

T  
12  
53

UNIVERSIDAD DE GRANADA  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Geometría y Topología.

COMPLETITUD GEODÉSICA  
DE VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS COMPACTAS

TESIS DOCTORAL

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA  
GRANADA  
Nº Documento 6196552853  
Nº Copia 21201213

*Miguel Sánchez Caja*

Granada, 1994.

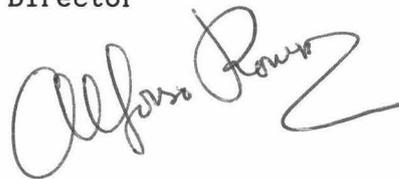
COMISION DE DOCTORADO

COMPLETITUD GEODÉSICA DE  
VARIETADES SEMI-RIEMANNIANAS COMPACTAS

MIGUEL SANCHEZ CAJA

Memoria realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, bajo la dirección del Prof. Dr. D. Alfonso Romero Sarabia, Profesor Titular del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada.

V<sup>o</sup>. B<sup>o</sup>. El Director



Aspirante al Grado de Doctor



Granada, 1994.

## AGRADECIMIENTOS

Deseo hacer constar mi más sincero agradecimiento, en primer lugar, al Prof. Alfonso Romero Sarabia, por haber sido el director de esta tesis y por haber contribuido esencialmente a mi formación matemática desde que, de modo desinteresado, me enseñaba Geometría cuando yo cursaba la licenciatura de C. Físicas.

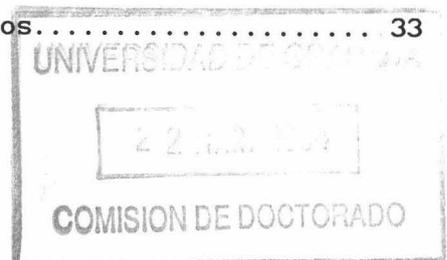
A Antonio Bernal Navarro y a Miguel Angel Palacios Iniesta les debo su compañerismo y ayuda, sin los cuales, probablemente, hoy no podría presentar ninguna investigación sobre este tema.

Si bien a todo el Departamento de Geometría y Topología le debo gratitud, deseo agradecer especialmente al Prof. Francisco Urbano Pérez-Aranda su apoyo y ánimo en mi primer año de investigación, que fue especialmente duro para mí.

Y mi agradecimiento a Yiya, ¡cómo no!

INDICE

Capítulo I. <u>PRELIMINARES</u> .....	1
1.- Introducción.....	1
(a) ¿Por qué estudiar completitud en el caso compacto?.....	2
(b) Objetivos generales de la presente memoria.....	4
2.- El caso compacto definido frente al no compacto y al definido....	6
Capítulo II. <u>COMPLETITUD DE VARIETADES SEMI-RIEMANNIANAS</u> <u>CON SIMETRIAS CONFORMES</u> .....	13
1.- Previos.....	15
2.- Teorema fundamental y primeras consecuencias.....	17
3.- Ejemplos.....	19
4.- Curvatura y completitud.....	24
Capítulo III. <u>EJEMPLOS DE METRICAS INCOMPLETAS SOBRE TOROS</u> .....	28
1.- ¿Por qué surge la incompletitud en variedades compactas?.....	30
(a) Cambios de carta lorentzianos y geodésicas cerradas incompletas.....	30
(b) Ejemplos naturales de toros incompletos.....	33



2.- Toros completos e incompletos con la misma curvatura.....	36
3.- Familias más generales de métricas de Lorentz incompletas.....	37
(a) Definición del tipo de métrica.....	37
(b) Estudio de la completitud y del comportamiento cualitativo de las geodésicas a partir de sus condiciones iniciales....	43
I.- Estudio de las soluciones no constantes a la ecuación (3.3a).....	43
II.-Estudio de las soluciones a la ecuación (3.3b)....	48
(c) Conclusión.....	53
4.- Estudio especial de las geodésicas luminosas.....	58
(a) Campos de vectores luminosos independientes.....	58
(b) Geodésicas luminosas cerradas.....	60
(c) Cambios conformes.....	61
5.- Reobtención de los ejemplos conocidos de variedades compactas incompletas.....	64
6.- Otras propiedades relevantes.....	66
(a) Conexión geodésica.....	66
(b) Geodésicas completas en el toro cuya velocidad se sale de cualquier compacto.....	68
<b>Capítulo IV. <u>COMPLETITUD DE PRODUCTOS LOCALMENTE WARPED</u>.....</b>	<b>70</b>
1.- Concepto y primeras propiedades.....	75
2.- Influencia de la fibra y completitud warped.....	76

3.- Estudio de la completitud warped con bases definidas.....	80
(a) Definiciones previas.....	80
(b) Teorema fundamental para bases completas.....	83
(c) Base con dimensión 1.....	88
(d) Ejemplos.....	92
(e) Productos twisted.....	96
4.- Completitud warped con bases indefinidas.....	97
(a) Base con simetrías conformes.....	97
(b) Relación con los problemas abiertos CC y CDC.....	100
<b>Capítulo V. <u>TOPOLOGIA DE LAS GEODESICAS COMPLETAS E INCOMPLETAS</u></b> .....	<b>103</b>
1.- Límites de curvas en Relatividad General.....	104
2.- Semigeodésicas límite.....	106
(a) Definiciones generales.....	106
(b) Propiedades generales.....	107
3.- Propiedades topológicas de $C$ y $J$ .....	111
<b>Capítulo VI. <u>TOPOLOGIA DE LAS METRICAS INCOMPLETAS Y EL MODULO CONFORME</u></b> <b><u>DE LAS METRICAS LORENTZIANAS SOBRE EL TORO</u></b> .....	<b>115</b>
1.- Topología natural de las métricas de Lorentz sobre un toro.....	116
2.- Propiedades topológicas de las métricas de Lorentz completas e incompletas.....	119

3.- Discusión acerca del módulo conforme de las métricas de Lorentz sobre el toro.....	123
(a) Caracterización de las métricas conformemente llanas.....	123
(b) Algunos problemas específicos del caso lorentziano.....	127

REFERENCIAS.....	129
------------------	-----

## Capítulo I.

### PRELIMINARES

#### 1.- INTRODUCCION.

A lo largo de la presente memoria, dada una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $n > 0$  con una métrica no degenerada  $g$  diremos, como es usual, que  $(M, g)$  es una variedad *semi-riemanniana*; como casos particulares diremos que  $(M, g)$  es una variedad:

*definida*, si el índice de  $g$  es 0 ( $(M, g)$  variedad de Riemann) ó  $n$ ,

*indefinida*, si no es definida,

*lorentziana* o *de Lorentz*, si  $n > 1$  y el índice de  $g$  es 1.

Es de notar que todos los resultados que se vean para variedades de Lorentz tienen su análogo para variedades de índice  $n-1$ . Fijada la variedad semi-riemanniana  $(M, g)$ , consideraremos:

(1) El carácter causal de un vector  $X_p$  es: *temporal*, si  $g(X_p, X_p) < 0$ , *luminoso*, si  $g(X_p, X_p) = 0$  y  $X_p \neq 0$ , y *espacial*, si  $g(X_p, X_p) > 0$  ó  $X_p = 0$ . Por tanto, dada una geodésica  $\gamma$  de  $(M, g)$ , diremos que  $\gamma$  es temporal, luminosa o espacial según el carácter causal de su velocidad. Una geodésica inextensible se dice *completa* si su dominio es todo  $\mathbb{R}$ , e *incompleta* en caso contrario; de la métrica  $g$  diremos es *temporal*, *luminosa* o *espacialmente (geodésicamente) completa* si sus geodésicas temporales, luminosas o espaciales, respectivamente, son completas.

(2) Es bien conocido que, para una variedad indefinida arbitraria, no existe una distancia canónicamente asociada. Por tanto, no hay resultados análogos al Teorema de Hopf-Rinow en el caso indefinido. El término *completitud* se usará en adelante, para cualquier variedad semi-riemanniana, en el sentido

de completitud geodésica. Así, diremos que  $(M,g)$  es completa si y sólo si todas sus geodésicas inextendibles son completas, e incompleta en caso contrario; como se sabe, toda variedad compacta definida es completa, pero existen variedades compactas indefinidas que no lo son.

(a) ¿Por qué estudiar completitud en el caso compacto?

Motivos para estudiar la completitud de variedades compactas semi-riemannianas se pueden hallar tanto en Relatividad General como en Geometría Diferencial. Empecemos señalando algunos que surgen en Relatividad (ver también el trabajo recopilatorio [Yu1]):

(1) En Cosmología, el concepto de "singularidad" conduce de modo natural a estudiar completitud geodésica en *espacio-tiempos* o, en general, en variedades de Lorentz. Aunque aún no existe una definición completamente satisfactoria de lo que es una singularidad ([ElSc], ver también [Gu] y las referencias allí citadas) sí se puede afirmar que aparecen singularidades en cualquier variedad de Lorentz inextendible  $(M,g)$  que tenga una geodésica no espacial  $\gamma$  incompleta. Si, además, la imagen de  $\gamma$  cayera en un subconjunto compacto de  $M$ , podríamos hablar entonces de la existencia de una *singularidad global*. Para esta *singularidad global* no existen divergencias de cantidades físicas ni puntos suprimidos de otra variedad <sup>mayor</sup> por tanto, sería diferente a, v.gr., la singularidad asociada a un agujero negro.

Por otra parte, es fácil encontrar ejemplos en los que en algún recubridor lorentziano  $(\bar{M},\bar{g})$  de  $(M,g)$  existe un levantamiento  $\bar{\gamma}$  de  $\gamma$  cuya imagen  $Im\bar{\gamma}$  no cae en ningún compacto de  $\bar{M}$ ; así,  $\bar{\gamma}$  es incompleta y está asociada a una *singularidad global* análoga a la de  $\gamma$ . Resulta atrayente pensar que el comportamiento cualitativo de estas singularidades pueda considerarse paradigmático dentro del conjunto, más general, de las singularidades casi-regulares definidas en [ElSc].

En conclusión, sería interesante: (a) encontrar una interpretación física a estas *singularidades globales* ó (b) encontrar una buena condición física sobre los espacio-tiempos de modo que un espacio-tiempo compacto que la satisfaga sea completo. En cualquiera de los casos, el estudio de la completitud geodésica en variedades compactas debe conducir a un mejor entendimiento de los problemas que plantean las singularidades.

(2) De la anterior discusión se desprende que el estudio de la completitud de variedades de Lorentz compactas puede clarificar el concepto de singularidad en cualquier variedad de Lorentz; ello sucede desde un punto de vista técnico, independientemente de si se emplean o no variedades de Lorentz compactas como modelos de nuestro Universo físico. No obstante, existen argumentos para usar variedades compactas como tales modelos, de los que entresacamos:

(2A) Históricamente, los espacio-tiempos compactos han estado apartados de la mente de los relativistas. Ello se debe a que contienen curvas temporales cerradas, con las fastidiosas implicaciones que acarrearán desde el punto de vista de la Causalidad. Sin embargo, conforme se asienta en Cosmología el estudio de los agujeros de gusano, se especula con que las leyes de la Física puedan permitir (e incluso implicar) la existencia de curvas temporales cerradas (ver p. ej. [MTY], [FMNEKTY], [FrNo], [Wa], [KiTh], [Haw] y referencias en ellos). Así, la principal objeción para el uso de espacio-tiempos compactos como modelos de nuestro Universo físico pierde importancia. De hecho, se pueden debilitar las imposiciones usuales de la Teoría de la Causalidad (hiperbolicidad global, causalidad fuerte) en otras que, aun a costa de sacrificar el *libre albedrío*, evitan la existencia de paradojas (v. gr.: espacio-tiempos "benignos" en [FMNEKTY] o [Yu1]).

(2B) Desde un punto de vista menos radical, podemos dar el siguiente argumento, que es perfectamente compatible con la Teoría de la Causalidad. Es bien conocida la extraordinaria importancia de la Teoría de Campos sobre variedades compactas riemannianas, pero debe tenerse presente que el argumento usual para aplicarla luego sobre una variedad de Lorentz (*rotación de Wick*; ver p. ej. [Ra] o [WaWe] pág. 230 ss.) presenta dificultades para una variedad curvada arbitrariamente. Por tanto, parecería natural estudiar Teoría de Campos directamente sobre una variedad de Lorentz, y compactificarla cuando las condiciones de frontera lo hagan necesario.

En cualquier caso, nuestro punto de vista en adelante será, al margen de la aplicación en Física, estrictamente matemático. De los motivos que, para el estudio del problema que nos ocupa, aparecen en Geometría Diferencial, podemos señalar:

(1) La no existencia de un teorema análogo al de Hopf-Rinow para variedades compactas indefinidas, abre la posibilidad de múltiples problemas nuevos relacionados con la completitud. Pese a algunos resultados relevantes, como

los de Marsden [Ma] o Carrière [Ca], la lista de problemas abiertos que surgen naturalmente es larga. Aunque en el próximo apartado haremos un resumen de cuestiones abiertas, señalemos como muestra que: (a) hasta hace poco, el toro de Clifton-Pohl era el único ejemplo de variedad compacta semi-riemanniana incompleta en la literatura, y (b) apenas se conoce nada sobre la estructura del módulo conforme de las métricas de Lorentz sobre un toro.

(2) Un problema de gran interés es, sin duda, la clasificación de variedades compactas semi-riemannianas con alguna hipótesis adicional, como la de tener curvatura constante. En general, la hipótesis de completitud suele ser fundamental para poder llevar a cabo esta clasificación, y es natural preguntarse hasta qué punto resulta necesaria tal hipótesis. Así, recordemos que las 3-variedades lorentzianas compactas llanas completas con grupo fundamental conmutativo fueron acabadas de clasificar en 1959 [AuMa]; treinta años más tarde, Carrière [Ca] probó que todas las variedades de Lorentz compactas y llanas son completas, con lo que todas las 3-variedades de Lorentz compactas llanas con grupo fundamental conmutativo quedaban clasificadas. Hoy día no se sabe si son completas todas las variedades compactas indefinidas de curvatura constante que no sean llanas y lorentzianas, por lo que la hipótesis de completitud es fundamental para su clasificación (más resultados sobre clasificación de variedades compactas y llanas pueden encontrarse en [Fr] y [GoKa]; para un resumen reciente sobre este problema ver [Ka]).

(3) Por último, se hará patente a lo largo del presente trabajo que el caso compacto es, a menudo, el primer paso para demostrar resultados válidos en el caso no compacto.

#### **(b) Objetivos generales de la presente memoria.**

A muy grandes rasgos, nuestros objetivos pueden resumirse en:

(A) Probar nuevos teoremas sobre completitud de variedades compactas, extendiéndolos, cuando sea posible, al caso no compacto.

(B) Encontrar nuevos ejemplos de variedades semi-riemannianas compactas incompletas, mostrando cómo las hipótesis de los teoremas que se prueben son necesarias, y cómo la incompletitud surge de una manera natural aun en el caso compacto.

(C) Plantear nuevos problemas y aportar nuevas ideas para la solución de las cuestiones que queden abiertas.

A estos tres objetivos les podríamos añadir un cuarto: el de contribuir a aclarar el estado actual de la investigación.

Como un ejemplo de la necesidad de este objetivo, podemos citar el del "olvido" del teorema de Marsden. Este notable resultado (toda variedad semi-riemanniana compacta y homogénea es completa [Ma], 1973) aparece detalladamente explicado en el libro clásico [AbMa] en 1978 y ha sido recogido en 1983, con una prueba modificada, en el libro de O'Neill [On]. Pese a ello, Carrière lo desconocía quince años más tarde, cuando escribió su teorema (en [Ca] aparece en una nota añadida al final) y, en 1986, Goldman y Hirsch [GoHi] probaron, como consecuencia de su estudio de variedades afines compactas que "toda variedad compacta semi-riemanniana homogénea y llana es completa" sin hacer ninguna alusión a Marsden (ver también [Go] pág. 303). Más aún, el resultado de Goldman y Hirsch se vuelve a citar por Duncan e Ihrig [DuIh] ;en 1993 y sin caer en la cuenta de que la hipótesis de ser llana resulta innecesaria! Por otra parte, el resultado de Marsden dio al traste con ejemplos incorrectos de variedades semi-riemannianas compactas homogéneas debidos a Hermann y citados en el libro clásico de Wolf ([Wo], pág. 95).

En general, este cuarto objetivo parece especialmente adecuado por:

(a) Según el tipo de variedades compactas en el que se estudie la completitud, puede no ser fácil conocer qué técnica es la más apropiada usar. Así, en el Capítulo II se verá que el resultado de completitud principal obtenido recientemente en [Ka] puede alcanzarse de manera mucho más sencilla y en un contexto mucho más general (ver también [RoSa4]). También con una técnica muy sencilla, en el Capítulo VI se obtiene que una de las afirmaciones de Harris en [Har] es incorrecta. (b) Es frecuente la aparición, en Geometría Semi-Riemanniana, de resultados fuertemente contrarios a la intuición, por lo que se ha de ser especialmente cuidadoso en este aspecto. Así, en el Capítulo V veremos un contraejemplo que invalida uno de los pasos en la demostración del teorema en [Yu2] (ver también [RoSa1]).

Al principio de cada uno de los próximos capítulos, se describirán brevemente los resultados del correspondiente capítulo. Podemos, no obstante, resumir muy rápidamente el contenido del presente trabajo como sigue:

En el Capítulo II se dan resultados sobre completitud de variedades que admiten campos conformes con un determinado carácter causal, discutiéndose la necesidad y naturalidad de las hipótesis asumidas. Usando algunas técnicas introducidas en el Capítulo II, en el siguiente Capítulo se construyen nuevas familias de variedades compactas incompletas, con una colección de nuevas propiedades que pueden verificar.

En el Capítulo IV se estudian sistemáticamente variedades semi-riemannianas que son productos (localmente) warped, introduciéndose el concepto de *completitud warped*. Tanto en este Capítulo como en el Capítulo II, los resultados de completitud se extienden ampliamente al caso no compacto, así, en el apartado 3(c) del Cap. IV se estudian exhaustivamente variedades que incluyen a los espacio-tiempos *Robertson-Walker*.

En el Capítulo V se estudia la topología de las geodésicas completas de una variedad compacta semi-riemanniana, y en el Capítulo VI la topología de las métricas incompletas dentro del conjunto de las métricas de Lorentz sobre un toro; estos capítulos suponen un primer paso en el estudio del módulo conforme de las métricas de Lorentz sobre un toro.

## 2.- EL CASO COMPACTO INDEFINIDO FRENTE AL NO COMPACTO Y AL DEFINIDO.

A continuación se explicarán algunos problemas que, de manera inmediata y natural, surgen al estudiar la completitud de las variedades semi-riemannianas. En cada uno de estos problemas compararemos lo que sucede en el caso riemanniano (o definido), en el caso indefinido no compacto y en el caso indefinido compacto. Como se verá, todos los problemas se resuelven fácilmente en el caso riemanniano, y la mayor parte de ellos está resuelto en el caso indefinido no compacto. Para el caso compacto indefinido, algunos de ellos estaban resueltos con antelación y otros se resolverán, total o parcialmente, en esta memoria; sin embargo, la lista de problemas abiertos continúa siendo muy amplia (ver también [RoSa5]).

(1) Puesto que, en una variedad semi-riemanniana, se puede hablar de completitud espacial, luminosa y temporal (por supuesto, sin considerar el caso definido) podemos preguntarnos,

*¿Son independientes los tres tipos de completitud causal o, por el con-*

*trario, existe alguna dependencia lógica entre ellos?*

En el caso no compacto indefinido existen resultados que resuelven esta cuestión. Kundt [Kun] dio el primer ejemplo de variedad Lorentz que es completa en un carácter causal pero incompleta en otro. Geroch [Ge] y Beem [Be1] dieron los restantes ejemplos para mostrar la completa independencia lógica entre los tres tipos de completitud. No obstante, en algunos casos particulares sí pueden existir relaciones lógicas. Así, Lafuente probó [La] la completa equivalencia lógica entre los tres tipos de completitud para variedades semi-riemannianas localmente simétricas (por otra parte, recordemos que toda variedad semi-riemanniana simétrica es completa [On], Lemma 8.20). En esta misma línea, veremos en el Capítulo IV las dependencias de completitudes para las familias de variedades semi-riemannianas que son productos (localmente) warped con base definida.

Sin embargo, hasta donde el autor conoce, no existen contraejemplos *compactos* que muestren alguna independencia lógica entre los tres tipos de completitud. Tampoco existen resultados que aseguren alguna dependencia lógica; en [Yu2] se daban ciertos argumentos que, a la postre, implicaban que una variedad lorentziana compacta incompleta fuera siempre luminosamente incompleta (ver [RS1]). Sin embargo, en el Capítulo V se verá cómo estos argumentos fallan, de modo que el problema permanece abierto en el caso compacto.

(2) Todos los ejemplos mencionados de variedades de Lorentz completas en un carácter causal pero incompletas en algún otro se obtienen tomando una métrica de Lorentz y multiplicándola por un factor conforme conveniente. En general, podemos preguntarnos:

*¿Puede la completitud ganarse o perderse por cambios conformes de métrica?*

En el caso compacto riemanniano todas las métricas son completas, con lo que esta cuestión es trivial. En el caso no compacto, Nomizu y Ozeki [NoOz] probaron que toda métrica de Riemann es conforme tanto a una métrica completa como a una de diámetro finito (y, por tanto, incompleta). En consecuencia, esta cuestión queda completamente resuelta en el caso riemanniano.

En el caso indefinido el problema es mucho más sutil. En el caso importante (pero muy particular) de los espacio-tiempos *globalmente hiperbólicos*, que son variedades no compactas lorentzianas, los trabajos de Seifert [Se] y Clarke [Cl] nos permiten decir que todos los espacio-tiempos

globalmente hiperbólicos son conformemente temporal y luminosamente completos. No obstante, no se sabe qué sucede para la completitud espacial, incluso en el caso globalmente hiperbólico (ver [BeEr] pág. 148).

Para una variedad compacta indefinida no es difícil demostrar que la completitud luminosa es un invariante conforme (Capítulo III). En el Capítulo II veremos que la completitud es un invariante conforme para variedades compactas que admiten campos de Killing con un cierto carácter causal (este resultado se extiende al caso no compacto, siempre que el factor conforme tenga un comportamiento adecuado en infinito). Sin embargo, el problema general en el caso compacto indefinido permanece abierto tanto para la completitud espacial como para la temporal. En este contexto, es digno de mencionarse el trabajo de Friedrich y Schmidt sobre geodésicas conformes [FrSc]; no obstante, no parece que, dentro de su enfoque, sus resultados puedan aplicarse directamente al estudio de completitud ante cambios conformes de métricas.

(3) Recordemos que un producto warped  $(B \times F, g^f)$  con base la variedad semi-riemanniana  $(B, g_B)$ , fibra la variedad semi-riemanniana  $(F, g_F)$  y función warping  $f: B \rightarrow \mathbb{R}^+$ , es la variedad producto  $B \times F$  dotada de la métrica  $g^f$ :

$$g^f = \pi_B^* g_B + (f \circ \pi_B)^2 \pi_F^* g_F$$

(donde  $\pi_B: B \times F \rightarrow B$ ,  $\pi_F: B \times F \rightarrow F$  son las proyecciones naturales). Muchas familias interesantes de variedades de semi-riemannianas, como los espacio-tiempos *Robertson-Walker*, se incluyen en la familia de los productos warped.

Resulta fácil mostrar que si se toman dos variedades completas de Riemann entonces todo producto warped construido con ellas es completo (ver, p. ej. [On], Lemma 7.40).

Sin embargo, en el caso indefinido las cosas son bien distintas. Beem y Buseman dieron un contraejemplo ([On], Example 7.41) de producto warped incompleto con base y fibra completas y definidas. En el Capítulo IV estudiaremos sistemáticamente la completitud de los productos warped (e incluso de variedades más generales, que llamaremos *productos localmente warped*); como casos particulares de este estudio se caracterizarán cada una de las completitudes causales para espacio-tiempos que generalizan a los Robertson-Walker, y se probará que, si la fibra es completa y la base definida y compacta, el producto warped es completo para toda función warping (ver también [RoSa3]).

(4) En el caso riemanniano es conocido que una variedad homogénea es completa.

Pero en el caso no compacto lorentziano es fácil construir variedades homogéneas que son incompletas (ver [On] Remark 9.37(2) ó Cap.III § 1(b), así como [DuIh]).

En el teorema clásico citado, Marsden demostró que *cualquier variedad semi-riemanniana compacta y homogénea es completa* ([Ma] ó [AbMa], Theorem 4.2.22). En el Capítulo II extenderemos fácilmente este teorema al caso conformemente homogéneo y compacto (Proposición 2.7), dando así una respuesta parcial a la cuestión planteada en (2).

(5) Si se elimina un punto de una variedad completa entonces la variedad así obtenida deja de ser completa; como consecuencia de esta obviedad se tiene que en el caso no compacto semi-riemanniano, no existe ninguna relación clara entre curvatura y completitud.

Para el caso compacto indefinido sí se pueden buscar relaciones entre curvatura y completitud. De hecho, de un resultado de Carrière [Ca] se obtiene que *toda variedad compacta de Lorentz llana es completa*. Este teorema, unido al punto (2) anterior nos permite afirmar que toda variedad de Lorentz compacta globalmente conformemente llana es luminosamente completa. En consecuencia podemos preguntarnos,

*¿Qué relación existe entre curvatura y completitud? En particular, ¿es completa toda variedad semi-riemanniana conformemente llana?*

La primera pregunta es de un carácter muy general, en el Capítulo III se dará una respuesta parcial a ella que es bastante sorprendente: existen métricas lorentzianas completas e incompletas con la misma curvatura sobre un toro. Para la segunda pregunta daremos en el Capítulo II una respuesta parcial afirmativa, al probar que todo toro lorentziano conformemente llano es completo (resultado generalizable a algunas otras variedades §4). Aún más, en el Capítulo VI veremos que las métricas conformemente llanas sobre un toro se pueden obtener como límite de métricas incompletas.

Merece señalarse que el resultado de Marsden es válido para cualquier métrica semi-riemanniana, mientras que el de Carrière sólo lo es para métricas lorentzianas. Para variedades de Lorentz, la segunda de las preguntas formuladas puede verse como un caso particular de la formulada en (2); no obstante, el problema de la completitud de las variedades compactas llanas permanece abierto para variedades de otros índices.

(6) En el caso riemanniano, el teorema de uniformización permite afirmar que sólo existen tres clases conformes de superficies de Riemann 1-conexas, dos de ellas homeomorfas a  $\mathbb{R}^2$  y una a la esfera  $S^2$ . Es también un resultado clásico que el módulo conforme de las métricas de Riemann sobre un toro es canónicamente identificable a  $\mathbb{C}$ , ([FaKr], IV.7, Theorem en pág. 198).

Los problemas análogos en superficies lorentzianas distan mucho de admitir (por el momento) soluciones de tal elegancia. Las superficies lorentzianas 1-conexas son homeomorfas a  $\mathbb{R}^2$ ; una primera aproximación al estudio de las correspondientes clases conformes puede hallarse en [Kul]. La estructura del módulo conforme de las métricas de Lorentz sobre un toro es mucho más compleja que la de su análogo lorentziano (ver [Yu1]). En el Capítulo VI le dotaremos de una topología natural, caracterizaremos las métricas conformemente llanas y veremos algunos problemas nuevos que pueden surgir. Quedan así abiertas las cuestiones,

*El módulo conforme de las métricas de Lorentz sobre un toro, ¿es identificable a algún espacio topológico conocido? ¿Admite una estructura natural de variedad topológica o diferenciable?*

(7) Por último, señalemos la necesidad de encontrar ejemplos de variedades lorentzianas incompletas (y completas). En el Capítulo III se construye un buen número de ellos y se analizan nuevas propiedades (p. ej. geodésicas completas en variedades indefinidas compactas cuya velocidad no cae en un compacto); parece además obvia la necesidad de hallar nuevos ejemplos. Así, señalemos:

(7a) Furness y Arrowsmith [FuAr] probaron que toda variedad localmente simétrica, compacta y 1-conexa es simétrica y, por tanto, completa. Pero, ¿es necesaria la hipótesis de 1-conexión?

(7b) Por el teorema de Hopf-Rinow, una variedad completa es siempre geodésicamente conexa. Ello no se mantiene en el caso indefinido no compacto: la pseudoesfera  $S_1^n$  es completa pero no geodésicamente conexa. La conexión geodésica de variedades Reissner-Nordström ha sido estudiada en [Gi]. En el caso compacto lorentziano, se verá (Capítulo III) que una variedad incompleta puede ser tanto geodésicamente conexa como geodésicamente desconexa. Sin embargo, ¿existen variedades de Lorentz compactas y completas pero no geodésicamente conexas?

Es de señalar que, probablemente, de los problemas abiertos que se han visto los dos primeros sean los más importantes. Ello se debe tanto a la naturalidad de sus hipótesis como a su relación con el resto de los problemas abiertos. Motivados por ellos, estableceremos las siguientes conjeturas:

**Conjetura Conforme (CC):** *toda variedad semi-riemanniana compacta que es (globalmente) conforme a una variedad semi-riemanniana completa es a su vez completa.*

**Conjetura de Dependencia de Completitudes (CDC):** *toda variedad semi-riemanniana compacta e incompleta es luminosamente incompleta.*

Ambos problemas no son independientes, pues si CDC es cierta entonces CC es cierta (Teorema III.32(3)). Se probará la equivalencia de algunos de los problemas que quedarán abiertos en la presente memoria, con CC y CDC.

Como un resumen de las propiedades vistas se tiene el esquema de la página siguiente.

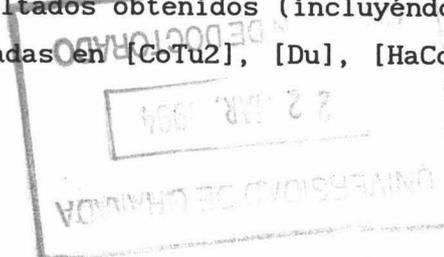
	<i>Riemanniano</i>	<i>Indefinido no compacto</i>	<i>Indefinido compacto</i>
Independencia 3 tipos de completitud causal	No definido	Totalmente indep. Caso particular: localmente simétrico $\Rightarrow$ equivalente (Simétrico $\Rightarrow$ completo)	ABIERTO  (Localmente simétrico y 1-conexo $\Rightarrow$ Simétrico $\Rightarrow$ completo)
Existencia de factores conformes que producen completitud	Compacto $\Rightarrow$ completo  No compacto SI	Hiperbolicidad global: Completitud luminosa y temporal, SI Espacial, ABIERTO (Ver también Cap. II)	Completitud luminosa NO Espacial o temporal ABIERTO  (Cfr. Cap. II, III)
Producto warped de variedades completas y definidas	Completo	No necesariamente completo (Caracterizaciones en Cap. IV)	Base compacta y definida $\Rightarrow$ completo (Ver Cap. IV)
Homogéneo $\Rightarrow$ completo?	SI	NO	SI (también para métricas conformes, Cap. II)
Relación con curvatura	Existen ejemplos completos e incompletos con igual curvatura (caso indefinido compacto en Cap. III).		
Llano $\Rightarrow$ completo?	Trivialmente NO	Trivialmente NO	SI para índice 1 ABIERTO en general.
Conforme a llano $\Rightarrow$ completo?			Completitud luminosa, índice 1, SI Toro y otros casos particulares, SI ABIERTO en general (Cap. II)
Completo $\Rightarrow$ geodésicamente conexo?	SI	NO	ABIERTO (existen toros incompletos geod. conexos y no conexos, Cap. III)

## Capítulo II.

# COMPLETITUD DE VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS CON SIMETRÍAS CONFORMES.

"En Relatividad General, a menudo se supone la existencia de ciertas simetrías para la búsqueda de soluciones a las ecuaciones de Einstein" [CoTu2] y, de hecho, "todos los espacio-tiempos conocidos explícitamente que son soluciones a las ecuaciones de Einstein presentan algún grupo de isometrías no trivial" [EIMM]. La aparición de simetrías manifiestas en sistemas físicos, unida a la necesidad técnica de poder integrar complicados sistemas de ecuaciones diferenciales, conduce a la búsqueda simultánea de simetrías y soluciones tanto en las ecuaciones de Einstein como en otras ecuaciones de interés en Física. Esta situación no es nueva en Geometría Diferencial: el estudio de objetos con simetrías, pese a ser éstas estructuras mayoritariamente rígidas, parece ser la regla en Geometría más que la excepción [DaGr].

Las simetrías conformes que se estudian en este Capítulo presentan, hablando informalmente, las siguientes ventajas. En primer lugar incluyen a las isometrías, por lo que resultan aplicables en muchos de los espacio-tiempos manejados usualmente. Por otra parte, al existir "muchos factores conformes" por los que multiplicar las métricas, resulta sencillo generar ejemplos en los que la "hipótesis conforme" es aplicable pero no así la "isométrica" (de hecho, en dimensión 2 toda variedad semi-riemanniana presenta localmente simetrías conformes no triviales, y esta propiedad, a diferencia de la de existencia de isometrías locales, no es rígida [DaGr]). Así, aunque se delimitan con precisión hasta dónde se pueden extender los resultados obtenidos (incluyéndose, p. ej., las simetrías afines conformes, estudiadas en [CoTu2], [Du], [HaCo]), la



facilidad de encontrar ejemplos con simetrías conformes casi obliga a que, al obtenerse resultados, se evite la formulación de hipótesis que, aunque aparentemente más generales, no dan en la práctica aplicaciones a nuevos ejemplos. A todo ello se ha de añadir la aplicación en Física de las simetrías conformes a, p. ej., el estudio de fluidos en Relatividad General (ver [CoTu1] y referencias ahí).

El resultado fundamental de este Capítulo, Teorema 4, permitirá, entre otros, deducir los siguientes resultados: (1) todo toro lorentziano conformemente llano es completo (Teorema 15), (2) todo espacio tiempo conforme a uno estacionario compacto es completo (Ejemplo 8), y (3) el Teorema de Marsden puede extenderse al caso conformemente homogéneo (Proposición 7). Pese a estas aplicaciones al caso compacto, es de señalar que el Teorema 4 se formula directamente en variedades no necesariamente compactas; su aplicación general se ilustra con ejemplos (que incluyen métricas de Kaluza-Klein con base definida) en §3. Esta extensión al caso no compacto no resulta en absoluto trivial; de hecho, dada la sencillez con la que se pueden construir variedades no compactas homogéneas incompletas ([On] Remark 9.37(2), [DuIh]) resulta difícil pensar en una extensión natural del Teorema de Marsden al caso no compacto.

Respecto a las técnicas usadas, merece la pena comentarse que el estudio del grupo de isometrías de una variedad en la línea de los resultados de Kamishima [Ka], y Goldman y Hirsch [GoHi] no parece aportar las técnicas más apropiadas para el estudio de la completitud. Así, el resultado principal sobre completitud en variedades de Lorentz con campos de Killing obtenido en [Ka] permite afirmar que "toda variedad de Lorentz de curvatura constante que admite un campo de Killing temporal es completa" (Theorem A). Sin embargo en el presente estudio, con una técnica de demostración más geométrica y en la línea de Marsden, se verá que no sólo la hipótesis de curvatura constante se puede suprimir sino que el resultado se mantiene en unas hipótesis mucho más generales (Corolario 5, Observación 6; ver también [RoSa4]). En el caso compacto, la técnica aquí usada puede considerarse una extensión de la de Marsden en el siguiente sentido:

En el teorema de Marsden, resulta esencial el poder asegurar que, dada una variedad semi-riemanniana homogénea  $(M, g)$ , para cada punto  $p \in M$  existen tantos campos de Killing independientes en  $p$  como dimensión tenga  $M$ . Sin embargo, veremos que, para asegurar completitud, basta con suponer la existencia

de un número de campos conformes temporales independientes en  $p$  igual al índice de  $g$ . En las Observaciones 6 y 9 se ponen los límites donde los resultados de completitud son ciertos; en el próximo Capítulo se darán contraejemplos para cuando estos límites se rebasan. En cualquier caso, el Capítulo II no agota las posibilidades de esta técnica: en [RoSa7] y [RoSa8] se hacen grandes extensiones, en direcciones muy diferentes, de estos resultados.

## 1.- PREVIOS.

Dadas dos variedades semi-riemannianas,  $(M, g)$  y  $(M', g')$  diremos que un difeomorfismo  $\phi: M \rightarrow M'$  es *conforme* si existe una función  $\mu$  (distinta de 0 en todo punto) sobre  $M$  tal que  $\phi^* g' = \mu \cdot g$ ; como es usual, diremos que dos variedades semi-riemannianas son conformes si existe un difeomorfismo conforme entre ambas. Nótese que resultan equivalentes (a) que la variedad  $(M, g)$  sea conforme a una variedad llana (resp. homogénea) y (b) que exista una función  $\mu > 0$  sobre  $M$  tal que  $(M, \mu \cdot g)$  es llana (resp. homogénea). En cualquiera de estos casos, diremos que  $(M, g)$  es *conformemente llana* (resp. *conformemente homogénea*); es de observar, por tanto, que la condición de ser conformemente llana (resp. homogénea) es *global*. Un campo de vectores  $\xi$  sobre  $M$  se dice conforme si sus flujos locales consisten en aplicaciones conformes entre abiertos de  $M$ , o, equivalentemente, si:

$$\mathfrak{L}_\xi g = \sigma \cdot g \quad (2.1)$$

donde  $\mathfrak{L}$  denota a la derivada de Lie y  $\sigma$  es una función sobre  $M$ . Por supuesto, si  $\xi$  es un campo de Killing entonces es conforme para  $g$  ( $\sigma \equiv 0$ ) y, dado cualquier factor conforme  $\Omega \neq 0$  en todo punto, se tiene  $L_\xi(\Omega \cdot g) = \xi(\Omega) \cdot g$ , esto es,  $\xi$  es un campo conforme para  $\Omega \cdot g$ .

Los siguientes dos resultados técnicos serán de gran utilidad posterior, por lo que, aunque conocidos, se esbozará su demostración.

**Lema 1.-** Sea  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana,  $\xi$  un campo conforme, y  $\gamma: I \rightarrow M$  una geodésica. Entonces

$$\frac{d}{dt} g(\gamma', \xi) = \frac{1}{2} C \cdot (\sigma \circ \gamma) \quad (2.2)$$

donde  $C = g(\gamma', \gamma')$ , y  $\sigma$  verifica (2.1) para  $\xi$ .

Dem.- Nótese que para cualesquiera campos  $X, Y, Z$  sobre  $M$  se tiene,  $(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X)$ . Por tanto, el resultado se sigue sin más que tomar  $X = \xi, Y = Z =$  extensiones locales de  $\gamma'$ . ■

**Lema 2.**- Sea  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana,  $\gamma: [0, b[ \rightarrow M, 0 < b < \infty$ , una geodésica. Entonces  $\gamma$  es extendible más allá de  $b$  si y sólo si existe una sucesión  $\{t_n\} \rightarrow b : \{\gamma'(t_n)\}$  converge en  $TM$ .

Dem.- Por supuesto, la condición necesaria es obvia y, para la suficiente, basta con tener en cuenta los siguientes resultados:

A) Sean  $N$  una variedad,  $G$  un campo de vectores sobre  $N$  y  $\alpha: [0, b[ \rightarrow N, b < \infty$ , una curva integral de  $G$ . Entonces  $\alpha$  es extendible como curva integral de  $G$  más allá de  $b$  si y solo si existe una sucesión  $\{t_n\} \rightarrow b$  tal que  $\{\alpha(t_n)\}$  converge en  $N$  (ver [On] Lemma 1.56).

B) Sea  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana, y sea  $G$  el campo geodésico sobre  $TM$  asociado a  $g$  (esto es  $G_x$  es la derivada en 0 de la curva en  $TM, t \rightarrow \exp(tX_p)'$ ,  $\forall X_p \in TM$ ). Si  $\gamma$  es una geodésica en  $M$  entonces  $\gamma'$  es una curva integral de  $G$  ([On] Proposition 3.28). ■

**Observación 3.**- (1) En la demostración del Teorema de Marsden en [Ma] y [AbMa], 4.2.22 se prueba que el fibrado tangente de una variedad semi-riemanniana compacta y homogénea puede dividirse en una colección de subconjuntos compactos que son invariantes por el flujo geodésico. Por tanto, el resultado aparece como una consecuencia inmediata del Lema 2.

(2) En la demostración de este Teorema que aparece en [On], Proposition 9.39, se usa que, en una variedad semi-riemanniana homogénea, cualquier vector tangente puede extenderse a un campo de Killing (global), [On], Corollary 9.38. Considerando esta propiedad en un punto de acumulación de la imagen de cada geodésica, el resultado se sigue fácilmente de los dos Lemas anteriores.

## 2.- TEOREMA FUNDAMENTAL Y PRIMERAS CONSECUENCIAS.

**Teorema 4.-** Sea  $(M, g)$  una variedad con una métrica indefinida de índice  $s \in \mathbb{N}$ . Si existen  $s$  campos  $\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$  temporales y conformes que verifiquen:

(i) la matriz  $\{g(\xi_i, \xi_j)\}$  tiene inversa  $\{g^{ij}\}$ , y  $\sum_{i,j} (g^{ij})^2$  está acotado sobre  $M$ ,

(ii) las funciones  $\sigma_i$  que satisfacen (2.1) para el correspondiente campo  $\xi_i$ , están acotadas,

(iii) la métrica de Riemann  $g_R$  es completa, viniendo  $g_R$  dada por:  $g_R(Z, W) = g(Z, W) - 2 \sum_{i,j} g^{ij} \cdot g(Z, \xi_j) \cdot g(\xi_i, W)$ ,  $\forall Z, W \in \chi(M)$ , esto es,  $g_R(X, Y) = g(X, Y)$ ,  $g_R(A, B) = -g(A, B)$ ,  $g_R(X, A) = 0$  para todo  $A, B \in \text{Span}\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$  y para todo  $X, Y$  en su  $g$ -complemento ortogonal.

Entonces  $(M, g)$  es completa.

Dem. - Comprobaremos que cualquier geodésica  $\gamma: [0, b[ \rightarrow M$ ,  $0 < b < \infty$ , es extendible a  $b$ . Por (iii) y el Lema 2, basta con demostrar que  $g_R(\gamma', \gamma')$  está acotada. Observemos que

$$g_R(\gamma', \gamma') = C - 2 \cdot \sum_{i,j} g^{ij} \cdot g(\xi_i, \gamma') \cdot g(\xi_j, \gamma') \quad (2.3)$$

donde  $C = g(\gamma', \gamma')$  es una constante. Por la condición (i), basta con demostrar que  $|g(\xi_i, \gamma')|$  está acotado,  $1 \leq i \leq s$ . Teniendo en cuenta el Lema 1, se sigue,

$$(d/dt)g(\xi_i, \gamma') = \frac{1}{2} C \cdot (\sigma_i \circ \gamma) \quad (2.4)$$

luego, por la condición (ii),  $(d/dt)g(\xi_i, \gamma')$  está acotado. Como el intervalo de definición de  $[0, b[ \gamma$  es finito,  $g(\xi_i, \gamma')$  también está acotado, como se quería. ■

Notemos que si  $M$  es compacta entonces, cuando  $\{g(\xi_i, \xi_j)\}$  tiene inversa, las condiciones (i) a (iii) en este Teorema se satisfacen automáticamente, produciendo:

**Corolario 5.-** Sea  $(M, g)$  una variedad compacta con una métrica indefinida de índice  $s \in \mathbb{N}$ . Si existen  $s$  campos conformes  $\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$  que sean temporales e independientes en cada punto entonces  $(M, g)$  es completa.

**Observación 6.-** (1) Las hipótesis en el Teorema 4 podrían debilitarse. Así cambiemos la condición de que  $\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$  sean conformes por la condición de que  $\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$  sean campos conformes afines, esto es, (ver [CoTu2])

$$\nabla_{\xi_i} g = \sigma_i \cdot g + T_i$$

donde  $T_i$  es un campo de tensores 2-covariantes paralelo sobre  $M$ ,  $\sigma_i \in C^\infty(M)$ ,  $i \in \{1, \dots, s\}$ . En este caso, (2.4) se reescribe como

$$(d/dt)g(\xi_1, \gamma') = \frac{1}{2} C.(\sigma_i \circ \gamma) + \frac{1}{2} T_i(\gamma', \gamma') \quad (2.5)$$

La condición de que  $T_i$  sea paralelo (y  $\gamma$  geodésica) implica que el último término sea constante, con lo que  $(d/dt)g(\xi_1, \gamma')$  vuelve a estar acotada, y la demostración se sigue como en el Teorema 4.

(2) En el Corolario 5 puede no sólo hacerse la suposición de que sean conformes afines, sino además se puede permitir que los campos  $\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$  tengan ceros, se hagan luminosos o sean dependientes en un conjunto finito de puntos  $\{p_1, \dots, p_m\}$  y la conclusión seguirá siendo cierta. La razón es la siguiente:

Tomemos  $\gamma: [0, b[ \rightarrow M$  como en la demostración del Teorema 4. Si, cuando  $t \rightarrow b$ ,  $\gamma$  converge a  $p_i$  para algún  $i \in \{1, \dots, m\}$  no hay nada que demostrar ([On], Lema 5.8); en caso contrario, por la continuidad de  $\gamma$  y la compacidad de  $M$  podemos encontrar un punto  $p \in M - \{p_1, \dots, p_m\}$  y una sucesión  $\{t_n\} \rightarrow b$  tales que  $\{\gamma(t_n)\} \rightarrow p$ . Tomando un entorno  $U$  de  $p$  cuya adherencia  $\bar{U}$  no interseque a  $\{p_1, \dots, p_m\}$ , tendremos que  $\{g^{ij}\}$  está acotado en  $\bar{U}$ . Por otra parte,  $(d/dt)g(\xi_1, \gamma')$  está acotada (como se vio en (2.5) ó (2.4)), y, por tanto, también lo estará  $g(\xi_1, \gamma')$ . En consecuencia  $g_R(\gamma', \gamma')$  (ver (2.3)) está acotado en  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , por lo que basta con aplicar el Lema 2.

(3) Por último, señalemos que, anteriormente en (2), la única condición esencial es: para todo punto  $p$  de  $M$  (salvo, a lo sumo, un número finito) existen  $s$  campos conformes afines definidos en toda la variedad que son independientes en  $p$ .

(4) Si  $\xi$  es temporal conforme para  $g$ , entonces  $\xi$  es Killing para  $g^* = -(1/g(\xi, \xi)) \cdot g$  (ver la Teorema 12 en Cap. VI y su comentario posterior). Por ello, si la conjetura conforme CC fuera cierta, podría darse una prueba más

directa del Corolario 5 para  $s=1$  considerando primero el caso en que  $\xi_1$  fuera Killing temporal, y extendiéndolo luego al caso conforme temporal por CC.

Consideremos ahora una variedad conformemente homogénea  $(M,g)$  y tengamos en cuenta: (a) cada campo de Killing  $\xi$  de la variedad homogénea  $(M,\Omega.g)$  a la que es conforme  $(M,g)$  es un campo conforme para  $(M,g)$  (§1), y (b) todo vector que pertenece a  $TM$  puede extenderse a un campo de Killing de  $(M,\Omega.g)$  (ver Observación 3 (2)). Entonces, aplicando la Observación 6 (3) se tiene,

**Proposición 7.-** *Toda variedad compacta semi-riemanniana conformemente homogénea es completa.*

### 3.- EJEMPLOS.

**Ejemplo 8.-** En primer lugar, recordemos que se dice que un espacio-tiempo (o, más generalmente, una variedad de Lorentz  $n$ -dimensional) es *estacionario* si admite un campo de Killing temporal [SaWu], pág. 219. En consecuencia el Corolario 5 da, como caso particular, que *todo espacio-tiempo compacto conforme a uno estacionario es completo.*

**Observación 9.-** (1) Podría conjeturarse que tal vez las hipótesis del Ejemplo anterior, o incluso las del Corolario 5 se podrían debilitar, imponiendo sólo a los campos conformes ser no espaciales en ningún punto, en lugar de ser temporales en todo punto. De hecho, en la Observación 6 ya se vio que los campos podían dejar de ser temporales en un conjunto finito de puntos, y la completitud se seguía obteniendo. No obstante:

(A) Esta conjetura es falsa: en el próximo Capítulo (ver Observación III.26 (1)) construiremos toros incompletos que admiten campos de Killing no espaciales y que, además, son temporales en un subconjunto denso de cada toro,

(B) El Corolario 5 permite afirmar que cualquier toro que admita un campo conforme que no se anule ni sea luminoso en ningún punto es completo; el toro de Clifton-Pohl es un ejemplo de toro incompleto con un campo de Killing que no se anula en ningún punto.

(2) Otra posible relajación en las hipótesis que podría conjeturarse, es la de la existencia de un *campo rígido*. Recordemos que un campo temporal  $Z$  sobre una variedad de Lorentz  $(M, g)$  con  $g(Z, Z) = -1$  induce una aplicación  $A$  en el fibrado ortogonal a  $Z$ ,  $\text{Span}\{Z\}^\perp$ , mediante  $A(v) = -\nabla_v Z$ ,  $\forall v \in \text{Span}\{Z\}^\perp$ ;  $Z$  se dice rígido si  $g(A(v), w) = -g(v, A(w))$ ,  $\forall v, w \in \text{Span}\{Z\}^\perp$  ([SaWu] pág.56). Si  $K$  es un campo de Killing temporal para  $g$  entonces  $Z = (1/\sqrt{-g(K, K)}) \cdot K$  es rígido, por lo que toda variedad de Lorentz estacionaria admite un campo rígido. No obstante, en el Capítulo IV (Contraejemplo 23) veremos que existen variedades Lorentz compactas incompletas que admiten un campo rígido.

**Ejemplo 10.** - Consideremos un fibrado principal  $P(B, G)$  con base  $B$  y grupo estructural  $G$ , y sea  $\omega: TP \rightarrow \mathfrak{g}$  cualquier conexión sobre  $P$  ( $\mathfrak{g}$  denota al álgebra de Lie de  $G$ ). Sea  $g_B$  una métrica de Riemann completa sobre  $B$  y supongamos que  $\mathfrak{g}$  tiene una métrica semi-riemanniana bi-invariante  $g_{\mathfrak{g}}$  de índice  $s$  (si suponemos que  $\mathfrak{g}$  es semisimple, podemos tomar su forma de Killing). Sea  $f > 0$  cualquier función diferenciable sobre  $B$  tal que  $\text{Inf}(f) > 0$ , y definamos sobre  $P$  la siguiente métrica, que generaliza a las usuales de Kaluza-Klein (las métricas de Kaluza-Klein se estudian en [Sa] Cap. 2 y referencias ahí):

$$g^f = \pi_B^* g_B + (f \circ \pi_B)^2 \omega^* g_{\mathfrak{g}}.$$

Comprobaremos a continuación que  $(P, g^f)$  cae en las hipótesis del Teorema 4, por lo que  $g^f$  es completa (en Cap. IV, Observación 21, veremos que la hipótesis  $\text{Inf}(f) > 0$  puede, de hecho, debilitarse imponiendo solamente que "f notienda a 0 demasiado rápidamente").

Tomemos  $s$  campos de vectores temporales invariantes por la izquierda  $\{A_1, \dots, A_s\}$  en  $\mathfrak{g}$ , que sean  $g_{\mathfrak{g}}$ -ortonormales. Veamos que los correspondientes campos de vectores fundamentales  $\{A_1^*, \dots, A_s^*\}$  sobre  $P$  son campos de Killing en las hipótesis del Teorema 4.

Notemos que  $g^f(A_i^*, A_j^*)(u) = f(\pi_B(u))^2 \cdot g_{\mathfrak{g}}(A_i, A_j)$ ,  $\forall u \in P$ . Puesto que  $g_{\mathfrak{g}}(A_i, A_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$ ,  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$  es una constante independiente del punto  $u$  escogido, la condición  $\text{Inf}(f) > 0$  implica que se verifique (i) en el Teorema 4.

Para (iii), consideremos primero la métrica de Riemann invariante por la izquierda  $g_{GR}$  sobre  $G$ , que se obtiene ampliando primero  $\{A_1, \dots, A_s\}$  hasta

obtener una base  $g_g$ -ortonormal de campos invariantes por la izquierda, e imponiendo entonces que estos campos formen una base ortonormal punto a punto de  $g_{gR}$ . Puesto que  $g_{gR}$  es invariante por la izquierda,  $(G, g_{gR})$  es una variedad de Riemann homogénea y, por tanto, completa. Nótese que, la métrica  $g_R$  del Teorema 4 es, en este caso,

$$g_R = \pi_B^* g_B + (f \circ \pi_B)^2 \omega^* g_{gR} .$$

Tomemos ahora una curva diferenciable  $\rho: [0, b[ \rightarrow P$ ,  $0 < b < \infty$ , de  $g_R$ -velocidad 1; su extendibilidad a  $b$  se prueba de:

(a) Sea  $\rho_B := \pi_B \circ \rho$ , que tiene  $g_B$ -longitud finita (de hecho,  $\leq b$ ); por la completitud de  $g_B$  la curva  $\rho_B$  tiende a un punto  $x_0 \in B$ .

(b) Tomemos una trivialización local del fibrado en un entorno de  $x_0$ , y sea  $\rho_F$  la proyección de  $\rho$  sobre la fibra. Puesto que  $\rho_F$  tiene una  $g_{gR}$ -longitud finita (de hecho, menor o igual que  $b \cdot \text{Inf}(f \circ \rho_B)^{-1}$ ), la completitud de  $g_{gR}$  implica que  $\rho_F$  sea prolongable de modo continuo a  $b$ .

Finalmente, para probar que los campos  $\{A_1^*, \dots, A_s^*\}$  son de Killing basta con tener en cuenta:

(a) Para cada  $a \in G$  definamos la traslación por la derecha:  $R_a: P \rightarrow P$ ,  $R_a(u) = ua$ ,  $\forall u \in P$ . Usando que  $g_g$  es bi-invariante, resulta directo comprobar que  $R_a$  es una isometría de  $g^f$ ,  $\forall a \in G$ .

(b) El flujo asociado al campo fundamental  $A^*$  es  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ , con  $\phi_t(u) = R_{(a^t)}(u)$ ,  $\forall u \in P$ , y  $a^t = \exp(tA)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , siendo  $\exp$  la aplicación exponencial asociada a  $G$ .

(c) En consecuencia, el flujo asociado a  $A^*$  está formado por isometrías, por lo que  $A^*$  es Killing ([On] Proposition 9.23).

**Ejemplo 11.-** Consideremos sobre  $\mathbb{R}^{2n}$   $3n$  funciones  $\alpha_i, \beta_i, \delta_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , y la métrica  $g$  que, en el sistema usual de coordenadas,  $B_0 = (\partial/\partial x_j)$ , tiene por matriz:

$$M_{B_0}(g) = \left[ \begin{array}{cc|cc} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & -\delta_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_2 & -\delta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

(en el caso  $n=1$  aparece sólo la primera submatriz cuadrada  $2 \times 2$ ) esto es,  $g_{2i-1,2i-1} = \alpha_i$ ,  $g_{2i-1,2i} = g_{2i,2i-1} = \beta_i$ ,  $g_{2i,2i} = -\delta_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , siendo cero el resto de las componentes. Supongamos que, para  $1 \leq i \leq n$ :

(a)  $\text{Inf}(\alpha_i \delta_i + \beta_i^2) > 0$ , (nótese que  $(\alpha_i \delta_i + \beta_i^2) > 0 \Rightarrow$  la métrica restringida al correspondiente subespacio de dimensión 2 es Lorentz; en particular, el índice de la métrica  $g$  es  $n$ ).

(b)  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  y  $\delta_i$  sólo dependen de las coordenadas impares  $(x_1, \dots, x_{2n-1})$ , con lo que los campos coordenados  $\xi_i := \partial/\partial x_{2i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , son campos de Killing.

(c)  $\text{Inf}(\delta_i) > 0$ .

(d)  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  y  $\delta_i$  están acotadas<sup>1</sup>.

Veamos que estas condiciones implican que la métrica  $g_R$  del Teorema 4 es completa, con lo que  $(\mathbb{R}^2, g)$  resulta completa. Para ello, observemos que:

$$g_R(Z, W) = g(Z, W) + 2 \sum_1 (1/\delta_i) g(Z, \xi_i) g(\xi_i, W)$$

de donde

---

<sup>1</sup>De hecho, no es difícil comprobar que la hipótesis (d) puede relajarse pues: (i) realmente, no es necesaria la condición de acotación sobre  $\alpha_i$  (ii) si  $\alpha_i \geq 0$ , tampoco es necesaria la de  $\beta_i$  (iii) si  $\alpha_i \geq \varepsilon > 0$ , no son necesarias ni la de  $\beta_i$  ni la de  $\delta_i$ .

$$M_{B_0}(g_R) = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc|cc} \alpha_1 + \frac{2\beta_1^2}{\delta_1} & -\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_1 & \delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_n + \frac{2\beta_n^2}{\delta_n} & -\beta_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_n & \delta_n \end{array} \right]$$

La completitud de  $g_R$  se sigue fácilmente comprobando que el ínfimo  $\nu$  de los autovalores de  $M_{B_0}(g_R)$  en  $\mathbb{R}^2$  es mayor que 0 (en este caso  $g_R \geq \nu g_0$ , siendo  $g_0$  la métrica de Riemann usual de  $\mathbb{R}^{2n}$ ). Para ello, basta con demostrar que los dos autovalores de cada submatriz

$$\begin{pmatrix} \alpha_i + \frac{2\beta_i^2}{\delta_i} & -\beta_i \\ -\beta_i & \delta_i \end{pmatrix}$$

tienen un ínfimo mayor que 0. Ello es inmediato, pues llamando  $D_i$  al determinante de cada submatriz,  $T_i$  a la traza y  $\lambda_i^+$ ,  $\lambda_i^-$  a los valores propios se tiene:

$$\text{Inf}(\lambda_i^+, \lambda_i^-) = \text{Inf}(D_i) = \text{Inf}(\alpha_i \delta_i + \beta_i^2) > 0$$

$$\text{Sup}(\lambda_i^+, \lambda_i^-) = \text{Sup}(T_i) = \text{Sup}(\alpha_i + \delta_i + 2\beta_i^2/\delta_i) < \infty \Rightarrow \lambda_i^+, \lambda_i^- \text{ acotados.}$$

**Ejemplo 12.**—Consideremos en el Ejemplo anterior cualquier factor conforme  $\Omega = \exp(2\omega)$  tal que  $\omega$  y  $\partial\omega/\partial x_{2i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , están acotados. La acotación inferior de  $\omega$  implica que  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  verifiquen (i) e (iii) en el Teorema 4, y, por el resto de acotaciones, también se verificará (ii); en consecuencia, la métrica  $\Omega.g$  es completa.

Es de señalar que estas métricas incluyen, tras cambios convenientes de coordenadas, a métricas sobre  $\mathbb{R}^2$  tales como:

$$g_1 = \zeta(x_1, x_2) \left( \exp(2u_2(x_2)) dx_1^2 - \exp(2u_1(x_1)) dx_2^2 \right) \text{ ó}$$

$$g_2 = \zeta(x_1, x_2) \left( dx_1^2 - \exp(2u(x_1 - x_2)) dx_2^2 \right),$$

donde las funciones  $\zeta$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u$  y algunas de sus derivadas se suponen convenientemente acotadas. (Para  $g_1$  nótese que

$$g_1 = \zeta(x_1, \bar{x}_2) \exp(2u_2(\bar{x}_2)) \left( dx_1^2 - \exp(2u_1(x_1)) d\bar{x}_2^2 \right)$$

con  $\bar{x}_2(x_2) = \int_0^{x_2} \exp(-u_2(x)) dx$ ,  $\forall x_2 \in \mathbb{R}$ ).

#### 4.- CURVATURA Y COMPLETITUD.

Para variedades no compactas riemannianas, lorentzianas, o semi-riemannianas en general, no existe ninguna relación clara entre curvatura y completitud. Para el caso compacto indefinido, daremos, en el próximo Capítulo, un resultado en esta misma dirección (Teorema III.5): *existen variedades compactas que admiten métricas lorentzianas completas e incompletas con la misma curvatura.*

Sin embargo, Y. Carrière probó [Ca] una cierta relación entre curvatura y completitud al demostrar: *toda variedad lorentziana llana y compacta es completa.* El siguiente paso en la línea de este resultado, parece natural sea responder a la cuestión:

*¿Es toda variedad lorentziana compacta y conformemente llana completa?*

El Corolario 5 permite dar una respuesta parcial en el siguiente sentido: si además admite un campo de vectores de Killing (o conforme) temporal, la respuesta es afirmativa. La siguiente pregunta que surge entonces de modo natural es ¿qué variedades lorentzianas llanas compactas admiten un campo de Killing temporal? Aún más, la falta de orientabilidad temporal obstruiría la existencia de ese campo de vectores, pero ello no sería impedimento para obtener la completitud si el recubridor de 2 hojas orientable temporalmente admite un

campo de vectores de Killing (conforme), por lo que podríamos preguntarnos de manera más general

*¿Qué variedades lorentzianas llanas compactas admiten un recubridor lorentziano con un número finito de hojas y que tenga un campo de Killing (o conforme) temporal?*

A continuación, vamos a demostrar de manera directa que cualquier 2-toro lorentziano llano admite tal recubridor. De los argumentos en [Yu1] pág. 3069, se puede asegurar que cualquier n-toro lorentziano llano también lo admitirá. Se sabe que ello también ocurre en otras variedades lorentzianas [RoSa2], y es esperable que, próximamente, se pueda dar una clasificación completa de este tipo de variedades.

**Lema 13.** - *Todo 2-toro lorentziano llano admite un campo de Killing temporal.*

Dem. - Por el resultado de Carrière [Ca], el toro es completo; en consecuencia, su recubridor universal lorentziano es  $\mathbb{L}^2$  ([On] Corollary 8.26). Nótese que el campo coordinado  $\partial/\partial x^2$  es Killing, por lo que basta con comprobar que este campo se puede inducir en el toro.

Para ello, notemos que cualquier automorfismo de recubridor de  $\mathbb{L}^2$  es composición de una isometría vectorial  $A$  que conserva la orientación y la orientación temporal, y de una traslación  $T$ . Si consideramos la matriz de  $A$  en la base usual,  $M(A, B_0)$ , se sabe que esta matriz es diagonalizable; en el caso de que sus valores propios pertenezcan a  $\{-1, 1\}$ , necesariamente,  $M(A, B_0)$  es la identidad o menos la identidad.

Teniendo en cuenta que el grupo  $G$  de los automorfismos de recubridor de  $\mathbb{L}^2$  actúa propia y discontinuamente sobre  $\mathbb{L}^2$ , la inducibilidad de  $\partial/\partial x^2$  en el toro se deduce directamente si se prueba que  $G$  está formado únicamente por traslaciones; lo cual se sigue del siguiente resultado:

"Sea  $f$  una isometría de  $\mathbb{L}^2$ , y sean  $A$  una isometría vectorial de  $\mathbb{L}^2$  y  $b \in \mathbb{L}^2$  tales que  $f(x) = A(x) + b$ ,  $\forall x \in \mathbb{L}^2$ . Si 1 no es un valor propio de  $A$  entonces  $f$  deja un (único) punto fijo."

La prueba de este resultado es inmediata ya que, si 1 no es un valor propio de  $A$ , entonces  $\det(A-I) \neq 0$ , y, por tanto, el sistema de ecuaciones lineales  $(A-I)(x) = -b$  es de Crámer. ■

**Observación 14.-** (1) Puesto que existen toros lorentzianos no orientables temporalmente ([SaWu], Example 1.2.2), ninguno de ellos será conformemente llano (comparar con Observación 6 y Nota 10 del Cap. III).

(2) En la demostración del Lema anterior, al probar que la isometría  $f$  de  $\mathbb{L}^2$ , que no admite a 1 como valor propio, deja un punto fijo, realmente, la hipótesis de que  $f$  sea isometría podría debilitarse por la de que  $f$  sea una aplicación afín. Recordemos asimismo que si  $f(x) = A(x)+b$ ,  $\forall x \in \mathbb{L}^2$ , es una isometría de  $\mathbb{L}^2$  y  $A$  no admite a 1 ni a  $-1$  como valores propios, entonces  $A$  admite una base ordenada de vectores propios luminosos  $B$ , y, tomando una base afín  $\bar{B}$  que tenga a  $B$  por base vectorial asociada, se tendrá,

$$M(f, \bar{B}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & b_1 \\ 0 & 1/\lambda & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para un cierto  $\lambda \notin \{-1, 1\}$ .

La matriz  $M(f, \bar{B})$  admite a 1 como un valor propio, y, en el correspondiente subespacio propio, existe un vector propio con tercera componente 1, que es

$$\begin{pmatrix} b_1/(1-\lambda) \\ \lambda b_2/(1-\lambda) \\ 1 \end{pmatrix},$$

Por tanto, el punto de  $\mathbb{L}^2$  que tiene esta coordenadas afines en  $\bar{B}$  es el -único- punto fijo para  $f$ .

Como una consecuencia del Lema 13, y de la discusión previa, se tiene el siguiente resultado, cuya utilidad será manifiesta en Cap. VI (comparar con [FuFe]):

**Teorema 15.-** *Todo variedad lorentziana compacta de dimensión 2 que sea conformemente llana es completa.*

**Observación 16.-** Sea  $(M, g)$  una variedad lorentziana compacta conformemente llana de dimensión  $n+1$ , y sea  $\Omega > 0$  un factor conforme tal que  $(M, \Omega \cdot g)$  es llana. El recubridor universal lorentziano de  $(M, \Omega \cdot g)$  es  $\mathbb{L}^{n+1}$  ([On], Corollary 8.26), y sea  $\pi: \mathbb{L}^{n+1} \rightarrow M$  la correspondiente aplicación recubridora. La métrica  $\pi^* g$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  es completa si y sólo si  $g$  lo es. Nótese que  $\partial/\partial x^{n+1}$  es un campo conforme temporal para  $\pi^* g$ , que, claramente, verifica las condiciones (i) e (iii)

del Teorema 4. Si el factor conforme  $\Omega$  es tal que la condición (ii) de este Teorema también se verifica,  $(M,g)$  será completa.

### Capítulo III.

## EJEMPLOS DE MÉTRICAS INCOMPLETAS SOBRE TOROS.

Desde el punto de vista de la completitud, las conexiones que proceden de una métrica indefinida sobre una variedad compacta se hallan a medio camino entre las afines (existen ejemplos de conexiones afines incompletas sencillas sobre  $S^1$ , [KoNo] pág. 292) y las riemannianas (no existen conexiones riemannianas incompletas sobre variedades compactas). Este Capítulo se dedica a la construcción de toros lorentzianos incompletos, incluyendo contraejemplos anunciados en el Capítulo anterior. Como se justifica en §5, todos los ejemplos que aparecen en la literatura de toros incompletos (hasta donde el autor conoce) están incluidos en las familias de ejemplos que aquí se estudian.

En §1(a) se construye una primera clase de métricas incompletas sobre un cilindro con geodésicas luminosas cerradas e incompletas. Este primer ejemplo tiene como objeto permitir "hacer sentir" de forma intuitiva cómo surge la incompletitud en geodésicas con imagen contenida en un compacto. En §1(b) se da un proceso para construir nuevos ejemplos de cilindros con geodésicas luminosas cerradas e incompletas, esta vez inducibles en un toro. Aunque, en principio, este ejemplo es tan intuitivo como el anterior, la necesidad técnica de inducirlo en un compacto obliga a trabajar en unas coordenadas donde queda enmascarada la incompletitud. Por ello, cuando se examina la expresión final de la métrica sobre el toro no resulta inmediato, de manera intuitiva, que esta métrica sea incompleta. Como aplicación sencilla de los ejemplos en §1 y de las técnicas usadas en Cap. II, en §2 se obtiene el siguiente resultado:

*existen métricas completas e incompletas sobre un toro con la misma curvatura* (Teorema 5).

En §3 se generalizan de modo natural las métricas incompletas introducidas en §1, y se estudia de modo sistemático la completitud y el comportamiento cualitativo de todas sus geodésicas (ver también [RoSa6]). Este estudio se apoya en que se pueden hallar dos integrales primeras a la ecuación de las geodésicas, usando, por un lado, la existencia de un campo de Killing, y por otro la constancia de la métrica a lo largo de cualquier geodésica. En cualquier caso, tal estudio resulta laborioso, por lo que el §3 se divide en los siguientes subapartados: §3(a) Se definen las métricas, se obtienen las integrales primeras (ecuaciones (3.3a) y (3.3b) y se señalan las dificultades que habrán de sortearse en su estudio. §3(b) En cada uno de sus dos epígrafes (§3(b)I, §3(b)II) se analiza detalladamente cada una de las dos integrales primeras. §3(c) Se obtienen los resultados definitivos (Teorema 22, Observación 23), comprobándose la incompletitud de todas las métricas estudiadas (Teorema 25).

Las propiedades especiales que presentan las geodésicas luminosas se estudian en §4; entre ellas destacan: una caracterización de la completitud de cada geodésica luminosa según el campo luminoso del que procede, §4(a), determinación de qué geodésicas luminosas son cerradas, §4(b), comprobación de que las pregeodésicas luminosas son un invariante conforme, y caracterización de cuándo su completitud puede también considerarse como tal invariante §4(c) .

En §6 se analiza primero la conexión geodésica y después la posibilidad de que, a diferencia del caso riemanniano, existan geodésicas completas en variedades indefinidas compactas con velocidad no contenida en un compacto. Respecto a la conexión geodésica, merece comentarse:

El hecho de que el toro de Clifton-Pohl no es geodésicamente conexo ya estaba recogido en [On], Exercise 9.12. En la Proposición 35 se dan tres familias incompletas de métricas sobre  $\mathbb{R}^2$  ( $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$ ,  $\mathcal{S}_3$ ) que se inducen sobre un toro, resultando éste geodésicamente conexo para las dos primeras, y geodésicamente desconexo para la tercera. En §5, se prueba que el toro de Clifton-Pohl puede obtenerse a partir de una métrica  $g$  en  $\mathcal{S}_3$  (como un caso particular, puede verse así que el toro de Clifton-Pohl no es geodésicamente conexo). En [Be2], Example 3, se da un ejemplo de un toro lorentziano que no es geodésica-

mente conexo. Es de señalar que este ejemplo es un caso particular de los aquí mostrados; de hecho, de la técnica usada en §5, resulta inmediato que ese toro es, esencialmente, el toro de Clifton-Pohl.

## 1.- ¿POR QUÉ SURGE LA INCOMPLETITUD EN VARIEDADES COMPACTAS?

### (a) Cambios de carta lorentzianos y geodésicas cerradas incompletas.

Empecemos recordando el concepto bien conocido de geodésica cerrada,

**Definición 1.-** Sea  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana. Diremos que una geodésica no constante  $\gamma: I \rightarrow M$  ( $I$  intervalo de  $\mathbb{R}$ ) es cerrada si  $\exists \lambda > 0$  y dos puntos del dominio  $s_1, s_2 \in I$ , ( $s_1 \neq s_2$ ) tales que  $\gamma'(s_1) = \lambda \gamma'(s_2)$ .

Por supuesto, si  $\gamma$  no es luminosa el escalar  $\lambda$  sólo puede ser 1. Es fácil comprobar que en el caso de que  $\lambda$  no sea 1, la geodésica cerrada es incompleta ([On], Proposition 7.13). Definamos a continuación variedades con geodésicas cerradas incompletas.

**Construcción 2.-** Recordemos previamente que, para todo  $\lambda \neq 0$ , podemos definir una isometría vectorial de  $\mathbb{L}^2$  tomando una base de vectores luminosos,  $\{w_1, w_2\}$  e imponiendo que la imagen de  $w_1$  sea  $\lambda w_1$ , y que la de  $w_2$  sea  $(1/\lambda)w_2$ .

Consideremos dos copias de  $\mathbb{L}^2$ , que denotaremos por  $\mathbb{L}^2$  y  $\check{\mathbb{L}}^2$ , sean  $a > 0$ ,  $b > 0$ , tomemos coordenadas luminosas usuales  $(u, v)$ ,  $(\check{u}, \check{v})$  en  $\mathbb{L}^2$  y  $\check{\mathbb{L}}^2$  respectivamente (así, la métrica  $g_0$  de  $\mathbb{L}^2$  se escribe  $g_0 = du \odot dv + dv \odot du$ ; y análogamente para  $\check{\mathbb{L}}^2$ ) y definamos los abiertos:

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{L}^2 / -a < u < b\}$$

$$\check{U} = \{(\check{u}, \check{v}) \in \check{\mathbb{L}}^2 / -2b < \check{u} < a\}$$

$$U_1 = \{(u_1, v_1) \in \mathbb{L}^2 / -a < u_1 < 0\}$$

$$\check{U}_1 = \{(\check{u}_1, \check{v}_1) \in \check{\mathbb{L}}^2 / 0 < \check{u}_1 < a\}$$

$$U_2 = \{(u_2, v_2) \in \mathbb{L}^2 / 0 < u_2 < b\}$$

$$\check{U}_2 = \{(\check{u}_2, \check{v}_2) \in \check{\mathbb{L}}^2 / -2b < \check{u}_2 < 0\}$$

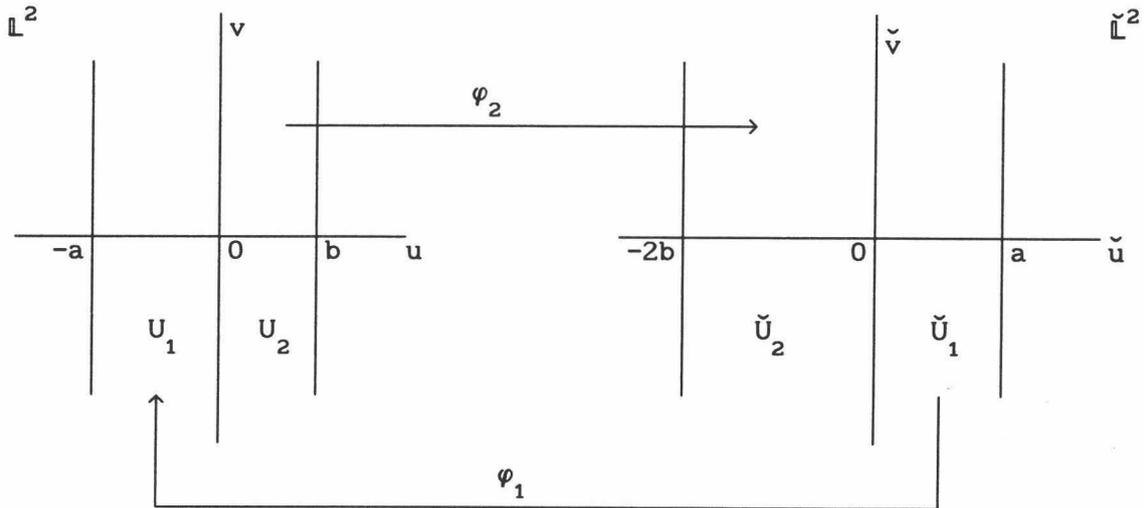


Fig. 3.1

Claramente, las siguientes aplicaciones son isometrías,

$$\begin{aligned} \varphi_1: \quad \check{U}_1 &\longrightarrow U_1 & \varphi_2: \quad U_2 &\longrightarrow \check{U}_2 \\ (\check{u}_1, \check{v}_1) &\longrightarrow (u_1 - a, v_1) & (u_2, v_2) &\longrightarrow (2u_2 - 2b, \frac{1}{2}v_2) \end{aligned}$$

Si en la unión disjunta de  $U$  y  $\check{U}$  identificamos cada punto con su imagen por  $\varphi_1$  ó  $\varphi_2$ , el cociente es topológicamente un cilindro,  $C^{(ab)}$  al que se le puede inducir de modo natural una estructura diferenciable y una métrica lorentziana  $g^{(ab)}$ , obteniéndose una variedad de Lorentz (ver Fig. 3.1).

Si consideramos la geodésica  $\bar{\gamma}$  en  $U$  tal que  $\bar{\gamma}(0) = (0,0)$ ,  $\bar{\gamma}'(0) = (1,0)$ , su proyección  $\gamma$  sobre  $C^{(ab)}$  es una geodésica; si extendemos el dominio de  $\gamma$  de modo maximal obtendremos una geodésica cerrada definida en  $]-\infty, a+2b[$  y no prolongable más allá.

Un procedimiento bien conocido de construir un cilindro con una geodésica lu-

minosa cerrada incompleta es el siguiente. Consideremos primero en  $\mathbb{L}^2$  el abierto  $V$  definido en coordenadas luminosas usuales por  $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / u > 0\}$ , y llamemos  $g$  a la métrica restringida sobre  $V$   $g_0|_V$ . Fácilmente,  $(V,g)$  es homogéneo y llano, pero no completo, ver [On], Example 7.14 y Remark 9.37(2)). Consideremos también la isometría  $\psi$  en  $\mathbb{L}^2$  dada por  $\psi(u,v) = (u/2, 2.v)$ , y sea  $G$  el grupo de isometrías generado por  $\psi$ .

**Observaciones 3.-** (1) La acción de  $G$  sobre  $\mathbb{L}^2$  no es discontinua.

(2) La acción por isometrías de  $G$  es inducible en  $\mathbb{L}^2 - \{(0,0)\}$ . Esta acción es discontinua pero no propiamente discontinua. Se puede dotar al cociente de estructura de variedad no Hausdorff. (Ello no podría ocurrir si la acción fuera discontinua y por isometrías de una métrica de Riemann; ver p. ej. [KoNo] Prop. 4.4 en Chap. I).

(3) La acción de  $G$  es inducible en  $V$ . En este caso, la acción es propiamente discontinua y se obtiene como cociente una variedad de Lorentz  $(C,g')$ , que es topológicamente un cilindro.  $(C,g')$  es incompleto al serlo  $(V,g)$ ; de hecho, la geodésica nula incompleta en  $V$ ,  $t \rightarrow (t,0)$ , se proyecta en una geodésica cerrada incompleta  $\rho$  de  $(C,g')$ . Nótese que la conexión en  $V$  es la misma que la restricción de la conexión de Levi Civita asociada a la métrica de Riemann usual en  $\mathbb{R}^2$ ; sin embargo, la conexión en  $(C,g')$  no puede ser la conexión de Levi-Civita asociada a ninguna métrica de Riemann.

Llamaremos *cilindro de Misner* al cilindro lorentziano con una geodésica luminosa cerrada incompleta  $(C,g')$  (ver también [HaEl] págs. 171-172).

**Observación 4.-** Es de notar que tanto los cilindros  $(C^{(ab)}, g^{(ab)})$  como el cilindro de Misner son llanos, por lo que podemos hallar para cada uno de ellos un atlas  $\{(U_i, \varphi_i) / i \in I\}$  donde cada carta coordenada  $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{L}^2$  es una isometría  $\forall i \in I$ . Puesto que las conexiones de los cilindros no pueden obtenerse como conexiones de Levi-Civita para ninguna métrica de Riemann, forzosamente existirá algún cambio de cartas  $\varphi_k \circ \varphi_j^{-1}$  que no será una isometría sobre su imagen cuando se considera la restricción de la métrica de Riemann usual (aunque sí cuando se considera la de Lorentz). Como se verá en la próxima subsección, este hecho puede quedar camuflado según las coordenadas que se tomen.

(b) Ejemplos naturales de toros incompletos.

Consideremos primeramente  $\mathbb{R}^2$  con la métrica de Lorentz usual  $g_0$  escrita en las coordenadas lumosas usuales  $x_1, x_2$  como  $g_0 = dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1$ , y consideremos, por otra parte, la subvariedad  $(V, g)$  de  $(\mathbb{R}^2, g_0)$  vista en el subapartado b) anterior; llamando  $u, v$  a las coordenadas naturales de  $V$ , se tiene  $g = du \otimes dv + dv \otimes du$ . Formemos a continuación dos cilindros lorentzianos: el primero  $(C_0, g_0')$  es el cociente de  $(\mathbb{R}^2, g_0)$  obtenido de la acción propia y discontinua de  $\mathbb{Z}$  inducida por  $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + 1)$ ,  $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ; el segundo  $(C, g')$  es el cilindro de Misner, una de cuyas geodésicas incompletas es  $\rho$  antes construida. Claramente, los dos cilindros tienen métricas de Lorentz llanas, siendo  $g_0'$  completa e inducible en un 2-toro, y  $g'$  incompleta y, (por el teorema de Carrière) no inducible en un 2-toro. Grosso modo, nuestro objetivo a continuación será construir un cilindro lorentziano incompleto e inducible en un toro en los siguientes pasos: (1) relacionar los dos cilindros por un difeomorfismo  $\Phi'$  y (2) construir una métrica sobre  $C_0$  que, en un entorno de  $\Phi'^{-1}(\rho)$ , se comporte como  $g$  (y, por tanto, sea incompleta), y fuera de una región compacta se comporte como  $g_0$  (y sea, por tanto, inducible en un compacto).

(1) Consideremos el difeomorfismo

$$\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow V, \quad \Phi(x_1, x_2) = (\exp(x_2), \exp(-x_2) \cdot x_1).$$

y sea  $S(u, v) = (e \cdot u, (1/e) \cdot v)$ . Puesto que  $\Phi \circ T = S \circ \Phi$ ,  $\Phi$  se induce en un difeomorfismo  $\Phi'$  entre  $C_0$  y  $C$ . Denotemos por  $g^*$  y  $g'^*$  a las métricas inducidas respectivamente sobre  $\mathbb{R}^2$  y  $C_0$ , esto es,  $g^* = \Phi^* g$ ,  $g'^* = \Phi'^* g'$ . Nótese que, en las coordenadas de  $\mathbb{R}^2$ ,  $g^*_{(x_1, x_2)} = dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1 - 2x_1 (dx_2)^2$ . Claramente, el eje  $x_2$  se reparametriza como una geodésica incompleta para  $g^*$ .

(2) Consideremos ahora una función meseta  $\mu$  que valga 1 en un entorno  $]-\varepsilon, \varepsilon[$ ,  $1 > \varepsilon > 0$ , de 0, y que valga 0 fuera de  $]-1, 1[$ . Sea  $h$  la métrica en  $\mathbb{R}^2$  dada por,

$$\begin{aligned} h_{(x_1, x_2)} &= \mu(x_1) g^*_{(x_1, x_2)} + (1 - \mu(x_1)) g_0 = \\ &= dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1 - 2 \mu(x_1) x_1 (dx_2)^2 \end{aligned}$$

Entonces  $h$  es una métrica de Lorentz incompleta e inducible en  $C_0$ . Aún más, tal como se quería,  $h$  también se puede inducir en un 2-toro, identificando mediante una traslación cualquier circunferencia  $S_\lambda$  en  $C_0$  tal que  $x_1 = \lambda < -1$ , con cualquier circunferencia  $S_{\lambda'}$  en  $C_0$ ,  $x_1 = \lambda' > 1$  (ver Fig. 3.2 en página siguiente).

Aún más, debido a que los símbolos de Christoffel que aparecen en la ecuación de las geodésicas sólo dependen en cada punto del valor de la métrica y su primera derivada en cada punto, podemos concluir que cualquier métrica  $h^\tau$  sobre  $\mathbb{R}^2$  del tipo

$$h^\tau = dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1 - 2 \tau(x_1) (dx_2)^2, \quad (3.1)$$

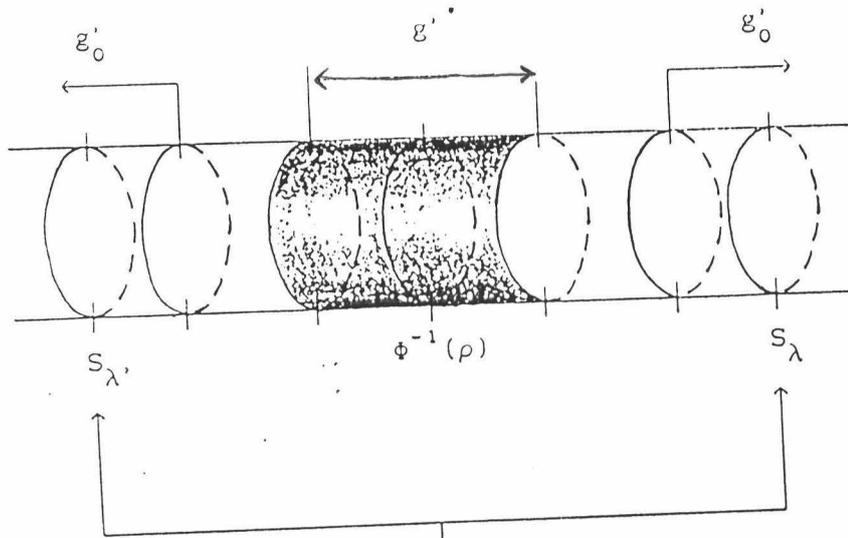
es incompleta siempre que  $\tau(0) = 0$ ,  $\tau'(0) = 1$ . Si  $\tau$  es periódica esta métrica será inducible en un 2-toro.

Las métricas del tipo  $h^\tau$  son casos particulares de las métricas que se estudiarán en §3. No obstante, para uso en el próximo apartado, retengamos las siguientes propiedades:

(1) Si  $\tau(0)=0$  pero  $\tau'(0) \neq 0$  entonces  $h^\tau$  es incompleta. De hecho, es inmediato de la ecuación de las geodésicas que existe una geodésica luminosa con  $x_1 \equiv 0$  y  $x_2$  una solución de  $x_2'' + \tau'(0) (x_2')^2 = 0$ .

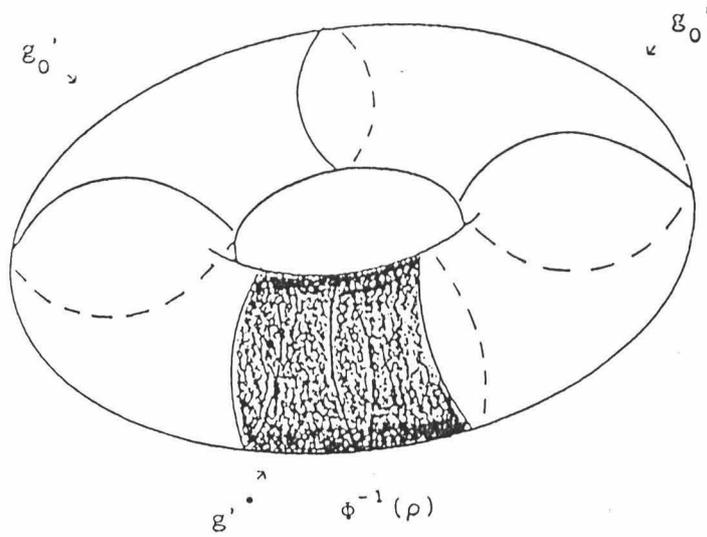
(2) Si  $\tau$  es periódica, entonces  $h^\tau$  es inducible en un toro.

Fig 3.2



Identificar

$$S_{\lambda} \equiv S_{\lambda'}$$



## 2.- TOROS COMPLETOS E INCOMPLETOS CON LA MISMA CURVATURA.

En Cap. II §4 se anunció que existen variedades compactas completas e incompletas con la misma curvatura. Veamos a continuación que tales variedades pueden hallarse a partir de las métricas  $h^\tau$  construidas en (3.1).

En primer lugar, observemos que la curvatura de Gauss de cualquier de las métricas  $h^\tau$  es  $-\tau''$ . Supongamos que tomamos  $\tau$  periódica; por ser  $h^\tau$  inducible en un toro  $T^2$  tendremos, aplicando el Corolario II.5 al campo de Killing inducido por  $\partial/\partial x_2$  en  $T^2$ , que, si  $\tau > 0$  ó  $\tau < 0$ , entonces la métrica inducida sobre el toro es completa. En consecuencia, escogiendo convenientemente  $\tau$  se tiene:

**Teorema 5-** Sea  $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función periódica de periodo  $T$  tal que:

$$(1) \int_0^T k = 0$$

(2)  $k$  no es idénticamente 0.

Entonces existen dos métricas de Lorentz  $h_1$  y  $h_2$  sobre  $\mathbb{R}^2$ ,  $h_1$  completa y  $h_2$  incompleta, con curvatura de Gauss para ambas  $K(x_1, x_2) = k(x_1)$ ,  $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , y que son inducibles en un 2-toro.

**Observación 6.-** (A) Si la condición (1) no se cumpliera, el Teorema de Gauss-Bonnet impediría que  $h_1$  y  $h_2$  fueran inducibles en un 2-toro. Si la condición (2) fallara, el teorema de Carrière impediría que  $h_2$  se indujera en un compacto.

(B) Usando el Teorema II.15, podemos afirmar que, en notable diferencia al caso riemanniano, las métricas  $h_2$  sobre el toro no son conformemente llanas. Ello también será inmediato si se toma  $h_2$  como una de las métricas  $h^\tau$  del §1(b), que son luminosamente incompletas, y se aplican (i) el Teorema 32 más adelante, por el que toda variedad compacta conforme a una luminosamente incompleta es, a su vez, luminosamente incompleta e (ii) el Teorema de Carrière, por el que toda variedad de Lorentz llana y compacta es, en particular, luminosamente completa. Por otra parte, como se verá en el Teorema 12 del Cap. VI, todo toro que admite un campo de Killing (o conforme) temporal es conformemente llano. Ello puede comprobarse directamente para las métricas  $h^\tau$

con  $\tau \neq 0$  en todo punto sin más que tener en cuenta:

$$h^\tau = \tau(x_1) \left( \frac{1}{\tau(x_1)} (dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1) - 2 (dx_2)^2 \right),$$

y tomando como nuevas variables  $(y_1, y_2)$  dadas por:

$$y_1(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \frac{1}{\tau} , \quad y_2(x_1, x_2) = x_2$$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ .

### 3.- FAMILIAS MAS GENERALES DE METRICAS DE LORENTZ INCOMPLETAS.

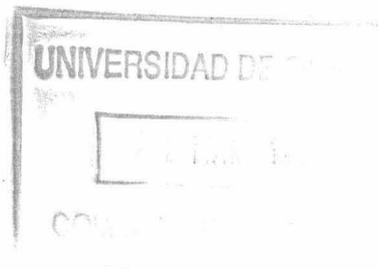
#### (a) Definición del tipo de métrica.

Consideremos a continuación la métrica  $g$  sobre  $\mathbb{R}^2$  definida en coordenadas usuales  $(x_1, x_2)$  por:

$$g_{(x_1, x_2)} = \alpha(x_1) dx_1^2 + \beta(x_1) [dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1] - \delta(x_1) dx_2^2 \quad (3.2)$$

donde  $\alpha, \beta, \delta$  son funciones diferenciables sobre  $\mathbb{R}$  que verifican  $\alpha\delta + \beta^2 > 0$ , esto es,  $g$  es una métrica de Lorentz. Claramente esta métrica generaliza a las métricas del tipo  $h^\tau$  vistas en §1, y el campo coordenado  $K = \partial/\partial x_2$  es un campo de Killing para  $(\mathbb{R}^2, g)$ . Si suponemos que  $\alpha, \beta, \delta$  son periódicas de periodos conmensurables, entonces  $g$  será inducible de modo natural en una métrica  $g'$  sobre un 2-toro  $T^2$  (comparar con Ejemplo 11 del Cap. II). Si además  $\delta \neq 0$  en todo punto, aplicando el Corolario II.5 la métrica  $g'$  (y, por tanto, la métrica  $g$ ) será completa.

Sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $I$  intervalo ( $I \neq \emptyset$ ),  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$  cualquier geodésica en  $(\mathbb{R}^2, g)$ , y sean  $C, D \in \mathbb{R}$  las constantes tales que  $C = g(\gamma', \gamma')$ ,  $D = g(\gamma', K)$ . Despejando  $x_1'(t)$  y  $x_2'(t)$  punto a punto encontraremos un cierto  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$



tal que:

$$x_1'(t) = \varepsilon \sqrt{\frac{D^2 + \delta C}{\alpha \delta + \beta^2}} (x_1(t)) \quad (3.3a)$$

$$\delta(x_1(t)) \cdot x_2'(t) = \beta(x_1(t)) \cdot x_1'(t) - D \quad (3.3b)$$

Si  $x_1' \equiv 0$  entonces  $\varepsilon$  se puede escoger tanto 1 como -1 en todo punto. En caso contrario, el valor de  $\varepsilon$  puede variar de un punto  $t$  a otro. Si, para ser más precisos, llamamos  $\varepsilon(t)$  al valor que debe tomar  $\varepsilon$  en  $\{-1, 1\}$  para cada punto  $t \in I$ , se tendrá que  $\varepsilon(t)$  está unívocamente determinado en los puntos tales que  $x_1'(t) \neq 0$ , y, claramente,  $\varepsilon(t)$  es constante en cada intervalo donde  $x_1'$  no se anule. Sin embargo, más adelante quedará de manifiesto que si  $t_1$  es un punto donde  $x_1'$  se anula y  $x_1' \neq 0$ , entonces los valores de  $\varepsilon$  no se pueden definir de manera continua en  $t_1$  (§3(b)I, especialmente Construcción 16).

**Observación 7.-** Cada geodésica  $\gamma$  de  $(\mathbb{R}^2, g)$  fija unos valores de  $C$ ,  $D$  y  $\varepsilon$  (al menos en los intervalos en que  $x_1'$  no se anula) y, en consecuencia, unas ecuaciones (3.3) con condiciones iniciales  $x_1(t_0)$ ,  $x_2(t_0)$ , (en  $t_0 \in I$ ) de la que  $\gamma$  es solución. Podemos preguntarnos cuándo, fijados unos valores de  $C$ ,  $D$ ,  $\varepsilon$ ,  $x_1(t_0)$ ,  $x_2(t_0)$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ , las soluciones a las ecuaciones (3.3) determinarán una geodésica. Habrá que tener para ello dos precauciones:

*Compatibilidad de las condiciones iniciales:* para que exista alguna solución a (3.3a) es necesario y suficiente que  $D^2 + \delta C \geq 0$ ; una vez impuesta esta condición, existirá alguna solución a (3.3b) sólo si no se verifican simultáneamente  $\delta(x_1(t_0)) = 0$ , y  $\varepsilon D / \beta(x_1(t_0)) < 0$ .

*Unicidad de las soluciones:* las soluciones a la ecuación (3.3a) no están determinadas de modo único si existe la posibilidad de que  $D^2 + \delta C$  (esto es  $x_1'$ ) se anule, (de hecho, la aplicación raíz cuadrada no es lipschitziana en 0 con lo que los teoremas usuales de unicidad para soluciones de una ecuación diferencial no pueden usarse; más geoméricamente, cuando  $x_1'$  se anula,  $\gamma'$  y  $K \circ \gamma$  son paralelos, de modo que la constancia de  $g(\gamma', \gamma')$  y  $g(\gamma', K)$  no fija "dos condiciones independientes" sobre  $\gamma'$ ). Además, como se ha anunciado, para una geodésica el valor de  $\varepsilon$  no tiene por qué mantenerse constante si  $x_1'$  se anula. Por otra parte, supuesto que exista unicidad para  $x_1$ , el valor de  $\delta \circ x_1$  puede hacerse 0, y, en ese caso, el valor de  $x_2'$  no queda unívocamente determinado por (3.3b).

Como se verá, es la anulación de  $\delta$  en algún punto  $x_1$ , y el hecho de que  $\delta'(x_1)$  sea o no nulo, lo que determina la existencia de geodésicas incompletas, y su comportamiento cualitativo (compárese con el comportamiento de las métricas  $h^\tau$  al final de §1). Para fijar ideas, en adelante, se considerará la métrica  $g$  dada en (3.2), imponiéndosele las condiciones,

**Definición 8.-** Denotaremos por  $\mathcal{G}$  a la familia formada por las métricas de Lorentz dadas en (3.2) que verifican:

(i)  $\alpha, \beta, \delta$  son periódicas de periodo 1 .

(ii)  $\delta(0) = 0$  , y  $\delta$  se anula sólo en puntos aislados,  $p_0=0, \dots, p_{n-1} \in [0,1[$ ,  $p_n = 1$  ,  $p_{k+1} = p_{k+n} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (n \geq 1)$ .

(iii) En cada punto  $p_i$  donde  $\delta$  se anula, existe una derivada de  $\delta$  que no es cero,  $\forall i \in \mathbb{Z}$ .

Si  $g \in \mathcal{G}$ , denotaremos por  $g'$  a la correspondiente métrica inducida sobre el toro  $T^2$ , obtenido como cociente por la acción propiamente discontinua de  $\mathbb{Z}^2$  sobre  $\mathbb{R}^2$  dada por las isometrías  $((m,n), (x,y)) \longrightarrow (m+x, n+y)$ ,  $\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ , de la métrica de Lorentz  $g$ .

Denotaremos por  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  y  $\mathcal{G}_3$  a las siguientes subfamilias de  $\mathcal{G}$ ,

$\mathcal{G}_1$ , definida por: sea  $g \in \mathcal{G}$ , entonces

$$g \in \mathcal{G}_1 \Leftrightarrow \delta|_{]0,1[} > 0 ,$$

$\mathcal{G}_2$ , definida por: sea  $g \in \mathcal{G}$ , entonces

$$g \in \mathcal{G}_2 \Leftrightarrow \delta'(p_i) \neq 0, \quad \beta(p_i) \cdot \beta(0) > 0, \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

$\mathcal{G}_3$ , definida por: sea  $g \in \mathcal{G}$ , entonces

$$g \in \mathcal{G}_3 \Leftrightarrow \delta'(p_i) \neq 0, \quad \beta(p_i) \cdot \beta(p_{i+1}) < 0, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Notemos que, para las métricas en  $\mathcal{G}_1$ , necesariamente  $\delta'(0) = \delta'(1) = 0$ ,  $n=1$ ,  $p_i=i \quad \forall i \in \mathbb{Z}$ . Un ejemplo de tales métricas es  $g_1$  dada por:  $\delta(x_1) = \alpha(x_1) = 1 - \cos 2\pi x_1$ ;  $\beta(x_1) = 1 + \cos 2\pi x_1$ ,  $\forall x_1 \in \mathbb{R}$ .

Como ejemplo de métrica en  $\mathcal{G}_2$  se tiene  $g_2$ :  $\delta(x_1) = \alpha(x_1) = \sin 2\pi x_1$ ,  $\beta(x_1) = \cos^2 2\pi x_1$ ,  $\forall x_1 \in \mathbb{R}$ .

Métrica  $g_3$  en  $\mathcal{G}_3$ :  $\delta(x_1) = \alpha(x_1) = \sin 2\pi x_1$ ,  $\beta(x_1) = \cos 2\pi x_1$ ,  $\forall x_1 \in \mathbb{R}$ .

La condición (i) en la Definición 8 se impone para que la métrica  $g$  sea inducible en un toro, resultando la elección del período 1 para todas ellas irrelevante (por supuesto, una función periódica de periodo  $(1/n)$   $n \in \mathbb{N}$  también se considera de periodo 1). Los Lemas II.1 y II.2, así como la técnica de la demostración del Teorema II.4 permite, en cualquier caso, extender bastantes de los resultados que obtendremos a métricas no inducibles en el toro. Las condiciones (ii) e (iii) imponen una "regularidad" en el comportamiento de los ceros de  $\delta$  que, aunque conveniente para fijar ideas, no es en muchas ocasiones esencial (así, p. ej., ver Nota 19).

**Observación 9.-** En el próximo subapartado se estudiarán sistemáticamente las geodésicas de las métricas en  $\mathcal{S}$  a partir de las ecuaciones (3.3). Señalaremos a continuación algunas cuestiones que pueden ayudar a que se comprenda mejor la técnica de este estudio, y a entender las dificultades que mediante ella se salvarán.

Por un cálculo directo se pueden computar los siguientes símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{22}^1(x_1, x_2) = \left( \frac{1/2}{\alpha\delta + \beta^2} \delta \delta' \right) (x_1) \quad \Gamma_{22}^2(x_1, x_2) = \left( \frac{1/2}{\alpha\delta + \beta^2} \beta \delta' \right) (x_1)$$

en todo  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$  ( $I$  intervalo) una geodésica no constante de  $(\mathbb{R}^2, g)$ , con  $g$  dada por (3.2):

(1) Recordemos, por la Observación 7, que si  $x_1'$  se anula en un punto  $t_1$ , entonces el uso de la ecuación (3.3a) para determinar  $x_1$  en un entorno de  $t_1$  puede producir ambigüedad. Esta ambigüedad se elimina, conocido el valor de  $x_2'(t_1)$ , teniendo en cuenta que, por la ecuación de las geodésicas para  $x_1$ , se tiene:

$$x_1''(t_1) + \left( \frac{1/2}{\alpha\delta + \beta^2} \delta \delta' \right) (x_1(t_1)) \cdot (x_2'(t_1))^2 = 0 \quad (3.4a)$$

de donde se puede fijar el valor de  $x_1''(t_1)$ .

Notemos que  $x_1''(t_1)$  también se anulará si y sólo si  $\delta(x_1(t_1))$  ó  $\delta'(x_1(t_1))$  se anulan (ya que  $\gamma$  se ha supuesto no constante y  $x_1'(t_1) = 0$  implica  $x_2'(t_1) \neq 0$ ). En cualquiera de estos casos:

$$\Gamma_{22}^2(x_1(t_1), x) = \frac{\delta'}{2\beta}(x_1(t_1)) , \forall x \in \mathbb{R}$$

Por consiguiente, si consideramos una solución  $\bar{x}_2(t)$  a la ecuación diferencial

$$x_2'' + \frac{\delta'}{2\beta}(x_1(t_1)) (x_2')^2 = 0 \quad (3.4b)$$

con condición inicial  $\bar{x}_2(t_1) = x_2'(t_1)$  se tendrá entonces que la curva  $t \rightarrow (x_1(t_1), \bar{x}_2(t))$  es una solución a la ecuación de las geodésicas, que debe coincidir (en el intervalo de definición común) con la geodésica  $\gamma$  de partida.

Resumiendo, podemos concluir para la primera componente de  $\gamma$ :

*Si  $\exists t_1 \in I$ :  $x_1'(t_1) = 0$ , entonces el valor de  $x_1''(t_1)$  viene dado por (3.4a) y,  $x_1''(t_1) = 0$  si y sólo si  $x_1$  es una constante; además si  $x_1$  es constante,  $x_1 \equiv p$ , necesariamente  $\delta(p) = 0$  ó  $\delta'(p) = 0$ .*

Esta observación está en la base del estudio de la primera componente de  $\gamma$  que se desarrolla en §3(b)I (Construcciones 14 y 16; Proposición 17).

(2) Para analizar similarmente el comportamiento de la segunda componente de  $\gamma$ , supongamos además que  $g \in \mathcal{E}$  (o, al menos, que los puntos donde se anula  $\delta$  son aislados). Si  $\delta \circ x_1 \neq 0$  en un subconjunto denso de  $I$ , entonces, por continuidad, (3.3b) determina unívocamente  $x_2$ . Puesto que los ceros de  $\delta$  son aislados, si los puntos donde se anula  $\delta \circ x_1$  tuvieran un punto interior, necesariamente  $x_1$  debe ser una constante, luego, en la notación de la Definición 8,  $\exists i \in \mathbb{Z}$ :  $x_1 \equiv p_i$ . En este caso, el valor de  $x_2$  queda fijado por (3.4b). Por tanto, podemos concluir:

*Si  $x_1$  no es constante, el valor de  $x_2$  queda determinado por (3.3b). Si  $x_1$  es una constante  $p$  entonces:*

*Cuando  $p$  no es un cero de  $\delta$  ( $\Rightarrow$  es un cero de  $\delta'$ ), el valor de  $x_2$  queda determinado por (3.3b), que coincide con (3.4b).*

*Cuando  $p$  es un cero de  $\delta$  el valor de  $x_2$  queda determinado por (3.4b).*

Este resultado será la idea fundamental para el estudio de la segunda componente de  $\gamma$  en 3(b)II. Una forma de interpretarlo es la siguiente. Como se apuntó en la Observación 7, la falta de unicidad a las ecuaciones (3.3)

cuando  $x_1'$  se anula, se debe a que  $\gamma'$  y  $K \circ \gamma$  en ese punto son paralelos. Si se sabe que  $x_1$  es una constante,  $x_1 \equiv p$ , entonces el valor de  $D$  (ó  $C$ ) fijará  $x_2$  si y sólo si  $K(\gamma(p))$  no es luminoso.

(3) En resumen, podemos afirmar que cualquier geodésica inextendible  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , ( $I$  intervalo) de  $(\mathbb{R}^2, g)$ ,  $g \in \mathcal{G}$ , permite, fijado un punto  $t_1 \in I$ , establecer unas ecuaciones (3.3), siendo  $\gamma$  una solución maximal de tales ecuaciones que verifica, además (3.4) en los puntos cuya primera componente se anula.

Recíprocamente, como quedará de manifiesto en §3(c), las ecuaciones (3.3) en  $\mathbb{R}^2$ ,  $g \in \mathcal{G}$ , con las condiciones iniciales y los valores de  $C$ ,  $D$ ,  $\varepsilon$  apropiados, permiten determinar una única solución maximal que verifique (3.4) en los puntos donde  $x_1'$  se anule, y que será una geodésica de  $(\mathbb{R}^2, g)$ . Las condiciones iniciales y los valores de  $C$ ,  $D$ ,  $\varepsilon$  apropiados en  $t_0$  se pueden tomar como sigue:

(a) valores de  $x_1(t_0)$  y  $x_2(t_0)$  arbitrarios,

(b) valores de  $C$ ,  $D \in \mathbb{R}$  tales que  $D^2 + \delta(x_1(t_0))C \geq 0$ ,

(c1) si  $D^2 + \delta(x_1(t_0))C \neq 0$  y  $\delta(x_1(t_0)) \neq 0$  a  $\varepsilon$  se le puede dar cualquier valor en  $\{-1, 1\}$ , (si  $D^2 + \delta(x_1(t_0))C \neq 0$  y  $\delta(x_1(t_0)) = 0$  el valor de  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  se fijará tal que  $\varepsilon D / \beta(x_1(t_0)) \geq 0$ ),

(c2) si  $D^2 + \delta(x_1(t_0))C = 0$  y  $\delta(x_1(t_0)) = 0$ , a  $x_2'(t_0)$  se le puede dar cualquier valor (si  $D^2 + \delta(x_1(t_0))C = 0$  y  $\delta(x_1(t_0)) \neq 0$ , se tomará  $x_2'(t_0) = -D / \delta(x_1(t_0))$ ).

El valor de  $\varepsilon$ , cuando es necesario fijarlo, debe entenderse como una condición inicial más en  $t_0$  de una aplicación "incógnita"  $I \rightarrow \{-1, 1\}$ . Si queremos fijar de manera única a  $\varepsilon$ , podemos ampliar su codominio a  $\{-1, 0, 1\}$ , e imponer que  $\varepsilon(t) = 0$  siempre que  $x_1'(t) = 0$ . Entonces, la ecuación (3.4a), que sirve para fijar los valores de  $\varepsilon$  en cada intervalo donde  $x_1'$  no se anula, se puede interpretar como la "ecuación que hay que añadir para determinar la aplicación incógnita  $\varepsilon: I \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ ".

**Nota 10.**- Haciendo actuar propia y discontinuamente grupos de traslaciones sobre  $\mathbb{R}^2$ , no es difícil generar a partir de  $g$  métricas que muestran la independencia entre orientabilidad y orientabilidad temporal para métricas de Lorentz (así, comparar con [SaWu], Example 1.2.3).

(b) Estudio de la completitud y del comportamiento cualitativo de las geodésicas a partir de sus condiciones iniciales.

**Notación 11.-** En todo este subapartado,  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $I = ]a_-, a_+[$  intervalo de  $\mathbb{R}$ ,  $-\infty \leq a_- < a_+ \leq +\infty$ , denotará una geodésica inextensible de  $(\mathbb{R}^2, g)$ ,  $g \in \mathcal{G}$ , y escribiremos  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ ,  $\forall t \in I$ ,  $C = g(\gamma', \gamma')$ ,  $D = g(\gamma', K)$  ( $K = \partial/\partial x^2$ ). Denotaremos por  $r[x]$  a la recta vertical de  $\mathbb{R}^2$ ,  $r[x] := \{(x, s) / s \in \mathbb{R}\}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Seguiremos llamando  $p_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , a los puntos donde se anula  $\delta$ .

De la Observación 9 (1) resulta inmediato,

**Proposición 12.-** La primera componente de la geodésica  $\gamma$  es constante si y sólo si:

(1) Supuesto  $C=0$  ( $\gamma$  es luminosa):  $D=0$ ; o, equivalentemente, si y sólo si  $\exists i \in \mathbb{Z}$  tal que  $\gamma$  es una reparametrización de  $r[p_i]$  cuya segunda componente verifica (3.4b).

(2) Supuesto  $C \neq 0$  ( $\gamma$  no luminosa):  $\exists p \in \mathbb{R}$ , tal que  $\delta'(p)=0$  y  $\gamma$  es una reparametrización de  $r[p]$  cuya segunda componente verifica (3.4b) (o, equivalentemente, (3.3b)); en este caso,  $\delta(p) \neq 0 \neq D$ .

Esta Proposición nos permitirá determinar las geodésicas cuya primera componente sea constante de manera evidente. Para el resto de las geodésicas, primero discutiremos (3.3a) y después usaremos las soluciones a esta ecuación para determinar las soluciones de (3.3b).

*I.- Estudio de las soluciones no constantes a la ecuación (3.3a).*

**Notación 13.-** Sea  $\gamma$  una geodésica inextensible como en Notación 11, y además con primera componente no constante. Fijemos:  $t_0 \in I$  tal que  $x_1'(t_0) \neq 0$ , y  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  tal que  $\varepsilon \cdot x_1'(t_0) > 0$ . Sea  $x_0 := x_1(t_0)$  y definamos:

$$x_+ := \text{Sup}\{x \in \mathbb{R} / x_0 < x, D^2 + \delta C|_{[x_0, x]} > 0\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad (3.5a)$$

$$x_- := \text{Inf}\{x \in \mathbb{R} / x < x_0, D^2 + \delta C|_{[x, x_0]} > 0\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \quad (3.5b)$$

Claramente, por la periodicidad de  $\delta$ ,  $x_+ = +\infty$  si y sólo si  $x_- = -\infty$ .

**Construcción 14.**- Nuestro objetivo a lo largo de este epígrafe 3.(b).I será comprobar que, dada la geodésica  $\gamma$ , las ecuaciones (3.3a) y (3.4a) permiten dar un procedimiento de construir unívocamente una curva diferenciable  $\bar{x}_1$  que verifica:

(i) Es solución a (3.3a) con  $\bar{x}_1(t_0) = x_0$ , con valores de C y D dados por  $\gamma$ , y tal que para el valor de  $\varepsilon$  determinado por  $\gamma$  en  $t_0$  se verifica  $\varepsilon \cdot \bar{x}_1'(t_0) > 0$ .

(i) Está definida en todo  $\mathbb{R}$ ,

(ii) Coincide en I con la primera componente de  $\gamma$ :  $x_1(t) = \bar{x}_1(t)$ ,  $\forall t \in I$ .

El siguiente resultado, caracteriza a  $\bar{x}_1$  en el intervalo en que está definida de manera única.

**Lema 15.**- Sea J el intervalo abierto maximal que contiene a  $t_0$  y en el cual no se anula la derivada de la (única) solución  $\bar{x}_1$  a (3.3a), con condiciones iniciales  $x_0$ ,  $\varepsilon$  en  $t_0$ , y compatible con los valores C, D de  $\gamma$ . La inversa de  $\bar{x}_1$  está definida en  $]x_-, x_+[$  y viene dada por:

$$t(x) = t_0 + \varepsilon \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{\alpha\delta + \beta^2}{D^2 + \delta C}}(x) dx \quad (3.6)$$

para todo  $x$  en  $]x_-, x_+[$ . Entonces  $\bar{x}_1$  es un difeomorfismo en J, y los extremos de J son  $t_- \in \mathbb{R} \cup \{-\varepsilon \cdot \infty\}$  y  $t_+ \in \mathbb{R} \cup \{\varepsilon \cdot \infty\}$ , siendo  $t_-$  (resp.  $t_+$ ) el valor de (3.6) cuando se toma  $x = x_-$  (resp.  $x = x_+$ ). Además  $t_-$  es el extremo inferior de J y  $t_+$  el superior si y sólo si  $\varepsilon = 1$ .

Por último,  $t_- = -\varepsilon \cdot \infty$  (resp.  $t_+ = \varepsilon \cdot \infty$ ) si y sólo si ocurre una de las siguientes alternativas:

i)  $x_- = -\infty$ , (resp.  $x_+ = +\infty$ )

ii)  $-\infty < x_-$  y  $\delta'(x_-) = 0$  (resp.  $x_+ < +\infty$ ,  $\delta'(x_+) = 0$ ).

Dem.- Todas las afirmaciones resultan inmediatas de (3.3a) excepto la última. Además, si  $x_- = -\infty$ , por la periodicidad de las componentes de  $g$  claramente  $t_- = -\varepsilon \cdot \infty$ . Supongamos pues  $-\infty < x_-$ .

Para la condición necesaria, admitamos por el contrarrecíproco que  $\delta'(x_-)$

≠ 0. Entonces

$$t_- = t_0 + \varepsilon \int_{x_0}^{x_-} \left( \sqrt{\frac{\alpha\delta + \beta^2}{D^2 + \delta C}(x) \cdot (x - x_-)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x - x_-}} \right) dx \quad (3.7)$$

donde la primera de las raíces del integrando (3.7) es continua en  $[x_-, x_0]$ , y, por tanto acotada. En consecuencia la integral en (3.7) está acotada, luego  $t_- \in \mathbb{R}$ , como se quería.

Para la condición suficiente, supongamos que  $\delta'(x_-) = 0$ . Entonces

$$t_- = t_0 + \varepsilon \int_{x_0}^{x_-} \left( \sqrt{\frac{\alpha\delta + \beta^2}{D^2 + \delta C}(x) \cdot (x - x_-)^2} \cdot \frac{1}{x - x_-} \right) dx \quad (3.8)$$

Cuando  $x$  tiende a  $x_-$  se tiene, aplicando la regla de L'Hopital, que el radicando tiende a un cierto  $L \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ ; en consecuencia, por el lema de conservación del signo  $\exists \lambda > 0$  tal que el radicando de (3.8) es mayor que  $\lambda$  en un intervalo  $[x_-, x_- + \lambda']$  ( $\lambda' > 0$ ), por lo que  $t_- = -\varepsilon\omega$ , como se quería. ■

**Construcción 16.**— El Lema 15 permite construir la solución  $\bar{x}_1$  anunciada en la Construcción 14 del siguiente modo.

(1) Si  $x_+ = +\infty$  (ó, equivalentemente,  $x_- = -\infty$ ) tomaremos como  $\bar{x}_1$  a la única solución a (3.3a) dada por el Lema 15. Claramente,  $\bar{x}_1$  es un difeomorfismo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ .

(2) Si  $x_+ < +\infty$ , (ó, equivalentemente,  $-\infty < x_-$ ) observemos primero:

(A) Si  $\delta'(x_+) = 0$  (resp.  $\delta'(x_-) = 0$ ) entonces  $t_+ = \varepsilon\omega$  (resp.  $t_- = -\varepsilon\omega$ ). El Lema 15 permite entonces definir de manera única a  $\bar{x}_1$  entre  $t_0$  y  $\varepsilon\omega$  (resp.  $t_0$  y  $-\varepsilon\omega$ ).

(B1) Si  $\delta'(x_+) \neq 0$ , entonces  $D^2 + \delta C$  se hace negativo más allá de  $x_+$ . En este caso,  $\bar{x}_1$  está unívocamente determinado por el Lema 15 hasta el extremo del intervalo  $J$ ,  $t_+ \in \mathbb{R}$ . Si  $\gamma$  estuviera definida en  $t_+$ , por (3.4a) se tendría que  $x_1''(t_+) \neq 0$ . En consecuencia  $x_1$  "llega hasta  $x_+$  en  $t_+$  y vuelve por donde

vino más allá de  $t_+$ " (ver Fig. 3.3). Por tanto, si  $\gamma$  estuviera definida en  $t_+$  su función  $x_1$  en  $]t_+, t_+ + \lambda[$ , para un cierto  $\lambda > 0$ , es un difeomorfismo cuya inversa puede determinarse integrando convenientemente en (3.6). de este punto. Por tanto, definiremos  $\bar{x}_1(t_+) = x_+$ , y definiremos  $\bar{x}_1(t)$  en el

intervalo de extremos  $t_+$  y  $t_+ + \varepsilon$   $\int_{x_-}^{x_+} \sqrt{\frac{\alpha\delta + \beta^2}{D^2 + \delta C}}(\bar{x}) d\bar{x}$ , como la inversa de la

aplicación  $x \rightarrow t_+ + \varepsilon \int_{x_+}^x \sqrt{\frac{\alpha\delta + \beta^2}{D^2 + \delta C}}(\bar{x}) d\bar{x}$ ,  $\forall x \in ]x_-, x_+[$ . Nótese que si  $\delta'(x_+) = 0$

así se definiría  $x$  entre  $t_+$  y  $\varepsilon \cdot \infty$ .

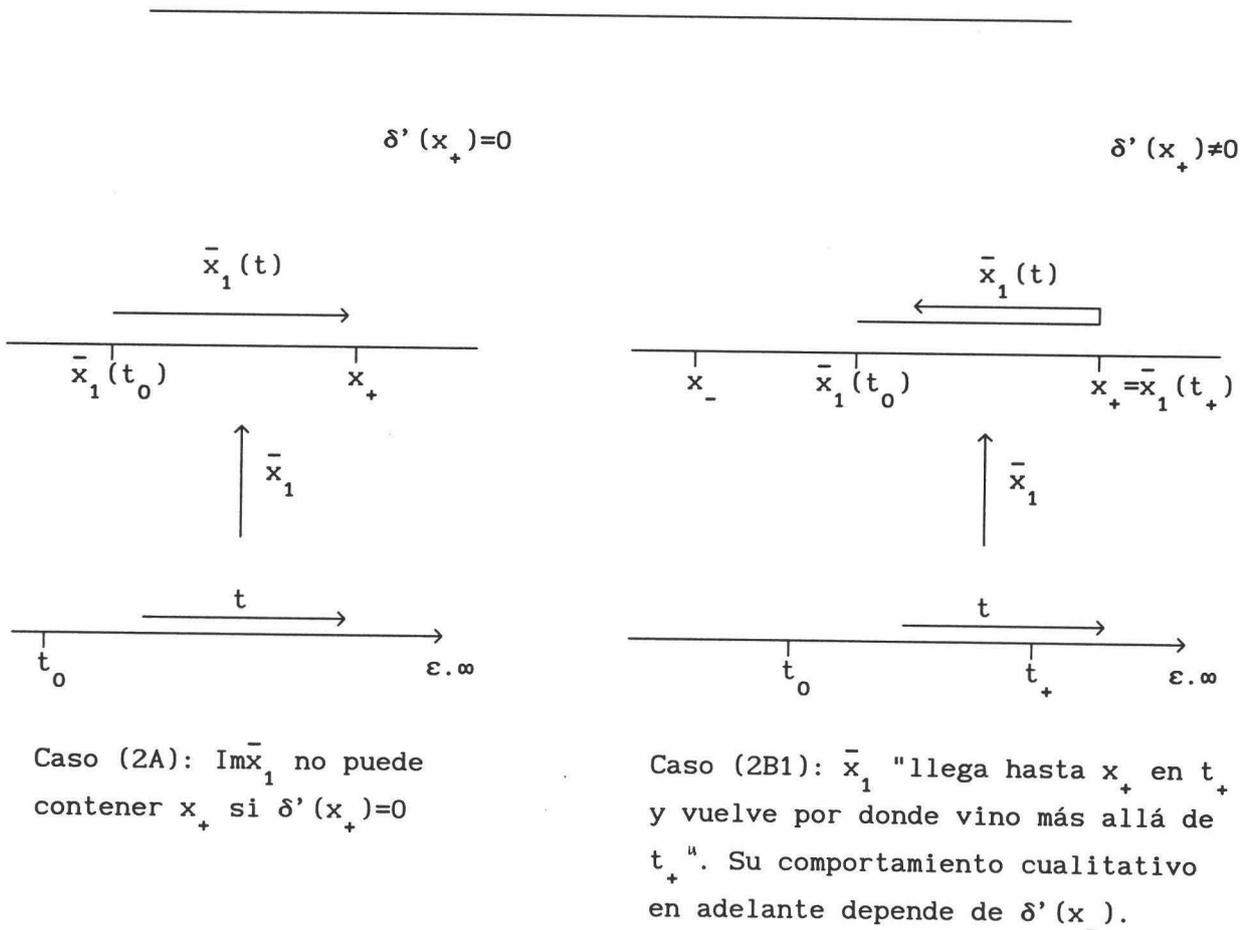


Fig. 3.1

(B2) Si  $\delta'(x_-) \neq 0$ , consideraciones análogas a (B1) permiten extender el dominio de  $\bar{x}_1$  al intervalo de extremos  $t_-$  y  $t_- - \varepsilon \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{\frac{\alpha\delta + \beta^2}{D^2 + \delta C}}(x) dx$ , y si  $\delta'(x_+) = 0$  así se definiría  $\bar{x}_1$  entre  $t_-$  y  $-\varepsilon \cdot \infty$ .

Como consecuencia de (A) y (B), definiremos  $\bar{x}_1$  del siguiente modo:

Si  $\delta'(x_+) = 0$  y  $\delta'(x_-) = 0$  entonces  $\bar{x}_1$  se define en todo  $\mathbb{R}$  usando (A).

Si  $\delta'(x_+) \neq 0$  y  $\delta'(x_-) = 0$  (resp. si  $\delta'(x_+) = 0$  y  $\delta'(x_-) \neq 0$ ) entonces  $\bar{x}_1$  se define en todo  $\mathbb{R}$  usando (B1) y (A) (resp. (A) y (B2)).

Si  $\delta'(x_+) \neq 0$  y  $\delta'(x_-) \neq 0$ , llamaremos  $T := 2|t_+ - t_-| = 2 \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{\frac{\alpha\delta + \beta^2}{D^2 + \delta C}}(x) dx$ ;

entonces se define  $\bar{x}_1$  primero en el intervalo de extremos  $t_- - \varepsilon T/2$  y  $t_+ + \varepsilon T/2$  usando (B1) y (B2), y luego tomando la única extensión periódica de esta aplicación (cuyo periodo será  $T$ ).

Por construcción,  $\bar{x}_1$  determinado en la Construcción 16 satisface las condiciones impuestas en la Construcción 14, permitiéndonos por tanto establecer (notación dada en Notación 11 y 13):

**Proposición 17.-** *Dada la geodésica  $\gamma$  con primera componente no constante, existe una solución  $\bar{x}_1$  de (3.3a) que verifica las condiciones (i), (ii) e (iii) impuestas en la Construcción 14 y que además cae en uno de los casos siguientes:*

(1) Caso  $x_- = -\infty$ ,  $x_+ = +\infty$ . Entonces  $\bar{x}_1$  es un difeomorfismo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ .

(2) Caso  $-\infty < x_-$ ,  $x_+ < +\infty$ , y  $\delta'(x_+) = 0$ ,  $\delta'(x_-) = 0$ . Entonces  $\bar{x}_1$  es un difeomorfismo de  $\mathbb{R}$  en  $]x_-, x_+[$ .

(3) Caso  $-\infty < x_-$ ,  $x_+ < +\infty$ , y  $\delta'(x_+) \neq 0$ ,  $\delta'(x_-) = 0$  (resp. (3') Caso  $-\infty < x_-$ ,  $x_+ < +\infty$ , y  $\delta'(x_+) = 0$ ,  $\delta'(x_-) \neq 0$ ). Entonces:

$$x_+ \in \text{Im} \bar{x}_1, \quad x_- \notin \text{Im} \bar{x}_1 \quad (\text{resp. } x_+ \in \text{Im} \bar{x}_1, \quad x_- \notin \text{Im} \bar{x}_1),$$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \bar{x}_1(t) = x_- \text{ (resp. } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \bar{x}_1(t) = x_+).$$

Todo punto de  $\text{Im}\bar{x}_1$  tiene dos preimágenes, excepto  $x_+$  (resp.  $x_-$ ) que tiene una única preimagen  $t_+$  (resp.  $t_-$ ). Además  $\bar{x}_1$  es un difeomorfismo local en  $\mathbb{R}-\{t_+\}$  (resp.  $\mathbb{R}-\{t_-\}$ ).

(4) Caso  $-\infty < x_-, x_+ < +\infty$ , y  $\delta'(x_+) \neq 0$ ,  $\delta'(x_-) \neq 0$ . Entonces  $\bar{x}_1$  es una aplicación periódica,  $\text{Im}\bar{x}_1 = [x_-, x_+]$ , y  $\bar{x}_1$  es un difeomorfismo local en todo  $\mathbb{R}$  salvo  $\bar{x}_1^{-1}(x_-) \cup \bar{x}_1^{-1}(x_+)$ .

En cualquiera de los casos,  $\bar{x}_1'$  está acotada,  $\text{Im}\bar{x}_1 \subset [x_-, x_+]$ .

## II.- Estudio de las soluciones a la ecuación (3.3b).

La Proposición 17, junto a la Proposición 12, permiten reducir el problema de cuándo es completa una geodésica  $\gamma$  a cuándo es definible en todo  $\mathbb{R}$  su segunda componente. Cuando  $x_1$  es una constante  $p$ , (3.4b) permite responder inmediatamente a esta pregunta, pues, en este caso, si  $\delta'(p)=0$  entonces  $x_2$  es lineal y  $\gamma$  es completa, mientras que si  $\delta'(p) \neq 0$  entonces  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ :

$$x_2'(t) = \left( \frac{\delta'}{2\beta}(p) \cdot t + \lambda \right)^{-1} \quad (3.9)$$

para todo  $t$ , luego  $x_2'$  no es definible en  $\mathbb{R}$  y  $\gamma$  es incompleta.

Cuando  $x_1$  no es constante, el problema es menos trivial. A lo largo de este epígrafe 3.(b)II, resolveremos este problema; para ello  $\gamma: ]a_-, a_+[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ , será una geodésica inextensible de  $(\mathbb{R}^2, g)$ ,  $g \in \mathcal{G}$ , con primera componente no nula, y se seguirá usando la Notación 13 y 11. Recordemos que  $\delta$  se anula en un conjunto discreto de puntos  $\{p_i / i \in \mathbb{Z}\}$ . En el siguiente resultado, caracterizaremos la completitud según los valores de  $D$ .

**Lema 18.-** Para cualquier geodésica  $\gamma$  con primera componente no constante se tiene,

(1) Si  $\exists i \in \mathbb{Z}$  tal que  $p_i \in \text{Im}\bar{x}_1$  y  $\varepsilon D/\beta(p_i) < 0$  entonces

- (i)  $Im\gamma \cap r[p_1] = \emptyset$  .  
(ii)  $\gamma$  es incompleta.

(2) Si  $\forall i \in \mathbb{Z}$  se tiene que  $p_i$  no pertenece a la adherencia de  $Im\bar{x}_1$  ó, en el caso de que pertenezca,  $\varepsilon D/\beta(p_i) > 0$  entonces  $\gamma$  es completa.

(3)  $D=0$  si y sólo si  $x_+ \in \mathbb{R}$  y  $\delta(x_+)=0$  (equivalentemente  $x_- \in \mathbb{R}$  y  $\delta(x_-)=0$ ). En este caso:

- (i)  $Im\gamma \cap r[x_+] = Im\gamma \cap r[x_-] = \emptyset$  .  
(ii)  $\gamma$  es completa si y sólo si  $\delta'(x_-)=\delta'(x_+)=0$ .

Dem.- (1)(i) Supongamos que  $\exists i \in \mathbb{Z}$  tal que  $p_i \in Im\bar{x}_1$  ,  $Im\gamma \cap r[p_i] \neq \emptyset$  . En este caso,  $p_i \in Imx_1$  y sea  $t_i \in \mathbb{R}$  tal que  $x_1(t_i) = p_i$  . Por (3.3b) y (3.3a) se tiene,

$$0 = \delta(p_i) \cdot x_2'(t_i) = \beta(p_i) \cdot x_1'(t_i) - D = \beta(p_i) \cdot \frac{\varepsilon \cdot |D|}{|\beta(p_i)|} - D$$

luego  $\varepsilon D/\beta(p_i) \geq 0$ , como se quería. El punto (ii) es inmediato de que, si  $\gamma$  fuera completa, entonces  $x_1 \equiv \bar{x}_1$  , luego  $p_i \in Imx_1$  , con lo que (i) no se verificaría.

(2) Para comprobar que  $\gamma$  es completa, basta con demostrar que  $x_2'$  está acotada, pues por la Proposición 18,  $\bar{x}_1'$  (y, por tanto,  $x_1'$ ) está acotada, y bastará con aplicar el Lema II.2<sup>1</sup>.

Para comprobar que  $x_2'$  está acotada, notemos que por (3.3b), siempre que  $\delta$  no se anule,

---

<sup>1</sup>Del hecho de que la métrica  $g$  es inducible en una métrica  $g'$  en un toro, se sigue automáticamente que la proyección  $\gamma^*$  de la geodésica  $\gamma$  sobre el toro es completa usando el Lema II.2, y, por tanto, la geodésica de partida  $\gamma$  también lo es. No obstante, aunque  $g$  no fuera inducible en un toro, no es difícil comprobar que si las componentes en el sistema de coordenadas usual de la velocidad de una geodésica están acotadas, entonces la geodésica es completa. Para ello, téngase en cuenta que si  $\gamma: [0, b[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  ,  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$  es una curva, entonces  $Im\gamma$  está contenida en una bola de centro  $\gamma(0)$  y radio  $b \cdot \text{Sup} \left\{ \sqrt{(x_1')^2 + (x_2')^2}(t), / t \in [0, b[ \right\}$  .

$$x_2'(t) = \left( \beta(\bar{x}_1(t)) \bar{x}_1'(t) - D \right) / \delta(\bar{x}_1(t)) \quad (3.10)$$

para todo  $t$  en el dominio de  $\gamma$ . Sea  $t_1 \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{t \rightarrow t_1} \bar{x}_1(t_1) = p_1$ . Se tiene entonces, para el numerador del segundo miembro de (3.10),

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \left( \beta(\bar{x}_1(t)) \bar{x}_1'(t) - D \right) = \lim_{x_1 \rightarrow p_1} \frac{\beta(x_1) \varepsilon \cdot |D|}{|\beta(x_1)|} - D = 0$$

luego aplicando la regla de L'Hopital al segundo miembro de (3.10),

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_1} \left\{ \left( \beta(\bar{x}_1(t)) \bar{x}_1'(t) - D \right) / \delta(\bar{x}_1(t)) \right\} = \\ = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{\beta'(\bar{x}_1(t)) (\bar{x}_1'(t))^2 + \beta(\bar{x}_1(t)) \bar{x}_1''(t) \varepsilon \left( \sqrt{\frac{D^2 + \delta C}{\alpha \delta + \beta^2}} \right)' (\bar{x}_1(t))}{\delta'(\bar{x}_1(t)) \bar{x}_1'(t)} \end{aligned} \quad (3.11a)$$

Puesto que  $\lim_{t \rightarrow t_1} \bar{x}_1(t_1) = p_1$  podemos considerar el límite

$$\lim_{x_1 \rightarrow p_1} \frac{\beta'(x_1) \varepsilon \left( \sqrt{\frac{D^2 + \delta C}{\alpha \delta + \beta^2}} \right)'(x_1) + \beta(x_1) \varepsilon \left( \sqrt{\frac{D^2 + \delta C}{\alpha \delta + \beta^2}} \right)'(x_1)}{\delta'(x_1)} \quad (3.11b)$$

Si el límite (3.11b) existe entonces el (3.11a) existe y ambos coincidirán. Un cálculo directo muestra que el límite (3.11b) es

$$\frac{1}{2D \beta(p_1)^2} \left( C\beta^2 - D^2\alpha \right) (p_1) \in \mathbb{R}$$

Observemos que, por la periodicidad de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$ , existe un conjunto finito de valores que pueda tomar el límite (3.11) en los puntos  $t_1$  para los que se anu-

le el denominador de (3.10). En consecuencia, como  $\bar{x}_1$  y  $\beta$  están acotados,  $x_2'$  estará acotada, como se quería.

(3) La primera afirmación es obvia. Probemos a continuación (ii); para ello supongamos primero que  $\gamma$  es completa y veamos que necesariamente  $\delta'(x_+) = 0$  (un razonamiento análogo implica que  $\delta'(x_-) = 0$ ). La completitud de  $\gamma$  implica  $x_1 \equiv \bar{x}_1$ , luego si  $\delta'(x_+) \neq 0$  se tendrá por la Proposición 17 que  $x_+ \in \text{Im}x_1$  y sea  $t_+ \in \mathbb{R}$  tal que  $x_1(t_+) = x_+$ . En este caso, teniendo en cuenta (3.10), y que, por la Proposición 12 se sabe  $C \neq 0$ ,

$$x_2'(t_+) = \lim_{t \rightarrow t_+} \left\{ \beta(x_1(t)) x_1'(t) / \delta(x_1(t)) \right\} =$$

$$= \varepsilon \lim_{t \rightarrow t_+} \left\{ \sqrt{\frac{\delta C}{\alpha \delta + \beta^2}} \frac{\beta}{\delta} \right\} (x_1(t)) = \varepsilon \cdot \text{signo}(\beta(x_+)) \cdot \lim_{x \rightarrow x_+} \frac{\sqrt{\delta C}}{\delta} (x) \in \{\pm\infty\}$$

ya que  $\delta(x_+) = 0$ .

Supongamos ahora  $\delta'(x_-) = \delta'(x_+) = 0$ . Por la Proposición 17,  $\bar{x}_1$  es un difeomorfismo de  $\mathbb{R}$  en  $]x_-, x_+[$ . Sustituyendo  $\bar{x}_1$  en (3.3b), podemos resolver la correspondiente ecuación para  $x_2'$ , que será extendible a todo  $\mathbb{R}$  (nótese que  $x_2'$  está acotado en todo intervalo acotado), obteniéndose finalmente que  $\gamma$  está definida en todo  $\mathbb{R}$ .

La afirmación (i), ya se anule o no  $\delta'$  en  $x_+$  ó  $x_-$  es inmediata de la discusión anterior. ■

**Nota 19.-** En el cálculo del límite (3.11) es el único punto de este Capítulo donde se usa la condición (iii) en la definición de la familia de métricas  $\mathcal{G}$  dada en Definición 8. En consecuencia, esta condición puede suprimirse para todos los resultados que no se derivan del Lema 18 (2).

En el Lema 18 se pone de manifiesto la importancia del signo de  $\varepsilon D/\beta(p_1)$  en los puntos de  $\text{Im}x_1$  e  $\text{Im}\bar{x}_1$ . En consecuencia, ello motiva la siguiente,

**Notación 20.-** Sea  $\gamma$  una geodésica inextendible con primera componente no constante como en Notación 13. Si  $\exists i \in \mathbb{Z}$  tal que  $\varepsilon D/\beta(p_1) \leq 0$  ( $\delta(p_1) = 0$ ) denota-

remos,

$$p_+ := \text{Mín} \{p_i / i \in \mathbb{Z} \quad x_0 < p_i, \quad \varepsilon D / \beta(p_i) \leq 0\}$$

$$p_- := \text{Máx} \{p_i / i \in \mathbb{Z} / p_i < x_0, \quad \varepsilon D / \beta(p_i) \leq 0\}$$

Nótese que, (a) si  $\delta(x_0) = 0$  entonces por el Lema 18 se tiene  $\varepsilon D / \beta(x_0) > 0$ , (b) por la periodicidad de  $\beta$  tanto  $p_+$  como  $p_-$  deben existir con las hipótesis impuestas y (c)  $D = 0 \Leftrightarrow p_+ = x_+ \Leftrightarrow p_- = x_-$ .

Se ha visto en el Lema 19 que  $\text{Im} \gamma$  nunca puede cortar a  $r[p_+]$  ó  $r[p_-]$ . Veamos a continuación que, si se da la condición natural  $p_+ \leq x_+$  (resp.  $x_- \leq p_-$ ) entonces  $\gamma$  tiende asintóticamente a  $r[p_+]$  (resp.  $r[p_-]$ ).

**Lema 21.-** Sea  $\gamma: ]a_-, a_+[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  una geodésica inextendible con primera componente no constante y tal que  $\exists i \in \mathbb{Z}: \varepsilon D / \beta(p_i) \leq 0$ . Si  $p_+$  (resp.  $p_-$ ) cae en la adherencia de  $\text{Im} \bar{x}_1$  entonces  $\gamma$  tiende asintóticamente a  $r[p_+]$  (resp.  $r[p_-]$ ).

Dem.- Se hará la demostración para  $p_+$ , siendo para  $p_-$  análoga. De la prueba del Lema 18 es inmediato que

$$\lim_{t \rightarrow a_+} x_1(t) = p_+. \quad (3.12)$$

Además, podemos encontrar un  $c \in ]a_-, a_+[$  tal que  $x_1$  es un difeomorfismo sobre su imagen cuando se restringe al intervalo de extremos  $c$  y  $a_+$ . En consecuencia, en este intervalo podemos definir, en la notación usual  $x_2(x_1) \equiv x_2 \circ (x_1^{-1})$ , y análogamente para  $x_1'(x_1)$  y  $x_2'(x_1)$ , distinguiéndose  $x_2(x_1)$  y  $x_2 \equiv x_2(t)$  por la notación del dominio de la variable. Se tendrá entonces, por (3.3b),

$$\lim_{x \rightarrow p_+} \frac{dx_2}{dx_1}(x) = \lim_{t \rightarrow a_+} \frac{x_2'(t)}{x_1'(t)} = \lim_{x \rightarrow p_+} \left\{ \frac{\beta(x)}{\delta(x)} - \frac{D}{\delta(x) \cdot x_1'(x)} \right\} \quad (3.13)$$

Como los ceros de  $\delta$  son puntos aislados y en ellos  $\beta$  no se anula, no existe

ningún problema en definir  $v_+ := \lim_{\substack{x \rightarrow p_+ \\ x < p_+}} \left\{ \frac{\beta(x)/|\beta(x)|}{\delta(x)/|\delta(x)|} \right\} \in \{-1, 1\}$ . Claramente, si

$D=0$  el límite (3.13) es  $v_+ \cdot \infty$ , y si  $D \neq 0$ , la condición  $\varepsilon D / \beta(p_+) < 0$ , implica

$$\lim_{x \rightarrow p_+} \frac{D}{\delta(x) \cdot x_1'(x)} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{D}{\delta(x_1(t)) \cdot x_1'(t)} = - \lim_{x \rightarrow p_+} \frac{\beta(x)}{\delta(x)}. \text{ Por tanto, sea o no}$$

$D$  nulo se tiene,

$$\lim_{x \rightarrow p_+} \frac{dx_2}{dx_1}(x) = v_+ \cdot \infty \quad (3.14)$$

En consecuencia,  $x_2(x_1)$  cuando  $x_1$  se aproxima a  $p_+$  debe ser necesariamente monótona. Por otra parte, al ser  $\gamma$  inextensible,  $x_2(x_1)$  no puede estar acotada, luego

$$\lim_{x \rightarrow p_+} x_2(x) = v_+ \cdot \infty. \quad (3.15)$$

De (3.12), (3.14) y (3.15) se sigue que  $r[p_+]$  es una asíntota de  $\gamma$ . ■

### (c) Conclusión.

Como consecuencia de la Proposición 12, la expresión (3.9), la Proposición 17, el Lema 18 y el Lema 21, podemos dar el siguiente resultado, consistente en una caracterización de la completitud y una descripción del comportamiento cualitativo de una geodésica a partir de sus condiciones iniciales:

**Teorema 22.-** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $I = ]a_-, a_+[$ ,  $-\infty \leq a_- < a_+ \leq +\infty$  una geodésica inextensible no constante de  $(\mathbb{R}^2, g)$ ,  $g \in \mathcal{G}$ ,  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ ,  $\forall t \in I$ ,  $C = g(\gamma', \gamma')$ ,  $D = g(\gamma', \partial/\partial x_2)$ ,  $\delta(p_i) = 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{Z}$ . Entonces:

(1) La primera componente de  $\gamma$  es constante si y sólo si se da una de las siguientes condiciones:

(1A)  $C=0$ ,  $D=0$ ; en este caso,  $\exists i \in \mathbb{Z}$  tal que  $\gamma$  es una reparametrización de  $r[p_i]$  y:

(a) Si  $\delta'(p_i) = 0$  entonces  $\gamma$  es completa.

(b) Si  $\delta'(p_i) \neq 0$  entonces  $\gamma$  es incompleta. Además, dado  $t_1 \in I$ , sea  $\eta \in \{-1, 1\}$  el signo de  $\left( x_2'(t_1) \cdot \delta'(p_i) \cdot \beta(p_i) \right)$ , entonces  $a_\eta = \eta \cdot \infty$ .

(1B)  $C \neq 0$ ,  $D \neq 0$ ,  $\exists p \in \mathbb{R}$ , tal que  $\delta(p) \neq 0$ ,  $\delta'(p) = 0$  y  $\gamma$  es una reparametrización lineal de  $r[p]$ ; por tanto,  $\gamma$  es completa en este caso.

(2) Si la primera componente de  $\gamma$  no es constante, sea  $t_0 \in I$  tal que  $x_1'(t_0) \neq 0$ ,  $x_0 = x(t_0)$ , y sea  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  tal que  $\varepsilon \cdot x_1'(t_0) > 0$ , y sean  $x_+$ ,  $x_-$ ,  $p_+$ ,  $p_-$  como en Notación 12 y 20. Entonces  $\gamma$  cae en exactamente uno de los siguientes casos:

(2A)  $\varepsilon D/\beta(p_i) > 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{Z}$ . En este caso,  $\gamma$  es completa.

(2B)  $D=0$ . Es equivalente a  $x_+ = p_+$  y también es equivalente a  $x_- = p_-$ . En este caso se verifica:

(i) Cuando  $t \rightarrow \varepsilon \cdot \infty$  (resp.  $t \rightarrow -\varepsilon \cdot \infty$ ) entonces  $\gamma$  tiende asintóticamente hacia  $r[p_+]$  (resp.  $r[p_-]$ )

(ii)  $\gamma$  se puede definir hasta  $-\varepsilon \cdot \infty$  ( $a_{-\varepsilon} = -\varepsilon \cdot \infty$ ) si y sólo si  $\delta'(x_-) = 0$ , y hasta  $\varepsilon \cdot \infty$  si y sólo si  $\delta'(x_+) = 0$ ; en consecuencia,  $\gamma$  es completa si y sólo si  $\delta'(x_+) = \delta'(x_-) = 0$ .

(2C)  $\exists i \in \mathbb{Z}$ :  $\varepsilon D/\beta(p_i) < 0$ . En este caso,  $Im\gamma \cap r[p_i] = \emptyset$ ; y  $\gamma$  cae en uno de los casos:

(a) Incompleta hacia ambos lados:  $x_- < p_- < x_0 < p_+ < x_+$  .

En este caso,  $-\infty < a_- < a_+ < +\infty$  , y cuando  $t \rightarrow a_\varepsilon$  (resp.  $t \rightarrow a_{-\varepsilon}$ ) entonces  $\gamma$  tiende asintóticamente hacia  $r[p_+]$  (resp.  $r[p_-]$ ).

(b) Incompleta hacia  $p_-$ :  $x_- < p_- < x_0 < x_+ < p_+$  .

En este caso,  $a_{-\varepsilon} \neq -\varepsilon\infty$  (esto es,  $\gamma$  no se puede definir hasta  $-\varepsilon\infty$ ) , y cuando  $t \rightarrow a_{-\varepsilon}$  entonces  $\gamma$  tiende asintóticamente hacia  $r[p_-]$ . Además,

Si  $\delta'(x_+) = 0$  entonces  $a_\varepsilon = \varepsilon\infty$  , y cuando  $t \rightarrow \varepsilon\infty$  ,  $\gamma$  tiende asintóticamente hacia  $r[x_+]$ .

Si  $\delta'(x_+) \neq 0$  entonces  $a_\varepsilon \neq \varepsilon\infty$  , y cuando  $t \rightarrow a_\varepsilon$  ,  $\gamma$  tiende asintóticamente hacia  $r[p_+]$ .

(c) Incompleta hacia  $p_+$ :  $p_- < x_- < x_0 < p_+ < x_+$  .

En este caso,  $a_\varepsilon \neq \varepsilon\infty$  (esto es,  $\gamma$  no se puede definir hasta  $\varepsilon\infty$ ), y cuando  $t \rightarrow a_\varepsilon$  entonces  $\gamma$  tiende asintóticamente hacia  $r[p_+]$ . Además,

Si  $\delta'(x_-) = 0$  entonces  $a_{-\varepsilon} = -\varepsilon\infty$  , y cuando  $t \rightarrow -\varepsilon\infty$  ,  $\gamma$  tiende asintóticamente hacia  $r[x_-]$ .

Si  $\delta'(x_-) \neq 0$  entonces  $a_{-\varepsilon} \neq -\varepsilon\infty$  , y cuando  $t \rightarrow a_{-\varepsilon}$  ,  $\gamma$  tiende asintóticamente hacia  $r[p_-]$ .

(d) Completa:  $p_- < x_- < x_0 < x_+ < p_+$  .

En este caso,  $]a_-, a_+ [= ]-\infty, +\infty[$  y, además,

Si  $\delta'(x_+) = 0$  ,  $\delta'(x_-) = 0$  , entonces cuando  $t \rightarrow \varepsilon\infty$  (resp.  $t \rightarrow -\varepsilon\infty$ )  $\gamma$  tiende asintóticamente hacia  $r[x_+]$  (resp.  $r[x_-]$ ).

Si  $\delta'(x_+) \neq 0$  ,  $\delta'(x_-) = 0$  , entonces cuando  $t \rightarrow \varepsilon\infty$  (resp.  $t \rightarrow -\varepsilon\infty$ )  $\gamma$  tiende asintóticamente hacia  $r[x_-]$  (resp.  $r[x_+]$ ).

Si  $\delta'(x_+) = 0$  ,  $\delta'(x_-) \neq 0$  ; entonces cuando  $t \rightarrow \varepsilon\infty$  (resp.  $t \rightarrow -\varepsilon\infty$ )  $\gamma$  tiende asintóticamente hacia  $r[x_+]$  (resp.  $r[x_-]$ ).

Si  $\delta'(x_+) \neq 0$  ,  $\delta'(x_-) \neq 0$  ; entonces cuando  $t \rightarrow \varepsilon\infty$  ó  $t \rightarrow -\varepsilon\infty$  los valores de  $Im\gamma$  oscilan entre  $r[x_+]$  y  $r[x_-]$ .

**Observación 23.-** Notemos que las geodésicas incompletas surgen en los casos (1A), (2C) (a),(b),(c) y algunos casos (2B).

En los casos (2C) (a),(b),(c) y (2B) se vio que el valor de  $\nu_+$  en la prueba del Lema 21 determinaba si  $\lim_{x \rightarrow p_+} x_2(x)$  era  $+\infty$  ó  $-\infty$ . Podemos definir pues, en estos casos,

$$\nu_+ := \lim_{\substack{x \rightarrow p_+ \\ x < p_+}} \left\{ \frac{\beta(x)/|\beta(x)|}{\delta(x)/|\delta(x)|} \right\}, \quad \nu_- := \lim_{\substack{x \rightarrow p_- \\ x > p_-}} \left\{ \frac{\beta(x)/|\beta(x)|}{\delta(x)/|\delta(x)|} \right\}$$

Así,  $\nu_+$ ,  $\nu_-$  determinan si la geodésica que tiene por asíntotas  $r[p_+]$ , ó  $r[p_-]$ , respectivamente, tenderá hacia esta asíntota en la dirección positiva o negativa del eje  $x_2$ .

En el caso (1A)(b) podemos definir

$$\nu := - \frac{\beta(x_1)/|\beta(x_1)|}{\delta'(x_1)/|\delta'(x_1)|}$$

cuya interpretación es la siguiente: cuando  $t$  tiende al extremo finito del intervalo de definición de  $x_2$  (esto es hacia la parte por donde  $\gamma$  es incompleta) entonces  $x_2(t)$  tiende hacia  $\nu \cdot \infty$ .

El Teorema 22 permite, dadas las condiciones iniciales de una geodésica, determinar cuándo esta geodésica es completa simplemente hallando, (como mucho) los valores de  $p_+$ ,  $p_-$ ,  $x_+$  y  $x_-$  y las derivadas de  $\delta$  en ellos. El siguiente resultado nos permitirá afirmar que todas las métricas  $g \in \mathcal{G}$  tienen geodésicas incompletas en los tres sentidos causales. Previamente, observemos que por el caso (2C)(a) del Teorema 22 es inmediato el siguiente

**Lema 24.-** *Cualquier geodésica  $\gamma$  en  $(\mathbb{R}^2, g)$ ,  $g \in \mathcal{G}$ , tal que  $C, D, \varepsilon$  verifiquen (3.3) con*

$$(i) \quad D^2 + \delta C > 0,$$

$$(ii) \quad \frac{\varepsilon D}{\beta(0)} < 0,$$

*es incompleta.*

**Teorema 25.-**  $(\mathbb{R}^2, g)$  es espacial, luminosa y temporalmente incompleto,  $\forall g \in \mathcal{G}$ .

Dem.- Para probar incompletitud en los tres sentidos causales, basta con demostrar que, para todo valor de  $C \in \mathbb{R}$ , podemos encontrar unas condiciones iniciales para  $\gamma$  que satisfagan (i) e (ii) del Lema 24. Para ello, tomemos  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\delta(x_0) \neq 0$ ,  $\beta(x_0) \cdot \beta(0) > 0$ , y observemos que las condiciones iniciales en ese punto verificarán:

$$x_2'(x_0) = \frac{\left( \beta \cdot x_1' \pm \sqrt{(\beta^2 + \alpha\delta) \cdot x_1'^2 - \delta C} \right)}{\delta} (x_0) \quad (3.16)$$

Por otra parte, notemos respecto a las condiciones (i) e (ii) que equivalen a:

$$(i)' \quad D^2 + \delta C = (\alpha\delta + \beta^2)(x_1')^2 > 0$$

$$(ii)' \quad \frac{\beta(x_0)}{\beta(0)} |x_1'(x_0)| < \frac{\varepsilon \delta(x_0)}{\beta(0)} x_2'(x_0) .$$

Y como el segundo miembro en (ii)' puede escribirse, usando (3.16), como

$$\left( \frac{\beta}{\beta(0)} |x_1'| \pm \frac{\varepsilon}{\beta(0)} \sqrt{(\beta^2 + \alpha\delta) \cdot x_1'^2 - \delta C} \right) (x_0)$$

se tiene que (ii)' equivale a

$$(ii)'' \quad 0 < \pm \frac{\varepsilon}{\beta(0)}$$

Por tanto, fijado el valor de  $C$ , tomemos  $(x_1')^2(x_0)$  lo suficientemente grande para que, dado el valor de  $D^2$  por (i)' en  $x_0$ , se tenga  $\text{Inf}(D^2 + \delta C) > 0$ . Basta entonces con escoger para  $x_2'(x_0)$  en (3.16) el signo tal que se verifique (ii)'.  
■

**Observación 26.-** En particular, observemos que toda métrica  $g \in \mathcal{G}_1$  es incompleta, pese a ser inducible en un toro  $T^2$ , el cual tiene un campo de Killing no espacial que es temporal en un conjunto denso de  $T^2$  (comparar con la Observación II.8(1))

#### 4.- ESTUDIO ESPECIAL DE LAS GEODESICAS LUMINOSAS.

##### (a) Campos de vectores luminosos independientes.

En cualquier superficie lorentziana orientable y orientable temporalmente, existen dos campos de vectores luminosos independientes,  $X_1$ ,  $X_2$ , globalmente definidos. Cualquier geodésica luminosa  $\gamma$  es una reparametrización de alguna de las líneas integrales de estos campos. (Si  $\gamma$  es reparametrización de las líneas del campo  $X_i$  diremos que  $\gamma$  proviene de  $X_i$ ,  $i=1,2$ ). Una posible elección de tales campos para las métricas en  $\mathcal{S}_1$  ó  $\mathcal{S}_2$  es:

$$X_1 = \left[ \delta / \left( \beta + \eta_0 \sqrt{\alpha\delta + \beta^2} \right) \right] \partial/\partial x_1 + \partial/\partial x_2 \quad (3.17a)$$

$$X_2 = \partial/\partial x_1 + \left[ \left( \beta - \eta_0 \sqrt{\alpha\delta + \beta^2} \right) / \delta \right] \partial/\partial x_2 \quad (3.17b)$$

donde  $\eta_0 \in \{-1,1\}$  se escoge tal que  $\eta_0 \cdot \beta(0) > 0$ ; para  $X_2$ , si  $\delta$  se anula en un punto, el coeficiente de  $\partial/\partial x_2$  en este punto se debe sustituir por su límite (nótese que en las métricas de  $\mathcal{S}_1$  ó  $\mathcal{S}_2$  se tiene que  $\beta(p_i) \cdot \beta(0) > 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{Z}$ , de modo que  $X_1$  está bien definido). Para las métricas de la familia  $\mathcal{S}_3$ , así como para el resto de las  $\mathcal{S}$ -métricas, la elección de estos campos es válida en  $]p_{-1}, p_1[$  y, por periodicidad, en todos los intervalos  $]n+p_{-1}, n+p_1[$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .<sup>2</sup>

**Lema 27.-** Sea  $g$  una métrica  $\mathcal{S}$ , y sea  $\gamma$  una geodésica luminosa (inextendible); si  $g$  es una métrica en  $\mathcal{S}_1$  ó  $\mathcal{S}_2$  y  $\gamma$  proviene de  $X_1$  (resp.  $X_2$ ), entonces  $\frac{\varepsilon \cdot D}{\beta(0)} \leq 0$  (resp.  $\frac{\varepsilon \cdot D}{\beta(0)} > 0$ ).

Dem.- Si  $D=0$ , la afirmación resulta inmediata del Teorema 22(1) y la definición de  $X_2$ . Si  $\gamma$  tiene  $D \neq 0$ , usando que  $\bar{x}_1(t)$  es un difeomorfismo podremos definir  $x_2(x_1) \equiv x_2 \circ (x_1^{-1})$ . Por (3.10) y (3.3b), se tiene que  $I$  debe incluir, al menos, a  $x_1^{-1}(]p_i, p_{i+1}[)$ , para algún  $i \in \mathbb{Z}$ , por lo que, usando (3.3),

<sup>2</sup> Escogiendo  $\eta_i \in \{-1,1\}$  tal que  $\eta_i \cdot \beta(p_i) > 0$  podremos extender fácilmente los resultados que obtendremos a cualquier  $\mathcal{S}$ -métrica.

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow p_i} \frac{x_2'(x_1)}{x_1'(x_1)} &= \lim_{x_1 \rightarrow p_i} \left\{ \frac{\beta(x_1)}{\delta(x_1)} - \frac{D}{\delta(x_1) \cdot x_1'(x_1)} \right\} = \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow p_i} \left\{ \frac{\beta(x_1)}{\delta(x_1)} - \frac{\varepsilon \cdot D |\beta(x_1)|}{\delta(x_1) \cdot |D|} \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Observemos que, como para las métricas en  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$  se tiene que  $\beta(p_i) \cdot \beta(0) > 0$ , el límite (3.18) es un número real si y solo si  $\frac{\varepsilon \cdot D}{\beta(0)} > 0$ . Para deducir el resultado requerido, basta entonces con tener en cuenta que, en los puntos donde  $\delta$  se anula, el campo  $X_1$  (resp.  $X_2$ ) tiene nula (resp. no nula) su componente en  $\partial/\partial x^1$ , con lo que el límite (3.18) para las geodésicas obtenidas de  $X_1$  (resp. de  $X_2$ ) no puede ser un número real (resp. es un número real). ■

Las propiedades de las geodésicas luminosas se resumen en la siguiente

**Proposición 28.-** (I) Para las métricas  $g \in \mathcal{S}$  tales que  $\beta(0)\beta(p_i) > 0, \forall i \in \mathbb{Z}$ , (en particular, las de las familias  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$ ) todas las geodésicas luminosas que provienen de  $X_2$  son completas.

(II) Sea  $\gamma: I \rightarrow M$  una geodésica luminosa inextendible que proviene de  $X_1$  para una métrica  $g$  en  $\mathcal{S}$ ,  $D = g(\gamma', K)$ ,

(1) Si  $D=0$  entonces  $\exists i \in \mathbb{Z}$  tal que  $\gamma$  es una reparametrización de  $r[p_i]$ .

Además:

(i) Si  $g$  pertenece a  $\mathcal{S}_1$  entonces  $\gamma$  es completa.

(ii) Si  $g$  pertenece a  $\mathcal{S}_2$  entonces  $\gamma$  es incompleta e  $I$  no está acotado.

(2) Si  $D \neq 0$  entonces  $\gamma$  es incompleta e  $I$  está acotado. Si además  $g \in \mathcal{S}_1$  ó  $g \in \mathcal{S}_2$  entonces  $\exists i \in \mathbb{Z}$  tal que  $\gamma$  tiene como asíntotas a  $r[p_i]$  y  $r[p_{i+1}]$ .

(III) Para las métricas de la familia  $\mathcal{S}_3$ , todas las geodésicas luminosas son incompletas e  $I$  está acotado..

**Dem.-** (I) Basta con comprobar que, por el Lema anterior, todas las geodésicas luminosas que provienen de  $X_2$  caen en las hipótesis del Teorema 22(2A).

(II)(1) Es inmediata del Teorema 22(1A); para (II)(2) y (III) basta con tener en cuenta que  $x_+ = \infty$ ,  $x_- = -\infty$  y considerar el Teorema 22(2C)(a). ■

**(b) Geodésicas luminosas cerradas.**

Por la Proposición 28(II), en  $(\mathbb{R}^2, g)$ ,  $g \in \mathcal{G}$ , de todas las geodésicas nulas que provienen del campo  $X_1$ , solo aquellas con  $D=0$  se proyectan en geodésicas cerradas del toro inducido  $(T^2, g')$ . Ello se debe a que si  $D \neq 0$  entonces tienden asintóticamente a una recta  $r[p_1]$ ; de ahí también se obtiene que si  $g \in \mathcal{G}_3$  las únicas geodésicas que se proyectan en geodésicas cerradas son aquellas con  $D=0$ . Sin embargo, para las geodésicas que provienen de  $X_2$  cuando  $g \in \mathcal{G}_1$  ó  $g \in \mathcal{G}_2$  se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 29.-** Sea  $g \in \mathcal{G}$ , con  $\beta(0)\beta(p_1) > 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{Z}$ , y sea  $g'$  la correspondiente métrica de Lorentz sobre  $T^2$ . Equivalen:

(i) Existe una geodésica luminosa de  $g'$  proyección de una que proviene de  $X_2$  y es cerrada.

(ii) Todas las geodésicas luminosas de  $g'$  son proyección de las que provienen de  $X_2$  son cerradas.

(iii) El valor de la integral:

$$\int_0^1 \frac{1}{\delta} (\beta - \eta_0 \sqrt{\alpha\delta + \beta^2})$$

(donde  $\eta_0 \in \{-1, 1\}$  verifica  $\beta(0) \cdot \eta_0 > 0$ ) es un número racional.

Dem. - Sea  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , cualquier geodésica luminosa de  $g$  que proviene de  $X_2$ . Puesto que  $\gamma$  tiene  $D \neq 0$ ,  $x_1(t)$  es un difeomorfismo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  y podremos definir  $x_2(x_1) \equiv x_2 \circ (x_1^{-1})$ . La curva  $\gamma$  se proyectará en una curva cerrada si y sólo si existen  $m, n \in \mathbb{Z}$  tales que  $x_2(x_1+m) - x_2(x_1) = n$ ,  $\forall x_1 \in \mathbb{R}$ . Pero, usando (3.3) se tiene,

$$x_2(x_1+m) - x_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_1+m} \frac{1}{\delta} (\beta - \eta_0 \sqrt{\alpha\delta + \beta^2}) = m \int_0^1 \frac{1}{\delta} (\beta - \eta_0 \sqrt{\alpha\delta + \beta^2})$$

de donde se sigue el resultado. ■

**Observación 30.-** (1) Para cualquier métrica  $g \in \mathcal{G}$ , podemos encontrar geodésicas espaciales, temporales y luminosas que verifiquen (i)  $D^2 + \delta C > 0$ , (ii)  $\frac{\epsilon D}{\beta(0)} > 0$  (ver la demostración del Teorema 25); si  $g$  satisface la condición  $\beta(0)\beta(p_1) > 0$ ,

$\forall i \in \mathbb{Z}$ , estas geodésicas son completas (Teorema 22(2A)). Cualquiera de estas geodésicas será cerrada si y sólo si

$$\int_0^1 \frac{1}{\delta} (\beta - \varepsilon D \sqrt{\frac{\alpha\delta + \beta^2}{D^2 + \delta C}}) dx$$

es racional. Si para cada valor de  $D$  fijo llamamos  $I_c$  a la anterior integral, resulta inmediato comprobar que la aplicación  $C \rightarrow I_c$  es continua y, al no ser constante, es claro que existirán valores de  $C$  positivos y negativos que hagan racional al valor de  $I_c$ . En consecuencia, existirán geodésicas espaciales y temporales de  $(\mathbb{R}^2, g)$  que se proyectarán en geodésicas cerradas sobre  $(T^2, g')$ .

(2) Galloway demostró [Ga] que cualquier toro lorentziano debe contener (a) una geodésica luminosa cerrada ó (b) una geodésica espacial y una temporal cerrada. Aún más, dio un ejemplo ([Ga], pág. 120) de un toro sin geodésicas espaciales cerradas. Este ejemplo puede generalizarse como sigue: sea  $g \in \mathcal{S}$  una métrica tal que:

- (i)  $\delta \geq 0$ , (ii) Si, en  $p \in \mathbb{R}$ ,  $\delta'(p) = 0$  entonces  $\delta(p) > 0$ , (iii)  $\exists i \in \mathbb{Z}: \beta(p_i) \cdot \beta(0) < 0$

Nótese que, por la condición (ii) no existen geodésicas espaciales con primera componente constante, y por tanto, la condición (i) implica que cualquier geodésica espacial está en las hipótesis del Teorema 22 (2B) ó (2C)(a); en cualquiera de los casos, tiende asintóticamente a una recta vertical y, por tanto, no puede inducirse en un compacto. En el ejemplo de Galloway, se escogen  $\alpha(x) = \delta(x) = \cos^2 x$ ,  $\beta(x) = \sin x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

### (c) Cambios conformes.

A continuación, veremos que todas las propiedades cualitativas vistas en las geodésicas luminosas se conservan tras cambios conformes de métrica. Previamente, veamos los siguientes resultados generales.

Sean en adelante  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana,  $\nabla^g$  su operador gradiente,  $\omega: M \rightarrow \mathbb{R}$  una función (diferenciable) sobre  $M$ ,  $\Omega = e^{2\omega}$ ,  $g^*$  la métrica conforme  $g^* = \Omega \cdot g$ ,  $D^*/dt$  su derivada covariante asociada, e  $I, J$  dos intervalos de  $\mathbb{R}$  no vacíos.

**Lema 31.-** Sea  $\gamma: I \rightarrow M$  una geodésica para la métrica  $g$ , y sea  $\hat{t}: J \rightarrow I$  una reparametrización de  $\gamma$ ,

(a) Llamando  $C = g(\gamma', \gamma')$  se verifica:

$$\frac{D^*}{ds} (\gamma \circ \hat{t})' = \left[ \frac{\hat{t}''}{\hat{t}'} + 2 \cdot d\omega(\gamma \circ \hat{t})' \right] \cdot (\gamma \circ \hat{t})' - C \cdot (\hat{t}')^2 \cdot (\nabla^g \omega) \circ (\gamma \circ \hat{t}) \quad (3.19)$$

(b) Si  $\gamma$  es además luminosa, entonces  $\gamma \circ \hat{t}$  es una geodésica para  $g^*$  si y sólo si  $\exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$  :

$$\hat{t}'(s) = \lambda \cdot e^{-2\omega(\gamma(\hat{t}(s)))} \quad (3.20)$$

para todo  $s$  en  $J$ . En consecuencia,  $\gamma$  es una pregeodésica para  $g^*$ .

Dem.- (a) Denotando por  $\nabla$  y  $\nabla^*$  a las conexiones de Levi-Civita para  $g$  y  $g^*$ , respectivamente, es bien conocido que

$$\nabla_x^* Y = \nabla_x Y + d\omega(X) Y + d\omega(Y) X - g(X, Y) \nabla^g \omega$$

$\forall X, Y \in \chi(M)$ . En consecuencia,

$$\frac{D^*}{ds} (\gamma \circ \hat{t})' = \frac{D}{ds} (\gamma \circ \hat{t})' + 2d\omega(\gamma \circ \hat{t})' \cdot (\gamma \circ \hat{t})' - g((\gamma \circ \hat{t})', (\gamma \circ \hat{t})') \cdot (\nabla^g \omega) \circ (\gamma \circ \hat{t}) \quad (3.21)$$

Teniendo en cuenta que, al ser  $\gamma$  una geodésica para  $g$ ,  $\frac{D}{ds} (\gamma \circ \hat{t})' = \hat{t}'' \cdot (\gamma \circ \hat{t})'$ , el resultado es inmediato de (3.21).

(b) La condición necesaria y suficiente se deriva de que el término entre corchetes en (3.19) se anula si y sólo si  $\hat{t}$  verifica (3.20). El que, como una consecuencia, se obtenga que  $\gamma$  es una pregeodésica para  $g^*$ , se debe a que una aplicación  $\hat{t}$  que verifique (3.20) se puede obtener, fijados  $t_0 \in I$  y  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ , como inversa de la aplicación,  $t \rightarrow \lambda^{-1} \cdot \int_{t_0}^t e^{2\omega(\gamma(\bar{t}))} d\bar{t}$ ,  $\forall t \in I$ . ■

Si  $\gamma$  es luminosa,  $\hat{t}$  verifica (3.20) y los intervalos  $I, J$  se toman maximales, es claro que:

(i) Si  $\omega$  está acotada superiormente entonces  $\text{Inf} |\hat{t}'| > 0$ . Por tanto, si además  $I \neq \mathbb{R}$  entonces  $J \neq \mathbb{R}$ , esto es,  $\gamma$  incompleta  $\Rightarrow \gamma \circ \hat{t}$  incompleta.

(ii) Si  $\omega$  está acotada inferiormente entonces  $\text{Sup} |\hat{t}'| < \infty$ . Por tanto, si

$I=\mathbb{R}$  entonces  $J=\mathbb{R}$  pues, en caso contrario, existiría el límite de  $\gamma \circ \hat{t}$  cuando se tiende a algún extremo finito del intervalo  $J$ ; esto es,  $\gamma$  completa  $\Rightarrow \gamma \circ \hat{t}$  completa.

En consecuencia, podemos afirmar,

**Teorema 32.-** Sea  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana y sea  $\Omega > 0$  una función diferenciable sobre  $M$ .

(1) Para cada geodésica luminosa  $\gamma: J \rightarrow M$ ,  $J$  intervalo de  $\mathbb{R}$ , de  $(M, g)$  existe una reparametrización  $\hat{t}: I \rightarrow J$  tal que  $\gamma \circ \hat{t}$  es una geodésica de  $(M, \Omega g)$ .

(2a) Supongamos en (1) que  $\text{Inf}(\Omega) > 0$ . Si la geodésica luminosa  $\gamma$  de  $g$  es completa entonces  $\gamma \circ \hat{t}$  es completa. En consecuencia, si  $(M, g)$  es luminosamente completa e  $\text{Inf}(\Omega) > 0$  entonces  $(M, \Omega g)$  es luminosamente completa.

(2b) Supongamos en (1) que  $\text{Sup}(\Omega) < \infty$ . Si la geodésica luminosa  $\gamma \circ \hat{t}$  de  $\Omega g$  es completa entonces  $\gamma$  es completa. En consecuencia, si  $(M, \Omega g)$  es luminosamente completa y  $\text{Sup}(\Omega) < \infty$  entonces  $(M, g)$  es luminosamente completa.

(3) Supongamos además que  $M$  es una variedad compacta. La geodésica luminosa  $\gamma$  de  $g$  es completa si y sólo si la geodésica luminosa  $\gamma \circ \hat{t}$  de  $\Omega g$  es completa. Por tanto:

$(M, g)$  es luminosamente completa si y sólo si  $(M, \Omega g)$  lo es.

**Observación 33.-** (1) Para cualquier métrica semi-riemanniana, resulta inmediato comprobar que los conos de luz son un invariante conforme. El Teorema 32 (1) anterior permite afirmar, además, que las pregeodésicas luminosas son invariantes conformes; podemos, por tanto, hablar de pregeodésicas luminosas para una clase de métricas semi-riemannianas conformes  $\mathcal{C}$ .

Como una consecuencia, los campos de vectores luminosos  $X_1$  y  $X_2$  que se escogieron el toro para una métrica  $g \in \mathcal{C}$  son también válidos para cualquier métrica conforme  $g^* = \Omega g$ , resultando el comportamiento asintótico de las geodésicas luminosas de  $g^*$  igual al de las correspondientes geodésicas de  $g$ .

(2) Si consideramos pregeodésicas luminosas para una clase de métricas semi-riemannianas conformes  $\mathcal{C}$  sobre una variedad compacta, por la Proposición 32(3) podemos afirmar que, cuando reparametrizemos esta pregeodésica como una

geodésica  $\gamma$  para un representante  $g \in \mathcal{C}$ , la completitud de  $\gamma$  será independiente del representante  $g$  escogido en  $\mathcal{C}$ . Por tanto, para cada clase de métricas conformes sobre una variedad compacta, podremos definir, de modo natural, cuándo una pregeodésica luminosa es completa.

En consecuencia, las propiedades sobre completitud vistas para las geodésicas luminosas de una métrica  $g \in \mathcal{G}$  se extienden a las correspondientes geodésicas luminosas sobre cualquier métrica conforme.

## 5.- REOBTENCION DE LOS EJEMPLOS CONOCIDOS DE VARIETADES COMPACTAS INCOMPLETAS.

Los ejemplos de variedades compactas incompletas que aparecen en la literatura, hasta donde el autor conoce, son el toro de Clifton-Pohl, y las de las referencias [RoSa1], [Ga], [Be2] y referencias ahí. Todas ellas son toros lorentzianos, y de todas ellas las únicas para las que no es evidente que pueden obtenerse como cociente a partir de una métrica  $g \in \mathcal{G}$  son las de [RoSa1] y el toro de Clifton-Pohl. Sin embargo, veremos a continuación que estos ejemplos son también casos particulares de los toros incompletos definidos en §3.

*Reobtención de las métricas en [RoSa1].* Consideremos para cada función diferenciable  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la métrica  $g^u$  sobre  $\mathbb{R}^2$  en coordenadas  $(x,y)$  usuales,

$$g^u := dx^2 - \exp\left[2u\left(\frac{x-y}{2}\right)\right] dy^2$$

Si tomamos como nuevas coordenadas  $x_1 = \frac{x-y}{2}$ ,  $x_2 = \frac{x+y}{2}$  se tendrá

$$g^u = \left(1 - \exp(2u(x_1))\right) (dx_1^2 + dx_2^2) + \left(1 + \exp(2u(x_1))\right) (dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1)$$

con lo que claramente  $g^u \in \mathcal{G}$ . En el Counterexample 2.2 de [RoSa1] aparece una métrica  $g^u$  con  $u(z) = 1 - \cos(2z)$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}$ , de modo que, en este caso,  $g^u \in \mathcal{G}_1$ , mientras en el Counterexample 2.3 aparece una métrica  $g^u \in \mathcal{G}_2$  con  $u(z) = \sin(2z)$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}$ .

Reobtención del toro de Clifton-Pohl. Recordemos que el Toro de Clifton-Pohl se define como sigue:

Tomemos en  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  en coordenadas usuales  $(u,v)$  la métrica,

$$g = \frac{1}{u^2 + v^2} (du \otimes dv + dv \otimes du)$$

para cada número real  $\lambda > 0$  la isometría  $\Psi^\lambda$ ,

$$\Psi^\lambda((u,v)) = (\lambda u, \lambda v), \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

genera un grupo de isometrías que actúa de modo propiamente discontinuo sobre  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ . Tomando  $\lambda \neq 1$ , el cociente por esta acción es un toro  $T_{CP}^\lambda$ , al que para  $\lambda=2$  se le llama de Clifton-Pohl.

Reobtenemos a continuación  $T_{CP}^\lambda$  a partir de una métrica  $g \in \mathcal{G}$ . Consideremos el recubridor diferenciable de  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ,

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \\ (x_1, x_2) &\longrightarrow (u(x_1, x_2), v(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

con  $u(x_1, x_2) = (1/\pi) \exp(\pi x_2) \operatorname{sen} \pi x_1$ ,  $v(x_1, x_2) = (1/\pi) \exp(\pi x_2) \operatorname{cos} \pi x_1$ ,  $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Se tiene entonces, para la métrica inducida,

$$\Phi^* g = -\pi^2 \operatorname{sen} 2\pi x_1 (dx_1^2 - dx_2^2) + \pi^2 \operatorname{cos} 2\pi x_1 (dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1)$$

Es de notar que la traslación  $T_0$ ,  $T_0((x_1, x_2)) = (x_1 + 2, x_2)$ ,  $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  genera un grupo de isometrías que actúa de modo propiamente discontinuo sobre  $(\mathbb{R}^2, \Phi^* g)$ , produciendo como cociente un cilindro  $C$  que es *isométrico* a  $(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, g)$ .

La isometría  $\Psi^\lambda$  de  $(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, g)$  se induce en una isometría del cilindro, que se puede levantar a una isometría  $T^\lambda$  de  $(\mathbb{R}^2, \Phi^* g)$ . Para hallar explícitamente  $T^\lambda$ , notemos que, localmente, la inversa de  $\Phi$  se obtiene de

$$\operatorname{tag}(\pi x_1) = u/v, \quad \text{si } v \neq 0; \quad \operatorname{cotag}(\pi x_1) = v/u, \quad \text{si } u \neq 0$$

$$x_2 = (2\pi)^{-1} \ln \left[ \pi^2 (u^2 + v^2) \right]$$

de modo que, fácilmente, la isometría de  $(\mathbb{R}^2, \Phi^* g)$  requerida es,

$$T^\lambda((x_1, x_2)) = (x_1, x_2 + \pi^{-1} \ln(\lambda))$$

y podemos concluir,

**Proposición 34.**- El recubridor universal lorentziano del toro de Clifton-Pohl  $T_{CP}$  es  $\mathbb{R}^2$  con una métrica  $\bar{g} \in \mathcal{S}_3$ , y el grupo de automorfismos de recubridor de  $\bar{g}$  es el generado por las traslaciones según los ejes coordenados,

$$(x_1, x_2) \rightarrow (x_1 + 2, x_2), \quad y \quad (x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2 + \pi^{-1} \ln 2), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

## 6.- OTRAS PROPIEDADES RELEVANTES.

### (a) Conexión geodésica.

Sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t_0 \in I$ , una geodésica inextendible con primera componente  $x_1$  no constante y tal que  $\exists i \in \mathbb{Z}$ :  $\varepsilon D/\beta(p_i) \leq 0$ . Recordemos (ver Lema 18) que su imagen no corta a  $r[p_i]$ . Como para las métricas de  $\mathcal{S}_3$  se tenía que  $\beta(p_i) \cdot \beta(p_{i+1}) < 0$ , necesariamente cualquier geodésica  $\gamma$  de  $(\mathbb{R}^2, g)$ ,  $g \in \mathcal{S}_3$ , con  $p_i < x_1(t_0) < p_{i+1}$  verificará  $p_i < x_1(t) < p_{i+2}$  ó  $p_{i-1} < x_1(t) < p_{i+1}$  para todo  $t$ . En consecuencia,  $(\mathbb{R}^2, g)$  no es geodésicamente conexo. La situación es diferente para las métricas de  $\mathcal{S}_1$  ó  $\mathcal{S}_2$ , pues en este caso existen geodésicas con  $\varepsilon D/\beta(p_i) > 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{Z}$ . Para las métricas inducidas sobre los toros en el sentido de la Definición 8 se tiene,

**Proposición 35.**- Sea  $g'$  una métrica inducida sobre el toro  $T^2$  por una métrica  $g \in \mathcal{S}$  sobre  $\mathbb{R}^2$ .

- (i) Si  $g \in \mathcal{S}_3$  entonces  $(T^2, g')$  es geodésicamente desconexo.
- (ii) Si  $g \in \mathcal{S}_1$  ó  $g \in \mathcal{S}_2$  entonces  $(T^2, g')$  es geodésicamente conexo.

Dem.- (i) Puesto que se ha visto que si  $g \in \mathcal{S}_3$  entonces  $(\mathbb{R}^2, g)$  es geodésicamente desconexo, basta con mostrar que existen dos puntos  $q_0, q_1 \in \mathbb{R}^2$  que no se pueden unir por una geodésica y que no se proyectan sobre el mismo punto del toro. Para ello, tomemos  $q_0 \in r[p_0]$ ,  $q_1 \in r[p_1]$ ; recordemos que para las métricas de  $\mathcal{S}_3$  se tenía  $p_0 = 0 < p_1 < 1$ , con lo que  $q_0$  y  $q_1$  no se proyectan en el mismo punto del toro. Por otra parte, toda geodésica  $\gamma$  con primera componente no constante que pase por  $q_1$  verificará  $\varepsilon D/\beta(p_0) > 0$ ; en consecuencia,  $\varepsilon D/\beta(p_1) < 0$ , luego  $\text{Im} \gamma \cap$

$r[p_1]=\emptyset$ , y  $\gamma$  no pasará por  $q_1$ .

(ii) Llamemos  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$  a la proyección sobre el cociente, y probemos el siguiente resultado más fuerte:

Dados  $C_-, C_+ \in \mathbb{R}$ ,  $C_- < C_+$   $\exists D \in \mathbb{R}$  tal que  $\forall q_1', q_2' \in T^2$  existe una geodésica  $\gamma$  de  $(\mathbb{R}^2, g)$  que verifica:

(a)  $g(\gamma', K) = D$ , (b)  $C := g(\gamma', \gamma') \in [C_-, C_+]$ , (c)  $q_1', q_2' \in \text{Im}(\pi \circ \gamma)$ .

Para ello, fijados  $C_-$  y  $C_+$  tomemos cualquier valor de  $D$  tal que  $D^2 > -\delta C$ ,  $\forall C \in [C_-, C_+]$ , y  $\varepsilon D / \beta(p_0) > 0$  para algún  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ . Sean  $(a_i, b_i) \in \pi^{-1}(q_i')$ ,  $i \in \{1, 2\}$  tales que  $a_1 \leq a_2$ . Consideremos en adelante geodésicas inextendibles  $\gamma^{[C]}(t) = (x_1^{[C]}(t), x_2^{[C]}(t)) \forall t \in \mathbb{R}$ , con estos valores fijos de  $D$  y  $\varepsilon$ , que pasen por  $(a_1, b_1)$  y con  $C = g(\gamma', \gamma')$  que verifique (b). Por la Proposición 17(1) y el Lema 18(2) podemos definir  $x_2^{[C]}(x_1) \equiv x_2^{[C]} \circ (x_1^{[C]})^{-1}$  en todo  $\mathbb{R}$ . Dados  $C, C' \in ]C_-, C_+[$  se tendrá entonces:

$$\begin{aligned} x_2^{[C']} (x_1) - x_2^{[C]} (x_1) &= \int_{a_1}^{x_1} \frac{d}{dx_1} (x_2^{[C']} - x_2^{[C]})(x) dx = \\ &= \varepsilon D \int_{a_1}^{x_1} \frac{\sqrt{\alpha\delta + \beta^2}}{\delta} \left\{ \frac{1}{\sqrt{D^2 + \delta C}} - \frac{1}{\sqrt{D^2 + \delta C'}} \right\} = \\ &= \varepsilon D \int_{a_1}^{x_1} \sqrt{\alpha\delta + \beta^2} \frac{C' - C}{\sqrt{D^2 + \delta C} \sqrt{D^2 + \delta C'} \left\{ \sqrt{D^2 + \delta C} + \sqrt{D^2 + \delta C'} \right\}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Notemos, por tanto, que para  $C$  y  $C'$  fijos, la diferencia  $|x_2^{[C']} (x_1) - x_2^{[C]} (x_1)|$  crece conforme nos alejamos de  $a_1$ , y por la periodicidad del integrando en (3.22) se verificará  $|x_2^{[C']} (a_1 + n) - x_2^{[C]} (a_1 + n)| = n |x_2^{[C']} (a_1 + 1) - x_2^{[C]} (a_1 + 1)|$ . Fijemos ahora  $C_0 \in [C_-, C_+]$  y sean

$$T^+ := \text{Máx} \left\{ x_2^{[C]} (a_1 + 1) - x_2^{[C_0]} (a_1 + 1) / C \in [C_-, C_+] \right\} =$$

$$= \text{Máx} \left\{ \int_0^1 \sqrt{\alpha\delta + \beta^2} \frac{\varepsilon D (C - C_0)}{\sqrt{D^2 + \delta C_0} \sqrt{D^2 + \delta C} \left\{ \sqrt{D^2 + \delta C_0} + \sqrt{D^2 + \delta C} \right\}} / C \in [C_-, C_+] \right\}$$

$$T^- := \text{Mín} \left\{ x_2^{[C]}(a_1+1) - x_2^{[C_0]}(a_1+1) / C \in [C_-, C_+] \right\} =$$

$$= \text{Mín} \left\{ \int_0^1 \sqrt{\alpha\delta + \beta^2} \frac{\varepsilon D (C - C_0)}{\sqrt{D^2 + \delta C_0} \sqrt{D^2 + \delta C} \left\{ \sqrt{D^2 + \delta C_0} + \sqrt{D^2 + \delta C} \right\}} / C \in [C_-, C_+] \right\}$$

Claramente  $T^- < T^+$ , y,  $\forall T \in [T^-, T^+] \exists C \in [C_-, C_+]$  tal que

$$x_2^{[C]}(a_1+1) - x_2^{[C_0]}(a_1+1) = T$$

Si tomamos ahora  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n(T^+ - T^-) \geq 1$ , y consideramos la aplicación continua

$$\Phi: [C_-, C_+] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(C) = x_2^{[C]}(a_2+n), \quad \forall C \in [C_-, C_+],$$

entonces, usando

$$|x_2^{[C]}(a_2+n) - x_2^{[C_0]}(a_2+n)| \geq n |x_2^{[C]}(a_1+1) - x_2^{[C_0]}(a_1+1)|$$

claramente, el intervalo de longitud mayor o igual que 1,

$$[x_2^{[C_0]}(a_2+n) - n(x_2^{[C_0]}(a_2+1) - T^-), x_2^{[C_0]}(a_2+n) + n(T^+ - x_2^{[C_0]}(a_2+1))] ]$$

está incluido en  $\text{Im}\Phi$ , con lo que existirá un  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $b_2 + m \in \text{Im}\Phi$ . La geodésica deseada será aquella con  $C = \Phi^{-1}(b_2 + m)$ . ■

**(b) Geodésicas completas en el toro cuya velocidad se sale de cualquier compacto.**

En una variedad de Riemann compacta, la velocidad de cualquier geodésica, por tener módulo constante, debe estar contenida en un compacto del fibrado tangente. Por otra parte, por el Lema 2 sabemos que si una geodésica (inextensible) de una variedad semi-riemanniana es incompleta, entonces su velocidad debe salirse de cualquier compacto del fibrado tangente. Resulta natural preguntarse entonces si el recíproco para variedades semi-riemannianas es cierto, esto es,

**Cuestión 36.-** Una geodésica completa de una variedad semi-riemanniana compacta, ¿debe tener su velocidad incluida en un compacto del fibrado tangente a la variedad?

Si analizamos lo que sucede para las métricas de Lorentz sobre un toro  $(T^2, g')$ , donde  $g'$  es la métrica inducida sobre  $T^2$  por una métrica  $g \in \mathcal{S}$ , el Teorema 22 permite afirmar que sí cae en un compacto la velocidad de cada geodésica completa sobre el toro inducida por una geodésica en  $(\mathbb{R}^2, g)$  que esté en alguno de los casos (1A)(a), (1B), (2A) y (2C)(d). Las restantes geodésicas de  $(\mathbb{R}^2, g)$  son incompletas excepto las del caso (2B) cuando  $\delta'(x_+) = \delta'(x_-) = 0$ . Recordemos, por otro lado, que para cualquier geodésica  $\gamma$  en el caso (2B) se tenía  $D=0$  y, debido a que  $(\delta \circ x_1) \cdot x_2' = (\beta \circ x_1) \cdot x_1'$ , la componente  $x_2'$  no estaba acotada (ver (3.11b)). En consecuencia,  $\gamma$  induce siempre, sea o no completa, una geodésica sobre el toro cuya velocidad no está contenida en ningún compacto del fibrado tangente. La respuesta a la Cuestión 36 de arriba es, por tanto no, como se resume en la siguiente

**Proposición 37.-** Sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(0 \in I)$   $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$  una geodésica inextensible no luminosa en  $(\mathbb{R}^2, g)$   $g \in \mathcal{S}$  tal que  $D=0$ . Entonces  $x_2'$  no está acotado en  $I$ . En consecuencia, si  $\bar{\gamma}$  es la geodésica que induce  $\gamma$  sobre  $(T^2, g')$ , su velocidad  $\bar{\gamma}'$  no cae en ningún compacto del fibrado tangente  $T(T^2)$ .

Si además  $g \in \mathcal{S}_1$  entonces  $\gamma$ , y por tanto  $\gamma'$ , es completa.

**Observación 38.-** Esta Proposición permite obtener ejemplos concretos de variedades compactas con geodésicas completas cuya velocidad no cae en un compacto. No obstante, como sabemos por el Teorema 25,  $(T^2, g')$  es incompleto. Podríamos preguntarnos entonces el caso más restrictivo de la Cuestión 36:

*Una geodésica de una variedad semi-riemanniana compacta y completa, ¿debe tener su velocidad incluida en un compacto del fibrado tangente a la variedad?*

Como veremos en el próximo Capítulo, la respuesta a esta pregunta también es negativa; el contraejemplo se construirá en la Observación IV.25.

## Capítulo IV.

### COMPLETITUD DE PRODUCTOS LOCALMENTE WARPED.

Es fácil comprobar que el producto de dos variedades semi-riemannianas es completo si y sólo si cada una de las dos variedades lo es. Una generalización natural de esta cuestión es preguntarse qué sucede cuando se considera un producto warped de dos variedades semi-riemannianas.

En el caso riemanniano, cualquier producto warped de dos variedades completas es completo ([On], Lemma 7.40). Sin embargo, Beem y Busemann dieron el siguiente contraejemplo para el caso lorentziano: base  $(\mathbb{R}, dt^2)$ , fibra  $(\mathbb{R}, -dt^2)$ , función warping  $f(x) = e^x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . En este producto warped, cualquier geodésica cuya proyección sobre la fibra no sea constante es incompleta (es inmediato de la ecuación de las geodésicas (4.1) abajo; consultar también [On], Example 4.21).

Pese a la sencillez de este contraejemplo, podemos preguntarnos si existirá alguna condición sobre la base, la fibra o la función warping que permita asegurar la completitud (espacial, temporal o luminosa) de un producto warped. En este Capítulo daremos respuestas a esta pregunta, que pueden resumirse como sigue:

(1) Influencia de la fibra (supuesta no trivial, esto es, con dimensión  $> 0$ ).

(A) Si la fibra es incompleta entonces el producto warped es incompleto. Si además la métrica warped es indefinida entonces su incompletitud es espacial, luminosa y temporal (Teorema 3).

(B) Si la fibra  $(F, g_F)$  es completa entonces su influencia en la completi-

tud del producto warped es nula en el siguiente sentido: dada una variedad semi-riemanniana  $(B, g_B)$  y una función  $f: B \rightarrow \mathbb{R}^+$ , un producto warped con base  $(B, g_B)$ , función warping  $f$  y fibra  $(F, g_F)$  es completo si y solo si para cualquier variedad semi-riemanniana completa  $(F', g_{F'})$  el producto warped con base  $(B, g_B)$ , función warping  $f$  y fibra  $(F', g_{F'})$  es completo (Teorema 5). Este resultado se mantiene para cada uno de los tres tipos de completitud causal. De ahí que pueda definirse la *completitud warped* (espacial, temporal o luminosa) de la terna  $(B, g_B, f)$  (Definición 6).

(C) Los resultados anteriores se formulan directamente generalizados para productos localmente warped, esto es, fibrados diferenciables con métricas que generalizan las de los productos warped (Definición 1, Ejemplo 17).

(2) Influencia de la base (en adelante, supuesta la fibra completa).

(A) En cada carta fibrada asociada a un producto localmente warped (Definición 1), las secciones constantes son totalmente geodésicas; por tanto, si  $(B, g_B)$  es incompleta, entonces la terna  $(B, g_B, f)$  es warped incompleta, §3. No obstante, si la base es definida puede que el producto warped no sea incompleto en los tres tipos causales (ver, el punto (4), más abajo).

(B) Si  $(B, g_B)$  es completa entonces  $(B, g_B, f)$  puede o no ser completa, dependiendo de la función warping. No obstante, según se ve en (3), (4) y (5) a continuación, el comportamiento es muy distinto según sea definida o no  $g_B$ .

(3) Influencia de la función warping para bases (conexas) definidas y completas.

(A) Si  $B$  es compacta entonces la terna  $(B, g_B, f)$  ( $g_B$  métrica definida) es completa warped, independientemente de la función warping (Teorema 13).

(B) Supongamos que  $(B, g_B)$  es completa, definida y no compacta, y que el valor de la función warping depende radialmente de la distancia a un punto  $x_0$ . Entonces la completitud warped espacial, luminosa o temporal depende exclusivamente del comportamiento de  $f$  en infinito, y es independiente de la base (completa, definida y no compacta) que se escoja. Ello permite definir los conceptos de III, II ó I completitud para funciones de  $\mathbb{R}^+$  en  $\mathbb{R}^+$ , y caracterizarlos según se dé lugar a ternas  $(B, g_B, f)$ , con  $f$  radial, completas warped en 3, 2 ó 1 sentidos causales. Para uso posterior, los conceptos de III, II y I-completitud se introducen para funciones  $[a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , y sus depen-

dencias lógicas se estudian exhaustivamente (ver Definición 10, Observación 11)

(C) Si  $f$  no depende radialmente de la distancia a un punto, entonces el apartado anterior permite dar cotas para  $f$  que aseguren la completitud. Más precisamente, escogido  $x_0 \in B$  podemos definir la función  $f_{\text{inf}}(r) = \text{Mín}\{f(x) / x \in B, \text{distancia}(x, x_0) = r\}$ ,  $\forall r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ , que sí es una función radial. Entonces, la III, II ó I completitud de  $f_{\text{inf}}$  implica la completitud warped en al menos 3, 2 ó 1 de los sentidos causales. En particular, si  $f_{\text{inf}} \geq \varepsilon > 0$  entonces  $(B, g_B, f)$  es warped completa, redemostrándose (A).

(4) Base de dimensión 1 (completa o no).

El caso de que la base tenga dimensión 1 es particularmente interesante; así, p. ej., incluye los espacio-tiempos relativistas de *Robertson-Walker* con fibra no necesariamente tridimensional ni de curvatura seccional constante, tal y como se consideran en [ARS]; con modificaciones obvias, incluyen las métricas de *Reissner-Nördstrom* cuya conexión geodésica se estudia en [Gi] usando una técnica muy diferente. Aunque la función warping no tiene por qué ser radial, como aplicación de la potencia de las herramientas introducidas en (2), (3A) y (3B) se dan procedimientos sistemáticos para determinar:

(A) Cuándo una terna  $(B, g_B, f)$ ,  $\dim B = 1$ , es completa warped en cada sentido causal (Corolario 16).

(B) Cuándo, dadas sus condiciones iniciales en un punto, una geodésica es incompleta, (en el caso de que la terna  $(B, g_B, f)$  sea incompleta warped en algún sentido causal, Teorema 15).

La preocupación de dar las hipótesis menos restrictivas posibles se ilustra con contraejemplos que muestran su no posible relajación. En §3.d se comprueba que una construcción similar a la de los productos (localmente) warped no es realizable para los productos *twisted*, dándose un producto *twisted* incompleto que tiene como base y fibra a  $S^1$  (Contraejemplo 23).

(5) Influencia de la función warping para bases indefinidas y completas.

(A) El Teorema 24 permite asegurar completitud warped bajo condiciones que extienden a las del Teorema 4 del Cap. II.

(B) Ni siquiera en el caso de que  $(B, g_B)$  sea completa e  $\text{Inf}(f) \geq \varepsilon > 0$  puede

asegurarse la completitud warped de una terna  $(B, g_B, f)$  (Contraejemplo 25; comparar con (3C) arriba).

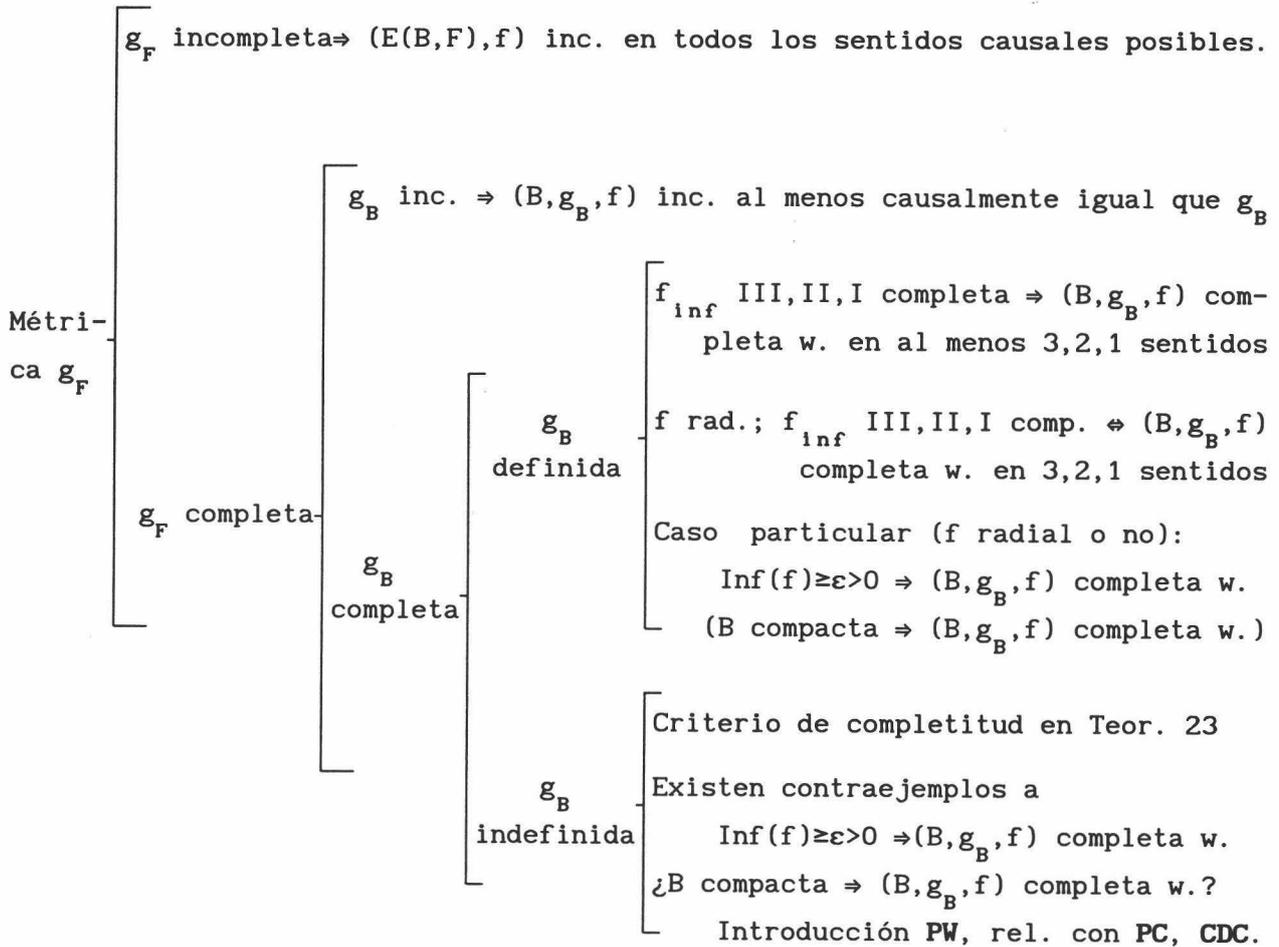
(C) La cuestión de si existe una variedad semi-riemanniana  $(B, g_B)$  que sea compacta y completa, y una función warping  $f$  tal que  $(B, g_B, f)$  no sea completa warped, queda abierta. Se muestra que este problema está directamente relacionado con los problemas abiertos **CC** y **CDC** enunciados al final del Cap. I. En la tabla de la página siguiente se resumen los resultados obtenidos.

$(E(B,F),f)$  fibrado diferenciable con métrica localmente warped;

$(B,g_B)$  base,  $(F,g_F)$  fibra,  $f$  función warping.

$f_{inf}(r) = \text{Mín}\{f(x) / x \in B, \text{dist}(x,x_0)=r\}, \forall r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$f$  radial :=  $f(x) = f_{inf}(\text{dist}(x,x_0))$ ,  $\forall x \in B$



[Para los recíprocos de cada implicación  $\Rightarrow$  de la que no se ha escrito la equivalencia  $\Leftrightarrow$ , se tienen contraejemplos].

## 1.- CONCEPTO Y PRIMERAS PROPIEDADES.

Sea  $E(B,F)$  un fibrado diferenciable con base  $B$  y fibra  $F$ . Denotemos por  $\pi_B: E \rightarrow B$  a su proyección canónica y, para cada carta fibrada,  $(\pi_B^{-1}(U), \Phi)$ ,  $\Phi: \pi_B^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ , denotemos por  $\pi_F$  a la composición de la proyección de  $U \times F$  sobre  $F$  con  $\Phi$  ( $U$  es el abierto de  $B$  correspondiente a la carta fibrada; a cada uno de estos abiertos de  $B$  asociados a una carta fibrada lo llamaremos *trivializante*). Sean  $g_B, g_F$  métricas semi-riemannianas sobre  $B$  y  $F$ , respectivamente, y sea  $f > 0$  una función diferenciable sobre  $B$ .

**Definición 1.-** Una métrica  $g^f$  sobre  $E$  es un producto warped local de  $g_B$  y  $g_F$  con función warping  $f$  si existe un recubrimiento de  $B$   $\{U_i / U_i \subset B, \forall i \in I\}$  formado por abiertos trivializantes tales que, para cada una de las correspondientes cartas fibradas,  $(\pi_B^{-1}(U_i), \Phi_i)$  la métrica  $g^f$  se escribe

$$g^f = \pi_B^* g_B + (f \circ \pi_B)^2 \pi_F^* g_F$$

Por supuesto, esta familia de variedades semi-riemannianas generaliza estrictamente a la de los productos warped (ver Ejemplo 17). A un producto warped con base  $B$ , fibra  $F$  y función warping  $f$  lo denotaremos por  $B \times_f F$ .

Sea  $\gamma$  una curva diferenciable en  $E$ . Razonando como con los productos warped usuales (ver [On], Proposition 7.38), es fácil comprobar que  $\gamma$  es una geodésica con respecto a  $g^f$  si y sólo si satisface:

$$(D/dt)\gamma'_B = (C/(f \circ \gamma_B)^3) \nabla^B f \quad \text{en } B \quad (4.1a)$$

$$(D/dt)\gamma'_F = -(2/(f \circ \gamma_B)) (d/dt)(f \circ \gamma_B) \gamma'_F \quad \text{en } F \quad (4.1b)$$

(la última en cada carta fibrada), donde  $\gamma_B := \pi_B \circ \gamma$ ,  $\gamma_F := \pi_F \circ \gamma$ ,  $D/dt$  denota en cada caso la derivada covariante correspondiente,  $\nabla^B f$  es el gradiente de  $f$  en  $(B, g_B)$  y la constante  $C$  es igual a  $(f \circ \gamma_B)^4 g_F(\gamma'_F, \gamma'_F)$ , independientemente de la carta fibrada escogida. Denotaremos por  $D$  a la constante  $g^f(\gamma', \gamma')$ . Es de notar que  $\gamma'_F$  es, (en cada carta fibrada), una pregeodésica de  $(F, g_F)$  (tén-gase en cuenta que  $(D/dt)\gamma'_F$  puede escribirse como combinación lineal de  $\gamma'_F$  en cada punto, y ver [On] Exercise 3.19).

**Convenio 2.-** En adelante, la variedad base  $B$  de cualquier producto localmente warped se considerará conexa. Si  $g_B$  es definida, se tomará  $\eta \in \{-1, 1\}$  de tal modo que  $\eta g_B$  sea siempre riemanniana, y  $\| \cdot \|$  denotará a la norma de  $\eta g_B$ .

## 2.- INFLUENCIA DE LA FIBRA Y COMPLETITUD WARPED.

En este apartado,  $(B, g_B)$  y  $(F, g_F)$  denotarán dos variedades semi-riemannianas,  $f > 0$  una función diferenciable sobre  $B$ ,  $E(B, F)$  un fibrado diferenciable con base  $B$  y fibra  $F$ , y  $g^f$  un producto warped local de  $g_B$  y  $g_F$ .

**Teorema 3.-** Supongamos que la fibra  $(F, g_F)$  del producto warped local  $(E(B, F), g^f)$  es incompleta.

(1)  $(E(B, F), g^f)$  es incompleto.

(2) Si, además,  $g^f$  es indefinida entonces  $(E(B, F), g^f)$  es incompleto espacial, luminosa y temporalmente.

Dem.- Supondremos a lo largo de toda la demostración, sin pérdida de generalidad, que  $g_F$  no es definida negativa (caso de que lo fuera, bastaría aplicar el razonamiento a  $-g^f$ ).

(1) Sea  $\bar{\rho}: [0, \bar{\varepsilon}[ \rightarrow F$ ,  $0 < \varepsilon < \omega$ , una geodésica de  $(F, g_F)$  inextendible a  $B$ , sea  $x \in B$ , y consideremos un abierto trivializante  $U \ni x$ . Sea  $\gamma_B$  la proyección sobre  $B$  de cualquier geodésica con  $C = f(x)^2$ , y tomemos  $\delta > 0$  para que  $\gamma_B([0, \delta[) \subset U$  y  $C^{-1} \cdot \int_0^\delta (f \circ \gamma_B)^{-2}(t) dt \leq \bar{\varepsilon}$ .

Cambiando, si es preciso, el origen de  $\bar{\rho}$ , podemos considerar una geodésica para  $(F, g_F)$ ,  $\rho: [0, \varepsilon[ \rightarrow F$  con  $\varepsilon = C^{-1} \cdot \int_0^\delta (f \circ \gamma_B)^{-2}(t) dt$ , y que sea inextendible a  $\delta$ . Definamos la función  $s: [0, \delta[ \rightarrow [0, \varepsilon[$ , por  $s(t) = C^{-1} \cdot \int_0^t (f \circ \gamma_B)^{-2}(t) dt$ ,  $\forall t \in [0, \delta[$ , y sea  $\gamma_F: [0, \delta[ \rightarrow F$ ,  $\gamma_F(t) = \rho(s(t))$ ,  $\forall t \in [0, \delta[$ , que es inextendible a  $\delta$ .

Es inmediato comprobar que, en la carta fibrada correspondiente a  $U$ , la curva  $\gamma: [0, \delta[ \rightarrow U \times F$ ,  $\gamma = (\gamma_B, \gamma_F)$  es una geodésica para la métrica inducida por

$g^f$ , y, por ser inextendible a  $\delta$ ,  $g^f$  es incompleta.

(2) Notemos que la geodésica  $\gamma$  construida en (1) verifica  $g(\gamma', \gamma') = g_B(\gamma_B', \gamma_B')(0) + 1$ . Si  $g_B$  no es definida positiva, podemos escoger condiciones iniciales  $\gamma_B'(0)$  convenientes para conseguir que  $\gamma$  resulte espacial, luminosa o temporal. Si  $g_B$  es definida positiva entonces  $g_F$  es indefinida, por lo que podemos razonar como antes que  $-g^f$  (y, por tanto,  $g^f$ ) es incompleta en los tres sentidos causales. ■

**Lema 4.-** Supongamos que la fibra  $(F, g_F)$  del producto warped local  $(E(B, F), g^f)$  es completa, y sea  $\gamma: [0, b[ \rightarrow E$ ,  $0 < b < \infty$ , una geodésica de  $g^f$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $\gamma$  es extendible como geodésica más allá de  $b$ .
- (2)  $\gamma_B$  es extendible de modo continuo a  $b$ .
- (3)  $\gamma_B'([0, b[)$  cae en un compacto del fibrado tangente  $TB$ .

Además, si  $g_B$  fuera definida, las afirmaciones previas serán también equivalentes a:

- (4)  $\gamma_B([0, b[)$  cae en un compacto de  $B$ .

Dem. - Las implicaciones (1) $\Rightarrow$ (2), (1) $\Rightarrow$ (3) son obvias.

(2) $\Rightarrow$ (1) Tomemos un abierto trivializante de  $B$  que contiene  $\lim_{t \rightarrow b} \gamma_B(t)$ . Como  $\gamma_F$  es una pregeodésica of  $g_F$ , podemos considerar la reparametrización  $h$  tal que  $\bar{\gamma}_F := \gamma_F \circ h$  es una geodésica. Llamando  $\mu = -(2/(f \circ \gamma_B)) \cdot (f \circ \gamma_B)' = (\ln(f \circ \gamma_B))^{-2}'$ , la expresión (4.1b) se puede reescribir  $(D/dt)\gamma_F' = \mu \cdot \gamma_F'$ , de donde

$$h'' + (\mu \circ h) (h')^2 = 0 .$$

Por tanto, existe  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$  tal que  $h' = \lambda (f \circ \gamma_B \circ h)^2$ , y  $(1/h')$  estará acotado en  $[0, b[$ . Por ser  $h^{-1}$  una aplicación monótona con derivada acotada,  $\lim_{t \rightarrow b} h^{-1}(t) = z \in \mathbb{R}$ , y  $\lim_{t \rightarrow b} \gamma_F(t) = \lim_{s \rightarrow z} \bar{\gamma}_F(s)$ . Como  $(F, g_F)$  es completa, este último límite existe, por lo que  $\gamma_F$  y  $\gamma$  son extendibles más allá de  $b$ . El resultado se sigue pues, de que una geodésica es extendible continuamente si y solo si es

extendible como geodésica ([On] Lemma 5.8).

(3) $\Rightarrow$ (2) Si  $\gamma_B$  es constante no hay nada que demostrar; en caso contrario su imagen,  $\text{Im}\gamma_B$ , debe tener un punto de acumulación  $p \in B$ . Tomemos cualquier métrica de Riemann  $g_R$  sobre  $B$ . La afirmación (3) implica que  $\gamma_B$  tiene una  $g_R$ -longitud finita, por lo que  $p$  debe ser el límite de  $\gamma_B$ .

Supongamos ahora que  $g_B$  es definida. Es obvio que (3) $\Rightarrow$ (4). Para el recíproco, nótese que, por la definición de la métrica localmente warped,  $\eta g_B(\gamma'_B, \gamma'_B) = \eta g^f(\gamma', \gamma') - (f \circ \gamma_B)^2 g_F(\gamma'_F, \gamma'_F)$ . Luego, para una geodésica, se tiene la expresión independiente de cartas fibradas:

$$\|\gamma'_B\| = (\eta D - (\eta C / (f \circ \gamma_B)^2))^{(1/2)} \quad (4.2)$$

( $D = g^f(\gamma', \gamma')$ ), de donde el resultado es inmediato. ■

Este Lema permite reducir (cuando la fibra es completa) el estudio de la extendibilidad de la geodésica  $\gamma$  al estudio de la extendibilidad de la solución de la ecuación (4.1a), fijada el valor de  $C$  y la condición inicial de  $\gamma_B$ . Así, se tiene,

**Teorema 5.-** Sea  $(B, g_B)$  una variedad semi-riemanniana, y sea  $f > 0$  una función diferenciable sobre  $B$ . Equivalen:

(1) Existe una variedad completa con una métrica indefinida  $(F_0, g_{F_0})$  y un fibrado diferenciable con una métrica localmente warped  $(E_0(B, F_0), g^f)$  que es completo (resp. temporal, luminosa o espacialmente completo).

(2) Todo fibrado diferenciable con una métrica localmente warped del tipo  $(E(B, F), g^f)$  es completo (resp. temporal, luminosa o espacialmente completo), para cualquier variedad semi-riemanniana completa  $(F, g_F)$ .

Si  $g_B$  fuera definida, la condición (1) se puede reemplazar por:

(1)' Existen una variedad completa definida  $(F_0, g_{F_0})$ , ( $\dim F_0 > 0$ ) tal que  $-ng_{F_0}$  es riemanniana, y un fibrado diferenciable con una métrica localmente warped  $(E_0(B, F_0), g^f)$  que es completo (resp. temporal, luminosa o espacialmente completo).

Dem.-(2) $\Rightarrow$ (1) es obvio.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea  $\gamma: [0, b[ \rightarrow E(B, F)$ ,  $0 < b < \infty$ , una geodésica. Por el Lema anterior, basta con comprobar la extendibilidad de  $\gamma_B$  a  $b$ . Consideremos cualquier geodésica inextendible (necesariamente completa)  $\rho: [0, b[ \rightarrow E_0(B, F_0)$ , tal que  $\rho'_B(0) = \gamma'_B(0)$  y con iguales constantes  $C$  para  $\gamma_B$  (esto último es posible por ser  $g_{F_0}$  indefinida). Por la unicidad de soluciones de la ecuación diferencial (4.1a),  $\rho_B|_{[0, b[} = \gamma_B$ , luego  $\gamma_B$  es extendible.

En el caso de que  $g_F$  sea definida, (2) $\Rightarrow$ (1)' vuelve a ser obvio. Para el recíproco, la completitud de las geodésicas con  $\eta C < 0$  del producto localmente warped  $(E(B, F), g^f)$ , se prueba de modo análogo a (1) $\Rightarrow$ (2). Para aquellas con  $\eta C \geq 0$ , nótese primero que la completitud de  $(E_0(B, F_0), g^f)$  implica que (4.1a), con  $C=0$ , tenga soluciones maximales definidas en todo  $\mathbb{R}$ , esto es,  $(B, g_B)$  es completa. Usando (4.2), se tiene  $\|\gamma'_B\| \leq \sqrt{|D|}$ , y, por la completitud de  $(B, g_B)$ ,  $\gamma'_B([0, b[)$  cae en un compacto de  $TB$ , con lo que basta con aplicar el anterior Lema. ■

Este resultado motiva la siguiente

**Definición 6.-** Sea  $(B, g_B)$  una variedad semi-riemanniana, y sea  $f > 0$  una función diferenciable sobre  $B$ .

(1) Diremos que  $(B, g_B, f)$  es completa warped (resp. completa warped espacial, luminosa o temporal) si, para cualquier variedad semi-riemanniana completa  $(F, g_F)$ , cualquier métrica localmente warped  $g^f$  sobre cualquier fibrado diferenciable  $E(B, F)$  es completa (resp. espacial, luminosa o temporalmente completa).

(2) Diremos que el par  $(\gamma_B, C_0)$  formado por una solución  $\gamma_B$  de la ecuación diferencial (4.1a) tomando como valor de la constante  $C=C_0$  es una proyección geodésica sobre  $(B, g_B, f)$ . La proyección geodésica  $(\gamma_B, C_0)$  se dirá temporal (resp. luminosa o espacial) si la constante  $D = g_B(\gamma'_B, \gamma'_B) + C_0/(f \circ \gamma_B)^2$  es negativa (resp. 0 o positiva). A las proyecciones geodésicas  $(\gamma_B, 0)$  las llamaremos tangentes a la base.

**Observación 7.-** (1) Una curva  $\rho$  en  $B$  constantemente igual a un punto  $p \in B$  determina la proyección geodésica luminosa  $(\rho, 0)$ . Tomando una fibra indefinida

$(F, g_F)$  podemos construir una geodésica luminosa  $\gamma$  de  $(B \times F, g^f)$  (y, por tanto, *no constante*) tal que  $\gamma_B = \rho$ ,  $C = f(p)^4 \cdot g_F(\gamma'_F, \gamma'_F) = 0$ . Por otra parte, si además  $\nabla^B f(p) = 0$ , el par  $(\rho, C_0)$  es una proyección geodésica  $\forall C_0 \in \mathbb{R}$ , que será espacial, luminosa o temporal según  $C_0 > 0$ ,  $C_0 = 0$ ,  $C_0 < 0$ , respectivamente.

(2) En general, dada una solución  $\gamma_B$  de (4.1a) el valor de  $C$  queda unívocamente determinado, salvo si  $(\nabla^B f) \circ \gamma_B = 0$ . Por ello, llamaremos también *proyección geodésica sobre*  $(B, g_B, f)$  a las soluciones de (4.1a), y, caso de que exista ambigüedad para la constante  $C$ , supondremos  $C = 0$ .

(3) Dada una proyección geodésica tangente a la base  $(\gamma_B, 0)$  podemos construir un producto warped  $B \times_f F$  de tal modo que  $\gamma_B$  sea la proyección sobre la base de una geodésica  $\gamma$  cuya imagen esté contenida en una sección del tipo  $B \times \{y\}$ ,  $y \in F$ . No obstante, si  $F$  es indefinida, también podremos construir otras geodésicas no contenidas en secciones  $B \times \{y\}$  y cuya proyección sea  $\gamma_B$ . Aún más, según quién sea  $B$  podremos construir fibrados diferenciables localmente warped que no admitan secciones del tipo  $B \times \{y\}$ , pero  $\gamma_B$  seguirá siendo la proyección de alguna geodésica en el (espacio total del) fibrado.

(4) El Lema 4 permite afirmar que la completitud warped de la terna  $(B, g_B, f)$  es equivalente a la completitud de todas sus proyecciones geodésicas.

### 3.- ESTUDIO DE LA COMPLETITUD WARPED CON BASES DEFINIDAS.

A lo largo de este apartado, supondremos que  $(B, g_B)$  es una variedad definida,  $f > 0$  una función diferenciable sobre  $B$ , y trataremos de imponer condiciones razonables sobre los elementos de la terna  $(B, g_B, f)$  para obtener completitud warped (espacial, temporal o nula). Recordemos que, por el Convenio 2,  $\eta \in \{-1, 1\}$  es tal que  $\eta g_B$  es de Riemann.

#### (a) Definiciones previas.

**Definición 8.-** Una proyección geodésica  $\gamma_B$  de  $(B, g_B, f)$  es definida si  $\eta C \geq 0$ , e indefinida si  $\eta C < 0$ .

En adelante supondremos usualmente que  $g_B$  es completa. En este caso, podemos considerar la demostración del Teorema 5 ((1)'  $\Rightarrow$  (2)), en donde se prueba que

todas las geodésicas definidas son completas, por lo que bastará con prestar atención a las indefinidas. Pero antes, se verán algunos resultados y definiciones técnicas, para uso posterior.

**Lema 9.-** Sea  $G: [y_0, y_1[ \rightarrow ]\lambda, \infty[$ ,  $-\infty < y_0 < y_1 \leq \infty$ ,  $\lambda \geq 0$ , una función medible. Si existe  $E_0$  en  $]-\lambda, \infty[$  tal que  $\int_{y_0}^{y_1} (G(y) + E_0)^{-1/2} dy = \infty$ , entonces, para todo  $E$  en  $]-\lambda, \infty[$ ,

$$\int_{y_0}^{y_1} (G(y) + E)^{-1/2} dy = \infty$$

Dem. - Si  $-\lambda \leq E \leq E_0$ , claramente

$$(G(y) + E)^{-1/2} \geq (G(y) + E_0)^{-1/2}$$

y el resultado es inmediato.

Si  $-\lambda < E_0 < E$ , supongamos, por reducción al absurdo, que existe un  $E$  para el que el valor de la integral es finito. La diferencia entre las integrales obtenidas con  $E_0$  y  $E$  es entonces:

$$\begin{aligned} 0 < \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{G(y) + E_0}} - \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{G(y) + E}} &= \int_{y_0}^{y_1} \frac{E - E_0}{\sqrt{G(y) + E} \sqrt{G(y) + E_0} (\sqrt{G(y) + E} + \sqrt{G(y) + E_0})} dy \\ &\leq \int_y^{y_1} \frac{E - E_0}{\sqrt{\lambda + E} \sqrt{\lambda + E_0} \sqrt{G(y) + E}} dy \leq \frac{E - E_0}{\lambda + E_0} \int_y^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{G(y) + E}} < \infty \end{aligned}$$

Por tanto, el valor de la integral obtenido con  $E_0$  es finito, lo que resulta absurdo. ■

**Definición 10.-** Sea  $\varphi: [a, b[ \rightarrow ]0, \infty[$ ,  $-\infty < a < b \leq \infty$ , una función continua. Diremos que  $\varphi$  es:

III-completa si existe una constante  $E_0 > 0$  tal que

$$\int_a^b (E_0 + (1/\varphi(y)^2))^{-1/2} dy = \infty$$

II-completa, si  $\int_a^b \varphi(y) dy = \infty$

I-completa, si  $\varphi$  no está acotada ó  $\int_a^b \varphi(y) dy = \infty$ .

**Observación 11.-** (1) Si  $\varphi$  es III-completa, es inmediato del Lema 9 que, sustituyendo  $E_0$  por cualquier  $E > 0$ , el valor de la integral correspondiente sigue siendo infinito. Aún más, sea  $M^2 = \lim_{t \rightarrow b} \sup \varphi(t)^2$ ; entonces, para todo

$E > (-1/M^2)$  se tiene que  $\int_{a_E}^b (E + (1/\varphi(y)^2))^{-(1/2)} dy = \infty$ , donde  $a_E \in [a, \infty[$  se es-

coge de modo que  $E + (1/\varphi(y)^2) > 0$  en todo  $[a_E, \infty[$ . La afirmación se mantiene incluso si  $E = -1/M^2$ , en el caso de que exista  $a_E$  bajo la misma suposición anterior.

(2) Como  $\varphi(y) > (E + (1/\varphi(y)^2))^{-(1/2)}$ ,  $\forall E > 0$ , también es inmediato que

$$\text{III-completitud} \Rightarrow \text{II-completitud} \Rightarrow \text{I-completitud}$$

Si  $\varphi$  está acotada entonces los recíprocos también son ciertos. Para comprobarlo, es de notar que el segundo recíproco resulta inmediato de las definiciones, mientras que, para el primero:

$$\begin{aligned} 0 < \int_a^b \varphi & - \int_a^b \frac{1}{\sqrt{E_0 + \frac{1}{\varphi^2}}} = \\ & = \int_a^b \frac{E_0}{\sqrt{\frac{1}{\varphi^2}} \sqrt{E_0 + \frac{1}{\varphi^2}} \left( \sqrt{\frac{1}{\varphi^2}} + \sqrt{E_0 + \frac{1}{\varphi^2}} \right)} \leq \\ & \leq \int_a^b \frac{E_0 \varphi}{\sqrt{E_0} \sqrt{E_0 + \frac{1}{\varphi^2}}} \leq M \sqrt{E_0} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{E_0 + \frac{1}{\varphi^2}}} \end{aligned}$$

donde  $M$  es una cota superior de  $\varphi$ , por lo que si  $\varphi$  no es III-completa, tampoco será II-completa.

(3) Si  $\varphi$  no está acotada, claramente I-completitud no implica II-completitud. En el caso de que  $b < \infty$  también es fácil comprobar que II-

completitud no implica III-completitud. Así, basta como contraejemplo la función  $x \rightarrow (1-x)^{-1}$ , definida en  $[0,1[$ . Si  $b=\infty$  también podemos encontrar un contraejemplo como sigue. Tomemos una sucesión de intervalos  $I_n = ]a_n, b_n[$ , donde  $0 < a_n < b_n < a_{n+1}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\sum_n (b_n - a_n) = 2$ . Sea  $B = \cup_n I_n$ , y escojamos otra sucesión  $I'_n = [a'_n, b'_n]$  tal que  $a_n < a'_n < b'_n < b_n$ , y  $\sum_n (b'_n - a'_n) = 1$ . Escribamos  $B' = \cup_n I'_n$ , y consideremos la función  $T: B' \rightarrow [0,1[$ ,  $T(x) =$  Medida de Lebesgue de  $[0,x] \cap B'$ , para todo  $x \in B'$ . Definiendo  $\varphi_1(x) = (1-T(x))^{-1}$  y  $\varphi_2(x) = (1+x^2)^{-1}$   $\forall x \in \mathbb{R}$ , hagamos  $\varphi = \varphi_1$  sobre  $B'$ ,  $\varphi = \varphi_2$  sobre  $\mathbb{R}^+ - B$ , y extendamos  $\varphi$  de modo continuo y positivo a  $\mathbb{R}^+$ . Claramente  $\int_0^\infty \varphi \geq \int_{B'} \varphi = \int_0^1 (1-x)^{-1} dx = \infty$ , por lo que  $\varphi$  es III-completa, pero  $\int_0^\infty (E + (1/\varphi(y)^2))^{-(1/2)} dy < 2\sqrt{E} + \int_{\mathbb{R}^+ - B} \varphi_2 < \infty$ .

Para comprobar que  $\varphi$  se puede extender a  $B - B'$  *manteniendo que  $\varphi > 0$* , y de modo no sólo continuo sino también diferenciable, consideremos, para cada intervalo  $I_n$ , una partición de la unidad diferenciable  $\{\rho_1, \rho_2\}$  subordinada al recubrimiento abierto de  $\mathbb{R}$   $\{I_n, \mathbb{R} - I'_n\}$ , con el soporte de  $\rho_1$  incluido en  $I_n$ . Basta con hacer entonces  $\varphi(x) = (\rho_1 \varphi_1 + \rho_2 \varphi_2)(x) \forall x \in I_n$ .

(4) Para uso posterior, señalemos que si  $\varphi: [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  es continua entonces es III-completa en los casos: (a)  $\text{Inf}(\varphi) > 0$ , o, más generalmente, si  $\exists \varepsilon > 0$  tal que el subconjunto  $\{r \in [0, \infty[ / \varphi(r) > 0\}$  tiene medida infinita, y (b) Si  $\varphi$  se comporta en  $\infty$  como  $1/r^p$ , con  $p \leq 1$ , esto es,  $\lim_{r \rightarrow \infty} (r^p \varphi(r)) \in \mathbb{R}^+$ ,  $p \leq 1$ .

**(b) Teorema fundamental para bases completas.**

El resultado principal que se va a establecer para cualquier base completa y definida  $(B, g_B)$ , precisa de la siguiente construcción técnica en el caso de que  $B$  no sea compacta:

Sean  $x_0 \in B$  y sea  $d: B \rightarrow [0, \infty[$  la función  $\eta_{g_B}$ -distancia desde el punto  $x_0$ . Si  $f^*$  es una función diferenciable sobre  $B$ , definamos  $f_{\text{inf}}^*(r) = \inf\{f^*(y) / d(y)=r\} \forall r \in [0, \infty[$ . Como es usual, diremos que  $f$  depende radialmente de la distancia a  $x_0$  si  $f = f_{\text{inf}}^* \circ d$ .

**Lema 12.-** Sea  $\rho: [0, b[ \rightarrow B$ ,  $0 < b \leq \infty$ , una curva diferenciable. Entonces:

$$\int_{d(\rho(0))}^{d(\rho(s))} f_{\text{inf}}^*(r) dr \leq \int_0^s f^*(\rho(\bar{s})) \|\rho'(\bar{s})\| d\bar{s}$$

Dem.- En primer lugar, es de notar que la función continua  $d$  podría ser no diferenciable. Denotemos por  $g_1(s)$  el miembro izquierdo de la desigualdad, y por  $g_2(s)$  el derecho. Entonces, para cualquier  $s$  en  $[0, b[$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup [(g_1(s+h) - g_1(s))/h] \leq f_{\text{inf}}^*(d \circ \rho(s)) \lim_{h \rightarrow 0} \sup [ |d \circ \rho(s+h) - d \circ \rho(s)| / h ] \leq g_2'(s)$$

donde la última desigualdad resulta clara ya que  $|d \circ \rho(s+h) - d \circ \rho(s)| \leq \int_s^{s+h} \|\rho'(\bar{s})\| d\bar{s}$ .

El resultado requerido es inmediato a partir de la siguiente generalización del teorema del valor medio clásico:

Sublema.- Sean  $g_1, g_2: [0, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones continuas con  $g_1(0) = g_2(0)$ , y que satisfacen, para cualquier  $s \in [0, b[$  la condición: si la sucesión  $\{h_n\} \rightarrow 0$  es tal que los límites  $l_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(g_i(s+h_n) - g_i(s))/h_n\}$ ,  $i=1,2$  existen (sean finitos o no) ocurre entonces que  $l_1 \leq l_2$ . En este caso, tendremos que  $g_1 \leq g_2$  en  $[0, b[$ ."

Dem.- Sea  $b' \in ]0, b[$  arbitrario, y veamos que, bajo las hipótesis del sublema,  $g_1(b') \leq g_2(b')$ . Definamos  $H(x) := g_1(x) - g_2(x)$ , y  $J(x) := b'H(x) - H(b')x$ ,  $\forall x \in [0, b']$ . Como  $J$  es continua, alcanza un mínimo en un punto  $x_m \in [0, b']$ . Puesto que  $J(0) = J(b') = 0$ , podemos escoger  $x_m \in [0, b'[$ . Sea entonces  $\{h_n\} \rightarrow 0$  una sucesión estrictamente decreciente tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{(J(x_m + h_n) - J(x_m))/h_n\} \geq 0$ . Extrayendo, si es necesario, una parcial, podemos suponer que este límite existe y pertenece a  $[0, \infty]$ . En consecuencia, se tendrá,

$$b \lim_{n \rightarrow \infty} \{(H(x_m + h_n) - H(x_m))/h_n\} - H(b') = b \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left( (g_1(x_m + h_n) - g_1(x_m))/h_n \right) - \left( (g_2(x_m + h_n) - g_2(x_m))/h_n \right) \right\} - g_1(b') + g_2(b') \geq 0$$

Si llamamos  $-L$  al límite que aparece entre llaves en la última expresión, por hipótesis se tiene  $L \geq 0$ , luego

$$g_2(b') \geq g_1(b') + L \cdot b' \geq g_1(b'),$$

como se quería. ■

Estamos ya en condiciones de dar el resultado fundamental.

**Teorema 13.-** Sean  $(B, g_B)$  una variedad completa y definida,  $x_0 \in B$ , y  $f > 0$  una función diferenciable sobre  $B$ .

(i) Si  $B$  es compacta entonces  $(B, g_B, f)$  es completa warped.

(ii) Supongamos que  $B$  no es compacta, entonces se tiene:

(a) Si  $f_{\text{inf}}$  es III-completa entonces  $(B, g_B, f)$  es completa warped.

(b) En el caso  $\eta = -1$  (resp.  $\eta = 1$ ) si  $f_{\text{inf}}$  es II-completa entonces  $(B, g_B, f)$  es espacial (resp. temporal) y luminosamente completa warped.

(c) En el caso  $\eta = -1$  (resp.  $\eta = 1$ ) si  $f_{\text{inf}}$  es I-completa entonces  $(B, g_B, f)$  es espacial (resp. temporal) completa warped.

(d) Si  $f$  depende radialmente de la distancia a  $x_0$  entonces los recíprocos de (a), (b) y (c) también son ciertos.

Dem.-(i) Es trivial del Lema 4.(4).

(ii) Sea  $\gamma_B: [0, b[ \rightarrow B$ ,  $b < \infty$ , una proyección geodésica indefinida de  $(B, g_B, f)$ , y supongamos, por reducción al absurdo, que  $\gamma_B$  no es extendible a  $b$ . Tomemos en el Lema 12  $f^* = (\eta D - \eta(C/f^2))^{(-1/2)}$ ; por ser  $\gamma_B$  indefinida  $f_{\text{inf}}^* = (\eta D - \eta(C/f_{\text{inf}}^2))^{(-1/2)}$ , y por (4.2) se obtiene:

$$(-\eta C)^{(-1/2)} \int_{d(\gamma_B(0))}^{d(\gamma_B(t))} (E + (1/f_{\text{inf}}(r)^2))^{(-1/2)} dr \leq t \quad (4.3)$$

donde  $E = -D/C$ . Nótese que  $\text{signo}(E) = \text{signo}(-\eta D/\eta C) = \text{signo}(\eta D)$ . De acuerdo con el Lemma 4, como  $\gamma_B$  no es extendible a  $b$  existe una sucesión  $\{t_n\} \rightarrow b$  tal que  $\{d \circ \gamma_B(t_n)\} \rightarrow \infty$ ; para las afirmaciones (a) y (b) basta con comprobar que por la Observación 16 el valor de la integral en (4.3), y, por tanto, el valor de  $b$ , es  $\infty$ . Para la afirmación (c), basta con considerar el caso en que  $f_{\text{inf}}$  no esté acotado. Al ser  $E < 0$  la imagen de  $\gamma_B$  estará contenida en una bola compacta (o el radicando en (4.3) se hará negativo) lo que es absurdo.

Para (d), notemos que, por ser  $(B, g_B)$  completa y no compacta, la función de corte en  $x_0$  debe tomar el valor  $\infty$  en algún punto. Por tanto, podemos considerar una geodésica de  $g_B$ ,  $\rho: [0, \infty[ \rightarrow B$  tal que  $\rho(0) = x_0$  y  $d(\rho(s)) = s$ ,

$\forall s \in [0, \infty[$ . Por tanto, se puede escribir,  $f_{\text{inf}} = f \circ \rho$ , y, en particular,  $f_{\text{inf}}$  es diferenciable. Escojamos  $E_0 \in \mathbb{R}$  y pongamos, cuando tenga sentido,

$$t(s) = \int_0^s (E_0 + (1/f_{\text{inf}}(r)^2))^{(-1/2)} dr .$$

Veamos que si  $s(t)$  es la inversa de la función  $t(s)$  (cuando existe), entonces  $\gamma_B(t) = \rho(s(t))$  es una proyección geodésica sobre  $(B, g_B, f)$  con  $\eta C = -1$  y  $D = \eta E_0$ . Notemos primero que

$$s''(t) = - \frac{s'(t) \cdot t''(s(t))}{t'(s(t))^2} = - \frac{f'_{\text{inf}}(s(t))}{f_{\text{inf}}(s(t))^3}$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{D\gamma'_B}{dt}(\bar{t}) &= \frac{D}{dt} [s'(\bar{t}) \cdot \rho'(\bar{t})] = s''(\bar{t}) \rho'(s(\bar{t})) = \\ &= - \frac{1}{f \circ \gamma_B(\bar{t})^3} f'_{\text{inf}}(s(t)) \rho'(s(t)) = \frac{C}{f \circ \gamma_B(\bar{t})^3} \eta f'_{\text{inf}}(s(t)) \rho'(s(t)) \end{aligned}$$

donde  $C = -\eta$ . Por tanto, para comprobar que  $\gamma_B$  es una proyección geodésica con  $\eta C = -1$  es suficiente con ver que  $f'_{\text{inf}}(s(t)) \rho'(s(t)) = \eta \nabla^B f(\gamma_B(t))$ . Por el Le-ma de Gauss,  $\eta g_B(\nabla^B f(\gamma_B(t)), X) = 0$  para cualquier vector  $X$  ortogonal a  $\rho'(s(t))$ , esto es,  $\rho'(s(t))$  y  $\nabla^B f(\gamma_B(t))$  son colineales. Para la igualdad deseada, basta pues con comprobar que el producto de ambos miembros con  $\rho'(s(t))$  coincide:

$$g_B(f'_{\text{inf}}(s(t)) \rho'(s(t)), \rho'(s(t))) = \eta f'_{\text{inf}}(s(t))$$

$$g_B(\eta \nabla^B f(\gamma_B(t)), \rho'(s(t))) = \eta df\{\rho'(s(t))\} = \eta \cdot (f \circ \rho)'(s(t)) = \eta f'_{\text{inf}}(s(t)),$$

como se quería. También podemos comprobar que  $\eta D = \eta g_B(\gamma'_B, \gamma'_B) + \eta C/f^2 \circ \gamma_B = s'(t)^2 - \eta C/f^2 \circ \gamma_B = E_0$ , como anunciamos.

Para el recíproco de (a) (resp. (b)), observemos que el dominio de definición de  $\gamma_B$  tomando  $E_0 > 0$  (resp.  $E_0 = 0$ ) se puede extender hasta  $+\infty$ , por lo que:  $\int_0^\infty (E_0 + (1/f_{\text{inf}}(r)^2))^{(-1/2)} dr = \infty$ . Para el recíproco de (c), observemos que si  $f_{\text{inf}}$  no está acotada entonces no hay nada que demostrar, mientras que si no lo está todo se reduce, por la Observación 11, al recíproco de (b). ■

**Observación 14.-** (1) La III o II-completitud de  $f_{\text{inf}}$  puede depender del punto  $x_0$  escogido en B. Para comprobarlo, tomemos  $B=\mathbb{R}$  y pongamos  $I_n=[a_n, b_n]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , donde  $a_n = n + (1/2)^{|n|+1}$ ,  $b_n = n + 1 - (1/2)^{|n|+2}$ . Sea  $f^0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación diferenciable,  $0 < f \leq 1$ ,  $f^0|_{I_{2n}} = 1$ ,  $f^0|_{I_{2n+1}} = 1/2^{|n|}$  (para encontrar un método de hallar tal aplicación, ver el final de la Observación 11 (3)). Si tomamos  $x_0 = 0$  entonces  $\int_0^\infty f_{\text{inf}}^0(r) dr < \infty$ , pero si  $x_0 = 1/2$ , entonces

$$\int_0^\infty (E + (1/f_{\text{inf}}^0(r)^2))^{(-1/2)} dr = \infty, \forall E > -1$$

(en particular,  $\int_0^\infty f_{\text{inf}}^0(r) dr = \infty$ )

(2) Por otra parte, este ejemplo también muestra que si  $f$  no es una función de la distancia a  $x_0$  entonces los recíprocos a (a), (b) o (c) no tienen porqué ser ciertos. Aún más, a partir de este ejemplo podemos probar que si  $f$  no es función de la distancia a un punto, entonces una terna  $(B, g_B, f)$  puede ser completa warped aun cuando para *cualquier*  $x_0 \in B$  la correspondiente función  $f_{\text{inf}}$  no es I (ni, por tanto, III ni II) completa. Para ello, basta con tomar  $(B, g_B) = (\mathbb{R}^2, g_0)$ ,  $f(x, y) = f^0(x)$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

(3) Nótese que si  $(B, g_B)$  es definida completa, y no compacta entonces la geodésica  $\rho$  de la demostración de (d) siempre existe. Para hallar la reparametrización de  $\rho$  como proyección geodésica basta con tener en cuenta el valor de  $f$  en un entorno abierto  $V$  de  $\text{Im}(\rho)$ , que no interseque al lugar de corte. Tomando funciones warping con un comportamiento radial adecuado en  $V$  y extendiéndolas a  $B$  podremos afirmar:

*Sea  $(B, g_B)$  una variedad definida, completa no compacta; entonces existe una función warping  $f$  tal que la terna  $(B, g_B, f)$  no es completa warped en al menos 1 (resp. 2, 3) sentidos causales.*

Para comprobar que la función warping  $f$  con el comportamiento radial adecuado en un entorno de  $\text{Im}(\rho)$  se puede extender a  $B$  manteniendo  $f > 0$ , tomemos un entorno abierto  $U$  de  $\text{Im}(\rho)$ , que no interseque al lugar de corte, y definamos  $f'$  en  $U$  con el comportamiento radial adecuado. Consideremos una partición de la unidad  $(\eta_1, \eta_2)$  asociada al recubrimiento abierto  $(B - \text{Im}(\rho), U)$  de  $B$  ( $\text{sop}(\eta_2) \subset U$ ), y tomemos  $f = \eta_2 f'|_U + \eta_1$ .

(c) Base con dimensión 1.

Aunque en el subapartado anterior la base se supuso completa, algunas de las ideas en él desarrolladas se pueden aplicar al estudio del caso en que  $(B, g_B)$  es incompleta. En particular, permiten estudiar detalladamente la completitud warped con base de dimensión 1.

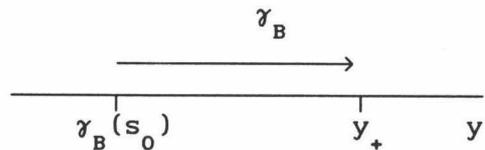
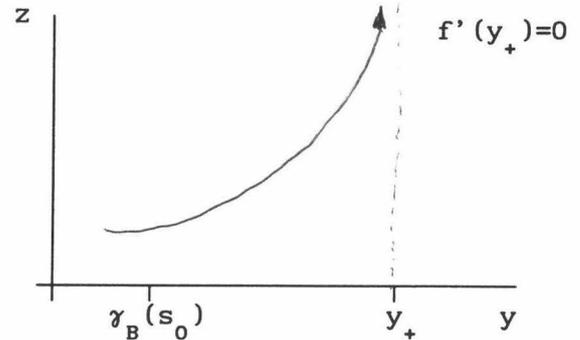
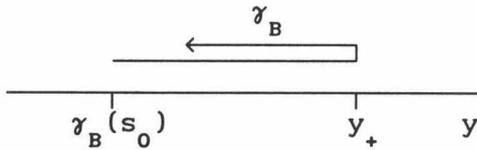
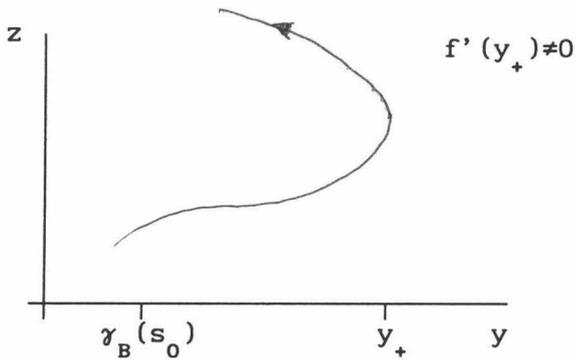
Por (4.1a), una proyección geodésica  $\gamma_B: I \rightarrow B$  es constante si y solo si  $\exists s \in I$ : (a)  $\gamma_B'(s) = 0$  y  $\nabla^B f(\gamma_B(s)) = 0$ , o bien (b)  $\gamma_B'(s) = 0$  y  $C = 0$ . Por tanto, si  $\gamma_B$  no es constante entonces el conjunto de ceros de  $\gamma_B'$  contiene únicamente puntos aislados.

Si  $\dim B = 1$  entonces o  $B$  es  $S^1$ , o  $(B, \eta g_B)$  es isométrico a un intervalo  $]c, d[$ ,  $-\infty < c < d < \infty$ , con su métrica usual. En el primer caso, la completitud warped de cualquier terna con base  $S^1$  está garantizada (Teorema 13(i)). A lo largo de este subapartado, consideraremos el segundo caso,  $B = ]c, d[$ ; además, impondremos  $\eta = -1$  para que los resultados sean más fácilmente traducibles a los espacio-tiempos relativistas.

Para la proyección geodésica  $\gamma_B$  con condición inicial en  $s_0$ , si existe un  $\bar{y}_+ > \gamma_B(s_0)$  (resp.  $\bar{y}_- < \gamma_B(s_0)$ ) tal que  $D/C = 1/f(\bar{y}_+)^2$  (resp.  $D/C = 1/f(\bar{y}_-)^2$ ) entonces  $\gamma_B$  no se puede extender más allá de  $\bar{y}_+$  (resp.  $\bar{y}_-$ ). Ello se sigue fácilmente si  $f$  no tiene un extremo local en  $\bar{y}_+$  (resp. en  $\bar{y}_-$ ) (ver (4.2)). Por otra parte, si  $f$  tiene un extremo local en  $\bar{y}_+$  (resp. en  $\bar{y}_-$ ) entonces la imagen de  $\gamma_B$  no puede alcanzar el punto  $\bar{y}_+$  (resp.  $\bar{y}_-$ ), pues, en caso contrario,  $\gamma_B$  sería constante, como se razonó antes (ver Fig. 4.1, en pág. siguiente, para discutir la extendibilidad).

$$z(y) = \eta g_B(\gamma'_B, \gamma'_B)(\gamma_B^{-1}(y)) = -D + C/f(y)^2$$

$$\gamma'_B(s_0) > 0, y_+ < b$$



$\text{Im}\gamma_B$  no puede sobrepasar  $y_+$  porque se haría negativo. La extendibilidad del dominio a  $\infty$  depende ahora de  $y_-$ .

$\text{Im}\gamma_B$  no puede alcanzar  $y_+$  porque  $\gamma_B$  no es constante; el dominio se puede extender a  $\infty$  pues  $\gamma_B([s_0, b[)$  cae en el compacto  $[\gamma_B(s_0), y_+]$ ,  $\forall b > s_0$ .

Fig. 3.1

Fijemos una proyección geodésica inextensible  $\gamma_B$  y un punto  $s_0$  en su dominio tal que  $\gamma'_B(s_0) \neq 0$ . Sean  $C, D$  las constantes consideradas hasta ahora, y pongamos  $A_+ = \{y \in ]c, d[ \mid \gamma_B(s_0) < y, C/f(y)^2 = D\}$ ,  $A_- = \{y \in ]c, d[ \mid \gamma_B(s_0) > y, C/f(y)^2 = D\}$ . Sean entonces en el intervalo  $]c, d[$ :

$$y_+ = \min(A_+) \text{ si } A_+ \neq \emptyset, \quad y_+ = d, \text{ si } A_+ = \emptyset \quad (3a)$$

$$y_- = \min(A_-) \text{ si } A_- \neq \emptyset, \quad y_- = c, \text{ if } A_- = \emptyset \quad (4.3b)$$

Los resultados anunciados en el caso  $B=]c,d[$  se resumen como sigue:

**Teorema 15.-** Sea  $\gamma_B$  una proyección geodésica inextendible sobre  $(B=]c,d[,g_B,f)$  definida en un intervalo  $I$ , y sea  $s_1 \in I$ .

(i)  $\gamma_B$  es constante ( $y$ , por tanto, completa) si y sólo si  $\gamma_B'(s_1) = 0$  y  $f'(\gamma_B(s_1))=0$ , ó  $\gamma_B'(s_1) = 0$  y  $C=0$ .

(ii) Si  $\gamma_B$  no es constante, sean  $s_0 \in I$ ,  $\varepsilon \in \{-1,1\}$  tales que  $\varepsilon \cdot \gamma_B'(s_0) > 0$ , y escojamos  $y_+$ ,  $y_-$  como en (4.3). Se tiene:

(1a): Si  $y_- = c$  entonces  $\gamma_B$  es extendible a  $-\varepsilon \cdot \infty$  si y sólo si:

$$\int_c^{\gamma_B(s_0)} (-D+(C/f(y)^2))^{-(1/2)} dy = \infty \quad (4.4a)$$

(1b): Si  $y_+ = d$  entonces  $\gamma_B$  es extendible a  $\varepsilon \cdot \infty$  si y sólo si:

$$\int_{\gamma_B(s_0)}^d (-D+(C/f(y)^2))^{-(1/2)} dy = \infty \quad (4.4b)$$

(2)  $\gamma_B$  es completa si y sólo si  $f$  satisface: si  $y_- = c$  entonces (4.4a), si  $y_+ = d$  entonces (4.4b) (luego no hay condiciones if  $c < y_-$ ,  $y_+ < d$ )

(3) La imagen de  $\gamma_B$  está contenida en  $[y_-,y_+]$ , contiene a  $]y_-,y_+[$ ,  $y$ , además,  $y_+$  (resp.  $y_-$ ) pertenece a ella si y sólo si  $y_+ < d$ ,  $f'(y_+) \neq 0$  (resp.  $c < y_-$ ,  $f'(y_-) \neq 0$ ). Más aún,  $\gamma_B$  es un difeomorfismo sobre su imagen si y solo si  $\text{Im}(\gamma_B) = ]y_-,y_+[$ .

Dem.- (i) es inmediato, y las afirmaciones (ii) se deducen claramente si ponemos  $y(t) \equiv \gamma_B(t)$  y tenemos en cuenta, en la notación natural, que por (4.1):

$$\frac{d}{dy}(y')^2 = y'' = C \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{f^2} \right), \quad y' = \varepsilon \sqrt{-D+(C/f(y)^2)} \quad \blacksquare$$

Fijemos  $e \in ]c, d[$ , y definamos  $f^+ : ]e, d[ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f^- : [-e, -c[ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f^+(x) = f(x)$ ,  $f^-(y) = f(-y)$ , para todo  $x, y$  en los correspondientes dominios. Nótese que la III, II o I-completitud de  $f^+$  y  $f^-$  no depende del punto escogido  $e$  en  $]c, d[$ . Diremos que  $f$  es III-completa (resp. II-completa, I-completa) si  $f^+$  y  $f^-$  son III-completas (resp. II-completas, I-completas) en el sentido de la Definición 10. Nótese que para que  $f$  sea III-completa, necesariamente  $]c, d[ = \mathbb{R}$ . Finalizaremos este subapartado con una consecuencia sencilla del último Teorema, que caracteriza cada completitud warped causal (comparar con [BeEr] Theorem 2.57, and [On] pág. 356).

**Corolario 16.-** (1) *Cada una de las tres siguientes propiedades es equivalente a la completitud warped temporal de  $(B, g_B, f)$ :*

- (a)  $(B, g_B, f)$  es completa warped.
- (b)  $f$  es III-completa.
- (c) Existe una proyección geodésica indefinida temporal que es completa.

*Más aún si  $B \neq \mathbb{R}$  entonces ninguna proyección geodésica indefinida temporal ni ninguna proyección geodésica tangente a  $B$  es completa.*

(2) *Cada una de las tres siguientes propiedades es equivalente a la completitud warped luminosa de  $(B, g_B, f)$ :*

- (a)  $(B, g_B, f)$  es completa warped espacial y luminosamente.
- (b)  $f$  es II-completa.
- (c) Existe una proyección geodésica luminosa ( $\Rightarrow$  indefinida) no constante que es completa.

(3)  $(B, g_B, f)$  es completo warped espacial si y sólo si  $f$  es I-completa.

Nótese que si  $f$  estuviera acotada todas las condiciones anteriores serían equivalentes (Observación 11 (2)).

(d) Ejemplos.

Claramente, un producto warped usual, o producto globalmente warped, cae dentro de la familia de los productos localmente warped. El siguiente ejemplo nos prueba que existen "muchos" productos localmente warped que no lo son globalmente.

**Ejemplo 17.-** Consideremos un fibrado principal  $P(B,G)$  con una conexión  $\omega$  como en el Ejemplo 10 del Cap. II. Si la conexión  $\omega$  es llana, entonces para cualquier  $f > 0$  (y cualesquiera métricas  $g_B, g_g$  sobre  $B$  y  $g$ , respectivamente) la métrica  $g^f$  considerada allí es un producto localmente warped; si el fibrado no fuera trivial, este producto localmente warped no lo es globalmente.

Recordemos que cuando se consideraba una base completa y definida  $(B, g_B)$ , e  $\text{Inf}(f) > 0$  sabíamos que  $g^f$  era completa, fuera  $\omega$  llana o no. En el caso de que  $\omega$  sea llana, el Teorema 13 nos permite dar condiciones que aseguren (o impidan) cada uno de los tipos de completitud warped, aun con  $\text{Inf}(f) = 0$  (ver también Observación 21).

Veamos a continuación el procedimiento teórico para construir los fibrados principales que admiten una conexión llana.

**Construcción 18.-** (de todos los fibrados principales no triviales conexos que admiten una conexión llana). Sea  $B$  una variedad diferenciable, y sea  $X$  un recubridor regular conexo de  $B$ , con aplicación recubridora  $p: X \rightarrow B$ , que no sea trivial. Recordemos que  $X$  es de modo natural una variedad diferenciable, y un fibrado principal sobre  $B$  cuyo grupo estructural es el grupo de automorfismos de recubridor  $\text{Aut}(X|_\pi)$  ([KoNo], pág. 61), que es un grupo de Lie de dimensión 0. Como es usual, llamaremos trivialización local para el fibrado principal  $X(B, \text{Aut}(X|_\pi))$  a cada carta fibrada  $(p^{-1}(U), T_U)$ ,  $T_U: p^{-1}(U) \rightarrow U \times \text{Aut}(X|_\pi)$ , donde  $T_U$  verifica que si  $w \in p^{-1}(U)$ , y  $T_U(w) = (p(w), g_0)$  entonces  $T_U(wg) = (p(w), g_0g)$ ,  $\forall g \in \text{Aut}(X|_\pi)$ . Para cada par de abiertos trivializantes  $U$  y  $V$  de  $B$  correspondientes a trivializaciones locales  $T_U$  y  $T_V$ , denotaremos por  $g_{UV}: U \cap V \rightarrow \text{Aut}(X|_\pi)$  a la correspondiente función de transición, esto es,  $T_U \circ T_V^{-1}(x, g) = (x, g_{UV}(x)g)$ ,  $\forall (x, g) \in p^{-1}(U \cap V)$ .

Consideremos ahora un monomorfismo continuo  $\psi$  de  $\text{Aut}(M|_{\pi})$  en un grupo de Lie  $G$ , y, para cada función de transición  $g_{UV}$ , definamos  $\bar{g}_{UV} = \psi \circ g_{UV}: U \cap V \rightarrow G$ . Notemos que si  $U, V$  y  $W$  son abiertos trivializantes,  $\bar{g}_{VU}(x) = \bar{g}_{UV}(x)^{-1}$ ,  $\forall x \in U \cap V$ ,  $\bar{g}_{UW}(x) = \bar{g}_{UV}(x) \cdot \bar{g}_{VW}(x)$ ,  $\forall x \in U \cap V \cap W$ . Sea entonces  $P(B, G)$  el fibrado principal que tiene iguales abiertos trivializantes que  $X(B, \text{Aut}(X|_{\pi}))$ , y que tiene como funciones de transición a las aplicaciones  $\bar{g}_{UV}$  (ver [KoNo] Proposition 5.2, Chapter I). Por construcción, para cada trivialización local  $T_W$  de  $X(B, \text{Aut}(X|_{\pi}))$  existe una trivialización local  $\bar{T}_W$  de  $P(B, G)$  de modo que

$$T_U \circ T_V^{-1}(x, g) = (x, g_{UV}(x)g) \Leftrightarrow \bar{T}_U \circ \bar{T}_V^{-1}(x, g) = (x, \bar{g}_{UV}(x)g), \quad \forall x \in U \cap V$$

para cada par de trivializaciones  $T_U, T_V$  de  $X(B, \text{Aut}(X|_{\pi}))$  y sus correspondientes  $\bar{T}_U, \bar{T}_V$  de  $P(B, G)$ .

Podemos ahora definir un monomorfismo natural de fibrados principales  $i_{\psi}: X(B, \text{Aut}(X|_{\pi})) \rightarrow P(B, G)$  a partir del monomorfismo de grupos  $\psi: \text{Aut}(X|_{\pi}) \rightarrow G$ , sin más que imponer, para cada par de trivializaciones  $T_U$  y  $\bar{T}_U$ :

$$i_{\psi} \circ T_U^{-1}(x, g) = \bar{T}_U^{-1}(x, \psi(g)) \quad \forall (x, g) \in U \times \text{Aut}(X|_{\pi})$$

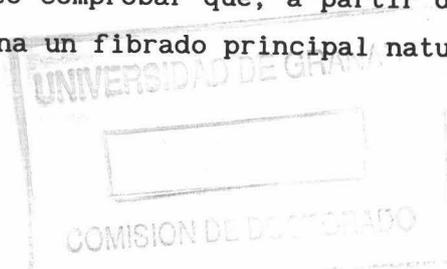
La definición es independiente de la trivialización escogida porque:

$$\begin{aligned} i_{\psi} \circ T_V^{-1}(x, g_{VU}(x)g) &= \bar{T}_V^{-1}(x, \psi(g_{VU}(x)g)) = \bar{T}_V^{-1}(x, \psi(g_{VU}(x))\psi(g)) = \\ &= \bar{T}_V^{-1}(x, \bar{g}_{VU}(x)g), \quad \forall (x, g) \in (U \cap V) \times \text{Aut}(X|_{\pi}). \end{aligned}$$

Nótese que  $P(B, G)$  no es trivial o, en caso contrario,  $X$  sería un recubridor trivial de  $B$  ([KoNo] Proposition 5.3, Chapter I).

Finalmente, la única conexión (llana) que, trivialmente, existe en  $X(B, \text{Aut}(X|_{\pi}))$  se puede enviar, mediante el monomorfismo de fibrados  $i_{\psi}$ , a una conexión sobre  $P(B, G)$ , que es llana ([KoNo], Chapter II, Proposition 6.1).

Comprobemos ahora que, mediante la anterior construcción, se generan todos los fibrados principales requeridos. Sean  $P(B, G)$  un fibrado principal conexo no trivial,  $\omega$  una conexión llana,  $u_0 \in P$ , y consideremos el fibrado de holonomía a través de  $u_0$ ,  $P(u_0)$ .  $P(u_0)$  es un recubridor regular conexo no trivial de  $B$ , cuyo grupo estructural  $\Phi(u_0)$  (grupo de holonomía con base  $u_0$ ) es un subgrupo (de Lie) de  $G$  ([KoNo], p. 93). Es directo comprobar que, a partir de este recubridor, la construcción anterior determina un fibrado principal natu-



ralmente isomorfo a  $P(B,G)$ .

**Ejemplo 19.**-(1) Por la Observación 11(4) sabemos que si  $f_{\text{inf}}(r)$  se comporta en  $\infty$  como  $1/r^p$ , con  $p \leq 1$ , entonces  $(B, g_B, f)$  es completa warped, pero si  $p > -1$ , no lo podemos garantizar. Esto último sucede en el ejemplo de Beem y Buseman (ver la introducción a este Capítulo); además, el Corolario 16 determina que este ejemplo sea incompleto.

(2) Si  $\text{Inf}(f) > 0$  (o si existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $\{r \in [0, \infty[ / f_{\text{inf}}(x) > \varepsilon\}$  tiene medida infinita) entonces  $f_{\text{inf}}$  es III-completo, y  $(B, g_B, f)$  es completo warped. Ello puede usarse para construir muchas métricas completas warped con base el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^s$  de dimensión  $s$  con métrica opuesta a la usual, y fibra una esfera de dimensión  $n-s$  con su métrica usual,  $S^{n-s}$ . En particular, la pseudo-esfera  $S_s^n$  puede verse como uno de estos productos warped para cierta función warping  $f$  con  $\text{inf}(f) = 1$ , con lo que la completitud de  $S_s^n$  queda así demostrada (de un modo bastante diferente al habitual). Además, como  $\mathbb{H}^s$  no tiene lugar de corte, usando la Observación 14 podemos encontrar funciones warping tales que  $(B, g_B, f)$  es completa warped en, exactamente, 1, 2 ó 3 sentidos causales.

Probemos a continuación la afirmación de que  $S_s^n$  se puede escribir como un producto warped de  $\mathbb{H}^s$  y  $S^{n-s}$ ; y veamos también que  $S_1^n$  se puede escribir como producto warped de  $\mathbb{R}$  y  $S^{n-1}$ .

**Construcción 20.**- Para cualquier  $p \in \mathbb{N}$  denotaremos por  $\langle \dots \rangle$  al producto escalar ordinario de  $\mathbb{R}^p$ , y por  $|\cdot|$  a la norma asociada. Sean  $0 < s < n$  y

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^s &:= \{(x, x_0) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R} / \langle x, x \rangle - (x_0)^2 = -1, x_0 > 0\} \subset \mathbb{R}_1^{s+1} \\ S_s^n &:= \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{n-s+1} \times \mathbb{R}^s / \langle \xi, \xi \rangle - \langle \eta, \eta \rangle = 1\} \subset \mathbb{R}_s^{n+s+1} \end{aligned}$$

(1) Sea  $\Phi: \mathbb{H}^s \times S^{n-s} \rightarrow S_s^n$ ,

$$\Phi((x, x_0), u) := \left( u \sqrt{1 + |x|^2}, x \right), \quad \forall ((x, x_0), u) \in \mathbb{H}^s \times S^{n-s};$$

$\Phi$  es un difeomorfismo, cuyo inverso es  $\Phi^{-1}: S_s^n \rightarrow \mathbb{H}^s \times S^{n-s}$ ,

$$\Phi^{-1}(\xi, \eta) = \left( (\eta, |\xi|), \frac{\xi}{|\xi|} \right), \quad \forall (\xi, \eta) \in S_s^n$$

La diferencial de  $\Phi$  verifica,

$$(d\Phi)_{((x,x_0),u)}((\dot{x},\dot{x}_0),\dot{u}) = \left( \frac{\langle x,\dot{x} \rangle}{\sqrt{1+|x|^2}} u + \sqrt{1+|x|^2} \dot{u}, \dot{x} \right)$$

$\forall((x,x_0),u) \in \mathbb{H}^s \times S^{n-s}, \forall((\dot{x},\dot{x}_0),\dot{u}) \in T_{((x,x_0),u)} \mathbb{H}^s \times S^{n-s}$ . Luego

$$\begin{aligned} \left\| (d\Phi)_{((x,x_0),u)}((\dot{x},\dot{x}_0),\dot{u}) \right\|^2 &= \frac{\langle x,\dot{x} \rangle^2}{1+|x|^2} + (1+|x|^2) |\dot{u}|^2 - |\dot{x}|^2 = \\ &= (-|\dot{x}|^2 + |\dot{x}_0|^2) + (1+|x|^2) |\dot{u}|^2 \end{aligned}$$

En consecuencia,  $\Phi$  es una isometría del producto warped con base el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^s$  con métrica opuesta a la usual, fibra  $S^{n-s}$  con su métrica canónica y función warping  $f(x,x_0) = \sqrt{1+|x|^2} = x_0$ . Nótese que  $\text{Inf}(f) > 0$ , como se quería.

(2) En el caso  $s=1$ , observemos que toda curva  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ ,  $t \in I$ , parametrizada con velocidad unidad, en  $\mathbb{H}^1$  verifica:  $|x_1'(t)| = x_2 = \sqrt{1+x_1^2}$ ,  $\forall t \in I$ . Luego podemos establecer la isometría entre  $\mathbb{H}^1$  y  $\mathbb{R}$ , con sus métricas usuales,  $\Psi: \mathbb{H}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Psi(x_1, x_2) = \ln(x_1 + \sqrt{1+x_1^2})$  ( $= \ln(x_1 + x_2)$ ),  $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{H}^1$ , cuya inversa es  $\Psi^{-1}(t) = (\sinh(t), \cosh(t))$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . En consecuencia, podemos escribir  $S_1^n$  como el producto warped con base  $(\mathbb{R}, -dt^2)$ , fibra  $S^{n-1}$  con su métrica usual, y función warping  $\bar{f}(t) = f \circ \Psi^{-1}(t) = \cosh(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

**Observación 21.** - Todo campo de Killing  $K$  sobre la fibra de un producto warped verifica, con las identificaciones naturales:

$$L_K g^f = (f \circ \pi_B)^2 L_K g_F = 0$$

luego también es campo de Killing en el producto warped. En consecuencia, algunos de los resultados vistos en este Capítulo se podrían deducir a partir de los del Capítulo II. Más concretamente, si partimos del concepto de completitud warped de una terna, (Teorema 5, Definición 6), podríamos tomar como fibra  $(\mathbb{R}, \varepsilon dt^2)$ ,  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ , y deducir, resultados de completitud (warped) a partir del Teorema 4 en Cap. II.

(e) **Productos twisted.**

Una extensión natural de los productos warped son los productos twisted, definidos como sigue:

**Definición 22.-** Sean  $(B, g_B)$  y  $(F, g_F)$  dos variedades semi-riemannianas, y sea  $h > 0$  una función diferenciable sobre  $B \times F$ . El producto twisted  $(B \times F, g_h)$  con base  $B$  y fibra  $F$  es la variedad producto  $B \times F$  dotada con el tensor métrico

$$g_h = \pi_B^* g_B + h^2 \pi_F^* g_F .$$

Si  $(B, g_B)$  y  $(F, g_F)$  son variedades de Riemann,  $B$  es completa y  $F$  compacta, entonces cualquier producto twisted  $(B \times F, g_h)$  es completo. Ello se debe a que, si no es completo, existe una curva diferenciable  $\gamma$  en  $B \times F$ , con longitud finita, cuya imagen se sale de cualquier compacto de  $B \times F$ . Se llega entonces a un absurdo porque su proyección  $\gamma_B$  sobre la base tiene una longitud menor o igual a la de  $\gamma$ , y, por la completitud de  $g_B$ , cae en un compacto de  $B$ . (Por otra parte, aun cuando  $\dim B = 0$ , la compacidad de la fibra es necesaria, porque cualquier métrica de Riemann completa sobre una variedad no compacta puede multiplicarse por un factor conforme que la convierta en incompleta, [NoOz].)

A continuación veamos que un resultado de completitud análogo a los de los productos localmente warped en el Teorema 13 para productos twisted con fibra compacta no es esperable, al existir productos twisted con base y fibra definidos y compactos que son incompletos.

**Contraejemplo 23.-** Sea  $B$  el círculo unitario en  $\mathbb{C}$ ,  $g_B$  su métrica usual, y  $(F, g_F) = (B, -g_B)$ . Consideremos la función  $h: B \times F \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $h(\exp(i\theta_1), \exp(i\theta_2)) = \exp(\sin(\theta_1 - \theta_2))$  (comparar con la métrica  $g_2$  en Ejemplo II.12). Un cálculo directo muestra que este producto twisted es incompleto ([RoSa1], Counterexample 2.3). De cualquier modo, podemos comprobarlo tomando como nuevas coordenadas

$x_1 = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$ , con lo que  $g_h$  queda,

$$g_h = [1 - \exp(\sin(x_1))] dx_1^2 + [1 + \exp(\sin(x_1))] (dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1) + [1 - \exp(\sin(x_1))] dx_2^2$$

Observemos entonces que, de acuerdo con la Definición III.8, la métrica inducida naturalmente por  $g_h$  sobre  $\mathbb{R}^2$  pertenece a la familia  $\mathcal{S}_2$ , por lo que es incompleta (Teorema III.25).

Observemos asimismo que el campo de vectores sobre  $B \times F$  inducido naturalmente por  $\partial/\partial\theta_1$  es un campo rígido para  $-g_h$  (ver Observación 9(2), Cap. II). En consecuencia, la hipótesis de existencia de un campo conforme temporal para asegurar la completitud de una variedad lorentziana compacta (Corolario II.5) no puede debilitarse en que exista un campo rígido.

#### 4.- COMPLETITUD WARPED CON BASES INDEFINIDAS.

##### (a) Base con simetrías conformes.

En el apartado anterior se hizo una caracterización bastante precisa de cuándo aparece cada uno de los tipos de completitud warped, en función del comportamiento de  $f$  en infinito, cuando la base es definida y completa. Veamos en este subapartado qué resultados se conservan para el caso indefinido y completo.

En primer lugar, se tiene la siguiente generalización de la Teorema II.4:

**Teorema 24.-** Sea  $(B, g_B)$  una variedad indefinida, y sean  $\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$  como en Teorema 4 del Cap. II. Entonces, para toda función diferenciable  $f$  sobre  $B$  con  $\inf(f) > 0$  y  $\xi_i(f)$  acotados,  $1 \leq i \leq s$ , se tiene que  $(B, g_B, f)$  es completa warped.

Dem.-Sea  $\gamma_B: [0, b[ \rightarrow B$ ,  $0 < b < \infty$ , una proyección geodésica sobre  $(B, g_B, f)$ . De (2.1) y (4.1a) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_B(\xi_1, \gamma_B') &= g_B(\nabla_{\gamma_B'} \xi_1, \gamma_B') + g_B\left(\xi_1, \frac{D\gamma_B'}{dt}\right) = \\ &= (1/2)(\sigma \circ \gamma_B) g_B(\gamma_B', \gamma_B') + \frac{C}{(f \circ \gamma_B)^3} (df)(\xi_1) = \\ &= (1/2)(\sigma \circ \gamma_B) \left( D - \frac{C}{(f \circ \gamma_B)^2} \right) + \frac{C}{(f \circ \gamma_B)^3} (df)(\xi_1) \end{aligned}$$

$1 \leq i \leq s$ , que está acotado en  $[0, b[$ . Por tanto, el resultado se sigue razonando como en el Teorema II.4 y usando el Lema 4. ■

Sin embargo, cuando  $(B, g_B)$  es (completa e) indefinida no podemos dar un resultado semejante al Teorema 13, aun cuando  $f$  satisfaga  $0 < \text{Inf}(f) < \text{Sup}(f) < \infty$  (en Ejemplo 19 se vio que  $0 < \text{Inf}(f) \Rightarrow$  completitud warped en el caso definido; además,  $\text{Sup}(f) < \infty \Rightarrow$  equivalencia entre III, II y I completitud para  $f_{\text{inf}}$ , Observación 11 (2)). El siguiente contraejemplo no solo muestra esto, sino también que la condición  $\xi_1(f)$  acotado en el Teorema 24 es necesaria.

**Contraejemplo 25.-** (A) (Dependencia de una función warping sobre  $\mathbb{L}^2$  en  $h(x_1) - h(x_2)$ ). Consideremos el espacio-tiempo de Minkowski  $\mathbb{L}^2 = (\mathbb{R}^2, g_0)$ , dos funciones diferenciables  $u, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , y la función positiva sobre  $\mathbb{R}^2$ ,  $f(x_1, x_2) = \exp(u(h(x_1) - h(x_2))) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Consideremos una proyección geodésica no constante,  $\gamma_B(t) = (x_1(t), x_2(t))$ ,  $t \in I$ ,  $0 \in I$ , sobre  $(\mathbb{R}^2, g_0, f)$ ; entonces,

$$D\gamma_B' / dt = [(C/f^3) \nabla^B f] \circ \gamma_B,$$

esto es,

$$\begin{aligned} x_1''(t) &= \left( \frac{C}{f^3} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (x_1(t), x_2(t)) = \\ &= \frac{C}{f^2(x_1(t), x_2(t))} u'(h(x_1(t)) - h(x_2(t))) h'(x_1(t)) \\ x_2''(t) &= - \left( \frac{C}{f^3} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (x_1(t), x_2(t)) = \\ &= \frac{C}{f^2(x_1(t), x_2(t))} u'(h(x_1(t)) - h(x_2(t))) h'(x_2(t)). \end{aligned}$$

Es de notar que, cuando se calcula  $\nabla^B f$ , el signo - de  $-h(x_2)$  se compensa con que  $\nabla^B \equiv (\partial/\partial x_1, -\partial/\partial x_2)$ , produciendo al final expresiones totalmente análogas para  $x_1''$  y  $x_2''$ . Resulta entonces inmediato que podemos hallar soluciones a la ecuación de las geodésicas con  $x_1(t) = x_2(t) =: x(t) \quad \forall t \in I$ , que satisfarán:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (x')^2(\bar{t}) &= 2 x'(\bar{t}) x''(\bar{t}) = \\ &= \frac{2C}{e^{2u(0)}} u'(0) x'(\bar{t}) \frac{dh}{dx}(x(\bar{t})) = A \frac{d(h \circ x)}{dt}(\bar{t}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

con  $A = \frac{2C}{e^{2u(0)}} u'(0)$ , esto es, llamando  $B = x'(0)^2 - A h(x(0))$ :

$$(x')^2(t) = A h(x(t)) + B, \quad \text{y} \quad \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{d\bar{x}}{\sqrt{|A h(\bar{x}) + B|}} = t$$

(la última expresión siempre que  $x'$  sea distinto de 0 en todos los valores entre 0 y t). Observemos que, para estas geodésicas,  $D = C/e^{2u(0)}$ .

(B) (*Condiciones particulares*). Impongamos ahora, sobre  $u$  y  $h$ :

$$(i) u'(0) \neq 0, \quad (ii) h > 0, \quad (iii) \int_0^{\infty} h(y)^{-1/2} dy < \infty$$

Supongamos  $x'(0) > 0$  (resp.  $< 0$ ), y tomemos  $C$  de tal modo que  $A > 0$ ,  $B \geq 0$ ; p. ej.,  $C = e^{2u(0)} x_1'(0)^2 / [2u'(0) \cdot h(x_1(0))]$ ; entonces el dominio de la proyección geodésica  $\gamma_B$  no será extendible a  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).

(C) (*Discusión*). (a) Observemos que si además imponemos a  $u$ ,  $0 < \text{Inf}(u)$ ,  $\text{Sup}(u) < \infty$  entonces  $0 < \text{Inf}(f) < \text{Sup}(f) < \infty$ , y, pese a que la base es completa, el producto warped es incompleto. (b) La condición (iii) impide que  $h$  sea inducible en un compacto; aún más, a causa de ella  $h'$  no está acotado, por lo que  $\partial f / \partial x_2$  no está acotado. Esta no acotación de  $\partial f / \partial x_2$ , así como la de  $\partial f / \partial x_1$ , era esperable, pues, en caso contrario, se caería dentro de las hipótesis del Teorema 24. (c) La proyección geodésica incompleta que se construye tiene  $\text{signo}(D) = \text{signo}(u'(0))$ , por lo que no puede ser luminosa (comparar con el Teorema 27 más adelante).

**Observación 26.**— Consideremos  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica con  $u'(0) \neq 0$ , tomemos como  $h$  la función identidad sobre  $\mathbb{R}$ , y construyamos  $f$  como en el Contraejemplo 25(A) anterior (claramente,  $h$  no satisface ahora la condición crucial (iii) de (B)). En este caso, no sólo la métrica  $g_0$  sino también la función warping  $f$  pueden inducirse en un 2-toro  $T^2$ . La completitud warped de la correspondiente terna  $(T^2, \bar{g}_0, \bar{f})$ , queda garantizada por el Teorema 24. Si consideramos una proyección geodésica no luminosa  $\gamma_B$  sobre  $(\mathbb{R}^2, g_0, f)$  con  $x_1(t) = x_2(t) \forall t \in \mathbb{R}$  como antes,  $\gamma_B$  induce una proyección geodésica (completa)  $\bar{\gamma}_B$  sobre  $T^2$ . Puesto que, por (4.5),  $x(t)$  es una parábola, resulta inmediato que  $\bar{\gamma}_B'$  no cae en un compacto de  $TT^2$ . Se da así una respuesta negativa a la cuestión planteada en la Observación 38 del Cap. III.

(b) Relación con los problemas abiertos CC y CDC.

Veamos a continuación una relación entre la completitud warped luminosa de una terna  $(B, g_B, f)$  y la completitud geodésica de la métrica  $(1/f^2).g_B$  sobre  $B$ .

**Teorema 27.-** Sea  $(B, g_B)$  una variedad semi-riemanniana, y sea  $f > 0$  una función diferenciable sobre  $B$ .

(1) Si  $\text{Sup}(f) < \infty$  y  $(B, g_B, f)$  es completa warped luminosa entonces  $(1/f^2).g_B$  es completa.

(2) Si  $\text{Inf}(f) > 0$  y  $(1/f^2).g_B$  es completa, entonces  $(B, g_B, f)$  es completa warped luminosa.

Dem.- Tomemos primero cualquier función  $w$  sobre  $B$  y sea  $g_B^* = e^{2w}.g_B$ . Recordemos que, para cualquier curva diferenciable  $\rho$  sobre  $B$ , la relación entre las derivadas covariantes  $(D/ds)\rho'$ ,  $(D^*/ds)\rho'$  de  $\rho$  respecto a  $g$  y  $g^*$ , respectivamente, viene dada por

$$\frac{D^*\rho'}{ds} = \frac{D\rho'}{ds} + 2(dw\rho')\rho' - g(\rho', \rho')\nabla^g w \quad (4.6)$$

Consideremos una geodésica  $\alpha(t)$  de  $g^*$  y sea  $\bar{\alpha}(s) = \alpha(t(s))$  una reparametrización de  $\alpha$  tal que  $dt/ds(\bar{s}) = k \cdot \exp(2w(\bar{\alpha}(\bar{s})))$ , siendo  $k$  una constante no nula. Entonces se tendrá:

$$\frac{D^*\bar{\alpha}'}{ds}(s) = t''(s)\alpha'(t(s)), \quad t''(s) = 2k t'(s) e^{2w(\bar{\alpha}(s))} \frac{d(w \circ \alpha)}{dt}(t(s)) \quad (4.7)$$

luego sustituyendo (4.7) en (4.6),

$$\frac{D\bar{\alpha}'}{ds} = (\bar{C}/2) k^2 (\nabla^B e^{2w}) \circ \bar{\alpha} \quad (4.8)$$

donde  $\bar{C} = g_B^*(\alpha', \alpha')$ . Recíprocamente, nótese que si se parte de una solución  $\bar{\alpha}(s)$  de (4.8) y se considera una reparametrización  $s(t)$  tal que  $ds/dt(\bar{t}) = k^{-1} \cdot \exp(-2w(\bar{\alpha}(s(\bar{t}))))$ , entonces  $\alpha(t) := \bar{\alpha}(s(t))$  es una geodésica de  $g_B^*$ , con  $\bar{C} = g_B^*(\alpha', \alpha')$ .

A partir de ahora, tomemos  $e^{2w} = 1/f^2$ , con lo que la ecuación (4.8) es análoga a la (4.1a), difiriendo sólo en los valores de las constantes ( $C$  y  $\bar{C}.k^2$ ) y de las condiciones iniciales.

Notemos que para cada geodésica  $\alpha$  de  $(B, (1/f^2)g_B)$  inextensible a  $b$

$$\alpha: [0, b[ \rightarrow B, \quad b \leq \infty, \quad p_0 = \alpha(0), \quad v_0 = \alpha'(0), \quad \bar{C} = g_B^*(\alpha', \alpha')$$

podemos considerar la única proyección de geodésica nula  $\gamma_B$  de  $(B, g_B, f)$ , inextensible a  $b'$

$$\gamma_B: [0, b'[ \rightarrow B, \quad b' \leq \infty, \quad / \quad \gamma_B(0) = p_0, \quad \gamma_B'(0) = v_0.$$

Por ser  $\gamma_B$  una proyección de geodésica nula ( $D=0$ ) se tiene  $C = -f^2(p_0) \cdot g_B(v_0, v_0) = -\bar{C} f^4(p_0)$  y, en consecuencia,

$$(D/dt)\gamma_B' = (\bar{C}/2) f^4(p_0) \cdot (\nabla^B f^{-2}) \circ \gamma_B$$

Para probar (1), partamos de la geodésica  $\alpha$  y tomemos la reparametrización de  $\gamma_B(s)$ , dada por  $s(0)=0$ ,  $s'(t) = f^{-2}(p_0) \cdot f^2(\gamma_B(s(t)))$ , con lo que, claramente,  $\alpha(t) = \gamma_B(s(t))$ ,  $\forall t \in [0, b[$  ( $b' = \infty$ ). Puesto que  $\text{Sup}(f) < \infty$ ,  $s'$  está acotada; en consecuencia, si  $b < \infty$ ,  $\exists t_0 \in ]0, \infty[$ :  $s_0 = \lim_{t \rightarrow b} s(t)$  (por ser  $s(t)$  una función monótona y acotada) y  $\lim_{t \rightarrow b} \alpha(t) = \gamma_B(s_0)$ , que es absurdo por ser  $\alpha$  inextensible.

Para (2), consideremos la proyección geodésica luminosa  $\gamma_B$  de  $(B, g_B, f)$ , y supongamos  $b' < \infty$ . Reparametricemos la geodésica  $\alpha(t)$  de  $(B, g_B^*)$ , que tiene iguales condiciones iniciales  $(p_0, v_0)$  que  $\gamma_B$  en 0, mediante  $t'(s) = f^2(p_0) \cdot f^{-2}(\bar{\alpha}(s))$ , siendo  $\bar{\alpha}(s) = \alpha(t(s))$ . Claramente  $\bar{\alpha} = \gamma_B$  y, como  $\text{Sup}(f^{-2}) = (\text{Inf}(f))^{-2} < \infty$ , se tiene que  $t'$  está acotada y, razonando como antes, se llega a un absurdo. ■

**Observación 28.**— Supongamos ahora que  $(B, g_B)$  es compacta e indefinida, con lo que, por el Teorema anterior,

$(B, g_B, f)$  es completa warped luminosa si y sólo si  $(1/f^2) \cdot g_B$  es completa.

Si además  $(B, g_B)$  es completa y podemos encontrar  $f > 0$  sobre  $B$  tal que  $(B, g_B, f)$  no es warped completa se tendrá:

(a) Si  $(B, g_B, f)$  no es completa warped luminosa entonces, como  $(1/f^2) \cdot g_B$  no es completa, existen dos métricas conformes sobre una variedad compacta, una completa y otra no. Por tanto, se resuelve la conjetura conforme **CC** propuesta al final del Cap. I, y, en consecuencia, la conjetura **CDC** es falsa.

(b) Si  $(B, g_B, f)$  fuera completa warped luminosa, tomando como fibra cualquier variedad compacta y completa, obtendríamos una variedad incompleta pero completa luminosa, con lo que **CDC** vuelve a ser falsa.

Como conclusión de este subapartado, podemos considerar la siguiente afirmación:

**Problema Warped (PW):** para cualquier variedad indefinida compacta y completa  $(B, g_B)$  y para cualquier función  $f > 0$  la terna  $(B, g_B, f)$  es completa warped.

Tendremos entonces las siguientes implicaciones lógicas:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \text{ PW falso} \Rightarrow \text{CDC verdad} \\ (2) \text{ PW verdad} \Rightarrow \text{CC verdad} \end{array} \right\} \text{CDC verdad} \Rightarrow \text{PW verdad} \Rightarrow \text{CC verdad.}$$

Nótese que ambas implicaciones se pueden refinar, porque (1) si PW es falso y además obtenemos un producto localmente warped incompleto luminoso, entonces tanto CDC como CC son falsos, y (2) si en lugar de PW verdad sólo se impone que no existan productos localmente warped incompletos luminosos también se obtiene que CC es verdad.

## Capítulo V.

### TOPOLOGÍA DE LAS GEODÉSICAS COMPLETAS E INCOMPLETAS.

Dentro del análisis de completitud de las geodésicas en la presente memoria, se estudia en este Capítulo cómo se comporta topológicamente el concepto de completitud, esto es, si la geodésica "límite" (en un sentido a precisar) de geodésicas completas (resp. incompletas) debe ser completa (resp. incompleta). Para la definición de la topología o del concepto de límite en el conjunto de las geodésicas se encuentran en la literatura:

(A) Los conceptos de curva límite, topología  $C^0$  de curvas ([BeEr], Sec. 2.3) y cuasi-límites ([On], Cap. 14, ver también [Mo] Cap. 3, §2), usados ampliamente en Relatividad General para desarrollar la Teoría de la Causalidad.

(B) La topología en el espacio de las geodésicas estudiada inicialmente por Low para las geodésicas luminosas [Lo] y, posteriormente, por Beem y Parker para todas las geodésicas [BePa3]; esta topología conduce naturalmente al concepto relacionado de *convergencia tangencial de geodésicas* ([BePa3], [Be2] §5).

El contenido de los apartados de este Capítulo puede resumirse como sigue:

§1. Se discuten los conceptos de límite en el punto (A), justificándose que, pese a su importancia en la Teoría de la Causalidad, no parecen en absoluto apropiados para discutir la completitud de una geodésica a partir de la de los elementos de una sucesión de geodésicas que tienda hacia ella.

§2. Se introduce el concepto de *semigeodésica límite*, discutiéndose algunas de sus propiedades, que se ilustran con ejemplos. Este concepto está

naturalmente relacionado con el de convergencia tangencial, siendo menos engorroso y, para el problema que nos ocupa, equivalente.

§3. Se obtiene el resultado principal de este Capítulo: *una semigeodésica completa (resp. incompleta) puede ser la semigeodésica límite de una sucesión de semigeodésicas incompletas (resp. completas)*. Este resultado contraintuitivo, que invalida uno de los pasos en la demostración del teorema en [Yu2], deja como un problema abierto la conjetura CDC (Proposición 13, Conclusión 15, ver también [RoSa1]).

### 1.- LÍMITES DE CURVAS EN RELATIVIDAD GENERAL.

Los conceptos más usuales en Relatividad General relativos a la idea de límite de curvas, son los de *curva límite y topología  $C^0$  de curvas* que aparecen en la Teoría de la Causalidad. En adelante nos centraremos en ellos; para el concepto relacionado de *cuasi-límite* introducido por O'Neill ([On] Chap. 14) se pueden hacer consideraciones completamente análogas.

Recordemos en primer lugar en qué consisten las curvas límite y la topología  $C^0$  de curvas.

**Definición 1.-** Sea  $(M, g)$  una variedad de Lorentz, y sea  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\gamma_n: I_n \rightarrow M$ ,  $I_n$  intervalo de  $\mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , una sucesión de curvas no espaciales en ningún punto.

(i) Diremos que la curva  $\gamma$  es una curva límite de la sucesión  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  si existe una sucesión parcial  $\{\gamma_{\sigma(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que,  $\forall p \in \text{Im}(\gamma)$ , cada entorno de  $p$  interseca a todos salvo a un número finito de las imágenes de las curvas  $\{\gamma_{\sigma(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ . De esta sucesión parcial diremos que distingue a la curva límite  $\gamma$ .

(ii) Supongamos que todos los intervalos  $I_n$  son iguales a un intervalo cerrado  $[a, b]$ . La curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  es el límite en la topología  $C^0$  de la sucesión  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(a) = \gamma(a)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(b) = \gamma(b)$ , y, para cualquier abierto  $U$  que incluya  $\text{Im}(\gamma)$ ,  $U$  incluye  $\text{Im}(\gamma_n)$  para todo  $n$  en  $\mathbb{N}$ , excepto, a lo sumo, un número finito de tales valores.

El teorema de existencia de una curva límite para una sucesión de curvas causales con un punto de acumulación en sus imágenes, se puede obtener en cualquier variedad lorentziana ([BeEr], Proposition 2.18). Y, en espacio-tiempos fuertemente causales, como los globalmente hiperbólicos, existe una estrecha relación entre ambos conceptos, manteniéndose el siguiente resultado [BeEr], Proposition 2.21:

**Proposición 2.-** Sea  $(M, g)$  un espacio-tiempo fuertemente causal. Supongamos que  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de curvas causales definidas en  $[a, b]$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(a) = p$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(b) = q$ ,  $p, q \in M$ . Una curva causal  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  con  $\gamma(a)=p$ ,  $\gamma(b)=q$ , es una curva límite de  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  si y sólo si existe una subsucesión  $\{\gamma_{\sigma(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  que converge a  $\gamma$  en la topología  $C^0$  de curvas.

Sin embargo, en espacio-tiempos que no sean fuertemente causales, como les sucede a todas las variedades lorentzianas compactas, se pierde esta equivalencia entre curvas límite y topología  $C^0$  (ver [BeEr], pág. 40). Los siguientes ejemplos sugieren que difícilmente se podrán usar los conceptos de curva límite o topología  $C^0$  de curvas en una variedad compacta lorentziana, para relacionar la completitud de una geodésica a partir de las completitudes de los miembros de una sucesión que tienda hacia ella.

**Ejemplo 3.-** (1) Consideremos sobre  $\mathbb{R}^2$  la métrica llana usual lorentziana  $h_0 = dx^2 - dy^2$ , en coordenadas  $(x, y)$  usuales, y sea  $\lambda$  un número irracional fijo. Definamos la acción propiamente discontinua de  $\mathbb{Z}^2$  sobre  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \rightarrow (x+m, y+\lambda n)$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2$ , que consiste en isometrías de  $h_0$ , y llamemos  $(N, h)$  al 2-toro lorentziano obtenido como cociente.  $(N, h)$  es un ejemplo de variedad de Lorentz compacta (y, por tanto, no fuertemente causal) con la propiedad de que cualquier geodésica luminosa inextensible  $\gamma$  de  $(N, h)$ , tiene una imagen densa en  $N$ . Así, si tomamos la sucesión  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\gamma_n = \gamma \forall n \in \mathbb{N}$ , entonces cualquier otra curva  $\alpha$  de  $N$  es una curva límite de la sucesión, en el sentido de la Definición 1

(2) Consideremos en el ejemplo anterior la curva temporal cerrada de periodo 1  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ ,  $\gamma(t) = (0, t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Fijemos  $\varepsilon \in ]0, 1/2[$ ; si consideramos la sucesión  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\gamma_n = \gamma|_{[0, \varepsilon]}$   $\forall n \in \mathbb{N}$  entonces esta sucesión tiende en la topología  $C^0$  a la curva temporal cerrada  $\gamma|_{[0, \varepsilon+m]}$   $\forall m \in \mathbb{N}$  (aunque  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no tiene a  $\gamma|_{[0, \varepsilon+m]}$  como curva límite; nótese además que todas las  $\gamma_n$  son homotópicas

entre sí, y que ninguna de ellas lo es a  $\gamma|_{[0, \varepsilon+m]} \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.- SEMIGEODESICAS LIMITE.

### (a) Definiciones generales.

Sea  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana. Diremos que una curva  $\rho: [0, b[ \rightarrow M$ ,  $0 < b \leq \infty$ , es una *semigeodésica a la derecha*, o, simplemente, *semigeodésica*, si es la restricción de una geodésica  $\gamma$  al intervalo  $[0, b[$ . En este caso, diremos que la semigeodésica  $\rho$  es *inextendible* o *maximal* si el dominio de  $\gamma$  como geodésica no se puede extender más allá de  $b$ .

**Convenio 4.-** Si  $\gamma$  es una geodésica definida en un intervalo abierto a la derecha  $I$ , supondremos en adelante siempre que  $I$  contiene a  $0$ , y llamaremos a  $\gamma|_{I \cap [0, \infty[}$  *semigeodésica a la derecha* (o, simplemente, *semigeodésica*) *inducida por  $\gamma$* .

Sea  $p \in M$ ,  $X_p \in T_p M$ , la semigeodésica  $\rho: [0, b[ \rightarrow M$  es una *semigeodésica a la derecha* (o *semigeodésica*) *de  $X_p$*  si  $\rho'(0) = X_p$ ; cada vector tangente determina una única semigeodésica inextendible a su derecha. Diremos que  $X_p$  es *completo a la derecha*, o, simplemente, *completo*, si su semigeodésica inextendible tiene por dominio  $[0, \infty[$ , y que es *incompleto a la derecha* o *incompleto* en caso contrario. Las definiciones "a la izquierda" de semigeodésica, vector completo etc., se pueden establecer de manera análoga, pero no se usarán en adelante<sup>1</sup>.

**Notación 5.-** Denotaremos por  $C$  al subconjunto de todos los vectores tangentes,

---

<sup>1</sup>Incluso en una variedad semi-riemanniana compacta es fácil que aparezca un vector tangente  $X_p$  completo a la derecha tal que  $-X_p$  no es completo a la derecha (esto es, tal que  $X_p$  no es completo a la izquierda), ver Teorema III.22. Esta propiedad ocurre siempre que se considera una geodésica luminosa cerrada incompleta  $\gamma$ : si  $X_p$  es la velocidad de  $\gamma$  en  $p$  entonces  $X_p$  es completo a la derecha si y sólo si  $-X_p$  no lo es.

distintos de 0, completos a la derecha, y por  $J$  al de todos los incompletos a la derecha.

**Observación 6.-** Nótese que podemos establecer en el tangente punteado  $TM^* := TM - \{0 / p \in M\}$  la relación de equivalencia:  $X_p$  está relacionado con  $X'_q$  si y solo si  $\exists \lambda > 0$  tal que  $X_p = \lambda X'_q$ , ( $\Rightarrow p=q$ )  $\forall X_p, X'_q \in TM^*$ . El cociente  $SM$  es, de modo natural, un fibrado diferenciable sobre  $M$ . Si tomamos cualquier métrica de Riemann  $g_R$  sobre  $M$ ,  $SM$  es, de modo natural, un fibrado isomorfo al fibrado unitario  $S_R M$  asociado a  $g_R$ . La partición de  $TM^*$  en  $C$  y  $J$  induce una partición natural de  $SM$ .

**Observación 7.-** Nos centraremos a continuación en sucesiones convergentes en  $TM^*$  formadas por elementos de  $C$  ó  $J$ . Dada una sucesión  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow X \in TM^*$ ,  $X_n \in TM^* \forall n \in \mathbb{N}$ , podemos formar la sucesión de las correspondientes semigeodésicas inextendibles  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , y pensar en la semigeodésica inextendible  $\gamma$  de  $X$  como en el límite de  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ; consecuentemente podemos llamar a  $\gamma$  la *semigeodésica límite* de la sucesión de semigeodésicas  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . De hecho,  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge tangencialmente a  $\gamma$ .

#### (b) Propiedades generales.

Las siguiente proposición da una relación entre los dominios de los elementos de una sucesión de semigeodésicas, y la el dominio de la semigeodésica límite. Para establecerlo, recordemos previamente el siguiente resultado [Mo], Proposición B.1.1 (2):

**Lema 8.-** Sea  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana. Para todo  $v \in TM$  existe un abierto  $U_v \ni v$  en  $TM$  y un  $\varepsilon_v > 0$  tales que:

(i) Si  $w \in U_v$  entonces la geodésica inextendible  $\gamma_w(t) = \exp(tw)$  para todo  $t$ , está definida en  $[-\varepsilon_v, \varepsilon_v]$ .

(ii) Resulta diferenciable la aplicación,

$$\Phi: ]-\varepsilon_v, \varepsilon_v[ \times U_v \longrightarrow TM$$

$$(t, w) \longrightarrow \left. \frac{d}{dt} \right|_t \exp(\bar{t}w)$$

**Proposición 9.-** Sea  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana y consideremos una sucesión convergente de vectores tangentes a  $M$ ,  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow X \in TM$ , Si el dominio de cada una de las correspondientes semigeodésicas inextendibles  $\gamma_n$  es  $[0, b_n[$ ,  $0 < b_n \leq \infty$ , y el de  $\gamma$  es  $[0, b[$ ,  $0 < b \leq \infty$ , entonces:

$$b \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \{b_n\} \quad (5.1)$$

Además para cualquier distancia en  $TM$  compatible con su topología,  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente sobre los compactos de  $[0, b[$  a  $\gamma$ .

Dem. - Definiremos en primer lugar,

$$A := \left\{ t \in [0, b[ \mid t < b_n \ \forall n \in \mathbb{N} - \{\text{subconjunto finito}\}, \text{ y } \{\gamma_n'(t)\} \text{ converge a } \gamma'(t) \right\}.$$

Claramente  $0 \in A$ , y basta con demostrar que, para todo  $t_0$  en la adherencia de  $A$ , existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $I_\varepsilon := [\max\{t_0 - \varepsilon, 0\}, t_0 + \varepsilon] \subset A$ , y  $\gamma_n'$  converge uniformemente a  $\gamma'$  en este intervalo.

Hagamos  $v = \gamma'(t_0)$ , y consideremos el abierto  $U_v$  de  $TM$ , el número real  $\varepsilon > 0$  y la aplicación  $\Phi$ , que proporciona el Lema 8. Tomaremos además  $U'_v \subset U_v$ , y  $\varepsilon < \varepsilon_v/2$  tales que  $\gamma'(t_0) \in U'_v$  y  $[-\varepsilon, \varepsilon] \times U'_v \subset \Phi^{-1}(U_v)^2$ . Si consideramos  $t'_0 \in A \cap I_\varepsilon$  entonces  $\gamma'(t'_0) \in U_v$  y, salvo para un conjunto finito  $N$  de valores de  $n$ ,  $\gamma'_n(t'_0) \in U_v$ . En consecuencia, la curva

$$t \rightarrow \exp(t \cdot \gamma'_n(t'_0)) = \gamma_n(t'_0 + t) = \gamma_n(t'_0 + t + (t'_0 - t_0))$$

está definida en  $]-\varepsilon_v, \varepsilon_v[$ . Como  $|t'_0 - t_0| \leq \varepsilon < (\varepsilon_v/2)$ , se tendrá que  $\gamma_n$  está definido en  $I_\varepsilon$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} - N$ . Por otra parte, de la continuidad de  $\Phi$  se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma'_n(t'_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \Big|_{t'_0} \exp(\bar{t} X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(t'_0, X_n) = \\ &= \Phi(t'_0, X) = \frac{d}{dt} \Big|_{t'_0} \exp(\bar{t} X) = \gamma'(t'_0), \quad \forall t'_0 \in I_\varepsilon, \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Resulta inmediato que  $U'_v$  y  $\varepsilon$  se pueden encontrar, pues  $\Phi^{-1}(U_v)$  es un abierto que contiene a  $(0, \gamma'(t_0))$ , y los abiertos de la forma  $]-\varepsilon', \varepsilon'[ \times U$ , con  $\varepsilon' > 0$  y  $U$  abierto de  $U_v$ , forman una base topológica de  $]-\varepsilon_v, \varepsilon_v[ \times U_v$  en  $(0, \gamma'(t_0))$ .

con lo que  $I_\varepsilon \subset A$ .

Para comprobar que  $\gamma_n'$  converge uniformemente a  $\gamma'$  en  $I_\varepsilon$ , notemos que, como  $\Phi$  es diferenciable, es localmente lipschitziana para cualquier distancia  $d$  compatible con la topología de  $TM$ . Por la compacidad de  $I_\varepsilon$  podremos encontrar un entorno  $W$  de  $X$  en  $TM$  y un  $K > 0$  tales que:

$$d(\Phi(t, X), \Phi(t', Y)) \leq K \{|t-t'| + d(X, Y)\}, \quad \forall Y \in W$$

En consecuencia,  $\forall \delta > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ : si  $n \geq n_0$  entonces  $d(X_n, X) < (\delta/K)$ , y  $X_n \in W$ . Luego

$$d(\gamma_n'(t), \gamma'(t)) = d(\Phi(t, X_n), \Phi(t, X)) \leq K d(X_n, X) \quad \forall t \in I_\varepsilon$$

como se quería. ■

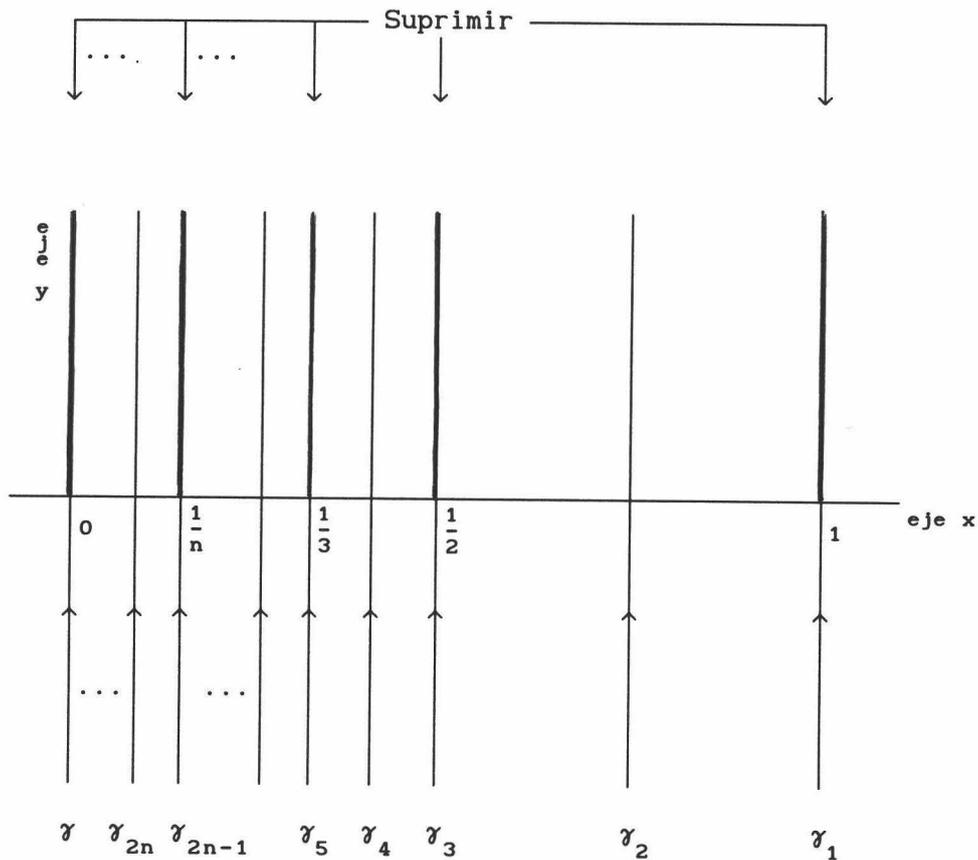
Notemos que la última afirmación tiene sentido pues (5.1) implica que, para cualquier compacto  $K$  en  $[0, b[$ ,  $\gamma_n$  está definido en  $K$  salvo a lo sumo en un subconjunto finito de valores de  $n$ . Además, de esa afirmación se obtiene, en particular, que  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente a  $\gamma$ . Teniendo en cuenta la Definición 1 podremos concluir,

**Corolario 10.-** Si en la Proposición 9 se supone que  $g$  es una métrica de Lorentz y que  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  está formado por geodésicas temporales, entonces  $\gamma$  es una curva límite de la sucesión  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y, para cualquier compacto  $L$  en  $[0, b[$ ,  $\{\gamma_n|_L\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge en la topología  $C^0$  de curvas a  $\gamma|_L$ .

**Observación 11.-** Aun en el caso de que  $g$  sea una métrica definida, resulta sencillo encontrar ejemplos de sucesiones  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que  $\liminf \{b_n\} < \limsup \{b_n\}$ . (Ver Fig. 5.1 en pág siguiente).

La Proposición 9 es válida para cualquier variedad semi-riemanniana, sea o no compacta o definida. En el caso compacto (y, necesariamente, indefinido) se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 12.-** Sea  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana compacta. Si  $J$  no es vacío entonces en su adherencia existen vectores luminosos.



$$(\mathbb{R}^2 - B, h_0), \quad h_0 = dx^2 - dy^2$$

$$B := \{(1/n, y) / n \in \mathbb{N}, 0 \leq y\} \cup \{(0, y) / 0 \leq y\}$$

Fig. 5.1

Dem. - Sea  $\gamma: [0, b[ \rightarrow M$ ,  $0 < b < +\infty$ , una semigeodésica inextendible a  $b$ . Consideremos una métrica de Riemann arbitraria  $g_R$  sobre  $M$  y sea  $S_R^M$  el fibrado tangente unitario sobre  $M$  relativo a  $g_R$ . Sea  $\{t_n\}$  una sucesión  $[0, b[$  que converge a  $b$ , y construyamos  $Z_n := \gamma'(t_n) / g_R(\gamma'(t_n), \gamma'(t_n))^{1/2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , obteniéndose así una sucesión en  $S_R^M$ . Como  $S_R^M$  es compacto, podemos hallar una sucesión parcial  $\{Z_{\sigma(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , que converge a un vector  $Z_0 \in S_R^M$ .

Llamemos  $\gamma_k$  a la semigeodésica a la derecha de  $Z_{\sigma(k)}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , y  $\gamma$  a la se-

migeodésica a la derecha de  $Z_0$ . Por el Lema 2 del Cap. II se sabe que  $\{g_R(\gamma'(t_n), \gamma'(t_n))\} \rightarrow \infty$ . Por otra parte, como  $\gamma$  es una geodésica  $g(\gamma'(t_n), \gamma'(t_n))$  es una constante  $C \in \mathbb{R}$  independiente de  $n \in \mathbb{N}$ . Usando la continuidad de la métrica  $g$  concluimos

$$g(Z, Z) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(Z_{\sigma(k)}, Z_{\sigma(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} [C/g_R(\gamma'(t_{\sigma(k)}), \gamma'(t_{\sigma(k)}))] = 0,$$

como se quería. ■

### 3.- PROPIEDADES TOPOLOGICAS DE $C$ Y $J$ .

Consideremos una variedad semi-riemanniana incompleta  $(M, g)$ . Si  $X_p \in T_p M$  es un vector incompleto, la sucesión  $\{\frac{1}{n} X_p\}_{n \in \mathbb{N}}$  es, claramente, una sucesión de vectores incompletos que tiende al vector nulo  $0_p$ , que es completo. Dado el carácter excepcional que, por ello, presenta el vector nulo, en la Notación 5 se excluyó el cero para la definición del conjunto  $C$  (ver también la Observación 6). Con esta consideración, podemos preguntarnos si el conjunto  $C$  (respectivamente,  $J$ ) es un cerrado de  $TM^*$ , o, equivalentemente, si la semigeodésica límite de una sucesión de semigeodésicas completas (resp. geodésicas incompletas) es necesariamente completa (resp. incompleta). En general, se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 13.-** *Sea  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana.*

(1) *Si  $J$  es abierto, y  $(M, g)$  es luminosamente incompleto, entonces  $(M, g)$  es espacial y temporalmente incompleto.*

(2) *Supongamos que  $M$  es compacta; si  $J$  es cerrado y  $(M, g)$  es incompleta entonces  $(M, g)$  es luminosamente incompleta.*

Dem.- (1) es consecuencia inmediata de que cualquier vector luminoso es un punto de acumulación tanto del subconjunto de los vectores espaciales y como del de los temporales. Para (2) basta con aplicar la Proposición 12. ■

A continuación, podemos preguntarnos, si la Proposición 9 permitirá asegurar que, en general  $C$  ó  $J$  sean abiertos o cerrados en  $TM^*$ . Sin embargo, es fácil

darse cuenta que, hasta en el caso riemanniano, puede ocurrir:

(i)  $b_n < \infty$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , pero  $b = \liminf \{b_n\} = \infty$  y, en consecuencia, que  $J$  no sea cerrado en  $TM^*$  (Fig. 5.2);

(ii)  $b_n = \infty$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , pero  $b < \liminf \{b_n\} (= \infty)$  y, en consecuencia, que  $C$  no sea cerrado en  $TM^*$  (Fig. 5.3).

---

$(\mathbb{R}^2 - D, h_0)$ ;  $h_0$  métrica usual de Riemann o Lorentz.  
 $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ / (1/x) \leq y\}$

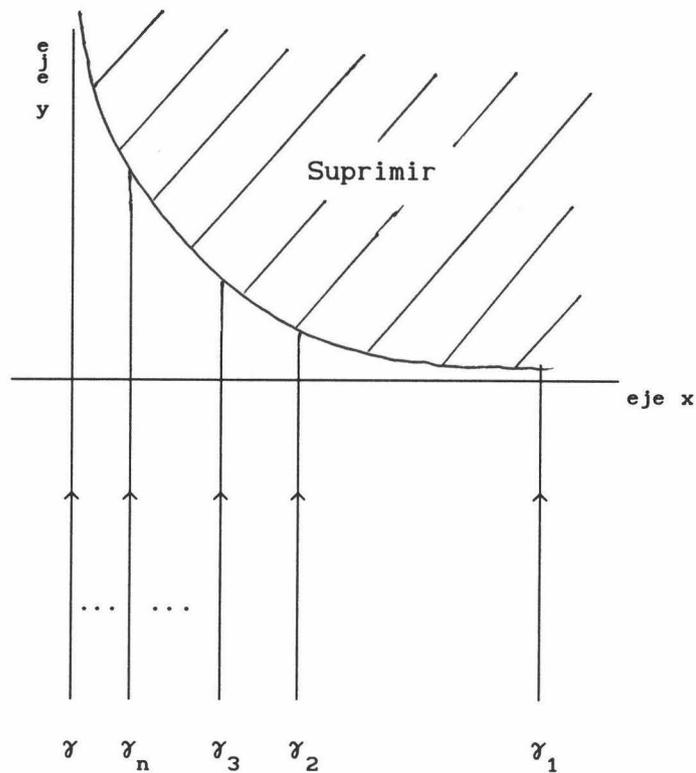


Fig. 5.2.- La semigeodésica límite de semigeodésicas incompletas puede ser completa.

$(\mathbb{R}^2 - \{\text{semieje positivo } y\}, h_0)$  ;  $h_0$  métrica usual de Riemann o Lorentz.

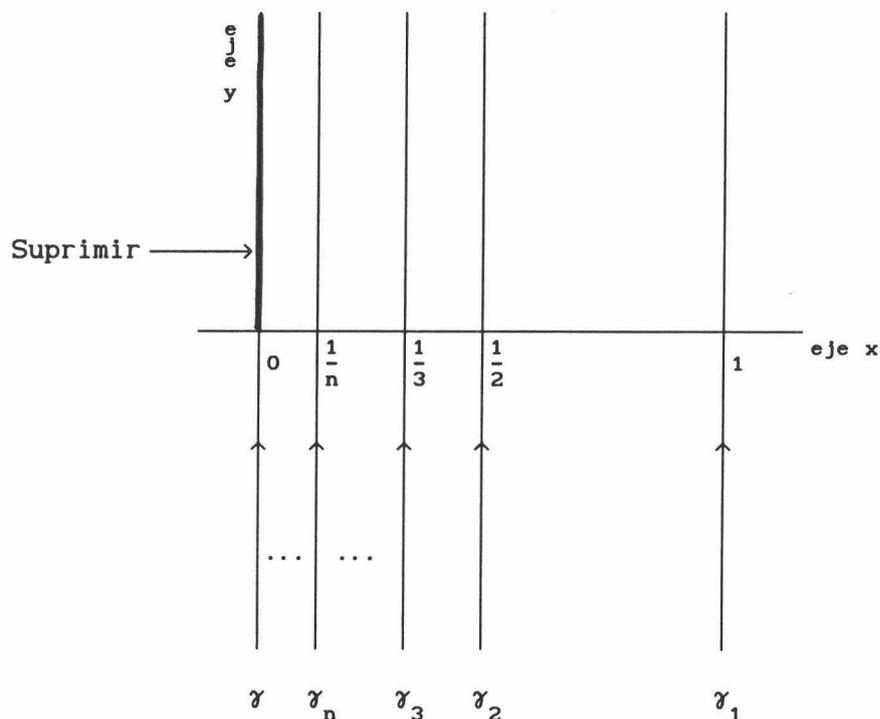


Fig. 5.3.- La semigeodésica límite de semigeodésicas completas puede ser incompleta.

Si bien la Proposición 19 no permite, en principio, deducir ninguna propiedad topológica sobre  $C$  ó  $J$ , ni siquiera en el caso definido, podría ser esperable que sí se pudiera hacer alguna afirmación de esta índole en el caso de que  $M$  fuera una variedad compacta. En este caso, por supuesto, si  $g$  es definida  $C = TM^*$  y  $J = \emptyset$ . Sin embargo, por contrario a la intuición que pueda parecer (ver [RoSa1]), existen variedades compactas indefinidas en que  $J$  no es ni abierto ni cerrado (ni, por consiguiente lo es  $C$ ).

**Ejemplo 14.-** Consideremos las métricas de la familia  $\mathcal{S}$  definida en el Capítulo III (Definición III.8). Usaremos  $\mathcal{S}$  para probar las afirmaciones siguientes:

- (1)  $J$  no es cerrado para una variedad compacta, en general. Dada

cualquier métrica  $g \in \mathcal{S}_1$ , por la Proposición III.28, las geodésicas luminosas que provienen de  $X_1$  con  $D=0$  son completas, y reparametrizaciones de  $r[p_i]$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ ; sin embargo, el resto de geodésicas luminosas que provienen de  $X_1$  son incompletas, y tienden asintóticamente a dos rectas  $r[p_i]$  consecutivas. En consecuencia, es inmediato construir sucesiones de vectores luminosos incompletos en el toro inducido  $(T^2, g')$  que tienden a un vector luminoso completo. Aún más, si consideramos una métrica  $h^\tau$  ( $h^\tau \notin \mathcal{S}$ ; ver Cap. III, §1 y (3.1) en §2) en la que  $\tau$  se comporta, en un entorno  $]-\rho, \rho[$  de 0, como  $\exp(-1/x^2)\text{sen}(1/2\pi x)$ , se tendrá entonces que para cada punto  $x_1$  que verifica  $0 < |x_1| < \rho$ , y  $\tau'(x_1) = 0$ , la recta  $r[x_1]$  se reparametriza como una geodésica luminosa incompleta. Sin embargo, la recta  $r[0]$  se reparametriza como una geodésica luminosa completa. Se tiene así otro claro ejemplo en el que  $J$  no tiene por qué ser cerrado.

(2)  $J$  no es abierto para una variedad compacta, en general. Si tomamos cualquier métrica  $g \in \mathcal{S}_2$ , cualquier geodésica  $\gamma$  que pase por  $(0,0)$  y que verifique  $D \neq 0$  cumple que  $\varepsilon D / \beta(p_i) > 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{Z}$ . En consecuencia,  $\gamma$  es completo. Sin embargo, si consideramos la geodésica luminosa que pasa por  $(0,0)$  con  $D=0$ , esta geodésica es incompleta.

Aunque las propiedades topológicas de cualquier métrica  $g \in \mathcal{S}$  pueden deducirse del Teorema 22 del Cap. III, a partir de los ejemplos anteriores es muy sencillo construir métricas  $g \in \mathcal{S}$  tal que  $J$  no sea, para ellas, ni abierto ni cerrado. Como resumen de las propiedades topológicas de  $C$  y  $J$  vistas, podemos dar la siguiente

**Conclusión 15.-** Sea  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana.

(1) Si  $g$  es definida y  $M$  es compacta  $C = TM^*$  y  $J = \emptyset$ . Existen ejemplos de variedades definidas no compactas en las que  $C$  (y, por tanto,  $J$ ) no es ni abierto ni cerrado de  $TM^*$ .

(2) Si  $g$  no es definida existen ejemplos de variedades tanto compactas como no compactas en los que  $C$  no es ni abierto ni cerrado de  $TM^*$ . Además:

(a) Si  $(M, g)$  es luminosamente incompleta y  $J$  es abierto entonces  $(M, g)$  es espacial y temporalmente incompleta.

(b) Si  $M$  es compacta y  $J$  no vacío en la adherencia de  $J$  existen vectores luminosos. Por tanto, si  $(M, g)$  es compacta e incompleta y  $J$  es cerrado entonces  $(M, g)$  es luminosamente incompleta.

## Capítulo VI.

# TOPOLOGÍA DE LAS MÉTRICAS INCOMPLETAS Y EL MÓDULO CONFORME DE LAS MÉTRICAS LORENTZIANAS SOBRE EL TORO.

En el Capítulo anterior se consideró, para una métrica de Lorentz fija, las propiedades topológicas del conjunto de las geodésicas incompletas. En este Capítulo se estudiarán, en primer lugar, las propiedades topológicas del conjunto de las métricas sobre una variedad  $M$  que son incompletas dentro del conjunto de todas las métricas semi-riemannianas sobre  $M$ . Además, nos restringiremos al caso de que  $M$  sea un toro por dos motivos: (1) por sencillez, ya que algunos de los resultados que se presentan pueden extenderse a variedades más generales (p. ej.; variedades tales que todas sus métricas de Lorentz llanas deban admitir un campo de Killing temporal; ver comentarios anteriores al Lema 13 en Cap. II) y (2) porque, desde el punto de vista de la completitud, se discutirá también la estructura del módulo conforme de las métricas lorentzianas sobre un toro.

Un resumen sobre el problema de la estabilidad de las métricas completas sobre una variedad (esto es, las propiedades topológicas de éstas en el conjunto de todas las métricas) puede hallarse en [Be2]; este resumen incluye resultados aún no publicados de Williams, pero no los resultados de [RoSa2]). En toda variedad definida el problema de la estabilidad se ha resuelto completamente por Beem al probarse que *en toda variedad conexa  $M$  los conjuntos de las métricas completas e incompletas sobre  $M$  son simultáneamente abiertos y cerrados en el conjunto de todas las métricas de Riemann sobre  $M$  con la topología  $C^0$  de Whitney* (y, por tanto, para cualquier topología  $C^r$  de Whitney con  $r \geq 0$ , ver [Be2], Proposition 7). Para métricas de Lorentz o, semi-riemannianas en general, no

existe, sin embargo, una conclusión tan sencilla. En [Be2] §4 y referencias ahí pueden hallarse resultados para el caso indefinido, siendo objeto de especial estudio las variedades de Lorentz que verifican condiciones apropiadas para la Teoría de la Causalidad (y que nunca verifican las variedades compactas). Sobre el problema más general de la estabilidad de las soluciones a ecuaciones diferenciales, merece destacarse [BePa1] y referencias en él.

En el §1 de este Capítulo se define una topología natural en el conjunto de las métricas de Lorentz sobre un toro y se discuten algunas de sus propiedades (es sencillo comprobar que esta topología es igual a la topología  $C^0$  de Whitney, y que un tratamiento completamente análogo podría hacerse para cualquier topología  $C^r$  de Whitney,  $r \geq 0$ ). Como consecuencia de los resultados principales del §2 (Teoremas 10 y 12) se obtiene que *ni la completitud ni la incompletitud de las métricas de Lorentz conformemente llanas sobre un toro es estable*.

En §3 se hacen algunas consideraciones sobre el módulo conforme de las métricas de Lorentz sobre un toro. Estas consideraciones parecen especialmente apropiadas dado el carácter abierto del problema (ver Observación 14, así como las Discusiones 6 y 11 hechas en §2), y pueden resumirse en: (a) caracterización de la clase de las métricas de Lorentz conformemente llanas sobre un toro como la clase formada por las métricas que admiten un campo conforme temporal, (b) repaso de la estructura del módulo conforme riemanniano sobre un toro y comparación con el módulo conforme lorentziano, y (c) exposición de algunos problemas adicionales que, relacionados con la completitud, aparecen en el caso lorentziano.

## 1.- TOPOLOGIA NATURAL DE LAS METRICAS DE LORENTZ SOBRE UN TORO.

Consideraremos, como hasta ahora,  $T^2$  como el toro bidimensional obtenido de  $\mathbb{R}^2$  como cociente de la acción propiamente discontinua,

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((m,n), (x,y)) &\longrightarrow (x+m, y+n) \end{aligned} \tag{6.1}$$

De los objetos sobre  $\mathbb{R}^2$  que se inducen en  $T^2$  mediante (6.1) diremos que se inducen naturalmente sobre  $T^2$ .

**Definición 1.-** Sea  $\mathcal{T}_{0,2}(T^2)$  el espacio vectorial real de los campos de tensores 2-covariantes sobre  $T^2$ . Dada cualquier métrica de Riemannian  $g_R$  sobre  $T^2$ , llamaremos *métrica euclídea inducida por  $g_R$  sobre  $\mathcal{T}_{0,2}(T^2)$*  a la métrica  $\langle, \rangle_R$  definida por

$$\langle A, B \rangle_R = \sum \int_{T^2} g_R^{ij} g_R^{kl} A_{ik} B_{jl} d\mu_R, \quad \forall A, B \in \mathcal{T}_{0,2}(T^2),$$

donde  $d\mu_R$  denota a la medida canónica sobre  $T^2$  inducida por  $g_R$ , y  $g_R^{ij}$ ,  $A_{ik}$ ,  $B_{jl}$  son, punto a punto, las componentes locales, respecto a cualquier sistema de coordenadas en ese punto, de los campos de tensores  $g$ ,  $A$ ,  $B$ , respectivamente (los índices se suben y bajan como es usual, y se sobreentenderá que se suma en índices repetidos). La métrica  $\langle, \rangle_R$  induce, a su vez, una norma  $\| \cdot \|_R$  sobre  $\mathcal{T}_{0,2}(T^2)$  y, en consecuencia, una distancia, que denotaremos  $d_R$ .

Aunque la distancia  $d_R$  depende claramente de la métrica euclídea escogida  $g_R$ , veamos a continuación que la topología asociada a  $d_R$  (y su uniformidad) es independiente de la métrica euclídea  $g_R$  escogida.

**Proposición 2.-** Sean  $g_R$  y  $g_{R'}$ , dos métricas de Riemann sobre  $T^2$ . Las correspondientes distancias inducidas  $d_R$  y  $d_{R'}$ , son uniformemente equivalentes.

Dem.- Sea  $S_R T^2$  el fibrado unitario para la métrica  $g_R$  y sean

$$m := \text{Mín}\{g_R(X, X) / X \in S_R T^2\}, \quad M := \text{Máx}\{g_R(X, X) / X \in S_R T^2\}$$

Escojamos una orientación  $\vartheta$  en  $T^2$ . En cualquier entorno coordinado  $(U; x_1, x_2)$ , tal que la base ordenada  $B = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$  es compatible con la orientación  $\vartheta$ , los elementos de volumen  $d\mu$  y  $d\mu'$  de  $g_R$  y  $g_{R'}$ , se escriben en  $U$ , respectivamente,

$$d\mu = |g_R| dx_1 \wedge dx_2 \quad d\mu' = |g_{R'}| dx_1 \wedge dx_2$$

donde  $|g_R| := [\det(M_B(g_R))]^{1/2}$ ,  $|g_{R'}| := [\det(M_B(g_{R'}))]^{1/2}$ . Tomando para cada  $p$  en  $T^2$  un sistema de coordenadas  $(U_p; x_1^p, x_2^p)$  tal que la base ordenada  $(\partial/\partial x_1^p, \partial/\partial x_2^p)$  sea  $g_R$ -ortonormal y  $g_{R'}$ -ortogonal en  $p$ , además de compatible con la orientación  $\vartheta$ , es inmediato comprobar que

$$m d\mu_p(X_p, Y_p) \leq d\mu'_p(X_p, Y_p) \leq M d\mu_p(X_p, Y_p) \quad \forall p \in T^2 \quad (6.3)$$

$$\forall (X_p, Y_p) \in \vartheta_p.$$

Si consideramos cualquier campo de tensores  $A \in \mathcal{T}_{(0,2)}(T^2)$ , entonces, usando de nuevo el sistema de coordenadas  $(U_p; x_1^p, x_2^p)$ , se tiene en el punto  $p$

$$\begin{aligned}
 (1/M^2) \sum g_R^{ij} g_R^{kl} A_{ik} A_{jl} &= (1/M^2) \sum_i (A_{ii})^2 \leq \sum_i g_R^{ii} (A_{ii})^2 \\
 &= \sum g_R^{ij} g_R^{kl} A_{ik} A_{jl} \leq \\
 (1/m^2) \sum_i (A_{ii})^2 &= (1/m^2) \sum g_R^{ij} g_R^{kl} A_{ik} A_{jl} \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

Usando (6.2) y (6.3) obtendremos para las normas  $\| \cdot \|_R$  y  $\| \cdot \|_R$ , asociadas a  $g_R$  y  $g_R$ , respectivamente:

$$(\sqrt{m}/M) \|A\|_R \leq \|A\|_R \leq (\sqrt{M}/m) \|A\|_R \quad \forall A \in \mathcal{T}_{(0,2)}(T^2) \quad (6.4)$$

de donde el resultado es inmediato. ■

**Observación 3.-** (1) Por un argumento estándar (derivado de la falta de completitud de las aplicaciones  $C^\infty([0,1] \times [0,1])$  como subconjunto del de las integrales Lebesgue al cuadrado -definidas salvo relaciones casi por doquier-  $L^2([0,1] \times [0,1])$ ) es fácil comprobar que el espacio vectorial normado  $(\mathcal{T}_{0,2}(T^2), \| \cdot \|_R)$  no es de Banach. Las desigualdades (6.4) permiten demostrar directamente la continuidad uniforme de la aplicación identidad entre los espacios métricos  $(\mathcal{T}_{0,2}(T^2), d_R)$ ,  $(\mathcal{T}_{0,2}(T^2), d_R)$ , y de su inversa. Por otra parte, recordemos que para aplicaciones lineales entre espacios normados equivalen la continuidad en un punto, la continuidad en todo punto y la continuidad uniforme.

(2) Claramente, la Definición 1, la Proposición 2, y lo dicho en el punto anterior, se pueden generalizar a campos de tensores  $(p,q)$ ,  $p,q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  sobre cualquier variedad compacta.

**Notación 4.-** En adelante, consideraremos sobre  $\mathcal{T}_{0,2}(T^2)$  a la única topología inducida por cualquier métrica de Riemann sobre  $T^2$ . Denotaremos por  $\mathcal{Lor}(T^2)$  al conjunto de todas las métricas de Lorentz sobre  $T^2$ ; es de notar que  $\mathcal{Lor}(T^2)$  es un abierto de  $\mathcal{T}_{0,2}(T^2)$ , y consideraremos sobre él a la topología inducida. Al subconjunto de las métricas de Lorentz completas lo representaremos por  $\mathcal{Lor}_c(T^2)$ , y al de las incompletas por  $\mathcal{Lor}_i(T^2)$ .

Por último, caracterizaremos la topología de  $\mathcal{T}_{0,2}(T^2)$ , y en consecuencia, la de  $\mathcal{Lor}(T^2)$ .

**Proposición 5.-** Sean  $A, A^n$ , campos de tensores (0,2) sobre  $\mathbb{R}^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , inducidos naturalmente en  $T^2$ , y sean  $A_{ij}, A_{ij}^n \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tales que, en coordenadas usuales  $(x_1, x_2)$  se tenga,

$$A = \sum A_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad A^n = \sum A_{ij}^n dx^i \otimes dx^j, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(1) Si la sucesión inducida por  $\{A^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $T^2$  converge al elemento en  $\mathcal{T}_{0,2}(T^2)$  inducido por  $A$ , entonces  $\{A_{ij}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente casi por doquier a  $A_{ij}$ ,  $\forall i, j \in \{1, 2\}$ .

(2) Supóngase que  $\exists N > 0$  que acota a  $|A_{ij}^n|$ ,  $\forall i, j \in \{1, 2\}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Si  $\{A_{ij}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente a  $A_{ij}$ ,  $\forall i, j \in \{1, 2\}$  entonces la sucesión inducida por  $\{A^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $T^2$  converge al elemento de  $\mathcal{T}_{0,2}(T^2)$  inducido por  $A$ .

Dem.- (1) Teniendo en cuenta que  $\left\{ |A_{ij}^n - A_{ij}| \Big|_{[0,1] \times [0,1]} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  puede considerarse

se como una sucesión en  $L^2([0,1] \times [0,1])$ , el resultado es inmediato. (2) Basta con aplicar el Teorema clásico de la Convergencia Dominada de Lebesgue. ■

## 2.- PROPIEDADES TOPOLOGICAS DE LAS METRICAS DE LORENTZ COMPLETAS E INCOMPLETAS.

**Discusión 6.-** En [Y1] pág. 3067 se intenta justificar que  $\mathcal{Lor}_c(T^2)$  es denso en  $\mathcal{Lor}(T^2)$ , argumentándose que, dada cualquier métrica de Lorentz incompleta sobre  $T^2$ , "abriendo ligeramente" los conos de luz se obtendrá una métrica de Lorentz completa. Nótese sin embargo, que el argumento intuitivo que se da para ello parece tener como contraejemplos a las métricas de las familias  $\mathcal{S}_2$  y  $\mathcal{S}_3$  de la Definición III.8. Estas métricas siguen siendo incompletas tanto para cambios conformes como para pequeñas variaciones que dependan solo de la coordenada  $x_1$  (y que, por tanto, pueden variar el tamaño de los conos de luz).

Aun así parece razonable entonces conjeturar que  $\mathcal{Lor}_c(T^2)$  es denso en  $\mathcal{Lor}(T^2)$ , sin que, hasta donde el autor conoce, se tenga una prueba rigurosa de ello.

A continuación discutiremos la densidad de  $\mathcal{Lor}_1(T^2)$  en  $\mathcal{Lor}(T^2)$ ; esta densidad no está, en principio, refñida con la de  $\mathcal{Lor}_c(T^2)$  en  $\mathcal{Lor}(T^2)$ .

**Lema 7.-** Para cada base ordenada  $(a,b)$  de  $\mathbb{L}^2=(\mathbb{R}^2,g_0)$  consideremos la aplicación lineal biyectiva,  $\Phi_{ab}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{L}^2$ ,  $\Phi_{ab}(x,y)=xa+yb$ ,  $\forall x,y \in \mathbb{R}$ . Entonces:

(1) La métrica de Lorentz sobre  $\mathbb{R}^2$ ,  $g_{ab} := \Phi_{ab}^* g_0$ , es llana e inducible naturalmente en una métrica llana  $g_{ab}'$  sobre  $T^2$ .

(2) Toda métrica de Lorentz llana sobre  $T^2$  se puede obtener de este modo, esto es, el conjunto de las métricas de Lorentz llanas sobre  $T^2$  es igual a

$$\{g_{ab}' \in \mathcal{Lor}(T^2) / (a,b) \text{ es una base ordenada de } \mathbb{L}^2 \text{ y } g_{ab}' \text{ es la métrica naturalmente inducida en } T^2 \text{ de } g_{ab} := \Phi_{ab}^* g_0\}$$

Dem.-(1) Es inmediato, por construcción.

(2) Usando el Lema 13 (1) de Cap. II y una discusión clásica sobre los grupos reticulares de  $\mathbb{R}^2$ , es inmediato que cualquier toro llano es isométrico al cociente de  $\mathbb{L}^2$  por la acción propia y discontinua del grupo de traslaciones generado por dos vectores independientes. En consecuencia, toda métrica llana sobre  $T^2$  es isométrica a una de las  $g_{ab}'$ . ■

**Lema 8.-** Las métricas llanas sobre  $T^2$  que admiten una geodésica luminosa cerrada son densas en el conjunto de todas métricas de Lorentz llanas sobre  $T^2$ .

Dem.- Consideremos, en la notación del Lema 7, una métrica llana cualquiera  $g_{ab}'$  sobre  $T^2$  y la correspondiente métrica  $g_{ab}$  sobre  $\mathbb{R}^2$  y base ordenada  $(a,b)$  de  $\mathbb{L}^2$ . La geodésica luminosa  $t \rightarrow (t,t)$  de  $\mathbb{L}^2$  generará una geodésica cerrada de  $T^2$  si y sólo si  $\exists m,n,p \in \mathbb{Z}$ :

$$m a + n b = p \quad (1,1) \quad (6.5)$$

(necesariamente  $p \neq 0$ ). Claramente, si  $a,b \in \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ , entonces  $(a,b)$  forma una base ordenada del espacio vectorial  $\mathbb{Q}^2(\mathbb{Q})$ , con lo que se podrá satisfacer (6.5), y  $g_{ab}'$  admite una geodésica luminosa cerrada. En el caso general, podremos encontrar un par de sucesiones  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow a$ ,  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow b$  tales que  $(a_n, b_n)$  es una base ordenada de  $\mathbb{Q}^2(\mathbb{Q})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Basta entonces con comprobar que  $\{g_{a_n b_n}'\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow g_{ab}'$  en  $\mathcal{Lor}(T^2)$ . Para ello, consideremos sobre  $T^2$  la métrica

de Riemann  $g_R$  que se le induce naturalmente de la métrica de Riemann usual de  $\mathbb{R}^2$ . Por la Definición 1,

$$\begin{aligned} \|g'_{ab} - g'_{a_n b_n}\|_{\mathbb{R}^2}^2 &= \int_{[0,1] \times [0,1]} \sum_{i=1}^2 (g_{ab} - g_{a_n b_n}) (\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_i)^2 = \\ &= \left( g_0(a,a) - g_0(a_n, a_n) \right)^2 + \left( g_0(b,b) - g_0(b_n, b_n) \right)^2 \end{aligned}$$

y por la continuidad de la métrica  $g_0$ , el resultado es inmediato. ■

**Lema 9.-** *Las métricas llanas sobre  $T^2$  que admiten una geodésica luminosa cerrada se hallan en la adherencia de las métricas luminosamente incompletas sobre  $T^2$ .*

Dem.- Sea  $g'$  una de tales métricas sobre  $T^2$ , consideremos su recubridor lorentziano  $\pi: \mathbb{L}^2 \rightarrow T^2$ , y una geodésica luminosa  $\gamma$  sobre  $\mathbb{R}^2$  tal que  $\pi \circ \gamma$  tenga periodo 1. Llamemos  $p = \gamma(0)$ , y sea  $\{X_1, X_2\}$  una base de vectores luminosos en  $p$  con  $X_2 = \gamma'(0)$ . Consideremos las coordenadas luminosas  $(\mathbb{R}^2, \varphi = (u, v))$  sobre  $\mathbb{L}^2$  que proporciona el difeomorfismo  $\varphi^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{L}^2$ ,  $\varphi^{-1}(u, v) = \exp_p(uX_1 + vX_2)$ ,  $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ . En estas coordenadas,  $\gamma$  es una reparametrización de la recta  $u=0$ , y la métrica  $g_0$  de  $\mathbb{L}^2$  se escribe  $du \odot dv + dv \odot du$ .

Para cada aplicación periódica  $\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de periodo 1, consideremos la métrica  $h^\tau$ , que en las coordenadas  $(u, v)$  se escribe,

$$h^\tau_{(u', v')} = du \odot dv + dv \odot du - 2\tau(u') dv^2 \quad \forall (u', v') \in \mathbb{R}^2$$

Se sabe (ver (3.1)) que esta métrica es incompleta siempre que  $\tau(0)=0$ ,  $\tau'(0) \neq 0$ . Como una aplicación directa de la Proposición 5 (2) basta entonces con tomar una sucesión de aplicaciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$   $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $\tau(0)=0$ ,  $\tau'(0) \neq 0$ ,  $|\tau_n| < 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , que sean periódicas y que converjan puntualmente a 0. ■

No resulta difícil generalizar el Lema 9 para probar la Proposition 5.2 en [BePa2].

**Teorema 10.-** *Las métricas de Lorentz conformemente llanas sobre  $T^2$  se hallan en la adherencia de las métricas luminosamente incompletas sobre  $T^2$ .*

Dem.- Consideremos una métrica de Lorentz conformemente llana  $g'$  sobre  $T^2$ , y sea  $\Omega > 0$  tal que  $\Omega \cdot g'$  es llana. Nótese que la aplicación  $T^\Omega: \mathcal{Lor}(T^2) \rightarrow \mathcal{Lor}(T^2)$ ,  $T^\Omega(h') = \Omega^{-1} \cdot h' \quad \forall h' \in \mathcal{Lor}(T^2)$  es continua. Por los Lemas 8 y 9 existe una sucesión de métricas luminosamente incompletas  $\{h'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \Omega \cdot g'$ . Por la continuidad de  $T^\Omega$ ,  $\{\Omega^{-1} \cdot h'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow g'$ , y usando el Teorema 32 (3) del Cap. III, se tiene que  $\Omega^{-1} \cdot h'_n$  es luminosamente incompleta,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . ■

**Discusión 11.**- Consideremos el espacio de los módulos  $\text{Mod}_c(T^2)$  definido como el espacio topológico cociente de las métricas de Lorentz completas  $\mathcal{Lor}_c(T^2)$  con la relación de equivalencia conforme (ver Definición 13 abajo). En [Y1] pág. 3069 y ss. se argumenta que resulta esperable que  $\text{Mod}_c(T^2)$  tenga estructura de variedad topológica de dimensión 2, y, suprimiendo un conjunto discreto de puntos,  $\text{Mod}_c(T^2)$  debe de tener estructura diferenciable. Además, se argumenta que, módulo la relación conforme, las métricas llanas son casi todas las métricas completas. En este caso, los módulos de métricas llanas deben ser densos en  $\text{Mod}_c(T^2)$ , y, por tanto, las métricas conformemente llanas, deben ser densas en  $\mathcal{Lor}_c(T^2)$ . En consecuencia, del Teorema 10 se obtendría:

Conjetura: *el conjunto de las métricas incompletas  $\mathcal{Lor}_1(T^2)$  es un conjunto denso en  $\mathcal{Lor}(T^2)$ .*

Por último, notemos que cualquiera de las métricas  $g$  en  $\mathcal{S}_1$  vistas en la Definición III.8 es incompleta y se puede escribir como límite de una sucesión de métricas completas inducibles en un toro (simplemente, cambiando en el miembro  $n$ -ésimo de la sucesión, la función  $\delta$  de la definición de  $g$  por  $\delta + (1/n)$ ). Ello, unido al Teorema 9 permite afirmar,

**Teorema 12.**-  $\mathcal{Lor}_c(T^2)$  no es un subconjunto abierto ni cerrado de  $\mathcal{Lor}(T^2)$ .

### 3.- DISCUSION ACERCA DEL MODULO CONFORME DE LAS METRICAS DE LORENTZ SOBRE EL TORO.

#### (a) Caracterización de las métricas conformemente llanas.

El conjunto de las métricas conformemente llanas sobre un toro puede caracterizarse del siguiente modo.

**Teorema 13.-** Sea  $(T^2, g)$  un toro lorentziano. Entonces  $g$  es conformemente llana si y sólo si  $(T^2, g)$  admite un campo conforme temporal  $K$ . En este caso  $g^* = -(1/g(K,K)).g$  es llana.

Dem.- La condición necesaria es inmediata del Lema II.13. Para la suficiente, consideremos los siguientes pasos:

(1) Si  $K$  es un campo conforme temporal para la métrica  $g$  entonces  $K$  es un campo de Killing para la métrica  $g^* = -(1/g(K,K)).g$  (válido en cualquier variedad de Lorentz). Para ello, basta con observar:

$$\begin{aligned} L_K g^* &= \frac{1}{g(K,K)^2} K(g(K,K)) g - \frac{1}{g(K,K)} \sigma g = \\ &= \left\{ \frac{1}{g(K,K)^2} 2g(\nabla_K K, K) - \frac{1}{g(K,K)} \sigma \right\} g \end{aligned}$$

Por lo que el resultado se sigue sin más que tener en cuenta

$$\sigma g(K,K) = (L_K g)(K,K) = 2 g(\nabla_K K, K)$$

(2) Sea  $W \in \chi(T^2)$  tal que  $g^*(W,W)=1$ ,  $g^*(K,W)=0$ ; entonces los campos de vectores  $K$  y  $W$  son  $g^*$ -paralelos (por la orientabilidad de  $T^2$  podemos encontrar exactamente dos campos de vectores en las condiciones impuestas a  $W$ ). El cálculo es directo; así, usando que  $K$  es Killing y  $g^*(K,K)$  es constante:

$$\begin{aligned}
g^*(\nabla_K^* K, K) &= (1/2) K(g^*(K, K)) = 0 . \\
g^*(\nabla_K^* K, W) &= -g^*(\nabla_W^* K, K) = -(1/2) W(g^*(K, K)) = 0
\end{aligned}
\left. \vphantom{\begin{aligned} g^*(\nabla_K^* K, K) \\ g^*(\nabla_K^* K, W) \end{aligned}} \right\} \nabla_K^* K = 0$$

$$\begin{aligned}
g^*(\nabla_W^* K, K) &= (1/2) W(g^*(K, K)) = 0 . \\
g^*(\nabla_W^* K, W) &= -g^*(\nabla_K^* K, W) = 0 .
\end{aligned}
\left. \vphantom{\begin{aligned} g^*(\nabla_W^* K, K) \\ g^*(\nabla_W^* K, W) \end{aligned}} \right\} \nabla_W^* K = 0$$

y K es paralelo. Usando esto, se tiene para W:

$$\begin{aligned}
g^*(\nabla_K^* W, K) &= K(g^*(W, K)) - g^*(W, \nabla_K^* K) = 0 \\
g^*(\nabla_K^* W, W) &= (1/2) K(g^*(W, W)) = 0 .
\end{aligned}
\left. \vphantom{\begin{aligned} g^*(\nabla_K^* W, K) \\ g^*(\nabla_K^* W, W) \end{aligned}} \right\} \nabla_K^* W = 0$$

$$\begin{aligned}
g^*(\nabla_W^* W, K) &= W(g^*(W, K)) - g^*(W, \nabla_W^* K) = 0 \\
g^*(\nabla_W^* W, W) &= (1/2) W(g^*(W, W)) = 0 .
\end{aligned}
\left. \vphantom{\begin{aligned} g^*(\nabla_W^* W, K) \\ g^*(\nabla_W^* W, W) \end{aligned}} \right\} \nabla_W^* W = 0$$

con lo que también W es  $g^*$ -paralelo.

(3) La métrica  $g^*$  es llana. Ello es inmediato porque  $[K, W] = \nabla_K W - \nabla_W K = 0$ , con lo que podemos encontrar en el entorno de cada punto de  $T^2$  un sistema de coordenadas  $(x_1, x_2)$  de modo que  $K = \partial/\partial x_1$ ,  $W = \partial/\partial x_2$  y, en esas coordenadas,  $g^* = -dx_1^2 + dx_2^2$ . ■

**Observación 14.-** (1) Nótese que, como consecuencia del punto (1) de la demostración, se obtiene que *todo campo conforme temporal para una métrica semi-riemanniana g es un campo de Killing (temporal y de "módulo" constante) para una métrica conforme a g* (comparar con [Har] pág. 294 línea 13 y ss.).

(2) También de la demostración del Teorema 12 es inmediato que si existe un campo conforme temporal K en una superficie lorentziana  $(M, g)$  entonces  $g^* = -(1/g(K, K)).g$  es una métrica llana. Consideraciones análogas pueden hacerse para campos conformes espaciales sin ceros en superficies lorentzianas.

**(b) Comparación entre los módulos conformes riemanniano y lorentziano.**

Un problema clásico en geometría de Riemann es el del estudio del módulo conforme de las métricas de Riemann sobre  $T^2$ ,  $\text{Mod}^R(T^2)$ , definido como el cociente que se obtiene del conjunto de todas las métricas de Riemann sobre  $T^2$ , cuando se identifican todas aquellas métricas que son conformes. Se sabe que  $\text{Mod}^R(T^2)$

puede identificarse de modo natural con  $\mathbb{C}$  ([FaKr], IV.7, Theorem en pág. 213), pudiendo resumirse los pasos para ello como sigue:

(1) Dentro de cada una de las clases de equivalencia conformes  $\mathcal{C} \in \text{Mod}^R(T^2)$  existe una métrica  $g' \in \mathcal{C}$  que es llana. En consecuencia, el recubridor universal de  $(T^2, g')$  es  $\mathbb{R}^2$  con la métrica de Riemann usual  $g_R$ , y el grupo de automorfismos de recubridor  $G$  es el generado por dos traslaciones  $z \rightarrow z + d_0$ ,  $z \rightarrow z + d$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}^2$  en las direcciones de dos vectores independientes  $d_0, d \in \mathbb{R}^2$ . Considerando  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ , y teniendo en cuenta que las dilataciones y rotaciones son transformaciones conformes en  $(\mathbb{C}, g_R)$ , podemos además suponer  $d_0 = 1$ ,  $\text{Im}(d_1) > 0$ .

(2) Sean ahora  $\mathcal{C}_i \in \text{Mod}^R(T^2)$ ,  $g_i' \in \mathcal{C}_i$ ,  $d_i \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}(d_i) > 0$ ,  $G_i$ ,  $\pi_i: \mathbb{C} \rightarrow T^2$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , de tal modo que  $g_i'$  es la métrica llana sobre el toro obtenido de  $(\mathbb{C}, g_R)$  por la acción propia y discontinua del grupo de isometrías  $G_i$  generado por las traslaciones  $z \rightarrow z + 1$ ,  $z \rightarrow z + d_i$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}^2$ , siendo  $\pi_i$  la correspondiente aplicación recubridora. Observemos que  $G_i$  se puede identificar de modo natural, como se hará en adelante, con un subgrupo de  $(\mathbb{C}, +)$ . Claramente, son equivalentes: (i)  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ , (ii) existe un difeomorfismo conforme  $f': (T^2, g_1) \rightarrow (T^2, g_2)$ , al que además se le puede imponer que conserve las orientaciones usuales, (iii) existe un difeomorfismo conforme  $f: (\mathbb{C}, g_R) \rightarrow (\mathbb{C}, g_R)$ , al que además se le puede imponer que conserve las orientaciones usuales, tal que  $f(G_1) = G_2$ , y la aplicación  $\vartheta: G_1 \rightarrow G_2$ ,  $\vartheta(d) = f(d)$ ,  $\forall d \in G_1$  es un isomorfismo de grupos.

(3) Es bien conocido que, gracias a la existencia de parametrizaciones isotermas, cualquier superficie  $S$  orientada con una métrica de Riemann  $g_R$  se puede considerar como una variedad compleja de dimensión 1 (superficie de Riemann). Los biholomorfismos de esta superficie de Riemann en sí misma coinciden con los difeomorfismos conformes que preservan la orientación de  $(S, g_R)$  en sí misma. La superficie de Riemann asociada a  $(\mathbb{C}, g_R)$  con su orientación usual es, por supuesto,  $\mathbb{C}$  considerado como variedad compleja. Se sabe que los biholomorfismos conformes en  $\mathbb{C}$  se pueden escribir como

$$z \rightarrow az + b, \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (6.6)$$

para  $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ ,  $b \in \mathbb{C}$ .

(4) Abreviemos cada traslación  $z \rightarrow z + d$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$  por  $d$ . De los puntos (2) y (3) anteriores podemos afirmar que si  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$  entonces  $\exists a \in \mathbb{C} - \{0\}$ :

$$\begin{aligned} a (= \vartheta(1)) &= m \cdot 1 + n \cdot d_2, & m, n \in \mathbb{Z} \\ ad_1 (= \vartheta(d_1)) &= p \cdot 1 + q \cdot d_2, & p, q \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (6.7)$$

(nótese que si  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una aplicación conforme en las hipótesis (iii) señaladas en el punto (2), entonces se podrá escribir como una de las aplicaciones (6.6) con  $b=0$ ). Como  $\phi^{-1}: G_2 \rightarrow G_1$ , necesariamente  $mq-pn \in \{-1, 1\}$ ; además, si dividimos la segunda de las expresiones (6.7) por la primera y usamos que  $\text{Im}(d_1) > 0$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , tendremos  $mq-pn = 1$ . Por otra parte, esta última igualdad, junto con (6.7), implica  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ . En consecuencia, podemos concluir:

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists m, n, p, q \in \mathbb{Z}: d_1 = \frac{p+qd_2}{m+nd_2}, \quad mq-pn=1 \quad (6.8)$$

(5) De (6.8) se deduce que  $\text{Mod}^R(T^2)$  puede considerarse como el conjunto cociente obtenido a partir de la relación de equivalencia en  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ : sean  $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ,  $d_1$  está relacionado con  $d_2$  si y sólo si  $\exists \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \in \text{PSl}(2, \mathbb{Z})$  tales que  $d_1 = \frac{p+qd_2}{m+nd_2}$ . Por un resultado estándar ([Iv] Cap. V.1) este cociente se puede identificar con  $\mathbb{C}$ . Es de notar que la topología que se induce en  $\text{Mod}^R(T^2)$  por esta identificación es la misma que la que hereda de la topología que existe en el conjunto de las métricas de Riemann, considerado como subconjunto del espacio topológico  $\mathcal{T}_{0,2}(T^2)$ .

Si intentáramos repetir un planteamiento análogo para estudiar el módulo conforme de las métricas lorentzianas, surgen los siguientes dos problemas fundamentales:

(A) A diferencia del punto (1) anterior, no todas las métricas de Lorentz sobre  $T^2$  son conformemente llanas. En consecuencia, no podremos escoger, en cada clase de equivalencia, una métrica cuyo recubridor lorentziano sea  $\mathbb{L}^2$ .

(B) Restrinjámonos al subconjunto  $\mathcal{Lor}_{c11}(T^2)$  formado por todas las métricas de  $\mathcal{Lor}(T^2)$  que son conformemente llanas (por el Teorema 10 sabemos que este subconjunto no es un abierto de  $\mathcal{Lor}(T^2)$ ). Podemos definir el correspondiente módulo conforme  $\text{Mod}_{c11}(T^2)$  y dar para él pasos análogos a los de (2). Sin embargo, el grupo de las transformaciones conformes de  $\mathbb{L}^2$ , que sería necesario para proseguir por este camino, es más difícil de manejar que el de las transformaciones conformes de  $(\mathbb{R}^2, g_R)$ . En [Yu1] pág. 3072 pueden verse las dificultades que surgen al tratar de estudiar un abierto de  $\text{Mod}_{c11}(T^2)$ , escogido por simplicidad.

(b) Algunos problemas específicos del caso lorentziano.

Como se ha visto, mientras que el estudio del módulo conforme de las métricas de Riemann sobre  $T^2$  está completamente acabado, el problema análogo en el caso lorentziano parece ser mucho más complejo y distar mucho de estar resuelto. Esta situación no es nueva en Geometría de Lorentz; así, recordemos lo que sucede en el siguiente problema relacionado: ¿cuántas clases conformes de métricas de Lorentz existen sobre superficies simplemente conexas?. El problema análogo riemanniano, gracias al teorema de uniformización, también se halla completamente resuelto. Sin embargo, el caso lorentziano, que fue estudiado por Kulkarni en [Kul], da lugar a una serie de nuevos elementos (asignación de una frontera invariante conforme, y aparición en ella de puntos característicos, gemelos, esquinas, barreras, etc.) que aumentan la complejidad del problema y sólo permiten, hasta la fecha, alcanzar resultados muy particulares.

Señalemos a continuación algunos problemas específicos inmediatos que surgen en el estudio del módulo conforme de las métricas de Lorentz sobre  $T^2$ . Para ello, empecemos por definir los objetos que, en este caso, pueden ser candidatos a representar el papel de  $\text{Mod}^R(T^2)$ .

**Definición 15.-** Sea  $X$  un subconjunto de  $\mathcal{Lor}(T^2)$ ; llamaremos relación conforme en  $X$  a la relación de equivalencia:

Sean  $g_1', g_2' \in X$ ;  $g_1'$  está relacionada con  $g_2'$  si y sólo si  $g_1'$  y  $g_2'$  son conformes.

(1) Llamaremos módulo conforme de las métricas de Lorentz sobre  $T^2$ ,  $\text{Mod}(T^2)$ , al conjunto cociente por la relación conforme en  $\mathcal{Lor}(T^2)$ .

(2) Llamaremos módulo conforme de las métricas de Lorentz completas sobre  $T^2$ ,  $\text{Mod}_c(T^2)$  al conjunto cociente por la relación conforme en  $\mathcal{Lor}_c(T^2)$ .

(3) Llamaremos módulo conforme de las métricas de Lorentz incompletas sobre  $T^2$ ,  $\text{Mod}_1(T^2)$  al conjunto cociente por la relación conforme en  $\mathcal{Lor}_1(T^2)$ .

Consideraremos los tres módulos conformes como espacios topológicos con la topología inducida.

**Discusión 16.-** En principio, resultaría deseable

$$\text{Mod}_c(T^2), \text{Mod}_1(T^2) \subset \text{Mod}(T^2), \quad (6.6a)$$

de modo que, conjuntistamente,

$$\text{Mod}(T^2) = \text{Mod}_c(T^2) \cup \text{Mod}_1(T^2). \quad (6.6b)$$

Sin embargo, la condición necesaria y suficiente para que (6.6) se verifique es que *la completitud sea un invariante conforme*, esto es, que la Conjetura Conforme **CC** sea cierta al menos en el caso de toros. En consecuencia, se tienen las implicaciones lógicas

$$\text{CDC verdad} \Rightarrow \text{CC verdad} \Leftrightarrow (6.6) \text{ verdad}$$

Si **CC** fuera cierta, entonces la división de  $\text{Mod}(T^2)$  en  $\text{Mod}_c(T^2)$  y  $\text{Mod}_1(T^2)$  parece natural, aunque, como una consecuencia del Teorema 13 y su demostración,  $\text{Mod}_c(T^2)$  y  $\text{Mod}_1(T^2)$  no son ni abiertos ni cerrados. Si **CC** no fuera cierta, ello podría acarrear problemas en el estudio de  $\text{Mod}_c(T^2)$  (ver Discusión 11) y, tal vez en el de  $\text{Mod}(T^2)$ .

Por otra parte, si **CDC** no fuera cierta o bien, aunque fuera cierta, si existieran métricas luminosamente incompletas sobre  $T^2$  que no lo fueran espacial o temporalmente, entonces podrían definirse, de modo natural, cada uno de los tres módulos conformes de métricas incompletas en exactamente 1 carácter causal, y cada uno de los tres módulos conformes de métricas incompletas en exactamente 2 caracteres causales. Si **CC** fuera cierta, entonces cada uno de estos módulos sería un subconjunto de  $\text{Mod}_1(T^2)$ ; en caso contrario, añadiría un problema adicional más al estudio de  $\text{Mod}_1(T^2)$ .

## REFERENCIAS.

[AbMa] R. Abraham, J.E. Marsden "Foundations of Mechanics", Benjamin/Cummings Pub. Co., Advanced Book Program, Reading, Massachusetts, 1978.

[ARS] L.J. Alías, A. Romero, M. Sánchez, *Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in spatially closed universes*, Universidad de Granada, 1993 (por publicar).

[AuMa] L. Auslander, L. Markus, "Flat Lorentz 3-manifolds", *Memoirs Amer. Math. Soc.*, **30**, 1959.

[Be1] J.K. Beem, *Some examples of incomplete spacetimes*, *Gen. Rel. Grav.* **7** (1976), 501-509.

[Be2] J.K. Beem, *Disprisoning and Pseudoconvex Manifolds*, *Proceedings Symp. Pure Math.* **54** (1993), Part. 2, 19-26.

[BeEr] J.K. Beem, P.E. Erlich, "Global Lorentzian Geometry", *Pure and Applied Mathematics*, Marcel Dekker Inc., NY, 1981.

[BePa1] J.K. Beem, P.E. Parker, *Whitney stability of solvability*, *Pac. J. Math.* **116** (1985), 11-23.

[BePa2] J.K. Beem, P.E. Parker, *Geodesic completeness and stability*, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **102** (1987), 319-328.

[BePa3] J.K. Beem, P.E. Parker, *The space of geodesics*, *Geom. Dedicata* **38** (1991), 87-99.

[Ca] Y. Carrière, *Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines*, *Invent. Math.*, **95** (1989), 615-628.

[Cl] C.J.S. Clarke, *On the geodesic completeness of causal space-times* *Proc. Cam. Phil. Soc.* **69** (1971), 319-324.

[CoTu1] A.A. Coley, B.O.J. Tupper, *Special conformal Killing vector space-times and simmetry inheritance*, *J. Math. Phys.* **30** (1989), 2616-2625.

- [CoTu2] A.A. Coley, B.O.J. Tupper, *Space-times admitting special affine conformal vectors*, J. Math. Phys. **31** (1990), 649-652.
- [DaGr] G. D'Ambra, M. Gromov, *Lectures on transformations groups: geometry and dynamics*, Surveys in Differential Geometry, **1** (1991), 19-111.
- [Du] K.L. Duggal, *Relativistic fluids and metric symmetries*, J. Math. Phys., **30** (1989), 1316-1321.
- [DuIh] D. Duncan, E. Ihrig, *Incomplete flat homogeneous geometries*, Proceedings Symp. Pure Math. **54** (1993), Part. 2, 197-202.
- [EIMM] D. Eardley, J. Isenberg, J. Marsden, V. Moncrief, *Homothetic and conformal symmetries of solutions to Einstein's equations*, Commun. Math. Phys. **106** (1987), 137-158.
- [ElSc] G.F.R. Ellis, B.G. Schmidt, *Singular space-times*, Gen. Rel. Grav. **7** (1977), 915-953.
- [FaKr] H.M. Farkas, I. Kra, "Riemann Surfaces", Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, N.Y. Inc. 1992.
- [FMNEKTY] J. Friedman, M.S. Morris, I.D. Novikov, F. Echevarría, G. Klinkhammer, K.S. Thorne, U. Yurtsever, *Cauchy problem in spacetimes with a closed timelike curve*, Phys. Rev. D, **42** (1990) 1915-1930.
- [Fr] D. Fried, *Flat spacetimes*, J. Differential Geometry **26** (1987) 385-396.
- [FrNo] V.P. Frolov, I.D. Novikov, *Physical effects in wormholes and time machines*, Phys. Rev. D, **42** (1990) 1057-1065.
- [FrSc] H. Friedrich, B.G. Schmidt, *Conformal geodesics in general relativity*, Proc. R. Soc. Lond. (1987), 171-195.
- [FuAr] P.M.D. Furness, D.K. Arrowsmith, *Locally symmetric spaces*, J. London Math. Soc. **10** (1975), 487-499.
- [FuFe] P.M.D. Furness, E. Fedida, *Sur les structures pseudo-riemanniennes*

*plates des variétés compactes*, J. Nigerian Math. Soc. 5 (1986), 63-77.

[Ga] G.J. Galloway, *Compact Lorentzian manifolds without closed non spacelike geodesics*, Proc. Amer. Math. Soc. 98 (1986), 119-123.

[Ge] R.P. Geroch, *What is a singularity in General Relativity?* Ann. Phys. 48 (1968), 526-540.

[Gi] F. Giannoni, *Geodesics on non static Lorentz manifolds of Reissner-Nordström type*, Math. Ann. 291 (1991), 383-401.

[Go] W.M. Goldman, *Nonstandard Lorentz space forms*, J. Differential Geometry 21 (1985), 301-308.

[GoHi] W. Goldman, M. Hirsch, *Affine manifolds and orbits of algebraic groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 295 (1986), 175-198.

[GoKa] W.M. Goldman, Y. Kamishima, *The fundamental group of a compact flat Lorentz space form is virtually polycyclic*, J. Differential Geometry 19 (1984), 233-240.

[Gu] M. Gutiérrez López, "Singularidades de conexiones", Tesis Doctoral, Univ. Complutense, 1993.

[HaCo] G.S. Hall, J. da Costa, *Affine collineations in space-time*, J. Math. Phys. 29 (1988), 2465-2472..

[HaEl] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, "The Large Scale Structure of Space-time", Cambridge Monographs in Mathematical Physics, Cambridge Univ. Press, 1973.

[Har] S.G. Harris, *What is the Shape of Space in a Spacetime?*, Proceedings Symp. Pure Math., 54 (1993), Part. 2, 287-296.

[Haw] S.W. Hawking, *The Chronology Protection Conjecture*, Phys. Rev. D 46 (1992) 603-611.

[Iv] B. Iversen, "Hyperbolic Geometry", London Mathematical Society Student Texts 25, Cambridge University Press, 1992.

[Ka] Y. Kamishima, *Completeness of Lorentz manifolds of constant curvature admitting Killing vector fields*, J. Differential Geometry 37 (1993), 569-601.

[KiTh] S-W. Kim, K.S. Thorpe, *Do vacuum fluctuations prevent the creation of closed timelike curves?* Phys. Rev. D, 43 (1991), 3929-3947.

[KoNo] S. Kobayashi, K. Nomizu, "Foundations of Differential Geometry", vol. 1, Wiley Inters. N.Y. 1963.

[Kul] R. S. Kulkarni, *An analogue to the Riemann mapping theorem for Lorentz metrics*, Proc. Royal Soc. London.

[Kun] W. Kundt, *Note on the completeness of spacetimes*, Zs. f. Phys. 172 (1963), 488-489.

[La] J. Lafuente López, *A geodesic completeness theorem for locally symmetric Lorentz manifolds*, Rev. Mat. Univ. Complutense Madrid, 1 (1988), 101-110.

[Lo] R.J. Low, *The geometry of the space of null geodesics*, J. Math. Phys. 30 (1989), 809-811.

[Ma] J.E. Marsden, *On completeness of homogeneous pseudo-Riemannian manifolds*, Indiana Univ. Math. J. 22 (1973), 1065-1066.

[Mo] C. Molina, "Causalidad en espacio-tiempos", Tesina de Licenciatura, Universidad de Granada, 1991.

[MTY] M.S. Morris, K.S. Thorne, U. Yurtsever, *Wormholes, Time Machines and the Weak Energy Condition*, Phys. Rev. Lett., 61 (1988), 1446-1449.

[NoOz] K. Nomizu, H. Ozeki *The existence of complete Riemannian metrics* Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 889-891.

[On] B. O'Neill, "Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity", Academic Press, N.Y., 1983.

[Ra] P. Ramond, "Field Theory. A modern primer", Benjamin/Cummings Pub.

Co., Advanced Book Program, Reading, Massachusetts, 1981.

[RoSa1] A. Romero, M. Sánchez, *On the completeness of geodesics obtained as a limit*, J. Math. Phys. **34**, No.8 (1993), 3768-3774.

[RoSa2] A. Romero, M. Sánchez, *New properties and examples of incomplete Lorentzian tori*, J. Math. Phys. **35** (1994) (en prensa).

[RoSa3] A. Romero, M. Sánchez, *On the completeness of certain families of semi-Riemannian manifolds*, Geometriae Dedicata (en prensa).

[RoSa4] A. Romero, M. Sánchez, *Completeness of compact Lorentz manifolds admitting a timelike conformal Killing vector field*, Proc. Amer. Math. Soc. (en prensa).

[RoSa5] A. Romero, M. Sánchez, *On completeness of compact Lorentzian manifolds*, Series on Geometry and Topology, Vol. 6, World Scientific Publishing Co. (en prensa).

[RoSa6] A. Romero, M. Sánchez, *Incomplete Lorentzian tori with a Killing vector field*, Universidad de Granada, 1993 (por publicar).

[RoSa7] A. Romero, M. Sánchez, *The geodesic equation and the equation of the motion of a charged particle*, Universidad de Granada, 1994, en preparación.

[RoSa8] A. Romero, M. Sánchez, *Some sufficient conditions to obtain completeness in Lorentzian manifolds*, Universidad de Granada, 1994, en preparación.

[Sa] M. Sánchez, "Formulación geométrica de la invarianza gauge", Tesina de Licenciatura, Universidad de Granada, 1991.

[SaWu] R.K. Sachs, H. Wu, "General Relativity for Mathematicians" Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, N.Y. Inc., 1977.

[Se] H.J. Seifert, *The causal boundary of space-times*, Gen. Rel. Grav. **1** (1971), 247-259.

[Wa] H. Waelbroek, *Do Universes with Parallel Cosmic Strings or Two-dimensional Wormholes have Closed Timelike Curves?* Gen. Rel. Grav. 23 (1991), 219-233.

[WaWe] R.S. Ward, R.O. Wells Jr., "Twistor Geometry and Field Theory", Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1990.

[Wo] J.A. Wolf, "Spaces of constant curvature", McGraw-Hill, Inc., 1967.

[Yu1] U.Yurtsever, *Test fields on compact space-times*, J. Math. Phys. 31 (1990), 3064-3078.

[Yu2] U.Yurtsever, *A simple proof of geodesical completeness for compact space-times of zero curvature*, J. Math. Phys. 33 (1992), 1295-1300.