Trifásica: Apuntes de Electrotecnia para Grados de Ingeniería

Autor: Ovidio Rabaza Castillo

INDICE

Tema1: Circuitos trifásicos
- Sistemas polifásicos
- Generación de sistemas trifásicos

Tema 2: Sistemas equilibrados
- Definiciones
- Sistemas equilibrados en estrella
- Sistemas equilibrados en triángulo

Tema 3: Sistemas desequilibrados
- Sistemas desequilibrados en estrella
- Sistemas desequilibrados en triángulo

Tema 4: Potencia de circuitos trifásicos
- Potencia
- Medida de potencia
- Corrección del factor de potencia

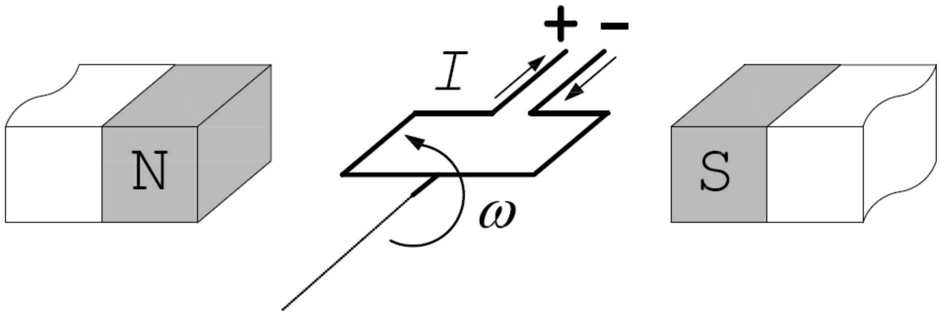
Bibliografía

Tema 1: Circuitos trifásicos

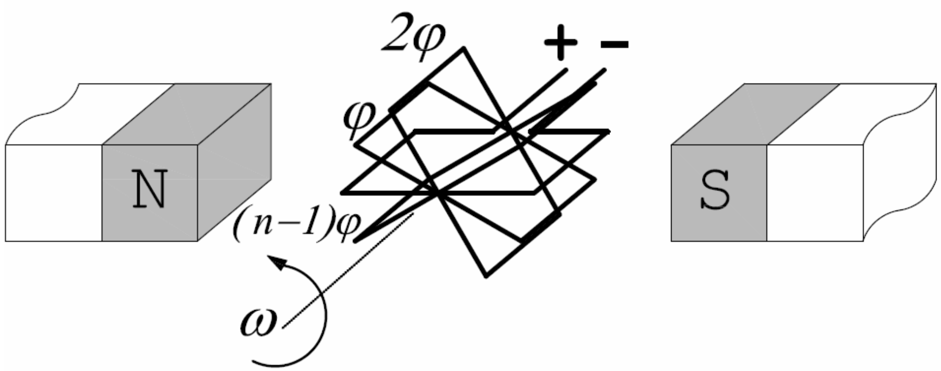
Índice

- Sistemas polifásicos
- Generación de sistemas trifásicos

Sistemas polifásicos



$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos \omega\, t$$



$$u_1(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot Cos\ \omega t$$

$$u_2(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot Cos\ (\omega t - \varphi)$$

$$u_3(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot Cos\ (\omega t - 2\varphi)$$

$$\vdots$$

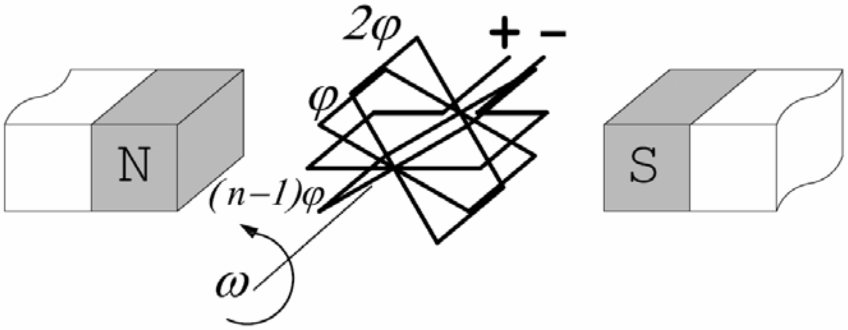
$$u_n(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot Cos\ (\omega t - (n-1)\varphi)$$

$$\boxed{n \cdot \varphi = 360^{o}}$$

Generación de sistemas trifásicos

- Fase

"Se denomina fase a cada una de las partes del circuito en la que se genera, transmite o utiliza una de las tensiones del sistema"



$$u_n(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot Cos\,(\omega t - (n-1)\varphi)$$

$$n \cdot \varphi = 360^o$$

$$n = 3\,(n^o\; de\;\; fases)$$

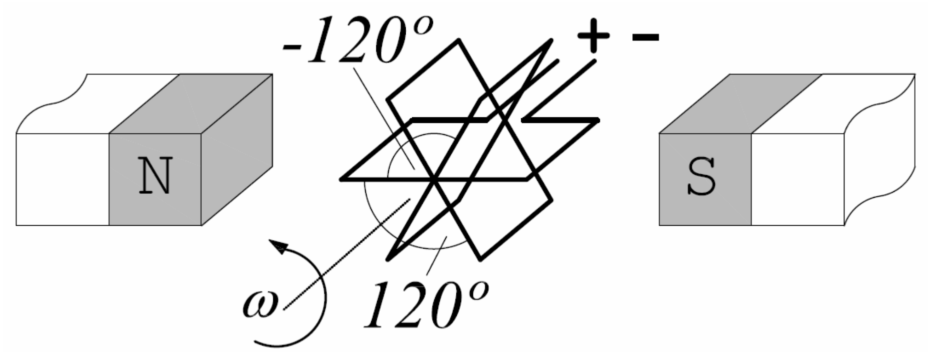
$$\varphi = 120^o$$

$$u_1(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot Cos\;\omega t$$

$$u_2(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot Cos\,(\omega t - 120)$$

$$u_3(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot Cos\,(\omega t - 240^o) = \sqrt{2} \cdot U \cdot Cos\,(\omega t + 120^o)$$

Generación de sistemas trifásicos



$$u_{AA'}(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot Cos\ \omega t \Rightarrow \overline{U}_{AA'} = U\angle 0^{o}$$

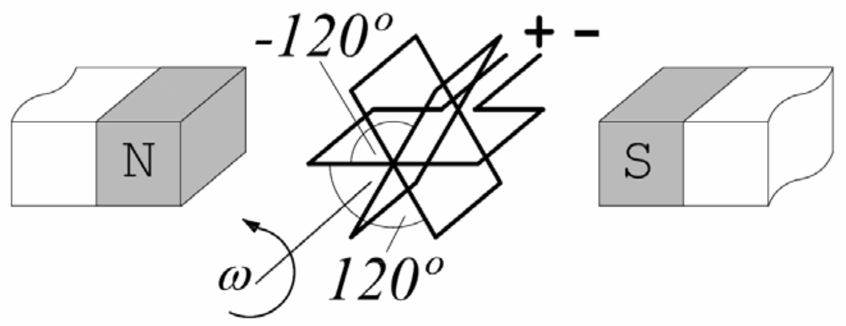
$$u_{BB'}(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot Cos\ (\omega t - 120) \Rightarrow \overline{U}_{BB'} = U\angle -120^{o}$$

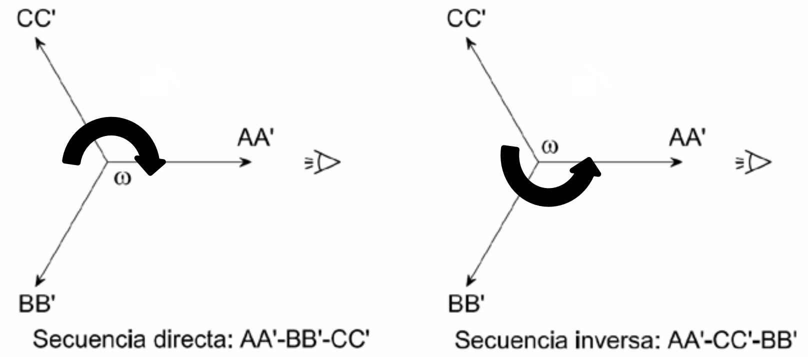
$$u_{CC'}(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot Cos\ (\omega t + 120^{o}) \Rightarrow \overline{U}_{CC'} = U\angle 120^{o}$$

Generación de sistemas trifásicos

- Secuencia de fases

Secuencia directa: ABC
Secuencia inversa: ACB





Secuencia directa: ABC

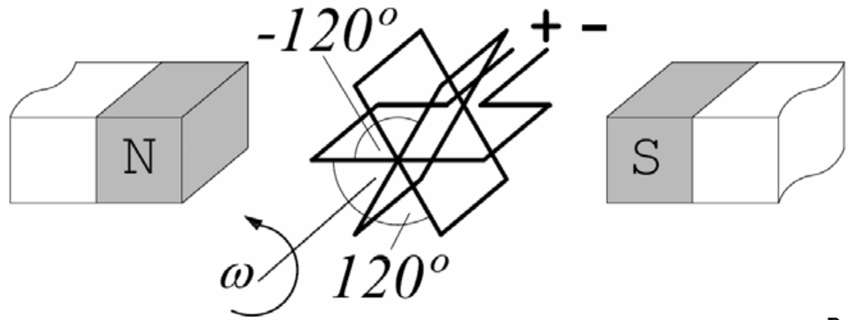
$$\overline{U}_{AA'} = U\angle 0^o$$
$$\overline{U}_{BB'} = U\angle -120^o$$
$$\overline{U}_{CC'} = U\angle +120^o$$

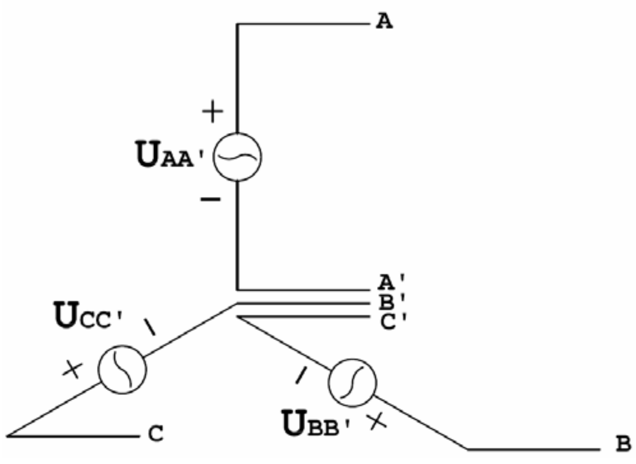
Secuencia directa: ACB

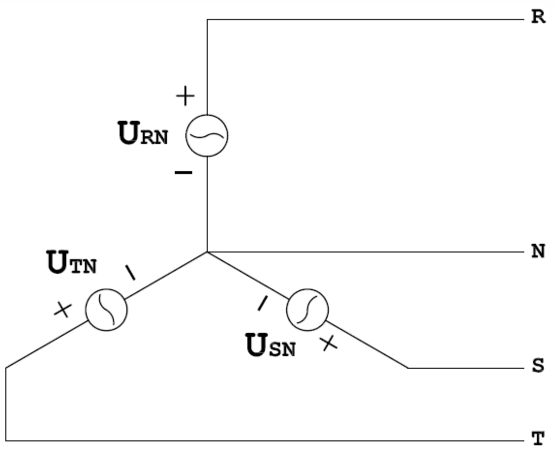
$$\overline{U}_{AA'} = U\angle 0^o$$
$$\overline{U}_{BB'} = U\angle +120^o$$
$$\overline{U}_{CC'} = U\angle -120^o$$

Generación de sistemas trifásicos

- Fuentes en estrella







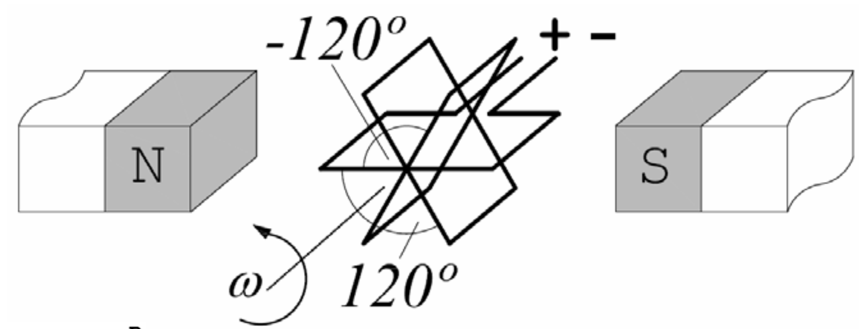
$$\overline{U}_{RN} = U\angle 0^{\circ}$$

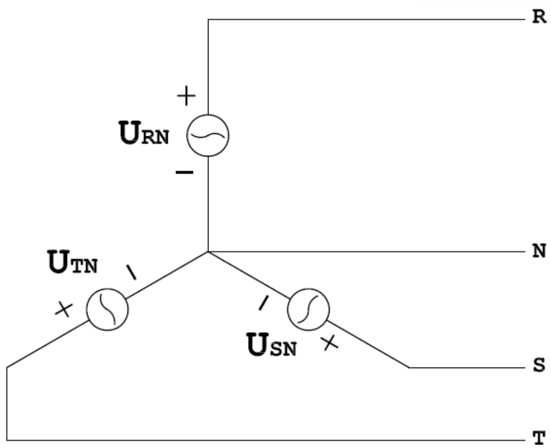
$$\overline{U}_{SN} = U\angle -120^{\circ}$$

$$\overline{U}_{TN} = U\angle 120^{\circ}$$

Generación de sistemas trifásicos

- Fuentes en estrella





$$\overline{U}_{RN} = U\angle 0^{o}$$

$$\overline{U}_{SN} = U\angle -120^{o}$$

$$\overline{U}_{TN} = U\angle 120^{o}$$

Generación de sistemas trifásicos

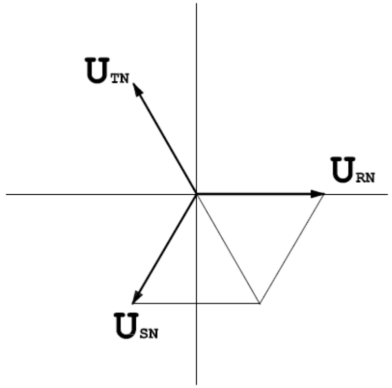
- Tensiones simples o de fase

“Es la tensión entre los bornes de cada uno de los generadores”

$$\overline{U}_{RN} = U\angle 0^{o}$$

$$\overline{U}_{SN} = U\angle -120^{o}$$

$$\overline{U}_{TN} = U\angle 120^{o}$$



$$\overline{U}_{RN} + \overline{U}_{SN} + \overline{U}_{TN} = U_F\angle 0^{o} + U_F\angle -120^{o} + U_F\angle 120^{o} = U_F + U_F\left[\cos 120 - \cancel{j\mathrm{sen}120}\right] + U_F\left[\cos 120 + \cancel{j\mathrm{sen}120}\right] =$$

$$= U_F\left[1 + 2\cos 120\right] = U_F\left[1 + 2\cdot\frac{-1}{2}\right] = 0$$

$$\boxed{\overline{U}_{RN} + \overline{U}_{SN} + \overline{U}_{TN} = 0}$$

Generación de sistemas trifásicos

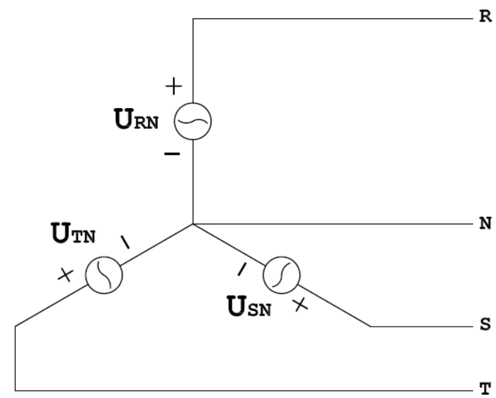
- Tensiones compuestas o de línea

"Es la tensión entre cada dos fases"

$$\overline{U}_{RS} = ?$$

$$\overline{U}_{ST} = ?$$

$$\overline{U}_{TR} = ?$$



$$\overline{U}_{RS} = \overline{U}_{RN} + \overline{U}_{NS} = \overline{U}_{RN} - \overline{U}_{SN} = U\angle 0^{o} - U\angle -120^{o} = U - U\left[\cos 120 - j sen 120\right] =$$

$$= U\left[1 + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = U\left[\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \sqrt{3}\cdot U\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right] = \sqrt{3}\cdot U\left[\cos 30^{o} + j sen 30^{o}\right] =$$

$$= \sqrt{3}\cdot U\angle 30^{o} = \sqrt{3}\cdot U\angle(0^{o} + 30^{o}) = U\angle 0^{o}\cdot\sqrt{3}\angle 30^{o} = \overline{U}_{RN}\sqrt{3}\angle 30^{o}$$

$$\boxed{\overline{U}_{RS} = \overline{U}_{RN}\sqrt{3}\angle 30^{o}}$$

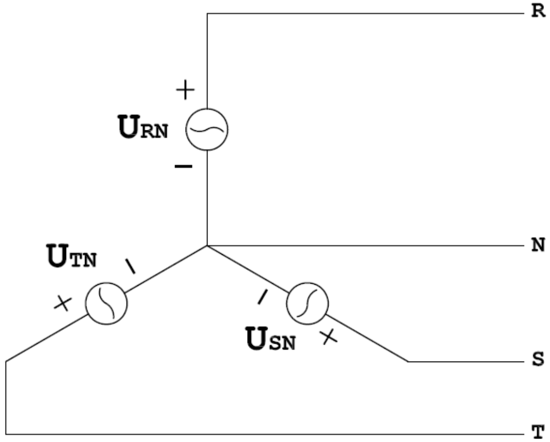
Generación de sistemas trifásicos

- Tensiones compuestas o de línea

$$\overline{U}_{RS} = ?$$

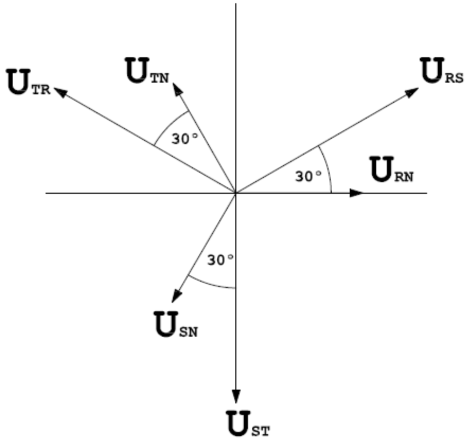
$$\overline{U}_{ST} = ?$$

$$\overline{U}_{TR} = ?$$



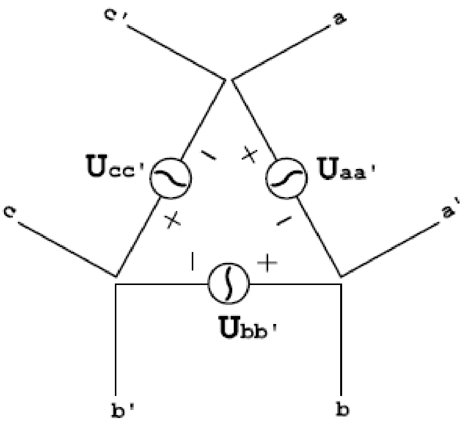
$$\begin{aligned} \overline{U}_{RS} &= \overline{U}_{RN}\sqrt{3}\angle 30^{o} & \overline{U}_{RS} &= U_{L}\angle 30^{o} \\ \overline{U}_{ST} &= \overline{U}_{SN}\sqrt{3}\angle 30^{o} \Rightarrow & \overline{U}_{ST} &= U_{L}\angle -90^{o} \\ \overline{U}_{TR} &= \overline{U}_{TN}\sqrt{3}\angle 30^{o} & \overline{U}_{TR} &= U_{L}\angle 150^{o} \end{aligned}$$

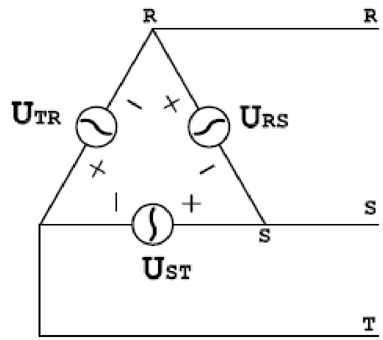
$$\boxed{U_{L} = \sqrt{3}\cdot U}$$

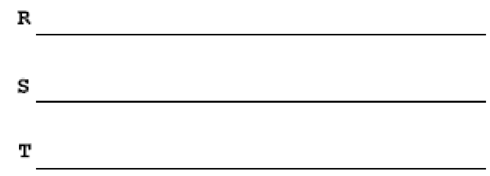


Generación de sistemas trifásicos

- Fuentes en triángulo







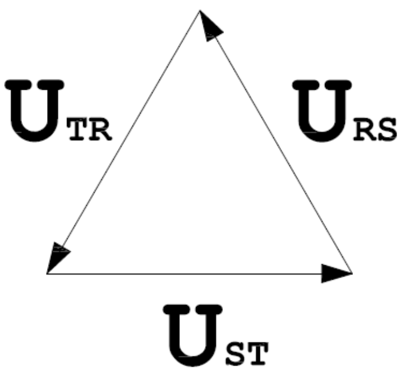
$$\overline{U}_{RS} = U\angle 0^{o}$$

$$\overline{U}_{ST} = U\angle -120^{o}$$

$$\overline{U}_{TR} = U\angle 120^{o}$$

$$\boxed{U_L = U}$$

$$\boxed{\overline{U}_{RN} + \overline{U}_{SN} + \overline{U}_{TN} = 0}$$



Tema 2: Sistemas equilibrados

Índice

- Definiciones
- Sistemas equilibrados en estrella
- Sistemas equilibrados en triángulo

Definiciones

- Sistemas equilibrados en carga

“Un sistema trifásico es equilibrado en carga cuando las cargas son iguales entre sí”

- Sistemas desequilibrados en carga

“Un sistema trifásico es desequilibrado en carga cuando las cargas no son iguales entre sí”

- Tensiones simples o de fase

“Es la tensión entre los bornes de cada uno de los generadores ó de las cargas”

- Tensiones compuestas o de línea

“Es la tensión entre cada dos fases”

- Corrientes simples o de fase

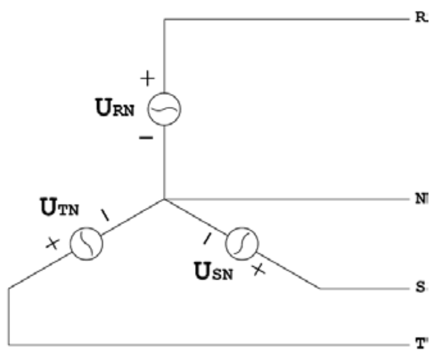
“Es la intensidad que atraviesa a cada uno de los generadores ó de las cargas”

- Corrientes compuestas o de línea

“Es la intensidad que sale de los bornes de los generadores”

Definiciones

- Repaso (Tensión de línea y de fase en generación)

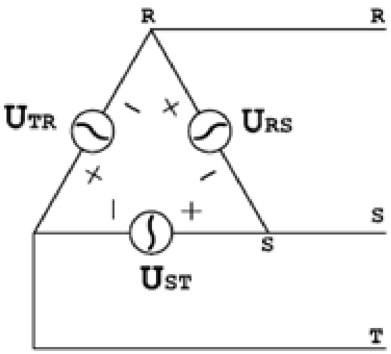


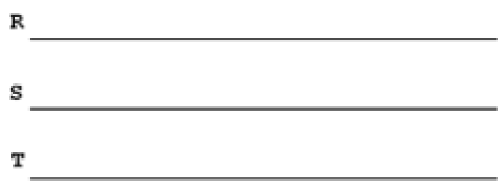
$$\overline{U}_{RN} = U\angle 0^{o}$$
$$\overline{U}_{SN} = U\angle -120^{o}$$
$$\overline{U}_{TN} = U\angle 120^{o}$$

$$\overline{U}_{RS} = U_L\angle 30^{o}$$
$$\overline{U}_{ST} = U_L\angle -90^{o}$$
$$\overline{U}_{TR} = U_L\angle 150^{o}$$

$$U_L = \sqrt{3}\cdot U$$

$$\overline{U}_{RN} + \overline{U}_{SN} + \overline{U}_{TN} = 0$$



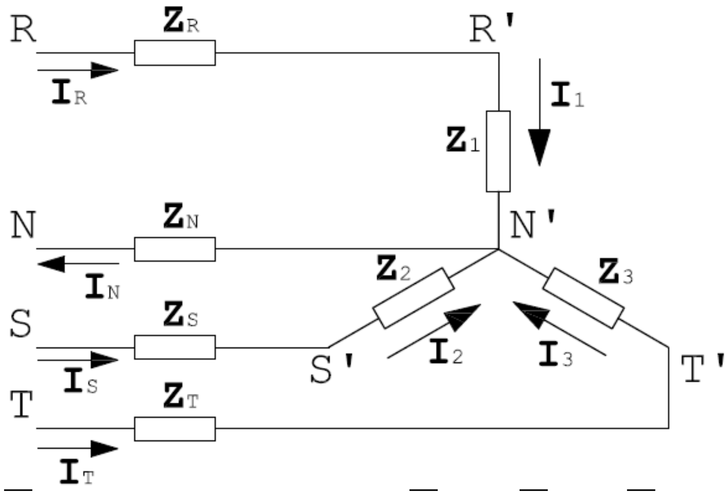


$$\overline{U}_{RS} = U\angle 0^{o}$$
$$\overline{U}_{ST} = U\angle -120^{o}$$
$$\overline{U}_{TR} = U\angle 120^{o}$$

$$U_L = U$$

Sistemas equilibrados en estrella

- Sistemas equilibrados en estrella con neutro



$\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$ corrientes simples o de fase

$\bar{I}_R, \bar{I}_S, \bar{I}_T$ corrientes compuestas o de línea

$$\bar{Z}_A = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_R;\ \bar{Z}_B = \bar{Z}_2 + \bar{Z}_S;\ \bar{Z}_C = \bar{Z}_3 + \bar{Z}_T$$

$$\bar{U}_{RN} = \bar{U}_{RN'} + \bar{U}_{N'N};\ \bar{U}_{SN} = \bar{U}_{SN'} + \bar{U}_{N'N};\ \bar{U}_{TN} = \bar{U}_{TN'} + \bar{U}_{N'N}$$

$$\frac{\bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_N} = \bar{I}_N = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_{RN'}}{\bar{Z}_A} + \frac{\bar{U}_{SN'}}{\bar{Z}_B} + \frac{\bar{U}_{TN'}}{\bar{Z}_C} = \frac{\bar{U}_{RN} - \bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_A} + \frac{\bar{U}_{SN} - \bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_B} + \frac{\bar{U}_{TN} - \bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_C} = \frac{\bar{U}_{RN}}{\bar{Z}_A} + \frac{\bar{U}_{SN}}{\bar{Z}_B} + \frac{\bar{U}_{TN}}{\bar{Z}_C} - $$

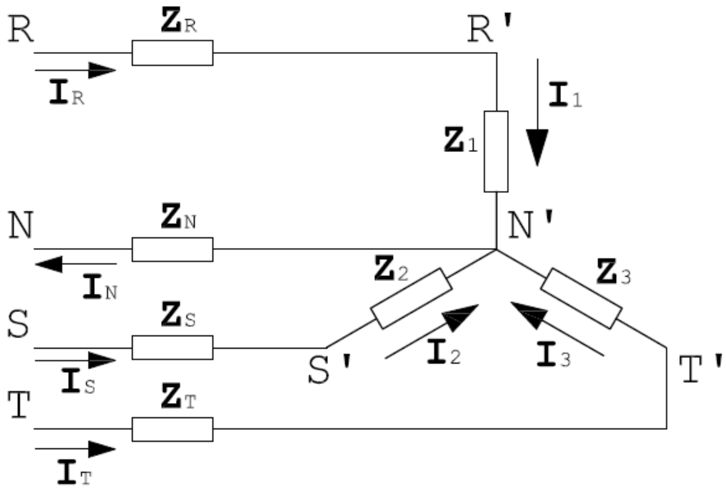
$$- \frac{\bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_A} - \frac{\bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_B} - \frac{\bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_C}$$

$$\boxed{\bar{U}_{N'N} = \frac{\dfrac{\bar{U}_{RN}}{\bar{Z}_A} + \dfrac{\bar{U}_{SN}}{\bar{Z}_B} + \dfrac{\bar{U}_{TN}}{\bar{Z}_C}}{\dfrac{1}{\bar{Z}_N} + \dfrac{1}{\bar{Z}_A} + \dfrac{1}{\bar{Z}_B} + \dfrac{1}{\bar{Z}_C}}}$$

¡Desplazamiento del neutro!

Sistemas equilibrados en estrella

- Sistemas equilibrados en estrella con neutro



$$\boxed{\overline{U}_{N'N} = \frac{\dfrac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_A} + \dfrac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_B} + \dfrac{\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}_C}}{\dfrac{1}{\overline{Z}_N} + \dfrac{1}{\overline{Z}_A} + \dfrac{1}{\overline{Z}_B} + \dfrac{1}{\overline{Z}_C}}}$$

$$\overline{Z}_A = \overline{Z}_B = \overline{Z}_C = \overline{Z}$$

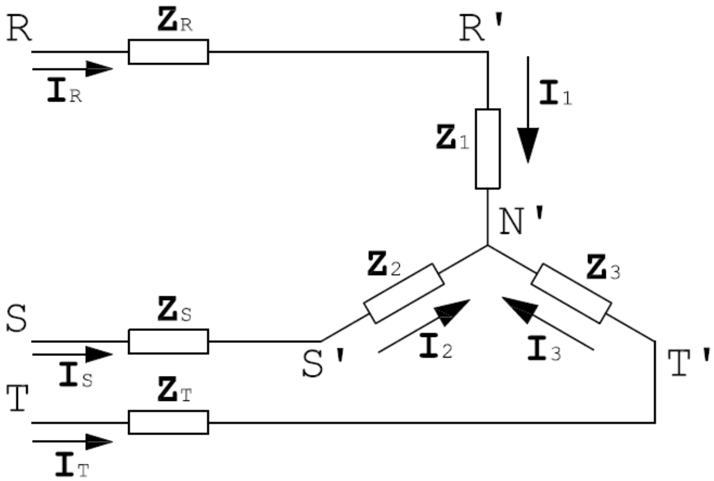
$$\overline{U}_{RN} + \overline{U}_{SN} + \overline{U}_{TN} = 0$$

$$\overline{U}_{N'N} = \frac{\dfrac{\overline{U}_{RN} + \overline{U}_{SN} + \overline{U}_{TN}}{\overline{Z}}}{\dfrac{1}{\overline{Z}_N} + \dfrac{3}{\overline{Z}}} = 0$$

$$\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = \overline{I}_N = \frac{\overline{U}_{NN'}}{\overline{Z}_N} = 0$$

Sistemas equilibrados en estrella

- Sistemas equilibrados en estrella sin neutro



$$\boxed{\overline{U}_{N'N}=\frac{\dfrac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_A}+\dfrac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_B}+\dfrac{\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}_C}}{\dfrac{1}{\overline{Z}_N}+\dfrac{1}{\overline{Z}_A}+\dfrac{1}{\overline{Z}_B}+\dfrac{1}{\overline{Z}_C}}}$$

$$\overline{Z}_A=\overline{Z}_B=\overline{Z}_C=\overline{Z}$$

$$\overline{U}_{RN}+\overline{U}_{SN}+\overline{U}_{TN}=0$$

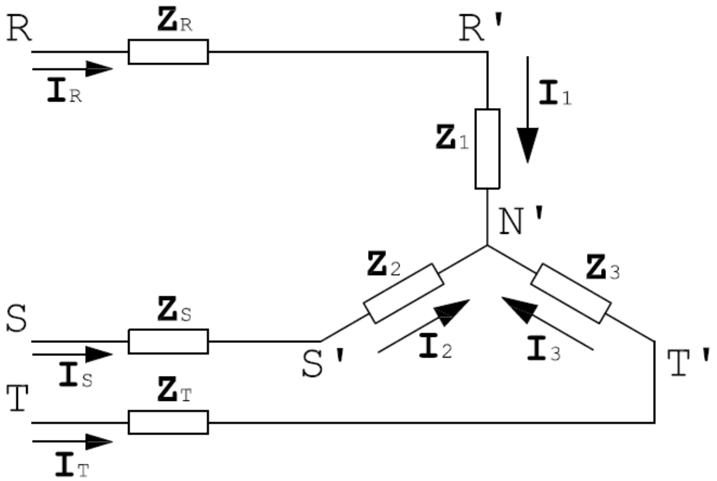
$$\overline{U}_{N'N}=\frac{\dfrac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_A}+\dfrac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_B}+\dfrac{\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}_C}}{\dfrac{1}{\overline{Z}_N}+\dfrac{1}{\overline{Z}_A}+\dfrac{1}{\overline{Z}_B}+\dfrac{1}{\overline{Z}_C}}=\frac{\dfrac{\overline{U}_{RN}+\overline{U}_{SN}+\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}}}{\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{3}{\overline{Z}}}=0$$

1ª Ley de Kirchhoff

$$\overline{I}_1+\overline{I}_2+\overline{I}_3=0$$

Sistemas equilibrados en estrella

- Sistemas equilibrados en estrella sin neutro



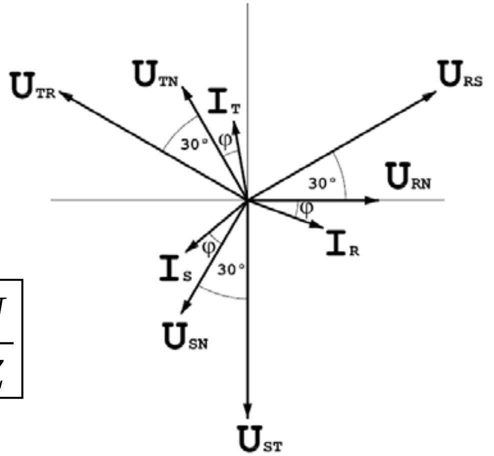
$$\overline{U}_{N'N} = 0$$

$$\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 0$$

$$\overline{U}_{RN} = \overline{U}_{RN'} + \overline{U}_{N'N} = \overline{U}_{RN'}$$

$$\overline{U}_{SN} = \overline{U}_{SN'} + \overline{U}_{N'N} = \overline{U}_{SN'}$$

$$\overline{U}_{TN} = \overline{U}_{TN'} + \overline{U}_{N'N} = \overline{U}_{TN'}$$



$$\overline{I}_1 = \overline{I}_R = \frac{\overline{U}_{RN'}}{\overline{Z}_A} = \frac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_A} = \frac{U\angle 0^\circ}{Z\angle\varphi} = \frac{U}{Z}\angle -\varphi$$

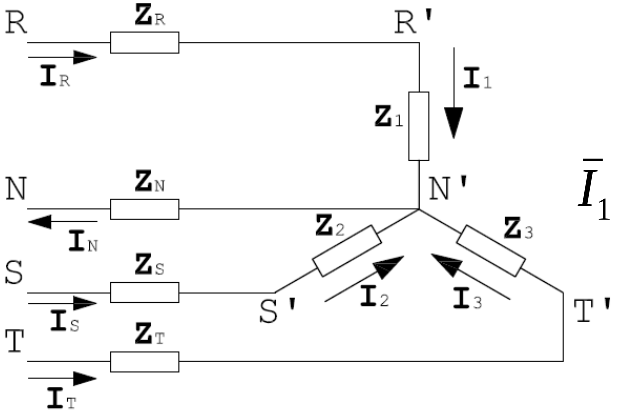
$$\overline{I}_2 = \overline{I}_S = \frac{\overline{U}_{SN'}}{\overline{Z}_B} = \frac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_B} = \frac{U\angle -120^\circ}{Z\angle\varphi} = \frac{U}{Z}\angle -120^\circ - \varphi$$

$$\overline{I}_3 = \overline{I}_T = \frac{\overline{U}_{TN'}}{\overline{Z}_C} = \frac{\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}_C} = \frac{U\angle 120^\circ}{Z\angle\varphi} = \frac{U}{Z}\angle 120^\circ - \varphi$$

$$\boxed{I_L = I \equiv \frac{U}{Z}}$$

Sistemas equilibrados en estrella

- Sistemas equilibrados en estrella (resumen)

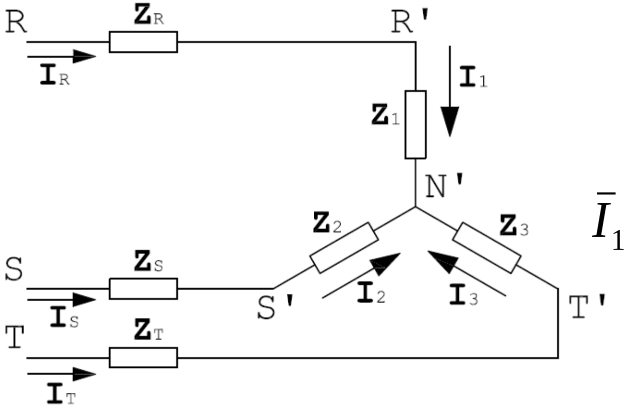


$$\overline{U}_{N'N} = 0$$

$$\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = \overline{I}_N = 0$$

$$\overline{U}_{RN} + \overline{U}_{SN} + \overline{U}_{TN} = 0$$

$$\overline{U}_{R'N'} + \overline{U}_{S'N'} + \overline{U}_{T'N'} = 0$$



$$\overline{U}_{N'N} = 0$$

$$\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 0$$

$$\overline{I}_1 = \overline{I}_R = \frac{U}{Z}\angle -\varphi$$

$$\overline{I}_2 = \overline{I}_S = \frac{U}{Z}\angle -120^{\circ} - \varphi$$

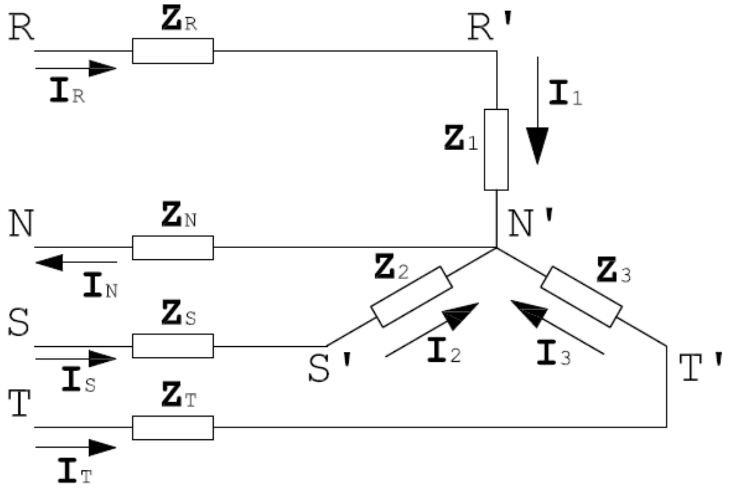
$$\overline{I}_3 = \overline{I}_T = \frac{U}{Z}\angle 120^{\circ} - \varphi$$

Sistemas equilibrados en estrella

Ejemplo: en el sistema de la figura se sabe que la tensión de línea en la carga es 380 V. La carga de cada fase es 10∟45ºΩ, la impedancia de línea es $\mathbf{Z_L}$=(1+**j**)Ω/fase y la secuencia de fases es directa (R-S-T). Tomando como referencia $\mathbf{U_{R'N'}}$, en la carga, determinar:

a) En un sistema con neutro, cuya impedancia es $\mathbf{Z_N}$=1+**j** Ω, las intensidades y tensiones de fase y línea en el generador.

b) Si se elimina el neutro, las mismas variables anteriores.



$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_{R'N'}}{\bar{Z}_1} = \frac{220\angle 0^o}{10\angle 45^o} = 22\angle -45^o$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_{S'N'}}{\bar{Z}_2} = \frac{220\angle -120^o}{10\angle 45^o} = 22\angle -165^o$$

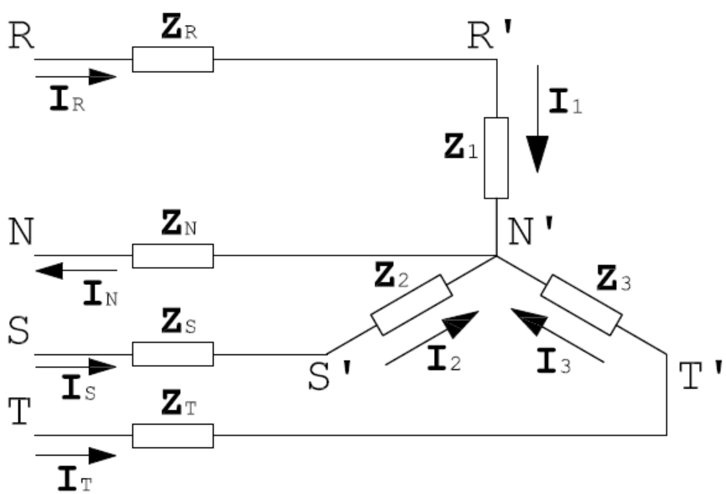
$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_{T'N'}}{\bar{Z}_3} = \frac{220\angle 120^o}{10\angle 45^o} = 22\angle 75^o$$

Sistemas equilibrados en estrella

Ejemplo: en el sistema de la figura se sabe que la tensión de línea en la carga es 380 V. La carga de cada fase es $10\angle 45^{\circ}\Omega$, la impedancia de línea es $\mathbf{Z_L}$=(1+**j**)Ω/fase y la secuencia de fases es directa (R-S-T). Tomando como referencia $\mathbf{U_{R'N'}}$, en la carga, determinar:

a) En un sistema con neutro, cuya impedancia es $\mathbf{Z_N}$=1+**j** Ω, las intensidades y tensiones de fase y línea en el generador.

b) Si se elimina el neutro, las mismas variables anteriores.



$$\overline{U}_{RN} = \overline{I}_R \cdot \overline{Z}_R + \overline{U}_{R'N'} + \overline{U}_{N'N} =$$

$$= 22\angle -45^{\circ} \cdot \sqrt{2}\angle 45^{\circ} + 220\angle 0^{\circ} = 251.1\angle 0^{\circ}$$

$$\overline{U}_{SN} = \overline{I}_S \cdot \overline{Z}_S + \overline{U}_{S'N'} + \overline{U}_{N'N} =$$

$$= 22\angle -165^{\circ} \cdot \sqrt{2}\angle 45^{\circ} + 220\angle -120^{\circ} = 251.1\angle -120^{\circ}$$

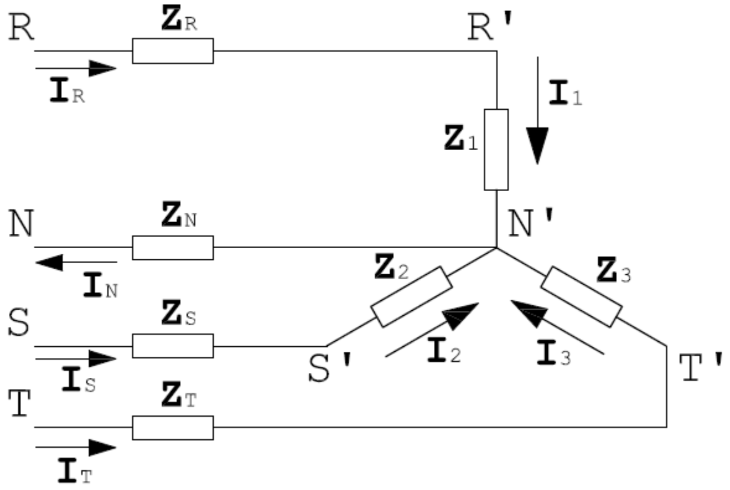
$$\overline{U}_{TN} = \overline{I}_T \cdot \overline{Z}_T + \overline{U}_{T'N'} + \overline{U}_{N'N} =$$

$$= 22\angle 75^{\circ} \cdot \sqrt{2}\angle 45^{\circ} + 220\angle 120^{\circ} = 251.1\angle 120^{\circ}$$

Sistemas equilibrados en estrella

Ejemplo: en el sistema de la figura se sabe que la tensión de línea en la carga es 380 V. La carga de cada fase es $10\llcorner 45^{o}\Omega$, la impedancia de línea es $\mathbf{Z_L}=(1+\mathbf{j})\Omega$/fase y la secuencia de fases es directa (R-S-T). Tomando como referencia $\mathbf{U_{R'N'}}$ en la carga, determinar:

a) En un sistema con neutro, cuya impedancia es $\mathbf{Z_N}=1+\mathbf{j}\ \Omega$, las intensidades y tensiones de fase y línea en el generador.
b) Si se elimina el neutro, las mismas variables anteriores.



$$\overline{U}_{RS} = \overline{U}_{RN}\sqrt{3}\angle 30^{o} = 434.9\angle 30^{o}$$

$$\overline{U}_{ST} = \overline{U}_{SN}\sqrt{3}\angle 30^{o} = 434.9\angle -90^{o}$$

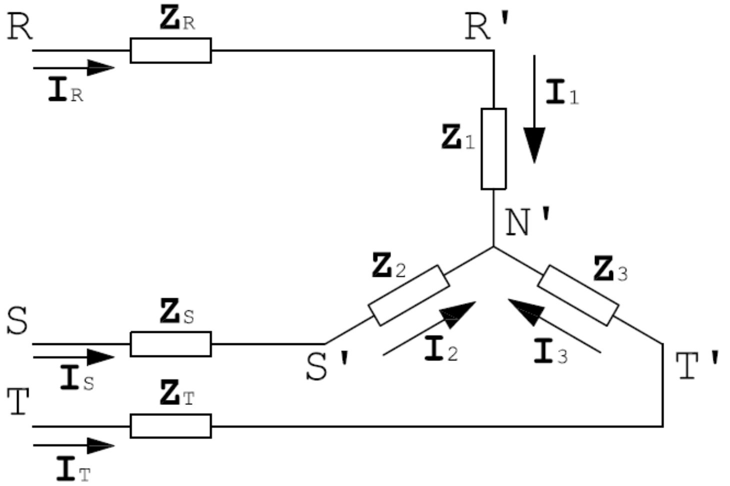
$$\overline{U}_{TR} = \overline{U}_{TN}\sqrt{3}\angle 30^{o} = 434.9\angle 150^{o}$$

Sistemas equilibrados en estrella

Ejemplo: en el sistema de la figura se sabe que la tensión de línea en la carga es 380 V. La carga de cada fase es $10\angle 45^{o}\Omega$, la impedancia de línea es $\mathbf{Z_L}=(1+\mathbf{j})\Omega$/fase y la secuencia de fases es directa (R-S-T). Tomando como referencia $\mathbf{U_{R'N'}}$, en la carga, determinar:

a) En un sistema con neutro, cuya impedancia es $\mathbf{Z_N}=1+\mathbf{j}\ \Omega$, las intensidades y tensiones de fase y línea en el generador.

b) Si se elimina el neutro, las mismas variables anteriores.



$$\bar{I}_1 = \frac{\overline{U}_{R'N'}}{\overline{Z}_1} = \frac{220\angle 0^{o}}{10\angle 45^{o}} = 22\angle -45^{o}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\overline{U}_{S'N'}}{\overline{Z}_2} = \frac{220\angle -120^{o}}{10\angle 45^{o}} = 22\angle -165^{o}$$

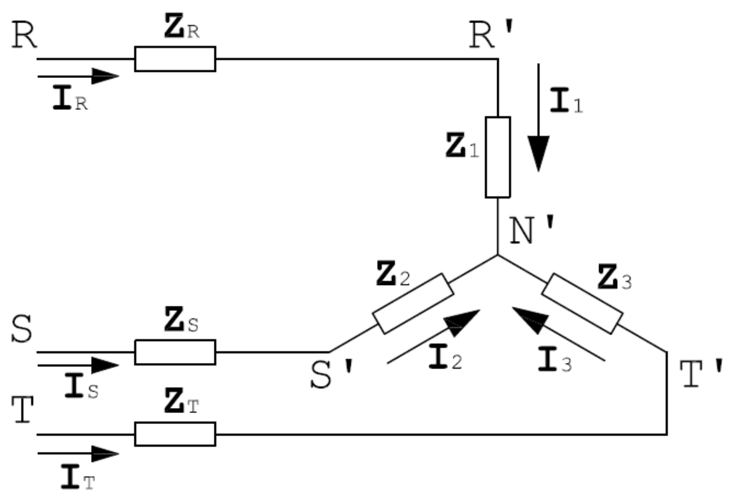
$$\bar{I}_3 = \frac{\overline{U}_{T'N'}}{\overline{Z}_3} = \frac{220\angle 120^{o}}{10\angle 45^{o}} = 22\angle 75^{o}$$

Sistemas equilibrados en estrella

Ejemplo: en el sistema de la figura se sabe que la tensión de línea en la carga es 380 V. La carga de cada fase es $10\angle 45^o \Omega$, la impedancia de línea es $\mathbf{Z_L}$=(1+**j**)Ω/fase y la secuencia de fases es directa (R-S-T). Tomando como referencia $\mathbf{U_{R'N'}}$, en la carga, determinar:

a) En un sistema con neutro, cuya impedancia es $\mathbf{Z_N}$=1+**j** Ω, las intensidades y tensiones de fase y línea en el generador.

b) Si se elimina el neutro, las mismas variables anteriores.



$$\overline{U}_{RN} = \overline{I}_R \cdot \overline{Z}_R + \overline{U}_{R'N'} + \overline{U}_{N'N} =$$
$$= 22\angle -45^o \cdot \sqrt{2}\angle 45^o + 220\angle 0^o = 251.1\angle 0^o$$

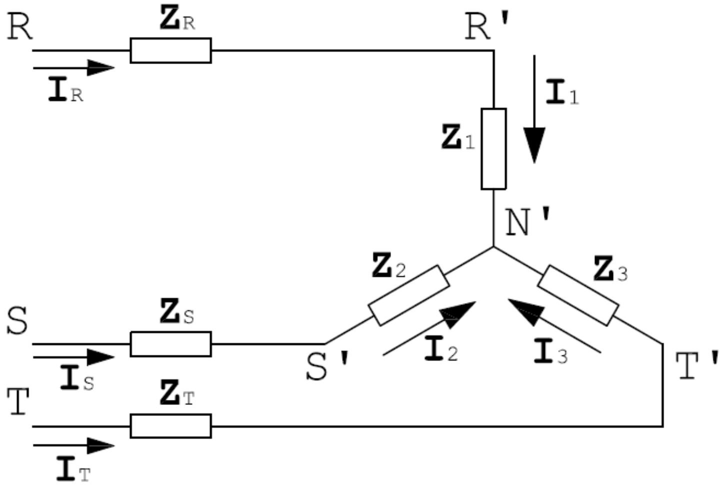
$$\overline{U}_{SN} = \overline{I}_S \cdot \overline{Z}_S + \overline{U}_{S'N'} + \overline{U}_{N'N} =$$
$$= 22\angle -165^o \cdot \sqrt{2}\angle 45^o + 220\angle -120^o = 251.1\angle -120^o$$

$$\overline{U}_{TN} = \overline{I}_T \cdot \overline{Z}_T + \overline{U}_{T'N'} + \overline{U}_{N'N} =$$
$$= 22\angle 75^o \cdot \sqrt{2}\angle 45^o + 220\angle 120^o = 251.1\angle 120^o$$

Sistemas equilibrados en estrella

Ejemplo: en el sistema de la figura se sabe que la tensión de línea en la carga es 380 V. La carga de cada fase es $10\llcorner 45^{o}\Omega$, la impedancia de línea es $\mathbf{Z_L}=(1+\mathbf{j})\Omega$/fase y la secuencia de fases es directa (R-S-T). Tomando como referencia $\mathbf{U_{R'N'}}$ en la carga, determinar:

a) En un sistema con neutro, cuya impedancia es $\mathbf{Z_N}=1+\mathbf{j}\ \Omega$, las intensidades y tensiones de fase y línea en el generador.
b) Si se elimina el neutro, las mismas variables anteriores.

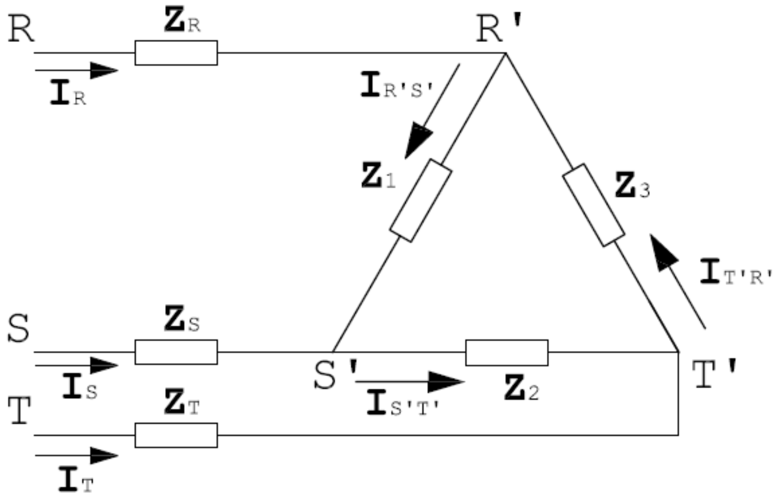


$$\overline{U}_{RS} = \overline{U}_{RN}\sqrt{3}\angle 30^{o} = 434.9\angle 30^{o}$$
$$\overline{U}_{ST} = \overline{U}_{SN}\sqrt{3}\angle 30^{o} = 434.9\angle -90^{o}$$
$$\overline{U}_{TR} = \overline{U}_{TN}\sqrt{3}\angle 30^{o} = 434.9\angle 150^{o}$$

¡El sistema es equilibrado y da igual que haya neutro como que no haya!

Sistemas equilibrados en triángulo

- Corrientes de línea y corrientes de fase



$$\overline{I}_R = \overline{I}_{R'S'} - \overline{I}_{T'R'}$$
$$\overline{I}_S = \overline{I}_{S'T'} - \overline{I}_{R'S'}$$
$$\overline{I}_T = \overline{I}_{T'R'} - \overline{I}_{S'T'}$$
$$\overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_T = \overline{I}_{R'S'} - \overline{I}_{T'R'} + \overline{I}_{S'T'} - \overline{I}_{R'S'} + \overline{I}_{T'R'} - \overline{I}_{S'T'} = 0$$

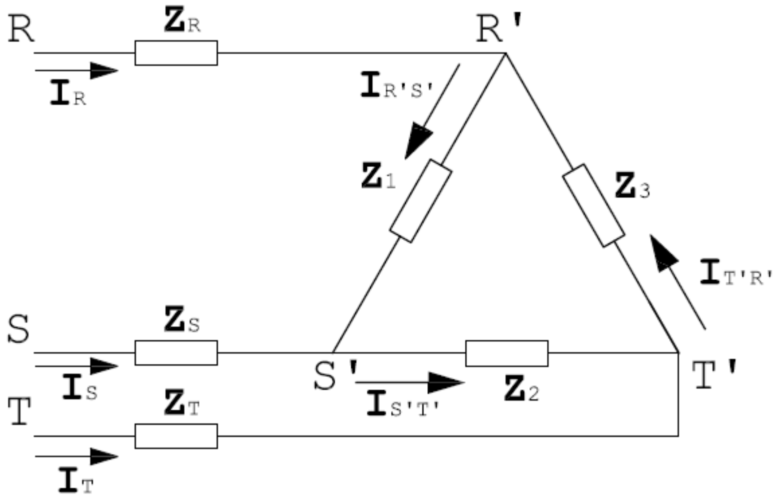
$$\boxed{\overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_T = 0}$$

$$\overline{I}_{R'S'} + \overline{I}_{S'T'} + \overline{I}_{T'R'} = \frac{\overline{U}_{R'S'}}{\overline{Z}_1} + \frac{\overline{U}_{S'T'}}{\overline{Z}_2} + \frac{\overline{U}_{T'R'}}{\overline{Z}_3} = \frac{1}{\overline{Z}}\left(\overline{U}_{R'S'} + \overline{U}_{S'T'} + \overline{U}_{T'R'}\right) = \frac{1}{\overline{Z}} \cdot 0 = 0$$

$$\boxed{\overline{I}_{R'S'} + \overline{I}_{S'T'} + \overline{I}_{T'R'} = 0}$$

Sistemas equilibrados en triángulo

- Corrientes de línea y corrientes de fase



$$\bar{I}_R = \bar{I}_{R'S'} - \bar{I}_{T'R'}$$

$$\bar{I}_R^{\,2} = \bar{I}_{R'S'}^{\,2} + \bar{I}_{T'R'}^{\,2} - 2\cdot\bar{I}_{R'S'}\cdot\bar{I}_{T'R'}$$

$$I_R^{\,2} = I_{R'S'}^2 + I_{T'R'}^2 - 2\cdot I_{R'S'}\cdot I_{T'R'}\cos\left(\bar{I}_{R'S'},\bar{I}_{T'R'}\right)$$

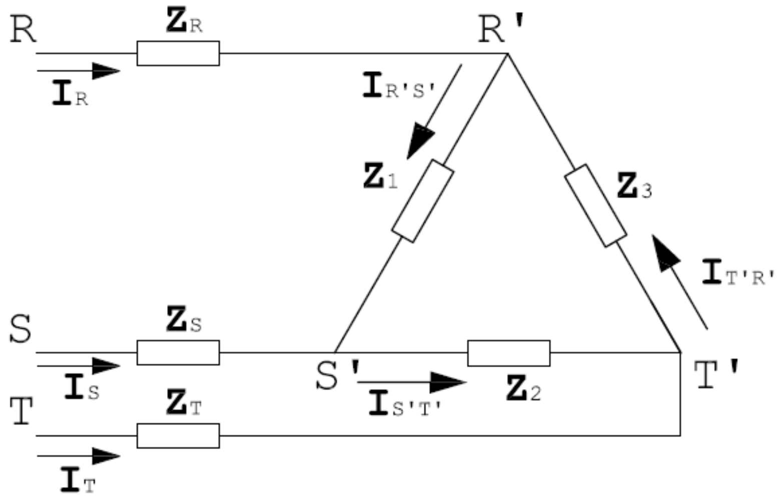
$$\left.\begin{array}{c} I_R \equiv I_L \\ I_{R'S'} = I_{T'R'} \equiv I \end{array}\right\}$$

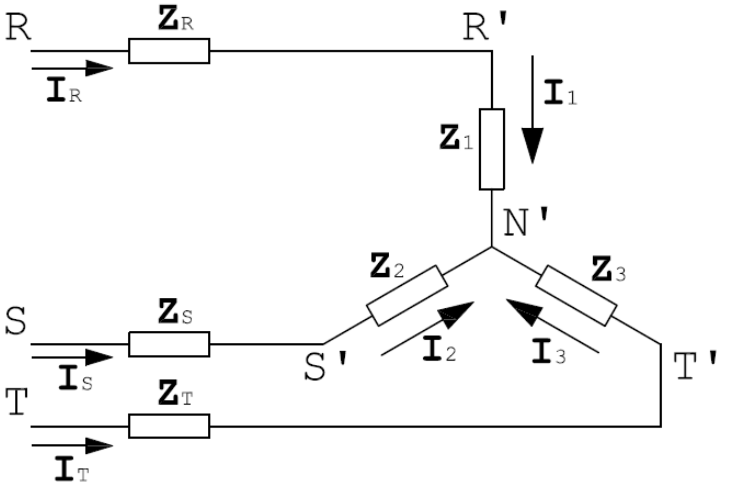
$$I_L^2 = 2\cdot I^2 - 2\cdot I^2\cos\left(120^{\circ}\right) = 2\cdot I^2 - 2\cdot I^2\cdot\frac{-1}{2} = 3\cdot I^2$$

$$\boxed{I_L = \sqrt{3}\cdot I}$$

Sistemas equilibrados en triángulo

- Corrientes de línea y corrientes de fase





Otra manera de obtener las corrientes de línea es transformar la carga en triángulo a carga en estrella:

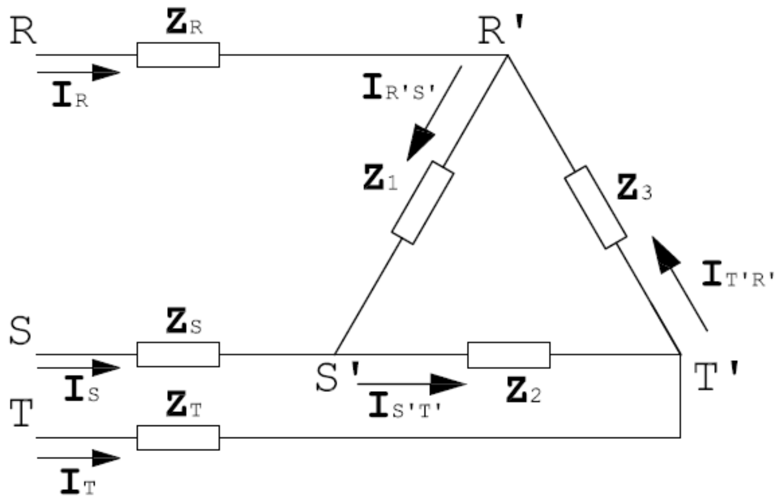
$$\boxed{\overline{Z}_Y = \frac{\overline{Z}_\Delta}{3}}$$

Sistemas equilibrados en triángulo

Ejemplo: se desea alimentar una carga equilibrada conectada en triángulo cuya impedancia por fase es de 38∟45ºΩ, a través de una línea de impedancia por fase 1+j Ω. Si la tensión en el receptor debe ser de 380 *V*, determinar:

a) Las corrientes de fase.

b) Las corrientes de línea.



$$\bar{I}_{R'S'} = \frac{\bar{U}_{R'S'}}{\bar{Z}} = \frac{380\angle 0^o}{38\angle 45^o} = 10\angle -45^o\ A$$

$$\bar{I}_{S'T'} = \frac{\bar{U}_{S'T'}}{\bar{Z}} = \frac{380\angle -120^o}{38\angle 45^o} = 10\angle -165^o\ A$$

$$\bar{I}_{T'R'} = \frac{\bar{U}_{T'R'}}{\bar{Z}} = \frac{380\angle 120^o}{38\angle 45^o} = 10\angle 75^o\ A$$

$$\bar{I}_R = \bar{I}_{R'S'} - \bar{I}_{T'R'} = 10\angle -45^o - 10\angle 75^o = 17.32\angle -75^o\ A$$

$$\bar{I}_S = 17.32\angle -195^o\ A$$

$$\bar{I}_T = 17.32\angle 45^o\ A$$

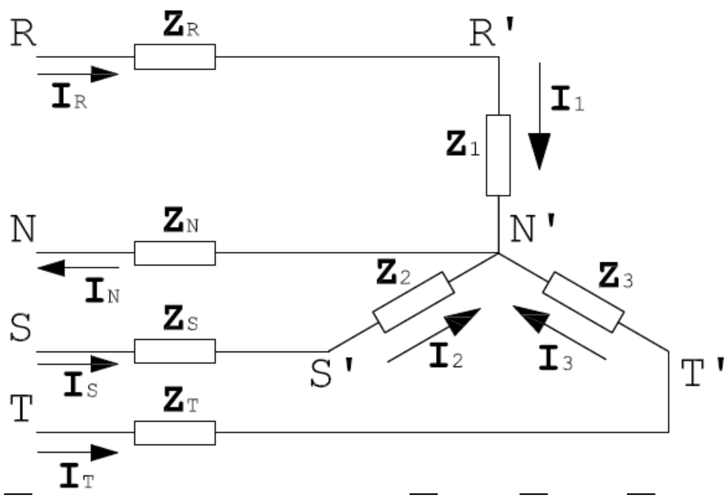
Tema 3: Sistemas desequilibrados

Índice

- Sistemas desequilibrados en estrella
- Sistemas desequilibrados en triángulo

Sistemas desequilibrados en estrella

- Sistemas desequilibrados en estrella con neutro



$\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$ corrientes simples o de fase

$\bar{I}_R, \bar{I}_S, \bar{I}_T$ corrientes compuestas o de línea

$$\bar{Z}_A = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_R;\ \bar{Z}_B = \bar{Z}_2 + \bar{Z}_S;\ \bar{Z}_C = \bar{Z}_3 + \bar{Z}_T$$

$$\bar{U}_{RN} = \bar{U}_{RN'} + \bar{U}_{N'N};\ \bar{U}_{SN} = \bar{U}_{SN'} + \bar{U}_{N'N};\ \bar{U}_{TN} = \bar{U}_{TN'} + \bar{U}_{N'N}$$

$$\frac{\bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_N} = \bar{I}_N = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_{RN'}}{\bar{Z}_A} + \frac{\bar{U}_{SN'}}{\bar{Z}_B} + \frac{\bar{U}_{TN'}}{\bar{Z}_C} = \frac{\bar{U}_{RN} - \bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_A} + \frac{\bar{U}_{SN} - \bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_B} + \frac{\bar{U}_{TN} - \bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_C} = \frac{\bar{U}_{RN}}{\bar{Z}_A} + \frac{\bar{U}_{SN}}{\bar{Z}_B} + \frac{\bar{U}_{TN}}{\bar{Z}_C} -$$

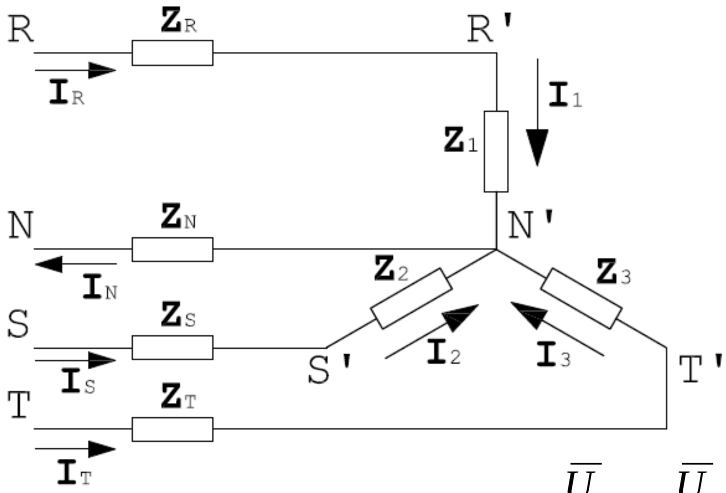
$$- \frac{\bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_A} - \frac{\bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_B} - \frac{\bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_C}$$

$$\boxed{\bar{U}_{N'N} = \frac{\dfrac{\bar{U}_{RN}}{\bar{Z}_A} + \dfrac{\bar{U}_{SN}}{\bar{Z}_B} + \dfrac{\bar{U}_{TN}}{\bar{Z}_C}}{\dfrac{1}{\bar{Z}_N} + \dfrac{1}{\bar{Z}_A} + \dfrac{1}{\bar{Z}_B} + \dfrac{1}{\bar{Z}_C}}}$$

¡Desplazamiento del neutro!

Sistemas desequilibrados en estrella

- Sistemas desequilibrados en estrella con neutro



Impedancia del neutro nula

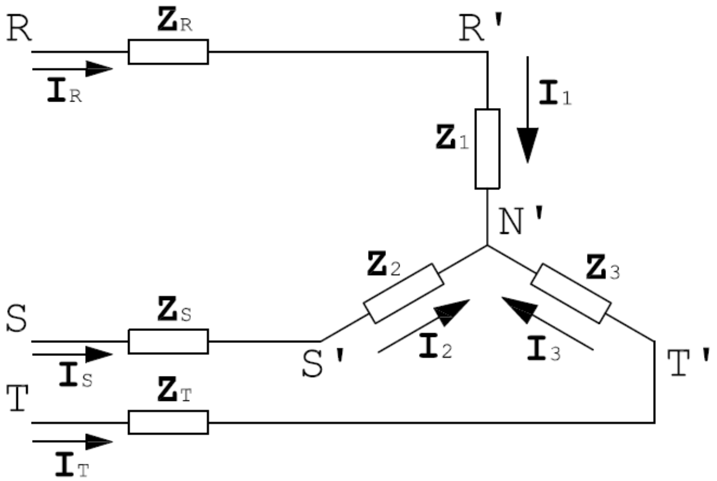
$$\overline{U}_{N'N}=\frac{\dfrac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_A}+\dfrac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_B}+\dfrac{\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}_C}}{\dfrac{1}{\overline{Z}_N}+\dfrac{1}{\overline{Z}_A}+\dfrac{1}{\overline{Z}_B}+\dfrac{1}{\overline{Z}_C}}$$

$$\overline{U}_{N'N}=\frac{\dfrac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_A}+\dfrac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_B}+\dfrac{\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}_C}}{\dfrac{1}{0}+\dfrac{1}{\overline{Z}_A}+\dfrac{1}{\overline{Z}_B}+\dfrac{1}{\overline{Z}_C}}=\frac{\dfrac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_A}+\dfrac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_B}+\dfrac{\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}_C}}{\infty}=0$$

$$\overline{I}_1+\overline{I}_2+\overline{I}_3=\overline{I}_N\neq 0$$

Sistemas desequilibrados en estrella

- Sistemas desequilibrados en estrella sin neutro



$$\overline{U}_{N'N} = \frac{\frac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_A} + \frac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_B} + \frac{\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}_C}}{\frac{1}{\overline{Z}_N} + \frac{1}{\overline{Z}_A} + \frac{1}{\overline{Z}_B} + \frac{1}{\overline{Z}_C}}$$

$$\overline{U}_{N'N} = \frac{\frac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_A} + \frac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_B} + \frac{\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}_C}}{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\overline{Z}_A} + \frac{1}{\overline{Z}_B} + \frac{1}{\overline{Z}_C}} = \frac{\frac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_A} + \frac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_B} + \frac{\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}_C}}{\frac{1}{\overline{Z}_A} + \frac{1}{\overline{Z}_B} + \frac{1}{\overline{Z}_C}} \neq 0$$

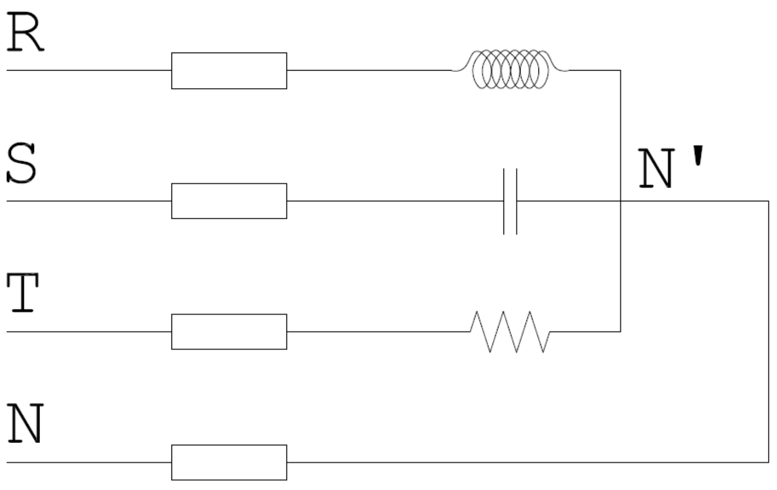
1ª Ley de Kirchhoff

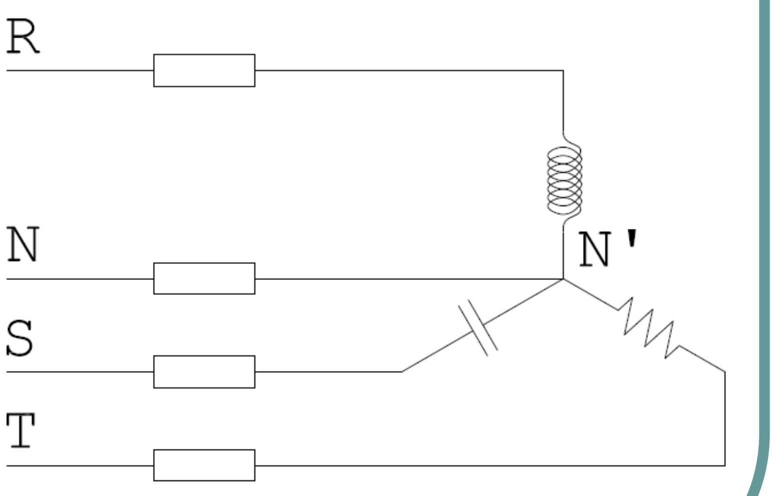
$$\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 0$$

Sistemas desequilibrados en estrella

Ejemplo: se dispone de la red de la figura, cuyos valores son: tensión de línea del generador 230V; $\mathbf{Z_L}=\mathbf{Z_N}=10\ \Omega$; $\mathbf{Z_R}=20\mathbf{j}\ \Omega$; $\mathbf{Z_S}=-10\mathbf{j}\ \Omega$; $\mathbf{Z_T}=15\ \Omega$.

a) Determinar las intensidades de fase y neutro y tensiones en las cargas.
b) Si la impedancia del neutro se hace cero, determinar las mismas magnitudes anteriores.



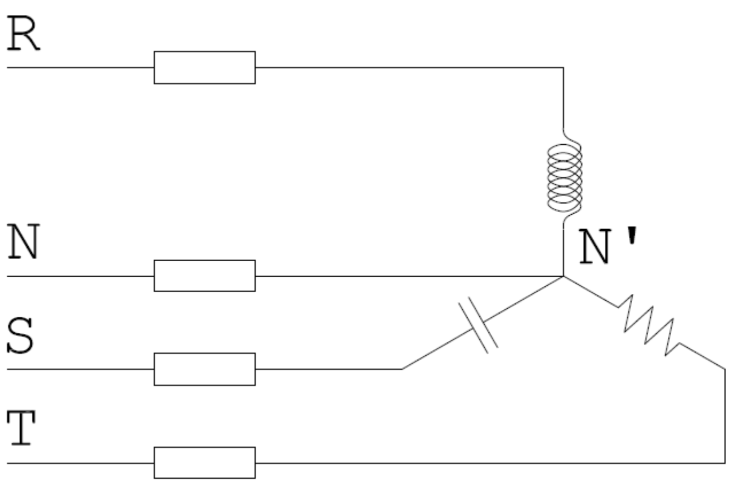


Sistemas desequilibrados en estrella

Ejemplo: se dispone de la red de la figura, cuyos valores son: tensión de línea del generador 230V; $\mathbf{Z_L}$=$\mathbf{Z_N}$=10 Ω; $\mathbf{Z_R}$=20**j** Ω; $\mathbf{Z_S}$=-10**j** Ω; $\mathbf{Z_T}$=15 Ω.

a) Determinar las intensidades de fase y neutro y tensiones en las cargas.
b) Si la impedancia del neutro se hace cero, determinar las mismas magnitudes anteriores.

$$U_L = \sqrt{3}\,U \Rightarrow U = 132.8\,V$$



$$\overline{U}_{N'N} = \frac{\dfrac{132.8\angle 0^{\circ}}{22.36\angle 63.4^{\circ}} + \dfrac{132.8\angle -120^{\circ}}{14.14\angle -45} + \dfrac{132.8\angle 120^{\circ}}{25\angle 0^{\circ}}}{\dfrac{1}{10\angle 0^{\circ}} + \dfrac{1}{22.36\angle 63.4^{\circ}} + \dfrac{1}{14.14\angle -45} + \dfrac{1}{25\angle 0^{\circ}}}$$

$$\overline{U}_{N'N} = \frac{10.1\angle -76.03^{\circ}}{0.21\angle 2.73^{\circ}} = 48\angle -78.77^{\circ}$$

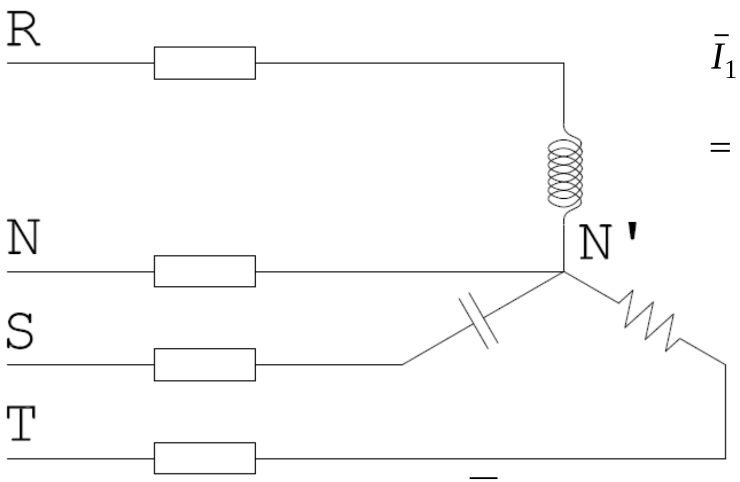
Sistemas desequilibrados en estrella

Ejemplo: se dispone de la red de la figura, cuyos valores son: tensión de línea del generador 230V; $\mathbf{Z_L}=\mathbf{Z_N}=10\ \Omega$; $\mathbf{Z_R}=20\mathbf{j}\ \Omega$; $\mathbf{Z_S}=-10\mathbf{j}\ \Omega$; $\mathbf{Z_T}=15\ \Omega$.

a) Determinar las intensidades de fase y neutro y tensiones en las cargas.

b) Si la impedancia del neutro se hace cero, determinar las mismas magnitudes anteriores.

$$U_L = \sqrt{3}\,U \Rightarrow U = 132.8\ \text{V}$$



$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_{RN'}}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_R} = \frac{132.8\angle 0^\circ - 48\angle -78.77^\circ}{22.36\angle 63.43^\circ} = \frac{132.13\angle 20.88^\circ}{22.36\angle 63.43^\circ} =$$
$$= 5.91\angle -42.6^\circ\ \text{A}$$

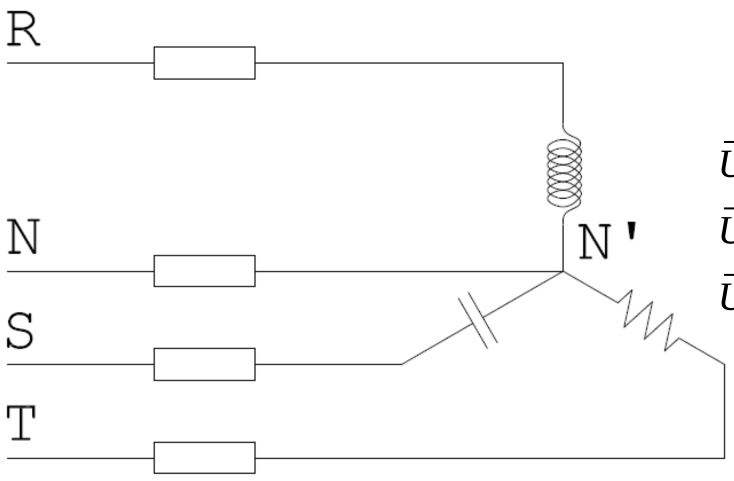
$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_{SN'}}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_S} = \frac{132.8\angle -120^\circ - 48\angle -78.77^\circ}{14.14\angle -45^\circ} =$$
$$= \frac{101.74\angle -138.12^\circ}{14.14\angle -45^\circ} = 7.2\angle -93.12^\circ\ \text{A}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_{TN'}}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_T} = \frac{132.8\angle 120^\circ - 48\angle -78.77^\circ}{25\angle 0^\circ} = \frac{178.92\angle 115.05^\circ}{25\angle 0^\circ} = 7.16\angle 115.05^\circ\ \text{A}$$

Sistemas desequilibrados en estrella

Ejemplo: se dispone de la red de la figura, cuyos valores son: tensión de línea del generador 230V; $\mathbf{Z_L}$=$\mathbf{Z_N}$=10 Ω; $\mathbf{Z_R}$=20**j** Ω; $\mathbf{Z_S}$=-10**j** Ω; $\mathbf{Z_T}$=15 Ω.

a) Determinar las intensidades de fase y neutro y tensiones en las cargas.
b) Si la impedancia del neutro se hace cero, determinar las mismas magnitudes anteriores.



$$\bar{I}_N = \frac{\bar{U}_{NN'}}{\bar{Z}_N} = \frac{48\angle -78.77^o}{10\angle 0^o} = 4.8\angle -78.77^o$$

$$\bar{U}_{R'N'} = \bar{I}_1 \cdot \bar{Z}_R = 5.91\angle -42.6^o \cdot \ 20\angle 90^o = 118.2\angle 47.4^o \text{ V}$$

$$\bar{U}_{S'N'} = \bar{I}_2 \cdot \bar{Z}_S = 7.2\angle -93.12^o \cdot \ 10\angle -90^o = 72\angle 176.88^o \text{ V}$$

$$\bar{U}_{T'N'} = \bar{I}_3 \cdot \bar{Z}_T = 7.16\angle 115.05^o \cdot \ 15\angle 0^o = 107.4\angle 115.1^o \text{ V}$$

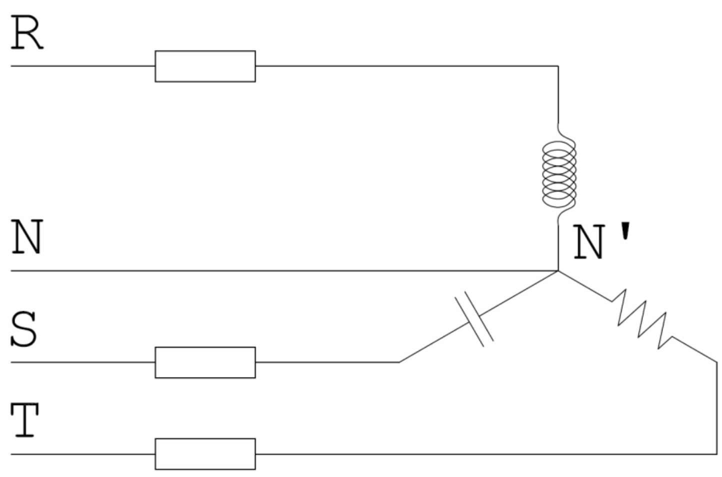
Recordamos:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{U}_{RN} &= 132.8\angle 0^o \text{ V} \\ \bar{U}_{SN} &= 132.8\angle -120^o \text{ V} \\ \bar{U}_{TN} &= 132.8\angle 120^o \text{ V} \end{aligned}}$$

Sistemas desequilibrados en estrella

Ejemplo: se dispone de la red de la figura, cuyos valores son: tensión de línea del generador 230V; $\mathbf{Z_L}$=$\mathbf{Z_N}$=10 Ω; $\mathbf{Z_R}$=20$\mathbf{j}$ Ω; $\mathbf{Z_S}$=-10$\mathbf{j}$ Ω; $\mathbf{Z_T}$=15 Ω.

a) Determinar las intensidades de fase y neutro y tensiones en las cargas.
b) Si la impedancia del neutro se hace cero, determinar las mismas magnitudes anteriores.



$$\overline{U}_{N'N} = 0$$

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{U}_{RN'}}{\overline{Z}_L + \overline{Z}_R} = \frac{132.8\angle 0^{\circ}}{22.36\angle 63.43^{\circ}} = 5.94\angle -63.43^{\circ}\ \text{A}$$

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{U}_{SN'}}{\overline{Z}_L + \overline{Z}_S} = \frac{132.8\angle -120^{\circ}}{14.14\angle -45^{\circ}} = 9.39\angle -75^{\circ}\ \text{A}$$

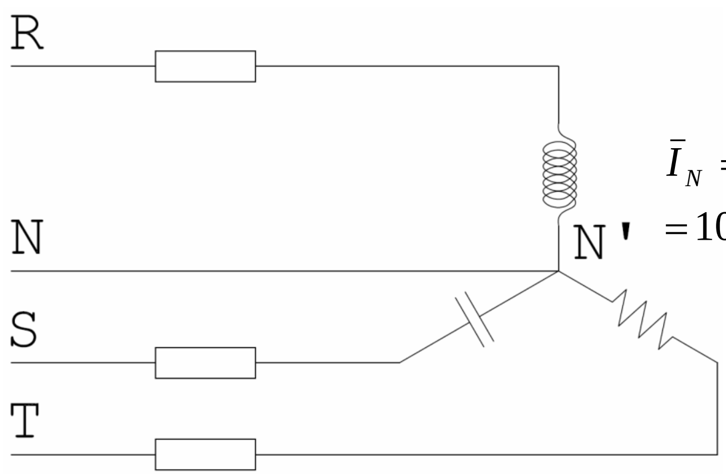
$$\overline{I}_3 = \frac{\overline{U}_{TN'}}{\overline{Z}_L + \overline{Z}_T} = \frac{132.8\angle 120^{\circ}}{25\angle 0^{\circ}} = 5.31\angle 120^{\circ}\ \text{A}$$

Sistemas desequilibrados en estrella

Ejemplo: se dispone de la red de la figura, cuyos valores son: tensión de línea del generador 230V; $\mathbf{Z_L}$=$\mathbf{Z_N}$=10 Ω; $\mathbf{Z_R}$=20**j** Ω; $\mathbf{Z_S}$=-10**j** Ω; $\mathbf{Z_T}$=15 Ω.

a) Determinar las intensidades de fase y neutro y tensiones en las cargas.

b) Si la impedancia del neutro se hace cero, determinar las mismas magnitudes anteriores.



$$\bar{I}_N = \frac{\bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_N} = \frac{0}{0} \quad \text{(Indeterminación)}$$

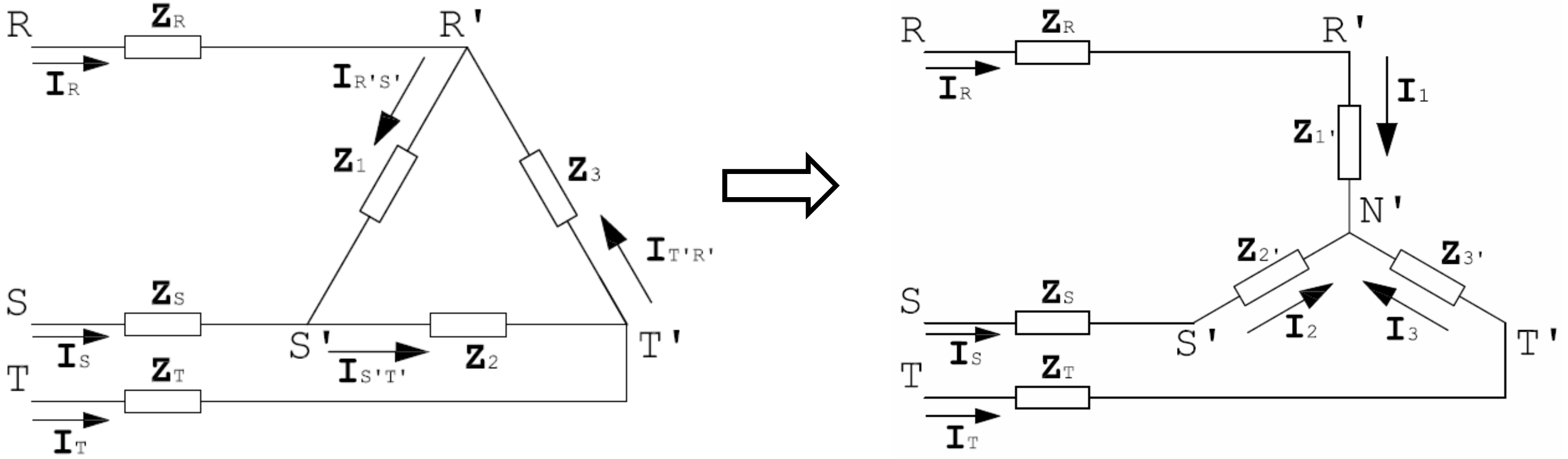
$$\bar{I}_N = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 5.94\angle -63.43^o + 9.39\angle -75^o + 5.31\angle 120^o =$$
$$= 10.08\angle -76.04^o \text{ A}$$

$$\bar{U}_{R'N'} = \bar{I}_1 \cdot \bar{Z}_R = 5.94\angle -63.43^o \cdot \ 20\angle 90^o = 118.8\angle 26.57^o \text{ V}$$
$$\bar{U}_{S'N'} = \bar{I}_2 \cdot \bar{Z}_S = 9.93\angle -75^o \cdot \ 10\angle -90^o = 99.3\angle -165^o \text{ V}$$
$$\bar{U}_{T'N'} = \bar{I}_3 \cdot \bar{Z}_T = 5.31\angle 120^o \cdot \ 15\angle 0^o = 79.65\angle 120^o \text{ V}$$

Sistemas desequilibrados en triángulo

- Tensiones en cabecera o generación

Transformamos la carga en triángulo a carga en estrella:

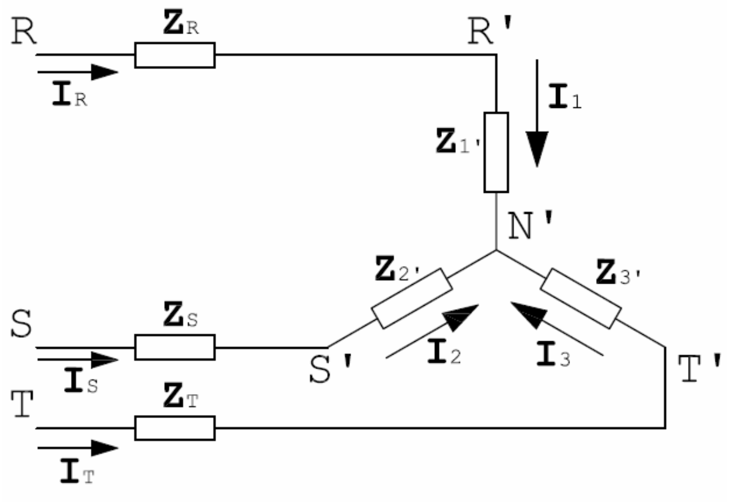


$$\overline{Z}_1' = \frac{\overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_3}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3} \quad \overline{Z}_2' = \frac{\overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3} \quad \overline{Z}_3' = \frac{\overline{Z}_2 \cdot \overline{Z}_3}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3}$$

¡Ojo! No hay hilo neutro en la conversión a estrella

Sistemas desequilibrados en triángulo

- Tensiones en cabecera o generación



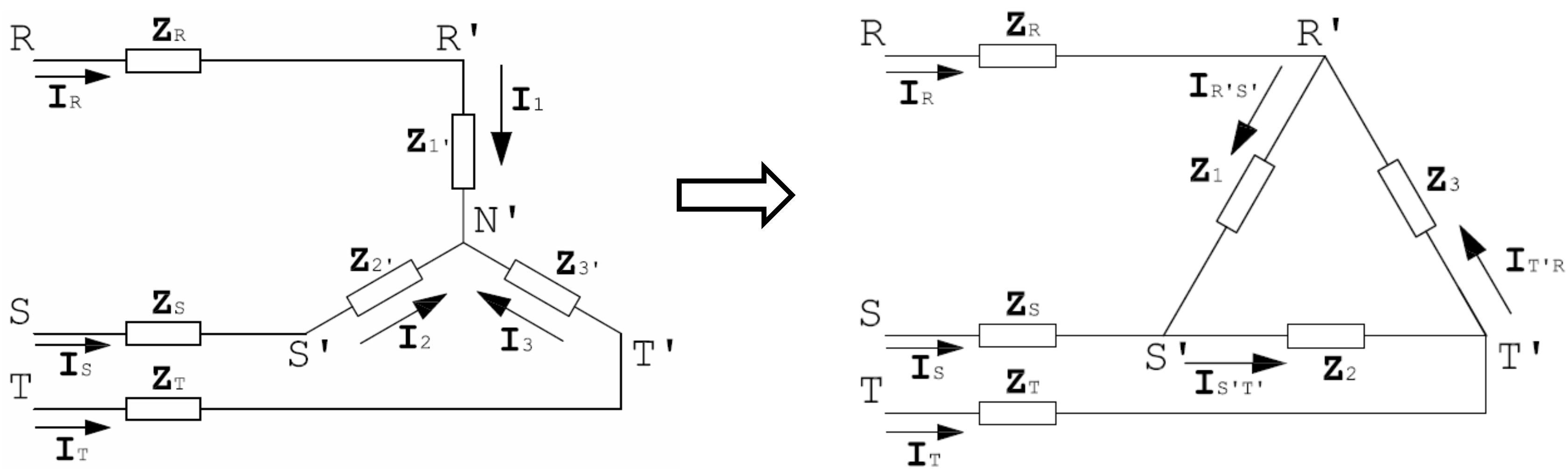
$$\overline{Z}_A = \overline{Z}_R + \overline{Z}_1'; \; \overline{Z}_B = \overline{Z}_S + \overline{Z}_2'; \; \overline{Z}_C = \overline{Z}_T + \overline{Z}_3'$$

$$\overline{U}_{N'N} = \frac{\dfrac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_A} + \dfrac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_B} + \dfrac{\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}_C}}{\dfrac{1}{\infty} + \dfrac{1}{\overline{Z}_A} + \dfrac{1}{\overline{Z}_B} + \dfrac{1}{\overline{Z}_C}} = \frac{\dfrac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_A} + \dfrac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_B} + \dfrac{\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}_C}}{\dfrac{1}{\overline{Z}_A} + \dfrac{1}{\overline{Z}_B} + \dfrac{1}{\overline{Z}_C}}$$

$$\begin{array}{l} \overline{U}_{RN} - \overline{U}_{N'N} = \overline{U}_{RN'} \\ \overline{U}_{SN} - \overline{U}_{N'N} = \overline{U}_{SN'} \\ \overline{U}_{TN} - \overline{U}_{N'N} = \overline{U}_{TN'} \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \overline{I}_R = \overline{U}_{RN'} / \overline{Z}_A \\ \overline{I}_S = \overline{U}_{SN'} / \overline{Z}_B \\ \overline{I}_T = \overline{U}_{TN'} / \overline{Z}_C \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \overline{U}_{R'S'} = \overline{U}_{R'N'} - \overline{U}_{S'N'} = \overline{I}_R \overline{Z}'_1 - \overline{I}_S \overline{Z}'_2 \\ \overline{U}_{S'T'} = \overline{U}_{S'N'} - \overline{U}_{T'N'} = \overline{I}_S \overline{Z}'_2 - \overline{I}_T \overline{Z}'_3 \\ \overline{U}_{T'R'} = \overline{U}_{T'N'} - \overline{U}_{R'N'} = \overline{I}_T \overline{Z}'_3 - \overline{I}_R \overline{Z}'_1 \end{array}}$$

Sistemas desequilibrados en triángulo

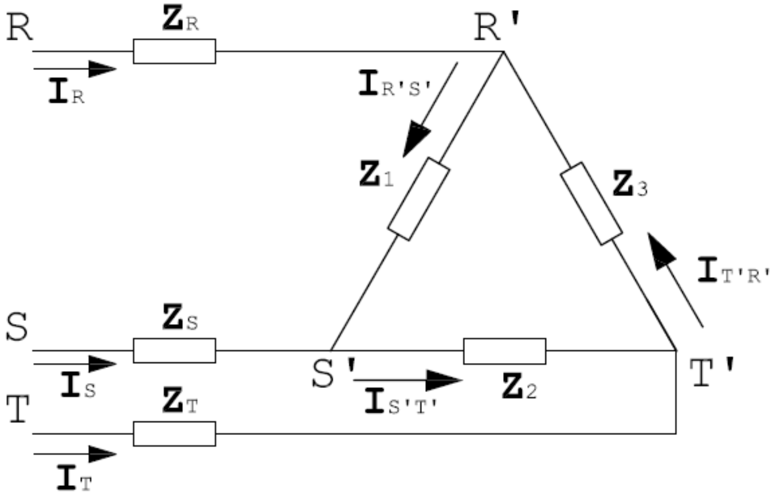
- Tensiones en cabecera o generación



$$\overline{I}_{R'S'} = \overline{U}_{R'S'} / \overline{Z}_{RS}$$
$$\overline{I}_{S'T'} = \overline{U}_{S'T'} / \overline{Z}_{ST}$$
$$\overline{I}_{T'R'} = \overline{U}_{T'R'} / \overline{Z}_{TR}$$

Sistemas desequilibrados en triángulo

- Tensiones en la carga



$$\boxed{\begin{aligned}\overline{I}_{R'S'} &= \overline{U}_{R'S'} / \overline{Z}_{R'S'} \\ \overline{I}_{S'T'} &= \overline{U}_{S'T'} / \overline{Z}_{S'T'} \\ \overline{I}_{T'R'} &= \overline{U}_{T'R'} / \overline{Z}_{T'R'}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{I}_R &= \overline{I}_{R'S'} - \overline{I}_{T'R'} \\ \overline{I}_S &= \overline{I}_{S'T'} - \overline{I}_{R'S'} \\ \overline{I}_T &= \overline{I}_{T'R'} - \overline{I}_{S'T'}\end{aligned}}$$

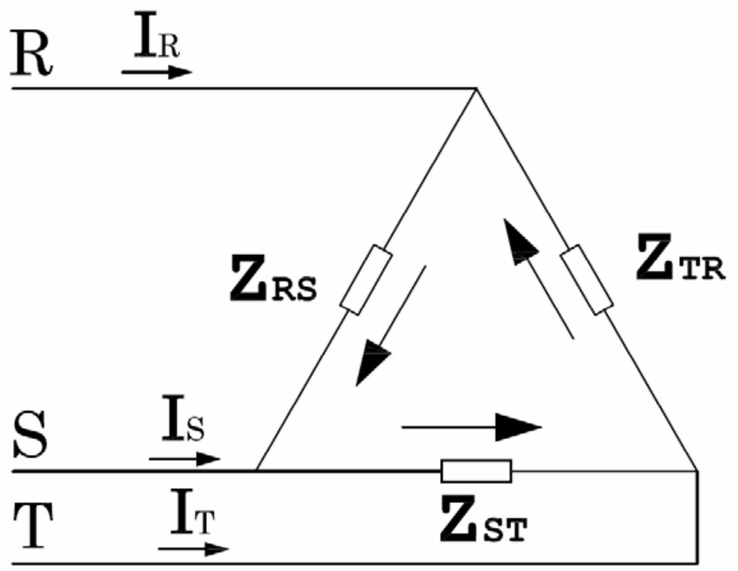
¡Para calcular el desplazamiento del neutro es necesario transformar la carga de triángulo a estrella!

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{U}_{RN} &= \overline{I}_R \cdot (\overline{Z}_R + \overline{Z}_1') + \overline{U}_{N'N} \\ \overline{U}_{SN} &= \overline{I}_S \cdot (\overline{Z}_S + \overline{Z}_2') + \overline{U}_{N'N} \\ \overline{U}_{TN} &= \overline{I}_T \cdot (\overline{Z}_T + \overline{Z}_1') + \overline{U}_{N'N}\end{aligned}}$$

Sistemas desequilibrados en estrella

Ejemplo: Disponemos de la red de la figura, cuyos valores son:

$\mathbf{Z_L}$=(1+**j**) Ω; $\mathbf{Z_{R'S'}}$=10**j** Ω; $\mathbf{Z_{S'T'}}$=10 Ω; $\mathbf{Z_{T'R'}}$=-10**j** Ω y tensión de línea en origen 230 V. Determinar tensiones en las cargas, intensidades de fase y línea.



Tema 4: Potencia de circuitos trifásicos

Índice

- Potencia
- Medida de potencia
- Corrección del factor de potencia

Potencia en sistemas trifásicos

- Definición de potencia

Recordatorio T^{ma} de Boucherot: la potencia aparente total consumida por "n" cargas es igual a la suma vectorial de las potencias aparentes consumidas por cada carga.

El generador sólo proporcionará la potencia total demandada por todas las cargas. Esto quiere decir que el balance energético se podría analizar desde el consumo en vez del suministro.

Sea un sistema polifásico de p-hilos (n<p), siendo r el hilo de referencia al que están conectadas todas las cargas, la potencia aparente total será:

$$\overline{S}_T = \overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \cdots + \overline{S}_n = \overline{U}_{1r}\overline{I}_1^* + \overline{U}_{2r}\overline{I}_2^* + \cdots + \overline{U}_{nr}\overline{I}_n^* \quad \textit{(n sumandos)}$$

Sea un sistema trifásico de 4-hilos, siendo el neutro el de referencia:

$$\overline{S}_3 = \overline{U}_{RN}\overline{I}_R^* + \overline{U}_{SN}\overline{I}_S^* + \overline{U}_{TN}\overline{I}_T^* \quad \textit{(3 sumandos)}$$

Potencia en sistemas trifásicos

- Definición de potencia

$$\overline{S} = \overline{U}_{RN}\overline{I}_R^* + \overline{U}_{SN}\overline{I}_S^* + \overline{U}_{TN}\overline{I}_T^* \equiv P + jQ$$

$$P = \mathrm{Re}\left\{\overline{U}_{RN}\overline{I}_R^*\right\} + \mathrm{Re}\left\{\overline{U}_{SN}\overline{I}_S^*\right\} + \mathrm{Re}\left\{\overline{U}_{TN}\overline{I}_T^*\right\}$$

$$Q = \mathrm{Im}\left\{\overline{U}_{RN}\overline{I}_R^*\right\} + \mathrm{Im}\left\{\overline{U}_{SN}\overline{I}_S^*\right\} + \mathrm{Im}\left\{\overline{U}_{TN}\overline{I}_T^*\right\}$$

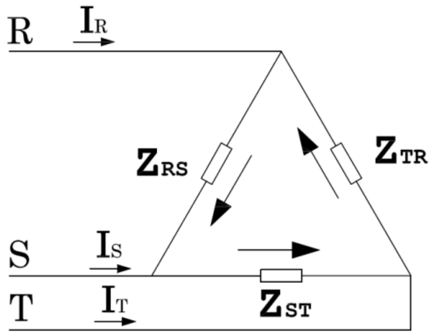
$$P = P_R + P_S + P_T$$

$$Q = Q_R + Q_S + Q_T$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Potencia en sistemas trifásicos

- Definición de potencia
  - Trifásico a tres hilos



$$\overline{S} = \overline{U}_{RT}\overline{I}_R^{\,*} + \overline{U}_{ST}\overline{I}_S^{\,*}$$

Demostración:

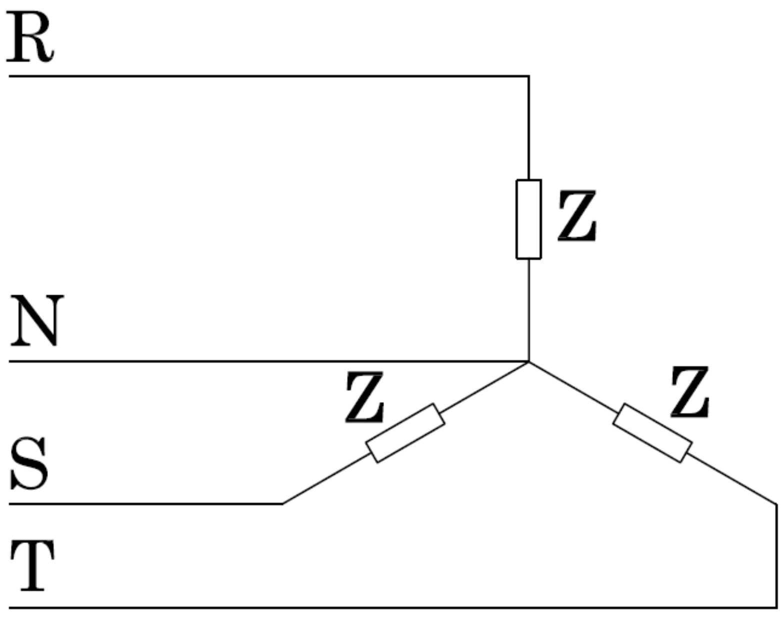
$$\overline{S} = \overline{U}_{RS}\overline{I}_{RS}^{*} + \overline{U}_{ST}\overline{I}_{ST}^{*} + \overline{U}_{TR}\overline{I}_{TR}^{*} = \underbrace{(-\overline{U}_{ST} - \overline{U}_{TR})}_{\overline{U}_{RS} + \overline{U}_{ST} + \overline{U}_{TR} = 0}\overline{I}_{RS}^{*} + \overline{U}_{ST}\overline{I}_{ST}^{*} + \overline{U}_{TR}\overline{I}_{TR}^{*} = (\overline{U}_{RT} - \overline{U}_{ST})\overline{I}_{RS}^{*} + \overline{U}_{ST}\overline{I}_{ST}^{*} + \overline{U}_{TR}\overline{I}_{TR}^{*} =$$

$$= (\overline{U}_{RT} - \overline{U}_{ST})\overline{I}_{RS}^{*} + \overline{U}_{ST}\overline{I}_{ST}^{*} - \overline{U}_{RT}\overline{I}_{TR}^{*} = \overline{U}_{RT}(\overline{I}_{RS}^{*} - \overline{I}_{TR}^{*}) + \overline{U}_{ST}(\overline{I}_{ST}^{*} - \overline{I}_{RS}^{*}) = \overline{U}_{RT}(\overline{I}_{RS} - \overline{I}_{TR})^{*} + \overline{U}_{ST}(\overline{I}_{ST} - \overline{I}_{RS})^{*} =$$

$$= \overline{U}_{RT}\overline{I}_R^{\,*} + \overline{U}_{ST}\overline{I}_S^{\,*}$$

Potencia en sistemas trifásicos

- Potencia de sistemas equilibrados
  - Cargas en estrella



$$P = P_R + P_S + P_T = 3U\,I\cos\varphi$$

$$Q = Q_R + Q_S + Q_T = 3U\,I\,sen\varphi$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3 \cdot U\,I$$

$$I_L = I$$

$$U_L = \sqrt{3} \cdot U$$

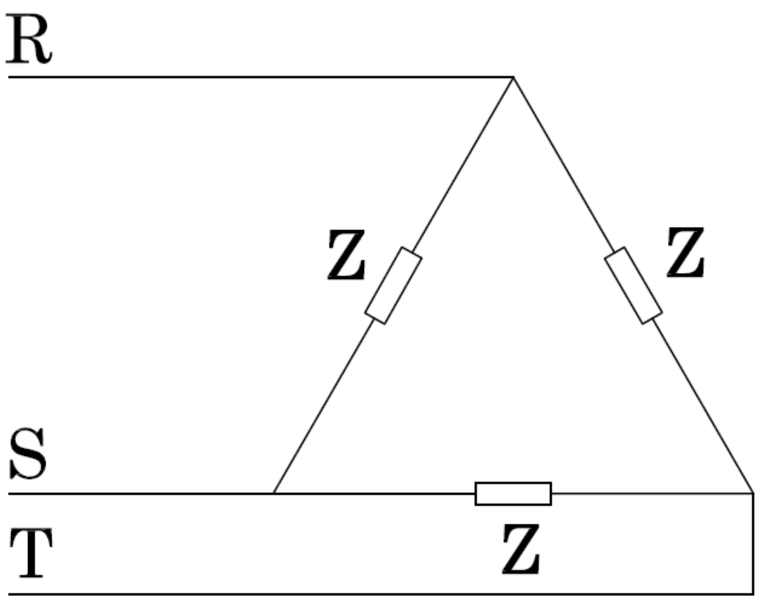
$$P = 3 \cdot \frac{U_L}{\sqrt{3}} I_L \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot U_L I_L \cos\varphi$$

$$Q = \sqrt{3} \cdot U_L I_L \operatorname{sen}\varphi$$

$$S = \sqrt{3} \cdot U_L I_L$$

Potencia en sistemas trifásicos

- Potencia de sistemas equilibrados
  - Cargas en triángulo



$$P = 3 \cdot U\ I \cos\varphi$$

$$Q = 3 \cdot U\ I\ sen\varphi$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3 \cdot U\ I$$

$$U_L = U$$

$$I_L = \sqrt{3} \cdot I$$

$$P = 3 \cdot U_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot U_L I_L \cos\varphi$$

$$Q = \sqrt{3} \cdot U_L I_L \mathrm{sen}\varphi$$

$$S = \sqrt{3} \cdot U_L I_L$$

Potencia en sistemas trifásicos

- Potencia de sistemas equilibrados

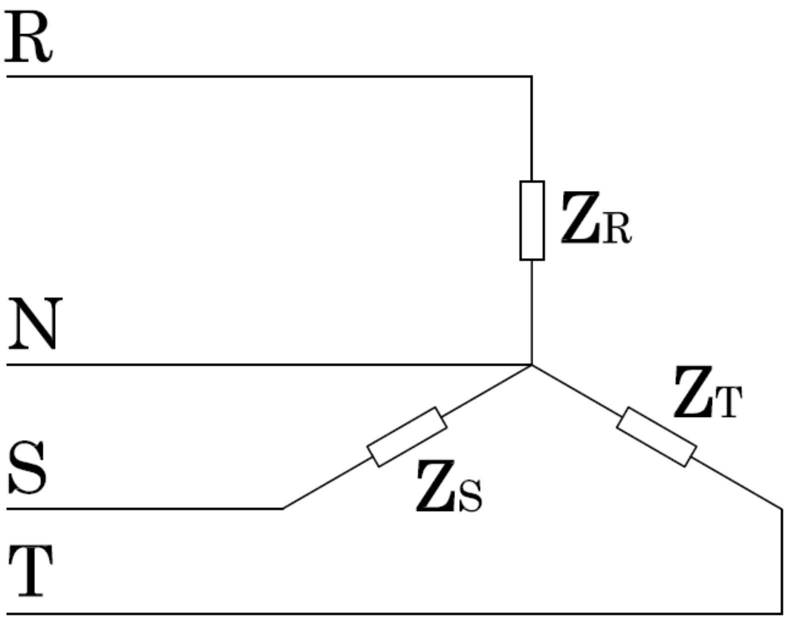
$$\boxed{P = 3 \cdot U\ I \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot U_L I_L \cos\varphi}$$

$$\boxed{Q = 3 \cdot U\ I\ sen\varphi = \sqrt{3} \cdot U_L I_L sen\varphi}$$

$$\boxed{S = 3 \cdot U\ I = \sqrt{3} \cdot U_L I_L}$$

Potencia en sistemas trifásicos

- Potencia de sistemas desequilibrados
  - Cargas en estrella



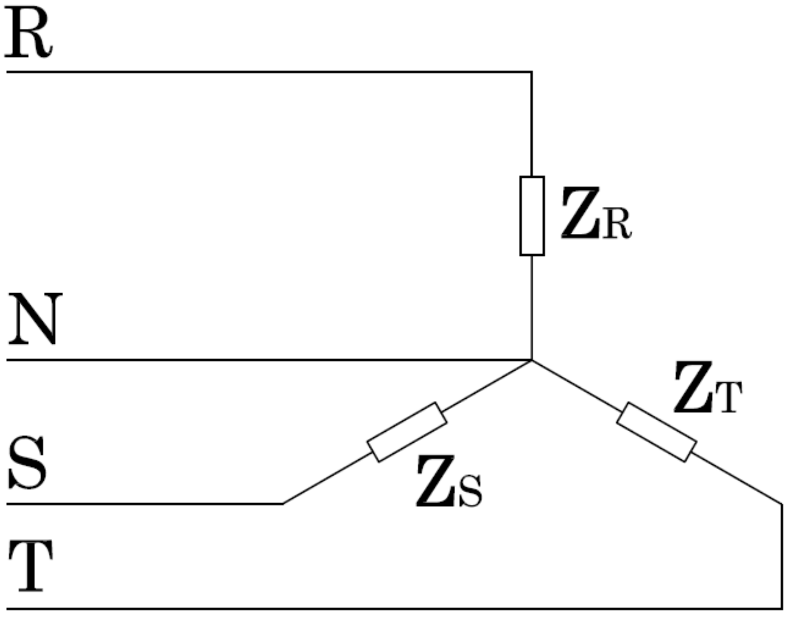
$$\overline{Z}_R = R_R + jX_R = Z_R \angle \varphi_R$$
$$\overline{Z}_S = R_S + jX_S = Z_S \angle \varphi_S$$
$$\overline{Z}_T = R_T + jX_T = Z_T \angle \varphi_T$$

$$P_R = U_{RN} I_R \cos\varphi_R = R_R I_R^2$$
$$P_S = U_{SN} I_S \cos\varphi_S = R_S I_S^2$$
$$P_T = U_{TN} I_T \cos\varphi_T = R_T I_T^2$$

$$Q_R = U_{RN} I_R sen\varphi_R = X_R I_R^2$$
$$Q_S = U_{SN} I_S sen\varphi_S = X_S I_S^2$$
$$Q_T = U_{TN} I_T sen\varphi_T = X_T I_T^2$$

Potencia en sistemas trifásicos

- Potencia de sistemas desequilibrados
  - Cargas en estrella



$$P = P_R + P_S + P_T$$

$$Q = Q_R + Q_S + Q_T$$

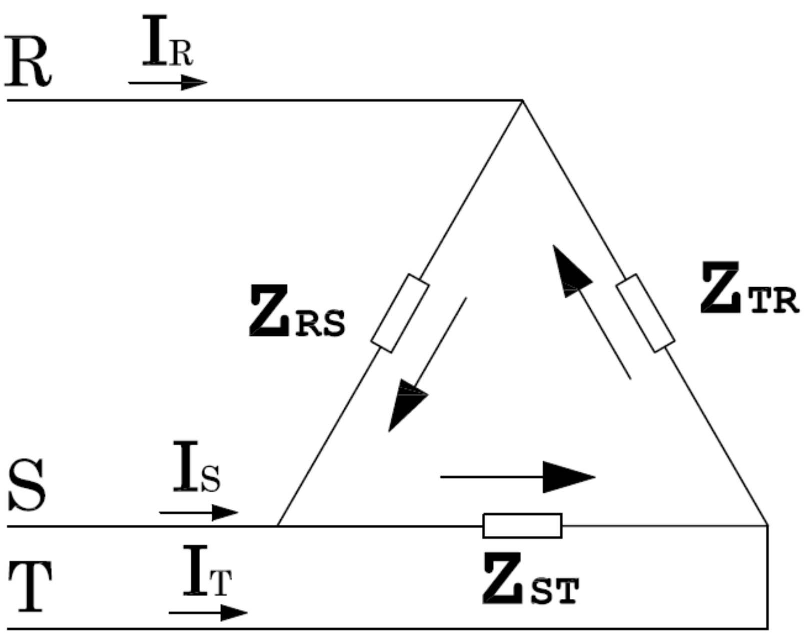
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\overline{S} = \overline{S}_R + \overline{S}_S + \overline{S}_T$$

$$\cos\varphi \Rightarrow \begin{cases} \tan\varphi = \dfrac{Q}{P} \\ \cos\varphi = \dfrac{P}{S} \end{cases}$$

Potencia en sistemas trifásicos

- Potencia de sistemas desequilibrados
  - Cargas en triángulo



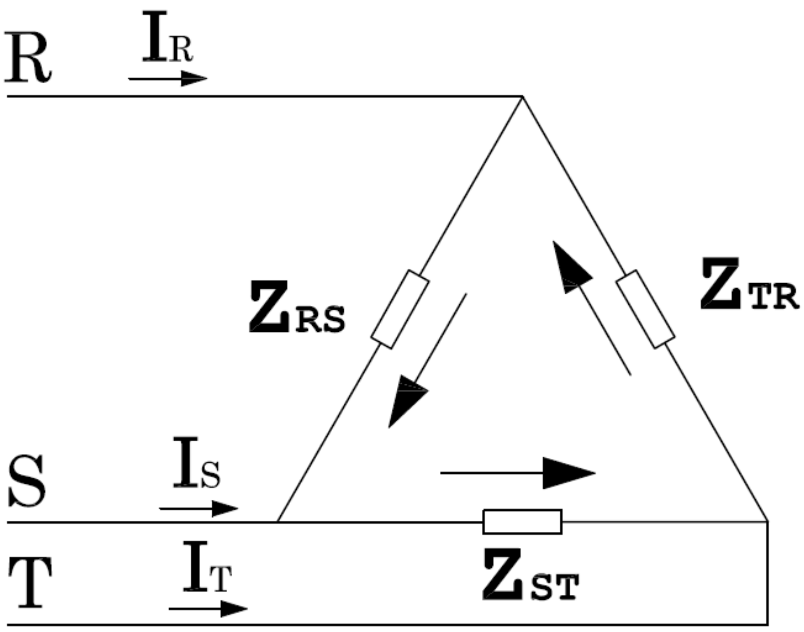
$$\overline{Z}_{RS} = R_{RS} + jX_{RS} = Z_{RS}\angle\varphi_{RS}$$
$$\overline{Z}_{ST} = R_{ST} + jX_{ST} = Z_{ST}\angle\varphi_{ST}$$
$$\overline{Z}_{TR} = R_{TR} + jX_{TR} = Z_{TR}\angle\varphi_{TR}$$

$$P_{RS} = U_{RS} I_{RS} \cos\varphi_{RS} = R_{RS} I_{RS}^2$$
$$P_{ST} = U_{ST} I_{ST} \cos\varphi_{ST} = R_{ST} I_{ST}^2$$
$$P_{TR} = U_{TR} I_{TR} \cos\varphi_{TR} = R_{TR} I_{TR}^2$$

$$Q_{RS} = U_{RS} I_{RS} sen\varphi_{RS} = X_{RS} I_{RS}^2$$
$$Q_{ST} = U_{ST} I_{ST} sen\varphi_{ST} = X_{ST} I_{ST}^2$$
$$Q_{TR} = U_{TR} I_{TR} sen\varphi_{TR} = X_{TR} I_{TR}^2$$

Potencia en sistemas trifásicos

- Potencia de sistemas desequilibrados
  - Cargas en triángulo



$$P = P_{RS} + P_{ST} + P_{TR}$$

$$Q = Q_{RS} + Q_{ST} + Q_{TR}$$

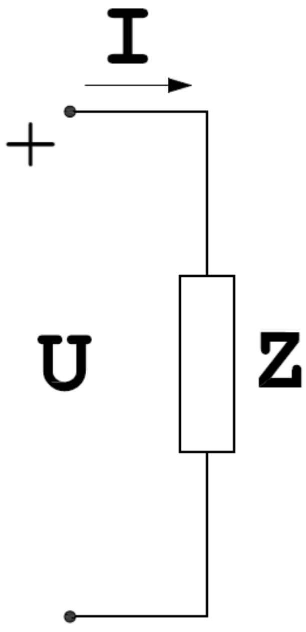
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\overline{S} = \overline{S}_{RS} + \overline{S}_{ST} + \overline{S}_{TR}$$

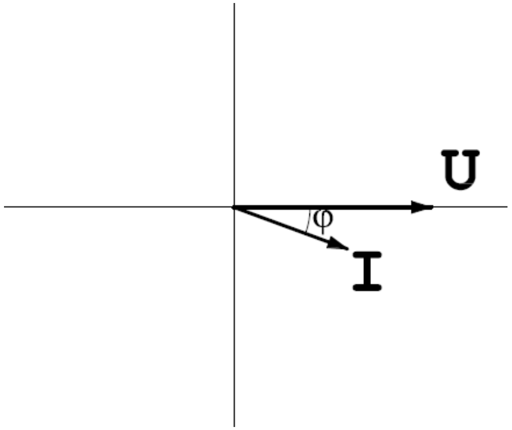
$$\cos\varphi \Rightarrow \begin{cases} \tan\varphi = \dfrac{Q}{P} \\ \cos\varphi = \dfrac{P}{S} \end{cases}$$

Medida de potencia

- Potencia activa
  - recordatorio



$$\left.\begin{aligned}\overline{U}&=U\angle 0^{o}\\ \overline{Z}&=Z\angle\varphi\end{aligned}\right\}\Rightarrow \bar{I}=\frac{U\angle 0^{o}}{Z\angle\varphi}=\frac{U}{Z}\angle-\varphi=I\angle-\varphi$$



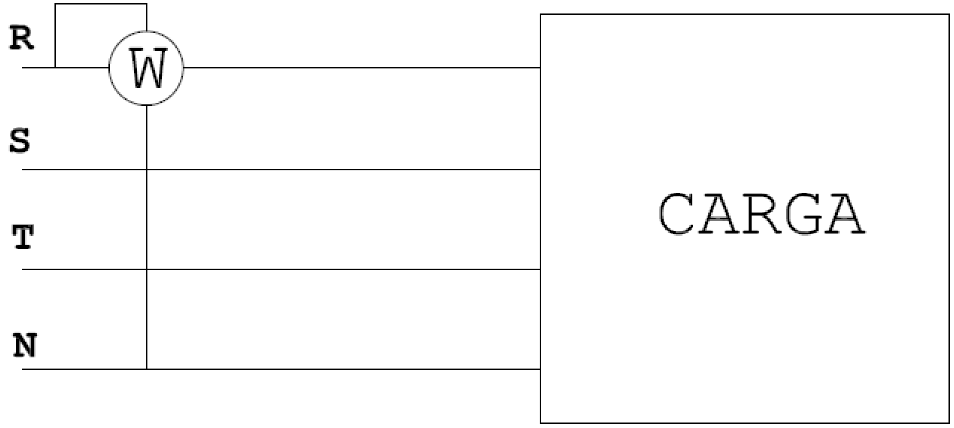
$$P=UI\cos\varphi=\overline{U}\cdot\bar{I}$$

"La potencia activa se puede expresar como un producto escalar de dos vectores"

$$P=\sum P_k$$

Medida de potencia

- Potencia activa
  - Sistema equilibrado con neutro

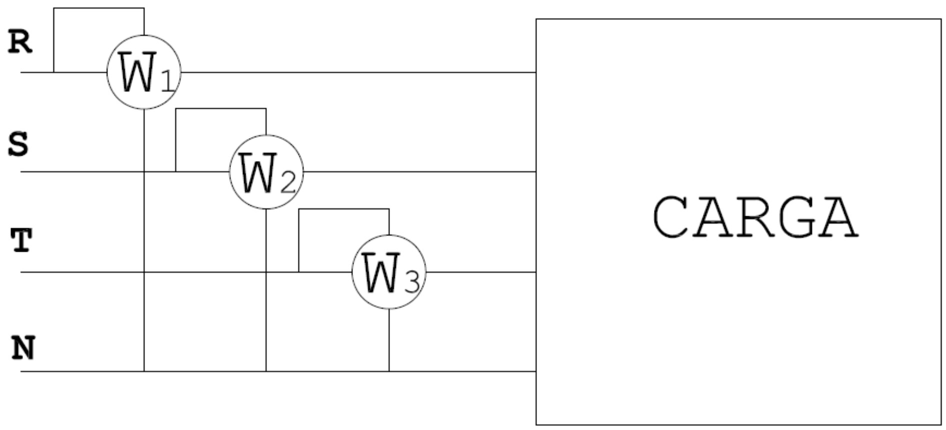


$$P = \sum P_k$$

$$\boxed{P = 3W}$$

Medida de potencia

- Potencia activa
  - Sistema desequilibrado con neutro

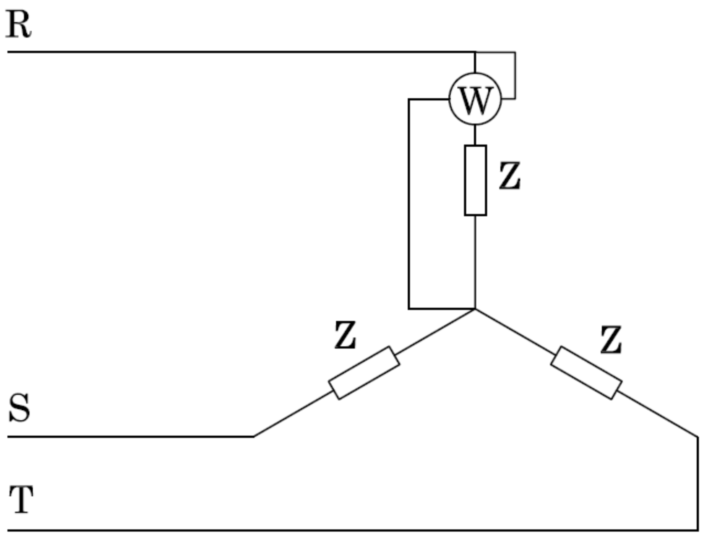


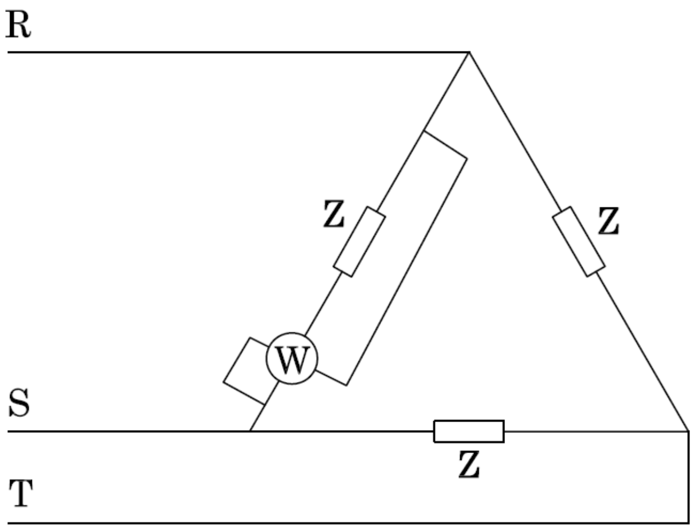
$$P = \sum P_k$$

$$\boxed{P = W_1 + W_2 + W_3}$$

Medida de potencia

- Potencia activa
  - Sistema equilibrado sin neutro





$$P = \sum P_k$$

$$\boxed{P = 3W}$$

Medida de potencia

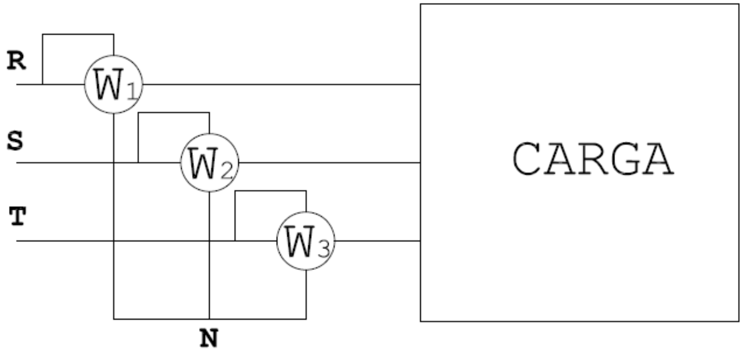
- Potencia activa
  - Sistema desequilibrado sin neutro

Para cargas en triángulo y estrella se conectan 3 vatímetros

$$P = \sum P_k$$

$$\boxed{P = W_1 + W_2 + W_3}$$

Si el neutro no es accesible se crea un neutro artificial

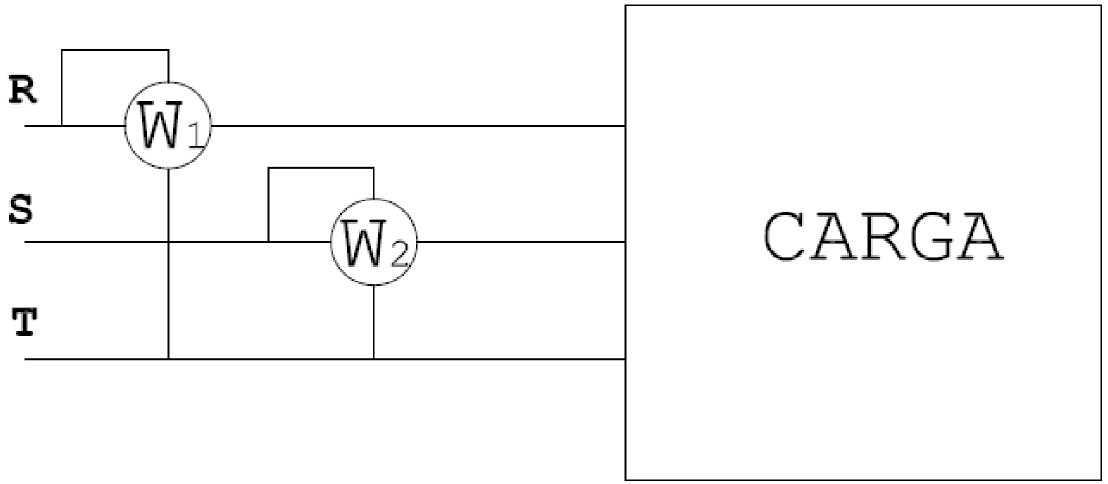


$$\boxed{P = W_1 + W_2 + W_3}$$

Medida de potencia

- Potencia activa
  - Método de Aron (método de los dos vatímetros)

Para sistemas sin neutro (equilibrados y desequilibrados)



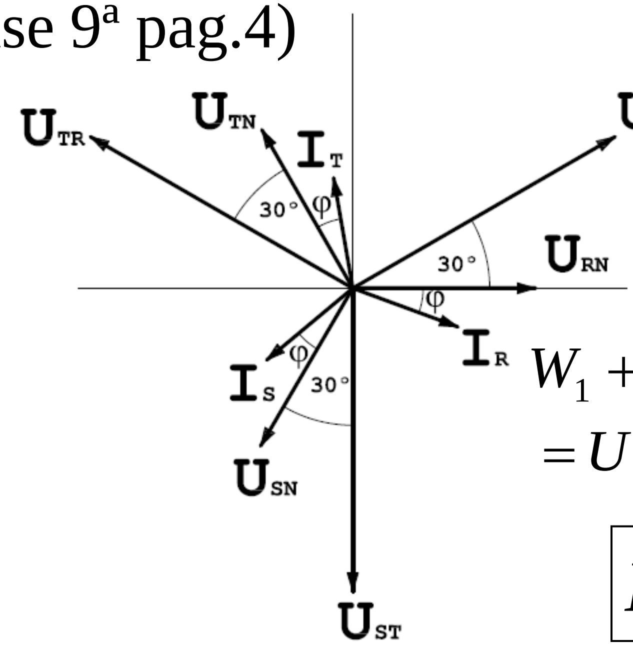
$$\boxed{P = W_1 + W_2}$$

Medida de potencia

- Potencia activa
  - Método de Aron (método de los dos vatímetros)

Demostración (para sistemas equilibrados):

(clase 9ª pag.4)



$$W_1 = \overline{U}_{RT} \cdot \overline{I}_R = U_L I_L \cos(30-\varphi)$$

$$W_2 = \overline{U}_{ST} \cdot \overline{I}_S = U_L I_L \cos(30+\varphi)$$

$$W_1 + W_2 = U_L I_L \left[\cos(30-\varphi) + \cos(30+\varphi)\right] =$$

$$= U_L I_L 2 \cdot \cos 30 \cos\varphi = \sqrt{3} U_L I_L \cos\varphi$$

$$\boxed{P = W_1 + W_2 = \sqrt{3} U_L I_L \cos\varphi}$$

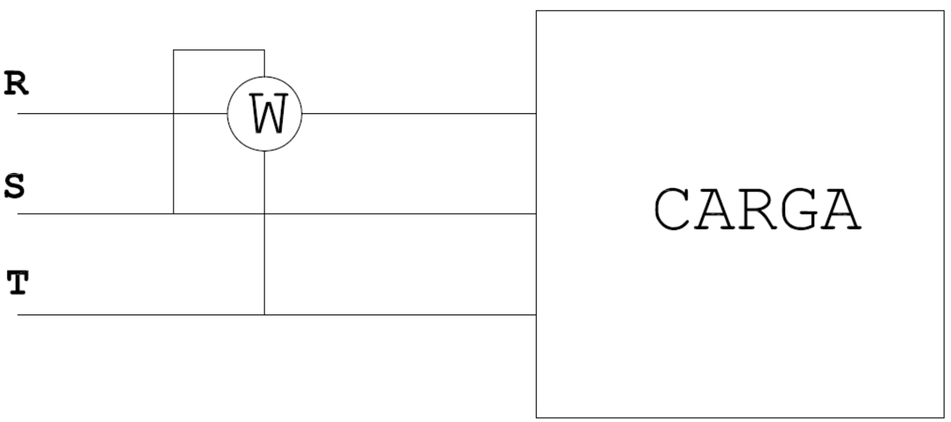
Medida de potencia

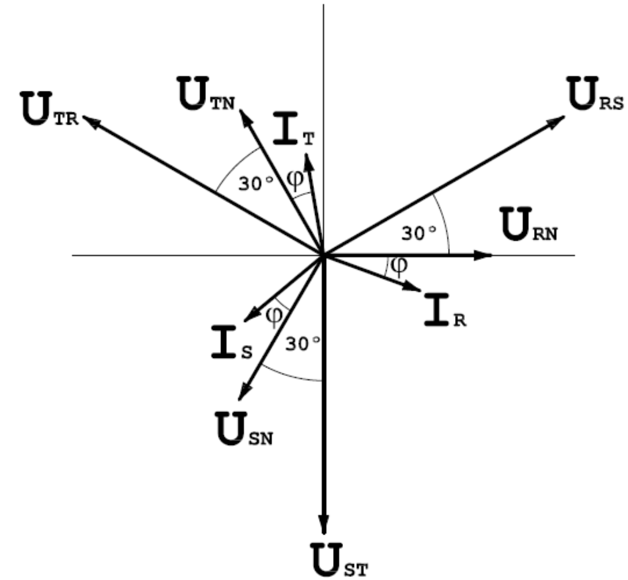
- Potencia reactiva
  - Medida con varímetros

Procedimiento análogo que con vatímetros para sistemas equilibrados y desequilibrados

Medida de potencia

- Potencia reactiva (EQUILIBRADOS)
  - Medida con un vatímetro



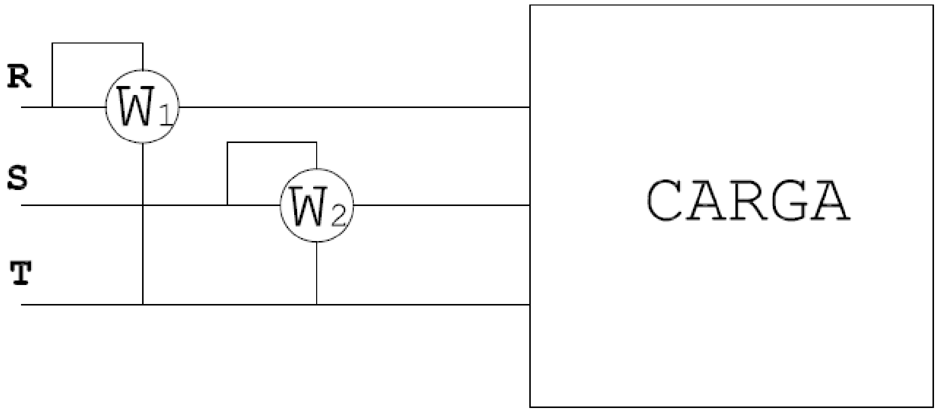


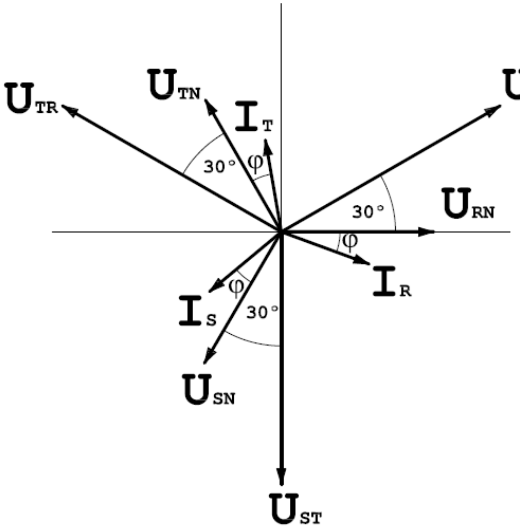
$$W = \overline{U}_{ST} \cdot \overline{I}_R = U_L I_L \cos(90 - \varphi) = U_L I_L sen\varphi \Rightarrow Q = \sqrt{3} \cdot U_L I_L sen\varphi$$

$$\boxed{Q = \sqrt{3} W}$$

Medida de potencia

- Potencia reactiva (EQUILIBRADOS)
  - Medida con dos vatímetros: método de Aron

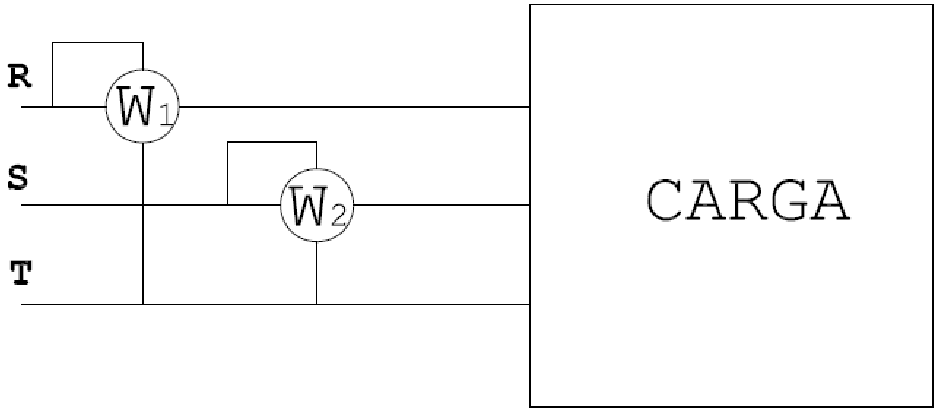


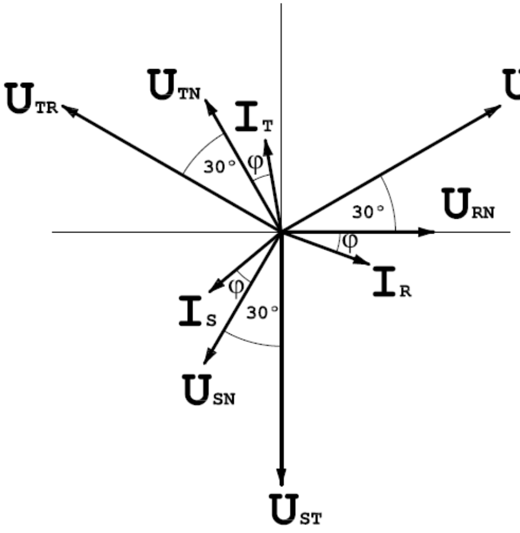


$$W_1 = \overline{U}_{RT} \cdot \overline{I}_R = U_L I_L \cos(30-\varphi)$$
$$W_2 = \overline{U}_{ST} \cdot \overline{I}_S = U_L I_L \cos(30+\varphi)$$
$$\Rightarrow W_1 - W_2 = U_L I_L sen\varphi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q = \sqrt{3}(W_1 - W_2)$$

Medida de potencia

- Potencia reactiva (EQUILIBRADOS)
  - Medida con dos vatímetros: método de Aron

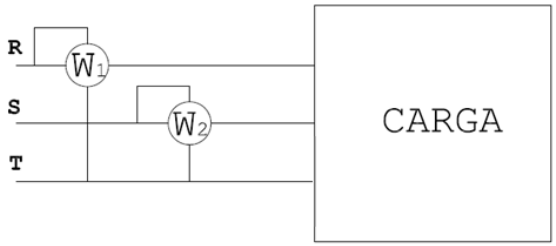


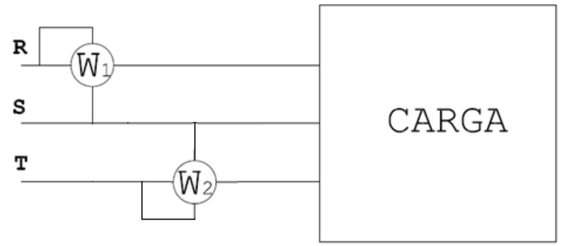


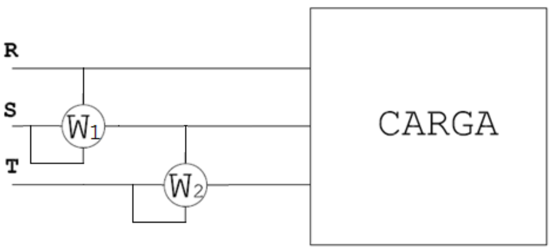
$$Q = \sqrt{3}(W_1 - W_2) \qquad \Rightarrow \tan\varphi = \frac{Q}{P} = \frac{\sqrt{3}(W_1 - W_2)}{W_1 + W_2}$$
$$P = W_1 + W_2$$

Medida de potencia

- Potencia reactiva (EQUILIBRADOS)
  - Medida con dos vatímetros: método de Aron





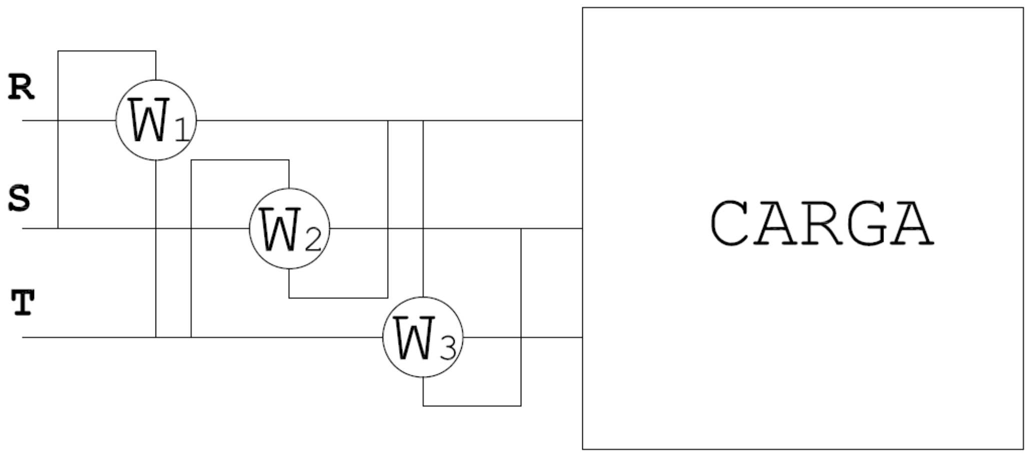


$$Q = \sqrt{3}(W_1 - W_2)$$
$$P = W_1 + W_2$$

$Q = \sqrt{3}(W_1 - W_2)$	Inductivo	Capacitivo
Secuencia Directa R-S-T	$Q > 0$	$Q < 0$
Secuencia Inversa R-T-S	$Q < 0$	$Q > 0$

Medida de potencia

- Potencia reactiva (DESEQUILIBRADOS)
  - Medida con tres vatímetros



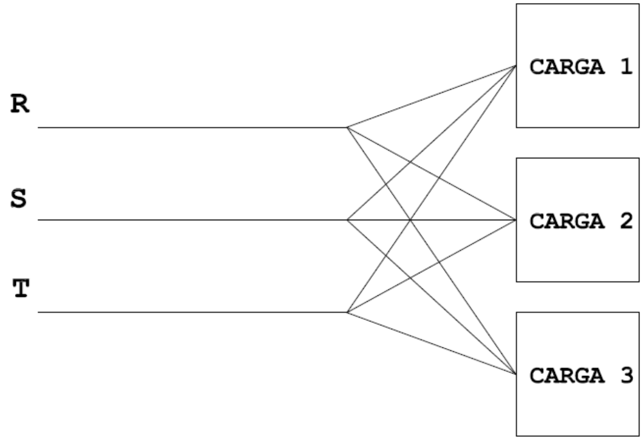
$$\boxed{Q = \frac{W_1 + W_2 + W_3}{\sqrt{3}}}$$

Medida de potencia

Ejemplo: se dispone de una red trifásica cuya tensión de línea es de 380 V a la que hay tres cargas equilibradas:

Carga 1: 10 *CV*; cosφ = 0.9 (i); η = 85%
Carga 2: 6 *kW*
Carga 3: 10 *kW*; cosφ = 0.8 (i); η = 80%

Determinar la lectura de los dos vatímetros que midan correctamente las potencias activa y reactiva absorbidas por la instalación



$$P_1 = \frac{736 \cdot 10}{0.85} = 8652.9 \text{ W}$$

$$P_2 = 6000 \text{ W}$$

$$\boxed{P = 27152.9 \text{ W}}$$

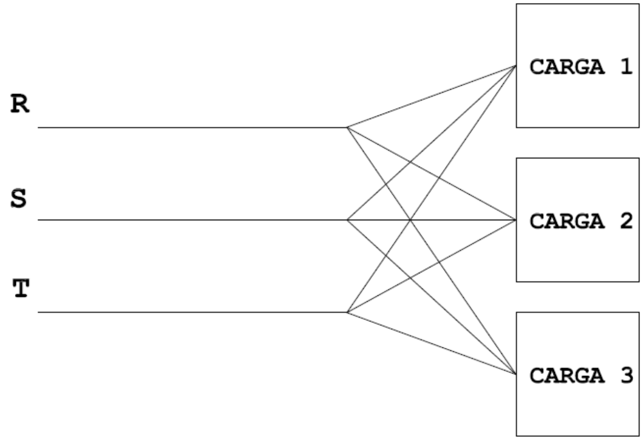
$$P_3 = \frac{10000}{0.80} = 12500 \text{ W}$$

Medida de potencia

Ejemplo: se dispone de una red trifásica cuya tensión de línea es de 380 V a la que hay tres cargas equilibradas:

Carga 1: 10 *CV*; cosφ = 0.9 (i); η = 85%
Carga 2: 6 *kW*
Carga 3: 10 *kW*; cosφ = 0.8 (i); η = 80%

Determinar la lectura de los dos vatímetros que midan correctamente las potencias activa y reactiva absorbidas por la instalación



$$Q_1 = 8652.9 \cdot \tan 25.84^{\circ} = 4190.8 \text{ VAr}$$

$$Q_2 = 0 \text{ VAr}$$

$$\boxed{Q = 13565.81 \text{ VAr}}$$

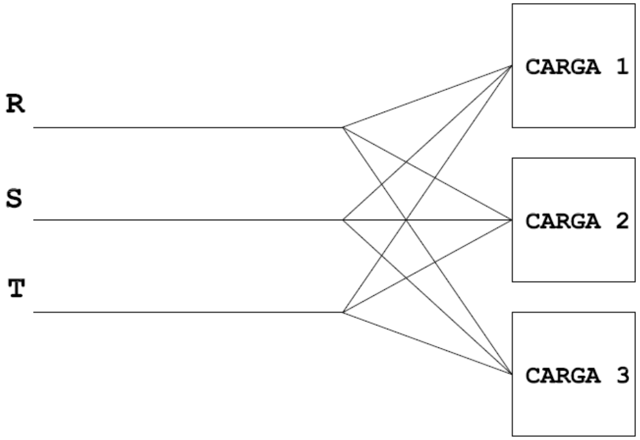
$$Q_3 = 12500 \cdot \tan 36.87^{\circ} = 9375 \text{ VAr}$$

Medida de potencia

Ejemplo: se dispone de una red trifásica cuya tensión de línea es de 380 V a la que hay tres cargas equilibradas:

Carga 1: 10 *CV*; cosφ = 0.9 (i); η = 85%
Carga 2: 6 *kW*
Carga 3: 10 *kW*; cosφ = 0.8 (i); η = 80%

Determinar la lectura de los dos vatímetros que midan correctamente las potencias activa y reactiva absorbidas por la instalación

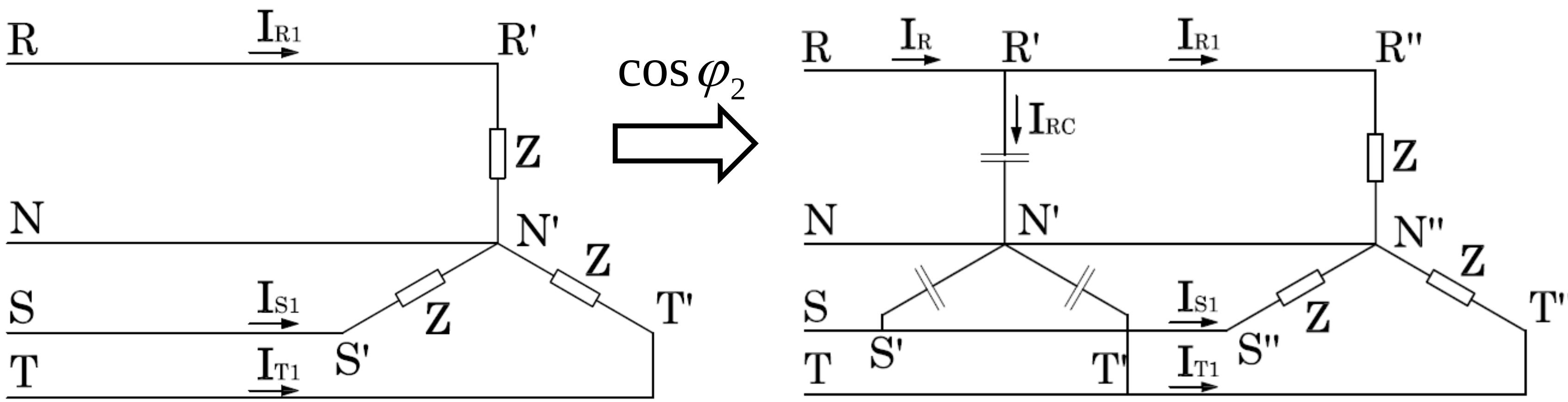


$$\boxed{\begin{aligned} P &= 27152.94\ \mathrm{W} \\ Q &= 13565.81\ \mathrm{VAr} \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} P &= W_1 + W_2 \\ Q &= \sqrt{3}(W_1 - W_2) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} W_1 = 17492.6\ \mathrm{W} \\ W_2 = 9660.4\ \mathrm{W} \end{cases}$$

Corrección del factor de potencia

- Batería de condensadores en estrella



$$Q_1 = \sqrt{3}\cdot U_L I_{R1} sen\varphi_1$$

$$f.d.p = \cos\varphi_1$$

$$Q_C = P\cdot\left[\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2\right]$$

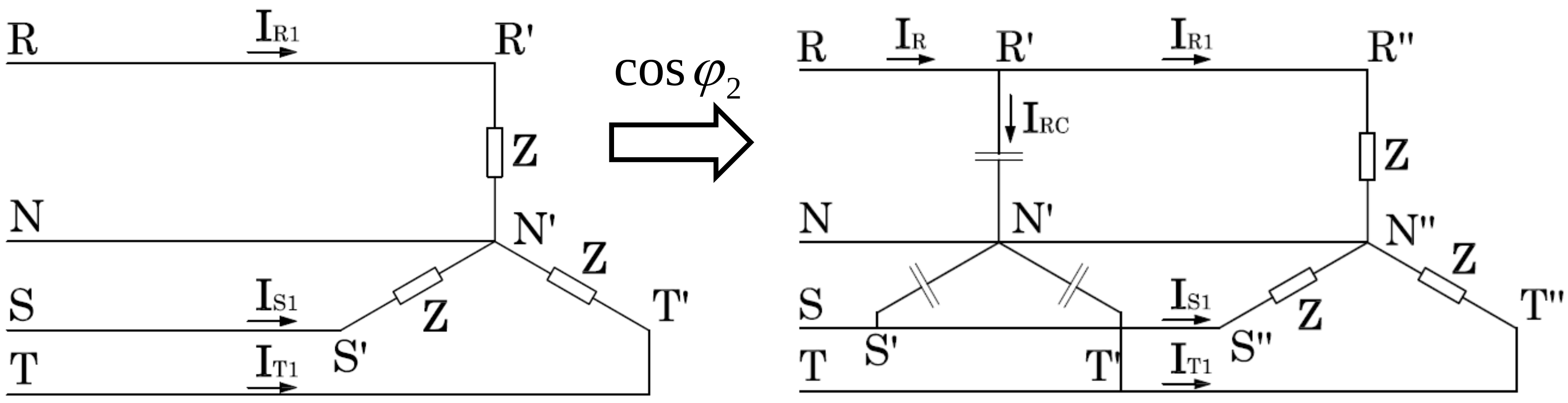
$$Q_C = 3Q_c$$

$$Q_C = 3\cdot U\ I_{RC} sen\,90^{o} = 3\frac{U_L}{\sqrt{3}} I_{RC} = \sqrt{3}\cdot U_L I_{RC} = \sqrt{3}\cdot U_L \frac{U}{X_C} = U_L^2\omega C$$

$$Q_C = U_L^2\omega C_Y \Rightarrow \boxed{C_Y = \frac{Q_C}{U_L^2\omega}}$$

Corrección del factor de potencia

- Batería de condensadores en estrella



$$Q_C = P \cdot [\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2]$$

$$Q_C = \sqrt{3} \cdot U_L I_{RC}$$

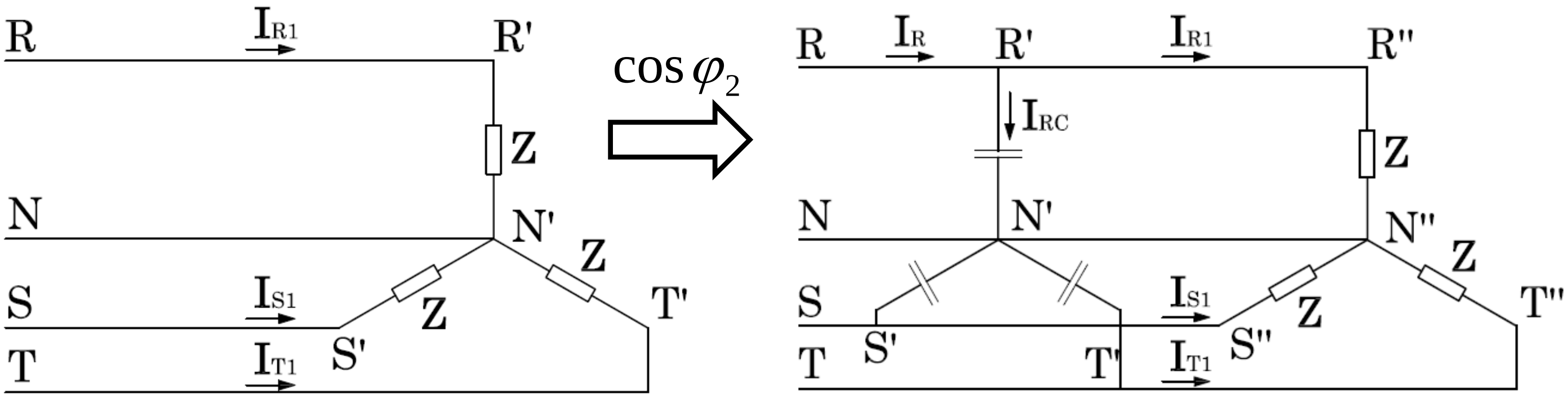
$$P = \sqrt{3} \cdot U_L I_{R1} \cos\varphi_1$$

$$\sqrt{3} \cdot U_L I_{RC} = \sqrt{3} \cdot U_L I_{R1} \cos\varphi_1 [\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2]$$

$$I_{RC} = I_{R1} \cos\varphi_1 [\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2]$$

Corrección del factor de potencia

- Batería de condensadores en estrella



$$Q_C = 3Q_c = 3\cdot U^2 \omega C = 3\cdot \frac{U_L^2}{3}\omega C = U_L^2 \omega C$$

$$C = \frac{Q_C}{U_L^2 \omega} = \frac{\sqrt{3}\cdot U_L I_{RC}}{U_L^2 \omega} = \frac{\sqrt{3}\cdot I_{RC}}{U_L \omega} = \frac{I_{RC}}{U\omega} \equiv \frac{I_C}{U\omega}$$

$$\boxed{C_Y = \frac{I_C}{U\omega}}$$

Corrección del factor de potencia

- Batería de condensadores en triángulo

$$Q_C = 3Q_c = 3 \cdot UI_C sen\, 90^\circ = 3 \cdot UI_C = 3 \cdot U \frac{U}{X_C} = 3 \cdot U_L^2 \omega C$$

$$Q_C = 3 \cdot U_L^2 \omega C_\Delta \Rightarrow \boxed{C_\Delta = \frac{Q_C}{3 \cdot U_L^2 \omega}}$$

  - Conexión de la batería de condensadores ¿En estrella o en triángulo?

$$\left.\begin{aligned} C_\Delta &= \frac{Q_C}{3 \cdot U_L^2 \omega} \\ C_Y &= \frac{Q_C}{U_L^2 \omega} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{C_\Delta = \frac{C_Y}{3}}$$

Corrección del factor de potencia

Ejemplo: Calcular la potencia reactiva y capacidad por fase de una batería de condensadores, conectados en triángulo, para que eleve el factor de potencia a la unidad, así como la lectura de los vatímetros que midan correctamente las potencias activa y reactiva de una instalación trifásica equilibrada.
Datos: P=27151.45 W; U_L=380 V; $\cos\varphi_1$=0.895.

$$Q_C = P\cdot\left[\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2\right] = 27151.45\cdot\left[\tan 26.45^{o} - \tan 0^{o}\right] = 13507.64\ \text{VAr}$$

$$C_\Delta = \frac{Q_C}{3\cdot U_L^2\omega} = \frac{13507.64}{3\cdot 380^2\cdot 2\pi\cdot 50} = 99.25\mu F$$

Medida de vatímetros antes de corregir:

$$\left.\begin{array}{l} P = 27151.45\ \text{W} \\ \text{Q} = 13507.64\ \text{VAr} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 27151.45 = W_1 + W_2 \\ 13507.64 = \sqrt{3}\left(W_1 - W_2\right) \end{array}$$

Corrección del factor de potencia

Ejemplo: Calcular la potencia reactiva y capacidad por fase de una batería de condensadores, conectados en triángulo, para que eleve el factor de potencia a la unidad, así como la lectura de los vatímetros que midan correctamente las potencias activa y reactiva de una instalación trifásica equilibrada.

Datos: P=27151.45 W; U_L=380 V; $\cos\varphi_1$=0.895.

Medida de vatímetros antes de corregir:

$$\left.\begin{aligned} P &= 27151.45\ \mathrm{W} \\ \mathrm{Q} &= 13507.64\ \mathrm{VAr} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} 27151.45 &= W_1 + W_2 \\ 13507.64 &= \sqrt{3}\left(W_1 - W_2\right) \end{aligned}$$

$$W_1 = 17475.04\ \mathrm{W}$$

$$W_2 = 9676.40\ \mathrm{W}$$

Corrección del factor de potencia

Ejemplo: Calcular la potencia reactiva y capacidad por fase de una batería de condensadores, conectados en triángulo, para que eleve el factor de potencia a la unidad, así como la lectura de los vatímetros que midan correctamente las potencias activa y reactiva de una instalación trifásica equilibrada.

Datos: P=27151.45 W; U_L=380 V; $\cos\varphi_1$=0.895.

Medida de vatímetros después de corregir:

$$\left.\begin{aligned} P &= 27151.45\ \mathrm{W} \\ \mathrm{Q} &= 0\ \mathrm{VAr} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 27151.45 &= W_1 + W_2 \\ 0 &= \sqrt{3}\left(W_1 - W_2\right) \end{aligned}$$

$$W_1 = 13575.73\ \mathrm{W}$$

$$W_2 = 13575.73\ \mathrm{W}$$

Bibliografía

1. F. Aznar, A. Espín y F. Gil. "Electrotecnia básica para ingenieros". 2ª Ed. Universidad de Granada, 2012.
2. J. Fraile Mora. "Electromagnetismo y circuitos eléctricos". 4ª Ed. McGraw-Hill, 2005.
3. A. Pastor Gutiérrez, J. Ortega Jiménez, V. M. Parra Prieto y A. Pérez Coyto. "Circuitos Eléctricos" Vol. I. Editorial de la Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2005.
4. J. Fraile Mora. "Problemas de circuitos eléctricos". Pearson, 2013.
5. M. R. Spiegel, L. Abellanas. "Fórmulas y tablas de matemática aplicada". McGraw-Hill, 1997.