COMPENDIO MATHEMATICO.

TOMO I.

P.F. en Valencia.

COMPENDIO MATHEMATICO,

EN QVE SE CONTIENEN TODAS LAS MATERIAS MAS principales de las Ciencias que tratan de la Cantidad.

QVE COMPVSO EL DOTOR THOMAS Vicente Tosca, Presbitero de la Congregacion del Oratorio de S. Felipe Neri de Valencia.

Y DEDICA

AL SEÑOR

D. FELIPE QVINTO

EL ANIMOSO,

REY DE LAS ESPAÑAS.

TOMO I.

Que comprehende (GEOMETRIA ELEMENTAR. ARITHMETICA INFERIOR. GEOMETRIA PRACTICA.

En Valencia, por Antonio Bordazar, año 1707.

SEÑOR.

ROMPE eſta vez el alborozo, aun por las lineas del reſpeto: porque ſiendo mayor que toda la alma, y no cabiendo en la dilatada, è immenſa esfera de ſus afectos, tomaſe por retorico hyperbole de ſu fineza la oſadìa. Y còmo pudiera de otra ſuerte caber en mi pequeñez tan alto penſamiento, como ponerme à los pies de V. Mag. y poner tan corta

ofrenda en ſus Reales manos? y mas
en ocaſion que, bolviendo V. Mag. à
renazer ſobre eſte Orizonte como
Sol, no arrojando rayos de juſta in-
dignacion, ſino eſparciendo luzes de
clemencia, ſerìa eſcaſa recompenſa
la ſangre mas pura de nueſtras venas,
aunque la ſacrificaſſemos por victima
de la lealtad? Confieſſo mi atrevimiẽ-
to, pero diſculpandole con el amor
ardiente que profeſſo à V. Mag. que
aun entre las cenizas de el mas hu-
milde vaſſallaje, no pierde las violen-
cias de fuego; ò con el jubilo correſ-
pondiente, que violentado diez y ſie-
te meſes de duras eſperanças, ya li-
bre con la poſſeſsion de tan glorioſa
ſervidumbre, puede licenciarſe eſte
arrojo: no deviendo eſtrañarſe, aun
en la flor mas humilde de el valle, ſa-
ludar al Sol que amanece à ſu Suelo,
ò

ò recompenſando del modo que pue-
de en fragrancias lo que recibiò en
influencias, ò deſabrochando ſu cora-
çon para preſentarle ſin doblez à
quien deviò la vida. Tenìa ya, Se-
ñor, antes que agena planta piſaſſe
eſte terreno, diſpueſtas en forma de
Compendio las Ciencias Mathemati-
cas, por exercicio Academico à la
Noble Juventud Valenciana, y aun
eſtampado el primer Tomo; pero
aviendo eſtampado en mi animo
con la prenſa del proprio conoci-
miento, que no mereceria aprecio en
Eſpaña tan toſca pluma, ni ſe logra-
rìa el beneficio publico à que eſtas
Ciencias ſe dirigen, ſi con el glorioſo
y triunfante Nombre de V.Mag. no
llevaſſe la recomendacion de ſu ſobe-
rano patrocinio; no le juzguè por
digno de la lùz, haſta que corridas
las

las ſombras que ocupavan eſte clima, pudieſſe lograr la dignacion de V. Mag. Y aſsi, aviendo amanecido en eſta primavera la de nueſtra dicha, me pareciò ſingularizarmela, conſagrando deſde luego à V.Mag. las primicias de mi aplicacion en eſte volumen; y aunque devo ſuponer, que toda la Geometria, y Arithmetica *Inferior* que contiene, lo parecerà en todo à viſta de V.Mag. cuya grandeza no ſe mide por Imperios, ſino por Mundos; cuyos triunfos no ſe cuentan por empreſſas, ſino por paſſos; cuyas virtudes en todo genero Chriſtianas, Politicas, Militares, ni ſe cuentan, ni ſe miden ſino por aſſombros; no dudo que V.Mag. le admitirà benigno, quando no por feudo de vn eterno reconocimiento, à lo menos por deſahogo de aquella fideliſsima, y afectuoſiſsima voluntad, con que ruego al Altiſsimo Dios guarde, y proſpere à V.Mag. en el auge de felizidades, que tanto intereſſan eſtos Reynos para ſu quietud; y la Catholica Igleſia para exaltacion de ſu Santa Fè.

Thomas Vicente Toſca.

APRO-

APROBACION

Del Señor Dotor Don Ramon Mascarell y Rubi, Canonigo de la Santa Metropolitana Iglesia de Valencia, Presbitero de la Real Casa de la Congregacion del Oratorio de San Felipe Neri de dicha Ciudad, y Examinador Synodal de este Arçobispado.

DE comission del Señor Dotor Luis Rocamora, Canonigo Penitenciario de la Santa Iglesia Metropolitana de Valencia, Oficial, y Vicario General nombrado por su muy Ilustre Cabildo en ausencia del Ilustrissimo y Reverendissimo Señor Don Fr. Antonio Folch de Cardona, Arçobispo de dicha Santa Iglesia, del Consejo de su Magestad, &c. hasta que la Santa Sede, ò su Ilustrissima dieren otra providencia: he visto este primer Tomo del Curso, ò Compendio Mathematico, que el R. P. Dot. Thomas Vicente Tosca, Presbitero, y Preposito de la Real Congregacion de N.P.S. Felipe Neri desea sacar à luz; y reconociendo el magisterio, y sutileza con que enseña, y trata materias tan dificiles, que aun el mas principiante se puede prometer fruto de su licion, nadie podrà dudar, quan vtil ha de ser, para la instruccion de muchos, que aficionados à tan nobles, y estudiosos empleos, malogran tal vez sus tareas, por no encontrar quien con claridad, y metodo (prendas singulares de su Autor) las enseñe: esto pretende con tan erudita obra, y si la passion de discipulo de tan gran Maestro no me engaña, podrè dezir, no aver visto quien con mas felizidad lo consiga. Y assi, no encontrandose en ella el menor apice, que desdiga de la pureza de nuestra Santa Fè, y buenas costumbres; y aviendo de ser de singular provecho para la Republica, y en que tendrà no poco que admirar el Orbe literario, me parece muy digna de la licencia que solicita. Assi lo siento, salva semper, &c. en la Congregacion à 8. de Junio 1707.

D.D. Ramon Mascarell y Rubi.

Imprimatur
Rocamora, V.G.

Imprimatur
Vt. Dolz del Castellar, R. Fis. Ad. Subdel.

INDI-

INDICE

DE LOS TRATADOS, LIBROS, y Capitulos, que en eſte Tomo primero ſe contienen.

TRATADO I.

De la Geometria elementar, que comprehende los ſeis primeros Libros de Euclides, juntamente con el vndecimo, y duodecimo.

TRATADO II.

De la Arithmetica inferior.

Li-

Li-

TRATADO III.
De la Geometria practica.

Li-

INTRO-

INTRODVCCION BREVE A LAS DICIPLINAS MATHEMATICAS.

ES natural en los hombres el deſeo, y apetito del ſaber, dixo Ariſtoteles *en el lib.* 1. *cap.* 1. *de la Metaphiſica*, y entre todas las demas ciencias naturales la que mas le ſatisface es la Mathematica: pues las excede ſin comparacion en la limpieza de ſus verdades, en la energia de ſus pruevas, en la claridad de ſus demonſtraciones, y continuado hilo de ſus conſequencias. Con eſto ſe mereciò el nombre de *Mathematica*, que ſegun ſu derivacion del Griego, es lo miſmo que doctrina, y diciplina, haziendoſe proprio eſte noble titulo, que todas podìan pretender por comun, porque carece de las dudas, y opiniones, tan frequentes, y comunes en las demas ciencias. No llegan à la excelſa region de la Mathematica aquellas nieblas que ſuelen obſcurecer el reſplandor de otras facultades; antesbien deciendem de ſu levantada esfera tales luzes, que deſcubren las ſendas à las otras artes naturales, para hallar la verdad deſeada con acierto.

Con ella ſe deſcubren los mas retirados ſecretos de la naturaleza. Ella es la que averigua las fuerças del impetu, las condiciones del movimiento, las cauſas, efetos, y diferencias de los ſones: la naturaleza admirable de la luz, las leyes de ſu propagacion: levanta con hermoſura los edificios, haze caſi inexpugnables las Ciudades, ordena con admiracion los exercitos; y entre las confuſas, è inconſtantes olas del mar, abre caminos, y ſendas à los que navegan. Se remonta vltimamente la Mathematica haſta el Cielo, para averiguar la grandeza de los Aſtros, y el concento, y armonia de ſus movimientos; y con varias invenciones de Teleſcopios, ha hecho corriente el comercio de la tierra con el cielo, tan deſeado por los ſiglos antiguos. No ſerà pues mal logrado el tiempo, que ſe conſumiere en ſu eſtudio; ni ſerà en vano el ſudor, que ſe empleare en tierra tan fertil, que le retorna en tan multiplicados frutos.

§. I.

Objeto, naturaleza, y diviſion de la Mathematica.

EL objeto de la Mathematica es la Quantidad, no tomada en quanto dize impenetrabilidad de vn cuerpo con otro, que es propria conſideracion del Phyſico; ſi ſolamente en quanto es extenſion, ò numero: y generalmente es objeto de la Mathematica aquello por lo qual vna coſa ſe dize mayor, menor, ò igual à otra; y la razon es, porque todo ſu empleo conſiſte en averiguar, y demonſtrar las propriedades, y atributos de dicha Quantidad. Con que Mathematica no es otro que *Ciencia que trata de la Quantidad en quanto menſurable, ò numerable.*

Caſi todos los Mathematicos antiguos, ſiguiendo à los Pythagoricos, dividieron la Mathematica en quatro principales partes: Arithmetica, Geometria, Muſica, y Aſtronomia. Pero procediendo con mejor orden las divido en Mathematicas puras, y no puras. Aquellas ſon las que de tal ſuerte tratan de la Quantidad, que no conſideran en ella accidente alguno, ni afeccion ſenſible: tales ſon la Geometria, y Arithmetica; porque aquella habla del Triangulo, ſin atender à ſi es blanco, ò negro; de madera, ù de hierro, &c. y eſta trata de ſus numeros, ſin meterſe en averiguar, ſi lo que numera ſon hombres, ò piedras, &c. Las Mathematicas no puras ſon las que conſideran la quantidad veſtida, y acompañada con algun accidente, o afeccion ſenſible; y porque las afecciones ſenſibles ſon proprias de la Philoſophia natural, ò Phyſica, ſe llaman Phyſico-Mathematicas: tales ſon la Muſica, que trata de la quantidad ſonora; la Optica, de la quantidad viſible, &c.

&c. Eſtas ſe ſubdividen en otras muchas, que con brevedad quiero referir aqui, antes de entrar en eſta Obra; para que viendo el eſtudioſo reducida à breve mapa, la amena provincia que ha de caminar, añada nuevos alientos à ſu empreſſa.

§. II.

Declaranſe las partes en que ſe divide la Mathematica.

LA primera de todas es la Geometria, que tratando de la extenſion, mide las lineas, angulos, ſuperficies, y ſolidos: averigua ſus proporciones, y abre los cimientos, ſobre los quales ſe levanta el edificio de toda la Mathematica. Siguеſe la Arithmetica, que ſe emplea en los numeros, eſpecula ſus propriedades, y exercita con ellos indefectibles operaciones. Entra en tercero lugar la Algebra, que con ſagacidad increible, ſigue por varias, y ocultas ſendas la verdad haſta encontrarla; diſuelve las queſtiones mas dificiles, y allana los mas intrincados laberintos. Siguеſe la Trigonometria, cuyo afan es reſolver Triangulos: à ella ſe deve todo el acierto de la Aſtronomia. Aumenta la facilidad de ſus operaciones la Logarithmica, que trata de la noble invencion de los Logarithmos, numeros artificiales, que no poco han enriquezido el orbe literario. Todas las referidas ſon ciencias puramente Mathematicas.

En el orden de las Phyſico-Mathematicas tiene el primer lugar la Muſica, que trata de la quantidad ſonora: averigua la razon de las conſonancias, y diſonancias: expone el ſyſtema muſico en diferentes generos: diſpone los Organos, Fiſtulas, Clavicordios, &c. compone diverſas melodias, ajuſtando en ellas lo acorde con lo diſcorde, para entretenimiento apacible del oìdo. Siguеſe la Mechanica, que con artificioſas maquinas aumenta ſobremanera las fuerças de qualquiera potencia: es increìble lo que aprovecha para philoſophar con acierto en las coſas de la naturaleza.

La Statica, aun con el peſo de ſu objeto, levanta ſu buelo haſta las regiones mas remotas de la Phyſica, averigua

gua las proporciones, y caufas de la gravedad de los cuerpos, examina fus momentos, efcudriña la proporcion de los movimientos por qualquiera linea: fu cremento, y decremento: depende de efta facultad toda la Baliftica, y Arte tormentaria, defuerte que fin ella no fe puede determinar cofa con acierto. Sigue à la Eftatica la Hydroftatica, que fe entretiene deliciofa en las corrientes de las aguas; averigua fus movimientos, compone de ellas fuentes artificiales, determina el origen, y caufa de las naturales: examina los pefos de los metales, y demas cuerpos en lo liquido, y abre gran puerta al conocimiento de las cofas naturales.

La Architectura Civil levanta los edificios con firmeza, hermofa proporcion, y fymmetria, fegun los cinco ordenes vulgares. Llegafe à efta el Arte que llaman *Montea*, que valiendofe de las reglas Geometricas, corta, y ajufta las piedras, levantando con ellas diverfos generos de arcos, y bovedas en las fabricas. Siguefe la Architectura Militar, que enfeña à fortalezer las plaças, con tal difpoficion de muros, baluartes, fofos, y otras defenfas, que pocos pueden pelear, y defenderfe contra muchos. La Artilleria, ò Arte Tormentaria, trata de las maquinas de fuego, difpone, y examina los cañones de Artilleria: regùla el modo de arrojar las balas, y otras invenciones de fuego à lugar determinado, por diferentes lineas.

La Optica confidera la quantidad en quanto es vifible, y afsi explaya fu confideracion por los campos mas amenos de la naturaleza, empleandofe en la efpeculacion del movimiento de la luz, y rayos vifuales: enfeña la formacion, y deformacion de las imagenes, en tan diverfas proiecciones, y reducciones, que de vn folo punto fe vè formado, lo que con ordenado deforden eftà deformado en muchos. Nacen de ella la Pefpectiva, Catoptrica, y Dioptrica. Aquella con diferentes traiecciones, proiecciones, y decufaciones de los rayos, finge lexos lo que eftà cerca, y abulta lo q̃ no tiene cuerpo. La Dioptrica, ò Arte Anaclaftica trata de los rayos de la luz refractos, de fus angulos, concurfos, y diverfiones: fe emplea en la fabrica de todo genero de telefcopios,

pios, y microfcopios, con los quales haze parecer cerca lo que eftà lexos, lexos lo que eftà cerca; grande lo que es pequeño, y pequeño lo que es grande: con efto ha dado à eftos figlos nuevas noticias de los cielos: nuevo conocimiẽto del artificio, y textura de las plantas, flores, y animales, haziendo en gran parte patente à los ojos aquel artificio, que tanto tiempo ocultava la naturaleza. La Catoptrica, ò Arte Anacamptica trata de los rayos reflexos, y atendiendo à fus leyes fabrica gran variedad de efpejos llanos, concavos, convexos, que ya recogiendo, ya efparciendo los rayos, caufan admirables efetos.

La Geographia confidera el globo terreftre, y nos ofrece, en las mapas que fabrica, vna perfecta idea de fu difpoficion, prefentando à nueftra vifta en breve efpacio fus dilatadas regiones, y provincias. Mas alto fe remonta la Aftronomìa, fube à las regiones celeftes, averigua las diftancias, grandezas, y difpoficiones de los Aftros, y en vn fyftema nos haze patente la gran maquina de fus movimientos. A la Aftronomìa figue la Gnomonica, que con la fombra de vn ftylo nos mueftra los movimientos de los cielos; y con la variedad de reloxes que fabrica, determina en diferentes planos los paffos, que dà el Sol por la luminofa carrera de fu Ecliptica. Y vltimamente la Chronographia fe emplea en la ordenacion de los tiempos, ajuftando fus periodos à los movimientos del Cielo. Eftas fon las materias mas principales de la Mathematica.

§. III.

Origen, progreffo, y vtilidad de las Mathematicas.

NO ay duda, que con las demas ciencias infundiò Dios à nueftro primer padre Adan la noticia de las Mathematicas, la qual fe fue continuando por fus defcendientes hafta Abrahan, que la comunicò à los Chaldeos, y à los Egypcios: y de eftos pafsò fin duda à los Griegos, porque Thales Milefio el año 584. antes del Nacimiento de Nueftro Salvador pafsò de Grecia à Egypto, para aprender la Geo-

Geometria,y comunicarla despues à los suyos: à este siguieron varones insignes en la Mathematica, como Pythagoras Samio, Anaxagoras Clazomenio,Oenopides Chio, Anaximandro Milesio, Hyppocrates Chio,Democrito, Theodoro, y su dicipulo Platon, Archytas Tarentino, Theoteto Atheniense, Neoclides Eudoxo, Xenocrates, Aristoteles, Euclides, Eratosthenes, Archimedes,Gemino, Menelao,de cuyos escritos compuso Theodosio en tiempo de Pompeio magno los elementos esfericos; siguiòse à estos Ptolomeo Alexandrino, Proclo, Theon, Campano, Juan de Regio-Monte,y otros muchos hasta este nuestro siglo, en el qual se han adelantado en gran manera las Mathematicas por muchos, è insignes Autores, especialmente de la esclarecida Religion de la Compañia de Jesus, que fuera largo el referirles:vease el Cathalogo, que de todos pone el P.Claudio Millet al principio de su Curso Mathematico. Han sido siempre estimadas, y tenidas en mucho estas ciencias, no solo de los Philosophos antiguos,como hemos visto; si tambien de Principes, y Reyes, que emplearon muchas tareas en su estudio, como fueron Atlante Rey de Mauritania; Agathocles Rey de los Siculos, Ptolomeo Rey de Egypto; Don Alfonso el Sabio Rey de Castilla y Leon, Iulio Cesar, Adriano, y Antonino Emperadores, y otros muchos. Fueron tambien estimadas de muchos Santos Padres de la Iglesia, que se emplearon en ellas, especialmente se nos ofrece S.Basilio, à quien alaba su dicipulo S. Gregorio Nazianzeno,por averse adelantado mucho en la Astronomìa, Geometrìa, Arithmetica, y otras Mathematicas; à quien se añaden S.Agustin, y el V. Beda, como se vè en lo que de estas materias dexaron escrito.

Y no es mucho apreciassen tanto su estudio, pues ademas de su nobleza, son de imponderable provecho. Ellas, dezìa Platon, avivan el ingenio, sutilizan el discurso, y le hazen apto para aprender mejor las demas ciencias: por esta causa excluìa de su Academia los que ignoravan la Geometria. Sin las Mathematicas no se puede dar passo en la Philosophia natural cō acierto; porque sin la Estatica còmo se han de explicar los movimientos de los cuerpos graves, su acceleracion, y proporciones? còmo, la restitucion de los compressos, y tensos, en que està sin duda la mayor parte de los efetos de la naturaleza? Sin la Optica, Dioptrica,y Catoptrica, què se discurrirà en materia de los colores, y de la luz, sino tinieblas? Què concepto se podrà hazer de la formacion del iris,coronas,y otros Metheoros? Quanto aprovechen tambien para la Theologia,lo declara muy bien S.Agustin *en el lib.2.de Doctr. Christiana, cap.* 16. 19. *y* 37. y S. Geronimo *tomo* 1. *epist.*1. Y especialmente son necessarias para la perfecta inteligencia de la Sagrada Escritura, la Geometria, Arithmetica, y Geographia, por aver casi innumerables textos, que requieren estas noticias para su inteligencia.

§. IV.

Methodo con que se deven enseñar, y aprender las Mathematicas.

La Methodo general para enseñar, y tratar qualquiera ciencia, ha de observar entre otras estas dos leyes: la primera, que todas sus materias vayan con tal orden, y consequencia, que parezca nazen las vnas de las otras: y aquellas se traten primero, que han de servir de luz para las demas. La segunda es, que se procure, en quanto fuere possible, mezclar con lo aspero lo deleitable; para que cogiendo el entendimiento temprana la cosecha de sus trabajos, prosiga con mayor denuedo sus tareas. Entrambas leyes he procurado observar en esta obra, introduciendo en ella al Letor por la Geometria elementar, y Arithmetica, à la Geometrìa practica, en quien perciba el fruto de lo que trabajò en las primeras. Siguense à estas la Arithmetica Superior,y Algebra, è inmediatamente la Musica, cuyos Theoremas no son menos apacibles al discurso, que deliciosas sus consonancias al oìdo.

Explico despues con brevedad las Secciones conicas de Apolonio,por servir de mucha luz à los tratados siguientes, como son la Machinaria,ò Mechanica, la Estatica,Hydrostatitatica, è Hydraulica, à que ſigue el Tratado de Rios, y Fuentes, y demas movimientos de las aguas. Entro deſpues en la Architectura Civil, y Militar, y Arte Tormentaria, ò Artilleria. De aqui paſſo à la Optica, Perſpectiva, Catoptrica, y Dioptrica. Explico deſpues la Trigonometria, y Logarithmica; que ſibien avian de ſeguir à la Geometria, y Arithmetica; pero por ſer mas para los Tratados ſiguientes, que para los referidos, les he dado eſte lugar inmediato al de la Eſphera celeſte, y terreſtre. A eſtos ſiguen la Gnomonica, y Nautica. Entro deſpues en el eſpacioſo campo de la Aſtronomìa, y paſſando à la Chronographia, cerrarè eſte Compendio Mathematico con vna breve explicacion de la Aſtrologìa; y aunque ſu poca certeza le deſmerece el lugar entre las Mathematicas, no ſerà de pequeña conſequencia manifeſtar los flacos fundamentos en que eſtriva. Siguiendo el referido orden el eſtudioſo, ſaldrà felizmente con ſu empreſſa; pero perderà el tiempo, y el trabajo, el que ſin aver entendido los primeros Tratados, quiſiere aplicar ſu eſtudio à los ſiguientes: Eſto no obſtante, aviendoſe hecho capaz de la Geometria, y Arithmetica, podrà emplear ſu trabajo en qualquiera de los otros; menos en la Aſtronomìa, que requiere eſtar verſado en la reſoluciõ de los triangulos, que la Trigonometria enſeña.

§. V.

Explicacion de algunos terminos, que ſon frequentes en la Mathematica.

SVelen los Autores, tanto antiguos como modernos, vſar de los terminos ſiguientes en ſus tratados Mathematicos. Definiciones, Axiomas, Poſtulados, Propoſiciones, Theoremas, Problemas, y Lemmas; los quales ſerà bien queden explicados al principio de eſta obra.

Definiciones ſon las explicaciones de los nombres, y terminos. Y aſsi dezimos, que por eſte nombre *Triangulo* no entendemos otra coſa mas que vna figura, que conſta de tres angulos. Eſtas explicaciones de los terminos es meneſter

ter eſten al principio de qualquiera Tratado, porque gran parte de las queſtiones, y tambien de los Paralogiſmos que ſe cometen, nace de la ambiguedad, y diferentes inteligencias de los nombres.

Poſtulados ſon vnos principios tan claros, y evidentes, que no neceſsitan de prueva, ni demonſtracion; y por ſer frequentes en el decurſo de la ciencia, piden concederſe al principio, para que deſpues no aya tropiezo en las demonſtraciones: como *de qualquier punto à otro punto ſe puede tirar linea recta.*

Axiomas, ò nociones comunes, ſon los principios generales comunes à todas las ciencias: tan evidentes, y claros, que por ſi miſmos con ſola la declaracion de los terminos, ſon manifieſtos, como es, *El todo es mayor que ſu parte*; porque conocido què coſa ſea todo, y parte, es evidente la dicha verdad.

Propoſicion es nombre general, y ſignifica aqui qualquiera concluſion de la ciencia, que proponemos para probarla por ſus principios. De las Propoſiciones, vnas ſon *Theoremas*, y otras *Problemas.*

Theorema, es vna Propoſicion eſpeculativa, que dize alguna propriedad, ò paſsion del ſugeto, como es: *Los tres angulos de qualquier triangulo juntos, ſon iguales à dos rectos.*

Problema, es vna Propoſicion practica, que propone el modo de hazer alguna coſa; como la que enſeña dividir vna linea en dos partes iguales.

Suele tambien muchas vezes hallarſe vna Propoſicion, que llaman *Lemma*. Eſta es la que vnicamente ſe pone, y ſe aſſume para demoſtrar la propoſicion, ò propoſiciones ſiguientes, de tal ſuerte, que ſi no es para eſte fin, no ſe harìa mencion de ella.

Ademas de las ſobredichas, ſe hallaran las ſiguientes en eſte Tratado.

Corolario, ò *Conſectario*, es vna Propoſicion, que por legitima conſequencia ſe infiere de lo ya demonſtrado.

Scholio, es vna Annotacion, que ſe añade algunas vezes al fin de alguna Propoſicion, para mayor explicacion ſuya, ò para mayor extenſion de lo que en ella ſe enſeña.

§. VI.

Explicacion de las citas mas frequentes.

TOda eſta obra và dividida en Tratados, cada Tratado en Libros, y cada Libro en Propoſiciones. Y aunque en algunos Tratados, para mayor claridad, y diſtincion de las materias , divido los Libros en Capitulos; pero eſtos jamas interrumpen el hilo de las Propoſiciones, que và continuado deſde el principio al fin de cada Libro, para mayor brevedad de las citas: eſtas ſe expreſſaràn ordinariamente en la forma ſiguiente.

Un numero ſolo denota la Propoſicion de aquel meſmo Libro; como (4) ſignifica *Propoſicion* 4. de aquel Libro. Quando ay vna L entre dos numeros, el primero denota la Propoſicion, y el ſegundo el Libro : como (5 .*l*.1.) denota *la prop*.5. *del lib*. 1. y no añadiendoſe otra coſa ſe ſignifica ſer de aquel meſmo Tratado. Eſta otra (*c*.2.1.*l*.3.) quiere dezir *corolario* 2. *de la prop*. 1. *del libro* 3. Y aſsi de las demas.

TRA-

TRATADO I. DE LA GEOMETRIA ELEMENTAR,

QVE COMPREHENDE LOS SEIS primeros Libros de Euclides, juntamente con el vndezimo , y duodezimo.

PROEMIALES.

DISPUSO la Sabiduria infinita de Dios eſta gran Fabrica del Mundo en medida , numero, y peſo, dixo Salomon *Sapi*. 11. 21 . manifeſtando, que todo ſu admirable artificio eſtà ajuſtado à los preceptos de la Geometria, Arithmetica, y Eſtatica : de que ſe colige , ſer neceſſaria la noticia de eſtas ciencias , para llegar al conocimiento perfeto de la Naturaleza. Tiene entre ellas el primer

mer lugar la Geometria, por ser la que con sus lineas, y angulos forma la planta, para levantar el Palacio de la Sabiduria, assegurando juntamente las basses de las siete colunas, en que descansa su maravilloso edificio. Singularmente necessitan de ella las demas Mathematicas, de quien sacan, firmeza para sus Theoremas, luz para sus discursos, y claridad para sus demonstraciones.

Geometria segun su ethimologìa, es lo mesmo que medida de la tierra; pero por comun sentir, y vso, tanto de Griegos, como de Latinos, se entiende por Geometria vna de las principales partes de la Mathematica, que tiene por objeto la Quantidad continua, sin atender, ni considerar en ella afeccion, ò accidente alguno sensible. O por mejor dezir, mira como proprio objeto todo lo mensurable, en quanto mensurable, como son lineas, superficies, solidos, angulos, &c. Con que la propria definicion de la Geometria es ser: *Ciencia que trata de lo mensurable en quanto mensurable*; esto es, en quanto se puede medir, dividir, aumentar, &c. sin atender à la materia, ni à sus qualidades.

Es en dos maneras, *Practica*, y *Especulativa*. Esta manifiesta meramente la verdad de las proposiciones, demonstrando las propriedades, y atributos de las cosas mensurables; y sus Proposiciones se llaman *Theoremas*: aquella dà reglas con que dirige las operaciones, para que salgan con acierto; y sus Proposiciones se llaman *Problemas*.

El origen de la Geometria es sin duda tan antiguo como el Mundo; pero singularmente floreciò en los Chinas luego despues del Diluvio, como prueva el Obispo Caramuel *art. 1. del Prologo*: deviò singularmente estimacion à los Egipcios, y sus mayores creces à los Griegos, cuyos fragmentos recogiò Euclides, y compuso de ellos los Elementos de esta facultad por los años 315. ò segun otros 313. antes del Nacimiento de Christo.

Ay de estos Elementos muchos, y muy doctos Comentarios, por lo que entiendo ceñirme à solas aquellas Proposiciones, que juzgarè mas necessarias, omitiendo las que lo fueren menos; pero sin faltar à la claridad, que deseo sea tanta, que qualquiera, con vna mediana aplicacion, pueda aprenderles sin Maestro. El estilo ordinario serà este: Cada Proposicion tendrà tres partes, la primera serà la explicacion de la propuesta: la segunda serà, en los Theoremas la Preparacion; y en los Problemas, la Operacion: y la tercera la Demonstracion; y si fuere menester, en los Problemas se añadirà despues de la Operacion, la Preparacion para demonstrarla.

LIBRO I.

DEFINICIONES.

1. PVNTO *es lo que no tiene parte alguna.*

Explicacion. El punto se supone y considera como indivisible, y por consiguiente sin partes algunas, en que se pueda dividir: Y aunque los Philosophos duden de la existencia, y aun de la possibilidad de los indivisibles physicos, que llaman *Zenonicos*; pero del punto mathematico nadie puede dudar, por ser indivisible solo por suposicion, y consideracion del entendimiento.

Tres son las especies de la Quantidad continua: *Linea*, *Superficie*, y *Cuerpo*, ò *Solido*.

2. *Linea es vna longitud sin anchura.* Esto es, en quien se considera vna sola extension, ò dimension, que se llama *Longitud*.

3. *Los extremos de la linea son puntos.*

Dividese la linea en *Recta*, y *Curva*.

4. *Linea recta es aquella que està igualmente estendida entre sus extremos.* Esto es, que entre sus extremos no se puede señalar punto alguno mas alto, ò mas baxo, que dichos extremos, segun Euclides. O es aquella, segun Platon, cuyos extremos cubren los medios: ò es la mas breve distancia entre dos puntos, segun Archimedes. *Linea curva* es qualquiera otra.

5. Su-

5. *Superficie es vna quantidad que tiene longitud, y latitud, sin profundidad.* Esto es, superficie es vna quantidad, en quien se consideran solas dos dimensiones, de las quales, la que se quiere suponer primera, se llama *Longitud*: y la segunda, *Latitud*.

6. *Los extremos de la superficie son lineas.*

La superficie se divide en *plana*, y *curva*.

7. *Superficie plana es aquella, que està igualmente estendida entre sus extremos.* O à quien por todas partes se ajusta vna linea recta. Superficie curva es qualquiera otra. Solido, ò cuerpo, es vna magnitud, que consta de las tres dimensiones, longitud, latitud, y profundidad. Con que la linea es vna sola dimension: la superficie, dos: el cuerpo, tres; y el punto, ninguna.

8. *Angulo plano, es la inclinacion de dos lineas, que concurren en vn punto, sin estar en drechura la vna con la otra.*

Explicacion. El Angulo plano se forma de dos lineas, que concurren en vn punto, como ABC (*Lam.* 1. *fig.* 1.) Y dichas lineas no han de estar en derechura la vna con la otra, porque de essa suerte formarìan las dos vna linea, como ABD. Adviertese, que ser el angulo mayor, ò menor, no depende de ser mas, ò menos largas las lineas que le componen; si de estar mas, ò menos abiertas: desuerte, que el angulo ABC siempre serìa el mesmo, aunque las lineas BA, BC, corriessen infinitamente. Qualquiera angulo se suele nombrar con tres letras; y la que està en medio, es siempre la que se halla en el concurso de las lineas, como en este exemplo la letra B.

El Angulo por razon de las lineas que le forman se divide en *rectilineo*, *curvilineo*, y *mixtilineo*.

9. *Angulo rectilineo es el formado de lineas rectas. Curvilineo de lineas curvas. Y Mixtilineo, de vna recta, y otra curva.*

Por razon de la inclinacion, ò abertura de las lineas, se divide en *Recto*, *Obtuso*, y *Agudo*.

10. *Angulo Recto es qualquiera de los que forma vna linea con otra, quando de tal suerte concurre con ella, que à entrambas partes forma los angulos iguales; y esta linea se llama Perpendicular.*

11. *Angulo obtuso es aquel que es mayor que recto.*

12. *Angulo agudo, el què es menor que recto.*

Explicacion. En la *fig.* 2. la linea GF de tal suerte cae sobre EH, qne no se inclina à vna, ni otra parte, con que forma los angulos GFE, GFH iguales: y en este caso se dizen estos angulos rectos; y la linea GF es perpendicular à la EH. Y porque el Angulo IFE es mayor, que el recto GFE, se llama *obtuso*; y el angulo IFH, por ser menor que el recto GFH, se dize *agudo*.

La medida del angulo es el arco de circulo, que se imagina descrito del punto del concurso de las lineas como centro, y se comprende entre las dos dichas lineas, que forman el angulo. Como si del punto F se descrive qualquier circulo, el arco HI serà medida del angulo IFH. Para este y otros fines dividen los Mathematicos el circulo en 360. partes iguales, que llaman *grados*: y cada grado en 60. minutos primeros: y cada minuto en 60. segundos, y assi infinitamente. Y estos grados son los que determinan la magnitud del angulo; como si el arco IH es de 49. grados, y 30. minutos, el angulo IFH es de 49. gr. y 30. min. y assi de los demas.

Tambien como el circulo conste de 360. gr. el semicirculo, como EGH, contendrà 180. Y la metad del semicirculo, ò la quarta parte del circulo, como es GH, ò GE, serà de 90. gr. De que se infiere, que el angulo recto GFE consta de 90. gr. el angulo obtuso IFE es de mas de 90. gr. y el agudo IFH tiene menos de 90. gr.

13. *Termino es el extremo de vna quantidad.*

14. *Figura es vna quãtidad cerrada de vno, ò muchos terminos.* Advirtiendo, que ha de estar cerrada por todas partes; y assi el angulo, como ABC (*fig.* 1.) no es figura, por quedar abierto por A, y C.

15. *Circulo es vna figura plana, terminada de vna sola linea, llamada Circunferencia, distante igualmente por todas partes de vn punto, que tiene en medio, del qual todas las lineas, que saliendo de èl se terminan en la circunferencia, son iguales.*

16. *Este punto de en medio se llama Centro.*

17. *Diametro del circulo es qualquiera linea recta, que passando por el centro se terminan sus extremos en la circunferencia; y*

divide el circulo en dos partes iguales.

18. *Semicirculo es vna figura terminada por el diametro, y la mitad de la circunferencia.*

Explicacion. (*fig.* 2.) El eſpacio, ò quantidad cerrada dentro de la linea GEKH es circulo: y dicha linea que le cierra ſe llama *circunferencia, periferia, y perimetro.* El punto F es el centro, de quien ſalen las lineas FH, FI, &c. à la circunferencia, todas iguales. La recta EFH, que paſſando por el centro F ſe termina por entrambas partes en la circunferencia, ſe llama *diametro*: y ſu mitad FH; ò FE, y generalmente todas las que ſalen del centro, y ſe terminan en la circunferencia, ſe llaman *ſemidiametro*, ò *radio.*

El diametro EFH divide el circulo en dos partes iguales, como ſe vè claramente, porque de otra ſuerte los ſemidiametros FG, y FK no ſerìan iguales, contra la naturaleza del circulo. Con que el eſpacio comprehendido de EH, y el arco EGH es ſemicirculo: y el eſpacio EGF quadrante, ò quarta de circulo.

19. *Figura rectilinea es aquella, que eſtà comprehendida de lineas rectas.*

20. *Trilateras, ò Triangulos ſon las figuras que conſtan de tres lados.*

21. *Quadrilateras, las que conſtan de quatro lados.*

22. *Multilateras, ò Polygonos, las que conſtan de mas que de quatro lados.*

El Triangulo ſe divide en tres eſpecies por razon de ſus lados: y en otras tres por razon de ſus angulos.

Por razon de ſus lados ſe divide en Equilatero, Iſoceles, y Eſcaleno.

23. *Triangulo Equilatero es el que tiene los tres lados iguales, como A.* (*fig.* 3.)

24. *Iſoceles es el que tiene ſolamente dos lados iguales, como C.*

25. *Eſcaleno, es el que tiene ſus tres lados deſiguales, como B.*

Por razon de los angulos ſe divide el Triangulo en Rectangulo, Acutangulo, y Obtuſangulo.

26. *Triangulo Rectangulo es el que tiene vn angulo recto, como B.*

27. *Obtuſangulo, ò Ambligonio, el que tiene vn angulo obtuſo, como C.*

28. *Acutangulo, ù Oxigonio, el que tiene ſus tres angulos agudos, como A.*

29. *Lineas paralelas ſon las que por todas partes diſtan igualmente entre ſi*; como MN, OP (*fig.* 4.) De que ſe ſigue, que aunq̃ ſe alarguẽ infinitamẽte, jamas podrà concurrir, ni por vn cabo, ni por el otro. La generacion de las paralelas depende, de que la recta LQ, perpendicular à OP, ſe mueva ſobre OP, conſervandoſe ſiempre perpendicular, porque con eſto el punto L deſcribirà la paralela MN.

Las figuras Quadrilateras ſe dividen en *Paralelogramo*, y *Trapezio.*

30. *Paralelogramo es vna figura quadrilatera, que tiene todos ſus lados opueſtos paralelos*, como ſon las A.C.D.E. (*fig.* 5.)

31. *Trapezio es qualquiera Quadrilatero, que no es paralelogramo*, como B.

El Paralelogramo ſe divide en rectangulo, y no rectangulo, ò obliquangulo.

32. *Paralelogramo rectangulo es el que tiene ſus quatro angulos rectos*, como A.C.

33. *Paralelogramo obliquangulo es el que no tiene angulos rectos*, como D, E.

El Paralelogramo rectangulo ſe divide en Quadrado, y Oblongo.

34. *Quadrado es el rectangulo que conſta de lados iguales*, como A.

35. *Oblongo es el rectangulo que no tiene todos los lados iguales, ſi ſolo los opueſtos*, como C.

El Paralelogramo obliquangulo ſe divide en Rhombo, y Rhomboyde.

36. *Rhombo es vn obliquangulo, que tiene ſus quatro lados iguales*, como D.

37. *Rhomboide es vn obliquangulo, cuyos lados no ſon todos iguales, ſi tan ſolamente los opueſtos*, como E.

38. Si en vn Paralelogramo, ſe tira de vn angulo à ſu opueſto vna linea PQ (*fig.* 6.) eſta linea ſe llama Diametro: Y ſuponiendo la XZ paralela à VQ: y por el punto S, en que corta à la diagonal, ſuponiendo otra paralela RY: quedarà el paralelogramo dividido en quatro parale-

logramos; de los quales, los dos por quienes no passa el diametro, que son SRTZ, XVYS, se llaman *complementos*: y los otros dos por quienes passa, se dizẽ *estar al rededor del diametro*.

PETICIONES.

1. *Que se pueda tirar vna linea recta de vn punto à otro.*

2. *Que se pueda prolongar vna linea recta à discrecion.*

3. *Que de vn centro se pueda con qualquier intervalo destribir vn circulo.*

AXIOMAS.

1. *Todas las cosas que son iguales à vna mesma, son iguales entre si.*

2. *Si à cosas iguales se añaden cosas iguales, los todos seràn iguales.*

3. *Si de cosas iguales, se quitan cosas iguales, las restas quedaràn iguales.*

4. *Si à cosas desiguales se añaden cosas iguales, las compuestas quedaràn desiguales.*

5. *Si de cosas desiguales se quitan cosas iguales, las restas seràn desiguales.*

6. *Las cosas que son duplas, triplas, &c. de vna mesma cosa, son iguales entre si. Y lo mesmo si son mitades, tercios, &c. de vna mesma cosa.*

7. *Las cosas que puestas vnas sobre otras se ajustan, son iguales; pero por ser iguales no se ajustan, sino quando son semejantes, como vn circulo igual à otro: vn triangulo equilatero igual à otro, tambien equilatero, &c.*

8. *El todo es mayor, que su parte.*

9. *Todos los angulos rectos son iguales entre si.*

10. *Todas las lineas, que se terminan en dos paralelas, siendo perpendiculares à ellas, seràn iguales.*

11. *Dos lineas rectas no encierran espacio.*

12. *Dos lineas rectas no tienen segmento comun; si que se cortan solamente en vn punto.*

PROPO-

PROPOSICION I. Problema.

Sobre vna recta dada, y terminada, describir vn triangulo equilatero.

EXplicacion. Sea dada la recta A B terminada, esto es, de longitud determinada; y se pide se describa sobre ella vn triangulo equilatero. [*fig.* 7.]

Operacion. Del punto B, con el intervalo BA describase el circulo ACD: y con el mesmo intervaló, haziendo centro en A describase el circulo BCD, que cortarà al primero en C. Tirense las rectas AC, BC: y el triangulo ABC serà equilatero.

Demonstracion. Las rectas BC, BA, son iguales, por ser radios de vn mesmo circulo ACD (*def.* 15.) Assi mesmo, AC, AB son iguales, por ser radios de vn mesmo circulo BCD: luego BC, AC son iguales con la misma AC: y por consiguiente, entre si (*axio.* 1.) Luego el triangulo ABC consta de tres lados iguales: luego es equilatero;

PROP. II. Problema.

De vn punto dado, tirar vna recta igual à otra dada. (*fig.* 8.)

EXplicacion. Sea dado el punto B, y la recta A: pidese, que del punto B se tire vna recta igual à la recta A.

Operacion. Tomese con el compas la recta A, y haziendo centro en B, hagase con dicho intervalo vn circulo: y tirando à qualquiera punto de su circunferencia, vna linea BD, esta serà igual à la dada A. (*def.* 15.)

PROP. III. Problema.

Dadas dos rectas desiguales, cortar de la mayor vna parte igual à la menor. (*fig.* 8.)

OPeracion. De vn extremo B de la mayor, con el intervalo de la menor A, se describirà el circulo DEF, que cortarà la BC en E: y la BE serà igual à la linea A, (*def.* 15.)

PROP. IV. Theorema.

Si dos triangulos tienen los dos lados del vno, iguales à los dos del otro, cada vno al suyo; y los angulos comprehendidos entre estos la-

lados fueren iguales; los triangulos seran totalmente iguales. (*fig.* 9.)

E*Xplicacion.* Ser vna figura absolutamente igual à otra, consiste en que el espacio que encierra la vna, sea igual al espacio que encierra la otra; pero ser vna figura totalmente igual à otra consiste, no solo en que los espacios que entrambas encierran sean iguales; si tambien en que los lados, y angulos de la vna, sean iguales à los de la otra, cada vno à su correspondiente.

Dize pues Euclides en esta proposicion, que si los triangulos FEH, KIL, tienen los lados KL, FH iguales; como tambien KI, FE: y los angulos K, y F comprehendidos de dichos lados, fueren tambien iguales; que los triangulos seràn totalmente iguales: esto es, que la base IL serà igual con EH: y el angulo L al angulo H: y el angulo I al angulo E.

Demonstracion. Supongase que el triangulo KIL se pone sobre el triangulo FEH: y porque el lado KL se supone igual al lado FH, puesto el punto K sobre F, el punto L vendrà sobre H: y todo el lado KL se ajustarà al lado FH: y porque el angulo K se supone igual al angulo F, el lado KI caerà sobre FE; y no mas afuera, ni mas adentro, porque ya dichos angulos no serian iguales: Luego el lado KI cae sobre FE: y por suponerse entrambos iguales, el punto I caerà sobre E: y cayendo tambien L sobre H, como hemos probado, se sigue, que la base IL se ajusta sobre EH: y por consiguiente el angulo L sobre el angulo H; y el angulo I, sobre E: luego la base IL es igual à EH: y el angulo L, à H; como tambien I, à E; y todo el triangulo la otro, que es lo que se devia demonstrar.

PROP. V. Theorema.

En el triangulo Isoceles, los angulos sobre la base son iguales; como tambien los que se forman debaxo la base, alargados los lados. [*fig.* 10.]

E*Xplicacion.* Sea el triangulo Isoceles MNO, cuyos lados iguales NM, NO, se alargan hasta P, y Q. Digo que los angulos NOM, NMO, son iguales: como tambien los angulos MOQ, OMP.

Prepa-

Preparacion. Considerese la recta NR que parta igualmente el angulo N.

Demonstracion. Los triangulos RNO, RNM tienen los lados NO, NM iguales por suposicion: y el lado NR comun: y los angulos RNO, RNM iguales por suposicion: luego dichos triangulos [por la 4.] son totalmente iguales: luego el angulo O es igual al angulo M.

Tambien por ser dichos triangulos totalmente iguales, si el lado NO, se pone sobre NM, tambien RO, vendrà justamente sobre RM: y OQ sobre MP. Luego todo el angulo ROQ, se ajustarà sobre RMP: luego son iguales. Esta proposicion hallò Thales Milesio.

Corolarios.

1. *De lo dicho se sigue, que el triangulo equilatero es equiangulo.*

2. *En el triangulo Isoceles, la recta que parte igualmente el angulo del vertice, parte tambien igualmente la base: y es perpendicular à la base; y al contrario: si parte igualmente la base, es perpendicular à ella. Porque siendo los triangulos NRO, NRM totalmente iguales: son RO, RM iguales: y los angulos, que forma NR con la MO, son rectos: luego* (def. 10.) *NR es perpendicular.*

3. *Si la perpendicular parte igualmente la base de vn triangulo, tambien el angulo; y si el angulo, tambien la base: y la recta que parte igualmente base, y angulo, es perpendicular, y siempre el triangulo serà Isoceles.*

PROP. VI. Theorema.

Si vn triangulo tiene dos angulos iguales, los lados opuestos à dichos angulos, tambien seràn iguales. (*fig.* 11.]

E*Xplicacion.* Sea el triangulo TSV, cuios angulos S, y V, sean iguales; digo que los lados TS, TV, opuestos à dichos angulos, seràn iguales.

Preparacion. Si no son iguales, luego vno de ellos, como, por exemplo, TS serà mayor, que el otro TV: luego se podrà cortar de èl vna parte igual à TV; supongase pues ser SX, y tirese la recta XV.

Demonstracion. Los triangulos XSV, TVS, tienen el lado XS igual à TV, y el lado SV comun à entrambos; y los angulos S, y TVS, comprehendidos de dichos lados, son igua-

iguales: luego [4.]los triangulos XSV,TSV son iguales; lo que es absurdo, por ser el vno parte del otro [ax.8.] Luego no puede vn lado ser mayor que otro; y por consiguiente son iguales. Que es lo que,&c.

Corolario.

Siguese, que el triangulo equiangulo es equilatero.

PROP. VII. Se omite por no ser menester.

PROP. VIII. Theorema.

Si dos triangulos tuvieren los tres lados del vno iguales à los tres del otro, seràn totalmente iguales. (*fig.*12.)

E*Xplicacion.* Los triangulos DEF, ABC tienen el lado ED igual al lado BA; el lado EF, al lado BC; y el lado DF, al lado AC. Digo, que los triangulos son totalmente iguales.

Preparacion. Del punto D como centro, con la distancia DE, hagase el circulo EGH: y del punto F, con la distancia FE hagase el circulo EIH.

Demonstracion. Supongase, que AC se pone sobre DF, y por ser iguales, se ajustaràn; esto es A caerà sobre D, y C sobre F: con esto el punto B caerà sobre E necessariamente; porque ha de caer en algun punto de la circunferencia EGH, por suponerse AB igual con el semidiametro DE; y tambien ha de caer en algun punto de la circunferencia EIH, por supenerse CB igual al semidiametro FE: luego cae en la interseccion E, punto comun à entrambas circunferencias: luego todo el triangulo ABC se ajusta con DEF, y son totalmente iguales. Que es,&c.

PROP. IX. Problema.

Dividir vn angulo rectilineo dado en dos partes iguales. (*fig.*13.)

O*Peracion.* En el angulo dado OLP, cortense de LO, LP, las partes iguales LK,LM: y sobre la KM describase el triangulo equilatero KNM; y tirada la LN, quedarà dividido el angulo dado en dos angulos iguales.

Demonstracion. Los triangulos LKN, LMN, tienen los lados del vno iguales à los del otro KL à LM, KN à MN, y el lado LN comun à entrambos: luego [8.] son totalmente iguales; luego los angulos KLN,MLN son iguales. Las lineas KM, MN, KN, solo sirven para la demonstracion; porque para dividir el angulo basta tener el punto N.

PROP. X. Problema.

Dividir vna recta dada, y terminada, en dos partes iguales. (*fig.*14.)

O*peracion.* Sea la linea MN la que se ha de dividir: describase à entrambas partes (1.) vn triangulo equilatero: y tirando la linea PQ de la vna cuspide à la otra, quedarà dicha linea dividida en O en dos partes iguales. Demuestrase como la antecedente.

PROP. XI. Problema.

De vn punto dado en vna linea, levantar sobre ella vna perpendicular. [*fig.* 14.]

E*Xplicacion.* En la linea MN se dà el punto O; y se pide, que se levante vna perpendicular desde el punto O.

Operacion. Cortense las OM, ON iguales; y sobre MN describanse los triangulos equilateros MPN, MQN, y la linea PO serà perpendicular.

Demonstracion. Como consta de lo demonstrado en la Prop.9. los triangulos MOP,NOP son totalmente iguales. Luego los angulos en O son iguales, y por cõsiguiente rectos: y la PO perpendicular. (*def.*10.)

PROP. XII. Problema.

De vn punto dado fuera de vna linea, baxar à ella vna perpendicular. [*fig.*15.]

E*Xplicacion.* Sea dada la recta RS indeterminada, esto es, que se pueda alargar, si fuere menester: Y sea dado el punto V, de donde ha de baxar vna perpendicular à la RS.

Operacion. Desde V describase vn circulo, que corte la RS en qualesquiera puntos X, Z. Dividase la XZ por medio en T (10.) y la linea VT serà la perpendicular.

Preparacion. Tirense las lineas VX,VZ.

Demonstracion. En los triangulos VTX, VTZ, los lados VX, VX, XT, ſon iguales à los lados VZ, ZT, cada vno al ſuyo: y el lado VT es comun: luego (8.) los triangulos ſon totalmente iguales: luego los angulos en T ſon iguales, y por conſiguiente rectos, y la VT perpendicular [*def.* 10.] Eſte Problema hallò Oenopides Chio.

PROP. XIII. Theorema.

Quando vna recta cae ſobre otra, forma con ella, ò dos angulos rectos, ò que ſon tanto como dos rectos. [*fig.* 16.]

E*Xplicacion.* La recta AB cae ſobre la recta CD: digo, que los angulos ABD, ABC, ò ſon dos rectos; ò que juntos ſon tanto como dos rectos.

Preparacion. Del punto B deſcribaſe el ſemicirculo CAD.

Demonſtracion. Si los angulos ABD, ABC ſon iguales, ſon rectos (*def.* 10.) Y ſi ſon deſiguales tienen por medida à todo el ſemicirculo CAD: el ſemicirculo es medida de dos angulos rectos: luego los angulos ABD, ABC ſon tanto como dos rectos.

Corolario.

Todos los angulos que ſe formaren de vn punto ſobre vna linea ſon tanto como dos rectos.

PROP. XIV. Theorema.

Si dos rectas ſe encuentran en vn meſmo punto de otra recta, formando con ella dos angulos iguales à dos rectos; las dos haràn vna linea recta. [*fig.* 16.]

E*Xplicacion.* En el punto B de la recta AB, concurren las rectas DB, CB, y ſe ſupone forman con AB los angulos ABD, ABC, que juntos ſon tanto como dos rectos. Digo, que DB, BC, hazen vna miſma recta DC.

Demonſtracion. Por ſer los angulos ABD, ABC tanto como dos rectos, el arco CAD, que es ſu medida, es ſemicirculo: luego DBC es el diametro, el qual es vna linea recta.

PROP. XV. Theorema.

Si dos rectas ſe cortaren, los angulos que forman verticalmente opueſtos ſon iguales. [*fig.* 17.]

Explicacion. Las rectas EF, GH ſe cortan en C. Digo, que los angulos ECH, GCF verticalmente opueſtos, ſon iguales.

Demonſtracion. La recta GC cae ſobre EF: luego (13.) los angulos ECG, GCF ſon tanto como dos rectos: aſsimeſmo la recta EC cae ſobre GH: luego los angulos ECG, ECH, ſon tanto como dos rectos: luego los dos angulos ECG, GCF juntos, ſon iguales à los dos ECG, ECH: luego quitando el angulo ECG comun, quedaràn los angulos ECH, GCF iguales. Eſte Theorema hallò Thales Mileſio.

PROP. XVI. y XVII.

Eſtan incluìdas en la Propoſicion 32. y antes de ella no ſeràn meneſter.

PROP. XVIII. Theorema.

En qualquiera Triangulo al mayor lado ſe le opone mayor angulo. [*fig.* 18.]

E*Xplicacion.* Digo, que en el triangulo AOB, el angulo A, que ſe opone al lado mayor OB, es mayor que el angulo B, opueſto al lado menor OA.

Demonſtracion. El angulo A no es igual à B, ni menor que B: luego es mayor. Lo primero, no es igual, porque ſi lo fuera, los lados OA, OB ſeràn iguales [6.] contra lo ſupueſto. Lo ſegundo, no es menor que el angulo B; porque ſi es menor, ſe podrà dentro del angulo B tirar la recta FB, que forme el angulo ABF igual al angulo A. Siendo pues en eſta ſupoſicion dichos angulos iguales, ſeràn (6.) FA, FB iguales; y añadiendo à entrambas la recta FO, ſerà OFB igual à OFA; y ſiendo OFA menor que OB, ſerà tambien OFB menor que OB: lo que es abſurdo, por ſer la recta OB la mas breve diſtancia (*def.* 4). Luego el angulo A, ni es igual, ni menor que B: luego mayor.

PROP. XIX. Theorema.

En todo triangulo, el mayor angulo eſtà opueſto al mayor lado.

E Sta Propoſicion conſta evidentemente de la paſſada, de quien es converſa; porque aviendoſe demonſtrado, que el mayor lado eſtà opueſto al mayor angulo, ſigueguese, que el mayor angulo està opuesto al mayor lado: y assi no es menester mas demonstracion.

PROP. XX. Thorema.

En todo triangulo, qualquiera dos lados juntos son mayores que el otro.

SVpuesta la definicion de Archimedes de la linea recta, es como Axioma: porque [*fig.* 18.] la distancia OB es la mas breve: luego qualquiera otra OAB es mayor.

PROP. XXI. Theorema.

Si de los extremos de vn lado de vn triangulo, se tiran dos rectas, que se encuentren dentro de èl; estas seràn menores que las otras dos, mas formaràn mayor angulo. [*fig.* 19.]

EXplicacion. De los extremos H,L, se han tirado las rectas HI, LI, que se encuentran en I: digo, que estas dos juntas son menores, que las dos juntas HG,GL; pero que el angulo HIL es mayor, que el angulo G.

Preparacion. Continuese HI hasta M.

Demonstracion. En el triangulo GHM, los lados HG,GM juntos son mayores que HM [20.] y añadiẽdo à vna y otra parte la LM, seràn HG,GL mayores q̃ HM,ML. Tambien en el triãgulo IML, los lados IM,ML juntos, son mayores que IL: y añadiendo la comun HI, seràn los lados HM, ML, mayores que HI, IL. Y aviendo ya probado ser HG, GL, mayores que los dos HM,ML, se sigue, que los lados HG, GL, seran mucho mayores que HI,IL.

La segunda parte se demonstrarà en el corolario 2. de la 2. part. de la Prop. 32.

PROP. XXII. Problema.

Formar vn triangulo de tres lineas dadas; con tal que qualquiera dos de ellas juntas sean mayores que la otra. (*fig.* 20.)

EXplicacion. Sean las tres rectas dadas A,B,C; pidese, se forme de ellas vn triangulo.

Operacion. Tirese vna recta à discrecion, y en ella se cortarà NO igual à A: OP igual à B: y PQ igual à C. Y desde O con el intervalo ON se describirà vn semicirculo: y desde

de P, con el intervalo PQ, se describirà otro semicirculo, que cortarà al primero en R: y tiradas las rectas OR, PR, quedarà formado el triangulo que se pide. Este Problema hallo Euphorbo Phrygio.

La demonstracion consta de la construccion mesma.

PROP. XXIII. Problema.

En vn punto señalado en vna recta hazer vn angulo igual à otro angulo dado. (*fig.* 20.)

EXplicacion. En la recta NP, se ha señalado el punto P, y se pide, que se forme en èl vn angulo igual al angulo T.

Operacion. Tirese à discrecion la recta SR. Cortese la PO igual à TR: y PQ igual à ST: y ON igual à RS. Con el intervervalo ON hagase vn semicirculo: y otro con el intervalo PQ: y del punto R en que se cortan, se tiraràn las rectas RO,RP: y el angulo P serà igual al angulo T.

Demonstracion. Por la construccion los tres lados del triãgulo ORP son iguales à los tres del triangulo RST: luego [8.] el angulo P es igual al angulo T. Este Problema hallò, ò ilustrò Oenopides Chio.

PROP. XXIV. Theorema.

Si dos triangulos tuvieren los dos lados del vno, iguales à los dos del otro, cada vno à su correspondiente; el que tuviere mayor angulo comprehendido en los lados iguales tendrà mayor base. [*fig.* 21.]

EXplicacion. Los triangulos BAC, BAD tienen el lado BA comun, y el lado AC, igual con AD; pero el angulo BAD es mayor que el angulo BAC: digo, que la base BD es mayor, que la BC.

Demonstracion. Las lineas AE, ED son mayores, que AD [20]; AD es igual con AC: luego las AE, ED juntas son mayores que AC. Quitese de AED, y de AEC el segmento comun AE, y quedarà ED mayor que EC: añadase à entrambas el mesmo segmento EB; y serà BED mayor que BEC: y como BEC sea mayor que BC, la base BD serà mucho mayor que BC.

PRO-

PROP. XXV. Theorema.

En el meſmo caſo, el triangulo que tuviere mayor baſe tendrà mayor angulo. (fig. 21.)

E*xplicacion.* Digo, que ſi la baſe BD es mayor que BC, tambien el angulo BAD ſerà mayor que el BAC.

Demonſtracion. Si no fuere aſsi, el angulo BAD ſerà, ò igual, ò menor que BAC; ſi igual, tambien lo ſeràn las baſes BD,BC [4.] y ſi mayor, la baſe BD ſerà menor que la BC (24.) y vno, y otro es contra lo ſupueſto: luego el angulo BAD es mayor que BAC.

PROP. XXVI. Theorema.

Si dos triangulos tuvieren los dos angulos del vno, iguales à los dos del otro; y vn lado à vn lado, cada coſa à ſu correſpondiente, los triangulos ſeràn totalmente iguales. (fig. 9.)

E*xplicacion.* Los triangulos EFH, IKL tienen los angulos E,H iguales à los angulos I,L, cada vno à ſu correſpondiente; y vn lado del vno igual al ſemejante lado del otro. Digo que los triangulos ſon totalmente iguales.

Demonſtracion. Y lo primero ſea el lado EH, igual al lado IL, q̃ ſon los que eſtàn entre los angulos iguales. Por ſer EH igual à IL, ſe ajuſtarà ſobre IL; y por ſer el angulo E igual à I, la EF caerà ſobre IK: y por ſer el angulo H igual à L; la HF caerà ſobre LK: luego el punto F caerà ſobre K; porque de otra ſuerte los lados EF, HF no vendrian ſobre IK, LK: luego todo el vn triangulo ſe ajuſta ſobre el otro: Luego ſon del todo iguales. Lo ſegundo, ſupongamos, que los lados iguales ſean FH, KL, que ſon los oppueſtos à los angulos E, I iguales. Porque los angulos E, H ſe ſuponen iguales à los angulos I, L tambien el angulo F ſerà igual al angulo K (corol. 3. pr. 32, que por no tener dependencia de eſta ſe puede ſuponer): luego por la razon dicha en la primera parte ſon los triangulos del todo iguales. Thales Mileſio hallò eſte Theorema.

PROP. XXVII. Theorema.

Si à las paralelas AB, CF las corta vna recta GH, formarà primero los angulos alternos RLO, QOL iguales. (fig. 22.)

Pre-

P*Reparacion.* Del punto, ò tireſe la OR perpendicular à AB: y del punto L, la LQ perpendicular à CF.

Demonſtracion. Conſta de la generacion de las paralelas (def. 29.) que las dichas lineas OR, LQ ſon perpendiculares à entrambas paralelas, y ſon iguales entre ſi; como tambien las RL, OQ; porque engendrandoſe las paralelas del movimiento de la perpendicular OR ſobre OF; tanto corre el punto O, como el R: Luego los triangulos RLO, QOL, tienen los lados OQ, RL iguales, como tambien RO, LQ, y LO comun: luego (8) ſon totalmente iguales: Luego los angulos alternos RLO, LOQ ſon iguales. De aqui ſe colige que los angulos LOC, OLB alternos, ſon tambien iguales; por ſer complementos de los iguales arriba dichos haſta dos rectos. (13)

Segundo. Digo que al entrar la linea GH en las paralelas forma los angulos GLB, LOF iguales.

Demonſtracion. El angulo GLB es igual à ſu vertical oppueſto RLO (15.) Eſte es igual al alterno LOF, como queda probado: Luego GLB, es igual à LOF.

Tercero. Digo, que los dos angulos internos de vna meſma parte, eſto es, los angulos ALO, COL ſon tanto como dos rectos.

Demonſtracion. ALO es igual à LOF [part. 1.] LOF con LOC haze dos rectos [13.] Luego ALO con LOC haze dos rectos.

PROP. XXVIII. Theorema.

Si vna linea recta, cayendo ſobre otras dos rectas, hiziere los angulos alternos iguales, eſtas dos ſeràn paralelas. (fig. 23).

E*xplicacion.* La recta GH cae en las lineas AB,CF, y forma los angulos alternos ALO, LOF iguales: Digo, que AB, CF ſon paralelas.

Demonſtracion. Si no ſon paralelas, tireſe por L otra linea XZ paralela à CF: luego (27.) el angulo XLO ſerà igual con FOL: eſte ſe ſupone ſer igual al angulo ALO: Luego el angulo XLO es igual à ALO, el todo à ſu parte, que es impoſsible: luego la linea AB es paralela con CF.

PROP.

PROP. XXIX. Theorema.

Si vna linea recta cayendo sobre otras dos rectas, entrare en ellas con iguales angulos; ò hiziere los dos interiores de vn mesmo lado iguales à dos rectos: estas dos lineas seràn entre si paralelas. [*fig.*22.]

EXplicacion. La recta GH corta las lineas AB, CF. Digo lo primero, que si forma los angulos GLB, LOF iguales, son dichas lineas paralelas.

Demonstracion. El angulo GLB es igual à su vertical opuesto ALO [15.] el mesmo GLB se supone igual à LOF. luego ALO es igual à LOF, q̃ es su alterno: Luego (28.) las AB,CF son paralelas.

Digo lo segundo, que si los angulos BLO, FOL son iguales à dos rectos, las lineas AB, CF son paralelas.

Demonstracion. ALO, con BLO]13.] haze dos rectos: FOL con BLO haze tambien dos rectos, segun se supone: luego ALO, y FOL, alternos, son iguales: luego [28.] las AB, CF son paralelas.

Colario.

De la segunda parte se sigue que todo rectangulo es paralelogramo.

PROP. XXX. Theorema.

Las lineas rectas paralelas à vna mesma, son paralelas entre si. [*fig.* 24.]

EXplicacion. Las rectas IK, OP son paralelas à la recta MN; digo que IK, OP son paralelas entre si.

Preparacion. Tirese la recta LQ, que corte las lineas propuestas.

Demonstracion. Por suponerse IK, MN paralelas, los angulos alternos IRS, RSN son iguales [27.] Tambien por suponerse MN, OP paralelas, los angulos RSN, STP son iguales (27.)luego los angulos alternos IRS,STP son iguales: luego las IK, OP [28.] son paralelas.

PROP. XXXI. Problema.

Dada vna linea recta, y vn punto fuera de ella, tirar vna paralela, que passe por el punto dado. (*fig.*25.)

EXplicacion. Pidese que por el punto X se tire vna recta, que sea paralela à la recta dada TV.

Ope-

Operacion. Elijase en la TV vn punto Z, y tirese la XZ; hagase (23.) el angulo ZXR igual al angulo XZV; y las rectas RS, TV seràn paralelas.

Demonstracion. Los angulos alternos RXZ, VZX son iguales [*por construccion*] luego (28.) RS, TV son paralelas.

PROP. XXXII. Theorema.

En todo triangulo, los tres angulos son iguales à dos rectos; y prolongado vno de sus lados, el angulo exterior es igual à los dos interiores opuestos. [*fig.*26.]

EXplicacion. Digo lo primero, que los tres angulos interiores A, B, C, en qualquiera triangulo son iguales à dos rectos.

Preparacion. Por el punto A tirese la DF paralela à BC.

Demonstracion. Por ser DF, BC paralelas, son los angulos alternos DAB, ABC iguales [27.]; y por la mesma razon son iguales FAC, ACB. y como *por el corol. de la pr.*13. DAB, y FAC con BAC hagan dos rectos, se sigue que los internos B, y C con BAC hazen dos rectos.

Digo lo segundo, que si vn lado, como, por exemplo, BC se prologa hasta E, el angulo exterior ACE es igual à los dos internos opuestos B, y BAC.

Demonstracion. Como queda demonstrado los dos internos B, y BAC, con el angulo ACB, hazen dos rectos. Assimesmo el externo ACE con el mesmo ACB haze dos rectos [13.] luego el externo ACE es igual à los internos opuestos B, y BAC. El Autor de este fecundissimo Theorema fuè Pithagoras.

Corolarios de la primera parte.

1. *Los tres angulos juntos de vn triangulo son iguales à los tres de otro qualquiera triangulo.*

2. *En qualquiera triangulo, si vno de sus angulos fuere recto, los demàs son agudos, y valen tanto como vn recto.*

3. *Si los dos angulos de vn triangulo son iguales à dos de otro tambien el tercero angulo del vno, serà igual al tercero del otro.*

4. *De vn punto, solo puede salir vna perpendicular à otra linea; porque de otra suerte podria aver en el triangulo dos angulos rectos, contra el corol.*2.

5. De

5. De las lineas que de vn punto se pueden tirar sobre otra linea, la perpendicular es la mas corta; porque esta se opone à vn angulo agudo, y las demàs al recto.

Corolarios de la segunda parte.

1. El angulo externo ACF es mayor que qualquiera de los internos opuestos A, ò B, que es la prop. 16. de Euclides.

2. [fig. 19.] *El angulo I formado dentro del triangulo, y sobre su base HL, es mayor que el angulo G: porque el angulo* HIL *externo respecto del triangulo ILM, es mayor que el angulo IML interno* (corol. 1.) *Asimesmo este angulo IML, externo respecto del triangulo GMH es mayor que el angulo G: luego el angulo I mucho mayor es que el angulo G, que es la segunda parte de la prop. 21. De la primera parte de esta prop. 32. se coligen las dos reglas siguientes para conocer à quantos angulos rectos equivalen los angulos internos de qualquiera figura rectilinea.*

Regla primera.

Dupliquese el numero que por su orden contando desde el triangulo, le toca à la figura, y à tantos rectos equivaldràn los angulos internos de dicha figura. El triangulo es la primera figura: la de quatro lados es la segunda: la de 5. lados es la tercera, &c. Pues porq̃ el triangulo es la primera, y vno, y vno son dos, sus angulos equivalen à dos rectos. La segunda es la quadrilatera; y porque dos y dos son quatro: sus angulos equivalen à quatro rectos. La tercera es la de cinco lados: y porque 3. y 3. son 6. sus angulos hazen 6. rectos.

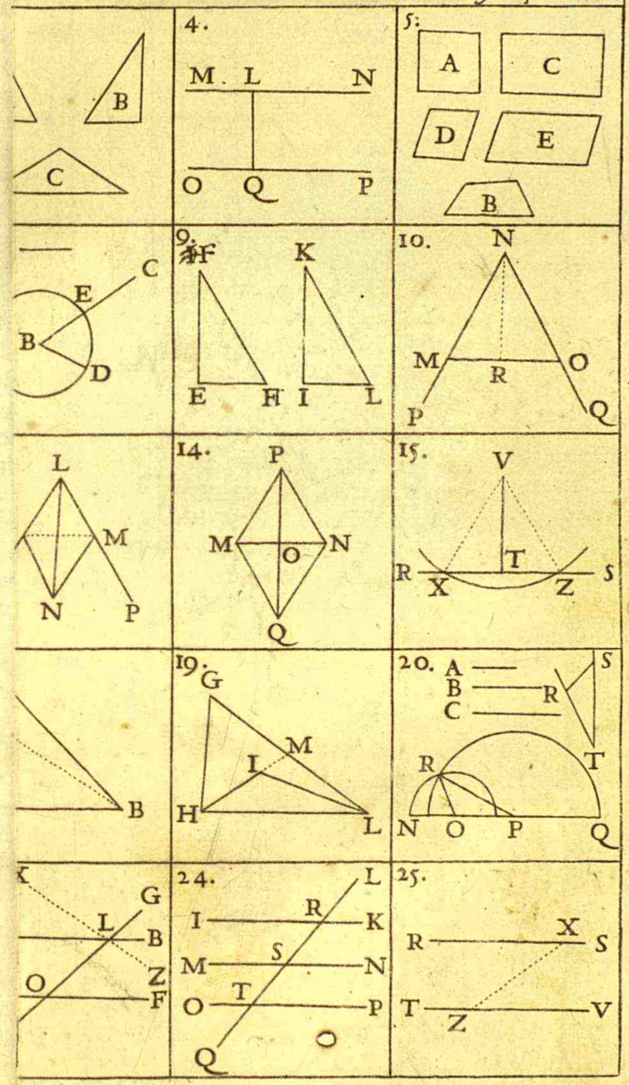
Demonstracion. (fig. 27.) La figura de cinco lados, tiradas las rectas NM, NO, se divide en tres triangulos, cuyos angulos componen los de dicha figura: Los angulos de estos tres triangulos hazen seis rectos, cada vno dos: luego los angulos de la tercera figura, que es la de 5. lados, hazen 6. rectos. Semejante demonstracion se puede hazer en las demàs.

Regla segunda.

Dupliquese el numero de lados que tiene la figura: del numero que resultare quitense 4. y à tantos rectos equivaldràn los angulos internos de la figura.

Exemplo. En la figura de 5. lados; duplicando los lados, sale

Estampa. 1.



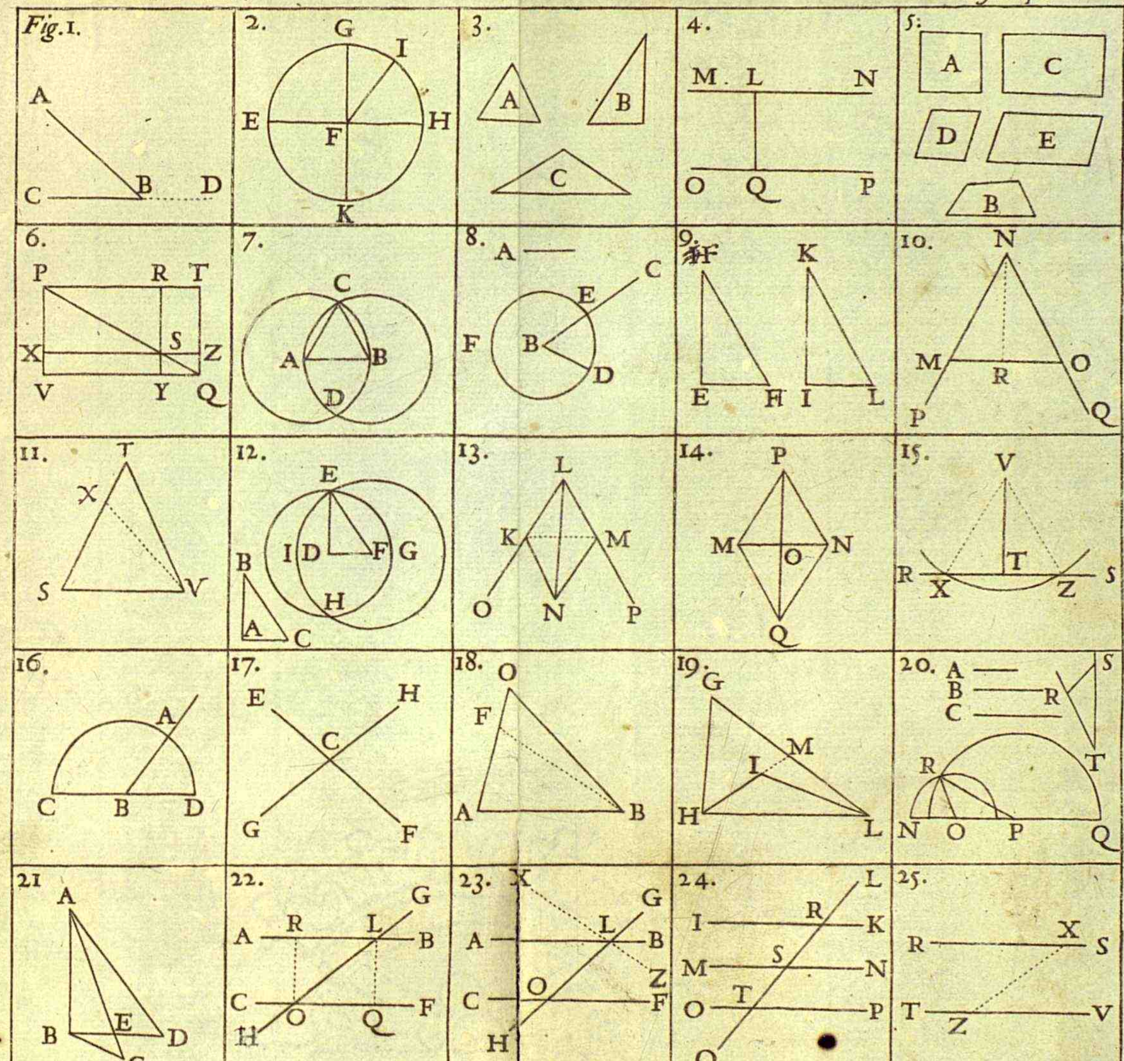


Fig. 1.
A B C D
2.
G I E H F K
3.
A B C
4.
M. L N O Q P
5.
A C D E B
6.
P R T X S Z V Y Q
7.
C A B D
8.
A C E F B D
9.
H K E H I L
10.
N M R O P Q
11.
T X S V
12.
E I D F G H B A C
13.
L K M O N P
14.
P M N O Q
15.
V R T S X Z
16.
A C B D
17.
E H C G F
18.
O F A B
19.
G M I H L
20.
A B C S R T R N O P Q
21
A E B D C
22.
G A R L B C O Q F H
23.
X G L A B Z O C F H
24.
L I R K S M N T O P Q
25.
R X S T Z V

ſale el numero 10. quitando 4. quedan 6. Digo, que los angulos de la figura de 5. lados equivalen à 6. rectos.

Demonſtracion. [*fig.* 28.] Señaleſe dentro de la figura el punto O, y tiradas las rectas ON, OQ, &c. queda dividida la figura en 5. triangulos: cuyos angulos equivalen à diez rectos, cada vno à dos: y porque los angulos en O no pertenecen à los angulos de la figura, quitados eſtos, el reſiduo ſeràn los angulos de la figura: y como los angulos en O equivalgan à vn circulo, que ſe puede deſcribir deſde O, el qual es juſtamente 4. rectos, ſe ſigue, que ſi quitamos 4. de los diez rectos, el reſiduo 6. ſerà el numero de angulos rectos à que equivalen los angulos de dicha figura.

De aqui ſe infiere, que ſi ſe ſe prolongan los lados de la figura haſta S, haſta T, &c. todos los angulos exteriores juntos ſiempre equivalen juſtamente à 4. rectos: porque el exterior NQS. cõ ſu interior NQP haze dos rectos [13.] tambien QPT con MPQ otros dos rectos: Luego todos los cinco exteriores haràn 10. rectos: y quitados los interiores, que como dixe, hazen ſeis rectos; los exteriores haran 4. rectos. Conque no tienen mas valor los mil angulos exteriores juntos de la figura de mil lados, que los cinco de la figura de 5. lados.

PROP. XXXIII. Theorema.

Las rectas, que vnen dos rectas paralelas, è iguales, de vna meſma parte; ſon tambien paralelas, è iguales. (*fig.* 29.)

EXplicacion. Las rectas TX, VZ vnen las dos TV, XZ, que ſon iguales, y paralelas; digo, que las TX, VZ, ſeràn tambien paralelas, è iguales.

Preparacion. Tireſe la diagonal TZ.

Demonſtracion. Por ſer TV, XZ paralelas, ſeràn los angulos VTZ, TZX iguales [27.] Conque los triangulos VTZ, TZX tienen los lados TV, XZ iguales por ſupoſició; y TZ comun, y los angulos comprehendidos VTZ, TZX iguales: luego [4.] ſon totalmente iguales; luego los angulos alternos VZT, ZTX ſon iguales; y las TX, VZ iguales, y paralelas. [28.]

PROP. XXXIV. Theorema.

En todo Paralelogramo, los lados, y angulos opuestos, son iguales; y la diagonal le divide en dos partes iguales. (fig. 29.)

EXplicacion. Digo, que en el paralelogramo XV, los lados, y angulos opuesto s son iguales: y que la diagonal TZ le divide en dos partes iguales.

Demonstracion. Por ser los lados TV, XZ paralelos, seràn los angulos alternos VTZ, TZX iguales [27.] assimesmo, por ser paralelos los lados TX, VZ, seràn los angulos TZV, ZTX iguales: Luego todo el angulo T, es igual à todo Z. Tambien los triangulos TVZ, TXZ tienen el lado TZ comun, y los dos angulos sobre esse lado en el vno, iguales à los dos del otro, cada vno à su semejante: luego [26.] son totalmente iguales: luego los angulos V, X, son iguales: y el lado TV es igual à XZ, como tambien TX à VZ; y todo el paralelogramo queda dividido en dos triangulos iguales.

PROP. XXXV. y XXXVI.

Los Paralelogramos, que tienen vna mesma, ò igual base, y estan entre vnas mesmas paralelas, son iguales. [fig. 30.]

EXplicacion. Los paralelogramos CABD, CEFD tienen vna mesma base CD, y estan entre las dos paralelas AF, CD. Digo, que son iguales.

Demonstracion. Los triangulos ACE, BDF tienen el lado AC igual al lado BD: y el lado CE, al lado DF [34.] Y siendo, tanto AB, como EF, iguales con CD, son iguales entre si; y añadiendo à entrambas BE comun, seran AE, BF iguales: Luego los tres lados del triangulo CAE son iguales à los tres del triangulo DBF: luego [8.] son iguales: quitese à entrambos el triangulo BOE, que es comun, y quedaràn los trapezios blancos iguales: añadase à entrambos el triangulo COD; y resultaràn los paralelogramos CABD, CEFD iguales. Lo mesmo es que tengan vna base CD, ò que sean diferentes, mientras sean iguales.

PROP. XXXVII. y XXXVIII.

Los triangulos, que tienen vna mesma, ò igual base, y estan entre vnas mesmas paralelas, son iguales. (fig. 31.)

Ex-

EXplicacion. Los triangulos GHI, GLI tienen la mesma base GI, y estan entre las mismas paralelas HM, GI: Digo, que son iguales.

Preparacion. Tirese IK paralela à GH; y la IM paralela à GL.

Demonstracion. Los quadrilateros GK, GM son paralelogramos [*dos.* 36.] y iguales [35.] Luego los triangulos GHI, GLI, que son sus mitades [34.] tambien seran iguales.

PROP. XXXVIIII. y XL. Theoremas.

Los triangulos iguales, que tienen vna mesma, ò igual base, y constituidos à vna mesma parte; estàn entre vnas mesmas paralelas. (fig. 32.)

EXplicacion. Sean los triangulos iguales NPO, NQO, constituidos sobre la mesma base NO, y à vna misma parte: Digo, que PQ tirada por los vertices, serà paralela à NO.

Preparacion. Si la PQ no es paralela à NO: luego alguna otra lo serà, sea pues RQ: alarguese OP hasta R, y tirese la RN.

Demonstracion. Los triangulos NRO, NQO tienen vna mesma base NO, y segun este supuesto, estan entre las paralelas RQ, NO: luego (37.) son iguales: el triangulo NPO se supone tambien igual al NQO: luego los triangulos NRO, NPO son iguales, siendo assi, que el vno es parte del otro, lo que es absurdo: luego ni RQ, ni otra alguna distinta de PQ, es paralela à NO: luego sola PQ es paralela à la base.

PROP. XLI. Theorema.

Si vn paralelogramo y vn triangulo, tienen vna mesma, ò igual base; y estan entre vnas mesmas paralelas, el paralelogramo serà duplo del triangulo. (fig. 33.)

EXplicacion. El paralelogramo STVX, y el triangulo YZR tienen las bases SX, YR iguales, y estan entre las paralelas TZ, SR: digo, que el paralelogramo STVX es doblado del triangulo YZR.

Preparacion. Tirese la diagonal TX.

De-

Demonſtracion. El triangulo STX es igual al triangulo YZR (38.) El triangulo STX es la mitad del paralelogramo SV[34.] luego el triangulo YZR es la mitad de dicho paralelogramo; y eſte doblado de dicho triangulo.

PROP. XLII. Problema.

Hazer vn paralelogramo igual à vn triangulo dado, y que tenga vn angulo igual à otro angulo rectilineo dado. (fig. 34.)

EXplicacion. Sea el triangulo BCA; y ſe pide que ſe haga vn paralelogramo, que ſea igual à dicho triangulo, y que vno de ſus angulos ſea igual al angulo E.

Operacion. Por el punto C tireſe la CH paralela à AB: (31.) partaſe la AB por medio en F: hagaſe el angulo AFG igual al angulo E (23.) Tireſe AH paralela à FG: y queda hecho lo que ſe manda.

Preparacion. Tireſe la recta CF.

Demonſtracion. Lo primero, el paralelogramo AFGH tiene el angulo F igual al angulo E por la conſtruccion. Lo ſegundo, el triangulo FCA es mitad del paralelogramo AFGH (41.): y el triangulo BCF es tambien mitad del meſmo paralelogramo: luego todo el triangulo BCA es dos mitades del dicho paralelogramo: luego el triangulo BCA, y el paralelogramo ſon iguales.

PROP. XLIII. Theorema.

En todo paralelogramo los complementos ſon iguales.

EXplicacion. Digo, que en el paralelogramo VPTQ los complementos ST,SV ſon iguales. [fig. 6.]

Demonſtracion. Los triangulos totales PTQ, PVQ ſon iguales [34.] y por la meſma lo es el triangulo PXS à PRS; y SYQ à SZQ, que quitados vnos y otros de los totales, quedaràn los complementos ST,SV iguales.

PROP. XLIV. Problema.

Dado vn triangulo, y vna linea recta, deſcribir ſobre ella vn paralelogramo igual al triangulo; y que tenga vn angulo igual à otro angulo dado. [fig. 35.]

Ex-

EXplicacion. Pideſe ſe haga vn paralelogramo, que ſea igual al triangulo HIK: y que vno de ſus lados ſea igual à la recta G; y tenga vn angulo igual al angulo D.

Operacion. Hagaſe[42.]el paralelogramo HPQR igual al triãgulo HIK, y que tenga el angulo HRQ igual al angulo D. Prolongueſe la QP haſta que PL ſea igual à la linea dada G. Tireſe la LH larga à diſcrecion, y prolongueſe QR haſta que encuentre la LH en M: tireſe la linea LO paralela à PH: alargueſe KH haſta que encuentre con la LO en N: tireſe MO paralela à KN: y alargando la PH haſta S quedarà formado el paralelogramo ONHS con las condiciones que ſe piden.

Demonſtracion. Lo primero, el paralelogramo ONHS es igual al paralelogramo HPQR (43.) y eſte paralelogramo HPQR es [*por conſtruccion*] igual al triangulo HIK: luego el paralelogramo ONHS es igual al triangulo HIK.

Lo ſegundo. Por ſer NH,OS paralelas, la linea PS entra en ellas formando los angulos NHP, OSH iguales [29.] y aſsimiſmo por ſer PS, QM paralelas, los angulos NHP, HRQ ſon iguales: luego ſiendo el angulo NHP igual, tanto con OSH, como con HRQ, eſtos angulos ſeràn iguales: y ſiendo (*por conſtruccion*) HRQ igual al angulo D: tambien lo ſerà el angulo OSH.

Lo tercero. La NH es igual à LP [34] y eſta es [*por conſtruccion*] igual à la dada G: luego el lado NH es igual à G: luego el paralelogramo ONHS tiene todas las condiciones que ſe piden.

PROP. XLV. Problema.

Hazer vn paralelogramo igual à vna figura rectilinea dada, y que tenga vn angulo igual à vn angulo dado. [fig. 36.]

REſuelve eſte problema Euclides con modo muy trabajoſo; y aſsi doy otro mas facil, cuya generalidad ſe verà latamente en la Geometria practica.

Explicacion. Pideſe ſe haga vn paralelogramo igual al rectilineo TVXZ, que tenga vn angulo igual al angulo O.

Operacion. Lo primero, ſe reduzirà el rectilineo à triangulo en la forma ſiguiente: tireſe la recta VZ, alargueſe TZ àzia Y à diſcrecion, tireſe XY paralela à la VZ, tireſe

UY,

VY, y el triangulo TVY ferà igual al rectilineo TUXZ. Lo fegundo, hagafe [42.]vn paralelogramo, que fea igual al triangulo TVY,y que tenga vn angulo igual à O:y quedarà hecho lo que fe manda.

Demonftracion. Los triangulos VXZ, VYZ tienen vna mefma bafe VZ, y eftan entre las paralelas VZ,XY: luego [37.] fon iguales: luego añadiendo à entrambos el triangulo TVZ, refultaràn TVXZ, que es el rectilineo dado, y el triangulo TVY iguales: luego el paralelogramo, que fe hiziere igual à efte triangulo, ferà igual al rectilineo TVXZ.

PROP. LXVI. Problema.

Hazer vn quadrado fobre vna recta dada AB. (fig.37.)

O*Peracion.*Levantenfe las perpēdiculares AC, BD iguales;y tirando la CD quedarà formado el quadrado.

Demonftracion. Las lineas AC, BD fon iguales (*por conftruccion*) y paralelas [29.] luego CD, AB fon paralelas, è iguales [33.]: luego la figura defcrita es paralelograma, y equilatera: y fiendo los angulos A, y B rectos, tambien lo fon (34.) los angulos C,y D : y por configuiente la figura ACDB es quadrado.

PROP. XLVII. Theorema.

En todo triangulo rectangulo,el quadrado del lado opuefto al angulo recto,es igual à los quadrados de los otros dos lados.(fig.38.)

E*Xplicacion.* Sea el triangulo EGF, cuyo angulo G fea recto. Digo, que el quadrado EHIF hecho del lado EF opuefto al angulo recto G, es igual à los dos quadrados juntos GMLF, ECDG hechos de los otros lados.

*Preparacion.*Tirefe la GK paralela à FI. No ay duda, que fi demonftràre, que el paralelogramo KNFI es igual al quadrado GMLF;y que el paralelogramo HENK,es igual al quadrado ECDG, que avrè demonftrado, que todo el quadrado HF es igual à los dos FM, ED. Pues para demonftrar, que el paralelogramo KNFI es igual al quadrado FM, tirenfe las rectas EL, GI.

*Demonftracion.*Confiderenfe los triangulos ELF, GIF, y fe

fe verà, que EF, lado del triangulo ELF, es igual à FI, lado del triangulo GIF, por fer EF, FI lados de vn quadrado:afsi mefmo FL lado del triangulo ELF,es igual à GF lado de GIF: luego dichos triangulos tienen dos lados del vno iguales à dos del otro. Ademas de efto,el angulo EFL comprehendido de dichos lados en el vno, es igual al angulo GFI,comprehendido de femejantes lados en el otro; porque fi à los rectos GFL, EFI fe añade el comun GFE, refultan iguales los angulos EFL, GFI: luego dichos triangulos ELF, GIF fon iguales. [4.] Tambien por tener el triangulo ELF, y el quadrado FM vna mefma bafe FL, y eftar entre las paralelas EGM, FL, es el triangulo la mitad del quadrado FM (41.); afsimefmo por tener el triangulo IGF, y el paralelogramo KF vna mefma bafe IF, y eftar entre las paralelas GK, FI, es el triangulo la mitad del paralelogramo *KF*: luego la mitad del paralelogramo KNFI, y la mitad del quadrado FGML fon iguales : luego todo el paralelogramo KF es igual à todo el quadrado FM. De la mefma fuerte probarè fer igual el paralelogramo HENK al quadrado ECDG : luego todo el quadrado HEFI es igual à los dos quadrados juntos.

He dado por fupuefto, que afsi como MG es paralela à LF, tambien lo es toda la MGE: y es evidente, porque el angulo FGM es recto por conftruccion ; y FGE por fupoficion : luego [14.] MG, GE fon vna recta, y fiendo la porcion MG paralela à LF tambien lo ferà GE.

Efte nobilifsimo Theorema ha enriquecido todas las Mathematicas, como fe verà en el difcurfo de efta obra: fu Inventor fue Pithagoras, que fegun Proclo, Vitrubio ,y otros, ofreciò victimas à las Mufas en hazimiento de gracias por tan provechofa invencion : donde fe vè no tuvo el conocimiento del verdadero Dios Fuente de la Sabiduria verdadera; y fi le tuvo, *non ficut Deum glorificavit.*

PROP. XXXXVIII. Theorema.

Si el quadrado de vn lado de vn triangulo,es igual à los quadrados de los otros dos lados ; el angulo opuefto à aquel lado, ferà recto. (fig.39.)

Ex-

EXplicacion. En el triangulo NOP ſe ſupone, que el quadrado del lado NP es igual à los quadrados de NO, y OP : digo, que el angulo NOP es recto.

Preparacion. Tireſe la QO perpendicular à OP , è igual à ON, y tireſe QP.

Demonſtracion. Por ſer el angulo QOP recto (*por conſtr.*) ſerà (47.) el quadrado de QP igual à los quadrados de QO, y de OP : y como OQ ſea igual à ON , ſerà el quadrado de QP igual à los quadrados de NO, y OP : y como [*por ſupoſicion*] el quadrado de NP ſea igual à los meſmos quadrados de NO, y OP, ſe ſigue ſer el quadrado de NP igual al de QP : luego NP , y QP ſon iguales. De que ſe infiere, que los triangulos NOP, QOP tienen los lados ON, OQ iguales , como tambien NP, y QP ; y OP comun : luego [8.] ſon totalmente iguales : luego el angulo NOP es igual al angulo QOP , y ſiendo (*por coſtruc.*) QOP recto, tambien lo ſerà NOP.

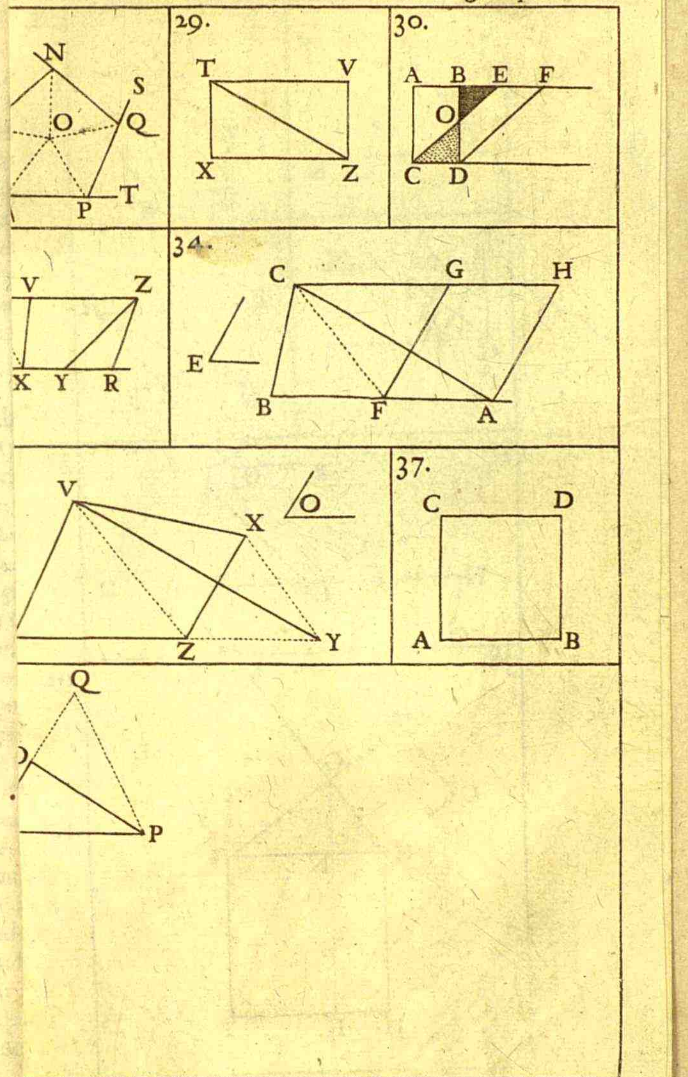
LIBRO II.

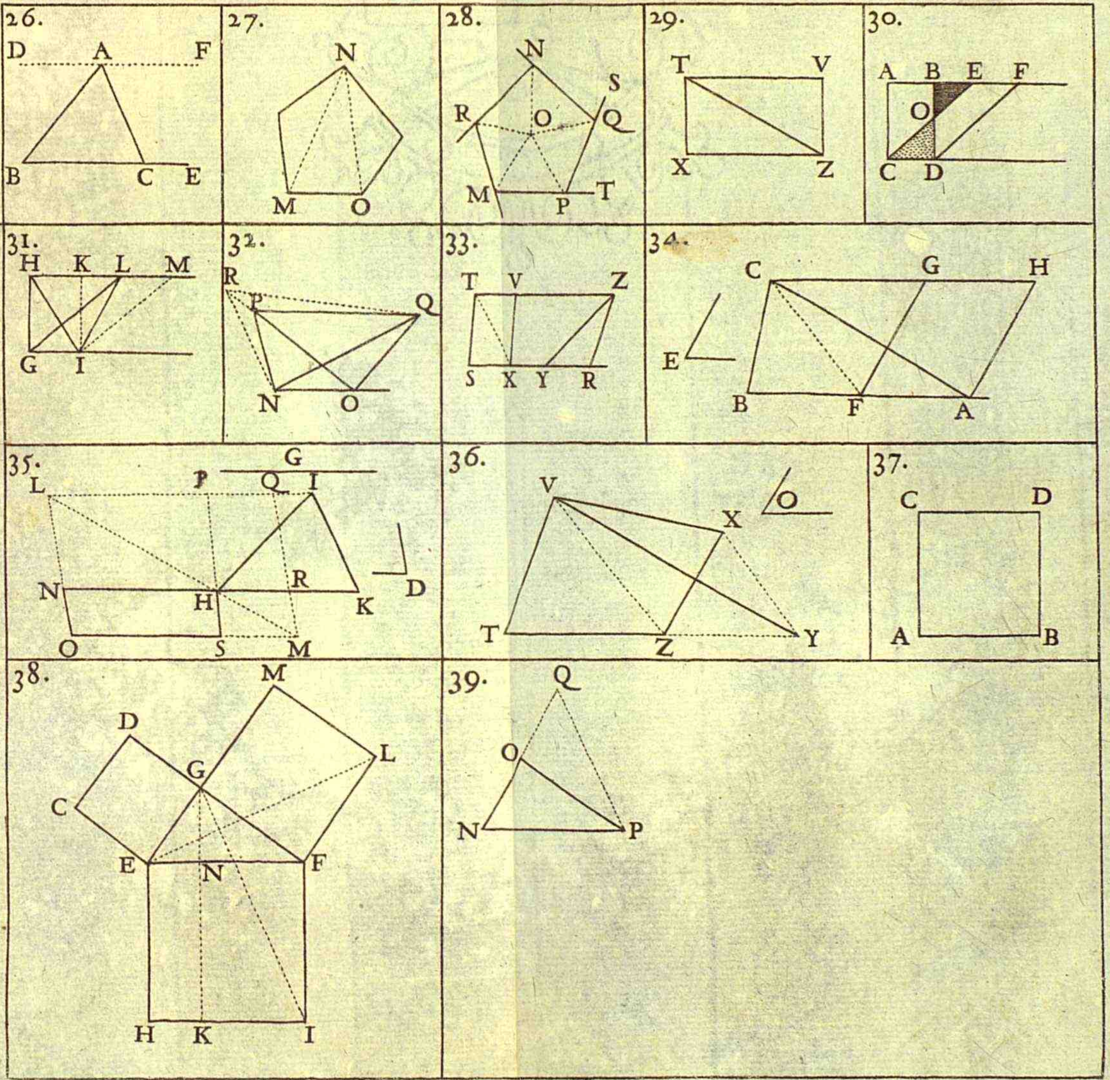
¶ Trata Euclides en eſte Libro, de la potencia de las lineas, cuyos Theoremas ſon de ſingular vtilidad , eſpecialmente para demonſtrar los fundamentos de la Algebra : y aunque de ſi ſon algo obſcuros, no por eſſo deve amedrentarſe el principiante, ſi halla alguna dificultad en percibirles: eſta procurarè minorar , explicandoles con la mayor claridad , que me ſerà poſsible.

DEFINICIONES.

1. POTENCIA *de dos lineas , es , el paralelogrmo rectangulo, que ſe forma, ò ſe puede formar de ellas.*

Explicacion. (*fig.*1. La potencia de las dos lineas CB,CD, es el paralelogramo rectangulo A, que ſe forma de ellas , juntandolas de modo , que formen el angulo recto C. La razon porquè ſe dize formarſe de ellas dicho paralelogramo es , porque eſte ſolamente tie-




26.
D A F
B C E
27.
N
M O
28.
N S
R O Q
M P T
29.
T V
X Z
30.
A B E F
O
C D
31.
H K L M
G I
32.
R P Q
N O
33.
T V Z
S X Y R
34.
C G H
E
B F A
35.
G
L P Q I
N H R K D
O S M
36.
V O
X
T Z Y
37.
C D
A B
38.
M
D
L
G
C
E N F
H K I
39.
Q
O
N P

tiene dos dimenſiones, longitud, y latitud, y de las dos lineas, la vna, como por exemplo, CB, determina la longitud, y la otra CD, la latitud: y tambien porque el paralelogramo ſe engendra del movimiento de la perpendicular DC ſobre CB, deſuerte, que ſi la DC, conſervandoſe perpendicular, ſe mueve ſobre CB, en aviendo llegado à B, avrà formado el paralelogramo rectangulo A.

En eſto ſe funda, que ſupueſta en numeros la cantidad de las lineas CB, CD, ſi ſe multiplica la vna por la otra, ſe producirà el rectangulo. Supongaſe pues, que en el paralelogramo EGHF, la EF es de 3. palmos, y la EG de 2. es cierto, que el dicho paralelogramo ſerà 6. eſto es, ſerà 6. palmos quadrados: y la razon es clara, porque ſi ſola la EQ de 1. palmo ſe moviera ſobre EF en llegando à K, formaria vn quadrado EN; y en llegando à L, huviera hecho los dos EO; y en llegando à F, los tres EP: luego porque EG es dos palmos, en llegando à K, avrà formado los dos quadrados EN, QI: en llegando à L, los quatro EM: y en F, los ſeis EH, que es todo el rectangulo.

La potencia de vna linea es el quadrado que ſe forma de ella, ò ſe puede formar. Y potencias de dos, ò mas lineas ſon los quadrados que de ellas ſe pueden formar. Y aſsi, la potencia de la linea CD (*fig.* 2.) es el quadrado M: y la potencia de EF es el quadrado N: y los dos quadrados ſon las potencias de dichas lineas. Donde ſe vè la diferencia entre *potencia de dos lineas*, y *potencias de dos lineas*; que aquella es el rectangulo que de ellas ſe forma: y eſtas ſon ſus quadrados.

2. *En qualquiera paralelogramo, vno de los rectangulos cortados de la diagonal, como EG, con los dos complementos FE, GH, ſe llama Gnomon.*

Advierto, que quando los quadrados, y paralelogramos eſtan formados, ſe nombran con ſolas dos letras de las que ay en ſus angulos opueſtos; pero quando no eſtan formados, ſe nombran con las meſmas lineas de que ſe pueden formar: como el quadrado CD es el que ſe puede formar de CD: el rectangulo de BC, BA es el que dichas rectas pueden formar. Quando las dos rectas tienen vn punto comun, ſe nombra ſu rectangulo con ſolas tres letras:

co-

como el rectangulo PQR es el que se puede formar de las rectas PQ, QR: el rectangulo PRQ es el que se puede formar de toda la PR, y del segmento RQ. Advierto tambien, que en nombrando *Rectangulo* absolutamente, se ha de entender el Paralelogramo rectangulo.

PROPOSICION I. Theorema.

Propuestas dos rectas RV, RX (fig. 3.) y una de ellas RV dividida en qualesquiera partes en S, T; el rectangulo RZ formado de las dos, es igual à los rectangulos RP, SQ, TZ, formados de la RX, y de cada segmento RS, ST, TV de la otra.

D*emonstracion.* Moviendose la perpendicular RX sobre la RV, engendra el paralelogramo RZ: y moviendose por la RS, forma el rectangulo RP: y por ST, forma SQ: y por TV, el TZ. Luego todos juntos son iguales al rectangulo RZ, producido del transito de RX por toda RV.

Demuestrase tambien en numeros. Sea RS 2. pies. ST sea 3. y TV sea 4. y toda RV 9. Sea la RX 5. Multipliquese RX 5. por RV 9. y serà todo el rectangulo RZ 45. Tambien multiplicando RX 5. por RS 2. resulta el rectangulo RP 10: y multiplicando PS 5. por ST 3. serà el rectãgulo SQ 15. y multiplicando QT 5. por TV 4. saldrà TZ 20. Y todos juntos hazen 45. que es el rectangulo total RZ.

PROP. II. Theorema.

Si la recta AB [fig. 4.] se divide en C en qualesquiera partes, los rectangulos AF, CE, hechos de toda la AB, ò AD su igual, y de los segmentos AC, CB, son iguales al quadrado AE de toda la recta AB.

D*emonstracion.* Siendo, como se supone, AD igual con AB, moviendose sobre AB, en llegando al extremo B, avrà producido el quadrado AE: y como moviendose por AC forme el rectangulo AF; y moviendose por CB forme el rectangulo CE, se sigue ser los dos rectangulos iguales al quadrado AE.

En numeros. Sea AD, ò AB 9. con que el quadrado AE serà el producto de 9. por 9. que es 81. Sea AC 4. y el rectangulo AF serà 36. Sea CB 5. y el rectangulo CE serà 45. y los dos juntos hazen 81. quadrado AE.

PROP. III. Theorema.

Si vna recta GH [fig. 5.] se divide como quiera en dos partes en I; el rectangulo GM, hecho de toda la GH, y de GK igual à GI, es igual al quadrado de GI que es GL; y al rectangulo IM, hecho IL igual à GI, y del segmento IH.

D*emonstracion.* Si GK igual à GI se mueve sobre GI, engendra al quadrado GL; y moviendose de I hasta H, engendra el rectangulo IM: y aviendo con esto corrido desde G hasta H, quedarà formado el rectangulo GM, compuesto del quadrado GL, y del rectangulo IM.

En numeros. Sea GI 4. y sea IH 3. y toda la GH 7. Luego el quadrado GL es 16. y el rectangulo IM serà 12. y los dos juntos 28. que es el mesmo producto de GI 4. por GH 7. que tambien es 28.

PROP. IV. Theorema.

Si vna recta MO [fig. 6.] se divide en N en qualesquiera dos partes, serà el quadrado MV de toda la MO, igual à los quadrados de los segmentos MN, NO; y à dos rectangulos hechos de los mesmos segmentos.

P*reparacion.* Cortese OQ igual à ON, y quedarà QV igual à NM: tirese QP paralela à OM, que tambien lo serà con VS: tirese NT paralela à OV, que serà tambien paralela à MS.

Demonstracion. NQ es (*por construc.*) paralelogramo de lados iguales, y siendo el angulo O recto, tambien lo serà el angulo R (34.1.) luego NQ es el quadrado del segmento NO. Assimesmo probarè ser PT quadrado del segmento ST, ù de su igual MN. Esto supuesto, por estàr la MO dividida en dos partes en N, serà (2.) el quadrado MV igual à los rectangulos MT, NV. Tambien por estàr MS dividida en P, el rectangulo MT, hecho de toda SM, y del segmento SP, ù de su igual ST, serà igual al quadrado PT, y al rectangulo MR, hecho de los segmentos PM, PS (3.) ù de MN, NO, sus iguales. Assimesmo probarè ser el el rectangulo NV igual al quadrado NQ; y al rectangulo RV, hecho de RQ, ò NO; y de QV, ò MN. Luego todo el quadrado MV se compone justamente de los quadrados de MN, NO, y de dos rectangulos de MN, NO: luego es igual à ellos.

En numeros. MN sea 4. y NO 2. toda MO serà 6. con que el quadrado MV es 36. Tambien el quadrado NQ serà 4: el quadrado PT serà 16. y los rectangulos MR, RV serà cada vno 8. y todo esto junto 36.

PROP. V. Theorema.

Si vna recta ST (fig. 7.) se divide por medio en M, y desigualmente en N, serà el rectangulo formado de las dos partes desiguales SN, NT, junto con el quadrado de la intermedia MN igual al quadrado de MT, mitad de la linea.

P*Reparacion.* Hecho el quadrado MZ sobre la MT, tomese TR igual à TN, y tiradas las RO, NY paralelas à los lados del quadrado, se alargarà la RO hasta perficionar el rectangulo SO.

Demonstracion. OY es el quadrado de MN, como se probò en la prop. passada: y SQ es el rectangulo de SN, NT, ò NQ su igual. Esto supuesto, por ser TZ, ò MT igual à SM: y NT, ò TR, igual à OM, son los rectangulos NZ, SO iguales: y añadiendo à entrambos el comun MQ, serà el rectangulo SQ igual al gnomon OTY: añadase à entrambos el quadrado OY, y serà el rectangulo SQ junto con el quadrado OY, igual al quadrado MZ, hecho de MT mitad de ST.

En numeros. Tenga ST 10. partes: esto es SM 5. MN 3. y NT 2. El rectangulo hecho de SN 8. y NQ 2. es 16. que junto con el quadrado de MN, que es 9. haze 25. lo que es igual al quadrado de 5. mitad de la linea ST.

PROP. VI. Theorema.

Si vna recta [fig. 8.] AB se divide por medio en C, y en derechura se le añade otra recta BD: el rectangulo de la compuesta AD, y de la añadida BD; esto es, el rectangulo ADB, junto con el quadrado de la mitad CB de la propuesta; es igual al quadrado de CD, que es la dicha mitad, y la añadida.

Pre-

P*Reparacion.* Sobre CD formese el quadrado CE: y tomando DH igual à la añadida BD, se formarà el rectangulo AH; y se tirarà BG paralela à DE.

Demonstracion. (4.) LG es el quadrado de CB; y KE es igual à CK; y siendo CK (36. 1.) igual à AL, serà KE igual à AL: añadase à entrambos el rectangulo CH, y serà AH igual al gnomon LDG, añadase à entrambos el quadrado LG, y serà AH junto con el quadrado LG, igual al quadrado CE: esto es, el rectangulo ADB, junto con el quadrado de CB, igual al quadrado de CD.

En numeros. Sea AB 8. AC 4. y CB otras 4. y BD sea 5. con qne toda AD es 13. que multiplicados por 5. de DH igual à DB producen 65. area del rectangulo AH, que junto con el quadrado de CB 16. hazen 81. iguales al quadrado de CD 9. que es 81.

PROP. VII. Theorema.

Si vna recta MN (fig. 9.) se divide en dos partes como quiera en L, serà el quadrado MQ, hecho de toda, junto con el quadrado SL, hecho de vna de sus partes ML, igual al quadrado de la otra parte LN, y à dos rectangulos comprehendidos de toda NM, y de la parte ML.

P*Reparacion.* Continùese TL hasta V, y tomando PO igual à ML tirese la PX paralela à MN.

Demonstracion. Los quadrados MQ, SL juntos se componen del rectangulo SR (hecho de PS, ST, ù de MN, ML sus iguales) y del rectangulo PQ (hecho de PX, y PO, ù de MN, ML sus iguales) y del quadrado LX: luego los quadrados de las rectas MN, ML son iguales à dos rectangulos NML, y al quadrado de NL.

Por numeros. Sea MN 5. y ML 2. con que el quadrado MQ es 25. y el quadrado SL es 4. y juntos son 29. Assimesmo el rectangulo NML es 10. y tomado dos vezes es 20. y añadido el quadrado 9. de NL que es 3. es todo tambien 29.

PROP.

PROP. VIII. Theorema.

Si vna recta AB [fig. 10.] se divide por medio en C: y se le añade en derechura otra BD; el quadrado de toda la compuesta AD, serà igual à 4. rectangulos ACD; esto es, hechos de la mitad AC, y de la CD compuesta de la otra mitad, y la añadida, juntamente con el quadrado de la añadida BD.

PReparacion. Formese sobre AD su quadrado AX: tirense las CR, BQ paralelas à AZ: y tirada la diagonal ZD, por los puntos O, y H en que corta dichas paralelas, tirense las EL, FK paralelas à AD.

Demonstracion. El quadrado AX se compone justamente del quadrado de BD, que es BK: de los tres rectangulos LR, KO, AO, que cada vno tiene vn lado igual à CD, y otro igual à AC, y de ER, y CH, que juntos hazen otro rectangulo igual à AO, por ser ER igual à FO, y CH igual à AG: luego el quadrado total es igual à todo lo propuesto.

Por numeros. Sea AB 6. y BD 4. con que toda AD es 10. y su quadrado es 100. Y siendo AC 3. y CD 7. el rectãgulo ACD es 21. y tomado quatro vezes son 84. y añadiendo el quadrado de BD 16. resultan justamente 100.

PROP. IX. Theorema.

Si vna recta PR [fig. 11.] se divide en dos partes iguales en X; y en dos desiguales en Z; los quadrados de las desiguales PZ, ZR, seràn duplos de los quadrados de PX, mitad de la recta, y de XZ, segmento intermedio.

PReparacion. Levantese la perpendicular XO igual à XR; y juntense OP, OR: del punto Z levantese la perpendicular ZH: tirese HI paralela à ZX; y juntese PH.

Demonstracion. Por ser PX, XO iguales, los angulos XPO, XOP son iguales [5.1.] y por ser el angulo X recto, serà cada vno de aquellos semirecto: y por la mesma causa son semirectos los ZHR, y R. Luego el triangulo HZR, tiene el angulo R semirecto, y como Z sea recto, serà ZHR tambien semirecto: luego (6.1.) las lineas ZH, ZR

ZR son iguales. Tambien por ser las IH, XZ paralelas, los angulos I, X son iguales [22.1.]: y siendo X recto, tambien lo serà el angulo I: y por ser IOH semirecto, tambien OHI serà semirecto; y las lineas IO, IH seràn iguales: y como IH sea igual con XZ, tambien lo serà OI. Esto supuesto.

En el triangulo POX, el quadrado de PO, es igual à los quadrados de PX, XO; y como estos sean iguales, serà el quadrado de PO duplo del quadrado de PX: assimesmo el quadrado de OH es duplo del quadrado de IH: y por ser IH, XZ iguales, el quadrado de OH es duplo del quadrado de XZ. Tambien porque el angulo O se compone de dos semirectos POX, ROX, es recto: luego (47.1.) el quadrado de PH es igual à los quadrados de PO, OH: y siendo estos doblados de los quadrados de PX, XZ: serà el mesmo quadrado de PH duplo de los quadrados de PX, XZ: y el mesmo quadrado de PH es igual à los quadrados de PZ, ZH, ù de su igual ZR: luego los quadrados de PZ, ZR son duplos de los quadrados de PX, XZ.

Por numeros. Sea PR 10. PZ 8. ZR 2. El quadrado de PZ serà 64: y el de ZR serà 4. y juntos son 68. Y esta suma es doblada de la suma de 25. quadrado de PX; y de 9. quadrado de XZ, que es 34.

PROP. X. Theorema.

Si vna linea AB (fig. 12.) se parte por medio en C; y en derecho se le añade otra BD, serà el quadrado de toda la compuesta AD, con el quadrado de la añadida BD, duplo del quadrado de la mitad AC, y del quadrado de CD, compuesta de la otra mitad, y de la añadida.

PReparacion. Levantese la perpendicular CE igual à CB: tirese FD tambien perpendicular, è igual à EC, y estiendase àzia G à discrecion: tirense AE, EB, y alarguese esta hasta que corte à la FG en G: vltimamente tirense las EF, AG.

Demonstracion. Por lo dicho en la antecedente es el angulo total E recto, y el angulo EBC semirecto: y [15.1.] el el angulo DBG tambien es semirecto: y porque el angulo D es recto, será (32.1.) el angulo DGB semirecto, y [6.1.] las lineas DB, DG iguales. Tambien por ser el angulo F recto; y FGE semirecto, tambien lo será el angulo FEG: luego FE, FG son iguales: como tambien EF, CD [33.1.] Esto supuesto, por ser el angulo C recto, es el quadrado de AE (47.1.) igual à los quadrados de AC, CE, y por ser estos iguales, será el quadrado de AE duplo del quadrado de AC. Tambien por ser el angulo F recto es el quadrado de EG igual à los quadrados de EF, FG, que por ser estos iguales, será duplo del quadrado de EF, esto es, del quadrado de CD. Assimesmo, porque el angulo AEG es recto, es el quadrado de AG igual à los quadrados de AE, EG: luego el quadrado dicho de AG es duplo de los quadrados de AC, CD: y como por el angulo recto D, sean los quadrados de AD, DG, esto es, de AD, DB iguales al quadrado de AG, se sigue ser los quadrados de AD, DB duplos de los quadrados AC, CD.

Por numeros. Sea AB 6. AC 3. BD 4. Será AD 10. y su quadrado será 100. que junto con 16. quadrado de BD son 116. lo que es duplo del quadrado de AC 9. y de 49. quadrado de CD, porque estos juntos hazen 58. mitad de 116.

PROP. XI. Problema.

Dividir vna linea en dos partes tales, que el rectangulo hecho de toda la linea, y vn segmento, sea igual al quadrado del otro segmento. (fig. 13.)

Operacion. Sobre la linea dada HI describase el quadrado HL [46. 1.] cuyo lado MH, dividase por medio en P, tirese la PI: Hagase la PO igual à PI, y cortese HK igual à HO: Digo que la linea HI queda dividida de tal manera en K, que el rectangulo de toda HI, y del segmento KI, es igual al quadrado del segmento HK.

Preparacion. Perficionese el quadrado OK, y el lado SK continuese hasta N.

Demonstracion. Lo que se ha de probar, es, que el rectangulo KL hecho de IL, ù IH su igual, y de IK, es igual al

al quadrado OK del segmento HK. Pruevase assi: La MH esta dividida por medio en P, y en derechura se le añadiò la HO: luego (6.) el rectangulo MS (hecho de toda la compuesta MO, y de la añadida HO, ù OS su igual) junto con el quadrado de PH, es igual al quadrado de PO, ù de su igual PI: y pues [47.1.] el quadrado de PI es igual al quadrado de PH, y al quadrado de HI, que es el quadrado HL, será

El rectangulo MS y el quadrado de PH	iguales	al quadrado HL, y al quadrado de PH.

Quitese à entrambas partes el quadrado de PH, y quedarà el rectangulo MS igual al quadrado HL. Quitese à entrambos el rectangulo comun HN, y quedarà el quadrado OK igual al rectangulo KL. Esta proposicion no se puede explicar por numeros.

PROP. XII. Theorema.

En todo triangulo obtusangulo RQS (fig. 14.) el quadrado del lado RS opuesto al angulo obtuso Q, es igual à los quadrados de los lados RQ, QS, y à dos rectangulos, hechos de SQ, sobre quien cae la perpendicular RT; y de QT, porcion añadida à SQ, hasta dicha perpendicular.

Demonstracion. En el triangulo RTS, por ser el angulo T recto, es (47.1.) el quadrado de RS igual à los quadrados de RT, TS: y pues este quadrado de TS, es [4.] igual à los quadrados de TQ, y QS, y à dos rectangulos hechos de SQ, QT, será el quadrado de RS igual à los quadrados de RT, TQ, QS, y à dos rectangulos de SQ, y QT: en lugar pues de los quadrados RT, TQ, substituyase el quadrado de RQ, que (47.1.) es igual à entrambos: y será el quadrado de RS igual al quadrado de RQ, y al de QS, y à dos rectangulos de SQ, y QT.

PROP. XIII. Theorema.

En todo triangulo XVZ (fig. 15.) el quadrado del lado VZ, opuesto al angulo agudo X, juntamente con dos rectangulos hechos de ZX, XY, esto es del lado en quien cae la perpendicular VY, y del segmento contenido entre dicho angulo, y la perpendicular, todo lo dicho es igual à los quadrados de los otros lados XV, XZ.

D De-

DEmonstracion. Por estàr la XZ dividida en Y, serà (7.) el quadrado de toda XZ junto con el quadrado del segmento XY, igual à dos rectangulos ZXY, juntos con el quadrado de YZ: añadase à entrambas partes el quadrado de la perpendicular VY: y seràn los quadrados de ZX, XY, VY, iguales à dos rectangulos ZXY, y à los quadrados de VY, YZ. En lugar de estos dos quadrados, pongase el quadrado de VZ, que [47. 1.] es igual à ellos: como tambien en lugar de los quadrados XY, VY, pongase el quadrado de VX; y seràn los quadrados de XZ, XV iguales à dos rectangulos ZXY, y al quadrado de VZ.

PROP. XIV. Problema.

Hazer vn quadrado igual à vn rectilineo dado. (*fig.* 16.)

EXplicacion. Pidese se haga vn quadrado igual al rectilineo dado A.

Operacion. Hagase [45. 1.] vn rectangulo igual al rectilineo dado A, y sea ZX, y si este fuere quadrado, no avia mas que hazer; pero no siendolo, alarguese XN hasta P, desuerte, que NP sea igual à NZ: Dividase la PX por medio en M; y con el intervalo MP describase vn semicirculo, continuese ZN hasta que encuentre en O con la circunferencia: y la linea NO servirà de lado para el quadrado, que serà igual al rectilineo A.

La demonstracion se hallarà muy facil en el corolario de la Prop. 17. del lib. 6. y antes no serà menester.

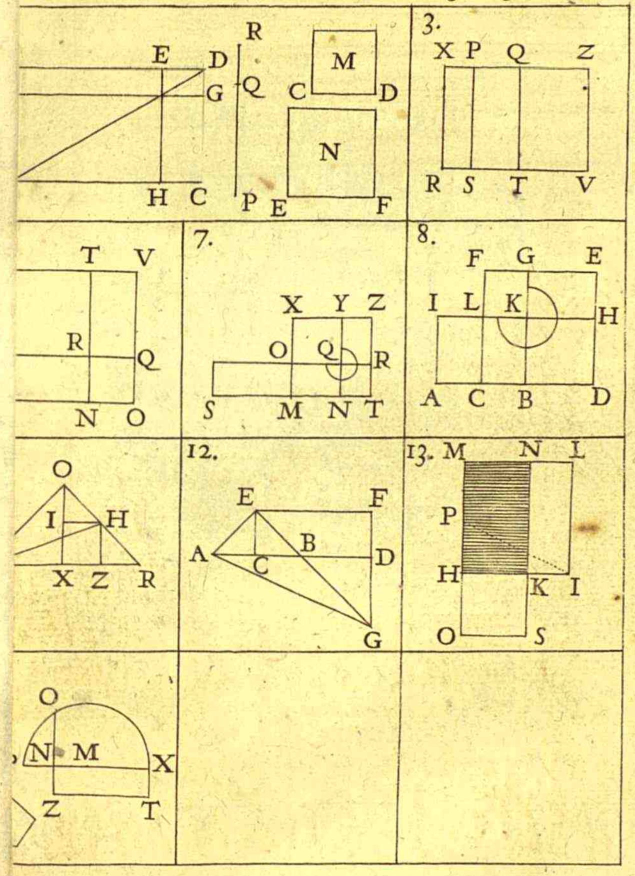
LIBRO III.

DEFINICIONES.

1. CIRCULOS iguales son aquellos cuyos diametros, ò semidiametros son iguales.

2. *Linea tangente es la que toca al circulo*: y aquella se dize toca al circulo, que encontran-

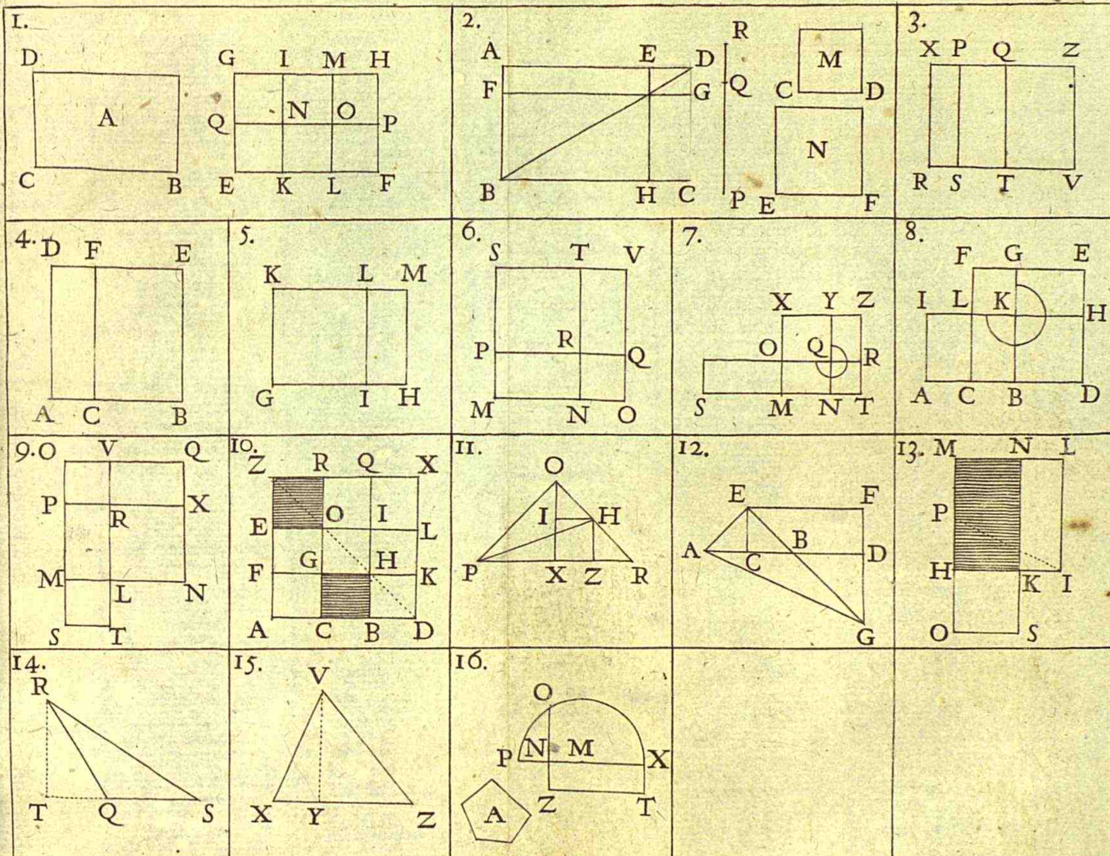
Estampa. 3.



tener

no puede estar fuera de la PQ, como en el punto R: Si alguno pues dixere ser R el centro, tirense las RM, RS, RN.

Demonstracion. En los triangulos RSM, RSN, los lados MS, SN, son iguales (*por construccion*) RS es comun; y los la-



1. D C B A G I M H Q N O P E K L F
2. A E D F G B H C R Q P M C D N E F
3. X P Q Z R S T V
4. D F E A C B
5. K L M G I H
6. S T V P R Q M N O
7. X Y Z O Q R S M N T
8. F G E I L K H A C B D
9. O V Q P X R M L N S T
10. Z R Q X E O I L F G H K A C B D
11. O I H P X Z R
12. E F A B D C G
13. M N L P H K I O S
14. R T Q S
15. V X Y Z
16. O P N M X A Z T

1. CIRCVLOS *iguales son aquellos cuyos diametros, ò semidiametros son iguales.*

2. *Linea tangente es la que toca al circulo:* y aquella se dize toca al circulo, que encon-

tran-

trando con su periferia no la corta, aunque passe mas adelante: como la linea AB [*fig.* 1.] que toca al circulo en C.

3. *Circulos tangentes son aquellos, cuyas periferias se encuentran sin cortarse*: y este contacto puede ser interior, como en los circulos A, y B (*fig.* 2.) ò exterior como en los circulos A, y C.

4. *Cuerda, ò subtensa es qualquiera recta tirada dentro del circulo, que por ambas partes se termina en la periferia*; como EF, GH [*fig.* 3.] Las cuerdas distan igualmente del centro C, quando las perpendiculares CI, CK, que vienen à ellas del centro, son iguales.

5. *Segmento de circulo es vna figura comprehendida de la periferia del circulo, y la cuerda*, como MON, ò MPN [*fig.* 4.]

6. *Angulo del segmento es el angulo mixtilineo que haze la periferia con la cuerda*, como OMN, ò PMN.

7. *Vn angulo se dize estar en el segmento, quando le forman dos cuerdas en la periferia del circulo*; y assi el angulo FGH està en el segmento FGH. [*fig.* 5.]

8. *Esse mesmo angulo se dize que insiste en la periferia opuesta FIH*: desuerte, que existe en el segmento FGH, è insiste en la periferia FIH.

9. *Sector es vna figura contenida de dos semidiametros, y del arco comprehendido entre ellos*, como LKM.

PROPOSICION I. Problema.

Hallar el centro del circulo. [*fig.* 6.]

O*Peracion.* Tirese qualquiera cuerda MN: dividase por medio en S: y por S, tirese la perpendicular PQ: dividase esta per medio en O, y el punto O serà el centro.

Preparacion. Si el centro està en la PQ, necessariamente ha de ser O, que està en medio de ella, porque de otra suerte no serian iguales las rectas del centro à la circunferencia: con que solo nos falta demonstrar, que el centro no puede estar fuera de la PQ, como en el punto R: Si alguno pues dixere ser R el centro, tirense las RM, RS, RN.

Demonstracion. En los triangulos RSM, RSN, los lados MS, SN, son iguales (*por construccion*) RS es comun; y los

la-

lados RM, RN iguales, por ser semidiametros, segun este supuesto: luego los triangulos son [8.1.] totalmente iguales: luego los angulos RSN, RSM son rectos: y como [*por constr.*] OSM tambien sea recto, seràn los angulos RSM, OSM iguales, el todo à su parte, que es absurdo: luego ni el punto R, ni otro fuera de PQ, puede ser el centro: luego lo es el punto O.

Corolario.

Siguese que qualquiera recta, que siendo perpendicular à la cuerda, la parte por medio, passa por el centro.

PROP. II. Theorema.

Toda la cuerda cae dentro del circulo.

ESta proposicion consta claramente de la definicion de la linea recta, y del circulo.

PROP. III. Theorema.

El diametro que parte por medio qualquiera cuerda que no passa por el centro, es perpendicular à ella; y si es perpendicular à ella, la parte por medio. (*fig.7.*)

E*Xplicacion.* Digo que si el diametro TY parte la cuerda XZ [que no passa por el centro] por medio en S, es perpendicular à dicha cuerda; y si es perpendicular à ella, la parte por medio.

Preparacion. Tirense VX, VZ.

Demonstracion. VX, VZ son iguales, por ser semidiametros: luego el triangulo XVZ es Isoceles: luego (cor. 2. 5.l.1.) si TY es perpendicular à XZ, la parte por medio, y al contrario.

PROP. IV. Theorema.

Si dos cuerdas se cortan fuera del centro, no se cortaràn entrambas en partes iguales. (*fig.8.*)

E*Xplicacion.* Las dos cuerdas AB, CD, se cortan en F, fuera del centro: digo, que no se cortan de suerte que cada vna quede dividida en dos partes iguales.

Preparacion. Si vna de ellas passa por el centro, claro està que cortandola la otra por fuera del centro, no la cortarà en partes iguales; pero si ninguna passa por el centro, y dixere alguno se cortan en F en dos partes iguales: tirese la EF del centro E.

Demonstracion. Porque la EF passa por el centro, y divide la CD por medio en F, serà [3] el angulo EFD recto: assi mesmo, porque EF divide la AB por medio en F, serà el angulo EFB recto: luego los angulos EFD, EFB son rectos, y por consiguiente iguales: el todo y su parte, que es imposible. Luego no se pueden dividir por medio.

PROP. V. y VI. Theoremas.

Los circulos que se cortan, ò se tocan interiormente, no tienen vn mesmo centro. [*fig.9. y 10.*]

ES claro, porque si A fuesse centro de entrambos, las AC, AF, por ser semidiametros iguales à AB, serian entre si iguales: el todo à su parte, que es imposible.

PROP. VII. Theorema.

Si de vn punto dentro del circulo, que no sea el centro, como de D, se tiran lineas à la circunferencia, DG, DI, DH, DK, DL. (*fig.11.*)

I. L*A mayor de todas serà DG, que passa por el centro E.*

Preparacion. Tirense del centro E las EI, EH, EK.

Demonstracion. Las rectas EG, EI son iguales, por ser semidiametros; añadase à entrambas la ED, y serà DEG, igual à las dos DE, EI: estas dos (20.1.) son mayores que DI: luego DG es mayor que DI: de la mesma suerte probarè ser mayor que otra qualquiera.

II. *La mas pequeña es DL, residuo de la DG.*

Demonstracion. En el triangulo EDI, los dos lados ED, DI juntos son mayores que EI [20.1.]: luego son mayores que EL igual à EI: quitese pues à EDI, y à EDL el segmento comun ED, y quedarà DI mayor que DL; lo mesmo se probarà de qualquiera otra: luego DL es la minima.

III. *La DH, que està mas cerca de la DG, es mayor que la DK mas apartada.*

Demonstracion. Los triangulos DHE, DKE tienen los lados EH, EK iguales, y el lado DE comun; pero el angulo lo DEH es mayor que DEK : luego [24.1.] la base DH es mayor que DK : y assi de los demàs.

IV. *Del punto D solas dos lineas pueden salir iguales à la circunferencia.*

Consta de lo demonstrado ; porque si algunas tres, como DI, DH, DK pudieren ser iguales, podria aver à vna mesma parte dos iguales , contra lo demonstrado.

PROP. VIII. Theorema.

Si de vn punto L (fig. 12.) puesto fuera del circulo se tiran lineas à la circunferencia concava LI, LK, &c.

I. L*A mayor de todas es LK, que passa por el centro O.*

Preparacion. Tirense del centro las rectas OM, OP, OQ, &c.

Demonstracion. La OK es igual à OS : y añadiendo à entrambas la LO, serà LOK igual à LOS : y como LOS [20.1.] sea mayor que LS , serà LOK mayor que LS : y assi de las demàs.

II. *La LS que està mas cerca de LK es mayor que qualquiera otra LR mas apartada.*

Demonstracion. Los triangulos LOS , LOR tienen el lado LO comun ; y OS igual à OR ; pero el angulo LOS es mayor que LOR : luego la base LS es mayor que LR.

III. *De las lineas que vienen à la periferia convexa, la LN, que alargada passa por el centro, es la minima.*

Demonstracion. Las dos LP, PO son (20.1.) mayores que LO : luego quitadas las ON , OP iguales, serà LN menor que LP : y lo mesmo se convencerà respeto de qualquiera otra.

IV. *La LP, que està mas cerca de LN , es menor que LQ, que està mas apartada.*

Demonstracion. Por estàr el triangulo LPO , dentro del triangulo LQO, y sobre su mesma base , los lados LP, PO son menores que LQ, QO : [21. 1.] luego quitando las iguales OP, OQ, quedarà LP menor que LQ.

V. *De dicho punto L solo pueden venir dos lineas iguales à la periferia convexa ; y lo mesmo à la concava.*

Se infiere de lo demonstrado.

PRO-

PROP. IX. Theorema.

Si de vn punto E (fig. 11.) puesto dentro del circulo , se pueden tirar à la circunferencia mas de dos lineas iguales, dicho punto serà el centro.

Consta de la quarta parte de Proposicion 7.

PROP. X. Theorema.

Dos circulos no se cortan mas que en dos puntos. [*fig.* 13.]

P*Reparacion.* Si alguno pretendiere cortarse los circulos en los tres puntos S, Q, R. Del punto X, centro del circulo QTR tirense las rectas XS, XQ, XR.

Demonstracion. Por ser XS, XQ, XR semidiametros del circulo QTR , son iguales : luego del punto X salen tres lineas iguales à la circunferencia del otro circulo ZQRV. Luego (9.) X es tambien centro de dicho circulo : luego los circulos QTR , ZQV, que se cortan, tienen vn mesmo centro contra la Proposicion 5.

PROP. XI. Theorema.

En los circulos que se tocan interiormente , la recta que passa por los centros, passa por el contacto. (*fig.* 14.)

E*Xplicacion.* Los circulos IMH , INS se tocan interiormente en I : Digo que la linea HI , que passa por los centros L, O, passa por el contacto I.

Preparacion: De L, centro del circulo IMH, tirese la recta LM por qualquiera punto N del circulo INS.

Demonstracion. [6.] El punto L es diferente del punto O : luego (7.) la LI , que passa por el centro O, es mayor que LN : y por consiguiente LM , igual à LI , es tambien mayor que LN : luego el punto N no es comun à entrambas circunferencias : luego no es el contacto : Lo mesmo probarè de qualquiera otro punto que no sea I : luego solo I es el contacto ; punto , en que la HI corta las periferias.

PROP. XII. Theorema.

Si dos circulos se tocan exteriormente , la recta que passa por los centros, passa por el contacto. (*fig.* 15.)

Ex-

EXplicacion. Los circulos RMT, VNT se tocan en T. Digo que la linea RV, que passa por los centros P, Q passa por el contacto T.

Preparacion. Tirese qualquiera otra linea del centro P, que no passe por el centro Q, que corte la periferia VNT en X.

Demonstracion. Por estàr el punto P fuera del circulo VNT, serà (8.) la linea PT menor que PX: luego tambien PS, igual à PT, es menor que PX: luego X no es el contacto: lo mesmo probarè de qualquiera otro punto que no sea T; luego solo el punto T, por quien passa la recta tirada por los centros, es el contacto.

PROP. XIII. Theorema.

Los circulos solo se tocan en vn punto.

Consta de lo dicho en las dos Proposiciones 11. y 12.

PROP. XIV. Theorema.

Las cuerdas iguales distan igualmente del centro; y las que distan igualmente del centro, son iguales. [*fig.* 16.]

EXplicacion. Las cuerdas BA, DE se suponen iguales: Digo lo primero, que distan igualmente del centro C.

Preparacion. Del centro C tirense las CG, CF perpendiculares à dichas cuerdas: y juntense CB, CD.

Demonstracion. Las perpendiculares CG, CF vienen del centro: luego (3.) dividen las cuerdas AB, ED en dos partes iguales: luego siendo AB, ED iguales, sus mitades GB, FD tambien seràn iguales. Esto supuesto: por ser el triangulo CGB rectangulo, el quadrado de CB serà igual [47.1.] à los quadrados de BG, GC: y assimesmo, el quadrado de CD, es igual à los quadrados de DF, FC: y como los quadrados de CB, CD, por ser de lineas iguales, sean iguales: los quadrados de BG, GC seràn iguales à los quadrados de DF, FC: luego quitando de aquellos el quadrado de BG; y de estos el quadrado de DF, que tambien son iguales por ser de lineas iguales, quedarà el quadrado de GC, igual al quadrado de FC: luego las lineas, ò distancias CG, CF son iguales.

Digo

Digo lo segundo, que si las lineas, ò distancias CG, CF son iguales, tambien las cuerdas AB, ED son iguales.

Demonstracion. Por lo demonstrado en la primera parte los quadrados de CG, GB son iguales à los quadrados de CF, FD: luego quitando de aquellos el quadrado de CG; y de estos el quadrado de CF, quedaràn los quadrados de GB, FD iguales; y por consiguiente las rectas GB, FD: como tambien las dobladas de ellas, que son las cuerdas AB, ED, seràn iguales.

PROP. XV. Theorema.

De las cuerdas del circulo, la mayor de todas es el diametro: de las demàs aquella es mayor, que està mas cerca del centro. [*fig.* 17.]

EXplicacion. Digo lo primero, que el diametro HK es mayor que qualquiera otra cuerda LM.

Preparacion. Tirense las rectas IL, IM.

Demonstracion. IL es igual à IH, por ser semidiametros, y assimesmo IM es igual à IK: luego LIM es igual à HK: Las LIM son [20. 1.] mayores que LM: luego HK es mayor que LM.

Digo lo segundo, que LM, que està mas cerca del centro I, es mayor que NO, mas apartada. Tirense las IN, IO.

Demonstracion. NI es igual à LI; como tambien OI à MI: y el angulo LIM es mayor que el angulo NIO: luego (24.1.) la base LM es mayor que NO.

PROP. XVI. Theorema.

La perpendicular à la extremidad del diametro cae toda fuera del circulo; y es tangente: y entre ella, y el circulo no se puede tirar otra recta del punto del contacto, sin que corte al circulo. [*fig.* 18.]

EXplicacion. Sea el diametro PQ, à cuya extremidad P sea perpendicular TP. Digo lo primero, que toda la TP cae fuera del circulo: y es tangente.

Preparacion. Tirese del centro O la recta OT.

Demonstracion. En el triangulo TPO el angulo TPO es rec-

recto: luego el angulo T es agudo: luego el lado OT, opuesto al mayor angulo [19. 1.] es mayor que el lado OP: y siendo OP semidiametro, serà OT mayor que semidiametro: luego el punto T cae fuera del circulo. Lo mesmo se convencerà de qualquiera otro punto de la linea PT: luego toda cae fuera el circulo: y solo el punto P es comun à la linea, y al circulo: y assi es tangente.

Digo lo segundo, que la linea PS, y qualquiera otra que se tire del punto P entre la PT, y el circulo, necessariamẽte corta al circulo.

Preparacion. Tirese del centro O la perpendicular OR à la recta PS; y quedarà formado el triangulo ORP.

Demonstracion. En el triangulo ORP, el angulo R es recto; y OPR, agudo: luego el lado OP, opuesto al angulo recto R, serà mayor que el lado OR opuesto al angulo OPR agudo: siendo pues OP semidiametro, serà OR menor que semidiametro: luego la PS le corta, y por cõsiguiente corta el circulo.

Corolarios.

1. El contacto de la tangente con el circulo es vn solo punto: y aunque la recta PQ se alargue àzia Q infinitamente; y en ella se tomen infinitos puntos, mas, y mas distantes, de que, como centros, se descrivan mayores, y mayores circulos por el punto P, todos tocaràn la linea PT en solo el punto P: lo que es evidente; pero en realidad admirable.

2. El angulo de la contingencia, que es el mixtilineo TPV no puede ser dividido, con linea recta: pero las sobredichas circunferencias de circulos mayores, y mayores le pueden dividir en angulos menores, y menores infinitamente: y en estos corolarios se encierra todo el misterio de la linea *asymptotos*, à quien siempre infinitamente se và acercando la parabola, sin que jamàs pueda concurrir, como se verà en su lugar.

Escolio.

De esta proposicion infieren algunos, que el angulo de la contingencia TPV es menor que qualquiera angulo rectilineo; y el angulo del semicirculo OPV, mayor que qualquiera angulo rectilineo agudo: porque, como se ha demonstrado, qualquiera recta PS cae dentro del circulo: luego la periferia PV siempre estarà entre PS, y PT: luego el angulo de la contingencia TPV siempre serà menor que qualquiera rectilineo TPR; y el angulo OPV del semicirculo, siempre serà mayor, que qualquiera angulo rectilineo agudo OPS, por estar siempre la curva PV sobre la recta PS.

De esto se infiere, que siendo el angulo OPV del semicirculo, mayor que qualquiera rectilineo agudo; y menor que el recto TPO, no ay, en los infinitos angulos agudos rectilineos, alguno que sea igual al angulo del semicirculo: con que se puede passar por todos los medios possibles que ay entre vna cosa menor, y otra mayor, sin que en ellas aya alguna igual à otra, que realmente està entre la mayor, y la menor.

Pero, como advierte el P. Tacquet, todos estos corolarios no son mas que vnos paradoxas, nacidos de la mala inteligencia de la naturaleza del angulo, que se supone ser quantidad, lo que es falso; porque no es otra cosa el angulo, que la inclinacion de dos lineas que salen de vn punto, la qual parece constante no ser quantidad, si modo de la quantidad; pues aunque dichas lineas se alarguen, ò se acorten, siempre queda el mesmo angulo; y por consiguiente mas pertenece el angulo al predicamento, que los Filosofos llaman situacion, que à otro alguno.

Y aunque es verdad que los Geometras atribuyen al angulo las propriedades de la quantidad, como es ser vno igual, mayor, ò menor que otro, poderse dividir en partes iguales, ò desiguales, &c. pero esto no se ha de entender con todo rigor, y propriedad, pues solo son iguales, mayores, ò menores vnos que otros, en quanto sus medidas, que son los arcos de circulo, incluyen los mesmos, ò mas, ò menos grados: y en tanto se dividen en dos, ò mas partes, en quanto dichos arcos se dividen. Esto supuesto, como el angulo de la contingencia; y tambien el del semicirculo, no tengan arco alguno que les pueda medir: pues quantos arcos se descrivieren del punto P del contacto, todos seràn desemejantes, y de mayor numero de grados, se sigue no poderse comparar dichos angulos con los rectilineos: y assi no poderse llamar propriamente mayores, menores, ò iguales entre si: con que cessan los paradoxas referidos.

PRO-

PROP. XVII. Problema.

Se resuelve con mayor facilidad por la Proposicion 31. vease en su corolario.

PROP. XVIII. Theorema.

Si del centro del circulo [fig. 18.] se tira una recta OP al punto del contacto, dicha recta serà perpendicular à la tagente.

PROP. XIX. Theorema.

Si à la tangente de un circulo, se levanta una perpendicular del punto del contacto, passarà por el centro.

ESta Proposicion, y la antecedente constan de la 16. por lo qual omito sus demonstraciones.

PROP. XX. Theorema.

El angulo formado en el centro, es doblado del que se forma en la circunferencia, si ambos insisten en un mesmo arco. (*fig.* 19.)

E*xplicacion.* Los angulos BCE, BAE insisten en el mesmo arco BE: Digo, que el angulo BCE, formado en el centro C, es doblado del angulo BAE, formado en la periferia. En este caso primero coinciden los lados EA, EC.

Demonstracion. El angulo BCE es externo, respeto del triangulo ABC: luego (32. 1.) es igual à los dos angulos ABC, BAC: y siendo estos iguales [5.1.] por ser iguales los lados CA, CB, serà el angulo BCE doblado del angulo BAE.

Caso segundo, en que ningun lado coincide con otro: Digo que el angulo BCD es doblado del angulo BAD.

Demonstracion. Queda demonstrado, que el angulo BCE es doblado del angulo BAE: de la mesma suerte se convence, ser el angulo DCE doblado del angulo DAE: luego todo BCD es doblado de todo BAE.

Caso tercero, en que los lados se cortan. (*fig.* 21.) Digo que el angulo HCI es doblado del angulo HFI. Tirese el diametro FCG.

De-

Demonstracion. Como queda demonstrado en el primero caso el angulo HCG es doblado del angulo HFG: y assimesmo el angulo ICG, es doblado del angulo IFG; quitese pues el angulo ICG del total HCG: y el angulo IFG, del total HFG, y quedarà el angulo HCI doblado del angulo HFI.

Corolario.

El valor, y medida del angulo formado en la circunferencia, es la mitad del arco sobre que insiste: esto es, [*fig.* 19.] el valor del angulo BAE es la mitad del arco BE: porque dicho angulo BAE es la mitad del angulo BCE: luego su medida serà la mitad del arco BE, que es medida del angulo BCE.

Lo mesmo es quando el angulo ADC (*fig.* 20.) formado en la circunferencia, insiste en el arco AEC mayor que el semicirculo. Tirese por el centro B la recta DBE, y juntense BA, BC: y por la razon sobredicha, la medida del angulo ADE es la mitad del arco AE: y assimesmo la medida del angulo EDC es la mitad del arco EC: luego la mitad de todo el angulo ADC es la mitad del arco AEC.

PROP. XXI. Theorema.

Los angulos que estàn en un mesmo segmento, ò que insisten sobre un mesmo arco, son iguales. (*fig.* 22.)

E*Xplicacion.* Los angulos MKN, MLN estàn en el mesmo segmento MKLN: y por consiguiente insisten en el mesmo arco MN: Digo que son iguales.

Preparacion. Tirense al centro O las rectas MO, NO.

Demonstracion. Tanto el angulo K, como el angulo L, son la mitad del angulo MON, hecho en el centro (20.): luego son iguales.

PROP. XXII. Theorema.

Los quadrilateros inscriptos en el circulo, tienen sus angulos opuestos iguales à dos rectos. (*fig.* 23.)

E*Xplicacion.* El quadrilatero PQRS està inscrito en el circulo. Digo que los angulos opuestos Q, S, juntos son tanto como dos rectos.

De-

Demonstracion. El valor del angulo PQR es la mitad del arco PSR en que insiste [corol. de la prop. 20.] : assimesmo el valor del angulo PSR es la mitad del arco PQR en que insiste : y como los dos arcos PSR, PQR hagan vn circulo, serà el valor de dichos angulos la mitad de vn circulo, que es dos rectos.

PROP. XXIII. y XXIV.

Se omiten por no ser menester.

PROP. XXV. Problema.

Acabar vn circulo, dada vna porcion de èl. (fig. 24.)

EXplicacion. Dado el arco TVX se pide se perficione todo el circulo.

Operacion. Tirense qualesquiera dos cuerdas TV , VX: dividanse por medio en S , y R con las perpendiculares SZ, RZ (10.1.) Digo que el punto Z, en que concurren, es el centro, de que con el intervalo ZV se perficionarà el circulo.

Demonstracion. [corol. de la prop. 1.] el centro està en SZ, y en RZ : luego es el punto Z.

PROP. XXVI. y XXVII.

En los circulos iguales , las cuerdas iguales lo son de arcos iguales : y si los arcos son iguales , tambien sus cuerdas. (fig. 25.)

EXplicacion. Primero. En los circulos iguales QS , LO, las cuerdas CE, FI se suponen iguales: Digo que tambien los arcos CSE , FOI son iguales : como tambien CQE , FLI.

Preparacion. De los centros A , B, tirense las rectas AC, AE : BF , BI.

Demonstracion. Por ser los circulos iguales, los triangulos ACE , BFI tienen los lados AC, AE, iguales à BF , BI; y siendo por suposicion, CE , FI iguales, seràn dichos triangulos (8.1.) del todo iguales : luego si vn circulo se ajusta sobre el otro , el triangulo BFI se podrà ajustar sobre ACE : y el centro B sobre A : y el punto F sobre C : I, sobre E : y el arco FOI se ajustarà sobre CSE ; como FLI, so-

bre CQE : luego dichos arcos son iguales.

Digo lo segundo. Si en los mesmos circulos , los arcos FLI, CQE se suponen iguales , tambien las rectas CE , FI seràn iguales ; porque hecha la superposicion , el punto F vendrà sobre C: y I, sobre E: luego toda FI sobre CE.

PROP. XXVIII. y XXIX. Theoremas.

En circulos iguales , los angulos iguales formados en el centro , ò en la circunferencia , insisten sobre arcos iguales : y si los arcos , en que insisten son iguales , los angulos son tambien iguales. (fig. 25.)

EXplicacion. Primero. En los circulos iguales QS , LO, se suponen iguales los angulos A , y B , hechos en el centro : Digo que los arcos CSE, FOI, sobre que insisten, son iguales.

Demonstracion. Los triangulos CAE , FBI tienen los lados CA , AE iguales à los lados FB , BI , por ser semidiametros de circulos iguales: y siédo los angulos A, y B iguales, seràn [4.1.] las bases CE , FI iguales : luego (26.) los arcos CSE, FOI son iguales.

Segundo. Digo que si los angulos , Q, y L, hechos en la circunferencia son iguales, tambien lo son los arcos CSE, FOI , porque siendo dichos angulos iguales , tambien lo son los angulos A, y B, hechos en el centro, que [20.] son doblados de ellos : luego , como he demonstrado , los arcos CSE, FOI son iguales.

Tercero. Digo que si los arcos CSE , FOI son iguales, tambien lo son los angulos A, y B hechos en el centro : y los Q, y L, hechos en la circunferencia.

Demonstracion. Si los arcos CSE, FOI son iguales, tambien (27.) las cuerdas CE , FI son iguales ; y siendo AC, AE iguales à BF, BI por ser semidiametros de circulos iguales, seràn (8.1.) los triangulos CAE , FBI del todo iguales; luego los angulos A, y B son iguales : y tambien Q, y L, que [20.] son sus mitades.

PROP. XXX. Problema.

Dividir vn arco MNO en dos partes iguales. (fig. 26.)

Ope-

Operacion. Tirese la cuerda MO: y dividase esta por medio en P, tirando la perpédicular NP [10. y 11. 1.] y quedarà dividido el arco por medio en N.

Preparacion. Tirense las MN, NO.

Demonstracion. En los triangulos MNP, ONP, son MP, PO iguales por construccion: y NP comun: y los angulos en P rectos, è iguales: luego (4. 1.) las MN, NO son iguales: luego [26.] los arcos MN, NO tambien son iguales.

PROP. XXXI. Theorema.

El angulo, que està en el semicirculo, es recto; el que en segmento mayor que semicirculo, es agudo; y el que en segmento menor, obtuso. [fig. 27.]

Explicacion. El angulo QPR està en el semicirculo: Digo que es recto.

Demonstracion. El valor del angulo QPR es la mitad del semicirculo QTR sobre que insiste (cor. de la prop. 20.) luego su valor es 90. grados: luego es recto.

Digo lo segundo. Que el angulo PQR, que està en el segmento PQTR mayor que el semicirculo, es agudo. Porque su valor es la mitad de la periferia PSR, sobre que insiste: esta es menor que vn semicirculo: luego el valor de dicho angulo es menor que la mitad del semicirculo, ò menor que 90. grados: luego es agudo.

Digo lo tercero. Que el angulo PSR, que existe en el segmento PSR menor que vn semicirculo; es obtuso. Porque su valor es la mitad de la periferia PQTR sobre que insiste, y siendo esta mayor que el semicirculo, serà el valor de dicho angulo mas que la mitad del semicirculo; esto es, mas de 90. grados: luego es obtuso. Este Theorema hallò Thales Milesio.

Corolario.

De aqui se colige el modo de resolver el Problema que trae Euclides en la Prop. 17. de este Libro. (*fig.* 28.)

Pidese que de vn punto X dado fuera del circulo, se le tire vna tangente.

Operacion. Tirese del punto dado X al centro V la recta XV:

XV. Dividase por medio en Y: y con la distancia YV hagase el semicirculo VZX, que cortarà la periferia en Z: tirese la XZ, y serà la tangente. La razon es, porque el angulo Z està en el semicirculo VZX: luego es recto: y la ZX tangente [16.]

PROP. XXXII. Theorema.

Si vna recta fuere tangente à vn circulo, y del contacto se tira otra que le corte, los angulos que esta hiziere con la tangente seràn iguales à los que se forman en los segmentos alternos. (fig. 29.)

Explicacion. La recta CA toca al circulo en B: y del punto B sale la BD, que corta al circulo. Digo, que el angulo ABD, formado de la secante BD con la tangente BA, es igual al angulo BED hecho en el segmento alterno BGED: y el angulo CBD tambien igual al angulo BFD, hecho en el segmento alterno BFD.

Demonstracion I. Si la linea que sale del contacto, passàre por el centro, formarìa [18.] con la tangente angulos rectos; y los angulos hechos en los segmentos alternos, que en este caso serian semicirculos, tambien serìan rectos. [31.]

II. Si la linea, que sale del contacto B no passa por el centro, como la BD, pruevo que el angulo ABD es igual al angulo E; y para mayor claridad supongo, que BE passa por el centro. Esto supuesto, por ser BE perpendicular à CA, los angulos ABE, CBE son dos rectos: y siendo los tres angulos del triangulo BDE iguales à dos rectos (32. 1.) seràn dichos tres angulos iguales à los dos ABE, CBE: quitese pues de estos dos el angulo CBE recto; y de aquellos tres, el angulo BDE, tambien recto, por estar en el semicirculo [31.] y quedaràn el angulo E, y el angulo EBD, iguales al recto ABE: quitese de entrambas partes el angulo EBD, que es comun, y quedarà el angulo ABD igual al angulo E.

III. Pruevo que el angulo CBD es igual al angulo BFD: los angulos CBD, ABD [13. 1.] son iguales à dos rectos: y en el quadrilatero BEDF los angulos opuestos E, y F [22.] tambien son iguales à dos rectos: quitese pues de los primeros el angulo ABD: y de los segundos, el angulo E,

E igual

igual [*por lo demonstrado*] al angulo ABD : y quedaràn de aquellos, el angulo CBD; y de estos el angulo F, iguales.

PROP. XXXIII. Problema.

Descrivir sobre vna recta dada vn segmento de circulo, capaz de vn angulo igual à otro angulo dado. [*fig.* 30.]

Explicacion. Sea dada la recta BC, y el angulo agudo ABC, pidese se descriva sobre ella vn segmento de circulo, que sea capaz de vn angulo igual al dado ABC.

Operacion. Del punto B tirese la BL perpendicular à AB; en el termino C de la recta dada BC, hagase el angulo BCI [23.1.] igual al angulo CBL; y la CI, que le forma, cortarà la BL en I, y quedarà formado el triangulo BCI isoceles, por tener los angulos B y C iguales (6.1.): haziendo pues centro en I, se describirà por B, y C vn circulo, cuyo segmento BQC serà capaz de vn angulo igual al angulo dado ABC.

Demonstracion. Por ser AB perpendicular al diametro BL es tangente [18.] y la BC es secante: luego (32.) el angulo que se hiziere en el segmento alterno BQC serà igual al dado ABC.

Si el angulo dado fuesse el obtuso RBC, se harìa la mesma operacion : y el segmento COB serà capaz de dicho angulo.

PROP. XXXIV. Problema.

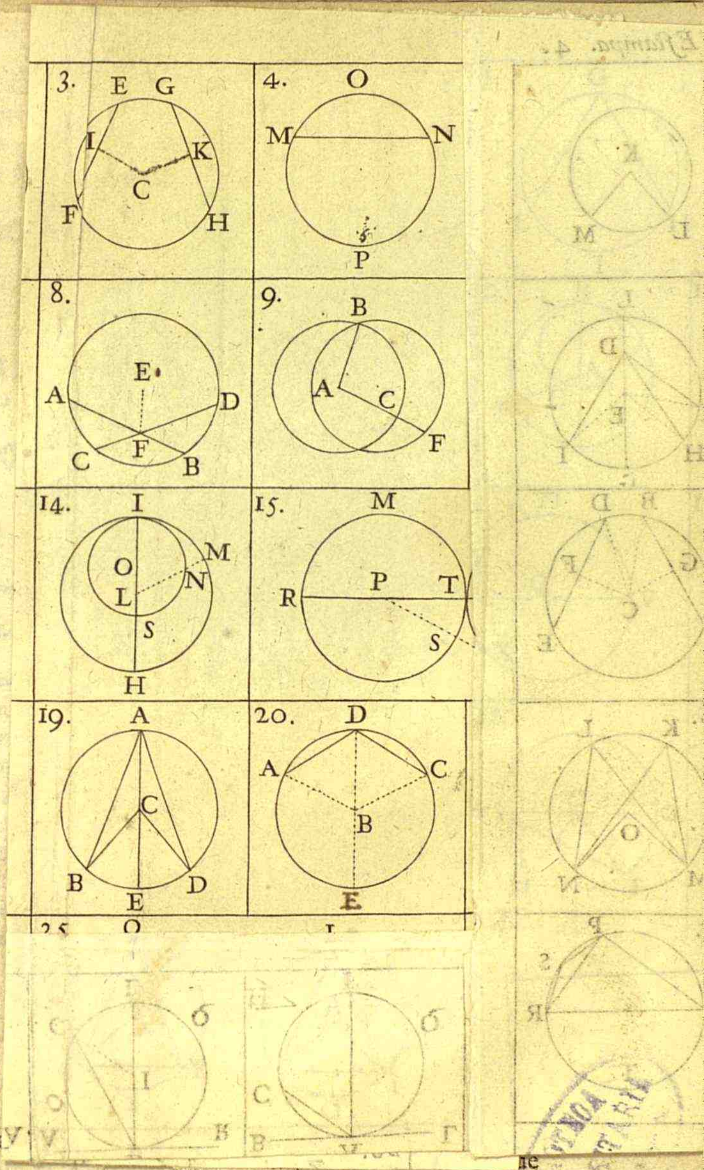
Dado vn circulo, cortar de èl vn segmento capaz de vn angulo, igual à otro angulo dado. (*fig.* 31.)

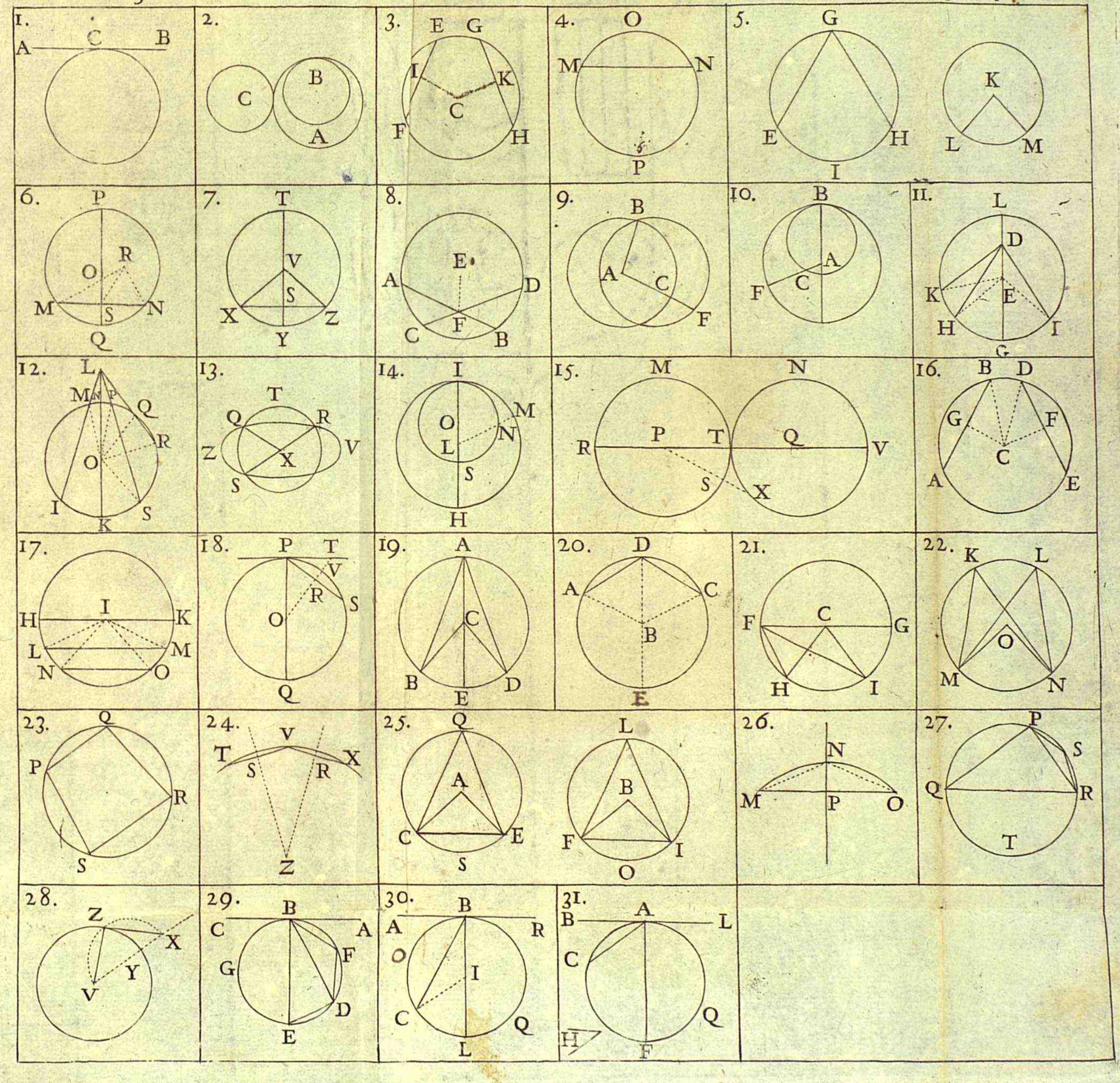
Explicacion. Pidese, que de el circulo ACFQ se corte vn segmento, capaz del angulo H.

Operacion. Tirese la BL perpendicular à la extremidad del diametro AF, y serà (18.) tangente : formese en A el angulo BAC igual al angulo H: y [*por la* 32.] serà el segmento AQC capaz de vn angulo igual al angulo BAC: esto es, igual al angulo H.

PROP. XXXV. XXXVI. y XXXVII.

¶ Estas tres vltimas Proposiciones de este Libro, se demuestran con gran facilidad por las Proposiciones 16. y 17. del




1. A C B
2. C B A
3. E G I K C F H
4. O M N P
5. G E H I K L M
6. P R O M S N Q
7. T V S X Z Y
8. E A D F C B
9. B A C F
10. B A F C
11. L D K E H I G
12. L M P Q R O I K S
13. T Q R Z X V S
14. I O M N L S H
15. M N R P T Q V S X
16. B D G F C A E
17. H I K L M N O
18. P T V R S O Q
19. A C B E D
20. D A C B E
21. C F G H I
22. K L O M N
23. Q P R S
24. V T X S R Z
25. Q A C E S L B F I O
26. N M P O
27. P S Q R T
28. Z X Y V
29. B C A G F D E
30. B A R O I C Q L
31. A B L C Q H F

del Libro 6. y como solo sirvan para la Proposicion 10. del Libro 4. que transfiero de este lugar à la Geometria Practica, dexo sus demonstraciones para el Apendice del Libro 6.

LIBRO IV.

¶ Es todo practico, y tiene su proprio lugar en el Tratado de la Geometria Practica.

LIBRO V.

EN este Libro trata Euclides generalmente de las proporciones en quanto convienen à toda especie de quantidad: es de singular vtilidad para todas las Mathematicas. Su Author, segun Vitruvio, es Eudoxio Gnidio compañero de Platon en su viage à Egipto. Todos los Theoremas de este Libro son puros axiomas, que solo necessitan de explicacion; pero, esto no obstante, demonstrarè los que pareciere tienen alguna dificultad, omitiendo la demonstracion de otros, que por tan claros no son capazes de que la demonstracion les añada mayor evidencia. La methodo de las demonstraciones serà la del P. Tacquet, y otros modernos, que es mas facil, è inteligible para los principiantes.

DEFINICIONES.

1. *Parte es vna quantidad menor, comparada con otra mayor. Todo es vna quantidad mayor comparada con otra menor*; como 2. es parte de 4: y el 4. es todo respeto del 2.

2. La parte se divide en *Aliquota*, y *Aliquanta*: parte aliquota, à quien Euclides llama absolutamente *parte*, es la

 que

que tomada algunas vezes compone, ò mide perfetamente al todo. Como el 3. es parte aliquota de 6. porque tomado, ò repetido dos vezes, haze perfetamente 6. Parte aliquota, à quien Euclides llama *partes*, es la que tomada algunas vezes, no adequa jamàs al todo: como 4. es parte aliquanta de 9. porque tomado dos vezes haze 8. que es menos que 9. y tomado tres vezes haze 12. que es mas que 9.

3. *Vn todo, respeto de la parte aliquota que le mide, se llama multiplice.* Como el 8. es multiplice del 4. porque dos vezes 4. hazen 8. Y porque el 8. es tan multiplice del 4. como el 6. del 3. esto es, tantas vezes el 8. encierra al 4. como el 6. al 3. se llaman el 8. y el 6. *equemultiplices* del 4. y del 3. y consiguientemente porque el 4. se incluye en el 8. tantas vezes como el 3. en el 6. se dizen ser el 4. y el 3. partes aliquotas semejantes del 8. y del 6.

4. *Razon es la habitud, relacion, ò respeto de vna quantidad à otra del mesmo genero.* Como si se compara numero con numero, linea con linea, superficie con superficie, &c. Esta definicion explica mas Euclides en la 5. diziendo, *que solas aquellas quantidades tienen razon entre si, que qualquiera de ellas multiplicada, puede exceder la otra.* De que se colige, que el lado del quadrado tiene razon con la diagonal, porque si se duplica, la excede. Coligese tambien, que ni la linea con la superficie; ni esta con el solido tienen razon alguna, porque aunque la linea se multiplique quanto se quiera, jamàs excederà, ni harà superficie; ni esta, vn solido. Como la razon sea relacion, ò respeto de vna cantidad à otra, necessariamente ha de incluir dos terminos, de los quales el vno se cõpara al otro: el que se compara al otro, se llama *antecedente*; y aquel à quien se compara, se dize *consequente*: como en la razon de 4. à 2. el 4. es el antecedente, porque se compara con el 2. diziendo ser doblado del 2. y este es el consequente.

5. La razon se divide primero en racional, è irracional. *Razon racional* es la que se puede explicar con numeros, como la que ay de vna linea de 4. palmos à otra de 2. palmos, que la explicamos con numeros, diziendo tener razon dupla, ò que la de 4. es doblada de la de 2. ò que se han como 4. à 2. *Razon irracional* es la que no se puede declarar con numeros, como la que ay entre la diagonal del quadrado con el lado del mesmo quadrado; porque no ay numeros que la puedan explicar.

6. Dividese tambien la razon, en *razon de igualdad*, y *de desigualdad*: la primera es la que se halla entre dos quantidades iguales, como 4. con 4. La segunda entre desiguales, como 4. con 2. Quando en la razon de desigualdad el antecedente es mayor que el consequente, se llama *razon de mayor desigualdad*, como la que ay de 4. con 2. Pero si el antecedente es menor que el consequente, se llama *razon de menor desigualdad*: como la que ay de 2. con 4. Las razones de desigualdad tienen diferentes nombres, cuya explicacion omito, por ser de poca importancia, y porque con solo el vso se aprenden.

7. *Razones semejantes, ò iguales*, si son de mayor desigualdad, son aquellas, *en que el antecedente de la vna contiene de la mismа manera à su consequente, que el antecedente de la otra, à su consequente*: y si son de menor desigualdad, son razones iguales, o semejantes, *si el antecedente de la vna se contiene en su consequente, de la mesma manera que el antecedente de la otra se contiene en el suyo.* Contener el antecedente de la vna à su consequente, de la mesma manera, que el antecedente de la otra razon incluye al suyo, consiste, en que el antecedente de la vna razon tantas vezes incluya à su consequente, ò qualquiera parte aliquota suya, quantas el antecedente de la otra incluye à su consequente, ò semejante parte aliquota suya: como la razon de 8. à 4. es la mesma, igual, ò semejante à la razon de 10. à 5. porque assi como el 8. incluye dos vezes al 4. assi 10. incluye dos vezes al 5. Tambien la razon de 6. à 4. es la mesma que de 12. à 8. porque assi como el 6. incluye al 4. vna vez y media; assi el 12. contiene al 8. vna vez y media.

De la mesma suerte en las razones de menor desigualdad, como son 4. à 8. y 6. à 12. contenerse el 4. de la mesma manera en el 8. que el 6. en el 12. consiste en que assi como el 4. se contiene dos vezes en el 8. assi el 6. se in-

incluye dos vezes en el 12. O tambien, que asi como el 4. incluye dos quartas del 8. asi el 6. incluye dos quartas de el 12.

8. De aqui se colige, que entonces dos razones son *diferentes*, *desiguales*, ò *desemejantes*; quando el antecedente de la vna incluye mas vezes à su consequente, que el antecedente de la otra incluye à su consequente: ò quando el antecedente de la vna incluye mas vezes alguna parte aliquota de su consequente; que el antecedente de la otra contiene semejante parte aliquota del suyo.

9. *Aquella razon se dirà generalmente mayor que otra, cuyo antecedente incluye mas vezes alguna parte aliquota de su consequente; que el antecedente de la otra incluye semejante parte aliquota del suyo.* Como la razon de 101. à 10. es mayor que la de 200. à 20. porque 101. incluye la dezima parte del 10. que es la vnidad ciento y vna vezes: y el 200. incluye la dezima parte del 20. que es 2. solo cien vezes. Tambien la razon de 3. à 4. es mayor que la de 4. à 8. porque el 3. incluye tres vezes la quarta parte de 4. y 4. incluye solas dos vezes la quarta parte de 8.

Esta explicaciõ de las razones semejantes, y desemejãtes sobre ser muy clara, è inteligible, se funda en la mesma naturaleza de las razones, q̃ no sõ otro q̃ vn respeto, ò cõparaciõ de vna quantidad cõ otra; las quales no de otra suerte se comparan, que en quanto se dizen vnas ser iguales, mayores, ò menores que otras; lo que no puede mejor explicarse, que diziendo incluìr, ò incluìrse mas, ò menos vezes las vnas en las otras; ò que incluya la vna mas, ò menos partes aliquotas de la otra: luego ser las razones semejantes consiste, en que estas inclusiones sean iguales; y el ser desemejantes, en que dichas inclusiones sean desiguales.

Conviene tambien esta explicacion à las razones irracionales, porque sibien en estas los antecedentes, y consequentes no tienen parte aliquota comun, por ser incommensurables; pero tantas vezes como cabe qualquiera parte aliquota de vn consequente en su antecedente, tantas se incluye semejante parte aliquota del otro consequente en su antecedente, aunque siempre en entrambos sobràra algo hasta el infinito: y esto basta para que dichas razones irracionales seã semejãtes: como trae el P. Tacquet, y el P. Miliet en el principio de este Libro.

10. *Proporcion es la semejança, ò igualdad de dos razones*: llamase en Griego *Analogia*. Y asi, por ser la razon de 4. à 2. semejante, ò igual à la razon de 6. à 3. hazemos de las dos vna proporcion, quando las comparamos diziendo: Como se ha 4. con 2. asi se ha 6. con 3.

De esto se sigue, que por tener vna razon dos terminos, antecedente y consequente, la proporcion, que como he dicho, incluye dos razones, tendrà por lo regular quatro terminos, dos antecedentes, y dos consequentes, como se vè en el exemplo propuesto; pero porque suele muchas vezes el mesmo termino, que es consequente de la primera razon, servir de antecedente para la segunda, se halla muchas vezes la proporcion en solos tres terminos, como quando dezimos: como se ha 8. con 4: asi 4. con 2. Los terminos que componen la proporcion, se llaman *proporcionales*.

11. Dividese la proporcion en continua, y no continua. *Continua* es quando el termino primero al segundo tiene la mesma razon, que el segundo al tercero; y que el tercero al quarto, y el quarto al quinto, &c. y se llaman los terminos tres, quatro, ò cinco *continuos proporcionales*, conforme el numero de los terminos, como los siguientes 16. 8. 4. 2. 1. como 16. à 8. asi 8. à 4. y 4. à 2. y 2. à 1. *Proporcion no continua* es quando se interrumpe, como en estos 12. 6. 8. 4. como 12. con 6. asi 8. con 4. pero no vale dezir, como 12. con 6. asi 6. con 8. Los terminos de esta se llaman proporcionales; pero no continuos.

12. *Terminos homologos son los antecedentes con los antecedentes, y los consequentes con los consequentes*; como siendo 12. con 6. como 8. con 4. el 12. y el 8. son homologos: como tambien el 6. y el 4.

13. *Razon compuesta es la que se compone de otras qualesquiera razones.* Si huviere pues muchas cantidades de vna especie, la primera à la vltima se dize tener la razon compuesta de

de las razones, que tienen entre si las cantidades intermedias; como en este exemplo: 3.5.8.9. La razon de 3.à 9. es compuesta de las tres razones intermedias, que son la de 3.à 5. la de 5.à 8. y la de 8.à 9. sean las que fueren. Y para que se vea con mayor claridad, hagase la composicion, poniendolas primero como quebrados, y multiplicando continuamente los numeradores; y tambien los denominadores, como aqui se vè: y serà la multiplicacion, ò composició de todás ellas este pro-

$\frac{3}{5}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{8}{9}$ | $\frac{120}{360}$

ducto $\frac{120}{360}$ que es la mesma razon que ay de 3.à 9.

14. *Razon duplicada*, es la que resulta de la composicion de dos razones semejantes, ò iguales: *Razon triplicada*, la que resulta de la composicion de tres semejantes: *Quadruplicada*, la que de quatro, &c. De que se sigue, que si ay algunas quantidades continuas proporcionales, como las siguientes:

primera	*segunda*	*tercera*	*quarta*	*quinta*
16.	8.	4.	2.	1.

La primera à la tercera tiene razon duplicada de la que ay entre la primera, y la segunda, porque se compone de la razon de la primera à la segunda, y de la segunda à la tercera; y por ser estas semejantes, se dize tener la primera à la tercera, razon duplicada de la que ay entre la primera, y segunda: ò entre la segunda, y tercera. Assi mismo, la primera à la quarta, tiene razon triplicada de la que ay entre la primera, y segunda, por componerse de tres razones semejantes à la que ay entre la primera, y segunda. Y por la mesma razon, la primera à la quinta tiene razon quadruplicada, &c.

15. *Razon subduplicada* es la que entra dos vezes en la cōposicion de otra: como la que ay entre la quantidad primera, y la segunda, es subduplicada de la que ay de la mesma primera à la tercera. Y essa mesma razon de la primera à la segunda *es subduplicada* de la que ay entre la primera, y la quarta, &c.

16. Los terminos proporcionales se pueden comparar de siete maneras, es à saber: *Directamente*: *alternando*: *invertiendo*: *componiendo*: *dividiendo*: *convirtiendo*, *y por igualdad*. Los seis primeros explicarè en los quatro terminos proporcionales siguientes.

Razon primera.		Razon segunda.	
Antecedente 1.	*Consequente* 1.	*Antecedente* 2.	*Consequente* 2.
Termino 1.	*Termino* 2.	*Termino* 3.	*Termino* 4.
B 4.	C 2.	D 6.	E 3.

Comparar *directamente* es comparar el antecedente 1. al consequente 1. y el 2. al 2. como B con C: assi D con E.

Comparar *alternando*, es quando se toman los terminos alternativamente, de suerte, que se compara el vn antecedente al otro antecedente: y el vn consequente al otro: como B con D: assi C con E.

Comparar *invertiendo*, es comparar cada consequente à su antecedente: de suerte, que lo que era consequente se haze antecedente: y lo que era antecedente, consequente: como C con B; assi E con D.

Comparar *componiendo*, consiste en comparar la suma, ò agregado del antecedente, y consequente al mesmo consequente: explicase la suma con este señal † que quiere dezir *mas*: y dezimos componiendo: como B†C con C: assi D†E con E. Esto es B y C juntos se han con C: como D y E juntos con E.

Comparar *dividiendo*, es comparar la diferencia del antecedente, y consequente, al mesmo consequente: explicase esta diferēcia con el señal -- que quiere dezir *menos*: y dezimos dividiendo: como B--C con C: assi D--E con E: esto es, como B menos C con C: assi D menos E con E.

Comparar *convirtiendo*, consiste en comparar el antecedente con la diferencia que ay entre el antecedente mesmo, y su consequente: como si dezimos directamente, como B con C, assi D con E, serà convirtiendo B con B--C: como D con D -- E.

La *comparacion por igualdad*, sucede, quando aviendo en cada vna de las dos partes de la proporcion mas de dos terminos; pero tantos en la vna como en la otra: y comparandoles de dos en dos tienen vna mesma razon; se cōparā vltimamēte el primero, y vltimo de la vna parte, cō el el primero y vltimo de la otra, omitiendo en entrambas los terminos intermedios: hazeſe claro con eſte exemplo.

16. 8. 4. 12. 6. 3.

Por ſer 16. con 8. como 12. con 6. y 8. con 4. como 6. con 3. ſe infiere por igualdad: luego 16. con 4. es como 12. con 3.

Eſta comparacion por igualdad, es en dos maneras: la primera *por igualdad ordenada*: y es quando las quantidades ſe vàn comparãdo por ſu orden: las dos primeras de la vna parte con las dos primeras de la otra; y las dos ſegundas de aquella, con las dos ſegundas de eſta; como ſe ha viſto en el exemplo propueſto.

La ſegunda es *por igualdad deſordenada, ò perturbada*: y es quando ſe perturba el dicho orden en la comparacion: como ſi dezimos, como 16. con 8. aſsi 6. con 3. y como 8. con 4. aſsi 12. con 6. ſerà por igualdad deſordenada, como 16. con 4. aſsi 12. con 3.

¶ *Explicarè los theoremas deſte Libro en numeros, por hazerſe en ellos mas faciles, y evidentes ſus verdades; pero lo que de ellos ſe dixere, ſe deve entender de todo genero de quantidad. Las primeras ſeis Propoſiciones ſe omiten ya comunmente por ſuperfluas.*

PROP. VII. Theorema.

X 8. C 4.
Z 8.

Las quantidades iguales X. Z tienen vna meſma razon con la quantidad C, y C tiene con X la meſma razon, que con Z.

Es axioma, y no neceſsita de demonſtracion.

PROP. VIII. Theorema.

Si las quantidades X. Z ſon deſiguales, la mayor X tiene mayor razon con vna tercera quantidad C, que la menor Z tiene con la meſma C. Y la tercera quantidad C, tiene menor razon con la mayor X, que con la menor Z.

X 8. C 2.
Z 4.

Conſta de la definicion 9. deſte Libro: y tambien porque X es quadrupla de C: y la Z es ſolo dupla: luego aquella razon es mayor que eſta. Tambien C incluye vna ſola quarta parte de X; y dos quartas partes de Z: luego mayor razon ay de C à Z, que de C à X.

PRO-

PROP. IX. Theorema.

Si las quantidades X, y Z tienen vna meſma razon con vna tercera quantidad C, ſe infiere ſer iguales X, y Z entre ſi. Y ſi vna meſma quantidad C tiene la meſma razon con X, y con Z: tambien ſe infiere ſer eſtas iguales entre ſi.

X 8. C 4.
Z 8.

PROP. X. Theorema.

Si la quantidad X tiene mayor razon con vna quantidad C, que tiene Z con la meſma C, ſe infiere ſer X mayor que Z. Y ſi la quaatidad C tiene mayor razon con Z que con X, ſe infiere ſer Z menor que X.

X 8. C 2.
Z 4.

Conſta de la definicion 9.

PROP. XI. Theorema.

Las razones que ſon iguales à otra razon, ſon iguales entre ſi.

A 10. B 5. F 8. G 4.
M 2. N 1.

Explicacion. A à B tiene la meſma razon dupla: que M à N. Tambien F à G tiene la meſma razon dupla que M à N: Digo que las razones de A à B, y de F à G ſon iguales, ò las meſmas; eſto es, entrambas ſon duplas.

PROP. XII. Theorema.

Si algunas quantidades fueren proporcionales, la meſma razon tendrà vn antecedente à ſu conſequente; que todos los antecedentes juntos, à todos los conſequentes.

Explicacion. El antecedente G tiene razon tripla con ſu conſequente L: y aſsimeſmo el antecedente H es triplo de ſu conſequente K: Digo ſer evidente que M, ſuma de los antecedentes, es triplo de N, ſuma de los conſequentes.

G 6. L 2.
H 9. K 3.
M 15. N 5.

PROP. XIII. y XIV.

Se omiten por no ſer meneſter.

PROP. XV. Theorema.

Los equimultiplices, tienen entre ſi la meſma razon que las quantidades de quienes ſon equimultiplices.

Ex-

G	2.	3.	L
F	2.	3.	K
E	2.	3.	H
C	6.	9.	D
A	2.	3.	B

E*Xplicacion.* Las quantidades C, y D ſon equimultiplices de A, y B: Digo que la meſma razon ay de C à D, que de A à B.

Preparacion. Supueſto que C incluye algunas vezes juſtamente la quantidad A: dividaſe C en las partes E, F, G, iguales à A: Dividaſe aſsimeſmo D en las H, K, L iguales à B: que ſeràn tantas como las diviſiones que ſe hizieron de A, por tener en ſi D à B, tantas vezes como C incluye à A.

Demonſtracion. Por ſer E igual à A, y H igual à B, ſeràn E à H, como A à B: y por la meſma razon ſeràn F à K, y G à L como A à B: Luego (12.) C, que es ſuma de los antecedentes E, F, G, tiene con D, ſuma de los conſequentes H,K,L, la meſma razon que E à H: ò que A à B.

Corolario.

Las partes aliquotas ſemejantes de los todos, tienen entre ſi la meſma razon que los todos; por ſer eſtos equimultiplices de las partes aliquotas ſemejantes.

PROP. XVI. Theorema.

Si quatro cantidades de vna meſma eſpecie ſon proporcionales directamente, lo ſeràn tambien alternativamente.

A B C D
8. 4. 6. 3.

E*Xplicacion.* Sean quatro cantidades de vna meſma eſpecie. A, B, C, D que ſean directamente proporcionales, como A con B; aſsi C con D: Digo inferirſe legitimamente, ſer tambien proporcionales alternando: como A con C: aſsi B con D.

Demonſtracion. Por ſer A con B, como C con D; ſeràn B, y D partes ſemejantes de A, y C (def. 7.): Luego [*por el corol. de la antecedente*] tẽdràn los todos A y C la meſma razon de ſus partes ſemejantes B, y D.

Eſcolio.

Conſta por ſi meſmo con evidencia; que ſi A con B, es como C con D directamente: tambien invertiendo ſerà D con C: como B con A; que es el corolario que trae Euclides al fin de la Propoſ. 4. de eſte Libro, que ſe omitiò por ſuperflua.

PRO-

PROP. XVII. Theorema.

Si las quantidades compueſtas ſon proporcionales, lo ſeràn tambien divididas.

A † B B. C † D D.
8. 4. 4. 6. 3. 3.

E*Xplicacion.* Digo que ſi ſon proporcionales A mas B con B: eſto es, en el exemplo propueſto, 12. con 4. como C mas D con D: eſto es 9. con 3. que tambien ſeràn proporcionales dividiendo A con B; como C con D.

Demonſtracion. Porque A † B con B, es como C † D cõ D: contendrà A † B tantas vezes vna parte aliquota de B; como C † D contiene vna ſemejante de D: y como dicha parte aliquota ſe halle tantas vezes en B, como la ſemejante en D: ſe ſigue, que quitando B de A † B, quedaràn en A tantas partes aliquotas de B, como quedaràn en C quitandole D: luego ſerà A con B, como C con D.

PROP. XVIII. Theorema.

Si las cantidades divididas ſon proporcionales, tambien lo ſeràn compueſtas.

M 8. P 4. N 6. Q 3.

E*Xplicacion.* Sea M con P; como N con Q. Digo que tambien ſerà M † P con P, como N † Q con Q.

Demonſtracion. Por ſer M con P; como N con Q, tantas vezes incluirà M qualquiera parte aliquota de P, quantas N incluye ſemejante parte aliquota de Q: Luego como P, y Q incluyan en ſi igual numero de dichas partes aliquotas; ſi ſe añade P à M, y Q à N: M † P tendrà tantas partes aliquotas de P, quantas N † Q incluye ſemejantes aliquotas de Q: Luego ſerà M † P con P, como N † Q con Q.

Corolario.

De lo dicho ſe demueſtra tambien la *razon converſa*: eſto es, que M † P es con M: como N † Q con N. Porque ſiendo, como ſe ſupone M † P à P; como N † Q à Q: ſerà dividiendo, (17.) como M con P; aſsi N con Q: y invertiendo (cor. de la 16.) como P con M; aſsi Q con N:

Lue-

Luego componiendo: como M † P con M; assi N † Q con N.

PROP. XIX.

Si de dos todos se restan dos cantidades, que tienen entre si la mesma razon que los todos; tambien los residuos tendràn la mesma razon que los todos.

Todos	12.	6.
	—	—
	4.	2.
Residuos	8.	4.

Explicacion. Sean los todos 12. y 6. de quienes se restan 4. y 2. que tienen entre si la mesma razon que los todos 12. y 6. Digo que los residuos 8. y 4. tienen entre si la mesma razon que 12. y 6. Vese claramente, porque assi como 12. es doblado de 6. assi 8. es doblado de 4.

Demonstracion. Porque 12. à 6. es como 4. à 2. Luego alternando serà como 12. à 4. assi 6. à 2. Luego dividiendo serà 12. -- 4. à 4. como 6. -- 2. à 2. esto es, 8. à 4. como 4. à 2. Luego siendo por suposicion 4. à 2. como 12. à 6. serà 8. à 4. como 12. à 6.

PROP. XX. y XXI.

Segun esta methodo son superfluas.

PROP. XXII. Theorema.

Si ay tres, ò mas quantidades de vna parte, como N, P, Q, y otras tantas de otra R, S, T: y fuere N con P, como R con S: y P con Q, como S con T, serà verdadera consequencia ser N con Q: como R con T, que es lo que diximos igualdad ordenada.

N 12. P 6. Q 2. R 18. S 9. T 3.

Demonstracion. La razon de N à P es la mesma q̃ de R à S: y la razon de P à Q es la mesma que de S à T: luego la razon de N à Q, que se compone de las dos razones de N à P, y de P à Q (def. 13.) serà igual à la razon de R à T compuesta de las razones de R à S: y de S à T: porque componiendose de igual numero de razones iguales, necessariamente han de ser iguales.

PROP. XXIII. Theorema.

Si tres quantidades de vna parte, P, Q, R: y otras tres de otra S, T, V: fueren proporcionales en esta forma P con Q, como T con V: y Q con R, como S con T, serà verdadero ser P con R: como S con V, que es lo que diximos igualdad perturbada, ò desordenada.

P 12. Q 6. R 3. S 8. T 4. V 2.

Demuestrase de la mesma manera que la Prop. antecedente.

PROP. XXIV. Theorema.

Si la primera quantidad es à la segunda, como la tercera à la quarta; y vna quinta quantidad fuere à la segunda, como otra sexta quantidad à la quarta; la compuesta de la primera y quinta, serà à la segunda, como la compuesta de la tercera y sexta, à la quarta.

Explicacion. Sea A con B: como C con D: y sea E con B, como F con D: Digo que A † E serà con B, como C † F con D.

E 4.		F 6.	
A 6.	B 2.	C 9.	D 3.

Demonstracion. Porque A es à B, como C à D, tantas vezes contendrà A vna parte aliquota de B; quantas C contiene semejante aliquota de D: assimesmo por ser E à B; como F à D; contendrà E vna aliquota de B tantas vezes, quantas F, vna semejante de D: Luego A y E juntas contendràn vna aliquota de B, tantas vezes, quantas F y C contienen la semejante de D: Luego serà A † E à B; como C † F à D.

PROP. XXV. Theorema.

En quatro quantidades proporcionales, la maxima, y minima juntas son mayores que las otras.

G 16. H 12. L 4. K 3.
M 4. N 3.
X 12. Z 9.

Explicacion. Las 4. quantidades G, H, L, K son proporcionales G con H; como L con K: Digo que G † K es mayor que H † L. Esto es que la maxima, y minima juntas son mayores que las otras.

Demonstracion. De la maxima G quitese M igual à L: y de la H quitese N igual à K: y serà toda G à toda H, como la que se quitò, M, à la otra, que se quitò, N: Luego (19.) serà el residuo X, al residuo Z, como toda G à toda H: y como se aya supuesto ser G mayor que H; serà la X mayor que Z, como se colige de la *def.* 7. Y siendo M igual à L; y N igual à K; seràn M † K iguales à N † L: Luego si à M † K se añade la X que es mayor: y à N † L se añade Z, que es menor, resultarà M † K † X mayor que N † L † Z: y siendo M † X igual à G: y N † Z igual à H, serà G † K mayor que H † L.

¶ *Aqui termina Euclides el Libro 5. pero Campano, y comunmente los Geometras añaden algunas Proposiciones sacadas de Pappo Alexandrino, y otros, que Archimedes, Apolonio, y diversos Autores citan como si fuessen de Euclides: y aunque sin ellas se puede vsar de estos elementos, por incluirse en lo demonstrado hasta aora; pero no he querido omitir vna breve explicacion suya, que podrà dexar de leer el Principiante si le pareciere.*

PROP. XXVI. Theorema.

Si la razon de la primera à la segunda es mayor, que de la tercera à la quarta: invertiendo, la de la quarta à la tercera, serà mayor que la de la segunda à la primera.

E 4.
A 8. B 2. C 6. D 3.

Explicacion. La razon de A à B es mayor que la de C à D: Digo que invertiendo, serà la razon de D à C, mayor que la de B à A.

Preparacion. Supongase que E es à B, como C à D: y assi [10.] serà A mayor que E.

Demonstracion. E à B, es como C à D: luego invertiendo D à C, es como B à E: B à E tiene mayor razon que B à A (8.): luego D à C tiene mayor razon, que B à A.

PROP. XXVII. Theorema.

Si la razon de la primera A à la segunda B, es mayor que la de la tercera C, à la quarta D: alternando serà la razon de A à C, mayor que la de B à D.

Demonstracion. Supuesto, como en la precedente, que E es à B, como C à D, se sigue ser A mayor que E: y que alternando (16.) es E à C, como B à D: y siendo A mayor que E; la razon de A à C serà mayor que la de E à C: luego tambien es mayor que la de B à D.

PROP. XXVIII. Theorema.

Si la razon de la primera à la segunda es mayor, que la de la tercera à la quarta: tambien componiendo serà la razon de la primera, y segunda à la segunda, mayor, que la de la tercera y quarta à la quarta.

Explicacion. En los mesmos proporcionales, A con B, tiene mayor razon, que C con D: digo, que componiendo A † B con B tiene tambien mayor razon que C † D con D. Supongase como antes, que E à B sea como C à D: y serà A mayor que E.

Demonstracion. E à B es como C à D: luego [18.] E † B à B es como C † D à D; pero A † B es mayor que E † B: luego A † B tiene mayor razon con B, que E † B con B: luego mayor que C † D con D.

PROP. XXIX. Theorema.

Si la razon de la A † B à B, es mayor que la de C † D à D; tambien la de A à B, serà mayor que la de C à D.

Consta de la antecedente.

PROP. XXX. Theorema.

Si la razon de la A † B à B es mayor que la de C † D à D; la razon de C † D à C, serà mayor, que la de A † B à A.

Consta de la Prop. XXVI.

PROP. XXXI. y XXXII. Theoremas.

Si tres quãtidades eſtan en mayor razon à otras tantas, pueſtas en el meſmo orden, ò en diferente; la primera de las primeras tendrà mayor razon à ſu vltima, que la primera de las otras à ſu vltima.

LA razon es, porque la primera de las primeras à ſu vltima, tiene razon compueſta de igual numero de mayores razones, que la primera de las otras à ſu vltima [*def.* 13.]: luego la primera y vltima de las primeras, tienen mayor razon, que la primera y vltima de las otras.

PROP. XXXIII. Theorema.

Si el todo tiene mayor razon al todo, que la parte reſtada, à la parte reſtada; tendrà el reſiduo al reſiduo mayor razon, que el todo al todo.

E 12. F 3. G 6. H 2.

E*Xplicacion.* El todo, ò ſuma E † F tiene mayor razon con el todo G † H, que la parte F con la parte H: digo, que quitadas eſtas cada vna de ſu todo; tendrà el reſiduo E al reſiduo G mayor razon que el todo E † F al todo G † H.

Demonſtr. Porque ay mayor razon de E † F, à G † H, que de F à H: alternando [27.] avrà mayor razon de E † F à F, que de G † H à H: y convirtiendo (30.) avrà menor razon de E † F à E, que de G † H à G: luego alternando otra vez, avrà menor razon de E † F à G † H, que de E à G.

PROP. XXXIV. Theorema.

Las razones duplicadas, triplicadas, &c. de razones iguales, ſon tambien iguales entre ſi.

LA razon es, porque ſe componen de igual numero de razones iguales [*def.* 14.] y no neceſsita de mas demonſtracion, por ſer como Axioma.

PROP. XXXV. Theorema.

Si las razones duplicadas, ò triplicadas, &c. de otras razones, ſon iguales; tambien lo ſeràn aquellas, de quienes ſon duplicadas, ò triplicadas, &c.

¶ Es tambien como axioma; y ſe infiere de la antecedente.

LI-

LIBRO VI.

TOda la doctrina de las proporciones, que contiene el Libro paſſado, ſe contrahe, y aplica en eſte à las figuras planas. Llamaſe con razon *Libro de oro*, por la nobleza y fecundidad de ſus propoſiciones: y conviene ſe ponga todo cuidado en comprehenderlas, porque ſin ellas jamàs ſe podràn regiſtrar los arcanos mas reconditos de la Geometria.

DEFINICIONES.

1. *Figuras rectilineas ſemejantes ſon las que tienen todos ſus angulos iguales, cada vno à ſu correſpondiente; y los lados, que forman dichos angulos iguales, proporcionales.* Como los triangulos ABC, DEF (*fig.* 1.) ſeràn ſemejantes, ſi los angulos A, y D: B, y E: C, y F fueren iguales: y el lado AB, à BC: como DE, à EF: y BC à CA, como EF à FD: y lo meſmo en las demas figuras.

2. *Figuras reciprocas ſon las que tienen los lados reciprocos: eſto es, que ſon ſus lados de tal manera proporcionales, que el primero, y quarto termino ſe hallan en la vna figura; y el ſegundo, y tercero, en la otra.* Conque empezando la proporcion en la vna, paſſa à la otra; y de eſta buelve à la primera. Como ſi en los paralelogramos FA, EC (*fig.* 2.) fuere el lado AB al lado CD, como el lado ED al lado FB, ſeràn los lados reciprocos, y las figuras reciprocas.

3. *Vna linea recta ſe dize eſtar dividida en media, y extrema razon, quando ſe divide de tal ſuerte en dos ſegmentos, que toda la linea al mayor ſegmento, tiene la meſma razon, que el mayor ſegmento al menor.* Como ſi la linea MN (*fig.* 2.) de tal ſuerte eſta dividida en O, que toda la MN tenga con MO la meſma razon, que MO con ON.

4. *La altura de qualquiera figura es la perpendicular tirada del vertice de la figura à ſu baſe*: y eſta perpendicular, à vezes

F 2 cae

cae dentro, à vezes fuera de la figura. Como la altura de los triangulos ABC [*fig.* 3.] es la perpendicular AD. De que se colige, que los triangulos, y paralelogramos, que tienen vna mesma altura, se pueden colocar entre vnas mesmas paralelas: y los que tienen vn mesmo vertice, y sus bases estàn sobre vna mesma recta, tienen vna mesma altura; por ser comun à entrambos la perpendicular que cae del vertice à la base.

5. *Arcos semejantes de circulo, se llaman los que tienen vna mesma razon con la circunferencia entera de su circulo*; como si entrambos fueren el tercio, ò el quarto de su circulo.

PROP. I. Theorema.

Los Triangulos, y Paralelogramos, que tienen vna mesma, ò igual altura, tienen la mesma razon que sus bases. (*fig.* 4.)

DE este Theorema, que es bien facil, depende todo este Libro 6. Sean pues los triangulos ABC, EFG, que tengan vna mesma altura: Digo, que tendràn entre si la mesma razon, que las bases AC, EG: esto es, que si por exemplo, AC es doblada de EG, tambien el triangulo ABC serà doblado del triangulo EFG.

Preparacion. Supongo pues sea la base AC doble de EG; partase por medio en I, y serà tanto AI, como IC igual con EG. Y tirese la recta IB: y supuesto que dichos triangulos tienen igual altura, podràn estar entre vnas mesmas paralelas AG, DF.

Demonstracion. Los triangulos IBC, EFG, por tener iguales bases, y estar entre paralelas, son iguales [38.1.] assi mesmo son iguales por la mesma razon los triangulos ABI, EFG: luego el triangulo ABC incluye dos vezes al triangulo EFG, assi como la base AC incluye dos vezes la base EG: luego (*def.* 7. *lib.* 5.) el triangulo ABC tiene cõ el triangulo EFG, la mesma razon, que la base AC, à la base EG: lo que he demonstrado en la razon dupla se demonstrarà de la mesma suerte en otra qualquiera.

Digo tambien, que los paralelogramos DC, HG, que tienen igual altura, se han como las bases: porque el paralelogramo DC es doble del triangulo ABC (41.1.) y el para-

paralelogramo HG es doble del triangulo EFG: luego [15.5.] dichos paralelogramos tienen la mesma razon entre si, que los triangulos: estos tienen la razon mesma de las bases: luego tambien aquellos.

Corolario.

Los triangulos, y paralelogramos, que tienen vna mesma, ò igual base, se han como sus alturas: porque el mesmo argumento se haze de las alturas, siendo las bases iguales, que hizimos de las bases, siendo iguales las alturas.

PROP. II. Theorema.

Si en vn triangulo se tira vna paralela à vno de sus lados, esta linea cortarà los otros lados en dos segmentos proporcionales; y si se dividen en segmentos proporcionales, la linea que les divide serà paralela al otro lado. [*fig.* 5.]

EXplicacion. En el triangulo HIK, la linea LM es paralela al lado IK: Digo que esta linea corta los lados HI, HK proporcionalmente en los puntos L, M, desuerte, que HL à LI, es como HM à MK.

Preparacion. Tirense las rectas LK, MI.

Demonstracion. Los triangulos MLI, LMK por tener vna mesma base LM, y estar entre las paralelas LM, IK, son iguales [37.1.] Luego (7.5.) el triangulo HLM la mesma razon tiene con el triangulo MLI, que con el triangulo LMK: y como los triangulos HML, MLI tengan vna mesma altura, por tener el vertice M comun (*def.* 4.) tendràn entre si (1.) la mesma razon que sus bases HL, LI: y por la mesma razon los triangulos HLM, MLK tendran la razon de sus bases HM, MK; teniendo pues el triangulo HML la mesma razon con el triangulo LMI, que con LMK; la mesma razon tendrà la base HL con la base LI, que la base HM con la base MK.

Digo tambien que si la LM divide los lados proporcionalmente, desuerte que HL con LI, sea como HM à MK, dicha linea serà paralela à la IK.

Demonstracion. Por lo demonstrado, el triangulo HLM, al triangulo LMI, tiene la mesma razon que la base HL, à la la base LI: Tambien el triangulo mesmo HLM al triangulo LMK tiene la razon de la base HM à la base MK: y como se suponga ser HL con LI: como HM con MK: la mesma razon tiene el triangulo HLM, con el triangulo LMI, que con LMK: luego estos dos triangulos son iguales; y como tengan vna mesma base LM, estaràn entre dos paralelas LM, IK. [39.1.]

PROP. III. Theorema.

La recta que divide vn angulo de qualquiera triangulo en dos partes iguales, divide la base en segmentos proporcionales à los lados del triangulo. Y la linea, que partiendo la base en segmentos proporcionales à los lados, divide el angulo, le divide en dos partes iguales. [*fig.6.*]

E*Xplicacion.* El angulo N del triangulo MNO, se supone dividido en dos partes iguales cõ la linea NP: Digo, que esta linea divide la base MO en los dos segmentos MP, PO, que tienen entre si la mesma razon que los lados del triangulo: esto es que OP à PM tiene la mesma razon que ON à NM.

Preparacion. Alarguese ON hasta Q, desuerte que NQ sea igual à NM: y juntese la QM.

Demonstr. El angulo ONM es externo respeto del triangulo MNQ: luego [32.1.] es igual à los dos internos opuestos Q, y NMQ: y siendo estos iguales por oponerse à los lados iguales NM, NQ (6.1.) qualquiera de ellos, como QMN, serà tanto como la mitad del angulo MNO; y siendo tambien por la suposicion, el angulo MNP mitad del angulo MNO, seràn los angulos NMQ, MNP iguales: y como sean alternos, seràn (28.1.) las lineas QM, NP paralelas: luego [2.] serà ON à NQ, como OP, à PM; y siendo NM igual à NQ, serà ON à NM, como OP à PM.

Digo tambien, que si la NP divide la base MO en los segmentos OP, PM proporcionales con los lados; esto es, que OP à PM sea como ON à NM, el angulo MNO quedarà dividido en dos partes iguales.

Demonstr. Porque las lineas MN, NQ son iguales, siendo por suposicion MN à NO, como MP à PO, serà QN à NO,

NO, como MP à PO: luego (2.) las lineas QM, NP son paralelas: y por consiguiente [27.1.] los angulos alternos QMN, MNP seràn iguales: y siendo (32.1.) todo el angulo MNO igual à los dos internos opuestos Q, y QMN; siendo, como se ha demonstrado, el angulo MNP igual al angulo QMN, serà el angulo PNO igual al angulo Q: y siendo los angulos NMQ, y Q iguales (5.1.) seràn tambien iguales los angulos MNP, PNO: y todo el MNO estarà dividido en dos partes iguales.

PROP. IV. Theorema.

Los triangulos equiangulos, tienen los lados que forman angulos iguales proporcionales: y los opuestos à los angulos iguales, son homologos. (*fig.7.*)

E*Xplicacion.* Sean los triangulos RQS, TVX equiangulos, esto es el angulo S sea igual al angulo X: R à T: y Q à V: Digo, que los lados que forman iguales angulos, son proporcionales en el vno y en el otro: esto es RS à SQ, como XT à XV: QR à RS, como VT à TX.

Preparacion. Por ser el angulo S igual al angulo X: si S se pone sobre X; las rectas SR, SQ vendran sobre XT, XV; de suerte, que SR ocuparà à XR; y SQ, à XQ: tirese la QR: y todo el triangulo SRQ, se ajustarà al triangulo XRQ.

Demonstr. El angulo XRQ se supone igual al angulo T: luego la XT entra con iguales angulos en las RQ, TV: luego [29.1.] dichas lineas son paralelas: luego (3.) serà XQ à QV, como XR à RT: y componiendo serà XV à XQ, como XT à XR: y alternando serà XV con XT, como XQ con XR. (De la mesma suerte demonstrarìa que los lados QR, RS son proporcionales con VT, TX ajustando el angulo R sobre el angulo T.

Consta tambien claramente, que los lados XV, XQ opuestos à los angulos iguales T, y R son homologos; por ser antecedentes en la dicha proporcion: como tambien XT, y XR opuestos à los angulos iguales V, y Q, por ser consequentes.

Coro-

Corolarios.

Primero. Si dentro de vn triangulo VTX ſe tira vna paralela QR à vno de ſus lados, ſeràn los triangulos VTX, RQX equiangulos, y ſemejantes: y ſerà XT à XR, como TV à RQ.

Segundo. Para aſſegurar que los triangulos ſon ſemejantes, baſta conocer ſer equiangulos el vno al otro; porque ſiendo equiangulos, tendràn los lados proporcionales; y por conſiguiente tendràn las dos condiciones requiſitas para ſer ſemejantes (*def.* 1.)

Tercero. Si en qualquiera triangulo XVT ſe tira vna linea XZ del angulo opueſto, que corte dichas paralelas, las cortarà proporcionalmente en Z, y O. Porque ſerà VZ à QO [*cor.* 1.] como ZX à OX; y tambien ZT à OR, como ZX à OX: luego VZ à QO es como ZT à OR: y alternando VZ à ZT, como QO à OR.

PROP. V. Theorema.

Si los lados de vn triangulo ſon proporcionales à los de otro triangulo, ſeràn los triangulos equiangulos: y los angulos opueſtos à los lados homologos ſeràn iguales. [*fig.* 8.]

EXplicacion. Los triangulos ACB, DFE ſe ſupone tienen los lados proporcionales, eſto es AC à CB, como DF à FE: y AB à BC como DE à EF. Digo, que los angulos C, y F; como tambien A y D, B y E, ſon iguales.

Preparacion. Hagaſe el angulo EFG igual al angulo C: y el angulo FEG, al angulo B: con que el angulo G ſerà tambien igual al angulo A: y los triangulos ACB, EFG ſeràn equiangulos.

Demonſtracion. Por ſer los triangulos ABC, EFG equiangulos, ſeràn [4.] ſus lados proporcionales: eſto es, AC à CB, como GF à FE: y ſiendo (*por ſupoſicion*) AC à CB como DF à FE; ſerà (11.5.) GF à FE, como DF à FE: Luego (7.5.) GF, y DF ſon iguales. De la meſma ſuerte probarè, que GE es igual à ED; conque los triangulos DFE, GFE tienen los dos lados FG, GE iguales à los dos FD, DE; y FE comun: luego [8.1.] dichos triangulos ſon totalmente iguales, y equiangulos: y ſiendo ACB, FGE equiangulos por conſtruccion: ſeràn ACB, y DFE equiangulos: deſuerte, que el angulo A ſerà igual à D; B à E; y C à F, que ſon los opueſtos à los lados homologos.

PROP. VI. Theorema.

Si dos triangulos tienen vn angulo igual; y los lados, que comprehenden eſte angulo, ſon proporcionales, los triangulos ſeràn equiangulos. (*fig.* 8.)

EXplicacion. Los triangulos ACB, FED, tienen los angulos C, y F iguales: y el lado AC al lado CB tiene la meſma razon, que el lado DF al lado FE: Digo, que los triangulos ſon equiangulos.

Preparacion. Hagaſe el angulo EFG igual al angulo C; y el angulo FEG, igual à B; y ſerà, como en la antecedente, el angulo G igual al angulo A; y los triangulos FEG, ACB equiangulos.

Demonſtracion. Por ſer los triangulos FEG, ACB equiangulos, ſerà GF à FE, como AC à CB: y ſiendo (*por ſupoſicion*) AC à CB como DF à FE, ſerà GF à FE como DF à FE: luego (7.5.) GF y DF ſon iguales: y por conſiguiente en los triangulos DFE, GFE, el lado DF es igual à FG; y FE comun, y los angulos DFE, EFG iguales, por ſerlo entrambos al angulo C: luego (4.1.) los triangulos DFE, EFG ſon totalmente iguales, y equiangulos; y ſiendo EFG equiangulo con ACB, tambien DFE ſerà equiangulo con ACB.

PROP. VII. ſe omite.

PROP. VIII. Theorema.

En el Triangulo rectangulo, la perpendicular que baxa del angulo recto à la baſe, divide el triangulo en dos triangulos ſemejantes al total, y entre ſi. [*fig.* 9.]

EXplicacion. Sea el triangulo GHL rectangulo en H: del angulo recto H cae la perpendicular HI à la baſe. Digo que el triangulo GHL queda dividido en dos triangulos HGI, HIL ſemejantes al triangulo total GHL, y entre ſi.

Demonſtracion. Los triangulos GHL, HIG tienen los angugulos GHL, HIG rectos, è iguales, y el angulo G comun: Luego los restantes angulos GHI, y L, son tambien iguales (32.1.) luego los triangulos GHL, GHI son equiangulos. De la mesma suerte probarè ser equiangulos los triangulos GHL, HIL: luego todos son equiangulos; y [4.] tienen sus lados proporcionales: luego son semejantes.

Corolarios.

1. *Siguese de lo dicho, que la linea HI es media proporcional entre las lineas GI, IL; porque siendo los triangulos HGI, HIL semejantes, tienen los lados proporcionales: como GI, lado menor del triangulo GHI, con HI, lado mediano del mesmo triangulo: asi el mesmo HI, lado menor del triangulo HIL, con IL, lado mediano del mesmo triangulo: luego HI es media proporcional entre GI, IL.*

2. *Siguese tambien, que el lado HG es medio proporcional entre GL, y el segmento GI: porque es, por la dicha razon, GL con GH, como GH con GI: y asimesmo es el lado HL, medio proporcional entre GL y LI; por ser GL con HL, como HL con IL.*

PROP. VIIII. Problema.

De vna recta dada HO [fig. 10.] *cortar vna quarta parte; ò otra qualquiera.*

Operacion. Tirese à arbitrio qualquiera recta HR; y porque se pide la quarta parte de HO, tomense con qualquiera intervalo en la HR quatro partes iguales HI, IL, LM, MR: tirese la linea RO: y del punto I saquese la IN paralela à RO; y HN serà la quarta parte de HO.

Demonstracion. Por ser IN paralela al lado RO, serà [4.] HI à IR, como HN à NO: y componiendo [18.5.] serà HR con HI, como HO con HN: luego siendo HI la quarta parte de HR, serà HN la quarta parte de HO.

PROP. X. Problema.

Dividir vna recta dada segun otra estuviere dividida. [*fig.* 11.]

Explicacion. La linea MN se propone dividida en O en dos partes tales, que la ON es doblada de MO: y se pide que la recta dada MR, se divida en otras dos partes, que guarden la mesma proporcion.

Operacion. Tirese la RN; y por O tirese la OL paralela à RN: y quedarà dividida MR en L, como se pide.

Demonstracion. Por ser LO paralela à RN, es (2.) RL à LM, como NO à OM; NO es doblada de OM: luego RL es doblada de LM.

PROP. XI. Problema.

Dadas dos rectas, hallarles vna tercera proporcional. (*fig.* 12.)

Explicacion. Dadas las rectas PS, PR, se pide la tercera proporcional.

Operacion. Dispónganse demanera, que formen qualquier angulo: añadase en derechura SQ igual à PR: tirese la SR: y del punto Q, hagase la QT paralela à SR, que cortarà à la PR alargada en T. Digo, que RT es la tercera proporc.

Demonstracion. Por ser RS, TQ paralelas, serà (2.) PS à SQ, como PR à RT: luego siẽdo PR igual à SQ, serà PS à PR, como PR à RT: luego RT es la tercera proporcional.

PROP. XII. Problema.

Dadas tres rectas hallar vna quarta proporcional. (fig. 13.)

Explicacion. Sean dadas las tres rectas MN, NV, MR; y se pide vna quarta proporcional.

Operacion. Dispónganse las dos primeras MN, NV en vna linea recta, y la tercera MR, que haga qualquier angulo: Tirese NR; y del punto V tirese la VT paralela à NR, que encuentre la MR alargada en T; y RT serà la quarta proporcional.

Demonstr. Por ser paralelas NR, VT, es MN à NV, como MR à RT: luego RT es quarta proporcional.

PROP. XIII. Problema.

Dadas dos rectas, hallar entre ellas vna media proporcional. [*fig.* 14.]

Explicacion. Sean dadas VZ, ZT; y se pide vna otra recta, que sea media proporcional entre ellas.

Operacion. Juntense las dadas en derechura, desuerte, que hagã vna linea recta VT: dividase VT por medio en Y: y cõ la distãcia YV hagase vn semicirculo: Del punto Z levãtese la perpẽdicular ZX: y esta serà la media proporcional.

Demonstracion. El angulo VXT es recto, por estar en el semicirculo (31.3.) luego (*corol. de la* 8.) la XZ es media proporcional entre VZ, ZT.

Coro-

Corolario.

De aqui se infiere, que si de qualquiera punto de la circunferencia, baxa vna perpendicular al diametro, que esta serà media proporcional entre sus segmentos.

PROP. XIV. Theorema.

Los paralelogramos iguales, que tienen vn angulo igual, tienen los lados, que forman dicho angulo, reciprocos: y los que tienen dichos lados reciprocos, son iguales. [*fig.* 15.]

EXplicacion. Sean los paralelogramos M,O, iguales; y tẽgan los angulos ACB, GCD iguales: Digo, que los lados, que forman dichos angulos son reciprocos; esto es, que el lado AC del paralelogramo M, al lado CD del paralelogramo O, es como el lado GC del paralelogramo O al lado CB del paralelogramo M.

Preparacion. Juntense los angulos C iguales, desuerte, que los lados AC,CD hagan vna linea recta: y necessariamente BC, CG haràn otra linea recta: porque el angulo BCD con el angulo BCA, haze dos rectos [13.1.] y como el angulo BCA se suponga igual al angulo GCD, es forçoso, que el angulo BCD con el DCG haga tambien dos rectos; luego (14.1.) BCG es vna linea recta: perficionese el paralelogramo N.

Demonstracion. Por ser los paralelogramos M y O iguales, la mesma razon tiene el paralelogramo M al paralelogramo N, que el paralelogramo O, al mesmo N [7.5.] y como el paralelogramo M al N tenga (1.) la razon de AC à CD, por tener entrambos vna mesma altura CB: y el paralelogramo O al N tenga la razon de GC à CB, por tener entrambos la mesma altura CD: se sigue, que la mesma razon tiene el lado AC del paralelogramo M al lado CD del paralelogramo O, que el lado GC del mesmo O, al lado CB, de M.

Digo tambien que si los paralelogramos M, O tienẽ dichos lados reciprocos, son iguales.

Demonstracion. Por tener los paralelogramos M, y N vna mesma altura CB, serà el paralelogramo M al N (1.) como la base AC à la base CD. Assimesmo, por tener los paralelogramos O, y N vna mesma altura CD, serà el paralelogramo O al N, como la base GC à la base CB: y como se suponga tener la base AC à CD, la mesma razon, que la base GC à CB; se sigue, que la mesma razon tiene el paralelogramo M al paralelogramo N, que el paralelogramo O al mesmo N: luego (7.5.) los paralelogramos M, y O son iguales.

PROP. XV. Theorema.

Los triangulos iguales, que tienen entre si vn angulo igual, tienen los lados, que forman dicho angulo, reciprocos; y si estos lados son reciprocos, los triangulos son iguales.

Consta de lo demonstrado en la antecedente, porque tiradas las diagonales en la mesma figura, se harà de los triangulos la mesma demonstracion que se hizo de los paralelogramos.

Corolario.

Consta de lo dicho, que tanto los paralelogramos, como los triangulos, que tienen las bases, y alturas reciprocas, son iguales.

PROP. XVI. Theorema.

Si quatro lineas fueren proporcionales, el rectangulo hecho de las extremas es igual al rectangulo hecho de las medias. Y si el rectangulo de las extremas fuere igual al de las medias, seràn dichas quatro lineas proporcionales. [*fig.* 16.]

EXplicacion. Sean las quatro lineas proporcionales AB à CD, como EC à FA: y de las AB, FA, que son las extremas, hagase el rectangulo G: y de las CD, CE, que son las medias, hagase el rectangulo H. Digo que los rectangulos G, y H son iguales.

Demonstracion. Los rectãgulos G, y H son equiangulos, y tienen los lados reciprocos, como AB à CD, assi CE à AF: luego (14.) son iguales.

Digo tambien, que si G y H son iguales, tendràn los lados reciprocos; y serà AB à CD, como CE à AF (14): luego son proporcionales.

PRO-

PROP. XVII. Theorema.

Si tres rectas son proporcionales, será el rectangulo hecho de las extremas, igual al quadrado hecho de la media: y al contrario, si el quadrado de la media fuere igual al rectangulo de las extremas, las tres lineas seràn proporcionales. (*fig.* 17.)

E*Xplicacion.* Sean las tres proporcionales IL à MN, como MN à OP. Digo què el rectangulo que se hiziere de las extremas IL, OP, serà igual al quadrado de la media M N.

Demonstracion. Tomando otra vez la MN, seràn quatro proporcionales, IL à MN, como la segunda MN à OP: luego [16.] el rectangulo de las extremas IL, OP, serà igual al rectãgulo de las medias, MN MN; y como el rectangulo de estas sea quadrado, por ser ellas iguales, serà el rectangulo de las extremas igual al quadrado de la media.

Asimesmo, si el rectangulo de las extremas IL, OP es igual al quadrado de la media MN, serà (16.) como IL à MN, assi MN à OP.

Corolario.

De lo dicho se colige la demonstracion del problema de la Prop. 14. del Libro 2. porque (*fig.* 16. *del lib.* 2.) la NO es media proporcional entre PN, y NX [13.] luego el quadrado de NO serà igual al rectangulo hecho de PN, NX.

PROP. XVIII. Problema.

Sobre vna recta dada, describir vn poligono semejante à otro, y semejantemente descrito. [*fig.* 18.]

E*Xplicacion.* Ser dos poligonos semejantes, y descritos sobre las rectas semejãtemẽte, consiste en q̃ los angulos iguales se formen sobre dichas rectas de la mesma manera en el vno que en el otro, y los demàs angulos iguales, y los lados proporcionales guarden en entrambas vn mesmo orden. Pidese pues, que sobre la recta dada IK se forme vn rectilineo semejante al rectilineo MR, y sea semejantemente descrito.

Operacion. Dividase el rectilineo MR en triangulos, tirando la LN: y sobre la IK hagase el angulo I igual à M; y el angulo OKI igual à LNM; y seràn los triangulos IOK, MLN equiangulos (32.1.) Hagase aora el angulo POK igual al angulo RLN; y OKP igual à LNR; y seràn los triangulos OPK, LRN equiangulos: Digo que el rectilineo IP serà semejante à MR.

Demonstracion. Por ser los triangulos parciales de cada poligono equiangulos, son tambien equiangulos los poligonos. Y porque los triangulos OIK, LMN son equiangulos, es [4.] IK à KO, como MN à NL. Tambien por ser equiangulos los triangulos POK, RLN, es KO à KP, como NL à NR: son pues proporcionales tres de vna parte, y tres de otra, como se sigue:

IK, KO, KP, MN, NL, NR,

Luego por igualdad ordenada (22.5.) serà IK à KP, como MN à NR, y assi de los demàs lados: luego los poligonos son equiangulos, y tienen los lados proporcionales: luego son semejantes.

PROP. XIX. Theorema.

Los triangulos semejantes estàn en razon duplicada de la de sus lados homologos. (*fig.* 19.)

E*Xplicacion.* Sean los triangulos *b* y *q* semejantes. Digo que tienen entre si la razon duplicada de los lados homologos, esto es, que el triangulo *b* al triangulo *q*, tiene razon duplicada de la que tiene el lado AB con el lado BC.

Preparacion. Dispónganse los triangulos de tal manera, que los lados AB, BC hagan vna recta; y añadase CD tal, que AB à BC tenga la mesma razon que BC à CD: y tirense las lineas EC, ED.

Demonstracion. La mesma razon ay de AB à BC, que de BC à CD: y pues por la similitud de los triangulos, la razon de EB à BF es la mesma que de AB à BC, serà tambien la razon de EB à BF la mesma que de BC à CD. Esto supuesto, por tener los triangulos *d* y *r* vna mesma altura, tiene [1.] el triangulo *d* al triangulo *r* la razon de BC à CD:

CD : y por la meſma cauſa tiene el meſmo triangulo d al triangulo q la razon de EB à BF : luego el triangulo d la meſma razon tiene con el triangulo r , que con el triãgulo q : luego [7.5.] los triangulos r, y q ſon iguales : luego el triangulo b la meſma razon tiene con el triangulo q , que con el triangulo r : luego como el triangulo b al triangulo r tenga la razon de la baſe AB à la baſe CD ; tendrà b à q la razon de la baſe AB à la baſe CD : y como eſta razon de AB à CD ſea duplicada de la que ay de AB à BC (por ſer AB , BC , CD continuas proporcionales) tendrà el triangulo b al triangulo q razon duplicada del lado AB al lado BC.

PROP. XX. Theorema.

Los poligonos ſemejantes ſe dividen en igual numero de triangulos ſemejantes, y proporcionales à ſus todos : y los poligonos ſemejantes tienen entre ſi la razon duplicada de los lados homologos. [*fig.* 20.]

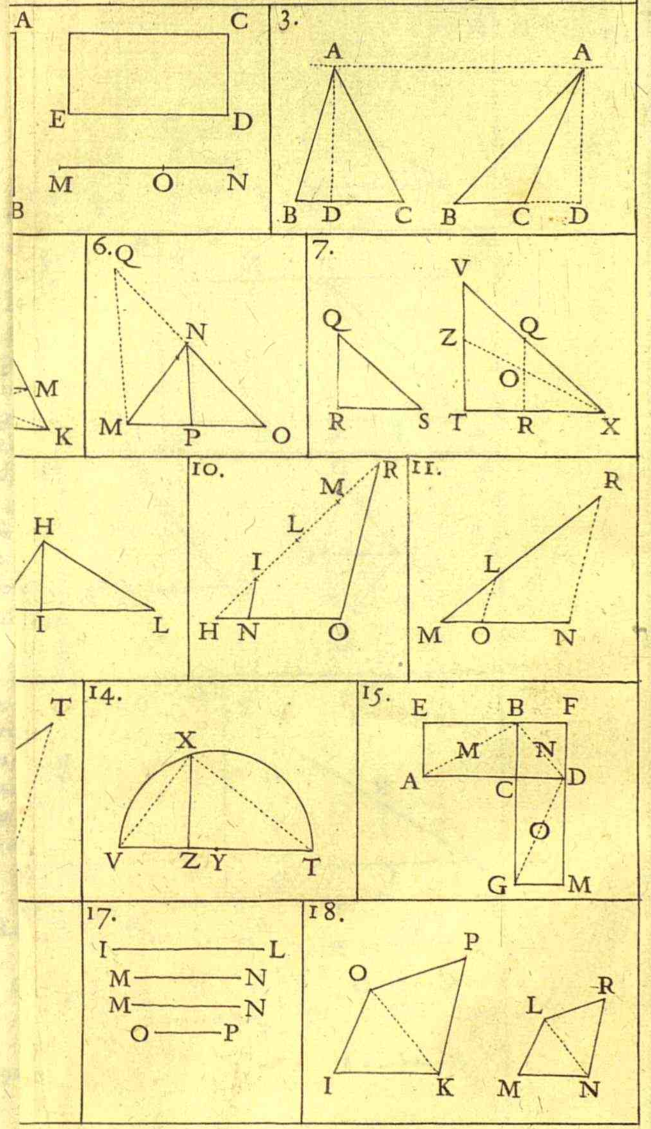
E*Xplicacion.* Sean los poligonos ſemejantes A y B. Digo lo primero , que ſe pueden dividir en igual numero de triangulos ſemejantes.

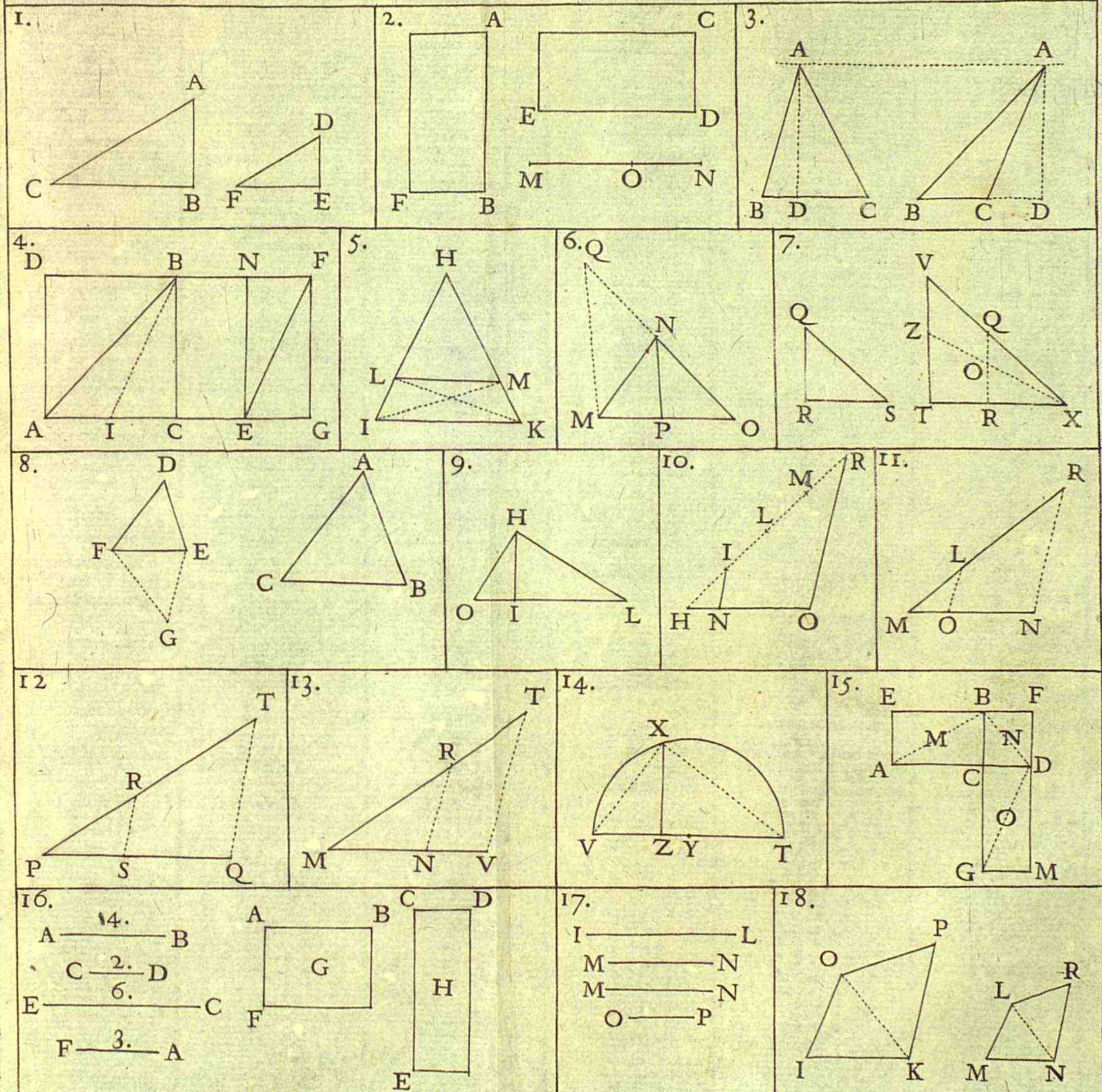
Preparacion. Tirenſe las rectas PM, PO , y LI , LH ; y quedarà dividido en tãtos triangulos el vno como el otro.

Demonſtracion. Por ſer los paligonos A y B ſemejantes, los angulos N y G [*def.* 1.] ſon iguales ; y el lado PN à NO, es como LG à GH : luego (6.) los triangulos PNO, LGH ſon equiangulos , y ſemejantes. Aſsimeſmo probarè que los triangulos PQM, LKI ſon equiangulos, y ſemejantes. Tambien por ſer todo el angulo O igual al angulo H; y todo M à I ; ſi del angulo total O , quitamos el angulo PON; y del angulo total , H quitamos el angulo LHG, iguales de iguales , quedaràn iguales los angulos POM, LHI: aſsimeſmo demõſtrarè ſer iguales los angulos PMO, LIH: luego los triangulos MPO , ILH ſon equiangulos: luego los tres triangulos , en que ſe divide el poligono A ſon equiangulos , y ſemejantes à los tres , en que ſe divide el poligono B.

Digo lo ſegundo, que los dichos triangulos ſon proporcionales con ſus todos : eſto es , que qualquiera triangulo del

Eſtampa. 5.




1. A D C B F E
2. A C E D F B M O N
3. A A B D C B C D
4. D B N F A I C E G
5. H L M I K
6. Q N M P O
7. Q V Z Q O R S T R X
8. D A F E C B G
9. H O I L
10. R M L I H N O
11. R L M O N
12 T R P S Q
13. T R M N V
14. X V Z Y T
15. E B F M N A C D O G M
16. 14. A B C 2. D 6. E C F 3. A A B G F C D H E
17. I L M N M N O P
18. P O R L I K M N

del poligono A, à ſu correſpondiente en el poligono B, tiene la meſma razon que el poligono A al poligono B.

Demonſtr. Por ſer los triangulos PNO, LGH ſemejantes, tienen entre ſi la razon duplicada de los lados homologos PO, LH. [19.] Y por la meſma razon los triangulos PMO, LIH tienen la razon duplicada de los meſmos lados PO, LH: luego la meſma razon tiene el triangulo PNO al triangulo LGH, que el triangulo PMO, al triangulo LIH: de la meſma ſuerte probarè, que el triangulo PQM al triangulo LKI, tiene la meſma razon, que el triangulo PMO al triangulo LIH: luego cada triangulo de vn poligono tiene la meſma razõ à ſu correſpondiente en el otro poligono: luego todos los de el vno juntos, tienen la meſma razon à todos los de el otro juntos, que cada vno de por ſi à ſu correſpondiente: luego vn poligono al otro, tiene la meſma razon, que cada triangulo à ſu correſpondiente.

Digo lo tercero, que los rectilineos ſemejantes, como A y B, tienen la razon duplicada de los lados homologos; porque tienen entre ſi la meſma razon que los triangulos, los quales [19] tienen la razon duplicada de los lados homologos.

Corolario.

Si ay tres lineas proporcionales A, B, C, la meſma razon, que ay de la primera à la tercera, tendrà el poligono hecho ſobre la primera A, al poligono ſemejante hecho de la meſma manera ſobre la ſegunda B; porque el poligono A al poligono B tiene razon duplicada del lado A al lado B: La razon que ay de A à C es duplicada de la de A à B: luego el poligono A al poligono B, es como la linea A à la linea C.

PROP. XXI. Theorema.

Los rectilineos, que ſon ſemejantes à vn tercero, ſon ſemejantes entre ſi.

Conſta de la prop. 11. del 5. y del 1. axioma del lib. 1.

PROP. XXII. Theorema.

Si quatro lineas ſon proporcionales, los rectilineos ſemejantes, deſcri-

 cri-

critos ſemejantemente ſobre ellas, ſeràn proporcionales: y ſi eſtos fueren proporcionales, tambien lo ſeràn las lineas. [*fig.*21.]

E*Xplicacion.* Sean las quatro lineas proporcionales AB à CD, como GH à KI. Digo, que los poligonos ſemejantes E, F, deſcritos ſobre AB, CD, ſon proporcionales à otros qualeſquiera poligonos ſemejantes L, M, deſcritos ſemejantemente ſobre GH, KI.

Demonſtr. (20.) El rectilineo E al rectilineo F tiene la razon duplicada de AB à CD: y porque AB, à CD tiene la meſma razon que GH à KI, tendrà el rectilineo E al rectilineo F la razon duplicada de GH à KI: y como el rectilineo L al rectilineo M tenga tambien la razon duplicada de GH à KI, tendrà el rectilineo E al rectilineo F la meſma razon q̄ L à M. Digo lo ſegundo, q̄ ſi el rectilineo E à F, tiene la meſma razon q̄ L à M, ſerà AB à CD como GH à KI.

Demonſtr. E à F tiene razon duplicada de AB à CD: luego como L à M tenga la meſma razon que E à F, tendrà L à M tambien la razon duplicada de AB à CD: y como L à M tenga la razon duplicada de GH à KI, ſe ſigue, que la razon de AB à CD es la meſma, que de GH à KI.

PROP. XXIII. Theorema.

Los paralelogramos equiangulos tienen la razon compueſta de los lados. (*fig.*15.)

E*Xplicacion.* Sean los paralelogramos M, y O equiangulos: Digo, que la razon que tienen entre ſi, ſe compone de las razones de AC à CD, y de BC à CG.

Preparacion. Juntenſe los paralelogramos por los angulos C iguales, deſuerte, que ACD, BCG, formen lineas rectas: y perficioneſe el paralelogramo N: Y para mayor claridad ſupongamos, que AC es doble de CD, como por exemplo 12. con 6. y que BC ſea ſubtripla de CG, como 6. con 18. Eſto ſupueſto, demonſtrarè, que la razon de M à O ſe compone de las razones de AC à CD; y de BC à CG.

Demonſtr. (1.) M à N es como AC à CD: eſto es, como 12. à 6. y N à O es como BC à CG, eſto es, como 6. à 18. Conque ay tres terminos de vna parte; y otros tres de otra, comparados igualmente como ſe ſigue:

M,

M, N, O, 12. 6. 18.

Luego por igualdad ordenada (22.5.) ſerà M à O como 12. à 18. eſto es, como AC à CG; que es la razon compueſta de las dos intermedias AC à CD, ò 12. à 6. y BC à CG, ò 6. à 18. Lo que ſe ha dicho de los paralelogramos ſe ha de entender tambien de los triangulos.

PROP. XXIV. Theorema.

En qualquiera paralelogramo, los paralelogramos parciales, que ſon cortados por la diagonal, ſon ſemejantes entre ſi, y al total. (*fig.*22.)

E*Xplicacion.* En el paralelogramo PN, la diagonal corta los paralelogramos ST, QR: Digo, que eſtos ſon ſemejantes al total PN, y entre ſi.

Demonſtr. Los triangulos OIR, OMN tienen el angulo en O comun; y la baſe IR es paralela à la baſe MN por ſupoſicion: luego tendràn los angulos en R, y N iguales; y por conſiguiente ſeràn equiangulos [32.1.] y ſerà OR à RI, como ON à NM: luego (*def.*1.) dichos triangulos ſeràn ſemejantes: y ſiendo eſtos las mitades de los paralelogramos QR, PN [34.1.] ſeràn tambien eſtos ſemejantes: aſsimeſmo probarè ſer ST ſemejante à PN: luego los paralelogramos QR, y ST ſon ſemejantes al total PN, y entre ſi. [21.]

PROP. XXV. Problema.

Conſtruir vn rectilineo igual à vno; y ſemejante à otro. [*fig.*23.]

E*Xplicacion.* Sean propueſtos dos rectilineos A, y B: y ſe pide ſe conſtruya vn rectilineo, que ſea ſemejante à L, è igual à B.

Operacion. Hagaſe ſobre el lado CD el rectangulo CE, igual à A [45.1.] Y ſobre DE hagaſe el paralelogramo DH, igual à B; y que ſea equiangulo à CE: Buſqueſe (13.) vna media proporcional entre CD, DG, y ſea IK: ſobre la qual ſe deſcribirà el rectilineo L, ſemejante à A: y eſte ſerà igual à B.

Demonſtr. Por ſer CD, IK, DG proporcionales, ſerà (*cor. de la* 20.) el rectilineo A, hecho ſobre CD, primera; al rectilineo L hecho sobre IK segunda: como CD primera, à DG tercera: y como el paralelogramo CE al paralelogramo DH, sea [1.] como CD à DG, serà el rectilineo A al rectilineo L, como el paralelogramo CE à DH: El paralelagramo CE, por construccion, es igual al rectilineo A, y DH à B: luego el rectilineo A al rectilineo L tiene la mesma razon, que al rectilineo B: luego (7.5.) B, y L seràn iguales.

PROP. XXVI. Theorema.

Si dentro de vn paralelogramo se describe otro semejante, desuerte, que tenga con èl vn angulo comun; el diametro del mayor passarà por el angulo del menor, opuesto al angulo comun.

Esta proposicion consta de la 24. y no necessita de mas demonstracion: y las demas hasta la 30. no son menester.

PROP. XXX. Problema.

Dividir vna recta dada, en media, y extrema razon. [*fig.* 23.]

O*peracion.* Dividase la recta OP propuesta, en Q (11. 2.) de tal suerte, que el rectangulo hecho de toda OP, y el segmento PQ, sea igual al quadrado de OQ: y serà [17.] toda OP à OQ, como OQ à PQ, que es lo que se devìa hazer.

PROP. XXXI. Theorema.

En qualquiera triangulo rectangulo, el rectilineo descrito sobre el lado opuesto al angulo recto, es igual à los rectilineos semejantes, descritos semejantemente sobre los otros lados. [*fig.* 24.]

E*xplicacion.* Sea el triangulo BAC, rectangulo en A: Digo, que qualquiera rectilineo D, descrito sobre el lado BC, opuesto al angulo recto A, es igual à los rectilineos F, E semejantes à D, y descritos semejantemente sobre los lados AB, AC.

Demonstr. Los rectilineos D, E, F, por ser semejantes, tienen entre si (20.) la razon duplicada de los lados BC, CA, AB: y si sobre los mesmos lados, se describieren sus quadrados, tambien estos tendrìan entre si la razon duplicada de los mesmos lados sobredichos: luego los rectilineos D, E, F, tienen entre si la mesma razon, què los quadrados: Estos [47.1.] tienen tal razon, que el hecho sobre BC es igual à los otros dos: Luego tambien el rectilineo D es igual à los otros dos E, y F.

PROP. XXXII. no es menester.

PROP. XXXIII. Theorema.

En los circulos iguales, los angulos formados en el centro, ò en la circunferencia, son entre si como sus arcos; y lo mesmo los sectores. [*fig.* 25.]

E*xplicacion.* Los angulos IGL, OHP estan formados en el centro de circulos iguales: y los angulos IML, ONP, estan en la circunferencia. Digo lo primero, que los angulos G, y H, tienen entre si la razon mesma, que los arcos IL, OP; y assi mesmo los sectores IGL, OHP son como los mesmos arcos.

Escuso esta demonstracion, por ser la mesma que la primera de este libro; salvo que se ha de vsar aqui de los arcos, como allà de las bases; y en lugar de citar la 28. del 1. se ha de citar la 29. del. 3.

Digo lo segundo, que los angulos M, y N, hechos en la circunferencia tienen tambien entre si la mesma razon, que los arcos IL, OP en que insisten: porque dichos angulos son mitades de los del centro (20.3.) luego siendo estos como los arcos IL, OP, tambien lo seràn aquellos.

APENDICE.

¶ *Concluye Euclides el Libro 6. en la proposicion sobredicha: las tres siguientes son las vltimas del Libro 3. que de industria reservè para este lugar, por mayor facilidad de sus demonstraciones.*

PROP. XXXIV. Theorema.

Que es 35. del Libro 3. de Euclides.

Si dos cuerdas de vn circulo se cortan, el rectangulo hecho de los seg-

ſegmentos de la vna, es igual al rectangulo hecho de los ſegmentos de la otra. (fig. 26.)

Explicacion. Las cuerdas RS, VT ſe cortan de qualquiera manera en Q. Digo, que el rectangulo hecho de RQ, QS, es igual al rectangulo hecho de VQ, QT.

Preparacion. Juntenſe las rectas RV, TS.

Demonſtracion. Los triangulos RQV, TQS tienen los angulos en Q iguales, por ſer verticalmente opueſtos [15.1.] tambien los angulos V, y S ſon iguales, por inſiſtir ſobre la meſma periferia RT (21.3.) Luego dichos triangulos RQV, TQS, ſon equiangulos: luego ſus lados (4.) ſon proporcionales; como RQ à QV, aſsi TQ à QS: luego [16.] el rectangulo hecho de los extremos RQ, QS, es igual al que ſe hiziere de los medios QV, QT.

PROP. XXXV. Theorema.

Que es 36. del Libro 3. de Euclides.

Si de vn meſmo punto pueſto fuera del circulo, ſe tiran al circulo dos lineas, vna tangente, y otra ſecante, ſerà el quadrado de la tangente igual al rectangulo hecho de toda la ſecante, y el ſegmento externo. (fig. 27.)

Explicacion. Del punto B pueſto fuera del circulo, ſale la recta BC, que toca al circulo en C: y la BE que le corta en D. Digo, que el quadrado de la tangente BC, es igual al rectangulo comprehendido de toda la ſecante BE, y el ſegmento externo BD.

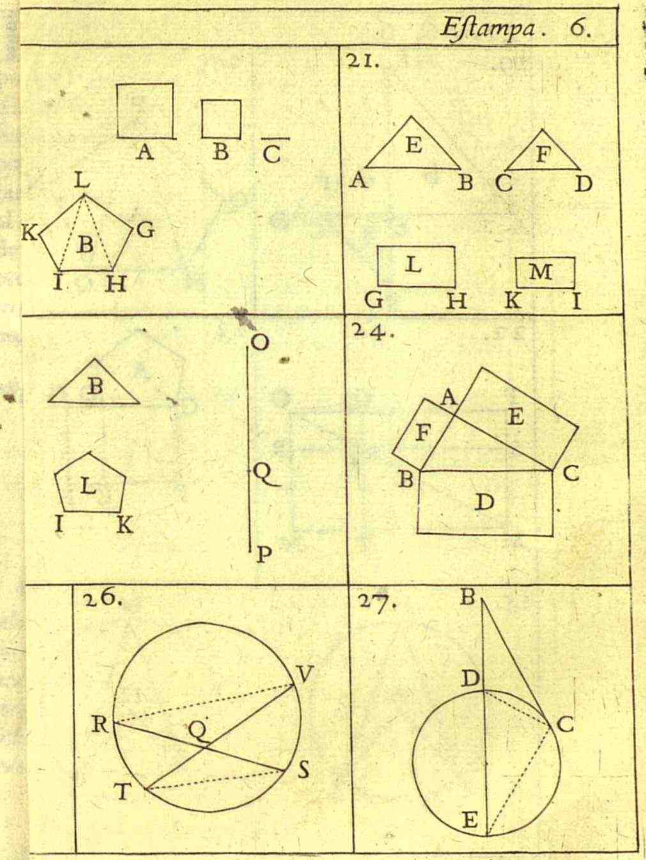
Preparacion. Tirenſe las rectas DC, EC.

Demonſtracion. Los triangulos BCD, BEC, tienen el angulo B comun, y los angulos BCD, y E iguales [32.3.] luego ſon equiangulos: y tienen los lados proporcionales (4.) como BE, lado mayor del triangulo BEC, con BC, lado menor de dicho triangulo: aſsi el meſmo BC lado mayor del triangulo BCD, con BD lado menor del meſmo: Luego (17.) el rectangulo hecho de las extremas BE, BD, es igual al quadrado de la media BC.

PROP. XXXVI. Theorema.

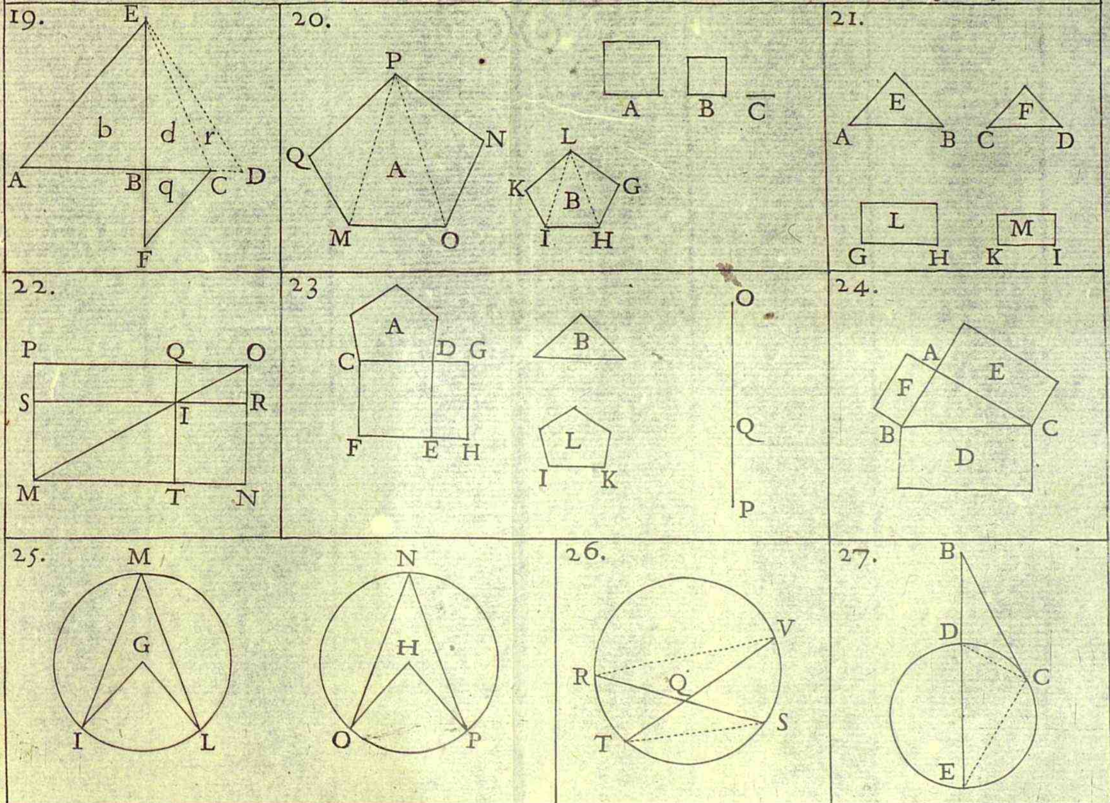
Que es 37. del Libro 3. de Euclides.

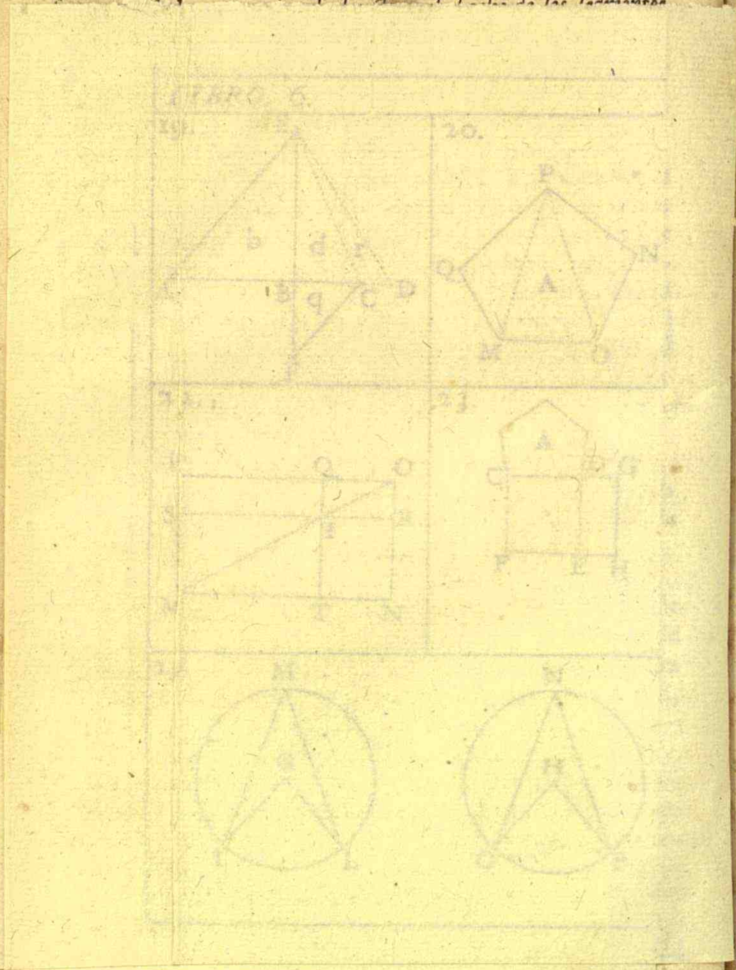
Si



2. *Los terminos del ſolido ſon ſuperficies.*

3. *Vna recta es perpendicular à vn plano, quando lo fuere à todas las rectas, que paſſan por el punto, en que ella toca al plano.* Como la recta AB [*fig. 1.*] ſerà perpendicular al


19. E b d r A B q C D F
20. P Q A N M O A B C L K B G I H
21. E A B F C D L G H M K I
22. P Q O S I R M T N
23 A C D G F E H B L I K O Q P
24. A F E B C D
25. M G I L N H O P
26. V R Q S T
27. B D C E



al quadrado de la media BC.

PROP. XXXVI. Theorema.
Que es 37. del Libro 3. de Euclides.

Si el rectangulo hecho de la recta BE, que corta al circulo [fig. 27.] *y del segmento BD, fuera igual al quadrado de la BC, que cae en el circulo, esta linea serà tangente.*

D*Emonstracion.* Porque el rectangulo hecho de BE, BD, se supone igual al quadrado de BC, seràn (17.) proporcionales, BE à BC; como BC à BD: luego BC serà media proporcional. Esta media proporcional es vnica, de suerte, que ni puede ser otra mayor que BC, ni menor: porque en qualquier caso, su quadrado serìa igual al rectangulo de las extremas BE, BD; y por consiguiente igual al quadrado de BC, lo que es absurdo, pues los quadrados de lineas desiguales no pueden ser iguales: luego la media proporcional entre BE, y BD es vnica: y como (*por la anteced.*) la tangente tirada del punto B sea media proporcional entre BE, y BD; se sigue ser BC dicha tangente.

LIBRO VII.

Que es onzeno de Euclides.

¶ *Trata en este Libro 11. Euclides de los principios fundamentales de los solidos. Omitense comunmente el 7. 8. 9. y 10. porque ademas de no ser muy necessaria su noticia, consta por experiencia, sacarse poco provecho de su estudio en los principios: Y aunque este libro, y el siguiente son, segun nuestro orden, 7. y 8. quando citarè sus proposiciones les nombrarè vndecimo, y duodecimo, segun el orden que tienen en Euclides.*

DEFINICIONES.

1. S*Olido, ò cuerpo, es vna quantidad, que consta de las tres dimensiones, longitud, latitud, y profundidad.*

2. *Los terminos del solido son superficies.*

3. *Vna recta es perpendicular à vn plano, quando lo fuere à todas las rectas, que passan por el punto, en que ella toca al plano.* Como la recta AB [*fig.* 1.] serà perpendicular

al plano DC, si es perpendicular à las GH, FE, &c. que passan por el punto B, en que la AB toca al plano; esto es, si los angulos ABE, ABF: ABG, ABH, &c. fueren rectos.

4. *Vn plano es perpendicular à otro, quando las rectas tiradas en el vno, perpendiculares à la comun seccion, son tambien perpendiculares al otro.*

Explicacion. La seccion comun de dos planos, es la linea comun à entrambos: como (*fig.* 2.) la linea AB, que es comun à entrambos planos AG, DC: pues si la linea EF, que es perpendicular à la comun seccion AB, y està en el plano AG, fuere perpendicular al plano DC, serà el plano AG perpendicular à DC.

5. *Si la linea AB* [fig. 3.] *no fuere perpendicular al plano DC; y del punto superior A cae la AE perpendicular al plano DC: y se tira la EB, el angulo agudo ABE serà la inclinacion de la AB al plano CD.*

6. *La inclinacion de vn plano à otro, es el angulo agudo, que forman las perpendiculares, que de vno y otro plano se tiran à la comun seccion.* Como la inclinacion del plano LQ [*fig.* 4.] al plano HI, es el angulo agudo NMO, que forman las rectas NM, MO, perpendiculares à la comun seccion PQ, de las quales la NM està en el plano LQ; y la MO en el plano HI, y segun fuere este angulo mayor, ò menor, es mayor, ò menor la inclinacion de los planos.

7. *Los planos tienen semejante inclinaeion vnos à otros, quando sus angulos de inclinacion son iguales.*

8. *Planos paralelos son aquellos, que prolongados por todas partes, siempre distan por qualquiera parte igualmente entre si.*

9. *Solidos semejantes son los terminados de igual numero de superficies semejantes.*

10. *Solidos semejantes; y iguales, son los terminados de igual numero de superficies iguales, y semejantes.*

11. *Angulo solido es la inclinacion de mas de dos rectas, que concurren en vn punto, y estan en diversos planos.* Como [*fig.* 5.] la inclinacion de las lineas MN, ML, MP, que concurren en vn mesmo punto M, y estàn en diferentes planos, forman vn angulo solido M. Si los angulos solidos fueren iguales, penetrando el vno con el otro, se ajustaràn;

y

y si se ajustàren, seràn iguales.

12. *Piramide es vna figura solida terminada de diversos triangulos, que saliendo de los extremos de otro plano, que sirve de base, concurren en vn punto,* como MNLP. [*fig.* 5.]

Explicacion. La piramide consta de Cuspide, Lados, Base, y Exe: la cuspide es M: la base es el plano NPL: lados son las lineas NM, LM, PM, que concurren en la cuspide: y el exe es la MO, tirada de la cuspide al medio de la base. La piramide puede ser en dos maneras, *recta*, è *inclinada*: *Recta* es aquella, cuyo exe es perpendicular à la base; *inclinada*, cuyo exe no es perpendicular à la base.

13. *Prisma es vna figura solida, que tiene por terminos dos planos paralelos, semejantes, è iguales; y los otros, paralelogramos.* Como (*fig.* 6.) QV: cuyos dos planos PQR, STV son paralelos, y triangulos semejantes, è iguales; y podìan ser otros qualesquiera rectilineos; pero los otros planos RT, RS, &c. son paralelogramos.

14. *Esphera es vna figura solida terminada de vna sola superficie, que tiene vn punto en medio, y quantas lineas salen de dicho punto, y se terminan en la superficie, son iguales.* Otros la definen diziendo, *ser vn solido formado de la revolucion entera de vn semicirculo al rededor de su diametro.*

15. *Exe de la Esphera, es el diametro fixo, al rededor del qual se mueve, y haze su revolucion el semicirculo.* Las extremidades del exe se llaman *Polos.*

16. *Centro de la esphera, es el mesmo que el del semicirculo, que describe la esphera.*

17. *Diametro de la esphera, es qualquiera recta, que passando por el centro, se terminan sus extremos en la superficie.*

18. *Piramide conica* [en Latin Conus] *es la que tiene per base vn circulo, y fenece en vn punto alto, que es el vertice. Su exe es la recta del vertice al centro de la base: su lado es la recta del vertice à la circunferencia de la base.* Si el *Exe* es perpendicular à la base, se llama esta piramide *recta*; si no es perpendicular, es *obliqua*, ò *inclinada*.

19. *Cilindro es vn solido, cuyos dos planos opuestos son dos circulos iguales, y paralelos. Bases* del cilindro son los dos circulos sobredichos: su *Exe* es la recta, que junta los centros de las

ba-

bases: su *lado* es la recta que passa de vna circunferencia à otra. Si el *Exe* es perpendicular à las dos bases, el cilindro es *recto*; si no, *obliquo*, ò inclinado.

20. *Cilindros, y Piramides conicas semejantes [siendo rectas] son las que tienen los exes, y diametros de las bases proporcionales*; pero siendo obliquos, ademas de lo dicho, han de tener los exes igualmente inclinados à sus bases.

21. *Paralelepipedo es vn solido, que consta de seis planos paralelogramos, que cada dos opuestos son iguales, y paralelos.*

22. *Cubo es vn solido, que consta de seis planos quadrados*; como vna piedra por todas partes quadrada: y generalmente el solido, que consta de muchas superficies, se llama *polyhedro*.

PROP. I. Theorema.

Vna linea recta no puede tener vna parte suya en vn plano, y otra en otro.

Es por si mesmo manifiesto; porque si huviesse parte en vn plano, y parte en otro, serìan dos lineas, que forman angulo; y por consiguiente no serìa linea recta, contra lo supuesto.

PROP. II. Theorema.

Todas las partes de vn triangulo estàn en vn mesmo plano; como tambien qualesquiera dos rectas, que se cortan.

Tambien es patente por si, porque el triangulo es vna superficie llana, cerrada con tres lineas rectas, y si vna parte suya estuviesse en vn plano; y otra en otro se falsificaria la proposicion antecedente. Y por la mesma razon las dos rectas, que se cortan, han de estar entrambas en vn mesmo plano.

PROP. III. Theorema.

Si dos planos AB, CD se cortan, su comun seccion EF es vna linea recta. (fig. 7.)

Demonstr. Si la seccion comun EF no es vna linea recta; sean dos, la EHF en el plano CD; y la EGF en el plano AB: estas concurren necessariamente en E, y F, donde se cortan los lados de los planos: luego dos rectas cierran espacio, contra el axioma 12. 1.

PROP.

PROP. IV. Theorema.

La linea que es perpendicular à dos rectas que se cortan, es tambien perpendicular al plano en que estan. [fig. 8.]

Explicacion. La recta DC es perpendicular à las dos rectas GC, BC, que se cortan en C: digo ser tambien perpendicular al plano AO, en que estàn dichas lineas.

Preparacion. Supongo, que *del punto D, superior al plano, no puede caer mas que vna perpendicular DC*; porque tirada qualquiera otra DH, y juntando la HC, serà HCD vn triangulo, y por consiguiente vn plano (2.) y suponiendose el angulo C recto, serà H agudo (32. 1.) luego sola DC puede ser perpendicular. Assimesmo *del punto C solo puede salir vna perpendicular al plano*; porque si se tira otra qualquiera CR, y se quiere que entrambas sean perpendiculares al plano, entrambas seràn [*def.* 3.] perpendiculares à GI: luego los angulos DCI, RCI son rectos, è iguales, el todo à su parte, lo que es impossible. Aunque esto lo demuestra Euclides en la prop. 13. lo he anticipado para mayor facilidad.

Demonstr. Supuesto lo dicho, pruevo, que la DC, perpendicular à las dos GC, BC es perpendicular al plano: porque en el punto C, la perpendicular al plano es vnica: esta ha de ser [*def.* 3.] perpendicular à las BC, GC: luego si DC es perpendicular à BC, CG, es tambien perpendicular al plano en que ellas se hallan.

PROP. V. Theorema.

Si vna linea es perpendicular à otras tres, en el mesmo punto, en que se cortan, estaràn las tres en vn mesmo plano. [fig. 9.]

Explicacion. La RA se supone ser perpendicular à las tres AI, AG, AF: Digo, que estas tres estan en vn mesmo plano HF.

Preparacion. Si no fuere assi, alguna estarà en otro plano: sea pues AI la que se halle en el plano RO, y no en HF.

Demonstr. Por ser RA perpendicular à las dos AG, AF, serà perpendicular [4.] al plano HF: luego (*def.* 3.) es perpenpendicular à AO, que por ser comun seccion de los dos planos, està en el plano HF: y como la mesma RA se suponga perpendicular à AI, seràn los angulos RAO, RAI rectos iguales; el todo à su parte, que es absurdo: luego la AI està en el plano HF donde estan las demas.

PROP. VI. Theorema.

Las rectas LM, NO, perpendiculares à vn mesmo plano, son entre si paralelas. (fig. 10.)

P*reparacion.* Juntese MO: y considerese, que el plano MN perpendicular à TS, passa por la NO, y q̃ del pũto M en dicho plano sale la MP perpendicular à la comun seccion MO.

Demonstr. Por ser MP perpendicular à la comun seccion MO, es [29.1.] paralela à ON, y [*def.*4.] perpendicular al plano TS: y como (*por lo demonstrado en la prepar. à la prop.*4.) solo pueda salir del punto M vna perpendicular al plano TS, serà MP la mesma ML, que se suponia perpendicular à dicho plano: siendo pues PM paralela à NO, tambien lo serà LM.

PROP. VII. Theorema.

La linea PS (*fig.*11.) *que junta los dos puntos P, y S, de las paralelas PQ, RS, està con ellas en vn mesmo plano.*

D*emonstr.* Si la PS no està en el mesmo plano que las paralelas, tirese la otra PTS, que estè en el mesmo plano; y si esta coincide con PS, estarà esta en el mesmo plano que las paralelas: y si no coincide, luego las dos rectas PTS, PS comprehenderàn espacio (*contra el axioma* 12. *del lib.* 1.

PROP. VIII. Theorema.

Si de dos paralelas la vna es perpendicular à vn plano, tambien lo serà la otra.

Consta esta propos. de lo demonstrado en la 6.

PROP. IX. Theorema.

Las lineas paralelas à vna mesma, son paralelas entre si, aunque no esten en vn mesmo plano. [fig. 12.]

E*xplicacion.* Las lineas AB, CD son paralelas à la linea EF, digo que son tambien paralelas entre si, aunque no esten las tres en vn mesmo plano.

Preparacion. Tirese en el plano de las lineas EF, AB, la HG, perpendicular à AB, que (29.1.) tambien lo serà à EF: y en el plano de las lineas EF, CD, tirese la HI, perpendicular à EF, que assi mesmo lo serà à CD.

Demonstr. Siendo la linea EH, perpendicular à las HG, HI; lo serà à su plano (4.) y por la precedente, las lineas AG, CI, que se suponen paralelas à EH; tambien seràn perpendiculares al mesmo plano: luego (6.) seràn paralelas entre si.

PROP. X. Theorema.

Si dos rectas, que concurren en vn plano, son paralelas à dos que concurren en otro, formaran angulos iguales. [fig. 13.]

E*xplicacion.* Si HG es paralela à ML; y HI à MO, aunque en diversos planos, los angulos GHI, LMO seràn iguales.

Preparacion. Haganse las lineas GH, ML: HI, MO, iguales: y tirense las lineas GL, HM, IO, GI, LO.

Demonstr. Por ser HG, ML paralelas, è iguales, seràn [33.1.] GL, HM paralelas è iguales; y assimesmo lo seràn IO, HM: y [9] las GL, IO tambien seràn paralelas iguales: luego las GI, LO son tambien iguales, y paralelas. Con que los triangulos GHI, LMO, tienen los tres lados del vno iguales à los tres del otro: luego (8.1.) los angulos GHI, LMO son iguales.

PROP. XI. Problema.

Tirar vna perpendicular al plano AB, de vn punto I dado fuera de el plano. (*fig.*14.)

O*peracion.* Tirese en el plano AB qualquiera recta LN: tirese del punto I la IM perpendicular à LM [12.1.]: y de M la perpendicular MP (11.1.) y à esta tirese del punto I la perpendicular IP: Digo que IP serà perpendicular al plano AB.

Preparacion. Tirese OP paralela à LM. (31.1.)

Demonstr. Por ser la LM perpendicular à las lineas IM, MP, serà (4) perpendicular al plano IMP, y aviendose tirado OP paralela à LM, serà (8) tambien perpendicular al al mesmo plano: luego serà perpendicular à IP: siendo pues IP perpendicular à las lineas MP, PO serà (4.) perpendicular al plano AB.

PROP. XII. Problema.

Levantar vna perpendicular à vn plano, de vn punto dado en èl. [*fig.* 15.]

Pidese que del punto C dado en el plano AB se levante vna perpendicular.

Operacion. Tomese qualquiera punto E fuera del plano, y tirese de èl la perpendicular ED [11.]: y del punto C, la CF paralela à ED (31.) y esta serà la perpendicular que se pide. Consta de la Prop. VIII.

PROP. XIII. Theorema.

De vn mesmo punto puesto en el plano, ò fuera de èl, no se puede tirar mas que vna perpendicular al plano.

Queda demonstrada en la preparacion de la Prop. IV.

PROP. XIV. Theorema.

Los planos, à los quales vna mesma linea es perpendicular son paralelos entre si. (*fig.* 16.)

Explicacion. La linea IK es perpendicular à los dos planos LO, MN: Digo que estos planos seràn paralelos.

Preparacion. Tirese la HG paralela à IK; y juntense las HI, GK.

Demonstr. Por ser HG, IK paralelas, y vna de ellas IK perpendicular à entrambos planos, serà tambien la otra HG [8.] perpendicular à los mesmos planos: luego (*def.* 3.) los angulos H,I,G,K seràn rectos; y las HI, GK, paralelas; y IG, paralelogramo, y por consiguiente [34.1.] los lados HG, IK iguales: lo mesmo probarè tirando otra qualquiera paralela: luego los planos son por todas partes equidistantes, ò paralelos.

PROP. XV. Theorema.

Si dos lineas que concurren en vn plano, son paralelas à otras dos que concurren en otro, dichos planos seràn paralelos. [*fig.* 17.]

Expli-

Explicacion. Las rectas RL, RM concurren en R, y son paralelas à las rectas NP, PO, que en diferente plano concurren en P: Digo que los planos LM, NO son paralelos.

Preparacion. (11.) Del punto R tirese vna perpendicular RS al plano NO: y por el punto S haganse las ST, SQ paralelas à PN, PO.

Demonstr. Por ser RL, ST paralelas à PN son (9.) paralelas entre si: luego (27.1.) los angulos LRS, RST son iguales à dos rectos, y siendo RST recto por construcciõ, serà el angulo LRS recto: de la mesma manera demonstrarè ser recto el angulo MRS: luego la SR es perpendicular à las dos RL, RM: luego (4.) es perpendicular al plano LM; y siendo tambien perpendicular al plano NO, seràn [14.] los planos LM, NO paralelos.

PROP. XVI. Theorema.

Si à dos planos paralelos les cortare otro, las comunes secciones seràn paralelas. [*fig.* 18.]

Explicacion. El plano XQ corta los planos paralelos TR, PY: Digo que las comunes secciones VQ, XS son paralelas.

Demonstr. Si no son paralelas, concurriràn en algun punto Z: y como ellas estèn en los planos, tambien estos concurriràn, si se continuan, en Z: luego no son paralelos, contra lo supuesto.

PROP. XVII. Theorema.

Si à dos rectas las cortan planos paralelos, las cortaràn proporcionalmente. (*fig.* 19.)

Explicacion. Si las rectas BA, DC se cortan con los planos paralelos H, I, M: Digo que se cortaràn proporcionalmente: AE, à EB; como CF à FD.

Preparacion. Tirese la recta AD; y las AC, EF, y BD.

Demonstr. Porque el plano del triangulo ABD, corta los tres planos paralelos, las rectas BD, EF seràn paralelas [16.] y por la mesma razon lo seràn AC, EF: luego [2.6.] serà AE à EB, como AG, à GD: y assimesmo CF à FD como la mesma AG, à GD: luego (11. 5.) serà AE à EB, como CF à FD.

PROP.

PROP. XVIII. Theorema.

Si vna recta es perpendicular à vn plano, todos los planos en que dicha recta se hallare, seràn perpendiculares al mesmo plano. (*fig.* 20.)

E*Xplicacion.* Sea la AB perpendicular al plano LI; digo que todos los planos en que se hallare, seràn perpendiculares al plano LI.

Preparacion. Hallese por exemplo, en el plano GA, que corte al plano LI en GH; tirese la EF perpendicular à la comun seccion GH (11.1.)

Demonstr. Porque los angulos ABF, EFB son rectos, las AB, EF son paralelas (29.1.): luego (8.) EF serà perpendicular al plano LI: luego [*def.* 4.] el plano GA es perpendicular al plano LI: Lo mesmo se demonstrarà de qualquier otro plano que passare por la perpendicular AB.

PROP. XIX. Theorema.

Si dos planos que se cortan son perpendiculares à otro, tambien su comun seccion serà perpendicular al mesmo plano. (*fig.* 21.)

E*Xplicacion.* Los planos VP, SO se cortan en LM, y entrambos son perpendiculares al plano QR: Digo que la comun seccion LM serà tambien perpendicular al plano QR.

Demonstr. Del punto M puede levantarse vna perpendicular al plano QR, que estè en el plano SO: tambien del mesmo punto M se puede levantar vna perpendicular al mesmo plano QR, que estè en el plano VP: luego como [13.] del punto M solo se pueda levantar vna perpendicular, essa mesma estarà en el plano SO, y en el plano VP: luego serà la comun seccion ML: luego esta es perpendicular al plano QR.

PROP. XX. Theorema.

Si vn angulo solido està compuesto de tres angulos planos, dos de aquellos juntos, qualesquiera que sean, son mayores que el tercero. (*fig.* 22.)

E*Xplicacion.* Los tres angulos planos PXQ, PXS, QXS forman el angulo solido X (que se deve considerar relevado como cuspide de piramide) Digo, que qualesquiera dos de los angulos planos QXP, PXS, son mayores que el tercero QXS.

Preparacion. Hagase qualquiera triangulo ABD: y tirando la BC como se quiera, tirense las AC, CD.

Demonstracion. Para que los dos triangulos ABC, CBD formen vn angulo solido con el triangulo ABD, es menester que el punto C estè elevado sobre el plano ABD: luego toda la BC, està elevada sobre dicho plano, menos el extremo B: luego el punto I tambien està elevado sobre AD: luego (20.1.) las AI, ID seràn mayores que AD: luego toda la compuesta de AI, ID es mayor que AD: luego (25.1.) el agregado de los angulos ABC, CBD es mayor que el angulo ABD: luego para poderse formar vn angulo solido de los angulos QXP, PXS, QXS, es forçoso sean los dos primeros, mayores que el otro.

PROP. XXI. Theorema.

Todos los angulos planos, que componen vn angulo solido, son menores que quatro rectos (fig. 22.)

D*Emonstracion.* Si los angulos planos X fueren iguales à quatro rectos, juntos formarìan vn espacio plano, equivalente à vn circulo, que es quatro rectos: luego no comprehenderà espacio solido; pero si los angulos X juntos son menores que quatro rectos, puestos en plano como en M, dexaràn vazìo el espacio PXZ: y si se juntan XP, XZ, se relevarà el punto X, y quedarà formado el angulo solido X.

PROP. XXII. y XXIII. no son essenciales.

PROP. XXIV. Theorema.

Si muchos planos paralelos comprehenden vn solido paralelepipedo, los planos opuestos son paralelogramos iguales, y semejantes. [fig. 23.]

E*Xplicacion.* Sea el solido AB, terminado de planos paralelos; digo, que los planos opuestos son paralelogramos semejantes, è iguales.

Demonstracion. Pruevo primeramente, que son paralelogragramos: porque el plano FE corta los dos paralelos CA, BE, las comunes secciones FA, DE seràn paralelas (16.) y assimesmo probarè ser paralelas FD, y AE: luego AD es vn paralelogramo [*def.* 36.1.] y por la mesma razon lo seràn AG, FB, y los demas.

Segundo: Pruevo, que los opuestos son semejantes, è iguales: porque siendo las lineas AE, EG, paralelas à FD, DB, è iguales, cada vna à su correspondiente, los angulos AEG, FDB, seràn iguales [10.] por el mesmo camino se demonstrarà, que los lados, y angulos opuestos en los otros paralelogramos son iguales: luego los paralelogramos opuestos son iguales, y semejantes.

PROP. XXV. Theorema.

Si vn paralelepipedo AB (fig. 24.) *se divide con vn plano CD, paralelo à los lados opuestos EA, BF: seràn los segmentos solidos proporcionales con sus bases: esto es, el segmento AC, al segmento DB; como la base AG, à la base DH.*

DEmuestrase como la Prop. 1. del Lib. 6. porque si la base AG cabe dos vezes, por exemplo, en la base DH, tambien el solido AC caberà dos vezes en el solido DB. Luego tienen dichos segmentos solidos la razon mesma de sus bases.

Lo mesmo se convence por la mesma razon en todos los prismas.

Corolarios.

1. *El solido AC al solido DB, es como el lado AD al lado DF: porque AC à DB es como la base AG à la base DH: la base AG à DH* (1.6.) *es como AD à DF: luego AC à DB es como AD à DF. De que se sigue, que tambien componiendo, serà AB con AC, como AF con AD, &c.*

2. *La seccion paralela à los planos opuestos en qualquiera prisma, es igual y semejante à los planos opuestos.*

PROP. XXVI. y XXVII. no son menester.

PROP. XXVIII. Theorema.

Si vn paralelepipedo se divide con vn plano, que passe por las diagonales de los planos opuestos, quedarà dividido en dos prismas iguales. [fig. 23.]

Expli-

E*Xplicacion.* Sea el paralelepipedo AB. Digo que si se divide por las diagonales DA, BH de los planos opuestos, quedarà dividido en dos prismas iguales.

Demonstracion. Por ser AG paralelogramo, las lineas GE, HA son paralelas, è iguales (34.1.) y assi mesmo son BD, GE paralelas, è iguales: luego HA, y BD, iguales, y paralelas à vna mesma GE, son entre si iguales, y paralelas [9.] luego las DA, BH, que las juntan, son tambien paralelas, è iguales [33.1.] luego AB es paralelogramo: y como los paralelogramos FE, CG sean cortados por las DA, BH en dos triangulos iguales [34.1.] los dos prismas FBA, EBA tendran los triangulos, y los paralelogramos de que se cōponen, iguales cada vno à su correspondiente [*def.* 21.]: luego dichos prismas son iguales.

PROP. XXIX. y XXX. Theoremas.

Los Paralelepipedos, que tienen vna mesma base, y altura, son iguales.

DOs casos comprehende este Theorema. El primero: (*fig.* 25.) Imaginense los paralelepipedos ISPN, ILQN, constituìdos sobre vna mesma base IKON: y de vna mesma altura, ò entre los mesmos planos paralelos IO, TQ; y que entrambos esten incluidos entre vnos mesmos planos laterales opuestos IR, KQ; digo, que seràn iguales.

Demonstracion. Los triangulos SKL, POQ, TIM, VNR son totalmente iguales [24. *de este*, y 8.1.] como tambien el paralelogramo IL à su opuesto NQ; y IS, à NP (24.): y assi mesmo son iguales SM, PR [36.1.] luego los prismas SIL, PNQ estan terminados de igual numero de superficies iguales, y semejantes: luego [*def.* 10.] son iguales: Luego si à cada vno se añade el solido comun ILPN, los todos, que resultan, esto es, los paralelepipedos ISPN, ILQN, seràn iguales.

El segundo caso (que demuestra Euclides en la prop. 30.) es quando los paralelepipedos de que hablamos no se incluyen entre vnos mesmos planos laterales opuestos; como en la fig. 26. los paralelepipedos ISPN, IZXN tienen la mesma base IKON: y tienen vna mesma altura, como los

 ante-

antecedentes; pero los planos laterales XZKO, ITVN, en que ſe incluyen, no ſon paralelos: Digo pues, que en eſte caſo tambien ſon iguales.

Demonſtracion. Supueſto que el plano ZHYX es paralelo à la baſe IKON, prolongadas las XY, ZH, cortaràn à TR en M, y Y: y à SP, en L, y Q: y juntando las KL, IM; OQ, NR, quedarà formado el ſolido IQLN, cuyos planos opueſtos, ſe probarà facilmente de lo dicho, ſer paralelos, è iguales; luego dicho ſolido es paralelepipedo. Eſto ſupueſto [*por la primera parte*] el paralelepipedo IKZHXONY es igual al paralelepipedo ILQN: eſte es por la meſma razon igual al ISPN: luego el paralelepipedo IKZHXONY es igual à ISPN.

PROP. XXXI. Theorema.

Los Paralelepipedos, que tienen las baſes, y alturas iguales, ſon iguales.

Conſta de la antecedente, pues lo meſmo es tener vna meſma baſe, y altura, que tenerlas diferentes, pero iguales: porque los paralelepipedos, que tienen vna meſma baſe, y altura; ſi ſe conſideran ſeparados, las tendrã iguales: y los que ſeparados tienen igual baſe, y altura, ſi ſe conſideran juntos ſobre la meſma baſe, tendran tambien vna meſma altura; y por la anteced. ſeràn iguales.

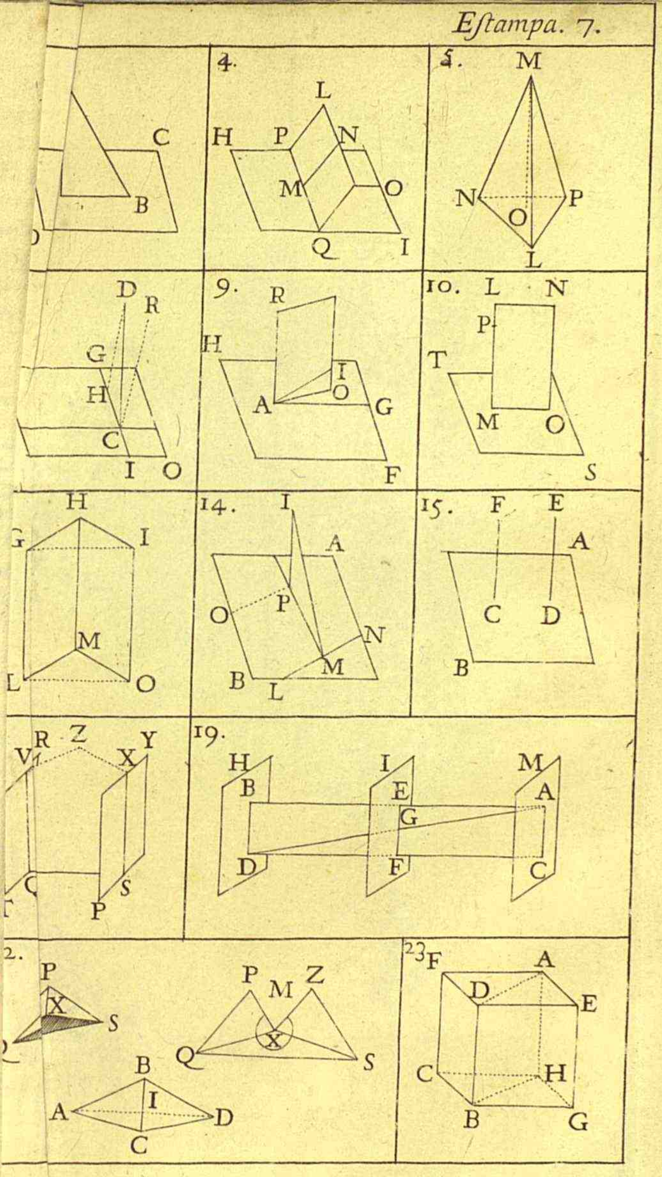
PROP. XXXII. Theorema.

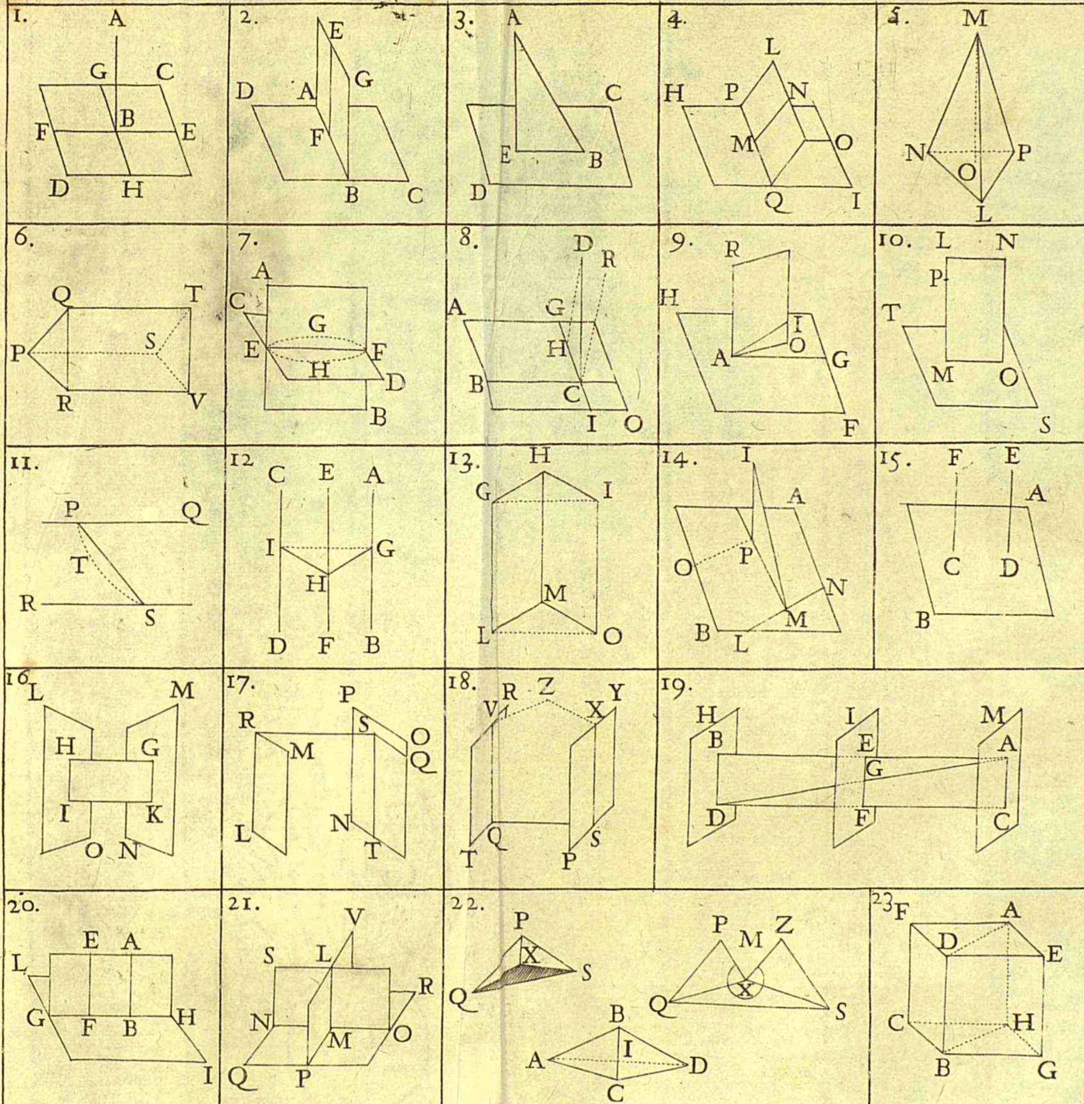
Los paralelepipedos de vna meſma altura, tienen la meſma razon que ſus baſes. [fig. 24.]

Conſta de la Prop. 25. Donde ſe demonſtrò, que los ſolidos parciales AC, DB, en que ſe dividiò el paralelepipedo AB, tienen entre ſi la razon de las baſes AG, DH: eſtos ſolidos tienen vna meſma altura, y ſon paralelepipedos, por ſer los lados, por ſupoſicion paralelos, è iguales; luego los paralelepipedos de vna meſma, ò igual altura, tienen la razon meſma de ſus baſes.

Corolarios.

1. *Los paralelepipedos de vna meſma, ò igual baſe ſon como ſus alturas. Aunque ſe infiere de lo dicho, lo demueſtro aſsi. Sean los paralelepipedos GA, ZR,* (fig. 27.) *cuyas baſes CA, TR ſean iguales;*





1. A G C B F E D H
2. E G D A F B C
3. A C E B D
4. L H P N M O Q I
5. M N P O L
6. Q T P S R V
7. A C G E F H D B
8. D R A G H B C I O
9. R H I O A G F
10. L N P T M O S
11. P Q T R S
12 C E A I G H D F B
13. H G I M L O
14. I A P O N M B L
15. F E A C D B
16 L M H G I K O N
17. P R S O M Q N L T
18. R Z V Y X Q S T P
19. H I M B E A G D F C
20. E A L G F B H I
21. V S L R N M O Q P
22. P X S Q P M Z X Q S B I A D C
23 F A D E C H B G

les; pero la altura AE sea, por exemplo, doblada de RX: Digo, que el paralelepipedo GA es doblado de ZR.

2. *Considerense las bases en vn mesmo plano CR; y que el plano PX paralelo à las bases, corte el paralelepipedo mayor en PN; y quedarà dividido el paralelepipedo GA en dos PA, GN: Esto supuesto, por tener los paralelepipedos ZR, PA iguales bases y alturas, son iguales: luego* (7.5.) *la mesma razon ay de GA à PA, que del mesmo GA à ZR: GA à PA.* (corol. 1. 25.) *es como AE à AN: luego GA à ZR es como la altura AE à AN, ò RX su igual.*

PROP. XXXIII. Theorema.

Los paralelepipedos semejantes tienen razon triplicada de la de sus lados homologos. (fig. 28.)

E*Xplicacion.* Sean los paralelepipedos AH, RC semejantes, digo, que tienen entre si razon triplicada de la que tienen sus lados homologos GB, BF.

Preparacion. Siendo dichos solidos semejantes, los planos que les terminan, seràn semejantes (*def.* 9.); y por la def. 1. del 6. dichos planos seran equiangulos: de que se sigue, que los paralelepipedos AH, RC se podràn colocar de genero, que los angulos iguales DBA, CBE sean opuestos; conque por las 14. y 15. del lib. 1. haràn AB, BC vna linea recta, como tambien DB, BE: y asimesmo por ser iguales los angulos ABF, GBC, haràn las lineas FB, BG vna recta: Y como los planos asi dispuestos sean semejantes, los lados que comprehenden dichos angulos iguales seràn proporcionales, GB à BF, como EB à BD: y EB à BD como CB à BA. Perficionense vltimamente los paralelepipedos BM, CH, como se vè en la figura.

Demonstracion. Porque los paralelepipedos RC, BM tienen vna mesma altura BC, seràn [*corol.* 1. 25.] RC à BM, como GB à BF: y por la mesma razon el paralelepipedo BM al paralelepipedo CH es como EB à BD: y asi mesmo el paralelepipedo CH, al paralelepipedo AH, es como CB à BA: siendo vna mesma razon la que ay de GB à BF, que de EB à BD, y de CB à BA; los solidos siguientes tendran vna mesma razon, y seràn continuos proporcionales:

RC. BM. CH. HA.

Lue-

Luego [*def.* 14.5.] el paralelepipedo RC al paralelepipedo HA tiene razon triplicada de la que tiene el paralelepipedo RC con el BM: estos tienen la razon de GB à BF: luego los paralelepipedos RC,HA, tienen razon triplicada de GB à BF, que son lados homologos.

Corolario.

Si huviere quatro lineas continuas proporcionales, el paralelepipedo hecho sobre la primera, à otro paralelepipedo semejante hecho semejantemente sobre la segunda, tendrà la mesma razon que ay de la primera à la quarta: porque la primera à la quarta tiene razon triplicada de la primera à la segunda; los paralelepipedos de la primera y segunda, tienen tambien razon triplicada de la primera y segunda, que son sus lados: luego tienen la mesma razon que la tercera à la quarta: Aqui se vè, que toda la dificultad del problema Deliaco de la duplicacion del cubo consiste en hallar dos medias proporcionales entre dos lineas dadas.

PROP. XXXIV. Theorema.

Los paralelepipedos iguales tienen las bases, y alturas reciprocas: y los que tienen las bases y alturas reciprocas, son iguales. (fig. 29.)

E*Xplicacion.* Los paralelepipedos LQ,IZ se suponen iguales: Digo lo primero, que tienen sus bases, y alturas reciprocas: esto es, la base IT, à la base LM, es como la altura MQ à la altura TZ.

Preparacion. Tomese MP igual à TZ: y por P hagase el plano PN, paralelo à la base ML.

Demonstracion. Por ser los paralelepipedos IZ, LQ iguales; IZ à LP (7.5.) tendrà la mesma razon que LQ à LP: IZ à LP tiene la razon de la base IT à la base LM (32.) y LQ à LP tiene la razon de la altura MQ à la altura MP [*corol.* 1.32.] luego la mesma razon ay de la base IT à la base LM, que de la altura MQ à la altura MP, ò TZ su igual: que es tener razon reciproca.

Digo lo segundo, que si las bases de los paralelepipedos tienen razon reciproca con sus alturas, son ellos iguales.

Demonstracion. El solido IZ al solido LP, es (32.) como la base IZ à la base LM. El solido LQ al solido LP, es como MQ à MP, ò TZ su igual. Luego si es reciprocamente IT à LM, como MQ à MP, ò TZ, la mesma razon tendrà el paralelepipedo IZ, con el solido LP, que el paralelepipedo LQ con el mesmo solido LP: luego [9.5.] los paralelepipedos IZ,LQ son iguales.

Corolario.

Lo que se ha demonstrado de los paralelepipedos en las Propos. 29.30.31.32.33. y 34. conviene tambien à los prismas triangulares, por ser (28.) la mitad de los paralelepipedos: y à todos los prismas polygonos, por resolverse en prismas triangulares.

1. Los prismas de vna misma altura, tienen la razon mesma de sus bases; y si tienen vna mesma base, tienen la razon de las alturas.

2. Si fueren semejantes, estaràn en razon triplicada de la razon de sus lados homologos, que son los opuestos à angulos iguales.

3. Si fueren iguales tendran las bases y alturas reciprocas; y si tienen las bases, y alturas reciprocas, seràn iguales.

PROP. XXXV. no es menester.

PROP. XXXVI. Theorema.

Si ay tres lineas proporcionales, el paralelepipedo hecho de las tres, serà igual al paralelepipedo equiangulo, que tiene todos sus lados, iguales à la de enmedio. [fig. 30.]

E*Xplicacion.* Sean las lineas A,B,C, tres continuas proporcionales; de las quales sea formado el paralelepipedo DE: esto es, la DF sea igual à la linea A: la GE, à la B: y FG, à la C: aya otro paralelepipedo HI, cuyos tres lados HK,KL,LI, y por consiguiente todos los demas, sean iguales à la media proporcional B: y sean entrambos equiangulos: Digo, que seràn iguales.

Demonstracion. Supongo, para mayor claridad, que son rectangulos: pues por ser los paralelogramos DG,HL equiangulos: y ser DF igual à A: FG, à C: y KH, como tambien KL igual à la media B; serà DF à KH, como KL à FG, que es ser los lados reciprocos: luego las bases DG, HL [15.6.] son iguales. Tambien, por ser las alturas GE, LI iguales à la mesma B, seràn iguales entre si: luego los paralelepipedos DE,HI tienen las bases, y alturas iguales: lue-

luego [31.] son iguales.

Si los paralelepipedos fuessen inclinados, siempre las perpendiculares à las bases serian iguales, por suponerse equiangulos; y seria la mesma demonstracion. Lo mesmo se convence de los prismas trilateros, por ser la mitad de los paralelepipedos de igual base, y altura. (28.)

PROP. XXXVII. Theorema.

Si quatro lineas son proporcionales, los paralelepipedos semejantes, descritos semejantemente de estas lineas, seràn proporcionales; y si los paralelepipedos semejantes son proporcionales, tambien lo seràn las lineas. [fig. 31.]

SEan quatro proporcionales M à N: como O à P: Digo, que el solido M al solido N, serà como el solido O al solido P.

Demonstracion. El solido M al solido N, tiene [33.] razõ triplicada de la que ay de la linea M à la linea N: M à N es como O à P. Luego el solido M al solido N tiene razon triplicada de la que ay de O à P. Esta mesma razon triplicada de O à P tiene el solido O al solido P. Luego el solido M al solido N, es como el solido O al solido P.

Tambien, si el solido M al solido N, tiene la mesma razon, que el solido O al solido P; como las lineas M, N tengan razon subtriplicada de sus solidos: y las O, P de los suyos, la mesma razon avrà de la linea M à N, que de la linea O à P.

PROP. XXXVIII. y XXXIX. no son essenciales.

PROP. XL. Theorema.

Si dos prismas triangulares tienen igual altura; y el vno tiene por base vn paralelogramo, duplo de la base del otro, que se supone ser triangular, los prismas seràn iguales. (fig. 32.)

E*Xplicacion.* Sean los prismas HM, PR, ambos triangulares, y de igual altura; pero HM tenga la base VX paralelograma, y dupla de la base QOP triangular del otro: Digo ser estos prismas iguales.

Preparacion. Supongan se perficionados los paralelepipedos OS, XN.

De-

Demonstracion. Por ser la base VX dupla del triangulo QOP; y ser tambien el paralelogramo OT duplo del mesmo triangulo (34.1.) seràn los paralelogramos OT, VX iguales; y como se suponga tener los prismas iguales alturas, tendran los paralelepipedos OS, XN bases, y alturas iguales: luego [31.] son iguales: luego los prismas HM, PR, que son sus mitades (28.) tambien seràn iguales.

LIBRO VIII.

Que es el duodezimo de Euclides.

¶ *La doctrina de este Libro es importantissima para aquella parte de Geometria practica, llamada Estereometria, que enseña la mensuracion de los solidos: demonstrarè sus proposiciones por el camino mas llano y breve, evitando la prolixidad de Euclides, que suele servir de tropiezo à los principiantes.*

DEFINICIONES.

1. P*oligono inscrito en el circulo, es el que se describe dentro del circulo, de tal suerte, que todos sus angulos tocan en el circulo.*

2. *Poligono circumscrito al circulo, es el que de tal suerte està descrito al rededor del circulo, que todos sus lados tocan en la periferia.*

3. *Solido, ò Polyhedro inscrito en la Esphera, es el que puesto dentro de ella, todos sus angulos solidos tocan en la superficie esferica.*

Solido, ò Polyhedro circunscrito à la esfera es aquel cuyas superficies tocan todas à la Esfera.

5. *Las quantidades, ò figuras inscritas en otra, ò circunscritas à ella, se dize degeneran, fenecen, ò se terminan en ella, quando tanto se puede augmentar la inscrita, ò disminuir la circumscrita, que la diferencia entre ellas, y aquella en quien se inscriben, ò circunscriben, sea menor, que otra qualquiera quantidad dada, ò dable.*

Esto

Eſto ſe verà con mayor claridad en el lema para la *prop.2.*

PROP. I. Theorema.

Los polygonos ſemejantes inſcritos en los circulos, tienen la razon duplicada de la de ſus diametros. [fig.1.]

E*Xplicacion.* Sean los polygonos ſemejantes inſcritos en los circulos ABOF, ILRC: Digo, tienen entre ſi la razon duplicada de la de los diametros AF, IC.

Preparacion. Tirenſe las rectas AO, BF: IR, LC.

Demonſtracion. Por ſer los polygonos ſemejantes, los angnlos ABO, ILR ſeràn iguales, y los lados OB, BA proporcionales con los lados RL, LI [*def.*1.6.] luego los triangulos OBA, RIL ſon equangulos: Luego los angulos BOA, LRI ſon iguales: el angulo BFA es igual al angulo BOA, por inſiſtir en el meſmo arco BA (21.3.) y el angulo LCI es igual al angulo LRI, por la meſma razon: luego los angulos BFA, LCI ſon entre ſi iguales. Eſto ſupueſto, los triangulos FBA, CLI, tienen los angulos BFA, LCI iguales: y los angulos FBA, CLI rectos, è iguales, por eſtar en el ſemicirculo [31.3.] luego los triangulos FBA, CLI ſon equiangulos, y ſemejantes (4.6.) luego la meſma razon ay de BA à LI, que de AF à IC: Los poligonos ABOF, ILRC tienen, por ſer ſemejantes, razon duplicada de la de los lados BA, LI [22.6.] Luego tienen tambien razon duplicada de la de los diametros AF, IC.

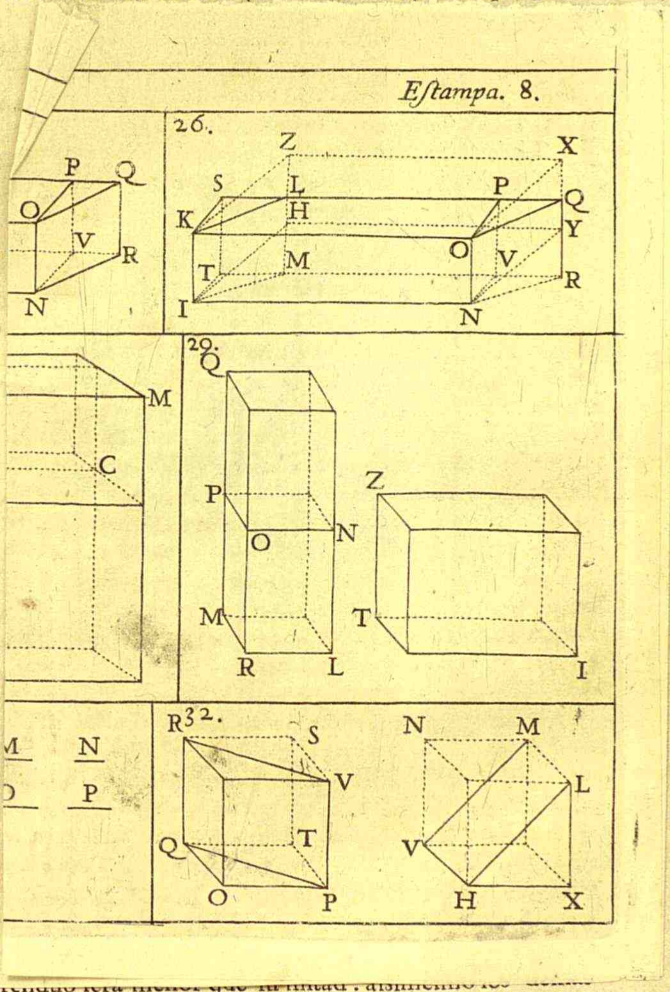
Corolario.

De lo dicho ſe infiere, que los ambitos de los polygonos inſcritos en los circulos, tienen entre ſi la razon meſma de ſus diametros: eſto es, que ſi, por exemplo, el diametro del vno es doblado del diametro del otro; el ambito de aquel, ſerà doblado del ambito de eſte: porque, como ſe ha demonſtrado, AB es à LI; como AF, à IC: y aſsi meſmo ſe demonſtrarà ſer tambien BO à LR como AF à IC; y aſsi de los demas: Luego [12.5.] *todos los lados juntos de vn poligono, à todos los de el otro juntos; eſto es, el ambito al ambito, ſer à como AF à IC.*

Lemma I. para la Prop.II.

Si de vna quantidad CE [fig.2.] *ſe quita mas que ſu mitad; y del reſiduo ſe quita otra vez mas, que ſu mitad, y aſsi continuamen-*

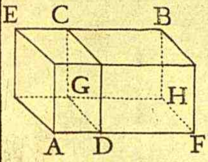
mente, vendrà à quedar vna quantidad menor, que otra qualquie-



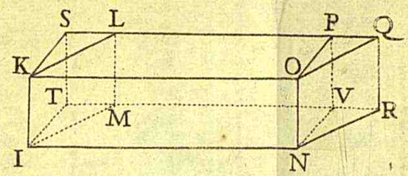
triangulos CHB, BID, &c. ſon mas de la mitad de ſus ſegmentos: luego ſi de los ſegmentos del circulo, que queda-

ron

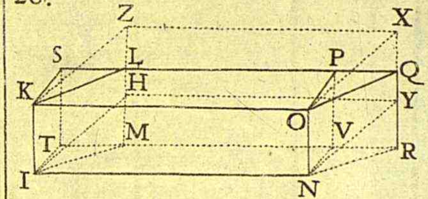
24.



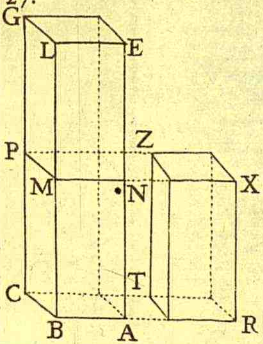
25.



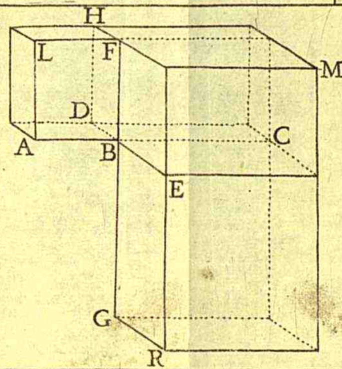
26.



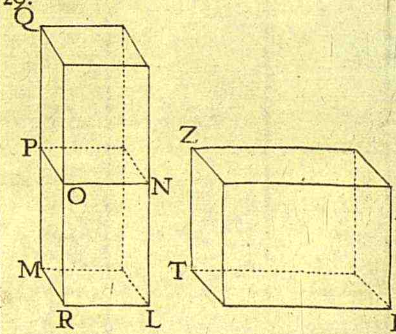
27.



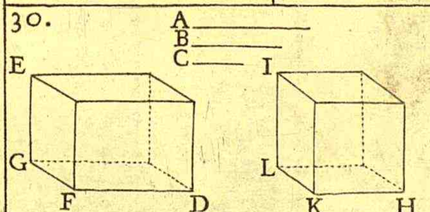
28.



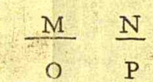
29.



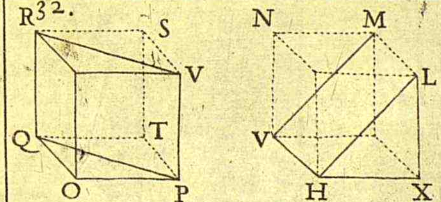
30.



31.



32.



Eſto ſe verà con mayor claridad en el lema para la

Si de vna quantidad CE [fig. 2.] ſe quita mas que ſu mitad; y del reſiduo ſe quita otra vez mas, que ſu mitad, y aſsi continua-men-

mente, vendrà à quedar vna quantidad menor, que otra qualquiera quantidad B dada, por pequeña que ſea.

P*reparacion*. Multipliqueſe la quantidad B haſta que haga vna quantidad que exceda à la CE: y ſupongamos, que tomada B tres vezes en GH, HI, IL, haga la quantidad GL mayor que CE.

Demonſtracion. Si de GL tripla de B, ſe quita B, ò GH ſu igual, es cierto ſe quita menos que ſu mitad; y por conſiguiente quedarà HL mayor que ſu mitad: luego ſi de CE, menor que GL, quitamos CD, mayor que ſu mitad, quedarà DE, menor que HL: eſto es, menor que el duplo de B: Luego ſi de HL mayor, ſe quita ſu mitad HI, ò B ſu igual: y de DE menor, ſe quita DF, mas que ſu mitad, quedarà FE menor que IL, ò menor que B, ſu igual.

Eſta Propoſicion es la primera del lib. 10. de Euclides.

Lemma II.

Los polygonos inſcritos en el circulo degeneran en el circulo. (fig. 3.)

D*emonſtracion*. Sea el quadrado ACBD inſcrito en el circulo. Eſte es la mitad del quadrado VO circunſcrito; porque VO ſe compone de quatro quadrados iguales al ZO: y el inſcrito, ſe compone de quatro triangulos iguales al AZD, que (34. 1.) ſon mitades de aquellos quadrados: ſiendo pues el circulo, menor que el quadrado VO, ſerà el quadrado ACBD inſcrito, mayor que la mitad del circulo; luego ſi eſte quadrado ſe quita del circulo, ſe le quita mas que ſu mitad.

Tambien partiendo los arcos por medio en E, K, I, H, quedarà inſcrito vn Octogono: y tirada por E la tangente GF, y alargados los lados DA, BC, quedarà formado el paralelogramo CF, cuya mitad es [41. 1.] el triangulo CEA: y ſiendo el ſegmento CEA menor, que el paralelogramo CF, ſerà el triangulo CEA mas que la mitad del ſegmento: Luego ſi dicho triangulo ſe quita del ſegmento, el reſiduo ſerà menor que ſu mitad: aſsimeſmo los demas triangulos CHB, BID, &c. ſon mas de la mitad de ſus ſegmentos: luego ſi de los ſegmentos del circulo, que quedaron

ron quitado el quadrado, se quitan dichos triangulos, se quitarà mas que la mitad del residuo. Lo mesmo sucederà inscribiendo siempre polygonos de doblado numero de lados: luego siempre se quitarà del residuo del circulo mas que su mitad: luego [*lemma* 1.] se llegarà à termino en que lo que sobràre del circulo serà menos que qualquiera quantidad dada, ò dable: luego [*def.* 5.] los polygonos inscritos degeneran en el circulo.

Porisma, ò Theorema vniversal.

Si las quantidades inscritas degeneran en aquellas en que se inscriben, estas tendran entre si la mesma razon que las inscritas. [fig.4.]

Los poligonos inscritos en los circulos A, y B degeneran en ellos: Digo, que el circulo A al circulo B, tiene la mesma razon, que qualquier poligono inscrito en A, como por exemplo el de 12. lados, tiene à otro semejante de 12. lados inscrito en B.

Preparacion. Si esto no fuere assi, supongamos tenga el circulo A mayor razon al circulo B, que tiene el poligono de 12. lados inscrito en A, al inscrito en B: luego se podrà señalar vna otra quantidad G, menor que el circulo A, que tenga con el circulo B, la mesma razon, que tiene el poligono de 12. lados inscrito en A, al inscrito de 12. lados en B: siendo pues la quantidad G menor que el circulo A, se diferenciarà de dicho circulo en alguna quantidad: y por el *lemma* 1. se podrà inscribir en el circulo A, vn otro poligono, que le falte menos para igualar con el circulo A, que lo que le falta à G: y por consiguiente sera mayor que G: sea este polygono el de 24. ledos; y supongase otro semejante à este, inscrito en el circulo B.

Demonstracion. La quantidad G se supone tener con el circulo B la mesma razon, que el polygono de 12. lados inscrito en A, tiene al otro su semejante inscrito en B: y como todos los polygonos semejantes inscritos, tengan entre si vna mesma razon, que es la duplicada de los diametros (1.) la mesma razon tendrà el polygono de 24. lados, inscrito en A, à su semejante inscrito en B, que tiene

ne la quantidad G al circulo B: luego alternando, la mesma razon tendrà el polygono de 24. lados inscrito en A, à la quantidad G, que tiene el polygono inscrito en B al circulo B. El dicho polygono inscrito en A, es mayor q̃ G: luego el polygono inscrito en B, es mayor que el circulo B: la parte que su todo, lo que es absurdo: luego el circulo A al circulo B no tiene mayor razon, que el polygono inscrito en A, al inscrito en B. Tienen pues los circulos entre si, la mesma razon, que los polygonos inscritos, que degeneran en ellos.

PROP. II. Theorema.

Los circulos tienen entre si razon duplicada de la de sus diametros.

Demonstracion. Los polygonos semejantes inscritos en los circulos degeneran en ellos [*lem.* 1.] luego los circulos tienen entre si, la mesma razon que los polygonos semejantes inscritos (*lem.* 3.): estos (1.) tienen la razon duplicada de sus diametros: luego tambien los circulos.

Corolarios.

1. *Los circulos son entre si como los quadrados de los diametros. Porque los quadrados tienen la razon duplicada de sus lados; siendo pues sus lados los diametros, tienen razon duplicada de los diametros, como tambien los circulos.*

2. *Las circunferencias de los circulos tienen entre si la mesma razon, que los semidiametros: porque assi como los polygonos inscritos degeneran en los circulos, assi las periferias de los polygonos degeneran en las periferias de los circulos: luego* [lem. 3.] *las circunferencias de los circulos tienen entre si la mesma razon que las periferias de los polygonos inscritos: estas son entre si como los diametros* (corol. de la 1.) *: luego tambien aquellas.*

PROP. III. y IV.

Se omiten, porque ademas de ser prolixas, y dificultosas, solo sirven para demonstrar la 5. la qual demonstrarè sin ellas por camino mas facil.

Lemma I.

Si vn paralelepipedo, prisma, cilindro, ò pyramide, se parte con vn pla-

plano paralelo à la base, la seccion es semejante à la base. [fig. 27. del lib. 11.]

DIgo lo primero, que la seccion PN paralela à la base CA del paralelepipedo AG, es semejante à la base CA. Porque siendo el plano PN paralelo à CA, serà AP paralelepipedo: y el plano PN igual, y semejante à CA. (24. 11.)

Digo lo segundo, que en el prisma CBALGE, la seccion PMN es semejante à la base CBA. Porque las rectas CBA se demonstraràn paralelas à PMN, y la CA à PN, como en semejante caso se demonstrò en la Prop. 24. del Lib. 11. Luego los triangulos PMN, CBA son (8. 1.) totalmente iguales: luego son semejantes. Lo mesmo se demonstrarà en qualesquiera prismas de bases polygonas.

Digo lo tercero, que en los cylindros la seccion paralela à la base, es tambien semejante à ella: porque considerando vn cilindro circunscrito al paralelepipedo AG: serà su base vn circulo circunscrito al paralelogramo CA: luego la seccion hecha por PN, parelela à la base, serà tambien vn circulo circunscrito al paralelogramo PN: y por consiguiente serà la seccion semejante à la base.

Digo lo quarto, [*fig.* 5.] que en la pyramide VXYD, la seccion QRST, paralela à la base VXYZ, es semejante à dicha base: porque siendo dichos planos paralelos, seràn VX, QR paralelas: como tambien VZ, QT, y XZ, TR: luego (10. 11.) los angulos XVZ, RQT, como tambien VXZ, QRT son iguales: luego los triangulos VXZ, QRT son equiangulos: y (4. 6.) sus lados seràn proporcionales: luego son semejantes. Lo mesmo se demonstrarà de los otros triàgulos RST, XYZ: lo mesmo de los quadrilateros QS, VY, y de qualesquiera pyramides de bases polygonas.

Lemma II.

Si vna piramide tiene la base paralelograma, se parte por el vertice, y angulos opuostos, en dos partes iguales. [fig. 5.]

LA base de la piramide propuesta es el paralelogramo YV, y su vertice es D: Digo, que el plano DXZ la parte igualmente: porque considerando en qualquiera parte de la piramide vn plano SQ paralelo à la base YV, serà la seccion SQ vn paralelogramo semejante à YV [*lem.* 1.] y los triangulos QRT, RST, siempre entre si iguales: luego la piramide triangular XYZD, es igual à la piramide triangular VXZD, por componerse de igual cantidad de planos siempre iguales.

PROP. V. y VI.

Se demonstraràn con mayor facilidad despues de la VII. en sus Corolarios.

PROP. VII. Theorema.

Toda pyramide es la tercia parte del prisma de vna mesma base, y altura. (fig. 6.)

E*Xplicacion.* En el prisma triangular DBF, considerese el plano CEA, que corte el prisma por el angulo E, y por la linea CA; y este solido cortado serà la pyramide ECBA, que tiene la mesma base, que el prisma, y la mesma altura. Digo, que esta pyramide es la tercia parte del prisma.

Preparacion. Para mayor claridad he puesto à parte en M, el solido remanente, despues de quitada la pyramide: Tirese la diagonal DA.

Demonstracion. El solido remanente es vna pyramide, cuya base es el paralelogramo CDFA, y su vertice es E: considerese el plano DEA, que por su cuspide E, y por la diagonal DA, parte dicha pyramide en dos partes, que (*lem.* 2.) son dos pyramides iguales DECA, DEFA.

Asimesmo, bolviẽdo al prisma entero, el solido DEBCA es vna pyramide, cuya base es el paralelogramo DEBC, y su vertice es A: luego si se parte por la diagonal CE, y por el vertice A, se dividirà en dos pyramides iguales (*lem.* 2.) que son DECA, ECBA: siendo pues las pyramides DEFA, ECBA iguales con la pyramide DECA, seran iguales entre si: y todas las tres seràn iguales: luego qualquiera de ellas es el tercio del prisma.

Lo mismo se demonstrarà de las pyramides polygonas, porque tanto ellas, como el prisma de semejante, è igual base, se dividiràn en triangulares; y cada pyramide triangugular ferà el tercio de fu prifma: luego todas las pyramides triangulares juntas: efto es, toda la pyramide polygona, ferà el tercio de todos los prifmas triangulares; efto es, del prifma polygono de igual bafe, y altura.

Corolarios.

1. *Las pyramides tanto triangulares, como polygonas, que tienen igual altura, tienen la razon mefma, que fus bafes: porque* (7.) *fon el tercio de fus prifmas: eftos, fi tienen igual altura, fon como fus bafes* (corol. 1. 34.) *: luego* (15. 5.) *tambien las pyramides. Efto es lo que contienen las prop. 5. y 6. de efte libro.*

2. *Las pyramides de iguales bafes fon como fus alturas, por la razon mefma. Y fi tienen iguales bafes, y alturas, fon iguales, como los prifmas de quienes fon el tercio.*

PROP. VIII. Theorema.

Las pyramides femejantes tienen razon triplicada de la de fus lados homologos. [fig. 7.]

PRimero. Sean las pyramides triangulares OACB, KHIN: Digo, que eftan en razon triplicada de fus lados homologos AB, HN.

Preparacion. Acabenfe los paralelogramos AM, HQ, y fobre ellos los paralelepipedos AG, HL con la mefma altura que las pyramides: y fiendo eftas femejantes, feràn fus bafes ACB, IHN femejantes: con que los paralelogramos AM, HQ tambien feràn femejantes: y afsi mefmo lo feràn los paralelepidos AG, HL.

Demonftracion. Cada vno de los dichos paralelepipedos fe divide por los angulos opueftos en dos prifmas iguales (28. 11.) Y cada prifma del paralelepipedo AG es triplo de la pyramide OACB: y cada prifma del HL es triplo de la pyramide KHIN (7.) Luego cada dos prifmas juntos, efto es, cada paralelepipedo, es fextuplo de fu pyramide: Luego (15. 5.) las pyramides tendran entre fi la mefma razon que los paralelepipedos: eftos (33. 11.) tienen la razõ triplicada de fus lados homologos AB, HN: Luego tambiẽ las pyramides.

Segundo. Si las pyramides fueffen polygonas, fe dividirìan en triangulares, y fe harìa de ellas la mefma demonftracion.

PRO-

PROP. IX. Theorema.

Las pyramides iguales tienen las bafes y alturas reciprocas: y las q̃ tienen las bafes, y alturas reciprocas, fon iguales. [fig. 8.]

PRimero. Seã las pyramides triangulares BACO, HINL iguales: Digo, que la bafe BCO, à la bafe HNL, es como la altura HI, à la altura BA. Perficionenfe los Paralelepipedos, como en la prop. antecedente.

Demonftracion. Confta de la demonftracion de la prop. anteced. que las pyramides fon la fexta parte de los paralelepipedos: conque fiendo las pyramides iguales, como fe fupone, feràn tambien los paralelepipedos iguales, los quales tienen por conftruccion, las mefmas alturas BA, HI, que las pyramides, y las bafes BE, HR, duplas de las bafes BCO, HNL de las pyramides [34. 1.] Por fer pues los paralelepipedos iguales, tienen (34. 11.) las bafes, y alturas reciprocas: efto es, la bafe BE à la bafe HR, como la altura HI à la altura BA: Luego tambien las mitades de las bafes de los paralelepipedos tendràn razon reciproca con las mefmas alturas; BCO con HNL, como HI à BA: Luego las pyramides triangulares iguales tienen fus bafes, y alturas reciprocas.

Segundo. Si la bafe BCO à la bafe HNL, es como HI à BA: Digo, que las pyramides feràn iguales: porque, fi BCO à HNL es como HI à BA: luego BE dupla de BCO à HR, dupla de HNL, tambiẽ ferà como HI à BA: luego (34. 11.) los paralelepipedos feràn iguales: luego tambien las pyramides, que fon fu fexta parte. Si las pyramides fueffen polygonas, fe dividirìan en triangulares, y fe harìa el mefmo argumento de cada vna de ellas; y por configuiente de todas juntas.

Lemma para la Prop. X.

Los prifmas infcritos en los cylindros, degeneran en cilindros: y las pyramides polygonas infcritas en las conicas degeneran en ellas.

DEmueftrafe efte Lema, como el fegundo para la prop. 2. Y entendido aquel, no tiene efte dificultad alguna; porque afsi como los polygonos planos, que infinita-

I men-

mente se inscriben en los circulos, degeneran en ellos: assi tambien los solidos, que tienen por base aquellos polygonos, como son los prismas, y pyramides, degeneran en los solidos, que tienen por base aquellos circulos, como son los cylindros, y pyramides conicas.

PROP. X. Theorema.

Toda pyramide conica es la tercia parte del cylindro, que tiene la misma base, y altura.

DEmonstracion. Si dentro de vn circulo se inscribe qualquiera polygono, y sobre èl como base se levanta vn prisma, y vna pyramide de igual altura, la pyramide serà (7.) el tercio del prisma; y esto serà siempre en quantos prismas, y pyramides se inscriben infinitamente: luego degenerando los prismas en cilindros, y las pyramides polygonas, en conicas; serà (*porisma vniversal*) la pyramide conica, el tercio del cylindro de igual base, y altura.

PROP. XI. Theorema.

Las pyramides conicas de vna mesma altura tienen la mesma razon que sus bases. Y assimesmo los cylindros.

DEmonstracion. Las pyramides polygonas de igual altura, inscriptas en las conicas, son entre si como sus bases (6.) Las pyramides polygonas degeneran en las conicas [*lemma de la* 10.] Luego (*por el poris. vniver.*) las pyramides conicas, son entte si como sus bases. De que se sigue, que por ser los cylindros triplos de las pyramides conicas, estaràn tambien en la mesma razon que sus bases.

Corolario.

De aqui se infiere en virtud de la mesma demonstracion, que los prismas, y cylindros de vna mesma altura, estan en la mesma razon que sus bases: y tambien qualquiera pyramide conica comparada con otra cylindrica de igual altura.

PROP. XII. Theorema.

Las pyramides conicas, y los cylindros semejantes tienen entre si razon triplicada de la de los diametros de sus bases. [fig. 9.]

EXplicacion. Sean las pyramides conicas BAF, QZR: Digo, que tienen entre si la razon triplicada de la de BF, QR, diametros de sus bases.

Preparacion. Inscrivanse en los circulos de sus bases, qualesquiera polygonos semejantes, y sobre ellos las pyramides polygonas, que seràn semejantes, è inscritas en las conicas.

Demonstracion. Las pyramides polygonas inscritas tienen entre si, por ser semejantes, la razon triplicada de sus lados BL, QE [8.] BL à QE tiene la razon de los diametros BF à QR [1.] luego las pyramides polygonas tienen entre si razon triplicada de los diametros BF, QR: las pyramides conicas, por degenerar en ellas las polygonas, tienen [*por el porisma vniver.*] la mesma razon que las polygonas: Luego tienen razon triplicada de los diametros BF, QR. Y siendo los cylindros triplos de las pyramides conicas, tendran tambien, como ellas, razon triplicada de BF à QR.

PROP. XIII. Theorema.

Si vn cylindro se corta con vn plano paralelo à las bases, cortarà las partes del exe en la mesma razon que las partes del cilindro.

DEmuestrase, como la 1. del lib. 6. y la 25. de este libro: y lo mesmo se verificarà de la superficie del cylindro.

PROP. XIV. Theorema.

Los cylindros de vna mesma, ò igual base, tienen la razon mesma que sus alturas: y assi mesmo las pyramides conicas. [fig. 10.]

EXplicacion. Sean los cylindros CI, AR, cuyas bases sean iguales: Digo, que tienen entre si la mesma razon, que sus alturas LQ, SF.

Preparacion. Cortese del mayor AR, el cylindro AO de igual altura à la de CI: conque los cylindros AO, CI seràn iguales. (11.)

Demonstracion. Siendo [13.] el cylindro AO, à AR como LE à LQ, tambien el cylindro CI serà à AR como LE à LQ: esto es [por ser SF, LE iguales] como SF à LQ. Lo mesmo queda demonstrado de las pyramides conicas, por ser el tercio de los cylindros.

PROP. XV. Theorema.

Los cylindros iguales tienen las bases, y alturas reciprocas: y los que tie-

tienen las bases, y alturas reciprocas son iguales: y asi mesmo en las pyramides conicas.

Esta proposicion se demuestra como la 34. del 11. valiendose de las proposiciones 11. y 13. de este libro: y entendida aquella, no se hallarà en esta dificultad alguna.

Scholio.

De lo demonstrado en varias proposiciones del lib. 1. y 6. consta, que los paralelogramos, y triangulos, si tienen igual base, y altura, son iguales; si igual base, son como las alturas; si igual altura, son como las bases: à que añado, que si tienen diferentes bases, y alturas, tienen razon compuesta de alturas, y bases: y aunque esto vltimo se puede deduzir de la prop. 23. del lib. 6. juzgo por conveniente se demuestre con especialidad.

Asimesmo en varias proposiciones de este libro se ha demonstrado, que los paralelepipedos, prismas, cylindros, y pyramides, si tienen igual base, y altura son iguales: si igual base, son como las alturas; si igual altura, como las bases: à que se ha de añadir, lo que omitiò Euclides, que si las bases, y alturas son diferentes, tienen razon compuesta de alturas, y bases. Demonstrarè pues esto en los cylindros; y la mesma demonstracion servirà para los demas solidos sobredichos, como tambien para los triangulos, y paralelogramos.

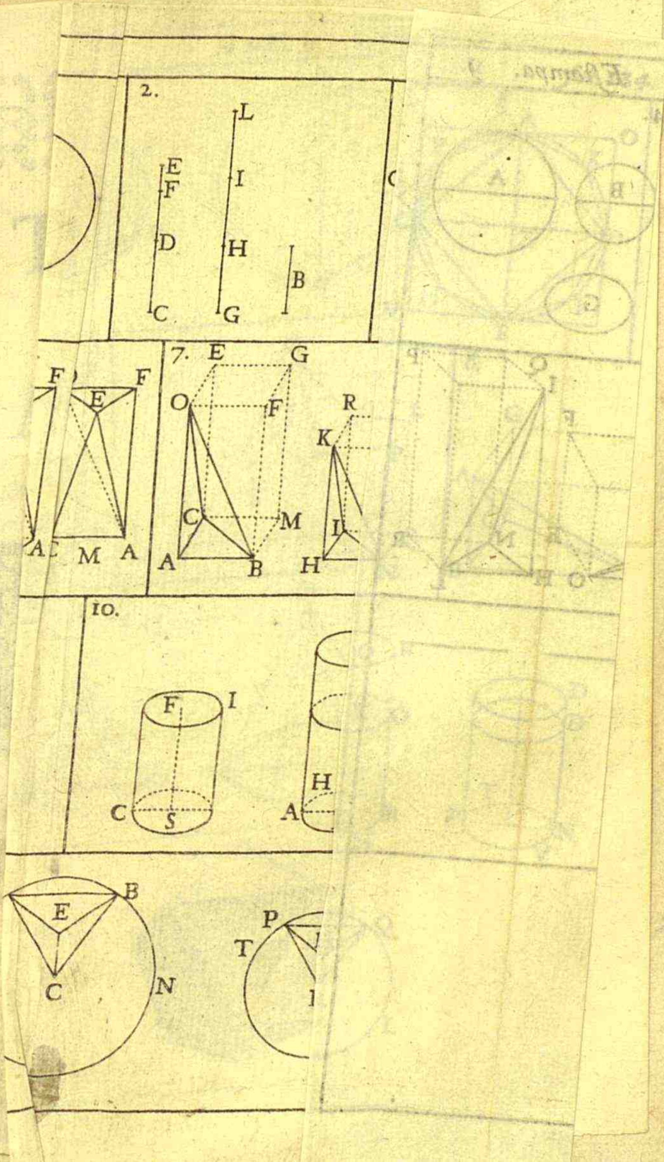
Sean los cylindros AR, FD [fig. 10.] *de diferente base, y altura: Digo, que tienen razon compuesta de las bases, y alturas. Cortese del mas alto AR, el cylindro AO de igual altura à FD: y sea como la base VT, à la base MH, asi FN, à X: y como la altura ND, ò BO, à la altura BR, asi X à Z: y serà la razon de FN à Z, compuesta de la razon de FN à X, que es la de las bases; y de X à Z, que es la de las alturas: luego probando que el cylindro FD es al cylindro AR, como FN, à Z, quedarà probado tener razon compuesta de sus bases, y alturas.*

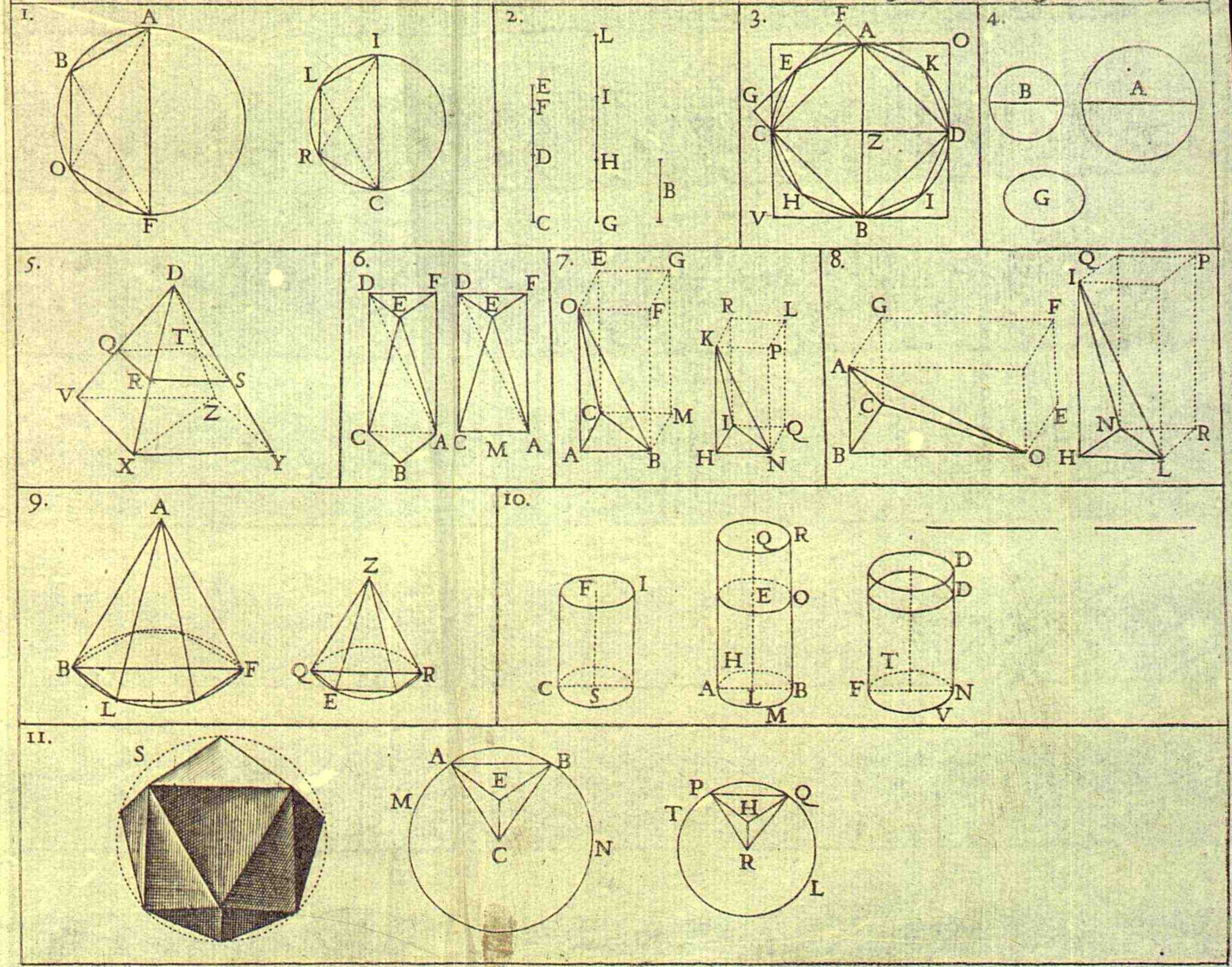
Demonstr. (11.) *El cylindro FD, es al cylindro AO, como la base VT, à MH: esto es* [por construc.] *como FN à X: el cylindro AO es al cylindro AR, como BO à BR (13.) esto es, como X, à Z: luego (22.5.) el cylindro FD es al cylindro AR, como FN à Z.*

PROP. XVI. y XVII.

Se omiten, porq ademas de ser prolixas, no sõ menester.

Lem-




1. A B O F I L R C
2. E F D C L I H G B
3. F A O E K G C Z D H I V B
4. B A G
5. D Q T R S V Z X Y
6. D F E C A B D E F C M A
7. E G O F C M A B R L K P I Q H N
8. G F A C E B O Q P I N R H L
9. A B F L Z Q R E
10. F I C S Q R E O H A L B M D D T F N V
11. S A B E M C N P Q H T R L

TRATADO II.

DE LA

ARITHMETICA

INFERIOR.

LA Arithmetica es vna de las mas principales partes de la Mathematica, que juntamente con la Geometria, las precede, y acompaña à todas. Las precede, por ſer, ſegun Platon, la puerta, no ſolo de eſtas, ſi de otras Facultades mayores: y ſegun Socrates, la oficina, en que ſe labran los mas ſutiles ingenios. Las acompaña, porque apenas ſe hallarà problema alguno, donde no tengan lugar las operaciones numericas. Es la Arithmetica: *Ciencia, que trata de los numeros, ò quantidad diſcreta.*

Divideſe primero, en *inferior*, y *ſuperior*. La *inferior* ſe ocupa en las mas ordinarias operaciones; y eſta es la materia de eſte tratado. La *ſuperior* ſe levanta à la compoſicion, y reſolucion de las poteſtades numericas, eſtableciendo los principales fundamentos de la Algebra, que ſerà empleo de otro Tratado. Segundo, ſe divide en *Eſpeculativa*, y *Practica*: aquella conſidera las propriedades de los numeros; y eſta dà reglas ciertas para vſar de ellas.

LIBRO I.

DE LAS REGLAS ELEMENTA- res, y Logiſtica de los nume- ros enteros.

DEFINICIONES.

1. **V***Nidad es la que à qualquiera coſa la denomina vna. Eucl.def.*1*.del lib.* 7. como vn hombre, vna piedra, &c.

2. *Numero es vna coleccion de vnidades. Eucl. def.*2*.del lib.*7. como *quatro* es vna coleccion de quatro vnidades.

De aqui ſe colige lo primero, que la vnidad no es numero, por no componerſe de otras vnidades; aunque Caramuel quiera defender lo contrario: y quando la vnidad ſe conſidera dividida en partes, como en tercias, quartas, &c. ya no ſe toma como vnidad, ſi como numero. En tanto pues ſe llama vnidad, en quanto la ſuponemos indiviſible; pero en variando la ſupoſicion, conſiderandola dividida en partes, ya dexa de ſer vnidad, y paſſa à tener la razon de numero, y ſe transfiere la razon de vnidad à cada vna de las partes de la diviſion: como, por exemplo, quando dezimos, que vna pieza de paño conſta de 50. varas, la vara es la vnidad; pero quando afirmamos, que la vara es quatro palmos, variamos la ſupoſicion, y la tomamos como numero, compueſto de quatro vnidades, que ſon los palmos.

Coligeſe lo ſegundo, que la materia del numero ſon las vnidades, de que ſe compone; pero la forma es el conocimiento que numera, y colectivamente dize, ſer diez, veinte, &c. con que dixo bien Ariſtoteles, que el numero ſe halla propriamente en el alma del hombre.

3. *El*

3. *El numero ſe divide en Par, è Impar.* Numero *par* es el q̃ ſe puede dividir enteramente en dos partes iguales, ò el que tiene mitad; como el 2. el 4. 6. &c. Numero *impar* es el que no ſe puede dividir enteramente en dos partes iguales; como el 3. el 5. &c. Algunas diviſiones del numero omito, por no ſer de vtilidad; otras ſe explicaràn en ſus lugares.

CAPITVLO I.

DEL NVMERAR.

LA Logiſtica de los numeros enteros ſe reduze à ſaber executar quatro generos de operaciones en los numeros, que ſon *ſumar*, *reſtar*, *multiplicar*, y *partir*; pero antes de eſto es meneſter ſaber numerar, que es lo meſmo que ſaber leer vn numero, eſcrito con ſus proprios caracteres.

Los caracteres con que ſe eſcrive qualquiera numero, por crecido q̃ ſea, ſon ſolamente los diez que ſe ſiguen:

vno,	*dos,*	*tres,*	*quatro,*	*cinco,*	*ſeis,*	*ſiete,*	*ocho,*	*nueve,*	*zero,*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Cada vno de eſtos caracteres, quando eſtà ſolo, ſignifica las vnidades ſobredichas: eſto es, 1. ſignifica *vno*, ò *vna vnidad*: 2. ſignifica *dos*, ò *dos vnidades*, &c. Solo el *zero*, por ſi ſolo no tiene valor alguno. Quando muchos de eſtos caracteres ſe juntan, vno al lado del otro, van augmentando ſu valor en decupla proporcion, de eſta ſuerte: començando por la mano derecha reſpeto de quien lee, el primer caracter vale *vnidades*: el ſegundo vale *dezenas*, como diez, veinte, treinta, quarenta, cinquenta, ſeſenta, ſetenta, ochēta, y noventa: y el tercero vale *centenares*, como ciento, ducientos, &c. Sirva de exemplo 492. El primer caracter à la derecha 2. ſignifica dos, y por eſtar en el primer lugar, ſignifica *dos vnidades*: el ſegundo es 9. nueve, y por eſtar en ſegundo lugar, ſignifica nueve dezenas, ò *noventa*: el

ter-

tercero es 4. quatro, y por tener el tercero lugar, ſignifica quatro centenares, ò *quatrocientos*: y leyendolo todo junto, de la ſinieſtra à la derecha, ſerà todo *quatrocientos noventa y dos*.

El zero por ſi ſolo, ò antes de otro numero, no tiene valor; pero pueſto deſpues de vn numero, le aumenta en decupla proporcion: y aſsi, 2. ſolo ſignifica *dos*, y con vn zero 20. es ya *veinte*, y con dos zeros 200. *ducientos, &c.*

Para dar el devido valor à los caracteres, ſe han de obſervar tres coſas: la figura del caracter, el lugar, y la dignidad; y por cada coſa de eſtas tiene cada caracter ſu valor. Las figuras de los caracteres ſon diez, cuyo valor queda explicado. Los lugares ſolo ſon tres, el primero à la derecha es de vnidades, el ſegundo de dezenas, y el tercero de centenares, como dixe. Las dignidades pueden ſer infinitas: como Unìdad, Millar, Cuento, Biquento, Triquento, &c. y en cada dignidad ſe hallan los tres lugares referidos; y proceden con el orden ſiguiente:

de tricuentos			de millares			de bicuentos			de millares			de cuentos			de millares			de vnidades		
Centena	Dezena	Vnidad	Centena	Dezena	Vnidad	Centena	Dezena	Vnidad	Centena	Dezena	Vnidad	Centena	Dezena	Vnidad	Centena	Dezena	Vnidad	Centena	Dezena	Vnidad
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4,&c.																				

Entendido eſto, quien ſepa numerar vna cuenta de tres caracteres, numerarà otra qualquiera por crecida que ſea. Dividaſe toda la ſerie de tres en tres letras, començando por la mano derecha, como ſe vè en la ſiguiente:

13,

13,132,525,781,398,674,149,276,432,124,247
5 4 3 2 1

Pongaſe debaxo del primer numero de la tercera diviſiõ, 1: à la quinta, 2: à la ſeptima, 3: à la nona, 4: à la vndecima, 5; y aſsi infinitamente. Eſtos numeros ſirven de exponentes, que declaran las dignidades: el 1. ſignifica cuentos, el 2. bicuentos, el 3. tricuentos, &c. y los que no tienen exponente, ſon millares; menos el primero à la derecha, que ſiempre pertenece à las vnidades. Lo que ſe vè claramente, cotejando eſtas reparticiones, con las de la tabla antecedente. Eſto ſupueſto, las letras del primer punto, empezando por la izquierda, ſon 13. y porque baxo tienen el exponente 5, ſeràn treze quinticuentos: las que ſe ſiguen haſta el punto ſon 132. y porque no tienen exponente, ſon ciento y treinta y dos mil. Las que ſe ſiguen haſta el otro punto ſon 525. y porque llevan el exponente 4, ſeràn quinientos veinte y cinco quadricuentos; y aſsi de las demas. Conque el valor de toda la ſerie ſerà: 13. quinticuentos, 132. mil, 525. quadricuentos, 781. mil, 398. tricuentos, 674. mil, 149. bicuentos, 276. mil, 432. cuentos, 124. mil, 247. vnidades, reales, ò libras, &c.

De la meſma manera ſe harà la numeracion en la ſerie ſiguiente:

40,300,693,434,200,101,340,203,000
4 3 2 1

40. quadricuentos, 300. mil, 693. tricuentos, 434. mil, ducientos bicuentos, 101. mil, 340. cuentos, y 203. mil; y aſsi en las demas.

CAPITVLO II.
DE LAS MONEDAS, PESOS, Y medidas.

Es grande la variedad de monedas, peſos, y medidas que ay en diferentes Reynos, lo que haze eſta materia muy dificultoſa. Recogerè en eſte capitulo, las que al preſente corren en eſtos Reynos, para que el Arithmetico pueda en qualquiera de ellos for-

formar ſus cuentas, dexando las eſtrangeras; principalmente, porque ſiendo vnas meſmas las reglas, podrà vſar de ellas, valiendoſe de las noticias de perſonas practicas en el Paìs.

MONEDAS DE CASTILLA.

El doblon vale al preſente quatro reales de à ocho Mexicanos.

El real de à ocho Mexicano, Segoviano, ò Sevillano vale 10. reales de plata, ò 15. de vellon.

El real de à ocho de Maria vale 8. reales de plata, ò 12. de vellon.

El real de vellon vale 34. maravedis, ò 8. quartos, y medio.

El quarto vale 4. maravedis.

El ochavo 2. maravedis.

PESOS DE CASTILLA.

El quintal tiene 4. arrobas, ò 100. libras.

La arroba contiene 25. libras.

La libra 16. onças.

La onça 16. adarmes.

El marco tiene 8. onças, ò media libra; ſi es de oro ſe divide en 50. Caſtellanos: cada Caſtellano en 8. tomines, y cada tomin en 12. granos. Pero ſi es de plata, ſe divide en 8. onças: cada onça en 8. ochavos: y cada ochavo en 75. granos. Algunos quieren que ſe divida en 6. tomines; y por conſiguiente en 72. granos: y aſsi que los granos del marco de la plata ſean menos en numero que los del oro; pero todos juntos en el peſo iguales.

MEDIDAS DE CASTILLA.

La vara de Caſtilla tiene 4. palmos: el palmo 12. dedos: el pie es la tercera parte de la vara: el codo es media vara.

El moyo tiene 16. cantaros, ò arrobas: El cantaro 8. açumbres: el açumbre 4. quartillos. El cantaro de azeyte tiene 4. quartas: vna quarta 16. panillas: la panilla peſa caſi 4. onças.

Vn caìz tiene 12. hanegas: La hanega 12. celemines: el celemin 4. quartillos.

MO-

MONEDAS DE VALENCIA.

La libra tiene 20. ſueldos, ò 10. reales: El ſueldo 12. dineros: el real 24. dineros: el real que llaman Valenciano 18. dineros: El doblon vale 3. lib. 17. ſueld. El real de à ocho Mexicano 19. ſueld. y 6. din.

PESOS DE VALENCIA.

La carga tiene 3. quintales, quando la arroba es de 30. libr. pero quando es de 36. tiene 10. arrobas, y tanto peſa la carga en vn caſo como en otro. El quintal conſta de 4. arrobas de 30. libr. La arroba es en dos maneras, vna de 30. libr. que llaman ſutil, ù de peſo delgado; y otra de 36. libr. que es la grueſſa: la arroba de la harina es de 32. libras. La libra tiene 12. onças; pero la de peſcado freſco menudo tiene 16. onças: y de peſcado gordo 18. la de carne, 36. La onça tiene 4. quartos: el quarto 4. adarmes: el adarme 36. granos, ſolo el de olores tiene 32.

MEDIDAS DE VALENCIA.

La vara tiene 4. palmos; y tambien 3. pies: El palmo 4. quartos: el quarto 3. dedos: el codo es media vara. La braça real tiene 9. palmos: y ſiendo quadrada tendrà 81. palm. La cuerda para medir los campos tiene 20. braças, ò 45. varas. La fanenagada de tierra tiene 200. braças quadradas. La caìzada tiene 6. fanegadas, ò 1200. braças quadradas. La yugada tiene 6. caìzadas, ò 7200. braças quadradas.

La carga de vino, y vinagre tiene 15. cantaros, ò arrobas: el cantaro 4. quartas, ò açumbres. La carga de azeyte tiene 12. cantaros, ò arrobas.

El caìz tiene 12. barchillas: la barchilla 4. celemines: el celemin 4. quarterones.

MONEDAS DE ARAGON.

La libra tiene 20. ſueldos: el ſueldo 12. dineros: el real 24. dineros: el doblon vale 3. libr. 4. ſueld. el real de à ocho Mexicano 16. ſueldos.

PESOS DE ARAGON.

La carga tiene 3. quintales: El quintal 4. arrobas: la arroba 24. libr. y 30. libr. y 36. libr. ſegun fuere la mercaderia. La libra 12. onças; y ſiendo de peſcado, ò carne 36.

La

La onça 4. quartos: el quarto 4. adarmes: el adarme 32. granos.

MEDIDAS DE ARAGON.

La vara tiene 4. palmos: el palmo 4. quartos.

Vn nietro de vino, ò carga tiene 16. cantaros: vn cãtaro 28. libras.

El caìz tiene 8. hanegas: la hanega 3. quartales por lo ordinario: el quartal 4. celemines.

MONEDAS DE CATALVñA

La libra vale 20. ſueldos: el ſueldo 12. dineros: el real 24.din. la dobla 55. reales: el real de à ocho Mexicano 14. reales.

PESOS DE CATALVñA.

La carga tiene 3. quintales: el quintal 4. arrobas: la arroba 26. libras: la libra 12. onças: la onça 4. quartos: el quarto 4. adarmes: el adarme 36. granos.

MEDIDAS DE CATALVñA.

La cana tiene 8. palmos: el palmo 4. quartos.

La carga de vino tiene 32. quarteros: el quartero 4. quartos.

La carga de azeyte 30. cortanes: el cortan 16. quartos.

La quartera de trigo tiene 12. cortanes.

CAPITVLO III.

DE LOS PESOS, Y MEDIDAS SOBREdichos, comparados entre ſi.

LA reduccion de los peſos, y medidas de vn Reyno, à los de otro, es importantiſsima à los tratantes: y eſta no ſe puede hazer ſin tener noticia de la correſpondencia, que tienen entre ſi; coſa bien dificultoſa, por la poca conformidad de los Autores: las principales de eſtos Reynos, averiguadas con toda diligẽcia, he reducido à la Tabla ſiguiente:

TA-

TABLA

De la correſpondencia de diferentes peſos, y medidas.

PESOS.

	Caſtilla	Valencia	Aragon	Cataluña
Onzas	32.	31.		
Onzas	35.		36.	
Onzas	14.			12.
Onzas		23.	24.	20.
Onzas		115.	120.	100.

MEDIDAS.

	Caſtilla	Valencia	Aragon	Cataluña
Palmos	13.	12.		
Palmos	95.	88.	102.	100.

MEDIDAS DE GRANOS.

	Caſtilla	Valencia	Aragon	Cataluña
Celemines	12.	13.	11. y 3. oct.	
Celemines		48.	42.	
Celemines	384.	416.		quarteras 25.

Teniendo el cantaro, ò arroba Valenciana 36. libras: 16. açumbres de Valencia, hazen 26. de Caſtilla, con poca diferencia; pero teniendo el cantaro 30. libras, 22. açũbres Valencianos ſon los meſmos 26. Caſtellanos, con poca diferencia.

Adviertaſe, que lo que ſe dize en la Tabla, de la correſpondencia de vnos palmos con otros, ſe ha de entender tambien de vnas varas con otras; y lo meſmo de los pies: y que el pie Valenciano es igual al Geometrico, ò Romano antiguo, que es el que ſe vſa en Roma al preſente: y aſsi los palmos, y varas Valencianas ſon iguales à las de Roma.

CAPI-

CAPITVLO IV.

DEL SVMAR.

S*Vmar es juntar muchos numeros en vno, para saber el valor de todos juntos*: y el agregado de dichos numeros se llama *suma*. Las reglas del sumar son las contenidas en la propos. siguiente.

PROPOSICION I. Problema.

Sumar vnos numeros con otros.

Regla I.

E*Scrivanse las partidas que se han de sumar vnas sobre otras de suerte, que las vnidades correspondan à las vnidades; decenas à decenas, &c. començando siempre iguales à la mano derecha. sumense las vnidades, y escrivase debaxo de ellas su suma; si no llegare à formar decenas: y assimesmo se sumaràn las decenas.*

Exemplo. Pidese se sumen las dos partidas 432. y 245. Dispónganse en la forma dicha, como aqui se vè: y sumense lo primero las vnidades diziendo, 2. y 5. son 7. escrivase 7. debaxo de las vnidades, y prosigase à sumar las dezenas, 3. y 4. son 7. escrivase en segundo lugar, que es el de las dezenas, y se sumarà las centenas diziendo, 4. y 2. son 6. y escrito el 6. en el tercero lugar, que es el de las centenas, serà la suma 677.

$$\begin{array}{r} 432. \\ 245. \\ \hline 677. \end{array}$$

Regla II.

Si la suma de las vnidades passare de 10. se pondrà debaxo el el numero, en que exceden al 10. y por cada decena se llevarà vno para juntarlo con las dezenas siguientes: y lo mesmo se observarà en las centenas, y millares, &c.

Exemplo. Se han de sumar estas dos partidas 459. y 665.

665. Dispuestas, como antes, dirè: 9. y 5. son 14. y porque en 14. ay vna dezena, y 4. escrivo el 4. en su lugar; y reservo la dezena, para sumarla con las dezenas, diziendo, vno que llevo, y 5. son 6. y 6. son 12. escrivo 2. debaxo las dezenas; y reservo las diez dezenas, que son vna centena, para sumarla con las centenas, digo pues, vno, y 4. son 5. y 6. son 11. Escrivo 1. debaxo las centenas; y las diez centenas, que es vn millar, le escrivo en el quarto lugar proprio de los millares: y es la suma 1124.

$$\begin{array}{r} 459 \\ 665 \\ \hline 1124 \end{array}$$

Regla III.

Si las vnidades sumadas hizieren diezes justos; y lo mesmo las centenas, millares, &c. se pondrà debaxo vn zero, y se llevaràn tantos como fueren las dezenas. Tambien la suma de muchos zeros, no es mas que vn zero.

Exemplo. Las dos partidas 5750. y 4250. se sumaràn assi: porque en la serie de las vnidades, no ay mas q̃ zeros, pongo baxo de ellas vn zero: y prosigo diziendo 5. y 5. son diez justos; pongo pues vn zero, y llevo vna dezena, que junta con el 7. es 8. y 2. son 10. pongo en su lugar el zero, y llevo vn millar, que junto con el 5. haze 6. y 4. hazen 10. pongo el zero en su lugar, y la vna que llevo la escrivo à su lado, por no aver mas que sumar, y es toda la suma 10000.

$$\begin{array}{r} 5750 \\ 4250 \\ \hline 10000. \end{array}$$

Demonstracion de las reglas. Sumando 9. con 5. son 14. esto es vna dezena, y quatro vnidades: luego las 4. vnidades se han de escrivir en su proprio lugar, que es el primero, y la dezena en el segundo: luego se ha de juntar con las demas dezenas, que se han de escrivir tambien en el mesmo lugar: lo mesmo dirè de los centenares, millares, &c.

$$\begin{array}{r} 459 \\ 665 \\ \hline 14 \\ 11 \\ 10 \end{array}$$

CAPITVLO V.

DEL RESTAR.

R*Eſtar es quitar vn numero menor de otro mayor, para conocer el exceſſo del mayor al menor.* Y eſte exceſſo ſe llama *Reſiduo.* El reſtar ſe haze obſervando las reglas de la Propoſicion ſiguiente.

PROP. II. Problema.

Reſtar vn numero de otro.

Regla I.

E*Scrivaſe el numero menor debaxo del mayor, de ſuerte, que à la mano derecha comiencen iguales: y empiezeſe por la mano derecha à quitar el numero inferior del ſuperior, y lo que ſobrare ſe pondrà debaxo en ſu proprio lugar.*

8 6 9
2 3 4
6 3 5

Exemplo. Pideſe, que de la cantidad 869. ſe reſten 234. eſcrivo la menor debaxo la mayor: y empiezo à reſtar diziendo: ſi de 9. quito 4. reſtan 5. eſcrivo 5. en ſu lugar: y proſigo, ſi de 6. quito 3. quedan 3. que pongo en ſu lugar: y digo, ſi de 8. quito 2. ſobran 6. y queda hecha la reſta, y digo que el reſiduo es 635.

Regla II.

Quando la cifra, que ſe ha de reſtar es mayor, que la ſuperior ſe añadiràn à la ſuperior diez, y ſe harà la reſta como antes.

6 5 8
4 8 9
1 6 9

Exemplo. 489. ſe han de reſtar de 658. Pues porque 9. es mayor que 8. añado diez al 8. y es 18. y digo, ſi de 18. quito 9. quedan 9. eſcrivole en ſu lugar: y porque la dezena que ſe añadiò al 8. ſe tomò de las 5. dezenas, que eſtan à ſu lado; el 5. queda hecho 4. y porque 8. es mayor que 4. añado diez al 4. y digo: ſi de 14. quito 8. reſtan 6. que eſcrivo en ſu lugar: y porque la de-

zena que añadi al 4. ſe tomò del 6. eſte viene à ſer 5. y digo, ſi de 5. quito 4. reſta 1. y es todo el reſiduo 169.

Puedenſe reſtar ſemejantes partidas del modo ſiguiente. Porque 9. es mayor que 8. añado al 8. vna dezena, y digo, ſi de 18. quito 9. ſobran 9. y llevo vno, y añadole al 8. que eſtà debaxo del 5. y quedarà hecho 9. y porque 9. es mayor que 5. le añadirè 10. al 5. y dirè, ſi de 15. quito 9. ſobran 6. y llevo vno, que con el 4. que ſe ſigue, haze 5. que reſtados de 6. ſobra 1. y es el reſiduo 169. como antes: eſte modo es equivalente al primero, porque lo meſmo es añadir 1. al 8. y reſtar 9. de 15. que quitarle à 15. vna vnidad, y reſtar 8. de 14. porque en todo caſo ſerà el reſiduo 9.

El modo ſiguiente es el que regularmente ſe vſa, y viene à ſer lo meſmo que los paſſados. En el meſmo exemplo: quien deve 8. y paga 9. paga mal, pues de 9, à 10. và 1. que junto con el 8. de arriba, haze 9. eſcrivo 9. en ſu lugar, y llevo 1. que junto con el 8. de la partida inferior, haze 9. y digo: quien deve 5. y paga 9. paga mal: de 9. à 10. và 1. y 5. de arriba ſon 6. eſcrivo 6. y llevo 1. que con el 4. haze 5. que quitados de 6. ſobra 1. y es el reſiduo 169.

Regla III.

Si el guariſmo inferior fuere zero, y no ſe llevare algo de la operacion antecedente, eſcrivaſe el meſmo guariſmo ſuperior debaxo de la linea; porque ſi de eſte numero ſe quita zero, que es, nada, es viſto ha de quedar el meſmo numero; pero ſi ſe llevare algo, ſe reſtarà eſto del numero ſuperior, y el reſiduo ſe eſcrivirà debaxo.

2 7 4 5
1 0 6 0
1 6 8 5

Exemplo. 1060. ſe han de reſtar de 2745. comienço la operacion diziendo: quien deve 5. y paga nada, deve 5. y eſcrivo el 5. debaxo de la raya; y proſigo: quien deve 4. y paga 6. paga mal: de 6. haſta 10. van 4. que con los quatro de arriba hazen 8. eſcritos los 8. llevo 1. que quitado de 7. ſobran 6. como tambien del 2. de arriba quitando 1. queda vno: y es la reſta 1685.

Regla IV.

Si la cifra que ſe reſta, y la de quien ſe reſta, ſon iguales, el reſiduo es zero; como tambien ſi vn zero ſe reſta de otro.

K 2 *Exem-*

420
220
200

Exemplo. 220. se han de restar de 420. Digo pues, quien de zero quita zero, el residuo es zero: escrivo zero, y prosigo, quien deve 2. y paga 2. ha pagado, y assi pongo debaxo vn zero: quien deve 4. y paga 2. deve 2. que escrito en su lugar, es la resta 200.

Regla V.

Quando arriba ay zeros, se pondrà por residuo lo que và de cada cifra, de lo que se resta, hasta diez, llevando vno à la cifra siguiente.

8000
3942
4058

Exemplo. Se ha de restar 3942. de 8000. Empiezo diziendo, de 2. à 10. van 8. que escrivo debaxo, y llevo 1. que con 4. haze 5. pues de 5. à 10. van 5. escrivoles debaxo, y llevo 1. que con 9. hazen 10. de 10. hasta 10. và nada; pues escrivo zero debaxo, y llevo vno, que con 3. haze 4. y quitados de 8. quedan 4. y es la resta 4058.

La demonstracion de las reglas: Es tan clara, que no necessita mas que de hazer vna atenta reflexion sobre las operaciones mesmas; porque con esso se harà manifiesto ser el residuo, la diferencia que ay entre la cantidad que se resta, y aquella, de quien se resta.

PROP. III. Problema.

Examinar si la suma, y resta estan bien hechas.

LA suma, y resta son operaciones contrarias, desuerte, que deshaze la vna, lo que hizo la otra; por esta razon sirven mutuamente de prueva la vna à la otra.

Prueva del sumar.

Si las partidas que se han sumado son dos, restese de la suma qualquiera de las dos partidas, y quedarà la otra, si està bien hecha la suma. Pero si las partidas sumadas son mas de dos, restese qualquiera partida, de la suma; y la resta ha de ser igual à la suma de las otras partidas, como se vè en los exemplos:

421

	325
	146
	128
Suma	599
Partida 1.	325
Prueva	274

	421
	352
Suma	773
	421
Prueva	352

igual à la suma de las partidas 2. y 3.

Prueva del restar.

Sumese la paga con la resta, y ha de salir la deuda, como en el exemplo:

Deuda	353
Paga	239
Resta	114
Prueva	353

CAPITVLO VI.

DEL MVLTIPLICAR.

M*Vltiplicar vn numero por otro es buscar vn tercer numero, que contenga tantas vezes al que se ha de multiplicar, quantas el multiplicador contiene la vnidad*; como multiplicar 8. por 4. es buscar el numero 32. que incluye en si quatro vezes al 8. quantas el 4. incluye la vnidad. Al numero que se ha de multiplicar llamaremos *cantidad*; al numero por quien se ha de multiplicar, *multiplicador*; y al que sale de la multiplicaciõ, *producto*.

PROP. IV. Problema.

Multiplicar vn numero por otro.

TRes casos se pueden ofrecer en la multiplicacion. 1. Quando vna sola letra, se ha de multiplicar solo por otra. 2. Quando muchas se han de multiplicar por vna.

3. Quan-

3. Quando muchas ſe han de multiplicar por muchas. Reſuelvenſe por las reglas ſiguientes.

Regla I.

Para multiplicar vna ſola letra por otra, nos hemos de valer de la memoria, ò tener preſente la ſiguiente Tabla, que llaman Pytagorica: por la qual ſe hallarà el produƈto de vna ſola cifra por otra, del modo ſiguiente. Se ha de multiplicar 8. por 6. eſto es, quiero ſaber quantos hazen 6. vezes 8. buſco el 6. arriba en la frente de la Tabla: y el 8. en el lado izquierdo; y en la caſilla correſpondiente à los dos numeros dichos, hallo 48. Y lo meſmo hallarè tomando el 8. arriba, y el 6. al lado; pues lo meſmo ſon 6. vezes 8. que 8. vezes 6. [16.7.] De la propria ſuerte ſe hallaràn los demas numeros.

Tabla Pytagorica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Regla II.

Para multiplicar muchas letras por vna, eſcrivaſe eſta debaxo de la cantidad en el lugar de las vnidades; y tireſe vna linea por debaxo: y començando por la mano derecha, vayanſe multiplicando por ella todas las cifras de la cantidad, vna por vna; y ſi lo que ſaliere de la multiplicacion tuviere vn guariſmo ſolo, ſe eſcrivirà debaxo de la raya, en correſpondencia al guariſmo multiplicado; pero ſi tuviere dos, ſe eſcrivirà el primero en la forma dicha, y el otro ſe guardarà en la memoria, para juntarlo con el produƈto ſiguiente.

Exem-

Exemplo primero. 324. ſe multiplican por 2. en eſta forma: 2. vezes 4. hazen 8. eſcrivo 8. debaxo la raya en correſpondencia del 4. multiplicado: y proſigo, 2. vezes 2. ſon 4. eſcrivo el 4. y 2. vezes 3 ſon 6. y eſcrito el 6. es todo el produƈto 648.

```
324
  2
---
648
```

Exemplo ſegundo. Se ha de multiplicar 5824. por 3. y digo: 3. vezes 4. ſon 12. eſcrivo el 2. debaxo el 4. y guardo vno. Proſigo diziendo, 2. vezes 3. ſon 6. y vno que llevo hazen 7. eſcrivo 7. debaxo de el 2. y digo, 3. vezes 8. ſon 24. eſcrivo 4. y llevo 2. y digo, 3. vezes 5. ſon 15. y 2. que llevo ſon 17. eſcrivo 7. debaxo del 5. y llevo 1. y por ſer el vltimo produƈto, eſcrivo 1. al lado de 7. y es todo 17472.

```
 5824
    3
-----
17472
```

Regla III.

Para multiplicar vn numero de muchos guariſmos, por otro tambien de muchos guariſmos, ſe eſcrivirà el multiplicador debaxo de la cantidad, deſuerte, que ſe correſpondan vnidades con vnidades; centenas con centenas, &c. Hecho eſto, ſe multiplicarà toda la cantidad por cada guariſmo del multiplicador de por ſi, en la forma ſobredicha: con que avrà tantos produƈtos, como ay guariſmos en el multiplicador: ſolo ſe ha de advertir, que el produƈto de cada vna ſe ha de començar à eſcrivir ſiempre debaxo de el guariſmo, por quien ſe haze la multiplicacion, como ſe vè en el exemplo; vltimamente ſe ſumaràn todos los produƈtos, y la ſuma ſerà el produƈto total.

Exemplo. 435. ſe ha de multiplicar por 24. Diſpueſtos como ſe vè, multiplico los 435. por 4. diziendo, 4. vezes 5. ſon 20. eſcrivo zero, y llevo 2. 3. vezes 4. ſon 12. y 2. que llevo ſon 14. eſcrivo 4. y llevo 1. 4. vezes 4. ſon 16. y 1. que llevo 17. eſcrivo el 17. y eſtà hecho el produƈto primero. Multiplico aora el meſmo numero 435. por 2. diziendo: 2. vezes 5. ſon 10. eſcrivo zero debaxo, en correſpondencia del 2. multiplicador, y llevo 1. 2. vezes 3. ſon 6. y 1. que

```
  435
   24
-----
 1740
 870
-----
10440
```

que llevo ſon 7. eſcrito el 7. proſigo, 2. vezes 4. ſon 8. y eſcrito eſte, es el ſegundo producto 870. ſumo los dos productos, y tengo el producto total 10440. De la meſma ſuerte ſe proſeguirà, ſi tiene mas guariſmos el multiplicador.

Demonſtracion. Conſta de la meſma operacion, que multiplicando 435. por 4. ſe ha tomado dicho numero 4. vezes: luego el producto primero incluye 4. vezes el 435. Aſsi meſmo, multiplicando el meſmo 435. por 2. (eſto es, por 20. que es el valor que tiene por eſtar en ſegundo lugar) ſe ha tomado dicho numero 435, veinte vezes: luego el producto ſegundo le incluye 20. vezes: luego los dos productos juntos, ò ſumados, le incluyen 24. vezes, eſto es, tantas vezes quantas ay vnidades en el 24. que es la definicion del multiplicar.

ADVERTENCIAS.

1. El zero, multiplicado por qualquiera numero, ſolo produce vn zero.

2. Si entre los guariſmos del multiplicador ocurriere algun zero, baſta poner zero en el producto parcial, baxo el meſmo zero del multiplicador: y paſſando à multiplicar por el otro guariſmo, ſe eſcrivirà el producto en la meſma linea.

```
   630
   205
 ------
  3150
 12600
 ------
129150
```

Exemplo. Multiplico 630. por 5. diziendo: 5. vezes zero es zero; eſcrivole. 3. vezes 5. es 15. eſcrivo 5. y guardo 1. 5. vezes 6. es 30. y 1. que guardè, ſon 31. y les eſcrivo. Aora he de multiplicar 630. por zero; pongo pues vn zero debaxo del zero multiplicador, para principio del producto ſegundo: y ſin hazer otra coſa, paſſo al producto ſegundo, diziendo, 2. vezes zero es zero, eſcrivole en la miſma linea; y proſigo, 2. vezes 3. ſon 6. y 2. vezes 6. ſon 12. y queda concluida la multiplicacion.

```
 240
  30
----
7200
```

3. Si en el principio de la cantidad, ò multiplicador huviere alguno, ò algunos zeros, como en el exemplo preſente, baſta multiplicar los otros guariſmos, como ſi eſtuvieran ſolos: y al producto añadirle tantos zéros, como huviere en la cantidad, ò en el multiplicador, ò en entrambos juntos. De que ſe colige, que para multiplicar vn numero por 10. 100. 1000. &c. baſta añadirle tantos zeros como tiene el multiplicador: y aſsi, multiplicando 45. por 100. ſerà el producto 4500.

CAPITVLO VII.

DEL PARTIR.

P*artir vn numero por otro, es buſcar vn tercer numero, que tenga en ſi tantas vezes la vnidad, quantas el numero que ſe parte incluye al otro por quien ſe parte*, como partir 12. por 4. es buſcar el numero 3. que incluye en ſi la vnidad tres vezes, quantas el 12. incluye al 4. Tambien ſe puede explicar diziendo, *que partir es ſacar vn numero de otro quantas vezes ſe contiene en èl.* Al numero que ſe parte llamarè *cantidad*; à aquel por quien ſe parte, *partidor, ò diviſor*: y al que ſale de la particion, *quociente*.

PROP. V. Problema.

Partir vn numero por otro.

EL modo mas claro de partir vn numero por otro es el contenido en las reglas ſiguientes.

Regla I.

Quando vna cantidad ſe ha de partir por vna ſola cifra.

Pongaſe el partidor apartado de la cantidad ſobre vna linea, y ſi eſta cifra, que es el partidor, fuere de menor, ò igual valor, que la vltima cifra de la cantidad à la mano izquierda, ſe pondrà vn punto entre eſta cifra, y la que ſe ſigue; pero ſi la letra del partidor fuere mayor, que la vltima de la cantidad, ſe pondrà el dicho punto deſpues de la ſegunda cifra: y luego ſe empeçarà à partir como en len los exemplos ſiguientes.

esta cantidad esta errada para que corresponda al quociente y ha de decir 9693

```
6.993 |3
06    ------
 09    3231
  03  [2331]
   0
```

este quociente equivale a 6993

Exemplo primero. Se hã de partir 6993. entre 3. Pueſto el partidor 3. ſobre la raya, por ſer el 9. mayor que dicho 3. pongo vn punto deſpues del 9. y empiezo à partir, diziendo, 3. en 9. cabe 3. vezes, eſcrivo 3. debaxo del partidor [que es el lugar del quociente] y le multiplico por el meſmo partidor, diziendo: tres vezes 3. ſon 9. reſtoles del 9. de la cantidad, y queda zero, eſcrivole debaxo el 9, Noteſe bien lo hecho haſta aora, que lo meſmo ſe ha de hazer en las demas cifras.

Para proſeguir con claridad, baxo el 6. (que es la cifra que ſe ſigue) y le eſcrivo al lado del primer reſiduo, que fue zero: y le parto por el partidor 3. diziendo, 3. en 6. cabe 2. vezes, eſcrivo 2. en el quociente, y les multiplico por el partidor 3. diziendo, 2. vezes 3. ſon 6. que reſtados de 6. queda zero. Baxo aora el otro 9. de la cantidad, y le eſcrivo al lado del reſiduo ſegundo, que tambien fue zero; y proſigo la particion: 3. en 9. cabe 3. vezes, eſcrivo 3. en el quociente, y multiplico el 3. partidor por eſte 3. diziendo, 3. vezes 3, ſon 9. reſtoles de 9. y es el reſiduo tercero zero. Eſcrivo el 3. al lado de eſte zero, y le parto, diziendo 3. en 3. cabe 1. vez, eſcrivo 1. en el quociente: multiplico el partidor 3. por 1. y el producto 3. reſtado del 3. que ſe partiò, dà el reſiduo zero, y queda concluìda la particion; y digo, que 9693. partido entre 3. cabe à cada vno 3231.

```
17.869 |5.
 28    ---------
  36    3573.4/5
   19
   (4
```

Exemplo ſegundo. Se ha de partir el numero 17869. por 5. ò entre 5. Porque el partidor 5. es mayor que 1. vltima cifra de la cantidad, ſe pone el punto deſpues del 7. Y empieço à partir diziendo: 5. en 17. cabe 3. vezes: eſcrivo 3. debaxo del partidor 5. y multiplico, diziendo, 3. vezes 5. ſon 15. haſta 17. de la cantidad van

van 2. pongo el 2. debaxo del 7. y eſte es el reſiduo primero. Eſcrivo el 8. que ſe ſigue, otra vez al lado del 2. y quedarà formado el numero 28. Parto 28. por 5. de la meſma ſuerte que antes partì el 17. y aſsi dirè: 5. en 28. cabe 5. vezes: eſcrivo 5. en el quociente, y multiplico, 5. vezes 5. ſon 25. que reſtados de 28. quedan 3. reſiduo ſegundo: abaxo el 6. que ſe ſigue en la cantidad, y le eſcrivo al lado del 3. y parto 36. por 5. diziendo, 5. en 36. cabe 7. vezes; eſcrivo 7. en el quociente, y multiplico, 7. vezes 5. ſon 35. reſtoles de 36. y ſobra 1. que es reſiduo tercero: eſcrivo à ſu lado el 9. de la cantidad, y parto 19. por 5. diziendo: 5. en 19. cabe 3. vezes: eſcrivo eſte 3. en el quociente: y multiplico, 3. vezes 5. ſon 15. que reſtandoles de 19. ſobran 4. y porque eſte es el vltimo reſiduo, le eſcrivo al lado del quociente ſobre vna raya, y debaxo eſcrivo el partidor, como ſe vè: lo qnal ſignifica quatro quintos, como ſe verà en ſu lugar.

Regla II.

Quando vna cantidad ſe ha de partir por vn partidor que tiene muchas cifras.

Pongaſe el partidor ſobre vna raya, como antes: y ſeparenſe de la cantidad con vn punto, tantas cifras, quantas tiene el partidor, con tal que hagan numero igual, ò mayor que el partidor; porque ſi hizieren numero menor, ſe ha de tomar vn guariſmo mas. Supueſta eſta diſpoſicion, ſe començarà la operacion, partiendo la primera cifra de la cantidad, por la primera del partidor [ò las dos primeras juntas, ſi la primera ſola no ſe pudieſſe partir] examinando quantas vezes cabe eſta en aquella: y eſte numero ſe eſcrivirà en el quociente; y por èl ſe iràn multiplicando vna por vna todas las cifras del partidor, y el producto ſe irà reſtando de las cifras correſpondientes de la cantidad, eſcriviendo debaxo de ellas los reſiduos. Eſto meſmo ſe harà en las demas letras de la cantidad, como mas claramente ſe entenderà en el exemplo ſiguiente.

Exem-

9 8.3 5	4 2
1 4 3	2 3 4. 7/42
1 7 5	
(7	

Exemplo. Se ha de partir 9835. por 42. Pueſto el partidor 42. ſobre la raya, veo que las dos vltimas cifras 98. ſon de mas valor, que las dos del partidor, y aſsi las ſeparo de las demas con vn punto; y parto 98. por 42. en eſta forma: el 4. del partidor cabe en 9. dos vezes: eſcrivo 2. en el quociente, y multiplico, diziendo, 2. vezes 2. ſon 4. reſtoles de 8. y quedan 4. proſigo la multiplicacion diziendo: 2. vezes 4. ſon 8. reſtados de 9. ſobra 1. y es el reſiduo primero 14. Entiendaſe bien lo obrado haſta aora, porque lo que ſe ſigue es lo meſmo ſin diferencia.

Baxeſe aora el 3. y pongaſe al lado del reſiduo 14. y ſerà 143. lo que he de partir por 42. Y porque 1. no ſe puede partir por 4. parto 14. por 4. diziendo 4. en 14. cabe 3. vezes: eſcrivo 3. en el quociente: y multiplico el partidor por eſte 3. y digo, 2. vezes 3. ſon 6. y porque no ſe pueden reſtar del 3. añado vna dezena, y reſto de 13. (*ſegun la regla 2. del reſtar, prop. 2.*) y ſobran 7. eſcrivo 7. debaxo del 3. y llevo 1. ſegun la dicha regla del reſtar; y proſigo la multiplicacion diziendo: 3. vezes 4. ſon 12. y vna que llevo ſon 13. que reſtados de 14. ſobra 1. que eſcrivo debaxo del 4. y es 17. el reſiduo ſegundo.

Eſcrivo el 5. de la cantidad al lado del 17. y ſerà lo que ſe ha de partir 175. y digo, como antes: 4. en 17. cabe 4. vezes, eſcrivo 4. en el quociente, y multiplico el partidor, diziendo, 2. vezes 4. ſon 8. y porque no les puedo reſtar de 5. añado vna dezena, y les reſto de 15. y ſobran 7. que eſcrivo debaxo el 5. y llevo 1. proſigo la multiplicacion: 4. vezes 4. ſon 16. y 1. que llevo ſon 17. que reſtados de 17. no ſobra nada: es pues 7. el vltimo reſiduo: y digo, que partiendo 9835. entre 42. les cabe à cada vno 234. y 7. 42. avos.

Demonſtracion. Segun las reglas ſobredichas, partiendo [por exemplo] 48. entre 12. es el quociente 4. el qual en virtud de las meſmas operaciones expreſſa, que tantas vezes cabe el partidor 12. en 48. quantas la vnidad ſe incluye

ye

ye en el 4. eſto es partir ſegun la definicion pueſta al principio deſte cap. Luego eſtas reglas ſon evidentes: y como de la meſma ſuerte ſe parta 48. entre 12. que qualquiera otro numero mayor por otro qualquiera, como ſe viò en la practica antecedente, queda generalmente demonſtrada la indefectibilidad de las reglas.

ADVERTENCIAS.

1. Quando la cifra que ſe baxa de la cantidad, haze con el reſiduo à quien ſe junta, numero menor que el partidor, ſe pondrà vn zero en el quociente; y baxando le otra cifra que ſe ſigue, ſe harà la particion, como antes.

1 8.2 7	9
0 2 7	2 0 3
. 0	

Exemplo. Por ſer la vltima cifra 1. ſe diſtingue con el punto el 18. y digo 9. en 18. cabe 2. vezes, pueſto 2. en el quociente, multiplico diziendo: 2. vezes 9. ſon 18. que reſtados de 18. no queda nada. Baxo el 2. y veo, que por ſer menor que 9. no ſe puede partir: pongo pues vn zero en el quociente, y abaxo el 7. parto 27. por 9. y viene 3. y queda concluida la particion.

2. Algunas vezes ſe ha de tomar por quociente, menos de lo que parece que cabe: lo que es muy ordinario quando la ſegunda cifra del partidor es grande; como ſe vè en eſte exemplo, en que 2. en 9. cabe 4. vezes; y no puedo poner en el quociente mas que 3. que ſiguiendo la regla dà por reſiduo primero 7. y baxando el 2. proſigo diziendo: el 2. del partidor cabe en 7. tres vezes; pero no puedo poner en el quociente mas que 2. que multiplicando el 28. y reſtando el producto de 72. es el reſiduo 16.

9 1.2	2 8
7 2	3 2
(1 6	

3. Adviertaſe, que ſi en el progreſſo de la operacion, multiplicando el partidor por la cifra que vino al quociente, el producto fuere mayor que la cantidad que ſe parte, ſerà ſeñal que ſe diò mas de lo que ſe podia: y aſsi ſe repetirà la operacion dando menos. Como ſi partiendo 91. por 28. le dieſſemos à 4. ſeria ſobrado: porque 4. vezes

zes

zes 28. hazen mas que 91. Y assi se repetiria la operacion, dandole menos, hasta que el producto sea igual, ò menor que lo que se parte; con tal, que el excesso sea menor que el partidor.

4. La vnidad sola, ni multiplicando aumenta, ni partiẽdo disminuye: de que se infiere, que si se ha de partir algun numero por 10. por 100. por 1000. &c. basta quitar de la cantidad tantas cifras de la mano derecha, como tiene zeros la vnidad, haziendo quebrado de lo que se quita: como si se ha de partir 253. por 10. serà el quociente 25. $\frac{3}{10}$ y si se parte por 100. serà el quociente 2. $\frac{53}{100}$

5. Si vn numero menor se ha de partir por otro mayor, no ay mas que hazer, sino poner la cantidad encima de vna linea; y el partidor debaxo en forma de quebrado: como si se ha de partir 18. por 24. serà el quociente $\frac{18}{24}$

PROP. VI. Problema.

Examen del multiplicar, y partir.

LA prueva real del multiplicar es partir, y la del partir es multiplicar. Para examinar pues, si la multiplicacion està acertada, partase el producto por el multiplicador, y ha de salir la cantidad: ò partase el producto por la cantidad, y ha de salir el multiplicador: como multiplicando 124. por 12. es el producto 1488. Parto este por 12. y salen 124. ò parto el mesmo producto por 124. y salen 12.

Para examinar si la particion està bien hecha: multipliquese el quociente por el partidor; y el producto serà la mesma cantidad: como partiendo 1488. por 12. fue el quociente 124. multiplico 124. por 12. y saldrà el producto 1488. Esta prueba es indefectible: otras ay que omito por la brevedad.

***

LI.

LIBRO II.

DE LA NATVRALEZA, Y Logistica de los quebrados.

DEFINICIONES.

1. FRaccion, ò numero quebrado, es vna, ò muchas partes de aquellas, en que se considera dividida vna vnidad, como quando dividimos la vara en quatro partes iguales; si tomamos vna de essas partes, serà vn quarto de vara; si tomamos dos, seràn dos quartos: y si tres, tres quartos: y estos son fracciones, ò quebrados. El modo de escrivirles es, poner debaxo de vna raya el numero de las partes, en que se considera dividida la vnidad; y sobre la raya el numero que declara, quantas de aquellas partes se toman, como $\frac{1}{4}$ vn quarto: $\frac{2}{4}$ dos quartos, &c. El numero superior se llama *Numerador*: y el inferior, *Denominador*.

2. De aqui se infiere, q̃ la mesma razon tiene vn quebrado con su entero [que es la vnidad] que tiene el numerador al denominador: como $\frac{1}{3}$ tiene con la vnidad razon subtripla, ò como 1. con 3. y es la razon, porque el 3. es la vnidad dividida en tres partes: y no ay duda que vna de essas tres partes, que es la que denota el numerador, tiene razon subtripla con las 3. De que tambien se sigue, que la vnidad al quebrado tiene la mesma razon que el denominador al numerador.

3. *Fraccion de fraccion*, ò *quebrado de quebrado*, es vna, ò muchas partes de vn quebrado simple: como $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$

quie-

quiere dezir vna mitad de tres quartos: $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{3}{7}$ es dos tercios de quatro quintos, de tres ſeptimos: Llamanſe *quebrados compueſtos.*

La Logiſtica de los quebrados ſe reduce à *determinacion, ſuma, reſta, multiplicacion, y particion* de los quebrados. Explicaſe todo en las ſiguientes propoſiciones, repartidas en diferentes capitulos para mayor diſtincion.

CAPITVLO I.

DE LA DETERMINACION DE LOS quebrados.

COntiene eſte capitulo los theoremas que ſirven para determinar ſi dos, ò mas fracciones ſon iguales, ù deſiguales, y qual de ellas ſea mayor.

Axiomas.

1. *El denominador de vna fraccion, ſiempre vale vn entero,* porque no ſignifica otro que vn entero dividido en partes.

2. *Si el numerador es igual al denominador: el quebrado, vale vn entero; ſi es menor, vale menos; y ſi mayor, mas q̃ vn entero:* como en eſtas fracciones $\frac{4}{4}$ ò $\frac{1}{1}$ &c. ſon cada vna vn entero: eſtas otras $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ cada vna es menos que vn entero; pero en eſtas $\frac{6}{4}$ $\frac{2}{1}$ vale cada vna mas de vn entero: conſta de lo dicho.

3. *Las fracciones, ò quebrados no ſon otro, que vna expreſsion de la razon que ay entre vn todo, y alguna, ò algunas partes ſuyas:* tambien conſta de lo dicho.

PROPOSICION I. Theorema.

Si el numerador de vn quebrado tiene la meſma razon con ſu denominador; que el numerador de otro con ſu denominador, ſon los quebrados iguales.

no-

DIgo, que los quebrados A, y B, cuyos numeradores tienen la meſma razon con ſus denominadores, ſon iguales. La razon es, porque A $\frac{2}{4}$ B $\frac{3}{6}$ ſon vna meſma parte aliquota de la vnidad: luego tiene vna meſma razon, con la vnidad: luego [7.5.] ſon iguales.

PROP. II. Theorema.

Las fracciones, que tienen vn meſmo denominador, ſon entre ſi como los numeradores.

SEan las fracciones A, y B, que tienen vn meſmo denominador: Digo, que A $\frac{6}{10}$ B $\frac{3}{10}$ tienen entre ſi la razon meſma de ſus denominadores 6. con 3. La razon es, porque ſiendo los denominadores iguales, toda la deſigualdad de las fracciones proviene de la deſigualdad de los numeradores: luego las fracciones tendran la meſma razon de ſus numeradores.

PROP. III. Theorema.

Los quebrados que tienen vn meſmo numerador, ſe han entre ſi reciprocamente como los denominadores.

LOs quebrados A, y B tienen vn meſmo numerador 2. Digo, que tienen A $\frac{2}{3}$ B $\frac{2}{6}$ entre ſi la razon de ſus denominadores; pero reciproca, eſto es, que el quebrado A al quebrado B, es como 6. denominador de B, con 3. denominador de A.

Demonſtracion. La fraccion A con la vnidad, ſe ha como 2. con 3. (*def.* 2.) Tambien la vnidad con el quebrado B, ſe ha como 6. con 2. Luego por razon perturbada [5] ſerà la fraccion A, à la fraccion B, como 6. con 3.

A $\frac{2}{3}$ 1 B $\frac{2}{6}$ 6 2 3

PROP. IV. Theorema.

Aquel quebrado es mayor, cuyo numerador tiene mayor razon à ſu denominador.

L Sean

SEan los quebrados A, y B: y la razon del numerador 5. à ſu denominador 6. es mayor, que la de 1. à 2. Digo, que el quebrado A, es mayor que B.

$$A\ \frac{5}{6} \qquad B\ \frac{1}{2}$$

Demonſtracion. La meſma razon tiene el quebrado à la vnidad, que el numerador al denominador: luego el quebrado cuyo numerador tiene mayor razon à ſu denominador, tiene mayor razon à la vnidad: luego es mayor parte de la vnidad, y por conſiguiente es mayor.

PROP. V. Theorema.

Los quebrados tienen entre ſi la meſma razon, que los productos de la multiplicacion en cruz de los numeradores por los denominadores.

SEan los quebrados A, y B. Multiplicando el numerador 3. por el denominador 8. ſale el producto 24. multiplicando el numerador 2. por el denominador 6. ſale el producto 12. Digo, que la meſma razon tiene el quebrado A, al quebrado B, que 24. à 12. Eſto es, que aſsi como 24. es doblado de 12. aſsi el quebrado A es doblado de B.

$$\begin{array}{ccc} 24 & & 12 \\ A\ \frac{3}{6} & \times & \frac{2}{8}\ B \\ & 48 & \end{array}$$

Preparacion. Multipliquenſe entre ſi los denominadores 6. y 8. y ſerà el producto 48.

Demonſtracion. El 6. multiplicando al 2. y al 8. produce 12. y 48. luego (como demueſtra Eucl. en la prop. 17. lib. 7.) la meſma razon tendrà 12. con 48. que tiene 2. con 8. luego los quebrados 2. 8. avos, y 12. 48. avos ſon iguales. (1.) Aſsi meſmo el 8. multiplicando al 3. y al 6. produce 24. y 48. que tendràn la meſma razon, que 3. à 6. Luego los quebrados 3. ſextos, y 24. 48. avos ſon iguales. Pues porque los quebrados 24. 48. avos, y 12. 48 avos, tienen vn meſmo denominador, tienen entre ſi [2.] la razon de los numeradores 24. à 12. Luego ſus iguales 3. ſextos, y 2. octavos, tienen entre ſi la razon de 24. à 12.

PROP. VI. Problema.

Determinar la magnitud de los quebrados.

Mul-

MVltipliquenſe los denominadores, y numeradores en cruz: y ſi los productos fueren iguales, ſeràn los quebrados iguales; pero ſi los productos fueren deſiguales, los quebrados ſeràn deſiguales; y aquel quebrado ſerà mayor, cuyo numerador, multiplicando al denominador opueſto, produxere mayor numero. Conſta de lo dicho.

CAPITVLO II.

DE LA REDVCCION DE LOS quebrados.

LA reduccion de los quebrados conſiſte en vna mutacion de vnos en otros, conſervando el meſmo valor.

PROP. VII. Problema.

Hallar la mayor medida comun de dos numeros.

SVpongo lo primero, que *medir vn numero à otro*, ſe dize, quando es parte aliquota ſuya, y por conſiguiente le parte igualmente; como el 2. es medida del 6. porque tomado tres vezes haze juſtamente 6. y ſi ſe parte 6. por 2. viene la particion juſta: con que *medida comun de dos numeros*, es el numero, que es parte aliquota de entrambos, ò que les parte igualmente; como 2. es medida comun de 8. y 10. porque es parte aliquota de entrambos: y ſi el 8. y el 10. ſe parten por 2. ſale la particion juſta.

2. *Numero primo*, es aquel que ſolo es medido de la vnidad, como 2. 3. 5. 7. *Numero compueſto*, es aquel à quien mide otro numero ademas de la vnidad: como el 12. à quiẽ, demas de la vnidad, mide el 2. 3. 4. 6.

3. *Numeros entre ſi primos* ſon aquellos, que no tienen otra medida comun mas que la vnidad: como 8. y 11. *Numeros entre ſi compueſtos* ſon los que tienen alguna medida comun à mas de la vnidad: como 8. y 10. à quienes mide el 2. Hallaràſe pues la mayor medida comun de dos numeros propueſtos, del modo ſiguiente.

Operacion. Partaſe el numero mayor por el menor; y ſi ſobra

L 2 bra

bra algo, partaſe el numero menor por lo que ſobrò; y ſi de eſta ſegunda particion ſobra algo, partaſe el primer reſiduo por el ſegundo: y de eſta ſuerte ſe continuarà haſta que ſobre zero, ò vnidad. Si ſobra 1. es ſeñal que los tales numeros no tienen otra medida comun mas que la vnidad, y por conſiguiente ſon entre ſi primos. Si queda zero, el vltimo partidor ſerà la mayor medida comun. *Exemplo.* Sean los numeros 25. y 15. partiendo 25. por 15. ſobran 10. partiendo 15. por 10. ſobran 5. partiendo 10. por 5. ſobra zero. Digo pues, que 5. es la mayor medida comun de 25. y 15.

Demonſtracion. Porque partiendo 10. por 5. viene la particion juſta, es cierto, que el 5. mide al 10. luego tambien mide al 15. que es el agregado de 10. y de 5. luego tambien mide al 25. que es agregado de 10. y 15. luego 5. es medida comun de 25. y 15. Y es la mayor de todas, porque en las particiones, ſe diò lo mas que ſe pudo dar.

PROP. VIII. Problema.

Hallar la mayor medida comun de mas de dos numeros.

HAzeſe por la meſma regla en eſta forma. Sean los numeros 18. 34. 42. Halleſe por la prop. anteced. la mayor medida comun de 18. y 34. y ſe hallarà 8. Buſqueſe aſsi meſmo la mayor medida comũ de 8. y 42. y ſe hallarà 2. Digo, que 2. es la mayor medida comun de los tres numeros propueſtos. La demonſtracion es la meſma.

PROP. IX. Problema.

Reducir vn quebrado à los minimos terminos.

BVſqueſe (7.) la mayor medida comun del numerador, y denominador; y por ella partanſe los dos: Digo, que ſi el quociente del numerador ſe pone ſobre vna raya; y el quociente del denominador, debaxo: eſte nuevo quebrado ſerà el meſmo que ſe propuſo, y eſtarà reduzido à los minimos terminos. Como ſi el quebrado fuere 15. 25. avos. Hallada la mayor medida comun, ſerà 5. partiendo 15. por 5. es el quociente 3. numerador del nuevo quebrado: y partiendo 25. por 5. ſerà el quociente 5.

deno-

denominador del quebrado reduzido, que ſerà 3. quintos.

Demonſtracion. Partiendo el numerador, y denominador por vn meſmo numero, los quocientes quedan con la meſma proporcion: luego [1.] queda el meſmo quebrado: y por partirſe por el mayor partidor, que es poſsible, ſalen los quocientes los menores que ſon poſsibles: luego eſtà reduzido à los minimos terminos.

De eſta miſma ſuerte ſe reduze vna razon à los minimos terminos.

PROP. X. Problema.

Reduzir los quebrados à vn comun denominador.

SI los quebrados ſon dos, multipliqueſe el denominador del vno por el denominador del otro, y el produćto ſerà el denominador comun: Multipliqueſe deſpues en cruz el numerador del vno por el denominador del otro; y los produćtos ſeràn los numeradores nuevos.

Exemplo. Sean los quebrados A, y B, que ſe han de reduzir à otros dos, que ſean iguales à ellos, y tengan vn meſmo denominador. Multipliquenſe los denominadores 4. por 6. y el produćto 24. es el comun denominador: multipliquenſe los denominadores 4. por 6. y el produćto 24. es el comun denominador: multiplico deſpues en cruz, 3. por 6. y el produćto 18. es el numerador del primero: y multiplicando 5. por 4. el produćto 20. es el numerador del ſegundo: y digo, que 18. 24. avos, es lo meſmo que 3. quartos, como tambien 20. 24. avos, es lo meſmo que 5. ſextos, y tienen vn meſmo denominador. *La demonſtracion es la meſma que la de la prop. 5.*

$$\begin{array}{ccccc} & 18 & & 20 & \\ A & \frac{3}{4} & \times & \frac{5}{6} & B \\ & & 24 & & \end{array}$$

Si los quebrados que ſe han de reduzir fueren mas que dos, ſe multiplicarà el denominador primero por el ſegundo, y el produćto por el tercero, &c. y el vltimo produćto ſerà el comun denominador. Para hallar los numeradores nuevos, multipliqueſe el numerador de cada quebrado por los denominadores de los otros quebrados, no por el proprio; y el produćto ſerà el numerador nuevo, y proprio de cada vno.

Exem-

Exemplo. Se han de reduzir los tres quebrados preſentes: Multiplico los denominadores 3. por 4. y el producto por 5. y ſale el denominador comun 60. Multiplico aora el numerador 2. por los denominadores 4. y 5. diziendo, 2. vezes 4. ſon 8. y otra vez: 8. vezes 5. ſon 40. y eſte es el primer numerador. Aſsi meſmo, multiplico el numerador 3. por los denominadores 3. y 5. y digo: 3. vezes 3. ſon 9. y 5. vezes 9. ſon 45. numerador ſegundo. Multiplico el numerador 4. por los denominadores 3. y 4. diziendo: 3. vezes 4. ſon 12. y 4. vezes 12. ſon 48. y eſte es tercero numerador.

$$\begin{array}{ccc} 40 & 45 & 48 \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} \\ & 60 & \end{array}$$

Aunque eſta operacion parece algo diferente de la paſſada; pero en realidad es la meſma, y tiene la meſma demonſtracion.

De eſta meſma ſuerte ſe reduziran muchas razones à vn meſmo conſequente; porque ſe formarà de los dos terminos de cada vna vn quebrado, poniendo el antecedente de cada razon ſobre la raya como numerador, y el conſequente debaxo como denominador.

PROP. XI. Problema.

Reduzir vn quebrado à vn denominador determinado.

MVltipliqueſe el numerador del quebrado, por el nuevo denominador, que ſe pide: y el producto partaſe por el denominador primero; y el quociente ſerà el nuevo numerador.

Exemplo. Pideſe, que 2. tercios ſe reduzgan à otro quebrado igual, que tenga por denominador al 9. que es lo meſmo, que pedir, 2. tercios quantas novenas ſean del meſmo entero? Multiplico 9. por 2. y parto el producto 18. por 3. y el quociente 6. ſerà el numerador: y aſsi, 6. 9.avos, es lo miſmo que 2. tercios.

Demonſtracion. Eſta practica conſiſte en hallar por regla de tres vn quarto numero proporcional, diziendo: ſi 3. dan 2. luego 9. daran 6. lo que ſin dependencia de eſto, ſe demonſtrarà en ſu lugar: luego la meſma razon ay de 6. à 9. que de 2. à 3. luego [1.] dichos quebrados ſon iguales.

Adviertaſe, que quando en la particion ſobredicha ſobra- brare algo; eſto que ſobrare, ſerà quebrado de vna parte del quebrado, que ſaliò por la reduccion: como ſi 2. quintos ſe han de reduzir à octavos, ſalen 3. octavos, y vn quinto de octavo. *De eſta propoſicion ſale la reſolucion del problema ſiguiente.*

PROP. XII. Problema.

Hallar el valor de vn quebrado.

HAllar el valor de vn quebrado es ſaber lo que vale en alguna eſpecie determinada. Como para ſaber 3. quintos de libra, moneda de Valencia, quanto valen: porque la libra conſta de 20. ſueldos, es lo meſmo que pedir ſe reduzgan 3. quintos à partes vigeſimas, eſto es à vn quebrado que tenga denominador al 20. Obreſe pues [*por la anteced.*] multiplicando 20. por 3. y el producto 60. partaſe por 5. y ſe hallarà, que 3. quintos de libra ſon 12. 20.avos de libra, eſto es 12. ſueldos. De la meſma manera ſe obrarà en otra qualquiera eſpecie.

PROP. XIII. Problema.

Reduzir el quebrado compueſto à ſimple.

MVltipliqueſe numerador por numerador, y el producto ſerà el nuevo numerad. Multipliqueſe denominador por denominador, y el producto ſerà el nuevo denominador: y el quebrado formado nuevamente ſerà el quebrado ſimple que ſe buſca.

Exemplo. El quebrado compueſto A, ſe ha de reduzir à ſimple. Multiplico pues los numeradores, 2. vezes 3. ſon 6. y vna vez 6. es 6. eſte es el numerador nuevo: multiplico aſsi meſmo los denominadores, 3. vezes 4. ſon 12. y 2. vezes 12. ſon 24. nuevo denominador: Digo pues, que el quebrado compueſto A, queda reduzido à B.

$$\begin{array}{c|c} A & B \\ \frac{2}{3} \text{ de } \frac{3}{4} \text{ de } \frac{1}{2} & \frac{6}{24} \end{array}$$

Demonſtracion. Para mayor facilidad, ſupongaſe el quebrado compueſto C reduzido, por la regla dicha, al ſencillo D. Los 2. tercios ſon de 3. quartos: luego ſi los 3. quartos ſe

$$\begin{array}{c|c} C & D \\ \frac{2}{3} \text{ de } \frac{3}{4} & \frac{6}{12} \end{array}$$

se dividen en tres partes, y de essas se toman dos, se tendrà el intento: Multiplicando pues el denominador 4. por el denominador 3. se forma otro quebrado, que es 3. 12.avos, que es vna tercera parte de 3.quartos (3.) luego si 3.12.avos se toman dos vezes, que se haze multiplicando el numerador 3. por el numerador 2. el producto 6. 12.avos, son los dos tercios de los tres quartos.

XIV

PROP. [redacted]. Problema.

Reduzir los enteros à quebrados, y los quebrados à enteros.

LO primero. Los enteros se reduzen à quebrados, multiplicandoles por el denominador del quebrado: y el producto serà el numerador. Quiero reduzir 5. enteros à quartos, multiplico 5. por 4. y el producto 20. es el numerador: y quedan 5. enteros reduzidos à 20.quartos.

Lo segundo. Los quebrados se reduzen à enteros, partiendo el numerador por el denominador: y el quociente seràn los enteros. Como, quiero reduzir 20. quartos à enteros, parto 20.por 4. y sale el quociente 5.enteros. Si sobra algo se dexa por quebrado: como 48. quintos, se han de reduzir à enteros: parto 48. por 5. y hallo que son 9. enteros, y 3. quintos. La razon es clara, y no ay necessidad de demonstracion.

CAPITVLO III.

DE LA SVMA, RESTA, MVLTIPLICACION, y particion de los quebrados.

PROP. XV. Problema.

Sumar quebrados.

PRimero. Si los quebrados tienen vn mesmo denominador, sumense los numeradores: y la suma de estos serà numerador de vn quebrado, à quien dandole el mesmo denominador, serà la suma de los quebrados. Como la suma de 2.septimos, y 3.septimos, es

15.

5.septimos.

Segundo. Si los quebrados tienen diferente denominador, reduzganse [10.] à vn comun denominador, y sumense los numeradores. Como 2.tercios, y 3.quartos, reduzidos son 8.dozavos, y 9. dozavos, y serà la suma de los quebrados 17. dozavos. Si se ofreciere sumar quebrados compuestos, reduzganse primero à simples, y hagase la mesma regla. Es claro, y no necessita de demonstracion.

Desta mesma suerte se sumaràn diferentes razones, formando de ellas quebrados, como dixe à lo vltimo de la prop. 10.

PROP. XVI. Problema.

Restar quebrados.

QVatro cosas se pueden ofrecer. 1. *Restar vn quebrado de otro.* 2. *Restar vn quebrado de muchos.* 3. *Restar quebrado de enteros.* 4. *Restar enteros, y quebrados de enteros, y quebrados.*

1. Para restar vn quebrado de otro, reduzganse ambos à vn comun denominador (si le tienen diferente) y restese el ~~denominador~~ menor del mayor: +numerador+ como si se ha de restar el quebrado A del quebrado B, reduzidos à vn denominador 12. seràn los quebrados C, y D: restese el numerador 8. del numerador 9. y el residuo vn dozavo serà la resta.

A $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ B

C $\frac{8}{12}$ $\frac{9}{12}$ D

2. Si vn quebrado se ha de restar de muchos: reduzganse todos à vn comun denominador; y restese el vno de la suma de los otros. Como si vna metad se huviere de restar de la suma de vn tercio, y dos quintos: reduzidos todos à vn comun denominador, seràn 15. 30.avos, 10.30.avos, y 12.30.avos, sumense los dos vltimos, y serà la suma 22. 30. avos: restense 15.30.avos de 22. 30.avos: y serà la resta 7.30.avos.

3. Si se ofreciere restar enteros, y quebrados, de vn numero entero, basta restar el numerador del quebrado, de su denominador, y poner la resta por numerador del nuevo quebrado, y llevar vno para añadir al entero siguiente,

que

Deve	24.
Paga	3. $\frac{4}{9}$
Reſta	20. $\frac{5}{9}$

que ſe ha de reſtar. Como en eſte exemplo: Si de 9. ſe quita el numerador 4. quedan 5. que con el meſmo denominador es 5. novenas, y llevo 1. que junto con el 3. haze 4. reſtados de 24. quedan 20. y es la reſta 20. y 5. novenas.

4. Para reſtar enteros, y quebrados, de enteros, y quebrados, reduzganſe los quebrados à vn comun denominador; y ſi el quebrado de la deuda es mayor, que el que ſe ha de reſtar, reſteſe el vn quebrado del otro, como en el num. 1. *Exemplo.* El quebrado de la deuda reduzido, es 45. 54.avos, y el de la paga es 24. 54. avos: reſtenſe pues 24. de 45. y ſerà la reſta 21. 54.avos: reſtenſe los tres enteros, de los 24. y reſtan 21. y es toda la reſta 21. y 21. 54.avos.

Deve	24. $\frac{5}{6}$	$\frac{45}{54}$
Paga	3. $\frac{4}{9}$	$\frac{24}{54}$
Reſta	21.	$\frac{21}{54}$

Pero ſi hecha la reduccion de los quebrados, ſe hallare que el quebrado de la paga es mayor que el de la deuda, reſteſe el numerador mayor, del denominador, y el reſiduo ſe añadirà al numerador menor, y lo que reſultare ſerà el numerador del quebrado de la reſta: y ſe guardarà vn entero para juntarle con los enteros ſiguientes, que ſe han de reſtar.

Deuda	12. $\frac{2}{3}$	$\frac{8}{12}$
Paga	3. $\frac{3}{4}$	$\frac{9}{12}$
Reſta	8.	$\frac{11}{12}$

Exemplo. Reduzidos los quebrados de la deuda, y paga à vn comun denominador, ſe halla ſer el de la deuda 8. 12.avos, y el de la paga 9. 12.avos: y porque eſte es mayor que aquel, reſto 9. de 12. y ſobran 3. que añadidos al numerador 8. hazen 11. que ſon 11. 12. avos, y llevo vn entero, que junto con el 3. es 4. reſto 4. de 12. y ſobran 8. y queda hecha la reſta.

Si en los caſos ſobredichos huviere quebrados compueſtos, reduzganſe à ſenzillos, y ſe obrarà con las meſmas reglas. La demonſtracion es la meſma que del reſtar enteros. De

De la meſma manera que en el num. 1. ſe reſtò vn quebrado de otro, ſe reſta vna razon menor de otra mayor.

PROP. XVII. Problema.

Multiplicar quebrados.

Tres dificultades pueden ocurrir. 1. *Multiplicar quebrado por quebrado.* 2. *Multiplicar quebrado por entero.* 3. *Multiplicar entero, y quebrado, por entero, y quebrado.*

1. Para multiplicar vn quebrado por otro, multipliqueſe el vn numerador por el otro: y el vn denominador por el otro: y el nuevo quebrado ſerà el producto. Como ſi ſe han de multiplicar los quebrados A por B: multiplico los numeradores 2. por 3. y el producto 6. ſerà numerador del nuevo quebrado: Multiplico los denominadores 3. por 4. y el producto 12. es el nuevo denominador: y todo el producto es 6. dozavos.

$$A\ \frac{2}{3}\quad \frac{3}{4}\ B\quad \frac{6}{12}\ C$$

Demonſtracion. Multiplicar 4. enteros por 3. enteros, es buſcar quanto ſea el 4. tomado 3. vezes: pues aſsi meſmo multiplicar dos tercios por tres quartos, es buſcar quanto ſean los tres quartos de dos tercios, que es lo meſmo que reducir vn quebrado compueſto, à ſenzillo; y aſsi vſamos de la meſma regla.

2. Para multiplicar vn quebrado por numero entero, ſe multiplicarà el numerador por el entero, y al producto ſe le pondrà el meſmo denominador. Como ſi ſe han de multiplicar 3. quartos por 2. ſe multiplicarà el numerador 3. por 2. y ſerà el producto 6. quartos; que reduzidos à enteros [14.] ſerà el producto 1. y 2. quartos.

Para multiplicar vn quebrado por vn numero igual à ſu proprio denominador, baſta borrar el denominador, y dexar el numerador como entero: y aſsi para multiplicar 3. quartos por 4. baſta quitar el denominador 4. y el producto ſerà 3. enteros. La razon es clara, porque multiplicando 3. quartos por 4. ſalen 12. quartos, que reduzidos à enteros [14.] ſon 3. enteros.

4. Para multiplicar enteros, y quebrados, por enteros, y que-

quebrados, se reduziran los enteros à quebrados: cada entero à la especie de quebrados, que le acompaña [14.] y se obrarà como en el *num.* 1.

$$A\ 3\frac{2}{3} \qquad B\ 5\frac{3}{4}$$

$$C\frac{11}{3} \quad D\frac{23}{4} \quad \Big| \quad E\ \frac{253}{12}$$

Exemplo. Se ha de multiplicar A por B: reducido A à la especie de su quebrado es C: y reducido B à la especie de su quebrado, es D. Y multiplicando (*num.* 1.) numerador por numerador, y denominador por denominador serà el producto E. 253 agregado de la multiplicacion de los enteros

De esta manera se haze la composicion de diferentes razones por multiplicacion, como dixe en la Geomet. elem. en la def. 13. *del lib.* 5. por los denominadores, y los numeradores antepuestos sumados con los

PROP. XVIII. Problema.

numeradores del primero multiplicado

Partir quebrados. y todo multiplicado por el comun denominador que le halla por la prop. num a y lo abrevia como en el numero primero

QVatro casos pueden ocurrir. 1. *Partir quebrado por quebrado.* 2. *Partir entero por quebrado, y al contrario.* 3. *Partir entero, y quebrado por entero solo.* 4. *Partir entero, y quebrado por entero, y quebrado.*

1. Para partir quebrado por quebrado, pongase à la mano izquierda de quien escrive, el quebrado que se ha de partir: y al lado de este à la derecha, el quebrado partidor: y multipliquese en cruz, el numerador del primero à la izquierda por el denominador del segundo; y el producto escrivase al lado sobre vna raya, y este serà el numerador del quebrado quociente. Multipliquese despues el denominador del primero por el numerador del segundo: y el producto escrivase debaxo de la raya; y este serà el denominador del quociente: y estarà concluida la operacion.

$$A\ \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}\ B \times \frac{9}{8}\ C$$

Exemplo. El quebrado A se ha de partir por el quebrado B: escritos como se vè, multiplico el numerador de A, que es 3. por el denominador de B, que tambien es 3. y el producto

9. es numerador del quociente C. Multiplico assi mesmo el denominador de A, que es 4. por el numerador de B, que es 2. y el producto 8. es el denominador del quebrado C, que es el quociente que se busca.

Demonstracion. De lo dicho al principio del *cap.* 7. del *lib.* 1. consta que partir es buscar vn numero que explique quantas vezes se incluye el partidor en el dividendo: con que tantas vezes este incluye al partidor, quantas el quociente, à la vnidad: luego (*def.* 5.) son proporcionales el dividendo al partidor: como el quociente à la vnidad: y assi partiendo 8. por 4. es el quociente 2. y son proporcionales: 8.4.2.1. Luego si yo pruevo, que la mesma razon ay del quebrado A, al quebrado B: q̃ del quebrado C à la vnidad, quedarà demonstrada la regla: Pruevolo assi. El numerador 9. y el denominador 8. del quebrado quociente C, han sido producidos de la multiplicacion en cruz de los terminos del quebrado dividendo A, por los del divisor B: luego [5.] la mesma razon ay del dividendo A al divisor B, que 9. à 8. La razon del numerador 9. al denominador 8. es la mesma que tiene el quebrado C, à la vnidad (*def.* 2.) luego el quebrado A al quebrado B, es como el quebrado C à la vnidad.

2. Si se ha de partir entero y quebrado por entero solo, ò al contrario: reduzgase el entero al quebrado que le acompaña [14.] y hagase la division como antes: como si se han de partir 10. y dos tercios por 8. reduzidos los enteros son 32. tercios, y el entero partidor puesto en forma de quebrado serà 8. enteros, y hecha la multiplicacion en cruz, como antes, serà el quociente 32.24. avos. Assimesmo, para partir 8.+ por 2. y 5. sextos reducidos los en~~teros~~ ~~del~~ ~~partidor~~, a quebrados son ~~48~~ ~~enteros~~ y 17. sextos, y hecha la particion es el quociente $\boxed{48.\ 17.\ \text{avos.}}$ 288: 102. avos

$$\frac{32}{3} \times \frac{8}{1} \times \frac{32}{24}$$

48 sestos

3. Para partir enteros y quebrados, por enteros y quebrados, se reduciràn los enteros à los quebrados que les acompañan, y quedaràn como dos quebrados: y se harà la particion, como en el num. 1.

Exem-

+ reduciendo 8 a 6os son 48 y 2 a 6 son 12 y 5 son 17 i partiendo 48 por 17 salen de quociente los ~~6~~ 6 / 288 / 102 6

Exemplo. 3. y 2. quintos ſe hâ de partir por 2. y 3. quartos: reducidos los enteros à los quebrados, quedan diſpueſtos como ſe vè en el exemplo; y hecha la particion es el quociente 68. 55. avos.

$$\frac{17}{5} \times \frac{11}{4} \times \frac{68}{55}$$

4. De lo dicho ſe colige el modo de partir entero ſolo por quebrado, ò al contrario.

PROP. XIX. Problema.

Examen de la logiſtica de los quebrados.

EL examen del ſumar es el reſtar: ſi de la ſuma de dos quebrados ſe reſta el vno, la reſta ha de ſer igual al otro quebrado.

El examen del reſtar es el ſumar: ſi hecha la reſta, ſumamos el reſiduo con el quebrado menor, la ſuma ha de ſer igual al quebrado mayor.

El examen del multiplicar es el partir: Si ſe parte el quebrado que ſaliò de la multiplicacion, por vno de los quebrados que ſe multiplicaron, el quociente ha de ſer igual al otro quebrado.

El examen del partir es el multiplicar; ſi el quebrado q̃ ſaliò por quociente, ſe multiplica por el quebrado que ſirviò de partidor, el producto ſerà igual al otro quebrado. Es claro, y no ay neceſsidad de exemplos.

Eſcolio.

Antes de paſſar adelante, conviene ſatisfacer vna duda, que ſuele ofrecerſe à los principiantes, y es: Por què razon, quando multiplicamos por enteros, ſiempre el producto es mayor, que lo que ſe multiplica? como ſi multiplicamos 8. por 2. es el producto 16. y quando multiplicamos por quebrado, ſale el producto menor que lo que ſe multiplica: como ſi multiplicamos 8. por vn quarto, es el producto 8. quartos, que es lo meſmo que 2. enteros?

Reſpondo facilmente: que como el multiplicar conſiſta en tomar tantas vezes la cantidad que ſe multiplica, quantas tiene vnidades el multiplicador; por eſſo quando el multiplicador es entero (que conſta de vnidades) ſe toma muchas vezes la cantidad que ſe multiplica, como el 8. ſe toma 2. vezes, quando le multiplicamos por 2. y aſsi el producto 16. es neceſſariamente mayor que el 8. pero quando el multiplicador es menos que vnidad, como lo es qualquiera quebrado, ſe toma lo que ſe multiplica menos que vna vez: y aſsi es forçoſo ſea el producto menor que lo que ſe multiplica: como quando multiplicamos 8. por 1. quarto, tomamos la quarta parte de 8. y aſsi el producto es 2. como quando el multiplicador es 1. ſe toma vna vez la cantidad. De que ſe infiere, que multiplicar por quebrado, ò por la vnidad, no es propriamente multiplicar: y lo meſmo ſe ha de dezir del partir reſpectivamente.

LIBRO III.

DE LA LOGISTICA DE LOS numeros denominados.

NVmeros denominados ſon los que numeran coſas de diferentes eſpecies: como libras, ſueldos, dineros, reales, arrobas, &c. Su logiſtica ſe comprehende en las propoſiciones ſiguientes.

PROPOSICION I. Problema.

Sumar numeros denominados.

R*Egla general.* 1. Eſcrivanſe las eſpecies que ſe han de ſumar, cada vna debaxo de ſu ſemejante: con tal orden, que la eſpecie de mayor valor eſtè à la izquierda; y la de menor valor, à la derecha.

2. Comienceſe à ſumar la eſpecie de menor valor: y en llegando à hazer el numero que conſtituye, ò iguala à la eſpecie immediata àzia la izquierda, ſe harà (ſi importàre pa-

para la memoria) vn ſeñal al lado, tantas vezes, quantas llegàre à la eſpecie ſiguiente; y lo que ſobràre ſe eſcrivirà debaxo. Deſpues ſe llevaràn tantas vnidades, como ſeñales huviere, para juntarlas con la coluna de la eſpecie ſiguiente la qual ſe ſumarà del meſmo modo. La ſuma de la vltima coluna, ſiempre ſe harà como en los enteros.

Exemplo 1. Se han de ſumar las partidas A, B, C, de moneda de Valencia.

A	124 lib.	15. ſuel.	9.
B	113 lib.	12. ſuel.	10.-
C	15 lib.	4. ſuel.	8.-
D	253 lib.	13. ſuel.	3.

Sumo primero los dineros, diziendo: 9. y 10. ſon 19. dineros: eſto es, vn ſueldo y 7. dineros: pongo pues vn ſeñal, y los 7. que ſobran con los 8. ſiguientes, ſon 15. eſto es, vn ſueldo y 3. dineros: pongo otro ſeñal, y eſcrivo el 3. debaxo la raya. Y paſſo à ſumar los ſueldos, llevando dos por otros tantos ſeñales: y digo 2. y 5. ſon 7. y 2. ſon 9. y 4. ſon 13. Eſcrivo tres, y llevo vna dezena, y ſumandola con las otras dezenas de los meſmos ſueldos hallo tres dezenas, que ſon 30. ſueldos: y porque los 20. ſueldos hazen vna libra, eſcrivo vna dezena, y llevo vna libra, para ſumarla cõ ellas: y aſsi digo, vno que llevo, 4. 3. y 5. hazen 13. Eſcrivo 3. y llevo vno, que con 2. 1. 1. haze 5. y 1. 1. hazen 2. y es toda la ſuma la que ſe vè en D.

Exemplo 2. Se han de ſumar las partidas ſiguientes de peſo de Valencia, ſegun lo referido en el *cap.* 2. del *lib.* 1.

28. carg. 2. quint. 1. arr. 18. lib. 8. onç. 3. quart. 2. adar. 20. g.
27. carg. 2. quint. 3. arr. 26. lib. 9. onç. 2. quart. 3. adar. 19. g.

56. carg. 2. quint. 1. arr. 15. lib. 6. onç. 2. quart. 2. adar. 3. g.

Sumo primero los granos, y hallo ſer 39. que ſon vn adarme y 3. granos: eſcrivo 3. y llevo vn adarme: que ſumado con los otros, ſon 6. adarmes: eſto es, vn quarto y 2. adarmes: eſcrivo 2. y llevo vn quarto, que con los otros, haze 6. quartos, que ſon 1. onça y 2. quartos: eſcrivo 2.

y llevo vna onza, que junta con las demas, ſon todas 18. onzas, eſto es, vna libra, y 6. onças: eſcrivo 6. y llevo vna libra: que ſumada con las otras, ſon 45. libras: eſto es, vna arroba de 30. lib. y 15. lib. eſcrivo pues 15. y llevo vna arroba, que con las demas ſuma 5. arrobas, que ſon vn quintal, y 1. arroba: eſcrivo 1. y llevo vn quintal, que con los otros ſuma 5. quintales, eſto es, vna carga, y 2. quintales: eſcrivo 2. y llevo vna carga; que con las demas haze 56. y eſta concluida la ſuma.

Exemplo 3. Para hazer la ſiguiente ſuma, y otras ſemejantes, ſe ha de ſuponer lo que dixe en la *Geom. element. lib.* 1. *def.* 12. que el circulo conſta de 360. grados, vn grado de 60.' minutos, vn minuto de 60.'' ſegundos, &c. Comienço la ſuma por los ſegundos: 5. y 9. ſon 14. eſcrivo 4. y llevo vna dezena: 1. que llevo, 4. y 3. ſon 8. y porque 6. dezenas de ſegundos hazen vn minuto, eſcrivo 2. y llevo 1. eſte 1. que llevo, y 2. y 8. ſon 11. eſcrivo 1. y llevo vno: que con el 5. y 4. ſon 14. y porque 6. dezenas de minutos hazen vn grado, eſcrivo 4. y llevo vn grado, que con los 40. y 60. hazen 91. y queda hecha la ſuma.

Grados,	Minut.	Segũdos,
40.	52.'	45.''
60.	48.'	39.''
91.	41.'	24.''

PROP. II. Problema.

Reſtar numeros denominados.

R*Egla general.* Eſcrita la partida menor debaxo de la mayor con la meſma correſpondencia, y orden, que ſe dixo en la prop. paſſada, ſe començarà la reſta por la eſpecie menor, reſtando el numero inferior del ſuperior: y ſi no ſe pudiere, por ſer el numero inferior mayor que el ſuperior, ſe tomarà la diferencia del numero inferior à la eſpecie mayor ſiguiente: eſta diferencia ſumada con el numero ſuperior, ſe eſcrivirà debaxo de la raya, llevando 1. para juntarlo con el numero inferior de la eſpecie inmediata ſiguiente.

Exemplo primero. Porque 9. es mayor que 8. y doze dine-

Deuda	36.lib.	4.ſuel.	8.
Paga	2.lib.	13.ſuel.	9.
Reſta	33.lib.	10.ſuel.	11.

ros hazen vn ſueldo: Digo, de 9. haſta 12. van 3. y 8. de arriba ſon 11. eſcrivo 11. y llevo vn ſueldo, que junto con los 13. ſueldos, haze 14. y porq́ 4. es menos que 14. y veinte ſueldos hazen vna libra, digo, de 14. à 20. van 6. y 4. de arriba ſon 10. eſcrivo 10. y llevo vna libra, que junta con las 2. haze 3. eſtas 3. reſtadas de 36. reſtan 33. y queda hecha la reſta.

Exemplo ſegundo, en peſos de Valencia. Porque 9. es mayor que 7. y doze onças hazen vna libra, digo, de 9. à 12. van 3. y 7. ſon 10. que eſcrivo en ſu lugar, y llevo vna lib. que con las 20. haze 21. y porque es mas que el 16. y la arroba grueſſa tiene 36. lib. digo: de 21. à 36. van 15. y 16. de arriba ſon 31. que eſcrivo en ſu lugar: y llevo vna arroba, que con la 1. hazen 2. que quitadas de 2. no queda coſa alguna, y queda concluida la reſta.

Arrob.	lib.	onças
2.	16.	7.
1.	20.	9.
0.	31.	10.

Exemplo tercero, en grados minutos, y ſegundos. Porque 4. es menos que 6. digo: de 6. à 10. van 4. y 4. de arriba ſon 8. eſcrivo 8. y llevo vno, que con 3. ſon 4. y porque 2. de arriba es menos que 4. y el minuto conſta de ſeis dezenas de ſegundos, digo: de 4. à 6. van 2. y dos de arriba ſon 4. eſcrivo 4. y llevo vn minuto, que con 5. haze 6. y porque 2. es menos que 6. digo, de 6. à 10. van 4. y 2. ſon 6. y llevo vna dezena, q́ junta con 1. haze 2. y porque el 1. de arriba es menos que 2. y ſeis dezenas de minutos hazen vn grado, digo, de 2. à 6. van 4. y 1. ſon 5. eſcrivo 5. y llevo vn grado, que reſtado de 5. quedan 4. eſcrivo 4. y reſtando 3. del 4. de arriba, reſta 1. y queda acabada la operacion.

Grados,	Minut.	Segund.
45.	12.'	24.''
30.	15.'	36.''
14.	56.'	48.''

PROP.

PROP. III. Problema.

Reduccion de diferentes eſpecies.

REGLA PRIMERA. Para reduzir las coſas de eſpecie ſuperior, ù de mayor valor, à otras de eſpecie inferior, ù de menor valor, ſe obſervarà lo ſiguiente. Primero, veaſe quantas coſas de la eſpecie inferior componen vna de la ſuperior. Segundo, multipliqueſe el numero dado de la eſpecie ſuperior, por el numero que expreſſa, quantas de la eſpecie inferior hazen vna de la ſuperior; y el producto ſerà la reduccion que ſe pretende.

Exemplo 1. Se han de reduzir 48. lib. moneda de Valencia, à ſueldos: porque 20. ſueldos hazen vna lib. multiplico 48. por 20. y el producto 960. ſueldos, es la reduccion que ſe deſea.

Exemplo 2. Pideſe, que los ſobredichos 960. ſueldos ſe reduzgan à dineros. Pues porque 12. dineros componen vn ſueldo: multiplicò 960. por 12. y el producto 11520. dineros, es lo que ſe pide.

Si muchas eſpecies ſe huvieren de reduzir à la infima, ſe obrarà como en eſte *Exemplo* 3. Pideſe que 36. lib. 12. ſueld. 8. din. ſe reduzgan à dineros. Multipliquenſe las 36. lib. por 20. y es el producto 720. ſueldos; añadanſe à eſtos los 12. ſueldos, y ſon todos 532. ſueldos. Multipliquenſe aora eſtos 732. ſueldos por 12. y es el producto 8784. dineros, que con los 8. dineros ſon 8792. dineros: y queda hecha la reduccion.

REGLA SEGVNDA. Para reduzir las coſas de inferior eſpecie, ò menor valor, à las de mayor valor, ſe partirà el numero de las dichas coſas de menor valor, por el numero que declara, quantas de ellas componen vna de las de mayor valor, y el quociente ſerà la reduccion que ſe buſca.

Exemplo 1. Pideſe que 11520. dineros, ſe reduzgan à ſueldos: porque 12. dineros hazen vn ſueldo, parto 11520. por 12. y el quociente 960. ſueldos, es la reduccion que ſe pide.

Exemplo 2. Si ſe quiere que los 960. ſueldos ſe reduzgan à libras: porque cada libra conſta de 20. ſueld. parto 960.

M 2 por

por 20. y el quociente ſeràn 48.lib.

Exemplo 3. 8792. din. ſe han de reduzir à lib. Reduzgoles primero à ſueldos, partiendoles por 12. y el quociente es 732.ſueld. y 8. din. Reduzgo los 732. ſueld. à lib. partiendoles por 20. y el quociente es 35.lib. 12.ſuel. con que los 8792. din. ſon 35.lib. 12.ſueld. 8.din. Lo meſmo ſe obſervarà en la reduccion de peſos, medidas, &c.

PROP. IV. Problema.

Multiplicar numeros denominados.

Este Problema ſe puede reſolver de muchas maneras: y las principales dificultades que pueden ocurrir, ſe reduzen à dos; es à ſaber, multiplicar vna eſpecie por muchas, y multiplicar muchas eſpecies por muchas.

Dificultad I.

Multiplicar vna eſpecie por muchas.

MODO I.

Multipliqueſe la cantidad por la eſpecie mas alta del multiplicador. Veaſe el numero de la eſpecie menor, que parte, ò partes ſea de la eſpecie mayor; y ſe tomarà de la cantidad ſemejante parte, ò partes, y ſumandolas con el producto antecedente, ſe ſabrà el valor que ſe buſca.

24.Varas
4.lib. 10. ſ.
———
96.lib.
12.lib.
———
108.lib.

Exemplo 1. Quiero ſaber quanto valen 24. varas de paño, à 4. lib. y 10. ſueld. la vara. Multiplico las 24. var. por las 4.lib. y ſalen 96.lib. Y porque 10. ſueld. ſon la mitad de vna libra, tomo la mitad de 24. que ſon 12. y ſuponiendo ſer libras, eſcrivo 12. lib. que ſumadas con las 96. es el valor q̃ ſe buſca 108.lib.

Demonſtracion. Que las 24. varas, multiplicadas por 4. lib. den 96.lib. conſta de la regla general del multiplicar. Que por los 10.ſuel. ſe ayan de tomar 12.lib. mitad de 24. es claro: porque como 10. ſueld. ſean la mitad de la libra, las 24.varas, por razon de los 10.ſueld. valdran 24. mitades

des de libra, eſto es, 12.enteros, ò libras.

MODO II.

Multipliquenſe las 24.varas por 4.lib. y ſeràn 96.lib. Multipliquenſe las meſmas 24. varas por los 10. ſueld. y ſeràn 240.ſueld. que reduzidos à libras (3.) ſon 12.lib. y todo 108.lib.

24.Varas
4.lib. 10.ſueld.
———
96.lib. 240.ſuel.
12.lib.
———
108.lib.

MODO III.

Reduzganſe las 4.lib. y 10. ſuel. à ſueldos, y ſeràn 90.ſuel. Multipliquenſe las 24.varas por 90.ſuel. y ſerà el valor 2160.ſueld. que reduzidos à libras [3.] ſon 108.lib. Todos los exemplos ſiguientes ſe pueden hazer por los modos ſobredichos, que no repetirè, por no ſer moleſto.

40.Cahizes
6.lib. 15.ſueld.
———
240.lib.
20.lib.
10.lib.
———
270.lib.

Exemplo 2. Pideſe quanto valdràn 40. cahizes de trigo, à 6.lib. 15.ſuel. el cahiz. Multiplico los 40. cahizes por las 6.lib. y ſuben 240.lib. Y porque los 15. ſueld. no ſon parte aliquota de la libra, ſi partes, divido mentalmente el 15. en las porciones mayores, que ſe pueda, que ſean partes aliquotas de la libra: y ſean 10. y 5. Pues porque 10. ſueldos es mitad de la libra, tomo la mitad de 40.cahizes, que aora ſupongo ſer libras, y eſcrivo 20.lib. Y porque 5. ſueldos ſon mitad de la mitad de vna libra, tomo la mitad de 20.libras, que ſon 10.lib. y eſcrivolas en ſu lugar: y la ſuma de todo es 270. lib. precio de los 40.cahizes.

Exemplo 3. Multiplico las 36. varas por 3. lib. y es el producto 108.lib. Divido aora los 16. ſueldos en partes aliquotas de la libra, y ſea en 10. 5. 1. Pues porque 10. es mitad de la libra, tomo la mitad de 36. que es 18.lib. Y porque 5. es mitad de la mitad de la libra, tomo 9.lib. mitad de 18.lib. y porque 1.ſueldo es la vigeſima parte de la libra, tomo la vigeſima parte de 36. que ſe haze partiendolo por 20. y hallo 1.lib. y 16.ſuel. Tambien porque 9.dine-

36. Varas,	
3. lib. 16. suel. 9. din.	
108. lib.	
18. lib.	
9. lib.	
1. lib. 16. suel.	
18. suel.	
9. suel.	
138. lib. 3. suel.	

neros no es parte, si partes del sueldo, le divido en 6. y 3. Y porque 6. dineros son mitad del sueldo, tomo la mitad de las 36. varas [que aora supone por sueldos] y son 18. sueldos: y porque 3. dineros son la mitad de la mitad del sueldo, tomo la mitad de 18. que son 9. sueldos: y la suma de todo 138. lib. 3. sueld. es el valor que se pide.

Dificultad II.

Multiplicar muchas especies por muchas especies.

MODO I.

Quando en la cantidad, y multiplicador ay muchas especies, se multiplicarà primero la mayor especie de la cantidad, por todas las especies del multiplicador, como en los exemplos passados. Hecho esto, se tomaran de todo el multiplicador, aquella, ò aquellas partes proporcionales, segun fueren las de las especies de la cantidad, respeto de su especie proxime menor: y la suma de todo serà el producto que se busca. Mejor se entenderà en los exemplos.

8. Varas, 2. palmos,		
4. lib. 10. sueld. 6. din.		
32. lib.		
4. lib.		
	4. suel.	
2. lib.	5. suel.	3. din.
38. lib.	9. sueld.	3. din.

Exemplo 1. Las 8. varas multiplicadas por 4. libras suben 32. lib. por razon de los 10. sueldos suben 4. lib. y por razon de los seis dineros subè 4. sueldos. Con esto se ha sacado el valor de las 8. varas. Solo falta sacar el valor de los 2. palmos: pues porque 2. palmos son la mitad de la vara, si vna vara vale 4. lib. 10. suel. 6. din. luego la mitad de la vara valdrà la mitad de 4. lib. que son 2. lib. la mitad de 10. sueldos, que son 5. sueld. y la mitad de 6. din. que son 3. dineros. Y la suma de todo 38.

38. lib. 9. sueld. 3. din. es el producto.

MODO II.

Reduzgase toda la cantidad à la menor especie, que en nuestro exemplo son palmos: y como el palmo es el quarto de la vara se avrà reduzido la cantidad à quartos de vara: assi mesmo se reduzirà el precio à la especie menor, que en el exemplo son dineros; y porque 240. dineros hazen vna libra, quedarà el precio reduzido à 240. avos de libra: y se avràn formado dos quebrados, vno de la cantidad, y otro del precio; y multiplicando vn quebrado por otro [17. 2. *Arith.*] el producto serà lo que se desea. Explico esta practica en el exemplo propuesto.

8. Varas, 2. palmos,
4. lib. 10. sueld. 6. din.

A	B	C
$\frac{34}{4}$ —	$\frac{1086}{240}$	$\frac{36924}{960}$

Las 8. varas son 32. palmos, y los 2. hazen 34. quartos de vara, que son el quebrado A. El precio reduzido à dineros (3.) son 1086. dineros, ò 240. avos de libra, que son el quebrado B. Multipliquese el quebrado A por el quebrado B; y el producto serà el quebrado C. Reduzgase el quebrado C à enteros, ò libras, y se hallaràn 38. lib. y sobran 444. 960. avos, que son partes de vna libra; reduzido este quebrado à vigesimas de libra, ò sueldos [*por la* 11. *ù* 12. *del lib.* 2.] multiplicando el numerador por 20. y partiendo el producto por el denominador 960. se hallaràn 9. sueldos, y 240. 960. avos de sueldo: reduzido este quebrado à dozavos de sueldo, ò dineros, se hallarà ser 3. dineros. Con que el producto es como antes, 38. lib. 9. suel. 3. din.

Exemplo 2. Multiplico 24. varas por 3. lib. y salen 72. lib. que escrivo en A: luego divido los 15. sueldos en 10. y 5. por los 10. tomo la mitad de 24. que es B, 12. lib. y por los 5. suel. tomo la metad de 12. lib. que son 6. lib. y las escrivo en C: y porque aun ay en el precio 8. dineros, que son dos tercios de vn sueldo, tomo los dos tercios de 24. que son 16. sueldos, y los escrivo en D en la serie de los sueldos. Y con esto queda acabada la multiplicacion de las 24.

	24. Varas, 3. Palmos, $\frac{3}{4}$
	3. lib. 15. ſuel. 8. din.
A	72. lib.
B	12. lib.
C	6. lib.
D	lib. 16. ſuel.
E	1. lib. 17. ſuel. 10. din.
F	lib. 18. ſuel. 11. din.
G	lib. 9. ſuel. 5. din. $\frac{1}{2}$
H	lib. 4. ſuel. 8. di. $\frac{3}{4}$
L	94. lib. 6. ſuel. 11. din. $\frac{1}{4}$

24. varas por las 3. lib. 15. ſueld. 8. din.

Pero porque à mas de las 24. varas ay tres palmos, proſigo aſsi. Porque de los tres palmos, los dos ſon la mitad de la vara, tomo la mitad del precio, eſto es, 1. lib. 17. ſuel. y 10. din. que eſcrivo en E: y por conſiguiente el otro palmo que queda haſta los 3. valdrà la mitad de 1. lib. 17. ſuel. 10. din. que es 18. ſuel. y 11. dineros, que eſcrivo en F: luego porque aun ay tres quartos de palmo, y los dos ſon la mitad de vn palmo, tomo la mitad de F, y ſerà 9. ſuel. 5. din. y medio, y los eſcrivo en G; y ſiendo eſte el valor de dos quartos, ſerà el valor del otro quarto que queda haſta los tres, la mitad de G, eſto es, 4. ſueld. 8. din. y tres quartos de dinero: eſcrivoles en H. Y la ſuma L de todas las partidas es el producto que ſe deſea.

De otro modo.

24. Varas, 3. Palmos, $\frac{3}{4}$
3. lib. 15. ſuel. 8. din.

A $\frac{399}{16}$ B $\frac{908}{240}$ C $\frac{362292}{3840}$

Reduzganſe las varas à palmos, è incorporenſe los 2. palmos, y ſeràn 99. palmos: reduzganſe eſtos à quartos, multiplicandoles por 4. y ſeràn 396. quartos, añadidos los 3. ſeràn 399. quartos: y porque el quarto del palmo es la dezimaſexta de la vara, ſeràn 399. 16. avos, y quedarà la cantidad reduzida al quebrado A. Reduzganſe aora las libras à ſueldos, y ſeràn 60. ſueldos, è incorporando los 15. ſeràn 75. ſuel. Reduzidos eſtos à dineros, y añadidos los 8. ſeràn 908. dineros: y porque el dinero es vna 240. parte de la libra, ſeràn 908. ducientos quarenta avos de libra: con que el precio es el quebrado B. Hecho eſto, multipliqueſe el quebrado A por el quebrado B, y el producto ſerà el quebrado C. Hagaſe la reduccion, partiendo el numerador por el denominador, y ſerà el quociente 94. lib. y 1332. 3840. avos de libra: Reduzido eſte quebrado, es 6. ſuel. y 3600. 3840. avos de ſueldo: y reduzido eſte vltimo quebrado, es 11. din. y vn quarto.

PROP. V. Problema.

Partir numeros denominados.

R*egla general.* Reduzgaſe la cantidad à la vltima eſpecie; y formeſe ſu quebrado, como en la prop. paſſada en el modo 2. Aſsimeſmo reduzgaſe el diviſor à ſu vltima eſpecie, formando ſu quebrado: partaſe el quebrado de la cantidad por el quebrado del diviſor [18. 2.] y el quociente que ſaliere, ſerà el que ſe pretende.

Exemplo primero. 8. varas, y 2. palmos de paño, coſtaron 38. lib. 9. ſuel. y 3. din. pideſe quanto vale cada vara. Reduzido el precio, del modo ſobredicho, forma el quebrado A; y la cantidad reduzida forma el quebrado B: y partiendo el quebrado A por el B, es el quociente el quebrado C.

A $\frac{9231}{240}$ B $\frac{34}{4}$ C $\frac{36924}{8160}$ avos de libra.

Reduzgaſe el quebrado C à enteros, ò libras (14. 2.) y ſerà 4. lib. y 4284. 8160. avos de libra, que reduzidos à ſueldos, ò 20. avos de libra [11. 2.] ſon 10. ſueldos, y 4080. 8160. avos de ſueldo: que reduzidos à dineros, ſon 6. dineros: fue pues el valor de la vara 4. lib. 10. ſuel. 6. din.

Exemplo ſegundo. 38. lib. 9. ſueld. y 3. din. ſe emplearon en ciertas varas de paño, por precio de 4. lib. 10. ſuel. 6. din. la vara: pideſe quantas varas de paño ſe compraron. El precio de todo el paño reduzido à la vltima eſpecie, como antes, forma el quebrado A: el precio de vna vara aſsimeſmo reduzido, forma el quebrado B: partaſe A por B: y lo que ſaliere ſerà el quociente que ſe buſca.

A

A $\frac{9231}{240}$ B $\frac{1086}{240}$ Y por tener entrambos vn mesmo denominador, basta partir el numerador de A, por el numerador de B: y serà el qnociente, 8. varas, y media, ò 2. palmos.

PROP. VI. Problema.

Examen de la logistica de los numeros denominados.

LAs pruevas de estas quatro operaciones son las mesmas, que las de la logistica de los enteros, y quebrados; porque el restar se prueva por el sumar; y el sumar por el restar. Tambien el multiplicar se examina por el partir; y el partir por el multiplicar.

LIBRO IV.

DE LA ANALOGIA DE LOS numeros.

TRATA este Libro, de los numeros proporcionales, y de sus propriedades. Dividese en quatro capitulos, en que se comprehenden las quatro Reglas, que vsan de las proporciones; es à saber: *Regla de tres*: *de Compañias*: *de Aligaciones*: y *de Falsas posiciones*.

(***) (***)
(***)
(*)

CAPI-

CAPITVLO I.

DE LA REGLA DE TRES ù de proporcion.

TEnganse en la memoria las definiciones del lib. 5. de la Geometria elementar; porque todo lo que alli se explicò de la quantidad en comun, se ha de aplicar aqui al numero, ò quantidad discreta en particular. Dexando pues de repetir aquí tanta multitud de difiniciones, solo pongo las siguientes para mayor claridad.

DEFINICIONES.

1, *NVmeros proporcionales se llaman los que son terminos de dos razones semejantes.* Como quando dezimos: como 8. con 4. asi 6. con 3. Los quatro numeros 8. 4. 6. 3. son proporcionales.

2. *Denominador de vna razon, es el numero que expressa quantas vezes el antecedente incluye, ò es incluido en el consequente de la razon.* Y asi, el denominador de la razon que ay de 20. à 5. es el 4. porque declara, que el 20. incluye quatro vezes al 5. Por esto Euclides en la def. 5. del lib. 6. llamò al denominador *quantidad de la razon*, porque enseña quan grande, ò pequeña sea la razon.

3. *Regla de tres, ù de proporcion, es la que enseña el modo de hallar vn quarto numero proporcional*; esto es, dados tres numeros, enseña hallar el quarto, que tenga la mesma razon con el tercero, que tiene el segundo con el primero.

4. *La proporcion se divide en Directa; y Reciproca, ò inversa. Directa* es quando los terminos se comparan directamente, esto es, como el primero al segundo, asi el tercero al quarto. *Reciproca, ò inversa*, se halla quando los terminos se comparan indirectamente: como el segundo al tercero, asi el quarto al primero: ò como el tercero al segundo, asi el primero al quarto. Llamase *inversa*, por invertirse el orden

de

de la comparacion: y *reciproca*, porque empezando la comparacion de la vna parte de la proporcion, passa à la segunda, y de esta buelve à la primera, ò al contrario.

5. Qualquiera de las dichas proporciones puede ser simple, ò compuesta. *Simple* es la que solamente se compone de quatro terminos principales, y por consiguiente de dos razones. *Compuesta* es la que se compone de mas que quatro terminos principales, y por consiguiente de mas que de dos razones, como se verà despues.

PROP. I. Theorema.

El producto que sale de la multiplicacion de vn numero por otro, es como vn rectangulo, cuyos dos lados son los numeros que se multiplican.

Queda explicada esta proporcion en la def. 1. del lib. 2. de la Geometria elementar. Multiplicando 6. por 3. sale el producto 18. y si ay vn rectangulo cuyos lados sean, el vno 3. dedos, y el otro 6. constarà de 18. dedos quadrados. Y si se parte por 6. serà el quociente 3. La razon se hallarà en el lugar citado.

PROP. II. Theorema.

Si quatro numeros son proporcionales, el producto de la multiplicacion de los extremos, es igual al producto de los medios: y si el producto de los extremos es igual al producto de los medios, seràn los quatro numeros proporcionales.

Demuestra este Theorema Euclides en la prop. 19. del lib. 7. Sean los quatro numeros proporcionales 3.6.2.4. digo, que el producto de 3. por 4. que son los extremos, es igual al producto de 6. por 2. que son los medios, Esto se vè claramente, porque entrambos productos son 12.

Demonstracion. De la multiplicacion de los extremos 3. y 4. resulta (1) vn rectangulo, que se haze de dichos extremos, supuestos lineas; como tambien de la multiplicaciō de los medios 6. y 2. resulta otro rectangulo hecho de dichos extremos: y siendo [16.6.] en quatro proporcionales, el rectangulo de los extremos igual al de los medios: serà el producto de los extremos 3. y 4. igual al de los medios 6. y 2. De lo dicho se colige la proposicion conversa.

PROP. III. Theorema.

Si tres numeros son proporcionales, el producto de los extremos es igual al producto que sale de la multiplicacion del medio por si mismo: y al contrario.

Explicacion. Sean los tres proporcionales 2. 4. 8. Digo, que el producto de los extremos 2. y 8. que es 16. es igual al producto de 4. por 4. que tambien es 16. Demuestrase como la passada: porque el producto de los extremos es vn rectangulo, y el del medio por si mesmo es vn quadrado; y como [17.6.] el rectangulo de los extremos sea igual al quadrado del medio proporcional, se sigue ser dichos productos iguales: y al contrario.

PROP. VI. Problema.

Regla de proporcion simple, y directa.

1. Dados tres numeros, se busca el quarto proporcional, esto es, que la mesma razon que ay del primero al segundo, aya del tercero al quarto.

Operacion. Multipliquese el segundo por el tercero, y el producto partase por el primero: y el quociente serà el quarto proporcional, que se busca.

Exemplo. Si 100. reales ganan 8. 200. quanto ganaran? Multipliquense 200. por 8. y el producto 1600. partase por 100. y serà el quociente 16. y tantos ganaran los 200.

Demonstracion. [2.] El producto de 200. por 8. que son los medios, es igual al producto de los extremos 100. y 16. Luego si el producto de 200. por 8. se parte por 100. que es el vn lado, ò numero producente, se tendrà el otro lado, ò numero 16. que se ignorava.

2. Dados dos numeros, se busca vn tercero proporcional: de suerte, que la mesma razon aya del primero al segundo; que de este, al tercero. Multipliquese el segundo por si mesmo, y el producto partase por el primero; y el quociente serà el tercer numero que se busca. Como si 4. ganan 8. 8. què ganaran? Multipliquese 8. por 8. y el producto-

ducto 64. partaſe por 4. y el quociente 16. es lo que ganan reſpectivamente los 8. Conſta por la meſma demonſtracion.

PROP. V. Problema.

Diſponer los terminos de la regla de tres ſimple: y conocer ſi es directa, ò inverſa.

SI al Arithmetico ſe le proponen los terminos deſordenados, les deve ordenar, y diſponer antes de la operacion: para eſto ſirven las reglas ſiguientes.

1. Siempre que el primer termino es de la meſma eſpecie del que falta, ſiendo las demas de otra eſpecie, eſtà alterado el orden. Como ſi 8. varas valen 32. reales: por 20. reales què varas daràn? Donde por ſer el primero, y vltimo varas, y los demas de otra eſpecie, eſtà alterado el orden. El modo de diſponerles es poner en primer lugar el ſegundo, y el primero en el ſegundo lugar, y aſsi diremos: Si por 32. reales dan 8. varas: por 20. reales, quantas varas darã? Y obrando ſegun la regla, ſaldran 5.

2. A vezes ſe propone la queſtion de tal ſuerte, que neceſsita de reduccion: como ſi en 8. meſes gano 60. reales: en 3. años quantos reales ganarè? Aqui es meneſter, que los tres años ſe reduzgan à meſes, para que el tercer termino ſea de la meſma eſpecie del primero; y ſe propondrà aſsi: Si en 8. meſes gano 60. reales: en 36. meſes quanto ganarè? Y ſiguiendo la regla ſe hallaràn 270. reales.

3. Algunas vezes ſe dan en la queſtion dos terminos ſimples, y vno compueſto; y entonces es meneſter hazer compoſicion de los otros dos, ſumandoles, y diſponer la pregunta, como en el exẽplo ſiguiente. Por vna libra ſe paga vn ſueldo de interes, he pagado con principal, è interes 1050. ſueldos: preguntaſe, quanto he pagado de interes? Pues porque los 1050. ſueldos ſe componen tanto del principal, como de ſu interes, tambien he de componer la libra con ſu interes, que es vn ſueldo. Junto pues 20. ſueldos, que es vna libra, con vn ſueldo, que es ſu interes, y ſeràn 21. ſueldo: Y digo, ſi en 21. ſueldo ay vno de interes: en 1050. quantos avrà de interes? y hecha la reſoluciõ por

por la regla de tres, hallarè ſer 50. ſueldos: y aſsi en otros caſos ſemejantes.

4. Para conocer ſi la queſtion propueſta es de proporcion directa, ò inverſa, ſe obſervarà eſta regla. Ordenados los terminos, veaſe ſi por crecer el tercer numero reſpeto del primero, ſe ſigue por conſequencia, que el quarto tãbien ha de crecer reſpeto del ſegundo: ò ſi menguando el tercero, ſe ſigue que el quarto tambien ha de menguar; porque en eſte caſo, la regla de tres es de proporcion directa. Pero ſi creciendo el tercero, ſe ſigue que el quarto ha de menguar; ò menguando el tercero ſe ſigue que el quarto ha de crecer, la regla de tres ſerà de proporcion inverſa.

Exemplo. Si 100. ganan 10. 200. què ganaran? Ya ſe vè, que por ſer 200. mas que 100. la ganancia tambien ha de ſer mas que 10. Con que eſta proporcion es directa. Si 3. Oficiales acaban cierta obra en 12. dias: 6. Oficiales en quantos dias la acabaran? Claro eſtà, que creciendo el numero de los Oficiales, ha de menguar el numero de los dias, porque acabaràn la obra mas preſto: eſta pues, y ſus ſemejantes, es inverſa.

PROP. VI. Problema.

Regla de proporcion ſimple inverſa.

DAdos tres numeros A, B, C, ſe buſca D, que tenga la meſma razon con el primero A, que el ſegundo B, tiene con el tercero C.

A	B	C	D
4.	6.	3.	8.

Operacion. Multipliqueſe el primero por el ſegundo, y el producto partaſe por el tercero: y el quociente ſerà el quarto que ſe buſca. Como multiplicando A por B ſerà el producto 24. eſte partido por C, dà el quociente 8. que tiene la meſma razon con el 4. que 6. con 3. O pongaſe el tercer numero en primer lugar, y guardeſe el meſmo modo de obrar, que en la regla de tres directa.

Demonſtracion. Por ſer la proporcion reciproca, ſon proporcionales B à C, como D à A: luego el producto de los extremos B,A, es igual al producto de los medios C,D, (2.) Luego ſi el producto de los extremos B, A, ſe parte por C,ſe tendrà el quarto proporcional D.

Exemplo. Si tres Oficiales acaban vna obra en 18.dias: 9. Oficiales en quantos dias la acabaràn ? Es cierto , que en menos dias: Luego es [5.] proporcion inverſa. Multiplico pues el primer termino 3. por el ſegundo 18. y el producto 54. partido por 9. dà el quociente 6. Y digo, que los 9. Oficiales haràn la obra en 6. dias.

PROP. VII. Problema.

Examen de las reglas de tres ſencillas.

1. SI la regla de tres es directa : Multipliqueſe el primer termino por el quarto, y aſsi meſmo el ſegundo por el tercero: y ſi ſe huviere obrado bien, ſeràn los productos iguales.(2.)

2.Si la regla de tres fuere inverſa, ò reciproca: Multipliqueſe el primer termino por el ſegundo: y aſsi meſmo, el tercero por el quarto; y ſi ſe huviere obrado bien, ſeràn los productos iguales. (2.)

PROP. VIII. Problema.

Reglas de proporcion compueſta directa.

SUpongo lo primero,que en qualquiera queſtion de proporcion, ſe hallan dos partes , y en cada vna de eſtas partes ay diferentes terminos: los terminos que eſtan en la primera parte ſon todos conocidos; pero en la ſegunda parte ay alguno, que ſe ignora.

Supongo lo ſegundo , que de tantas proporciones ſe cōpone la queſtion , como ay terminos conocidos en la ſegunda parte: como, ſi 6. ganan 3. ⁎ 8. què ganaràn? Solo ay vn termino conocido en la ſegunda parte, y aſsi ſolo ay vna proporcion; pero en eſta: Si 6.en 10.dias ganan 2. ⁎ 8.en 20.dias què ganaràn? ay dos proporciones , porque ay dos terminos conocidos en la ſegunda parte.

Supongo lo tercero , que para que ſalga la operacion acertada, ſe han de diſponer los terminos de ella de ſuerte, que el primero de la primera parte , ſea de la miſma eſpecie, que el primero de la ſegunda: y aſsi meſmo ſean de vna meſ-

meſma eſpecie el ſegundo de la primera , y ſegundo de la ſegunda,&c. Eſto ſupueſto, explicarè dos reglas que ay para reſolver las queſtiones de proporcion compueſta.

Regla I.

Eſta regla conſiſte en formar, y reſolver de por ſi tantas reglas de tres ſencillas,quantas ſon las proporciones de que ſe compone la queſtion: ſu execucion ſe vè en el exemplo ſiguiente: porque muchas vezes,vſar de terminos abſtractos en la explicacion de las reglas , mas confunde que declara los preceptos. Sea pues la queſtion que ſe ſigue:

25. Oficiales, en 6.dias, ganan 100. ⁎ 30. Oficiales, en 8.dias què ganaran?

Porque en la ſegunda parte ay dos terminos conocidos , ſe forman dos reglas de tres. La primera : Si 25. Oficiales ganan 100 : 30. Oficiales què ganaran ? Reſuelvaſe por la Prop.4. y ſe hallarà ganan 120. la qual ſe ha de entender, trabajando 6.dias, como los primeros. Buſcaſe aora quanto ganaran eſſos meſmos 30.Oficiales trabajando 8.dias; y para eſto ſe forma la ſegunda regla de tres : Si en 6. dias ganan 120. que ganaràn en 8. dias : y reſolviendola como la paſſada, ſe hallarà ganan 160. La razon es clara, porque por la primera regla de tres ſe ſaca lo que ganan 30.Oficiales en 6.dias: y ſabido eſto , ſe ſaca por la ſegunda lo que ganaran los meſmos en 8. dias.

Regla II.

1.Se ordenaràn los terminos de la queſtion , como ſe vè en la ſiguiente:

25.hombres, 6.dias, 100. ⁎ 30.hombres, 8.dias,

Quiere dezir: ſi 25.hombres, en 6.dias ganan 100. lib. ⁎ 30.hombres, en 8.dias què ganaran ? Donde ſe vè , ay en la queſtion ſeis terminos, tres en cada parte : y el que ſe ignora tiene en ſu lugar por ſeñal vn punto.

2. Eſcrivanſe los meſmos terminos, como en AB en vna linea, ſiempre con eſte orden : el vltimo en primer lugar, que en eſte exemplo es zero, por ſer el vltimo el que ſe igora; deſpues ſiguen, el primero 25.

A B

0. 25. 6. | 100. 30. 8.

N el

el ſegundo 6.&c. como ſe vè : partanſe con vna raya , ò diſtincion en dos partes, de ſuerte, que tantos aya en la vna parte, como en la otra.

3. Eſcrivanſe en forma de quebrado ; los de la parte A, ſobre vna rayà: y los de B debaxo de ella , como en C ; ò al reves, como en D: de qualquiera de eſtos dos modos eſtaràn bien colocados.

$$C\ \frac{0.\quad 25.\quad 6.}{100.\quad 30.\quad 8.}$$

$$D\ \frac{100.\quad 30.\quad 8.}{0.\quad 25.\quad 6.}$$

4. Vayanſe multiplicando continuamente los numeros que eſtàn ſobre la raya: y guardeſe el producto. Multipliquenſe aſsimeſmo continuamente los que eſtan debaxo de la raya, y guardeſe tambien ſu producto.

5. De eſtos productos, el que ſaliò de aquella ſerie, en que ſe halla el zero, ò ſeñal del numero que ſe buſca, ſerà partidor, por quien ſe partirà el otro producto: y el quociente ſerà el numero que ſe buſca.

Multiplico pues en C; 25. por 6. y es el producto 150. al qual guardo aparte , porque ha de ſer el partidor , por aver ſalido de la ſerie , en quien eſtà el zero. Multiplico aora 100. por 30. y es el producto 3000. Multiplico 3000. por 8. y es el producto 24000. Parto eſte producto por 150. y el quociente 160. es el numero que ſe buſca. De ſuerte, que ſi 25. hombres en 6. dias ganan 100. 30. hombres en 8. dias ganaran 160.

Demonſtracion. Eſta regla no ſe diſtingue ſubſtancialmente de la primera; porque ſi dixeſſemos : Si 25. hombres ganan 100. què ganaràn 30. hombres ? multiplicando 100. por 30. ſale el producto 3000. que partido por 25. es el quociente en forma de quebrado $\frac{3000}{25}$ que es lo que ganan los 30. hombres en 6. dias. Paſſando aora, ſegun la Regla I. à hazer la otra regla de tres , diremos : Si en 6. dias ganan $\frac{3000}{25}$ quanto ganaràn en 8. dias? Multiplicando eſte

que-

quebrado por 8. es el producto 24000.25. avos; y eſte partido por 6. es 24000.150. avos [18.2.] que es lo que ganan los 30. hombres en 8. dias; que ſi ſe reduze à enteros , partiendo 24000. por 150. ſalen 160. como arriba : luego es evidente dicha regla.

De la meſma ſuerte ſe obrarà , faltando qualquiera de los otros numeros de la ſegunda parte de la queſtion; como ſe vè en eſte exemplo, ſuponiendo que ſe ignoran los dias: Si 25. hombres , en 6. dias, ganan 100. 30. hombres en quantos dias ganaran 160.

25. homb. 6. dias, 100. ∗ 30. hom. . dias, 160.

Diſpueſtos los terminos en forma de quebrado , eſtàn como en A,

$$A\ \frac{160.\quad 25.\quad 6.}{100.\quad 30.\quad 0.}$$

Multiplico 160. por 25. y el producto 4000. por 6. es el producto 24000. que guardo. Multiplico 100. por 30. y ſale el producto 3000. que ſervirà de partidor, por ſalir de la ſerie en que eſtà el zero: y hecha la particion de 24000. por 3000. es el quociente 8. que es el numero de los dias que ſe piden.

Si acaſo en la queſtion ſe ignoraſſen dos terminos , avrà muchas reſpueſtas: y aſsi ſe ſupondrà conocido qualquiera de los terminos que faltan, poniendo en ſu lugar qualquiera numero, y ſe obrarà como antes. *Exemplo* : Si 25. hombres, en 6. dias, ganan 100. quantos hombres , y en quantos dias ganaràn 160. Supongo que los hombres ſean 40. y hecha la operacion, como antes, ſe hallaràn 6. dias , en que ganaràn los 160. Tambien ſe puede ſuponer qualquiera numero de dias, y ſe hallarà el numero de los hombres.

PROP. IX. Problema.

Conocer ſi ay indireccion en las queſtiones de proporcion compueſta.

En eſtas queſtiones puede ſuceder , que alguna, ò algunas de las proporciones , de que ſe componen , ſean inverſas: lo qual ſe conocerà examinando, por la regla dada en la *prop.* 5. todas las proporciones cada vna de por ſi , ſin

va-

variar el orden de la propueſta;como en el exemplo ſobredicho.

Si 25.hombres en 6. dias ganan 100. ⁎ 30. hombres en 8. dias què ganaràn? Conſidero la primera proporcion, que es: Si 25.hombres ganan 100. 8.hombres què ganaràn? y veo ſer proporcion directa, porque ſiendo menos los hombres, ganaràn menos. Examino deſpues la ſegunda, que es: Si 6.dias ganan 100. què ganaràn 8. dias? y hallo ſer tambien directa: porque creciendo los dias ha de crecer la ganancia. Concluyo pues, que en dicha queſtion no ay inverſion alguna.

Dixe *Sin variar el orden de la propueſta*, porque vna meſma proporcion compueſta ſolo con mudar de termino incognito, puede paſſar de directa à inverſa, ò al contrario; como en el exemplo dicho, ſi ſe buſcaſſen los dias en eſta forma: 25. hombres, para ganar 100.libras, han meneſter 6.dias: 30. hombres, para ganar 160. lib. quantos dias avràn meneſter? Donde ſe vè, que ſi 25. hombres, para ganar 100.lib. han meneſter 6.dias: 30. hombres, ganaràn 100.libras, en menos dias, por ſer mas en numero; y por conſiguiente, en menos dias reſpectivamente ganaràn las 160.lib. Luego eſta proporcion es inverſa: y ſerìa meneſter para ſu reſolucion aplicar las cautelas que ſe diràn en la prop.ſiguiente, teniendo los terminos la diſpoſicion ſobredicha; pero en la que tienen en la propueſta antecedente, no es meneſter immutar coſa alguna para buſcar el numero de los dias, como ſe viò en la prop. paſſada; porque guardando aquel orden, llevan ya conſigo todo lo que las cautelas que diremos, podian prevenir.

PROP. X. Problema.

Regla de proporcion compueſta inverſa.

QVando en la queſtion propueſta ſe encuentra alguna proporcion inverſa, ſe guardaràn las cautelas ſiguientes.

1.Noteſe con diligencia, què terminos ſon la cauſa de la inverſion; eſto es, què terminos ſon cauſa, de que el que ſe buſca aya de ſer menor, ò mayor, de lo que ſerìa ſi la proporcion no fuere inverſa. 2. Formeſe el quebrado de los terminos, como en la directa. 3. Los terminos que fueren cauſa de la inverſion, permuten ſus lugares mutuamente, baxando el que eſtà ſobre la raya, y ſubiendo el que eſtà debaxo de ella. 4. Hecho eſto, ſe guardaràn los preceptos meſmos, que ſe dieron en la prop.8.regla 2. para las compoſiciones directas; y ſe hallarà el numero que ſe buſca.

Exemplo. Si 100.Soldados abren 80. varas de foſo en 6. dias: 75.Soldados, 120.varas de foſo, en quantos dias las abriràn?

100.Sol. 80.var. 6. dias: ⁎ 75.Sol. 120.var. .dias.

Primeramente averiguo ſi ay inverſion de eſta manera: la primera proporcion es: Si 100. Soldados abren vn foſo en 6. dias: 75. Soldados, en què dias abriràn el meſmo foſo: donde veo claramente, que por ſer menos los trabajadores, han de gaſtar mas dias; concluyo pues, que eſta proporcion es inverſa, y que la cauſa de la inverſion ſon los trabajadores. Examino deſpues la otra proporcion,que es: Si 80.varas han meneſter 6.dias de trabajo,120.varas han meneſter mas dias, ſiendo lo demas igual: Luego aqui no ay inverſion: conſiſte pues la vnica inverſion en los numeros de los trabajadores, que ſon 100.y 75.

A $\dfrac{0.\quad 100.\quad 80.}{6.\quad 75.\quad 120.}$

B $\dfrac{0.\quad 75.\quad 80.}{6.\quad 100.\quad 120.}$

2.Eſcrivo el quebrado directo A, eſto es, con la meſma diſpoſicion, que en las queſtiones de proporciones directas. Y porque la cauſa de la inverſion ſon 100. y 75. hago que permuten ſus lugares, eſcriviendo el quebrado B inverſo: y de eſte vſarè para reſolver la queſtiō.

Multiplico pues 75.por 80. y el producto 6000.guardo para partidor. Multiplico 6. por 100. y el producto 600. por 120. y es el producto 72000. à quien parto por 6000. y el quociente 12.es el numero de dias,què ſe buſca.

De otro modo.

Formo primero eſta regla de tres: Si 100.Soldados abrē vn vn foſo en 6. dias : 75. Soldados en que dias le abriràn? Y porque es proporcion inverſa , vſarè de la regla de la prop.6. Multiplico pues 100. por 6. y al produĉto 600. parto por 75. y es el quociente 8. y eſtos ſon los dias que gaſtarìan 75.Soldados en hazer el foſo de 80.varas. Hago pues aora otra regla de tres, diziendo : Si 80. varas han meneſter 8. dias de trabaxo [ſe entiende trabaxando 75. Soldados] 120.varas que dias avràn meneſter; y porque es proporcion directa, multiplico 120. por 8. y el produĉto 960. partido por 80. dà el quociente 12. dias, como ſe hallò por el modo antecedente.

PROP. XI. Problema.

Reſuelvenſe algunas queſtiones por las reglas de tres.

AVnque de lo dicho ſe colige el modo de reſolver todas las queſtiones de reglas de tres, ù de proporciõ; pero porque en la preparacion de los terminos , pueden ocurrir varias dificultades, reſolverè aqui algunas queſtiones, que aunque pocas, por la brevedad de eſte Compendio; pero baſtantes , para que à imitacion ſuya pueda reſolver el Arithmetico qualeſquiera otras.

Queſtion 1. Pideſe, 240. lib. de Caſtilla , quantas libras ſon de Valencia? Porque la libra en Caſtilla conſta de 16. onças, multiplico las 240. lib. por 16. y ſeràn 3840. onç.

es ye Voy aora à la Tabla del cap.3.lib.1. y hallo, que 32.onças

210 de Caſtilla hazen 31.de Valencia; y formo la ſiguiente regla de tres: Si 32. dan 31. luego 3840. onças de Caſtilla,

3720 ſon 3407.onç.y med.de Valencia. Reduzgo eſtas à libras, partiendo las por 12.que ſon las onças de vna libra en Valencia , y el quociente es 283. y ſobran 11. y med. Digo

310 pues, que ſon 283.lib.11.onç.y med. de Valencia. Y aſsi ſe haràn las demas reducciones.

Queſtion 2. Vn Mercader comprò cierta mercaderìa por 300. reales , pideſe por quanto la avrà de vender para ganar à 8. por 100? Sumenſe los 8. con los 100. y formeſe eſta regla de tres: Si 100. ſuben à 108. luego 300.ſubiràn à 324. y por tanto precio la ha de vender.

Queſ-

Queſtion 3. Vn Mercader vendiò cierta mercaderìa por 324. reales, y hallò que ganava à 8.por 100. pideſe quanto le coſtò la dicha mercaderia? Sumenſe 8. y 100. y ſeràn 108. y hagaſe la regla de tres: Si 108. vienen de 100. de quantos vendràn 324. y ſe hallarà vienen de 300. reales; y tanto le coſtò dicha mercaderia.

Queſtion 4. Vendiendo 4. varas de paño por 8. ducados, ſe pierde à razon de 10. por 100. * Si ſe vendieſſen 6.varas por 16. ducados, quanto ſe ganarà,ò perderà por 100? Reſtenſe los 10. que ſe pierden por 100. del meſmo 100. y quedaràn 90.y eſte 90.ſerà el termino tercero en la proporcion, dexando los 100. como ſi no eſtuvieran , y ſerà la diſpoſicion ſiguiente:

4.var. 8.duc. 90. * 6.var. 16.ducad. ...

El quebrado directo es A ; pero como por ſer mas las varas, que ſe dan por el meſmo precio, la ganancia ha de ſer menos , ay inverſion , cuya cauſa es el numero de las varas , y ſe formarà el quebrado inverſo B: y ſiguiẽdo la regla, ſerà el produĉto de los denominadores 5760. y el de los numeradores 48. Parto aquel numero por eſte, y es el quociente 120. y porque es mas que 100. reſto 100. de 120. y quedaràn 20. de ganancia por 100. y ſi eſte quociente hallado fuere menor que 100. le reſtarìa de 100. y el reſiduo ſerìa la perdida por 100.

	0.	4.	8.
A	90.	6.	16.
	0.	6.	8.
B	90.	4.	16.

Queſtion 5. Vendiendo 4.varas de paño por 8. ducados, ſe pierde à razon de 10.por 100. * Seis varas por quantos ducados ſe avràn de vender para ganar à 20. por 100? Reſto, como antes los 10. de perdida , del caudal 100. y quedan 90. Sumo la ganancia 20. con el caudal , y ſerà 120.y diſpongo los terminos, como ſe ſigue:

4.var. 8.duc. 90. * 6.var. ...duc. 120.

El quebrado es B , por la meſma razon de la queſtion paſſada : el produĉto de los numeradores es 5760.

	120.	6.	8.
B	90.	4.	0.

5760. el de los denominadores es 360. partido aquel por eſte es el quociente 16. y eſte es el numero que ſe deſea.

Queſtion 6. Deve vno 100. libras, que ha de pagar al fin de vn año; pero ſi las paga de contado, ſe les ofrece por parte de ſu acreedor, le remitirà à razon de 10. por 100. Pideſe quanto darà de contado? Añadanſe los 10. à los 100. y ſeràn 110. Digaſe aora: Si 110. baxan à 100. à quantos baxaràn 100. libras? Siguiendo la regla ſe hallaràn 90. lib. 18. ſuel. y 2. din. y tanto ha de pagar de contado.

Queſtion 7. Pedro preſto à Iuan 2400. reales por 8. meſes à razon de 5. por 100. Preguntaſe quanto ſube el interes? Digaſe, ſi 100. en 12. meſes, que es vn año, ganan 5. los 2400. en 8. meſes què ganaràn? Sigaſe la regla, y ſe hallaràn 80. reales.

Queſtion 8. Pedro preſtò à Iuan 20. lib. con tal que al cabo de dos meſes le ha de bolver 22. Preguntaſe à quanto gana por 100? Hagaſe eſta regla de tres. Si 20. lib. en 2. meſes ganan 2. las 100. lib. en 12. meſes quanto ganaràn? y ſe hallarà ganan 60. lib. luego gana à 60. por 100. ganancia exorbitante, y contra conciencia.

Queſtion 9. Pedro preſta à Iuan 450. reales por 12. años, à razon de 5. por 100. Pideſe quanto le ha de bolver paſſados los 12. años? Hagaſe primeramente eſta regla de tres; Si 100. en 1. año ganan 5. los meſmos 100. en 12. años, què ganaràn? y ſe hallarà ganan 60. Digaſe aora ſegunda vez, ſumando los 60. con el caudal: Si 100. ſuben à 160. 450. à quantos ſubiràn? y reſuelta eſta vltima queſtion ſe hallarà, ſalen 720. y tantos reales le ha de bolver.

440
sum.
270
720

Queſtion 10. Pedro preſtò à Iuan 1000. lib. por 3. años, à razon de 10. por 100. con pauto, que el interes gane al reſpeto del principal: pideſe quanto ha de bolver Iuan paſſados los 3. años. Diſponganſe las reglas de tres con el orden ſiguiente. *Año primero.* Si 100. ganan 10. luego 1000. ganaràn 100. Sumenſe eſtos 100. con el caudal, y ſerà 1100. *Año ſegundo.* Si 100. ganan 10. luego 1100. ganarà 110. Sumenſe 110. con 1100. y ſeràn 1210. *Año tercero.* Si 100. ganan 10. luego 1210. ganaran 121. que ſumados con

con los 1210. ſon 1331. y eſte es todo el credito al cabo de los tres años: y la ganancia ſon 331.

CAPITVLO II.

DE LA REGLA DE COMPAÑIAS.

LA regla de compañias conſiſte en dividir vn numero en partes proporcionales à otros numeros dados: con que reſuelto, y demonſtrado eſte problema, quedarà demonſtrada la regla de compañias. Es en dos maneras *ſimple*, y *compueſta*: en aquella ſe reparte vna cantidad en partes proporcionales à otras dadas, ſin atender à tiempo, ni otras circunſtancias. En la compueſta, ſe atiende al tiempo, ù otras condiciones.

PROP. XII. Problema.

Dividir vn numero en qualeſquiera partes proporcionales à otros numeros dados.

PIdeſe, que el numero 100. ſe divida en tres partes, que guarden entre ſi la razon de 10. 9. 6.

Operacion. Sumenſe los numeros dados, 10. 9. 6. y la ſuma ſerà 25. Diſponganſe aora tantas reglas de tres, quantos ſon los numeros dados: y en todas ſerà el primer termino, la ſuma 25. el ſegundo, el numero 100. que ſe ha de dividir: y en tercero lugar ſe pondràn los tres numeros dados, en la forma ſiguiente.

Deſpues ſe dirà: Si 25. dan 100. luego 10. dan 40. Otra vez: Si 25. dan 100. luego 9. dan 36. Otra vez: Si 25. dan 100. luego 6. dan 24. y ſon los numeros 40. 36. 24. los que ſe piden.

		A	B
		10.	40.
25.	100.	9.	36.
		6.	24.
		25.	100.

Demonſtracion. Conſta de la operacion, que 25. à 100. es como 10. à 40. y alternando do 25.à 10. es como 100.à 40. è invertiendo, es 10.à 25. como 40. à 100. Tambien es 25. à 9. como 100. à 36. luego (*por igualdad ordenada*) ſerà 10. à 9. como 40. à 36. ſegun aqui ſe vè:

10.	25.	9.	40.	100.	36.

De la meſma ſuerte demonſtrarè, que 9. à 6. es como 36. à 24. Luego los tres numeros 40. 36. 24. tienen entre ſi la meſma razon que 10.25.9.

Solo falta demonſtrar, que los numeros de la ſerie B, juntos hazen 100. Demueſtraſe aſsi. Por ſer proporcionales los numeros A con los numeros B, ſerà (12.5.) la ſuma de A, à la ſuma de B, como qualquiera antecedente 10. à ſu conſequente 40. 10.à 40.es [*por conſtruc.*] como 25. à 100. Luego la ſuma de A, à la ſuma de B, es como 25. à 100. y alternando, la ſuma de A es à 25. como la ſuma de B à 100. aquella, por ſupoſicion, es igual à 25. luego eſta es igual à 100.

PROP. XIII. Problema.

Regla de Compañias ſimples.

LA regla de Compañias no es mas, que vna practica del problema antecedente; como ſe verà en ſus queſtiones.

Queſtion 1. Tres Mercaderes puſieron à ganancia, el primero 20. doblones, el ſegundo 18. y el tercero 12. y ganaron entre todos cien doblones. Preguntaſe, quanto ganò cada vno? que es lo meſmo que pedir, que el numero 100. ſe divida en tres partes, que tengan entre ſi la meſma proporcion, que 20. 18. 12.

Operacion. Sumenſe eſtos tres numeros: y la ſuma 50. ſerà el primer termino para tres reglas de proporcion: y el ſegundo ſerà 100. Y el tercero ſerà cada caudal en particular, como aqui ſe vè.

50.	100.	20.	40.
		18.	36.
		12.	24.

Digaſe pues: ſi 50.dan 100. què daran 20. y ſalen 40. ganancia del primero. Aſsi meſmo: Si 50.ganan 100. luego 18. ganan 36.

36. ganancia del ſegundo. Tambien, ſi 50. ganan 100. luego 12.ganan 24. ganancia del tercero. Eſtas ganancias parciales hã de ſumar 100.ganancia comun; aſsi como los caudales parciales, ſumados hazen 25. caudal comun.

Queſtion 2. Tres emplearon 100.doblones: y el primero ganò 20. el ſegundo 18. el tercero 12. Pideſe què caudal puſo cada vno? Obreſe como antes, y ſe hallarà ſer el caudal del primero 40. del ſegundo 36. y del tercero 24.

Queſtion 3. Es meneſter embiar ſocorro de harina à vna plaça: ay 720. cahizes de trigo, que ſe han de repartir entre quatro molinos: el primero en vn dia muele 2.cahizes, el ſegundo 4. el tercero 5. y el quarto muele 7. Pideſe, quantos ſe han de dar à cada molino, para que ſe acaben de moler todos à vn meſmo tiempo? Sumenſe los numeros 2.4.5.7. y la ſuma 18. ſerà el primer termino para las reglas de tres, el ſegundo ſerà 720. y el tercero ſeràn los numeros 2. 4. &c. de por ſi. Reſuelvanſe, como antes, y ſe hallaràn los cahizes que ſe hã de dar à cada molino, como ſe vè en el exemplo.

18.	720.	2.	80.
		4.	160.
		5.	200.
		7.	280.

Queſtion 4. Tengo tres acreedores, al primero devo 40. al ſegundo 36. al tercero 24. tengo ſolos 50. reales, pideſe quanto he de dar à cada vno, guardando la proporcion de las deudas? Sumo 40.36. 24.y ſeràn 100. termino primero, el ſegundo ſeràn los 50. reales, y el tercero los numeros 40. 36. y 24. Y reſolviendo las reglas de tres, hallo lo què he dar à cada acreedor.

100.	50.	40.	20.
		36.	18.
		24.	12.

PROP. XVI. Problema.

Regla de Compañias compueſtas.

SI en las compañias ay tiempo, ſe multiplicarà por los caudales de cada vno, y en los productos ſe formarà la la mesma regla de la prop. anteced. Advirtiendo, que en todos los caudales ha de ser el tiempo de vna mesma especie, como años, ò meses, &c. porque si en vn caudal fuere meses, y en otro años, se avrà de reduzir à vna mesma especie.

Question 1. Dos Mercaderes emplearon, el primero 320. lib. por 5. meses, el segundo 300. lib. por 6. meses, y ganaron 340. lib. Pidese la ganancia de cada vno. Multipliquese el caudal de cada vno por su proprio tiempo, esto es 320. por 5. y serà el producto 1600. Multiplico assi mesmo 300. por 6. y serà el producto 1800.

3400.	340.	1600.	160.
		1800.	180.

Sumense los productos, y la suma serà 3400. y este es termino primero, y 340. el segundo, para las dos reglas de tres: Si 3400. ganan 340. luego 1600. ganan 160. Si 3400. ganan 340. luego 1800. ganan 180.

Demonstr. Solo es menester demonstrar, que cada caudal se ha de multiplicar por su tiempo: que lo demas està demonstrado en la *prop.* 12. La razon pues, porque se haze dicha multiplicacion es, porque exponer 320. por 5. meses, es lo mesmo que exponer cinco vezes, por vn mes, los 320. esto es, exponer por vn mes los 320. tomados 5. vezes, que es 1600. Assi mesmo dirè, que el que expone 300. por 6. meses, haze lo mesmo que si se expusiera 6. vezes 300. esto es 1800. por vn mes: luego por medio de esta multiplicacion, se reduze à compañia simple: y por consiguiente se resuelve de la mesma forma. De esta manera se resolveran otras questiones semejantes de compañias, que omito por brevedad; pero añado las siguientes por necessitar de especiales prevenciones su resolucion.

Question 2. Suponese vn Leon de marmol, que despide agua por ojos, pies, y boca: y se busca lo que el Obispo Caramuel propone en la forma siguiente:

El que fulmino incendios en el Cielo,
y si me abrasa el Sol, abraso el mundo,
oy en la tierra convertido en yelo,

por

por ojos, pies, y boca me difundo,
y con nectar divino
refresco al fatigado peregrino.
Este pilon de marmol esculpido,
que en pocos dias ha sido fabricado,
en dos el primer ojo le ha llovido;
pero en tres el segundo le ha llorado,
en quatro el pie le toca,
y se escupe en seis horas por la boca:
Esto haze vn caño solo;
y todos juntos? lo difina Apolo.

Reduzganse primero los dias à horas, y se sabrà, que el ojo derecho llena la pila en 48. horas: el siniestro en 72. El pie en 96. y la boca en 6. luego el ojo derecho en vn hora llenarà vn 48. avo de la pila: el siniestro, tambien en vna hora, llenarà vn 72. avo: el pie vn 96. avo: y la boca vn sexto. Reduzganse los quebrados à vn comun denominador, que serà 1990656. y los numeradores [10.2.] seran 331776. 20736. 27648. 41472. Sumense estos quebrados, y serà la suma de los numeradores 421632. Hecho esto, para saber en que tiempo llenaràn la pila todos juntos, se harà esta regla de tres: Si 421632. suma de los numeradores, dan vna hora, què darà el denominador 1990656. y se hallaràn 4. horas, 43. min. y algunos segundos. ~~43~~ Min y 26 Seg

Question 3. Pagaron entre quatro el precio de vna lampara: el primero diò vn quinto del precio, el segundo dos septimos, el tercero 3. dezimos, y el quarto diò 15. lib. Pidese quanto fue todo el precio? Reduzganse todos los quebrados à vn comun denominador [10.2.] y seràn 70. y 100. y 105. 350. avos. Sumense los tres, y serà la suma 275. 350. avos; y esto es lo que dieron los tres primeros: luego el quarto diò lo restante hasta 350. 350. avos, que es el precio entero: luego diò 75. 350. avos: luego las 15. lib. que diò, son 75. 350. avos del precio. Con esto se sabrà todo el precio, por esta regla de tres: Si 75. 350. avos son 15. lib. 350. quanto seràn? y no haziendo caso de los denominadores, por ser vna mesma cosa: multiplico 350.

por

por 15. y el producto partido por 75. dà 70. lib. y este es todo el precio.

La prueva de esto es, q̃ vn quinto de 70. son 14. lib. los dos septimos son 20. lib. y los 3. dezimos son 21. lib. que sumadas son 55. que es lo que dieron los tres primeros: y restadas 55. lib. de 70. quedan 15. que diò el quarto.

Question 4. Cierta hazienda se repartiò entre tres à razon de vn quarto, vn quinto, y vn sexto. El primero tuvo 900. lib. pidese quanto era toda la hazienda, y lo que les tocò à los otros? Reduzganse los quebrados, y seràn 30. 24. y 20. 120. avos. Sumense, y serà la suma 74. 120. avos. Hagase aora esta regla de tres: Si 30. 120. avos, dan 74. 120. avos, que es toda la hazienda, què daran 900. y salen 2220. cantidad de toda la hazienda. Para hallar lo que les toca à los otros, se haràn estas reglas de tres: Si 30. 120. avos, son 900. què seran 24. 120. avos; y se hallaran 720. para el segundo. Otra vez, si 30. 120. avos son 900. què seran 20. 120. avos; y se hallaràn 600. para el tercero.

Question 5. Madrid, y Barcelona distan cien leguas: y salen à vn mesmo tiempo dos correos, vno de Madrid para Barcelona, y este camina 10. leguas cada dia: el otro de Barcelona para Madrid, y camina 15. leguas cada dia. Preguntase quando se juntaràn? Sumense las leguas que camina cada vno al dia, y serà la suma 25. y esto es lo que caminan los dos en vn dia: luego si 25. leguas las caminan en vn dia, 100. leguas las caminaràn entre los dos, cada vno por su parte, en 4. dias: luego al cabo de 4. dias concurriràn los correos.

Si se pidiere quanto avrà caminado cada correo quando concurren, se multiplicarà lo que cada vno camina al dia, por los 4. dias sobredichos, que tardan en concurrir, y se sabrà lo que se desea; multiplico pues 10. por 4. y 15. por 4. y los productos 40. y 60. manifiestan, que el vno caminò 40. leguas, y el otro 60.

Question 6. Vn correo, que camina 15. leguas cada dia, sale de vn lugar 6. dias despues, de otro que camina 10. leguas al dia: preguntase, quando le alcançarà? Restese diez de quince, y la diferencia 5. es lo que camina mas el vno, que el otro al dia: y porque el mas tardo, que camina diez leguas al dia, saliò antes 6. dias, es claro, que avrà caminado 60. leguas, al tiempo que el mas veloz empieza su camino, y tantas avrà de adelantar este para alcançar al otro; hagase pues esta regla de tres: Si el mas veloz camina mas que el otro 5. leguas en 1. dia: 60. leguas en quantos dias las adelantarà? y hecha la resolucion, se hallaràn doze dias. A este modo se pueden formar, y resolver muchas preguntas.

CAPITVLO III.

DE LA ALIGACION.

A*ligacion es vna liga, mezcla, ò composicion de diferentes especies, de que resulta otra especie media.* Llamamos aqui cosas *de diferentes especies*, à las que tienen diferente valor: como si se mezcla oro de 24. quilates, con otro de 15. resultarà vna especie media, de mas estimacion qne de 15. y de menos que de 24.

De aqui se sigue, que en qualquiera aligacion han de concurrir à lo menos seis terminos, es à saber, tres especies, y tres cantidades; esto es, las tres especies mayor, menor, y media, que se declaran por sus precios, ò valor: y las tres cantidades, vna de la especie mayor, otra de la menor, y otra de la media. Dixe, que à lo menos ha de aver seis terminos, porque se pueden mezclar tres, y quatro especies, y entonces concurren mas de seis terminos.

PROP. XV. Theorema.

Las cantidades de las especies mayor, y menor, se han entre si, como las diferencias que tienen respeto de la especie media reciprocamente.

E*xplicacion.* Tiene vn Platero oro de 22. quilates, especie mayor, y oro de 13. quilates, especie menor, y quie-

22. 3.

16

13. 6.

quiere mezclarlas de forma, que hagan vna eſpecie de oro media, de 16.quilates. Digo, que la cantidad que ha de poner de oro de 22.quilates, ſe ha con la que ha de poner de 13.quilates, como la diferencia de 13.à 16. que es 3. con la diferencia de 22. à 16.que es 6. eſto es, que la cantidad que ha de poner de oro de 22.quilates, ha de ſer como 3. y la que ha de poner de 13.quilates, ha de ſer como 6.

Demonſtracion. Lo que le falta al oro de 13.quilates para llegar à 16.quilates, que es 3. ſe ha de ſuplir de lo que excede à 16.quilates el oro de 22.Luego ſe ha de poner tanta cantidad de 22.quilates, quanta baſte à ſuplir eſſe defeto. Mas, lo que excede el oro de 22.quilates à 16. que es 6. ſe ha de rebaxar con lo que le falta para 16. quilates al oro de 13. Luego ſe ha de poner tanta cantidad de oro de 13.quilates, quanta baſte à rebaxar eſte exceſſo: pues como lo que ſe ha de rebaxar el de 22. quilates, ſea doblado de lo que ſe ha de ſubir el de 13. ſerà tambien doblada la cãtidad del oro que ſirve para rebaxar [qual es el de 13.] que la cantidad del oro que ſirve para ſubir, qual es el de 22.y por conſiguiente ſe avràn eſtas cantidades reciprocamente como las diferencias.

Todas las dificultades que pueden ocurrir en eſta materia, ſe reſuelven facilmente, entendida la ſiguiente regla general.

PROP. XVI. Problema.

Regla general de Aligacion.

Las dos diferencias, vna de la eſpecie mayor, y media: y otra de la eſpecie menor, y media, pueſtas en cruz, ſon las partes de vn todo mixto, igual à la diferencia, que ay entre la eſpecie mayor, y menor.

Explicaſe la regla, y el orden de executarla en eſte exemplo.

Vn

Vn Platero tiene oro de 22.quilates, y otro de 13. quiere mezclarles de ſuerte, que la mezcla ſea de 16. quilates: pideſe quanto pondrà de cada eſpecie?

22. 3.

16

13. 6.

9.

Operacion. Eſcrivaſe la eſpecie mayor 22.arriba, y la menor 13. baxo: y la media 16. al lado entre las dos, como ſe vè, y tiradas las lineas que ſe cruzan, reſtenſe 13. de 16. y la diferencia 3. eſcrivaſe arriba, como guia la raya: reſtenſe 16.de 22, y el reſiduo 6.pongaſe baxo: reſteſe el 13. eſpecie menor, de 22. eſpecie mayor, y ſerà el reſiduo 9. igual à la ſuma de 3.y 6.que tambien es 9. y ſe eſcrivirà debaxo de la raya. Digo pues, que en cada nueve onças de mezcla, ha de aver 3.onças de 22. quilates, y 6. onças de 13.quilates; y con eſto ſeràn las 9. onças de 16.quilates.

La prueva es, que multiplicando 22.por 3. y 13.por 6. la ſuma de los productos, que es 144. es igual al producto de 16. por 9. que tambien es 144.

Demonſtracion. Las cantidades de la mezcla: eſto es, 3. de 22.quilates, y 6. de 13.quilates, ſe han entre ſi como las diferencias de las eſpecies extremas à la media reciprocamente: luego [15.] eſtà bien hecha la mezcla.

PROP. XVII. Problema.

Reſuelvenſe algunas queſtiones de Aligacion.

1. *Quando en la queſtion ſe determina la cantidad de la mezcla, deſpues de aver hecho la ſobredicha operacion, ſe formarà vna regla de tres para determinar la cantidad de cada eſpecie que ha de entrar en dicha mezcla.*

22. 3. 12.

16

13. 6. 24.

9. 36.

Queſtion 1. Pideſe, 36.onças de oro de 16. quilates, compueſto de oro de 22. y de 13. quilates; y ſe dificulta, quantas onças han de ſer del de 22. y quantas de 13. Obreſe ſegun la regla ſobredicha, y ſe hallarà, que en 9.onças de oro de

O

16. quilates, entran 3. de 22. quilates, y 6. de 13. Hecho esto, formo la siguiente regla de tres: Si en 9. ay 3. de 22. quilates: luego en 36. avrà 12. Tambien, si en 9. ay 6. de 13. quilates: luego en 36. avrà 24.

Corolario.

De aqui se colige, que en qualquiera aligacion son proporcionales, 9 con 36. como 6. con 24. y como 3. con 12. Y convirtiendo, 12. con 3. como 24. con 6. y 36. con 9. De que se infiere el modo de resolver qualquiera questiõ, en que se busque qualquiera de los dichos terminos.

2. *Quando la vna de las especies, que se han de mezclar, no tiene valor alguno, como quando se liga oro con cobre, ò vino con agua, se pondrà vn zero en lugar de la especie menor.*

Question 2. Tiene vn Platero, oro de 22. quilates; quiere baxarle à 16. quilates en cantidad de 66. onças: pidese, quantas onças mezclarà de cobre? Dispónganse las especies como se vè; y restando se hallarà, que la diferencia de zero, y 16. es 16. escrivase arriba: tambien la diferencia de 16. y 22. es 6. escrivase baxo: 16. y 6. son 22. Digo pues, que en 22. onças de mezcla, cuyo valor es 16. quilates, se han de poner 16. onças de 22. quilates, y 6. onças de cobre; y porque de esta calidad de oro, se piden 66. onças, hago la regla de tres: Si en 22. entran 6. onças de cobre, luego en 66. entraràn 18. onças; y las restantes 48. seràn de oro.

	22.	16.	48.
16		✕	
	0.	6.	18.
		22.	66.

3. *Quando se ha de subir el oro de punto, se obrarà de la mesma manera.*

Question 3. De 66. onças de oro de 16. quilates, que tiene liga de cobre, se ha de hazer oro de 22. quilat. pidese, quantas onças de liga se dexaran consumir en el fuego? Dispuestos los terminos, se harà la mesma operacion antecedente, hasta hallar el 22. y luego se vsarà de esta regla de tres: Si 22. dan 66. luego 16. daràn 48. onças de 22. quilates: y assi las 18. onças las consumirà el fuego.

4. *Quando las especies que se han de mezclar fueren mas de dos, se*

se haràn dos, ò mas aligaciones, segun fuere la multitud de las especies, que se han de mezclar: y tendrà la question en semejantes casos infinitas respuestas: Para proceder con acierto se observaràn los siguientes preceptos.

1. Si las especies son 3. ò 4. se dividirà la cantidad de la mezcla en dos qualesquiera partes iguales, o desiguales: si las especies fueren 5. ò 6. se dividirà en tres partes: si 7. ò 8. se dividirà en 4. &c. 2. Con cada vna de estas partes de la mezcla, se aligaràn dos especies, cuidando siempre, que la vna sea mayor, y la otra menor, que la especie media, ò valor, que ha de tener toda la mezcla, tomando, si fuere menester, dos, ò tres vezes vna mesma especie. Con los exemplos se harà facil la execucion.

Question 4. en que se mezclan quatro especies. Tiene vn Platero, oro de 22. de 20. de 15. y de 13. quilates: quiere hazer 56. onças de mezcla de 16. quilates: pidese quanto tomarà de cada especie? Divido primeramente el 56. en qualesquiera dos partes: y sean 36. y 20. Esto hecho, hago dos aligaciones, vna de los 22. y 13. con las 36. onças: y hallo [15.] que en las 36. onças ha de aver 12. onças de 22. quilates: y 24. de 13. y seràn las 36: de 16. quilates.

	22.	3.	12.
16		✕	
	13.	6.	24.
		9.	36.

Hago despues otra aligacion de los 20. y 15. quilates con las 20. onças de mezcla: y hallarè, que en las 20. onças han de entrar 4. onças de 20. quilates; y 16. de 15. y seràn las 20. onças de mezcla de 16. quilates; y concluirè diziendo, que en 56. onças de 16. quilates ay 12. de 22. y 24. de 13. y 4. de 20. y 16. de 15. quilates. Hagase la prueva, multiplicando 22. por 12. 13. por 24. 20. por 4. y 15. por 16. y sumados los productos, serà la suma 896. igual al producto de 56. por 16.

	20.	1.	4.
16		✕	
	15.	4.	16.
		5.	20.

Aqui se vè claramente, que se pueden dar diferentes respuestas infinitamente, y qualquiera satisfarà la question; por-

porque el 56. se puede dividir en dos partes diferentes infinitamente; y haziendo las aligaciones de las mesmas especies en la forma dicha, se satisfarà siempre la question: y aun en cada division del 56. se pueden hallar quatro respuestas, por poderse variar la situacion de los terminos de quatro maneras, esto es, aligando 22. con 13. y el 20. con 15. Tambien 22. con 15. y 20. con 13. y cada vna de estas con el 36. ò con 20.

Question 5. en que se mezclan tres especies. He menester 50. onças de oro de 16. quilates: tengo oro de 22. de 20. y de 13. quilates: quanto tomarè de cada especie? Parto las 50. onças en dos partes, y sean 36. y 14. y hago dos aligaciones: La primera de 22. con 13. la segunda de 20. con el mesmo 13. y acabadas las dos aligaciones hallo, que en las 50. onças, para que sean de 16. quilates, ha de aver 12. onças de 22. quilates: 6. onças de 20. quilates: y del oro de 13. quilates ha de aver por vna parte 24. onças: y por otra 8. que son 32. onças. Donde se vè, que con el 13. se han hecho dos aligaciones, y si fuere necessario se avian de hazer muchas mas.

22.	3.	12.
16		
13.	6.	24.
	9.	36.

20.	3.	6.
16		
13.	4.	8.
	7.	14.

Question 6. en que se mezclan cinco especies. Si vn Platero tiene oro de 24. de 20. de 18. de 14. y de 12. quilates, y quiere hazer 50. onças de oro de 16. quilates, quanto tomarà de cada vna de las especies sobredichas? *Operacion.* Porque ay cinco especies, divido el 50. en tres partes à mi arbitrio; y sean 24. 18. y 8. Y hago primeramente aligacion del oro de 24. quilates, y del de 12. en cantidad de 24. onças. Hago despues segunda aligacion de 20. quilates, y 14. en cantidad de 18. onças. Y vltimamente tercera aligacion de 18. quilates, y 14. en cantidad de 8. onças: y despues de las tres operaciones hallo, que en las 50. onças de 16. quilates, entran 8. de 24. quilates, 16. de 12. y 6. de 20. 4. de 18. y del de 14. quilates entran 16. esto es, por vna parte 12. y por otra 4. Hagase la prueva, y se hallarà ser verdad.

24.	4.	8.
16		
12.	8.	16.
	12.	24.

20.	2.	6.
16		
14.	4.	12.
	6.	18.

18.	2.	4.
16		
14.	2.	4.
	4.	8.

5. *Si se pidiere el valor de vna mezcla, en que entran cantidades de diferentes especies: Multipliquese cada especie, que es lo mesmo que cada valor por su cantidad: y la suma de los productos partase por la suma de las cantidades; y el quociente serà el valor de la mezcla.*

Question 7. Ay vna mezcla, ò composicion, en que ay 8. onças de oro de 24. quilates. 6. de 20. 4. de 18. 16. de 14. y 16. de 12. quilates; pidese, de quantos quilates serà la mezcla? Multipliquense los 24. quilates por las 8. onças: los 20. por las 6. &c. y serà la suma de los productos 800. partidos 800. por 50. que es la suma de las cantidades, serà el quociente 16. y estos son los quilates de la mezcla.

6. *Con las reglas dadas se pueden resolver innumerables questiones; solo advierto, que en algunas, antes de hazer la aligacion, es menester buscar el precio, ò valor medio.*

Question 8. Se han de comprar 800. hanegas de trigo por 24000. reales, ay trigo de 35. reales la hanega, de 32. de 28. y de 24. pidese, que cantidad se avrà de tomar de cada especie? para que mezcladas hagan 800. hanegas, y valgan 24000. reales? Busquese primero el precio medio, partiẽdo 24000. por 800. y su quociente 30. serà el precio medio que se busca: Hallado este, dispónganse los terminos, y hagase la aligacion, como en la quest. 4. y quedarà resuelta la question.

(***) (***)
(***)

CAPI-

CAPITVLO IIII.

DE LA FALSA POSICION.

R *Egla de falſa poſicion es la que ſupone vn numero conocido para hallar otro no conocido.* Llamaſe *falſa poſicion*, porque como el numero ſupueſto caſi nunca ſatisfaga la queſtion, ſuele llamarſe *falſo* ; con mas propriedad ſe llamaria *numero exemplar* , por ſervir de idea para hallar el numero que ſe pide. Dos modos ay de falſa poſicion, *ſimple*, y *compueſta*. La primera , por vn ſolo numero ſupueſto halla el verdadero : la ſegunda ſupone dos para encontrar con el que ſe buſca.

PROP. XVIII. Problema.

Regla de falſa poſicion ſimple.

LA regla de falſa poſicion ſimple ſe reduze à tres preceptos. 1. Tomeſe qualquiera numero , que ſea apto para que en èl ſe puedan exercitar las operaciones que pide la queſtion. 2. Examineſe, ſi es el numero que ſe pregunta : y ſi acaſo fuere el meſmo , quedarà ſatisfecha la queſtion; pero ſi no lo fuere, ſe formarà vna regla de tres , que es el tercero precepto , y ſe hallarà el numero que ſe buſca.

Exemplo. Pideſe , que el numero 100. ſe divida en tres partes, que la primera ſea dupla de la ſegunda ; y eſta ſea tripla de la tercera. Que es lo meſmo qne pedir tres numeros, el primero doblado del ſegundo , y eſte tres doble del tercero, que ſumados hagan 100. Tomo arbitrariamente vn numero, y ſea 2. eſte ſupongo ſer el menor de los tres, que ſe piden, para mayor facilidad. Triplico el 2. y ſerà 6. el ſegundo: duplico el 6. y tengo 12. ſumo eſtos tres numeros 12. 6. 2. y hazen 20. y porque la ſuma avia de ſer 100. buſco otro numero por regla de tres, diziendo: Si

Si 20. vienen de 2. de quantos vendran 100. y hallo vienen de 10. Eſte pues ſerà el numero menor: luego el ſegundo es 30. y el mayor es 60. Con eſto queda ſatisfecha la queſtion; porque he dado los tres numeros 60. 30. 10. de los quales 60. es doblado de 30. y eſte triplo de 10. y ſumados hazen 100.

Demonſtracion. Conſta de la meſma operacion , ſer proporcionales 20. à 2, como 100. à 10. tambien 20. à 6 .como 100. à 30. y 20. à 12. como 100. à 60. luego componiendo ſerà como 20. à 2. 6. 12. juntos: aſsi 100. à 10. 30. 60. juntos: 20. es igual à 2. 6. 12. luego 100. es igual à 10. 30. 60. que es el intento.

12.	60.
6.	30.
2.	10.
20.	100.

PROP. XIX. Problema.

Reſuelvenſe algunas queſtiones por la falſa poſicion ſimple.

ADvierto lo primero , que todas las queſtiones, que ſe pueden reſolver por la poſicion ſimple , ſe pueden reſolver por la compueſta ; pero no al contrario : y todas las queſtiones que reſuelve la compueſta, puede reſolver la Algebra; pero no al contrario. Y para no canſarſe embalde, ſe obſervaràn las reglas ſiguientes.

1. Siempre que el numero que ſe buſca ſe huviere de multiplicar por ſi meſmo , ò por alguna parte ſuya , ò vna parte del meſmo numero por otra , ninguna de las falſas poſiciones podrà reſolver la duda: ſi ſolamente la Algebra.
2. Las queſtiones que piden ſe ſume, ò reſte algun numero dado en la meſma queſtion, no ſe pueden reſolver por poſicion ſimple; ſi no es que ſe puedan antes reduzir, ſumando, ò reſtando dicho numero, como conſtarà de los exemplos.

Advierto lo ſegundo, que quando la queſtion procede por partes de vn numero incognito, pidiendo que eſtas ſe ſumen, ò reſten, ſerà conveniente eſcrivirlas en forma de quebrados; y reduzidos eſtos à vn comun denominador, ſe tomarà eſte denominador, por numerador ſupueſto para la operacion , y ſe obrarà con gran facilidad.

Ad-

Adviertolo tercero, que quando la queſtion pide que vn numero ſe divida en partes, que guarden vnas con otras cierta proporcion, ſerà bien ſuponer por la menor qualquiera numero, y empezar por ella la operacion, como ſe hizo en el exemplo arriba pueſto.

Queſtion 1. Pìdeſe vn numero, que ſu mitad, ſu tercio, y ſu quarto ſumados hagan 52. *Operacion.* Las partes que ſe piden, expreſſadas como quebrados, y reducidos à vn comun denominador, ſon 12.8.y 6. 24. avos. Supongo pues, que el numero que ſe pide ſea 24. ſumo ſu metad, ſu tercio, y ſu quarto, que ſon los meſmos numeradores de los quebrados, eſto es, 12.8.6. y ſuman 26. y porque avian de ſumar 52. hago eſta regla de tres: Si 26. avian de ſer 52. luego 24. avian de ſer 48. y eſte es el numero que ſe pide; porque ſu mitad 24. ſu tercio 16. y ſu quarto 12. ſumados hazen 52.

Queſtion 2. Pideſe vn numero, que añadiendole ſu mitad, y ſu quarto, y mas 12. ſea todo 852. *Operacion.* Reſto primero de los 852. los 12. y quedan 840. Buſco aora vn numero, que añadiendole ſu mitad, y ſu quarto, ſea todo 840. Supongo, que eſte numero es el 12. añadole ſu mitad 6. y ſu quarto 3. y es todo 21. y porque avia de ſer 840. Digo, ſi 21. avia de ſer 840. luego 12. avian de ſer 480. y eſte es el numero que ſe pide, porque ſu mitad es 240. y ſu quarto es 120. y ſumando 480. 240. 120. hazê 840. y añadiendo mas 12. es 852. como ſe deſeava.

Queſtion 3. Pideſe vn numero, que añadiendole ſus tres quartos, y ſus dos quintos, menos 12. ſea todo 246. *Operacion.* Añado primero 12. à 246. y ſerà 258. Luego he de buſcar vn numero, que añadiendole ſus tres quartos, y ſus dos quintos, ſea todo 258. Reduzidos los quebrados à vn comun denominador, ſon 15. veinteavos, y 8. veinteavos: ſupongo pues, que el numero es 20. y añadiendole 15. y 8. es todo 43. Digo pues: Si 43. dan 20. què daran 258. y ſale 120. y eſte es el numero que ſe buſca, à quien añadiendo ſus tres quartos, que ſon 90. y ſus dos quintos, que ſon 48. ſalen 258. quito 12. como pedìa la queſtion, y quedan 246.

Queſ-

Queſtion 4. Sea la que propone el Obiſpo Caramuel en eſta forma:

Juno, y Jupiter peſavan veinte minas,
y vn quarto del primero,
y vn tercio del ſegundo,
componen vn tercero,
que peſa ſeis. Luzero
de la Eſcuela ſeràs, ſi me adevinas
què peſa cada vno,
Juno ſin Jupiter, y Jupiter ſin Juno.

Supongo que Juno peſava 4. y Jupiter 6. con que vn quarto del peſo de Juno ſerà 1. y vn tercio del peſo de Jupiter ſerà 2. los dos juntos hazen 3. peſo del tercero: y porque avia de ſer 6. digo: Si 3. avian de ſer 6. 4. quantos avian de ſer? y hallo que Juno peſava 8. minas. Otra vez, ſi tres avian de ſer 6. luego 6. que ſuponemos ſer el peſo de Jupiter, avrà de ſer 12. y queda ſatisfecha la queſtion: porque 2. que es el quarto de 8. con 4. que es el tercio de 12. hazê 6. peſo de la tercera Eſtatua.

PROP. XX. Problema.

Regla de falſa poſicion compueſta.

1. SUpongaſe qualquier numero, y como ſi fuere el que ſe pregunta, guardeſe en èl todo el orden de la pregunta: Examineſe ſi es, ò no el verdadero, ſi lo fuere quedarà ſatisfecha la queſtion; pero ſi no lo fuere, ſe notarà el error, ò diferencia del numero hallado al verdadero. 2. Eſcrivaſe eſte error al lado del numero ſupueſto, notando ſi ſe errò por exceſſo, ò por defeto: el error por exceſſo ſe nota con eſte ſeñal †, que ſignifica *mas*; y el que es por defeto ſe ſeñala con el ſeñal -- que ſignifica *menos*. 3. Supongaſe otro qualquier numero, y procedaſe en èl ſegun el tenor de la queſtion: examineſe tambien ſi es, ò no el que ſe buſca: y ſi no lo fuere, noteſe à ſu lado el error, de la meſma ſuerte que en el primero. Entrambos numeros ſe han de eſcrivir de ſuerte, que el vn numero ſupueſto eſte

de-

debaxo del otro: y aſsi meſmo el error del vno, debaxo del error del otro.

4. Hecho eſto, ò los errores ſon iguales, ò deſiguales; ſi iguales, ſumenſe los numeros ſupueſtos, y la mitad de la ſuma ſerà el el numero que ſe buſca. Si los errores ſon deſiguales, ſe formarà vna regla de tres, cuyo primer termino ſerà la diferencia de los errores: el ſegundo la diferencia de los numeros ſupueſtos: y el tercero ſerà vno de los errores qualquiera que ſea. 5. El numero que ſaliere por la regla de tres, ſe ſumarà con el numero ſupueſto, cuyo error ſe tomò en la formacion de la regla de tres, ſi dicho error lleva el ſeñal --, y ſe reſtarà ſi tiene el ſeñal †: y la ſuma, ò reſta, ſerà el numero que ſe buſca.

Advierto, que para hallar la diferencia de los errores, ſe ha de reſtar ſiempre el vno de el otro; pero como ſe enſeña en la Algebra, el reſtar, quando los ſeñales ſon diferentes, es ſumar; porque ſi vno deve † 4. y paga -- 2. deve mas 6. eſto es, deve los 4. y los otros 2. que quita con el menos 2. Y aſsi meſmo: ſi vno deve -- 6. y paga mas 4. ſe queda con -- 10. porque antes le faltavan 6. y deſpues le faltan los 4. que pagò. Eſto ſe explicarà mas en ſu lugar, baſta por aora ſaber, que quando los ſignos ſon diferentes, ſu diferencia ſe halla ſumando los errores.

PROP. XXI. Problema.

Explicaſe todo lo dicho en vn exemplo, y ſe haze demonſtracion de la regla.

C*Aſo I. quando los errores ſon iguales.* Pideſe, que el numero 62. ſe divida en tres partes, que la primera ſea tanto como la ſegunda, y tercera mas 6. y la ſegunda ſea doblada de la tercera mas 4. Empiezo por el numero menor, que es el tercero, y ſupongo que ſea 5. doblole, y ſerà 10. y añadidos 4. ſerà 14. y eſte ſerà ſegun el tenor de la queſtion, el ſegundo numero: ſumo aora 5. y 14. y ſeràn 19. añadidos 6. ſeràn 25. y eſte ſerà el numero primero: ſumo pues los tres 25. 14. 5. y ſeràn 44. ſiendo aſsi que

avian

avian de ſer 62. luego en eſta ſupoſicion ay error de menos 18. Eſcrivaſe pues eſte error al lado del 5. con la nota --, como ſe vè.

Supongo pues otro numero, y ſea 11. y ſuponiendo que ſea el tercero, ſigo el meſmo orden que antes, y ſerà el ſegundo 26. y el primero 43. Sumo 43. 26. 11. y ſon 80. y porque avia de ſer 62. veo que excede en 18. eſcrivo pues 11. y à ſu lado el error † 18. como ſe vè: y porque los errores ſon iguales, ſumo los numeros ſupueſtos 5. y 11. y es la ſuma 16. y ſu mitad 8. es el numero verdadero: con que el ſegundo ſerà 20. y el tercero 34. y la ſuma de los tres 62. La razon es evidente, porque los numeros 5. y 11. diſtan igualmente del numero verdadero: luego eſte ſe halla en igual diſtancia de dichos extremos: luego es la mitad de ſu ſuma.

Supoſiciones.	*Errores.*
5.	-- 18.
11.	† 18.
16.	8.

Caſo II. quando los errores ſon deſiguales, y en entrambos ſe peca por defeto, y por conſiguiente ſus errores llevan el ſeñal --. Sirva la meſma queſtion por exemplo, y ſupongo, como antes, el 5. cuyo error es -- 18. Supongo otra vez 7. y ſiguiendo la queſtion hallo, que ſu error es -- 6. La diferencia de las ſupoſiciones es 2. y la diferencia de los errores es 12. Digo aora, ſi 12. dan 2. luego 18. error primero, darà 3. diferencia del 5. al numero verdadero: y porque el 5. es menos que el numero verdadero, como lo manifieſta ſu error, que es -- 18. ſe ſumarà 3. con 5. y la ſuma 8. es el numero que ſe pide. Si ſe quiere vſar de la otra ſupoſicion 7. ſe harà la regla de tres: Si 12. dan 2. luego 6. error de la ſupoſicion 7. darà 1. que ſumado con el 7. dà tambien 8.

Supoſiciones.	*Errores.*
5.	-- 18.
7.	-- 6.
2.	12.

Caſo III. quando en entrambas ſupoſiciones ſe peca por exceſſo, y los errores ſon deſiguales. En la meſma queſtion: Supongo, que el numero que ſe pide es 13. y examinandole hallo ſer ſu error † 30. Supongo deſpues el numero 10. y hallo que ſu error es † 12. la diferencia de las ſupoſiciones es 3. y la

de

de los errores es 18. y formo la regla de tres: Si 18. dan 3. luego 30. dan 5. y porque el error es †, resto 5. de 13. y tengo 8. numero que se pide. Si quiero, hago otra regla de tres en la suposicion segunda, y saldrà lo mesmo: Si 18. dan 3. luego 12. dan 2. que restados de 10. quedan 8.

Suposiciones.	*Errores.*
13.	† 30.
10.	† 12.
3.	18.

Caso IV, quando los errores son desiguales, y el vno peca por excesso, y el otro por defeto: y por consiguiente, el vno tiene el señal † y el otro --. En la mesma pregunta supongo 5. y hallo, que su error es -- 18. Supongo otra vez 12. y siguiendo el orden de la pregunta, hallo ser su error † 24. Hago la regla de tres: Si 42. dan 7. luego 18. daràn 3. que añadidos al 5. [por ser su error menos] es 8. el numero que se pide. Tambien si 42. dan 7. luego 24. daràn 4. que restados de 12. [por ser su error mas] quedan 8.

Suposiciones.	*Errores.*
5.	-- 18.
12.	† 24.
7.	42.

Demonstracion de la Regla.

La demonstracion consiste en probar, que son proporcionales: la diferencia de los errores à la diferencia de las suposiciones; como el error, à la diferencia del numero supuesto, y verdadero. Para demonstrar esto, se ha de suponer, que los errores de las suposiciones son proporcionales à los errores de los numeros, que salen obrando con dichas suposiciones, lo que se pide en la question; como en este vltimo exemplo, las suposiciones son 5. y 12. cuyas diferencias, hasta el numero verdadero 8. son -- 3. y † 4. Los numeros que han procedido de dichas suposiciones, segun el tenor de la question, son 25. y 86. cuyos errores, ò diferencias, hasta el numero 62. que avia de salir segun la question, son -- 18. † 24. Digo pues, que son proporcionales estos quatro numeros, ò diferencias -- 3. † 4. -- 18. † 24.

La razon es, porque segun el tenor de la question, solo se pueden hazer las quatro operaciones de sumar, restar, multiplicar, y partir: y de estas, el sumar, y restar no varìa las

las diferencias; porque si, por exemplo, à 8. y 12. se añade, ò se quita vn mesmo numero, las sumas, ò restas siempre se diferenciaràn en 4. Tampoco el multiplicar, ò partir por vn mesmo numero, varìa la proporcion en los productos, ò quocientes [*Eucl.* 17. *y* 18. *lib.* 7.] luego se conservarà la mesma razon entre dichos numeros, y por consiguiente entre sus diferencias: luego dichas diferencias -- 3. † 4. -- 18. † 24. siempre seràn proporcionales, con razon de igualdad, ò desigualdad.

Esto supuesto, el numero que se busca (que aora le supongo conocido) es 8. y siendo las suposiciones 5. y 12. son las diferencias de estas al numero verdadero -- 3. y † 4. las quales, por la razon sobredicha, difieren entre si en 7. esto es, en tanto quanto se diferencian 5. y 12. y pues las diferencias -- 3. y † 4. son proporcionales con los errores -- 18. y † 24. serà como -- 3. con 7. diferencia entre -- 3. y † 4. assi -- 18. à 42. diferencia entre -- 18. y † 24. y convirtiendo, como 7. con -- 3. assi 42. à -- 18. y alternando, como 7. à 42. assi -- 3. à -- 18. y otra vez invirtiendo, como 42. con 7. assi -- 18. con -- 3. que es la regla dada.

LIBRO V.

DE LAS PROGRESSIONES.

DEFINICIONES.

1. P*rogression, es vna serie de numeros, que se van continuando con algun excesso, ò diferencia proporcional.* Dos maneras ay de progression, *Arithmetica*, y *Geometrica*.

2. Pro-

2. *Progreſsion Arithmetica, es vna ſerie de numeros, que ſe vàn excediendo con igual exceſſo.*

3. *Progreſsion Geometrica, es vna ſerie de numeros, que proceden en vna meſma razon de deſigualdad.* Explicaſe en los ſiguientes exemplos.

Progreſsiones Arithmeticas	A	1.	2.	3.	4.	5.	6.
	B	1.	3.	5.	7.	9.	11.
Progreſsiones Geometricas	C	1.	2.	4.	8.	16.	32.
	D	1.	3.	9.	27.	81.	243.

La progreſsion A, es Arithmetica, porque todos los terminos que la componen, ſe van excediendo en la vnidad. La progreſsion B, es tambien Arithmetica, por irſe excediendo ſus terminos en 2. Las progreſsiones C, y D, ſon geometricas, porque los terminos de C proceden todos en razon dupla, y por conſiguiente ſus exceſſos eſtan tambien en razon dupla: y los de la progreſsion D, proceden en tripla, que ſon proporciones de deſigualdad.

4. *Tanto la progreſsion arithmetica, como la geometrica, puede ſer aſcendente, ò deſcendente.* En la aſcendente los terminos van creciendo, como 2. 4. 6. 8. &c. ò como 2. 4. 8. 16. &c. En la deſcendente van menguando: como 8. 6. 4. 2. ò como 16. 8. 4. 2.

Eſtas progreſsiones, con las admirables propriedades que tienen, han enriquezido las principales materias de la Mathematica. Tratarè aqui lo mas preciſſo, remitiendo al Lector entre otros Autores al P. Gregorio de Sancto Vincencio, que tratò de ellas con extraordinaria erudicion.

(***) (***)
(***)
(*)

CAPI-

CAPITVLO I.

DE LA PROGRESSION ARITHMETICA.

PROP. I. Problema.

Continuar vna progreſsion Arithmetica.

O*Peracion.* Halleſe el exceſſo, en que los numeros ſe vã continuamente excediendo: el qual ſe halla reſtando qualquiera de ellos del mayor, que immediatamente ſe ſigue. Añadaſe eſte exceſſo continuamente al numero, deſde el qual ſe ha de continuar la progreſsion, y ſe continuarà la progreſsion aſcendente; ò quiteſe continuamente del numero ſobredicho; y ſe avrà proſeguido la progreſsiõ deſcendente.

Exemplo. Se ha de continuar eſta progreſsion aſcendente 1.3.5.7. Reſteſe 3. de 5. ò 5. de 7. y ſe hallarà ſer la diferencia de los terminos, dos. Añadaſe dos al 7. y ſaldrà 9. termino ſiguiente: añadaſe dos al 9. y ſaldrà 11. y aſsi infinitamente. Quiereſe continuar eſta progreſsion deſcendente 13. 11. 9. Hallada la diferencia dos, como antes, reſte ſe de 9. y quedaran 7. reſteſe otra vez de 7. y quedaran 5. reſteſe de 5. y quedaràn 3. reſteſe de 3. y quedarà 1. y ya no ſe puede reſtar mas: De que ſe colige, que las progreſsiones arithmeticas pueden infinitamente aumentarſe, pero no infinitamente diſminuirſe; ſino es, que nos valgamos de terminos negados, que ſon menos que nada: y de eſta ſuerte ſeria la progreſsion deſcendente ſobredicha: 11.9.7.5.3.1. -- 1. -- 3. &c. De eſtos numeros defectivos trataremos en la Algebra.

Demonſtracion. Todos los terminos de la progreſsion ſobredicha ſe exceden en dos: luego añadiendo dos à vn termino, ſaldrà el mayor immediato, y reſtando dos, ha de ſalir el immediato menor.

PROP.

PROP. II. Theorema.

En qualquiera progresion arithmetica la suma de los extremos es igual à la suma de qualesquiera dos terminos distantes igualmente de dichos extremos.

SEa qualquiera progresion arithmetica ABCD, &c. cuya diferencia sea Z. Digo, que la suma de los extremos A, y G, es igual à la suma de B, y F, igualmente distantes de los mesmos extremos.

Z 4.

A B C D E F G

3. 7. 11. 15. 19. 23. 27.

Demonstracion. Si del extremo mayor G, se quita la diferencia Z, quedaran F, y G, iguales, por exceder G à F, en sola la dicha diferencia. Tambien si la misma diferencia Z, quitada, se añade al menor extremo A, quedaràn A, y B, iguales: luego si à los iguales G, y F se añaden los iguales A, y B, esto es A, à G; y B à F, seràn las sumas A † G, y B † F iguales. Por la mesma razon seràn iguales las sumas B † F, y C † E; luego A † G, y C † E son iguales.

Corolario.

La suma de qualesquiera dos terminos, es igual à la suma de otros qualquiera dos terminos igualmente distantes de los sobredichos: como D † G es igual à E † F.

PROP. III. Theorema.

En la progresion arithmetica de terminos impares, la suma de los extremos es igual al duplo del termino medio.

SEa la progresion A,B,C,D, &c. de terminos impares, cuya diferencia es Z: Digo, que la suma de los extremos A, y G, es igual al termino medio D, doblado.

Z 3.

A B C D E F G

1. 4. 7. 10. 13. 16. 19.

Demonstracion. La suma de los terminos C, y E, immediatos à D, es igual à la suma de los extremos A † G: [2] luego si probàre, que la suma de C y E, es igual al duplo de D, quedarà probado, que la suma A † G de los extremos, es igual al duplo de D. Pruevolo assi: Si del termino E se quita la diferencia Z, quedaràn D, y E iguales; y si la mesma diferencia quitada, se añade à C, seràn C, y D iguales: con que los tres C,D,E seràn iguales: luego C, y E juntos, son iguales à dos D.

Corolario.

El duplo de qualquier termino es igual à la suma de qualesquiera dos terminos igualmente distantes de dicho termino: como el duplo de E, es igual à C † G: y assi mesmo à D † F.

PROP. IV. Theorema.

En la progresion arithmetica, qualquier termino restado de la suma de dos, dista tanto de el vno, quanto el residuo dista del otro.

A B C D E F G

27. 23. 19. 15. 11. 7. 3.

SEa la progresion arithmetica A,B,C,D,&c. y sumense los dos terminos A, y F. Digo, que si de dicha suma se resta qualquier termino, como por exemplo C, distante dos terminos de A: el residuo serà el termino D, distante tambien dos terminos de F.

Demonstracion. La suma C † D es igual à la suma A † F: Si de la suma C † D se resta C, queda D: luego tambien, si de la suma A † F se resta C, quedarà D.

PROP. V. Theorema.

En qualquiera progresion arithmetica, el vltimo termino incluye tantas vezes al excesso, en que los terminos se van excediendo, quantos son los terminos menos vno: y ademas de esto incluye al primer termino.

EXplicacion. Sea vna progresion arithmetica, por exemplo, de quatro terminos. Digo, que el vltimo incluye tres vezes al excesso, y vna vez al termino primero.

Demonstracion. (1) Los terminos de la progresion arithmetica se van formando, añadiendo continuamente el ex-

 ces-

cesso: y assi el segundo incluye al primero, y vn exceso: el tercero incluye al segundo, y vn exceso; esto es, al primero, y dos excessos: el quarto incluye al tercero, y vn excesso, esto es, al segundo y dos excessos, ò al primero y tres excessos, esto es, tantos excessos como son los terminos menos vno.

De estos Theoremas se colige la resolucion de qualesquiera questiones, que dependen de la progression arithmetica: de las quales propondrè aqui las mas principales, à que pueden reduzirse las demas.

PROP. VI. Problema.

Entre dos numeros dados, hallar vno, ò muchos medios arithmeticamente proporcionales.

Regla. Restese el numero menor del mayor: el residuo partase por el numero de los medios que se piden mas vno, y el quociente serà la diferencia de los terminos, que añadida continuamente al numero menor de los que se propusieron, darà los medios que se piden.

5. 8. 11. 14. 17. 20.

Exemplo. Dados 5. y 20. se pide, que entre ellos se señalen quatro medios arithmeticos. Resto 5. de 20. y es su diferencia 15. parto 15. por 4. mas 1. esto es, por 5. y el quociente 3. es la diferencia de los terminos, que añadida à 5. haze 8. añadida à 8. haze 11. añadida à 11. haze 14. añadida à 14. haze 17. que son los quatro medios que se piden.

Demonstracion. [5.] El vltimo termino 20. incluye al primero, y tantos excessos, quantos ay terminos en la progression menos vno: luego si del 20. se quita el primero 5. y el residuo le partimos por el numero de los seis terminos menos vno, ù de los quatro terminos medios, mas vno, el quociente serà la diferencia, ò excesso de los terminos, que añadida continuamente al menor, producirà dichos terminos.

PROP. VII. Problema.

Dados el primero, y vltimo terminos de vna progression arithmetica, y el numero de los terminos, hallar la diferencia, en que se exceden.

Restese, como en la antecedente, el termino menor 5. del mayor 20. y partase por el numero de los terminos menos vno: y el quociente serà la diferencia que se busca. Consta de la antecedente.

Exemplo. Distribuye vno por 6. dias ciertas limosnas; el primer dia dà 5. reales, y el vltimo dà 20. y cada dia fue aumentando con iguales excessos las limosnas. Pidese, quãto diò cada dia? *Operacion.* Restese 5. de 20. y el residuo 15. partase por 6. dias menos vno, esto es por 5. y el quociente 3. añadido à los 5. que diò el primer dia, harà 8. que diò el segundo dia, &c. como en la prop. 6.

PROP. VIII. Problema.

Dados el primero, y vltimo terminos de vna progression, y el numero de sus terminos, hallar la suma de todos.

Operacion. Sumese el primero, y vltimo termino: multipliquese esta suma por el numero de los terminos; y la mitad del producto serà la suma que se busca.

Exemplo. Pedro distribuye cierta cantidad de reales en los pobres, en progression arithmetica, por espacio de 6. dias; el primero dà 5. reales, y el vltimo 20. pidese, quanto sea todo lo que ha distribuido? la suma de los terminos dados 5. y 20. es 25. multipliquese 25. por 6. numero de los dias; y del producto 150. tomese la mitad 75. y esta es la suma de la progression, ù de las cantidades repartidas.

Demonstracion. En toda progression arithmetica, la suma de los extremos es igual à la suma de qualesquiera dos terminos igualmente distantes de los extremos [2.] y si el numero de los terminos no fuere par, es tambien igual à la suma del medio tomado dos vezes: (3.) luego en la suma de toda la progression ay tantas sumas, iguales à la de los extremos, quanta es la mitad del numero de los terminos: luego multiplicando la ſuma de los extremos por todo el numero de los terminos, el producto ſerà doblado de la ſuma de la progreſsion: luego ſu mitad ſerà la ſuma que ſe pide.

Corolarios.

1. La meſma ſuma ſe ſabrà multiplicando la ſuma de los extremos por la mitad del numero de los terminos: ò multiplicando la mitad de la ſuma de los extremos, por el numero de los terminos, como ſe colige de lo ſobredicho.

2. En la progreſsion natural, como 0.1.2.3.4.5.6. Si el mayor termino 6. ſe multiplica, por el que ſe avia de ſeguir ſi proſiguiera la progreſsion, que en eſte caſo es el 7. la mitad del producto ſerà la ſuma de todos los terminos de la progreſsion: porque ſiendo el primer termino zero, no ay que ſumarle con el vltimo: y aſsi baſta multiplicar al vltimo por el numero de los terminos; que en eſta progreſsion natural, es tanto como el numero que ſe ſigue.

3. De lo dicho ſe colige la reſolucion de las queſtiones ſemejantes à la del exemplo ſiguiente. *Exemplo.* Si vn pozo, que tiene 15. palmos de hondo ſe abre por 36. lib. otro poco, que ha de tener 28. palmos de hondo, por quanto ſe abrirà. *Operacion.* Porque quanto mas ſe profunda es mayor el trabajo: antes de formar regla de tres, ſe han de imaginar dos progreſsiones naturales, cuyo primer termino ſea zero; y el vltimo en la primera ſea 15. y en la otra, 28. La ſuma de la primera progreſsion, ſegun la regla dada, ſerà 120. y la de la ſegunda ſerà 406. Digo, pues, ſi 120. valen 36. luego 406. valen 121. y quatro quintos, eſto es, 121. lib. 16. ſueld. De eſta ſuerte ſe ſacarà el valor de las hechuras de los edificios, cuyo valor ſube quanto mas ſe levanta la obra.

PROP. IX. Problema.

En la progreſsion arithmetica, dado el numero de los terminos, y el termino menor, y la diferencia, hallar el otro extremo.

Mul-

MVltipliqueſe la diferencia dada, por el numero de los terminos menos vno: ſumeſe el producto con el termino dado, y la ſuma ſerà el vltimo termino que ſe buſca.

Exemplo. Sea 8. el termino menor de vna progreſsion, que llega à tener 10. terminos, cuya diferencia es 5. Pideſe el vltimo termino. Multiplico la diferencia 5. por 9. numero de los terminos quitado vno: el producto 45. ſumado con 8. que es el termino dado, dà 53. vltimo termino.

Demonſtracion. El vltimo termino incluye nueve vezes la diferencia 5. y vna vez al termino primero 8. (5.) luego, &c.

Otro exemplo. Un Jardinero ha cogido de vn mançano por eſpacio de 12. años mançanas en eſta forma: el primer año 5. el ſegundo 60. mas que el primero: el tercero 60. mas que el ſegundo, y aſsi en los demàs: pideſe quantas mançanas cogiò el año duodecimo. De las mançanas que cogiò cada año, ſe forma vna progreſsion arithmetica, cuyo termino primero es 5. la diferencia es 60. y el numero de los terminos 12. Obreſe ſegun la regla, y ſe hallarà, que el año 12. cogiò 665. mançanas.

PROP. X. Problema.

En la progreſsion arithmetica dado el numero de los terminos; el termino mayor, y la diferencia, hallar el otro extremo.

SEa 20. el mayor extremo de vna progreſsion arithmetica, que conſta de 6. terminos, cuya diferencia es 3. Pideſe el menor extremo. Quiteſe vno del numero de los terminos, y ſerà 5. Multipliqueſe 5. por 3. diferencia dada: y ſerà el producto 15. que reſtado de 20. ſerà el reſiduo 5. el termino menor que ſe buſca. Conſta de lo dicho.

PROP. XI. Problema.

Dados el primero y vltimo termino, y la ſuma de la progreſsion, hallar el numero de los terminos.

SEa el primer termino 5. y el vltimo 23. y la ſuma de la progreſsion ſea 98. Pideſe el numero de los terminos

nos. *Operacion.* Sumense los extremos 5. y 23. y de la suma 28. tomese la mitad 14. partase 98. por 14. y el quociente 7. es el numero de los terminos.

Demonstracion. Multiplicando la suma de los extremos por la mitad del numero de los terminos, sale la suma de la progression: (*pr.8.cor.1.*) luego al contrario, si partimos la suma de la progression por la mitad de la suma de los extremos, se hallarà el numero de los terminos.

PROP. XII. Problema.

Dados el primero, y vltimo termino, y la suma de la progression, hallar el excesso, ò diferencia.

LA suma de vna progression es 75. el primer termino es 5. y el vltimo 20. Pidese la diferencia. *Operacion.* Busquese primero [11] el numero de los terminos, y se hallarà ser 6. luego dados el primero y vltimo termino, y el numero de los terminos, se hallarà la diferencia. (7.)

PROP. XIII. Problema.

Dados el primero y vltimo termino, y la diferencia: hallar el numero de los terminos.

EL termino primero de vna progression arithmetica es 5. el vltimo es 20. la diferencia 3. Pidese el numero de los terminos.

Operacion. Restese 5. de 20. y serà el residuo 15. Partase 15. por 3. diferencia de los terminos, y serà el quociente 5. añadasele la vnidad, y serà 6. el numero de los terminos. Consta de la proposicion 6.

PROP. XIV. Problema.

Dados el primero y vltimo termino, y la diferencia, hallar la suma de la progression.

DAdos 5. y 20. extremos de la progression arithmetica; y la diferencia 3. de los terminos, se busca la suma de toda la progression.

Ope-

Operacion. Hallase primero (13.) el numero de los terminos, que serà 6. Y conocidos el primer termino 5. y el vltimo 20. y el numero 6. de los terminos, se hallarà [8.] la suma 75.

PROP. XV. Problema.

Dado vno de los extremos, el numero de los terminos, y la suma de la progression, hallar el otro extremo.

SEa 168. la suma de vna progression arithmetica de 12. terminos; el vltimo es 25. Pidese qual serà el primero.

Operacion. Partase 168. por 6. mitad del numero de los terminos; y el quociente 28. serà la suma de los dos extremos: restese 25. que es el vltimo extremo, y restarà 3. el primero.

Domonstracion. Consta de la proposicion 8. que la suma 168. sale de la multiplicacion de la suma de ambos extremos, por la mitad del numero de los terminos: luego si 168. se parte por dicha mitad, el quociente serà la suma del primero y vltimo termino; y por consiguiente quitando el vno de dicha suma, se sabrà el otro.

PROP. XVI. Problema.

Dados el primer termino, el numero de los terminos, y la suma de la progression, hallar la diferencia.

BVsquese (15.) el vltimo termino 25. y por la proposicion 7. dados el primero 3. y el vltimo termino 25. y el numero de los terminos 12. se hallarà la diferencia. 2.

PROP. XVII. Problema.

Dados el vltimo termino, numero de los terminos, y suma de la progression, hallar la diferencia.

HAllese (15.) el primer termino; y con esto, dado el primero y vltimo, y el numero de los terminos, se hallarà [7.] la diferencia.

PROP.

PROP. XVIII. Problema.

Dado vno de los extremos, el numero de los terminos, y la diferencia, hallar la ſuma de la progreſsion.

BVſqueſe (9. v. 10.) el otro extremo; y conocidos entrambos, y el numero de los terminos, ſe hallarà (8.) la ſuma que ſe pide.

PROP. XIX. Problema.

En la progreſsion arithmetica, dados el numero de los terminos, la ſuma, y diferencia, hallar los extremos.

AY vna progreſsion arithmetica de 12. terminos, cuya diferencia es 2. y la ſuma 168. Pidenſe los extremos.

Operacion. Partaſe la ſuma 168. por 6. mitad del numero de los terminos; y el quociente 28. ſerà la ſuma de los extremos, como conſta de la demonſtracion de la propoſicion 15. Multipliqueſe aora la diferencia 2. por el numero de los terminos menos vno, eſto es por 11. y el producto 22. ſerà la diferencia entre el extremo mayor, y menor, porque ſon las onze diferencias, que el extremo mayor incluye à mas de el extremo menor. [5.] Reſteſe pues 22. de 28. ſuma de entrambos extremos, y quedarà 6. duplo del extremo menor, y ſu mitad ſerà el extremo menor 3. y añadiendo à 3. la diferencia del extremo mayor, y menor, que es 22. ſerà 25. el extremo mayor.

Exemplo. Vna fuente tiene 12. caños de agua: de los quales el ſegundo, arroja dos libras de agua mas que el primero: el tercero, dos libras mas que el ſegundo, y aſsi los demàs; deſuerte que todos juntos arrojan en vna hora 168. libras de agua. Pideſe quanta agua arroja en vna hora el primero, y quanta el ſegundo?

Aqui ſe conoce la diferencia de los terminos de la progreſsion, que es 2. el numero de dichos terminos, que es 12. y la ſuma de todos, que es 168. Luego ſiguiendo la regla ſobtedicha ſe hallarà que el caño primero en vna hora arroja

arroja tres libras de agua, y el vltimo 25. Si ſe pidiere quanto arroja cada vno, ſe irà añadiendo al primero la diferencia 2. continuamente (1.)

De lo dicho ſe colige el modo de reſolver otras queſtiones de progreſsion arithmetica, que bien examinadas vienen à reducirſe à las ſobredichas. Otras ay que neceſsitan de la Algebra, que dexo para ſu lugar.

CAPITVLO II.

DE LA PROGRESSION GEOMETRICA.

PROP. XX. Problema.

Continuar vna progreſsion geometrica.

PAra continuar vna progreſsion geometrica, ſe ha de ſaber primero ſu denominador; eſto es, el denominador de la razon en que proceden ſus numeros; el qual ſe halla partiendo qualquiera termino por ſu inmediato menor. Hallado el denominador ſe continuarà la progreſsion geometrica, ſi es aſcendiente, multiplicando el numero, de quien ſe ha de proſeguir, por el denominador hallado; y el producto ſerà el termino ſiguiente: y multiplicando èſte por el meſmo denominador, ſe hallarà el otro que ſe ſigue: y aſsi infinitamente.

Exemplo. Eſta progreſsion 3. 6. 12. ſe continuarà aſsi: partiendo 12. por 6. es el quociente 2. que es el denominador: multiplico pues 12. por 2. y el producto 24. es el termino ſiguiente: multiplico 24. por 2. y el producto 48. es el otro termino; y aſsi de los demàs.

Pero ſi la progreſsion geometrica fuere deſcendiente, ſe partirà el numero de quien ſe ha de proſeguir, por el denominador, y el quociente ſerà el termino que ſe ſigue: y partiendo otra vez èſte por el meſmo denominador, el quociente ſerà el otro termino; y aſsi infinitamente.

Exemplo. Eſta progreſsion 48. 24. 12. ſe ha de proſeguir deſcendiendo: parto 12. por el denominador 2. y el el quociente 6. es el termino que se sigue: parto 6. por 2. y el quociente 3. es el otro termino. La razon consta de la mesma naturaleza de las razones.

Aqui se vè claramente, que qualquiera progresion geometrica, tanto subiendo, como baxando, puede proceder infinitamente.

PROP. XXI. Theorema.

En toda progresion geometrica, el producto de los extremos es igual al producto de qualesquiera dos terminos igualmente distantes de dichos extremos.

EXplicacion. Digo, que en la progresion A, el producto de 2. por 64. que es 128. es igual al producto de 4. por 32. que tambien es 128. y al producto de 8. por 16.

A. 2. 4. 8. 16. 32. 64.

Demonstracion. [2. del lib. 4. de este trat.) Por ser proporcionales 2. à 4. como 32. à 64. el producto de 2. por 64. es igual al producto de 4. por 32. Tambien porque 4. à 8. es como 16. à 32. el producto de 4. por 32. serà igual al producto de 8. por 16. Luego el producto de 2. por 64. tãbien serà igual al producto de 8. por 16. que es lo que se pretende probar.

PROP. XXII. Theorema.

En la progresion geometrica, que consta de terminos impares, el quadrado del medio es igual al producto de qualesquiera terminos igualmente distantes de dicho medio.

EXplicacion. La progresion geometrica B, consta de cinco terminos: digo, q̃ el quadrado de 8. esto es, el producto que sale de la multiplicacion de 8. por 8. es igual al producto de 2. por 32. y al de 4. por 16.

B. 2. 4. 8. 16. 32.

Demonstrac. (3. lib. 4. Arith.) Por ser 2. 8. 32. proporcionales, el producto de 2. por 32. es igual al producto de 8. por

por 8. Lo mesmo dirè del producto de 4. por 16. Luego es evidente la propuesta.

PROP. XXIII. Theorema.

En toda progresion geometrica, si el producto de dos terminos, se parte por otro qualquier termino, el quociente serà vn termino tan distante del vno de los terminos multiplicados, quanto el partidor dista del otro.

EXplicacion. Sea la progresion geometrica A, y multipliquese 64. por 2. y el producto 128. partase por 32. Digo, que el quociente 4. distarà tanto del 2. quanto el 32. dista del 64. porque el quociente 4. multiplicando al partidor 32. restituye al dividendo 128. Luego el producto de 4. por 32. es igual al producto de 2. por 64. Luego como los productos igualmente distantes sean iguales: si el producto de 2. por 64. se parte por 32. ha de salir el otro termino 4. igualmente distante.

A. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128.

PROP. XXIV. Theorema.

El vltimo termino de qualquiera progresion geometrica, incluye tantas vezes la suma de los demàs terminos, quantas vnidades tiene el denominador menos vna; y ademàs de esto incluye vna vez al primer termino.

EXplicacion. Sea la progresion geometrica A, cuyo denominador es 3. Digo, que el vltimo termino 972. incluye la suma de los restantes terminos, que es 484. dos vezes; es à saber, tantas quantas vnidades ay en el denominador 3. menos 1. y ademàs de esto incluye al primer termino 4. vna vez.

A. 4. 12. 36. 108. 324. 972.

Demonstracion. El denominador 3. multiplicando el primer termino 4. produce al 12. y como lo mesmo sea multiplicar 4. por 3. que multiplicar 4. por 2. y añadir 4. [1. 2. Eucl.)

Eucl.] luego 12. incluye al primer termino 4. dos vezes: esto es, tantas quantas ay vnidades en el denominador 3. menos vna: y ademàs incluye vna vez al primer termino 4. Tambien multiplicar 12. por 3. es lo mesmo que multiplicar 12. por 2. y añadir vna vez el 12. porque de qualquier manera sale el producto 36. Y como el 12. resulte, como diximos, de la multiplicacion de 4. por 2. y suma del mesmo 4. se sigue, que el tercer termino 36. resulta de la multiplicacion del segundo por 2. y del primero por 2. esto es, de la multiplicacion de la suma del primero y segundo por 2. y de la suma del 4. termino primero: Luego 36. incluye tantas vezes la suma de los precedentes 4. y 12. quantas vnidades tiene el denominador 3. menos vna: y ademas incluye al primer termino 4. vna vez. De la mesma suerte se continuarà la demonstracion, hasta probar, q̃ el vltimo termino 972. incluye dos vezes la suma de los demàs terminos: y vna vez al primero: que es lo que se avia de demonstrar.

PROP. XXV. Theorema.

En la progresion geometrica, la diferencia entre el extremo menor, y su inmediato, tiene la mesma razon con dicho menor extremo; que la diferencia del extremo mayor, y menor, con la suma de todos los terminos precedentes al extremo mayor.

E*xplicacion.* Sea la progresion geometrica 4. 12. 36. &c. La diferencia del extremo 4. y su consequente es 8. La diferencia del extremo mayor 324. y el menor 4. es 320. La suma de los terminos 4. 12. 36. 108. es 160. Digo, que son proporcionales 4. 8. 160. 320.

4.	12.	36.	108.	324.
8.		160.		320.

Demonstracion. El vltimo termino [24.] incluye tantas vezes la suma de los demàs terminos, quantas vnidades tiene el denominador de la progresion, menos vna: è incluye vna vez al primero. Tambien el segundo termino incluye tantas vezes al primero, quantas ay vnidades en el denominador menos vna; è incluye asimesmo vna vez al primer termino: quitemos pues de entrambas partes el primer termino, y quedarà 320. diferencia del primero y vltimo, que incluye tantas vezes la suma de sus antecedentes 160. quantas vnidades tiene el denominador, menos vna: y quedarà tambien 8. diferencia del primero, y segundo, que asimesmo incluye tantas vezes al primero 4. quantas tiene vnidades el denominador, menos vna: Luego la mesma razon ay de 320. à 160. que de 8. à 4.

Este Theorema es el que demuestra Euclides en la proposicion 3. del lib. 9. de quien deducen grandes arcanos en la progresion infinita el P. Gregorio à S. Vicencio, y el P. Andres Tacquet, ambos de la Compañia de Jesus.

Corolarios.

1 *SI los terminos de la progresion proceden en razon dupla, el vltimo termino, menos el primero, es igual à todos los precedentes, como en esta progesion* 1. 2. 4. 8. 16. *el* 16. *menos* 1. *esto es,* 15. *es igual à la suma de todos los demàs. La razon es, porque* 2.--1. *à* 1. *es como* 16.-- 1. *à la suma sobredicha:* 2. *menos* 1. *es igual à* 1. *luego* 16. *menos* 1. *es igual à dicha suma.*

2 *Si los terminos proceden en tripla: el vltimo menos el primero, es duplo de todos los terminos precedentes. Si proceden en quadrupla, es triplo de dicha suma; y assi de los demàs. Demuestrase como el corolario primero.*

De estos Theoremas se infiere bastantemente la resolucion de los Problemas de progresion geometrica: pero añado el siguiente, que aunque supone noticias de la Arithmetica superior, serà de mucha vtilidad.

PROP. XXVI. Theorema.

En toda progresion geometrica, el segundo termino es igual al producto del denominador por el termino primero; el tercer termino es igual al producto de la primera potestad del denominador, por el termino primero: el quarto es igual al producto de la segunda potestad del denominador por el primero: el quarto, al de la tercera por el mesmo primero; y assi de los demàs.

Sea

SEa la progresſion geometrica A. cuyo denominador es 3. Multipliqueſe 3. por ſi meſmo, y producirà 9. ſu poteſtad primera: Multipliqueſe 9. por 3. y el producto 27. ſerà ſu poteſtad ſegunda: multipliqueſe 27. por 3. y ſale 81. ſu poteſtad tercera; y 81. por 3. haze 243. poteſtad quarta, como aqui ſe vè.

A.	4.	12.	36.	108.	324.	972.
		3.	9.	27.	81.	243.

Digo, que el primer termino 4. multiplicado por 3. haze el ſegundo termino 12. tambien 9. multiplicado por 4. haze 36. termino tercero: 27. multiplicado por 4. haze 108. termino quarto: 81. multiplicado por 4. produze 324. termino quinto, &c.

La razon de eſto proviene de la meſma naturaleza de la multiplicacion, y es ſemejante à la del theorema antecedente; y porque ſeria prolixa ſu explicacion en numeros, la propongo ſolamente en los caracteres literales, para que el eſtudioſo, deſpues de aver viſto la logiſtica de dichos caracteres, pueda entender con ſuma facilidad el fundamento de eſta propoſicion.

En lugar pues de los ſeis terminos numericos, ſubſtituyanſe los ſeis literales ſiguientes; cuyo denominador ſea q.

Progreſsion.	b.	c.	d.	f.	g.	h.
Denominador.	q.					

El termino c procede de la multiplicacion de b por q. Luego el ſegundo termino c es lo meſmo que qb. Aſsimeſmo el tercer termino d procede de la multiplicacion de c por q: eſto es, qb por q. Luego es qqb, que es lo meſmo que la primera poteſtad de q, multiplicada por b. Tambien el quarto termino f procede de la multiplicacion de d por q: eſto es, de qqb por q. Luego es qqqb: aſsi ſe hallarà ſer g, lo que qqqqb, &c. Luego los terminos de la progreſsion ſalen de la multiplicacion continua del denominador, y ſus poteſtades por el termino primero: como aqui ſe vè.

Progreſsion.	b.	qb.	qqb.	qqqb.	qqqqb. &c.
Poteſtades del denominador.	q.	qq.	qqq.	qqqq.	

PROP.

PROP. XXVII. Problema.

Dados el primero y vltimo, terminos de vna progreſsion geometrica, y el denominador, hallar la ſuma de la progreſsion, y el numero de los terminos.

DAdos el primer termino 4. y el vltimo 972. y el denominador 3. ſe pide la ſuma de la progreſsion. Reſteſe el menor extremo 4. del mayor 972. y el reſiduo 968. partaſe por el denominador 3. menos la vnidad: eſto es, por 2. y el quociente 484. ſerà la ſuma de la progreſsion menos el mayor extremo, añadaſe pues el mayor extremo 972. y ſerà 1456. ſuma de toda la progreſsion.

Demonſtracion. [25.] el vltimo termino 972. incluye tantas vezes la ſuma de los demàs terminos, quantas vnidades tiene el denominador, menos vna, y ademàs incluye al primer termino: luego reſtando el primer termino 4. del vltimo 972. el reſiduo 968. incluirà dos vezes la ſuma de los demàs terminos; eſto es, tantas quantas vnidades tiene el denominador 3. menos vna: luego partiendo 968. por 2. el quociente es la ſuma de toda la progreſsion, menos el vltimo termino; y añadido eſte, ſe ſabrà toda.

Para hallar el numero de los terminos, multipliqueſe el extremo menor por el denominador diferentes vezes, haſta que ſalga el extremo mayor, y ſe tendràn todos los terminos.

PROP. XXVIII. Problema.

En la progreſsion geometrica, dados los extremos, y la ſuma de la progreſsion, hallar el denominador, y el numero de los terminos.

SEa el vn extremo 4. y el otro 972. y la ſuma de todos 1456. ſe pide el denominador. *Operacion.* Reſteſe el menor extremo 4. del mayor 972. Reſteſe tambien el mayor 972. de la ſuma 1456. y ſerà el reſiduo 484. partaſe el vn reſiduo por el otro; eſto es, 968. por 484. y el quociente 2. ſerà el denominador menos vno: añadaſe pues la vni-

vnidad, y ſerà 3. el denominador.

Demonſtracion. Si la diferencia de los extremos, ſe parte por el denominador menos 1. ſale la ſuma de la progreſſion menos el mayor extremo (28.) luego ſi dicha diferencia de los extremos ſe parte por la ſuma de la progreſsion, menos el mayor extremo, el quociente ſerà el denominador menos 1. aſsi como porque partiendo 8. por 4. ſale 2. partiendo 8. por 2. ſale 4.

Hallado el denominador, ſe ſabrà por la antecedente el numero de los terminos.

PROP. XXIX. Problema.

Dado el mayor extremo, la ſuma de la progreſsion, y el denominador, hallar el menor extremo, y el numero de los terminos.

DAdos el mayor extremo 972. la ſuma 1456. y el denominador 3. ſe pide el menor extremo. *Operacion.* Quiteſe de la ſuma 1456. el mayor extremo 972. Quiteſe del denominador 3. la vnidad, y quedaràn 484. y 2. Multipliqueſe 484. por 2. y el producto, 968. reſteſe del mayor extremo 672. y el reſiduo 4. y ſerà el menor extremo que ſe buſca.

Demonſtracion. Reſtando el mayor extremo 972. de la ſuma total 1456. el reſiduo 484. es la ſuma de los demàs terminos; y eomo (25.) el mayor extremo incluya la ſuma de los demàs tantas vezes como ay vnidades en el denominador, menos vna, y ademàs incluìa al primer termino; ſi el producto de 484. por el dcnominador, menos la vnidad, ſe reſta del mayor extremo, es forçoſo que el reſiduo ſea el primer termino. Tambien conocidos los extremos, y el denominador, ſe hallarà (28.) el numero de los terminos.

PROP. XXX. Problema.

Dados el menor extremo, la ſuma de la progreſsion, y el denominador, hallar el mayor extremo, y el numero de los terminos.

Sea

SEa el menor extremo 4. la ſuma ſea 1456. y el denominador 3. Buſcaſe el mayor extremo. *Operacion.* Al denominador quiteſele la vnidad, y ſerà 2. Multipliqueſe por eſte 2. la ſuma 1456. y ſerà el producto 2912. añadaſe à eſte producto el extremo menor 4. y ſerà 2916. Partaſe eſta ſuma por el denominador 3. y el quociente 972. ſerà el mayor extremo.

Demonſtracion. [28.] Para hallar la ſuma ſe reſta el menor extremo del mayor, y el reſiduo ſe divide por el denominador menos vno, y al quociente ſe añade el mayor extremo: luego ſi la ſuma ſe multiplica por el denominador menos 1. y al producto ſe añade el menor extremo, y todo ſe divide por el denominador, ſaldrà el mayor extremo, que es reſolver lo que hizo la ſuma. Los terminos ſe hallaràn por la 28.

PROP. XXXI. Problema.

Dados el mayor extremo, numero de los terminos, y el denominador, hallar el menor extremo, y la ſuma.

EL mayor extremo es 972. el numero de los terminos es 6. y el denominador 3. Pideſe el menor extremo. *Operacion.* Eſcrivaſe el denominador 3. cinco vezes, eſto es, tantas quantos ſon los terminos menos vno, en eſta forma 3.3.3.3.3. Multipliqueſe el primer 3. por el ſegundo: y el producto 9. por el 3. ſiguiente: y el producto 27. por el quarto 3. y el producto 81. por el vltimo 3. y ſerà el vltimo producto 243. Partaſe el vltimo termino 972. por 243. y el quociente 4. ſerà el menor extremo.

Demonſtracion. [27.] Si la poteſtad 243. ſe multiplica por el menor termino 4. reſulta el vltimo, y mayor extremo 972. luego partiendo eſte por 243. ſe hallarà el menor termino 4.

Para hallar la ſuma reſteſe el menor extremo 4. del mayor 972. y el reſiduo 968. partaſe por el denominador 3. menos 1. ò por 2. y añadiendo el vltimo termino al quociente, ſe hallarà la ſuma 1456.

PROP. XXXII. Problema.

Dados el menor extremo, el denominador, y el numero de los ter-

 mi-

minos, hallar el mayor extremo, y la ſuma.

SEa el menor extremo 4. el numero de los terminos 6. y el denominador 3. Pideſe el mayor extremo. *Operacion*. Eſcrivaſe, como en la prop. paſſada, cinco vezes el denominador, y hecha la multiplicacion continua, ſerà el vltimo producto 243. Multipliqueſe 243. por el menor termino 4. y el producto ſerà el mayor extremo 972. La razon es la meſma que la del probl. antec. La ſuma ſe hallarà por la prop. 28.

PROP. XXXIII. Problema.

Dado el mayor extremo, y la ſuma de la progreſsion, hallar el menor extremo, y el denominador.

COnocido el mayor extremo 972. y la ſuma 1456. ſe pide el menor extremo, y el denominador. *Operaciõ*. Reſteſe el mayor extremo 972. de la ſuma 1456. y ſerà el reſiduo 484. Partaſe el meſmo mayor extremo 972. por eſte reſiduo 484. y ſerà el quociente 2. y ſobraràn 4. y eſtos 4. que ſobran, ſon el primer termino: y el quociente 2. con vna vnidad ſerà el denominador 3.

Demonſtracion. Reſtando èl mayor extremo, de la ſuma de la progreſsion, el reſiduo 484. es la ſuma de los demas terminos: y como el vltimo termino incluya eſta ſuma tantas vezes, quantas vnidades tiene el denominador, menos vna; y ademas de eſto incluya vna vez al primer termino [25.] Es forçoſo, que partiendo el vltimo termino, 972. por dicha ſuma 484. ſea el quociente 2. eſto es el denominador, menos la vnidad, y ſobren 4. que ſon el menor extremo.

PROP. XXXIV. Problema.

Dados el numero de los terminos, la ſuma de todos, y el denominador, hallar los extremos.

DAdos el numero de los terminos 6. y la ſuma 1456. y el denominador 3. ſe buſca el menor extremo. *Operacion*. Por ſer el numero de los terminos 6. y el denominador 3. formeſe vna progreſsion cuyo primer termino ſea la vnidad, y el ſegundo 3. deſuerte que tenga ſeis terminos: ſumeſe eſta ſegunda progreſsion, y ſerà la ſuma 364.

364. Partaſe la ſuma 1456. por 364. y el quociente ſerà el menor extremo 4.

A	4.	12.	36.	108.	324.	972.
B	1.	3.	9.	27.	81.	243.

Demonſtracion. Sea la progreſsion de la pregunta, A, y la que ſe ha formado en la ſolucion ſea B. Eſto ſupueſto, porque tanto los terminos de la pregunta A, como los de B, proceden en tripla, por tener vn meſmo denominador 3. ſerà como el primer termino de A al ſegundo; aſsi el primero de B al ſegundo, y aſsi todos los demas: y alternando, como el primero de B, al primero de A, aſsi el ſegundo de B, al ſegundo de A, y aſsi de los demas: luego como 1. que es vn antecedente, à 4. ſu conſequente: aſsi toda la ſuma de la progreſsion B, ò ſuma de los antecedentes de B, que es 364. à la ſuma 1456. que es la ſuma de los conſequentes de A: que es lo meſmo que, como 364. à 1456. aſsi 1. à 4. y pues el tercer termino de eſta regla de tres, es 1. que no aumenta la multiplicacion, baſta partir 1456. por 364. y el quociente ſerà el menor extremo 4.

Conocido el menor extremo, el denominador, y la ſuma, ſe hallarà el mayor extremo por la prop. 31.

LIBRO VI.

DE LAS COMBINACIONES.

COmbinacion, ſegun ſu ethimologia, no es otro, que vna comparacion de coſas tomadas de dos en dos; pero aqui ſe toma mas vniverſalmente por todas las partes, agregados, ò conjunciones poſsibles, que reſultan de vn numero de coſas determinado, ſegun las diferentes diſpoſiciones que pueden tener las meſmas coſas, comparadas entre ſi, ò con otras. Como por exemplo, en tres coſas ay muchas combinaciones;porque demas de poderſe tomar cada vna de por ſi, ſe puede cada vna juntar con qualquiera de las otras, ò con entrambas.

Reduzenſe à dos eſpecies, *Abſoluta*, y *Reſpectiva*. La *Abſoluta* conſidera ſolo las coſas que componen vn numero determinado, comparandolas entre ſi; como en el exemplo referido de tres. La *Reſpectiva* conſidera las meſmas coſas, comparandolas con otras; como ſi tres coſas de vn genero ſe comparan con ſeis de otro genero.

Cada vna de eſtas eſpecies ſe ſubdivide en otras tres. La primera, quando las diſpoſiciones que reſultan, hecha la combinacion, ſe diferencian *en quanto à la ſubſtancia*, por tener alguna de las coſas, que no ſe halla en la otra. La ſegunda, quando ſiendo las coſas las meſmas, tienen ſegun el orden que eſtàn colocadas, diferentes diſpoſiciones *en quanto al lugar*. La tercera, que ſe compone de las dos, cóſidera en qualquier numero dado de coſas, demas de las diſpoſiciones diferentes, que pueden tener *en quanto à la ſubſtancia*, las que cada vna de eſtas puede tener ſegun la diferente ſituacion, *en quanto al lugar*. Sirva de exemplo el meſmo numero de tres coſas, y ſean A, B, C, en quien ay ſiete combinaciones *en quanto à la ſubſtancia*, A. B. C. AB. AC. BC. ABC. ſeis *en quanto al lugar* ABC. BCA. CAB. CBA. BAC. ACB. y quince *en quanto à la ſubſtancia, y lugar*. A. B. C. AB. BA. AC. CA. BC. CB. ABC. BCA. CAB. CBA. BAC. ACB. Y ſon todas las combinaciones poſsibles *abſolutas*, las quales, ſi ſe comparan con otras de otro numero, daràn las *reſpectivas*.

A cada vna de dichas combinaciones llamamos indiferentemente *elecciones*, y ſolo llamamos *conjunciones* à las que tienen mas de la vnidad, las quales pueden ſer de dos coſas, y ſe llaman de *Binarios*, ù de tres, y ſe llaman de *Ternarios*, ù de quatro, y ſe llaman de *quaternarios*, &c. A demas de eſto, las coſas meſmas, que ſe han de combinar, pueden ſer de tres maneras; porque pueden ſer, ò todas diferentes, como ABC, ò todas ſemejantes, como AAA, ò parte diferentes, y parte ſemejantes como AAB.

CA-

CAPITVLO I.

DE LAS COMBINACIONES EN QVANTO à la ſubſtancia.

PROP. I. Problema.

Dado vn numero de coſas todas ſemejantes, hallar todas ſus combinaciones en quanto à la ſubſtancia.

Regla. Veaſe quantas ſon las coſas ſemejantes, y tantas ſeràn ſus combinaciones. *Exemplo*. Sean dadas quatro AAAA. Digo, que ſolo pueden tener quatro combinaciones ſubſtancialmente diferentes, quales ſon A. AA. AAA. AAAA. La razon es, porque ſiendo todos ſemejantes, no pueden tener otra diferencia que la repeticion: luego ſi tomo la coſa vna vez, ò dos vezes, ò tres, &c. haſta el numero dado, ſeràn ſus combinaciones, iguales al numero. c

PROP. II. Problema. 1

Dado vn numero de coſas todas diferentes, hallar todas ſus f
combinaciones en quanto à la ſubſtancia. fc

Regla. Eſcrivaſe vna progreſsion dupla deſde la 2
vnidad, que conſte de tantos terminos, co- s
mo ſon las coſas: y la ſuma de dichos terminos da- sc
rà la ſuma de todas las combinaciones poſsibles. sf
Exemplo. Vn Philoſopho deſea ſaber, de quantas sfc
maneras ſe pueden combinar las quatro primeras 4
qualidades, *Calor*, *Frialdad*, *Humedad*, y *Sequedad*. h
Eſcriva en proporcion dupla quatro numeros, deſ- hc
de la vnidad: 1. 2. 4. 8. y en la ſuma de ellos, que hf
es 15. hallarà la de todas las combinaciones. hfc

Demonſtracion. Cada coſa, que ſe añade à otro hs
numero de coſas, duplica ſus combinaciones, y hsc
añade vna mas; porque buelve à contar todas las hsf
combinaciones de dicho numero, ſuponiendolas: hsfc
añade otras tantas, juntandoſe con todas; y vna 8

mas,

mas, que es la mesma cosa tomada de por si: luego (25.7. de este Trat.) la suma de las combinaciones serà igual à la suma de dicha progression dupla. Haràse mas evidente en la presente Tabla de las quatro primeras qualidades, dispuesta segun el orden natural, en que se van augmentando las combinaciones, al passo que las cosas.

PROP. III. Problema.

Dado vn numero de cosas todas diferentes, hallar los binarios, ternarios, quaternarios, &c.

REgla 1. Escrivase vna progression arithmetica natural, que conste de tantos numeros como cosas. La suma de todos los numeros inferiores al de las cosas, darà los binarios: la suma de los binarios de dichos numeros, darà los ternarios: la de sus ternarios, los quaternarios; y assi de los demas. *Exemplo.* Vn Pintor tiene en su paleta cinco colores, Blanco, Azul, Verde, Colorado, y Pagizo; desea saber las mezclas, ò combinaciones, que puede hazer de ellos para la pintura. Escriva pues, vna progression arithmetica natural hasta 5. que es el numero de los colores, en esta forma: 1.2.3.4.5. Digo, que la suma de los numeros inferiores 1.2.3.4. que es 10. dà los Binarios de 5. Y porque por la mesma regla los binarios de 4. cosas son 6. los de 3. son 3. los de dos 1. sume todos estos binarios 1. 3. 6. y la suma 10. darà los ternarios de 5. Mas, porque los ternarios de 4. por la mesma regla son 4. y los de 3. son 1. sume estos ternarios 4. 1. y saldran 5. que son los quaternarios de 5. cosas. Y finalmente, porque en 4. no ay mas que vn quaternario, solo avrà en 5. vn Quinario: con que queda concluìda la operacion; y sabidas todas las mezclas, ò combinaciones, que vn Pintor puede hazer de 5. colores, esto es, 5. senzillos: 10. compuestos de dos: otros 10. de tres: 5. de quatro: y vno de todos, que hazen la suma de 31. colores diferentes. Esto se entiende tomando de cada color determinada cantidad; porque variada la cantidad, como esta puede ser mas, ò menos indefinidamente, resultaràn infinitos colores, que aunque no se distinguiràn substancialmente de los 31. se diferenciaràn por la mayor, ò menor viveza, segun la mayor, ò menor cantidad, que mezclàre de cada especie.

Demonstracion. Qualquiera cosa que se añade à vn numero de cosas determinado, por quanto se puede juntar con cada vna de ellas de por si, añade tantos binarios à los que avia producido dicho numero, quantas son sus cosas: y pudiendose dezir lo mesmo de todos los otros numeros respeto de los proximè menores hasta la vnidad, seràn los binarios de qualquier numero iguales à la suma de todos los antecedentes. Esto mesmo, y por la mesma razon, dirè de los ternarios respeto de sus binarios; y de los quaternarios respeto de los ternarios, &c. luego la suma de los numeros inferiores al de las cosas, darà los binarios; la de los binarios, los ternarios: y assi de los demas.

Regla 2. Supuesta la mesma progression arithmetica natural, multiplico el numero mayor por el proximè menor, y el producto partido por dos, dàrà en el quociente los binarios: Multiplico despues estos binarios por el numero que se sigue retrocediendo en la mesma progression, y el producto partido por 3. darà los ternarios: el producto de estos, y del otro numero que se sigue, partido por 4. darà los quaternarios; y assi de los demas, hasta llegar à la vnidad, con que empieza la progression.

Exemplo. Danse para combinar 4. cosas, y por ellas escrivo la progression natural 1.2.3.4. Multiplico 4. por 3. y el producto 12. partido por 2. dà 6. binarios. Multiplico despues 6. por 2. que es el numero que se sigue en la progression, retrocediendo; y el producto 12. partido por 3. dà en el quociente 4. ternarios: multiplico finalmente 4. por 1. y el producto 4. partido por 4. dà en el quociente 1. quaternario; con el qual sumadas todas las antecedentes daràn las 15. combinaciones possibles.

En esta forma se encontraràn las de qualquier otro numero, advirtiendo siempre, que el partidor que se ha de tomar para encontrar los binarios, es 2. para los ternarios 3. para los quaternarios 4. &c. y por qualquiera de dichas dos reglas se podrà formar, y estender infinitamente la tabla que se sigue.

Co-

Coſas,	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10. &c.
Binarios,		1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36.	45.
Ternarios,			1.	4.	10.	20.	35.	56.	84.	120.
Quaternarios,				1.	5.	15.	35.	70.	126.	210.
Quinarios,					1.	6.	21.	56.	126.	252.
Senarios,						1.	7.	28.	84.	210.
Septenarios,							1.	8.	36.	120.
Octonarios,								1.	9.	45.
Nonarios,									1.	10.
Denarios,										1.

Corolario.

Para ſaber en qualquier numero de coſas, quantas vezes ſe hallarà cada coſa en los binarios, quantas en los ternarios, &c. ſervirà la ſiguiente Regla: Obſerveſe en el numero proximè menor quantas ſon las coſas, quantos los binarios, ternarios, &c. y dirè, que cada coſa del numero dado ſe halla en ſus binarios tantas vezes como coſas ay en el antecedente: y en los ternarios, tantas vezes como ay binarios: y en los quaternarios, tantas como ay ternarios, &c.

PROP. IV. Problema.

Dado vn numero de coſas todas diferentes, hallar quales ſean en particular todas las combinaciones en quanto à la ſubſtancia.

R*Egla.* Eſcrivanſe en vna linea las coſas, y juntado à cada vna con cada vna de las que ſe le ſiguen, ſaldran los binarios: juntando cada binario con cada vna de las coſas que ſe le ſiguen, ſaldràn los ternarios, y lo meſmo de los quaternarios, &c. La razon es, porque los binarios reſultan de juntarſe vna coſa con otra: los ternarios, de juntarſe vna con dos: los quaternarios, de juntarſe vna con tres, &c.

Exemplo. Vn Maeſtro de Capilla deſea ſaber las compoſiciones, que puede hazer de las cinco conſonancias, *Tercera, Quinta, Sexta, Octava*, y *Decima*. Sabràlo aſsi: Eſcriva por ſu orden los nombres de dichas conſonancias, ò para mayor facilidad ſus iniciales T Q S O D. Junte la T con cada vna de las quatro que ſe le ſiguen. La Q, con las tres. La S, con las dos. La O con vna; y tendrà los 10. binarios, y

y en ellos otras tantas compoſiciones de 3. vozes. Si quiere hallar los ternarios, junte cada vno de eſtos binarios con las letras q̃ ſe le ſiguen, omitiendo aquellos, que por acabar en la vltima letra no ſe les ſigue ninguna: y lograrà otras 10. compoſiciones de quatro vozes. Junte deſpues del meſmo modo los ternarios con cada vna de las letras que ſe le ſiguen, y hallarà cinco quaternarios, y con ellos otras tantas compoſiciones de 5. vozes: y finalmente, juntando el primer quaternario con la D, que ſe le ſigue, omitiendo los demas por no ſeguirſeles ninguna, tendrà vn quinario, ò compoſiciõ de 6. vozes, y con ella todas las poſsibles, como aqui ſe vè.

TQ
TS
TO
TD
QS
QO
QD
SO
SD
TQS
TQO
TQD
TSO
TSD
TOD
QSO
QSD
QOD
SOD
TQSO
TQSD
TQOD
TSOD
QSOD
TQSOD

PROP. V. Problema.

Dado vn numero de coſas, en que ay algunas ſemejantes, hallar todas ſus combinaciones en quanto à la ſubſtancia.

R*Egla.* Eſcrivanſe los numeros de cada coſa, ſegun mas, ò menos ſe repitieren, añadiendo à cada vno vna vnidad. Multipliquenſe continuamente, y el producto, menos vno, darà las combinaciones poſsibles.

Exemplo. Pregunta vn Jugador, quantas ſon las combinaciones que pueden tener, en quanto à la ſubſtancia ſolamente, las piezas del Axedrez: y por quanto las piezas ſon 16. eſto es, 8. Peones, 2. Roques, 2. Cavallos, 2. Arfiles, vn Rey, y vna Dama, añada à cada vno de eſtos numeros vna vnidad, y eſcriva la ſerie ſiguiente: 9.3.3.3.2.2. cuya multiplicacion continuada, le darà en el producto 972. menos vno, la reſpueſta: eſto es, que todas las combinaciones poſsibles ſon 971.

Demonſtracion. Sean 3. coſas ſemejantes, à quienes ſe junte te vna diferente: como [1.] las 3. ſemejantes ſolo tengan 3. combinaciones; y (2.) cada coſa que ſe añade à qualquier numero, añade otras tantas combinaciones, y vna mas, reſultaràn dos vezes tres combinaciones, y mas vna, que es lo meſmo, que el producto de 4. por 2. menos vna. Si la coſa, que ſe añade à las tres, ſe repitieſſe dos vezes, como (1.) tiene ſolas dos combinaciones: y (2.) cada vna añadida à las tres, añade otras tantas, y vna mas, ſerian ſus combinaciones tres vezes tres, y dos mas, que es lo meſmo, ſegun la regla, que multiplicar 4. por 3. y quitar vna del producto. Por la meſma razon, ſi ſe repitieſſe 3. vezes, ſerian ſus combinaciones tres vezes 4. y 3. mas, ò el producto de 4. por 4. vna menos, que es lo meſmo. Y aſsi de las demas.

PROP. VI. Problema.

Dado vn numero de coſas, en que ay algunas ſemejantes, hallar los binarios, ternarios, &c.

Regla. Eſcrivanſe primero las ſemejantes, ſean de vna, ù de muchas eſpecies, y deſpues las demas; y por ellas vna progreſsion natural que empieze de la vnidad, y conſte de tantos terminos, como coſas, repitiendo vn meſmo numero, quando ſe repite vna meſma coſa: como ſi de quatro coſas, las dos ſe repiten tres vezes, y otra dos, ſerà la progreſsion 111222334. Sumo pues qualquiera de eſtos numeros [excepto la primera vnidad] ò con el binario del numero proximè menor, ſi el numero que ſe ſigue fueſſe igual; ò con ſu meſmo binario, ſi el numero que ſe ſigue es mayor, y la ſuma darà el binario del numero ſiguiente; ſumo deſpues los binarios de cada numero, ò con el ternario del numero proximè menor, ſi el numero que ſe ſigue fueſſe igual; ò con ſu meſmo ternario, ſi el numero que ſe ſigue es mayor, y la ſuma darà el ternario del numero ſiguiente. Hago lo meſmo de los ternarios reſpeto de los quaternarios, y aſsi de los demas. Todo lo qual ſe harà con facilidad ſuponiendo [1.] que el primer binario, ternario, &c. ſiempre es vnidad: como en eſta tabla.

Exemplo. Vn Poeta Caſtellano, que regularmente no vſa mas que de ſiete generos de verſos, eſto es, de 5. de 6. de

de 7. de 8. de 9. de 10. y de 11. ſylabas, deſea ſaber, quantas ſean las eſpecies de metros poſsibles; y mas en particular, quantos los pareados, Tercetos, Quartillas, Quintillas, Sextinas, Septenas, Octavas, Novenas, y Dezimas. Diſponga pues la progreſsion de ſiete numeros, repitiendo cada vno diez vezes, en eſta forma,

Coſas	1	1	1	2	2	2	3	3	4
Bin.		1	1	2	3	3	5	6	9
Tern.			1	2	3	4	7	9.	15
Quater.				1	2	3	7.	10.	19
Quin.					1	2	5	9.	19
Senar.						1	3	6.	15
Sept.							1	3	9
Oct.								1	4
Non.									1

111111111122222222223333333333 44, &c. y ſume como en la tabla precedente, y hallarà 20774. metros diferentes, eſto es, 28. eſpecies de Pareados: 84. de Tercetos: 204. de Quartillas: 500. de Quintillas: 956. de Sextinas: 1742. de Septenas: 3223. de Octavas: 5419. de Novenas: y 8616. de Decimas.

Demonſtracion. Infiereſe de las prop. 1. 2. y 5. porque cada numero añadido à otro, ſupone los binarios del numero proximè menor, y añade tantos mas, quantas ſon las coſas con quienes ſe junta: y aſsi meſmo ſupone los ternarios del numero proximè menor, y añade tantos terminos, como ſon los binarios, con quienes ſe junta: lo meſmo dirè de los quaternarios, quinarios, &c.

PROP. VII. Problema.

Dado vn numero de coſas, en que ay algunas ſemejantes, hallar quales ſean en particular ſus combinaciones en quanto à la ſubſtancia.

Regla. Eſcrivanſe en vna linea los nombres de las coſas, ò ſus iniciales, poniendo en primer lugar las que ſe repiten, y deſpues las otras: y en lo demas guardeſe el methodo que ſe diò en la prop. 4. y ſe hallaràn en particular todas las combinaciones. La razon conſta de la prop. citada.

Exemplo. Quiere el meſmo Poeta ſaber, quales ſon las eſpecies de Romances mas vſados; y porque los generos de de versos de que constan, son 4. esto es, de 5. de 6. de 7. y de 10. sylabas: y cada vno se puede repetir 4. vezes, valgase por los 5. 6. 7. de los mesmos numeros, como si fuessen cosas, y por el 10. de la D, y escrivales en vna linea assi 5555666677 77DDDD: junte primero el 5. con todos los numeros, ò letras, que se le siguen, cuidando no repetir ninguna combinacion; y lo mesmo del 6. del 7. y del D, respectivamente à las que se le siguen, y logrará saber de passo, que son 10. los binarios, ò pareados, que pueden resultar de dichos versos. Passe mas adelante, y junte todos los dichos binarios, cada vno con los numeros, ò letras, que se le siguen; y hallarà tambien de passo en 20. ternarios, veinte especies de tercetos: junte finalmente todos estos ternarios con las letras, ò numeros que se les siguen; y hallarà en 35. quaternarios todas las especies de Romances.

55	555D
56	5566
57	5567
5D	556D
66	5577
67	557D
6D	55DD
77	5666
7D	5667
DD	566D
555	5677
556	567D
557	56DD
55D	5777
566	577D
567	57DD
56D	5DDD
577	6666
57D	6667
5DD	666D
666	6677
667	667D
66D	66DD
677	6777
67D	677D
6DD	67DD
777	6DDD
77D	7777
7DD	777D
DDD	77DD
5555	7DDD
5556	DDDD
5557	

PROP. VIII. Problema.

Dado vn numero determinado de cosas, hallar las combinaciones respectivas, q̃ pueden tener las mesmas cosas entre si en quanto à la substancia.

R*Egla.* Halladas las combinaciones absolutas, dexando por inutil la que consta de todos los terminos, multiplico las otras por dos, y el producto darà todas las comparaciones possibles.

Demonstracion. Cada combinacion de cosas se compara con todas las demas cosas, que ay en el dicho numero: Luego las combinaciones se han de tomar dos vezes, vna como fundamento, y otra como termino de la comparacion.

Exemplo. Un Geometra desea saber sobre el Triangulo, q̃ consta de tres lados, y tres angulos, quantos Problemas se podràn formar, cerca de si conocido vno, ò muchos angulos, ò lados, se podràn hallar los lados, y angulos restantes: sabralo assi. Sean los tres angulos ABC, los tres lados DEF: y porque son seis cosas todas diferentes, busque (3.) quantos son sus binarios, ternarios, &c. y hallarà todo lo que se puede suponer conocido; esto es, cada vno de los seis terminos de por si, en que se supone conocida vna cosa sola: 15. binarios, en que se suponen conocidas dos: 20. ternarios, en que se suponen conocidas tres: 15. quaternarios, en que se suponen conocidas 4. y 6. quinarios, en que se suponen conocidos cinco terminos: Y en qualquiera de estas suposiciones, se pueden formar otros tantos Problemas, quantos son en cada vno los terminos restantes; pero serà menester apartar los inutiles, ò que no se pueden resolver, segun Trigonometria.

Practica se harà muy facil, si aviendo escrito [4] todas las combinaciones absolutas de 6. terminos, se buelven à escrivir al revès, los quinarios enfrente de las vnidades; los quaternarios enfrente de los binarios, &c. en esta forma.

A.bcdef	BD.acef	ABF.cde	CDE.abf	ACEF.bd
B.acdef	BE.acdf	ACD.bef	CDF.abe	ADEF.bc
C.abdef	BF.acde	ACE.bdf	CEF.abd	BCDE.af
D.abcef	CD.abef	ACF.bde	DEF.abc	BCDF.ae
E.abcdf	CE.abdf	ADE.bcf		BCEF.ad
F.abcde	CF.abde	ADF.bce	ABCD.ef	BDEF.ac
	DE.abcf	AEF.bcd	ABCE.df	CDEF.ab
AB.cdef	DF.abce	BCD.aef	ABCF.de	
AC.bdef	EF.abcd	BCE.adf	ABDE.cf	ABCDE.f
AD.bcef		BCF.ade	ABDF.ce	ABCDF.e
AE.bcdf	ABC.def	BDE.acf	ABEF.cd	ABCEF.d
AF.bcde	ABD.cef	BDF.ace	ACDE.bf	ABDEF.c
BC.adef	ABE.cdf	BEF.acd	ACDF.be	ACDEF.b
				BCDEF.a

PROP.

PROP. IX. Problema.

Dados dos numeros determinados de coſas, hallar las combinaciones que pueden tener el vno reſpeto del otro.

R*egla.* Saquenſe por las reglas antecedentes, las combinaciones abſolutas de cada numero: multipliquenſe las vnas por las otras; y el producto darà todas las combinaciones reſpectivas, ò comparaciones poſsibles.

Demonſtracion. Cada combinacion de las de vn numero, ſe puede comparar con todas las de el otro: Luego el producto de las vnas por las otras, las darà todas.

Exemplo. Un Medico deſea ſaber el predominio que tienen las quatro primeras qualidades con los quatro humores; y para averiguarlo pregunta de quantas maneras pueden mezclarſe, y compararſe con ellos. Reſpondole, que de 196. maneras; porque cada vno de los dos agregados de 4. tiene 14. combinaciones (ademàs de la que comprehende todos los terminos) y 14. multiplicados por 14. producen 196.

CAPITVLO II.

DE LAS COMBINACIONES EN QVANTO al lugar.

PROP. X. Theorema.

Las combinaciones de vn numero dado de coſas en quanto al lugar, ſon tantas como los lugares en que pueden colocarſe.

D*emonſtracion.* Porque ſiendo el lugar la vnica diferencia, que tienen, como conſta de ſu definicion, tantas ſeràn las diferentes combinaciones en quanto al lugar, quantos fueren diferentes los lugares.

PROP. XI. Theorema.

Quando las coſas ſon todas ſemejantes, no pueden tener combinaciones diferentes en quanto al lugar.

La razon es, porque ſer las coſas ſemejantes es lo meſmo, que vna meſma coſa repetida muchas vezes: Luego por mas que varien los lugares, ſiempre queda vna meſma combinacion: como en eſtas tres AAA, en qualquiera parte que ſe coloque qualquiera de ellas, ſiempre quedan como antes.

PROP. XII. Problema.

Dado vn numero de coſas todas diferentes, hallar todas las combinaciones que pueden tener en quanto al lugar.

R*egla.* Eſcrivaſe vna progreſsion natural, que empezando de la vnidad termine en el numero dado: Multipliquenſe continuadamente, y el vltimo producto darà todas las combinaciones poſsibles.

Demonſtracion. Reſpeto de la primer coſa, ſolo ay dos lugares donde pueda colocarſe la ſegunda, que es primero, y ſegundo: Luego las combinaciones de dos coſas, ſolo ſon dos: eſto es, vna vez 2. Mas, en cada vna de eſtas dos combinaciones ay tres lugares, donde puede ponerſe la tercera, que ſon primero, medio, y vltimo: Luego las combinaciones de 3. ſon 6. eſto es, 2. vezes 3. Tambien en cada vna de eſtas 6. combinaciones ay quatro lugares, donde puede colocarſe la quarta, que ſon antes de la primera, entre la primera y ſegunda: entre la ſegunda y tercera: y deſpues de la tercera: Luego las combinaciones de 4. coſas ſon 24. que es el producto de 6. por 4. y aſsi de las demàs: Luego el producto de toda la progreſsion haſta el numero dado, dà todas las combinaciones poſsibles en quanto al lugar.

De lo dicho ſe colige el modo de hazer la tabla combinatoria. Eſcrivaſe la ſerie natural de los numeros indefinidamente, y al lado de cada numero pongaſe el producto de la multiplicacion continua de los numeros antecedentes haſta èl, como aqui ſe vè.

1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600.

Quie-

Quiero pues ſaber quantas combinaciones en quanto al lugar tendràn las coſas en qualquier numero dado: Buſco en la coluna primera el numero de las coſas; y el numero, que tiene al lado en la ſegunda coluna, ſerà el de todas las combinaciones poſsibles en quanto al lugar.

Exemplo. Vn Poeta curioſo compuſo eſte verſo Latino:

Lux, nox; nix, pix; mel, fel; ius, vis; res, cui par nil.

Y pregunta, de quantos modos pueden variarſe ſus palabras, ſin que falte à las exactas leyes de verſo exametro? Reſpondole, que de 39916800. maneras; porque quedando ſiempre en el antepenultimo lugar, para la conſtancia del verſo, la palabra *cui*, remate del pie dactilo; quedan 11. palabras, que por ſer monoſylabas, y largas, de qualquier modo que ſe variẽn, ſirven al ſpondeo: Buſco pues en la Tabla, el numero 11. y à ſu lado hallo treinta y nueve millones, novecientos y diez y ſeis mil, y ochocientos: y tantos ſon los modos con que ſe puede variar, ſin faltar à las leyes de la Poeſia.

De aquel otro verſo Mariano tan celebrado:

Tot tibi ſunt dotes, Virgo, quàm ſydera cœlo;

Se ſuele dezir, que ſin faltar al metro, ni al ſentido, ſe puede variar tantas vezes, como eſtrellas ay en el cielo, eſto es 1022. y que à eſto aludiò el Poeta quando quiſo contar por eſtrellas las Dotes de Maria Santiſsima; pero anduvo muy corto en todo, porque como prueva el Obiſpo Caramuel en ſu Apollo Analexico Proteo 2. ſe puede eſte verſo variar de 3728. modos, y aun à eſte numero exceden ſin comparacion los dotes, y gracias, que el cielo depoſitò en la que fue Madre de todas ellas. Y pudiera aver dicho con mas verdad:

En tibi ſunt dotes plures, quàm ſydera cœlo.

PROP. XIII. Problema.

Dado vn numero de coſas todas diferentes, hallar quales ſean ſus combinaciones en quanto al lugar.

Regla. Colocaràſe cada coſa en los lugares que puede tener en las combinaciones antecedentes, ſegun ellas

ellas ſe van multiplicando, y ſe demonſtrò en la prop. 4.

Exemplo. Deſea vn curioſo ſaber todos los Anagramas poſsibles de eſte nombre ROMA. Dirèle, que conſtando de 4. letras differentes, tendrà 24. porque tantas ſon ſus combinaciones. Encontraràlas aſsi. Eſcriva la primera letra R, y porque ſolo tiene dos lugares donde puede colocarſe la ſegunda letra O, eſto es, primero y vltimo, ponga en ellos la O, y reſultaràn de eſtas dos letras, dos combinaciones RO, OR. Tome aora la tercer letra M, y colocandola en los tres lugares, primero, medio, y vltimo, que tiene cada vna de dichas dos combinaciones, hallarà otras ſeis: MRO. RMO. ROM. MOR. OMR. ORM. Tome finalmente la vltima letra A, y colocandola en cada vna de dichas ſeis combinaciones quatro vezes, quantos ſon los lugares, primero, dos intermedios, y vltimo, avrà ya encontrado en 24. combinaciones, otros tantos Anagramas, como ſe ſigue:

AMRO	ARMO	AROM	AMOR	AOMR	AORM
MARO	RAMO	RAOM	MAOR	OAMR	OARM
MRAO	RMAO	ROAM	MOAR	OMAR	ORAM
MROA	RMOA	ROMA	MORA	OMRA	ORMA

Del miſmo modo procederà en qualquier otro numero de coſas, ò letras. Como ſi quiſieſſe añadir à eſtas 24. combinaciones la letra N, colocandola 5. vezes en cada vna, por ſer cinco los lugares, primero, tres intermedios, y vltimo, hallarìa 120. combinaciones; y ſi à cada vna de eſtas, añadieſſe 6. vezes la letra I, por ſer otros tantos los lugares, encontrarìa en 720. combinaciones otros tantos Anagramas de eſte nombre ROMANI; y aſsi de los demas.

PROP. XIV. Problema.

Dado vn numero de coſas en que ay muchas ſemejantes de vna eſpecie, hallar quantas combinaciones pueden tener en quanto al lugar.

R Re-

REgla. Escrivase vna progression natural, que empezando de la vnidad termine en el numero dado; notese el numero de las cosas semejantes, y multiplicando continuamente los numeros que se le siguen en dicha progression, el producto darà las combinaciones possibles.

Exemplo. Ofrecense combinar las letras de el Nombre de IESVS, y porque son 5. escrivo la progression 1 2 3 4 5; pero como tiene dos semejantes, que son 2.SS, empiezo la multiplicacion desde el numero que se sigue al 2. que es el 3; y digo, 3. por 4. son 12. 12. por 5. son 60. y tantas son las combinaciones, ò Anagramas de el dicho SS.Nombre. Si tuviera 3. semejantes, como AMARA, empezarè la multiylicacion desde el 4. que se sigue al 3. diziendo, 4. por 5. son 20. y dirè, que solo son 20. sus combinaciones, ò Anagramas. Y assi de los demas.

Demonstracion. Las cosas semejantes no producen por si solas (11.) diferentes combinaciones; pero dan, como si fuessen desemejantes, muchos lugares donde pueden colocarse las que se les siguen; como dos AA dan 3. lugares, primero, medio, y vltimo; tres AAA dan 4. primero, dos intermedios, y vltimo: luego basta multiplicar los numeros siguientes, sin hazer cuenta de los numeros que corresponden à las semejantes.

PROP. XV. Problema.

Dado vn numero de cosas, en que ay muchas semejantes de vna especie, hallar quales sean sus combinaciones en quanto al lugar.

REgla. Escrivanse primero las cosas semejantes, y coloquense las demas en los lugares que dexan las combinaciones antecedentes, segun ellas se van multiplicando.

Exemplo. Quiero saber las combinaciones, ò Anagramas del Nombre de MARIA; escrivo primeramente las dos letras semejantes AA: y porque dexan 3. lugares, primero, medio, y vltimo, coloco en ellos la M, y hallo tres combinaciones, MAA, AMA, AAM; las quales, dando cada vna quatro lugares à la R, esto es, primero, dos intermedios, y vltimo, forman con ella otras 12. que son RMAA, MRAA, MARA, MAAR, RAMA, ARMA, AMRA, AMAR, RAAM, ARAM, AARM, AAMR; y como cada vna de estas 12. dexò para la I, 5. lugares, que son, primero, tres intermedios, y vltimo, saldràn juntamente con ella las 60. combinaciones, ò Anagramas possibles de todo el Nombre de MARIA, que cada vno podrà escrivirselas con facilidad, colocando la I en dichos lugares, como IRMAA, RIMAA, RMIAA, RMAIA, RMMAI, &c.

PROP. XVI. Problema.

Dado vn numero de cosas en que ay muchas semejantes de diferentes especies, hallar quantas combinaciones pueden tener en quanto al lugar.

REgla. Escrita la progression natural hasta el numero dado, y sabido su producto, observense los numeros de cada vna de las especies semejantes, y los que à cada vno corresponden en la tabla combinatoria de la prop. 12. multipliquense estos entre si continuadamente, y partido por su producto el producto de toda la progression, darà en el quociente todas las combinaciones possibles.

Exemplo. Vn Musico desea saber de quantos modos podrà variar su canto con solas las seis vozes: *Vt, Re, Mi, Fa, Sol, La.* Respondole, que como pueden repetirse infinitamente, son infinitos los modos, con que se pueden combinar; pero limitando las repeticiones à solas dos, y suponiendo que cada voz se repita 2. vezes en el passo siguiente: *vt, vt, re, re, mi, mi, fa, fa, sol, sol, la, la*, digo, que este passo puede variarse de 7453150. maneras. Escrivo la progression natural hasta el num. 12. que es el de las notas, 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12. y multiplicando continuadamente sus terminos, hallo que su producto es 479001600. y porque cada vna de dichas seis notas se repite 2. vezes, observo en dicha tabla el numero de combinaciones que corresponde al 2. y hallando que es 2. multiplicole continuadamente 6 vezes, y por su producto 64. parto el de toda la progression,

ſion, y encuentro en el quociente los 7453150. modos, con que el Muſico puede cantar dicho paſſo. Y eſte es el medio de que ſe valiò el P. Athanaſio Kirquer, para enriquezer con tanta novedad la Muſica en ſus dos tomos *de Muſurgia.*

Eſta Regla ſin duda deviò obſervar tambien el eruditiſſimo Caramuel, pata adelantar ſu Arte Poetica en nuevos, y diferentes metros, ſegun la varia colocacion de los conſonantes. Pone por exemplo, entre los muchos de ſu Rhythmica cap. 3. art. 4. eſta Redondilla:

La Ciencia calificada
es, que el hombre en gracia acabe,
que al partir de la jornada,
aquel que ſe ſalva, ſabe,
que el otro no ſabe nada.

Y porque conſta de 5. verſos, tres de ellos conſonantes en *Ada*, y dos en *Abe*, pregunta quantas eſpecies puede aver de Redondillas, que tengan en 5. verſos las miſmas dos eſpecies de conſonantes: y reſponde, que 10. Es aſsi, porque, tantas ſon las combinaciones de 5. coſas, en que ay 3. ſemejantes de vna eſpecie, y 2. de otra. Eſcrivo la Progreſsion 1 2 3 4 5, cuyo producto es 120. veo en la tabla referida, que el numero que correſponde al 3. es 6. y el que correſponae al dos es 2. multiplico 6. por 2. y por el producto 12. parto 120. y hallo en el quociente 10. todas las variaciones poſsibles, y otras tantas eſpecies de Redondillas. Lo miſmo podrà hazer qualquiera en los demas generos de metros, y enriquezer ſobre manera la Poeſia.

Demonſtracion. La multiplicacion continuada de toda la progreſion natural haſta el numero dado, ſiendo todas las coſas diferentes, dà [12.] en el producto, el numero de ſus combinaciones; ſiendo pues cierto, qne las ſemejantes por ſi, no aumentan (11.) combinacion alguna, ſerà preciſſo [14.] no hazer cuenta de ſu multiplicacion, ò deſcontarla (que es lo miſmo) partiendo todo el producto de la progreſsion por los productos que ellas tuvieran, ſi fueſſen diferentes.

PROP.

PROP. XVII. Problema.

Dado vn numero de coſas en que ay muchas ſemejantes de diferentes eſpecies, hallar quales ſean ſus combinaciones en quanto al lugar.

Regla. Coloqueſe cada coſa en los lugares, que dexan las combinaciones antecedentes, como en la prop. 15. advirtiendo, que ſi en ellas ay ya alguna coſa ſemejante à la que ſe añade, no ſe ha de colocar en todos los lugares, que tiene cada combinacion, ſino en los que ſe ſiguen à la ſemejante.

Exemplo; el ſegundo de la propoſicion antecedente. Sean las 3. conſonantes de vna eſpecie AAA, y las 2. de otra BB. Eſcrivo pues las tres AAA, y porque dexan 4. lugares donde poderſe colocar la primera B, primero, dos intermedios, y vltimo, colocola en ellos, como ſe ſigue, BAAA, ABAA, AABA, AAAB, Para colocar la ſegunda B, obſervo quantos lugares ſe ſiguen deſpues de la primera B, ſu ſemejante en otras 4. combinaciones; y porque en la primera ſe ſiguen 4. en la ſegunda 3. y en la tercera 2. y en la quarta 1. coloco en ellas la ſegunda B, y eſcrivolas perpendicularmente por acomodarlas mas à la diſpoſicion del metro, en eſta forma:

B	B	B	B	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	B	B	B	A	A	A
A	B	A	A	B	A	A	B	B	A
A	A	B	A	A	B	A	B	A	B
A	A	A	B	A	A	B	A	B	B

De las quales, ſi quito la primera, y vltima, como inutiles, por tener (lo que no ſe ſufre) tres conſonantes conſequtivos, quedan 8. ſpecies de redondillas de cinco verſos, de que el Poeta podrà vſar en ſus compoſiciones.

PROP.

PROP. XVIII. Problema.

Dados dos numeros de cosas, hallar las combinaciones respectivas del vno al otro, en quanto al lugar.

Explicacion. Dado qualquier numero de cosas, pueden ellas combinarse entre si, segun todas las situaciones possibles, y à esta llamamos combinacion *absoluta*; pero prescindiendo de esta, y suponiendo à las mismas cosas invariables, y siempre con la misma situacion entre si, pueden mezclarse con otro numero de cosas, y respecto de ellas colocarse diferentemente, y à esta llamamos *respectiva*; y aun esta puede ser de dos maneras, por poderse suponer invariables las cosas de entrambos numeros, ò solo las de el vno.

Regla. Las cosas que se suponen invariables entre si, respecto de no tener mas que vna combinacion, se han como si fueran semejantes; conque si las cosas de vn numero se suponen invariables, variandose las de el otro, se han juntas, como vn numero de cosas, en que ay muchas semejantes de vna especie: y si las cosas de entrambos numeros se suponen invariables, se han juntas, como vn numero dado de cosas, en que ay algunas semejantes de diferentes especies. Executo pues, para la primera, la operacion de las prop. 14. y 15. y para la segunda la operacion de las prop. 16. y 17. y hallarè todas las combinaciones possibles.

Exemplo de la primera especie de combinaciones respectiva, en que vno de los numeros se supone invariable. Danle à vn Maestro de Capilla este passo invariable, *mi, vt, re*, y sobre èl le piden que componga con solas las otras vozes, *fa, sol, la*, todos los contrapuntos possibles. Digo, que para satisfacer à la peticion ha de componer 120. contrapuntos. Porque se le dan seis notas, de las quales, las tres, por invariables, se han como si fueran semejantes. Escriva pues la progression 1. 2. 3. 4. 5. 6. y empezando (14.) la multiplicacion continuada desde el 4. que se sigue al 3. hallarà en el producto, 120. contrapuntos; todos los quales, siendo perito el Maestro, haziendo que las notas sean mas, ò menos breves, ò valiendose de puntos, y de pausas, lograrà que sean consonantes.

Exemplo manual de la segunda especie, en que los numeros que se comparan, se suponen invariables. Vn Curioso impertinente preguntò en cierta ocasion, de quantas maneras puede vno dar la mano à su Amigo; que es lo mismo que preguntar, de quantos modos pueden enlazarse los cinco dedos de vna mano con los cinco de la otra. Respondole, de 252. y lo pruevo assi. Guardando los dedos de cada mano siempre la misma situacion entre si, es lo mismo, que si se combinassen 10. cosas, de las quales cinco erã de vna especie, y cinco de otra. Escrivo pues (16.) la progression 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. y hallado su producto 3628800. busco en la tabla combinatoria de la prop. 12. el numero de combinaciones que corresponde al 5. y porque son 120. y ay 5. semejantes de dos especies, multiplico 120. por 120. y parto por su producto 14400. el de toda la progression; y aviendo encontrado en el quociente 252. combinaciones de los dedos de vna mano con los de otra, digo, que tantos son los modos con que vno puede dar la mano à su Amigo.

CAPITVLO III.

DE LAS COMBINACIONES EN QVANTO à la substancia, y lugar.

PROP. XIX. Problema.

Dado vn numero de cosas diferentes, hallar sus combinaciones en quanto à la substancia, y lugar, con expression de los binarios, ternarios, &c.

Regla. Escrivase vna progression natural de numeros desde la vnidad hasta el numero dado; y multipliquese continuadamente, retrocediendo desde el numero mayor, hasta la vnidad, digo, que el pri-

primer producto darà los binarios, el segundo los ternarios, el tercero los quaternarios, &c. y la suma de ellos, cō el numero de las cosas, darà todas las combinaciones possibles.

Exemplo. Vn Philosopho desea saber los generos que ay de mixtos, atendiendo solamente al mayor, ò menor predominio de los elementos en cada vno. Disponga pues, por ser 4. los elementos, la progression natural 1.2.3.4. y multipliquela retrocediendo continuadmente, diziendo, 4. por 3. dan 12. y otros tantos mixtos imperfectos, que cōstan de solos dos elementos; 12. por 2. dan 24. y otros tantos mixtos, no tan perfectos, que constan de 3. elementos, y finalmente 24. por 1. dan 24. y otros tantos mixtos perfetos, que constan de todos los 4. y conocerà por el orden con que estuvieren escritos, el predominio de cada elemento.

Demonstracion. Danse para combinar 5. cosas ABCDE: Por quanto cada vna de estas 5. letras se puede juntar con qualquiera de las otras 4. formarà con ellas otros tantos binarios; luego los binarios de 5. saldràn de la multiplicacion de 5. por 4. y seràn 20. Mas, cada vno de estos 20. binarios se puede juntar con qualquiera de las otras 3. letras, y formar con ellos otros tantos ternarios; luego los ternarios saldran de la multiplicacion de 20. por 3. y seràn 60. Mas; cada vno de estos 60. ternarios se puede juntar con las 2. letras restantes, y formar con ellas otros tantos quaternarios; luego los quaternarios saldran de la multiplicacion de 60. por 2. y seràn 120. y finalmente, porque cada vno de estos 120. quaternarios se puede juntar con la vnidad restante, y formar con ella los quinarios: los quinarios saldran de la multiplicacion de 120. por 1. y seràn 120. Y como de cada numero de cosas se puede proporcionalmente demonstrar lo mismo, queda probada la proposicion.

PROP. XX. Problema.

Dado vn numero de cosas diferentes, hallar quales sean en particular sus combinaciones en quanto à la substancia, y lugar.

Re-

Regla. Se infiere de la demonstracion antecedente. Juntese cada cosa con cada vna de las otras, y saldran los binarios; juntese cada binario con cada vna de las cosas restantes, y saldran los ternarios, &c.

Exemplo. Un Metaphisico quiere discurrir por las 3. propriedades de el Ente, UNIDAD, UERDAD, y BONDAD, segun el methodo del Iluminado Raimundo Lullo. Valgase para mayor facilidad de las iniciales U.V.B. y junte cada vna con las otras dos, y saldràn 6. binarios, UV.UB.VU.VB.BU.BV. y con ellas otros tantos sugetos sobre que poder discurrir, haziendo, que la vltima letra sea genetivo de possession; y assi podrà inquirir: Què cosa sea la Unidad de la Verdad? la Unidad de la Bondad? la Verdad de la Unidad? la Verdad de la Bondad? la Bondad de la Unidad? y la Bondad de la Verdad? Junte aora cada vno de dichos seis binarios con la letra restante, y resultaràn otros seis ternarios, UVB.UBV.VUB.VBU.BUV.BVU; y con ellos otras tantas questiones, adjetivando la segunda letra, y poniendo en genetivo la tercera; y assi podrà inquirir: Què cosa sea la Unidad Verdadera de la Bondad? la Unidad Buena de la Verdad? la Verdad Una de la Bondad? la Verdad Buena de la Unidad? la Bondad Una de la Verdad? y la Bondad Verdadera de la Unidad? Tambien se podrìan formar otras 6. questiones, haziendo verbo à la segunda letra, y preguntar con el mismo orden: Si la Unidad Verifica la Bondad del Ente? si la Unidad Bonifica (ò haze buena) la Verdad? si la Verdad Unifica (ò haze Una) la Bondad, &c. Y este, ò semejante, es el methodo con que proceden en su Arte Magna los Lullistas, y que tanto adelantò en su Arte Combinatoria el P. Athanasio KirKer.

PROP. XXI. Problema.

Dado vn numero de cosas, en que ay algunas semejantes, hallar todas sus combinaciones en quanto à la substancia, y lugar.

Regla. Saquense por la prop. 7. de este Libro, quales sean en particular sus combinaciones, en quanto à la subs-

ſubſtancia, y lugar: luego ſe buſcaràn en cada vna de ellas por la prop. 14. 15. ù 16. las combinaciones que tienen en quanto al lugar; y la ſuma de eſtas darà todas las combinaciones.

Exemplo. Un Cabaliſta, que por verſado en la Sagrada Eſcritura ſabe los miſterios, que Galatino, y otros, han deſcubierto en las letras de el Santo Nombre de Dios IEHOVAH, y lo mucho que ha dado que diſcurrir vna ſola que añadiò Dios al de Abram, mandando que ſe llamaſſe Abraham; deſea ſaber, para encontrar otros nuevos, las ſylabas, y nombres que pueden reſultar de la varia particion, y colocacion de las 4. letras que le componen en el Idioma Hebreo, Iod, He, Vau, y otra vez He. Sabràlo aſsi: Buſque primero por la prop. 7. las combinaciones que pueden tener en quanto à la ſubſtancia 4. coſas, en las quales ay dos ſemejantes; y halladas como en la margen, eſcrivaſe al lado de cada vna el numero de combinaciones, que por la prop. 15. le correſponden en quanto al lugar: y la ſuma de eſtos numeros dà las 34. combinaciones, que las letras del Santo Nombre de Dios pueden tener en quanto à la ſubſtancia, y lugar; y nuevo campo al Cabaliſta, para diſcurrir otros miſterios, como huya de los peligros de ſuperſticiò, en que ſuelen incurrir los Rabinos, por el abuſo de la Cabala.

1.	H
1.	V
1.	I
1.	HH
2.	HV
2.	HI
2.	VI
3.	HHV
3.	HHI
6.	HVI
12.	HHVI
34.	

PROP. XXII. Problema.

Dado vn numero de coſas, en que cada vna ſe repite indefinidamente, hallar todos ſus binarios, ternarios, &c. en quanto à la ſubſtancia, y lugar.

QUando las coſas ſe repiten indefinidamente, eſto es, tantas vezes quantas ſe quiere ſin termino, no le tienen ſus combinaciones, porque ſon infinitas como la repeticion; pero, aunque la ſuma de todas ſea infinita,

ta, los binarios, ternarios, &c. ſon determinados, y para ellos ſirve la Regla ſiguiente.

Regla. Multipliqueſe por ſi miſmo el numero de las coſas, y el producto darà ſus binarios; ſi ſe buelven à multiplicar por eſte primer producto, el ſegundo producto darà los ternarios, y ſi otra vez ſe multiplican por el ſegundo producto, el tercer producto darà los quaternarios, y aſsi de los demas infinitamente.

Demonſtracion. Por quanto ſe repiten todas las coſas, cada vna ſe podrà juntar, no ſolo con las demas, ſino con ella miſma repetida: y aſsi, los binarios en cada vna ſon tantos como las coſas: luego multiplicado el numero de las coſas por ſi miſmo, el producto darà los binarios; y como cada binario de eſtos ſe puede juntar, no ſolo con las demas coſas, ſino con aquellas miſmas de que ſe compone repetidas, los ternarios que cada binario produce, ſeràn tantos como las coſas: luego la multiplicacion de los binarios (que es el primer producto) por el numero de las coſas, darà los ternarios. Lo miſmo probarè de los quaternarios, quinarios, &c.

Exemplo. Un Gramatico deſeoſo de adelantarſe en la Poeſia Latina, pregunta quantos generos ay de *Pies*, que pueden ſervir à los verſos? Reſpondole, que no aviendo vſado los Poetas, aſsi Griegos, como Latinos, de mayores *Pies*, que de 6. ſylabas, ſeràn todos los generos de Pies 126. Y por quanto las eſpecies de ſylabas ſolo ſon dos, larga, ò breve, podrà hazer la prueva con el numero 2. multiplicandole haſta cinco vezes por ſus Poteſtades Geometricas, en eſta forma: 2. 4. 8. 16. 32. 64. y avrà hallado en el numero 2. los pies de vna ſylaba: en el 4. los de dos: en el 8. los de tres: en el 16. los de quatro: en el 32. los de cinco: y en el 64. los de ſeis ſylabas; y en la ſuma de eſtos numeros, todos los generos de *Pies*, que han vſado los Poetas.

PROP. XXIII. Problema.

Dado vn numero de coſas, que ſe repitan indefinidamente, hallar quales ſean en particular ſus binarios, ternarios, &c.

Regla

R *Egla*; ſe infiere de la antecedente. Junteſe cada coſa con todas, y ſaldràn los binarios: junteſe cada binario con todas las coſas, y ſaldràn los ternarios, &c.

Exemplo 1. Un Dialectico deſea ſaber todas las eſpecies, y modos de arguir. Suponiendo que para ello ſe ha de valer de propoſiciones, las quales vnas ſon vniverſales, otras particulares, y cada vna de eſtas puede ſer, ò afirmativa, ò negativa; valdràſe por la vniverſal afirmativa de la A: por la vniverſal negativa de la E: por la particular afirmativa, de la I: y por la particular negativa, de la O; y tendrà quatro terminos combinables AEIO.

Junte pues cada vna de eſtas letras con todas las quatro, *AA, AE, AI, AO*; *EA, EE, EI, EO*; *IA, IE, II, IO*; *OA*; *OE, OI, OO*; y hallarà en eſtos 16. binarios otros tantos entimemas. Para encontrar los ſylogiſmos baſtarìa juntar cada vno de dichos entimemas con las miſmas quatro letras, aſsi: *AAA, AAE, AAI, AAO*; *AEA, AEE, AEI, AEO, &c.* pero como ni de dos premiſſas afirmativas, negativa; ni de vna negativa, afirmativa; ni de vna particular, ſe infiere vniverſal; ni de dos particulares, ni de dos negativas ſe puede inferir coſa alguna: de los 64. ſylogiſmos ſolo quedan vtiles 12. que ſon: *AAA, AAI, AII, AEE, AEO, AOO, EAE, EAO, EIO, IAI, IEO, OAO*. De los quales, los 6. que tienen la mayor vniverſal, y menor afirmativa, ſirven para la primer figura; los 6. que tienen la mayor vniverſal, y conſequencia negativa, para la ſegunda: los 6. que tienen la menor afirmativa, y conſequencia particular, para la tercera: y los 6. que tienen la mayor afirmativa, y menor vniverſal, para la quarta: y avrà encontrado los 24. modos de ſylogiſmos, como ſe ſiguen.

1. Fig.	2. Fig.	3. Fig.	4. Fig.
AAA	*AEE*	*AAI*	*AAA*
AAI	*AEO*	*AII*	*AAI*
AII	*AOO*	*EAO*	*IAI*
EAE	*EAE*	*EIO*	*AEE*
EAO	*EAO*	*IAI*	*AEO*
EIO	*EIO*	*OAO*	*IEO*

Todos eſtos 24. ſylogiſmos concluyen directamente: y ſi la conſequencia de cada vno ſe convirtieſſe, reſultarìan de ellos, otros tantos ſylogiſmos indirectos.

Exemplo 2. Un Impreſſor deſea ſaber, quantos ſon los vocablos que podrà componer de todas las 23. letras de el Abecedario? Reſponderàle la multiplicacion de el miſmo numero 23. por todas ſus poteſtades, que podrà componer vocablos de dos letras 529. de tres 12167. de quatro 279841. de cinco 6436343. de ſeis 148035889. de ſiete 3404825447. de ocho 78310985281. de nueve 1801252561463. y de diez 41428808913549. &c. Y ſi me buelve à preguntar, deſeoſo de ſaber todos los idiomas poſsibles, quales ſean en particular eſſos vocablos? le reſpondere, que ſi compuſieſſe en cada ſegundo de tiẽpo diez vocablos, eſto es 3600. en cada hora, y eſtuvieſſe componiendo ſin ceſſar de dia, ni de noche, treinta millones de millones de años, no avrìa acabado de componer aun ſolos los vocablos de diez letras; y por conſiguiente, que el ſaberlos en particular, es noticia reſervada à ſolo Dios, *cuius ſapientiæ non eſt numerus.*

PROP. XXIV. Problema.

Dados dos numeros de coſas, hallar las combinaciones reſpectivas del vno al otro, en quanto à la ſubſtancia, y lugar.

R *Egla*. Saquenſe las combinaciones de cada vno de los numeros en quanto à la ſubſtancia, y lugar; ò por la prop. 19. ſi todas las coſas fueſſen diferentes, ò por la 21. ſi huvieſſe algunas ſemejantes, ò por la 22. ſi todas ſe repiten indefinidamente; luego, ſiguiendo las Reglas del cap. 2. ſe verà en cada vna de las combinaciones del vn numero las que tienen en quanto al lugar, juntas con las de el otro; y la ſuma de eſtas darà todas las combinaciones reſpectivas.

Exemplo. El miſmo Impreſſor, mal ſatisfecho de el exẽplo paſſado, en que por no aver hecho diſcrecion de conſonantes, y vocales, reſultaron muchas compoſiciones de ſolas conſonantes, los quales no ſiendo pronunciables de por ſi, no merecen el nombre de vocablos; deſea ſaber los vocablos que pueden reſultar de la mezcla de conſonantes,

tes, y vocales. Sabràlos asi. Porque las consonantes son 20, y las vocales 5. sepa primero por la prop. 22. quantas son sus combinaciones en quanto à la substancia, y lugar; y hallando que los binarios de las 5. vocales son 25. los ternarios 125. los quaternarios 625. los quinarios 3125. &c. Y que los binarios de las 20. consonantes son 400. los ternarios 8000. los quaternarios 160000. los quinarios 3200000. &c. Combine despues en quanto al lugar, [segun las Reglas del cap. 2.] las de las consonantes juntas con las de las vocales, y al contrario; y hallarà, vocablos pronunciables de dos letras, esto es vna consonante, y otra vocal 200. porque tantos son 20. por 5. tomados dos vezes. De tres letras, esto es, dos consonantes con vna vocal, ù dos vocales con vna consonante 7500. porque tantos son 400. por 5. y 25. por 20. tomados tres vezes. De quatro letras, esto es, de tres consonantes con vna vocal, de tres vocales con vna consonante, y de dos consonantes con dos vocales 230000. porque tantos son 8000. por 5. y 125. por 20. tomados quatro vezes, y 400. por 25. tomados seis. Y asi de las demas.

COROLARIO.

De lo dicho en todo este Libro se infiere, cō quāta razon el Iluminado Raymundo Lullo, el P. Atanasio Kirquer, el P. Sebastian Yzquierdo, y otros Authores, llaman à la Arte Combinatoria, Arte de las Artes, Ciencia de las Ciencias, y la verdadera logica, y modo de saber.

TRA-

TRATADO III.

DE LA GEOMETRIA PRACTICA.

COMPREHENDE este Tratado, los mas principales Problemas de la Geometria, sin que se omita alguno, de los que se pueden desear en vn perfecto Geometra. Todos se demuestran por la Geometria elementar, que convendrà tenga vista primero el estudioso, para que consiga la noticia fundamental de este Tratado; y con ella se habilite para las operaciones, que suelen ser, no solo convenientes, sino necessarias, asi en lo Politico, como en lo Militar.

LIBRO

LIBRO I.

DE LA FORMACION, Y DIVISION de Lineas, y Angulos.

PROPOSICION I.

Levantar vna perpendicular sobre la extremidad de vna linea dada. (fig. 1.)

PIdese, que sobre la extremidad B, de la recta dada AB, se levante vna perpendicular.

Modo 1. Pongase el pie del compas en qualquiera punto C, sobre la recta AB: y con la distancia CB, hagase vna porcion de circulo, que cortarà la recta AB en D. De la interseccion D por el punto C, tirese la recta DCE, que cortarà el arco en E: tirese la EB, y serà la perpendicular que se pide.

Demonstracion. El angulo B està formado en el semicirculo: luego [31.3.] es recto, y DB perpendicular.

Modo 2. Del punto F con qualquier abertura de compas, descrivase el arco GHM; y haziendo centro en G, descrivase con la misma abertura el arco MN: desde M, hagase con la mesma distancia el arco HN; del punto de la interseccion N, tirese la NF, y serà perpendicular.

Demonstr. Si se tirassen vnas rectas HG, HF, quedaria descrito vn triangulo equilatero (1.1.) luego (32.1.) el arco HF es el tercio de vn semicirculo: luego es 60. gr. y assi mesmo HM es 60. grados: luego su mitad HO es 30. luego todo GO es 90. gr. y por consiguiente la NF es perpendicular.

Los demas problemas de lineas perpendiculares quedan resueltos en la Geom. Elem. lib. 1.

PROP.

PROP. II.

Tirar vna paralela por vn punto dado. [fig. 3.]

ESte Problema queda resuelto en la *prop.* 31. *lib.* 1. *de la Geom. elem.* pero se resuelve con mayor brevedad del modo siguiente.

Por el punto dado D se ha de tirar vna paralela à la linea dada AB. *Operacion.* Escojase à discrecion el punto C en la linea AB, ò fuera de ella. Hagase centro en C, y con la distancia CD, hagase vn arco que corte à la linea AB en dos puntos A, y B: tomese la distancia AD, y passese desde B à E: tirese la DE, y serà paralela à AB. La razon es clara.

PROP. III.

Por vn punto dado fuera de vna linea, tirar vna recta que haga con dicha linea vn angulo igual à otro angulo dado. [fig. 4.]

SEa dada la linea XZ; y fuera de ella el punto E: pidese, que por E se tire vna recta, que concurriendo con la XZ, forme con ella vn angulo igual al angulo A.

Operacion. Hagase (23.1.) en qualquiera punto C el angulo C igual al angulo A. Tirese [2.] por el punto E la EZ paralela à FC: y el angulo Z serà igual al angulo A. Porque siendo FC, EZ paralelas, es el angulo Z igual à C (27.1.) y siendo C por construccion igual à A, tambien Z serà igual à A.

PROP. IV.

Dadas dos rectas inclinadas AB, CZ (fig. 5.) *hallar el punto O del concurso: ò tirar otras lineas, que si se alargàran concurrieran en el mesmo punto O.*

OPeracion. De los puntos AB, tirense de qualquiera manera las paralelas AC, BZ. De los mesmos puntos A, B, tirense otras dos paralelas AQ, BP; tomese con el compas la linea AC, y passese algunas vezes [como por exemplo 3.] desde A hasta Q. Passese otras tantas vezes

S la

la BZ desde B hasta P: tirense las ES, QP; y estas concurriràn en el mesmo punto O: en que concurririan las AB, CZ si se continuàran.

Demonstr. En el triangulo AOC, son AC, BZ paralelas: luego [.2.6.] es como AC à BZ, assi AO, à BO. y siendo por exemplo AC dupla de BZ, serà AO dupla de BO, ù de AB: luego la CZ concnrre con AB à dupla distancia de AB. Tambien por ser AQ, BP equèmultiplices de AC, BZ, assi como AC es dupla de BZ, serà AQ, dupla de BP; (15.5.) y por consiguiente probarè, como antes, que la QP cócurre con AB à dupla distancia de la AB: y assimesmo la ES. Luego en el mesmo punto O, en que concurren AB, CZ, concurren ES, y QP.

Esto mesmo se sacarà por Arithmetica del modo siguiente. Vease de quantos dedos constan la AC: y BZ. Restese la menor de la mayor: partase la mayor por este residuo; y el quociente darà las vezes que cabe la distancia CZ, desde C, hasta el punto O del concurso. Sea AC 24. dedos: y BZ 12. la diferencia de 24. y 12. es 12. Parto 24. por 12. y salen 2. por quociente: Digo, que desde C, hasta Z, cabe dos vezes la distancia CZ. Como tambien desde A hasta O cabe dos vezes la AB.

Por esta regla se sabe à quanta distancia concurre en vn cañon de Artilleria la linea del raso de los metales con la linea de la alma, ò vazio del cañon, como veremos en su lugar.

PROP. V.

Dado qualquiera angulo rectilineo BAE [fig. 6.] *y entre sus lineas el punto F: tirar por F la DC de tal suerte, que quede dividida en F en dos partes iguales.*

Operacion. Tirese por el punto F la recta GF paralela à AB: cortese GD igual à AG: del punto D, por F, tirese la DC, y quedarà dividida por medio en F.

Demonstr. En el triangulo ADC es GF paralela à AC: luego [2.6.] es como DG à GA, assi DF à FC: DG es igual à GA: luego DF es igual à FC. De la mesma suerte se harà quede DC dividida en F en otra qualquiera razon de desigualdad.

PROP.

PROP. VI.

Dividir vna recta en qualesquiera partes iguales. [fig. 7.]

Pidese, que la recta AN se divida en tres partes iguales.

Operacion. De la extremidad A tirese à discrecion la recta AZ, que forme qualquier angulo con AN. De la extremidad N tirese NF paralela con AZ. Tomense en AZ tres distancias iguales con qualquier abertura de compas: tomense otras tantas desde N en la NF con la mesma abertura: y tiradas OM, EG, quedarà la recta AN dividida en I, K en tres partes iguales. Consta de la prop. 10. del lib. 6. de Euclides.

PROP. VII.

Por dos puntos poco distantes tirar vna linea larga. (fig. 8.)

Este problema es necessario para tirar con acierto las lineas estendidas por dos puntos, que por estar poco distantes, se expondria el artifice à manifiesto error, si se fiasse de solos ellos. Sean pues los puntos A, y P, por los quales se ha de tirar vna linea larga.

Operacion. Desde dichos puntos, con qualquiera abertura, haganse las decussaciones CT: y desde C y T, hagase la decussacion E: y si se quiere, hagase otra H. Por A y H tirese la AH: y passarà por todos los puntos P, E, &c. Tirense CT, TE, CE.

Demonstr. (11.1.) La linea PA es perpendicular à CT en O: assi mesmo HO es perpendicular à la mesma CT en O: luego HO, y PO son vna mesma linea.

PROP. VIII.

Entre dos puntos dados hallar otros dos, de suerte que todos esten directamente puestos en linea recta. [fig. 9.]

Sean los puntos dados A, y B: entre los quales se han de señalar dos, de tal suerte, que la recta que se tirare de A à B, passe por todas.

 Opera-

Operation. Del punto A y B, como centros, haganſe con qualquiera abertura los arcos que ſe cruzan en D, y C: y de eſtos puntos D, y C, haganſe otros dos arcos, que ſe cortan en H, y G: Digo, que los puntos H, y G eſtàn en linea recta con los dados A, y B. La demonſtracion viene à ſer la meſma que la paſſada.

PROP. IX.

De tres lineas proporcionales, dada la media, y la ſuma de las extremas, determinar las extremas. (fig. 10.)

SEa la linea C media proporcional entre otras dos, cuya ſuma es la recta AB. Pideſe la magnitud de cada vna de las extremas.

Operacion. Dividaſe la linea AB en dos partes iguales en G: deſde G con la abertura GA, deſcrivaſe el ſemicirculo AEB: levanteſe la perpendicular BD, igual à la media proporcional C: tireſe la DE paralela à AB, que cortarà al circulo en vn punto E: deſde E hagaſe EF paralela à DB: Digo, que el punto F determina la magnitud de las extremas proporcionales, y que la vna es AF; y la otra, FB. Porque [13.6.] EF es media proporcional entre AF, FB.

PROP. X.

Dada la media de tres proporcionales, y la diferencia de las extremas hallar las extremas. (fig. 11.)

DE tres proporcionales ſe conoce ſolamente la media GH; y la diferencia de las extremas entre ſi, que es BA: Pideſe ſe determine la magnitud de las extremas.

Operacion. Del punto B, extremidad de la diferencia BA, levanteſe la perpendicular BC, igual à la media proporcional GH: Dividaſe la diferencia BA por medio en D, y prolongando à diſcrecion la linea BA por ambas partes, deſcrivaſe deſde el centro D con la diſtancia DC el ſemicirculo FCE: y ſeràn BF, BE las extremas que ſe piden. La razon es, porque (13.6.) es FB à BC, como BC à BE.

PROP.

PROP. XI.

En tres proporcionales, dada la primera, y la ſuma de la tercera, y media, determinar la media. [fig. 12.]

SEa BP la primera proporcional à dos lineas, cuya ſuma es la recta AO. Pideſe determinadamente la media proporcional.

Operacion. Tireſe la CD indefinida: corteſe en ella las lineas DE, EC iguales à AO, BP: ſobre CD hagaſe el ſemicirculo CFD: del punto E levanteſe la perpendicular EF: corteſe la linea CE por medio en B: de eſte punto B, con el intervalo BF, deſcrivaſe el arco FG: corteſe la AH igual à EG; y AH ſerà media proporcional entre BP, y HO.

La demonſtracion conſiſte en probar, que ſon proporcionales BP à AH, como AH à HO: eſto es CE à EG, como EG à GD, iguales à las ſobredichas: propondrè la demonſtracion por numeros, que es mas clara, y menos prolixa que por lineas.

Demonſtr. Sea BP, ò CE 4. ſea AO, ò ED 24. Eſto ſupueſto, por ſer CE à EF, como EF à EG, ſerà [17. 6.] el rectangulo, ò producto de CE, ED, que es 96. igual al quadrado de EF: luego eſte quadrado de EF es 96. El quadrado de BE es 4. y porque [47. 1.] los quadrados de BE, EF ſon iguales al quadrado de BF, ſumando 96. y 4. la ſuma 100. ſerà el quadrado de BF; y ſu raiz 10. ſerà BF: y ſiendo BF, BG iguales, ſerà BG 10. Quitando pues de BG la BE, que es 2. quedarà EG 8, y por conſiguiente là GD ſerà 16. Son pues proporcionales, como CE 4. con EG 8: aſsi EG 8. con GD 16.

PROP. XII.

Entre dos lineas dadas hallar dos medias proporcionales.

EſTe problema es de grande vtilidad en la Geometria, por ſervir para la reſolucion de otros innumerables; lo que motivò à los Geometras intentar reſolverle por varios modos; pero ninguno tiene la riguroſa demonſtra-

cion

cion que se desea. Propondrè solamente dos, que ademas de ser mas inteligibles, qualquiera de ellos es bastante para la practica.

Modo 1. de Platon. (*fig.* 13.)

Sean dadas las dos rectas AO, OC, y se piden otras dos que sean medias proporcionales. *Operacion.* Dispónganse las lineas dadas de suerte, que componga el angulo recto O: alarguese à discrecion la linea AO àzia E: y CO àzia T: en la linea OT formese el angulo recto ATE, de tal suerte, que formando assi mesmo el angulo recto TEC en la linea OE, la linea EC cayga en el punto C: para lo qual no ay regla geometrica; pero se puede hazer aplicando el angulo recto de vna esquadra sobre la linea OT: y el angulo recto de otra esquadra sobre la linea OE; procurando ajustar perfectamente el braço TE de la primera con el braço ET de la segunda; y los otros braços caygan, el vno sobre el punto A, y el otro sobre el punto C. Y entonces las lineas OT, OE seràn las dos medias proporcionales, que se desean.

Demonstr. La linea OT (8.6.) es media proporcional entre AO, OE: assi mesmo la linea OE es media proporcional entre OT, OC: luego como AO à OT; assi OT à OE: y OE à OT.

Modo 2. de Philon Byzancio. [fig. 14.]

Sean dadas las lineas D, y E, entre las quales se han de hallar dos medias proporcionales C, y B. *Operacion.* Dispongase de manera, que formen vn angulo recto GFP, haziendo GF igual à D. y FP igual à E: perficionese el rectangulo FGSP: y tiradas las diagonales, desde el punto A como cẽtro, se describirà por sus angulos vn circulo GSPLG, que sin duda passarà por todos [22.3.] Alarguense à discrecion los lados SG àzia H, y SP àzia R: tirese aora vna linea recta de tal suerte, que passando por F, sean FR, LH iguales: y seràn las lineas HG, RP las dos medias proporcionales entre D, y E.

Demonstr. Aunque no ay modo geometrico para tirar la recta HR con las circunstancias sobredichas; pero suponiendo las tenga, se demuestra ser quatro continuas propor-

cio-

cionales FP, PR, HG, GF, en la forma siguiente. El rectangulo SHG, es igual al rectangulo FHL [*corol.* 1. *de la* 36. 3.) y por ser RL igual à HF; y RF à HL, serà el rectangulo SHG igual al rectangulo LRF: y siendo este rectangulo LRF igual al rectangulo SRP, serà el rectangulo SHG tambien igual al rectangulo SRP: luego (15.6.) estos dos rectangulos tienen los lados reciprocos, como HS à SR, assi RP à HG; y siendo [2.6.] FP à PR, como HS à SR, serà FP à PR, como PR à HG: luego son tres continuas proporcionales, FP, PR, HG. Y porque son tambien proporcionales (2.6.) FP à PR, como HG à GF, seràn quatro continuas proporcionales FP à PR, como PR à HG, y HG à GF: y tomando C igual à FP: y B igual à HG, seràn las quatro D, C, B, E, proporcionales.

PROP. XII.

Dividir dos lineas dadas, cada vna en dos partes, de tal suerte, que los quatro segmentos sean continuos proporcionales. [fig. 15.]

Pidese, que las lineas dadas M, y N, se dividan cada vna en dos partes, que las quatro sean continuas proporcionales.

Operacion. Hagase el angulo recto BOC: y sea BO igual à M: y la OC igual à N: juntese BC: descrivase el semicirculo BDO: de la seccion D tirese DE paralela à CO: y la linea DF, paralela à EO: y quedarà BO, ò M cortada en E: y OC, ò N cortada en F, de tal suerte, que seràn continuos proporcionales los segmentos BE, OF, EO, FC.

Demonstr. La linea ED es media proporcional entre BE, y EO: (8.6.) luego serà BE à ED, ò OF su igual, como OF à EO. Tambien los triangulos BED, DFC, tienen los angulos E, y F rectos; y por ser paralelas ED, OC, son (27.1.) los angulos BDE, y C iguales; y por consiguiente son dichos triangulos equiangulos: y sus lados proporcionales [4.6.]: luego como BE à ED, ò OF; assi DF ò EO à FC: y aviendo probado arriba ser BE à OF, como OF à EO; seràn los segmentos proporcionales como BE à OF, assi OF à EO, y EO à FC.

PROP.

PROP. XIII.

Dividir dos lineas dadas, cada vna en dos partes, de ſuerte, que los quatro ſegmentos ſean reciprocamente proporcionales. (fig. 16.)

LAs lineas M, N, ſe han de dividir cada vna en dos partes tales, que ſean reciprocamente proporcionales.

Operacion. Deſcrivaſe vn circulo con qualquiera abertura de compas: Tomeſe con el compas la linea M; y pueſto el vn pie en qualquiera punto T, ſeñaleſe con el otro el punto R en la circunferencia. Aſsi meſmo, ſe tomarà la linea N, y pueſto el vn pie del compas en qualquiera punto Q, ſeñaleſe con el otro el punto G en la circunferencia; pero de manera, que tiradas las lineas TR, GQ, ſe corten en qualquiera punto P: y quedaràn las dichas lineas cortadas mutuamente en P, de tal ſuerte, que los quatro ſegmentos ſeran reciprocamente proporcionales, eſto es TP à GP, como PQ à PR.

Demonſtr. Por cortarſe las cuerdas TR, GQ dentro del circulo, es [35.3.] el rectangulo hecho de los ſegmentos TP, PR igual al rectangulo hecho de los otros dos GP, PQ: luego (16.6.) ſeràn TP, PR extremas en la proporcion, y GP, PQ medias: como TP à GP, aſsi PQ à PR, que es proporcion reciproca.

PROP. XIV.

Dada vna linea, hallar otras dos continuas proporcionales, tales, que el quadrado de la primera ſea igual à los quadrados de las otras dos juntos. (fig. 17.)

SEa dada la linea AB, y ſe buſcan otras dos, que con ella ſean tres continuas proporcionales, tales, que el quadrado de la primera AB, ſea tanto como los quadrados de las otras.

Operacion. Dividaſe (30.6.) la linea AB en media, y extrema razon en D (30.6.) Y tomeſe DB por tercera proporcional: y paſſandola de B, haſta d, ſe ſacarà [13.6.] vna media proporcional entre AB, y Bd, que ſerà BC, y ſeràn las tres proporcionales AB, BC, y Bd, tales, que el quadrado de AB es igual à los quadrados de BC, y Bd juntos.

Demonſtr. El rectangulo hecho de AB, y Bd, ò DB, es igual al quadrado de BC [17.6.] Tambien por eſtar la AB dividida en media, y extrema razon en D, es el rectangulo hecho de AB, y AD igual al quadrado de DB: luego los dos rectangulos ABD, y BAD juntos, ſon iguales à los quadrados de BC, y DB juntos. El quadrado de AB es igual à los dos rectangulos ſobredichos [2.2.] luego el quadrado de AB es igual à los quadrados de BC, y BD juntos.

PROP. XV.

Por vn punto dado en la circunferencia de vn circulo, tirar vna tangente. [fig. 18.]

POr el punto T, ſeñalado en la periferia del circulo A, ſe ha de tirar vna tangente. *Operacion.* Tireſe el radio AT al punto T: y del punto T ſaqueſe la perpendicular à la extremidad del radio. (16.3.)

PROP. XVI.

Deſcribir vn circulo, cuya circunferencia paſſe por dos puntos dados. [fig. 19.]

POr los puntos A, y B ha de paſſar la circunferencia de vn circulo.

Operacion. Con vn meſmo intervalo, tomado à diſcrecion, hagaſe la interſeccion C: y con el meſmo intervalo, haziendo centro en C, ſe deſcribirà vn circulo, que paſſarà por los puntos A, y B. Es por ſi evidente.

PROP. XVII.

Deſcribir vn circulo, cuya circunferencia paſſe por tres puntos dados.

Sean

SEan los tres puntos A. B.C. por los quales ha de paſſar la circunferencia de vn circulo. *Operacion.* Deſde los puntos A, y B, con qualquiera intervalo haganſe las interſecciones E, y G. Aſsimeſmo, deſde los puntos B, y C, haganſe otras dos interſecciones F, y H: tirenſe las lineas EG, FH, que ſe cruzaràn en O: ſi deſde O ſe haze vn circulo, con la diſtancia que ay de O haſta qualquiera de los puntos dados, paſſarà por los tres. Tirenſe las cuerdas AB, BC.

Demonſtracion. La linea EG es perpendicular à la cuerda AB: luego (*corol.de la prop.* 1 *.lib.*3.) en ella eſtà el centro: por la meſma razon eſtà el centro en la FH: Luego el punto O, que ſolo ſe halla en entrambas cuerdas, es el centro del circulo que paſſa por los tres puntos.

PROP. XVIII.

Sobre vna recta dada deſcribir vn arco, que toque otra recta dada infinita. [fig.19.]

DOs caſos ſe pueden ofrecer, porque ò ſon paralelas las rectas dadas, ò no lo ſon.

Caſo 1. Sea dada la recta DC infinita; y otra AB finita, que no es paralela con DC: pideſe, que ſobre AB ſe deſcriba vn arco, que toque la linea DC. *Operacion.* Alargueſe la AB haſta que encuentre con la DC en vn punto D: Halleſe aora (13.6.] vna media proporcional entre toda la DA, y el ſegmento DB: y eſta media hallada paſſeſe deſde el punto D haſta C: Hagaſe vn circulo, que paſſe por los tres puntos A.B.C: y eſte tocarà preciſamente à la CD en C. El modo de hazer eſte circulo conſta de la propoſicion antecedente.

Demonſtracion. La DC. *por conſtruct.* es media proporcional entre la DA, y el ſegmento DB: Luego [36.3.) la DC es tangente.

Caſo 2. Sea dada la recta FE paralela à la infinita DC: y ſe pide vn circulo, que toque à la DC.

Operacion. Dividaſe FE por medio en G, con vna perpendicular, (11. 1.) que cortarà la DC en C: Deſcribaſe vn circulo que paſſe por los tres puntos F. E. C. y tocarà à la DC en C. Y es la razon, porque ſiendo CA perpendicular à FE, tambien lo ſerà à la DC paralela à FE: y ſiendo AC diametro, por ſer perpendicular à la mitad de la cuerda FE, (*corol.de la* 1 *.del* 3.) ſerà DC perpendicular à la extremidad del diametro, y por conſiguiente (16. 3.) tangente.

PROP. XIX.

Sobre vna recta dada deſcribir vna linea eſpiral.

SEa dada la recta LI ſobre quien ſe ha de deſcribir vna linea eſpiral. *Operacion.* Partaſe LI por medio en B: dividaſe BI en tantas partes iguales quantas bueltas ha de dar la eſpira, y ſean por exemplo quatro en B. C. E. G. I. dividaſe la parte BC por medio en A. Deſde A, como centro, haganſe los ſemicirculos BC, DE, FG, HI: deſpues del punto B, como centro, haganſe los otros ſemicirculos CD, EF, GH, IL; y quedarà deſcripta la linea eſpiral. Otros muchos modos ay de formar lineas eſpirales, como ſon el de Archimedes para la quadratura del circulo: y los que vſan los Architectos en los chapiteles de las colunas jonicas, de que hablaremos en ſu lugar.

LIBRO

LIBRO II.

DE LA CONSTRUCCION DE las figuras planas.

PROP. I.

De dos rectas dadas hazer vn triangulo isoceles. (fig. 1.)

SEAN dadas las dos rectas B. C. y de ellas se ha de formar vn triangulo isoceles. *Operacion.* Tomese con el compàs qualquiera de las lineas dadas, como por exemplo B: y de qualquiera punto A hagase à discrecion el arco ST: tomese con el compàs la linea C, y puesto el piè del compàs en qualquiera punto S del arco, hagase el corte T: tirense las lineas AS, AT, y quedarà formado de las lineas dadas el triangulo AST, el qual serà isoceles, por ser los lados AS, AT iguales radios de vn mesmo circulo.

PROP. II.

De dos rectas dadas hazer vn triangulo rectangulo. (fig. 2)

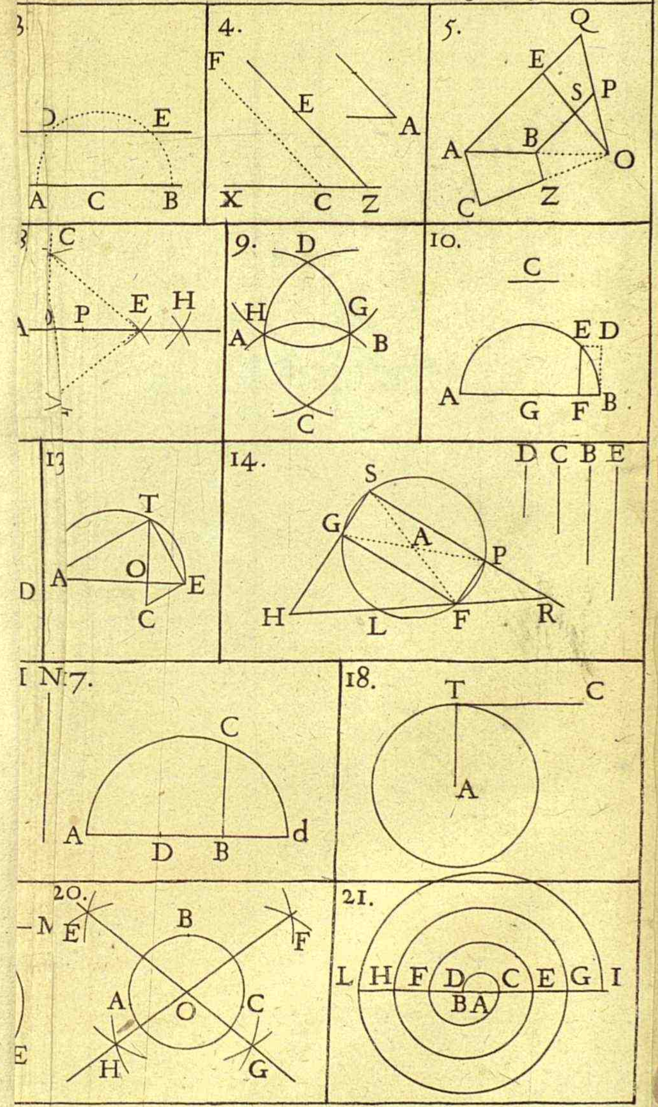
ESte problema comprehende dos casos. *Caso* 1. Sean dadas las rectas IL, LM: y se pide se forme de ellas vn triangulo rectangulo, cuyo angulo recto sea comprehendido de dichas lineas.

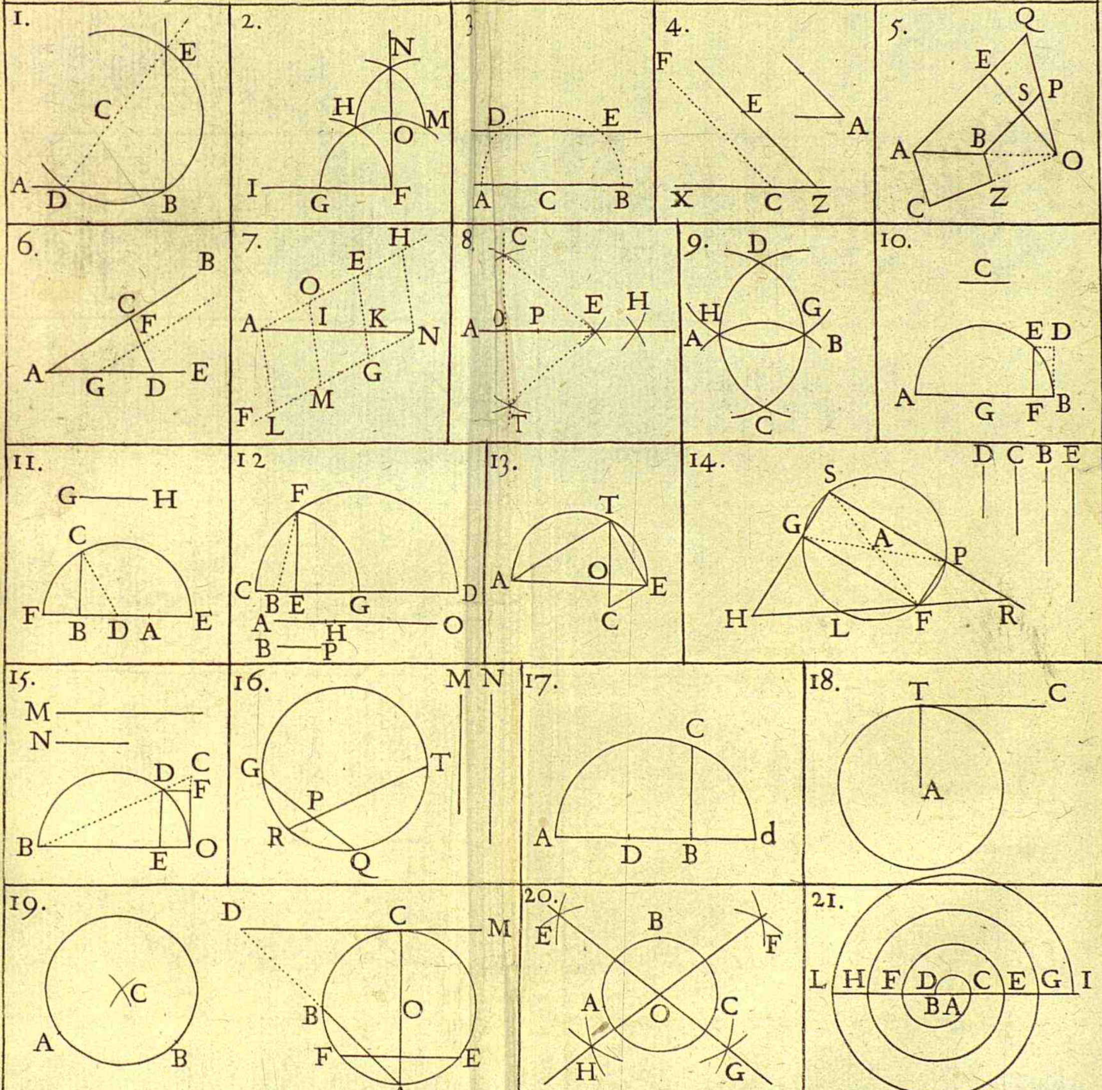
Operacion. Hagase IL perpendicular à la extremidad de LM, (1. *lib.* 1. *de este trat.*) y juntando la recta IM, quedarà formado el triangulo ILM de dichas lineas, y rectangulo en L.

Caso 2. Sean dadas las lineas SA, y E: pidese se forme de ellas

ellas

Estampa. I.




1. E C A D B
2. N H M O I G F
3 D E A C B
4. F E A X C Z
5. Q E S P A B O C Z
6. B C F A G D E
7. H E O A I K N G F L M
8 C A O P E H T
9. D H G A B C
10. C E D A G F B
11. G H C F B D A E
12 F C B E G D A H O B P
13. T A O E C
14. D C B E S G A P H L F R
15. M N D C F B E O
16. M N G T P R Q
17. C A D B d
18. T C A
19. C A B D C M O B F E A
20. B E F A O C H G
21. L H F D C E G I B A

ellas vn triangulo rectangulo, de ſuerte, que la mayor SA, ſea la baſe opueſta al angulo recto.

Operacion. Dividaſe SA por medio en F; y haziendo centro en F con la diſtancia FA, hagaſe vn ſemicirculo: tomeſe con el compàs la linea E, y paſſeſe deſde S haſta C: tirenſe las lineas CA, CS, y quedarà formado el triangulo que ſe pide, el qual ſerà rectangulo en C, por eſtar el angulo C en el ſemicirculo (31. 3.)

PROP. III.

Conſtruir vn triangulo iſoceles, que tenga cada angulo ſobre la baſe duplo del vertical. (fig. 3.)

DIvidaſe vna linea AS en media y extrema razon en X, [30. 6.) y haziendo centro en A, con la diſtancia AS, hagaſe el arco OS à diſcrecion: y tomando con el compàs la AX, ſe paſſarà deſde S à O: y tiradas las lineas SO, AO, quedarà formado el triangulo ASO, que tendrà los angulos O, y S, cada vno duplo del vertical A. Tireſe la XO, y hagaſe (16. 1. *de eſte trat.*] vn circulo, que paſſe por los tres puntos A.X.O.

Demonſtracion. Por eſtar la linea AS dividida en X en media y extrema razon, ſerà el rectangulo de AS, SX, igual al quadrado de AX, ù de SO ſu igual: Luego el rectangulo ASX es igual al quadrado de SO: Luego (37. 3.] SO es tangente del circulo AXO: Luego (32. 3.) el angulo SOX, formado de la tangente SO con la ſecante OX, es igual al angulo A, formado en el ſegmento alterno. Añadaſe à entrambos el angulo AOX, y ſeràn los dos angulos AOX, XOS, eſto es, todo el angulo AOS, igual à los dos juntos A, y AOX: y ſiendo el angulo SXO, por ſer externo reſpeto del triangulo XOA (32. 1.) igual à los dos internos opueſtos A, y AOX, ſerà el angulo OXS igual al angulo AOS: y ſiendo èſte igual al angulo S, por la igualdad de los lados AO, AS, ſeràn los angulos SXO, y S iguales: Luego los lados OX, OS (6. 1.) ſon iguales: y ſiendo por la conſtrucion OS igual à AX, ſeràn las rectas AX, XO iguales: Luego los angulos A, y AOX,

opueſ-

opuestos à dichos lados, son iguales: y siendo, como se ha dicho, el angulo A igual al angulo XOS, seràn los tres angulos A, AOX, XOS iguales: Luego todo el angulo O es doblado del angulo A; y assimismo el angulo S.

Corolario.

De lo dicho se sigue, que el angulo A, y assimismo AOX, es la tercera parte del angulo AXO; porque este angulo (32. 1.) *es igual al angulo S, que es duplo de A; y al angulo XOS, igual à A: luego es triplo de A: y por consiguiente A subtriplo de AXO. Con que segun la mesma construccion se forma vn triangulo Isosceles OXA, que cada angulo sobre la base es vn tercio del vertical.*

PROP. IV.

Dados los lados, y el angulo hazer vn paralelogramo.

(fig. 4.)

EL modo de describir vn quadrado sobre vna recta dada, consta de la prop. 46. del lib. 1. de Eucl. Pidese pues, que de las rectas AB, AC se forme vn paralelogramo rectangulo. Formese de ellas el angulo CAB recto: y desde B con la distancia AC hagase vn arco: y desde C con la distancia AB, hagase otro, que corte al primero en E: tirense las CE, EB, y quedarà formado el paralelogramo rectangulo AE. El Rhomboide se harà de la mesma suerte, solo que el angulo A ha de ser obliquo, è igual al angulo dado, si assi se pidiere.

PROP. V.

Sobre vna linea dada describir qualquiera figura rectilinea semejante à otra rectilinea dada. (fig. 5.)

1 SEa dada la linea FG, y se pide, que sobre ella se desriva vn triangulo semejante al triangulo ACD.

Operacion. Hagase el angulo F igual al angulo A, (23. 1.) y el angulo G, al angulo D: y juntandose las lineas en H, serà tambien el angulo H igual al angulo C: [32. 1.) y por consiguiente seràn los dichos triangulos equiangulos; y

y [4. 6.) sus lados proporcionales: luego son semejantes.

2. Pidese, que sobre la dada SI se forme vn rectilineo semejante al rectilineo PMLQ. Tirese la diagonal PL, y sobre SI hagase, como antes, vn triangulo SOI, semejante al triangulo PLQ: assimesmo descrivase sobre SO el triangulo STO, semejante al triangulo PML, y serà el trapecio TI semejante al MQ, por constar de triangulos semejantes.

PROP. VI.

Sobre vna recta dada describir vn pentagono regular.

(fig. 6.]

Modo I.

PIdese, que sobre la recta AB se descriva vn pentagono regular.

Operacion. Hagase à parte (3.] vn triangulo isosceles M, que tenga cada angulo sobre su base duplo del vertical: y (5.) formese sobre la recta AB el triangulo ADB, semejante à M: y [17. 1. de este) hagase vn circulo, que passe por sus tres puntos ADB: dividanse los angulos DAB, DBA por medio [9. 1.] con las lineas AE, BC: tirense las lineas AC, CD, BE, ED, y quedarà hecho el pentagono.

Demonstracion. El angulo ADB es la mitad del angulo DAB; y como por la construccion los angulos DAE, EAB sean cada vno la mitad del mesmo angulo DAB, seràn los tres angulos ADB, DAE, EAB iguales; assimesmo probarè ser iguales à los sobredichos los angulos DBC, CBA: Luego los cinco son iguales: Luego los cinco arcos DE, EB, BA, AC, CD son iguales; (26. 3.) y por consiguiente son iguales sus cuerdas. (29. 3.] Luego el pentagono descripto es equilatero. Tambien por ser los arcos CDE, DEB iguales, los angulos CDE, DEB son iguales; [21. 3.) y assi los demàs: Luego el pentagono descripto es tambien equilatero: Luego es regular.

Modo II.

Sobre la linea dada AB [fig. 7.] con la distancia AB hagase

gase vn arco à discrecion: levantese del punto A la perpendicular AC: dividase el quadrante CB en cinco partes iguales: tomese vna de estas, y passese de C à F: tirese la linea FA: tirese tambien la A3 al punto 3: de la mitad O de la linea AB, levantese vna perpendicular, que cortarà à la A3 en I: y este serà el centro del circulo, que passarà por los puntos B, A, F, y serà el arco AB su quinta parte: con que passandola de B à H, de H à G, &c. quedarà formado el pentagono.

Esta practica carece del rigor geometrico, por no aver regla demonstrable para dividir el arco CB en cinco partes iguales; pero supuesta su division, se demonstrarà de esta suerte.

Demonstracion. Por los corolarios de la prop.32. del lib. 1. de la Geometria elementar, los cinco angulos internos del pentagono son tanto como seis rectos: Luego à cada vno le tocan seis quintas partes de vn recto. Aviendose pues formado el angulo FAB de seis quintas del recto CAB, serà CAB el angulo del pentagono regular: y por consiguiente tanto la AB, como AF, que le componen, y se han hecho iguales, seràn cuerdas de la quinta parte del circulo que passa por B, A, F, &c. Luego AFG, &c. es pentagono regular.

PROP. VII.

Sobre vna linea dada formar vn exagono regular. [fig.8.]

SEa dada la linea AH, sobre quien se ha de formar vn exagono regular.

Operacion. De los extremos A, H, con la distancia AH, haganse los arcos AC, HC. De la seccion C hagase con el mesmo intervalo el circulo AHE, &c. y la recta AH entrarà seis vezes justas en la circunferencia, y quedarà formado el exagono.

Demonstracion. Tiradas las lineas CA, CH [1. 1. Eucl.] queda formado el triangulo ACH equilatero: Luego el angulo C es la tercera parte de dos rectos, [32.1. Eucl.] ù de vn semicirculo: Luego es la sexta parte de quatro rectos, ù de todo el circulo: Luego el arco AH, que es su medida, es la sexta parte del circulo: y por consiguiente su cuerda AH es el lado del exagono.

PROP. VIII.

Sobre vna recta dada descrivir qualquiera rectilineo regular desde el exagono hasta el de doze lados. [fig.9.]

ESta proposicion, y la siguiente, son de grande vtilidad para la practica; aunque carecen del rigor geometrico. Sea la linea AB, sobre la qual se ha de formar vn Eptagono, Octagono, &c.

Operacion. Dividase la recta AB por medio en O, levantando la perpendicular OI. Hagase centro en B, y con la distancia BA hagase el arco CA: dividase AC en seis partes iguales 1.2.3.&c. Hecho esto, si se quiere hazer vn Eptagono, se tomarà la distancia C 1, y se passarà de C hasta D; y en el circulo hecho con la distancia DA, caberà siete vezes la linea AB. Si se quiere hazer vn Octagono, se passarà la distancia C 2. desde C hasta E: y en el circulo hecho con la distancia EA, caberà ocho vezes la linea AB: y assi de las demas, hasta la figura de 12. lados, en que la distancia CA se passarà hasta I; y en el circulo hecho con la distancia IA caberà 12.vezes la linea AB.

PROP. IX.

Sobre vna linea dada descrivir qualquiera rectilineo desde el de 12. hasta el de 24.lados. (fig.10.)

SEa dada la linea AB, sobre la qual se han de descrivir qualesquiera rectilineos desde el de 12. hasta el de 24.lados.

Operacion. Hagase, como antes, el arco AC, que se dividirà en 12.partes iguales: veasse quantos lados sobre doze tiene la figura que se ha de describir, y tomense del arco CA otras tantas partes, y passense à la perpendicular ID desde C àzia arriba, esto es, si se ha de describir la figura de 15. lados, porque 15. excede al 12.en 3. se tomaràn tres partes del arco CA, y se passaràn de C hasta O: tomese la distancia OB, y passese de O hasta F : y puesto el compas en F, y abierto hasta A, se harà vn circulo, en quien caberà 15. vezes la linea AB. De la misma suerte se describirà qualquiera otra figura hasta la de 24. lados.

PROP. X.

Sobre vna recta dada descrivir vna porcion de circulo capaz de vn angulo igual à otro angulo dado. (fig. 11.)

Pidese, que sobre la linea XA se descriva vna porcion de circulo capaz de vn angulo igual al angulo C dado.

Operacion. Hagase el angulo XAT igual al angulo dado C. Del punto A rirese AE perpendicular à AT: dividase XA por medio, con la perpendicular FH: y haziendo centro en la interseccion F, con la distancia FA, hagase la porcion de circulo XEA: y todos los angulos que se formaren dentro de esta porcion de circulo sobre la recta XA, seràn iguales al angulo dado C.

Preparacion. Tirese la FX, y su perpendicular XG.

Demonstr. El triangulo XFA tiene iguales los lados FX, FA, por ser radios de vn mesmo circulo: luego (5. 1. *Euclid.*) los angulos FXA, FAX son iguales: luego si estos se quitan de los rectos FXG, FAT, quedaràn HXG, HAT iguales: y siendo HAT, por construccion, igual al angulo C, serà HXG igual al angulo C.

Tambien los tres angulos del triangulo XFA son tanto como dos rectos (32. 1. *Eucl.*) luego son iguales à los angulos FXG, FAT: quitense de ambas partes los angulos FAH, FXH, y quedarà el angulo XFA igual à los dos HXG, HAT: esto es, à dos angulos C: y como [20. 3. *Euclid.*] el angulo XEA, hecho en la circunferencia sea la mitad del angulo XFA hecho en el centro; serà el angulo XEA igual al angulo C: y lo mesmo de qualquiera otro que sobre XA se formàre en la circunferencia.

PROP. XI.

De vn punto dado descrivir vn circulo que toque à vna recta dada. [fig. 12.]

Sea dado el punto C, desde quien como centro se ha de descrivir vn circulo, que toque à la recta MN. *Operacion.* Tirese desde C la linea CO perpendicular à MN: y el circulo hecho con el intervalo CO, tocarà à la linea MN; por ser esta perpendicular à la extremidad del radio CO. [16. 3. *Eucl.*] Si se señalasse el punto O en la linea MN, se tiraria la perpendicular OC: y con qualquiera intervalo OC se haria el circulo tangente.

PROP. XII.

De vn punto dado descrivir vn circulo, que toque à otro circulo dado. (fig. 13.)

1. Pidese, que del punto A dado fuera del circulo HM, se descriva otro circulo que le toque. *Operacion.* Tirese por A, y por el centro C la recta AC: y con la distancia AO, se harà el circulo OGD tangente al circulo dado en O.

2. Pidese que del punto B puesto dentro del circulo, se descriva el circulo tangente. *Operacion.* Tirese por el punto dado B, y el centro C, la recta CBO; y con el radio BO, se harà el circulo SLO tangente.

3. Sea dado el punto O en la periferia del circulo, y se pide otro que le toque en O. *Operacion.* Tirese la COD; y de qualquiera punto A, con el radio AO, se harà el circulo tangente. La razon de todo lo dicho, es, porque [11. 3. *Eucl.*] las rectas que passan por los centros de los circulos, passan por el contacto.

PROP. XIII. Theorema.

Si en el semidiametro prolongado de vn circulo, se toma vn punto fuera del centro; el circulo descrito de dicho punto como centro, por la extremidad del diametro, serà tangente; y caerà todo fuera del circulo sobredicho. [fig. 14.]

Explicacion. Sea el circulo AHC, cuyo centro es D: y en el ſemidiametro AD alargado tomeſe qualquier punto E; y con el intervalo EA, haziendo centro en E, deſcrivaſe el circulo ABF. Digo, que eſte circulo toca al AHC en ſolo el punto A.

Demonſtr. El punto E, ò eſtà dentro del circulo AHC, ò fuera. Si dentro; porque en el diametro AF del circulo ABF, ſe ha ſeñalado el punto D fuera del centro E, ſerà (7.3.*Eucl.*) DA menor, que DB: luego el punto B cae fuera el circulo AHC. De la meſma, ò ſemejante manera ſe probaria caer dicho punto B fuera del circulo AHC ſi el punto E eſtuviera fuera de dicho circulo: luego en todo caſo cae fuera el punto B. Lo meſmo ſe convencerà de otro qualquiera, menos el punto A: luego dichos circulos ſe tocan ſolamente en A, y toda la circunferencia ABF cae fuera del circulo AHC.

PROP. XIV.

Deſcrivir vna figura oval, dado el mayor diametro.

LA figura oval puede ſer de diferentes maneras, porque ſe puede formar, ò con circulos que ſe corten, ò que ſe toquen, ò que eſten ſeparados: y en todos caſos puede ſer iguales, ò deſiguales. Su deſcripcion conſiſte en hallar el centro de vn circulo, cuya periferia por la parte concava toque à entrambos circulos ſin cortarles.

Regla general para la deſcripcion por circulos iguales. (fig. 15. 16. y 17.) Sea dada la recta AB para mayor diametro de vn ovalo, que ſe ha de hazer con circulos iguales. Tomenſe los puntos C, y Q igualmente diſtantes de los extremos A, y B: y deſde ellos, con el intervalo CA, haganſe dos circulos: deſde los meſmos puntos, con abertura arbitraria, hagaſe la decuſacion E: deſde E, por los centros C, y Q tirenſe las ECI, EQH: y puesto el pie del compas en E, cō la diſtancia EI, ò EH, hagaſe el arco IH: hagaſe la meſma operacion à la otra parte, y quedarà formado el ovalo con circulos iguales; ò apartados, como en la fig. 15. ò ſecantes, como en la 16. ò tangentes, como en la 17.

Regla general para la deſcripcion de vn ovalo con circulos deſiguales. [fig. 18. 19. y 20.]

Sea dada la recta AB para diametro mayor de vn ovalo, que ſe ha de formar con circulos deſiguales. Tomeſe con el compas vn intervalo mayor que la mitad de la linea AB; con eſte ſe cortaràn los ſegmentos iguales AG, BH. Ponga ſe el compas en E, centro del circulo menor, y con la diſtancia EG, hagaſe el arco GI: paſſeſe el compas à F, centro del circulo mayor; y con la diſtancia FH, hagaſe el arco HI: del punto I en que ſe cortan los arcos, tirenſe por los centros de los circulos las IEQ, IFD; y deſde I, cō la diſtancia IQ, ò ID, hagaſe el arco QD, que tocando à entrambos circulos, formarà el ovalo, tanto en los tangentes, fig. 18. como en ſecantes, fig. 19. como en ſeparados, fig. 20.

Demonſtr. EG, EI, ſon por conſtruccion iguales: luego añadiendoles las iguales EA, EQ, ſeran GA, IQ iguales: por la meſma razon ſon iguales HB, ID: ſiendo pues HB, AG por conſtruccion iguales, ſeràn IQ, ID iguales: y eſtando en eſtas lineas los centros E, I: F, I, el arco QD hecho del centro I, ſerà (13.) tangente de entrambos circulos, y caerà todo fuera de ellos. De la meſma ſuerte ſe demonſtrarà la formacion del ovalo en circulos iguales.

PROP. XV.

Deſcrivir vn ovalo, dados el mayor, y menor diametro. [fig. 21.]

PIdeſe ſe deſcriva vn ovalo, cuyo diametro mayor ſea AB, y el menor CR. *Operacion.* Cortenſe arbitrariamente las porciones iguales AS, BQ, CP. Tireſe la linea PQ: dividaſe PQ en dos partes iguales con la perpendicular MO, que cortarà el diametro CR (alargado ſi fuere meneſter) en O. Deſde O tireſe por el punto Q la linea OQZ: y por S, la OSI: y deſde O, con la diſtancia OC, hagaſe el arco ICZ: y deſde Q, con la diſtancia QZ, hagaſe el arco ZB: y deſde S, con la diſtancia SI, hagaſe el arco IA: y haziendo lo meſmo à la otra parte, quedarà deſcrito el ovalo.

Demonstr. Los triangulos OMP, OMQ tienen los lados OM, MP, iguales à los lados OM, MQ, y los angulos en M rectos iguales: luego los lados OP, OQ son iguales: luego añadiendoles los segmentos PC, QZ iguales, resultaràn OC, OZ iguales: luego el arco ICZ, serà tangente de los arcos ZB, IA descritos de los centros Q, y S (13.) luego la periferia ACB forma el semiovalo.

PROP. XVI.

Descrivir vna Elypse. (fig. 22.)

E*Lypse es vna especie de figura oval, que nace de la seccion obliqua de vna pyramide conica, ù de vn cilindro*: sus admirables propriedades se explican en el Tratado de las Secciones conicas. No se puede describir con el compas: vno de los modos de su formacion es el siguiente.

Sea su mayor diametro AH: y el menor IG, que se cortan perpendicularmente por medio en O. Del punto I, con abertura igual à OA, cortese el mayor diametro en los puntos C, y E: tomese vn hilo igual al mayor diametro AH: y vno de sus cabos fixese en C, y el otro en E; con que el medio del hilo podrà justamente subir hasta I, y formarà el triangulo CIE. Pongase en I vn lapis, y vayase llevando hasta A, y hasta C, cuidando estè siempre tirante, y estendido el hilo: hagase lo mesmo à la otra parte, y quedarà formada la elypse, cuyo centro es O; y los dos puntos C, y E, se llaman *focus*.

PROP. XVII.

Hallar el centro, y los dos diametros de vna Elypse. (fig. 23.)

SEa dada la Elypse ABCD: pidese el centro, y los diametros. *Operacion.* Tirense à discrecion las dos lineas paralelas NX, IH: dividanse entrambas por medio en L, y M: tirese por essas divisiones la recta YLMT, que se partirà por medio en E: y este punto E serà el centro de la Elypse.

Hallado el centro E, se hallaràn los dos diametros del mo-

do siguiente: del centro E descrivase qualquier arco de circulo, que corte la elypse en qualesquiera puntos F, y G: tirese la FG, que se partirà por medio en R: por R y el centro E, tirese la recta BED, y esta serà el mayor diametro de la elypse: tirese por E la perpendicular AEC: y serà el diametro menor. La demonstracion es facil, pero porque requiere tener noticia de algunos terminos, que se explicaràn en el tratado de las secciones conicas, la omito en este lugar.

LIBRO III.

DE LA INSCRIPCION, Y CIRcunscripcion de las figuras.

EN este Libro se contienen las proposiciones del Libro 4. de Euclides; y otras de mucha vtilidad. Las de Euclides se comprehenden en las quince primeras, que guardan casi su mesmo orden; y son el fundamento de la fabrica del canon trigonometrico, como veremos en su lugar.

DEFINICIONES.

1. *Figura inscrita se dize, la que estando dentro de otra toca à la de afuera con todos sus angulos: y si la inscrita es circulo, tocarà con la circunferencia todos sus lados.*

2. *Figura circumscrita se dize, la que està por afuera de su inscrita, y sus lados tocan todos los angulos de la inscrita; y si es circulo, su circunferenci a passa por todos sus angulos.*

3. *Vna linea recta, se dize estar acomodada, ò inscrita en vn circulo, quando sus extremos tocan à la circunferencia.*

PROP.

PROP. I.

Inſcrivir en vn circulo vna recta igual à otra recta dada, mientras ſea menor que ſu diametro. [fig. 1.]

PIdeſe, que la recta AC ſe inſcriva, ò acomode dentro el circulo GIHF. Tomeſe con el compas la longitud de AC: y pueſto el vn pie en E, ſe cortarà con el otro la circunferencia en F: y la linea EF, ſerà igual à la dada AC, como es manifieſto.

PROP. II.

Inſcrivir en vn circulo vn triangulo, equiangulo à otro triangulo dado. (fig. 1.)

EN el circulo meſmo GIHF ſe ha de inſcribir vn triangulo equiangulo al dado ABC. *Operacion.* Tireſe qualquiera tangente LIM (15. 1. *de eſte Trat.*) y en el contacto I hagaſe el angulo MIH igual al angulo A: y el angulo LIG, igual al angulo C (23. 1. *Eucl.*) y tirando la GH quedarà formado el triangulo GIH equiangulo al triangulo dado ABC.

Demonſtr. El angulo MIH es igual al angulo G, hecho en ſu ſegmento alterno (32. 3. *Eucl.*) tambien el angulo LIG, es por la meſma razon, igual al ángulo H. Siendo pues por conſtruccion, el angulo MIH igual al angulo A: y el LIG, al angulo C; ſerà el angulo G igual à A, y el angulo H à C: conque el triangulo GIH es equiangulo al ABC.

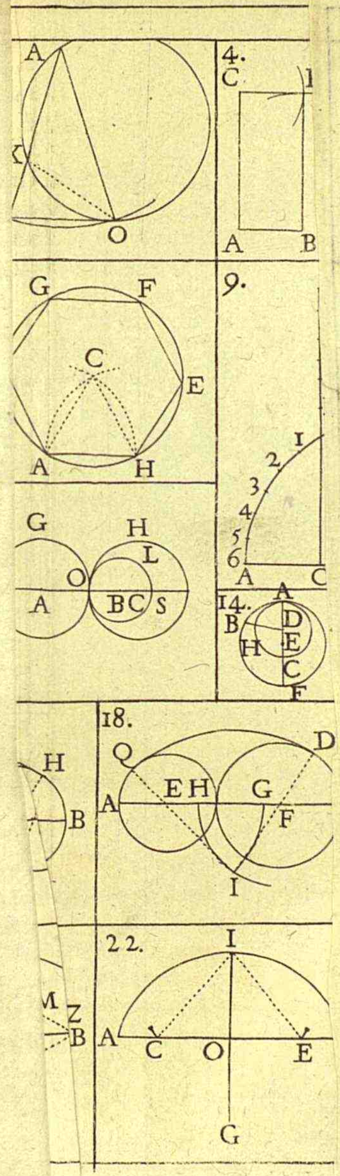
PROP. III.

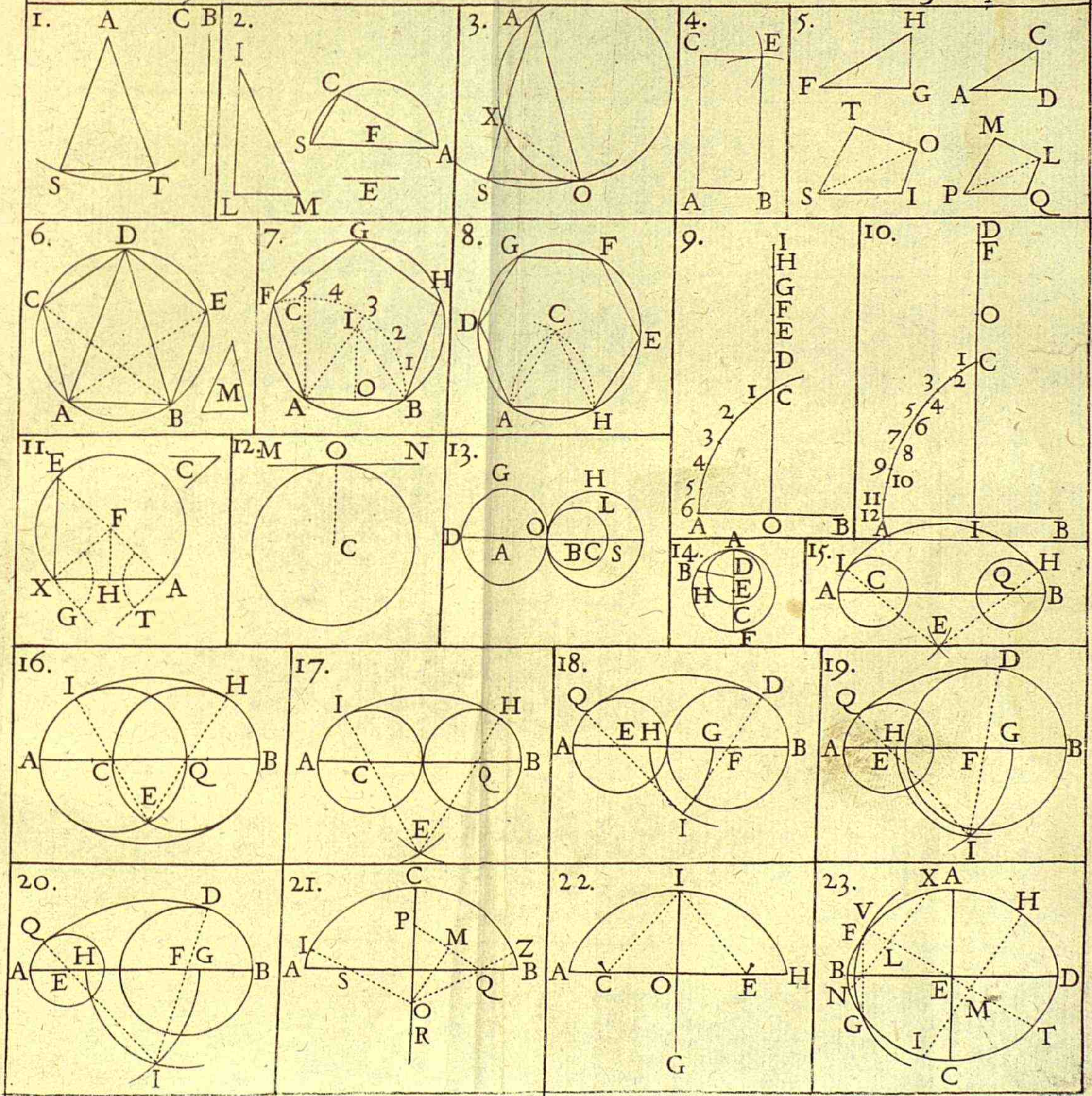
Circumſcrivir à vn circulo dado, vn triangulo, que ſea ſemejante à otro triangulo dado. (fig. 2.

PIdeſe, que al circulo AEDB ſe circunſcriva vn triangulo ſemejante al triangulo dado GPH.

Operacion. Tireſe el diametro AB. Formeſe en el centro C el angulo ACE igual al angulo H: y el angulo BCD igual al angulo G: alarguenſe las lineas EC, y DC à diſ-

cre.




1. A C B S T
2. I C F S A E L M
3. A X S O
4. C E A B
5. H C F G A D T M O L S I P Q
6. D C E M A B
7. G F H 5 4 C 3 I 2 1 O A B
8. G F C D E A H
9. I H G F E D C 1 2 3 4 5 6 A O B
10. D F O 1 C 3 2 5 4 6 7 8 9 10 11 12 A I B
11. E C F X H A G T
12. M O N C
13. G H L O D A B C S
14. A B D H E C F
15. I C Q H A B E
16. I H A C Q B E
17. I H A C Q B E
18. Q D E H G A B F I
19. D Q H G A E F B I
20. Q D A H F G B E I
21. C P M I Z A S Q B O R
22. I A C O E H G
23. X A V H F L B D N E M G T I C

crecion àzia S, y R. Tirese la tangente NO paralela à RD, y la tangente OI paralela à ES, y la tangente NI paralela al diametro AB: y serà el triangulo INO circunscrito, y semejante à GPH.

Demonstr. Por ser ES paralela à OI, es (29.1.) el angulo I igual al angulo ESN: y por ser NS paralela à FC, es el angulo dicho ESN igual al angulo ECF: luego el angulo I es igual al angulo ECF: y siendo este (*por construccion*) igual al angulo H, serà el angulo I igual al angulo H. Tambien por ser RD paralela à NO, es el angulo N igual al angulo DRI: este es igual al angulo DCT, por ser RI, CT paralelas: luego el angulo N es igual al angulo DCT: y como este sea (*por construc.*) igual al angulo G, serà el angulo N igual al angulo G: y por consiguiente (32.1. *Eucl.*) el angulo O igual à P: luego el triangulo circunscrito NOI es equiangulo al dado GPH.

PROP. IV.

Inscrivir vn circulo en vn triangulo. [fig.3.]

EN el triangulo ACH se ha de inscribir vn circulo. *Operacion.* Dividanse dos de sus angulos, como C, y H, por medio, con las lineas CO, HO: y del punto O de su concurso, tirense OF, OE, OG perpendiculares à los lados; y el circulo hecho del centro O, con la distancia OF, ù de qualquiera otra de dichas perpendiculares, tocarà los lados del triangulo propuesto, y serà inscrito. (*def.* 1.)

Demonstr. Los triangulos OGH, OFH, tienen los angulos G, y F rectos iguales: y los angulos en H iguales (*por construc.*) y el lado OH comun: luego (26.1.) dichos triangulos son totalmente iguales: luego OG, OF son iguales. Asimesmo probarè ser OE, OF iguales: luego las tres rectas OE, OF, OG son iguales: luego el circulo descrito del centro O por F, passa por E, y G: y siendo los angulos E, F, G rectos, seràn los lados del triangulo tangentes (16.3. *Eucl.*) luego el circulo es inscrito.

PROP. V.

Circunſcrivir vn circulo à vn triangulo.

DEſcrivaſe por la *prop.17.del Lib.1.de eſte Trat.* vn circulo, que paſſe por los tres puntos, en que ſe forman los angulos del triangulo, y quedarà el circulo circunſcrito. Conſta de dicha prop.

PROP. VI.

Inſcrivir en vn circulo [fig.4.] *vn quadrado, vn octagono; y las demas figuras regulares de doblado numero de lados.*

O*Peracion.* Tirenſe dos diametros, que ſe corten perpendicularmente en el centro E del circulo: Tirenſe las lineas AC,AD,BD, BC: y quedarà inſcrito el quadrado.

Demonſtr. Por ſer los quatro angulos formados en el centro E rectos, ſeràn los arcos, y cuerdas AC, AD, &c. iguales: y porque cada vno de los quatro angulos A,D,B,C eſtà en el ſemicirculo, ſon todos rectos (31.3.) luego ACBD es quadrado.

De aqui ſe infiere, que dividiendo los arcos AC,CB,&c. por medio, y tirando ſus cuerdas, quedarà inſcrito el octagono: y continuando la ſubdiviſion, ſe inſcriviràn las demas figuras de doblado numero de lados.

PROP. VII.

Circumſcrivir vn quadrado à vn circulo. (fig.5.)

O*Peracion.* Por el centro E del circulo, tirenſe dos diametros en angulos rectos AB, CD: por ſus extremidades tirenſe perpendiculares, y quedarà formado el quadrado IG circumſcrito.

Demonſtr. En el quadrilatero AD, los angulos E y D ſon iguales por conſtruccion. Luego las lineas AE, GD ſon paralelas (28. 1.) por la meſma razon ſon paralelas ED, AG: Luego las opueſtas EA, DG: ED, AG, ſon (33.1.)

[33.1.] iguales: y ſiendo EA, ED iguales (por la def del circ.) ſeràn todas iguales: y (34.1.) los angulos E, y G opueſtos tambien ſeràn iguales: ſiendo pues E recto, tambien lo ſerà el angulo G: de la meſma ſuerte probarè ſer H, I, F rectos: y que las rectas BH, AG ſon iguales à ED, y por conſiguiente entre ſi, y que IB, CE ſon iguales, y por conſiguiente IB con BH, y aſsi de las demàs: luego los quatro lados FG, GH, IH, IF, tienen ſus mitades mutuamente iguales: luego los quatro lados ſobredichos ſon iguales, y FH, es quadrado, y circunſcrito al circulo, por ſer ſus lados las tangentes.

PROP. VIII.

Inſcrivir vn circulo en vn quadrado. (fig.6.)

O*Peracion.* Dividanſe los lados del quadrado por medio en E, F, G, H, y tiradas las lineas EG, HF, de la interſeccion I con la diſtancia IE hagaſe vn circulo, y quedarà inſcrito.

Demonſtr. Las lineas EG, BD, juntan las EB, GD, que ſon paralelas, y por conſtruccion iguales: luego [33.1. Eucl.] EG, BD ſon paralelas, è iguales: y (34. 1. Eucl.) los angulos E, y D ſon iguales, y ſiendo D recto, tambien lo ſerà el angulo E. Aſsimeſmo probarè ſer rectos los angulos formados en G, H, F. Siendo pues EI, BF paralelas; como tambien EB, IF, ſerà EF paralelogramo, y ſiendo por ſupoſicion ſus lados EB, BF iguales, tambien lo ſeràn IE, IF [34.1.Eucl.] de la meſma ſuerte probarè ſer iguales IF, IG, IH: luego el circulo deſcrito del centro I, por E, paſſarà por F, G, H, y ſiendo los angulos formados en E, F, G, H, rectos: los lados ſeràn tangentes.

PROP. IX.

Circunſcrivir vn circulo à vn quadrado. (fig.4.)

O*Peracion.* Tirenſe las diagonales AB: CD, que ſe cortaràn en E: y haziendo centro en E con la diſtantancia EA, se harà vn circulo, que serà circunscrito al quadrado.

Demonstr. El triangulo CAD tiene el angulo A recto: luego los dos ACD, ADC hazen vn recto (32.1.Eucl.): y como dichos angulos [5.1.Eucl.] sean iguales, serà el angulo ACE medio recto: de la mesma suerte se probarà ser medio recto el angulo CAE: luego los angulos ACE, CAE son iguales: luego (6.1.Eucl.) las EC, EA son iguales: lo mesmo se convence de las demàs: luego el circulo descrito del punto E con la distancia EA passa por los quatro puntos A, D, B, C.

PROP. X.

Inscrivir en vn circulo vn pentagono regular, y las demàs figuras de doblado numero de lados. [fig.6.lib.2.]

MOdo 1. Dado el ciriculo ACD, &c. se pide que se inscriva en èl vn pentagono regular.

Operacion. Hagase aparte vn triangulo M Isoceles, que cada angulo sobre su base sea duplo del vertical [3. lib.2. de este Trat.] y dentro del circulo dado inscrivase [2.] el triangulo ADB semejante à M: y la AB serà el lado del pentagono inscrito, que tomandola con el compàs, darà los puntos E, D, C: y tiradas las lineas BE, ED, &c. quedarà inscrito el pentagono. Consta de la prop.6. del lib.2. de este Trat.

Modo 2. mas breve, y facil: es de Ptolomeo en el *lib.*1. *de su Almagesto.* (fig. 7.) Tirese el diametro GH: y el semidiametro MI perpendicular à GH: dividase el radio MH por medio en L. Desde L como centro, con la distancia LI, Hagase el arco IF: tirese la recta IF, y esta serà el lado del pentagono inscrito, desuerte, que caberà cinco vezes justas en la periferia del circulo: y MF serà el lado del polygono de 10. lados, que cabe rà 10. vezes en la mesma periferia. La demonstracion se puede ver en el P. Clavio en el Escolio à la prop. 10. del *lib.*13.*de Eucl.* Dividiendo por medio los arcos que sirven para el pentagono

no se inscrivirà tambien la figura de 10. lados: y con otra subdivision la de 20. y assi de las demàs.

PROP. XI.

Circunscrivir vn pentagono, ò qualquiera figura regular à vn circulo. [fig.8.]

LA regla que dà Euclides para circunscrivir el Pentagono regular al circulo, es general para todos los polygonos regulares: y assi, lo que se obrare en el Pentagono, se harà tambien en los demas.

Operacion. Inscrivase en el circulo [11.] el Pentagono MNP, &c. Tirense à sus angulos los radios OM, ON, OP, &c. Por sus extremidades MNP, &c. tirense las tangentes SZ, TS, TV, VX, XZ; y quedarà circunscrito el pentagono.

Preparacion. Del centro O tirense las lineas OS, OT.

Demonstr. Por salir las tangeutes SM, SN de vn mesmo punto S, es el quadrado de qualquiera de ellas igual al rectangulo OSI (36.3.*Eucl.*) Luego los quadrados de SM, SN son iguales, y por consiguiente son iguales dichas lineas: tambien son iguales los radios OM, ON: luego los triangulos SOM, SON, tienen los lados SMO, SNO iguales, y SO comun: luego (8.1.*Eucl.*) dichos triangulos son totalmente iguales: luego los angulos SOM, SON, son iguales, y cada vno es la mitad del angulo NOM. Assi mesmo demonstrarè, que el angulo NOT es la mitad del angulo NOP, igual à MON, por ser los angulos del centro proprios del pentagono regular inscrito: luego los angulos SON, NOT son iguales; con que los triangulos SNO, TNO, tienen los angulos en O iguales: los angulos en N rectos, y la NO comun: luego [26.1.*Eucl.*] son totalmente iguales, y las lineas SN, NT son iguales: de la mesma suerte probarè ser iguales las lineas SM, MZ: luego TS, SZ son iguales: y assi mesmo las demas lados del pentagono: luego es equilatero. Y aviendo probado, que los angulos NSO, NTO son iguales, y mitades de los angulos totales T, y S, se sigue ser estos, como todos los demas angulos, iguales: luego el pentagono es equiangulo: luego es regular.

PROP.

PROP. XII.

Inscrivir vn circulo en el Pentagono regular. (fig.9.)

SEa propuesto el pentagono MST, &c. en quien se ha de inscribir vn circulo. *Operacion.* Dividanse los angulos M, y S por mitad con las lineas MO,SO,que concurriràn en O : dividanse tãbien por mitad los lados MS,ST en H,I: y tiradas del punto O las OH, OI: hagase vn circulo con la distancia OH: y este tocarà los lados del pentagono; y por consiguiente serà inscrito.

Demonstr. En el triangulo MOS, los angulos M, y S son iguales, por ser mitades de angulos iguales: luego [6. 1. *Eucl.*) los lados OS, OM son iguales: luego los triangulos MHO,SHO, tienen los lados OM, MH, iguales à los lados OS, SH, y los angulos en M, y S iguales: luego [4.1. *Eucl.* son totalmente iguales : y por la mesma razon seràn iguales ISO, SOH; como tambien ISO, IOT : luego los lados OH, OI son iguales : luego el circulo descrito del centro O, por H, passarà por I: y por las demas mitades de los lados del pentagono: luego tocarà dichos lados. De la mesma manera se inscrivirà el circulo en otra qualquiera figura regular.

PROP. XIII.

Circumscrivir vn circulo à vn Pentagono, ò à qualquiera otra figura regular. [fig. 10.]

OPeracion. Dividanse qualesquiera dos lados del pentagono, ù de otra qualquiera figura regular, por medio en O,I: y de dichas divisiones se levantaràn las perpendiculares OR, IR, que concurriràn en vn punto, como R: Digo, que el circulo hecho del centro R,con la distancia RQ, serà circunscrito. Tirense RQ,RP,RS.

Demonstr. Los triangulos PRO,ORQ, QRI, IRS, se demuestran iguales, como en la prop. anteced. Luego RP, RQ, RS son iguales : luego R es centro del circulo que passa por PQS.

PROP.

PROP. XIV.

Inscrivir vn Exagono regular en el circulo. [fig.11.]

OPeracion. Tirese el diametro NR : y haziendo centro en R, con la distancia RO, hagase el arco SOQ: tirense las rectas QOM, SOP : juntense las cuerdas MN, NP,&c. y quedarà inscrito el Exagono regular. Consta de la prop.7. del lib.2.de este Trat.

Corolarios.

1. *De aqui se colige ser el lado del Exagono igual al radio, porque RO, RQ son radios de vn mesmo circulo SOQ : y RO es radio del circulo en quien està inscrito el exagono.*

2. *Si se tiran las lineas SN,NQ, SQ, quedarà inscrito el triangulo SNQ equilatero: porque el angulo SOQ incluye dos sextas, esto es, vn tercio del circulo: y assi mesmo los angulos NOS,NOQ : luego las cuerdas SN,NQ, SQ son iguales.*

PROP. XV.

Inscrivir en vn circulo las figuras de 15.30.60.lados,&c. [fig.12.]

OPeracion. Inscrivase en el circulo vn triangulo equilatero ACB [*corol.2.precedente*] y vn pentagono regular ADF,&c. (13.) Digo, que CF es la decimaquinta parte de la periferia; y su cuerda, el lado del polygono de 15.lados.

Demonstr. Por ser la recta AC lado del triangulo equilatero, es el arco AC la tercera parte del circulo : luego a viendose de dividir el circulo en 15. partes, le tocaràn 5. al arco AC, que son el tercio de 15. Tambien por ser AD lado del pentagono, serà el arco AD la quinta parte del circulo: luego de las 15. partes le tocan 3.que son el quinto de 15. y al arco DF le tocan otras tres : luego à todo el arco ADF le tocan 6. Y como al arco AC, por la razon sobredicha, le toquen 5. se sigue ser CF vna de las 15. partes del circulo: y la cuerda CF el lado de la figura de 15. lados.

Hallado este, por continua subdivision se inscriviràn las figu-

figuras de 30.60. lados, &c. *Aqui terminan las proposiciones del lib. 4. de Euclides.*

PROP. XVI.

Inscrivir vn Heptagono regular en vn circulo.

HAsta aora no se ha hallado methodo demonstrable para inscrivir en el circulo otros polygonos regulares, que los explicados en las proposiciones passadas, y los que se pueden continuar por bisseccion de sus arcos. Si se hallasse arte para formar vn triangulo isoceles, que qualquier angulo sobre su base fuera triplo, quadruplo, &c. del vertical, se inscrivirìan en el circulo las figuras de 7.9.11. 13. lados, &c. porque assi como el triangulo isoceles del angulo duplo [11.] sirve para la inscripcion del pentagono; el isoceles del angulo triplo sirviera para el *Heptagono*; el de quadruplo para el *Nonagono*, &c. pero por no aver modo geometrico para formar dicho triangulo, me contentarè con explicar el siguiente, bastante para la practica.

Tirese el diametro AI (*fig.* 13.) y con la distancia igual al semidiametro AL; hagase el arco CLC: tirese la recta CC: y su mitad CO, serà el lado del Heptagono, que caberà 7. vezes en la circunferencia del circulo dado.

PROP. XVII.

Inscrivir vn Nonagono regular en vn circulo. [fig. 14.]

EN el circulo dado tirese el semidiametro AI: hagase centro en I, y con la distancia IA, hagase el arco OAC. Tirese la recta CC prolongada àzia F: y con la mesma distancia AI, desde E como centro, hagase el arco FG: y del punto F con el mesmo intervalo, el arco EG. Tirese la recta AG: y el arco OH serà sin diferencia notable la nona parte de la periferia: y la recta OH el lado del Nonagono.

PROP.

PROP. XVIII.

Inscrivir el polygono de onze lados en vn circulo. [fig. 15.]

O*Peracion.* Tirese el semidiametro AT: dividase por medio en C: de los puntos A, y C con el intervalo AC, haganse los arcos CSI, AS: del punto I con el intervalo IS, hagase el arco SO, y el intervalo CO serà sin diferencia notable el lado de la figura de once lados.

PROP. XIX.

Inscrivir en el circulo qualquiera figura regular.

O*Peracion.* Dividase vn quadrante del circulo dado, en tantas partes iguales, quantos tiene lados la figura que se ha de inscrivir. Tomense siempre quatro de las dichas partes, y esta distancia caberà tantas vezes justamente en el circulo, quantos lados tiene la figura. *Exemplo.* Quiero inscrivir el pentagono: divido vn quadrante del circulo en 5 partes iguales: tomo con el compas las 4. y esta distancia serà el lado del pentagono. La razon es, porque las cinco partes en que està dividido el quadrante, caben quatro vezes en todo el circulo: luego quatro de ellas caben cinco vezes; y assi de los demas polygonos regulares.

PROP. XX.

Inscrivir vn quadrado en vn triangulo dado. [fig. 16.]

E*Sta, y las siguientes proposiciones solo sirven à la curiosidad; omito sus demonstraciones por ser prolixas, y no depender de ellas Theorema alguno: podrà verlas el curioso en Samuel Marolois, que satisfarà su deseo.*

Sea dado el triangulo ABC; y se pide se inscriva en èl vn quadrado. *Operacion.* Del punto A levantese à esquadra la AD igual à AB: del angulo C, caiga el perpendiculo CE: tirese la DE, y de la seccion F tirese FG paralela à la base AB: tirense FH, GI perpendiculares à la mesma base, y serà HG el quadrado inscrito.

V PROP.

PROP. XXI.

Inscrivir vn triangulo equilatero en vn quadrado. (fig. 16.)

O*Peracion*. Tirense las diagonales AC,BD; y del punto E, con el intervalo EA, hagase el circulo circumscrito al quadrado dado: y desde C con el mesmo intervalo, haganse los cortes G,y F: tirense las lineas AG, AF: y por las intersecciones H,I con los lados del quadrado, tirese la HI;y quedarà inscrito el triangulo equilatero AHI.

PROP. XXII.

Inscrivir vn triangulo equilatero en vn pentagono. (fig. 18.)

PIdese, que dentro del pentagono ABC, &c. se inscriva vn triangulo equilatero. *Operacion*. Circumscrivase al pentagono dado vn circulo [14.] y tirado el diametro AG, con el mesmo intervalo del radio FG, haganse desde G los cortes KL: tirense las AL,AK,que cortan al pentagono en I, H: tirese la HI, y serà el triangulo inscrito AHI equilatero.

PROP. XXIII.

Inscrivir vn quadrado en vn pentagono. (fig. 19.)

SEa dado el pentagono ABC,&c. en quien se ha de inscrivir vn quadrado. *Operacion*. Tirese AQ perpendicular à la base CD: hagase ET paralela à AQ, è igual à EB: tirese la recta AT,que cortarà al lado del pentagono en O: tirese OP paralela à DC, y OM paralela à AQ: y PN tambien paralela à AQ; y cerrando con la NM, quedarà el quadrado PM inscrito en el pentagono.

PROP. XXIV.

Circunscrivir vn quadrado à vn triangulo equilatero. (fig. 20.)

SEa el triangulo equilatero ACB à quien se ha de circumscrivir vn quadrado. *Operacion*. Cortese la base CB por medio en E: alarguese la mesma base à entrambas partes,desuerte,que ED,ED sean iguales à EA. Del pũto E, con la distancia EC, hagase el semicirculo CFB. Tirese la linea AEF, y las lineas AD,AD: y del punto F tirense las lineas FCH, FBG, y quedarà circumscrito el quadrado AGFH.

PROP. XXV.

Circunscrivir à vn quadrado vn triangulo, semejante à otro triangulo dado. [fig. 21.]

PIdese, que al quadrado FGDE se circunscriva vn triangulo semejante al triangulo ABC. *Operacion*. Hagase el angulo EFM igual al angulo A: y el angulo FEM igual al angulo B: alarguese la linea GD por entrambas partes; y assi mesmo las ME, MF, hasta que encuentren con la IH en I, y en H: y serà el triangulo circumscrito MIH, semejante al triangulo ACB.

Demonstr. El triangulo MIH es (2.6.Eucl.) semejante al MFE, y aviendose este hecho semejante al triangulo ACB, serà IMH semejante à ACB.

PROP. XXVI.

Circumscrivir vna figura oval à vn paralelogramo rectangulo. [fig. 22.]

PIdese, que al paralelogramo rectangulo AF, se circumscriva vna figura oval. *Operacion*. Dividanse por medio los quatro lados en H,I,G,K, y tirense las lineas GK, HI. Tirense las rectas AI, CI, que cortaràn à GK en L, y O. Desde I, con la distancia IA, hagase el arco AC; y desde L, con la distancia LA, hagase el arco AE: y assi sus correspondientes, y quedarà circumscrito el ovalo. Tambien se puede tirar la linea AR à qualquiera punto R de la HR, y con la distancia RA hazer el arco AC: y con la QA el arco AE. Consta esta practica de la prop. 13. del libro antecedente.

(***)
(*)

LIBRO IV.

DE LA DIVISION DE LAS Figuras.

PROP. I.

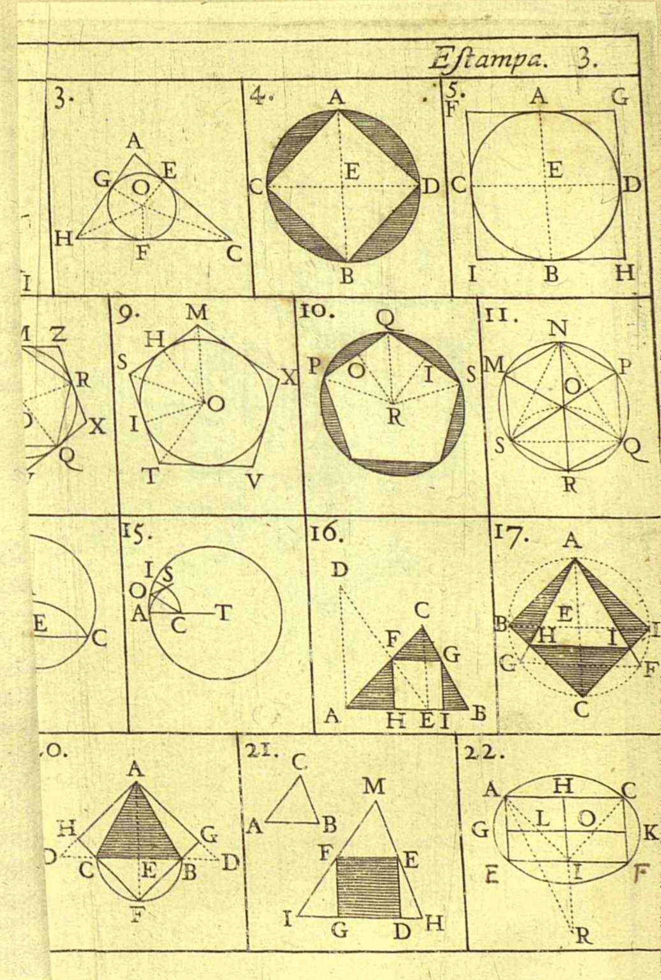
Dividir el circulo en 360. grados. (fig. 1.)

PAra dividir el circulo en 360. grados, se tirarà el diametro AE; à quien se harà perpendicular el otro diametro CF: y quedarà dividido el circulo en quatro quadrantes AC, CE, FE, FA. Con el intervalo igual al radio, haganse desde A los cortes H, y G, que, como diferentes vezes se ha dicho, seràn cada vno de 60. grados. Desde C, con la mesma abertura, haganse los cortes M, y N; y desde E los cortes I, K: y desde F los cortes S, L: y quedarà dividido el circulo en 12. partes iguales: porque siendo el quadrante CA 90. gr. y siendo AH 60. y CM tambien 60. seràn tanto AM, como CH: y MH de 30. gr. luego el quadrante CA, queda dividido en tres partes iguales; y assi mesmo los otros: luego todo el circulo eu 12. Dividase aora cada vna de estas partes en tres iguales: y quedarà cada quadrante dividido en 9. partes iguales; y todo el circulo en 26. Dividase cada vna de estas en 10. y quedarà cada quadrante dividido en 90. gr. y el circulo, en 360.

PROP. II.

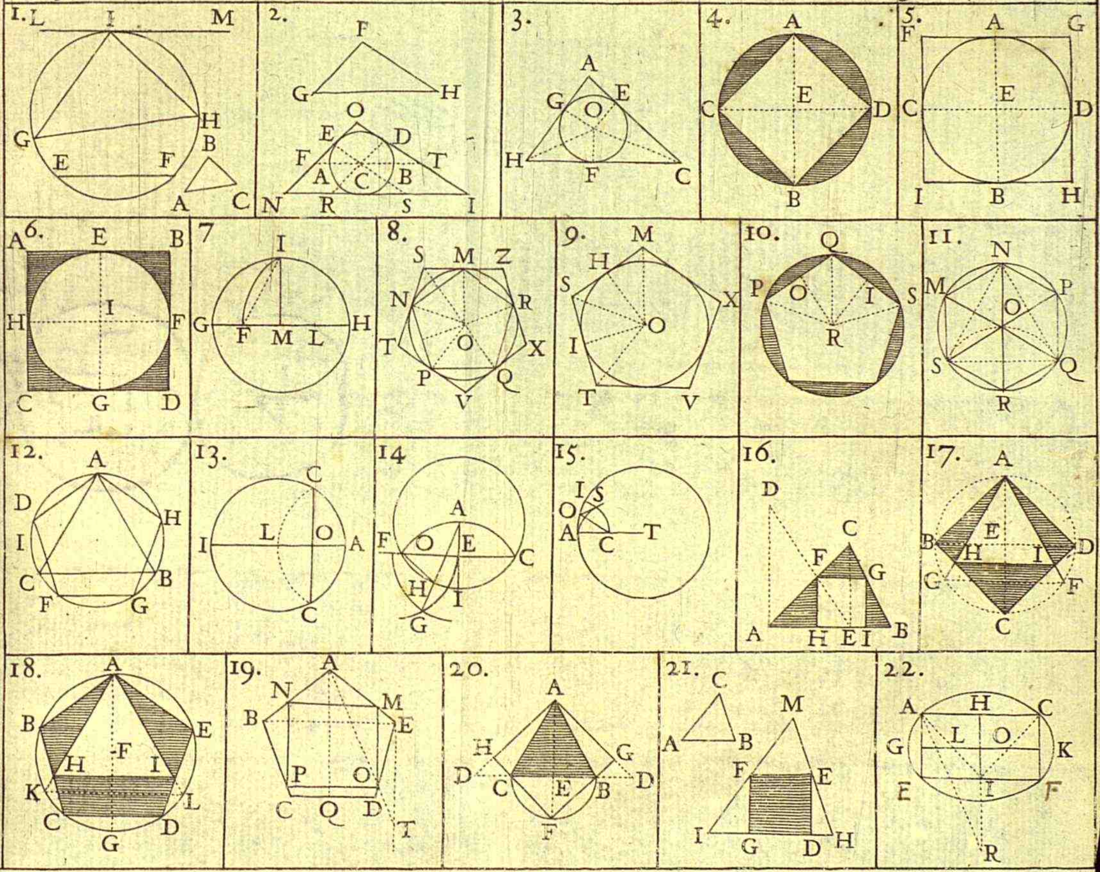
Dividir vn triangulo en qualesquiera partes, con lineas tiradas de vno de sus angulos. [fig. 2.]

El



ma: *Pidese vn triangulo semejante al propuesto AEF, que sea su mitad.*

Si se pidiere, que la paralela KL dividiesse el triangulo AEF en dos partes desiguales; como por exemplo, q̃ la AL fues-


1. L I M G H E F B A C
2. F G H O E D F T A C B N R S I
3. A G E O H F C
4. A C E D B
5. F A G C E D I B H
6. A E B I H F C G D
7 I G F M L H
8. S M Z N R T O X P Q V
9. M H S X O I T V
10. Q P O I S R
11. N M P O S Q R
12. A D H I C B F G
13. C I L O A C
14 A F O E C H I G
15. I S O A C T
16. D C F G A H E I B
17. A E B H I D G F C
18. A B E F H I K L C D G
19. A N M B E P O C Q D T
20. A H G D C E B D F
21. C A B M F E I G D H
22. A H C G L O K E I F R

Dividir vn triangulo en qualeſquiera partes, con lineas tiradas de vno de ſus angulos. [fig.2.]

El

EL triangulo ABC ſe ha de dividir en dos partes, la vna doblada de la otra, con vna linea tirada del angulo A.

Operacion. Dividaſe el lado BC, opueſto al angulo A, en dos partes tales, que BE ſea doblada de EC (10. 6. Eucl.) tireſe la AE, y quedarà dividido el triangulo en dos partes, de los quales BAE ſerà dupla de EAC.

Demonſtr. Los triangulos BAE, EAC, por tener vna meſma altura, ſon como ſus baſes [1.6.Eucl.] luego ſiendo BE dupla de AE, ſerà el triangulo BAE duplo de EAC. Si ſe pidiere que dicho triangulo ſe divida en dos partes iguales, ſe dividirà la baſe por medio, y ſe obrarìa como antes: y aſsi en las demas proporciones.

PROP. III.

Dividir vn triangulo en qualeſquiera dos partes, con vna paralela à vno de ſus lados. [fig.3.]

PIdeſe, que el triangulo AEF ſe divida en dos partes iguales, con vna linea paralela à la baſe AF. *Operacion.* Dividaſe el lado AE por medio en G: añadaſe en derechura EH igual à EG: ſaqueſe [13. 6. Eucl.] la media proporcional EI entre AE, EH: corteſe EB igual à EI; y la paralela BL dividirà el triangulo en dos partes iguales.

Demonſtr. Los triangulos AEF, BEL ſon ſemejantes [2.6. Eucl.] luego tienen entre ſi razon duplicada de la de ſus lados homologos AE, BE; y ſiendo BE igual à EI, tendrà dichos triangulos razon duplicada de la de AE à EI: la razon de AE à EH es duplicada de la de AE à EI: luego el triangulo AEF, al triangulo BEL, tiene la meſma razon que AE à EH: ſiendo pues AE doblada de EH, ſerà el triãgulo AEF doblado de BEL: luego eſte es mitad del otro; y el trapezio AL, la otra mitad.

Eſte Problema ſe puede tambien proponer en eſta forma: *Pideſe vn triangulo ſemejante al propueſto AEF, que ſea ſu mitad.*

Si ſe pidiere, que la paralela KL dividieſſe el triangulo AEF en dos partes deſiguales; como por exemplo, q̃ la AL fueſ-

fueſſe doblada de la otra: ſe dividirà la AE en dos partes, la vna doblada de la otra; y la menor ſe pondrìa en EH: y ſi ſe pidieſſe, que BEL fueſſe la mayor, ſe pondrìa el mayor ſegmento de la AE, deſde E à H; y ſe obrarìa como antes.

PROP. IV.

Dividir vn triangulo con lineas paralelas à vn lado, en diferentes partes, que tengan entre ſi vna razon dada. (fig.4.)

PIdeſe, que el triangulo ABC ſe divida en quatro partes iguales con lineas paralelas à la baſe BC. *Operacion.* Dividaſe AB en quatro partes iguales en los puntos D,E,F. Halleſe entre AB, AD, la media proporcional AI: entre AB,AE, la media AO: y entre AB, AF la media AP. Tirenſe por los puntos P,O,I, las lineas PL,ON, IM paralelas à BC; y quedarà dividido el triangulo, como ſe deſeava. Cada diviſion es la meſma que la de la propoſicion antecedente, como tambien la demonſtracion.

PROP. V.

Dividir vn triangulo en dos partes iguales, por vn punto dado en vno de ſus lados. (fig.5.)

SEa dado el punto F en el lado CE del triangulo CAE. Pideſe, ſe divida dicho triangulo en dos partes iguales con vna linea que ſalga del punto F. *Operacion.* Dividaſe el lado CE por medio en G: y tirenſe las lineas AG,AF; y del punto G hagaſe GH paralela à FA: y tirando la linea FH, quedarà partido el triangulo en dos partes iguales.

Demonſtr. El triangulo GAC es la mitad del triangulo CAE (1.6.Eucl.) El trapezio CAHF es igual al triangulo GAC: luego es la mitad del triangulo CAE. Que el trapezio CAHF ſea igual al triangulo GAC, ſe prueva, porque los triangulos GAH, GFH tienen vna meſma baſe GH, y eſtàn entre las paralelas GH, FA: luego [32.1.Eucl.] ſon iguales. Quiteſe à entrambos GOH, que es comun, y quedaràn los triangulos FOG, AOH iguales: añadaſe à entrambos el trapezio AOFC; y reſultaràn el trapezio CAHF,

CAHF, y el triangulo GAC iguales: luego dicho trapezio es la mitad del triangulo: y FHE la otra mitad. Aſsi meſmo ſe dividirà en dos partes que tengan otra qualquier proporcion, dividiendo la CE en dos partes, que tengan la proporcion dada, y obrando como antes.

PROP. VI.

Dividir vn triangulo en qualeſquiera partes, por vn punto dado en vno de ſus lados. (fig.6.)

PIdeſe, que el triangulo MAN ſe divida en tres partes iguales, por el punto I. *Operacion.* Dividaſe la baſe MN en tres partes iguales en los puntos O, P. Tirenſe las rectas AO, AI,AP, haganſe PH, OG, paralelas à AI: tirenſe vltimamente las rectas IG,IH; y con eſtas quedarà dividido el triangulo en tres partes iguales.

Demonſtr. Los triangulos PAH,PIH, por tener vna meſma baſe PH, y eſtar entre las paralelas PH, IA, ſon iguales (37.1.Eucl.) luego ſi ſe añade à entrambos el triangulo PHN, reſultaràn PAN, IHN iguales. El triangulo PAN es el tercio del triangulo total MAN: luego IHN es el tercio de dicho triangulo. De la meſma ſuerte ſe convence, que el triangulo MGI es el tercio de MAN: luego queda dividido en tres partes iguales.

De la meſma ſuerte ſe dividirà en partes, que tengan qualquiera razon de deſigualdad, dividiendo ſegun la razon dada la baſe MN, y haziendo la meſma operacion.

PROP. VII.

Dividir vn triangulo en partes iguales, por diferentes puntos ſeñalados en vno de ſus lados. (fig.7.)

PIdeſe, que el triangulo KAC ſe divida en tres partes iguales, por los puntos E,H. *Operacion.* Dividaſe por el punto E en dos partes, que la vna ſea doblada de la otra, [5.] y ſerà, por exemplo, el triangulo EGC doblado del trapezio KAGE; y por conſiguiente ſerà eſte la tercera parte del total KAC: dividaſe aora el triangulo EGC en dos partes iguales por el punto H (5.) y quedarà el triangugulo total dividido por E, y H, en tres partes iguales. Consta de las antecedentes.

PROP. VIII.

Cortar de vn campo triangular las cahizadas de tierra, que se pidieren. [fig.8.]

1. PIdese, que del campo triangular LMN, se corten con vna linea, tirada del angulo M, cien varas quadradas. *Operacion.* Tirese la perpendicular MP, y vease quantas varas tiene de largo, supongamos sean 25. Partase 100. por 25. y serà el quociente 4. dupliquese el 4. y serà 8. cuentense en LO. 8. varas, y tirese la recta OM: y serà el triangulo LMO de 100. varas quadradas.

Demonstr. El triangulo LMO es (41.1. Eucl.) la mitad del paralelogramo hecho de la base LO, y de la perpendicular MP; y siendo MP 25. y LO 8. serà dicho paralelogramo 200. luego el triangulo LMO serà 100.

2. Pidese, que del triangulo QRS se corten 100. varas quadradas con vna linea tirada del punto I, dado en el lado RS. *Operacion.* Tirese del punto I la perpendicular IT al lado RQ: vease quantas varas tiene en longitud, sean por exemplo 10. partanse 100. por 10. y serà el quociente 10. dupliquese, y seràn 20. cuentense 20. varas desde R hasta V, y tirando la recta VI, serà el triangulo VRI de 100. varas quadradas, por la razon sobredicha.

Si aviendo duplicado el quociente fuere tan crecido el numero, que no cupiesse en la linea RQ, se tirarà la linea IQ al angulo Q, y se buscarà quantos pies quadrados caben en la area del triangulo RIQ, que seràn menos de los que se buscan: y del modo sobredicho, se cortarà del triangulo QIS, lo que restare para cumplimiento del numero que se pide.

PROP. IX.

Dividir vn paralelogramo en qualesquiera partes con lineas paralelas à vno de sus lados. [fig.9.]

El

EL paralelogramo MN se ha de dividir en dos partes, la vna doblada de la otra, con vna linea paralela al lado NP.

Operacion. Dividase el lado MP en R, desuerte, que MR sea doblada de RP. Tirese RV paralela à NP, y quedarà dividido en dos partes MV, RN, aquella doblada de esta.

Demonstr. Los paralelogramos MV, RN, por tener vna mesma altura se han como sus bases MR, RP (1.6. Eucl.) y siendo por construccion MR doblada de RP, tambien MV serà doblado de RN.

PROP. X.

Cortar de vn campo paralelogramo las cahizadas que se quisieren. [fig.9.]

DEl campo MN se han de cortar 600. varas quadradas.

Operacion. Midase el lado NP, si fuere perpendicular à MP, y si no lo fuere, tirese la perpendicular VT, y midase: tenga por exemplo 20. varas. Partanse 600. por 20. y serà el quociente 30. varas: cortese MR de 30. varas, y tirando la RV paralela à PN, serà el paralelogramo MV de 600. varas. La razon es, porque la area nace de la multiplicacion de la altura VT por la base MR (def.1. lib.2. Eucl.) luego si la area 600. se parte por la altura VT, se hallarà la base MR: y por consiguiente queda determinado el paralelogramo.

PROP. XI.

Dividir vn paralelogramo en dos partes iguales por vn punto determinado. (fig.10.)

SI el punto dado fuere vno de sus angulos, con tirar de dicho punto la diagonal, queda dividido por medio. (34.1. Eucl.) Pero si el punto dado fuere K en vno de sus lados, se tiraràn las diagonales YZ, MN, que se cruzan en O: tirese por O la recta KOL, y quedarà el paralelogramo dividido en dos partes iguales.

De-

Demonstr. Los triangulos YOL, KOZ, tienen los angulos en O iguales (15.1. Eucl.) y los angulos LYO, KZO tambien iguales, por ser alternos en las paralelas: y los lados YO, OZ iguales, como se colige de la 34. del 1. de Eucl. luego dichos triangulos [26.1. Eucl. son iguales: luego si del triangulo YNZ, se quita el triangulo YOL; y à lo remanente LOZN se añade el triangulo KOZ: seràn el triangulo YNZ: y el trapezio KLNZ iguales: Dicho triangulo es la mitad del paralelogramo [34.1. Eucl.] luego tambien dicho trapezio.

PROP. XII. Theorema.

En qualquiera quadrilatero ABCD [fig. 11.] *la recta CE, tirada del angulo C, paralela à la diagonal DB, corta el lado AB continuado, en E, de tal suerte, que AB à BE tiene la mesma razon, que el segmento ABD, al segmento BCD.*

D*Emonstr.* Tirada la linea DE, quedan formados los triangulos BED, BCD, iguales, por estar sobre la mesma base BD, y entre las paralelas EC, BD (37.1. Eucl.) Teniendo pues el triangulo BDA al triangulo EDB (por ser de vna mesma altura) la razon que tiene la base AB à la base BE: el triangulo BDA, al triangulo BCD, tendrà la razon de la base AB, à la base BE.

PROP. XIII. Theorema.

En qualquiera polygono ABCDE [fig. 12.] *las paralelas à las diagonales AC, AD, determinan en los lados continuados, la razon que tienen los segmentos entre si.*

E*Xplicacion.* Sea el polygono ABCDE, dividido con las diagonales AD, AC. Del angulo E tirese ES paralela à AD, que cortarà en S al lado CD continuado: tirese SO paralela à AC, y cortarà en O al lado BC alargado: tirese tambien DQ paralela à AC. Digo, que los segmentos AED, ADC, ACB, tienen entre si la mesma razon que OQ, QC, CB.

De-

Demonstr. por la anteced. En el quadrilatero AEDC, los segmentos AED, ADC, son como SD à DC, esto es (2.6. Eucl.] como OQ à QC. Tambien en el quadrilatero ADCB, los segmentos ADC, ACB son como QC à CB: luego OQ, QC, CB, tienen la mesma razon, que los segmentos AED, ADC, ACB.

PROP. XIV.

Dividir el triangulo AFE en qualesquiera partes, empezando las divisiones por vn punto O, dado dentro del triangulo. (fig. 13.)

PAra principio de la division tirese la recta OG al angulo G: y tambien se podia tirar à qualquier punto de vn lado. Pidese pues aora, que se divida el triangulo en quatro partes, que tengan la mesma proporcion que las rectas dadas A, B, C, D.

Operacion. Del punto O tirense las rectas OF, OE à los angulos F, E: y desde G tirese GR paralela à OF: que cortarà al lado EF continuado en R; desde R tirese RQ paralela à OE, que cortarà al lado GE continuado en Q. Dividase (10.6. Eucl.) la linea GQ en quatro partes, que tengan entre si la mesma razon, que las dadas A, B, C, D, y seràn las divisiones GZ, ZP, PS, SQ. Tirense SH, PL, paralelas à RQ: y porque SH corta al lado EF alargado fuera del triangulo: tirese del punto H la HV paralela à RG. Tirense del punto O las lineas OZ, OL, OV: y quedarà dividido el triangulo en las quatro partes GOZ, ZOLE, LOVF, VOG, que tendran la razon mesma de las rectas A, B, C, D.

Demonstr. Porque la linea LP es paralela à la diagonal OE del rectilineo ZOLE, serà (12.) el triangulo ZOE al triangulo EOL, como ZE à EP: y como (1.6. Eucl.) el triangulo GOZ al triangulo ZOE, sea como GZ à ZE, serà el triangulo GOZ à los dos ZOE, EOL juntos: esto es al rectilineo ZOLE, como GZ, à ZE, EP juntas, ò como à toda la ZP. Tambien porque en el rectilineo ZOGFE son diagonales OF, OE, las lineas GR, VH: RQ, HS, LP

para-

paralelas à dichas diagonales; cortan la linea ZQ, de suerte, que ZOLE es à LOVF, como ZP à PS: y LOVF, es à VOG, como PS à SQ: luego siendo, como queda probado, GOZ, à ZOLE, como GZ à ZP, tendràn los dichos segmentos, la razon que tienen GZ, ZP, PS, SQ, que por construccion es la mesma de A,B,C,D. Luego queda dividido el triangulo como se mandava.

PROP. XV.

Dividir vn paralelogramo en qualesquiera partes, tirando lineas de vn angulo. (fig. 14.)

PIdese, que el paralelogramo CD se divida por el angulo B en tres partes, que guarden entre si la razon que las lineas M,N,O. *Operacion.* Tirese la diagonal BA, y CE su paralela, que cortarà al lado DA continuado, en E: dividase ED en tres partes proporcionales à las rectas M,N,O, y seràn DG, GF, FE. Tirese FH paralela à EC: y tirando las rectas BH, BG, quedarà dividido el paralelogramo, como se deseava.

Demonstr. [13.] Las CE, HF paralelas à la diagonal AB, determinan en la linea ED la razon de los segmentos: luego los segmentos CHB, AHBG, GBD tienen la mesma razon que EF, FG; GD, esto es, que M, N, O, por la construccion.

PROP. XVI.

Dividir vn paralelogramo en qualesquiera partes, por vn punto dado en vno de sus lados. (fig. 15.)

EL paralelogramo ACDB se ha de dividir en tres partes iguales por el punto O, dado en el lado DB.

Operacion. Tirense del punto O las lineas OA, OC, à los angulos: y desde el angulo D, que es el mas proximo al punto O, tirese la DI, paralela OC, que cortarà en I al lado AC continuado: tirese IL paralela à OA, que cortarà en L al lado BA continuado. Dividase LB en tres partes iguales en M,P, tirese MH paralela à LI: y tirando las rectas OH, OP, quedarà dividido el paralelogramo, como se deseava. Demuestrase como las antecedentes.

PROP. XVII.

Dividir vn paralelogramo en qualesquiera partes, por vn punto dado dentro, y vna recta tirada de esse punto à qualquiera lado, ò angulo. (fig. 16.)

SEa dado el paralelogramo ABCD; y el punto O, y la linea OG, tirada al lado AB. Pidese, que por el punto O se divida el paralelogramo en dos partes, que sean como X à Z.

Operacion. Tirense desde O las lineas OA, OB, OC, OD, à los angulos. Desde el punto G tirese GE paralela à OB, que corta al lado CB continuado, en E: desde E tirese la EF paralela à OC, que corta en F al lado DC alargado. Desde F tirese FH paralela à DO, que corta en H al lado AD prolongado. Desde H tirese HI paralela à OA, que cortarà en I al lado BA, continado. Dividase GI en dos partes GM, MI, proporcionales con X, Z. Tirese MN paralela à AO: y porque corta à la AH en N fuera del paralelogramo, tirese NP paralela à DO. Desde O tirese la recta O P, y quedarà dividido el paralelogramo en los rectilineos POGÆD, POGBC, que tendràn la mesma razon, que IM à MG, esto es, que X à Z. Consta de las antecedentes.

PROP. XVIII.

Dividir qualquiera polygono en partes, que tengan vna razon dada, por vn punto señalado en el lado, ò por el angulo. [fig. 17.]

SEa el polygono ÆDCB: y el punto F en el lado ÆB. Pidese, se divida por el punto F en dos partes, que tengan la razon de X à Z.

Operacion. Tirense del punto F à los angulos las rectas FE, FD, FC: y continuados los lados DCG. EDH. AEI. Tirense las paralelas, empeçando del punto B, mas proximo à F, en esta forma: BG paralela à FC: GH paralela à FD:

FD : y HI paralela à FE. Dividanse AI en S, desuerte que AS à SI, sea como X à Z : y desde S tirese SL paralela à IH : y porque aun no corta lado alguno del polygono: tirese la LO paralela à HG, que corta al lado del polygono en O : tirese la FO : y quedarà partido en dos partes, que la mayor à la menor serà como X à Z. De la mesma suerte se harà dicha division por el angulo.

PROP. XIX.

Dividir el polygone ABCDE (fig. 18.) *en dos partes, que tengan la razon de X à Z, por vn punto dado dentro del polygono.* (fig. 18.)

O*peracion.* Del punto O, tirese OF, al lado, ò al angulo, para empeçar de allì la operacion. Tirense desde O rectas à los angulos ; y alargados los lados, como se vè en la figura, empieçense à tirar las paralelas del punto F, en esta forma : FG paralela à OB : GH paralela à OC : HI paralela à DO : IK paralela ò OE : y KL paralela à OA : Dividase FL en M en dos partes, que sean, como X à Z, assi FM à ML : y desde M tirese MN paralela à LK : y porque ann no corta lado alguno del polygono, tirese NP paralela à KI : y porque tampoco corta el lado del polygono, tirese PR paralela à IH, que corta al lado del polygono en R : tirese la OR : y quedarà dividido el polygono en dos partes, que [13.] tienen la razon de FM à ML : esto es, de X à Z.

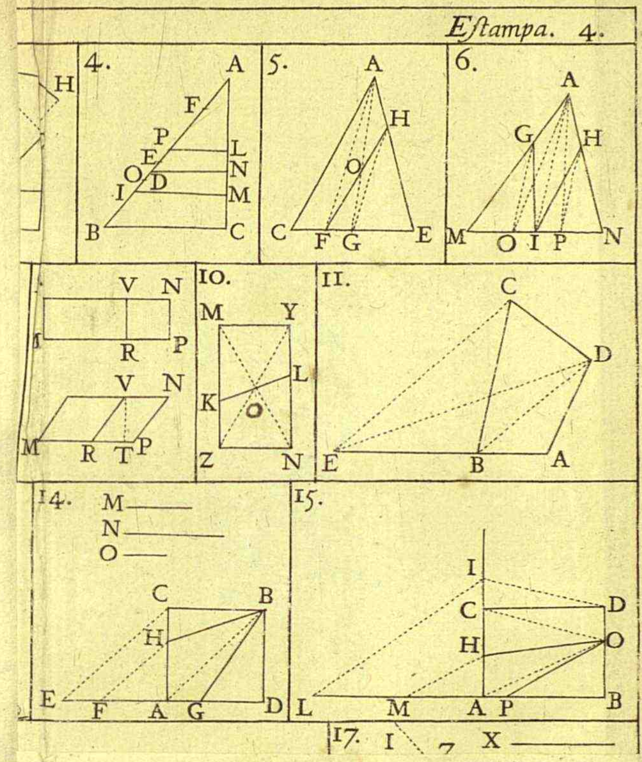
PROP. XX.

Divid ir vn trapiezo, cuyos dos lados sean paralelos, con lineas tiradas de vn lado parelelo al otro.

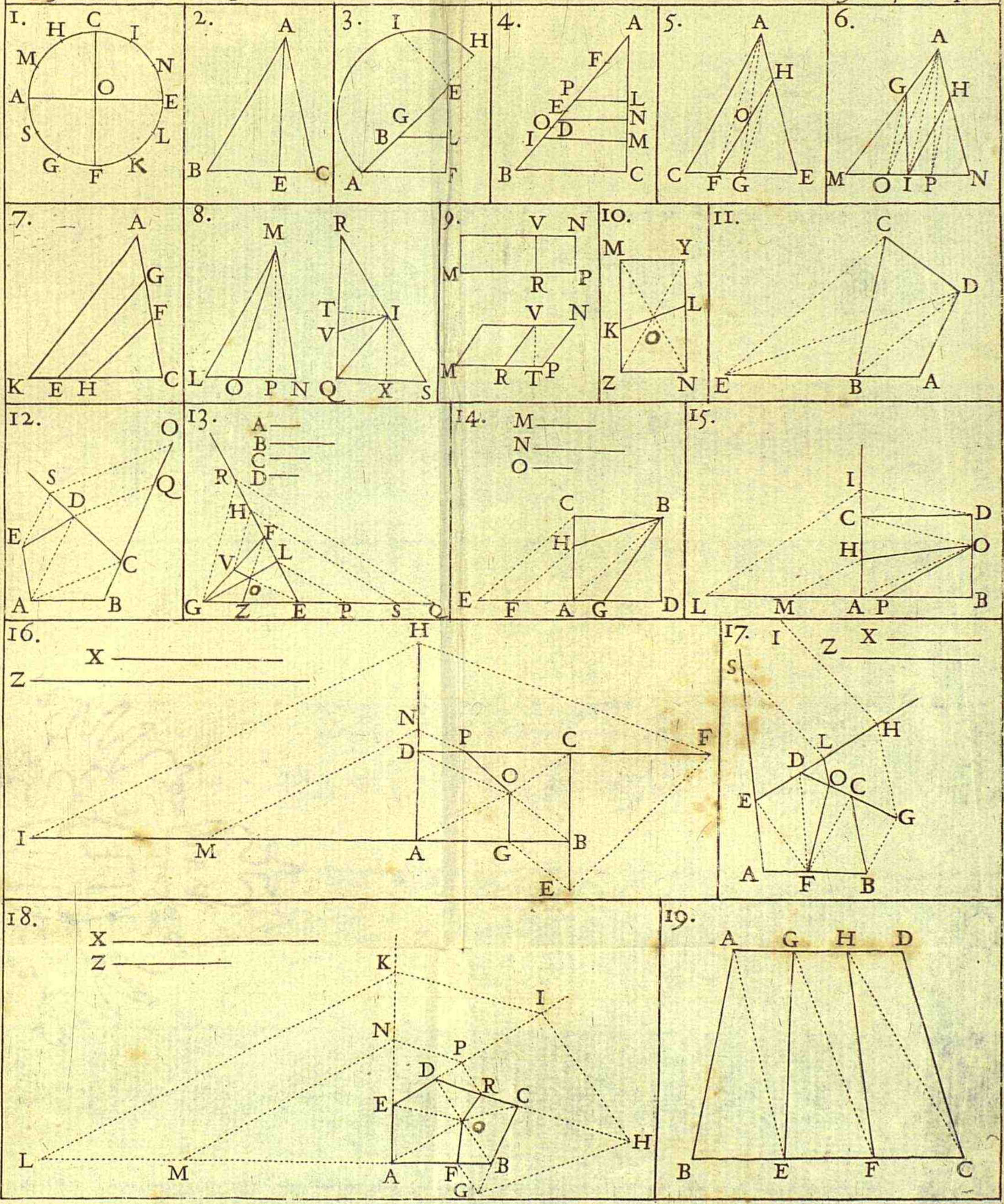
[fig. 19.]

EL trapezio ABCD tiene los lados AD, BC paralelos: pidese se divida en tres partes iguales, con lineas que passen de vn lado paralelo al otro.

Operacion. Dividase tanto el lado AD, como BC en tres partes iguales, en los puntos G. H : E, F. Tirense las GE,



2. Sea ... mejante, tal, que ABF al segundo tenga la razon que tiene
ne


1. H C I M N A O E S L G F K
2. A B E C
3. I H E G B L A F
4. A F P L E N O D I M B C
5. A H O C F G E
6. A G H M O I P N
7. A G F K E H C
8. M R L O P N Q T V I X S
9. V N M R P V N M R T P
10. M Y K L O Z N
11. C D E B A
12. O S Q D E C A B
13. A B C D R H F V L G Z E P S Q
14. M N O C B H E F A G D
15. I C D H O L M A P B
16. H X Z N P C F D O I M A G B E
17. I Z X S H L D O C E G A F B
18. X Z K I N P D R C E H L M A F B G
19. A G H D B E F C

o BC en
partes iguales, en los puntos G. H: E, F. Tirense las
GE,

GE, HF, y quedarà dividido. Tirense AE: GF: HC.

Demonstr. Los triangulos BAE, EGF, FHC, por tener iguales bases, y estàr entre las paralelas AD, BC son iguales: assimesmo son iguales AFG, GFH, HCD. (38.1. *Eucl.*) Luego el segmento BAGE, compuesto de los dos BAE, AEG, es igual al segmento EGHF, cõpuesto de los otros dos: y este es igual al tercero: luego los tres segmentos son iguales.

LIBRO V.

DE LA PROPORCION, AUGmento, y diminucion de las figuras planas.

PROPOSICION I.

Dado vn rectilineo hazer otro semejante, con quien tenga vna razon determinada. (fig. 1.)

1 SEa dado el rectilineo A: pidese otro, con quien tenga el primero la razon de BC à F. *Operacion.* Hallese vna media proporcional entre BC, y F [13.6. *Eucl.*] y sea HG. Hagase sobre HG [5.2. *de este*] el rectilineo I semejante al rectilineo A: y tendrà A à I la razon de BC à F.

Demonstr. Por ser proporcionales las tres BC. HG. F. serà la razon de BC à F duplicada de la razon de BC à HG: y como (20.6. *Eucl.*) el rectilineo A al rectilineo I, tenga tambien la razon duplicada de BC à HG; tendrà A à I, la razon de BC à F.

2. Sea dado el rectilineo ABF [*fig.2.*] pidese otro semejante, tal, que ABF al segundo tenga la razon que tiene

ne la linea G à la linea H. *Operacion.* Hallese la media proporcional M entre G, y H. Busquese aora vna quarta proporcional BC à las lineas G. M. AB : esto es, sea G à M : como AB à CB (12.6.*Eucl.*) Hagase sobre BC el rectilineo CBE, semejante à ABF, y serà este à aquel, como G à H.

Demonstr. El rectilineo ABF al rectilineo CBE, tiene la razon duplicada de AB à CB : y siendo [*por construct.*] AB à CB, como G à M; tendrà el rectilineo ABF, al rectilineo CBE la razon duplicada de G à M : y como G à H tenga tambien la razon duplicada de G à M, tendrà ABF à CBE, la razon de G à H.

Corolario.

Lo que se ha dicho de los rectilineos, se ha de entender tambien de los circulos, y demàs figuras planas : desuerte, que el circulo que tuviere por diametro la recta AB, al circulo, cuyo diametro fuere CB, tendrà la razon, que G à H : porque (2.12.Eucl.) *los circulos tienen la razon duplicada de sus diametros : Luego el circulo, cuyo diametro es AB, al circulo, cuyo diametro es CB, tiene la razon duplicada de AB à CB : estas tienen la razon de G à M : Luego tambien dichos circulos : G à H, tiene razon duplicada de G à M : Luego los circulos son como G à H.*

PROP. II.

Hallar la razon que tienen entre si los rectilineos semejantes. [fig. 2.]

EN la mesma figura, sean los rectilineos ABF, CEB. Buscase la razon que tienen entre si. *Operacion.* Hallese vna tercera proporcional à las lineas AB, CB : y sea DB : y tendrà el rectilineo AFB, al rectilineo CEB. La razon de AB à DB.

Demonstr. El rectilineo AFB al CEB, tiene (20.6.*Eucl.*) razon duplicada de AB, à CB : y pues AB à DB tiene tambien la duplicada de AB à DB; tendràn los rectilineos la razon de AB, à DB.

PROP.

PROP. III.

Dado vn rectilineo señalar otro semejante, doblado, tresdoblado, &c. (fig. 3.)

SEa dado el rectilineo OXA, pidese otro, que sea duplo: otro que sea triplo, &c. semejante al primero. *Operacion.* De la extremidad de qualquiera lado, como de OA, tirese la perpendicular AF à discrecion : cortese AC igual à AO: tirese OC; y el rectilineo semejãte hecho sobre OC, y de la mesma manera, que OXA, serà doblado de dicho rectilineo : tomese con el compas la OC, y passese desde A hasta Z; tirese la OZ, y el rectilineo semejante, hecho de la mesma suerte sobre OZ, serà tresdoblado : y si OZ se passa de A hasta K, el rectilineo sobre OK, serà quadruplo de OXA: y assi infinitamente.

Demonstr. Por ser el angulo OAC recto, el rectilineo hecho sobre OC [31.6.*Eucl.*] es igual à los rectilineos semejantes hechos sobre OA, AC : y como estos sean iguales, por ser OA, AC iguales, es el rectilineo hecho sobre OC, doblado de OXA. Assimesmo el rectilineo hecho sobre OZ, es igual à los semejantes hechos semejantemente sobre OA, AZ: y siendo el rectilineo sobre AZ, ù OC su igual, doblado del rectilineo OXA, serà el delineado sobre AZ triplo del OXA. Y assi en los demas.

Corolario.

Lo mesmo que se ha hecho en los rectilineos, se executarà en los circulos: desuerte, que el circulo que tuviere por diametro OC, serà doblado del que tuviere por diametro OA : y el que tuviere por diametro OZ, serà triplo, &c. Y es la razon, porque (2.12. *Eucl.*) *los circulos son como los quadrados de los diametros : siendo pues*(47.1.*Eucl.*) *el quadrado de OC igual à los quadrados de OA, AC ; y por consiguiente doblado del quadrado de OA, serà tambien el circulo, que tuviere por diametro OC igual à los circulos, cuyos diametros fueren OA, AC : y por consiguiente doblado del circulo, cuyo diametro fuere OA : y assi en las demas figuras planas.*

X PROP.

PROP. IV.

Augmentar, ò disminuir vn rectilineo, segun qualquiera razon dada. (fig.4.)

1. SEa dado el rectilineo ABC, pidese, que se aumente en razon tripla, ò que se haga otro semejante, que sea tres vezes mayor. Puedese esto hazer por la regla de la prop.anteced. quando la proporcion q se pide es multiplice; pero siendo otra, se harà del modo siguiente mas vniversal.

Tirese à discrecion la recta DG: cortese ED igual al lado AB del rectilineo, ò à otro qualquiera: y porque el que se pide ha de ser triplo de ABC, hagase EG tripla de ED; y assi en las demas proporciones. Hallese [13. 6. Euclid.] la EF media proporcional entre DE, EG, y el rectilineo hecho semejantemente sobre EF, serà triplo de ABC. Tomese pues AH igual à EF, y perficionese el rectilineo AHI, que serà triplo de ABC. *Demonstr.* Por ser EF media proporcional entre GE ED, es el rectilineo hecho sobre EF, al semejante hecho sobre DE, como GE à ED(2.) Siendo pues GE tripla de ED, serà el rectilineo sobre EF, triplo del rectilineo sobre ED: luego AHI es triplo de ABC.

1. Dado el rectilineo RSL, se ha de formar otro semejante, que sea subtriplo, ò su tercio. *Operacion.* Tomese GE igual à RS: dividase EG en tres partes iguales, por pedirse subtriplo: añadase directamente ED igual à vna de las tres partes: hallese, como antes, la media proporcional EF entre GF, ED: tomese RN igual à EF; y tirando MN paralela à LS, quedarà formado el rectilineo RNM semejante, y subtriplo de RSL.

PROP. V.

Dadas qualesquiera figuras planas semejantes, hazer vna, que sea igual à todas juntas. [fig.5.]

SEan dadas qualesquiera figuras semejantes, cuyos lados homologos, ò cuyos diametros [si fueren circulos] sean

sean A,B,C,D. Pidese vna figura semejante, que sea igual à la suma de todas.

Operacion. Tirese EF igual à la linea A, y hagase FG igual à la linea B, y perpendicular à EF. Tirese EG; y del punto G hagase le perpendicular GH igual à la linea C. Tirese EH; y del punto H saquese la perpendicular HI, igual à la linea D, y tirese EI: hagase sobre EI vna figura semejante, y de la mesma suerte que las otras, y serà igual à todas juntas.

Demonstr. Porque el angulo F es recto, serà [31.6. *Eucl.*] el rectilineo hecho sobre EG igual à los semejantes hechos sobre EF, FG, esto es, sobre A, y B. Assi mesmo, porque el angulo EGH es recto, serà el rectilineo hecho sobre EH, igual à los rectilineos hechos semejantemente sobre GH, ò C: y sobre EG, esto es sobre A, y B. De la mesma suerte, el rectilineo hecho sobre EI, es igual à los hechos sobre EH, HI: esto es, à los rectilineos juntos hechos sobre A,B, C,D, que es lo que se deseava.

PROP. VI.

Hallar la diferencia que ay entre dos figuras semejantes. (fig.6.)

PIdese la diferencia, que ay entre vna figura plana, hecha sobre CB, y otra su semejante hecha sobre la linea Z. *Operacion.* Sobre la linea mayor CB hagase vn semicirculo: cortese CA con la distancia igual à Z: y tirense las lineas AC, AB. Digo, que la figura hecha sobre BC, excede à la figura semejante, hecha sobre AC, ò Z, en otra figura semejante, hecha sobre AB.

Demonstr. El angulo A, hecho en el semicirculo, es recto (31.3. *Eucl.*) luego [31.6. *Eucl.*] la figura hecha sobre CB serà igual à las semejantes hechas de la mesma suerte sobre CA, AB: luego si de la hecha sobre CB, se quitasse la figura hecha sobre CA, el residuo serìa igual à la figura semejante, hecha sobre AB.

PROP. VII.

De vn circulo dado cortar vn circulo menor, que sea igual al anillo residuo. [fig.7.]

 Sea

SEa dado el circulo AMOE; pidese, que de este se quite vn circulo, que sea igual al anillo, que sobràre. *Operacion.* Dividase la semiperiferia AMO en dos partes en M. Tirense las cuerdas MA, MO. Dividase MA por medio en I: y con el intervalo IA hagase desde el centro G el circulo CNLF: y el anillo, ò espacio, que quedarà entre las dos periferias, serà igual al circulo dicho CNLF.

Demonstr. Por ser el angulo M recto (31.3. *Eucl.*) el circulo, cuyo diametro es AO; esto es, el circulo AMOE, es igual à los dos circulos, que tuvieren por diametros las MA, MO: y siendo estas lineas iguales, por ser cuerdas de arcos iguales, serà el circulo AMOE doblado del circulo, que tuviere por diametro AM: Siendo pues CL igual à AM, serà el circulo AMOE doblado del circulo CNLF: luego este es su mitad: luego el anillo serà la otra mitad, y por consiguiente son iguales.

PROP. VIII.

Hazer vn anillo igual à vn circulo dado. (fig. 8.)

SUponese dado el circulo QFEH, y el otro AGOI. Pidese el circulo SMLN, tal, que el anillo comprehendido entre este, y el mayor, sea igual al circulo QFEH. *Operacion.* Hallese [6.] el diametro del circulo igual à la diferencia entre los circulos AGOI, y QFEH: y serà SL. Hagase del diametro SL el circulo SMNL: y el anillo cõprehendido entre AGOI, y SMNL serà igual al circulo QFEH. Consta de las proposiciones passadas, y de la mesma operacion.

PROP. IX.

Hazer vn circulo igual à vn anillo dado. (fig. 8.)

SEa dado el anillo comprehendido entre AGOI, SMLN; pidese vn circulo igual à dicho anillo. *Operacion.* Hallese (6.) el diametro del circulo igual à la diferencia de los circulos sobredichos, que forman el anillo; y serà QE. Con este diametro hagase el circulo QFEH, y este serà igual

igual al anillo propuesto. Consta de lo dicho.

De esta manera se cortarà de qualquier rectilineo, vn otro semejante, que sea igual al marco que sobràre; y al contrario, se formarà vn marco igual à vn rectilineo, con iguales angulos, y del mesmo numero de lados.

LIBRO VI.

DE LA TRANSFORMACION de las figuras rectilineas.

LA transformacion de las figuras consiste en descrivir vna figura igual à otra; pero desemejante à ella: y assi, el triangulo se transforma en quadrado, haziendo vn quadrado igual à vn triangulo. Los rectilineos se pueden transformar en rectilineos: como tambien los curvilineos en curvilineos: y estos mesmos en rectilineos, y al contrario. En este libro tratarè solamente de la transformacion de rectilineos en rectilineos; dexando las demas para el siguiente.

PROP. I.

Transformar vn Triangulo en otro Triangulo. (fig. 1.)

CAso 1. Pidese, que el triangulo ABC se transforme en otro qualquiera. *Operacion.* Tirese por el vertice B la BD paralela à la base AC. De los puntos A, C, à qualquiera punto de BD, tirense las rectas AD, CD: y serà (37.1. Eucl.) el triangulo ADC igual al triangulo ABC. Si se pide, que vno de sus angulos sea igual al angulo O, se harà el angulo DAC igual al angulo O, y se obrarà como antes.

Ca-

Caso 2. [fig.2.] Dado el triangulo ABC, se pide otro igual, cuya base sea AG, y el angulo sobre la base, sea igual al angulo O. *Operacion.* Tirese BD paralela à la base AC: hagase el angulo DAC igual al angulo O: tirese la oculta DG: y su paralela CF, hasta que encuentre con AD, continuada en F: tirese GF, y el triangulo AFG serà igual al triangulo ABC. Tirese DC.

Demonstr. Los triangulos DFG, DCG tienen vna mesma base DG, y estan entre las paralelas DG, FC: luego [37.1. Eucl.] son iguales: luego si à entrambos se añade el triangulo ADG, resultaràn ADC, AFG iguales: El triangulo ADC es igual à ABC (37.1.Eucl.) luego AFG es tambien igual à ABC, como se deseava.

Caso 3. (fig.3.) Sea dado el triangulo AFG: pidese otro igual al sobredicho, que su base sea AC, y su angulo vertical igual al angulo O. *Operacion.* Tirese la oculta CF: y del punto G hagase GD paralela à CF, que cortarà al lado AF en D; por D hagase BD paralela à la base: y tirando la DC, serà el triangulo ADC igual al triangulo AFG, por lo demonstrado. Hagase aora sobre la recta AC el segmento de circulo ABFC capaz de vn angulo igual à O (10. 2. *de este Trat.*) y su circunferencia cortarà à la paralela BD en B: tirense las lineas AB, BC: y quedarà formado el triãgulo ABC, igual al triangulo ADC [37.1.Eucl.] y por cõsiguiente igual al dado AFG: y su angulo vertical B, igual al angulo O, por estar en el segmento ABFC capaz vnicamente de dicho angulo. Si el circulo no cortàre la paralela BD, serà imposible lo que se pide.

PROP. II.

Hazer vn paralelogramo igual à vn triangulo. (fig.4.)

Este problema queda resuelto en el *lib.* 1. *de la Geom. element. prop.* 42. *y* 44. pero esto no obstante, le resolverè del modo siguiente. Los lados CA, AX del triangulo ACX, dividanse por medio en P, y S: y por estas divisiones tirese la recta SP larga à discrecion; y juntando CZ paralela à XS, serà el paralelogramo SC igual al triangulo ACX.

De-

Demonstr. Aviendose dividido proporcionalmente los lados AC, AX en S, y P, es [2.6.Eucl.] la linea SP paralela à XC, con que XZ es paralelogramo: y teniendo este la mesma altura del triangulo ACX, y la mitad de su base, serà igual al triangulo. Assi mesmo, dividiendo por medio los lados CA, CX, en P, y O, y tirando la recta EQ, por P, y O: y levantando desde A qualesquiera paralelas AE, XQ, serà el paralelogramo AQ igual al triangulo ACX: por tener la mesma base del triangulo, y la mitad de su altura.

PROP. III.

Hazer vn triangulo igual à vn paralelogramo. (fig.5.)

Caso 1. Pidese vn triangulo, qualquiera que sea, igual al paralelogramo dado AE. *Operacion.* Continuense à discrecion los lados FE, AC: tomese CI igual à AC: y sobre toda la base AI hagase qualquiera triangulo AHI, que tenga su vertice en la linea FH: y serà igual al paralelogramo AE; por tener la mesma altura, y doblada base. Si se pidiere, que vn angulo sea igual al angulo O, se harìa el angulo HAI igual à O; y se obrarìa como antes.

Caso 2. Dado el mesmo paralelogramo AE, se pide vn triangulo igual al dicho paralelogramo, que tenga vn lado igual à X; y vn angulo igual à O. *Operacion.* Hagase, como antes, qualquiera triangulo AHI igual al paralelogramo AE: y (*por la* 45.1.*Eucl.*) sobre la recta VQ, igual à X: hagase el paralelogramo RQ con vn angulo igual à O: y que sea igual à dicho triangulo AHI: continuese VR, hasta que RT sea igual à VR: y tirada la QT serà el triangulo VQT el que se pide, como consta de lo dicho.

PROP. IV.

Hazer vn paralelogramo igual à otro paralelogramo, (fig.6.)

Caso 1. Pidese vn paralelogramo igual al paralelogramo AO, con vn angulo igual al angulo X. *Operacion.* Estiendase CO, y hagase el angulo BAE igual à X: y tirada BQ paralela à AE, serà el paralelogramo AQ igual à AO, AO, por la 35.*del* 1.*de Eucl.*

Caso 2. [fig.7.] Pidese vn paralelogramo igual al AO, con vn angulo igual à X: y sobre la linea AR. *Operacion.* Tirese la diagonal CB. Hagase (1.) el triangulo AFR igual al triangulo ACB, y que tenga el angulo A igual à X. Tirese FP paralela à AR: y RP paralela à AF; y serà el paralelogramo AP igual à AO, como se deseava.

Demonstr. Los triangulos ACB, AFR son iguales por construccion: y siendo aquel la mitad del paralelogramo AO, y este la mitad de AP, seràn estos paralelogramos iguales.

Caso 3. [fig.8.] Pidese, que el paralelogramo AP se convierta en otro, que tenga por base la recta AB: y vn angulo igual à X. *Operacion.* Tirese FB; y por R hagase la RE paralela à BF, por E tirese CO paralela à la base AB: formese aora el angulo CAB igual à X: y tirando OB paralela à CA, quedarà formado el paralelogramo AO, como se deseava, igual à AP. Tirense RF, EB.

Demonstr. El triangulo AFR es igual al triangulo AEB (1.) luego el paralelogramo AP, que es doblado del triangulo AFR, es igual al paralelogramo AO, que es doblado del triangulo AEB. Y siendo el angulo A igual à X, tiene todo lo que pide la propuesta.

PROP. V.

Hazer vn paralelogramo igual à vn quadrado. (fig.9.)

EN la prop.14.del lib.2. de la Geomet. element. se diò el modo para hazer vn quadrado igual à vn paralelogramo: aora se pide vn paralelogramo igual al quadrado AZ.

Operacion. Tomese qualquiera recta EF, ò la que se diere determinada: y à las dos EF, AX, hallese vna tercera proporcional FG [11.6.Eucl.) la qual se tirarà perpendicular à EF: y se perficionarà el paralelogramo EG, que serà igual al quadrado AZ. Si se determinàre el angulo, se harà el angulo LEF igual al que se diere; pero siempre ha de passar la paralela LGI por la extremidad de la perpendicular FG.

De-

Demonstr. Por ser AX media proporcional entre EF, y FG, serà [17.6.] el rectangulo EG hecho de las extremas, igual al quadrado AZ de la media AX. Y tambien el paralelogramo EI serà igual à dicho quadrado, por ser igual al rectangulo EG (35.1.)

PROP. VI.

Hazer vn quadrado igual à vn triangulo. [fig.10.]

PIdese vn quadrado igual al triangulo ACB. *Operacion.* Del angulo C tirese CD perpendicular à la base: busquese vna media proporcional entre CD, y AE mitad de la base, que serà IH: hagase sobre IH el quadrado IP, y serà igual al triangulo.

Demonstr. El triangulo ACB, es [42.1. Eucl.] igual al paralelogramo hecho de CD, y AE mitad de la base: este paralelogramo es igual al quadrado IP, hecho de IH media proporcional entre CD, y AE [17.6. Eucl.] luego el quadrado IP, y el triangulo dado, son iguales.

PROP. VII.

Formar vn triangulo igual à vn quadrado. (fig.10.)

C*Aso* 1. Pidese qualquiera triangulo igual al quadrado CA. *Operacion.* Tomese para base qualquiera linea OP: y à las dos OP primera, y CH segunda, hallese IL tercera proporcional: esta se elevarà perpendicularmente sobre qualquiera punto de OP: dupliquese IL, y serà toda la IS altura del triangulo: tirense pues SO, SP: y serà el triangulo OSP igual al quadrado CA. Si se pidiere, que el angulo SOP sobre la base, sea igual al angulo Z, se tirarà la QS paralela à la base, por la extremidad de la perpendicular IS: y hecho el angulo O igual à Z, se continuarà la recta OS hasta que encuentre con la paralela QS: y tirando SP, quedarà formado el triangulo, igual al quadrado CA.

Demonstr. El triangulo OSP es igual al paralelogramo hecho de su base OP, y IL, mitad de su altura, como se colige

lige de la 41. del 1. de Eucl. y siendo (17.6. *Eucl.*) este paralelogramo de OP, IL, por formarse de las extremas, igual al quadrado CA, hecho de la media CH, serà el triangulo OSP igual al quadrado CA.

Caso 2. Pidese vn triangulo igual al quadrado CA, que tenga el angulo vertical igual al angulo X: y que su altura sea SI.

Operacion. A las dos rectas SI primera; CH segunda, hallese vna tercera proporcional, que serà OM: dupliquese, y serà OP la base del triangulo: tirese la paralela QS: y hagase (10.2. *de este Trat.*) sobre OP, vn arco de circulo capàz del angulo X: que cortarà à la paralela QS en S. Tirense de la interseccion S las rectas SO, SP: y el triangulo SOP, serà igual al quadrado CA: por la razon sobredicha. Si el circulo no cortare la paralela QS, serà la propuesta imposible.

PROP. VIII.

Convertir qualquiera rectilineo dado, en triangulo. (fig. 11.)

ESta metodo es general para convertir qualquiera rectilineo en triangulo: en la *prop.* 45. *del lib.* 1. *de la Geom. elem.* dì alguna noticia de ella, ofreciendo para este Tratado su mayor extension, y juzgo no serè molesto, aplicando su practica à diferentes rectilineos, para hazer mas patente su vniversalidad.

1. Pidese que el quadrilatero ABCD, se convierta en triangulo. *Operacion.* Tirese la diagonal BD: y desde C, su paralela CE, que cortarà la base prolongada en E: Tirese BE: y el triangulo ABE serà igual al quadrilatero.

Demonstr. Los triangulos BCD, BED por tener la mesma base BD, y estàr entre las paralelas BD, CE, son iguales (37.1. *Eucl.*) añadase à entrambos el triangulo ABD, y resultaràn el triangulo ABE, y el quadrilatero ABCD iguales.

2. Pidese que el pentagono ABL, &c. (*fig.* 12.) se convierta en triangulo.

Operacion. Tirese LA, y su paralela BG: tirese LF, y su paralela CE: tirense LG, LE à los puntos G, y E en que las

las dichas paralelas cortan la base prolongada, y el triangulo GLE serà igual al pentagono.

Demonstr. Los triangulos LCF, LFE son iguales, por tener la mesma base LF; y estàr entre las paralelas LF, CE: luego si al pentagono se le quita el triangulo LCF, y en su lugar se pone el triangulo LFE, serà el pentagono igual al quadrilatero ABLE. Assi mesmo son iguales los triangulos LBA, LGA: luego si del quadrilatero ABLE, se quita el triangulo LBA, y se substituye LGA, resultarà el triangulo GLE igual al quadrilatero ABLE; y por consiguiente igual al pentagono.

3. Pidese que el exagono ABC, &c. (*fig.* 13.) se convierta en triangulo. *Operacion.* Tirese la recta EF, y su paralela IO: y tirando la EO, quedarà el exagono convertido en el pentagono ABC EO: este se reducirà à triangulo, como antes; y quedarà el exagono reducido à triangulo. Con el mesmo artificio se reducirà qualquier rectilineo à triangulo, el qual consiste solamente en reducirle primero à vn otro rectilineo, que tenga vn lado menos: este à otro que tenga vn lado menos; y assi succesivamente hasta que pare en triangulo.

Si el rectilineo tuviere algun angulo entrante, se reducirà à otro que no le tenga: y este se convertirà en triangulo del modo sobredicho. *Exemplo.* El rectilineo de la figura 14. tiene el angulo E entrante, reduzgole pues en esta forma: Tirese DF, y su paralela EX: tirese DX, y serà el rectilineo propuesto igual al ABCDX, sin angulo entrante, como consta de lo dicho: y este se reducirà à triangulo, como el antecedente.

PROP. IX.

Reduzir qualquiera rectilineo à triangulo de otra manera. (fig. 15.)

EL siguiente modo vniversal de reduzir los rectilineos à triangulo, no es menos ingenioso que el passado; y siendo tan claro su fundamento, como facil su execucion, no dudarè satisfacer à la curiosidad con proponerle, aunque me desvie algo de la brevedad, que professo.

Pidese, que el rectilineo de la figura 15. se reduzga à triangulo. *Operacion*. Del angulo A tirense las diagonales AC, AZ, AE: y por el angulo F, inmediato al angulo A, tirese FO, paralela à la diagonal AE, y cortarà al lado ZE prolongado, en O. Tirese la OV paralela à la diagonal AZ, que cortarà al lado CZ alargado, en V. Tirese VQ paralela à la diagonal AC, que cortarà en Q al lado PC continuado. Tirese la recta AQ, y quedarà hecho el triangulo APQ, igual al rectilineo propuesto.

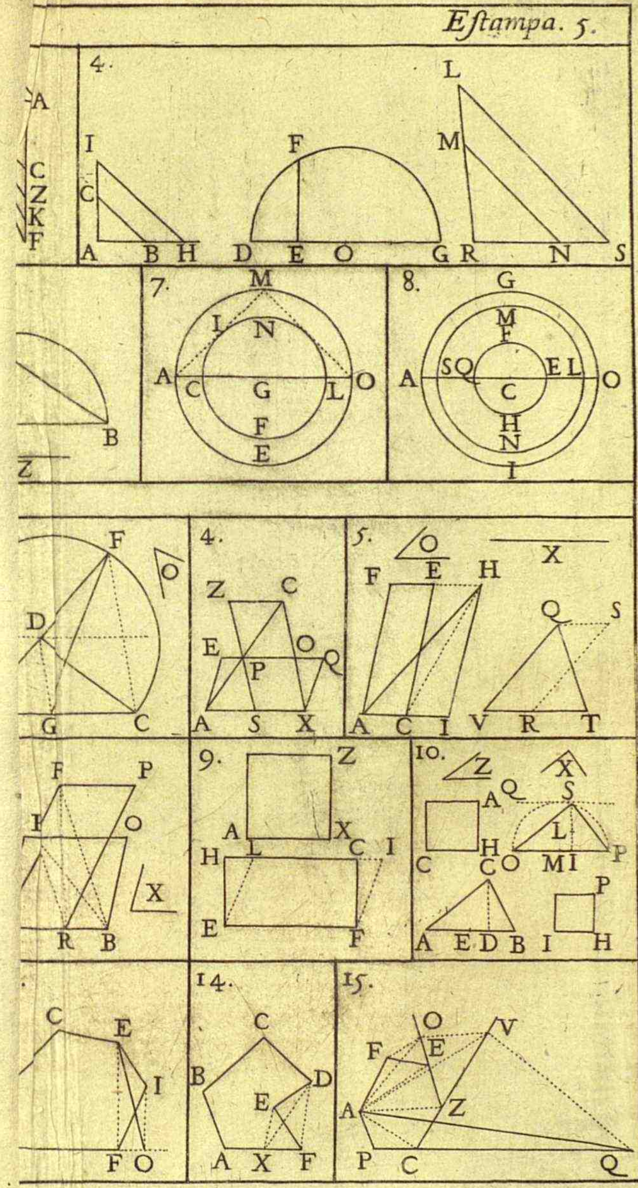
Demonstr. Tirada la recta AO, seràn los triangulos AFE, AOE iguales, por tener la mesma base AE, y estar entre las paralelas AE, FO: luego si del rectilineo dado, se quita el triangulo *A*EF, y en su lugar se substituye *A*EO, serà el rectilineo *A*PCZO*A* igual al rectilineo dado. *A*si mesmo, tirada la recta *A*V, seràn iguales los triangulos *A*OZ, *A*VZ, por estar sobre la base *A*Z, y entre las paralelas *A*Z, OV: luego si del rectilineo *A*PCZO*A*, se quita el triangulo *A*OZ, y se substituye *A*VZ, quedarà el rectilineo *A*PCV*A*, igual à *A*PCZO*A*. Tambien los triangulos *A*CV, *A*CQ son iguales, por tener la mesma base *A*C, y terminarse en su paralela VQ: luego añadiendo à entrambos el triangulo *A*PC, quedarà el triangulo *A*PQ, igual al rectilineo *A*PCVA: y por consiguiente al rectilineo dado.

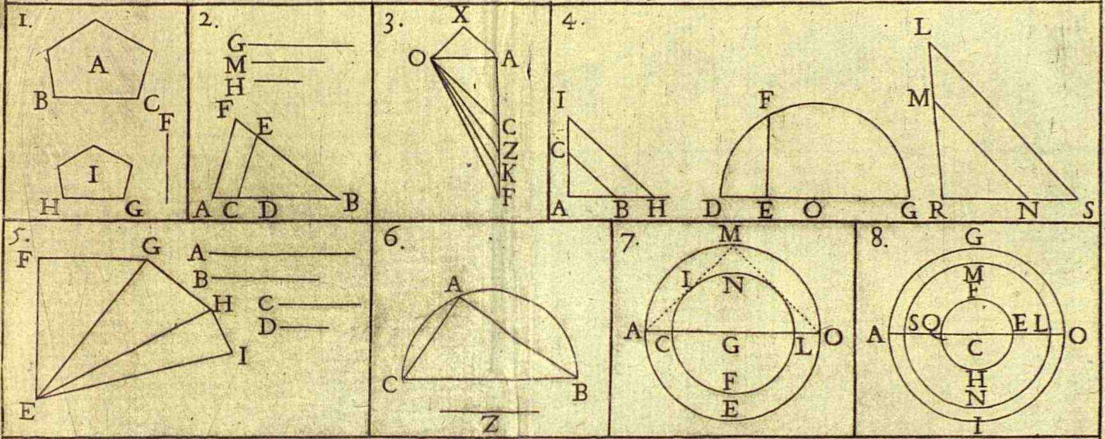
PROP. X. Theorema.

Los rectilineos semejantes se reduzen por el modo de la proposicion passada, à triangulos semejantes. (fig. 16.)

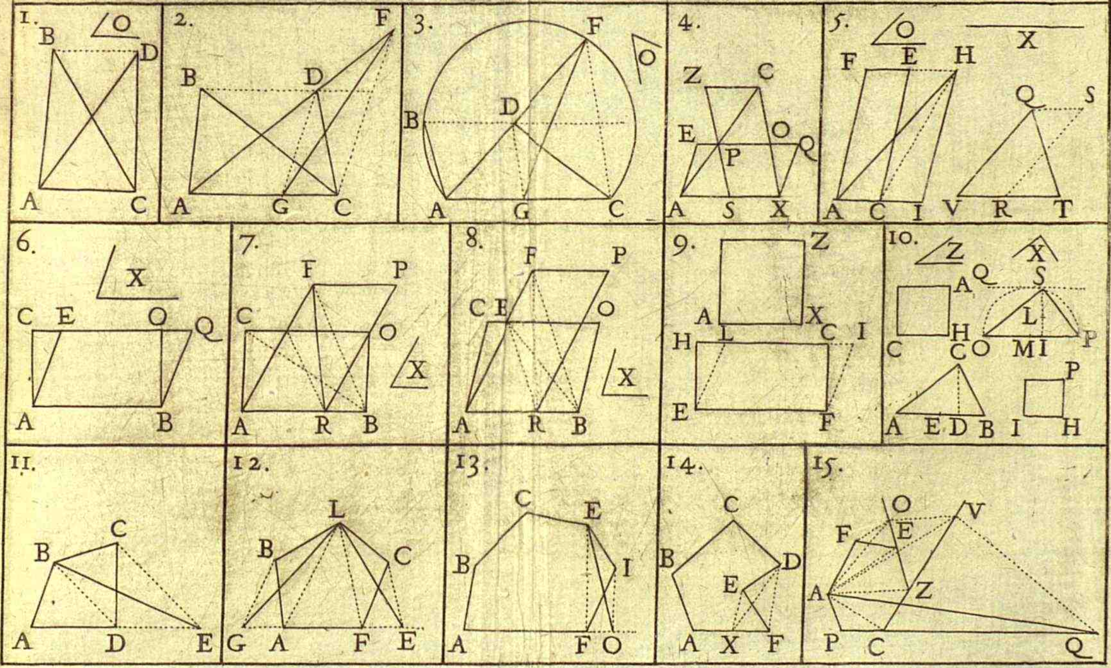
SEan los rectilineos propuestos en la fig. 16. semejantes, y reduzidos, por la prop. anteced. à los triangulos BSA, OHN iguales à los rectilineos, cada vno al suyo: Digo, que estos triangulos son semejantes.

Demonstr. Porque los rectilineos son semejantes, son tambien los triangulos internos. en que estan resueltos, semejantes [20.6. Eucl.] y por ser QE paralela à D*A*; y MR à VN, son los angulos alternos *A*DE, DEQ iguales, como tambien NVR, VRM; y siendo *A*DE igual à NVR, serà tambien DEQ igual VRM: assi mesmo por ser paralelas las dichas lineas, serà el angulo CDA igual al angulo DQE, co-




1.
A
B C F
I
H G
2.
G
M
H
F E
A C D B
3.
X
O A
C
Z
K
F
4.
L
I M
F
C
A B H D E O G R N S
5.
F G A
B
H C
D
I
E
6.
A
C B
Z
7.
M
I N
A C G L O
F
E
8.
G
M
F
A SQ EL O
C
H
N
I

Libro. 6.


1.
B O
D
A C
2.
F
B D
A G C
3.
F
O
D
B
A G C
4.
Z C
E O Q
P
A S X
5.
O
X
F E H
Q S
A C I V R T
6.
X
C E O Q
A B
7.
F P
C O
X
A R B
8.
F P
C E O
X
A R B
9.
Z
A X
H L C I
E F
10.
Z
X
A Q S
L
C H O M I P
C
P
A E D B I H
11.
C
B
A D E
12.
L
B C
G A F E
13.
C
E
B I
A F O
14.
C
B D
E
A X F
15.
O V
F E
A Z
P C Q

como tambien IVN, à VMR; y ſiendo CD*A* igual à IVN, ſerà el angulo Q igual à M: luego DEQ, y VMR, ſon equiangulos, y ſemejantes. De la meſma ſuerte probarè ſer ſemejante el triangulo CSQ al triangulo IHM: luego los rectilineos SB*A*EQ, HONRM, compueſtos de igual numero de triangulos ſemejantes, ſon ſemejantes entre ſi: y el angulo O ſerà igual al angulo B: y ſeràn proporcionales ſus lados, HO à ON, como SB à B*A*: luego los triangulos OHN, BS*A*, ſon equiangulos, y ſemejantes.

PROP. XI.

Dados dos rectilineos, hazer vn rectilineo, igual al vno, y ſemejante al otro. [fig. 17.]

ESte Problema ſe reſolviò ya en la prop. 25. del lib. 6. de la Geom. elem. pero por ſer aquel modo tan canſado por ſu prolixidad, explico aqui otro mas breve fundado en el Theorema precedente.

Pideſe vn rectilineo ſemejante al dado OZE, è igual al rectilineo BHGC. *Operacion.* Haganſe (9.) los triangulos B*A*C, ORE iguales, cada vno à ſu rectilineo: tirenſe ſus perpendiculos *A*S, RV; proſigaſe VR haſta X deſuerte, que VX ſea igual à S*A*. Tireſe por X la XF paralela à la baſe OE: continueſe el lado ER, haſta que corte la paralela en F; deſde F tireſe FP paralela al lado RO. Halleſe la media proporcional EQ entre BC, y EP. Hagaſe ſobre EQ (5. 2. *de eſte Trat.*) vn rectilineo ſemejante al OZE, y eſte ſerà igual al rectilineo BHGC.

Demonſtr. Por ſer el triangulo ORE igual al rectilineo OZE, [9.] el triangulo PFE, que es ſemejante à ORE (2.6. Eucl.) ſerà igual [10.] al rectilineo hecho ſobre PE, ſemejante à OZE: y ſiendo la altura XV del triangulo PFE, igual à la altura *A*S del triangulo B*A*C, ſerà el triangulo PFE al triangulo B*A*C (1.6. Eucl.) como la baſe PE à la baſe BC: luego el dicho rectilineo ſobre PE, è igual al triangulo PFE, al rectilineo BHG, que es igual al triangulo B*A*C, ſerà tambien como PE à BC: y como por ſer PE, QE, BC continuas proporcionales, tenga PE à BC razon duplicada de la de PE à QE ; se sigue que el rectilineo sobre PE semejante à OZE, tiene con el BHG razon duplicada de PE à QE : Teniendo pues el rectilineo hecho sobre PE, à su semejante sobre QE tambien razon duplicada de PE à QE [20. 6. *Eucl.*] tendrà el rectilineo sobre PE, à su semejante sobre QE, la mesma razon que tiene al rectilineo BHG : luego el rectilineo sobre QE, semejante à OZE es igual al rectilineo dado BHG.

Para mayor inteligencia de la practica de estas reducciones añado los dos exemplos siguientes.

Sea dado el triangulo ABC (fig. 18.) pidese vn triangulo equilatero, igual à ABC. *Operacion.* Hagase qualquiera triangulo equilatero : estiendase su altura VR, hasta Z, desuerte que ZV sea igual à SA : Tirese FZ paralela à la base : continuese el lado ER hasta que encuentre en F con la paralela : tirese FP paralela al lado RO, que cortarà la base prolongada en P. Hallese entre BC, y PE la media proporcional QE, y el triangulo equilatero QTE, serà igual à BAC.

Sea dado el Pentagono irregular BDC (fig. 19.) pidese se reduzga à regular. *Operacion.* Reduzgase BDC al triangulo BAC [9.] Hagase vn pentagono regular LTS, y reduzgase al triangulo LDS : tirese su perpendiculo DP, y continuese hasta V, desuerte, que VP sea igual à AS : Tirese VQ paralela à la base LS : continuese el lado SM, hasta que corte la paralela en Q : tirese QI paralela à DL: Hallese la media proporcional OS entre IS, y BC : y el pentagono regular, hecho sobre OS, serà igual al irregular BDC.

Si la paralela VQ passare mas abaxo del punto D, se obrarà de la mesma suerte, tirando la QI del punto en que dicha paralela corta al lado SM prolongado.

(***) (***) (***)
(***) (***)
(***)

LI-

LIBRO VII.

DE LA TRANSFORMACION de las figuras curvilineas.

Divido este libro en tres capitulos ; el primero de la quadratura del circulo : el segundo, de la quadratura de la elipse : y el tercero de la quadratura de la lunula. En esto se comprehende lo que se puede desear en esta materia ; porque reducida qualquiera de las dichas figuras à quadrado, se podrà este reducir, por el libro antecedente, à qualquiera otro rectilineo, con que quedaràn reducidas al mesmo las sobredichas figuras.

CAPITVLO I.

DE LA QVADRATVRA DEL CIRCVLO.

MODO I. DE ARCHIMEDES.
Por polygonos inscritos, y circunscritos.

PROPOSICION I.

Dado en numeros el semidiametro, y la cuerda de vn arco, hallar la cuerda de la mitad del arco. [fig. 1.]

Sea el radio OF 100. partes : y tenga FA 90. de essas mesmas. Dividase la cuerda FA por medio en E; y tirese por E la recta OC : y quedarà tambien el arco FCA, dividido por medio en C : pidese quantas partes de las 100. en que se supone dividido el radio,

ten-

tendrà la recta FC, que es la cuerda de la mitad del arco FC*A*.

Operacion. Supuesto que *A*F es 90. su mitad EF serà 45. y por ser el triangulo FEO rectangulo en E (3.3.*Eucl.*) serà el quadrado de FO (47.1.*Eucl.*) igual à los quadrados de FE, EO: Luego si del quadrado de FO se resta el quadrado de FE, el residuo serà el quadrado de EO: quadrese pues 45. y serà el quadrado de FE: 2025. este quadrado restese de 10000. quadrado del radio FO, y serà el residuo 7975. quadrado de EO: saquese su raìz quadrada, y serà 89. y tantas partes del radio tendrà la linea OE: restese OE 89. de OC 100. y el residuo serà la linea EC 11. Y porque el triangulo FEC es rectangulo en E, seràn los quadrados de CE, y EF juntos, iguales al quadrado de CF: sumese pues 121. quadrado de CE, con 2025. quadrado de EF, y serà la suma 2146. quadrado de FC, saquese su raìz quadrada, y serà 46. que es la cuerda FC. El modo de sacar la raìz quadrada, se explica en la Arithmetica superior.

PROP. II.

Hallar proximamente la razon que tiene el diametro de qualquier circulo, con su circunferencia.

EL artificio con que los Geometras procuran averiguar la razon, que tiene el diametro de vn circulo con su periferia, consiste en circunscrivir al circulo vn polygono regular de muchos lados, è inscrivirle otro semejante, y hallar la razon que tiene el diametro tãto cõ el perimetro del vno, como con el del otro. Y como sea cierto que el ambito del circumscrito es algo mayor que el del inscrito; y que la circunferencia del circulo viene à mediar entre los dos: hallado el perimetro de entrambos, y la diferencia del vno al otro, si se parte esta diferencia por medio, y se añade su mitad al ambito del polygono inscrito, serà la suma, sin diferencia notable, igual à la periferia del circulo, y se sabrà proximamente la razon que tiene con el diametro. Por este camino la investigò el grande *A*rchimedes,

des, suponiendo circunscrito al circulo vn poligono de 96. lados, y otro semejante inscrito; y obrando en la forma siguiente.

Supongase en la fig. 2. q̃ el diametro AX es 20000000. para que salga mas exacta la operacion: supongase tambien inscrito en el circulo el exagono regular; y siendo su lado igual al semidiametro, tendrà 10000000. partes: Hallese aora (1.) la cuerda de 30. grados, que es la mitad del arco, que corresponde al lado del exagono, y serà 5778380. que es el lado del polygono de 12. lados. Busquese assi mesmo el lado del polygono de 24. lados, que es la cuerda de 15. grados: y serà 2610524. De la mesma suerte se hallarà la cuerda de 7. grados, y medio, que es lado del polygono de 48. lados, y serà 1308062. Busquese despues el lado del polygono de 96. lados, que es la cuerda de 3. grados, y 45. minut. y serà 654380.

Hecho esto, se passa à inquirir el lado del polygono circunscrito de 96. lados, de esta suerte. Supongase que AB es el lado del inscrito; y GE, del circunscrito: Tirese del punto del contacto F el radio FC, que [3.3. Eucl.] dividirà el lado AB por medio en I: con que AI serà de 327190. partes; cuyo quadrado, si se resta del radio AC, serà el residuo el quadrado de IC: y sacando su raiz quadrada, se sabrà que IC consta de 9944493. partes.

Hagase aora la regla de tres siguiente: como CI, à IA: assi el radio CF à FG [2.6. Eucl.] y se hallarà ser GF de 327366. partes, y por consiguiente toda EG 654732. Y quitadas las dos vltimas cifras, tanto del lado del polygono inscrito, como del circunscrito, serà el lado del inscrito 6543. y del circunscrito 6547. Multipliquese aora cada lado de estos por 96. y serà el ambito del circunscrito 628512. y el del inscrito 628128. La diferencia del vno al otro es 382. su mitad 191. añadase al lado del polygono inscrito, y serà la circunferencia del circulo 628320. y el diametro 200000. y quitando de ambas cantidades las tres vltimas cifras, serà la circunferencia 628. y el diametro 200. esto es, reducido todo à menores terminos, la circunferencia 157. y el diametro 50. Conque la circunfe-

Y ren-

rencia incluye tres vezes al diametro, y algo menos que su septimo: y mandando Archimedes, que para hallar la circunferencia, se triplique el diametro, y se añada su septima parte, haze la circunferencia algo mayor de lo justo.

Esto mesmo se hallarà con mayor precision, vsando de vn polygono de muchos mas lados, y haziendo la mesma operacion, que se executarà con mayor brevedad vsando de la tabla de los senos, y tangentes del circulo.

Razon de la circunferencia del circulo con su diametro.

	Circunferencia,	Diametro,
Archimedes	22.	7.
Adriano Mecio	223.	71.
Luis de Ceulen	314.	100.

Esta vltima se juzga por mejor.

PROP. III.

Dado el diametro de vn circulo, hallar su circunferencia; y al contrario.

1. DAda la circunferencia de vn circulo, se pide su diametro. *Operacion*. Elijase qualquiera de las proporciones sobredichas, y se dispondrà vna regla de tres; poniendo en primer lugar la circunferencia, segun se halla en la proporcion eligida; en segundo, el diametro; y en el tercero, la circunferencia dada: y el quarto termino serà lo que se busca.

Exemplo. La circunferencia de la tierra tiene 6300. leguas Españolas, pidese quantas leguas tendrà el diametro: Digase, si 22. dan 7. què daràn 6300? y se hallaràn 2004. leguas, y 12. veinte y dos avos de legua, y tantas tiene el diametro.

2. Dado el diametro, se pide la circunferencia. Dispongase la regla de tres, como se sigue: Si 7. dan 22. què daràn 2004. y 12. veintedos avos de legua? y se hallaran 6300. leguas, y tantas tiene la circunferencia de la tierra.

PROP.

PROP. IV. Theorema.

La area del polygono circunscrito al circulo, es igual al rectangulo hecho del semidiametro, y de la mitad de su periferia. (fig. 3.)

SUpongase qualquiera polygono ZCF, &c. circunscrito al circulo. Digo, que su area es igual al rectangulo hecho del semidiametro del circulo, y del semiambito del polygono. Resuelvase en triangulos, tirando del centro A las rectas AZ, AC, &c. à los angulos: tirese tambien la linea AE al punto del contacto E, que [16.3. *Eucl.*) serà perpendicular al lado ZC.

Demonstr. La area del triangulo ZAC es igual al rectangulo hecho de AE, y de la mitad de ZC: porque (41.1. *Eucl.*) si el rectangulo tuviesse la misma base ZC, y la misma altura del triangulo, serìa doblado: luego [1.6. *Eucl.*] el que tiene la mitad de la base ZC serà la mitad del dicho rectangulo; y por consiguiente igual al triangulo. Por la mesma razon, la area del triangulo CAF es igual al rectangulo hecho de AF, y la mitad del lado CF, y assi de los demas triangulos: luego siendo la area de todo el polygono, igual à todos los triangulos juntos, serà su area igual al rectangulo hecho del radio AE, y de vna linea compuesta de las mitades de las bases ZC, CF, &c. que es la mitad de todo el ambito.

PROP. V. Theorema.

El circulo es igual al rectangulo hecho de la semiperiferia, y del radio.

LA razon es, porque (*por el lema 2. para la 2. del lib. 12. de la Geom. elem.*) Los polygonos circunscritos al circulo degeneran en el circulo; desuerte, que el circulo no se diferencia sensiblemente de vn polygono circunscrito de muchos lados; antes viene à ser vn polygono de infinitos lados: Luego siendo la area del polygono circunscrito igual al rectangulo de la semiperiferia, y el radio; tambien la area del circulo es igual al rectangulo hecho de su semiperiferia, y el radio.

Y 2 Co-

Corolario.

La area de vn sector es igual al rectangulo hecho de la mitad de su arco, y del radio. Infierese de lo dicho.

PROP. VI.

Hazer vn quadrado igual à vn circulo.

O*peracion.* Hallese vna media proporcional entre la semicircunferencia, y el radio del circulo, y esta serà el lado del quadrado, igual al circulo.

Demonstr. (5.) La area del circulo es igual al rectangulo de su semicircunferencia, y el radio: este rectangulo [17.6. Eucl.] es igual al quadrado de la media proporcional entre la semicircunferencia, y el radio: Luego este quadrado es igual al circulo.

PROP. VII.

Hazer vn circulo igual à vn quadrado. (fig. 4.)

SEa dado el quadrado M, pidese vn circulo igual à dicho quadrado. *Operacion.* Tirese aparte la linea CD, larga à discrecion: tomese à arbitrio CB, que se supone ser siete partes: y cortese BD, que tenga 22. de las mesmas partes: saquese vna media proporcional entre CB, BD, que serà AB: saquese tambien vna quarta proporcional à AB, BD, EF: y serà como AB, à BD; assi EF, à GH. Hallese aora vna tercera proporcional à las lineas GH, EF; y serà GH à EF, como EF à IL: Digo que si de IL, como radio, se haze vn circulo, serà igual al quadrado M.

Demonstr. Por la construccion es GH à EF, como BD, à AB; y siendo GH à EF, como EF à IL; serà EF à IL, como BD à AB: y pues BD à AB, es como AB à CB: serà EF à IL, como AB à CB. Son pues todas proporcionales en en esta forma: GH à EF, como BD à AB: EF à IL, como AB, à BC: luego por igualdad ordenada GH à IL es como BD, à BC.

GH.

GH. EF. IL. BD. AB. BC.

Siendo pues BD à BC, como 22. à 7. razon de la periferia al diametro, ù de la semiperiferia al semidiametro; serà GH à IL como 22. à 7. Luego el rectangulo de GH, IL, es igual al circulo hecho del radio IL (6.) el quadrado M, es (17.6. *Eucl.*) igual al dicho rectangulo: luego el quadrado M, es igual al circulo del radio IL: y por consiguiente el circulo igual à dicho quadrado.

PROP. VIII. Theorema.

El quadrado à su circulo inscrito es proximamente como 14. à 11. [fig. 5.]

DIgo que el quadrado BA al circulo inscrito, tiene proximamente la razon de 14. à 11.

Preparacion. Continuese el lado CB, desuerte, que CF, sea doblada de CB: y tirando la HI por el centro, paralela à CB, perficionese el rectangulo HF. Cortese tambien [3.] CG, desuerte que sea igual à la semiperiferia del circulo; y tirese GK paralela à CH.

Demonstr. El rectangulo FH, formado de HC, mitad del lado del quadrado; y por consiguiente igual al radio del circulo; y de CF, doblada del lado CB, y por consiguiente doblada del diametro del circulo, es igual al quadrado AB; por tener los lados reciprocos con los del quadrado. Tambien el rectangulo HG, hecho de la mesma HC igual al radio, y de CG, igual à la mitad de la periferia del circulo, es igual al circulo: luego la mesma razon ay del rectangulo FH, al rectangulo GH, que ay del quadrado AB, al circulo: siendo pues el rectangulo FH, al GH, como la base CF, à la base CG (1.6. *Eucl.*) por tener ambos vna mesma altura: serà el quadrado AB, al circulo, como la base CF à la CG: La base CF es 14. por ser dupla del diametro, que es 7. y la base CG es 11. por ser la mitad de la periferia, que es 22. Luego el quadrado AB, al circulo inscrito, es como 14. à 11.

PROP.

PROP. IX.

De lo dicho se coligen diferentes reglas pvra quadrar el circulo. [fig.6.]

Pidese vn quadrado igual al circulo M.

Regla 1. Dividase el diametro LN en 14. partes iguales: cortese SN, que tenga 3. de dichas partes, y quedarà LS de 11. Levantese la perpendicular SO: y tirese la linea LO, y esta serà el lado del quadrado igual al circulo M.

Demonstr. El rectangulo QR, al quadrado QP circunscrito, se ha como la base QI, à la base QO (1.6. *Eucl.*) QI es 11. y QO es 14. luego el rectangulo QR, al quadrado QP, es como 11. à 14. y siendo (8.) el circulo M, al mesmo quadrado, como 11. à 14. serà el rectangulo QR, igual al circulo: y como el quadrado de LO, sea igual al rectangulo QR; por ser LO media proporcional entre LN, LS (*corol.* 2. *de la* 8.6. *Eucl.*) ò entre QI, IR sus iguales: serà el quadrado de LO igual al circulo.

Regla 2. *por numero.* Supongo, por exemplo, que el diametro LN es 112. partes: y para saber quantas le tocan à LS. Digo, como 14. à 11. assi 112. que es LN, à 88. y y estas le tocan à LS: multiplico 112. por 88. y el producto 9856. serà el rectangulo QR, que, como dixe, es igual al circulo: saquese la raìz quadrada de 9856. y serà proximamente 99. y vn quarto, y este serà el lado del quadrado igual al circulo.

Regla 3. Formese esta regla de tres: como 7. à 22. assi 112. à 352. circunferencia del circulo. Tomese la mitad de 112. y serà 56. tomese tambien la mitad de 352. y serà 176. que es la semiperiferia. Multipliquese 176. por 56. que es el semidiametro: y serà el producto 9856. rectangulo igual al circulo (5.) saquese su raìz quadrada 99. y vn quarto: y serà, como antes, el lado del quadrado igual al circulo.

MODO II.

Por la linea Quadratriz de Nicostrato, y Nicomedes.

Ni-

Nicostrato, y Nicomedes antiguos Geometras para quadrar el circulo, discurrieron vna linea llamada *Quadratriz*, ò *Quadrantal*: y aunque su descripcion no es en todo rigor Geometrica, como veremos; pero sus vsos son admirables, por lo que juzgo conveniente explicarla en este lugar.

PROP. X.

Descripcion de la linea Quadratriz. (fig.7.)

En el quadrado ACBD, descrivase el quadrante AB: Dividase dicho quadrante en qualesquiera partes iguales, y en otras tantas el lado AC; y el lado BD: en quanto mas partes se hiziere esta division, tanto serà la operacion mas exacta; pero por evitar confusion, divido tanto el arco AB, como las AC, DB en ocho partes. Tirense las lineas ocultas de cada punto de AC, à su correspondiente en DB: y del centro C tirense tambien lineas ocultas à cada division del quadrante AB: y la primera cortarà à ZE en E; la segunda cortarà à KF en F, y assi de las demàs: por estos puntos se irà descriviendo la linea curva AEFH, y esta serà la linea quadratriz. Aqui se vè claramente que la descripcion de esta linea no es del todo geometrica, por no aver methodo para señalar el vltimo punto H. La AC se llama *Lado de la quadratriz*: la CH es su *base*: y C su *centro*.

PROP. XI. Theorema.

La linea tirada del centro por qualquiera punto de la quadratriz; y la perpendicular de dicho punto al lado, cortan proporcionalmente el arco del quadrante, y dicho lado. (fig. 7.)

Tirese el radio CP, que passe por qualquiera punto, como F, de la quadratriz: tirese de F la perpendicular FK al lado AC: digo ser proporcionales el arco AP al quadrante AB, como la linea AK, con la AC.

Demonstr. Por la construccion, en tantas partes iguales

se

se divide el arco AB, para formar la quadratriz, en quantas se divide AC: luego si AP es la quarta parte del quadrâte AB: tambien AK serà la quarta parte del quadrante AC: y lo mesmo dividiendo, convirtiendo, &c.

PROP. XII.

Dividir vn angulo, ò arco en qualesquiera partes iguales. (fig. 7.)

POr la linea quadratriz se resuelve el deseado problema de la triseccion del angulo. Supongase pues, se ha de dividir el arco AM, ò el angulo ACM en tres partes iguales. Tirese el radio CM, que corta la quadratriz en X: de X tirese la perpendicular XL: dividase AL en tres partes iguales, en los puntos K, Z: y tirense las perpendiculares KF, ZE: por E y F tirense los radios CEO, CFP: y los arcos AO, OP, PM seràn iguales.

Demonstr. (11.) Las lineas AZ, ZK, KL, son proporcionales con los arcos AO, OP, PM. Aquellas tres lineas son iguales; luego tambien los tres arcos sobredichos son iguales: y por consiguiente queda AM dividido en tres partes iguales; y tambien el angulo ACM, de quien es medida.

PROP. XIII. Theorema.

El arco AN del quadrante; el lado AM, y la base MC de la quadratriz, son continuas proporcionales. [fig. 8.]

DIgo que el arco AN, al lado AM; es como el lado AM, ò MN, à la base MC de la quadratriz.

Preparacion. Si no fuesse assi, seria AN à AM, como MN à ME, mayor que MC, ò à otra menor: pruevo pues que AN à AM no es como MN à ME; y para esso, descrivase del centro M por E el quadrante EF, que cortarà à la quadratriz en G: tirese GL perpendicular al lado AM: y GI perpendicular à la base MN.

Demonstr. El quadrante AN (segun se supone) al lado AM es como MN à ME: y siendo tambien el quadrante AN al quadrante FE, como el radio MN, al radio ME (*corol. 2. de la prop. 2. del lib. 12. Eucl.*) Luego el quadrante FE, y el radio MN, ò AM, son iguales. Tambien el quadrante NA al arco NH, es como el quadrante EF al arco EG: y siendo [por la formacion de la quadratriz] NA à NH, como AM à LM: serà AM à LM, como EF à EG: y alternando AM à EF, como LM à EG: y aviendo probado ser MA igual al quadrante FE, se sigue ser LM ò GI, su igual, igual al arco EG: lo que es absurdo: luego el quadrante AN à AM, no es como AM à ME, mayor que MC. Por modo semejante probarè, no poder ser el quadrante AN con AM, como AM con MI, menor que MC: luego son proporcionales el quadrante AN con AM, como AM con MC.

PROP. XIV.

Hallar vna linea recta igual à la circunferencia de vn circulo. [fig. 8.]

OPeracion. Hallese vna tercera proporcional O à la base MC de la quadratriz, y à su lado AM: y esta serà igual à la periferia del quadrante AN: y tomada quatro vezes, serà enteramente la periferia del circulo.

Demonstr. (13.) MC con AM es como AM à la periferia AN del quadrante: siendo pues, por construccion, MC con AM, como AM con O, serà la linea O igual al quadrante AN de la periferia: y tomada la linea O quatro vezes, serà igual à la periferia entera del circulo: con que este se quadrarà por la prop. 6. de este Lib.

MODO III.

Por la linea espiral de Archimedes.

EL celebrado Archimedes, para hallar vna linea recta igual à la circunferencia de vn circulo, y lograr el deseado fin de su quadratura, discurriò el artificio ingenioso de vna linea espiral; cuya idea se formarà facilmente, si se concibe [*fig. 9.*] que la linea BA se mueve de tal suerte, que haziendo su extremo A centro en A, dè vna buelta ta entera, corriendo el otro extremo B la circunferencia del circulo; y que al mesmo tiempo vn punto movible corra desde B hasta A: ù desde A hasta B: desuerte, que entrambos movimientos empiezen, y acaben à vn mesmo tiempo. Conque aviendo corrido la AB el arco BM, octava parte del circulo, el otro movible avrà corrido la MI octava parte del radio: en llegando AB à AC, corrida la quarta del circulo, el otro avrà baxado à D, quarta parte del radio, y asi en lo restante, hasta aver corrido el radio todo el circulo, en el qual tiempo, avrà llegado al centro A el otro movible.

Lo mesmo serà suponiendo, que el segundo movible empieze su movimiento del centro A: y en este caso, si hiziere segunda revolucion el radio, correrìa el segundo movible tanto, como otro radio, fuera del circulo.

PROP. XV.

Descrivir la linea espiral de Archimedes. (fig. 9.)

DIvidase la circunferencia del circulo en muchas partes iguales, porque quanto fuere mayor su numero, tanto serà mas exacta la descripcion. Dividase asimesmo el radio en tantas partes, en quantas se dividiò la circunferencia: Tirense radios à todas las divisiones de la circunferencia: y transfieranse las divisiones del radio à los demàs; es à saber la primera, al primero que se sigue despues del dividido; la segunda, al segundo; la tercera, al tercero, y asi de los demàs; vayase conduciendo por estos puntos vna linea curva; y serà la spiral que se desea.

Corolario.

De lo dicho se infiere, que las partes del radio comprehendidas entre el primer circulo, y la espiral, son proporcionales con los arcos del mesmo circulo: y asi porque DC es doblada de IM, el arco BC es doblado de BM.

PROP. XVI.

Dividir vn angulo en tres, ò qualesquiera partes iguales. (fig. 10.)

Pi-

PIdese que el angulo BAC se divida en tres partes iguales. *Operacion.* Hecha la espiral CIEDA; tirese por la extremidad del radio AC, el arco CB: y el segmento DB, dividase en tres partes iguales; por las divisiones O, S, haganse del centro A los arcos OI, SE, que cortaràn la espiral en los puntos E, I, tirense por estos puntos las rectas AEF, AIG: y quedarà dividida la circunferencia BC, y por consiguiente el angulo BAC en tres partes iguales.

Demonstr. [*por el corol. p reced.*] las partes de la circunferencia son proporcionales con las partes del radio: luego si DS, SO, OB, son iguales, los arcos BF, FG, GC tambien son iguales.

PROP. XVII.

Proponese la quadratura del circulo por la linea espiral. (fig. 10.)

DEmuestra Archimedes, que si del fin de la primera revolucion de la espiral, se tira vna tangente CL, cortarà esta en el diametro prolongado, vna linea AL, igual à la periferia del circulo; cõ q̃ se quadrarà con facilidad por la prop. 6. Pero como Archimedes no determine modo para tirar dicha tangente, su artificio, aunque ingenioso, adelanta poco la quadratura, y asi juzgo por conveniente no cansar con lo prolixo de su demonstracion.

CAPITVLO II.

DE LA QVADRATVRA DE LA ELYPSE.

E*Lypse es vna especie de figura oval, que nace de la seccion obliqua de vna pyramide conica, ù de vn cilindro, quando dicha seccion corta entrambos lados*: como AGHI [fig. 11.] Tiene dos diametros principales; vno *mayor* AH; y otro *menor* GI. El punto C es el *centro de la elypse*: y los puntos F, y E se llaman: *puntos de comparacion, y focos de la elypse*: y distan igualmente del centro C: las rectas

rectas KL, MN, &c. paralelas à qualquiera de los diametros, se llaman *ordenadas*: y sus mitades FL, ON, &c. semiordenadas.

Tiene la elypse insignes propriedades, que se demuestran en el tratado de secciones conicas: la mas principal, y la que aora hemos menester tener presupuesta, es que los quadrados de las ordenadas, ù de las semiordenadas, tienen entre si la mesma razon que los rectangulos hechos de los segmentos del diametro: como el quadrado de FL, es al quadrado de CI, como el rectangulo AFH, al rectangulo ACH: y assi de las demàs. Y es tan essencial esta propriedad à la elypse, que no se entiende otro por elypse, que vna figura oval, que en virtud de su construccion tiene la propriedad sobredicha: con esto se demonstraràn las proposiciones siguientes.

PROP. XVIII. Theorema.

Las ordenadas en la elypse, à las ordenadas en el circulo del mayor diametro, sus correspondientes, tienen la mesma razon, que el menor al mayor diametro. (fig. 11.)

Explicacion. Del centro C de la elypse, con el radio CA, descrivase el circulo ASHV: Las semiordenadas en la elypse son FL, CI, ON, &c. sus correspondientes en el circulo son EP, CS, OT. Digo que FL à FP, es como CI semidiametro menor de la elypse, à CS, semidiametro mayor: y assimesmo ON, à OT, es como CI à CS; y assi todas las demàs.

Demonstr. Por naturaleza de la elypse, el quadrado de FL, al quadrado de CI, es como el rectangulo AFH, al rectangulo ACH: y siendo (*corol. de la prop.* 13. 6. *Eucl.*) el rectangulo AFH igual al quadrado de FP: y el rectangulo ACH, igual al quadrado de CS; serà el quadrado de FL al quadrado de CI; como el quadrado de FP al quadrado de CS: y alternando, el quadrado de FL, al quadrado de FP, como el quadrado de CI al quadrado de CS: y como [20. 6. *Eucl.*] los quadrados tengàn entre si razon duplicada de la de sus lados; la razon duplicada de FL à FP, serà la mesma que la duplicada de CI, à CS: luego la mesma razon ay de FL, à FP, que de CI, semidiametro menor de la elypse, à CS semidiametro mayor. Lo mesmo se demonstrarà de las demàs semiordenadas.

Con semejante demonstracion se convence, que descrito el circulo GFIE, del menor semidiametro de la elypse; y tiradas las semiordenadas ZXY, y las demàs, es ZX à ZY, como CF semidiametro menor de la elipse, à CA su semidiametro mayor.

PROP. XIX. Theorema.

El circulo del mayor diametro, tiene con la elypse la mesma razon, que tiene el diametro mayor con el menor: y essa mesma razon tiene la elypse con el circulo del menor diametro. [fig. 11.]

Demonstr. Considerense tiradas las ordenadas paralelas à VS, y quedarà formada con ellas toda la area de la elypse, y del circulo mayor: y siendo assi [18.] que todas las dichas lineas son cortadas por la elypse en la razon mesma de CS à CI, se sigue que todas las del circulo mayor juntas, à todas las dè la de la elypse: esto es, la area del circulo mayor, à la area de la elypse, tiene la razon de CS semidiametro mayor, à CI semidiametro menor. Assimesmo, si se consideran todas las possibles dentro de la elypse paralelas à AH, se infiere tienen todas las de la elypse, à todas las del circulo menor, la razon de AC, semidiametro mayor, à FC, semidiametro menor: luego el circulo mayor à la elypse: y esta, al circulo menor, tienen la razon del semidiametro mayor al semidiametro menor.

Corolario.

El circulo mayor, la elypse, y el circulo menor, son continuos proporcionales, por tener la razon mesma del semidiametro mayor, al semidiametro menor.

PROP. XX.

Hazer vn circulo igual à vna Elypse. (fig. 11.)

Ope-

O *Peracion.* Hallese la linea B, media proporcional entre el semidiametro mayor CS: y el semidiametro menor CI de la Elypse: y el circulo, que se hiziere de la linea B, como semidiametro, serà igual à la Elypse.

Demonstr. El circulo mayor ASHV, al circulo hecho de B, tiene [2.12. Eucl.] razon duplicada del radio CS, al radio B: y siendo la razon de CS à CI duplicada, de la de CS à B, por ser proporcionales CS, B, CI; el circulo mayor ASHV al circulo hecho de B, serà como CS à CI: el mesmo circulo mayor à la elypse (19.) es tambien como CS à CI: luego el circulo hecho del radio B, y la elypse, son iguales.

Corolarios.

1. *De lo dicho se colige el modo de reduzir la Elypse à quadrado: porque reduzida à circulo; se convertirà este en quadrado por la prop. 6.*

2. *El rectangulo hecho de los diametros de la Elypse, ò circunscrito à ella: y el quadrado del diametro del circulo hecho de B, ò circunscrito à dicho circulo son iguales. Porque el diametro de este circulo es medio proporcional entre los diametros de la Elypse. Luego [16.6. Eucl.] son iguales.*

3. *Las Elypses son entre si como los rectangulos de sus diametros: y assi todo lo que se demonstrò en la Geom. elem. de los rectangulos se deve entender de las Elypses. Y assi las que tienen los diametros reciprocos son iguales. Las semejantes: esto es, las que tienen los diametros proporcionales, tienen la razon duplicada de la de sus diametros homologos. Las que tienen vn diametro igual, tienen la razon, que el otro diametro: y las que constan de desiguales diametros, tienen razon compuesta de los mesmos.*

(***) (***) (***)
(***) (***)
(***)

CAPI-

CAPITVLO III.

DE LA QVADRATVRA DE LA LVNVLA.

HYpocrates Chio, que floreciò 550. años antes de Christo nuestro Señor, buscando la quadratura del circulo, hallò la quadratura de la Lunula; para cuya noticia sirven las proposiciones siguientes.

PROP. XXI.

Hazer vn angulo curvilineo igual à vn angulo rectilineo dado. [fig. 12.]

AUnque es impropria la igualdad, ò desigualdad de los angulos rectilineos, y curvilineos, como dixe en el Escholio de la prop. 16. del lib. 3. de la Geom. elem. Esto no obstante se satisfarà la propuesta del modo siguiente. Pidese vn angulo curvilineo igual al angulo rectilineo EAF.

Operacion. Tomense iguales AE, AF, y con el intervalo EA, haziendo centro en E, y F, haganse los arcos AS, AB: y el angulo curvilineo SAB, serà igual al rectilineo EAF.

Demonstr. Los angulos mixtilineos SAE, BAF son iguales, por ser de semicirculos iguales: luego si de entrambos se quita el angulo BAE, que es comun, quedaràn SAB, EAF iguales.

PROP. XXII.

Hazer vn Arbelo igual à vn triangulo; y al contrario. (fig. 13.)

O *Peracion.* Dividase el circulo AOCI en quatro partes iguales: Tirense las lineas AC, IA, IC, y con el mesmo radio NI del circulo, descrivanse los arcos AQI, CPI, y haziendo centro en I hagase el arco AEC: Digo, que el arbelo pintado con puntos es igual al triangulo AIC.

Demonstr. Los arcos AQI, CPI, son iguales à los arcos AFI, CLI: estos son la quarta parte de la periferia del circulo lo: luego tambien AQI, CPI: y siendo el arco AEC tambien la quarta parte de la periferia de su circulo, por ser medida del angulo AIC recto (31. 3. Eucl.) seràn los segmentos NSR semejantes: Luego [*corol. de la pr.* 15. 5. *Eucl.*] tendran entre si la mesma razon, que los circulos, de quienes son segmentos: estos (2.12.*Eucl.*) tienen la razon de los quadrados de sus diametros, ù de sus semidiametros: luego los segmentos N, S, R, son como el quadrado del radio IA, al quadrado del radio IN: y como el de IA sea [47. 1.*Eucl.*] duplo del quadrado de IN, se sigue, que el segmēto N es duplo del segmento S: luego es igual à los segmentos S, y R: luego si del arbelo se quita el segmento N: y en su lugar se añaden los segmentos S, R, resultarà el triangulo AIC, igual à dicho arbelo.

Como este triangulo AIC sea igual al quadrado *AZIN*, se sigue ser este quadrado igual al arbelo.

PROP. XXIII.

Hazer vn triangulo igual à la Lunula ABCDA. [fig. 14.]

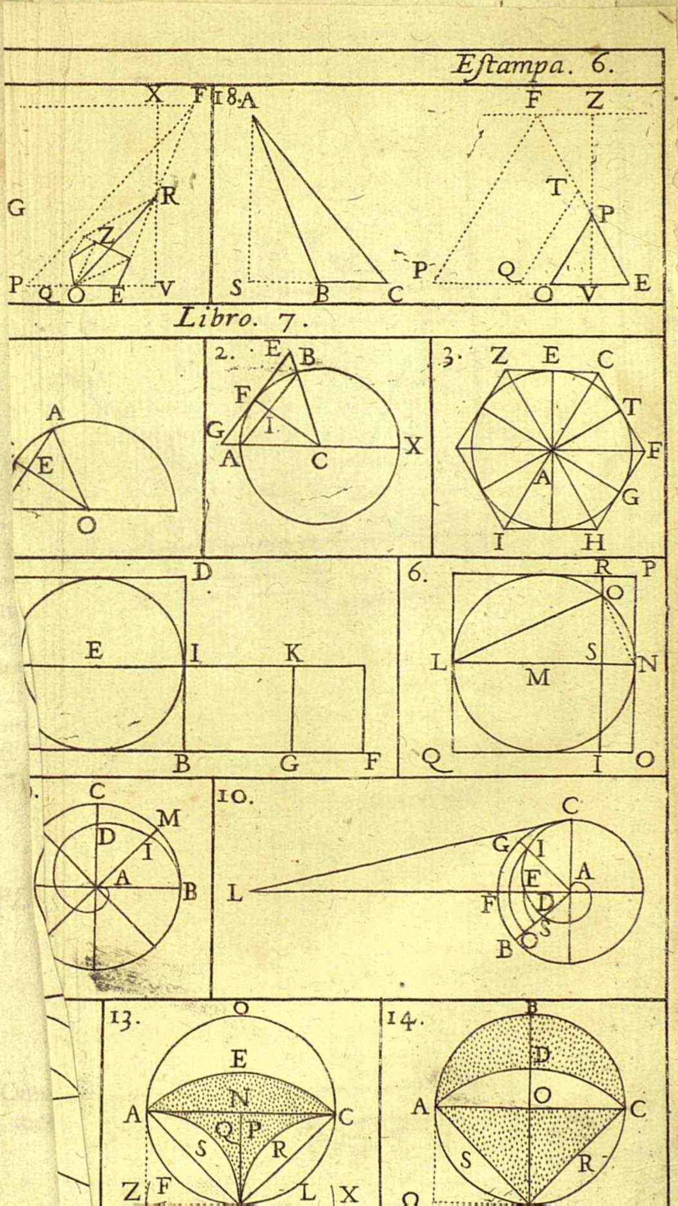
O*Peracion.* Dividase el circulo en quatro partes, con los diametros AC, BP: tirense las AP, CP: y con la distancia PA, hagase el arco ADC: y quedarà formado el triangulo APC, igual à la lunula ABCDA.

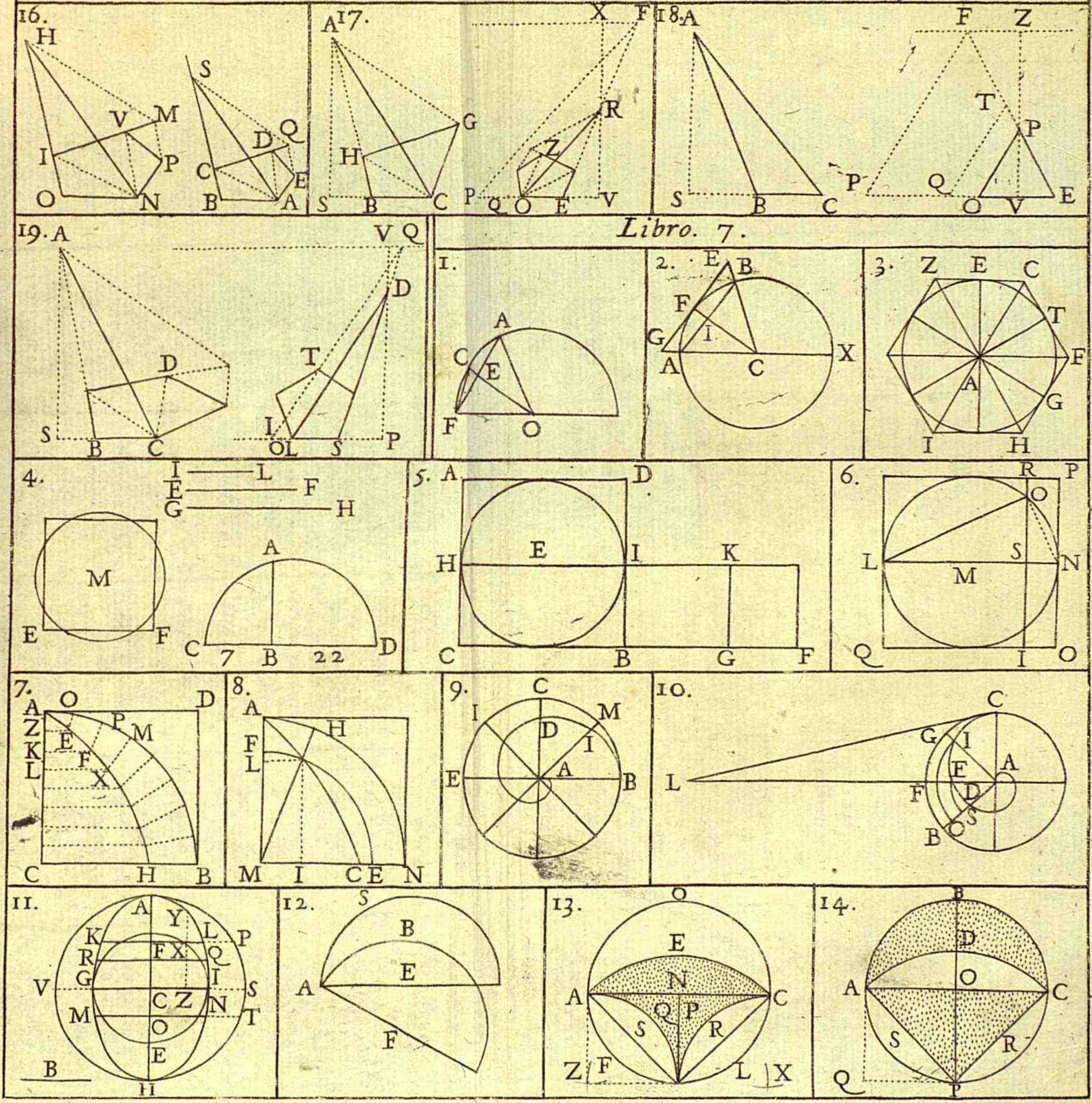
Demonstr. Por la razon dicha en la prop. passada, los segmentos S, R, son iguales al segmento O: luego si del semicirculo ABC, se quita el segmento O: y del semicirculo APC, se quitan los segmentos S, R, los residuos que son la lunula, y el triangulo, quedaràn iguales. Y como el quadrado OQ, sea igual al triangulo APC, serà tambien igual à la lunula.

Esta es la celebre lunula de Hipocrates Chio tan aplaudida por la antiguedad, cuya quadratura, aunque no infiere la del circulo, convence su posibilidad. Otras proposiciones omito por ser de mas curiosidad que provecho.

(********)

LI-




Libro. 7.

LIBRO VIII.

DE LA FABRICA, Y USO DE algunos inſtrumentos geometricos.

LOS inſtrumentos geometricos, cuya frabrica, y vſo ſe funda en los Theoremas de la Geometria, ſon de mucha vtilidad para el exercicio de eſta ciencia; por reducirſe con ellos facilmente à practica lo que enſeñò la Theorica: ſu numero es caſi ſin numero, pues apenas ay Autor, que no les procure diſponer con alguna novedad, ajuſtada à ſus ideas. Darè en eſte libro vna ſuccinta declaracion de los mas familiares à los Geometras. Quien deſeàre en eſta materia mayor extenſion, podrà recurrir al P. Gaſpar Eſcoto en el Organo Mathematico: en el Pantometro KirKeriano, y Amuſi Ferdinandea.

CAPITVLO I.

EXPLICASE LA FABRICA, Y VSO DE algunos inſtrumentos geometricos.

PROPOSICION I.

Daſe noticia de algunas medias geometricas.

COmo el fin de los inſtrumentos geometricos ſea el medir, ſerà conveniente preſuponer el conocimiento de algunas medidas, que comunmente ſon tantas, y tan varias, como los paìſes: deve pues el Geometra tener bien ſabidas à lo menos las de ſu patria para proceder con acierto: y ſupueſto que las mas corrientes de los Reynos de Eſpaña quedan explicadas en el libro 1. cap. 2. de la Arithmetica, explicarè en eſte lugar ſolamente las de los Romanos, que juzgo ſerà baſtante para el intento preſente: porque las reglas geometricas de la meſma ſuerte ſe exercitan con vnas, que con otras: y mas aviendo de tratar deſte aſſumpto en la Architectura militar, y Geographia.

La menor medida de los Romanos era la latitud de vn grano de cevada: llamaſe *Grano*. El *dedo* conſtava de 4. granos juntos por los lados; pero aora dividen el dedo en 12. partes iguales, à que llaman *Lineas*. El *palmo menor*, ò *quadrante* tenia quatro dedos; llamavaſe *menor* à diſtincion del *mayor*, ò *dodrante*, que era medio codo. El *pie* conſtava de 4. palmos menores, y por conſiguiente de doze dedos. El pie Romano es el meſmo que el Geometrico, y es igual al pie Valenciano, que es el tercio de la vara de Ualencia, como demueſtra Joſeph Vicente del Olmo en ſu nueva deſcripcion del Orbe pag. 92.

El *codo* conſtava de pie, y medio, y es media vara Valenciana. El *paſſo Geometrico*, conſtava de 5. pies: llamavaſe *mayor* à diſtincion de otro paſſo menor, que llamavan *greſſus*, y conſtava de dos pies y medio. La *pertica* conſtava de dos paſſos, ò 10. pies. El *eſtadio*, de 125. paſſos. La *milla* de 8. eſtadios, ò mil paſſos. Vea el curioſo al Doctor Juan Bautiſta Corachan en ſu Arithmetica Demonſtrada, que trata con erudicion eſta materia.

PROP. II.

Fabrica, y vſo de la eſcala, ò pitipie Geometrico. (fig. 1.)

ADemàs de compàs, y Regla, de que neceſsita el Geometra, ha de tener la Eſcala, ò pitipie Geometrico, que ſe fabrica en eſta forma. En vna regla de alaton, ò otra materia firme, y bien llana, tireſe la recta AB, paralela

la al lado de la regla, y que ſea igual à vn pie Geometrico: eſta ſe dividirà en 12. partes iguales, que ſeràn las vncias, ò polices: en la figura ſe halla vn medio pie Valenciano, ò Geometrico, que contiene 6. de las dichas partes. Tireſe la otra recta CH, paralela à la primera; y por cada diviſion tirenſe las perpendiculares, que tienen los numeros 100. 200. &c. y quedarà todo el pie dividido en 1200. partes: de las quales las centeſsimas ſon actuales: y las intermedias, potenciales, que ſe diſtinguiràn en la forma ſiguiente.

Dividanſe los lados AE, FH en diez partes iguales, que ſe notaràn con los numeros 10. 20. &c. tirenſe las tranſverſales obliquas como ſe ſigue; del punto E, principio de la diviſion, tireſe vna linea à la primera parte: de la primera, notada con el 10. tireſe otra à la ſegunda, &c. Dividaſe aſsimeſmo AH, BC en 10. partes iguales, y tiradas las rectas paralelas à los lados, ſe pondràn los numeros 1. 2. 3. y los demàs, como en la figura.

El vſo de eſte pitipie es el ſiguiente: ſe han de tomar 368. partes. Buſqueſe arriba el numero 8. y baxeſe por ſu linea haſta encontrar con la tranſverſal obliqua, que tiene la nota 60. y ſe cortan en O: Pongaſe en O el pie del compàs, y eſtiendaſe el otro haſta la tranſverſal, que lleva la nota 300. que es en I: y la diſtancia OI, ſerà de 368. partes. Si ſe ofreciere aver de tomar mayor numero de partes, de las que tiene el pitipie, como 1824. ſe tomarà todo el pitipie, que ſon 1200. y deſpues en la forma referida, ſe tomaràn las reſtantes 624. y juntas todas ſeràn 1824.

Advertencia.

El medio pie de la eſtampa es algo menor de lo juſto, porque el papel mojado ſe eſtiende regularmente vna ſexageſima parte; y en ſecandoſe, ſe encoge otra ſexageſima: con que el medio pie eſtampado con preciſion en el papel mojado, ſe reduze deſpues, y es vna ſexageſima parte menor: y aſsi ſerà meneſter añadirle dicha porcion para que ſea preciſſo; ò bolverle à mojar, como para la impreſion, y apegarle en vna tabla, con que ſe reducirà à ſu devida magnitud. Eſto vltimo es lo mas ſeguro: ya porque la extenſion

 del

del papel quando mojado, y la reduccion quando enjuto, no es vniforme en todo genero de papel: y ya tambien porque mas ſe contrae por lo ancho del folio, que por lo largo; y eſta es la cauſa porque vn circulo eſtampado degenera en ovalo.

PROP. III.

Fabrica, y vſo de la Eſquadra. [fig. 2.]

Componeſe la Eſquadra de dos varas de alaton, ò otra materia firme, que forman angulo recto. Sirve para tirar lineas perpendiculares con brevedad, y examinar los angulos rectos: y poniendole tres clavos, vno en el concurſo A, y los otros en las extremidades B, y C, ſirve para determinar el punto, en que las viſuales terminadas à dos objetos, forman el angulo recto. Solo es meneſter advertir que quando por los dichos clavos ſe miran los objetos, hemos de vſar de dos lineas viſuales; vna que toque la parte dieſtra de los clavos A, B: y otra que toque la ſinieſtra de A, C.

PROP. IV.

Fabrica, y vſo de la regla magnetica. (fig. 3.)

Hagaſe de alaton, ù de otra materia firme, que no ſea hierro, la varilla recta DE, con las dos pinulas E, D: à quien ſe ajuſtarà la pixide O, con ſu bruxula dentro: y el circulo ſe dividirà en 360. grados: y quedarà fabricado el inſtrumento, como ſe vè en la figura.

Sirve eſta regla magnetica para diferentes operaciones: ſingularmente por hazer vna deſcripcion ichnografica de vna Ciudad, ò terreno: porque cõ ella ſe toman los angulos orizontales, y de poſicion, que ſe forman con lineas paralelas al orizonte en la forma ſiguiente. Importa ſaber el angulo que ſe forma en el lugar A, con las dos lineas viſuales AB, AC, terminadas à dos baluartes, para conocer la diſtancia que tienen entre ſi, ò la magnitud de la cortina.

Operacion. Mireſe deſde A por las pinulas el Baluarte B; y ſupongamos que la ſaetilla de la bruxula ſeñale 10. grados: conviertaſe la regla del meſmo lugar A àzia C; y viſto por las pinulas el baluarte C, ſeñale la ſaetilla, por exemplo, 45. grados: reſtenſe 10. de 45. y el reſiduo que ſon 35. ſerà el valor del angulo BAC. La razon es, porque como la bruxula ſiempre mire al polo del mundo, quantos grados ſe aparta la linea AC de AB, tantos ſe aparta la ſaetilla, pueſta en AC, de los que ſeñalava en AB.

PROP. V.

Fabrica, y vſo del Baculo, ò cruz geometrica. [fig. 4.]

Componeſe eſte inſtrumento de dos palos HL, MN, bien derechos, y de madera firme: el mayor puede tener de longitud quatro, ò cinco pies geometricos; el menor ſea largo à diſcrecion; pero de tal ſuerte ſe ha de ajuſtar con el mayor, que pueda correr de L à H libremente, conſervandoſe ſiempre perpendicular: pondranſe ademàs de eſto quatro clavos pequeños en H, M, L, N, para mirar por ellos con preciſsion los objetos. La graduacion de eſte inſtrumento ſe executarà como ſe ſigue.

Tireſe aparte la linea EF, igual à OM, mitad de MN: tireſe ſu perpendicular FG: del punto E como centro deſcrivaſe vn quadrante de circulo dividido exactamente en 90. grados: y ſi puede ſer cada grado ſe dividirà tambien por medio: por eſtas diviſiones ſe tirarân lineas ocultas del centro E, haſta que corten la linea HF: traſladenſe eſtas diviſiones à la linea HL del inſtrumento, empeçando del punto H, con eſte orden 75. 60. 45. &c. y quedarà graduado el inſtrumento.

Valenſe comunmente de la cruz geometrica los marineros para obſervar las alturas de las eſtrellas ſobre el orizonte: ſirve juntamente para medir diſtancias, y elevaciones, tomando los angulos que forman las lineas viſuales: ſu vſo ſe entenderà en el exemplo ſiguiente. Supongamos, que obſervado vn punto, ò ſeñal de vn objeto por los puntos H, L, para obſervar al meſmo tiempo otro ſeñal, por los puntos H, M, ſe aya de colocar el palo MN en el grado, ò diviſion 75. Dirè que en tal caſo el angulo MHL es 75. gra-

grados: y el angulo MHN es 150. grados. La razon es porque segun consta de la construccion, la linea H 75. es tangente de 15. grados: luego el angulo M es de 15. grados: luego (32.1. *Eucl.*) el angulo H será de 75. grados: y el angulo MHN, por ser doblado del sobredicho, será de 150. grados.

PROP. VI.

Fabrica, y vso del quadrante, y quadrado geometrico. [fig. 5.]

LA fabrica de este instrumento es la siguiente. Hagase de alaton, ò madera vn quadrado HF, que tenga à lo menos vn pie por lado: en qualquiera de sus angulos, como en E, se ha de ajustar vna regla IL, q̃ llaman *Alidada*: de suerte, que pueda moverse libremente; y sea algo mas larga que la diagonal EG. Esta ha de tener dos diopras, ò pinulas; como tambien el lado EF: dividanse los dos lados FG, HG en 100. partes iguales, ò en 1000. conforme fuere capàz el instrumento: dividase assimesmo la alidada IL en partes iguales à las de los lados, como se vè en la figura: y quedarà preparado el instrumento. A vno de los lados divididos, llaman comunmente *vmbra recta*; y al otro *vmbra versa*; nombres que mas sirven de confusion, que de otro; y assi no vsaremos de ellos.

Dentro, ò fuera del quadrado, se suele descrivir vn quadrante de circulo, dividido en 90. grados: y seria mejor, alargando la tabla, hazer todo el semicirculo: en el centro E se puede poner vn hilo delgado con vn plomo, que sirva de perpendiculo.

El quadrado sirve para medir alturas, y distancias: y el quadrante para determinar, y conocer los angulos, como latamente veremos en el libro siguiente.

(***) (***) (***)
(***)

CAPITVLO II.

EXPLICASE LA FABRICA, Y VSO DEL compàs de proporcion, ò Pantometra.

PROP. VII.

Explicase la fabrica de este instrumento. (fig. 6.)

HAganse de alaton, cobre, ò otra materia semejante dos lineas, ò reglas paralelogramas, como se representan en la figura. Su longitud puede ser de vn pie geometrico; su latitud de tres dedos; y su cracicie moderada, para que no sea sobrado pesado el instrumento: estas han de ajustarse con gran primor; de suerte, que puedan cerrarse, y abrirse à modo de compàs. Llamase este instrumento *Pantometra*, que es lo mesmo que medida vniversal: y *compàs de proporcion*: por ser esta el fundamento total de su artificio. Muchas son las lineas, que se pueden poner en la Pantometra; pero las mas frequentes, y essenciales son la linea *Arithmetica*: *Cordometrica*: *Geometrica*: *Stereometrica*, *y Metalica*; cuya explicacion comprehenden las proposiciones siguientes.

PROP. VIII.

Preparar la linea fundamental.

LLamase *linea fundamental*, la que sirve de fundamento, y como pitipie, para dividir las demàs lineas de la Pantometra. Tirese pues en vna lamina, ò tabla aparte, vna linea recta, cuya longitud sea igual à la de la Pantometra: dividase esta linea exactissimamente en 100. ù en 1000. partes iguales, conforme la magnitud del instrumento: y si este fuere igual à la regla geometrica, que expliquè en la prop. 2. deste libro: esta mesma serviria de linea fundamental.

LINEA ARITHMETICA.

Linea Arithmetica, es la que dividida en partes iguales, se inscrive en la Pantometra: su fabrica, y uso es como se sigue.

PROP. XI.

Dividir la linea Arithmetica, è inscrivirla en la Pantometra. (fig. 7.)

Tirense del centro de la Pantometra por toda la longitud de sus reglas las lineas AB, AB, las quales se dividiràn en 100. 120. 200. ò mil partes iguales, segun la capacidad del instrumento. Ponganse à las divisiones sus proprios numeros: y el titulo, *Linea Arithmetica.* Con esta linea se resolveràn muchos problemas, como los siguientes.

PROP. X.

Dividir vna linea recta en qualesquiera partes. (fig. 7.)

Pidese que la linea MN se divida en 100. partes iguales. *Operacion.* Tomese con el compàs la distancia MN, abrase la Pantometra de suerte, que puesto el vn pie del compàs en el punto 100. el otro se ajuste al 100. del otro lado: y conservando la Pantometra en la mesma disposicion, se tomarà con el compàs la distancia de 10. à 10. y esta serà la decima parte de la recta MN: y tomando despues la que ay de 99. à 99. se notarà con ella desde M el punto O, y serà ON vna centesima parte de la linea MN: y con esta se dividirà cada decima parte en 10. partes: y toda la linea en 100. Con esta practica se formarà vn pitipie, dividido en las partes que se quisieren.

Demonstr. Por ser las lineas EE, FF paralelas, son [2. 6. *Eucl.*] proporcionales, AF à AE, como FF à EE, siendo pues AF 99. partes de AE, serà FF: esto es, MO 99. partes de EE ù de MN: luego ON es la centesima parte de MN.

PROP.

PROP. XI.

Cortar de vna recta dada qualesquiera partes. (fig. 7.)

De la recta MN, se han de cortar 99. partes. Tomese, como antes, la distancia MN: y abrase la Pantometra hasta que la dicha distancia se ajuste de 100. à 100. Tomese la distancia de 99. à 99. y passandola de M à O, serà MO 99. partes de MN. Consta de lo dicho.

PROP. XII.

Dada vna planta de vn recinto, hazer otra semejante sobre vna linea dada. [fig 8.]

Dada la planta BE, se pide otra semejante sobre la recta FG, correspondiente à BA, y menor que ella.

Operacion. Tomese con el compàs la BA, passese à la Pantometra sobre la linea Arithmetica desde O hasta dóde llegàre, como por exemplo, hasta M: tomese con el compàs la GF, y abriendo la Pantometra ajustese dicha distancia de M à M: y sin variar la abertura se hallaràn las demàs lineas como se sigue.

Quiero hallar la GH, correspondiente à BC. Tomo con el compàs la BC, y la passo de O hasta N: tomo la distancia NN, y esta serà la longitud de GH: de la mesma suerte se hallaràn las demàs lineas; y disponiendolas de suerte, que formen angulos iguales à los de la plãta dada, se avrà logrado el intento.

Aora se le darà su proporcionado pitipie en la forma siguiente: Saquese vna quarta proporcional (12.6. Eucl.) como BA à GF: assi el pitipie de la planta dada, al que se busca: y esta quarta proporcional serà el que se desea.

Si dada la planta BE, se pide otra sobre el lado ST mayor que su correspondiente BA, serà mejor invertir la sobredicha operacion en esta forma. Tomese la ST, y passese à la Pantometra desde O sobre la linea Arithmetica: y sea OM. Tomese AB, y ajustese de M à M: y permaneciendo assi la Pantometra, si se quiere hallar el lado SK cor-

correspondiente à BC: se tomarà BC, y veasse à que puntos semejantes se acomoda transversalmente; sea por exéplo de N à N: tomese pues la distancia ON, y esta serà el lado SK: y assi de las demas. Demuestrase como la prop. 10.

PROP. XIII.

Hallar vna quarta proporcional à tres lineas dadas. [fig. 9.]

SEan dadas las tres lineas O, P, Q. Buscase la quarta proporcional. *Operacion.* Pongase con el compas la primera O, desde C hasta M: apliquese la segunda P transversalmente desde M à M, y la tercera Q, desde C hasta N: y la NN serà la quarta proporcional. Porque [2.6. Eucl.] es CM, à MM, como CN à NN.

PROP. XIV.

Hallar vna tercera proporcional à dos rectas dadas. (fig. 10.)

SEan dadas dos rectas O, P, y se busca la tercera proporcional. *Operacion.* Tomese con el compas la primera O: y passese de C à N: Tomese la segunda P, y abriendo la Pantometra, passesse de N à N; y dexando la Pantometra en el mesmo estado, se passarà el mesmo intervalo de la segunda de C à M: y MM serà la tercera proporcional que se busca: Porque (2.6. Eucl.) CN à NN es como CM, ò NN à MM: luego como O à P, assi P à MM.

PROP. XV.

Hallar vn numero medio proporcional entre dos dados. [fig. 11.]

EL modo de hallar vna recta media proporcional entre dos dadas, es mucho mas trabajoso por la Pantometra, que el ordinario, que expliquè en el lib. 6. de la Geom. elem. prop. 13. Y assi en su lugar doy el modo de hallar vn numero medio proporcional entre dos dados, como entre 48. y 12. *Operacion.* Tirese à discrecion la recta FG: y abrase arbitrariamente la Pantometra. Tomese en ella la distancia entre 48. y 48. y passese desde G à I. Tomese despues la distancia de 12. à 12. en la mesma postura de la Pantometra, y passese desde I à F: descrivase sobre FG vn semicirculo, y levantese la perpendicular IK: y tomandola con el compas, se hallarà, que en la Pantometra se ajusta transversalmente à 24. 24. dirè pues, que 24. es el medio proporcional entre 48. y 12. Consta de la prop. citada.

Puedese por la Pantometra hallar la raiz quadrada; pero en siendo los numeros algo crecidos, ò no sale exacta, ò requiere mucho rodeo: y assi omito este Problema.

PROP. XVI.

Dividir vna recta, conforme lo està otra recta dada. (fig. 12.)

PIdese, que la recta OM se divida en N en la mesma proporcion que HF està dividida en G. *Operacion.* Busquese [12.] à las tres lineas HF, GF, MO vna quarta proporcional MN: y quedarà dividida la OM, en N, como se deseava. Si la recta OM tuviere muchas divisiones, se repitirìa esta mesma operacion, para cada division, como si fuere sola.

PROP. XVII.

Dividir vna recta dada en media, y extrema razon.

TEnganse divididas en la Pantometra las lineas Arithmeticas en media y extrema razon, poniendo en la division este señal *: y con esto se dividirà qualquiera linea dada en dicha razon, de esta manera. Tomese con el compas la linea dada; y abriendo la Pantometra, ajustese transversalmente à los vltimos puntos: y tomando la distancia de * à * se dividirà con ella la recta dada, en media y extrema razon. La demonstracion es la mesma de las proposiciones passadas.

LINEA CORDOMETRICA.

L*inea Cordometrica* es la que en sus divisiones contiene las cuerdas, ò subtensas de todos los grados del semicircirculo: y se suele poner en las Pantometras, con este titulo: *Linea Chordarum*, à ella pertenecen los problemas siguientes.

PROP. XVIII.

Dividir la linea cordometrica, y colocarla en la Pantometra. (fig. 13.)

Modo 1. Tirese à parte la linea GH igual à la linea AB, tirada del centro A de la Pantometra, en ambas varas. Dividase por medio en I: y con el semidiametro IG, hagase vn semicirculo. Este se dividirà con gran precision en 180. gr. y del punto H se tiraràn, ò imaginaràn las lineas HK, HL, &c. à los puntos de las divisiones: esto es, à cada grado, ò à cada dos, conforme la capacidad del instrumento, que seràn cuerdas de los arcos HK, HL, &c. Trasladense estas lineas à las AB, AB de la Pantometra, empezando siempre del centro A. Pongase en cada division (si se puede) ò si no de 5. en 5. grados, el numero de los que subtende cada cuerda en el semicirculo: y quedaràn divididas las lineas cordometricas.

Modo 2. Por las tablas de los senos, que daremos en la Trigonometria. Tirense las lineas AB, AB iguales à la linea fundamental: y por exemplo, para señalar la cuerda de 10. grados; voy à la tabla de los senos, y busco el seno de 5. grados, mitad de 10. y omitiendo las vltimas cifras de la mano derecha, hallo ser 87. y su duplo 174. Tomo pues de la linea fundamental 174. partes, y passolas à la Pantometra desde A àzia B en ambas lineas: y haziendolo mesmo en las demas divisiones, quedarà inscrita la linea cordometrica. Fundase esto, en que el seno de vn arco es la mitad de la cuerda del arco duplo, como en su lugar veremos.

PROP. XIX.

Cortar de vn circulo vn arco de qualesquiera grados.

Pidese, que de vn circulo dado se corten 40. grados. *Operacion*. Tomese con el compas el radio del circulo dado: y abriendo la Pantometra, ajustese dicho radio transversalmente à los puntos 60. 60. y sin mover el instrumento, tomese la distancia, que ay de 40. à 40. y esta serà la cuerda de 40. grados del circulo dado. Demuestrase como los problemas antecedentes.

PROP. XX.

Conocer el valor de vn arco dado.

Operacion. Tomese el radio del circulo, de quien es el arco dado, y ajustese en la Pantometra de 60. à 60. Tomese con el compas el arco dado, y vease à que puntos semejantes se ajusta transversalmente: si se ajusta de 40. à 40. el arco propuesto serà de 40. grados: y assi en los demas.

PROP. XXI.

Dado vn arco, y su valor, hallar el radio.

Sea dado vn arco de 40. grados: buscase el radio de su circulo. *Operacion*. Tomese dicho arco con el compas; y ajustese en la Pantometra de 40. à 40. Tomese la distancia de 60. à 60. y esta serà el radio, que se busca.

PROP. XXII.

Inscrivir en vn circulo qualquiera Polygono regular.

Operacion. Tomese con el compas el radio del circulo, en quien se ha de inscrivir el Polygono; y abriendo la Pantometra ajustese à los puntos 60. 60. Vease despues quantos grados subtende el lado del polygono, que se quiere inscrivir: como si es el Pentagono serà el de 72. si el octagono 45. &c. Estos se buscaràn en la linea cordometrica; y perseverando la Pantometra en la mesma abertura, se tomaràn transversalmente los dichos grados, y passandoles al circulo, serà dicha distancia el lado del Polygono, que se desea.

Para hallar los grados que subtende el lado de qualquiera Polygono, se partiran 360. por el numero de sus lados; y el quociente serà los grados que se buscan. Algunos añaden

den à la Pantometra la *linea Polygonographica*, la qual omito, por resolver todos sus problemas la cordometrica, casi con igual facilidad.

PROP. XXIII.

Dado el lado de qualquier Polygono regular, hallar el radio.

DAdo vn pentagono, se busca el radio del circulo, que le circunscrive. *Operacion.* Tomese su lado con el cõpas, y abrase la Pantometra, hasta que dicha distancia se ajuste de 72.à 72. que son los grados, que subtende el lado del Pentagono: Tomese la distancia de 60.à 60. y esta será el radio que se pide.

PROP. XXIV.

Investigar el angulo que comprehenden las lineas cordometricas de la Pantometra en qualquier abertura.

TOmese con el compas el intervalo que ay de 60.à 60. en las lineas cordometricas: y passese desde el centro sobre qualquiera de las dichas lineas: y la extremidad de este intervalo darà el valor del angulo que forman las dichas lineas en la abertura dada. Por este medio se resuelven varios Problemas Astronomicos, y Geometricos; pero es menester añadir al instrumento dos pinulas en cada linea cordometrica.

LINEA GEOMETRICA.

LInea Geometrica es la que sirve para augmentar, ò disminuir en qualquiera proporcion las figuras planas. Otros la llaman, *linea Planometrica*; otros, *linea Quadratica.* Su fabrica, y vso, comprehenden las proposiciones siguientes.

PROP. XXV.

Dividir la linea geometrica, è inscrivirla en la Pantometra. (fig.14.)

Modo

MOdo 1. Tiradas en el instrumento, de el centro, por toda su longitud dos lineas, se tirarà aparte la recta AN igual à qualquiera de ellas. Esta se dividirà en diez partes iguales: levantese AC perpendicular, è igual à AD. Tomese la distancia CD: y passesse de A hasta P. Tomese CP: y transfierase de A hasta Q: tomese CQ, y passese de A hasta E: y continuando de la mesma suerte con gran cuidado, quedarà dividida la linea, como se desea. Estas divisiones se passaràn à las lineas geometricas de la Pantometra, començando siempre del centro, ò concurso de ellas, y quedarà perfecta la obra. A la primera division, baxando del centro, se escrivirà 1.à la segunda 2.à la tercera 3.&c. Si la operacion està bien hecha, la linea del quadrado quarto caerà sobre el punto E de la division primera: la del nono sobre F: la del dezimosexto sobre G; y por esta causa se hazẽ las 10. divisiones iguales de la linea AN. Fũdase esta practica en la prop.47.lib.1.de la Geom. elem.

Modo 2. Haganse las lineas de la Pantometra iguales à la linea fundamental: y divididas en 10. partes iguales, como antes, se escogerà por primer quadrado el numero 10000. saquese su raiz quadrada, que es 100. Tomense 100.partes de la linea fundamental; y passense del centro de la Pantometra sobre sus lineas, y este serà el lado del primer quadrado. Dupliquese el numero que se escogiò, y en nuestro exemplo serà 20000. saquese su raiz quadrada, que es 141. y tomando 141. partes de la linea fundamental, se passaràn à la Pantometra desde su centro; y este serà el lado del segundo quadrado, y assi en los demas: tomando para el tercero 30000. y para el quarto 40000. &c. y sacando sus raizes. Conoceràse si và precissa la operacion, si los lados de los quadrados, quarto, nono, dezimosexto, &c. caen sobre las divisiones iguales, que se hizieron al principio,

PROP. XXVI.

Augmentar, ò disminuir vna figura dada en qualquiera proporcion. (fig.15.)

Sea

SEa dado el triangulo ABC : pidese otro, su semejante, que tenga con èl razon sesquialtera. *Operacion.* Tomense qualesquiera numeros en razon sesquialtera, como 12. y 8. Tomese con el compas la linea AB : y abriendo la Pantometra, ajustese transversalmente à los puntos 8.8. de la linea Geometrica: y sin mover el instrumento, tomese el intervalo 12.12. y sea DE, y el triangulo hecho semejantemente sobre DE, serà sesquialtero de ABC : y assi en las demas figuras.

Demonstr. De la construccion de las lineas Geometricas consta, que el quadrado, ò qualquiera rectilineo hecho sobre O8 al hecho semejantemẽte sobre O 12. se ha como 8. à 12. Y siẽdo [2.6.Eucl.] la linea 12.12. à la linea 8.8. como O 12. à O 8. El rectilineo hecho sobre 12.12. ù DE, à su semejante hecho sobre 8.8. ò AB, tendrà la razon mesma de 12. à 8.

PROP. XXVII.

Hallar la razon que tienen qualesquiera figuras semejantes. [fig. 16.]

SEan dados los quadrados H, y I : y se busca la proporcion que tienen entre si. *Operacion.* Tomese con el compàs la linea KL, y abriendo la Pantometra, se aplicarà dicha linea transversalmente à qualquiera punto de las lineas Geometricas : como por exemplo à 20. 20. Tomese despues FG : y sin mover la Pantometra veafe à que puntos se ajusta, y sea por exemplo à 10. 10. Y se dirà que el quadrado I al quadrado H, tiene la razon que ay de 20. à 10. que es dupla : y assi de los demàs. Si la FG no se ajustare à ningun punto, se aplicarà la distan. KL à otro punto, hasta que ambas se ajusten à algunos de los allì notados. La demonstracion es la mesma que la antecedente.

PROP. XXVIII.

Dadas muchas figuras semejantes, hazer otra semejante, è igual à todas juntas. [fig. 17.]

Sean

SEan dadas tres figuras semejantes; cuyos lados homologos, ò diametros [si fueren circulos] sean las lineas A,B,C. Pidese vna figura, que sea igual à todas. *Operacion.* Tomese con el compas la largaria de la linea C : y abierta la Pantometra, apliquese à qualquier numero de la linea Geometrica, como, por exemplo, à 12. 12. y dexandola en la mesma postura, tomese la linea B, y veafe à que puntos se ajusta, y sea à 9.9. y porque 12. y 9. son 21. guardese este numero en la memoria : tomese despues la linea A, y veafe à que puntos se ajusta, y sea à 6.6. junto 6. con 21. y haze 27. tomese pues la distancia 27.27. y serà la linea D, y la figura hecha sobre D, serà igual à las propuestas. Consta de la construccion de las lineas Geometricas.

PROP. XXIX.

Propuestas dos figuras semejantes, y desiguales, hallar otra semejante, que sea igual à la diferencia de las propuestas. (fig. 18.)

DAdos dos circulos desiguales, el vno del diametro AA: y el otro de BB, se busca el diametro de vn circulo, que sea igual à la diferencia de los circulos dados. *Operacion.* Tomese el diametro mayor AA : y apliquese transversalmente à qualesquiera puntos de las lineas Geometricas: y sean 20.20. y sin mover la Pantometra, tomese BB, y veafe à que puntos se ajusta en las mesmas lineas, y sean 8. 8. restese 8. de 20. y quedaràn 12. Tomese la distancia 12.12. y esta serà èl diametro que se busca: hagase CC igual à la dicha distancia, y el circulo que tuviere este diametro CC serà igual à la diferencia de los circulos dados, la qual es el anillo comprehendido entre los circulos AA, BB.

LINEA STEREOMETRICA.

LLamase *Linea Stereometrica*, la que sirve para augmentar, ò disminuir en qualquiera proporcion los solidos semejantes.

PROP. XXX.

Dividir la linea Stereometrica, è inscrivirla en la Pantometra.

Aa Ope-

Operacion. Dividida en 1000. partes la linea fundamental igual à la longitud de la Pantometra, ſe entrarà en la ſiguiente Tabla, y para lado del primer cubo ſe hallaràn en la ſegunda coluna 200. Tomenſe 200. partes de la linea fundamental, y ponganſe en la Pantometra deſde ſu centro. Aſsimeſmo, para lado del ſegundo cubo, ſe hallan 252. y tomados de la linea fundamental, ſe paſſaràn, como antes, à la Pantometra: de eſta ſuerte ſe proſeguirà haſta colocar 125. cubos; y quedaràn divididas las lineas ſtereometricas.

TABLA DE LOS LADOS DE LOS CVBOS, O Raìzes cubicas.

1	200	26	592	51	742
2	252	27	600	52	746
3	288	28	607	53	750
4	317	29	614	54	753
5	342	30	621	55	756
6	363	31	628	56	760
7	382	32	635	57	765
8	400	33	641	58	770
9	416	34	648	59	774
10	431	35	654	60	778
11	445	36	660	61	782
12	458	37	666	64	800
13	470	38	672	65	804
14	482	39	678	70	824
15	492	40	684	75	842
16	504	41	690	80	862
17	514	42	695	85	880
18	524	43	701	90	896
19	534	44	706	95	912
20	543	45	711	100	928
21	552	46	717	105	943
22	560	47	722	110	958
23	569	48	727	115	962
24	577	49	732	120	968
25	585	50	737	125	1000

PROP. XXXI.

Sacar la Raìz cubica por las lineas ſtereometricas. (fig.19.)

POr eſtas lineas ſolo ſe puede ſacar raìz cubica de aquellos numeros, que quitandoles tres cifras à la derecha, lo que queda no excede al vltimo numeto de dichas lineas. Pideſe pues la raìz cubica de 1600. *Operacion.* Tomenſe de la linea Arithmetica con el compàs 20. partes; y abriendo la Pantometra, apliqueſe eſta diſtancia tranſverſalmente à los puntos 8, 8. de las lineas ſtereometricas; y ſin abrir, ni cerrar la Pantometra, tomeſe la diſtancia que ay entre 16. y 16. que es el numero dado, quitadas las tres cifras de la derecha; apliqueſe eſta diſtancia ſobre la linea Arithmetica deſde el centro, y ſe hallarà comprehender 25. partes: y eſta ſerà la raiz cubica proxima del numero dado.

Demonſtracion. (26.) La meſma razon ay de NO à PQ, que de MN à MP. Luego la meſma razon ay del cubo de NO al cubo de PQ, que ay del cubo de MN al de MP: el cubo de MN, que es el octavo, es ſubduplo del cubo de MP, que es el dezimoſexto: luego el cubo de NO, que es 8. eſto es 8000. por la operacion, es ſubduplo del cubo de PQ: luego PQ es raìz proxima del cubo duplo de 8000. eſto es, ſerà raìz proxima de 16000. numero dado. La razon porque ſe toma de la linea Arithmetica 20. mas que otro numero, es, porque en la diviſion de las lineas, es 20. el primer lado cubico: y 8. ù 8000, el primer cubo.

PROP. XXXII.

Hallar dos medias proporcionales entre dos lineas dadas. (fig.20.)

DAdas las lineas A, y D, que ſean por exemplo A.108. y D.32. ſe deſean dos medias proporcionales.

Operacion. Tomeſe con el compàs la linea A, y abierta la Pantometra, acomodeſe entre los puntos 108. 108. y ſin mover el inſtrumento, tomeſe la diſtancia de 32. à 32.

y esta serà la segunda proporcional B. Apliquese la linea B de 108. à 108. y tomando segunda vez la distancia de 32. à 32. serà esta la tercera proporcional C. Si las halladas B, y C se aplican con el compàs al mesmo pitipie con que se midieron A, y D, se hallarà ser B.72. y C.48. La demonstracion omito, por poderse colegir de las prop. 13. y 14.

PROP. XXXIII.

Aumentar, ò disminuir qualquiera solido en vna proporcion dada, por las lineas stereometricas. (fig. 21.)

SEa dado el globo AB. Pidese otro tres vezes mayor. *Operacion.* Escojanse qualesquiera dos numeros en razon tripla, como 10. y 30. Tomese con el compàs el diametro AB, y ajustese à los puntos 10. y 10. de la Pantometra en las lineas stereometricas: y sin mover el instrumento, tomese la distancia 30. 30. en las mesmas lineas: y esta serà el diametro CD del globo tres vezes mayor que el dado AB. Si el diametro AB se diere en numeros, como si fuesse de 8. palmos, se tomarà el numero 8. de la linea Arithmetica, y se colocarà entre 10. y 10. como antes, en las lineas stereometricas; y tomando la distancia de 30. à 30. en las mesmas lineas, serà esta el diametro del globo que se busca, la qual puesta desde el centro sobre la linea Arithmetica, darà los palmos que se le han de dar à dicho diametro.

De la mesma suerte se duplicarà, triplicarà, &c. el cubo, y qualquiera otro solido, haziendo con el lado, lo que hemos hecho con el diametro: y si tuviere lados desiguales, se repetirà en cada lado la mesma operacion.

Demonstracion. Por la construccion de las lineas stereometricas, M.30. es el lado del solido, que con el solido semejante, hecho de M.10. tiene la razon de 30. à 10. Y como [2.6. Eucl.] la linea 30. 30. à la linea 10. 10. tenga la mesma razon que M.30. à M.10. serà tambien el solido hecho de la linea 30. 30. triplo del que se formàre de la linea 10. 10. como se deseava.

PROP.

PROP. XXXIV.

Dados diferentes solidos semejantes, hazer otro, que sea igual à todos los que se propusieron. (fig. 21.)

SEan dados los globos AB, CD. Pidese otro, que sea igual à los dos juntos. *Operacion.* Tomese con el compàs el diametro AB, y apliquese transversalmente à qualesquiera puntos iguales de las lineas stereometricas, como por exemplo à 10. 10. Y sin mover el instrumento, tomese el diametro CD: y vease à què puntos iguales de las mesmas lineas se ajusta, y sean 30. 30. Sumese 30. con 10. que es el punto antecedente, y seràn 40. Tomese la distancia 40. 40. y sea OP, y este serà el diametro de vn globo igual à los dos AB, y CD. De la mesma suerte se obrarà, aunque sean los globos, ò solidos tres, ò quatro, &c. Y si los diametros, ò lados se dieren en numeros, se tomaràn estos, de la linea Arithmetica, y con estas distancias se haràn las mesmas operaciones.

Demonstracion. De la construccion de las lineas stereometricas consta, que el globo, ò solido segundo, que es el que tiene por diametro, ò lado la distancia del centro de la Pantometra hasta el 2. es doblado del primero: y el tercero, por la misma razon, es triplo del primero: luego es igual al segundo y primero, y assi de los demàs: Luego el solido, ò globo hecho de M.40. es igual à los que se hizieron de M.10. y M.30. Siendo pues [2. 6. Eucl.] proporcionales M.40. M.30. y M.10. con 40.40. 30.30. y 10.10. serà el globo OP, cuyo diametro es 40.40. igual à los globos CD, y AB, hechos de 30.30. y de 10.10.

PROP. XXXV.

Hallar la proporcion de los solidos semejantes. (fig. 21.)

SEan dados los globos AB, CD. Pidese què proporcion tenga el mayor con el menor. *Operacion.* Tomese con el compàs el diametro AB, y ajustese à qualesquiera puntos semejantes de las lineas stereometricas, como por exemplo

plo à 10. 10. Tomese el diametro CD, y veaſe, ſin mover nada, à què puntos ſemejantes ſe ajuſta; y ſean 30. 30. Digo, que el globo CD, al globo AB, tiene la razon de 30. à 10. que es tripla. Conſta de lo dicho.

LINEA METALICA.

L*ineas metalicas* en la Pantometra ſon las que expreſſan las proporciones que tienen los metales entre ſi, tanto en quanto al peſo, ſuponiendoles de vna meſma magnitud, como en quanto à la magnitud, ſuponiendoles de igual peſo. Van ſeñaladas con los caracteres de los ſiete Planetas con que ſe ſe ſuelen ſeñalar lo metales: el del Sol ſignifica el Oro: el de la Luna, la Plata: Saturno denota el Plomo: Jupiter, el Eſtaño: Marte, el Hierro: Venus, el Cobre: y Mercurio, el Azogue.

PROP. XXXVI.

Dividir la linea metalica, è inſcrivirla en la Pantometra.

PAra la inſcripcion, y diviſion de eſtas lineas ſupongo lo q̄ mas latamente dirèmos en la Stalica, que los globos, cubos, &c. de diferentes metales, ſi tienen igual peſo, tienen deſigual magnitud; y ſi tienen igual magnitud, tienen deſigual peſo: de tal manera, que la razon de las magnitudes, quando tienen igual peſo, es reciproca con la razon de los peſos, quando tienen iguales magnitudes: como por exemplo; porque el peſo de vn globo de oro es doblado del peſo de vn globo de cobre de igual magnitud, la magnitud de vn globo de cobre es doblada de la magnitud de vn globo de oro de igual peſo.

De aqui ſe infiere que para ſeñalar en las lineas metalicas los diametros de los globos de diferentes metales, tomados en igual peſo, es meneſter ſaber la proporcion que tienen en quanto al peſo los metales tomados en igual magnitud; porque de aqui ſe inferirà qual ſea la proporcion de ſus magnitudes, quando tienen igual peſo; requiſito eſſencial para determinar eu la Pantometra ſus diametros. Todo eſto comprehenden las tablas ſiguientes fundadas

das en las experiencias mas diligentes del P. Merſenno, y otros Autores.

TABLA I. DE LA PROPORCION DEL PESO DE los metales tomados en igual magnitud.

	Azogue		71	1. medio
	Plomo		60	1. medio
	Plata		54	1. medio
	Cobre		47	1. tercio
El oro al	Alaton	es como 100. à	45	
	Hierro		42	
	Eſtaño comun		39	
	Piedra comun		14	
	Polvora comun		5	1. quarto

TABLA II. DE LOS DIAMETROS DE LOS GLObos equiponderantes de diferentes metales expreſſados en partes iguales.

Oro	500.	Alaton	652.
Azogue	559.	Hierro	668.
Plomo	592.	Eſtaño comun	684.
Plata	615.	Piedra	963.
Cobre	643.		

De dos maneras ſe puede executar la diviſion de las lineas metalicas; ò por la Tabla primera, valiendoſe de la linea Stereometrica; ò por la Tabla ſegunda, y mediante la linea Arithmetica, ò fundamental.

Modo 1. Tirenſe del centro de la Pantometra dos lineas; cortéſe eſtas à diſcrecion, y el ſegmento de la parte del centro, ſe ſupondrà ſer el diametro de vn Globo de Oro; y à la diviſion ſe pondrà el ſeñal del Oro. Hecho eſto, ſe ſeñalaràn los diametros de los globos de los demàs metales, tomados en igual peſo, en eſta forma. Porque en la Tabla 1. el peſo del Oro al de Azogue es como 100. à 71. y med. Tomeſe con el compàs el diametro que ſe ſeñalò para ra el oro ; y abriendo la Pantometra, pongase transversalmente en las lineas stereometricas de 71. à 71. no haziendo caso del quebrado : y sin abrir ni cerrar la Pantometra, tomese la distancia que ay de 100. à 100. y passandola desde el centro sobre las lineas metalicas, quedarà señalado el diametro del globo de Azogue de igual peso con el oro : y à las divisiones se pondrà el señal del Azogue. De la mesma suerte se pondrà el diametro del Plomo. El Oro al Plomo, segun la Tabla es como 100. à 60. y med. Tomese pues el diametro del Oro, y ajustese de 60. à 60. en las lineas stereometricas : y tomãdo la distancia de 100. à 100. se passarà sobre las lineas metalicas desde el cẽtro, y à la division se pondrà el señal del Plomo : y assi en las demàs.

Domonstr. El peso del Oro, al del plomo de igual magnitud es como 100. à 60. Luego siendo reciprocas las magnitudes, y los pesos, serà la magnitud del globo de Plomo, à la del globo de Oro, como 100. à 60. esto es, como el cubo cẽtessimo al cubo sexagessimo: luego el diametro del Plomo al del Oro, serà como el lado del cubo centessimo, al lado del sexagessimo : esto es, (fig. 22.) como M 100. à M 60. y por consiguiente [2.6. Eucl.] como 100. 100. à 60.60. Luego la linea 100. 100. es el diametro del globo de Plomo : y 60. 60. la del Oro de vn mesmo peso.

Modo 2. Tomense de la linea fundamental, ù de la Arithmetica, las partes que para el diametro de cada metal, señala la Tabla 2. y passandolas del centro de la Pantometra sobre las lineas quedaràn divididas, como se desea. La razon de esta division es la mesma que la antecedente.

PROP. XXXVII.

Dado el diametro de vn globo, ò el lado de vn cubo de qualquier metal, hallar el diametro del globo, ò lado del cubo de otro metal, de igual peso con el primero.

SEa, por exemplo, la linea A diametro de vn globo de Plomo. Buscase el diametro de vn globo de Oro de igual peso con el Plomo.

Ope-

Operacion. Tomese con el compàs la linea A dada, y apliquese al señal del Plomo de entrambas varas de la Pantometra transversalmente : y la distancia que ay de Oro à Oro serà diametro de la bola de Oro de igual peso : y assi en los demàs metales. Consta de lo dicho.

PROP. XXXVIII.

Hallar la proporcion que ay de vnos metales à otros en quanto al peso.

PIdese, por exemplo, que proporcion guardan el Oro, y la Plata entre si, en quanto al peso, tomados en igual magnitud.

Operacion. Tomese en la linea metalica la distancia que ay del centro al punto, ò señal de la Plata : y abriendo la Pantometra, apliquese la sobredicha distancia transversalmente à qualesquiera pũtos de la linea stereometrica, por exemplo, à 100.100. Y sin abrir, ni cerrar el instrumento, tomese la distancia que ay del centro al señal del Oro : y busquese, à que puntos semejantes de las lineas stereometricas se ajusta, y sea por exemplo à 54. y medio, y 54. y med. Digo pues que el peso del Oro al de la Plata es como 100. à 54. y med. La razon consta de lo dicho.

De aqui se colige el modo de resolver la question siguiente, y sus semejantes. Ay vna estatua de piedra comun : quierese fabricar otra semejante, y de la mesma grandeza, que sea de Plata : Buscase quantas libras de plata seràn menester.

Operacion. Pesese la estatua de piedra, y sea su peso 20. libr. Tomese la distancia que ay del centro de la Pantometra al punto *Plata*, y abriendo la Pantometra, apliquese esta distancia à los puntos 20.20. de las lineas stereometricas: y sin mover el instrumento, tomese la distancia del centro al punto *Piedra*, y vease à que puntos de las lineas stereometricas se ajusta transversalmente, y sea, por exemplo, à 96.96. Digo q̃ 96. libras de plata seràn menester para fabricar dicha estatua.

PROP.

PROP. XXXIX.

Dados dos lados de dos solidos semejantes de diferente materia, hallar la razon que tienen entre si en quanto al peso. [fig. 22.]

SEa la linea A diametro de vna bola de cobre: y la linea B diametro de otra bola de hierro, buscase la razon de sus pesos.

Operacion. Temese con el compàs la linea A: y abierta la Pantometra, apliquese à los puntos del cobre, y sin moverla, tomese la distancia transversal del hierro, y sea, por exemplo, la linea X. Si esta fuesse igual à la linea B diriamos, que ambos solidos A, y B eran de igual peso; pero siendo la X desigual à B, y siendo diametro de vna bola de hierro de igual peso al de la bola A, no ay duda que la mesma proporcion en quanto al peso, ay de la bola A, à la bola B, que de la bola X, à la mesma bola B: y porque X, y B son de vna mesma materia, hallaremos la proporcion que tienen en quanto al peso, y magnitud (que es vna mesma, por ser de vna mesma materia) valiendonos (35.) de las lineas stereometricas: esto es, se tomarà la linea X: y se aplicarà transversalmente à qualesquiera pũtos semejãtes, y sea à los 60. 60. Veasse despues à que puntos se ajusta la linea B, y sea, por exemplo, à 20. 20. y diremos, que la bola X à la bola B, es en quanto al peso, y magnitud como 60. à 20. y siendo la bola A del mesmo peso que X, serà la bola A de cobre, en quanto al peso, à la bola B de hierro, como 60. à 20. que es razon tripla.

PROP. XXXX.

Dado el diametro, y peso de vna bola, hallar la grandeza de otra bola de diferente materia, y de vn peso determinado. [fig. 22.]

SEa dada la linea X, diametro de vna bola de piedra, cuyo peso es 7. libr. Pidese el diametro de vna bola de plomo, que pese 20. libr.

Ope-

Operacion. Ajustese transversalmente el diametro X, à los puntos *Pied. Pied.* Tomese sin mover la Pantometra, la distancia transversal del plomo: y esta serà, como consta de lo dicho, el diametro de vna bola de plomo de 7. libr. y porque se pide, ha de pesar 20. lib. apliquese transversalmente el diametro X à los puntos 7. 7. de las lineas stereometricas: y tomando la distancia 20. 20. esta serà el diametro de la bola de plomo de 20. lib. Consta todo de la mesma construccion de las lineas.

PROP. XXXXI.

Vsar de estas lineas, como de calibre vniversal para la Artilleria.

C*Alibre* es vna vara de alaton, en que estan señalados los diametros de las balas, tanto de plomo, como de hierro, y piedra, desde el peso de vna libra hasta 100. Es vno de los principales instrumentos que ha menester vn Artillero; pero como la variedad de los pesos, y cantidad de la libra, sea tanta como ay Republicas en el mundo, se sigue que el calibre fabricado segun vna cantidad de libra, no se puede adaptar à las libras de otras Naciones: Este inconveniente evita la Pantometra, que puede servir de calibre vniversal, obrando como en el exemplo siguiente.

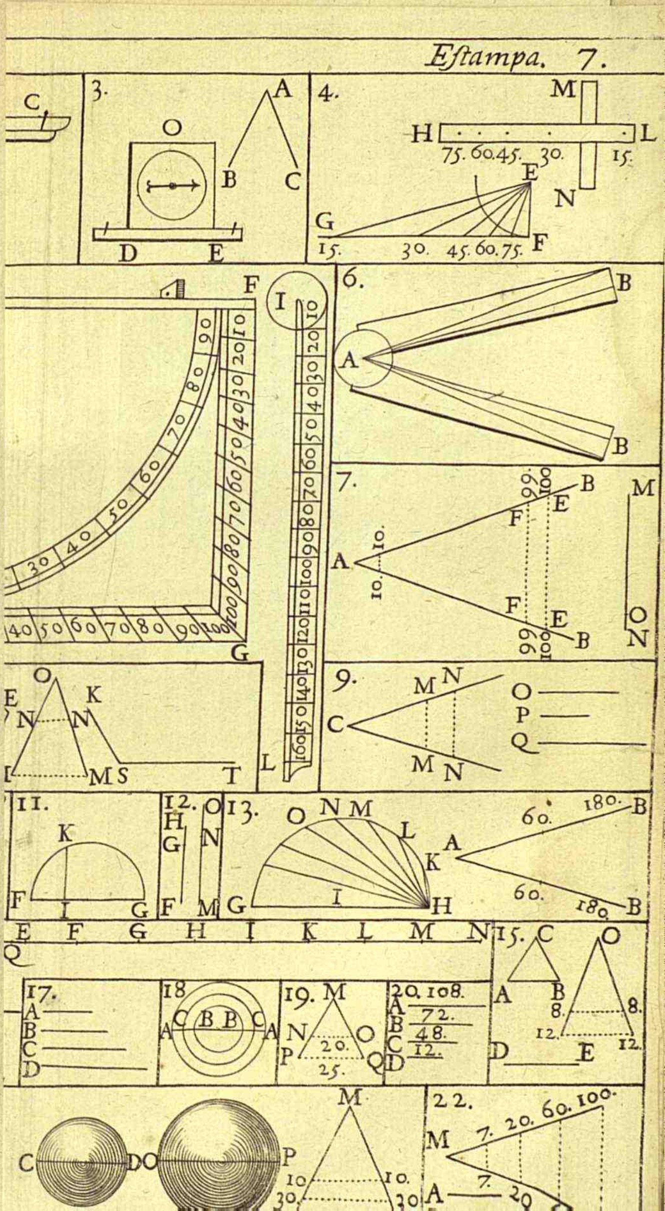
Snpongamos que vn Artillero se halle en Lisboa sin el calibre ajustado à la libra de aquella Ciudad, y se le ofrece examinar el calibo de vn cañon, y determinar de quantas libras de Lisboa sea la bala de hierro, plomo, ò piedra, que requiere la dicha pieza. Tome pues el diametro de vna bala de qualquiera de las dichas materias, y de qualquier peso que sea; supongamos sea el diametro de vna bala de hierro de 10. lib. que notarà en vn lado de la Pantometra con dos puntos: hecho esto, tomarà con el compàs dicho diametro, y le ajustarà à los puntos 10. 10. de las lineas stereometricas: y la Pantometra con esta abertura, serà el calibre que se desea: porque tomando el diametro

de

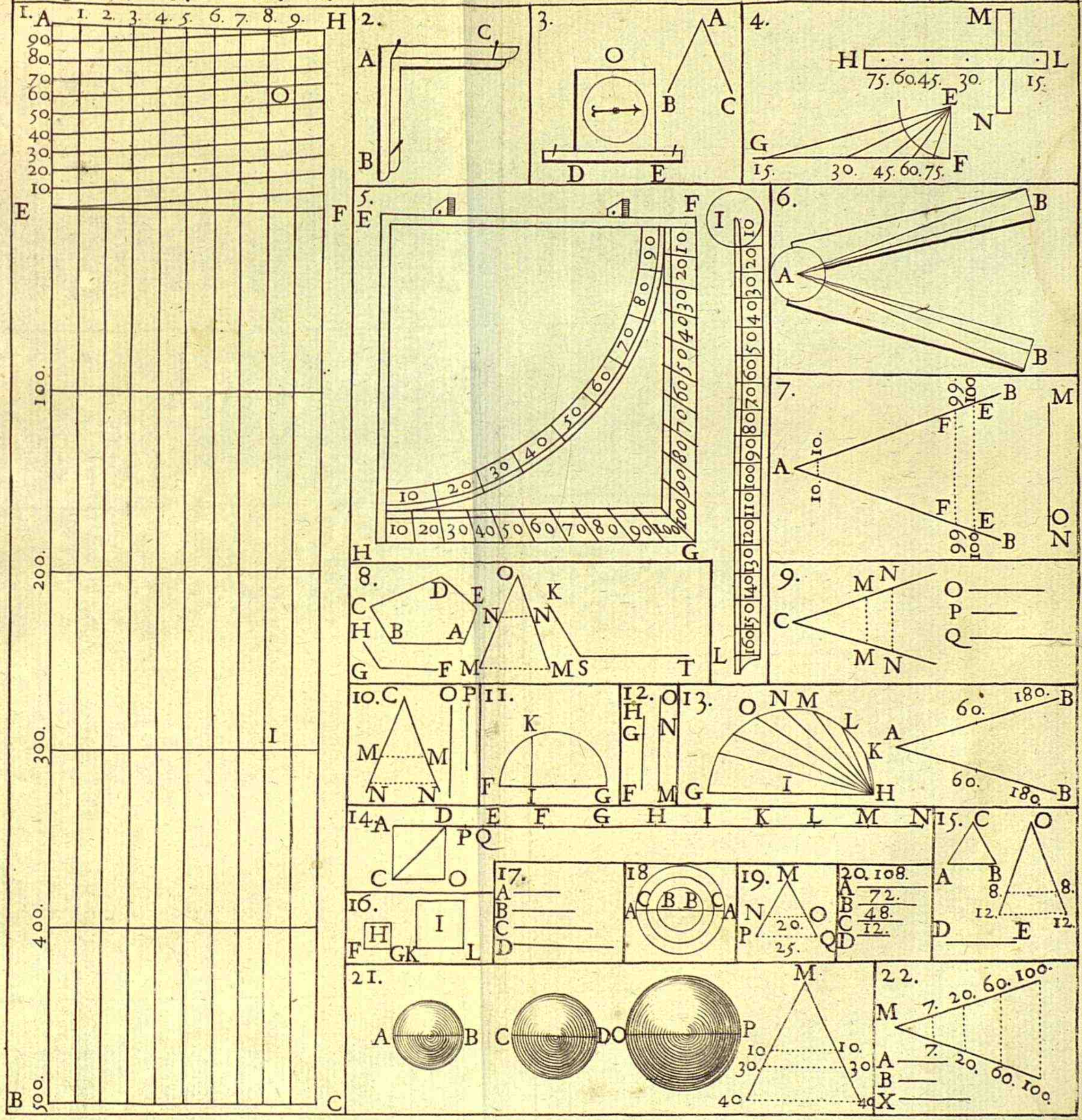
de la boca de la pieza, y viendo à que puntos de las mesmas lineas se ajusta transversalmente, se sabrà el peso de su propria bala de hierro: como si se ajusta à 15.15. serà su bala de 15. lib.

Otras muchas lineas se pueden inscrivir en la Pantometra, como las *Harmonicas* para la musica; las *Militares* para la Fortificacion, que se explicaràn en su lugar.

LI-



Estampa. 7.


1. A 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. H
90 80 70 60 50 40 30 20 10
O
E F
100. 200. 300. 400. 500.
I
B C
2. A C B
3. O A B C D E
4. M H L 75. 60. 45. 30. 15. E N G F 15. 30. 45. 60. 75.
5. E F I H G L
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160
6. A B B
7. A 10. 10. F E B 99. 100. F E B 99. 100. M O N
8. C D E A B H G F O N N K M M S T
9. C M N M N O P Q
10. C O P M M N N
11. K F I G
12. O H G N F M
13. O N M L K I G H A 60. 180. B 60. 180. B
14. A D E F G H I K L M N P Q C O
15. C O A B D E 8. 8. 12. 12.
16. H I F G K L
17. A B C D
18 A C B B C A
19. M N O P 20. 25. Q
20. 108. A 72. B 48. C 12. D
21. A B C D O P M 10 10. 30 30 40 40
22. M 7. 20. 60. 100. 7. 20. 60. 100. A B X

LIBRO IX.

DE LA DIMENSION DE las lineas.

OCupaſe la Geometria en medir la quantidad continua ; y por tener eſta tres eſpecies , *linea*, *ſuperficie* , *y cuerpo*. Suele aquella dividirſe en *Longimetria* , que mide las lineas : *Planometria*, que las ſuperficies planas : y *Sterometria* , que mide los ſolidos, ò cuerpos: de la primera tratarè en eſte Libro ; de las demàs en los ſiguientes.

Pero antes conviene advertir , que las lineas ſe miden con lineas ; las ſuperficies con ſuperficies : y los ſolidos con ſolidos : como (fig. 1.) la linea IH es medida de la linea IA; y ſiendo IH de vn palmo ſerà IA de 6.palmos. Pero la medida del plano , ò ſuperficie CA es el quadrado IP , que ſiendo IH vn palmo , ſerà IP vn palmo quadrado ; y diremos que la ſuperfieie CA conſta de 18. palmos qnadrados. Aſsi meſmo la medida de los ſolidos , es vn cubo, como vn palmo cubico, ò pie cubico , &c. La razon de aver eſcogido el quadrado para medida de los planos ; y el cubo para los ſolidos,es ademàs de la vniformidad de ſns angulos, y lados, lo mucho que facilitan las operaciones.

Las ſeis primeras propoſiciones de eſte Libro contienen algunas practicas, de que frequentemente neceſſitarà el Geometra; y aunque ſe podian inferir de lo dicho, juzgo ſerà conveniente explicarlas aqui , antes de entrar en la dimenſion de las lineas.

PROP. I.

Conocido vn lado, y dos angulos de vn triangulo, hallar los otros lados. [fig. 2.]

SVpongamos que en la campaña tengo conocida la linea, ò diſtancia AB 100. varas, y los angulos A 70. grad. y B 60. grad. y me importa ſaber las dlſtancias AC, BC.

Operacion. Tomo de vn pitipie 100. partes, por las 100. varas de la linea AB, y con eſſa diſtancia determino la linea DE en vn papel: hago [23.1. Eucl.] el angulo D igual à A, y el angulo E igual à B, y quedarà formado el triangulo DFE equiangulo à ACB: y (4.6. Eucl.) los lados del vno ſeran proporcionales à los del otro. Tomenſe pues con el compas las lineas DF, EF, y veaſe quantas partes comprehenden del meſmo pitipie; y tantas varas tendran las lineas AC, BC.

PROP. II.

Conocidos dos lados, y vn angulo de vn triangulo, hallar el otro lado, y los demàs angulos. (fig. 2.)

SEa el triangulo ABC formado en la campaña; y ſean conocidos ſus dos lados, es à ſaber, AB de 100. varas, y AC de 80. y el angulo A ſea 70. gr. y quiero conocer el lado, ò diſtancia CB, y los angulos B. y C.

Operacion. Hagaſe en vn papel el angulo D de 70. gr. denſele à la linea DE 100. partes del pitipie, y à la DF 80. Tireſe la FE, y tomandola con el compàs, y aplicandola al pitipie, ſe verà quantas partes comprehende, y de tantas varas conſtarà la CB. Veaſe tambien en vn quadrante graduado, quantos grados incluyen los arcos que miden los angulos F, y E, y eſſos ſeràn los que comprehenden à los C, y B. La razon es, por ſer entrambos triangulos ſemejantes.

Si conocidos los lados AB. 100. y AC. 80. ſe conoce ſolamente el angulo C, ſe obrarà como ſe ſigue: Hagaſe en vn papel el angulo F igual à C; denſe à la linea FD 80. partes del pitipie, tantas quantas varas tiene AC: tomenſe con el compàs 100. partes del pitipie, por tener AB 100. varas, y con eſta diſtancia hagaſe vn arco deſde D, que corte à la linea FE, y tirando la DE, quedarà formado el triangulo DFE ſemejante à ACB: y aplicando la FE al pitipie, ſe ſabrà quantas partes incluye, y tantas varas tendrà la longitud CB. Los angulos ſe ſabràn, como en el caſo precedente.

PROP. III.

Conocidos los tres lados de vn triangulo, hallar el valor de ſus angulos. (fig. 2.)

EN el triangulo ABC, ſe ſuponen conocidos ſus tres lados: AB 100. varas, AC 80. BC 90. y ſe buſcan los angulos.

Operacion. Formeſe el triangulo DEF ſemejante al dado, en eſta forma: Denſele à la linea DE 100. partes del pitipie, y tomando 80. partes del pitipie, ſe harà deſde D el arco F: y tomando 90. partes del meſmo pitipie, ſe harà deſde E otro arco, que cortarà al primero en F, y quedarà formado el triangulo DFE, ſemejante al dado, y por conſiguiente equiangulo: midanſe pues por el quadrante los angulos D.F.E. y ſe ſabràn los otros A.B.C.

PROP. IV.

Formar en vn papel vn angulo igual à otro formado en la tierra, ò en el ayre: y al contrario. [fig. 3.]

PIdeſe, que el angulo GHI, formado en el ſuelo, ſe traſlade en vn papel.

Modo 1. Pongaſe el centro del ſemicirculo en H, y mireſe por las pinulas fixas en ſu diametro el punto, ò ſeñal G: y bolviendo la Alidada, atiendaſe por ſus pinulas el punto, ò ſeñal I: y eſta ſeñalarà en la periferia los grados, ò valor del angulo H: à que ſe formarà otro igual en el papel, como en otras partes ſe ha dicho.

Modo 2. Cuentenſe en las lineas HG, HI, los palmos que ſe se quieran, puestas [si fuere menester) vnas estacas en los puntos H, G, I. Vease quantos palmos ay en GI, y seràn conocidos los tres lados del triangulo GHI. Hagase [por la anteced.) en vn papel el triangulo KLM, y el valor del angulo L serà el mesmo que el del angulo H.

De la mesma suerte se formarà en el suelo el angulo H, igual al angulo L, formando alli el triangulo GHI, semejante à KLM, contando en cada linea tantos palmos, quantas partes del pitipie incluyen los lados de KLM. Fundase en la prop.4.lib.6.de Eucl.

PROP. V.

Medir los angulos entrantes, y salientes de los edificios, y trasladarles al papel. (fig.4.)

1 Pidese se mida el angulo entrante MKL que forman dos paredes. *Operacion.* Tirense las lineas LM, LK en el llano de las paredes, y à nivel con el orizonte; cuentense en ellas los palmos que se quisieren, veașe quantos palmos tiene la MK, y con esto se sabran los tres lados del triangulo LMK. Hagase en vn papel [3.) otro triangulo semejante, y quedara conocido el angulo entrante L.

2 Se hà de medir el angulo saliente N que forman dos muros. *Operacion.* Apliquense à dichos muros dos varas rectas, à nivel con el Orizonte, que se cruzen, como se vè en la figura: midase la distancia OP de sus extremidades, y las porciones ON, PN, y con esto se hara [3.) sobre vn papel vn triangulo semejante à ONP, y quedara conocido el angulo ONP, que [15.1.Eucl.) es igual al angulo saliente, su vertical opuesto.

PROP. VI.

De vn punto dado en vna linea tirada en el suelo, sacar vna perpendicular. (fig.5.)

Puedese esto executar con la Esquadra, como todos saben; y assimesmo con el semicirculo, ajustando su centro al punto dado; y el diametro à la linea, y poniendo la Alidada à los 90. grados. Pero si el Geometra careciesse de dichos instrumentos, obrarà como se sigue: Del punto A dado en la linea, se cortaràn à entrambas partes los segmentos iguales AM, AN: y tomando vn hilo, largo à discrecion, se doblarà ajustando sus cabos, para tenerle dividido por medio; y aplicando los cabos à los puntos M, N, se estenderà desuerte que formarà con la linea el triangulo MON isosceles: tirese la OA, y serà perpendicular (corol.2. de la prop.5. Eucl.)

Si se pidiere que la perpendicular salga del punto S extremo de la linea; y esta no se pudiere alargar: se doblarà el hilo como antes, y ajustados sus cabos al punto S de la linea, y al punto P tomado à discrecion, estendido el hilo, se notarà el punto R: hecho esto, la extremidad S del hilo se passarà à Q, desuerte que P, R, Q, hagan vna linea recta: tirese la QS, y serà perpendicular.

Demonstr. Por ser iguales RP, RS, RQ; el circulo hecho del radio RP, passarà por S, y Q: luego el angulo PSQ, està en el semicirculo: luego (31.3. Eucl.) es recto.

De otro modo: Dividase vn hilo en doze partes iguales con vnos nudos: ajustense sus dos cabos en el punto S: estiendanse tres partes de dicho hilo sobre SP. Dense cinco à PQ: y quatro à QS: y esta serà perpendicular à PS. La razon es, porque el quadrado de PS es 9. y el de SQ.16. que juntos son 25. que es el quadrado de PQ: luego [47. 1.Eucl.] el angulo S es recto, y QS perpendicular.

PROP. VII.

De vn punto puesto fuera de vna linea dada en el suelo, tirar vna perpendicular. (fig. 5.)

Del punto O, se ha de tirar vna perpendicular à la linea MN. *Operacion.* Doblese vn hilo, como en las antecedentes; y puesto el punto de en medio sobre O, ajustense sus cabos à la linea MN. Partase por medio MN en A: y la linea OA, serà perpendicular.

De otro modo: Del punto dado Q estiendase vn hilo hasta qualquiera punto P de la linea dada PS: hallese la mitad

tad del hilo en R: doblese por R desuerte que la extremidad Q venga à S: y la linea QS, serà la perpendicular que se pide. Consta de lo dicho. De estas practicas se pueden inferir otras muchas.

PROP. VIII.

Medir vna linea recta, que sea por vn solo cabo accesible.

En este Problema se contienen diferentes casos, que resolveremos en particular.

Caso I. La linea orizontal EF [fig. 6.] es accesible en E, è inaccesible en F. Pidese su longitud. *Operacion.* Fixese perpendicularmente en E el palo EA, de cinco pies de largaria: Fixese en A el quadrado AC, por el centro A del quadrante, desuerte que se pueda mover arriba, y abaxo: mirese por sus pinulas el cabo F, y notense las partes que corta el perpendiculo AO. Si corta al lado LC opuesto al de las pinulas, se harà vna regla de tres: como LO à LA; assi la altura AE, à la longitud EF. Supuesto pues, que LO sea 35. partes: y AE 5. pies; diremos, si LO 35. dan LA 100. luego AE 5. pies, darà 14. pies y dos septimas de vn pie: y esta serà la longitud de EF.

Demonstr. Los triangulos ALO, FEA, tienen los angulos E y L rectos; y los angulos FAE, LOA iguales, por ser alternos en las paralelas AH, LC (29. 1. Eucl.) luego son equiangulos, y semejantes: luego [4. 6. Eucl.] es LO à LA, como EA à EF. Si el perpendiculo corta el lado HC en O (fig. 7.) serà AH à HO, como AE à EF. Esto es, como AH 100. à HO, que supongo ser 80. assi AE 5. pies, à EF 4. pies.

Demonstr. Los triangulos OHA, FEA son equiangulos, por tener los angulos E, H, rectos: y el angulo A comun: luego (4. 6. Eucl.) son proporcionales AH à HO, como AE à EF.

Si el Perpendiculo corta por el angulo C (fig. 8.) serà la longitud EF igual à la altura AE. Porque los triangulos ALC, AEF son equiangulos: luego como LA à LC, assi EA à EF; y siendo LA, LC iguales, tambien lo seran EA, EF.

Quando la distancia EF es larga, y la altura AE corta (fig. 9.) serà cierto el error, obrando del modo sobredicho, por no poder discernir la vista con precision el punto F, y ser el angulo AFE muy agudo: y assi en semejante caso se procederà del modo siguiente.

De la extremidad E, saquese en el suelo nivelado, y llano, la perpendicular EA, tan larga como se pueda [6.] sea por exemplo de 30. pies: apliquese el quadrado en A; y mirese por las pinulas el punto F: y por el otro lado AH notese el punto Q, en que la visual AQ corta à la FE prolongada: midase la distancia EQ: y sea por exemplo 10. pies: quadrese por numeros AE multiplicando 30. por 30. y el producto 900. partido por 10. que es EQ. darà el quociente 90. que es la distancia EF.

Demonstr. (8. 6. Eucl.) AE es medida proporcional entre EQ, EF. Luego su quadrado es igual al rectangulo de QE, EF: luego partiendo 900. quadrado de AE, por QE 10. el quociente serà EF.

Caso II. Pidese que se mida la altura, ò linea perpendicular FH (fig. 10.) *Operacion.* Pongase la asta EA à plomo sobre el suelo, y pongase en ella el quadrado CA, como antes, y sea AE 5. pies. Midase con vna vara la distancia EF, si se puede; ò sino, midase como en el caso precedente, y sea 40. pies: hecho esto, mirese por las pinulas el punto H: y el perpendiculo cortarà el quadrado, ò por la diagonal, ò por el lado CX, ò por ZC.

Si corta el lado CZ, como sucede en E, serà como AZ à ZO; assi EF, ò AS, à SH: esto es por regla de tres, como 100. AZ, à 42. que supongo ser ZO, assi AS 40. à SH, que se hallarà ser 16. pies y 4. quintos: añadase à esta altura la AE, ò SF: y serà FH. 21. pie y 4. quintos.

Demonstr. Los triangulos ASH, AZO, son equiangulos; por tener los angulos Z S rectos: y los angulos HAS, OAZ iguales; porque siendo ZAH, OAS rectos, quitado el comun ZAS, quedan HAS, OAZ iguales: luego dichos triangulos son proporcionales: luego AZ, con ZO, es como AS, con SH.

Si el Perpendiculo corta el lado XC, como en Q: hagase se esta regla de tres: como XI, que supongo ser 60. à XP 100. assi PS, que supongo ser 10. pies, y 2. veinte y cinco avos, à SH 16. pies y 4. quintos: y añadida PQ, 5. pies, serà toda la altura 21. pie y 4. quintos. Si el Perpendiculo cayere por la diagonal, la distancia PS, y la altura SH seràn iguales; y añadida PQ, ò SF, se sabrà toda la altura.

Caso III. Pidese se mida la profundidad FP de vn pozo. (fig. 11.) *Operacion.* Midase primero su amplitud VF, y sea 4. pies. Compongase el quadrado geometrico en EA, desuerte, que mirando por las pinulas se vean los puntos V de la boca del pozo; y P de su profundidad; y el perpendiculo cortarà, ò el lado CS, ò el lado IC, ò por la diagonal.

Si corta el lado CS en O. 40. partes, hagase la regla de tres: como OS 40. à SA, 100. assi 4. pies VF, à FP 10. pies. Si el hilo cortasse 40. partes en el lado IC, serà la regla de tres: como 100. lado del quadrado, à 10. partes, que corta el hilo; assi VF 4. pies, à FP 40. centesimas. Si corta por la diagonal, serà la profundidad FP igual à la ancharia FV. Consta de lo dicho.

PROP. IX.

Executar lo mesmo con otros instrumentos. (fig. 12.)

LAS mesmas operaciones de la proposicion pasada puede executar el Geometra, valiendose de los demàs instrumentos que expliquè en el lib. antecedente; pero por evitar molestia, solo repetirè aqui algunas, para mayor inteligencia de su manejo.

1. Pidese se mida con el semicirculo la linea NO, solamente accesible en N, por causa de no poderse llegar al cabo O, por aver vn Rio entremedio. *Operacion.* Saquese del punto N (6.) vna perpendicular NM, que se medirà con vna vara: Apliquese el centro del semicirculo en M; y por las pinulas fixas en el lado MP, mirese el punto N; y por la alidada mirese el cabo O: vease quantos grados tiene el arco PQ, y se sabrà el valor del angulo M: luego conocidos el angulo M, y el angulo N recto, y el lado MN, se sabrà (1.) el lado NO.

2.

2. Pidese se mida la distancia mesma NO (fig. 13.) con la cruz geometrica. *Operacion.* Tirada como antes la perpendicular NM, apliquese sobre ella la vara mas larga de la cruz geometrica, desuerte que por sus clavos, ò pinulas, se vea el punto N; y sin moverla de dicho lugar, acerquese despues, ò apartese la vara transversal PQ, hasta que por los clavos MQ, se descubra el cabo O: y medida la linea NM, se advertirà juntamente el grado que corta en el punto P el brazo PQ: y esse serà [5] el valor del angulo M: luego en el triangulo MNO, conocidos los angulos M, N, y el lado MN, se sabrà [1.] el lado NO.

Si las varas de la cruz se dividen en partes iguales, se sacarà la distancia NO, por regla de tres: como MP à PQ: assi MN à NO. De aqui se puede colegir el modo de executar semejantes operaciones con los sobredichos instrumentos.

PROP. X.

Medir vna Linea del todo inaccesible.

LInea del todo inaccesible es aquella à quien no podemos llegar por aver de por medio algun valle, rio, ù otro impedimento.

Caso 1. (fig. 14.) Sea la linea orizontal EF, totalmente inaccesible, por no poderse pasar vn rio que ay de por medio: y es menester saber su longitud. *Operacion.* Escojase qualquiera punto I; de donde se descubran los extremos F, E. Fixese en I vn palo perpendicular: y desde vn lugar, como desde A, mirese por I la extremidad E: desuerte que A I E esten en vna linea recta: y pasando à otro lugar B, mirese por I la extremidad F: Tirense las rectas AI, BI: Encaminense tambien por algun trecho las rectas AF, BE: Dividanse las AI, BI en qualesquiera partes iguales, como por exemplo en tres; y sea vna dellas OI, QI. Tirense OS, QP paralelas con AF, BE: y juntando SP, serà SP la tercera parte de FE: Midase pues SP, y el numero de pies que contiene, tripliquese, y se sabrà quantos pies de longitud tiene la linea FE.

Demonstr. En el Triangulo AIF, es la OS paralela à AF: lue-

luego (2.6. Eucl.) serà IO à IA, como IS à IF; y como IO sea el tercio de IA, serà IS el tercio de IF: assi mesmo probarè que en el triangulo BIE, es IP el tercio de IE. Esto supuesto, en el triangulo IEF es IS à IF, como IP à IE: luego (2.6. Eucl.) SP, FE son paralelas: luego IS à SP, es como IF à FE; y alternando, es IS à IF, como SP à FE: siendo pues IS el tercio de IF, serà SP el tercio de FE.

Caso 2. (fig. 15.) Pidese se mida la altura perpendicular FH totalmente inaccessible, por no permitirsele al Geometra llegar al punto F. *Operacion.* Puesto el Quadrado en Z, veasse por sus pinulas el punto H, y notense las partes que corta el hilo. Apartandose despues al punto X, por exemplo 50. passos, fixese el quadrado en X, cuidando que APS sea paralela al orizonte; y atendiendo por las pinulas la extremidad H, notense las partes, que corta el hilo. Veasse aora si el hilo, en entrambas estaciones, ò en alguna de ellas cortò el lado opuesto al de las pinulas, porque sucediendo esto, siempre se necessitarà de reduccion, en esta forma:

Supongamos que en la estacion Z cortò el hilo en dicho lado 84. partes: y en la estacion X cortò en el mesmo lado 44. partes. Multipliquese el lado del quadrado, que es 100. por si mesmo, y el producto 10000. partase por 84. y serà el quociente 119. partes, y 1. veyte y vn avo, que es RY. Assi mesmo partanse 10000. por 44. y saldràn 227. partes y 3. onzeavos, que es BT: Restese aora el quociente menor RY, del mayor BT, y saldrà la diferencia 108. y 52. 231. avos, que es TL. Hagase aora vna regla de tres, como TL 108. 52. 231. avos, diferencia de RY, BT, con AP, distancia de las estaciones 50. pies: assi AB 100. à SH, altura de 46. pies, y vn quinto: añadasele la PZ, ò FS, que suponemos ser 6. pies; y serà toda la altura FH, 52. pies, y vn quinto de pie.

Demonstr. Los Triangulos ABT, ASH, son equiangulos, por tener los angulos B S rectos; y los angulos BAT, AHS, iguales en la entrada de las paralelas HF, AT: luego (4.6. Eucl.) BT à BA, es como AS à SH: y alternando es BT à AS, como BA à SH. Por la mesma razon y semejan-

janza de los triangulos RPY, PSH, es RY à RP, como PS, à SH: y alternando RY à PS, como RP à SH: luego toda BT à toda AS, serà como RY, ò BL, à PS: luego tambien es LT con AP, como BT, con AS: esto es, como AB, con SH, por ser entrambas razones iguales.

Caso 3. (fig. 16.) Pidese la altura DA, que se ha de medir desde el llano XZ. *Operacion.* Haganse, como antes, las dos estaciones X, Z, y se sabrà toda la altura AE. Busquese despues de la mesma suerte la altura DE; y restando esta de aquella, se sabrà la altura AD.

Caso 4. [fig. 17.] Pidese se mida la linea inclinada EH. *Operacion.* Hallese por el caso 2. la perpendicular HF; y supongamos se halle ser de 25. pies. Busquese despues por el caso 1. la longitud de la orizontal EF, y sea 40. pies. Quadrense dichos numeros, multiplicando 25. por 25. y 40. por 40. y sus quadrados seràn 625. 1600. Sumense, y serà la suma 2225. Saquese la raìz quadrada de este numero, y se hallarà ser 47. y algo mas; y esta serà la longitud de EH.

Demonstr. El Triangulo EFH, es rectangulo en F: luego [47.1. Eucl.] el quadrado de EH es igual à la suma de los quadrados de EF, FH: luego su raìz, ò lado es la EF.

PROP. XI.

Guiar vna mina subterranea à vn lugar, correspondiente à otro señalado sobre la tierra. (fig. 18. 19. 20.)

Desde el lugar A se ha de conducir vna mina por dentro de vn monte, hasta que su cabo P, corresponda en drechura al punto L puesto sobre tierra. *Operacion.* 1. Midase por la prop. passada, la distancia AP (fig. 18.) y al mesmo tiempo, en que por las pinulas del quadrante, se observa el punto L, apliquese à dicho quadrado vna bruxula puesta dentro de vn circulo graduado: y observese que grados señala su saeta: Compongase despues en el suelo sobre A, de modo que señale los mesmos grados: y al lado de su caxuela, que supongo sea bien quadrada, apliquese vna regla, y tirando con ella vna linea, se irà por ella

ella abriendo la mina tan larga, como es la distancia medida AP.

Si la mina no se pudiere guiar rectamente de A à P, por aver de por medio alguna peña, ò otro impedimento, se avrà de doblar por SQ: y en papel aparte se tirarà la recta AP [fig. 19.] à quien se le daràn tantas partes de vn pitipiè, como tiene pies de longitud la mina AP (fig. 18.) y sean 173. Cuentense los pies que ay en la mina desde A à S; y sean 42. Y contando 42. partes en el papel (fig. 19.) desde A à S, se notarà el punto S. Tomese aora el angulo QSP [fig. 18.] y sea por exemplo 60. grados: y hagase en el papel el otro angulo QSP de 60. grados. Tomense assi mesmo los pies que ay en el braço de mina SQ; y sean 41. y del pitipiè se le daràn en el papel à SQ 41. partes.

Observense aora (fig. 18.) los grados del angulo VQS, y sean 90. y hagase en el papel [fig. 19.] el angulo VQS de 90. grad. Vease quantas partes del pitipie tiene la linea VQ y sean 73. y de tantos pies se ha de abrir el braço de mina QV (fig. 18.) para restituirse à la recta AP. Examinese aora [fig. 19.] quantas partes del pitipiè tiene la AV: y sean 103. y como toda la AP, tenga 173. serà la VP de 70. partes; y assi se sabrà que la parte de mina VP [fig. 18.] se ha de abrir hasta 70. pies. Assi mesmo se procederà, aunque aya mas rebueltas, mientras que todas sean orizontales, sin subir, ni baxar; porque si subiessen, ò baxassen, se avrà de obrar del modo siguiente.

Supongamos que la parte de mina SQ (fig. 18.) se inclina, formando con la orizontal angulo de 20. grados, y que su longitud es de 41. pies. Tirese en papel à parte [fig. 20.] la linea ST, que representarà la orizontal de la mina, y haziendo el angulo CSE de 20. gr. se le daràn à SE 41. partes del pitipiè: y levantando la EC perpendicular à ST, se verà por el pitipiè de quantas partes consta, y à tantos pies de la orizontal de la mina corresponderà el punto Q. [fig. 18.]

Por el punto E tirese la paralela RE, que representarà la linea orizontal inferior, que passa por el punto Q de la mina que, como dixe, està mas profundo: y la recta SC, passese

se à la SQ de la fig. 19. y tirese EI paralela à QV, por pedirlo assi el caso presente. Supongo aora, que el brazo de la mina QV (fig. 18.) se levanta con elevacion de 10. gr. Hagase pues en la fig. 20. el angulo REO de 10. grad. y tirese la recta EO. Tomese aora la recta CT, igual à la EI de la fig. 19. y tirando la perpendicular TO, se determinarà la EO, que comprehenderà tantas partes del pitipiè, quantos pies ha de tener la QV de la mina (fig. 18.) para alcanzar la rectitud AP.

Puesto ya el minador en V dispondrà la bruxula desuerte que señale el mesmo grado, que señalava en A, y continuarà la mina rectamente dandole à VP tantos pies, quantas partes del pitipiè tiene la UP de la fig. 19. Esto se ha de executar con sumo cuidado, y comprobandolo muchas vezes. Otras circunstancias pueden ocurrir, que se dexan al juizio del Geometra, y se pueden inferir de lo dicho.

PROP. XII.

Señalar en la superficie de la tierra el punto, correspondiente al cabo de vna mina. [fig. 21.]

SUponese hecha ya vna mina, y se desea saber el punto N, que en la superficie de la tierra corresponde perpendicularmente à su cabo. *Operacion.* Pintese en vn papel la planta, y direccion de la mina por las reglas antecedentes: y vltimamente se sabrà quantos pies ay desde su principio M, hasta su cabo P por linea recta. Supongo pues que MP es 173. pies: Fixese vn palo perpendicular AM, y sobre èl la vara AB bien nivelada, y que corresponda à la MP. Lo que se consigue por medio de la bruxula, como en otra parte dixe. Cuentense los pies de que consta AB, y guardese el numero: hagase lo mesmo en B, y conservese el numero de pies que ay en CD: y assi se proseguirà, hasta que los numeros de las varas AB, CD, &c. hagan 173. pies: y donde se terminare este numero, serà el punto N, correspondiente al cabo P.

PROP.

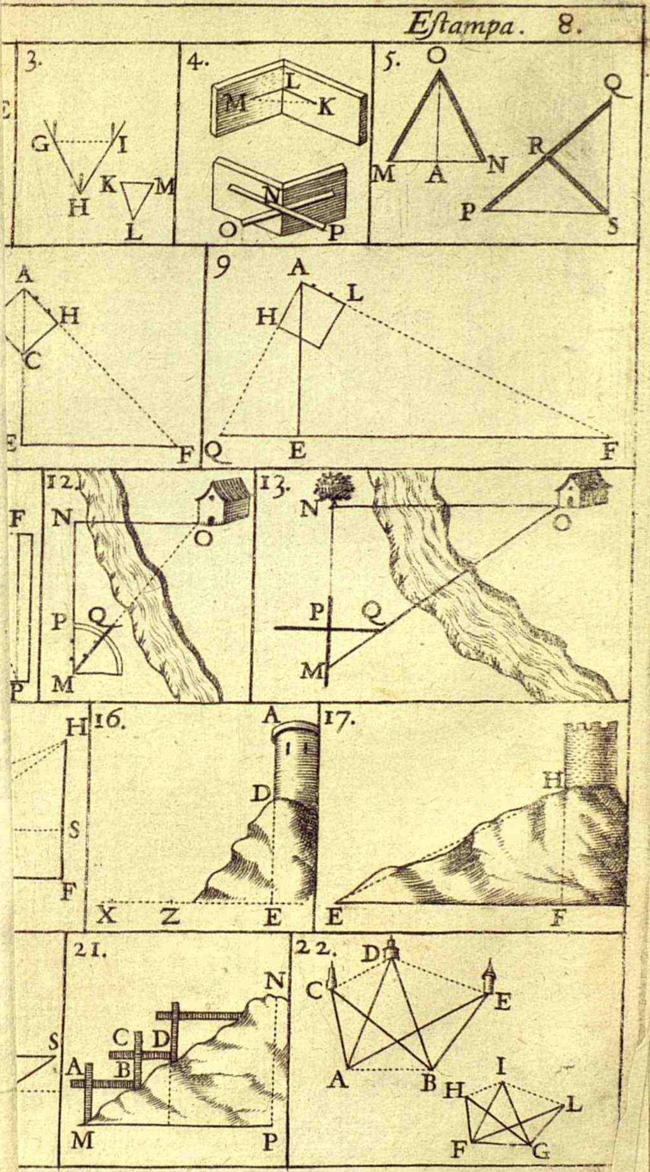
PROP. XIII.

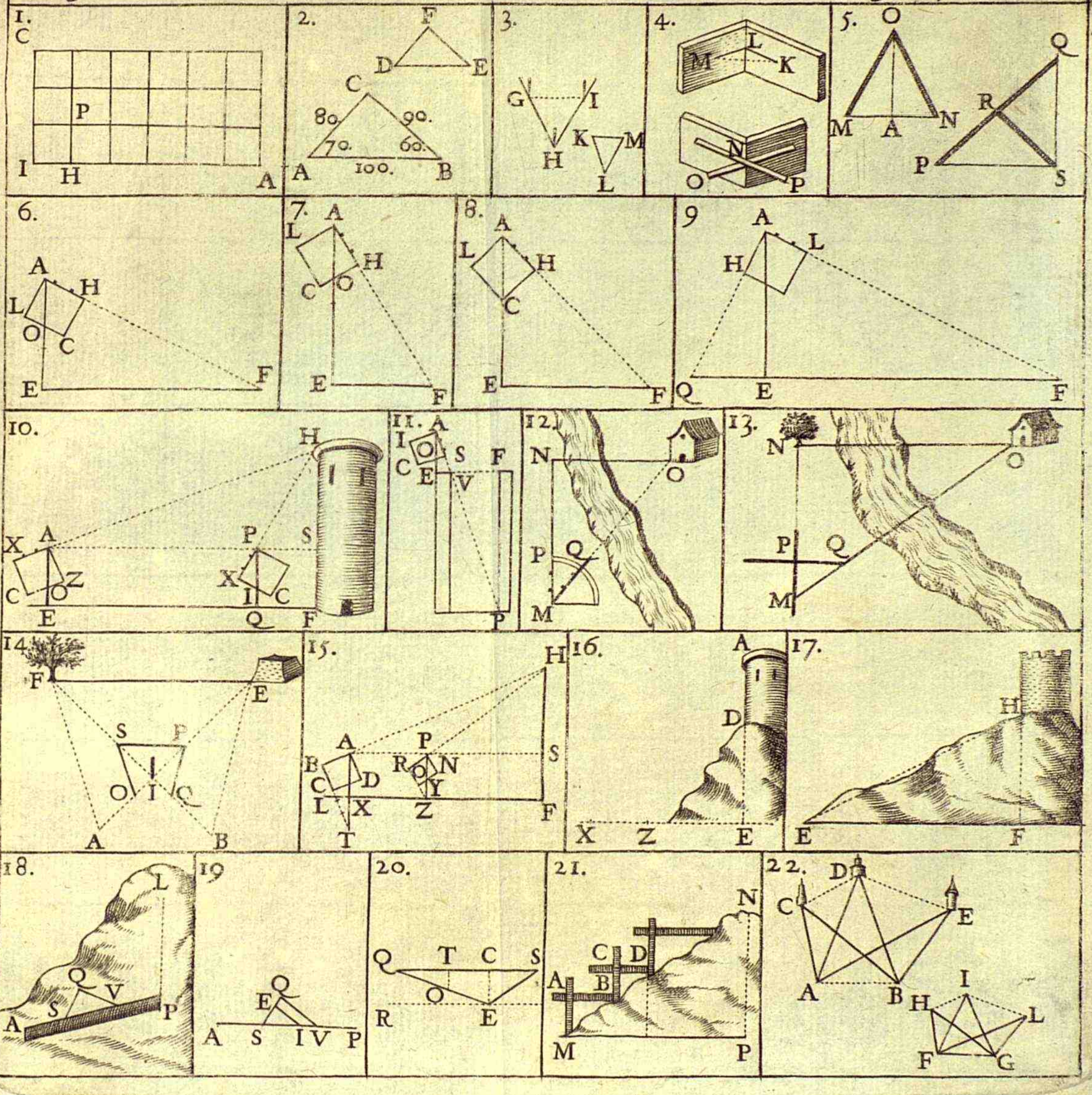
Hazer vna deſcripcion Icnographica de vna Ciudad, ò Fortaleza. [fig. 22.]

Deſcripcion Icnographica ſe llama la que expreſſa la planta de vna Ciudad, Fortaleza, ò Edificio: como ſi vna Ciudad ſe conſideraſſe cortada orizontalmente cerca de la ſuperficie de la tierra, aparecerian en aquella ſeccion los veſtigios de todos ſus Edificios, Calles, Plazas, &c. y la expreſsion de eſte veſtigio ſe llama *Planta*, ò *Ignographia* de la Ciudad. Executaſe por las reglas dadas en eſte libro, obſervando con todo cuydado los angulos, que llaman de *Poſicion*, como ſe ſigue.

Eſcojanſe dos lugares, ò torres de la Ciudad A, y B, que diſten notablemente entre ſi, porque ſiendo crecida ſu diſtancia ſe aſſegura mas el acierto. Eſtos lugares han de eſtar en tal paraje, que de cada vno dellos ſe deſcubran todas, ò la mayor parte de las Torres de la Ciudad. Deſde el lugar A con el ſemicirculo obſervenſe por la prop. 6. lib. 8. los angulos BAC, BAD, BAE, y todos los demas, dirigiendo la Alidada à todas las Torres. Deſpues ſe paſſarà el Geometra al lugar B, deſde el qual obſervarà de la meſma ſuerte los angulos ABC, ABD, ABE, &c.

Hechas eſtas obſervaciones, y comprobadas con toda diligencia, repitiendolas de otros dos lugares, diſtintos de los primeros, ſe tirarà en el papel la linea FG, correſpondiente à la AB: y en el punto F ſe formaràn los angulos HFI, IFL, LFG correſpondientes, è iguales à los que ſe obſervaron en A: y aſsi meſmo ſe formaràn en G los demàs angulos que expreſſa la figura, correſpondientes, è iguales à los obſervados en el lugar ò punto B. Y en el punto H, en que concurren las FH, GH, correſpondientes à AC, BC, ſe pintarà la Torre C: aſsi meſmo en el punto I, en que cócurren las lineas FI, GI, ſe pintarà la Torre D: como en L la Torre E. Y obrando en eſta forma, quedaràn las Torres, y puntos principales de la Ciudad colocados en ſus proprios lugares, y diſtancias. Determinados eſtos puntos prin-




1. C P I H A
2. F D E C 80. 90. 70. 60. A 100. B
3. G I K M H L
4. M L K N O P
5. O Q R M A N P S
6. A H L O C E F
7. A L H C O E F
8. A L H C E F
9 A L H Q E F
10. H A X P S X C O Z I C E Q F
11. A I O S F C E V P
12. N O P Q M
13. N O P Q M
14 F E S P O I Q A B
15. H A P B R N S C D O Y L X Z F T
16. A D X Z E
17. H E F
18. L Q V S A P
19 E Q A S I V P
20. Q T C S O R E
21. N C D A B M P
22. D C E A B H I L F G

Eucl.) luego es igual al paralelogramo hecho de la mitad de la base, y de la mesma altura : Este (1.) se halla multiplicando ZO por la mitad de AI : luego es constante la regla.

Si por algun accidente no se pudiesse medir la perpendicular YZ, se sacarà su medida de esta manera : Midanse los lados ; y sea AI 42. sea OI 34. y AO 20. Hagase aora por regla de tres: como AI 42. con 54. suma de los otros lados: assi 14. diferencia de los mesmos lados, con 18. restese este numero de 42. que es el lado AI ; y el residuo serà 24. cuya mitad 12. serà el segmento AZ. Si el numero hallado por la regla sobredicha fuere mayor que el lado AI: se restaria este lado 42. de dicho numero, y se sabria tambien el segmento AZ. Sabido pues este segmento, que es 12. su quadrado 144. se restarà de 400. quadrado de AO, y del residuo 256. saquese la raìz quadrada 16. y esta serà la perpendicular OZ, como consta de la 47. del 1. de Eucl. conocida esta, se sabrà la area del Triangulo, como antes. La demonstracion se verà en la Trigonometria.

Puedese tambien saber la area del mesmo triangulo sin valerse de la perpendicular, por la regla siguiente, que demuestra el P. Clavio lib. 4. de su Geom. pract. cap. 2. Sea AI 42. sea OI 34. y AO 20. Sumense los tres lados, y serà la suma 96. y su mitad 48. Restense de 48. cada lado de por si, y seràn los residuos 6. 14. 28. Multipliquense 6. por 14. y el producto 84. por 28. y el producto 2352. por la semisuma 48. de cuyo producto 112896. saquese la raìz quadrada, que serà 336. y esta es la area del triangulo.

PROP. III.

Medir la area de los Quadrilateros no rectangulos.

1. PIdese la area del quadrilatero AC paralelogramo. (fig. 3.) *Operacion.* Tirese la perpendicular CI al lado opuesto: midase dicha perpendicular, y sea 100. por exemplo. Multipliquese esta perpendicular por el lado AS, qne supongo ser 200. y el producto 20000. serà la area del quadrilatero AC.

De-

Demonstr. Por dicha multiplicacion ſale la area del paralelogramo rectangulo hecho de AS, CI (2.) El quadrilatero AC es igual al rectangulo de AS, CI; por tener entrambos vna meſma baſe, y altura: (35.1. Eucl.) luego, &c.

2. Pideſe la area del trapezio ABPR. *Operacion.* Tireſe la diagonal AP, y quedarà reſuelto en dos triangulos: midaſe [2.] la area de eſtos triangulos: y la ſuma de los dos, ſerà la area del trapezio.

PROP. IV.

Medir la area de qualquiera Polygono. [fig. 5.]

1. SE deſea ſaber la area de vn Polygono regular, como del Pentagono ABC, &c. *Operacion.* Halleſe ſu centro F (17.1. de eſte trat.) Deſde F, tireſe la FG perpendicular à qualquiera lado: midaſe tanto dicha perpendicular, como el ambito del polygono; y multipliqueſe la mitad del ambito por la perpendicular; y el producto ſerà igual à la area del polygono. La razon es, porque eſta es igual à la area del triangulo que tiene por altura la FG, y por baſe todo el ambito. [4.7. de eſte trat.] La area de eſte triangulo ſe ſabe (2.) multiplicando la mitad de ſu baſe, por la altura FG: luego tambien la area del Polygono.

2. Pideſe la area del polygono irregular LVS, &c. Dividaſe en triangulos: y [2.] ſaqueſe la area de cada triangulo: y la ſuma de todas ſerà la area del polygono.

PROP. V.

Medir la area de vn circulo.

PAra medir la area de un circulo, ſe ha de ſaber primero ſu diametro, y ſu peripheria, por lo que dixe en el lib. 7. y multiplicando la mitad de ſu periferia por el ſemidiametro, ſe ſabrà la area. Sea pues el diametro de vn circulo 30. pies: ſu periferia ſerà 94. 20. 100. avos, y la ſemiferia ſerà 47. 10. 50. avos. Multipliqueſe 47. 10. 50. avos por el ſemidiametro, que es 15. y el producto 706. y medio es la area del circulo. La razon conſta de la prop. 5. del libro ſeptimo.

De otro modo. Multipliqueſe el diametro 30. por 30. y ſaldrà el quadrado del diametro 900. Y porque eſte quadrado [8.7. de eſte] à la area del circulo es como 14. à 11. hagaſe eſta regla de tres: como 14. à 11. aſsi 900. à 707. pies, y vn ſeptimo, que es la area del circulo, ſegun la razon de Archimedes.

PROP. VI.

Medir la area de los ſectores, y ſegmentos del circulo. (fig. 7.)

1. BVſcaſe la area del ſector AOBC. *Operacion.* Midaſe el radio OA, y ſea 10. pies: midaſe el arco ACB, y ſea 21. pies. Multipliqueſe la mitad del arco 10. y medio, por el radio 10. y el producto 105. ſerà la area del ſector. Fundaſe en el corolar. de la prop. 5. del lib. 7.

2. Pideſe la area del ſegmento AFBC. *Operacion.* Halleſe por el modo dicho, la area del ſector AOBC. Halleſe [2.] la area del triangulo AOB: reſteſe eſta area de la del ſector, y el reſiduo ſerà la area del ſegmento. De aqui ſe colige el modo de medir las ſuperficies compueſtas de ſegmentos de circulos.

PROP. VII.

Medir la area de la Elypſe. (fig. 8.)

SEa DGFH vna Elypſe: y ſe pide ſu area. *Operacion.* Midanſe entrambos diametros; y ſupongamos ſea DF de 64. pies: y GH de 49. Buſqueſe vn numero medio proporcional entre 64. y 49. que ſe hallarà por la Pantometra [15. lib. 8. de eſte] ò multiplicando 64. por 49. y del producto 3136. ſacando la raiz qnadrada 56. Y eſte 56. es el diametro de vn circulo igual à la Elypſe: [20.7. de eſte trat.] Halleſe pues la area de eſte circulo, (5.) y quedarà conocida la area de la Elypſe.

PROP.

PROP. VIII.

Medir la area de vna parabola. [fig. 9.]

PArabola es vna figura plana, como ABC, que naze de la ſeccion de vna pyramide conica, paralela à ſu lado: Pideſe ſu medida. *Operacion.* Tirenſe las rectas AB, CB: y el triangulo ABC quedarà inſcrito en la parabola: Alargueſe la baſe AC, haſta E, de ſuerte que CE ſea vn tercio de AC. Tireſe la BE; y el triangulo ABE ſerà igual à la parabola, como demueſtra Archimedes en lo de *Quadrat. Parab.* Midaſe pues la area del Triangulo ABE, (2.) y ſe ſabrà la area de la parabola.

La dimenſion de las ſuperficies de los ſolidos, ſe hallarà en el libro ſiguiente.

LI-

LIBRO XI.

DE LA STEREOMETRIA, ò menſuracion de los ſolidos.

PROP. I.

Medir la area de los priſmas, y cilindros. (fig. 1.)

1. MIdaſe por el libro antecedente la area de la baſe del priſma, ò cilindro. 2. Tireſe vna perpendicular de la baſe ſuperior à la inferior, alargando eſta, ſi fuere meneſter, por caer la perpendicular fuera del ſolido que ſe mide. 3. Multipliqueſe la baſe por la perpendicular, que es la altura, y el producto ſerà la area, ò ſolidez del priſma, ò cilindro.

Exemplo. Sea el paralelepipedo AQ. El lado AB de la baſe ſea 3. palmos: ſu altura AO ſea 5. Y porque la baſe AC ſe ſupone ſer quadrada, y que ſu lado es 3. ſerà ſu area 9. Multipliqueſe 9. por AO, que es 5. y ſerà 45. palmos cubicos toda la area AQ.

Demonſtr. Por conſtar la baſe AC de 9. palmos quadrados, caberàn ſobre ella juſtamente 9. palmos cubicos, que cada vno tiene vn palmo de altura: ſi ſobre eſtos ſe ponen otros 9. llenaràn otro palmo de altura; y aſsi de los demàs: conque para llenar todo el paralelepipedo, ſeràn meneſter tantas vezes nueve palmos cubicos, como ay palmos en la altura AO: luego multiplicando la baſe por la altura, ſe ſabe la ſolidez AO.

Lo meſmo ſe verifica en los priſmas, y cilindros inclinados: porque multiplicando la baſe AC por AO, ò HG ſu igual, ſe ſabe la area del ſolido AQ: ſiendo pues (31. 11. Eucl.) el paralelepipedo inclinado BF igual al AQ, por tener vna meſma baſe, y altura, es cierto que multiplicando AC por HG, ſe ſabrà la ſolidez del inclinado BF.

Lo que ſe ha demonſtrado en los paralelepipedos, vale tambien en los prismas triangulares, por ser estos [28.11. Eucl.] la mitad de los paralelepipedos de vna mesma base y, altura: y en los demas prismas, por resolverse todos en triangulares: y en los cilindros, por ser estos vnos prismas de infinitos lados: por la mesma razon que en el lib.12.dixe ser el circulo vn polygono de lados infinitos.

PROP. II.

Medir la superficie de los prismas, y cilindros.

LA superficie de los prismas, y cilindros rectos, se cõsigue multiplicando el ambito de su base por la altura; y el producto serà la superficie que se busca: y si à esta se añaden las superficies de entrambas bases, se sabrà la superficie total.

Exemplo. Supongamos que vn cilindro recto tiene 8. palmos de altura, y la circunferencia de su base es 157. multipliquense 157. por 8. y el producto 1256. serà la superficie cilindrica. Saquese aora [3.lib.7.de este trat.] el diametro de su base, que serà 50. y luego se sabrà (5.del lib.anteced.) la area de dicha base, que serà 1962. y medio. Dupliquese, y serà 3925. Añadase este numero à 1256. y serà la superficie total del cilindro 5181.

Demonstr. No ay duda en que de los quatro rectangulos del paralelepipedo AQ, que son AS, BQ, CR, AR, se puede formar vn rectangulo, que tenga por base las quatro bases AB, BC, &c. esto es, todo el ambito del quadrado AC: y por altura la AO, que lo es del paralelepipedo: y este rectangulo serà igual à la superficie del paralelepipedo, menos sus bases: Dicho rectangulo se mide multiplicando su base por la altura: luego la superficie del paralelepipedo, menos sus bases, tambien se mide multiplicando el ambito de su base por la altura. Lo mesmo se convence de los prismas por la mesma razon: y de los cilindros por ser prismas de infinitos lados.

Si el cilindro, ò prisma son inclinados, se medirà su superficie, no por la base MN; [fig.2.] si por otra base MQ perpendicular à los lados. Midase pues el ambito de esta base con vn hilo, cuidando que forme angulos rectos con los lados OM, PN: y multiplicando este ambito por el lado PN, ò FQ, se sabrà la superficie del cilindro sin las bases. La razon es porque la superficie del cilindro obliquo MP, es igual à la del recto FM: porque quitandole el segmento MNQ, y añadiendole OFP, quanto se le quita por vna parte, se le añade por la otra, por ser dichos segmentos iguales en quanto à la solidez, y superficie. Hallandose pues la superficie del cilindro recto OMF, del modo sobredicho, tambien se hallarà de la mesma suerte la del obliquo OMP.

PROP. III.

Medir la area de las piramides. [fig.3.]

LA solidez de las piramides, sean conicas, ò qualesquiera otras, se halla por la regla siguiente. 1. Busquese la area de su base (por el lib. anteced.) 2. Tirese vna perpendicular à la base desde su vertice: y porque regularmente suele caer dentro de la piramide, se pondrà vna regla recta OP en el vertice O, paralela à la base: y de qualquiera punto P, se tirarà la perpendicular PQ à la base alargada. 3. Multipliquese la area de la base por el tercio de la altura PQ: y el producto serà la area, ò solidez de la piramide: como si la base es 100. y la altura 30. multiplicando 100. por 10. tercio de la altura, el producto 1000. serà la solidez.

Demonstracion por la 7. y 10. del lib.12. Eucl. Las piramides son el tercio de los prismas de igual base, y altura; y si son conicas, son el tercio de los cilindros. La solidez de los prismas, y cilindros naze de la multiplicacion de su base por la altura: luego la solidez de las piramides proviene de la multiplicacion de su base por el tercio de su altura.

PROP. IV.

Hallar la superficie de las piramides.

1. LA superficie de las piramides polygonas se halla, buscando la area de cada triangulo de los que componen su superficie, y sumando las areas halladas: y si à

à esta suma se añade la area de la base, se sabrà la total superficie. Si la piramide polygona fuere regular, se hallarà su superficie con vna sola operacion, es à saber, multiplicando el semiambito de su base por la perpendicular tirada de su vertice à vno de los lados de su base.

2. Para hallar la superficie de vna piramide conica recta sin la base, se multiplicarà el semiambito de la base por el lado de dicha piramide: y el producto serà lo que se desea. La razon es, porque la piramide conica es vna piramide regular de infinitos lados; por degenerar las polygonas en conicas: la superficie de las polygonas es el producto del semiambito de su base, por la perpendicular del vertice à la base de qualquier triangulo: luego como en la piramide conica recta, todas las rectas del vertice à la periferia de la base sean iguales; saldrà su superficie, multiplicando el semiambito de la base por su lado.

Para medir la superficie de la piramide conica obliqua, no ay regla especial; y asi se avrà de proceder por modo menos geometrico, reduciendola à quadriculas pequeñas.

Corolarios.

1. *La superficie de vna piramide conica recta, à la superficie del circulo que tiene por base, es como el lado de dicha piramide, al radio de la base. La razon es, porque la superficie de dicha piramide es igual al rectangulo hecho del lado de dicha piramide, y de la semiperipheria del circulo de su base. Este circulo* (5.7. de este trat.) *es igual al rectangulo hecho del radio, y de la semiperipheria: pues como estos rectangulos tengan vna mesma base, que es la semiperipheria, seràn entre si como las alturas: esto es, como el lado de la piramide conica al radio del circulo que es su base: luego la superficie de dicha piramide, y de su base, son como el lado, al semidiametro de la base.*

2. *La superficie de vn cilindro recto, à la superficie de la piramide conica de igual base, y altura, se ha como el lado del cilindro, à la mitad del lado de la piramide. La razon es, porque la superficie del cilindro recto es igual al rectangulo hecho del lado, y de toda la peripheria de su base.* [2.] *Y la superficie de la piramide conica es igual al rectangulo de su lado, y la semiperipheria de su base: ò tam-*

tambien [que es lo mesmo] de la mitad de su lado, y de toda la peripheria de su base: luego siendo sus bases iguales, seràn como las alturas; esto es, como el lado del cilindro, à la mitad del lado de la piramide.

PROP. V.

Medir la area de las piramides truncadas. (fig.4)

Sea la piramide conica truncada AOFE: y se busca su solidez. *Operacion.* Considerese toda entera ACO: Midase [3.] la solidez de toda: midase tambien la solidez de la piramide ECF: restese esta solidez de aquella, y el residuo serà la truncada AOFE.

Para hallar practicamente la altura de toda la piramide ACO, se obrarà como se sigue. Hallese la altura MN de la truncada, como en otra parte dixe; y formese esta regla de tres, como la diferencia de los diametros de las bases EF, AO, al diametro superior EF: asi la altura hallada MN, al residuo MC de toda la altura: añadase MC à MN, y se sabrà toda la altura.

Sea pues (por exemplo) el diametro AO 10. y el diametro EF sea 4. y la MN sea 12. Hagase, como 6. diferencia de los diametros, con 4. que es el diametro menor: asi 12. con 8. con que MC es 8. que añadidos à MN 12. resulta toda la CN 20.

La razon de esta regla es, porque siendo los triangulos ACO, ECF semejantes, serà (4.6. Eucl.) AO con AC, como EF con EC: y alternando; como AO, con EF; asi AC con EC: luego dividiendo [cortando AI igual à EF] serà como IO con EF: asi AE con EC: y porque los planos paralelos AO, EF alargados, cortan las rectas CA, CN proporcionalmente: serà IO diferencia de los diametros de las bases, con EF diametro menor: como MN, con CM.

Halladas ya las alturas MN, CN, se hallarà la area, ò solidez de entrambas piramides AOC, EFC por la regla sobredicha: por la AO, que hemos supuesto ser 10. se saca la periferia de la base mayor 31. 3/7. avos; y multiplicando el semidiametro 5. por la semiperiferia 15. 5/7. avos sa-

le

le la area de dicha base 78. 4.7. avos. Multipliquese 78. 4.7. avos por el tercio de la altura CN; esto es, por 6.2.3. avos; y serà la solidez de la piramide total AOC 524. 2.3. avos. De la mesma suerte, sabida la altura CM, 8. de la piramide EFC, y su diametro EF 4. se hallarà su solidez 33. 11.12. avos, que restada de 524. 2.3. avos; resta la solidez del fragmento AOFE 491.3.21.avos.

PROP. VI. Theorema.

Qualquiera porcion de piramide triangular ABCD, &c. (fig. 5.) *se divide por las diagonales AD, EB, DB, en tres piramides ABCD, AEBD, EFBD, continuas proporcionales en la razon mesma de los lados homologos AC, ED de sus bases.*

Demonstrac. Los triangulos ADC, DAE, estan entre las paralelas CA, DE: luego [1.6.Eucl.] son como sus bases AC, ED; y como (5.12.Eucl.) las piramides ABCD, AEBD, que tienen su vertice comun B, sean como los triangulos dichos ADC, DAE, que son sus bases; se sigue, ser entre si dichas piramides como CA à ED. Tambien las piramides AEBD, EFDB, que tienen por vertice comun D, son como sus bases ABE, EBF. Estas bases son como AB à EF, ò como AC à ED; por la semejança de los triangulos ABC, EFD: luego las piramides AEBD, EFDB son como AC à ED: luego las tres piramides son proporcionales en la mesma razon de AC à ED.

PROP. VII.

Medir de otro modo la area, ò solidez de las piramides truncadas.

1. Midase la altura de la piramide truncada, como arriba dixe. 2. Midanse ambas bases mayor, y menor: y entre ellas hallese otra base que sea media proporcional geometrica. 3. Sumense las tres bases, y multipliquese esta suma por el tercio de la altura, y el producto serà la solidez que se busca.

Exem-

Exemplo. La altura de la piramide truncada sea 18. su base inferior sea 100. la superior 16. Multiplicando 100. por 16. y del producto 1600. sacando la raiz quadrada 40. seràn las tres bases continuas proporcionales 16. 40. 100. cuya suma 156. multiplicada por 6. tercio de la altura 18. da el producto 936. y esta es la solidez que se desea.

Demonstr. Multiplicando las bases 100. y 16. por 6. tercio de la altura, se tienen las dos extremas piramides ABCD, AFDB; y porque la base 40. es media proporcional entre las bases 100. y 16. y se ha multiplicado por el mesmo 9. tercio de la altura, es forzoso salga de dicha multiplicacion vna piramide, media proporcional entre las extremas: luego por la regla sobredicha se hallan las tres piramides, en que se divide qualquiera fragmento de piramide: luego se halla la solidez de la piramide. Y porque qualquiera fragmento de piramide polygona se divide en fragmentos de triangulares, valdrà en todas la mesma regla: y assi mesmo en la conica truncada; por ser esta vna piramide polygona de infinitos lados.

PROP. VIII.

Hallar la superficie de las piramides truncadas.

Para hallar la superficie de qualquiera piramide truncada, se observarà lo siguiente. 1. Hallese la superficie de la piramide entera. Busquese la superficie del segmento que falta; y restando esta de aquella se sabrà la superficie de la truncada.

Pero para medir la superficie de la piramide conica recta truncada, vsaremos de la regla siguiente, sacada del libro 1. de Archimedes *de Sphera, & cylindro.* Busquese vn medio arithmetico entre las periferias de las bases, que se hallarà sumandolas, y tomando la mitad de la suma: multipliquese este medio por el lado del troço de la piramide conica; y el producto serà la superficie que se busca sin las bases.

Exemplo. (fig. 6.) Sea la piramide conica truncada AD, cuya superficie curva se desea saber. Segun la regla prime-

ra

ra se hallarà asi. Sea la periferia mayor 300. y la menor sea 100. Sea el lado AC del segmento 20. y por la prop. 5. se hallarà ser el lado de toda AE 30. y el lado CE del segmẽto que falta, serà 10. Multiplico 30. por 150. y serà (4.) el producto 4500. la superficie de toda la piramide entera. Multiplico asi mesmo 10. por 50. y el producto 500. serà la superficie del segmento CED. Resto pues 500. de 4500. y el residuo 4000. es la superficie de la piramide truncada AD.

Segun la regla segunda se procederà asi: Sumo 300. y 100. y de la suma 400. tomo la mitad 200. medio arithmetico entre las dos periferias: multiplico 200. por 20. lado AC: y el producto 4000. es la superficie de la piramide truncada AD.

Demonstr. Hagase el triangulo rectangulo PQS, cuyo lado PQ sea igual al lado AE de la piramide conica total: y QS sea igual à la periferia de la base AB: y serà dicho triangulo igual al rectangulo hecho de PQ, y la mitad de QS; [41.1. Eucl.] y por consiguiente igual [4.] à la superficie de la piramide total AEB. Asi mesmo tomese TQ igual al lado AC del troço: y tirando TV, paralela à QS, serà el triangulo PTV igual à la superficie de la porcion CED: luego el trapezio TQSV es igual à la superficie de la piramide conica truncada AD. Hallandose pues la area de dicho trapezio multiplicando la RI, ò QN, media arithmetica entre TV, QS por la altura TQ: por ser el rectangulo QM, igual al trapezio TQSV; por quanto el triangulo INS que se le quita, es igual à VMI que se le añade: la area de la piramide conica truncada AD, se hallarà del modo sobredicho.

PROP. IX.

Medir la solidez de vn prisma triangular por la base paralelograma. (fig. 7.)

AUnque en la prop. 1. de este libro di vna regla general para medir todos los prismas por las bases opuestas, que son iguales; conviene para lo siguiente tener noticia de este otro modo de hallar la solidez de vn prisma triangular OMT, tomando por base conocida el paralelogramo MP.

Operacion. Tirese del punto F la perpendicular FG al plano de la base: multipliquese esta base por la mitad de la perpendicular FG, ò la mitad de la base por toda la FG: y el producto serà la solidez del prisma.

Demonstr. El prisma (28.11. Eucl.) es la mitad del paralelepipedo de la mesma base MP, y de la mesma altura FG: este resulta de la multiplicacion de la base, por toda la altura: [1.] luego el prisma resultarà de la multiplicacion de la base por la mitad de la altura.

PROP. X.

Medir vn segmento de prisma triangular, cortado con vn plano paralelo à la base paralelograma. (fig. 7.)

SVponese el mesmo prisma OMT, cortado con el plano HILR, paralelo à la base paralelograma MP: y se pide la solidez del segmento MHRN. *Operacion.* Midanse las areas de los planos MP, HIRL: sumense las dos; y tomese la mitad de la suma: multipliquese esta semisuma por la altura perpendicular IG del fragmento; y el producto serà su solidez, Demuestrase como la regla 2. de la prop. 8.

PROP. XI.

Medir la solidez de las paredes de vn edificio. [fig. 8.]

PIdese se mida la solidez de la pared DB. *Operacion.* Midase su longitud AC: y sea 12. midase su crasicie DA: y sea 3. y su altitud sea 9. Multipliquese 12. por 3. y el producto 36. multipliquese por 9. y el producto 324. serà la solidez de la pared. Consta de la prop. 1. Para medir las demàs paredes que forman los angulos, como la AF, se ha de cuydar no contar dos vezes el paralelepipedo AH: y asi de la longitud AI, se descontarà la crasicie AD, que pertenece à la pared AB.

PROP.

PROP. XII.

Medir la solidez de las paredes de desigual crasicie. (fig. 9.)

QVando las paredes tienen gordaria desigual; como es en las cortinas, y baluartes de las fortalezas, se tomarà vna crasicie media: como si se ha de medir el pedazo de muro DB, no se ha de vsar de la crasicie AC: ni de la DE; si de otra media DH. Esta se multiplicarà por la altura AD; y el producto, por la longitud CI; y resultarà la solidez que se pide. La razon es, porque semejantes paredes son vn segmento de prisma cortado con vn plano AI paralelo à la base paralelograma DB: luego (10.) se hallarà su solidez por la sobredicha regla.

De lo dicho hasta aqui se colige el modo de medir qualesquiera cuerpos irregulares, porque ò se reducen à los sobredichos, ò se componen de segmentos, que cada vno de ellos se podrà medir por las reglas demonstradas.

Los Theoremas siguientes conducen à la dimension de la superficie, y solidez de la esphera, y de sus segmentos.

PROP. XIII. Theorema.

Las circunferencias de los circulos se han entre si como sus diametros.

ESta proposicion queda demonstrada en el corolario 2. de la proposic. 2. del libro 12. de la Geometria Elementar.

Corolario.

De la sobredicha proposicion se infiere, que el diametro de qualquiera circulo, al agregado de los diametros de otros circulos, tiene la mesma razon, que la circunferencia de aquel circulo, al agregado de las circunferencias de los otros. [13.5. *Eucl.*] *Y el producto de la periferia de vn circulo por el diametro de otro, es igual al producto de la periferia de este, por el diametro de aquel.* (16. 6. *Eucl.*)

PROP. XIV. Theorema.

Si dentro de vn circulo se inscrive vn Polygono regular parilatero, singularmente de 8. 12. 16. &c. lados, cuyo numero se pueda partir por 4. como el de la fig. 10. Y dicho Polygono rueda al rededor del diametro AB, se engendrarà vn solido, comprehendido de superficies conicas, las quales juntas seràn iguales al producto del lado AE del polygono, multiplicado por todas las periferias de los circulos, que con su movimiento descriven los angulos del Polygono.

D*Emonstracion.* Con el sobredicho movimiento circular del poligono al rededor de AB, el lado AE engendra la superficie conica, que es igual al producto del lado AE, y de la periferia del circulo, cuyo diametro es EG. (4.) El lado EF engendra la superficie conica truncada, que es igual al producto de EF, ò AE por vna circũferécia media entre las de las bases, (8. *regla* 2.) ò (que es lo mesmo) por la semiperiferia del circulo, cuyo diametro es EG, y por la semiperiferia del circulo, cuyo diametro es FH: donde se ve claramente que las superficies engendradas de AE, EF son iguales al producto de AE por toda la periferia de EG, y por la semiperiferia de FH.

El lado FC engendra la superficie truncada igual al producto del lado FC, ò AE, por la semiperiferia del circulo, cuyo diametro es FH, (que es la residua de la multiplicacion pasada) y por la semiperiferia del circulo, cuyo diametro es CD. Conque las superficies engendradas por AE, EF, FC, son iguales al producto de AE, por la periferia del diametro EG; por la del diametro FH, y por la semiperia del circulo, cuyo diametro es CD. De la mesma suerte probarè que las superficies engendradas por CI, IK, KB, son iguales al producto de AB, por la semiperiferia del circulo cuyo diametro es CD, por la de IL, y por la de KP: luego la superficie de todo el solido sobredicho es igual al producto del lado AE por todas las periferias de los circulos de los diametros EG, FH, &c.

PROP. XV.

Si se tira la recta BG [fig. 10.] serà la superficie del solido sobredicho igual al producto de la periferia circular ACBD, por dicha recta BG.

Demonstracion. Tiradas las rectas EH, FD, CL, IP, quedan formados los triangulos GAQ, ESQ, HSN, FTN, &c. los quales son semejantes al triangulo BAG; porque son rectangulos en Q, N, M, &c. y el mayor lo es en G (31.3. Eucl.) y los angulos E, H, F, &c. como tambien ABG, son iguales, por insistir en iguales periferias. (21.3. Eucl.)

Por ser pues dichos triangulos semejantes, serà [4.6. Eucl.] como BG con GA, assi GQ con QA: y assi EQ con QS: y assi HN con NS, &c. luego (13.5. Eucl.) serà como BG con GA, assi el agregado de EG, FH, CD, IL, con las AQ, QS, SN, &c. ò con toda la AB. Esto es, como vn antecedente à vn consequente; assi el agregado de todos los antecedentes, que son los diametros, al agregado de todos los consequentes, que es el diametro AB: luego siendo (13.) las periferias como los diametros, serà como BG con GA; assi la periferia, cuyo diametro es igual al agregado de los diametros EG, FH, CD, &c. à la periferia, cuyo diametro es AB. La periferia, cuyo diametro es igual al agregado de dichos diametros EG, FH, &c. es igual à las periferias, cuyos diametros son las mesmas EG, FH, &c. [13.] luego como BG à GA: assi el agregado de las periferias, cuyos diametros son EG, FH, &c. con la periferia, cuyo diametro es AB. Y como (16.6. Eucl.) el rectangulo, ò producto de BG por la periferia del diametro AB, que son los extremos, sea igual al rectangulo, ò producto de GA por el agregado de las periferias, cuyos diametros son EG, FH, &c. y este (14.) sea igual à la superficie del solido tornatil sobredicho; serà el producto de BG por la periferia, cuyo diametro es AB [que es la circular ABCD] igual à la superficie de dicho solido.

PROP.

PROP. XVI. Theorema.

La superficie de la esfera es igual al producto, ò rectangulo de la periferia de su circulo maximo, y su diametro. (fig. 10.)

Demonstracion. Si en el mesmo circulo se considera inscrito vn polygono de inumerables lados; la recta BG coincide con el diametro AB, porque el lado AG se desvanece: y en este caso la superficie del solido engendrado del movimiento del polygono de infinitos lados, serà [15.] igual al producto de la periferia circular ABCD, por el diametro AB. La superficie de dicho solido, es la superficie de la esfera; porque aviendo el polygono por la multitud de sus lados, degenerado en circulo, el solido que con su movimiento engendra, es la esfera: luego la superficie de la esfera es igual al producto, ò rectangulo de la periferia de su circulo maximo, y su diametro.

PROP. XVII. Theorema.

La superficie de la esfera es quadrupla de su circulo maximo.

Demonstracion. La superficie de la esfera es igual [16.] al rectangulo hecho de la periferia de su circulo maximo, y el diametro. La superficie del circulo maximo es igual (5.7. de este trat.) al rectangulo hecho de su semiperiferia, y de su diametro: y como el rectágulo de toda la periferia, y el diametro, sea quadruplo del rectangulo de la semiperiferia, y el semidiametro: se sigue ser la superficie de la esfera quadrupla de su circulo maximo. Que el rectangulo de la periferia, y el diametro, sea quadruplo del de la semiperiferia, y semidiametro, consta de la prop. 20 lib. 6. de Eucl. Porque dichos rectangulos tienen razon duplicada de sus lados homologos, que son el diametro, y semidiametro; y teniendo estos razon dupla, tendran sus rectangulos razon quadrupla.

Esta es la prop. 11. del lib. 1. de Archimedes de Sphera, & Cylindro, que le mereciò nombre inmortal entre los Geometras.

PROP.

PROP. XVIII. Theorema.

La superficie del cilindro circumscrito à la esfera, menos las bases, es igual à la superficie de la esfera. (fig. 11.)

DEmonstracion. La base del cylindro AC circumscrito à la esfera, es igual al circulo maximo de la mesma esfera; y su altura es el mesmo diametro EG, ò DA: siendo pues la superficie, tanto del cylindro, como de la esfera, igual al rectangulo de la periferia del circulo AGB, que es base del cylindro, y maximo de la esfera, por AD, que es altura del cylindro, y diametro de la esfera, seràn la superficie del cylindro, y de la esfera iguales: que es otro Theorema nobilissimo de Archimedes.

PROP. XIX. Theorema.

La superficie total del cylindro circumscrito à la esfera, es sesquialtera con la superficie de la esfera.

DIgo que la superficie total del cylindro circumscrito à la esfera; esto es, juntamente con sus dos bases, es sesquialtera de la superficie de la esfera; es à saber, tiene cõ ella la razon de 3. à 2. ù de 6. à 4.

Demonstr. (18.) La superficie del cilindro sin sus bases, es igual à la superficie de la esfera: esto es [17.] à quatro circulos maximos de la mesma esfera: luego si añadimos las dos bases, que son dos circulos maximos; la superficie del cylindro con sus bases serà 6. y la superficie de la esfera serà 4. luego se han como 6. con 4. ò como 3. con 2. que es razon sesquialtera.

PROP. XX. Theorema.

La superficie de vn segmento esferico es igual al producto de la periferia del circulo maximo de la esfera, por la sagita del segmento. [fig. 10.

DIgo que la superficie del segmento esferico IAL es igual al rectangulo hecho de la periferia del circulo maximo, y de la porcion, ò sagita AR de dicho segmento.

Demonstr. Si en el segmento IAL se inscrive el polygono parilatero regular, que se mueva al rededor del diametro AB, se forma con dicho movimiento vn solido, cuya superficie sin la base IL es (14.) igual al rectangulo de vno de sus lados, como de AE por todas las periferias de los circulos, cuyos diametros son EG, FH, &c. menos la del vltimo circulo, cuyo diametro es IL. Assi mesmo (15.) el segmento IAL tiene su superficie, menos la base, igual al rectangulo de la recta BG, y de la periferia del circulo, cuyo diametro es AR, que es la sagita de dicho segmento: luego (16.) desvaneciendose en el poligono de infinitos lados, el lado AG, y coincidiendo la BG con el diametro AB, serà la superficie del segmento esferico IAL igual al rectangulo del diametro AB, y de la circumferencia del circulo, cuyo diametro fuere la sagita AR: y como el producto de la periferia del circulo, cuyo diametro es AB; esto es, del circulo maximo de la esfera, por el diametro AR, sea [*corol. de la prop.* 13.] igual al producto de la periferia del circulo, cuyo diametro es AR, por el diametro AB de la esfera, serà la superficie de dicho segmento esferico igual al producto de la periferia del circulo maximo de la esfera, por la sagita del segmento.

PROP. XXI. Theorema.

Si tanto la esfera, como el cilindro circumscrito, se cortan con vn plano ZX [fig. 11.] *seràn la superficie del segmento esferico OEQ; y la del cilindro ZDCX iguales.*

DEmonstracion. La superficie del segmento esferico sobredicho es igual al rectangulo de la periferia del circulo maximo por la sagita EK. (20.) La superficie del cilindro ZDCX, es tambien igual al producto de la periferia del circulo maximo de la esfera, que es su base, por la altura EK: luego son iguales.

Coro-

Corolarios.

1. *Los planos paralelos ZX, FH, cortan en la esfera, y cilindro siempre superficies iguales; porque si de las superficies iguales del segmento esferico FEH, y del cilindro FDCH, se quitan las ZEX del segmento esferico, y ZDCX del cilindro, las superficies residuas seràn siempre iguales.*

2. *Si del cilindro AFHB circumscrito al emisferio, FGH, se quita el emisferio, quedarà el concabo-convexo FGHBA, cuya superficie concava serà igual à la convexa sin la base.*

PROP. XXII. Problema.

Medir la superficie de la esfera, y de sus segmentos, y sectores.

Para hallar la superficie de la esfera; se supondrà conocido el diametro; y por el se sacarà la circumferencia del circulo maximo, (3. lib. 7. de este Trat.) y multiplicando el diametro por la circumferencia hallada, se sabrà la superficie de la esfera. [16.] Como si el diametro es 50. serà la circumferencia 157. Multipliquese 157. por 50. y el producto serà la superficie de la esfera.

Para hallar la superficie de vn segmento de esfera, se medirà su altura, que es la sagita: y multiplicando el circulo maximo de la esfera, cuyo es el segmento, por dicha sagita, el producto serà la superficie que se busca. (20.)

Para medir la superficie de vn sector de esfera, como CABD, (fig. 10.) se medirà primero del modo dicho la superficie del segmento ADB; y despues se medirà la superficie de la pyramide conica AODC, (4.) y la suma de entrambas cantidades serà la superficie del sector.

PROP. XXIII. Theorema.

La esfera es igual à vna pyramide conica, cuya base es igual à la superficie de la esfera, y su altura igual al radio.

Demonstracion. Considerese vn polyhedro circumscrito à la esfera, y del centro tirense rectas à todos los angulos, y quedarà dicho polyhedro resuelto en tantas pyra-

pyramides, quantas tiene bases, ò superficies el polyhedro, cuyas alturas son el radio de la esfera; y las bases son las superficies del polyhedro. A todas estas piramides juntas es igual vna piramide que tiene por altura el mesmo radio de la esfera, y por base vna superficie igual à todas las bases juntas de dichas piramides. Y es la razon, porque la piramide total, y las parciales, tienen vna mesma altura, è igual base, supuesto que la base de la total es igual à las bases de todas las demàs juntas.

Esto supuesto, como circumscriviendole à la esfera polyhedros de mas, y mas lados infinitamente, vengan estos à degenerar en la esfera; viene la esfera à ser lo mesmo que vn polyhedro de infinitos lados. Siendo pues qualquiera polyhedro igual à vna piramide conica, cuya altura es el radio de la esfera inscrita, y su base igual à la superficie del polyhedro; tambien la esfera serà igual à vna pyramide conica, cuya altura es el radio de la esfera; y la base, la superficie esferica.

Corolarios.

1. *De lo dicho se sigue, que la esfera es igual à vna pyramide conica, cuya altura es igual al radio de la mesma esfera, y su base es quadrupla del circulo maximo de la esfera.*

2. *El sector de la esfera es igual à vna pyramide conica, cuya altura es el radio de la esfera, y su base es igual à la superficie esferica del mesmo sector; porque circumscribiendole al sector vn polyhedro, se convencerà lo mesmo que de toda la esfera.*

PROP. XXIV. Theorema.

El cilindro circumscrito à la esfera es sesquialtero de la mesma esfera. (fig. 11.)

Sea el cilindro AC circumscrito à la esfera; digo que es su solidez sesquialtera de la solidez de la esfera: esto es, que si el cilindro es 3. la esfera es dos.

Demonstr. Si sobre la base circular AB del cilindro, se forma la pyramide conica APB, cuyo vertice està en P cetro de la esfera, la dicha pyramide conica serà la quarta par-

parte de la esfera, por ser su base la quarta parte de la base de la pyramide conica, que probè en la prop. 23. ser igual à la esfera, y tener la mesma altura. (11.12. Eucl.) Esta mesma pyramide conica APB es la sexta parte del cilindro AD; por ser [10.12. Eucl.] el tercio de su mitad AFHB: luego el cilindro incluye justamente seis de las dichas pyramides; y la esfera, quatro: luego el cilindro AC à la esfera inscrita, es como 6. con 4. ò como 3. con 2. que es razon sesquialtera: luego el cilindro circumscrito à la esfera es sesquialtero de ella, tanto en la superficie, (como probè en la prop. 19.) como en la solidez. Y este es el ilustre Theorema hallado por Archimedes, que mandò se insculpiesse en el marmol de su sepulcro.

PROP. XXV. Problema.

Medir la solidez de la esfera, y de sus sectores, y segmentos.

1. La solidez, ò area de la esfera se hallarà en la forma siguiente: Midase (22.) la superficie de la esfera: Multipliquese esta superficie por la tercera parte del radio, y el producto serà la area, ò solidez que se busca.

Demonstr. La esfera es igual à vna superficie conica, cuya altura es el radio, y la base es la superficie de la mesma esfera. (23.) La solidez de esta pyramide se halla del modo dicho: [3.] luego tambien la de la esfera.

2. La area, ò solidez del sector esferico [fig. 12.] se sabrà multiplicando la superficie del segmento esferico ABD, por el tercio del radio BC. La razon es, porque el sector de la esfera [corol. 2. prop. 23.] es igual à vna pyramide conica, cuya altura es el radio de la esfera, y la base es igual à la superficie esferica de dicho sector. Esta pyramide se mide del modo sobredicho: luego tambien el sector.

3. La solidez, ò area del segmento esferico ABDA, se halla midiendo el sector CABD, y la pyramide conica ADC: y restando esta del sector, quedarà la solidez del segmento. De aqui se puede colegir el modo de hallar la solidez de vna zona esferica.

PROP.

PROP. XXVI.

Medir la Esferoide, y Conoide.

Espheroide es vn solido que se engendra de la circumvolucion de vna Elipse al rededor de su exe. Y porque la Elipse tiene dos exes, vno mayor, y otro menor, ay tambien dos especies de Espheroide, vna *Longa*, y otra *Lata*. *La espheroide Longa, es la que naze de la circumvolucion de vna Elipse al rededor de su exe mayor*: y viene à ser como vna ciruela. *La espheroide Lata, es la que se origina de la circumvolucion de la Elipse al rededor de su exe menor*; y es como vna esfera algo allanada.

Conoide, es vn solido producido de la circumvolucion de vna parabola, ò hyperbola al rededor de su exe; aunque tambien puede proceder de la revolucion de vn segmento de elipse al rededor de su exe. Para cuya inteligencia se ha de suponer que la *Elipse*, *Parabola*, è *Hyperbola* nacen de las secciones de vna pyramide conica, como ABD. [fig. 13.] Si la seccion fuere paralela à la base AB, seria *Circulo*: si la seccion es obliqua, y llega à cortar entrambos lados, como EC, es *Elipse*: Si corta solo vn lado, y es paralela al otro, como OSQ, es *Parabola*: y si corta solo vn lado, y no es paralela al otro, como IRP, es *Hyperbola*.

1. La solidez de la espheroide, tanto longa, como lata, se hallarà assi: Multipliquese la area del circulo, cuyo diametro se moviò para la produccion de la espheroide, por dos tercios del diametro que sin moverse sirviò de exe: y el producto serà la area, ò solidez que se busca.

Exemplo. (fig. 14.) Buscase la solidez de la espheroide longa ABDC, cuyo diametro inmoto AD, que sirvio de exe, sea 20. y el menor diametro, que se movio BC sea 15. cuyo circulo serà 176. 5.8. avos. Multipliquese este por 13. y 1. tercio, que son los dos tercios del diametro AD 20. y el producto 2355. serà la solidez de la espheroide.

La razon es, porque, como se colige de la prop. 23. de Archim. *de Spheroide, & Conoide*, la espheroide longa tiene con la esfera del mayor diametro, razon duplicada del menor al mayor diametro: esto es, tiene la mesma razon

 que

que el circulo del menor diametro al circulo del mayor. Esto supuesto, sea FAE el emisferio sobre el diametro mayor FE, ò AD; sea FGHE el cilindro, cuya base es la mesma del emisferio, y cuya altura sea dos tercios del semidiametro mayor de la esferoide, ò radio del emisferio: sea BOIC otro cilindro de la mesma altura; pero su base sea el circulo del menor diametro de la esferoide.

Por tener estos dos cilindros vna mesma altura, son como sus bases. Estas bases (que son los circulos del mayor, y menor diametro de la esferoide) son entre si como la semiesferoide, al emisferio, segun Archimedes: luego dichos cilindros son como la semiesferoide al emisferio: siendo pues el cilindro FGHE igual al emisferio; por tener este dos tercios del cilindro circunscrito à dicho emisferio, el qual es tambien dos tercios del mesmo cilindro, por tener con el razon subsesquialtera: (24) luego tambien el cilindro BOIC es igual à la semiesferoide longa; y su duplo, igual à toda la dicha esferoide. Midiendose pues el cilindro por la multiplicacion de su base por la altura; esto es, la area del circulo BC por los dos tercios del diametro: tãbien se medirà del mesmo modo la esferoide.

2. Pidese aora se mida la solidez de la esferoide lata, cuyo diametro movido, que es el mayor, sea 20. y el menor sea 15. Hallese la area del circulo, cuyo diametro es 20. y serà 314. Multipliquese por 10. que son los dos tercios de 15. y el producto 3140. serà la area que se busca. La demonstracion viene à ser como la pasada, porque la esferoide lata con la esfera del menor diametro, tiene la mesma razon que el circulo del mayor diametro, al circulo del menor.

Aqui se ha de advertir, que la esfera del mayor diametro, la esferoide lata, la esferoide longa, y la esfera del menor diametro, son continuas proporcionales, y tienen entre si la mesma razon que ay del mayor al menor diametro: mientras que entrambas esferoides nazcan de vna mesma elipse; y asi 4186. 2. 3. avos, 3140. 2355. 1766. y 1. quarto, tienen continuada la razon de 20. con 15.

3. La solidez de vn segmento de esferoide, cortado con vn

vn plano perpendicular al exe, se medirà como se sigue: se ha de medir el segmento VAP. [fig. 14.] Midase la recta VP; y las partes AZ, ZD del exe AD. Busquese la area del circulo, cuyo diametro es VP. Multipliquese esta area por el tercio del segmento AZ del exe AD, y resultarà vna pyramide conica, cuya base es el circulo del diametro VP; y su altura, la porcion ZA. Y porque segun Archimedes en la prop. 31. *de Sphæroide, & Conoide*, tiene dicha pyramide conica con la porcion menor de la esferoide, la razon que la mayor porcion del exe ZD, con la suma de las rectas XD, ZD. Hagase esta regla de tres: como ZD, segmento mayor del exe, con la suma de las rectas XD, ZD; esto es, del semidiametro mayor, y del exe de la porcion mayor; asi dicha pyramide conica, à la solidez del segmento menor VAP.

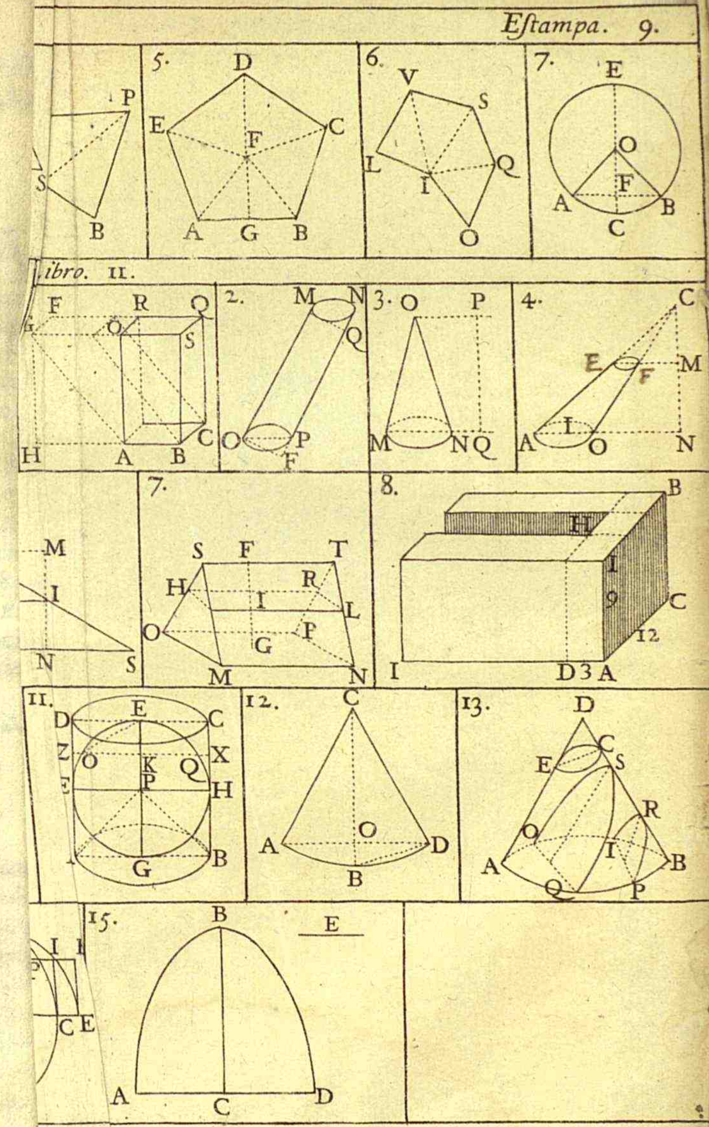
Si se busca el segmento mayor VDP; hallese la pyramide conica, cuya base es el circulo del diametro VP, y su altura ZD: y hagase como ZA, segmento menor del exe, con la suma de las rectas XA, ZA: asi dicha pyramide conica con la area del mayor segmento VDP. De aqui se colige el modo de medir la porcion VBCP de la esferoide.

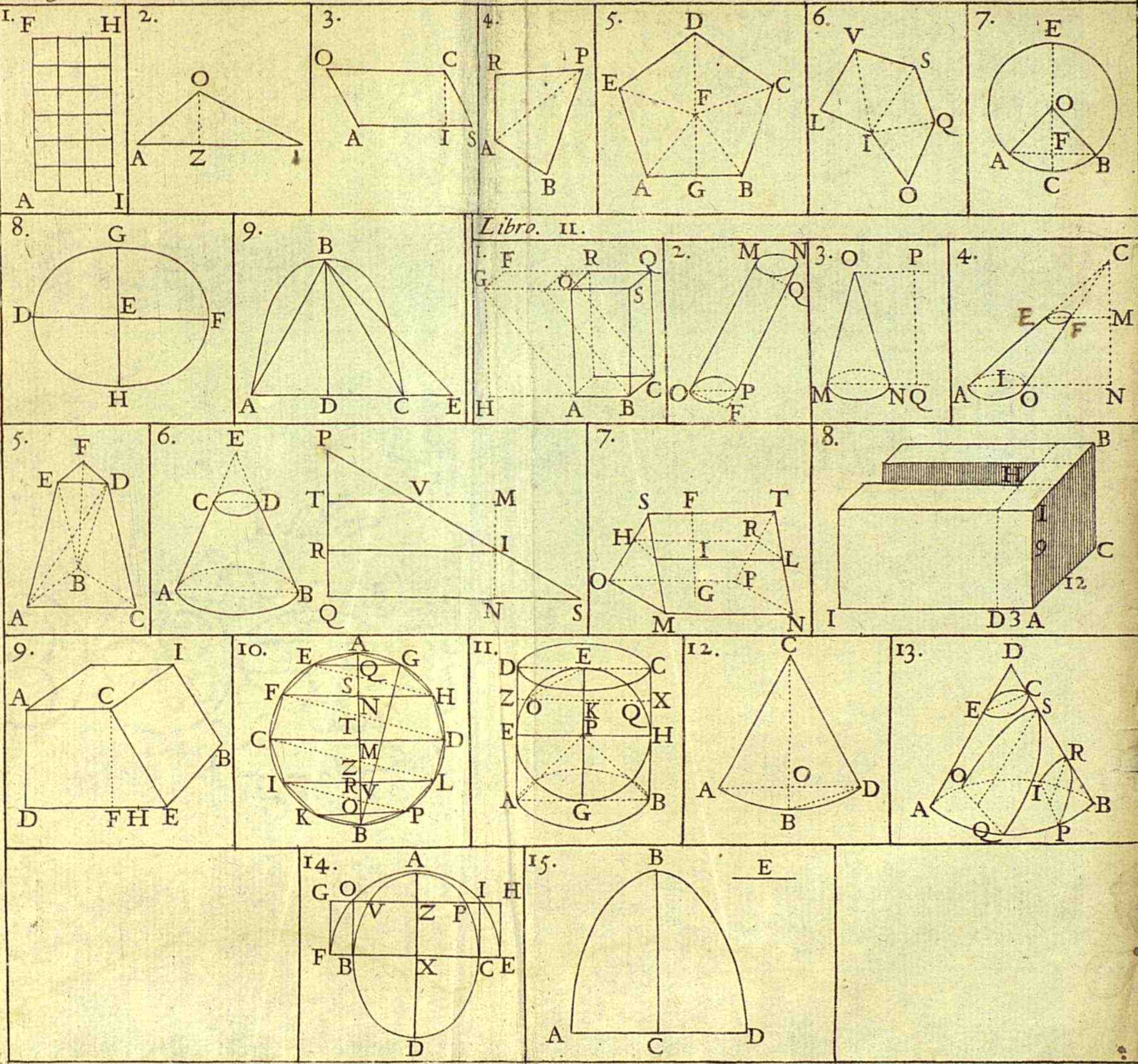
4. Pidese se mida la conoide parabolica ABD. (fig. 15.) Midase la pyramide conica, cuya base sea el circulo del diametro AD, y su altura BC: y hagase como 2. con 3. asi dicha piramide con la conoide que se busca. La razon es, porque segun Archimedes prop. 23. *de Sphæroide, & Conoide*, dicha pyramide conica es subsesquialtera de la conoide recta; esto es, como 2. à 3. luego, &c.

5. La solidez de la conoide hyperbolica se halla asi: supongase que la figura mesma es hyperbola recta: y que E es la mitad del diametro transverso entre dos hyperbolas opuestas: y porque Archimedes en la 27. *de Sphær. & Con.* demuestra, que la conoide hyperbolica ABD, con la pyramide conica, cuya base es la mesma de la conoide, ò cuyo diametro es AD, y el mesmo exe BC, tiene la mesma razon que la linea compuesta del exe BC, y del triplo de E, con la linea compuesta del exe BC, y de la dupla de E, se sigue q̃ si se haze esta regla de tres: como la compuesta de BC, y la

la dupla de E; con la compuesta de BC, y la tripla de E: assi la dicha pyramide con la area de la conoide hyperbolica ABD, se hallarà la solidez que se pide. En el tratado de secciones conicas se darà mas entera noticia de estos solidos.

De lo dicho se colige el modo de medir los cuerpos irregulares, procurandoles reducir, en quanto sea possible, à los regulares referidos, lo que se dexa à la industria, y solicitud del Geometra, por no alargar mas este tratado.




1. F H A I
2. O A Z
3. O C A I S
4. R P A B
5. D E C F A G B
6. V S L Q I O
7. E O F A C B
8. G D E F H
9. B A D C E
Libro. 11.
1. F R Q G O S H A B C
2. M N Q O P F
3. O P M N Q
4. C E M F I A O N
5. F E D B A C
6. E C D A B
P T V M R I Q N S
7. S F T H R I L O P G M N
8. B H I 9 C 12 I D 3 A
9. I A C B D F H E
10. A E G Q S F H N T C D M Z I R V L O K P B
11. D E C Z O K Q X E P H A G B
12. C O A D B
13. D C E S R O I A B Q P
14. A G O I H V Z P F B X C E D
15. B E A C D

APENDICE.

AViendo concluido este Tratado, me pareciò ser muy conveniente añadir aqui vna breve suma de reglas geometricas, tan breves, y faciles, que los Arquitectos, sin ser Geometras, puedan con ellas facilmente medir, reducir, aumentar, y disminuir qualquier genero de figuras, tanto planas, como solidas, como tengan vna mediana noticia de la Arithmetica.

Circulo.

1. *Como* 10000. *à* 62832. *asi el radio à la circunferencia.*

2. *Como* 10000. *à* 1592. *asi la circunferencia al radio.*

Exemplo 1. Vn circulo tiene 8. palmos de radio, pidese la circunferencia. Hago esta regla de tres: Si 10000. dan 62832. que darà 8? y hallo 50. y 2656. diezmilesimas.

Exemplo 2. Un circulo tiene 60. palmos de circunferencia, pidese el radio. Digo: Si 10000. dan 1592. que daràn 60? y hallo 9. y 5520. diezmilesimas.

FIGURAS INSCRIPTAS, Y CIRCVNSCRIPTAS.

	Figuras.		Circulo.	
	Inscriptas.	Circunscriptas.	Inscripto.	Circunscripto.
Triangulo.	17320.	34640.	2887.	5773.
Quadrado.	14142.	20000.	5000	7071.
Pentagono.	11756.	14530.	6882.	8507.
Hexagono.	10000	11547.	8660.	10000
Sieteavo.	8678.	9630	10384	11524
Ochavo.	7654.	8284	12071.	13066
Nonavo.	6840.	7297	13704	14619
Diezavo.	6180.	6498	15388.	16180
Dozavo.	5176.	5358.	18660.	19319.

Da

Dado el circulo hallar las figuras.

3 *Regla* 1. *Dado el circulo hallar las figuras inscriptas. Como* 10000. *al numero correspendiente à la figura inscripta, en la Tabla: assi el radio dado del circulo, al lado de la figura.*

Exemplo. Vn circulo tiene 6. palmos de radio, ò semidiametro, pidese el lado del Pentagono inscripto. Digo. Si 10000. dan 11756. què daran 6. y se hallan 7. y 536. diezmilesimas partes de palmo.

4 *Regla* 2. *Dado el circulo hallar las figuras circunscriptas. Como* 10000. *al numero correspondiente à la figura en las circunscriptas, assi el radio dado al lado de la figura.*

Exemplo. Vn circulo tiene 6. palmos de radio, pidese el lado del Pētagono circunscripto. Si 10000. dan 14530. que daràn 6. y hallo 8. y 7180. diezmilesimas.

Dadas las figuras hallar el circulo.

5 *Regla. Como* 10000. *al numero de la Tabla correspondiente à la figura; assi el lado dado de la figura al radio, ò semidiametro del circulo.*

Exemplo 1. Vn triangulo equilatero tiene 9. palmos de lado, pidese el circulo inscripto. Digo: Si 10000. dan 2887. que daràn 9? y daràn 2. palmos, y 5983. diezmilesimas.

Exemplo 2. Vn Pentagono tiene de lado 5. palmos, pidese el circulo circunscripto. Digo: Si 10000. dan 8507. que daràn 5? y hallo dan 4. palmos, y 2535. diezmilesimas.

3. SVPERFICIES DE LAS FIGURAS.

	Dado el lado, hallar la superficie.	Dada la circunferencia, hallar la superficie.	Dada la superficie, hallar el lado.	Dada la superficie, hallar la circunferencia.
Triangulo.	4330	481.	15186.	207845.
Quadrado.	10000	625.	10000	160000
Pentagono.	17205	688.	5812.	145308.
Hexagono.	25981	722.	3849	138568.
Sieteavo.	36339	742.	2752.	134844.
Ochavo.	48284.	754.	2071.	132549.
Nonavo.	61818.	763.	1618.	131028.
Diezavo.	76942.	769.	1300	129969.
Dozavo.	111961.	778.	893.	128619.
Circulo.	31416.	796.	3183.	125689.

Dado el lado, hallar la superficie.

6 *Regla: Como* 10000. *al numero de la primer coluna: assi el quadrado del lado à la superficie de la figura.*

Exemplo. Vn Pentagono tiene 6. palmos de lado, pidese la superficie. Hagase la regla de tres: Si 10000. dan 17205. que daràn 36? que es el quadrado de 6. y se hallan 61. palmo, y 9380. diezmilesimas.

Dada la circunferencia, hallar la superficie.

7 *Regla: Como* 10000. *al numero de la segunda coluna; assi el quadrado de la circunferencia, à la superficie de la figura.*

Exemplo. La circunferencia de vn Hexagono tiene 24. palmos, pidese su superficie. El quadrado de 24. es 576. Digo, pues, si 10000. dan 722. que daràn 576? y se hallan 41. palmo, y 5872. diezmilesimas.

Dada la superficie, hallar el lado.

8 *Regla: Como* 10000. *al numero de la tercer coluna: assi la superficie dada al quadrado del lado que se pide.*

Exemplo. La superficie de vn Pentagono tiene 60. palmos,

mos, pidese su lado. Digo: Si 10000. dan 5812. que daràn 60? y salen 34. palmos, y 8720. diezmilesimas. Cuya raiz quadrada es casi 5. y medio, y este es el lado.

Dada la superficie, hallar la circunferencia.

9 *Regla: Como* 10000. *al numero de la quarta coluna, assi la superficie dada al quadrado de la circunferencia.*

La superficie de vn circulo, es de 36. palmos, pidese su circunferencia. Digase: Si 10000. dan 125689. que daràn 36? y hallo 452. palmos, y 4804. diezmilesimas, quadrado de la circunferencia: luego su raiz quadrada, que es 21. y cerca de medio, es la circunferencia.

Reduzir vnas figuras à otras.

Reduzir vna figura à otra, consiste en hallar otra de diferente especie, que tenga, ò igual superficie, ò igual circunferencia.

Reduzir vna figura à otra, de igual circunferencia.

10 *Regla. Multipliquese el lado dado de la figura por el numero de sus lados, y el producto partase por el numero de los lados de la otra, y el quociente serà el lado de la figura que se pide.*

Exemplo. Vn Hexagono tiene 9. palmos de lado, pidese vn triangulo equilatero de igual circunferencia; porque el Hexagono tiene 6. lados, multiplico 9. por 6. y el producto 54. partido por 3. que son los lados del triangulo, dà el quociente 18. y este es el lado del triangulo.

11 Si se pidiesse vn circulo de igual circunferencia à la de dicho Hexagono, se tomaria el producto 54. por circunferencia, y se hallaria el radio por la regla arriba puesta del circulo numero 1.

Si se diesse el radio del circulo, se buscaria su circunferencia, por la regla puesta en el lugar citado; y esta se partiria por 4. para hallar vn quadrado, ò por cinco, para hallar vn Pentagono, &c.

Reduzir vna figura à otra de igual superficie.

12 *Regla. Dado el lado, ò circunferencia de vna figura, se hallarà su superficie por la regla, num.* 6. *Con esta superficie, se hallarà el lado de la nueva figura por la regla, num.* 8. *y quedarà resuelto el Problema.*

Exemplo. Vn Quadrado tiene 8. palmos de lado: Pidese vn circulo de igual superficie; por la regla del num. 6. serà la superficie del quadrado 64. luego por la regla num. 8. digo: Si 10000. dan 3183. que daràn 64? y salen 20. y 3712. diezmilesimas, cuya raiz quadrada, que es algo mas de 4. es el radio del circulo que se pide.

Aumentar, ò disminuir las figuras.

13 *Regla: Los terminos de la proporcion dada, son proporcionales con los quadrados de los lados de las figuras semejantes, y assi se procederà como en los exemplos siguientes.*

Exemplo. 1. Vna figura (qualquiera que sea) tiene de lado 8. palmos, y quiere aumentarse, de manera que la superficie de la primera à la segunda, sea como 2. à 3. El quadrado de 8. es 64. Digo: Si 2. dan 3. que daràn 64? y sale 96. que es el quadrado del nuevo lado: luego la raiz quadrada de 96. que es casi 10. es el lado de la figura que se pide.

Exemplo 2. Vn circulo tiene 8. palmos de radio, quierese disminuir de tal suerte, que el primero al segundo sea como 16. à 9. El quadrado de 8. es 64. Digo, pues, si 16. dan 9. que daràn 64? y salen 36. cuya raiz quadrada 6. es el radio del circulo que se busca.

14 *Si la figura no fuere de lados iguales, se hallarà primeramente el vn lado, como antes:* 2. *se hallaràn los otros lados por regla de tres.*

Exemplo. Vn triangulo tiene vn lado de 6. palmos, el otro de 4. y el otro de 5. Quierese aumentar en proporcion de 9. à 16. Tomo el vn lado 6. su quadrado es 36. y hago la regla de tres: Si 9. dan 16. que daràn 36? y sale 64. cuya raiz quadrada es 8. y este serà vn lado del nuevo triangulo: Busco despues los otros lados por regla de tres, diziendo: Si 6. dan 4. luego 8. daràn 5. y vn tercio el lado segundo. Otra vez: Si 6. dan 5. luego 8. daràn 6. y 2. tercios, lado tercero: y assi en las demàs figuras de lados desiguales.

So-

Solidos inscriptos, y circunscriptos à la Esphera.

	Dada la Esphera, hallar el solido.		Dado el solido, hallar la Esphera.	
	Incripto.	Circunscripto.	Inscripta.	Circunscripta.
Tetraedro	16330.	48990	2041.	6124.
Cubo	11547.	20000	5000	8660
Octaedro	14142	24495	4082	7071
Dodecaedro	7136.	8981	11135.	14012.
Icosaedro.	10515.	13232	7558.	9511.

Dada la Esphera, hallar los Solidos.

15 *Regla. Hagase como* 10000. *al numero correspondiente en la Tabla* 1. *asi el radio de la Esphera dada, al lado del solido inscripto, ò circunscripto.*

Exemplo 1. Tiene vna Esphera 10. palmos de radio, pidese el tetraedro inscripto dentro de la Esphera. Digo: Si 10000. dan 16330. que daràn 10? y salen 16. y 3300. diezmilesimas.

Exemplo 2. Pidese el cubo circunscripto à la sobredicha Esphera. Digo: Si 10000. dan 20000. que daràn 10? y salen 20. palmos.

Dados los solidos, hallar las Espheras.

16 *Regla: Como* 10000. *al numero de la Tabla segunda, asi el lado del solido al radio de la Esphera incripta, ò circunscripta.*

Exemplo. Un Octaedro tiene cinco palmos de lado, pidese la Esphera inscripta. Si 10000. dan 4082. que daràn 5? y salen 2. y 410. diezmilesimas. En el mesmo caso se pide la Esphera circunscripta. Digase: Si 10000. dan 7071. que daràn 5? y salen 3. y 5355. diezmilesimas.

Superficie, y solidez de los cuerpos.

	Dado el lado, hallar la superficie.	Dada la superficie, hallar el lado.	Dado el lado, hallar la solidez.	Dada la solidez, hallar el lado.
Tetraedro	17320	5774.	1178.	84851.
Cubo	60000	1667.	10000.	10000
Octaedro	34640	2887.	4714.	21213
Dodecaedro	206457.	484.	76631.	1305.
Icosaedro	86600	1154.	21817.	4583.
Esphera	125664.	796.	41888.	2387.

Dado el lado, hallar la superficie.

17 *Regla: Como* 10000. *al numero de la coluna primera; asi el quadrado del lado à la superficie del cuerpo.*

Exemplo. Vna Esphera tiene 5. palmos de radio, pidese la superficie. Digase: Como 10000. à 125664. asi 25. quadrado de 5. à 314. palmos, y 1500. diezmilesimas de vn palmo; y esta es la superficie de la Esphera.

Dada la superficie, hallar el lado.

18 *Regla: Como* 10000. *al numero de la coluna* 2. *asi la superficie dada, al quadrado del lado del solido que se pide.*

Exemplo: Vn cubo tiene 96. palmos de superficie, pidese el lado. Digo: Si 10000. dan 1667. que daràn 96? y salen 16. cuya raiz 4. es el lado del cubo que se pide.

Dado el lado, hallar la solidez.

19 *Regla: Como* 10000. *al numero de la* 3. *coluna: asi el cubo del lado dado à la solidez del cuerpo que se pide.*

Exemplo: Vn octaedro tiene 10. palmos de lado, pidese su solidez; su cubo es 1000. Digo: Si 10000. dan 4714. que daràn 1000? y se hallan 471. y 4000. diezmilesimas; y esta es la solidez.

Dada la solidez, hallar el lado.

20 *Regla: Como* 10000. *al numero de la coluna* 4. *asi la solidez dada, al cubo del lado que se busca del cuerpo.*

Exemplo. Tiene vna Eſphera 115. palmos de ſolidez, pideſe el radio. Digaſe: Si 10000. dan 2387. que daràn 115? y ſe hallan 27. y 4505. diezmileſimas, cubo del lado; ſu raiz cubica 3. es con poca diferencia el radio de la Eſphera.

Reduzir vn cuerpo à otro de igual ſuperficie.

21 *Regla* 1. *Halleſe la ſuperficie del cuerpo dado, por el num.* 17. 2. *con aquella ſuperficie, halleſe el lado del nuevo cuerpo, por el num.* 18. *y quedarà reſuelto el problema.*

Exemplo. Vn cubo tiene 6. palmos de lado, pideſe vna Eſphera de igual ſuperficie à la de dicho cubo. La ſuperficie del cubo es 216. Digaſe aora: Si 10000. dan 796. que daràn 216? y ſalen 17. y 1936. diezmileſimas; cuya raiz quadrada es poco mas de 4. y eſte es el radio de la Eſphera de igual ſuperficie à la del cubo.

Reduzir vn cuerpo à otro de igual ſolidez.

22 *Regla* 1. *Halleſe la ſolidez del cuerpo dado, num.* 19. 2. *con eſta ſolidez ſe hallarà el lado del nuevo cuerpo, por el num.* 20.

Aumentar, ù diſminuir la ſolidez de los cuerpos.

Regla: Los terminos de la proporcion dada, ſon proporcionales con los cubos de los lados de los cuerpos: Con eſto ſe formarà la regla de tres, como en el ſiguiente.

Exemplo. Vn cubo tiene 10. palmos de lado, quiero aumentarle de ſuerte, que la ſolidez del primero à la del ſegundo, ſea como 2. à 3. El cubo de 10. es 1000. Formo, pues, la regla de tres, diziendo: Si 2. dan 3. que daràn 1000? y ſalen 1500. cuya raiz cubica es 11. $\frac{44}{100}$ lado del nuevo cuerpo, qualquier que ſea. Si la proporcion dada fuere de las ſuperficies, ſe obrarà como en el num. 13. Si el cuerpo fuere de lados deſiguales, ſe hallarà vn lado por la regla dada; y los demàs ſe ſacaràn por regla de tres, como en el num. 14.

Re-

Los Artifices para determinar el juſto precio de ſus obras, deven atender à la materia, y al trabajo. *Los precios del trabajo guardan la proporcion, que los quadrados de los lados, quando ſolo ſe trabaja la ſuperficie.* Pero *los precios de la materia guardan la proporcion de los cubos de los lados.*

Exemplo. Vna lampara de plata, que tiene 2. palmos de diametro, vale de manos 24. peſos: otra de 4. palmos de diametro, que guarde en todo la meſma proporcion, que coſtarà de manos? Para formar la regla de tres, tomo los quadrados de 2. y 4. que ſon 4. y 16. y digo: Si 4. dan 16. que daràn 24. y ſalen 96. peſos. Si la primera tiene 60. onzas de plata, que tendrà la ſegunda? Para formar eſta regla de tres, tomo los cubos de 2. y de 4. que ſon 8. y 64. y digo: Si 8. dàn 64. que daràn 60. onzas, y ſalen 480. onzas. De eſta regla han de vſar todos los Artifices que ponen el material, y labran la ſuperficie ſolamente.

Pero ſi ſe labra tambien lo interior, y mazizo de la obra, como en las paredes, y torres de ladrillo, ſe avrà de ſacar el precio del trabajo, formando la regla de tres por los cubos, como para ſacar la cantidad de la materia: y al reves los Doradores, que ſolo ponen el material en la ſuperficie, deven ſacar el valor de la materia de la meſma ſuerte que ſe ſaca el valor de las hechuras, formando la regla de tres por los quadrados de los lados.

Exemplo. Vn retablo, que tiene 20. palmos de ancho, ſe dora por 300. libras: Otro de la meſma forma, que tiene 30. palmos de ancho, por quanto ſe dorarà? Para reſolver la regla de tres, me valgo de los quadrados de 20. y 30. que ſon 400. y 900. Y digo: Si 400. dan 900. que daràn 300. libras? y ſe hallan 675. libras. Para ſacar la cantidad de oro que entrarà, hago la meſma regla de tres; y ſuponiendo por exemplo que en el primero entran 8000. panecillos de oro: Digo: Si 400. dan 900. que daràn 8000? y ſalen 18000. panecillos.

Eſto

Eſto ſe deve entender quando ay total ſemejanza en la obra, porque el precio puede ſer mayor, ò menor de lo que ſale por eſta regla, por muchas cauſas, como por aver mas, ò menos talla, ò relieve, ò por la mayor, ò menor perfeccion de la obra; para lo qual no ſe puede dar regla cierta.

FINIS.