Monofásica: Apuntes de Electrotecnia para Grados de Ingeniería

Autor: Ovidio Rabaza Castillo

INDICE

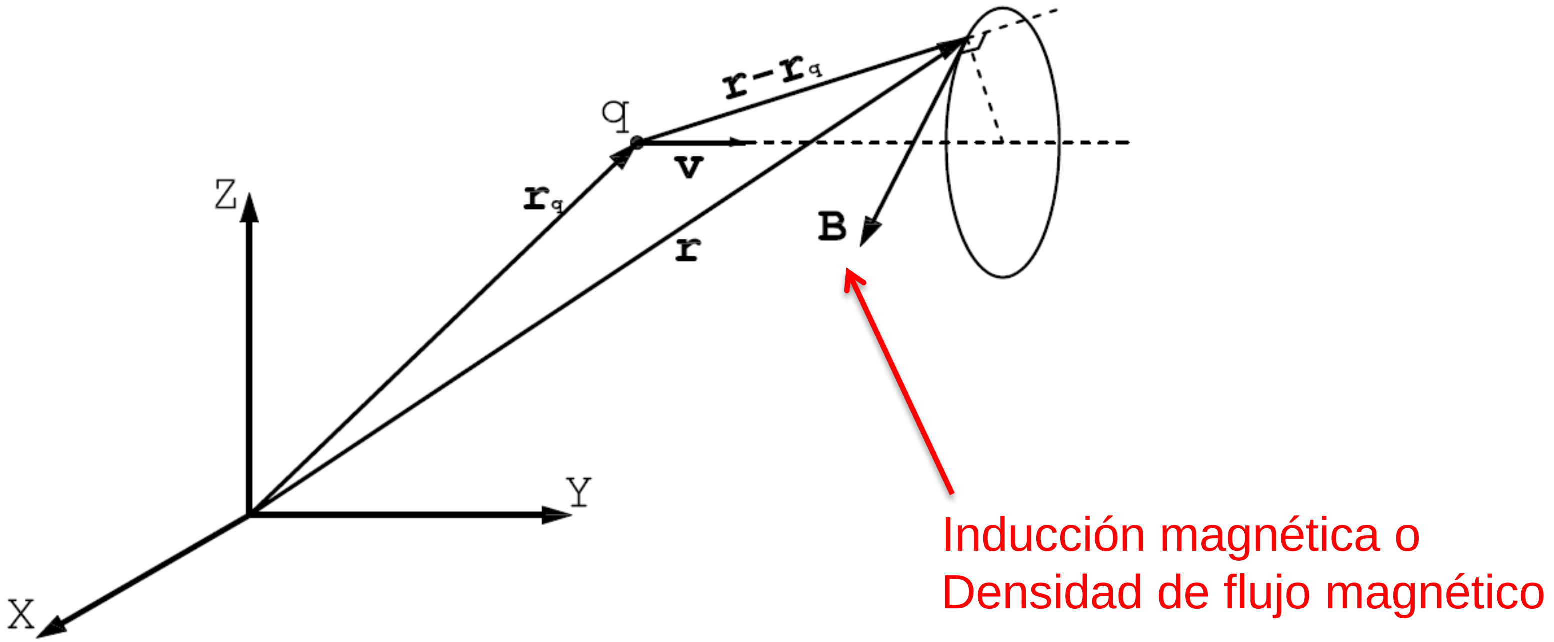
Tema 1: Campos variables con el tiempo. Inducción electromagnética.

Índice

- Definición de campo magnético
- Generación de Fuerza Electromotriz
- Ley de inducción de Faraday
- Variables de Corriente Alterna
- Aparatos de Medidas Eléctricos

Definición de Campo Magnético

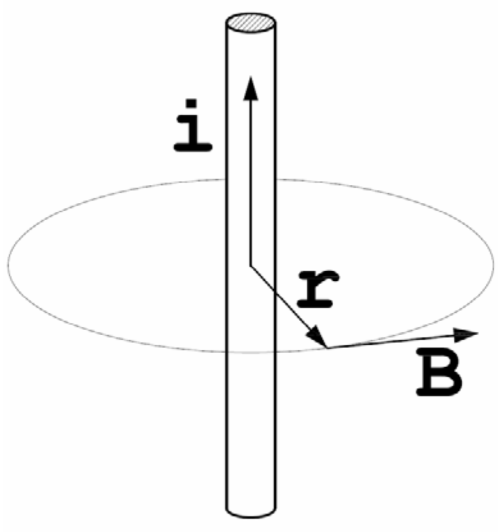
Campo magnético creado por una carga en movimiento



$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \cdot v \cdot Sen\,\theta}{d^2} \Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \cdot \vec{v} \times \left(\vec{r} - \vec{r}_q\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_q\right|^3}$$

Definición de Campo Magnético

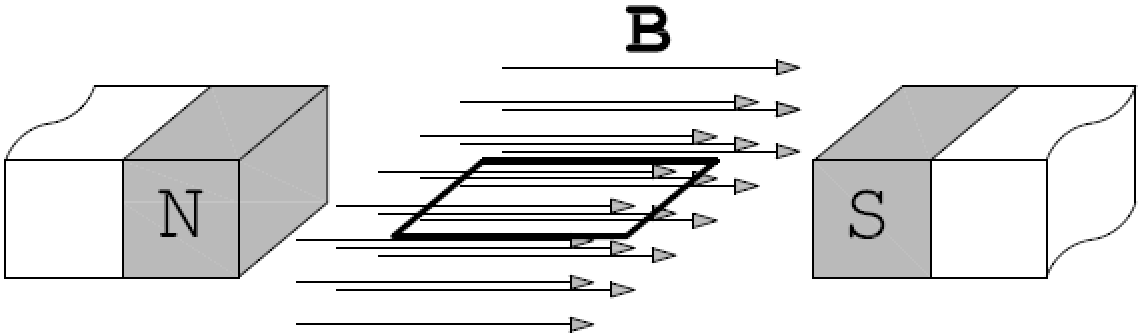
Campo magnético creado por una corriente eléctrica



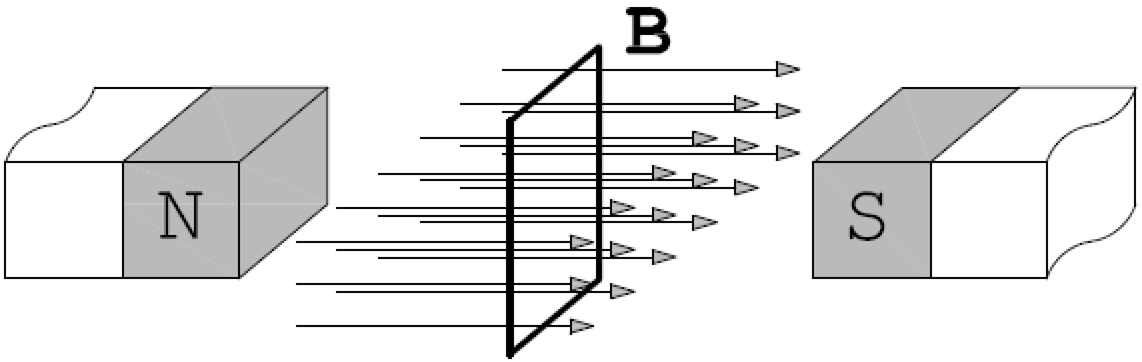
Regla del sacacorchos o de la mano derecha.

Generación de F.E.M.

$\phi = 0$



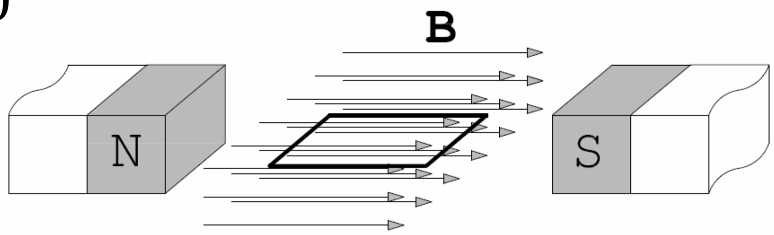
$\phi_{\max} = B \cdot S$



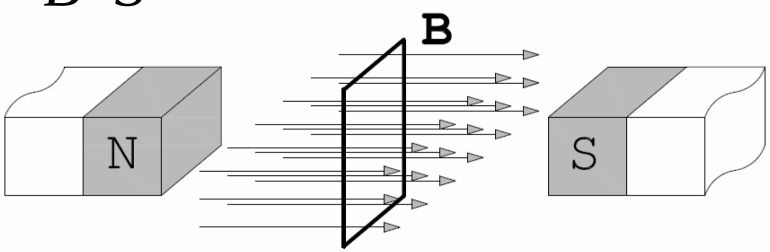
$$\phi = B \cdot S \cdot \cos\left(\vec{B}, \vec{S}\right) \equiv \vec{B} \cdot \vec{S}$$

Ley de Inducción de Faraday

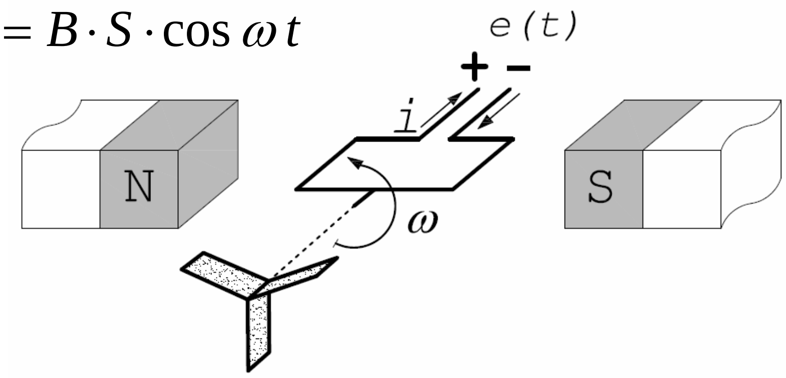
$$\phi = 0$$



$$\phi_{\max} = B \cdot S$$



$$\phi(t) = B \cdot S \cdot \cos \omega\, t$$



$$\boxed{\phi = B \cdot S \cdot \cos\left(\vec{B}, \vec{S}\right) \equiv \vec{B} \cdot \vec{S}}$$

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$e(t) = \omega \cdot \phi_{\max} \cdot sen\, \omega\, t$$

para N espiras:

$$\boxed{\begin{array}{l} e(t) = e_{\max} \cdot sen\, \omega t \\ e_{\max} = N \cdot \omega \cdot \phi_{\max} \end{array}}$$

Variables de Corriente Alterna

- Intensidad de corriente eléctrica

$$\boxed{i(t) = \frac{dq}{dt}} \qquad \left(Amperio\ \ (A) = \frac{Culombio\ \ (C)}{segundo\ \ (s)} \right)$$

- Tensión, diferencia de potencial o caída de potencial

$$\boxed{u(t) = \frac{dE}{dq}} \qquad \left(Voltio\ \ (V) = \frac{Julio\ \ (J)}{Culombio\ \ (C)} \right)$$

Variables de Corriente Alterna

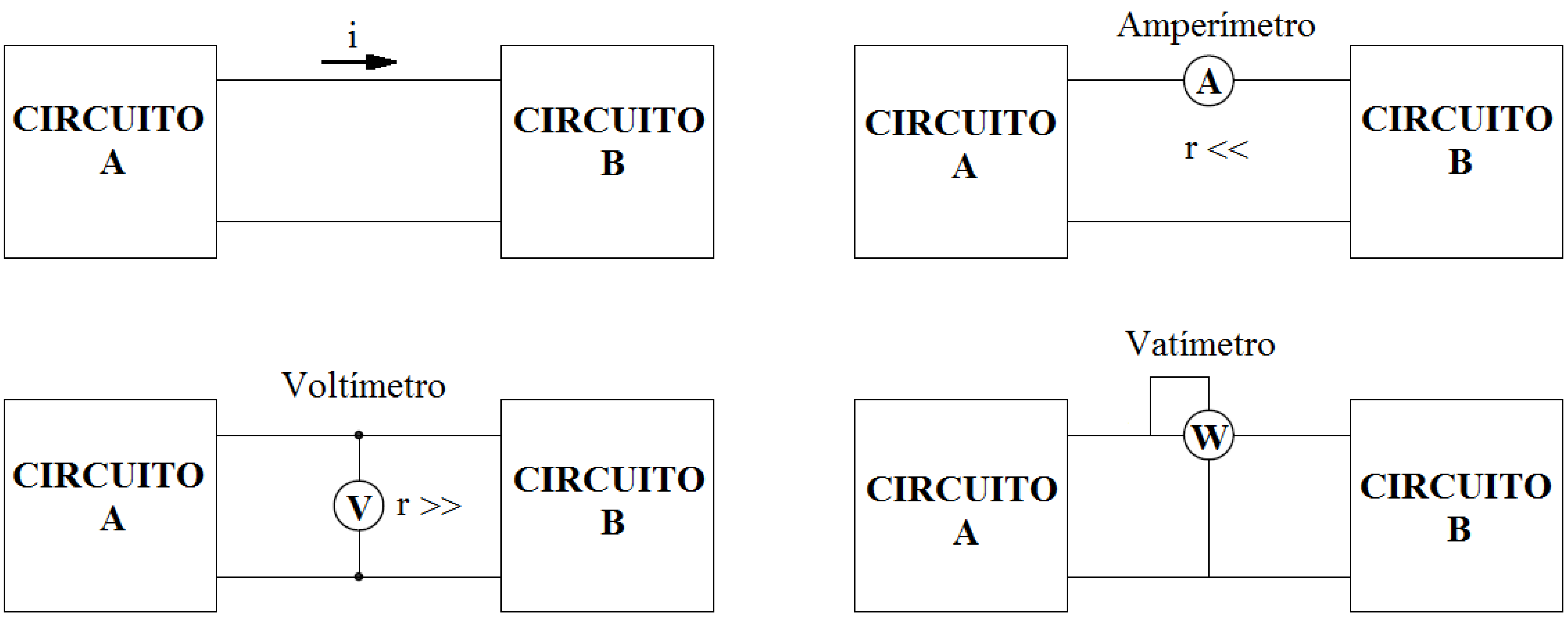
- Potencia eléctrica (suministrada o consumida)

$$\boxed{p(t)=\frac{dE}{dt}} \Rightarrow \boxed{p(t)=\frac{dE}{dt}=\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dq}{dt}=u(t)\cdot i(t)} \qquad (Vatio\ \ (W))$$

- Energía eléctrica (suministrada o consumida)

$$\boxed{dE=p(t)\cdot dt=u(t)\cdot i(t)\cdot dt} \qquad (J=W\cdot s)$$

Aparatos de Medida



Tema 2: Análisis de circuitos de corriente alterna

Índice

- Circuito eléctrico
- Tipos de circuitos
- Elementos pasivos
- Elementos activos
- Onda senoidal y valores asociados
- Representación fasorial
- Impedancia

Circuito eléctrico

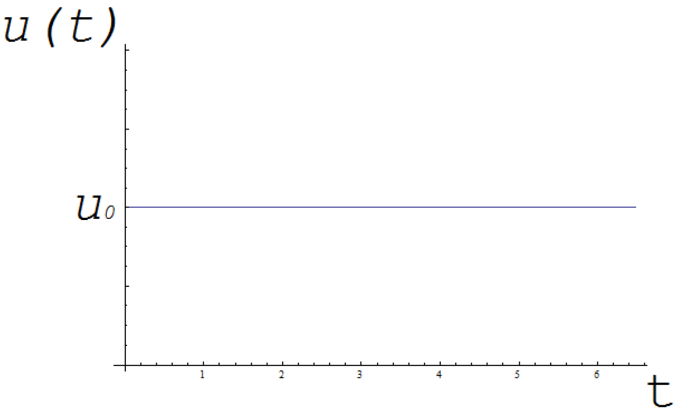
Definición: un circuito eléctrico o una red eléctrica, es un conjunto de elementos combinados de tal forma que con ellos se pueda originar una corriente eléctrica.

Los elementos pueden ser:

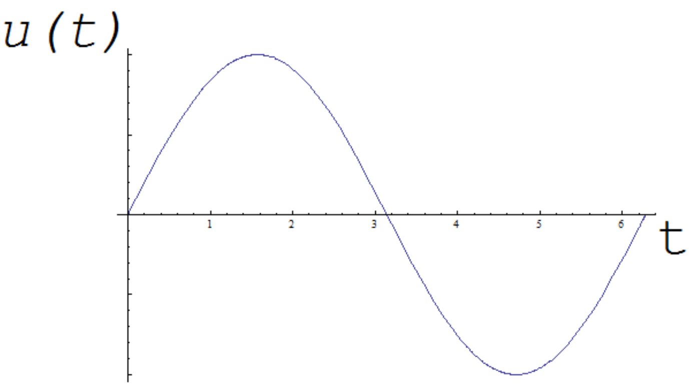
- **Activos:** fuentes o generadores que suministran energía eléctrica al sistema.
- **Pasivos:** disipan o almacenan energía eléctrica.
- **Aproximaciones** en el estudio analítico:
  - Parámetros concentrados (Simplificación)
  - Parámetros distribuidos (Real)

Tipos de Circuitos: clasificación

- **Por su excitación**
  - De tipo continuo

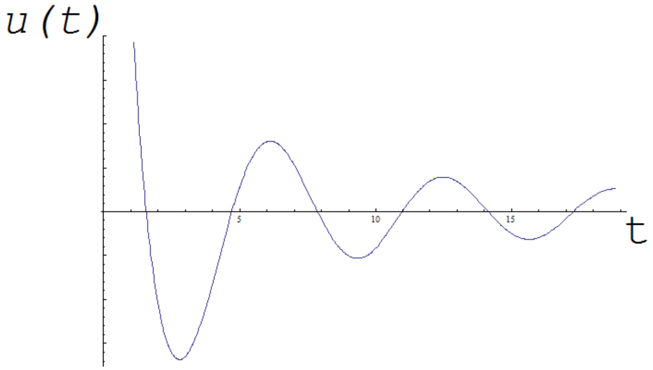


  - De tipo alterno

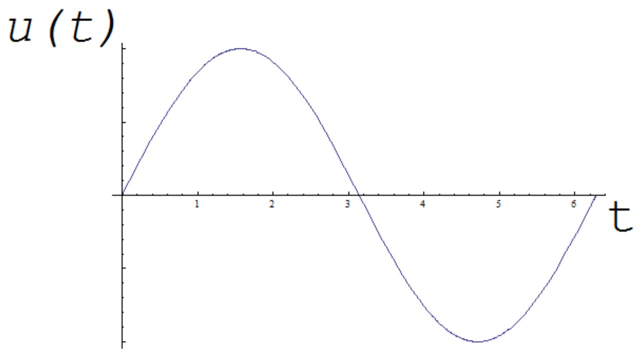


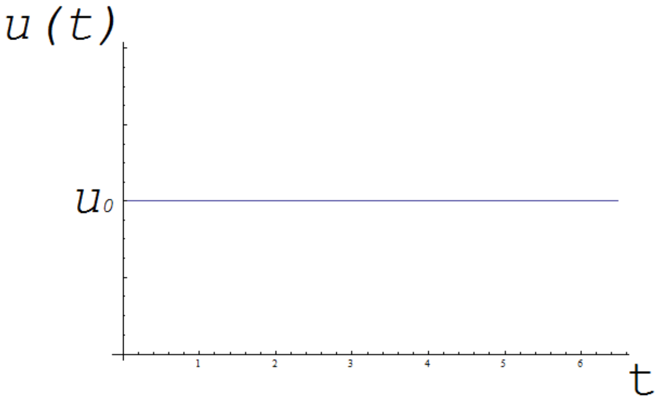
Tipos de Circuitos

- **Por su régimen de funcionamiento**
  - Transitorio



  - Estacionario o Permanente





Elementos pasivos

Definición: aquellos componentes que disipan o almacenan energía

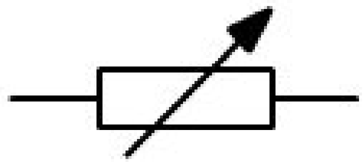
Nombre genérico: **Impedancia**

- **Resistencia:** *disipa energía en forma de calor*

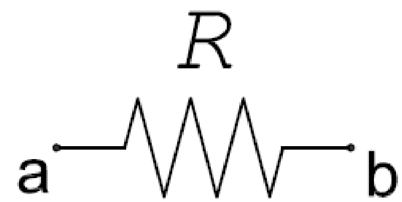
Resistencia fija

$R\,(\Omega)$ *Resistencia (Ohmio)*

Resistencia variable



$$\boxed{u(t) = R \cdot i(t)}$$



- **Variación de la resistencia con el material y dimensiones**

$$\boxed{R = \rho \frac{l}{s} = \frac{l}{c \cdot s}}$$

$R\,(\Omega)$	*resistencia*
$\rho\,(\Omega \cdot mm^2 / m)$	*resistividad*
$c\,(m / \Omega \cdot mm^2)$	*Conductividad (Cu = 58; Al = 36 a 20 ºC)*
$l\,(m)$	*longitud*
$s\,(mm^2)$	*sección*

Nota: simbología por la Norma UNE-EN 60617 (IEC 60617)

Elementos pasivos

- Variación de la resistencia con la temperatura:

$$\boxed{R(T_2) = R(T_1)[1+\alpha(T_2 - T_1)]}$$

$$\boxed{\rho(T_2) = \rho(T_1)[1+\alpha(T_2 - T_1)]}$$

$$\alpha_{Cu} = 0.0039$$

- Potencia y energía

$$\boxed{p(t) = u(t)\cdot i(t) = R\cdot i^2(t) = \frac{u^2(t)}{R}}$$

$$\boxed{dE = p(t)dt \Rightarrow E = R\cdot \int_0^t i^2(t)\cdot dt}$$

en cc:

$$\boxed{E = R\cdot I^2\cdot t}$$

Elementos pasivos

- <u>Cortocircuito</u>: incremento brusco de la intensidad eléctrica a valores muy por encima de lo soportado por el elemento que lo provoca y d.d.p. entre bornes muy próximo a cero.

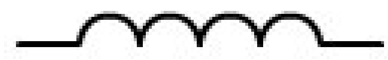
$$\frac{u(t)}{R} = i(t)$$

- <u>Circuito abierto</u>: se produce cuando la intensidad por el elemento es cero. El hueco vacío entre dos puntos de un circuito es igual a una resistencia de valor infinito.

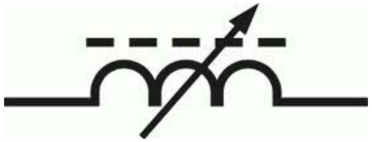
Elementos pasivos

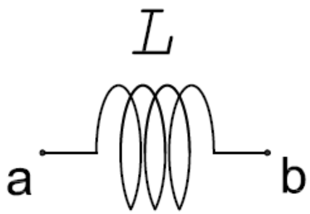
- **Bobina:** *almacenan energía magnética*

Bobina fija



Bobina variable





$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$dE = p(t)dt \Rightarrow E = L \cdot \int_0^t i(t) \cdot \frac{di(t)}{dt} dt = \frac{1}{2} L \cdot i^2(t)$$

$L\,(H)$ *Inducción (Henrio)*

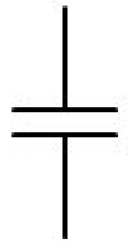
- Si la intensidad i(t) que circula por la bobina es constante, la tensión entre sus bornes es cero. Esto implica que la bobina se comporte como un cortocircuito (controlado).
- No admite cambios bruscos de intensidad. Derivada infinita.

Nota: simbología por la Norma UNE-EN 60617 (IEC 60617)

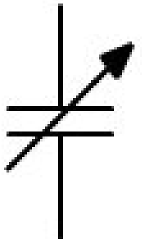
Elementos pasivos

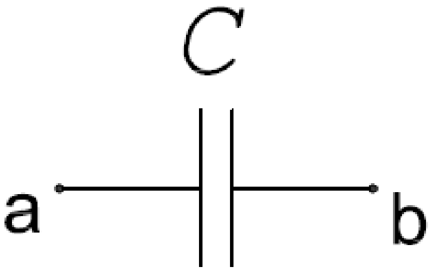
- **Condensador:** *<u>almacenan energía eléctrica</u>*

Condensador fijo



Condensador variable





$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

$$dE = p(t)dt \Rightarrow E = C \cdot \int_0^t u(t) \cdot \frac{du(t)}{dt} dt = \frac{1}{2} C \cdot u^2(t)$$

$C\,(F)$ *Capacidad (Faradio)*

- Si la tensión u(t) entre los bornes es constante el condensador actúa como un circuito abierto.

- Cambios bruscos de tensión equivale a un cortocircuito.

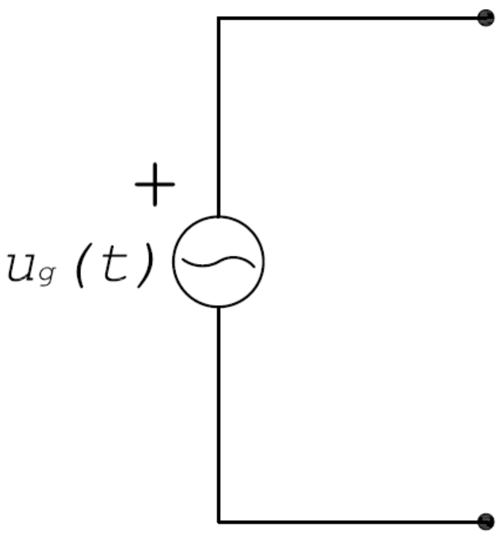
Nota: simbología por la Norma UNE-EN 60617 (IEC 60617)

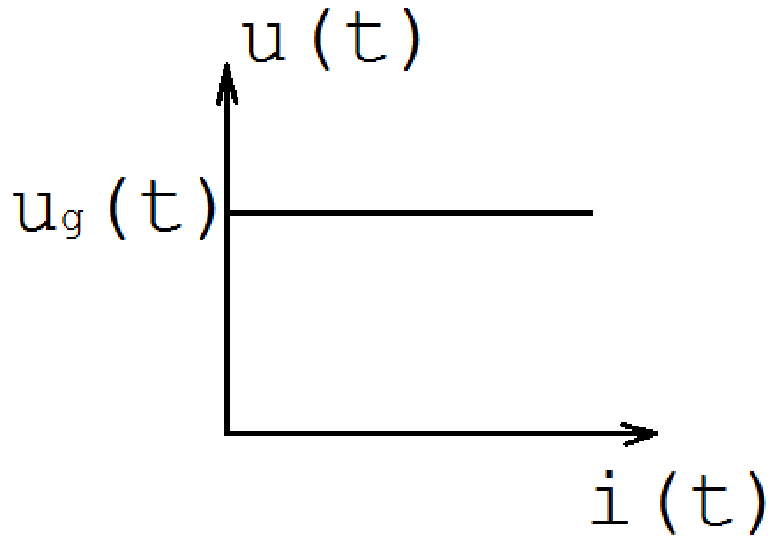
Elementos activos

Definición: aquellos componentes que proporcionan energía eléctrica

- **Fuentes o generadores de tensión ideal**

Suministra tensión al circuito independientemente de la intensidad eléctrica.



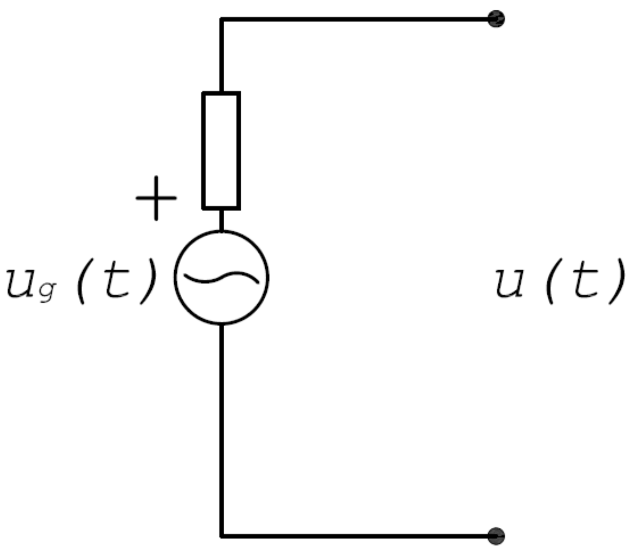


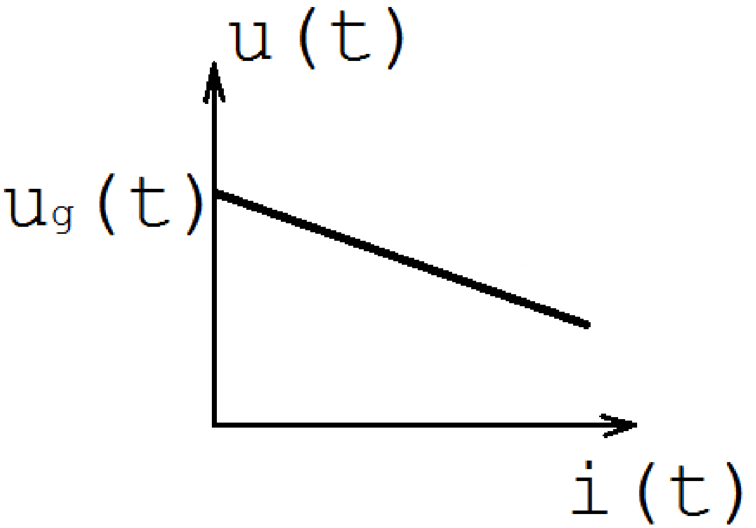
Elementos activos

Definición: aquellos componentes que proporcionan energía eléctrica

- **Fuentes o generadores de tensión real**

Suministra tensión al circuito dependientemente de la intensidad eléctrica.



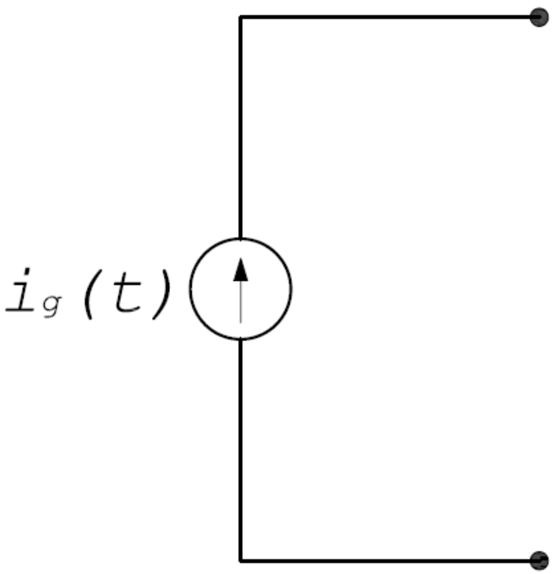


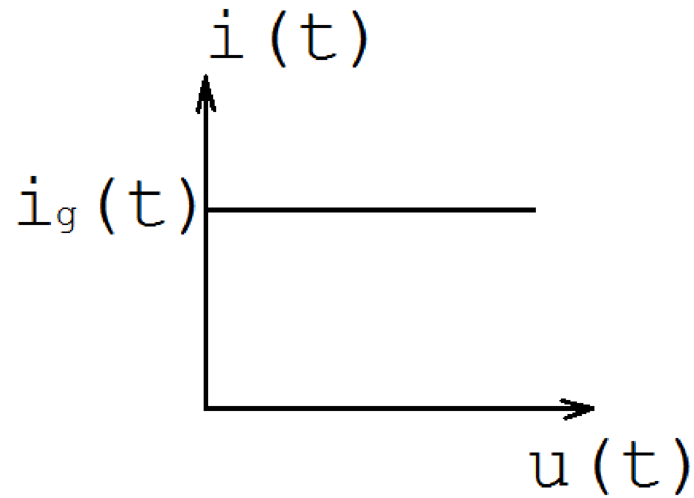
Elementos activos

Definición: aquellos componentes que proporcionan energía eléctrica

- **Fuentes o generadores de corriente ideal**

Suministra corriente al circuito independientemente de la tensión en los bornes.



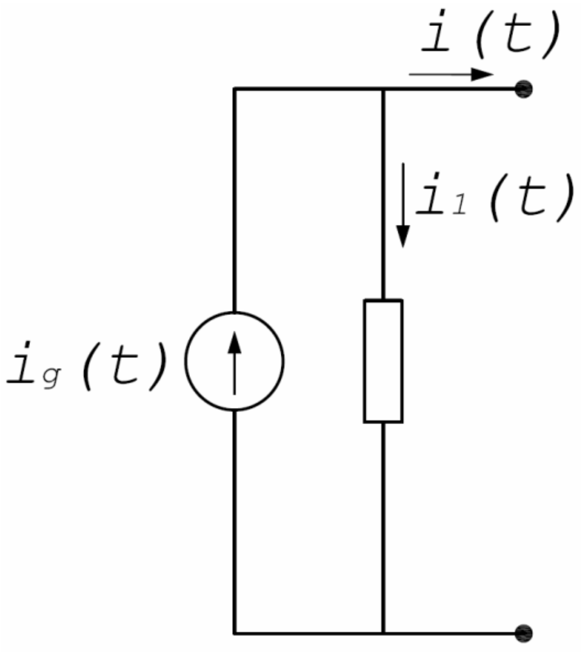


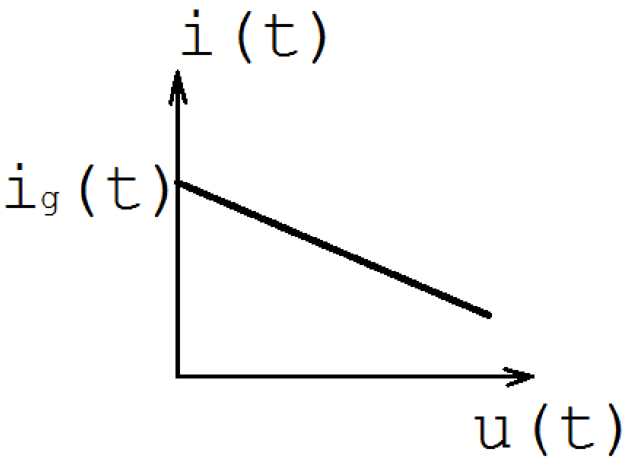
Elementos activos

Definición: aquellos componentes que proporcionan energía eléctrica

- **Fuentes o generadores de corriente real**

Suministra corriente al circuito dependientemente de la tensión en los bornes.

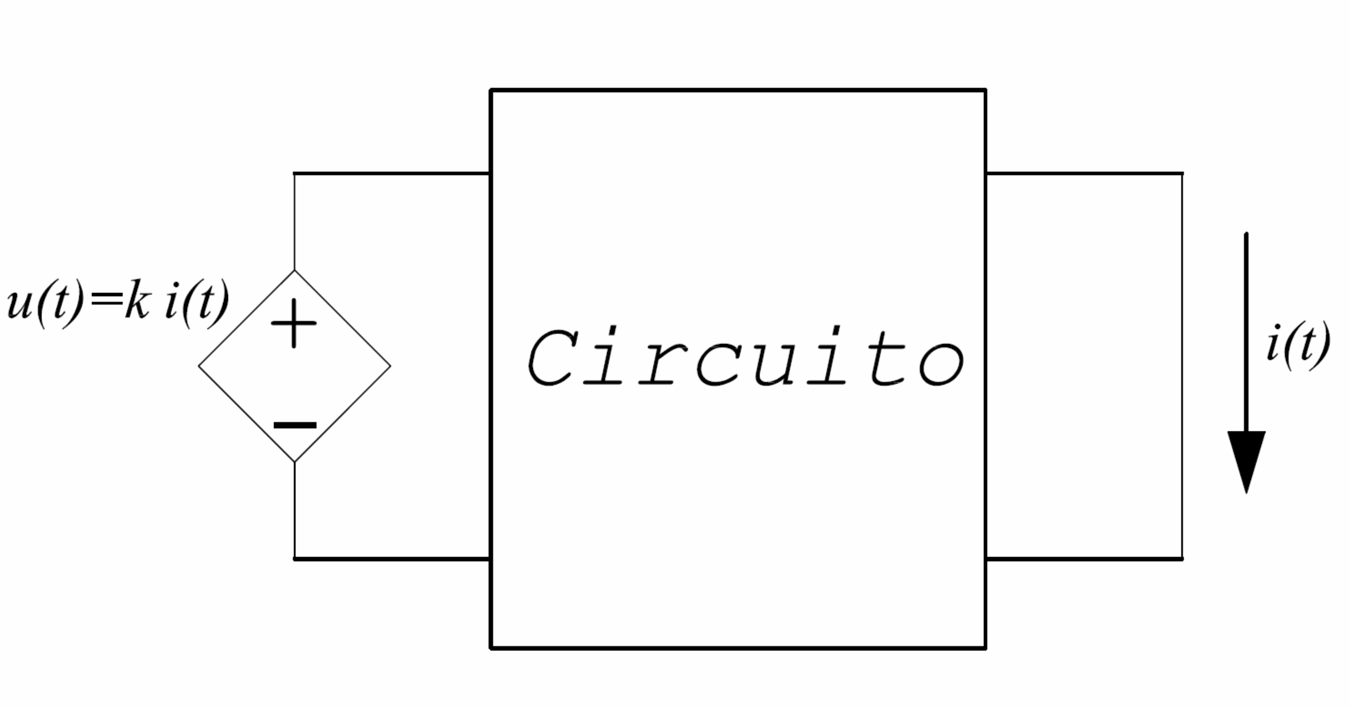




Elementos activos

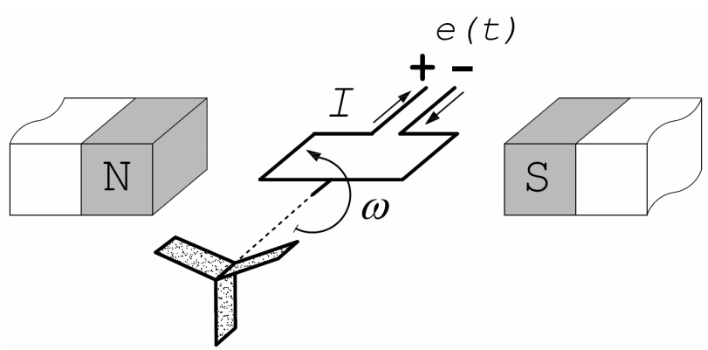
Definición: aquellos componentes que proporcionan energía eléctrica

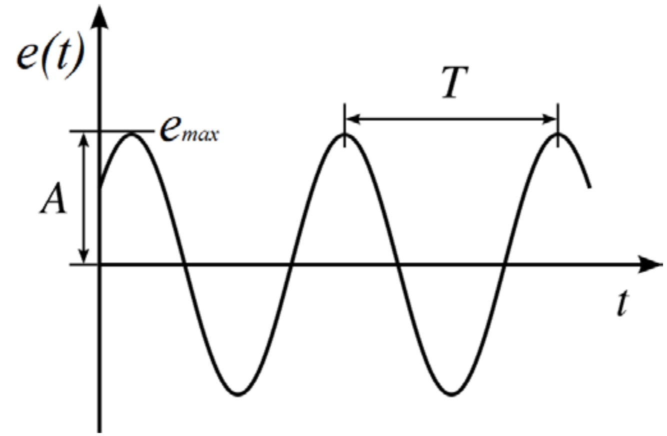
- **Fuentes o generadores dependientes**



Onda senoidal y valores asociados

- **Generación y valores asociados**





$$e(t) = e_{\max} sen\, \omega t = e_{\max} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \boxed{e(t) = e_{\max} \cos(\omega t + \varphi)}$$

$e(t)$	*Valor instantáneo de f.e.m. (Voltio)*
$e_{\max}(V)$	*Valor máximo de f.e.m.*
$\omega\,(rad \cdot s^{-1})$	*Pulsación o frecuencia angular*
$t\,(s)$	*Tiempo*
$\varphi\,(rad)$	*Ángulo de desfase*

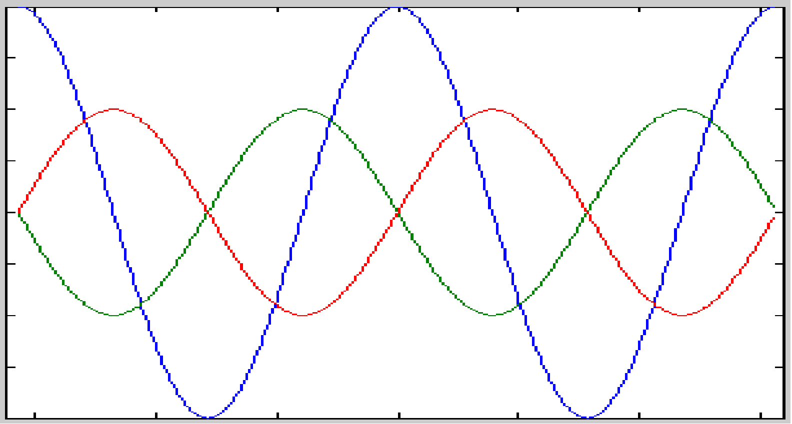
$T(s)$	*Periodo*
$f = \frac{1}{T}\ (Hz)$	*Frecuencia*

$$\omega\,(rad \cdot s^{-1}) = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$

Onda senoidal y valores asociados

- **Desfase entre ondas**

Angulo de fase o *desfase*, el que existe entre el origen y un punto cualquiera de la onda.



Angulo de desfase entre dos ondas:

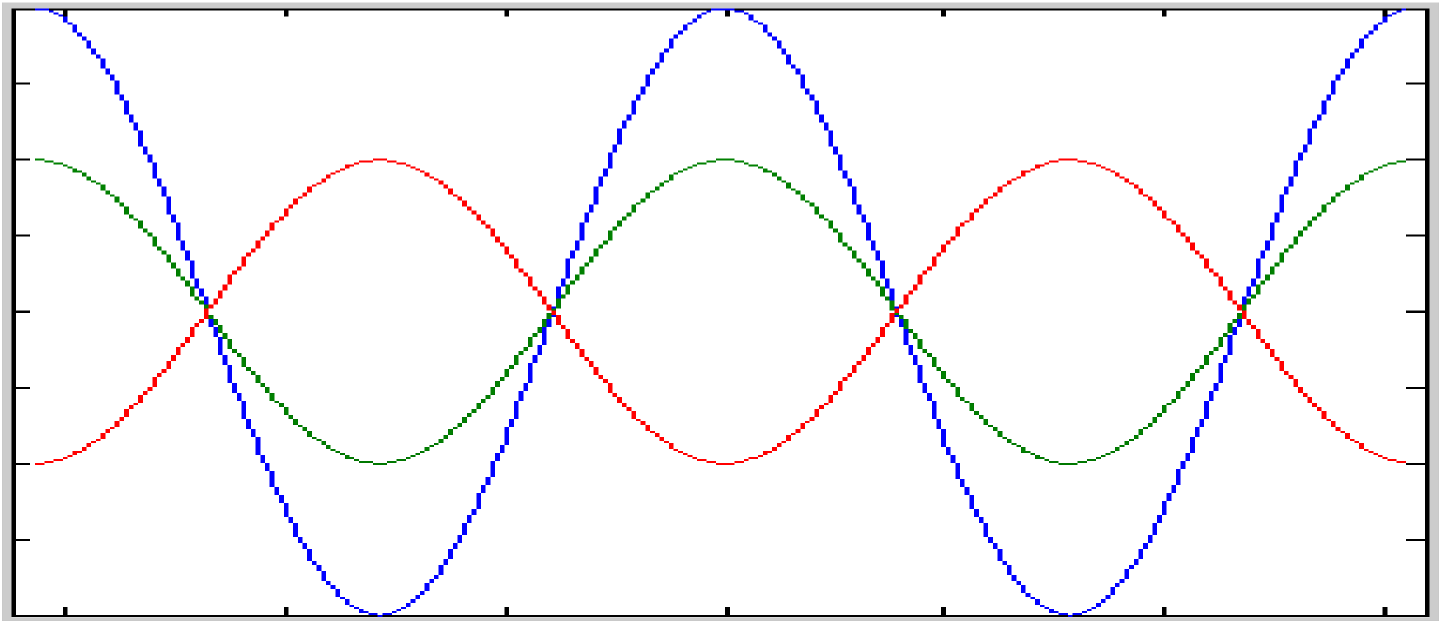
$$\boxed{\varphi = \varphi_1 - \varphi_2}$$

Tomando la onda azul como referencia: $e(t) = e_{\max} \cdot \cos \omega t$

La onda verde está adelantada en fase: $e(t) = e_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$

La onda roja está retrasada en fase: $e(t) = e_{\max} \cdot \cos(\omega t - \varphi_2)$

Onda senoidal y valores asociados



- **Ondas en fase** $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$
- **Ondas en cuadratura** $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\frac{\pi}{2}$
- **Ondas en oposición** $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\pi$

Onda senoidal y valores asociados

- **Valor medio**

n	x
n_1	x_1
n_2	x_2
-	-
n_m	x_m
N	

$$x_{med} = \sum x_i \cdot \frac{n_i}{N}$$

$$\boxed{y = y(t) \Rightarrow y_{med} = \sum y(t_i) \cdot \frac{\Delta t}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \cdot dt}$$

Onda senoidal y valores asociados

- **Valor medio** (Cont.)

El "valor medio" de una función durante un tiempo T es:

$$\boxed{Y_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\cdot dt}$$

$$e(t) = e_{\max}\cdot\cos\omega t \Rightarrow e_{med}(T) = \frac{1}{T}\int_0^T e_{\max}\cdot\cos\omega t\cdot dt = \frac{e_{\max}}{\omega\cdot T}\left(sen\omega T - sen\omega 0\right) = \left\{\omega = \frac{2\pi}{T}\right\} =$$

$$= \frac{e_{\max}}{\omega\cdot T} sen\, 2\pi = 0 \quad \Rightarrow e_{med}(T) = 0$$

- **Valor eficaz**

Se define el "valor eficaz" de una función durante un tiempo T como:

$$\boxed{Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)\cdot dt}}$$

¿Para qué sirve? $Y_{ef}^2\cdot T = \int_0^T y^2(t)\cdot dt \Rightarrow I_{ef}^2\cdot T = \int_0^T i^2(t)\cdot dt$

Para simplificar $E = R\cdot\int_0^T i^2(t)\cdot dt \Rightarrow E = R\cdot I_{ef}^2\cdot T$

Onda senoidal y valores asociados

- **Valor eficaz** (Cont.) $i(t) = I_{\max} \cos \omega t$

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\cdot dt} = \sqrt{\frac{I_{\max}^2}{T}\int_0^T \cos^2 \omega t \cdot dt} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{T}}\sqrt{\int_0^T \cos^2 \omega t \cdot dt} = (*)$$

$$\int \cos^2 ax \cdot dx = \frac{x}{2} + \frac{sen\, 2ax}{4a} \Rightarrow \int_0^T \cos^2 \omega t \cdot dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{sen\, 2\omega t}{4\omega}\right]_0^T = \frac{T}{2}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega T = 2\pi$$

$$(*) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{T}}\sqrt{\frac{T}{2}} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{I_{\max} = \sqrt{2}\cdot I_{ef}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= U_{\max} \cos \omega t = \sqrt{2}\cdot U_{ef} \cdot \cos \omega t \\ i(t) &= I_{\max} \cos \omega t = \sqrt{2}\cdot I_{ef} \cdot \cos \omega t \end{aligned}}$$

¿Cómo serían las magnitudes en Corriente Continua?

Corriente Continua

- **Magnitud Alterna**

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= U_{\max}\cos\omega t = \sqrt{2}\cdot U_{ef}\cdot\cos\omega t \\ i(t) &= I_{\max}\cos\omega t = \sqrt{2}\cdot I_{ef}\cdot\cos\omega t \end{aligned}}$$

- **Magnitud Continua**

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= U_{\max}\cos\omega t = U_{ef} \\ i(t) &= I_{\max}\cos\omega t = I_{ef} \end{aligned}}$$

$$\downarrow$$

$$\omega = 0 \text{ y } Y_{\max} = Y_{ef}$$

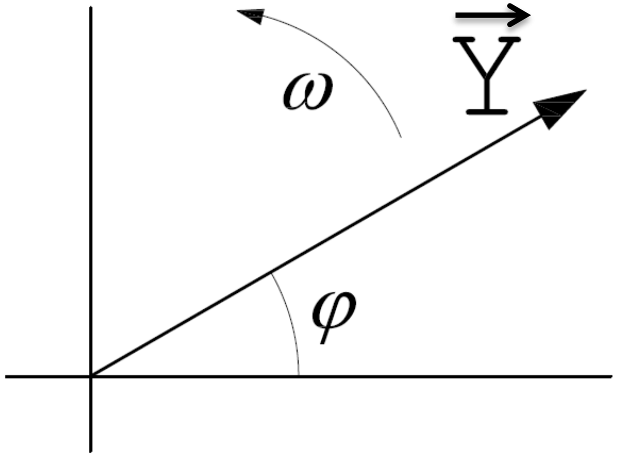
¿Podemos decir que la corriente continua es una particularidad de la alterna?

Representación fasorial

- **Fasor**

El Fasor es un vector que gira con una velocidad angular constante. La representación se realiza en un determinado instante.

$$\vec{Y} = Y \cdot \cos\varphi + j\,Y \cdot sen\varphi = Y \cdot (\cos\varphi + j sen\varphi)$$



Ejemplo:

$$\vec{z} = 3 + j\,2 = \left\{ \begin{array}{c} z = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3.61 \\ \varphi = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 33.69^o \end{array} \right\} =$$

$$= 3.61 \cdot (\cos 33.69^o + j sen 33.69^o)$$

- **Representación polar**

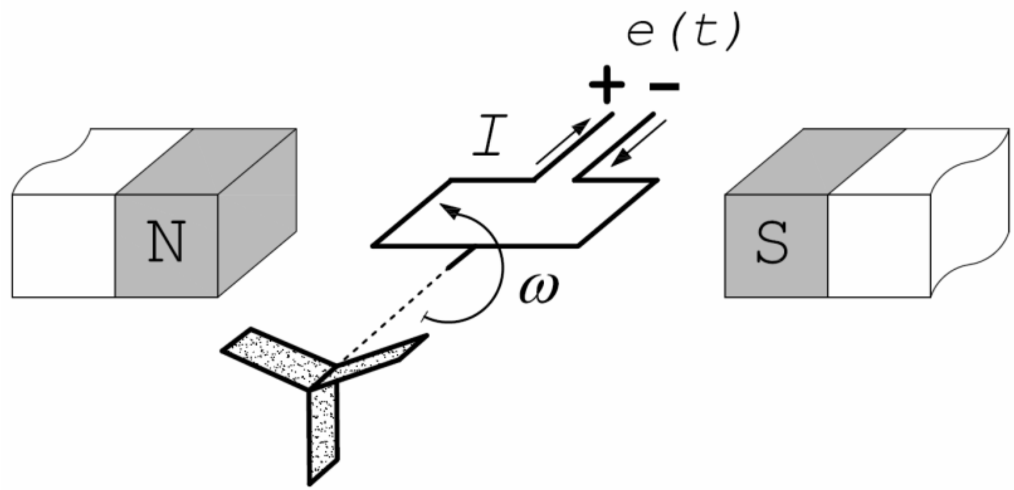
$$\vec{Y} = Y \cdot \cos\varphi + j\,Y \cdot sen\varphi = Y \cdot (\cos\varphi + j sen\varphi) = Y\angle\varphi$$

Ejemplo:

$$\vec{z} = 3 + j\,2 = 3.61\angle 33.69^o$$

Representación fasorial

- **Representación fasorial**



$$\boxed{e(t) = e_{max} \cdot \cos(\omega t + \varphi)}$$

Supongamos el siguiente número complejo: $\overline{e}(t) = e_{max}\cos(\omega t + \varphi) + j e_{max} sen(\omega t + \varphi)$

$$\boxed{e(t) = \mathrm{Re}\{\overline{e}(t)\}}$$

Representación fasorial

- **Representación fasorial** (Cont.)

$$\overline{e}(t) = e_{\max}\cos(\omega t + \varphi) + j e_{\max} sen(\omega t + \varphi) = \sqrt{2}\cdot e_{ef}\cdot\left(\cos(\omega t + \varphi) + j sen(\omega t + \varphi)\right)$$

$$\overline{e}(t) = \sqrt{2}\cdot e_{ef}\cdot\left(\cos(\omega t + \varphi) + j sen(\omega t + \varphi)\right) = \sqrt{2}\cdot e_{ef}\angle(\omega t + \varphi) = \underbrace{\left(e_{ef}\angle\varphi\right)}_{\overline{e}}\cdot\left(\sqrt{2}\angle\omega t\right)$$

$$\boxed{\overline{e} = e_{ef}\angle\varphi} \Rightarrow \overline{e}(t) = \overline{e}\cdot\sqrt{2}\angle\omega t$$

En resumen:

$$\boxed{e(t) = \sqrt{2}\cdot e_{ef}\cdot\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \overline{e} = e_{ef}\angle\varphi}$$

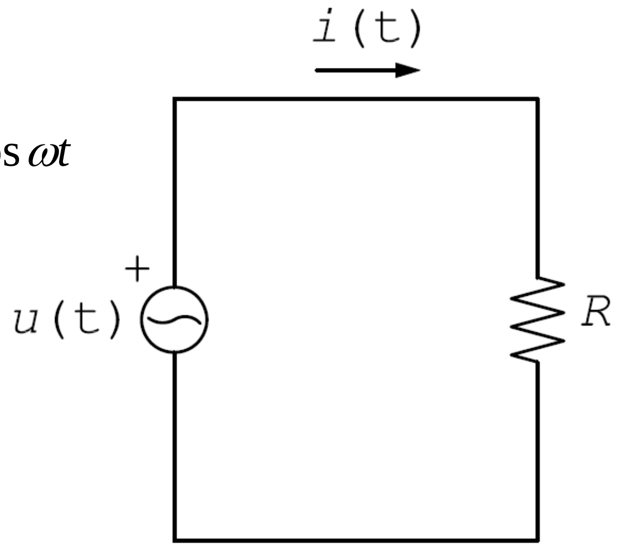
Impedancia

Vamos a deducir las expresiones complejas (y polares) de los elementos pasivos

- **Resistencia**

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{2}\cdot U \cdot \cos\omega t \\ u(t) &= R\cdot i(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow i(t) = \sqrt{2}\cdot \frac{U}{R}\cos\omega t \equiv \sqrt{2}\cdot I \cdot \cos\omega t$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{U} &= U\angle 0^{o} \\ \overline{I} &= I\angle 0^{o} = \frac{U}{R}\angle 0^{o} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\overline{U}}{\overline{I}} = \frac{U\angle 0^{o}}{U/R\,\angle 0^{o}} = R\angle 0^{o} = R$$



Impedancia

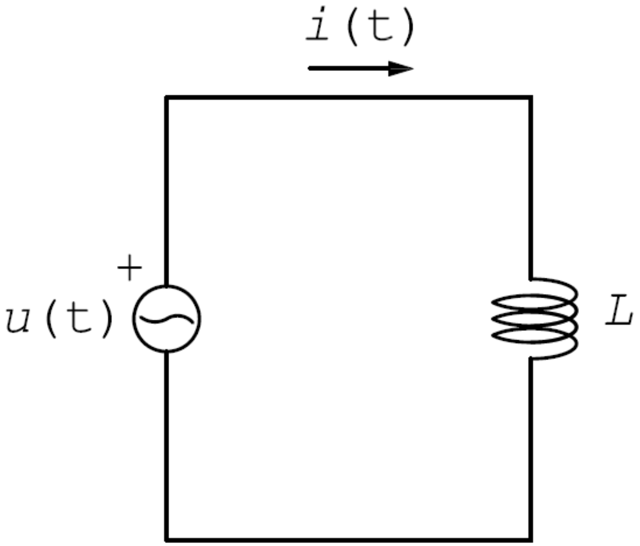
- **Reactancia inductiva**

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{2}\cdot U\cdot\cos\omega t \\ u(t) &= L\frac{di(t)}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow i(t) = \frac{1}{L}\int u(t)\cdot dt =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\frac{U}{L}\int\cos\omega t\cdot dt = \sqrt{2}\cdot\frac{U}{\omega L} sen\,\omega t =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\frac{U}{\omega L}\cos(\omega t - 90^{o}) = \sqrt{2}\cdot\frac{U}{\omega L}\cos(\omega t - 90^{o}) \equiv$$

$$\equiv \sqrt{2}\cdot I\cdot\cos(\omega t - 90^{o})$$



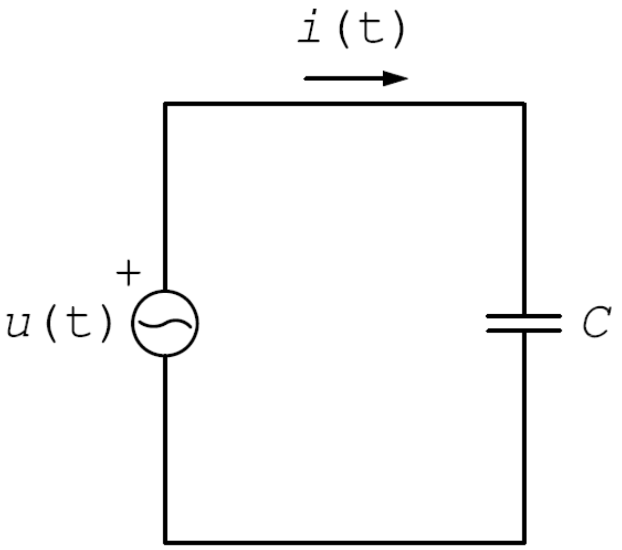
$$\left.\begin{aligned} \overline{U} &= U\angle 0^{o} \\ \overline{I} &= I\angle -90^{o} = \frac{U}{\omega L}\angle -90^{o} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\overline{U}}{\overline{I}} = \frac{U\angle 0^{o}}{U/_{\omega L}\angle -90^{o}} = \omega L\angle 90^{o} = \boxed{j\omega L = \overline{X}_L}$$

Impedancia

- **Reactancia capacitiva**

$$\left.\begin{array}{l} u(t) = \sqrt{2}\cdot U \cdot \cos\omega t \\ i(t) = C\dfrac{du(t)}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow i(t) = -\sqrt{2}\cdot U\omega C \cdot sen\omega t =$$

$$= \sqrt{2}\cdot U\omega C \cdot \cos(\omega t + 90^{o}) \equiv \sqrt{2}\cdot I \cdot \cos(\omega t + 90^{o})$$



$$\left.\begin{array}{l} \overline{U} = U\angle 0^{o} \\ \overline{I} = I\angle 90^{o} = U\omega C\angle 90^{o} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\overline{U}}{\overline{I}} = \frac{U\angle 0^{o}}{U\omega C\angle 90^{o}} = \frac{1}{\omega C}\angle -90^{o} = \boxed{-\frac{j}{\omega C} = \overline{X}_C}$$

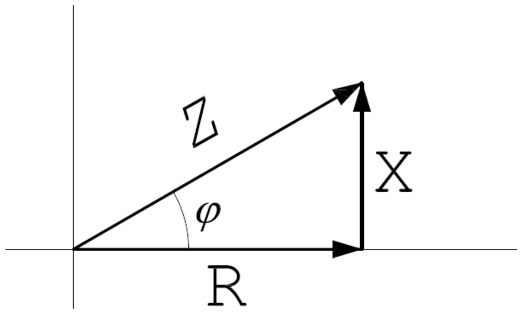
Impedancia

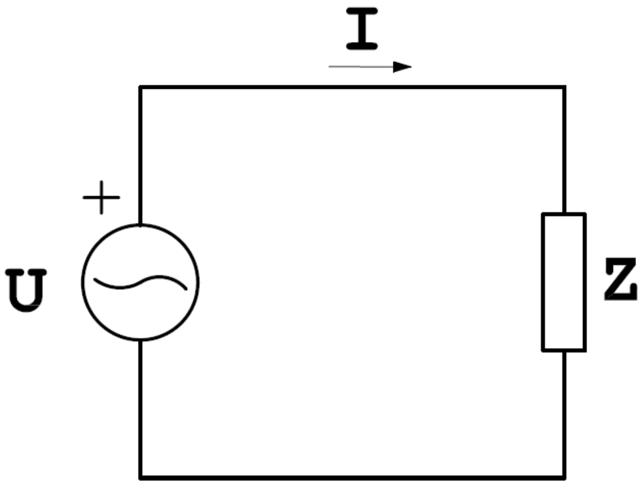
- **Impedancia**

$$\boxed{\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}} = R + jX = Z\angle\varphi}$$

$\overline{Z}\,(\Omega)$ *Ohmio*

Triángulo de impedancias





Recordamos:

$$\overline{Z} = \begin{cases} R + j\cdot 0 = R & \textit{Resistencia} \\ 0 + j\omega L = \overline{X}_L & \textit{Bobina} \\ 0 - \dfrac{j}{\omega C} = \overline{X}_C & \textit{Condensador} \end{cases}$$

Impedancia

- **Admitancia**

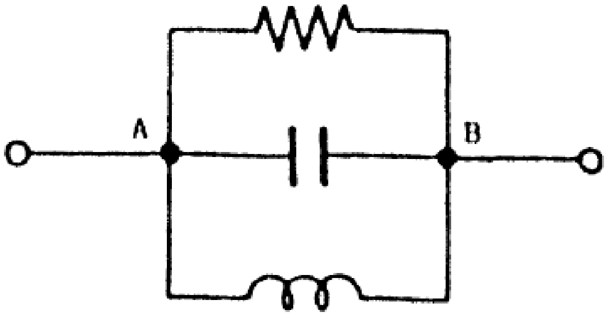
$$\boxed{\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{1}{Z}\angle -\varphi} \quad \overline{Y}(\Omega^{-1}) \quad \textit{Siemens o mho}$$

Conductancia (G) *Susceptancia (B)*

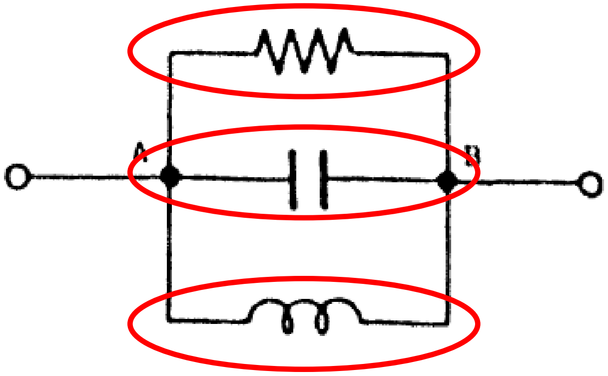
$$\boxed{\overline{Y} = G + jB}$$

Análisis de redes

- **Definiciones**
  - **Nudo:** es un punto de unión entre tres o más elementos del circuito.

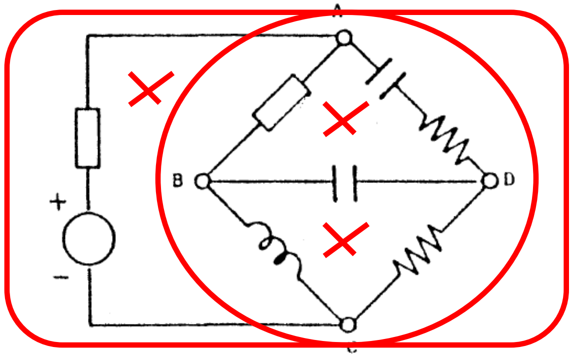


  - **Rama:** elemento o grupo de elementos conectado entre dos nudos.



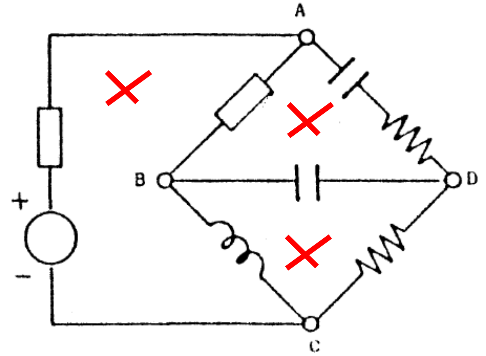
Análisis de redes

- **Definiciones** (Cont.)
  - **Lazo o bucle:** conjunto de ramas que forman una línea cerrada.



⇦ 7 Lazos o bucles

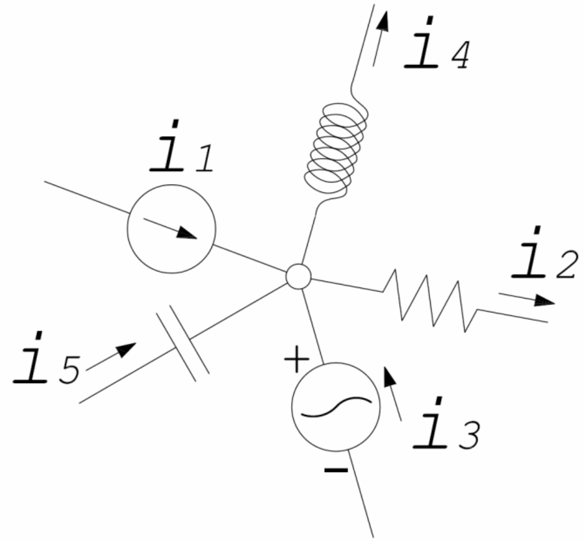
  - **Malla:** un lazo que no contiene ningún otro en su interior



Leyes de Kirchhoff

- **1ª Ley de Kirchhoff**

"En todo nudo de una red (o circuito) la suma algebraica de las corrientes que concurren a él es cero" (Principio de Conservación de la Carga).



Recordamos: $$\boxed{i(t) = \frac{dq}{dt}}$$

$$dq_1 + dq_3 + dq_5 = dq_2 + dq_4$$

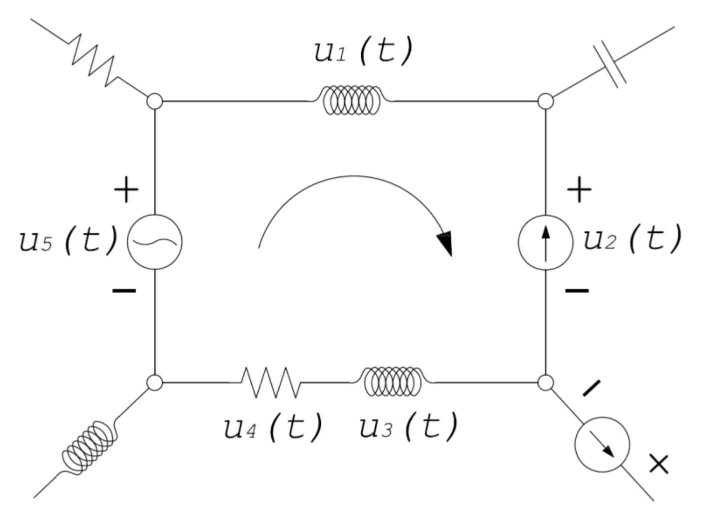
$$i_1 dt + i_3 dt + i_5 dt = i_2 dt + i_4 dt$$

$$\boxed{i_1 + i_3 + i_5 = i_2 + i_4}$$

Leyes de Kirchhoff

- **2ª Ley de Kirchhoff**

"En toda malla de una red (o circuito) la suma algebraica de las tensiones existentes entre sus terminales es cero" (Principio de Conservación de Energía).



Recordamos: $\boxed{u(t) = \frac{dE}{dq}}$

$$-dE_2 + dE_5 = dE_1 + dE_3 + dE_4$$

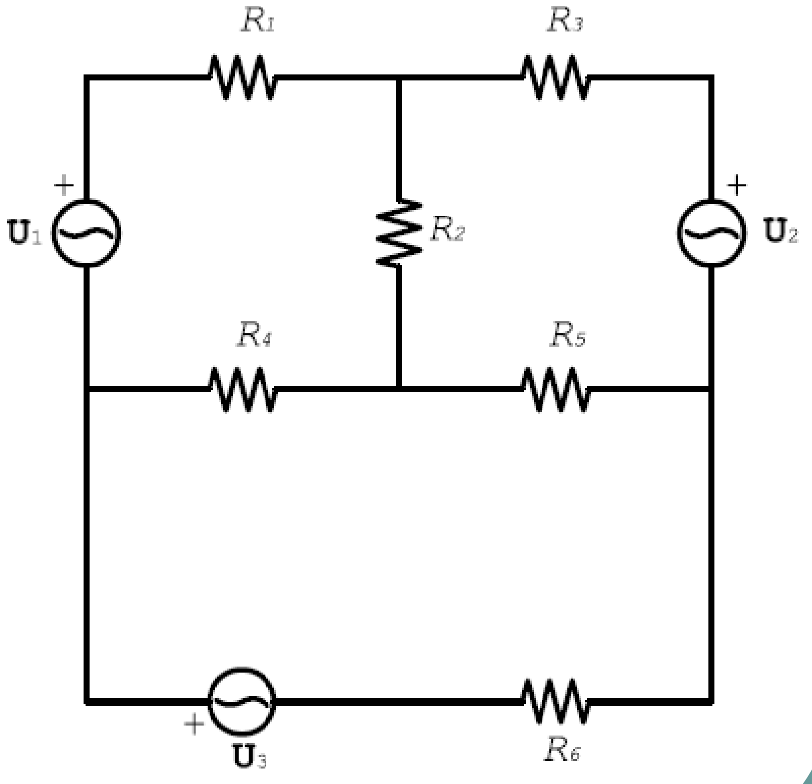
$$-u_2 dq + u_5 dq = u_1 dq + u_3 dq + u_4 dq$$

$$\boxed{-u_2 + u_5 = u_1 + u_3 + u_4}$$

Leyes de Kirchhoff

- Ejemplo:

Datos: tensiones de los generadores y las impedancias (resistencias)



Se trabajará con Fasores:

$$\overline{U} = U\angle\varphi_U$$

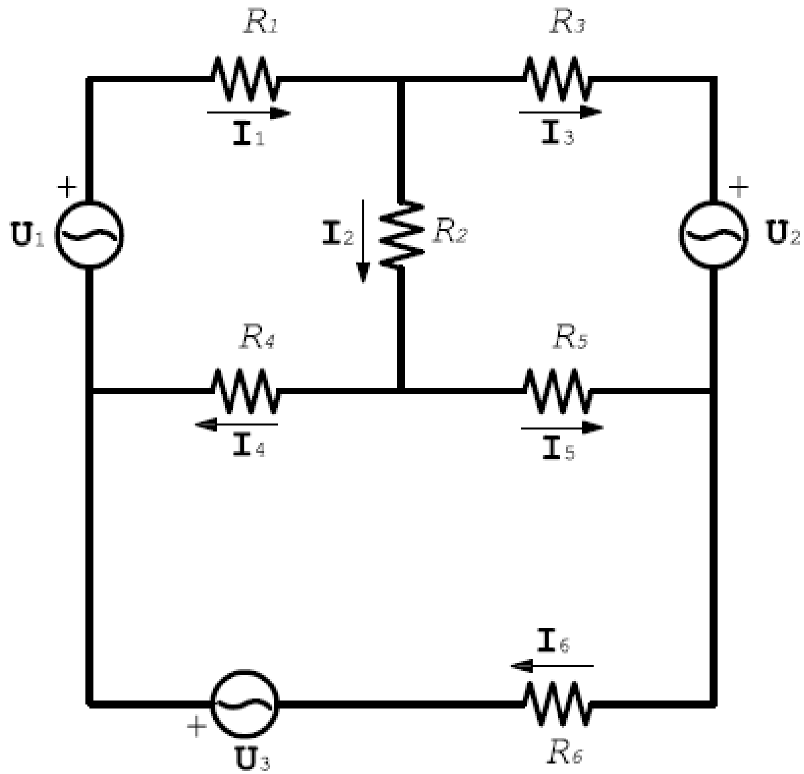
$$\bar{I} = I\angle\varphi_I$$

Leyes de Kirchhoff

- Ejemplo:

Señalar todas las corrientes en cada rama. El sentido de las corrientes será arbitrario.

6 incógnitas, entonces serán necesarias 6 ecuaciones



Leyes de Kirchhoff

- Ejemplo:

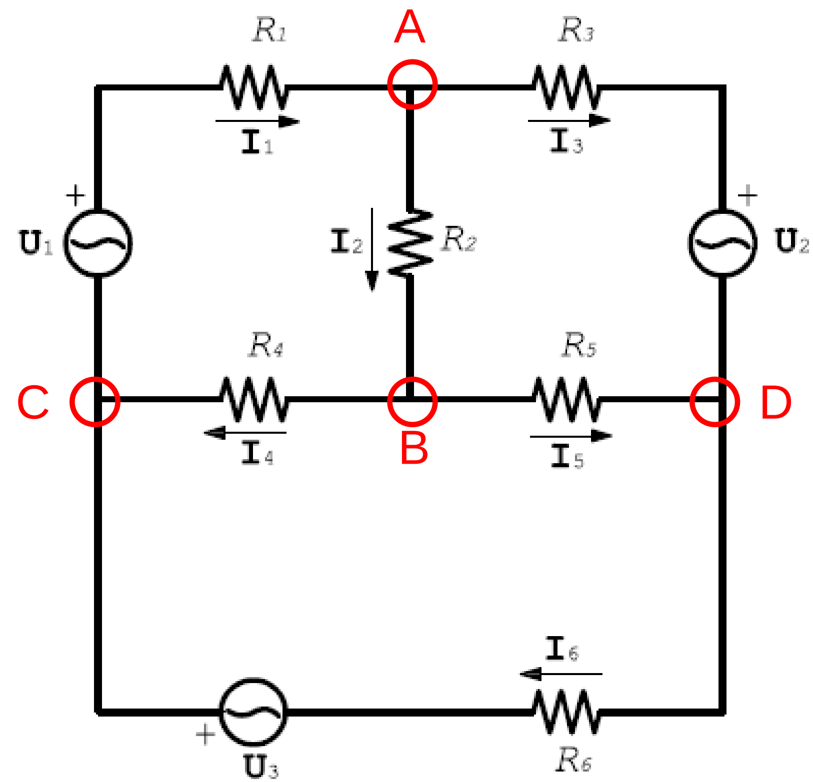
Identificamos los nudos y aplicamos la primera ley de Kirchhoff:

$$A: \bar{I}_1 = \bar{I}_2 + \bar{I}_3$$

$$B: \bar{I}_2 = \bar{I}_4 + \bar{I}_5$$

$$C: \bar{I}_4 + \bar{I}_6 = \bar{I}_1$$

$$D: \bar{I}_3 + \bar{I}_5 = \bar{I}_6$$



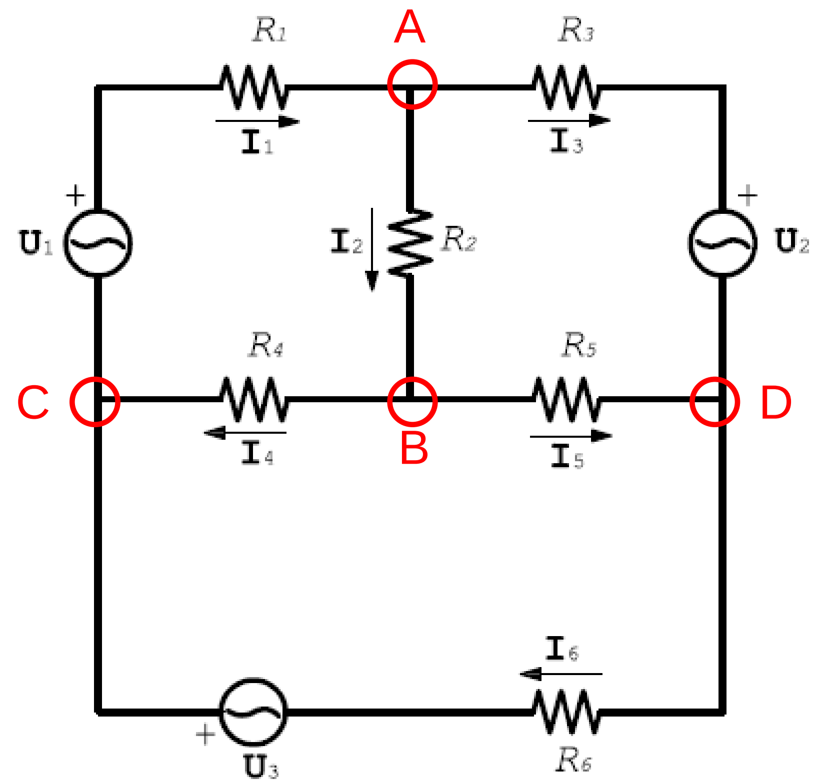
Leyes de Kirchhoff

- Ejemplo:

Identificamos los nudos y aplicamos la primera ley de Kirchhoff:

$$A: \bar{I}_1 = \bar{I}_2 + \bar{I}_3$$
$$B: \bar{I}_2 = \bar{I}_4 + \bar{I}_5$$
$$C: \bar{I}_4 + \bar{I}_6 = \bar{I}_1$$
$$\boxed{D: \bar{I}_3 + \bar{I}_5 = \bar{I}_6}$$

Cada ecuación es combinación lineal del resto, por ejemplo D=A+B+C



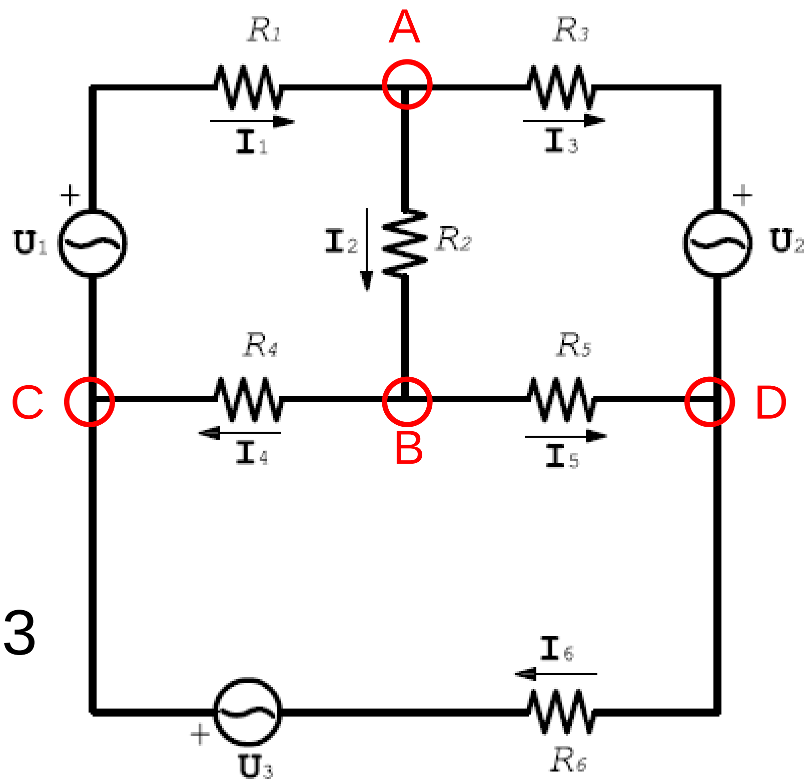
Leyes de Kirchhoff

- Ejemplo:

Identificamos los nudos y aplicamos la primera ley de Kirchhoff:

$$A: \bar{I}_1 - \bar{I}_2 - \bar{I}_3 = 0$$
$$B: \bar{I}_2 - \bar{I}_4 - \bar{I}_5 = 0$$
$$C: -\bar{I}_1 + \bar{I}_4 + \bar{I}_6 = 0$$

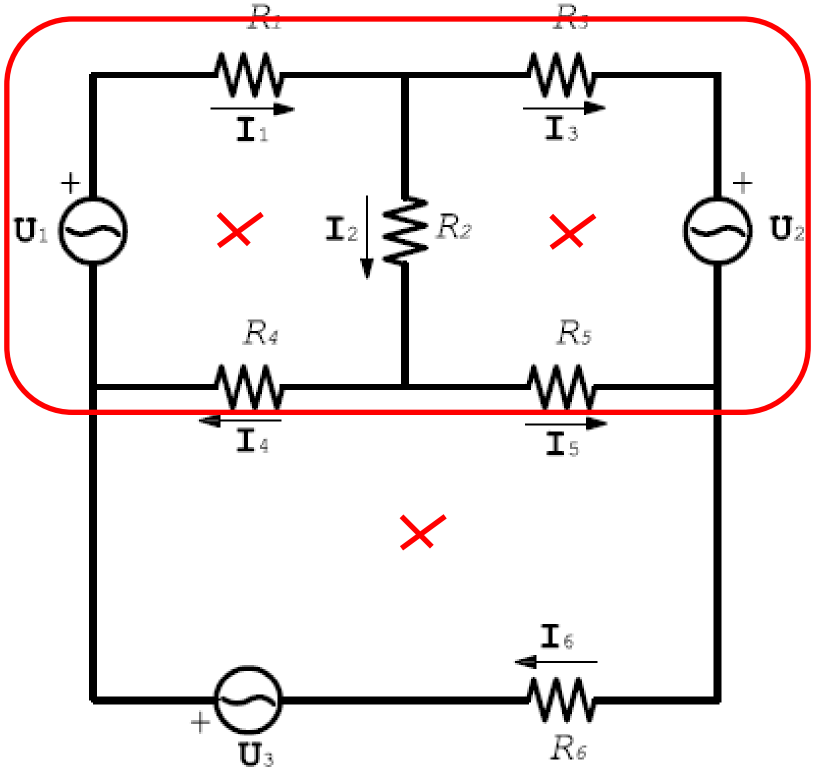
3 ecuaciones, nos faltan otras 3



Leyes de Kirchhoff

- Ejemplo:

Identificamos bucles y mallas



Leyes de Kirchhoff

- Ejemplo:

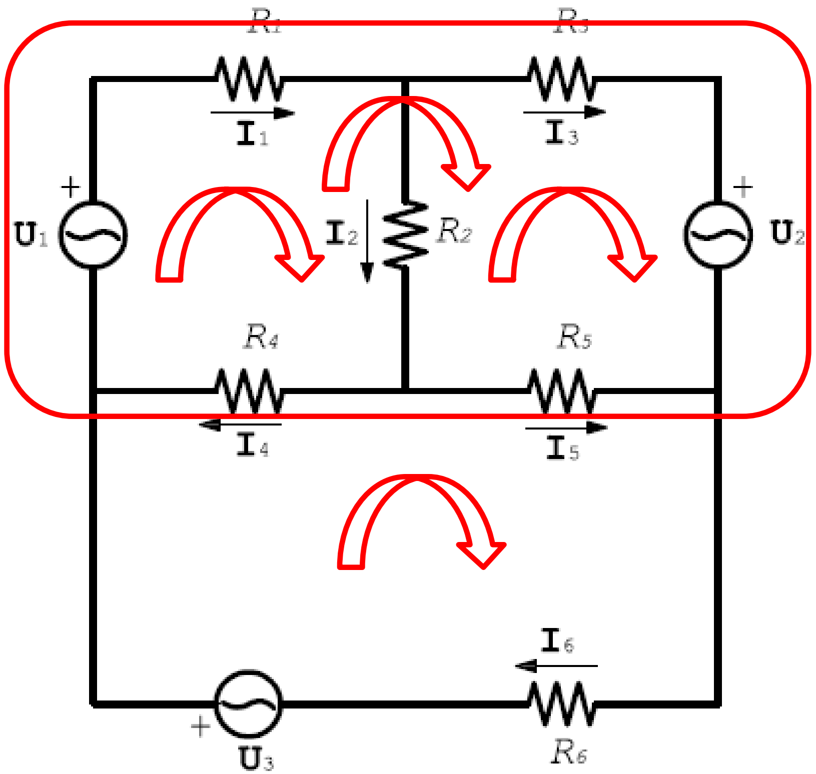
Identificamos bucles y mallas y aplicamos la segunda ley de Kirchhoff:

$$\overline{U}_1 = R_1 \cdot \overline{I}_1 + R_2 \cdot \overline{I}_2 + R_4 \cdot \overline{I}_4$$

$$-\overline{U}_2 = -R_2 \cdot \overline{I}_2 + R_3 \cdot \overline{I}_3 - R_5 \cdot \overline{I}_5$$

$$\overline{U}_1 - \overline{U}_2 = R_1 \cdot \overline{I}_1 + R_3 \cdot \overline{I}_3 - R_5 \cdot \overline{I}_5 + R_4 \cdot \overline{I}_4$$

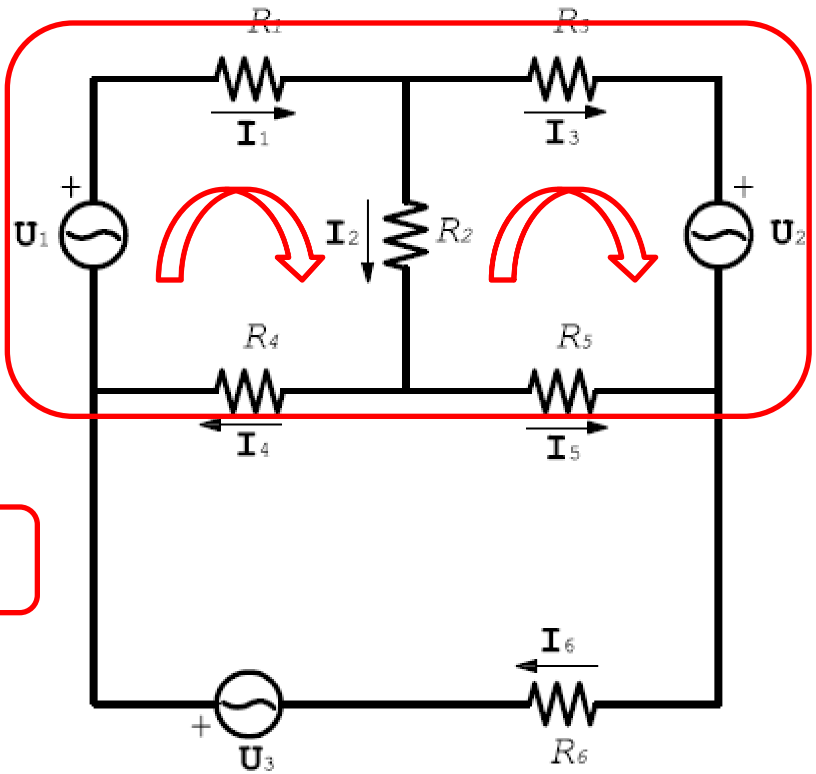
$$\overline{U}_3 = -R_4 \cdot \overline{I}_4 + R_5 \cdot \overline{I}_5 + R_6 \cdot \overline{I}_6$$



Leyes de Kirchhoff

- Ejemplo:

La tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras



$$\begin{cases} \overline{U}_1 = R_1 \cdot \overline{I}_1 + R_2 \cdot \overline{I}_2 + R_4 \cdot \overline{I}_4 \\ -\overline{U}_2 = -R_2 \cdot \overline{I}_2 + R_3 \cdot \overline{I}_3 - R_5 \cdot \overline{I}_5 \end{cases}$$

$$\boxed{\overline{U}_1 - \overline{U}_2 = R_1 \cdot \overline{I}_1 + R_3 \cdot \overline{I}_3 - R_5 \cdot \overline{I}_5 + R_4 \cdot \overline{I}_4}$$

$$\overline{U}_3 = -R_4 \cdot \overline{I}_4 + R_5 \cdot \overline{I}_5 + R_6 \cdot \overline{I}_6$$

Leyes de Kirchhoff

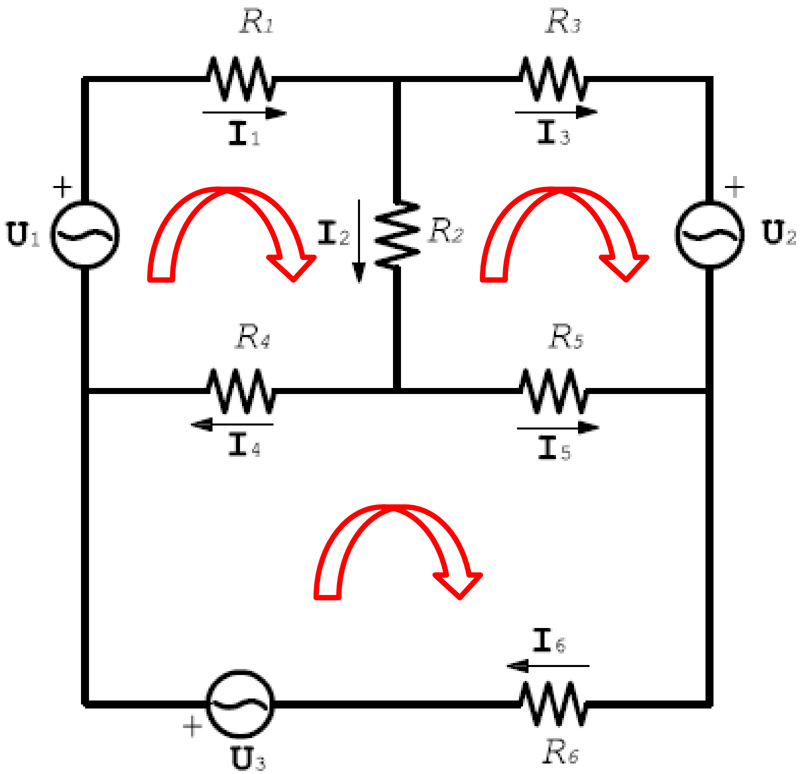
- Ejemplo:

Nos quedamos entonces con las ecuaciones de cada malla

$$\overline{U}_1 = R_1 \cdot \overline{I}_1 + R_2 \cdot \overline{I}_2 + R_4 \cdot \overline{I}_4$$

$$-\overline{U}_2 = -R_2 \cdot \overline{I}_2 + R_3 \cdot \overline{I}_3 - R_5 \cdot \overline{I}_5$$

$$\overline{U}_3 = -R_4 \cdot \overline{I}_4 + R_5 \cdot \overline{I}_5 + R_6 \cdot \overline{I}_6$$



Leyes de Kirchhoff

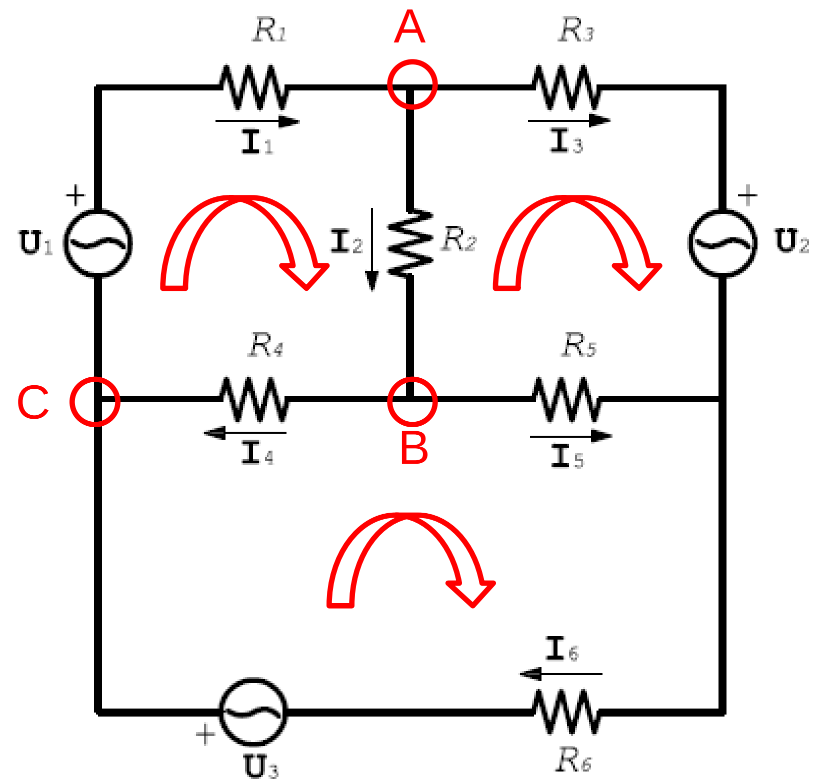
- Ejemplo:

en los nudos (todos menos uno)

$$\bar{I}_1 - \bar{I}_2 - \bar{I}_3 = 0$$
$$\bar{I}_2 - \bar{I}_4 - \bar{I}_5 = 0$$
$$\bar{I}_1 + \bar{I}_4 + \bar{I}_6 = 0$$

en las mallas (todas)

$$\overline{U}_1 = R_1 \cdot \bar{I}_1 + R_2 \cdot \bar{I}_2 + R_4 \cdot \bar{I}_4$$
$$-\overline{U}_2 = -R_2 \cdot \bar{I}_2 + R_3 \cdot \bar{I}_3 - R_5 \cdot \bar{I}_5$$
$$\overline{U}_3 = -R_4 \cdot \bar{I}_4 + R_5 \cdot \bar{I}_5 + R_6 \cdot \bar{I}_6$$



Leyes de Kirchhoff

- Ejemplo:

en los nudos (todos menos uno)

$$\bar{I}_1 - \bar{I}_2 - \bar{I}_3 = 0$$
$$\bar{I}_2 - \bar{I}_4 - \bar{I}_5 = 0$$
$$\bar{I}_1 + \bar{I}_4 + \bar{I}_6 = 0$$

en las mallas (todas)

$$\overline{U}_1 = R_1 \cdot \bar{I}_1 + R_2 \cdot \bar{I}_2 + R_4 \cdot \bar{I}_4$$
$$-\overline{U}_2 = -R_2 \cdot \bar{I}_2 + R_3 \cdot \bar{I}_3 - R_5 \cdot \bar{I}_5$$
$$\overline{U}_3 = -R_4 \cdot \bar{I}_4 + R_5 \cdot \bar{I}_5 + R_6 \cdot \bar{I}_6$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vec{U}_1 \\ -\vec{U}_2 \\ \vec{U}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ R_1 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 & 0 & -R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & R_5 & R_6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \\ \vec{I}_4 \\ \vec{I}_5 \\ \vec{I}_6 \end{pmatrix}$$

Leyes de Kirchhoff

- Ejemplo:

en los nudos (todos menos uno)

$$\bar{I}_1 - \bar{I}_2 - \bar{I}_3 = 0$$
$$\bar{I}_2 - \bar{I}_4 - \bar{I}_5 = 0$$
$$\bar{I}_1 + \bar{I}_4 + \bar{I}_6 = 0$$

en las mallas (todas)

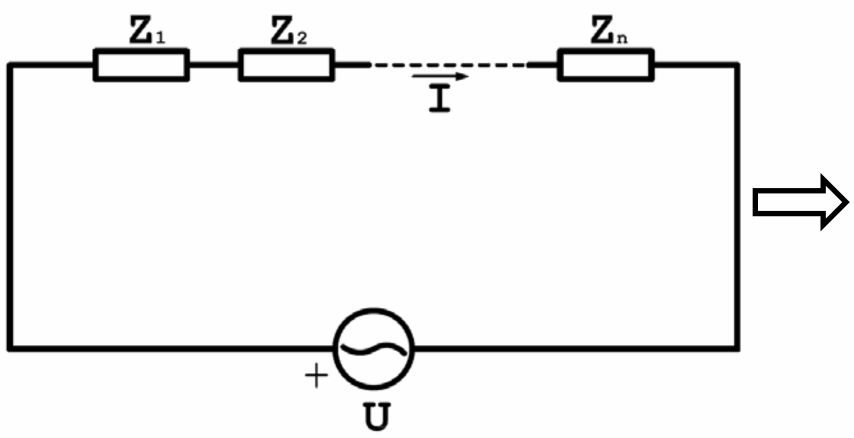
$$\overline{U}_1 = R_1 \cdot \bar{I}_1 + R_2 \cdot \bar{I}_2 + R_4 \cdot \bar{I}_4$$
$$-\overline{U}_2 = -R_2 \cdot \bar{I}_2 + R_3 \cdot \bar{I}_3 - R_5 \cdot \bar{I}_5$$
$$\overline{U}_3 = -R_4 \cdot \bar{I}_4 + R_5 \cdot \bar{I}_5 + R_6 \cdot \bar{I}_6$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ R_1 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 & 0 & -R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & R_5 & R_6 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vec{U}_1 \\ -\vec{U}_2 \\ \vec{U}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \\ \vec{I}_4 \\ \vec{I}_5 \\ \vec{I}_6 \end{pmatrix}$$

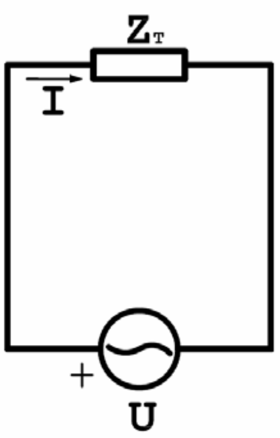
Asociación de elementos

- Elementos pasivos
  - en serie

“Varios elementos están conectados en serie cuando por ellos circula la misma intensidad”



$$\overline{U} = \overline{I}\cdot\overline{Z}_1 + \overline{I}\cdot\overline{Z}_2 + \ldots + \overline{I}\cdot\overline{Z}_N = \overline{I}\cdot\sum\overline{Z}_i$$



$$\overline{U} = \overline{I}\cdot\overline{Z}_T$$

$$\boxed{\overline{Z}_T = \sum\overline{Z}_i}$$

Asociación de elementos

- Resistencias $(\overline{Z} = R)$

$$\boxed{R_T \equiv \sum R_i}$$

- Bobinas $(\overline{Z} = j\omega L)$

$$\boxed{L_T \equiv \sum L_i}$$

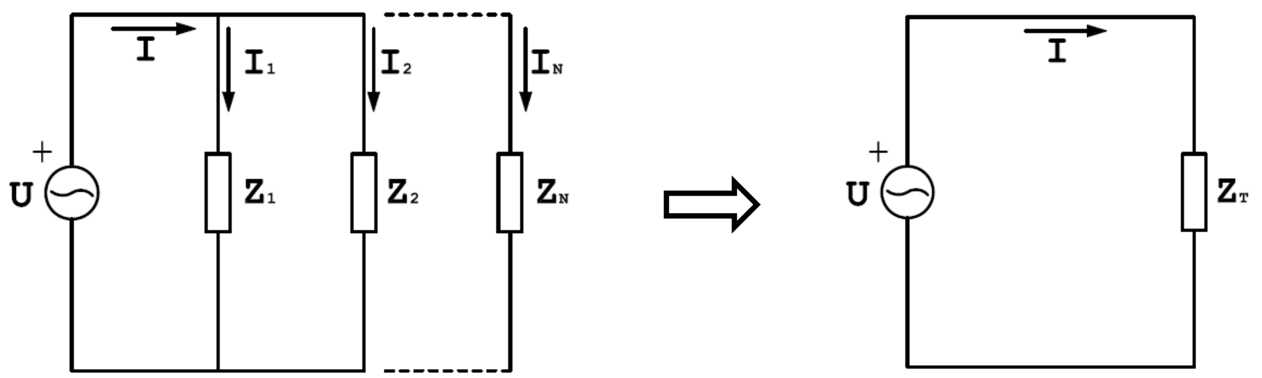
- Condensadores $(\overline{Z} = -\frac{j}{\omega C})$

$$\boxed{\frac{1}{C_T} \equiv \sum \frac{1}{C_i}}$$

Asociación de elementos

- Elementos pasivos
  - en paralelo

"Varios elementos están conectados en paralelo cuando están sometidos a la misma tensión"



$$\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \ldots + \overline{I}_N = \frac{\overline{U}}{\overline{\overline{Z}}_1} + \frac{\overline{U}}{\overline{\overline{Z}}_2} + \ldots + \frac{\overline{U}}{\overline{\overline{Z}}_N} = \overline{U} \cdot \sum \frac{1}{\overline{\overline{Z}}_i}$$

$$\overline{I} = \frac{\overline{U}}{\overline{\overline{Z}}_T}$$

$$\boxed{\frac{1}{\overline{\overline{Z}}_T} = \sum \frac{1}{\overline{\overline{Z}}_i}}$$

Asociación de elementos

- Resistencias $(\overline{Z} = R)$

$$\boxed{\frac{1}{R_T} \equiv \sum \frac{1}{R_i}}$$

- Bobinas $(\overline{Z} = j\omega L)$

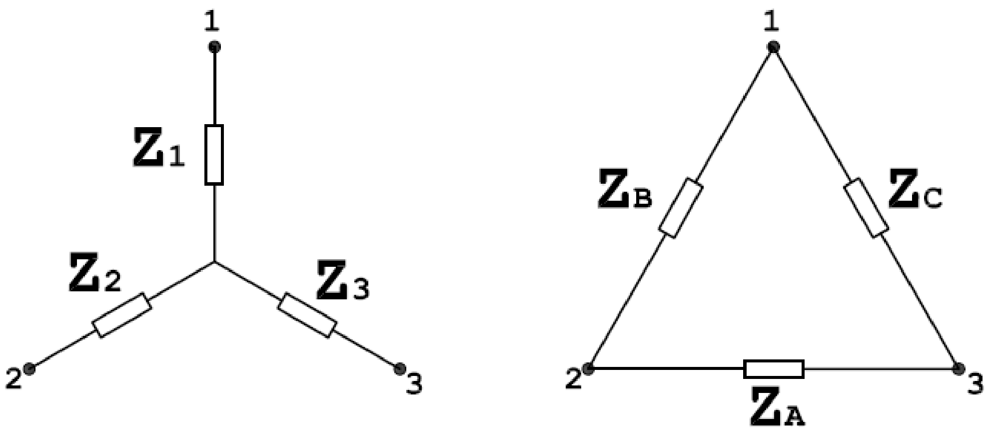
$$\boxed{\frac{1}{L_T} \equiv \sum \frac{1}{L_i}}$$

- Condensadores $(\overline{Z} = -\frac{j}{\omega C})$

$$\boxed{C_T \equiv \sum C_i}$$

Asociación de elementos

- Elementos pasivos
  - Conexión estrella - triángulo

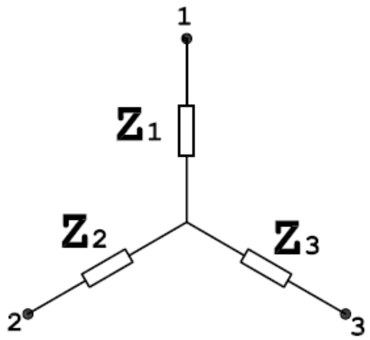


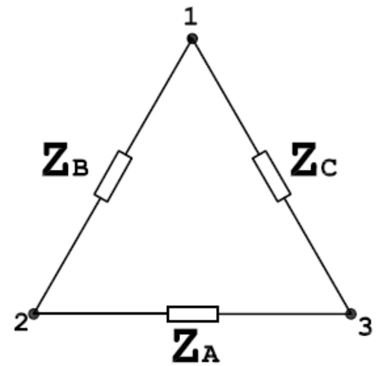
$$\overline{Z}_{12} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 = \overline{Z}_B \setminus\setminus \ (\overline{Z}_A + \overline{Z}_C)$$

$$\overline{Z}_{12} = \overline{Z}_B \setminus\setminus \ (\overline{Z}_A + \overline{Z}_C) = \left(\frac{1}{\overline{Z}_B} + \frac{1}{\overline{Z}_A + \overline{Z}_C} \right)^{-1} = \left(\frac{\overline{Z}_A + \overline{Z}_C}{\overline{Z}_B(\overline{Z}_A + \overline{Z}_C)} + \frac{\overline{Z}_B}{\overline{Z}_B(\overline{Z}_A + \overline{Z}_C)} \right)^{-1} = \frac{\overline{Z}_B(\overline{Z}_A + \overline{Z}_C)}{\overline{Z}_A + \overline{Z}_B + \overline{Z}_C}$$

Asociación de elementos

- Elementos pasivos
  - Conexión estrella - triángulo





$$\overline{Z}_{12} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 = \overline{Z}_B \setminus\setminus (\overline{Z}_A + \overline{Z}_C) = \frac{\overline{Z}_B(\overline{Z}_A + \overline{Z}_C)}{\overline{Z}_A + \overline{Z}_B + \overline{Z}_C}$$

$$\overline{Z}_{23} = \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3 = \overline{Z}_A \setminus\setminus (\overline{Z}_B + \overline{Z}_C) = \frac{\overline{Z}_A(\overline{Z}_B + \overline{Z}_C)}{\overline{Z}_A + \overline{Z}_B + \overline{Z}_C}$$

$$\overline{Z}_{31} = \overline{Z}_3 + \overline{Z}_1 = \overline{Z}_C \setminus\setminus (\overline{Z}_A + \overline{Z}_B) = \frac{\overline{Z}_C(\overline{Z}_A + \overline{Z}_B)}{\overline{Z}_A + \overline{Z}_B + \overline{Z}_C}$$

Asociación de elementos

- Elementos pasivos
  - Conexión estrella - triángulo

$$\overline{Z}_{12} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 = \overline{Z}_B \backslash\backslash\ (\overline{Z}_A + \overline{Z}_C) = \frac{\overline{Z}_B(\overline{Z}_A + \overline{Z}_C)}{\overline{Z}_A + \overline{Z}_B + \overline{Z}_C}$$

$$-$$

$$\overline{Z}_{23} = \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3 = \overline{Z}_A \backslash\backslash\ (\overline{Z}_B + \overline{Z}_C) = \frac{\overline{Z}_A(\overline{Z}_B + \overline{Z}_C)}{\overline{Z}_A + \overline{Z}_B + \overline{Z}_C}$$

$$+$$

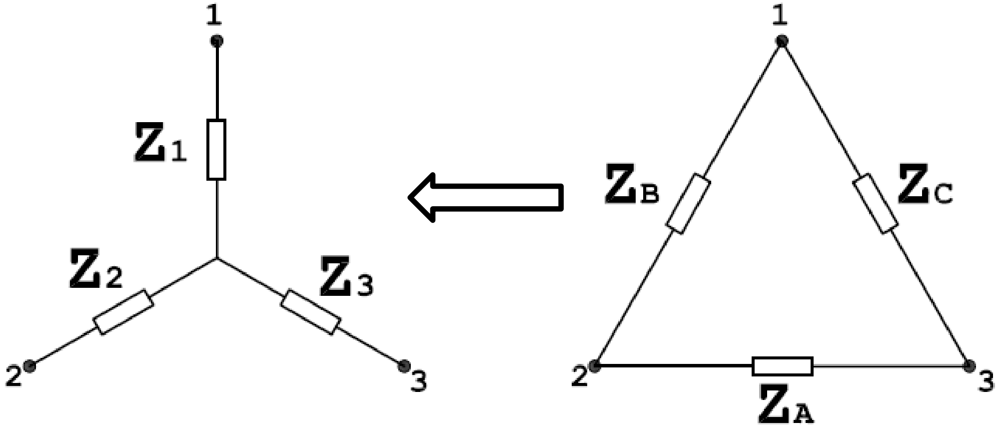
$$\overline{Z}_{31} = \overline{Z}_3 + \overline{Z}_1 = \overline{Z}_C \backslash\backslash\ (\overline{Z}_A + \overline{Z}_B) = \frac{\overline{Z}_C(\overline{Z}_A + \overline{Z}_B)}{\overline{Z}_A + \overline{Z}_B + \overline{Z}_C}$$

$$2 \cdot \overline{Z}_1 = \frac{2 \cdot \overline{Z}_B \cdot \overline{Z}_C}{\overline{Z}_A + \overline{Z}_B + \overline{Z}_C}$$

$$\boxed{\overline{Z}_1 = \frac{\overline{Z}_B \cdot \overline{Z}_C}{\overline{Z}_A + \overline{Z}_B + \overline{Z}_C}}$$

Asociación de elementos

- Elementos pasivos
  - Conexión estrella - triángulo



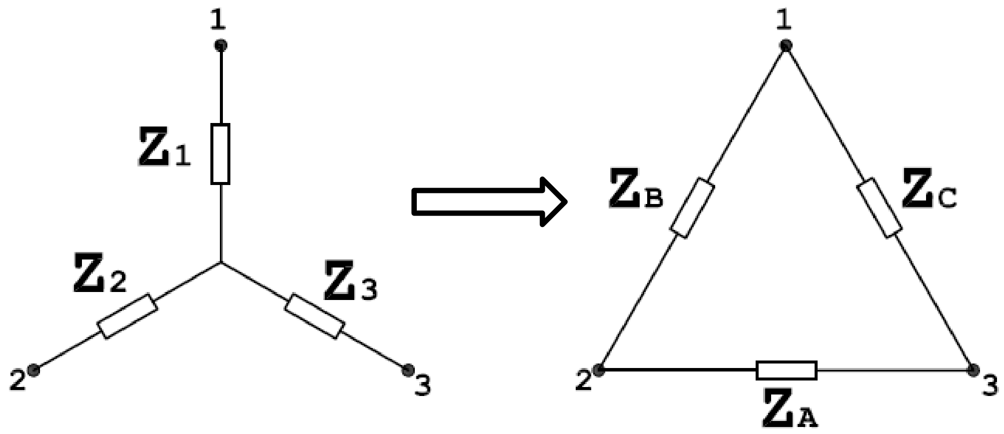
$$\overline{Z}_1 = \frac{\overline{Z}_B \cdot \overline{Z}_C}{\overline{Z}_A + \overline{Z}_B + \overline{Z}_C}$$

$$\overline{Z}_2 = \frac{\overline{Z}_A \cdot \overline{Z}_B}{\overline{Z}_A + \overline{Z}_B + \overline{Z}_C}$$

$$\overline{Z}_3 = \frac{\overline{Z}_C \cdot \overline{Z}_A}{\overline{Z}_A + \overline{Z}_B + \overline{Z}_C}$$

Asociación de elementos

- Elementos pasivos
  - Conexión estrella - triángulo



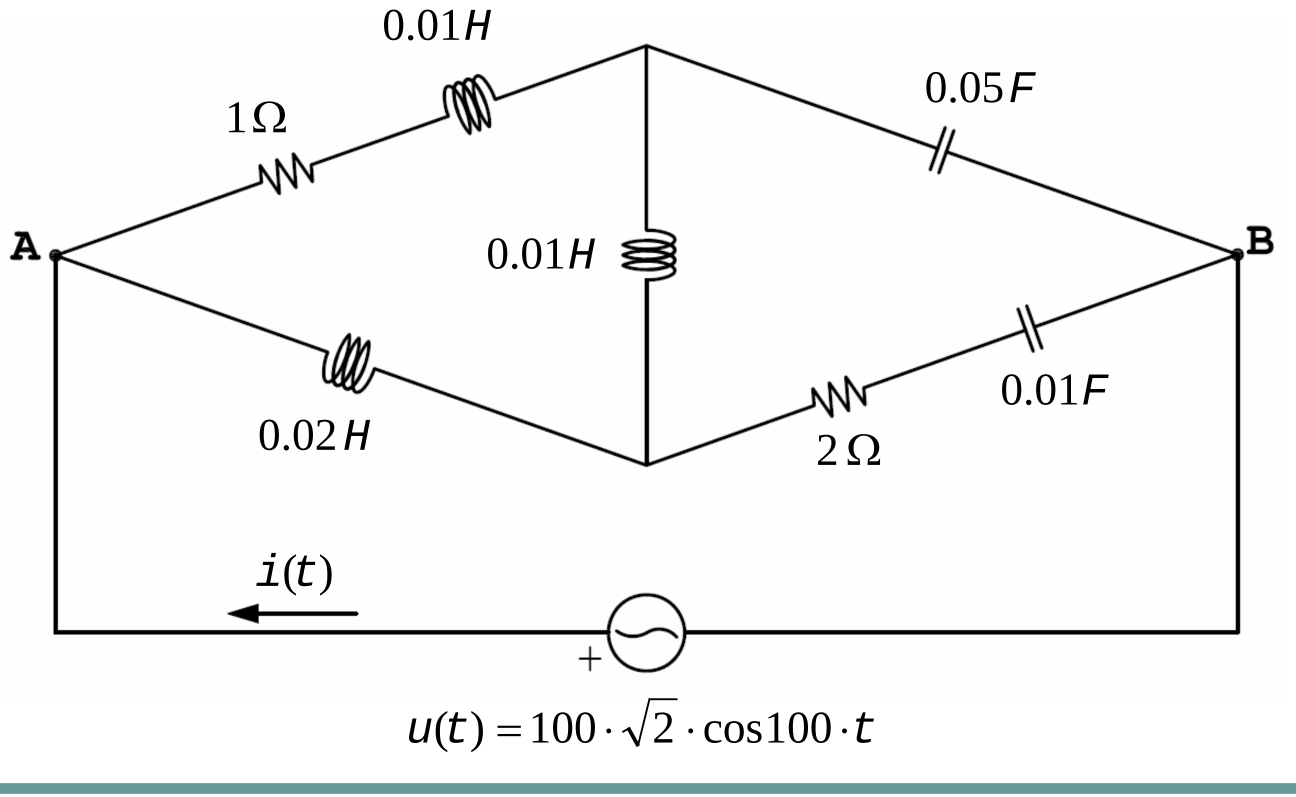
$$\boxed{\overline{Z}_A = \frac{\overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_2 + \overline{Z}_2 \cdot \overline{Z}_3 + \overline{Z}_3 \cdot \overline{Z}_1}{\overline{Z}_1}}$$

$$\boxed{\overline{Z}_B = \frac{\overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_2 + \overline{Z}_2 \cdot \overline{Z}_3 + \overline{Z}_3 \cdot \overline{Z}_1}{\overline{Z}_3}}$$

$$\boxed{\overline{Z}_C = \frac{\overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_2 + \overline{Z}_2 \cdot \overline{Z}_3 + \overline{Z}_3 \cdot \overline{Z}_1}{\overline{Z}_2}}$$

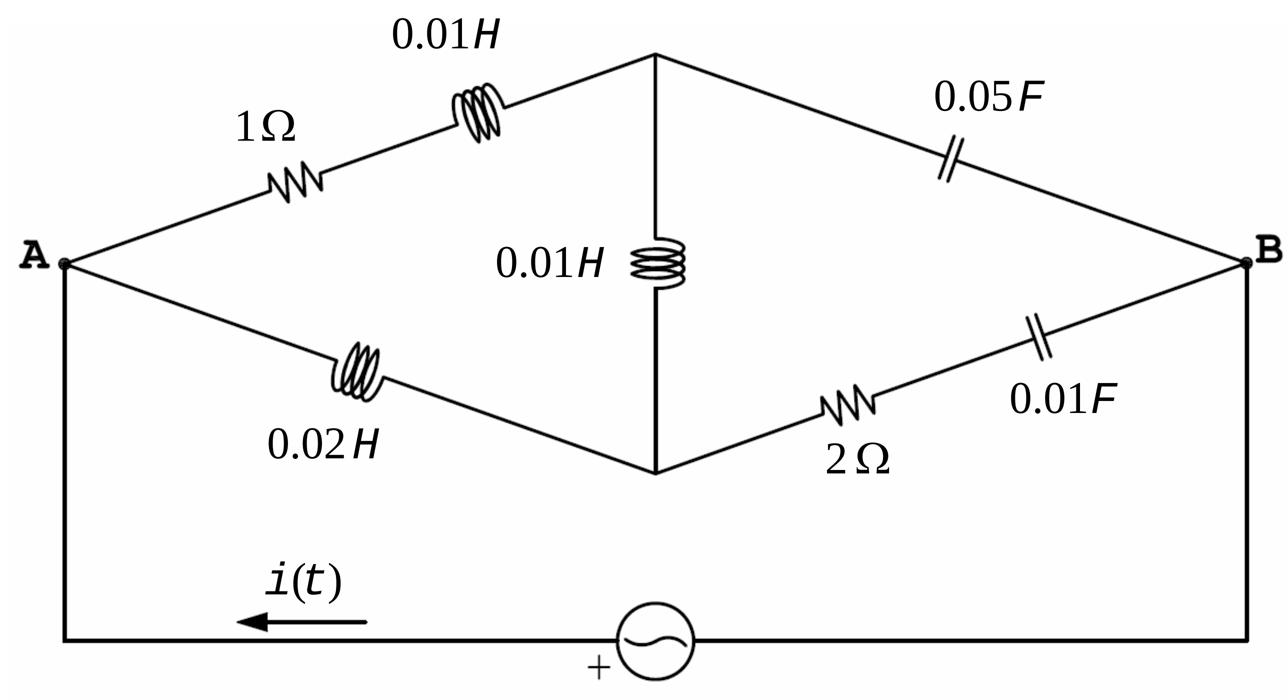
Asociación de elementos

- Ejercicio: calcular la resistencia equivalente entre los terminales A y B, así como $i(t)$



Asociación de elementos

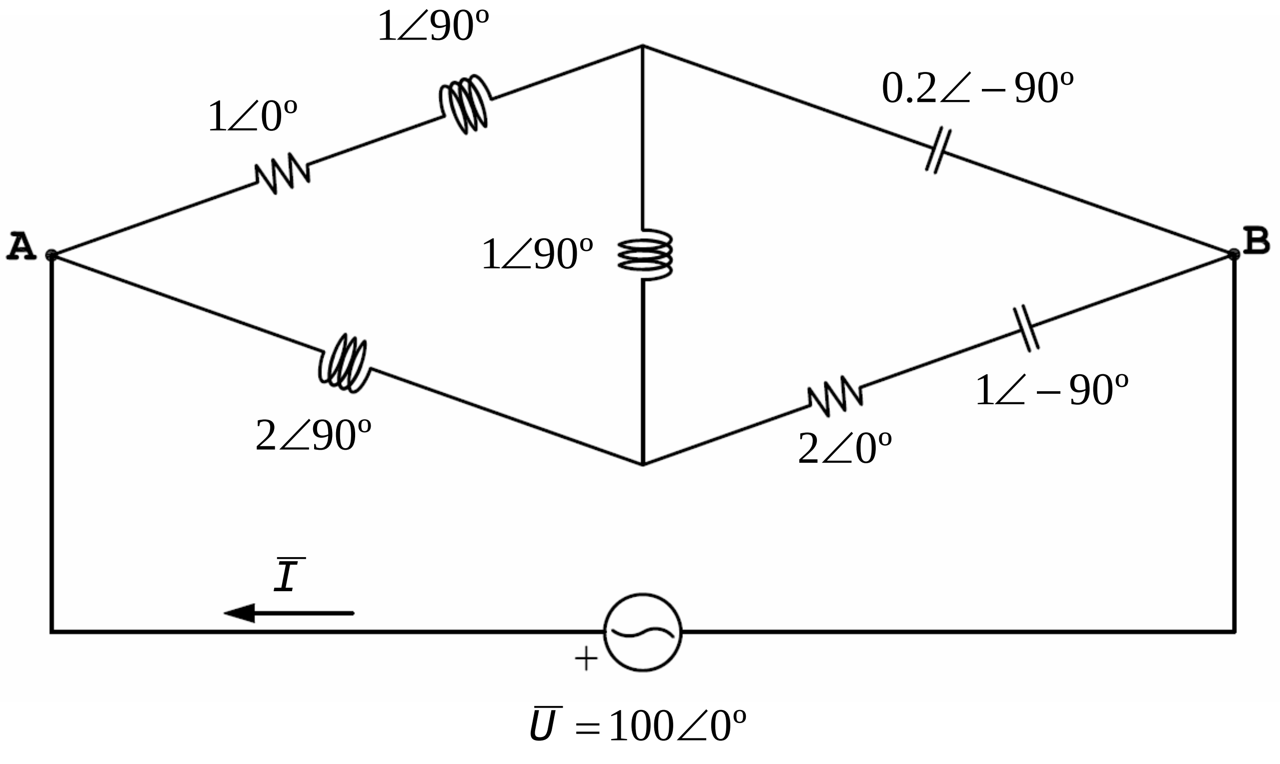
- Ejercicio: transformamos las impedancias y la tensión del generador a Fasores



$$u(t) = 100 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 100 \cdot t$$

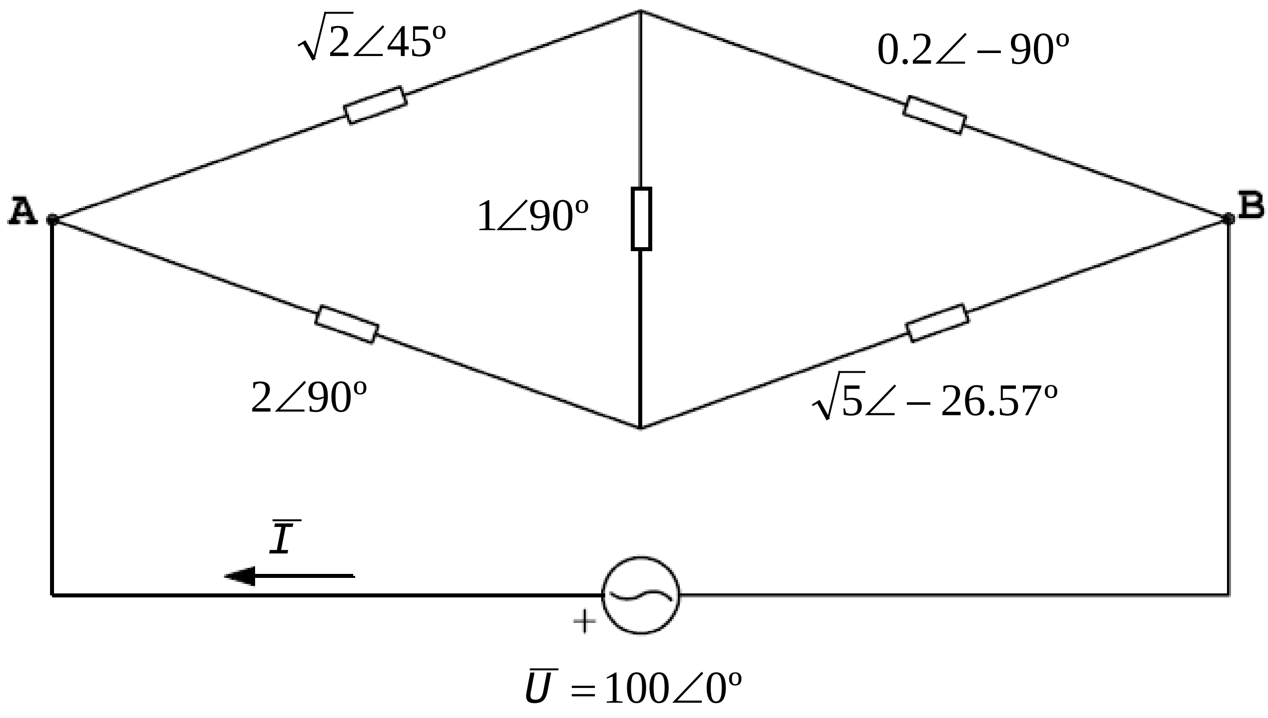
Asociación de elementos

- Ejercicio: simplificamos a una impedancia las que estén en serie



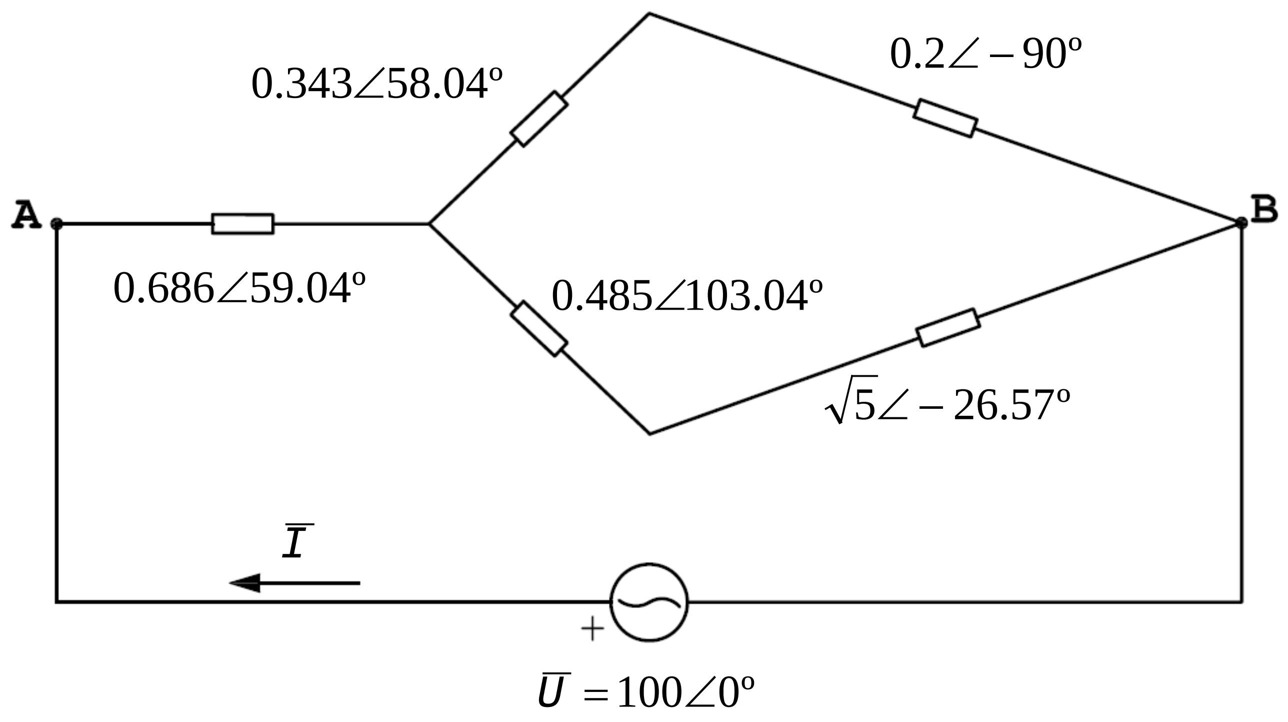
Asociación de elementos

- Ejercicio: transformamos de triángulo a estrella



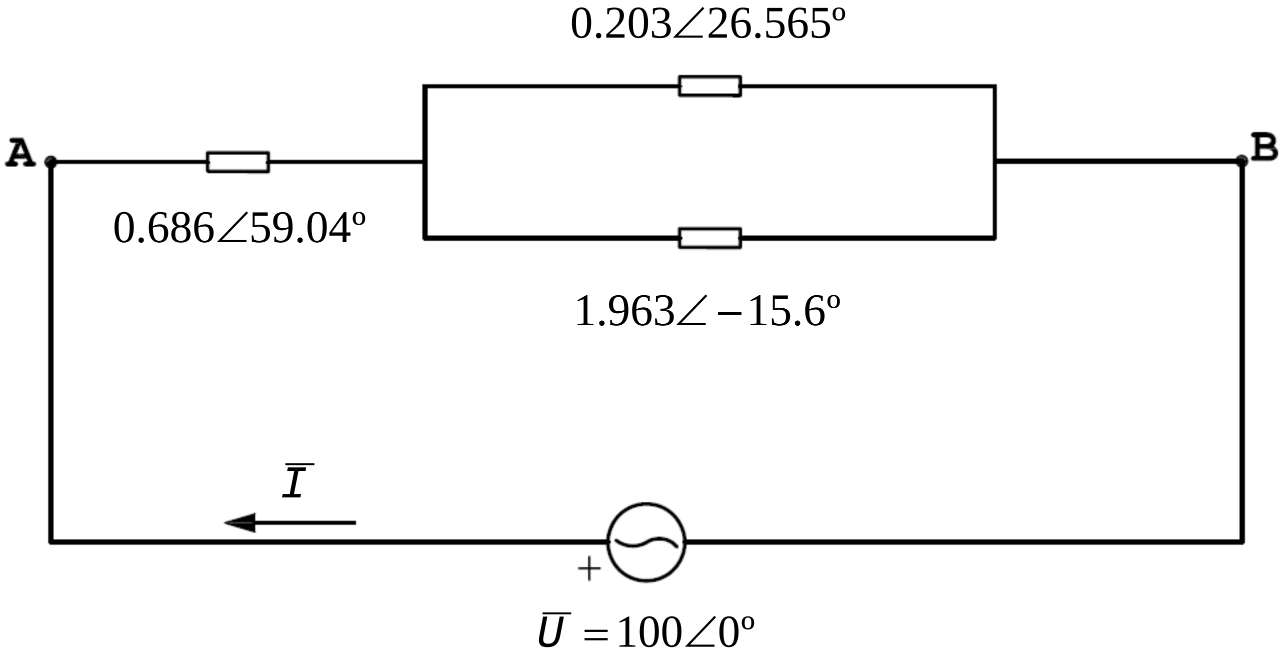
Asociación de elementos

- Ejercicio: volvemos a simplificar a una impedancia las que están en serie



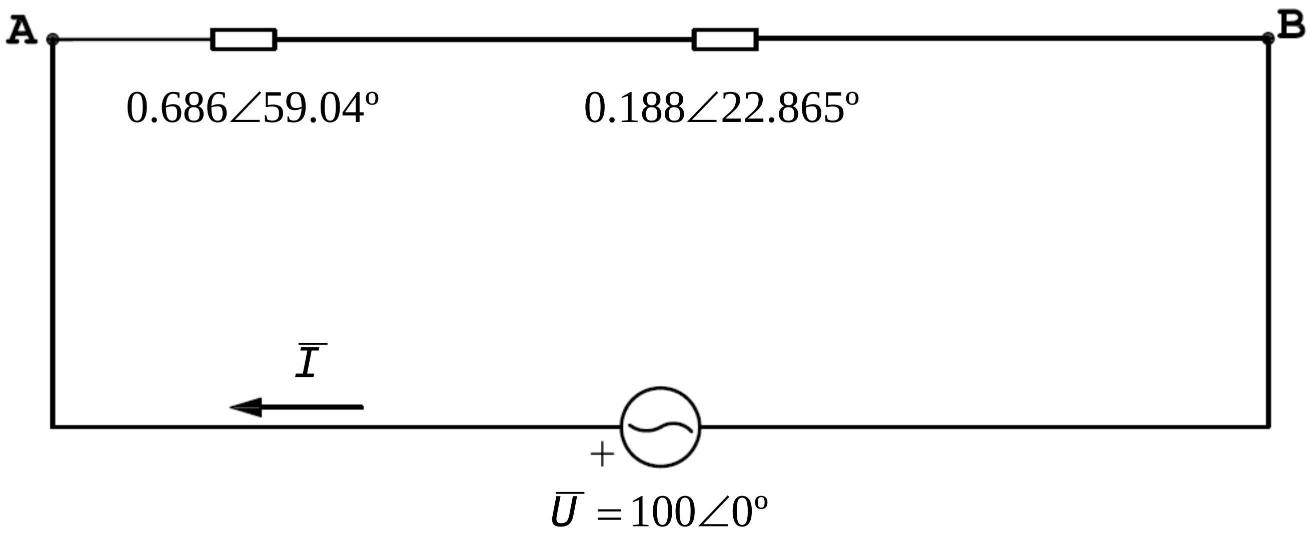
Asociación de elementos

- Ejercicio: transformamos las impedancias en paralelo a una



Asociación de elementos

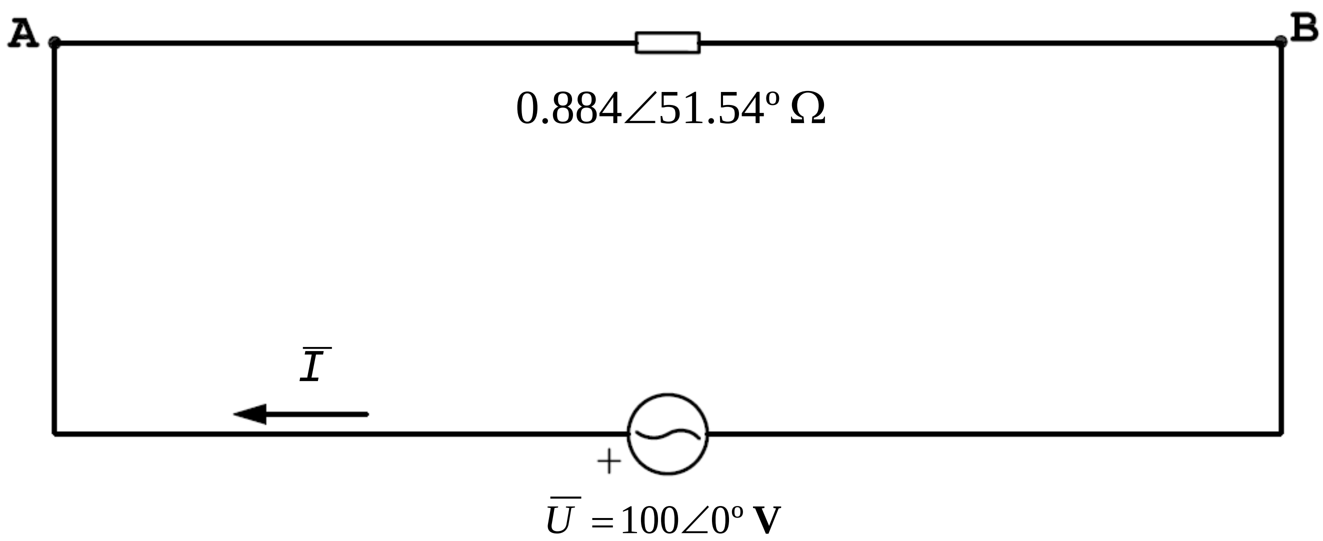
- Ejercicio: simplificamos a una sola impedancia



Asociación de elementos

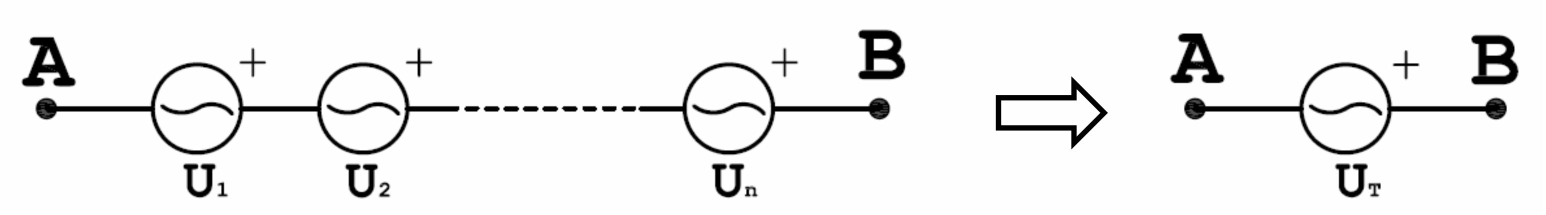
- Ejercicio: deducimos la intensidad y la convertimos de Fasor al dominio temporal

$$\bar{I} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}} = \frac{100\angle 0^{\circ}}{0.844\angle 51.54^{\circ}} = 118.5\angle -51.54^{\circ} \Rightarrow i(t) = \sqrt{2}\cdot 118.5 \cdot \cos(100\cdot t - 51.54^{\circ})\ A$$



Asociación de elementos

- Elementos activos (fuentes o generadores)
  - Fuentes de tensión ideal en serie



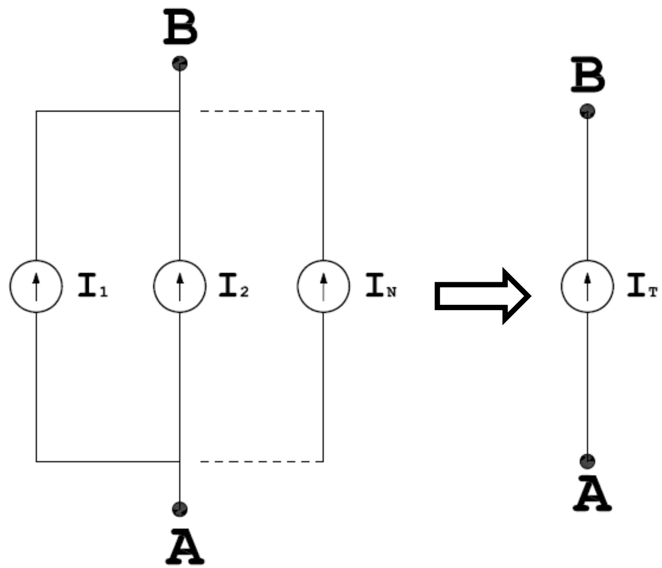
$$\boxed{\overline{U}_T = \sum \overline{U}_i}$$

  - Fuentes de tensión ideal en paralelo

Sólo es posible si son iguales y están conectadas con la misma polaridad.

Asociación de elementos

- Elementos activos (fuentes o generadores)
  - Fuentes de intensidad ideal en paralelo



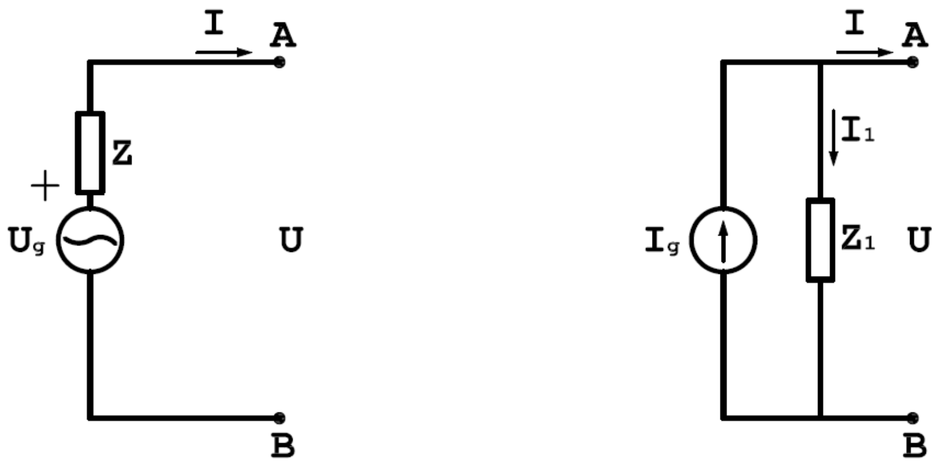
$$\boxed{\bar{I}_T = \sum \bar{I}_i}$$

  - Fuentes de intensidad ideal en serie

Sólo es posible si son iguales y están conectadas con el mismo sentido.

Transformación de fuentes

- Entre generadores de tensión e intensidad reales



$$\overline{U} = \overline{U}_g - \overline{Z} \cdot \overline{I} \Rightarrow \overline{I} = \frac{\overline{U}_g}{\overline{Z}} - \frac{\overline{U}}{\overline{Z}}$$

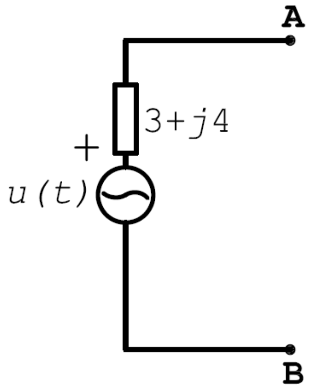
$$\overline{I}_g = \overline{I}_1 + \overline{I} \Rightarrow \overline{I} = \overline{I}_g - \overline{I}_1 = \overline{I}_g - \frac{\overline{U}}{\overline{Z}_1}$$

Ambos son equivalentes si se cumple:

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{Z} = \overline{Z}_1 \\ \overline{I}_g = \dfrac{\overline{U}_g}{\overline{Z}} \end{array}}$$

Transformación de fuentes

- Ejemplo: $u(t) = \sqrt{2} \cdot 220 \cdot \cos(100t + 35^{o})$



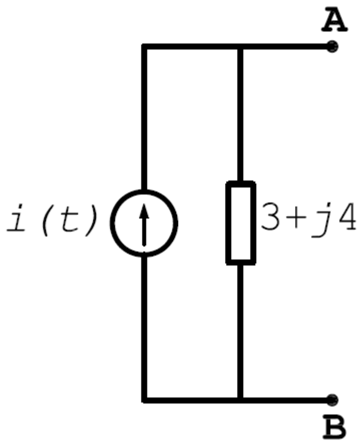
$$\overline{U} = 220\angle 35^{o}$$
$$\overline{Z} = 5\angle 53.13^{o}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{Z} &= \overline{Z}_1 \\ \overline{I}_g &= \frac{\overline{U}_g}{\overline{Z}} \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$

$$\overline{I}_g = \frac{220\angle 35^{o}}{5\angle 53.13^{o}} = 44\angle -18.13^{o}$$



$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 44 \cdot \cos(100t - 18.13^{o})$$

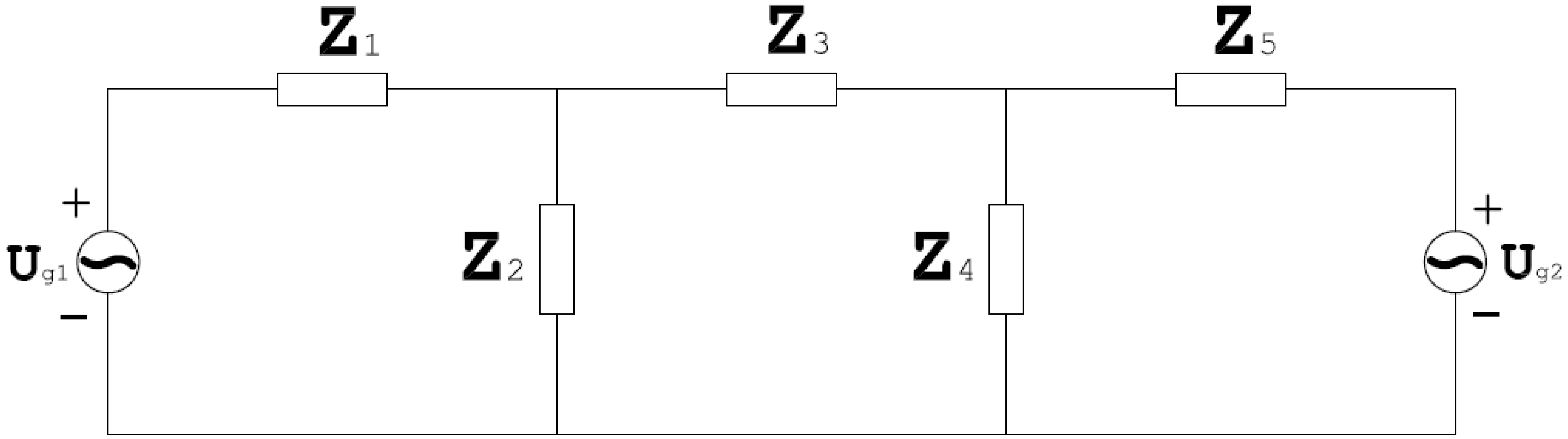
Tema 3: Circuitos monofásicos

Índice

- Método de las mallas
- Método de los nudos
- Método de superposición

Método de las mallas

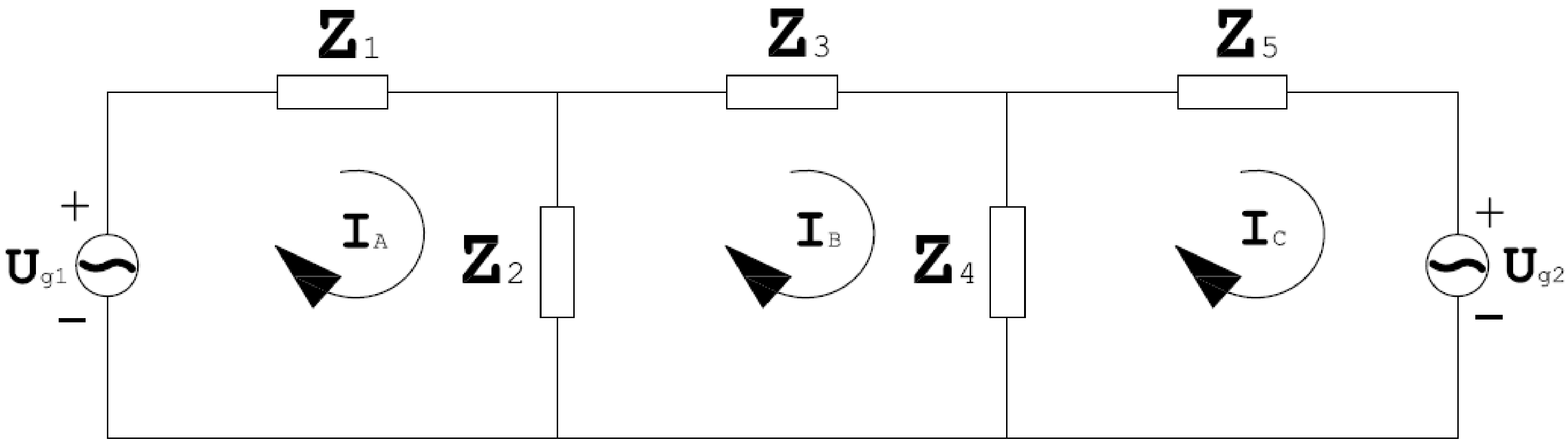
“Consiste en escribir todas las ecuaciones correspondientes a las mallas”



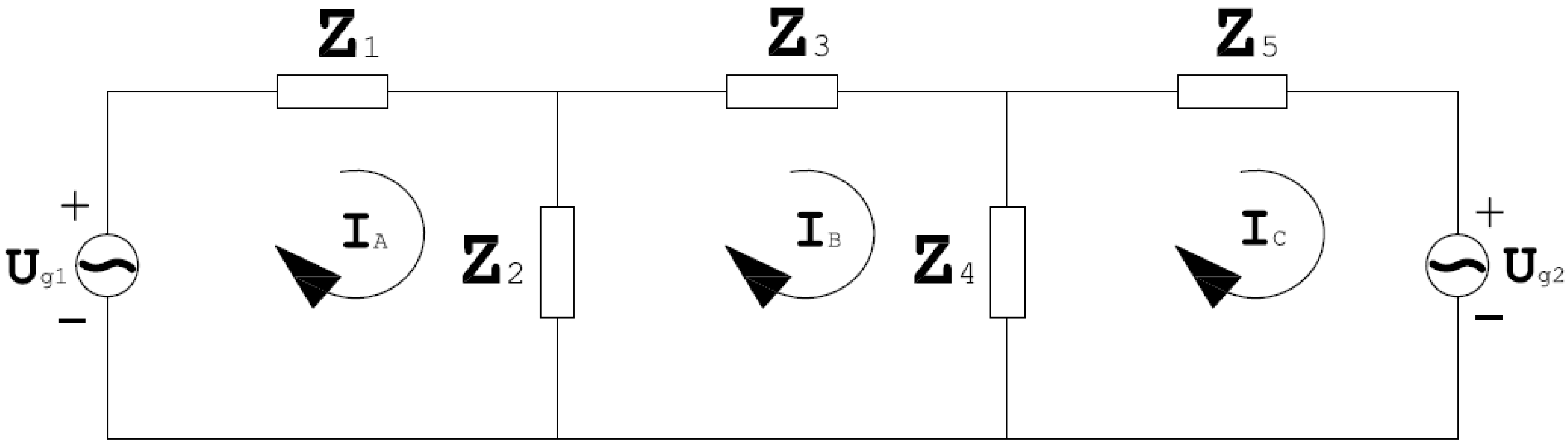
Objetivo: determinar las corrientes en cada rama

Método de las mallas

Asignamos corrientes a cada malla. Todas han de ir orientadas hacia el mismo sentido.



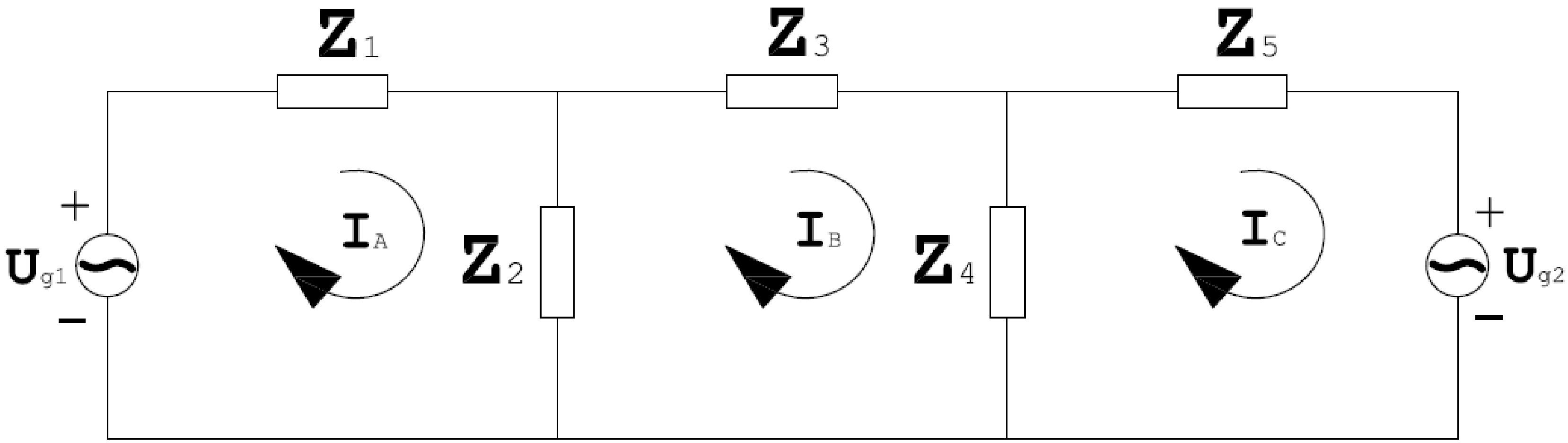
Método de las mallas



$$\overline{U}_{g1} = \overline{I}_A \cdot \overline{Z}_1 + \left(\overline{I}_A - \overline{I}_B\right) \cdot \overline{Z}_2$$
$$0 = \left(\overline{I}_B - \overline{I}_A\right) \cdot \overline{Z}_2 + \overline{I}_B \cdot \overline{Z}_3 + \left(\overline{I}_B - \overline{I}_C\right) \cdot \overline{Z}_4 \Rightarrow$$
$$-\overline{U}_{g2} = \left(\overline{I}_C - \overline{I}_B\right) \cdot \overline{Z}_4 + \overline{I}_C \cdot \overline{Z}_5$$

$$\overline{U}_{g1} = (\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2) \cdot \overline{I}_A - \overline{Z}_2 \cdot \overline{I}_B$$
$$0 = -\overline{Z}_2 \cdot \overline{I}_A + (\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3 + \overline{Z}_4) \cdot \overline{I}_B - \overline{Z}_4 \cdot \overline{I}_C \Rightarrow$$
$$-\overline{U}_{g2} = -\overline{Z}_4 \cdot \overline{I}_B + (\overline{Z}_4 + \overline{Z}_5) \cdot \overline{I}_C$$

Método de las mallas



$$
\begin{aligned}
\overline{U}_{g1} &= (\overline{Z}_1+\overline{Z}_2)\cdot\overline{I}_A-\overline{Z}_2\cdot\overline{I}_B \\
0 &= -\overline{Z}_2\cdot\overline{I}_A+(\overline{Z}_2+\overline{Z}_3+\overline{Z}_4)\cdot\overline{I}_B-\overline{Z}_4\cdot\overline{I}_C \\
-\overline{U}_{g2} &= -\overline{Z}_4\cdot\overline{I}_B+(\overline{Z}_4+\overline{Z}_5)\cdot\overline{I}_C
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{pmatrix} \overline{z}_1+\overline{z}_2 & -\overline{z}_2 & 0 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_2+\overline{z}_3+\overline{z}_4 & -\overline{z}_4 \\ 0 & -\overline{z}_4 & \overline{z}_4+\overline{z}_5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\overline{I}_A\\ \overline{I}_B\\ \overline{I}_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{U}_{g1}\\ 0\\ -\overline{U}_{g2}\end{pmatrix}
$$

Método de las mallas

$$\begin{pmatrix} \overline{z}_{11} & -\overline{z}_{12} & -\overline{z}_{13} \\ -\overline{z}_{21} & \overline{z}_{22} & -\overline{z}_{23} \\ -\overline{z}_{31} & -\overline{z}_{32} & \overline{z}_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{I}_1 \\ \overline{I}_2 \\ \overline{I}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \overline{U}_1 \\ \sum \overline{U}_2 \\ \sum \overline{U}_3 \end{pmatrix}$$

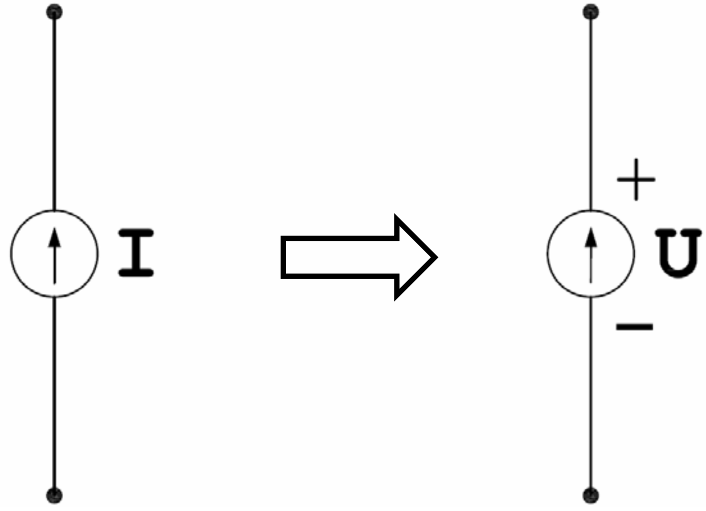
$$\overline{Z}_{ij} = \begin{cases} \textit{Suma de impedancias en la malla i para } i = j \\ \textit{Suma de impedancias comunes entre las mallas i y j para } i \neq j \end{cases}$$

Método de las mallas

- Restricciones del método

El método de las mallas se aplica directamente cuando todos los generadores son de tensión.

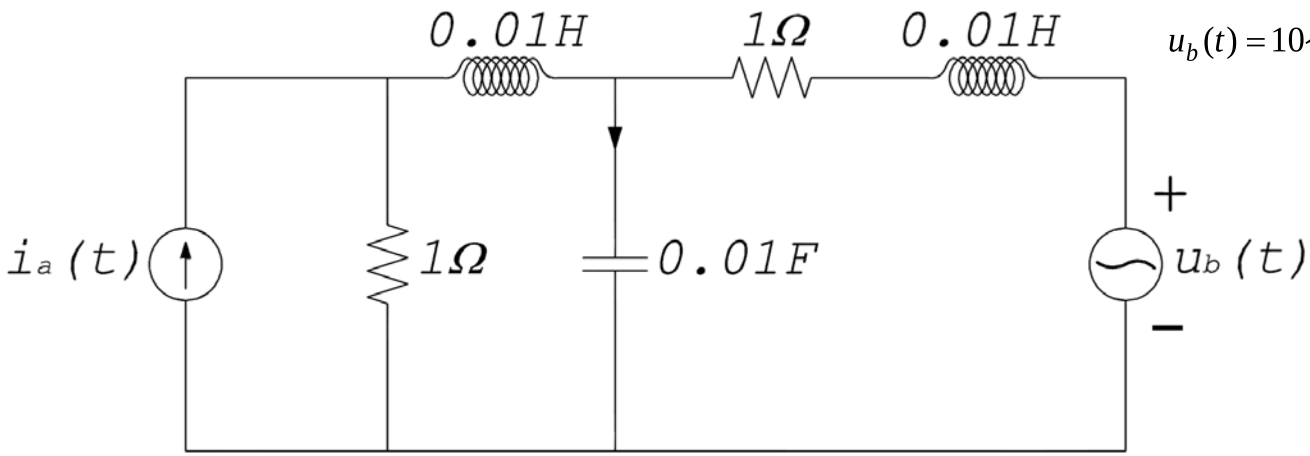
Cuando hay algunos generadores de corriente, si éstos son reales se transforma a generadores reales de tensión, *sin embargo, si éstos son ideales se realiza el siguiente cambio:*



Método de las mallas

- Ejemplo: calcular la intensidad que circula por el condensador.

$$i_a(t) = 10\sqrt{2}\cdot sen\,(100\,t)$$
$$u_b(t) = 10\sqrt{2}\cdot \cos(100\,t)$$

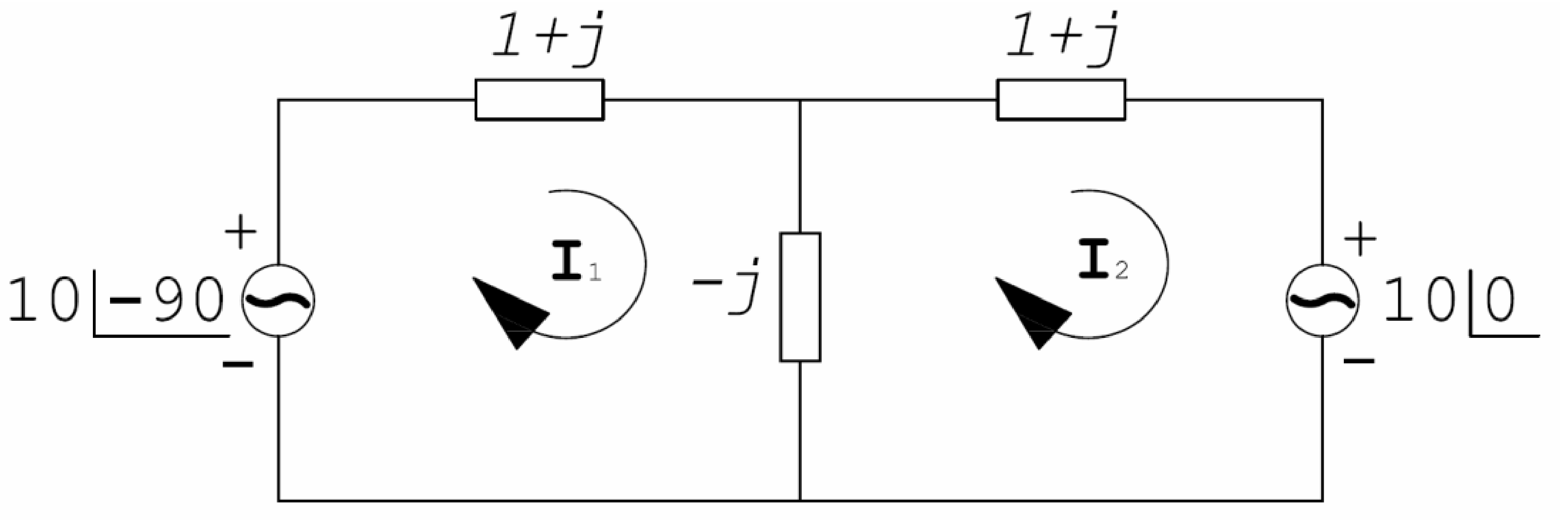


$$\overline{I} = 10\angle -90$$
$$\overline{U} = 10\angle 0^{o}$$

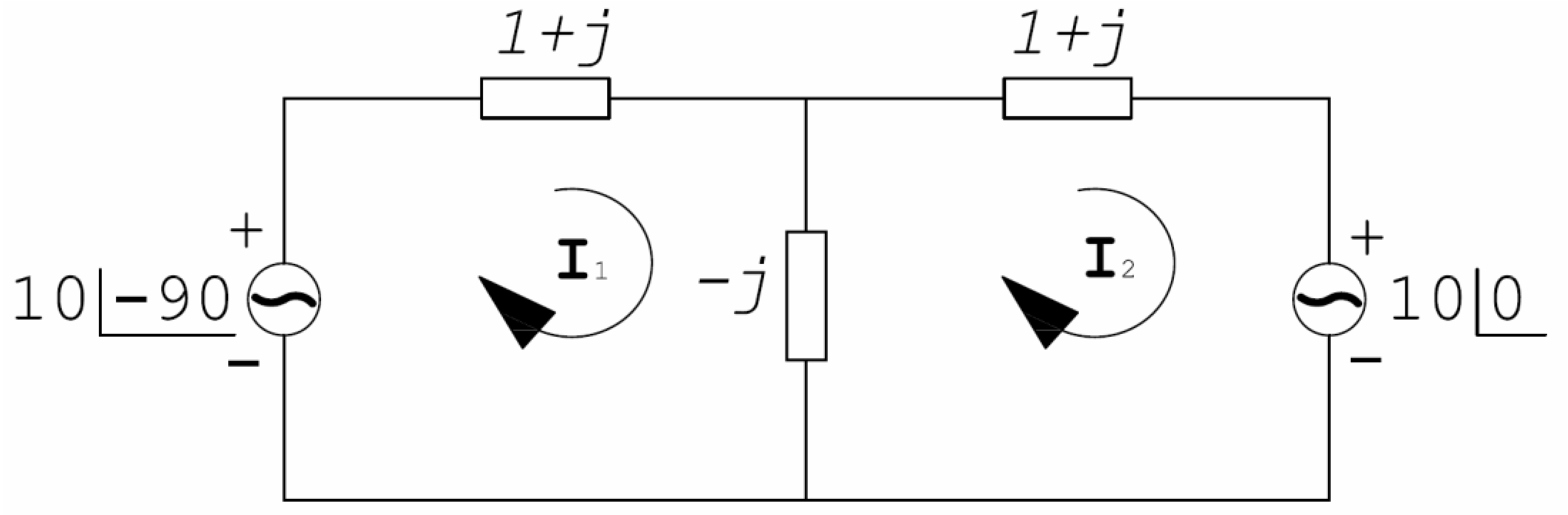
$$\overline{Z}_1 = 1\angle 0^{o}$$
$$\overline{Z}_2 = j \equiv 1\angle 90$$
$$\overline{Z}_3 = -j \equiv 1\angle -90$$
$$\overline{Z}_4 = 1\angle 0^{o}$$
$$\overline{Z}_5 = j = 1\angle 90^{o}$$

Método de las mallas

- Transformamos fuentes de corriente a fuentes de tensión y simplificamos las impedancias.



Método de las mallas

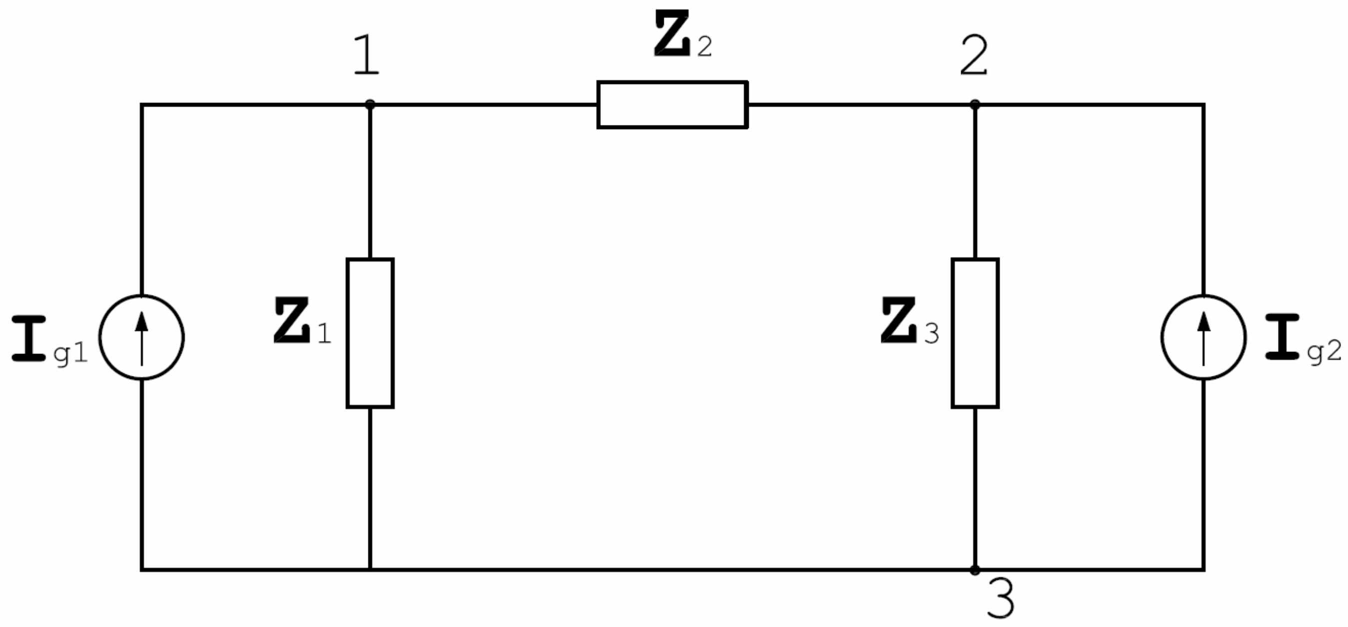


$$\begin{pmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10j \\ -10 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \bar{I}_1 = 0 \\ \bar{I}_2 = -10 \end{cases} \qquad \bar{I} = \bar{I}_1 - \bar{I}_2 = 10\angle 0^{\text{o}}$$

$$\boxed{i(t) = 10\sqrt{2}\cos 100 \cdot t \ \text{ A}}$$

Método de los nudos

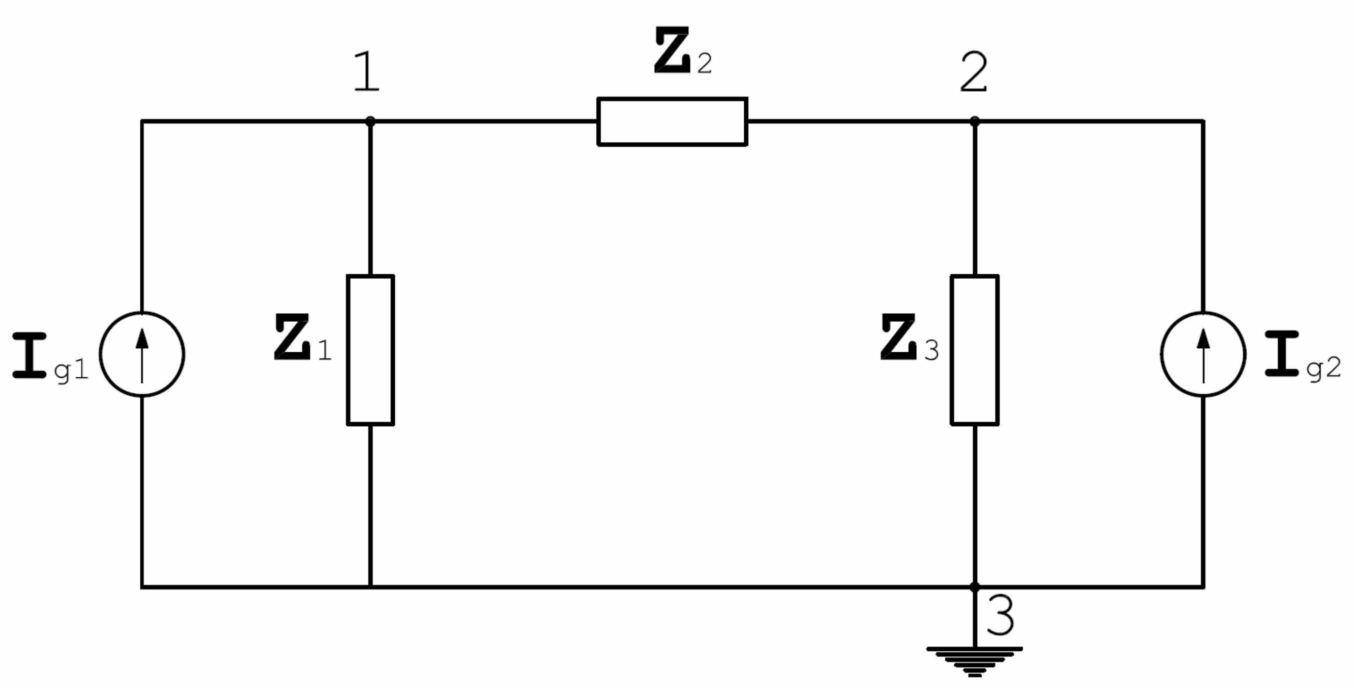
“Consiste en escribir las ecuaciones correspondientes a todos los nudos menos uno (consecuencia de la 1ª ley de Kirchhoff)”



Objetivo: determinar las tensiones en cada rama

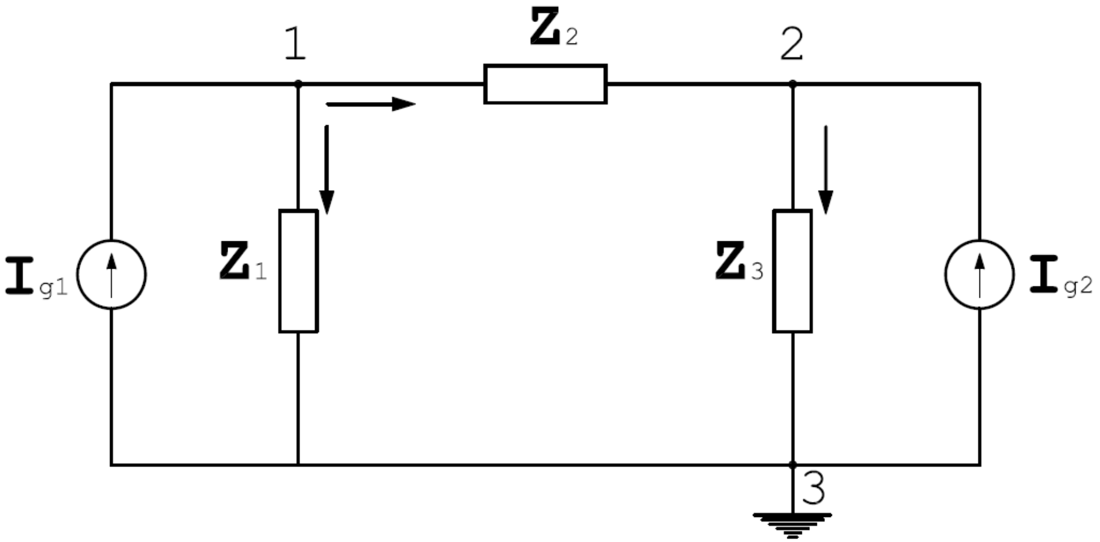
Método de los nudos

Ponemos el nudo inferior a tierra



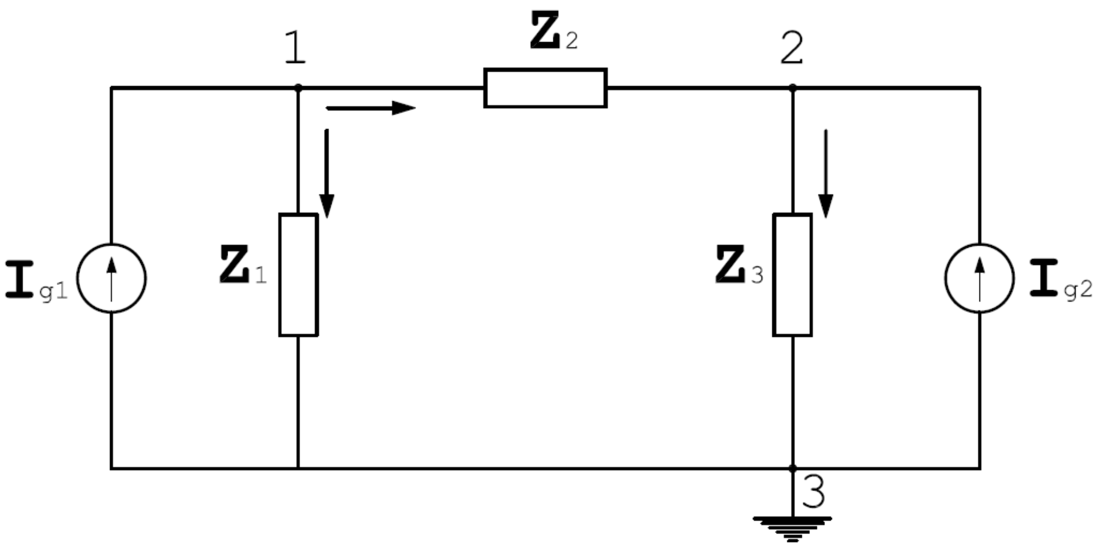
Método de los nudos

Representamos las corrientes en cada rama y aplicamos la 1ª ley de Kirchhoff



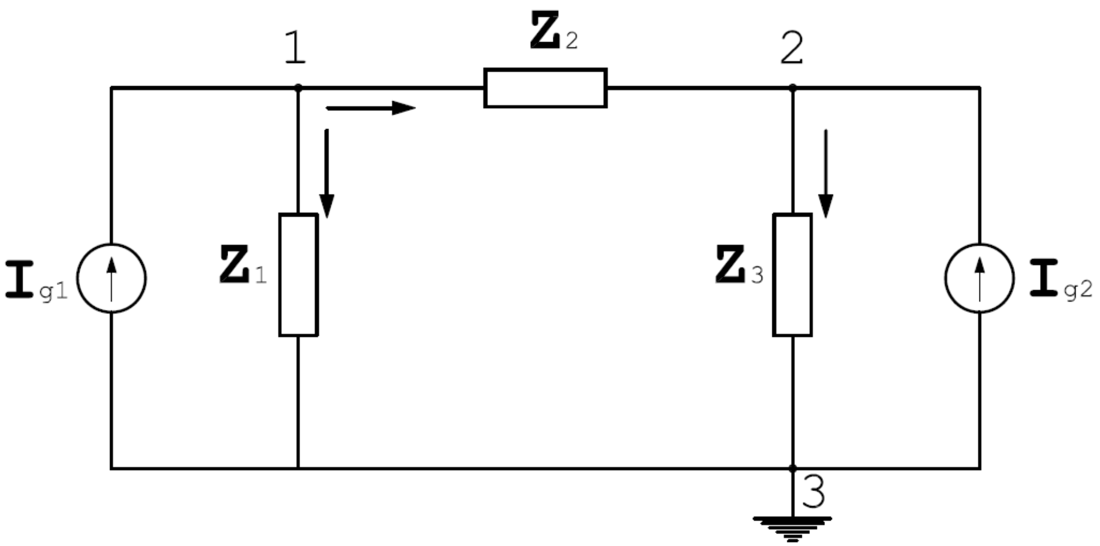
$$\begin{aligned}\overline{I}_{13}+\overline{I}_{12}&=\overline{I}_{g1}\\ \overline{I}_{23}&=\overline{I}_{g2}+\overline{I}_{12}\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}\overline{I}_{13}+\overline{I}_{12}&=\overline{I}_{g1}\\ \overline{I}_{23}-\overline{I}_{12}&=\overline{I}_{g2}\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}\overline{I}_{13}+\overline{I}_{12}&=\overline{I}_{g1}\\ \overline{I}_{23}+\overline{I}_{21}&=\overline{I}_{g2}\end{aligned}$$

Método de los nudos



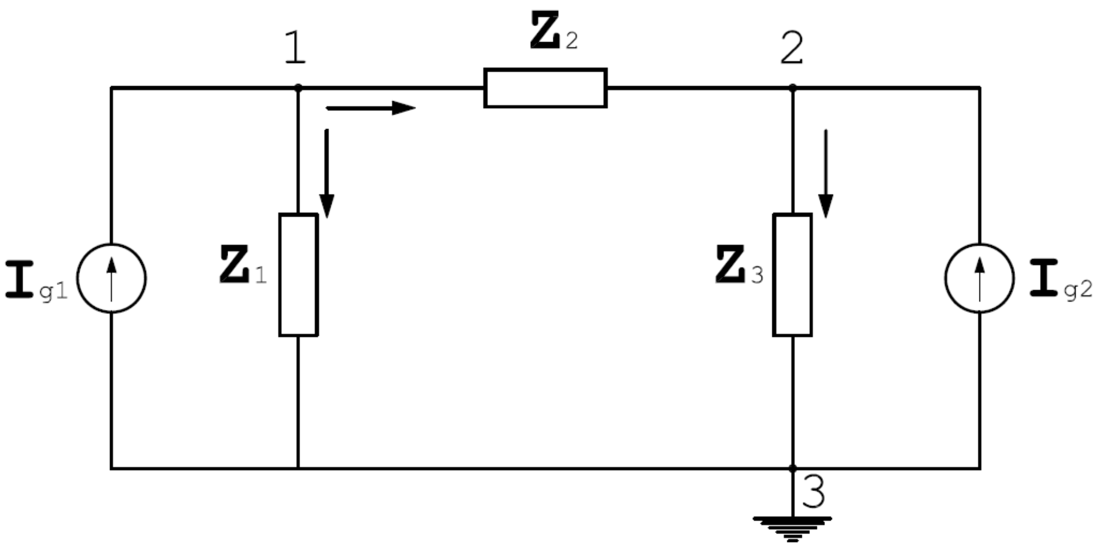
$$\begin{aligned}\bar{I}_{13}+\bar{I}_{12}&=\bar{I}_{g1}\\ \bar{I}_{23}+\bar{I}_{21}&=\bar{I}_{g2}\end{aligned} \;\Rightarrow\; \begin{aligned}\frac{\bar{U}_{13}}{\bar{Z}_1}+\frac{\bar{U}_{12}}{\bar{Z}_2}&=\bar{I}_{g1}\\ \frac{\bar{U}_{23}}{\bar{Z}_3}+\frac{\bar{U}_{21}}{\bar{Z}_2}&=\bar{I}_{g2}\end{aligned} \;\Rightarrow\; \begin{aligned}\frac{\bar{U}_1-\bar{U}_3}{\bar{Z}_1}+\frac{\bar{U}_1-\bar{U}_2}{\bar{Z}_2}&=\bar{I}_{g1}\\ \frac{\bar{U}_2-\bar{U}_3}{\bar{Z}_3}+\frac{\bar{U}_2-\bar{U}_1}{\bar{Z}_2}&=\bar{I}_{g2}\end{aligned}$$

Método de los nudos



$$\frac{\bar{U}_1-\bar{U}_3}{\bar{Z}_1}+\frac{\bar{U}_1-\bar{U}_2}{\bar{Z}_2}=\bar{I}_{g1}$$
$$\frac{\bar{U}_2-\bar{U}_3}{\bar{Z}_3}+\frac{\bar{U}_2-\bar{U}_1}{\bar{Z}_2}=\bar{I}_{g2}$$
$$\Rightarrow$$
$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{Z}_1}+\frac{\bar{U}_1-\bar{U}_2}{\bar{Z}_2}=\bar{I}_{g1}$$
$$\frac{\bar{U}_2}{\bar{Z}_3}+\frac{\bar{U}_2-\bar{U}_1}{\bar{Z}_2}=\bar{I}_{g2}$$
$$\Rightarrow$$
$$\left(\frac{1}{\bar{Z}_1}+\frac{1}{\bar{Z}_2}\right)\cdot\bar{U}_1-\frac{1}{\bar{Z}_2}\bar{U}_2=\bar{I}_{g1}$$
$$-\frac{1}{\bar{Z}_2}\cdot\bar{U}_1+\left(\frac{1}{\bar{Z}_2}+\frac{1}{\bar{Z}_3}\right)\cdot\bar{U}_2=\bar{I}_{g2}$$

Método de los nudos



$$\left(\frac{1}{\overline{Z}_1}+\frac{1}{\overline{Z}_2}\right)\cdot\overline{U}_1-\frac{1}{\overline{Z}_2}\overline{U}_2=\overline{I}_{g1}$$

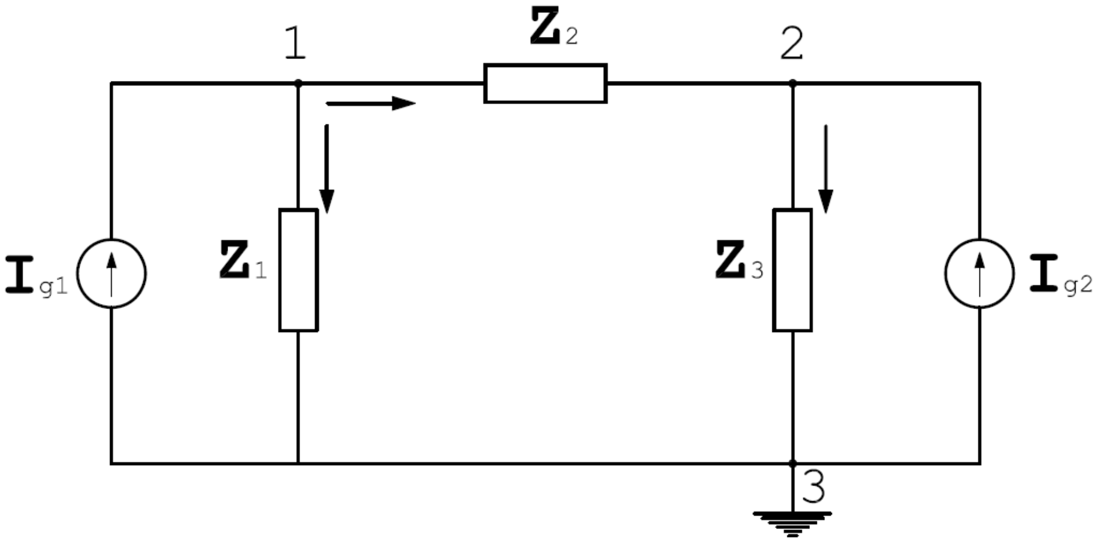
$$-\frac{1}{\overline{Z}_2}\cdot\overline{U}_1+\left(\frac{1}{\overline{Z}_2}+\frac{1}{\overline{Z}_3}\right)\cdot\overline{U}_2=\overline{I}_{g2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\left(\overline{Y}_1+\overline{Y}_2\right)\cdot\overline{U}_1-\overline{Y}_2\cdot\overline{U}_2=\overline{I}_{g1}$$

$$-\overline{Y}_2\cdot\overline{U}_1+\left(\overline{Y}_2+\overline{Y}_3\right)\cdot\overline{U}_2=\overline{I}_{g2}$$

Método de los nudos



$$\left(\overline{Y}_1+\overline{Y}_2\right)\cdot\overline{U}_1-\overline{Y}_2\cdot\overline{U}_2=\overline{I}_{g1}$$
$$-\overline{Y}_2\cdot\overline{U}_1+\left(\overline{Y}_2+\overline{Y}_3\right)\cdot\overline{U}_2=\overline{I}_{g2}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\overline{Y}_1+\overline{Y}_2 & -\overline{Y}_2\\ -\overline{Y}_2 & \overline{Y}_2+\overline{Y}_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\overline{U}_1\\ \overline{U}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{I}_{g1}\\ \overline{I}_{g2}\end{pmatrix}$$

Método de los nudos

$$\begin{pmatrix} \overline{Y}_{11} & -\overline{Y}_{12} & -\overline{Y}_{13} \\ -\overline{Y}_{21} & \overline{Y}_{22} & -\overline{Y}_{23} \\ -\overline{Y}_{31} & -\overline{Y}_{32} & \overline{Y}_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{U}_2 \\ \overline{U}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \overline{I}_{g1} \\ \sum \overline{I}_{g2} \\ \sum \overline{I}_{g3} \end{pmatrix}$$

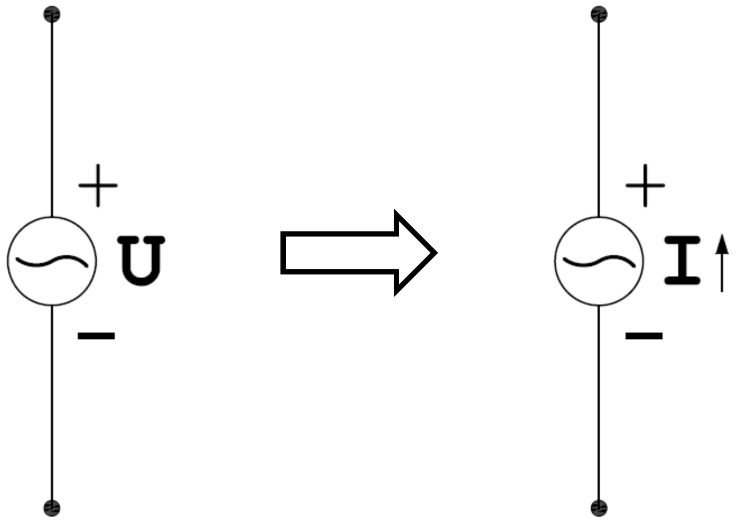
$$\overline{Y}_{ij} = \begin{cases} \text{Suma de admitancias conectadas al nudo } i \text{ para } i = j \\ \text{Suma de admitancias conectadas entre los nudos } i \text{ y } j \text{ para } i \neq j \end{cases}$$

Método de los nudos

- Restricciones del método

El método de los nudos se aplica directamente cuando todos los generadores son de corriente.

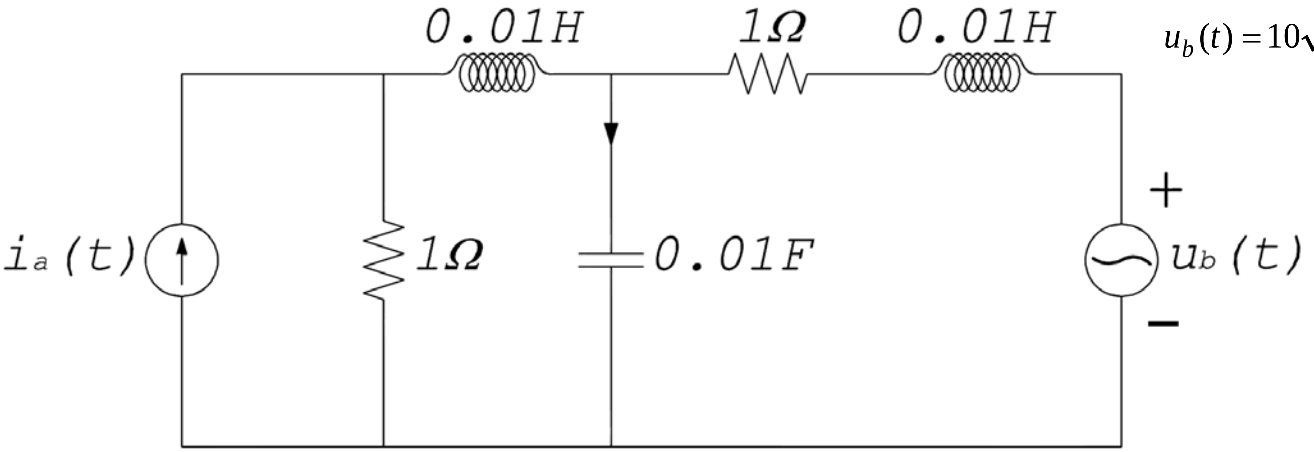
Cuando hay algunos generadores de tensión, si éstos son reales se transforman a generadores reales de corriente*, sin embargo, si éstos son ideales se realiza el siguiente cambio:*



Método de los nudos

- Ejemplo: calcular la intensidad que circula por el condensador.

$$i_a(t) = 10\sqrt{2} \cdot sen(100\,t)$$
$$u_b(t) = 10\sqrt{2} \cdot \cos(100\,t)$$

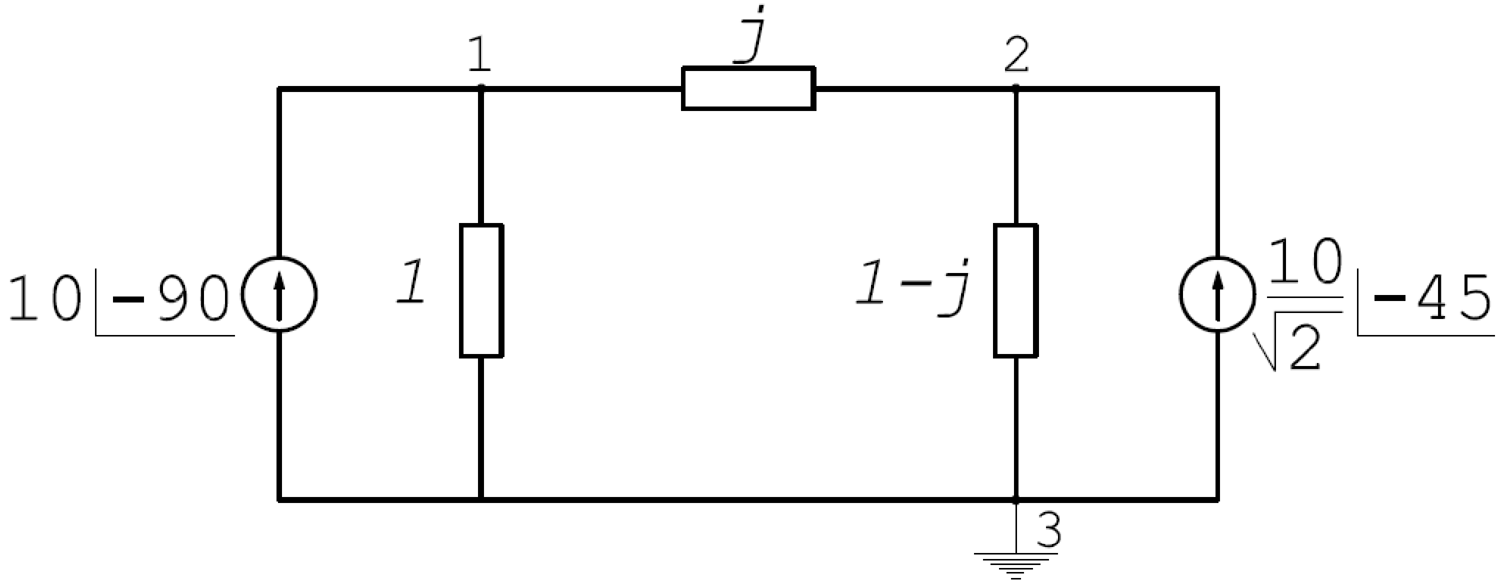


$$\overline{I} = 10\angle -90$$
$$\overline{U} = 10\angle 0^{o}$$

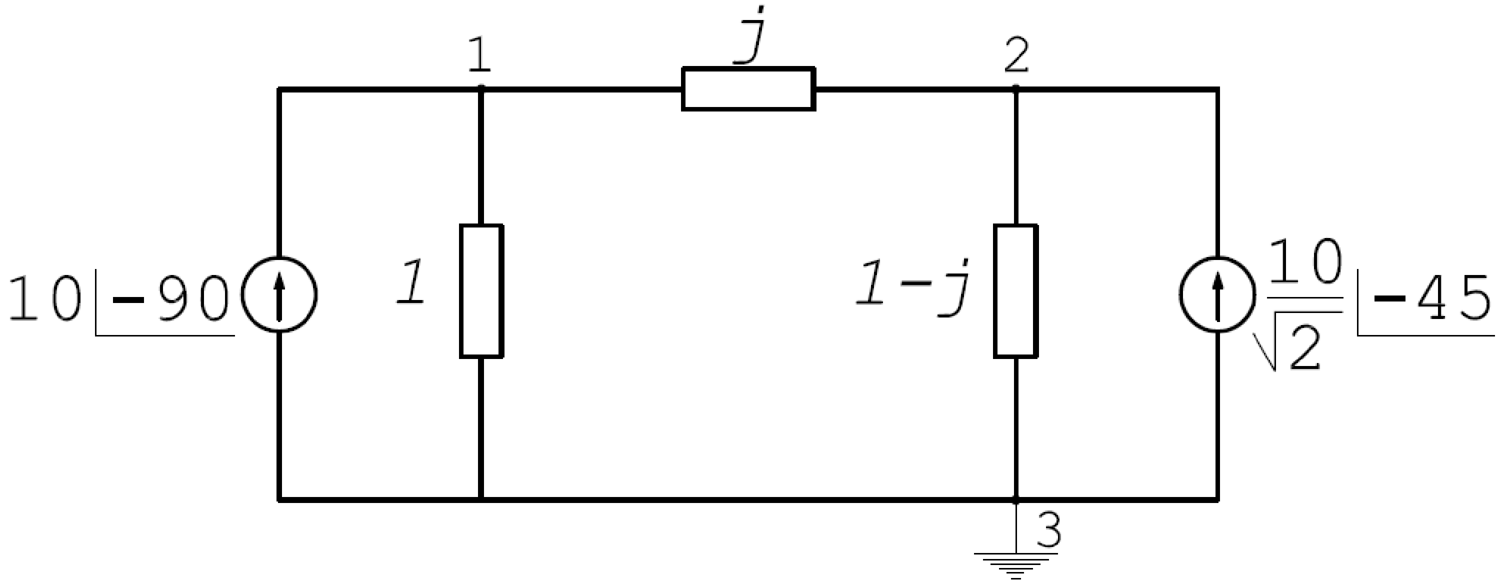
$$\overline{Z}_1 = 1\angle 0^{o}$$
$$\overline{Z}_2 = j \equiv 1\angle 90$$
$$\overline{Z}_3 = -j \equiv 1\angle -90$$
$$\overline{Z}_4 = 1\angle 0^{o}$$
$$\overline{Z}_5 = j = 1\angle 90^{o}$$

Método de los nudos

- Transformamos fuentes de tensión a fuentes de corriente y simplificamos las impedancias.



Método de los nudos



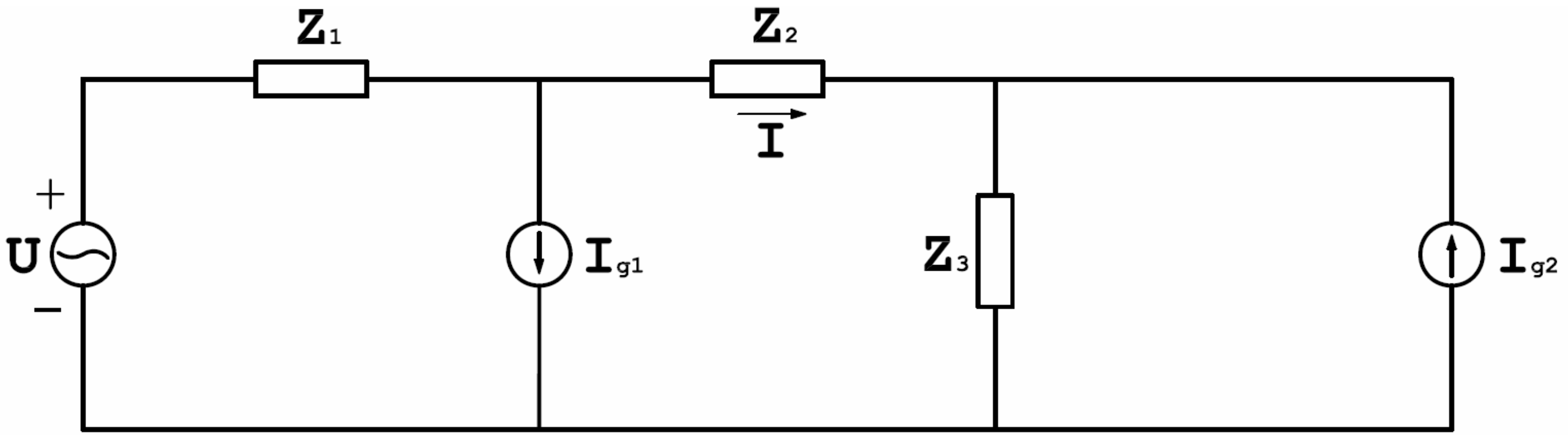
$$\begin{pmatrix} 1-j & j \\ j & 1/(1+j) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10j \\ 5(1-j) \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \overline{U}_1 = -10j \\ \overline{U}_2 = -10j \end{cases} \quad \overline{I} = \frac{\overline{U}_2}{\overline{Z}_3} = \frac{-10j}{-j} = 10\angle 0^{\circ}$$

$$\boxed{i(t) = 10\sqrt{2}\,Cos(100 \cdot t)}$$

Método de superposición

"En una red formada por fuentes (de intensidad y tensión) e impedancias, la corriente en cada rama es la suma de las corrientes que se producirían si las fuentes actuasen una a una independientemente"

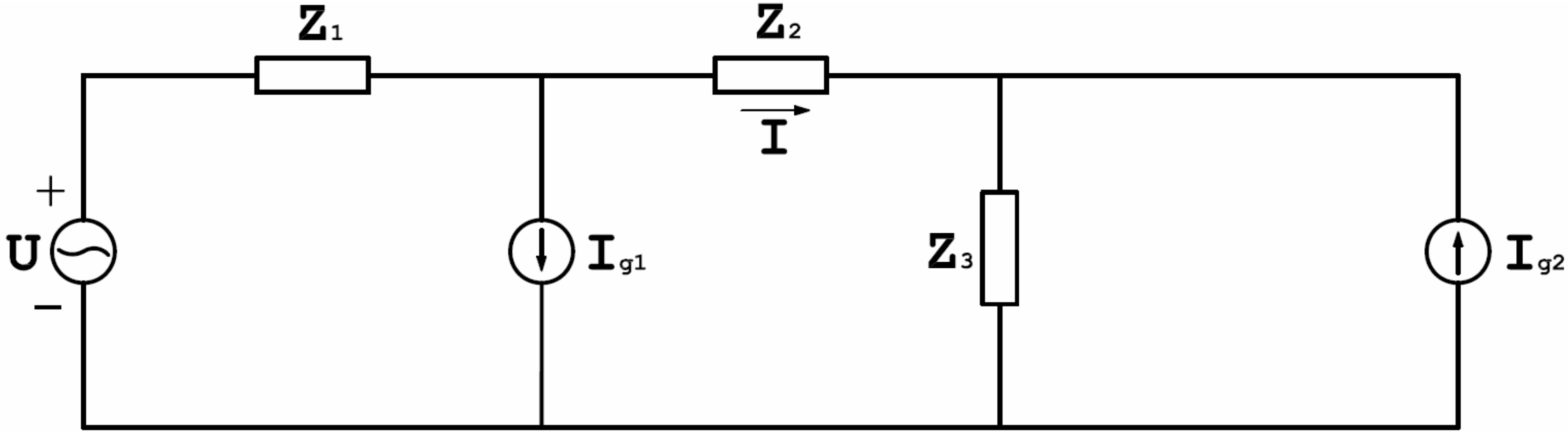
Se aplica el Principio de Linealidad.



Objetivo: determinar la intensidad que circula por la impedancia $\mathbf{Z_2}$

Método de superposición

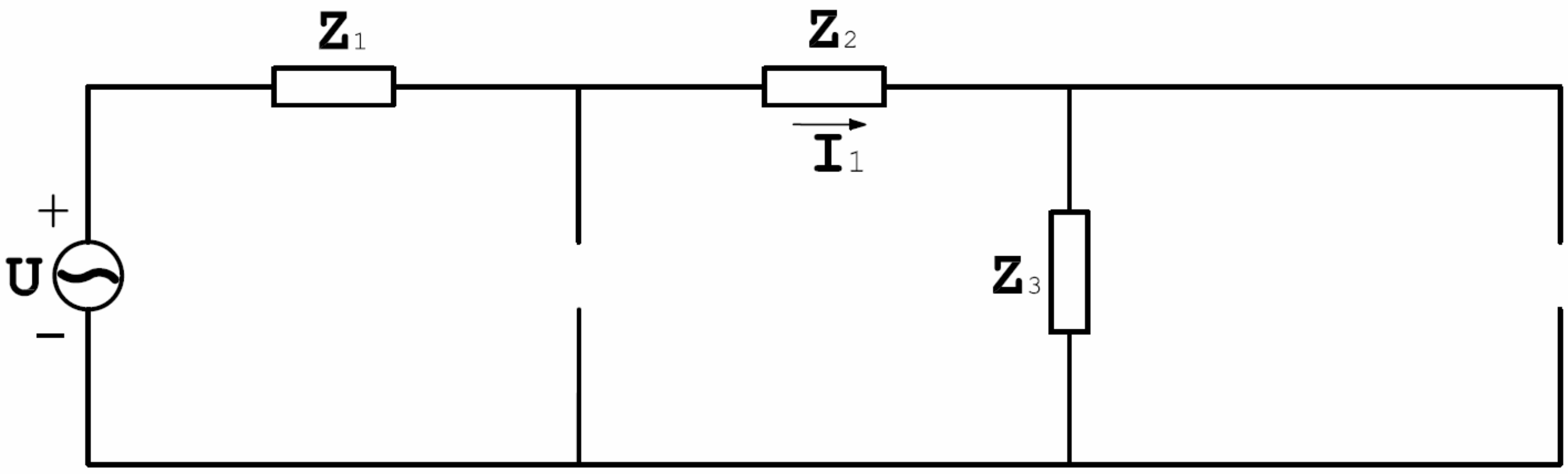
Se resuelve el circuito para cada generador por separado. Donde había un generador de corriente se deja el circuito abierto y donde había un generador de tensión se cortocircuita.



Método de superposición

Se resuelve el circuito para cada generador por separado. Donde había un generador de corriente se deja el circuito abierto y donde había un generador de tensión se cortocircuita.

Paso 1º. Se abren las fuentes de intensidad:

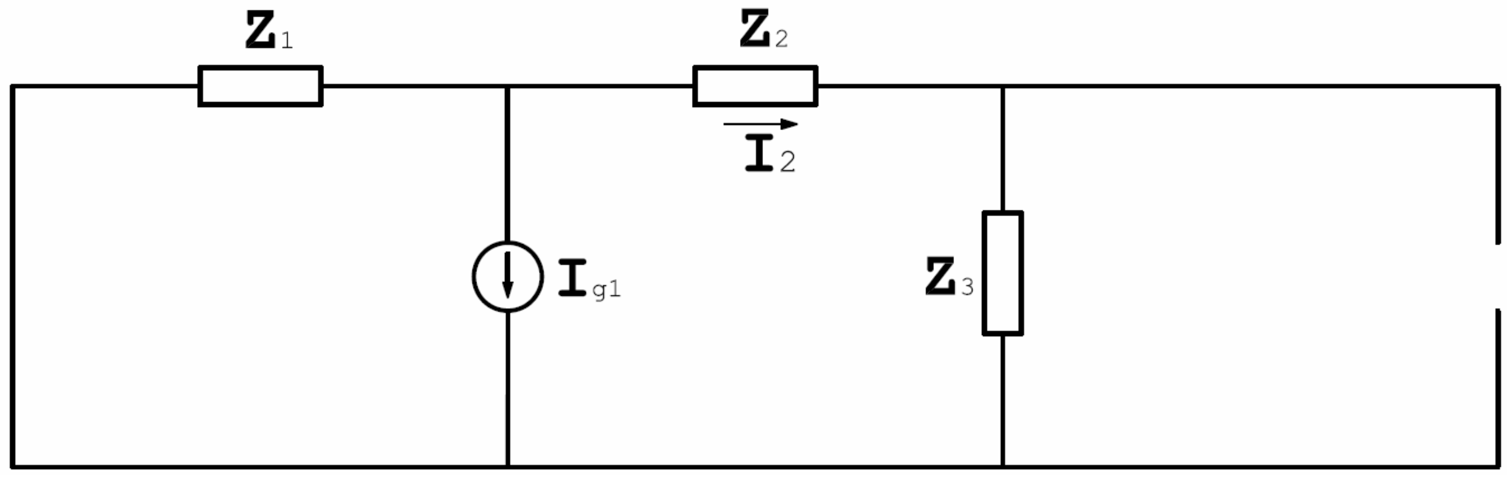


$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}$$

Método de superposición

Se resuelve el circuito para cada generador por separado. Donde había un generador de corriente se deja el circuito abierto y donde había un generador de tensión se cortocircuita.

Paso 2º. Se cortocircuita la fuente de tensión y se abre la fuente de intensidad

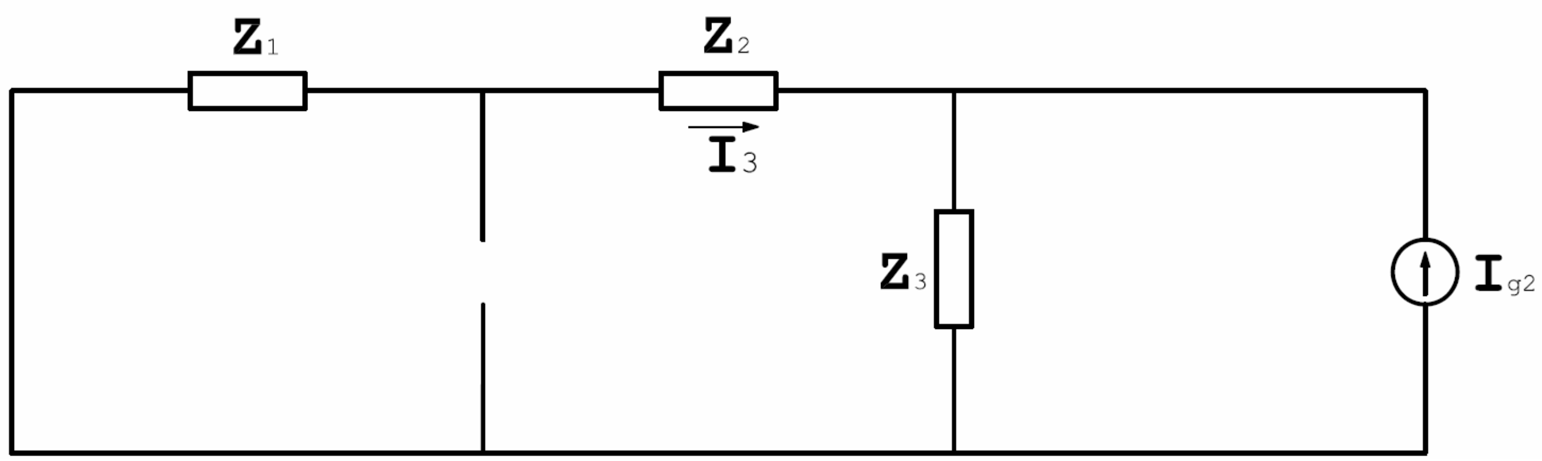


$$\bar{I}_2 = \frac{-\bar{I}_{g1} \cdot \bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}$$

Método de superposición

Se resuelve el circuito para cada generador por separado. Donde había un generador de corriente se deja el circuito abierto y donde había un generador de tensión se cortocircuita.

Paso 3º. Se cortocircuita la fuente de tensión y se abre la otra fuente de intensidad.



$$\overline{I}_3 = \frac{-\overline{I}_{g2} \cdot \overline{Z}_3}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3}$$

Método de superposición

$$\left.\begin{aligned}
\bar{I}_1 &= \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} \\[2em]
\bar{I}_2 &= \frac{-\bar{I}_{g1} \cdot \bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} \\[2em]
\bar{I}_3 &= \frac{-\bar{I}_{g2} \cdot \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \boxed{\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3}$$

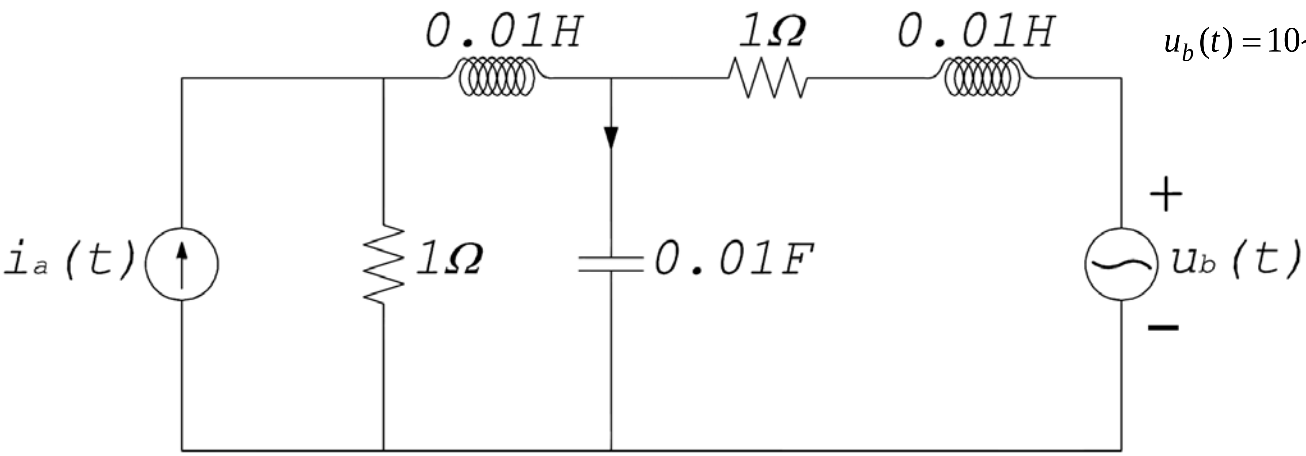
Nota. El método de superposición es el único con el que se puede resolver circuitos con fuentes de frecuencias distintas, si es así:

¡Ojo! Se tiene que pasar primero de fasores al espacio temporal y hacer la SUMA .

Método de superposición

- Ejemplo: Calcular la intensidad que circula por el condensador.

$$i_a(t) = 10\sqrt{2} \cdot sen(100\,t)$$
$$u_b(t) = 10\sqrt{2} \cdot \cos(100\,t)$$

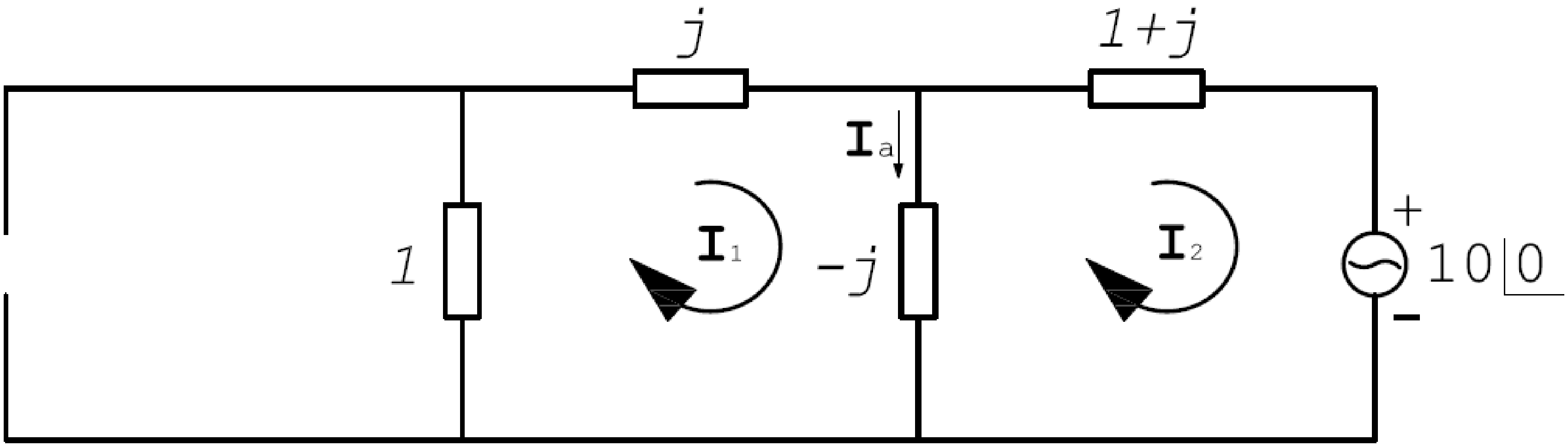


$$\overline{I} = 10\angle -90$$
$$\overline{U} = 10\angle 0^{o}$$

$$\overline{Z}_1 = 1\angle 0^{o}$$
$$\overline{Z}_2 = j \equiv 1\angle 90$$
$$\overline{Z}_3 = -j \equiv 1\angle -90$$
$$\overline{Z}_4 = 1\angle 0^{o}$$
$$\overline{Z}_5 = j = 1\angle 90^{o}$$

Método de superposición

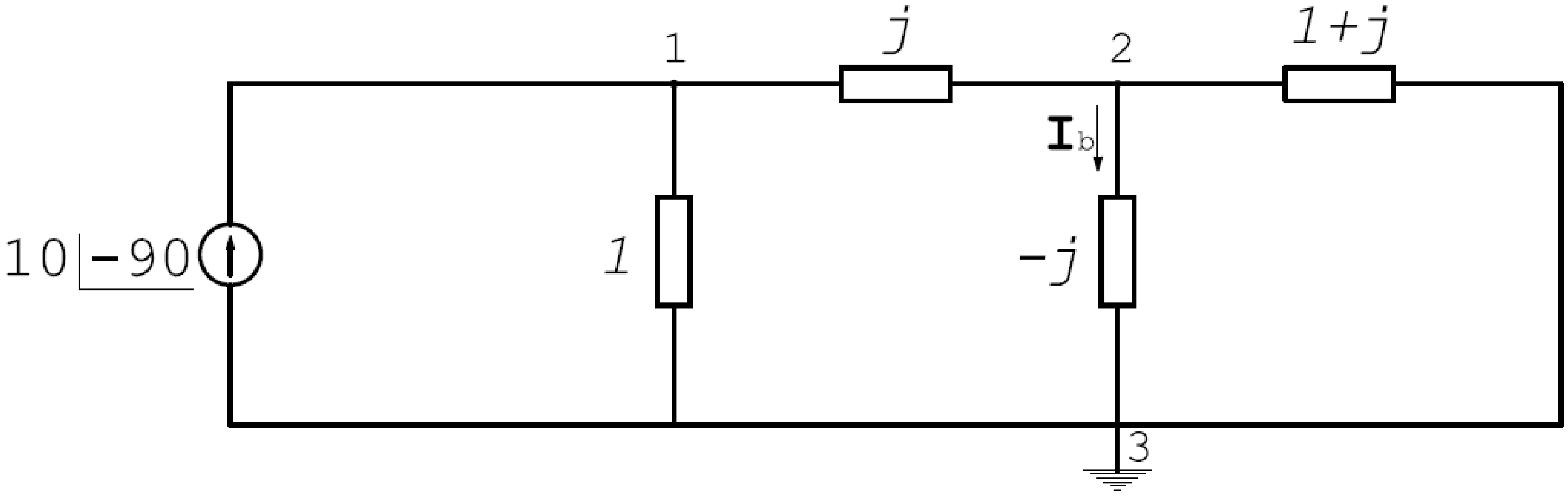
- Trabajamos con la fuente de tensión, entonces dejamos abierta la fuente de corriente.



$$\begin{pmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{I}_1 \\ \overline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{I}_a = \overline{I}_1 - \overline{I}_2 = 5 + 5j$$

Método de superposición

- Trabajamos con la fuente de corriente, entonces cortocircuitamos la fuente de tensión.



$$\begin{pmatrix} 1-j & j \\ j & 1/(1+j) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10j \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{I}_b = \frac{\overline{U}_2}{-j} = 5-5j$$

Método de superposición

$$\left.\begin{array}{l}\overline{I}_a = 5 + 5j \\[2em] \overline{I}_b = 5 - 5j\end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\overline{I} = \overline{I}_a + \overline{I}_b = 10\angle 0^{\circ} \Rightarrow i(t) = 10\sqrt{2}\,Cos(100 \cdot t)}$$

Tema 4: Potencia de circuitos monofásicos

Índice

- Potencia
- Triángulo de potencias
- Teorema de Boucherot
- Factor de potencia
- Mejora del factor de potencia

Potencia

- Efecto Joule

“Es la disipación de energía en forma de calor al pasar una corriente eléctrica por un elemento pasivo”.

Supongamos una resistencia R conectada a los bornes de una fuente de tensión u(t);

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos \omega t \Longrightarrow i(t) = \frac{u(t)}{R} = \sqrt{2} \cdot \frac{U}{R} \cdot \cos \omega t = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos \omega t$$

$$E = \int_0^T p(t)\,dt = \int_0^T u(t)\,i(t)\,dt = \int_0^T R\,i^2(t)\,dt = R \int_0^T i^2(t)\,dt = R\,I^2 T \quad (J)$$

$$\boxed{Q = 0.24 \cdot R\,I^2 T \quad (Cal)}$$

$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)\,dt}$$

Potencia

- Potencia instantánea, fluctuante, aparente, activa y reactiva.

Supongamos una impedancia ***Z*** *conectada a los bornes de una fuente de tensión u(t);*

$$\left.\begin{array}{l} u(t)=\sqrt{2}\cdot U\cdot\cos\omega t \Rightarrow \overline{U}=U\angle 0^{\circ} \\ \overline{Z}=Z\angle\varphi \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{I}=\frac{\overline{U}}{\overline{Z}}=\frac{U\angle 0^{\circ}}{Z\angle\varphi}=\frac{U}{Z}\angle-\varphi=I\angle-\varphi$$

$$\boxed{i(t)=\sqrt{2}\cdot I\cos(\omega t-\varphi)}$$

$$p(t)=u(t)\,i(t)=2\,UI\cos\omega t\cdot\cos(\omega t-\varphi)=UI\left[\cos(2\omega t-\varphi)+\cos\varphi\right]=$$

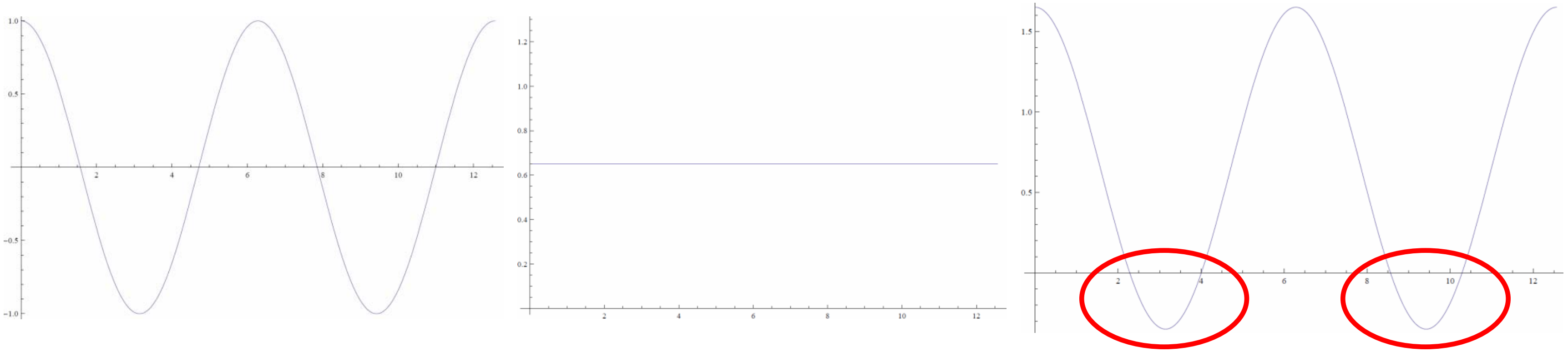
$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$

Potencia

$$= UI\left[\cos(2\omega t-\varphi)+\cos\varphi\right] = UI\cos(2\omega t-\varphi)+UI\cos\varphi = P_f + P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p(t) = P_f + P}$$

Potencia Fluctuante *Potencia Activa*



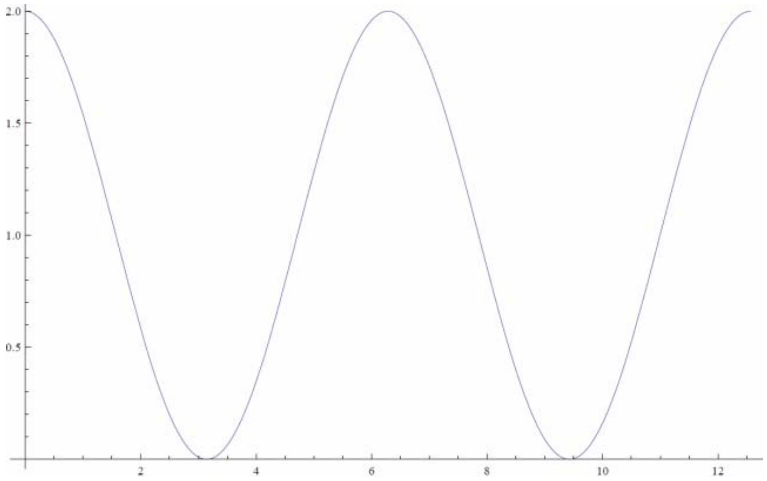
Potencia Fluctuante + *Potencia Activa* = *Potencia Instantánea*

Parte de la energía la rechaza la carga y es como si la devolviese

Potencia

- *Potencia (energía proporcionada cada segundo) sobre una resistencia R*

$$\overline{Z} = R\angle 0^{\circ} \Rightarrow p(t) = UI\cos(2\omega t - \varphi) + UI\cos\varphi = UI\cos 2\omega t + UI = P_f + P$$

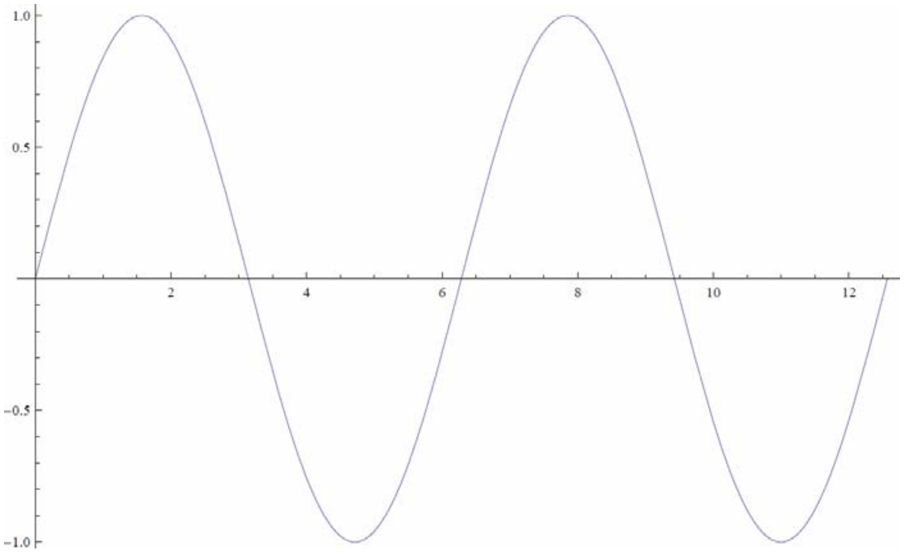


No devuelve nada de energía (en cada segundo), la gasta entera en realizar un trabajo

Potencia

- *Potencia (energía proporcionada cada segundo) sobre una bobina L*

$$\overline{Z} = \omega L \angle 90^{\circ} \quad \Rightarrow p(t) = UI\cos(2\omega t - \varphi) + UI\cos\varphi = UI\cos\left(2\omega t - 90\right) = P_f$$

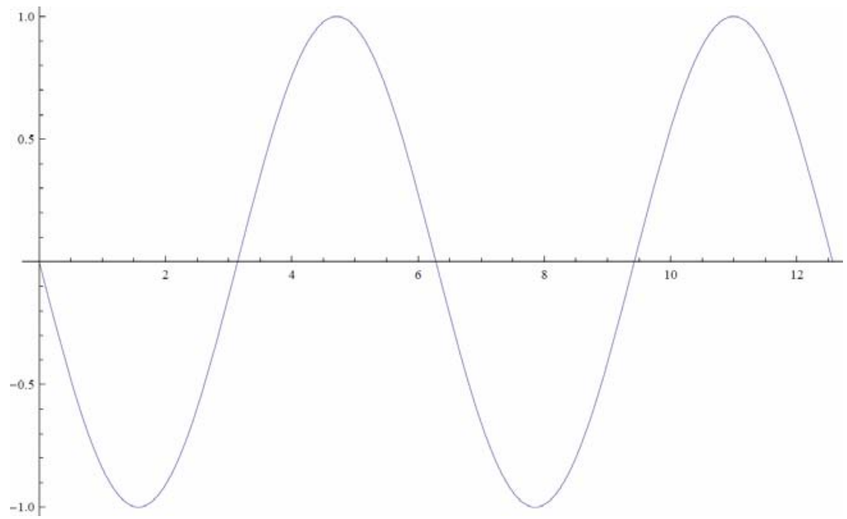


Devuelve toda la energía (en cada segundo), por tanto "no" realiza ningún trabajo

Potencia

- *Potencia (energía proporcionada cada segundo) sobre un condensador C*

$$\overline{Z} = \frac{1}{\omega C}\angle -90^{\text{o}} \;\Rightarrow\; p(t) = UI\cos(2\omega t - \varphi) + UI\cos\varphi = UI\cos\left(2\omega t + 90\right) = P_f$$



Devuelve toda la energía (en cada segundo), por tanto "no" realiza ningún trabajo

Potencia

$$p_{media} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{UI}{T}\underbrace{\int_0^T \cos(2\omega t - \varphi)dt}_{\text{CERO}} + \frac{UI}{T}\int_0^T \cos\varphi \, dt = UI\cos\varphi = P$$

$$\boxed{p_{media} = P}$$

$$p(t) = UI\ Cos\ \varphi + UI\ Cos\ (2\omega t - \varphi) = P\left[1 + Cos\ 2\omega t\right] + UI\ Sen\ \varphi\ Sen\ 2\omega t =$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + sena\ senb$$

$$= P\left[1 + Cos\ 2\omega t\right] + \underbrace{UI\ Sen\ \varphi}_{Q}\ Sen\ 2\omega t = P\left[1 + \cos\ 2\omega t\right] + Q\ \text{sen}\ 2\omega t$$

(Potencia reactiva)

Potencia

$$p(t) = UI\ Cos\,(2\omega t - \varphi) + UI\ Cos\,\varphi = F + P = P\left[1 + Cos\ 2\omega t\right] + Q\ Sen\ 2\omega t$$

$$\boxed{P = UI \cdot Cos\,\varphi \quad (\mathrm{W}) \qquad \textit{(Potencia activa)}}$$

$$Q = UI \cdot Sen\,\varphi \quad (\mathrm{VAr}) \qquad \textit{(Potencia reactiva)}$$

$$S = UI \quad (\mathrm{VA}) \qquad \textit{(Potencia aparente)}$$

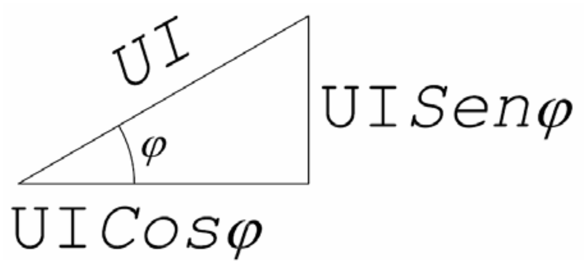
La potencia activa (potencia media) es la que realmente realiza el trabajo, ésta es la razón por la que se le denomina activa.

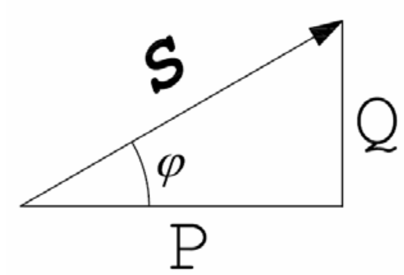
La potencia aparente es la que aparentemente proporciona el generador, sin embargo, sólo una parte actúa activamente en producir el trabajo.

Triángulo de Potencias

$$\left.\begin{array}{c} u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos \omega t \Rightarrow \overline{U} = U\angle 0^{o} \\ \overline{Z} = Z\angle\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{I} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}} = \frac{U\angle 0^{o}}{Z\angle\varphi} = \frac{U}{Z}\angle -\varphi = I\angle -\varphi$$

$$\overline{U} \cdot \overline{I}^{*} = U\angle 0^{o} \cdot I\angle\varphi = UI\angle\varphi \Rightarrow \overline{U} \cdot \overline{I}^{*} = UI \cdot Cos\,\varphi + jUI \cdot Sen\,\varphi$$





$$\boxed{\overline{S} = \overline{U} \cdot \overline{I}^{*} = P + jQ}$$

Teorema de Boucherot

La potencia activa absorbida por un conjunto de receptores es la suma ***algebraica*** *de las potencias activas absorbidas por cada uno de ellos.*

$$P_T = \sum P_i$$

La potencia reactiva absorbida por un conjunto de receptores es la suma ***algebraica*** *de las potencias reactivas absorbidas por cada uno de ellos.*

$$Q_T = \sum Q_i$$

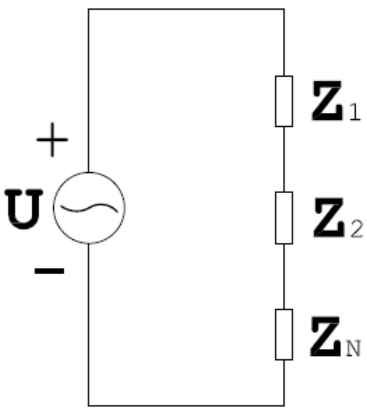
La potencia aparente absorbida por un conjunto de receptores es la suma ***vectorial*** *de las potencias aparentes absorbidas por cada uno de ellos.*

$$\overline{S}_T = \sum \overline{S}_i \Rightarrow S_T = \sqrt{P_T{}^2 + Q_T{}^2}$$

Teorema de Boucherot

Demostración:

a) Circuito en serie



$$\overline{S} = \overline{U} \cdot \overline{I}^* = \left[\overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \cdots + \overline{U}_N\right] \cdot \overline{I}^* = \overline{U}_1 \cdot \overline{I}^* + \overline{U}_2 \cdot \overline{I}^* + \cdots + \overline{U}_N \cdot \overline{I}^* =$$

$$= \boxed{\overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \cdots + \overline{S}_N} = P_1 + jQ_1 + P_2 + jQ_2 + \cdots + P_N + jQ_N =$$

$$= \boxed{\left(P_1 + P_2 + \cdots + P_N\right)} + j\boxed{\left(Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_N\right)} = P_T + jQ_T$$

b) Circuito en paralelo

Demostración en el libro del área

Factor de Potencia

$$\boxed{Factor \quad de \quad potencia \quad = \frac{P}{S}}$$

$$\frac{P}{S} = \frac{UI\cos\varphi}{UI} = Cos\,\varphi \Rightarrow f.d.p. = Cos\,\varphi$$

¿Qué significado físico tiene?

Ejemplo: Efectuar un estudio comparativo para una instalación en la que se desea alimentar un motor de 20kW (inductivo), a 380 V, mediante una línea monofásica cuya resistencia total es de 0,003 Ω/m y una longitud total de 100 m, para;

i) Cos φ = 1
ii) Cos φ = 0.5

Factor de Potencia

La intensidad que circula por el circuito cuando conectamos la carga (motor) es:

Nota: en los motores, en vez de dar el valor de su impedancia se proporciona el valor de la potencia eléctrica consumida (cuando se conecta a su tensión nominal) y el factor de potencia.

$$I = \frac{P}{U \cdot Cos\varphi} = \begin{cases} \dfrac{20000}{380 \times 1.0} = 52.632 \text{ A} \Rightarrow \bar{I} = 52.632\angle 0^{o} \Rightarrow \bar{Z} = \dfrac{\bar{U}}{\bar{I}} = \dfrac{380\angle 0^{o}}{52.632\angle 0^{o}} = 7.22\angle 0^{o} \\ \dfrac{20000}{380 \times 0.5} = 105.26 \text{ A} \Rightarrow \bar{I} = 105.26\angle -60^{o} \Rightarrow \bar{Z} = \dfrac{\bar{U}}{\bar{I}} = \dfrac{380\angle 0^{o}}{105.26\angle -60^{o}} = 3.61\angle 60^{o} \end{cases}$$

Por efecto Joule, la potencia disipada en forma de calor por la línea monofásica es:

$$P_L = R \cdot I^2 = \begin{cases} 0.3 \times 52.632^2 = 831.04 \text{ W} \\ 0.3 \times 105.26^2 = 3323.9 \text{ W} \end{cases}$$

Factor de Potencia

La potencia proporcionada por el generador al sistema para que funcione el motor en su tensión nominal es:

$$P_G = P_L + P_M = \begin{cases} 831.04 + 20000 = 20831.04 \ \text{ W} \\ 3323.9 + 20000 = 23323.90 \ \text{ W} \end{cases}$$

El rendimiento de las dos instalaciones es:

$$\eta = \frac{P_M}{P_G} = \begin{cases} \dfrac{20000}{20831.04} = 96.00\,\% \\ \dfrac{20000}{23323.90} = 85.75\,\% \end{cases}$$

La potencia reactiva consumida por el motor es:

$$Q = P \cdot \tan\varphi = \begin{cases} 20000 \times \tan 0^{\text{o}} = 0 \quad \text{VAr} \\ 20000 \times \tan 60^{\text{o}} = 34641 \quad \text{VAr} \end{cases}$$

Mejora del Factor de Potencia

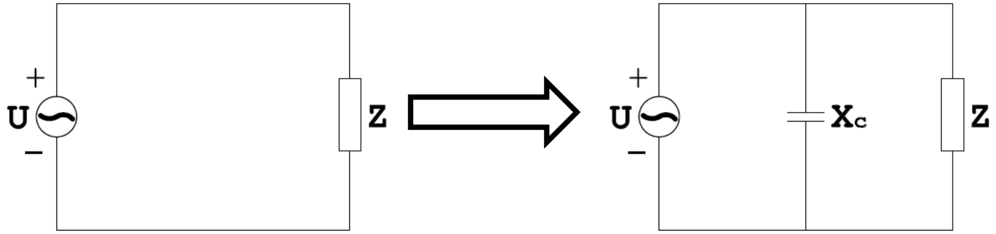
- Medida del factor de potencia

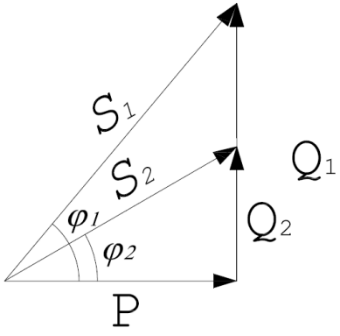
Medida del factor de potencia a través de contadores de activa y reactiva:

$$Cos\,\varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}} = \frac{P\cdot t}{\sqrt{(P\cdot t)^2+(Q\cdot t)^2}} = \frac{kWh}{\sqrt{kWh^2+kVArh^2}}$$

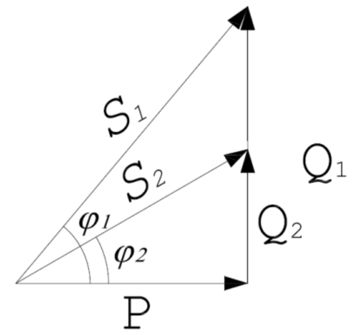
- Corrección del factor de potencia

a) Corrección de un f.d.p. inductivo





Mejora del Factor de Potencia



$$Q_2 = Q_1 + Q_C \Rightarrow Q_C = Q_2 - Q_1 \Rightarrow Q_C = P \cdot \left[\tan\varphi_2 - \tan\varphi_1\right]$$

$$\overline{S}_C = \overline{U} \cdot \overline{I}* = \overline{U} \cdot \left(\frac{\overline{U}}{\overline{X}_C}\right)^* = \overline{U} \cdot \frac{\overline{U}*}{\overline{X}_C*} = U\angle 0^o \cdot \frac{U\angle 0^o}{(\frac{1}{\omega C}\angle -90^o)*} = \frac{U^2\angle 0^o}{\frac{1}{\omega C}\angle 90^o} = -jU^2\omega C = P_C + jQ_C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_C = -U^2\omega C \Rightarrow -U^2\omega C = P \cdot \left[\tan\varphi_2 - \tan\varphi_1\right] \Rightarrow \boxed{C = \frac{P \cdot \left[\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2\right]}{U^2\omega}}$$

Mejora del Factor de Potencia

b) Corrección de un f.d.p. capacitivo

Mismo procedimiento que en el caso anterior, pero esta vez usando una bobina conectada en paralelo (las impedancias de corrección de f.d.p. no se conectan en serie porque entonces habría que generar más tensión para compensar la caída por la impedancia conectada en serie). Realizando el mismo procedimiento, el valor de la bobina es:

$$\boxed{L = \frac{U^2}{\omega P \cdot \left[\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2\right]}}$$

Problema

Una obra alimentada por una red monofásica a 220 V y 50 Hz, tiene las siguientes cargas:

1) *Grúa con una potencia total instalada de 10 kW, cosφ = 0,8 inductivo, rendimiento 90%.*
2) *Dos hormigoneras de 5 CV cada una, cosφ = 0,75 inductivo, η = 88%.*
3) *Un grupo de soldadura de 5 kW, η = 97%, f.d.p. unidad.*

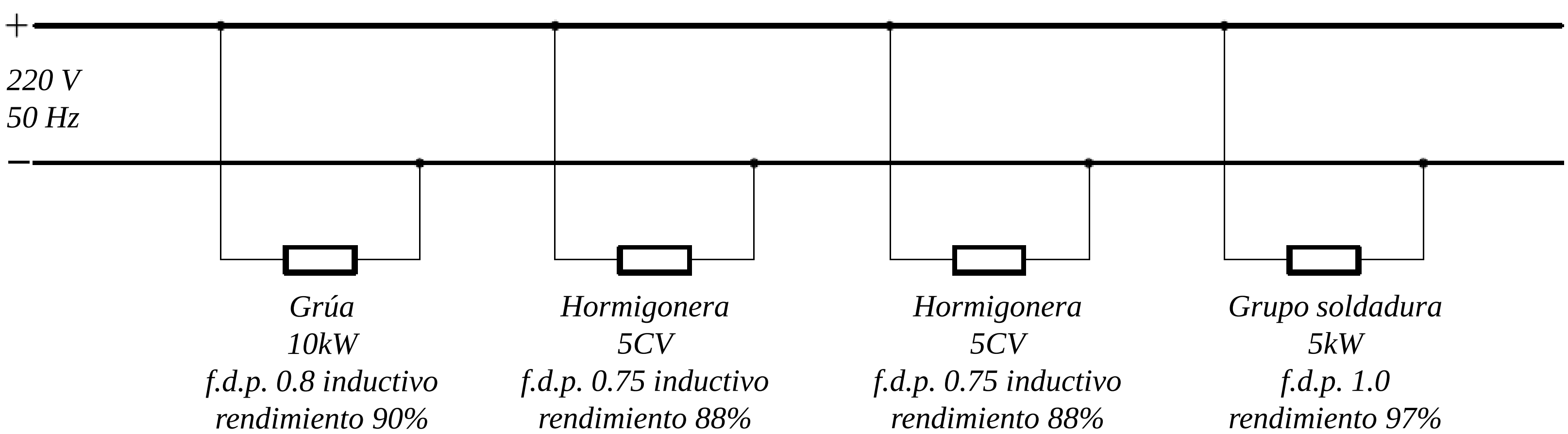
Calcular:

a) Corrientes parciales absorbidas por cada carga.
b) Corriente total y su f.d.p.
c) Si la línea tiene una resistencia total de 0,1Ω, calcular la potencia perdida por efecto Joule en la misma.
d) Potencia reactiva de los condensadores necesaria para elevar el f.d.p. de la instalación a 0.9 en retraso.
e) Nueva corriente que circulará por la línea con los efectos de los condensadores conectados y potencia perdida en la línea por efecto Joule.
f) Sección de los conductores de la línea antes y después de conectar la batería de condensadores si la densidad de corriente admitida es 3 A/mm^2

Problema

Calcular:

a) Corrientes parciales absorbidas por cada carga.

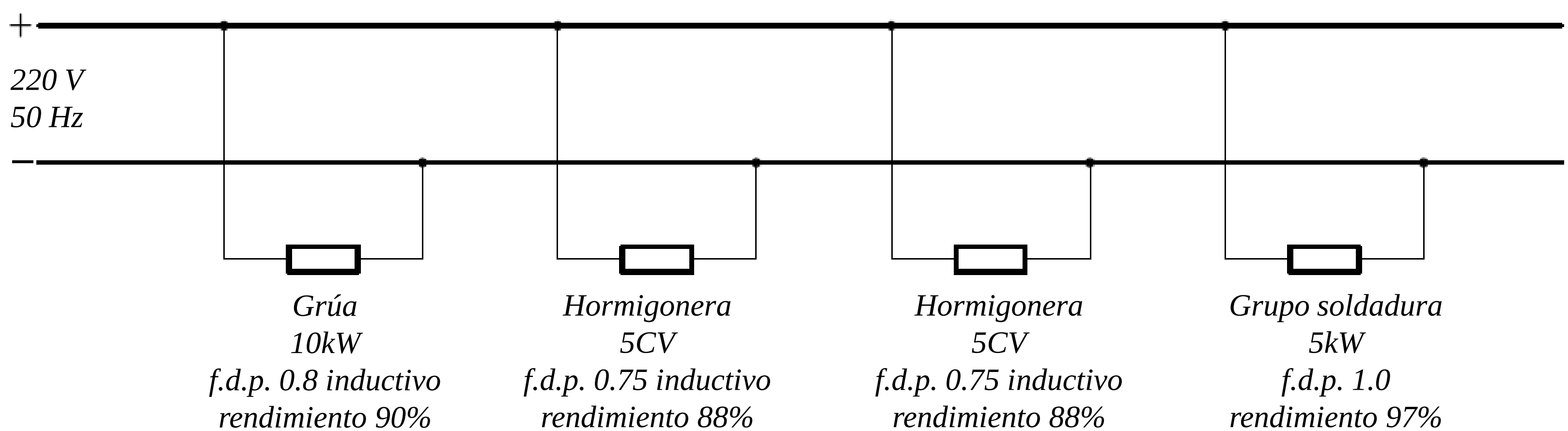


$$P = UI\cos\varphi \;\Rightarrow I = \frac{P}{U\cos\varphi} \;\Rightarrow I = \frac{P_{mec}}{\eta \cdot U\cos\varphi}$$

Problema

Calcular:

a) Corrientes parciales absorbidas por cada carga.



Grúa:

$$I = \frac{P_{mec}}{\eta \cdot U \cos\varphi} = \frac{10000}{0.9 \cdot 220 \cdot 0.8} = 63.13 \text{ A}$$

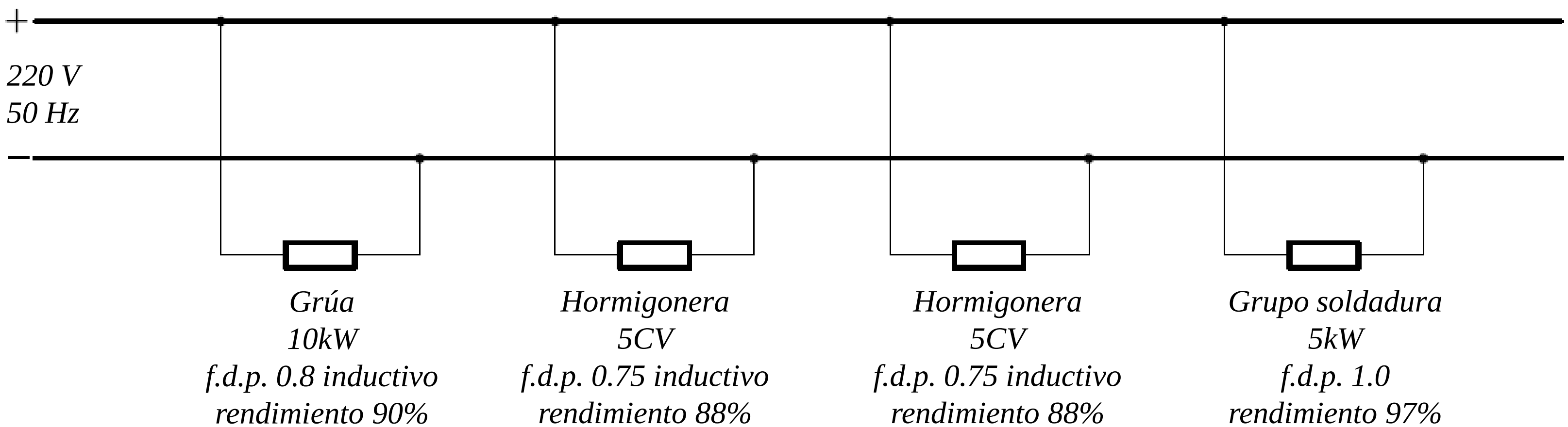
$$\cos\varphi = 0.8 \Rightarrow \varphi = 36.87 \text{ el ángulo es positivo por ser inductivo}$$

$$\bar{I} = 63.13\angle -36.87^{o} \text{ A}$$

Problema

Calcular:

a) Corrientes parciales absorbidas por cada carga.



Hormigonera:

$$I = \frac{P_{mec}}{\eta \cdot U \cos\varphi} = \frac{5 \times 736}{0.88 \cdot 220 \cdot 0.75} = 25.34 \text{ A}$$

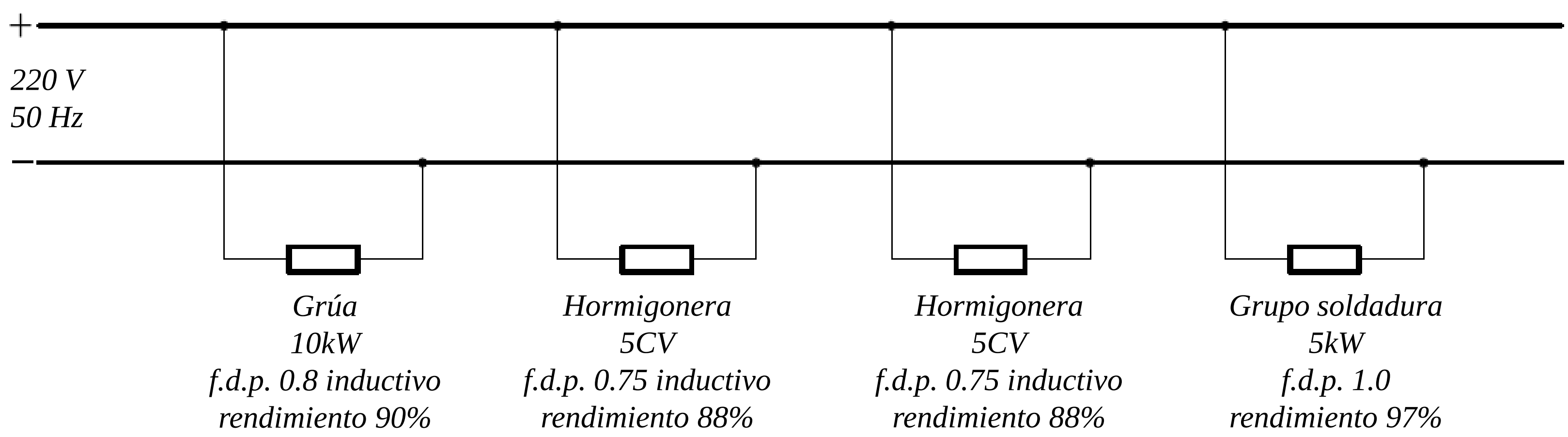
$$\cos\varphi = 0.75 \Rightarrow \varphi = 41.41 \text{ el ángulo es positivo por ser inductivo}$$

$$\bar{I} = 25.34\angle -41.41^{o} \text{ A}$$

Problema

Calcular:

a) Corrientes parciales absorbidas por cada carga.



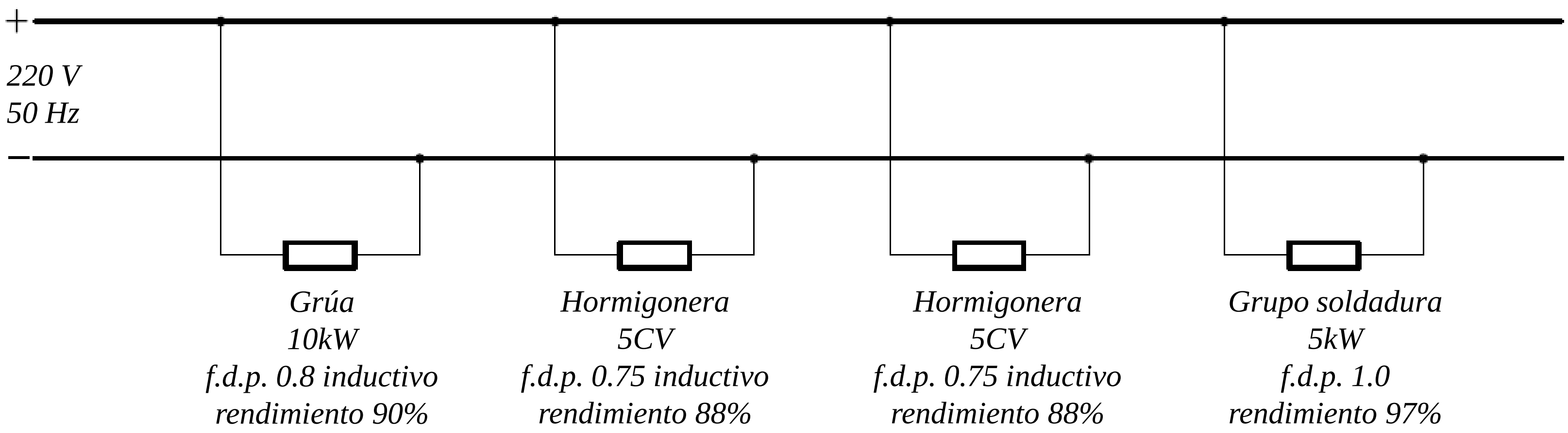
Grupo soldadura:

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{P_{mec}}{\eta \cdot U \cos\varphi} = \frac{5000}{0.97 \cdot 220 \cdot 1} = 23.43\ \text{A} \\ &\cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \end{aligned}\right\} \quad \bar{I} = 23.43\angle 0^{\circ}\ \text{A}$$

Problema

Calcular:

b) Corriente total y su factor de potencia.



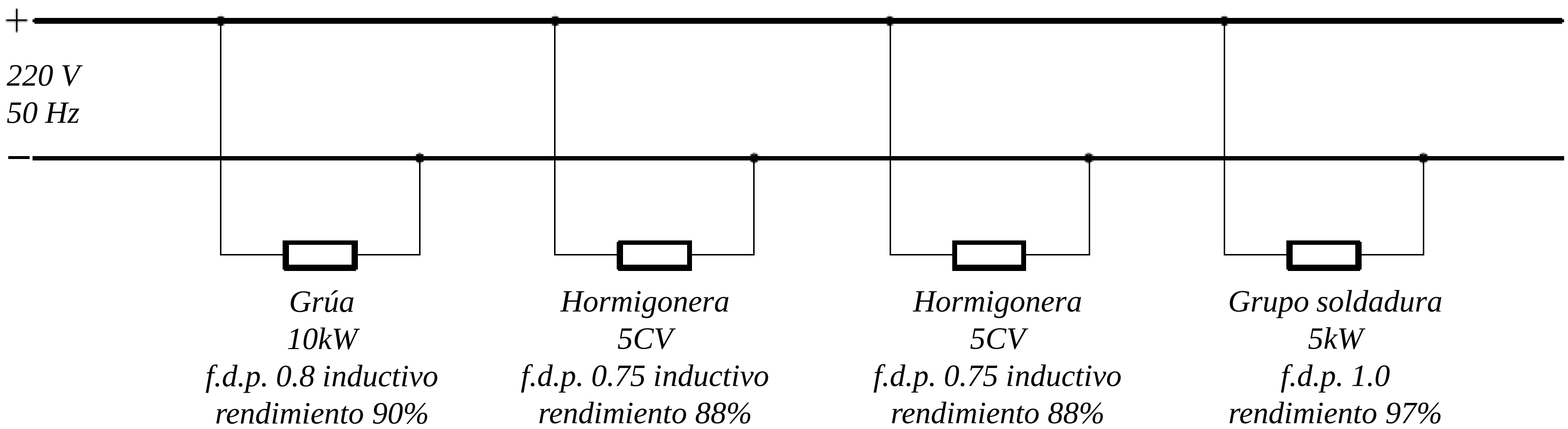
$$\bar{I}_T = \bar{I}_{Grúa} + 2 \cdot \bar{I}_{Hormigonera} + \bar{I}_{Grupo} = 63.13\angle -36.87^{o} + 2 \times 25.34\angle -41.41^{o} + 23.43\angle 0^{o} =$$

$$= 132.76\angle -32.53^{o}\ \mathrm{A} \qquad \cos 32.53^{o} = 0.84\ \text{inductivo}$$

Problema

Calcular:

c) Si la línea tiene una resistencia total de 0,1Ω, calcular la potencia perdida por efecto Joule en la misma.

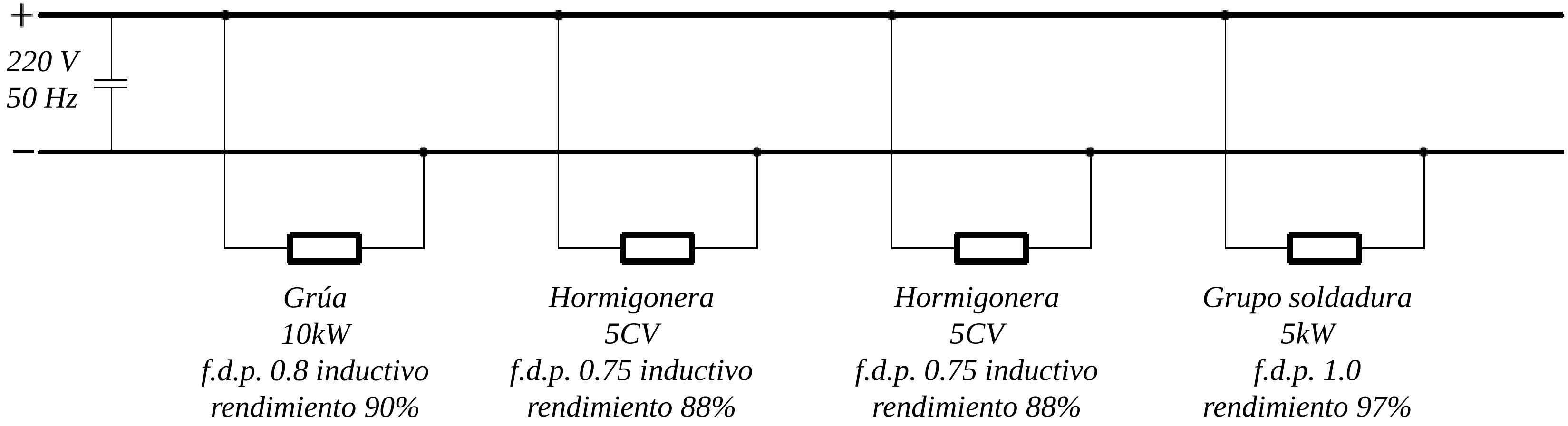


$$P_{calor} = R \cdot I^2 = 0.1 \cdot 132.76^2 = 1762.52 \text{ W}$$

Problema

Calcular:

d) Potencia reactiva de los condensadores necesaria para elevar el f.d.p. de la instalación a 0.9 en retraso.



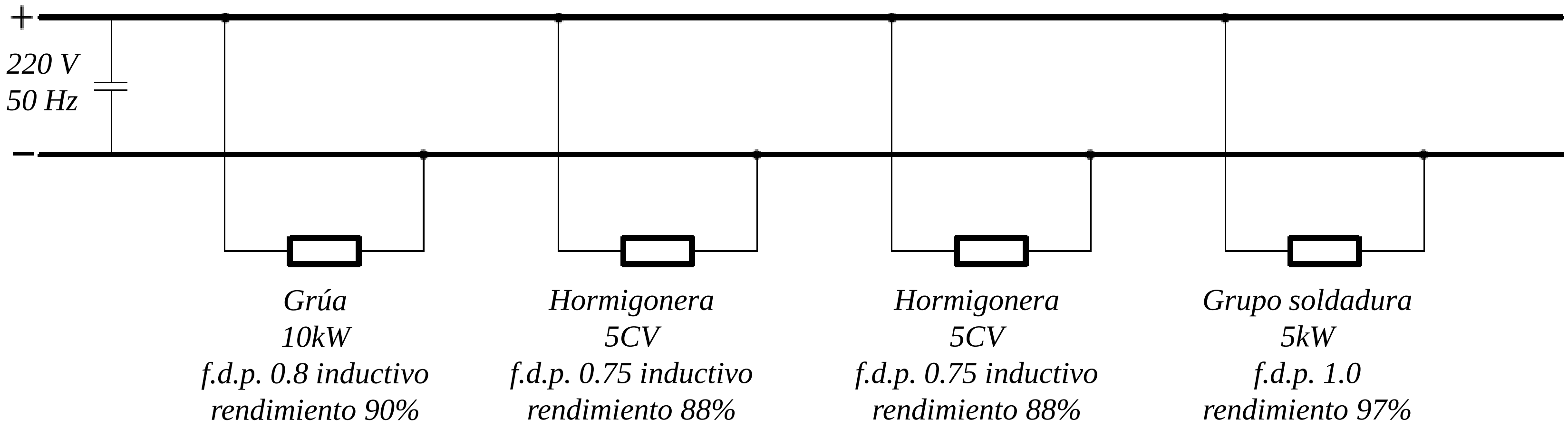
$$\cos 32.58^{\circ} = 0.84 \qquad \cos\varphi_f = 0.9 \Rightarrow \varphi_f = 25.84^{\circ}$$

$$Q_C = P \cdot [\tan\varphi_i - \tan\varphi_f] = 220 \cdot 132.76 \cdot 0.84 \cdot [\tan 32.58^{\circ} - \tan 25.84^{\circ}] = 3.78\ \mathrm{kVAr}$$

Problema

Calcular:

e) Nueva corriente que circulará por la línea con los efectos de los condensadores conectados y potencia perdida en la línea por efecto Joule.



El condensador que ha mejorado el factor de potencia no modifica la potencia activa consumida por las cargas, por tanto conocemos la potencia activa:

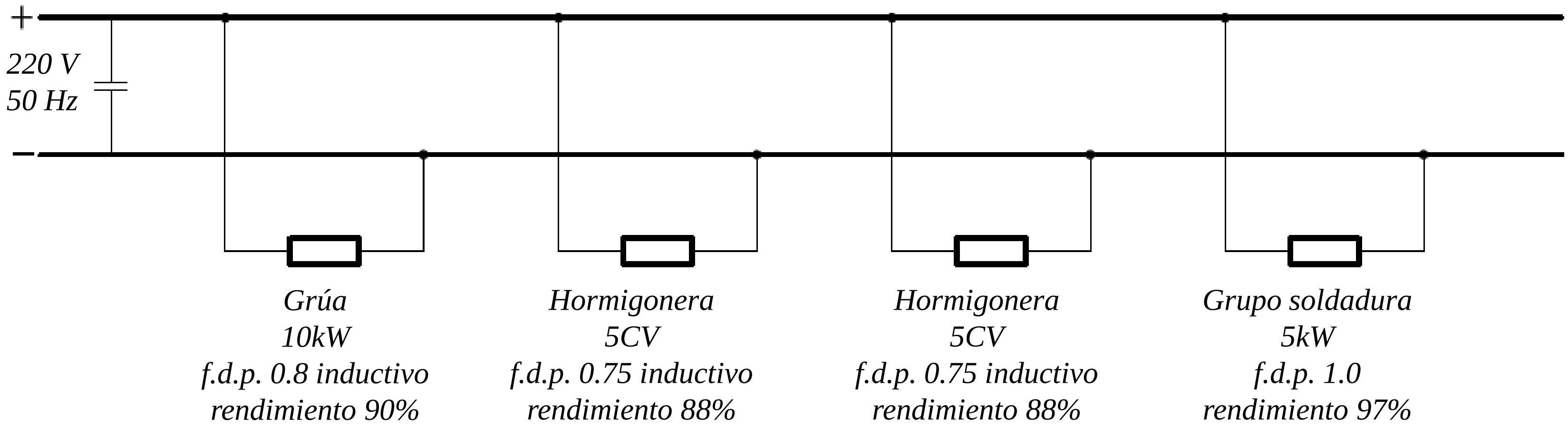
$$P = 24.7\ \text{kW} = 220 \cdot I \cdot 0.9 \Rightarrow I = 124.34\ \text{A} \Rightarrow \bar{I} = 124.34\angle -25.84^{\circ}$$

$$P_{calor} = R \cdot I^2 = 0.1 \cdot 124.34^2 = 1546.13\ \text{W}$$

Problema

Calcular:

f) Sección de los conductores de la línea antes y después de conectar la batería de condensadores si la densidad de corriente admitida es 3 A/mm²



antes:

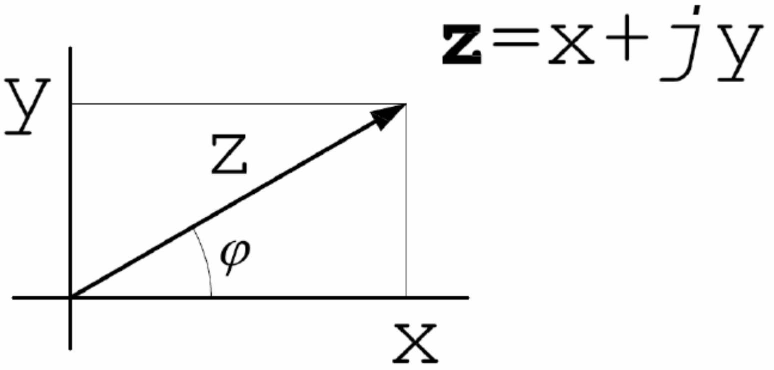
$$I_T = 132.76\ \text{A} \Rightarrow s = \frac{132.76\ \text{A}}{3\ \text{A/mm}^2} = 44.25\ \text{mm}^2$$

ahora:

$$I_T = 124.34\ \text{A} \Rightarrow s = \frac{124.34\ \text{A}}{3\ \text{A/mm}^2} = 41.45\ \text{mm}^2$$

Apéndice

Repaso de números complejos



$$j = \sqrt{-1}$$

$$z = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

$$x = z \cdot cos\varphi$$

$$y = z \cdot sen\varphi$$

$$\vec{z} = x + jy = (z \cdot cos\varphi) + j(z \cdot sen\varphi) = z(cos\varphi + jsen\varphi)$$

Repaso de números complejos

Otra forma de expresar un número complejo: Polares

$$\vec{z} = z\angle\varphi \equiv z(cos\varphi + jsen\varphi)$$

$$\vec{u} = u_1 + ju_2 \equiv u\angle\varphi_u$$

$$\vec{v} = v_1 + jv_2 \equiv v\angle\varphi_v$$

1. Suma $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_2) + j(u_2 + v_2)$
2. Resta $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_2) + j(u_2 - v_2)$
3. Opuesto $-\vec{u} = -u_1 - ju_2 \equiv u\angle(\varphi_u + 180^\circ)$
4. Conjugado $\vec{u}^* = u_1 - ju_2 \equiv u\angle - \varphi_u$
5. Producto $\vec{u} \cdot \vec{v} \equiv u\angle\varphi_u \cdot v\angle\varphi_v = u \cdot v\angle(\varphi_u + \varphi_v)$
6. Cociente $\frac{\vec{u}}{\vec{v}} \equiv \frac{u\angle\varphi_u}{v\angle\varphi_v} = \frac{u}{v}\angle(\varphi_u - \varphi_v)$
7. Inverso $\vec{u}^{-1} = \frac{1}{\vec{u}} = \frac{1\angle 0^\circ}{u\angle\varphi_u} \equiv \frac{1}{u}\angle - \varphi_u$

$$j = \sqrt{-1} \equiv 1\angle 90^\circ$$

$$j^2 = -1 \equiv 1\angle 180^\circ$$

$$j^3 = j \cdot j^2 = -j \equiv 1\angle - 90^\circ$$

$$j^4 = j^2 \cdot j^2 = 1 \equiv 1\angle 0^\circ$$

Bibliografía

1. F. Aznar, A. Espín y F. Gil. “Electrotecnia básica para ingenieros”. 2ª Ed. Universidad de Granada, 2012.
2. J. Fraile Mora. “Electromagnetismo y circuitos eléctricos”. 4ª Ed. McGraw-Hill, 2005.
3. A. Pastor Gutiérrez, J. Ortega Jiménez, V. M. Parra Prieto y A. Pérez Coyto. “Circuitos Eléctricos” Vol. I. Editorial de la Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2005.
4. J. Fraile Mora. “Problemas de circuitos eléctricos”. Pearson, 2013.
5. M. R. Spiegel, L. Abellanas. “Fórmulas y tablas de matemática aplicada”. McGraw-Hill, 1997.