UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Prov. t- 14/12

Departamento de Álgebra

COMPLETACIÓN DE ANILLOS Y MÓDULOS NOETHERIANOS RELATIVOS

TESIS DOCTORAL

Evangelina Santos Aláez

Granada, 1.993

COMPLETACIÓN DE ANILLOS Y MÓDULOS NOETHERIANOS RELATIVOS

Evangelina Santos Aláez

Departamento de Álgebra
Universidad de Granada
1.993

Completación de anillos y módulos noetherianos relativos

por

Evangelina Santos Aláez

MEMORIA realizada en el departamento de Álgebra de la Universidad de Granada, bajo la dirección del profesor Dr. D. Pascual Jara Martínez, para obtener el grado de Doctor en Ciencias.

V. B.
El director,

La aspirante al grado de Doctor,

Contenido

Introducción.

La completación I-ádica ha sido fundamental en el estudio de los anillos conmutativos, especialmente en el estudio de los anillos locales $(R, \mathfrak{m})$ cuando se toma $I = \mathfrak{m}$.

En este caso se tienen caracterizaciones tanto topológicas como algebraicas de esta completación. $\hat{R}$ es el completado topológico del anillo topológico R para la topología dada por $\{I^n : n \in \mathbb{N}\}$ como base de entornos de 0. Entonces su construcción es la construcción estandar del completado de un espacio métrico utilizando sucesiones de Cauchy. Existen otras descripciones del completado, éstas más algebraicas, que se basan en la descripción de sus elementos como sucesiones, así tenemos que es posible obtener el completado como un límite inverso

$$\hat{R} = \varprojlim \{R/I^n : n \in \mathbb{N}\}$$

Estas descripciones, como es bien conocido, se pueden también trasladar a R-módulos.

La aplicación canónica de M en su completado $\hat{M}$, $c_M : M \longrightarrow \hat{M}$, se puede dotar de estructura de homomorfismo de R-módulos. Surge de forma natural la siguiente definición, un R-módulo M es completo si $c_M : M \cong \hat{M}$.

De esta forma se combinan las propiedades universales de ambas construcciones, topológica y algebraica, dando lugar a la siguiente propiedad universal del completado. Sea M un R-módulo y N un R-módulo completo, entonces para cada homomorfismo $f : M \longrightarrow N$ existe un único homomorfismo $\bar{f} : \hat{M} \longrightarrow N$ tal que

$f = \bar{f} \circ c_M$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "c_M"] \arrow[dr, "f"'] & \hat{M} \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Este desarrollo paralelo entre los aspectos algebraicos y topológicos ha sido exportado a otras topologías distintas de las I-ádicas. En algunos casos ha sido necesario pasar al uso de uniformidades en el anillo ó el módulo y hacer la construcción del completado utilizando redes de Cauchy. Toda esta teoría ha permitido extender los métodos de la completación a distintas estructuras.

Dada una topología lineal $\mathcal{L}$ en R, el completado uniforme $\hat{R}$ de R puede ser dotado de estructura de anillo y para cada R-módulo topológico M su completado puede ser dotado de estructura de $\hat{R}$-módulo. Obteniendose nuevamente un paralelismo entre la situación topológica y algebraica que permite tratar esta situación de forma análoga a la de la completación I-ádica.

El punto de vista que pretendemos introducir nosotros es totalmente distinto, ya que perdemos muchas de las propiedades importantes de la completación, sin embargo es necesario desarrollarlo por sus aplicaciones. Vamos rápidamente a plantear el problema y la solución que se ha adoptado.

Partimos de un anillo conmutativo R y vamos a estudiarlo desde el punto de vista local, esto podemos hacerlo desde cada punto del espectro de R ó mejor considerando subconjuntos del espectro; de esta forma el estudio local es más completo. Si adoptamos este último punto de vista, dado un conjunto $\mathcal{K}$ de $Spec(R)$, necesitamos poder localizar respecto a $\mathcal{K}$, y que esta localización se comporte bien, para ello resulta que $\mathcal{K}$ puede ser considerado un subconjunto genéricamente estable de $Spec(R)$, esto es, si $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}$ y $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{q} \in \mathcal{K}$. Así $\mathcal{K}$ determina una teoría de torsión $\sigma_{\mathcal{K}}$ en R-**mód**, la cual tiene asociado un filtro y por tanto una topología lineal en R.

No basta con poder localizar, ya que en general no es posible controlar la estructura del anillo localizado en $\mathcal{K}$, para ello necesitamos que dicho localizado sea un objeto sencillo en la categoría formada por todos los R-módulos localizados, $(R, \sigma_{\mathcal{K}})$-**mód**; nos es suficiente con que sea un objeto noetheriano en dicha categoría. De esta forma nos encontramos con que no nos vale cualquier subconjunto genéricamente estable de $Spec(R)$, sino únicamente aquellos que verifican esta propiedad, "el localizado de R es un objeto noetheriano en $(R, \sigma_{\mathcal{K}})$-**mód**". Este tipo especial de subconjuntos genéricamente estables no están perfectamente determinados, nosotros en el Capítulo 5 hacemos un estudio de ellos caracterizándolos por propiedades topológicas del espectro junto con propiedades aritméticas de los R-módulos.

Una vez fijado el punto de partida necesitamos hacer un estudio de las teorías de torsión y sus elementos, a este estudio dedicamos el Capítulo 1.

Seguidamente, para poder estudiar el anillo R desde el punto de vista local tenemos dos métodos totalmente distintos, uno es hacer construcciones únicamente en la categoría de R-**mód**, de esta forma no ganamos nada respecto a la teoria clásica, y más aún, no podemos dar nuevos teoremas de estructura, por lo que finalmente desistimos de hacer este estudio. Por esta razón nos hemos dedicado a estudiar directamente la categoría $(R, \sigma_{\mathcal{K}})$-**mód**, para de esta forma lograr mayor información de los aspectos locales del anillo R y sus módulos.

Para justificar este estudio hagamos el siguiente razonamiento. El estudio local de un anillo consiste básicamente en eliminar aquellos módulos cuyo soporte permanece fuera del conjunto $\mathcal{K}$, los que van a resultar ser los R-módulos de $\sigma_{\mathcal{K}}$-torsión, al hacer este proceso de eliminación los restantes módulos forman una clase muy dificil de estudiar ya que no verifica ninguna propiedad que permita dicho estudio, sin embargo, ya que la extensión por módulos de $\sigma_{\mathcal{K}}$-torsión en esencia no cambia el módulo en consideración, podemos por ejemplo para cada R-módulo M considerar el mayor submódulo suyo de $\sigma_{\mathcal{K}}$-torsión, $\sigma_{\mathcal{K}}(M)$, y sustituir M por el cociente $M/\sigma_{\mathcal{K}}(M)$, quedandonos pues con una clase más pequeña de R-módulos, los R-módulos libres de $\sigma_{\mathcal{K}}$-torsión. Podemos reducir aún más esta clase haciendo la siguiente construcción; para cada R-módulo libre de $\sigma_{\mathcal{K}}$-torsión

M consideramos su envolvente injectiva $E(M)$ y ahora $\sigma_{\mathcal{K}}(E/M)$, este es un R-módulo de la forma $Q_{\sigma_{\mathcal{K}}}(M)/M$, donde $Q_{\sigma_{\mathcal{K}}}(M)$ es un submódulo de $E(M)$ y es el "mayor" R-módulo, en el que está incluido M, de forma que el cociente $Q_{\sigma_{\mathcal{K}}}(M)/M$ sea $\sigma_{\mathcal{K}}$-torsión. Tras todas estas reducciones ha resultado que, desde el punto de vista local, el R-módulo M puede ser sustituido (estudiado) por el R-módulo $Q_{\sigma_{\mathcal{K}}}(M)$, ya que ambos verifican las mismas propiedades, considerados desde la óptica de $\mathcal{K}$.

Todo este proceso no tendría sentido si en él no ganásemos algo, y precisamente lo que gananos es poder dar una descripción más sencilla de los módulos. Por ejemplo, el R-módulo $Q_{\sigma_{\mathcal{K}}}(M)$ es $\sigma_{\mathcal{K}}$-inyectivo y libre de $\sigma_{\mathcal{K}}$-torsión, esto es, $\sigma_{\mathcal{K}}$-cerrado. La subcategoría plena de R-**mód** formada por todos los R-módulos $\sigma_{\mathcal{K}}$-cerrados es la categoría $(R, \sigma_{\mathcal{K}})$-**mód**, la cual aunque no es siempre una categoría de módulos sobre un anillo, sí es una categoría de Grothendieck, por lo que el proceso de reducción descrito llega a buen puerto al poder dar una buena estructura a la clase de los R-módulos a estudiar.

Nos interesa pues, desde el punto de vista local, hacer construcciones únicamente en la categoría $(R, \sigma_{\mathcal{K}})$-**mód**, ó que acaben en dicha categoría, esto es, que los módulos resultantes sean objetos de la misma.

Es por esto que necesitamos "cambiar" la definición clásica de completado respecto a una topología lineal, ya que vamos a considerar R-módulos $\sigma_{\mathcal{K}}$-cerrados. También es de destacar que ya no vamos a poder mantener el paralelismo entre la construcción topológica y la construcción algebraica, por lo que hemos decidido hacer la construcción algebraica y tratar de forma colateral sus aspectos topológicos.

El origen de nuestra definición de completación puede situarse en el trabajo [11], en él se estudia la dualidad de Matlis relativa a una teoría de torsión y se aplica al estudio de anillos y módulos Cohen-Macaulay y Gorenstein relativos a una teoría de torsión. Para ello es necesario un nuevo concepto de completitud, probandose allí que si R es un anillo σ-noetheriano y σ una teoría de torsión estable, si se define la σ-completación de un anillo R como

$$\hat{R} = \varprojlim\{Q_\sigma(M/N):M/N \in \mathcal{T}_{\sigma^1}\},$$

entonces si llamamos E al módulo σ-dualizante, se tiene el isomorfismo

$$\hat{R} \cong End_R(E).$$

A partir de esta definición, en la que se utilizan el par de teorías de torsión $\sigma \leq \sigma^1$, hemos desarrollado la completación para un par arbitrario de teorías de torsión σ y τ, si bien las propiedades de estructura aparecerán cuando estas teorías verifican $\sigma \leq \tau \leq \sigma^1$.

El primer problema es dotar de estructura a la completación y al completado de un módulo. Desde el punto de vista algebraico es también importante el que la completación sea un funtor y estudiar sus propiedades de exactitud. Todo esto ha sido realizado tomando como modelo la completación I-ádica.

Posteriormente surgen el problema de estudiar la estructura de la completación. Es claro que la completación respecto a un par arbitrario de teorías de torsión no es de esperar que mantenga ninguna estructura interesante. Como en el caso de la completación I-ádica, la completación puede ser descrita con más precisión cuando $(R, \mathfrak{m})$ es un anillo local noetheriano y tomamos $I = \mathfrak{m}$. Por eso, y siguiendo las ideas contenidas en los trabajos de E. Matlis [38] y W. Brandal [9], sobre descomposición del completado de un anillo en producto directo de completados, estudiamos el caso en que la teoría de torsión τ verifica $\sigma \leq \tau \leq \sigma^1$, obteniendo un resultado óptimo sobre la estructura de la completación, y reduciendo su estudio a la completación en anillos locales noetherianos, los localizados de R en los ideales primos contenidos en $\mathcal{K}(\sigma) \cap \mathcal{Z}(\tau)$.

Siguiendo con este caso particular, $\sigma \leq \tau \leq \sigma^1$, vemos que podemos aplicar la dualidad de Matlis. De hecho estamos en el mismo caso que estudia R. Hartshorne en "Residues and duality". De forma natural en el estudio de la completación aparece un R-módulo distinguido, que es el cogenerador de la teoría de torsión κ, esto es, la teoría de torsión determinada por que sus módulos libres de torsión son precisamente los módulos (σ, τ)-Hausdorff. Éste es el módulo dualizante que aparece en el trabajo [11], y que generaliza al caso de una teoría de torsión la dualidad de Matlis. Utilizando pues dicha dualidad podemos estudiar los módulos reflexivos, obteniendo que los mismos están en conexión con los módulos completos. Reencontramos pues los resultados clásicos sobre módulos reflexivos y su relación con la completación, y obtenemos en este contexto los resultados de E. Matlis [38], R. G. Belshoff [6], R. G. Belshoff y J. Xu [7].

Pasamos, brevemente, a detallar el contenido de cada uno de los capítulos de esta Memoria.

El Primer Capítulo está dedicado a recopilar y asentar los tópicos sobre los que se sostiene el resto de la estructura, principalmente las definiciones y conceptos elementales relativos a teorías de torsión y a topologías lineales.

En la Primera Sección se ofrecen las diferentes apariencias bajo las que una teoría de torsión puede ser dada, haciendo especial hincapié en los filtros de ideales y submódulos que ellas determinan. Un especial interés se muestra por la descripción que se obtiene a partir de una partición del espectro del anillo en dos conjuntos que son, el uno genéricamente estable y el otro cerrado por especializaciones. Tal interés proviene esencialmente de dos hechos; por un lado es probablemente la descripción menos difundida en los textos clásicos, por el otro es usada con frecuencia a lo largo de este trabajo por su gran utilidad en el reconocimiento de las teorías de torsión. Así mismo, cuando las hipótesis necesarias son dadas, permite una fácil descripción de las operaciones ínfimo y supremo del retículo R-**tors** de las teorías de torsión en la categoría de módulos sobre el anillo R. Las hipótesis a las que hemos hecho referencia son condiciones de finitud sobre el anillo ó las teorías de torsión; por ejemplo que el anillo R sea noetheriano u otras más débiles que aparecen bien descritas posteriormente.

Dentro de este Primera Sección incluimos también de forma rápida los resultados relativos a la localización respecto a una teoría de torsión. Realmente los resultados sobre localización que aquí utilizamos son básicos y pueden encontrarse con más detalle en la literatura ([19], [47]). Además contamos con la ventaja añadida de trabajar sobre anillos conmutativos; en este caso, la localización en conjuntos multiplicativamente cerrados (en especial los que son de la forma $R \setminus \mathfrak{p}$ para un ideal primo $\mathfrak{p}$) aparece ligada en muchas ocasiones a la localización relativa a una teoría de torsión, proporcionándonos una herramienta increíblemente potente.

Como en cualquier parcela de la teoría de anillos y módulos, las condiciones de finitud, ya mencionadas, nos situarán en un contexto en el que gran cantidad de resultados pueden ser aplicados de forma más eficiente. No se trata en este momento de recorrer exhaustivamente la gama de estas condiciones, puede consultarse para este fin la literatura que se cita al final de la Memoria, si no que, como observará el lector, nos centramos fundamentalmente en el estudio de dos propiedades, la *noetherianidad* y la *generación finita* relativas a una teoría de torsión. La hipótesis de noetherianidad relativa del anillo supone de hecho una condición de finitud para la teoría de torsión; efectivamente aquella implica la de ser la teoría de torsión de *tipo finito*. Esta última es contemplada también ampliamente en este apartado dado que, bajo esta condición, el comportamiento ante diferentes situaciones como conmutación del funtor núcleo idempotente con límites directos, compatibilidad, ó correspondencia con subconjuntos genéricamente estables del espectro es tan buena como sería de desear.

Por último, bajo condiciones de finitud, se exponen los resultados parciales para la existencia de ideales primos asociados a un módulo no nulo; en virtud de un resultado global se utilizará la definición de ideales primos débilmente asociados, cuyo comportamiento es objeto de un estudio algo más detallado, y que permiten caracterizar tipos interesantes de teorías de torsión, entre los cuales se incluyen como ejemplos aquellas teorías de torsión σ tales que R es un anillo σ-noetheriano. Los resultados obtenidos para ideales primos débilmente asociados son utilizados en el Apéndice de la Sección 2.2.

La Segunda Sección del Primer Capítulo expone cómo los conceptos de completación y teorías de torsión están íntimamente relacionados. La palabra clave que los conecta es, sin lugar a dudas, la **topología**. Se comienza pues recordando el concepto de topología lineal para anillos y módulos para a continuación presentar los resultados clásicos sobre la completación I-ádica, que fueron siempre nuestro punto de referencia a la hora de indagar qué situaciones son posibles y deseables para ser obtenidas a lo largo de esta investigación.

La ubicación e incluso el epígrafe del apartado correspondiente a topologías de Gabriel estables responde a nuestra idea de la íntima conexión entre el Lema de Artin-Rees, que ha sido expuesto inmediatamente antes, y la estabilidad de una teoría de torsión. Es de destacar en este punto que como consecuencia del Lema de Artin-Rees, si el anillo R es noetheriano, toda teoría de torsión en R-**mód** es *estable*, esto es, la clase de torsión es cerrada para extensiones esenciales. En este punto surge la cuestión de si esto es cierto en situaciones más restrictivas, y resulta que, en el caso en que σ es una teoría de torsión estable y R es σ-noetheriano, entonces toda teoría de torsión τ tal que $\sigma \leq \tau$ es también estable. De forma ingenua uno podría preguntarse sobre lo siguiente: "Si R es un anillo σ-noetheriano, es toda teoría de torsión $\tau \geq \sigma$ estable", la respuesta parece negativa, pero sin embargo podemos dar una condición de estabilidad relativa a σ, que va a ser aplicada en la Sección 2.2 para ver que podemos obviar la condición de estabilidad que antes hemos impuesto a las teorías de torsión.

En el Segundo Capítulo entramos de lleno en el objeto de esta memoria. La completación de un módulo relativa a una pareja de teorías de torsión (σ, τ) proviene de la dada inicialmente para anillos, en [11], la cual ha sido remodelada convenientemente. Por supuesto, el primer objetivo es dotar de estructura de anillo a la completación $R^{(\sigma,\tau)}$ del anillo R y de $R^{(\sigma,\tau)}$-módulo a la completación $M^{(\sigma,\tau)}$ de cada R-módulo M. Siguiendo como inspiración el trabajo de J. Rios Montes [44], se obtiene, después de una sencilla aunque laboriosa tarea, que el funtor de completación (de R-**mód** en R-**mód** y también de R-**mód** en $R^{(\sigma,\tau)}$-**mód**) es exacto a izquierda. Esto constituye la Primera Sección.

Inmediatamente, durante la indagación del problema de reconocer a los módulos Hausdorff (es decir, aquellos que son submódulos de su completación). Aparece una nueva teoría de torsión a la que denotamos por κ y que resulta ser el pseudocomplemento de τ relativo a σ. Este concepto había sido definido en [19] , aunque ahora tiene un significado topológico claro: "los módulos libres de κ-torsión son exactamente los módulos (σ, τ)-Hausdorff". Además se obtiene que la clase de torsión para κ está formada precisamente por los módulos cuya completación es cero.

Hay que señalar que en los trabajos de J. Rios Montes este resultado había sido establecido para el caso particular en el que σ es la teoría de torsión trivial 0; en este caso el pseudocomplemento de τ con respecto a 0 se denota por $\tau^{\perp}$ y se llama el *complemento* de τ.

La teoría de torsión κ jugará a partir de este momento un papel esencial en la descripción de la (σ, τ)-completación de un módulo. Por ejemplo, para cada R-módulo M, demostramos que la (σ, τ)-completación de M es siempre un R-módulo κ-cerrado; además el morfismo $c_M: M \longrightarrow M^{(\sigma,\tau)}$ factoriza a través de la localización en κ de M. Recogiendo los mencionados resultados, la Proposición 2.2.11 nos permite describir cómo la (σ, τ)-completación y la localización en κ resultan ser dos funtores "compatibles". Este resultado jugará un papel muy relevante a lo largo del Capítulo 3.

Terminamos las generalidades de la completación haciendo una corta discusión de los problemas topológicos convencionales. En este sentido, la completación de un módulo es siempre un módulo Hausdorff y con una topología apropiada es un módulo topológico completo.

En el Apéndice del Capítulo 2, como ya hemos mencionado, demostramos que la condición de estabilidad sobre las teorías de torsión puede ser eliminada.

En este punto, esta Memoria se centra en el estudio de un grupo particular de parejas de teorías de torsión, que son parcialmente las consideradas en [11], es decir, aquellas que verifica $\sigma \leq \tau \leq \sigma^1$.

Para empezar, en la Sección 3.1 se estudian parejas de teorías de torsión cuyos conjuntos genéricamente estables difieren en un sólo ideal primo. El resultado que se obiene en este caso afirma que la completación consiste en localizar en el primo en cuestión y después hacer la completación de un anillo local respecto de su ideal maximal. Es interesante observar cómo aparecen relacionadas en esta Sección dos teorías de torsión diferentes que vienen determinadas por un ideal primo $\mathfrak{p}$: por un lado $\sigma_{R\setminus\mathfrak{p}}$ en la categoría de R-módulos, y por el otro $\sigma_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}$ en $R_\mathfrak{p}$-módulos. Hay que destacar aquí que esto es posible hacerlo por que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo maximal en $\mathcal{K}(\sigma)$ y R es σ-noetheriano; el realizar esto sin considerar la teoría de torsión σ es imposible a no ser que impongamos condiciones adicionales a $\mathfrak{p}$, ser un ideal finitamente generado, ó a R, ser un anillo noetheriano, lo que supone prescindir de un gran número de ejemplos.

El comportamiento del funtor completación en este caso es excepcionalmente bueno, tanto como en el caso de las topologías I-ádicas, puesto que se obtiene la exactitud sobre módulos σ-finitamente generados. Nos permite además establecer la relación entre el funtor completación y el funtor producto tensor por el completado del anillo.

Estos resultados que aparece en la Sección 3.3 con ser importantes, no son más que una consecuencia directa del Teorema 3.2.10 que describe cómo la (σ, τ)-completación de un módulo σ-finitamente generado es un producto directo de completaciones en anillos locales respecto a su ideal maximal. Un resultado del mismo tipo fué obtenido por W. Brandal en [9] para topologías lineales sobre anillos h-locales. Aunque alguna similitud aparece en las definiciones (la de ideales comaximales relativos está directamente inspirada por su trabajo), las técnicas de demostración y desde luego, el tipo de situaciones en las que se aplican diferencian de forma rotunda ambos trabajos.

Cuando comienza el Capítulo 4, se encuentran de nuevo dos secciones dedicadas a condiciones de finitud relativas a una teoría de torsión. Por un lado, decidimos que aparecieran en este momento dado que su uso es exclusivo de este capítulo (no así las que se introdujeron en la Sección 1.1). También, porque se ofrecen nuevas apariencias de estos conceptos bajo la condición de noetherianidad del anillo relativa a la teoría de torsión. Estos resultados, que son utilizados de forma esencial en el resto del Capítulo son el Lema 4.1.2 y la Proposición 4.2.3.

Los conceptos de dualidad de Matlis y de módulos reflexivos intervienen ahora para mostrar el paralelismo existente entre la completación y el doble dual. Así, el (σ, τ)-dual de un R-módulo M se define como el R-módulo $Hom_R(M, E)$ donde E es la suma directa de las envolventes inyectivas de cada $R/\mathfrak{p}$ con $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}(\sigma) \cap \mathcal{Z}(\tau)$, es decir el cogenerador inyectivo de la teoría de torsión κ. El doble dual de un R-módulo resulta ser κ-cerrado, por eso, al igual que en la definición de módulos (σ, τ)-completos la comparación tiene lugar entre el doble dual y la localización en κ del módulo.

Se han obtenido así resultados que reproducen las situaciones clásicas que pueden ser encontrados en [16], entre los que destacaríamos el Teorema 4.4.4 que caracteriza los anillos (σ, τ)-completos como aquellos para los que los módulos (σ, τ)-finitamente generados son (σ, τ)-reflexivos.

Se encuentra también en este Capítulo un resultado que habíamos deseado desde los primeros momentos de nuestro trabajo, y que sólo usando el Teorema 3.2.10 hemos podido obtener. Se trata de asegurar la completitud respecto de una topología supuesta la completitud respecto de otra más fuerte (Teorema 4.5.2).

El último Capítulo se dedica al desarrollo de ejemplos, y en él estudiamos y caracterizamos cuando un anillo R es σ-noetheriano. En términos de la topología de Zariski podemos caracterizar cuando σ es una teoría de torsión de tipo finito, pero el resto, esto es, probar que cada ideal primo en $\mathcal{K}(\sigma)$ es σ-finitamente generado es más complicado. Siguiendo la ideas de W. Heinzer y J. Ohn en [25], podemos probar el Teorema 5.1.6.

Surge ahora la dificultad de encontrar ejemplos de teorías de torsión σ tales que R sea σ-noetheriano. Estudiamos con más detalle dos casos particulares, el caso clásico de un anillo local, del que ya hemos hablado a lo largo de la Memoria, y el caso de los dominios de Krull, en los que tomamos como subconjunto genéricamente estable el formado por los ideales primos de altura menor ó igual que 1; y particularizamos a ellos las construcciones que hemos realizado a lo largo de esta Memoria.

Quiero agradecer a Pascual que haya sabido no sólo ayudarme y dirigirme en este trabajo, si no también sacar de mí la ilusión y el esfuerzo para realizarlo. También debo expresar mi gratitud a todos los que durante los dias de derrota me han animado y soportado, especialmente a Oscar, Marián y por supuesto, a mis padres.

Granada, Julio de 1.993
Evangelina Santos Aláez

Capítulo 1

Localización y completación.

1.1 Teorías de torsión en R-mód.

A lo largo de esta memoria R denotará un anillo conmutativo y R-**mód** la categoría de módulos (unitarios) sobre R. Un ideal $\mathfrak{p}$ de R se dice que es *primo* si para cada par de elementos $a, b \in R$ tales que $ab \in \mathfrak{p}$, se tiene que $a \in \mathfrak{p}$ ó $b \in \mathfrak{p}$. El conjunto de los ideales primos del anillo R se escribirá $Spec(R)$.

Descripciones de una teoría de torsión.

Si $\sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es un par de clases no vacías de R-**mód**, se dice que σ es una teoría de torsión en R-**mód** si:

$$\mathcal{T} = \{M \in R\text{-}\mathbf{m\acute{o}d} : \ Hom_R(M, N) = 0 \text{ para todo } N \in \mathcal{F}\},$$

$$\mathcal{F} = \{N \in R\text{-}\mathbf{m\acute{o}d} : \ Hom_R(M, N) = 0 \text{ para todo } M \in \mathcal{T}\}.$$

La clase $\mathcal{T}$ se llama la *clase de torsión* de σ, sus objetos son los *módulos de σ-torsión* ó simplemente de *torsión*, y $\mathcal{F}$ se llama la *clase libre de torsión* de σ, sus objetos son los *módulos libres de σ-torsión* ó simplemente *libres de torsión.*

(1.1.1) Proposición. *([47, VI,3.2]) Para una teoría de torsión $\sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ en R-***mód** *son equivalentes:*

1. *$\mathcal{T}$ es cerrada para submódulos;*

2. *$\mathcal{F}$ es cerrada para extensiones esenciales.*

Cuando el par $\sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ verifica las condiciones anteriores se dice que σ es una *teoría de torsión hereditaria.*

En lo que sigue, todas las teorías de torsión consideradas en esta memoria serán hereditarias, y omitiremos este adjetivo por simplicidad.

(1.1.2) Proposición. *([47, VI,2.1,2.2])*

1. *Una clase $\mathcal{T}$ no vacía de R-módulos es la clase de torsión para alguna teoría de torsión σ si, y sólo si, $\mathcal{T}$ es cerrada para submódulos, extensiones, sumas directas y cocientes.*

2. *Una clase $\mathcal{F}$ no vacía de R-módulos es la clase libre de torsión, para alguna teoría de torsión σ si, y sólo si, $\mathcal{F}$ es cerrada para submódulos, extensiones, productos directos y extensiones esenciales.*

(1.1.3) Ejemplo. Consideremos $\mathfrak{p} \in Spec(R)$, entonces el conjunto $R \setminus \mathfrak{p}$ es multiplicativamente cerrado. Si M es un R-módulo, denotamos por $M_{\mathfrak{p}}$ el correspondiente módulo de fracciones. La clase de módulos

$$\mathcal{T} = \{M \in R\text{-}\mathbf{m\acute{o}d}\colon M_{\mathfrak{p}} = 0\}$$

es una clase de torsión para una teoría de torsión a la que nos referiremos por $\sigma_{R\setminus\mathfrak{p}}$.

Un *funtor núcleo idempotente* en R-**mód** es un subfuntor de la identidad

$$\sigma\colon R\text{-}\mathbf{m\acute{o}d} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{m\acute{o}d}$$

que es exacto a izquierda y tal que para cada R-módulo M se verifica la condición $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$.

Si σ es un funtor núcleo idempotente y llamamos $\mathcal{T}_\sigma$ a la clase de todos los R-módulos tales que $\sigma(M) = M$ y $\mathcal{F}_\sigma$ a la clase de los R-módulos verificando $\sigma(M) = 0$, entonces $(\mathcal{T}_\sigma, \mathcal{F}_\sigma)$ es una teoría de torsión.

Dada una teoría de torsión $\sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$, para cada R-módulo M se define:

$$\sigma(M) = \Sigma\{N \leq M : N \in \mathcal{T}\},$$

obteniendo que $\sigma(-)$ así definido es un funtor núcleo idempotente en R-**mód**.

(1.1.4) Proposición. *([47, VI,4.2]) La anterior correspondencia es una correspondencia biyectiva entre teorías de torsión en R-**mód** y funtores núcleo idempotentes en R-**mód**.*

Como consecuencia de este resultado usamos indistintamente el símbolo σ para representar tanto a la teoría de torsión como al funtor núcleo idempotente.

(1.1.5) Ejemplo. La teoría de torsión descrita en el Ejemplo 1.1.3 tiene por funtor núcleo idempotente asociado

$$\sigma_{R\setminus\mathfrak{p}}(M) = \{m \in M : \text{ existe algún } s \in R \setminus \mathfrak{p} \text{ tal que } sm = 0\}.$$

Sea σ una teoría de torsión, para la completa descripción de σ basta conocer los R-módulos cíclicos que son σ-torsión, i. e., el conjunto

$$\mathcal{L}(\sigma) = \{I \leq R : R/I \in \mathcal{T}_\sigma\}.$$

Este conjunto verifica, entre otras, las siguientes propiedades:

TG0 $R \in \mathcal{L}(\sigma)$.

TG1 Si $I \in \mathcal{L}(\sigma)$, y si $J \leq R$ es tal que para todo $x \in I$ se tiene que $(J : x) \in \mathcal{L}(\sigma)$, entonces $J \in \mathcal{L}(\sigma)$.

Una familia $\mathcal{L}$ de ideales de R que verifica estas dos propiedades se llama un *filtro de Gabriel.* En particular $\mathcal{L}(\sigma)$ es el filtro de Gabriel asociado a la teoría de torsión σ.

Es claro que todo filtro de Gabriel $\mathcal{L}$ verifica además las propiedades de filtro, esto es:

T1 Si $I \in \mathcal{L}$, y $J \leq R$ es tal que $I \subseteq J$, entonces $J \in \mathcal{L}$.

T2 Si $I, J \in \mathcal{L}$, entonces $I \cap J, IJ \in \mathcal{L}$.

Queda aún por establecer una correspondencia biunívoca entre filtros de Gabriel y teorías de torsión, esto se hace de la siguiente forma: sea $\mathcal{L}$ un filtro de Gabriel, para un R-módulo M definimos

$$\sigma_{\mathcal{L}}(M) = \{x \in M : \ ann(x) \in \mathcal{L}\},$$

entonces σ es un funtor núcleo idempotente, y la correspondencia $\sigma \mapsto \mathcal{L}(\sigma)$, con inversa $\mathcal{L} \mapsto \sigma_{\mathcal{L}}$, es biyectiva.

(1.1.6) Ejemplo. Continuando con el Ejemplo 1.1.3 describimos el filtro de Gabriel correspondiente a la teoría de torsión $\sigma_{R\setminus\mathfrak{p}}$. Utilizando la definición

$$\mathcal{L}(\sigma_{R\setminus\mathfrak{p}}) = \{I \leq R \text{: } R/I \in \mathcal{T}(\sigma_{R\setminus\mathfrak{p}}\}.$$

Pero R/I está en $\mathcal{L}(\sigma_{R\setminus\mathfrak{p}})$ si, y sólo si, el elemento $1 + I$ es de torsión, es decir existe $s \in R \setminus \mathfrak{p}$ tal que $s \in I$. Nos queda entonces que

$$\mathcal{L}(\sigma_{R\setminus\mathfrak{p}}) = \{I \leq R \text{: } I \cap R \setminus \mathfrak{p} \neq \varnothing\}$$

ó bien

$$\mathcal{L}(\sigma_{R\setminus\mathfrak{p}}) = \{I \leq R \text{: } I \not\subseteq \mathfrak{p}\}.$$

El retículo de las teorías de torsión.

Vamos a estudiar ahora el conjunto de las teorías de torsión en la categoría R-**mód**; la correspondencia entre teorías de torsión y filtros de Gabriel prueba que realmente las teorías de torsión forman un conjunto.

Consideremos una familia de teorías de torsión $\Lambda = \{\sigma_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, definimos el ínfimo de la familia como la teoría de torsión $\wedge_{\lambda\in\Lambda}\sigma_\lambda$ cuya clase de torsión es la intersección de las clases de torsión $\mathcal{T}_{\sigma_\lambda}$, esto es:

$$\mathcal{T}_{\wedge_{\lambda\in\Lambda}\sigma_\lambda} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}_{\sigma_\lambda}$$

y el supremo de la familia se define dualmente considerando las clases libres de torsión, por tanto es la teoría de torsión $\vee_{\lambda\in\Lambda}\sigma_\lambda$ cuya clase libre de torsión es la intersección de las clases libres de torsión $\mathcal{F}_{\sigma_\lambda}$, esto es:

$$\mathcal{F}_{\vee_{\lambda\in\Lambda}\sigma_\lambda} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_{\sigma_\lambda}.$$

El estudio del retículo de las teorías de torsión queda fuera del contexto que utilizamos en esta memoria, sin embargo una muy buena exposición puede encontrarse en el libro de J. Golan [19].

Vamos a ver la descripción del filtro de Gabriel del ínfimo de una familia de teorías de torsión.

(1.1.7) Proposición. *Sea $\Lambda = \{\sigma_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia de teorías de torsión en R-**mód**, se verifica:*

$$\mathcal{L}(\wedge\sigma_\lambda) = \bigcap \mathcal{L}(\sigma_\lambda).$$

Para el supremo un resultado similar puede darse en el caso en que todas las teorías de torsión de la familia sean de tipo finito. Este concepto y el resultado citado se encontrarán más adelante bajo el epígrafe *Condiciones de tipo finito.*

Con estas operaciones, el conjunto de las teorías de torsión en R-**mód** es un retículo distributivo sobre intersecciones infinitas (ver [19, 29.1]), que se denota por R-**tors** y cuya relación de orden está dada por la inclusión de las clases de torsión, esto es: dadas dos teorías de torsión σ y τ en R-**mód** decimos que $\sigma \leq \tau$ si $\sigma(M) \subseteq \tau(M)$ para todo R-módulo M, equivalentemente, si $\mathcal{T}_\sigma \subseteq \mathcal{T}_\tau$, ó bien si $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_\sigma$.

En R-**tors** existen dos elementos distinguidos, la teoría de torsión *trivial*, a la que representamos por 0 y cuya clase de torsión es $\{0\}$, y la teoría de torsión *impropia* ó *total*, cuya clase de torsión es R-**mód**, y que representamos por 1.

Dadas σ y τ en R-**tors**, el conjunto U de todas las teorías de torsión λ tales que $\sigma \wedge \lambda \leq \tau$ es un conjunto no vacío que incluye al elemento 0. Al único elemento maximal de U lo llamamos el *pseudocomplemento* de τ relativo a σ y lo representamos por $(\sigma : \tau)$.

Teorías de torsión e ideales primos.

Sea σ una teoría de torsión en R-**mód** y sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de R, entonces se verifica:

(1.1.8) Lema. *$R/\mathfrak{p}$ es σ-torsion ó libre de σ-torsión.*

Demostración. Supongamos que $R/\mathfrak{p}$ no es libre de σ-torsión, entonces existe $r \in R \setminus \mathfrak{p}$ y un ideal $I \in \mathcal{L}(\sigma)$ tal que $Ir \subseteq \mathfrak{p}$, como $\mathfrak{p}$ es primo resulta que $I \subseteq \mathfrak{p}$, y por tanto $\mathfrak{p} \in \mathcal{L}(\sigma)$, entonces $R/\mathfrak{p}$ es σ-torsión. □

Este Lema permite hacer una partición del espectro del anillo R. Para ello definimos

$$\mathcal{K}(\sigma) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) : \ R/\mathfrak{p} \in \mathcal{F}_\sigma\}$$

y

$$\mathcal{Z}(\sigma) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) : \ R/\mathfrak{p} \in \mathcal{T}_\sigma\} = \mathcal{L}(\sigma) \cap Spec(R).$$

(1.1.9) Corolario. *Para cualquier teoría de torsión σ en R-mód, se verifica que $\mathcal{K}(\sigma)$ y $\mathcal{Z}(\sigma)$ forman una partición del espectro de R.*

Un subconjunto $\mathcal{K} \subseteq Spec(R)$ se llama *genéricamente estable* si verifica la siguiente condición: si $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}$ y $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{q} \in \mathcal{K}$. Es claro que para una teoría de torsión σ en R-**mód** el conjunto $\mathcal{K}(\sigma)$ es genéricamente estable.

Un subconjunto $\mathcal{Z} \subseteq Spec(R)$ se llama *cerrado por especializaciones* si verifica la condición: si $\mathfrak{p} \in \mathcal{Z}$ y $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{q} \in \mathcal{Z}$. En particular para una teoría de torsión σ en R-**mód** el conjunto $\mathcal{Z}(\sigma)$ es cerrado por especializaciones. Se puede comprobar de forma sencilla que el complemento de un conjunto cerrado por especializaciones es genéricamente estable y viceversa.

Los conjuntos genéricamente estables son útiles en nuestro estudio, por ello vamos a ver cómo determinan teorías de torsión. Sea $\mathcal{K}$ un subconjunto genéricamente estable de $Spec(R)$, a $\mathcal{K}$ le asociamos un filtro de Gabriel $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ como sigue:

$$I \in \mathcal{L}(\mathcal{K}) \text{ si, y sólo si, } \mathcal{K} \subseteq X(I).$$

Donde $X(I) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) : I \nsubseteq \mathfrak{p}\}$. El funtor núcleo idempotente asociado a $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ se representa por $\sigma_{\mathcal{K}}$. En general un R-módulo M es $\sigma_{\mathcal{K}}$-torsión si, y sólo si, $M_{\mathfrak{p}} = 0$ para todo $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}$. Es de interés observar que esto es exactamente decir que existe una igualdad entre las siguientes teorías de torsión:

$$\sigma_{\mathcal{K}} = \wedge_{\mathfrak{p}\in\mathcal{K}}\sigma_{R\setminus\mathfrak{p}}.$$

La correspondencia entre teorías de torsión y subconjuntos genéricamente estables de $Spec(R)$ no es, en general, biyectiva. Sin embargo, restringiendo el conjunto de las teorías de torsión en consideración, puede obtenerse una correspondencia uno a uno; aparecen de esta forma las teorías de torsión semicentradas.

Una teoría de torsión σ se dice que es *semicentrada* si es de la forma $\sigma_{\mathcal{K}}$ para algún conjunto genéricamente estable $\mathcal{K}$. Más adelante veremos propiedades de este tipo de teorías de torsión.

Localización.

Sea σ una teoría de torsión en R-**mód** y E un R-módulo, decimos que E es *σ-inyectivo* si para cualquier par de R-módulos $M' \leq M$ con $M/M' \in \mathcal{T}_\sigma$ y cualquier homomorfismo de R-módulos $f{:}M' \longrightarrow E$, existe un homomorfismo $f'{:}M \longrightarrow E$ extendiendo a f.

Si f' es siempre única, diremos que E es *σ-cerrado* (o *fielmente σ-inyectivo*). Es fácil caracterizar los R-módulos σ-cerrados.

(1.1.10) Proposición. *Sea σ una teoría de torsión en R-**mód** y sea E un R-módulo. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *E es σ-cerrado;*

2. *E es σ-inyectivo y libre de σ-torsión.*

Demostración. Para la implicación $1 \Rightarrow 2$, supongamos que $\sigma(E) \neq 0$ y tomemos $0 \neq e \in \sigma(E)$. Existe un ideal $I \in \mathcal{L}(\sigma)$ tal que $Ie = 0$. Consideremos el homomorfismo cero $0 : I \longrightarrow E$, entonces el homomorfismo $0 : R \longrightarrow E$ extiende al anterior. Además el homomorfismo que consiste en la multiplicación por e tambien extiende a 0. Como E es σ-cerrado por hipótesis, tenemos que $e = 0$ lo que es una contradicción. Para el recíproco, consideremos un homomorfismo $f : N \longrightarrow E$ donde $N \leq M$ y $M/N \in \mathcal{T}_\sigma$. Puesto que E es σ-inyectivo, existe al menos una extensión de f. Supongamos que $f', f'' : M \longrightarrow E$ son dos extensiones distintas de f y consideremos $m \in M$ tal que $f'(m) \neq f''(m)$. Entonces $m \notin N$ por lo que $m + N \neq 0 + N$ y por tanto existe $I \in \mathcal{L}(\sigma)$ de manera que $Im \subseteq N$. Entonces $I(f'(m) - f''(m)) = 0$ y por tanto $f'(m) - f''(m) \in \sigma(E) = 0$. Así ambos son iguales y la demostración está terminada. □

Como consecuencia tenemos que podemos relacionar los R-módulos cerrados para dos teorías de torsión, resultado que es fundamental en nuestro desarrollo.

(1.1.11) Observación. Si $\sigma \leq \tau$, entonces todo R-módulo τ-cerrado es tambien σ-cerrado.

Si consideramos la subcategoría plena de R-**mód** formada por los módulos σ-cerrados, resulta que es una categoría de Grothendieck. Vamos a representar esta subcategoría por (R, σ)-**mód**.

Un homomorfismo $f{:}M \longrightarrow N$ se dice que es un *σ-isomorfismo* si $Ker(f)$ y $Coker(f)$ son ambos módulos de σ-torsión.

(1.1.12) Proposición. *Si E es un R-módulo σ-cerrado, entonces para cualquier σ-isomorfismo $f{:}N \longrightarrow M$, la aplicación canónica*

$$Hom_R(M, E) \longrightarrow Hom_R(N, E)$$

es biyectiva.

Demostración. Es suficiente considerar la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Ker(f) \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow Coker(f) \longrightarrow 0$$

y aplicar que el funtor $Hom_R(-, E)$ es un funtor exacto que se hace cero para los módulos σ-torsión. $\square$

Sea M un R-módulo, representamos por $E(M)$ a la capa inyectiva de M. Si llamamos $E_\sigma(M)$ al subconjunto de $E(M)$ que consta de todos los $m \in E(M)$ tales que $Im \subseteq M$ para algún $I \in \mathcal{L}(\sigma)$, se verifica:

1. $E(M)/E_\sigma(M) \in \mathcal{F}_\sigma$.

2. $E_\sigma(M)/M \in \mathcal{T}_\sigma$.

Además, si $M \in \mathcal{F}_\sigma$ entonces $E_\sigma(M)$ es σ-cerrado.

Llamaremos *localizado respecto a σ* de M al R-módulo

$$Q_\sigma(M) = E_\sigma(M/\sigma(M)).$$

Es claro que $Q_\sigma(M) \in (R, \sigma)$-**mód**, y que existe un homomorfismo canónico $j_{\sigma,M}{:}M \longrightarrow Q_\sigma(M)$ que es un σ-isomorfismo.

Cuando M es σ-cerrado se tiene $Q_\sigma(M) = M$ y además $Q_\sigma(M) = 0$ si, y sólo si, $M \in \mathcal{T}_\sigma$.

(1.1.13) Lema. *Sea σ una teoría de torsión en R-***mód***. Se verifica:*

1. *$Q_\sigma(R)$ tiene estructura de anillo y esta estructura extiende la de R, esto es, el homomorfismo canónico $j_{\sigma,R}: R \longrightarrow Q_\sigma(R)$ es un homomorfismo de anillos.*

2. *Si $M \in R$-***mód***, entonces $Q_\sigma(M)$ tiene estructura de $Q_\sigma(R)$-módulo y por tanto de R-módulo.*

La construcción del localizado respecto a σ define un funtor exacto a izquierda $Q_\sigma: R$-**mód** $\longrightarrow R$-**mód**, llamado el *funtor localización*, que es un funtor exacto cuando restringimos su codominio a (R,σ)-**mód**. Este funtor se suele representar por $a_\sigma: R$-**mód** $\longrightarrow (R,\sigma)$-**mód** y es un adjunto a la izquierda del funtor inclusión $i_\sigma: (R,\sigma)$-**mód** $\longrightarrow R$-**mód**.

Es claro que una descripción del funtor localización en términos de la envolvente inyectiva tiene únicamente interés teórico, ya que es bastante difícil su cálculo en la mayor parte de los ejemplos. Por esta razón se impone el dar una descripción alternativa que sea más manejable, en este caso tenemos:

(1.1.14) Lema. *([19, 26.2]) Sea σ una teoría de torsión en R-***mód***. Para cualquier R-módulo M se tiene que:*

$$Q_\sigma(M) = \varinjlim\{Hom_R(I, M/\sigma(M)) \colon I \in \mathcal{L}(\sigma)\}$$

salvo isomorfismo canónico.

La teoría hasta aquí desarrollada generaliza a la construcción clásica de los módulos y anillos de fracciones, sin embargo hemos perdido algo fundamental. En el caso clásico el módulo de fracciones se construye haciendo el producto tensor por el anillo de fracciones, de donde resulta que este es un R-módulo plano, y por lo tanto la localización es un funtor exacto cuando se considera como codominio la categoría de R-módulos. Esta situación tan ideal no se presenta en el caso general que acabamos de introducir.

Las teorías de torsión cuyos funtores localización son exactos, han sido estudiadas por Goldman, y se denominan teorías de torsión *perfectas*. La localización relativa a este tipo de teorías de torsión mantiene un comportamiento similar al de la localización en un conjunto multiplicativamente cerrado. El siguiente resultado caracteriza a estas teorías de torsión.

(1.1.15) Proposición. *Para una teoría de torsión σ en R-***mód***, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *Q_σ es exacto y conmuta con sumas directas.*
2. *Todo $Q_\sigma(R)$-módulo es libre de σ-torsión.*
3. *$IQ_\sigma(R) = Q_\sigma(R)$ para todo $I \in \mathcal{L}(\sigma)$.*
4. *Todo $Q_\sigma(R)$-módulo es σ-cerrado.*
5. *Para todo R-módulo M se verifica $Q_\sigma(R) \otimes_R M \cong Q_\sigma(M)$.*

En este caso las categorías (R,σ)-**mód** y $Q_\sigma(R)$-**mód** son equivalentes. Cuando σ es una teoría de torsión perfecta, existe una correspondencia biyectiva entre $Spec(Q_\sigma(R))$ y $\mathcal{K}(\sigma)$. De esta forma, algunos subconjuntos genéricamente estables provienen de espectros de localizados del anillo, sin embargo no es ésta la situación general, por ejemplo para cada ideal I de R el subconjunto $X(I)$ es genéricamante estable y salvo contadas excepciones no corresponde al espectro de un anillo localizado de R. La teoría de torsión $\sigma_{R\setminus\mathfrak{p}}$ que hemos presentado como ejemplo a lo largo de esta Sección es perfecta.

Condiciones de tipo finito.

Vamos a continuación a introducir condiciones de finitud respecto a una teoría de torsión; el problema fundamental es que no es fácil trabajar en un anillo arbitrario, y como consecuencia no es posible obtener resultados suficientemente buenos con una teoría de torsión arbitraria, por ejemplo, los resultados fundamentales de la descomposición primaria de ideales necesitan de la hipótesis de anillo noetheriano, la estabilidad de las topologías I-ádicas necesita del lema de Artin-Rees, etc. Por este motivo es necesario reproducir nociones que extiendan, al ámbito de teorías de torsión, las condiciones de finitud.

Comenzamos por una definición suficientemente restrictiva, la de teoría de torsión de tipo finito.

Una teoría de torsión σ se dice que es de *tipo finito* si $\mathcal{L}(\sigma)$ tiene una base de filtro formada por ideales finitamente generados.

Como consecuencia de la definición tenemos algunas buenas propiedades del funtor localización:

(1.1.16) Proposición. *([12, III,3.13]) Para una teoría de torsión en R-***mód** *los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *σ conmuta con límites directos.*
2. *σ es de tipo finito.*

Para teorías de torsión de tipo finito puede enunciarse un resultado que de forma similar a la Proposición 1.1.7 describe el filtro de Gabriel para el supremo de una familia de teorías de torsión.

(1.1.17) Proposición. *([49, 1.22]) Sea $\{\sigma_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia de teorías de torsión. Si cada σ_λ es de tipo finito, entonces para un ideal I de R se verifica $I \in \mathcal{L}(\vee\sigma_\lambda)$ si, y sólo si, existe un número finito de ideales $I_1, \ldots, I_n$ en $\bigcup \mathcal{L}(\sigma_\lambda)$ de manera que $I \supseteq I_1 \cdots I_n$.*

Es de destacar que las teorías de torsión de tipo finito estan incluidas dentro de un tipo que ya habia sido estudiado en este mismo Capítulo, el de las teorías de torsión semicentradas.

(1.1.18) Proposición. *([12, III,3.17]) Toda teoría de torsión de tipo finito es semicentrada.*

Como consecuencia es interesante plantearse qué tipo de subconjuntos genéricamente estables determinan teorías de torsión de tipo finito.

(1.1.19) Proposición. *([14, Theorem 3.3]) Existe una correspondencia biyectiva entre teorías de torsión de tipo finito en R-*mód *y conjuntos genéricamente estables $\mathcal{K}$ quasicompactos.*

Las teorías de torsión de tipo finito facilitan las construcciones en virtud de la Proposición 1.1.16, pero no son suficientes para dar resultados estructurales sobre los anillos; vamos pues a introducir un nuevo tipo de teorías de torsión.

Un R-módulo M se dice que es *σ-finitamente generado* si existe un submódulo finitamente generado N de M tal que $M/N \in \mathcal{T}(\sigma)$. Si $\sigma \leq \tau$ y M es σ-finitamente generado, entonces M es tambien τ-finitamente generado.

Aún podemos dar resultados sobre las teorías de torsión de tipo finito, por ejemplo podemos generalizar a este contexto el bien conocido Lema de Cohen.

(1.1.20) Proposición. *([5]) Sea σ una teoría de torsión en R-*mód*, si cada ideal primo en $\mathcal{Z}(\sigma)$ es σ-finitamente generado, entonces σ es de tipo finito.*

Puesto que el recíproco de esta Proposición es consecuencia de la definición de teoría de torsión de tipo finito, podemos enunciar el siguiente Corolario.

(1.1.21) Corolario. *Una teoría de torsión σ en R-*mód *es de tipo finito si, y sólo si, cada ideal primo en $\mathcal{Z}(\sigma)$ es σ-finitamente generado.*

(1.1.22) Lema. *([12, III,3.2]) Dada la sucesión exacta de R-módulos*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0,$$

se verifica

1. *Si M es σ-finitamente generado, entonces tambien lo es M/N.*
2. *Si N y M/N son σ-finitamente generados, entonces tambien lo es M.*

(1.1.23) Corolario. *([12, III,3.3]) Si M es un R-módulo, entonces:*

1. *M es σ-finitamente generado si, y sólo si, $M/\sigma(M)$ lo es.*
2. *Si M es σ-finitamente generado, entonces tambien lo es $Q_\sigma(M)$.*

Las teorías de torsión de tipo finito presentan aún aspectos en los que son de interés, por ejemplo en el siguiente sentido:

(1.1.24) Lema. *([49, 2.13]) Sean σ y τ dos teorías de torsión de tipo finito en R-***mód***, entonces para cualquier R-módulo M se tiene un isomorfismo*

$$Q_\sigma(\tau(M)) \cong \tau(Q_\sigma(M)).$$

(1.1.25) Corolario. *([49, 2.16]) Si σ y τ son teorías de torsión de tipo finito en R-***mód***, entonces $Q_\sigma Q_\tau = Q_\tau Q_\sigma$.*

(1.1.26) Corolario. *([49, 2.14]) Sea σ una teoría de torsión de tipo finito en R-***mód** *y sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de R, entonces para cualquier R-módulo M se tiene un isomorfismo canónico*

$$(Q_\sigma(M))_\mathfrak{p} = Q_\sigma(M_\mathfrak{p})$$

El enunciado del Corolario anterior no es válido en general, como prueba el siguiente Ejemplo debido a F.W. Call. Sin embargo se mantiene para teorías de torsión cualesquiera siempre que el ideal primo $\mathfrak{p}$ pertenezca a $\mathcal{K}(\sigma)$.

(1.1.27) Ejemplo. Sea k un cuerpo y llamemos A al anillo de las sucesiones de elementos de k que son constantes a partir de alguna posición. A es un anillo regular en el sentido de von Neumann cuyos ideales maximales son de la forma *a*) $\mathfrak{m}_i = (1 - e_i)A$, $i \geq 1$, donde e_i es la sucesión cuyos elementos son todos cero salvo el de la posición i-ésima que es un 1; y *b*) $\mathfrak{m} = \oplus e_i A$, es decir, el conjunto de todas las sucesiones que son cero a partir de alguna posición. Consideremos el conjunto genéricamente estable $\mathcal{K} = Spec(A) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ y denotemos por σ a la teoría de torsión que determina. El filtro de Gabriel correspondiente es $\mathcal{L}(\sigma) = \{A, \mathfrak{m}\}$. Puesto que A es libre de σ-torsión, entonces $0 \neq A_\mathfrak{m} \subseteq (Q_\sigma(A))_\mathfrak{m}$. Por otra parte, como $A_\mathfrak{m} \cong (A/\mathfrak{m})_\mathfrak{m}$, entonces es un módulo de σ-torsión y por tanto $Q_\sigma(A_\mathfrak{m}) = 0$. Así tenemos

$$Q_\sigma(A_\mathfrak{m}) = 0 \neq (Q_\sigma(A))_\mathfrak{m}.$$

El concepto de teoría de torsión de tipo finito no es suficientemente bueno para el estudio de anillos y sus localizaciones, por ejemplo, si R es un anillo y $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de R tal que el anillo $R_\mathfrak{p}$ es noetheriano, la teoría de torsión $\sigma_{R\setminus\mathfrak{p}}$ es de tipo finito y verifica propiedades adicionales, vamos a ver algunas de estas propiedades adicionales.

Diremos que un R-módulo M es *σ-noetheriano* si cada uno de sus submódulos es σ-finitamente generado. El anillo R se dirá *σ-noetheriano* si lo es como R-módulo.

Para un R-módulo M, denotaremos por $C(M,\sigma)$ al retículo de los submódulos $N \leq M$ tales que $M/N \in \mathcal{F}_\sigma$. A los elementos de este retículo los llamamos *submódulos σ-cerrados* de M. Para cada submódulo N de M existe un menor elemento de $C(M,\sigma)$ conteniendo a N, que se llama la *σ-clausura* de N en M, se representa por $Cl_\sigma^M(N)$ y viene definida por la igualdad $Cl_\sigma^M(N)/N = \sigma(M/N)$.

Para ver que la definición de anillo σ-noetheriano generaliza el caso que antes hemos planteado, enunciamos el siguiente resultado.

(1.1.28) Proposición. *([47, XIII,2.4]) Sea σ una teoría de torsión en R-mód, y M un R-módulo, son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. *M es σ-noetheriano.*
2. *$M/\sigma(M)$ es σ-noetheriano.*
3. *$Q_\sigma(M)$ es σ-noetheriano.*
4. *$C(M,\sigma)$ es un retículo noetheriano.*
5. *$a_\sigma(M)$ es un objeto noetheriano en la categoría (R,σ)-mód.*

(1.1.29) Observaciones. Si σ es una teoría de torsión en R-mód tal que el anillo R es σ-noetheriano, entonces σ es de tipo finito (Ver [12, III,3.23]).

Usando la Proposición 1.1.18 obtenemos que $\sigma \leq \sigma_{R\setminus\mathfrak{p}}$ para cada ideal primo $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}(\sigma)$. Por otra parte, es obvio que si $\sigma \leq \tau$ y R es σ-noetheriano, entonces es tambien τ-noetheriano. Como consecuencia, si R es σ-noetheriano, entonces $R_\mathfrak{p}$ es noetheriano para cada ideal primo $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}(\sigma)$.

Puesto que una teoría de torsión σ para la que R sea σ-noetheriano es semicentrada, es claro que σ está determinada por la partición del espectro en $\mathcal{K}(\sigma)$ y $\mathcal{Z}(\sigma)$. Además, el conjunto genéricamente estable $\mathcal{K}(\sigma)$ tiene elementos maximales; al conjunto de estos elementos lo denotamos por $\mathcal{C}(\sigma)$. A su vez $\mathcal{K}(\sigma)$ es el menor conjunto genéricamente estable conteniendo a $\mathcal{C}(\sigma)$.

Existe desarrollada toda una teoría de anillos σ-noetherianos que en general imita a la teoría clásica de anillos noetherianos, a modo de ejemplo veamos la siguiente Proposición.

(1.1.30) Proposición. *([47, XIII,2.6]) Sea σ una teoría de torsión en R-mód, son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. *R es un anillo σ-noetheriano.*

2. *La suma directa de una familia de R-módulos inyectivos y libres de σ-torsión es otra vez inyectivo y libre de σ-torsión.*

3. *Cada R-módulo inyectivo y libre de σ-torsión es isomorfo a una suma directa de R-módulos inyectivos indescomponibles y libres de σ-torsión.*

Finalmente señalar que el Lema de Cohen se puede establecer en el contexto de anillos σ-noetherianos, haciendo ahora intervenir a todos los ideales primos del anillo y no sólo a los contenidos en $\mathcal{L}(\sigma)$ como en la Proposición 1.1.20.

(1.1.31) Lema. *([35, 5.15]) Sea σ una teoría de torsión en R-mód, entonces R es σ-noetheriano si, y sólo si, cada ideal primo es σ-finitamente generado.*

Ideales primos asociados.

En el estudio de los anillos noetherianos, una herramienta fundamental son los ideales primos asociados. Vamos a ver que podemos decir en un caso más general.

Sea M un R-módulo, un ideal primo $\mathfrak{p}$ de R se dice que es *asociado* a M si existe un submódulo de M isomorfo a $R/\mathfrak{p}$, ó equivalentemente, si $\mathfrak{p} = ann(x)$ para algún $0 \neq x \in M$.

Denotaremos por $Ass(M)$ al conjunto, posiblemente vacío, de los ideales primos asociados a M.

Los siguientes resultados relativos a ideales primos asociados son bien conocidos.

(1.1.32) Proposición.

1. *Dada la sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0,$$

se tiene

$$Ass(N) \subseteq Ass(M) \subseteq Ass(M/N) \cup Ass(N).$$

2. $Ass(\oplus M_i) = \cup Ass(M_i)$

3. *Para cualquier R-módulo M, se tiene* $Ass(M) = Ass(E(M))$.

4. *Si M es un R-módulo uniforme, entonces Ass(M) posee, como máximo, un elemento.*

En el caso de un anillo noetheriano los asociados de un módulo no nulo constituyen un conjunto no vacío, lo que no es cierto en el caso general. Para evitar este problema se puede trabajar en dos direcciones diferentes. En primer lugar, pueden obtenerse resultados parciales para módulos libres de σ-torsión cuando el anillo es σ-noetheriano.

(1.1.33) Lema. *([12, III,4.2]) Si R es un anillo σ-noetheriano y M un R-módulo no nulo libre de σ-torsión, entonces:*

$$\varnothing \neq Ass(M) \subseteq \mathcal{K}(\sigma)$$

(1.1.34) Proposición. *([12, III,4.4])*

Si R es σ-noetheriano y M es un R-módulo que es σ-finitamente generado y no es de σ-torsión, entonces podemos encontrar una cadena

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$$

de R-módulos tales que, para cada $1 \leq i \leq n$, existe un isomorfismo

$$(M_i/M_{i-1})/\sigma(M_i/M_{i-1}) = R/\mathfrak{p}_i$$

para algún $\mathfrak{p}_i \in \mathcal{K}(\sigma)$.

(1.1.35) Corolario. *Si M es un módulo σ-finitamente generado sobre el anillo σ-noetheriano R, entonces $Ass(M)$ es un conjunto finito.*

Por otro lado, la definición de ideal primo asociado puede generalizarse de manera que cada módulo no nulo tenga un conjunto de ideales asociados distinto de vacío. Una definición posible es la siguiente: sea M un R-módulo y $\mathfrak{p}$ un ideal primo del anillo R, decimos que $\mathfrak{p}$ es un *ideal primo débilmente asociado a M* si existe un elemento no nulo m de M tal que $\mathfrak{p}$ es minimal sobre $ann(m)$. Al conjunto de los ideales primos débilmente asociados a M lo representamos por $Ass_f(M)$.

(1.1.36) Lema. *Sea R un anillo cualquiera y M un R-módulo, entonces $M \neq 0$ si, y solo si, $Ass_f(M) \neq \varnothing$.*

Demostración. Supongamos que $M \neq 0$, entonces existe algún $0 \neq m \in M$; consideremos el conjunto

$$\Sigma = \{\mathfrak{p} \in Spec(R)\colon ann(m) \subseteq \mathfrak{p}\}$$

entonces $\Sigma \neq \varnothing$ y si tomamos en Σ una cadena descendente

$$\ldots \subseteq \mathfrak{p}_3 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}_1$$

y denotamos por $\mathfrak{p} = \cap_{i=1}^{\infty}\mathfrak{p}_i$, resulta que $\mathfrak{p}$ es de nuevo un ideal primo que contiene a $ann(m)$. Para demostrarlo tomemos $a, b \notin \mathfrak{p}$, entonces existe algún $n \in \mathbb{N}$ de manera que $a, b \notin \mathfrak{p}_n$ y por tanto $ab \notin \mathfrak{p}_n$ lo que implica que $ab \notin \mathfrak{p}$. Ahora el lema de Zorn asegura la existencia de un elemento minimal en Σ, que será un elemento de $Ass_f(M)$. □

Para los ideales primos débilmente asociados a un R-módulo, se verifican propiedades análogas a las de los primos asociados. Podemos enunciar los siguientes resultados:

(1.1.37) Lema. *Sea R un anillo y consideremos una sucesión exacta corta de R-módulos*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0,$$

entonces

$$Ass_f(N) \subseteq Ass_f(M) \subseteq Ass_f(N) \cup Ass_f(M/N).$$

Demostración. Sea $\mathfrak{p} \in Ass_f(N)$, entonces existe $0 \neq n \in N$ tal que $\mathfrak{p}$ es minimal sobre $ann(n)$; puesto que $n \in N \leq M$ tenemos que $\mathfrak{p} \in Ass_f(M)$. Por otra parte, sea $\mathfrak{p} \in Ass_f(M)$ y $0 \neq m \in M$ tal que $\mathfrak{p}$ es minimal sobre $ann(m)$, si $m + N \neq 0 + N$ entonces es claro que $\mathfrak{p} \in Ass_f(M/N)$. En otro caso, $m \in N$ y por tanto $\mathfrak{p} \in Ass_f(N)$. □

(1.1.38) Corolario. *Si $\{M_i : i \in \Lambda\}$ es una familia de R-módulos, entonces*

$$Ass_f(\oplus_{i\in\Lambda}(M_i)) = \cup_{i\in\Lambda} Ass_f(M_i)$$

Demostración. Para cada $j \in \Lambda$ consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M_j \longrightarrow \oplus_{i\in\Lambda} M_i \longrightarrow \oplus_{i\neq j} M_i \longrightarrow 0,$$

de la que deducimos que $Ass_f(M_j) \subseteq Ass_f(\oplus_{i\in\Lambda} M_i)$ y por tanto

$$\cup_{i\in\Lambda} Ass_f(M_i) \subseteq Ass_f(\oplus_{i\in\Lambda} M_i).$$

Para la otra inclusión, razonemos en primer lugar que la afirmación es cierta para cualquier conjunto finito de índices, o lo que es equivalente, para el conjunto $\lambda = \{1, 2\}$. En este caso, aplicando el lema anterior a la sucesión

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0,$$

obtenemos que $Ass_f(M_1 \oplus M_2) \subseteq Ass_f(M_1) \cup Ass_f(M_2)$. Ahora, si se verifica que $\mathfrak{p} \in Ass_f(\oplus M_i)$, entonces existe un conjunto finito $F \subseteq \Lambda$ tal que $\mathfrak{p} \in Ass_f(\oplus_F M_i)$ y se aplica el razonamiento anterior. □

(1.1.39) Corolario. *Sea $\{N_i : i \in \Lambda\}$ una familia de submódulos de M tal que $\cap_{i\in\Lambda} N_i = 0$. Entonces,*

$$Ass_f(M) \subseteq \cup_{i\in\Lambda} Ass_f(M/N_i)$$

Demostración. Basta considerar el monomorfismo natural

$$M \longrightarrow \oplus M/N_i$$

y aplicar el Corolario anterior. $\square$

Veamos a continuación cómo se comportan los ideales primos débilmente asociados cuando se localiza en un conjunto multiplicativo.

(1.1.40) Lema. *Dado un anillo R y un conjunto multiplicativo Σ de R, si llamamos*

$$\Phi = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) : \mathfrak{p} \cap \Sigma = \varnothing\},$$

entonces para cualquier R-módulo M se tiene que

$$Ass_f(\Sigma^{-1}M) = Ass_f(M) \cap \Phi.$$

Demostración. Sea $\mathfrak{p} \in Ass_f(M) \cap \Phi$ y tengamos un elemento $m \in M$ tal que $\mathfrak{p}$ es minimal sobre $ann(m)$. Calculemos

$$ann_R(m/1) = \{r \in R : \text{existe } s \in \Sigma \text{ tal que } srm = 0\}$$

y comprobemos que $ann_R(m/1) \subseteq \mathfrak{p}$. Para esto, si $srm = 0$ entonces $sr \in ann(m) \subseteq \mathfrak{p}$ y puesto que $\mathfrak{p} \cap \Sigma = \varnothing$ y $\mathfrak{p}$ es un ideal primo, entonces $r \in \mathfrak{p}$. Además como $\mathfrak{p}$ es minimal sobre $ann(x)$ tambien lo es sobre $ann_r(m/1)$. Para la otra inclusión, tomemos $\mathfrak{p} \in Ass_f(\Sigma^{-1}M)$ y sea $m/1 \neq 0$ con $\mathfrak{p}$ minimal sobre su anulador. Es claro entonces que $ann(m) \subseteq \mathfrak{p}$. Veamos que es minimal: si $ann(m) \subseteq \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, entonces por un razonamiento similar al anterior tenemos que $\mathfrak{q}$ contiene a $ann_R(m/1)$ y además es $\mathfrak{q} \cap \Sigma = \varnothing$ lo que es una contradición con la minimalidad de $\mathfrak{p}$. $\square$

(1.1.41) Corolario. *Con la misma notación que en el Lema precedente, para cada R-módulo M existe una correspondencia biyectiva entre los conjuntos de ideales primos $Ass_f(M) \cap \Phi$ y $Ass_f(\Sigma^{-1}M_{\Sigma^{-1}R})$ dada por $\mathfrak{p} \to \Sigma^{-1}\mathfrak{p}$.*

Demostración. Si $\mathfrak{p} \in Ass_f(\Sigma^{-1}M)$, tomemos $0 \neq m/1 \in \Sigma^{-1}M$ tal que $\mathfrak{p}$ es minimal sobre su anulador, entonces $\Sigma^{-1}\mathfrak{p} \supseteq \Sigma^{-1}ann(m/1)$ y es minimal, por tanto está en $Ass_f(\Sigma^{-1}M_{\Sigma^{-1}R})$. Por otra parte, si $\Sigma^{-1}\mathfrak{p} \in Ass_f(\Sigma^{-1}M_{\Sigma^{-1}R})$, entonces existe $0 \neq m/1 \in \Sigma^{-1}M$ tal que

$$\Sigma^{-1}\mathfrak{p} \supseteq ann_{\Sigma^{-1}R}(m/1) = \Sigma^{-1}ann_R(m/1)$$

es minimal, entonces por el lema anterior tenemos que $\mathfrak{p}$ es un elemento de $Ass_f(\Sigma^{-1}M)$. □

Relacionemos ahora los ideales primos débilmente asociados con otros conjuntos de ideales primos relativos a un R-módulo.

(1.1.42) Lema. *([47, XIII,4.14]) Sea R un anillo y M un R-módulo, entonces*

$$Ass(M) \subseteq Ass_f(M) \subseteq Supp(M)$$

y se tiene que

$$Supp(M) = \{\mathfrak{q} \in Spec(R)\colon \textit{ existe } \mathfrak{p} \in Ass_f(M) \textit{ tal que } \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}.$$

Como consecuencia de este Lema se tiene que el conjunto de los elementos minimales de $Ass_f(M)$ coincide con el de los elementos minimales de $Supp(M)$.

Bajo ciertas condiciones, el conjunto de los ideales primos débilmente asociados coincide con el conjunto de los ideales primos asociados, esto ocurre por ejemplo cuando el anillo R es σ-noetheriano y el R-módulo es libre de σ-torsión (Ver [12, III,4.7]).

En general, para un módulo M se verifica que si $Ass_f(M) \subseteq \mathcal{K}(\sigma)$, entonces M es libre de σ-torsión. El recíproco no es cierto en general. Cuando para una teoría de torsión σ se tiene la igualdad $\mathcal{F}_\sigma = \{M \in R\text{-mód} : Ass_f(M) \subseteq \mathcal{K}(\sigma)\}$ decimos que σ es *bien centrada.* Sabemos por ejemplo, que si R es σ-noetheriano, entonces puesto que $Ass_f(M) = Ass(M)$ obtenemos por el Lema 1.1.33 que σ es bien centrada.

(1.1.43) Lema. *Sea R un anillo y σ una teoría de torsion bien centrada en R-***mód***, entonces*

$$\mathcal{T}_\sigma = \{M \in R\text{-}\mathbf{m\acute{o}d} : Ass_f(M) \subseteq \mathcal{Z}(\sigma)\} =$$

$$= \{M \in R\text{-}\mathbf{m\acute{o}d} : Supp(M) \subseteq \mathcal{Z}(\sigma)\}.$$

Demostración. La inclusión $\subseteq$ ocurre siempre: consideremos M un módulo de σ-torsión, y sea $\mathfrak{p} \in Ass_f(M)$. Entonces existe $0 \neq m \in M$ tal que $\mathfrak{p}$ es minimal conteniendo a $ann(m)$; como m es un elemento de σ-torsión, entonces $ann(m) \in \mathcal{L}(\sigma)$ y por tanto $ann(m) \subseteq \mathfrak{p} \in \mathcal{L}(\sigma)$. Para la otra inclusión si es necesaria la hipótesis de ser σ bien centrada: supongamos que $M \neq \sigma(M)$ por lo que $\varnothing \neq Ass_f(M/\sigma(M)) \subseteq \mathcal{K}(\sigma)$. Elijamos $\mathfrak{p} \in Ass_f(M/\sigma(M))$ y sea $x+\sigma(M)$ tal que $\mathfrak{p}$ es minimal sobre $ann(x+\sigma(M))$. Ahora bien, como $ann(x) \subseteq ann(x+\sigma(M))$ y cualquier ideal primo minimal sobre $ann(x)$ está por hipótesis en $\mathcal{Z}(\sigma)$, tenemos que $\mathfrak{p}$ tambien está en $\mathcal{Z}(\sigma)$ lo que nos lleva a una contradicción. Para la segunda igualdad basta aplicar el Lema 1.1.42 $\square$

La propiedad $\mathcal{T}(\sigma) = \{M \in R\text{-}\mathbf{m\acute{o}d} : Ass_f(M) \subseteq \mathcal{Z}(\sigma)\}$ caracteriza a las teorías de torsión semicentradas, por lo tanto toda teoría de torsión bien centrada es semicentrada. Finalmente, comprobar que las teorías de torsión que vamos a estudiar están incluidas en estas clases.

(1.1.44) Corolario. *Si R es un anillo y σ una teoría de torsión de tipo finito en R-***mód***, entonces*

$$\mathcal{F}_\sigma = \{M \in R\text{-}\mathbf{m\acute{o}d} : Ass_f(M) \subseteq \mathcal{K}(\sigma)\}$$

y

$$\mathcal{T}_\sigma = \{M \in R\text{-}\mathbf{m\acute{o}d} : Ass_f(M) \subseteq \mathcal{Z}(\sigma)\}.$$

y por tanto σ es bien centrada y semicentrada.

1.2 Topologías lineales y completación I-ádica

Anillos y módulos topológicos

Un grupo abeliano G se dice que es un *grupo topológico* si está dotado de una topología de manera que las operaciones $(a,b) \mapsto a+b$ y $a \mapsto -a$ son funciones continuas.

Si G es un grupo topológico, la topología de G está totalmente determinada por el conjunto $\mathcal{E}$ de los entornos de cero. Este conjunto satisface las propiedades:

E1 Para cada $U \in \mathcal{E}$, existe $V \in \mathcal{E}$ tal que $V+V \subseteq U$.

E2 $U \in \mathcal{E}$ implica que $-U \in \mathcal{E}$.

Recíprocamente, si G es un grupo abeliano y $\mathcal{E}$ es una familia de subconjuntos de G verificando **E1** y **E2** y tal que todos contienen al cero, entonces existe una única topología sobre G tal que G es un grupo topológico y $\mathcal{E}$ es el conjunto de entornos de cero. Si G es un grupo topológico y H es un subgrupo de G, entonces H es un subconjunto abierto si, y sólo si, contiene un punto interior (basta observar que la traslación es un homeomorfismo).

Un *anillo topológico* es un anillo R con una topología que dota a R de estructura de grupo topológico y de manera que la multiplicación $(a,b) \mapsto ab$ es una aplicación continua.

Si R es un anillo topológico, el conjunto de entornos de cero satisface, además de **E1** y **E2**, las propiedades:

E3 Para cada $a \in R$ y $U \in \mathcal{E}$, existe $V \in \mathcal{E}$ tal que $aV \subset U$.

E4 Para cada $U \in \mathcal{E}$ existe $V \in \mathcal{E}$ tal que $VV \subset U$.

Y recíprocamente, si $\mathcal{E}$ es una familia de subconjuntos de R que contienen al cero° y verificando **E1-4**, entonces existe una única topología sobre R de manera que R es un anillo topológico y $\mathcal{E}$ es el conjunto de entornos de cero.

Dado un anillo topológico R, un *R-módulo topológico* es un R-módulo M dotado con una topología de manera que M es un grupo topológico y tal que la multiplicación por elementos del anillo es continua. Las consideraciones hechas sobre el conjunto de entornos de cero de un grupo topológico son válidas en este caso, y además de los axiomas **E1-2**, dicho conjunto $\mathcal{M}$ verifica:

EM3 Para cada $x \in M$ y $U \in \mathcal{M}$, existe $V \in \mathcal{E}$ tal que $xV \subset U$.

EM4 Para cada $a \in A$ y $U \in \mathcal{M}$, existe $V \in \mathcal{M}$ tal que $aV \subset U$.

EM5 Para cada $U \in \mathcal{M}$ existen $V \in \mathcal{M}$ y $W \in \mathcal{E}$ tal que $VW \subset U$

Un anillo topológico R se dice que es *linealmente topológico* si existe un sistema fundamental de entornos de cero formado por ideales de R. En este caso, el conjunto $\mathcal{L}$ de todos los ideales abiertos satisface las propiedades:

L1 Si $I \in \mathcal{L}$ y $I \subset J$, entonces $J \in \mathcal{L}$.

L2 Si $I, J \in \mathcal{L}$, entonces $I \cap J \in \mathcal{L}$.

L3 Si $I \in \mathcal{L}$ y $a \in R$, entonces $(I : a) \in \mathcal{L}$.

Análogamente, si R es un anillo linealmente topológico, un R-módulo topológico M se dice que es *linealmente topológico* si tiene un sistema fundamental de entornos de cero formado por submódulos. Este sistema de submódulos abiertos verifica:

LM1 Si $N \subset N'$ son submódulos de M y N es abierto, entonces N' es abierto.

LM2 Si N y N' son submódulos abiertos, entonces $N \cap N'$ es abierto.

LM3 Si N es un submódulo abierto y $x \in M$, entonces $(N : x) \in \mathcal{L}$.

Cuando R es linealmente topológico, para cualquier R-módulo M la topología lineal más fuerte sobre M es aquella que tiene por conjunto de submódulos abiertos

$$\mathcal{L}(M) = \{N \leq M \colon (N : x) \in \mathcal{L} \text{ para todo } x \in M\}$$

(1.2.1) Ejemplo. Dado un filtro de Gabriel $\mathcal{L}(\sigma)$ sobre un anillo R, se verifican trivialmente **L1-3** y por tanto $\mathcal{L}(\sigma)$ constituye el conjunto de ideales abiertos para una topología lineal sobre R. Además, para cada R-módulo M el filtro

$$\mathcal{L}_\sigma(M) = \{N \leq M : M/N \in \mathcal{T}(\sigma)\}$$

da estructura de R-módulo linealmente topológico a M. Este tipo de topologías sobre un anillo, es decir, las que vienen asociadas a una teoría de torsión, se denominan *topologías de Gabriel* y nos vamos a centrar en ellas por las construcciones algebraicas que tienen asociadas.

Topologías I-ádicas

Vamos a estudiar un ejemplo de topología lineal y su completación. Sea I un ideal de un anillo R, consideramos el filtro $\{I^n \colon n \in \mathbb{N}\}$ que es un sistema fundamental de entornos de cero para una topología lineal sobre R, esta topología será llamada la *topología I-ádica.* Para un R-módulo M, si tomamos como base de entornos de cero al filtro de submódulos $\{I^n M \colon n \in \mathbb{N}\}$, obtenemos una estructura de R-módulo topológico que es así mismo llamada *topología I-ádica* de M.

(1.2.2) Teorema. *([4, II,2.6.11]) Sea M un R-módulo dotado con la topología I-ádica, entonces el R-módulo*

$$\hat{M} = \varprojlim\{M/I^n M : n \in \mathbb{N}\}$$

con la topología del límite inverso de espacios topológicos discretos, es una completación Hausdorff de M.

Cuando el anillo es Hausdorff para la topología I-ádica, se dice que es un *anillo de Zariski*. En éste caso, el anillo puede identificarse con un submódulo de su completado. Por ejemplo, todo anillo local noetheriano $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo de Zariski para la topología $\mathfrak{m}$-ádica.

La topología I-ádica sobre M es Hausdorff si $\cap_{i=1}^{n} I^n M = 0$. Esto ocurre, en particular, cuando el anillo es noetheriano, $I \subseteq J(R)$ y M es finitamente generado. Ver [4, II,2.5.5]

Un resultado de gran importancia en el estudio de las completaciones I-ádicas es el Lema de Artin-Rees:

(1.2.3) Teorema. Lema de Artin-Rees([39, 8.5])

Sea R un anillo noetheriano, M un R-módulo finitamente generado, N un submódulo de M e I un ideal de R. Entonces existe un entero positivo c tal que para todo $n > c$ se tiene

$$I^n M \cap N = I^{n-c}(I^c M \cap N).$$

Su importancia radica fundamentalmente, en la posibilidad de establecer el siguiente resultado acerca de la topología I-ádica.

(1.2.4) Teorema. *([39, 8.6]) Si R es un anillo noetheriano, I es un ideal de R y M es un R-módulo finitamente generado, entonces para cada submódulo N de M coincide la topología I-ádica de N con la topología inducida sobre N por la de M.*

(1.2.5) Corolario. *Si R es un anillo noetheriano y*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de R-módulos finitamente generados, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \hat{N} \longrightarrow \hat{M} \longrightarrow \widehat{M/N} \longrightarrow 0$$

es también exacta.

En la demostración de este resultado clásico se hace uso de manera esencial de la propiedad de Mittag-Leffler. Esta propiedad, que puede ser encontrada en [24] asegura la exactitud a la derecha del límite inverso bajo determinadas condiciones, a saber, que el sistema inverso esté indizado en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales y que cada homomorfismo en el sistema inverso sea sobreyectivo.

(1.2.6) Teorema. *([4, 2.6.19]) Sea R un anillo noetheriano y M es un R-módulo finitamente generado, entonces el homomorfismo*

$$\eta(M) : \hat{R} \otimes_R M \longrightarrow \hat{M}$$

es un isomorfismo de $\hat{R}$-módulos.

Como consecuencia de este teorema se obtienen dos importantes resultados: que $\hat{R}$ es una R-álgebra plana y que la completación $\hat{M}$ de un módulo finitamente generado M es un R-módulo completo con la topología I-ádica. Respecto de este tema hay que observar que no ocurre para R-módulos arbitrarios, incluso si el anillo es local y $\mathfrak{m} = I$ (ver [22] página 15).

El estudio de la completación puede reducirse a completar en anillos de Zariski, como prueba el siguiente resultado.

(1.2.7) Proposición. *([8, III,3.12]) Sean R un anillo noetheriano, I un ideal de R, S el conjunto multiplicativo $1+I$ y M un R-módulo de tipo finito, entonces:*

1. *$S^{-1}R$ es un anillo de Zariski para la topología $S^{-1}I$-ádica.*
2. *El homomorfismo $\hat{f} : \hat{M} \longrightarrow \widehat{S^{-1}M}$ es un isomorfismo.*

Veremos que todo este estudio se puede hacer con técnicas de teorías de torsión.

Para un anillo noetheriano R y un ideal I de R, podemos definir la teoría de torsión σ_I de manera que para cada R-módulo M

$$\sigma_I(M) = \{m \in M \text{: existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } I^n m = 0\}$$

(1.2.8) Proposición. *Si R es un anillo noetheriano, I es un ideal de R y M es un módulo finitamente generado, la topología I-ádica en M coincide con la topología que determina $\mathcal{L}_{\sigma_I}(M)$.*

Demostración. En primer lugar observemos que $\mathcal{L}(\sigma_I)$ tiene como base de filtro al conjunto $\{I^n; n \in \mathbb{N}\}$. Entonces es evidente que todo I^nM está en $\mathcal{L}_{\sigma_I}(M)$. Por otra parte, si $N \in \mathcal{L}_{\sigma_I}(M)$ puesto que M es finitamente generado, también lo será M/N. Consideremos $m_1 + N, \ldots, m_n + N$ un conjunto de generadores para $M/N \in \mathcal{T}_{\sigma_I}$, existirán $s_1, \ldots, s_n$ números enteros positivos tales que $I^{s_i}(m_i + N) = 0$, entonces tomando $s = \text{máx}\{s_1, \ldots, s_n\}$ obtenemos que $I^sM \subseteq N$ lo que completa el razonamiento. □

Topologías de Gabriel estables

Dada una teoría de torsión σ en R-**mód** y un R-módulo M, nos referiremos a la topología inducida por σ sobre M tal como se definió en el Ejemplo 1.2.1 diciendo simplemente "la topología de M". Con este convenio, si N es un submódulo de M, es fácil comprobar que la topología en N inducida por la de M es más débil que la topología de N.

Se trata ahora de establecer cuando estas dos topologías coinciden. En este sentido podemos enunciar el siguiente resultado.

(1.2.9) Teorema. *([47, VI,7.1]) Sea σ una teoría de torsión en R-***mód***. Son equivalentes*

1. *Para cada R-módulo M y cada submódulo N de M, la topología de N coincide con la topología en N inducida por la de M.*
2. *la clase de módulos de σ-torsión es cerrada para extensiones esenciales.*

Si la teoría de torsión σ verifica las condiciones equivalentes del Teorema anterior, decimos que σ es *estable*.

(1.2.10) Ejemplo. El ejemplo clásico de una teoría de torsión estable es el de la *teoría de torsión de Goldie.* Recordemos que un R-modulo M se dice que es *no singular* si para cada $0 \neq m \in M$, se tiene que $ann(m)$ no es esencial en R. La teoría de torsión de Goldie tiene por clase de libres de torsión a

$$\mathcal{F}_G = \{M \in R\text{-}\mathbf{m\acute{o}d}\colon M \text{ es no singular } \}$$

y su funtor núcleo idempotente asociado es $\sigma_G(M) = Z_2(M)$ (ver [47, VI,7]).

Para teorías de torsión estables podemos enunciar, entre otras, las siguientes propiedades:

(1.2.11) Proposición. *Sea σ una teoría de torsión estable en R-*$\mathbf{m\acute{o}d}$*. Entonces para cada inyectivo indescomponible E, se tiene que $E \in \mathcal{T}_\sigma$ ó bién $E \in \mathcal{F}_\sigma$.*

(1.2.12) Proposición. *El ínfimo de una familia de teorías de torsión estables es también estable.*

Demostración. Se deduce de la definición de ínfimo puesto que

$$\mathcal{T}_{\wedge\sigma} = \cap\mathcal{T}_\sigma$$

y de la hipótesis de ser cada teoría de torsión estable. □

La importancia de las teorías de torsión estables es doble. Por una parte y como ya hemos visto, la estabilidad significa un buen comportamiento de la topología lineal que determina la teoría de torsión. Por otro lado, también ofrece ventajas importantes en el cálculo del localizado de un módulo como se mostrará en la Proposición 1.2.15.

Utilizando el Corolario 1.1.44 podemos deducir fácilmente el siguiente

(1.2.13) Teorema. *Sobre un anillo noetheriano R toda teoría de torsión es estable.*

Aunque para anillos σ-noetherianos no se tiene un resultado tan fuerte como el anterior, sin embargo bajo la condición de estabilidad para σ, se obtiene un resultado parcial:

(1.2.14) Proposición. *([12, VI,3.5]) Si R es un anillo σ-noetheriano y σ es una teoría de torsión estable, entonces toda teoría de torsión τ en R-***mód** *tal que $\sigma \leq \tau$ es también estable.*

Finalmente recordar que para teorías de torsión estables la descripción de la localización es más sencilla.

(1.2.15) Proposición. *([12, III, 2.9]) Sea σ una teoría de torsión estable en R-***mód***. Entonces para cualquier R-módulo M se tiene*

$$Q_\sigma(M) = \varinjlim\{Hom_R(I,M) : I \in \mathcal{L}(\sigma)\}$$

Capítulo 2

Completación relativa a una teoría de torsión.

2.1 Completación.

En lo que sigue R será un anillo conmutativo, $\sigma \leq \tau$ dos teorías de torsión en R-**mód** de manera que R es σ-noetheriano y σ es estable; M representará a un R-módulo.

En el Capítulo 1 se ha descrito cómo el filtro de Gabriel $\mathcal{L}(\tau)$ define una topología lineal sobre R. Del mismo modo, para un R-módulo M podemos considerar el conjunto de submódulos

$$\mathcal{L}_\tau(M) = \{N \leq M \colon M/N \in \mathcal{T}_\tau\}$$

que verifica propiedades similares a las de $\mathcal{L}(\tau)$:

1. Si $N \in \mathcal{L}_\tau(M)$ y $x \in M$, entonces $(N : x) \in \mathcal{L}(\tau)$
2. Si $N \in \mathcal{L}_\tau(M)$ y $N \subseteq K \subseteq M$, entonces $K \in \mathcal{L}_\tau(M)$
3. Si $N, N' \in \mathcal{L}_\tau(M)$, entonces $N \cap N' \in \mathcal{L}_\tau(M)$

De éste modo $\mathcal{L}_\tau(M)$, tomado como base de entornos de cero, define una topología R-lineal sobre M.

Además $\mathcal{L}_\tau(M)$ define un sistema inverso con homomorfismos

$$\nu_{N_1,N_2} : M/N_1 \longrightarrow M/N_2$$

inducidos por las inclusiones $N_1 \subseteq N_2$, donde $N_1, N_2 \in \mathcal{L}_\tau(M)$.

Si a este sistema inverso aplicamos el funtor localización en σ, obtenemos un nuevo sistema inverso con homomorfismos

$$\mu_{N_1,N_2} = Q_\sigma(\nu_{N_1,N_2}) : Q_\sigma(M/N_1) \longrightarrow Q_\sigma(M/N_2);$$

y por tanto podemos considerar el límite inverso:

$$M^{(\sigma,\tau)} = \varprojlim\{Q_\sigma(M/N) : N \in \mathcal{L}_\tau(M)\}$$

y el homomorfismo canónico:

$$c_M : M \longrightarrow M^{(\sigma,\tau)}$$

inducido por la familia

$$\{M \longrightarrow M/N \overset{j_{\sigma,M/N}}{\longrightarrow} Q_\sigma(M/N) : N \in \mathcal{L}_\tau(M)\}.$$

Llamamos a $M^{(\sigma,\tau)}$ la (σ,τ)-*completación* de M.

El primer paso en nuestro trabajo será dotar de estructura de anillo a $R^{(\sigma,\tau)}$ y de estructura de $R^{(\sigma,\tau)}$-módulo a cada $M^{(\sigma,\tau)}$.

Para este fin necesitaremos algunos resultados técnicos:

(2.1.1) Proposición. *([19, 47.16]) Sea I un ideal de R y sea $p : R \longrightarrow R/I$ la proyección canónica. Sea σ una teoría de torsión en R-***mód** *y denotemos por $\lambda = p_*(\sigma)$, esto es, la teoría de torsión inducida en S-***mód** *por σ. Entonces las siguientes condiciones para un S-módulo N son equivalentes:*

1. *$Q_\sigma(N_R) = Q_\lambda(N_S)$;*
2. *$Q_\lambda(N_S)$ es σ-inyectivo;*
3. *$Q_\sigma(N_R)$ es un S-módulo.*

(2.1.2) Lema. *Sea M un R-módulo y $N \in \mathcal{L}_\tau(M)$. Para cada $m_N \in Q_\sigma(M/N)$ tenemos que $Q_\sigma(Rm_N)$ es un $Q_\sigma(R/(0 : m_N))$-módulo.*

Demostración. En primer lugar observemos que es suficiente probar que $Q_\sigma(Rm_N)$ es un $R/(0 : m_N)$-módulo: puesto que $Rm_N \cong R/(0 : m_N)$, usando la Proposición 2.1.1 tendremos que $Q_\sigma(R/(0 : m_N)) = Q_\lambda(R/(0 : m_N))$ y por tanto $Q_\sigma(Rm_N)$ es un $Q_\sigma(R/(0 : m_N))$-módulo.

Ahora, por la estabilidad de σ, tenemos

$$Q_\sigma(Rm_N) = \varinjlim\{Hom_R(I, Rm_N) \colon I \in \mathcal{L}_\sigma(R)\}$$

y puesto que Rm_N es un $R/(0 : m_N)$-módulo y R es conmutativo (lo que es un requisito imprescindible), es posible obtener una estructura de $R/(0 : m_N)$-módulo para $Hom_R(I, Rm_N)$ y demostrar así el resultado. □

(2.1.3) Teorema. *Con la misma notación del Lema anterior, para cada R-módulo M existe una aplicación bilineal*

$$\theta : R^{(\sigma,\tau)} \times M^{(\sigma,\tau)} \longrightarrow M^{(\sigma,\tau)} :$$

$$\theta((r_I)_{I\in\mathcal{L}_\tau(R)}, (m_N)_{N\in\mathcal{L}_\tau(M)}) = (k_N)_{N\in\mathcal{L}_\tau(M)},$$

donde $k_N = r_{(0:m_N)} m_N$.

Demostración. En primer lugar, observemos que:

1. puesto que Q_σ es exacto a izquierda y $Q_\sigma Q_\sigma = Q_\sigma$, entonces se tiene

$$m_N \in Q_\sigma(Rm_N) \leq_R Q_\sigma(M/N).$$

2. $m_N \in Q_\sigma(M/N) \in \mathcal{T}_\tau$; por tanto $(0 : m_N) \in \mathcal{L}(\tau)$.

Primer paso. θ está bien definida. Supongamos $I \subseteq (0 : m_N)$, entonces usando un razonamiento similar al Lema 2.1.2, $Q_\sigma(Rm_N)$ es un $Q_\sigma(R/I)$-módulo y podemos considerar la aplicación:

$$Q_\sigma(R/I) \times Q_\sigma(Rm_N) \longrightarrow Q_\sigma(Rm_N): \qquad (r_I, m_N) \mapsto r_I m_N.$$

Tenemos que probar que $r_I m_N = r_{(0:m_N)} m_N$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en R-**mód**:

$$\begin{tikzcd} \frac{R}{I} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{R}{(0:m_N)} \arrow[d] \\ Rm_N \arrow[r, "id"] & Rm_N \end{tikzcd}$$

donde las flechas horizontales son la proyección y la identidad respectivamente y las flechas verticales son ambas la multiplicación por m_N. Usando la Proposición 2.1.1 de nuevo, obtenemos un diagrama conmutativo de $Q_\sigma(R/I)$-módulos:

$$\begin{tikzcd} Q_\sigma\left(\frac{R}{I}\right) \arrow[r, "\mu_{I,(0:m_N)}"] \arrow[d] & Q_\sigma\left(\frac{R}{(0:m_N)}\right) \arrow[d] \\ Q_\sigma(Rm_N) \arrow[r, "id"] & Q_\sigma(Rm_N) \end{tikzcd}$$

y puesto que $\mu_{I,(0:m_N)}(r_I) = r_{(0:m_N)}$, deducimos que $r_I m_N = r_{(0:m_N)} m_N$.

Segundo paso. Bilinealidad. Que es lineal en la primera variable es inmediato. Probemos la linealidad en la segunda variable. Consideramos $(m_N)_{N\in\mathcal{L}_\tau(M)}$ y $(q_N)_{N\in\mathcal{L}_\tau(M)}$ elementos de $M^{(\sigma,\tau)}$; se tiene:

$$\theta\left((r_I)_{I\in\mathcal{L}(\tau)}, (m_N + q_N)_{N\in\mathcal{L}_\tau(M)}\right) =$$

$$= \left((r_{(0:m_N+q_N)}(m_N + q_N)\right)_{N\in\mathcal{L}_\tau(M)} =$$

$$= \left((r_{(0:m_N+q_N)} m_N + r_{(0:m_N+q_N)} q_N)\right)_{N\in\mathcal{L}_\tau(M)}.$$

Observemos que $(0 : m_N) \cap (0 : q_N) \subseteq (0 : m_N + q_N)$ y utilicemos la buena definición de θ,

$$r_{(0:m_N)\cap(0:q_N)}(m_N + q_N) = r_{(0:m_N+q_N)}(m_N + q_N)$$

$$r_{(0:m_N)\cap(0:q_N)} m_N \quad = \quad r_{(0:m_N)} m_N$$

$$r_{(0:m_N)\cap(0:q_N)} q_N \quad = \quad r_{(0:m_N)} q_N$$

con lo que tenemos

$$r_{(0:m_N+q_N)}(m_N + q_N) = r_{(0:m_N)} m_N + r_{(0:q_N)} q_N$$

y por tanto θ es bilineal.

□

(2.1.4) Corolario. *$R^{(\sigma,\tau)}$ tiene estructura de anillo y para cada R-módulo M su completación $M^{(\sigma,\tau)}$ tiene estructura de $R^{(\sigma,\tau)}$-módulo.*

(2.1.5) Teorema. *Sean N y M dos R-módulos y $f : N \to M$ un R-homomorfismo, entonces f induce una aplicación $R^{(\sigma,\tau)}$-lineal*

$$f^{(\sigma,\tau)} : N^{(\sigma,\tau)} \longrightarrow M^{(\sigma,\tau)}.$$

Además,

$$(-)^{(\sigma,\tau)} : R\text{-}\mathbf{m\acute{o}d} \longrightarrow R^{(\sigma,\tau)}\text{-}\mathbf{m\acute{o}d}$$

es un funtor exacto a izquierda y c es una transformación natural del funtor identidad a $(-)^{(\sigma,\tau)}$, i. e., para cualquier R-homomorfismo f el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{c_N} & N^{(\sigma,\tau)} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^{(\sigma,\tau)}} \\ M & \xrightarrow{c_M} & M^{(\sigma,\tau)} \end{array}$$

Demostración. Supongamos que $f : N \to M$ y $K \in \mathcal{L}_\tau(M)$, entonces puesto que $(f^{-1}(K) : x) = (K : f(x))$ para cada elemento x de N, tenemos que $f^{-1}(K) \in \mathcal{L}_\tau(N)$. Llamamos

$$f_{f^{-1}(K)} : N/f^{-1}(K) \longrightarrow M/K$$

al homomorfismo inducido por f y definimos

$$f^{(\sigma,\tau)} : N^{(\sigma,\tau)} \longrightarrow M^{(\sigma,\tau)} :$$

$$(x_H)_{H\in\mathcal{L}_\tau(N)} \mapsto (Q_\sigma(f_{f^{-1}(K)})(x_{f^{-1}(K)}))_{K\in\mathcal{L}_\tau(M)}.$$

Primer paso. Probemos que $f^{(\sigma,\tau)}$ es un $R^{(\sigma,\tau)}$-homomorfismo. Tomemos por ejemplo $(r_I)_{I\in\mathcal{L}(\tau)} \in R^{(\sigma,\tau)}$ y $(x_H)_{H\in\mathcal{L}_\tau(N)} \in N^{(\sigma,\tau)}$, entonces

$$f^{(\sigma,\tau)}((r_I)_{I\in\mathcal{L}(\tau)}(x_H)_{H\in\mathcal{L}_\tau(N)}) =$$

$$= f^{(\sigma,\tau)}((r_{(0:x_H)}x_H)_{H\in\mathcal{L}_\tau(N)}) =$$

$$\left(Q_\sigma(f_{f^{-1}(K)})(r_{(0:x_{f^{-1}(K)})}x_{f^{-1}(K)})\right)_{K\in\mathcal{L}_\tau(M)} = *$$

Usemos ahora que el homomorfismo

$$Q_\sigma(f_{f^{-1}(K)}) : Q_\sigma(M/f^{-1}(K)) \longrightarrow Q_\sigma(N/K)$$

puede ser restringido a $Rx_{f^{-1}(K)}$ y dicha restricción es un homomorfismo de $Q_\sigma(R/(0 : x_{f^{-1}(K)})$-módulos de nuevo por la Proposición 2.1.1. Así, tenemos que

$$* = \left(r_{(0:x_{f^{-1}(K)})}Q_\sigma(f_{f^{-1}(K)})(x_{f^{-1}(K)})\right)_{K\in\mathcal{L}_\tau(M)} =$$

$$= (r_I)_{I\in\mathcal{L}(\tau)}f^{(\sigma,\tau)}((x_H)_{H\in\mathcal{L}_\tau(N)}).$$

Segundo paso. Para comprobar la funtorialidad de $(-)^{(\sigma,\tau)}$ consideremos homomorfismos $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ y sea $K \in \mathcal{L}_\tau(M_3)$. La composición

$$M_1/f^{-1}(g^{-1}(K)) \xrightarrow{f_{f^{-1}(g^{-1}(K))}} M_2/g^{-1}(K) \xrightarrow{g_{g^{-1}(K)}} M_3/K$$

es exactamente

$$M_1/f^{-1}(g^{-1}(K)) \xrightarrow{(g\circ f)_{(f\circ g)^{-1}(K)}} M_3/K$$

y como Q_σ es un funtor, entonces

$$\left(Q_\sigma((g\circ f)_{(g\circ f)^{-1}(K)})\right) = Q_\sigma(g_{g^{-1}(K)}) \circ Q_\sigma(f_{f^{-1}(g^{-1}(K))}).$$

Ahora, utilizando estas igualdades, podemos calcular:

$$(g \circ f)^{(\sigma,\tau)}((x_H)_{H \in \mathcal{L}_\tau(M_1)}) =$$

$$= \Big(Q_\sigma((g \circ f)_{(g\circ f)^{-1}(K)})(x_{(g\circ f)^{-1}(K)})\Big)_{K \in \mathcal{L}_\tau(M_3)} =$$

$$\Big(Q_\sigma(g_{g^{-1}(K)})(Q_\sigma(f_{f^{-1}(g^{-1}(K))})(x_{f^{-1}(g^{-1}(K))}))\Big)_{K \in \mathcal{L}(M_3)} =$$

$$g^{(\sigma,\tau)}(f^{(\sigma,\tau)}((x_H)_{H \in \mathcal{L}_\tau(M_1)})) = (g^{(\sigma,\tau)} \circ f^{(\sigma,\tau)})((x_H)_{H \in \mathcal{L}_\tau(M_1)}).$$

La condición $(1_M)^{(\sigma,\tau)} = 1_{M^{(\sigma,\tau)}}$ para todo R-módulo M se satisface trivialmente.

Tercer paso. Para demostrar que c es una transformación natural, debemos probar que el diargrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "c_N"] \arrow[d, "f"'] & N^{(\sigma,\tau)} \arrow[d, "f^{(\sigma,\tau)}"] \\ M \arrow[r, "c_M"] & M^{(\sigma,\tau)} \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Tomemos un elemento $n \in N$ y calculemos

$$(f^{(\sigma,\tau)} \circ c_N)(n) = f^{(\sigma,\tau)}((j_{\sigma,N/H}(n+H))_{H \in \mathcal{L}_\tau(N)}) =$$

$$= \Big(Q_\sigma(f_{f^{-1}(K)}) \circ j_{\sigma,N/f^{-1}(K)}\Big)\,(n + f^{-1}(K))_{K \in \mathcal{L}_\tau(M)} = *$$

Como j_σ es una transformación natural, para cada $K \in \mathcal{L}_\tau(M)$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} \dfrac{N}{f^{-1}} \arrow[r, "j_{\sigma,N/f^{-1}(K)}"] \arrow[d, "f_{f^{-1}(K)}"'] & Q_\sigma\left(\dfrac{N}{f^{-1}(K)}\right) \arrow[d, "Q_\sigma(f_{f^{-1}(K)}"] \\ M/K \arrow[r, "j_{\sigma,M/K}"] & Q_\sigma(M/K) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Así podemos continuar los cálculos escribiendo

$$* = \Big((j_{\sigma,M/K} \circ f_{f^{-1}(K)})(n + f^{-1}(K))\Big)_{K \in \mathcal{L}_\tau(M)} =$$

$$= (j_{\sigma,M/K}(f(n) + K))_{K \in \mathcal{L}_\tau(M)} = c_M(f(n)).$$

Por último, para probar la exactitud a izquierda, aplicamos el hecho de ser Q_σ y $\varprojlim$ ambos exactos a izquierda. Entonces el resultado se sigue sin más que tomar límites inversos sobre el mismo conjunto de índices, lo que puede hacerse en virtud de la estabilidad de τ: tenemos $\mathcal{L}_\tau(N) = \{K \cap M \colon K \in \mathcal{L}_\tau(M)\}$ para todo $N \subseteq M$, y por otra parte, siempre se verifica

$$\mathcal{L}_\tau(M/N) = \{(N+K)/N;\ K \in \mathcal{L}_\tau(M)\}.$$

□

Por simplicidad en esta Sección hemos impuesto la condición de estabilidad a σ y por tanto a τ; más adelante veremos que tales hipótesis no son necesarias para la construcción de la (σ, τ)-completación.

2.2 Completación y localización.

Sea M un R-módulo y consideremos el homomorfismo canónico $c_M : M \longrightarrow M^{(\sigma,\tau)}$.

En esta Sección estudiaremos los resultados más inmediatos sobre la completación, su relación con la localización y la teoría de torsión que define.

(2.2.1) Proposición.

1. *Si $M \in \mathcal{T}_\sigma$, entonces $c_M = 0$.*
2. *Si $M \in \mathcal{T}_\tau$, entonces $Ker(c_M) = \sigma(M)$ y $M^{(\sigma,\tau)} \cong Q_\sigma(M)$.*

Demostración.

1. Puesto que todo cociente de un σ-torsión es σ-torsión, nos queda

$$M^{(\sigma,\tau)} = \varprojlim \{Q_\sigma(M/N) \ : N \in \mathcal{L}_\tau(M)\} = \varprojlim \{0\} = 0.$$

   y por tanto $c_M = 0$.

2. Si M es τ-torsión, entonces $0 \in \mathcal{L}_\tau(M)$ y $\{0\}$ es un conjunto cofinal para el sistema inverso definido por $\mathcal{L}_\tau(M)$. De esta manera, queda

$$M^{(\sigma,\tau)} = \varprojlim \{Q_\sigma(M/N) \ : N \in \mathcal{L}_\tau(M)\} = \varprojlim \{Q_\sigma(M)\} = Q_\sigma(M)$$

   y por tanto $c_M = j_{\sigma,M}$ de donde $Ker(c_M) = \sigma(M)$.

□

Un R-módulo M decimos que es (σ,τ)-*Hausdorff* si el homomorfismo c_M es un monomorfismo.

Como consecuencia de la Proposición anterior, la clase de los módulos (σ,τ)-Hausdorff incluye a la de los módulos que son libres de σ-torsión y τ-torsión.

A continuación demostraremos que la clase de los módulos Hausdorff es una clase de libres de torsión y relacionaremos la teoría de torsión que define con σ y con τ.

(2.2.2) Proposición. *La clase de los R-módulos*

$$\{M \in R\text{-}\mathbf{mód}\colon M \text{ es } (\sigma,\tau)\text{-Hausdorff}\}$$

es una clase de libres de torsión. Además, es la menor clase de libres de torsión conteniendo a $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_\tau$.

Demostración. Llamemos $\mathcal{F} = \{M \in R\text{-}\mathbf{mód}\colon M \text{ is } (\sigma,\tau)\text{-Hausdorff}\}$; probaremos en primer lugar que $\mathcal{F}$ es una clase de libres de torsión. Sea

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta. Podemos construir el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "c_{M'}"] & M \arrow[r] \arrow[d, "c_M"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "c_{M''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (M')^{(\sigma,\tau)} \arrow[r] & M^{(\sigma,\tau)} \arrow[r] & (M'')^{(\sigma,\tau)} &
\end{tikzcd}$$

Si $M \in \mathcal{F}$, tenemos que c_M es monomorfismo, por tanto $c_{M'}$ es también monomorfismo, y $M' \in \mathcal{F}$. Si suponemos ahora que $M', M'' \in \mathcal{F}$, entonces por medio de una simple caza de diagramas, podemos demostrar que c_M es un monomorfismo.

A continuación veremos que la clase $\mathcal{F}$ es cerrada para productos. Supongamos que $\{M_\alpha\colon \alpha \in A\}$ es una familia de R-módulos en $\mathcal{F}$, entonces para cualquier $\beta \in A$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\prod M_\alpha \arrow[r, "c_{\Pi M_\alpha}"] \arrow[d, "p_\beta"'] & (\prod M_\alpha)^{(\sigma,\tau)} \arrow[d, "(p_\beta)^{(\sigma,\tau)}"] \\
M_\beta \arrow[r, "c_{M_\beta}"] & M_\beta^{(\sigma,\tau)}
\end{tikzcd}$$

Si cada c_{M_β} es monomorfismo, entonces $c_{\prod M_\alpha}$ es un monomorfismo también, y como consecuencia $\prod M_\alpha \in \mathcal{F}$.

Por último, sea $N \in \mathcal{F}$ un submódulo esencial de M con homomorfismo inclusión $i : N \hookrightarrow M$; como en los casos anteriores, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "c_N"] \arrow[d, "i"'] & N^{(\sigma,\tau)} \arrow[d, "i^{(\sigma,\tau)}"] \\ M \arrow[r, "c_M"] & M^{(\sigma,\tau)} \end{tikzcd}$$

Por hipótesis c_N es un monomorfismo, y como i es esencial, c_M es también un monomorfismo.

Si $M \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_\tau$, entonces $0 \in \mathcal{L}_\tau(M)$, y así $M^{(\sigma,\tau)} \cong Q_\sigma(M)$. Como c_M es la composición $M \to Q_\sigma(M) \to M^{(\sigma,\tau)}$, tenemos que c_M es monomorfismo.

Para la última parte, supongamos que $\mathcal{H}$ es una clase de libres de torsión conteniendo a $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_\tau$. Puesto que $\mathcal{H}$ es cerrada para productos y submódulos, para cualquier R-módulo M, tenemos $M^{(\sigma,\tau)} \in \mathcal{H}$. Si M es (σ,τ)-Hausdorff, entonces $c_M : M \to M^{(\sigma,\tau)}$ es un monomorfismo, y $M \in \mathcal{H}$, por tanto $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{F}$. □

Llamaremos κ a la teoría de torsión definida por esta clase de libres de torsión, i. e.,

$$\mathcal{F}_\kappa = \{M \in R\text{-}\mathbf{mód}\colon M \text{ es } (\sigma,\tau)\text{-Hausdorff}\}.$$

El siguiente Lema será de gran utilidad en lo que resta de Sección:

(2.2.3) Lema. *Sea M un R-módulo, $M^{(\sigma,\tau)}$ puede ser descrito de la siguiente forma:*

$$M^{(\sigma,\tau)} = \varprojlim\{Q_\sigma(M/K) \colon M/K \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_\tau\}$$

Demostración. El sistema inverso que usábamos en la definición era

$$\{Q_\sigma(M/K) \colon M/K \in \mathcal{T}_\tau\},$$

pero si M/K es σ-torsión, entonces $Q_\sigma(M/K) = 0$ y podemos quitarlo del sistema inverso. Por otro lado, si M/K no es libre de σ-torsión, podemos tomar H como la σ-clausura de K en M, i. e., el más pequeño submódulo de M conteniendo a K y tal que $M/H \in \mathcal{F}_\sigma$. Así, $Q_\sigma(M/K) = Q_\sigma(M/H)$ y el sistema inverso queda:

$$\{Q_\sigma(M/K) : M/K \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_\tau\}.$$

□

Vamos a ver que es posible dar una caracterización de la clase de torsión de κ:

(2.2.4) Proposición.

$$\mathcal{T}_\kappa = \{M \in R\text{-}\mathbf{m\acute{o}d}\colon M^{(\sigma,\tau)} = 0\}.$$

Demostración. Por definición tenemos

$$\mathcal{T}_\kappa = \{M \in R\text{-}\mathbf{m\acute{o}d}\colon Hom_R(M,F) = 0 \text{ para todo } F \in \mathcal{F}_\kappa\}.$$

Sea $M \in \mathcal{T}_\kappa$, entonces para calcular la (σ,τ)-completación de M, utilizando el Lema 2.2.3, tomamos el límite inverso sobre el conjunto $\{Q_\sigma(M/N)\colon M/N \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_\tau\}$. En este caso tenemos $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_\tau \subseteq \mathcal{F}_\kappa$, y por tanto el sistema inverso se reduce a $\{0\}$, con lo que $M^{(\sigma,\tau)} = 0$, y la inclusión $\mathcal{T}_\kappa \subseteq \{M\colon M^{(\sigma,\tau)} = 0\}$ queda probada. Por otra parte, sea M un módulo con (σ,τ)-completación cero y consideremos un homomorfismo $f : M \to H$ tal que H es libre de κ-torsión. Podemos dibujar un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & H \arrow[r] & \prod\{Q_\sigma(F)\colon F \in \mathcal{T}_\tau\} \arrow[d, "p_F"'] \\ & & Q_\sigma(F) \end{tikzcd}$$

donde p_F es la proyección canónica. Es claro que si f no es cero, entonces existe algún F tal que la composición no es cero. Usando la factorización épica-mónica de esta flecha, existirá un submódulo K de M y un homomorfismo no nulo

$$M \longrightarrow M/K \longrightarrow Q_\sigma(M/K) \longrightarrow Q_\sigma(F),$$

de manera que $Q_\sigma(M/K) \neq 0$. Así $M^{(\sigma,\tau)} \neq 0$ y llegamos a una contradicción. □

(2.2.5) Corolario. *Con las notaciones anteriores tenemos:*

$$\sigma \leq \kappa$$

Demostración. Es fácil ver que si M es un R-módulo σ-torsión , entonces $M^{(\sigma,\tau)} = 0$, por tanto M es κ-torsión. □

Sean σ, τ teorías de torsión en R-**mód**. En [19] J. S. Golan define el *pseudocomplemento* de τ relativo a σ como la mayor teoría de torsión λ tal que $\tau \wedge \lambda \leq \sigma$ y lo representa por $(\sigma : \tau)$. Este concepto aparece de manera natural en el estudio de la completación.

(2.2.6) Lema. *Sea R un anillo σ-noetheriano, y σ, τ como antes, entonces κ es el pseudocomplemento de τ relativo a σ.*

Demostración. Denotemos por simplicidad λ al pseudocomplemento de τ relativo a σ. Probaremos en primer lugar que $\lambda \leq \kappa$; sea $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}(\sigma) \cap \mathcal{Z}(\tau)$, si $\mathfrak{p} \in \mathcal{Z}(\lambda)$, entonces $\mathfrak{p} \in \mathcal{Z}(\lambda) \cap \mathcal{Z}(\tau)$, así $\mathfrak{p} \in \mathcal{Z}(\sigma)$, que es una contradicción, por tanto $\mathcal{K}(\sigma) \cap \mathcal{Z}(\tau) \subseteq \mathcal{K}(\lambda)$, como κ es la mayor teoría de torsión tal que $\mathcal{K}(\sigma) \cap \mathcal{Z}(\tau) \subseteq \mathcal{K}(\kappa)$, entonces tenemos $\lambda \leq \kappa$. A continuación probaremos que $\mathcal{T}_\kappa \subseteq \mathcal{T}_\lambda$. Sea $X \in \mathcal{T}_\kappa \cap \mathcal{T}_\tau$, entonces $X \in \mathcal{T}_\tau$, y tenemos $X^{(\sigma,\tau)} = Q_\sigma(X)$. Por otro lado tenemos $X \in \mathcal{T}_\kappa$ y $X^{(\sigma,\tau)} = 0$, y así $Q_\sigma(X) = 0$, por lo que X es σ-torsión. Hemos demostrado $\kappa \leq \lambda$, lo que termina el razonamiento. □

(2.2.7) Proposición. *Con las notaciones anteriores tenemos:*

$$M^{(\sigma,\tau)} \cong (M/\kappa(M))^{(\sigma,\tau)}.$$

Demostración. Puesto que para todo H tal que $M/H \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_\tau$ tenemos que M/H es libre de κ-torsión, $\kappa(M) \subseteq H$. Ahora,

$$M^{(\sigma,\tau)} = \varprojlim \{Q_\sigma(M/H) : M/H \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_\tau\} \cong$$

$$\varprojlim \{Q_\sigma\left(\frac{M/\kappa(M)}{H/\kappa(M)}\right) : M/H \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_\tau\} \cong (M/\kappa(M))^{(\sigma,\tau)}$$

□

(2.2.8) Proposición. *Para cada R-módulo M tenemos que $M^{(\sigma,\tau)}$ es un R-módulo κ-cerrado.*

Demostración. Puesto que el límite inverso de κ-cerrados es κ-cerrado, sólo necesitaremos probar que todo R-módulo σ-cerrado de $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_\tau$ es κ-cerrado. Sea M un R-módulo en esas condiciones, entonces $E(M)$ está también en $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_\tau$, y probaremos ahora que $E(M)/M$ está también en $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_\tau$. Esto es una consecuencia del hecho de ser $\mathcal{T}_\tau$ cerrada para cocientes y de que M es σ-cerrado por lo que $\sigma(E(M)/M) = 0$. Por último consideremos un ideal I de R tal que $R/I \in \mathcal{T}_\kappa$ y el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \vdots & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & Hom_R\left(\frac{R}{I}, \frac{E(M)}{M}\right) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
\cdots \to Hom_R(R,M) & \longrightarrow & Hom_R(I,M) & \longrightarrow & Ext^1_R(\frac{R}{I}, M) & \to \cdots & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & Ext^1_R(\frac{R}{I}, E(M)) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \vdots & &
\end{array}$$

Puesto que $E(M)$ es inyectivo, $Ext^1_R(R/I, E(M)) = 0$ por ser $E(M)/M$ libre de κ-torsión. Por tanto tenemos que $Hom_R(R/I, E(M)/M) = 0$ y también $Ext^1_R(R/I, M) = 0$; entonces M es κ-inyectivo y como es libre de κ-torsión, es κ-cerrado. □

(2.2.9) Corolario. *Para cada R-módulo M existe un único monomorfismo*

$$\Psi_M : Q_\kappa(M) \longrightarrow M^{(\sigma,\tau)}$$

haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Q_\kappa(M) \arrow[rr, "\Psi_M"] & & M^{(\sigma,\tau)} \\ & M \arrow[ul, "j_{\kappa,M}"] \arrow[ur, "c_M"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Por ser $M^{(\sigma,\tau)}$ κ-cerrado, el homomorfismo Ψ_M existe y es único haciendo conmutativo el diagrama anterior. Para probar que Ψ_M es monomorfismo podemos reducirnos al caso en el que M es libre de κ-torsión; sea $0 \neq x \in Q_\kappa(M)$ y tomemos $r \in R$ tal que $0 \neq rx \in M$, pero puesto que c_M es un monomorfismo, entonces $\Psi_M j_{\kappa,M}(rx) \neq 0$ y por tanto $\Psi_M(x) \neq 0$. □

(2.2.10) Proposición. *En las mismas condiciones, podemos construir un diagrama conmutativo con filas exactas*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \kappa(M) \arrow[r] \arrow[d, "id_{\kappa(M)}"] & M \arrow[r, "j_{\kappa,M}"] \arrow[d, "id_M"] & Q_\kappa(M) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi_M"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \kappa(M) \arrow[r] & M \arrow[r, "c_M"] & M^{(\sigma,\tau)} \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde $A = \frac{Q_\kappa(M)}{Im(j_{\kappa,M})}$ *y* $B = \frac{M^{(\sigma,\tau)}}{Im(c_M)}$, *entonces el homomorfismo inducido* μ *es inyectivo y nos proporciona un isomorfismo entre* A *y la* κ*-torsión de* B.

Demostración. En el diagrama

$$\begin{tikzcd} Q_\kappa(M) \arrow[rr, "\Psi_M"] & & M^{(\sigma,\tau)} \\ & M \arrow[ul, "j_{\kappa,M}"] \arrow[ur, "c_M"'] & \end{tikzcd}$$

usamos los isomorfismos

$$Im(j_{\kappa,M}) \cong Im(c_M) \cong M/\kappa(M) \text{ y } Q_\kappa(M) \cong Im(\Psi_M).$$

Puesto que $A = \frac{Q_\kappa(M)}{Im(j_{\kappa,M})} \in \mathcal{T}_\kappa$, entonces tenemos $\frac{Q_\kappa(M)}{Im(j_{\kappa,M})} \subseteq \kappa\left(\frac{M^{(\sigma,\tau)}}{Im(c_M)}\right)$. Sea N el submódulo de $M^{(\sigma,\tau)}$ tal que $\kappa\left(\frac{M^{(\sigma,\tau)}}{Q_\kappa(M)}\right) = \frac{N}{Q_\kappa(M)}$. Como $Q_\kappa(M)$ es κ-cerrado, tenemos una descomposición de N de la manera sigiente: $N = Q_\kappa(M) \oplus N'$, con N' κ-torsión. Pero, al mismo tiempo, es libre de κ-torsión porque es un submódulo de $M^{(\sigma,\tau)}$, así que debe ser cero. Como consecuencia $\frac{M^{(\sigma,\tau)}}{Q_\kappa(M)}$ es libre de κ-torsión. Sea K el submódulo de $M^{(\sigma,\tau)}$ que satisface

$$\frac{K}{Im(j_{\kappa,M})} = \kappa\left(\frac{M^{(\sigma,\tau)}}{Im(c_M)}\right)$$

está claro que $Q_\kappa(M) \subseteq K$ y, por otra parte, $\frac{K}{Q_\kappa(M)} \subseteq \frac{M^{(\sigma,\tau)}}{Q_\kappa(M)}$, que es libre de κ-torsión. Entonces el homomorfismo canónico $\frac{K}{Im(j_{\kappa,M})} \to \frac{K}{Q_\kappa(M)}$ es cero, y por tanto $K = Q_\kappa(M)$. □

(2.2.11) Proposición. *Para cada R-módulo M tenemos isomorfismos:*

$$Q_\kappa(M^{(\sigma,\tau)}) \cong (Q_\kappa(M))^{(\sigma,\tau)} \cong M^{(\sigma,\tau)}.$$

Demostración. Puesto que $M^{(\sigma,\tau)}$ es κ-cerrado, tenemos el isomorfismo $M^{(\sigma,\tau)} \cong Q_\kappa(M^{(\sigma,\tau)})$. El resto se deduce fácilmente usando la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Q_\kappa(M) \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Observemos que podemos suponer $M \in \mathcal{F}_\kappa$ sin pérdida de generalidad; entonces la anterior sucesión exacta nos da otra sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M^{(\sigma,\tau)} \longrightarrow (Q_\kappa(M))^{(\sigma,\tau)} \longrightarrow A^{(\sigma,\tau)}$$

y puesto que A es κ-torsión, deducimos $A^{(\sigma,\tau)} = 0$, lo que finaliza la demostración.
□

(2.2.12) Observación. Esta Proposición generaliza el resultado bien conocido de N. Bourbaki [8, Prop. III.5.12 pag. 251], que reduce el problema de la completación a completar anillos de Zariski.

Problemas topológicos.

Vamos a trasladar la situación topológica que aparece en el caso de la completación I-ádica al caso general.

(2.2.13) Teorema. *Sea M un R-módulo, tenemos las siguientes dos propiedades:*

1. *$M^{(\sigma,\tau)}$ es (σ,τ)-Hausdorff.*
2. *La (σ,τ)-completación de M, $M^{(\sigma,\tau)}$, es un R-módulo completo con respecto a la topología*
$$\{N^{(\sigma,\tau)}\colon N \in \mathcal{L}_\tau(M)\}.$$

Demostración. La primera afirmación es obvia porque toda clase de libres de torsión es cerrada para límites inversos. Para la segunda, sea $N \in \mathcal{L}_\tau(M)$, y usemos el siguiente isomorfismo:

$$Q_\sigma\left(\frac{M^{(\sigma,\tau)}}{N^{(\sigma,\tau)}}\right) \cong (M/N)^{(\sigma,\tau)} = Q_\sigma\left(M/N\right).$$

Así tenemos

$$\varprojlim\{Q_\sigma\left(M/N\right) : N \in \mathcal{L}_\tau(M)\} \cong \varprojlim\{Q_\sigma\left(\frac{M^{(\sigma,\tau)}}{N^{(\sigma,\tau)}}\right) : N \in \mathcal{L}_\tau(M)\}.$$

□

En [11] los autores introducen el concepto de anillo σ-completo; aquí sería conveniente reformular esta definición para el caso general, así como extenderla para R-módulos.

Un R-módulo M se dice que es (σ,τ)-*completo* si $M^{(\sigma,\tau)} = Q_\kappa(M)$. Como consecuencia del Corolario 2.2.10, M es (σ,τ)-completo si, y sólo si Ψ_M es un isomorfismo.

Apéndice.

Cuando comenzamos este Capítulo, impusimos la hipótesis de ser σ una teoría de torsión estable. Aunque en el Lema 2.1.2 se hace uso de ella, la hipótesis puede ser levantada fácilmente ya que Rm_N es libre de σ-torsión y entonces la descripción de la σ-localización dada en el Lema 1.1.14 y en la Proposición 1.2.15 coinciden.

Realmente la condición de estabilidad para σ fué originalmente impuesta para que τ fuese estable. Pero como podremos observar en el siguiente razonamiento, ésto no es necesario. Observemos que la hipótesis de estabilidad para τ es utilizada en la última etapa de la demostración del Teorema 2.1.5 para justificar la exactitud a izquierda del funtor completación. Sin embargo, el Lema 2.2.3 y la siguiente Proposición nos permitirán obtener el mismo resultado con la única condición de ser R un anillo σ-noetheriano.

(2.2.14) Proposición. *Sea R un anillo σ-noetheriano y τ una teoría de torsión en R-***mód** *tal que $\sigma \leq \tau$. Si*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L$$

es una sucesión exacta de R-módulos libres de σ-torsión, entonces los filtros

$$\mathcal{L}_1(N) = \{X \leq N : N/X \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_\tau\}$$

y

$$\mathcal{L}_2(N) = \{Y \cap N : Y \leq M \text{ y } M/Y \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_\tau\}$$

coinciden.

Demostración. Es claro que $\mathcal{L}_2(N) \subseteq \mathcal{L}_1(N)$. Para la otra inclusión sea $X \in \mathcal{L}_1(N)$, entonces si $X = N$ es claro que $X = M \cap N$ y por tanto $X \in \mathcal{L}_2(N)$. En otro caso tenemos que $0 \neq N/X \leq \tau(M/X) \leq M/X$. Se verifica que M/X es libre de σ-torsión puesto que existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N/X \longrightarrow M/X \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

cuyos extremos son libres de torsión (observar que $M/N \leq L \in \mathcal{F}_\sigma$).

Supongamos ahora que $\tau(M/X) \leq^e M/X$ es una extensión esencial, entonces se verifica

$$Ass_f(\tau(M/X)) = Ass(\tau(M/X)) = Ass(M/X) = Ass_f(M/X);$$

como R es τ-noetheriano, entonces τ es bién centrada y resulta que $M/X \in \mathcal{T}_\tau$.

Si por el contrario llamando Z/X a $\tau(M/X)$ se tiene que la inclusión no es esencial en M/X, existirá $0 \neq Y/X \leq M/X$ tal que $(Y/X) \cap (Z/X) = 0$. Tomemos Y maximal verificando esta propiedad, entonces $Y/X \in \mathcal{F}_\tau$ y como

$$\frac{Z/X}{Y/X \cap Z/X} \cong \frac{Y/X + Z/X}{Y/X} \cong \frac{Y+Z}{Y} \leq^e \frac{M}{Y}$$

tenemos $M/Y \in \mathcal{T}_\tau$. Finalmente, ya que $(Y/X) \cap (N/X) = 0$ al ser uno libre de τ-torsión y el otro τ-torsión, concluimos que $Y \cap N = X$ y por tanto $X \in \mathcal{L}_2$. □

(2.2.15) Corolario. *Si R es un anillo σ-noetheriano y $\sigma \leq \tau$, entonces la clase de los R-módulos $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_\tau$ es cerrada para extensiones esenciales.*

Demostración. Sea $M \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_\tau$ y $M \leq^e E$, entonces

$$Ass_f(M) = Ass(M) = Ass(E) = Ass_f(E)$$

y por tanto $Ass_f(E) \subseteq \mathcal{K}(\sigma) \cap \mathcal{Z}(\tau)$. Así aplicando el Corolario 1.1.44 tenemos el resultado. □

Nos gustaría hacer ahora un comentario; con la hipótesis de estabilidad el desarrollo es más natural y por eso fue impuesta en una primera aproximación al problema. Sin embargo el probar que una determinada teoría de torsión es estable es complicado por lo que el que no sea necesaria nos permite poder estudiar nuevas situaciones.

Capítulo 3

Estructura de la completación.

En este Capítulo vamos a estudiar un caso particular, aquel en que $\tau = \sigma^1$ el primer esqueleto de σ, esto es, la teoría de torsión determinada por el conjunto genéricamente estable $\mathcal{K}(\sigma) \setminus \mathcal{C}(\sigma)$, donde $\mathcal{C}(\sigma)$ es el conjunto de los elementos maximales de $\mathcal{K}(\sigma)$. Para llegar a este objetivo necesitaremos un paso previo que consiste en estudiar la completación relativa al par $(\sigma, \pi_{\mathfrak{p}})$ para cada ideal primo $\mathfrak{p} \in \mathcal{C}(\sigma)$. Veremos que podemos descomponer la (σ, σ^1)-completación en completaciones más simples usando $\pi_{\mathfrak{p}}$.

A través de este Capítulo R denotará a un anillo conmutativo y σ será una teoría de torsión en R-**mód**, tal que R es σ-noetheriano.

3.1 $(\sigma, \pi_{\mathfrak{p}})$-completación.

Sea $\mathfrak{p} \in \mathcal{C}(\sigma)$, y denotemos por $\pi_{\mathfrak{p}}$ a la teoría de torsión determinada por la siguiente partición del espectro de R:

$$\mathcal{Z}(\pi_{\mathfrak{p}}) = \mathcal{Z}(\sigma) \cup \{\mathfrak{p}\}$$

$$\mathcal{K}(\pi_{\mathfrak{p}}) = \mathcal{K}(\sigma) \setminus \{\mathfrak{p}\}$$

Observemos que $\sigma \leq \pi_{\mathfrak{p}}$ y por tanto R es $\pi_{\mathfrak{p}}$–noetheriano.

Vamos a calcular $R^{(\sigma,\pi_{\mathfrak{p}})}$ paso a paso.

1. En primer lugar consideremos el pseudocomplemento $\kappa = (\sigma : \pi_{\mathfrak{p}})$ de $\pi_{\mathfrak{p}}$ relativo a σ. Es conocido del capítulo anterior que $\mathcal{K}(\kappa)$ es el menor conjunto genéricamente estable conteniendo a $\mathcal{K}(\sigma) \cap \mathcal{Z}(\pi_{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{p}\}$. Así $\kappa = \sigma_{R\setminus\mathfrak{p}}$. La localización en esta teoría de torsión se denota por $(-)_{\mathfrak{p}}$, como de costumbre.

2. Usando la Proposición 2.2.11 y el razonamiento anterior, obtenemos:

$$R^{(\sigma,\pi_{\mathfrak{p}})} \cong (Q_{\kappa}(R))^{(\sigma,\pi_{\mathfrak{p}})} = (R_{\mathfrak{p}})^{(\sigma,\pi_{\mathfrak{p}})}.$$

3. Observamos que $\pi_{\mathfrak{p}}$ induce una teoría de torsión $\widetilde{\pi_{\mathfrak{p}}}$ en $R_{\mathfrak{p}}$-**mód** mediante:

$$\text{si } M \in R_{\mathfrak{p}}\text{-}\mathbf{m\acute{o}d}, \text{ entonces } M \in \mathcal{T}_{\widetilde{\pi_{\mathfrak{p}}}} \text{ si, y sólo si, } M \in \mathcal{T}_{\pi_{\mathfrak{p}}}.$$

Esta teoría de torsión $\widetilde{\pi_{\mathfrak{p}}}$ determina una partición de $Spec(R_{\mathfrak{p}})$ de la siguiente forma $\mathcal{Z}(\widetilde{\pi_{\mathfrak{p}}}) = \{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\}$ y $\mathcal{K}(\widetilde{\pi_{\mathfrak{p}}}) = Spec(R_{\mathfrak{p}}) \setminus \{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\}$. Así, obtenemos que $\widetilde{\pi_{\mathfrak{p}}}$ es exactamente la teoría de torsión $\sigma_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}$ generada por el $R_{\mathfrak{p}}$-módulo $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$.

Como preparación para el resultado principal de esta Sección, necesitamos la siguiente Proposición:

(3.1.1) Proposición. *Si I es un R-submódulo de $R_{\mathfrak{p}}$ tal que $0 \neq R_{\mathfrak{p}}/I \in \mathcal{F}_{\sigma} \cap \mathcal{T}_{\pi_{\mathfrak{p}}}$, entonces $I = I_{\mathfrak{p}}$.*

Demostración. Usando el Lema 1.1.33 y el Corolario 1.1.44 se obtiene

$$\varnothing \neq Ass(R_{\mathfrak{p}}/I) \subseteq \mathcal{K}(\sigma) \cap \mathcal{Z}(\pi_{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{p}\}.$$

Por tanto, por [47, Proposition IX.4.2] los submódulos $\sigma_{R\setminus\mathfrak{p}}$-cerrados de $R_{\mathfrak{p}}$ son exactamente aquellos submódulos tales que el cociente es libre de $\sigma_{R\setminus\mathfrak{p}}$-torsión, y tenemos que $I = I_{\mathfrak{p}}$. □

(3.1.2) Teorema. *Con las mismas notaciones de la Proposición anterior*

$$(R_{\mathfrak{p}})^{(\sigma,\pi_{\mathfrak{p}})} = \widehat{R_{\mathfrak{p}}},$$

donde $\widehat{R_{\mathfrak{p}}}$ *es la* $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$*-completación clásica del anillo local* $(R_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})$.

Demostración. Por definición

$$(R_{\mathfrak{p}})^{(\sigma,\pi_{\mathfrak{p}})} = \varprojlim\{Q_\sigma(R_{\mathfrak{p}}/I) \colon R_{\mathfrak{p}}/I \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_{\pi_{\mathfrak{p}}}\} =$$

y usando la Proposición anterior obtenemos

$$= \varprojlim\{Q_\sigma(R_{\mathfrak{p}}/I_{\mathfrak{p}}) \colon R_{\mathfrak{p}}/I_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{T}_{\sigma_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}}\} =$$

ahora, puesto que la composición $Q_\sigma \circ (-)_{\mathfrak{p}}$ es exactamente $(-)_{\mathfrak{p}}$ para todo $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}(\sigma)$, la igualdad puede continuarse en la forma:

$$= \varprojlim\{R_{\mathfrak{p}}/I_{\mathfrak{p}} \colon R_{\mathfrak{p}}/I_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{T}_{\sigma_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}}\} =$$

como $R_{\mathfrak{p}}$ es un anillo noetheriano y el filtro de Gabriel $\mathcal{L}(\sigma_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}})$ tiene una base de filtro de la forma $\{\mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}} \colon n \in \mathbb{N}\}$, entonces

$$= \varprojlim\{R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}} \colon n \in \mathbb{N}\} = \widehat{R_{\mathfrak{p}}}.$$

□

Un resultado similar se puede establecer para módulos σ-finitamente generados, como vemos a continuación:

(3.1.3) Corolario. *Para un* R*-módulo* M σ*-finitamente generado se verifica:*

$$M^{(\sigma,\pi_{\mathfrak{p}})} \cong \widehat{M_{\mathfrak{p}}}.$$

Demostración. Como $\sigma \leq \sigma_{R\setminus\mathfrak{p}}$, deducimos que $M_{\mathfrak{p}}$ es un $R_{\mathfrak{p}}$-módulo finitamente generado. Como antes, tenemos

$$M^{(\sigma,\pi_{\mathfrak{p}})} \cong (M_{\mathfrak{p}})^{(\sigma,\pi_{\mathfrak{p}})}$$

y los R-submódulos N de $M_\mathfrak{p}$ tales que $M_\mathfrak{p}/N \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_{\pi_\mathfrak{p}}$ son exactamente los $R_\mathfrak{p}$-submódulos de $M_\mathfrak{p}$ tales que el cociente pertenece a $\mathcal{T}_{\sigma_\mathfrak{p} R_\mathfrak{p}}$. Finalmente, la topología de $M_\mathfrak{p}$ inducida por $\sigma_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}$ tiene una base de filtro de la forma

$$\{\mathfrak{p}^n M_\mathfrak{p} \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Combinando los resultados previos queda probada la afirmación.

$\square$

(3.1.4) Observación. Es bien conocido que si $M_\mathfrak{p}$ es finitamente generado como $R_\mathfrak{p}$-módulo, entonces $\widehat{M_\mathfrak{p}} \cong M_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} \widehat{R_\mathfrak{p}}$, cf. [8, Théorème III.3.3]. También, si $\mathfrak{p} \notin Supp(M)$, entonces $M_\mathfrak{p} = 0$ y por tanto $M^{(\sigma,\pi_\mathfrak{p})} = 0$.

3.2 (σ, σ^1)-completación.

Dada la teoría de torsión σ de manera que R sea σ-noetheriano, consideramos el conjunto

$$\mathcal{K}^1 = \{\mathfrak{q} \in Spec(R) \colon \exists \mathfrak{p} \in \mathcal{C}(\sigma), \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}\} = \mathcal{K}(\sigma) \setminus \mathcal{C}(\sigma).$$

Este conjunto $\mathcal{K}^1$ es, de manera clara, genéricamente estable y por tanto, dado que R es σ-noetheriano y $\mathcal{K}^1 \leq \mathcal{K}(\sigma)$, el conjunto $\mathcal{K}^1$ determina de forma única un funtor núcleo idempotente σ^1 con $\mathcal{K}(\sigma^1) = \mathcal{K}^1$ que denominaremos el *primer esqueleto* de σ. Además $\sigma \leq \sigma^1$ y por tanto R es también σ^1-noetheriano.

(3.2.1) Ejemplo. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de R, entonces

$$\mathcal{K}(\sigma^1_{R\setminus\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{q} \in Spec(R) \colon \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}\}.$$

Veamos algunas situaciones particulares:

1. Si R es un dominio y $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de altura 1, entonces $\sigma^1_{R\setminus\mathfrak{p}} = \sigma_{R\setminus 0}$.
2. Si R es un anillo local noetheriano con ideal maximal $\mathfrak{m}$, entonces

$$\mathcal{K}(\sigma^1_{R\setminus\mathfrak{m}}) = \{\mathfrak{q} \in Spec(R) \colon \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{m}\} = Spec(R) \setminus \{\mathfrak{m}\} = \mathcal{K}(\sigma_{\mathfrak{m}}).$$

(3.2.2) Proposición. *([12, V,1.8]) El primer esqueleto de σ es la teoría de torsión cogenerada por*

$$E = \oplus\{E(R/\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \mathcal{C}(\sigma)\}.$$

$\circ$

(3.2.3) Proposición. *Sea σ teoría de torsión en R-*mód *de manera que R sea σ-noetheriano, y consideremos la teoría de torsión $\vee\{\pi_{\mathfrak{p}} \colon \mathfrak{p} \in \mathcal{C}(\sigma)\}$. Entonces $\sigma^1 = \vee\{\pi_{\mathfrak{p}} \colon \mathfrak{p} \in \mathcal{C}(\sigma)\}$.*

Demostración. Puesto que $\sigma \leq \vee\{\pi_{\mathfrak{p}}: \mathfrak{p} \in \mathcal{C}(\sigma)\}$ y $\sigma \leq \sigma^1$, ambas pueden ser descritas mediante el conjunto genéricamente estable que determinan. Por definición tenemos $\mathcal{K}(\pi_{\mathfrak{p}}) = \mathcal{K}(\sigma) \setminus \{\mathfrak{p}\}$, y así por la siguente cadena de igualdades obtenemos el resultado:

$$\mathcal{K}(\vee\pi_{\mathfrak{p}}) = \cap\mathcal{K}(\pi_{\mathfrak{p}}) = \cap(\mathcal{K}(\sigma) \setminus \{\mathfrak{p}\}) = \mathcal{K}(\sigma) \setminus \mathcal{C}(\sigma) = \mathcal{K}(\sigma^1).$$

□

(3.2.4) Corolario. *Si M es un R-módulo, entonces*

$$M^{(\sigma,\sigma^1)} = M^{(\sigma,\vee\pi_{\mathfrak{p}})}.$$

Con esta identificación entre σ^1 y $\vee\pi_{\mathfrak{p}}$, podemos manejar la teoría de torsión σ^1 de una manera cómoda, usando la descripción de su filtro de Gabriel dada en la Proposición 1.1.17. De esta forma tenemos:

$$\mathcal{L}(\sigma^1) = \mathcal{L}(\vee\pi_{\mathfrak{p}}) = \{I_{\mathfrak{p}_1} I_{\mathfrak{p}_2} \dots I_{\mathfrak{p}_n}: I_{\mathfrak{p}_i} \in \mathcal{L}(\pi_{\mathfrak{p}_i})\}.$$

La siguiente definición nos proporcionará un método para descomponer módulos, y será una herramienta muy útil para nuestros propósitos:

Sea R un anillo, dos ideales I y J se dirán *σ-comaximales* si $I + J \in \mathcal{L}(\sigma)$.

Una consecuencia inmediata de la definición es que los ideales I y J son σ-comaximales si, y sólo si, se verifica $Q_\sigma(I + J) = Q_\sigma(R)$.

(3.2.5) Proposición.

1. *I, J son ideales σ-comaximales R si, y sólo si, el homomorfismo natural*

$$Q_\sigma(R/I \cap J) \longrightarrow Q_\sigma(R/I) \times Q_\sigma(R/J)$$

es un isomorfismo.

2. *Si I, I_1, $\dots$, I_n es un conjunto de ideales σ-comaximales dos a dos de R, entonces $I + I_1 \dots I_n \in \mathcal{L}(\sigma)$.*

3. *Si $I_1, \ldots, I_n$ es un conjunto de ideales σ-comaximales dos a dos de R, entonces*
$$(I_1 \cap \ldots \cap I_n)/I_1 \ldots I_n \in \mathcal{L}(\sigma).$$

4. *Si $I_1, \ldots, I_n$ son un conjunto de ideales σ-comaximales dos a dos de R, entonces el homomorfismo natural*
$$Q_\sigma(R/I_1 \cap \ldots \cap I_n) \longrightarrow Q_\sigma(R/I_1) \times \cdots \times Q_\sigma(R/I_n)$$
es un isomorfismo.

Demostración.

1. Supongamos que I, J son ideales σ-comaximales de R. El homomorfismo natural
$$\Phi : R \longrightarrow R/I \times R/J$$
induce un homomorfismo
$$Q_\sigma(\Phi) : Q_\sigma(R) \longrightarrow Q_\sigma(R/I \times R/J)$$
cuya descomposición épica-mónica es
$$Q_\sigma(\Phi) : Q_\sigma(R) \longrightarrow Q_\sigma(R/I \cap J) \stackrel{Q_\sigma(\Phi')}{\longrightarrow} Q_\sigma(R/I \times R/J).$$
Probaremos que $(R/I \times R/J)/\Phi(R) \in \mathcal{T}_\sigma$, con lo que $Q_\sigma(\Phi')$ que es un monomorfismo, será un isomorfismo. Esto será suficiente para obtener lo deseado, puesto que σ es de tipo finito, y por tanto Q_σ conmuta con sumas directas.

Vamos a probar que $(R/I \times R/J)/\Phi(R)$ es σ-torsión si, y sólo si, I y J son ideales σ-comaximales de R.

Observemos en primer lugar que $(I+J)/I \times (I+J)/J \subseteq \Phi(R)$; tomemos $(j+I, i+J) \in (I+J)/I \times (I+J)/J$ con $j \in J$ e $i \in I$, así si definimos $r = i + j$, es fácil ver que $\Phi(r) = (j+I, i+J)$.

Supongamos ahora que I y J son ideales σ-comaximales de R y tomemos $(a+I, b+J) \in R/I \times R/J$, existirá $H \in \mathcal{L}(\sigma)$ tal que Ha, $Hb \subseteq I + J$, y por tanto $H(a+I, b+J) \subseteq (I+J)/I \times (I+J)/J \subseteq \Phi(R)$.

Para el recíproco, si $(R/I \times R/J)/\Phi(R)$ es σ-torsión y $r \in R$, entonces $(r+I, 0+J) \in (R/I \times R/J)$ y existe $H \in \mathcal{L}(\sigma)$ tal que $H(r+I, 0+J) \subseteq \Phi(R)$. De esta inclusión obtenemos que para cualquier $h \in H$ existe $r_h \in R$ tal que $r_h + I = hr + I$ y $r_h + J = 0 + J$, por tanto $hr \in I + J$ y $Hr \subseteq I + J$ y así I y J son ideales σ-comaximales de R.

2. Puesto que $I + I_i \in \mathcal{L}(\sigma)$ para $i = 1, \ldots, n$, tenemos $\Pi_{i=1}^n(I + I_i) \in \mathcal{L}(\sigma)$ y la siguiente inclusión es clara

$$\Pi_{i=1}^n(I + I_i) \subseteq I + I_1 \ldots I_n,$$

por tanto $I + I_1 \ldots I_n \in \mathcal{L}(\sigma)$.

3. En este apartado, usando los anteriores, tenemos que

$$(I_i + \Pi_{j>i} I_j) \in \mathcal{L}(\sigma) \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n-1.$$

El producto de todos estos ideales está contenido en la suma

$$\sum_{i=1}^{n-1} I_1 \ldots I_{i-1} I_{i+1} \ldots I_n,$$

por lo que la siguiente inclusión es inmediata

$$\left(\Pi_{i=1}^{n-1}(I_i + \Pi_{j>i} I_j)\right)(I_1 \cap \ldots \cap I_n) \subseteq I_1 \ldots I_n$$

y de ella se obtiene el resultado deseado.

4. Consideremos la aplicación canónica

$$\Phi : R \longrightarrow R/I_1 \times \ldots \times R/I_n.$$

Como en el apartado 1, sólo necesitamos demostrar que el cociente $(R/I_1 \times \ldots \times R/I_n)/\Phi(R)$ es σ-torsión. Sea $(x_1 + I_1, \ldots, x_n + I_n) \in R/I_1 \times \cdots \times R/I_n$. Puesto que $I_i + I_1 \ldots I_{i-1} I_{i+1} \ldots I_n$ es un elemento de $\mathcal{L}(\sigma)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces existen $H_i \in \mathcal{L}(\sigma)$ tales que

$$H_i x_i \subseteq I_i + I_1 \ldots I_{i-1} I_{i+1} \ldots I_n$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. Si definimos $H = H_1 \cap \ldots \cap H_n$, para cualquier $h \in H$ existe $y_i \in I_i$ y $x_{(i)} \in I_1 \ldots I_{i-1} I_{i+1} \ldots I_n$ tal que $hx_i = y_i + x_{(i)}$. Si tomamos $x = x_{(1)} + \ldots + x_{(n)}$, tendremos

$$x + I_i = x_{(i)} + I_i = hx_i + I_i.$$

Así $H(x_1 + I_1, \ldots, x_n + I_n) \subseteq \Phi(R)$ y esto prueba el resultado.

□

(3.2.6) Lema. *Sea $I_1, \ldots, I_n$ un conjunto de ideales σ-comaximales dos a dos de R y sea M un R-módulo, entonces el cociente*

$$(I_1M \cap \ldots \cap I_nM)/(I_1 \ldots I_n)M$$

es σ-torsión.

Demostración. Por la Proposición 3.2.5 tenemos que $\Pi_{i=1}^{n-1}(I_i + \Pi_{j>i}I_j) \in \mathcal{L}(\sigma)$. Sea $m \in I_1M \cap \ldots \cap I_nM$, entonces

$$(\Pi_{i=1}^{n-1}(I_i + \Pi_{j>i}I_j))m \subseteq (I_1 \ldots I_n)M$$

y el resultado queda demostrado. □

El último punto en la Proposición 3.2.5 puede generalizarse para un R-módulo arbitrario M. Más explícitamente, podemos enunciar:

(3.2.7) Proposición. *Si $I_1, \ldots, I_n$ es un conjunto de ideales σ-comaximales dos a dos de R, entonces el homomorfismo natural*

$$Q_\sigma(M/I_1 \ldots I_nM) \longrightarrow Q_\sigma(M/I_1M) \times \cdots \times Q_\sigma(M/I_nM)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Consideremos el homomorfismo

$$\Psi : M \longrightarrow M/I_1M \times \cdots \times M/I_nM$$

y la descomposición épica-mónica de $Q_\sigma(\Psi)$ que es

$$Q_\sigma(M) \stackrel{Q_\sigma(\Psi)}{\longrightarrow} Q_\sigma(M/I_1M \cap \cdots \cap I_nM) \longrightarrow Q_\sigma(M/I_1M \times \cdots \times M/I_nM).$$

Un argumento similar al del apartado 4 de la Proposición 3.2.5 demuestra que

$$Q_\sigma(M/I_1M \cap \cdots \cap I_nM) \cong Q_\sigma(M/I_1M \times \cdots \times M/I_nM).$$

Ahora por el Lema anterior, el homomorfismo

$$M/(I_1 \cdots I_n)M \longrightarrow M/I_1M \cap \cdots \cap I_nM$$

induce un isomorfismo

$$Q_\sigma(M/(I_1 \cdots I_n)M) \cong Q_\sigma(M/I_1M \cap \cdots \cap I_nM)$$

lo que prueba el resultado. $\square$

(3.2.8) Proposición.

1. *Sean I y J ideales de R tales que $R/I \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_{\pi_\mathfrak{p}}$ y $R/J \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_{\pi_\mathfrak{q}}$ con $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q} \in \mathcal{C}(\sigma)$. Entonces I, J son σ-comaximales.*

2. *Sea M un R-módulo σ-finitamente generado, I, J como antes, entonces*

$$Hom_R(Q_\sigma(M/IM), Q_\sigma(M/JM)) = 0.$$

Demostración.

1. Sabemos que $V(I+J) = V(I) \cap V(J)$. Ahora, observemos que $\varnothing \neq Ass(R/I) = \{\mathfrak{p}\}$ y también que $\mathfrak{p}$ es el único ideal primo minimal de $V(I)$. La misma afirmación es cierta para J. Por tanto $V(I+J) \subseteq \mathcal{Z}(\sigma)$ y así $R/(I+J) \in \mathcal{T}(\sigma)$.

2. El módulo $Q_\sigma(M/JM)$ pertenece a $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_{\pi_\mathfrak{p}} \subseteq \mathcal{F}_{\sigma_{R\setminus\mathfrak{q}}}$. Lo único que queda por probar para obtener la afirmación es que el R-módulo $Q_\sigma(M/IM)$ es $\sigma_{R\setminus\mathfrak{q}}$-torsión. Es conocido que M/IM es $\sigma_{R\setminus\mathfrak{q}}$-torsión ya que

$$\varnothing \neq Ass(M/IM) = \{\mathfrak{p}\} \subseteq \mathcal{Z}(\sigma_{R\setminus\mathfrak{q}}).$$

Ahora, como $(M/IM)/\sigma(M/IM)$ es libre de σ-torsión y $\sigma_{R\setminus\mathfrak{q}}$-torsión, aplicando el Corolario 2.2.15 obtenemos que también $Q_\sigma((M/IM)/\sigma(M/IM)) = Q_\sigma(M/IM)$ es un módulo de $\sigma_{R\setminus\mathfrak{q}}$-torsión.

$\square$

(3.2.9) Lema. *Sea M un R-módulo σ-finitamente generado, entonces*

$$M^{(\sigma,\sigma^1)} \cong \varprojlim\{M^{(\sigma,\pi_\mathfrak{p})}\colon \mathfrak{p} \in \mathcal{C}(\sigma)\}.$$

En particular, esto ocurre para $M = R$.

Demostración. Daremos la demostración para R por razones de simplicidad en la notación, pero es fácil comprobar que funciona para cualquier R-módulo σ-finitamente generado M.

$$R^{(\sigma,\sigma^1)} = R^{(\sigma,\vee\pi_\mathfrak{p})} \cong \varprojlim\{Q_\sigma(R/I_{\mathfrak{p}_1}\dots I_{\mathfrak{p}_n})\colon I_{\mathfrak{p}_i} \in \mathcal{L}(\mathfrak{p}_i),\ \mathfrak{p}_i \in \mathcal{C}(\sigma)\}.$$

Observemos que $I_{\mathfrak{p}_i}$ y $I_{\mathfrak{p}_j}$ son σ-comaximales cuando $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$. Por la Proposición 3.2.5 existe un isomorfismo

$$Q_\sigma(R/I_{\mathfrak{p}_1}\dots I_{\mathfrak{p}_n}) \cong Q_\sigma(R/I_{\mathfrak{p}_1}) \times \cdots \times Q_\sigma(R/I_{\mathfrak{p}_n}).$$

Ahora usemos que $Hom(Q_\sigma(R/I_{\mathfrak{p}_i}), Q_\sigma(R/I_{\mathfrak{p}_j})) = 0$ cuando $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$. Por tanto, el límite inverso queda

$$R^{(\sigma,\sigma^1)} \cong \varprojlim\{\varprojlim\{Q_\sigma(R/I_{\mathfrak{p}_i})\colon R/I_{\mathfrak{p}_i} \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_{\pi_{\mathfrak{p}_i}}\}\colon \mathfrak{p}_i \in \mathcal{C}(\sigma)\} \cong$$

$$\cong \varprojlim\{R^{(\sigma,\pi_\mathfrak{p})}\colon \mathfrak{p} \in \mathcal{C}(\sigma)\}.$$

□

(3.2.10) Teorema. *Si M es σ-finitamente generado, entonces*

$$M^{(\sigma,\sigma^1)} \cong \Pi\{\widehat{M_\mathfrak{p}}\colon \mathfrak{p} \in \mathcal{C}(\sigma)\}.$$

En particular esto se verifica para $M = R$.

Demostración. Por el lema anterior

$$M^{(\sigma,\sigma^1)} \cong \varprojlim\{M^{(\sigma,\pi_\mathfrak{p})}\colon \mathfrak{p} \in \mathcal{C}(\sigma)\}$$

y usando los cálculos que aparecen en la Sección 3.1 tenemos:

$$M^{(\sigma,\sigma^1)} \cong \varprojlim\{\widehat{M_\mathfrak{p}}\colon \mathfrak{p} \in \mathcal{C}(\sigma)\}.$$

Para demostrar que este límite inverso es un producto, probaremos que no existen homomorfismos no nulos entre $\widehat{M_\mathfrak{p}}$ y $\widehat{M_\mathfrak{q}}$ cuando $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$. Observemos el siguiente diagrama

$$\widehat{M_\mathfrak{p}} \xrightarrow{f} \widehat{M_\mathfrak{q}} \xrightarrow{p_n} M_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^n M_\mathfrak{q}$$

donde p_n es la proyección canónica. Es claro que el homomorfismo f es cero si, y sólo si, cada composición con p_n es cero para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, puesto que $M_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^n M_\mathfrak{q} \in \mathcal{F}_{\sigma_{R\setminus\mathfrak{q}}}$, necesitamos probar que $\widehat{M_\mathfrak{p}}$ es $\sigma_{R\setminus\mathfrak{q}}$-torsión. Por la Observación 3.1.4 tenemos que $M_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} \widehat{R_\mathfrak{p}} \cong \widehat{M_\mathfrak{p}}$, y entonces será suficiente probar que $\widehat{R_\mathfrak{p}}$ es $\sigma_{R\setminus\mathfrak{q}}$-torsión. Pero $R/\mathfrak{p}$ es $\sigma_{R\setminus\mathfrak{q}}$-torsión y libre de $\sigma_{R\setminus\mathfrak{q}}$-torsion, por tanto usando el Corolario 2.2.15 también lo es $E(R/\mathfrak{p})$. Por ota parte, sabemos que $\widehat{R_\mathfrak{p}} \cong End(E(R/\mathfrak{p}))$, ver [41, Corollary 3.10]. Sea $\phi \in End(E(R/\mathfrak{p}))$; ϕ está determinado por $\phi(1) \in E(R/\mathfrak{p}) \in \mathcal{T}_{\sigma_{R\setminus\mathfrak{q}}}$. De esta manera, existe $I \in \mathcal{L}(\sigma_{R\setminus\mathfrak{q}})$ tal que $I\phi(1) = 0$ y por tanto $I\phi = 0$. Así, $\phi \in \sigma_{R\setminus\mathfrak{q}}\left(\widehat{R_\mathfrak{p}}\right)$ y la demostración está terminada. □

(3.2.11) Corolario. *Bajo las mismas hipótesis se tiene*

$$M^{(\sigma,\sigma^1)} = \Pi\{\widehat{M_\mathfrak{p}}\colon \mathfrak{p} \in \mathcal{C}(\sigma) \cap Supp(M)\}$$

Demostración. Se sigue directamente de la Observación 3.1.4 y del Teorema anterior. □

3.3 La exactitud del funtor (σ, σ^1)-completación.

Hemos obtenido en la Sección 3.2 la exactitud a izquierda del funtor de (σ, τ)-completación. Pero existen algunos casos en los que este funtor es exacto, al menos sobre una clase restringida de R-módulos, los que son σ-finitamente generados:

(3.3.1) Proposición. *Toda sucesión exacta de R-módulos σ-finitamente generados*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (M')^{(\sigma,\sigma^1)} \longrightarrow M^{(\sigma,\sigma^1)} \longrightarrow (M'')^{(\sigma,\sigma^1)} \longrightarrow 0$$

Demostración. La localización en $\mathfrak{p}$ es siempre exacta, así para cada $\mathfrak{p} \in \mathcal{C}(\sigma)$ obtenemos una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow (M')_{\mathfrak{p}} \longrightarrow M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (M'')_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$$

Como para todo $\mathfrak{p} \in \mathcal{C}(\sigma)$ tenemos $\sigma \leq \sigma_{R\setminus\mathfrak{p}}$ y cada módulo en la sucesión anterior es un $R_{\mathfrak{p}}$-módulo finitamente generado. Ahora, haciendo uso del resultado correspondiente para la completación clásica, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \widehat{(M')_{\mathfrak{p}}} \longrightarrow \widehat{M_{\mathfrak{p}}} \longrightarrow \widehat{(M'')_{\mathfrak{p}}} \longrightarrow 0.$$

Con esto y con el Teorema 3.2.10 se completa la demostración. □

(3.3.2) Corolario. *Para todo par de R-módulos σ-finitamente generados M y N, tenemos*

$$M^{(\sigma,\sigma^1)} \oplus N^{(\sigma,\sigma^1)} \cong (M \oplus N)^{(\sigma,\sigma^1)}$$

Como es bién sabido, en el caso de la completación I-ádica existe un isomorfismo entre la completación de un módulo finitamente generado y el producto tensor con la completación $\widehat{R}$ de R. El mismo resultado no puede obtenerse, por el momento, para nuestro tipo de completación, pero nos acercaremos tanto como nos es posible.

En primer lugar, definimos un homomorfismo $\mu_M : R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes M \longrightarrow M^{(\sigma,\sigma^1)}$ de la siguiente manera: $\mu_M((r_I)_{I\in\mathcal{L}(\sigma^1)} \otimes m) = (k_N)_{N\in\mathcal{L}_{\sigma^1}(M)}$, determinado por la propiedad

$$k_{IM} = r_I m_{IM} \text{ cuando } N = IM.$$

(Aquí representamos por m_{IM} la imagen de $m + IM \in M/IM$ en $Q_\sigma(M/IM)$).

Puesto que $R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R R \cong R^{(\sigma,\sigma^1)}$, usando el Corolario 3.3.2, se obtiene

$$R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R R^n \cong (R^n)^{(\sigma,\sigma^1)}$$

(3.3.3) Proposición. *Sea M un R-módulo σ-finitamente generado. Elijamos $N \leq M$ finitamente generado tal que $M/N \in \mathcal{T}_\sigma$. Entonces*

$$R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R N \cong N^{(\sigma,\sigma^1)}$$

y en el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R N \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R M \arrow[d] \\ N^{(\sigma,\sigma^1)} \arrow[r, "\cong"] & M^{(\sigma,\sigma^1)} \end{tikzcd}$$

las flechas vertical-izquierda y horizontal-inferior son isomorfismos de R-módulos.

Demostración. Sea N el submódulo adecuado de M; es posible encontrar una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow R^n \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

con K un módulo σ-finitamente generado y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc}
 & R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R K & \longrightarrow & R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R R^n & \longrightarrow & R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R N & \to 0 \\
 & \downarrow{\scriptstyle \mu_K} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{R^n}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_N} & \\
0 \to & K^{(\sigma,\sigma^1)} & \longrightarrow & (R^n)^{(\sigma,\sigma^1)} & \longrightarrow & N^{(\sigma,\sigma^1)} & \to 0
\end{array}$$

puesto que μ_{R^n} es isomorfismo, μ_N is epimorfismo. Para obtener información acerca de μ_K consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R H & \longrightarrow & R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R K & \longrightarrow & R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R K/H & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \mu_H} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_K} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \\
H^{(\sigma,\sigma^1)} & \xrightarrow{\cong} & K^{(\sigma,\sigma^1)} & \longrightarrow & 0 & &
\end{array}$$

donde H es un submódulo finitamente generado de K tal que $K/H \in T_\sigma$. El último diagrama prueba que μ_K es un epimorfismo porque es la segunda en una composición que es epimorfismo. Ahora, volviendo al diagrama principal, una sencilla caza de diagramas nos muestra que μ_N es un isomorfismo. □

Esta Proposición puede particularizarse al caso de teorías de torsión perfectas, en cuyo caso obtenemos una descripción más eficiente de la completación.

(3.3.4) Corolario. *Cuando σ es una teoría de torsión perfecta, para cualquier R-módulo σ-finitamente generado M tenemos:*

$$R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R M \cong M^{(\sigma,\sigma^1)}$$

Demostración. En el diagrama de la Proposición anterior

$$\begin{array}{ccc}
R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R N & \longrightarrow & R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R M \\
\downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow \\
N^{(\sigma,\sigma^1)} & \xrightarrow{\cong} & M^{(\sigma,\sigma^1)}
\end{array}$$

es claro que la flecha horizontal superior es un monomorfismo. Probaremos que es un isomorfismo y esto probará el resultado. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R N \longrightarrow R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R M \longrightarrow R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R M/N$$

si calculamos el último módulo, tenemos

$$R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R M/N \cong R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R Q_\sigma(R) \otimes_R M/N \cong R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R Q_\sigma(M/N)$$

donde usamos la σ-inyectividad de $R^{(\sigma,\sigma^1)}$ y la exactitud de Q_σ. Ahora, puesto que M/N es σ-torsión, es necesariamente cero. Por tanto tenemos un isomorfismo

$$R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R N \cong R^{(\sigma,\sigma^1)} \otimes_R M,$$

y como consecuencia obtenemos lo deseado. $\square$

Como un subproducto de este resultado tenemos que si σ es una teoría de torsión perfecta, entonces $R^{(\sigma,\sigma^1)}$, la (σ,σ^1)-completación de R, es un R-módulo plano.

Capítulo 4

Dualidad y módulos reflexivos

Ya hemos estudiado la completación de R-módulos respecto a un par de teorías de torsión $\sigma \leq \tau \leq \sigma^1$, en este estudio ha aparecido un R-módulo distinguido, el módulo $E = \oplus\{E(R/\mathfrak{p})\colon \mathfrak{p} \in \mathcal{K}(\sigma) \cap \mathcal{Z}(\tau)\}$, así como el funtor $Hom_R(-, E)$. Vamos en este Capítulo a estudiar con más detalle la situación creada por estos dos elementos.

4.1 Módulos σ-finitamente presentados.

Aunque otros autores han introducido una definición distinta de σ-finitamente presentado, vamos a seguir aquí la introducida por K. R. Goodearl en [20] que ya fue utilizada por J. S. Golan en [19] y J. Martínez en [36].

Sea M un R-módulo, decimos que M es *σ-finitamente presentado* si existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

en la que F es un R-módulo finitamente generado y K es un submódulo σ-finitamente generado de F.

El siguiente resultado será muy útil en el presente trabajo y nos da caracterizaciones de los R-módulos σ-finitamente presentados.

(4.1.1) Lema. *Para un R-módulo M las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *M es σ-finitamente presentado.*
2. *Si*
$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$
es una sucesión exacta en la que F es σ-finitamente generado, entonces K es σ-finitamente generado.
3. *Existe una sucesión exacta corta*
$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$
en la que F es σ-finitamente presentado y K es σ-finitamente generado.
4. *Existe una sucesión exacta corta*
$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$
con F finitamente presentado y K σ-torsión.

En particular, si M es libre de σ-torsión, entonces M es σ-finitamente presentado si, y sólo si, existe un R-módulo finitamente presentado F tal que $M \cong F/\sigma(F)$.

Demostración. Ver [19, 19.3; 19.5] ó [36, (2.1.6) ; (2.1.8)]. □

Estamos interesados principalmente en el caso de un anillo σ-noetheriano R, por eso veremos con detalle cuál es la situación en este caso.

(4.1.2) Lema. *Sea R un anillo σ-noetheriano, entonces un R-módulo es σ-finitamente generado si, y sólo si, existe un R-módulo finitamente presentado (más aún, libre finitamente generado) F y un σ-isomorfismo $f : F \rightarrow M$.*

Demostración. Supongamos que M es σ-finitamente generado, entonces existe un submódulo N de M finitamente generado tal que M/N es σ-torsion, y un epimorfismo $f : F \to N$ donde F es un R-módulo libre finitamente generado; el núcleo K de f es σ-finitamente generado, por tanto N es un R-módulo σ-finitamente presentado. Combinando estas dos construcciones, tenemos el σ-isomorfismo deseado.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & F \arrow[rr] \arrow[dr] & & M \arrow[r] & M/N \arrow[r] & 0 \\
& & & N \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

El recíproco es inmediato. □

En [12], se introduce la noción de R-módulo σ-finitamente presentado usando justamente la caracterización que proporciona este Lema.

4.2 Módulos artinianos relativos

Sea M un R-módulo. Diremos que M es *σ-artiniano* si, y sólo si, el retículo $C(M,\sigma)$ satisface la condición de cadena descendente.

Con el fin de obtener los resultados posteriores, necesitamos introducir alguna definición más. Un R-módulo M se dice que es *σ-simple* si no es σ-torsión y $C(M,\sigma) = \{\sigma(M)\}$. El R-módulo M se llama *σ-cocrítico* si es σ-simple y libre de σ-torsión. Definiciones equivalentes de módulos σ-cocríticos pueden verse en [19, 14.3]. Un R-módulo M es *σ-cofinitamente generado* si verifica la siguiente condición: para cualquier familia $\{M_i\colon i \in \Omega\}$ de elementos de $C(M,\sigma)$, tal que $\cap_{i\in\Omega} M_i = \sigma(M)$, existe un conjunto finito $\Lambda \subseteq \Omega$ tal que $\cap_{i\in\Lambda} M_i = \sigma(M)$.

(4.2.1) Proposición. *([19, 18.3]) Si M es libre de σ-torsión entonces es σ-cofinitamente generado si, y sólo si, tiene un submódulo esencial de la forma $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ donde los M_i son submódulos σ-cocríticos de M.*

Una de las definiciones equivalentes de σ-artiniano es la siguiente: M es σ-artiniano si, y sólo si, cualquier imagen homomórfica de M es σ-cofinitamente generada (ver [19, 21.1]). En particular, M es un módulo σ-cofinitamente generado.

Usando la Proposición 4.2.1 obtenemos que existe un submódulo esencial de M de la forma $\oplus_{i=1}^n M_i$ donde cada M_i es un módulo σ-cocrítico. Por tanto, $E(M) = E(\oplus_{i=1}^n M_i)$.

(4.2.2) Proposición. *Sea M un módulo libre de σ-torsión y σ-artiniano. Entonces*

$$\varnothing \neq Ass(M) \subseteq \mathcal{C}(\sigma)$$

Demostración. Es bién conocido que $\varnothing \neq Ass(M) \subseteq \mathcal{K}(\sigma)$. Si $\mathfrak{p} \in Ass(M)$ y

N es un submódulo de M tal que $ann(N) = \mathfrak{p}$, puesto que N es de nuevo libre de σ-torsión y σ-artiniano, usando [19, 21.6] podemos elegir $K \leq N$, σ-cocrítico y $K \cong R/\mathfrak{p}$.

Ahora, si $\mathfrak{p}$ no fuese maximal en $\mathcal{K}(\sigma)$ existiría $\mathfrak{m} \in \mathcal{C}(\sigma)$ con $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$. Entonces podríamos dibujar el siguiente diagrama:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{p} \longrightarrow R/\mathfrak{p} \longrightarrow R/\mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

pero K es σ-cocrítico y $R/\mathfrak{m}$ es libre de σ-torsión. Esto es una contradicción. □

(4.2.3) Proposición. *Sea R un anillo σ-noetheriano y M un R-módulo σ-artiniano y libre de σ-torsión. Entonces $E(M) \cong \oplus_{i=1}^{n} E(R/\mathfrak{p}_i)$ para algunos $\mathfrak{p}_i \in \mathcal{C}(\sigma)$.*

Demostración. Sabemos que $E(M) = \oplus_{i=1}^{n} E(M_i)$ donde cada M_i es σ-cocrítico. Es obvio que $\varnothing \neq Ass(M_i) \subseteq \mathcal{C}(\sigma)$, además M_i es uniforme [19, 14.3] y por tanto $E(M_i)$ es necesariamente de la forma $E(R/\mathfrak{p}_i)$ con $\mathfrak{p}_i \in \mathcal{C}(\sigma)$. □

4.3 Dualidad.

Sea σ una teoría de torsión en R-**mód** de manera que R es un anillo σ-noetheriano, y sea τ otra teoría de torsión tal que $\sigma \leq \tau \leq \sigma^1$.

Si M es un R-módulo, definimos el (σ, τ)-*dual* de M como

$$M^* = Hom_R(M, E),$$

donde E es la suma directa de las capas inyectivas de los cocientes $R/\mathfrak{p}$, con $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}(\sigma) \cap \mathcal{Z}(\tau)$. La elección del módulo inyectivo E viene dada por el siguiente resultado.

(4.3.1) Proposición. *La teoría de torsión $\kappa = (\sigma : \tau)$, es exactamente la teoría de torsión cogenerada por $E = \oplus\{E(R/\mathfrak{p}) \ : \ \mathfrak{p} \in \mathcal{K}(\sigma) \cap \mathcal{Z}(\tau)\}$.*

Demostración. Llamemos σ_E a la teoría de torsión cogenerada por E. Si $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}(\sigma) \cap \mathcal{Z}(\tau)$, entonces $R/\mathfrak{p} \subseteq E(R/\mathfrak{p}) \subseteq E$ y por tanto $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}(\sigma_E)$; esto significa que $\sigma_E \leq \kappa$. Por otro lado, si tomamos $\mathfrak{q} \in Spec(R) \setminus \mathcal{K}(\kappa)$ entonces $Hom_R(R/\mathfrak{q}, E(R/\mathfrak{p})) = 0$ para cada $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}(\sigma) \cap \mathcal{Z}(\tau)$ y por tanto $Hom_R(R/\mathfrak{q}, E) = 0$ con lo que $\mathfrak{q} \in \mathcal{Z}(\sigma_E)$ y la igualdad queda probada. $\square$

En esta Sección vamos a estudiar algunos resultados acerca del (σ, τ)-dual M^* y del doble (σ, τ)-dual M^{**} de un R-módulo M.

(4.3.2) Lema. *Sea M un R-módulo, entonces $M^* \cong (M/\kappa(M))^* \cong Q_\kappa(M)^*$.*

Demostración. Para probar el primer isomorfismo, consideramos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \kappa(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/\kappa(M) \longrightarrow 0,$$

ya que E es inyectivo, entonces como el funtor $Hom_R(-, E)$ es exacto, $\kappa(M)$ es κ-torsión, y E es libre de κ-torsión, entonces $Hom_R(\kappa(M), E)$ es cero, por tanto $M^* = Hom_R(M, E) \cong Hom_R(M/\kappa(M), E)$. El segundo isomorfismo se prueba de la misma forma considerando ahora la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Q_\kappa(M) \longrightarrow Q_\kappa(M)/M \longrightarrow 0,$$

M es libre de κ-torsión, entonces $Q_\kappa(M)/M$ es κ-torsión y el resultado se sigue fácilmente. □

(4.3.3) Lema. *Sea M un R-módulo, entonces $M^* = Hom_R(M, E)$ es libre de κ-torsión y κ-inyectivo, por tanto tenemos $M^* \cong Q_\kappa(M^*)$.*

Demostración. Que M^* es libre de κ-torsión es una consecuencia de [3, Lemma 6.(b)]. Para probar que es κ-inyectivo, puesto que E es κ-cerrado, utilizamos el Corolario 2 de [3] que nos asegura que $Hom_R(M, E)$ es su propia envolvente κ-inyectiva. □

(4.3.4) Lema. *El funtor doble (σ, τ)-dual $(-)^{**} : R$-**mód** $\rightarrow R$-**mód** satisface las siguientes propiedades:*

1. $(Q_\kappa(M))^{**} \cong M^{**} \cong Q_\kappa(M^{**})$.

2. *Es exacto y covariante, y se anula sobre los R-módulos κ-torsión.*

3. $R^{**} \cong R^{(\sigma,\tau)}$.

Demostración.

1. El primer isomorfismo es una consecuencia de nuestro Lema 4.3.2 y el segundo es la repetición del argumento del Lema 4.3.3 ahora aplicado al módulo M^*.

2. El funtor $(-)^{**} = Hom_R(Hom_R(-, E), E)$ es siempre covariante y exacto a la izquierda. Y ya que E es un R-módulo inyectivo, $(-)^{**}$ es exacto. Además, por ser E libre de κ-torsión el doble dual se anula sobre los módulos de κ-torsión.

3. Este resultado es consecuencia del obtenido en [11, Lemma 3.2], que afirma el isomorfismo $R^{(\sigma,\tau)} \cong End_R(E)$, y de forma clara se tiene que $End_R(E) = R^{**}$.

□

De forma natural surge el problema de calcular el núcleo del homomorfismo canónico $\theta_M : M \to M^{**}$. La aplicación θ_M está definida de la manera obvia, i. e., $\theta_M(m)(\varphi) = \varphi(m)$ para cualquier $\varphi \in M^*$ y $m \in M$, entonces $\theta_M(m) = 0$ implica que $\varphi(m) = 0$ para todo $\varphi \in M^*$, y finalmente de esto se deduce que $m \in \kappa(M)$, luego tenemos la igualdad

$$Ker(\theta_M) = \kappa(M).$$

Otra cuestión simple es calcular aquellos R-módulos M tales que $M^{**} = 0$. De los anteriores razonamientos, sabemos que todo R-módulo κ-torsión se aplica en cero por $(-)^{**}$. Para el recíproco procedamos de la siguiente manera, si $M^{**} = 0$, entonces la aplicación canónica θ_M es cero, y por tanto cualquier $m \in M$ es κ-torsión.

En particular, en el caso particular en que $\tau = \sigma^1$, tenemos $\kappa = \sigma$, y por tanto se verifica $\sigma(M) = Ker(\theta_M : M \to M^{**})$, y $(-)^{**}$ se anula sobre los R-módulos σ-torsión.

4.4 Completación y doble dual.

Vamos a estudiar en esta Sección R-módulos (σ, τ)-completos usando las técnicas desarrolladas en las anteriores Secciones y en especial la relación entre completación y dualidad.

Es conocido el hecho de que si $(R, \mathfrak{m})$ es un anillo local noetheriano, entonces la completación de un R-módulo finitamente generado M se puede expresar como el doble dual M^{**}, siendo en este caso $M^* = Hom_R(M, E(R/\mathfrak{m}))$. Esta propiedad se extiende al caso más general de la completación relativa a una teoría de torsión.

Como antes, consideremos una teoría de torsión σ en R-**mód** tal que R es σ-noetheriano. Sea τ otra teoría de torsión en R-**mód** tal que $\sigma \leq \tau \leq \sigma^1$. Entonces, para cualquier R-módulo σ-finitamente generado M, vamos a dar una descripción de la completación $M^{(\sigma,\tau)}$ en términos del doble (σ, τ)-dual.

(4.4.1) Teorema. *Sean R un anillo σ-noetheriano y M un R-módulo σ-finitamente generado. Entonces existe un isomorfismo natural*

$$M^{(\sigma,\tau)} \cong Hom_R(Hom_R(M, E), E) = M^{**}.$$

Demostración. Sea M un R-módulo σ-finitamente generado, entonces por el Lema 4.1.2 existe un σ-isomorfismo $f{:}F \to M$ con F finitamente presentado. Ahora, como E es libre de σ-torsión, el anterior σ-isomorfismo induce un isomorfismo entre los Hom

$$Hom_R(F, E) \cong Hom_R(M, E).$$

Puesto que F es finitamente presentado, usando por ejemplo [15, Lemme 5], obtenemos que existe un isomorfismo

$$Hom_R(E, E) \otimes_R F \cong Hom_R(Hom_R(F, E), E).$$

Para acabar la demostración sólo necesitamos componer los isomorfismos anteriores en la forma siguiente:

$$M^{(\sigma,\tau)} \cong F^{(\sigma,\tau)} \cong R^{(\sigma,\tau)} \otimes_R F \cong$$

$$Hom_R(E,E) \otimes_R F \cong Hom_R(Hom_R(F,E),E) \cong$$

$$\cong Hom_R(Hom_R(M,E),E).$$

□

Vamos ahora a relacionar el dual con los localizados del módulo siguiendo la técnica desarrollada en la Seción 2.2. Sea M un R-módulo, puesto que $Q_\kappa(M)$ es σ-cerrado, podemos construir un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j_{\sigma,M}"] \arrow[dr, "j_{\kappa,M}"'] & Q_\sigma(M) \arrow[d] \\ & Q_\kappa(M) \end{tikzcd}$$

y como $M^{(\sigma,\tau)}$ es también κ-cerrado, es posible completar este diagrama hasta obtener el siguiente

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j_{\sigma,M}"] \arrow[dr, "j_{\kappa,M}"] \arrow[ddr, "c_M"'] & Q_\sigma(M) \arrow[d] \\ & Q_\kappa(M) \arrow[d, "\Psi_M"] \\ & M^{(\sigma,\tau)} \end{tikzcd}$$

Recordemos que un R-módulo M se llama (σ,τ)-*completo* si el morfismo Ψ_M, en el diagrama anterior, es un isomorfismo.

Un R-módulo M se llama (σ,τ)-*reflexivo* si el morfismo canónico $\nu_M : Q_\kappa(M) \rightarrow M^{**}$ es un isomorfismo. Aquí ν_M está definido como el único morfismo tal que el siguiente diagrama es commutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j_{\kappa,M}"] \arrow[dr, "\theta_M"'] & Q_\kappa(M) \arrow[d, "\nu_M"] \\ & M^{**} \end{tikzcd}$$

De las anteriores definiciones y del Teorema 4.4.1 se deduce que un R-módulo σ-finitamente generado es (σ,τ)-reflexivo si, y sólo si, es (σ,τ)-completo.

(4.4.2) Lema. *Sea M un R-módulo (σ,τ)-completo, entonces todo submódulo de M es (σ,τ)-completo.*

Demostración. Supongamos que $\Psi_M{:}Q_\kappa(M)\cong M^{(\sigma,\tau)}$ y consideremos un submódulo $N \subseteq M$, entonces la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

induce un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Q_\kappa(N) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi_N"'] & Q_\kappa(M) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi_M"', "\cong"] & Q_\kappa(M/N) \arrow[d, "\Psi_{M/N}"'] \\ 0 \arrow[r] & N^{(\sigma,\tau)} \arrow[r] & M^{(\sigma,\tau)} \arrow[r] & (M/N)^{(\sigma,\tau)} \end{tikzcd}$$

donde todas la flechas verticales son monomorfismos. Probaremos ahora que Ψ_N es también sobreyectiva. Tomemos un elemento $\hat{n} \in N^{(\sigma,\tau)} \setminus Im(\Psi_N)$, podemos considerarlo un elemento de $M^{(\sigma,\tau)}$ y sea $x \in Q_\kappa(M)$ tal que $\Psi_M(x) = \hat{n}$. Por la elección de $\hat{n}$, la imagen de x en $Q_\kappa(M/N)$ no es cero, y entonces por ser $\Psi_{M/N}$ un monomorfismo, la imagen de $\hat{n}$ en $(M/N)^{(\sigma,\tau)}$ no es cero. Pero esto es una contradicción con el hecho de ser la fila inferior una sucesión exacta. □

Además de ser cerrada para submódulos, es fácil comprobar que la clase de los R-módulos (σ,τ)-completos es también cerrada para extensiones. El mismo resultado se ofrece ahora para R-módulos (σ,τ)-reflexivos.

(4.4.3) Lema. *En una sucesión exacta corta de R-módulos*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

el R-módulo M es (σ,τ)-reflexivo si y sólo si N y M/N lo son.

Demostración. La condición necesaria es similar a la del Lema anterior, pero usando la exactitud del funtor $(-)^{**}$. Para la condición suficiente supongamos en primer lugar que M es libre de κ-torsión y después estudiaremos el caso general. Observemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q_\kappa(N) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi_N"', "\cong"] & Q_\kappa(M) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\Psi_M"'] & Q_\kappa(M/N) \arrow[d, "\Psi_{M/N}"', "\cong"] & \\
0 \arrow[r] & N^{**} \arrow[r] & M^{**} \arrow[r, "\beta"] & (M/N)^{**} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde Ψ_N y $\Psi_{M/N}$ son isomorfismos. Probaremos que $M^{**}/Im(\Psi_M)$ es κ-torsión: sea $x \in M^{**} \setminus Im(\Psi_M)$, obviamente $\beta(x) \neq 0$ y existe $y \in Q_\kappa(M/N)$ tal que $\beta(x) = y \notin Im(\alpha) \cong Q_\kappa(M)/Q_\kappa(N)$. Así, existe $I \in \mathcal{L}(\kappa)$ tal que $Iy \subseteq Q_\kappa(M)/Q_\kappa(N)$ y por tanto obtenemos que $Ix \subseteq Im(\Psi_M)$. Ahora, M^{**} tiene las propiedades: (i)$M \leq M^{**}$, (ii)M^{**} es κ-cerrado y (iii)M^{**}/M es κ-torsión. Por tanto, $Q_\kappa(M) \cong M^{**}$ y M es (σ,τ)-reflexivo. El caso general se obtiene ahora aplicando el anteriormente estudiado a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \frac{N}{N \cap \kappa(M)} \longrightarrow \frac{M}{\kappa(M)} \longrightarrow \frac{M}{N + \kappa(M)} \longrightarrow 0$$

en la que $N/(N \cap \kappa(M))$ y $M/(N + \kappa(N))$ son (σ,τ)-reflexivos por ser cocientes de (σ,τ)-reflexivos. □

Como consecuencia de los Lemas aquí expuestos podemos caracterizar los anillos σ-noetherianos (σ,τ)-completos en función de sus módulos σ-noetherianos.

(4.4.4) Teorema. *Sea R un anillo σ-noetheriano, entonces R es un anillo (σ,τ)-completo si, y sólo si, todo R-módulo σ-finitamente generado es (σ,τ)-reflexivo ó equivalentemente (σ,τ)-completo.*

Demostración. Si R es (σ,τ)-completo, entonces R^n es (σ,τ)-completo para todo entero positivo n (esto es una fácil consecuencia de [28, Corollary 3.2]), y por tanto es (σ,τ)-reflexivo. Si M es un R-módulo σ-finitamente generado, entonces por Lema 4.1.2 existe un R-módulo libre y finitamente generado R^n y un σ-isomorfismo $f{:}R^n \to M$. Puesto que R^n es (σ,τ)-reflexivo, es fácil ver que M también lo es. □

La clase de los R-módulos (σ,τ)-reflexivos es tambien cerrada para algunos funtores, por ejemplo, podemos probar:

(4.4.5) Proposición. *Sea N un R-módulo (σ,τ)-reflexivo y M un R-módulo libre de κ-torsión y κ-finitamente generado, entonces $Hom_R(M,N)$ es (σ,τ)-reflexivo.*

Demostración.
Primer paso. Sea $f : F \to M$ un κ-isomorfismo con F un R-módulo finitamente presentado, consideremos la sucesión exacta asociada

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

con X, $Y \in \mathcal{T}_\kappa$. Si aplicamos $Hom_R(-,N)$, puesto que N es libre de κ-torsión, tenemos un isomorfismo $Hom_R(M,N) \cong Hom_R(F,N)$.
Segundo paso. A continuación tratamos de calcular el doble dual de $Hom_R(F,N)$; puesto que F es finitamente presentado y E es inyectivo, entonces

$$Hom_R(Hom_R(F,N),E) \cong Hom_R(N,E) \otimes_R F = N^* \otimes_R F.$$

Usando el isomorfismo de la adjunción entre $F\otimes_R$ y $Hom_R(F,-)$, tenemos los isomorfismos

$$Hom_R(M,N)^{**} \cong Hom_R(F \otimes_R N^*, E) \cong Hom_R(F, Hom_R(N^*,E)) =$$

$$Hom_R(F,N^{**}) \cong Hom_R(F,Q_\kappa(N)).$$

Tercer paso. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow Q_\kappa(N) \longrightarrow Q_\kappa(M)/N \longrightarrow 0$$

y apliquemos el funtor $Hom_R(F, -)$, así obtenemos

$$0 \longrightarrow Hom_R(F, N) \longrightarrow Hom_R(F, Q_\kappa(N)) \longrightarrow Hom_R(F, Q_\kappa(M)/N),$$

puesto que F es un R-módulo finitamente generado y $Q_\kappa(N)/N$ es κ-torsión, entonces $Hom_R(F, Q_\kappa(N)/N)$ es κ-torsión. Por tanto, de la anterior sucesión exacta deducimos

$$Q_\kappa(Hom_R(F, N)) \cong Q_\kappa(Hom_R(F, Q_\kappa(N))).$$

Cuarto paso. Finalmente, puesto que $Q_\kappa(N)$ es κ-cerrado, resulta que también lo es $Hom_R(F, Q_\kappa(N))$ (ver [3, Proposición 9]).
Con los isomorfismos obtenidos hasta aquí tenemos una cadena que prueba el enunciado.

$$\begin{aligned}
Hom_R(M, N)^{**} &\cong \text{ (primer paso)} \\
\cong Hom_R(F, N)^{**} &\cong \text{ (segundo paso)} \\
\cong Hom_R(F, N^{**}) &= \text{ (por la hipótesis)} \\
= Hom_R(F, Q_\kappa(N)) &\cong \text{ (cuarto paso)} \\
\cong Q_\kappa(Hom_R(F, Q_\kappa(N)) &\cong \text{ (tercer paso} \\
\cong Q_\kappa(Hom_R(F, N)) &\cong \text{ (primer paso)} \\
&\cong Q_\kappa(Hom_R(M, N)).
\end{aligned}$$

□

4.5 Módulos reflexivos sobre anillos completos

Veamos ahora el comportamiento de los anillos (σ, τ)-completos, a este fin es necesario para el lector retomar el Teorema 4.4.4.

(4.5.1) Proposición. *Sea R un anillo (σ, τ)-completo. Entonces para cada ideal primo $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}(\sigma) \cap \mathcal{Z}(\tau)$ el anillo $R_\mathfrak{p}$ es $(\sigma, \pi_\mathfrak{p})$-completo (esto es; es un anillo local completo en el sentido clásico).*

Demostración. Usando el Teorema 3.2.10 tenemos un isomorfismo $R^{(\sigma,\tau)} \cong \Pi \widehat{R_\mathfrak{p}}$ y por el Teorema 3.1.2, existe otro isomorfismo $\widehat{R_\mathfrak{p}} \cong R^{(\sigma,\pi_\mathfrak{p})}$ entonces sólo necesitamos probar que existe un isomorfismo $R_\mathfrak{p} \cong \widehat{R_\mathfrak{p}}$. Puesto que R es (σ, τ)-completo, entonces el homomorfismo $Q_\kappa(R) \longrightarrow \widehat{R_\mathfrak{p}}$ es un epimorfismo, y por ser $\kappa \leq \sigma_\mathfrak{p}$, se deduce que existe un único homomorfismo $Q_\kappa(R) \longrightarrow R_\mathfrak{p}$. Estos hechos juntos nos permiten construir el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Q_\kappa(R) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \widehat{R_\mathfrak{p}} \\
& R_\mathfrak{p} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

y el homomorfismo canónico $R_\mathfrak{p} \longrightarrow \widehat{R_\mathfrak{p}}$, que es siempre inyectivo, es ahora también biyectivo por ser el segundo en una composición sobreyectiva, lo que finaliza la demostración. □

Este resultado puede aún mejorarse sustituyendo $\pi_\mathfrak{p}$ por una teoría de torsión arbitraria.

(4.5.2) Teorema. *Si R es un anillo (σ, σ^1)-completo, entonces para cada teoría de torsión τ tal que $\sigma \leq \tau \leq \sigma^1$ se tiene que R es también (σ, τ)-completo.*

Demostración. Usando el Teorema 3.2.10, tenemos que

$$R^{(\sigma,\tau)} = \Pi\{\widehat{R_{\mathfrak{p}}}; \mathfrak{p} \in \mathcal{K}(\sigma) \cap \mathcal{Z}(\tau)\}.$$

Por tanto $R^{(\sigma,\tau)}$ es un submódulo de $R^{(\sigma,\sigma^1)} = Q_\sigma(R)$. Observemos ahora que $\sigma \leq \kappa = (\sigma : \tau)$ y así

$$R^{(\sigma,\tau)} = Q_\kappa(R^{(\sigma,\tau)}) \leq Q_\kappa(Q_\sigma(R)) = Q_\sigma(Q_\kappa(R)) = Q_\kappa(R).$$

Pero la inclusión $Q_\kappa(R) \leq R^{(\sigma,\tau)}$ ocurre siempre, con lo que $R^{(\sigma,\tau)} = Q_\kappa(R)$ y R es entonces (σ,τ)-completo. □

(4.5.3) Lema. *Sea R un anillo (σ,τ)-completo. Para cada $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}(\sigma) \cap \mathcal{Z}(\tau)$ el R-módulo $E(R/\mathfrak{p})$ es (σ,τ)-reflexivo.*

Demostración. Calculemos $(E(R/\mathfrak{p}))^{**}$. Usando que $E(R/\mathfrak{p})$ es $\sigma_{R\setminus\mathfrak{q}}$-torsión para $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q} \in \mathcal{K}(\sigma) \cap \mathcal{Z}(\tau)$ y la proposition anterior

$$Hom_R(E(R/\mathfrak{p}), E) \cong Hom_R(E(R/\mathfrak{p}), E(R/\mathfrak{p})) \cong \widehat{R_{\mathfrak{p}}} \cong R_{\mathfrak{p}}$$

y ahora por el resultado [41, Corollaire 3.10] tenemos

$$Hom_R(R_{\mathfrak{p}}, E) \cong Hom_R(R_{\mathfrak{p}}, E(R/\mathfrak{p})) \cong Hom_{R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}, E(R/\mathfrak{p})) \cong E(R/\mathfrak{p})$$

obtenemos el resultado. □

La clase de los R-módulos reflexivos es "bastante" extensa, por ejemplo.

(4.5.4) Corolario. *Cada R-módulo M σ-artiniano es (σ,τ)-reflexivo.*

Demostración. La cuestión es que $E(M)$ es un módulo (σ,τ)-reflexivo. Más exactamente, $E(M) = \bigoplus_{i=1}^n E(R/\mathfrak{p}_i)$ donde $\mathfrak{p}_i \in \mathcal{C}(\sigma)$. Este problema fue resuelto en la Proposición 4.2.3. □

(4.5.5) Observación. En particular tenemos que E es (σ,τ)-reflexivo si, y sólo si, $\mathcal{K}(\sigma) \cap \mathcal{Z}(\tau)$ es finito.

Capítulo 5

Ejemplos.

5.1 Anillos localmente noetherianos relativos.

Sea R un anillo y $\mathcal{K}$ un subconjunto genéricamente estable de $Spec(R)$ verificando que para cada ideal primo $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}$, el anillo local $R_{\mathfrak{p}}$ es noetheriano. Es natural plantear la conjetura de que la condición anterior implica que R es noetheriano relativo a la teoría de torsión $\sigma_{\mathcal{K}}$ determinada por $\mathcal{K}$.

La conjetura es falsa incluso en el caso en que $\mathcal{K} = Spec(R)$, ver [25, pag. 276]. Para el caso relativo, ofrecemos aquí un ejemplo debido a Nastasescu.

(5.1.1) Ejemplo. Sea A un anillo noetheriano y Λ un conjunto infinito. En el anillo de polinomios $R = A[X_\alpha]_{\alpha\in\Lambda}$ consideremos para cada $n \geq 0$ el conjunto genéricamente estable

$$\mathcal{K}_n = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) \ : \ ht(\mathfrak{p}) \leq n\}$$

Llamemos σ_n a la teoría de torsión que determina cada uno de ellos. Como prueba [42, Theoreme 1.1], para cada $n \geq 0$ el anillo R es σ_n-noetheriano. Como consecuencia, para cada ideal primo $\mathfrak{p} \in \cup_{n\geq 0}\mathcal{K}_n$ el anillo $R_{\mathfrak{p}}$ es noetheriano. Tomemos ahora la teoría de torsión $\sigma = \wedge_{n\geq 0}\sigma_n$ que viene determinada por el conjunto genéricamente estable $\mathcal{K} = \cup_{n\geq 0}\mathcal{K}_n$. Se tiene por [42, Theoreme 1.4] que R no es σ-noetheriano.

Sin embargo, si fuese posible dar condiciones sobre el anillo R o el conjunto $\mathcal{K}$ para que esto ocurra, estaríamos en condiciones idóneas de encontrar ejemplos de situaciones (R, σ), donde R sea un anillo σ-noetheriano. Una condición suficiente aparece en el libro de B. Stenström, [47, Corollary XIII.4.6] "cada $r \in R$ está contenido en un número finito de ideales primos de $\mathcal{K}$", y será aplicada en la Sección 5.3 para determinar que todo dominio de Krull es noetheriano relativo a la teoría de torsión determinada por los ideales primos de altura menor ó igual que uno.

Siguiendo el trabajo de W. Heinzer y J. Ohm [25] sobre anillos localmente noetherianos, vamos a caracterizar en términos de ideales primos débilmente asociados cuando R es un anillo $\sigma_{\mathcal{K}}$-noetheriano.

Antes hagamos un breve comentario para centrar aún más el problema.

En el Ejemplo 5.1.1 observamos que el conjunto genéricamente estable $\mathcal{K}$ no verifica la condición de cadena ascendente y esta condición es más débil que la de ser R noetheriano relativo a $\sigma_{\mathcal{K}}$. Además, si deseamos que R sea un anillo $\sigma_{\mathcal{K}}$-noetheriano, obtendremos en particular que la teoría de torsión $\sigma_{\mathcal{K}}$ es de tipo finito, o equivalentemente, según la Proposición 1.1.19 que $\mathcal{K}$ es quasicompacto. Se nos ocurrió en un primer momento añadir ambas hipótesis a la inicial de ser los localizados del anillo noetherianos. Sin embargo, al estudiar más detenidamente el asunto se observa que la primera de estas dos nuevas condiciones es consecuencia de la segunda.

(5.1.2) Lema. *Sea R una anillo y $\mathcal{K}$ un subconjunto de Spec(R) genéricamente estable y quasicompacto. Si para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ en $\mathcal{K}$ el anillo $R_{\mathfrak{p}}$ es noetheriano, entonces $\mathcal{K}$ verifica la condición de cadena ascendente.*

Demostración. Tomemos una cadena ascendente

$$\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq \dots$$

de ideales primos en $\mathcal{K}$. Es claro que $\mathfrak{q} = \cup_{i\geq 0}\mathfrak{p}_i$ es un ideal primo. Probaremos que $\mathfrak{q} \in \mathcal{K}$. Supongamos que $\mathfrak{q} \notin \mathcal{K}$; consideremos la cadena ascendente

$$X(\mathfrak{p}_1) \subseteq X(\mathfrak{p}_2) \subseteq \ldots$$

donde $X(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{n} \in Spec(R)\ :\ \mathfrak{p} \nsubseteq \mathfrak{n}\}$. Puesto que $\mathfrak{q} \notin \mathcal{K}$, entonces $\mathcal{K} \subseteq X(\mathfrak{q})$. Ahora, como $\mathcal{K} \subseteq X(\mathfrak{q}) = X(\cup\mathfrak{p}_i) = \cup X(\mathfrak{p}_i)$ y el conjunto $\mathcal{K}$ es quasicompacto, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{K} \subseteq X(\mathfrak{p}_n)$ lo que contradice el hecho de ser $\mathfrak{p}_n$ un elemento de $\mathcal{K}$.

Ahora, puesto que $\mathfrak{q} \in \mathcal{K}$, el anillo $R_\mathfrak{q}$ es noetheriano y por tanto al localizar en $\mathfrak{q}$ la cadena ascendente del principio obtenemos que dicha cadena se estabiliza. □

Como consecuencia de este resultado obtenemos que la teoría de torsión σ descrita en el Ejemplo 5.1.1 no es de tipo finito.

Volvamos pues a la situación de partida, un anillo (conmutativo) R y un subconjunto $\mathcal{K}$ de $Spec(R)$ genéricamente estable, quasicompacto y tal que para cada ideal primo $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}$ el anillo local $R_\mathfrak{p}$ es noetheriano; en esta situación vamos a decir que R es un anillo *localmente $\sigma_\mathcal{K}$-noetheriano.* Tratamos ahora de caracterizar cuando un anillo localmente $\sigma_\mathcal{K}$-noetheriano es $\sigma_\mathcal{K}$-noetheriano.

Para continuar necesitamos algunos Lemas técnicos.

(5.1.3) Lema. *([25]) Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de subconjuntos finitos de un conjunto parcialmente ordenado X que verifica la condición de cadena ascendente; si para cada $x \in X_{n+1}$ existe un elemento $y \in X_n$ tal que $y < x$, entonces existe un índice n tal que para cada $m \geq n$ se tiene $X_m = \varnothing$.*

(5.1.4) Lema. *Sea R un anillo localmente $\sigma_\mathcal{K}$-noetheriano tal que cada ideal $\sigma_\mathcal{K}$-finitamente generado y $\sigma_\mathcal{K}$-cerrado tiene únicamente un número finito de ideales primos minimales en $\mathcal{K}$. Si $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}$ es un ideal primo, entonces $\mathfrak{p}$ es el único ideal primo minimal de algún ideal $\sigma_\mathcal{K}$-finitamente generado y $\sigma_\mathcal{K}$-cerrado de R.*

Demostración. Por el Lema 5.1.2 podemos considerar un ideal maximal $\mathfrak{m}$ en $\mathcal{K}$ tal que $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$, ya que $\mathfrak{p}R_\mathfrak{m}$ es finitamente generado, podemos tomar

un ideal finitamente generado $I \leq R$ tal que $IR_\mathfrak{m} = \mathfrak{p}R_\mathfrak{m}$. Definimos entonces $min(I) = \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n\}$ como el conjunto de todos los ideales primos minimales sobre I. Al menos uno de ellos contiene a $\mathfrak{p}$, supongamos que es $\mathfrak{q}_1$, entonces tenemos $\mathfrak{p}R_\mathfrak{m} = IR_\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{q}_1 R_\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}R_\mathfrak{m}$, y por tanto $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}$. Por la minimalidad de los elementos de $\{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n\}$, tenemos que $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}_i$ para $i = 2, \ldots, n$, entonces tomando $p_1 \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}_2$ podemos definir un nuevo ideal finitamente generado $I_1 = I + p_1 R$ contenido en $\mathfrak{p}$, y que no está contenido en $\mathfrak{q}_2$. Consideramos el siguiente ideal, por ejemplo $\mathfrak{p}_r$, que sea primo minimal sobre I_1, podemos construir un ideal finitamente generado I_2 contenido en $\mathfrak{p}$ y no conteniendo a $\mathfrak{p}_r$. Después de un número finito de pasos construimos un ideal I_s finitamente generado conteniendo a I y tal que sus ideales primos minimales, distintos de $\mathfrak{p}$, son estrictamente mayores que algún ideal primo minimal de I, llamémoslo $I^{(1)}$, y llamemos X_1 al conjunto $min(I^{(1)}) \setminus \{\mathfrak{p}\}$. Siguiendo de esta forma y aplicando el Lema 5.1.3, llegamos a que algún X_n es vacío, por tanto podemos encontrar un ideal finitamente generado tal que $\mathfrak{p}$ es minimal sobre él. Por último, únicamente tenemos que tomar su $\sigma_\mathcal{K}$-clausura en R para obtener un ideal $\sigma_\mathcal{K}$-cerrado en R.
□

(5.1.5) Proposición. *Sea R un anillo localmente $\sigma_\mathcal{K}$-noetheriano, entonces R es $\sigma_\mathcal{K}$-noetheriano si, y sólo si, cada ideal I $\sigma_\mathcal{K}$-finitamente generado y $\sigma_\mathcal{K}$-cerrado de R tiene únicamente un número finito de ideales primos minimales en $\mathcal{K}$ y además $rad(I)$ es $\sigma_\mathcal{K}$-finitamente generado.*

Demostración. Es claro que si R es $\sigma_\mathcal{K}$-noetheriano, entonces cada ideal ($\sigma_\mathcal{K}$-finitamente generado) I tiene un número finito de ideales primos minimales en $\mathcal{K}$, además $rad(I)$ es $\sigma_\mathcal{K}$-finitamente generado. La demostración sigue la línea de la del caso absoluto, que puede verse en [21, Theorem 2.4]. Por otro lado, supongamos que $\mathfrak{p}$ sea un ideal de $\mathcal{K}$, entonces por el Lema 5.1.4 existe un ideal $\sigma_\mathcal{K}$-finitamente generado I tal que $rad(I) = \mathfrak{p}$, por la hipótesis $rad(I)$ es $\sigma_\mathcal{K}$-finitamente generado. Entonces aplicando el Lema de Cohen relativo a la teoría de torsión $\sigma_\mathcal{K}$, resulta que R es $\sigma_\mathcal{K}$-noetheriano. □

Vamos ahora a estudiar el resultado fundamental de esta Sección.

(5.1.6) Teorema. *Sea R un anillo localmente $\sigma_{\mathcal{K}}$-noetheriano, entonces R es $\sigma_{\mathcal{K}}$-noetheriano si, y sólo si, para cada ideal I $\sigma_{\mathcal{K}}$-finitamente generado se verifica que el conjunto $Ass_f(R/I) \cap \mathcal{K}$ es finito.*

Demostración. Recordemos que para cada R-módulo M se verifica que $Ass_f(M) \cap \mathcal{K} = Ass_f(M/\sigma_{\mathcal{K}}(M))$. De esta forma, para simplificar, podemos tomar el ideal I de forma que sea $\sigma_{\mathcal{K}}$-cerrado. Si R es $\sigma_{\mathcal{K}}$-noetheriano, entonces el conjunto $Ass_f(R/I) = Ass(R/I)$ es finito. Recíprocamente, sea $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}$, vamos a probar que existe un ideal $\sigma_{\mathcal{K}}$-finitamente generado y $\sigma_{\mathcal{K}}$-cerrado tal que $Ass_f(R/I) = \{\mathfrak{p}\}$. Por el Lema 5.1.4 existe un ideal H $\sigma_{\mathcal{K}}$-finitamente generado y $\sigma_{\mathcal{K}}$-cerrado en R tal que $rad(H) = \mathfrak{p}$. Ya que $R_{\mathfrak{p}}$ es noetheriano, existe un ideal finitamente generado J tal que $JR_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$, entonces el ideal $K = H + J$ verifica: es $\sigma_{\mathcal{K}}$-finitamente generado, $KR_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ y $rad(K) = \mathfrak{p}$. Vamos a comprobar esta última propiedad, supongamos que $\mathfrak{q} \in \mathcal{K}$ verifica $K \subseteq \mathfrak{q}$, entonces ya que $H \subseteq K \subseteq \mathfrak{q}$, se tiene que $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$. Por la hipótesis tenemos que $Ass_f(R/K)$ es finito, sea $\mathfrak{q}$ minimal en el conjunto $Ass_f(R/K) \setminus \{\mathfrak{p}\}$; ya que $K \subseteq ann(x+K) \subseteq \mathfrak{q}$, se deduce que $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$. Debe de existir pues un elemento $x \in R$ verificando $x + K \neq 0$ y $ann(x+K) \subseteq \mathfrak{q}$ es minimal; si $x \notin \mathfrak{p}$, entonces $xann(x+K) \subseteq K \subseteq \mathfrak{p}$ y $ann(x+K) \subseteq \mathfrak{p}$, por la minimalidad de $\mathfrak{q}$ llegamos a una contradicción. Tenemos entonces que $\mathfrak{q} \in Ass_f(\mathfrak{p}/K)$. Vamos a considerar la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}/K \longrightarrow 0$$

y la correspondiente en $R_{\mathfrak{q}}$-**mód**:

$$0 \longrightarrow KR_{\mathfrak{q}} \longrightarrow \mathfrak{p}R_{\mathfrak{q}} \longrightarrow \mathfrak{p}R_{\mathfrak{q}}/KR_{\mathfrak{q}} \longrightarrow 0.$$

Se verifica que $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}} \in Ass(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{q}}/KR_{\mathfrak{q}})$, y por tanto existe un ideal $L \leq R$ $\sigma_{\mathcal{K}}$-finitamente generado y $\sigma_{\mathcal{K}}$-cerrado en R tal que $Ass(LR_{\mathfrak{q}}/KR_{\mathfrak{q}}) = \{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}\}$ y $Ass(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{q}}/LR_{\mathfrak{q}}) = Ass(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{q}}/KR_{\mathfrak{q}}) \setminus \{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}\}$. Pasamos entonces a considerar el ideal L, se verifica $K \subseteq L \subseteq \mathfrak{p}$ y está en la misma situación que K, esto es: es $\sigma_{\mathcal{K}}$-finitamente generado, $\sigma_{\mathcal{K}}$-cerrado, $\mathfrak{p}$ es minimal sobre él y $LR_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$; además $\mathfrak{q} \notin Ass_f(R/L)$ ya que $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}} \notin Ass(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{q}}/LR_{\mathfrak{q}})$. Continuando en esta misma dirección podemos construir una cadena estrictamente ascendente de ideales $\sigma_{\mathcal{K}}$-finitamente generados y $\sigma_{\mathcal{K}}$-cerrados $\{L_n\}_n$ tal que cada elemento de

$Ass_f(R/L_{n+1}) \setminus \{\mathfrak{p}\}$ mayora estrictamente a elementos de $Ass_f(R/L_n) \setminus \{\mathfrak{p}\}$, entonces aplicando el Lema 5.1.3 llegamos a que a partir de uno de estos conjuntos, por ejemplo el correspondiente al índice n, todos los restantes han de ser vacíos, y por tanto tenemos el resultado anteriormente enunciado. Llamemos $L = L_n$, vamos finalmente a probar que L es un ideal primo; sean $a, b \in R$ tales que $ab \in L$ y $a, b \notin L$, entonces $R \neq ann(a + L) \subseteq \mathfrak{p}$, y tenemos que $b \in \mathfrak{p}$. De la misma forma se tiene $R \neq ann(b + L) \subseteq \mathfrak{p}$. Por otro lado, ya que $LR_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$, existe $t \in R \setminus \mathfrak{p}$ tal que $tb \in L$, y como consecuencia $t \in ann(b+L) \subseteq \mathfrak{p}$, lo que es una contradicción. Entonces el ideal $\mathfrak{p}$ es $\sigma_{\mathcal{K}}$-finitamente generado, y por el Lema de Cohen relativo a la teoría de torsión $\sigma_{\mathcal{K}}$, resulta que R es $\sigma_{\mathcal{K}}$-noetheriano. □

(5.1.7) Ejemplo. Si R es un anillo con un número finito de ideales minimales y para cada ideal primo minimal $\mathfrak{p}$ el localizado $R_{\mathfrak{p}}$ es noetheriano, entonces llamando $\mathcal{K}$ al conjunto de todos los ideales primos minimales tenemos que R es $\sigma_{\mathcal{K}}$-noetheriano.

En este contexto, la condición de finitud sobre el conjunto $\mathcal{K}$ puede ser sustituida por la siguiente condición local: *Para cada $a \in R$ existe un número finito de ideales $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}$ de manera que $a \in \mathfrak{p}$.*

En esta situación, ya que $\mathcal{K}$ es obviamente genéricamente estable, para que R sea $\sigma_{\mathcal{K}}$-noetheriano sólo es necesario que la inclusión $\mathcal{K} \hookrightarrow Spec(R)$ sea quasicompacta. Esta condición está caracterizada en el libro de J.A. Huckaba [27] obteniéndose que cuando R es reducido, el conjunto $\mathcal{K}$ de los ideales primos minimales es quasicompacto si, y sólo si, el anillo total de fracciones del anillo $R[X]$ es regular en el sentido de von Neumann.

5.2 Anillos locales

Para un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$, la completación $\mathfrak{m}$-ádica presenta algunas particularidades respecto a las propiedades expuestas en el Teorema 1.2.2. Por ejemplo, siempre se satisfacen las hipótesis para que el anillo sea Hausdorff. Sin embargo, lo que queremos es exponer brevemente cómo se ajusta este tipo de completación a la desarrollada en esta memoria. Consideremos en el anillo local R la teoría de torsión trivial 0, es decir, la que tiene como clase de torsión a $\{0\}$ y cuyo funtor de localización es la identidad. La partición del espectro que determina $\sigma = 0$ es la siguiente: $\mathcal{K}(\sigma) = Spec(R)$ y $\mathcal{Z}(\sigma) = \varnothing$. De este modo, $\mathcal{C}(\sigma) = \{\mathfrak{m}\}$ y por tanto σ^1, el primer esqueleto de σ, es exactamente la teoría de torsión $\sigma_\mathfrak{m}$ con partición del espectro $\mathcal{K}(\sigma_\mathfrak{m}) = Spec(R) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ y $\mathcal{Z}(\sigma_\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{m}\}$ y que tiene como base de filtro el conjunto de ideales $\mathcal{L}(\sigma_\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{m}^n : n \in \mathbb{Z}\}$. La completación $\mathfrak{m}$-ádica de R es entonces

$$\hat{R} = \varprojlim\{R/\mathfrak{m}^n : n \in \mathbb{Z}\},$$

que se puede reformular de la siguiente forma

$$\hat{R} = \varprojlim\{Q_\sigma(R/I) : I \in \mathcal{L}(\sigma^1)\} = R^{(\sigma,\sigma^1)}.$$

De esta manera tenemos un primer ejemplo de nuestra construcción.

Hay que señalar además, que también la completación de un anillo semilocal respecto a su radical de Jacobson responde al modelo de completación que hemos descrito. Presentamos aquí un resultado que puede encontrarse en [8, III,2] y del que el Teorema 3.2.10 puede considerarse una generalización.

(5.2.1) Proposición. *Sea R un anillo semilocal, $\mathfrak{m}_i, 1 \leq i \leq q$ sus ideales maximales distintos y $J = \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_q$ su radical. El completado $\hat{R}$ de R para la topología J-ádica es un anillo semilocal isomorfo al producto $\Pi_{i=1}^q \widehat{R_{\mathfrak{m}_i}}$ donde $\widehat{R_{\mathfrak{m}_i}}$ es el completado del anillo local $R_{\mathfrak{m}_i}$ para la topología $\mathfrak{m}_i R_{\mathfrak{m}_i}$-ádica.*

5.3 Dominios de Krull.

Para un anillo R denotamos por $Spec^1(R)$ al conjunto de los ideales primos de altura menor o igual que 1.

Un anillo R se dice que es un *dominio de Krull* si satisface las siguientes propiedades:

K1 Para todo ideal no nulo $\mathfrak{p}$ en $Spec^1(R)$, se tiene que $R_\mathfrak{p}$ es un dominio de ideales principales;

K2 $R = \cap_{\mathfrak{p} \in Spec^1(R)} R_\mathfrak{p}$;

K3 Para cada $0 \neq a \in R$ existe sólo un número finito de ideales primos $\mathfrak{p}$ en $Spec^1(R)$ tales que $a \in \mathfrak{p}$.

El conjunto $Spec^1(R)$ es en cualquier caso genéricamente estable; y por tanto determina una teoría de torsión que llamaremos σ. Recordemos que $M \in \mathcal{T}_\sigma$ si, y solo si, $M_\mathfrak{p} = 0$ para todo $\mathfrak{p} \in Spec^1(R)$. A continuación demostramos que todo Dominio de Krull es un anillo σ-noetheriano para la teoría de torsión σ.

(5.3.1) Proposición. *Si M es un R-módulo tal que $M_\mathfrak{p}$ es un $R_\mathfrak{p}$-módulo noetheriano para cada $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}$ y tal que $Supp(M/N) \cap \mathcal{K}$ es finito para todo submódulo N de M, entonces M es $\sigma_\mathcal{K}$-noetheriano.*

Demostración. Sea $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$ una cadena ascendente de submódulos de M. Entonces, para cada ideal primo $\mathfrak{p} \notin Supp(M/N_1)$, se tiene que $(N_1)_\mathfrak{p} = (N_h)_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}$. Como el conjunto de ideales $Supp(M/N) \cap \mathcal{K}$ es finito, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $(N_n)_\mathfrak{p} = (N_h)_\mathfrak{p}$ para todo $n \leq h$ y para todo $\mathfrak{p} \in Supp(M/N_1) \cap \mathcal{K}$. Así tenemos que $(N_n)_\mathfrak{p} = (N_h)_\mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}$ y por tanto M es $\sigma_\mathcal{K}$-noetheriano. $\square$

(5.3.2) Corolario. *Si $R_{\mathfrak{p}}$ es un anillo noetheriano para todo $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}$ y cada elemento $0 \neq r \in R$ está contenido sólo en un número finito de ideales primos de $\mathcal{K}$, entonces R es $\sigma_{\mathcal{K}}$-noetheriano. En particular, todo dominio de Krull es noetheriano relativo a la teoría de torsión σ antes definida.*

Aunque este resultado se obtiene de forma directa de nuestro Teorema 5.1.6, por completitud, hemos preferido incluirlo también en esta forma.

Calculemos ahora el primer esqueleto de la teoría de torsión σ de un dominio de Krull. Puesto que

$$\mathcal{C}(\sigma) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) : \mathfrak{p} \text{ tiene altura } 1\}$$

se tiene que

$$\mathcal{K}(\sigma^1) = \mathcal{K}(\sigma) \setminus \mathcal{C}(\sigma) = \{0\};$$

es decir, σ^1 es exactamente la teoría de torsión usual del dominio.

Por supuesto, esta teoría de torsión σ^1 es siempre estable, pero aún es posible demostrar que σ es también estable. Dicho resultado puede encontrarse en [47].

Un tipo especial de Dominios de Krull son los Dominios de Dedekind. Recordemos que un anillo R se dice que es un *dominio de Dedekind* si verifica las condiciones

1. R es un dominio noetheriano;
2. R es normal;
3. los ideales primos no nulos de R son maximales.

Una propiedad que caracteriza a los dominios que son Dominios de Dedekind es que todo ideal no nulo de R sea un producto de ideales primos.

Supongamos que R es un Dominio de Dedekind, tomando como teoría de torsión σ la trivial, observamos que σ^1 es de nuevo la teoría de torsión usual del dominio.

Los Dominios de Dedekind son particularmente interesantes porque en ellos toda completación es de las descritas en esta Memoria, ya que se puede probar que todo filtro para una topología lineal en un Dominio de Dedekind determina unívocamente una teoría de torsión como señala el siguiente Lema.

(5.3.3) Lema. *Sea R un dominio de Dedekind y $\mathcal{L} \neq \{R\}$ un filtro para una topología lineal sobre R. Entonces si definimos la teoría de torsión τ mediante*

$$\mathcal{Z}(\tau) = \mathcal{L} \cap Spec(R);$$

se verifica que $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}(\tau)$ determinan la misma topología en R.

Demostración. Puesto que R es noetheriano, entonces τ es estable y la clase de los módulos de torsión es $\mathcal{T}(\tau) = \{M \in R\text{-}\mathbf{mód} : Ass(M) \subseteq \mathcal{Z}(\tau)\}$. Así, el filtro de Gabriel asociado a τ es $\mathcal{L}(\tau) = \{J \leq R : Ass(R/J) \subseteq \mathcal{Z}(\tau)\}$. Consideremos $I \in \mathcal{L}, I \neq R$; para cada $\mathfrak{p} \in Ass(R/I)$ se tiene que $I \subseteq \mathfrak{p}$ y por tanto $\mathfrak{p} \in \mathcal{Z}(\tau)$. Así $Ass(R/I) \subseteq \mathcal{Z}(\tau)$ y tenemos que $I \in \mathcal{L}(\tau)$. Por otro lado, si $J \in \mathcal{L}(\tau)$ consideremos su descomposición como producto de ideales primos $J = \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_n$, entonces $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \subseteq Ass(R/J) \subseteq \mathcal{Z}(\tau) \subseteq \mathcal{L}$ y por tanto $J \in \mathcal{L}$ por ser un producto finito de ideales en $\mathcal{L}$. $\square$

(5.3.4) Corolario. *Toda completación relativa a una topología lineal propia en un Dominio de Dedekind es la completación relativa a un par de teorías de torsión (σ, τ), donde σ es la teoría de torsión trivial y $\sigma \leq \tau \leq \sigma^1$.*

Observemos que si $\{R\} = \mathcal{L}$, entonces la completación $\hat{R}$ de R para la topologia determinada por $\mathcal{L}$ es 0.

De este modo, usando el Teorema 3.2.10, cualquier completación no nula $\hat{R}$ del anillo R para una topología lineal tiene la forma

$$\hat{R} = \Pi_{\mathfrak{m} \in \mathcal{C}} \widehat{R_{\mathfrak{m}}}. \qquad (*)$$

donde cada localizado $R_{\mathfrak{m}}$ es un dominio de valoración discreta y $\mathcal{C}$ es un subconjunto de $Max(R)$.

La descripción de la completación de un anillo de valoración discreta es muy sencilla. Para ello utilizaremos el siguiente resultado que extraemos de [22, 3.3]

(5.3.5) Proposición. *Si R es un anillo noetheriano e $I = (a_1, \ldots, a_n)$ un ideal finitamente generado de R tal que R es Hausdorff para la topología I-ádica, entonces la I-completación de R es isomorfa al anillo*

$$R[[X_1, \ldots, X_n]]/(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n).$$

Puesto que cada $R_\mathfrak{m}$ es un anillo de valoración discreta, entonces su ideal maximal $\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$ está generado por un único elemento, digamos $a_\mathfrak{m}$. Además, como se trata de un anillo local, es Hausdorff para la topología que determina el maximal. Así,

$$\widehat{R_\mathfrak{m}} \cong \frac{R_\mathfrak{m}[[X]]}{(X - a_\mathfrak{m})}.$$

y sustituyendo en (*) tenemos

$$R^{(\sigma,\tau)} \cong \Pi_{\mathfrak{m} \in C} \frac{R_\mathfrak{m}[[X_\mathfrak{m}]]}{(X_\mathfrak{m} - a_\mathfrak{m})}.$$

Bibliografía

[1] ALBU, T.; NASTASESCU, C., *Décompositions primaires dans les catégories de Grothendieck commutatives. I*, J. fur Reine und Angew. Math., **280**, 172–194 (1976).

[2] ALBU, T.; NASTASESCU, C., *Décompositions primaires dans les catégories de Grothendieck commutatives. II*, J. fur Reine und Angew. Math., **282**, 172–185 (1976).

[3] AOYAMA, K., *On the Commutativity of torsion and inyective hull*, Hiroshima Math. J., **6**, 527–537 (1976).

[4] BALCERZYK,S. AND JÓZEFIAK T., "Commutative Noetherian and Krull Rings", Ellis Horwood Ltd and PWN. Warszawa, 1989.

[5] BEATTIE, M.; ORZECH, M., *Prime ideals and finiteness conditions for Gabriel topologies over commutative rings*, Rocky Mountain J. Math., **22**, 432–439 (1992).

[6] BELSHOFF, R. G., *Matlis Reflexive Modules*, Comm. Algebra, **19**, 1099–1118 (1991).

[7] BELSHOFF, R. G.; J. XU, *Injective envelopes and flat covers of Matlis reflexive modules*, J. Pure Appl. Algebra, **79**, 205–215 (1992).

[8] BOURBAKI, N, "Algèbre Commutative", Masson. Paris, 1985.

[9] BRANDAL, W., *Completions of commutative topological rings*, Comm. Algebra, **20**, 3381–3391 (1992).

[10] Bueso, J. L.; Jara, P.; Santos. E., *Completion*, Por aparecer en Communications in Algebra.

[11] Bueso, J. L.; Jara, P.; Verschoren, A., *Duality, localization and completion*, Por aparecer en Journal of Pure and Appl. Algebra.

[12] Bueso, J. L.; Torrecillas, B.; Verschoren, A., "Local cohomology and localization", Pitman Research Notes in Mathematical Series No. 226, Longman Scientific and Technical. Harlow, 1990.

[13] Cahen, J.P., *Commutative torsion theory*, Trans. Amer. Math. Soc., **184**, 73–85 (1973).

[14] Call, F.W., "Torsion theoretic algebraic geometry", Queen's Paper in Pure and Appl. Math., **82**, Kingston, Ontario, 1989.

[15] Couchot, M. F., *Topologie cofinie et modules pur-injectifs*, C. R. Acad. Sc. Paris, **283**, 277–280 (1976).

[16] Enochs, E., *Flat Cover and Flat Cotorsion Modules*, Proc. Amer. Math. Soc., **92**, 179–184 (1984).

[17] Fossum, R., *Duality over Gorenstein rings*, Math. Scand. **26**, 165–176 (1970).

[18] Fuchang, C. and Mingyi, W., *Homological Dimension of G-Matlis Dual Modules over Semilocal Rings*, Comm. Algebra **21**, 1215–1220 (1993).

[19] Golan, J. S., "Torsion theories", Longman Scientific and Technical. Essex, 1986.

[20] Goodearl, K. R., "Ring Theory. Nonsingular Rings and Modules", Marcel Dekker. New York, 1976.

[21] Goodearl, K. R.; Warfield jr., R. B., "An introduction to noncommutative noetherian rings, London Math. Soc. Student Texts, **16**, Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1989.

[22] Greco, S. and Salmon, P., "Topics in $\mathfrak{m}$-adic Topologies", Springer Verlag. Berlin, 1971.

[23] HANNA, C. C. AND JOHNSON, J., *Noetherian subsets of prime spectra*, Proc. Amer. Math. Soc., **88**, 397–398 (1983).

[24] HARTSHORNE, R., "Algebraic Geometry", Graduate Texts in Mathematics, No 52. Springer-Verlag. New York, 1977.

[25] HEINZER, W. AND OHM J., *Locally noetherian commutative rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **158**, 273–284 (1971).

[26] HUBER, M., *On Reflexive Modules and Abelian Groups*, J. Algebra, **82**, 469–487 (1983).

[27] HUCKABA, J. A., "Commutative rings with zero divisors", Monograhs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **117**. Marcel Dekker, Inc.. New York, 1988.

[28] JARA, P.; SANTOS, E., *Completions of commutative rings and modules*, Por aparecer en el Israel Journal of Mathematics.

[29] JOHNSON, J. L., *Modules injective with respect to primes*, Communications in Algebra, **7**, 327–332 (1979).

[30] LAFON, J. P., "Algèbre commutative. Languages géometrique et algébrique, Collection enseignement des sciences, **24**. Hermann. Paris, 1977.

[31] LAMBEK, J., *Localization and completion*, J. Pure and Applied Algebra, **2**, 343–370 (1972).

[32] LOUDEN, K., *Stable torsion and the spectrum of an FBN ring*, J. Pure and Applied Algebra, **15**, 173–180 (1979).

[33] MACDONALD, I. G., *Duality over complete local rings*, Topology, **1**, 213–235 (1962).

[34] MADER, A. AND MINES, R., *Completions of linearly topologized vectorspaces*, J. Algebra **74**, 317–327 (1982).

[35] MANOCHA, J.N., Finiteness Conditions and Torsion Theories, PhD thesis, University of Wisconsin, 1973.

[36] MARTÍNEZ HERNÁNDEZ, J., λ-dimensión de anillos respecto de radicales idempotentes, Tesis Doctoral, Univ. de Murcia, 1982.

[37] MATLIS, E., *Injective modules over noetherian rings*, Pacific J. Math. **8**, 511-528 (1958).

[38] MATLIS, E., "Torsion-free modules", The Chicago University Press. Chicago, 1972.

[39] MATSUMURA, H., "Commutative ring theory", Cambridge studies in advanced mathematics, No 8. Cambridge University Press, 1986.

[40] MENINI, C.; ORSATTI, A., *Duality over a quasi-injective module and commutative $\mathcal{F}$-reflexive rings*, Symposia Mathematica, **XXIII**, 145–179. Academic Press, 1979.

[41] NASTASESCU, C., *La structure des modules par rapport à une topologie additive*, Tohôhu Math. J., **22**, 173–201 (1974).

[42] NASTASESCU, C., *Modules $\sum$-injectives*, in "Ring Theory" Proc. 1978 Antwerp Conference. Lect. Notes in Appl. Mat., 51, 729–740. Marcel Dekker. (1979)

[43] NASTASESCU, C.; RAIANU, S., *Stability conditions for commutative rings with Krull dimension*, in "Methods in Ring Theory", 391–402. Reidel Publ. Co. (1984).

[44] RIOS MONTES, J., *Algunos funtores relacionados con la completación de módulos respecto a un filtro de Gabriel*, Rev. Mat. Hisp.-Amer., **42**, 201–219 (1982).

[45] SHARPE, D. W.; VAMOS, P., "Injective modules", Cambridge University Press. Cambridge, 1972.

[46] STENSTRÖM, B., *On the completion of modules in an additive topology*, J. Algebra, **16**, 523–540 (1970).

[47] STENSTRÖM, B., "Rings of quotients", Springer Verlag. Berlin, 1975.

[48] VAMOS, P., *Classical Rings*, J. Algebra **34**, 114–129 (1975).

[49] VERSCHOREN, A., "Compatibility and stability", Notas de Matemática, Vol. 3. Universidad de Murcia, 1990.

[50] ZARISKI, O. AND SAMUEL, P., "Commutative Algebra" (Volume I), Graduate Texs in Mathematics, No 28 Springer-Verlag New York, 1958.

[51] ZARISKI, O. AND SAMUEL, P., "Commutative Algebra" (Volume II), Graduate Texs in Mathematics, No 29 Springer-Verlag New York, 1960.