500}{50000} = 59.$$

(*) La **Deuda pública**, en España, es de dos clases, *perpetua* y *amortizable*, y tanto una como otra tienen asignado el 4 por 100 de interés anual.

Segunda. Hallar el valor nominal, n, *ó el interés*, i; pues se tiene la proporción $\frac{100}{4} = \frac{n}{i}$.

Ejemplos.

1.° *¿Qué valor nominal, en Deuda española, producirá anualmente 2000 pesetas efectivas?*

$$n = \frac{100\,i}{4} = \frac{100 \times 2000}{4} = \frac{200000}{4} = 50000 \text{ pesetas nominales.}$$

2.° *¿Qué interés efectivo producirán 50000 pesetas nominales de Deuda española?*

$$i = \frac{4n}{100} = \frac{4 \times 50000}{100} = 4 \times 500 = 2000 \text{ pesetas.}$$

Tercera. Hallar el tanto por ciento efectivo, r, *ó el cambio*, c; pues se tiene la proporción $\frac{100}{r} = \frac{c}{4}$.

Ejemplos.

1.° *¿Qué tanto por ciento efectivo produce un capital empleado en Deuda española, al cambio de 59?*

$$r = \frac{100 \times 4}{c} = \frac{400}{59} = 6{,}77\ \% \text{ (próximamente).}$$

2.° *¿A qué cambio se debe comprar Deuda española, para que el efectivo produzca el 6,77 %?*

$$c = \frac{100 \times 4}{r} = \frac{400}{6{,}77} = 59{,}08 \text{ (próximamente).}$$

Cuarta. Hallar el efectivo, e, *la renta*, R, *ó el cambio* c.

Estas cuestiones pueden resolverse por dos percentajes sucesivos y, mejor aún, por una regla de tres simple; pues se tiene la proporción $\frac{c}{4} = \frac{e}{R}$.

Ejemplos.

1.° *¿Qué capital efectivo, empleado en Deuda española, al cambio de 59, producirá 2000 pesetas?*

$$e = \frac{cR}{4} = \frac{2000 \times 59}{4} = 29500 \text{ pesetas.}$$

2.° *¿Qué renta producirán 29500 pesetas, empleadas en Deuda española, al cambio de 59?*

$$R = \frac{4e}{c} = \frac{29500 \times 4}{59} = 2000 \text{ pesetas.}$$

3.° *¿A qué cambio se debe comprar Deuda española para que 29500 pesetas den una renta de 2000 pesetas?*

$$c = \frac{4e}{R} = \frac{29500 \times 4}{2000} = 59.$$

B.—*Regla de interés.*

230. La Regla de interés *tiene por principal objeto hallar la ganancia que produce un capital, al cabo de cierto tiempo de estar impuesto, con la condición de que* 100 *unidades produzcan, al año, una ganancia dada, llamada tanto por ciento ó rédito.*

Si el tiempo de imposición es un año, el interés se llama *anual* y todas las cuestiones referentes á él se resuelven por un percentaje; pues, designando el capital por c, el tanto por ciento ó rédito por r y el interés por i, como éstos son directamente proporcionales al capital y á 100 unidades suyas, se tiene la proporción $\frac{i}{r} = \frac{c}{100}$ ó $\frac{100}{r} = \frac{c}{i}$, por la que se halla fácilmente cada uno de los valores i, r ó c, conocidos los otros dos.

Así resulta de ella:

1.° $i = \frac{cr}{100} = \frac{c}{100} \times r$, lo que indica *que para hallar el interés, se multiplica el céntimo del capital, por el rédito.*

2.° $r = \frac{100i}{c}$, lo que indica que *para hallar el rédito, se divide el céntuplo del interés, por el capital.*

3.° $c = \frac{100i}{r}$, lo que indica que *para hallar el capital, se divide el céntuplo del interés, por el rédito.*

Ejemplos.

1.° *¿Cuál es el 7 por 100 de 6000 pesetas?*

Se tiene $i = 60 \times 7 = 420$ pesetas.

2.° *¿A qué rédito hay que imponer 6000 pesetas, para que produzcan 420, en un año?*

Se tendrá $r = 42000 : 6000 = 7\ \%$

3.° *¿Qué capital, impuesto al 7 por 100, da un interés anual de 420 pesetas?*

Se tendrá $c = 42000 : 7 = 6000$ pesetas.

Si el tiempo de imposición es distinto de un año, puede ocurrir que se retiren los intereses al fin de cada año ó que se dejen acumulados al capital para producir intereses mayores en los años sucesivos: en el primer caso, el interés se llama *simple*, y en el segundo, *compuesto*.

231. Interés simple. Como el interés y el rédito son directamente proporcionales á los capitales y á los tiempos, designando por t el número de años de imposición, se tiene por una regla de tres compuesta la proporción

$$\frac{i}{r} = \frac{ct}{100.1} \text{ ó sea } \frac{i}{r} = \frac{ct}{100}, \quad (\alpha)$$

Si t expresase otra unidad cronométrica, se transformaría en incomplejo de año y la proporción anterior tomaría las formas:

$$\text{si } t \text{ expresa meses, } \frac{i}{r} = \frac{c \times \frac{t}{12}}{100} \text{ ó sea } \frac{i}{r} = \frac{ct}{1200} \quad (\alpha')$$

$$\text{si } t \text{ expresa días, } \frac{i}{r} = \frac{c \times \frac{t}{365}}{100} \text{ ó sea } \frac{i}{r} = \frac{ct}{36500} \quad (\alpha'').$$

Las igualdades (α), (α') y (α'') se llaman *fórmulas del interés simple*, por años, meses y días, respectivamente, y con cada una de ellas se puede hallar cada uno de los valores i, r, c ó t, conocidos los otros tres.

Ejemplos.

1.° *¿Cuánto producen 20000 pesetas, en 3 años, al 6 °/₀?*

Cómo $r=6$, $c=20000$ y $t=3$ años, se tendrá, por la fórmula (α)

$$i = \frac{6 \times 20000 \times 3}{100} = 3600^{p}.$$

2.° *¿A qué tanto por ciento anual se han de imponer 2000 pesetas para que, en 8 años y 7 meses, den un interés de 500 pesetas?*

Cómo $i=500$, $c=2000$ y $t=8^{A}$, $7^{M}=103^{M}$, se tendrá, por la fórmula (α')

$$r = \frac{1200 \times 500}{2000 \times 103} = 2{,}91 \,\%.$$

3.° *¿Qué capital hay que colocar al 6 % para que, en 75 días, dé un interés de 20 pesetas?*

Cómo $i=20$, $r=6$ y $t=75$ días, se tendrá, por la fórmula (α'')

$$75c = \frac{36500 \times 20}{6}, \text{ de donde, } c = \frac{36500 \times 20}{6 \times 75} = 1622{,}22^{p}.$$

232. Interés compuesto. Toda cuestión que tenga por objeto hallar uno de los valores que entran en el cálculo del interés compuesto tiene su completa y fácil solución en el Algebra; pero, aritméticamente, aunque de una manera enojosa, se puede obtener el interés compuesto de un capital, por el siguiente procedimiento:

Se halla el interés correspondiente al primer año; se agrega al capital y se obtiene el interés anual correspondiente á la suma; se agrega este interés á la suma anterior, y así se continúa hasta el último año; se halla además el interés correspondiente á los días de imposición, que no formen un año, y se suman todos los intereses obtenidos.

Ejemplo. *¿Cuánto producen 20000 pesetas, en 3 años, 5 meses y 13 días, al 6 % de interés compuesto?*

En el primer año, el capital de 20000^{p} produce (230. 1.°)....... $\Big\}\; i_1 = \dfrac{20000 \times 6}{100} = 200 \times 6 = 1200^{p}$

En el segundo año, el capital de $20000^{p} + 1200^{p} = 21200^{p}$ produce $\Big\}\; i_2 = \dfrac{21200 \times 6}{100} = 212 \times 6 = 1272$

En el tercer año, el capital de $21200^{p} + 1272^{p} = 22472^{p}$ produce $\Big\}\; i_3 = \dfrac{22472 \times 6}{100} = 224{,}72 \times 6 = 1348{,}32$

En 5^{M} y $13^{d} = 163$ días, el capital de $22472^{p} + 1348{,}32^{p} = 23820{,}32^{p}$ produce. (231. Fórmula α'')..... $\Big\}\; i_4 = \dfrac{23820{,}32 \times 6 \times 163}{36500} = 638{,}25$

Interés pedido $= 4458{,}57$.

C.—Regla de descuento.

233. La Regla de descuento *tiene por objeto determinar el valor de un documento de crédito, antes de su vencimiento.*

Los documentos de crédito más usados son *el pagaré* y *la letra de cambio.*

Pagaré *es un documento por el que una persona se obliga á pagar cierta cantidad en una fecha designada, que se llama vencimiento.*

Letra de cambio *es un documento por el que una persona manda á otra que, á determinado vencimiento, pague cierta cantidad á una tercera persona ó á su órden.*

En todo pagaré ó letra se consideran dos valores: uno constante, llamado *nominal,* que es el consignado en el documento, y otro variable, llamado *efectivo,* que es el que tiene antes del vencimiento. El valor efectivo depende de muchas y variadas circunstancias, pero principalmente del tiempo que falta para el vencimiento.

Descuento *es la diferencia entre el valor nominal de un documento de crédito y su valor efectivo.*

La relación que liga el valor nominal, N, al efectivo, E, y al descuento, d, es $E = N - d$.

Se conocen dos clases de descuento: el *comercial* y el *racional,* de los que el primero es el usual, y el cálculo de uno y otro se hace por días y á un tanto por ciento de descuento anual sobre el valor nominal, en el primero, y sobre el efectivo, en el segundo.

234. Descuento comercial. Para hallar la fórmula del descuento comercial, basta poner en la fórmula del interés (**231**) (α''), d en vez de i, y N en vez de c, con lo que se tendrá $\dfrac{d}{r} = \dfrac{Nt}{36500}$,

de donde resulta $d = \dfrac{Nrt}{36500}$ y, por tanto, $E = N - \dfrac{Nrt}{36500}$.

Ejemplo. *Descontar comercialmente, al 6 %, una letra de 20000 pesetas que vence á los 3 meses.*

Se tendrá, $E = 20000 - \dfrac{20000\ 6.90}{36500} = 20000 - 295{,}89 = 19704{,}11$p.

235. Descuento racional. Para hallar la fórmula del descuento racional, basta poner en la fórmula del interés (**231**) (α''), d en vez de i, y E en vez de c, con lo que se tendrá $\dfrac{d}{r} = \dfrac{Et}{36500}$,

de donde resulta $d = \dfrac{Ert}{36500}$ y, por tanto, $E = N - \dfrac{Ert}{36500}$.

Multiplicando por 36500 los dos miembros de esta igualdad, resulta $36500\ E = 36500\ N - Ert$, y de aquí,

$$36500\ E + Ert = 36500\ N \text{ ó } (36500 + rt)\ E = 36500\ N$$

y, por tanto, $E = \dfrac{36500\,N}{36500 + rt}$.

Ejemplo. *Descontar racionalmente, al 6 %, una letra de 20000 pesetas que vence á los 3 meses.*

Se tendrá, $E = \dfrac{36500.20000}{36500 + 6.90} = 19708{,}42$p.

236. Teorema. *El descuento comercial excede al racional en el interés de éste.*

En efecto, designando por E_r y E_c el efectivo de un documento descontado al r %, racional y comercialmente, un año ántes de su vencimiento, se tiene

$$E_r - E_c = \frac{100\,N}{100 + r} - \left(N - \frac{Nr}{100}\right) = \frac{100\,N}{100 + r} - N + \frac{Nr}{100}$$
$$= N\left(\frac{100}{100 + r} - 1 + \frac{r}{100}\right)$$
$$= N \times \frac{100 \,.\, 100 - 100 \,.\, 100 - 100\,r + 100\,r + r^2}{100\,(100 + r)}$$
$$= N \times \frac{r^2}{100\,(100 + r)} = \frac{N}{100} \times \frac{r^2}{100 + r}.$$

Por otra parte, cómo el descuento racional en un año es

$$N - E_r = N - \frac{100\,N}{100 + r} = \frac{100\,N + Nr - 100\,N}{100 + r} = \frac{Nr}{100 + r},$$

su interés, $\dfrac{\dfrac{N\,r}{100 + r} \times r}{100} = \dfrac{N\,r^2}{100\,(100 + r)} = \dfrac{N}{100} \times \dfrac{r^2}{100 + r}$,

es igual al exceso del efectivo racional sobre el comercial.

ARTÍCULO II.

REPARTIMIENTOS PROPORCIONALES Ó PRORATEOS.

§ 1.º—Generalidades.

237. **Dividir una cantidad á prorata entre otras** *es descomponer el número que la expresa, en partes proporcionales á los números que expresan éstas.*

Todas las cuestiones referentes á prorateos se fundan en la división de un número en partes proporcionales á otros, la que se obtiene considerando que si aquél es N y éstos son a, b, c, y x, y, z, las partes de N proporcionales á a, b, y c, se tendrá la igualdad $N = a + b + c$ y la serie de razones iguales, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, de la que resulta

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \text{ ó sea } \frac{N}{a+b+c} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

y, haciendo á $a + b + c = s$, $\frac{N}{s} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$,

de donde se obtienen las proporciones

$$\frac{N}{s} = \frac{x}{a};\quad \frac{N}{s} = \frac{y}{b};\quad \frac{N}{s} = \frac{z}{c},$$

y de ellas, $x = \frac{N}{s}a$; $y = \frac{N}{s}b$; $z = \frac{N}{s}c$.

De lo expuesto se deduce la siguiente regla:

Para dividir un número en partes proporcionales á otros dados se le divide por la suma de éstos y el cociente se multiplica por cada uno de ellos.

Ejemplo. *Dividir 4176 en partes proporcionales á los números 2, 3 y 7.*

Como, $2 + 3 + 7 = 12$, se tendrá el cociente $\frac{4176}{12} = 348$;

luego los números pedidos serán, $348 \times 2 = 696$
$348 \times 3 = 1044$
$348 \times 7 = 2436$

cuya suma, 4176, es el número dado.

§ 2.º—Aplicaciones de los repartimientos proporcionales.

238. Numerosas son las cuestiones que se resuelven por el cálculo de prorateos, tales como *los repartos de contribuciones, cupos de quintas, cuotas por socorros mutuos, liquidación de averías, regla de Compañía*, etc.

239. **El reparto de contribuciones** *tiene por objeto distribuir equitativamente las cargas públicas*, para lo cual la contribución nacional se reparte entre todas las provincias, en proporción á su riqueza imponible, la cuota de cada provincia entre los municipios de ella, y la de cada municipio, entre sus vecinos.

240. **El reparto de quintas** *tiene por objeto distribuir equitativamente el servicio militar*, para lo cual el reemplazo de cada año se reparte entre todas las provincias, en proporción al número de sus mozos sorteables, y el cupo de cada provincia, entre sus municipios.

241. **El reparto por socorros mutuos y el de averías marítimas** *tienen por objeto distribuir entre varios asociados ó asegurados el importe del siniestro sufrido por uno de ellos*, para lo cual se divide dicho importe en partes proporcionales al interés que cada uno tiene en la Sociedad.

242. **La Regla de Compañía** *tiene por objeto repartir debidamente entre los socios la ganancia ó pérdida de una Sociedad.*

El capital impuesto por cada socio se llama *imposición;* la suma de las imposiciones constituye el *capital social;* la ganancia ó pérdida repartible se llama *dividendo general*, y la parte de él, correspondiente á cada socio, *dividendo parcial*, que es *activo* ó *pasivo*, según que se cobra ó paga.

La determinación de cada dividendo parcial descansa en estos tres principios:

1.º *Los dividendos parciales son proporcionales á las imposiciones, cuando los tiempos son iguales.* Principio de verdad evidente.

2.º *Los dividendos parciales son proporcionales á los tiempos, cuando las imposiciones son iguales.* Principio admitido.

3.° *Los dividendos son proporcionales á los productos de las imposiciones por los tiempos respectivos, cuando aquéllas y éstos son diferentes para cada socio.*

Este principio se deduce de los dos anteriores; pues, si representamos por c, t y d, la imposición, tiempo y dividendo parcial de un socio, y por c', t' y d' los de otro, se tiene, por la regla de tres compuesta, $\frac{d}{d'} = \frac{ct}{c't'}$.

La resolución de la cuestión más frecuente de Regla de Compañía se reduce, pues, á dividir el dividendo general en partes proporcionales á los tiempos, si las imposiciones son iguales; á las imposiciones, si los tiempos son iguales; y á los productos de las imposiciones por los tiempos, si aquéllas y éstos son diferentes para cada socio.

Ejemplos.

1.° *Entre tres individuos A, B y C, compran un billete de la Lotería nacional por 500 pesetas, poniendo A, 170 pesetas; B, 208; y C, 122: ¿cuánto corresponde á cada uno, del premio de 1500000 pesetas con que ha sido agraciado el billete?*

Los números á que deben ser proporcionales las cuotas, son 170, 208 y 122, cuya suma es $170 + 208 + 122 = 500$.

Luego, como $\frac{1500000}{500} = 3000$, se tendrá:

$$\begin{aligned}\text{cuota de A} &= 3000 \times 170 = 510000\\ \text{cuota de B} &= 3000 \times 208 = 624000\\ \text{cuota de C} &= 3000 \times 122 = 366000.\end{aligned}$$

2.° *Una persona, A, emprende una especulación con un capital de 5000 pesetas: á los 4 meses se le asocia otra, B, con uno de 2500, y 5 meses después, otra C, con uno de 4768: al año de emprendida por A la especulación, liquidan con una ganancia de 20000 pesetas, ¿cuánto corresponde á cada socio?*

Puesto que el socio A está en la sociedad 1 año = 12 meses, el socio B, $12 - 4 = 8$ meses, y el socio C, $8 - 5 = 3$ meses, los números á que, en este caso, deben ser proporcionales las ganancias son $5000 \times 12 = 60000$, $2500 \times 8 = 20000$, y $4768 \times 3 = 14304$, cuya suma es $60000 + 20000 + 14304 = 94304$.

Luego, como $\frac{20000}{94304} = 0{,}2120801$, se tendrá:

$$\begin{aligned}\text{ganancia de A} &= 0{,}2120801 \times 60000 = 12724{,}81\\ \text{ganancia de B} &= 0{,}2120801 \times 20000 = 4241{,}60\\ \text{ganancia de C} &= 0{,}2120801 \times 14304 = 3033{,}59.\end{aligned}$$

ARTÍCULO III.

REGLA DE ALIGACIÓN Ó DE LAS MEZCLAS.

243. Mezcla *es la reunión de dos ó más sustancias, sin sufrir deterioro ni alteración apreciables.*

Precio *de una sustancia ó de una mezcla es el valor de una unidad de ella.* El precio de una mezcla recibe el nombre de *precio medio* y está, naturalmente, comprendido entre el mayor y el menor de los precios de las sustancias mezcladas.

Valor *de una sustancia ó de una mezcla es el producto de su precio por el número de sus unidades.*

La Regla de aligación *tiene dos objetos principales: hallar el precio medio, conocidas las cantidades de cada una de las sustancias mezcladas y sus precios respectivos, ó hallar la cantidad que se ha de mezclar de cada sustancia, conocidos sus precios y el precio medio.*

La Regla de aligación es *directa* ó *inversa*, según que se refiera al primero ó al segundo de los objetos indicados.

244. Regla de aligación directa.

La Regla de aligación directa se funda en los siguientes principios, en harmonía con las definiciones de mezcla, precio y valor.

1.° *La cantidad de una mezcla es igual á la suma de las cantidades mezcladas.*

2.° *El valor de una mezcla es igual á la suma de los valores de las sustancias mezcladas.*

Escolio. De estos principios resulta que, designando por C la cantidad de una mezcla, por M su precio, por c, c', c'', etc., las cantidades mezcladas, y por p, p', p'', etc. el precio de cada unidad de éstas, se tendrá

$$CM = cp + c'p' + c''p'' + \ldots.$$

y dividiendo por $C = c + c' + c'' + \ldots\ldots$ resulta

$$M = \frac{cp + c'p' + c''p'' + \ldots\ldots}{c + c' + c'' + \ldots\ldots}$$

de donde se deduce la siguiente regla:

Para hallar el precio medio, conocidas las cantidades de cada sustancia que entran en una mezcla y sus precios respectivos, se divide la suma de los valores de las sustancias mezcladas, por la suma de las cantidades.

Ejemplos.

1.° *¿Cuál debe ser el precio medio de 24 hectólitros de trigo de á 27 pesetas, mezclados con 36 hectólitros de á 23 pesetas?*

La operación se dispone del modo siguiente:

Cantidades.		Valores.
24hl	á 27p = 24 × 27 =	648p
36	á 23 = 36 × 23 =	828
60		1476p

$$\begin{array}{l|l} 1476^p & 60 \\ \hline 276 & 24{,}60^p \text{ (precio medio)} \\ 360 & \\ 00 & \end{array}$$

2.° *¿Cuál debe ser el precio medio de 24 hectólitros de trigo de á 27 pesetas, mezclados con 36 hectólitros de á 23 pesetas y con 13 de á 21 pesetas?*

Cantidades.		Valores.
24hl	á 27p = 24 × 27 =	648p
36	á 23 = 36 × 23 =	828
13	á 21 = 13 × 21 =	273
73		1749p

$$\begin{array}{l|l} 1749^p & 73 \\ \hline 289 & 23{,}96^p \text{ (precio medio)} \\ 700 & \\ 430 & \\ 65 & \end{array}$$

245. Regla de aligación inversa.

La Regla de aligación inversa se funda en el siguiente principio:

La razón de dos cantidades mezcladas es igual á la razón inversa de las diferencias entre sus precios respectivos y el precio medio.

En efecto, sean c y c' las cantidades mezcladas, p y p' sus precios respectivos, siendo $p>p'$, y M el precio medio, menor, naturalmente, que p y mayor que p'.

En cada unidad de precio p, vendida al precio M, se pierde $p-$M, luego en las c unidades se perderá $c\,(p-\text{M})$; en cada unidad de precio p', vendida al precio M, se gana $\text{M}-p'$, luego en las c' unidades se ganará $c'(\text{M}-p')$, y como, por la naturaleza de la cuestión, aquella pérdida debe ser igual á esta ganancia, se tendrá la igualdad $c(p-\text{M}) = c'(\text{M}-p')$, de donde se obtiene la proporción

$$\frac{c}{c'} = \frac{\text{M}-p'}{p-\text{M}} \quad (171).$$

En la Regla de aligación inversa distinguiremos dos casos:

1.° *Que sean dos las sustancias mezcladas.*
2.° *Que sean más de dos.*

Primer caso. Si en la igualdad, $\dfrac{c}{c'} = \dfrac{\text{M}-p'}{p-\text{M}}$, se hace $c = \text{M}-p'$ y $c' = p-\text{M}$, se deduce la siguiente regla:

Para hallar la cantidad que se ha de mezclar de cada una de dos sustancias de precios conocidos, para que la mezcla tenga un precio dado, se resta del precio mayor el precio medio y se tendrá la cantidad de la sustancia de menor precio; se resta del precio medio el menor y se tendrá la cantidad de la sustancia de mayor precio.

Ejemplo. *¿Cuántos hectólitros de trigo de á 27 y de á 23 pesetas se han de mezclar, para que el precio medio sea 24,60p?*

Llamando c y c' á las cantidades pedidas, se tendrá:

$$\text{Precio medio, } 24^p{,}60 \left\{ \begin{array}{l|l} \multicolumn{1}{c}{\text{Precios.}} & \\ 27^p & c = 24{,}60 - 23 = 1{,}60^{hl} \\ 23^p & c' = 27 - 24{,}60 = 2{,}40^{hl} \end{array} \right.$$

Observación. Si se multiplican ó dividen por un número cualquiera los términos c y c', los productos ó cocientes forman proporción con $\text{M}-p'$ y $p-$M, (**171-Cor.**) lo que indica que, hallada una solución de la cuestión, se pueden dar otras, en número infinito, por lo que se dice que la Regla de aligación inversa es indeterminada.

Sin embargo, esta indeterminación desaparece cuando se fijan condiciones que limiten el número de soluciones.

Así, si en el ejemplo anterior se exige que los c hectólitros de á 27 pesetas sean 24 ó que los c' de á 23 pesetas sean 36 ó que los $c+c'$ de la mezcla sean 60, de la proporción $\dfrac{c}{c'} = \dfrac{1{,}60}{2{,}40}$, se deducirá

1.° $\dfrac{24}{c'} = \dfrac{1{,}60}{2{,}40}$, de donde resulta, $c' = \dfrac{24 \times 2{,}40}{1{,}60} = 36.$

2.° $\dfrac{c}{36} = \dfrac{1{,}60}{2{,}40}$, de donde resulta, $c = \dfrac{36 \times 1{,}60}{2{,}40} = 24.$

3.° $\dfrac{c+c'}{c} = \dfrac{1{,}60+2{,}40}{1{,}60}$ ó sea $\dfrac{60}{c} = \dfrac{4}{1{,}60}$,

de donde resulta, $c = \dfrac{60 \times 1{,}60}{4} = 24$; $c' = 60 - 24 = 36.$

Segundo caso. Si se toman de dos en dos las sustancias mezcladas, de modo que sus precios comprendan al precio medio, y esto se repite hasta operar con todas ellas, se tendrá una solución para cada par de sustancias y el conjunto de estas soluciones será la solución de la cuestión propuesta, de donde se deduce la siguiente regla:

Para hallar las cantidades que se han de mezclar de cada una de más de dos sustancias de precios conocidos, para que la mezcla tenga un precio dado, se hallarán, por la regla del caso anterior, las cantidades de dos sustancias cuyos precios comprendan al de la mezcla y, repitiendo esta operación cuantas veces sea necesario para que en la mezcla entren todas las sustancias dadas, las sumas de las cantidades parciales de cada una será la cantidad de ella que ha de entrar en la mezcla.

Ejemplo. *¿Cuántos hectólitros de trigo de á 27, de á 23 y de á 21 pesetas se deben mezclar, para que el precio medio sea de 23,96 pesetas?*

Llamando c, c' y c'' á las cantidades pedidas, se tendrá:

	27	23,96—23=0,96 ; 23,96—21=2,96	c =0,96+2,96=3,92
23,96	23	27—23,96=3,04 ;	c' =......... =3,04
	21	.... 27—23,96=3,04	c''=......... =3,04

Observación. Como la resolución de toda cuestión del segundo caso de la Regla de aligación inversa se obtiene por la de otras del primero, siendo éstas indeterminadas, también lo será aquélla.

Sin embargo, esta indeterminación podrá desaparecer fijando condiciones que limiten el número de soluciones.

Así, si en el ejemplo anterior se exige que los hectólitros de la mezcla sean 73 y el de los de trigo de á 21 pesetas sean 13, se tendrá, $c+c'+13=73$, de donde se obtiene $c+c'=73-13=60$, lo que reduce la cuestión á hallar los hectólitros de á 27 pesetas y los de á 23, necesarios para tener 60 hectólitros, al precio medio de 23,96, cuestión ya determinada y de la que se obtiene $c=14{,}40$ y $c'=45{,}60$; luego $c=14{,}40^{\text{hl}}$, $c'=45{,}60^{\text{hl}}$ y $c''=13^{\text{hl}}$.

ÍNDICE.

Págs.

APÉNDICE AL LIBRO II.

BREVES IDEAS SOBRE LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NÚMEROS APROXIMADOS.

LIBRO III.

DE LA COMPARACIÓN DE NÚMEROS ABSTRACTOS.

SEGUNDA PARTE.

DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

LIBRO PRIMERO.

DE LA NUMERACIÓN DE NÚMEROS CONCRETOS.

LIBRO II.

DEL CÁLCULO DE NÚMEROS CONCRETOS.

LIBRO III.

DE LA COMPARACIÓN DE NÚMEROS CONCRETOS.

ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS.