FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANALISIS MATEMATICO

ESPACIOS DE BANACH QUE SON SUBESPACIOS ABSOLUTOS DE SU BIDUAL.

JUAN CARLOS CABELLO PIÑAR

UNIVERSIDAD DE GRANADA

1988

Tesis doctoral dirigida por los doctores Rafael Payá Albert y Angel Rodriguez Palacios, profesores del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada y defendida por D. Juan Carlos Cabello Piñar el día 13 de Mayo de 1988, ante el tribunal formado por los profesores: Presidente, Dr.D.Carlos Benitez Rodriguez; Vocales, Dr.D.Fernando Bombal Gordón,Dr.D.Antonio Ros Mulero,Dr.D.Jávier Pérez González; Secretario, Dr.D.Juan Francisco Mena Jurado. Obtuvo la calificación de Apto "cum laude".

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

DON JUAN DE DIOS PEREZ JIMENEZ, PROFESOR TITULAR Y SECRETARIO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA - UNIVERSIDAD DE GRANADA,

Núm. 1319

C E R T I F I C O: Que la presente Tesis - Doctoral corresponde a la presentada - en esta Facultad por D. Juan Carlos Cabello Piñar, que fué calificada con Apto "Cum laude" el día 13 de Mayo de - 1988 por el tribunal correspondiente - que fué aprobado en Comisión de Doctorado celebrada el día 27 de Abril de - 1988, siendo el tema "Espacios de Banach que son subespacios absolutos de su bidual".

Y para que conste y surta los efectos correspondientes se extiende la presente certificación con el visto bueno del Iltmo. Sr. Decano de esta Facultad en Granada a veintiuno de noviembre de mil novecientos ochenta y ocho.

Vº. Bº.
EL DECANO,

Caballero

J. D. Pérez

FACULTAD DE CIENCIAS - UNIVERSIDAD DE GRANADA -

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANALISIS MATEMATICO

ESPACIOS DE BANACH QUE SON SUBESPACIOS ABSOLUTOS DE SU BIDUAL.

JUAN CARLOS CABELLO PIÑAR

UNIVERSIDAD DE GRANADA

1988

A Sisa y los niños

INDICE

INTRODUCCION

INTRODUCCION

Dos importantes clases de espacios de Banach son objeto actualmente de gran atención: los espacios de Banach que son L-sumandos de sus biduales y los que son M-ideales de sus biduales. El predual de un álgebra de Von Neumann es un ejemplo de espacio que es L-sumando de su bidual, mientras que los operadores compactos en un espacio de Hilbert constituyen un espacio que es M-ideal de su bidual. Los trabajos de G. Godefroy y D. Li [21,27] por una parte, y los de P. Harmand y A. Lima [24,29] por otra, inician el estudio sistemático de estas dos clases de espacios de Banach y permiten calibrar el estado actual de la teoría.

A este respecto, procede citar un reciente resultado de G. Godefroy [20; Théorème 6] según el cual, para que un espacio de Banach sea L-sumando de su bidual es suficiente (y, obviamente, necesario) que sea "sumando" (en un sentido que se precisará enseguida) de su bidual.

Como quiera que los conceptos de L-sumando y L-ideal coinciden [13] ,los espacios de Banach de cualquiera de las dos clases arriba mencionadas son "ideales" de su bidual. Curiosamente, si un espacio de Banach es ideal de su bidual, dicho espacio ha de ser un L-sumando o un M-ideal de su bidual. Esta bonita extensión del teorema de G. Godefroy es uno de los principales resultados de la presente memoria (de hecho su consecución fue el primer objetivo del trabajo) y en torno a ella se vertebra el resto del contenido de la memoria.

Antes de pasar a resumir en forma precisa los resultados obtenidos en ésta es obligado concretar las nociones de sumando e ideal así como otras estrechamente relacionadas con ellas y, para ello, es conveniente arrancar de sus precedentes históricos.

La teoría de L-sumandos y M-ideales se inicia en la década de los 60 en artículos de F. Cunningham [11,12] y se consolida primero en 1972 con la aparición del decisivo trabajo de E. Alfsen y E. Effros [1,2] y definitivamente con la publicación de la monografía de E. Behrends [6]. Esta teoría ha tenido un espectacular desarrollo en la última década, al que no han sido ajenos la aparición y estudio de extensiones naturales de los L-sumandos y M-ideales, tales como los L^p-sumandos del propio E. Behrends [4,5,7] y los semi-L-sumandos y semi-M-ideales de A. Lima [28,29,30] (ver también los trabajos de D. Yost [48,49,50]).

Una ventaja, no despreciable por cierto, de la introducción y tratamiento del concepto general de "semisumando" y sus sucesivas predualizaciones es la de poner orden en la maraña de conceptos previamente citados, así como la de clarificar una parte notable de los correspondientes resultados. Dicho tratamiento, que se aborda tímidamente en trabajos como los de R. Evans [16] y P. Volkmann [47], se afronta sistemáticamente en la tesis de R. Payá [37] (ver también [38]) y se continúa en la tesis de J.F. Mena [34] (ver también [35]). Por último hemos de reseñar que el estudio posterior de la localización de los anteriores conceptos [36] ha dado lugar al de subespacio absoluto, que engloba a todos los conceptos anteriores y culmina la abnegada labor de ordenación y clarificación antes comentada.

A partir de este momento Y denotará un espacio normado, real o complejo. Por *semiproyección* en Y entenderemos una aplicación π de Y en Y verificando:

$$\pi[\lambda y + \pi(z)] = \lambda\pi(y) + \pi(z) \qquad (y,z\varepsilon Y,\ \lambda\varepsilon K)$$

Si π es lineal diremos que π es una *proyección*.

Una semiproyección π se llama *absoluta* si la norma de cada vector y depende únicamente de las normas de $\pi(y)$ e $y-\pi(y)$, en cuyo caso existe una norma absoluta $|.|$ en $\mathbb{R}^2$ (única si π es no trivial) verificando:

$$\|y\| = |(\|\pi(y)\|, \|y - \pi(y)\|)| \qquad (y\varepsilon Y)$$

Decimos que π es una *semi-$|.|$-proyeccion* cuando queremos enfatizar dicha norma absoluta.

La imagen de Y por una semiproyección (resp. proyección) absoluta recibe el nombre de *semisumando (resp. sumando)* de Y. Los términos *semi-$|.|$-sumando* y *$|.|$-sumando* se explican por sí solos.

Los semi-L-sumandos de A. Lima son los semi-$|.|$-sumandos con

$$|(r,s)| = L(r,s) = |r| + |s|$$

Los L^p-sumandos de E. Behrends son los $|.|$-sumandos con

$$|(r,s)| = L^p(r,s) = (|r|^p + |s|^p)^{1/p}$$

para $1 < p < \infty$.

Finalmente, los M-sumandos son los $|.|$-sumandos con

$$|(r,s)| = M(r,s) = Max\ \{|r|, |s|\}$$

Para abarcar el concepto clásico de M-ideal y su posterior generalización, el de semi-M-ideal, es necesario "predualizar" el concepto de semisumando como sigue:

Un *semiideal (resp. ideal)* de Y es por definición un subespacio cerrado X de Y cuyo anulador X^0 es un semisumando (resp. sumando) del espacio dual Y^*. Más concretamente, se dice que X es un *semi*-$|.|$-*ideal* de Y si X^0 es un semi-$|.|^*$-sumando de Y' ,donde $|.|^*$, la *norma conjugada* de $|.|$, viene dada por:

$$|(r,s)|^* = Max\ \{|rb + sa|;\ |(a,b)| \leq 1\}$$

En particular, reencontramos el concepto clásico de semi-M-ideal: subespacio cerrado cuyo anulador es un semi-L-sumando del dual.

Predualizando , análogamente , ahora el concepto de semiideal obtenemos el de *semiidealoide*. Concretamente un *semi*-$|.|$-*idealoide* de Y es un subespacio cerrado X de Y tal que X^0 es un semi-$|.|^*$-ideal de Y' .

El concepto de "idealoide" que el lector podría imaginar coincide con el de ideal [35; Corollary 4.2] y si se predualiza el concepto de semiidealoide no se obtiene otra cosa que el ya conocido concepto de semiideal [35; Theorem 4.1].

Finalmente, dada una norma absoluta $|.|$, se dice que X es un $|.|$-*subespacio* de Y si X es un semi-$|.|$-ideal de $X + \mathbb{K}y$, para cada y de Y , y X se dice ser un *subespacio absoluto* de Y si existe una norma absoluta $|.|$, tal que X es un $|.|$-subespacio de Y.

La relación entre los anteriores conceptos puede ser resumida por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\textit{sumando} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \textit{semisumando} \arrow[d, Rightarrow] \\
\textit{ideal} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \textit{semiidealoide} \arrow[d, Rightarrow] \\
\textit{semiideal} \arrow[r, Rightarrow] & \textit{subespacio absoluto}
\end{tikzcd}$$

En general ninguna de las implicaciones es reversible. De hecho para cada una de las implicaciones del diagrama se dispone de una caracterización de aquellas normas absolutas que la hacen reversible. No cansaremos al lector enunciando los correspondientes siete teoremas que pueden verse en [35,36]. No obstante, con el ánimo de que se pueda calibrar el alcance de los resultados de esta memoria, baste decir que si una norma absoluta $|.|$ es "suficientemente perversa" hay $|.|$-subespacios que no son semiidealoides ni semiideales, semi-$|.|$-idealoides que no son ni semisumandos ni ideales, semi-$|.|$-ideales que no son ideales, $|.|$-ideales que no son sumandos y semi-$|.|$-sumandos que no son sumandos; todas estas patologías pueden presentarse aunque el espacio ambiente sea completo.

Existen ciertos indicadores que hacen pensar que el hecho de que un espacio de Banach sea $|.|$-subespacio de su bidual fuerza severas restricciones sobre la norma absoluta $|.|$, así como que su naturaleza inicial de subespacio absoluto se perfeccione en algunos conceptos más fuertes que aparecen en el diagrama anterior.

Entre estos indicadores citaremos el teorema de G. Godefroy comentado al principio, su extensión a semisumandos [34,35], el hecho de que un espacio de Banach semi-M-ideal de su bidual es M-ideal de su bidual [43] y el de que si un espacio de Banach no reflexivo es semi-$|.|$-ideal o semi-$|.|$-idealoide de su bidual, entonces $|.| = |.|_\gamma$, con $0 \leq \gamma \leq 1$ y

$$|(r,s)|_\gamma = Max \{ |s|, |r| + \gamma|s| \}$$

[34;Corolario 2.20 y Corolario 3.20]. (Claramente $|.|_0 = M$, $|.|_1 = L$ pero para $0 < \gamma < 1$, $|.|_\gamma$ es "suficientemente perversa" en el sentido antes apuntado).

A la vista de los ejemplos de que disponemos hasta el momento y de los precedentes que acabamos de citar no parece descabellada la siguiente:

CONJETURA

Si un espacio de Banach X es subespacio absoluto de su bidual, entonces X es o bien L-sumando o bien M-ideal de su bidual.

Los resultados de esta memoria suponen un acercamiento sustancial hacia la eventual demostración de la certeza de la conjetura anterior. Las técnicas empleadas para conseguir este acercamiento son muy superiores en profundidad y dificultad a las que se han utilizado hasta ahora para abordar este tipo de problemas. Consecuentemente, cuando hemos considerado que tales técnicas tenían interés por sí mismas, las hemos aislado y estudiado sistemáticamente.

Es ya el momento de enunciar nuestro

TEOREMA PRINCIPAL

Supongamos que un espacio de Banach X es subespacio absoluto de su bidual. Entonces se verifica una de las afirmaciones siguientes:

i) X es un semi-L-sumando de su bidual

ii) X es un $|\cdot|_{\frac{1}{2}}$-subespacio de su bidual

iii) X es un M-ideal de su bidual.

Se obtienen, no obstante, con hipótesis adicionales, resultados más precisos no recogidos en dicho teorema. Para la exposición de éstos hacemos un breve recorrido por los distintos capítulos.

En el primer capítulo, concebido a modo de prólogo, se establece una pequeña perfección de un resultado ya citado de J.F. Mena [34,35].

TEOREMA 1.7

Sea X *un espacio normado y* $|.|$ *una norma absoluta. Si* X *es semi-*$|.|$*-sumando de* Y *, con* $Y \subset X''$*, entonces* X *es de hecho, un semi-L-sumando de* Y*.*

Así mismo se obtiene una respuesta parcial al difícil problema de si existen o no espacios de Banach que son semi-L-sumandos, no L-sumandos, de su bidual.

TEOREMA 1.10

Si un retículo de Banach X *es semi-L-sumando de su bidual, entonces* X *es, de hecho, un L-sumando de* X'' *.*

En la línea de nuestra conjetura, el principal resultado del segundo capítulo reza como sigue:

TEOREMA 2.17

Sea X *un espacio de Banach. Si* X *es semiidealoide de su bidual, entonces* X *es, o bien un semi-L-sumando, o bien un M-ideal de su bidual.*

Como consecuencia destacable tenemos

COROLARIO 2.17

Sea X *un espacio de Banach. Si* X *es ideal de su bidual, entonces* X *es L-sumando o M-ideal de su bidual.*

Se dan dos demostraciones del Teorema 2.16 . Una de ellas aprovecha ideas de un trabajo reciente de E. Behrends y P. Harmand [8] en que se caracterizan de forma intrínseca los espacios de Banach que son M-ideales propios de algún espacio de Banach, caracterización que nosotros extendemos a ideales propios para normas absolutas arbitra--rias (X es ideal propio de un espacio de Banach Y , si es ideal de Y , pero no sumando de Y).

La otra demostración está preparada en una primera sección del capítulo (cuyo contenido posiblemente sea lo más interesante del mismo), cuyo resultado principal proporciona un procedimiento constructivo mediante el cual aparecen todos los ideales y da de paso una condición necesaria intrínseca que todo espacio de Banach debe cumplir si aspira a ser ideal propio de algún otro.

TEOREMA 2.8

Sea $|.|$ *una norma absoluta y notemos* $n^* = Max\{\alpha \geq 0;\ |(1,\alpha)| = 1\}$. *Sean* Z, U *espacios de Banach y* S *un operador lineal continuo de* U *en* Z'''/Z *verificando:*

$$\| S^t(w) \| + n^* \| f \| \leq n^* \| w + J_{Z'}(f) \|$$

para cualesquiera f *en* Z' *y* w *en* $Z^{\perp}$.

Se considera el espacio $Z'' \times U$ *con la norma*

$$\| (z'',u) \| = |(\| z'' \|, \| u \|)|$$

se consideran así mismo los subespacios

$$\hat{Y} = \{(z'',u) \in Z'' \times U;\ S(u) = z'' + J_Z(Z)\}$$

$$\hat{X} = \{(J_Z(z),0);\ z \in Z\} \qquad (\subset \hat{Y})$$

Pues bien, $\hat{X}$ *es* $|.|$*-ideal de* $\hat{Y}$. *Además* $\hat{X}$ *es* $|.|$*-sumando si, y sólo si,* S *es cero.*

Recíprocamente, todo ideal aparece por este procedimiento. En concreto, dado Y un espacio de Banach y X un ideal suyo, existen Z,U,S como arriba y una biyeccion lineal isométrica del correspondiente $\hat{Y}$ sobre Y, que aplica $\hat{X}$ sobre X.

La condición necesaria intrínseca anteriormente anunciada para los ideales propios se recoge en el siguiente

TEOREMA 2.10

Sea X un espacio de Banach. Supongamos que el subespacio de $X^{\perp}$ engendrado por los elementos que son de mejor aproximación en $X^{\perp}$ para algún elemento de X' es débil--denso en $X^{\perp}$. Entonces X no puede ser ideal propio de ningún espacio de Banach.*

El tercer capítulo se dedica fundamentalmente a la demostración del teorema principal ya enunciado. Puestos ya en la situación general de un espacio de Banach que es subespacio absoluto de su bidual, las técnicas utilizadas hasta el momento fracasan, incluso bajo la hipótesis más fuerte de que el espacio fuese semiideal de su bidual.

El hecho ya comentado de que si un espacio de Banach es semi-$|\cdot|$- ideal de su bidual, obligadamente la norma $|\cdot|$ ha de ser hexagonal, se extiende sin dificultad al caso general de un espacio de Banach que es subespacio absoluto de su bidual. Este hecho, junto con una bonita caracterización de los subespacios absolutos de espacios de Banach reales arbitrarios, obtenida en [36] permite reformular nuestra hipótesis de trabajo en los siguientes términos, que involucran la conocida propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola introducida por D. Yost [48]

TEOREMA 3.5

Un espacio de Banach real X *es subespacio absoluto de su bidual si, y solamente si, verifica las dos condiciones siguientes:*

(a) X *tiene la propiedad de la* $1\frac{1}{2}$ *bola en* X''.

(b) Existe r, *con* $0 \leq r \leq 1$, *tal que :*

$$\{x\epsilon X: \|x\| < 2r\|F+X\|\} \subset P_X(F) - P_X(F) \subset \{x\epsilon X: \|x\| \leq 2r\|F+X\|\}$$

para todo F *en* X'', *donde* $P_X(F)$ *es el conjunto de mejores aproximaciones para* F *en* X.

De hecho si X *verifica (a) y (b), entonces* X *es* $|.|_\gamma$*-subespacio de* X'' *para* $\gamma = 1-r$.

Nótese que las condiciones (a) y (b) del teorema anterior no involucran explícitamente la norma absoluta $|.|$ para la que X es subespacio absoluto de X''. Ello nos permite "olvidar", al menos formalmente, la noción de subespacio absoluto y trabajar simplemente con aquellos espacios de Banach que verifican (a) y (b) del teorema anterior. En particular la condición (b) puede, por analogía con situaciones familiares en dimensión finita, leerse en la siguiente forma: $P_X(F)$ es un subconjunto de X (convexo, cerrado y acotado) "de anchura constante", anchura que es proporcional a $\|F+X\|$. Es por esto que dedicamos una sección del capítulo al estudio de las propiedades de los convexos de anchura constante. El "cincuenta por ciento" de la demostración del Teorema Principal se obtendrá utilizando estas propiedades, por cierto elementales.

Hacemos a continuación un estudio autónomo de cada una de las propiedades que aparecen en el Teorema 3.5. Como resultados más destacables de este estudio enunciamos los dos siguientes:

COROLARIO 3.20

Sea X un espacio de Banach que verifica la propiedad de la $1\frac{1}{2}$ bola en su bidual. Supongamos que existe $r<1$ tal que:

$$P_X(F)-P_X(F) \subset \{x\in X: \|x\| \leq 2r\|F+X\|\}$$

para todo F en X''. Entonces X no puede ser ideal propio de ningún espacio de Banach.

LEMA 3.23

Sea X un espacio de Banach real. Supongamos que existe $r>\frac{1}{2}$ tal que:

$$\{x\in X: \|x\| < 2r\|F+X\|\} \subset P_X(F)-P_X(F)$$

para todo F en X''. Entonces X' tiene la propiedad de Radon Nikodym.

El primero de estos resultados, que da una nueva condición necesaria que deben verificar los ideales propios, utiliza también la ya obtenida en el capítulo II y comentada más arriba (Teorema 2.10). Como consecuencia de él se mejora sustancialmente el Teorema 2.17, llegándose al siguiente enuciado:

COROLARIO 3.21

Sea X un espacio de Banach que es subespacio absoluto de su bidual. Supongamos que existe F en X'', y no en X, tal que X es ideal de $X+\mathbb{K}F$. Entonces X es semi-L-sumando o M-ideal de X''.

El Lema 3.23, para r=1, fue demostrado por A. Lima [29] y nuestra demostración del caso general es una afortunada adaptación de la suya. El encadenamiento de este lema con la famosa caracterización de C. Stegall de los espacios de Asplund conduce al "cincuenta por ciento" que faltaba de la demostración del Teorema Principal.

Este tercer capítulo se concluye con dos nuevas respuestas parciales a nuestra Conjetura que se deducen ambas del Teorema Principal, la primera usando una carateterización de B. Maurey de los espacios de Banach separables que contienen a ℓ_1 [33] (ver también [42]) y la segunda mediante la caracterización de los retículos de Banach débilmente secuencialmente completos [32; Theorem 1.c.4] (ya usada en el Teorema 1.10):

<u>TEOREMA 3.30</u>

Si un espacio de Banach separable X es subespacio absoluto de su bidual, entonces X es semi-L-sumando o M-ideal de su bidual.

<u>TEOREMA 3.31</u>

Si un retículo de Banach X es subespacio absoluto de su bidual, entonces X es L-sumando o M-ideal de su bidual.

Con el capítulo tercero de la memoria acaba el trabajo que hemos realizado en torno a la Conjetura que preside toda la exposición. No obstante, hemos creído oportuno concluir la memoria dedicando un cuarto y último capítulo al estudio sistemático de una propiedad, perfectamente aislable, que ha jugado un papel fundamental en la demostración de nuestro Teorema Principal. Este estudio, aparte de su interés intrínseco, supone abrir en cierto modo un nuevo camino, escapando del ambiente claramente obstructivo que respiran los resultados anteriormente expuestos.

Dado un número real r entre cero y uno, diremos que un subespacio X *tiene la propiedad I(r) en* Y, si

$$\{x \varepsilon X;\ \|x\| < 2r\|y+X\|\} \subset P_X(y)-P_X(y)$$

para todo y en Y.

Es bien conocido que X tiene la propiedad $I(1)$ en Y si, y sólo si, X es semi-M-ideal de Y (de hecho M-ideal si $Y = X''$).

Nuestro crucial Lema 3.23, ya comentado, afirma ahora que si un espacio de Banach X tiene la propiedad $I(r)$ en X'' para $r > \frac{1}{2}$ entonces X' tiene la propiedad de Radon-Nikodym. Así dicho lema puede considerarse como punto de partida de nuestro trabajo en este último capítulo.

Un primer resultado (Teorema 4.1) nos garantiza la existencia para cada r, con $0 < r < 1$, de espacios que tienen la propiedad $I(r)$ en sus biduales y no son M-ideales de sus biduales (de hecho, ni tan siquiera tienen la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola en sus biduales).

El siguiente resultado resume la mayor parte de lo que por el momento conocemos sobre los espacios de Banach con la propiedad $I(r)$ en sus biduales:

TEOREMA 4.7

Sea Z *un subespacio cerrado de un espacio de Banach con la propiedad* $I(r)$, *con* $r > \frac{1}{2}$, *en su bidual. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

i) Z' *tiene la propiedad de Radon-Nikodym*

ii) $P_{Z'}(\theta) = J_{Z'} J_Z^t(\theta)$, *para todo* $\theta \in Z'''$. *En particular* Z' *es un subespacio de Chebyshev de* Z'''.

iii) Si Y es un subespacio cerrado de un espacio de Banach con la propiedad $I(s)$, con $s > \frac{1}{2}$, en su bidual, entonces toda biyección lineal isométrica de Y'' en Z'' es la segunda traspuesta de una biyección lineal isométrica de Y en Z.

iv) Z no tiene la propiedad de intersección finito-infinita (ver [19]), esto es, existe una familia de bolas cerradas en Z, $\{B_\alpha;\ \alpha \in I\}$ tal que $\bigcap_\alpha B_\alpha = \Phi$, y sin embargo, toda intersección finita de dichas bolas es no vacía.

v) Si Y es un subespacio cerrado de Z'' conteniendo estrictamente a Z, entonces no existen proyecciones de norma uno de Y en Z. En particular si Z es un espacio de Banach dual, Z es reflexivo.

Cabe destacar que la afirmación *iii)* del teorema anterior extiende el hecho de que toda biyección lineal isométrica del bidual de un espacio de Banach, que es M-ideal de su bidual, en sí mismo es la doble traspuesta de una biyección lineal isométrica del propio espacio en sí mismo [24; Proposition 4.2].

La misma afirmación *iii)* del teorema anterior junto con un resultado de Cho-Ho Chu [14] permite obtener el siguiente

<u>COROLARIO 4.9</u>

Sea X una C^*-álgebra. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) Existe $r > \frac{1}{2}$, tal que X tiene la propiedad $I(r)$ en X''.

ii) $X = (\bigoplus_{\alpha\in A} K(H_\alpha))_{C_0}$, donde $K(H_\alpha)$ es el espacio de los operadores compactos sobre un cierto espacio de Hilbert H_α.

iii) X es M-ideal de X''.

Llegado este momento sólo me queda expresar mi agradecimiento:

Al profesor Angel Rodriguez Palacios por sus importantes aportaciones y su labor crítica.

Al profesor Rafael Payá Albert por sus brillantes aportaciones y certeras orientaciones, así como por su encomiable labor de clarificación y ordenación de la práctica totalidad de las demostraciones de los resultados obtenidos.

Al profesor Gilles Godefroy, de L'Equipe d'Analyse de l'Université de Paris (VI), que me ha prestado su valiosa colaboración durante mi estancia en París, de tan grato recuerdo y de cuyos frutos abunda esta memoria.

Al profesor J.F. Mena por su desinteresada participación que ha servido para completar nuestro trabajo, así como al resto de compañe-ros por su estímulo y ayuda de todo tipo.

CAPITULO I

CAPITULO I

ESPACIOS DE BANACH QUE SON SEMISUMANDOS DE SU BIDUAL

En toda la presente memoria Y denotará un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, el cuerpo de los números reales o complejos indistintamente, salvo especificación en caso contrario. Y' denotará el espacio dual y como quiera que no habrá confusión, $\|\cdot\|$, representará indistintamente las normas de Y y de sus sucesivos duales.

1.1 DEFINICION:

Se llamará *semiproyección en* Y a una aplicación π de Y en Y que verifica:

$$\pi[\lambda y + \pi(z)] = \lambda\pi(y) + \pi(z) \qquad (y,z\in Y, \lambda\in \mathbb{K})$$

Haciendo $\lambda=0$ obtenemos que π es idempotente. Una semiproyección lineal se llamará simplemente *proyección*.

Se comprueba fácilmente que la imagen de Y por una semiproyección π es un subespacio vectorial de Y, y que el conjunto

$$Ker\ \pi = \{ y\in Y;\ \pi(y)=0 \}$$

es un cono simétrico en Y.

La fórmula $y=\pi(y)+y-\pi(y)$ da la única descomposición, de un vector arbitrario y, como suma de un vector en $\pi(Y)$ y en otro de $Ker\ \pi$.

En [37] se estudian por primera vez aquellas semiproyecciones π con la propiedad de que la norma de cada vector, y, es función de las normas de los vectores $\pi(y)$, $y-\pi(y)$, en los que π descompone a y. Tal dependencia ha de venir dada por una norma absoluta en $\mathbb{R}^2$:

1.2 DEFINICION:

Una norma $|\circ|$ en $\mathbb{R}^2$, se llamará *absoluta*, si verifica:

$$i) \quad |(a,b)| = |(|a|,|b|)| \qquad (a,b \in \mathbb{R})$$

$$ii) \quad |(1,0)| = |(0,1)| = 1$$

Ejemplos típicos de normas absolutas son las normas clásicas L, L^p $(1 < p < \infty)$ y M dadas, para cualesquiera a, b en $\mathbb{R}$, por:

$$L(a,b) = |a| + |b|$$

$$L^p(a,b) = (|a|^p + |b|^p)^{1/p}$$

$$M(a,b) = Max\{|a|,|b|\}$$

1.3 DEFINICION

Se dice que una semiproyección π en Y es una *semiproyección absoluta* si existe una norma absoluta $|.|$, tal que

$$\|y\| = |(\|\pi(y)\|, \|y-\pi(y)\|)| \qquad (y \in Y)$$

Descartados los casos triviales $\pi(Y)=0$, $\pi(Y)=Y$, dicha norma absoluta es única, y se suele decir que π es una *semi-$|.|$-proyección* para enfatizar la norma absoluta asociada a π. La imagen de Y por una semiproyección absoluta (respec. semi-$|\circ|$-proyección) es, por definición, un *semisumando* (respec. *semi-$|.|$-sumando*).

En el caso en que la semiproyección bajo consideración sea lineal usaremos los términos: *proyección absoluta*, *$|\cdot|$-proyección*, *sumando* y *$|.|$-sumando*, cuyo significado es claro.

Evidentemente para cada norma absoluta, $|.|$, pueden construirse ejemplos de $|.|$-sumandos. Los primeros ejemplos de semisumandos que no son sumandos fueron dados por A. Lima en [28], para el caso $|\circ|=L$. La existencia de semi-$|\circ|$-sumandos que no son $|\circ|$-sumandos depende de la siguiente propiedad de la norma absoluta $|\circ|$:

1.4 DEFINICION:

El *índice* de una norma absoluta $|.|$, $n(|.|)$ (o símplemente n si no hay lugar a confusión), se define por:

$$n(|.|) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{|(1,\alpha)| - 1}{\alpha}$$

Es claro que $0 \leq n(|.|) \leq 1$. Así por ejemplo $n(L)=1$, y para $1 < p < \infty$, $n(L^p)=0=n(M)$.

La relación entre los conceptos de sumando y semisumando quedó clarificada en [34; Teorema 1.23] (ver también [35]) probándose que todo semi-$|.|$-sumando es de hecho $|.|$-sumando si, y sólo si, $n(|.|)=0$. Consideremos ahora la posibilidad de que un espacio de Banach X sea semisumando de su bidual (notamos J_X a la inyección canónica, y siempre que no haya lugar a confusión identificaremos X con $J_X(X)$). Dicha situación es bastante restrictiva como muestra el siguiente resultado:

1.5 TEOREMA [35; Theorem 1.7]

Sea X un espacio de Banach. Si X es un semisumando de X'', entonces X es, de hecho, un semi-L-sumando de X''.

La demostración dada en [35] del teorema anterior utiliza el Teorema de Bishop-Phelps junto con técnicas de rango numérico. Optamos por incluir aquí una demostración mucho más elemental, inspirada en la técnica usada por G. Godefroy para resolver el caso particular en que X se supone de hecho sumando de X'' [20; Théorème 6]. Precisamos el siguiente lema inocente, cuyo contenido parece deberse a Dixmier, quien utilizó este tipo de argumentos para dar una demostración elemental del hecho de que el cuarto dual de un espacio de Banach , no reflexivo, no puede ser estrictamente convexo. En el enunciado del lema y en todo lo que sigue notaremos por T^t al traspuesto de un operador lineal continuo T entre espacios normados.

1.6 LEMA:

Sea X *un espacio normado; para cada* F *en* X'' *y* $a,b \geqq 0$*, se tiene:*

$$\| aJ_X^{tt}(F) + bJ_{X''}(F) \| = (a+b)\|F\|$$

Demostración.

Considerando a X' como subespacio de X''', $aJ_X^{tt}(F) + bJ_{X''}(F)$ es una extensión a X''' de $(a+b)F$, luego:

$$\| aJ_X^{tt}(F) + bJ_{X''}(F) \| \geq (a+b)\|F\|$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que J_X^{tt} y $J_{X''}$ son isometrías, se tiene la desigualdad contraria.

Dado X un subespacio del espacio normado Y, notaremos por X^0 al anulador de X en Y', esto es

$$X^0 = \{f \varepsilon Y';\ f(x)=0,\ \forall x \varepsilon X\}$$

y cuando en particular se considera X como subespacio de su bidual notaremos simplemente por $X^\perp$ al subespacio $J_X(X)^0$.

Teniendo en cuenta que si X es semi-$|.|$-sumando de Y entonces X es $|.|$-sumando de $X+\mathbb{K}y$, para cada $y \varepsilon Y$, el Teorema 1.5 es consecuencia inmediata del siguiente:

1.7 TEOREMA

Sea X *un espacio normado,* Y *un subespacio de* X'' *y* $|.|$ *una norma absoluta. Si* X *es un semi-*$|.|$*-sumando de* Y*, entonces* X *es, de hecho, un semi-L-sumando de* Y.

Demostración

Sea π la semi-$|.|$-proyección que existe por hipótesis en Y. Previa identificación standard, el bidual de Y puede considerarse como subespacio de $X^{iv)}$, en cuyo caso J_Y es la restricción a Y de $J_{X''}$. En virtud de [34; Teorema 3.4] existe una semiproyección π^0 en Y'', verificando:

$$\pi^0 J_Y = J_Y \pi \quad \text{y} \quad \pi^0(Y'') = X^{\perp\perp}$$

Dado F en $Ker\pi$, es evidente que $J_{X''}(F)=J_Y(F) \in Ker\pi^0$, mientras que $J_X^{tt}(F) \in X = \pi^0(Y'')$. Si además suponemos que $\|F\| = 1$, se tiene que:

$$\| J_X^{tt}(F) \| = \| J_{X''}(F) \| = 1$$

y entonces para $a,b \in \mathbb{R}$, por definición de $|.|$-proyección obtenemos:

$$|(a,b)| = |(|a|,|b|)| = \| \, |a| J_X^{tt}(F) + |b| J_{X''}(F) \|$$

bastando entonces aplicar el Lema 1.6 para concluir que:

$$|(a,b)| = |a| + |b| = L(a,b).$$

1.8 COROLARIO

Sea X *un espacio normado y* $|.|$ *una norma absoluta. Si* X *es un* $|.|$*-sumando de* Y*, con* Y *subespacio de* X''*, entonces* X *es L-sumando de* Y.

1.9 NOTA

Obsérvese que en el Teorema 1.7 el espacio X no se supone completo. Dado que los semisumandos son siempre subespacios cerrados [37; Proposición 7.8 i)], la hipótesis de que un espacio normado X sea semisumando de su bidual exige la complitud de X , sin embargo, un espacio normado no completo puede ser sumando de un subespacio (no cerrado) propio de su bidual.

Abundan los espacios de Banach que son L-sumandos de sus biduales. Tal es el caso por ejemplo de los espacios $L^1(\mu)$ o, de forma más general de los preduales de las W*-álgebras. En [21,27] puede encontrarse un extenso estudio de estos espacios, incluyendo una abundante gama de ejemplos. Sin embargo, no se conoce ningún ejemplo de espacios de Banach que sean semi-L-sumandos pero no L-sumandos de su bidual. La situación podría ser por tanto aún más restrictiva que la que muestra el teorema anterior. En esa dirección apunta la siguiente respuesta parcial al problema recién planteado; nótese que el problema se concentra principalmente en el caso real, pues si un espacio de Banach complejo X es semi-L-sumando de su bidual, igual le ocurre al espacio real subyacente, $X_{\mathbb{R}}$.

Entenderemos por *retículo de Banach* (ver [32; Definition 1.a.1]) un espacio de Banach real X dotado de una relación de orden parcial $\leq$ que verifica los siguientes axiomas:

i) $x,y \in X$, $x \leq y \implies x+z \leq y+z \qquad \forall z \in X$

ii) $x \in X$, $x \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0 \implies ax \geq 0$

iii) Para $x,y \in X$, *el conjunto* $\{x,y\}$ *tiene supremo* $x \vee y$ *e ínfimo* $x \wedge y$.

iv) $x,y \in X$, $|x| \leq |y| \implies \|x\| \leq \|y\|$, *donde el valor absoluto* $|x|$ *de* $x \in X$ *viene definido por* $|x| = x \vee (-x)$

1.10 TEOREMA

Sea X un retículo de Banach. Si X es un semi-L-sumando de X'', entonces X es, de hecho, un L-sumando de X''.

La demostración requiere dos lemas previos, cada uno de los cuales tiene interés en sí mismo.

1.11 LEMA

Sean q , p dos semiproyecciones sobre un mismo espacio normado X verificando:

i) $\|2q(x)-x\| = \|x\| = \|2p(x)-x\| \qquad (x\in X)$

ii) $q(X)=p(X)$.

Entonces $q=p$.

Demostración

Sea $x \in Ker q$, y pongamos $x=y+z$, con $y \in p(X)=q(X)$, $z \in Ker p$. Notemos $T=2q-I$ y $S=2p-I$. *(I es la identidad)*, se tiene claramente:

$$q(-z) = q(y-x) = y$$

con lo cual para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos:

$$TS(z+\lambda y)= T(2p-I)(z+\lambda y)= T(-z+\lambda y)=(2q-I)(-z+\lambda y)=2q(-z+\lambda y)+z-\lambda y=$$
$$=2q(-z)+2\lambda y+z-\lambda y=z+(\lambda+2)y.$$

A partir de esta igualdad se deduce evidentemente por inducción que para cada número natural n

$$(TS)^n(z)=z+2ny$$

y puesto que $\|(TS)^n(z)\|=\|z\|$, para cada $z \in Ker p$ y para cada n tenemos:

$$\|z\| = \|z+2ny\|$$

lo cual sólo es posible si $y=0$. Hemos probado así que $Ker\, q \subset Ker\, p$.

Finalmente dado $u \in X$, se tiene

$$p(u)= pq(u) + p(u-q(u))= pq(u)= q(u) .$$

1.12 NOTA

Es claro que si π es una semiproyección absoluta en el espacio normado X, entonces $\| 2\pi(x)-x\| = \| x\|$ para cada x en X; pero se pueden construir fácilmente ejemplos que muestran que el recíproco no es cierto. Por tanto, el lema anterior generaliza sustancialmente el resultado conocido que afirma la igualdad de dos semiproyecciones absolutas con la misma imagen [35; Corollary 1.3].

1.13 LEMA

Si un espacio de Banach X es semi-L-sumando de X'', entonces X es débilmente secuencialmente completo.

Demostración

Este resultado ha sido probado por G. Godefroy bajo la hipótesis, posiblemente más restrictiva, de que X sea un L-sumando de X'' [18; Théorème 1.4], pero la hipótesis de linealidad no se precisa en la demostración.

Fin de la demostración del Teorema 1.10

Según el lema anterior X es débilmente secuencialmente completo, lo que, para retículos de Banach, equivale a la existencia de una simetría isométrica S en X'', cuyo conjunto de puntos fijos es X [18; Proposition 1.11]. Poniendo $p=\frac{S+I}{2}$, resulta que p es una proyección de X'' sobre X tal que $2p-I=S$ es isométrica. Aplicando el Lema 1.11 obtenemos que p coincide con la semi-L-proyección de X'' sobre X , pero p es lineal.

Mediante sucesivas predualizaciones, la noción de semisumando ha dado lugar a importantes clases de subespacios de espacios normados, los semiideales y los semiidealoides [34] (ver también [35]). Finalmente se ha encontrado una clase de subespacios "los subespacios absolutos" que engloba de manera natural a las tres citadas y proporciona una visión unificada de las mismas [36]. Han quedado ya sobradamente de manifiesto las especiales características de la situación en que un espacio de Banach X , como subespacio de su bidual, pertenece a una de dichas clases, concretamente la de los semisumandos. El objetivo central de la presente memoria consiste precisamente en analizar dichas características especiales para las restantes clases de subespacios. Nos preguntaremos por tanto por la posibilidad de que un espacio de Banach sea semiideal, semiidealoide, o más en general, subespacio absoluto, de su bidual, tratando de decidir para qué normas es ello posible y de estudiar las propiedades relevantes de los espacios que responden a dicha posibilidad.

CAPITULO II

CAPITULO II

ESPACIOS DE BANACH QUE SON SEMIIDEALOIDES DE SU BIDUAL

Sección I: *Ideales propios*

Este capítulo se centra en el estudio de los ideales "propios", deduciéndose dos resultados principales al respecto.

El primero de ellos, que es novedoso aún en el caso de M-ideales, da un procedimiento constructivo mediante el cual aparecen todos los ideales y proporciona de paso una condición necesaria intrínseca que todo espacio de Banach debe satisfacer si aspira a ser un ideal propio de algún otro espacio de Banach. El segundo da una condición necesaria y suficiente para que un espacio de Banach sea ideal propio de algún otro, extendiendo el resultado de E. Behrends y P. Harmand [8] para M-ideales propios. Ambos resultados, independientes entre sí, permiten, como se verá, resolver el problema de los espacios de Banach que son ideales de su bidual.

Para precisar el concepto de ideal necesitamos la definición de norma absoluta conjugada.

2.1 DEFINICION

Dada una norma absoluta $|\circ|$, se define su *norma conjugada*, $|\circ|^*$, por:

$$|(r,s)|^* = \mathrm{Max}\ \{|rb+sa|;\ |(a,b)|=1\} \qquad (r,s \in \mathbb{R})$$

Al índice, $n(|.|^*)$, de la norma conjugada lo notaremos simplemente n^* cuando no haya lugar a confusión.

2.2 NOTA

Sean E y F dos espacios normados y $|.|$ una norma absoluta. Si consideramos en $E\times F$ la norma definida por:

$$\|(x,y)\| = |(\|x\|,\|y\|)| \qquad (x\in E, y\in F)$$

y en $E'\times F'$ consideramos a su vez la norma definida por:

$$\|(f,g)\| = |(\|g\|,\|f\|)|^* \qquad (f\in E', g\in F')$$

entonces la expresión $(f,g)(x,y)=f(x)+g(y)$ permite identificar totalmente el espacio dual de $E\times F$ con el espacio $E'\times F'$.

La afirmación anterior, cuya prueba no ofrece dificultad, fue establecida en [37] de la siguiente forma equivalente: "Si X es un $|.|$-sumando de Y entonces X^0 es un $|.|^*$-sumando de Y'. Más concretamente se prueba que la $|.|^*$-proyección sobre X^0 es $1-\pi^t$, donde π es la $|.|$-proyección sobre X. El hecho de que existen espacios de Banach Y con subespacios cerrados X tales que X^0 es $|.|^*$-sumando de Y', pero X no es $|.|$-sumando de Y, es lo que motiva la definición de ideal:

2.3 DEFINICION

Sea $|.|$ una norma absoluta y X un subespacio cerrado del espacio normado Y. Se dice que X es un *$|.|$-ideal (resp. semi-$|.|$-ideal)* de Y si X^0 es un $|.|^*$-sumando (resp. un semi-$|.|^*$-sumando) de Y'.

Se dice que X es un *ideal (resp. semiideal)* de Y si existe una norma absoluta $|.|$ tal que X es un $|.|$-ideal (resp. semi-$|.|$-ideal) de Y'. Salvo en los casos triviales $X=\{0\}$, $X=Y$, dicha norma absoluta es única.

Para el caso particular $|.|=M$, se obtienen los M-ideales que fueron introducidos por E. Alfsen y E. Effros en [1,2], trabajo que ha sido punto de partida de otros muchos [6,7,24,28,29,44], que avalan la importancia del concepto de M-ideal. Por otro lado, el concepto de semi-M-ideal fue introducido por primera vez en [28].

La generalización a normas absolutas cualesquiera es debida a R. Payá, quién en [37] inicia un estudio que más tarde fue perfeccionado en [35,36]. En particular en estos trabajos quedó clarificada la relación entre los conceptos de sumando, semisumando, ideal y semiideal, relación que vamos a exponer rápidamente para la mejor comprensión de resultados posteriores.

Como ya se ha indicado, todo $|.|$-sumando es un $|.|$-ideal, y obviamente, todo $|.|$-ideal es un semi-$|.|$-ideal. Si la norma absoluta $|.|$ verifica que n^* es cero, todo semi-$|.|$-ideal de un espacio de Banach es de hecho un $|.|$-sumando; recíprocamente, para cada norma absoluta $|.|$ con n^* positivo existen espacios de Banach que contienen semi-$|.|$-ideales que no son $|.|$-ideales y espacios de Banach con $|.|$-ideales que no son $|.|$-sumandos [35]. Finalmente, un subespacio cerrado X de un espacio de Banach Y es un $|.|$-sumando de Y si, y sólo si, X es simultáneamente un semi-$|.|$-sumando y un semi-$|.|$-ideal de Y [35; Theorem 2.10].

Por otro lado, extendiendo la noción de M-ideal propio introducida en [8], es natural definir el siguiente concepto:

2.4 DEFINICION

Se dice que un ideal X de un espacio de Banach Y es un *ideal propio* de Y si no es sumando de Y.

Según [37; Corolario 9.2] ello equivale a que la proyección absoluta de Y' sobre X^0 no sea débil-*-contínua, esto es, a que su núcleo no sea débil-*-cerrado (Teorema de Banach-Smulyan, ver por ejemplo [40; Lemma 4.9])

Nuestro primer objetivo es, como ya se ha dicho, obtener una condición necesaria intrínseca que todo ideal propio debe verificar, esto es, desentrañar de alguna manera la patología inherente al hecho de que un ideal sea propio. Trataremos de explicar el camino a seguir. Sea X un ideal propio de Y ; recordemos que un subespacio X de Y' es débil-*-cerrado si, y sólo si, $J_Y^t(X^{00}) \subset X$ (Teorema de Dixmier, ver por ejemplo [27; Section I. Remarques 7 a]), luego en nuestro caso $J_Y^t[(Ker\ \pi)^{00}]$ no puede estar contenido en $Ker\ \pi$, esto es, πJ_Y^t no puede anularse en $(Ker\ \pi)^{00}$. Este hecho nos llevará a la construcción de un operador, no nulo, satisfaciendo curiosas restricciones de tipo geométrico y topológico.

Necesitaremos el siguiente lema que tiene interés en sí mismo por caracterizar ciertas proyecciones de norma uno en espacios con una proyección absoluta. Dada una norma absoluta $|.|$, notaremos $|.|^r$ a la que se obtiene de ella invirtiendo las variables:

$$|(a,b)|^r = |(b,a)| \qquad (a,b \in \mathbb{R})$$

El índice $n(|.|^r)$ se notará simplemente n^r.

2.5 LEMA

Sea $|.|$ *una norma absoluta,* Z *un espacio normado y* q *una* $|.|$*-proyección en* Z *. Sea* p *una proyección lineal en* Z *tal que* $p(Z)$ *es invariante por* q *. Entonces* $\|p\| \leq 1$ *si, y sólo si, se verifican las siguientes afirmaciones:*

i) $\|qpq\| \leq 1$

ii) $\|(1-q)p(1-q)\| \leq 1$

iii) $\|qp(z)\| + n\|(1-q)p(z)\| \leq n\|z\|$ *, para cada* z *en* $Ker\ q$

iv) $\|(1-q)p(z)\| + n^r\|qp(z)\| \leq n^r\|z\|$ *, para cada* z *en* $q(Z)$

Demostración

Observemos previamente que la condición de que $p(Z)$ sea invariante por q, esto es, $qp(Z) \subset p(Z)$, nos lleva a que $pqp=qp$. Supuesto $\|p\| \leq 1$, *i)* y *ii)* son clara consecuencia de que $\|q\|$ y $\|1-q\|$ son menores o iguales que uno. Para *iii)* se puede suponer que $\|z\| = 1$. Si $qp(z)=0$, *iii)* es consecuencia inmediata de *ii)*. Supongamos pues que $qp(z)\neq 0$, y llamemos $x = \dfrac{qp(z)}{\|qp(z)\|}$. Dado que $x \in q(Z)$, $\|p\| \leq 1$ y q es una $|.|$-proyección, se tiene para cada $\alpha \in \mathbb{R}^+$

$$\|p(x+\alpha z)\| \leq \|x+\alpha z\| = |(\|x\|, \alpha\|z\|)| \leq |(1,\alpha)|$$

Por otra parte ya que $pqp=qp$,

$$qp(x+\alpha z)=qp(x) + \alpha qp(z)=qpqp(\frac{z}{\|qp(z)\|}) + \alpha qp(z)=qp(\frac{z}{\|qp(z)\|}) +$$
$$+ \alpha qp(z)=(\frac{1}{\|qp(z)\|} + \alpha)qp(z)$$

Es claro además que $p(x) \in q(Z)$, con lo que

$$(1-q)p(x+\alpha z)= \alpha(1-q)p(z)$$

por tanto,

$$\| p(x+\alpha z) \| = |(\|qp(x+\alpha z)\| , \| (1-q)p(x+\alpha z) \|)| =$$

$$= |(1+\alpha \| qp(z) \| , \alpha \| (1-q)p(z) \|)|$$

y aplicando [35; Lemma 1.5], tenemos:

$$1 + \alpha(\| qp(z) \| + n \| (1-q)p(z) \|) \leq |(1,\alpha)|$$

Basta ahora restar 1 en ambos miembros, dividir por α , y hacer tender α a 0 para obtener la desigualdad buscada.

Para obtener *iv)* basta aplicar *iii)* con $1-q$ en lugar de q , ya que $p(Z)$ es también invariante por $1-q$, y tener en cuenta que $1-q$ es una $|.|^r$-proyección.

Para probar el recíproco, sea $y \varepsilon Z$ fijo y notemos para abreviar, $a=\| qpq(y) \|$, $b=\| qp(1-q)(y) \|$, $c=\| (1-q)pq(y) \|$ y finalmente $d=\| (1-q)p(1-q)(y) \|$. Aplicando *iii)* con $z=(1-q)(y)$ y *iv)* con $z=q(y)$, obtenemos:

iii') $b+nd \leq n \| (1-q)(y) \|$

iv') $c+n^r a \leq n^r \| q(y) \|$

Por otra parte, de *i)* y *ii)* deducimos:

i') $a=\| qpqq(y) \| \leq \| q(y) \|$

ii') $d \leq \| y-q(y) \|$

Usando que las normas absolutas son funciones crecientes en cada variable [9; Lemma 21.2] y que dada una norma absoluta $|.|$, existe otra, $|.|^+$, tal que para $a, b \;\varepsilon\; \mathbb{R}$

$$|(a,b)| = |(|a| + n|b|, |b|)|^+ \qquad (*)$$

hecho que fue probado en [35; Lemma 1.10]; la demostración se concluye de la siguiente forma:

$$\| p(y) \| = |(\| qp(y) \| , \| (1-q)p(y) \|)| \leq$$

$$\leq |(\| qpq(y) \| + \| qp(1-q)(y) \| , \| (1-q)pq(y) \| + \| (1-q)p(1-q)(y) \|)| =$$

$$=|(a+b,c+d)| = (\text{ aplicando } (*)\ ) = |(a+nc+b+nd,c+d)|^{+} \leqq (\text{ por } iii')\text{ y } ii')) \leqq$$
$$\leqq |(a+nc+n\|(1-q)(y)\|, c+\|(1-q)(y)\|)|^{+} = (*) = |(a, c+\|(1-q)(y)\|)| =$$
$$=|(c+\|(1-q)(y)\|, a)|^{r} = (*) = |(c+n^{r}a+\|(1-q)(y)\|, a)|^{r+} \leqq (\text{por } iv')\text{ e } i')) \leqq$$
$$\leqq |(n^{r}\|q(y)\|+\|(1-q)(y)\|, \|q(y)\|)|^{r+} = (*) = |(\|(1-q)(y)\|, \|q(y)\|)|^{r} =$$
$$=|(\|q(y)\|, \|(1-q)(y)\|)| = \|y\| .$$

En nuestro próximo resultado realizamos ya la anunciada construcción del operador que refleja el carácter propio de un ideal X. El espacio de partida de dicho operador será $X^{\perp}$, el anulador de X cuando se le considera como subespacio de su bidual.

2.6 LEMA

Sea $|\cdot|$ *una norma absoluta y supongamos que* X *es un* $|\cdot|$*-ideal propio de un espacio de Banach* Y. *Entonces existe un operador lineal, no nulo,* T *de* $X^{\perp}$ *en* X^{0} *satisfaciendo:*

$$\|T(w)\| + n^{*}\|f\| \leqq n^{*}\|w+J_{X'}(f)\|$$

para todo w *en* $X^{\perp}$ *y* f *en* X'. *Además,* T *es continuo cuando en* $X^{\perp}$ *y* X^{0} *se consideran las topologías débil-* inducidas por* X''' *e* Y' *respectivamente.*

Demostración

Sea π la $|\cdot|^{*}$-proyección de Y' sobre X^{0}. Comenzaremos aplicando el lema anterior tomando $Z=Y'''$, espacio en el que se dispone de la $|\cdot|^{*}$-proyección π^{tt}, que se toma como q, y de la proyección de dualidad determinada por Y, esto es $J_{Y'}J_{Y}^{t}$ que, como es sabido, tiene norma uno y que tomamos como p. La afirmación *iii)* del lema nos da en este caso la siguiente desigualdad:

$$\|\pi^{tt}J_{Y'}J_{Y}^{t}(z)\| + n^{*}\|(1-\pi^{tt})J_{Y'}J_{Y}^{t}(z)\| \leqq n^{*}\|z\|$$

válida para todo z en $Ker\ \pi^{tt}$. Teniendo en cuenta que $\pi^{tt}J_{Y'}=J_Y^t\pi$ y que $J_{Y'}$ es isométrica, la anterior desigualdad se transforma en:

$$\| \pi J_Y^t(z) \| + n^* \| (1-\pi)J_Y^t(z) \| \leq n^* \| z \| \qquad (1)$$

para cada $z \in Ker\ \pi^{tt}$.

Como orientación para los razonamientos que siguen, baste observar que el hecho de que X sea ideal propio se refleja en la no nulidad del primer sumando de la desigualdad (1). En efecto, si πJ_Y^t se anulase en $Ker\ \pi^{tt}=(Ker\ \pi)^{00}$, $Ker\ \pi$ sería débil-*-cerrado. Por otra parte, $(Ker\ \pi)^{00}$ es isométricamente isomorfo, como se verá enseguida, a X''', y tras identificación, πJ_Y^t se convertirá en el operador T que vamos buscando, mientras que (1) nos dará la desigualdad del enunciado. Lamentablemente, la formalización rigurosa de esta idea será ardua.

La aplicación que a cada $f+X^0 \in Y'/X^0$ asocia $f-\pi(f) \in Y'$ es lineal, isométrica y su imagen es $Ker\ \pi$. Usando la identificación canónica de Y'/X^0 con X' obtenemos, por composición, una aplicación Ψ lineal e isométrica de X' en Y' con $\Psi(X')=Ker\ \pi$. Como consecuencia, Ψ^{tt} es una isometría lineal de X''' en Y''' y se tiene:

$$\Psi^{tt}(X''')=(Ker\ \pi)^{00}=Ker\ \pi^{tt} \qquad (2)$$

Nuestro objetivo es hacer $z=\Psi^{tt}(x''')$ en la desigualdad (1); para simplificar notablemente la desigualdad que así se obtiene nos será útil probar previamene la siguiente relación:

$$(1-\pi)J_Y^t\Psi^{tt}=\Psi J_X^t \qquad (3)$$

Para ello, sea $Q=\Psi^{-1}(1-\pi)J_Y^t\Psi^{tt}$ que queremos probar coincide con J_X^t. En primer lugar es fácil comprobar, mediante la definición de Ψ , que, para cada $x''' \in X'''$, $Q(x''')$ es la restricción a X de $J_Y^t \Psi^{tt}(x''')$. Por otra parte, dado $f \in X'$ se tiene fácilmente:

$$\Psi^t J_Y(x)\ (f)= J_Y(x)\left[\Psi(f)\right]= \Psi(f)(x)= f(x)= J_X(x)(f),$$

esto es, para cada $x \in X$

$$\Psi^t J_Y(x)=J_X(x)\ . \tag{4}$$

Finalmente tenemos:

$$Q(x''')\ (x)= J_Y^t \Psi^{tt}(x''')(x)= \Psi^{tt}(x''')\left[J_Y(x)\right]= x''' \Psi^t J_Y(x) = x''' J_X(x) =$$
$$= J_X^t(x''')(x)$$

para cualesquiera x''' en X''', x en X , como se quería.

Dados ahora f en X', w en $X^{\perp}$, tenemos, aplicando (3):

$$(1-\pi)J_Y{}^t\Psi^{tt}(w+J_{X'}(f)) = \Psi\, J_X^t(w+J_{X'}(f))=\Psi(f) \tag{5}$$

donde se ha usado que $J_X^t(w)=0$ y que $J_X^t J_{X'}$ es la identidad en X'.
Por otra parte, puesto que

$$J_Y^t\Psi^{tt}J_{X'}(f)= J_Y^t J_{Y'}\Psi(f)=\Psi(f)\ \in Ker\ \pi$$

tenemos que:

$$\pi J_Y^t \Psi^{tt} J_{X'}=0 \tag{6}$$

Podemos ya aplicar la desigualdad (1) con $z=\Psi^{tt}(w+J_{X'}(f))$ y, usando (5) y (6) obtenemos:

$$\|\ \pi J_Y^t\Psi^{tt}(w)\ \| + n^*\|\ f\ \| \le n^*\|\ \Psi^{tt}(w+J_{X'}(f))\ \|$$

y por ser Ψ y Ψ^{tt} isométricas nos da,

$$\|\ \pi J_Y^t\Psi^{tt}(w)\ \| + n^*\| f \| \le n^*\|\ w+J_{X'}(f)\ \|$$

que es la desigualdad del enunciado si definimos T por

$$T(w)= \pi J_Y^t\Psi^{tt}(w), \qquad (w\in X^{\perp})$$

el cual es evidentemente un operador lineal continuo de $X^{\perp}$ sobre X^0.

Para probar la débil-*-continuidad de T , baste observar que por ser $J_X^t(w)=0$ para cada $w\in X^{\perp}$, se tiene en virtud de (3) que para cada w

$$T(w)=J_Y^t\Psi^{tt}(w) \tag{7}$$

lo que muestra a T como la restricción a $X^{\perp}$ de un operador débil-*-continuo de X''' en Y'.

Finalmente, si fuese $T=0$, $\pi J_Y^t\Psi^{tt}$ se anularía en $X^{\perp}$ pero, por (5), también se anula en $J_{X'}(X')$, luego se tendría $\pi J_Y^t\Psi^{tt}=0$, lo que por (2) equivale a que πJ_Y^t se anule en $Ker\ \pi^{tt}$, esto es, a que $J_Y^t(Ker\ \pi^{tt}) \subset Ker\ \pi$. Entonces $Ker\ \pi$ sería un subespacio débil-*-cerrado de Y', π sería débil-*-continua y X no sería ideal propio.

Obsérvese que el lema anterior da una nueva demostración del hecho ya conocido de que si la norma absoluta $|\circ|$ verifica que $n^*=0$, todo $|\circ|$-ideal es un $|.|$-sumando [35; Theorem 2.2].

Seguidamente pondremos de manifiesto el hecho ya comentado de que el operador T del lema anterior describe toda la patología inherente al hecho de que X sea un ideal propio de Y. Para concretar esta idea, pensemos primeramente que $X^{\perp}$ y X^0 pueden identificarse totalmente con los duales de los espacios $X''/J_X(X)$ e Y/X respectivamente, y que esta identificación alcanza también a las topologías débil-*. La débil-*-continuidad de T implica por tanto la existencia de un operador lineal continuo S de Y/X en $X''/J_X(X)$ cuyo traspuesto es T, salvadas las anteriores identificaciones. Pues bien, el conocimiento de los espacios X (que implica el de X''/X) e Y/X y del operador S permite reconstruir el espacio Y, y este proceso se puede abstraer dando lugar a un método constructivo mediante el cual pueden obtenerse todos los espacios que contengan un ideal.

Para centrar aún más el interés de este proceso, consideremos el siguiente hecho elemental: Si X es un $|.|$-sumando de Y, el espacio Y queda determinado por el conocimiento de X, y del cociente Y/X; en efecto, la aplicación que a cada y le hace corresponder el par $(\pi(y),y+X)$ (donde π es la $|\circ|$-proyección sobre X) es una biyección lineal isométrica de Y sobre el espacio producto $X \times Y/X$ normado por:

$$\|(x,y+X)\| = |(\|x\|, \|y+X\|)|$$

Por el contrario, Si X es sólamente un ideal de Y, el espacio Y

no queda determinado cuando se conocen X e Y/X , como muestra el siguiente ejemplo:

2.7 EJEMPLO

En el espacio ℓ_∞ de las sucesiones acotadas de números reales, con su norma usual, se consideran los subespacios $Y_1=c$, sucesiones convergentes, e Y_2 formado por las sucesiones $\{x_n\}$ tales que $\{x_{2n}\}$ converge a cero y $\{x_{2n-1}\}$ es convergente. Es sabido que el espacio $X=c_0$, sucesiones convergentes a cero, es un M-ideal de ℓ_∞ [10; Section 2], luego lo es tanto de Y_1 como de Y_2 , y los espacios Y_1/X e Y_2/X son idénticos (son unidimensionales). Sin embargo Y_1 e Y_2 **no** pueden ser isométricamente isomorfos, ya que la bola unidad de Y_2 carece de puntos extremos a diferencia de la de Y_1 .

No obstante, como hemos dicho, si X es un ideal de Y , el espacio Y puede reconstruirse a partir de X e Y/X con la ayuda del operador T del Lema 2,6.

En efecto, siguiendo con la notación del lema y de su demostración, consideremos el espacio producto $X'' \times Y/X$ normado por:

$$\|(x'',y+X)\| = |(\|x''\|, \|y+X\|)|$$

Sea S , como ya se ha dicho, el operador lineal continuo de Y/X en $X''/J_X(X)$ cuyo traspuesto, salvadas las identificaciones de $(Y/X)'$ con X^0 y de $(X''/J_X(X))'$ con $X^\perp$, es el operador T del lema anterior. Consideremos el subespacio $\hat{Y}$ de $X'' \times Y/X$ dado por:

$$\hat{Y} = \{(x'',y+X):\ S(y+X)= x''+ J_X(X)\}$$

Y el subespacio $\hat{X}$ de $\hat{Y}$ dado por:

$$\hat{X} = \{(J_X(x),0):\ x\in X\}$$

Pues bien, vamos a probar que *existe una biyección lineal isométrica de* Y *sobre* $\hat{Y}$ *que aplica* X *sobre* $\hat{X}$. La demostración es la siguiente:

Para $y \varepsilon Y$ pongamos

$$\Phi(y) = (\Psi^t J_Y(y), y+X)$$

donde Ψ es la aplicación usada en la demostración del lema anterior.

Si notamos I a la identificación canónica de X^{00} con X'', es rutinario comprobar que

$$I(1-\pi^t) = \Psi^t$$

con lo que para cada $y \varepsilon Y$,

$$\| \Psi^t J_Y(y) \| = \| (1-\pi^t) J_Y(y) \| .$$

Por otra parte, es sabido que $\| y+X \| \doteq \| J_Y(y)+X^{00} \|$ (ver [37: Lema 8.6], y, por ser $1-\pi^t$ una $|.|$-proyección de Y'' sobre X^{00}, tenemos:

$$\| y \| = \| J_Y(y) \| = | (\| (1-\pi^t) J_Y(y) \| , \| \pi^t J_Y(y) \|) | =$$
$$= | (\| (1-\pi^t) J_Y(y) \| , \| J_Y(y) + X^{00} \|) | = | (\| \Psi^t J_Y(y) \| , \| y+X \|) | = \| \Phi(y) \|$$

y por lo tanto, Φ es una inyección lineal isométrica de Y en $X'' \times Y/X$. Es inmediato a partir de *(4)* para cada $x \varepsilon X$ que

$$\Phi(x) = (J_X(x), 0)$$

con lo que sólo resta probar que $\Phi(Y) = \hat{Y}$.

Consideremos el operador S_0 de Y/X en $X''/J_X(X)$ dado por

$$S_0(y+X) = \Psi^t J_Y(y) + J_X(X).$$

Dado $w \varepsilon X^{\perp}$ y notando $\hat{w}$ al correspondiente elemento de $(X''/J_X(X))'$ tenemos que para cada $y \varepsilon Y$

$$[S_0^t(\hat{w})](y+X) = \hat{w}[\Psi^t J_Y(y) + J_X(X)] = w[\Psi^t J_Y(y)] = [(J_Y^t \Psi^{tt}(w)](y)$$

luego $S_0^t(\hat{w})$, considerado como elemento de X^0 , no es otro que $J_Y^t\Psi^{tt}(w)$. Pero en virtud de la expresión (7) tenemos $J_Y^t\Psi^{tt}(w)=T(w)$ para cada $w\varepsilon X^{\perp}$. Hemos probado así que cuando $(X''/J_X(X))'$ e $(Y/X)'$ se identifican con $X^{\perp}$ y X^0 respectivamente, S_0^t se convierte en el operador T , en otras palabras, hemos probado que $S=S_0$; esto es:

$$S(y+X) = \Psi^t J_Y(y) + J_X(X)$$

para cada $y \varepsilon Y$. A partir de esta igualdad es claro que $\Phi(Y) \subset \hat{Y}$. Recíprocamente, sea $(x'',y+X) \varepsilon \hat{Y}$, entonces:

$$\Psi^t J_Y(y) + J_X(x) = \Psi^t J_Y(y+x)$$

luego existe un $x\varepsilon X$ tal que:

$$x'' = \Psi^t J_Y(y) + J_X(x) = \Psi^t J_Y(y+x)$$

donde se ha utilizado (4). Hemos probado así que

$$(x'',y+X) = \Phi(y+x) \ \varepsilon\ \Phi(Y)$$

como se quería.

Resumiendo, hemos ideado un proceso mediante el cual, a partir de los espacios de Banach X e Y/X y del operador T del lema anterior, o si se quiere del operador S, pretraspuesto de él, se reconstruye la pareja (Y,X) donde X es un ideal de Y . Nuestro próximo resultado muestra que el papel de X e Y/X en este proceso puede ser jugado por dos espacios de Banach cualesquiera para los que exista un operador S con las convenientes restricciones. Obtenemos así la prometida construcción genérica de todos los ideales. Toda la información queda recogida en el siguiente enunciado, cuya parte más dificil e importante está ya demostrada:

2.8 TEOREMA

Sea $|.|$ *una norma absoluta. Sean* Z,U *dos espacios de Banach y* S *un operador lineal continuo de* U *en* Z''/Z *con*

$$\|S^t(w)\| + n^*\|f\| \leq n^*\|w + J_{Z'}(f)\|,$$

con f *en* Z' *y notando por* w *indistintamente un elemento del dual de* Z''/Z *y su correspondiente por la identificación de dicho dual con* $Z^{\perp}$.

Se considera el espacio $Z''\mathrm{x}U$ *con la norma*

$$\|(z'',u)\| = |(\|z''\|, \|u\|)| \qquad (z''\varepsilon Z'', u\varepsilon U)$$

y los subespacios

$$\hat{Y} = \{(z'',u) \ \varepsilon\ Z''\mathrm{x}U;\ S(u)=z''+Z\}$$

$$\hat{X} = \{(J_Z(z),0);\ z\varepsilon Z\}$$

Pues bien, $\hat{X}$ *es* $|.|$*-ideal de* $\hat{Y}$. *Además,* $\hat{X}$ *es* $|.|$*-sumando de* $\hat{Y}$ *si, y sólo si,* $S=0$.

Recíprocamente, todo ideal aparece por este procedimiento. En concreto, dados un espacio de Banach Y *y un* $|.|$*-ideal* X *de* Y, *existen* Z,U,S *como arriba y una biyección lineal isométrica del correspondiente* $\hat{Y}$ *sobre* Y, *que aplica* $\hat{X}$ *sobre* X.

Demostración

Dado que $\hat{Y}$ es un subespacio de $Z''\mathrm{x}\,U$, podemos identificar $\hat{Y}'$ con $(Z''\mathrm{x}\,U)'/\hat{Y}^0$. Desvelemos previamente $\hat{Y}^0$ y tengamos en cuenta para ello que $(Z''\mathrm{x}\,U)'$ puede identificarse (Nota 2.2) con $Z'''\mathrm{x}\,U'$ con la norma

$$\|(z''',u')\| = |(\|u'\|, \|z'''\|)|^*$$

para cada $z'''\varepsilon Z'''$, $u'\varepsilon U'$.

Sea $(z''',u')\varepsilon Z'''\times U'$ tal que $(z''',u')(z'',u)=0$, para cada $(z'',u)\varepsilon \hat{Y}$. Tomemos en particular $u=0$ y z'' en $J_Z(Z)$ lo que nos lleva a deducir que $z'''\varepsilon Z^{\perp}$. Si notamos por w indistintamente tanto a los elementos del dual $(Z''/J_Z(Z))'$ como a sus identificados en $Z^{\perp}$, tenemos

$$0=(w,u')(z'',u) = w(z'') + u'(u) = w(z''+J_Z(Z)) + u'(u) = wS(u) + u'(u) =$$
$$= [S^t(w) + u'](u)$$

es decir, $u'=-S^t(w)$, concretando,

$$\hat{Y}^0 = \{(w,-S^t(w)) : w\varepsilon Z^{\perp}\}.$$

Teniendo en cuenta nuevamente la identificación de $\hat{Y}'$ con el cociente $(Z''\times U')/\hat{Y}^0$, obtenemos que

$$\hat{X}^0=\{(z''',u') + \hat{Y}^0 / [(z''',u')+\hat{Y}^0](J_Z(z),0)=\theta\} = \{(w,u') + \hat{Y}^0 / w\varepsilon Z^{\perp}\}$$

Construyamos ahora la proyección correspondiente; para ello haremos uso de la descomposición de un elemento de Z''' , z''' , en suma de un elemento de $Z^{\perp}$, w, y un $J_{Z'}(f)$, con $f\,\varepsilon\, Z'$. Dado $u'\,\varepsilon\, U'$ definimos:

$$\pi\,((z''',u') + \hat{Y}^0) = (w,u') + \hat{Y}^0$$

Comprobemos que π es una $|.|^*$-proyección. Consideremos un elemento arbitrario α en $\hat{Y}'$ que, como hemos dicho tendrá la forma $\alpha = w + J_{Z'}(f) + \hat{Y}^0$ con $w\,\varepsilon\, Z^{\perp}\cong(Z''/J_Z(Z))'$, $f\,\varepsilon\, Z'$, $u'\,\varepsilon\, U'$. Para $v\,\varepsilon\, Z^{\perp}$ tenemos:

$$\|(w + J_{Z'}(f) + v, u'-S^t(v))\| = |(\|u'-S^t(v)\|, \|w + J_{Z'}(f) + v\|)|^* =$$
$$= (\text{ por } [35;\ \text{Lemma } 1.10]) =$$
$$= |(\|u'-S^t(v)\| + n^*\|w + J_{Z'}(f) + v\|, \|w + J_{Z'}(f) + v\|)|^{*+} \geq$$
$$\geq (\text{ por la hipótesis de } S\ ) \geq$$
$$\geq |(\|u'-S^t(v)\| + n^*\|f\| + \|S^t(v+w)\|, \|f\|)|^{*+} =$$
$$= |(\|u'-S^t(v)\| + \|S^t(v+w)\|, \|f\|)|^* \geq |(\|u'+S^t(w)\|, \|f\|)|^*$$

y la desigualdad así obtenida se convierte en igualdad en el caso $v=-w$. Cuando v recorre $Z^{\perp}$, el par $(v,-S^t(v))$ recorre $\hat{Y}^0$, luego hemos probado que:

$$\|(w + J_{Z'}(f),u') + \hat{Y}^0\| = |(\|u' + S^t(w)\|, \|f\|)|^* \qquad (a)$$

en particular, tomando $f=0$ tenemos:

$$\|u' + S^t(w)\| = \|(w,u') + \hat{Y}^0\| = \|\pi(\alpha)\| \qquad (b)$$

mientras que haciendo $u'=-S^t(w)$ obtenemos

$$\|f\| = \|(w + J_{Z'}(f),-S^t(w)) + \hat{Y}^0\| = \|\alpha - \pi(\alpha)\| \qquad (c)$$

sustituyendo (b) y (c) en (a) obtenemos

$$\|\alpha\| = |(\|\pi(\alpha)\|, \|\alpha - \pi(\alpha)\|)|^*$$

y esto para cada $\alpha \in \hat{Y}'$, como se quería.

Por último supuesto $S=0$, tenemos $\hat{Y} = J_Z(Z)\times U$, y por tanto claramente $J_Z(Z)\times\{0\}$ es $|\circ|$-sumando de $\hat{Y}$, por la propia forma de normar $Z''\times U$.

Recíprocamente si $\hat{X}$ es $|\circ|$-sumando de $\hat{Y}$, la proyección antes descrita $\pi((z''',u') + \hat{Y}^0) = (w,u') + \hat{Y}^0$ donde $z''' = w + J_{Z'}(f)$, $w \in Z^{\perp}$, $f \in Z'$, que aplica $(Z''\times U)'/\hat{Y}^0$ sobre $\hat{X}^0$, es continua considerando en $(Z''\times U)'/\hat{Y}^0$ la topología cociente de la débil-* de $(Z''\times U)'$ a la que llamaremos σ . Por tanto su núcleo es cerrado para dicha topología. Ahora bien,

$$\begin{aligned} Ker\,\pi &= \{(w + J_{Z'}(f),u') + \hat{Y}^0 \;/\; (w,u') \in \hat{Y}^0 ,\; f \in Z'\} = \\ &= \{(w + J_{Z'}(f),-S^t(w)) + \hat{Y}^0 / \; w \in Z^{\perp},\; f \in Z'\} = \\ &= \{(J_{Z'}(f),0) + \hat{Y}^0 / \; f \in Z'\}. \end{aligned}$$

Sea ahora $w \in Z^{\perp}$, y tomemos una red $\{J_{Z'}(f_\alpha)\}$ de $J_{Z'}(Z')$ convergiendo a w en la topología débil-* de Z''' . Entonces la red $\{(J_{Z'}(f_\alpha),0) + \hat{Y}^0\}$ converge a $(w,0) + \hat{Y}^0$ en la topología σ . Por ser $Ker\,\pi$ cerrado, $(w,0) + \hat{Y}^0$ está en $Ker\,\pi$, lo que fuerza que $S^t(w)=0$. Moviendo ahora w en $Z^{\perp}$, obtenemos que $S^t=0$ y por tanto $S=0$.

Como quiera que el teorema que acabamos de probar es desconocido incluso en el caso de ser $|.|= M$, enunciamos explícitamente el siguiente corolario.

2.9 COROLARIO

Sean Z *y* U *dos espacios de Banach y* S *un operador lineal continuo de* U *en* Z''/Z *, con*

$$\| S^t(w)\| + \|f\| \leq \|w + J_Z(f)\|$$

para todo f *en* Z' *y* w *en* $Z^{\perp}$.

Se considera el espacio $Z''\times U$ *con la norma*

$$\|(z'',u)\| = Max \{\|z''\|, \|u\|\} \qquad (z''\in Z'', u \in U)$$

y los subespacios

$$\hat{Y} = \{(z'',u) \in Z''\times U ; S(u)= z'' + Z \}$$

$$\hat{X} = \{(J_Z(z),0); z \in Z \}$$

Pues bien, $\hat{X}$ *es M-ideal de* $\hat{Y}$ *. Además* $\hat{X}$ *es M-sumando si, y sólo si,* $S=0$ *.*

Recíprocamente, todo M-ideal aparece por este procedimiento. En concreto, dado un espacio de Banach Y *y un M-ideal* X *de* Y*, existen* Z,U,S *como arriba y una biyección lineal isométrica del correspondiente* $\hat{Y}$ *sobre* Y *, que aplica* $\hat{X}$ *sobre* X *.*

Para terminar obtenemos una nueva consecuencia del Lema 2.6 , que nos va a permitir más adelante determinar las normas absolutas $|.|$ para las que existen espacios de Banach que son $|.|$-ideales de sus biduales. Concretamente, vamos a poner de manifiesto cómo el Lema 2.6 impone a un ideal propio ciertas restricciones intrínsecas, esto es, da condiciones necesarias sobre un espacio de Banach para que el tal espacio pueda ser ideal propio de otro. Por ejemplo, si X es un espacio reflexivo, tenemos que $X^{\perp}=0$ y es imposible tener operadores lineales no nulos definidos en $X^{\perp}$, luego un espacio reflexivo no puede ser ideal propio. La hipótesis de reflexividad es una condición demasiado fuerte, pero fácilmente podemos encontrar hipótesis más débiles que nos permitan llegar a la misma conclusión:

2.10 TEOREMA

Sea X un espacio de Banach. Supongamos que el subespacio de $X^{\perp}$ engendrado por los elementos que son de mejor aproximación en $X^{\perp}$ para algún elemento de X' es débil--denso en $X^{\perp}$. Entonces X no puede ser ideal propio de ningún espacio de Banach.*

Demostración

Supongamos que X es un ideal propio de un espacio de Banach Y, y sea T el operador no nulo dado por el Lema 2.6, definido sobre $X^{\perp}$ y con valores en X°. Si $f \in X'$, es fácil ver que $\| J_{X'}(f) + X^{\perp} \| = \|f\|$, con lo cual, si w es de mejor aproximación en $X^{\perp}$ para $J_{X'}(f)$ la desigualdad del Lema 2.6 nos da:

$$\| T(w) \| + n^* \| f \| \leq n^* \| J_{X'}(f) - w \| = n^* \| f \|$$

esto es, $T=0$. Por ser T lineal y débil-*-continuo, la hipótesis sobre X hace que T sea idénticamente nulo, lo cual es una contradicción.

Acabamos de obtener una condición necesaria intrínseca que todo ideal propio debe verificar. Como punto final de esta sección vamos a extender a ideales cualesquiera la caracterización intrínseca de los M-ideales propios, recientemente obtenida por E.Behrends y P. Harmand [8]. Esta extensión es sorprendentemente sencilla gracias a los teoremas de renormación obtenidos en [35; Theorem 2.3 y theorem 2.6]. La caracterización de los M-ideales propios dada en [8] utiliza el concepto de seudobola, más concretamente, un espacio de Banach es M-ideal propio si, y sólo si, contiene una seudobola que no es una bola [8; Theorem 3.4]. Para nuestros propósitos resulta conveniente tomar como definición de seudobola la caracterización dada por [8; Proposition 3.2], que es la siguiente:

2.11 DEFINICION

Diremos que un subconjunto convexo y cerrado, C, de un espacio de Banach X es una *seudobola* cuando el cierre débil-* de C en X'', $\overline{C}^{w^*}$, sea una bola de radio uno. Toda bola cerrada de radio uno es obviamente una seudobola. Que el recíproco no es cierto quedará claro enseguida.

La siguiente notación se utilizará con profusión en lo que sigue: Si X es un subespacio cerrado de Y, para cada y en Y, notaremos por $P_X(y)$, al conjunto de puntos de X que materializan la distancia de y a X, es decir:

$$P_X(y) = \{ x \in X;\ \|y - x\| = \|y + X\| \}$$

Tal conjunto es claramente cerrado, convexo y acotado; pudiendo ser vacío.

Se dice que X es un subespacio *proximinal (resp. Chebyshev)* de Y cuando para cada y en Y, $P_X(y)$ es no vacío (resp. tiene un único punto).

Por último notaremos por $\overline{P_X(y)}^{w^*}$, al cierre de $P_X(y)$ en la topología débil-* del bidual de X.

Si X es un $|\cdot|$-sumando de Y, para cada y en Y, $P_X(y)$ es una bola de radio $n^*\|y+X\|$ [35; Proposition 1.2]. Para ideales se tiene la siguiente generalización:

2.12 PROPOSICION

Sea $|\cdot|$ una norma absoluta y sea X un $|\cdot|$-ideal de Y. Para cada y en Y, con $n^*\|y+X\| = 1$, $P_X(y)$ es una seudobola. Además, si X es un $|\cdot|$-ideal propio de Y, se puede conseguir y, con $n^*\|y+X\| = 1$, tal que $P_X(y)$ no es una bola.

Demostración

Si X es un $|\cdot|$-sumando de Y, el resultado se sigue de [35; Proposition 1.2]. Sea pues X un $|\cdot|$-ideal propio de Y, lo cual implica $n^* > 0$. Aplicando [35; Theorem 2.6] existe una nueva norma, $|||\cdot|||$, en Y, para la cual X es M-ideal propio de Y. Además la nueva norma está relacionada con la inicial por:

$$\|y\| = |(n^*|||y|||, |||y + X|||)| \qquad (1)$$

Para cada y en Y [35; Remark 2.7].

A partir de esta relación se deduce inmediatamente que para cada y en Y:

$$|||y + X||| = \|y + X\|$$

así como que los conjuntos de mejor aproximación en X , de cada elemento de Y , son los mismos para ambas normas, con lo que no hay ambigüedad en notarlos a ambos por $P_X(y)$. Sea $y \in Y$ con $n^*\| y+X\| = 1$, entonces $\||\, n^*y + X\|| = 1$ y aplicando [29; Theorem 1.1 (2)] ver conjuntamente con [8; Definition 3.1 y Proposition 3.2]) obtenemos que $P_X(n^*y)$ es una seudobola en $(X, \||.\||)$ y que para algún y_0 , $P_X(n^*y_0)$ no es una bola [29; Theorem 1.3].

Finalmente, de (1) , deducimos que para cada $x \in X$

$$\|x\| = n^*\||x\||$$

y por tanto la misma relación existirá entre las normas biduales, luego $P_X(y)$ es una seudobola en $(X, \|.\|)$ que para algún y_0 no es una bola.

2.13 COROLARIO

Sea X un espacio de Banach; son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) Existe un espacio de Banach Y tal que X es ideal propio de Y.

ii) X contiene una seudobola que no es una bola.

Demostración

i) $\Rightarrow$ *ii)* Es consecuencia evidente de la proposición anterior.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Aplicando a *ii)* [8;Theorem 3.4], existe un espacio de Banach tal que X es M-ideal propio de Y.

Sección II: *Espacios de Banach que son ideales de su bidual*

Esta sección tiene como principal objetivo detectar, del estudio realizado de los $|.|$-ideales propios, las normas absolutas $|.|$ para las que un espacio de Banach no reflexivo puede ser $|.|$-ideal de su bidual.

Para expresar los resultados en forma más general se introduce el concepto de semiidealoide, que engloba a los de semisumando e ideal. A decir verdad, dicho concepto debía tener cabida en la presente memoria por respeto histórico, y es este el momento oportuno de su introducción, ya que el estudio de los espacios de Banach que son semiidealoides de su bidual no supone mayor esfuerzo que el de los que son ideales. Ello se debe al hecho de que X es "semi-$|.|$-idealoide" de Y si, y sólo si, X es $|.|$-ideal de $X+\mathbb{K}y$, para cada $y \in Y$.

2.14 DEFINICION

Sea $|.|$ una norma absoluta y X un subespacio cerrado de un espacio de Banach Y. Se dice que X es un *semi-$|.|$-idealoide* de Y si el anulador de X es semi-$|.|^*$-ideal del espacio dual Y'. Se dice que *X es semiidealoide de Y* si existe una norma absoluta $|.|$ (única supuesto $X\neq 0$, $X\neq Y$) tal que X es un semi-$|.|$-idealoide de Y.

Este concepto fue introducido en [35] donde se estudia su relación con los anteriormente manejados, relación que puede resumirse en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & {|\cdot|\text{-}\mathit{sumando}} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
{\mathit{semi}\text{-}|\cdot|\text{-}\mathit{sumando}} \arrow[dr, Rightarrow] & & {|\cdot|\text{-}\mathit{ideal}} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & {\mathit{semi}\text{-}|\cdot|\text{-}\mathit{idealoide}} & & {\mathit{semi}\text{-}|\cdot|\text{-}\mathit{ideal}}
\end{tikzcd}$$

Ninguna de las implicaciones es reversible, de hecho, existen semiidealoides que no son ideales ni semisumandos. Las referencias pertinentes son [35; Theorem 3.1 i), Theorem 1.4, Theorem 2.3 y Remark 3.2 ii)].

Nuestro primer resultado es una sencilla adaptación de [34; Corolario 2.20], resultado que limita de forma drástica el tipo de norma absoluta $|\cdot|$ para la que se puede esperar que existan espacios de Banach semi-$|\cdot|$-ideales de sus biduales.

2.15 DEFINICION

Dado γ un número real con $0 \leq \gamma \leq 1$, podemos considerar la norma absoluta $|\cdot|_\gamma$ definida por:

$$|(a,b)|_\gamma = Max\ \{|b|, |a| + \gamma|b|\}$$

para cada a y b en $\mathbb{R}$. Se dirá que una norma absoluta $|\cdot|$ es *hexagonal* si existe γ tal que $|\cdot| = |\cdot|_\gamma$. Nótese que $|\cdot|_0 = M$, $|\cdot|_1 = L$ y que para $0 < \gamma < 1$ se tiene que la esfera unidad de $\mathbb{R}^2$ con la norma $|\cdot|_\gamma$ es un hexágono.

Es fácil probar que $n(|\cdot|_\gamma) = \gamma$, mientras que $n(|\cdot|_\gamma{}^*) = 1-\gamma$.

Recíprocamente si una norma absoluta es tal que $n + n^* = 1$, dicha norma absoluta es hexagonal [34; Proposition 1.36].

2.16 TEOREMA

Sea $|.|$ *una norma absoluta,* X *un espacio de Banach e* Y *un subespacio de* X''. *Si* X *es semi-*$|.|$*-ideal de* Y *, entonces la norma absoluta* $|.|$ *es hexagonal.*

Demostración

Dado un subespacio Z de un espacio normado U , se define una seminorma ρ_Z en U por:

$$\rho_Z(u) = Sup\ \{|f(u)|;\ f \in U',\ z \in Z\ ,\ \|f\| = f(z)=\|z\|=1\}$$

para cada u en U . Se define también (vease [34; Definición 1.24]:

$$n(U,Z) = Sup\ \{k \geq 0;\ k\|u\| \leq \rho_Z(u)\quad \forall u \in U\}$$

Nótese que si, a su vez, U es subespacio de otro espacio normado V, se tiene:

$$n(V,Z) \leq n(U,Z)$$

Sean ahora X e Y como arriba. En virtud de [34;Corolario se tiene que

$$n(Y,X) \leq n + n^*$$

Por otra parte, una aplicación directa del Teorema de Bishop-Phelps permite probar que $\rho_X(F) = \|F\|$, para cada $F \in X''$, y por tanto $n(X'',X) = 1$. Así pues, uniendo las observaciones anteriores obtenemos que

$$n + n^* \geq n(Y;X) \geq n(X'',X) = 1.$$

Si ahora tenemos en cuenta que para cualquier norma absoluta se tiene que $n + n^* \leq 1$, deducimos que $n + n^*$ es uno, lo cual equivale a que la norma absoluta $|.|$ es hexagonal [34; Proposición 1.36]

Llegamos por fin al resultado principal de este capítulo, del que damos dos demostraciones.

Antes de enunciar dicho resultado conviene fijar la siguiente notacion:

Dado y en un espacio normado Y , y r un número real no negativo , notaremos por $B_Y(y,r)$ a la bola cerrada de centro y y radio r del espacio Y. Simbolizaremos por $B_Y^{int}(y,r)$ a la correspondiente bola abierta.

2.17 TEOREMA

Si un espacio de Banach X es semiidealoide de su bidual, entonces X es Semi-L-sumando o M-ideal de su bidual.

1ª Demostración

Si X es semi-$[.[$-idealoide de su bidual entonces X es $[.[$-ideal de $X + \mathbb{K}F$, para cada $F \in X''$ [36; Proposition 1.8]. Por el teorema anterior se tiene por tanto que $[.[=[.[_\gamma$ para algún γ entre cero y uno . Si $\gamma=0$ tenemos $[.[= M$ y aplicando [35; Theorem 3.1 iii)] X es M-ideal de X''.

Sea pues $n > 0$. Por ser X un semi-$[.[$*-ideal de X''' , tenemos, aplicando [35; Corollary 2.9] que, para cada $f \in X'$, $f \neq 0$, el conjunto $P_X(f) - P_X(f)$ contiene a la bola abierta de centro cero y radio $2n[[f + X [[= 2n [[f [[>0$, con lo cual X verifica sobradamente la hipótesis del Teorema 2.10, luego X no puede ser ideal propio de ningún espacio de Banach. Por tanto , como consecuencia de la observación inicial, X es $[.[$-sumando de $X + \mathbb{K}F$, para cada $F \in X''$. Aplicando el Corolario 1.8 se tiene pues que $|.| = L$, lo cual fuerza que X es semi-L-sumando de su bidual [35; Theorem 3.1 iv)].

2ª *Demostración*

Esta segunda demostración se hará discutiendo los valores del índice de la norma absoluta conjugada, para la cual X es semiideaoide de su bidual.

Si $n^*=0$, en virtud de [35; Theorem 3.1 iv)] X es de hecho un semi-$|.|$-sumando de su bidual, por lo que usando , por ejemplo el Teorema 1.5, X es semi-L-sumando de su bidual. Supongamos pues que $n^* > 0$ y tomemos $F \in X''$ tal que $n^*\| F + X \| = 1$. Usando nuevamente el hecho de que X es $|.|$-ideal de $X + \mathbb{K}F$ y la Proposición 2.11 obtenemos que $P_X(F)$ es una seudobola, esto es, existe $G \in X''$ tal que:

$$\overline{P_X(F)}^{w^*} = B_{X''}(G,1) \tag{1}$$

Por otro lado, es claro que

$$\overline{P_X(F)}^{w^*} \subset B_{X''}(F, \| F + X \|) \tag{2}$$

Si $x \in X$, con $\| G - x\| < 1$, entonces usando (1) y (2) se tiene:

$$\| F - x\| \leq \|F - G\| + \| G - x\| < \|F + X\| - 1 + 1 = \| F + X\|$$

lo cual es una clara contradicción. Por otro lado, para cada $x \in P_X(F)$, se tiene, en virtud de (1), que $\| G - x\| \leq 1$, y por tanto

$$\| G + X\| = 1 \tag{3}$$

Si ahora intersectamos en (1) con X obtenemos, ya que $P_X(F)$ es un subconjunto de X convexo y cerrado, que:

$$P_X(F) = P_X(G) \tag{4}$$

Por otra parte, como ya se ha dicho, X es $|.|$-ideal de $X + \mathbb{K}G$

y en consecuencia el diámetro de $P_X(G)$ es $2n^*\|G + X\| = 2n^*$ [35; Corollary 2.9]. Usando (1) y (4) tenemos:

$$2 = diam(B_{X''}(G,1)) = diam(P_X(F)^{w^*}) = diam(P_X(F)) = diam(P_X(G)) = 2n^*$$

esto es, $n^*=1$, y en consecuencia $\|.\| = M$. La conclusión es inmediata usando nuevamente que todo semi-M-idealoide es de hecho un M-ideal [35; Theorem 3.1 iii)].

Para los espacios de Banach que son ideales de su bidual tenemos la siguiente perfección:

2.18 COROLARIO

Si un espacio de Banach X es ideal de su bidual, entonces X es L-sumando o M-ideal de su bidual.

Demostración

Como hemos visto en el diagrama resumen, por otra parte evidente, todo ideal es semiidealoide. Aplicando el teorema anterior se tiene que X es semi-L-sumando o M-ideal de su bidual. Para concluir basta usar que los ideales que son a su vez semisumandos coinciden con los sumandos [35; Theorem 2.10].

CAPITULO III

CAPITULO III

ESPACIOS DE BANACH QUE SON SUBESPACIOS ABSOLUTOS DE SU BIDUAL

Sección I: *Preliminares*

Como ya señalamos anteriormente, los semisumandos, semiideales y semiidealoides son tipos especiales de una amplia clase de subespacios, "los subespacios absolutos", que fueron introducidos por primera vez en [36] con el objetivo central de hacer un estudio unificado de las tres clases de subespacios citados.

3.1 DEFINICION

Sea $|.|$ una norma absoluta y X un subespacio cerrado del espacio de Banach Y. Se dice que X es un $|.|$-*subespacio de* Y si X es un semi-$|.|$-ideal de $X+\mathbb{K}y$ para cada $y \in Y$. Se dice que X es un *subespacio absoluto de* Y si existe una norma absoluta $|.|$ tal que X es un $|.|$-subespacio de Y. Como siempre, $|.|$ es única salvados los casos triviales $X=\{0\}$, $X=Y$.

Continuando el camino iniciado en los capítulos anteriores, nuestro objetivo es, como ya se ha comentado, discutir la posibilidad de que un espacio de Banach sea subespacio absoluto de su bidual. Para centrar tanto este problema como el mismo concepto de subespacio absoluto, merece la pena destacar algunos de los resultados referentes a esta clase de subespacios obtenidos en [36].

No es difícil probar que, como ya se ha mencionado, si X es un semi-$[\cdot[$-ideal o un semi-$[\cdot[$-idealoide (en particular un semi-$[\cdot[$-sumando) de Y, entonces X es un $[\cdot[$-subespacio de Y [36; Lemma 1.1 y proposition 1.8 iii)]. Quizás la más importante perfección de la clase de los subespacios absolutos sea su invarianza por dualización y predualización, más concretamente, " X es $[\cdot|$-subespacio de Y si, y sólo si, X^0 es un $[\cdot[^*$-subespacio de Y' " [36; Theorem 1.14]

Si se recuerda que los conceptos de semiideal y semiidealoide se obtuvieron por predualización sucesiva del de semisumando, se comprenderá, a la vista del comentario anterior, que la clase de subespacios absolutos puede considerarse como eslabón final de una larga cadena, puesto que además de englobar a las clases de subespacios que motivaron su introducción, es estable cuando se la somete a las manipulaciones que habían producido nuevas clases de subespacios.

Si $n([\cdot[^*)=0$, todo $|\cdot|$-subespacio es de hecho un semi-$|\cdot|$-sumando [36; Proposition 1.15], en particular, los L-subespacios no son otra cosa que los semi-L-sumandos. Combinando este resultado con la observación sobre la estabilidad de los subespacios absolutos, respecto a la predualización, obtenemos que si $n([\cdot|)=0$, todo $[\cdot[$-subespacio es un semi-$|\cdot|$-ideal.

En el caso que tengamos simultáneamente $n([\cdot|) = 0 = n([\cdot[^*)$, deducimos que los $[\cdot[$-subespacios son $[\cdot[$-sumandos, en particular, el concepto de L^p-subespacio coincide con el de L^p-sumando ($1 < p < \infty$). Así pues, sólo pueden existir $[\cdot[$-subespacios "propios" esto es, que no sean semi-$[\cdot[$-ideales, ni semi-$[\cdot[$-idealoides (mucho menos semi-$[\cdot[$-sumandos), para normas absolutas $[\cdot[$ con $n.n^* > 0$.

De hecho, para cada norma absoluta $|.|$, con $n.n^*$ positivo, puede construirse un espacios de Banach con un $|.|$-subespacio propio [36; Theorem 3.11].

El objetivo central de este capítulo es contestar al siguiente problema:

3.2 PROBLEMA

Sea X un espacio de Banach subespacio absoluto de su bidual. ¿Puede asegurarse que X es un semi-L-sumando o un M-ideal de su bidual? .

Los resultados que vamos a obtener en lo que sigue, permiten apostar, sin miedo a equivocarse, por una respuesta afirmativa a esta pregunta, pero la persistencia de una pequeña laguna nos ha impedido establecer completamente una tal respuesta.

Un primer resultado en este sentido es el Teorema 2.16, que limita el tipo de norma absoluta a las normas hexagonales.

Otro resultado en la misma línea, bien que previamente conocido, lo codificamos en el siguiente enunciado

3.3 PROPOSICION

Si un espacio de Banach X es M-subespacio de su bidual, entonces X es M-ideal de su bidual.

Demostración

Puesto que $n(M)=0$, todo M-subespacio es de hecho un semi-M-ideal, por lo que bastará probar que todo espacio de Banach semi-M-ideal de su bidual es M-ideal de su bidual. Aunque este último resultado aparece en [43], optamos por hacer aquí una demostración elemental:

Si X es semi-$|\cdot|$-ideal de X'' , entonces $X^{\perp}$ es un semi-L-sumando de X''' y en particular X es un subespacio de Chebyshev de X'''. Por otra parte, es sabido que para cada $\theta \in X'''$, $\theta - J_{X'}J_X^t(\theta) \in P_{X^{\perp}}(\theta)$, por lo que $I - J_{X'}J_X^t$ resulta ser la semi-L-proyección correspondiente, y claramente esta es lineal.

Es el momento de enunciar una importante caracterización de los subespacios absolutos obtenida en [36] y que, para normas absolutas hexagonales, da lugar a una formulación especialmente cómoda que tomaremos como punto de partida para nuestro estudio posterior.

3.4 TEOREMA [36; Theorems 2.1 y 2.6]

Sea $|\cdot|$ una norma absoluta y X un $|\cdot|$-subespacio del espacio de Banach Y. Entonces X es un subespacio proximinal de Y , y para cada y en Y , se verifica:

i) $B_X^{int}(0,2n^*\|y+X\|) \subset P_X(y) - P_X(y) \subset B_X(0,2n^*\|y+X\|)$

ii) $\|y\| = |(d(0,P_X(y)) + n^*\|y+X\|, \|y+X\|)|$

Recíprocamente, si X es un subespacio proximinal de Y y se verifican las condiciones i) y ii), entonces X es un $|\cdot|$-subespacio del espacio real subyacente a Y, del propio Y, si este es real.

Por novedosas que puedan parecer las dos condiciones aparecidas en el teorema anterior, éstas habían sido ya objeto de estudio con anterioridad en ciertos casos particulares que vamos a comentar. En el caso $|\cdot|=M$, se tiene $n^*=1$, con lo que la segunda inclusión en *i)* es automática para cualquier subespacio, mientras que la primera inclusión toma la forma:

$$B_X^{int}(0,2\|y+X\|)\subset P_X(y)-P_X(y)$$

En [29; Theorem 1.2] A. Lima demostró que los subespacios proximinales, verificando esta condición son los semi-M-ideales. De hecho, prueba que la condición es equivalente a la llamada "propiedad de la 2-bola", una de las propiedades de intersección de bolas introducidas por E. Alfsen y E. Effros en [1,2] y ampliamente estudiadas con posterioridad [28, 29, 49].

Consideremos ahora la condición *ii)* del teorema anterior, en el caso que nos interesa, esto es, en el caso en que la norma absoluta es hexagonal (ver definición 2.15). Si $|\cdot| = |\cdot|_\gamma$, con $0\leq\gamma\leq 1$, tenemos como ya se dijo $n^*=1-\gamma$ y usando la definición de $|\cdot|_\gamma$, la condición *ii)* toma la siguiente forma especialmente sencilla:

$$\|y\| = d(0,P_X(y)) + \|y+X\|. \qquad (*)$$

Condición que resulta ser equivalente a otra propiedad de intersección de bolas, esta vez introducida por D. Yost [48]. Se dice que un subespacio cerrado de X del espacio de Banach Y posee la *propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola en Y*, si para cualesquiera bolas cerradas $B_Y(x,r)$, $B_Y(y,t)$ con $x\in X$ e $y\in Y$, verificando que $\|x-y\|<r+t$ y que $B_Y(y,t)\cap X\neq\emptyset$, ocurre que $B_Y(x,r)\cap B_Y(y,t)\cap X\neq\emptyset$.

Usando resultados de D. Yost [48], G.Godini [23; Corollary 4] demostró que X tiene la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola en Y si, y sólo si, X es un subespacio proximinal de Y y se verifica la condición $(*)$ para cada $y \in Y$. En [39; Proposition 3 i)] puede verse una demostración más directa de este resultado. Así pues, la condición *ii)* del teorema anterior, cuando la norma absoluta $|.|$ es hexagonal equivale a la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola de D. Yost.

Enlazando los Teoremas 2.16 y 3.4 con las anteriores observaciones llegamos a la siguiente reformulación de la propiedad de que un espacio de Banach sea subespacio absoluto de su bidual, que será nuestro punto de partida en el desarrollo que sigue.

3.5 TEOREMA

Supongamos que un espacio de Banach X es subespacio absoluto de su bidual, entonces:

a) X tiene la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola en X''

b) Existe r, con $0 \leq r \leq 1$, tal que para cada $F \in X''$, se tiene:

$$B_X^{int}(0,2r\|F + X\|) \subset P_X(F) - P_X(F) \subset B_X(0, 2r\|F + X\|).$$

Recíprocamente, si X verifica las condiciones a) y b), entonces el espacio real subyacente a X, el propio X si este es real, es un subespacio absoluto de su bidual, concretamente, es un $|.|_\gamma$-subespacio con $\gamma = 1 - r$.

Demostración

Si X es un $|.|$-subespacio de X'', el Teorema 2.16 nos dice que $|.|$ es una norma absoluta hexagonal. La afirmación *ii)* del Teorema 3.4 nos asegura entonces que X posee la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola en X''. mientras que la afirmación *i)* de dicho teorema equivale a la condición *b)* para $r = n^*$.

Recíprocamente, con los mismos argumentos, si X verifica las condiciones *a)* y *b)* entonces X es un subespacio proximinal de X'' y satisface las condiciones *i)* y *ii)* del Teorema 3.4 para la norma absoluta hexagonal $[\cdot[_{\gamma}$ con $\gamma = 1 - r$, luego basta aplicar dicho teorema.

Nótese que las condiciones *a)* y *b)* del teorema anterior no involucran explícitamente la norma absoluta $[\cdot[$ para la que X es subespacio absoluto de X''. Ello nos va a permitir, en lo sucesivo, "olvidar", al menos formalmente, la noción de subespacio absoluto y trabajar simplemente con aquellos espacios de Banach que verifican las condiciones *a)* y *b)* del teorema anterior. La situación no habrá cambiado nada, según el teorema, mientras se trate de espacios reales. Sin embargo, en el caso complejo, el nuevo planteamiento es ligeramente más general. Ello se debe al hecho de que para un espacio de Banach complejo Y puede ocurrir que un subespacio suyo X sea subespacio absoluto del espacio real subyacente a Y sin serlo de Y. Tal patología se da, sin ir más lejos, en el ejemplo ya citado de subespacio absoluto propio [36; Theorem 3.11].

Valga también este comentario para justificar el hecho de que los resultados de [36] que hemos citado en esta sección no son esenciales para el estudio que vamos a hacer, sino que su utilidad estriba en centrar dicho estudio.

Sección II. *Convexos de anchura constante.*

En un primer análisis del Teorema 3.5, y más concretamente de su afirmación *b)*, intentamos obtener algunas consecuencias elementales del hecho de que $P_X(F)$ sea un conjunto convexo, cerrado y acotado, y cuya diferencia consigo mismo contiene una bola cuyo radio es el diámetro de $P_X(F)$. Para evaluar dichas consecuencias fijemos una notación cómoda:

Dado K un subconjunto acotado de un cierto espacio normado, notamos:

$$[\![K [\![= Sup \{ [\![x [\![\ ; \ x \in K \}$$

Llamamos *radio exterior del conjunto* K al ínfimo de los radios de las bolas que contienen a K. Radio que notaremos por $r_e(K)$. Es claro que una bola de centro z y radio r contiene a K si, y sólo si, $[\![K - z [\![\leq r$, de donde se deduce que :

$$r_e(K) = Inf \{ [\![K - z [\![\ ; \ z \in X \} \qquad (1)$$

Por otra parte es claro que el diámetro de K es,

$$diam\ (K) = [\![K - K [\![= Sup \{ [\![K - x [\![\ ; \ x \in K \},$$

con lo que claramente $r_e(K) \leq diam\ (K)$.

Vamos a mejorar esta información. Definimos el *radio interior de* K , $r_i(K)$, como el supremo de los radios de las bolas contenidas en K. Notemos que $r_i(K)=0$ si, y sólo si, K tiene interior vacío. De hecho, se tiene:

3.6 LEMA

Si K *es un subconjunto acotado de un espacio normado* X *, se tiene:*

i) $r_e(K) + r_i(K) \leqq diam(K)$

ii) $\|K\| - diam(K) \leqq d(0,K)$

iii) Si además K *tiene centro de simetría, sea* x_0 *dicho centro de simetría, entonces:*

$$K \subset B_X(x_0, \frac{diam\ (K)}{2})$$

Demostración

i) Sea $z \in K$ y $t \geqq 0$, tales que $B_X(z,t) \subset K$. Para cada $x \in K$, tenemos

$$B_X(z - x,\ t) \subset K - x,$$

y por tanto

$$\|z - x\| + t = \|B_X(z - x,\ t)\| \leqq \|K - x\| \leqq diam\ (K)$$

tomando supremos cuando x recorre K obtenemos

$$\|z - K\| + t \leqq diam\ (K)$$

y por tanto usando *(1)*

$$r_e(K) + t \leqq diam\ (K)$$

con lo que basta ahora hacer tender t a $r_i(K)$ para obtener *i)*.

ii) Sean x e y en K

$$\|x\| \leqq \|x - y\| + \|y\| \leqq diam\ (K) + \|y\|$$

tomando ínfimo cuando y recorre K obtenemos

$$\|x\| \leqq diam\ (K) + d(0,K)$$

por lo que basta tomar supremo cuando x recorre K para concluir.

iii) Si $x \in K$ y x_0 es el centro de simetría de K , entonces $2x_0 - x$ también pertenece a K , y por tanto:

$$2\|x - x_0\| = \|2x - 2x_0\| \leq \|(2x_0 - x) - x\| \leq diam\ (K).$$

Veamos ahora como se completa el cuadro anterior si exigimos convexidad y una cierta condición sobre el interior de $K - K$, concretamente

3.7 PROPOSICION

Sea K *un conjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio normado* X *, tal que* $B_X^{int}(0,2r) \subset K - K$ *, con* $r \in \mathbb{R}_0^+$ *. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

i) $d(0,K) \leq Max\ \{0, \|K\| - 2r\}$

ii) $\{z \in X;\ \|K - z\| \leq 2r\} \subset K$

iii) $2r \leq r_e(K) + r_i(K)$

iv) Si además K tiene un centro de simetría, x_0*, entonces*

$$B_X(x_0,r) \subset K$$

Demostración

i) Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $d(0,K) > 0$. Sea t un número real tal que $0 < t < d(0,K)$ y por tanto se tiene $B_X^{int}(0,t) \cap K = \emptyset$. Aplicando el Teorema de separación de convexos encontramos $f \in X'$, con $\|f\| = 1$ y verificando que $Re\ f(x) \geq t$, para cada $x \in K$, Dado s un número real positivo , existe $u \in X$ tal que $\|u\| = 1$, y con $Re\ f(u) > 1-s$. Tomando ahora $\alpha < 1$, se tiene por hipótesis que

$$2\alpha ru = y - z$$

Donde z e y son dos elementos de K . Entonces:

$$\|y\| \geq Re\ f(y) = Re\ f(2\alpha ru) + Re\ f(z) \geq 2\alpha r(1 - s) + t$$

de donde,

$$\| K \| \geq 2\alpha r(1 - s) + t$$

Haciendo tender α a 1, s a 0 y t a $d(0,K)$, obtenemos

$$\| K \| \geq 2r + d(0,K)$$

como se quería.

ii) Sea $z \in K$ tal que $\| K - z \| \leq 2r$. Si aplicamos *i)* al convexo $K - z$, se tiene $d(0, K - z) = 0$, esto es, $z \in K$ ya que K es cerrado.

iii) Si $2r \leq r_e(K)$, no hay nada que demostrar. Sea pues t un número real comprendido estrictamente entre $r_e(K)$ y $2r$; por definición de radio exterior, existe $y \in X$ tal que $\| K - y \| \leq t$. Si $\| z - y \| \leq 2r - t$, tenemos:

$$\| K - z \| \leq \| K - y \| + \| y - z \| \leq 2r$$

luego, aplicando *ii)*, $z \in K$. Hemos probado así que:

$$B_X(y, 2r - t) \subset K,$$

y por tanto, $r_i(K) \geq 2r - t$. Para concluir basta hacer tender t a $r_e(K)$.

iv) Sea $x \in X$, con $\| x - x_0 \| < r$, entonces

$$2(x - x_0) \in B_X^{int}(0, 2r) \subset K - K.$$

Sea $2(x - x_0) = a - b$, con $a, b \in K$. Por ser x_0 un centro de simetría de K tenemos que $2x_0 - b \in K$, y por ser K convexo,

$$x = (1/2)(a + 2x_0 - b) \in K.$$

Hemos probado, por tanto, que $B_X^{int}(x_0, r) \subset K$. Basta ahora aplicar que K es cerrado.

Las desiguladades e inclusiones del lema anterior se convierten en igualdad para aquellos conjuntos en los que la inclusión

$$B_X^{int}(0,2r) \subset K - K$$

se da para $r = (1/2)\, diam\,(K)$.

3.8 DEFINICION

Se dice que un subconjunto convexo, cerrado y acotado K de un espacio normado X *tiene anchura constante* si verifica que:

$$B_X^{int}(0, diam\,(K)) \subset K - K$$

Como consecuencia del Lema 3.6 y de la Proposición 3.7, obtenemos:

3.9 COROLARIO

Sea K un subconjunto convexo, cerrado y acotado, de anchura constante, de un espacio normado X. Entonces se verifica:

i) $d(0,K) = Max\,\{0, \|K\| - diam\,(K)\}$

ii) $K = \{z \in X;\ \|K - z\| \leq diam\,(K)\}$

iii) $diam\,(K) = r_e(K) + r_i(K)$

iv) Si K tiene un centro de simetría, x, entonces

$$K = B_X(x,(1/2)\, diam\,(K))$$

Sección III: *Nuevas propiedades de intersección de bolas*

Con objeto de disponer de una expresión más cómoda de los resultados que siguen, vamos a introducir, o mejor a dar nombre, a las propiedades que han aparecido en la nueva formulación del teorema de caracterización de los subespacios absolutos, Teorema 3.5.

3.10 DEFINICION

Sea r un número real, con $0 \leqq r \leqq 1$, y X un subespacio proximinal del espacio de Banach Y. Diremos que X *tiene la propiedad $I(r)$ en* Y cuando se verifica, para cada $y \in Y$, que :

$$B_X^{int}(0, 2r\|y + X\|) \subset P_X(y) - P_X(y)$$

Se dirá que X *tiene la propiedad $E(r)$ en* Y cuando se tiene para cada $y \in Y$, que:

$$\|P_X(y)\| \leq \|y\| + (2r - 1)\|y + X\|$$

Finalmente, diremos que X *tiene la propiedad $A(r)$ en* Y cuando X tenga simultáneamente las propiedades $I(r)$ y $E(r)$ en Y .

Analicemos ahora brevemente los casos $r = 0$, $r = 1$. Si $r = 1$, la propiedad $I(r)$ equivale, como sabemos, a la propiedad de la 2-bola y caracteriza a los Semi-M-ideales; en cambio la propiedad $E(1)$ es verificada por cualquier subespacio proximinal.

Por otra parte, la propiedad $I(0)$ carece de contenido, mientras que la propiedad $E(0)$ caracteriza, como vamos a ver, a los semi-L-sumandos. En efecto, sea X un subespacio proximinal de Y verificando que, para cada $y \in Y$

$$\|P_X(y)\| \leq \|y\| - \|y + X\|$$

fijados $y \in Y$, $x \in P_X(y)$, tenemos, poniendo $y - x$ en lugar de y, que

$$\|P_X(y) - x\| \leq \|y - x\| - \|y + X\| = 0$$

luego, $P_X(y) = \{x\}$, de donde X es un subespacio de Chebyshev de Y. Por otra parte, si para cada $y \in Y$ notamos $\pi(y)$ al único punto de $P_X(y)$, tenemos que π es una semiproyección de Y sobre X y que

$$\|\pi(y)\| = \|P_X(y)\| \leq \|y\| - \|y + X\| = \|y\| - \|y - \pi(y)\|$$

de donde X es un semi-L-sumando de Y. El recíproco es evidente.

Para todo valor de r se tiene trivialmente que si X tiene la propiedad $I(r)$ en Y, también tiene la propiedad $I(s)$ para $0 \leqq s \leqq r$. Es igualmente evidente que si X tiene la propiedad $E(r)$ en Y, también tiene la propiedad $E(s)$ para $r \leqq s \leqq 1$.

Como se ha dicho, la propiedad $I(1)$ puede expresarse mediante formulaciones equivalentes, todas ellas útiles dependiendo del ambiente de trabajo. En lo que sigue, nosotros también utilizaremos otra formulación de la propiedad $I(r)$, en la que se pone de manifiesto que es una propiedad de intersección de bolas.

<u>3.11 LEMA</u>

Sea X un subespacio proximinal en Y y r un número real comprendido entre cero y uno. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) X tiene la propiedad $I(r)$ en Y.

ii) Para cualesquiera $x \in X$, $y \in Y$, con $\|x\| < \|y + X\|$, se tiene $B_Y(y + rx, \|y + X\|) \cap B_Y(y - rx, \|y + X\|) \cap X \neq \emptyset$

Demostración

Si $r = 0$, ambas afirmaciones se reducen a la proximinalidad de X. Sea pues r positivo, y sean $y \in Y$, $x \in X$, con $\|x\| < \|y + X\|$; por tanto $2rx = z' - z''$, $z', z'' \in P_X(y)$, con lo que

$$\|y + rx - (1/2)(z' + z'')\| = \|y - z''\| = \|y + X\| = \|y - z'\| =$$
$$= \|y - rx - (1/2)(z' + z'')\|,$$

luego

$$(1/2)(z' + z'') \in B_Y(y + rx, \|y + X\|) \cap B_Y(y - rx, \|y + X\|) \cap X,$$

probándose así que *i)* fuerza *ii)*.

Recíprocamente, sean $y \in Y$, $x \in X$, tales que $\|x\| < 2r\|y + X\|$, esto es, $\|(1/2r)x\| < \|y + X\|$. Por *ii)* existe un $z \in B_Y(y + (1/2)x, \|y + X\|) \cap B_Y(y - (1/2)x, \|y + X\|) \cap X$, y por tanto $(1/2)x + z$, $-(1/2)x + z$ pertenecen a $P_X(y)$, luego

$$x = (1/2)x + z - (-(1/2)x + z) \in P_X(y) - P_X(y).$$

Pasamos ahora a relacionar estas nuevas propiedades con las propiedades de la $1\frac{1}{2}$-bola y de la acotación del diámetro,

$$diam\ (P_X(y)) \leq 2r\|y + X\|,$$

que eran las propiedades que realmente aparecían en el Teorema 3.5.

3.12 PROPOSICION

Sea $r \in [0, 1]$ y X un subespacio proximinal de Y. Cada una de las afirmaciones que a continuación se exponen fuerza la siguiente:

i) X tiene la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola en Y, y se verifica además que, para cada y en Y,

$$diam\ (P_X(y)) \leq 2r\|y + X\|$$

ii) X tiene la propiedad $E(r)$ en Y

iii) Para cada y en Y, $diam\ (P_X(y)) \leq 2r\|y + X\|$.

<u>*Demostración*</u>

i) fuerza ii). Sean $x, z \in P_X(y)$. Aplicando la acotación del diámetro tenemos:

$$\|x\| \leq \|x - z\| + \|z\| \leq diam\,(P_X(y)) + \|z\| \leq 2r\|y + X\| + \|z\|$$

Tomando ínfimo cuando z recorre $P_X(y)$ y aplicando la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola, tenemos:

$$\|x\| \leq 2r\|y + X\| + d(0, P_X(y)) = 2r\|y + X\| + \|y\| - \|y + X\| =$$
$$= \|y\| + (2r - 1)\|y + X\|$$

Basta ahora tomar supremos cuando x recorre $P_X(y)$.

ii) fuerza iii). Dados $y \in Y$, $x, z \in P_X(y)$, se tiene:

$$\|z - x\| \leq \|P_X(y) - x\| = \|P_X(y - x)\| \leq \|y - x\| + (2r - 1)\|y + X\| =$$
$$= 2r\|y + X\|.$$

Baste el siguiente ejemplo, para probar que las implicaciones de la proposición anterior no son reversibles.

<u>3.13 EJEMPLO</u>

Sea X un L^2-sumando, no trivial, de Y (por ejemplo Y podría ser cualquier espacio de Hilbert y X cualquier subespacio cerrado). Entonces X es un subespacio de Chebyshev de Y, claramente X no tiene la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola en Y y no es difícil comprobar que X tiene la propiedad $E(r)$ en Y si, y sólo si, $r \geq 1/2$.

Por tanto X , que obviamente verifica la afirmación *iii)* de la proposición para cualquier valor de r , no tiene la propiedad $E(r)$ en Y, para $r < 1/2$. En cambio, si $r \geq 1/2$, X verifica *ii)* pero no *i)*.

Así pues, hemos visto que la propiedad $E(r)$ es estrictamente más fuerte que la acotación $diam\,(P_X(y)) \leq 2r\|y + X\|$ que venía sugerida por el Teorema 3.5. El interés de este fortalecimiento se pondrá de manifiesto más adelante (ver por ejemplo Teorema 3.17 y Lema 3.28).

3.14 PROPOSICION

Si X *tiene la propiedad* $A(r)$ *en* Y *, entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

i) X *tiene la propiedad de la* $1\frac{1}{2}$*-bola en* Y

ii) $\|y\| \leq Max\{\|y + X\|, \|P_X(y)\| + (1 - 2r)\|y + X\|\}$,
para cada $y \in Y$.

Demostración

i) Dados y en Y, x en $P_X(y)$, se tiene:

$$\|y\| \leq \|y - x\| + \|x\| = \|y + X\| + \|x\|$$

Tomando ínfimo cuando x recorre $P_X(y)$, obtenemos que

$$\|y\| \leq \|y + X\| + d(0,P_X(y))\,.$$

Para probar la desigualdad contraria, observemos que si $0 \in P_X(y)$, dicha desigualdad es trivial. Tomemos pues $y \in Y$ tal que $0 \notin P_X(y)$ y apliquemos la Proposición 3.7 al convexo $P_X(y)$ y el hecho de que X tiene la propiedad $E(r)$ en Y, con lo que obtendremos:

$$d(0,P_X(y)) \leq \|P_X(y)\| - 2r\|y + X\| \leq \|y\| + (2r - 1)\|y + X\| - 2r\|y+X\| =$$
$$= \|y\| - \|y + X\|$$

como queríamos probar.

ii) Dado $y \in Y$, aplicando la Proposicion 3.12, $P_X(y)$ tiene anchura constante, y por tanto, en virtud del Corolario 3.9, tenemos:

$$d(0,P_X(y)) = Max\,\{0, \|P_X(y)\| - 2r\|y + X\|\}$$

y aplicando la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola obtenemos finalmente:

$$|[y]| = d(0, P_X(y)) + \| y + X \| = Max \{ \| y + X \|, \| P_X(y) \| + (1-2r) \| y \| \}$$

Las proposiciones 3.12 y 3.14 permiten reformular el Teorema 3.4 para normas hexagonales, obteniéndose una nueva caracterización de los subespacios absolutos, para este tipo de normas.

3.15 TEOREMA

Sea X *un subespacio proximinal del espacio de Banach* Y*. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) X *verifica la propiedad* $A(r)$ *en* Y *para algún* r *, con* $0 \leqq r \leqq 1$ *.*

ii) Existe γ *,* $0 \leqq \gamma \leqq 1$ *, tal que* X *es un* $|.|_\gamma$*-subespacio del espacio real subyacente a* Y *, del propio* Y *si este es real.*

Caso de que se cumplan i) y ii) se tiene $1 - r = \gamma$.

La afirmación *ii)* de la Proposición 3.14 nos da una consecuencia de la propiedad $A(r)$ que tendrá su importancia más adelante. Por ahora, como sencilla aplicación de este hecho, obtenemos el siguiente resultado que también tendrá su utilidad posteriormente.

3.16 COROLARIO

Si X *tiene la propiedad* $A(r)$ *en* Y *y existe una simetría isométrica en* Y *, cuyo conjunto de puntos fijos es* X *, entonces* X *es un sumando de* Y*.*

Demostración

Sea S una simetría isométrica en Y cuyo conjunto de puntos fijos es X . Notando $q = (1/2)(S + I)$, es inmediato comprobar que q es una proyección lineal en Y cuya imagen es X .

Sean $y \in Y$, $x \in P_X(y)$ y veamos que $2q(y) - x \in P_X(y)$. Para ello observemos que:

$$\|y - 2q(y) + x\| = \|y - x - 2q(y - x)\| = \|- S(y - x)\| = \|y - x\| =$$
$$= \|y + X\|$$

y puesto que $q(y) = (1/2)(2q(y) - x + x)$, de hecho hemos probado que $q(y)$ es un centro de simetría para el conjunto de anchura constante $P_X(y)$. Aplicando el Corolario 3.9 ,*iv*, se tiene que para cada $y \in Y$:

$$P_X(y) = B_X(q(y), r\|y + X\|)$$

y por tanto,

$$\|P_X(y)\| = \|q(y)\| + r\|y + X\|$$

Aplicando la Proposición 3.14, *ii)*, tenemos:

$$\|y\| = Max\{\|y + X\|, \|q(y)\| + r\|y + X\| + (1 - 2r)\|y + X\|\} =$$
$$= Max\{\|y + X\|, \|q(y)\| + (1 - r)\|y + X\|\} = [(\|q(y)\|, \|y - q(y)\|)[$$

donde $[.[= [.[_\gamma$ con $\gamma = 1 - r$. Hemos probado que q es una $[.[$-proyección de Y sobre X como se quería.

Con los siguientes resultados pretendemos hacer un estudio del comportamiento de las propiedades $I(r)$, $E(r)$ y $A(r)$ por dualidad, resultando de ello algunas consecuencias importantes. Por un lado, la abundancia de mejores aproximaciones en X fuerza una acotación para las mejores aproximaciones en el anulador de X y viceversa. Por otro, se encuentran nuevas condiciones equivalentes a la propiedad $A(r)$ que revierten en nuevas caracterizaciones de los subespacios absolutos para las normas hexagonales. Finalmente, obtenemos una condición necesaria para que X sea ideal propio, de la cual se deduce una importante perfección del Teorema 2.17.

3.17 TEOREMA

Sea X un subespacio proximinal de Y y $r \in [0,1]$. Si X tiene la propiedad $I(r)$ en Y, entonces X^0 tiene la propiedad $E(1-r)$ en Y'. Análogamente, si X^0 tiene la propiedad $I(r)$ en Y', entonces X tiene la propiedad $E(1-r)$ en Y.

Demostración

Supongamos que X tiene la propiedad $I(r)$ en Y. Sean $g \in Y'$, $f \in P_{X^0(g)}$, $y \in Y$, $x \in X$ tales que $\|x\| < 1 = \|y + X\|$. Aplicando el Lema 3.11, existe un $z \in X$, verificando que

$$\|y \pm rx - z\| \leq 1$$

usando que $f(z)=0$, se comprueba de forma inmediata que:

$$2f(y) + 2r(g-f)(x) = g(y + rx - z) + (2f-g)(y - rx - z)$$

de donde,

$$2Ref(y) + 2rRe(g-f)(x) \leq \|g\| \, \|y + rx - z\| + \|2f - g\| \, \|y - rx - z\| \leq$$
$$\leq \|g\| + \|2f - g\|.$$

Tomando supremo cuando x recorre la bola abierta unidad de X y usando que $\|g-f\| = \|g - f + X^0\| = \|(g-f)/X\|$, tenemos:

$$2Ref(y) + 2r\|g-f\| \leq \|g\| + \|2f-g\|,$$

de donde,

$$2Ref(y) \leq \|g\| + (1-2r)\|g-f\| + \|f\|.$$

Si ahora tenemos en cuenta la identificación de X^0 con $(Y/X)'$, que nos permite considerar f como elemento de $(Y/X)'$ y tomamos supremos cuando $y + X$ recorre la esfera unidad de Y/X, obtenemos:

$$2\|f\| \leq \|g\| + (1-2r)\|g-f\| + \|f\|$$

o lo que es lo mismo,

$$\|f\| \leq \|g\| + (1 - 2r)\|g + X^0\| .$$

Puesto que f es un elemento arbitrario de $P_{X^0}(g)$, hemos probado así que:

$$\|P_{X^0}(g)\| \leq \|g\| + [2(1 - r) - 1]\|g + X^0\|$$

esto es , que X^0 tiene la propiedad $E(1 - r)$ en Y' .

Supongamos ahora que X^0 tiene la propiedad $I(r)$ en Y'. Entonces por lo ya demostrado, X^{00} tiene la propiedad $E(1 - r)$ en Y'' , esto es,

$$\|P_{X^{00}}(y'')\| \leq \|y''\| + (1 - 2r)\|y'' + X^{00}\| \qquad (*)$$

para todo $y'' \in Y''$. Ahora bien, dado $y \in Y$, es sabido que $\|J_Y(y) + X^{00}\| = \|y + X\|$, y que $J_Y(P_X(y)) \subset P_{X^{00}}(J_Y(y))$. Tomando pues $y'' = J_Y(y)$ en $(*)$, obtenemos:

$$\|P_X(y)\| \leq \|P_{X^{00}}(J_Y(y))\| \leq \|y\| + (1 - 2r)\|y + X\|$$

esto es, que X tiene la propiedad $E(1 - r)$ en Y .

Recordemos la relación entre extensiones Hahn-Banach y mejores aproximaciones en el dual, que se usará con frecuencia en lo que sigue. Si X es un subespacio de Y , $f \in X'$ y $\hat{f}$ es una extensión equinórmica de f a Y , entonces el conjunto de todas las extensiones equinórmicas de f a Y es $\hat{f} - P_{X^0}(\hat{f})$.

<u>3.18 TEOREMA</u>

Sea X un subespacio que tiene la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola en Y .

i) Si diam $(P_{X^0}(f)) \leq 2(1 - r)\|f + X^0\|$, para cada $f \in Y'$, entonces X tiene la propiedad $I(r)$ en Y.

ii) Si $diam\ (P_X(y)) \leq 2(1-r)\|y+X\|$, *para cada* $y \in Y$, *entonces* X^0 *tiene la propiedad* $I(r)$ *en* Y'.

Demostración

i) Supongamos que X tiene la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola en Y y que $diam\ (P_{X^0}(f)) \leq 2(1-r)\|f+X^0\|$ para cada $f \in Y'$. Por [49; Theorem 3], X^0 tiene la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola en Y' y, aplicando la Proposicion 3.12 (*i) fuerza ii)*), X^0 tiene la propiedad $E(1-r)$ en Y'.

Sean $f,g \in Y'$ con $f+g \in X^0$; vamos a probar que:

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| - 2r\|g+X^0\| \qquad (1)$$

En efecto, dado $h \in P_{X^0}(f)$, se tiene:

$$h-(f+g) \in P_{X^0}(f-(f+g)) = -P_{X^0}(g),$$

luego,

$$\|f+g\| \leq \|h\| + \|h-(f+g)\| \leq \|h\| + \|P_{X^0}(g)\|$$

Tomando ínfimo cuando h recorre $P_{X^0}(f)$, obtenemos:

$$\|f+g\| \leq d(0,P_{X^0}(f)) + \|P_{X^0}(g)\|. \qquad (2)$$

La propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola nos da:

$$d(0,P_{X^0}(f)) = \|f\| - \|f+X^0\| \qquad (3)$$

y la propiedad $E(1-r)$ nos da:

$$\|P_{X^0}(g)\| \leq \|g\| + (1-2r)\|g+X^0\| \qquad (4)$$

sustituyendo (3) y (4) en (2) y teniendo en cuenta que $\|f+X^0\| = \|g+X^0\|$, se obtiene (1).

Sean ahora $y \in Y$ y $x \in X$ con $\|x\| < \|y+X\|$. Se tiene claramente que:

$$|(g-f)(x)| \leq |g(x)| + |f(x)| \leq (\|f/X\| + \|g/X\|)\|x\| =$$

$$=2\|g+X^0\|\ \|x\| \leq 2\|g+X^0\|\ \|y+X\|$$

y, por otra parte, puesto que $f + g$ puede considerarse como elemento de $(Y/X)'$, tenemos:

$$|(f+g)(y)| \leq \|f + g\| \, \|y + X\| \leq (\|f\| + \|g\| - 2r\|g + X^0\|)\|y + X\|$$

donde se ha usado la desigualdad (1). Uniendo las dos desigualdades recién obtenidas, tenemos:

$$|f(y + rx) + g(y - rx)| \leq |(f + g)(y)| + r|(f - g)(x)| \leq$$
$$\leq (\|f\| + \|g\|)\|y + X\| \qquad (5)$$

Resumiendo, hemos probado que si $y \in Y$, $x \in X$ y $\|x\| < \|y + X\|$ se verifica (5) para cualesquiera $f, g \in Y'$ tales que $f + g \in X^0$. Aplicando [28; Theorem 1.1], tenemos, con las mismas condiciones sobre x e y que, para cada $\varepsilon > 0$,

$$B_Y(y + rx, \|y + X\| + \varepsilon) \cap B_Y(y - rx, \|y + X\| + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$$

Fijado $\varepsilon > 0$, sea x_ε perteneciente a X tal que

$$\|y \pm rx - x_\varepsilon\| \leq \|y + X\| + \varepsilon$$

o, lo que es lo mismo, por tener X la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola en Y

$$d(0, P_X(y \pm rx - x_\varepsilon)) < \varepsilon$$

Entonces $\pm rx - x_\varepsilon$ es un punto de $P_X(y) + B_X(0,\varepsilon)$ y, finalmente: $2rx = (rx - x_\varepsilon) - (-rx - x_\varepsilon)$ es un elemento de ,

$$[P_X(y) + B_X(0,\varepsilon)] - [P_X(y) + B_X(0,\varepsilon)] = P_X(y) - P_X(y) + B_X(0,2\varepsilon)$$

En vista de la arbitrariedad de ε, hemos probado que $2rx$ pertenece al cierre en norma de $P_X(y) - P_X(y)$, y puesto que x sólo estaba sometido a la condición $\|x\| < \|y + X\|$, hemos obtenido realmente que la bola $B_X^{int}(0, 2r\|y + X\|)$ está contenida en dicho cierre. Siendo $P_X(y)$ un subconjunto convexo, cerrado y acotado de X (completo), podemos aplicar [26; Corollary 22.5] para concluir que el interior de $P_X(y) - P_X(y)$ coincide con el de su cierre, luego

$$B_X^{int}(0, 2r\|y + X\|) \subset P_X(y) - P_X(y)$$

esto es, X tiene la propiedad $I(r)$ en Y, como se quería.

ii) La demostración es muy similar a la de *i)* e incluso con una simplificación en la última parte.

Dados $g \in Y'$, $f \in X^0$ con $\|f\| < \|g + X^0\|$, razonando de manera análoga a como se hizo en *i)* para probar *(5)*, obtenemos:

$$|(g + rf)(y) + (g - rf)(z)| \leqq (\|y\| + \|z\|)\|g + X^0\| \qquad (5')$$

para cualesquiera $y, z \in Y$ y tales que $y + z \in X$. Estamos por tanto en condiciones de aplicar [28; Theorem 1.2] para obtener que si $g \in Y'$, $f \in X^0$ con $\|f\| < \|g + X^0\|$, se tiene:

$$B_{Y'}(g + rf, \|g + X^0\|) \cap B_{Y'}(g - rf, \|f + X^0\|) \cap X^0 \neq \emptyset$$

(en la demostración de *i)*, la propiedad análoga a esta se obtenía sólo "aproximadamente", pero ahora tenemos la ventaja de trabajar en un espacio dual con un subespacio débil-*-cerrado).

Aplicando el Lema 3.11, tenemos que X^0 tiene la propiedad $I(r)$ en Y' tal como se quería.

Los dos teoremas anteriores conducen de forma inmediata al siguiente resultado que nos proporciona dos nuevas caracterizaciones de los subespacios absolutos para normas hexagonales.

<u>3.19 COROLARIO</u>

Sea X un subespacio proximinal de Y y $r \in [0,1]$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) X tiene la propiedad $A(r)$ en Y

ii) X^0 tiene la propiedad $A(1 - r)$ en Y'

iii) X tiene las propiedades $E(r)$ y de la $1\frac{1}{2}$-bola en Y y X^0 tiene la propiedad $E(1 - r)$ en Y'

iv) X *y* X^0 *tienen, respectivamente, la propiedad* $I(r)$ *en* Y *e* $I(1-r)$ *en* Y' .

<u>*Demostración*</u>

i) fuerza ii). X tiene la propiedad $I(r)$ en Y , luego por el Teorema 3.17 , X^0 tiene la propiedad $E(1-r)$ en Y'. Por otra parte, X tiene la propiedad $E(1-r)$ en Y (Proposición 3.14) y la propiedad $E(r)$ en Y , luego por el Teorema 3.18 *ii)*, X^0 tiene la propiedad $I(1-r)$ en Y'.

ii) fuerza iii). Por la Proposición 3.14, X^0 tiene la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola en Y'. En virtud de [49; Theorem 3], X también la tiene en Y . Que X tiene la propiedad $E(r)$ en Y se deduce del Teorema 3.17.

iii) fuerza iv). Basta aplicar *i)* y *ii)* del Teorema 3.18.

iv) fuerza i). Por el Teorema 3.17, X tiene la propiedad $E(r)$ en Y , pero por hipótesis tambien tiene la $I(r)$.

Como segunda aplicación de los teoremas anteriores, podemos encontrar condiciones sobre un espacio de Banach que permitan asegurar que se cumple la hipótesis del Teorema 2.10, con lo que llegamos a una condición necesaria, para que un espacio de Banach sea ideal propio, más natural que la dada por dicho teorema.

<u>3.20 COROLARIO</u>

Sea X *un espacio de Banach que tiene la propiedad de la* $1\frac{1}{2}$*-bola en* X'' *y verificando que existe* $r < 1$ *, tal que* $\operatorname{diam}(P_X(F)) \leq \leq 2r\|F+X\|$*, para cada* $F \in X''$*. Entonces* X *no puede ser ideal propio de ningún espacio de Banach.*

Demostración

Aplicando el Teorema 3.18 *ii)*, obtenemos que $X^{\perp}$ tiene la propiedad $I(1-r)$ en X'''. Dado $f \in X'$, $f \neq 0$, se tiene por tanto que: $P_{X^{\perp}}(f) - P_{X^{\perp}}(f)$ contiene una bola de radio $2(1-r)\|f + X^{\perp}\| = 2(1-r)\|f\|$, con lo que se cumplen sobradamente las hipótesis del Teorema 2.10, bastando aplicar dicho teorema para concluir.

3.21 COROLARIO

Sea X un subespacio absoluto de su bidual y supongamos que existe F en X'', $F \notin X$, tal que X es un ideal de $X + \mathbb{K}F$. Entonces X es M-ideal o semi-L-sumando de X''.

Demostración

Sea X $[.[$-subespacio de X''; por el Teorema 2.16 la norma absoluta $[.[$ ha de ser hexagonal, $[.[= [.[_{\gamma}$ con $0 \leqq \gamma \leqq 1$. Por el Teorema 3.15, X verifica la propiedad $A(r)$ en X'' con $r = 1 - \gamma$. Si $r = 1$, X es un M-subespacio de X'', por tanto, aplicando la Proposición 3.3, X es M-ideal de X''. Si $r < 1$, podemos usar el corolario anterior, para deducir que X es sumando de $X + \mathbb{K}F$ donde F es el elemento de X'' que aparece en el enunciado. Por el Teorema 1.9, X es un L-sumando de $X + \mathbb{K}F$, luego $[.[= L$ y X es un semi-L-sumando de X''.

El corolario anterior podría haberse probado ya en el capítulo II, pero su contenido encaja mejor con los resultados del presente capítulo. Nótese que la hipótesis del corolario es ligerísimamente más fuerte que la de que X sea subespacio absoluto de su bidual. No obstante, un subespacio X de un espacio de Banach Y puede ser subespacio absoluto, incluso semiideal, de Y y no ser ideal de $X + \mathbb{K}y$ para ningún $y \in Y$, $y \notin X$. Piénsese por ejemplo que existen semiideales no ideales con codimensión uno. Por otra parte, dicha hipótesis es bastante más débil por ejemplo, que la de que X sea semiidealoide de su bidual, que fue usada en el principal resultado del capítulo II (Teorema 2.17).

En la siguiente sección trabajamos ya con la hipótesis general de que X sea sólo subespacio absoluto de su bidual.

Sección IV: *El Teorema principal*

Probamos en esta sección el resultado principal de la presente memoria, haciendo uso de las técnicas desarrolladas en las secciones precedentes. La demostración tiene su punto álgido en dos resultados independientes, que rompen el problema, uno para valores del índice de la norma menores que $1/2$ (Teorema 3.24), y otro para valores mayores que $1/2$ (Teorema 3.26). Las técnicas en uno y otro caso son muy diferentes y curiosamente no son aplicables a los espacios de Banach que son $[\cdot[_{\frac{1}{2}}$-subespacios de su bidual, única laguna que deja el teorema. Con todo, se prueba que estos espacios de Banach que son $[\cdot[_{\frac{1}{2}}$-subespacios de su bidual no pueden ser ni separables ni retículos de Banach.

3.22 LEMA

Sea X un espacio de Banach que tiene la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola en su bidual y supongamos que la norma de X es Fréchet-diferenciable al menos en un punto. Entonces para cada $r < 1$, existe $F \in X''$ tal que $\operatorname{diam}(P_X(F)) > 2r\|F + X\|$.

Demostración

Sea x un punto de Fréchet-diferenciabilidad de la norma de X; no es restrictivo suponer que $\|x\| = 1$. Por un conocido resultado de Smulyan (ver por ejemplo [3; Corollary 4.5]) la norma de X'' también es Fréchet-diferenciable en x y, en particular, x es un punto suave de X'', esto es, existe un único elemento $\theta \in X'''$ tal que $\|\theta\| = \theta J_X(x) = 1$. De hecho, $\theta = J_{X'}(f)$, para algún $f \in X'$. Para cada $w \in P_{X^\perp}(\theta)$, se tiene:

$$\| \theta - w \| = \| \theta + X^{\perp} \| = \| J_{X'}(f) + X^{\perp} \| = \| f \| = 1$$

verificándose además,

$$(\theta - w) J_X(x) = \theta J_X(x) = 1,$$

luego, la unicidad de θ nos dice que $w = 0$ y hemos probado que

$$P_{X^{\perp}}(\theta) = \{0\}.$$

En suma, la existencia de un punto en el que la norma de X es Fréchet-diferenciable, nos ha permitido encontrar un elemento de X''', no en X, cuyo conjunto de mejor aproximación en $X^{\perp}$ es unitario.

Si no se cumpliera la tesis del lema existiría $r < 1$, verificando, para cada $F \in X''$, que:

$$diam\,(P_X(F)) \leq 2r \| F + X \| .$$

Por el Teorema 3.18 *ii)*, X tendría la propiedad $I(r)$ en X'' y en particular tendríamos:

$$B_X^{int}\,(0, 2(1-r) \| \theta + X^{\perp} \|) \subset P_{X^{\perp}}(\theta) - P_{X^{\perp}}(\theta) = \{0\}$$

lo cual es una contradicción, pues $1-r > 0$ y $\| \theta + X^{\perp} \| = 1$.

A la vista del lema anterior, si X verifica la propiedad $A(r)$ en X'' y la norma de X es Fréchet-diferenciable al menos en un punto, deberá tenerse $r=1$. Si X' tiene la propiedad de Radon Nikodym, podemos asegurar la existencia, e incluso la abundancia, de puntos de Fréchet-diferenciabilidad de la norma de X. Ello motiva el siguiente lema, crucial, que es extensión de un resultado de A. Lima [29; Theorem 2.6], cuya técnica de demostración adaptamos a nuestro caso más general.

3.23 LEMA

Sea X un espacio de Banach real, verificando la propiedad $I(r)$ en su bidual, con $r > 1/2$. Entonces X' tiene la propiedad de Radon Nikodym.

Demostración

Supongamos, por reducción al absurdo, que X' no tiene la propiedad de Radon Nikodym, o equivalentemente ([45,46], ver también [15; Capter VII, Section 4 , Corollary 1]) que existe un subespacio separable de X cuyo dual no es separable. Siguiendo exactamente la misma argumentación de A. Lima [29; Theorem 2.6], basada en un importante resultado de C. Stegall, dados dos números reales positivos , ε , t con $\varepsilon + t \leqq 1$, podemos encontrar dos sucesiones, $\{x_n\}$ en la bola unidad de X y $\{f_m\}$ en la bola unidad de X' , tales que:

(1) $f_m(x_n) \geqq t$, cuando $m \geqq n$

(2) $|f_m(x_n)| \leqq \varepsilon$, cuando $m < n$.

El Teorema de Banach- Alaoglu nos proporciona sendos valores de adherencia, F en la bola unidad de X'' y f en la de X' , de las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{f_m\}$ en las topologías débil-* de X'' y X' respectivamente. Las condiciones (1) y (2) nos permiten asegurar que:

$$f(x_n) \geqq t \quad \text{y} \quad |F(f_m)| \leqq \varepsilon \qquad (3)$$

para cualesquiera m y n.

Supongamos por un momento que $F \notin X$; entonces:

$$(1+\varepsilon)^{-1} \|x_1\| \, \|F + X\| < \|F + X\|$$

y el Lema 3.11 nos dice entonces que:

$$B_{X''}(F + r(1+\varepsilon)^{-1}\|F + X\| x_1, \|F+X\|) \cap B_{X''}(F - r(1+\varepsilon)^{-1}\|F+X\| x_1, \|F+X\|) \cap$$

$$\cap X \neq \emptyset .$$

y si z es un punto de dicha intersección, se tiene:

$$\| F \pm rx_1 - z \| \leq$$

$$\leq \| F \pm r(1+\varepsilon)^{-1} \| F+X \| x_1 - z \| + \| rx_1 - r(1+\varepsilon)^{-1} \| F+X \| x_1 \| \leq$$

$$\leq \| F+X \| + r \| x_1 \| (1 - (1+\varepsilon)^{-1} \| F+X \|) \leq \| F+X \| + 1 - (1+\varepsilon)^{-1} \| F+X \| =$$

$$1 + (1+\varepsilon)^{-1} \varepsilon \| F+X \| \leq 1 + \varepsilon .$$

Si $F \in X$, basta tomar $z = F$ para obtener, trivialmente, las mismas desigualdades. Así pues, en cualquier caso, existe $z \in X$, tal que:

$$\| F \pm rx_1 - z \| \leq 1 + \varepsilon \qquad (4)$$

Se tiene por tanto, para cada número natural m,

$$| F(f_m) \pm f_m(rx_1) - f_m(z) | \leq 1 + \varepsilon ,$$

lo que junto con (3) nos da:

$$| f_m(z) \pm f_m(rx_1) | \leq 1 + 2\varepsilon .$$

Usando estas dos desigualdades y el hecho de que por (1) se tiene $f_m(x_1) \geq t$, obtenemos:

$$- 1 - 2\varepsilon + rt \leq f_m(z) - f_m(rx_1) + rf_m(x_1) = f_m(z) = f_m(z) + f_m(rx_1) -$$

$$- rf_m(x_1) \leq 1 + 2\varepsilon - rt ,$$

de donde,

$$| f_m(z) | \leq 1 + 2\varepsilon - rt ,$$

y por ser f un valor adherente de $\{f_m\}$

$$| f(z) | \leq 1 + 2\varepsilon - rt \qquad (5)$$

Por otra parte, se tiene igualmente a partir de (4):

$$| F(f) - f(z) \pm f(rx_1) | \leq 1 + \varepsilon$$

Con idéntico razonamiento al seguido para probar (5), usando que $f(x_1) \geq t$, obtenemos ahora :

$$| F(f) - f(z) | \leq 1 + \varepsilon - rt \qquad (6)$$

A partir de (3), por ser F valor adherente a $\{x_n\}$ en la topología débil-* de X'', tenemos $F(f) \geq t$, y usando (5) y (6),

$$t \leq |F(f)| \leq |F(f) - f(z)| + |f(z)| \leq 2 + 3\varepsilon - 2rt .$$

Haciendo tender ε a 0 y después t a 1 en la desigualdad anterior, se tiene $r \leq 1/2$, en contra de la hipótesis.

3.24 TEOREMA

Sea $r > 1/2$ *y* X *un espacio de Banach, con la propiedad* $A(r)$ *en su bidual. Entonces* X *es M-ideal de su bidual.*

Demostración

En primer lugar, observemos que la propiedad $A(r)$ no involucra al cuerpo base, con lo que X tiene la propiedad $A(r)$ en X'' si, y sólo si, $X_{\mathbb{R}}$ (espacio real subyacente) tiene dicha propiedad en su bidual, que es identificable con $(X''_{\mathbb{R}})$. En segundo lugar, es conocido, ver por ejemplo [37; Teorema 15.10], que los M-ideales están $\mathbb{R}$-determinados, esto es, los M-ideales de un espacio de Banach complejo coinciden con los del real subyacente.

En virtud del lema anterior, X' tiene la propiedad de Radon Nikodym, con lo que aplicando un resultado de C. Stegall ([45; Lemma 2.7], ver también [15; Chapter VII, Section 5]), tenemos asegurada la existencia de puntos de la esfera de X en los que la norma es Fréchet-diferenciable. Por otra parte, se tiene que para cada $F \in X''$,

$$diam\ (P_X(F)) \leq 2r\|F + X\|,$$

por lo que el Lema 3.22 no deja más salida que $r = 1$. Así pues, X es un M-subespacio de su bidual, y por tanto, M-ideal de su bidual (Proposición 3.3)

Pasemos ahora a considerar el caso $r < 1/2$. La técnica para resolver este caso es bastante más elemental. Usaremos el siguiente lema debido a K. Saatkamp [43] , del que improvisamos una sencilla demostración.

3.25 LEMA [K. Saatkamp]

Si X es un espacio de Banach cualquiera, entonces $P_X(F)$ tiene interior vacío en X , para todo $F \in X''$.

Demostración

Supongamos por reducción al absurdo que existen $F \in X''$, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, tales que: $B_X(x,\varepsilon) \subset P_X(F)$. Puesto que evidentemente para cada $F \in X''$, $P_X(F) \subset B_{X''}(F, \|F + X\|)$, y esta última bola es débil-*-cerrada , el cierre débil-* de $B_X(x,\varepsilon)$ seguirá contenido en dicha bola, esto es:

$$B_{X''}(x,\varepsilon) \subset B_{X''}(F, \|F + X\|)$$

con lo que $\|F - x\| \leq \|F + X\| - \varepsilon$, lo cual es una contradicción.

3.26 TEOREMA

Sea $r < 1/2$ y X un espacio de Banach con la propiedad $A(r)$ en X'' . Entonces X es un semi-L-sumando de X''.

Demostración

Sea $G \in X''$ fijo; dado que X tiene la propiedad $E(r)$ en X'', la Proposición 3.12 nos asegura que:

$$diam\,(P_X(G)) \leq 2r\|G + X\|,$$

pero, puesto que X también tiene la propiedad $I(r)$ en X'' , deberá ser:

$$diam\ (P_X(G)) = 2r\|G + X\|.$$

Por el lema anterior $P_X(G)$ tiene interior vacío en X , y, puesto que $P_X(G)$ tiene anchura constante, deducimos que su radio exterior coincide con su diámetro (Corolario 3.9), esto es,

$$r_e(P_X(G)) = 2r\|G + X\| .$$

Dado ahora $F \in X''$ arbitrario , y tomando cualquier elemento $y \in P_X(F)$, se deduce de la definición de radio exterior que:

$$r_e(P_X(G)) \leqq \|P_X(G) - y\| \leqq \|P_X(G) - P_X(F)\|$$

y, en suma, para cada $F \in X''$,

$$2r\|G + X\| \leqq \|P_X(G) - P_X(F)\| \qquad (1)$$

Sea ahora A el cierre de $P_X(G)$ en la topología débil-* de X'' y tomemos $F \in A$. La semicontinuidad inferior de la norma para dicha topología débil-* nos permite afirmar que

$$diam\ (A) = diam\ (P_X(G)),$$

y por tanto:

$$\|F - P_X(G)\| \leqq diam\ (A) = 2r\|G + X\| \qquad (2)$$

Sea ahora $x \in P_X(G)$ arbitrario; la propiedad $E(r)$ nos dice:

$$\|P_X(F) - x\| = \|P_X(F - x)\| \leqq \|F - x\| + (2r - 1)\|F + X\| \leqq$$
$$\leqq \|F - P_X(G)\| + (2r - 1)\|F + X\|$$

y, tomando supremo cuando x recorre $P_X(G)$ obtenemos:

$$\|P_X(F) - P_X(G)\| \leqq \|F - P_X(G)\| + (2r - 1)\|F + X\| .$$

Usando la desigualdad (2) llegamos a :

$$\|P_X(F) - P_X(G)\| \leqq 2r\|G + X\| + (2r - 1)\|F + X\|,$$

lo que junto con (1) nos lleva a:

$$(2r - 1)\|F + X\| \geq 0 ,$$

pero como $2r - 1 < 0$ por hipótesis, tenemos pues $\|F + X\| = 0$, esto es, $F \in X$. Hemos probado así que $A \subset X$, con lo que también se tiene $A - A \subset X$.

La propiedad $I(r)$ nos asegura que:

$$B_X^{int}\ (0, 2r\|G + X\| \subset A - A ,$$

pero, puesto que A es débil-*-compacto, y por tanto $A - A$ también lo es, concluimos que:

$$B_{X''}(o, 2r\|G + X\| \subset A - A \subset X .$$

Salvado el caso trivial de que X sea reflexivo, y tomando $G \in X''$, $G \notin X$, la anterior inclusión sólo es posible para $r = 0$, en cuyo caso X es un semi-L-sumando de X'' , como se quería probar.

3.27 TEOREMA PRINCIPAL

Supongamos que un espacio de Banach X es subespacio absoluto de su bidual. Entonces se verifica alguna de las afirmaciones siguientes:

i) X es semi-L-sumando de su bidual.

ii) X es $[.[_{\frac{1}{2}}$ -subespacio de su bidual.

iii) X es M-ideal de su bidual .

Demostración

Sea X $[.|$-subespacio de X'' . Por el Teorema 2.16, la norma absoluta $[.[$ es hexagonal, concretamente $[.| = [.[_\gamma$, con $0 \leqq \gamma \leqq 1$. Por el Teorema 3.15, X verifica la propiedad $A(r)$ en X'' , con $r = 1 - \gamma$.

Si $r < 1/2$, aplicando el Teorema 3.26, X es semi-L-sumando de X'' .

Si $r > 1/2$, en virtud del Teorema 3.24, X es M-ideal de X'' .

Finalmente si $r = 1/2$, se cumple *ii)*.

Sería deseable eliminar la posibilidad *ii)* del teorema anterior. Su aparición es debida a que las técnicas usadas en el Teorema 3.24 y en el Teorema 3.26 fracasan para el caso $r = 1/2$. Nuestra conjetura, sin embargo, es que no existen espacios de Banach que sean $[\cdot[_{\frac{1}{2}}$ -subespacios de su bidual. La viabilidad de esta conjetura viene avalada por los resultados parciales que siguen, en los que se establece dicha conjetura para el caso separable y de retículo de Banach.

3.28 LEMA

Sea $r \leq 1/2$ *y* X *un espacio de Banach con la propiedad* $E(r)$ *en* X'' *. Supongamos que para cada* $F \in X''$, $F \notin X$, $P_X(F)$ *tiene al menos dos puntos distintos. Entonces* X *es débilmente secuencialmente completo.*

Demostración

La propiedad $E(r)$ con $r \leq 1/2$, nos da, que para cada $F \in X''$:

$$\| P_X(F) \| \leq \| F \| + (2r-1) \| F + X \| \leq \| F \|$$

Para cualquier $u \in X$, la anterior desigualdad aplicada a $F - u$ nos da:

$$\| P_X(F) - u \| \leq \| F - u \| ,$$

de donde,

$$P_X(F) \subset \bigcap_{x \in X} B_{X''}(u, \| F - u \|) \cap X$$

Si $F \in X''$, $F \notin X$, el conjunto que aparece en el segundo miembro tendrá más de un punto. Hemos probado así que el conjunto

$$\{F \in X''; \bigcap_{u \in X} B_{X''}(u, \| F - u \|) \cap X \text{ tiene a lo más un punto}\}$$

se reduce a X . Los resultados y comentarios de [18; Section 1] permiten concluir que X es débilmente secuencialmente completo.

3.29 LEMA

Si X es un espacio de Banach $[\cdot[_{\frac{1}{2}}$ - subespacio de su bidual, entonces X es débilmente secuencialmente completo.

Demostración

La propiedad $I(1/2)$ asegura que para $F \in X''$, $F \notin X$, $P_X(F)$ tiene más de un punto, y basta entonces aplicar el lema anterior.

3.30 TEOREMA

Si un espacio de Banach separable X es subespacio absoluto de su bidual, entonces X es semi-L-sumando o M-ideal de su bidual.

Demostración

Una vez probado el Teorema principal, sólo resta probar que un espacio de Banach separable no puede ser $[\cdot[_{\frac{1}{2}}$ -subespacio de su bidual.

Supongamos que X es un $[\cdot[_{\frac{1}{2}}$ -subespacio de X''; en virtud del lema anterior X es débilmente secuencialmente completo, por lo que usando el Teorema de H. P. Rosental [41], X contiene isomórficamente a ℓ_1. Si X es separable, en virtud del Teorema de B. Maurey [33] (ver también [42]) existe $F \in X''$, $F \neq 0$, tal que

$$\| F + x \| = \| F - x \| ,$$

para cada $x \in X$, por lo que el origen es un centro de simetría para el conjunto convexo $P_X(F)$. Puesto que dicho conjunto es de anchura constante, aplicando el Corolario 3.9, se tiene:

$$P_X(F) = B_X(0, (1/2) \| F + X \|)$$

en clara contradicción con el Lema 3.25.

3.31 TEOREMA

Si un retículo de Banach X es subespacio absoluto de su bidual, entonces X es L-sumando o M-ideal de su bidual.

Demostración

Usando conjuntamente el Teorema principal y el Teorema 1.10, basta probar que X no puede ser $[.[_{\frac{1}{2}}$-subespacio de su bidual. Supuesto X $[.[_{\frac{1}{2}}$-subespacio de X'' y en virtud del Lema 3.29 tenemos que X es débilmente secuencialmente completo, por lo que aplicando [18 ; Proposition 11] se sabe de la existencia de una simetría isométrica en X'', cuyo conjunto de puntos fijos es precisamente X. En virtud del Corolario 3.16, X es un $[.[_{\frac{1}{2}}$-sumando de su bidual, lo cual es imposible a la vista del Teorema 1.5.

CAPITULO IV

CAPITULO IV

ESPACIOS DE BANACH CON LA PROPIEDAD I(r) EN SU BIDUAL

Una vez cubierto el objetivo central de la presente memoria, queremos hacer algunas puntualizaciones. En la resolución del Teorema principal ha jugado un papel claramente protagonista el hecho de que los espacios de Banach con la propiedad $I(r)$ en su bidual, para $r > 1/2$, tienen una importante propiedad: la de que sus duales satisfacen la propiedad de Radon Nikodym, Lema 3.23. Podría pensarse si estos espacios son forzosamente M-ideales de su bidual. A este respecto damos la siguiente información:

1) En general la respuesta es negativa: "Existen espacios de Banach con la propiedad $I(r)$, $r > 1/2$, en subidual, que ni siquiera tienen la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola en su bidual (Teorema 4.1), mucho menos pueden ser M-ideales de su bidual.

2) Si X tiene la propiedad $I(r)$ su bidual, $r > 1/2$, entonces X tiene otras muchas de las propiedades que satisfacen los espacios de Banach que son M-ideales de su bidual (Teorema 4.7).

3) Si X es una C*-algebra, entonces X es M-ideal de su bidual si, y sólo si, existe $r > 1/2$, tal que X tiene la propiedad $I(r)$ en su bidual (Teorema 4.9).

4.1 TEOREMA

Para cada r *con* $0 < r < 1$ *, existen espacios de Banach con la propiedad* $I(r)$ *en su bidual y que no tienen la propiedad de la* $1\frac{1}{2}$*-bola en su bidual.*

Para la construcción de dichos espacios, algo laboriosa, necesitamos hacer algunas precisiones.

Consideremos el espacio c_0 de las sucesiones de escalares convergentes a cero, con la norma usual, que notaremos por $\|\cdot\|$. Es sabido, que el bidual de c_0 es el espacio ℓ_∞, espacio de las sucesiones acotadas de escalares, igualmente con su norma usual; coincidiendo su inyección canónica con la inyección natural. Para simplificar las notaciones, dado $F \in \ell_\infty$, escribiremos:

$$|F| = \|F + c_0\| ,$$

y en lugar de $P_{c_0}(F)$ escribiremos simplemente $P(F)$.

Dado $t \in [0,1]$ formemos el espacio producto $c_0 x c_0$ con la norma $\|\cdot\|_t$, definida por

$$\|(y,z)\|_t = Max \{\|y\|, \|z\| + t\|y\|, (1+t)\|z\|\}$$

para cada $y,z \in c_0$. Llamemos X_t al espacio de Banach $(c_0 x c_0, \|\cdot\|_t)$.
Es rutinario probar las siguientes afirmaciones:

i) El espacio $\ell_\infty x \ell_\infty$, *con la norma* $\|\cdot\|_t$, *definida naturalmente por:*

$$\|(F,G)\|_t = Max \{\|F\|, \|G\| + t\|F\|, (1+t)\|F\|\}$$

para cada $F,G \in \ell_\infty$, *y donde por* $\|\cdot\|$ *representamos la norma usual de* ℓ_∞, *es el espacio bidual de* X_t*; coincidiendo, por supuesto, la inyección canónica de* X_t *en su bidual con la inclusión natural de* $c_0 x c_0$ *en* $\ell_\infty x \ell_\infty$.

Es sabido, ver por ejemplo [10; Section 2], que c_0 es M-ideal de ℓ_∞, de donde se deduce inmediatamente que X_0 es M-ideal de su bidual.

ii) Para cada $H := (F,G) \in X_t''$, *la norma cociente viene dada por:*

$$\| H + X_t \|_t = Max \{ |F|, |G| + t|F|, (1+t)|G| \}$$

Y por último,

iii) $P(F) \times P(G) \subset P_t(H)$,

donde por $P_t(H)$ se simboliza al conjunto de mejores aproximaciones para H en X_t, esto es, escribimos $P_t(H)$ en lugar de $P_{X_t}(H)$.

Vamos a obtener ahora escalonadamente el resto de la información que precisamos, en los siguientes lemas.

4.2 LEMA

Dado $H \in X_t''$, *se tiene; para cada* $x \in P_0(H)$, *que:*

$$d_t(x, P_t(H)) \leq t(1+t) \| H + X_t \|_t$$

donde d_t *denota la distancia en el espacio* X_t.

Demostración

El lema es evidente para $t = 0$, así pues supondremos $t > 0$. Sea $H = (F,G)$, con $F,G \in \ell_\infty$; es claro que ha de presentarse uno de los tres casos siguientes:

a) $|F| \leq |G|$

b) $|G| + t|F| \geq |F| > |G|$.

c) $|F| > |G| + t|F|$

Vamos a probar que en cualquiera de ellos, se da la tesis del lema.

Fijemos ahora $x=(y,z) \in P_0(H)$, con $y,z \in c_0$.

a) Supongamos que $|F| \leq |G|$. En este caso, según (2) se tiene:

$$\| H + X_t \|_t = (1+t)|G| \ ;$$

y por tanto,

$$Max \{ \| F - y \|, \| G - z \| \} = \| H + X_0 \|_0 = |G|$$

por lo que en virtud de (1) tenemos:

$$\| H - x \|_t = \| (F - y, G - z) \|_t =$$
$$= Max \{ \| F - y \|, \| G - z \| + t \| F - y \|, (1+t) \| G - z \| \} \leq$$
$$\leq Max \{ |G|, |G| + t|G|, (1+t)|G| \} = (1+t)|G| = \| H + X_t \|_t$$

esto es, $x \in P_t(H)$. Y por tanto en este caso se tiene que:

$$P_0(H) \subset P_t(H)$$

y la tesis del lema se cumple trivialmente.

b) Supongamos ahora que

$$|G| + t|F| \geq |F| > |G| ,$$

con lo que,

$$\| H + X_t \|_t = |G| + t|F| ,$$

mientras que:

$$\| H + X_0 \|_0 = |F| .$$

De que

$$Max \{ \| F - y \|, \| G - z \| \} \leq |F|$$

deducimos ahora que $y \in P(F)$. Tomando $u \in P(G)$ arbitrario y usando (3), tenemos que $(y,u) \in P_t(H)$, luego:

$$d_t(x, P_t(H)) \leq \| (y,z) - (y,u) \|_t = (1+t) \| z - u \| .$$

Tomando ínfimo cuando u recorre $P(G)$, llegamos a

$$d_t(x, P_t(H)) \leq (1+t) d(z, P(G)) \qquad (*)$$

Finalmente, puesto que c_0 es M-ideal de ℓ_∞ y en particular verifica la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola, tenemos:

$$d(z,P(G)) = d(0,P(G - z)) = \|G - z\| - |G - z| = \|G - z\| - |G| \leq$$
$$\leq |F| - |G| \leq t|F| \leq t(|G| + t|F|) = t\|H + X_t\|_t .$$

Basta ahora sustituir esta desigualdad en $(*)$ para obtener la tesis buscada.

c) Supongamos finalmente que:

$$|F| > |G| + t|F|$$

con lo que en particular se tiene

$$|F| > (1+t)|G| \geq |G|,$$

y por tanto, en virtud de (2) ,

$$\|H + X_t\|_t = |F| = \|H + X_0\|_0 .$$

Volvemos a tener, como en el caso b), que:

$$Max \{ \|F - y\|, \|G - z\| \} \leq |F|$$

luego, otra vez, $y \in P(F)$. Sea $u \in P(G)$ y sea

$$\alpha = (|F| - |G|)^{-1}((1-t)|F| - |G|);$$

notemos que $0 < \alpha < 1$, y llamemos v a $\alpha z + (1-\alpha)u$. Se tiene,

$$\|G - v\| = \alpha\|G - z\| + (1-\alpha)\|G - u\| \leq \alpha|F| + (1-\alpha)|G| = (1-t)|F|,$$

con lo que,

$$\|(F - y, G - v)\|_t = Max\{\|F - y\|, \|G - v\| + t\|F - y\|, (1+t)\|G - v\|\} \leq$$
$$\leq Max \{|F|, (1-t)|F| + t|F|, (1+t)(1-t)|F|\} = |F| = \|H + X_t\|_t$$

y hemos probado así que $(y,v) \in P_t(H)$. Así pues,

$$d_t(x,P_t(H)) \leq \|(y,z) - (y,v)\|_t = (1+t)\|z - v\| = (1+t)(1-\alpha)\|z - u\| .$$

Tomando ínfimo cuando u recorre $P(G)$, obtenemos

$$d_t(x,P_t(H)) \leq (1+t)(1-\alpha)d(z,P(G)) \qquad (*)$$

pero, haciendo uso nuevamente de la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola:

$$d(z,P(G)) = \|G - z\| - |G| \leq |F| - |G|$$

desigualdad que, sustituida en $(*)$, nos da :

$$d_t(x,P_t(H)) \leq (1+t)(1-\alpha)(|F| - |G|) = (1+t)t|F| = (1+t)t\|H + X_t\|_t .$$

4.3 NOTA

Se puede comprobar, aunque ello no se usará en lo que sigue, que la desigualdad del lema anterior es óptima. De hecho, se alcanza la igualdad para convenientes valores de H y x.

4.4 LEMA

Sea K un conjunto convexo, cerrado de un espacio normado X y sean r y s dos números reales tales que $r > s > 0$ y verificando que:

$$B_X^{int}(0,r) \subset K + B_X(0,s) .$$

Entonces

$$B_X(0,r-s) \subset K .$$

Demostración

Supongamos, por reducción al absurdo, que existe $x \in X$ con $\|x\| \leq r - s$ y $x \notin K$. Por el Teorema de separación punto-convexo, existe $f \in X'$, con $\|f\| = 1$, tal que:

$$Sup\ \{Ref(k);\ k \in K\} < Ref(x)$$

Por tanto, usando la hipótesis, tenemos:

$$r = Sup\ \{Ref(y);\ y \in B_X^{int}(0,r)\} \leq Sup\{Ref(y);\ y \in K + B_X(0,s)\} \leq$$
$$\leq Sup\ \{Ref(k);\ k \in K\} + Sup\ \{Ref(y);\ y \in B_X(0,s)\} =$$
$$= Sup\ \{Ref(k);\ k \in K\} + s < Ref(x) + s \leq \|x\| + s \leq r ,$$

lo cual es absurdo.

Como consecuencia de los dos lemas anteriores obtenemos, ya, la parte más importante del teorema buscado:

4.5 LEMA

Si $t(1+t^2) < 1$, *entonces* X_t *tiene la propiedad* $I(r)$ *en su bidual para* $r = (1+t)^{-1}[1-t(1+t)^2]$.

Demostración

Es claro que para cada $x \in X_t$,

$$\|x\|_0 \leq \|x\|_t \leq (1+t)\|x\|_0$$

y por tanto, para cada $H \in X_t''$

$$\|H\|_0 \leq \|H\|_t \leq (1+t)\|H\|_0 ,$$

y pasando a cociente (nótese que los conjuntos X_0 y X_t son iguales) tenemos:

$$\|H + X_0\|_0 \leq \|H + X_t\|_t \leq (1+t)\|H + X_0\|_0 .$$

Fijemos pues $H \in X_t''$, $H \notin X_t$ y sea $x = (y,z) \in X_t$, verificando:

$$\|x\|_t < 2(1+t)^{-1}\|H + X_t\|_t .$$

Según las observaciones anteriores, tenemos:

$$\|x\|_0 < 2\|H + X_0\|_0 ,$$

y puesto que X_0 es M-ideal de su bidual, se tendrá que

$$x \in P_0(H) - P_0(H) ,$$

probándose así que

$$B_X^{int}(0, 2(1+t)^{-1}\|H + X_t\|_t) \subset P_0(H) - P_0(H).$$

Combinando esto con el Lema 4.2, obtenemos que para cada $\rho \in \mathbb{R}^+$,

$$B_X^{int}(0,2(1+t)^{-1}\|H+X_t\|_t) \subset P_t(H)-P_t(H) + B_{X_t}(0,2\rho+2t(1+t)\|H+X_t\|_t) \subset$$
$$\subset \overline{P_t(H) - P_t(H)} + B_{X_t}(0,2\rho+t(1+t)\|H + X_t\|_t)$$

Tomando K como el cierre en norma de $P_t(H) - P_t(H)$ esto es $K = \overline{P_t(H) - P_t(H)}$, y aplicando el Lema 4.4, obtenemos:

$$B_X^{int}(0,2r\|H + X_t\|_t - 2\rho) \subset K$$

para cada $\rho > 0$ arbitrario.

Puesto que $P_t(H)$ es un subconjunto convexo, cerrado y acotado del espacio de Banach X_t, podemos aplicar [26; Corollary 22.5], para deducir que $P_t(H) - P_t(H)$ tiene el mismo interior que K. Esto es,

$$B_{X_t}^{int}(o, 2r\|H + X_t\|_t) \subset P_t(H) - P_t(H)$$

como se quería.

Terminemos esta larga lista de resultados intermedios en el que sigue;

4.6 LEMA

X_t tiene la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola en su bidual si, y sólo si, $t = 0$.

Demostración

Si $t = 0$, X_0 es, como ya se ha dicho, M-ideal de su bidual y por tanto tiene la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola en su bidual.

Supongamos pues, $t > 0$, y tomemos $H = (F,G) \in X_t''$ tal que

$$\|G\| + t\|F\| \geq \|F\| > \|G\|.$$

Entonces:

$$\|H\|_t = Max\{\|F\|, \|G\| + t\|F\|, (1+t)\|G\|\} = \|G\| + t\|F\|.$$

Es rutinario comprobar que, en este caso, se tiene:

$$P_t(H) = P(F) \times P(G),$$

con lo cual,

$$d_t(0, P_t(H)) = Inf\{Max\{\|y\|, \|z\| + t\|y\|, (1+t)\|z\|\};\ (y,z) \in P(F)\times P(G)\} \geq$$
$$\geq Inf\{(1+t)\|z\|;\ z \in P(G)\} = (1+t)d(0, P(G)).$$

Se tiene entonces, usando una vez más que c_0 tiene la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola en su bidual, que:

$$\| H + X_t \|_t + d_t(0,P_t(H)) = |G| + t|F| + d_t(0,P_t(H)) \geq$$
$$\geq |G| + t|F| + (1+t)d(0,P(G)) = \|G\| + t|F| + td(0,P(G)) > \|H\|_t ,$$

lo que demuestra que X_t no tiene la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola en X_t'' .

Demostración del Teorema 4.1

Dado r , con $0 \leq r < 1$, es claro que tomando $t > 0$, suficientemente pequeño, podemos conseguir:

$$t(1+t)^2 < 1$$

y

$$(1+t)^{-1}\left[1 - t(1+t)^2\right] > r .$$

Por el Lema 4.4 , el correspondiente X_t tiene la propiedad $I(r)$ en su bidual, mientras que por el Lema 4.5, no tiene la propiedad de la $1\frac{1}{2}$-bola en su bidual.

El siguiente enunciado resume los más importantes hechos que hemos obtenido para los espacios de Banach que tienen la propiedad $I(r)$ ($r > 1/2$) en su bidual. Las técnicas usadas para la demostración se inspiran en las desarrolladas por G. Godefroy para tratar el caso $r = 1$.

4.7 TEOREMA

Sea X un espacio de Banach con la propiedad $I(r)$, con $r > 1/2$, en su bidual. Sea Z cualquier subespacio cerrado de X . Entonces, se verifican las siguientes afirmaciones:

i) Z' tiene la propiedad de Radon Nikodym.

ii) $P_{Z'}(\theta) = \{J_Z, J_Z^t(\theta)\}$, para cada $\theta \in Z'''$. En particular, Z' es un subespacio de Chebyshev de Z''' .

iii) Si Y *es un subespacio cerrado de un espacio de Banach con la propiedad* $I(s)$ $(s > 1/2)$ *en su bidual, entonces toda biyección lineal isométrica de* Y'' *en* Z'' *, es la segunda traspuesta de una biyección lineal isométrica de* Y *en* Z .

iv) Z *no tiene la propiedad de intersección finito-infinita, esto es (ver [19] y [31]) existe una familia de bolas cerradas en* Z, $\{B_i \; ; \; i \in I\}$ *cuya intersección es vacía, mientras que por el contrario , toda intersección finita de dichas bolas es no vacía.*

v) Si Y *es un subespacio cerrado de* Z'' *, conteniendo estrictamente a* Z *, entonces no existen proyecciones de norma uno de* Y *sobre* Z *. En particular si* Z *es un espacio de Banach dual, entonces es reflexivo .*

<u>*Demostración*</u>

i) **Basta aplicar el Lema 3.23 y el hecho de que la propiedad de** Radon Nikodym es estable por cocientes [45; Theorem 2.8 y Corollary 2.9] .

Para el resto de las afirmaciones establecemos las siguientes observaciones.

Sea P la proyección de dualidad correspondiente a X , esto es, $P = J_{X'} J_X^t$, proyección de norma uno, cuya imagen es $J_{X'}(X')$ y cuyo núcleo es $X^{\perp}$. Es sabido, y se ha usado anteriormente, que para cada $x''' \in X'''$ se tiene, $x''' - P(x''') \in P_{X^{\perp}}(x''')$.

Por otra parte, si X tiene la propiedad $I(r)$ en X'', entonces aplicando el Teorema 3.15 *i)* , obtenemos:

$$\| P_X(x''') \| \leq \| x''' \| + (1-2r) \| P(x''') \|$$

para cada $x''' \in X'''$. Y por tanto, combinando ambos resultados,

$$\| x''' - P(x''') \| \leq \| x''' \| + (1-2r) \| P(x''') \| \qquad (1)$$

para cada $x''' \in X'''$.

Sean ahora Z un subespacio cerrado de X y Q su proyección de dualidad. Se comprueba rutinariamente que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X''' \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\Phi"'] & X''' \arrow[d, "\Phi"] \\ Z''' \arrow[r, "Q"] & Z''' \end{tikzcd}$$

donde Φ es la tercera traspuesta de la inclusión i de Z en X.

Recordando que $Ker\ \Phi = Z^{00}$ y que la descomposición canónica de Φ da lugar a la igualmente canónica identificación de X''' / Z^{000} con Z''', tenemos que Φ es sobreyectiva y que:

$$\| \Phi(x''') \| = \| x''' + Z^{000} \|$$

para cada $x''' \in X'''$. Como quiera que Z^{000} es proximinal en X''', deducimos que para cada $\theta \in Z'''$ se puede encontrar $x''' \in X'''$, tal que $\| x''' \| = \| \theta \|$ y $\Phi(x''') = \theta$.

Usando ahora (1) y que $r \geq 1/2$, obtenemos:

$$\| \theta \| = \| x''' \| \geq \| x''' - P(x''') \| + (2r-1) \| P(x''') \| \geq$$
$$\geq \| \Phi(x''' - P(x''')) \| + (2r-1) \| \Phi P(x''') \| = \| \theta - Q(\theta) \| + (2r-1) \| Q(\theta) \|$$

con lo que hemos establecido, para Z, la misma propiedad de X que aparecía en (1).

ii) Para $\theta \in Z'''$ fijo y $\xi \in J_{Z'}(Z^{r})$; aplicando la desigualdad recien probada a $\theta - \xi$ y usando que $Q(\xi) = \xi$, tenemos:

$$\| \theta - \xi \| \geq \| \theta - Q(\theta) \| + (2r-1) \| Q(\theta) - \xi \|$$

lo que prueba por una parte que:

$$\|\theta + J_{Z'}(Z')\| = \|\theta - Q(\theta)\|$$

esto es, $Q(\theta) \in P_{Z'}(\theta)$, y por otra parte, que si $\xi \in P_{Z'}(\theta)$, se ha de tener $\xi = Q(\theta)$. En suma,

$$P_{Z'}(\theta) = \{Q(\theta)\} = \{J_{Z'}J_Z^t(\theta)\}$$

y esto para cada $\theta \in Z'''$, como se quería.

iii) Sea I una biyección lineal isométrica de Y'' en Z''.

Por el primer apartado, sabemos que Y' tiene la propiedad de Radon Nikodym, con lo que aplicando [17; Theorem 10 y Definition 5] se tiene que:

$$I^t J_{Z'}(Z') = J_{Y'}(Y')$$

(En particular I es la traspuesta de una biyección lineal isométrica de Z' en Y').

Para cada $\theta \in Z'''$, se tiene entonces

$$\|\theta + Z'\| = \|I^t(\theta) + Y'\| .$$

Notando $Q = J_{Z'}J_Z^t$ y $P = J_{Y'}J_Y^t$, las proyecciones de dualidad de Z e Y respectivamente, tenemos aplicando *ii)* a Z , que $Q(\theta) \in P_{Z'}(\theta)$, con lo que:

$$\|I^t(\theta) + Y'\| = \|\theta + Z'\| = \|\theta - Q(\theta)\| = \|I^t(\theta) - I^t Q(\theta)\|$$

esto es,

$$I^t Q(\theta) \in P_{Y'}(I^t(\theta)) ,$$

pero usando nuevamente *ii)* , esta vez aplicado a Y , tenemos:

$$P_{Y'}(I^t(\theta)) = \{PI^t(\theta)\}$$

luego, hemos probado que,

$$PI^t(\theta) = I^t Q(\theta) ,$$

para todo $\theta \in Z'''$. Como consecuencia, tendremos que $I^t(Z) = Y$, y por tanto , ya que

$$[IJ_Y(Y)]^0 = Ker\ [(IJ_Y)^t] = Ker\ J_Y^t I^t = (I^t)^{-1}(Ker\ J_Y^t) = (I^t)^{-1}(Y) = Z =$$
$$= J_Z(Z)^0 ,$$

deducimos que

$$IJ_Y(Y) = J_Z(Z) ;$$

poniendo $IJ_Y(y) = J_Z H(y)$, es inmediato comprobar que H es un operador lineal continuo de Y en Z tal que $I = H^{tt}$ sobre Y. Puesto que tanto I como H^{tt} son débil-*-continuos, deducimos que $I = H^{tt}$ y, a posteriori, H es una biyección lineal isométrica de Y en Z.

iv y *v)* son consecuencia del siguiente hecho, que probaremos a continuación:

Sean Z *un espacio de Banach y* Q *su proyección de dualidad. Sea* $t > 0$, *verificando , para cada* $\theta \in Z'''$, *que*

$$\|\theta\| \geq \|\theta - Q(\theta)\| + t\|Q(\theta)\| . \qquad (*)$$

Entonces para cada $F \in Z''$, $F \notin Z$, *se tiene:*

$$\bigcap_{z\in Z} B_Z(z, \|F - z\|) = \emptyset .$$

En efecto, supongamos, por reducción al absurdo, que existen $F \in Z''$, $F \notin X$, $y, x \in X$, tales que para todo $z \in Z$, se tiene

$$\|F - z\| \geq \|z - x\| .$$

Usando $F - x$ en lugar de F podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $x = 0$ y, previa normalización $(F - x \neq 0)$, supondremos igualmente que $\|F\| = 1$. Sea pues $F \in Z''$, con $\|F\| = 1$, tal que

$$\|F - z\| \geq \|z\|$$

para todo $z \in Z$. Es claro que para cada $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene:

$$\|\lambda F - z\| \geq \|z\| ,$$

de donde,

$$\|z\| = Inf\ \{\|z - \lambda F\| ;\ \lambda \in \mathbb{K}\} = \|z + \mathbb{K}F\| = \|z + (Ker\ F)^0\| =$$
$$= \|J_Z(z)/Ker\ F\|$$

A partir de la igualdad anterior es rutinario probar, usando el Teorema de separación, que $Ker\ F \cap B_{Z'}(0,1)$ es débil-*-denso en $B_{Z'}(0,1)$.

Sea ρ un número real positivo estrictamente menor que t , y sea $f \in Z'$, con $\|f\| = 1$, tal que $F(f) > 1-\rho$, y $\{f_i\}$ una red en $Ker\ F \cap B_{Z'}(0,1)$ convergiendo a f en la topología débil-* de Z'. Sea finalmente θ un valor adherente para la red $\{J_{Z'}(f_i)\}$ con respecto a la topología débil-* de Z'''. Por la débil-*-continuidad de J_Z^t tendremos $J_Z^t(\theta) = f$, de donde,

$$Q(\theta) = J_{Z'}(f)$$

mientras que claramente

$$\theta(F) = \lim_i F(f_i) = 0,$$

por lo que aplicando $(*)$

$$1-\rho < |F(f)| = |J_{Z'}(f)(F)| = |Q(\theta)(F)| = |\theta(F) - Q(\theta)(F)| \leq$$
$$\leq \|\theta - Q(\theta)\| \leq \|\theta\| - t\|Q(\theta)\| = \|\theta\| - t\|f\| \leq 1-t ,$$

lo cual es una contradicción.

Como consecuencia, volviendo a tener en cuenta que la desigualdad (1) es válida para Z y tomando $t = 2r-1$, obtenemos que

$$\bigcap_{z \in Z} B_Z(z, \|F - z\|) \neq \emptyset$$

para cada $F \in Z''$.

Pero, la mera existencia de un $F \in Z''$ cumpliendo la afirmación anterior es equivalente (Para cualquier espacio de Banach Z) a la afirmación *iv)* del enunciado [22; Theorem II.8].

Por otra parte, *v)* es evidente sin más que tener en cuenta que la existencia de un tal espacio Y y de una tal proyección q de Y sobre Z , fuerzan que para cada $y \in Y$, se tiene

$$q(y) \in \bigcap_{z \in Z} B_Z(z, \| y - z \|),$$

en contra de la vaciedad de dicha intersección.

4.8 NOTA

Se puede establecer, bajo las mismas hipótesis del teorema anterior, una perfección al hecho de que los subespacios no reflexivos no pueden ser duales; concretamente se puede probar, con técnicas análogas a las desarrolladas en [29; Theorem 2.4] (ver junto con [25]), que si X tiene la propiedad $I(r)$ en su bidual, entonces para cualquier subespacio cerrado, no reflexivo de X, Z, y para cualquier espacio de Banach Y, se verifica que la distancia de Banach-Mazur entre Z e Y' es mayor o igual que $r + 1/2$.

Queremos hacer observar también que el apartado *iii)* del teorema anterior, resultado claramente más general que el dado por P. Harmand y A. Lima en [24; Proposition 4.2], permite probar el siguiente resultado.

4.9 COROLARIO

Sea X una C^*-álgebra. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) Existe $r > 1/2$, talque X tiene la propiedad $I(r)$ en X''.

ii) $X = (\bigoplus_{i \in I} K(H_i))_{c_0}$, donde $K(H_i)$ es el espacio de los operadores compactos sobre un cierto espacio de Hilbert H_i.

iii) X es M-ideal de su bidual.

Demostración

ii) fuerza iii). Es bien conocido, ver por ejemplo [10; Proposition 5 y Theorem 1].

iii) fuerza i). Es evidente tomando $r = 1$.

Supongamos, para cerrar el ciclo, que existe un tal r ; usando el Lema 3.23, se tiene que X' satisface la propiedad de Radon Nikodym, por lo que siendo X una C*-álgebra y aplicando [14; Theorem 4] , sabemos de la existencia de un espacio de Banach Z , predual de X' , que es del tipo descrito en *ii)*. En particular, como ya se ha visto, Z es M-ideal de su bidual (tiene la propiedad $I(1)$ en su bidual), por lo que, aplicando el teorema anterior, Z es isométrico a X .

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

|1| E. M. ALFSEN and E. G. EFFROS: *Structure in real Banach spaces I.* Ann. Math. 96 (1972), 98-128.

|2| E. M. ALFSEN and E. G. EFFROS: *Structure in real Banach spaces II.* Ann. Math. 96 (1972), 129-173.

|3| C. APARICIO, F. OCAÑA, R. PAYA and A. RODRIGUEZ: *A non smooth extension of Frechet differentiability of the norm with applications to numerical ranges.* Glasgow Math. J. 28 (1986), 121-137.

|4| E. BEHRENDS: *L^p-struktur in Banachräumen.* Studia Math. LV (1976), 71-85.

|5| E.BEHRENDS: *L^p-struktur in Banachräumen II.* Studia Math. LXXII (1978), 47-63.

|6| E. BEHRENDS: *M-structure and the banach-Stone theorem.* Lecture notes in Mathematics, 736. Springer-Verlag (1979).

|7| E, BEHRENDS et al. : *L^p-structure in real Banach spaces.*

Lecture Notes in Mathematics, 613. Springer-Verlag (1977)

[8] E. BEHRENDS and P. HARMAND: *Banach spaces which are proper M-ideals*. Studia Math. LXXXI (1985), 159-169.

[9] F.F. BONSALL and J. DUNCAN: *Numerical ranges II*. London Math. Society. Lecture Notes Series, 10 (1973)

[10] L. BROWN and T. ITO: *Classes of Banach spaces with unique isometric preduals*. Pacif. J. Math. 90 (1980), 261-283.

[11] F. CUNNINGHAM Jr.: *L-structure in L-spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 274-299.

[12] F. CUNNINGHAM Jr.: *M-structure in Banach spaces*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 63 (1967), 613-629.

[13] F. CUNNINGHAM, E.G. EFFROS and E. ROY: *M-structure in dual Banach spaces*. Israel J. Math. (1973), 304-308.

[14] CHO-HO CHU: *A note on Scatered C*-algebras and the Radon Nikodym property*. J. London Math. Soc. 24 (1981), 533-536.

[15] J. DIESTEL and J.J. UHL Jr.: *Vector Measures*. Math. Surveys 15. A. M. S. Providence (1977).

[16] R. EVANS: *Projektionen mit normbedingungen in reellen Banachräumen*. Dissertation, Freie Universität Berlin (1974).

[17] G. GODEFROY: *Espaces de Banach. Existence et unicité de certains préduaux*. Ann. de l'Institut Fourier 28, 3 (1978), 87-105.

[18] G. GODEFROY: *Parties admissibles d'un espace de Banach. Applications*. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4er Série t. 16 (1983), 109-122.

[19[G. GODEFROY: *Application a la Dualité d'une Propieté d'Intersection de boules.* Mathematische Zeitschrift 182 (1983), 233-236.

[20[G. GODEFROY: *Symmetries isometriques. Applications a la dualité de espaces Reticulés.* Isr. J. Math. 44 (1983), 61-74.

[21[G. GODEFROY: *Sous-espaces bien disposés de L^1-applications.* Trans. Amer. Math. Soc. 286 N°1 (1984), 227-249.

[22[G. GODEFROY and N.J. KALTON: *The ball topology and its applications.* Preprint.

[23[G. GODINI: *Best approximation and intersections of balls.* In Banach theory and its applications. Springer-Verlag (1983), 44-54.

[24[P. HARMAND and A. LIMA: *Banach spaces which are M-ideals in their biduals.* Trans. Amer. Math. Soc. 283 (1984), 253-264.

[25[R.C. JAMES: *Reflexivity and the sup of linear functionals.* Israel J. Math. 13 (1972), 289-300.

[26[G.J.O. JAMESON: *Topology and normed spaces.* Chapman and Hall (1974).

[27[D. LI: *Espaces L-facteurs de leurs biduaux. Bonne disposition, meilleure approximation et propieté de Radon Nikodym.* Quart. J. Math. Oxford (150) 39 (1987), 229-243.

[28[A. LIMA: *Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. 227 (1977), 1-62.

[29[A. LIMA: *On M-ideals and best approximation.* Indiana Univ. Math. J. 31 (1982), 27-36.

[30] A. LIMA: *Intersection properties of balls in spaces of compact operators.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 28,3 (1978), 35-65.

[31] J. LINDESTRAUSS: *Extension of compact operators.* Mem. Amer. Math. Soc. 48 (1964).

[32] J. LINDESTRAUSS and L. TZAFRIRI: *Classical Banach spaces II.* Springer- Verlag (1979).

[33] B. MAUREY: *"Types and l_1-subspaces".* Longhorn Notes the Univerity of Texas, Functional Analysis seminar (1982-1983), 123-137.

[34] J.F. MENA: *Semisumandos, semiideales y semiidealoides en espacios normados.* Tesis doctoral de la univ. de Granada.

[35] J.F. MENA, R. PAYA and A. RODRIGUEZ: *Semisummands and semiideals in Banach spaces.* Isr. J. Math. (51) 1-2. (1985), 33-67.

[36] J.F. MENA, R. PAYA and A. RODRIGUEZ: *Absolute subspaces of Banach spaces.* Aparecerá en Quart. J. Math. Oxford.

[37] R. PAYA: *Técnicas de rango numérico y estructura en espacios normados.* Tesis doctoral de la Univ. de Granada nº 319.

[38] R. PAYA: *Numerical range of operators and structure in Banach spaces.* Quart. J. Math. Oxford (2) 33 (1982), 357-364.

[39] R. PAYA and D. YOST: *The Two-Ball property: Transitivity and examples.* Preprint of Univ. of Camberra.

[40] F. PEDRIZET: *Espaces de Banach ordonnés et ideaux.* J. Math. Pures et Appl. 49 (1970), 61-98.

[41] H.P. ROSENTHAL: *A characterization of Banach spaces containing l_1.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA 71, N 6 (1974), 2411-2413.

[42[H.P. ROSENTHAL: *Doble dual Types and the Maurey characterization of Banach spaces containing l_1.* Longhorn Notes the Univ. of Texas, Functional Analysis seminar (1983-1984).

[43[K. SAATKAMP: *Schnitteigenschaften und beste approximation.* Dissertation, Bonn (1979)

[44[R.R. SMITH and J.D. WARD: *M-ideal structure in Banach algebras.* J. Func. Anal. 27 (1978), 337-349.

[45[C: STEGALL: *The Radon Nikodym property in conjugate Banach spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. 206 (1975), 213-223.

[46[C. STEGALL: *The Radon Nikodym property in conjugate Banach spaces II.* Trns. Amer. Math. Soc. 264 (1981), 507-519.

[47[P. VOLKMANN: *Über die Möglichkeit, die norm eines normierten raumes aus der Zerlegung in zwei Unterräume mit Hilfe einer Norm des $\mathbb{R}^2$ zu gewinnen.* Arch. Math. 40 (1983), 377-384.

[48[D. YOST: *Best approximation and intersection of balls in Banach spaces.* Bull. Austr. Math. Soc. 20 (1979), 285-300.

[49[D. YOST: *The n-Ball properties in real and complex Banach spaces.* Math. Scandinavia 50 (1982), 100-110.

[50[D. YOST: *Semi-M-ideals in complex Banach spaces.* Rev. Roum. Math. Pures Appl. 29 (1984),,7, 619-623.