

Análisis dinámico de pérgolas para el ferrocarril de alta velocidad

Proyecto Fin de Carrera

Autora

Patricia Maldonado Salguero

Tutor

Alejandro Martínez Castro

Granada, enero 2014



ugr

Universidad
de Granada



E.T.S. de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

*ANÁLISIS DINÁMICO DE PÉRGOLAS PARA EL FERROCARRIL DE
ALTA VELOCIDAD.*

PROYECTO FIN DE CARRERA
Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

Por
Patricia Maldonado Salguero

Tutor
Alejandro Martínez Castro

Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica
Universidad de Granada
Edificio Politécnico Fuentenueva, C/ Severo Ochoa s/n , CP 18002
Granada (España)

Enero , 2014

Resumen

El diseño exigente de las líneas de ferrocarril y en especial de las líneas alta velocidad, presenta en ocasiones la problemática de resolver cruces a distinto nivel mediante trazados fuertemente esviados. Aparece la necesidad de diseñar estructuras cuya longitud mínima viene condicionada por el ancho del vial inferior y el ángulo de cruce entre las dos líneas, dando lugar a luces elevadas donde la pérgola se convierte en la mejor solución.

La finalidad de este proyecto es analizar las posibilidades de modelización de pérgolas y su respuesta dinámica atendiendo al reducido número de publicaciones existentes actualmente sobre el tema. Se pretenden buscar modelos simplificados basados en losas ortótropas cuyo comportamiento sea válido tanto en análisis estático como dinámico, el estudio de la incidencia del esviaje en las respuestas dinámicas debidas al paso de los trenes y el cálculo dinámico de pérgolas reales.

La normativa vigente española impone la realización del cálculo dinámico mediante integración directa en el tiempo con cargas móviles en aquellas estructuras que precisen comprobaciones en cualquier rango de velocidades, para puentes isostáticos e hiperestáticos, sin limitar la masa ni las frecuencias. Este es el método necesario a aplicar en pérgolas para los análisis realizados en el presente proyecto. La solución al problema de paso de cargas móviles se ha resuelto tradicionalmente mediante el método de elementos finitos, realizando una integración directa en el tiempo del modelo en su totalidad con métodos paso a paso. En este proyecto se empleará el método semianalítico generalizado a la geometría de una pérgola.

Agradecimientos

En primer lugar, debo agradecer el apoyo incondicional de mis padres Vicente y Maravillas y los valores que me han enseñado. También, a mi hermano Vicente, con el que comparto tantas cosas. A mis sobrinos Mar y Abel, que aún siendo tan pequeños me han dado tantas alegrías. A mi abuela Mara, que se merece un agradecimiento con mayúsculas, por su apoyo, optimismo, generosidad y atención durante todo el proyecto y durante toda mi vida. A mi tía Mari Ángeles, por sus palabras tan positivas en el momento preciso, mi primo David, mi cuñada Aranzazu y mi tío Juan por sus consejos. A toda mi familia en general y a personas especiales como Arantza, Ana y Alicia. A todos mis amigos, a los compañeros de la Escuela, que han llenado estos años de buenos momentos. A mis compañeros del CIE - Ayuntamiento de Almuñécar, donde he tenido el primer contacto con el mundo laboral paralelo a la realización de este proyecto y quienes también me han aportado mucho.

También es esencial recalcar mis palabras de gratitud hacia el tutor de este proyecto, Alejandro Martínez, por toda la orientación, el apoyo, el conocimiento, la paciencia, la disponibilidad y la motivación que me ha brindado. Mi agradecimiento también al profesor Alejandro Castillo Linares y a ACL-estructuras por sus aportaciones que han permitido el análisis de la pérgola Olmedo 1 y la pérgola de las Infantas. A Raimundo Delgado, profesor de la Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto por el envío de artículos relacionados con pérgolas. Precisamente en FEUP tuve el primer contacto con la dinámica de puentes de ferrocarril de alta velocidad.

Dedicado a mi familia

Índice general

Resumen	I
Agradecimientos	III
Capítulo 1. Introducción, objetivos y metodología.	1
1.1. Introducción.	1
1.1.1. El problema de los efectos dinámicos en puentes de ferrocarril de alta velocidad	2
1.2. Introducción al caso de estudio: Problemática en cruces de gran esviaje	4
1.3. Objetivos	5
1.4. Metodología	5
Capítulo 2. Revisión del estado del arte	7
2.1. Normativas vigentes	7
2.1.1. Instrucción de acciones a considerar en puentes de ferrocarril: <i>IAPF-2011</i> [1]	7
2.1.2. Norma UNE-EN 1991-2:2003. Eurocódigo 1: Acciones en estructuras. Parte 2: Cargas de tráfico en puentes[2]	13
2.2. Trabajos y publicaciones sobre cálculo dinámico de pérgolas	15
2.3. Solución al problema de cargas móviles	16
2.3.1. Trabajos y publicaciones sobre soluciones al problema de cargas mó- viles en puentes de ferrocarril de alta velocidad.	16
2.3.2. Métodos de integración en el dominio del tiempo. Métodos paso a paso	16
Capítulo 3. Método semianalítico	21
3.1. Introducción	21
3.2. Formulación del método.	21
3.3. Generalización y ejecución del método	32
3.4. Tests de validación.	33
3.4.1. Planteamiento.	33
3.4.2. Test de validación 1: Viga de Bernouilli-Euler de tres vanos	33
3.4.3. Test de validación 2: Losa esviada.	38
3.5. Conclusiones	45

Capítulo 4. Modelizado de pérgolas	47
4.1. Introducción	47
4.2. Geometría de la pérgola de estudio	48
4.3. Modelos de tablero tridimensionales: Modelo 1, 2 y 3	50
4.4. Modelos de tablero bidimensionales basados en vigas homogeneizadas y losa ortótropa	52
4.4.1. Modelo 4: Modelo vigas homogeneizadas-losa ortótropa	54
4.5. Modelos de tablero bidimensionales basados en losas ortótropas	56
4.5.1. Modelo 5: Modelo vigas-losa ortótropa	57
4.5.2. Modelo 6: Modelo basado en losas ortótropas	69
4.6. Conclusiones	71
Capítulo 5. Análisis dinámico	73
5.1. Variables fundamentales a tener en cuenta en análisis dinámico	73
5.1.1. Ecuación diferencial del comportamiento dinámico de una losa ortótropa	76
5.1.2. Rigidez, masa y amortiguamiento	76
5.2. Análisis modal. Influencia de la malla de elementos finitos en placas esviadas ortótropas. Convergencia	80
5.2.1. Convergencia de una placa isótropa de Kirchhoff esviada	81
5.2.2. Convergencia del modelo numérico de una pérgola teórica con una región de ortotropía	82
5.2.3. Conclusiones	88
5.2.4. Convergencia del modelo numérico de la pérgola de estudio con tres regiones de ortotropía	89
5.2.5. Conclusiones	95
5.3. Validación de modelos numéricos	96
5.3.1. Planteamiento	96
5.3.2. Análisis modal	97
5.3.3. Puntos de postproceso y línea de carga	97
5.3.4. Hipótesis de carga dinámica 1: $v \leq 220km/h$	100
5.3.5. Resultados del cálculo dinámico 1: Aceleraciones y flechas	100
5.3.6. Conclusiones	112
Capítulo 6. Análisis de sensibilidad frente a la variación del esviaje	115
6.1. Planteamiento	115
6.2. Sensibilidad en el análisis estático y modal	117
6.3. Sensibilidad en la respuesta dinámica del sistema	119
6.3.1. Aceleraciones	121
6.3.2. Desplazamientos	124
6.4. Conclusiones	126

Capítulo 7. Cálculos dinámicos de pérgolas reales	129
7.1. Planteamiento	129
7.1.1. Trenes de carga	130
7.1.2. Resultados y comprobaciones asociados a los E.L.S según normativa IAPF-2011 [1]	130
7.2. Cálculo dinámico 1: Pérgola Olmedo 1	131
7.2.1. Frecuencias propias y modos de vibración	132
7.2.2. Respuestas dinámicas-Comprobaciones asociadas a los ELS	132
7.3. Cálculo dinámico 2: Pérgola de las Infantas	143
7.3.1. Frecuencias propias y modos de vibración	145
7.3.2. Respuestas dinámicas-Comprobaciones asociadas a los ELS	145
7.4. Conclusiones	155
Capítulo 8. Conclusiones, aportaciones y desarrollo futuro	157

Índice de tablas

2.1. Clasificación general de acciones	8
2.2. Clasificación de las limitaciones en las deformaciones dinámicas y aceleraciones de los tableros	10
2.3. Valores limitativos en las deformaciones dinámicas y aceleraciones de los tableros	11
2.4. Resumen de los ámbitos de aplicación de cada método de cálculo dinámico descrito por la IAPF-2011	18
2.5. Trenes de cargas para el cálculo dinámico	19
3.1. Frecuencias de modos de vibración. Test 1	34
3.2. Variación de frecuencias en función de la malla de elementos finitos. Test 2.	40
4.1. Propiedades de la sección transversal de las vigas que conforman el tablero-pérgola. Modelo 3D	50
4.2. Propiedades de las 6 tipologías de vigas definidas en el Modelo 4	55
4.3. Datos de entrada de la viga: Cálculo constantes de ortotropía. Región 1	64
4.4. Datos de entrada de la losa: Cálculo constantes de ortotropía. Región 1	64
4.5. Constantes ortotropía geométrica. Región 2	67
4.6. Constantes ortotropía material. Región 2	67
4.7. Modificadores de rigidez y de masa. Región 2	67
4.8. Constantes ortotropía geométrica. Región 3	68
4.9. Constantes ortotropía material. Región 3	68
4.10. Modificadores de rigidez y de masa. Región 3	68
4.11. Modificadores de masa. Regiones 4, 5 y 6	68
4.12. Flechas estáticas máximas hipótesis balasto nominal	72
5.1. Parámetros a considerar en el comportamiento dinámico de pérgolas	77
5.2. Control de respuestas dinámicas	80
5.3. Resultados de frecuencias en (Hz) y flecha estática en (mm) para el estudio de convergencia para la pérgola teórica modelizada mediante modelo 5. Balasto incrementado	84
5.4. Resultados de frecuencias en (Hz) y flecha estática en (mm) para el estudio de convergencia para la pérgola teórica modelizada mediante modelo 6. Balasto incrementado	86
5.5. Diferencias entre los modelos 5 y 6 de la pérgola teórica. Máxima flecha estática en (mm), Frecuencias de modos en (Hz)	89

5.6. Resultados de frecuencias en (Hz) y flecha estática en (mm) para el estudio de convergencia para la pérgola de estudio modelizada mediante modelo 4. Balasto incrementado	90
5.7. Resultados de frecuencias en (Hz) y flecha estática en (mm) para el estudio de convergencia para la pérgola de estudio modelizada mediante modelo 5. Balasto incrementado	92
5.8. Resultados de frecuencias en (Hz). Flecha estática en (mm) para el estudio de convergencia para la pérgola de estudio modelizada mediante modelo 6. Balasto incrementado	94
5.9. Resumen frecuencias (Hz) de los cuatro primeros modos de flexión de los modelos numéricos definitivos	96
5.10. Frecuencias naturales en (Hz) hasta 30 Hz de los modelos numéricos a contrastar. Hipótesis balasto incrementado	98
5.11. Frecuencias naturales en (Hz) hasta 30 Hz de los modelos numéricos a contrastar. Hipótesis balasto incrementado	99
5.12. Resultados aceleraciones máximas en (m/s^2) en la pérgola de estudio para cada modelo. Velocidades en (km/h)	101
5.13. Resultados de desplazamientos máximos en (mm) en la pérgola de estudio para cada modelo. Velocidades en (km/h)	109
6.1. Datos de las pérgolas de análisis en el test de esviajes. α ($^\circ$), Área (m^2), Longitudes (m).	116
6.2. Resultados flecha máxima (m) y tres primeros modos de flexión (Hz) para pérgolas modelizadas mediante Modelo 5	117
6.3. Resultados flecha máxima (m) y tres primeros modos de flexión (Hz) para pérgolas modelizadas mediante Modelo 6. Hipótesis de balasto nominal . . .	117
6.4. Velocidades resonantes para el tren AVE según el ángulo de esviaje. Frecuencias en (Hz), espaciamentos en (m), velocidades en (km/h)	120
6.5. Aceleraciones máximas para cada pérgola en función de su ángulo de cruce α . Aceleraciones en (m/s^2), velocidades en (km/h).	121
6.6. Desplazamientos máximos para cada pérgola en función de su ángulo de cruce α . Desplazamientos en (mm), velocidades en (km/h)	124
7.1. Frecuencias naturales de la pérgola real 1 para cada hipótesis de balasto consideradas	133
7.2. Máximas aceleraciones para el cálculo dinámico de la pérgola real 1. Hipótesis de balasto reducido 30 %	134
7.3. Máximas aceleraciones para el cálculo dinámico de la pérgola real 1. Hipótesis de balasto nominal	134
7.4. Máximas aceleraciones para el cálculo dinámico de la pérgola real 1. Hipótesis de balasto incrementado un 30 %	134

7.5. Máximos desplazamientos para el cálculo dinámico de la pérgola real 1. Hipótesis de balasto reducido un 30 %	139
7.6. Máximos desplazamientos para el cálculo dinámico de la pérgola real 1. Hipótesis de balasto nominal	139
7.7. Máximos desplazamientos para el cálculo dinámico de la pérgola real 1. Hipótesis de balasto incrementado	139
7.8. Frecuencias naturales de la pérgola real 2 para cada hipótesis de balasto consideradas	146
7.9. Frecuencias naturales de la pérgola real 2 para cada hipótesis de balasto consideradas	147
7.10. Máximas aceleraciones para el cálculo dinámico de la pérgola real 2. Hipótesis de balasto reducido	147
7.11. Máximas aceleraciones para el cálculo dinámico de la pérgola real 2. Hipótesis de balasto nominal	147
7.12. Máximas aceleraciones para el cálculo dinámico de la pérgola real 2. Hipótesis de balasto incrementado	148
7.13. Máximos desplazamientos para el cálculo dinámico de la pérgola real 2. Hipótesis de balasto reducido	151
7.14. Máximos desplazamientos para el cálculo dinámico de la pérgola real 2. Hipótesis de balasto nominal	152
7.15. Máximos desplazamientos para el cálculo dinámico de la pérgola real 2. Hipótesis de balasto incrementado	152

Índice de figuras

3.1. Carga móvil sobre viga de sección variable. Equilibrios de la rebanada	22
3.2. Discretización para un elemento barra y criterio de signos.	24
3.3. Geometría de la viga. Test 1.	34
3.4. Ejemplo de modo de vibración 10. Test 1.	34
3.5. Aceleraciones en el punto central del primer vano por el método de Newmark. Test 1.	36
3.6. Aceleraciones del punto central del primer vano por el método Semianalítico. Test 1.	37
3.7. Comparación entre distintas metodologías de paso de cargas. Test 1.	37
3.8. Geometría y puntos de postproceso de losa. Test 2.	38
3.9. Singularidades en las esquinas. Tensión σ_{11}	39
3.10. Mallado elementos finitos tipo 1 y tipo 2	40
3.11. Ejemplo de modo de vibración 8. Test 2	41
3.12. Esquema losa esviada para cálculo de giros	41
3.13. Aceleraciones en el punto 1. Método de Newmark-Beta. Pasos $T_{24}/10$ y $T_{24}/20$. Test 2.	43
3.14. Comparativa de aceleraciones calculadas por cada método. Punto postproceso 1. Test 2.	44
3.15. Comparativa de aceleraciones calculadas por cada método. Punto postproceso 4. Test 2.	44
3.16. Comparativa de aceleraciones calculadas por cada método. Punto postproceso 7. Test 2.	45
4.1. Sección de las vigas que conforman el tablero de la pérgola. Cotas en cm.	49
4.2. Planta tablero-pérgola a modelizar	49
4.3. Esquema 3D tablero-pérgola	49
4.4. Tipología de sección de viga a emplear según su posición. (1)-Sección compuesta hormigón HA-30-viga HP-50. (2)-Sección viga HP-50	50
4.5. Deformada modelo 1	52
4.6. Deformada modelo 2	52
4.7. Deformada modelo 3	52
4.8. Áreas sustituidas por diferentes tipos de vigas	53
4.9. Definición de sección de viga homogeneizada eficaz. Viga tipo 4	55
4.10. Deformada modelo 4	56

4.11. Regiones de ortotropía	57
4.12. Figura 1. Sección para definición de constantes de ortotropía	59
4.13. Figura 2. Sección para definición de constantes de ortotropía	59
4.14. Deformada modelo 5	69
4.15. Deformada modelo 6	71
5.1. Variables que definen la planta del tablero de una pérgola	74
5.2. Esquema del triángulo que relaciona longitud de línea de carga, ángulo y longitud de vigas principales.	74
5.3. Esquema de triángulos elementales para el cálculo de la luz de pérgolas	75
5.4. Mallados empleados para el estudio de convergencia de la pérgola teórica - Malla tipo 1, 2, 3, malla de referencia. Modelo 5	83
5.5. Singularidades en las esquinas para malla tipo 1 y tipo 2. Modelo pérgola teórica mediante modelo tipo 5. Tensión σ_{11}	84
5.6. Modo 1 : 5.8583 Hz, Modo 2 : 6.1923 Hz, Modo 3 : 6.5619 Hz, Modo 4 : 7.0017 Hz. Modos de flexión de la losa. Modelo pérgola teórica modelizada mediante modelo tipo 5	84
5.7. Mallados empleados para el estudio de convergencia de la pérgola teórica- Malla tipo 1, 2, 3, malla referencia. Modelo 6	85
5.8. Singularidades en las esquinas para malla tipo 1 y tipo 2 . Modelo pérgola teórica mediante modelo tipo 6. Tensión σ_{11}	86
5.9. Singularidades en las esquinas para malla referencia. Modelo pérgola teórica mediante modelo tipo 6. Tensión σ_{11}	86
5.10. Modo 1,2,3 y 4 de flexión de la losa. Modelo pérgola teórica modelizada mediante Modelo tipo 6	87
5.11. Composición elementos tipo placa con diferentes propiedades mecánicas	88
5.12. Malla tipo 1 y malla tipo 2. Modelo 4 de la pérgola de estudio	90
5.13. Malla de referencia. Modelo 4 de la pérgola de estudio	90
5.14. Tensión σ_{11} . Modelo 4 de la pérgola de estudio	91
5.15. Cuatro primeros modos de flexión. Modelo 4 de la pérgola de estudio	91
5.16. Malla tipo 1 y malla tipo 2. Modelo 5 de la pérgola de estudio	92
5.17. Malla tipo 3. Modelo 5 de la pérgola de estudio	92
5.18. Cuatro primeros modos de flexión. Modelo 5 de la pérgola de estudio	93
5.19. Malla tipo 1 y tipo 2. Modelo 6 de la pérgola de estudio	93
5.20. Malla tipo 3. Modelo 6 de la pérgola de estudio	94
5.21. Malla tipo 4. Modelo 6 de la pérgola de estudio	94
5.22. Cuatro primeros modos de flexión. Modelo 6 de la pérgola de estudio	95
5.23. Puntos de postproceso y línea de carga de la pérgola de estudio	100
5.24. Puntos de postproceso donde se producen las máximas aceleraciones hasta $v= 220$ km/h. Pérgola de estudio	102

5.25. Aceleraciones en el punto de aceleración máxima del Modelo 4 de la pérgola de estudio. Punto 19 Tren 9 HSLM	102
5.26. Aceleraciones en el punto de aceleración máxima Modelo 5 de la pérgola de estudio. Punto 13 Tren real 4	103
5.27. Aceleraciones en el punto de aceleración máxima Modelo 6.1 y 6.2 de la pérgola de estudio. Punto 5 Tren real 4	103
5.28. Aceleraciones en punto próximo medio vano de la pérgola de estudio. Punto 10 Tren real 4	104
5.29. Envoltente de aceleraciones en el punto máximo del modelo 4 de la pérgola de estudio. Punto 19	104
5.30. Envoltente de aceleraciones en el punto máximo del modelo 5 de la pérgola de estudio. Punto 13	105
5.31. Envoltente de aceleraciones en el punto máximo del modelo 6.1 y 6.2 de la pérgola de estudio. Punto 5	105
5.32. Envoltente de aceleraciones en el punto próximo medio vano de la pérgola de estudio. Punto 10	106
5.33. Serie temporal del tren 9 HSLM a 220 km/h en el punto postproceso 19. Modelo 4	107
5.34. Serie temporal del tren real 4 a 140 km/h en el punto postproceso 13. Modelo 5	107
5.35. Serie temporal del tren real 4 a 220 km/h en el punto postproceso 5. Modelo 6.1 y 6.2	108
5.36. Series temporales del tren real 4 a 220 km/h en el punto postproceso 10	108
5.37. Puntos de postproceso donde se producen las máximas flechas hasta $v= 220$ km/h. Pérgola de estudio	109
5.38. Desplazamientos en el punto de flecha máxima de los Modelos 4 y 6.1 de la pérgola de estudio. Punto 10 Tren real 4	110
5.39. Desplazamientos en el punto de flecha máxima del modelo 6.2 de la pérgola de estudio. Punto 16 Tren real 4	110
5.40. Envoltente de desplazamientos de la pérgola de estudio. Punto 10	111
5.41. Envoltente de desplazamientos de la pérgola de estudio. Punto 5	111
5.42. Envoltente de desplazamientos de la pérgola de estudio. Punto 13	112
5.43. Envoltente de desplazamientos de la pérgola de estudio. Punto 16	112
6.1. Conjunto de pérgolas a analizar en el estudio de esviajes	116
6.2. Ángulos de cruces a analizar en el estudio de esviajes	116
6.3. Ejemplo de modelo numérico de pérgola. Modelo 5 y ángulo de cruce de 20°	117
6.4. Tres primeras formas modales de flexión de la losa de compresión para los diferentes ángulos de análisis	118
6.5. Línea de carga y puntos de postproceso de las pérgolas teóricas para el análisis de esviaje	121

6.6. Puntos de máximas aceleraciones para cada pérgola en función de su ángulo de cruce	121
6.7. Aceleraciones en el punto de postproceso 9 para el paso de un tren AVE según el ángulo de cruce	122
6.8. Aceleraciones en el punto de postproceso 6 para el paso de un tren AVE según el ángulo de cruce	122
6.9. Aceleraciones en el punto de postproceso 5 (medio vano) para el paso de un tren AVE según el ángulo de cruce	123
6.10. Puntos de máximos desplazamientos para cada pérgola en función de su ángulo de cruce	124
6.11. Desplazamientos en el punto de postproceso 9 para el paso de un tren AVE según el ángulo de cruce	125
6.12. Desplazamientos en el punto de postproceso 6 para el paso de un tren AVE según el ángulo de cruce	125
6.13. Desplazamientos en el punto de postproceso 5 (medio vano) para el paso de un tren AVE según el ángulo de cruce	126
7.1. Puntos de postproceso para pérgola real 1. Modelización mediante modelo tipo 5	132
7.2. Envolvente de aceleraciones de la pérgola real 1. Velocidades hasta 80 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	135
7.3. Envolvente de aceleraciones de la pérgola real 1. Velocidades hasta 120 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	136
7.4. Envolvente de aceleraciones de la pérgola real 1. Velocidades hasta 220 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	136
7.5. Composición por trenes: aceleraciones de la pérgola real 1 en el punto de postproceso 8. Velocidades hasta 80 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	137
7.6. Composición por trenes: aceleraciones de la pérgola real 1 en el punto de postproceso 13. Velocidades hasta 120 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	138
7.7. Composición por trenes: aceleraciones de la pérgola real 1 en el punto de postproceso 5. Velocidades hasta 220 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	138
7.8. Envolvente de desplazamientos de la pérgola real 1. Velocidades hasta 80 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	140
7.9. Envolvente de desplazamientos de la pérgola real 1. Velocidades hasta 120 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	140
7.10. Envolvente de desplazamientos de la pérgola real 1. Velocidades hasta 220 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	141
7.11. Composición por trenes: desplazamientos de la pérgola real 1 en el punto de postproceso 10. Velocidades hasta 80 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	142
7.12. Composición por trenes: desplazamientos de la pérgola real 1 en el punto de postproceso 10. Velocidades hasta 120 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	142

7.13. Composición por trenes: desplazamientos de la pérgola real 1 en el punto de postproceso 5. Velocidades hasta 220 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	143
7.14. Malla de elementos finitos para la pérgola real 2.	144
7.15. Puntos de postproceso y línea de carga de la pérgola real 2	144
7.16. Regiones de ortotropía de la pérgola real 2. Modelo 5.	144
7.17. Envolverte de aceleraciones de la pérgola real 2. Velocidades hasta 80 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	148
7.18. Envolverte de aceleraciones de la pérgola real 2. Velocidades hasta 120 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	149
7.19. Envolverte de aceleraciones de la pérgola real 2. Velocidades hasta 220 km/h. Hipótesis de balasto reducido	149
7.20. Composición por trenes: aceleraciones de la pérgola real 2 en el punto de postproceso 8. Velocidades hasta 80 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	150
7.21. Composición por trenes: aceleraciones de la pérgola real 2 en el punto de postproceso 13. Velocidades hasta 120 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	150
7.22. Composición por trenes: aceleraciones de la pérgola real 2 en el punto de postproceso 13. Velocidades hasta 220 km/h. Hipótesis de balasto reducido .	151
7.23. Envolverte de desplazamientos de la pérgola real 2. Velocidades hasta 80 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	152
7.24. Envolverte de desplazamientos de la pérgola real 2. Velocidades hasta 120 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	153
7.25. Envolverte de desplazamientos de la pérgola real 2. Velocidades hasta 220 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	153
7.26. Composición por trenes: desplazamientos de la pérgola real 2 en el punto de postproceso 13. Velocidades hasta 80 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	154
7.27. Composición por trenes: desplazamientos de la pérgola real 2 en el punto de postproceso 13. Velocidades hasta 120 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	154
7.28. Composición por trenes: desplazamientos de la pérgola real 2 en el punto de postproceso 13. Velocidades hasta 220 km/h. Hipótesis de balasto incrementado	155
8.1. Esquema resumen del presente proyecto	157

CAPÍTULO 1

Introducción, objetivos y metodología.

1.1. Introducción.

Según la UIC se denomina línea de alta velocidad aquella donde se alcanzan velocidades superiores a 250 km/h si son de nueva construcción, 200 km/h en líneas convencionales actualizadas, y en líneas que tienen características especiales velocidades que deben adaptarse a cada condicionante.

El país pionero de la alta velocidad fue Japón. Aunque la idea de esta forma de movilidad existía desde los años 30, fue en la década de los 50 cuando idearon la conexión ferroviaria entre Tokio y Osaka. China es actualmente el país que cuenta con el mayor kilometraje de red de alta velocidad con aproximadamente 7.000 km construidos, alcanzando velocidades superiores a los 350 km/h. Sus previsiones son llegar a los 16.000 km en 2020. A nivel europeo, los primeros interesados fueron los franceses centrandose su atención en la investigación y desarrollo de los trenes de alta velocidad desde la década de los 60. El TGV alcanza los 320 km/h en ciertos tramos y los 575 km/h en tramos especiales de prueba, siendo uno de los trenes convencionales más veloces del mundo. El tren Alstom V-150 alcanzó los 574,8 km/h en el tramo París-Estrasburgo, batiendo en su momento, un record mundial de velocidad.

España en 1960 consiguió que un Talgo propulsado por una locomotora de la Serie 352 de Renfe superase los 200 km/h durante la realización de pruebas. Pero se tuvo que esperar hasta 1992 para inaugurar su primera línea de alta velocidad, con ancho de vía de 1.435 mm, que unía Sevilla con Madrid. La alta velocidad ferroviaria española cuenta con dos décadas de experiencia y desde enero de 2013, con la finalización del tramo Barcelona-Figueras, con 3.000 Km de red en servicio. Estas cifras han convertido a la L.A.V española en la segunda más extensa del mundo y en la primera a nivel europeo desde 2010, tras la puesta en servicio de 438 km de la línea Madrid-Albacete-Valencia.

Las principales ventajas del ferrocarril de alta velocidad son:

- Velocidad, llegando a ser más eficiente que el modo de transporte aéreo en distancias medias, tanto para transporte de mercancías como de pasajeros.
- Calidad en el transporte de pasajeros. Confort y puntualidad en sus trayectos.
- Seguridad.

- Sostenibilidad. Reducción de emisiones de CO₂ y ahorro energético.
- Mejora de la intermodalidad.
- Responsable de un desarrollo socioeconómico en las poblaciones adyacentes a las vías.
- Motor de desarrollo económico y social del país que invierte en él.

1.1.1. El problema de los efectos dinámicos en puentes de ferrocarril de alta velocidad

Las diferencias más notables entre los puentes diseñados en líneas de alta velocidad y los puentes realizados en vías convencionales son:

- Menor magnitud de las fuerzas verticales actuantes, debido a que los trenes circulantes por estas vías son más ligeros.
- Menor magnitud de las fuerzas de arranque y frenado, debido a la proporcionalidad existente entre estas y las fuerzas verticales actuantes.
- Menor magnitud de la fuerza centrífuga actuante, debido a que los radios son mayores.
- Interacción vía-tablero más notable.
- Imprescindible el uso de aparatos de dilatación.
- Mayor deformabilidad y vibraciones, por verse solicitado a aceleraciones verticales superiores.
- Efectos dinámicos significativos.

El diseño de puentes de ferrocarril de alta velocidad debe cumplir: resistencia y durabilidad estructural en Estado Límite Último. El Estado Límite de Servicio se convierte en un criterio fundamental para su concepción, ya que se requiere seguridad suficiente para garantizar la estabilidad de la vía, un contacto permanente entre rueda-carril y asegurar el confort dentro de los vehículos. Para garantizarlo, es preciso un estudio no solo de tensiones y deformaciones, que ambas se verán incrementadas por el efecto dinámico de las cargas móviles respecto al valor estático, sino también en términos de vibraciones y aceleraciones de la estructura.

Efectos resonantes

El comportamiento dinámico de la estructura debido al paso de cargas móviles controla el proceso de diseño de los puentes de ferrocarril de alta velocidad y es un factor crucial en términos de seguridad estructural y confort de los pasajeros. Los fenómenos dinámicos originados por los trenes se deben a su naturaleza de cargas verticales móviles, que en conjunto con los efectos ocasionados por la irregularidad del carril, las ruedas y el espaciamiento regular entre las cargas del tren ¹, dan lugar a excitaciones periódicas que pueden resonar

¹Ejemplos de valores de espaciamiento entre cargas: TALGO: d=13,1 m; TGV d=18,7 m

la estructura. A grandes rasgos, la repetición de cargas cíclicas a velocidades superiores a 220 km/h incrementan la posibilidad del efecto de resonancia. Para líneas cuya velocidad máxima de circulación es menor 220 km/h, suele comprobarse que la primera frecuencia de flexión del tablero cumple los criterios establecidos.

Puede producirse resonancia cuando la frecuencia de excitación dinámica debida a las cargas² o algún múltiplo de ella coincida con alguna frecuencia propia de la estructura. Así, los principales parámetros de acción del fenómeno de resonancia son identificados: tipo de tren (concretamente la distribución espacial de los ejes del tren), velocidad y características modales del puente que a su vez dependen de la rigidez, masa y amortiguamiento del mismo.

Un efecto muy nocivo que puede inducir el fenómeno de resonancia en los puentes de ferrocarril de alta velocidad son problemas de desconsolidación de balasto. Por ello, es importante entender por qué y cómo reacciona la estructura ante el paso de las cargas móviles, y en qué características de la estructura hay que trabajar para modificar su comportamiento, con el fin de evitar la degradación de las características de las vías y los posibles riesgos para las personas. Otros efectos inducidos por este fenómeno puede ser una amplificación de las aceleraciones máximas y de los desplazamientos, aumentando la respuesta hasta niveles que pongan en peligro la funcionalidad y seguridad del puente. Estos pueden darse tanto en puentes hiperestáticos como en puentes isostáticos, siendo más sustancial en puentes isostáticos.

La masa y la rigidez son los parámetros fundamentales a analizar. Estos deben permitir el paso de las cargas móviles a las velocidades deseables. En caso contrario, hay que buscar su modificación, con el fin de conseguir unos valores de frecuencias naturales de vibración del sistema que se ajusten a los valores de aceleraciones verticales, alabeos de tablero, deformaciones de tablero etc, definidos en la Normativa [1].

Degradación prematura de la capa balasto por el paso de cargas móviles

En puentes de ferrocarril de alta velocidad, las vibraciones cíclicas en torno a 30 Hz provocan problemas de desconsolidación de balasto. La aparición de irregularidades en la geometría de la vía puede llegar a descarrilar el propio tren, pudiendo perder la garantía del buen funcionamiento del servicio ferroviario. El balasto amortigua y absorbe los esfuerzos, sufriendo vibraciones que pueden llegar a licuefactarlo, descompactando los granos y disminuyendo su capacidad portante. La licuefacción se produce cuando la capa sufre aceleraciones comprendidas entre 0,7-0,8g [3].

²Acción periódica induce al puente a una frecuencia $f = v/d$

Otro problema derivado es el vuelo de balasto. Velocidades superiores a 300 km/h crean en la zona de los bogies y bajos del tren flujos de aire turbulentos tales que pueden llegar a levantar partículas superficiales de la capa de balasto, impactando estos en las ruedas y bajos, dañando tanto la vía como el vehículo [3].

1.2. Introducción al caso de estudio: Problemática en cruces de gran esviaje

La necesidad de satisfacer las demandas actuales de movilidad puede conducir a la exigencia de proyectar vías cuyas plantas discurren por trazados prácticamente paralelos a otras ya existentes. Esto es muy frecuente en el caso del trazado de líneas ferroviarias de alta velocidad, que por sus condicionantes geométricos limitativos, hacen que la mejor solución sea la misma que se eligió por la vía construida inicialmente. Por ello, por condicionantes de trazado, aparecen cruces entre vías existentes y las nuevas líneas con ángulos de esviajes³ muy fuertes. Surge la problemática de salvar grandes luces, cuya solución óptima en términos económicos es el diseño de una pérgola. Debe salvar el ancho total del vial que cruza, además de un resguardo añadido que se considera por motivos de seguridad, de posibles ampliaciones de la vía inferior etc. Por otro lado, la luz también viene condicionada por el ángulo de cruce en planta.

La problemática que se plantea en las pérgolas es:

- Existen pocos estudios rigurosos sobre qué modelos emplear y modos de fallo, por lo que la modelización eficiente de estas estructuras no está clara para realizar cálculos dinámicos satisfactorios.
- La normativa IAPF-2011 [1] no plantea modelos, simplificados o no, válidos para su análisis.
- Problemática de singularidades en las esquinas oblicuas que modifican los resultados modales de los análisis dinámicos si el modelo se realiza mediante placas esviadas.

Para la modelización de pérgolas, pueden emplearse modelos tridimensionales sofisticados, modelos realizados mediante losas y vigas homogeneizadas, y modelos que pretenden analizarse en el presente proyecto tales como, modelos bidimensionales conformados con losas ortótropas y vigas exteriores, y modelos realizados en su conjunto mediante losas con diferentes ortotropías en función de que sustituyan la zona exclusiva de vigas, de losa y vigas, o de losa, balasto y vigas. Este último modelo simplificado es de gran interés ya que permitiría su programación definiendo ciertos parámetros de entrada tales como el ancho, la longitud horizontal, el ángulo de esviaje, las inercias unitarias, densidades de inercias, masa de balasto y rigideces.

³El ángulo de esviaje es el ángulo complementario al ángulo de cruce entre las líneas en planta

El modelo de losa ortótropa define distintas rigideces transversales en función de las diferentes separaciones entre las vigas, diferentes densidades y una única rigidez longitudinal. La reducción de distancia en las vigas se realiza para aumentar la rigidez en los puntos de aceleraciones máximas. Esta distribución de vigas traerá consigo una serie de regiones de ortotropías las cuales se analizarán más adelante.

1.3. Objetivos

Los objetivos de este proyecto se resumen en:

1. Detección y análisis de la problemática de singularidades en las esquinas debido a la presencia de ángulos obtusos en la modelización del tablero.
2. Caracterización de pérgolas mediante modelos simplificados y establecimiento de una metodología general para su análisis y problemáticas detectadas en su modelización. Contraste entre modelos tridimensionales y bidimensionales.
3. Desarrollo de una metodología para realizar el análisis dinámico de pérgolas para el paso del ferrocarril de alta velocidad mediante el método semianalítico, tras demostrar las ventajas del mismo.
4. Análisis de sensibilidad de resultados dinámicos en función de la variación del ángulo de esviaje del tablero.

1.4. Metodología

La metodología desarrollada en el proceso del presente proyecto es:

1. Revisión del estado del arte en las soluciones para el paso de carga móvil en pérgolas.
2. Verificación del método semianalítico para realizar los cálculos dinámicos en estructuras tipo pérgola, tras demostrar sus ventajas y calibrar el método con un modelo bidimensional realizado mediante una viga de Bernoulli-Euler de canto variable y un modelo tridimensional realizado mediante una losa esviada.
3. Concepción y verificación de modelos simplificados de pérgolas empleando el *software* SAP2000 para introducir la geometría y realizar el análisis modal, previo a la integración analítica en el tiempo.
4. Análisis dinámico de pérgolas modelizadas mediante métodos simplificados, empleando el método semianalítico siguiendo la normativa vigente (IAPF-2011 [1]) y exposición de conclusiones.
5. Análisis de la variación en las respuestas dinámicas de pérgolas en función de su ángulo de esviaje.

6. Análisis de varios casos de pérgolas construídas en España con objeto de estudiar la influencia de los Trenes Reales del Apéndice C de la normativa [1]. Valoración de las necesidades de adaptación para cumplir las condiciones de interoperatividad impuestas por el Eurocódigo.

CAPÍTULO 2

Revisión del estado del arte

2.1. Normativas vigentes

En la presente sección se va a realizar una descripción de la normativa española y europea que dirigen la realización de proyectos de puentes de ferrocarril de alta velocidad. Se trata de la *Instrucción de Acciones a considerar en Puentes de Ferrocarril (IAPF-2011)*[1], y el *Eurocódigo 1*[2].

2.1.1. *Instrucción de acciones a considerar en puentes de ferrocarril: IAPF-2011*[1]

Introducción

Esta normativa define las acciones que se deben tener presentes en todo modelo de puente de ferrocarril. Se trata de una norma que a su vez, sirve de base a otras recomendaciones para puentes, y que debe emplearse conjuntamente. Una clasificación general de las acciones definidas es resumida en la siguiente tabla 2.1

Aspectos destacables dentro de la definición de acciones según la IAPF-2011

Se desarrollan someramente los condicionantes exigidos por la norma con el fin de justificar los valores que se adoptarán durante toda la ejecución del proyecto.

El primer punto que se debe recalcar, es referente a la definición de cargas muertas. Según la Instrucción[1], para la definición de la acción que el balasto se deben considerar tres hipótesis:

Acciones permanentes de valor constante G_k	Peso propio Cargas muertas
Acciones permanentes de valor no constante G_k^*	Originadas por presolicitaciones: Pretensado, Otras Reológicas Debidas al terreno: Acciones del terreno, asientos
Acciones accidentales A_k	Descarrilamientos Impactos Acciones sísmicas
Acciones variables	<i>SOBRECARGAS DE USO</i> ▶ Cargas verticales ferroviarias ▶ Acciones dinámicas ▶ Cargas horizontales ferroviarias ▶ Cargas no ferroviarias ▶ Fatiga ▶ Aerodinámicas por paso de trenes ▶ Sobrecarga en terraplenes ▶ Acciones locales sobre el tablero Climáticas: Viento, nieve, acciones térmicas Sobrecargas debidas al agua Otras sobrecargas transitorias

Tabla 2.1: Clasificación general de acciones

- *Valor de balasto*: Determinado por los espesores de proyecto. En caso de no tener valores sobre ello, hay que considerar un espesor de 0,5 m para anchos de vía ibérico y UIC, y de 0,25 m para ancho de vía métrico
- *Valor inferior* $G_{k,inf}$: Se obtiene disminuyendo el 30 % del valor nominal.
- *Valor superior* $G_{k,sup}$: se obtiene aumentando el 30 % del valor nominal.

Entrando de lleno en las acciones variables, estas representan tanto acciones verticales, longitudinales y transversales que se aplicarán individualmente o combinadas entre sí. El tren de cargas ferroviario entra dentro de esta clasificación. La carga estática que produce el peso de los trenes sobre la estructura se adopta como el peso del tren UIC71, aplicado sobre el eje de la vía a nivel de su plano de rodadura¹

Las solicitaciones que aparecen por el paso de un vehículo ferroviario en un puente de ferrocarril son de naturaleza dinámica, y pueden ser bastante superiores a las acciones estáticas según la naturaleza móvil de las cargas, la aplicación cíclica de las mismas y las irregularidades de la vía. Se deben realizar los cálculos dinámicos con los distintos tipos de tren,

¹El tren UIC71 se define en el apartado 2.3.1.1 de la Instrucción[1], mediante cuatro ejes puntuales y una sobrecarga uniforme que irán multiplicados por un coeficiente de clasificación α

a todas sus posibles velocidades. La envolvente de las solicitaciones dinámicas máximas, sea cual fuere el método de evaluación de los efectos dinámicos, se caracteriza mediante un coeficiente de impacto. La expresión del coeficiente de impacto viene dada por:

$$\phi = \frac{\max S_{din,real}}{S_{est,tipo}} = \frac{\max \delta_{din,real}}{\delta_{est,tipo}} \quad (2.1)$$

Con $\phi \leq 1$

Siendo:

- $\max S_{din,real}$: Solicitación dinámica máxima debida a todos los posibles trenes reales y velocidades de circulación.
- $S_{est,tipo}$: Solicitación estática debido al tren UIC71 situado en la situación más desfavorable.
- $\delta_{din,real}$: Flecha dinámica debida a todos los posibles trenes reales y velocidades de circulación.
- $\delta_{est,tipo}$: Flecha estática debido al tren UIC71 situado en la situación más desfavorable.

Asumiendo proporcionalidad entre solicitaciones y flechas para el cálculo del coeficiente de impacto.

Se tendrán en cuenta los siguientes casos:

1. *Trenes circulando a velocidad $v \leq 220$ km/h*
2. *Trenes circulando a velocidad $v > 220$ km/h*: Se debe realizar un cálculo dinámico.

Aspectos destacables sobre las comprobaciones a realizar para verificar ELU y ELS según la IAPF-2011[1]

Deben de comprobarse los Estados Límite Últimos, adoptando los correspondientes coeficientes parciales de seguridad γ_f , variables según el tipo de acción, situación persistente, transitoria o accidental, y según la acción tenga un efecto favorable o desfavorable. Los coeficientes parciales de seguridad γ_f para Estado Límite de Servicio, también dependen del tipo de acción, si nos encontramos ante un efecto favorable o desfavorable, o si es una situación transitoria o persistente.

Es trascendente prestar atención a los límites en deformaciones dinámicas y aceleraciones en los tableros de puentes para asegurar la seguridad de la obra civil. Estas limitaciones, la Instrucción[1] las divide en criterios que garanticen la seguridad de la circulación del

vehículo ferroviario, preservando la conservación, geometría, continuidad de la vía y contacto entre rueda y carril; y en criterios que aseguren el confort de los usuarios de los trenes. Además de la comprobación de que las deformaciones producidas en el material permanece en el rango elástico, se deberán comprobar los siguientes requisitos expuestos en la tabla 2.2.

Limitaciones ligadas a la seguridad	Aceleración vertical del tablero Alabeos del tablero y total Deformación vertical del tablero Deformación horizontal del tablero Vibración transversal del tablero Giro transversal del tablero
Limitaciones ligadas al confort de usuarios	Deformación vertical del tablero en función de la velocidad de proyecto de la línea

Tabla 2.2: Clasificación de las limitaciones en las deformaciones dinámicas y aceleraciones de los tableros

Cálculo dinámico en puentes sometidos a cargas móviles (APÉNDICE B IAPF-2011)[1]

Una síntesis de proceso de diseño de un puente de ferrocarril en el que debemos considerar efectos dinámicos sería: La respuesta de la estructura (*Flecha máxima y la aceleración máxima del tablero, producidas sobre la vía ideal sin irregularidades, entre $V_{min}=20$ km/h y $V_{max}=1,2 V$*) en función del tiempo se obtienen mediante un método de cálculo dinámico adecuado. A partir de estos valores, el siguiente paso es la comprobación en ELU y en ELS. Finalmente, se debe obtener el valor del coeficiente de impacto definido en la Ec.(2.1).

Si la velocidad de circulación de los trenes es inferior de 220 km/h:

- Si no se cumplen las limitaciones superiores e inferiores de frecuencias definidas en el apartado B.2.1.1 de la Instrucción, no se producirán fenómenos resonantes, ni se debe comprobar las limitaciones de aceleraciones del tablero.
- Si se trata de tipologías no convencionales, se comprobarán las limitaciones de aceleraciones del tablero.
- Sí se consideran los efectos dinámicos combinados en varias vías en caso de puentes de dos o más vías.

Si la velocidad de circulación de los trenes es superior a 220 km/h:

- Pueden producirse fenómenos resonantes. Debe realizarse cálculo dinámico.
- Con el cálculo dinámico se realizarán las envolventes que incluyen los fenómenos resonantes.

Aceleración vertical del tablero	$a_{max} \leq 0,35g$ para vías con balasto $a_{max} \leq 0,5g$ para vías sin balasto
Alabeos del tablero y total	$t \leq 4.5\beta mm/3m$ si $v \leq 120km/h$ $t \leq 3.0\beta mm/3m$ si $120 < v \leq 220km/h$ $t \leq 1.5\beta mm/3m$ si $v > 220km/h$ $\beta = \frac{1,78r^2}{(r+0,5)^2}$, r: distancia entre apoyos de ruedas de un eje ferroviario en m, v: velo- cidad del tren en km/h
Comprobación de alabeo total	$t_{total} = 7,5\beta mm/3m$
Deformación vertical del tablero	Flecha máxima $\leq L/600$ Limitación de giros verticales máximos en apoyos, en función de la existencia o no de balasto Radio de curvatura vertical de la vía com- patible con la velocidad de proyecto
Deformación horizontal del tablero	Limitación de giro horizontal máximo $R = \frac{L^2}{8\delta_h}$ R: radio de curvatura horizontal, L: longitud segmento más desfavorable, δ_h : deformación transversal relativa
Vibración transversal del tablero	Primera frecuencia por flexión transver- sal ≥ 1.2 Hz Desplazamiento relativo transversal má- ximo entre dos puntos de un vano por de- formación (por flexión, alabeo o torsión) lateral de 6 mm
Giro transversal del tablero	$\theta_t \leq 0,0040rad$ si $v \leq 120$ km/h $\theta_t \leq 0,0027rad$ si $120 < v \leq 220$ km/h $\theta_t \leq 0,0013rad$ si $220 < v \leq 350$ km/h
Limitaciones ligadas al confort	Muy Bueno: $b_v \leq 1.0m/s^2$ Bueno: $b_v \leq 1.3m/s^2$ Aceptable: $b_v \leq 2.0m/s^2$ b_v : aceleración vertical Limitación de deformaciones verticales máximas de los tableros en función de: L, v, y tipología del puente

Tabla 2.3: Valores limitativos en las deformaciones dinámicas y aceleraciones de los tableros

- El cálculo debe simular el paso del tren a las distintas velocidades de paso, desde $V_{min}=20$ km/h hasta $V_{max}=1,2 V$
- El incremento máximo entre velocidades debe ser inferior a los 10 km/h.
- En puentes de dos o más vías, se considerará el cálculo con el paso del tren por una única vía en la situación más desfavorable, sin tener en cuenta la simultaneidad de efectos resonantes en varias vías. Misma indicación debe tomarse para la comprobación de ELS de aceleraciones.

Para tener en cuenta las irregularidades de la vía, que modificarán los efectos dinámicos del puente, se incluye en la Ec. (2.1) el coeficiente φ'' definido en B.12 de la Instrucción. De este modo se definen, respectivamente, el coeficiente de impacto, aceleración y desplazamiento máximo en el tablero:

$$\phi = \frac{\delta_{din,real}^{ideal}}{\delta_{est,tipo}} (1 + r\varphi'') \quad (2.2)$$

$$A_v = A_v^{ideal} (a + r\varphi'') \quad (2.3)$$

$$\delta_v = \delta_{din,real}^{ideal} (1 + r\varphi'') \quad (2.4)$$

En la tabla 2.4 se adjunta un resumen de los ámbitos de aplicación de los métodos descritos en la Instrucción [1] para el cálculo dinámico en puentes de ferrocarril.

Las pérgolas no son estructuras convencionales y además son hiperestáticas, hacen que tan solo podamos emplear los siguientes métodos según la Instrucción [1]:

- “Cálculo dinámico mediante integración directa en el tiempo con cargas móviles”.
- “Cálculo dinámico simplificado mediante integración directa en el tiempo con interacción vehículo-estructura”.

Los métodos que incluyen la interacción vehículo-estructura son complejos y su empleo está supeditado a la autorización por parte de la Administración, además de que el hiperestatismo de la estructura hace que los efectos de interacción no sean determinantes en el cálculo.

Durante todo el proyecto se emplea el método de cálculo: “Cálculo dinámico mediante integración directa en el tiempo con cargas móviles”.

Cálculo dinámico mediante integración directa en el tiempo con cargas móviles

Este método resuelve en el tiempo el problema dinámico bajo modelos de cargas móviles. No tiene en cuenta la interacción vehículo-estructura pero sí los posibles efectos resonantes en el puente. Es aplicable para estructuras hiperestáticas e isostáticas, no tiene en cuenta restricciones de masa ni de frecuencias, y es válido para todo rango de velocidades.

Existen diferentes procedimientos para abordar este problema:

- Estructuras sencillas: Métodos de análisis modal³ partiendo de una definición analítica de los modos de vibración de la estructura.
- Resto de estructuras: Métodos de elementos finitos con una integración directa en el tiempo del modelo completo o integración de los modos de vibración de la estructura discretizada

La descomposición modal emplea los modos de vibración de la estructura y la combinación de las respuestas de cada modo frente a cargas móviles. Para puentes isostáticos suele ser suficiente considerar un solo modo, mientras que para puentes hiperestáticos deben considerarse más. La Instrucción[1] resuelve el caso de una única carga móvil⁴ que recorre el puente. Parte de la ecuación dinámica de la elástica y los desplazamientos (y por consiguiente, las velocidades y aceleraciones) se descomponen, mediante el análisis modal, en función de las formas modales y de las amplitudes correspondientes. Se desacoplan las ecuaciones dinámicas para obtener ecuaciones independientes para cada modo.

Trenes de cargas para el cálculo dinámico. (APÉNDICE C IAPF-2011)[1]

Los trenes a usar en el cálculo dinámico dependen del tipo de vía. En la tabla 2.5 se resumen los trenes a considerar.

2.1.2. Norma UNE-EN 1991-2:2003. Eurocódigo 1: Acciones en estructuras. Parte 2: Cargas de tráfico en puentes[2]

Efectos estáticos

Las acciones de tráfico ferroviario están definidas por varios modelos de carga. Según EN1991-2 [2] hay cuatro modelos que representan la carga vertical estática:

³Los procedimientos basados en el análisis modal suponen un comportamiento lineal de la estructura, que es la hipótesis generalmente válida para casi todas las estructuras

⁴La exclusiva diferencia entre el modelo que aplica en tren de cargas con este, se encuentra en la carga modal

- *Load Model 71 y Load Model SW/0 para puentes continuos, para representar tráfico ferroviario normal*: Con el propósito de simplificar y estandarizar el diseño de puentes de ferrocarril, UIC creó un modelo de carga que engloba los efectos estáticos de los trenes. Los valores característicos de estos trenes pueden amplificarse con un factor α en líneas con tráfico más pesado o más ligero del normal.
- *Load Model SW/2*, que modeliza cargas pesadas.
- *Unloaded train*: Representa el efecto de la no existencia de cargas ferroviarias.

Factor amplificación dinámica

Como anteriormente se ha desarrollado, los esfuerzos estáticos, las deformaciones y las aceleraciones asociadas en el tablero del puente, pueden verse incrementadas o decremen- tadas bajo los esfuerzos de tráfico, generalmente por irregularidades de la vía, naturaleza de las cargas o debido al paso de las sucesivas cargas con un espaciamiento uniforme que pueden excitar a la estructura creando fenómenos resonantes.

El coeficiente de amplificación dinámica ϕ aumenta los efectos estáticos de carga bajo los trenes LM71, SW/0 y SW2.

$$\phi * S_{LM71} \geq \text{MAX}_{i=1,6}((1 + \varphi)_i * S_{sta,i}) \quad (2.5)$$

Análisis dinámico

El estudio que debe realizarse en la superestructura sigue un diagrama flujo definido en esta Normativa[2]. Los parámetros condicionantes de realizar un cálculo o no dinámico son: velocidad máxima de la línea, longitud de vano, primera frecuencia de flexión y primera frecuencia de torsión.

Un análisis dinámico debe tener en cuenta:

- Valores característicos de carga de trenes reales para proyecto y velocidades superiores a 200 km/h. Ejemplos tales como: Convencionales (ICE2, VIRGIN, ETR-Y), articulados (TGV, THALYS, EUROSTAR), o regulares (TALGO)
- Modelo de carga HSLM-A y HSLM-B, en puentes diseñados para líneas donde el cri- terio de interoperabilidad sea aplicable.
- Número de vías del puente, para realizar las combinaciones de carga.
- Rango de velocidades: Para cada tren real y cada modelo HSLM, la máxima velocidad de diseño suele ser 1,2 veces superior a la máxima velocidad de la línea. Pequeños pasos pueden demostrar la posibilidad de velocidades resonantes.

- Seguridad estructural: el factor de amplificación dinámica puede obtenerse basándose en resultados de análisis dinámicos, basándose en los factores indicativos de la UIC 776-1R si no es necesario un análisis dinámico⁶
- Deben cumplirse los estados límite de deformaciones y de vibraciones (EN1990-AnnexA2), en aceleraciones verticales, torsión, flecha, deformación y vibración transversal del tablero.

2.2. Trabajos y publicaciones sobre cálculo dinámico de pérgolas

Uno de los problemas detectados en relación con el cálculo de pérgolas durante la redacción del presente proyecto es la aparición de singularidades por la oblicuidad de las esquinas del tablero esviado de la pérgola. Existen variedad de artículos relacionados al respecto. A. Leissa *el al* [4] [5] estudian las vibraciones en placas romboidales con diferentes condiciones de contorno, señalando la trascendencia de la presencia de las esquinas oblicuas. S.K Malhotra *el al* [6] analizalas frecuencias según el ángulo de esviaje de placas de Kirchhoff, ortótropas, rómbicas empleando elementos finitos para diferentes condiciones de contorno. S.A Eftekhari *el al* [7], O.G.McGee *el al* [8], P.Malekzadeh *el al* [9], M.V Quintana *el al* [10] estudian las vibraciones libres placas esviadas, gruesas con diferentes condiciones de contorno aplicando diferentes formulaciones. D.Zhou *el al*[11] [12] estudian las vibraciones de placas esviadas empleando el método de Chebyshev-Ritz, y con el método de MLS⁷-Ritz. Estos estudios llegan a una conclusión común: los resultados modales de frecuencias naturales se ven condicionados con el esviaje de la placas.

Como artículos destacables sobre modelización de pérgolas para el ferrocarril de alta velocidad, destaca el trabajo realizado por Juan Luis Bellod y Peter Tanner [13], donde describe las pérgolas diseñadas en las Alameda de la Sagra (L.A.V Madrid-Toledo), en Montilla del Palancar (L.A.V Madrid-Levante), en Málaga (L.A.V Córdoba-Málaga), para proceder a un análisis estructural y de detalles estructurales en el dimensionamiento de los nudos por medio de campos de tensiones, otras zonas singulares y proceso constructivo. Los artículos de J.Goicolea [14] , [15] exponen algunos detalles de cálculo para pérgolas mediante modelo tridimensional mostrando la complicación de cálculo derivado por el empleo de modelos complejos. Durante la redacción del presente proyecto en fase ya avanzada, se presentó el trabajo en la Universidad Politécnica de Madrid de J. Ugarte [16], se trata de un estudio exhaustivo del análisis dinámico de pérgolas, donde se defiende el empleo de placas ortótropas en la modelización del tablero, reduciendo el concepto a emparrillados conformados con vigas homogeneizadas que representen dicha ortotropía en los cálculos dinámicos realizados.

⁶Velocidades inferiores a 200 km/h y frecuencias naturales superiores al valor límite.

⁷Moving least square-Ritz método

2.3. Solución al problema de cargas móviles

2.3.1. Trabajos y publicaciones sobre soluciones al problema de cargas móviles en puentes de ferrocarril de alta velocidad.

Los efectos dinámicos debidos a las cargas móviles condicionan el proyecto de los puentes de ferrocarril de alta velocidad. Se ha resuelto dicho problema mediante soluciones aproximadas y formulaciones exactas para ciertos casos. En 1905, Kryloff[17] aporta una de las primeras soluciones analíticas al caso de una viga isosática simplemente apoyada, siendo un problema estudiado también en trabajos de Bleich [18], Thimoshenko. Frýba [19], Li y Su [20] o Yang *el al* [21] que también analizan comportamientos dinámicos en estructuras isostáticas. Hayashikawa y Watanabe [22] obtienen un resultado analítico para estructuras de cantos escalonados. Sobre estructuras hiperestáticas, Chen y Li[23] obtienen una nueva solución exacta de los modos mediante el método de la rigidez dinámica en vigas con deformación a cortante. Henchi *el al* [24] estudian la solución en el dominio de la frecuencia. Dugush y Eisenberger[25] trabajaron con estructuras continuas de canto variable resolviendo la parte espacial de forma exacta mediante el método de la rigidez dinámica y la solución temporal de forma analítica mediante una serie infinita. Pero sin embargo, estos modelos no dejan de ser teóricos alejados de los casos reales. Consideraciones tales como cantos variables, efecto de deformación por cortante, ortotropías, etc se escapan de sus hipótesis.

Por otro lado, la práctica más difundida de cálculo trabaja con el método de elementos finitos para resolver de forma aproximada la variable espacial y con métodos de integración paso a paso (véanse en el libro de Clogh y Penzien [26]) para resolver la variable temporal, siendo el método más empleado el método de integración de Newmark-Beta [27]. El método semianalítico fue publicado por primera vez en 2006 en la revista internacional Journal of Sound and Vibration, propuesto por Castro *el al* [28],[29], [30] y [31], en la Universidad de Granada, se trata de una solución al problema general de cálculo de estructuras analizables mediante superposición modal y el modelo de cargas puntuales sin interacción vehículo-estructura. Como se estudiará en el próximo capítulo se proporciona una solución general analítica en el tiempo, eliminando el carácter aproximado de los métodos de cálculo tradicionales, cuyo arrastre de errores en cada aproximación los convierten en métodos más costosos en tiempo y fiabilidad. En pérgolas, se ha aplicado el método semianalítico en el cálculo de la pérgola Olmedo, pérgola de las Infantas y pérgola Bobadilla.

2.3.2. Métodos de integración en el dominio del tiempo. Métodos paso a paso

Existen dos métodos numéricos de cálculo que resuelven el problema dinámico del paso de cargas móviles. Estos son los métodos indirectos y directos. Los métodos indirectos, están

limitados a cálculos de estructuras con comportamientos lineales. El método de superposición modal entra dentro de esta metodología, separando la variable temporal de la espacial y resolviendo el problema mediante integración temporal de las ecuaciones modales. Los métodos de cálculo directo permiten no linealidades en la estructura, mediante integración directa de las ecuaciones de equilibrio en cada instante y para cada grado de libertad. Un ejemplo de esta metodología es el método paso a paso de Newmark-Beta, Hughes, Wilson [27],[32],[33] y [34].

Los métodos paso a paso consisten, generalmente, en la división de la carga dinámica y su respuesta en una serie de pasos en los cuales, se calcula la respuesta aplicando las condiciones iniciales mediante un cálculo independiente de cada uno de los pasos.

- *Métodos explícitos: Ej. Runge-Kutta.* Emplean la ecuación diferencial en un tiempo t_{n+1} para predecir una solución en $t_n + \Delta t_n$. Son métodos condicionalmente estables con el tamaño del incremento del tiempo, por lo general, se necesitan pasos muy pequeños en estructuras reales para que la solución sea estable.
- *Métodos implícitos. Ej. Método de Newmark-Beta:* Emplean la ecuación diferencial en un tiempo t_n tras encontrar la solución en $t_n - \Delta t_n$. Esto implica que se debe resolver un sistema de ecuaciones lineales para cada paso.

Los métodos paso a paso tienen limitaciones en términos de tiempo de cálculo, fiabilidad y acumulación de errores en cada aproximación. Son métodos de integración numérica de tipo incremental en la variable temporal. El paso del tiempo y el tamaño del mismo condicionan la mejor o peor solución. Para cálculo de estructuras reales, se requieren pasos pequeños que traen consigo la necesidad de buscar simplificaciones de los modelos de cálculo o bien, se encarecen los tiempos de análisis.

El método semianalítico elimina íntegramente todos los problemas anteriormente descritos. Su formulación mantiene la aproximación espacial porque necesita del método de elementos finitos para caracterizar modos y formas modales, pero suprime la aproximación numérica temporal, obteniendo resultados satisfactorios en tiempos mucho menores. En el próximo capítulo se presenta la solución semianalítica y su aplicación en estructuras tipo pérgola, para su empleo en el presente proyecto.

METODO DE CALCULO	AMBITO DE APLICACION
<i>Cálculo estático y coeficiente de impacto envolvente</i>	<ul style="list-style-type: none"> ▶ Puentes o elementos estructurales de tipologías convencionales ▶ $v \leq 220$ km/h ▶ Puentes cuya primera frecuencia natural de flexión cumpla las limitaciones superiores e inferiores impuestas por la norma
<i>Coeficiente de impacto para los trenes reales mediante expresiones analíticas</i>	<ul style="list-style-type: none"> ▶ Puentes o elementos estructurales de tipologías convencionales ▶ $v \leq 220$ km/h ▶ Puentes cuya primera frecuencia natural de flexión NO cumpla las limitaciones impuestas por la norma ▶ No se produzcan fenómenos resonantes ni se superan los límites de aceleraciones.
<i>Coeficiente de impacto para los trenes reales mediante cálculo dinámico</i>	<ul style="list-style-type: none"> ▶ Puentes o elementos estructurales de tipologías convencionales y no convencionales ▶ $v \leq 220$ km/h ▶ Puentes cuya primera frecuencia natural de flexión NO cumpla las limitaciones impuestas por la norma
<i>Cálculo estático con coeficiente de impacto envolvente extendido a otras estructuras no resonantes.</i>	<ul style="list-style-type: none"> ▶ Puentes isostáticos no esviados modelizables como viga biapoyada ▶ Marcos bajo terraplén
<i>Cálculo dinámico mediante integración directa en el tiempo con cargas móviles</i>	<ul style="list-style-type: none"> ▶ Válido para cualquier rango de velocidades ▶ Sin limitación de masas ni de frecuencias mínimas ▶ Aplicable en puentes isostáticos e hiperestáticos
<i>Cálculo dinámico simplificado mediante la impronta dinámica del tren</i>	<ul style="list-style-type: none"> ▶ Válido para cualquier rango de velocidades ▶ Sin limitación de frecuencias ni masas mínimas ▶ Sólo aplicable en puentes isostáticos
<i>Cálculo dinámico mediante integración directa en el tiempo con interacción vehículo-estructura²</i>	<ul style="list-style-type: none"> ▶ Válido para cualquier rango de velocidades ▶ Aplicable en puentes isostáticos e hiperestáticos ▶ Sin limitación de masas ni de frecuencias mínimas

Tabla 2.4: Resumen de los ámbitos de aplicación de cada método de cálculo dinámico descrito por la IAPF-2011

<p>C.1 → Líneas interoperables de alta velocidad. Modelo HSLM⁵</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▶ <i>Tren dinámico Universal A</i> (Aplicable en tableros continuos o simplemente apoyados de luz superior a 7 m): Acción conjunta de 10 trenes articulados (Cada tren: 2 locomotoras+coches de pasajeros). ▶ <i>Tren dinámico Universal B</i> (Aplicable en tableros simplemente apoyados de $L < 7$ m): Formado por "N.ºes con cargas $P=170$ kN
<p>C.2 → Casos especiales o exigencias de la Administración: Trenes reales de alta velocidad</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▶ ICE2 ▶ ETR-Y ▶ EUROSTAR 373/1 ▶ AVE ▶ TALGO AV ▶ VIRGIN ▶ THALYS
<p>C.3 → Trenes reales característicos del modelo de cargas UIC 71</p>	<p>Aplicables en tramos con $v \leq 220$ km/h. Se les aplica un coeficiente de clasificación α</p>

Tabla 2.5: Trenes de cargas para el cálculo dinámico

CAPÍTULO 3

Método semianalítico

3.1. Introducción

La solución semianalítica fue desarrollada por *A.Martínez Castro, P. Museros Romero y A.Castillo Linares (Universidad de Granada)* y publicado en la revista *Journal of Sound and Vibration* [29].

El concepto de esta metodología es la eliminación del tratamiento aproximado de la variable temporal que tradicionalmente se realizaba mediante métodos numéricos de integración temporal. Así, los cálculos se basan en la superposición modal con el tratamiento de:

- *Variable espacial*: Solución aproximada mediante discretización aplicando el método de elementos finitos.
- *Variable temporal*: Solución exacta a través de expresiones analíticas.

En este apartado, se pretende exponer la formulación del método, su aplicación a un test bidimensional y otro tridimensional para validar su aplicación en pérgolas, y sus notables ventajas frente a los métodos tradicionales de cálculo.

3.2. Formulación del método.

Para la formulación del método se siguen los siguientes pasos:

1. Obtención de la ecuación de gobierno de una viga de canto variable en dinámica.
2. Obtención de la formulación matricial de un elemento barra y generalización a toda la estructura.
3. Resolución del sistema.

4. Solución para cada modo de vibración, pues se ha desacoplado el sistema. Introducción de amortiguamiento en el problema.

Paso 1. Ecuación de Gobierno de una viga de sección variable en dinámica.

Sea una viga de Bernoulli-Euler de sección variable, representada en la figura 3.1 sometida a una carga $q(x, t)$ definida como una fuerza puntual p_0 que se desplaza por el eje x a una velocidad constante v . La función de carga $q(x, t)$ se puede definir mediante una Delta de Dirac según la ecuación 3.1:

$$q(x, t) = p_0 \cdot \delta(x - vt) \tag{3.1}$$

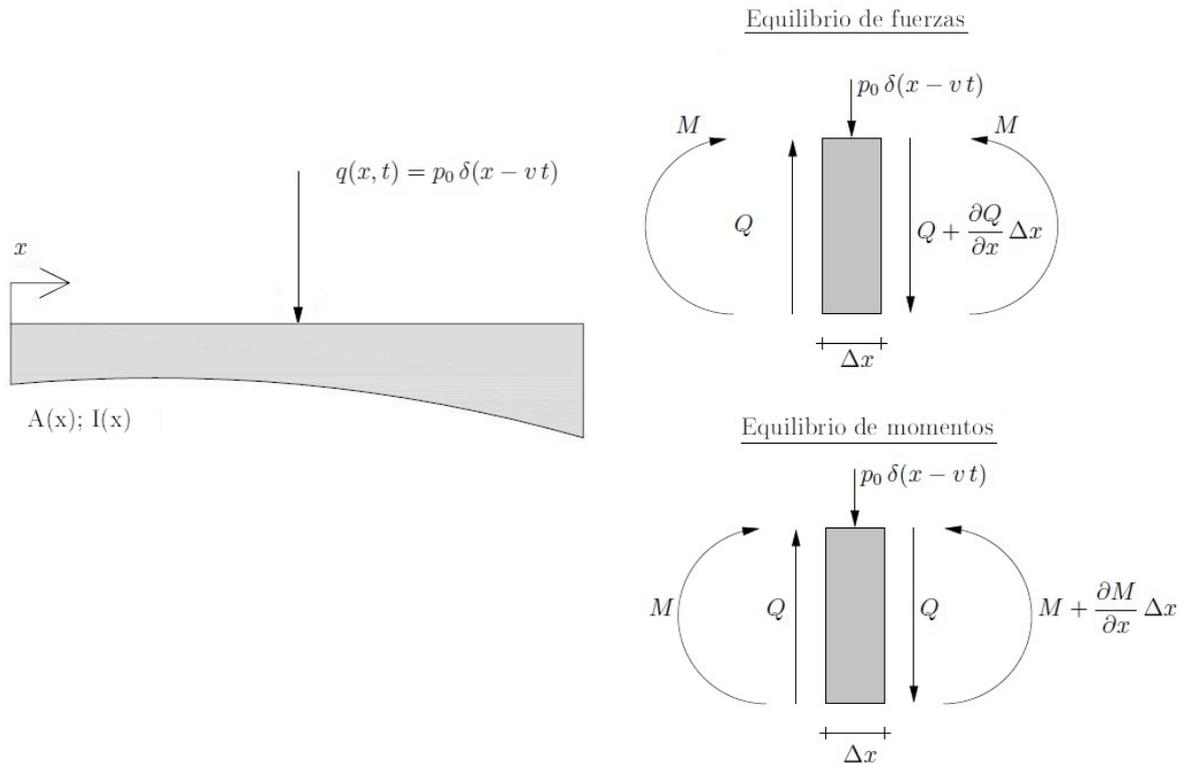


Figura 3.1: Carga móvil sobre viga de sección variable. Equilibrios de la rebanada

Se plantean las ecuaciones de equilibrio dinámico en la rebanada sin contabilizar el término de la amortiguación:

- Equilibrio de fuerzas:

$$-\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} - p_0 \cdot \delta(x - vt) = \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.2}$$

Siendo la fuerza de inercia el término a la derecha de la igualdad de la ecuación 3.2 y $\rho(x)$ la densidad lineal de la estructura.

- Equilibrio de momentos:

$$\partial M(x, t) = Q(x, t)\partial x \Rightarrow \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = Q(x, t) \quad (3.3)$$

Sustituyendo la ecuación 3.3 en 3.2:

$$-\frac{\partial\left(\frac{\partial M(x, t)}{\partial x}\right)}{\partial x} - p_o \cdot \delta(x - vt) = \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} - p_o \cdot \delta(x - vt) = \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

Se establece como ecuación constitutiva, la relación lineal de momento curvatura de la viga de Euler-Bernouilli:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{M(x, t)}{EI(x)} \quad (3.6)$$

$$M(x, t) = EI(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.7)$$

Expresión que sustituida en 3.5, permite la obtención de la ecuación de gobierno del problema:

$$\frac{\partial^2 EI(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}}{\partial x^2} - p_o \cdot \delta(x - vt) = \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.8)$$

$$\rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}] + p_o \cdot \delta(x - vt) = 0 \quad (3.9)$$

Ecuación diferencial que debe resolverse con condiciones iniciales de reposo:

$$u(s, 0) = 0, \forall x \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \forall x \quad (3.11)$$

Paso 2. Formulación matricial para toda la estructura.

Se obtiene a continuación, la formulación matricial que rige el comportamiento dinámico de un elemento, con objeto de llegar a la formulación matricial acoplada para toda la estructura. Dada una viga de longitud L según la figura 3.2 sometida a:

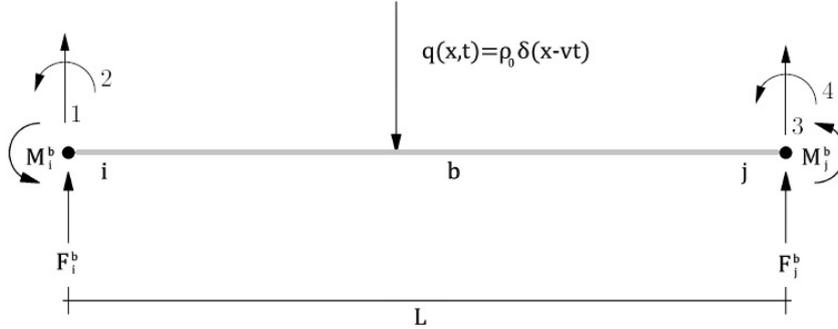


Figura 3.2: Discretización para un elemento barra y criterio de signos.

■ Fuerzas externas:

1. Fuerzas y momentos nodales: Teniendo en cuenta el criterio de signos de la figura 3.2 :

$$F_i^b = Q(0, t) \quad (3.12)$$

$$F_j^b = -Q(L, t) \quad (3.13)$$

$$M_i^b = -M(0, t) \quad (3.14)$$

$$M_j^b = M(L, t) \quad (3.15)$$

2. Fuerza puntual:

$$p_0 \cdot \delta(x - vt) \quad (3.16)$$

3. Fuerzas de inercia:

$$\rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.17)$$

■ Esfuerzos:

1. Cortantes:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = -p_0 \cdot \delta(x - vt) - \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.18)$$

Que integrándola entre 0 y $x \in [0, L]$:

$$Q(x, t) = Q(0, t) - \int_0^x p_0 \cdot \xi(\xi - vt) d\xi - \int_0^x \rho(\xi) \cdot \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi \quad (3.19)$$

2. Flectores:

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = Q(x,t) \cdot dx \quad (3.20)$$

$$M(x,t) = M(0,t) + \int_0^x Q(\xi,t)d\xi \quad (3.21)$$

Multiplicando la ecuación de gobierno 3.9 por una función de ponderación espacial, $u^*(x)$ y aplicando integración por partes se llega a la formulación débil de la ecuación de Euler-Bernouilli.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = u'(x,t) \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dot{u}(x,t) \quad (3.23)$$

Se multiplica, 3.9 por $u^*(x)$:

$$\rho(x) \cdot \ddot{u}(x,t) + (u''(x,t) \cdot EI(x))'' = -p_0 \cdot \delta(x - vt) \quad (3.24)$$

$$\rho(x) \cdot \ddot{u}(x,t) \cdot u^*(x) + (u''(x,t) \cdot EI(x))'' \cdot u^*(x) = -p_0 \cdot \delta(x - vt) \cdot u^*(x) \quad (3.25)$$

Se integra en el dominio:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho(x) \cdot \ddot{u}(x,t) \cdot u^*(x) dx + \int_0^L (u''(x,t) \cdot EI(x))'' \cdot u^*(x) ds = \\ & = - \int_0^L p_0 \cdot \delta(x - vt) \cdot u^*(x) dx \end{aligned} \quad (3.26)$$

Aplicando doble integración por partes en el segundo sumando del primer término:

$$\begin{aligned} & \int_0^L (u''(x,t) \cdot EI(x))'' \cdot u^*(x) dx = \\ & = u^*(x) \cdot (u''(x,t) \cdot EI(x))'|_0^L - \int_0^L (u''(x,t) \cdot EI(x))' \cdot \frac{\partial u^*(x)}{\partial x} ds = \\ & = u^*(x) \cdot (u''(x,t) \cdot EI(x))'|_0^L - (u''(x,t) \cdot EI(x)) \cdot \frac{\partial u^*(x)}{\partial x} |_0^L + \\ & + \int_0^L u''(x,t) \cdot EI(x) \cdot \frac{\partial^2 u^*(x)}{\partial x^2} dx \end{aligned} \quad (3.27)$$

Se observa que algunos de los sumandos de la expresión anterior se identifican con las expresiones de esfuerzos cortantes y momentos flectores:

$$Q(x, t) = (u'' \cdot EI(x))' \quad (3.28)$$

$$M(x, t) = u'' \cdot EI(x) \quad (3.29)$$

Se llega, teniendo en cuenta 3.28 y 3.29 a:

$$\begin{aligned} (u'' \cdot EI(x))' \cdot u^*(x) \Big|_0^L &= Q(L, t) \cdot u^*(x) \Big|_0^L = \\ &= Q(L, t) \cdot u^*(L) - Q(0, t) \cdot u^*(0) = -F_j^b \cdot u^*(L) - F_i^b \cdot u^*(0) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} u'' \cdot EI(s) \cdot \frac{\partial \cdot u^*(s)}{\partial s} \Big|_0^L &= M(s) \cdot \frac{\partial u^*}{\partial s} \Big|_0^L = \\ &= -M_j^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial s} \Big|_L - M_i^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial s} \Big|_0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

La ecuación 3.27 resultaría:

$$\begin{aligned} \int_0^L (u''(s, t) \cdot EI(s))'' \cdot u^*(s) dx &= \\ \int_0^L u''(s, t) \cdot EI(s) \cdot \frac{\partial^2 u^*(s)}{\partial s^2} - F_j^b \cdot u^*(L) - F_i^b \cdot u^*(0) - M_j^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial s} \Big|_L + \\ + M_i^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial s} \Big|_0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Aplicando las propiedades de la función Delta de Dirac, en el segundo miembro de la ecuación 3.26:

$$\int_0^L p_0 \cdot \delta(x - vt) \cdot u^*(x) \cdot dx = p_0 \cdot u^*(vt) \quad (3.33)$$

Se sustituyen las ecuaciones 3.32 y 3.33 en la ecuación 3.26 se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \rho(x) \cdot \ddot{u}(x,t) \cdot u^*(x) dx + \int_0^L (u''(x,t) \cdot EI(x))'' \cdot u^*(s) dx = \\
& = +F_j^b \cdot u^*(L) + F_i^b \cdot u^*(0) + M_j^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_L + M_i^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_0 - p_o \cdot u^*(vt) \quad (3.34)
\end{aligned}$$

No se impone condición sobre $u^*(x)$ más que su continuidad y derivabilidad. Los elementos tipo barra se han discretizado en los dos nodos con cuatro grados de libertad equivalentes a dos giros y dos desplazamientos. Se considera, por tanto, una base de polinomios de grado menor o igual a 3 de Hermite. Suponiendo que la flecha $u(x,t)$ puede representarse de forma exacta como una combinación lineal de la base de los polinomios de Hermite:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^4 y_n(t) \cdot h_n(x) \quad (3.35)$$

La forma de los polinomios de Hermite son:

$$[U_i] \rightarrow h_1(x) = 1 - 3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.36)$$

$$[\theta_i] \rightarrow h_2(x) = L \cdot \left[\frac{x}{L} - 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right] \quad (3.37)$$

$$[U_j] \rightarrow h_3(x) = 3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.38)$$

$$[\theta_j] \rightarrow h_4(x) = L \cdot \left[-\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right] \quad (3.39)$$

Desarrollando la ecuación 3.35 usando las relaciones anteriores:

$$u(x,t) = y_i \cdot h_1(x) + \theta_i \cdot h_2(x) + y_j \cdot h_3(x) + \theta_j \cdot h_4(x) \quad (3.40)$$

Se obtienen las expresiones de velocidad y aceleración derivando.

$$u(\dot{x},t) = \dot{y}_i \cdot h_1(x) + \dot{\theta}_i \cdot h_2(x) + \dot{y}_j \cdot h_3(x) + \dot{\theta}_j \cdot h_4(x) \quad (3.41)$$

$$u(\dot{x},t) = \sum_{n=1}^4 y_n(\dot{t}) \cdot h_n(x) \quad (3.42)$$

$$u(\ddot{x},t) = \ddot{y}_i \cdot h_1(x) + \ddot{\theta}_i \cdot h_2(x) + \ddot{y}_j \cdot h_3(x) + \ddot{\theta}_j \cdot h_4(x) \quad (3.43)$$

$$u(\ddot{x},t) = \sum_{n=1}^4 y_n(\ddot{t}) \cdot h_n(x) \quad (3.44)$$

Si se toman como funciones de ponderación $u^*(x)$ las propias funciones de Hermite:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho(x) \cdot \sum_{n=1}^4 [y_n(t) \cdot h_n(x)] \cdot h_m(x) dx + \int_0^L \sum_{n=1}^4 [y_n(t) \cdot \frac{\partial^2 h_n(x)}{\partial x^2}] \cdot EI(x) h_m(x) dx^2 = \\ & = +F_j^b \cdot h_m(L) + F_i^b \cdot h_m(0) + M_j^b \cdot \frac{\partial h_m(x)}{\partial x} \Big|_L + M_i^b \cdot \frac{\partial h_m(x)}{\partial x} \Big|_0 - p_0 \cdot h_m(vt) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Se obtiene la formulación matricial:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_i(vt) \\ \ddot{\theta}_i(vt) \\ \dot{y}_j(vt) \\ \ddot{\theta}_j(vt) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i(vt) \\ \theta_i(vt) \\ y_j(vt) \\ \theta_j(vt) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} F_i^b(vt) \\ M_i^b(vt) \\ F_j^b(vt) \\ M_j^b(vt) \end{bmatrix} - p_0 \begin{bmatrix} h_1(vt) \\ h_2(vt) \\ h_3(vt) \\ h_4(vt) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Donde:

$$M_{ij} = \int_0^L \rho(x) \cdot h_i(x) \cdot h_j(x) dx \quad (3.47)$$

$$K_{ij} = \int_0^L h_i''(x) \cdot EI(x) \cdot h_j''(x) dx \quad (3.48)$$

Se tratan de matrices simétricas. Se llega a la formulación global acomplando estas matrices elementales, para la estructura completa:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = -p_0\mathbf{h}(vt) \quad (3.49)$$

Paso 3. Resolución del sistema.

Se trabaja desacoplando el sistema por el hecho de tener matrices simétricas, realizando un cambio de base, mediante la matriz C de cambio de base obtenida del problema de autovalores, del sistema B que coincidirá con la base de vectores propios a la base canónica E:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{y}(t) = 0 \Rightarrow \left| \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \right| = 0 \quad (3.50)$$

Problema de autovalores que proporcionará los vectores propios o modos de vibración que componen la matriz C . Las coordenadas del vector y se relacionan con las coordenadas del mismo en la base B , mediante la matriz C de la siguiente forma:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{q} \quad (3.51)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{y} \quad (3.52)$$

Se cambia de base en 3.49 y multiplicando por la transpuesta de C se desacopla el sistema y se obtiene:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{M} \mathbf{C} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^T \mathbf{K} \mathbf{C} \mathbf{q} = -p_0 \mathbf{C}^T \mathbf{h}(vt) \quad (3.53)$$

Resultando diagonalizadas las matrices de masa y rigidez, M y K :

$$\mathbf{M}_D = \mathbf{C}^T \mathbf{M} \mathbf{C} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{K}_D = \mathbf{C}^T \mathbf{K} \mathbf{C} \quad (3.55)$$

Si multiplicamos por \mathbf{M}_D^{-1} podremos reescribir:

$$\mathbf{M}_D^{-1} \cdot \mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_D^{-1} \cdot \mathbf{K}_D \cdot \mathbf{q} = -p_0 \cdot \mathbf{M}_D^{-1} \cdot \mathbf{C}^T \mathbf{h}(vt) \quad (3.56)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}(vt) \quad (3.57)$$

Siendo \mathbf{D} una matriz diagonal tal que $D_{ii} = \omega_i^2$, y la matriz \mathbf{G} :

$$\mathbf{G} = -p_0 \cdot \mathbf{M}_D^{-1} \cdot \mathbf{C}^T \quad (3.58)$$

Ya se tiene un sistema desacoplado, siendo resoluble para cada función $q_i(t)$ de forma independiente. Los valores propios de esta matriz w_i^2 permiten obtener las frecuencias naturales.

Paso 4. Solución para cada modo.

Se tiene en cuenta la hipótesis de que la carga puntual, en cualquier instante de tiempo se encuentra en algún elemento o fuera del intervalo $[0, L)$. En cada instante de tiempo, y para cada modo, intervienen cuatro coeficientes procedentes de la matriz G para definir la función de carga. Como funciones temporales, sólo cuatro de ellas pueden combinarse en un punto inferior a un intervalo de la forma $[0, L)$.

Incluyendo la contribución del amortiguamiento ζ , el problema planteado viene dado por:

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta w_n \dot{q}_n(t) + w_n^2 \cdot q_n(t) = \sum_{m=1}^4 G_{nm} h_m(vt) \quad (3.59)$$

$$q_i(t)|_{t=0} = q_i(0) \quad (3.60)$$

$$\dot{q}_i(t)|_{t=0} = \dot{q}_i(0) \quad (3.61)$$

En la que ζ representa el factor de amortiguamiento, que podría ser variable en cada modo, pero se considera constante por ser lo común en la práctica.

Se eliminan las exponenciales con términos fuera de rango considerando una escala de referencia local para cada elemento, donde $t=0$ coincide con el instante en que la carga entra en el elemento, coincidente con el punto de abscisa 0.

La ecuación 3.59 es una ecuación diferencial lineal no homogénea cuya solución se descompone en la suma de una solución particular más la solución homogénea:

$$q(t) = q_H(t) + q_P(t) \quad (3.62)$$

- Solución homogénea:

$$q_H(t) = e^{-\zeta w_i t} (C_1 \cos(w_{iD} t) + C_2 \sin(w_{iD} t)) \quad (3.63)$$

$$w_{iD} = w_i \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.64)$$

- Solución particular:

Si se descompone el término no homogéneo en 3.59:

$$p_0(G_1h_1(vt) + G_2h_2(vt) + G_3h_3(vt) + G_4h_4(vt)) \quad (3.65)$$

Se tiene un polinomio de tercer grado por lo que la ecuación particular será de la forma:

$$q_P(t) = \alpha_0 + \alpha_1 vt + \alpha_2 (vt)^2 + \alpha_3 (vt)^3 \quad (3.66)$$

Cuyos coeficientes se obtienen sustituyendo en la ecuación 3.59 y resolviendo el sistema:

$$\alpha_0 = v^3 \alpha_{01} + v^2 \alpha_{02} + v \alpha_{03} + \alpha_{04} \quad (3.67)$$

$$\alpha_1 = v^2 \alpha_{11} + v \alpha_{12} + \alpha_{13} \quad (3.68)$$

$$\alpha_2 = v \alpha_{21} + \alpha_{22} \quad (3.69)$$

$$\alpha_3 = \alpha_{31} \quad (3.70)$$

Donde:

$$[1] \mapsto \alpha_{01} = -\frac{24\zeta(2\zeta^2 - 1)(2G_1 - 2G_3 + (G_2 + G_4)L)}{L^3 w_i^5} \quad (3.71)$$

$$[2] \mapsto \alpha_{02} = -\frac{2(4\zeta^2 - 1)(3G_1 - 3G_3 + (2G_2 + G_4)L)}{L^2 w_i^4} \quad (3.72)$$

$$[3] \mapsto \alpha_{03} = -\frac{2G_2\zeta}{w_i^3} \quad (3.73)$$

$$[4] \mapsto \alpha_{04} = \frac{G_1}{w_i^2} \quad (3.74)$$

$$[5] \mapsto \alpha_{11} = \frac{6(4\zeta^2 - 1)(2G_1 - 2G_3 + (G_2 + G_4)L)}{L^3 w_i^4} \quad (3.75)$$

$$[6] \mapsto \alpha_{12} = \frac{4\zeta(3G_1 - 3G_3 + (2G_2 + G_4)L)}{L^2 w_i^3} \quad (3.76)$$

$$[7] \mapsto \alpha_{13} = \frac{G_2}{w_i^2} \quad (3.77)$$

$$[8] \mapsto \alpha_{21} = -\frac{6\zeta(2G_1 - 2G_3 + (G_2 + G_4)L)}{L^3 w_i^3} \quad (3.78)$$

$$[9] \mapsto \alpha_{22} = -\frac{4\zeta(3G_1 - 3G_3 + (2G_2 + G_4)L)}{L^2 w_i^2} \quad (3.79)$$

$$[10] \mapsto \alpha_{31} = \frac{2G_1 - 2G_3 + (G_2 + G_4)L}{L^3 w_i^2} \quad (3.80)$$

Estos diez elementos dependen de:

- Amortiguamiento.
- Longitud del elemento.
- Frecuencias naturales
- Coeficientes G_i que depende de los modos de vibración.

No dependen, por tanto, de la velocidad de paso de la carga por lo que se podrían determinar en un principio estos diez parámetros para cualquier malla.

Finalmente, se determinan los parámetros C_1 y C_2 de la solución homogénea a partir de la imposición de las condiciones iniciales:

$$q(0) = \alpha_0 + C_1 \quad (3.81)$$

$$C_1 = q(0) - \alpha_0 \quad (3.82)$$

$$\dot{q}(0) = -\zeta w_i C_1 + w_{iD} C_2 + \alpha_1 v \quad (3.83)$$

$$C_2 = \frac{\dot{q}(0) + \zeta w_i C_1 - \alpha_1 v}{w_{iD}} \quad (3.84)$$

Esta metodología para vigas es generalizable para otros casos genéricos, con la la única imposición de derivabilidad de la línea de carga.

3.3. Generalización y ejecución del método

Los parámetros necesarios para la solución del sistema, C_i , w_i y G_i se pueden hallar mediante análisis modal. En el presente proyecto se emplea el *software* SAP2000.

Se puede interpretar la ecuación matricial 3.46, mediante un operador diferencial L:

$$\mathcal{L}\{u(\bar{x}, t), v(\bar{x}, t), w(\bar{x}, t)\} = -p_0 \cdot \delta(s - vt) \quad (3.85)$$

Siendo s la coordenada curvilínea de la línea de carga C^1 . Se resuelve el sistema mediante separación de variables espacial y temporal, a través del análisis modal que gracias a la diagonalización de las matrices de rigidez y masa, desacopla todo el sistema.

$$\mathbf{C}^T \mathbf{M} \mathbf{C} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^T \mathbf{K} \mathbf{C} \mathbf{q} = -p_0 \cdot \mathbf{C}^T \cdot h(vt) \quad (3.86)$$

Entonces, la única imposición impuesta por la formulación semianalítica ha sido la derivabilidad de la línea de carga introducida.

Así, el procedimiento de cálculo es el siguiente:

- Datos de entrada en *software SAP2000*: Modelizado de la estructura-Definición de la geometría, materiales, elección de la malla más conveniente de elementos finitos, definición de la línea de carga y de los puntos de postproceso a analizar.
- Datos de salida en *software SAP2000*: Se recopila la información espacial necesaria para definir los diez parámetros α_n , así como las matrices C y G: Modos y frecuencias naturales, giros y desplazamientos modales.
- Cálculo semianalítico mediante un programa en FORTRAN independiente en un entorno de cálculo intensivo basado en Linux y es donde se realiza la integración temporal del problema.

3.4. Tests de validación.

3.4.1. Planteamiento.

A continuación se plantea, en un elemento viga y en un elemento placa, el mismo cálculo dinámico realizado por el método semianalítico y por el método de integración de Newmark-Beta, con objeto de realizar:

1. Comparativa entre los resultados obtenidos por ambos métodos.
2. Detectar las ventajas del método semianalítico frente a los métodos tradicionales paso a paso.
3. Demostrar la aplicación del método semianalítico en el cálculo de pérgolas.

3.4.2. Test de validación 1: Viga de Bernoulli-Euler de tres vanos

Este primer test consiste en la comparativa de resultados en la viga representada en la figura 3.3, estudiada ya por Hayashikawa y Watanabe [22], Henchi *et al.* [24], Zheng *et al.* [35], Martínez-Castro *et al.* en [29] y en [36], [37].

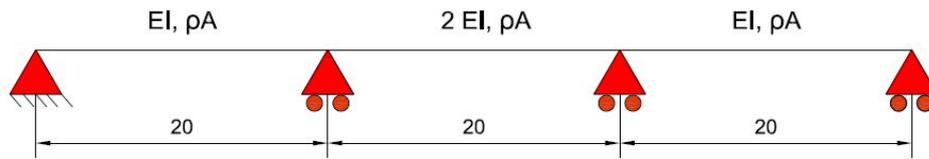


Figura 3.3: Geometría de la viga. Test 1.

Las características de la viga son:

- Viga de Bernouilli-Euler ¹ de tres vanos.
- Longitud de cada vano: $L=20$ m
- Masa por unidad de longitud constante en los tres vanos: $\rho \cdot A = 1000\text{kg}/\text{m}$
- Rigidez a flexión: Igual en los vanos laterales y de valor $EI=1,96\text{GNm}^2$ y en el vano central de valor doble $2EI$.
- Amortiguamiento modal: $\xi=2\%$.

Se divide cada vano de manera uniforme con 40 elementos. Se realiza un análisis bidimensional y el cálculo modal mediante el *software* SAP2000 considerando 12 modos de vibración. Se obtienen los siguientes resultados de modos y frecuencias naturales.

Modo	Periodo	Frecuencia
Número	Seg	Hz
1	0,161	6,205
2	0,132	7,582
3	0,084	11,975
4	0,041	24,209
5	0,038	26,442
6	0,027	37,286
7	0,019	53,584
8	0,018	56,647
9	0,013	76,971
10	0,011	94,164
11	0,010	98,580
12	0,008	130,440

Tabla 3.1: Frecuencias de modos de vibración. Test 1



Figura 3.4: Ejemplo de modo de vibración 10. Test 1.

¹Sin considerar deformación por cortante

Una vez realizado el cálculo modal, se calcula la respuesta dinámica de la estructura al paso de una carga puntual aislada de valor 9,8 kN que la recorre a velocidad constante de 35,57 m/s. Se realizará tanto el cálculo por el método de Newmark a través del *software* SAP2000 que implementa este método paso a paso tras un desacople modal del problema dinámico (Ver referencia [38]). Para el cálculo mediante el método semianalítico se recurre, sin embargo, al entorno de cálculo intensivo basado en Linux.

Cálculo mediante el Método de Newmark:

Como en cualquier método paso a paso, se debe definir los dos siguientes parámetros:

1. Tiempo de discretización de la carga: Se emplearán pasos de $T_{12}/25$ y $T_{12}/150$.
2. Tiempo de discretización del paso: Será igual que el anterior.

Siendo T_{12} es el período menor, correspondiente al modo 12:

$$\frac{T_{12}}{25} \cong 3E - 04s \quad (3.87)$$

$$\frac{T_{12}}{150} \cong 5E - 05s \quad (3.88)$$

Estos pasos se eligen lo suficientemente finos, especialmente $T_{12}/150$ para evitar una acumulación de errores excesivos y poder realizar una comparativa satisfactoria con el método semianalítico.

Se obtienen los siguientes resultados para los primeros 0,1 s representados en la figura 3.5.

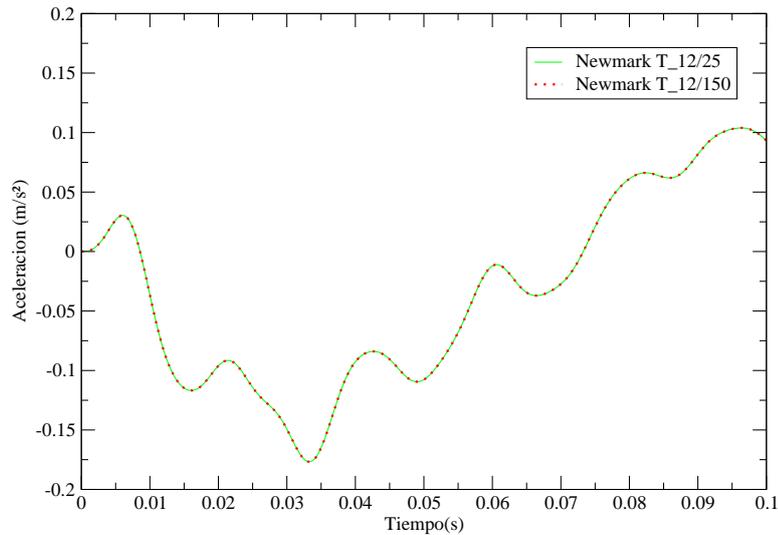


Figura 3.5: Aceleraciones en el punto central del primer vano por el método de Newmark. Test 1.

Cálculo mediante el Método semianalítico:

Los datos de entrada del método semianalítico son: frecuencias naturales, número de modos a analizar, valores de aceleración vertical y giros procedentes del análisis modal, valor de la amortiguación, definición de cargas móviles, definición de línea de carga y de puntos de postproceso. El poder definir exclusivamente los puntos que interesa analizar ahorrará más tiempo ya que los cálculos con el método de Newmark se realizan en cada nodo que se discretiza la estructura.

Los puntos postproceso escogidos se corresponden a cuartos, medios y tres cuartos de cada vano. Un total de nueve puntos de postproceso.

El paso del tiempo que se emplea es de un décimo del periodo menor, es decir, $T_{12}/10$. Se obtiene lo representado en la figura 3.6:

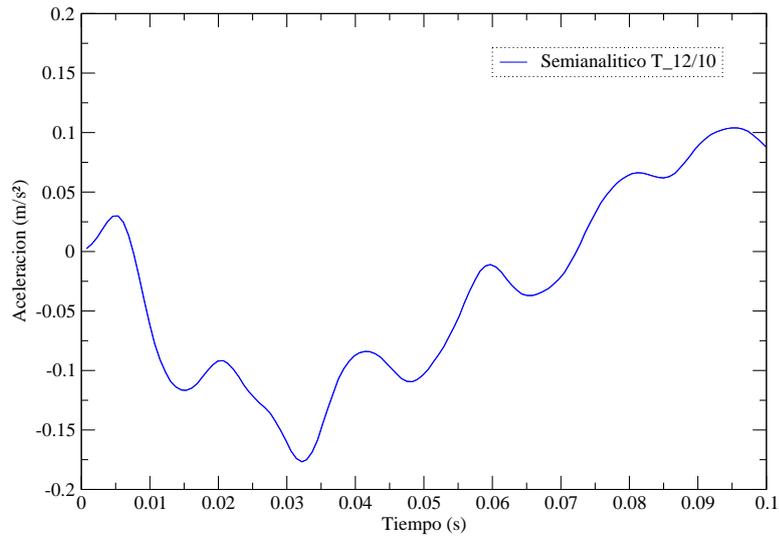


Figura 3.6: Aceleraciones del punto central del primer vano por el método Semianalítico. Test 1.

Comparativa:

Se comparan las tres series temporales calculadas anteriormente en la figura 3.7:

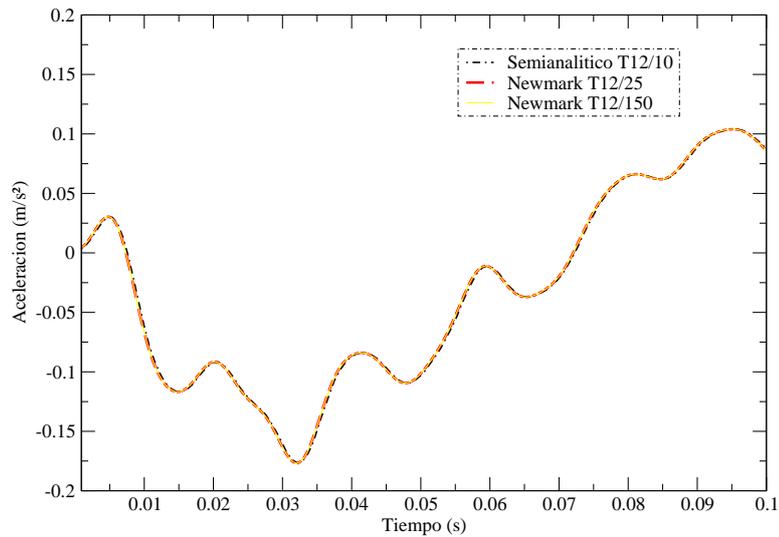


Figura 3.7: Comparación entre distintas metodologías de paso de cargas. Test 1.

Estos datos coinciden con los publicados en las referencias [22], [24] y [35], [29], [36], [37]. En la referencia [29], se realiza el mismo análisis en el intervalo 3,05-3,15 s, demostrándose que a medida que el tiempo es mayor, los errores acumulados por los métodos paso a paso son superiores, llegando a existir diferencias notables de resultados entre los cálculos realizados por el método de Newmark con pasos $T_{12}/25$ y $T_{12}/150$. Sin embargo, con el método semianalítico, con un paso de $T_{12}/10$ se obtienen resultados igual de fiables que los presentados para el paso menor de $T_{12}/150$ del método de Newmark. Esto es, por su tratamiento analítico de la variable temporal.

3.4.3. Test de validación 2: Losa esviada.

Se define una losa esviada tridimensional representada en la figura 3.8, con el fin de poder demostrar que el método semianalítico es aplicable en pérgolas.

Geometría:

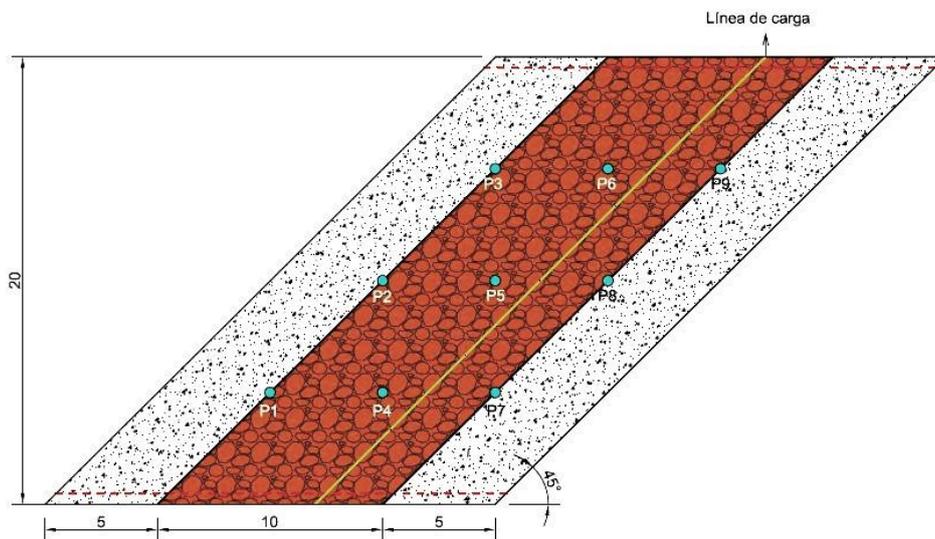


Figura 3.8: Geometría y puntos de postproceso de losa. Test 2.

Las características de la losa son:

- Losa de hormigón HA-35.
- Placa biapoyada.
- Canto $h=0,3\text{m}$
- Coeficiente de Poisson $\nu=0,2$
- Densidad $\rho=2500\text{kg}/\text{m}^3$
- Amortiguamiento modal $\xi=2\%$
- Masa adicional que incluye balasto, vías, traviesas $m=1000\text{kg}/\text{m}^2$

Sobre esta losa, se aplica la misma carga del test 1, una carga móvil de 9.8 kN a velocidad constante de 35.57 m/s, circulando por la línea de carga definida en la figura 3.8.

Para la elección de la malla de elementos finitos, se ensayan diferentes densidades de mallado estudiando la convergencia de los modelos numéricos con el fin de limitar el efecto conocido en placas esviadas producido por las singularidades en las esquinas (Figura 3.9). Se realiza una análisis de la variación de frecuencias entre una malla de referencia muy fina, y mallados con elementos rectangulares de relaciones [1 : 1] (Malla tipo 1 con elementos de dimensiones 1x1 tanto en zona de balasto con en zona de no balasto), [1 : 2] (Malla tipo 2 con elementos de dimensiones 1x0.5 en zona de balasto y 0.5x0.5 en zona de no balasto) 3.10, [1 : 4] (Malla tipo 3 elementos de dimensiones 1x0.25 en zona de balasto y 0.25x0.25 en zona de no balasto), [1 : 5] (Malla tipo 4 elementos de dimensiones 1x0.2 en zona de balasto y 0.2x0.2 en zona de no balasto). Errores tolerables tienen diferencias en frecuencias menores del 10 %. Como se observa en la tabla 3.2 los errores son asumibles en las mallas, pero para mayor precisión del cálculo con el fin de limitar los errores inherentes al método de elementos finitos y conseguir una mejor comparativa de resultados, se elige como malla para modelizar la estructura la definida con la relación [1 : 4].

Geometría:

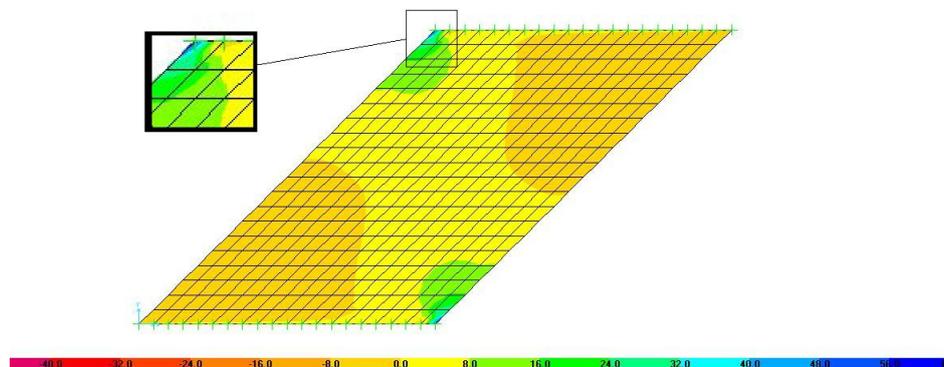


Figura 3.9: Singularidades en las esquinas. Tensión σ_{11}

En la tabla 3.2 se representan las variaciones de las frecuencias naturales en función de la malla de elementos finitos. En las columnas numeradas de M_1 al M_5 , se escriben las frecuencias naturales en Hz obtenidas de las mallas [1 : 1], [1 : 2], [1 : 4], [1 : 5], y la malla de referencia respectivamente. En las columnas nombradas como e_a a hasta e_d , se calculan las variaciones de frecuencias de la malla de referencia frente los mallados [1 : 1], [1 : 2], [1 : 4] y [1 : 5] respectivamente, mediante el cálculo del error relativo.

MODO	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	e_a	e_b	e_c	e_d
1	0.907	0.908	0.909	0.909	0.910	0.270 %	0.111 %	0.058 %	0.051 %
2	1.476	1.480	1.482	1.482	1.485	0.599 %	0.337 %	0.242 %	0.229 %
3	3.175	3.183	3.185	3.186	3.192	0.551 %	0.282 %	0.213 %	0.204 %
4	4.256	4.280	4.288	4.289	4.210	1.028 %	0.451 %	0.279 %	0.256 %
5	5.200	5.224	5.230	5.231	5.243	0.811 %	0.362 %	0.248 %	0.235 %
6	6.484	6.537	6.552	6.554	6.578	1.423 %	0.613 %	0.395 %	0.366 %
7	7.701	7.752	7.766	7.767	7.787	1.103 %	0.447 %	0.279 %	0.258 %
8	9.836	9.9512	9.976	9.979	10.032	1.955 %	0.802 %	0.556 %	0.526 %
9	9.857	9.975	10.013	10.018	10.068	2.100 %	0.924 %	0.546 %	0.497 %
10	10.639	10.746	10.774	10.777	10.804	1.527 %	0.537 %	0.278 %	0.250 %
11	13.172	13.324	13.363	13.367	13.446	2.038 %	0.907 %	0.617 %	0.588 %
12	14.208	14.454	14.507	14.514	14.555	2.384 %	0.694 %	0.330 %	0.282 %
13	14.247	14.508	14.586	14.595	14.671	2.890 %	1.111 %	0.579 %	0.518 %
14	16.829	17.061	17.120	17.128	17.253	2.458 %	1.113 %	0.771 %	0.725 %
15	17.194	17.594	17.702	17.715	17.834	3.589 %	1.346 %	0.740 %	0.667 %
16	18.402	18.814	18.924	18.937	19.004	3.168 %	1.000 %	0.421 %	0.353 %
17	18.660	19.121	19.241	19.256	19.422	3.923 %	1.550 %	0.932 %	0.855 %
18	20.917	21.240	21.324	21.335	21.522	2.811 %	1.310 %	0.920 %	0.869 %
19	22.586	23.116	23.256	23.273	23.355	3.293 %	1.023 %	0.424 %	0.351 %
20	24.030	24.627	24.775	24.793	25.189	4.601 %	2.231 %	1.644 %	1.572 %
21	25.075	25.988	26.154	26.171	26.390	4.983 %	1.523 %	0.894 %	0.830 %
22	25.507	26.014	26.227	26.256	26.591	4.077 %	2.170 %	1.369 %	1.260 %
23	27.248	28.027	28.237	28.263	28.369	3.951 %	1.206 %	0.465 %	0.374 %
24	27.326	28.310	28.571	28.604	29.092	6.070 %	2.688 %	1.791 %	1.677 %
25	29.601	30.350	30.537	30.559	31.132	4.918 %	2.512 %	1.911 %	1.841 %

Tabla 3.2: Variación de frecuencias en función de la malla de elementos finitos. Test 2.

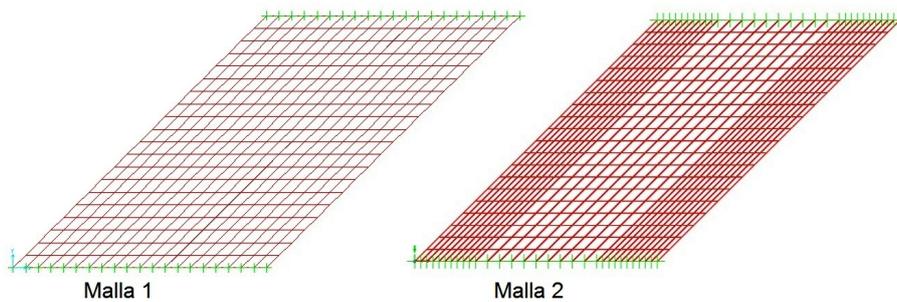


Figura 3.10: Mallado elementos finitos tipo 1 y tipo 2

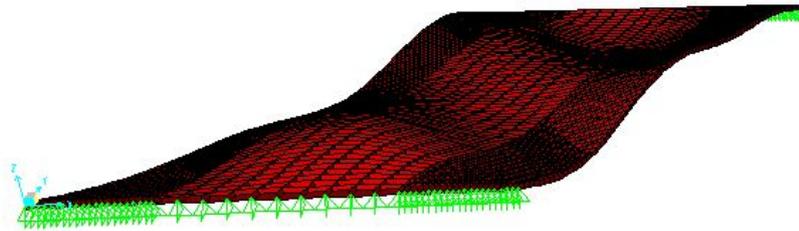


Figura 3.11: Ejemplo de modo de vibración 8. Test 2

Debe indicarse cómo se transforman los datos obtenidos del postproceso con el software *SAP2000* para poder emplear el método semianalítico cuando existe una esviación en la línea de carga. En un análisis de 3 gdl por nodo, a parte de las frecuencias naturales como datos de entrada para el uso de dicho método se requieren los desplazamientos y giros modales obtenidos del análisis modal expresados como u_z y $\frac{\partial w}{\partial d}$. El desplazamiento modal debe normalizarse, para ello, en caso de trabajar con unidades diferentes a N.m del S.I, el desplazamiento modal deberá recalcularse dividiéndose por la raíz de la masa modal.

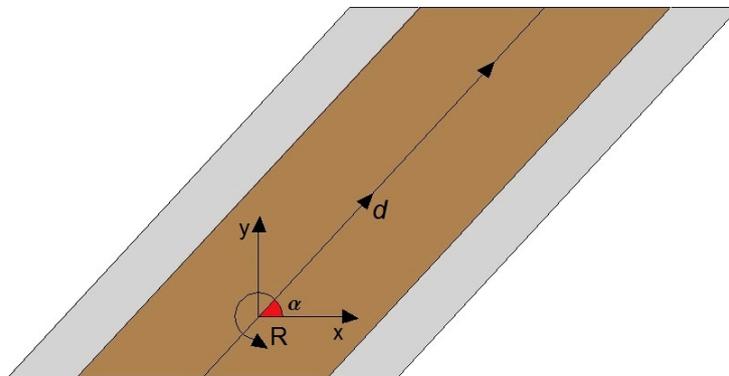


Figura 3.12: Esquema losa esviada para cálculo de giros

Del postproceso con *SAP2000* se obtienen los giros como una magnitud vectorial (R_x, R_y) en un análisis de 3 gdl por nodo en función de los ejes coordenados. El giro considerando la esviación de la línea de carga, es decir, la variación del desplazamiento respecto a la dirección es el resultado del siguiente producto escalar:

$$\frac{\partial w}{\partial d} = \nabla w \cdot \vec{d} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cdot (dx, dy)$$

Siendo:

$$dx = \cos(\alpha) \quad (3.89)$$

$$dy = \sin(\alpha) \quad (3.89)$$

Los giros obtenidos en la fase de postproceso del programa *SAP2000* son:

$$R_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.89)$$

$$R_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.89)$$

Por tanto:

$$\frac{\partial w}{\partial d} = -R_y \cdot dx + R_x \cdot dy \quad (3.89)$$

Es precisamente el giro definido en la ecuación 3.89 el que debe considerarse en los cálculos futuros con el método semianalítico cuando la línea de carga esté esviada.

Cálculo mediante el Método de Newmark y método semianalítico.

Se realiza el cálculo dinámico mediante integración numérica para los pasos: $T_{24}/20$, $T_{24}/10$. Se realiza un filtrado de modos hasta 30 Hz, resultado un total de 24 modos. Para el cálculo mediante el método semianalítico se usa el paso de tiempo de $T_{24}/10$.

Los puntos de postproceso a analizar son, tal como se muestra en la figura 3.8:

- Puntos extremo izquierda cama balasto: $P1, P2, P3$
- Puntos centro cama balasto: $P4, P5, P6$
- Puntos extremo derecho cama balasto: $P7, P8, P9$

Los resultados obtenidos por el método de Newmark, para los dos pasos calculados se exponen en la figura 3.13

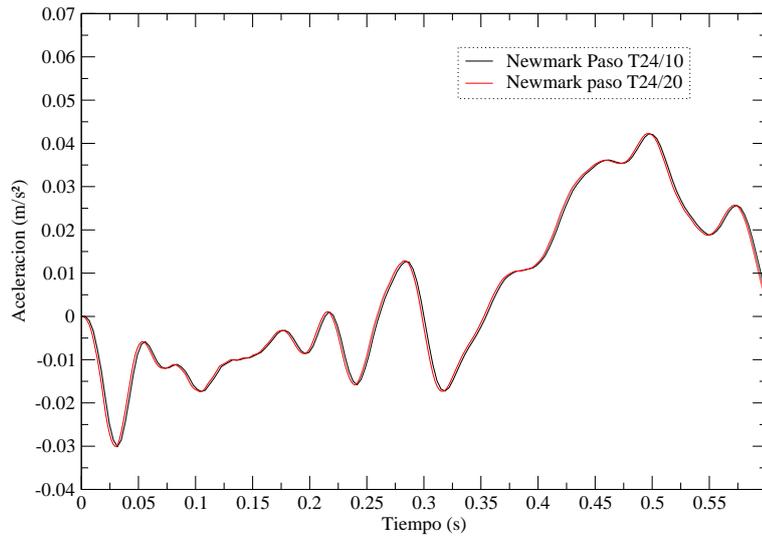


Figura 3.13: Aceleraciones en el punto 1. Método de Newmark-Beta. Pasos $T_{24}/10$ y $T_{24}/20$. Test 2.

Comparativa

En los gráficos 3.14, 3.15, 3.16, se realiza la comparativa entre los cálculos realizados en los apartados anteriores, representando las aceleraciones en los puntos de postproceso 1, 4 y 7.

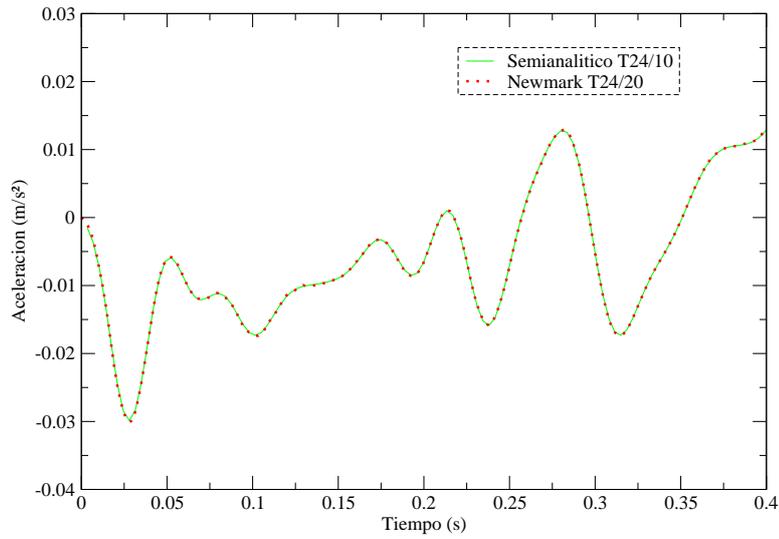


Figura 3.14: Comparativa de aceleraciones calculadas por cada método. Punto postproceso 1. Test 2.

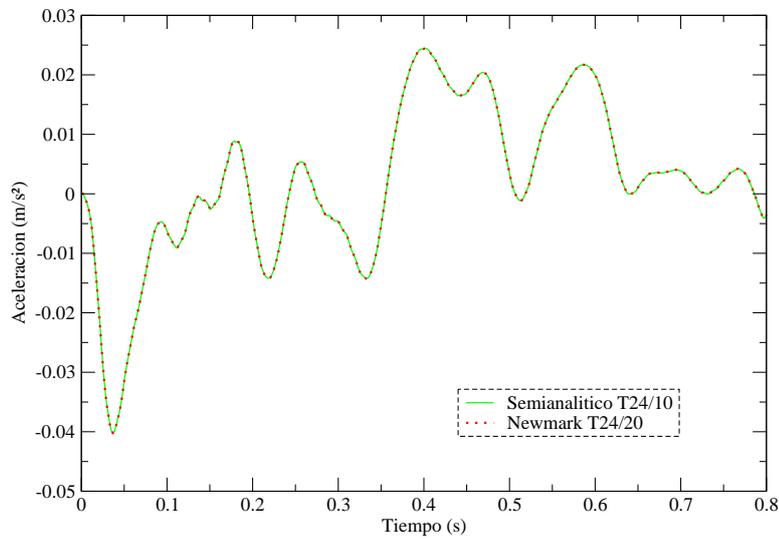


Figura 3.15: Comparativa de aceleraciones calculadas por cada método. Punto postproceso 4. Test 2.

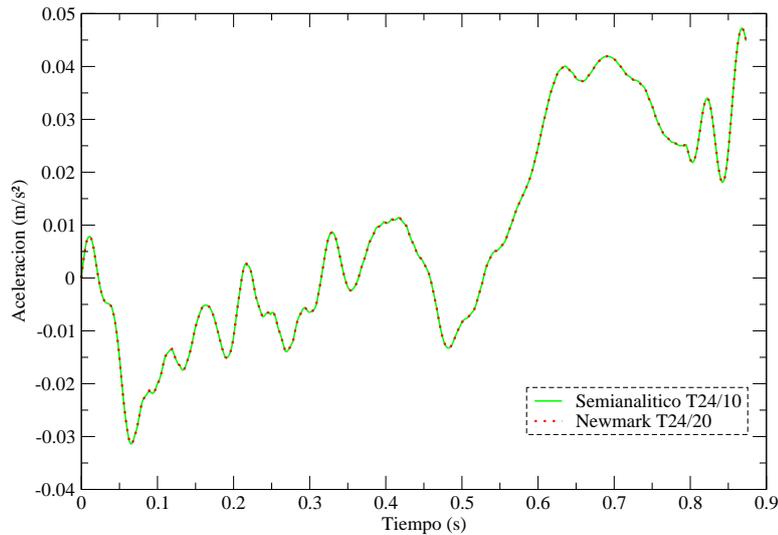


Figura 3.16: Comparativa de aceleraciones calculadas por cada método. Punto postproceso 7. Test 2.

3.5. Conclusiones

Se exponen a continuación las conclusiones extraídas de los test evaluados.

1. *La aplicación del método semianalítico implica un ahorro de tiempo de cálculo.* Esta disminución del tiempo procede de la formulación analítica de la variable temporal, evitando el empleo de métodos de integración en el tiempo. Los métodos paso a paso ven condicionada su fiabilidad y los tiempos de cálculo al paso definido, el cual debe ser lo suficientemente fino. Por otro lado, la posibilidad que ofrece el método semianalítico de escoger los puntos de postproceso que se quieran analizar y que el calculista considere convenientes, elimina gran número de cálculos ya que no analiza todos los puntos que se han discretizado.
2. Los métodos paso a paso pierden fiabilidad a medida que se incrementa el intervalo de análisis en el tiempo. Esto se debe a la acumulación de errores en cada iteración. Hecho que *no acontece en el cálculo realizado por el método semianalítico, por su cálculo exacto en la variable temporal.* Los errores acumulados por el método semianalítico provienen exclusivamente del análisis modal realizado por el método de elementos finitos.
3. *Los pasos de tiempo de evaluación empleados por el método semianalítico son menores a los pasos de tiempo de integración requeridos por los métodos paso a paso.* Un paso de una décima del periodo más pequeño asegura resultados satisfactorios, mientras que

los métodos paso a paso, la definición de este parámetro condiciona la rigurosidad del cálculo.

4. El método semianalítico calcula su solución mediante diez coeficientes por elemento y modos que no dependen de la velocidad, óptimo para realizar los cuantiosos cálculos exigidos por la normativa vigente.
5. A bajas velocidades, la solución semianalítica converge a la estática, evitando el fenómeno de Gibbs asociado a las soluciones analíticas basadas en series armónicas, las cuales deben tratarse de manera especial.
6. En el método semianalítico se evitan exponenciales con argumentos elevados y sus errores numéricos en soluciones analíticas, por la normalización temporal realizada en la formulación de la metodología.

CAPÍTULO 4

Modelizado de pérgolas

4.1. Introducción

La modelización de una pérgola debe considerar que si no se atiende a los detalles de diseño de manera correcta, puede llegar a ser una solución que no resuelva eficientemente el problema de cruces a distinto nivel con fuertes esviajes. Por ejemplo, una distribución incorrecta de vigas puede dar lugar a una estética poco lograda, problemas de visibilidad derivados por la presencia de luz y sombras generadas por ellas en la vía inferior o el incumplimiento de los criterios restrictivos de aceleraciones, desplazamientos, alabeos que la Instrucción [1] exige. Por ello, su proyección cuenta con ciertas variables que el proyectista debe considerar para que la pérgola llegue a ser la mejor solución para la problemática ya descrita, desde el punto de vista económico, estético y funcional.

Por tanto, el buen diseño hará de la pérgola la mejor opción. Una solución genérica se proyecta mediante un tablero conformado con vigas prefabricadas de hormigón pretensado apoyadas en unos muros paralelos al vial inferior y si la luz es elevada, se emplean dinteles en la mediana que sirvan de apoyo al tablero. Puntos decisivos para la concepción [13] son:

- El ancho del vial inferior más el resguardo que se debe respetar y el ángulo de cruce. Estos dos parámetros definen la luz a salvar por la pérgola.
- La elección de vigas prefabricadas si existe la necesidad de mantener el tráfico en el vial inferior durante la ejecución de la pérgola, o se requieren tiempos reducidos en la ejecución del puente.
- La solución del estribo y la continuidad de la plataforma ferroviaria. Puede realizarse mediante un terraplén ¹ con la implantación minuciosa de las cuñas de transición cuyo ángulo con los muros puede ser reducido, pudiendo existir si no se ejecutan bien unos asientos asimétricos perjudiciales para la funcionalidad del puente. Otra solución es

¹Esta solución puede realizarse si no hay viales de servicio.

realizar las zonas de transición mediante muros entre el tablero de vigas de la pérgola y las vigas longitudinales a ambos lados.

- El número y ubicación de las vigas del tablero que controlan la rigidez del conjunto de la estructura.

Se tiene en cuenta que las pérgolas no pueden diseñarse con modelos sencillos de pórticos planos. Dentro de la Instrucción [1] son consideradas tipologías no convencionales. La mejor opción de diseño nos lleva a modelos complejos y costosos tridimensionales, definiendo todos sus elementos con detalle. En este proyecto se pretende buscar modelos alternativos más simples:

- **Modelos tridimensionales:** Tablero modelizado mediante vigas y losa conectados mediante uniones monolíticas a través de *links, body constraints, offsets*.
- **Modelos bidimensionales:** Tablero modelizado mediante vigas homogeneizadas conectadas mediante elementos tipo placa, tablero modelizado mediante vigas unidas solidariamente a un tablero ortótropo y tablero modelizado mediante losas ortótropas en todo su conjunto.

4.2. Geometría de la pérgola de estudio

Se va a definir la geometría y materiales del tablero de la pérgola representada en las figuras 4.2, 4.1, 4.3 que va a modelizarse por cada una de las formas descritas en el apartado anterior. Su tipología y dimensiones son análogas a la pérgola diseñada en Olmedo, en la L.A.V Madrid-Olmedo-Zamora-Galicia (proyecto: ACL-Estructuras). Está compuesta por:

- **Vigas de hormigón pretensado HP-50:** 21 vigas de 1.85 m de canto. Las propiedades del material son: módulo de elasticidad de 41 GPa, coeficiente de Poisson de 0.2 y densidad de 2500 kg/m^3 . En el modelo se proyectarán como vigas de Timoshenko.
- **Losa de hormigón armado HA-30:** de canto 0.29 m. Las propiedades del material son: módulo de elasticidad de 38 GPa, coeficiente de Poisson de 0.2 y densidad de 2500 kg/m^3 . En el modelo se proyectarán como placas de Kirchhoff.

Se considera además, la masa correspondiente a la zona de balasto como masa adicional. En los cálculos dinámicos se calcularán las tres hipótesis de cálculo definidas en la Instrucción [1]: Balasto nominal, balasto incrementado y balasto reducido.

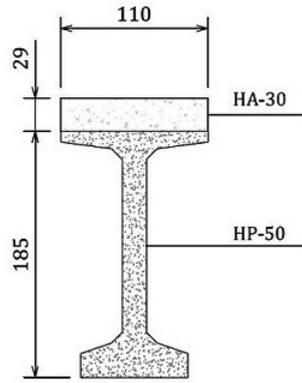


Figura 4.1: Sección de las vigas que conforman el tablero de la pérgola. Cotas en cm.

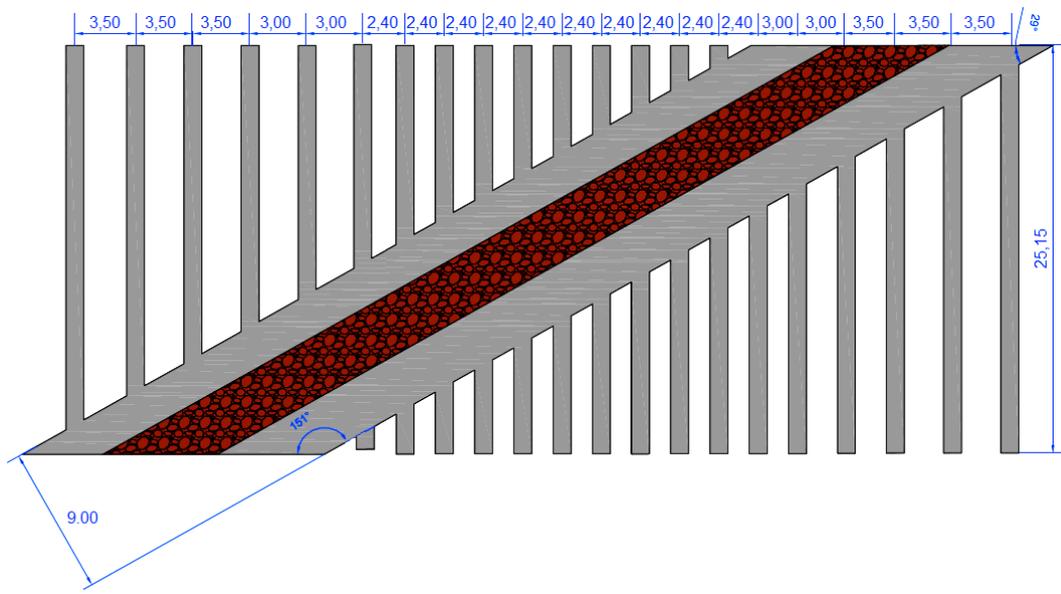


Figura 4.2: Planta tablero-pérgola a modelizar

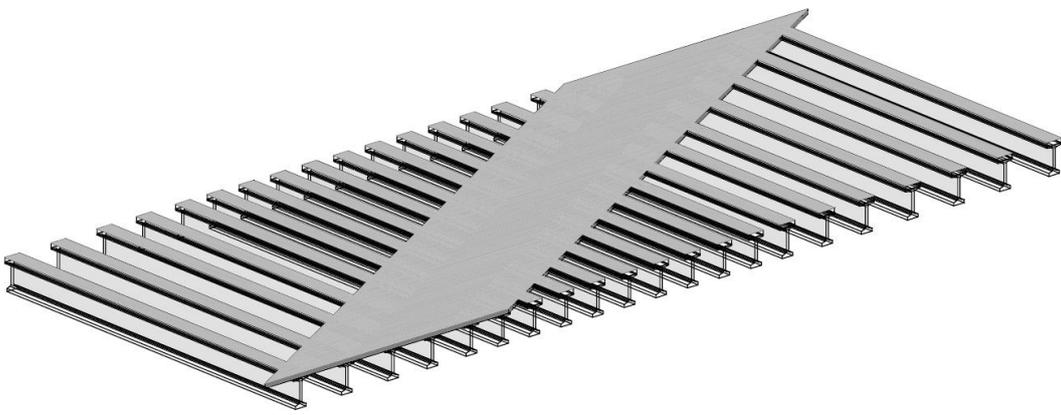


Figura 4.3: Esquema 3D tablero-pérgola

4.3. Modelos de tablero tridimensionales: Modelo 1, 2 y 3

Se proyecta el modelo empleando las menores simplificaciones posibles. En este modelo no se tienen en cuenta zonas de diferentes ortotropías, ya que las vigas se representan completamente. Deben concebirse de manera diferente estén por debajo de la losa, o sean exteriores. En caso de ser vigas exteriores, se modelizan mediante la viga HP-50 y cuentan con una sección rectangular de hormigón HA-30 en su parte superior de 0.29m de canto. Las vigas que recaen debajo de la losa de hormigón, son modelizadas exclusivamente con la sección de hormigón pretensado, ya que el canto de 0.29 m está incluido dentro de la misma placa de hormigón. En la figura 4.4 se representa la idea gráficamente. En la tabla 4.1 se recogen las propiedades de ambas secciones, que son calculadas mediante Section Designer del *Software SAP2000*. La losa, se modeliza mediante una placa delgada² despreciando el efecto de deformación por cortante.

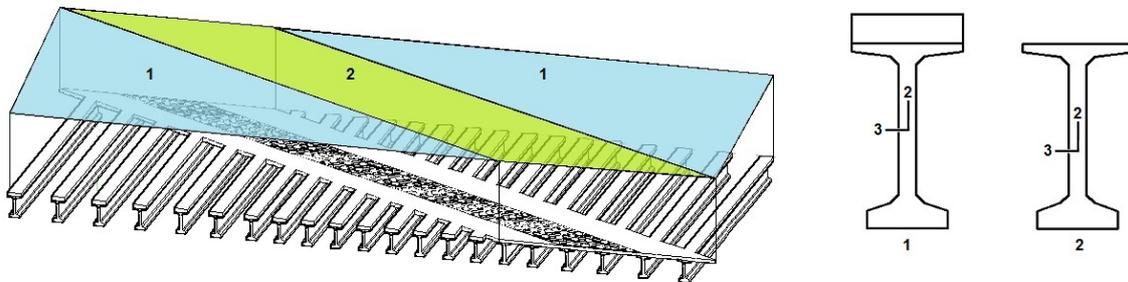


Figura 4.4: Tipología de sección de viga a emplear según su posición. (1)-Sección compuesta hormigón HA-30-viga HP-50. (2)-Sección viga HP-50

	<i>Vigas exteriores (1)</i>	<i>Vigas interiores (2)</i>
Tipo sección	Sección homogénea HA-30 y HP-50	Sección HP-50
Coefficiente homogeneización	0,9268	-
Área (m^2)	0,9082	0,5892
Inercia a flexión I_3 (m^4)	0,5175	0,2702
Inercia a flexión I_2 (m^4)	0,0507	0,0209
Inercia torsional (m^4)	0,0296	8,86E-03
Área cortante dirección 2 (m^2)	0,3974	0,3281
Área cortante dirección 3 (m^2)	0,7395	0,4436

Tabla 4.1: Propiedades de la sección transversal de las vigas que conforman el tablero-pérgola. Modelo 3D

El modificador de masa aplicado en la región de balasto amplifica la masa de la losa. Para su calculo, se relaciona la masa que existe en la realidad (la masa de la losa de hormigón más la masa debida al balasto) entre la masa existente en el modelo (la losa proyectada). Para

²Tipo thin-shell en *software SAP-2000*

ello, se tiene en cuenta que el canto de la losa es de 0.29 m y su densidad es de 2500 kg/m^3 , mientras que la cama de balasto tiene un espesor de 0,5 m considerando una masa valorada de 1250 kg/m^2 que incluye balasto, vías y traviesas. Dicho modificador se resuelve para la hipótesis de balasto incrementado en la ecuación 4.3, y su valor indica que en esa región de la losa, existe más del triple de masa por la presencia de la carga de balasto.

$$\text{MassModifier} = \frac{2500 * 0,29 + 1,3 * 1250}{2500 * 0,29} = 3,2413 \quad (4.0)$$

El análisis se debe realizar en los 6 grados de libertad por nodo. Es por ello, que la conexión entre las vigas y la losa en la zona (2) (Ver figura 4.4) debe realizarse con mucha atención. Se realiza una unión monolítica entre ambos elementos. Mediante el *Software SAP2000* se pueden modelizar las uniones mediante offsets, body-constraints o links. Se han proyectado tres modelos:

- *Modelo 1. Unión mediante Shell Joint Offsets:* Obtenemos una unión monolítica, transmitiéndose esfuerzos y movimientos entre viga y losa. Los elementos tipo frame y elementos tipo shell se modelizan en el plano de la línea neutra de la viga. Con la opción shell joint offsets, definiendo el valor como la diferencia entre las cotas del centro de gravedad de la sección de la viga y de la superficie media de la sección de la placa, se recoloca la losa en su posición correcta mediante el tipo de unión buscado.
- *Modelo 2. Unión mediante Body Constraints:* Obtenemos una unión monolítica, seleccionando la restricción en los 6 grados de libertad correspondientes a este tipo de unión. Debe seleccionarse nodo a nodo que quiera conectarse, tanto en la viga como en la losa y crearse un body constraint para cada nodo.
- *Modelo 3. Unión mediante Links:* Similar al empleo de Body Constraints, con la salvedad de que en este caso, no debe definirse un link diferente para cada nodo, y puede emplearse el mismo para cada par de nodos de unión (viga y losa).

Los apoyos de las vigas y del tablero se realizan mediante apoyos simples, que restringen u_x, u_y, u_z . Se impondrá restricción íntegra de desplazamientos y giros en el inicio y final de la línea de carga. El procedimiento más simple de los tres modelos es el primero, ya que en los otros dos se debe unir nodo a nodo mediante los elementos descritos. Para poder realizarlos, debe mallarse de tal forma que los nodos de la losa recaigan sobre los de las vigas. La buena aproximación de estos modelos con la realidad están condicionados al número de de nodos. A mayor número a los que se le apliquen estas conexiones, mejor aproximación del modelo a la situación real. El análisis se realiza en seis grados de libertad ($u_x, u_y, u_z; R_x, R_y, R_z$). En las figuras 4.5, 4.6, 4.7, se representan las deformadas debidas a peso propio de los tres modelos.

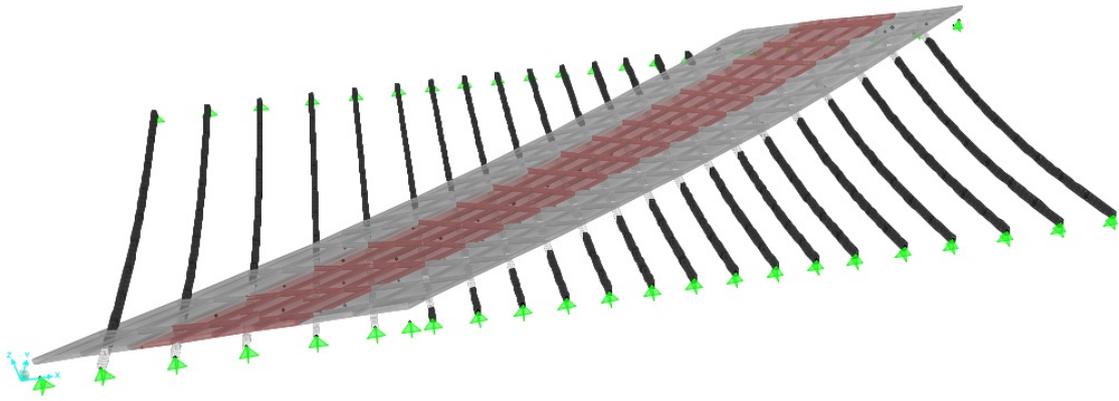


Figura 4.5: Deformada modelo 1

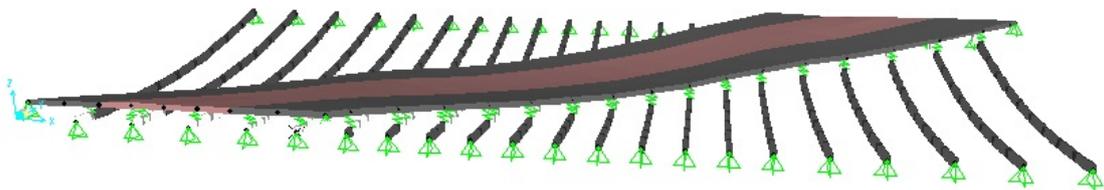


Figura 4.6: Deformada modelo 2

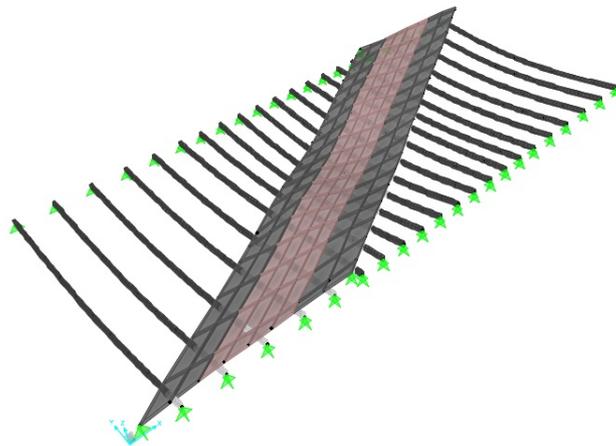


Figura 4.7: Deformada modelo 3

4.4. Modelos de tablero bidimensionales basados en vigas homogeneizadas y losa ortótropa

Estos modelos se analizan en tres grados de libertad ($u_z; R_x, R_y$), y tienen la ventaja de eliminar los problemas de unión entre la losa y las vigas, pero presentan la problemática de

que la malla de elementos finitos está condicionada por la geometría y disposición de las vigas situadas bajo la losa.

En la figura 4.8, se representan las diferentes áreas que serán sustituidas por diferentes vigas, las cuales, tendrán las propiedades mecánicas de la sección conjunta homogénea formada por la viga de hormigón pretensado y la sección de losa incluida por encima de la misma, correspondiente al área de influencia (mitad de área existente entre dos vigas). Estas vigas incluyen la rigidez a flexión pero no la masa correspondiente a la losa, ya que está incluida en la modelización de la misma.

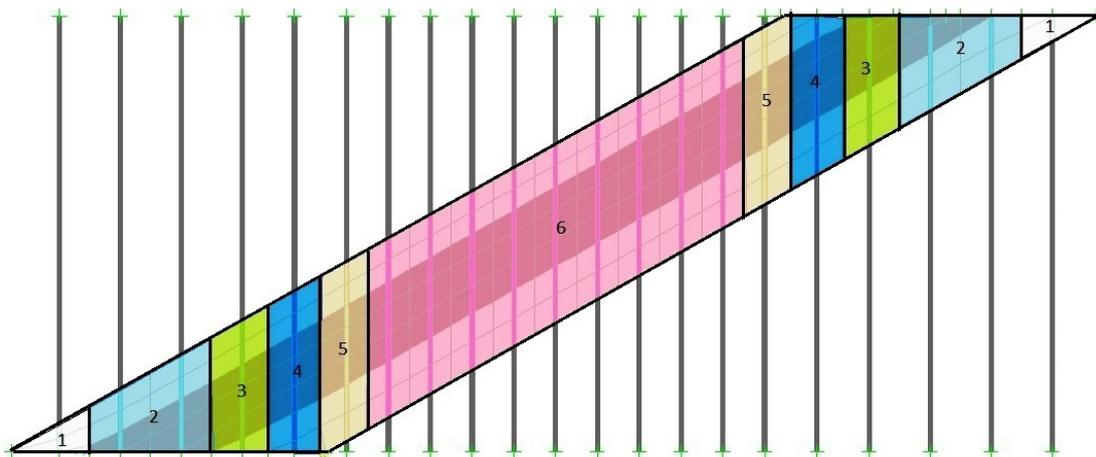


Figura 4.8: Áreas sustituidas por diferentes tipos de vigas

Las secciones de las vigas deben convertirse a un único material, a HP-50 mediante el coeficiente de homogeneización $n = 38/41 = 0.927$ y aplicando el coeficiente de reducción por rasante, $\psi_{eff} = 0.9$. La descripción geométrica de cada viga es:

- **Viga tipo 1:** Sección homogeneizada eficaz formada por: Viga de hormigón HP – 50 y losa superior HA – 30 cuyo ancho es: $b = 3,8 + 3,5/2 = 5,7m$ (esquina pérgola-primera viga-mitad primer intereje de 3,5 m)
- **Viga tipo 2:** Sección homogeneizada eficaz formada por: Viga de hormigón HP – 50 y losa superior HA – 30 cuyo ancho es: $b = 3,5/2 + 3,5/2 = 3,5m$
- **Viga tipo 3:** Sección homogeneizada eficaz formada por: Viga de hormigón HP – 50 y losa superior HA – 30 cuyo ancho es: $b = 3,5/2 + 3/2 = 3,25m$
- **Viga tipo 4:** Sección homogeneizada eficaz formada por: Viga de hormigón HP – 50 y losa superior HA – 30 cuyo ancho es: $b = 3/2 + 3/2 = 3m$
- **Viga tipo 5:** Sección homogeneizada eficaz formada por: Viga de hormigón HP – 50 y losa superior HA – 30 cuyo ancho es: $b = 3/2 + 2,4/2 = 2,7m$

- **Viga tipo 6:** Sección homogeneizada eficaz formada por: Viga de hormigón $HP - 50$ y losa superior $HA - 30$ cuyo ancho es: $b = 2,4/2 + 2,4/2 = 2,4m$

El modelo que se desarrolla siguiendo esta metodología es :

- **Modelo 4:** Modelo donde se el tablero se modeliza mediante vigas homogeneizadas y losa ortótropa que permiten el reparto transversal de flexión.

4.4.1. Modelo 4: Modelo vigas homogeneizadas-losa ortótropa

El tablero pérgola se representa mediante:

1. Vigas exteriores

Las vigas exteriores se modelizan con la misma sección de la figura 4.1, por lo tanto hay que calcular la sección homogénea que tiene las propiedades físicas expuestas en la tabla 4.1 (Vigas exteriores (1)).

2. Apoyos

Los apoyos de las vigas y la losa se modelizan de forma análoga a los Modelos 1,2 y 3.

3. Vigas interiores

Estas vigas interiores incluyen las propiedades mecánicas de la losa superior, teniendo en cuenta la reducción por rasante y por el coeficiente de homogeneización. Dependen de su posición espacial como se ha definido al inicio de esta sección y se expone en la figura 4.8. Por tanto, las inercias a flexión y a torsión de cada una estas vigas serán las de la sección homogénea eficaz. Por ejemplo, la viga tipo 4 se definiría siguiendo la figura 4.9. Para el resto de los 6 tipos de vigas se haría de manera análoga. La superficie de estas vigas es la de la sección de la viga de hormigón pretensado, ya que el área y por tanto, la masa de la losa, quedará modelizada en las propiedades de la placa.

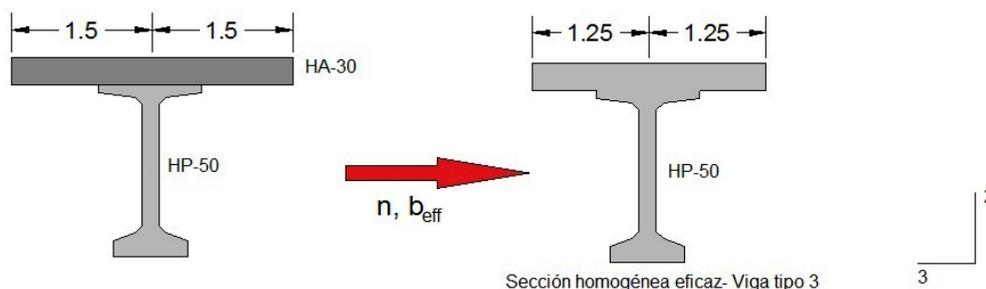


Figura 4.9: Definición de sección de viga homogeneizada eficaz. Viga tipo 4

	Área (m^2)	Inercia a torsión (m^4)	Inercia eje 3 (m^4)	Inercia eje 2 (m^4)
Viga tipo 1	0,589	0,011	0,578	0,103
Viga tipo 2	0,589	0,015	0,706	0,676
Viga tipo 3	0,589	0,014	0,692	0,545
Viga tipo 4	0,589	0,013	0,677	0,433
Viga tipo 5	0,589	0,012	0,658	0,322
Viga tipo 6	0,589	0,011	0,636	0,232

Tabla 4.2: Propiedades de las 6 tipologías de vigas definidas en el Modelo 4

En la tabla 4.2 se exponen las inercias correspondientes para cada una de las 6 tipologías de vigas que deben definirse en el modelo.

4. Losa

La losa se modeliza mediante elementos tipo placa delgada (thin shell) que permiten el reparto transversal de la flexión. Esta losa, cuya rigidez ha sido incluida en la sección de las vigas internas, debe ser ortótropa eliminando su parámetro D_{22} , el referente a la rigidez en dirección de las vigas transversales. Al igual ocurre con la sección de losa que incluye la cama de balasto, que se modeliza con una losa de igual propiedades que la anterior, prescindiendo de su rigidez D_{22} pero aumentando su masa con el amplificador que corresponda a la hipótesis de balasto de estudio. El cálculo de este modificador se realiza de manera similar al cálculo en la ecuación 4.3. Por tanto, el modelo de la losa guarda todas las propiedades de una placa delgada, con la salvedad de anular su rigidez a flexión D_{22} .

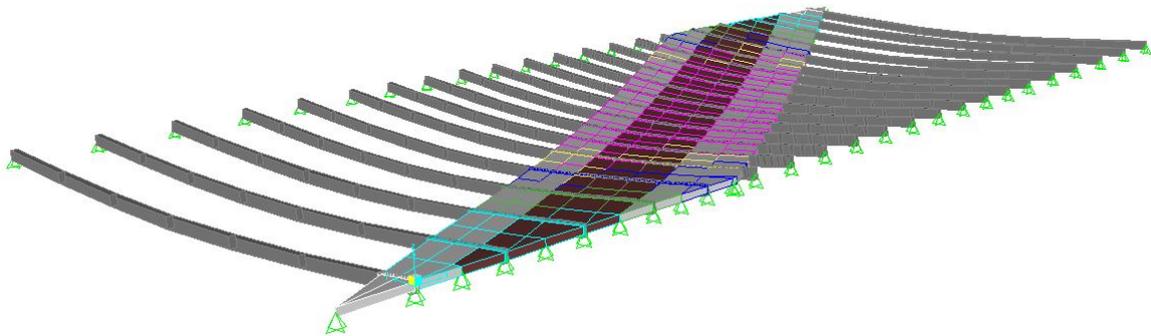


Figura 4.10: Deformada modelo 4

4.5. Modelos de tablero bidimensionales basados en losas ortótropas

Estos modelos se analizan en tres grados de libertad ($u_z; R_x, R_y$) sus ventajas son la simplificación del modelo, la libertad de la forma junto con la disposición de nodos de la malla de elementos finitos y la conexión íntegra de los elementos en toda su longitud. Sustituyen parte de las vigas internas por la contribución de losas ortótropas. Cada uno de los modelos que se describirán a continuación tienen en consideración las distintas regiones de ortotropías que aparecen en el tablero. Puede variar tanto su rigidez longitudinal como la masa en cada una de ellas, según el interese entre las vigas, y si encontramos balasto o no sobre ellas. En la figura 4.11 se describe gráficamente este concepto aplicado en la pérgola de estudio. Se definen las siguientes regiones:

- Región 1: Zona de ortotropía definida por las rigideces de las vigas equiespaciadas 3.5 m. Se trata de la región con menos rígida.
- Región 2: Zona de ortotropía definida por las rigideces de las vigas equiespaciadas 3 m.
- Región 3: Zona de ortotropía definida por las rigideces de las vigas equiespaciadas 2,40 m. Se trata de la región más rígida.
- Región 4: Se define con igual ortotropía que la región 1, incrementando la masa de la región por la presencia de balasto.
- Región 5: Se define con igual ortotropía que la región 2, incrementando la masa de la región por la presencia de balasto.
- Región 6: Se define con igual ortotropía que la región 3, incrementando la masa de la región por la presencia de balasto.

- Región A: Se define de manera análoga a la región 1, anulando prácticamente la rigidez longitudinal.
- Región B: Se define de manera análoga a la región 2, anulando prácticamente la rigidez longitudinal.
- Región C: Se define de manera análoga a la región 3, anulando prácticamente la rigidez longitudinal.

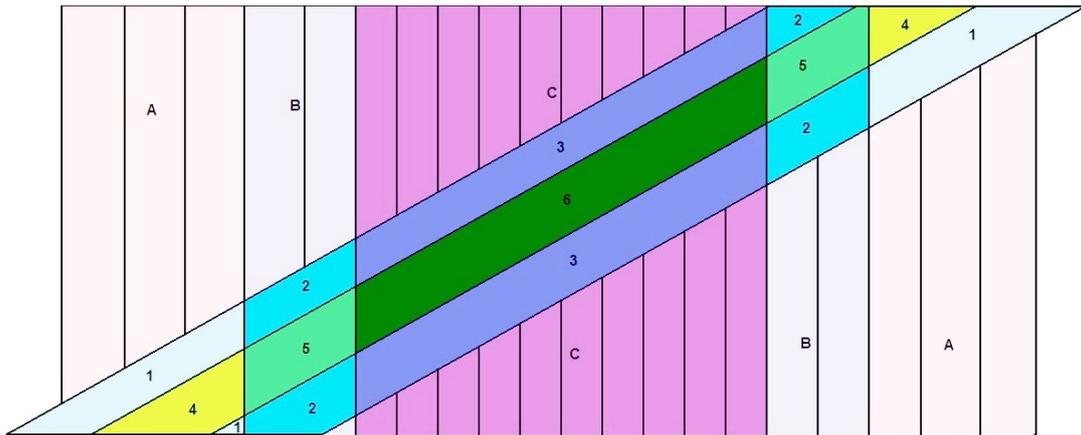


Figura 4.11: Regiones de ortotropía

Estas regiones se tendrán en cuenta en función del modelo que se desarrolle, que son:

- Modelo 5: Modelo donde el tablero se modeliza mediante vigas externas y losas ortótropas.
- Modelo 6: Modelo donde el tablero se modeliza íntegramente con losas ortótropas.

4.5.1. Modelo 5: Modelo vigas-losa ortótropa

Las vigas externas permanecen modelizadas de la misma manera que en los casos anteriores. El cambio reside en la losa de compresión. El método que se describirá consiste en la sustitución de la zona del tablero conformada por la losa de hormigón y vigas internas por una losa ortótropa equivalente que tendrá las mismas características de resistencia medias a flexión y a torsión. El estudio de placas ortótropas y la definición de sus constantes ortótropas es ya conocido y existen diversas publicaciones y trabajos sobre el tema [39] [40]. En el presente proyecto se sigue la teoría para placas de Kirchhoff. En primer lugar se debe hacer la distinción entre ortotropía geométrica y ortotropía del material.

- **Ortotropía geométrica:** El comportamiento de los materiales es isótropo, pero las secciones transversales en alguna de las direcciones principales tiene una geometría diferente a la otra dirección.
- **Ortotropía material:** El comportamiento del material es anisótropo, presentando diferentes rigideces en cada una de sus direcciones principales mientras que la geometría es constante en ambas.

En el proceso de modelización, la ortotropía geométrica se corresponde al puente real, conformado con todos sus elementos que aportan diferentes rigideces en los distintos ejes coordenados. En el caso de pérgolas, existen vigas transversales a la losa de hormigón que le aportan una rigidez superior en la dirección perpendicular al estribo. Cuando se procede a la definición del modelo numérico, a la losa de hormigón se le aplican ciertos modificadores de rigidez a flexión en las dos direcciones en planta, torsión y masa, de tal forma que se convierta en una losa ortótropa equivalente. Este concepto se aplica en tableros de vigas celulares y losa, en tableros multicelulares, losas aligeradas, de vigas múltiples entre otros casos, por eso en pérgolas se pretende comprobar si es viable su empleo. El *Software SAP2000* permite introducir materiales ortótropos definiendo distintos modificadores cuando se definen los elementos tipo shell/plates. Por ello, se debe conseguir la equivalencia entre ortotropía geométrica y material. Esto se consigue buscando la misma ecuación del movimiento de ambas, suponiendo que el espesor y propiedades de las placas son constantes.

Sean las propiedades mecánicas de una placa de Kirchhoff: E_x, E_y (módulo de elasticidad en el eje x , en el eje y), ν_x, ν_y (coeficiente de Poisson en eje x , eje y), G_{xy} (modulo elástico transversal). Suponiendo un comportamiento elástico lineal, las expresiones de tensiones normales y tangenciales en función de las deformaciones y distorsiones:

$$\sigma_x = \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y} (\epsilon_x + \nu_y \epsilon_y) \quad (4.0)$$

$$\sigma_y = \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y} (\epsilon_y + \nu_x \epsilon_x) \quad (4.0)$$

$$\tau_{xy} = G_{xy} \gamma_{xy} \quad (4.0)$$

$$\frac{\nu_x}{E_x} = \frac{\nu_y}{E_y} \quad (4.0)$$

Relaciones momento-curvatura:

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_2 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{pmatrix} \quad (4.0)$$

A continuación se desarrollarán las relaciones entre ortotropía material y ortotropía geométrica. Para ello en las figuras 4.12 4.13, se define una sección tipo de cada viga junto con la losa superior que adquirirá sus propiedades.

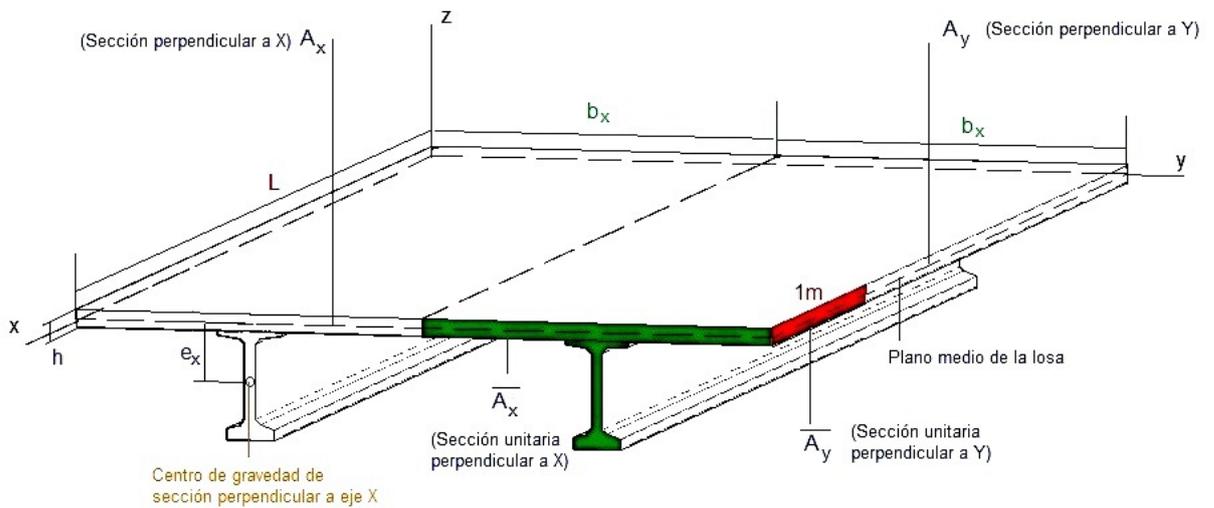


Figura 4.12: Figura 1. Sección para definición de constantes de ortotropía

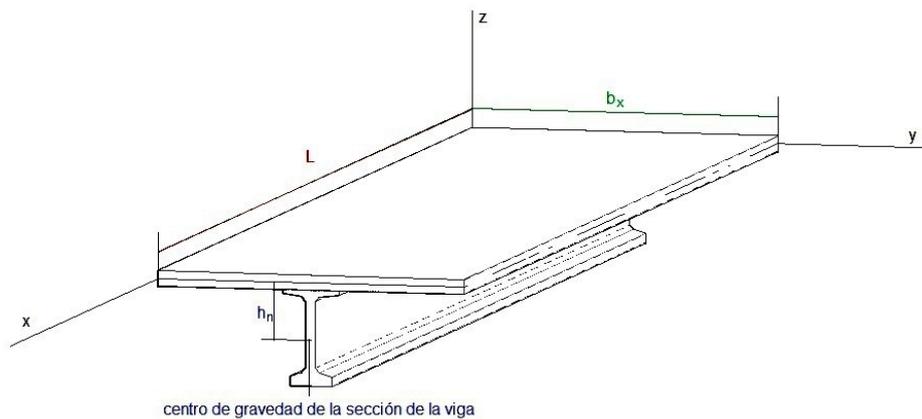


Figura 4.13: Figura 2. Sección para definición de constantes de ortotropía

Donde:

- A_v : Área de la sección de la viga.
- I_v : Inercia de la sección de la viga.
- E_v : Módulo de Elasticidad de la viga.
- E_L : Módulo de elasticidad de la losa.
- h : canto de la losa
- b_x : Reparto de la losa sobre la viga.
- L : Ancho de la losa.

Se debe diferenciar el centro de gravedad de la sección de la viga h_n del centro de gravedad de la sección perpendicular al eje "x" (posición centroidal) e_x . La posición del centro de gravedad, representado según la figura 4.13, de la viga se calcula normalmente mediante la teoría de geometría de masas de la sección. Las posiciones centroidales se definen como en las ecuaciones 4.5.1 y 4.5.1 siguiendo un esquema como el de la figura 4.12.

$$e_x = \frac{A_v h_n}{A_v + \frac{E_L}{E_v} h b_x} \quad (4.0)$$

$$e_y = 0 \quad (4.0)$$

Se tienen las siguientes expresiones en relación de movimientos, para una placa de Kirchhoff:

$$u(x, y, z) = -(z + e_x) \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \quad (4.0)$$

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad (4.0)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad (4.0)$$

En relación a curvaturas:

$$K_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.0)$$

$$K_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4.0)$$

$$K_x = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.0)$$

Deformaciones:

$$\epsilon_x = -(z + e_x)K_x \quad (4.0)$$

$$\epsilon_y = -zK_y \quad (4.0)$$

$$\gamma_{xy} = -zK_{xy} \quad (4.0)$$

Tensiones en la viga y en la losa:

$$\sigma_x^V = -(z + e_x)E_v K_x \quad (4.0)$$

$$\sigma_x^L = \frac{-(z + e_x)E_L}{1 - \nu_L^2} (K_x + \nu_L K_y) \quad (4.0)$$

$$\sigma_y^L = \frac{-zE_L}{1 - \nu_L^2} (K_y + \nu_L K_x) \quad (4.0)$$

$$\tau_{xy}^L = -zG_L K_{xy} \quad (4.0)$$

Definición de constantes de ortotropía material

Las constantes de ortotropía material son:

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)} \quad (4.0)$$

$$D_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)} \quad (4.0)$$

$$D_1 = \nu_y D_x = \frac{\nu_y E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)} \quad (4.0)$$

$$D_2 = \nu_x D_y = \frac{\nu_x E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)} \quad (4.0)$$

$$D_{xy} = \frac{G_{xy} h^3}{12} = D_{yx} \quad (4.0)$$

Como se cumple la ecuación 4.5.1 implica que $D_1 = D_2$

La ecuación del movimiento de una placa ortótropa, tras proceder con la metodología del cálculo del equilibrio de fuerzas verticales y momentos en un elemento diferencial en el eje x, es la que sigue:

$$D_x \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = q_z(x, y, t) \quad (4.0)$$

$$2H = D_1 + D_2 + 2(D_{xy} + D_{yx}) \quad (4.0)$$

Pero en una placa ortótropa material, $D_{xy} = D_{yx}$, luego $M_{xy} = M_{yx}$. Sin embargo, en una placa con ortotropía geométrica $M_{xy} \neq M_{yx}$, esto implica que hay dos relaciones y dos constantes diferentes para los momentos torsores.

Definición de constantes de ortotropía geométrica

$$M_{xy} = D_{xy} K_{xy} \quad (4.0)$$

$$M_{yx} = D_{yx} K_{yx} \quad (4.0)$$

$$K_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = K_{yx} \quad (4.0)$$

En el caso de una pérgola definida como un puente de vigas, y por tanto, el caso de la existencia de una ortotropía geométrica se tiene la siguiente relación momento-curvatura:

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ M_{yx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_x & D_1 & 0 & 0 \\ D_2 & D_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{yx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \\ K_{yx} \end{pmatrix} \quad (4.0)$$

Las expresiones de las rigideces que componen la matriz anterior, donde $\nu_x = \nu_y$ y $E_x = E_y$:

$$D_x = \frac{E_L h^3}{12(1 - \nu_L^2)} + \frac{1}{b_x} E_v (I_v + A_v h_n^2 - e_x A_v h_n) \quad (4.0)$$

$$D_y = \frac{E_L h^3}{12(1 - \nu_L^2)} \quad (4.0)$$

$$D_1 = D_2 = \frac{\nu_L E_L h^3}{12(1 - \nu_L^2)} \quad (4.0)$$

$$D_{xy} = \frac{G_L h^3}{12} + \frac{G_v J_v}{2b_x} \quad (4.0)$$

$$D_{yx} = \frac{G_L h^3}{12} \quad (4.0)$$

Ortotropía geométrica = Ortotropía material

Para proceder al cálculo de los modificadores de rigidez que se precisan para la simplificación de la pérgola a losa ortótropa, todos los valores son conocidos de la geometría de la viga y la losa, o bien se calculan con expresiones teóricas conocidas. El módulo elástico transversal equivalente G_{xy} es el que debe hallarse a través de la igualdad entre la ecuación del movimiento de una placa ortótropa material y una estructura con ortotropía geométrica. Volviendo a las ecuaciones 4.5.1 y 4.5.1 y aplicando la igualdad entre ortotropía material (segundo término de la ec. 4.5.1) y geométrica (tercer término ec 4.5.1) se tiene:

$$2H = D_1 + D_2 + 2\left(\frac{G_{xy}h^3}{12} + \frac{G_{xy}h^3}{12}\right) = D_1 + D_2 + 2(D_{xy} + D_{yx}) \quad (4.0)$$

$$\left(\frac{G_{xy}h^3}{12} + \frac{G_{xy}h^3}{12}\right) = (D_{xy} + D_{yz}) \quad (4.0)$$

Despejando G_{xy} :

$$G_{xy} = \frac{6(D_{xy} + D_{yz})}{h^3} \quad (4.0)$$

Con la ecuación 4.5.1 están definidos todos las propiedades definidas para poder calcular la placa ortótropa que modeliza un puente pérgola.

Cálculo constantes ortotropía para la pérgola de estudio

Región 1: Intereje entre vigas de 2,4 m, sin balasto

Las tablas 4.3 y 4.4 exponen los datos de entrada necesarios para proceder al cálculo de las constantes de ortotropía.

DATOS ENTRADA VIGA	
A_v : Área de la sección de la viga (m^2)	0,589
I_v : Inercia de la sección de la viga (m^4)	0,270
E_v : Módulo de elasticidad de la viga (GPa)	41
ν_v : Coeficiente de Poisson viga	0,200
A_{vh} : Área sección viga homogénea eficaz (m^2)	0,855
I_{vh} : Inercia de la sección viga homogénea eficaz (m^4)	0,501
n =Número vigas	8
J_v = Constante torsión solo viga (m^4)	8,860E-03
h_n : Distancia línea neutra losa-viga (m)	1,115
b_x : Reparto losa sobre viga (m)	2,400
e_x : Posición centroidal (m)	0,532

Tabla 4.3: Datos de entrada de la viga: Cálculo constantes de ortotropía. Región 1

DATOS DE ENTRADA LOSA	
E_L : Módulo de Elasticidad de la losa (GPa)	38
h : Canto losa (m)	0,290
ν_L : Coeficiente de Poisson losa	0,200
N : Ancho de la losa (m)	18,120

Tabla 4.4: Datos de entrada de la losa: Cálculo constantes de ortotropía. Región 1

El valor del reparto de la losa sobre la viga es igual al interese entre vigas, y la posición centroidal e_x se calcula aplicando la fórmula 4.5.1. A continuación se obtienen las constantes de ortotropía geométrica (incluye la sección conformada por vigas y losa: sección homogeneizada eficaz de la viga con una losa superior de ancho 2,4 m): $D_x, D_1 = D_2, D_y, G_v, G_L, D_{xy}, D_{yx}$. Las unidades de cálculo son en unidades kN, m.

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{E_L h^3}{12(1-\nu_L^2)} + \frac{1}{b_x} E_v (I_v + A_v h_n^2 - e_x A_v h_n) = \\ &= \frac{38000000 * 0,29^3}{12 * (1-0,2^2)} + \frac{1}{2,4} 41000000 (0,270 + 0,589 * 1,115^2 - 0,532 * 0,589 * 1,115) = \\ &= 11236442,240 \text{ kNm}^2 / \text{m} \end{aligned}$$

$$D_y = \frac{E_L h^3}{12(1-\nu_L^2)} = \frac{38000000 * 0,290^3}{12(1-0,200^2)} = 80449,826 \text{ kNm}^2 / \text{m}$$

$$D_1 = D_2 = \frac{\nu_L E_L h^3}{12(1-\nu_L^2)} = \frac{0,200 * 38000000 * 0,290^3}{12(1-0,200^2)} = 16089,965 \text{ kNm}^2 / \text{m}$$

$$G_v = \frac{E_v}{2(1+\nu_v)} = \frac{41000000}{2(1+0,200)} = 17083333,330 \text{ kN/m}^2$$

$$G_L = \frac{E_L}{2(1+\nu_L)} = \frac{38000000}{2(1+0,200)} = 15833333,330 \text{ kN/m}^2$$

$$D_{xy} = \frac{G_L h^3}{12} + \frac{G_v J_v}{2b_x} = \frac{15833333,330 * 0,290^3}{12} + \frac{17083333,330 * 8,860E-03}{2 * 2,400} = 63702,240 \text{ kNm}^2 / \text{m}$$

$$D_{yx} = \frac{G_L h^3}{12} = \frac{15833333,330 * 0,290^3}{12} = 32179,930 \text{ kNm}^2 / \text{m}$$

Una vez calculadas estas constantes, se hallan las que definen la ortotropía material de una losa ortótropa (D_x, D_y, D_1, D_2 y D_{xy}):

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} = \frac{38000000 * 0,290^3}{12(1-0,200^2)} = 80449,826 \text{ kNm}^2 / \text{m}$$

$$D_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)} = \frac{38000000 * 0,290^3}{12(1 - 0,200^2)} = 80449,826 \text{ kNm}^2/\text{m}$$

$$D_1 = \nu_y D_x = 0,200 * 80449,826 = 16089,965 \text{ kNm}^2/\text{m}$$

$$D_2 = \nu_x D_y = 0,200 * 80449,826 = 16089,965 \text{ kNm}^2/\text{m}$$

Para el cálculo de la rigidez a torsión debe calcularse G_{xy} equivalente de ambas ortotropías. Para ello, se recurre a la expresión 4.5.1.

$$G_{xy} = \frac{6(D_{xy} + D_{yz})}{h^3} = \frac{6(63702,240 + 32179,931)}{0,290^3} = 23588216,850 \text{ kNm}/\text{m}$$

$$D_{xy} = D_{yx} = \frac{G_{xy} h^3}{12} = \frac{23588216,850 * 0,290^3}{12} = 47941,085 \text{ kNm}^2/\text{m}$$

Para poder aplicar estos conceptos al modelo a través de un software de elementos finitos, en este caso en el *Software SAP2000*, deben buscarse los modificadores de rigideces y masas mediante la relación de las constantes halladas anteriormente. Para ello, se busca la relación entre la rigidez existente en la realidad (ortotropía geométrica, la correspondiente al tablero de la pέργola), y la rigidez relativa a una losa ortótropa (lo que tenemos en el modelo). De este modo:

$$\text{ModificadorRigidezFlexion} = M_{22} = \frac{D_x^{geom}}{D_x^{mat}} = 139,670$$

$$\text{ModificadorRigidezTorsion} = M_{12} = \frac{D_{xy}^{geom}}{D_{xy}^{mat}} = 1,329$$

$$\text{ModificadorMasa} = \frac{\text{masa}_{vigas+losa}}{\text{masa}_{losa}} = \frac{2500 * (0,589 + 2,400 * 0,290)}{2500 * (2,400 * 0,290)} = 1,847$$

Región 2: Intereje entre vigas de 3 m, sin balasto

Se repiten los cálculos de manera análoga a la región 1. Se modifican los parámetros:

- $b_x = 3m$
- $e_x = 0,471m$

Se obtienen los siguientes resultados expuestos en las tablas 4.5.4.6 y 4.7 Unidades usando kN y m:

CONSTANTES ORTOTROPIA GEOMETRICA	
D_x	9557490
$D_1 = D_2$	16089,965
D_y	80449,826
G_v	17083333
G_L	15833333
D_{xy}	57397,778
D_{yx}	32179,931

Tabla 4.5: Constantes ortotropía geométrica. Región 2

CONSTANTES ORTOTROPIA MATERIAL	
D_x	80449,826
D_1	16089,965
D_y	80449,826
D_2	16089,965
$D_{xy} = D_{yx}$	44788,854

Tabla 4.6: Constantes ortotropía material. Región 2

MODIFICADORES LOSA	
M_{12}	1,282
M_{22}	118,801
M_{masa}	1,677

Tabla 4.7: Modificadores de rigidez y de masa. Región 2

Región 3: Intereje entre vigas de 3,5 m, sin balasto

Se repiten los cálculos de manera análoga a la región 1 y 2. Se modifican los parámetros:

- $b_x = 3,500m$
- $e_x = 0,429m$

Los resultados se exponen en las tablas 4.8, 4.9, 4.10

Región 4, 5 y 6: Interejes entre vigas de 2,4; 3 y 3,5 m respectivamente, con balasto

CONSTANTES ORTOTROPIA GEOMETRICA	
D_x	8521859,212
$D_1 = D_2$	16089,965
D_y	80449,826
G_v	17083333,330
G_L	15833333,330
D_{xy}	53795,228
D_{yx}	32179,931

Tabla 4.8: Constantes ortotropía geométrica. Región 3

CONSTANTES ORTOTROPIA MATERIAL	
D_x	80449,826
D_1	16089,965
D_y	80449,826
D_2	16089,965
$D_{xy} = D_{yx}$	42987,579

Tabla 4.9: Constantes ortotropía material. Región 3

MODIFICADORES LOSA	
M_{12}	1,251
M_{22}	105,927
M_{masa}	1,580

Tabla 4.10: Modificadores de rigidez y de masa. Región 3

Estas regiones tienen los mismos modificadores de rigidez anteriores. Esto es, los modificadores de rigidez a flexión y torsión de la zona 1 son iguales a los de la zona 4, la zona 2 a los de la zona 5 y la zona 3 a los de la zona 6. Solo se calcula el modificador de masa que se incrementa por la presencia de la cama de balasto, vías y traviesas. El modificador de masa con balasto se calcula de forma idéntica al calculado en la Ec.4.3. En la tabla 4.11 se exponen los resultados de estos modificadores:

	Región 4	Región 5	Región 6
$M_{-30\%}^{masa}$	2,716	2,546	2,449
$M_{nominal}^{masa}$	3,088	2,919	2,822
$M_{+30\%}^{masa}$	3,460	3,291	3,194

Tabla 4.11: Modificadores de masa. Regiones 4, 5 y 6

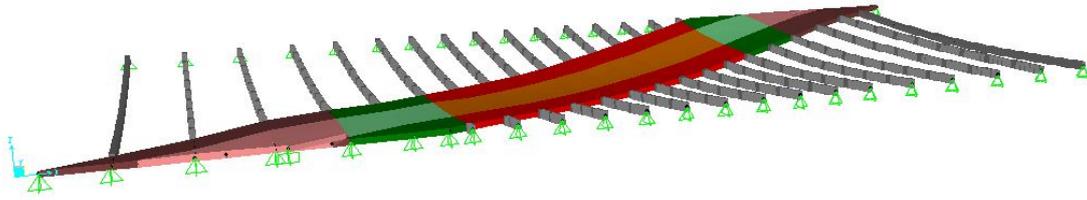


Figura 4.14: Deformada modelo 5

4.5.2. Modelo 6: Modelo basado en losas ortótropas

Este modelo es el que podría ser programado con mayor facilidad, y podría ser el más interesante de todos. Consiste en el diseño del tablero íntegramente a través de losas con distintas ortotropías y masas. En este ejemplo aparecerían dos elementos tipo viga que se colocan en los extremos de las losas exteriores que tienen la mitad de inercia y masa de las vigas reales existentes en la pérgola. Se incluyen para compensar la mitad de rigidez y masa que no se reparte mediante el tramo de losa que sustituye a las vigas más exteriores, ya que en el modelo la losa llega justo hasta la línea neutra de la viga exterior real, y no reparte más que la mitad de las propiedades de la viga que sustituyen.

Existen las seis regiones de ortotropía idénticas definidas en el Modelo 5 y se modelizan de igual forma, considerando la inclusión de tres regiones más de placas ortótropas que aparecen en la figura 4.11: Región A, B y C. Estas nuevas regiones sustituyen las vigas exteriores mediante una losa con diferentes constantes de ortotropía. Se considerará una losa de igual canto que las modelizadas en el resto de ámbitos, en nuestro ejemplo ($h = 0.29m$). Como regla general, se pueden considerar $3n$ regiones de ortotropía para este modelo, siendo n el número de intereses distintos en el diseño de la pérgola. Para el Modelo 5, se consideran $2n$ regiones de ortotropía.

Para equiparar el comportamiento de una placa a una viga, trabajamos igual que en el ejemplo anterior con una serie de modificadores que relacionan las constantes de una ortotropía geométrica (solo vigas externas) y de las constantes de una ortotropía material (solo la losa del modelo). Se debe considerar que las vigas son elementos lineales, y tan solo aportan rigidez a flexión significativa en una de las direcciones en planta mientras que las placas aportan en los dos. Por ello, el modificador de rigidez M_{11} de la losa que estamos incluyendo en las regiones A, B ó C debe anularse prácticamente, para tener una concepción realista. De igual modo ocurre con el modificador de rigidez a torsión, que igualmente se reduce en la placa.

Región C: Zona de interese 3,5 m

Se procede al cálculo de los modificadores, mediante la técnica de relacionar ortotropías geométricas y materiales. Las propiedades a considerar de las vigas son las de las vigas exteriores que existen en la pérgola a modelizar, expuestas en la tabla 4.1 y se corresponden a la figura 4.1. Así tenemos empleando las relaciones definidas con anterioridad para la definición de las diferentes constantes de ortotropía:

$$M_{22} = \frac{D_x^{viga}}{D_x^{losa}} = \frac{\frac{1}{b_x} E_v I_v}{\frac{E_L h^3}{12(1-\nu^2)}} = \frac{\frac{1}{3,500} 41000000 * 0,518}{\frac{38000000 * 0,290^3}{12(1-0,200^2)}} = 75,353]$$

$$M_{11} = 0,001] M_{12} = 0,001] M_{masa} = \frac{M_{vigas}}{M_{losa}} = \frac{2500 * 0,908}{2500 * 0,290 * 3,500} = 0,895]$$

Región C: Zona de interese 3 m

Se calculan de manera análoga, modificando exclusivamente $b_x = 3$. Se obtienen los siguientes modificadores a aplicar en la modelización de la placa ortótropa equivalente en la región B:

$$M_{22} = 87,912] M_{11} = 0,001] M_{12} = 0,001] M_{masa} = 1,044]$$

Región A: Zona de interese 2,4 m

En este caso, $b_x = 2,4m$. Se obtiene:

$$M_{22} = 109,890] M_{11} = 0,001] M_{12} = 0,001] M_{masa} = 1,305]$$

Este modelo tiene una deficiencia por lo que debe trabajarse con mucho cuidado. A la hora de mallar las losas representadas en las regiones A,B,C, aparecerán, sino se malla con tamaño de elemento igual al interese, nodos intermedios en el espacio entre vigas donde en la realidad no existe nada.

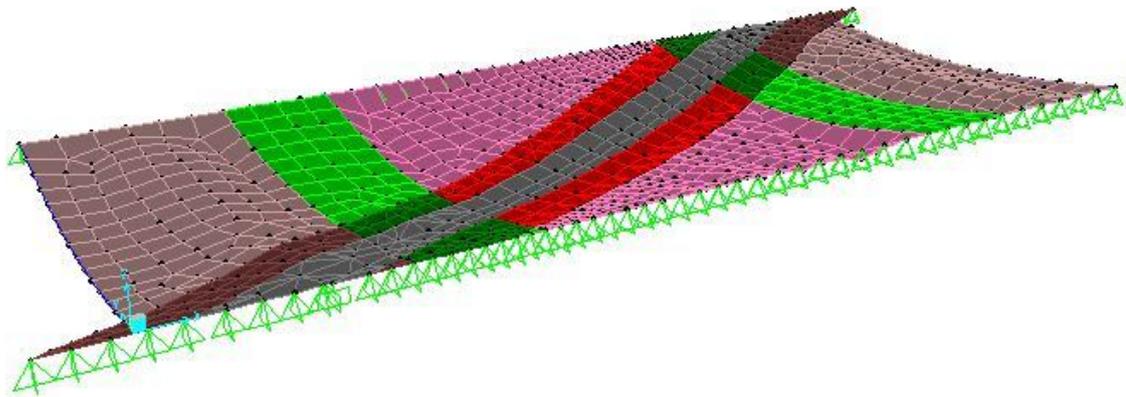


Figura 4.15: Deformada modelo 6

4.6. Conclusiones

A continuación se exponen las conclusiones extraídas de este capítulo:

1. Los modelos tridimensionales definidos (*Modelo 1, 2 y 3*) requieren un grado de precisión alto en las conexiones entre las vigas y la losa. Estas conexiones dependen directamente del mallado de elementos finitos. Una malla más densa dará la posibilidad de crear mayor número de puntos de conexión obteniendo un modelo más cercano a la realidad, siendo el caso contrario una mala caracterización de la modelización por no considerarse un número mínimo de nodos de conexión.
2. Los modelos tridimensionales descritos en el presente proyecto deben tener los nodos de la malla de elementos finitos de las vigas y la losa coincidentes en planta, para poder realizar una conexión de elementos satisfactoria. Esto da lugar a una malla condicionada por la disposición de las vigas. Esto también ocurre en el *Modelo 4*.
3. Los modelos bidimensionales (*Modelo 4, 5 y 6*) prescinden de la problemática de las uniones, ya que se consideran las propiedades conjuntas de la losa en las vigas (*Modelo 4*) o las propiedades de las vigas mediante ortotropías en la definición de la losa (*Modelo 5 y 6*).
4. Los modelos basados en losas ortótropas (*Modelo 5 y 6*) tienen la ventaja que ofrecen un mallado más libre. Como se estudiará en el próximo capítulo el mallado es trascendente en el estudio dinámico.
5. Los modelos basados en losas ortótropas en todo su conjunto (*Modelo 6*) tienen la desventaja de que en las zonas exteriores (regiones A, B y C) se modelizan nodos que presentan masas y rigideces que en la realidad no existen. Esto dará una imprecisión en los resultados dependiente del número de nodos intermedios que aparezcan entre las vigas exteriores.

	Flechas (mm)
Modelo 1	7,200
Modelo 2	7,400
Modelo 3	7,400
Modelo 4	8,000
Modelo 5	7,900
Modelo 6	7,700

Tabla 4.12: Flechas estáticas máximas hipótesis balasto nominal

6. Los resultados de máximas flechas estáticas presentan una variación aproximada máxima del 9%. Esto es consecuencia de lo expuesto en los puntos 1 y 2 de estas conclusiones. Un resumen de resultados de flechas estáticas máximas de cada uno de los modelos se representa en la tabla 4.12.

CAPÍTULO 5

Análisis dinámico

En esta sección se pretende contrastar el comportamiento dinámico de los modelos que se definieron en el capítulo anterior como los adecuados para la proyección de pérgolas. Como se expuso en el Capítulo tercero del presente proyecto, el cálculo dinámico se realizará mediante el Método Semianalítico, por sus numerosas ventajas. Para su aplicación, debe recurrirse al cálculo de frecuencias y desplazamientos modales por el Método de Elementos Finitos. Este capítulo comenzará con una descripción de las variables fundamentales a considerar en el cálculo dinámico, se evaluará la influencia de la malla de elementos finitos en el análisis modal y posteriormente, se realizará el cálculo y análisis dinámico de los diferentes modelos. Durante todo el proyecto se trabaja con las hipótesis de placa delgada.¹

5.1. Variables fundamentales a tener en cuenta en análisis dinámico

Ante un cruce a distinto nivel de dos líneas mediante un fuerte esviaje en planta, la solución de un puente pérgola se convierte en la mejor opción de diseño, especialmente cuando la luz a salvar es de una magnitud significativa. Durante el proceso de diseño del trazado en planta, se obtienen los datos iniciales: *ancho del vial inferior*, el *ancho del vial a proyectar* " b_s "² y el *ángulo de cruce* " α ", siendo este ángulo el complementario del ángulo de esviaje. Estos tres parámetros serán los que conduzcan a la elección de implantar una pérgola para dar solución al cruce. La *longitud* " L " que tendrá la línea de carga y por tanto, la longitud necesaria del puente depende del ancho del vial inferior, del ancho de la propia vía a proyectar y del ángulo de cruce definido en el trazado, siendo necesario un puente de mayor longitud cuanto menor es el ángulo de cruce. Este valor se relaciona igualmente con el tiempo que tarda la carga en atravesar el puente en función de la velocidad de paso:

¹La teoría de placas delgadas (placas de Kirchhoff) establece que la deformación por cortante puede despreciarse siempre que se cumpla una relación ($\frac{h}{L} \leq \frac{1}{10} - \frac{1}{20}$). Las normales al plano medio se mantienen rectas y ortogonales a la deformada del plano medio.

²El ancho de la losa a proyectar b_s depende del número de vías que tenga el puente, siendo valores comunes: vía única $\approx 7m$, vía doble $\approx 14m$

($t = L/v$). La longitud de las vigas principales " b_i " coincide con el ancho del vial inferior más el resguardo que se precise dejar por cuestiones de seguridad o el que la Administración competente ordene respetar. La longitud " L " de la línea de carga, el ángulo de cruce " α " y la longitud de las vigas principales " b_i " se relacionan mediante una expresión trigonométrica elemental, representada en la ecuación 5.1 y en la figura 5.2

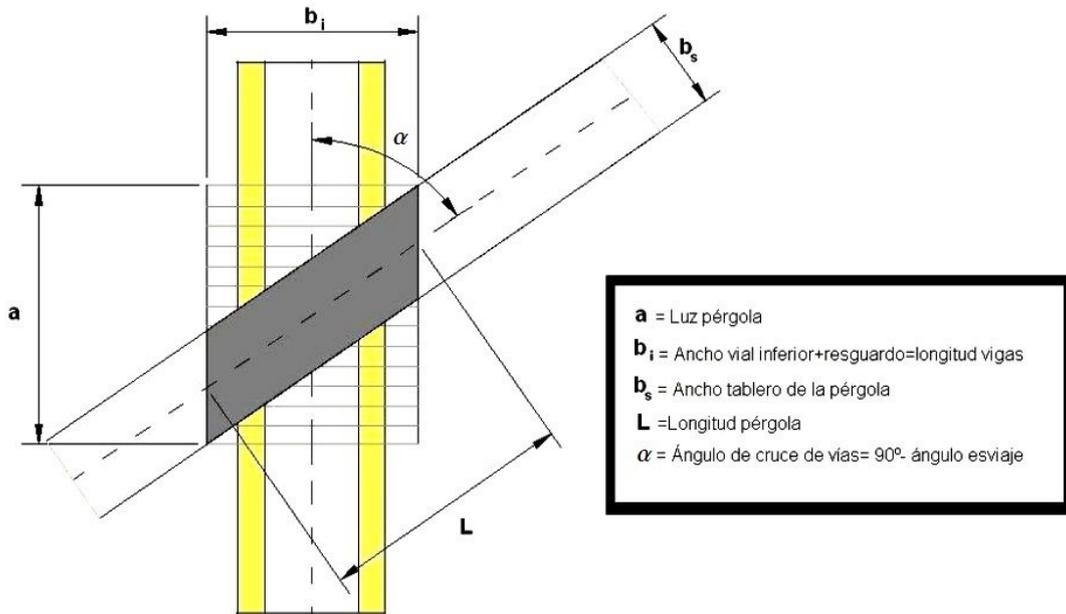


Figura 5.1: Variables que definen la planta del tablero de una pérgola

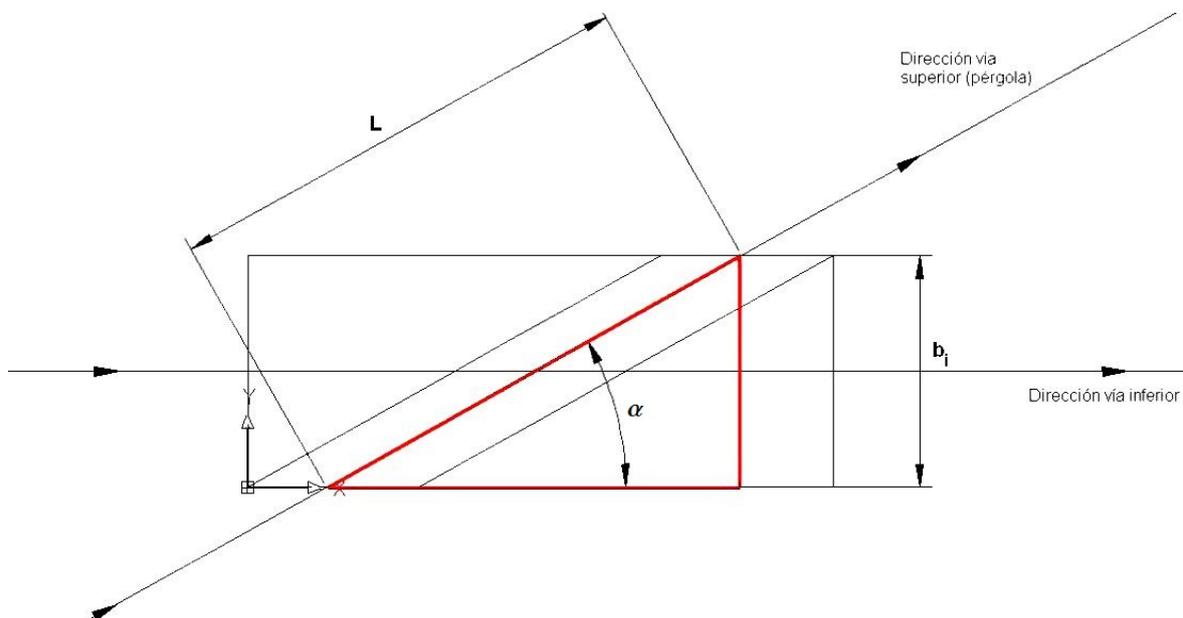


Figura 5.2: Esquema del triángulo que relaciona longitud de línea de carga, ángulo y longitud de vigas principales.

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{b_i}{L} \quad (5.0)$$

La proyección horizontal de la línea de carga o luz de la pérgola (a), es la magnitud donde deben encajarse las vigas principales, y con esta variable, es con la que se estudiarán los posibles interjejes y número de vigas necesarias en el diseño de pérgolas. En la figura 5.3 se representan los triángulos elementales que resuelven dicha magnitud, pudiéndose emplear la ecuación 5.1 para la estimación de posibles luces en función de la longitud de la línea de carga (L), la longitud de las vigas (b_i), el ángulo de cruce(α), y ancho de la losa de hormigón de compresión(b_s).

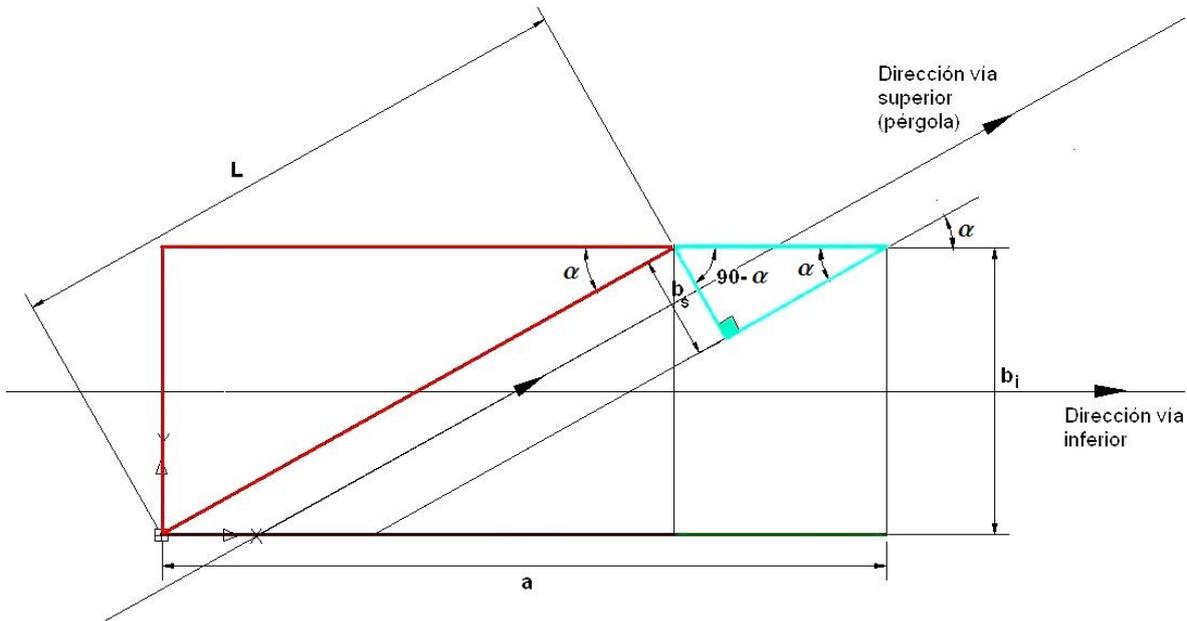


Figura 5.3: Esquema de triángulos elementales para el cálculo de la luz de pérgolas

$$a = L \cos(\alpha) + \frac{b_s}{\text{sen}(\alpha)} \quad (5.0)$$

Una vez encajada la planta de la pérgola que la define y conocidas las alternativas de modelización que se expusieron en el Capítulo cuarto, pueden describirse las variables fundamentales que afectan en el cálculo dinámico de pérgolas para el paso del ferrocarril de alta velocidad. Como el principal objetivo del presente proyecto es verificar la viabilidad del uso de placas ortótropas en los modelos numéricos de pérgolas, se presenta a continuación la ecuación del comportamiento dinámico de placas ortótropas, para proseguir con la definición de los diferentes elementos que deben de estudiarse con atención ya que son variables cuya alteración modificará el comportamiento dinámico de la pérgola a proyectar.

5.1.1. Ecuación diferencial del comportamiento dinámico de una losa ortótropa

La ecuación de movimiento de una placa ortótropa parte de la ecuación de equilibrio de fuerzas y momentos en un prisma diferencial de placa, diferenciándose de la formulación estática por la inclusión de fuerzas inerciales y de amortiguamiento. Se cumplen las hipótesis de placa de Kirchhoff, material elástico lineal, espesor de placa constante, y tensiones normales distribuidas perpendicularmente al plano de la losa despreciables ($\sigma_z = 0$). La ecuación diferencial que gobierna el comportamiento dinámico de una placa ortótropa es conocida.

$$m(x, y) \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} + c(x, y) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} + D_x \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} = f(x, y, t) \quad (5.0)$$

Se trata de una ecuación de tres variables, dos espaciales por tratarse de un elemento bidimensional y una temporal por el carácter dinámico. La diferencia de esta expresión con la de una placa isótropa reside en la aparición de las tres rigideces diferentes ya definidas en el capítulo cuarto:

- D_x : Rigidez longitudinal de la placa.
- D_y : Rigidez transversal de la placa.
- $2H$: Rigidez a torsión de la placa, considerando la contribución de la losa y las vigas longitudinales.

5.1.2. Rigidez, masa y amortiguamiento

Los parámetros dinámicos que definen la solución de la ecuación diferencial de gobierno (5.1.1) son la matriz de amortiguamiento, la matriz de masa, y las matrices de rigidez longitudinal, transversal y rigidez a torsión. Por lo tanto, la respuesta dinámica está determinada por dichas variables. En la tabla 5.1 se presenta un resumen de los parámetros a considerar en una pérgola que caracterizarán cada una de las matrices. En el trabajo [16] se estudian en profundidad estos conceptos, en el presente proyecto se describen de forma concisa.

Rigidez

La rigidez es la propiedad que tienen los elementos o estructuras para oponerse a las deformaciones y/o desplazamientos. Suele definirse mediante un coeficiente (K_i) que relaciona la fuerza aplicada con el desplazamiento adquirido por el cuerpo consecuencia de dicha fuerza.

RIGIDEZ	<ol style="list-style-type: none"> 1. Inercia a flexión de las vigas principales. 2. Intereje entre las vigas principales 3. Rigidez a torsión de las vigas principales 4. Canto de la losa
MASA	<ol style="list-style-type: none"> 1. Área de las vigas principales. Número de vigas principales. Peso propio de las vigas. 2. Espesor y área de la losa. Peso propio de la losa. 3. Espesor de la cama de balasto. Hipótesis de balasto incrementado, nominal y reducido.
AMORTIGUAMIENTO	<ol style="list-style-type: none"> 1. Tasa amortiguamiento constante en todos los modos definido en IAPF 2011[1] 2 %Estructuras de hormigón.

Tabla 5.1: Parámetros a considerar en el comportamiento dinámico de pérgolas

De forma general para cualquier elemento tipo barra, los parámetros que definen la rigidez son la sección transversal (más rígido cuanto más gruesa sea la sección), longitud del mismo (más rígido cuanto menor longitud) y el tipo de material (más rígido cuanto mayor Módulo de Elasticidad). La rigidez a flexión depende de la dirección de aplicación del flector, del momento de inercia de la sección transversal en el eje, del Módulo de Young y de la longitud. La rigidez a torsión depende del módulo elástico transversal (G), del momento de inercia torsional (J) y de la longitud del elemento. Para cualquier elemento tipo placa de Kirchhoff es análogo, ampliándose a una dimensión más, dependiendo, por tanto, de la geometría y el material de la placa. La mayoría de las pérgolas se construyen con losa de hormigón armado junto con vigas prefabricadas pretensadas luego el valor del Módulo de Young no es un parámetro muy variable. Por tanto, se da más importancia a las disposiciones geométricas de los elementos estructurales: vigas principales y losa de hormigón.

La propiedad principal del conjunto de la pérgola en este contexto es la rigidez a flexión. Para considerar la aportación de la rigidez a flexión de la losa debe atenderse al canto de la misma. En cuanto a la participación de las vigas, hay que considerar la sección, disposición y número de ellas a colocar en la luz de la pérgola. Estos valores definirán los interejes que como se ha presentado en el Capítulo cuarto, determinarán las distintas regiones de ortotropía de la placa. Para la definición de interejes también hay que tomar en consideración la tipología de viga escogida, ya que una viga artesa permite un mayor espaciado entre las vigas. Las condiciones de contorno también cambian en el caso de considerar una sección doble T o artesa, ya que las vigas artesas cuentan con dos almas y por tanto, con mayor puntos de apoyos de la losa. En cuanto a la rigidez a torsión de las vigas prefabricadas (I_t), es dependiente del tipo de vigas empleadas. Las vigas doble T con su sección abierta, tendrán una inercia a torsión inferior a las vigas artesas, que tienen una sección transversal cerrada. En la tesis sobre pérgolas de la UPM [16] se tratan con mayor extensión todos estos conceptos presentados.

Existe una rigidez transversal a flexión superior a la rigidez longitudinal, ya que cuenta con la mayor aportación de rigidez de las vigas principales, mientras que la rigidez longitudinal es aportada por la losa. Esto es aceptable siempre y cuando los valores de los interesees adoptados no generen modos de vibración locales de la losa, es decir, que la losa vibre de forma independiente a las vigas por existir un espaciamiento entre ellas excesivo[41] [16]. Por tanto, debe respetarse una relación apropiada para evitar este fenómeno, el cual empeorará el comportamiento dinámico del modelo. En [41] se propone la relación de que el canto de la losa sea superior a un décimo del interesee, aunque no quita la posibilidad de que la respuesta dinámica de la placa pueda amplificarse respecto a la de las vigas principales. Este valor es para tableros con elementos transversales a la dirección de avance a la vía, por lo que se adoptará solo como referencia teniendo en cuenta que el problema de estudio no es idéntico ya que es el de una placa esviada con elementos transversales a la dirección del vial inferior y no al de la línea de carga, y suele ser una estructura donde se adoptan diferentes interesees. En la ecuación 5.1.2 se representa la relación descrita, siendo h el canto de la losa y s_y el interesee de las vigas.

$$h > \frac{s_y}{10} \quad (5.0)$$

Masa

La fuerza de inercia depende de la distribución de masas a lo largo de la estructura. Se trata de un parámetro que está ligado a la respuesta de aceleraciones. Esta variable es dependiente de la densidad del material y de la geometría de la sección, concretamente del área por unidad de longitud, o de volumen. En un puente pérgola de líneas de ferrocarril, se presentan dos materiales con diferentes densidades: el hormigón que compone los elementos tipo viga y la losa de compresión, y el balasto. La densidad del hormigón se considera de $\rho_h = 2500 \text{ kg/m}^3$, mientras que la del balasto se estima en $\rho_b = 1800 \text{ kg/m}^3$. La distinción de las variables que aportarán mayor o menor masa al conjunto, se analiza separando los elementos de diferentes densidades. Atendiendo a los elementos cuyo material es hormigón:

- **Vigas:** Debe prestarse atención al área de las secciones transversales de las vigas principales, y el número de vigas totales que componen la pérgola. A menor interesee, mayor masa aportada por las vigas principales al conjunto de la estructura.
- **Losa:** El área en planta junto con el canto definen el peso propio de la losa de compresión. El área en planta de la misma se calcula sencillamente como el área del paralelogramo (Ec 5.1.2) multiplicando la longitud de las vigas principales (altura) por la longitud del estribo (base).

$$A_{losa} = b_i \frac{b_s}{\text{sen}(\alpha)} \quad (5.0)$$

Atendiendo a la cama de balasto en la normativa vigente [1] se considera un espesor de 0,5m en caso de desconocerlo. También se debe adoptar las tres hipótesis de balasto siguientes:

- Balasto reducido un 30 %
- Balasto nominal
- Balasto incrementado un 30 %

Amortiguamiento

El amortiguamiento es la tercera característica fundamental que gobierna la respuesta dinámica de una estructura. Este cuantifica la capacidad de disipar la energía del sistema atenuando y reduciendo la vibración en el tiempo. El amortiguamiento aumenta a medida que aumenta la frecuencia de los modos de vibración. Existen dos grupos de modelos de amortiguamiento: el viscoso proporcional a la velocidad y el histérico a los desplazamientos. En la práctica habitual, el método de Rayleigh es muy empleado y obtiene la matriz de amortiguamiento relacionando la matriz de masas y la matriz de rigidez:

$$[C] = \alpha.[M] + \beta.[K] \quad (5.0)$$

En la normativa [1], el parámetro ξ se define dependiente del material y luz del puente. En IAPF-2011 [1] se considera un valor de amortiguamiento $\xi = 2\%$ constante para todos los modos en estructuras de hormigón de luz superior a 20 m, y será la tasa considerada en el presente proyecto. Nótese que este modelo de amortiguamiento es conservador pues los modos más altos no se amortiguan en realidad con tasa constante, sino con tasas mayores.

Resupuesta dinámica de la estructura: Desplazamientos y aceleraciones

Las frecuencias naturales aumentan con el aumento de rigidez, y disminuyen con el aumento de la masa del conjunto. Del mismo modo, los desplazamientos disminuyen con el aumento de rigidez, así como las aceleraciones disminuyen con el aumento de la masa. La tabla 5.2 contiene los principales criterios de diseño de puentes de ferrocarril de alta velocidad extraídas de [41] y que se describen a continuación. Así, si la estructura proyectada tiene unos resultados dinámicos con flechas excesivas, podemos modificar los parámetros expuestos anteriormente de tal manera que se aumente la rigidez. Si se trata de aceleraciones

excesivas fueras del límite impuesto por la normativa vigente [1], se debería actuar disminuyendo la masa. Si la velocidad resonante está dentro del rango de velocidades de estudio, se puede expulsar de dicho rango aumentando las frecuencias naturales disminuyendo la magnitud de la masa controlando que las aceleraciones sean admisibles, o bien, aumentando la rigidez. En el caso de recurrir a un aumento tanto de la rigidez como de la masa, debe incrementarse más la rigidez, con el fin de que las frecuencias no disminuyan.

REDUCIR ACELERACIONES	REDUCIR DESPLAZAMIENTOS
AUMENTAR RIGIDEZ	AUMENTAR RIGIDEZ
1. Aumentan frecuencias naturales. 2. Aumenta magnitud velocidad resonante	1. Disminuye magnitud desplazamientos 2. Aumentan frecuencias naturales 3. Aumenta magnitud velocidad resonante
AUMENTAR MASA	DISMINUIR MASA
1. Disminuye magnitud aceleraciones	1. Aumentan frecuencias naturales 2. Aumenta magnitud velocidad resonante

Tabla 5.2: Control de respuestas dinámicas

5.2. Análisis modal. Influencia de la malla de elementos finitos en placas esviadas ortótropas. Convergencia

En la modelización de una estructura, la discretización de su dominio mediante el Método de Elementos Finitos aporta a los resultados arrojados por cualquier programa de cálculo unos errores derivados del carácter aproximado de esta metodología. La convergencia de los resultados, desde el punto de vista del mallado del dominio en elementos finitos, se obtiene actuando en:

- Mayor refinamiento de la malla.
- Incrementando el orden de interpolación del polinomio en el elemento.
- Uso conjunto de las dos técnicas anteriores.

En el caso de que se tenga que discretizar una estructura cuyas propiedades geométricas y/o mecánicas no sean constantes, el análisis se complica. El efecto de las singularidades en las esquinas presentes en una placa oblicua ³ en las variaciones de convergencia del modelo en función del esviaje, de sus condiciones de contorno y de la densidad del mallado, es conocido y estudiado por diversos autores citados en el Capítulo segundo de revisión del estado del arte.

Por otro lado, si se estudia la ecuación de equilibrio dinámica de un elemento finito con la obtenida en el caso estático, se corresponde a la misma ecuación salvo con los términos

³En placa delgada y placa gruesa

nuevos que se correspondería a las fuerzas de inercia y de amortiguamiento. En el nuevo término aparece la matriz de inercia del elemento que representa la distribución de masas en el interior del mismo. La matriz de masas que emplea el *software* SAP 2000 es diagonal, y por tanto, se trata de una matriz de masas concentrada. Esta asocia la masa total del elemento a una serie de masas puntuales individuales situadas en sus nodos. Se trata de una razón más por la cual, debe trabajarse con especial cuidado.

Se busca estudiar una discretización que tenga un porcentaje de convergencia aceptable en el análisis modal, pero a su vez cuente con la menor densidad de elementos posibles con objeto de ahorro de tiempo de análisis. Gracias al Método Semianalítico, este condicionante es de menor envergadura por su rapidez y eficacia, pero hay que reiterar la mención de que la ejecución de los siguientes cálculos dinámicos mediante métodos paso a paso, junto con una malla muy fina, traerían consigo unos cálculos muy costosos en tiempos y en recursos, prácticamente inabordables.

Ante el paso de cargas móviles en modelos bidimensionales tipo losa con vía única y sin esviaje las vibraciones que aparecen en la estructura son debidas a los modos de flexión [42]. En el presente proyecto, se incluyen esviajes y composiciones de elementos tipo vigas, y tipo placas ortótropas con 3 gdl, siendo los primeros modos de flexión de la losa los que se considerarán para el análisis y estudio de convergencia de los modelos. Hasta 30 Hz, aparecen modos locales de flexión de las vigas, y modos de flexiones locales de viga y flexión de la losa global.

5.2.1. Convergencia de una placa isótropa de Kirchhoff esviada

Según diversos estudios, la presencia de singularidades en las esquinas de placas esviadas incide en los resultados de las vibraciones naturales de las mismas. En [4] se presentan los estudios realizados sobre las vibraciones naturales de placas delgadas cuya geometría es de forma rómbica según las condiciones de contorno consideradas: empotradas, simplemente apoyadas y combinación de ambas. Las tensiones debidas a la flexión son singulares, adquiriendo valores significativos y aparecen en dos esquinas opuestas aumentando a medida que el ángulo obtuso es mayor. Se considera un ángulo superior de 45° como un esviaje alto. En [6] se estudian los efectos de las condiciones de contorno y del esviaje en placas delgadas, ortótropas, rómbicas ya que todos estos parámetros modifican los resultados de frecuencias naturales.

En el Capítulo 3 del presente proyecto, se presentó un estudio de convergencia para una placa delgada isótropa esviada, no rómbica sino romboidal como ocurre en las pérgolas, cuyos resultados están recogidos en la tabla 3.2. Se trata de una placa isótropa con una banda central cuya masa es superior debido al balasto que se consideró. Las condiciones

de contorno eran de placa biapoyada en sus lados menores y un ángulo de esviaje de 45° considerado como ángulo de esviaje alto. Se ensayaron diferentes elementos de más a menos fino, obteniéndose una convergencia rápida y la posibilidad de emplear un mallado que discretice la estructura con elementos razonables en tamaño y en tiempos de cálculos. El mallado tipo 1 o tipo 2 de la tabla 3.2 podía ser aceptable.

5.2.2. *Convergencia del modelo numérico de una pérgola teórica con una región de ortotropía*

Convergencia del modelo numérico tipo 5 de una pérgola teórica con una región de ortotropía

Como paso intermedio antes de estudiar la convergencia de los modelos numéricos presentados en el Capítulo 4, se ensaya una pérgola teórica con el fin de evaluar la incidencia de las diferentes regiones de ortotropía que aparecen por los cambios de interejes. Se trata de una pérgola cuya geometría en planta es idéntica a la pérgola de estudio en el Capítulo 4, con la salvedad de incluir un único intereje igual a 2,4 m, y por tanto, presentar una única región de ortotropía. Los materiales y secciones de las vigas y losa de compresión de hormigón son los mismos de la pérgola de estudio. La cama de balasto y su área es también, invariable. Se presentan los valores que se han adoptado en este modelo numérico los cuales condicionarán la convergencia:

- Ángulo de esviaje: 29°
- Presencia de ortotropías: Una única región por el intereje igual a 2,4 m entre todas las vigas principales.
- Condiciones de contorno: placa biapoyada en los lados más cortos, vigas transversales simplemente apoyadas en sus extremos. Unión monolítica entre vigas y losa.

Se ensaya para el Modelo 5, la convergencia de tres mallados junto con uno de referencia muy fino. El mallado tipo 1 tiene las dimensiones de sus elementos iguales tanto en las regiones próximas a las esquinas, como en las zonas centrales. El mallado tipo 2 reduce en cuatro elementos un elemento de la malla tipo 1. El mallado tipo 3, reduce el tamaño de los elementos de las bandas sin balasto próximas a las esquinas, y mantiene constante los elementos de la banda central del mallado tipo 2. El mallado de referencia se trata de un mallado muy fino en toda la losa. Las diferentes mallas de elementos finitos se representan en la figura 5.4.

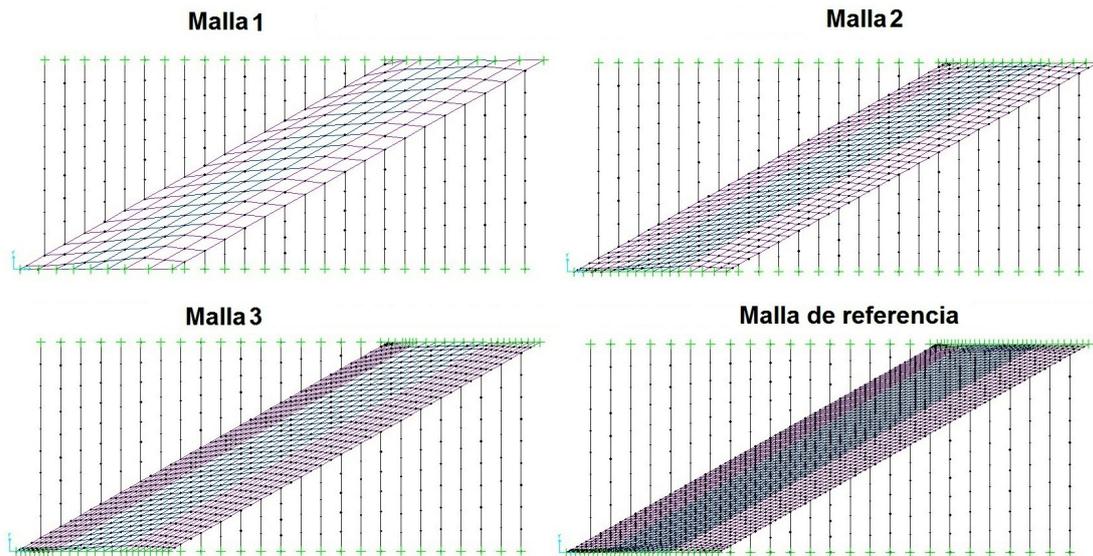


Figura 5.4: Mallados empleados para el estudio de convergencia de la pérgola teórica - Malla tipo 1, 2, 3, malla de referencia. Modelo 5

Los resultados extraídos de frecuencias naturales para los primeros modos de flexión de la losa, junto con el valor de la flecha estática máxima y los errores relativos considerando los resultados del mallado de referencia como valores a los que se deba converger, son recogidos en la tabla 5.3. Los cálculos presentados son los debidos a la hipótesis de balasto incrementado. Se observa una convergencia más lenta y con necesidad de una discretización más fina que en el caso de una losa isótropa. Además, los errores relativos son bastante altos. Sin embargo, en la figura 5.5 se observa como las esquinas son elementos singulares por el valor extremo de las tensiones en ellas. Con la malla tipo 2 (derecha figura), ya la problemática de la singularidad, al afinar la discretización, queda su efecto menos disperso en los elementos, efecto que no ocurre en la malla tipo 1 (izquierda figura). Se observa en el contorno un cambio también de las tensiones. Esto es debido al empotramiento impuesto en el inicio y fin de la línea de carga, que restringe los desplazamientos y giros en esos punto con el fin de evitar impactos ficticios por la entrada de las cargas dinámicas. La malla tipo 2 por tanto, podría considerarse en los cálculos y se empleará en el próximo capítulo. Las formas modales correspondientes a los cuatro primeros modos de flexión se representan en la figura 5.6

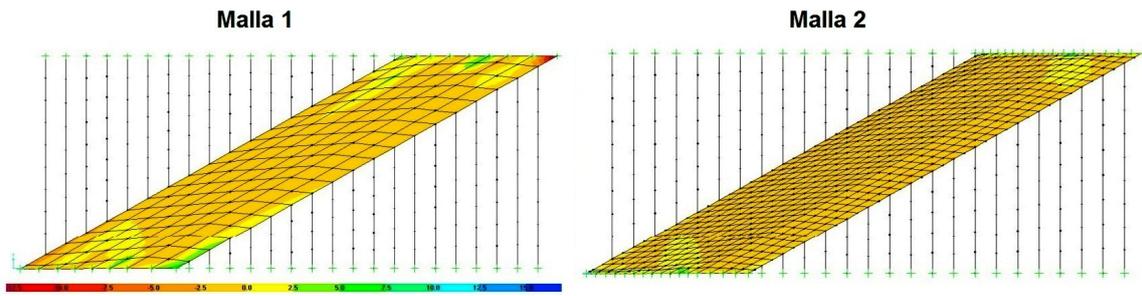


Figura 5.5: Singularidades en las esquinas para malla tipo 1 y tipo 2. Modelo pérgola teórica mediante modelo tipo 5. Tensión σ_{11}

	MALLA1	MALLA2	MALLA3	M.REF	1-REF	2-REF	3-REF
FLECHA	9.2	8.8	9.2	9.5	-3.16 %	-7.37 %	-3.16 %
MODO 1	5.731	5.858	5.726	5.604	2.27 %	4.54 %	2.18 %
MODO 2	5.871	6.192	6.076	5.998	-2.12 %	3.25 %	1.31 %
MODO 3	6.146	6.562	6.465	6.425	-4.35 %	2.12 %	0.62 %
MODO 4	6.644	7.002	6.926	6.828	-2.70 %	2.54 %	1.43 %

Tabla 5.3: Resultados de frecuencias en (Hz) y flecha estática en (mm) para el estudio de convergencia para la pérgola teórica modelizada mediante modelo 5. Balasto incrementado

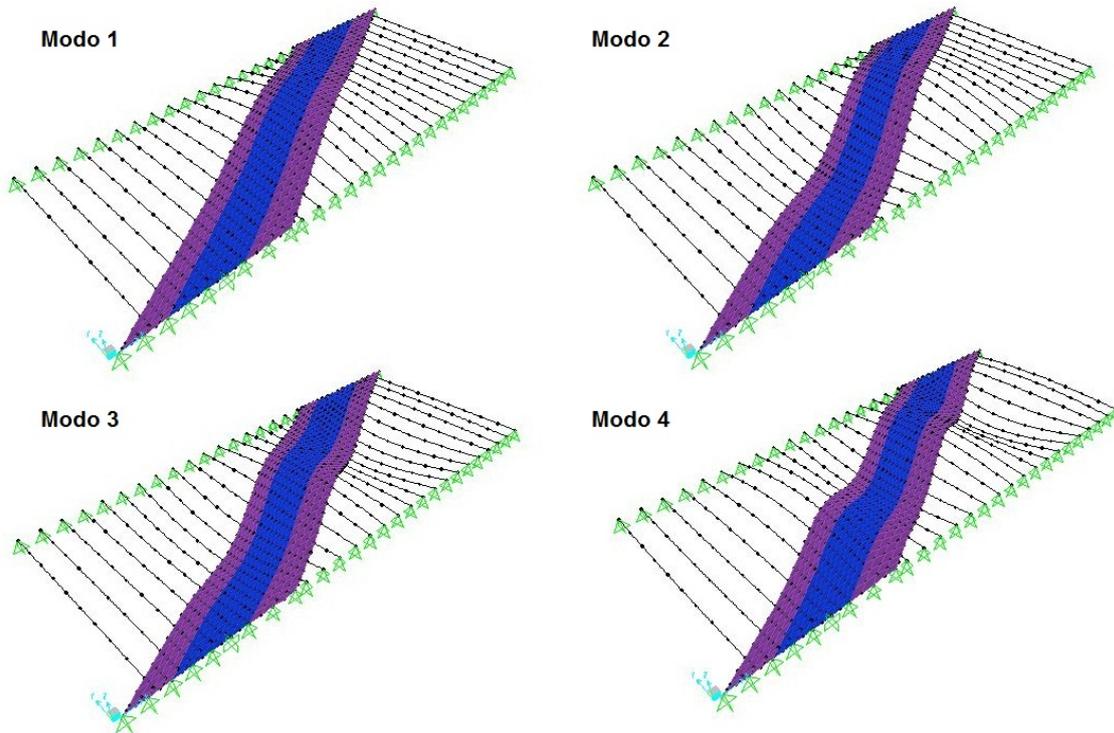


Figura 5.6: Modo 1 : 5.8583 Hz, Modo 2 : 6.1923 Hz, Modo 3 : 6.5619 Hz, Modo 4 : 7.0017 Hz. Modos de flexión de la losa. Modelo pérgola teórica modelizada mediante modelo tipo 5

Convergencia del modelo numérico tipo 6 de una pérgola teórica con una región de ortotropía

A continuación, se estudia la convergencia en la misma pérgola teórica, pero modelizada ahora en su integridad mediante losas ortótropas, incluídas las zonas exteriores de vigas (Modelo tipo 6 presentado en el Capítulo cuarto). A pesar de que existe una única región de ortotropía por existir un único intereje, la losa que modeliza la zona de vigas externas se clasificaría como otro tipo de región, ya que debe anularse su rigidez a flexión en la dirección "x" y reducir también su rigidez a torsión. Se ensayan modelos numéricos discretizando la zona de la losa de compresión con los mismos elementos finitos ensayados en el test anterior, con el fin de contrastar los resultados de ambos estudios. Las discretizaciones realizadas se muestran en la figura 5.7. De igual modo, los cálculos se realizan para la hipótesis de balasto incrementado.

- Ángulo de esviaje: 29°
- Presencia de ortotropías: Una única región en la losa de compresión por el intereje igual a 2,4 m entre todas las vigas principales. Una única región de ortotropía en la zona de vigas exteriores.
- Condiciones de contorno: placa biapoyada.

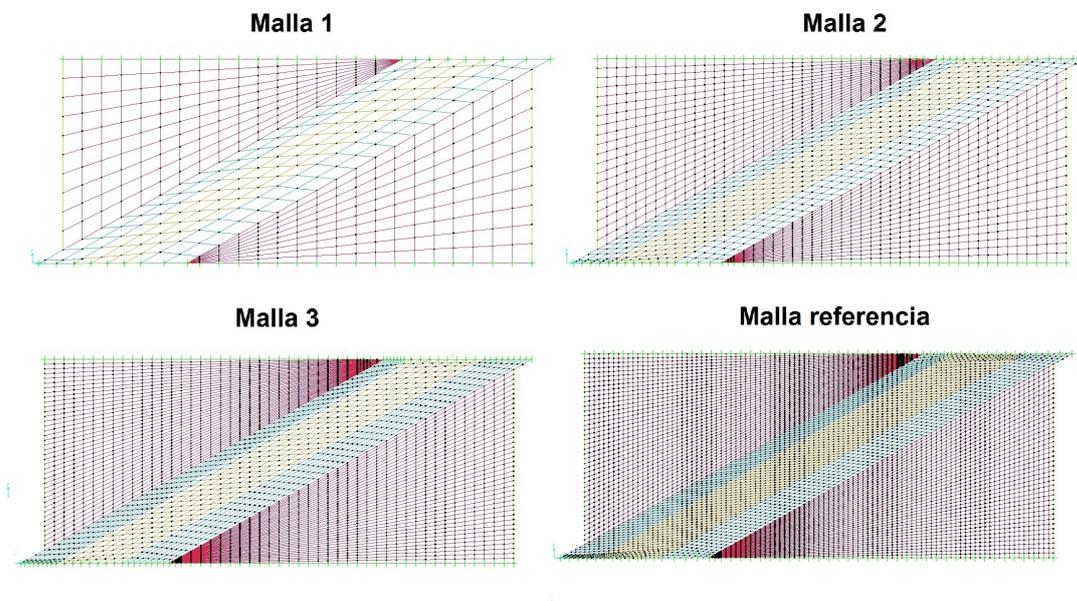


Figura 5.7: Mallados empleados para el estudio de convergencia de la pérgola teórica-Malla tipo 1, 2, 3, malla referencia. Modelo 6

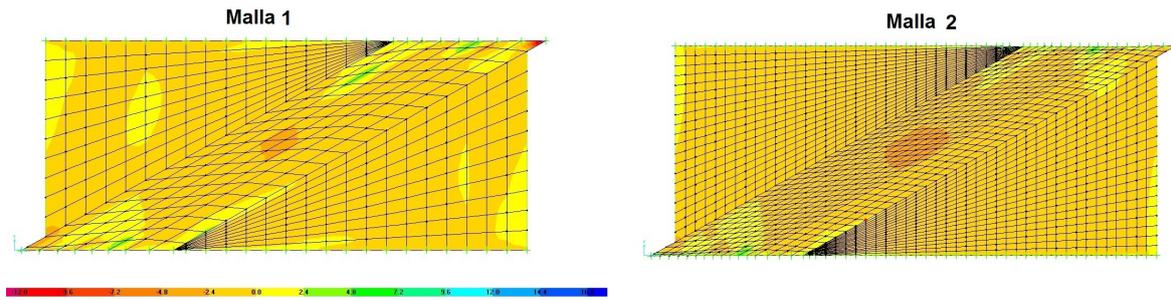


Figura 5.8: Singularidades en las esquinas para malla tipo 1 y tipo 2 . Modelo pérgola teórica mediante modelo tipo 6. Tensión σ_{11}

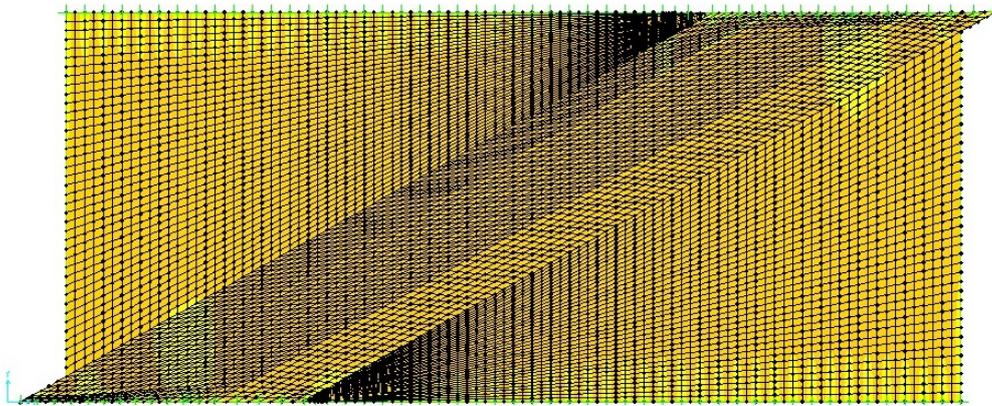


Figura 5.9: Singularidades en las esquinas para malla referencia. Modelo pérgola teórica mediante modelo tipo 6. Tensión σ_{11}

	MALLA1	MALLA2	MALLA3	MALLAREF	1-REF	2-REF	3-REF
FLECHA	22	13	14	9.5	131.58 %	36.84 %	47.37 %
MODO 1	3.758	4.752	4.74	5.687	-33.93 %	-16.44 %	-16.65 %
MODO 2	4.488	5.506	5.491	6.222	-27.87 %	-11.52 %	-11.75 %
MODO 3	5.067	6.178	6.187	6.776	-25.22 %	-8.83 %	-8.69 %
MODO 4	5.411	6.704	6.761	7.234	-25.20 %	-7.33 %	-6.54 %

Tabla 5.4: Resultados de frecuencias en (Hz) y flecha estática en (mm) para el estudio de convergencia para la pérgola teórica modelizada mediante modelo 6. Balasto incrementado

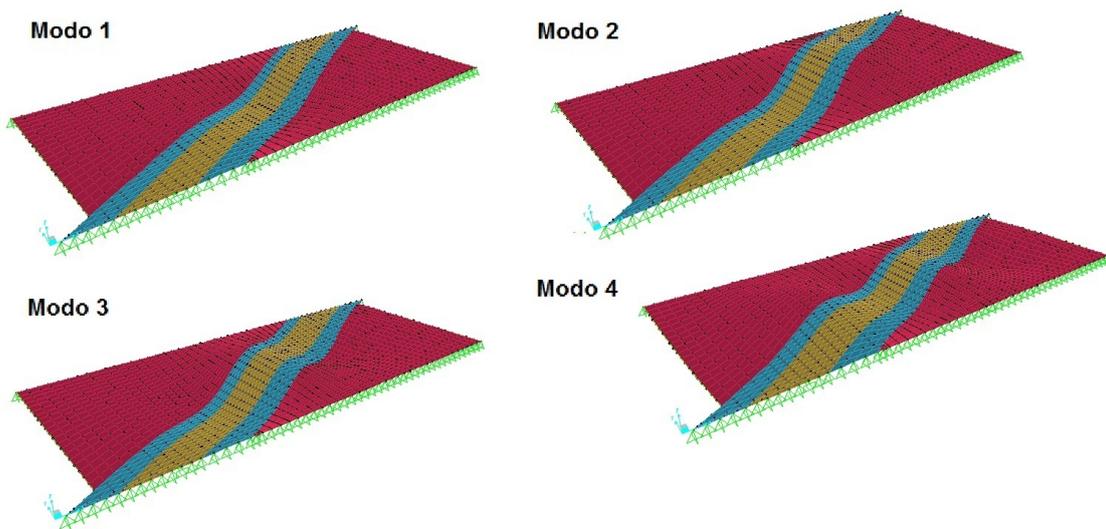


Figura 5.10: Modo 1, 2, 3 y 4 de flexión de la losa. Modelo pérgola teórica modelizada mediante Modelo tipo 6

Los resultados se exponen en la tabla 5.4. En ella, se puede observar como los errores relativos son superiores a los presentados en el subapartado anterior, resultando inadmisibles. Estudiando los resultados aislados de la malla 2 y la malla 3, se podría interpretar una convergencia entre ambas y concluir que el modelo numérico de la malla 2 es aceptable, pero dicha interpretación sería errónea conocido el orden de magnitud de la primera frecuencia calculada en el subapartado anterior, y estudiando la convergencia a una malla aún más fina en su discretización. La diferencia principal entre estas mallas (malla 2 y 3) estriba en una reducción del tamaño de los elementos en la zona de la losa de compresión sin balasto en la dirección "x", pero no en la otra dirección (dirección paralela a la línea de carga). Este mallado no resulta eficaz para reducir los errores, y debe afinarse por tanto, en los puntos de unión de la losa con las vigas, es decir, afinar el mallado en los puntos donde hay un cambio entre ortotropías. Existen dos tipos de losa con diferentes propiedades mecánicas representadas en la figura 5.11. Se trata de una placa romboidal con un aumento significativo de su valor de rigidez a flexión en la dirección transversal, y dos placas triangulares con un aumento de rigidez en la misma dirección pero a su vez, una disminución de rigidez a flexión en la dirección longitudinal. Es precisamente en la discretización más fina entre ambas regiones donde los resultados convergen (malla de referencia).

Puede interpretarse por tanto, que esta similitud entre frecuencias de las mallas 2 y 3 podría llevarnos a un error al considerar una convergencia incorrecta del modelo. El mayor refinado empleado en la malla tipo 3 es irrelevante para corregir los errores obtenidos.

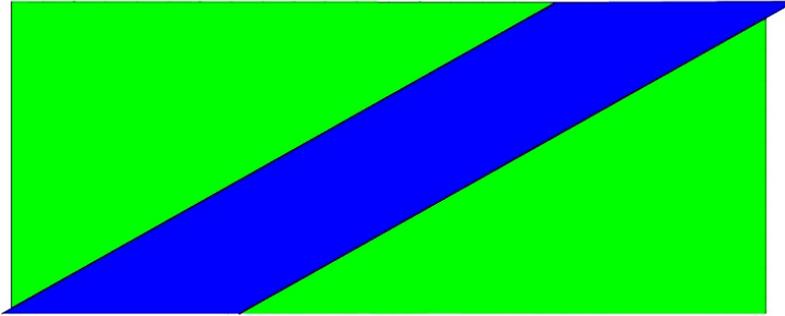


Figura 5.11: Composición elementos tipo placa con diferentes propiedades mecánicas

5.2.3. Conclusiones

En el presente subapartado, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Como es conocido y estudiado por diversos autores, las singularidades que aparecen en las esquinas por los incrementos de tensiones debidas a la flexión de placas rómbricas incide en las vibraciones libres de dichas placas. Parámetros decisivos son la geometría, las condiciones de contorno y los cambios de propiedades mecánicas.
- El ángulo de esviaje influye en los resultados modales. En [4] consideran un ángulo de 45° como alto. En pérgolas, los valores normales de ángulos de cruce⁴ pertenecen al rango de 20° - 50° y también serán variables decisivas en el análisis de frecuencias. Por ello, el Capítulo sexto del presente proyecto se dedicará a dicho estudio.
- La losa de compresión de una pérgola tiene forma de romboide, con los dos lados horizontales de dimensiones inferiores a los dos lados oblicuos paralelos a la línea de carga. En el caso de existir un único intereje, asumiendo modelos de placas ortótropas y vigas (Modelo tipo 5) aparece una única región de ortotropía modelizada mediante una placa romboidal. En caso de existir un único intereje y la realización del modelo numérico mediante el modelo tipo 6 de placas ortótropas, se modeliza mediante una placa romboidal y dos placas triangulares, con diferentes propiedades mecánicas cada una de ellas.
- La convergencia de un modelo de placa ortótropa y vigas (modelo tipo 5) es más pobre que en el caso de una placa isótropa.
- La convergencia en un modelo de placas ortótropas (modelo tipo 6), es deficiente, y debe estudiarse con sumo cuidado.
- Las líneas de transiciones de propiedades mecánicas entre placas y las esquinas son puntos críticos donde debe afinarse el mallado.

⁴complementario del ángulo de esviaje

En la tabla 5.5 se representan los valores de las cuatro primeras frecuencias de los modos de flexión entre los dos modelos desarrollados (Modelo 5 y 6) de la pérgola teórica, para las mallas de referencia ensayadas. Las variaciones en los dos primeros modos son satisfactorias. Debe tenerse en cuenta que la diferencia entre ambos modelos radica en la modelización de las vigas exteriores, como placas que a su vez, se dividen en elementos finitos. Estas están discretizadas mediante numerosos nodos, en los cuales se concentran masas por toda la distribución geométrica de la losa, mientras que en la realidad, tan solo existen en la zona donde existe una viga.

	MODELO 5	MODELO 6	ERROR
FLECHA	9.5	9.5	0.00 %
MODO 1	5.6037	5.6871	1.47 %
MODO 2	5.9976	6.2224	3.61 %
MODO 3	6.4254	6.7761	5.18 %
MODO 4	6.8283	7.2343	5.61 %

Tabla 5.5: Diferencias entre los modelos 5 y 6 de la pérgola teórica. Máxima flecha estática en (mm), Frecuencias de modos en (Hz)

5.2.4. *Convergencia del modelo numérico de la pérgola de estudio con tres regiones de ortotropía*

En esta sección se estudia la convergencia de la pérgola estudiada en el Capítulo cuarto del presente proyecto, para los modelos bidimensionales considerados en el mismo (Modelo 4, Modelo 5 y Modelo 6).

Convergencia del modelo numérico de la pérgola de estudio mediante el Modelo 4

Siguiendo el procedimiento realizado en las subsecciones anteriores, se ensayan tres discretizaciones con el fin de analizar su convergencia. Las mallas estudiadas se representan en las figuras 5.12 y 5.13, y los valores obtenidos se exponen en la tabla 5.6 para la hipótesis de balasto incrementado. Se observa que no existen variaciones significativas en las frecuencias para los distintos mallados. Se trata de un conjunto de placas que no trabajan a flexión en la dirección transversal, de forma romboidales, situadas entre dos elementos lineales de gran rigidez, siendo estas las que aportan las propiedades de rigideces variables según los inter ejes entre las mismas. La losa, sin embargo, sí aporta la masa que le corresponde al conjunto, tanto la suya propia y la de la cama de balasto, debido a que su área no se incluye en la sección de la viga. Por presentar una rápida convergencia, se adoptan los resultados de este test como los valores de referencia para las comparativas que se realizarán a continuación entre los modelos que se desean contrastar en el presente apartado (Modelo 4, 5 y 6). Los cálculos dinámicos que se realizarán se obtendrán con el modelo numérico discretizado con

la malla tipo 1, por obtener buenos resultados de convergencia y tener una menor densidad de elementos.

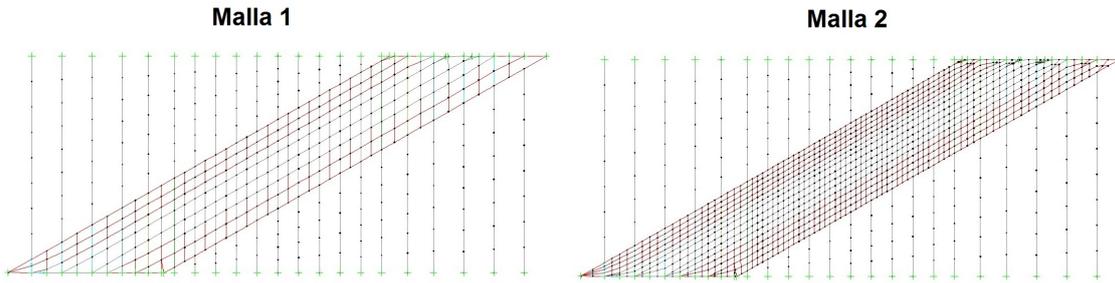


Figura 5.12: Malla tipo 1 y malla tipo 2. Modelo 4 de la pérgola de estudio

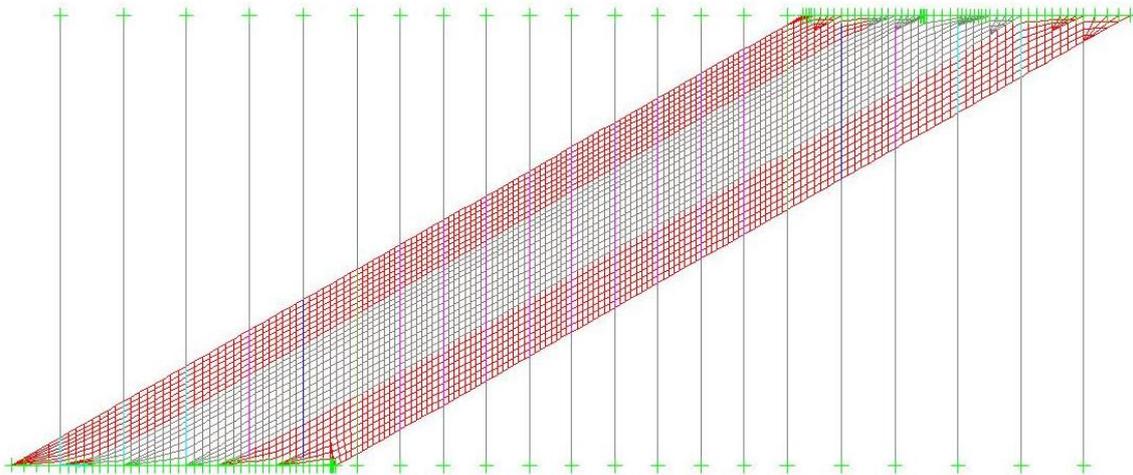


Figura 5.13: Malla de referencia. Modelo 4 de la pérgola de estudio

	MALLA 1	MALLA 2	REF	1-REF	2-REF
Flecha	10	10	10	0.00 %	0.00 %
Modo 1	5.363	5.358	5.358	0.10 %	0.10 %
Modo 2	5.642	5.642	5.645	-0.07 %	-0.07 %
Modo 3	5.961	5.969	5.976	-0.26 %	-0.26 %
Modo 4	6.312	6.329	6.339	-0.40 %	-0.40 %

Tabla 5.6: Resultados de frecuencias en (Hz) y flecha estática en (mm) para el estudio de convergencia para la pérgola de estudio modelizada mediante modelo 4. Balasto incrementado

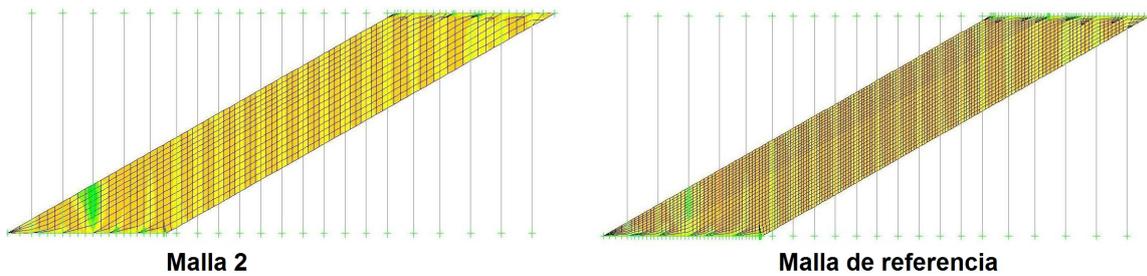


Figura 5.14: Tensión σ_{11} . Modelo 4 de la pérgola de estudio

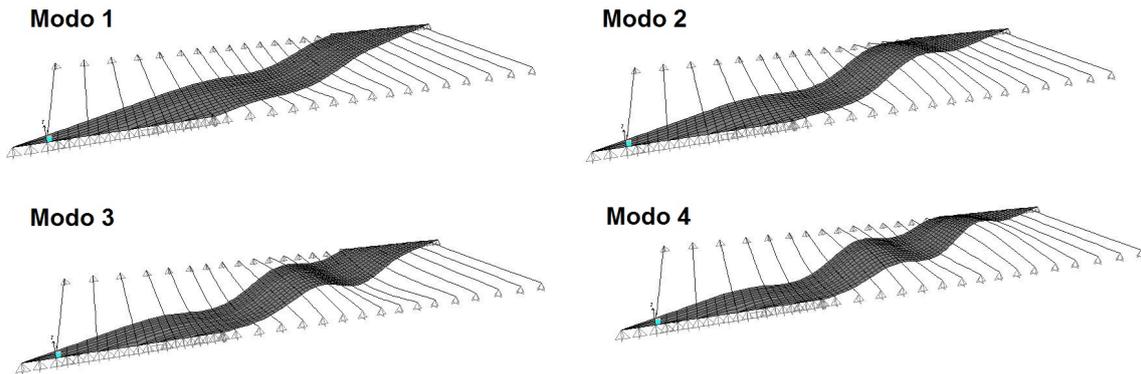


Figura 5.15: Cuatro primeros modos de flexión. Modelo 4 de la pérgola de estudio

Convergencia del modelo numérico de la pérgola de estudio mediante el Modelo 5

Se analiza la convergencia de la pérgola de estudio mediante el Modelo 5. Se ensayan diferentes discretizaciones, con elementos de cuatro nodos, aumentando la densidad de los mismos. El mallado tipo 1, cuyos elementos son bastante grandes, su convergencia como era de esperar es pésima. El mallado tipo 2, a pesar de tener un mallado más fino y una concentración de nodos superior en las esquinas también tiene unos resultados intolerables para aceptar el modelo numérico. El tercer mallado representado en la figura 5.17 consiste en una discretización irregular, concentrando mayor número de elementos en las zonas de unión de cada tramo de ortotropía con las vigas que conectan y en las esquinas, dejando más libre de elementos las zonas centrales de la losa. En la tabla 5.7 se recogen los resultados, observándose que aparece el problema de convergencia que surgía en el modelo tipo 6 de la pérgola teórica, y contrastando los resultados con los valores de referencia del modelo 4, se concluye que el mallado para la realización de los próximos cálculos dinámicos será el mallado tipo 3.

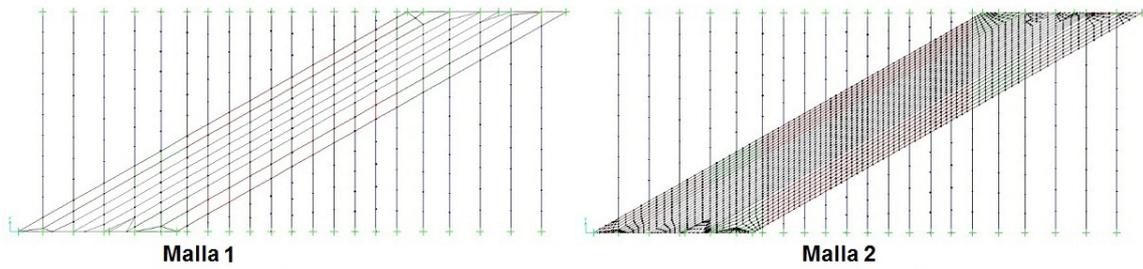


Figura 5.16: Malla tipo 1 y malla tipo 2. Modelo 5 de la pérgola de estudio

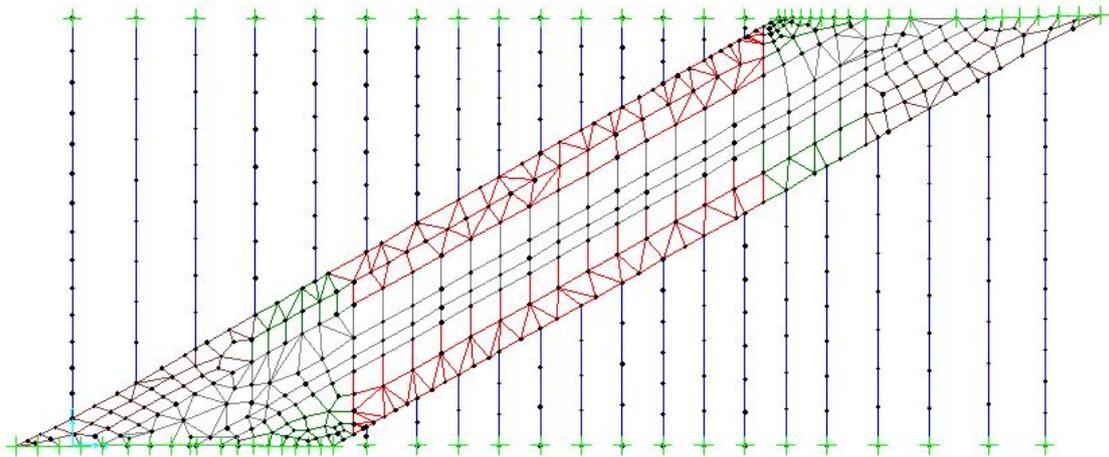


Figura 5.17: Malla tipo 3. Modelo 5 de la pérgola de estudio

	MALLA 1	MALLA 2	MALLA 3
Flecha	39.4	23.7	9.8
Modo 1	2.837	3.556	5.281
Modo 2	3.439	3.955	5.492
Modo 3	4.098	4.406	5.878
Modo 4	5.940	4.973	6.248

Tabla 5.7: Resultados de frecuencias en (Hz) y flecha estática en (mm) para el estudio de convergencia para la pérgola de estudio modelizada mediante modelo 5. Balasto incrementado

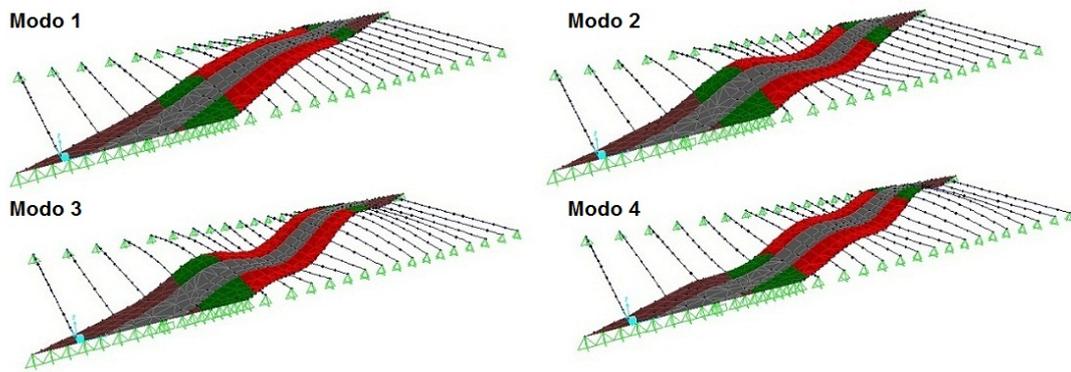


Figura 5.18: Cuatro primeros modos de flexión. Modelo 5 de la pérgola de estudio

Convergencia del modelo numérico de la pérgola de estudio mediante el Modelo 6

Se ensayan ahora diferentes formas de discretización del dominio mediante cuatro mallas diferentes. La diferencia entre la malla 3 (fig:5.20) y la malla 4 (fig:5.21) radica en la mayor triangulación en las bandas exteriores de la zona de la losa de compresión donde existiría la unión con las vigas. Observando la tabla 5.8 donde se exponen los resultados, vuelve a aparecer una deficiencia en la convergencia de los dos primeros modelos, mientras que el tercer y cuarto modelo presentan valores que pueden considerarse como aceptables. Dado que existe una variación en frecuencias entre la malla 3 y 4, y que ambas presentan un error medio similar con el mallado definitivo del modelo 4 que se había considerado como mallado de referencia, ambos modelos numéricos serán considerados en el cálculo dinámico.

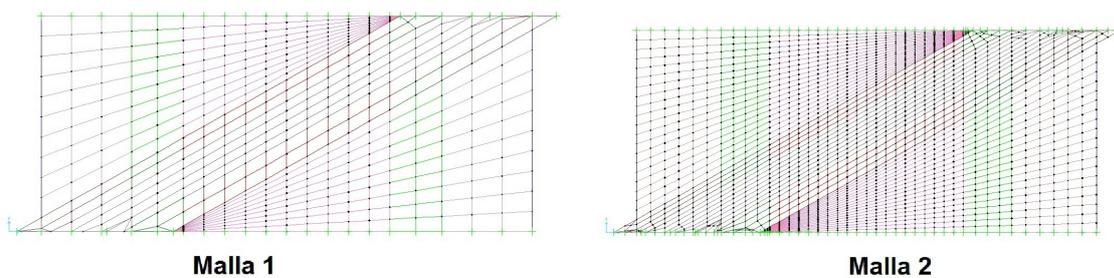


Figura 5.19: Malla tipo 1 y tipo 2. Modelo 6 de la pérgola de estudio

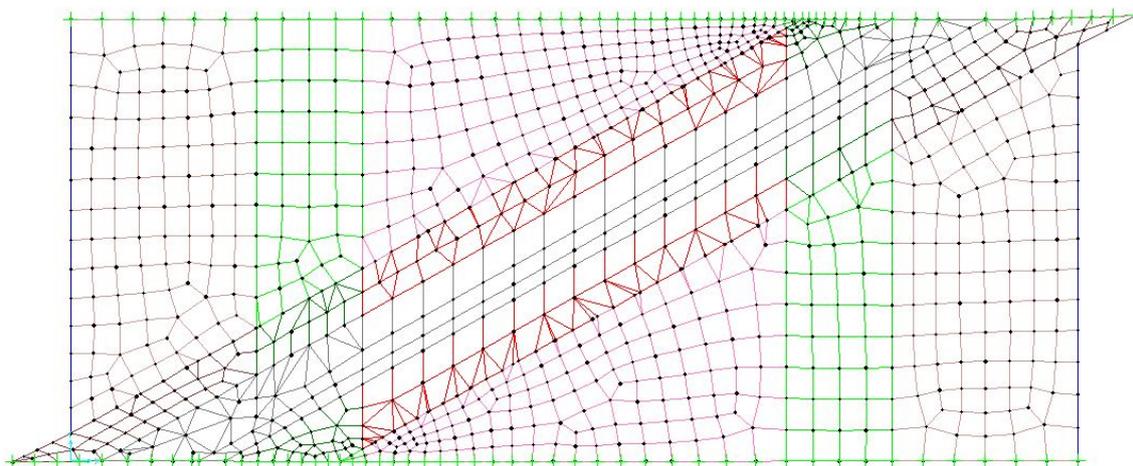


Figura 5.20: Malla tipo 3. Modelo 6 de la pérgola de estudio

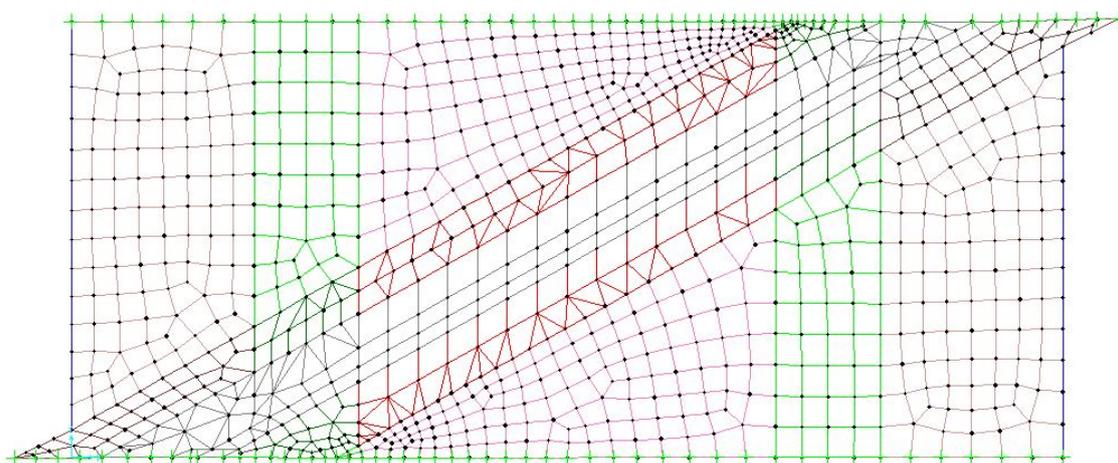


Figura 5.21: Malla tipo 4. Modelo 6 de la pérgola de estudio

	MALLA 1	MALLA 2	MALLA 3	MALLA 4
Flecha	71	51	9.6	10
Modo 1	2.081	2.246	5.494	5.295
Modo 2	2.530	3.790	5.669	5.609
Modo 3	3.408	4.386	6.078	6.038
Modo 4	3.954	5.207	6.597	6.724

Tabla 5.8: Resultados de frecuencias en (Hz). Flecha estática en (mm) para el estudio de convergencia para la pérgola de estudio modelizada mediante modelo 6. Balasto incrementado

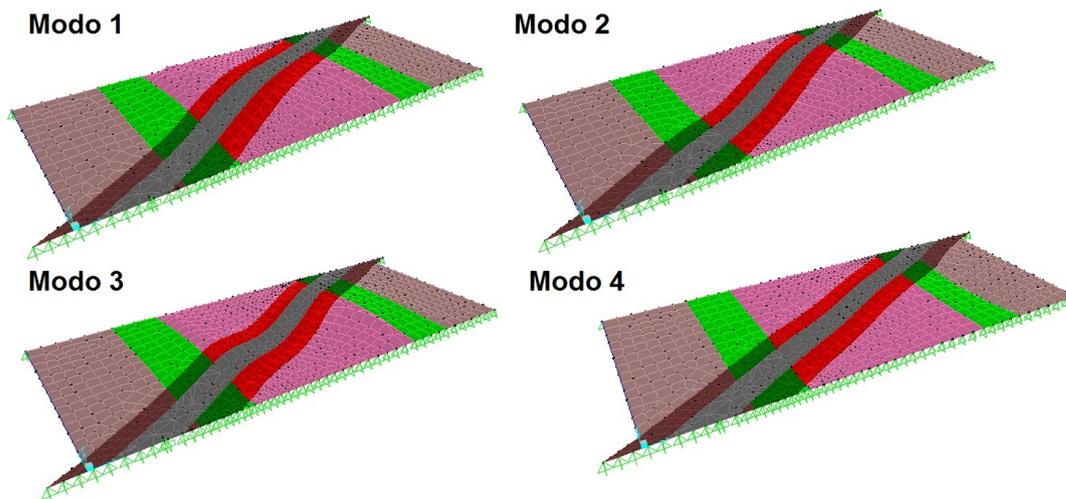


Figura 5.22: Cuatro primeros modos de flexión. Modelo 6 de la pérgola de estudio

5.2.5. Conclusiones

Se presentan las conclusiones extraídas de este subapartado:

- El modelo 4, consistente en la modelización de la pérgola con vigas homogeneizadas y losa sin rigidez transversal, su modelo numérico presenta una convergencia rápida, sin exigir una discretización fina, ni mallados irregulares.
- El modelo 5 y 6, consistente en la modelización de la pérgola mediante placas ortótropas, presentan una convergencia pésima aún con discretizaciones finas. Debe recurrirse a un análisis de convergencia muy exhaustivo, y puede verse en la necesidad de considerar el empleo de mallas irregulares.
- Las zonas de transición de ortotropías son zonas críticas donde el mallado debe realizarse con mayor atención ya que los resultados de las frecuencias modificando los elementos de estas zonas se ven modificados significativamente (malla 3 y malla 4 del Modelo 6).

En la tabla 5.9 se recogen los resultados de las frecuencias de los cuatro primeros modos de flexión de los modelos numéricos que finalmente se estudiarán en el siguiente apartado:

- Modelo 4–Malla tipo 1
- Modelo 5–Malla tipo 3
- Modelo 6 (modelo 6.1) –Malla tipo 3
- Modelo 6 (modelo 6.2) –Malla tipo 4

	Modelo 4	Modelo 5	Modelo 6.1	Modelo 6.2
MODO 1	5.363	5.281	5.495	5.295
MODO 2	5.642	5.492	5.669	5.609
MODO 3	5.961	5.878	6.078	6.038
MODO 4	6.314	6.248	6.597	6.724

Tabla 5.9: Resumen frecuencias (Hz) de los cuatro primeros modos de flexión de los modelos numéricos definitivos

5.3. Validación de modelos numéricos

Una vez definidos los diferentes modelos numéricos, desde la composición de la estructura hasta la discretización de su dominio en elementos finitos, el siguiente paso es calibrar los resultados obtenidos en los tres modelos bidimensionales considerados (Modelo 4, 5, y 6), con el fin de validar el empleo de los modelos 5 y 6 para el cálculo dinámico. El modelo 4 es empleado en los proyectos de pérgolas para líneas de ferrocarril de alta velocidad. Sin embargo, el objeto del presente proyecto es verificar que una composición de losa ortótropa en la integridad del dominio responde de forma similar ante una excitación dinámica inducida por el paso de los trenes.

5.3.1. Planteamiento

Se parte de un análisis modal de los diferentes modelos mediante el *Software SAP2000*. De este análisis modal, se filtrarán las frecuencias hasta 30 Hz, valor que la normativa vigente IAPF-2011 [1] señala como frecuencia límite para la desconsolidación del balasto. Se seleccionarán los puntos de postproceso sobre los cuales, se estudiarán los resultados en flechas y aceleraciones dinámicas que serán calculados por el método semianalítico.

El cálculo dinámico se realizará entre las velocidades de 20 a 220 km/h, siendo 220 km/h la velocidad de proyecto de la pérgola real. Aunque el paso de velocidades que prescribe la normativa IAPF-2011 [1] es cada 10 km/h, en el presente proyecto y gracias al empleo del método semianalítico, se tomará cada 1km/h, ya que cada 10 km/h puede escaparse picos que pueden ser trascendentales en el análisis.

Se consideran 14 trenes, los 10 trenes universales de la serie HSLM, los trenes habituales de las líneas españolas AVE y TALGO, el tren real 4 de pasajeros para $v \leq 250$ km/h⁵ y el turbotren para $v \leq 300$ km/h⁶.

⁵Apéndice C: Trenes de cargas para el cálculo dinámico. Apartado C.3: Trenes reales característicos del modelo de cargas UIC 71. Figura C.8. IAPF-2011 [1]

⁶Apéndice C: Trenes de cargas para el cálculo dinámico. Apartado C.3: Trenes reales característicos del modelo de cargas UIC 71. Figura C.9. IAPF-2011 [1]

El amortiguamiento considerado es el prescrito en la normativa IAPF-2011[1], empleando un factor de amortiguamiento constante para todos los modos del 2 %, el exigido para puentes de hormigón estructural cuya luz es superior a 20 m, como es el caso de la pérgola de estudio.

El cálculo dinámico se realiza mediante el Método Semianalítico. El tiempo de evaluación de la señal, como se ha mencionado en el Capítulo 3 del presente proyecto, se puede considerar como un décimo del periodo menor. El valor será del orden de 3 milisegundos.

En este test, se considera la hipótesis de balasto incrementado. En el Capítulo 7 del presente proyecto se expondrán todos los calculos para las diferentes hipótesis de balasto: nominal, incrementado 30 % y reducido 30 %, junto con las comprobaciones E.L.S que la normativa IAPF-2011 [1] impone.

5.3.2. *Análisis modal*

En la tabla 5.10 se recogen las frecuencias filtradas a 30 Hz que se considerarán en los cálculos dinámicos para cada uno de los modelos. Se tienen 40 modos para el Modelo 4; 37 modos para el Modelo 5; 74 modos para el Modelo 6.1 y 66 para el Modelo 6.2.

5.3.3. *Puntos de postproceso y línea de carga*

Las coordenadas de los puntos de postproceso no son exactamente las mismas en los modelos numéricos, debido a que los nodos de los elementos de las diferentes discretizaciones recaen en posiciones diferentes. Sin embargo, se eligen 20 puntos de postproceso en zonas próximas entre cada modelo. Se eligen líneas de cuatro puntos, dos en los extremos de la cama de balasto, y dos en la zona central de la misma. En la figura 5.23 se marcan en color naranja los puntos de postproceso en el modelo 5 y en color verde los puntos de la línea de carga. Cada punto de la línea de carga está equiespaciado con una distancia aproximada de 2 m en cada modelo.

MODO	Modelo 4	Modelo 5	Modelo 6.1	Modelo 6.2
1	5.363	5.282	5.495	5.296
2	5.642	5.493	5.670	5.610
3	5.961	5.879	6.079	6.038
4	6.314	6.248	6.598	6.725
5	6.739	6.873	6.881	7.350
6	7.080	7.278	7.168	7.459
7	7.113	7.313	7.185	7.497
8	7.163	7.626	7.334	7.747
9	7.367	8.008	7.828	8.198
10	7.451	8.206	7.964	8.482
11	7.842	8.684	8.199	8.595
12	8.510	9.670	8.596	8.808
13	9.454	10.434	8.659	9.499
14	10.544	10.958	8.746	9.812
15	11.302	11.946	9.000	10.051
16	11.979	13.643	9.357	10.487
17	13.772	15.671	9.466	10.973
18	15.958	18.097	9.818	11.194
19	18.374	20.465	10.145	11.419
20	20.885	21.109	10.477	11.567
21	21.064	21.324	10.892	12.096
22	21.261	21.444	11.072	12.707
23	21.707	21.726	11.459	12.884
24	21.854	21.881	11.594	13.215
25	22.366	22.987	12.159	13.290
26	22.570	23.455	12.231	13.619
27	22.960	23.828	12.640	13.768
28	23.317	24.561	12.669	14.115
29	23.795	25.358	12.962	14.379
30	24.373	25.669	13.292	15.000
31	25.062	25.831	14.028	15.325
32	25.316	25.954	14.259	15.651
33	25.520	26.859	14.343	16.563
34	25.671	27.084	14.784	16.780
35	26.061	27.312	15.436	17.108
36	26.107	28.710	15.917	17.142
37	26.405	29.987	16.592	17.234
38	27.484	-	16.700	17.494
39	28.824	-	17.470	17.869
40	29.768	-	17.528	18.322
41	-	-	18.172	18.643
42	-	-	18.249	19.025
43	-	-	18.732	19.451
44	-	-	18.861	19.939
45	-	-	19.065	20.244
46	-	-	19.337	21.312

Tabla 5.10: Frecuencias naturales en (Hz) hasta 30 Hz de los modelos numéricos a contrastar. Hipótesis balasto incrementado

MODO	Modelo 4	Modelo 5	Modelo 6.1	Modelo 6.2
47	-	-	19.904	21.534
48	-	-	20.278	22.552
49	-	-	20.423	23.288
50	-	-	20.541	23.875
51	-	-	21.091	24.018
52	-	-	21.303	24.242
53	-	-	21.377	24.545
54	-	-	21.828	24.875
55	-	-	22.168	25.624
56	-	-	22.406	26.618
57	-	-	22.453	26.975
58	-	-	22.700	27.482
59	-	-	23.155	27.832
60	-	-	23.673	28.096
61	-	-	24.045	28.199
62	-	-	24.522	28.278
63	-	-	24.956	28.510
64	-	-	25.865	28.645
65	-	-	26.101	29.005
66	-	-	26.838	29.467
67	-	-	27.089	-
68	-	-	28.038	-
69	-	-	28.447	-
70	-	-	28.538	-
71	-	-	28.838	-
72	-	-	29.071	-
73	-	-	29.559	-
74	-	-	29.665	-

Tabla 5.11: Frecuencias naturales en (Hz) hasta 30 Hz de los modelos numéricos a contrastar.
Hipótesis balasto incrementado

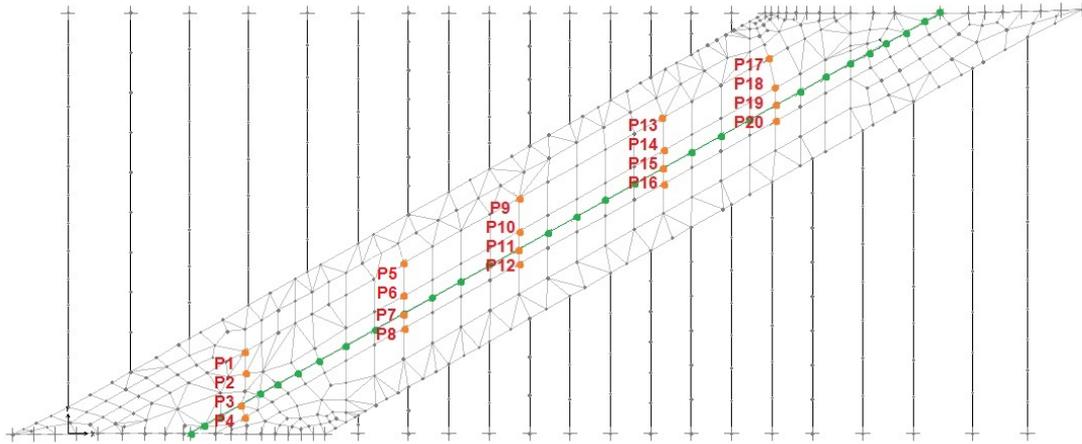


Figura 5.23: Puntos de postproceso y línea de carga de la pέργola de estudio

5.3.4. Hipótesis de carga dinámica 1: $v \leq 220\text{km/h}$

Como se ha mencionado en el planteamiento, se consideran en este primer test de cálculo

- Cálculos dinámicos en los Modelos 4, 5, 6.1 y 6.2
- Puntos de postproceso y línea de carga representada en la figura 5.23
- Velocidad de proyecto: 220 km/h
- Barrido de velocidades: desde 20 km/h a 220 km/h
- Incremento de velocidad: 1 km/h
- Hipótesis de balasto incrementado un 30 %
- 14 trenes: Los 10 trenes HSLM, un tren TALGO, un tren AVE, un tren real de pasajeros, un turbotren.
- Tasa de amortiguamiento constante para cada modo de un 2 %
- Cálculo dinámico mediante el Método Semianalítico.
- Tiempo de evaluación de la señal: un décimo del periodo menor ≈ 3 milisegundos.

5.3.5. Resultados del cálculo dinámico 1: Aceleraciones y flechas

Aceleraciones

En la tabla 5.12 se recogen los valores obtenidos de las aceleraciones máximas de cada uno de los modelos ensayados para la hipótesis de balasto incrementado. Se puede observar, que exceptuando el Modelo 4, la aceleración máxima se da con el paso del tren real 4.

En el caso de que el máximo de aceleración coincida con la última velocidad de análisis, debe señalarse que muy probablemente no se corresponderá con el máximo del pico de

	Modelo 4	Modelo 5	Modelo 6.1	Modelo 6.2
Aceleración max	2.27	2.24	1.85	1.69
Punto	19	13	5	5
Tren	Tren 9 HSLM	Tren 4	Tren 4	Tren 4
Velocidad	220	140	220	220

Tabla 5.12: Resultados aceleraciones máximas en (m/s^2) en la pérgola de estudio para cada modelo. Velocidades en (km/h)

aceleración, que debe encontrarse en una velocidad de análisis superior. Observando la tabla 5.12, esto ocurre tanto en el modelo 4, 6.1 y 6.2.

En la figura 5.24 se muestran la localización aproximada de los puntos de postproceso donde aparecen los máximos. En el caso de los modelos 6.1 y 6.2 son coincidentes tanto en punto, velocidad y tren de excitación, sin embargo, hay una diferencia de $0,2 m/s^2$ entre aceleraciones máximas en ambos modelos. Esto deja entender, la complejidad y variabilidad de los resultados en función del mallado de elementos finitos en las zonas de transición de ortotropías (se recuerda que la diferencia del mallado de ambos modelos estriba en dicha zona de transición). En el caso de los modelos 4 y 5, el valor máximo es muy aproximado, y la situación espacial de los puntos de postproceso también.

Se representan en los puntos de postproceso donde se obtienen los máximos de los modelos y en un punto ubicado aproximadamente en el centro de la pérgola, la respuesta en aceleraciones de cada uno de ellos, para el tren que los excita. Así, se representa la respuesta de la pérgola para el paso de:

- Tren 9 HSLM en el punto de postproceso 19, para los cuatro modelos. Fig 5.25
- Tren real 4 en el punto de postproceso 13, para los cuatro modelos. Fig 5.27
- Tren real 4 en el punto de postproceso 5, para los cuatro modelos. Fig 5.27
- Tren real 4 en el punto de postproceso 10 ubicado aproximadamente en el centro de la pérgola, para los cuatro modelos. Fig 5.28

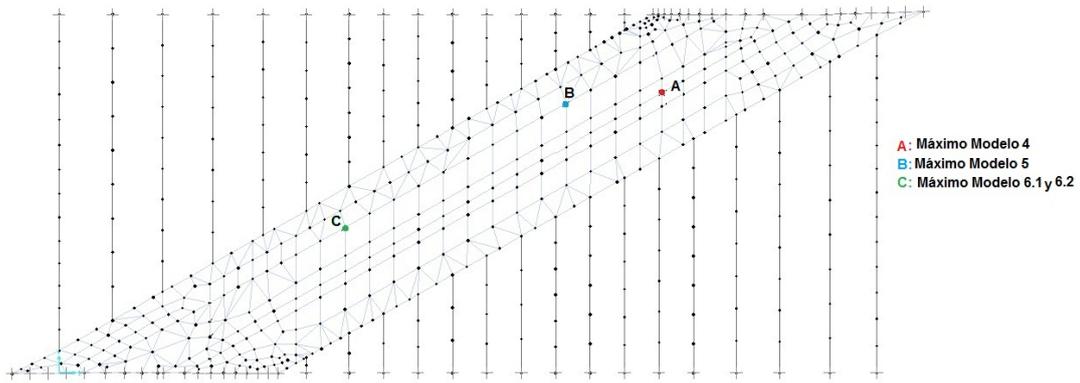


Figura 5.24: Puntos de postproceso donde se producen las máximas aceleraciones hasta $v=220$ km/h. Pέργola de estudio

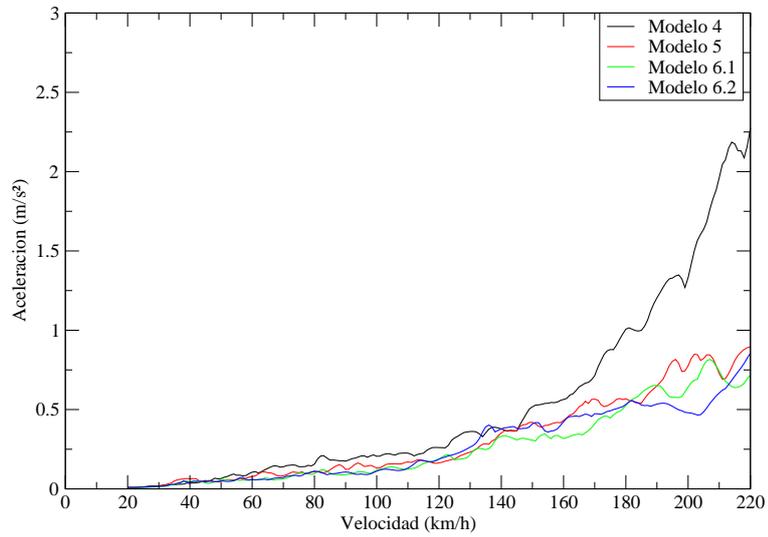


Figura 5.25: Aceleraciones en el punto de aceleración máxima del Modelo 4 de la pέργola de estudio. Punto 19 Tren 9 HSLM

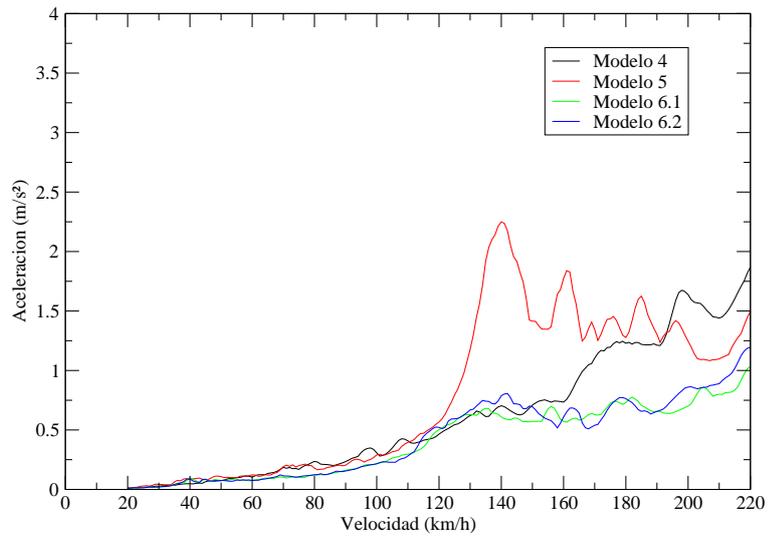


Figura 5.26: Aceleraciones en el punto de aceleración máxima Modelo 5 de la pérgola de estudio. Punto 13 Tren real 4

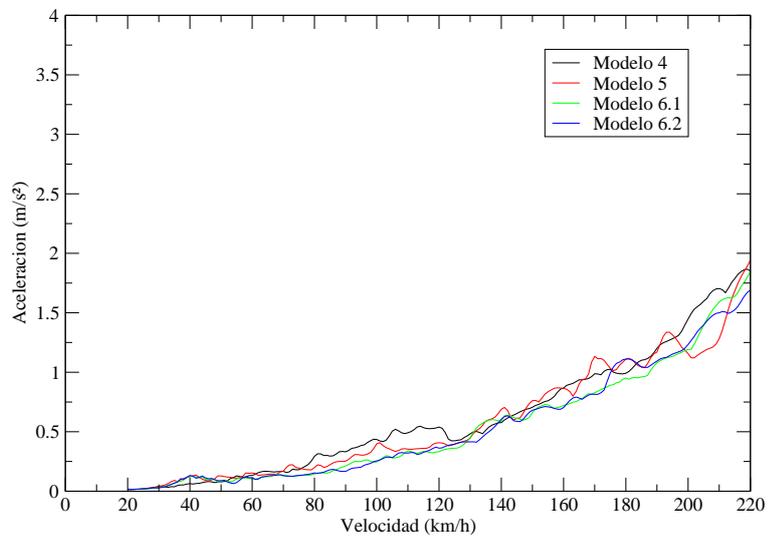


Figura 5.27: Aceleraciones en el punto de aceleración máxima Modelo 6.1 y 6.2 de la pérgola de estudio. Punto 5 Tren real 4

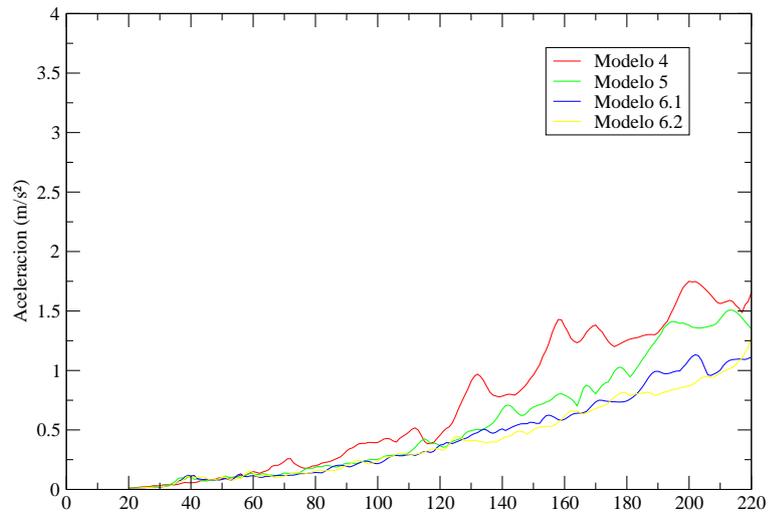


Figura 5.28: Aceleraciones en punto próximo medio vano de la pérgola de estudio. Punto 10 Tren real 4

En las figuras 5.29, 5.31 y 5.32 se representan las envolventes de aceleraciones en cada uno de los puntos de postproceso representados anteriormente.

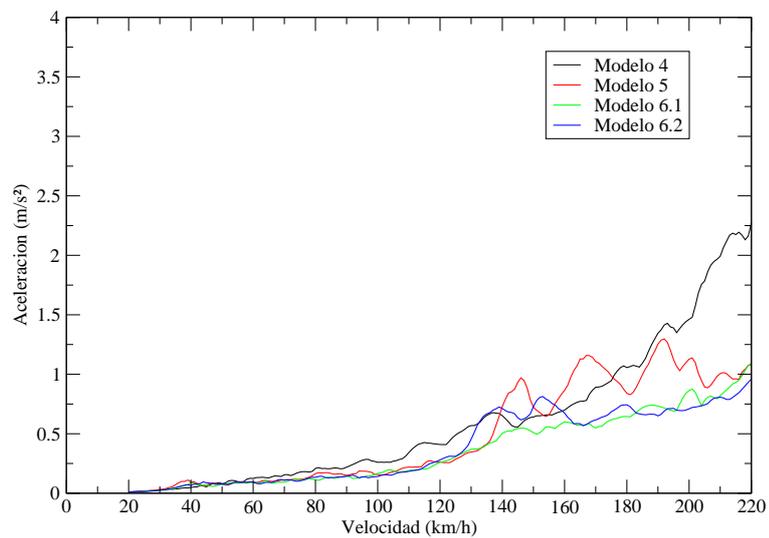


Figura 5.29: Envolvente de aceleraciones en el punto máximo del modelo 4 de la pérgola de estudio. Punto 19

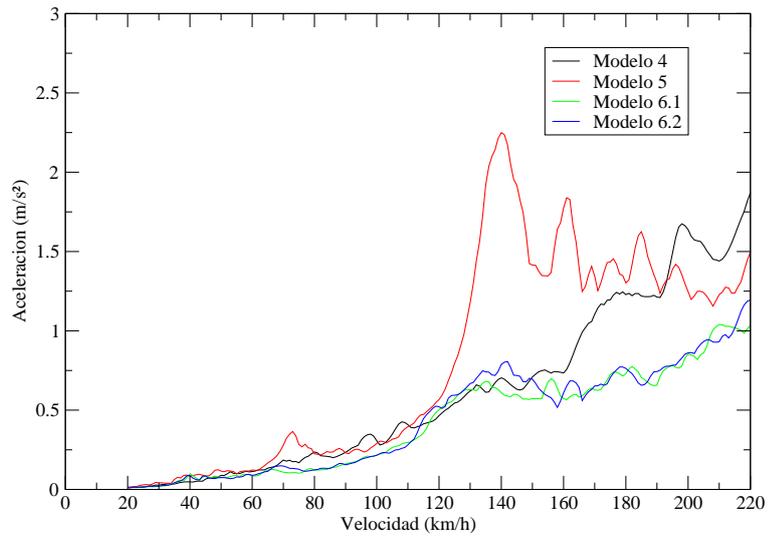


Figura 5.30: Envolvente de aceleraciones en el punto máximo del modelo 5 de la pérgola de estudio. Punto 13

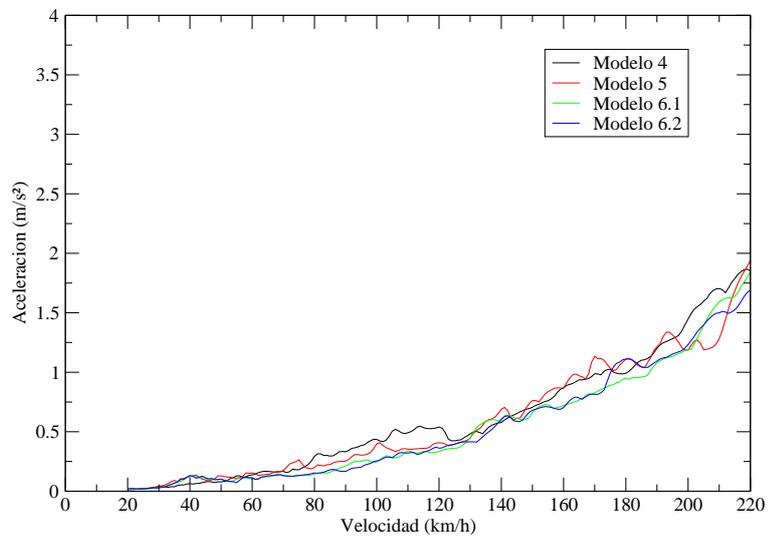


Figura 5.31: Envolvente de aceleraciones en el punto máximo del modelo 6.1 y 6.2 de la pérgola de estudio. Punto 5

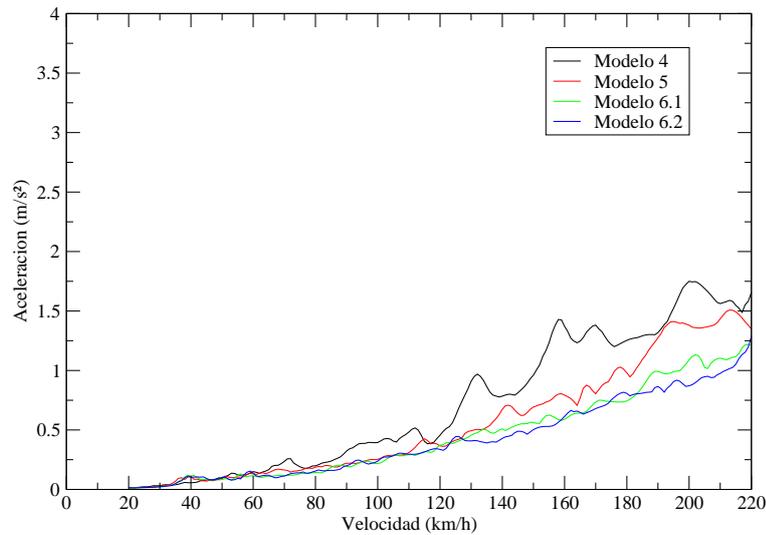


Figura 5.32: Envolvente de aceleraciones en el punto próximo medio vano de la pérgola de estudio. Punto 10

Se tiene en cuenta que son fuentes de error que inducen a la variación de los resultados las diferencias en las discretizaciones de los modelos numéricos que ya han sido justificados en el apartado de convergencia, lo que conlleva que los puntos de postproceso no estén ubicados en las mismas coordenadas espaciales en los cuatro modelos, sino que se hayan elegido los puntos más próximos entre modelos.

En las series temporales representadas en las figuras siguientes, se observa que el comportamiento dinámico sigue el mismo esquema. Aparecen las máximas aceleraciones en la entrada y salida del tren, no existiendo fenómenos resonantes en ninguno de los cuatro modelos. En 5.36 se representan las series temporales conjuntas de los cuatro modelos, para el mismo punto y la misma velocidad, donde se contrasta lo anteriormente descrito.

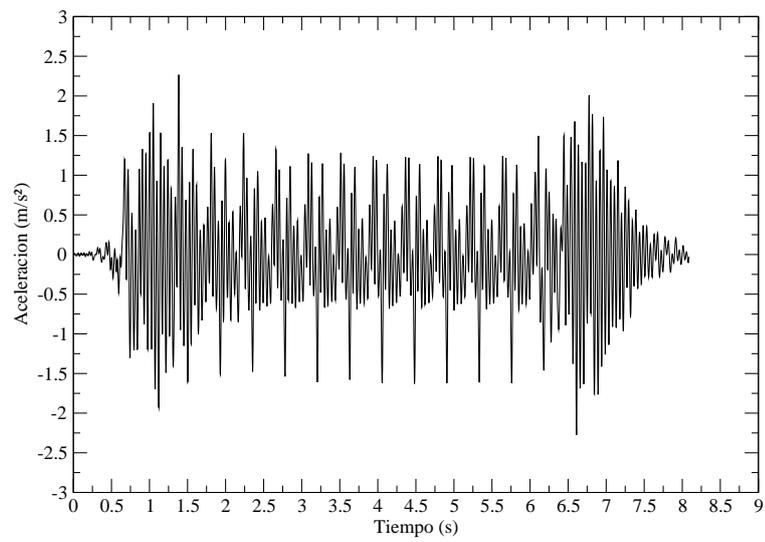


Figura 5.33: Serie temporal del tren 9 HSLM a 220 km/h en el punto postproceso 19. Modelo 4

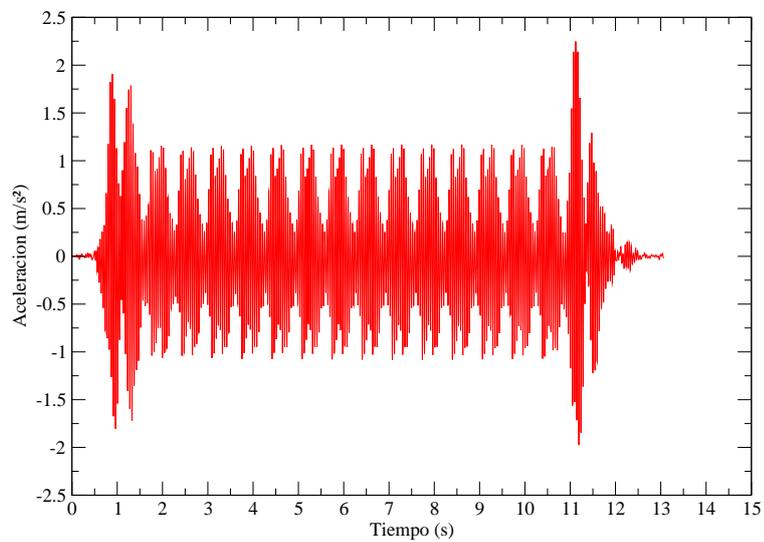


Figura 5.34: Serie temporal del tren real 4 a 140 km/h en el punto postproceso 13. Modelo 5

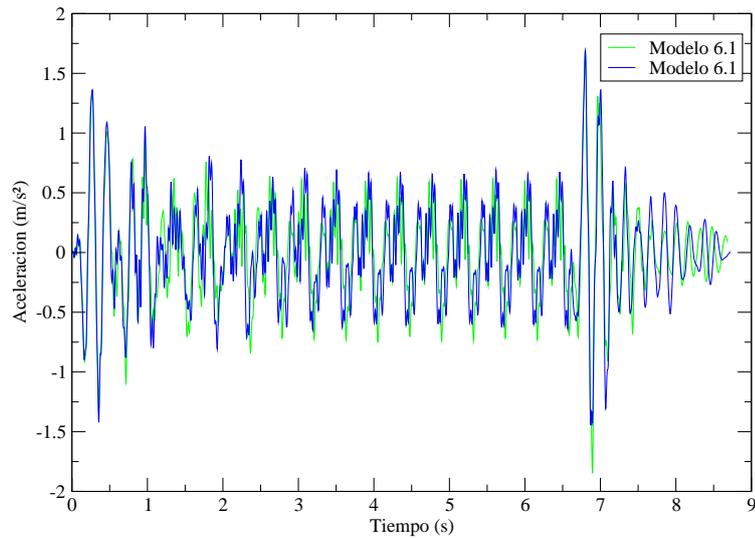


Figura 5.35: Serie temporal del tren real 4 a 220 km/h en el punto postproceso 5. Modelo 6.1 y 6.2

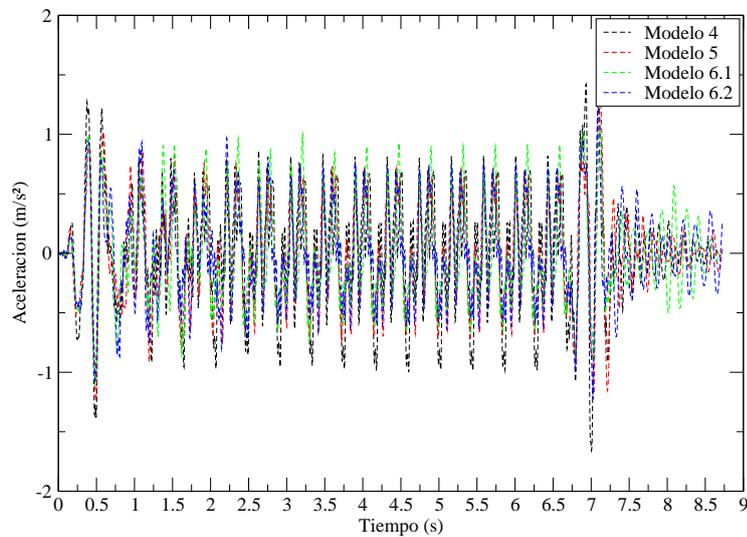


Figura 5.36: Series temporales del tren real 4 a 220 km/h en el punto postproceso 10

Desplazamientos

Se exponen a continuación los resultados de los desplazamientos máximos obtenidos en la tabla 5.13 que son debidos al paso del tren real 4 en todos los modelos. Puede observarse

la variabilidad de los resultados entre el modelo 6.1 y el modelo 6.2, donde la variación mencionada en la discretización modifica también los resultados de flechas dinámicas máximas y la velocidad de excitación de la misma.

	Modelo 4	Modelo 5	Modelo 6.1	Modelo 6.2
Flecha max	5.21	5.65	4.99	5.22
Punto	10	5	10	16
Tren	Tren 4	Tren 4	Tren 4	Tren 4
Velocidad	218	220	188	220

Tabla 5.13: Resultados de desplazamientos máximos en (mm) en la pérgola de estudio para cada modelo. Velocidades en (km/h)

En la figura 5.37 se marcan los puntos de postproceso donde aparecen los máximos desplazamientos. En todos los modelos, se presentan en la zona central aproximadamente de la pérgola.

Se representa a continuación, los valores de los desplazamientos para cada uno de los puntos de postproceso representados en la figura 5.37. Se observa en la figura 5.39 correspondiente con el punto de postproceso donde se produce el máximo del modelo 6.2, una diferencia importante en la respuesta dinámica de desplazamientos entre el modelo 6.1 y 6.2.

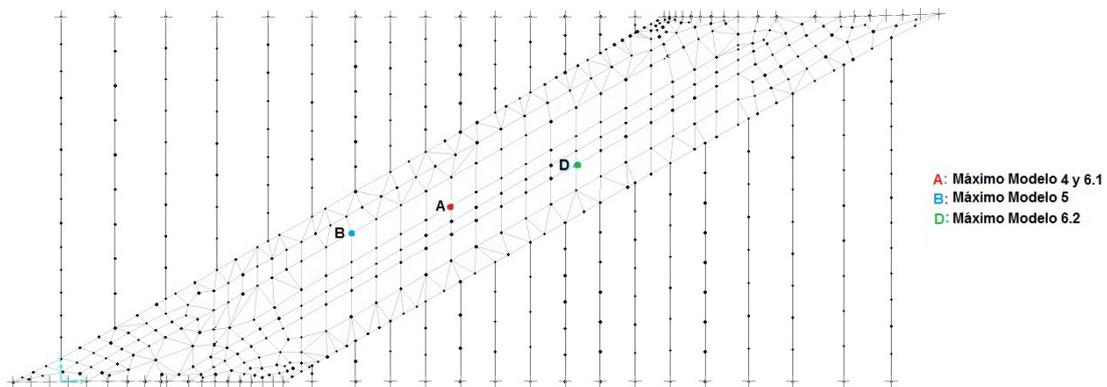


Figura 5.37: Puntos de postproceso donde se producen las máximas flechas hasta $v= 220$ km/h. Pérgola de estudio

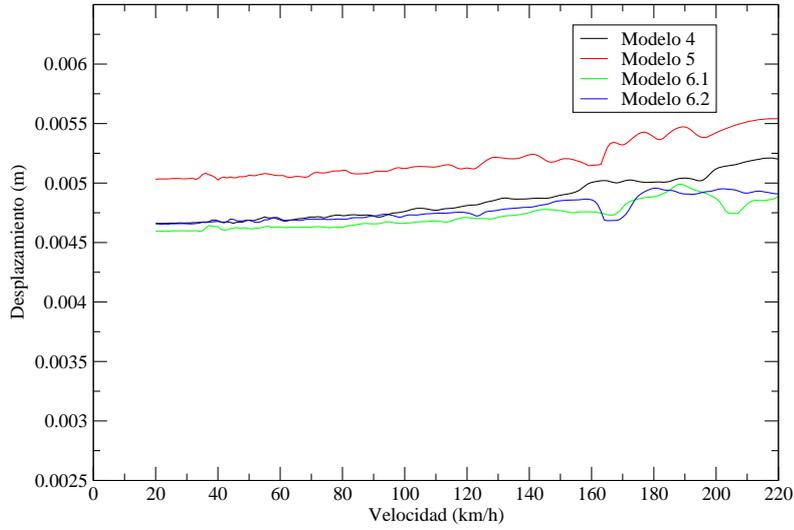


Figura 5.38: Desplazamientos en el punto de flecha máxima de los Modelos 4 y 6.1 de la pérgola de estudio. Punto 10 Tren real 4

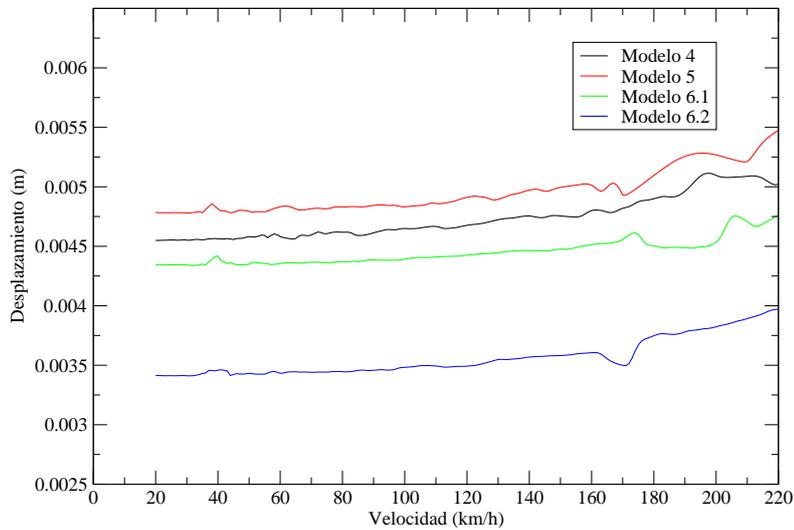


Figura 5.39: Desplazamientos en el punto de flecha máxima del modelo 6.2 de la pérgola de estudio. Punto 16 Tren real 4

En las figuras siguientes, se presentan las envolventes de flechas dinámicas para cada modelo en los puntos donde se presentan los máximos desplazamientos.

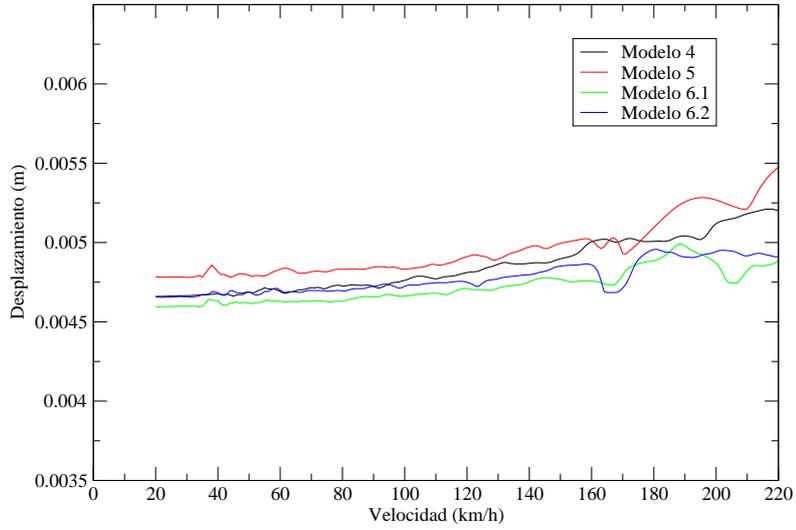


Figura 5.40: Envolvente de desplazamientos de la pérgola de estudio. Punto 10

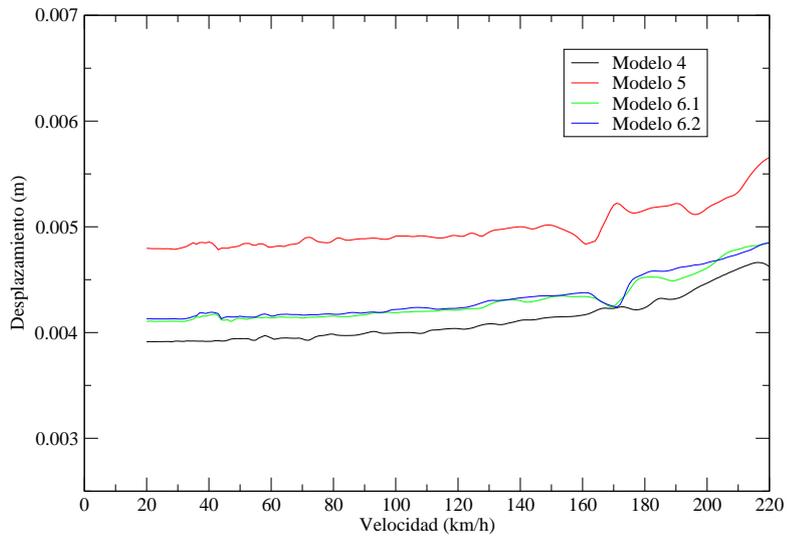


Figura 5.41: Envolvente de desplazamientos de la pérgola de estudio. Punto 5

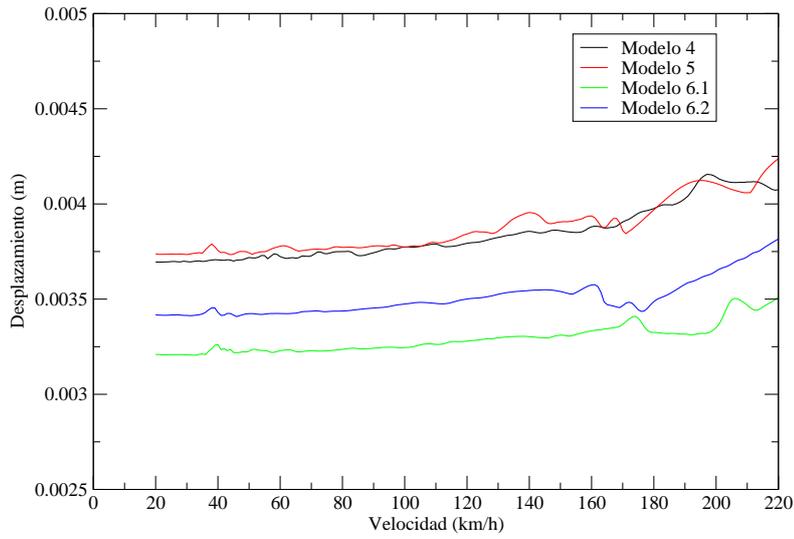


Figura 5.42: Envolvente de desplazamientos de la pérgola de estudio. Punto 13

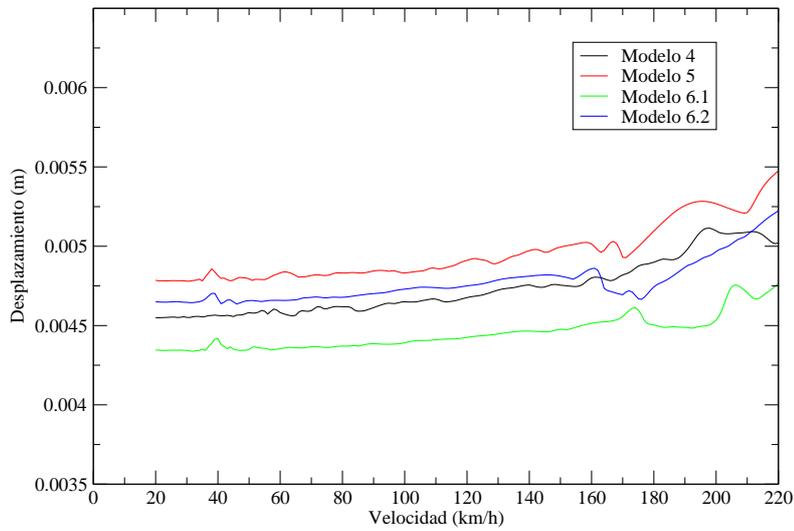


Figura 5.43: Envolvente de desplazamientos de la pérgola de estudio. Punto 16

5.3.6. Conclusiones

Se extraen del cálculo dinámico, las siguientes conclusiones:

1. Existen fuentes de errores que deben tenerse en cuenta para la interpretación de los resultados. La diferente discretización, la imposibilidad de ubicar los puntos de postproceso en las coordenadas espaciales exactas en cada modelo y en el caso de los modelos 6.1 y 6.2, la existencia de nodos en las zonas entre vigas exteriores donde se concentran masas que no existen en la realidad.
2. El paso del tren real 4 genera los máximos desplazamientos en todos los modelos, y las máximas aceleraciones en los modelos 5, 6.1 y 6.2
3. Existe una variabilidad en los resultados entre los modelos 6.1 y 6.2 interesante a analizar. Ambos modelos son idénticos, con la salvedad de aumentar en el modelo 6.2 el número de elementos en la zona de transición de rigideces entre la placa que modeliza la losa y la placa que modeliza la zona donde solo existen vigas.
4. Por lo expuesto en el punto anterior, se confirma que los modelos tipo 6 deben realizarse con un análisis exhaustivo de convergencia. Su respuesta es sensible al tamaño y forma de sus elementos en la discretización.
5. Mediante las series temporales se observa que para todos los modelos, las máximas aceleraciones aparecen en la entrada y salida del tren. No aparecen fenómenos resonantes para esta pérgola para las velocidades consideradas.
6. El modelo tipo 4 se ha empleado en cálculos de proyectos en la actualidad. El modelo tipo 5 se aproxima al modelo tipo 4, en su análisis modal, la respuesta en aceleraciones y desplazamientos dinámicos, siempre y cuando se consideren intereses que permitan la aproximación de la pérgola a placas ortótropas equivalentes.

CAPÍTULO 6

Análisis de sensibilidad frente a la variación del esviaje

En la presente sección se estudiará la sensibilidad de los resultados dinámicos de una pérgola teórica según el ángulo de esviaje existente entre las líneas de cruce. Se presentan dos puntos, los cuales se pretende analizar:

- Sensibilidad en el análisis modal de frecuencias y formas modales en función del ángulo de esviaje.
- Sensibilidad en la respuesta de la estructura (aceleraciones y desplazamientos) en función de la variación del ángulo de esviaje.

6.1. Planteamiento

El ángulo de esviaje entre dos líneas es uno de los parámetros que conduce al proyectista a la elección de la implantación de un puente pérgola y a la definición del resto de variables geométricas de la misma.

Se plantean 6 pérgolas teóricas modelizadas mediante los modelos tipo 5 y tipo 6. Dichas pérgolas mantienen idénticas propiedades con la salvedad de un incremento de 5° en el esviaje entre cada una de ellas. De esta manera se ensayan pérgolas con las siguientes características:

- Losa de compresión HA-30 de canto 0,29 m.
- Vigas principales HP-50. Sección definida en el capítulo cuarto del presente proyecto.
- Intereje constante de 2,4 m.
- Hipótesis de balasto nominal cuyo espesor se estima en 0,5 m.
- Análisis de los siguientes ángulos de cruce: 20°, 25°, 30°, 35°, 40°, 45° y 50°.

A la hora de variar el ángulo de cruce, deben fijarse otros parámetros. Al tratarse de una pérgola teórica y buscarse su análisis dinámico, se mantienen constantes el área en planta (y el canto) de la losa de hormigón con el fin de mantener el peso propio de la misma y la longitud de las vigas principales, ya que este depende del resguardo que debe dejarse en el vial inferior. Por el contrario se variará inevitablemente el número de vigas y el ancho del tablero. Las dimensiones de cada pérgola se recogen en la tabla 6.1. En ella se observa claramente la necesidad de la implantación de una pérgola para ángulos de cruce superiores a 35°, donde encajadas en la longitud fija del ancho del vial inferior se observa que la longitud de la línea de carga, y por tanto, la luz de la pérgola ascienden a valores considerables.

Pérgola	α	Área losa	Long vigas	Long L.C	Núm vigas	Luz	Ancho losa
1	20	459.90	25.20	73.67	34	87.48	6.24
2	25	459.90	25.20	59.72	27	72.29	7.71
3	30	459.90	25.20	50.40	24	61.89	9.13
4	35	459.90	25.20	43.93	21	54.23	10.45
5	40	459.90	25.20	39.20	18	48.28	11.73
6	45	459.90	25.20	35.72	16	43.45	12.90
7	50	459.90	25.20	32.89	14	39.39	13.98

Tabla 6.1: Datos de las pérgolas de análisis en el test de esviajes. α ($^{\circ}$), Área (m^2), Longitudes (m).

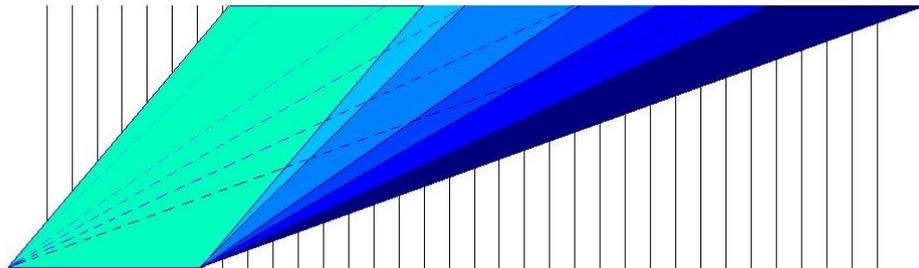


Figura 6.1: Conjunto de pérgolas a analizar en el estudio de esviajes

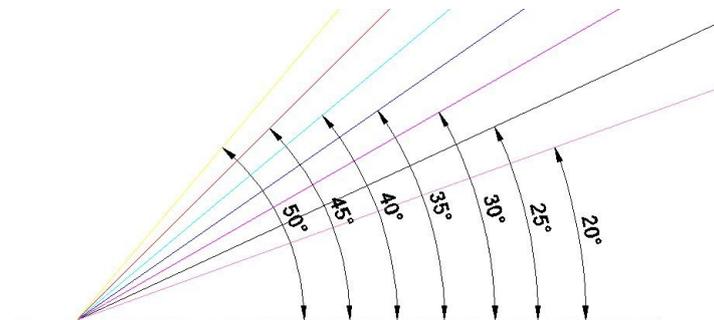


Figura 6.2: Ángulos de cruces a analizar en el estudio de esviajes

6.2. Sensibilidad en el análisis estático y modal

En las tablas 6.2 y 6.3 se muestran los resultados obtenidos del análisis modal de cada una de las pérgolas ensayadas según los modelos de losas ortótropas (Modelo 5 y Modelo 6), con un mallado de elementos finitos que cumple con un porcentaje de convergencia aceptable.

	$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 25^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 35^\circ$	$\alpha = 40^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 50^\circ$
Flecha max	0.0078	0.0082	0.0085	0.0088	0.0091	0.0093	0.0094
Modo 1	6.227	6.078	5.966	5.893	5.847	5.848	5.893
Modo 2	6.376	6.2935	6.253	6.268	6.334	6.510	6.786
Modo 3	6.5267	6.5073	6.570	6.745	7.052	7.528	8.035

Tabla 6.2: Resultados flecha máxima (m) y tres primeros modos de flexión (Hz) para pérgolas modelizadas mediante Modelo 5

	$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 25^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 35^\circ$	$\alpha = 40^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 50^\circ$
Flecha max	0.0078	0.0083	0.0086	0.0087	0.009	0.0095	0.0096
Modo 1	6.218	6.110	5.981	6.128	6.090	5.848	5.812
Modo 2	6.548	6.550	6.471	6.488	6.650	6.668	6.675
Modo 3	6.905	6.847	6.810	7.030	7.430	7.250	7.191

Tabla 6.3: Resultados flecha máxima (m) y tres primeros modos de flexión (Hz) para pérgolas modelizadas mediante Modelo 6. Hipótesis de balasto nominal

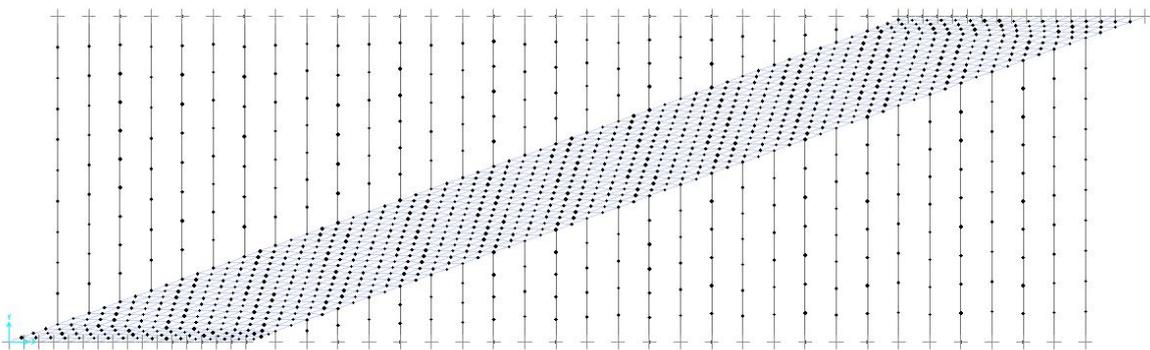


Figura 6.3: Ejemplo de modelo numérico de pérgola. Modelo 5 y ángulo de cruce de 20°

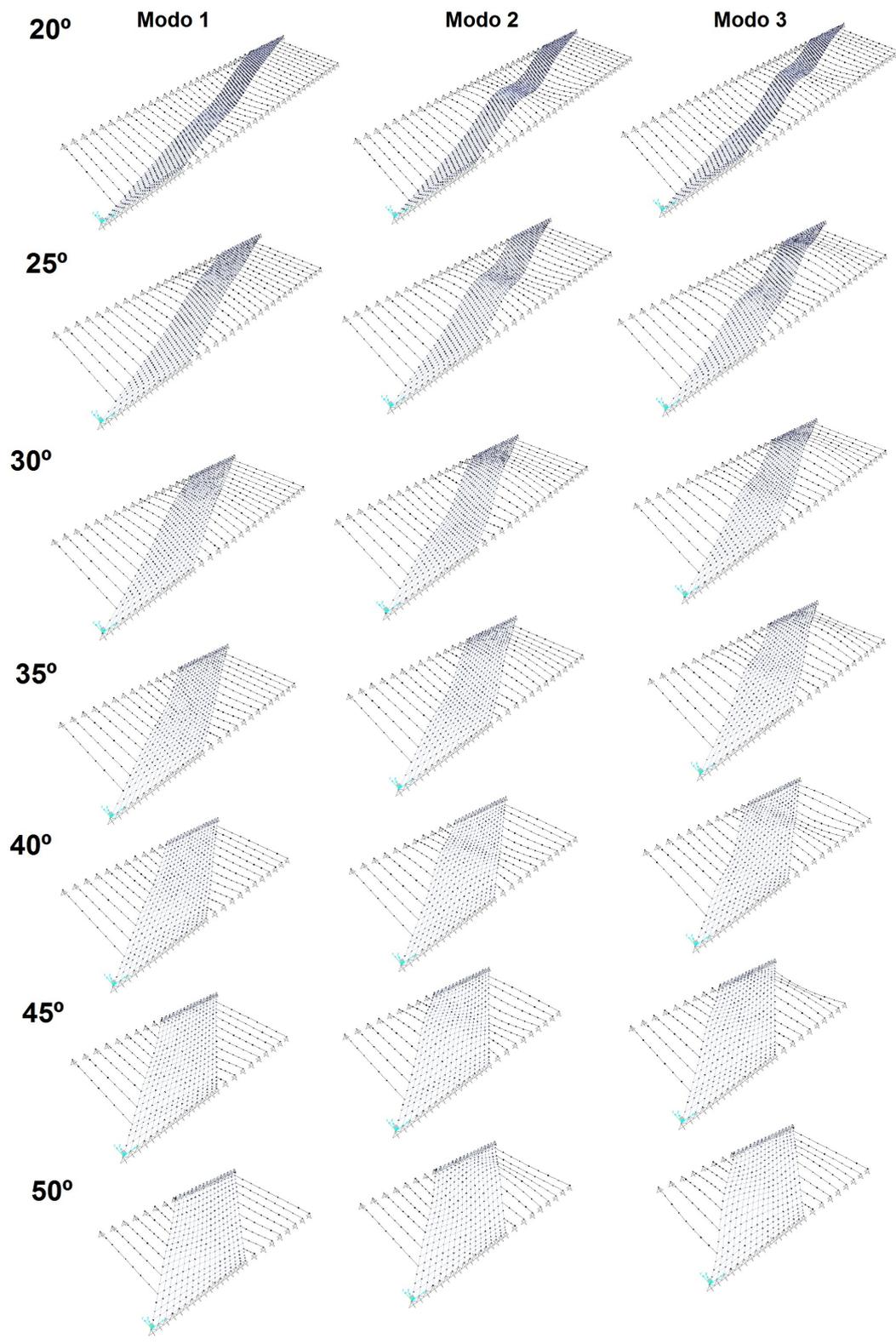


Figura 6.4: Tres primeras formas modales de flexión de la losa de compresión para los diferentes ángulos de análisis

Observando ambas tablas, los resultados de las flechas máximas estáticas son muy similares entre los Modelos 5 y 6. Para el primer modo de flexión de la losa, ocurre un comportamiento similar entre dichos modelos, existiendo mayores variaciones en frecuencias para los siguientes modos. Atendiendo al resultado de flecha estática, puede observarse que la que menor flecha presenta es precisamente la pérgola de mayor longitud de línea de carga, es decir, la de menor ángulo de cruce. Esto puede ser algo contrario a lo que a priori se intuye. Estos modelos teóricos mantienen constante el peso propio de la losa de hormigón, siendo variable entre todos los modelos el número de vigas. El peso propio de cada uno de los modelos, será la suma del peso propio de la losa de compresión (constante para cada una de las pérgolas) más el peso propio de las vigas. La pérgola con menor ángulo (20°) es la que mayor número de vigas tiene, luego es la que mayor peso propio tiene. Sin embargo, estamos trabajando con placas ortótropas y aunque el peso propio del conjunto y la longitud del modelo de menor ángulo sea superior al resto, su flecha estática es inferior. Se trata por tanto, del modelo más rígido. El interese entre ellas es el mismo, pero el número de vigas es superior. Se comprende de estos resultados, que a mayor número de vigas mayor rigidez y aunque el peso propio sea superior, la flecha estática es inferior. Por otro lado, podría extraerse también que los modelos de mayores ángulos de cruce precisan de un interese menor para conseguir la misma flecha estática.

El primer modo de flexión de la losa disminuye con el aumento del ángulo de cruce. Esto reafirma que las pérgolas con mayor ángulo con igual interese y por tanto, mayor peso propio son más rígidas por obtener valores superiores de sus primera frecuencia. Los modos superiores difieren en el comportamiento de cada uno de los test. Observándose las formas modales precisamente se ven diferencias entre ellas. Para ángulos altos de cruce (45° - 50°) en las frecuencias intermedias entre la del segundo y tercer modo de flexión global aparecen flexiones locales de las vigas, algo que no ocurre para el resto de los ángulos.

6.3. Sensibilidad en la respuesta dinámica del sistema

Se estudia a continuación, los resultados obtenidos en los test ensayados para aceleraciones y flechas dinámicas. Para el presente análisis se emplea el tren de cargas representativo del tráfico habitual de las líneas de ferrocarril españolas AVE definido en el Apéndice C de la normativa[1]. Se consideran velocidades hasta 350 km/h, aunque se amplía el estudio hasta $1.2.V_{max} = 420$ km/h con un paso de velocidades cada km/h y cálculo dinámico realizado mediante el Método Semianalítico.

El tren de cargas AVE es un tren articulado cuyo espaciado característico es de 18,70 m. Este dato determina la frecuencia con la que cada eje siguiente excitará a la estructura. Conocida la frecuencia natural del primer modo de vibración y la espaciado entre ejes

se puede estimar el resultado aproximado de la primera velocidad resonante para dicho tren. En este caso:

$$\frac{\lambda}{v} = \frac{1}{f} \quad (6.0)$$

Por ejemplo, para el caso de $\alpha = 20^\circ$

$$V_{res-AVE} = \frac{f_1 \cdot \lambda_{AVE}}{i} = \frac{3.6 * 6.28 * 18.7}{1} = 422.770 \text{ km/h} \quad (6.0)$$

En la tabla 6.4 se presentan las velocidades resonantes que aparecerán a priori para el tren AVE ensayado según la frecuencia más baja. Se observa que las velocidades obtenidas recaen dentro del análisis hasta 420 km/h, exceptuando para el ángulo más bajo.

α	1º Frec	λ	V_{res}
20	6.28	18.7	422.770
25	6.11	18.7	411.325
30	5.98	18.7	402.574
35	6.13	18.7	412.672
40	6.09	18.7	409.979
45	5.84	18.7	393.149
50	5.81	18.7	391.129

Tabla 6.4: Velocidades resonantes para el tren AVE según el ángulo de esviaje. Frecuencias en (Hz), espaciamientos en (m), velocidades en (km/h)

Los puntos de postproceso elegidos se encuentran en el centro de la pérgola y en los medios tercios de ellas. La línea de carga se encuentra situada dentro de la zona de cama de balasto, desfasada un cuarto del ancho de cama de balasto desde el eje central de la pérgola hacia la derecha. Se representan dichos puntos en la figura 6.5 para el caso de la pérgola cuyo $\alpha = 35^\circ$

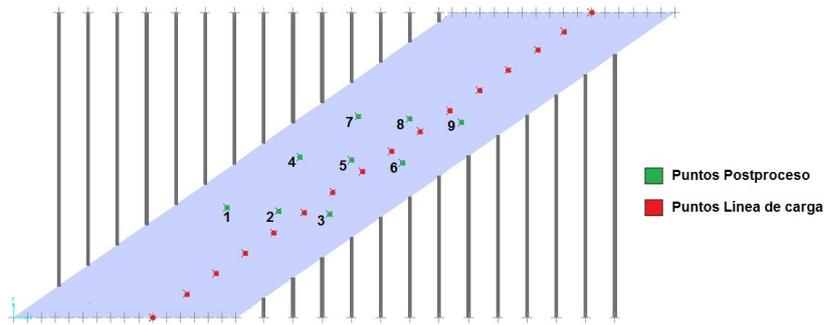


Figura 6.5: Línea de carga y puntos de postproceso de las pérgolas teóricas para el análisis de esviaje

6.3.1. Aceleraciones

En la tabla 6.5 siguiente se muestran los resultados obtenidos del cálculo dinámico descrito para cada uno de los ángulos de cruce definidos. En las figuras siguientes, los gráficos de las aceleraciones según la velocidad de paso del tren AVE para cada uno de los puntos de postproceso donde se produce un máximo de velocidades y en el punto ubicado en el centro de la pérgola (punto 5) con el fin de estudiar la influencia del esviaje en la respuesta de aceleraciones dinámicas.

	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
a_{max}	11.955	11.594	9.250	9.426	10.005	8.629	6.069
Punto	9	9	9	9	9	9	6
Velocidad	408	420	420	420	420	420	420

Tabla 6.5: Aceleraciones máximas para cada pérgola en función de su ángulo de cruce α . Aceleraciones en (m/s^2), velocidades en (km/h).

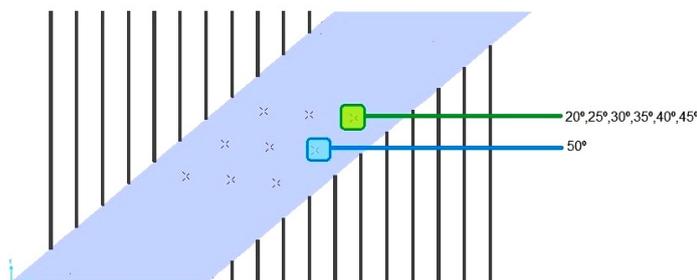


Figura 6.6: Puntos de máximas aceleraciones para cada pérgola en función de su ángulo de cruce

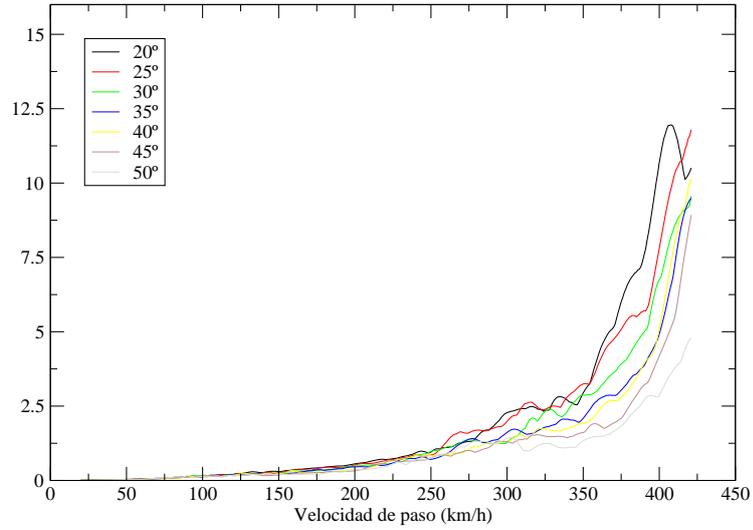


Figura 6.7: Aceleraciones en el punto de postproceso 9 para el paso de un tren AVE según el ángulo de cruce

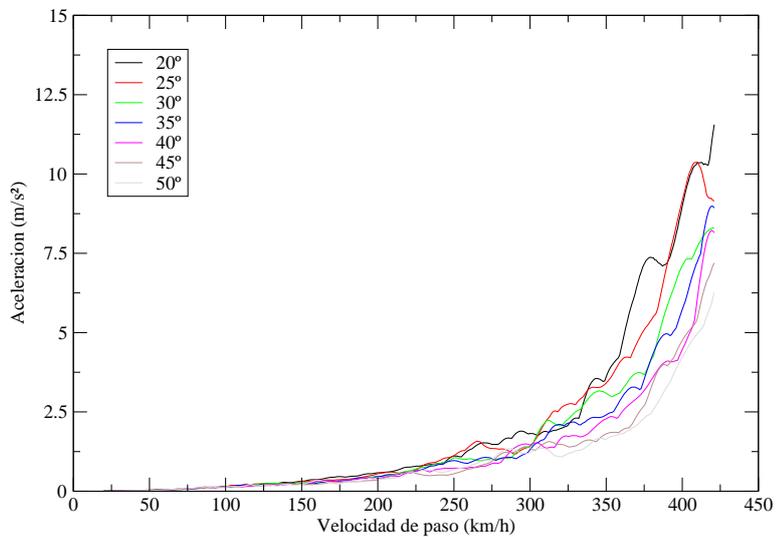


Figura 6.8: Aceleraciones en el punto de postproceso 6 para el paso de un tren AVE según el ángulo de cruce

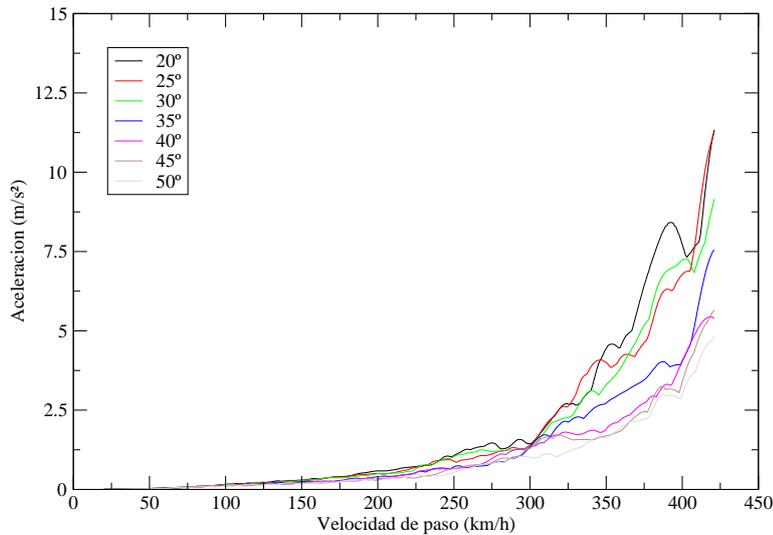


Figura 6.9: Aceleraciones en el punto de postproceso 5 (medio vano) para el paso de un tren AVE según el ángulo de cruce

De los resultados obtenidos, puede observarse que las zonas donde se dan las máximas aceleraciones debidas al paso del tren de cargas AVE recaen en el borde derecho de la cama de balasto, en la mitad-tercio superior de la pérgola para todos los puntos, exceptuando el caso de la pérgola de ángulo 50° que aparece en la banda central.

Del estudio tanto de la aceleración máxima en el conjunto de puntos de postproceso como de las gráficas para cada uno de ellos, se puede observar que para velocidades inferiores a 220 km/h incluso 250 km/h, la respuesta del sistema es similar para cada una de las pérgolas ensayadas. A partir de velocidades superiores a 250 km/h es donde comienza a observarse la influencia del ángulo de cruce. Los ángulos de cruce menores, y por tanto, esviajes superiores, presentan aceleraciones superiores.

Del estudio obtenido a través flechas estáticas se llegó a la conclusión de que las pérgolas de ángulos menores se deformaban menos por ser más rígidas globalmente. La forma de corregir flechas estáticas es aumentando la rigidez, y en el caso de las pérgolas se trataría en estos test de aumentar el intereje o aumentar el canto de las vigas. También se reducirían disminuyendo el peso propio del sistema. Sin embargo, en el caso de aceleraciones dinámicas, ocurre el fenómeno contrario. A menor ángulo de cruce, mayores aceleraciones. Una pérgola de un ángulo de 20° por ejemplo, es más rígida por tener menores flechas estáticas, pero es el sistema que mayor masa tiene (la losa aporta una masa constante en cada modelo, por lo que cada modelo varía su masa en función del número de vigas). Siendo el modelo más rígido y con masa mayor, a priori debería presentar aceleraciones menores. Aún siendo

la primera frecuencia superior, las siguientes son inferiores por lo que puede entenderse que el comportamiento dinámico para las pérgolas con ángulos de cruce inferiores está influenciado por modos superiores. Las diferencias son menos apreciables cada 5°, pero en incrementos de 10° sí son significativas a partir de 250 km/h. Por tanto, la relación entre masa y rigidez trasciende en las pérgolas de ángulos de cruce menores.

Pero no debe olvidarse que estamos ante un análisis de placas ortótropas, que aunque globalmente sean más rígidas, esta mayor rigidez se presenta exclusivamente en la dirección longitudinal. La incidencia de un tren de cargas móviles que depende evidentemente del ángulo de cruce, aunque la relación entre rigideces longitudinales frente rigideces transversales sea la misma entre todos los modelos por tener interejes iguales, cuando las cargas móviles inciden en una inclinación más próxima a la dirección longitudinal por ejemplo 20°, al existir una rigidez longitudinal bastante inferior a la transversal, aparecen estos valores precisamente superiores además consecuencia de esta descompensación de rigideces. Debería en estos casos, ampliarse la rigidez longitudinal debiendo ser superior en casos de ángulos de cruce más bajos ampliando el canto de la losa, por ejemplo.

6.3.2. Desplazamientos

En la tabla 6.6 se presentan los resultados de las máximas flechas dinámicas producidas por el paso del tren AVE en las distintas pérgolas según su ángulo de cruce. a continuación se respresentan las gráficas en los puntos de postproceso de máximos desplazamientos de dichas respuestas en función de la velocidad de paso del tren de cargas AVE.

	20	25	30	35	40	45	50
d_{max}	5.517	5.866	5.614	5.900	6.512	6.078	4.959
Punto	6	9	9	9	9	9	6
Velocidad	420	420	420	420	420	420	419

Tabla 6.6: Desplazamientos máximos para cada pérgola en función de su ángulo de cruce α . Desplazamientos en (mm), velocidades en (km/h)

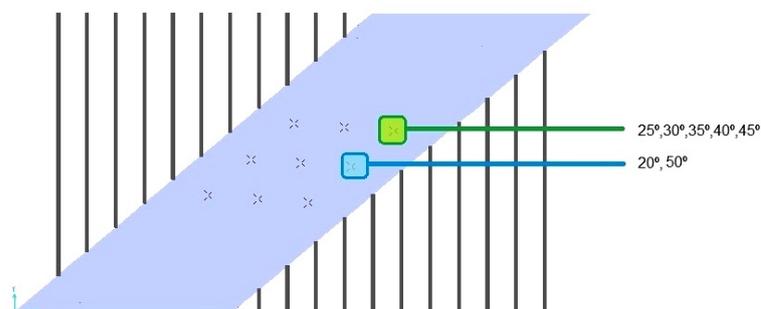


Figura 6.10: Puntos de máximos desplazamientos para cada pérgola en función de su ángulo de cruce

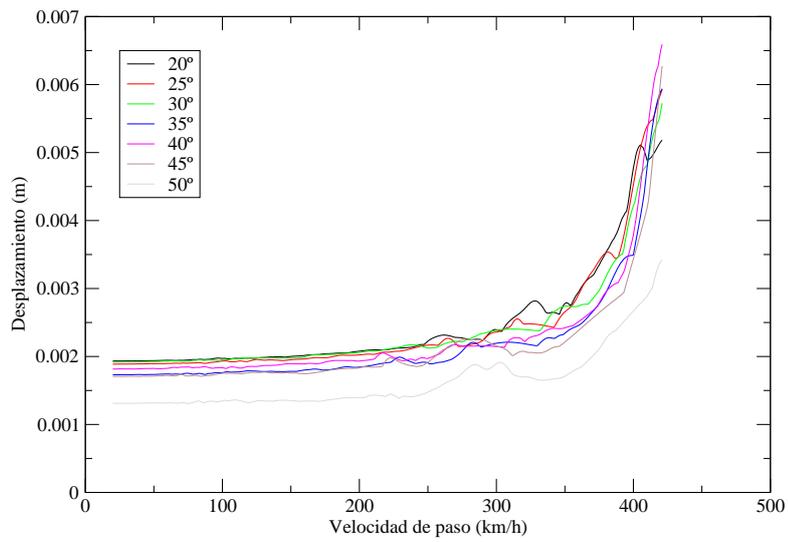


Figura 6.11: Desplazamientos en el punto de postproceso 9 para el paso de un tren AVE según el ángulo de cruce

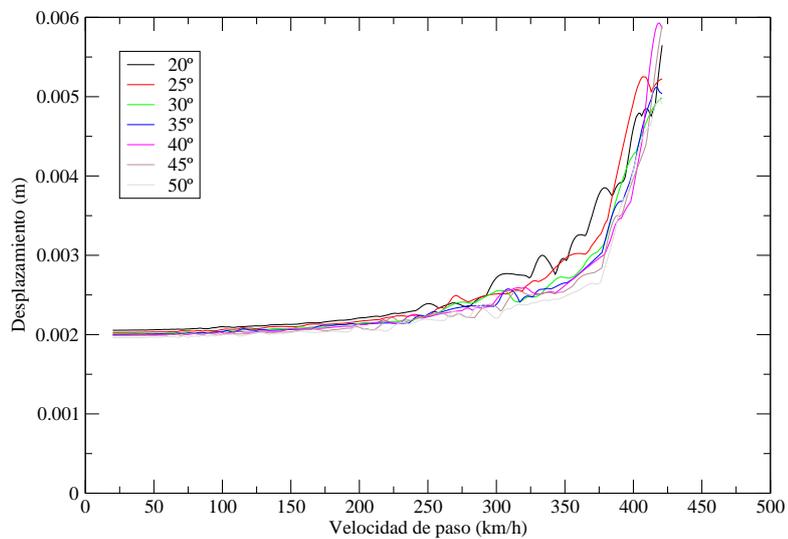


Figura 6.12: Desplazamientos en el punto de postproceso 6 para el paso de un tren AVE según el ángulo de cruce

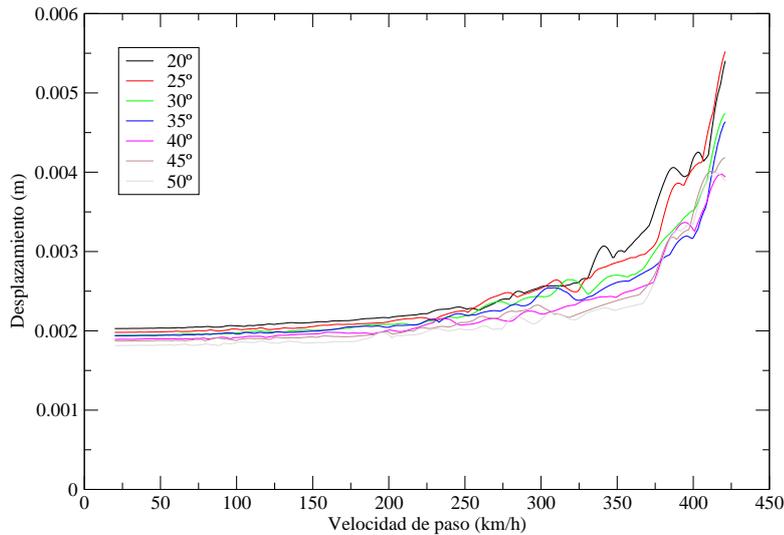


Figura 6.13: Desplazamientos en el punto de postproceso 5 (medio vano) para el paso de un tren AVE según el ángulo de cruce

Se observa que en desplazamientos dinámicos, no se aprecia una relación expresa entre el ángulo de cruce y la respuesta, ya que aumentan de diferente forma. Aún así se aprecian unos valores superiores para el caso de ángulos más bajos de cruce, aunque el esviaje en este caso no es tan determinante como en la respuesta de aceleraciones. Los puntos de postproceso donde se dan los valores máximos son precisamente los mismos que el tren de cargas AVE excitó en el caso de aceleraciones.

6.4. Conclusiones

Del presente capítulo pueden extraerse las siguientes conclusiones:

1. A menor ángulo de cruce, más vigas necesarias, mayores luces y mayor longitud de la línea de carga, por tanto, se proyectarán pérgolas más costosas. Ángulos de cruce inferiores a 35° presentan longitudes considerables que conducen a la posible elección de una pérgola.
2. Las pérgolas con menor ángulo de cruce presentan flechas estáticas inferiores. Estos test presentan el mismo peso propio de las losas de compresión, por lo tanto, las pérgolas con menor ángulo de cruce tienen superior peso propio ya que tienen mayor longitud y mayor número de vigas que aportan más peso al conjunto. Por lo tanto, a pesar de que todos estos test tienen el mismo interese, las pérgolas con menor ángulo de cruce son más rígidas globalmente.

3. Para conseguir igual flecha estática, los modelos de mayor ángulo de cruce precisarían de un intereje menor.
4. La primera frecuencia a flexión es también superior a medida que el ángulo de cruce es menor. Esto reafirma la conclusión anterior a pesar de que la masa de estas sea superior a las de ángulos superiores (la masa es la aportada por la losa de compresión, constante en todos los test y la aportada por las vigas es superior cuantas más vigas existan, que es el caso de los ángulos de cruce más bajos). El resto de los modos difieren entre ellos siendo más bajos en el caso de ángulos de cruce menores.
5. Para velocidades de paso inferiores a 220-250 km/h, las magnitudes en desplazamientos y aceleraciones son similares para los distintos ángulos de cruce. Es para velocidades superiores cuando la respuesta del sistema está determinada al ángulo de cruce.
6. En aceleraciones existe una notable diferencia según el ángulo, donde los ángulos de cruce menores presentan mayores aceleraciones.
7. La primera frecuencia es superior en los modelos con ángulos menores, mientras que los modos siguientes no cumplen esta tendencia. Las aceleraciones son también superiores, por lo que se desprende que la respuesta de las pérgolas con ángulos de cruce menores está condicionada por modos superiores.
8. En estos ensayos, los modelos tienen igual intereje y la masa está determinada por el número de vigas. Por la conclusión extraída del análisis estático, resultaba una rigidez global superior en los modelos de ángulos inferiores. También presentan una masa mayor. Sin embargo, las aceleraciones son superiores. La incidencia de un tren de cargas móviles en direcciones próximas a la longitudinal donde la rigidez es bastante más reducida que la transversal, resalta unas respuestas dinámicas superiores.
9. De lo anteriormente expuesto, a medida que disminuye el ángulo de cruce debe atenderse más a la relación entre rigidez longitudinal y transversal. De igual modo, a la relación entre masa y rigidez global. Las pérgolas de ángulos más reducidos deberían aumentar la rigidez longitudinal frente a las pérgolas de ángulos de cruce superiores.
10. En la respuesta dinámica de desplazamientos la incidencia del ángulo de cruce no es tan determinante como en la respuesta de aceleraciones.

CAPÍTULO 7

Cálculos dinámicos de pérgolas reales

En esta sección se procederá al cálculo dinámico completo de dos pérgolas reales para velocidades inferiores a 220 km/h tal y como la normativa IAPF-2011[1] prescribe. El objetivo en el presente capítulo es determinar qué trenes son los que más influencia tienen en las respuestas dinámicas para dicho rango de velocidades en puentes pérgola.

7.1. Planteamiento

Se tienen en cuenta los siguientes puntos para el cálculo dinámico en ambos casos:

- Para el cálculo dinámico se emplea el Método Semianalítico. Para su uso, como en todo el presente proyecto se ha venido realizando, se obtienen los modos de vibración mediante el *software* SAP2000 para proceder al cálculo exacto de las ecuaciones modales en el dominio del tiempo.
- Se procede a un filtrado de los modos de frecuencia menor o igual a 30 Hz, tal y como la normativa IAPF-2011[1] impone.
- Se consideran las hipótesis de balasto reducido un 30 %, balasto nominal y balasto incrementado un 30 %.
- Las vibraciones libres que tienen lugar después del paso de los trenes de cargas se calculan en un tiempo equivalente a diez periodos de vibración de valor más alto, con el fin de considerar tiempos suficientes donde las oscilaciones máximas se vean reducidas ya que tras el paso de los trenes pueden producirse igualmente efectos resonantes.
- La tasa de amortiguamiento es constante para cada modo del 2 %, definida en la normativa [1] para puentes de hormigón con luces superiores a 20 m.
- Los modelos numéricos se realizarán según elementos de tipo placa ortótropa para las zonas donde existe la losa de compresión de hormigón distinguiendo las diferentes regiones de ortotropía según los interejes y elementos tipo viga para las vigas exteriores. Se trata del Modelo 5 presentado en el capítulo cuarto del presente proyecto.

- Se consideran velocidades de paso de los trenes de cargas desde 20 km/h hasta $1.2 V_{max} = 1.2 * 220 = 264$ km/h en incrementos de 1 km/h.
- Análisis con 3 gdl por nodo ($u_z; R_x; R_y$)

7.1.1. Trenes de carga

Se definen a continuación los trenes que deben considerarse para los próximos cálculos dinámicos según la normativa [1]. Al tratarse de un cálculo dinámico hasta velocidad máxima de proyecto de 220 km/h deben realizarse dichos cálculos para distintos grupos de trenes según el intervalo de velocidad que se considere, considerando los definidos en el Apéndice C Apartado C.3 de la normativa [1]:

Hasta $v \leq 220$ km/h un total de 14 trenes:

- 10 Trenes HSLM¹.
- Tren real TALGO AV².
- Tren real AVE³.
- Tren real 4: tren de pasajeros ⁴.
- Tren real 5: Turbotren ⁵.

Hasta $v \leq 120$ km/h deben considerarse otros 3 trenes:

- Tren real 1: tren de vagones ⁶.
- Tren real 2: tren de locomotoras CC ⁷.
- Tren real 3: tren de vagones ⁸.

Hasta $v \leq 80$ km/h debe considerarse otro tren:

- Tren real 6: Convoy excepcional ⁹.

7.1.2. Resultados y comprobaciones asociados a los E.L.S según normativa IAPF-2011 [1]

Deben realizarse las siguientes comprobaciones:

¹Tren dinámico universal-A. Apéndice C normativa IAPF-2011[1] . Apartado C.1.1

²Apéndice C normativa IAPF-2011 [1]. Apartado C.2.5

³Apéndice C normativa IAPF-2011 [1]. Apartado C.2.4

⁴Apéndice C normativa IAPF-2011 [1]. Apartado C.3 Figura C.8

⁵Apéndice C normativa IAPF-2011 [1]. Apartado C.3 Figura C.9

⁶Apéndice C normativa IAPF-2011 [1]. Apartado C.3 Figura C.5

⁷Apéndice C normativa IAPF-2011[1]. Apartado C.3 Figura C.6

⁸Apéndice C normativa IAPF-2011 [1]. Apartado C.3 Figura C.7

⁹Apéndice C normativa IAPF-2011[1]. Apartado C.3 Figura C.10

- Flecha dinámica máxima sobre vía sin irregularidades para determinar el coeficiente de impacto ϕ .
- Flecha dinámica máxima para la comprobación de ELS: Límite $L/600$ siendo L la longitud de la pérgola.
- Aceleración máxima vertical para la comprobación de ELS: Límite $3,5 \text{ m/s}^2$ para vía de balasto.
- Alabeo máximo para la comprobación de ELS: $t \leq 4.5\beta \text{ mm}/3 \text{ m}$ para $v \leq 120 \text{ km/h}$ y $t \leq 3\beta \text{ mm}/3 \text{ m}$ para $120 < v \leq 220 \text{ km/h}$, con $\beta = 1.78r^2/(r + 0.5)^2$ siendo r: distancia entre apoyos de ruedas de un eje ferroviario o igual al ancho de vía incrementado en 0.065 m.

7.2. Cálculo dinámico 1: Pérgola Olmedo 1

Se presenta a continuación, los cálculos dinámicos descritos anteriormente para la pérgola real ubicada en la línea de alta velocidad Madrid-Galicia-Olmedo-Zamora (proyecto ACL-estructuras). El modelo numérico se ha definido ya para una pérgola de similares características en el capítulo cuarto mediante seis modelos diferentes y en el capítulo quinto, se validaron los diferentes modelos. En la realidad, se proyectaron dos pérgolas de geometrías iguales, por lo cual, se calcula exclusivamente una. Se resume la geometría y propiedades físicas de la pérgola:

- Número de vigas principales: 21
- Interejes de 2,4 m en el centro, 3 y 3,5 m en las vigas más exteriores.
- Canto de las vigas: 1.85 m
- Vigas HP-50, $E=41 \text{ Gpa}$, $\nu = 0.2$, $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$
- Losa de canto variable(0.25-0.34 m): Canto medio 0.29 m
- Losa HA-30, $E=30 \text{ Gpa}$, $\nu = 0.2$, $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$
- Ángulo de cruce: 29°

Los 20 puntos de postproceso que se representan en la figura 7.1, son los mismos que se definieron en los capítulos posteriores al igual que los puntos que definen la línea de carga representados en la figura 5.23 y la malla de elementos finitos representada en la figura 5.17 del capítulo quinto del presente proyecto.

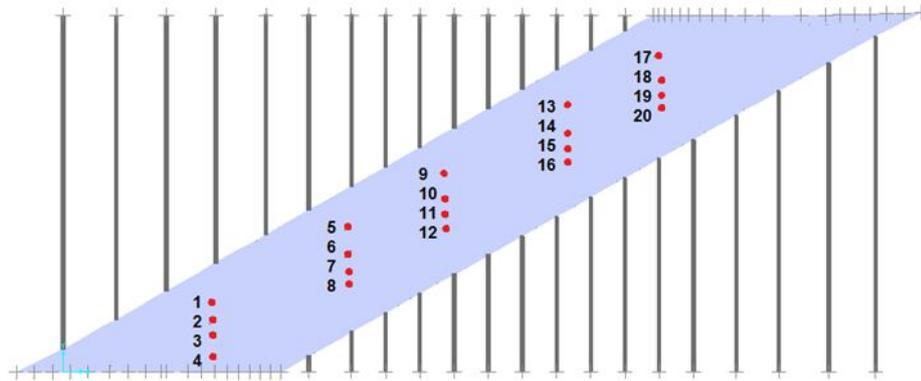


Figura 7.1: Puntos de postproceso para pérgola real 1. Modelización mediante modelo tipo 5

7.2.1. Frecuencias propias y modos de vibración

Mediante el método de elementos finitos empleando el *Software SAP2000* se obtienen las siguientes frecuencias naturales según las distintas hipótesis de balasto consideradas recogidas en la tabla 7.1. Tanto para la hipótesis de balasto decrementado como de balasto nominal se consideran 36 modos, y 37 para la hipótesis de balasto incrementado.

7.2.2. Respuestas dinámicas-Comprobaciones asociadas a los ELS

Se presentan los resultados obtenidos para las tres hipótesis de balasto que prescribe la normativa [1]. Las frecuencias más bajas se corresponden a la hipótesis de balasto incrementado y los resultados de máximos son acordes a las frecuencias más bajas. La normativa IAPF-2011 [1] cita que para velocidades de proyecto ordinarias inferiores a 220 km/h no presentan fenómenos resonantes y así se observa en los resultados de esta pérgola.

Debe calcularse el coeficiente φ'' para amplificar los resultados obtenidos por la presencia de las irregularidades de la vía. No obstante, las pérgolas se clasifican como tipologías no convencionales- puentes cortos. En este caso se conoce que los efectos de la interacción del vehículo aminoran las aceleraciones máximas en un orden de un 10 %. Esta reducción es similar al incremento de la respuesta por las irregularidades de la vía, luego puede considerarse que un efecto compensa al otro.

Modo	Balasto -30 %	Balasto nominal	Balasto +30 %
1	5.528	5.402	5.282
2	5.715	5.601	5.493
3	6.064	5.971	5.879
4	6.412	6.327	6.248
5	7.055	6.962	6.873
6	7.280	7.279	7.278
7	7.314	7.313	7.313
8	7.800	7.712	7.626
9	8.018	8.012	8.008
10	8.217	8.212	8.206
11	8.866	8.773	8.684
12	9.829	9.749	9.670
13	10.507	10.471	10.434
14	11.081	11.018	10.958
15	12.148	12.044	11.946
16	13.899	13.769	13.643
17	15.941	15.805	15.671
18	18.379	18.237	18.097
19	20.740	20.602	20.465
20	21.418	21.258	21.109
21	21.760	21.560	21.324
22	21.858	21.627	21.444
23	22.042	21.882	21.726
24	22.323	22.090	21.881
25	23.536	23.251	22.987
26	24.077	23.758	23.455
27	24.518	24.168	23.828
28	25.151	24.847	24.561
29	25.605	25.487	25.358
30	25.917	25.792	25.669
31	25.950	25.935	25.831
32	26.536	26.179	25.954
33	26.987	26.932	26.859
34	27.092	27.088	27.084
35	27.898	27.586	27.312
36	29.339	29.024	28.710
37	-	-	29.987

Tabla 7.1: Frecuencias naturales de la pérgola real 1 para cada hipótesis de balasto consideradas

Aceleraciones

Se presentan las tablas 7.2, 7.3 y 7.4 con las máximas aceleraciones obtenidas para las tres hipótesis de balasto y para los tres rangos de velocidades que la normativa [1] impone para velocidades ordinarias inferiores a 220 km/h. En ellas se exponen los puntos de postproceso donde se dan según la numeración definida en la figura 7.1, para el tren y la velocidad de paso que se obtiene.

	v=80km/h	v=120km/h	v=220km/h
$a_{max}(m/s^2)$	0.59	3.22	3.25
Punto	8	13	5
Tren	TR1	TR1	TR4
Velocidad	84	143	264

Tabla 7.2: Máximas aceleraciones para el cálculo dinámico de la pérgola real 1. Hipótesis de balasto reducido 30 %

	v=80km/h	v=120km/h	v=220 km/h
$a_{max}(m/s^2)$	0.59	3.09	3.33
Punto	8	13	5
Tren	TR1	TR1	TR4
Velocidad	83	141	264

Tabla 7.3: Máximas aceleraciones para el cálculo dinámico de la pérgola real 1. Hipótesis de balasto nominal

	v=80km/h	v=120km/h	v=220km/h
$a_{max}(m/s^2)$	0.57	2.97	3.41
Punto	8	13	5
Tren	TR1	TR1	TR4
Velocidad	82	140	264

Tabla 7.4: Máximas aceleraciones para el cálculo dinámico de la pérgola real 1. Hipótesis de balasto incrementado un 30 %

Del estudio de las tablas de máximas aceleraciones se observa que a medida que se aumenta la velocidad, aumentan también las aceleraciones. Los puntos de máximas aceleraciones se corresponden a los puntos ubicados en los medios tercios de la longitud de la pérgola (próximos a la zona central) siempre al borde de la cama de balasto. La hipótesis más desfavorable es la de balasto incrementado. Sin embargo, para velocidades inferiores (120 y 80 km/h) se alcanzan las máximas aceleraciones en la hipótesis de balasto reducido, tratándose del modelo que menor masa tiene de los tres. Las velocidades de paso donde se dan estos máximos son similares para las tres hipótesis, los puntos de postproceso son los mismos y los trenes que producen estas máximas respuestas también.

El valor máximo que prescribe la normativa IAPF-2011[1] para las aceleraciones en un puente de ferrocarril sobre balasto es de $a_{max} = 3,5m/s^2$. Valor que no se supera en ninguna de las hipótesis consideradas, por ninguno de los trenes, en los intervalos de velocidades 20-1.2*80 km/h, 20-1.2*120 km/h, 20-1.2*220 km/h. *Luego se cumple el límite asociado a los ELS para la respuesta de aceleración máxima vertical*

Las gráficas siguientes representan las envolventes de las aceleraciones para los trenes considerados en cada rango de velocidades, para la hipótesis más desfavorable. En ellas se aprecia claramente que las máximas aceleraciones aparecen en los puntos ubicados en las bandas exteriores de la cama de balasto, para los puntos ubicados aproximadamente desfasados un tercio de la longitud media de la pérgola de su punto central.

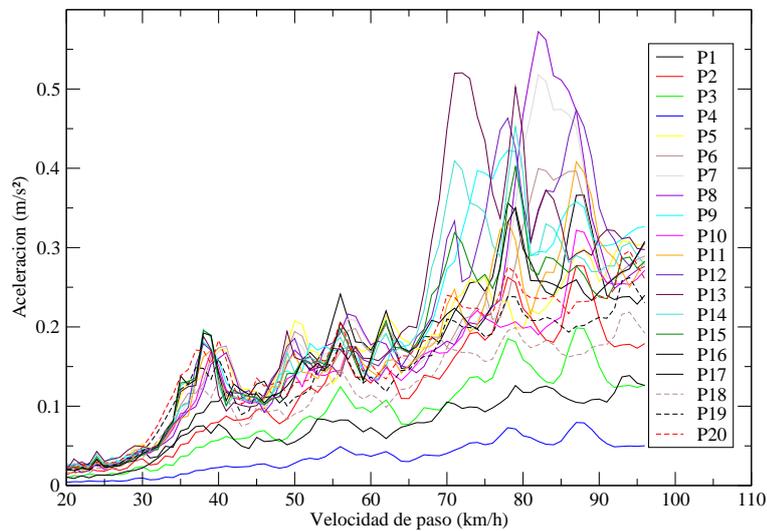


Figura 7.2: Envolvente de aceleraciones de la pérgola real 1. Velocidades hasta 80 km/h. Hipótesis de balasto incrementado

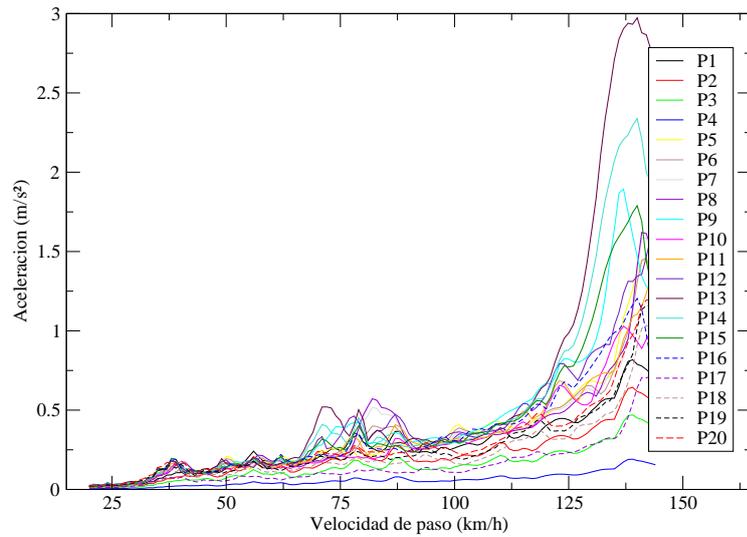


Figura 7.3: Envolvente de aceleraciones de la pérgola real 1. Velocidades hasta 120 km/h. Hipótesis de balasto incrementado

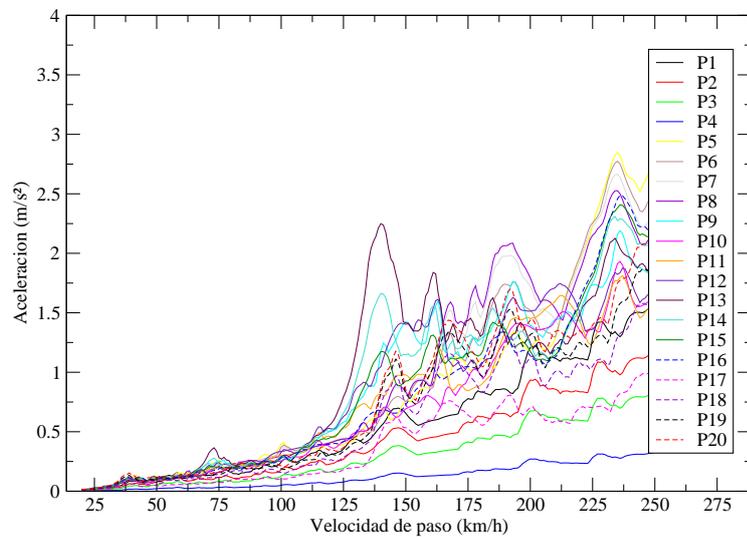


Figura 7.4: Envolvente de aceleraciones de la pérgola real 1. Velocidades hasta 220 km/h. Hipótesis de balasto incrementado

Seguidamente, se muestran las gráficas correspondientes a los puntos de máximas aceleraciones, donde se representan las aceleraciones obtenidas para el paso de cada tren considerado en los distintos cálculos. El objeto de estos gráficos es ver qué trenes tienen mayor

incidencia en estos cálculos. Para los cálculos de menos de 80 km/h se trata del tren real 1 y el tren real 6, para los inferiores a 120 km/h el tren real 1, tren real 2, tren real 3 y tren real 4. Para los cálculos inferiores a 220 km/h, se trata del tren real 4. Por tanto, es el paso de los trenes reales del Apéndice C Apartado C.3 de la normativa [1] el que gobierna la respuesta de la pérgola para velocidades ordinarias inferiores a 220 km/h. Se advierte que las aceleraciones producidas por el paso de los 10 trenes HSLM, AVE y TALGO están muy por debajo de las respuestas inducidas por el paso de dichos trenes reales para cada uno de estos intervalos de velocidades considerados.

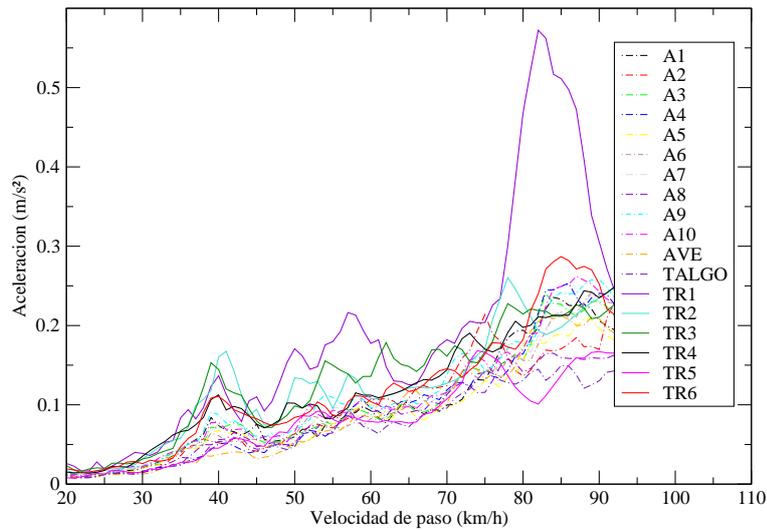


Figura 7.5: Composición por trenes: aceleraciones de la pérgola real 1 en el punto de post-proceso 8. Velocidades hasta 80 km/h. Hipótesis de balasto incrementado

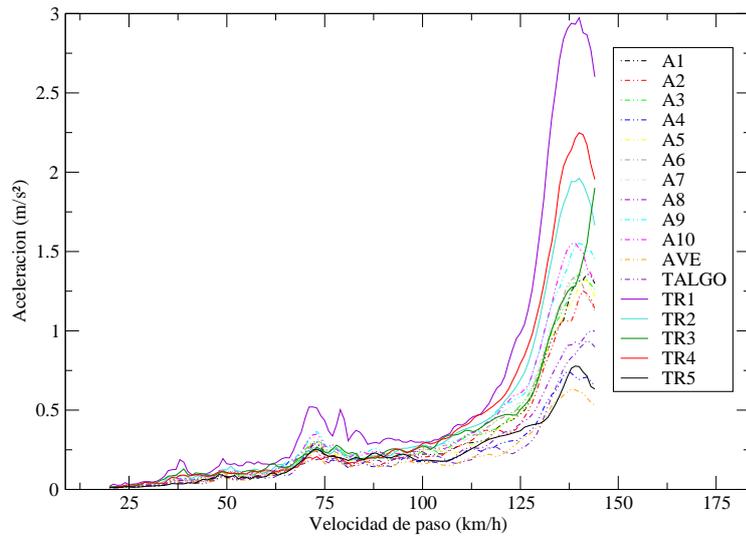


Figura 7.6: Composición por trenes: aceleraciones de la pérgola real 1 en el punto de post-proceso 13. Velocidades hasta 120 km/h . Hipótesis de balasto incrementado

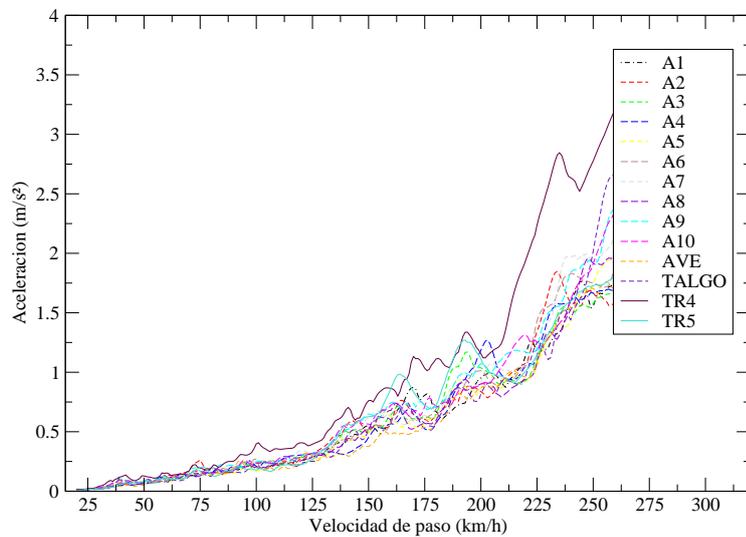


Figura 7.7: Composición por trenes: aceleraciones de la pérgola real 1 en el punto de post-proceso 5. Velocidades hasta 220 km/h . Hipótesis de balasto incrementado

Desplazamientos

Se presentan las tablas 7.5, 7.6 y 7.7 con los máximos desplazamientos obtenidos para las tres hipótesis de balasto y los tres rangos de velocidades.

	v=80km/h	v=120km/h	v=220km/h
d_{max} (m)	7.72E-03	6.49E-03	6.00E-03
Punto	10	10	5
Tren	TR6	TR3	TR4
Velocidad	96	144	258

Tabla 7.5: Máximos desplazamientos para el cálculo dinámico de la pérgola real 1. Hipótesis de balasto reducido un 30 %

	v=80km/h	v=120km/h	v=220km/h
d_{max} (m)	7.73E-03	6.67E-03	6.00E-3
Punto	10	10	5
Tren	TR6	TR3	TR4
Velocidad	96	144	253

Tabla 7.6: Máximos desplazamientos para el cálculo dinámico de la pérgola real 1. Hipótesis de balasto nominal

	v=80km/h	v=120km/h	v=220km/h
d_{max} (m)	7.75E-03	6.77E-03	6.00E-03
Punto	10	10	5
Tren	TR6	TR3	TR4
Velocidad	96	144	264

Tabla 7.7: Máximos desplazamientos para el cálculo dinámico de la pérgola real 1. Hipótesis de balasto incrementado

Del análisis de los máximos obtenidos en desplazamientos dinámicos, para las tres hipótesis coinciden tanto el punto de máximo como el tren de cargas que lo produce. En este caso, la hipótesis de balasto incrementado supera los valores para todos los intervalos de velocidades considerados.

El valor máximo que prescribe la normativa IAPF-2011[1] para la flecha dinámica en un puente de ferrocarril es de $L/600$. La longitud de esta pérgola es de 50.6 m, por lo que el valor límite que la normativa [1] impone es de $50.6/600 = 0.084\text{m}$. Valor que no se supera en ninguna de las hipótesis consideradas, por ninguno de los trenes, en los intervalos de velocidades 20-1.2*80 km/h, 20-1.2*120 km/h, 20-1.2*220 km/h. *Luego se cumple el límite asociado a los ELS para la respuesta de flecha dinámica máxima*

Las gráficas siguientes representan las envolventes de los desplazamientos para los trenes considerados en cada rango de velocidades para la hipótesis de balasto incrementado.

Los puntos donde se presentan los máximos coinciden con los puntos ubicados espacialmente en el centro de la pérgola, tanto en los bordes de la cama de balasto como en el centro de la misma. A medida que los puntos están más próximos a los apoyos, su desplazamiento es inferior como era de esperar.

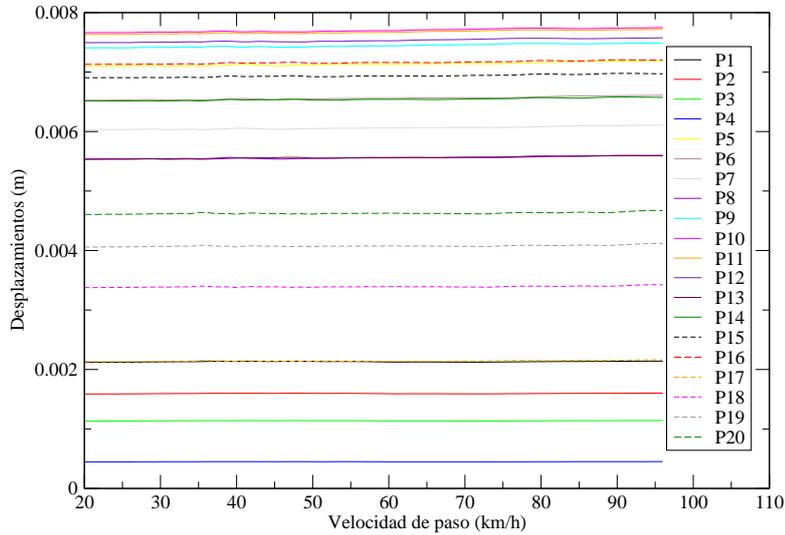


Figura 7.8: Envolvente de desplazamientos de la pérgola real 1. Velocidades hasta 80 km/h. Hipótesis de balasto incrementado

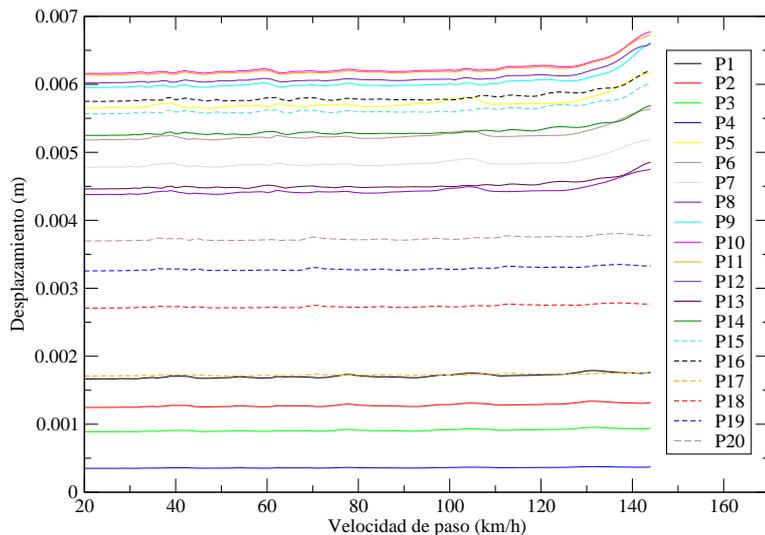


Figura 7.9: Envolvente de desplazamientos de la pérgola real 1. Velocidades hasta 120 km/h. Hipótesis de balasto incrementado

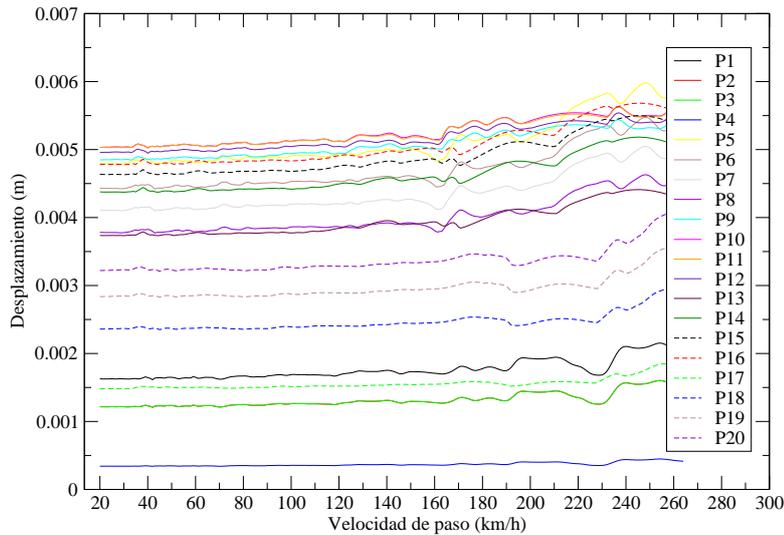


Figura 7.10: Envolvente de desplazamientos de la pérgola real 1. Velocidades hasta 220 km/h. Hipótesis de balasto incrementado

En las próximas gráficas se muestra la respuesta de desplazamientos en cada punto de postproceso donde se ha detectado el máximo, distinguiendo las velocidades de paso y por tanto, los distintos trenes que la recorren. Se observa que precisamente en el intervalo de velocidades comprendidas entre 20-80 km/h las flechas dinámicas obtenidas máximas son superiores a las obtenidas para velocidades comprendidas entre 20-120 km/h y estas mismas son superiores a las halladas en el intervalo 20-220 km/h. Para las velocidades comprendidas entre 20-80 km/h es el paso del tren real 6 el que produce estas máximas flechas y este tren se considera exclusivamente para el cálculo hasta 80 km/h. Las flechas adquieren unos valores constantes aproximadamente. Para el rango de velocidades comprendidas entre 20-120 km/h los máximos obtenidos pertenecen al paso de los trenes reales especialmente al tren real 3. Son constantes aproximadamente observándose un incremento para velocidades de paso superiores a 120 km/h. Para velocidades comprendidas entre 20-220 km/h vuelve a ser un tren real el que produce mayores desplazamientos siendo en este caso el tren real 4 (ya no se consideran en estos cálculos el tren real 1, 2, 3 y 6). Todos los trenes reales del Apéndice C Apartado C.3 de la normativa [1] producen desplazamientos superiores a los trenes HSLM, al tren AVE y TALGO, exceptuando el tren real 5 que obtiene desplazamientos de magnitudes similares a estos últimos. Por tanto, al igual que en la respuesta de aceleraciones, para velocidades inferiores a 220 km/h, son los trenes reales del Apéndice C-Apartado C.3 los que gobiernan la respuesta en desplazamientos.

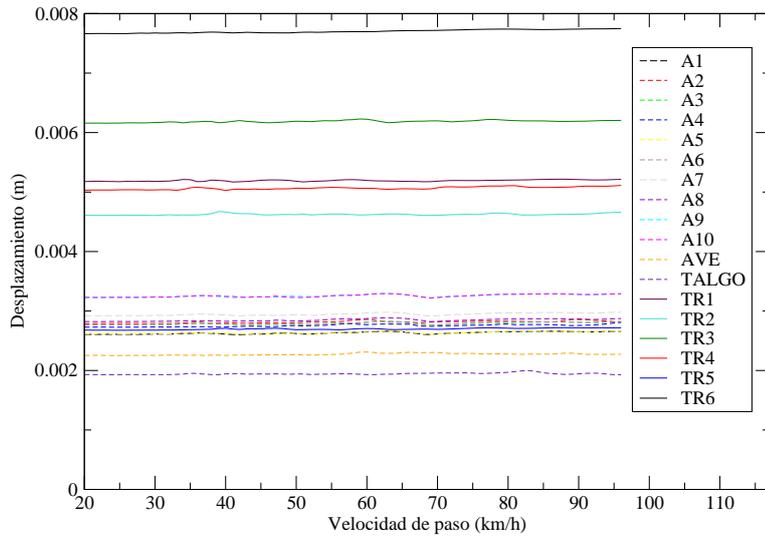


Figura 7.11: Composición por trenes: desplazamientos de la pérgola real 1 en el punto de postproceso 10. Velocidades hasta 80 km/h. Hipótesis de balasto incrementado

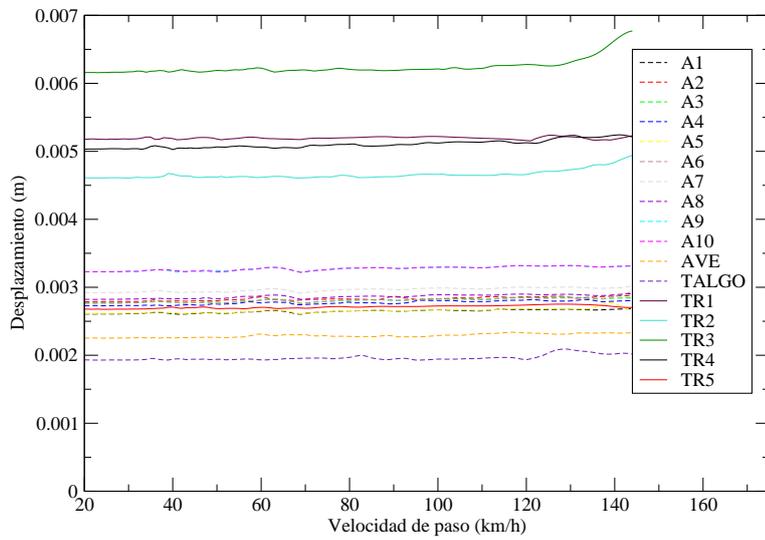


Figura 7.12: Composición por trenes: desplazamientos de la pérgola real 1 en el punto de postproceso 10. Velocidades hasta 120 km/h. Hipótesis de balasto incrementado

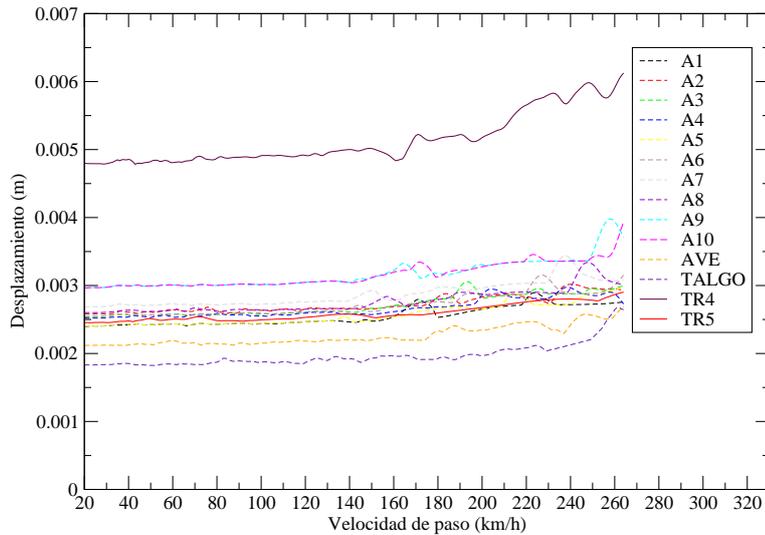


Figura 7.13: Composición por trenes: desplazamientos de la pérgola real 1 en el punto de postproceso 5. Velocidades hasta 220 km/h. Hipótesis de balasto incrementado

7.3. Cálculo dinámico 2: Pérgola de las Infantas

Se presentan a continuación los cálculos dinámicos para la pérgola real de las infantas (proyecto: ACL-estructuras). El modelo numérico representado en la figura 7.14 se obtiene de forma análoga al calculado para la pérgola anterior y al descrito en el capítulo 4 mediante el Modelo tipo 5. Se resume la geometría y propiedades físicas de la pérgola:

- Número de vigas principales: 40
- Interejes de 1.65 m en el centro, 2.2 m y 2.8 m en las vigas más exteriores.
- Canto de las vigas: 1.20 m
- Vigas HP-50, $E=36 \text{ Gpa}$, $\nu = 0.2$, $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$
- Losa de canto 0.30 m
- Losa HA-25, $E=30 \text{ Gpa}$, $\nu = 0.2$, $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$
- Presenta una junta de dilatación en el centro de la pérgola.
- Ángulo de cruce: 19°

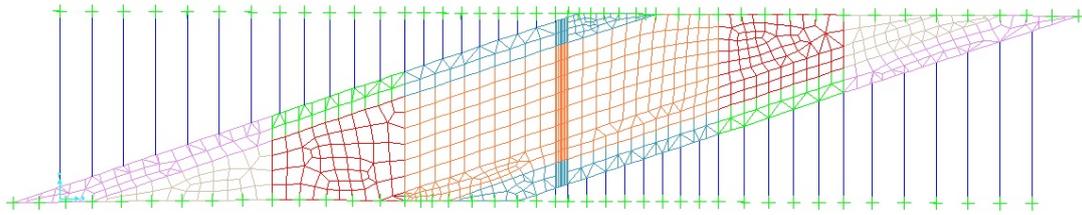


Figura 7.14: Malla de elementos finitos para la pérgola real 2.

Los 15 puntos de postproceso (color rojo) y la línea de carga (color verde) junto con la planta de la pérgola se representan en la figura 7.15. Las distintas regiones de ortotropía de esta pérgola se presentan en la figura 7.16.

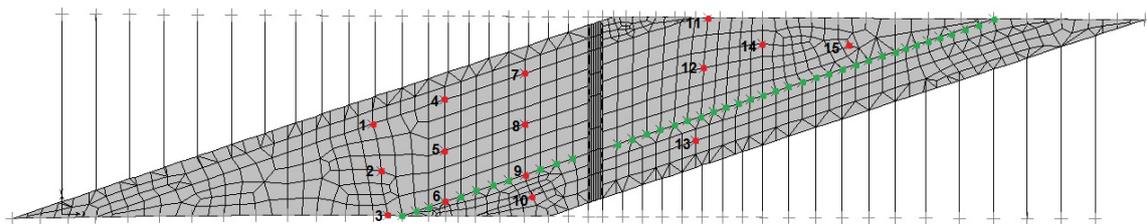


Figura 7.15: Puntos de postproceso y línea de carga de la pérgola real 2

- En color gris, se representa la zona correspondiente al intereje de 2.8 m y balasto.
- En color rojo, se representa la zona correspondiente al intereje de 2.2 m y balasto.
- En color naranja, se representa la zona correspondiente al intereje de 1.65 m y balasto.
- En color rosa, se representa la zona correspondiente al intereje de 2.8 sin balasto.
- En color verde, se representa la zona correspondiente al intereje de 2.2 sin balasto.
- En color azul, se representa la zona correspondiente al intereje de 1.65 sin balasto.

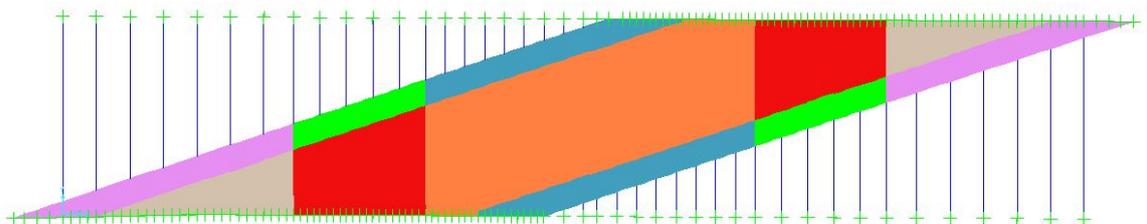


Figura 7.16: Regiones de ortotropía de la pérgola real 2. Modelo 5.

7.3.1. Frecuencias propias y modos de vibración

Se obtienen las frecuencias naturales recogidas en las tablas 7.8 y 7.9 para las hipótesis de balasto incrementado, nominal y reducido un 30 %. Para el primer caso se consideran 65 modos, para el segundo 63 y para la hipótesis de balasto reducido un total de 62 modos hasta 30 Hz.

7.3.2. Respuestas dinámicas-Comprobaciones asociadas a los ELS

A continuación se exponen los resultados hallados para cada hipótesis tanto para la respuesta en aceleraciones como para la de desplazamientos. Los cálculos dinámicos tienen las mismas hipótesis que las utilizadas en el cálculo dinámico 1. De igual modo esta pérgola se clasifica como puente corto-no convencional, por lo que puede obviarse el cálculo del coeficiente φ'' .

Aceleraciones

Se presentan las tablas donde se recogen los máximos detectados entre los distintos puntos de postproceso analizados. Todos ellos, al igual que en el cálculo dinámico de la pérgola real 1, son debidos al paso de trenes reales del Apéndice C-Apartado C.3 de la normativa[1]. Los resultados obtenidos son elevados, puede ser consecuencia del impacto ficticio que genera la transición en la zona de la junta, ya que no se ha considerado un reparto longitudinal de la carga para evitarlo. La estructura real cuenta con un sistema de reparto de carga que evita este efecto. Los puntos además están próximos a la junta, por ello el efecto descrito se ve reflejado en ellos.

Modo	Balasto -30 %	Balasto nominal	Balasto +30 %
1	5.062	4.918	4.778
2	5.236	5.072	4.927
3	5.310	5.223	5.034
4	5.448	5.229	5.139
5	5.521	5.414	5.311
6	5.936	5.819	5.712
7	6.006	5.910	5.798
8	6.347	6.096	5.890
9	6.769	6.635	6.509
10	6.890	6.783	6.670
11	7.551	7.357	7.181
12	7.952	7.801	7.657
13	8.229	8.107	7.998
14	9.001	8.919	8.835
15	9.255	9.159	9.012
16	9.318	9.254	9.252
17	9.581	9.510	9.432
18	10.099	9.996	9.895
19	10.114	10.097	10.095
20	10.913	10.781	10.653
21	10.993	10.821	10.664
22	11.491	11.470	11.454
23	11.984	11.826	11.683
24	13.025	12.829	12.639
25	13.432	13.245	13.067
26	14.637	14.509	14.381
27	15.075	14.811	14.569
28	16.322	16.110	15.913
29	17.283	16.989	16.713
30	18.681	18.415	18.161
31	19.827	19.364	18.925
32	20.246	19.845	19.460
33	20.964	20.216	19.547
34	21.774	21.113	20.537
35	22.029	21.418	20.625
36	22.178	21.556	20.998
37	22.622	21.939	21.533
38	22.967	22.331	21.780
39	23.108	22.737	22.293
40	23.829	23.106	22.538
41	23.880	23.436	22.826
42	24.118	23.772	23.699
43	24.476	24.431	24.233
44	25.185	24.727	24.382
45	25.215	24.855	24.384
46	25.400	25.176	24.955

Tabla 7.8: Frecuencias naturales de la pérgola real 2 para cada hipótesis de balasto consideradas

Modo	Balasto -30 %	Balasto nominal	Balasto +30 %
47	25.816	25.426	25.137
48	25.882	25.662	25.265
49	26.250	25.728	25.397
50	26.392	26.206	25.500
51	26.662	26.311	25.924
52	26.908	26.535	26.081
53	26.952	26.541	26.179
54	27.683	26.689	26.343
55	27.705	27.343	26.409
56	27.848	27.414	26.809
57	28.116	27.695	27.682
58	28.791	27.822	27.788
59	28.809	28.529	28.219
60	28.890	28.746	28.376
61	29.732	29.182	28.710
62	29.805	29.731	29.158
63	-	29.804	29.728
64	-	-	29.803
65	-	-	29.959

Tabla 7.9: Frecuencias naturales de la pérgola real 2 para cada hipótesis de balasto consideradas

	v=80 km/h	v=120 km/h	v=220 km/h
$a_{max} (m/s^2)$	0.929	4.154	6.761
Punto	8	8	15
Tren	TR6	TR1	TR4
Velocidad	80	123	260

Tabla 7.10: Máximas aceleraciones para el cálculo dinámico de la pérgola real 2. Hipótesis de balasto reducido

	v=80 km/h	v=120 km/h	v=220 km/h
$a_{max} (m/s^2)$	1.070	4.813	6.606
Punto	13	13	13
Tren	TR3	TR2	TR4
Velocidad	95	144	256

Tabla 7.11: Máximas aceleraciones para el cálculo dinámico de la pérgola real 2. Hipótesis de balasto nominal

	v=80 km/h	v=120 km/h	v=220 km/h
$a_{max} (m/s^2)$	1.125	5.975	6.619
Punto	8	13	13
Tren	TR3	TR2	TR4
Velocidad	96	142	251

Tabla 7.12: Máximas aceleraciones para el cálculo dinámico de la pérgola real 2. Hipótesis de balasto incrementado

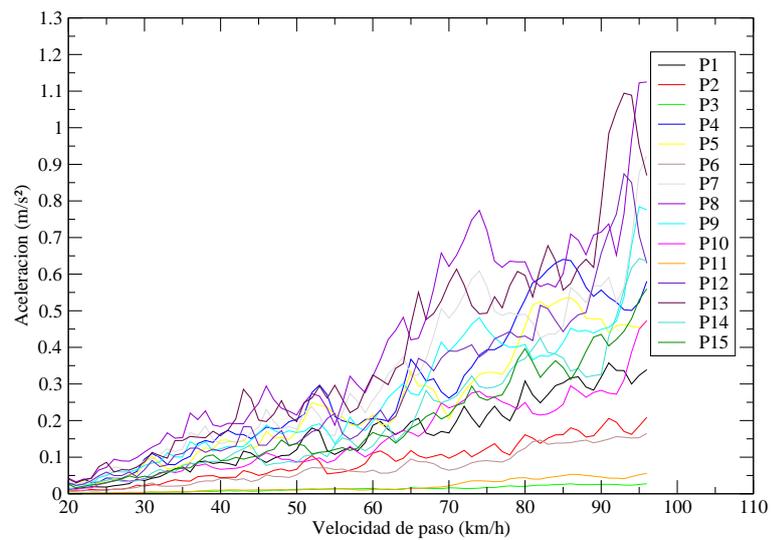


Figura 7.17: Envolvente de aceleraciones de la pérgola real 2. Velocidades hasta 80 km/h. Hipótesis de balasto incrementado

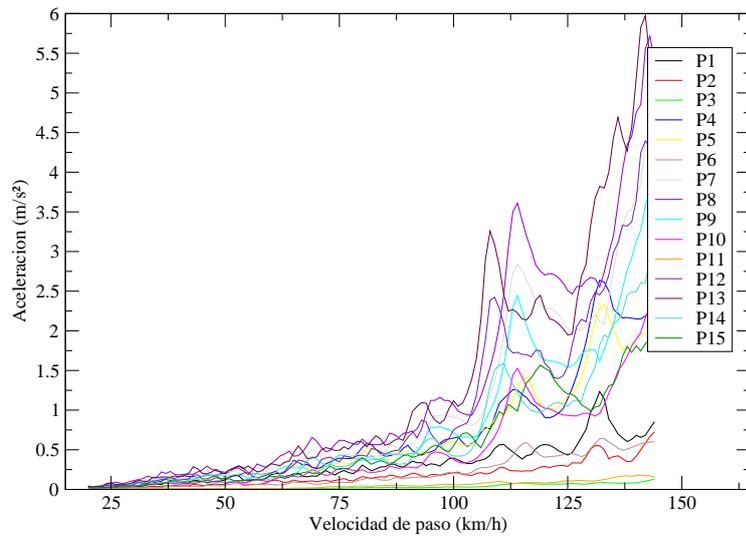


Figura 7.18: Envolvente de aceleraciones de la pérgola real 2. Velocidades hasta 120 km/h . Hipótesis de balasto incrementado

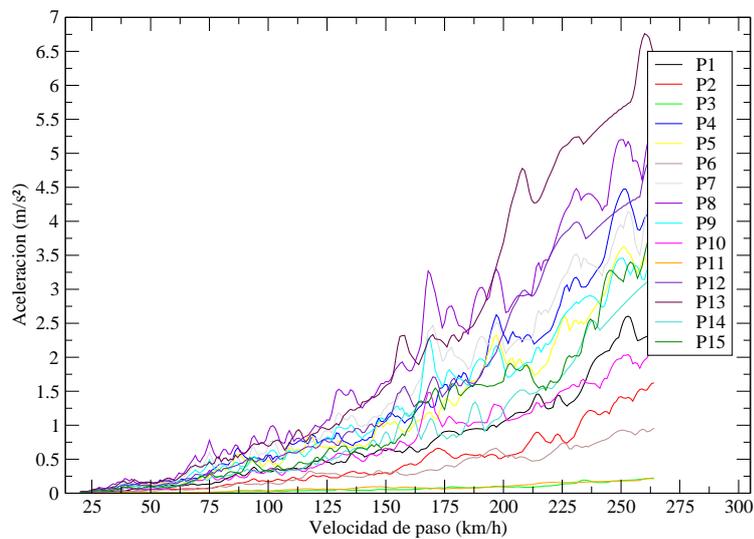


Figura 7.19: Envolvente de aceleraciones de la pérgola real 2. Velocidades hasta 220 km/h . Hipótesis de balasto reducido

Se muestran las gráficas correspondientes a los puntos de máximas aceleraciones con objeto de analizar qué trenes producen respuestas de mayor magnitud a su paso. Para todos

los intervalos, se observa que son nuevamente son los trenes del Apéndice C- Apartado C.3 de la IAPF-2011 [1] como ocurrió en el cálculo de la pérgola real 1.

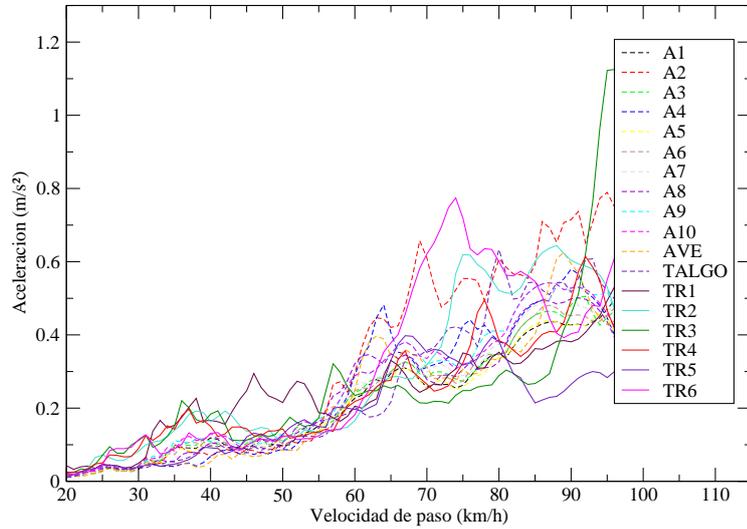


Figura 7.20: Composición por trenes: aceleraciones de la pérgola real 2 en el punto de post-proceso 8. Velocidades hasta 80 km/h . Hipótesis de balasto incrementado

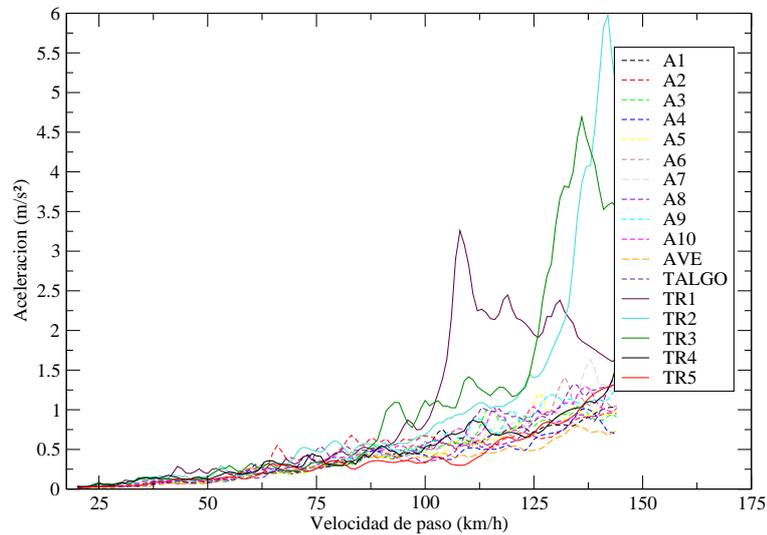


Figura 7.21: Composición por trenes: aceleraciones de la pérgola real 2 en el punto de post-proceso 13. Velocidades hasta 120 km/h . Hipótesis de balasto incrementado

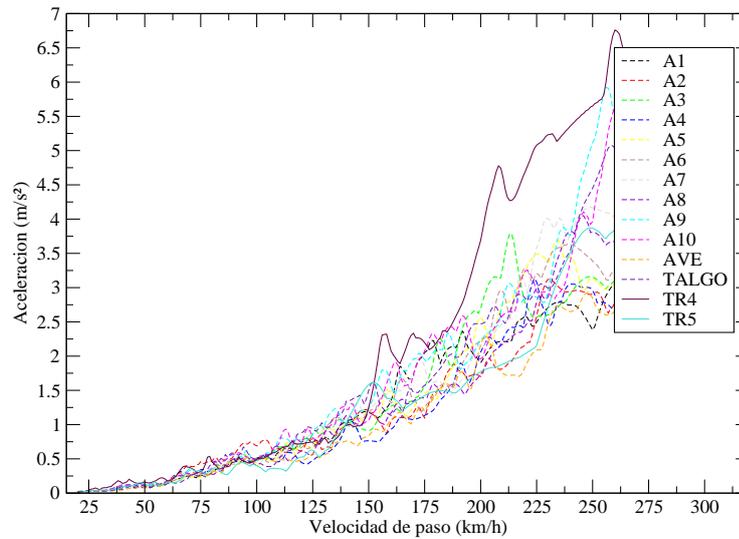


Figura 7.22: Composición por trenes: aceleraciones de la pérgola real 2 en el punto de post-proceso 13. Velocidades hasta 220 km/h. Hipótesis de balasto reducido

Desplazamientos

En las tablas siguientes se exponen los máximos obtenidos por el paso de los trenes en los distintos puntos de postproceso. Al igual que en el resto de cálculos dinámicos realizados en la presente sección, son debidos al paso de trenes reales. El punto de postproceso máximo coincide en todas las hipótesis e intervalos, y es precisamente un punto próximo a la junta de dilatación y a la línea de carga.

	v=80 km/h	v=120 km/h	v=220 km/h
d_{max} (mm)	5.287	7.113	6.396
Punto	13	13	13
Tren	TR6	TR3	TR4
Velocidad	86	144	261

Tabla 7.13: Máximos desplazamientos para el cálculo dinámico de la pérgola real 2. Hipótesis de balasto reducido

	v=80 km/h	v=120 km/h	v=220 km/h
d_{max} (mm)	5.323	7.881	6.516
Punto	13	13	13
Tren	TR6	TR3	TR4
Velocidad	94	140	256

Tabla 7.14: Máximos desplazamientos para el cálculo dinámico de la pérgola real 2. Hipótesis de balasto nominal

	v=80 km/h	v=120 km/h	v=220 km/h
d_{max} (mm)	5.338	8.646	6.588
Punto	13	13	13
Tren	TR6	TR3	TR4
Velocidad	94	141	251

Tabla 7.15: Máximos desplazamientos para el cálculo dinámico de la pérgola real 2. Hipótesis de balasto incrementado

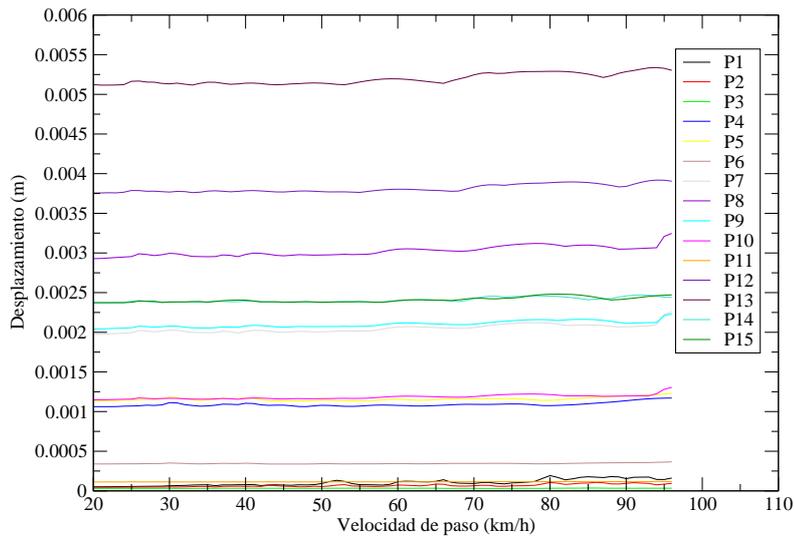


Figura 7.23: Envoltorio de desplazamientos de la pérgola real 2. Velocidades hasta 80 km/h. Hipótesis de balasto incrementado

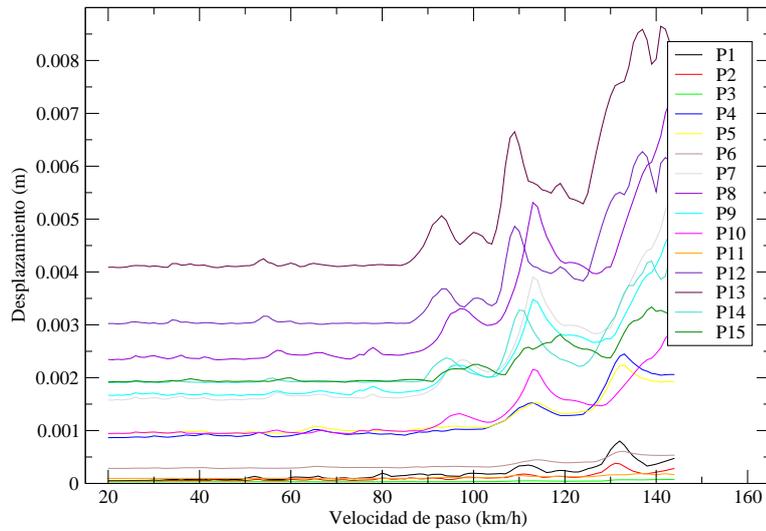


Figura 7.24: Envolvente de desplazamientos de la pérgola real 2. Velocidades hasta 120 km/h. Hipótesis de balasto incrementado

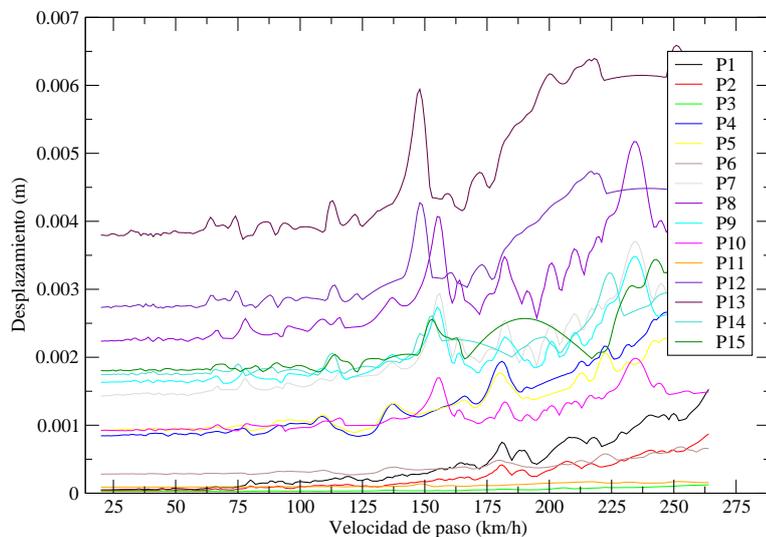


Figura 7.25: Envolvente de desplazamientos de la pérgola real 2. Velocidades hasta 220 km/h. Hipótesis de balasto incrementado

En las próximas gráficas se analiza la influencia de cada tren en el punto de postproceso donde se ha detectado el máximo. Al igual que ocurrió en el cálculo dinámico 1, la respuesta

para todos los intervalos de velocidades analizados es debida al paso de trenes reales del Apéndice C-Apartado C.3 de la normativa [1].

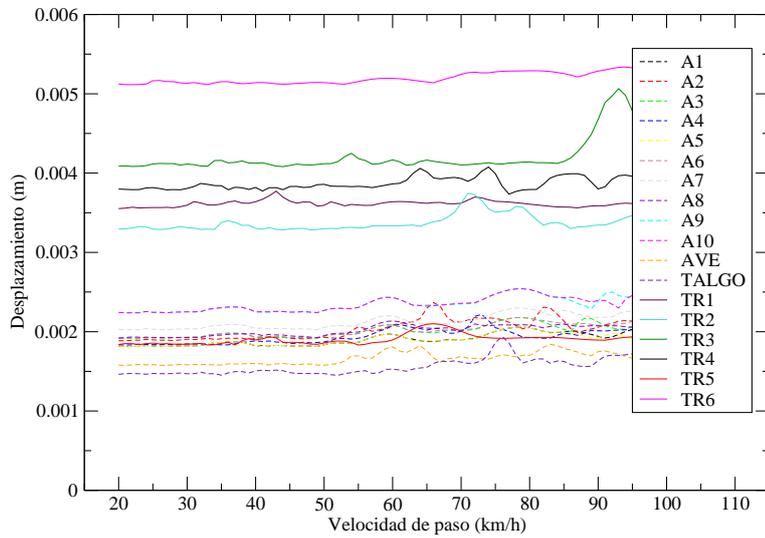


Figura 7.26: Composición por trenes: desplazamientos de la pérgola real 2 en el punto de postproceso 13. Velocidades hasta 80 km/h. Hipótesis de balasto incrementado

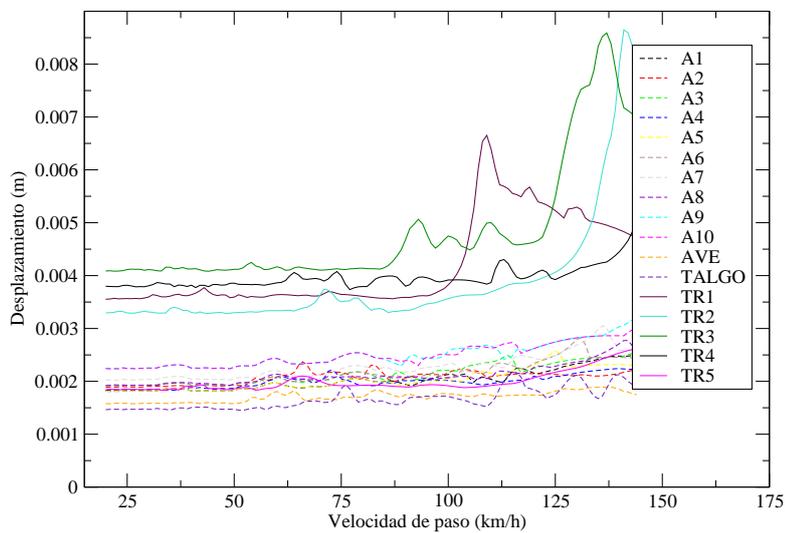


Figura 7.27: Composición por trenes: desplazamientos de la pérgola real 2 en el punto de postproceso 13. Velocidades hasta 120 km/h. Hipótesis de balasto incrementado

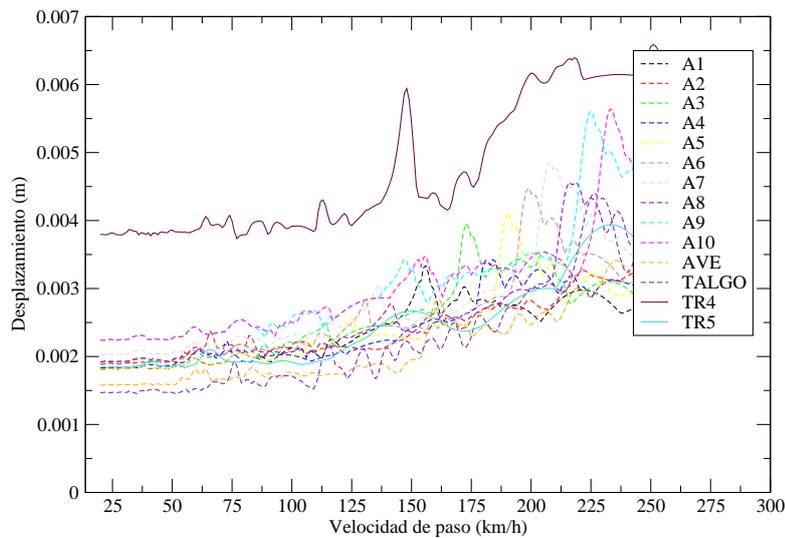


Figura 7.28: Composición por trenes: desplazamientos de la pérgola real 2 en el punto de postproceso 13. Velocidades hasta 220 km/h. Hipótesis de balasto incrementado

7.4. Conclusiones

Del presente apartado se extraen las siguientes conclusiones:

1. Los puntos de máximas aceleraciones se presentan en las bandas exteriores de la cama de balasto, aproximadamente en la zona central de la pérgola.
2. Los trenes que mayor incidencia tienen en la respuesta de aceleraciones son los trenes reales del Apéndice C Apartado C.3 de la normativa [1] para velocidades inferiores a 220 km/h. El efecto producido por los trenes HSLM, TALGO y AVE es bastante inferior a estos para los rangos de velocidades considerados: 20-80 km/h, 20-120 km/h y 20-220 km/h.
3. En el caso de la pérgola real 1 los trenes que gobiernan la respuesta de aceleraciones: Análisis 20-80 km/h: Tren real 1. Análisis 20-120 km/h: Tren real 1. Análisis 20-220 km/h: Tren real 4.
4. Las máximas aceleraciones aumentan con la velocidad de análisis.
5. Los puntos de postproceso donde se presentan los máximos desplazamientos dinámicos están ubicados aproximadamente en el centro de la pérgola, tanto en los extremos de la cama de balasto como dentro de ella.
6. Se presentan desplazamientos superiores para los rangos de velocidades inferiores (20-80 km/h). Este análisis incluye el tren real 6, tren que no circula a velocidades superiores y es precisamente el paso de dicho tren el que produce los valores más altos.

Los desplazamientos en este intervalo de velocidades mantienen resultados aproximadamente constantes.

7. Los desplazamientos obtenidos en el análisis con velocidades hasta 120 km/h son superiores a los obtenidos con velocidades hasta 220 km/h. Estos mayores desplazamientos son producidos por el paso de el tren real 3 que no es considerado para el intervalo de velocidad hasta 220 km/h.
8. Los desplazamientos hasta velocidades de 220 km/h son gobernados también, por un tren real, en este caso, por el tren real 4.
9. El paso de los trenes HSLM, AVE y TALGO provocan desplazamientos con magnitudes bastante inferiores a los producidos por el paso de los trenes reales para todas las velocidades hasta 220 km/h.
10. Tanto la respuesta en aceleraciones como en desplazamientos, para velocidades de paso inferiores a 220 km/h está gobernada por los trenes reales (tren 1, 2, 3, 4, 5 y 6) del Apéndice C-Apartado C.3 de la normativa IAPF-2011[1].

CAPÍTULO 8

Conclusiones, aportaciones y desarrollo futuro

Los estudios realizados se dividen en partes diferenciadas representadas en la figura 8.1.

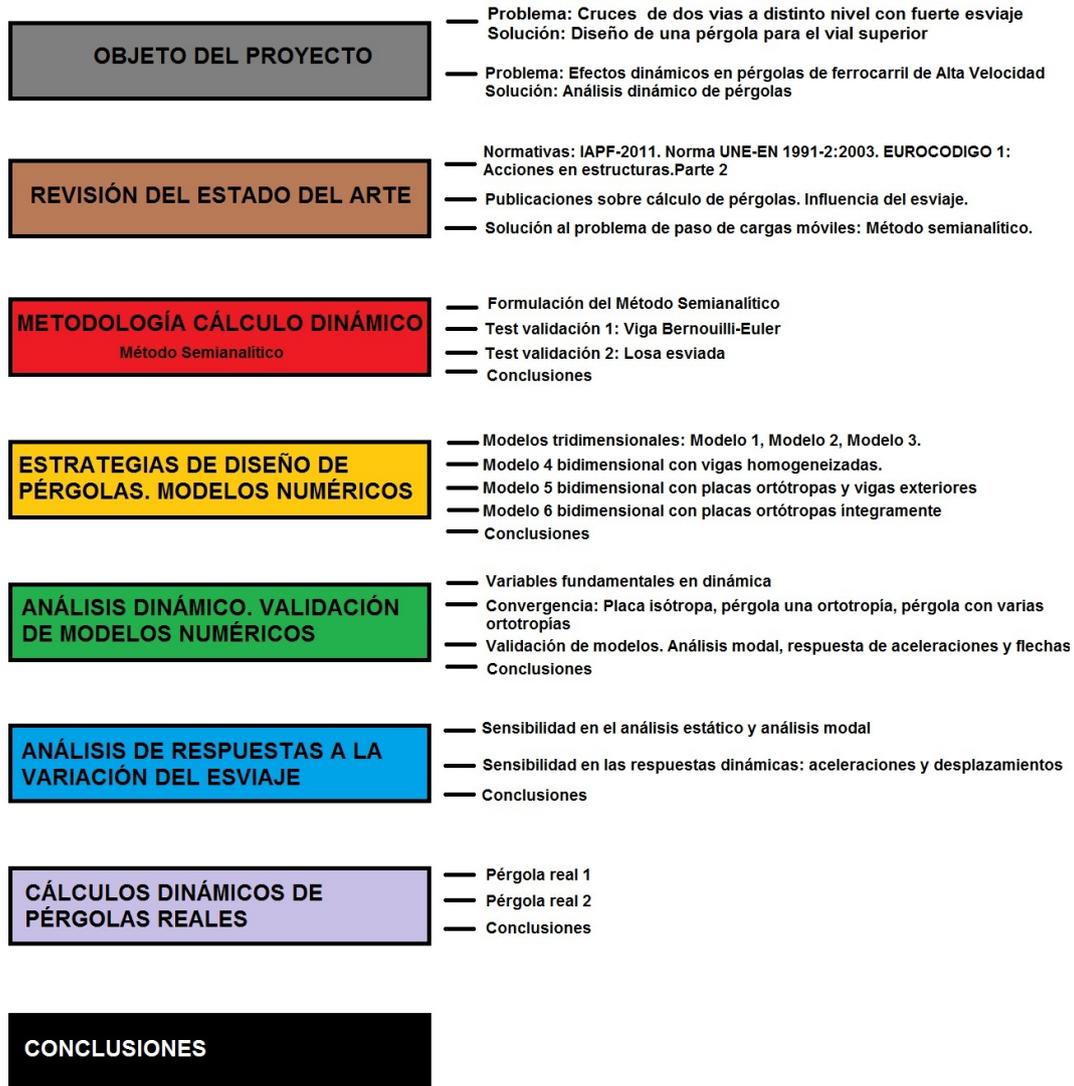


Figura 8.1: Esquema resumen del presente proyecto

Se sintetizan a continuación las conclusiones más relevantes obtenidas del presente proyecto:

1. El método semianalítico que resuelve el problema de paso de cargas móviles presenta una serie de ventajas significativas frente a los métodos de integración incremental paso a paso. Estas ventajas son un importante ahorro en el tiempo de cálculo, menor acumulación de errores por su cálculo exacto en la variable temporal, requiere pasos de tiempo menos exigentes que los métodos paso a paso, posibilita el cálculo de las respuestas dinámicas en los puntos de postproceso que se seleccionen, permite la evaluación de los pasos de carga cada km/h obteniendo una calidad y precisión de los resultados de las respuestas dinámicas. Este método es aplicable al cálculo de pérgolas como se ha demostrado.
2. Los modelos numéricos tridimensionales requieren de un alto grado de precisión en la unión entre las vigas y la losa de compresión para obtener que esta sea monolítica, siendo necesaria una malla de elementos finitos densa. Por lo general, la disposición de las vigas presentes en los modelos numéricos dentro de las zonas de la losa de compresión condiciona la forma del mallado de elementos finitos excepto en los modelos basados en losas ortótropas que permiten a priori, un mallado más libre.
3. En placas esviadas aparecen singularidades en las esquinas por los incrementos de tensiones debidas a la flexión de estas. Tanto la geometría, como las condiciones de contorno y los cambios de las propiedades mecánicas son decisivos en la influencia de estas singularidades en los resultados modales y dinámicos obtenidos. Uno de estos parámetros es el ángulo de cruce que en caso de pérgolas oscila entre valores comprendidos en los $50 - 20^\circ$ los cuales se considera que deben ser analizados con atención. Los cambios en las propiedades mecánicas también trascienden. En pérgolas es común que existan varias regiones de ortotropía en función del intereje y del tipo de modelo elegido. La convergencia de los modelos en el análisis modal está condicionada al ángulo de esviaje y al número de cambios de ortotropías en las placas siendo más compleja su convergencia cuanto mayores sean. El mejor mallado no es el más fino en todo el dominio sino aquel que se afine en las esquinas y en los cambios bruscos de ortotropías. Los modelos basados en placas ortótropas requieren de un estudio detenido de su convergencia.
4. En los cálculos dinámicos existen inevitablemente errores derivados del empleo del Método de Elementos Finitos y del resultado de convergencia obtenido. Las series temporales de las distintas pérgolas ensayadas muestran que las máximas respuestas son debidas a la entrada y salida de los trenes. Se validan los modelos obteniendo que los basados en placas ortótropas en su integridad son los que precisan de un mayor estudio de convergencia, y que es viable el empleo de placas ortótropas siempre y cuando se consideren interejes que permitan la aproximación de pérgolas a placas ortótropas equivalentes.

5. Las pérgolas con menor ángulo de cruce presentan flechas estáticas inferiores a pesar de tener una mayor longitud ya que son más rígidas globalmente para interejos iguales. El primer modo de flexión también es superior para cruces de ángulos pequeños, tendencia que no ocurre para modos superiores. Atendiendo a los resultados de aceleraciones dinámicas son similares en las distintas pérgolas según el esviaje adoptado hasta 250 km/h. A partir de esta velocidad de paso, las pérgolas de ángulos de cruce inferiores presentan aceleraciones superiores y este ángulo determina la respuesta dinámica. En desplazamientos el ángulo de cruce no es tan trascendente, ya que las respuestas no difieren tanto con la variación del esviaje. Por todo ello, debe cuidarse la relación entre rigidez longitudinal y transversal junto con la relación entre la masa y la rigidez en las pérgolas de ángulos de cruce inferiores.
6. Los trenes del Apéndice C-Apartado C.3 de la normativa [1] (trenes reales) gobiernan la respuesta tanto de aceleraciones como de desplazamientos dinámicos en los cálculos de pérgolas hasta velocidades de 220 km/h. La respuesta asociada al paso de los trenes HSLM, AVE y TALGO es bastante inferior a la producida por el paso de dichos trenes reales.

Como desarrollo futuro, se proponen las siguientes líneas:

1. Análisis completo de la convergencia de placas con distintas ortotropías esviadas.
2. Estudios in situ de las respuestas de las pérgolas ante el paso de trenes de ferrocarril de alta velocidad con el fin de verificar las conclusiones obtenidas.
3. Realización de una base de datos con cálculos de pérgolas reales con el fin de contrastar las conclusiones expuestas.
4. Estudio de las diferentes respuestas dinámicas considerando un único intereje medio o distintos interejos aumentándolos en las zonas externas. Realización de un estudio económico para considerar si el aumento de interejos en los extremos de la pérgola resulta más económico que reducir el canto de las vigas y considerar un intereje constante más reducido.

Bibliografía

- [1] Instrucción de Acciones a considerar en el proyecto de Puentes de Ferrocarril (IAPF), 2011.
- [2] UNE-EN 1991-2: 2003. Eurocódigo 1: Acciones en estructuras. Parte 2: Cargas de tráfico en puentes. Septiembre 2003.
- [3] A.Vidal Muro. *Vibraciones en las vías de ferrocarril*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, 2009.
- [4] A.W.Leissa, Y.S.Kim, O.G. McGee, and J.W.Kim. Corner stress singularity effects on the vibration of rhombic plates with combinations of clamped and simply supported edges. *Journal of Sound and Vibration*, pages 555–579, 1996.
- [5] A.W.Leissa, Y.S.Kim, O.G. McGee, and J.W.Kim. The influence of corner stress singularities on the vibration characteristics of rhombic plates with combinations of simply supported and free edges. *International Journal of Mechanical Sciences*, pages 17–41, 1999.
- [6] S.K Malhotra, N.Ganesan, and M.A. Veluswami. Effect of fibre orientation and boundary conditions on the vibration behaviour of orthotropic rhombic plates. *Composites*, 19:127–132, 1988.
- [7] S.A Eftekhari and A.A Jafari. Modified mixed Ritz-DQ formulation for free vibration of thick rectangular and skew plates with general boundary conditions. *Applied Mathematical Modelling*, pages 7398–7426, 2013.
- [8] O.G McGee, W.D.Graves, and T.S. Butalia. Natural frequencies of shear deformable rhombic plates with clamped and simply supported edges. *Pergamon*, pages 1133–1148, 1994.
- [9] P.Malekzadeh and G.Karami. Polynomial and harmonic differential quadrature methods for free vibration of variable thickness thick skew plates. *Engineering Structures*, pages 1563–1574, 2005.
- [10] M.V.Quintana and L.G.Nallim. A variational approach to free vibration analysis of shear deformable polygonal plates with variable thickness. *Applied acoustics*, pages 393–401, 2010.
- [11] D.Zhou, S.H.Lo, F.T.K Au, Y.K. Cheung, and W.Q.Liu. 3-D vibration analysis of skew thick plates using Chebyshev-Ritz method. *International Journal of Mechanical Sciences*, pages 1481–1493, 2006.

- [12] D.Zhou and W.X.Zheng. Vibration of skew plates by MLS-Ritz method. *International Journal of Mechanical Sciences*, pages 1133–1141, 2008.
- [13] J.L.Bellod and P.Tanner. Cruces en líneas de alta velocidad mediante pérgolas. *Hormigón y acero*, 62:91–103, 2011.
- [14] J.M.Goicolea. La consideración de los fenómenos dinámicos en el proyecto de puentes ferroviarios. Technical report, Universidad Politécnica de Madrid, 2007.
- [15] J.M.Goicolea, F.Gabaldón, and J.J.Arribas. Dynamic analysis of structures under high speed train loads: Case studies in Spain. *Dynamics of High speed railway bridges. Advanced course. FEUP-UPM*, Septiembre 2005.
- [16] J. Ugarte González. *Análisis del comportamiento dinámico de tableros de puentes pérgola de ferrocarril en líneas de alta velocidad. Trabajo Fin de Máster*. UPM, Septiembre 2013.
- [17] A.Kryloff. *Über die erzwungenen schwingungen von gleichförmigen elastischen stäben*. . Mathematische Annalen, 1905.
- [18] F. Bleich. *Theorie und Berechnung der Eisernen Brücken*. Universidad de Michigan, 1924.
- [19] L. Frýba. *Vibration of solids and structures under moving loads. 3rd ed*. Thomas Telford, 1999.
- [20] J. Li and M. Su. The resonant vibration for a simply supported girder bridge under high-speed trains. *Journal of Sound and Vibration*, 224:897–915. DOI:10.1006/jsvi.1999.2226, 1999.
- [21] Y.B. Yang, J.D. Yau, and L.C. Hsu. Vibration of simple beams due to trains moving at high speeds. *Engineering Structures*, 19(11):936–944. DOI:10.1016/S0141-0296(97)00001-1, 1997.
- [22] T. Hayashikawa and N. Watanabe. Dynamic behavior of continuous beams with moving loads. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 107:229–246, 1981.
- [23] Y.H. Chen and C.Y. Li. Dynamic response of elevated high-speed railway. *Journal of Bridge Engineering*, 5:124–130, 2000.
- [24] K. Henchi, M. Fafard, G. Dhatt, and M. Talbot. Dynamic behaviour of multi-span beams under moving loads. *Journal of Sound and Vibration*, 199(1):33–50. doi:10.1006/jsvi.1996.0628, 1997.
- [25] Y.Dugush and M.Eisenberger. Vibrations of non-uniform continuous beams under moving loads. *Sound and Vibration*., 254:911–926., 2002.
- [26] R.W.Clough and J.Penzien. *Dynamics of Structures*. Mac Graw-Hill., 1993.
- [27] N.M.Newmark. A method of computation for structural dynamics. *ASCE*, 85, 1959.
- [28] P. Museros, A. Martínez-Castro, and A.Castillo-Linares. Design goes up a gear. *Bridge. Design & Engineering*, Issue 33, Fourth Quarter:42–43, 2003.
- [29] P. Museros, A. Martínez-Castro, and A.Castillo-Linares. Semi-analytic solution in the time domain for non-uniform multi-span Bernoulli-Euler beams traversed by moving loads. *Journal of Sound and Vibration*, 294:278–297, 2006.

- [30] P. Museros, A. Martínez-Castro, and A.Castillo-Linares. Solución semianalítica al problema de paso de trenes de alta velocidad sobre puentes hiperestáticos de sección variable. *Actas del VI Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, Lisboa*, 2004.
- [31] P. Museros, A. Martínez-Castro, and A.Castillo-Linares. Semi-analytic solution for non-uniform Euler-Bernoulli beams under moving forces. *Proceedings of the 7th International Conference on Computational Structures Technology, Lisboa*, 294:278–297, 2004.
- [32] E.L.Wilson and R.W.Clough. *Dynamic Response by Step-By-Step Matrix Analysis*. Proceedings, Symposium On the Use of Computers in Civil Engineering, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1962.
- [33] E.L.Wilson, I. Farhoomand, and K.J.Bathe. Nonlinear dynamic analysis of complex structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, pages 241–252, 10973.
- [34] T.Hughes. *The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice Hall, 1987.
- [35] D.Y. Zheng, Y.K. Cheung, F.T.K. Au, and Y.S. Cheng. Vibrations of multi-span non-uniform beams under moving loads by using modified beam vibration functions. *Journal of Sound and Vibration*, 212(3):455–467. DOI:10.1006/jsvi.1997.1435, 1998.
- [36] E. García Macías. *Dinámica de Puentes Arco Atirantados para el ferrocarril de alta velocidad: estudio de un caso, planteamiento de alternativas y conclusiones para el diseño*. PFC. <http://digibug.ugr.es/handle/10481/22908>, 2012.
- [37] P. Martínez García. *Análisis dinámico de puentes mixtos bipoutre con doble acción mixta para el ferrocarril de alta velocidad. Estudio de un caso y conclusiones para el diseño*. PFC. <http://digibug.ugr.es/handle/10481/23757>, 2013.
- [38] *Example 1-022: Frame - Two-Dimensional Moment Frame with Static and Dynamic Loads. Software Verification, Program Name: SAP2000. Computers & Structures*.
- [39] S. Monleón Cremades. *Ingeniería de puentes: Análisis estructural*. Universidad Politécnica de Valencia, 1997.
- [40] S. Monleón Cremades. *Curso de Puentes. Volumen I*. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, 1986.
- [41] A. Carnerero Ruiz. *Comportamiento dinámico de tableros de puentes de ferrocarril de alta velocidad con elementos transversales a la dirección de la vía. Tesis doctoral*. PhD thesis, ETSICCP. Universidad Politécnica de Madrid, 2007.
- [42] L. Matas Montejo. *Aproximación analítica de frecuencias de flexión libres de losas aligeradas simplemente apoyadas mediante elementos finitos*. ETSICCP Universidad de Granada, 2011.

