

T 11-44

UNIVERSIDAD DE GRANADA



UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Fecha 14/7/03
ENTRADA NUM. 2234

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Matemática Aplicada

**QUASI-INTERPOLANTES SPLINE
DISCRETOS DE NORMA CASI MÍNIMA.
TEORÍA Y APLICACIONES**

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA
N.º Documento b14987685
N.º Copia i17857119

UNIVERSIDAD DE GRANADA
27 JUN. 2003
COMISION DE DOCTORADO

TESIS DOCTORAL

MARÍA JOSÉ IBÁÑEZ PÉREZ

Granada, 2003



UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento de Matemática Aplicada

**QUASI-INTERPOLANTES SPLINE
DISCRETOS DE NORMA CASI MÍNIMA.
TEORÍA Y APLICACIONES**

TESIS DOCTORAL

realizada por
María José Ibáñez Pérez
para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas

Granada, Septiembre de 2003

Memoria titulada *Quasi-interpolantes spline discretos de norma casi mínima. Teoría y Aplicaciones*, realizada en el Departamento de Matemática Aplicada de la Univesidad de Granada, bajo la dirección de los Profesores Doctores D. Paul Sablonnière y D. Domingo Barrera Rosillo, para la obtención del grado de doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas, por la Universidad de Granada.

Vº Bº



Domingo Barrera Rosillo
P.O.

Los Directores



Fdo.: María José Ibáñez Pérez

AUTORIZACIÓN PARA PRESENTACIÓN DE TESIS

D. Paul SABLONNIÈRE y D. Domingo BARRERA ROSILLO Directores de la Tesis QUASI-INTERPOLANTES SPLINE DISCRETOS DE NORMA CASI MÍNIMA. TEORÍA Y APLICACIONES de la que es autora Dña. María José IBÁÑEZ PÉREZ

Programa de Doctorado: MATEMÁTICA APLICADA

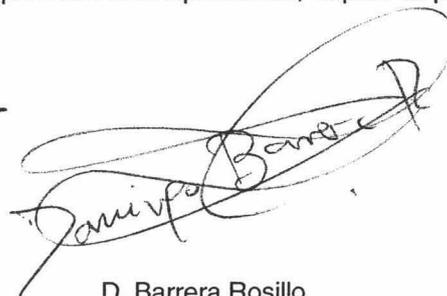
AUTORIZA la presentación de la referida Tesis para su defensa y mantenimiento de acuerdo con lo previsto en el Real Decreto 185/1985, de 23 de enero, emitiendo el siguiente informe:

SE ADJUNTA

Y para que conste y surta sus efectos en el expediente correspondiente, expido la presente en Granada a 17 de junio de 2003.



Fdo. P. Sablonnière



D. Barrera Rosillo

RATIFICACIÓN DEL TUTOR (Cuando el Director no sea Profesor del Departamento)

D.

TUTOR del Doctorando autor de la presente Tesis, ratifica la autorización del Director de la misma para su presentación por las siguientes razones:

Granada a

*A Domi, Alberto, Pablo, Javi y,
muy especialmente, a mi madre,
por su inconmensurable ayuda
para la elaboración de este tesis.*

Quiero dar las gracias a todos aquellos que han hecho posible que este trabajo vea finalmente la luz. A los directores, Profesores Paul Sablonnière y Domingo Barrera, por hacerme partícipe de sus conocimientos de manera que yo pudiera desarrollar mis propias ideas, y por su dedicación para que esta tesis llegase a este punto. A Miguel Pasadas y a Domingo por ofrecerme su tiempo. A Antonio López Carmona, por su apoyo constante desde el principio y por sus críticas siempre constructivas para la mejora de este trabajo. En fin, a mis compañeros del Departamento de Matemática Aplicada, que me han animado durante todo este tiempo.

A mis hijos, Alberto, Pablo y Javi, que han sido los grandes sufridores de todo el proceso de elaboración, discusión y revisión de esta memoria. A toda, toda la familia, que han estado siempre ahí para ayudarme en lo que hiciera falta.

Índice

Introducción	iii
1 Quasi-interpolantes spline discretos univariados de norma infinito casi mínima	1
1.1 Quasi-interpolantes discretos y B-splines de orden par	2
1.2 Quasi-interpolantes discretos cúbicos de norma infinito casi mínima .	13
1.3 Una familia de qid de norma casi mínima	21
2 Quasi-interpolantes spline discretos de norma infinito casi mínima sobre particiones no uniformes de la recta real	29
2.1 Quasi-interpolantes discretos con abscisas de Greville	30
2.2 Quasi-interpolantes spline cuadráticos no uniformes de norma casi mínima	32
2.3 Quasi-interpolantes spline cúbicos de norma casi mínima	38
3 Quasi-interpolantes box-spline discretos de norma casi mínima sobre redes regulares del plano	43
3.1 Preliminares: box-splines	44
3.2 Quasi-interpolantes box-spline discretos de norma casi mínima sobre la red tridireccional	49
3.3 Qid box-spline cuárticos de norma casi mínima sobre la red tridireccional	53
3.4 Qid box-spline de grado siete de norma casi mínima sobre la red tridireccional	62
3.5 Qid box-spline discretos de norma casi mínima sobre la red cuatridireccional	65
3.6 Qid de norma casi mínima y box-spline cuadrático	68
3.7 Qid de norma casi mínima y box-splines cuárticos	74

4	Quasi-interpolantes spline discretos de tipo Chebyshev	79
4.1	Representación integral de los quasi-interpolantes spline discretos exactos sobre espacios de polinomios	80
4.2	El problema de minimización. Existencia de solución	84
4.3	Ejemplos	88
4.4	Quasi-interpolante cúbico clásico frente al casi óptimo de Chebyshev .	91
5	Control local del error de quasi-interpolación	99
4.1	Descripción del problema	100
5.2	El problema del control local del error de quasi-interpolación. Propuesta inicial	105
5.3	Quasi-interpolantes cúbicos de norma casi mínima y control local del error	112
5.4	Una propuesta alternativa para controlar localmente el error	117
	Anexo al capítulo 1	123
	Anexo al capítulo 3	127
	Anexo al capítulo 4	145
	Bibliografía	149

Introducción

Las funciones spline constituyen en la actualidad una herramienta básica en la teoría de aproximación. Desde su introducción en la década de los cuarenta del siglo pasado hasta la actualidad han ido ocupando parcelas cada vez más amplias, tanto científicas como técnicas. Baste citar los dominios de la ingeniería, del tratamiento de la imagen en medicina y de la señal en las telecomunicaciones, la síntesis e imágenes por ordenador...

Un problema básico en el que juegan un papel fundamental es la aproximación de datos empíricos y de funciones de una y varias variables. La construcción de aproximantes spline puede llevarse a cabo de muy diversas formas, entre las que las más conocidas son la interpolación y el ajuste por mínimos cuadrados. La interpolación es una técnica muy empleada, aunque requiere la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, lo que la hace muy costosa computacionalmente. Esto es especialmente evidente cuando se aplica en varias variables. Lo mismo puede decirse de la aproximación por mínimos cuadrados. Las técnicas de quasi-interpolación spline surgen con el ánimo de conseguir buenos aproximantes con un coste moderado. El procesamiento en tiempo real de gran cantidad de datos requiere que el aproximante spline sea construido conforme se dispone de la información, por lo que es necesario diseñar métodos de tipo local que, además, tengan un alto orden de aproximación.

Los quasi-interpolantes spline ocupan un lugar importante en este campo. El estudio en una variable y con nodos uniformemente espaciados se remonta a los trabajos de I. J. Schoenberg, quien consideró como quasi-interpolantes series B-spline en cuyos coeficientes intervienen valores de función o derivadas. El siguiente paso fue la utilización de nodos no uniformemente espaciados, siendo numerosos los autores que han construido quasi-interpolantes univariados en el caso no uniforme, basados en B-splines sobre particiones no uniformes, en la utilización de valores de función o derivadas y en la exigencia de que el operador construido sea exacto sobre un espacio de polinomios o sobre la totalidad del espacio de splines.

Al mismo tiempo se plantea la necesidad de definir quasi-interpolantes multivari-

ados. En el caso de particiones regulares, el papel del B-spline univariado pasa a ser desempeñado por el box-spline o, en general, por B-splines (funciones polinómicas a trozos, de soporte compacto). Los datos que se emplean son valores de función, de derivadas parciales o de valores integrales.

En esta memoria se estudian diversos problemas relativos a la construcción de quasi-interpolantes B-spline discretos en una y dos variables, a los que se exige, entre otras cosas, que sean exactos en el mayor espacio de polinomios contenido en el espacio de funciones spline en el que se trabaja.

El capítulo 1 se centra en la construcción de quasi-interpolantes discretos (qid) simétricos a partir del B-spline de orden par con nodos simples, M_{2m} , exactos en el espacio de los polinomios de grado menor o igual que $2m-1$. Son de la forma

$$Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i(f) M_{2m}(\cdot - i),$$

donde

$$\lambda_i(f) = a_0 f(i) + \sum_{j=1}^n a_j (f(i+j) + f(i-j)),$$

siendo a_0, a_1, \dots, a_n , $n \geq m$, coeficientes que proporcionan la exactitud de Q en el espacio \mathbb{P}_{2m-1} de los polinomios de grado menor o igual que $2m-1$. Como el error de quasi-interpolación se acota de forma estándar haciendo uso de la preservación de \mathbb{P}_{2m-1} , y en la acotación interviene la norma infinito del operador de quasi-interpolación, es natural plantearse construir el quasi-interpolante de norma infinito mínima. Dada la dificultad de minimizar la norma, se recurre a minimizar una cota de la misma.

Se prueba que el problema de minimización considerado tiene solución, proporcionando lo que se denomina quasi-interpolantes de norma (infinito) casi mínima. Cuando la forma lineal coeficiente del qid usa los nodos del soporte del B-spline, caracteriza la solución del problema, dando explícitamente la solución cuando el grado del B-spline es moderado.

En el capítulo 2 se aborda la construcción de qid de norma casi mínima considerando particiones no uniformes de la recta real. En primer lugar, se plantea un problema general de construcción en el que intervienen B-splines de grado par y formas lineales coeficientes definidas a partir de abscisas de Greville. Bajo la hipótesis de que la partición no uniforme verifique una condición con un determinado significado geométrico (que se cumple en el caso uniforme) y de que la forma lineal coeficiente emplee cinco abscisas de Greville, prueba la existencia de dichos qid cuadráticos de norma casi mínima. Además, se acota uniformemente la norma

infinito del operador de quasi-interpolación construido. La técnica desarrollada en el caso cuadrático se extiende, a continuación, al B-spline cúbico (no uniforme), obteniendo resultados similares. En particular, se consigue acotar uniformemente la norma del operador, con una cota más pequeña que la obtenida en el caso cuadrático.

La extensión a dos variables del problema planteado en el capítulo 1 se desarrolla en el capítulo 3. Los B-splines que se emplea son box-splines sobre redes regulares tridireccionales y cuatridireccionales (no equiláteras) del plano. En lo que respecta a la red tridireccional, se plantea el problema de minimización, en el que juegan un papel importante la exactitud en el mayor espacio de polinomios contenido en el espacio engendrado por las trasladadas enteras del box-spline y la estructura hexagonal de los coeficientes de la forma lineal λ_i que interviene en este caso. Se establece la existencia de solución del problema, que resulta ser equivalente a un problema de programación lineal. En general, el problema no tiene solución única, como se prueba considerando el box-spline de grado siete y clase cuatro. Se analiza detalladamente el caso cuártico de clase dos, probando que se tiene la unicidad cualquiera que sea la sucesión hexagonal de coeficientes. Se obtiene una sucesión de operadores de quasi-interpolación que converge en norma infinito al operador de Schoenberg-Marsden. Se muestra, asimismo, que para grado bajo, los qid de norma casi mínima tienen menor norma infinito que los qid correspondientes que aparecen en la literatura.

El problema común planteado en los capítulos 1 y 3 es la minimización de una mayorante de la norma infinito del operador de quasi-interpolación, y el objetivo es construir qid con norma lo más pequeña posible. La acotación estándar del error de quasi-interpolación a partir de la preservación del espacio de polinomios hace que el qid produzca, en general, una cota de error más pequeña. Sin embargo, es razonable pensar que mejores acotaciones del error (por ejemplo, para funciones suficientemente regulares) puedan dar lugar a problemas con el objetivo específico de disminuir el error de quasi-interpolación (no la norma infinito).

El capítulo 4 estudia este problema en su versión B-spline univariada. Tras obtener una representación integral adecuada del qid al que se imponen las condiciones habituales de exactitud y simetría, se plantea un problema de minimización específico y se caracteriza la existencia de solución. Se prueba que siempre existe solución, y que, si las formas lineales coeficiente emplean sólo los nodos que pertenecen al soporte del B-spline, entonces la solución es única. Cada solución da lugar a lo que se denomina qid casi óptimo de Chebyshev. A continuación se compara el qid cúbico clásico con el casi óptimo de Chebyshev obtenido, poniéndose de manifiesto la considerable disminución de la constante que aparece en la acotación del error de quasi-interpolación. Se piensa que un método similar en el

caso bivariado puede proporcionar buenos resultados en comparación con los qid clásicos.

El último capítulo trata nuevamente el problema del error, pero desde una nueva perspectiva. Una de las agradables características de los quasi-interpolantes es su carácter local y se puede plantear la posibilidad de controlar localmente el error cometido al utilizar un quasi-interpolante cúbico clásico, con lo que ello supone de disminución del coste computacional. El objetivo es aproximar la función que se desee de modo que el error disminuya progresivamente sin estar obligados a computar nuevamente el quasi-interpolante en toda la región donde se aproxima. Se propone un método inicial de control que se podría considerar natural, pero que, al usar una función discontinua, produce un efecto no deseado. El quasi-interpolante construido es nuevamente exacto en el espacio de las cúbicas y coincide con el inicialmente calculado en gran parte de de la región donde ya estaba calculado. Se presentan dos alternativas al procedimiento. La primera utiliza un qid cúbico de norma casi mínima con el objetivo de amortiguar el fenómeno indeseado que se producía. La segunda, opta por evitar la intervención de una función discontinua para controlar localmente el error de quasi-interpolación. Ambos procedimientos consiguen disminuir el error y conservar parcialmente el quasi-interpolante construido en la etapa previa. En base a las acotaciones que se establecen para los errores de quasi-interpolación de los nuevos qid se propone la utilización del método basado en el qid de norma casi mínima.

Capítulo 1

Quasi-interpolantes spline discretos univariados de norma infinito casi mínima sobre particiones uniformes

La aproximación de funciones o de datos empíricos es un problema muy frecuente, por lo que las funciones spline en una y varias variables han encontrado numerosas aplicaciones en todas las áreas de las ciencias y la tecnología. La construcción de tales aproximantes spline puede llevarse a cabo de muy diversas formas, entre las que la interpolación y el ajuste por mínimos cuadrados ocupan un lugar importante. El procesamiento en tiempo real de grandes cantidades de datos exige, además, que el aproximante spline sea producido conforme se dispone de la información y tenga un alto orden de aproximación. La interpolación es una técnica muy empleada, aunque requiere la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, lo que la hace muy costosa computacionalmente. Los métodos de quasi-interpolación spline son procedimientos locales de aproximación de funciones o datos discretos, lo que los hace interesantes en problemas prácticos (ver, por ejemplo, [34] y [61], síntesis de imágenes por ordenador; [1], reconstrucción de funciones; [17] y [20], primera etapa de un análisis multiresolución), además de proporcionar nuevas técnicas para abordar problemas clásicos del análisis numérico (ver, por ejemplo, [22], integración numérica y resolución de ecuaciones integrales).

En [5] se construyen quasi-interpolantes (qi) del tipo

$$Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i(f) M_{i,k},$$

siendo $M_{i,k}$ el i -ésimo B-spline de orden $k \in \mathbb{N}$ asociado a la sucesión de nodos $t := (t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$

que cumple la condición $t_i < t_{i+k}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, y λ_i una forma lineal que utiliza valores de función o de derivada. En [35] se define otro método de quasi-interpolación B-spline en el que $\lambda_i(f)$ utiliza valores de f en un esquema de diferencias divididas.

En estos casos el operador Q reproduce el espacio \mathbb{P}_{k-1} de polinomios de grado menor o igual que $k-1$ y proporciona orden de aproximación óptimo.

Si $\lambda_i(f)$ es una combinación lineal finita de valores de f , esta propiedad de exactitud en \mathbb{P}_{k-1} puede ser impuesta directamente para obtener los coeficientes de la combinación lineal (cf. [14]).

En [33] se considera una construcción general de qi B-spline univariados que reproducen no el espacio de polinomios contenido en el espacio de splines sino todo el espacio de funciones spline. De nuevo, la forma lineal coeficiente es una combinación lineal de valores de la función que se quasi-interpola.

Un proceso de construcción de quasi-interpolantes puede basarse, pues, en que

- (a) $\lambda_i(f)$ use sólo valores de f en puntos que pertenecen a un entorno del soporte de $M_{i,k}$ y
- (b) Q reproduzca los polinomios del espacio spline.

Por otra parte, un argumento estándar (ver, por ejemplo, [25], p. 144) muestra que $\|f - Qf\|_\infty \leq (1 + \|Q\|_\infty) \text{dist}(f, S)$ donde S es el espacio reproducido. Es natural plantearse la construcción de tal qi de modo que $\|Q\|_\infty$ sea mínima (cf. [9], p. 73, [54]).

Como se ha indicado, una menor norma infinito implica una mejor cota del error de quasi-interpolación según la desigualdad anterior. Nos planteamos en este capítulo la construcción de qid sobre particiones uniformes de la recta real que verifiquen las propiedades (a) y (b) enunciadas anteriormente y que minimicen la norma infinito del operador en un sentido que se precisará.

El capítulo se estructura como sigue: en la primera sección se construyen qid de norma casi mínima para B-splines de orden par, siendo los resultados análogos para orden impar; en la segunda, se detalla el caso cúbico por su interés práctico y por su utilización en el capítulo 5 (los resultados para el B-spline quíntico se incluyen en un anexo); en la tercera sección se analiza el problema cuando la forma lineal coeficiente del qid usa sólo los nodos del soporte del B-spline, dando explícitamente la solución cuando el grado del B-spline es moderado.

1.1 Quasi-interpolantes discretos y B-splines de orden par

Sea $M := M_{2m}$ el B-spline de orden par $2m$, $m \geq 2$, con soporte $[-m, m]$ centrado en el origen (cf. [59]). Queremos construir operadores de quasi-interpolación B-spline discretos, Q , que presenten las siguientes propiedades:

1. Son exactos en el espacio \mathbb{P}_{2m-1} de los polinomios de grado menor o igual que $2m-1$; es decir, $Qp = p$ para todo $p \in \mathbb{P}_{2m-1}$.
2. Sus funciones fundamentales son simétricas respecto del origen; es decir, si Q se representa como

$$Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(i) L(\cdot - i),$$

entonces la función fundamental L cumple que $L(-x) = L(x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

3. La norma infinito del operador es casi mínima, lo que significa que una determinada cota superior de la norma infinito del operador Q es mínima.

Para ello, sea $n \geq m$ y consideremos el quasi-interpolante discreto (qid) $Q := Q_{m,n}$ dado por la expresión

$$Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(a_0 f(i) + \sum_{j=1}^n a_j (f(i+j) + f(i-j)) \right) M(\cdot - i). \quad (1.1.1)$$

Puede escribirse como

$$Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(i) L(\cdot - i),$$

donde la función fundamental $L := L_{m,n}$ está definida por la igualdad

$$L = a_0 M + \sum_{j=1}^n a_j (M(\cdot + j) + M(\cdot - j)).$$

Es, evidentemente, simétrica respecto del origen.

La norma infinito de Q es la norma de Chebyshev de la función de Lebesgue $\Lambda := \Lambda_{m,n}$, dada por

$$\Lambda = \sum_{i \in \mathbb{Z}} |L(\cdot - i)|,$$

que es 1-periódica. Por tanto,

$$\|Q\|_{\infty} = \max_{x \in [0,1]} \Lambda(x) \leq \nu(a),$$

donde $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)^T$ y

$$\nu(a) = |a_0| + 2 \sum_{i=1}^n |a_i|. \quad (1.1.2)$$

En general, no es fácil determinar la norma infinito del operador discreto (1.1.1), por lo que no plantearémos la construcción del operador de norma infinito mínima. En su lugar, determinaremos los coeficientes a que minimizan la cota superior $\nu(a)$ de la norma infinito de Q , bajo las restricciones lineales impuestas por la exactitud de Q en \mathbb{P}_{2m-1} .

Para obtener éstas, recordemos cómo se expresan los monomios $e_k(x) := x^k$, $0 \leq k \leq 2m-1$, como combinaciones lineales de las trasladadas enteras de M (cf. [12], Teo. 6.2.1, p. 464):

Proposición 1.1.1 *Para $k = 0, 1, \dots, m-1$, se cumple que*

$$e_{2k} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ j^{2k} + \sum_{l=1}^k \frac{(2k)!}{(2k-2l)!} \beta(2l, 2m) j^{2k-2l} \right\} M(\cdot - j) \quad (1.1.3)$$

$$e_{2k+1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ j^{2k+1} + \sum_{l=1}^k \frac{(2k+1)!}{(2k+1-2l)!} \beta(2l, 2m) j^{2k+1-2l} \right\} M(\cdot - j) \quad (1.1.4)$$

donde los valores $\beta(2l, 2m)$ están dados por el desarrollo en serie de potencias

$$\left(\frac{u}{2 \operatorname{sen} \frac{u}{2}} \right)^{2m} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \beta(2l, 2m) u^{2l}, \quad (1.1.5)$$

con $\beta(0, 2m) = 1$.

Nota 1.1.1 *En [59] los coeficientes del desarrollo en serie (1.1.5) se notan $\gamma_{2l}^{(2m)}$ y se indica que $(-1)^l 2^{2l} (2l)! \gamma_{2l}^{(2m)}$ es un polinomio en m de grado l . Estos valores permiten representar las funciones spline de grado menor o igual que $2m-1$ como series B-spline. Por otra parte, en [12], Prop. 6.2.1, p. 464, se prueba que los coeficientes de dicho desarrollo en serie de potencias están relacionados con los números factoriales centrales (cf. [12] y [13]), se reencuentra el resultado de Schoenberg (p. 466) y se establecen (Prop. 6.2.4, p. 467) las igualdades (1.1.3)-(1.1.4). Además, si $0 \leq l \leq m-1$, se cumple que (cf. [12], p. 469)*

$$\beta(2l, 2m) = \frac{(2m-1-2l)!}{(2m-1)!} t(2m, 2m-2l),$$

y, por consiguiente (cf. [12], Prop. 2.6, p. 431),

$$\operatorname{sgn} \beta(2l, 2m) = \operatorname{sgn} t(2m, 2m-2l) = (-1)^l. \quad (1.1.6)$$

En lo sucesivo, escribiremos β_l en lugar de $\beta(2l, 2m)$ si no hay lugar a confusión. En las Tablas 1.1 y 1.2 se muestran algunos valores $t(2m, 2k)$ y $\beta(2l, 2m)$, respectivamente.

k	m									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	-1	4	-36	576	-14400	518400	-25401600	1625702400
2	0	0	1	-5	49	-820	21076	-773136	38402064	-2483133696
3	0	0	0	1	-14	273	-7645	296296	-15291640	1017067024
4	0	0	0	0	1	-30	1023	-44473	2475473	-173721912
5	0	0	0	0	0	1	-55	3003	-191620	14739153
6	0	0	0	0	0	0	1	-91	7462	-669188
7	0	0	0	0	0	0	0	1	-140	16422
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-204
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tabla 1.1: Valores $t(2m, 2k)$ para $2 \leq m \leq 9$.

Nota 1.1.2 En [54], p. 2-3, se parte de los quasi-interpolantes diferenciales proporcionados por la representación de las funciones spline como series B-spline para construir quasi-interpolantes discretos, reemplazando las derivadas por diferencias finitas. Se da una representación de los qid obtenidos a partir de los números factoriales centrales de primera especie y de los operadores en diferencias finitas.

Una vez conocido cómo se expresan los monomios como combinaciones lineales de trasladadas del B-spline, establecemos las condiciones que deben cumplirse para que el operador (1.1.1) deje fijos los monomios de grado par.

Proposición 1.1.2 Para cada $r \leq m - 1$ el operador Q definido por (1.1.1) cumple que $Qe_{2k} = e_{2k}$, $k = 0, 1, \dots, r$, si y sólo si

$$\begin{aligned}
 a_0 + 2 \sum_{i=1}^n a_i &= 1 \\
 \sum_{i=1}^n i^{2l} a_i &= \frac{1}{2} (2l)! \beta_l, \quad 1 \leq l \leq r
 \end{aligned}
 \tag{1.1.7}$$

DEMOSTRACIÓN Para $k = 0, 1, \dots, r$ se cumple que

$$Qe_{2k} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ a_0 j^{2k} + \sum_{i=1}^n a_i \left((j+i)^{2k} + (j-i)^{2k} \right) \right\} M(\cdot - j).$$

m	l								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	$-\frac{1}{6}$							
3	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{30}$						
4	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{120}$	$-\frac{1}{140}$					
5	1	$-\frac{5}{12}$	$\frac{13}{144}$	$\frac{41}{3024}$	$\frac{1}{630}$				
6	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{31}{240}$	$-\frac{139}{6048}$	$\frac{479}{151200}$	$-\frac{1}{2772}$			
7	1	$-\frac{7}{12}$	$\frac{7}{40}$	$-\frac{311}{8640}$	$\frac{37}{6480}$	$-\frac{59}{79200}$	$\frac{1}{12012}$		
8	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{41}{180}$	$-\frac{67}{1260}$	$\frac{2473}{259200}$	$-\frac{4201}{2993760}$	$\frac{266681}{1513512000}$	$-\frac{1}{51480}$	
9	1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{23}{80}$	$-\frac{757}{10080}$	$\frac{2021}{134400}$	$-\frac{4679}{1900800}$	$\frac{3739217}{10897286400}$	$-\frac{63397}{1513512000}$	$\frac{1}{218790}$

Tabla 1.2: Valores $\beta(2l, 2m)$ para $2 \leq m \leq 9$.

Como

$$\begin{aligned} (j+i)^{2k} + (j-i)^{2k} &= \sum_{l=0}^{2k} \binom{2k}{l} (1+(-1)^l) j^{2k-l} i^l \\ &= 2 \sum_{l=0}^k \binom{2k}{2l} j^{2k-2l} i^{2l} \end{aligned}$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} Qe_{2k} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ a_0 j^{2k} + \sum_{i=1}^n a_i 2 \sum_{l=0}^k \binom{2k}{2l} j^{2k-2l} i^{2l} \right\} M(\cdot - j) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \left(a_0 + 2 \sum_{i=1}^n a_i \right) j^{2k} + \sum_{l=1}^k \left(2 \binom{2k}{2l} \sum_{i=1}^n i^{2l} a_i \right) j^{2k-2l} \right\} M(\cdot - j) \end{aligned}$$

Por (1.1.3), $Qe_{2k} = e_{2k}$ si y sólo si

$$a_0 + 2 \sum_{i=1}^n a_{=1i}, \quad 2 \binom{2k}{2l} \sum_{i=1}^n i^{2l} a_i = \frac{(2k)!}{(2k-2l)!} \beta_l \quad 1 \leq l \leq r,$$

de donde se deduce (1.1.7). \square

La reproducción de los monomios de grado impar se sigue de la reproducción de los de grado par.

Capítulo 1

Quasi-interpolantes spline discretos univariados de norma infinito casi mínima sobre particiones uniformes

La aproximación de funciones o de datos empíricos es un problema muy frecuente, por lo que las funciones spline en una y varias variables han encontrado numerosas aplicaciones en todas las áreas de las ciencias y la tecnología. La construcción de tales aproximantes spline puede llevarse a cabo de muy diversas formas, entre las que la interpolación y el ajuste por mínimos cuadrados ocupan un lugar importante. El procesamiento en tiempo real de grandes cantidades de datos exige, además, que el aproximante spline sea producido conforme se dispone de la información y tenga un alto orden de aproximación. La interpolación es una técnica muy empleada, aunque requiere la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, lo que la hace muy costosa computacionalmente. Los métodos de quasi-interpolación spline son procedimientos locales de aproximación de funciones o datos discretos, lo que los hace interesantes en problemas prácticos (ver, por ejemplo, [34] y [61], síntesis de imágenes por ordenador; [1], reconstrucción de funciones; [17] y [20], primera etapa de un análisis multiresolución), además de proporcionar nuevas técnicas para abordar problemas clásicos del análisis numérico (ver, por ejemplo, [22], integración numérica y resolución de ecuaciones integrales).

En [5] se construyen quasi-interpolantes (qi) del tipo

$$Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i(f) M_{i,k},$$

siendo $M_{i,k}$ el i -ésimo B-spline de orden $k \in \mathbb{N}$ asociado a la sucesión de nodos $t := (t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$

que cumple la condición $t_i < t_{i+k}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, y λ_i una forma lineal que utiliza valores de función o de derivada. En [35] se define otro método de quasi-interpolación B-spline en el que $\lambda_i(f)$ utiliza valores de f en un esquema de diferencias divididas.

En estos casos el operador Q reproduce el espacio \mathbb{P}_{k-1} de polinomios de grado menor o igual que $k-1$ y proporciona orden de aproximación óptimo.

Si $\lambda_i(f)$ es una combinación lineal finita de valores de f , esta propiedad de exactitud en \mathbb{P}_{k-1} puede ser impuesta directamente para obtener los coeficientes de la combinación lineal (cf. [14]).

En [33] se considera una construcción general de qi B-spline univariados que reproducen no el espacio de polinomios contenido en el espacio de splines sino todo el espacio de funciones spline. De nuevo, la forma lineal coeficiente es una combinación lineal de valores de la función que se quasi-interpola.

Un proceso de construcción de quasi-interpolantes puede basarse, pues, en que

- (a) $\lambda_i(f)$ use sólo valores de f en puntos que pertenecen a un entorno del soporte de $M_{i,k}$ y
- (b) Q reproduzca los polinomios del espacio spline.

Por otra parte, un argumento estándar (ver, por ejemplo, [25], p. 144) muestra que $\|f - Qf\|_\infty \leq (1 + \|Q\|_\infty) \text{dist}(f, S)$ donde S es el espacio reproducido. Es natural plantearse la construcción de tal qi de modo que $\|Q\|_\infty$ sea mínima (cf. [9], p. 73, [54]).

Como se ha indicado, una menor norma infinito implica una mejor cota del error de quasi-interpolación según la desigualdad anterior. Nos planteamos en este capítulo la construcción de qid sobre particiones uniformes de la recta real que verifiquen las propiedades (a) y (b) enunciadas anteriormente y que minimicen la norma infinito del operador en un sentido que se precisará.

El capítulo se estructura como sigue: en la primera sección se construyen qid de norma casi mínima para B-splines de orden par, siendo los resultados análogos para orden impar; en la segunda, se detalla el caso cúbico por su interés práctico y por su utilización en el capítulo 5 (los resultados para el B-spline quíntico se incluyen en un anexo); en la tercera sección se analiza el problema cuando la forma lineal coeficiente del qid usa sólo los nodos del soporte del B-spline, dando explícitamente la solución cuando el grado del B-spline es moderado.

1.1 Quasi-interpolantes discretos y B-splines de orden par

Sea $M := M_{2m}$ el B-spline de orden par $2m$, $m \geq 2$, con soporte $[-m, m]$ centrado en el origen (cf. [59]). Queremos construir operadores de quasi-interpolación B-spline discretos, Q , que presenten las siguientes propiedades:

1. Son exactos en el espacio \mathbb{P}_{2m-1} de los polinomios de grado menor o igual que $2m-1$; es decir, $Qp = p$ para todo $p \in \mathbb{P}_{2m-1}$.
2. Sus funciones fundamentales son simétricas respecto del origen; es decir, si Q se representa como

$$Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(i) L(\cdot - i),$$

entonces la función fundamental L cumple que $L(-x) = L(x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

3. La norma infinito del operador es casi mínima, lo que significa que una determinada cota superior de la norma infinito del operador Q es mínima.

Para ello, sea $n \geq m$ y consideremos el quasi-interpolante discreto (qid) $Q := Q_{m,n}$ dado por la expresión

$$Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(a_0 f(i) + \sum_{j=1}^n a_j (f(i+j) + f(i-j)) \right) M(\cdot - i). \quad (1.1.1)$$

Puede escribirse como

$$Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(i) L(\cdot - i),$$

donde la función fundamental $L := L_{m,n}$ está definida por la igualdad

$$L = a_0 M + \sum_{j=1}^n a_j (M(\cdot + j) + M(\cdot - j)).$$

Es, evidentemente, simétrica respecto del origen.

La norma infinito de Q es la norma de Chebyshev de la función de Lebesgue $\Lambda := \Lambda_{m,n}$, dada por

$$\Lambda = \sum_{i \in \mathbb{Z}} |L(\cdot - i)|,$$

que es 1-periódica. Por tanto,

$$\|Q\|_{\infty} = \max_{x \in [0,1]} \Lambda(x) \leq \nu(a),$$

donde $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)^T$ y

$$\nu(a) = |a_0| + 2 \sum_{i=1}^n |a_i|. \quad (1.1.2)$$

En general, no es fácil determinar la norma infinito del operador discreto (1.1.1), por lo que no plantearémos la construcción del operador de norma infinito mínima. En su lugar, determinaremos los coeficientes a que minimizan la cota superior $\nu(a)$ de la norma infinito de Q , bajo las restricciones lineales impuestas por la exactitud de Q en \mathbb{P}_{2m-1} .

Para obtener éstas, recordemos cómo se expresan los monomios $e_k(x) := x^k$, $0 \leq k \leq 2m-1$, como combinaciones lineales de las trasladadas enteras de M (cf. [12], Teo. 6.2.1, p. 464):

Proposición 1.1.1 *Para $k = 0, 1, \dots, m-1$, se cumple que*

$$e_{2k} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ j^{2k} + \sum_{l=1}^k \frac{(2k)!}{(2k-2l)!} \beta(2l, 2m) j^{2k-2l} \right\} M(\cdot - j) \quad (1.1.3)$$

$$e_{2k+1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ j^{2k+1} + \sum_{l=1}^k \frac{(2k+1)!}{(2k+1-2l)!} \beta(2l, 2m) j^{2k+1-2l} \right\} M(\cdot - j) \quad (1.1.4)$$

donde los valores $\beta(2l, 2m)$ están dados por el desarrollo en serie de potencias

$$\left(\frac{u}{2 \operatorname{sen} \frac{u}{2}} \right)^{2m} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \beta(2l, 2m) u^{2l}, \quad (1.1.5)$$

con $\beta(0, 2m) = 1$.

Nota 1.1.1 *En [59] los coeficientes del desarrollo en serie (1.1.5) se notan $\gamma_{2l}^{(2m)}$ y se indica que $(-1)^l 2^{2l} (2l)! \gamma_{2l}^{(2m)}$ es un polinomio en m de grado l . Estos valores permiten representar las funciones spline de grado menor o igual que $2m-1$ como series B-spline. Por otra parte, en [12], Prop. 6.2.1, p. 464, se prueba que los coeficientes de dicho desarrollo en serie de potencias están relacionados con los números factoriales centrales (cf. [12] y [13]), se reencuentra el resultado de Schoenberg (p. 466) y se establecen (Prop. 6.2.4, p. 467) las igualdades (1.1.3)-(1.1.4). Además, si $0 \leq l \leq m-1$, se cumple que (cf. [12], p. 469)*

$$\beta(2l, 2m) = \frac{(2m-1-2l)!}{(2m-1)!} t(2m, 2m-2l),$$

y, por consiguiente (cf. [12], Prop. 2.6, p. 431),

$$\operatorname{sgn} \beta(2l, 2m) = \operatorname{sgn} t(2m, 2m-2l) = (-1)^l. \quad (1.1.6)$$

En lo sucesivo, escribiremos β_l en lugar de $\beta(2l, 2m)$ si no hay lugar a confusión. En las Tablas 1.1 y 1.2 se muestran algunos valores $t(2m, 2k)$ y $\beta(2l, 2m)$, respectivamente.

k	m									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	-1	4	-36	576	-14400	518400	-25401600	1625702400
2	0	0	1	-5	49	-820	21076	-773136	38402064	-2483133696
3	0	0	0	1	-14	273	-7645	296296	-15291640	1017067024
4	0	0	0	0	1	-30	1023	-44473	2475473	-173721912
5	0	0	0	0	0	1	-55	3003	-191620	14739153
6	0	0	0	0	0	0	1	-91	7462	-669188
7	0	0	0	0	0	0	0	1	-140	16422
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-204
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tabla 1.1: Valores $t(2m, 2k)$ para $2 \leq m \leq 9$.

Nota 1.1.2 En [54], p. 2-3, se parte de los quasi-interpolantes diferenciales proporcionados por la representación de las funciones spline como series B-spline para construir quasi-interpolantes discretos, reemplazando las derivadas por diferencias finitas. Se da una representación de los qid obtenidos a partir de los números factoriales centrales de primera especie y de los operadores en diferencias finitas.

Una vez conocido cómo se expresan los monomios como combinaciones lineales de traladadas del B-spline, establecemos las condiciones que deben cumplirse para que el operador (1.1.1) deje fijos los monomios de grado par.

Proposición 1.1.2 Para cada $r \leq m - 1$ el operador Q definido por (1.1.1) cumple que $Qe_{2k} = e_{2k}$, $k = 0, 1, \dots, r$, si y sólo si

$$\begin{aligned}
 a_0 + 2 \sum_{i=1}^n a_i &= 1 \\
 \sum_{i=1}^n i^{2l} a_i &= \frac{1}{2} (2l)! \beta_l, \quad 1 \leq l \leq r
 \end{aligned}
 \tag{1.1.7}$$

DEMOSTRACIÓN Para $k = 0, 1, \dots, r$ se cumple que

$$Qe_{2k} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ a_0 j^{2k} + \sum_{i=1}^n a_i \left((j+i)^{2k} + (j-i)^{2k} \right) \right\} M(\cdot - j).$$

m	l								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	$-\frac{1}{6}$							
3	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{30}$						
4	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{120}$	$-\frac{1}{140}$					
5	1	$-\frac{5}{12}$	$\frac{13}{144}$	$\frac{41}{3024}$	$\frac{1}{630}$				
6	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{31}{240}$	$-\frac{139}{6048}$	$\frac{479}{151200}$	$-\frac{1}{2772}$			
7	1	$-\frac{7}{12}$	$\frac{7}{40}$	$-\frac{311}{8640}$	$\frac{37}{6480}$	$-\frac{59}{79200}$	$\frac{1}{12012}$		
8	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{41}{180}$	$-\frac{67}{1260}$	$\frac{2473}{259200}$	$-\frac{4201}{2993760}$	$\frac{266681}{1513512000}$	$-\frac{1}{51480}$	
9	1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{23}{80}$	$-\frac{757}{10080}$	$\frac{2021}{134400}$	$-\frac{4679}{1900800}$	$\frac{3739217}{10897286400}$	$-\frac{63397}{1513512000}$	$\frac{1}{218790}$

Tabla 1.2: Valores $\beta(2l, 2m)$ para $2 \leq m \leq 9$.

Como

$$\begin{aligned} (j+i)^{2k} + (j-i)^{2k} &= \sum_{l=0}^{2k} \binom{2k}{l} (1+(-1)^l) j^{2k-l} i^l \\ &= 2 \sum_{l=0}^k \binom{2k}{2l} j^{2k-2l} i^{2l} \end{aligned}$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} Qe_{2k} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ a_0 j^{2k} + \sum_{i=1}^n a_i 2 \sum_{l=0}^k \binom{2k}{2l} j^{2k-2l} i^{2l} \right\} M(\cdot - j) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \left(a_0 + 2 \sum_{i=1}^n a_i \right) j^{2k} + \sum_{l=1}^k \left(2 \binom{2k}{2l} \sum_{i=1}^n i^{2l} a_i \right) j^{2k-2l} \right\} M(\cdot - j) \end{aligned}$$

Por (1.1.3), $Qe_{2k} = e_{2k}$ si y sólo si

$$a_0 + 2 \sum_{i=1}^n a_{=1i}, \quad 2 \binom{2k}{2l} \sum_{i=1}^n i^{2l} a_i = \frac{(2k)!}{(2k-2l)!} \beta_l \quad 1 \leq l \leq r,$$

de donde se deduce (1.1.7). \square

La reproducción de los monomios de grado impar se sigue de la reproducción de los de grado par.

Proposición 1.1.3 *Sea $0 \leq r \leq m - 1$. Si $Qe_{2k} = e_{2k}$ para $0 \leq k \leq r$ entonces $Qe_{2r+1} = e_{2r+1}$.*

DEMOSTRACIÓN Se tiene que

$$\begin{aligned} Qe_{2r+1} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ a_0 j^{2r+1} + \sum_{i=1}^n a_i \left((j+i)^{2r+1} + (j-i)^{2r+1} \right) \right\} M(\cdot - j) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \left(a_0 + 2 \sum_{i=1}^n a_i \right) j^{2r+1} + \sum_{l=1}^r \left(2 \binom{2r+1}{2l} \sum_{i=1}^n i^{2l} a_i \right) j^{2r+1-2l} \right\} M(\cdot - j) \end{aligned}$$

Por (1.1.7),

$$Qe_{2r+1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ j^{2r+1} + \sum_{l=1}^r \frac{(2r+1)!}{(2r+1-2l)!} \beta_l j^{2r+1-2l} \right\} M(\cdot - j).$$

De (1.1.4) se deduce que $Qe_{2r+1} = e_{2r+1}$. \square

Las dos proposiciones precedentes caracterizan los coeficientes que dan lugar a un operador exacto.

Proposición 1.1.4 *El operador Q dado por (1.1.1) es exacto en \mathbb{P}_{2m-1} si y sólo si*

$$\begin{aligned} a_0 + 2 \sum_{i=1}^n a_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^n i^{2l} a_i &= \frac{1}{2} (2l)! \beta_l, \quad 1 \leq l \leq m-1 \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

Sea $V := V_{m,n} = \{a \in \mathbb{R}^{n+1} : a \text{ cumple (1.1.8)}\}$. Construiremos quasi-interpolantes B-spline discretos minimizando la cota $\nu(a)$ del operador Q dado por (1.1.1) bajo las restricciones (1.1.8); es decir, consideramos el siguiente problema de minimización:

Problema 1.1.5 *Resolver $\text{Min} \{\nu(a), a \in V\}$.*

Definición 1.1.6 *Si a es solución del Problema 1.1.5, entonces el correspondiente qid dado por (1.1.1) se dice qid de norma casi mínima relativo a n .*

Resolviendo el sistema (1.1.8) en $a_0, a_{n-m+2}, \dots, a_n$, hay constantes $C_{i,j}$ (dependientes de n y m) tales que

$$a_i = a_i^* - \sum_{j=1}^{n-m+1} C_{i,j} a_j, \quad i \in \{0, n-m+2, \dots, n\}, \tag{1.1.9}$$

donde $(a_0^*, a_{n-m+2}^*, \dots, a_n^*)^T \in \mathbb{R}^m$ es la única solución del sistema resultante al hacer $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-m+1} = 0$ en (1.1.8).

Sean $a^* = (a_0^*, 0, \dots, 0, 2a_{n-m+2}^*, \dots, 2a_n^*)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $S = \{Ac : c \in \mathbb{R}^{n-m+1}\}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} C_{0,1} & C_{0,2} & \cdots & C_{0,n-m+1} \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \\ 2C_{n-m+2,1} & 2C_{n-m+2,2} & \cdots & 2C_{n-m+2,n-m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2C_{n,1} & 2C_{n,2} & \cdots & 2C_{n,n-m+1} \end{pmatrix}.$$

Por (1.1.9), resolver el Problema 1.1.5 equivale a minimizar la expresión

$$\left| a_0^* - \sum_{j=1}^{n-m+1} C_{0,j} a_j \right| + 2 \sum_{i=1}^{n-m+1} |a_i| + 2 \sum_{i=n-m+2}^n \left| a_i^* - \sum_{j=1}^{n-m+1} C_{i,j} a_j \right|,$$

que es la l_1 -norma de $a^* - A\tilde{a}$, donde $\tilde{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-m+1})^T$. Se deduce, pues, el siguiente resultado:

Proposición 1.1.7 *a es solución del Problema 1.1.5 si y sólo si \tilde{a} es la mejor l_1 -aproximación de a^* en S . En consecuencia, el Problema 1.1.5 tiene al menos una solución.*

Nota 1.1.3 *Sea $r := r(\tilde{a}) = a^* - A\tilde{a}$. La función $\|a^* - A\tilde{a}\|_1 = \|r(\tilde{a})\|_1$ define una región convexa en \mathbb{R}^{n-m+1} cuyos vértices corresponden a los puntos donde $r_{i_1} = r_{i_2} = \dots = r_{i_{n-m}} = 0$ para $(n-m)$ -uplas de índices. Este resultado permite calcular la mejor l_1 -aproximación de a^* en S para valores moderados de m y n .*

Nota 1.1.4 *El problema de la mejor l_1 -aproximación lineal ha sido ampliamente estudiado (ver, por ejemplo, [66], donde se presenta una exposición histórica de la aproximación en espacios vectoriales normados) y se han desarrollado numerosas técnicas de resolución. Una de ellas consiste en convertirlo en un problema de programación lineal (cf. [65], cap. 6). Si se introducen variables no negativas $u_1, \dots, u_{n-m+1}, v_1, \dots, v_{n-m+1}$ de forma que $r_i = u_i - v_i$, y se escribe $a_i = c_i - d_i$, $i = 1, \dots, n-m+1$, $c_i, d_i \geq 0$, entonces el Problema 1.1.5 es equivalente al problema de programación lineal*

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \sum_{i=1}^{n-m+1} (u_i + v_i) \\ & \text{sujeto a} && u - v + A(c - d) = a^* \\ & && u, v, c, d \geq 0 \end{aligned}$$

donde $u = (u_1, \dots, u_{n-m+1})^T$, $v = (v_1, \dots, v_{n-m+1})^T$, $c = (c_1, \dots, c_{n-m+1})^T$ y $d = (d_1, \dots, d_{n-m+1})^T$. Las restricciones $u, v, c, d \geq 0$ se interpretan de la manera usual. Si I denota la matriz identidad de orden $n - m + 1$, $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{n-m+1}$ y $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{n-m+1}$, el problema anterior se escribe como

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ c \\ d \end{pmatrix} \\ & \text{sujeto a} \quad \begin{pmatrix} I & -I & A & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ c \\ d \end{pmatrix} = a^* \\ & \quad \quad \quad u, v, c, d \geq 0 \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

Este problema está en forma estándar y se puede calcular una solución aplicando el método del simplex. En la elección de una solución básica factible inicial juegan un papel importante los signos de las componentes del vector a^* .

En [43] se consideran algoritmos simpliciales para minimizar funciones poliédricas.

Determinemos el signo de cada una de las componentes de a^* , además de establecer un resultado necesario más adelante. Para ello, notemos $D(x_1, x_2, \dots, x_r)$ al determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_r^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{2r-2} & x_2^{2r-2} & \dots & x_r^{2r-2} \end{pmatrix}$$

y $\text{sim}_k(x_1, x_2, \dots, x_r)$ a la función simétrica de orden k de los argumentos $x_1^2, x_2^2, \dots, x_r^2$, es decir (cf. [60], p. 185)

$$\begin{aligned} \text{sim}_0(x_1, x_2, \dots, x_r) &= 1 \\ \text{sim}_k(x_1, x_2, \dots, x_r) &= \sum_{1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_k \leq r} x_{l_1}^2 x_{l_2}^2 \dots x_{l_k}^2 \end{aligned}$$

El vector $(a_0^*, a_{n-m+2}^*, \dots, a_n^*)^T$ es la única solución del sistema resultante al hacer $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-m+1} = 0$ en el sistema (1.1.8), por lo que

$$C(a_0^*, a_{n-m+2}^*, \dots, a_n^*)^T = \gamma, \tag{1.1.11}$$

donde

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & (n-m+2)^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (n-m+2)^{2m-2} & \cdots & n^{2m-2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}2!\beta_1 \\ \vdots \\ \frac{1}{2}(2m-2)!\beta_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Proposición 1.1.8 *Se cumple que*

$$a_0^* = \frac{1}{\prod_{i=2}^m (n-m+i)^2} \sum_{i=1}^m (2i-2)! |\beta_{i-1}| \text{sim}_{m-i}(n-m+2, \dots, n) \quad (1.1.12)$$

y, para $j = 2, \dots, m$,

$$a_{n-m+j}^* = \frac{(-1)^{j-1} D(n-m+2, \dots, n-m+j-1, n-m+j+1, \dots, n)}{2(n-m+j)^2 D(n-m+2, \dots, n)} \\ \times \sum_{i=1}^{m-1} (2i)! |\beta_i| \text{sim}_{m-1-i}(n-m+2, \dots, n-m+j-1, n-m+j+1, \dots, n) \quad (1.1.13)$$

En consecuencia, $a_0^* > 0$ y $(-1)^{j-1} a_{n-m+j}^* > 0$ para $j = 2, \dots, m$.

DEMOSTRACIÓN Para $i = 1, 2, \dots, r$, notemos $D_i(x_1, \dots, x_r)$ al determinante obtenido al eliminar la i -ésima fila y la primera columna en $D(x_1, \dots, x_r)$. Por (1.1.11),

$$\det C = D(n-m+2, \dots, n) \prod_{i=2}^m (n-m+i)^2$$

y es positivo pues $n-m+2 < \dots < n$.

Resolviendo el sistema (1.1.11), tenemos que

$$a_0^* = \frac{1}{\det C} N_0,$$

donde

$$N_0 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \frac{1}{2}2!\beta_1 & (n-m+2)^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}(2m-2)!\beta_{m-1} & (n-m+2)^{2m-2} & \cdots & n^{2m-2} \end{pmatrix} \\ = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2!\beta_1 & (n-m+2)^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (2m-2)!\beta_{m-1} & (n-m+2)^{2m-2} & \cdots & n^{2m-2} \end{pmatrix}$$

Desarrollando el determinante por los elementos de la primera columna y teniendo en cuenta que $\beta_0 = 1$, podemos escribir

$$N_0 = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} (2i-2)! \beta_{i-1} D_i(1, n-m+2, \dots, n).$$

Por (1.1.6),

$$\beta_{i-1} = (-1)^{i-1} |\beta_{i-1}|.$$

Por tanto,

$$N_0 = \sum_{i=1}^m (2i-2)! |\beta_{i-1}| D_i(1, n-m+2, \dots, n).$$

Como

$$D_i(1, n-m+2, \dots, n) = \text{sim}_{m-i}(n-m+2, \dots, n) D(n-m+2, \dots, n),$$

se deduce sin más (1.1.12).

Sea ahora $j = 2, \dots, m$. Por (1.1.11), se tiene que

$$a_{n-m+j}^* = \frac{1}{\det C} N_{n-m+j},$$

donde N_{n-m+j} es el determinante de la matriz obtenida al sustituir en C la columna $(2, (n-m+j)^2, \dots, (n-m+j)^{2m-2})^T$ por γ . Entonces

$$N_{n-m+j} = \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 2 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & \dots & (n-m+j-1)^2 & \frac{1}{2} 2! \beta_1 & (n-m+j+1)^2 & \dots & n^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (n-m+j-1)^{2m-2} & \frac{1}{2} (2m-2)! \beta_{m-1} & (n-m+j+1)^{2m-2} & \dots & n^{2m-2} \end{pmatrix}$$

Desarrollando por los elementos de la primera columna e intercambiándolas posteriormente en el determinante que resulta para que la columna con los coeficientes de γ pase a ser la primera, queda que

$$N_{n-m+j} = \frac{1}{2} (-1)^{j-2} \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^m (n-m+i)^2 \times \det \begin{pmatrix} 2! \beta_1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (2m-2)! \beta_{m-1} & \dots & (n-m+j-1)^{2m-4} & (n-m+j+1)^{2m-4} & \dots & n^{2m-4} \end{pmatrix}$$

Seguidamente, desarrollando por los elementos de la primera columna, podemos escribir

$$N_{n-m+j} = \frac{1}{2} (-1)^{j-2} \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^m (n-m+i)^2 \\ \times \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i+1} (2i)! \beta_i D_i(1, n-m+2, \dots, n-m+j-1, n-m+j+1, \dots, n)$$

Como $\beta_i = (-1)^i |\beta_i|$ y

$$D_i(1, n-m+2, \dots, n-m+j-1, n-m+j+1, \dots, n) \\ = \text{sim}_{m-1-i}(n-m+2, \dots, n-m+j-1, n-m+j+1, \dots, n) \\ \times D(n-m+2, \dots, n-m+j-1, n-m+j+1, \dots, n),$$

podemos escribir

$$N_{n-m+j} = \frac{1}{2} (-1)^{j-1} \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^m (n-m+i)^2 \\ \times D(n-m+2, \dots, n-m+j-1, n-m+j+1, \dots, n) \\ \times \sum_{i=1}^{m-1} (2i)! |\beta_i| \text{sim}_{m-1-i}(n-m+2, \dots, n-m+j-1, n-m+j+1, \dots, n)$$

Por tanto,

$$a_{n-m+j}^* = \frac{N_{n-m+j}}{\det C} \\ = \frac{(-1)^{j-1} \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^m (n-m+i)^2}{2 \prod_{i=2}^m (n-m+i)^2} \frac{D(n-m+2, \dots, n-m+j-1, n-m+j+1, \dots, n)}{D(n-m+2, \dots, n)} \\ \times \sum_{i=1}^{m-1} (2i)! |\beta_i| \text{sim}_{m-1-i}(n-m+2, \dots, n-m+j-1, n-m+j+1, \dots, n) \\ = \frac{(-1)^{j-1}}{2(n-m+j)^2} \frac{D(n-m+2, \dots, n-m+j-1, n-m+j+1, \dots, n)}{D(n-m+2, \dots, n)} \\ \times \sum_{i=1}^{m-1} (2i)! |\beta_i| \text{sim}_{m-1-i}(n-m+2, \dots, n-m+j-1, n-m+j+1, \dots, n)$$

con lo que concluye la demostración de (1.1.13). El signo de a_0^* y a_{n-m+j}^* , $j = 2, \dots, m$, se deduce de (1.1.12) y (1.1.13), respectivamente. \square

Nota 1.1.5 *La Proposición 1.1.8 proporciona el signo de cada componente del vector a^* que forma parte de las restricciones del problema de programación lineal (1.1.10). Por tanto, una solución factible básica inicial se obtiene de forma inmediata ([65], p. 124): Como $a_0^* > 0$, el vector $(1, 0, \dots, 0)$ puede estar en la matriz básica inicial; del mismo modo, como $(-1)^{j-1} a_{n-m+j}^* > 0$ para $j = 2, \dots, m$, el vector $(0, \dots, (-1)^{j-1}, \dots, 0)$, en el que $(-1)^{j-1}$ aparece en la posición j -ésima, estará en dicha matriz.*

1.2 Quasi-interpolantes discretos cúbicos de norma infinito casi mínima

Consideremos en primer lugar el caso cúbico ($m = 2$). Se tiene que

$$\begin{aligned} e_0 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} M_4(\cdot - i) & e_2 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} (i^2 - \frac{1}{3}) M_4(\cdot - i) \\ e_1 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} i M_4(\cdot - i) & e_3 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} (i^3 - i) M_4(\cdot - i). \end{aligned}$$

Para $n \geq 2$, las igualdades (1.1.7) proporcionan las condiciones que garantizan la exactitud de $Q_{4,n}$ en \mathbb{P}_3 :

$$\begin{aligned} a_0 + 2 \sum_{i=1}^n a_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^n i^2 a_i &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Este sistema se resuelve en términos de las variables a_1, \dots, a_{n-m+1} , es decir, la solución se expresa como función afín de a_1, \dots, a_{n-m+1} :

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 + \frac{1}{3n^2} + \sum_{i=1}^{n-1} 2 \left(\frac{i^2}{n^2} - 1 \right) a_i \\ a_n &= -\frac{1}{6n^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i^2}{n^2} a_i \end{aligned}$$

Proposición 1.2.1 $(1 + \frac{1}{3n^2}, 0, \dots, 0, -\frac{1}{6n^2})^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ resuelve el Problema 1.1.5 en el caso cúbico.

DEMOSTRACIÓN La función $\nu_{4,n}(a) = |a_0| + 2 \sum_{i=1}^n |a_i|$ coincide sobre el espacio $V_{4,n}$ definido por las restricciones que dan la exactitud en \mathbb{P}_3 con la función $\|\lambda(a_1, \dots, a_{n-1})\|_1$, donde

$$\lambda(a_1, \dots, a_{n-1}) = \left(1 + \frac{1}{3n^2} + \sum_{i=1}^{n-1} 2 \left(\frac{i^2}{n^2} - 1 \right) a_i, 2a_1, \dots, 2a_{n-1}, \frac{1}{6n^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2i^2}{n^2} a_i \right)^T.$$

Por tanto, $(1 + \frac{1}{3n^2}, 0, \dots, 0, -\frac{1}{6n^2})^T$ es solución del Problema 1.1.5 si y sólo si $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ minimiza la función $\|\lambda(a_1, \dots, a_{n-1})\|_1$.

Para cada $i = 1, \dots, n-1$, notemos $\lambda_i = \frac{\partial \lambda}{\partial a_i}$. Como λ es afín, λ_i es constante. Entonces,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \left(2 \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right), 2, 0, \dots, 0, 2 \frac{1}{n^2} \right)^T \\ \lambda_2 &= \left(2 \left(\frac{2^2}{n^2} - 1 \right), 0, 2, \dots, 0, 2 \frac{2^2}{n^2} \right)^T \\ &\vdots \\ \lambda_{n-1} &= \left(2 \left(\frac{(n-1)^2}{n^2} - 1 \right), 0, 0, \dots, 2, 2 \frac{(n-1)^2}{n^2} \right)^T \end{aligned}$$

Sea $v = (v_0, v_1, \dots, v_n)^T$ el vector de componentes $v_0 = v_n = 1$ y, para $i = 1, \dots, n-1$,

$$v_i = 1 - 2 \frac{i^2}{n^2}.$$

Como $\lambda(0) = (1 + \frac{1}{3n^2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{3n^2})^T$, el signo de su primera componente (que es no nula) coincide con el de v_0 , y lo mismo ocurre con el de la última componente y v_n .

Por otra parte, $|v_0| = |v_n| = 1$, y, para cada $i = 1, \dots, n-1$, se cumple que

$$1 - 2 \frac{(n-1)^2}{n^2} \leq 1 - 2 \frac{i^2}{n^2} \leq 1 - 2 \frac{1}{n^2},$$

por lo que $-1 < v_i < 1$. En definitiva, $|v_i| \leq 1$ para $i = 0, 1, \dots, n$.

Además,

$$v^T \lambda_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

En consecuencia (cf. [65], Teo. 1.7, p. 16), $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ minimiza la función $\|\lambda(a_1, \dots, a_{n-1})\|_1$ y $(1 + \frac{1}{3n^2}, 0, \dots, 0, -\frac{1}{6n^2})^T$ es solución del Problema 1.1.5 cuando $m = 2$. \square

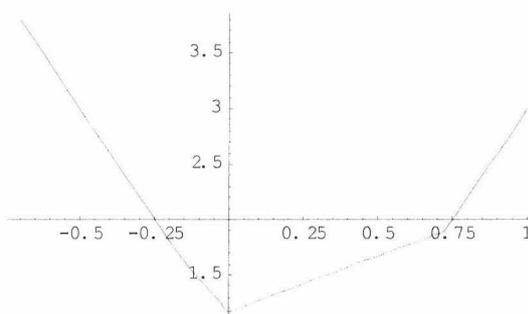


Figura 1.1: Gráfica de $\nu_{4,2}$ en un entorno del origen.

Como consecuencia, el quasi-interpolante

$$Q_{4,n}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ \left(1 + \frac{1}{3n^2} \right) f(i) - \frac{1}{6n^2} (f(i+n) + f(i-n)) \right\} M_4(\cdot - i) \quad (1.2.1)$$

es un quasi-interpolante de norma uniforme casi mínima.

Nota 1.2.1 *Un estudio detallado de la función convexa $\|\lambda(a_1, \dots, a_{n-1})\|_1$ en un entorno del origen muestra que $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ es el único punto donde $\|\lambda(a_1, \dots, a_{n-1})\|_1$ alcanza su mínimo absoluto, por lo que (1.2.1) es el único qid de norma casi mínima relativo a n .*

La Figura 1.1 muestra la gráfica de la función $\nu_{4,2}$ en un entorno del origen.

Las gráficas de la función $\nu_{4,3}$ y de sus curvas de nivel aparecen en las Figuras 1.2 y 1.3, respectivamente.

Sea $S_4(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ el espacio de las funciones spline cúbicas de clase $C^2(\mathbb{R})$ con nodos enteros. Es inmediato probar el siguiente resultado:

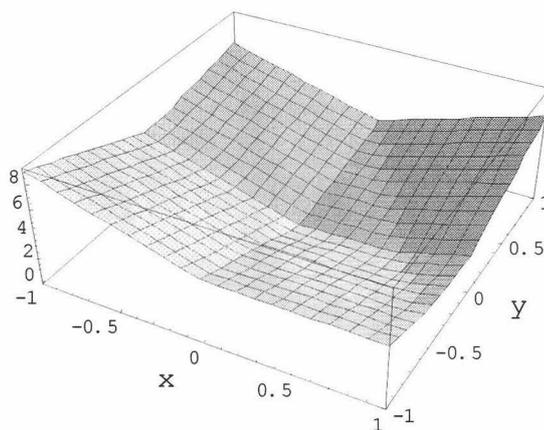
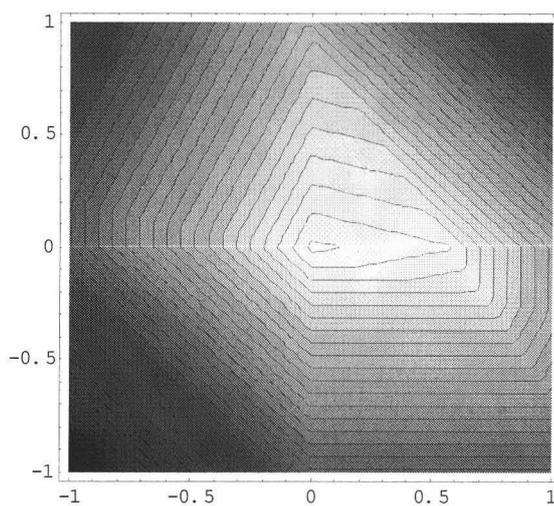
Proposición 1.2.2 *Para cada $n \geq 2$, el operador $Q_{4,n} : C(\mathbb{R}) \rightarrow S_4(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ dado por (1.2.1) es exacto en \mathbb{P}_3 y*

$$\|Q_{4,n}\|_\infty \leq \frac{3n^2 + 2}{3n^2}.$$

Entre todos los qid del tipo (1.1.1) es el que minimiza la suma de coeficientes de la forma lineal asociada.

Proposición 1.2.3 *La sucesión $(Q_{4,n})_{n \geq 2}$ dada por (1.2.1) converge en la norma infinito al operador de Schoenberg $S_4 : C(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{S_4}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ definido por*

$$S_4f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(i) M_4(\cdot - i).$$

Figura 1.2: Gráfica de $\nu_{4,3}$ en un entorno del origen.Figura 1.3: Curvas de nivel de la función $\nu_{4,3}$ en un entorno del origen.

DEMOSTRACIÓN Sea $f \in C(\mathbb{R})$ tal que $\|f\|_\infty \leq 1$. Se cumple que

$$\begin{aligned} |Q_{4,n}f - S_4f| &\leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left| -\frac{1}{6n^2}f(i+n) + \frac{1}{3n^2}f(i) - \frac{1}{6n^2}f(i-n) \right| M_4(\cdot - i) \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\frac{2}{3n^2} \|f\|_\infty \right) M_4(\cdot - i) \\ &\leq \frac{2}{3n^2} \end{aligned}$$

y, por tanto, $\|Q_{4,n} - S_4\|_\infty \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. \square

Proposición 1.2.4 Para cada $n \geq 4$ se verifica que $\|Q_{4,n}\|_\infty = \frac{3n^2 + 2}{3n^2}$.

DEMOSTRACIÓN La función de Lebesgue correspondiente a $Q_{4,n}$ es

$$\Lambda_{4,n}(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left| -\frac{1}{6n^2}M_4(x-i+n) + \frac{3n^2+1}{3n^2}M_4(x-i) - \frac{1}{6n^2}M_4(x-i-n) \right|.$$

Para $n \geq 4$ los interiores de $M_4(\cdot - i \pm n)$ y $M_4(\cdot - i)$ son disjuntos, por lo que

$$\begin{aligned} \Lambda_{4,n}(x) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{6n^2}M_4(x-i+n) + \frac{3n^2+1}{3n^2}M_4(x-i) + \frac{1}{6n^2}M_4(x-i-n) \right) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\frac{3n^2+1}{3n^2} + 2\frac{1}{6n^2} \right) M_4(x-i) \\ &= \frac{3n^2+2}{3n^2} \end{aligned}$$

con lo que concluye la demostración. \square

Para determinar el valor de la norma infinito del operador $Q_{4,n}$ cuando $n = 2, 3$ utilizaremos la representación de Bernstein-Bézier (ver, por ejemplo, [17], cap. 1).

Sea $b_l^{2m}(t) = \binom{2m-1}{l} t^l (1-t)^{2m-1-l}$ el l -ésimo polinomio de Bernstein de grado $2m-1$ relativo al intervalo $[0, 1]$, $0 \leq l \leq 2m-1$. Entonces $b_{l,j}^{2m} := b_l^{2m}(\cdot - j)$ es el l -ésimo polinomio de Bernstein de grado $2m-1$ relativo al intervalo $I_j = [j, j+1]$, $j \in \mathbb{Z}$.

Si s es una función spline polinómica de orden $2m$ con nodos en \mathbb{Z} , entonces su restricción s_j al intervalo I_j es de la forma

$$s_j(x) = \sum_{k=0}^{2m-1} \sigma_k(j) b_{j,k}^{2m}(x).$$

Los valores $\sigma_k(j)$ son los coeficientes de Bernstein-Bézier (BB-coeficientes) de s en I_j . Cuando s es el B-spline M_{2m} , los BB-coeficientes se calculan de forma recurrente (cf. [17], Teo. 1.8, p. 11).

Llamamos matriz de BB-coeficientes de s en $[j, j+k]$, $j \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{N}$, a la matriz de tamaño $k \times m$ cuya r -ésima fila, $1 \leq r \leq k$, contiene (de izquierda a derecha) los BB-coeficientes de s correspondientes al intervalo $[j+r-1, j+r]$.

La matriz de BB-coeficientes del B-spline cúbico M_4 en $[-2, 2]$ es (ver, por ejemplo, [17], p. 13)

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 1.2.5 *Se cumple que $\|Q_{4,2}\|_\infty = \frac{41}{36}$ y $\|Q_{4,3}\|_\infty = \frac{29}{27}$.*

DEMOSTRACIÓN Para $n = 2, 3$ escribimos

$$Q_{4,n}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(i) L_{4,n}(\cdot - i),$$

donde

$$L_{4,n} = -\frac{1}{6n^2}M_4(\cdot + n) + \frac{3n^2 + 1}{3n^2}M_4 - \frac{1}{6n^2}M_4(\cdot - n).$$

A partir de las matrices de BB-coeficientes de $M_4(\cdot + n)$, M_4 y $M_4(\cdot - n)$ en $[-n, n]$ determinamos la matriz de BB-coeficientes de $L_{4,n}$ en $[-n, n]$, obteniendo

$$\frac{1}{144} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -2 & 25 \\ 25 & 52 & 104 & 104 \\ 104 & 104 & 52 & 25 \\ 25 & -2 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{1}{324} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 56 \\ 56 & 112 & 224 & 224 \\ 224 & 224 & 112 & 56 \\ 56 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Por tanto (ver Figuras 1.4 y 1.5),

$$\|Q_{4,2}\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} \Lambda_{4,2}(x) = \Lambda_{4,2}(0) = \frac{41}{36} \simeq 1.1389$$

y

$$\|Q_{4,3}\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} \Lambda_{4,3}(x) = \Lambda_{4,3}(0) = \frac{29}{27} \simeq 1.0741.$$

□

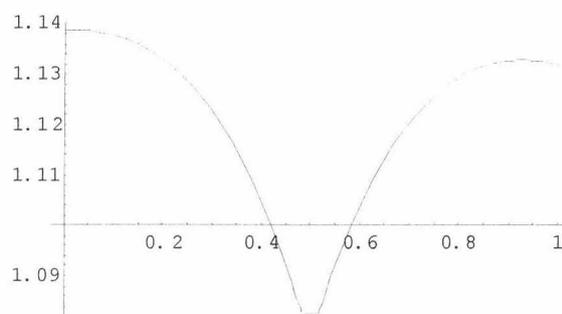


Figura 1.4: Gráfica de la función de Lebesgue $\Lambda_{4,2}$ en $[0, 1]$.

Nota 1.2.2 Obsérvese que el valor de la norma infinito de $Q_{4,3}$ coincide con la cota superior proporcionada por la Proposición 1.2.2.

En (1.1.1) se ha impuesto que $n \geq m$. En el caso cúbico, $n \geq 2$. Pero la elección $n = 1$ produce el quasi-interpolante

$$Q_{4,1}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (a_0 f(i) + a_1 (f(i-1) + f(i+1))) M_4(\cdot - i).$$

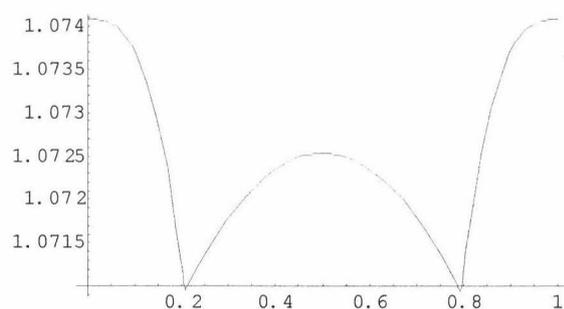


Figura 1.5: Gráfica de la función de Lebesgue $\Lambda_{4,3}$ en $[0, 1]$.

Sólo hay una elección de a_0 y a_1 que proporcione exactitud en \mathbb{P}_3 , por lo que no es posible plantear un problema de minimización. Es $a_0 = \frac{4}{3}$ y $a_1 = -\frac{1}{6}$. Para el quasi-interpolante cúbico clásico (ver, por ejemplo, [20], p. 104)

$$Q_{4,1}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{1}{6}f(i-1) + \frac{4}{3}f(i) - \frac{1}{6}f(i+1) \right) M_4(\cdot - i)$$

se dispone de la acotación simple

$$\|Q_{4,1}\|_{\infty} \leq \frac{5}{3} \simeq 1.6667,$$

mientras que el mismo método de acotación da

$$\|Q_{4,2}\|_{\infty} \leq \frac{7}{6} \simeq 1.1667$$

y

$$\|Q_{4,3}\|_{\infty} \leq \frac{29}{27} \simeq 1.0741$$

Para comparar los valores exactos, escribimos

$$Q_{4,1}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(i) L_{4,1}(\cdot - i),$$

donde

$$L_{4,1} = -\frac{1}{6}M_4(\cdot + 1) + \frac{4}{3}M_4 - \frac{1}{6}M_4(\cdot - 1).$$

La matriz de BB-coeficientes de $L_{4,1}$ en $[-4, 4]$ es

$$\frac{1}{36} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & 4 \\ 4 & 12 & 30 & 30 \\ 30 & 30 & 12 & 4 \\ 4 & -4 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y la función de Lebesgue

$$\Lambda_{4,1}(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} |L_{4,1}(\cdot - i)|$$

está representada en la Figura 1.6.

Por tanto,

$$\|Q_{4,1}\|_{\infty} = \max_{x \in [0,1]} \Lambda_{4,1}(x) = \Lambda_{4,1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{9} \simeq 1.2222$$

El procedimiento constructivo desarrollado proporciona en el caso cúbico una sucesión de qid con norma cada vez más próxima a 1. En un anexo se dan resultados análogos para qid de norma casi mínima definidos a partir del B-spline quíntico.

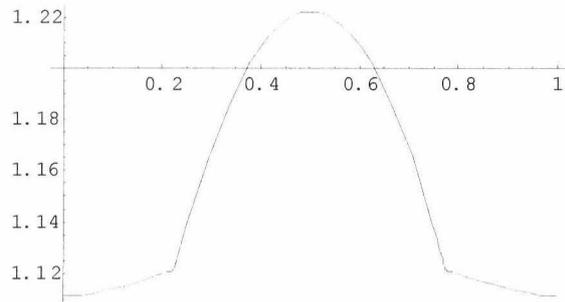


Figura 1.6: Gráfica de la función de Lebesgue $\Lambda_{4,1}$.

1.3 Una familia de qid de norma casi mínima

En las secciones anteriores se ha considerado la construcción de qid univariados, exactos en el mayor espacio de polinomios contenido en el espacio engendrado por las trasladadas enteras del B-spline $M = M_{2m}$ de soporte $[-m, m]$, $m \geq 2$, con función fundamental simétrica respecto del origen. La forma lineal coeficiente es una combinación lineal de valores de función en los puntos de $[-n, n] \cap \mathbb{Z}$, con $n \geq m$. Los coeficientes de la combinación lineal se eligen minimizando una cota superior de la norma infinito del operador de quasi-interpolación. En esta sección completamos la descripción del caso $n = m$, es decir se emplean sólo los nodos que pertenecen al soporte del B-spline.

Cuando $n = m$, el sistema (1.1.8) se escribe como

$$\begin{aligned} a_0 + 2 \sum_{i=2}^m a_i &= 1 - 2a_1 \\ \sum_{i=2}^m i^{2l} a_i &= \frac{1}{2} (2l)! \beta_l - a_1, \quad 1 \leq l \leq m-1 \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

y los coeficientes a_i , $i \in \{0, 2, \dots, m\}$, del qi

$$Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(a_0 f(i) + \sum_{j=1}^m a_j (f(i+j) + f(i-j)) \right) M(\cdot - i)$$

son funciones afines de a_1 , que se expresan a partir de la solución $a^* = (a_0^*, a_2^*, \dots, a_m^*)^T$ del sistema que resulta al hacer $a_1 = 0$. Por tanto, el problema de minimización que hay que resolver equivale a la minimización (global) de una función real de la variable a_1 . Sea $\alpha_1 := \alpha_{m,1} = 0$ y, para cada $i \in \{0, 2, \dots, m\}$, notemos $\alpha_i := \alpha_{m,i}$ al valor de a_1 para el que $a_i(\alpha_i) = 0$.

Proposición 1.3.1 *Se cumple que*

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \frac{D(2, \dots, m)}{D(1, 2, \dots, m)} \sum_{i=2}^m (2i-2)! |\beta_{i-1}| \text{sim}_{m-i}(2, \dots, m)$$

y, para $j = 2, \dots, m$,

$$\alpha_j = -\frac{1}{2} \frac{D(2, \dots, j-1, j+1, \dots, m)}{D(1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, m)} \sum_{i=1}^{m-1} (2i)! |\beta_i| \text{sim}_{m-i}(2, \dots, j-1, j+1, \dots, m)$$

Además, $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_j < 0$ para $j = 2, \dots, m$.

DEMOSTRACIÓN Por (1.1.12) y (1.1.13),

$$\begin{aligned} a_j^* &= \frac{(-1)^{j-1}}{2j^2} \frac{D(2, \dots, j-1, j+1, \dots, m)}{D(2, \dots, m)} \\ &\times \sum_{i=1}^{m-1} (2i)! |\beta_i| \text{sim}_{m-1-i}(2, \dots, j-1, j+1, \dots, m) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema (1.3.1), se tiene que

$$a_0 = a_0^* - \frac{2}{2^2 \dots m^2} \frac{D(1, 2, \dots, m)}{D(2, \dots, m)} a_1,$$

y el valor α_0 que anula a_0 es

$$\alpha_0 = \frac{2^2 \dots m^2}{2} \frac{D(2, \dots, m)}{D(1, 2, \dots, m)} a_0^*.$$

Por (1.1.12),

$$a_0^* = \frac{1}{m} \sum_{i=2}^m (2i-2)! |\beta_{i-1}| \text{sim}_{m-i}(2, \dots, m)$$

y, en consecuencia,

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \frac{D(2, \dots, m)}{D(1, 2, \dots, m)} \sum_{i=1}^m (2i-2)! |\beta_{i-1}| \text{sim}_{m-i}(2, \dots, m),$$

y $\alpha_0 > 0$.

Sea ahora $j = 2, \dots, m$. Resolviendo (1.3.1), se tiene que

$$\begin{aligned} a_j &= a_j^* - \frac{1}{j^2} \frac{D(2, \dots, j-1, 1, j+1, \dots, m)}{D(2, \dots, m)} a_1 \\ &= a_j^* - (-1)^j \frac{1}{j^2} \frac{D(1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, m)}{D(2, \dots, m)} a_1 \end{aligned}$$

luego el valor α_j que anula a_j es

$$\alpha_j = (-1)^j j^2 \frac{D(2, \dots, m)}{D(1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, m)} a_j^*.$$

Por (1.1.13),

$$a_j^* = \frac{(-1)^{j-1}}{2j^2} \frac{D(2, \dots, j-1, j+1, \dots, m)}{D(2, \dots, m)} \sum_{i=1}^{m-1} (2i)! |\beta_i| \text{sim}_{m-1-i}(2, \dots, j-1, j+1, \dots, m).$$

Entonces,

$$\alpha_j = \frac{-1}{2} \frac{D(2, \dots, j-1, j+1, \dots, m)}{D(1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, m)} \sum_{i=1}^{m-1} (2i)! |\beta_i| \text{sim}_{m-1-i}(2, \dots, j-1, j+1, \dots, m)$$

y $\alpha_j < 0$. □

La función cuyo mínimo global se va a determinar no es derivable en los puntos α_j , que están ordenados.

Proposición 1.3.2 *Se cumple que*

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_m.$$

DEMOSTRACIÓN Como $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 < 0$, se tiene que $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2$. Por la Proposición 1.3.1,

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_3 &= -\frac{1}{2} \frac{D(3, \dots, m)}{D(1, 3, \dots, m)} \sum_{i=1}^{m-1} (2i)! |\beta_i| \text{sim}_{m-1-i}(3, \dots, m) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{D(2, 4, \dots, m)}{D(1, 2, 4, \dots, m)} \sum_{i=1}^{m-1} (2i)! |\beta_i| \text{sim}_{m-1-i}(2, 4, \dots, m) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} (2i)! |\beta_i| \left\{ \frac{D(2, 4, \dots, m)}{D(1, 2, 4, \dots, m)} \text{sim}_{m-1-i}(2, 4, \dots, m) - \right. \\ &\quad \left. \frac{D(3, \dots, m)}{D(1, 3, \dots, m)} \text{sim}_{m-1-i}(3, \dots, m) \right\} \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} D(2, 4, \dots, m) &= (m^2 - 2^2) \cdots (4^2 - 2^2) D(4, \dots, m) \\ D(1, 3, \dots, m) &= (m^2 - 1) \cdots (3^2 - 1) D(3, \dots, m) \\ D(1, 2, 4, \dots, m) &= (m^2 - 2^2) \cdots (4^2 - 2^2) (m^2 - 1) \cdots (4^2 - 1) (2^2 - 1) D(4, \dots, m) \end{aligned}$$

se tiene que

$$\frac{D(2, 4, \dots, m)}{D(1, 2, 4, \dots, m)} = \frac{1}{(m^2 - 1) \cdots (4^2 - 1) (2^2 - 1)}$$

y

$$\frac{D(3, \dots, m)}{D(1, 3, \dots, m)} = \frac{1}{(m^2 - 1) \cdots (3^2 - 1)}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_3 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} (2i)! |\beta_i| \left\{ \frac{D(2, 4, \dots, m)}{D(1, 2, 4, \dots, m)} \text{sim}_{m-1-i}(2, 4, \dots, m) - \right. \\ &\quad \left. \frac{D(3, \dots, m)}{D(1, 3, \dots, m)} \text{sim}_{m-1-i}(3, \dots, m) \right\} \end{aligned}$$

podemos escribir

$$\alpha_2 - \alpha_3 = \frac{1}{2 \prod_{k=2}^m (k^2 - 1)} \sum_{i=1}^{m-1} (2i)! |\beta_i| A_{2, m-1-i},$$

donde

$$A_{2, m-1-i} = (3^2 - 1) \text{sim}_{m-1-i}(2, 4, \dots, m) - (2^2 - 1) \text{sim}_{m-1-i}(3, \dots, m).$$

Estudiemos, pues, el signo de

$$A_{2, k} = (3^2 - 1) \text{sim}_k(2, 4, \dots, m) - (2^2 - 1) \text{sim}_k(3, \dots, m), \quad 0 \leq k \leq m - 2.$$

Evidentemente, se tiene que $A_{2,0} > 0$. Como

$$\text{sim}_{k+1}(2, 4, \dots, m) = 2^2 \text{sim}_k(4, \dots, m) + \text{sim}_{k+1}(4, \dots, m)$$

y

$$\text{sim}_{k+1}(3, \dots, m) = 3^2 \text{sim}_k(4, \dots, m) + \text{sim}_{k+1}(4, \dots, m),$$

se cumple que

$$\begin{aligned} A_{2,k+1} &= (3^2 - 1) \{2^2 \operatorname{sim}_k(4, \dots, m) + \operatorname{sim}_{k+1}(4, \dots, m)\} \\ &\quad - (2^2 - 1) \{3^2 \operatorname{sim}_k(4, \dots, m) + \operatorname{sim}_{k+1}(4, \dots, m)\} \\ &= 5 \{ \operatorname{sim}_k(4, \dots, m) + \operatorname{sim}_{k+1}(4, \dots, m) \} \end{aligned}$$

Entonces, $A_{2,k} > 0$ para $k = 0, \dots, m - 2$, y, por tanto, $\alpha_2 - \alpha_3 > 0$.

Utilizaremos la misma técnica para comparar α_j con α_{j+1} , $j = 3, \dots, m - 1$. Se tiene que

$$\begin{aligned} &\alpha_j - \alpha_{j+1} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{D(2, \dots, j-1, j+1, \dots, m)}{D(1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, m)} \sum_{i=1}^{m-1} (2i)! |\beta_i| \operatorname{sim}_{m-1-i}(2, \dots, j-1, j+1, \dots, m) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{D(2, \dots, j, j+2, \dots, m)}{D(1, 2, \dots, j, j+2, \dots, m)} \sum_{i=1}^{m-1} (2i)! |\beta_i| \operatorname{sim}_{m-1-i}(2, \dots, j, j+2, \dots, m) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} (2i)! |\beta_i| \left\{ \frac{D(2, \dots, j, j+2, \dots, m)}{D(1, 2, \dots, j, j+2, \dots, m)} \operatorname{sim}_{m-1-i}(2, \dots, j, j+2, \dots, m) - \right. \\ &\quad \left. \frac{D(2, \dots, j-1, j+1, \dots, m)}{D(1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, m)} \operatorname{sim}_{m-1-i}(2, \dots, j-1, j+1, \dots, m) \right\} \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} D(1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, m) &= \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^m (k^2 - 1) D(2, \dots, j-1, j+1, \dots, m) \\ D(1, 2, \dots, j, j+2, \dots, m) &= \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j+1}}^m (k^2 - 1) D(2, \dots, j, j+2, \dots, m) \end{aligned}$$

se cumple que

$$\alpha_j - \alpha_{j+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} (2i)! |\beta_i| \left\{ \left(\prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j+1}}^m (k^2 - 1) \right)^{-1} \operatorname{sim}_{m-1-i}(2, \dots, j, j+2, \dots, m) - \right. \\ \left. \left(\prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^m (k^2 - 1) \right)^{-1} \operatorname{sim}_{m-1-i}(2, \dots, j-1, j+1, \dots, m) \right\}$$

o, equivalentemente,

$$\alpha_j - \alpha_{j+1} = \frac{1}{2 \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j, j+1}}^m (k^2 - 1)} \sum_{i=1}^{m-1} (2i)! |\beta_i| A_{j, m-1-i},$$

donde

$$A_{j,k} = \left((j+1)^2 - 1 \right) \text{sim}_k(2, \dots, j, j+2, \dots, m) - (j^2 - 1) \text{sim}_k(2, \dots, j-1, j+1, \dots, m)$$

para $k = 0, \dots, m-2$.

Estudiemos, pues, el signo de $A_{j,k}$. Como

$$\begin{aligned} \text{sim}_{k+1}(2, \dots, j, j+2, \dots, m) &= j^2 \text{sim}_k(2, \dots, j-1, j+2, \dots, m) \\ &\quad + \text{sim}_{k+1}(2, \dots, j-1, j+2, \dots, m) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{sim}_{k+1}(2, \dots, j-1, j+1, \dots, m) &= (j+1)^2 \text{sim}_k(2, \dots, j-1, j+2, \dots, m) \\ &\quad + \text{sim}_{k+1}(2, \dots, j-1, j+2, \dots, m) \end{aligned}$$

se cumple que

$$A_{j,k+1} = (2j+1) \{ \text{sim}_k(2, \dots, j-1, j+2, \dots, m) + \text{sim}_{k+1}(2, \dots, j-1, j+2, \dots, m) \}.$$

En definitiva, $A_{j,k} > 0$, $k = 0, \dots, m-2$, y, por tanto, $\alpha_j - \alpha_{j+1} > 0$. \square

Una vez establecida la ordenación de los puntos $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$, estamos en condiciones de caracterizar la solución del Problema 1.1.5 cuando $n = m$.

Proposición 1.3.3 Sean $F_0 = D(1, 2, \dots, m)$, $F_m = D(0, 1, \dots, m-1)$ y

$$F_j = D(0, \dots, j-1, j+1, \dots, m), \quad j = 1, \dots, m-1.$$

Entonces, la mediana de

$$\left(\underbrace{\alpha_0, \dots, \alpha_0}_{F_0}, \underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_{F_1}, \dots, \underbrace{\alpha_m, \dots, \alpha_m}_{F_m} \right)$$

es solución del Problema 1.1.5 cuando $n = m$.

DEMOSTRACIÓN La solución del Problema 1.1.5 minimiza la función $|a_0| + 2 \sum_{j=1}^m |a_j|$, lo que, resolviendo (1.3.1), equivale a minimizar

$$\begin{aligned} & \left| a_0^* - 2 \frac{D(1, 2, \dots, m)}{D(0, 2, \dots, m)} a_1 \right| + 2 |a_1| + 2 \sum_{j=2}^m \left| a_j^* - \frac{D(0, 2, \dots, j-1, 1, j+1, \dots, m)}{D(0, 2, \dots, m)} a_1 \right| \\ &= 2 \frac{D(1, 2, \dots, m)}{D(0, 2, \dots, m)} |\alpha_0 - a_1| + 2 |\alpha_1 - a_1| + 2 \sum_{j=2}^m \frac{D(0, 2, \dots, j-1, 1, j+1, \dots, m)}{D(0, 2, \dots, m)} |\alpha_j - a_1| \\ &= \frac{2}{D(0, 2, \dots, m)} \left\{ D(1, 2, \dots, m) |\alpha_0 - a_1| + D(0, 2, \dots, m) |\alpha_1 - a_1| \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=2}^m D(0, 2, \dots, j-1, 1, j+1, \dots, m) |\alpha_j - a_1| \right\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, dicha solución minimiza la función

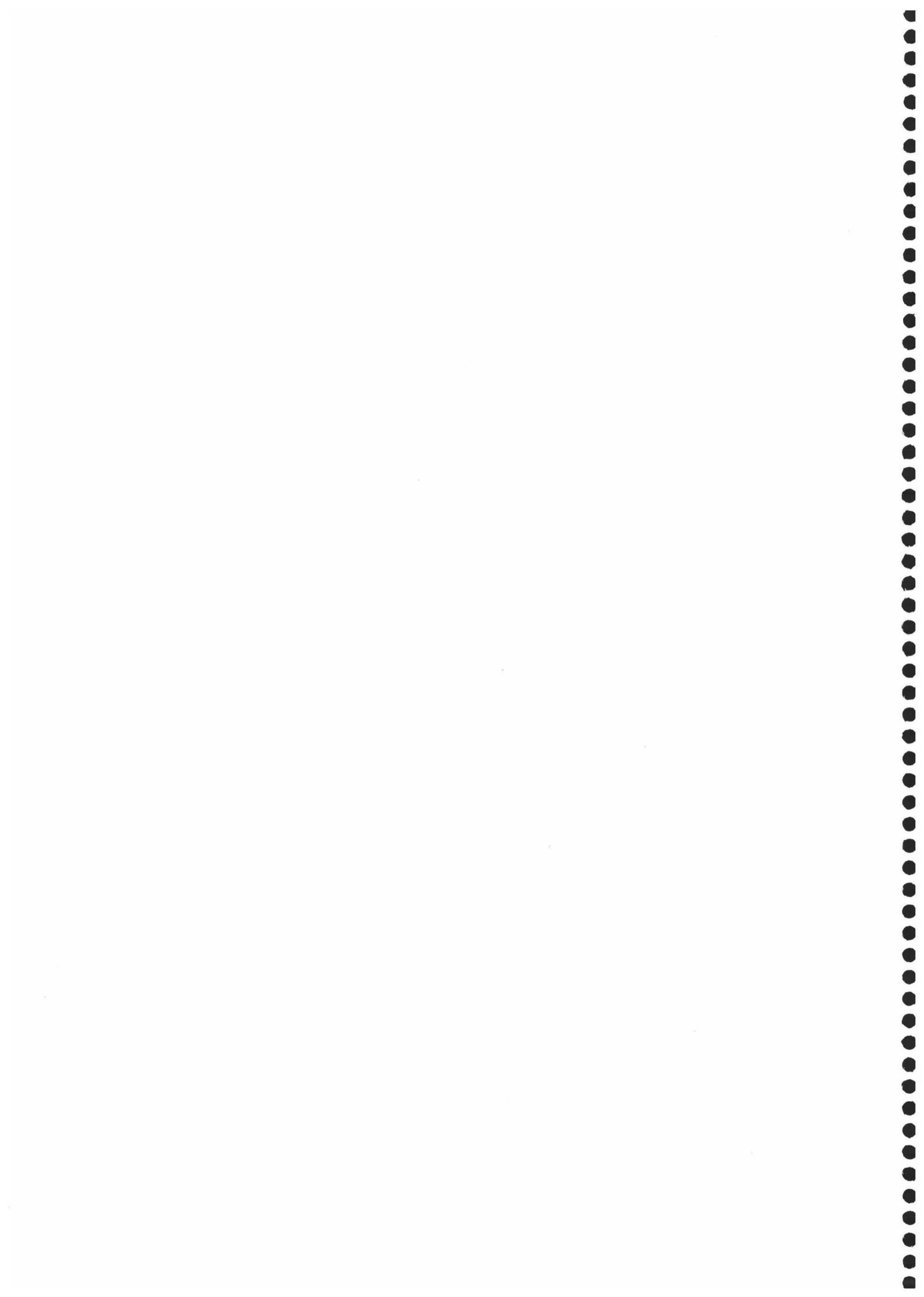
$$\sum_{j=0}^m F_j |\alpha_j - a_1|,$$

y es la mediana de los datos

$$\left(\underbrace{\alpha_0, \dots, \alpha_0}_{F_0}, \underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_{F_1}, \dots, \underbrace{\alpha_m, \dots, \alpha_m}_{F_m} \right).$$

□

Nota 1.3.1 Para $2 \leq m \leq 9$, se ha comprobado que el mínimo de $\nu(\alpha)$ sujeta a (1.1.8) se alcanza únicamente para $a_1 = 0$, esto es, el único qid de norma casi mínima se obtiene resolviendo el sistema que resulta al hacer $a_1 = 0$ en (1.1.8).



Capítulo 2

Quasi-interpolantes spline discretos de norma infinito casi mínima sobre particiones no uniformes de la recta real

El problema estudiado en el capítulo anterior se ha ceñido a la construcción de qid (simétricos) de norma casi mínima basados en B-splines sobre particiones uniformes de la recta real. El problema se estudió para los de orden par, siendo similar el estudio del caso impar.

En este capítulo se consideraran particiones no uniformes. Son bien conocidos los espacios de funciones splines asociadas a este tipo de particiones (ver [60], y referencias allí incluidas). La construcción de qid sobre tales particiones ha sido estudiada en múltiples trabajos, entre los que debemos citar [4], [37], [17], [8], [55] y [57], además de las referencias dadas en la introducción del capítulo 1.

Los qid en ese capítulo se definían a partir de formas lineales λ_i que eran combinaciones lineales de los nodos de la partición. Nos planteamos ahora construir qid cuyas formas lineales son combinaciones lineales de abscisas de Greville, son exactos en el mayor espacio de polinomios contenido en el espacio de splines y de norma casi mínima, en un sentido que se precisará más adelante. A diferencia del caso uniforme, la partición juega un papel fundamental en la existencia de tales qi.

El capítulo está estructurado de la siguiente manera: en la primera sección se plantea un problema general de construcción qid de norma casi mínima basados en abscisas de Greville y B-splines de grado par, estableciendo los resultados previos necesarios; en la segunda sección se estudia el caso cuadrático, estableciendo condiciones para la existencia de solución, acotando uniformemente la norma infinito del operador cuando tal condición se cumple; en la última sección se formula un problema de minimización similar para el

caso cúbico.

2.1 Quasi-interpolantes discretos con abscisas de Greville

Sea $X = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ una sucesión estrictamente creciente tal que $|x_i| \rightarrow \infty$ cuando $i \rightarrow \pm\infty$. Dado $r \geq 3$, sea $(N_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ la sucesión de B-splines de orden r asociada a X , donde (cf. [60], capítulo 4, [25], capítulo 5)

$$N_i(x) := N_{i,r}(x) := (x_{i+r} - x_i) [x_i, \dots, x_{i+r}] (\cdot - x)_+^{r-1}.$$

Son bien conocidas las propiedades de estas funciones, relativas al grado, a la clase, al soporte, a que constituyen una partición de la unidad. En particular, la sucesión $(N_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es una base del espacio de Schoenberg $S_r(X, \mathbb{R})$, formado por las funciones polinómicas a trozos de clase $C^{r-2}(\mathbb{R})$ cuyas restricciones a cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ inducido por la sucesión de nodos X son polinomios de grado menor o igual que $r-1$ (cf. [60], capítulo 4, [25], capítulo 5). Se cumple la identidad de Marsden (cf. [36], [37])

$$(y - x)^{r-1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\prod_{j=1}^{r-1} (y - x_{i+j}) \right) N_i(x),$$

y, por tanto, cada monomio $e_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, \dots, r-1$, se expresa como combinación lineal de tales B-splines, cumpliéndose que (cf. [60], p. 125, [25], p. 141)

$$e_k = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\text{symm}_k(x_{i+1}, \dots, x_{i+r-1})}{\binom{r-1}{k}} N_i, \quad k = 0, 1, \dots, r-1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.1.1)$$

donde

$$\begin{aligned} \text{symm}_0(y_1, \dots, y_n) &= 1 \\ \text{symm}_k(y_1, \dots, y_n) &= \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq n} y_{l_1} y_{l_2} \cdots y_{l_k}, \quad k = 1, 2, \dots, r-1 \end{aligned}$$

son las funciones simétricas clásicas (cf. [60], p. 185).

Asociamos a X la sucesión $\Theta_r := (\theta_{r,i})_{i \in \mathbb{Z}}$ de abscisas de Greville (cf. [29])

$$\theta_{r,i} := \theta_i = \frac{x_i + \cdots + x_{i+r-2}}{r-1}.$$

Supongamos r impar, $r = 2m + 1$, $m \geq 1$. Sea $n \geq 1$ un entero y consideremos el qid $Q_{2m+1,n,X} := Q$ dado por

$$Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mu_i(f) N_i, \quad (2.1.2)$$

donde

$$\mu_i(f) = \sum_{j=-n}^{2m+n} a_{i,j} f(\theta_{i+j+1-m}), \quad (2.1.3)$$

con $a_{i,j}$ parámetros reales.

Proposición 2.1.1 *El qid dado por (2.1.2) y (2.1.3) es exacto en \mathbb{P}_{2m} si y sólo si*

$$\sum_{j=-n}^{2m+n} a_{i,j} \theta_{i+j+1-m}^s = \frac{\text{symm}_s(x_{i+1}, \dots, x_{i+2m})}{\binom{2m}{s}}, \quad s = 0, 1, \dots, 2m. \quad (2.1.4)$$

DEMOSTRACIÓN Para cada $s = 0, 1, \dots, 2m$ se tiene que

$$Qe_s = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=-n}^{2m+n} a_{i,j} \theta_{i+j+1-m}^s \right) N_i.$$

Por (2.1.1), se tiene que

$$e_s = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\text{symm}_s(x_{i+1}, \dots, x_{i+2m})}{\binom{2m}{s}} N_i,$$

y la exactitud se traduce en las igualdades (2.1.4). □

Si f está acotada, con $\|f\|_\infty \leq 1$, entonces el qid dado por (2.1.2) y (2.1.3) cumple que

$$|Qf| \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=-n}^{2m+n} |a_{i,j}| \right) N_i = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \nu(a_i) N_i,$$

donde $a_i = (a_{i,-n}, \dots, a_{i,2m+n})^T$ y

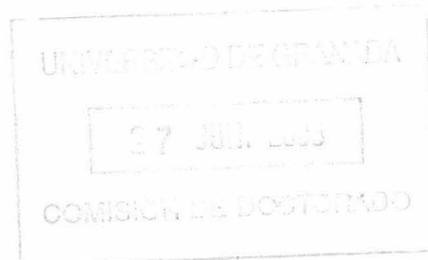
$$\nu(a_i) = \sum_{j=-n}^{2m+n} |a_{i,j}|,$$

por lo que se puede considerar el problema consistente en determinar a_i de modo que $\nu(a_i)$ sea mínimo. Al mismo tiempo, Q será exacto si y sólo si se cumple (2.1.4). Definamos, por tanto,

$$V_{r,i} := V = \{a \in \mathbb{R}^{2m+2n+1} : a \text{ cumple (2.1.4)}\}.$$

Estamos interesados en el siguiente problema:

Problema 2.1.2 *Resolver* $\text{Min} \{\nu(a_i), a_i \in V\}$.



La existencia de solución está garantizada.

Proposición 2.1.3 *El Problema 2.1.2 tiene al menos una solución.*

DEMOSTRACIÓN El resultado se sigue al interpretar el problema como la determinación de la mejor l_1 -aproximación lineal de $0 \in \mathbb{R}^{2m+2n+1}$ mediante elementos del subespacio afín $2n$ -dimensional V . \square

Aun cuando el problema tiene solución, es preciso que ésta dé lugar a un operador de quasi-interpolación acotado.

Definición 2.1.4 *Si a_i es solución del Problema 2.1.2 y la correspondiente sucesión $(\nu(a_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ de coeficientes del quasi-interpolante está en l_∞ , diremos que el qid asociado a a_i , dado por (2.1.2) y (2.1.3), es un qid de norma uniforme casi mínima de orden $2m+1$ relativo a n .*

2.2 Quasi-interpolantes spline cuadráticos no uniformes de norma casi mínima

Consideramos inicialmente el caso cuadrático ($m = 1$). Sea, pues, $(N_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ la sucesión de B-splines cuadráticos asociada a la sucesión de nodos X . Las igualdades (2.1.1) se expresan del siguiente modo:

$$1 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} N_i, \quad e_1 = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (x_{i+1} + x_{i+2}) N_i, \quad e_2 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_{i+1} x_{i+2} N_i,$$

Se obtiene, pues, la representación de los monomios como combinaciones lineales de los B-splines cuadráticos. Antes de abordar la resolución del Problema 2.1.2 consideraremos el caso en que la forma lineal μ_i es una combinación lineal de los valores que la función aproximada en los puntos de Θ_3 interiores al soporte. La existencia de una única solución se prueba en [14], por lo que nos ocuparemos de su expresión explícita y de la acotación del quasi-interpolante correspondiente. Definamos $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Proposición 2.2.1 *Consideremos el qid $Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mu_i(f) N_i$, donde*

$$\mu_i(f) = -\frac{\sigma_i^2 \sigma'_{i+1}}{\sigma_i + \sigma'_{i+1}} f(\theta_i) + (1 + \sigma_i \sigma'_{i+1}) f(\theta_{i+1}) - \frac{\sigma_i (\sigma'_{i+1})^2}{\sigma_i + \sigma'_{i+1}} f(\theta_{i+2}),$$

con

$$\sigma_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \quad y \quad \sigma'_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}.$$

Entonces,

1. Q es exacto en \mathbb{P}_2 .
2. Q es un operador acotado y

$$\|Q\|_\infty \leq 1 + 2 \max_{i \in \mathbb{Z}} (\sigma_i \sigma'_{i+1}) \leq 3$$

para todas las particiones X .

3. Si X cumple que $\frac{1}{\rho} \leq \frac{h_{i+1}}{h_i} \leq \rho$ para algún $\rho \geq 1$, entonces

$$\|Q\|_\infty \leq 1 + 2 \left(\frac{\rho}{\rho + 1} \right)^2.$$

DEMOSTRACIÓN La exactitud de Q se establece sin mayor dificultad, teniendo en cuenta las expresiones de los monomios 1 , x y x^2 como combinaciones lineales de los B-splines N_i . Por tanto, es el único qid exacto en \mathbb{P}_2 cuya forma lineal es combinación lineal de los valores de la función en las abscisas θ_j interiores al soporte $[x_i, x_{i+3}]$ de N_i (cf. [14]).

Si $f \in C(\mathbb{R})$ es tal que $\|f\|_\infty \leq 1$, entonces

$$|\mu_i(f)| \leq 1 + 2\sigma_i \sigma'_{i+1}.$$

Como $\sigma_i \leq 1$ y $\sigma'_i \leq 1$ para todo entero i , entonces $(\sigma_i \sigma'_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}} \in l_\infty$ y, en consecuencia, Q está acotado, cumpliéndose que

$$\|Q\|_\infty \leq 1 + 2 \max_{i \in \mathbb{Z}} (\sigma_i \sigma'_{i+1}) \leq 3.$$

Por último, si $\frac{1}{\rho} \leq \frac{h_{i+1}}{h_i} \leq \rho$, también se cumple que $\frac{1}{\rho} \leq \frac{h_i}{h_{i+1}} \leq \rho$, por lo que

$$\sigma_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} = \frac{1}{1 + \frac{h_i}{h_{i+1}}} \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{\rho}} = \frac{\rho}{\rho + 1}.$$

Análogamente,

$$\sigma'_{i+1} = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} \leq \frac{\rho}{\rho + 1}.$$

Se sigue, pues, que

$$\|Q\|_\infty \leq 1 + 2 \left(\frac{\rho}{\rho + 1} \right)^2,$$

con lo que concluye la demostración. □

Nota 2.2.1 La cota obtenida aparece en [55] en el contexto de la construcción de qid cuadráticos sobre intervalos acotados, siendo mejorada en [57]. Concretamente, se establece que $\|Q\|_\infty \leq 2.5$. El procedimiento allí empleado proporciona la misma mejora de la cota aquí obtenida para qid definidos sobre toda la recta real.

Nota 2.2.2 Si los nodos de X está igualmente espaciados, entonces $\rho = 1$ y la proposición anterior proporciona la acotación $\|Q\|_\infty \leq \frac{3}{2}$. Se puede comprobar que el valor exacto de la norma en tal caso es $\|Q\|_\infty = 1.25$. En la Tabla 2.1 aparece para diferentes valores de ρ la cota uniforme $\phi(\rho) = 1 + 2\left(\frac{\rho}{\rho+1}\right)^2$ establecida.

ρ	1	2	3	4	5
$\phi(\rho)$	1.5	1.8889	2.125	2.28	2.3889

Tabla 2.1: Valores de la cota de la norma uniforme del operador de quasi-interpolación.

Para construir un qid cuadrático de norma casi mínima consideramos formas lineales basadas en cinco puntos,

$$\mu_i(f) = \sum_{j=-1}^3 a_{i,j} f(\theta_{i+j}), \quad a_{i,j} \in \mathbb{R},$$

y el qid asociado

$$Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mu_i(f) N_i.$$

Como

$$Q1 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=-1}^3 a_{i,j} \right) N_i, \quad Q(\cdot) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=-1}^3 a_{i,j} \theta_{i+j} \right) N_i \quad \text{y} \quad Q(\cdot)^2 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=-1}^3 a_{i,j} \theta_{i+j}^2 \right) N_i,$$

las igualdades

$$1 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} N_i(x), \quad x = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (x_{i+1} + x_{i+2}) N_i(x), \quad x^2 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_{i+1} x_{i+2} N_i(x)$$

garantizan que Q es exacto en \mathbb{P}_2 si y sólo si

$$\sum_{j=-1}^3 a_{i,j} = 1, \quad \sum_{j=-1}^3 a_{i,j} \theta_{i+j} = \theta_{i+1}, \quad \sum_{j=-1}^3 a_{i,j} \theta_{i+j}^2 = x_{i+1} x_{i+2} \quad (2.2.1)$$

para todo entero i . El Problema 2.1.2 consiste, pues, en minimizar

$$\nu(a_i) = \sum_{j=-1}^3 |a_{i,j}|,$$

con $a_i = (a_{i,-1}, a_{i,0}, a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3})^T$, sujeto a (2.2.1).

Proposición 2.2.2 *Supongamos que X cumple que*

$$\theta_{i+1} + \theta_{i+2} \leq \theta_i + \theta_{i+4} \leq \theta_{i+2} + \theta_{i+3} \quad (2.2.2)$$

para todo entero i . Definamos

$$a_{i,-1}^* = -\frac{h_{i+1}^2}{\eta_i(\eta_i + \eta_{i+2})}, \quad a_{i,1}^* = 1 + \frac{h_{i+1}^2}{\eta_i\eta_{i+2}}, \quad a_{i,3}^* = -\frac{h_{i+1}^2}{\eta_{i+2}(\eta_i + \eta_{i+2})}, \quad (2.2.3)$$

donde $\eta_i = h_{i-1} + 2h_i + h_{i+1}$. Entonces,

1. $a_i^* = \left(a_{i,-1}^*, 0, a_{i,1}^*, 0, a_{i,3}^* \right)^T$ es una solución del Problema 2.1.2 para $m = n = 1$.

2. El correspondiente \tilde{Q}

$$\tilde{Q}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(a_{i,-1}^* f(\theta_{i-1}) + a_{i,1}^* f(\theta_{i+1}) + a_{i,3}^* f(\theta_{i+3}) \right) N_i$$

está acotado y se cumple que

$$\|\tilde{Q}\|_{\infty} \leq 1 + 2 \max_{i \in \mathbb{Z}} \left(\frac{h_{i+1}^2}{\eta_i\eta_{i+2}} \right) \leq 3$$

para toda sucesión X que verifica (2.2.2).

3. Si X cumple que $\frac{1}{\rho} \leq \frac{h_{i+1}}{h_i} \leq \rho$ para algún $\rho \geq 1$, entonces

$$\|\tilde{Q}\|_{\infty} \leq 1 + 2 \left(\frac{\rho}{\rho + 1} \right)^4.$$

DEMOSTRACIÓN a_i es solución de (2.2.1) si y sólo si

$$\begin{aligned} a_{i,-1} &= a_{i,-1}^* - \delta_{i,-1}\alpha_1 + \varepsilon_{i,-1}\alpha_2 \\ a_{i,0} &= \alpha_1 \\ a_{i,1} &= a_{i,1}^* - \delta_{i,1}\alpha_1 - \varepsilon_{i,1}\alpha_2 \\ a_{i,2} &= \alpha_2 \\ a_{i,3} &= a_{i,3}^* + \delta_{i,3}\alpha_1 - \varepsilon_{i,3}\alpha_2 \end{aligned}$$

siendo α_1 y α_2 parámetros reales,

$$\begin{aligned} \delta_{i,-1} &= \frac{(\theta_{i+3} - \theta_i)(\theta_{i+1} - \theta_i)}{(\theta_{i+3} - \theta_{i-1})(\theta_{i+1} - \theta_{i-1})}, & \varepsilon_{i,-1} &= \frac{(\theta_{i+3} - \theta_{i+2})(\theta_{i+2} - \theta_{i+1})}{(\theta_{i+3} - \theta_{i-1})(\theta_{i+1} - \theta_{i-1})}, \\ \delta_{i,3} &= \frac{(\theta_i - \theta_{i-1})(\theta_{i+1} - \theta_i)}{(\theta_{i+3} - \theta_{i-1})(\theta_{i+3} - \theta_{i+1})}, & \varepsilon_{i,3} &= \frac{(\theta_{i+2} - \theta_{i-1})(\theta_{i+2} - \theta_{i+1})}{(\theta_{i+3} - \theta_{i-1})(\theta_{i+3} - \theta_{i+1})}, \\ \delta_{i,1} &= 1 - \delta_{i,-1} + \delta_{i,3}, & \varepsilon_{i,1} &= 1 - \varepsilon_{i,-1} + \varepsilon_{i,3}, \end{aligned}$$

y $(a_{i,-1}^*, a_{i,1}^*, a_{i,3}^*)^T$ la solución del sistema resultante al hacer $a_{i,0} = a_{i,2} = 0$ en (2.2.1), es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \theta_{i-1} & \theta_{i+1} & \theta_{i+3} \\ \theta_{i-1}^2 & \theta_{i+1}^2 & \theta_{i+3}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i,-1}^* \\ a_{i,1}^* \\ a_{i,3}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_{i+1} \\ x_{i+1}x_{i+2} \end{pmatrix}.$$

Resolviendo este sistema se obtienen las igualdades (2.2.2). Por tanto, a_i es solución del Problema 2.1.2 para $m = n = 1$ si y sólo si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$ minimiza la función

$$\begin{aligned} \nu_i(\alpha) &= \left\| (a_{i,-1}^* - \delta_{i,-1}\alpha_1 + \varepsilon_{i,-1}\alpha_2, \alpha_1, a_{i,1}^* - \delta_{i,1}\alpha_1 - \varepsilon_{i,1}\alpha_2, \alpha_2, a_{i,3}^* + \delta_{i,3}\alpha_1 - \varepsilon_{i,3}\alpha_2) \right\|_1 \\ &= \|a_i^* - A\alpha\|_1 \end{aligned}$$

donde $a_i^* = (a_{i,-1}^*, 0, a_{i,1}^*, 0, a_{i,3}^*)^T$ y

$$A^T = \begin{pmatrix} \delta_{i,-1} & -1 & \delta_{i,1} & 0 & -\delta_{i,3} \\ -\varepsilon_{i,-1} & 0 & \varepsilon_{i,1} & -1 & \varepsilon_{i,3} \end{pmatrix}.$$

Sea $v = (-1, -\delta_{i,-1} + \delta_{i,1} + \delta_{i,3}, 1, -\varepsilon_{i,-1} + \varepsilon_{i,1} + \varepsilon_{i,3}, -1)^T$. Es inmediato comprobar que las componentes de v son menores o iguales que uno en valor absoluto si se cumple (2.2.2) y que el signo de cada componente no nula de v coincide con el de la correspondiente de a_i^* . Además, $A^T v = 0$. Por tanto (cf. [65]) $\alpha = (0, 0)^T$ minimiza ν_i y, equivalentemente, a_i^* es solución del Problema 2.1.2.

Como, por (2.2.3),

$$|a_{i,-1}^*| + |a_{i,1}^*| + |a_{i,3}^*| = -a_{i,-1}^* + a_{i,1}^* - a_{i,3}^* = 1 + 2\frac{h_{i+1}^2}{\eta_i\eta_{i+2}}$$

y

$$\frac{h_{i+1}^2}{\eta_i\eta_{i+2}} < 1$$

para todo entero i , entonces el qid

$$\tilde{Q}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (a_{i,-1}^* f(\theta_{i-1}) + a_{i,1}^* f(\theta_{i+1}) + a_{i,3}^* f(\theta_{i+3})) N_i$$

está acotado, es de norma casi mínima y se cumple que

$$\|\tilde{Q}\|_{\infty} \leq 1 + 2 \max_{i \in \mathbb{Z}} \left(\frac{h_{i+1}^2}{\eta_i\eta_{i+2}} \right) \leq 3.$$

Si existe $\rho \geq 1$ tal que $\frac{1}{\rho} \leq \frac{h_{i+1}}{h_i} \leq \rho$, también es cierto que $\frac{1}{\rho} \leq \frac{h_i}{h_{i+1}} \leq \rho$, por lo que

$$\frac{\eta_i}{h_{i+1}} = \frac{h_{i-1}}{h_{i+1}} + 2\frac{h_i}{h_{i+1}} + 1 = \frac{h_{i-1}}{h_i} \frac{h_i}{h_{i+1}} + 2\frac{h_i}{h_{i+1}} + 1 \geq \frac{1}{\rho^2} + 2\frac{1}{\rho} + 1 = \left(\frac{\rho+1}{\rho}\right)^2.$$

Análogamente,

$$\frac{\eta_{i+2}}{h_{i+1}} \geq \left(\frac{\rho+1}{\rho}\right)^2.$$

Por tanto,

$$\frac{h_{i+1}^2}{\eta_i \eta_{i+2}} \leq \left(\frac{\rho}{\rho+1}\right)^4,$$

con lo que concluye la demostración. \square

Nota 2.2.3 Si los nodos de X está igualmente espaciados, entonces $\rho = 1$ y la proposición anterior proporciona la acotación $\|Q\|_\infty \leq \frac{9}{8} = 1.125$. Se puede comprobar que el valor exacto de la norma en tal caso es $\|Q\|_\infty = 1.125$. En la Tabla 2.2 aparece para diferentes valores de ρ la cota uniforme $\varphi(\rho) = 1 + 2\left(\frac{\rho}{\rho+1}\right)^4$ establecida.

ρ	1	2	3	4	5
$\varphi(\rho)$	1.125	1.3951	1.6328	1.8192	1.9645

Tabla 2.2: Valores de la cota de la norma uniforme del operador de quasi-interpolación.

Nota 2.2.4 Si las condiciones (2.2.2) fuesen estrictas, el estudio de la función v_i en un entorno de $(0, 0)$ demuestra que el mínimo absoluto se alcanza sólo en $(0, 0)$, existiendo, por tanto, un único qid de norma casi mínima.

Ejemplo 2.2.1 Consideremos $p \in \mathbb{R}$ y $h > 0$. Definamos

$$x_i = p + (i + \epsilon_i)h, \quad i \in \mathbb{Z},$$

donde $|\epsilon_i| \leq \frac{1}{4}$. La sucesión $X = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ se obtiene perturbando la sucesión uniforme $(p + ih)_{i \in \mathbb{Z}}$. La correspondiente sucesión Θ de abscisas de Greville está formada por los valores

$$\theta_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = \frac{1}{2}[2p + (2i + 1)h + (\epsilon_i + \epsilon_{i+1})h], \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Se cumplirá la condición (2.2.2) si y sólo si

$$\epsilon_{i+1} + 2\epsilon_{i+2} + \epsilon_{i+3} \leq 2 + \epsilon_i + \epsilon_{i+1} + \epsilon_{i+4} + \epsilon_{i+5} \leq 4 + \epsilon_{i+2} + 2\epsilon_{i+3} + \epsilon_{i+4},$$

lo que se verifica bajo la hipótesis $|\epsilon_i| \leq \frac{1}{4}$. Por tanto, existe al menos un quasi-interpolante discreto de norma casi mínima. Si cada perturbación ϵ_i cumple que $|\epsilon_i| < \frac{1}{4}$, entonces existe un único qid de norma casi mínima.

2.3 Quasi-interpolantes spline cúbicos de norma casi mínima

El Problema 2.1.2 ha sido formulado para splines de orden impar y, sin embargo, queremos completar el estudio realizado anteriormente con la construcción de quasi-interpolantes cúbicos exactos en \mathbb{P}_2 , cuyas formas lineales sean del tipo considerado en el caso cuadrático. Con este objetivo, sea $X = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ una sucesión estrictamente creciente de nodos no uniformemente espaciados, tal que $|x_i| \rightarrow \infty$ cuando $i \rightarrow \pm\infty$, y sea Θ_4 la sucesión de abscisas de Greville

$$\theta_i = \frac{1}{3}(x_i + x_{i+1} + x_{i+2}), \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Consideremos la sucesión $(N_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de B-splines cúbicos asociada a X . La identidad de Marsden proporciona las siguientes representaciones de los monomios como combinaciones lineales de los B-splines cúbicos:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} N_i(x) \\ x &= \frac{1}{3} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}) N_i(x) \\ x^2 &= \frac{1}{3} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (x_{i+1}x_{i+2} + x_{i+1}x_{i+3} + x_{i+2}x_{i+3}) N_i(x) \end{aligned}$$

Para cada $n \geq 0$, el qid

$$Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=-n}^{2+n} a_{i,j} f(\theta_{i+j}) \right) N_i,$$

será exacto en \mathbb{P}_2 si y sólo si

$$\begin{aligned} \sum_{j=-n}^{2+n} a_{i,j} &= 1 \\ \sum_{j=-n}^{2+n} a_{i,j} \theta_{i+j} &= \theta_{i+1} \\ \sum_{j=-n}^{2+n} a_{i,j} \theta_{i+j}^2 &= \frac{1}{3}(x_{i+1}x_{i+2} + x_{i+1}x_{i+3} + x_{i+2}x_{i+3}) \end{aligned}$$

para todo entero i . Si $n = 0$, la forma lineal discreta que acompaña al B-spline N_i es una combinación lineal de las abscisas interiores al soporte $[x_i, x_{i+4}]$ de N_i , y está garantizada la existencia de un únid exacto en \mathbb{P}_2 , que está acotado (cf. [14]).

Proposición 2.3.1 Consideremos el qid $Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mu_i(f) N_i$, donde

$$\mu_i(f) = \alpha_i f(\theta_i) + \beta_i f(\theta_{i+1}) + \gamma_i f(\theta_{i+2}),$$

con

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{h_{j+1}^2 + h_{j+1}h_{j+2} + h_{j+2}^2}{(h_j + h_{j+1} + h_{j+2})(h_j + 2h_{j+1} + 2h_{j+2} + h_{j+3})} \\ \beta_i &= 1 + \frac{h_{j+1}^2 + h_{j+1}h_{j+2} + h_{j+2}^2}{(h_j + h_{j+1} + h_{j+2})(h_{j+1} + h_{j+2} + h_{j+3})} \\ \gamma_i &= -\frac{h_{j+1}^2 + h_{j+1}h_{j+2} + h_{j+2}^2}{(h_{j+1} + h_{j+2} + h_{j+3})(h_j + 2h_{j+1} + 2h_{j+2} + h_{j+3})} \end{aligned}$$

Entonces,

1. Q es exacto en \mathbb{P}_2 .
2. Q es un operador acotado y

$$\|Q\|_\infty \leq 1 + 2 \max_{i \in \mathbb{Z}} \left(\frac{h_{j+1}^2 + h_{j+1}h_{j+2} + h_{j+2}^2}{(h_j + h_{j+1} + h_{j+2})(h_{j+1} + h_{j+2} + h_{j+3})} \right) \leq 3$$

para todas las particiones X .

DEMOSTRACIÓN Es similar a la de la Proposición 2.2.1. Como

$$\frac{h_{j+1}^2 + h_{j+1}h_{j+2} + h_{j+2}^2}{(h_j + h_{j+1} + h_{j+2})(h_{j+1} + h_{j+2} + h_{j+3})} < \frac{(h_{j+1} + h_{j+2})^2}{(h_j + h_{j+1} + h_{j+2})(h_{j+1} + h_{j+2} + h_{j+3})} < 1,$$

Q está acotado y $\|Q\|_\infty \leq 3$. □

La elección $n = 1$ permite plantear la construcción de qid de norma infinito más pequeña, empleando un procedimiento análogo al desarrollado en el caso cuadrático. Las condiciones de exactitud en \mathbb{P}_2 son ahora

$$\begin{aligned} \sum_{j=-1}^3 a_{i,j} &= 1 \\ \sum_{j=-1}^3 a_{i,j} \theta_{i+j} &= \theta_{i+1} \\ \sum_{j=-1}^3 a_{i,j} \theta_{i+j}^2 &= \frac{1}{3} (x_{i+1}x_{i+2} + x_{i+1}x_{i+3} + x_{i+2}x_{i+3}) \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Si la función

$$\nu(a_i) = \sum_{j=-1}^3 |a_{i,j}|, \quad a_i = (a_{i,-1}, a_{i,0}, a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3})^T,$$

sujeta a (2.3.1) tiene mínimo y el correspondiente qid está acotado, éste se denominará qid de norma casi mínima.

Proposición 2.3.2 *Supongamos que X cumple*

$$\theta_{i+1} + \theta_{i+2} \leq \theta_i + \theta_{i+4} \leq \theta_{i+2} + \theta_{i+3} \quad (2.3.2)$$

para todo entero i . Sean

$$a_{i,-1}^* = -\frac{h_{i+1}^2 + h_{i+1}h_{i+2} + h_{i+2}^2}{\xi_i(\xi_i + \xi_{i+2})} \quad (2.3.3)$$

$$a_{i,1}^* = 1 + \frac{h_{i+1}^2 + h_{i+1}h_{i+2} + h_{i+2}^2}{\xi_i\xi_{i+2}} \quad (2.3.4)$$

$$a_{i,3}^* = -\frac{h_{i+1}^2 + h_{i+1}h_{i+2} + h_{i+2}^2}{\xi_{i+2}(\xi_i + \xi_{i+2})}, \quad (2.3.5)$$

donde $\xi_i = h_{i-1} + 2h_i + 2h_{i+1} + h_{i+2}$. Entonces, el qid

$$\tilde{Q}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (a_{i,-1}^* f(\theta_{i-1}) + a_{i,1}^* f(\theta_{i+1}) + a_{i,3}^* f(\theta_{i+3})) N_i$$

es de norma infinita casi mínima y se cumple que

$$\|\tilde{Q}\|_{\infty} \leq 1 + 2 \max_{i \in \mathbb{Z}} \left(\frac{h_{i+1}^2 + h_{i+1}h_{i+2} + h_{i+2}^2}{\xi_i\xi_{i+2}} \right) \leq \frac{7}{3}.$$

DEMOSTRACIÓN La demostración es similar a la de la Proposición 2.2.2. a_i es solución de (2.2.1) si y sólo si

$$\begin{aligned} a_{i,-1} &= a_{i,-1}^* - \delta_{i,-1}\alpha_1 + \varepsilon_{i,-1}\alpha_1 \\ a_{i,0} &= \alpha_1 \\ a_{i,1} &= a_{i,1}^* - \delta_{i,1}\alpha_1 - \varepsilon_{i,1}\alpha_2 \\ a_{i,2} &= \alpha_2 \\ a_{i,3} &= a_{i,3}^* + \delta_{i,3}\alpha_1 - \varepsilon_{i,3}\alpha_2 \end{aligned}$$

siendo α_1 y α_2 parámetros reales,

$$\begin{aligned}\delta_{i,-1} &= \frac{(\theta_{i+3} - \theta_i)(\theta_{i+1} - \theta_i)}{(\theta_{i+3} - \theta_{i-1})(\theta_{i+1} - \theta_{i-1})}, & \varepsilon_{i,-1} &= \frac{(\theta_{i+3} - \theta_{i+2})(\theta_{i+2} - \theta_{i+1})}{(\theta_{i+3} - \theta_{i-1})(\theta_{i+1} - \theta_{i-1})}, \\ \delta_{i,3} &= \frac{(\theta_i - \theta_{i-1})(\theta_{i+1} - \theta_i)}{(\theta_{i+3} - \theta_{i-1})(\theta_{i+3} - \theta_{i+1})}, & \varepsilon_{i,3} &= \frac{(\theta_{i+2} - \theta_{i-1})(\theta_{i+2} - \theta_{i+1})}{(\theta_{i+3} - \theta_{i-1})(\theta_{i+3} - \theta_{i+1})}, \\ \delta_{i,1} &= 1 - \delta_{i,-1} + \delta_{i,3}, & \varepsilon_{i,1} &= 1 - \varepsilon_{i,-1} + \varepsilon_{i,3},\end{aligned}$$

y $(a_{i,-1}^*, a_{i,1}^*, a_{i,3}^*)^T$ la solución del sistema resultante al hacer $a_{i,0} = a_{i,2} = 0$ en (2.3.1), es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \theta_{i-1} & \theta_{i+1} & \theta_{i+3} \\ \theta_{i-1}^2 & \theta_{i+1}^2 & \theta_{i+3}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i,-1}^* \\ a_{i,1}^* \\ a_{i,3}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_{i+1} \\ \frac{1}{3}(x_{i+1}x_{i+2} + x_{i+1}x_{i+3} + x_{i+2}x_{i+3}) \end{pmatrix}.$$

Resolviendo este sistema se obtienen las igualdades (2.3.2). Minimizar $\nu(a_i)$ equivale a minimizar la función

$$\nu_i(\alpha) = \|a_i^* - A\alpha\|_1$$

donde $a_i^* = (a_{i,-1}^*, 0, a_{i,1}^*, 0, a_{i,3}^*)^T$ y

$$A^T = \begin{pmatrix} \delta_{i,-1} & -1 & \delta_{i,1} & 0 & -\delta_{i,3} \\ -\varepsilon_{i,-1} & 0 & \varepsilon_{i,1} & -1 & \varepsilon_{i,3} \end{pmatrix}.$$

Como en el caso cuadrático, el mínimo se alcanza en $\alpha = (0, 0)^T$.

Por (2.3.3), (2.3.4) y (2.3.5),

$$\begin{aligned}|a_{i,-1}^*| + |a_{i,1}^*| + |a_{i,3}^*| &= 1 + 2 \left(\frac{h_{i+1}^2 + h_{i+1}h_{i+2} + h_{i+2}^2}{\xi_i(\xi_i + \xi_{i+2})} + \frac{h_{i+1}^2 + h_{i+1}h_{i+2} + h_{i+2}^2}{\xi_{i+2}(\xi_i + \xi_{i+2})} \right) \\ &\leq 1 + 2 \left(\frac{h_{i+1} + h_{i+2}}{\xi_i} \frac{h_{i+1} + h_{i+2}}{\xi_i + \xi_{i+2}} + \frac{h_{i+1} + h_{i+2}}{\xi_{i+2}} \frac{h_{i+1} + h_{i+2}}{\xi_i + \xi_{i+2}} \right)\end{aligned}$$

Como

$$\frac{h_{i+1} + h_{i+2}}{\xi_i} \leq 1, \quad \frac{h_{i+1} + h_{i+2}}{\xi_i + \xi_{i+2}} \leq \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \frac{h_{i+1} + h_{i+2}}{\xi_i + \xi_{i+2}} \leq \frac{1}{3},$$

se concluye que

$$|a_{i,-1}^*| + |a_{i,1}^*| + |a_{i,3}^*| \leq \frac{7}{3},$$

por lo que el qid

$$\tilde{Q}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (a_{i,-1}^* f(\theta_{i-1}) + a_{i,1}^* f(\theta_{i+1}) + a_{i,3}^* f(\theta_{i+3})) N_i$$

está acotado, es de norma casi mínima y se cumple que

$$\|\tilde{Q}\|_{\infty} \leq 1 + 2 \max_{i \in \mathbb{Z}} \left(\frac{h_{i+1}^2 + h_{i+1}h_{i+2} + h_{i+2}^2}{\xi_i \xi_{i+2}} \right) \leq \frac{7}{3}$$

para toda sucesión X que cumple (2.3.2). \square

Nota 2.3.1 Si las condiciones (2.3.2) fuesen estrictas, el mínimo absoluto se alcanzaría sólo en $(0,0)$, existiendo, por tanto, un único qid de norma casi mínima.

Ejemplo 2.3.1 Consideremos nuevamente la sucesión $X = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ definida por

$$x_i = p + (i + \epsilon_i)h, \quad i \in \mathbb{Z},$$

donde $p \in \mathbb{R}$, $h > 0$ y la correspondiente sucesión Θ de abscisas de Greville está formada por los valores

$$\theta_i = \frac{x_i + x_{i+1} + x_{i+2}}{3} = \frac{1}{3} [3p + (3i + 3)h + (\epsilon_i + \epsilon_{i+1} + \epsilon_{i+2})h], \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Si $|\epsilon_i| \leq \frac{1}{4}$, se cumplirá la condición (2.3.2). Por tanto, también en este caso existe al menos un quasi-interpolante discreto de norma casi mínima, siendo único si cada perturbación ϵ_i cumple que $|\epsilon_i| < \frac{1}{4}$.

Capítulo 3

Quasi-interpolantes box-spline discretos de norma casi mínima sobre redes regulares del plano

En el capítulo 1 se ha considerado la construcción de quasi-interpolantes spline discretos sobre particiones uniformes de la recta real a partir de la minimización de una cota superior de la norma infinito del operador. Es lo que se ha dado en llamar qid de norma infinito casi mínima. El operador de quasi-interpolación asocia a cada función una serie B-spline cuyos coeficientes son combinaciones lineales de valores de f en los nodos de la partición.

Se quiere abordar un problema similar en el caso bivariado, haciendo uso de particiones regulares. El papel del B-spline univariado será desempeñado por un box-spline. Las propiedades de los box-splines son bien conocidas (ver, los libros [3], capítulo 11; [9]; [17], capítulos 2, 3 y 5; [42], capítulo 4; [44], capítulo 17; [62], capítulo 3; y [6], [7], [30], [45], [46], [47]). En lo que respecta a la evaluación de box-splines y series box-spline, hay que añadir [19], [21], [32].

Existen diferentes métodos para definir quasi-interpolantes multivariados que dan el máximo orden de aproximación (cf. [8]). Por ejemplo, en [9] y [17] se describe la construcción de qi box-spline utilizando sucesiones de Appell, series de Neumann y transformada de Fourier (ver también [7], [15], [16], [18], [23], [63]).

Emplearemos box-splines sobre redes tridireccionales y cuatridireccionales del plano, aunque la construcción que se dará podría llevarse a cabo con otros B-splines, es decir, funciones polinómicas a trozos de soporte compacto (cf. [38], [39], [40], [45], [46], [48], [49], [51], [52], [56], [58]).

El capítulo se organiza de la siguiente manera: en la primera sección se recuerda la definición del box-spline por convolución y se enumeran las principales propiedades, además de fijar los tipos de box-splines que se emplearán en la construcción de qid de

norma casi mínima para cada una de las redes regulares consideradas; en la segunda sección se formula el problema para box-splines de soporte hexagonal; la tercera detalla el caso cuártico de clase C^2 , determinando la única solución del problema; en la sección cuarta se muestra la no unicidad de solución, en general, considerando el box-spline de grado 7 y clase C^4 ; las tres secciones restantes tratan el problema para la red cuatridireccional, considerándose por separado el problema general, el basado en box-spline cuadrático y los correspondientes a los box-splines cuárticos.

3.1 Preliminares: box-splines

Para cada $n \geq 2$, sea $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un subconjunto de $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$. Supondremos que el espacio $\langle X_n \rangle$ engendrado por X_n es \mathbb{R}^2 y que X_n está ordenado de modo que los vectores $x_1 = (x_{1,1}, x_{1,2})^T$ y $x_2 = (x_{2,1}, x_{2,2})^T$ cumplan que

$$\det \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} \end{pmatrix} > 0.$$

Notemos $[X_n]$ a la envolvente convexa centrada de X_n , es decir,

$$[X_n] = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i, -\frac{1}{2} \leq t_i \leq \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Definimos

$$M(x, y | x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{\det \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} \end{pmatrix}}, & \text{si } (x, y) \in [\{x_1, x_2\}], \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y, para $m = 3, \dots, n$,

$$M(\cdot | x_1, x_2, \dots, x_m) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} M(\cdot - tx_m | x_1, \dots, x_{m-1}) dt.$$

Hacemos

$$M(\cdot | X_n) = M(\cdot | x_1, x_2, \dots, x_m),$$

obteniendo el box-spline centrado en el origen asociado al conjunto de direcciones X_n .

El box-spline $M(\cdot | X_n)$ verifica las siguientes propiedades:

1. Para toda $f \in C(\mathbb{R}^2)$ se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^2} M(x, y | X_n) f(x, y) dx dy = \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n} f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) dt_1 \cdots dt_n.$$

2. Su transformada de Fourier es

$$\widehat{M}(\cdot | X_n)(y) = \prod_{i=1}^n \frac{\text{sen} \langle y, \frac{1}{2}x_i \rangle}{\langle y, \frac{1}{2}x_i \rangle},$$

donde $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2$.

3. Su soporte es $[X_n]$.

4. $M(x, y | X_n) > 0$ si (x, y) es interior a $[X_n]$.

5. Sea

$$B(X_n) = \left\{ cx_{i_1} + \sum_j b_j x_{i_j} : -\frac{1}{2} \leq c \leq \frac{1}{2}, b_j = \pm \frac{1}{2}, 1 \leq i_1 \leq n \right\},$$

donde $\{i'_j\}$ denota el complementario de $\{i_1\}$ respecto de $\{1, 2, \dots, n\}$. Entonces, la restricción de $M(\cdot | X_n)$ a cada componente de $B(X_n)$ es un polinomio de grado total $n - 2$.

6. $M(\cdot | X_n)$ es de clase $C^{r(X_n)}(\mathbb{R}^2)$, donde

$$r(X_n) = \min \{ \text{card } Y : Y \subset X_n, \langle X_n \setminus Y \rangle \neq \mathbb{R}^2 \} - 2.$$

7. $\{M(\cdot - i | X_n), i \in \mathbb{Z}^2\}$ es una partición de la unidad, es decir,

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}^2} M(\cdot - i | X_n) = 1.$$

8. $\{M(\cdot - i | X_n), i \in \mathbb{Z}^2\}$ es linealmente independiente si y sólo si $|\det Y| = 1$ para toda base $Y \subseteq X_n$ de \mathbb{R}^2 .

9. Si

$$S(X_n) = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} c_i M(\cdot - i | X_n), c_i \in \mathbb{R} \right\},$$

entonces

$$\mathbb{P}_{r(X_n)+1} \subset S(X_n)$$

y

$$\mathbb{P}_{r(X_n)+2} \not\subset S(X_n)$$

La situación más frecuente consiste en formar X_n con las direcciones $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $e_3 = (1, 1)$ y $e_4 = (-1, 1)$, cada una de ellas con una determinada multiplicidad. (La notación empleada para estos vectores no se confunde con la que se ha venido utilizando para los monomios, que se seguirá usando en este capítulo.) Dados $p, q, r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea

$$X_{p,q,r,s} = \left\{ \underbrace{e_1, \dots, e_1}_p, \underbrace{e_2, \dots, e_2}_q, \underbrace{e_3, \dots, e_3}_r, \underbrace{e_4, \dots, e_4}_s \right\}$$

y notemos $M_{p,q,r,s} = M(\cdot | X_{p,q,r,s})$. Si $r = s = 0$ y $p, q \in \mathbb{N}$, entonces escribimos $M_{p,q}$ en lugar de $M_{p,q,0,0}$. El conjunto $B(X_n)$ induce una descomposición de \mathbb{R}^2 en cuadrados mediante las líneas $x = i$, $y = i$, $i \in \mathbb{Z}$. Si $s = 0$ y $p, q, r \in \mathbb{N}$, entonces escribimos $M_{p,q,r}$ en lugar de $M_{p,q,r,0}$. Ahora el conjunto $B(X_n)$ induce una triangulación del plano mediante las rectas $x = i$, $y = i$, $x + y = i$, $i \in \mathbb{Z}$. La denominaremos triangulación τ_1 . Finalmente, si $p, q, r, s \in \mathbb{N}$, la triangulación inducida por $B(X_n)$ está producida por las rectas de ecuaciones $x = i$, $y = i$, $x - y = i$ y $x + y = i$, $i \in \mathbb{Z}$. Denominaremos τ_2 a esta triangulación cuatridireccional.

En este capítulo vamos a determinar quasi-interpolantes discretos basados en box-splines sobre las triangulaciones τ_1 y τ_2 . En lo que respecta a la primera, consideraremos el box-spline $M_{k+1,k+1,k+1}$, $k \geq 0$, correspondiente a $p = q = r = k + 1$. Denotemos por H_s al hexágono de vértices $\{\pm s e_i, i = 1, 2, 3\}$. Entonces, el soporte de $M_{k+1,k+1,k+1}$ es H_{k+1} . Además, $M_{k+1,k+1,k+1}$ es de clase $C^{2k}(\mathbb{R}^2)$ y su restricción a cada triángulo de τ_1 es un polinomio de grado total $3k + 1$. Escribiremos $M_{k+1,k+1,k+1} \in \mathbb{P}_{3k+1}^{2k}(\tau_1)$. \mathbb{P}_{2k+1} es el mayor espacio de polinomios contenido en el espacio generado por las trasladadas de $M_{k+1,k+1,k+1}$.

Las Figuras 3.1 y 3.2 muestran los soportes de los box-splines $M_{k+1,k+1,k+1}$ para $k = 0, 1, 2$, y el box-spline $M_{1,1,1}$, respectivamente.

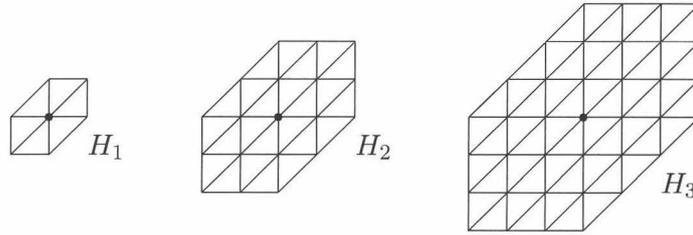


Figura 3.1: Triangulación τ_1 y hexágonos H_1 , H_2 y H_3 .

La definición indicada del box-spline $M(\cdot | X_n)$ muestra que

$$M_{k+1,k+1,k+1} = M_{1,1,1} * \overset{(k+1)}{\dots} * M_{1,1,1},$$

donde $*$ indica convolución.

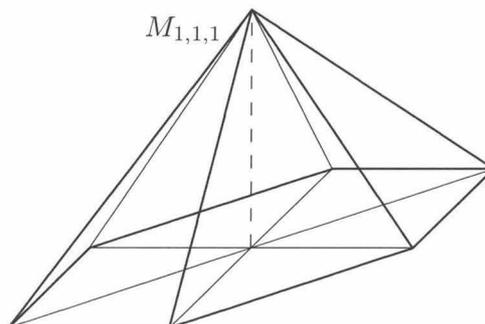


Figura 3.2: Pirámide de base H_1 .

Para la red cuatridireccional τ_2 , dos son los conjuntos de direcciones que vamos a considerar. El primero de ellos corresponde a $p = q = k + 1$ y $r = s = k$, $k \geq 1$, y da lugar al box-spline $M_{k+1,k+1,k,k}$. Su soporte es el octógono $\Omega_{k+1,k}$ centrado en el origen cuyos lados paralelos a las direcciones e_1 y e_2 son de longitud $k + 1$, mientras que los paralelos a las direcciones e_3 y e_4 son de longitud $k\sqrt{2}$. En la Figura 3.3 se muestran los correspondientes a $k = 1, 2, 3$.

El box-spline $M_{k+1,k+1,k,k}$ es de clase $C^{3k-1}(\mathbb{R}^2)$ y su restricción a cada triángulo de τ_2 es un polinomio de grado total $4k$. El espacio engendrado por las trasladadas enteras contiene al espacio \mathbb{P}_{3k} de los polinomios de grado total menor o igual que $3k$.

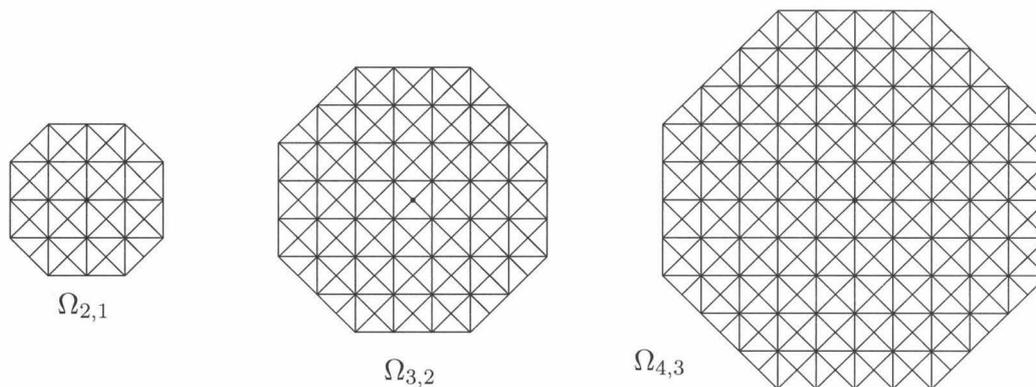


Figura 3.3: Triangulación τ_2 y octógonos $\Omega_{2,1}$, $\Omega_{3,2}$ y $\Omega_{4,3}$.

La segunda opción es $p = q = k$ y $r = s = k + 1$, $k \geq 1$, y proporciona el box-spline $M_{k,k,k+1,k+1}$. Su soporte es el octógono $\Omega_{k,k+1}$ centrado en el origen que tiene lados paralelos a las direcciones e_1 y e_2 de longitud k , siendo los paralelos a las direcciones e_3 y e_4 de longitud $(k + 1)\sqrt{2}$. Los correspondientes a $k = 1, 2, 3$ se muestran en la Figura 3.4.

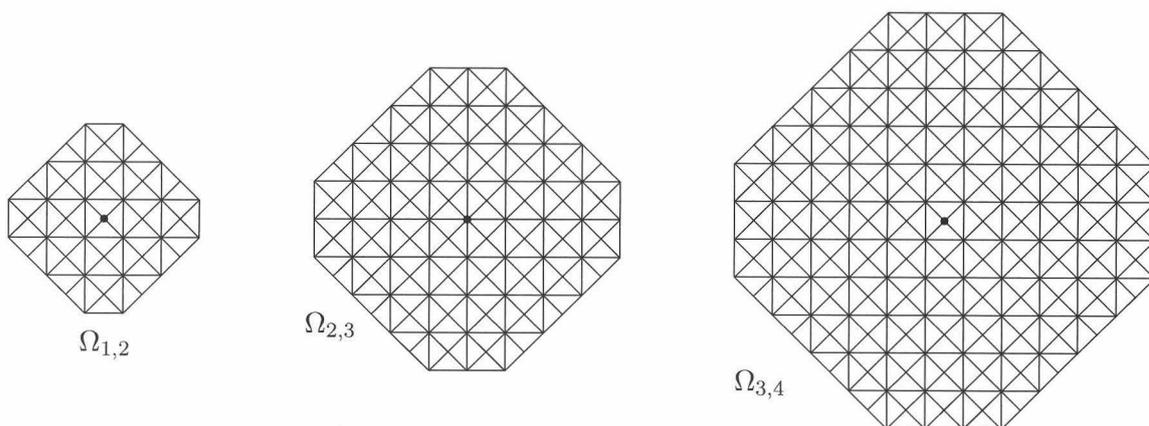


Figura 3.4: Triangulación τ_2 y octógonos $\Omega_{1,2}$, $\Omega_{2,3}$ y $\Omega_{3,4}$.

$M_{k,k,k+1,k+1}$ es de clase $C^{3k-1}(\mathbb{R}^2)$, su restricción a cada triángulo de τ_2 es un polinomio de grado total $4k$ y también es \mathbb{P}_{3k} el mayor espacio de polinomios contenido en el espacio engendrado por sus trasladadas enteras.

Para expresar $M_{k+1,k+1,k,k}$ y $M_{k,k,k+1,k+1}$ en términos de convolución, consideremos el box-spline $M_{1,1,1,1}$. Su soporte, que se muestra en la Figura 3.5, es el octógono centrado en el origen cuyos lados paralelos a las direcciones e_1 y e_2 son de longitud unidad, mientras que los paralelos a e_3 y e_4 son de longitud $\sqrt{2}$.

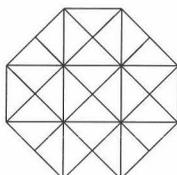


Figura 3.5: Soporte del box-spline $M_{1,1,1,1}$.

Es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ y su restricción a cada triángulo de τ_2 es de grado total dos.

Sea Σ (resp. Λ) el cuadrado (resp. rombo) de lado unidad (resp. $\sqrt{2}$) centrado en el origen (ver la Figura 3.6).

Los box-splines $M_{k+1,k+1,k,k}$ y $M_{k,k,k+1,k+1}$ cumplen que

$$M_{k+1,k+1,k,k} = 1_{\Sigma} * M_{1,1,1,1} * \cdots * M_{1,1,1,1}^{(k)}$$

$$M_{k,k,k+1,k+1} = 1_{\Lambda} * M_{1,1,1,1} * \cdots * M_{1,1,1,1}^{(k)}$$

donde 1_Σ (resp. 1_Λ) es la función característica de Σ (resp. Λ). Nótese que

$$1_\Sigma = M_{1,1,0,0}$$

$$1_\Lambda = M_{0,0,1,1}$$



Figura 3.6: Cuadrado Σ y rombo Λ .

3.2 Quasi-interpolantes box-spline discretos de norma casi mínima sobre la red tridireccional

En [50] se considera la estructura algebraica del conjunto $\{M(i), i \in H_k \cap \mathbb{Z}^2\}$ de valores del box-spline $M := M_{k+1,k+1,k+1}$ en los nodos interiores a su soporte para construir qid. Este conjunto hereda las simetrías de M . Concretamente, el box-spline M es invariante por las simetrías del hexágono H_1 , que están generadas por las matrices

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.1)$$

Sea $H_k^* := H_k \cap \mathbb{Z}^2$. Si G es una de las matrices anteriores, entonces $M(Gi) = M(i)$ para todo $i \in H_k^*$ y el conjunto $\{M(i), i \in H_k^*\}$ es una sucesión hexagonal con soporte en H_k . Le corresponde un operador en diferencias, D^* , que coincide sobre \mathbb{P}_{2k+1} con el operador de Schoenberg-Marsden $S_k := S$ definido por

$$Sf = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} f(i) M(\cdot - i).$$

El quasi-interpolante discreto

$$Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} f(i) (D^{*-1}M)(\cdot - i)$$

obtenido a partir de la inversa formal D^{*-1} de D^* sobre \mathbb{P}_{2k+1} es exacto en \mathbb{P}_{2k+1} . La elección de diferentes bases en el álgebra de las sucesiones hexagonales (por tanto, en el de operadores en diferencias asociados) da lugar a diferentes inversas formales. Cada una

de ellas conduce a un qid, cuya norma uniforme es fácilmente acotable. Las bases pueden ser elegidas de modo que disminuya dicha cota superior de la norma (cf. [52], [54]).

Planteamos un procedimiento alternativo de construcción de qid, atendiendo a la minimización de determinada cota superior de la norma infinito, similar al desarrollado en el capítulo 1 para el caso univariado. De hecho, el método empleado en el caso univariado fue considerado inicialmente en el marco de los qid bivariados basados en H-splines (cf. [56]).

Dado $s \geq k$, queremos construir qid del tipo

$$Q_{k+1,s}f := Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha f(i + \alpha) \right) M(\cdot - i). \quad (3.2.2)$$

Equivalentemente,

$$Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} f(i) L(\cdot - i), \quad (3.2.3)$$

donde la función fundamental $L_{k+1,s} := L$ se escribe como

$$L = \sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha M(\cdot - \alpha). \quad (3.2.4)$$

Se pedirá que la función fundamental L presente las mismas simetrías que M , es decir, que sea invariante por las simetrías de H_1 .

Lema 3.2.1 *L es invariante por las simetrías de H_1 si y sólo si para cada una de las matrices G_i dadas por (3.2.1) se cumple que $c_{G_i\alpha} = c_\alpha$ para todo $\alpha \in H_s^*$.*

DEMOSTRACIÓN L es invariante por las simetrías de H_1 si y sólo si $L(G\cdot) = L$ para toda matriz G que representa una simetría de H_1 . Como las simetrías de H_1 están generadas por las que tienen como matrices asociadas G_1 y G_2 , es suficiente probar que $L(G_i\cdot) = L$, para $i = 1, 2$. Sea G una cualquiera de tales matrices. Se cumple que

$$L(Gx) = \sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha M(Gx - \alpha) = \sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha M(G(x - (G^{-1}\alpha))).$$

Como M es invariante por las simetrías de H_1 ,

$$L(Gx) = \sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha M(x - G^{-1}\alpha).$$

El cambio de índice $\alpha = G\beta$ permite escribir

$$L(Gx) = \sum_{G\beta \in H_s^*} c_\alpha M(x - \beta).$$

Como $G^{-1}(H_s^*) = H_s^*$, entonces

$$L(Gx) = \sum_{\beta \in H_s^*} c_{G\beta} M(x - \beta).$$

Se concluye que L es invariante por las simetrías de H_1 si y sólo si $c_{G_i\beta} = c_\beta$ para todo $\beta \in H_s^*$ ($i = 1, 2$). \square

Para $s \geq 1$, sea \mathcal{H}_s el espacio de las sucesiones hexagonales con soporte en H_s . El lema precedente muestra que L presenta las mismas simetrías que el box-spline M si y sólo si $c = (c_\alpha)_{\alpha \in H_s^*} \in \mathcal{H}_s$.

Se cumple que (cf. [50]) \mathcal{H}_s es un espacio vectorial real de dimensión

$$d := d(s) = \begin{cases} (t+1)^2, & \text{si } s = 2t, \\ (t+1)(t+2), & \text{si } s = 2t+1. \end{cases}$$

Una sucesión $c \in \mathcal{H}_s$ está completamente determinada por una lista específica formada por d coeficientes, digamos $c_{\alpha_1}, \dots, c_{\alpha_d}$. Asociamos a c el vector $\tilde{c} = (c_{\alpha_1}, \dots, c_{\alpha_d})^T$. La Figura 3.7 muestra algunos ejemplos.

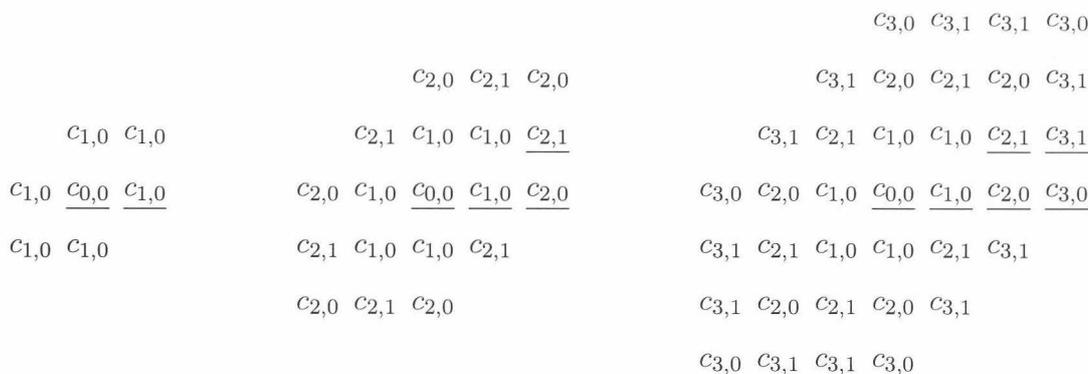


Figura 3.7: De izquierda a derecha, sucesiones hexagonales $c \in \mathcal{H}_s$, $s = 1, 2, 3$. Las listas \tilde{c} asociadas son $(c_{0,0}, c_{1,0})$, $(c_{0,0}, c_{1,0}, c_{2,0}, c_{2,1})$ y $(c_{0,0}, c_{1,0}, c_{2,0}, c_{2,1}, c_{3,0}, c_{3,1})$, respectivamente.

Además de la invarianza de L por las simetrías del hexágono H_1 , se va a exigir que Q sea exacto en el mayor espacio de polinomios contenido en el espacio generado por las trasladadas de M , es decir, que $Qp = p$ para todo $p \in \mathbb{P}_{2k+1}$. Esta propiedad da lugar a un conjunto de restricciones lineales para la sucesión hexagonal c , existiendo una matriz A de tamaño $r \times d$ de rango $r < d$ y un vector $b \in \mathbb{R}^r$ tales que la exactitud de Q equivale al cumplimiento de $A\tilde{c} = b$. Sea $V = \{\tilde{c} \in \mathbb{R}^d : A\tilde{c} = b\}$.

Finalmente, tenemos en cuenta que la norma infinito de Q es igual a la norma de Chebyshev de su función de Lebesgue,

$$\lambda_{k+1,s} := \lambda = \sum_{\alpha \in H_s^*} |L(\cdot - \alpha)|,$$

que está acotada superiormente por la l_1 -norma de c ; es decir,

$$\|Q\|_\infty \leq \|c\|_1.$$

Esta mayoración proporciona la función objetivo.

Proponemos, pues, el siguiente problema:

Problema 3.2.2 Resolver $\text{Min} \{\|c\|_1, c \in V\}$.

Definición 3.2.3 Si c es solución del Problema 3.2.2, entonces el correspondiente qid dado por (3.2.2) se dice qid de norma infinito casi mínima (relativo a H_s).

Proposición 3.2.4 El Problema 3.2.2 tiene al menos una solución.

DEMOSTRACIÓN Como el rango de A es r , el sistema $A\tilde{c} = b$ puede ser resuelto, y cada c_{α_i} , $1 \leq i \leq d$, es una función afín de $d - r$ componentes de \tilde{c} . Por otra parte, $c \in \mathcal{H}_s$. La sustitución de las funciones afines c_{α_i} en $\|c\|_1$ da lugar a una matriz \tilde{A} de tamaño $d \times (d - r)$ y un vector $\tilde{b} \in \mathbb{R}^d$ tales que $\|c\|_1 = \|\tilde{b} - \tilde{A}\tilde{c}\|_1$. Resolver el Problema 3.2.2 equivale a determinar la mejor l_1 -aproximación lineal de \tilde{b} por elementos de la forma $\tilde{A}\tilde{c}$, y la existencia de al menos una solución está garantizada. Si $\tilde{A}\tilde{c}$ es una mejor l_1 -aproximación lineal de \tilde{b} , entonces \tilde{c} es una solución del Problema 3.2.2 y proporciona un qid de norma casi mínima. \square

Nota 3.2.1 La demostración de la proposición anterior prueba que el problema de minimización considerado equivale a un problema de programación lineal.

Nota 3.2.2 En general, la solución no es única, como se mostrará más adelante.

La exactitud de Q en \mathbb{P}_{2k+1} proporciona las restricciones del problema de minimización planteado y se determinan a partir de la expresión de los monomios como combinación lineal de las trasladadas del box-spline. Como $\widehat{M}(0) = 1$, la función $\widehat{M}(u)^{-1}$ admite un desarrollo en serie de potencias centrado en el origen, que se escribe como

$$\widehat{M}(u)^{-1} = \sum_{\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^2} a_\alpha u^\alpha.$$

El quasi-interpolante diferencial

$$\mathcal{D}f = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^2} a_\alpha (-\mathbf{i})^{|\alpha|} D^\alpha f(j) \right) M(\cdot - j), \quad \mathbf{i}^2 = -1,$$

es exacto en \mathbb{P}_{2k+1} (cf. [23]). $D^\alpha f(j)$ representa la derivada parcial de orden α de f en j . Como

$$\mathcal{D}e_{\alpha,\beta} = e_{\alpha,\beta}$$

para todo $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^2$ tal que $\alpha + \beta \leq 2k + 1$, se obtienen igualdades que proporcionan las expresiones necesarias de los monomios como combinaciones lineales del box-spline. Además, las simetrías de la función fundamental facilitan el cálculo. El método descrito aprovecha que la transformada de Fourier del box-spline tiene una expresión simple. Un procedimiento alternativo se basa en los polinomios de Appell (cf. [17], [9]), que se construyen de forma recurrente a partir de los valores que el box-spline toma en los nodos interiores a su soporte.

3.3 Qid box-spline cuárticos de norma casi mínima sobre la red tridireccional

Consideraremos el problema general para el box-spline cuártico ($k = 1$) de clase dos.

Monomios como combinaciones lineales de las trasladadas del box-spline

Definamos la función *sinus cardinalis*

$$\text{sinc } z = \frac{2}{z} \text{sen } \frac{z}{2}.$$

Se tiene que

$$\widehat{M}(u) = (\text{sinc } u_1 \text{ sinc } u_2 \text{ sinc } (u_1 + u_2))^2$$

y

$$\widehat{M}(u)^{-1} = a_{0,0} + a_{2,0}u_1^2 + a_{1,1}u_1u_2 + a_{0,2}u_2^2 + \dots$$

con

$$a_{00} = 1 \quad \text{y} \quad a_{2,0} = a_{1,1} = a_{0,2} = \frac{1}{6}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}f &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{m=0}^1 (-1)^m \sum_{n=0}^{2m} a_{2m-n,n} D^{(2m-n,n)} f(i) \right) M(\cdot - i) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(f(i) - \frac{1}{6} \left(D^{(2,0)} f(i) + D^{(1,1)} f(i) + D^{(0,2)} f(i) \right) \right) M(\cdot - i) \end{aligned}$$

y es exacto en \mathbb{P}_3 .

Por tanto,

$$\begin{aligned} e_{0,0} &= \mathcal{D}e_{0,0} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} e_{0,0}(i) M(\cdot - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} M(\cdot - i) \\ e_{1,0} &= \mathcal{D}e_{1,0} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} e_{1,0}(i) M(\cdot - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_1 M(\cdot - i) \\ e_{0,1} &= \mathcal{D}e_{0,1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} e_{0,1}(i) M(\cdot - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_2 M(\cdot - i) \\ e_{2,0} &= \mathcal{D}e_{2,0} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(e_{2,0}(i) - \frac{1}{3} \right) M(\cdot - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1^2 - \frac{1}{3} \right) M(\cdot - i) \\ e_{1,1} &= \mathcal{D}e_{1,1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(e_{1,1}(i) - \frac{1}{6} \right) M(\cdot - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1 i_2 - \frac{1}{6} \right) M(\cdot - i) \\ e_{0,2} &= \mathcal{D}e_{0,2} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(e_{0,2}(i) - \frac{1}{3} \right) M(\cdot - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_2^2 - \frac{1}{3} \right) M(\cdot - i) \\ e_{3,0} &= \mathcal{D}e_{3,0} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (e_{3,0}(i) - e_{1,0}(i)) M(\cdot - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (i_1^3 - i_1) M(\cdot - i) \\ e_{2,1} &= \mathcal{D}e_{2,1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(e_{2,1}(i) - \frac{1}{3} e_{1,0}(i) - \frac{1}{3} e_{0,1}(i) \right) M(\cdot - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1^2 i_2 - \frac{1}{3} i_1 - \frac{1}{3} i_2 \right) M(\cdot - i) \\ e_{1,2} &= \mathcal{D}e_{1,2} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(e_{1,2}(i) - \frac{1}{3} e_{1,0}(i) - \frac{1}{3} e_{0,1}(i) \right) M(\cdot - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1 i_2^2 - \frac{1}{3} i_1 - \frac{1}{3} i_2 \right) M(\cdot - i) \\ e_{0,3} &= \mathcal{D}e_{0,3} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (e_{0,3}(i) - e_{0,1}(i)) M(\cdot - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (i_2^3 - i_2) M(\cdot - i) \end{aligned}$$

Condiciones de exactitud

Para $s \geq 1$, el qid

$$Q_{2,s}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha f(i + \alpha) \right) M(\cdot - i)$$

es exacto en \mathbb{P}_3 si y sólo si $Q_{2,s}e_{m,n} = e_{m,n}$ para $m + n \leq 3$. Como

$$Q_{2,s}e_{0,0} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha e_{0,0}(i + \alpha) \right) M(\cdot - i) = \sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha,$$

$Q_{2,s}e_{0,0} = e_{0,0}$ si y sólo si $\sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha = 1$.

Al ser $(c_\alpha)_{\alpha \in H_s^*}$ una sucesión hexagonal, $\sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha \alpha_1 = 0$ (y $\sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha \alpha_2 = 0$), por lo que

$$Q_{2,s}e_{1,0} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha (i_1 + \alpha_1) \right) M(\cdot - i) = \sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_1 M(\cdot - i) = e_{1,0} \sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha,$$

y la condición $\sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha = 1$ garantiza que $Q_{2,s}e_{1,0} = e_{1,0}$. Análogamente, $Q_{2,s}e_{0,1} = e_{0,1}$.

Además,

$$\begin{aligned} Q_{2,s}e_{2,0} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha (i_1 + \alpha_1)^2 \right) M(\cdot - i) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left\{ \left(\sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha \right) i_1^2 + 2 \left(\sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha \alpha_1 \right) i_1 + \left(\sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha \alpha_1^2 \right) \right\} M(\cdot - i) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left\{ i_1^2 + \left(\sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha \alpha_1^2 \right) \right\} M(\cdot - i) \\ &= \left(\sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha \alpha_1^2 \right) + \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_1^2 M(\cdot - i) \\ &= \left(\sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha \alpha_1^2 \right) + e_{2,0} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

y la condición $Q_{2,s}e_{2,0} = e_{2,0}$ equivale a $\sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha \alpha_1^2 = -\frac{1}{3}$. Esta igualdad garantiza que $Q_{2,s}e_{1,1} = e_{1,1}$ y $Q_{2,s}e_{0,2} = e_{0,2}$.

Finalmente, las condiciones

$$\sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha \alpha_1^2 = -\frac{1}{3}$$

implican que $Q_{2,s}e_{m,n} = e_{m,n}$ para $m+n=3$ (obsérvese que $\sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha \alpha_1^m \alpha_2^n = 0$ si $m+n=3$ pues $c \in \mathcal{H}_s$).

Proposición 3.3.1 $Q_{2,s}$ es exacto en \mathbb{P}_3 si y sólo si

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha &= 1 \\ \sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha \alpha_1^2 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Quasi-interpolantes box-spline discretos de norma casi mínima

Si $s=1$ entonces $d=2$ y también son dos las condiciones de exactitud. El sistema lineal tiene solución única, que proporciona el único qid exacto en \mathbb{P}_3 con forma lineal coeficiente construida a partir de una sucesión hexagonal $c \in \mathcal{H}_1$. Es (cf. [54], p. 10)

$$Q_{2,1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{3}{2} f(i) - \frac{1}{12} \sum_{l=1}^3 f(i \pm e_l) \right) M(\cdot - i). \quad (3.3.1)$$

Por tanto, es necesario que $s > 1$ para que $d > 2$ y haya parámetros que permitan que el problema de minimización pueda ser planteado. Supongamos, pues, que $s > 1$. Concretamente, $s = 2t$, $t \geq 1$. Una sucesión $c \in \mathcal{H}_s$ queda completamente determinada por $d = \dim \mathcal{H}_s = (t+1)^2$ de sus coeficientes.

La función objetivo del Problema 3.2.2 se escribe a partir de dichos coeficientes de la siguiente manera:

$$\|c\|_1 = |c_{0,0}| + 6 \sum_{j=1}^t (|c_{2j,j}| + |c_{2j,0}|) + 12 \sum_{j=2}^t \sum_{l=1}^{j-1} |c_{2j,l}| + 6 \sum_{j=0}^{t-1} |c_{2j+1,0}| + 12 \sum_{j=1}^t \sum_{l=1}^{j-1} |c_{2j-1,l}|.$$

Las restricciones son

$$1 = c_{0,0} + 6 \sum_{j=1}^t (c_{2j,j} + c_{2j,0}) + 12 \sum_{j=2}^t \sum_{l=1}^{j-1} c_{2j,l} + 6 \sum_{j=0}^{t-1} c_{2j+1,0} + 12 \sum_{j=1}^t \sum_{l=1}^{j-1} c_{2j-1,l}$$

y

$$-\frac{1}{3} = \sum_{j=1}^t \left\{ 4(2j)^2 c_{2j,0} + \left(2(2j)^2 + 4j^2 \right) c_{2j,j} \right\} + \sum_{j=2}^t \sum_{l=1}^{j-1} 4 \left\{ (2j)^2 + l^2 + (2j-l)^2 \right\} c_{2j,l} \\ + \sum_{j=2}^t \sum_{l=1}^{j-1} 4 \left\{ (2j-1)^2 + l^2 + (2j-1-l)^2 \right\} c_{2j-1,l}$$

Proposición 3.3.2 Sean

$$c_{0,0}^* = 1 + \frac{1}{2(2t)^2} \quad y \quad c_{2t,0}^* = -\frac{1}{12(2t)^2}.$$

Entonces,

$$\left(c_{0,0}^*, \underbrace{0, \dots, 0}_{t^2+t-1}, c_{2t,0}^*, \underbrace{0, \dots, 0}_t \right)^T \in \mathbb{R}^{(t+1)^2}$$

es solución del Problema 3.2.2 para $k = 1$ y $s = 2t$, $t \geq 1$.

DEMOSTRACIÓN La función objetivo $\|c\|_1$ depende de las $d = (t+1)^2$ variables

$$c_{0,0}, c_{1,0}, c_{2,0}, c_{2,1}, c_{3,0}, c_{3,1}, \dots, c_{2t-1,0}, c_{2t-1,1}, \dots, c_{2t-1,t-1}, c_{2t,0}, c_{2t,1}, \dots, c_{2t,t-1}, c_{2t,t}.$$

Resolviendo las igualdades que garantizan la exactitud en \mathbb{P}_3 , tenemos que $c_{0,0}$ y $c_{2t,0}$ son funciones afines del resto de los coeficientes que determinan la sucesión hexagonal c . En consecuencia, minimizar $\|c\|_1$ sujeta a las condiciones lineales de exactitud en \mathbb{P}_3 equivale a minimizar en \mathbb{R}^{d-2} una función (convexa) w de las variables

$$c_{1,0}, c_{2,0}, c_{2,1}, c_{3,0}, c_{3,1}, \dots, c_{2t-1,0}, c_{2t-1,1}, \dots, c_{2t-1,t-1}, c_{2t,1}, \dots, c_{2t,t-1}, c_{2t,t}.$$

Es suficiente probar que la restricción \bar{w} de esta última función a cada uno de los ejes coordenados presenta un mínimo local (y, por tanto, global) en $0 \in \mathbb{R}^{d-2}$.

Consideremos, una de las variables $c_{2j,j}$, $j = 1, 2, \dots, t$. La correspondiente restricción es

$$\bar{w}(c_{2j,j}) = \left| c_{0,0}^* - \frac{6}{4(2t)^2} \left(4(2t)^2 - 2(2j)^2 - 4j^2 \right) c_{2j,j} \right| \\ + 6 \left| c_{2t,0}^* - \frac{1}{4(2t)^2} \left(2(2j)^2 + 4j^2 \right) c_{2j,j} \right| + 6 |c_{2j,j}|$$

Para $c_{2j,j} \geq 0$ suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned}\bar{w}(c_{2j,j}) &= c_{0,0}^* - \frac{6}{4(2t)^2} \left(4(2t)^2 - 2(2j)^2 - 4j^2 \right) c_{2j,j} \\ &\quad - 6c_{2t,0}^* + 6\frac{1}{4(2t)^2} \left(2(2j)^2 + 4j^2 \right) c_{2j,j} + 6c_{2j,j} \\ &= (c_{0,0}^* - 6c_{2t,0}^*) + \frac{12}{4(2t)^2} \left(2(2j)^2 + 4j^2 \right) c_{2j,j} \\ &\geq c_{0,0}^* - 6c_{2t,0}^* \\ &= w(0)\end{aligned}$$

Análogamente, para $c_{2j,j} < 0$ suficientemente próximo a cero,

$$\begin{aligned}\bar{w}(c_{2j,j}) &= c_{0,0}^* - \frac{6}{4(2t)^2} \left(4(2t)^2 - 2(2j)^2 - 4j^2 \right) c_{2j,j} \\ &\quad - 6c_{2t,0}^* + 6\frac{1}{4(2t)^2} \left(2(2j)^2 + 4j^2 \right) c_{2j,j} - 6c_{2j,j} \\ &= (c_{0,0}^* - 6c_{2t,0}^*) + \left\{ \frac{12}{4(2t)^2} \left(2(2j)^2 + 4j^2 \right) - 12 \right\} c_{2j,j} \\ &\geq c_{0,0}^* - 6c_{2t,0}^* \\ &= w(0)\end{aligned}$$

Por tanto, $\bar{w}(c_{2j,j})$ presenta un mínimo relativo (y global) en $0 \in \mathbb{R}$.

Lo mismo sucede para cada una de las restantes variables. La convexidad de la función objetivo garantiza que w alcanza su mínimo global en $0 \in \mathbb{R}^{d-2}$, con lo que concluye la demostración. \square

La solución encontrada proporciona el quasi-interpolante box-spline discreto exacto en \mathbb{P}_3 de norma casi mínima (relativo a H_s , $s = 2t$)

$$Q_{2,s}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\left(1 + \frac{1}{8t^2} \right) f(i) - \frac{1}{48t^2} \sum_{l=1}^3 f(i \pm 2te_l) \right) M(\cdot - i).$$

Obsérvese que en lo que respecta al coste computacional, $Q_{2,s}$ y el quasi-interpolante clásico $Q_{2,1}$ son similares: en todos los casos, siete es el número de sumandos no nulos de la forma lineal coeficiente.

Si $s = 2t + 1$ es impar, con $t \geq 1$, la situación es análoga: la función objetivo es

$$\|c\|_1 = |c_{0,0}| + 6 \sum_{j=1}^t (|c_{2j,j}| + |c_{2j,0}|) + 12 \sum_{j=2}^t \sum_{l=1}^{j-1} |c_{2j,l}| + 6 \sum_{j=0}^t |c_{2j+1,0}| + 12 \sum_{j=1}^{t+1} \sum_{l=1}^{j-1} |c_{2j-1,l}|.$$

mientras que las restricciones son ahora

$$1 = c_{0,0} + 6 \sum_{j=1}^t (c_{2j,j} + c_{2j,0}) + 12 \sum_{j=2}^t \sum_{l=1}^{j-1} c_{2j,l} + 6 \sum_{j=0}^t c_{2j+1,0} + 12 \sum_{j=1}^{t+1} \sum_{l=1}^{j-1} c_{2j-1,l}$$

y

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} &= \sum_{j=1}^t \left\{ 4(2j)^2 c_{2j,0} + \left(2(2j)^2 + 4j^2 \right) c_{2j,j} \right\} + \sum_{j=2}^t \sum_{l=1}^{j-1} 4 \left\{ (2j)^2 + l^2 + (2j-l)^2 \right\} c_{2j,l} \\ &+ \sum_{j=0}^t 4(2j+1)^2 c_{2j+1,0} + \sum_{j=2}^{t+1} \sum_{l=1}^{j-1} 4 \left\{ (2j-1)^2 + l^2 + (2j-1-l)^2 \right\} c_{2j-1,l} \end{aligned}$$

Proposición 3.3.3 Sean

$$c_{0,0}^* = 1 + \frac{1}{2(2t+1)^2} \quad y \quad c_{2t+1,0}^* = -\frac{1}{12(2t+1)^2}.$$

Entonces,

$$(c_{0,0}^*, \underbrace{0, \dots, 0}_{t^2+2t}, c_{2t+1,0}^*, \underbrace{0, \dots, 0}_t)^T \in \mathbb{R}^{(t+1)(t+2)}$$

es solución del Problema 3.2.2 para $k = 1$ y $s = 2t + 1$, $t \geq 1$.

Obsérvese que, en general, hemos obtenido el quasi-interpolante box-spline de norma casi mínima (exacto en \mathbb{P}_3 y relativo a H_s) dado por

$$Q_{2,s}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\left(1 + \frac{1}{2s^2} \right) f(i) - \frac{1}{12s^2} \sum_{l=1}^3 f(i \pm se_l) \right) M(\cdot - i). \quad (3.3.2)$$

Proposición 3.3.4 Para cada, $s > 1$ se cumple que

$$\|Q_{2,s}\|_{\infty} \leq 1 + \frac{1}{s^2}.$$

La sucesión $(Q_{2,s})_{s>1}$ converge en norma infinito al operador de Schoenberg-Marsden.

DEMOSTRACIÓN Sea $f \in C(\mathbb{R}^2)$ tal que $\|f\|_\infty \leq 1$. Por (3.3.2),

$$\begin{aligned}
|Q_{2,s}f| &\leq \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left| \left(1 + \frac{1}{2s^2}\right) f(i) - \frac{1}{12s^2} \sum_{l=1}^3 f(i \pm se_l) \right| M(\cdot - i) \\
&\leq \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\left(1 + \frac{1}{2s^2}\right) |f(i)| + \frac{1}{12s^2} \sum_{l=1}^3 |f(i \pm se_l)| \right) M(\cdot - i) \\
&\leq \|f\|_\infty \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\left(1 + \frac{1}{2s^2}\right) + \frac{1}{12s^2} 6 \right) M(\cdot - i) \\
&\leq \left(\left(1 + \frac{1}{2s^2}\right) + \frac{1}{12s^2} 6 \right) \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} M(\cdot - i) \\
&= 1 + \frac{1}{s^2}
\end{aligned}$$

de donde se concluye la acotación de la norma infinito de $Q_{2,s}$.

Por otra parte, como el operador de Schoenberg-Marsden está definido por

$$Sf = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} f(i) M(\cdot - i),$$

se tiene que

$$Q_{2,s}f - Sf = \frac{1}{2s^2} \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(f(i) - \frac{1}{6} \sum_{l=1}^3 f(i \pm se_l) \right) M(\cdot - i).$$

Por tanto,

$$|Q_{2,s}f - Sf| \leq \frac{1}{2s^2} \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (2\|f\|_\infty) M(\cdot - i).$$

En consecuencia,

$$\|Q_{2,s} - S\|_\infty \leq \frac{1}{s^2}$$

y $(Q_{2,s})_{s>1}$ converge en norma infinito a S .

□

Comparación entre quasi-interpolantes box-spline discretos

La igualdad (3.3.1) da el único quasi-interpolante box-spline discreto exacto en \mathbb{P}_3 cuya función fundamental presenta las mismas simetrías que el box-spline M_2 . Cumple que

$$\|Q_{2,1}\|_\infty \leq 2.$$

Consideremos los quasi-interpolante box-spline discretos (3.3.2) para $s = 2, 3$. Se verifica que

$$\|Q_{2,2}\|_\infty \leq \frac{5}{4} = 1.25 \quad \text{y} \quad \|Q_{2,3}\|_\infty \leq \frac{10}{9} \simeq 1.1111.$$

La Figura 3.8 muestra las sucesiones hexagonales correspondientes a las formas lineales coeficiente de $Q_{2,s}$, $s = 1, 2, 3$.

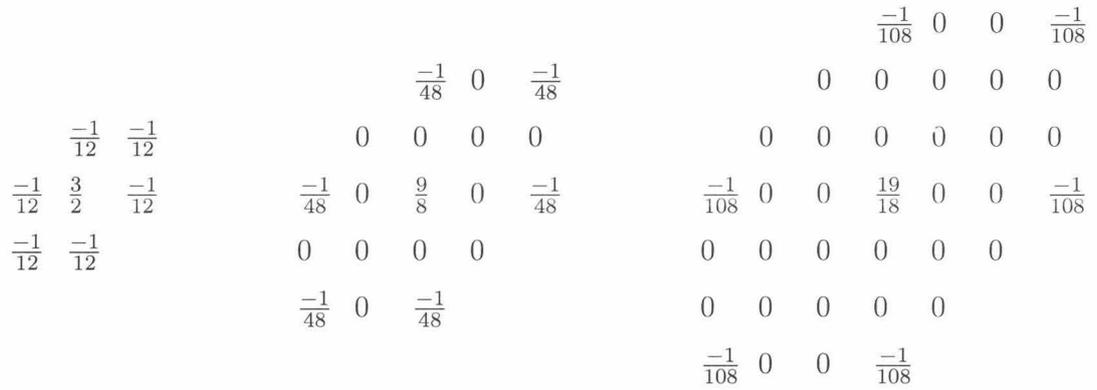


Figura 3.8: De izquierda a derecha, sucesiones hexagonales $c \in \mathcal{H}_s$, $s = 1, 2, 3$, de las formas lineales coeficiente de los qid $Q_{2,s}$.

A partir de la representación de Bernstein-Bézier de M_2 (ver anexo al capítulo 3) se determina el valor exacto de la norma infinito de cada uno de ellos.

Proposición 3.3.5 *Se cumple que*

$$\begin{aligned} \|Q_{2,1}\|_\infty &= \lambda_{2,1} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{193}{144} \simeq 1.34028 \\ \|Q_{2,2}\|_\infty &= \lambda_{2,2} (0, 0) = \frac{59}{48} \simeq 1.22917 \\ \|Q_{2,3}\|_\infty &= \lambda_{2,3} (0, 0) = \frac{119}{108} \simeq 1.10185 \end{aligned}$$

Para $s = 3$ la cota de la norma infinito es una buena aproximación de ésta.

3.4 Qid box-spline de grado siete de norma casi mínima sobre la red tridireccional

Ilustraremos la no unicidad de solución del Problema 3.2.2 considerando el box-spline de grado siete ($k = 2$).

Condiciones de exactitud

Consideremos el hexágono H_2 , el box-spline de grado siete $M := M_3$ y el qid

$$Q_{3,2}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{\alpha \in H_2^*} c_\alpha f(i + \alpha) \right) M(\cdot - i),$$

con $c \in \mathcal{H}_2$. Como $d = \dim \mathcal{H}_2 = 4$, c queda determinada a partir de 4 de sus elementos. Seleccionamos $c_{0,0}$, $c_{1,0}$, $c_{2,0}$ y $c_{2,1}$.

Proposición 3.4.1 $Q_{3,2}f$ es exacto en \mathbb{P}_5 si y sólo si

$$\begin{aligned} c_{0,0} + 6c_{1,0} + 6c_{2,0} + 6c_{2,1} &= 1 \\ c_{1,0} + 4c_{2,0} + 3c_{2,1} &= -\frac{1}{8} \\ c_{1,0} + 16c_{2,0} + 9c_{2,1} &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN Como

$$Q_{3,2}e_{0,0} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{\alpha \in H_2^*} c_\alpha e_{0,0}(i + \alpha) \right) M(\cdot - i) = \sum_{\alpha \in H_2^*} c_\alpha,$$

$Q_{3,2}$ fija $e_{0,0}$ si y sólo si

$$\sum_{\alpha \in H_2^*} c_\alpha = 1,$$

es decir,

$$c_{0,0} + c_{1,0} + c_{2,0} + c_{2,1} = 1.$$

En lo que respecta al monomio $e_{1,0}$, se cumple que

$$\begin{aligned} Q_{3,2}e_{1,0} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\left(\sum_{\alpha \in H_2^*} c_\alpha \right) i_1 + \sum_{\alpha \in H_2^*} c_\alpha \alpha_1 \right) M(\cdot - i) \\ &= \left(\sum_{\alpha \in H_2^*} c_\alpha \right) \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_1 M(\cdot - i) + \sum_{\alpha \in H_2^*} c_\alpha \alpha_1 \end{aligned}$$

La condición $\sum_{\alpha \in H_2^*} c_\alpha = 1$, junto con la igualdad $\sum_{\alpha \in H_2^*} c_\alpha \alpha_1 = 0$, permite escribir

$$Q_{3,2}e_{1,0} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_1 M(\cdot - i).$$

Por tanto (ver anexo),

$$Q_{3,2}e_{1,0} = e_{1,0}.$$

Análogamente,

$$Q_{3,2}e_{0,1} = e_{0,1}.$$

Consideremos ahora el monomio $e_{2,0}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} Q_{3,2}e_{2,0} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{\alpha \in H_2^*} c_\alpha (i_1^2 + 2\alpha_1 i_1 + \alpha_1^2) \right) M(\cdot - i) \\ &= \sum_{\alpha \in H_2^*} c_\alpha \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_1^2 M(\cdot - i) + 2 \sum_{\alpha \in H_2^*} \alpha_1 c_\alpha \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_1 M(\cdot - i) + \sum_{\alpha \in H_2^*} \alpha_1^2 c_\alpha \end{aligned}$$

y, por tanto (ver anexo al capítulo 3),

$$Q_{3,2}e_{2,0} = \sum_{\alpha \in H_2^*} i_1^2 M(\cdot - i) + \sum_{\alpha \in H_2^*} \alpha_1^2 = e_{2,0} + \frac{1}{2} + \sum_{\alpha \in H_2^*} \alpha_1^2 c_\alpha.$$

Se cumple que $Q_{3,2}e_{2,0} = e_{2,0}$ si y sólo si

$$\sum_{\alpha \in H_2^*} \alpha_1^2 c_\alpha = -\frac{1}{2},$$

es decir,

$$c_{1,0} + 4c_{2,0} + 3c_{2,1} = -\frac{1}{8}.$$

Es inmediato comprobar que $\sum_{\alpha \in H_2^*} c_\alpha = 1$ y $\sum_{\alpha \in H_2^*} \alpha_1^2 c_\alpha = -\frac{1}{2}$ garantizan que $Q_{3,2}e_{m,n} = e_{m,n}$, $m + n \leq 3$.

Para $e_{4,0}$, un cálculo similar proporciona la igualdad

$$Q_{3,2}e_{4,0} = \sum_{\alpha \in H_2^*} i_1^3 M(\cdot - i) + 6 \sum_{\alpha \in H_2^*} \alpha_1^2 c_\alpha \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_1^2 M(\cdot - i) + \sum_{\alpha \in H_2^*} \alpha_1^4 c_\alpha.$$

Equivalentemente,

$$Q_{3,2}e_{4,0} = \sum_{\alpha \in H_2^*} (i_1^3 - 3i_1^2) M(\cdot - i) + \sum_{\alpha \in H_2^*} \alpha_1^4 c_\alpha,$$

En consecuencia (ver anexo)

$$Q_{3,2}e_{4,0} = e_{4,0} - \frac{4}{5} + \sum_{\alpha \in H_2^*} \alpha_1^4 c_\alpha$$

y $Q_{3,2}e_{4,0} = e_{4,0}$ si y sólo si $\sum_{\alpha \in H_2^*} \alpha_1^4 c_\alpha = \frac{4}{5}$, es decir,

$$c_{1,0} + 16c_{2,0} + 9c_{2,1} = \frac{1}{5}.$$

Se comprueba que $Q_{3,2}e_{m,n} = e_{m,n}$, $m+n=4$, $1 \leq n \leq 4$, si se cumplen las condiciones $\sum_{\alpha \in H_2^*} c_\alpha = 1$ y $\sum_{\alpha \in H_2^*} \alpha_1^2 c_\alpha = -\frac{1}{2}$ y $\sum_{\alpha \in H_2^*} \alpha_1^4 c_\alpha = \frac{4}{5}$. \square

Quasi-interpolantes box-spline discretos de norma casi mínima

Estamos en condiciones de probar la existencia de una familia uniparamétrica de qid de norma casi mínima para el box-spline de grado siete y clase C^4 .

Proposición 3.4.2 *Para cada $\gamma \in [-\frac{7}{30}, 0]$, el qid*

$$Q_{3,2}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left\{ \left(\frac{179}{80} + 3\gamma \right) f(i) + \left(\frac{7}{30} + \gamma \right) \sum_{i=1}^3 f(i \pm e_i) + \left(\frac{13}{480} - \frac{1}{2}\gamma \right) \sum_{i=1}^3 f(i \pm 2e_i) + \gamma (f(\pm(e_1 + e_3)) + f(\pm(e_2 + e_3)) + f(\pm(-e_1 + e_2))) \right\} \times M(\cdot - i)$$

es de norma casi mínima (exacto en \mathbb{P}_5 y relativo a H_2).

DEMOSTRACIÓN La solución general del sistema que resulta de las condiciones de exactitud en \mathbb{P}_5 es

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= \frac{179}{80} + 3\gamma \\ c_{1,0} &= \frac{7}{30} + \gamma \\ c_{2,0} &= \frac{13}{480} - \frac{1}{2}\gamma \\ c_{2,1} &= \gamma \end{aligned}$$

con $\gamma \in \mathbb{R}$. La función objetivo del problema de minimización se escribe como

$$\begin{aligned} \|c\|_1 &= |c_{0,0}| + 6|c_{1,0}| + 6|c_{2,0}| + 6|c_{2,1}| \\ &= \left| \frac{179}{80} + 3\gamma \right| + 6 \left| \frac{7}{30} + \gamma \right| + 6 \left| \frac{13}{480} - \frac{1}{2}\gamma \right| + 6|\gamma| \end{aligned}$$

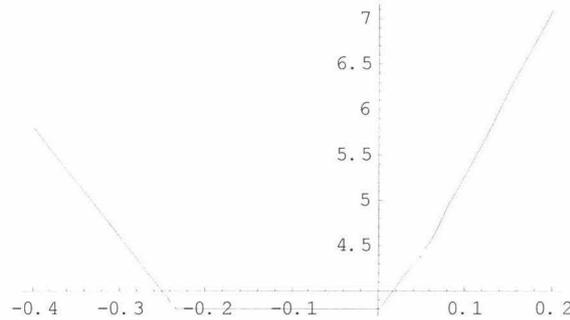


Figura 3.9: Función objetivo para la construcción de qid de norma casi mínima asociados al box-spline M_3 . La forma lineal coeficiente emplea los nodos de M_3^* .

Su mínimo es $\frac{19}{5}$ para todo $\gamma \in [-\frac{7}{30}, 0]$ (ver Figura 3.9). □

El valor $\gamma = -\frac{7}{30}$ proporciona una sucesión hexagonal con un patrón de ceros similar al de la que aparece en [56] para la red tridireccional equilátera.

Cada γ proporciona un quasi-interpolante box-spline discreto exacto en \mathbb{P}_5 de norma casi mínima, cuya forma lineal coeficiente utiliza los nodos en H_2^* .

3.5 Qid box-spline discretos de norma casi mínima sobre la red cuatridireccional

Sea ahora M uno de los box-splines $M_{1,1,1,1}$, $M_{k+1,k+1,k,k}$ o $M_{k,k,k+1,k+1}$, $k \geq 1$, Ω su soporte y Ω° su interior. M es invariante por las simetrías del rombo Λ , que están generadas por las matrices

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad G_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.5.1}$$

Se cumple, pues, que $M(Gi) = M(i)$ para cada simetría G , y el conjunto de valores de M en $\Omega^* := \Omega^\circ \cap \mathbb{Z}^2$ presenta las mismas simetrías que el rombo Λ . El conjunto $\{M(i), i \in \Omega^*\}$ es una sucesión rombo, y, como en el caso tridireccional, le corresponde un operador en diferencias. Su inversa formal sobre el mayor espacio de polinomios contenido en el espacio generado por las trasladas enteras de M permite definir quasi-interpolantes discretos. Si se eligen diferentes bases en el álgebra de las sucesiones rombo pueden obtenerse diferentes inversas formales y, por tanto, diferentes qid.

Planteamos un procedimiento de construcción de qid similar al desarrollado en la primera parte de este capítulo.

Para cada $s \geq 1$, sean Λ_s el rombo de vértices $(s, 0)$, $(0, s)$, $(-s, 0)$ y $(0, -s)$, y $\Lambda_s^* := \Lambda_s \cap \mathbb{Z}^2$. Dado $s \geq k$, queremos construir qid $Q_{(1,1,1,1),s} := Q_s := Q, Q_{(k+1,k+1,k,k),s} :=$

$Q_s := Q$ y $Q_{(k+1,k+1,k,k),s} := Q_s := Q$ del tipo

$$Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} c_\alpha f(i + \alpha) \right) M(\cdot - i). \quad (3.5.2)$$

En términos de la función fundamental $L_{(1,1,1,1),s} := L_s := L$, $L_{(k+1,k+1,k,k)} := L_s := L$ o $L_{(k,k,k+1,k+1)} := L_s := L$, definida por

$$L = \sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} c_\alpha M(\cdot - \alpha), \quad (3.5.3)$$

el quasi-interpolante se escribe como

$$Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} f(i) L(\cdot - i). \quad (3.5.4)$$

Lema 3.5.1 *L es invariante por las simetrías de Λ si y sólo si para cada una de las matrices G_i dadas por (3.5.1) se cumple que $c_{G_i \alpha} = c_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda_s^*$.*

DEMOSTRACIÓN Es similar a la del lema establecido para la red tridireccional. \square

Para $s \geq 1$, sea \mathcal{R}_s el espacio de las sucesiones rombo con soporte en Λ_s . Por el lema anterior, L tiene las mismas simetrías que el box-spline M si y sólo si $c = (c_\alpha)_{\alpha \in \Lambda_s^*} \in \mathcal{R}_s$.

Como \mathcal{R}_s es un espacio vectorial real de dimensión

$$d := d(s) = \begin{cases} (t+1)^2, & \text{si } s = 2t, \\ (t+1)(t+2), & \text{si } s = 2t+1, \end{cases}$$

una sucesión $c \in \mathcal{R}_s$ está completamente determinada por una lista específica formada por d coeficientes, digamos $c_{\alpha_1}, \dots, c_{\alpha_d}$, y asociamos a c el vector $\tilde{c} = (c_{\alpha_1}, \dots, c_{\alpha_d})^T$. La Figura 3.10 muestra algunos ejemplos.

Como en el caso tridireccional, se exigirá que Q sea exacto en el mayor espacio de polinomios contenido en el espacio generado por las trasladadas de M . Esta propiedad da lugar a un conjunto de restricciones lineales para la sucesión rombo c : existen una matriz A de tamaño $r \times d$ de rango $r < d$ y un vector $b \in \mathbb{R}^r$ tales que la exactitud de Q equivale al cumplimiento de $A\tilde{c} = b$. Sea $V = \{\tilde{c} \in \mathbb{R}^d : A\tilde{c} = b\}$.

Una vez impuestas las condiciones de simetría y de exactitud, queda por definir la función objetivo del problema de minimización, que vuelve a ser $\|c\|_1$ por cumplirse que

$$\|Q\|_\infty = \max \lambda(x) \leq \|c\|_1,$$

con

$$\lambda := \sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} |L(\cdot - \alpha)|$$

Por tanto, proponemos el siguiente problema:

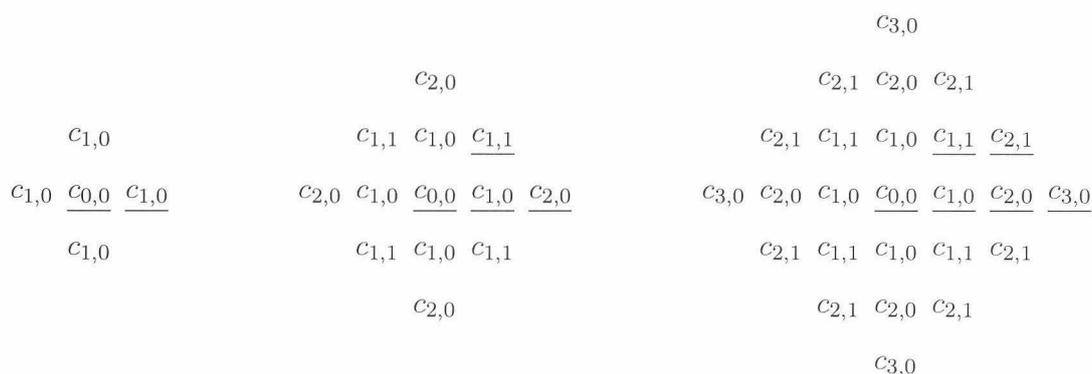


Figura 3.10: De izquierda a derecha, sucesiones rombo $c \in \mathcal{R}_s$, $s = 1, 2, 3$. Las listas \tilde{c} asociadas son $(c_{0,0}, c_{1,0})$, $(c_{0,0}, c_{1,0}, c_{2,0}, c_{1,1})$ y $(c_{0,0}, c_{1,0}, c_{2,0}, c_{1,1}, c_{3,0}, c_{2,1})$, respectivamente.

Problema 3.5.2 Resolver $\text{Min} \{ \|c\|_1, c \in V \}$.

Definición 3.5.3 Si c es solución del Problema 3.5.2, entonces el correspondiente qid dado por (3.5.2) se dice qid de norma infinito casi mínima (relativo a Λ_s).

Proposición 3.5.4 El Problema 3.5.2 tiene al menos una solución.

DEMOSTRACIÓN Es similar a la desarrollada para el Problema 3.2.2. □

Nota 3.5.1 Para determinar las restricciones lineales que deben cumplir los coeficientes de la sucesión rombo para que el quasi-interpolante Q sea exacto, es necesario conocer cómo se expresan los monomios como combinaciones lineales de las trasladadas del box-spline. El quasi-interpolante diferencial construido a partir de la transformada de Fourier del box-spline (cf. [23]) proporciona esta información. Sin embargo, en [63] se encuentran las expresiones necesarias cuando se considera un box-spline sobre la red cuatridireccional asociado al conjunto de direcciones

$$X_{p,q,r,s} = \{ \underbrace{e_1, \dots, e_1}_p, \underbrace{e_2, \dots, e_2}_q, \underbrace{e_3, \dots, e_3}_r, \underbrace{-e_4, \dots, -e_4}_s \}.$$

Nota 3.5.2 Es posible considerar tipos particulares de sucesiones rombo de forma que las soluciones de los correspondientes problemas de minimización tengan una función fundamental con un soporte más pequeño. El último ejemplo de la sección 3.7, se da un ejemplo considerando para ello el box-spline $M_{1,1,2,2}$.

3.6 Qid de norma casi mínima y box-spline cuadrático

Consideremos el box-spline cuadrático de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ sobre la red τ_2 , $M := M_{1,1,1,1}$. Su transformada de Fourier es

$$\widehat{M}(u) = \text{sinc } u_1 \text{ sinc } u_2 \text{ sinc } (u_1 + u_2) \text{ sinc } (u_2 - u_1)$$

y

$$\widehat{M}(u)^{-1} = a_{0,0} + a_{2,0}u_1^2 + a_{1,1}u_1u_2 + a_{0,2}u_2^2 + \dots$$

con

$$a_{0,0} = 1, \quad a_{1,1} = 0 \quad \text{y} \quad a_{2,0} = a_{0,2} = -\frac{1}{8}.$$

Entonces, el quasi-interpolante diferencial asociado es

$$\mathcal{D}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(f(i) - \frac{1}{8} \left(D^{(2,0)}f(i) + D^{(0,2)}f(i) \right) \right) M(\cdot - i),$$

y es exacto en \mathbb{P}_2 .

Por tanto,

$$\begin{aligned} e_{0,0} &= \mathcal{D}e_{0,0} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} e_{0,0}(i) M(\cdot - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} M(\cdot - i) \\ e_{1,0} &= \mathcal{D}e_{1,0} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} e_{1,0}(i) M(\cdot - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_1 M(\cdot - i) \\ e_{0,1} &= \mathcal{D}e_{0,1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} e_{0,1}(i) M(\cdot - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_2 M(\cdot - i) \\ e_{2,0} &= \mathcal{D}e_{2,0} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(e_{2,0}(i) - \frac{1}{4} \right) M(\cdot - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1^2 - \frac{1}{4} \right) M(\cdot - i) \\ e_{1,1} &= \mathcal{D}e_{1,1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} e_{1,1}(i) M(\cdot - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_1 i_2 M(\cdot - i) \\ e_{0,2} &= \mathcal{D}e_{0,2} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(e_{0,2}(i) - \frac{1}{4} \right) M(\cdot - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_2^2 - \frac{1}{4} \right) M(\cdot - i) \end{aligned}$$

Proposición 3.6.1 Para cada $s \geq 1$, el qid

$$Q_{(1,1,1,1),s}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} c_\alpha f(i + \alpha) \right) M(\cdot - i)$$

es exacto en \mathbb{P}_2 si y sólo si

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha \in H_s^*} c_\alpha &= 1 \\ \sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} c_\alpha \alpha_1^2 &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN Para el monomio $e_{0,0}$ se tiene que

$$Q_{(1,1,1,1),s} e_{0,0} = \sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} c_\alpha.$$

Para $e_{1,0}$,

$$Q_{(1,1,1,1),s} e_{1,0} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} c_\alpha e_{1,0}(i + \alpha) \right) M(\cdot - i) = \sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} c_\alpha \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_1 M(\cdot - i) + \sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} \alpha_1 c_\alpha$$

Por tanto,

$$Q_{(1,1,1,1),s} e_{1,0} = \left(\sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} c_\alpha \right) e_{1,0},$$

pues $\sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} \alpha_1 c_\alpha = 0$. Análogamente,

$$Q_{(1,1,1,1),s} e_{0,1} = \left(\sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} c_\alpha \right) e_{0,1}.$$

En lo que respecta a $e_{2,0}$,

$$\begin{aligned}Q_{(1,1,1,1),s} e_{2,0} &= \sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} c_\alpha \sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} i_1^2 M(\cdot - i) + 2 \sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} \alpha_1 c_\alpha \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_1 M(\cdot - i) + \sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} \alpha_1^2 c_\alpha \\ &= \sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} c_\alpha \sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} i_1^2 M(\cdot - i) + \sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} \alpha_1^2 c_\alpha\end{aligned}$$

Entonces,

$$Q_{(1,1,1,1),s} e_{2,0} = \left(\sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} c_\alpha \right) \left(e_{2,0} + \frac{1}{4} \right) + \sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} \alpha_1^2 c_\alpha.$$

Del mismo modo,

$$Q_{(1,1,1,1),s} e_{0,2} = \left(\sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} c_\alpha \right) \left(e_{0,2} + \frac{1}{4} \right) + \sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} \alpha_2^2 c_\alpha.$$

Por último,

$$\begin{aligned}
Q_{(1,1,1,1),s}e_{1,1} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} c_\alpha (i_1 i_2 + i_1 \alpha_2 + i_2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2) \right) M(\cdot - i) \\
&= \sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} c_\alpha \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_1 i_2 M(\cdot - i) + \sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} \alpha_1 c_\alpha \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_1 M(\cdot - i) \\
&\quad + \sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} \alpha_2 c_\alpha \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_2 M(\cdot - i) + \sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} \alpha_1 \alpha_2 c_\alpha \\
&= \left(\sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} c_\alpha \right) e_{1,1}
\end{aligned}$$

En resumen, $Q_{(1,1,1,1),s}$ es exacto en \mathbb{P}_2 si y sólo si

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} c_\alpha &= 1 \\
\sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} \alpha_1^2 c_\alpha &= \sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} \alpha_2^2 c_\alpha = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Pero $\sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} \alpha_1^2 c_\alpha = \sum_{\alpha \in \Lambda_s^*} \alpha_2^2 c_\alpha$, con lo que concluye la demostración. \square

Si $s = 1$ entonces $c \in \mathcal{R}_1$ y la sucesión está determinada por $c_{0,0}$ y $c_{1,0}$. Las condiciones de exactitud son

$$\begin{aligned}
c_{0,0} + 4c_{1,0} &= 1 \\
2c_{1,0} &= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Su única solución es $c_{0,0} = \frac{3}{2}$ y $c_{1,0} = -\frac{1}{8}$. El qid asociado es (cf. [54], p. 10)

$$Q_{(1,1,1,1),s}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{3}{2}f(i) - \frac{1}{8} \sum_{l=1}^2 f(i \pm e_l) \right) M(\cdot - i). \quad (3.6.1)$$

Si $s > 1$ entonces $d = \dim \mathcal{R}_s > 2$ y se puede plantear el problema de minimización 3.5.2. Supongamos $s = 2t$, $t \in \mathbb{N}$. Una sucesión $c \in \mathcal{R}_s$ queda completamente determinada por $d = \dim \mathcal{R}_s = (t+1)^2$ de sus coeficientes.

La función objetivo del Problema 3.5.2 se escribe en términos de dichos coeficientes como

$$\|c\|_1 = |c_{0,0}| + 4 \sum_{j=1}^t (|c_{2j,j}| + |c_{2j-1,0}| + |c_{2j,j}|) + 8 \sum_{j=2}^t \sum_{l=1}^{j-1} (|c_{2j,l}| + |c_{2j-1,l}|).$$

Las restricciones son

$$1 = |c_{0,0}| + 4 \sum_{j=1}^t (c_{2j,j} + c_{2j-1,0} + c_{2j,j}) + 8 \sum_{j=2}^t \sum_{l=1}^{j-1} (c_{2j,l} + c_{2j-1,l})$$

y

$$-\frac{1}{4} = 2 \sum_{j=1}^t \left\{ (2j-1)^2 c_{2j-1,0} + (2j)^2 c_{2j,0} + 2j^2 c_{2j,j} \right\} \\ + 4 \sum_{j=2}^t \sum_{l=1}^{j-1} \left\{ [l^2 + (2j-l)^2] c_{2j,l} + [l^2 + (2j-1-l)^2] c_{2j-1,l} \right\}$$

El estudio en un entorno del origen (similar al presentado en el caso tridireccional) de cada una de las funciones (convexas) que surgen al anular en la expresión descrita para la función objetivo todas las variables

$$c_{0,0}, c_{1,0}, c_{2,0}, c_{2,1}, \dots, c_{2t,1}, \dots, c_{2t,t}$$

excepto una permite demostrar el siguiente resultado:

Proposición 3.6.2 Sean

$$c_{0,0}^* = 1 + \frac{1}{2(2t)^2} \quad y \quad c_{2t,0}^* = -\frac{1}{8(2t)^2}.$$

Entonces,

$$(c_{0,0}^*, \underbrace{0, \dots, 0}_{t^2+t-1}, c_{2t,0}^*, \underbrace{0, \dots, 0}_t)^T \in \mathbb{R}^{(t+1)^2}$$

es solución del Problema 3.5.2 para el box-spline $M_{1,1,1,1}$ y $s = 2t$, $t \geq 1$.

La solución indicada proporciona el quasi-interpolante box-spline discreto exacto en \mathbb{P}_2 de norma casi mínima (relativo a Λ_s , $s = 2t$, $t \geq 1$)

$$Q_{(1,1,1,1),s} f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\left(1 + \frac{1}{8t^2} \right) f(i) - \frac{1}{48t^2} \sum_{l=1}^2 f(i \pm 2te_l) \right) M(\cdot - i).$$

El coste computacional de $Q_{(1,1,1,1),s}$ es similar al de $Q_{(1,1,1,1),1}$.

Si $s \geq 3$ es impar, digamos $s = 2t + 1$ con $t \in \mathbb{N}$, la situación es análoga:

Proposición 3.6.3 Sean

$$c_{0,0}^* = 1 + \frac{1}{2(2t+1)^2} \quad y \quad c_{2t+1,0}^* = -\frac{1}{8(2t+1)^2}.$$

Entonces,

$$(c_{0,0}^*, \underbrace{0, \dots, 0}_{t^2+2t}, c_{2t+1,0}^*, \underbrace{0, \dots, 0}_t)^T \in \mathbb{R}^{(t+1)(t+2)}$$

es solución del Problema 3.5.2 para $k = 1$ y $s = 2t + 1$, $t \geq 1$.

Obsérvese que, en general, hemos obtenido el quasi-interpolante box-spline de norma casi mínima (exacto en \mathbb{P}_2 y relativo a Λ_s) dado por

$$Q_{(1,1,1,1),s} f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\left(1 + \frac{1}{2s^2} \right) f(i) - \frac{1}{8s^2} \sum_{l=1}^2 f(i \pm se_l) \right) M(\cdot - i). \quad (3.6.2)$$

Proposición 3.6.4 Para cada $s > 1$, se cumple que

$$\|Q_{(1,1,1,1),s}\|_{\infty} \leq 1 + \frac{1}{s^2}.$$

La sucesión $(Q_{(1,1,1,1),s})_{s>1}$ converge en norma infinito al operador de Schoenberg-Marsden.

Los qid $Q_{(1,1,1,1),s}$, $s = 1, 2, 3$, exactos en \mathbb{P}_2 proporcionados por las igualdades (3.6.1) y (3.6.2) cumplen que

$$\begin{aligned} \|Q_{(1,1,1,1),1}\|_{\infty} &\leq 2 \\ \|Q_{(1,1,1,1),2}\|_{\infty} &\leq \frac{5}{4} = 1.25 \\ \|Q_{(1,1,1,1),3}\|_{\infty} &\leq \frac{10}{9} \simeq 1.1111. \end{aligned}$$

La Figura 3.11 muestra las sucesiones rombo correspondientes a las formas lineales coeficiente de $Q_{(1,1,1,1),s}$.

Proposición 3.6.5 Se cumple que

$$\begin{aligned} \|Q_{(1,1,1,1),1}\|_{\infty} &= \lambda_{(1,1,1,1),1} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} \\ \|Q_{(1,1,1,1),2}\|_{\infty} &= \lambda_{(1,1,1,1),2} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{4} \\ \|Q_{(1,1,1,1),3}\|_{\infty} &= \lambda_{(1,1,1,1),3} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{10}{9} \end{aligned}$$

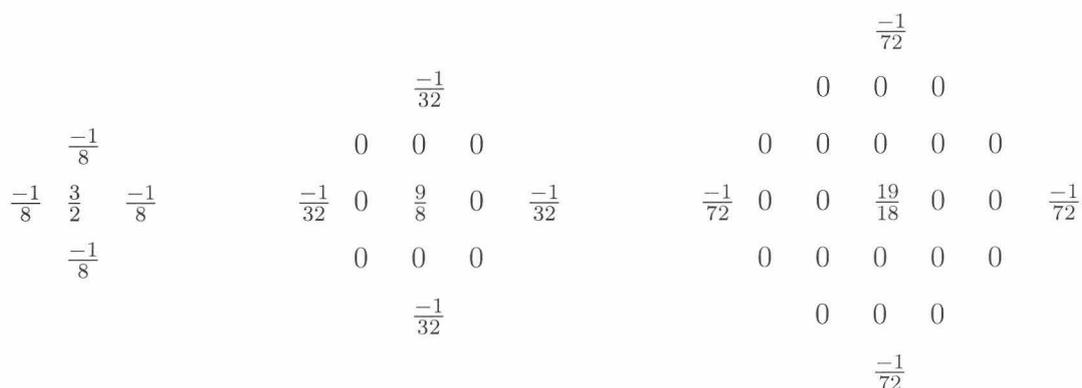


Figura 3.11: De izquierda a derecha, sucesiones rombo $c \in \mathcal{R}_s$, $s = 1, 2, 3$, de las formas lineales coeficiente de los qid $Q_{(1,1,1,1),s}$.

DEMOSTRACIÓN Para $s = 1, 2$, se determina el valor exacto de la norma infinito de cada $Q_{(1,1,1,1),s}$ a partir de la representación de Bernstein-Bézier de $M_{1,1,1,1}$ (ver anexo al capítulo 3). Para $s = 3$, se escribe

$$Q_{(1,1,1,1),3}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} f(i) L(\cdot - i),$$

con

$$L = \frac{19}{18}M - \frac{1}{72} \sum_{l=1}^2 M(\cdot \pm 3e_l).$$

Como los soportes de M y $M(\cdot \pm 3e_l)$ tienen interiores disjuntos, entonces

$$|L| = \frac{19}{18}M + \frac{1}{72} \sum_{l=1}^2 M(\cdot \pm 3e_l),$$

de donde se sigue el resultado. □

Nótese cómo los valores exactos de las normas uniformes de los qid $Q_{(1,1,1,1),2}$ y $Q_{(1,1,1,1),3}$ coinciden con las correspondientes cotas.

3.7 Qid de norma casi mínima y box-splines cuárticos

Box-spline $M_{1,1,2,2}$

En [54] se construyen dos qid asociados al box-spline $M_{1,1,2,2}$, para lo que se consideran dos bases diferentes del espacio \mathcal{R}_2 . Son

$$P_{(1,1,2,2),2,a}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{97}{48} f(i) - \frac{13}{48} \sum_{l=1}^2 f(i \pm e_l) + \frac{1}{64} \sum_{l=1}^2 f(i \pm 2e_l) \right) M_{1,1,2,2}(\cdot - i)$$

y

$$P_{(1,1,2,2),2,b}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{41}{24} f(i) - \frac{7}{48} \sum_{l=1}^2 f(i \pm e_l) - \frac{1}{32} \sum_{l=3}^4 f(i \pm e_l) \right) M_{1,1,2,2}(\cdot - i).$$

Para dichos qid, se tiene que

$$\|P_{(1,1,2,2),2,a}\|_{\infty} \leq \frac{19}{6} \simeq 3.1666 \quad y \quad \|P_{(1,1,2,2),2,b}\|_{\infty} \leq \frac{29}{12} \simeq 2.4166.$$

La representación de Bernstein-Bézier de $M_{1,1,2,2}$ permite establecer el siguiente resultado (ver anexo):

Proposición 3.7.1 *Se verifica que*

$$\|P_{(1,1,2,2),2,a}\|_{\infty} \simeq 1.406834 \quad y \quad \|P_{(1,1,2,2),2,b}\|_{\infty} = \frac{12437}{9216} \simeq 1.3495.$$

Podemos plantear la construcción de qid de norma casi mínima con una forma lineal coeficiente que emplea los nodos de Λ_2^* .

Proposición 3.7.2 *Supongamos que $(c_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda_2^*} \in \mathcal{R}_2$. El qid*

$$Q_{(1,1,2,2),2}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{\alpha \in \Lambda_2^*} c_{\alpha} f(i + \alpha) \right) M_{1,1,2,2}(\cdot - i)$$

es exacto en \mathbb{P}_3 si y sólo si

$$\begin{aligned} c_{0,0} + 4c_{1,0} + 4c_{2,0} + 4c_{2,1} &= 1 \\ c_{1,0} + 4c_{2,0} + 2c_{2,1} &= -\frac{5}{24} \end{aligned}$$

Además, es de norma casi mínima si y sólo si

$$c_{0,0} = \frac{29}{24}, \quad c_{1,0} = 0, \quad c_{2,0} = -\frac{5}{96} \quad y \quad c_{2,1} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN La deducción de las condiciones de exactitud en \mathbb{P}_3 es similar a las ya desarrolladas en los ejemplos previos. Las expresiones de los monomios como combinaciones lineales de las trasladadas del box-spline se encuentran en el anexo.

Resolviendo el sistema, se tiene que

$$\begin{aligned} \|c\|_1 &= |c_{0,0}| + 4|c_{1,0}| + 4|c_{2,0}| + 4|c_{2,1}| \\ &= \frac{1}{24} |29 - 72c_{1,0} - 48c_{2,1}| + 4|c_{1,0}| + \frac{1}{24} |5 + 24c_{1,0} + 48c_{2,1}| + 4|c_{2,1}| \end{aligned}$$

Esta función convexa alcanza su mínimo absoluto (únicamente) en $c_{1,0} = c_{2,1} = 0$. \square

Se ha probado que sólo hay un único qid de norma casi mínima, $Q_{(1,1,2,2),2,a}$, para el box-spline $M_{1,1,2,2}$ (exacto en \mathbb{P}_3 y relativo a Λ_2):

$$Q_{(1,1,2,2),2,a}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{29}{24} f(i) - \frac{5}{96} \sum_{l=1}^2 f(i \pm 2e_l) \right) M(\cdot - i).$$

Se prueba el siguiente resultado:

Proposición 3.7.3 *Se cumple que*

$$\|Q_{(1,1,2,2),2,a}\|_\infty = \frac{2009}{1536} \simeq 1.3079.$$

Nótese que $Q_{(1,1,2,2),2,a}$ es menos costoso en términos de computación que $P_{(1,1,2,2),2,a}$ y $P_{(1,1,2,2),2,b}$. Además, es mejor que ambos en lo que respecta a la norma infinito. En la Figura 3.12 se muestran las sucesiones rombo asociadas a $P_{(1,1,2,2),2,a}$, $P_{(1,1,2,2),2,b}$ y $Q_{(1,1,2,2),2,a}$.

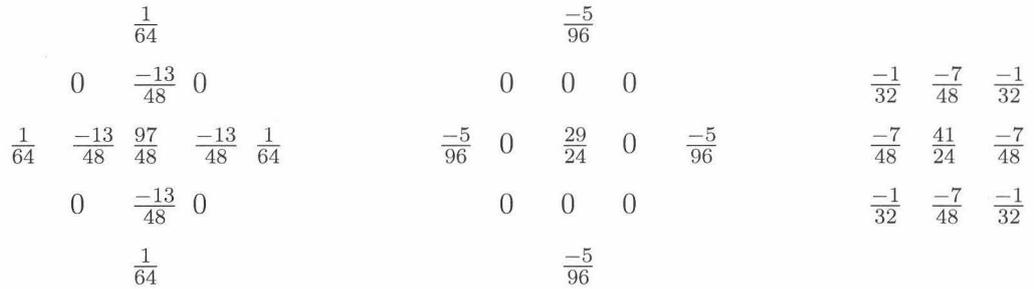


Figura 3.12: De izquierda a derecha, sucesiones rombo $c \in \mathcal{R}_s$, $s = 1, 2, 3$, de las formas lineales coeficiente de los qid $P_{(1,1,2,2),2,a}$, $Q_{(1,1,2,2),2,a}$ y $P_{(1,1,2,2),2,b}$.

Un estudio similar al desarrollado muestra que, entre todos los qid exactos en \mathbb{P}_3 de la forma

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{\alpha \in \Lambda_2^*} c_\alpha f(i + \alpha) \right) M_{1,1,2,2}(\cdot - i)$$

tales que $c \in \mathcal{R}_2$ con $c_{2,0} = 0$, el que minimiza la l_1 -norma de c es

$$Q_{(1,1,2,2),2,b}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{17}{12}f(i) - \frac{5}{48} \sum_{l=1}^2 f(i \pm 2e_l) \right) M(\cdot - i).$$

Nótese que

$$\|Q_{(1,1,2,2),2,b}\|_{\infty} \leq \frac{7}{4} = 1.75,$$

mientras que

$$\|P_{(1,1,2,2),2,b}\|_{\infty} \leq \frac{29}{12} \simeq 2.4166,$$

como debía suceder por construcción. Sin embargo,

$$\|Q_{(1,1,2,2),2,b}\|_{\infty} = \frac{6271}{4608} \simeq 1.36089$$

y

$$\|P_{(1,1,2,2),2,b}\|_{\infty} = \frac{12437}{9216} \simeq 1.3495.$$

Añadir restricciones a la sucesión c para conseguir una determinada estructura del qid no garantiza que la norma infinito disminuya.

Box-spline $M_{2,2,1,1}$

Para el box-spline $M_{2,2,1,1}$ se pueden establecer resultados análogos. En [54] se proponen los qid

$$P_{(2,2,1,1),2,a}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{43}{24}f(i) - \frac{5}{24} \sum_{l=1}^2 f(i \pm e_l) + \frac{1}{96} \sum_{l=1}^2 f(i \pm 2e_l) \right) M_{2,2,1,1}(\cdot - i)$$

y

$$P_{(2,2,1,1),2,b}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{19}{12}f(i) - \frac{1}{8} \sum_{l=1}^2 f(i \pm e_l) - \frac{1}{48} \sum_{l=3}^4 f(i \pm e_l) \right) M_{2,2,1,1}(\cdot - i),$$

para los que se dispone de las acotaciones

$$\|P_{(2,2,1,1),2,a}\|_{\infty} \leq \frac{8}{3} \simeq 2.6666 \quad \text{y} \quad \|P_{(2,2,1,1),2,b}\|_{\infty} \leq \frac{13}{6} \simeq 2.1666.$$

Además, se verifica que

$$\|P_{(2,2,1,1),2,a}\|_{\infty} = \frac{13463}{9216} \simeq 1.46083 \quad \text{y} \quad \|P_{(2,2,1,1),2,b}\|_{\infty} = \frac{817}{576} \simeq 1.4184.$$

Se tiene el siguiente resultado sobre la existencia y unicidad:

Proposición 3.7.4 *El quasi-interpolante*

$$Q_{(2,2,1,1),2,\alpha}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{7}{6}f(i) - \frac{1}{24} \sum_{l=1}^2 f(i \pm 2e_l) \right) M(\cdot - i)$$

es el único qid de norma casi mínima (exacto en \mathbb{P}_3 y relativo a Λ_2) y

$$\|Q_{(2,2,1,1),2,\alpha}\|_{\infty} = \frac{475}{384} \simeq 1.23698.$$



Capítulo 4

Quasi-interpolantes spline discretos de tipo Chebyshev

En los capítulos 1 y 3 se ha considerado la construcción de quasi-interpolantes spline discretos sobre particiones uniformes en una y dos variables, respectivamente. El problema común planteado es la construcción de nuevos qid por medio de la minimización de una mayorante de la norma infinito del operador de quasi-interpolación. Como se dijo, esto se traduce, mediante un argumento estándar, en una acotación de la norma infinito del error de quasi-interpolación, aunque no es éste el objetivo.

Si la función que se aproxima es suficientemente regular, entonces es posible establecer otras acotaciones del error y se puede proponer la construcción de qid específicamente diseñados para minimizar dicho error a partir de la acotación propuesta. Éste es el problema que analizaremos en este capítulo. Como se argumentará más adelante, el estudio se llevará a cabo para quasi-interpolantes discretos basados en el B-spline de orden par M_{2m} .

El capítulo se organiza de la siguiente manera: en la primera sección se establece una representación adecuada del error de quasi-interpolación para funciones de clase $C^{2m+1}(\mathbb{R})$; en la segunda sección se plantea el problema y se establece la existencia de solución, y la unicidad si la forma lineal coeficiente $\lambda_i(f)$ del qid es una combinación lineal de los valores de f en los nodos del soporte; en la tercera sección se estudia el caso cúbico, y en la cuarta se compara el quasi-interpolante de chebyshev cúbico con el qid cúbico clásico.

En un anexo se representa la función objetivo del problema considerado en términos de BB-coeficientes, lo que facilita la implementación de la resolución del problema.

4.1 Representación integral de los quasi-interpolantes spline discretos exactos sobre espacios de polinomios

Consideremos nuevamente el B-spline $M := M_{2m}$ de orden par $2m$, $m \geq 2$. Pretendemos definir qid del tipo dado por (1.1.1) que sean exactos en el espacio \mathbb{P}_{2m-1} de los polinomios de grado menor o igual que $2m - 1$ y tales que el error de quasi-interpolación asociado sea mínimo en un sentido que se indicará más adelante. Con este objetivo, sea $\mu_i := \mu_{i,n}$ la forma lineal definida por

$$\mu_i(f) = a_0 f(i) + \sum_{j=1}^n a_j (f(i+j) + f(i-j)) \quad (4.1.1)$$

donde $n \geq m$ y $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)^T$ es tal que

$$p = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mu_i(p) M_{2m}(\cdot - i) \quad (4.1.2)$$

para todo $p \in \mathbb{P}_{2m-1}$. Se tiene que

$$\mu_i(f) = \mu_0(f(\cdot + i)). \quad (4.1.3)$$

Necesitamos disponer de una representación integral de μ_i . Para ello seguiremos un proceso similar al desarrollado en [25] (capítulo 13, sección 7). Sea Ω un intervalo que contenga a 0. Entonces (cf. [25], capítulo 4, Teorema 2.7, p. 103) existe una constante C , dependiente de a , Ω y M tal que

$$|\mu_0(p)| \leq C \|p\|_{1,\Omega}, \quad (4.1.4)$$

donde

$$\|p\|_{1,\Omega} = \int_{\Omega} |p(t)| dt.$$

Lema 4.1.1 *Existe $K : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ acotada tal que*

$$\mu_0(f) = \int_{\Omega} f(t) K(t) dt \quad (4.1.5)$$

para $\phi \in L^1(\Omega)$. Además, $\|K\|_{\infty} \leq C$.

DEMOSTRACIÓN Por los teoremas de Hahn-Banach y de representación de Riesz (cf. [11], Teorema I.1, p. 1, y Teorema IV.14, p. 63, respectivamente) la forma lineal μ_0 admite una extensión continua a $L^1(\Omega)$, por lo que existe $K : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ acotada tal que se cumple (4.1.5)

para $f \in L^1(\Omega)$. Como la norma de la extensión a $L^1(\Omega)$ de μ_0 coincide con la norma de ésta y se da (4.1.4), se verifica que $\|K\|_\infty \leq C$. \square

Extendamos la función K a \mathbb{R} haciendo

$$K(t) = 0, \quad t \notin \Omega.$$

Lema 4.1.2 *Para cada f localmente integrable,*

$$\mu_i(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t) K(t-i) dt. \quad (4.1.6)$$

Si $\Omega = [-L, L]$, con $L \in \mathbb{N}$, y $\Omega_i := [-L+i, L+i]$, $i \in \mathbb{Z}$, entonces

$$|\mu_i(f)| \leq C \|f\|_{1, \Omega_i}.$$

DEMOSTRACIÓN Por (4.1.3) y (4.1.5),

$$\mu_i(f) = \mu_0(f(\cdot + i)) = \int_{\Omega} f(t+i) K(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t+i) K(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) K(t-i) dt.$$

Si $\Omega = [-L, L]$, por el Lema anterior se tiene que

$$|\mu_i(f)| \leq C \int_{\Omega} |f(t+i)| dt = C \int_{\Omega_i} |f(t)| dt = C \|f\|_{1, \Omega_i}.$$

\square

Las formas lineales μ_i dadas por (4.1.1) proporcionan el qid

$$Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mu_i(f) M_{2m}(\cdot - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_0 f(i) + \sum_{j=1}^n a_j (f(i+j) + f(i-j)) M_{2m}(\cdot - i) \quad (4.1.7)$$

y la sucesión $(Q_h)_{h>0}$ de operadores escalados

$$Q_h f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mu_i(f(h\cdot)) M\left(\frac{\cdot}{h} - i\right). \quad (4.1.8)$$

Por (4.1.2), Q y Q_h son operadores exactos en \mathbb{P}_{2m-1} .

Proposición 4.1.3 *Q_h admite la representación integral*

$$Q_h f = \int_{\mathbb{R}} f(t) G_h(t, \cdot) dt \quad (4.1.9)$$

para funciones f localmente integrables, donde el núcleo G_h se define como

$$G_h(t, x) = \frac{1}{h} \sum_{i \in \mathbb{Z}} K\left(\frac{t}{h} - i\right) M\left(\frac{x}{h} - i\right), \quad t, x \in \mathbb{R}. \quad (4.1.10)$$

Además, Q_h es un operador acotado sobre $L^\infty(\mathbb{R})$.

DEMOSTRACIÓN Por (4.1.6), se sigue de (4.1.8) que

$$\begin{aligned} Q_h f &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(ht) K(t-i) dt \right) M\left(\frac{\cdot}{h} - i\right) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) K\left(\frac{t}{h} - i\right) \frac{1}{h} dt \right) M\left(\frac{\cdot}{h} - i\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\frac{1}{h} \sum_{i \in \mathbb{Z}} K\left(\frac{t}{h} - i\right) M\left(\frac{\cdot}{h} - i\right) \right) dt, \end{aligned}$$

por lo que se cumple (4.1.9).

El i -ésimo sumando en el término de la derecha de (4.1.10) es no nulo si y sólo si $\frac{x}{h}$ y $\frac{t}{h}$ están en $\Omega_i = [-L+i, L+i]$, lo que puede ocurrir a lo sumo par $2L$ valores de i . Por tanto,

$$|G_h(t, x)| = 0, \quad \left| \frac{x}{h} - \frac{t}{h} \right| \geq 2L.$$

En otro caso, teniendo en cuenta que $\|K\|_{\infty} \leq C$, se cumple que

$$|G_h(t, x)| \leq \frac{1}{h} (2L) C \|M\|_{\infty}. \quad (4.1.11)$$

Supongamos que $\|f\|_{\infty} \leq 1$. Entonces

$$|Q_h f| \leq \int_{|x-t| \leq 2Lh} |f(t)| |G_h(t, \cdot)| dt \leq \int_{|x-t| \leq 2Lh} |G_h(t, \cdot)| dt \leq C_1,$$

donde

$$C_1 = 4L^2 C \|M\|_{\infty},$$

deduciéndose que Q_h está acotado y $\|Q_h\| \leq C_1$. □

Si $h = 1$ escribimos $G_h = G$.

Proposición 4.1.4 *El núcleo G definido por (4.1.10) con $h = 1$ es invariante por traslaciones. Para algunas constantes positivas C_2 y ε se cumple que*

$$|G(t, x)| \leq C_2 (1 + |t - x|)^{-(2m+2+\varepsilon)}.$$

DEMOSTRACIÓN Para $j \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$G(t-j, x-j) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} K(t-j-i) M(x-j-i).$$

El cambio de índices $j \leftarrow j - i$ proporciona la igualdad

$$G(t - j, x - j) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} K(t - i) M(x - i),$$

deduciéndose la invarianza por traslaciones.

El decaimiento indicado es consecuencia inmediata de (4.1.11) con $h = 1$: basta tomar $C_2 = 2LC \|M\|_\infty$ y cualquier $\varepsilon > 0$. □

Una vez establecida la representación integral del quasi-interpolante escalado y las propiedades del núcleo, estamos en condiciones de establecer la acotación del error de quasi-interpolación para funciones suficientemente regulares.

Proposición 4.1.5 *Sea Q_h un qid del tipo (4.1.8) exacto en \mathbb{P}_{2m-1} . Entonces, para cualquier $f \in C^{2m+1}(\mathbb{R})$ se cumple que*

$$\|f - Q_h f\|_\infty \leq \frac{1}{(2m)!} \|e_{2m,G}\|_{\infty,[0,1]} h^{2m} \|f^{(2m)}\|_\infty + C_2 h^{2m+1} \|f^{(2m+1)}\|_\infty,$$

siendo C_2 la constante que aparece en la proposición anterior y

$$e_{2m,G} = \int_{\mathbb{R}} (t - \cdot)^{2m} G(t, \cdot) dt.$$

DEMOSTRACIÓN La exactitud de Q_h en \mathbb{P}_{2m-1} , la invarianza por traslaciones de su núcleo G y el decaimiento indicado del mismo hacen que el resultado sea consecuencia del Teorema 1.1 de [26] en el caso univariado. □

Nota 4.1.1 *Obsérvese que*

$$e_{2m,G}(x) = \sum_{l=0}^{2m} \binom{2m}{l} (-x)^l \int_{\mathbb{R}} t^{2m-l} G(t, x) dt = \sum_{l=0}^{2m} \binom{2m}{l} (-x)^l Qe_{2m-l}(x)$$

con

$$e_r(x) = x^r, r \geq 0.$$

Entonces

$$e_{2m,G}(x) = Qe_{2m}(x) + \sum_{l=1}^{2m} \binom{2m}{l} (-x)^l Qe_{2m-l}(x).$$

Como Q es exacto en \mathbb{P}_{2m-1} ,

$$\begin{aligned}
 e_{2m,G}(x) &= Qe_{2m}(x) + \sum_{l=1}^{2m} \binom{2m}{l} (-x)^l e_{2m-l}(x) \\
 &= Qe_{2m}(x) + \sum_{l=1}^{2m} \binom{2m}{l} (-x)^l x^{2m-l} \\
 &= Qe_{2m}(x) + \sum_{l=0}^{2m} \binom{2m}{l} (-x)^l x^{2m-l} - x^{2m} \\
 &= Qe_{2m}(x) + (-x+x)^{2m} - x^{2m} \\
 &= Qe_{2m}(x) - x^{2m}
 \end{aligned}$$

En definitiva,

$$e_{2m,G} = Qe_{2m} - e_{2m}.$$

La constante que acompaña a la potencia h^{2m} en la expresión de la norma infinito del error de quasi-interpolación está determinada por cómo el q_i aproxima al monomio e_{2m} .

4.2 El problema de minimización. Existencia de solución

A la vista de la Proposición 4.1.5, es natural elegir a de modo que el operador Q (y también Q_h) sea exacto en \mathbb{P}_{2m-1} y $\|Qe_{2m} - e_{2m}\|_{\infty,[0,1]}$ sea mínima.

Recordemos (ver (1.1.8)) que el qid Q es exacto en \mathbb{P}_{2m-1} si y sólo si

$$a_0 + 2 \sum_{i=1}^n a_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n i^{2l} a_i = \frac{1}{2} (2l)! \beta(2l, 2m) \quad 1 \leq l \leq m-1, \quad (4.2.1)$$

y sea, nuevamente,

$$V := V_{m,n} = \{a \in \mathbb{R}^{n+1} : a \text{ cumple (4.2.1)}\}$$

Planteamos, pues, el siguiente problema:

Problema 4.2.1 Resolver $\text{Min} \left\{ \|Qe_{2m} - e_{2m}\|_{\infty,[0,1]}, a \in V \right\}$.

Definición 4.2.2 Si a es solución del Problema 4.2.1, entonces el correspondiente qid dado por (4.1.7) se dice qid de tipo Chebyshev (relativo a n).

Sea $\varepsilon := \varepsilon_{2m} = Qe_{2m} - e_{2m}$. Para establecer la existencia de solución precisamos representar adecuadamente la función objetivo $\|\varepsilon\|_{\infty,[0,1]}$.

Lema 4.2.3 Si $a \in V$, el qid Q dado por (4.1.7) cumple que

$$Qe_{2m} = \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(2m)!}{(2m-2l)!} \beta(2l, 2m) \sum_{i \in \mathbb{Z}} i^{2m-2l} M(\cdot - i) + 2 \sum_{j=1}^n j^{2m} a_j. \quad (4.2.2)$$

DEMOSTRACIÓN Se tiene que

$$\begin{aligned} Qe_{2m} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ a_0 i^{2m} + \sum_{j=1}^n a_j \left[(i+j)^{2m} + (i-j)^{2m} \right] \right\} M(\cdot - i) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ a_0 i^{2m} + 2 \sum_{j=1}^n a_j \sum_{l=0}^m \binom{2m}{2l} i^{2m-2l} j^{2l} \right\} M(\cdot - i) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ \left(a_0 + 2 \sum_{j=1}^n a_j \right) i^{2m} + \sum_{l=1}^m \left(2 \binom{2m}{2l} \sum_{j=1}^n j^{2l} a_j \right) i^{2m-2l} \right\} M(\cdot - i) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ \left(a_0 + 2 \sum_{j=1}^n a_j \right) i^{2m} + \sum_{l=1}^{m-1} \left(2 \binom{2m}{2l} \sum_{j=1}^n j^{2l} a_j \right) i^{2m-2l} \right\} M(\cdot - i) \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^n j^{2m} a_j \end{aligned}$$

Como $a \in V$, las igualdades (4.2.1) conducen a

$$Qe_{2m} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ i^{2m} + \sum_{l=1}^{m-1} \frac{(2m)!}{(2m-2l)!} \beta(2l, 2m) i^{2m-2l} \right\} M(\cdot - i) + 2 \sum_{j=1}^n j^{2m} a_j.$$

Como $\beta(0, 2m) = 1$, entonces

$$Qe_{2m} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(2m)!}{(2m-2l)!} \beta(2l, 2m) i^{2m-2l} \right\} M(\cdot - i) + 2 \sum_{j=1}^n j^{2m} a_j,$$

de donde se deduce (4.2.2). \square

Las igualdades (1.1.3) proporcionan las expresiones de los monomios e_{2k} , $0 \leq k \leq m-1$, como combinaciones lineales de las trasladadas enteras del B-spline M . Se cumple que, para cada $l = 1, \dots, m$, $\sum_{i \in \mathbb{Z}} i^{2m-2l} M(\cdot - i)$ es un polinomio de grado $2m-2l$. Definamos $\pi_{2m-2l} := \sum_{i \in \mathbb{Z}} i^{2m-2l} M(\cdot - i)$. La restricción de $\sum_{i \in \mathbb{Z}} i^{2m} M(\cdot - i)$ a $[0, 1]$ es un polinomio de grado menor o igual que $2m-1$. Definamos $\pi_{2m}(x) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} i^{2m} M(x - i)$, $x \in [0, 1]$.

Proposición 4.2.4 Para $x \in [0, 1]$ se cumple que

$$\varepsilon(x) = \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(2m)!}{(2m-2l)!} \beta(2l, 2m) \pi_{2m-2l}(x) - e_{2m}(x) + 2 \sum_{j=1}^n j^{2m} a_j.$$

a es solución del Problema 4.2.1 si y sólo si $-2 \sum_{j=1}^n j^{2m} a$ es la mejor aproximación uniforme constante de $\sum_{l=0}^{m-1} \frac{(2m)!}{(2m-2l)!} \beta(2l, 2m) \pi_{2m-2l}(x) - e_{2m}$ en $[0, 1]$.

DEMOSTRACIÓN Es inmediata. □

Sea $\phi(x) := \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(2m)!}{(2m-2l)!} \beta(2l, 2m) \pi_{2m-2l}(x) - e_{2m}(x)$, $x \in [0, 1]$.

Proposición 4.2.5 a es solución del Problema 4.2.1 si y sólo si

$$2 \sum_{j=1}^n j^{2m} a = -\frac{1}{2} \left(\max_{x \in [0,1]} \phi(x) + \min_{x \in [0,1]} \phi(x) \right).$$

DEMOSTRACIÓN La mejor aproximación uniforme constante de una función continua en $[0, 1]$ es el promedio de los valores máximo y mínimo de ésta en dicho intervalo. □

Corolario 4.2.6 a es solución del Problema 4.2.1 si y sólo si

$$\begin{aligned} a_0 + 2 \sum_{i=1}^n a_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^n i^{2l} a_i &= \frac{1}{2} (2l)! \beta(2l, 2m), \quad 1 \leq l \leq m-1 \\ \sum_{i=1}^n i^{2m} a_i &= -\frac{1}{4} \left(\max_{x \in [0,1]} \phi(x) + \min_{x \in [0,1]} \phi(x) \right) \end{aligned}$$

En consecuencia, el Problema 4.2.1 tiene al menos una solución. Es única si y sólo si $n = m$.

DEMOSTRACIÓN Basta tener en cuenta que el sistema para $m = n$ es de orden $m + 1$, y su matriz de coeficientes es no singular. □

Nota 4.2.1 Se cumple que

$$Qe_{2m}(1-x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ a_0 i^{2m} + \sum_{j=1}^n a_j \left[(i+j)^{2m} + (i-j)^{2m} \right] \right\} M(1-x-i).$$

Por la simetría del B-spline M ,

$$Qe_{2m}(1-x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ a_0 i^{2m} + \sum_{j=1}^n a_j [(i+j)^{2m} + (i-j)^{2m}] \right\} M(x+i-1).$$

El cambio de índice $i \leftarrow -i+1$ da lugar a la expresión

$$Qe_{2m}(1-x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ a_0 (-i+1)^{2m} + \sum_{j=1}^n a_j [(-i+1+j)^{2m} + (-i+1-j)^{2m}] \right\} M(x-i),$$

por lo que

$$Qe_{2m}(1-x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ a_0 (i-1)^{2m} + \sum_{j=1}^n a_j [(i-1+j)^{2m} + (i-1-j)^{2m}] \right\} M(x-i),$$

es decir,

$$Qe_{2m}(1-x) = Q[e_{2m}(1-\cdot)](x).$$

Pero

$$e_{2m}(1-x) = (1-x)^{2m} = \sum_{l=0}^{2m} \binom{2m}{l} (-x)^{2m-l} = \sum_{l=0}^{2m} \binom{2m}{l} (-1)^{2m-l} e_{2m-l}(x),$$

por lo que

$$Q[e_{2m}(1-\cdot)] = \sum_{l=0}^{2m} \binom{2m}{l} (-1)^{2m-l} Qe_{2m-l} = Qe_{2m} + \sum_{l=1}^{2m} \binom{2m}{l} (-1)^{2m-l} Qe_{2m-l}$$

Por la exactitud de Q en \mathbb{P}_{2m-1} ,

$$Q[e_{2m}(1-\cdot)] = Qe_{2m} + \sum_{l=1}^{2m} \binom{2m}{l} (-1)^{2m-l} e_{2m-l}.$$

Como

$$\sum_{l=1}^{2m} \binom{2m}{l} (-1)^{2m-l} e_{2m-l} = \sum_{l=0}^{2m} \binom{2m}{l} (-1)^{2m-l} e_{2m-l} - e_{2m} = e_{2m}(1-\cdot) - e_{2m},$$

se concluye que

$$Q[e_{2m}(1-\cdot)] = Qe_{2m} + e_{2m}(1-\cdot) - e_{2m},$$

En definitiva,

$$Qe_{2m}(1-x) = Qe_{2m}(x) + e_{2m}(1-x) - e_{2m}(x),$$

es decir,

$$\varepsilon(1-x) = \varepsilon(x).$$

Nota 4.2.2 *Un cálculo similar muestra que*

$$Qe_{2m}(x+1) = Q[e_{2m}(\cdot+1)](x)$$

y que

$$Q[e_{2m}(\cdot+1)] = Qe_{2m} + e_{2m}(\cdot+1) - e_{2m},$$

de lo que se deduce que $Qe_{2m} - e_{2m}$ es una función 1-periódica.

Nota 4.2.3 *El problema se ha planteado y resuelto para qid construidos a partir de M_{2m} , $m \geq 2$, exigiéndose inicialmente, además de la exactitud en P_{2m-1} , que la función fundamental del qid fuese simétrica respecto del origen. Si se mantiene este requisito y se considera un qid basado en M_{2m+1} , $m \geq 1$, exacto en \mathbb{P}_{2m} , entonces es inmediato probar que la función $Qe_{2m+1} - e_{2m+1}$ no depende de los coeficientes de la forma lineal, por lo que no se puede establecer un problema de minimización a partir de la acotación establecida en la Proposición ??.*

4.3 Ejemplos

Qid casi óptimo de Chebyshev cúbico

Consideremos el caso cúbico ($m = 2$) y $n = m$. El qi es de la forma

$$Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ \sum_{k=-2}^2 a_k f(i-k) \right\} M_4(\cdot - i),$$

con

$$a_{-2} = a_2 \quad \text{y} \quad a_{-1} = a_1,$$

y se le exige exactitud en \mathbb{P}_3 .

Se cumple que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} M_4(\cdot - i) &= 1 \\ \sum_{i \in \mathbb{Z}} i^2 M_4(\cdot - i) &= x^2 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Además, $\beta(0, 4) = 1$ y $\beta(2, 4) = -\frac{1}{6}$. Por tanto, Q es exacto en \mathbb{P}_3 si y sólo si

$$\begin{aligned} a_0 + 2a_1 + 2a_2 &= 1 \\ a_1 + 4a_2 &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

La restricción de $\sum_{i \in \mathbb{Z}} i^4 M_4(\cdot - i)$ en $[0, 1]$ es igual a $\sum_{i=-1}^2 i^4 M_4(\cdot - i)$ y su matriz (fila) de BB-coeficientes en $[0, 1]$ es $\frac{1}{3}(1, 1, 2, 10)$. Entonces, para $x \in [0, 1]$,

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} i^4 M_4(x - i) = 2x^3 + x^2 + \frac{1}{3}.$$

Por (4.2.2),

$$\begin{aligned} Qe_4 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} i^4 M_4(\cdot - i) - 2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} i^2 M_4(\cdot - i) + 2(a_1 + 16a_2) \\ &= 2x^3 - x^2 - \frac{1}{3} + 2(a_1 + 16a_2) \end{aligned}$$

Así pues,,

$$Qe_4(x) - e_4(x) = -x^4 + 2x^3 - x^2 - \frac{1}{3} + 2(a_1 + 16a_2).$$

Para la función (simétrica respecto de $x = \frac{1}{2}$) $\phi(x) = -x^4 + 2x^3 - x^2 - \frac{1}{3}$ se cumple que

$$\begin{aligned} \min_{x \in [0,1]} \phi(x) &= \phi\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{19}{48} \\ \max_{x \in [0,1]} \phi(x) &= \phi(0) = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

En resumen, $a = (a_0, a_1, a_2)^T$ es solución del Problema 4.2.1 si y sólo si

$$\begin{aligned} a_0 + 2a_1 + 2a_2 &= 1 \\ a_1 + 4a_2 &= -\frac{1}{6} \\ a_1 + 16a_2 &= -\frac{1}{4} \left(\phi(0) + \phi\left(\frac{1}{2}\right) \right) = \frac{35}{192} \end{aligned}$$

La única solución es $a = \left(\frac{193}{128}, -\frac{163}{576}, \frac{67}{2304}\right)^T$ y el único qid de Chebyshev es

$$Q^*f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{193}{128} f(i) - \frac{163}{576} f(i+1) + f(i-1) + \frac{67}{2304} (f(i+2) + f(i-2)) \right\} M_4(\cdot - i).$$

Para este qid se tiene que $\|Q^*e_4 - e_4\|_{\infty, [0,1]} = \frac{1}{32}$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} \|f - Q_h^*f\|_{\infty} &\leq \frac{1}{24} \|Q^*e_4 - e_4\|_{\infty, [0,1]} h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty} + C_2 h^5 \|f^{(5)}\|_{\infty} \\ &= \frac{1}{768} h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty} + C_2 h^5 \|f^{(5)}\|_{\infty} \end{aligned}$$

Qid casi óptimo de Chebyshev quíntico

Consideremos ahora el caso quíntico ($m = 3$). Se tiene que $\beta(0, 6) = 1$, $\beta(2, 6) = -\frac{1}{4}$ y $\beta(4, 6) = \frac{1}{30}$. Además,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} M_6(\cdot - i) \\ e_2 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(i^2 - \frac{1}{2} \right) M_6(\cdot - i) \\ e_4 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(i^4 - 3i^2 + \frac{4}{5} \right) M_6(\cdot - i) \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} i^2 M_6(\cdot - i) &= e_2 + \frac{1}{2} \\ \sum_{i \in \mathbb{Z}} i^4 M_6(\cdot - i) &= e_4 + 3e_2 + \frac{7}{10}. \end{aligned}$$

Supongamos $n = m$. El qid es de la forma

$$Qf = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ \sum_{k=-3}^3 a_k f(i - k) \right\} M_6(\cdot - i),$$

con

$$a_{-3} = a_3, \quad a_{-2} = a_2 \quad \text{y} \quad a_{-1} = a_1,$$

Entonces,

$$Qe_6 = \sum_{l=0}^2 \frac{6!}{(6-2l)!} \beta(2l, 6) \sum_{i \in \mathbb{Z}} i^{6-2l} M_6(\cdot - i) + 2 \sum_{j=1}^3 j^6 a_j.$$

En $[0, 1]$,

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} i^{6-2l} M_6(\cdot - i) = \frac{3}{6} + 11e_2 + 5e_4 + 3e_5$$

y

$$Qe_6 - e_6 = \frac{9}{4} + \frac{1}{2}e_2 - \frac{5}{2}e_4 + 3e_5 - e_6 + 2 \sum_{j=1}^3 j^6 a_j.$$

Como

$$\phi = \frac{9}{4} + \frac{1}{2}e_2 - \frac{5}{2}e_4 + 3e_5 - e_6,$$

se tiene que $\min_{x \in [0,1]} \phi(x) = \phi(0) = \frac{9}{4}$ y $\max_{x \in [0,1]} \phi(x) = \phi(\frac{1}{2}) = \frac{147}{64}$. La solución del Problema 4.2.1 cumple que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 16 & 81 \\ 0 & 1 & 64 & 729 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{5} \\ -\frac{291}{256} \end{pmatrix},$$

y es

$$a = \left(\frac{15781}{7680}, -\frac{19631}{30720}, \frac{1891}{15360}, -\frac{353}{30720} \right)^T$$

Proporciona el único qid casi óptimo de Chebyshev quíntico ($n = m = 3$).

4.4 Quasi-interpolante cúbico clásico frente al casi óptimo de Chebyshev

Consideremos el qi B-spline discreto cúbico escalado

$$Q_h f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{6} \{-f((i-1)h) + 8f(ih) - f((i+1)h)\} M_4\left(\frac{\cdot}{h} - i\right).$$

Proposición 4.4.1 Sea $f \in C^4(\mathbb{R})$. Para todo $x \in I_j := [jh, (j+1)h]$, $j \in \mathbb{Z}$, se cumple que

$$|f(x) - Q_h f(x)| \leq \frac{37}{1728} h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty, I_j}.$$

DEMOSTRACIÓN Escribamos $x = h(j + \xi)$, $\xi \in [0, 1]$. Como Q_h es exacto en \mathbb{P}_3 , la forma lineal $L = f(x) - Q_h f(x)$ es nula en \mathbb{P}_3 . Por el Teorema del núcleo de Peano (cf. [3], Teorema 3.1, p. 28; [24], Teorema 3.7.1 p.??)

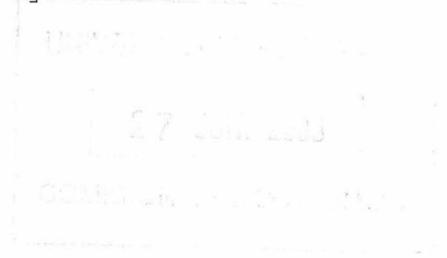
$$f(x) - Q_h f(x) = \frac{1}{6} \int_{jh}^{(j+1)h} L\left[\left(\frac{\cdot - t}{h}\right)_+^3\right] f^{(4)}(t) dt.$$

Un cambio de variable permite escribir

$$f(x) - Q_h f(x) = \frac{1}{6} \int_0^1 L\left[\left(\frac{\cdot - jh - th}{h}\right)_+^3\right] f^{(4)}(jh + th) h dt,$$

o, equivalentemente,

$$f(x) - Q_h f(x) = \frac{1}{6} h^4 \int_0^1 L\left[\left(\frac{\cdot}{h} - j - t\right)_+^3\right] f^{(4)}(jh + th) dt.$$



Como

$$L \left[\left(\frac{\cdot}{h} - j - t \right)_+^3 \right] = \left(\frac{x}{h} - j - t \right)_+^3 - Q_h \left[\left(\frac{\cdot}{h} - j - t \right)_+^3 \right] (x),$$

un cambio de índices da lugar a la igualdad

$$\begin{aligned} L \left[\left(\frac{\cdot}{h} - j - t \right)_+^3 \right] &= (\xi - t)_+^3 - \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ \sum_{k=-1}^1 c_k (i - k - t)_+^3 \right\} M_4(\xi - i) \\ &= (\xi - t)_+^3 - Q_1 \left[(\cdot - t)_+^3 \right] (\xi) \end{aligned}$$

con $\xi, t \in [0, 1]$.

Si $\xi \leq t$, entonces $(\xi - t)_+^3 = 0$ y

$$\begin{aligned} L \left[\left(\frac{\cdot}{h} - j - t \right)_+^3 \right] &= -Q_1 \left[(\cdot - t)_+^3 \right] (\xi) \\ &= - \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ \sum_{k=-1}^1 c_k (i - k - t)_+^3 \right\} M_4(\xi - i) \\ &= - \sum_{i=-1}^2 \left\{ \sum_{k=-1}^1 c_k (i - k - t)_+^3 \right\} M_4(\xi - i) \end{aligned}$$

es decir,

$$L \left[\left(\frac{\cdot}{h} - j - t \right)_+^3 \right] = \sum_{k=0}^2 \alpha_k(t) M_4(\xi - k),$$

con

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &= \frac{1}{6} (1 - t)^3 \\ \alpha_1(t) &= \frac{1}{6} \left\{ -8(1 - t)^3 + (2 - t)^3 \right\} \\ \alpha_2(t) &= \frac{1}{6} \left\{ (1 - t)^3 - 8(2 - t)^3 + (3 - t)^3 \right\} \end{aligned}$$

Se tiene, pues, que en el triángulo T_1 de vértices $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (1, 1)$ y $A_3 = (0, 1)$ el núcleo $L \left[\left(\frac{\cdot}{h} - j - t \right)_+^3 \right]$ es un polinomio de grado total 6 en las variables ξ y t . Si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ son las coordenadas baricéntricas de (ξ, t) respecto de T_1 , entonces

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = (\xi, t), \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,$$

y el polinomio $L \left[\left(\frac{\cdot}{h} - j - t \right)_+^3 \right]$ se escribe de forma única como

$$L \left[\left(\frac{\cdot}{h} - j - t \right)_+^3 \right] = \sum_{|k|=6} a_k b_k^6(\lambda),$$

donde los polinomios de Bernstein $b_k^6(\lambda)$ de grado total 6 están definidos como

$$b_k^6(\lambda) = \frac{6!}{k!} \lambda^k = \frac{6!}{k_1! k_2! k_3!} \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \lambda_3^{k_3}$$

y los coeficientes a_k , $|k| = 6$, son los coeficientes de Bernstein-Bézier (BB-coeficientes) de $L \left[\left(\frac{\cdot}{h} - j - t \right)_+^3 \right]$. Tras algunos cálculos, se determina que sus BB-coeficientes son los que se muestran seguidamente:

$a_{0,0,6}$	$a_{0,1,5}$	$a_{0,2,4}$	$a_{0,3,3}$	$a_{0,4,2}$	$a_{0,5,1}$	$a_{0,6,0}$	20	30	44	59	72	80	80
$a_{1,0,5}$	$a_{1,1,4}$	$a_{1,2,3}$	$a_{1,3,2}$	$a_{1,4,1}$	$a_{1,5,0}$		30	46	69	89	96	80	
$a_{2,0,4}$	$a_{2,1,3}$	$a_{2,2,2}$	$a_{2,3,1}$	$a_{2,4,0}$			44	69	106	129	112		
$a_{3,0,3}$	$a_{3,1,2}$	$a_{3,2,1}$	$a_{3,3,0}$				$= \frac{1}{720}$	59	89	129	146		
$a_{4,0,2}$	$a_{4,1,1}$	$a_{4,2,0}$						72	96	112			
$a_{5,0,1}$	$a_{5,1,0}$							80	80				
$a_{6,0,0}$								80					

Como son positivos, el núcleo es positivo en el triángulo T_1 .

Si $\xi \geq t$, entonces $(\xi - t)_+^3 = (\xi - t)^3$, por lo que

$$\begin{aligned} L \left[\left(\frac{\cdot}{h} - j - t \right)_+^3 \right] &= Q_1 \left[(\cdot - t)^3 - (\cdot - t)_+^3 \right] (\xi) \\ &= \sum_{i=-1}^2 \left\{ \sum_{k=-1}^1 c_k \left[(i - k - t)^3 - (i - k - t)_+^3 \right] \right\} M_4(\xi - i) \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$L \left[\left(\frac{\cdot}{h} - j - t \right)_+^3 \right] = \sum_{k=-1}^1 \beta_k(t) M_4(\xi - k),$$

con

$$\begin{aligned} \beta_{-1}(t) &= \frac{1}{6} \left\{ (2+t)^3 - 8(1+t)^3 + t^3 \right\} \\ \beta_0(t) &= \frac{1}{6} \left\{ (1+t)^3 - 8t^3 \right\} \\ \beta_1(t) &= \frac{1}{6} t^3 \end{aligned}$$

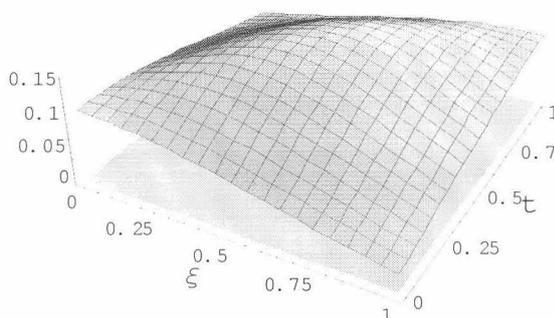


Figura 4.1: Núcleo de Peano para el error de quasi-interpolación asociado a Q_1 .

con

$$a_0 = \frac{193}{128}, \quad a_{-1} = a_1 = -\frac{163}{576}, \quad a_{-2} = a_2 = \frac{67}{2304}.$$

Proposición 4.4.2 Sea $f \in C^4(\mathbb{R})$. Para todo $x \in I_j := [jh, (j+1)h]$, $j \in \mathbb{Z}$, se cumple que

$$|f(x) - Q_h^* f(x)| \leq \frac{13373}{1548288} h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty, I_j}.$$

DEMOSTRACIÓN Escribamos $x = h(j + \xi)$, $\xi \in [0, 1]$. Siguiendo el mismo proceso que en la demostración de la proposición anterior, se cumple que

$$f(x) - Q_h^* f(x) = \frac{1}{3!} h^4 \int_0^1 K_2(\xi, t) f^{(4)}(jh + th) dt,$$

con

$$K_2(\xi, t) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^i a_{j-3} (i-j+1-t)^3 \right) M_4(\xi-i+2), & \text{si } \xi \leq t \\ -\sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=i+1}^5 a_{j-3} (-i+j-1+t)^3 \right) M_4(\xi-i+2), & \text{si } \xi > t. \end{cases}$$

El núcleo K_2 cumple que

$$K_2(1-\xi, 1-t) = K_2(\xi, t), \quad \xi, t \in [0, 1],$$

y cambia de signo en un entorno de $(1, 0)$ (y de $(0, 1)$). Entonces

$$|f(x) - Q_h^* f(x)| \leq \frac{1}{3!} h^4 \int_0^1 |K_2(\xi, t)| |f^{(4)}(jh + th)| dt \leq \left(\frac{1}{3!} h^4 \int_0^1 |K_2(\xi, t)| dt \right) \|f^{(4)}\|_{\infty, I_j}.$$

K_2 es un polinomio bivariado de grado total 6 en el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$. Lo mismo sucede en el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$.

En cada triángulo se acota $|K_2(\xi, t)|$ por la función $\bar{K}_2(\xi, t)$ que tiene por BB-coeficientes los valores absolutos de los BB-coeficientes de K_2 , verificándose que

$$|f(x) - Q_h^* f(x)| \leq \left(\frac{1}{3!} h^4 \int_0^1 \bar{K}_2(\xi, t) dt \right) \|f^{(4)}\|_{\infty, I_j} = \frac{1}{3!} \tilde{K}_2(\xi) \|f^{(4)}\|_{\infty, I_j},$$

con

$$\tilde{K}_2(\xi) = \frac{2636 + 16933\xi + 32067\xi^2 - 91728\xi^3 + 30184\xi^4 + 18816\xi^5 - 6272\xi^6}{193536}.$$

Esta función es positiva, simétrica respecto de $\xi = \frac{1}{2}$, y alcanza su máximo absoluto en $\frac{1}{2}$. Entonces,

$$|f(x) - Q_h^* f(x)| \leq \frac{1}{3!} \tilde{K}_2\left(\frac{1}{2}\right) h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty, I_j} = \frac{13373}{1548288} h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty, I_j},$$

con lo que concluye la demostración. \square

Comparando las constantes $\frac{37}{1728} \simeq 2.1412 \cdot 10^{-2}$ y $\frac{13373}{1548288} \simeq 8.6373 \cdot 10^{-3}$ que aparecen en $|f(x) - Q_h f(x)|$ y $|f(x) - Q_h^* f(x)|$, se observa que la constante del qid casi óptimo de Chebyshev es, aproximadamente, el 40% de la constante del qid clásico.

Sea la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. La Figura 4.2 muestra las gráficas en el intervalo $[-3, 3]$ de f y de sus qid cúbicos clásico y casi óptimo de Chebyshev. Como se ha utilizado $h = 1$, se notan $Q_1 f$ y $Q_1^* f$, respectivamente.

La Figura 4.3 muestra los errores de quasi-interpolación.

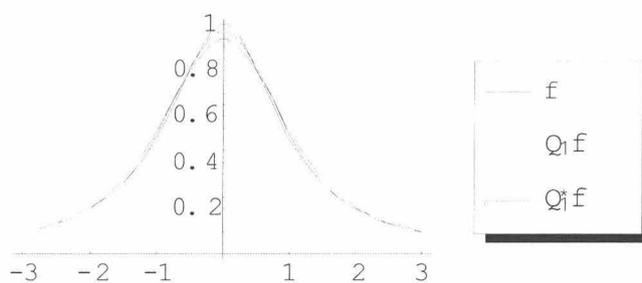


Figura 4.2: Gráficas en el intervalo $[-3, 3]$ de f y de sus qid cúbicos clásico y casi óptimo de Chebyshev.

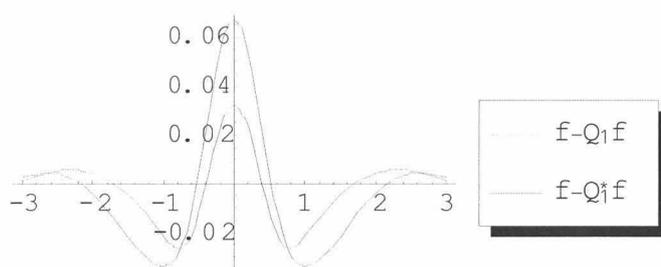


Figura 4.3: Errores de quasi-interpolación cúbico clásico y casi óptimo de Chebyshev.



Capítulo 5

Control local del error de quasi-interpolación

El qid cúbico clásico

$$Q_h f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{6} (-f((i-1)h) + 8f(ih) - f((i+1)h)) M_4\left(\frac{\cdot}{h} - i\right),$$

permite aproximar funciones definidas en la recta real a partir de sus valores en $h\mathbb{Z}$. Si f es suficientemente regular entonces $f - Q_h f = O(h^4)$, y los qid cúbicos son en la práctica buenos aproximantes de f .

Supongamos que se desea que el error de qi $|f - Q_h f|$ sea inferior en el intervalo I donde se quiere aproximar la función f a una cota preestablecida. $Q_h f$ puede satisfacer dicha exigencia en un determinado subintervalo (acotado o no) de I o una unión de ellos. Para obtener un aproximante $A_h f$ en I que cumpla la condición impuesta sobre el error, se quiere proponer un procedimiento tal que

- (a) A_h sea exacto en \mathbb{P}_3 ,
- (b) $A_h f$ coincida con $Q_h f$ en aquella región donde el error sea admisible, y
- (c) lo disminuya en aquella región donde no se cumpla tal requisito.

De este modo no aumentará el coste computacional, calculándose el aproximante $A_h f$ de un modo progresivo.

En este capítulo se analizará el problema y se darán diversas alternativas, proponiendo un procedimiento de control local del error. El estudio se llevará a cabo sobre intervalos de la forma $[Nh, +\infty)$, $h > 0$ y $N \in \mathbb{Z}$. El estudio es análogo cuando se trate de intervalos de

la forma $(-\infty, Nh]$. La combinación de ambos tipos de control proporciona una técnica para controlarlo en intervalos acotados.

El capítulo se estructura como sigue: en la primera sección se describe el problema de un modo eminentemente gráfico y se establece un procedimiento inicial para controlar localmente el error, basado en la quasi-interpolación del producto del error de interpolación por una función escalón; en la segunda sección se formaliza el problema descrito en la primera y se analiza el error de quasi-interpolación asociado al procedimiento propuesto; en la tercera sección se plantea una primera alternativa para controlar el error, basada en la utilización de un qid cúbico de norma casi mínima; en la última sección se adopta una estrategia diferente, que pasa por la regularización de la función escalón.

5.1 Descripción del problema

Para motivar los procedimientos de control local del error que se estudiarán en este capítulo, consideremos la función $f(x) = I_0\left(\frac{1}{2}x\right) \frac{1}{14 + \sin^2 x}$, definida en la recta real, donde I_0 es la función de Bessel modificada de orden cero de primera especie (cf. [64]). La aproximamos mediante su quasi-interpolante cúbico clásico ($h = 1$),

$$Q_1 f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=-1}^1 c_j f(i-j) \right) M_4(\cdot - i),$$

donde

$$c_{-1} = c_1 = -\frac{1}{6} \quad \text{y} \quad c_0 = \frac{4}{3}.$$

La Figura 5.1 muestra las gráficas de f y $Q_1 f$ en el intervalo $[0, 10]$.

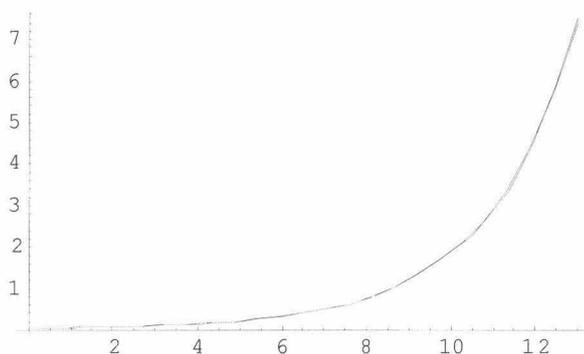


Figura 5.1: Gráficas de la función f y de su qi $Q_1 f$ en el intervalo $[0, 13]$.

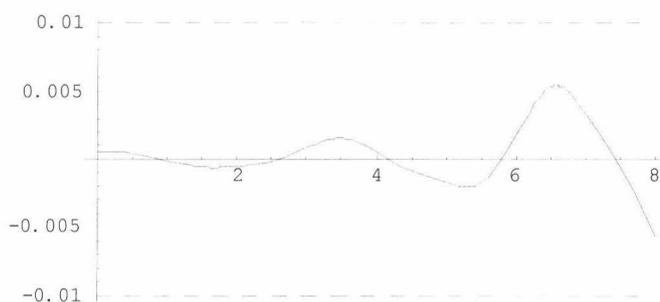


Figura 5.2: Gráfica del error $f - Q_1 f$ en el intervalo $[0, 8]$.

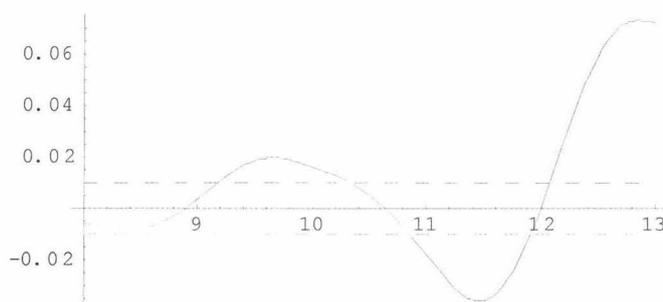


Figura 5.3: Gráfica del error $f - Q_1 f$ en el intervalo $[8, 13]$.

Supongamos que se acepta la aproximación proporcionada por el quasi-interpolante $Q_1 f$ cuando el error es inferior en valor absoluto a 10^{-2} . Las Figuras 5.2 y 5.3 muestran el error de quasi-interpolación en los intervalos $[0, 8]$ y $[8, 13]$, respectivamente. En $[0, 9]$ el error es inferior en valor absoluto a 10^{-2} . Por tanto, nos planteamos disminuir el error en $[9, 13]$ construyendo un nuevo q_i que coincida con $Q_1 f$ en (la mayor parte de) $[0, 9]$.

Sea $(Q_h f)_{h>0}$ la sucesión de q_i cúbicos escalados, definidos por

$$Q_h f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=-1}^1 c_j f((i-j)h) \right) M_4 \left(\frac{\cdot}{h} - i \right).$$

Sea $E_h := f - Q_h f$ el error de quasi-interpolación.

Como $(Q_h f)_{h>0}$ converge a f cuando $h \rightarrow 0^+$ (si f es, por ejemplo, continua), una

posibilidad consiste en considerar el quasi-interpolante cúbico $Q_{\frac{1}{2}}f$, es decir,

$$Q_{\frac{1}{2}}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=-1}^1 c_j f \left(\frac{i-j}{2} \right) \right) M_4(2 \cdot -i).$$

No sólo disminuye el error en $[9, 13]$, sino también en $[0, 9]$ (ver Figura 5.4). Se cumplen las condiciones (a) y (c), pero no (b), pues el aproximante $Q_{\frac{1}{2}}f$ de f se recalcula completamente, no aprovechando el buen comportamiento del error $E_1 = f - Q_1f$ en $[0, 9]$.

Es razonable utilizar conjuntamente Q_1 y $Q_{\frac{1}{2}}$ para tener un buen comportamiento del error, dejando a un lado, por ahora, el cumplimiento de (b). Observemos que

$$f = Q_1f + E_1.$$

Como

$$E_1 = Q_{\frac{1}{2}}E_1 + E_{\frac{1}{2}},$$

siendo $E_{\frac{1}{2}}$ el error de quasi-interpolación de E_1 mediante $Q_{\frac{1}{2}}E_1$, escribimos

$$\begin{aligned} f &= Q_1f + E_1 \\ &= Q_1f + Q_{\frac{1}{2}}E_1 + E_{\frac{1}{2}} \\ &= Q_1f + Q_{\frac{1}{2}}(f - Q_1f) + E_{\frac{1}{2}} \\ &= Q_1f + Q_{\frac{1}{2}}f - Q_{\frac{1}{2}}Q_1f + E_{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

y, por tanto, podemos aproximar f mediante su quasi-interpolante de tipo suma booleana (cf. [27]):

$$f = B_1f + E_{\frac{1}{2}},$$

con

$$B_1 := Q_{\frac{1}{2}} \oplus Q_1 := Q_1 + Q_{\frac{1}{2}} - Q_{\frac{1}{2}}Q_1.$$

B_1 es, obviamente, exacto en \mathbb{P}_3 .

La Figura 5.4 muestra los errores de quasi-interpolación $f - B_1f$ y $f - Q_{\frac{1}{2}}f$ en $[0, 13]$.

El objetivo de disminuir el error se ha logrado, pero a costa de construir el nuevo qi B_1f en todo el intervalo $[0, 13]$.

¿Cómo se consigue que se cumpla (b), además de (a) y (c)? Sea H la función definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

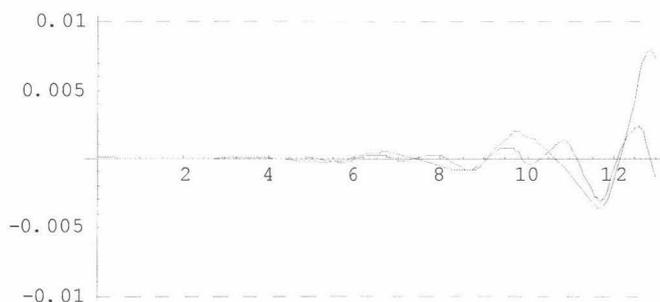


Figura 5.4: Errores $f - B_1 f$ (negro) y $f - Q_{\frac{1}{2}} f$ (rojo) en el intervalo $[0, 13]$.

Sea \tilde{Q}_1 el quasi-interpolante definido por

$$\tilde{Q}_1 f = Q_1 f + Q_{\frac{1}{2}} (H(\cdot - 9)(f - Q_1 f)).$$

Como Q_1 y $Q_{\frac{1}{2}}$ son exactos en el espacio \mathbb{P}_3 de los polinomios de grado menor o igual que tres, también lo es \tilde{Q}_1 .

La Figura 5.5 muestra los errores de quasi-interpolación de f mediante Q_1 , \tilde{Q}_1 y B_1 .

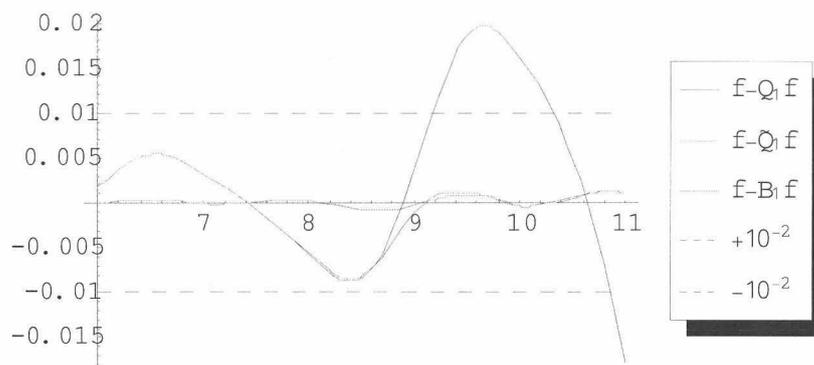


Figura 5.5: Errores $f - Q_1 f$, $f - \tilde{Q}_1 f$ y $f - B_1 f$.

El error a partir de 9 disminuye, pero el quasi-interpolante $\tilde{Q}_1 f$ coincide con $Q_1 f$ sólo en el intervalo $[0, 7.5]$ (ver Figura 5.6).

Por otra parte, coincide con el qi $B_1 f$ a partir de $x = 10$ (ver Figura 5.7).

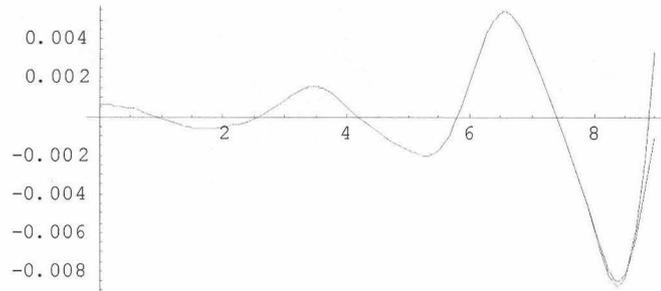


Figura 5.6: Errores $f - Q_1 f$ (en azul) y $f - \tilde{Q}_1 f$ (en verde) en el intervalo $[0, 9]$.

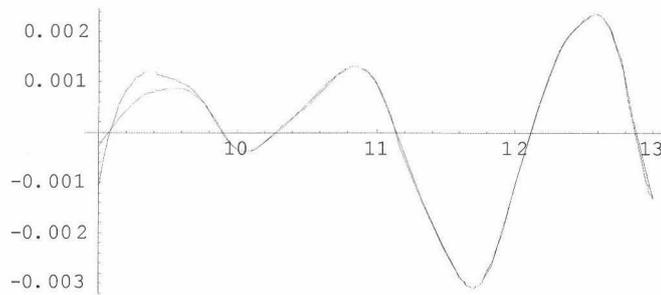


Figura 5.7: Errores $f - B_1 f$ (en rojo) y $f - \tilde{Q}_1 f$ (en verde) en el intervalo $[9, 13]$.

5.2 El problema del control local del error de quasi-interpolación. Propuesta inicial

Formalicemos y analicemos el problema descrito básicamente de forma gráfica en la sección anterior. Supongamos se desea disminuir el error de qi en el intervalo $I \cap [Nh, +\infty)$. Recordemos que se pretende construir un nuevo qi de modo que se verifiquen las propiedades (a), (b) y (c).

Sea \tilde{Q}_h el quasi-interpolante definido por

$$\tilde{Q}_h f = Q_h f + Q_{\frac{h}{2}} \left(H \left(\frac{\cdot}{h} - N \right) (f - Q_h f) \right),$$

donde H es la función escalón unidad definida anteriormente. \tilde{Q}_h es exacto en \mathbb{P}_3 por serlo Q_h y $Q_{\frac{h}{2}}$. Entonces, \tilde{Q}_h cumple (a).

A continuación se muestra cómo se expresa $\tilde{Q}_h f$ en cada intervalo inducido por los nodos de $h\mathbb{Z}$. Supondremos que $N = 0$, lo que no supone pérdida de generalidad.

Proposición 5.2.1 *Se cumple que*

$$\tilde{Q}_h f(x) = \begin{cases} Q_h f(x), & \text{si } \frac{x}{h} \leq -\frac{3}{2}, \\ Q_h f(x) + R_{h,1}(x), & \text{si } -\frac{3}{2} < \frac{x}{h} \leq -1, \\ Q_h f(x) + R_{h,1}(x) + R_{h,2}(x), & \text{si } -1 < \frac{x}{h} \leq -\frac{1}{2}, \\ Q_h f(x) + R_{h,1}(x) + R_{h,2}(x) + R_{h,3}(x), & \text{si } -\frac{1}{2} < \frac{x}{h} \leq 0, \\ Q_{\frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x) - R_{h,4}(x) - R_{h,5}(x), & \text{si } 0 < \frac{x}{h} \leq \frac{1}{2}, \\ Q_{\frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x) - R_{h,4}(x), & \text{si } \frac{1}{2} < \frac{x}{h} \leq 1, \\ Q_{\frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x), & \text{si } \frac{x}{h} > 1, \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} R_{h,1} &= c_1 E_h(0) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} + 1 \right) \\ R_{h,2} &= \left(c_0 E_h(0) + c_1 E_h \left(\frac{h}{2} \right) \right) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} \right) \\ R_{h,3} &= \left(c_{-1} E_h(0) + c_0 E_h \left(\frac{h}{2} \right) + c_1 E_h(h) \right) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} - 1 \right) \\ R_{h,4} &= c_{-1} E_h \left(-\frac{h}{2} \right) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} \right) \\ R_{h,5} &= \left(c_{-1} E_h(-h) + c_0 E_h \left(-\frac{h}{2} \right) \right) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} + 1 \right) \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN Es inmediata. \square

Se observa que no se logra completamente el objetivo (b).

Para determinar el error de quasi-interpolación en cada uno de los intervalos es preciso acotar el error de quasi-interpolación para Q_h y $Q_{\frac{h}{2}} \oplus Q_h$. Recordemos que en el capítulo 4 se estableció el siguiente resultado:

Proposición 5.2.2 *Sea $f \in C^4(\mathbb{R})$. Para todo $x \in I_j := [jh, (j+1)h]$, $j \in \mathbb{Z}$, se cumple que*

$$|f(x) - Q_h f(x)| \leq \frac{37}{1728} h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty, I_j}.$$

En su demostración se obtuvo la igualdad

$$f(x) - Q_h f(x) = \frac{1}{6} h^4 f^{(4)}(jh + \tau h) K(\xi), \quad (5.2.1)$$

donde

$$K(\xi) = \frac{1}{144} (11 + 21\xi + 15\xi^2 - 72\xi^3 + 36\xi^4), \quad \xi \in [0, 1]. \quad (5.2.2)$$

En lo que respecta a $Q_{\frac{h}{2}} \oplus Q_h$, probamos un resultado análogo.

Proposición 5.2.3 *Sea $f \in C^4(\mathbb{R})$. Para todo $x \in I_j := [jh, (j+1)h]$, $j \in \mathbb{Z}$, se cumple que*

$$\left| f(x) - Q_{\frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x) \right| \leq 0.000766929 h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty, I_j}.$$

DEMOSTRACIÓN Un cálculo explícito muestra que

$$\begin{aligned} Q_{\frac{h}{2}} \oplus Q_h f &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(ih) \sum_{k=-6}^6 \gamma_k M_4 \left(2\frac{\cdot}{h} - 2i - k \right) + \\ &\quad \sum_{i \in \mathbb{Z}} f \left(\left(i + \frac{1}{2} \right) h \right) \sum_{k=-1}^1 c_k M_4 \left(2\frac{\cdot}{h} - 2i - k - 1 \right) \end{aligned}$$

con

$$\gamma_0 = \frac{295}{216}, \gamma_1 = -\frac{1}{6}, \gamma_2 = -\frac{13}{576}, \gamma_3 = 0, \gamma_4 = \frac{1}{144}, \gamma_5 = 0, \gamma_6 = -\frac{1}{1728},$$

$\gamma_{-k} = \gamma_k$, $1 \leq k \leq 6$.

Si $x \in I_{j,1} := [jh, (j + \frac{1}{2})h]$, entonces $x = jh + \xi h$, $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$. Como para el quasi-interpolante clásico considerado en el resultado anterior, el Teorema del núcleo de Peano (cf. [3], Teorema 3.1, p. 28; [24], Teorema 3.7.1 p.70), seguido de un cambio de variable para reducir la integral al intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, proporciona la igualdad

$$f(x) - Q_{\frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x) = \frac{1}{6} h^4 \int_0^{\frac{1}{2}} K(\xi, t) f^{(4)}(jh + ht) dt,$$

con

$$\begin{aligned}
 K(\xi, t) &= (\xi - t)_+^3 - Q_{\frac{1}{2}} \oplus Q_1 \left[(\cdot - t)_+^3 \right] (\xi) \\
 &= (\xi - t)_+^3 - \sum_{i \in \mathbb{Z}} (i - t)_+^3 \sum_{k=-6}^6 \gamma_k M_4(2\xi - 2i - k) - \\
 &\quad \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(i + \frac{1}{2} - t \right)_+^3 \sum_{k=-1}^1 c_k M_4(2\xi - 2i - k - 1)
 \end{aligned}$$

En el triángulo T_1 de vértices $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $A_3 = (0, \frac{1}{2})$, el núcleo $K(\xi, t)$ es un polinomio de grado total 6 en las variables ξ y t , y sus BB-coeficientes son los siguientes:

	-880	-520	144	924	1632	2080	2080
	-740	-164	857	1872	2430	2080	
	440	460	2014	3188	2948		
$\frac{1}{207360}$	-72	1006	2686	3684			
	264	11128	1944				
	480	480					
	480						

Por tanto, el núcleo cambia de signo en un entorno de A_3 (ver Figura 5.8).

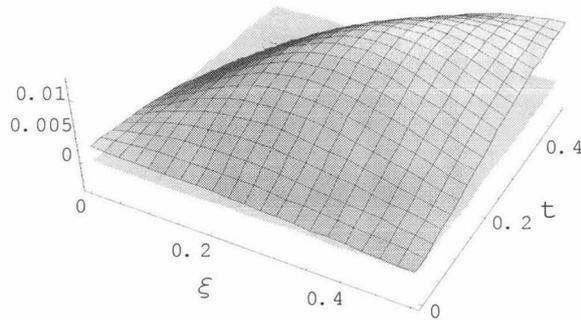


Figura 5.8: Núcleo de Peano para el error de quasi-interpolación en $[jh, (j + \frac{1}{2})h]$ mediante el quasi-interpolante suma booleana.

En el triángulo T_2 de vértices $A_1 = (0, 0)$, $A_4 = (\frac{1}{2}, 0)$ y $A_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ el núcleo $K(\xi, t)$ también es un polinomio de grado total 6 en las variables ξ y t . Sus BB-coeficientes son

los siguientes:

						2080
						2080 2080
					2948	2598 1800
$\frac{1}{207360}$			3684	3444	2296	1348
		1944	2942	2526	1541	832
	480	1296	1430	1144	700	360
	480	480	432	350	248	140 40

El núcleo es positivo en el triángulo T_2 .

Como

$$\begin{aligned}
 \left| f(x) - Q_{\frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x) \right| &\leq \frac{1}{6} h^4 \int_0^{\frac{1}{2}} |K(\xi, t)| \left| f^{(4)}(jh + th) \right| dt \\
 &\leq \frac{1}{6} h^4 \left\| f^{(4)} \right\|_{\infty, I_{j,1}} \int_0^{\frac{1}{2}} |K(\xi, t)| dt \\
 &= \frac{1}{6} h^4 \left\| f^{(4)} \right\|_{\infty, I_{j,1}} \left(\int_0^\xi K(\xi, t) dt + \int_\xi^{\frac{1}{2}} |K(\xi, t)| dt \right)
 \end{aligned}$$

acotamos $K(\xi, t)$ en el triángulo A_1, A_2 y A_3 por la función $\overline{K}(\xi, t)$ que tiene por BB-coeficientes los valores absolutos de los de $K(\xi, t)$. Entonces

$$\left| f(x) - Q_{\frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x) \right| \leq h^4 \left\| f^{(4)} \right\|_{\infty, I_{j,1}} \frac{1}{6} \left(\int_0^\xi K(\xi, t) dt + \int_\xi^{\frac{1}{2}} \overline{K}(\xi, t) dt \right).$$

Un cálculo explícito muestra que

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{6} \left(\int_0^\xi K(\xi, t) dt + \int_\xi^{\frac{1}{2}} \overline{K}(\xi, t) dt \right) \\
 &= \frac{1679 + 6160\xi + 146454\xi^2 - 436660\xi^3 + 25760\xi^4 + 864192\xi^5 - 882560\xi^6 + 339712\xi^7}{8709120}
 \end{aligned}$$

Su máximo absoluto se alcanza en la única raíz del polinomio

$$6160 + 292908\xi - 1309980\xi^2 + 103040\xi^3 + 4320960\xi^4 - 5295360\xi^5 + 2377984\xi^6$$

en el intervalo $(0, \frac{1}{2})$, y su valor es igual, aproximadamente, a 0.000766929.

Cuando $x \in I_{j,2} := [(j + \frac{1}{2})h, (j + 1)h]$, se tiene que $x = (j + \frac{1}{2})h + \xi h$, $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$. Un desarrollo similar al anterior, representando el error como integral en $[0, \frac{1}{2}]$, muestra que el correspondiente núcleo de Peano es positivo en el triángulo T_1 , mientras que cambia de signo en T_2 (concretamente, en un entorno de A_4). El resultado propuesto se sigue de

la desigualdad establecida sin más que efectuar un cambio de variable en la representación integral del error de quasi-interpolación. \square

Una vez acotado el error en $(-\infty, -\frac{3}{2}h] \cup [h, +\infty)$, lo acotamos en cada uno de los subintervalos de $[-\frac{3}{2}h, h]$.

Proposición 5.2.4 Sea $J_r := [-\frac{3+r}{2}h, \frac{-2+r}{2}h]$, $0 \leq r \leq 4$. Para $x \in J_r$, $0 \leq r \leq 2$, se cumple que

$$\left| f(x) - \tilde{Q}_h f(x) \right| \leq |f(x) - Q_h f(x)| + \delta_{r,0} |E_h(0)| + \delta_{r,1} \left| E_h\left(\frac{h}{2}\right) \right| + \delta_{r,2} |E_h(h)|,$$

con

$$\begin{aligned} \delta_{0,0} &= \frac{1}{36} & \delta_{0,1} &= 0 & \delta_{0,2} &= 0 \\ \delta_{1,0} &= \frac{1}{3} & \delta_{1,1} &= \frac{1}{36} & \delta_{1,2} &= 0 \\ \delta_{2,0} &= \frac{37}{36} & \delta_{2,1} &= \frac{1}{3} & \delta_{2,2} &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

Además, para $x \in I_r$, $3 \leq r \leq 4$, se tiene que

$$\left| f(x) - \tilde{Q}_h f(x) \right| \leq \left| f(x) - Q_{\frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x) \right| + \varepsilon_{r,0} |E_h(-h)| + \varepsilon_{r,1} \left| E_h\left(-\frac{h}{2}\right) \right|,$$

con

$$\varepsilon_{3,0} = \frac{1}{36}, \quad \varepsilon_{3,1} = \frac{1}{3}, \quad \varepsilon_{4,0} = 0, \quad \varepsilon_{4,1} = \frac{1}{36}.$$

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $x \in J_0$. Por la Proposición 5.2.1,

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \tilde{Q}_h f(x) \right| &\leq |f(x) - Q_h f(x)| + \left| c_1 E_h(0) M_4 \left(\frac{2x}{h} + 1 \right) \right| \\ &= |f(x) - Q_h f(x)| + \frac{1}{6} |E_h(0)| M_4 \left(\frac{2x}{h} + 1 \right) \end{aligned}$$

Como los BB-coeficientes de $M_4 \left(\frac{2x}{h} + 1 \right)$ en $[-\frac{3}{2}h, -h]$ son $(0, 0, 0, \frac{1}{6})$, se cumple que $M_4 \left(\frac{2x}{h} + 1 \right)$ está acotado por $\frac{1}{6}$, por lo que

$$\left| f(x) - \tilde{Q}_h f(x) \right| \leq |f(x) - Q_h f(x)| + \frac{1}{36} |E_h(0)|.$$

Las restantes acotaciones se obtienen de igual modo. \square

Corolario 5.2.5 Con la notación del resultado anterior, si $f \in C^4(\mathbb{R})$, entonces para cada $0 \leq r \leq 2$ se cumple que

$$\left| f(x) - \tilde{Q}_h f(x) \right| \leq |f(x) - Q_h f(x)| + C_r h^4 \left\| f^{(4)} \right\|_{\infty, J_r}$$

y, para cada $3 \leq r \leq 4$,

$$\left| f(x) - \tilde{Q}_h f(x) \right| \leq \left| f(x) - Q_{\frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x) \right| + C_r h^4 \left\| f^{(4)} \right\|_{\infty, J_r}$$

siendo

$$C_0 = \frac{11}{31104} \simeq 3.5365 \cdot 10^{-4}$$

$$C_1 = \frac{59}{62208} \simeq 9.4843 \cdot 10^{-4}$$

$$C_2 = \frac{1702}{62208} \simeq 2.7359 \cdot 10^{-2}$$

$$C_3 = \frac{233}{31104} \simeq 7.4910 \cdot 10^{-3}$$

$$C_4 = \frac{37}{62208} \simeq 5.9478 \cdot 10^{-4}$$

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $x \in J_0$. Por (5.2.1) y (5.2.2), se tiene que

$$E_h(0) = f(0) - Q_h f(0) = \frac{1}{6} h^4 K(0) f^{(4)}(\tau h),$$

con $\tau \in [0, 1]$. Entonces,

$$E_h(0) = \frac{1}{6} \frac{11}{144} h^4 f^{(4)}(\tau h).$$

Por la Proposición 5.2.4,

$$\left| f(x) - \tilde{Q}_h f(x) \right| \leq \left| f(x) - Q_h f(x) \right| + \delta_{0,0} |E_h(0)| \leq \left| f(x) - Q_h f(x) \right| + \frac{11}{31104} h^4 \left\| f^{(4)} \right\|_{\infty, J_0}.$$

El resto de las acotaciones se establece de igual modo. \square

La construcción de \tilde{Q}_h se basa en la multiplicación del error $f - Q_h f$ por una función escalón $H\left(\frac{\cdot}{h} - N\right)$, lo que se traduce en que \tilde{Q}_h coincide con Q_h en una determinada región a la izquierda del punto a partir del que se corrige el error, con $Q_{\frac{h}{2}} \oplus Q_h$ en otra a la derecha y es una *perturbación* de Q_h en una determinada *zona de transición*. Como $H\left(\frac{\cdot}{h} - N\right)(f - Q_h f)$ es discontinua, se produce un fenómeno de Gibbs al aplicar $Q_{\frac{h}{2}}$ para formar \tilde{Q}_h .

El siguiente resultado cuantifica dicho fenómeno cuando la función $f - Q_h f$ es constante e igual a la unidad.

Proposición 5.2.6 *Se cumple que*

$$\max_{x \in \mathbb{R} \setminus \left[\left(N - \frac{1}{2}\right)h, Nh \right]} \left| H\left(\frac{\cdot}{h} - N\right)(x) - Q_{\frac{h}{2}}\left(H\left(\frac{\cdot}{h} - N\right)(x)\right) \right| = \frac{11}{1800} \left(6 + \sqrt{11}\right) \simeq 0.056935.$$

DEMOSTRACIÓN Ho hay pérdida de generalidad si se supone que $h = 1$ y $N = 0$. Se tiene que

$$Q_{\frac{1}{2}}H(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=-1}^1 c_j H\left(\frac{i-j}{2}\right) \right) M_4(2x-i).$$

Si $x \in [-2, -\frac{3}{2}]$, entonces

$$Q_{\frac{1}{2}}H(x) = \sum_{i=-5}^{-2} \left(\sum_{j=-1}^1 c_j H\left(\frac{i-j}{2}\right) \right) M_4(2x-i) = 0.$$

Análogamente, $Q_{\frac{1}{2}}H(x) = 0$ si $x \leq -2$.

Si $x \geq 1$, entonces

$$Q_{\frac{1}{2}}H(x) = \sum_{i \geq 1} \left(\sum_{j=-1}^1 c_j H\left(\frac{i-j}{2}\right) \right) M_4(2x-i) = \sum_{i \geq 1} M_4(2x-i) = H(x)$$

Por tanto, $H(x) - Q_{\frac{1}{2}}H(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus [-\frac{3}{2}, 1]$. Hay que determinar el máximo absoluto de $|H - Q_{\frac{1}{2}}H|$ en $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}] \cup [0, 1]$. Como $Q_{\frac{1}{2}}H$ es un spline cúbico de clase C^2 con nodos en $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, empleamos su representación de Bernstein-Bézier en cada intervalo contenido en $[-\frac{3}{2}, 1]$ inducido por los nodos de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. La Figura 5.9 muestra la gráfica de $Q_{\frac{1}{2}}H$ en $[-2, 2]$.

Tras algunos cálculos, se obtiene que los BB-coeficientes de $36 Q_{\frac{1}{2}}H$ en $[\frac{-3+r}{2}, \frac{-2+r}{2}]$, $r \in \{0, 1, 3, 4\}$, son

$$(0, 0, 0, -1), (-1, -2, -4, 3), (33, 40, 38, 37), (37, 36, 36, 36) \quad \text{y} \quad (37, 36, 36, 36),$$

respectivamente.

El mínimo absoluto de $Q_{\frac{1}{2}}H$ en $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$ es $-\frac{11}{1800}(6 + \sqrt{11})$ y se alcanza en el intervalo $[-1, -\frac{1}{2}]$. Análogamente, el máximo absoluto se alcanza en $[0, \frac{1}{2}]$ y es $1 + \frac{11}{1800}(6 + \sqrt{11})$. En definitiva,

$$\max_{x \in \mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{2}, 0]} |H(x) - Q_{\frac{1}{2}}(H)(x)| = \max_{x \in [-\frac{3}{2}, 1] \setminus [-\frac{1}{2}, 0]} |H(x) - Q_{\frac{1}{2}}(H)(x)| = \frac{11}{1800}(6 + \sqrt{11}),$$

con lo que concluye la demostración. \square

El resultado anterior prueba que la sucesión $(Q_{\frac{h}{2}}(H(\frac{\cdot}{h} - N)))_{h>0}$ no converge a $H(\cdot - N)$ cuando $h \rightarrow 0^+$. Es decir, la aplicación de $Q_{\frac{h}{2}}$ a la función discontinua

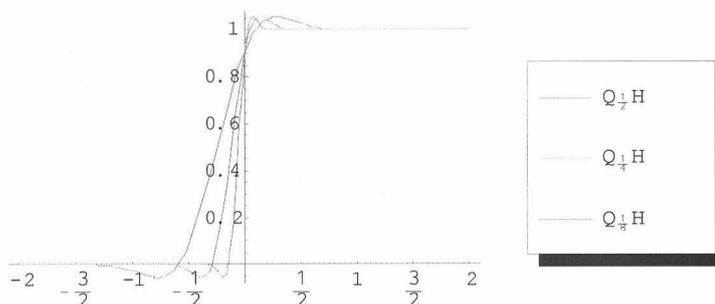


Figura 5.9: Gráficas de los quasi-interpolantes $Q_{\frac{1}{2}}H$, $Q_{\frac{1}{4}}H$ y $Q_{\frac{1}{8}}H$.

$H\left(\frac{\cdot}{h} - N\right)$ produce un fenómeno de Gibbs: $Q_{\frac{h}{2}}\left(H\left(\frac{\cdot}{h} - N\right)\right)$ excede en $\mathbb{R} \setminus \left[\left(N - \frac{1}{2}\right)h, Nh\right]$ a $H\left(\frac{\cdot}{h} - N\right)$ en un 5.7%, aproximadamente, persistiendo tal exceso cuando $h \rightarrow 0^+$. Como, en general, $H\left(\frac{\cdot}{h} - N\right)(f - Q_h f)$ es discontinua, se produce un efecto similar al aplicar el quasi-interpolante $Q_{\frac{h}{2}}$ para formar \tilde{Q}_h .

5.3 Quasi-interpolantes cúbicos de norma casi mínima y control local del error

Los quasi-interpolantes de norma casi mínima pueden jugar un papel interesante en la amortiguación del fenómeno de Gibbs que ha sido descrito

Consideremos el qid cúbico (escalado) de norma casi mínima construido en el capítulo 1, dado por

$$Q_{2,h}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=-2}^2 d_j f((i-j)h) \right) M_4\left(\frac{\cdot}{h} - i\right),$$

con

$$d_{-2} = d_2 = -\frac{1}{24}, \quad d_{-1} = d_1 = 0 \quad \text{y} \quad d_0 = \frac{13}{12}.$$

Sea $\tilde{Q}_{2,h}$ el quasi-interpolante definido por

$$\tilde{Q}_{2,h}f = Q_h f + Q_{2,\frac{h}{2}}\left(H\left(\frac{\cdot}{h} - N\right)(f - Q_h f)\right),$$

con N entero.

En la construcción de $\tilde{Q}_{2,h}$ interviene el término $Q_{2,\frac{h}{2}}\left(H\left(\frac{\cdot}{h} - N\right)(f - Q_h f)\right)$. Si $f - Q_h f$ fuese constante e igual a la unidad, entonces, como en el caso anterior, se produciría

un fenómeno de Gibbs. Sin embargo, en esta ocasión, el exceso de $Q_{2, \frac{h}{2}}(H(\frac{\cdot}{h} - N))$ frente a $H(\frac{\cdot}{h} - N)$ es igual a $\frac{762+13\sqrt{26}}{22500} \simeq 0.036813$, es decir, alrededor del 3.7% frente al 5.7% del qid cúbico clásico, y persiste cuando $h \rightarrow 0^+$.

La Figura 5.10 ilustra este comportamiento. La gráfica en rojo corresponde al quasi-interpolante clásico de H , mientras que la correspondiente al quasi-interpolante de norma casi mínima de H aparece en azul.

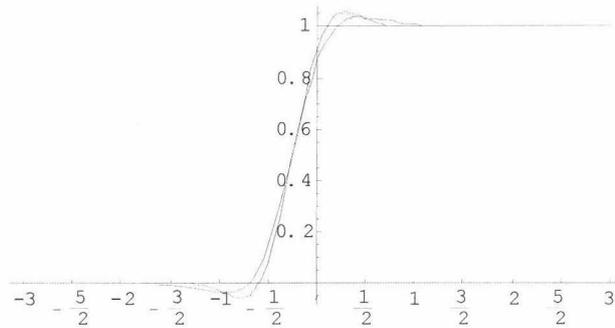


Figura 5.10: Gráficas de la función H y de sus quasi-interpolantes clásico (en rojo) y de norma casi mínima (en azul).

De haber utilizado el quasi-interpolante de norma casi mínima $Q_{3,h}$ dado por

$$Q_{3,h}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{54} (-f((i-3)h) + 56f(ih) - f((i+3)h)) M_4\left(\frac{\cdot}{h} - i\right),$$

se habría conseguido reducir dicho exceso hasta el 1.85%, a costa de ampliar aún más la zona de transición.

La acotación del error requiere expresar $\tilde{Q}_{2,h}f$ en cada intervalo inducido por los nodos de $\frac{h}{2}\mathbb{Z}$. Volvemos a suponer que $N = 0$.

Proposición 5.3.1 *Se cumple que*

$$\tilde{Q}_{2,h}f(x) = \begin{cases} Q_h f(x), & \text{si } \frac{x}{h} < -2, \\ Q_h f(x) + \bar{R}_{h,1}(x), & \text{si } -2 \leq \frac{x}{h} \leq -\frac{3}{2}, \\ Q_h f(x) + \bar{R}_{h,1}(x) + \bar{R}_{h,2}(x), & \text{si } -\frac{3}{2} < \frac{x}{h} \leq -1, \\ Q_h f(x) + \bar{R}_{h,1}(x) + \bar{R}_{h,2}(x) + \bar{R}_{h,3}(x), & \text{si } -1 < \frac{x}{h} \leq -\frac{1}{2}, \\ Q_h f(x) + \bar{R}_{h,1}(x) + \bar{R}_{h,2}(x) + \bar{R}_{h,3}(x) + \bar{R}_{h,4}(x), & \text{si } -\frac{1}{2} < \frac{x}{h} \leq 0, \\ Q_{2,\frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x) - \bar{R}_{h,5}(x) - \bar{R}_{h,6}(x) - \bar{R}_{h,7}(x), & \text{si } 0 < \frac{x}{h} \leq \frac{1}{2}, \\ Q_{2,\frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x) - \bar{R}_{h,5}(x) - \bar{R}_{h,6}(x), & \text{si } \frac{1}{2} < \frac{x}{h} \leq 1, \\ Q_{2,\frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x) - \bar{R}_{h,5}(x), & \text{si } 1 < \frac{x}{h} \leq \frac{3}{2}, \\ Q_{2,\frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x), & \text{si } \frac{x}{h} > \frac{3}{2}, \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} \bar{R}_{h,1} &= d_2 E_h(0) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} + 2 \right) \\ \bar{R}_{h,2} &= d_2 E_h \left(\frac{h}{2} \right) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} + 1 \right) \\ \bar{R}_{h,3} &= (d_0 E_h(0) + d_2 E_h(h)) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} \right) \\ \bar{R}_{h,4} &= \left(d_0 E_h \left(\frac{h}{2} \right) + d_2 E_h \left(\frac{3}{2}h \right) \right) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} - 1 \right) \\ \bar{R}_{h,5} &= d_{-2} E_h \left(-\frac{h}{2} \right) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} - 1 \right) \\ \bar{R}_{h,6} &= d_{-2} E_h(-h) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} \right) \\ \bar{R}_{h,7} &= \left(d_{-2} E_h \left(-\frac{3}{2}h \right) + d_0 E_h \left(-\frac{h}{2} \right) \right) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} + 1 \right) \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN Es inmediata. \square

Se observa que la zona de transición desde Q_h hasta $Q_{2,\frac{h}{2}} \oplus Q_h$ aumenta en relación a la obtenida al considerar el quasi-interpolante \tilde{Q}_h de la sección anterior. En lugar de ser $[(N - \frac{3}{2})h, (N + 1)h]$, dicha zona de transición es $[(N - 2)h, (N + \frac{3}{2})h]$. El amortiguamiento del exceso producido al actuar $Q_{2,\frac{h}{2}}$ sobre $H(\frac{\cdot}{h} - N)(f - Q_h f)$ tiene esta contrapartida.

En $\mathbb{R} \setminus [(N - 2)h, (N + \frac{3}{2})h]$ el $\tilde{Q}_{2,h}$ coincide con $Q_h f$ o con $Q_{2,\frac{h}{2}} \oplus Q_h f$, por lo que el error es $f - Q_h f$ o $f - Q_{2,\frac{h}{2}} \oplus Q_h f$. En lo que respecta a éste, disponemos del siguiente resultado:

Proposición 5.3.2 *Sea $f \in C^4(\mathbb{R})$. Para todo $x \in I_j := [jh, (j+1)h]$, $j \in \mathbb{Z}$, se cumple que*

$$\left| f(x) - Q_{2, \frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x) \right| \leq 0.0070489 h^4 \left\| f^{(4)} \right\|_{\infty, I_j}.$$

DEMOSTRACIÓN La demostración es análoga a la de la Proposición 5.2.3 La constante exacta es $\frac{877}{124416}$. \square

Tras este resultado, sólo resta acotar el error en $[(N-2)h, (N+\frac{3}{2})h]$. Volvemos a suponer $N = 0$.

Proposición 5.3.3 *Sea $J_r := [-\frac{4+r}{2}h, -\frac{3+r}{2}h]$, $0 \leq r \leq 6$. Para $x \in J_r$, $0 \leq r \leq 3$, se cumple que*

$$\left| f(x) - \tilde{Q}_{2,h} f(x) \right| \leq |f(x) - Q_h f(x)| + \bar{\delta}_{r,0} |E_h(0)| + \bar{\delta}_{r,1} \left| E_h\left(\frac{h}{2}\right) \right| + \bar{\delta}_{r,2} |E_h(h)| + \bar{\delta}_{r,3} \left| E_h\left(\frac{3}{2}h\right) \right|,$$

con

$$\begin{array}{cccc} \bar{\delta}_{0,0} = \frac{1}{144} & \bar{\delta}_{0,1} = 0 & \bar{\delta}_{0,2} = 0 & \bar{\delta}_{0,3} = 0 \\ \bar{\delta}_{1,0} = \frac{1}{36} & \bar{\delta}_{1,1} = \frac{1}{144} & \bar{\delta}_{1,2} = 0 & \bar{\delta}_{1,3} = 0 \\ \bar{\delta}_{2,0} = \frac{5}{24} & \bar{\delta}_{2,1} = \frac{1}{36} & \bar{\delta}_{2,2} = \frac{1}{144} & \bar{\delta}_{2,3} = 0 \\ \bar{\delta}_{3,0} = \frac{145}{144} & \bar{\delta}_{3,1} = \frac{5}{24} & \bar{\delta}_{3,2} = \frac{1}{36} & \bar{\delta}_{3,3} = \frac{1}{144} \end{array}$$

Además, para $x \in J_{r+4}$, $0 \leq r \leq 2$, se tiene que

$$\left| f(x) - \tilde{Q}_{2,h} f(x) \right| \leq \left| f(x) - Q_{2, \frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x) \right| + \bar{\varepsilon}_{r,0} \left| E_h\left(-\frac{3}{2}h\right) \right| + \bar{\varepsilon}_{r,1} |E_h(-h)| + \bar{\varepsilon}_{r,2} \left| E_h\left(-\frac{h}{2}\right) \right|,$$

con

$$\begin{array}{ccc} \bar{\varepsilon}_{0,0} = \frac{1}{144} & \bar{\varepsilon}_{0,1} = \frac{1}{36} & \bar{\varepsilon}_{0,2} = \frac{5}{24} \\ \bar{\varepsilon}_{1,0} = 0 & \bar{\varepsilon}_{1,1} = \frac{1}{144} & \bar{\varepsilon}_{1,2} = \frac{1}{36} \\ \bar{\varepsilon}_{2,0} = 0 & \bar{\varepsilon}_{2,1} = 0 & \bar{\varepsilon}_{2,2} = \frac{1}{144} \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN La Proposición 5.3.1 proporciona las expresiones del error en cada intervalo. Las acotaciones se obtienen a partir de los BB-coeficientes de $M_4\left(\frac{2}{h}\right)$ en cada intervalo considerado y de los coeficientes c y d de los q_i Q_h y $Q_{2, \frac{h}{2}}$, respectivamente. \square

Corolario 5.3.4 Con la notación del resultado anterior, si $f \in C^4(\mathbb{R})$, entonces para cada $0 \leq r \leq 3$ se cumple que

$$\left| f(x) - \tilde{Q}_{2,h}f(x) \right| \leq |f(x) - Q_h f(x)| + D_r h^4 \left\| f^{(4)} \right\|_{\infty, J_r}$$

y, para cada $4 \leq r \leq 6$,

$$\left| f(x) - \tilde{Q}_{2,h}f(x) \right| \leq \left| f(x) - Q_{2, \frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x) \right| + D_r h^4 \left\| f^{(4)} \right\|_{\infty, J_r}$$

siendo

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{11}{124416} \simeq 8.8413 \cdot 10^{-5} \\ D_1 &= \frac{125}{248832} \simeq 5.0235 \cdot 10^{-4} \\ D_2 &= \frac{415}{124416} \simeq 3.3356 \cdot 10^{-3} \\ D_3 &= \frac{1475}{82944} \simeq 1.7783 \cdot 10^{-2} \\ D_4 &= \frac{6785}{248832} \simeq 2.7267 \cdot 10^{-2} \\ D_5 &= \frac{85}{124416} \simeq 6.8319 \cdot 10^{-4} \\ D_6 &= \frac{37}{248832} \simeq 1.4869 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN Probemos, por ejemplo, la acotación para el intervalo J_2 . Supongamos que $x \in J_2$. Por (5.2.1) y (5.2.2), se tiene que

$$\begin{aligned} E_h(0) &= \frac{1}{6} h^4 K(0) f^{(4)}(\tau_1 h) \\ E_h\left(\frac{h}{2}\right) &= \frac{1}{6} h^4 K\left(\frac{1}{2}\right) f^{(4)}(\tau_2 h) \\ E_h(h) &= \frac{1}{6} h^4 K(1) f^{(4)}(\tau_3 h) \end{aligned}$$

con $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in [0, 1]$. Entonces,

$$\begin{aligned} |E_h(0)| &\leq \frac{1}{6} \frac{11}{144} h^4 \left\| f^{(4)} \right\|_{\infty, J_2} \\ \left| E_h\left(\frac{h}{2}\right) \right| &\leq \frac{1}{6} \frac{37}{288} h^4 \left\| f^{(4)} \right\|_{\infty, J_2} \\ |E_h(h)| &\leq \frac{1}{6} \frac{11}{144} h^4 \left\| f^{(4)} \right\|_{\infty, J_2} \end{aligned}$$

Por la Proposición 5.3.3,

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \tilde{Q}_{2,h} f(x) \right| &\leq |f(x) - Q_h f(x)| + \frac{5}{24} |E_h(0)| + \frac{1}{36} \left| E_h\left(\frac{h}{2}\right) \right| + \frac{1}{144} |E_h(h)| \\ &\leq |f(x) - Q_h f(x)| + \frac{415}{124\,416} h^4 \left\| f^{(4)} \right\|_{\infty, J_0} \end{aligned}$$

La demostración de las restantes acotaciones es similar. \square

Comparando las acotaciones del error para los Q_h y $\tilde{Q}_{2,h}$ se observa cómo, en el intervalo donde se produce el fenómeno de Gibbs a la izquierda de Nh , el Q_h tiene una cota del error menor que la de $\tilde{Q}_{2,h}$.

5.4 Una propuesta alternativa para controlar localmente el error

La segunda alternativa considerada ha consistido en sustituir el quasi-interpolante $Q_{\frac{h}{2}}$ que se empleaba para formar \tilde{Q}_h por un quasi-interpolante de norma casi mínima. De este modo se conseguía amortiguar el exceso producido al actuar sobre la función discontinua $H\left(\frac{\cdot}{h} - N\right) (f - Q_h f)$.

Se emplee $Q_{\frac{h}{2}}$ o uno de norma casi mínima, el resultado es que $f - Q_h f$ en cada nodo de $\frac{h}{2}\mathbb{Z}$ se multiplica por un *peso* (unidad o nulo), que es el valor de la función escalón $H\left(\frac{\cdot}{h} - N\right)$ en dicho nodo. Un método cualitativamente diferente consiste en producir una función suave a la que aplicar $Q_{\frac{h}{2}}$. Esto lleva aparejado una modificación de los pesos asignados al error $f - Q_h f$ en $\frac{h}{2}\mathbb{Z}$.

Se propone sustituir $H\left(\frac{\cdot}{h} - N\right)$ por su quasi-interpolante de Schoenberg, es decir, por

$$\tilde{H}_h = \sum_{i \in \mathbb{Z}} H(i - N) M_4\left(\frac{\cdot}{h} - i\right).$$

Es una función spline cúbica de clase $C^2(\mathbb{R})$, que conecta suavemente las rectas de ecuaciones $y = 0$ e $y = 1$. Como $0 \leq \tilde{H}_h(x) \leq 1$, sus valores en $\frac{h}{2}\mathbb{Z}$ pueden actuar como pesos para controlar localmente el error. Se ilustra la situación en la Figura 5.11.

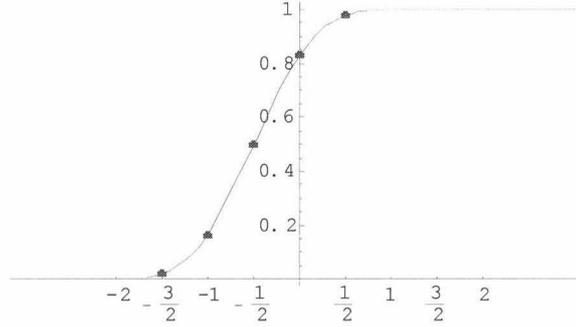


Figura 5.11: La función S_h , para $N = 0$ y $h = 1$.

Lema 5.4.1 *Se cumple que*

$$\tilde{H}_h \left((2N + j) \frac{h}{2} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq -4 \\ \frac{1}{48} & \text{si } j = -3 \\ \frac{1}{6} & \text{si } j = -2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } j = -1 \\ \frac{5}{6} & \text{si } j = 0 \\ \frac{47}{48} & \text{si } j = 1 \\ 1 & \text{si } j \geq 2 \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN Basta tener en cuenta que

$$\tilde{H}_h \left((2N + j) \frac{h}{2} \right) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} H(i - N) M_4 \left(\frac{2N + j}{2} - i \right) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} H(i) M_4 \left(\frac{j}{2} - i \right).$$

Se sigue que los valores son independientes de N y h . \square

Se propone controlar localmente el error utilizando el quasi-interpolante \tilde{S}_h definido por

$$\tilde{S}_h f = Q_h f + Q_{\frac{h}{2}} \left(\tilde{H}_h \times (f - Q_h f) \right).$$

Como Q_h es exacto en \mathbb{P}_3 , también lo es \tilde{S}_h .

Supongamos, nuevamente, que $N = 0$.

Proposición 5.4.2 *Se cumple que*

$$\tilde{S}_h f(x) = \begin{cases} Q_h f(x), & \text{si } \frac{x}{h} < -3, \\ Q_h f(x) + \tilde{R}_{h,1}(x), & \text{si } -3 \leq \frac{x}{h} \leq -\frac{5}{2}, \\ Q_h f(x) + \tilde{R}_{h,1}(x) + \tilde{R}_{h,2}(x), & \text{si } -\frac{5}{2} < \frac{x}{h} \leq -2, \\ Q_h f(x) + \tilde{R}_{h,1}(x) + \tilde{R}_{h,2}(x) + \tilde{R}_{h,3}(x), & \text{si } -2 < \frac{x}{h} \leq -\frac{3}{2}, \\ Q_h f(x) + \tilde{R}_{h,1}(x) + \tilde{R}_{h,2}(x) + \tilde{R}_{h,3}(x) + \tilde{R}_{h,4}(x), & \text{si } -\frac{3}{2} < \frac{x}{h} \leq -1, \\ Q_h f(x) + \tilde{R}_{h,2}(x) + \tilde{R}_{h,3}(x) + \tilde{R}_{h,4}(x) + \tilde{R}_{h,5}(x), & \text{si } -1 < \frac{x}{h} \leq -\frac{1}{2}, \\ Q_h f(x) + \tilde{R}_{h,3}(x) + \tilde{R}_{h,4}(x) + \tilde{R}_{h,5}(x) + \tilde{R}_{h,6}(x), & \text{si } -\frac{1}{2} < \frac{x}{h} \leq 0, \\ Q_{\frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x) - \tilde{R}_{h,7}(x) - \tilde{R}_{h,8}(x) - \tilde{R}_{h,9}(x) - \tilde{R}_{h,10}(x), & \text{si } 0 < \frac{x}{h} \leq \frac{1}{2}, \\ Q_{\frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x) - \tilde{R}_{h,7}(x) - \tilde{R}_{h,8}(x) - \tilde{R}_{h,9}(x), & \text{si } \frac{1}{2} < \frac{x}{h} \leq 1, \\ Q_{\frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x) - \tilde{R}_{h,7}(x) - \tilde{R}_{h,8}(x), & \text{si } 1 < \frac{x}{h} \leq \frac{3}{2}, \\ Q_{\frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x) - \tilde{R}_{h,7}(x), & \text{si } \frac{3}{2} < \frac{x}{h} \leq 2, \\ Q_{\frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x), & \text{si } \frac{x}{h} > 2, \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{h,1} &= \frac{1}{48} c_1 E_h \left(-\frac{3h}{2} \right) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} + 4 \right) \\ \tilde{R}_{h,2} &= \left(\frac{1}{48} c_0 E_h \left(-\frac{3h}{2} \right) + \frac{1}{6} c_1 E_h(-h) \right) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} + 3 \right) \\ \tilde{R}_{h,3} &= \left(\frac{1}{48} c_{-1} E_h \left(-\frac{3h}{2} \right) + \frac{1}{6} c_0 E_h(-h) + \frac{1}{2} c_1 E_h \left(-\frac{h}{2} \right) \right) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} + 2 \right) \\ \tilde{R}_{h,4} &= \left(\frac{1}{6} c_{-1} E_h(-h) + \frac{1}{2} c_0 E_h \left(-\frac{h}{2} \right) + \frac{5}{6} c_1 E_h(0) \right) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} + 1 \right) \\ \tilde{R}_{h,5} &= \left(\frac{1}{2} c_{-1} E_h \left(-\frac{h}{2} \right) + \frac{5}{6} c_0 E_h(0) + \frac{47}{48} c_1 E_h \left(\frac{h}{2} \right) \right) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} \right) \\ \tilde{R}_{h,6} &= \left(\frac{5}{6} c_{-1} E_h(0) + \frac{47}{48} c_0 E_h \left(\frac{h}{2} \right) + c_1 e E_h(h) \right) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} - 1 \right) \\ \tilde{R}_{h,7} &= \frac{1}{48} c_{-1} E_h \left(\frac{h}{2} \right) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} - 2 \right) \\ \tilde{R}_{h,8} &= \left(\frac{1}{6} c_{-1} E_h(0) + \frac{1}{48} c_0 E_h \left(\frac{h}{2} \right) \right) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} - 1 \right) \\ \tilde{R}_{h,9} &= \left(\frac{1}{2} c_{-1} E_h \left(-\frac{h}{2} \right) + \frac{1}{6} c_0 E_h(0) + \frac{1}{48} c_1 E_h \left(\frac{h}{2} \right) \right) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} \right) \\ \tilde{R}_{h,10} &= \left(\frac{5}{6} c_{-1} E_h(-h) + \frac{1}{2} c_0 E_h \left(-\frac{h}{2} \right) + \frac{1}{6} c_1 E_h(0) \right) M_4 \left(\frac{2\cdot}{h} + 1 \right) \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN Es inmediata. \square

Se observa que la zona de transición desde Q_h hasta $Q_{\frac{h}{2}} \oplus Q_h$ es $[(N-3)h, (N+2)h]$.

Proposición 5.4.3 Sea $I_r := \left[-\frac{6+r}{2}h, \frac{-5+r}{2}h\right]$, $0 \leq r \leq 9$. Para $x \in I_r$, $0 \leq r \leq 5$, se cumple que

$$\begin{aligned} \left|f(x) - \tilde{S}_h f(x)\right| &\leq |f(x) - Q_h f(x)| + \\ &\phi_{r,0} \left|E_h\left(-\frac{3h}{2}\right)\right| + \phi_{r,1} |E_h(-h)| + \phi_{r,2} \left|E_h\left(-\frac{h}{2}\right)\right| + \\ &\phi_{r,3} |E_h(0)| + \phi_{r,4} \left|E_h\left(\frac{h}{2}\right)\right| + \phi_{r,5} |E_h(h)|, \end{aligned}$$

con

$$\begin{array}{cccccc} \phi_{0,0} = \frac{1}{1728} & \phi_{0,1} = 0 & \phi_{0,2} = 0 & \phi_{0,3} = 0 & \phi_{0,4} = 0 & \phi_{0,5} = 0 \\ \phi_{1,0} = \frac{1}{144} & \phi_{1,1} = \frac{1}{216} & \phi_{1,2} = 0 & \phi_{1,3} = 0 & \phi_{1,4} = 0 & \phi_{1,5} = 0 \\ \phi_{2,0} = \frac{37}{1728} & \phi_{2,1} = \frac{1}{18} & \phi_{2,2} = \frac{1}{72} & \phi_{2,3} = 0 & \phi_{2,4} = 0 & \phi_{2,5} = 0 \\ \phi_{3,0} = \frac{37}{1728} & \phi_{3,1} = \frac{31}{216} & \phi_{3,2} = \frac{1}{6} & \phi_{3,3} = \frac{5}{216} & \phi_{3,4} = 0 & \phi_{3,5} = 0 \\ \phi_{4,0} = \frac{1}{144} & \phi_{4,1} = \frac{37}{216} & \phi_{4,2} = \frac{37}{72} & \phi_{4,3} = \frac{5}{18} & \phi_{4,4} = \frac{47}{1728} & \phi_{4,5} = 0 \\ \phi_{5,0} = \frac{1}{1728} & \phi_{5,1} = \frac{1}{18} & \phi_{5,2} = \frac{37}{72} & \phi_{5,3} = \frac{185}{216} & \phi_{5,4} = \frac{47}{144} & \phi_{5,5} = \frac{1}{36} \end{array}$$

Además, para $x \in I_{r+6}$, $0 \leq r \leq 3$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left|f(x) - \tilde{S}_h f(x)\right| &\leq \left|f(x) - Q_{\frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x)\right| + \\ &\varphi_{r,0} |E_h(-h)| + \varphi_{r,1} \left|E_h\left(-\frac{h}{2}\right)\right| + \varphi_{r,2} |E_h(0)| + \varphi_{r,3} \left|E_h\left(\frac{h}{2}\right)\right|, \end{aligned}$$

con

$$\begin{array}{cccccc} \varphi_{6,0} = \frac{5}{216} & \varphi_{6,1} = \frac{1}{6} & \varphi_{6,2} = \frac{37}{216} & \varphi_{6,3} = \frac{37}{1728} \\ \varphi_{7,0} = 0 & \varphi_{7,1} = \frac{1}{72} & \varphi_{7,2} = \frac{1}{18} & \varphi_{7,3} = \frac{37}{1728} \\ \varphi_{8,0} = 0 & \varphi_{8,1} = 0 & \varphi_{8,2} = \frac{1}{216} & \varphi_{8,3} = \frac{1}{144} \\ \varphi_{9,0} = 0 & \varphi_{9,1} = 0 & \varphi_{9,2} = 0 & \varphi_{9,3} = \frac{1}{1728} \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN La Proposición 5.4.2 proporciona las expresiones del error en cada intervalo. Las acotaciones se obtienen a partir de los BB-coeficientes de $M_4\left(\frac{2}{h}\right)$ en cada intervalo considerado y de los coeficientes c del $q_i Q_h$. \square

Corolario 5.4.4 *Con la notación del resultado anterior, si $f \in C^4(\mathbb{R})$, entonces para cada $0 \leq r \leq 5$ se cumple que*

$$\left|f(x) - \tilde{S}_h f(x)\right| \leq |f(x) - Q_h f(x)| + \tilde{D}_r h^4 \left\|f^{(4)}\right\|_{\infty, J_r}$$

y, para cada $6 \leq r \leq 9$,

$$\left|f(x) - \tilde{S}_h f(x)\right| \leq \left|f(x) - Q_{\frac{h}{2}} \oplus Q_h f(x)\right| + \tilde{D}_r h^4 \left\|f^{(4)}\right\|_{\infty, J_r}$$

siendo

$$\begin{aligned} \tilde{D}_0 &= \frac{37}{2985984} \simeq 1.2391 \cdot 10^{-5} \\ \tilde{D}_1 &= \frac{155}{746496} \simeq 2.0764 \cdot 10^{-4} \\ \tilde{D}_2 &= \frac{4369}{2985984} \simeq 1.4632 \cdot 10^{-3} \\ \tilde{D}_3 &= \frac{18361}{2985984} \simeq 6.1491 \cdot 10^{-3} \\ \tilde{D}_4 &= \frac{52111}{2985984} \simeq 1.7452 \cdot 10^{-2} \\ \tilde{D}_5 &= \frac{89489}{2985984} \simeq 2.9970 \cdot 10^{-2} \\ \tilde{D}_6 &= \frac{19417}{2985984} \simeq 6.5027 \cdot 10^{-3} \\ \tilde{D}_7 &= \frac{4369}{2985984} \simeq 1.4632 \cdot 10^{-3} \\ \tilde{D}_8 &= \frac{155}{746496} \simeq 2.0764 \cdot 10^{-4} \\ \tilde{D}_9 &= \frac{37}{2985984} \simeq 1.2391 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN Se sigue de la Proposición 5.4.3 y de las igualdades (5.2.1) y (5.2.2). \square

La comparación de las constantes D y \tilde{D} que aparecen en las acotaciones de los errores $f - \tilde{Q}_{2,h} f$ y $f - \tilde{S}_h f$, respectivamente, para funciones de clase $C^4(\mathbb{R})$ indica un mejor comportamiento de $\tilde{Q}_{2,h}$ en la zona de transición a la izquierda de Nh . Hasta el nivel

de análisis desarrollado, concluimos que, de los tres métodos considerados, $\tilde{Q}_{2,h}$ es el que mejor controla localmente el error.

Debe decirse, sin embargo, que sería interesante establecer acotaciones más precisas de los errores de q_i , pues algunos experimentos numéricos sugieren que $\tilde{S}_h f$ podría proporcionar similares resultados, o aún mejores.

Anexo al capítulo 1

Quasi-interpolantes spline discretos quínticos de norma infinito casi mínima

Monomios como combinaciones lineales del B-spline quíntico

$$\begin{aligned} e_0 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} M_6(\cdot - i) & e_3 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(i^3 - \frac{3}{2}i \right) M_6(\cdot - i) \\ e_1 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} i M_6(\cdot - i) & e_4 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(i^4 - 3i^2 + \frac{4}{5}i \right) M_6(\cdot - i) \\ e_2 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(i^2 - \frac{1}{2} \right) M_6(\cdot - i) & e_5 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(i^5 - 5i^3 + \frac{2}{5}i \right) M_6(\cdot - i). \end{aligned}$$

Exactitud de $Q_{6,n}$, $n \geq 3$, en \mathbb{P}_5

El qid

$$Q_{6,n}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(a_0 f(i) + \sum_{j=1}^n a_j (f(i+j) + f(i-j)) \right) M_6(\cdot - i)$$

es exacto en \mathbb{P}_5 si y sólo si

$$a_0 + 2 \sum_{j=1}^n a_j = 1, \quad \sum_{j=1}^n j^2 a_j = -\frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^n j^4 a_j = \frac{2}{5}.$$

Problema

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar } \nu_{6,n}(a) &= |a_0| + 2 \sum_{i=1}^n |a_i| \\
 \text{sujeta a } a_0 &= 1 + \frac{8 + 5(n^2 + (n-1)^2)}{10(n-1)^2 n^2} - 2 \sum_{j=1}^{n-2} \left(1 - \frac{j^2}{(n-1)^2 n^2}\right) a_j \\
 a_{n-1} &= -\frac{5n^2 + 8}{20(n-1)^2 (2n-1)} + \sum_{j=1}^{n-2} \frac{j^2 (j^2 - n^2)}{(n-1)^2 (2n-1)} a_j \\
 a_n &= \frac{8 + 5(n-1)^2}{20n^2 (2n-1)} - \sum_{j=1}^{n-2} \frac{j^2 (j^2 - (n-1)^2)}{n^2 (2n-1)} a_j
 \end{aligned}$$

Problema equivalente

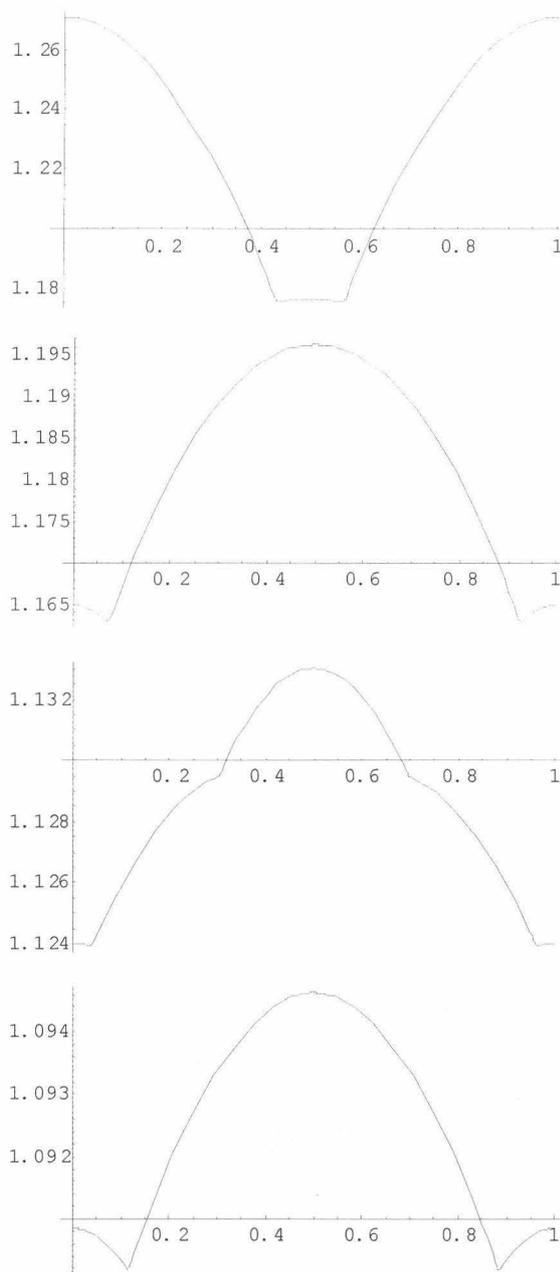
$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar } w &= \left| 1 + \frac{8 + 5(n^2 + (n-1)^2)}{10(n-1)^2 n^2} - 2 \sum_{j=1}^{n-2} \left(1 - \frac{j^2}{(n-1)^2 n^2}\right) a_j \right| + 2 \sum_{j=1}^{n-2} |a_j| \\
 &+ 2 \left| -\frac{5n^2 + 8}{20(n-1)^2 (2n-1)} + \sum_{j=1}^{n-2} \frac{j^2 (j^2 - n^2)}{(n-1)^2 (2n-1)} a_j \right| \\
 &+ 2 \left| \frac{8 + 5(n-1)^2}{20n^2 (2n-1)} - \sum_{j=1}^{n-2} \frac{j^2 (j^2 - (n-1)^2)}{n^2 (2n-1)} a_j \right|
 \end{aligned}$$

Proposición 1 $\left(1 + \frac{8+5(n^2+(n-1)^2)}{10(n-1)^2 n^2}, 0, \dots, 0, -\frac{5n^2+8}{20(n-1)^2 (2n-1)}, \frac{8+5(n-1)^2}{20n^2 (2n-1)}\right)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ resuelve el Problema 1.1.5 cuando $m = 3$. Además, es el único punto donde el mínimo absoluto se alcanza y proporciona el único qid exacto en \mathbb{P}_5 de norma infinito casi mínima.

Matriz de B-coeficientes de M_6 en $[-3, 3]$

$$\frac{1}{120} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 26 \\ 26 & 36 & 48 & 60 & 66 & 66 \\ 66 & 66 & 60 & 48 & 36 & 26 \\ 26 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gráficas de las funciones de Lebesgue de $Q_{6,3}$, $Q_{6,4}$, $Q_{6,5}$ y $Q_{6,6}$



Valores exactos de $\|Q_{6,n}\|_\infty$, $n = 3, 4, 5, 6$

$$\begin{aligned}\|Q_{6,3}\|_\infty &= \Lambda_{6,3}(0) = \frac{61}{48} \simeq 1.2708 \\ \|Q_{6,4}\|_\infty &= \Lambda_{6,4}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{23152727}{19353600} \simeq 1.1963 \\ \|Q_{6,5}\|_\infty &= \Lambda_{6,5}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{78314131}{69120000} \simeq 1.1330 \\ \|Q_{6,6}\|_\infty &= \Lambda_{6,6}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4334741}{3960000} \simeq 1.09463 \\ \|Q_{6,n}\|_\infty &= 1 + \frac{8 + 5n^2}{5(n-1)^2(2n-1)}, \quad n \geq 6\end{aligned}$$

Qid quíntico clásico

En el caso quíntico, $n \geq m = 3$. La elección $n = 2$ produce el quasi-interpolante

$$Q_{6,2}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (a_0 f(i) + a_1 (f(i-1) + f(i+1)) + a_2 (f(i-2) + f(i+2))) M_6(\cdot - i).$$

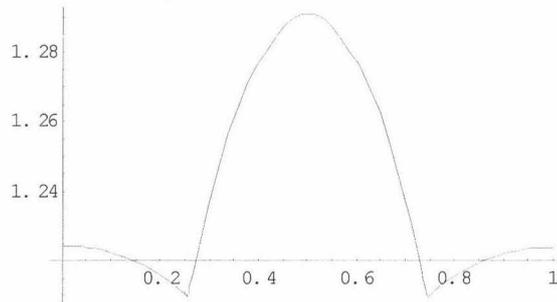
Es exacto en \mathbb{P}_5 si y sólo si

$$a_0 = \frac{73}{40}, a_1 = -\frac{7}{15}, a_2 = \frac{13}{240}.$$

Da lugar al qid clásico

$$Q_{6,2}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\frac{13}{240} f(i-2) - \frac{7}{15} f(i-1) + \frac{73}{40} f(i) - \frac{7}{15} f(i+1) + \frac{13}{240} f(i+2) \right) M_6(\cdot - i)$$

Función de Lebesgue de $Q_{6,2}$



Valor exacto de la norma infinito de $Q_{6,2}$

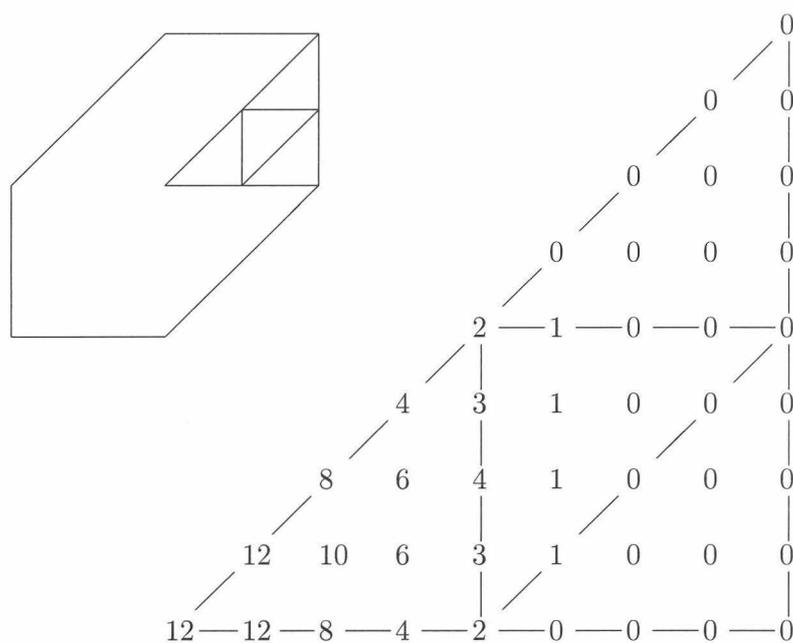
$$\|Q_{6,2}\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} \Lambda_{6,2}(x) = \Lambda_{6,2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{37183}{28800} \simeq 1.29108.$$

Anexo al capítulo 3

RED TRIDIRECCIONAL

BB-coeficientes del box-spline M_2

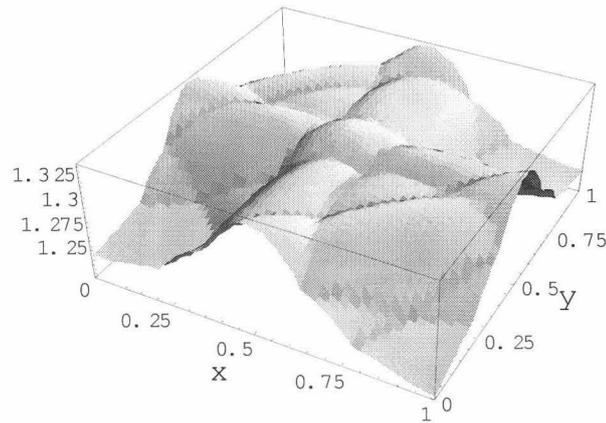
La figura muestra los BB-coeficientes de $24M_2$ en los cuatro triángulos de τ_1 que determinan el triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(2,2)$. En los restantes triángulos del soporte de M_2 se determinan por las simetrías del hexágono.



Qid box-spline cuárticos sobre la red tridireccional

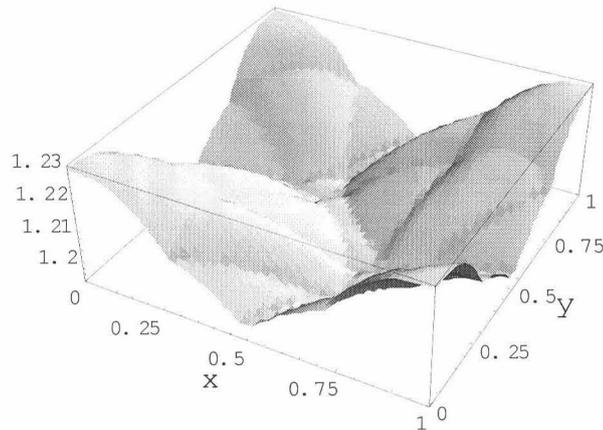
Función de Lebesgue del quasi-interpolante

$$Q_{2,1}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{3}{2}f(i) - \frac{1}{12} \sum_{l=1}^3 f(i \pm e_l) \right) M_2(\cdot - i)$$



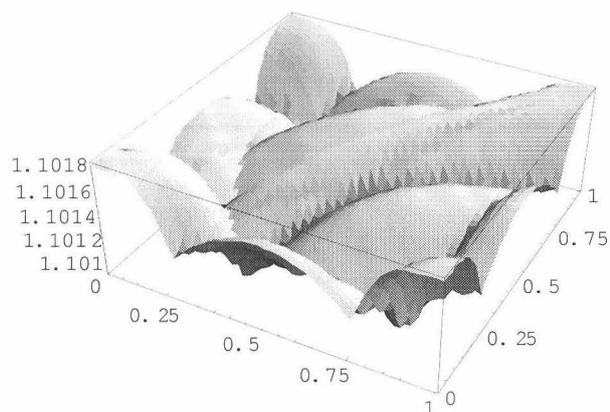
Función de Lebesgue del quasi-interpolante

$$Q_{2,2}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{9}{8}f(i) - \frac{1}{48} \sum_{l=1}^3 f(i \pm 2e_l) \right) M_2(\cdot - i)$$



Función de Lebesgue del quasi-interpolante

$$Q_{2,3}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{19}{18} f(i) - \frac{1}{108} \sum_{l=1}^3 f(i \pm 3e_l) \right) M_2(\cdot - i).$$



Monomios como combinaciones lineales de las trasladadas del box-spline M_3

El desarrollo en serie de Taylor en el origen de la recíproca de la transformada de Fourier del box-spline M_3 es

$$\widehat{M}(u)^{-1} = a_{0,0} + a_{2,0}u_1^2 + a_{1,1}u_1u_2 + a_{0,2}u_2^2 + a_{4,0}u_1^4 + a_{3,1}u_1^3u_2 + a_{2,2}u_1^2u_2^2 + a_{1,3}u_1u_2^3 + a_{0,4}u_2^4 + \dots$$

con

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= 1 \\ a_{2,0} &= a_{1,1} = a_{0,2} = \frac{1}{4} \\ a_{4,0} &= a_{0,4} = \frac{1}{30}, \quad a_{1,3} = a_{3,1} = \frac{1}{15}, \quad a_{2,2} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

El quasi-interpolante diferencial asociado es

$$\mathcal{D}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{D}f(i) M(\cdot - i),$$

con

$$\begin{aligned} \mathbb{D}f &= f - \frac{1}{4} \left(D^{(2,0)}f + D^{(1,1)}f + D^{(0,2)}f \right) \\ &\quad + \frac{1}{30} \left(D^{(4,0)}f + 2D^{(3,1)}f + 3D^{(2,2)}f + 2D^{(1,3)}f + D^{(0,4)}f \right). \end{aligned}$$

Es exacto en \mathbb{P}_5 y proporciona las igualdades

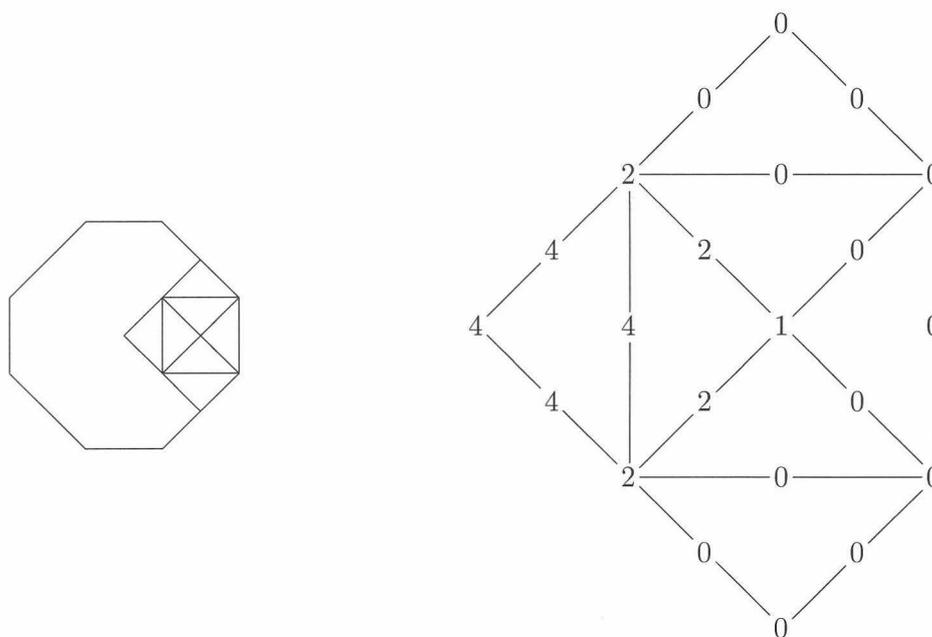
$$\begin{aligned} e_{0,0} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} M(\cdot - i) \\ e_{1,0} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_1 M(\cdot - i) \\ e_{0,1} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_2 M(\cdot - i) \\ e_{2,0} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1^2 - \frac{1}{2} \right) M(\cdot - i) \\ e_{1,1} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1 i_2 - \frac{1}{4} \right) M(\cdot - i) \\ e_{0,2} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_2^2 - \frac{1}{2} \right) M(\cdot - i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{3,0} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1^3 - \frac{3}{2} i_1 \right) M(\cdot - i) \\
e_{2,1} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1^2 i_2 - \frac{1}{2} (i_1 + i_2) \right) M(\cdot - i) \\
e_{1,2} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1 i_2^2 - \frac{1}{2} (i_1 + i_2) \right) M(\cdot - i) \\
e_{0,3} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_2^3 - \frac{3}{2} i_2 \right) M(\cdot - i) \\
e_{4,0} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1^4 - 3i_1^2 + \frac{4}{5} \right) M(\cdot - i) \\
e_{3,1} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1^3 i_2 - \frac{3}{4} i_1^2 - \frac{3}{2} i_1 i_2 + \frac{2}{5} \right) M(\cdot - i) \\
e_{2,2} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1^2 i_2^2 - \frac{1}{2} i_1^2 - i_1 i_2 - \frac{1}{2} i_2^2 + \frac{2}{5} \right) M(\cdot - i) \\
e_{1,3} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1 i_2^3 - \frac{3}{2} i_1 i_2 - \frac{3}{4} i_2^2 + \frac{2}{5} \right) M(\cdot - i) \\
e_{0,4} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_2^4 - 3i_2^2 + \frac{4}{5} \right) M(\cdot - i) \\
e_{5,0} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (i_1^5 - 5i_1^3 + 4i_1) M(\cdot - i) \\
e_{4,1} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1^4 i_2 - 3i_1^2 i_2 - i_1^3 + \frac{8}{5} i_1 + \frac{4}{5} i_2 \right) M(\cdot - i) \\
e_{3,2} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1^3 i_2^2 - \frac{3}{2} i_1^2 i_2 - \frac{3}{2} i_1 i_2^2 - \frac{1}{2} i_1^3 + \frac{6}{5} i_1 + \frac{4}{5} i_2 \right) M(\cdot - i) \\
e_{2,3} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1^2 i_2^3 - \frac{3}{2} i_1 i_2^2 - \frac{3}{2} i_1^2 i_2 - \frac{1}{2} i_2^3 + \frac{4}{5} i_1 + \frac{6}{5} i_2 \right) M(\cdot - i) \\
e_{1,4} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1 i_2^4 - 3i_1 i_2^2 - i_2^3 + \frac{4}{5} i_1 + \frac{8}{5} i_2 \right) M(\cdot - i) \\
e_{0,5} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (i_2^5 - 5i_2^3 + 4i_2) M(\cdot - i)
\end{aligned}$$

RED CUATRIDIRECCIONAL

BB-coeficientes del box-spline $M_{1,1,1,1}$

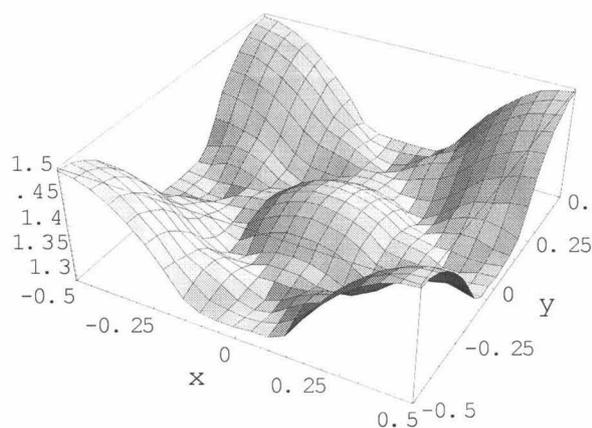
La figura muestra los BB-coeficientes de $8M_{1,1,1,1}$ en los triángulos de τ_2 que determinan la región de vértices $(0,0)$, $(1,-1)$ y $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ y $(1,1)$. En los restantes triángulos del soporte de $M_{1,1,1,1}$ se determinan por las simetrías del octógono.



Qid box-spline cuadráticos sobre la red cuatridireccional

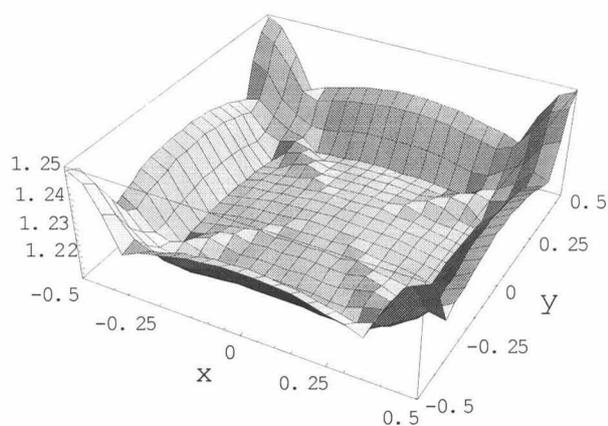
Función de Lebesgue del quasi-interpolante

$$Q_{(1,1,1,1),1}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{3}{2}f(i) - \frac{1}{8} \sum_{l=1}^2 f(i \pm e_l) \right) M_{1,1,1,1}(\cdot - i)$$



Función de Lebesgue del quasi-interpolante de norma casi mínima

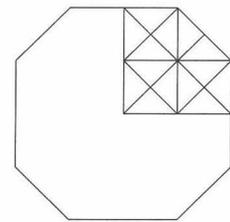
$$Q_{(1,1,1,1),2}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{9}{8}f(i) - \frac{1}{32} \sum_{l=1}^2 f(i \pm 2e_l) \right) M_{1,1,1,1}(\cdot - i)$$



BB-coeficientes del box-spline $M_{2,2,1,1}$

La figura muestra los BB-coeficientes de $192M_{2,2,1,1}$ en los 14 triángulos de τ_2 que determinan la región de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$ y $(0, 2)$. En los restantes triángulos del soporte de $M_{2,2,1,1}$ se determinan por las simetrías del octógono.

0	0	0	0	0					
	0	0	0	0	0				
0	0	0	0	0	0	0			
	0	1	0	0	0	0	0		
0	2	2	0	0	0	0	0		
	4	4	3	0	0	0	0	0	
8	8	6	4	0	0	0	0	0	
	16	12	8	4	0	0	0	0	0
24	24	16	8	4	0	0	0	0	0
	32	28	16	8	4	0	0	0	0
40	40	30	16	8	4	0	0	0	0
	52	44	30	16	8	3	0	0	0
64	58	44	30	16	6	2	0	0	0
	72	58	44	28	12	4	1	0	0
80	72	58	40	24	8	2	0	0	0
	80	72	52	32	16	4	0	0	0
80	80	64	40	24	8	0	0	0	0



Monomios como combinaciones lineales de las trasladadas del box-spline $M_{1,1,2,2}$

La transformada de Fourier del box-spline cuártico de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ sobre la red τ_2 , $M := M_{1,1,2,2}$, es

$$\widehat{M}(u) = \text{sinc } u_1 \text{ sinc } u_2 (\text{sinc}(u_1 + u_2) \text{ sinc}(u_2 - u_1))^2$$

y

$$\widehat{M}(u)^{-1} = 1 + \frac{5}{24}(u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{5760}(135u_1^4 + 298u_1^2u_2^2 + 135u_2^4) + \dots$$

El quasi-interpolante diferencial asociado es

$$\begin{aligned} \mathcal{D}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(f(i) - \frac{5}{24} \left(D^{(2,0)} f(i) + D^{(0,2)} f(i) \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{5760} \left(135D^{(4,0)} f(i) + 298D^{(2,2)} f(i) + 135D^{(0,4)} f(i) \right) \right) M(\cdot - i) \end{aligned}$$

Es exacto en \mathbb{P}_3 .

Los monomios se expresan como combinaciones lineales de trasladadas enteras de M como sigue:

$$\begin{aligned} e_{0,0} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} M(\cdot - i) & e_{3,0} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1^3 - \frac{5}{4} i_1 \right) M(\cdot - i) \\ e_{1,0} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_1 M(\cdot - i) & e_{2,1} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1^2 i_2 - \frac{5}{12} i_2 \right) M(\cdot - i) \\ e_{0,1} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_2 M(\cdot - i) & e_{1,2} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1 i_2^2 - \frac{5}{12} i_1 \right) M(\cdot - i) \\ e_{2,0} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1^2 - \frac{5}{12} \right) M(\cdot - i) & e_{0,3} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_2^3 - \frac{5}{4} i_2 \right) M(\cdot - i) \\ e_{1,1} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_1 i_2 M(\cdot - i) \\ e_{0,2} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_2^2 - \frac{5}{12} \right) M(\cdot - i) \end{aligned}$$

Monomios como combinaciones lineales de las trasladadas del box-spline $M_{2,2,1,1}$

La transformada de Fourier del box-spline cuártico de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ sobre la red τ_2 , $M := M_{2,2,1,1}$, es

$$\widehat{M}(u) = (\text{sinc } u_1 \text{ sinc } u_2)^2 \text{sinc}(u_1 + u_2) \text{sinc}(u_2 - u_1)$$

y

$$\widehat{M}(u)^{-1} = 1 + \frac{1}{6}(u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{720}(11u_1^4 + 23u_1^2u_2^2 + 11u_2^4) + \dots$$

El quasi-interpolante diferencial asociado es

$$\begin{aligned} \mathcal{D}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(f(i) - \frac{1}{6} \left(D^{(2,0)} f(i) + D^{(0,2)} f(i) \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{720} \left(11D^{(4,0)} f(i) + 23D^{(2,2)} f(i) + 11D^{(0,4)} f(i) \right) \right) M(\cdot - i) \end{aligned}$$

Es exacto en \mathbb{P}_3 .

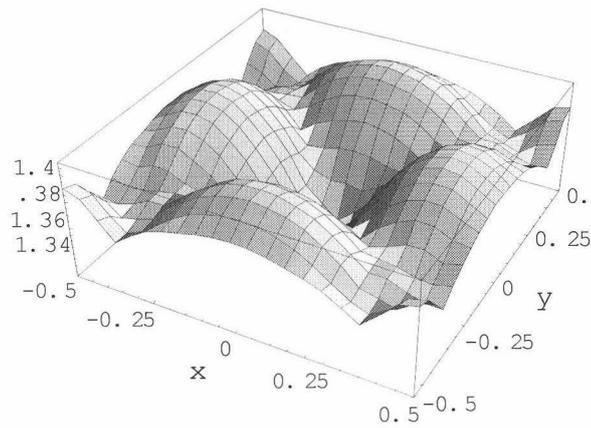
Los monomios se expresan como combinaciones lineales de trasladadas enteras de M como sigue:

$$\begin{aligned} e_{0,0} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} M(\cdot - i) & e_{3,0} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (i_1^3 - i_1) M(\cdot - i) \\ e_{1,0} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_1 M(\cdot - i) & e_{2,1} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1^2 i_2 - \frac{1}{3} i_2 \right) M(\cdot - i) \\ e_{0,1} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_2 M(\cdot - i) & e_{1,2} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1 i_2^2 - \frac{1}{3} i_1 \right) M(\cdot - i) \\ e_{2,0} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_1^2 - \frac{1}{3} \right) M(\cdot - i) & e_{0,3} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (i_2^3 - i_2) M(\cdot - i) \\ e_{1,1} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} i_1 i_2 M(\cdot - i) \\ e_{0,2} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(i_2^2 - \frac{1}{3} \right) M(\cdot - i) \end{aligned}$$

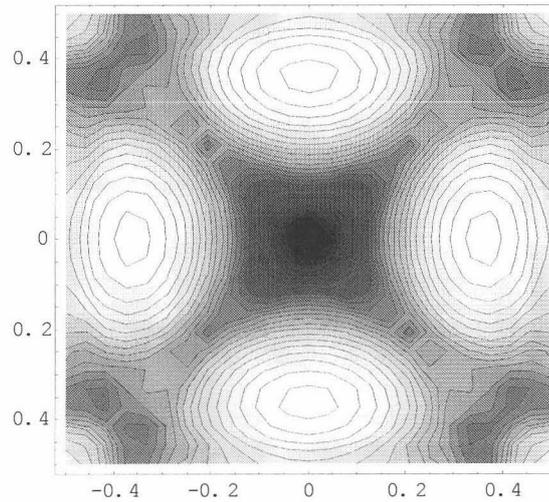
Qid box-spline cuárticos basados en $M_{1,1,2,2}$

Función de Lebesgue del quasi-interpolante

$$P_{(1,1,2,2),2,a}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{97}{48}f(i) - \frac{13}{48} \sum_{l=1}^2 f(i \pm e_l) + \frac{1}{64} \sum_{l=1}^2 f(i \pm 2e_l) \right) M_{1,1,2,2}(\cdot - i)$$

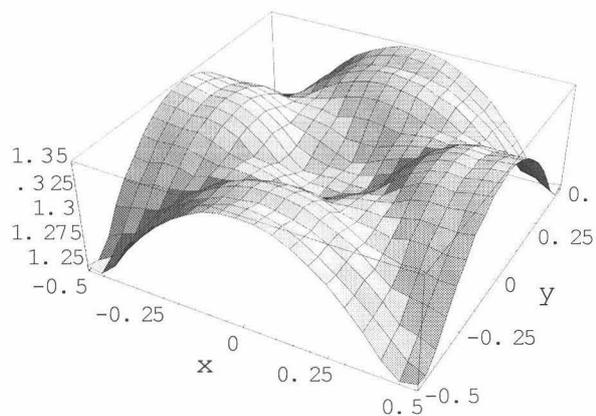


Sus curvas de nivel

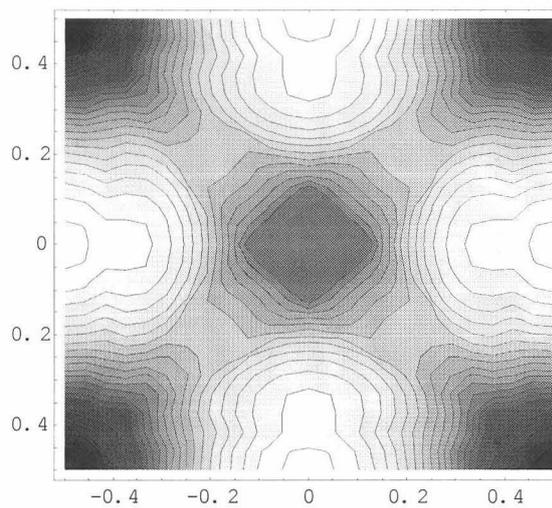


Función de Lebesgue del quasi-interpolante

$$P_{(1,1,2,2),2,b}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{41}{24} f(i) - \frac{7}{48} \sum_{l=1}^2 f(i \pm e_l) - \frac{1}{32} \sum_{l=3}^4 f(i \pm e_l) \right) M_{1,1,2,2}(\cdot - i).$$

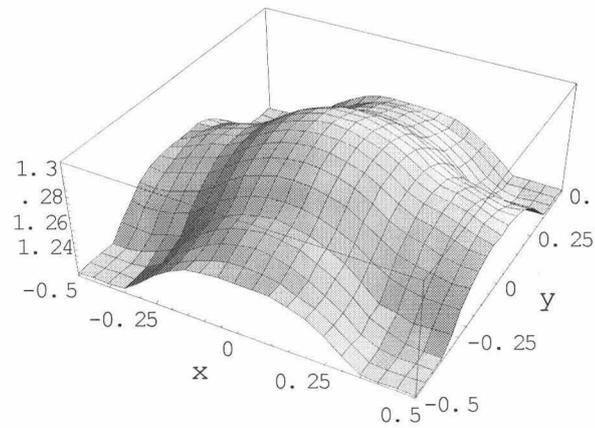


Sus curvas de nivel

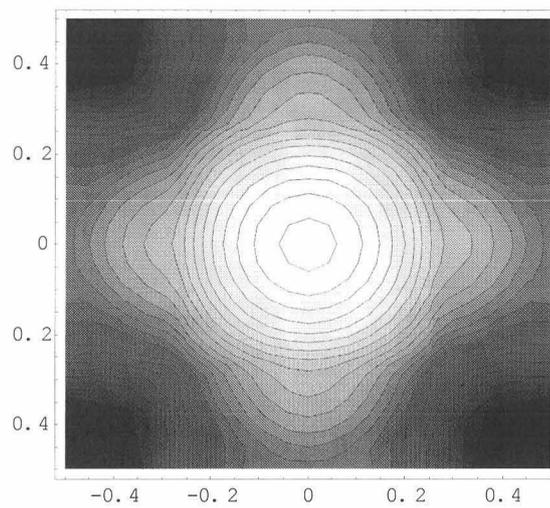


Función de Lebesgue del quasi-interpolante

$$Q_{(1,1,2,2),2,a}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{29}{24} f(i) - \frac{5}{96} \sum_{l=1}^2 f(i \pm 2e_l) \right)$$

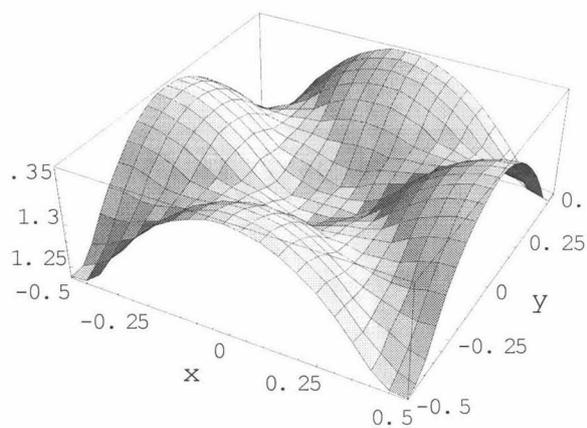


Sus curvas de nivel

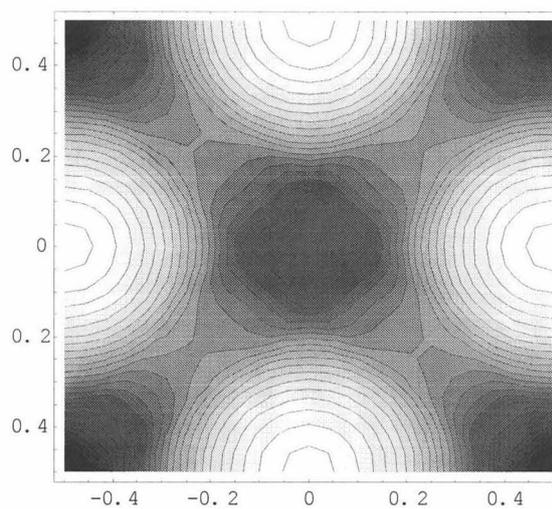


Función de Lebesgue del quasi-interpolante

$$Q_{(1,1,2,2),2,b}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{4}{3} f(i) - \frac{1}{12} \sum_{l=1}^2 f(i \pm 2e_l) \right) M(\cdot - i)$$



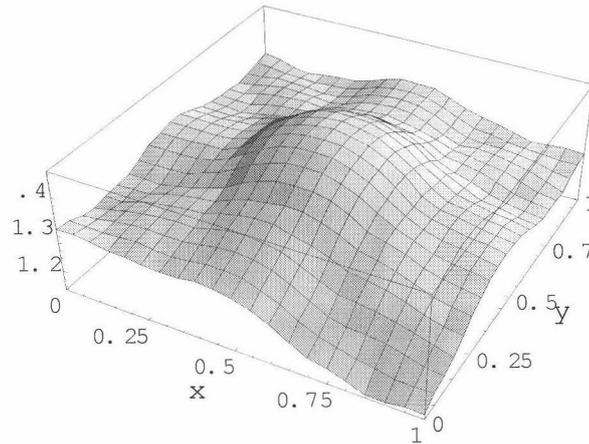
Sus curvas de nivel



Qid box-spline cuárticos basados en $M_{2,2,1,1}$

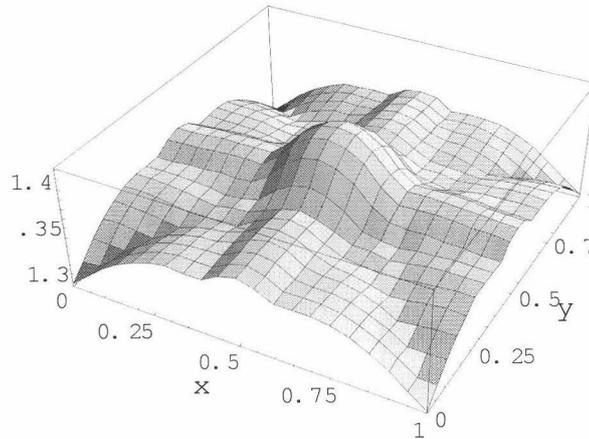
Función de Lebesgue del quasi-interpolante

$$P_{(2,2,1,1),2,a}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{43}{24} f(i) - \frac{5}{24} \sum_{l=1}^2 f(i \pm e_l) + \frac{1}{96} \sum_{l=1}^2 f(i \pm 2e_l) \right) M_{2,2,1,1}(\cdot - i)$$



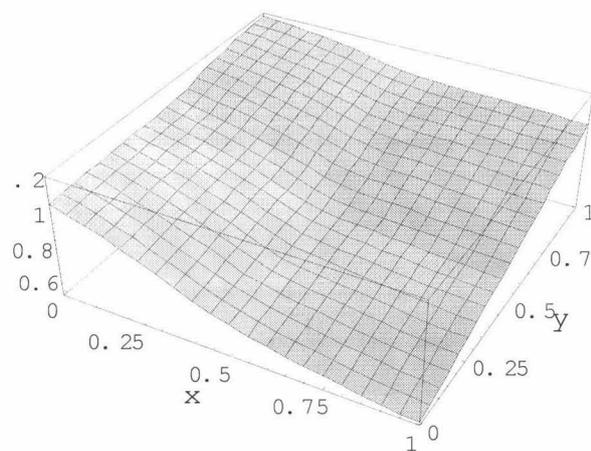
Función de Lebesgue del quasi-interpolante

$$P_{(2,2,1,1),2,b}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{19}{12} f(i) - \frac{1}{8} \sum_{l=1}^2 f(i \pm e_l) - \frac{1}{48} \sum_{l=3}^4 f(i \pm e_l) \right) M_{2,2,1,1}(\cdot - i)$$



Función de Lebesgue del quasi-interpolante

$$Q_{(2,2,1,1),2,a}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{7}{6} f(i) - \frac{1}{24} \sum_{l=1}^2 f(i \pm 2e_l) \right) M(\cdot - i)$$





Anexo al capítulo 4

Representación de Bernstein-Bézier

Las relaciones (1.1.3) permiten determinar los polinomios π_{2m-2l} , $1 \leq l \leq m$, mientras que $\pi_{2m}(x)$, $x \in [0, 1]$, puede ser hallado a partir de la matriz de BB-coeficientes de M en $[-m, m]$. Pretendemos utilizar la representación de Bernstein-Bézier para encontrar una expresión alternativa de $\varepsilon = Qe_{2m} - e_{2m}$ en $[0, 1]$ que sea fácil de utilizar para resolver el problema planteado cuando m es elevado..

Sea $b_l^{2m+1}(t) = \binom{2m}{l} t^l (1-t)^{2m-l}$ el l -ésimo polinomio de Bernstein de grado $2m$ relativo al intervalo $[0, 1]$, $0 \leq l \leq 2m$. La restricción de ε a $[0, 1]$ es un polinomio de \mathbb{P}_{2m} y puede escribirse en términos de la base de Bernstein $(b_l^{2m+1})_{0 \leq l \leq 2m}$, obteniendo la representación de Bernstein-Bézier

$$\varepsilon(x) = \sum_{l=0}^{2m} \varepsilon_{2m,l} b_l^{2m+1}(x), \quad x \in [0, 1].$$

Sea $C := C_{2m}$ la matriz de orden $2m$ de BB-coeficientes de M en $[-m, m]$. Sea $R_{2m} := R = (R_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2m}$ la matriz de permutación definida por

$$R_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j = 2m + 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Para cada $l = 0, 1, \dots, m-1$, sea $d_{2m,l} := d_l = \left((-m+1)^{2m-2l}, \dots, m^{2m-2l} \right)^T$. Por último, sea $u_{2m+1} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{2m+1}$.

Lema 1 *La matriz (fila) de BB-coeficientes en $[0, 1]$ de $Qe_{2m} - 2 \sum_{j=1}^n j^{2m} a_j \in \mathbb{P}_{2m-1}$ es*

$$\left(\sum_{l=0}^{m-1} \frac{(2m)!}{(2m-2l)!} \beta(2l, 2m) d_l \right) RC. \quad (1)$$

Este algoritmo de elevación del grado permite determinar los BB-coeficientes en $[0, 1]$ de $Qe_{2m} - 2 \sum_{j=1}^n j^{2m} a_j$.

Lema 2 La matriz de BB-coeficientes de $Qe_{2m} - 2 \sum_{j=1}^n j^{2m} a_j \in \mathbb{P}_{2m}$ es

$$\left(\sum_{l=0}^{m-1} \frac{(2m)!}{(2m-2l)!} \beta(2l, 2m) d_l^T \right) RCE^T.$$

DEMOSTRACIÓN Es consecuencia de (1) y (2). \square

La matriz de BB-coeficientes en $[0, 1]$ de la constante $2 \sum_{j=1}^n j^{2m} a_j$ como polinomio de grado menor o igual que $2m$ es, evidentemente, $\left(2 \sum_{j=1}^n j^{2m} a_j \right) u_{2m+1}^T$, y la de e_{2m} es $v_{2m+1} := (0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^{2m+1}$. Por tanto,

Proposición 3 La matriz de BB-coeficientes de ε en $[0, 1]$ es

$$\left(\sum_{l=0}^{m-1} \frac{(2m)!}{(2m-2l)!} \beta(2l, 2m) d_l^T \right) RCE^T - v_{2m+1}^T + \left(2 \sum_{j=1}^n j^{2m} a_j \right) u_{2m+1}^T. \quad (3)$$

DEMOSTRACIÓN Es inmediata. \square

El desarrollo precedente permite expresar en términos de la base de Bernstein el polinomio cuya mejor aproximación uniforme constante en $[0, 1]$ hay que determinar, y facilita su cálculo. Por otra parte, permite plantear un problema alternativo de construcción de qid que puede ser extendido al caso bivariado.

La expresión (1) proporciona el vector de BB-coeficientes de ε en $[0, 1]$: como $R^T = R$, es

$$EC^T R \left(\sum_{l=0}^{m-1} \frac{(2m)!}{(2m-2l)!} \beta(2l, 2m) d_l \right) - v_{2m+1} + \left(2 \sum_{j=1}^n j^{2m} a_j \right) u_{2m+1}.$$

Consideremos ahora el sistema que garantiza la exactitud de Q en \mathbb{P}_{2m-1} :

$$a_0 + 2 \sum_{i=1}^n a_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n i^{2l} a_i = \frac{1}{2} (2l)! \beta(2l, 2m) \quad 1 \leq l \leq m-1, \quad (4)$$

Sea $(a_{n-m+1}^*, \dots, a_n^*)^T$ la solución del sistema que resulta al hacer $a_0 = \dots = a_{n-m} = 0$. Entonces $a^* = (0, \dots, 0, a_{n-m+1}^*, \dots, a_n^*)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ es solución de (4) y cualquier elemento

a de V es de la forma $a^* + S\tilde{a}$, con $\tilde{a} = (a_0, \dots, a_{n-m})^T \in \mathbb{R}^{n-m+1}$ y

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ s_{n-m+1,0} & \cdots & s_{n-m+1,n-m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,0} & \cdots & s_{n,n-m} \end{pmatrix}.$$

Si $w_{2m,n} = (0, 1, 2^{2m}, \dots, n^{2m})^T \in \mathbb{R}^{n+1}$, entonces

$$\sum_{j=1}^n j^{2m} a_j = w_{2m,n}^T (a^* + S\tilde{a}).$$

Por (3), el vector de BB-coeficientes de ε es

$$\begin{aligned} & EC^T R \left(\sum_{l=0}^{m-1} \frac{(2m)!}{(2m-2l)!} \beta(2l, 2m) d_l \right) - v_{2m+1} + 2w_{2m,n}^T (a^* + S\tilde{a}) u_{2m+1} \\ &= \left\{ EC^T R \left(\sum_{l=0}^{m-1} \frac{(2m)!}{(2m-2l)!} \beta(2l, 2m) d_l \right) - v_{2m+1} + 2w_{2m,n}^T a^* u_{2m+1} \right\} \\ &+ 2w_{2m,n}^T (S\tilde{a}) u_{2m+1} \end{aligned}$$

y puede escribirse como $\gamma - A\tilde{a}$ con

$$\gamma = EC^T R \left(\sum_{l=0}^{m-1} \frac{(2m)!}{(2m-2l)!} \beta(2l, 2m) d_l \right) - v_{2m+1} + 2w_{2m,n}^T a^* u_{2m+1}$$

y

$$A = -2w_{2m,n}^T (S\tilde{a}) u_{2m+1} = -2u_{2m+1} (w_{2m,n}^T S) \tilde{a}.$$

Bibliografía

- [1] A. Aldroubi, K. Gröchenig, Nonuniform sampling and reconstruction in shift-invariant spaces, *SIAM Review*, vol. 43, No. 4 (2001), 585-620.
- [2] D. Barrera, M. J. Ibáñez, P. Sablonnière, Near-best quasi-interpolants on uniform and nonuniform partitions in one and two dimensions (aceptado para su publicación en *Proceedings of the International conference on Curves and Surfaces*, Saint-Malo, July 2002).
- [3] B. D. Bojanov, H. A. Sahakian, A. A. Sahakian, *Spline functions and multivariate interpolations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [4] C. de Boor, On uniform approximation by splines, *J. Approx. Theory* 1 (168), 219-235.
- [5] C. de Boor, G. F. Fix, Spline approximation by quasiinterpolants, *J. Approx. Theory* 8 (1973), 19-54.
- [6] C. de Boor, K. Höllig, Bivariate box splines and smooth pp functions on a three direction mesh, *J. Comput. Appl. Math.* 9 (1983) 13-28.
- [7] C. de Boor, The polynomials in the linear span of integer translates of a compactly supported function, *Constr. Approx.* (1987) 3: 199-208.
- [8] C. de Boor, Quasiinterpolants and approximation power of multivariate splines, In *Computation of Curves and Surfaces*, W. Dahmen, M. Gasca, C. A. Micchelli (eds), 313-345, Kluwer, Dordrecht, 1990.
- [9] C. de Boor, K. Höllig, S. Riemenschneider, *Box splines*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [10] C. de Boor, *A practical guide to splines*, Springer-Verlag, New York, 2001 (edición revisada).
- [11] H. Brézis, *Análisis funcional*, Alianza Universidad Textos, Madrid, 1984.

- [12] P. L. Butzer, M. Schmidt, E. L. Stark, L. Vogt, Central factorial numbers; their main properties and some applications, *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.* 10, 5&6 (1989), 419-488.
- [13] P. L. Butzer, M. Schmidt, Central factorial numbers and their role in finite difference calculus and approximation. En *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai* 58. Approximation Theory, Kecskémet, Hungary (1990), 127-150.
- [14] G. Chen, C. K. Chui, M. J. Lai, Construction of real-time spline quasi-interpolation schemes, *Approx. Theory Appl.* 4 (1988), 61-75.
- [15] C. K. Chui, H. Diamond, A natural formulation of quasi-interpolation by multivariate splines, *Proceedings of the Amer. Math. Soc.*, Volume 99, Number 4, 1987, 643-646.
- [16] C. K. Chui, M. J. Lai, A multivariate analog of Marsden's identity and a quasi-interpolation scheme, *Constr. Approx.* (1987) 3: 111-122.
- [17] C. K. Chui, *Multivariate Splines*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1988.
- [18] C. K. Chui, H. Diamond, A characterization of multivariate quasi-interpolation formulas and its applications, *Numer. Math.* 57 (1990), 105-121.
- [19] C. K. Chui, M.-J. Lai, Algorithms for generating B-nets and graphically displaying spline surfaces on three- and four-directional meshes, *CAGD* 8 (1991) 479-493.
- [20] C. K. Chui, *An introduction to wavelets*, Academic Press, San Diego, 1992.
- [21] M. Daehlen, On the evaluation of box splines, In *Mathematical methods in computer aided geometric design*, T. Lyche, L. L. Schumaker (eds), Academic Press, 1989, 167-179.
- [22] C. Dagnino, P. Lamberti, Numerical integration of 2-D integrals based on local bivariate C^1 quasi-interpolating splines, *Adv. Comput. Math.* 8 (1998), 19-31.
- [23] W. Dahmen, C. K. Micchelli, Translates of multivariate splines, *Linear Algebra Appl.* 52/53 (1983), 217-234.
- [24] P. J. Davis, *Interpolation and Approximation*, Dover, New York (1975).
- [25] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive approximation*, Springer-Verlag, Berlin (1993).
- [26] S. Dekel, D. Leviatan, On measuring the efficiency of kernel operators in $L_1(\mathbb{R}^d)$, *Advances in Comp. Math* (to appear).

- [27] F.-J. Deltos, W. Schempp, Boolean methods in interpolation and approximation, Pitman research notes in mathematics series, 230, Longman Scientific & Technical, Essex (1989).
- [28] G. Farin, Curves and surfaces for computer aided geometric design. A practical guide, 4th edition, Academic Press, San Diego, 1990.
- [29] T. N. E. Greville, On the normalization of the B-splines and the location of the nodes for the case of unequally spaced knots, en Inequalities, O. Shisha (ed.), Academic Press, New York, 1967.
- [30] K. Höllig, Box splines, In Approximation Theory V, C. K. Chui, L. L. Schumaker, J. D. Ward (eds), Academic Press, New York, (1986), 71-95.
- [31] J. Hoschek, D. Lasser, Fundamentals of computer aided geometric design, A. K. Peters, Wellesley, 1993.
- [32] M.-J. Lai, Fortran subroutines for B-nets of box-splines on three and four-directional meshes, Numer. Algorithms 2 (1992), 33-38.
- [33] B.-G. Lee, T. Lyche, M. Morken, Some examples of quasi-interpolants constructed from local spline projectors, en Mathematical Methods for Curves and Surfaces: Oslo 2000, T. Lyche, L. L. Schumaker (eds.), Vanderbilt University Press, Nashville, 2000, 243-252.
- [34] N. Litke, A. Levin, P. Schröder, Fitting subdivision surfaces, Visualization 2001, p. 319-324.
- [35] T. Lyche, L. L. Schumaker, Local spline approximation methods, J. Approx. Theory 15 (1975), 294-325.
- [36] J. M. Marsden, I. J. Schoenberg, On variation diminishing spline approximation methods, Mathematica Vol. 8 (31), 1, 1966, 61-82.
- [37] J. M. Marsden, An identity for spline functions with applications to variation diminishing spline approximation, J. Approx. Theory (1970), 7-49.
- [38] A. Mazroui, Construction de B-splines simples et composés sur un réseau uniforme du plan, et étude des quasi-interpolants associés, Thèse d'Etat, Université d'Oujda, Maroc (2000).
- [39] A. Mazroui, D. Sbilih, Existence and construction of Δ_1 -splines of class C^k on a three directional mesh, Numer. Algorithms 26 (2001), 21-48.

- [40] O. Nouisser, Construction des B-splines et quasi-interpolants associés sur un réseau quadridirectionnel uniforme du plan, Thèse de doctorat, Université d'Oujda, Maroc (2002).
- [41] H. N. Mhaskar, F. J. Narcowich, J. D. Ward, Quasi-interpolation in shift invariant spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 251 (2000), 356-363.
- [42] C. A. Micchelli, Mathematical aspects of geometric modeling, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 65, SIAM, Philadelphia, 1995.
- [43] M. R. Osborne, Simplicial algorithms for minimizing polyhedral functions, Cambridge University Press, Cambridge (2001).
- [44] H. Prautzsch, W. Boehm, M. Paluszny, Bézier and B-spline techniques, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [45] P. Sablonniere, Bases de Bernstein et approximants spline, Thèse de doctorat, Université de Lille, 1982.
- [46] P. Sablonniere, A catalog of B-splines of degree ≤ 10 , Raport ANO 132, Université de Lille, 1984.
- [47] P. Sablonniere, Bernstein-Bézier methods for the construction of bivariate spline approximants, *CAGD* 2 (1985) 29-36.
- [48] P. Sablonnière, D. Sbibih, B-splines à support hexagonaux sur un réseau tridirectionnel régulier du plan, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 319, Serie I, (1994), 277-282.
- [49] P. Sablonnière, D. Sbibih, Some families of B-splines with hexagonal support on a three-direction mesh of the plane, In *Mathematical methods for curves and surfaces*, M. Daehlen, T. Lyche, L. L. Schumaker (eds), Vanderbilt University Press, Nashville, 1995, 467-475.
- [50] P. Sablonnière, Quasi-interpolants associated to H-splines on a three direction mesh, *J. Comput. Appl. Math.* 66 (1996), 433-442.
- [51] P. Sablonnière, B-splines on uniform meshes of the plane, In *Advanced topics in multivariate approximation*, F. Fontanella, K. Jetter, P. J. Laurent (eds), World Scientific, 1996, 323-338.
- [52] P. Sablonnière, On some families of B-splines on the uniform four-directional mesh of the plane, *Conference on Multivariate Approximation and Interpolation with Applications in CAGD, Signal and Image Processing*, Eilat, Israel, Sept. 7-11, 1998 (unpublished).

- [53] P. Sablonnière, New families of B-splines on uniform meshes of the plane, In CRM Proceedings and Lecture Notes, Volume 18, Université de Montréal (1999), 89-100.
- [54] P. Sablonnière, Quasi-interpolantes splines sobre particiones uniformes, Meeting in Approximation Theory, Úbeda (Spain), July 2000. Prépublication IRMAR 00-38, 2000.
- [55] P. Sablonnière, On some multivariate quadratic spline quasi-interpolants on bounded domains, Prépublication IRMAR 02-55, November 2002. To appear in proceedings of the congress Multivariate Approximation, Bommerholz, September 22-27, 2002.
- [56] P. Sablonnière, H-splines and quasi-interpolants on a three directional mesh, in Advanced Problems in Constructive Approximation (Eds.) M. D. Buhmann and D. H. Mache, International Series of Numerical Mathematics Vol. 142, 187–201, 2002, Birkhäuser Verlag, Basel.
- [57] P. Sablonnière, Quadratic spline quasi-interpolants on bounded domains of \mathbb{R}^d , $d = 1, 2, 3$. Prépublication IRMAR 03-09, February 2003.
- [58] D. Sbilih, B-splines et quasi-interpolants sur un réseau tridirectionnel uniforme du plan, Thèse d'habilitation, Université d'Oujda, Maroc (1995).
- [59] I. J. Schoenberg, Cardinal Spline Interpolation, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia (1973).
- [60] L. L. Schumaker, Spline functions. Basic theory, John Wiley & Sons, New York (1981).
- [61] M. M. Stark, W. Martin, E. Cohen, T. Lyche, R. F. Riesenfeld, B-splines for physically-based rendering, University of Utah Technical Report UUCS-02-005, 2002.
- [62] R.-H. Wang, Spline functions and their applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
- [63] J. D. Ward, Polynomial reproducing formulas and the commutator of a locally supported spline, in Topics in Multivariate Approximation (Eds.) C. K. Chui, L. L. Schumaker and F. I. Utreras, Academic Press, San Diego, 1987, 255–263.
- [64] G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1958.
- [65] G. A. Watson, Approximation Theory and Numerical Methods, Wiley, Chichester (1980).

-
- [66] G. A. Watson, Approximation in Normed Linear Spaces (A Historical Survey of Numerical Methods), *Journal of Computational and Applied Mathematics* 121 (2000), 1–36.