LOCALIZACION Y EXTENSIONES DE ANILLOS NOETHERIANOS

Luis Miguel Merino González

Departamento de Algebra
Universidad de Granada
1.991

Localizacion y extensiones de anillos noetherianos

por

Luis Miguel Merino González

MEMORIA realizada en el departamento de Algebra de la Universidad de Granada, bajo la dirección del profesor Dr. D. Pascual Jara Martínez, para obtener el grado de Doctor en Ciencias

V B

El director.

Aspirante al grado de Doctor.

INDICE

INTRODUCCIÓN.

Siguiendo a Grothendieck podemos decir que el objetivo fundamental del álgebra es el estudio de las soluciones de los sistemas de ecuaciones polinómicas, esto es; si tenemos un anillo noetheriano conmutativo R y el anillo de polinomios $R[X_i \mid i\in\Lambda]$, siendo Λ un conjunto finito, para cada familia $a = \{a_i \mid i\in\Lambda\}$ de elementos de R existe un único morfismo de anillos

$\omega_a:R[X_i \mid i\in\Lambda] \to R;\ \omega_a(p(X))=p(a),$

definido por $X_i \mapsto a_i$ para cada $i\in\Lambda$; para cada $p(x)\in R[X_i \mid i\in\Lambda]$ existe entonces un único morfismo de anillos $p:R^{\Lambda} \to R$ definido por $p((a_i)_{i\in\Lambda})=p(a)$, las soluciones de $p(x)$ son los elementos $a\in R^{\Lambda}$ tales que $p(a)=0$, y si $\{p_j(x) \mid j\in J\}$ es un sistema de polinomios, una solución al sistema es un elemento $a\in R^{\Lambda}$ tal que $p_j(a)=0$ para cada $j\in J$. Los elementos de R^{Λ} que son soluciones a un sistema de polinomios se conoce sobradamente y constituye el objetivo central de la Geometría Analítica. Este estudio se hace sencillo en algunos casos, si R es un cuerpo, por ejemplo $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y se hace difícil en otros casos, si R es $\mathbb{Z}$ o un anillo conmutativo con otras propiedades.

El objetivo de la geometría algebraica clásica es estudiar los conjuntos de soluciones de sistemas de ecuaciones polinómicas sobre un cuerpo desde el punto de vista geométrico, esto es sus intersecciones, sus subvariedades, etc. Existe otro método, que es asociar a cada conjunto de soluciones (variedad) un anillo, esto se hace de la siguiente forma, dada una variedad V, consideramos todos los polinomios que son combinaciones lineales en $R[X_i \mid i \in \Lambda]$ de los $p_j(x)$, estos forman un ideal de $\mathbb{K}[X_i \mid i \in \Lambda]$ al que llamaremos I_V, y definimos un anillo $\mathbb{K}[V]$ mediante

$$\mathbb{K}[V] = \mathbb{K}[X_i \mid i \in \Lambda]/I_V.$$

El anillo $\mathbb{K}[V]$ determina completamente a la variedad V, es el anillo de coordenadas de V, además I_V es un ideal finitamente generado ya que $\mathbb{K}[X_i \mid i \in \Lambda]$ es un anillo noetheriano. Otra forma de asociar un anillo a una variedad es considerar el anillo las funciones polinomiales sobre V, que son restricción de funciones polinomiales sobre $\mathbb{K}^{\Lambda}$; para cada punto $x \in V$ consideramos el anillo de las funciones regulares en x, y para un abierto $U \subseteq V$ el anillo $\theta(U)$ de las funciones regulares en U. Entonces la correspondencia $U \mapsto \theta(U)$ define un haz de K-álgebras sobre V; en particular tenemos que $\theta(V) = K[V]$ es el anillo de coordenadas de la variedad V, el cuerpo de fracciones de $K[V]$ es $K(V)$ que es el anillo de las funciones racionales sobre V.

Pasando al punto de vista local, para cada $W \subseteq V$ irreducible se define el anillo $\theta_{V,W}$ de los gérmenes de funciones regulares en W, obteniendo un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}_{V,W}$ formado por todos los gérmenes de funciones regulares que tiene un representante nulo en un abierto no vacio; en el caso en que $W=\{x\}$ es un punto, resulta que $\theta_{V,x}$ es un anillo local y es precisamente la fibra del haz θ en el punto x.

Tenemos entonces la siguiente situación, a la variedad V le asociamos el anillo $K[V]$, a cada punto x de V le asociamos un ideal primo I_x de $K[V]$, y para cada abierto $U \subseteq V$ tenemos un conjunto de ideales primos $X(I) \subseteq \mathrm{Spec}(V)$, donde $I=I_V$. Para cada punto $x \in V$ tenemos que $\theta_{V,x}$ es precisamente el localizado de K[V] en I_x. Así pues la variedad V queda perfectamente estudiada al estudiar el anillo K[V], y su espectro. El estudio local se realiza al estudiar el comportamiento de los ideales primos de K[V]. Esta es una de las razones que nos mueve al estudio de los ideales primos de un anillo noetheriano conmutativo.

Otro argumento para justificar este estudio está dado, también implícitamente en lo anterior, y se basa en un hecho fundamental que ocurre en los anillos noetherianos, es que cada ideal de un anillo noetheriano tiene una descomposición primaria. Cuando pretendemos estudiar anillos noetherianos no conmutativos, el primer problema que surge es cual es la definición adecuada de ideal primo para poder tener por ejemplo una buena teoría de descomposición primaria; fue Krull quien en 1928 dió la siguiente definición; un ideal P de un anillo R es primo si para cualesquiera ideales A y B de R tales que $AB \subseteq P$ se tiene $A \subseteq P$ ó $B \subseteq P$. Posteriormente, a finales de los 50 y principios de los 60, se vió la real importancia de éste concepto; (1) con el trabajo de Leusieur-Croisot sobre descomposiciones primarias (2) con los teoremas de Goldie sobre localización en anillos noetherianos.

Goldie, aprovechando la construción de un anillo de fracciones desarrollado por Ore, prueba que si R es un anillo noetheriano con ideal 0 primo, un anillo primo, entonces el conjunto de los elementos regulares de R es un conjunto de Ore y que por tanto se puede definir un anillo de fracciones al estilo del caso conmutativo, y que este anillo de fracciones es un anillo de matrices sobre un anillo de división (un anillo artiniano simple).

Ya que es posible hacer el anillo de fracciones de un anillo noetheriano primo, el problema es pasar a hacer el anillo de fracciones en un ideal primo, esto tiene más dificultad y no es posible realizarlo con tanta alegría. Para empezar es necesario determinar cual es el conjunto de Ore que se ha de utilizar; la elección de este conjunto es clara si pretendemos generalizar el caso conmutativo y que en el caso de anillos primos sea la desarrollada por Goldie. Para ello, dado un ideal primo P consideramos al conjunto multiplicativo de los elementos regulares módulo P. Este conjunto no es necesariamente un conjunto Ore y como consecuencia se produjo un estancamiento de la teoría, ya que no se encontraba una forma adecuada de localizar en un ideal primo.

Por esta misma época aparecieron los primeros trabajos en teorías de torsión, cuyo objetivo era en primer lugar extender la teoría de localizaciones desarrollada en módulos sobre un DI. Cabe citar el trabajo fundamental de Gabriel en el que aparece clara la relación existente entre teorías de torsión y localización. Muchos otros conceptos equivalentes se han dado a estos desde entonces, filtros de Gabriel etc.

Con esta nueva técnica de la localización relativa a una teoría de torsión se puede entonces localizar en un ideal primos sin ninguna dificultad, podemos citar a Lambek y Michler quienes desarrollan la teoría, probando que la mayor teoría de torsión para la que R/P es libre de torión coincide con la teoría de torsión asociada al conjunto multiplicativo $\mathcal{C}_R(P)$ de los elementos regulares módulo P.

Sin embargo esta localización no es útil, primeramente por la dificultad que representa manejar esta teoría de torsión en segundo lugar porque no establece una relación buena entre los ideales de R y del localizado, esto es; no es perfecta, y en tercer lugar porque no es útil para construcción de un haz de estructura sobre el especto de los ideales primos de un anillo noetheriano.

Por todas estas razones se introce una nueva teoría de torsión σ_{R-P} asociada a un ideal primo P, esta nueva teoría de torsión tiene la propiedad de tener una base de filtro formada por ideales (biláteros), es una teoría simétrica, entonces es posible construir sobre el espectro de los ideales primos de un anillo noetheriano a la derecha con la topología de Zariski, esto es; los subconjuntos abiertos son de la forma

$X(I)=\{P\in Spec(R)/I$ no está contenido en $P\}$,

un prehaz, asociando a cada abierto X(I) el anillo $Q_I(R)$, esto es la localización en la teoría de torsión $\kappa_I=\wedge\{\sigma_{R-P}/P\in X(I)\}$, esta teoría es también simétrica. Pero para poder construir un haz necesitamos propiedades adicionales y sobretodo cambiar la topología. Nosotros hemos formulado en el texto una condición equivalente a que el prehaz construido sea un prehaz bajo condiciones de cuasi-compacidad sobre la topología.

Estas condiciones se basan principalmente en la compatibilidad de las teorías de torsión; dos teorías de torsión σ y τ se llaman mutuamente compatibles si se tiene $\sigma Q_\tau=Q_\tau\sigma$ y $\tau Q_\sigma=Q_\sigma\tau$, este concepto introducido por Van Oystaeyen es estudiado también por Verschoren, quien obtiene diversas caracterizaciones de cuando dos teorías de torsión son mutuamente compatibles. Con esto en mente podemos comprobar que el prehaz estructura sobre Spec(R) es un haz.

Para buscar condiciones sobre la compatibilidad de teorías de torsión, tenemos que imponer al anillo nuevas condiciones aritméticas, en principio podemos ver que cada dos teorías de torsión estables son mutuamente compatibles. Esto nos lleva al estudio de la condición de Artin-Rees, primero observando que la teoría de torsión simétrica κ_I es estable si y sólo si I verifica la condición de Artin-Rees, y después abtrayendo esta propiedad para teorías de torsión arbitrarias. De este modo podemos llegar a caracterizar las teorías de torsión σ tales que σ y τ son mutuamente compatibles para cada teoría simétrica τ, pero esto que tiene únicamente un interés técnico no tiene ninguno práctico por la imposibilidad de manejar convenientemente estas teorías de torsión.

En este camino hemos llegado hasta introducir las teorías de torsión que verifican la condición débil de Artin-Rees, caracterizando las teorías de torsión simétricas σ que verifican la condición débil de Artin-Rees como aquellas para las que σ^{op} es ideal-invariante. Estas teorías de torsión son el marco más general en el que vamos a trabajar, y comprobaremos que cuando el anillo verifica suficientes condiciones la condición débil de Artin-Rees coincide con la condición de Artin-Rees.

Una vez construido el haz estructura el siguiente objetivo es comprobar que es funtorial, esto es; si $f:R \to S$ es un morfismo de anillos entonces existe una aplicación entre los espectros que es continua para las topologías respectivas. Para obtener una aplicación $f':\mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ una condición suficiente es que f sea un morfismo centralizante, esto es; S está generado como R-módulo por elementos que centralizan a f(R). Para que esta aplicación sea continua necesitamos que la imagen inversa de un abierto de Spec(R) sea abierto en Spec(S). Aquí surge la dificultad salvada recientemente con el empleo de los birradicales fuertes por Verschoren y Mulet.

El siguiente paso es construir un morfismo de anillos de $Q_I(R)$ a $Q_{I'}(S)$, siendo $X(I')=f^{-1}(X(I))$. Existen únicamente soluciones parciales a este problema en el caso en que los anillos son primos, ver [Bueso,Jara,Verschoren], [Mulet-Verschoren]. Por este camino parece que la teoría llega nuevamente a un punto de inactividad.

¿Pero qué ocurre si retomamos otra vez la localización clásica, en el sentido de Goldie, en un ideal primo?. En la década de los 70, impulsado entre otros por Jategaonkar, se llega a interpretar correctamente la localización en ideales primos; resulta que esta no es posible, no tiene sentido, plantearla para localizar en un ideal primo aislado, debido fundamentalmente al hecho de que si p y Q son ideales maximales distintos tales que R/P y R/Q son artinianos y $Q\cap P\neq QP$, entonces P no puede ser localizable, ya que si un conjunto de Ore a derecha C contiene a $\mathcal{C}_R(P)$, también tiene que contener a $\mathcal{C}_R(Q)$. Esto sugiere la posibilidad de que los ideales P y Q esten ligados, y que exista esta ligazón entre otros ideales. La teoría es iniciada por Jategaonkar en 1.973, y fue Mueller quien en 1.976 define cuando dos ideales primos de un anillo FBN están lincados. Posteriormente esta noción fue extendida a anillos noetherianos, obteniendose que el espectro de un anillo se convierte en un grafo, y que los ideales que estan ligados pertenecen a la misma componente conexa; cada una de estas componentes conexas se llama una clique y se obtiene que este es el marco idóneo para estudiar la localización en primos, esto es se localiza en cliques y no en ideales primos.

El siguiente paso es estudiar cuando un conjunto de ideales primos es localizable; para esto en 1982 Jategaonkar introduce en 1982 la condición de second layer, probando que bajo esta condición un conjunto finito de ideales primos es localizable si y sólo si es una unión de cliques. Bajo la hipótesis de second layer y otras más fuertes es posible entonces determinar perfectamente cuando una clique (no necesariamente finita) es localizable, y lo que es más importante para nuestros intereses, es posible también probar que existe compatibilidad entre cliques y las topologías sobre el espectro del anillo que se introducen generalizando la topología de Zariski (topología estable, etc.), debido esto fundamentalmente al hecho de que si R es un anillo que verifica la condición fuerte de second layer, entonces un ideal I verifica al condición de Artin-Rees si y sólo si X(I) es cerrado para cliques. Para conseguir nuestro objetivo de obtener un haz estructura únicamente es necesario ahora imponer la condición de que cada clique sea localizable, ó la condición equivalente de que se verifique la condición débil de intersección, lo cual no es una restricción excesiva.

Queda estudiar la funtorialidad de la construcción, esto se consigue probando que si $f:R \to S$ es un morfismo centralizante, dada una clique en R, se obtiene en S un conjunto de primos que es cerrado para link, y de forma que la aplicación entre los espectros es continua. Finalmente la construcción de un morfismo de anillos entre los localizados es un cuestión técnica que ya habiamos resuelto previamente.

Para resolver el problema totalmente necesitamos poder calcular la fibra de forma sencilla; para esto es suficiente el que los puntos se puedan separar con la topología que estamos utilizando, es conveniente recordar que todos los ideales primos que están en la misma clique estan todos siempre en el mismo abierto, por lo que los puntos de que estamos hablando son *en* realidad cliques. Esto no es posible hacerlo en general, sin imponer nuevas condiciones, sin embargo conocemos de ejemplos importantes en lo que esto es posible separar estos puntos, por ejemplo los anillos FBN ó las álgebras envolventes de álgebras de Lie nilpotentes.

Esta memoria está dividida en cuatro capítulos que desarrollamos aquí sucintamente:

El capítulo 1, **Teorías de torsión y extensiones**, está compuesto por tres secciones. En la primera de ellas se introducen todos los conceptos básicos y generalidades referentes a teorías de torsión. Se presta particular atención a la teoría de torsión σ_C asociada a un conjunto multiplicativo C, y en particular la teoría $\sigma_P=\sigma_{C(P)}$ asociada a un ideal primo. Se estudia también aquí el proceso de simetrización de una teoría de torsión. Se prueba que σ_P^{sim} $=\sigma_{R-P}$ y como consecuencia se obtiene que cada K = $\mathcal{K}(\sigma)$ determina una gama teorías de torsión, de las cuales sólamente una es simétrica, naturalmente esta teoría está definida por $\wedge\{\sigma_{R-P} \mid P\in K\}$; dentro de esta gama será de particular interes para nosotros (ver capíulo 4) la teoría $\wedge\{\sigma_P \mid P\in K\}$. Finaliza la sección, con una rápida introducción de las teorías de torsión estables y con la propiedad de Artin-Rees, que serán estudiadas en detalle en el capítulo 3.

En 1.2, tras una rápida exposición de distintos tipos de extensiones de anillos: finitas, centralizantes, normalizantes y automórficas y de sus propiedades más importantesnos centramos en el estudio de un nuevo tipo, las extensiones fuertemente normalizantes. Para estas extensiones, que son más generales que las centralizantes (ver los ejemplos incluidos en esta sección) probamos que se mantienen la gran mayoría de las propiedades de aquellas:

paso a cocientes, cambio de ideales primos, etc. Veremos en el capítulo 2 que las extensiones fuertemente normalizantes finitas son el el marco adecuado para desarrolar teoremas de cambio de anillo referentes a localización en el sentido de Jategaonkar.

En la sección tres, por último se estudia el comportamiento conjunto de lo introducido en las secciones anteriores, esto es; la compatibilidad de las teorías de torsión con respecto a extensiones de anillos Usando la terminología introducida por Golan, básicamente lo que se estudia es bajo qué condiciones para una teoría de torsión σ en mod-R, la inducida toería de torsión $\bar{\sigma}$ en mod-S está suficientemente determinada por σ y es por tanto posible trabajar con ella. Conectado con esto, se estudia la relación entre $\mathcal{K}(\sigma)$ y $\mathcal{K}(\bar{\sigma})$.

El capítulo 2, **localización y extensiones**, está enteramente dedicado a la localización de un anillo noetheriano no commutativo con respecto a un ideal primo o más estrictamente, con respecto a un conjunto de ellos. En la primera sección de este capítulo, se introduce la base teórica, incluyendo las links, la propiedad (fuerte) de second layer y el teorema de caracterización de conjuntos de primos clásicamente localizables debido a Jategaonkar.

En la sección 2.2, se obtienen los resultados de cambio de anillo antes referidos. En particular, se prueba que dada una extensión fuertemente normalizante finita de anillos noetherianos $R \subseteq S$, asociado a un conjunto X de primos de R, tenemos en Spec(S) el conjunto $X^{*} = \{Q \in \mathrm{Spec}(S) \mid Q \cap R \in X\}$ que es localizable (resp clásicamente localizable) cuando X lo es, y de forma que se induce una extensión $R_X \subseteq S_X{}^*$, que es también fuertemente normalizante finita.

El capítulo 3, **estabilidad, propiedad de Artin-Rees**, se dedica a la propiedad de Artin-Rees y los birradicales. Beachy prueba que en anillos FBN la propiedad de Artin-Rees para una teoría de torsión es equivalente a una propiedad menos restrictiva, que aquí introducimos con el nombre de propiedad débil de Artin-Rees. Este resultado ha sido aplicado (ver [Verschoren-90] entre otros) en el estudio de la mutua compatibilidad de teorías de torsión y su posterior uso de cara a construir un haz de estructura sobre el espectro del anillo. Aquí extendemos el resultado de Beachy para una clase mucho más amplia de anillos, los anillos con la condición fuerte de second layer (Ver [Bell-88] para una lista de clases de anillos que verifican esta propiedad). Se obtiene, también, para anillos con la condición fuerte de second layer una caracterización en términos de links de importancia en el intento de una geometría algebraica con localización no simétrica: un radical σ en mod-R es Artin-Rees si y sólo si $\mathcal{K}(\sigma)$ es cerrado para links a derecha. En particular se obtiene que esta propiedad no depende para esta clase de anillos de la simetría de σ.

En (3.2) se estudian el concepto de birradical introducido por Jategaonkar y el recientemente introducido de birradical fuerte de Mulet y Verschoren, en particular se prueba que ambos conceptos son equivalentes para anillos que verifican la condición fuerte de second layer.

Finalmente en el capítulo 4, **haz estructura**, se aplica la gran mayoría de lo antes estudiado al intento de iniciar una geometría algebraica no conmutativa. En la primera sección se da una visión general de las topologías hasta ahora introducidas en el espectro de un anillo noetheriano; se caracterizan para cuales el prehaz (ver [Verschoren-90]) es un haz, y se hace un estudio clarificador de la teoría en relación con la compatibilidad de teorías de torsión.

En la sección 4.2, se plantea, una nueva solución al problema de la construcción del haz estructura para anillos con la condición fuerte de second layer. Se construye un prehaz mediante el uso de teorías de torsión no simétricas y conjuntos de Ore, que concide, claro está, con el usual para anillos FBN, en los que todas las teorías de torsión son simétricas, y se prueba que este prehaz proporciona las propiedades que se pueden exigir a una construcción de este tipo: es un haz, las fibras son fácilmente calculables, son los localizados respecto a conjuntos de Ore en tipos de anillos importantes, y se obtiene funtorialidad respecto a morfismos centralizantes.

CAPITULO 1.

TEORIAS DE TORSION Y EXTENSIONES.

1.1.

TEORÍAS DE TORSIÓN.

1.1.1.

Un radical exacto a izquierda (o radical, si no hay ambiguedad) en la categoría mod-R, de todos los R-módulos a derecha, es un subfuntor σ del funtor identidad tal que:

1. $\sigma(N) = N\cap\sigma(M)$ para cada $M \in$ mod-R y cada $N \leq M$.
2. $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$ para cada $M \in$ mod-R.

Si σ es un radical en mod-R, un R-módulo derecha M se llama de σ-torsión si $\sigma(M)=M$ y libre de σ-torsión si $\sigma(M)=0$. Llamamos $\mathcal{T}_\sigma$ a la clase de todos los R-módulos derecha σ-torsión y $\mathcal{F}_\sigma$ a la clase de los R-módulos derecha libres de σ-torsión. $\mathcal{T}_\sigma$ se llama clase de torsión de σ y $\mathcal{F}_\sigma$ se llama clase libre de torsión de σ.

La clase $\mathcal{T}_\sigma$ está caracterizada por las siguientes propiedades de clausura:

1. Es cerrada para submódulos.
2. Es cerrada para módulos cocientes.
3. Es cerrada para sumas directas.
4. Es cerrada para extensiones.

Definimos entonces una clase de torsión como una clase de R-módulos derecha que verifica las propiedades (1) a (4). De forma similar la clase $\mathcal{F}_\sigma$ verifica las propiedades:

1'. Es cerrada para extensiones esenciales.

2'. Es cerrada para submódulos.

3'. Es cerrada para productos.

4'. Es cerrada para extensiones.

Definimos entonces una clase libre de torsión como una clase de R-módulos derecha que verifica las propiedades (1') a (4').

Si $\mathcal{T}$ es una clase de torsión, entonces la clase

$\mathcal{F}(\mathcal{T}) = \{M\in \text{mod-}R \mid \text{Hom}_R(T,M)=0 \text{ para todo } T\in\mathcal{T}\}$

es una clase libre de torsión; y análogamente si $\mathcal{F}$ es una clase libre de torsión, entonces la clase

$\mathcal{T}(\mathcal{F}) = \{M\in \text{mod-}R \mid \text{Hom}_R(M,F)=0 \text{ para todo } F\in\mathcal{F}\}$

es una clase de torsión. Para cada clase de torsión $\mathcal{T}$ y cada clase libre de torsión $\mathcal{F}$ se verifica:

$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{F}(\mathcal{T}))$ y $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$.

Un par $(\mathcal{T},\mathcal{T})$ con $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{T})$ y $\mathcal{F} = \mathcal{T}(\mathcal{F})$, se llama una teoría de torsión; en particular asociada a cada radical σ tenemos una teoría de torsión $(\mathcal{T}_\sigma,\mathcal{F}_\sigma)$, a la que representaremos también por σ.

Para cada teoría de torsión $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ y cada R-módulo derecha M, definimos $\sigma(M)$ como el mayor submódulo de M contenido en $\mathcal{T}$, se puede probar que $\sigma(-)$ define un radical, y que $(\mathcal{T}_\sigma,\mathcal{F}_\sigma) = (\mathcal{T},\mathcal{F})$. Existe por tanto una correspondencia biunívoca entre teorías de torsión y radicales en la categoría de R-módulos derecha, por lo que nos referiremos de forma indistinta a un concepto u otro.

1.1.2.

Un radical σ define una operación de clausura en el retículo de los submódulos de un R-modulo derecha M. Sea M un R-módulo derecha, y N un submódulo, llamamos σ-clausura de N en M, y la notaremos por $\sigma\text{-cl}_M N$, a la imagen inversa en M de $\sigma(M/N)$. Un submódulo N de M se llama σ-denso si $\sigma\text{-cl}_M N = M$, o equivalentemente si $M/N \in \mathcal{T}_\sigma$, y σ-cerrado (σ-puro en el sentido de J. S. Golan) si $\sigma\text{-cl}_M N = N$, o equivalentemente si $M/N \in \mathcal{F}_\sigma$. Llamamos $\mathcal{L}_\sigma(M)$ al conjunto de los submódulos σ-densos de M y $\mathcal{C}_\sigma(M)$ al conjunto de los submódulos σ-cerrados. En el caso particular de tomar M = R el conjunto $\mathcal{L}_\sigma(R)$ se suele representar por $\mathcal{L}(\sigma)$, y verifica las siguientes propiedades:

1. Si $I,J \leq R_R$, $I \subseteq J$, $I \in \mathcal{L}(\sigma)$, entonces $J \in \mathcal{L}(\sigma)$.
2. Si $I,J \in \mathcal{L}(\sigma)$, entonces $I \cap J \in \mathcal{L}(\sigma)$.
3. Si $I \in \mathcal{L}(\sigma)$, $r \in R$, entonces $(I:r) \in \mathcal{L}(\sigma)$.
4. Si para $I \leq R_R$ y $J \in \mathcal{L}(\sigma)$ se tiene $(I:r) \in \mathcal{L}(\sigma)$ para cada $r \in J$, entonces $I \in \mathcal{L}(\sigma)$.

Un conjunto de ideales derecha de R que verifica las propiedades (1) a (4) se llama un filtro de Gabriel en R. Si $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel en R, definimos para cada R-módulo derecha M

$\sigma(M) = \{m \in M \mid mI=0 \text{ para algún } I \in \mathcal{L}\}$,

entonces σ define un radical, y $\mathcal{L}(\sigma) = \mathcal{L}$; existe una correspondencia biyectiva entre filtros de Gabriel en R y radicales en mod-R.

1.1.3.

Representamos por tor-R al conjunto de todas las teorías de torsión en mod-R; en tor-R existe de forma natural una relación de orden definida por $\sigma \leq \tau$ si para cada M∈mod-R se verifica $\sigma(M) \leq \tau(M)$, o equivalentemente, si $\mathcal{T}_\sigma \subseteq \mathcal{T}_\tau$, resp. $\mathcal{F}_\sigma \supseteq \mathcal{F}_\tau$. Si $\sigma \leq \tau$ diremos que σ es una especialización (ó refinamiento) de τ y que τ es una generalización de σ.

Para una familia Ω de tor-R, el supremo $\vee\Omega$ tiene por clase libre de torsión a

$$\mathcal{F}_{\vee G} = \cap\{\mathcal{F}_\sigma \mid \sigma\in\Omega\}.$$

y el ínfimo $\wedge\Omega$ tiene por clase de torsión a

$$\mathcal{T}_{\wedge\Omega} = \cap\{\mathcal{T}_\sigma \mid \sigma\in\Omega\}.$$

Entonces tor-R es un retículo distributivo y completo. La caracterización del filtro de Gabriel de $\wedge\Omega$ es fácil de realizar, ya que $\mathcal{L}(\wedge\Omega) = \cap\{\mathcal{L}(\sigma) \mid \sigma\in\Omega\}$; sin embargo el filtro de Gabriel de $\vee\Omega$ es un poco más dificil, daremos una sencilla caracterización en algunos casos particulares más adelante.

1.1.4.

Dado un conjunto multiplicativo C de un anillo R, vamos a definir, asociado a C, un radical σ_C en mod-R mediante:

$$\mathcal{T}_{\sigma_C} = \{M\in\text{mod-}R \mid \forall m\in M,\ \exists c\in C \text{ tal que } mc=0\};$$

la clase libre de torsión y el filtro de Gabriel de σ_C son respectivamente:

$$\mathcal{F}_{\sigma_C} = \{M\in\text{mod-}R \mid \forall 0\neq N\leq M_R,\ N\notin\mathcal{T}_{\sigma_C}\}.$$

$$\mathcal{L}(\sigma_C) = \{I\leq R_R \mid I\cap rC\neq\emptyset,\ \forall r\in R\}.$$

Para cada M∈mod-R tenemos que $\sigma_C(M)$ es el mayor submódulo de M que está en $\mathcal{T}_{\sigma_C}$.

Esta expresión de $\sigma_C(M)$ es poco manejable, pero cuando C verifica la condición de Ore a derecha, esto es;

$\forall r \in R$, $\forall c \in C$, $\exists s \in R$, $\exists d \in C$ tales que $rd=cs$;

tenemos:

$\sigma_C(M) = \{m \in M \mid \exists c \in C \text{ tal que } mc = 0\}$;

existe también una simplificación en la descripción del filtro de Gabriel:

$\mathcal{L}(\sigma_C) = \{I \leq R_R \mid I \cap C \neq \emptyset\}$.

Si C y D son dos conjuntos multiplicativos en R, entonces es evidente que $\sigma_C \leq \sigma_D$ si y solo si $C \subseteq D$.

1.1.5.

Sea P un ideal primo de un anillo R, llamamos $\mathcal{C}_R(P)$ al conjunto de los elementos regulares módulo P de R;

$\mathcal{C}_R(P) = \{c \in R \mid c+P \text{ es regular en } R/P\}$;

cuando R es un anillo noetheriano a derecha tenemos:

$\mathcal{C}_R(P) = \{c \in R \mid xc \in P \Rightarrow x \in P\}$.

$\mathcal{C}_R(P)$ es un subconjunto multiplicativo de R; llamamos σ_P al radical asociado a $\mathcal{C}_R(P)$;

$\sigma_P = \sigma_{\mathcal{C}_R(P)}$,

Si R es un anillo noetheriano a derecha y P y Q son ideales primos, entonces es posible relacionar los radicales σ_P y σ_Q de forma sencilla.

LEMA. *Sean R un anillo noetheriano a derecha y $P,Q \in Spec(R)$. Si consideramos:*

a. $\sigma_P \leq \sigma_Q$.

b. $Q \cap \mathscr{C}_R(P) = \emptyset$

c. $Q \subseteq P$.

Entonces se verifica (a)⇒(b)⇔(c). Si $\mathscr{C}_R(P)$ es Ore a derecha, las tres condiciones son equivalentes.

Demostración. Obviamente (a) es equivalente a $\mathscr{C}_R(P) \subseteq \mathscr{C}_R(Q)$ y entonces, puesto que evidentemente $Q \cap \mathscr{C}_R(Q) = \emptyset$, será también $Q \cap \mathscr{C}_R(P) = \emptyset$; esto prueba (a)⇒(b). Para (b)⇒(c), supongamos que Q no está contenido en P, entonces $(Q+P)/P$ es un ideal no nulo del anillo noetheriano primo R/P y debe por tanto contener un elemento regular entonces $Q \cap \mathscr{C}_R(P) \neq \emptyset$. Finalmente, (c)⇒(b) es evidente. Si $\mathscr{C}_R(P)$ es un conjunto de Ore a derecha y $Q \cap \mathscr{C}_R(P) = \emptyset$, entonces $\sigma_P(R/Q)$ es un ideal bilátero del anillo primo R/Q que ha de ser cero puesto que por hipótesis no contiene ningún elemento regular; así pues, cada elemento de $\mathscr{C}_R(P)$ es regular módulo Q, esto es; $\mathscr{C}_R(P) \subseteq \mathscr{C}_R(Q)$.

1.1.6.

Sea σ un radical, llamamos $\mathscr{L}^2(\sigma)$ al conjunto de los ideales biláteros en $\mathscr{L}(\sigma)$, en general $\mathscr{L}^2(\sigma)$ no determina completamente a σ, para que esto ocurra es necesario que $\mathscr{L}^2(\sigma)$ sea una base de filtro para $\mathscr{L}(\sigma)$, esto es;

$\forall I \in \mathscr{L}(\sigma)\ \exists J \in \mathscr{L}^2(\sigma)$ tal que $J \subseteq I$.

Si un radical σ verifica esta condición, se dice que es un radical <u>simétrico</u>. A cada radical σ le podemos asociar un radical simétrico σ^{sim}, que está definido como el mayor radical simétrico menor que σ; σ^{sim} está caracterizado por:

$\sigma^{sim}(M) = \{m \in M \mid \exists I \in \mathscr{L}^2(\sigma) \text{ tal que } mI = 0\}$.

Como consecuencia $\mathcal{L}^2(\sigma^{\mathrm{sim}}) = \mathcal{L}^2(\sigma)$.

Si consideramos un ideal primo de un anillo R y el radical σ_P, tenemos que

$$\mathcal{L}^2(\sigma_P) = \{I \leq_R R_R \mid I \cap \mathcal{C}_R(P) \neq \emptyset\}.$$

1.1.7.

Sea R un anillo noetheriano a la derecha, para cada ideal primo P de R, definimos un radical simétrico σ_{R-P} en mod-R verificando:

$$\mathcal{L}^2(\sigma_{R-P}) = \{I \leq R \mid \text{I no está contenido en P}\}.$$

De esta forma, $\mathcal{L}(\sigma_{R-P})$ está formado por todos los ideales a derecha de R que contienen un ideal bilátero I no contenido en P.

Vamos a comprobar que todo radical simétrico es un ínfimo de una familia de radicales σ_{R-P}, con P un ideal primo de R. Para ello antes observamos que si σ es un radical simétrico, entonces los ideales primos se separan en dos clases disjuntas, y que este resultado también es válido para radicales en anillos noetherianos a la derecha; si σ es un radical llamamos $\mathcal{Z}(\sigma)$ al conjunto de ideales primos de R que son σ-densos; $\mathcal{Z}(\sigma) = \mathcal{L}(\sigma) \cap \mathrm{Spec}(R)$, y $\mathcal{K}(\sigma)$ al conjunto de ideales primos σ-cerrados en R.

LEMA A. *Si el anillo* R *es noetheriano a derecha o el funtor núcleo idempotente* σ *es simétrico, entonces cada ideal primo de* R *es o bien* σ*-cerrado o bien* σ*-denso.*

Demostración. (1) Supongamos que R es noetheriano a derecha y sea $\sigma \in$tor-R arbitrario; si $P\in Spec(R)$ y $\sigma(R/P)\neq 0$, entonces por ser R/P un anillo noetheriano a derecha y primo, existe un elemento regular $a+P\in\sigma(R/P)$; por ser $a+P$ de σ-torsión existe $I\in\mathcal{L}(\sigma)$ tal que $(a+P)I = 0$, luego $I\subseteq P$ y tenemos $P\in\mathcal{L}(\sigma)$.

(2) Supongamos ahora que $\sigma\in$tor-R es simétrico, y que para cierto $P\in Spec(R)$ se tiene $\sigma(R/P)\neq 0$, entonces existe algún elemento no nulo $r+P\in\sigma(R/P)$, y existe $I\in\mathcal{L}^2(\sigma)$ tal que $rI\subseteq P$; ya que P es un ideal primo tenemos $I\subseteq P$, luego $P\in\mathcal{L}(\sigma)$.

Así pues, en las hipótesis del lema, $\mathcal{K}(\sigma)$ y $\mathcal{Z}(\sigma)$ determinan cada uno al otro. Si σ es simétrico y el anillo es noetheriano a derecha, entonces σ está completamente determinado por cualquiera de ellos en la siguiente forma:

LEMA B. [van Oystaeyen-75] *Sea* R *un anillo noetheriano a derecha, para cada radical simétrico* σ*, se verifica:*

$$\sigma = \wedge\{\sigma_{R-P} \mid P\in\mathcal{K}(\sigma)\}$$

Como consecuencia de ambos resultados, y puesto que si R es noetheriano a la derecha, entonces para cada radical σ se verifica $\mathcal{Z}(\sigma)=\mathcal{Z}(\sigma^{sim})$, resulta que $\mathcal{K}(\sigma)=\mathcal{K}(\sigma^{sim})$ y tenemos:

COROLARIO. *Sea* R *un anillo noetheriano a derecha y* σ *es un radical en mod-R, entonces:*

1. $\sigma^{sim} = \wedge\{\sigma_{R-P} \mid P\in\mathcal{K}(\sigma)\}$.

2. Si τ *es un radical simétrico, entonces* $\tau = \sigma^{sim}$ *si y sólo si* $\mathcal{K}(\tau) = \mathcal{K}(\sigma)$.

3. $\sigma_P^{sim} = \sigma_{R-P}$, *para cada* $P\in Spec(R)$.

Demostración. (1) y (2) son evidentes a partir de lo anterior. Para (3), usando (2), basta hacer notar que $\mathcal{K}(\sigma_P) = \mathcal{K}(\sigma_{R-P})$, que es consecuencia directa de (1.1.6).

Sea I un ideal (bilátero) de un anillo R que es fin. gen. como R-módulo a la derecha, definimos un radical κ_I mediante su filtro de Gabriel:

$\mathcal{L}(\kappa_I) = \{J \leq R_R \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } I^n \subseteq J\}$,

entonces para cada R-módulo derecha M se tiene:

$\kappa_I(M) = \{m \in M \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } mI^n = 0\}$.

Resulta que κ_I es un radical simétrico, y tenemos la siguiente caracterización de $\mathcal{K}(\kappa_I)$;

$\mathcal{K}(\kappa_I) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \text{ no está contenido en } P\}$.

1.1.8.

Existe un tipo de anillos en los que todos los radicales son simétricos, vamos a caracterizarlos. Un anillo R es <u>F.B.N.</u> (<u>fully bounded noetherian</u>) <u>a derecha</u> si es noetheriano a derecha y para todo P∈Spec(R), cada ideal a derecha esencial de R/P contiene un ideal bilátero. Caracterizaciones alternativas vienen dadas por la proposición siguiente:

PROPOSICION. *Dado un anillo noetheriano a derecha* R, *son equivalentes:*

a. R *es F.B.N. a derecha.*

b. *Toda teoría de torsión en* mod-R *es simétrica.*

c. σ_P *es simétrica, para cada* P∈Spec(R).

Demostración. (a)⇔(b) es conocido y puede verse en [Golan-86]. (b)⇒(c) Es evidente. Para (c)$\Rightarrow$(b), sea $P\in Spec(R)$ y sea I/P ideal a derecha esencial de R/P. Entonces, para cada $r\in R$ tenemos que $(I:r)/P=(I/P:r+P)$ es de nuevo un ideal a derecha esencial de R/P. Así, puesto que R/P es noetheriano a derecha primo, cada $(I:r)/P$ debe contener un elemento regular, esto es $(I:r)\cap\mathcal{C}_R(P)\neq\emptyset$. Por tanto $I\in\mathcal{L}(\sigma_P)$ y ya que por hipótesis, σ_P es simétrica, I contiene un ideal bilátero $J\in\mathcal{L}^2(\sigma_P)=\mathcal{L}^2(\sigma_{R-P})$, es decir J no está contenido en P. Entonces J/P es un ideal bilátero no nulo de R/P contenido en I/P.

1.1.9.

Otra propiedad de radicales que es útil en nuestro desarrollo de la teoría es la estabilidad. Un radical σ en mod-R es <u>estable</u> si para cada R-módulo a derecha M y cada submódulo N la topología en N determinada por $\mathcal{L}_\sigma(N)$ coincide con la inducida por la topología de M determinada por $\mathcal{L}_\sigma(M)$; el siguiente resultado nos proporciona diferentes caracterizaciones de teorías de torsión estables.

LEMA. *Sea σ un radical en mod-R, son equivalentes:*

a. *σ es estable.*

b. *La clase $\mathcal{T}_\sigma$ es cerrada para extensiones esenciales.*

c. *Para cada* R*-módulo* M, *$\sigma(M)$ es esencialmente cerrado en* M.

d. *Para cada* R*-módulo inyectivo* E, *$\sigma(E)$ es un sumando directo de* E.

PROPOSICION.

1. *El infimo de una familia de radicales estables es estable.*
2. *El supremo de una familia finita de radicales estables es estable.*
3. *Si* R *es noetheriano a derecha, entonces el supremo de una familia*

arbitraria de radicales estables es estable.

1.1.10.

Sea I un ideal (bilátero) de un anillo noetheriano a derecha R, retomemos el radical κ_I, el hecho de que κ_I sea estable puede ser caracterizado mediante una propiedad aritmética del ideal según afirma el siguiente Teorema.

TEOREMA. [Golan-86] *Sea* R *un anillo noetheriano a derecha e I un ideal, son equivalentes:*

a. κ_I *es una teoría de torsión estable.*

b. Para cada R-*módulo derecha fin. gen.* M *y cada submódulo* N *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $MI^n \cap N \subseteq NI$.

c. Para cada ideal derecha K *de* R *y cada* $L \in \mathcal{L}(\kappa_I)$ *existe* $J \in \mathcal{L}(\kappa_I)$ *tal que* $K \cap J \subseteq KL$.

Los ideales I de R que verifiquen las condiciones equivalentes del Teorema se llaman ideales Artin-Rees a derecha.

1.1.11.

Generalizando estos resultados, diremos que un radical σ es Artin-Rees o que verifica la propiedad de Artin-Rees si

$\forall K \leq R_R \ \forall I \in \mathcal{L}(\sigma) \ \exists J \in \mathcal{L}(\sigma)$ tal que $J \cap K \subseteq KI$.

Obtenemos entonces un resultado análogo al anterior para estos radicales.

LEMA. [Verschoren-90] *Sea* σ *un radical simétrico en* mod-R, *son equivalentes:*

a. σ *es estable.*

b. σ verifica la propiedad de Artin-Rees.

Existe una clase de anillos en los que cada ideal verifica la propiedad de Artin-Rees; un anillo R noetheriano a derecha es clásico a derecha si cada ideal de R verifica la propiedad de Artin-Rees a derecha. La propiedad más importante de esta clase de anillos viene dada por el siguiente lema:

PROPOSICION. [Stenström-75] *Si* R *es un anillo clásico a derecha, entonces cada radical simétrico en* mod-R *es estable.*

1.1.12.

Sea σ un radical en mod-R, para cada R-módulo M vamos a definir un su módulo de cocientes. En primer lugar definimos

$$Q_{(\sigma)}(M) = \varinjlim \{\mathrm{Hom}_R(I,M) \mid I \in \mathcal{L}(\sigma)\};$$

es posible dar estructura de anillo a $Q_{(\sigma)}(R)$ y de $Q_{(\sigma)}(R)$-módulo a derecha a $Q_{(\sigma)}(M)$ para cada R-módulo derecha M. Si reiteramos el proceso tenemos para cada R-módulo derecha M

$$Q_{\sigma}(M) = Q_{(\sigma)}(Q_{(\sigma)}(M));$$

$Q_{\sigma}(M)$ se llama el módulo de cocientes de M relativo a σ, para cada R-módulo derecha M tenemos que $Q_{\sigma}(M)$ es un $Q_{\sigma}(R)$-módulo derecha y además existe un morfismo de R-módulos

$$j_M : M \to Q_{\sigma}(M).$$

El R-módulo $Q_{\sigma}(M)$ es libre de σ-torsión y verifica que para cada $I \in \mathcal{L}(\sigma)$ y cada morfismo $f: I \to Q_{\sigma}(M)$ existe un morfismo $g: R \to Q_{\sigma}(M)$ tal que $g_{|I} = f$; los R-módulos que verifican esta última propiedad se llaman σ-inyectivos. El morfismo j_M verifica además que Ker(j_M) y Coker(j_M) son σ-torsión. Estas propiedades caracterizan al módulo de cocientes de M. También es posible dar otra descripción del módulo de cocientes de M como la σ-clausura de $M/\sigma(M)$ en $E(M/\sigma(M))$.

Los R-módulos libres de σ-torsion y σ-inyectivos se suelen llamar σ-cerrados ó fielmente σ-inyectivos, y forman una subcategoría plena de mod-R, a la que notaremos por mod-(R,σ). Esta subcategoría es una subcategoría de Giraud de mod-R [Stenström-75], y una categoría de Grothendieck; en general no es equivalente a la categoría mod-$Q_\sigma(R)$; cuando esto ocurre diremos que el radical σ es perfecto.

1.1.13.

Un morfismo $N \to M$ en mod-R es un σ-isomorfismo si su núcleo y su conúcleo son σ-torsión; un ejemplo de σ-isomorfismo es el morfismo canónico j_M de M en su módulo de cocientes. Los σ-isomorfismos permiten caracterizar de forma sencilla a los módulos σ-cerrados.

LEMA. *Sea* E *un* R-*módulo derecha, son equivalentes:*

(a) E *es* σ-*cerrado.*

(b) E *es libre de* σ-*torsión y el morfismo canónico*

$\mathrm{Hom}_R(M,E) \to \mathrm{Hom}_R(N,E)$

es biyectivo para cada σ-*isomorfismo* $N \to M$.

1.1.14.

Finalizamos esta sección con un resultado sobre el cálculo del módulo de cocientes para un tipo especial de radicales.

LEMA. *Sea σ un radical estable, entonces para cada* R-*módulo* M *se tiene:*

$$Q_{\sigma}(M) = \varinjlim\{\mathrm{Hom}_R(I,M) \mid I\in\mathcal{L}(\sigma)\}$$

1.2.

EXTENSIONES DE ANILLOS.

1.2.1.

Existen en la literatura definiciones de distintos tipos de extensiones de anillos de forma que sea posible estudiar el comportamiento de propiedades de anillos con respecto a la extensión. Hacemos aquí un rápido resumen de las definiciones más habituales, con sus propiedades más interesantes, como motivación a la posterior introducción de las extensiones fuertemente normalizantes que surgen como el grado idóneo de generalidad y serán el marco adecuado para nuestro estudio.

1.2.2.

Dado un morfismo de anillos $f:R \to S$, el anillo S tiene de forma natural estructura de R-bimódulo, por restricción de escalares, via f. Diremos que f es un morfismo finito de anillos, si via f, S es finitamente generado como R-módulo a cada lado. En el caso particular del morfismo inclusión, diremos que $R \subseteq S$ es una extensión finita de anillos. Para extensiones finitas de anillo tenemos como resultado más importante:

LEMA. *Si* $R \subseteq S$ *es una extensión finita de anillos y* R *es noetheriano a derecha, entonces* S *también lo es.*

1.2.3.

Un elemento m de un R-bimódulo M es R-centralizante si

$$mr = rm \quad \text{para cada } r \in R.$$

Diremos que un R-bimódulo M es un <u>bimódulo</u> <u>centralizante</u> si está generado por elementos centralizantes. En particular, una extensión de anillos $R \subseteq S$ será una <u>extensión</u> <u>centralizante</u> <u>de</u> <u>anillos</u> (o <u>extensión</u> <u>en</u> <u>el</u> <u>sentido</u> <u>de</u> Processi) si S es un R-bimódulo centralizante. Más en general, diremos que un morfismo de anillos $f:R \rightarrow S$ es un <u>morfismo</u> <u>centralizante</u> <u>de</u> <u>anillos</u> si, la extensión $f(R) \subseteq S$ es centralizante.

LEMA. *Si* $R \subseteq S$ *es una extensión centralizante de anillos entonces, para cada ideal primo* Q *de* S, $Q \cap R$ *es un ideal primo de* R.

1.2.4.

Un elemento m de un R-bimódulo M es <u>R-normalizante</u> si $mR=Rm$. Una extensión de anillos $R \subseteq S$ es <u>normalizante</u> si S está generado como R-modulo por elementos R-normalizantes. En la última década se ha avanzado mucho en el estudio de las extensiones normalizantes finitas (e.n.f.) [Heinicke & Robson-81, 84, Bit-David & Robson-80a, 80b]. Los principales resultados al respecto los sumarizamos a continuación:

PROPOSICION. Sea $R \subseteq S$ *una extensión normalizante finita de anillos*, $S = \Sigma\{Ra_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, los a_i elementos normalizantes. *Entonces:*

1. R *es noetheriano (resp. artiniano) a derecha si y sólamente si* S *lo es.*
2. *Para cada ideal primo* Q *de* S, $Q \cap R$ *es un ideal semiprimo de* R, *intersección de como máximo* n *ideales primos de* R, $P_1,\dots,P_n$ *minimales sobre* $Q \cap R$. *(Diremos que* Q *cae sobre los* P_i*).*
3. *(Lying over) Para cada ideal primo* P *de* R, *existe al menos uno y como máximo n ideales primos de* S *que caen sobre* P.

4. *(Going up) Para cada* Q *ideal primo de* S, *y cada* P' *ideal primo de* R *de forma que* $Q\cap R\subseteq P'$, *existe* Q' *ideal primo de de* S *que cae sobre* P' *y tal que* $Q\subseteq Q'$.

5. *(Incomparabilidad) Dados* Q_1 *y* Q_2 *ideales primos de* S *tales que* $Q_1\cap R=Q_2\cap R$, *o bien* Q_1 *y* Q_2 *son iguales o bien son incomparables.*

1.2.5.

Un interesante caso particular de extensión normalizante lo constituyen las llamadas extensiones automórficas.

Un elemento m de un R-bimódulo M es R-automórfico, si existe un automorfismo φ de R de forma que $rm=m\varphi(r)$ para cada $r\in R$. Diremos que una extensión de anillos $R\subseteq S$ es una extensión automórfica de anillos si S está generado como R-módulo por elementos automorficos. Más en general, diremos que un morfismo de anillos $f:R\to S$ es un morfismo automórfico de anillos si, la extensión $f(R)\subseteq S$ es automórfica.

Obviamente cada extensión normalizante es automórfica, y cada automórfica es centralizante. En [McConnell-Robson-88] pueden verse ejemplos que prueban que las implicaciones son estrictas.

1.2.6.

Un elemento m de un R-bimódulo M es fuertemente R-normalizante si para cada ideal bilátero I de R se tiene $Im = mI$. Una extensión de anillos $R\subseteq S$ es fuertemente normalizante (e.f.n.), si S está generado como R-módulo por elementos fuertemente R-normalizantes. De igual manera, un morfismo de anillos

$f:R\to S$ es fuertemente normalizante, si la extensión $f(R)\subseteq S$ es fuertemente normalizante.

LEMA. *Sea M un* R*-bimódulo, un elemento* $m\in M$ *es fuertemente normalizante si y sólo si es normalizante y para cada* $r\in R$ *se verifica* $RmrR = RrmR$.

Demostración. Dado un ideal I de R, podemos escribir $I = \Sigma Rx_j$ para cierta familia $\{x_j \mid j\in J\}$ de elementos de R. Así, si m es fuertemente R-normalizante, tenemos:

$$Im = IRm = (\Sigma Rx_j)Rm = \Sigma(Rx_jRm) = \Sigma(Rx_jmR) = \Sigma(Rmx_jR) = \Sigma(mRx_jR) =$$
$$= m(\Sigma Rx_j)R = mIR = mI.$$

Recíprocamente, si $mI=Im$ para cada ideal I de R, entonces en particular $mR=Rm$, con lo cual m es normalizante. Por otra parte, dado $r\in R$, considerando el ideal $I=RrR$, tenemos:

$$RmrR = mRrR = RrRm = RrmR.$$

COROLARIO. *Si* $R\subseteq S$ *es una extensión fuertemente normalizante de anillos, e* I *es un ideal de* R*, entonces* $IS=SI$ *es un ideal de* S.

Demostración. Si $R\subseteq S$ es fuertemente normalizante, podemos escribir $S=\Sigma Ra_i$, donde cada a_i es un elemento fuertemente R-normalizante. Dado un ideal I de R, tenemos:

$$IS = I(\Sigma Ra_i) = \Sigma IRa_i = \Sigma RIa_i = \Sigma Ra_iI = SI.$$

Obviamente, entonces:

$$S(IS) = (SI)S = (IS)S = IS$$

y por tanto IS es ideal (bilátero) de S.

EJEMPLO A. *Cada extensión centralizante de anillos es fuertemente normalizante.*

Veamos ahora algunos ejemplos de extensiónes fuertemente normalizantes no centralizantes.

EJEMPLO B. *Cada extensión normalizante de un anillo simple es fuertemente normalizante.*

Demostración. Dados un generador R-normalizante a_i de S y un elemento arbitrario r de R,

$$Rra_iR = RrRa_i = Ra_i = a_iR = a_iRrR = Ra_irR,$$

puesto que por ser R simple $RrR=R$ para cada $r\in R$.

EJEMPLO C. *Dado un anillo* R, *si* φ *es el automorfismo interior asociado a algún elemento invertible* $a\in R$, *y consideramos el anillo de polinomios skew* $R[X,\varphi]$, *es decir con:* $Xr = \varphi(r)X = (a^{-1}ra)X$, *entonces la extensión* $R \subseteq R[X,\varphi]$ *es fuertemente normalizante.*

Demostración. Obviamente $R[X,\varphi]$ está generado como R-módulo por la familia $\{X^i \mid i\in\mathbb{N}\}$, veamos que estos generadores son fuertemente R-normalizantes. Puesto que $Xr = \varphi(r)X$, es claro que $X^ir = \varphi^i(r)X^i$, y por tanto $X^iR = RX^i$, esto es, cada X^i es R-normalizante. Por otra parte

$$X^ir = a^{-i}raX^i = a^{-i}rXa^i \in RrX^iR,$$

puesto que $Xa = aX$ $(\varphi(a)=a)$, y de igual manera $rX^i \in RX^irR$. Luego $RrX^iR =$

COROLARIO B. *Si* $f:R \to S$ *es un morfismo fuertemente normalizante de anillos, entonces la factorización canonica de* f, $\bar{f}:R/\ker(f) \to S$, *es también fuertemente normalizante.*

Demostración. Evidente, puesto que $f(R) = \bar{f}(R/\mathrm{Ker}(f))$.

COROLARIO C. *Si* $f:R \to S$ *es un morfismo fuertemente normalizante de anillos, e* I *es un ideal bilátero de* S*, entonces el morfismo* inducido $f':R/f^{-1}(I) \to S/I$ *es también fuertemente normalizante.*

Demostración. Trivial a partir de los dos resultados anteriores.

1.2.8.

PROPOSICION. *Si* $R \subseteq S$ *es una extensión fuertemente normalizante de anillos, entonces, para cada ideal primo* Q *de* S, $Q \cap R$ *es un ideal primo de* R.

Demostración. Sea Q ideal primo de S, y supongamos $IJ \subseteq P \cap R$ para ciertos I,J ideales de R. Entonces $(SI)(SJ)=SIJ \subseteq S(Q \cap R) \subseteq Q$, luego puesto que SI,SJ son ideales bilateros de S, uno de ellos debe estar contenido en Q. Si, por ejemplo $SI \subseteq Q$, entonces $I \subseteq SI \cap R \subseteq Q \cap R$.

COROLARIO. Sea $S=\Sigma Ra_i$ *una extensión fuertemente normalizante finita de anillos, se verifica:*

1. (Lying over). Para cada P *ideal primo de* R*, existe al menos uno y como máximo* n *ideales primos de* S *que caen sobre él.*

2. (Going up). Para cada Q *ideal primo de* S*, y cada* P' *ideal primo de* R *de*

forma que $Q\cap R\subseteq P'$, *existe* Q' *ideal primo de* S *que cae sobre* P' *y tal que* $Q\subseteq Q'$.
3. (Incomparabilidad). Dados Q_1 *y* Q_2 *ideales primos de* S *tales que* $Q_1\cap R=Q_2\cap R$, *ó bien* Q_1 *y* Q_2 *son iguales o bien son incomparables.*

1.2.9.

LEMA. *Sea* m *un elemento fuertemente* R*-normalizante de un* R*-bimódulo* M. *Entonces* ${}_R(0:m) = (0:m)_R$ *es un ideal bilátero de R.*

Demostración. Dado $r \in {}_R(0:m)$, rm=0, luego RmrR = RrmR = 0, y por tanto mr=0, con lo que $r \in (0:m)_R$.

PROPOSICION A. Sea $R\subseteq S$ *es una extensión fuertemente normalizante de anillos, y supongamos que* S *es primo, entonces* Is $\neq$ 0, *para cada* I$\neq$0 *ideal bilátero de* R *y cada* $0\neq s\in S$.

Demostración. Si fuese Is=0, entonces ISs=SIs=0, con lo cual (IS)(SsS)=0, y por ser S primo habrá de ser o bien IS=0, con lo cual I=0 ($I\subseteq IS\cap R$), o bien SsS=0, con lo cual s=0.

PROPOSICION B. *Sea* $R\subseteq S$ *es una extensión fuertemente normalizante finita de anillos,* $S = \Sigma Ra_i$, *entonces para cada* i *se tiene:* $(0:a_i)\subseteq rad(R)$.

Demostración. Es claro, a partir de los resultados anteriores que si S es primo, entonces $(0:a_i)=0$, para cada i. Para el caso general, sea $P\in Spec(R)$, entonces $P=Q\cap R$, para algún $Q\in Spec(S)$ y $R\subseteq S$ induce por paso a cocientes (1.2.7) una extensión fuertemente normalizante $R/P\subseteq S/Q$, con generadores fuertemente normalizantes, a_i+Q, aplicando lo anterior se sigue que $(0:a_i+Q)_{R/P}=0$, y de aquí $(0:a_i)\subseteq P$. Puesto que esto se verifica para cada $P\in Spec(R)$, $(0:a_i)\subseteq rad(R)$.

EJEMPLO. *Dada una extensión* finita *$R\subseteq S$ de anillos tal que S es primo, son equivalentes:*

(a) $R\subseteq S$ es fuertemente normalizante.

(b) $R\subseteq S$ es automórfica y $RrR=R\varphi_i(r)R$, para cada $r\in R$ y cada $i\in\Lambda$, siendo $\{\varphi_i \mid i\in\Lambda\}$ los automorfismos de la extensión.

Demostración. (a)⇒(b). Que $R\subseteq S$ es automórfica es immediato por la proposición A anterior. Por otro lado, puesto que $a_ir=\varphi_i(r)a_i$, para cada $r\in R$ y cada i, tenemos:

$$(R\varphi_i(r)R)a_i = R\varphi_i(r)a_iR = Ra_irR = Rra_iR = (RrR)a_i$$

y de aquí $(R\varphi_i(r)R) = (RrR)$, puesto que siendo S primo $(0:a_i)=0$.

(b)⇒(a). Obviamente si $R\subseteq S$ es automórfica, cada a_i es normalizante. Por otra parte, tenemos:

$$Ra_irR = R\varphi_i(r)a_iR = R\varphi_i(r)Ra_i = RrRa_i = Rra_iR$$

luego la extensión es fuertemente normalizante.

1.3

COMPATIBILIDAD DE TEORIAS DE TORSION.

1.3.1.

Dada una situación de adjunción:

$$\begin{array}{c} \text{mod-}S \\ {\scriptstyle F}\uparrow\downarrow{\scriptstyle G} \\ \text{mod-}R \end{array}$$

si G es exacto y commuta con sumas directas, entonces dado un radical σ mod-R podemos definir en mod-S un radical $G(\sigma)$ mediante:

$$\mathcal{T}_{G(\sigma)} = \{N \in \text{mod-}S \mid G(N) \in \mathcal{T}_\sigma\}$$

Dualmente, si F es exacto y commuta con sumas directas, entonces para cada radical τ en mod-S, definimos en mod-R un radical mediante:

$$\mathcal{T}_{F(\tau)} = \{M \in \text{mod-}R \mid F(M) \in \mathcal{T}_\tau\}$$

Cuando particularizamos al caso de la adjunción asociada a un *morfismo* de anillos $f:R \to S$, tenemos

$$\begin{array}{c} \text{mod-}S \\ {\scriptstyle f^*}\uparrow\downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \text{mod-}R \end{array}$$

donde $f_*(N_S)=N_R$ y $f^*(M_R)=M\otimes_R S$, para cada S-módulo N y cada R-módulo M. En este caso el funtor f_* es exacto y conmuta con sumas directas, luego para cada radical σ en mod-R existe un radical $\bar{\sigma} = f_*(\sigma)$ en mod-S definido:

$$\mathcal{T}_{\bar{\sigma}} = \{N \in \text{mod-}S \mid N_R \in \mathcal{T}_\sigma\}$$

esto es: un S-módulo a derecha M es $\bar{\sigma}$-torsión si y sólo si es σ-torsión como R-módulo, por restricción de escalares via f.

Una condición para que el funtor f^* sea exacto es que S sea un R-módulo a izquierda plano, en este caso para cada radical τ en mod-S podemos definir un radical en mod-R, al que llamaremos f^{*}, y que está definido por

$$\mathcal{T}_{f^{*}(\tau)} = \{M\in\text{mod-}R \mid M\otimes_R S\in\mathcal{T}_\tau\}.$$

1.3.2.

Para un radical σ en mod-R no se verifica, desafortunadamente, que la clase de los S-módulos libre de $\bar{\sigma}$ torsión sea

$$\{N\in\text{mod-}S \mid N_R\in\mathcal{F}_\sigma\};$$

cuando esto ocurre diremos que σ es <u>compatible</u> con el morfismo f. Es posible caracterizar los radicales que verifican esta condición también por las siguientes condiciones equivalentes [Golan-86]:

a. Para todo S-módulo N, N es libre de $\bar{\sigma}$-torsión si y sólo si es libre de σ-torsión.

b. Si un R-módulo M es libre de τ-torsión, entonces también lo es $\mathrm{Hom}_R(S,M)$.

c. Si un R-módulo M es τ-torsión, entonces también lo es $M\otimes_R S$.

d. $\mathcal{L}(\bar{\sigma}) = \{I\leq S_S \mid f^{-1}(I)\in\mathcal{L}(\sigma)\}$.

e. $\{I\leq S_S \mid f^{-1}(I)\in\mathcal{L}(\sigma)\}$ es un filtro de Gabriel.

f. Para todo S-módulo N se tiene $\bar{\sigma}(N) = \sigma(N)$.

PROPOSICION. *Sea* f:R $\to$ S *un morfismo de anillos, tal que* S *es plano como* R-*módulo a izquierda. Sea* τ *un radical en mod-*S *y* $\sigma=f^{*}(\tau)$, *si consideramos:*

1. $\tau \leq f_{*}(\sigma)$.

2. σ *es compatible con* f.

3. $\sigma = f^{*}f_{*}(\sigma)$.

Entonces se verifica (1)⇒(2)⇒(3).

Demostración. (1)⇒(2) Sea $M \in \mathcal{T}_\sigma$ y veamos que $M \otimes_R S \in \mathcal{T}_\sigma$. Si M es σ-torsión, entonces, por la definición de σ, $M \otimes_R S$ es τ-torsión, luego usando (1), $M \otimes_R S$ es $f_*(\sigma)$-torsión, es decir; $M \otimes_R S$ es σ-torsión considerado como R-módulo. (2)⇒(3) Puede verse en [Golan-86].

1.3.3.

Pasamos ahora a estudiar la compatibilidad de teorías de torsión con extensiones y morfismos finitos, normalizantes y fuertemente normalizantes. Comenzaremos con un resultado para extensiones finitas. Para ello, veamos antes un interesante lema:

LEMA. *Dados un R-bimódulo* M *finitamente generado a izquierda y un radical* σ *en mod-R, son equivalentes:*

a. $M \in \mathcal{T}_\sigma$.

b. $Ann(M_R) \in \mathcal{L}(\sigma)$.

c. Existe $I \in \mathcal{L}^2(\sigma)$, *tal que* $MI = 0$.

Demostración. Las implicaciones (b)⇒(c) y (c)⇒(a) son evidentes, veamos (a)⇒(b). Puesto que M es finitamente generado a izquierda, podremos escribir $M = \sum_{i=1}^{n} Rm_i$, para ciertos m_i. Ya que M es σ-torsión, para cada m_i, su anulador $(0:m_i)_R$ es un ideal a derecha σ-denso de R, con lo cual, la intesección (finita) de todos ellos $I = \cap_{i=1}^{n}(0:m_i)_R$, tambien lo es; por otra parte es claro que $I \subseteq Ann(M_R)$ y por tanto $Ann(M_R) \in \mathcal{L}(\sigma)$.

PROPOSICION. *Dada una extensión finita de anillos* $R \subseteq S$*, para cada* $\sigma \in$*tor-R, se verifica:*

$$\mathcal{L}^2(\bar{\sigma}) = \{I \leq_S S_S \mid I \cap R \in \mathcal{L}^2(\sigma)\}.$$

Demostración. Para la inclusión a la derecha, sea $L \in \mathcal{L}^2(\bar{\sigma})$, entonces $S/L \in \mathcal{T}_{\bar{\sigma}}$, o equivalentemente $(S/L)_R \in \mathcal{T}_\sigma$. Puesto que S/L es un R-bimodulo finitamente generado a izquierda, por ser L bilatero y la extensión finita, podemos aplicar el resultado anterior y tenemos que existe $I \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ tal que $(S/L)I=0$, es decir, tal que $SI \subseteq L$. Pero entonces $I \subseteq SI \cap R \subseteq L \cap R$, con lo cual $L \cap R \in \mathcal{L}^2(\sigma)$. Para la inclusión recíproca, sea L ideal bilatero de S, y supongamos que $L \cap R \in \mathcal{L}^2(\sigma)$, entonces $R/L \cap R \in \mathcal{T}_\sigma$ y puesto que este es un R-bimódulo finitamente generado a cada lado, existe $I \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ de forma que $RI \subseteq L \cap R$. Pero entonces $SI \subseteq S(L \cap R) \subseteq L$ y por tanto $(S/L)_R \in \mathcal{T}_\sigma$, con lo cual $S/L \in \mathcal{T}_{\bar{\sigma}}$, es decir $L \in \mathcal{L}^2(\sigma)$.

1.3.4.

Dado un morfismo normalizante de anillos $f:R \to S$, con $S = \Sigma\{f(R)a_i \mid i \in \Lambda\}$, y dado un ideal a derecha I de R, podemos considerar, para cada i lo que podríamos llamar el simetrizado de I con respecto a a_i:

$$I_i^* = \{r \in R \mid a_i r \in I a_i\}$$

Es claro que para cada $i \in \Lambda$, I_i^* es un ideal a derecha de R que verifica $a_i I_i^* \subseteq I a_i$.

PROPOSICION. [Merino-88] *Sea* $f:R \to S$ *un morfismo normalizante de anillos, y sea* $\sigma \in$ tor-R *tal que existe una base de filtro* $\mathcal{L}$ *para* $\mathcal{L}(\sigma)$ *verificando:*

$$\forall I \in \mathcal{L},\ \forall i \in \Lambda,\ I_i^* \in \mathcal{L}(\sigma).$$

Entonces σ *es compatible con* f.

Demostración. Comprobemos la condición (c) de la definición. Para ello, sea $M\in\mathcal{T}_\sigma$, y consideremos $M\otimes_R S$. Dado un elemento arbitrario $x \in M\otimes_R S$, x será de la forma $x = \sum_j n_j \otimes s_j$, pero cada s_j tendrá una expresión $s_j = \sum_i f(r_{ij})a_i$, con lo cual, tenemos:

$$x = \sum_j n_j \otimes s_j = \sum_j n_j \otimes (\sum_i f(r_{ij})a_i) == \sum_{i,j} n_j r_{ij} \otimes a_i = \sum_i (\sum_j n_j r_{ij}) \otimes a_i .$$

Esto es, $x = \sum_{i\in\Lambda'} m_i \otimes a_i$, donde $\Lambda' \subseteq \Lambda$ es finito, y cada $m_i \in M$. Para cada i, el elemento m_i es σ-torsión, y por tanto su anulador $(0:m_i)_R$ es un ideal a derecha σ-denso de R. Así pues, la intersección (finita) de todos ellos $J = \cap_{i\in\Lambda'}(0:m_i)_R$ es también σ-denso. Puesto que $\mathcal{L}$ es base de filtro para $\mathcal{L}(\sigma)$, existe $I\in\mathcal{L}$ tal que $I\subseteq J$ y aplicando la condición de la hipótesis para I, obtenemos que $I^* = \bigcap_{i\in\Lambda'} I_i^* \in \mathcal{L}(\sigma)$, de nuevo por tratarse de una intersección finita y se verifica:

$$xI^* = (\sum_{i\in\Lambda'} m_i \otimes a_i)I^* = \sum_{i\in\Lambda'} m_i \otimes a_i I^* \subseteq \sum_{i\in\Lambda'} m_i \otimes a_i I_i^* \subseteq \sum_{i\in\Lambda'} m_i \otimes I a_i \subseteq$$

$$\subseteq \sum_{i\in\Lambda'} m_i \otimes J a_i = \sum_{i\in\Lambda'} m_i J \otimes a_i = 0$$

Con lo cual cada elemento $x \in M\otimes_R S$ es anulado por un ideal a derecha σ-denso de R, y por tanto $M\otimes_R S$ es σ-torsión.

1.3.5.

PROPOSICION A. *Si* $f:R \to S$ *es un morfismo fuertemente normalizante de anillos, entonces cada radical simétrico en* mod-R *es compatible con* f.

Demostración. Si σ es un radical simétrico, entonces $\mathcal{L}^2(\sigma)$ es una base de filtro para $\mathcal{L}(\sigma)$ que verifica la condición de la proposición anterior, puesto que en este caso para cada $I\in\mathcal{L}^2(\sigma)$, y para cada i se tiene $I_i^* = I$.

PROPOSICION B. *Si* $f:R \to S$ *es un morfismo fuertemente normalizante de anillos, entonces para cada* $\sigma\in$tor-R *simétrico,* $\bar{\sigma}$ *es también simétrico.*

Demostración. Sea $I\in\mathcal{L}(\bar{\sigma})$, entonces, por el resultado anterior, $f^{-1}(I)\in\mathcal{L}(\sigma)$ y por tanto, existe $J\in\mathcal{L}^2(\sigma)$ tal que $J\subseteq f^{-1}(I)$. Consideremos $f(J)S$, este es un ideal bilatero de S, además, $J\subseteq f^{-1}(f(J)S)$, luego $f^{-1}(f(J)S)\in\mathcal{L}(\sigma)$ y por tanto $f(J)S\in\mathcal{L}^2(\bar{\sigma})$. Por último, puesto que $J\subseteq f^{-1}(I)$, $f(J)\subseteq I$, y tenemos $f(J)S\subseteq I$.

COROLARIO A. *Si* $f:R \to S$ *es un morfismo centralizante de anillos, entonces cada radical en* mod-R *es compatible con* f.

Demostración. Basta tener en cuenta que en este caso $I_i^* = I$, para cada i y cada $I \in \mathcal{L}(\sigma)$.

COROLARIO B. *Si* $f:R \to S$ *es un morfismo sobreyectivo de anillos, entonces cada radical en* mod-R *es compatible con* f.

Demostración. Basta tener en cuenta que cada morfismo sobreyectivo es centralizante.

1.3.6.

Estudiamos a continuación el comportamiento de $\mathcal{K}(\sigma)$ con respecto a extensiones.

PROPOSICION. *Sea* $R\subseteq S$ *una extensión normalizante finita de anillos, con* R *noetheriano a derecha, entonces, para cada* $\sigma\in$tor-R, *se verifica:*

$\mathcal{K}(\bar{\sigma}) = \{Q\in \mathrm{Spec}(S) \mid \varphi(Q)\cap\mathcal{K}(\sigma)\neq\emptyset\}$.

donde $\varphi(Q)$ *representa el conjunto de ideales primos de* R *asociados a* $Q\cap R$.

Demostración. Puesto que R es noetheriano a derecha, S también lo es y por tanto tenemos que $\mathcal{K}(\sigma) = \mathrm{Spec}(R)-\mathcal{L}^2(\sigma)$ y $\mathcal{K}(\bar{\sigma}) = \mathrm{Spec}(S)-\mathcal{L}^2(\bar{\sigma})$, y entonces es claro que $\mathcal{K}(\bar{\sigma}) = \{Q\in \mathrm{Spec}(S) \mid Q\cap R \notin \mathcal{L}(\sigma)\}$. Pero, puesto que $Q\cap R = \cap\{P \mid P\in\varphi(Q)\}$ y esta es una intersección finita, evidentemente $Q\cap R \notin \mathcal{L}(\sigma)$ si y sólo si $\varphi(Q)\cap\mathcal{K}(\sigma)\neq\emptyset$.

TEOREMA. *Sea* $R\subseteq S$ *una extensión fuertemente normalizante de anillos, entonces, para cada* $\sigma\in$tor-R *simétrico, se verifica:*

$\mathcal{K}(\bar{\sigma}) = \{Q\in \mathrm{Spec}(S) \mid Q\cap R\in\mathcal{K}(\sigma)\}$.

Demostración. Puesto que (1.3.5) si σ es simétrico, también $\bar{\sigma}$ lo es, $\mathcal{K}(\sigma)=\mathrm{Spec}(R)-\mathcal{L}(\sigma)$ y $\mathcal{K}(\bar{\sigma})=\mathrm{Spec}(S)-\mathcal{L}(\bar{\sigma})$ y en este caso, para cada $Q\in\mathrm{Spec}(S)$ se tiene que $Q\cap R\in\mathrm{Spec}(R)$, y el resultado es claro.

CAPITULO 2.

LOCALIZACION CLASICA Y EXTENSIONES.

2.1.

LOCALIZACION CLÁSICA.

Introducimos en esta sección todos los conceptos básicos y las técnicas referentes a la localización en ideales primos en el sentido clásico.

2.1.1.

Para cada subconjunto multiplicativo C de un anillo conmutativo R existe siempre un anillo de fracciones de R con denominadores en C y es conocido que esto no es siempre posible en el caso no conmutativo. Buscando obtener propiedades análogas al caso conmutativo se define:

Sea C un subconjunto multiplicativo de un anillo R, un <u>anillo de fracciones a la derecha</u> de R con respecto a C es un anillo RC^{-1} junto con un morfismo de anillos $i:R \to RC^{-1}$ de forma que:

1. $i(c)$ es una unidad en RC^{-1}, para cada $c \in C$.
2. Todo elemento de RC^{-1} es de la forma $i(r)i(c)^{-1}$, con $r \in R$, $c \in C$.
3. $i(r)i(c)^{-1} = i(r')i(c)^{-1}$ si y sólo si existe $d \in C$ tal que $rd = r'd$.

La existencia de un anillo de fracciones a la derecha con respecto a C, es equivalente a que C verifique las propiedades:

- C verifica la <u>condición de Ore a la derecha</u>.

  $\forall r \in R$, $\forall c \in C$ $\exists s \in R$, $\exists d \in C$ tales que $rd = cs$.

- C es <u>reversible a la derecha</u>.

  $\forall r \in R$, $\forall c \in C$ verificando $cr = 0$, $\exists d \in C$ tal que $rd = 0$.

Llamamos conjunto de Ore a la derecha o conjunto de denominadores a la derecha a un conjunto multiplicativo que verifica estas dos propiedades. En el caso particular de que R sea un anillo noetheriano a la derecha, entonces un subconjunto multiplicativo es un conjunto de Ore si y sólo si verifica la condición de Ore.

De forma analoga se pueden definir anillo de fracciones a la izquierda, conjunto de Ore a la izquierda, etc.

El anillo de fracciones a la derecha verifica la siguiente propiedad universal.

LEMA. [Stenström-75] *Sea* R *un anillo y* C *un subconjunto multiplicativo, si existe el anillo de fracciones a la derecha de* R *respecto a* C*,* RC^{-1}*, entonces para cada morfismo de anillos* $f:R \to S$ tal que $f(c)\in S$ *es una unidad para cada* $c\in C$*, existe un único morfismo de anillos* $f':RC^{-1} \to S$ *tal que* $f = f'i$.

Como consecuencia el anillo de fracciones es único salvo isomorfismos, y si existen RC^{-1} y $C^{-1}R$, entonces son isomorfos.

2.1.2.

Un problema mucho más complejo es el de hacer en el caso no conmutativo la localización en ideales primos. El primer obstáculo a salvar es el de elegir una buena generalización del concepto de ideal primo. En anillos no conmutativo los conceptos de ideal primo e ideal completamente primo no son equivalentes, y por lo tanto el conjunto R-P no es en general un conjunto multiplicativo. La solución a este primer problema pasa por trabajar con un nuevo conjunto multiplicativo disjunto con P, que coincida con R-P en el caso de ideales completamente primos (y por ende en el caso conmutativo); en este contexto surge el conjunto $\mathcal{C}_R(P)$ de los elementos regulares módulo P; en [Jategaonkar-86] puede verse una completa justificación de esta elección. El siguiente paso es estudiar cuando es posible construir un anillo de fracciones con respecto a $\mathcal{C}_R(P)$ o equivalentemente cuando es $\mathcal{C}_R(P)$ un conjunto de denominadores a la derecha; es en este punto donde la problemática se hace mucho más compleja; no solo no es siempre posible realizar siempre tal construcción, sino que incluso hay ejemplos de anillos en los que unos ideales primos la permiten (son localizables) y otros no; esto ha resultado ser debido principalmente a dos obstrucciones: (1) la existencia de links no triviales entre ideales primos y (2) la ausencia de la propiedad de second layer. [Jategaonkar-86].

2.1.3.

Si R es un anillo noetheriano, dados Q, P ideales primos de R diremos que <u>existe una link</u> de Q a P vía A y lo notaremos

$Q \rightsquigarrow P$ (via A),

si se verifica:

1. A es un ideal de R de forma que $QP \subseteq A \subset Q \cap P$,
2. $\mathrm{Ann}({}_R(Q\cap P)/A)=Q$,
3. $\mathrm{Ann}((Q\cap P)/A_R)=P$,
4. $(Q\cap P)/A$ es libre de torsión como R/P-módulo derecha y como R/Q-módulo a izquierda.

Dado un subconjunto X de Spec(R), diremos que X es cerrado a la derecha para links, si siempre que $Q \rightsquigarrow P$, $P \in X$, se tiene $Q \in X$. Análogamente se definen cerrado a la izquierda para links y cerrado (a ambos lados) para links. Dado $P \in$ Spec(R), llamaremos clique a la derecha de P y notaremos rtcl(P) al menor subconjunto de Spec(R), cerrado a la derecha para links que contiene a P. Análogamente se definen, la clique a la izquierda ltcl(P) y la clique de P, cl(P).

El siguiente resultado, ilustra como la presencia de links no triviales supone una obstrucción a la localización en primos:

LEMA. [Bell-89] *Sean* R *un anillo noetheriano a la derecha,* $P \in \mathrm{Spec}(R)$ *y* C *un conjunto de Ore a la derecha en* R *disjunto con* P, *entonces*

$$C \subseteq \cap\{\mathcal{C}_R(Q) \mid Q \in \mathrm{rtcl}(P)\}.$$

Este resultado nos induce a pensar que no es conveniente localizar en un ideal primo, sino en todos los que están en su clique.

2.1.4.

Un interesante resultado técnico al respecto de las links es el siguiente:

LEMA. *Sea* R *un anillo noetheriano a la derecha,* $P,Q \in \mathrm{Spec}(R)$ *e* I *un ideal de* R *tal que* $I \subseteq P,Q$. *Entonces:*

1. *Si* $Q/I \rightsquigarrow P/I$ *(vía* A/I*) en* R/I, *entonces* $Q \rightsquigarrow P$ *(vía* A*) en* R.
2. $Q/I \rightsquigarrow P/I$ *(vía* 0*) en* R/I si y sólo si $Q \rightsquigarrow P$ *(vía* I*) en* R.

Demostración. 1. Tenemos

$$(Q/I)(P/I)\subseteq A/I\subset (Q/I)\cap (P/I),$$

esto es

$$(QP+I)/I\subseteq A/I\subset (Q\cap P)/I,$$

y por tanto $QP\subseteq A\subset Q\cap P$. Por otra parte

$$\mathrm{Ann}_{R/I}(((Q\cap P)/I)/(A/I))=Q/I,$$

$$\mathrm{Ann}(((Q\cap P)/I)/(A/I))_{R/I}=P/I,$$

luego puesto que tenemos un isomorfismo de R-bimódulos y por tanto de (R/Q,-R/P)-bimódulos $((Q\cap P)/I)/(A/I)\cong (Q\cap P)/A$, se sigue que $\mathrm{Ann}_R((Q\cap P)/A)=Q$, $\mathrm{Ann}((Q\cap P)/A)_R=P$ y $Q\cap P/A$ es libre de torsión a cada lado como (R/Q,R/P)-bimódulo.

2. La implicación hacia la derecha es un caso particular de (1), veamos la otra implicación. Tenemos $QP\subseteq A\subset Q\cap P$, $\mathrm{Ann}_R((Q\cap P)/A)=Q$, $\mathrm{Ann}((Q\cap P)/A)_R=P$ y $Q\cap P/A$ es libre de torsión a cada lado como (R/Q,R/P)-bimódulo. Así:

$$(Q/A)(P/A)=(QP+A)/A=0\subset (Q\cap P)/A=(Q/A)\cap (P/A).$$

Además $\mathrm{Ann}_{R/A}((Q\cap P)/A)=Q/A$, $\mathrm{Ann}((Q\cap P)/A)_{R/A}=P/A$ y $Q\cap P/A$ es libre de torsión a cada lado como ((R/A)/(Q/A),(R/A)/(P/A))-bimódulo.

2.1.5.

Veamos ahora, la segunda obstrucción a la que nos referíamos anteriormente. Sea R un anillo noetheriano a la derecha. Se dice que $P\in \mathrm{Spec}(R)$ verifica la <u>condición de second layer a derecha</u>, si no existen un ideal primo Q y una sucesión exacta corta de R-módulos derecha uniformes, finitamente generados, $0 \to L \to M \to N \to 0$ de forma que se verifique

1. $L = \mathrm{Ann}_M(P)$,

2. L es libre de torsión como R/P-módulo derecha (esto es: σ_P-libre de torsión),

3. $Q = \mathrm{Ann}(M_R) = \mathrm{Ann}(N'_R)$, para cada submódulo no nulo N' de N.

En el caso en que podamos rebajar la condición de ser L libre de torsión a que sea Ann(L')=P, para cada submódulo no nulo L' de L, diremos que P verifica la <u>condición fuerte de second layer a derecha</u>.

Existen amplias clases de anillos en los que todos sus ideales primos verifican la condición de second layer a derecha: F.B.N., anillos artinianos, etc., e incluso la condición fuerte de second layer; de hecho, no se conocen ejemplos de anillos que verifiquen la condición de second layer y no la condición fuerte de second layer. Una relación exhaustiva de estas clases de anillos puede verse en [Bell-89, 4.7].

2.1.6.

Sea X un conjunto X de ideales primos de un anillo noetheriano a la derecha R, diremos que X es <u>localizable a la derecha</u>, (ver [Bell-89], [Goodearl-Warlfield-89]), si existe un conjunto de Ore a derecha C disjunto con cada $P \in X$, de forma que:

1. Para cada $P \in X$, el anillo RC^{-1}/PC^{-1} es artiniano.

2. Los ideales primitivos de RC^{-1} son exactamente los ideales PC^{-1}, con $P \in X$.

Diremos que X es <u>clasicamente localizable a la derecha</u>, si además se verifica:

3. Cada RC^{-1}-módulo derecha finitamente generado que es extensión esencial de un RC^{-1}-módulo simple es artiniano.

Llamamos $\mathcal{C}_R(X) = \cap\{\mathcal{C}_R(P) \mid P \in X\}$, es claro que si X es localizable a la derecha, entonces $C \subseteq \mathcal{C}_R(X)$, $\mathcal{C}_R(X)$ es un conjunto de Ore y existe un isomorfismo $RC^{-1} \cong R\mathcal{C}_R(X)$, este anillo lo representamos simplemente por R_X. [Bell-89].

2.1.7.

Para asegurar la localizabilidad clásica de un conjunto de ideales primos de un anillo noetheriano a la derecha, existen dos condiciones que vamos a estudiar a continuación.

Sea $X \subseteq Spec(R)$ un conjunto de ideales primos, se dice que X verifica la <u>condición débil de intersección a la derecha</u>, si para cada ideal a derecha I de R tal que $I \cap \mathcal{C}_R(P) \neq \emptyset$, para todo $P \in X$, se tiene que $I \cap \mathcal{C}_R(X) \neq \emptyset$. Es conocido que si X es un conjunto finito, entonces verifica la condición débil de intersección a la derecha [Jategaonkar-86].

Sea $X \subseteq Spec(R)$ un conjunto de ideales primos, se dice que X verifica la <u>condición de incomparabilidad</u> si cada dos primos en X son incomparables, esto es; si no existen P, $Q \in X$ de forma que $P \subset Q$.

2.1.8.

El resultado principal caracterizando la localizabilidad clásica es el siguiente:

TEOREMA. [Jategaonkar-86] *Dados un anillo noetheriano a la derecha* R *y* X⊆Spec(R) *un conjunto de ideales primos,* X *es clásicamente localizable a la derecha si y solamente si se verifica:*

1. X *es cerrado para links a derecha*
2. *Cada* P∈X *verifica la condición de second layer a derecha.*
3. X *verifica la condición débil de intersección a derecha.*
4. X *verifica la condición de incomparabilidad.*

Como consecuencia obtenemos, para el caso de un único primo:

COROLARIO. *Un ideal primo* P *de un anillo noetheriano a la derecha* R *es clásicamente localizable a la derecha si y sólo si verifica la condición de second layer y* {P} *es cerrado para links a derecha.*

Otra consecuencia es el siguiente resultado de Bell.

COROLARIO. [Bell-89] *Un conjunto X de ideales primos de un anillo noetheriano R es clásicamente localizable a derecha si y sólo si es localizable a derecha y verifica la condición de second layer a derecha.*

2.2

LOCALIZACION CLÁSICA Y EXTENSIONES.

Estudiamos en esta sección el comportamiento respecto a extensiones de todos los conceptos introducidos en la sección anterior: conjuntos de Ore, localizabilidad, propiedad de second layer y links.

2.2.1.

Empezamos con algunos resultados técnicos en extensiones fuertemente normalizantes.

LEMA. *Sea* $R\subseteq S$ *una extensión fuertemente normalizante finita de anillos,* $S = \sum_{i\in I} Ra_i$. *Dado* $i\in I$, *para cada* $P\in \mathrm{Spec}(R)$ *y cada* $r\in R$, *se verifica:* $a_i r \in a_i P$ *si y sólo si* $r\in P$.

Demostración. Si $a_i r\in a_i P$, entonces $a_i r=a_i p$, para algún $p\in P$ y entonces $a_i(r-p)=0$, luego $r-p\in(0:a_i)$. Pero según (1.2.9), $(0:a_i)\subseteq \mathrm{rad}(R)\subseteq P$, luego $r-p\in P$ y por tanto $r\in P$.

PROPOSICION A. *Sea* $R\subseteq S$ *una extensión fuertemente normalizante finita de anillos,* $S = \sum_{i\in I} Ra_i$. *Dados* $i\in I$, $r\in R$, *si* $a_i r = r' a_i$, *entonces:*

1. *Para cada* $P\in \mathrm{Spec}(R)$, $r\in P$ si y sólo si $r'\in P$.
2. *Para cada* $X\subseteq \mathrm{Spec}(R)$, $r\in \mathcal{C}_R(X)$ si y sólo si $r'\in \mathcal{C}_R(X)$.

Demostración. (1) Si $r\in P$, entonces $a_i r\in a_i P$, luego $r' a_i\in a_i P=Pa_i$ y por tanto $r'\in P$. La otra implicación es análoga.

(2) Puesto que $\mathcal{C}_R(X)=\bigcap_{P\in X}\mathcal{C}_R(P)$, es suficiente probar el caso $X=\{P\}$ Supongamos pues que $r\in\mathcal{C}_R(P)$, y sea $t\in R$ tal que $tr'\in P$. Entonces $tr'a_i\in Pa_i=a_iP$, Pero $ta_i=t'a_i$, para algún $t'\in R$ y entonces $a_it'r=ta_ir=tr'a_i$, y por tanto $a_it'r\in a_iP$ y se sigue del lema anterior que $t'r\in P$. Como r es regular módulo P, entonces $t'\in P$ y usando (1) obtenemos $t\in P$. Puesto que esto se verifica para cada $t\in R$, se sigue que $r'\in\mathcal{C}_R(P)$. Revirtiendo el argumento se obtiene la implicación reciproca.

Con esta técnica obtenemos un teorema de cambio de anillo, no para cualquier conjunto de Ore, pero si para los asociados a un conjunto de ideales primos:

PROPOSICION B. *Sea* $R\subseteq S$ *una extensión fuertemente normalizante finita de anillos noetherianos a derecha, y sea* $X\subseteq\mathrm{Spec}(R)$*. Entonces:*

1. *Si* $C=\mathcal{C}_R(X)$ *es un conjunto de Ore a derecha en* R*, entonces* C *es también un conjunto de Ore a derecha en* S.

2. *Los localizados* $RC^{-1}\subseteq SC^{-1}$ *forman una extensión fuertemente normalizante.*

3. *Para cada* $Q\in\mathrm{Spec}(S)$*, se verifica* $(Q\cap R)C^{-1} = QC^{-1}\cap RC^{-1}$.

Demostración. (1) Dados $s\in S$, $c\in C$, podemos escribir $s = r_1a_1+\ldots+r_na_n$, para un número finito de elementos $r_1,\ldots,r_n\in R$, $a_1,\ldots,a_n\in S$ fuertemente R-normalizantes. En vista de la proposición anterior, para cada i, existe $c'_i\in C$ de forma que $a_ic'_i=c_ia_i$. Por otra parte, usando la propiedad de común denominador para $r_1,\ldots,r_n\in R$, $c'_1,\ldots,c'_n\in S$, obtenemos $t_1,\ldots,t_n\in R$, $d\in C$ de forma que $r_id = c'_it_i$, para cada $i=1,\ldots,n$. Así: $sd = \Sigma a_ir_id = \Sigma a_ic'_it_i = \Sigma ca_it_i = c\Sigma a_it_i$

$= ct$ para $t = \Sigma a_i t_i$.

(2) Supongamos que $S=\Sigma Ra_i$ para una familia $\{a_i\}_{i\in\Lambda}$ de elementos fuertemente R-normalizantes y veamos primero que $SC^{-1}=\Sigma(RC^{-1})a_i$. La inclusión a derecha es obvia; para la otra, consideremos un elemento $x\in\Sigma(RC^{-1})a_i$ arbitrario. Podemos escribir x en la forma $x = (r_1c_1^{-1})a_1+\ldots+(r_nc_n^{-1})a_n$, y puesto que C es Ore a derecha en S, para $a_1,\ldots,a_n\in S$, $c_1,\ldots,c_n\in C$ obtenemos por la propiedad de común denominador [McConnel-Robson-88] que existen $d\in C$ y $t_1,\ldots,t_n\in S$, de forma que $a_id =c_it_i$, para cada $i=1,\ldots,n$. Entonces $xd = r_1t_1+\ldots+r_nt_n = t\in S$, con lo cual $x = td^{-1}\in SC^{-1}$. Por otra parte, cada ideal J de RC será de la forma $J=IC^{-1}$ para algún ideal I de R y entonces para cada $i=1,\ldots,n$ tenemos:

$$a_iJ = a_iIC^{-1} = Ia_iC^{-1} = IC^{-1}a_i = Ja_i.$$

(3) La inclusión a la derecha es obvia; para la otra, sea x un elemento arbitrario de $QC^{-1}\cap RC^{-1}$, entonces $x = qc_1^{-1} = rc_2^{-1}$ para ciertos $q\in Q$, $r\in R$, $c_1,c_2\in C$. Reduciendo a común denominador, existen $r_1,r_2\in R$, $c\in C$ de forma que $c_1^{-1} = r_1c^{-1}$, $c_2^{-1} = r_2c^{-1}$, y entonces $qr_1c^{-1} = rr_2c^{-1}$. Existe por tanto $d\in C$ tal que $qr_1d = rr_2d$, y así $qr_1d\in Q\cap R$, de donde $qr\in(Q\cap R)C^{-1}$ y finalmente $x =qc_1^{-1} = qr_1c^{-1} \in (Q\cap R)C^{-1}$.

2.2.2.

Nuestro proposito ahora es dada una extensión fuertemente normalizante finita $R\subseteq S$ de anillos noetherianos, y dado un conjunto localizable X de ideales primos de R, obtener asociado a X un conjunto X^* de ideales primos de S y localizable. Para ello dado $X\subseteq Spec(R)$ definimos $X^*\subseteq Spec(S)$ por:

$$X^* = \{Q\in Spec(S) \mid Q\cap R\in X\}$$

Entonces se verifica:

TEOREMA. *Sea* $R \subseteq S$ *una extensión fuertemente normalizante finita de anillos noetherianos a derecha, y sea* $X \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ *localizable, entonces* $X^{*} \subseteq \mathrm{Spec}(S)$ *es localizable y los localizados forman una extensión fuertemente normalizante* $R_X \subseteq S_{X^*}$.

Demostración. Puesto que según el resultado anterior $C = \mathcal{C}_R(X)$ es conjunto de Ore a derecha en S, podemos considerar el localizado SC^{-1}, veamos ahora que SC^{-1} es una localización de S con respecto a X^{*}. Para ello comprobemos las tres condiciones de la definición:

1. Puesto que $C \subseteq R$, tenemos para cada $Q \in X^{*}$, $C \cap Q = C \cap (Q \cap R) = \emptyset$ ya que $Q \cap R \in X$.
2. Puesto que $(Q \cap R)C^{-1} = QC^{-1} \cap RC^{-1}$, podemos considerar pasando a cocientes la extensión fuertemente normalizante finita $RC^{-1}/(Q \cap R)C^{-1} \subseteq SC^{-1}/QC^{-1}$ y puesto que $RC^{-1}/(Q \cap R)C^{-1}$ es artiniano, también SC^{-1}/QC^{-1} lo será.
3. Si T es un ideal primitivo de SC^{-1}, habrá de ser $T = QC^{-1}$ para algún $Q \in \mathrm{Spec}(S)$. Entonces $T \cap RC^{-1} = (Q \cap R)C^{-1}$ es primitivo en $R \cap C^{-1}$ y por tanto $(Q \cap R) \in X$, con lo cual $Q \in X^{*}$.

2.2.3.

De cara a generalizar el resultado anterior para conjuntos clásicamente localizables, necesitamos en vista de (2.1.8.) un teorema de cambio de anillo para la condición de second layer. El siguiente resultado al respecto es debido a Letzter:

TEOREMA A. [Letzter-90] *Si* $R \subseteq S$ *es una extensión finita de anillos noetherianos y cada ideal primo de* R *verifica la condición de second layer entonces cada ideal primo de* S *también la verifica.*

No obstante, a pesar de su importancia, el resultado anterior, no nos es útil de cara a extender (2.2.2.) por dos motivos: (1) Necesita de la condición de second layer a ambos lados y (2) que esta se verifique para todos los ideales primos de R y no meramente para los de un subconjunto X. Sin embargo bajo la hipótesis más fuerte de que la extensión sea normalizante además de finita, una adaptación de su demostración, combinada con [Page-87, th. 8] y [Soueif-87, prop. 16] nos da:

TEOREMA B. *Sea* $R \subseteq S$ *una extensión normalizante finita de anillos noetherianos a la derecha. Dado* $Q \in \mathrm{Spec}(S)$*, notemos por* $\varphi(Q)$ *el conjunto de los ideales primos de* R *minimales sobre* $Q \cap R$*. Si* $\cup\{\mathrm{rtcl}(P) \mid P \in \varphi(Q)\}$ *verifica la condición (fuerte) de second layer a derecha en* R*, entonces* Q *verifica la condición (fuerte) de second layer a derecha en* S.

Demostración. Supongamos que Q no verifica la condición de second layer a derecha, y sea $0 \to L \to M \to N \to 0$, una sucesión exacta corta de S-módulos derecha uniformes finitamente generados, con $L = \mathrm{Ann}_M(Q)$, L libre de torsión como S/Q-módulo derecha, $\mathrm{Ann}(M) = \mathrm{Ann}(N) = T \in \mathrm{Spec}(S)$ con T no incluido en Q. Pasando a cocientes, podemos suponer que T=0, esto es S primo. Usando [Page-87, th. 8], tenemos entonces que $\mathcal{C}_R(Q \cap R) \subseteq \mathcal{C}_S(Q)$, y por tanto L es libre de torsión como $R/Q \cap R$-módulo derecha. Por otra parte, aplicando [Jategaonkar-86, 4.2.6], tenemos que $\mathrm{Ass}(L_S) = Q$, luego $\mathrm{Ass}(L_R) = \varphi(Q)$ por [Soueif-87, prop. 16]. Consideremos ahora K un R-submódulo de M maximal con respecto a $L \cap K = 0$; entonces L es isomorfo a un submódulo esencial de M/K, y por tanto $\mathrm{Ass}(M/K) = \mathrm{Ass}(L) \subseteq \varphi(Q)$, y M/K es tame (esta propiedad se conserva por extensiones esenciales). Puesto que por hipótesis $\cup\{rtcl(P)/P\in\varphi(Q)\}$ verifica la condición de second layer a derecha, estamos en condiciones de aplicar [Bell-89, 4.3] a M/K. Existen pues $P_1,\ldots,P_n\in\cup\{rtcl(P)/P\in\varphi(Q)\}$, de forma que $(M/K)P_1..P_n=0$. En este momento, el mismo razonamiento de [Letzter-90, 2.5] es válido:

Puesto que S es primo, P contiene un elemento regular c de S, y por tanto una copia isomorfa cS de S. Se sigue que el rango reducido de S/Q como R-módulo es cero t por tanto $(Q\cap R)\cap\mathcal{C}_R(0)=\varnothing$. Entonces $P\cap\mathcal{C}_R(0)=\varnothing$, para cada $P\in\varphi(Q)$ y puesto que cada P_i está en la clique a dercha de algún $P\in\varphi(Q)$, también cada P_i contiene un elemento regular de R.

Así, $J=Ann(M/K)_R$ contiene un elemento regular, y entonces S/SJ es torsión como S-módulo a izquierda, ya que:

$$J\cap\mathcal{C}_R(0)=\varnothing \Rightarrow J\in\mathcal{L}(\sigma_{\mathcal{C}_R(0)}) \Rightarrow SJ\in\mathcal{L}(\sigma_{\mathcal{C}_S(0)})$$

y puesto que es finitamente generado a derecha , obtenemos que su anulador $I=Ann_S(S/SJ)$ es un elemento del filtro $\mathcal{L}(\sigma_{\mathcal{C}_S(0)})$ y es en particular no nulo. Finalmente $MI=MIS\subseteq MSJ=MJ\subseteq K$ y entonces MI es un S-submódulo de M tal que $MI\cap L=0$. Puesto que M es S-uniforme, será MI=0 en contradicción con ser $Ann(M)_S=T=0$.

Estamos ahora finalmente en condiciones de establecer el resultado antes anunciado:

TEOREMA C. *Sea $R\subseteq S$ una extensión fuertemente normalizante finita de anillos noetherianos a derecha, y sea $X\subseteq Spec(R)$ clásicamente localizable, entonces $X^*\subseteq Spec(S)$ es clásicamente localizable y los localizados forman una extensión fuertemente normalizante $R_X\subseteq S_{X^*}$.*

Demostración. Si $X\subseteq \mathrm{Spec}(R)$ es clásicamente localizable, entonces en particular es cerrado para links a derecha y second layer a derecha. Por tanto del anterior resultado se obtiene que X^* es second layer a derecha y puesto que es localizable a derecha por (2.2.2), es clásicamente localizable a derecha.

2.2.4.

Nos ocupamos ahora del paso de links con respecto a extensiones. El siguiente resultado está inspirado en [Braun-Warfield-88].

TEOREMA. *Dada una extensión fuertemente normalizante finita* $R\subseteq S$ *de anillos noetherianos con la condición de second layer, y dados* $Q_1,Q_2\in \mathrm{Spec}(S)$ *tales que* $Q_1 \rightsquigarrow Q_2$*, entonces o bien* $Q_1\cap R=Q_2\cap R$ *o bien* $Q_1\cap R\rightsquigarrow Q_2\cap R$.

Demostración. Supongamos que $Q_1\rightsquigarrow Q_2$ via A, entonces $Q_1/A\rightsquigarrow Q_2/A$ via 0 en R/A, y podemos sin pérdida de generalidad suponer pasando a cocientes que $A=0$, usando (2.1.4). Tenemos pues que $Q_1\cap Q_2$ es un $(S/Q_1,S/Q_2)$-bimódulo libre de torsión a cada lado. Puesto que [Page-87, th. 8] $\mathscr{C}_R(Q_1\cap R)\subseteq \mathscr{C}_S(Q_2)$ y similarmente para Q_2, $Q_1\cap Q_2$ es también un $(R/Q_1\cap R,R/Q_2\cap R)$-bimódulo libre de torsión a cada lado y noetheriano a cada lado. Se sigue de [Jategaonkar-86], que $\mathrm{clKdim}(R/Q_1\cap R)=\mathrm{clKdim}(R/Q_2\cap R)$ y por tanto o bien $Q_1\cap R=Q_2\cap R$, o bien son incomparables. Si $Q_1\cap R\neq Q_2\cap R$, entonces puesto que $(Q_1\cap R)(Q_2\cap R)=0$, tenemos que $Q_1\cap R$ y $Q_2\cap R$ son precisamnte los primos minimales de R y puesto que para cada otro primo T de R $\mathrm{clKdim}(R/T)<\mathrm{clKdim}(R/Q_1\cap R)$, se sique que $\{Q_1\cap R,\ Q_2\cap R\}$cerrado para links. Si no existiese una link $Q_1\cap R\rightsquigarrow Q_2\cap R$, entonces $\{Q_2\cap R\}$ sería cerrado para links a derecha y por tanto clasicamnte localizable a derecha, con lo cual, usando el teorema 2.2.3.C $\{Q_2\cap R\}^*=\{P\in Spec(R)/P\cap R=Q_2\cap R\}$ sería clásicamente localizable a derecha en S y en particular cerrado para links a derecha, en contradicción con existir una link $Q_1\rightsquigarrow Q_2$ y ser $Q_1\notin\{Q_2\cap R\}^*$, $Q_2\in\{Q_2\cap R\}^*$.

Letzter, muestra con un ejemplo en [Letzter-90] que no es esperable una generalización de este resultado para extensiones normalizantes finitas.

COROLARIO. *Dada una extensión fuertemente normalizante finita* $R\subseteq S$ *de anillos noetherianos a la derecha con la condición de second layer, se verifica:*

1. Si $X\subseteq Spec(R)$ *es cerrado para links a derecha, entonces* X^* *también lo es.*

2. Dado $P\in Spec(R)$, $rtcl(P)\subseteq(rtcl(P\cap R))^*$. *En particular, si* $rtcl(P\cap R)$ *es finita, también* $rtcl(P)$ *lo es.*

Demostración. 1. Si $P\in X^*$ y $Q\rightsquigarrow P$, entonces $Q\cap R=P\cap R$ ó $Q\cap R\rightsquigarrow P\cap R$ y en cualquier caso $Q\cap R\in X$, con lo cual $Q\in X^*$.

2. Aplicando (1), $(rtcl(P\cap R))^*$ es un conjunto cerrado para links que contiene a P, y por tanto contiene a rtcl(P). Para la segunda afirmación, basta tener en cuenta (1.2.8.)

2.2.5.

En cuanto a la subida de links tenemos los siguientes resultados:

TEOREMA. [Letzter-90] *Sea* $R\subseteq S$ *una extensión finita de anillos noetherianos, y sean* $P_1,P_2\in Spec(R)$ *tales que* $P_1\rightsquigarrow P_2$. *Entonces existen* $Q_1,Q_2\in Spec(R)$ *de forma* *que cada* Q_i *cae sobre* P_i*, y o bien* $Q_1 = Q_2$*, o bien existe una sucesión de ideales primos* $Q_1 = T_1, T_2, \ldots, T_t = Q_2$ *de forma que* $t \geq 2$ *y* $T_i \rightsquigarrow T_{i+1}$*, para cada* $i=1, \ldots, t-1$.

COROLARIO. *Dados una extensión fuertemente normalizante finita* $R \subseteq S$ *de anillos noetherianos a la derecha y dado* $X \subseteq \mathrm{Spec}(R)$*, si* X^* *es cerrado para links a derecha, entonces* X *también lo es.*

Demostración. Dados $Q \in \mathrm{Spec}(R)$, $P \in X$, tales que $Q \rightsquigarrow P$, existen según el resultado anterior $\bar{Q}, \bar{P} \in \mathrm{Spec}(S)$, de forma que $\bar{Q} \cap R = Q$, $\bar{P} \cap R = P$, y existe una cadena de primos $\bar{Q} \rightsquigarrow T_2 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow T_{t-1} \rightsquigarrow \bar{P}$. Ya que $P \in X$, tenemos $\bar{P} \in X^*$, y por ser X^* cerrado para links a derecha, también $\bar{Q} \in X^*$, con lo cual $Q \in X$.

CAPITULO 3.

ESTABILIDAD, PROPIEDAD DE ARTIN-REES.

3.1.

PROPIEDAD DE ARTIN-REES.

3.1.1.

El lema de Artin-Rees, establece que dados un ideal I de un anillo conmutativo noetheriano R y un R-módulo finitamente generado M, para cada submódulo N de M existe un entero positivo n de forma que $MI^n \cap N \subseteq NI$. En el caso no conmutativo, se dice que un ideal (bilátero) I de un anillo R satisface la <u>propiedad de Artin-Rees a derecha</u> si se verifica el lema de Artin-Rees para I y cada R-modulo a derecha finitamente generado M. El siguiente resultado es bien conocido:

LEMA.- [Smith-82] *Sean* R *un anillo noetheriano a derecha e* I *un ideal de* R, *son equivalentes:*

a. I *verifica la propiedad de Artin-Rees.*

b. Para cada ideal a derecha K *de* R *existe un entero n tal que* $K \cap I^n \subseteq KI$.

c. Para cada R*-módulo a derecha finitamente generado* M *conteniendo un submódulo esencial* L, *con* LI=0, *existe un entero* n *tal que* $MI^n=0$.

Una formulación equivalente de la propiedad de Artin-Rees es también posible en terminos del radical κ_I:

Para cada ideal derecha K de R y cada $L \in \mathcal{L}(\kappa_I)$, existe $J \in \mathcal{L}(\kappa_I)$ de forma que $K \cap J \subseteq KL$.

Más en general, recordemos que un radical $\sigma \in$tor-R verifica la <u>propiedad</u>

de Artin-Rees, si para cada ideal a derecha K de R y cada $L\in\mathcal{L}(\sigma)$ existe $J\in\mathcal{L}(\sigma)$ tal que $K\cap J\subseteq KL$.

3.1.2.

Vemos enseguida una interesante caracterización de la propiedad de Artin-Rees:

PROPOSICION. *Sea* R *un anillo noetheriano, y sea* σ *un radical en* mod-R, *entonces son equivalentes:*

a. σ *verifica la propiedad de Artin-Rees a derecha.*

b. *Para cada extensión esencial* $N\leq^{e}M$ *de* R*-modulos a derecha, si* $\mathrm{Ann}(N_R)\in\mathcal{L}(\sigma)$, *entonces* M *es* σ*-torsión.*

c. $\mathcal{T}_{\sigma} \supseteq \{M_R \mid \mathrm{Ass}(M_R)\subseteq\mathcal{Z}(\sigma)\}$.

Demostración. (a)⇒(b). Supongamos que σ verifica la propiedad de Artin-Rees y sea $N\leq^{e}M$, $L=\mathrm{Ann}(N_R)\in\mathcal{L}(\sigma)$. Dado un elemento arbitrario $m\in M$, consideremos el ideal a derecha de R, $K=(N:m)_R=\{r\in R/mr\in N\}$. Aplicando la propiedad de Artin-Rees para L, existe $J\in\mathcal{L}(\sigma)$ tal que $K\cap J\subseteq KL$. Entonces $mJ\cap N=0$, puesto que si $mj\in mJ\cap N$, entonces $j\in J\cap K\subseteq KL$ y así $mj\in mKL\subseteq NL=0$. Usando la esencialidad de N, obtenemos $mJ=0$, y entonces, puesto que $J\in\mathcal{L}(\sigma)$, tenemos $m\in\sigma(M)$. Como esto se verifica para cada elemento m de M, tenemos $M\in T_{\sigma}$.

(b)⇒(a). Dados K ideal a derecha de R y $L\in\mathcal{L}(\sigma)$, podemos considerar el morfismo $f=i\pi:K \to K/KL\subseteq E(K/KL)$. Por ser $E(K/KL)$ inyectivo, existe $e\in E(K/KL)$ de forma que $f(r)=er$, para cada $r\in K$. Por otra parte, puesto que K/KL es anulado por $L\in\mathcal{L}(\sigma)$, $\mathrm{Ann}(K/KL)\in\mathcal{L}(\sigma)$ y entonces usando la hipótesis (b), $E(K/KL)$ es σ-torsión, con lo que $eJ=0$ para algún $J\in\mathcal{L}(\sigma)$, y así $J\cap K\subseteq \mathrm{Ker}(f)\subseteq KL$.

(b)⇒(c). Supongamos que σ verifica la propiedad de Artin-Rees, y sea M_R tal que $Ass(M_R) \subseteq \mathcal{Z}(\sigma)$. De cara a probar que M es σ-torsión, es suficiente, probar que cada submódulo finitamente generado lo es. Pero si $N \leq M$ es finitamente generado, entonces [Jategaonkar-88,4.2.12] N está contenido esencialmente en una suma directa $\oplus\{N_P / P \in Ass(N_R)\}$ de forma que cada N_P es P-primario. Así, para cada $P \in Ass(N_R)$ tenemos $Ann_{N_P}(P) \leq^e N$, y $Ann(Ann_{N_P}(P)_R) \supseteq P$, luego usando (b), cada $N \in T_\sigma$. Por tanto $\oplus\{N_P / P \in Ass(N_R)\} \in T_\sigma$, y finalmente $M \in \mathcal{T}_\sigma$.

(c)⇒(b). Sea $N \leq^e M$ una extensión esencial de forma que $Ann(N_R) \in \mathcal{L}(\sigma)$, entonces, puesto que cada primo asociado de N contiene a $Ann(N_R)$, tenemos $Ass(M)=Ass(N) \subseteq \mathcal{Z}(\sigma)$ y por tanto, usando la hipótesis (b), $M \in \mathcal{T}_\sigma$.

3.1.3.

Recordemos (1.1.9.) que un radical σ en mod-R es estable si la clase $\mathcal{T}_\sigma$ es cerrada para extensiones esenciales y que un radical simétrico es estable si y sólo si verifica la propiedad de Artin-Rees. Como consecuencia directa del anterior resultado, obtenemos que una implicación es cierta aún sin la hipótesis de simetría.

COROLARIO A. *Sea* R *un anillo noetheriano, entonces cada radical estable en* mod-R *verifica la propiedad de Artin-Rees.*

Por otra parte, la equivalencia entre (a) y (c) en (3.1.2), nos proporciona, en el caso simétrico:

COROLARIO B. *Sea* R *un anillo noetheriano, y sea σ un radical simétrico en* mod-R, *entonces son equivalentes:*

a. σ *es estable.*

b. $\mathcal{T}_\sigma = \{M_R \mid \operatorname{Ass}(M_R) \subseteq \mathcal{Z}(\sigma)\}$.

PROPOSICION.- *En un anillo noetheriano, el ínfimo de una familia de radicales Artin-Rees es también Artin-Rees.*

Demostración. Si $N \leq^e M$ es una extensión esencial de R-módulos derecha de forma que $\operatorname{Ann}(N_R) \in \mathcal{L}(\wedge\sigma_\alpha)$, entonces $\operatorname{Ann}(N_R) \in \mathcal{L}(\sigma_\alpha)$, para cada σ_α y por ser cada σ_α Artin-Rees, M es σ_α-torsión, para cada α y por tanto $(\wedge\sigma_\alpha)$-torsión.

3.1.4.

Usando (3.1.2.) podemos obtener una generalización de (3.1.1.) para radicales simétricos:

PROPOSICION. *Sea* R *un anillo noetheriano, entonces dado un radical simétrico* σ *en* mod-R, *son equivalentes:*

a. σ *verifica la propiedad de Artin-Rees.*

b. Para cada extensión esencial $N \leq^e M$ *de* R*-módulos a derecha finitamente generados, si* $\operatorname{Ann}(N_R) \in \mathcal{L}(\sigma)$, *entonces* $\operatorname{Ann}(M_R) \in \mathcal{L}(\sigma)$.

c. Para cada extensión $N \leq M$ *de* R*-módulos a derecha finitamente generados, y cada* $L \in \mathcal{L}(\sigma)$, *existe* $J \in \mathcal{L}(\sigma)$ *tal que* $MJ \cap N \subseteq NL$.

Demostración. (a)⇒(b) Por (3.1.2.), M es σ-torsión, y puesto que M es finitamente generado y σ simétrico, entonces $\operatorname{Ann}(M_R) \in \mathcal{L}(\sigma)$. Para (b)⇒(c), consideremos la familia $\Sigma = \{T \leq M_R \mid T \cap N = NL\}$, entonces $NL \in \Sigma$ y por tanto Σ es una clase no vacía y claramente inductiva. Por el lema de Zorn, existe K maximal en Σ. Entonces $(N+K)/K$ es esencial en M/K, pues si $(N+K)/K \cap T/K = 0$, tenemos $T\cap N=K\cap N=NL$ y por maximalidad $T=K$. Por otra parte, $(N+K)/K \cong N/(N\cap K) = N/NL$ es anulado por $L\in\mathcal{L}(\sigma)$, luego $\mathrm{Ann}((N+K)/K)\in\mathcal{L}(\sigma)$. Usando (b), $J=\mathrm{Ann}(M/K) \in \mathcal{L}(\sigma)$ y entonces $MJ\cap N\subseteq K\cap N=NL$.

(c)$\Rightarrow$(a) Puesto que R es él mismo un R-módulo a derecha finitamente generado, usando (c) para $K\leq R_R$ y $L\in\mathcal{L}(\sigma)$, existe $J\in\mathcal{L}(\sigma)$ tal que $RJ\cap K\subseteq KL$ y puesto que por ser σ simétrico, J contiene un ideal bilatero σ-denso, $RJ\in\mathcal{L}(\sigma)$.

Para una extensión de R-bimódulos finitamente generados a cada lado, usando (1.3.3.), podemos eliminar la hipótesis de simetría de σ, obteniendo un resultado, quizas excesivamente técnico, pero que será de utilidad en el siguiente capitulo:

COROLARIO. *Sea* R *un anillo noetheriano y sea* σ *un radical en* mod-R *con la propiedad de Artin-Rees, entonces para cada extensión* $N\leq M$ *de* R*-bimódulos finitamente generados a cada lado y cada* $L\in\mathcal{L}(\sigma)$*, existe* $J\in\mathcal{L}(\sigma)$ *de forma que* $MJ\cap N\subseteq NL$.

Demostración. Consideremos ahora la familia $\Sigma=\{T\leq {}_RM_R \mid T\cap N=NL\}$, igual que antes Σ es inductiva y no vacía, puesto que $NL\in\Sigma$ (NL es R-subbimódulo de M). Sea pues K maximal en Σ, entonces, igual que allí, $(N+K)/K\leq M/K$ es una extensión esencial de R-módulos derecha finitamente generados, y $\mathrm{Ann}((N+K)/K)\in\mathcal{L}(\sigma)$, luego usando (3.1.2.), M/K es σ-torsión, y puesto que es un R-bimódulo finitamente generado a cada lado, usando (1.3.3.) existe $J\in\mathcal{L}(\sigma)$ de forma que $(M/K)J=0$ y entonces $MJ\cap N\subseteq K\cap N=NL$.

3.1.5.

Es conocido [Beachy-82] que si R es un anillo F.B.N., entonces la propiedad de Artin-Rees es equivalente a una propiedad menos restrictiva, relacionada con el concepto de birradical. En lo que sigue generalizamos este hecho para anillos verificando la condición fuerte de second layer a derecha. Para ello introduzcamos primero esta nueva condición:

Diremos que un radical σ en mod-R verifica la propiedad débil de Artin-Rees, si verifica una de las condiciones equivalentes del siguiente lema:

LEMA.- *Para un radical* σ *en* mod-R, *las siguientes condiciones, son equivalentes:*

(a) Para cada ideal K *de* R *y cada* $I\in\mathcal{L}(\sigma)$, *existe* $J\in\mathcal{L}(\sigma)$ *de forma que* $JK\subseteq KI$.

(b) Para cada ideal K *de* R *y cada* $I\in\mathcal{L}^2(\sigma)$, *existe* $J\in\mathcal{L}^2(\sigma)$ *de forma que* $JK\subseteq KI$.

Demostración. (a)⇒(b). Dados K ideal de R, $I\in\mathcal{L}^2(\sigma)$, obviamente $I\in\mathcal{L}(\sigma)$, y aplicando (a), existe $J\in\mathcal{L}(\sigma)$ tal que $JK\subseteq KI$. Considerando $J'=RJ$, éste es un ideal bilatero que pertenece a $\mathcal{L}^2(\sigma)$, puesto que contiene a J. Además: $J'K=RJK\subseteq RKI=KI$.

(b)⇒(a). Dado, ahora $I\in\mathcal{L}(\sigma)$, $RI\in\mathcal{L}^2(\sigma)$, y aplicando (b), existe $J\in\mathcal{L}^2(\sigma)$ de forma que $JK\subseteq KRI=KI$.

3.1.6.

Vemos ahora el anunciado teorema, relacionando la propiedad de Artin-Rees, con la propiedad débil:

TEOREMA. *Sea R un anillo noetheriano a derecha σ un radical en* mod-R *y consideremos las siguientes condiciones:*

a. σ verifica la propiedad de Artin-Rees.

b. σ verifica la propiedad débil de Artin-Rees.

c. $\mathcal{Z}(\sigma)$ es cerrado a izquierda para links.

d. $\mathcal{K}(\sigma)$ es cerrado a derecha para links.

Entonces (a)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(c)$\Leftrightarrow$(d) y todas las condiciones son equivalentes si $\mathcal{K}(\sigma)$ verifica la condición fuerte de second layer a derecha.

Demostración.

(a)$\Rightarrow$(b). Es evidente, puesto que $JK \subseteq J \cap K$.

(b)$\Rightarrow$(c). Supongamos que σ verifica la propiedad débil de Artin-Rees, y sean $P,Q \in \mathrm{Spec}(R)$ tales que $Q \rightsquigarrow P$ y supongamos que $Q \in \mathcal{Z}(\sigma)$. Entonces existe A ideal de R, $QP \subseteq A \subseteq Q \cap P$ de forma que $Q=\mathrm{Ann}_R(Q \cap P/A)$, $P=\mathrm{Ann}(Q \cap P/A)_R$. Aplicando la propiedad débil de Artin-Rees para $Q \cap P$ y $Q \in \mathcal{L}(\sigma)$, existe $J \in \mathcal{L}(\sigma)$ tal que $(Q \cap P)J \subseteq Q(Q \cap P)$. Pero entonces $(Q \cap P)J \subseteq QP \subseteq A$, con lo cual $J \subseteq \mathrm{Ann}(Q \cap P/A)_R=P$, y puesto que $J \in \mathcal{L}(\sigma)$, tenemos $P \in \mathcal{Z}(\sigma)$.

(c)$\Leftrightarrow$(d). Supongamos que $Q \rightsquigarrow P$, $P \in \mathcal{K}(\sigma)$. Entonces $Q \in \mathcal{K}(\sigma)$, puesto que en caso contrario sería $Q \in \mathcal{Z}(\sigma)$ y usando (c) $P \in \mathcal{Z}(\sigma)$, absurdo. La implicación recíproca es similar.

(c)$\Rightarrow$(a). Supongamos ahora que $\mathcal{K}(\sigma)$ satisface la propiedad fuerte de second layer a derecha, y que se verifica (c), y sea M un R-módulo derecha de forma que $\mathrm{Ass}(M_R) \subseteq \mathcal{Z}(\sigma)$. Entonces, puesto que $\mathcal{Z}(\sigma)$ es cerrado a derecha para links, tenemos que $X = \bigcup\{\mathrm{rtcl}(P)/P\in \mathrm{Ass}(M_R)\}$ está contenido en $\mathcal{Z}(\sigma)$. Ahora, usando [Bell-89,4.3] existen $P_1,\dots,P_n \in X$ de forma que $MP_1\dots P_n=0$. Luego $\mathrm{Ann}(M_R)\supseteq P_1\dots P_n \in \mathcal{Z}(\sigma)$ y por tanto $\mathrm{Ann}(M_R)\in\mathcal{L}(\sigma)$.

3.1.7.

En particular, como consecuencia del anterior resultado, obtenemos que en el caso en que R (o más especificamente $\mathcal{K}(\sigma)$) verifica la condición fuerte de second layer a derecha, la propiedad de Artin-Rees para σ depende solo de $\mathcal{K}(\sigma)$ y es por tanto independiente de la simetría de σ.

COROLARIO.- *Sea σ un radical en* mod-R *de forma que $\mathcal{K}(\sigma)$ verifica la condición fuerte de second layer a derecha, entonces son equivalentes:*

a. σ es Artin-Rees.

b. σ^{sim} es Artin-Rees.

c. σ^{sim} es estable.

d. τ es Artin-Rees, para cada τ tal que $\mathcal{K}(\tau)=\mathcal{K}(\sigma)$.

COROLARIO.- *Sea* R *un anillo verificando la condición fuerte de second layer a derecha y supongamos que σ_P es Artin-Rees para cada* $P\in\mathrm{Spec}(R)$, *entonces todo radical en* mod-R *es Artin-Rees. En particular,* R *es clásico a derecha.*

3.2.

BIRRADICALES.

3.2.1.

Un birradical, es un par (τ,σ), donde τ es un radical en R-mod y σ es un radical en mod-R, verificando una de las condiciones equivalentes del siguiente lema:

LEMA. *Dados* σ,τ *radicales en* mod-R *y* R-mod *respectivamente son equivalentes:*

a. Para cada par de ideales $K\subseteq L$ *de* R, $\tau(L/K) = \sigma(L/K)$.

b. Para cada par de ideales $K\subseteq T$ *de* R, ${}_R(T/K)\in\mathcal{T}_\tau \Leftrightarrow (T/K)_R\in\mathcal{T}_\sigma$.

c. Para cada ideal K *de* R, $\tau(R/K) = \sigma(R/K)$.

Demostración. Las implicaciones (a)⇒(b) y (a)⇒(c) son evidentes. Para (b)⇒(a), sean $K\subseteq L$ ideales de R, y notemos $\sigma(L/K)=T/K$. Entonces T es un ideal (bilatero) de R. En efecto si $t\in T$, entonces existe $I\in\mathcal{L}(\sigma)$ de forma que $tI\subseteq K$, y para cada $r\in R$, considerando $(I:r)_R\in\mathcal{L}(\sigma)$, tenemos $tr(I:r)_R\subseteq K$ y así $tr\in T$. Ahora, puesto que T/K es σ-torsión, será también τ-torsión y por tanto, $\sigma(L/K)=T/K\subseteq\tau(L/K)$. La otra inclusión es similar. Para (c)⇒(a), basta tener en cuenta que $\tau(L/K)=(L/K)\cap\tau(R/K)=(L/K)\cap\sigma(R/K)=\sigma(L/K)$.

EJEMPLO. [Jategaonkar-86, 1.2.5] *Si* C *es un conjunto de Ore en un anillo noetheriano R, entonces* (τ_C,σ_C) *es un birradical.*

Como consecuencia del lema anterior, obtenemos que en particular, si (τ,σ) es un birradical, entonces necesariamente $\mathcal{L}^2(\tau)=\mathcal{L}^2(\sigma)$. No obstante, esta condición no es en general suficiente, como prueba el siguiente resultado:

PROPOSICION. *Sea* R *un anillo noetheriano, y sean* σ,τ *radicales en* mod-R *y* R-mod *respectivamente, tales que* $\mathcal{L}^2(\sigma)=\mathcal{L}^2(\tau)$. *Entonces son equivalentes:*

a. (τ,σ) *es un birradical.*

b. σ *y* τ *verifican la condición débil de Artin-Rees.*

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Sean L un ideal de R, e $I\in\mathcal{L}^2(\sigma)$. Entonces, el cociente L/LI es anulado por $I\in\mathcal{L}(\sigma)$ y por tanto $\tau(L/LI)=\sigma(L/LI)=L/LI$. Puesto que R es noetheriano, L/LI es un R-bimódulo finitamente generado a derecha y por tanto (1.3.3.) $J=\mathrm{Ann}({}_R L/LI)\in\mathcal{L}^2(\tau)=\mathcal{L}^2(\sigma)$, y por supuesto $JL\subseteq LI$. Por tanto, σ verifica la condición débil de Artin-Rees. El mismo razonamiento, sirve para τ.

(b)$\Rightarrow$(a). Sean $K\subseteq L$ ideales de R, y notemos $\sigma(L/K)=T/K$. Puesto que T/K es un R-bimódulo finitamente generado a izquierda (R es noetheriano), existirá $I\in\mathcal{L}^2(\sigma)$ de forma que $(T/K)I=0$, o equivalentemente, $TI\subseteq K$. Aplicando (b) para T ideal de R e $I\in\mathcal{L}^2(\sigma)=\mathcal{L}^2(\tau)$, existe $J\in\mathcal{L}^2(\tau)$ de forma que $JT\subseteq TI$ y así $JT\subseteq K$, con lo cual $J(T/K)=0$ y por tanto T/K es τ-torsión. Esto prueba que $\sigma(L/K)\subseteq\tau(L/K)$, la otra inclusión es similar.

3.2.2.

Combinando (3.2.1.) con (3.1.6.) obtenemos para el caso en que R es fuertemente second layer a derecha:

COROLARIO. *Sea* R *un anillo noetheriano, verificando la condición fuerte de second layer y sean* σ,τ *radicales en* mod-R *y* R-mod *respectivamente, tales que*

$\mathcal{L}^2(\sigma)=\mathcal{L}^2(\tau)$. *Entonces son equivalentes:*

a. (τ,σ) *es un birradical.*

b. σ *y* τ *verifican la condición de Artin-Rees.*

c. $\mathcal{K}(\sigma)$ $(=\mathcal{K}(\tau))$ *es cerrado para links.*

3.2.3.

Diremos que un radical σ en mod-R es <u>ideal-invariante</u>, si verifica una de las condiciones equivalentes del siguiente lema:

LEMA. [Verschoren-90, 5.27] *Para un radical* σ *en* mod-R, *son equivalentes:*

a. Para cada ideal L *de* R, *si* $M\in\mathcal{T}_\sigma$, *entonces* $M\otimes_R L\in\mathcal{T}_\sigma$.

b. Para cada ideal L *de* R, *si* $I\in\mathcal{L}(\sigma)$, *entonces* $IL\in\mathcal{L}_\sigma(L)$.

Por otra parte, dado un radical σ en mod-R, podemos considerar, asociado a σ el radical σ^{op} en R-mod, definido como el único radical simétrico verificando $\mathcal{K}(\sigma^{op})=\mathcal{K}(\sigma)$.

PROPOSICION. *Sea* R *un anillo noetheriano y sea* σ *un radical simétrico en* mod-R, *entonces son equivalentes:*

a. σ *verifica la condición débil de Artin-Rees.*

b. σ^{op} *es ideal-invariante.*

Demostración. (a)⇒(b). Dados L ideal de R, e $I\in\mathcal{L}(\sigma)$, consideremos primero $I'\subseteq I$ de forma que $I'\in\mathcal{L}^2(\sigma)=\mathcal{L}^2(\sigma^{op})$. Por tener σ la propiedad débil de Artin-Rees, para L e I, existe $J\in\mathcal{L}(\sigma)$ tal que $JL\subseteq LI'\subseteq LI$, y entonces $J(L/LI)=0$, con lo cual L/LI es σ^{op}-torsión y por tanto $LI\in\mathcal{L}_\sigma(L)$.

(b)⇒(a). Sean L ideal de R, $I\in\mathcal{L}(\sigma)$, y consideremos igual que antes $I'\subseteq I$ tal que $I'\in\mathcal{L}^2(\sigma)=\mathcal{L}^2(\sigma^{op})$. Tenemos entonces que $L/LI'\in\mathcal{T}_{\sigma^{op}}$. ya que R es noetheriano, L/LI es un R-bimódulo finitamente generado y aplicando (1.3.3.) existe $J\in\mathcal{L}^2(\sigma)$ de forma que $J(L/LI)=0$ y por tanto $JL\subseteq LI'\subseteq LI$.

El siguiente resultado generaliza [Beachy-82, theorem 1.6].

COROLARIO A. *Sea* R *un anillo noetheriano, y sean* σ,τ *radicales simétricos en* mod-R *y* R-mod *respectivamente, tales que* $\mathcal{L}^2(\sigma)=\mathcal{L}^2(\tau)$. *Entonces son equivalentes:*

a. *(τ,σ) es un birradical.*

b. *σ y τ verifican la condición débil de Artin-Rees.*

c. *σ y τ son ideal-invariantes.*

Demostración. Basta combinar el resultado anterior con (3.2.1).

De nuevo, en el caso en que se tiene la propiedad de second layer a derecha, se obtiene:

COROLARIO B. *Sea σ radical simétrico en* mod-R, *y supongamos que* R *es un anillo noetheriano que verifica la condición fuerte de second layer. Entonces, son equivalentes:*

a. *(σ^{op},σ) es un birradical.*

b. *σ^{op} y σ son estables.*

c. *σ^{op} y σ son ideal-invariantes.*

d. *$\mathcal{K}(\sigma)$ es cerrado para links.*

3.2.4.

Estudiamos en este momento, las propiedades de clausura de la clase de los radicales con la propiedad débil de Artin-Rees.

PROPOSICION A. *Dado un anillo noetheriano* R, *el ínfimo de una familia de radicales simétricos en* mod-R *con la propiedad débil de Artin-Rees también verifica tal propiedad.*

Demostración. Sea $\{\sigma_i / i\in\Lambda\}$, una familia de radicales en las hipótesis del enunciado, puesto que obviamente $(\wedge\sigma_i)^{op}=\wedge\sigma_i^{op}$, y según (3.2.3) $\wedge\sigma_i$ es débilmente Artin-Rees si y sólo si $(\wedge\sigma_i)^{op}$ es ideal invariante, basta comprobar que el ínfimo de una familia de radicales simétricos ideal-invariantes, también lo es y esto último es evidente.

LEMA. *Dado un anillo noetheriano* R, *si* σ, τ *son radicales simétricos en* mod-R *con la propiedad débil de Artin-Rees, entonces:*

$$\mathcal{L}(\sigma\vee\tau) = \{L\leq R_R \mid \exists I\in\mathcal{L}(\sigma), \exists J\in\mathcal{L}(\tau), \text{ con } IJ\subseteq L\}.$$

Demostración. Según [Verschoren-90, 1.8], tenemos:

$$\mathcal{L}(\sigma\vee\tau)=\{L\leq R_R / \exists I_1,..,I_n\in\mathcal{L}(\sigma)\cup\mathcal{L}(\tau), \text{ con } I_1..I_n\subseteq L\}.$$

Pero puesto que $\mathcal{L}(\sigma)$ es cerrado para el producto de ideales, y σ, τ son simétricos $L\in\mathcal{L}(\sigma\vee\tau)$, si y sólo si existen $I_1,..,I_k\in\mathcal{L}(\sigma)$, $J_1,..,J_k\in\mathcal{L}^2(\sigma)$, de forma que $I_1J_1..I_kJ_k\subseteq L$. Entonces es suficiente comprobar que dados $I_1,I_2\in\mathcal{L}(\sigma)$, $J_1,J_2\in\mathcal{L}(\tau)$, existen $I\in\mathcal{L}(\sigma)$, $J\in\mathcal{L}(\sigma$ de forma que $IJ\subseteq I_1J_1I_2J_2$ y esto es consecuencia de tener σ la propiedad débil de Artin-Rees: para J_1

ideal, $I_2 \in \mathcal{L}(\sigma)$, existe $I'_2 \in \mathcal{L}(\sigma)$, de forma que $I'_2 J_1 \subseteq J_1 I_2$, y entonces $I_1 I'_2 J_1 J_2 \subseteq I_1 J_1 I_2 J_2$, y basta tomar $I = I_1 I'_2$, $J = J_1 J_2$.

PROPOSICION B. *Dado un anillo noetheriano* R, *el supremo de una familia finita de radicales simétricos en* mod-R *con la propiedad débil de Artin-Rees también verifica tal propiedad.*

Demostración. Dados K ideal de R, $L \in \mathcal{L}(\sigma \vee \tau)$, existen según lo anterior $I \in \mathcal{L}(\sigma)$, $J \in \mathcal{L}(\tau)$, de forma que $IJ \subseteq L$. Ahora aplicando la propiedad débil de Artin-Rees de σ, obtenemos que existe $I' \in \mathcal{L}(\sigma)$ tal que $I'K \subseteq KI$, y análogamente, para τ, que existe $J' \mathcal{L}(\tau)$ tal que $J'K \subseteq KJ$. Entonces, llamando $L' = I'J'$, tenemos que $L' \in \mathcal{L}(\sigma \vee \tau)$, y se verifica: $L'K = I'J'K \subseteq I'KJ \subseteq KIJ \subseteq KL$.

COROLARIO. *Dado un anillo noetheriano* R *el ínfimo de una familia de birradicales simétricos en* mod-R *es un birradical, y el supremo de una familia finita es también un birradical*

Demostración. Basta combinar los anteriores resultados con (3.2.1).

3.2.5.

Recordemos que un bimódulo M es un <u>bimódulo</u> <u>centralizante</u> (o de <u>Artin</u>), si M está generado por elementos R-centralizantes. Así, por ejemplo, para cada ideal K de R el cociente R/K es un R-bimódulo centralizante, generado por 1+K.

Diremos que un par (τ, σ), donde τ y σ son radicales en R-mod y mod-R, respectivamente es un birradical fuerte, si $\tau(M)=\sigma(M)$, para cada R-bimódulo centralizante M. A partir de (3.2.1) es claro que cada birradical fuerte es un birradical.

PROPOSICION. Sea R *un anillo noetheriano y sea* σ *radical en* mod-R. *Entonces si consideramos:*

a. σ *verifica la propiedad de Artin-Rees.*

b. $\sigma(M)\subseteq\sigma^{op}(M)$ *para cada* R-*bimódulo centralizante* M.

c. σ *verifica la propiedad débil de Artin-Rees.*

Se verifica (a)⇒(b)⇒(c) y se da la equivalencia si $\mathcal{K}(\sigma)$ *verifica la condición fuerte de second layer a derecha.*

Demostración. (a)⇒(b). Puesto que cada R-bimódulo es unión directa de R-bimódulos finitamente generados, y σ, σ^{op} commutan con uniones directas por ser R noetheriano, podemos suponer M R-bimódulo centralizante finitamente generado. Sea, ahora $N=\sigma(M)$, entonces N es un R-subbimódulo de M que es finitamente generado a cada lado (M es R-módulo noetheriano a cada lado) y por tanto (1.3.3) existe $I\in\mathcal{L}^2(\sigma)$ de forma que $NI=0$. Entonces por la propiedad de Artin-Rees, (3.1.4), existe $J\in\mathcal{L}^2(\sigma)=\mathcal{L}^2(\sigma^{op})$ tal que $MJ\cap N\subseteq NI=0$, y puesto que $MJ=JM$ por ser un R-bimódulo centralizante, tenemos $JN\subseteq MJ\cap N=0$. Por tanto, N es τ-torsión como R-módulo a izquierda. y así $\sigma(M)\subseteq\sigma^{op}(M)$.

(b)⇒(c) Repetimos el argumento de (3.2.1). Dados L ideal de R, $I\in\mathcal{L}^2(\sigma)$, el cociente L/LI es un R-subbimódulo que está en $\mathcal{T}_\sigma$, puesto que es anulado por $I\in\mathcal{L}(\sigma)$. Así, puesto que R/LI es un R-bimódulo centralizante, tenemos:

$$L/LI=\sigma(L/LI)=\sigma(R/LI)\cap L/LI\subseteq\sigma^{op}(R/LI)\cap L/LI=\sigma^{op}(L/LI)$$

y por tanto $L/LI\in\mathcal{T}_{\sigma^{op}}$ y entonces, aplicando (1.3.3) tenemos:

$$J = \mathrm{Ann}_R(L/LI) \in \mathcal{L}^2(\sigma) = \mathcal{L}^2(\sigma^{op})$$

y obviamente $JL \subseteq LI$.

COROLARIO. *Sea* R *un anillo noetheriano, verificando la condición fuerte de second layer y sean* σ,τ *radicales en* mod-R *y* R-mod *respectivamente, tales que* $\mathcal{L}^2(\sigma)=\mathcal{L}^2(\tau)$. *Entonces son equivalentes:*

a. (τ,σ) *es un birradical.*

b. (τ,σ) *es un birradical fuerte.*

3.2.6.

Estudiamos ahora el problema de cuando dada una extensión de anillos $R \subseteq S$, un radical en R con la propiedad de Artin-Rees induce un radical en S con la propiedad de Artin-Rees. Los resultados son para anillos con la condición fuerte de second layer, notese que en particular son aplicables para anillos F.B.N.

LEMA. *Dada una extensión centralizante* $R \to S$ *de anillos con la condición fuerte de second layer a derecha; para cada radical* σ *en* mod-R *verificando la propiedad de Artin-Rees el radical* $\bar{\sigma}$ *inducido en* mod-S *verifica también la propiedad de Artin-Rees.*

Demostración. Usando (3.2.5), basta comprobar que $\bar{\sigma}(M) \subseteq \bar{\sigma}^{op}(M)$, para cada S-bimódulo centralizante M. Pero M es R-bimódulo centralizante, por extensión de escalares y entonces usando la compatibilidad de las extensiones centralizantes (1.3.5), tenemos: $\bar{\sigma}(M)=\sigma(M) \subseteq \sigma^{op}(M)=\bar{\sigma}^{op}(M)$, con lo cual $\bar{\sigma}$ verifica la propiedad de Artin-Rees.

COROLARIO. *Dada una extensión centralizante* R → S *de anillos con la condición fuerte de second layer, para cada ideal* I *de* R *verificando la propiedad de Artin-Rees a derecha el ideal* IS *de* S *verifica también la propiedad de Artin-Rees a derecha.*

Demostración. Basta aplicar el resultado anterior al radical κ_I, pues obviamente $\bar{\kappa}_I=\kappa_{IS}$.

TEOREMA. *Sea* R⊆S *una extensión fuertemente normalizante finita de anillos noetherianos con la condición fuerte de second layer, y sea* σ *radical en* mod-R. *Entonces* σ *verifica la propiedad de Artin-Rees si y solamente si el radical* $\bar{\sigma}$ *inducido en* mod-S *la verifica.*

Demostración. Basta combinar (2.2.4) y (2.2.5) con (3.1.6).

3.2.7.

Sea R un anillo, dados dos radicales σ, τ en mod-R, se dice (ver [Verschoren-90]) que σ es Q_τ-compatible, si para cada M∈mod-R se verifica que $\sigma Q_\tau(M)=Q_\tau(\sigma(M))$. Diremos que σ, y τ son mutuamente compatibles si σ es Q_τ-compatible, y τ es es Q_σ-compatible. Por último diremos que σ es τ-compatible, si $\forall I\in\mathcal{L}(\sigma)$, $\forall J\in\mathcal{L}(\tau)$, existen $I'\in\mathcal{L}(\sigma)$, $J'\in\mathcal{L}(\tau)$, de forma que $I'J'\subseteq JI$.

La siguiente proposición se debe a [Van Oystaeyen-75], ver también [Verschoren-90]:

PROPOSICION. *Dado un anillo noetheriano* R *y dados* σ, τ *radicales simétricos en* mod-R, *son equivalentes:*

a. σ *y* τ *son mutuamente compatibles.*

b. σ *es* τ*-compatible y* τ *es* σ*-compatible.*

PROPOSICION. *Dado un anillo noetheriano* R, *si* σ *es un radical en* mod-R *con la propiedad débil de Artin-Rees, entonces cada radical simétrico en* mod-R *es* σ*-compatible.*

Demostración. Dados $I\in\mathcal{L}(\sigma)$, $J\in\mathcal{L}(\tau)$, consideremos $J'\subseteq J$ tal que $J'\in\mathcal{L}^2(\tau)$, aplicando la propiedad de Artin-Rees para J' ideal de R, $I\in\mathcal{L}(\sigma)$, tenemos que existe $I'\in\mathcal{L}(\sigma)$ de forma que $I'J'\subseteq J'I\subseteq JI$.

COROLARIO. *Dado un anillo noetheriano* R, *si* σ *y* τ *son radicales simétricos en* mod-R *con la propiedad débil de Artin-Rees, entonces* σ *y* τ *son mutuamente compatibles.*

CAPITULO 4.

HAZ ESTRUCTURA.

4.1

TOPOLOGIAS EN SPEC(R).

4.1.1.

De un tiempo a esta parte se vienen haciendo esfuerzos por hacer una geometría algebraica no commutativa. Básicamente lo que se pretende en un primer paso es, para una clase lo suficientemente amplia de anillos construir un haz de estructura sobre el anillo que se reduzca al conocido en el caso conmutativo y mantenga las propiedades más importantes de cara a su utilidad. Estas propiedades buscadas, serían:

1. Que coincida con el usual en el caso conmutativo.
2. Que en el caso noetheriano el prehaz canónico sea un haz.
3. Que las fibras sean fáciles de calcular.
4. Que se recupere el anillo por las secciones globales.
5. Que Spec(R) sea cuasi-compacto.
6. Que se obtenga funtorialidad.

El primer problema que surge es que al considerar el que en principio es candidato natural a haz de estructura sobre el espectro de los ideeales primos del anillo, se obtiene un prehaz separado que no es en general un haz. Se comprueba más adelante que esta obstrucción proviene del anómalo comportamiento de la topología usual (la de Zariski) en el caso no conmutativo. Se ha intentado, por tanto (ver [Bueso-Segura-Verschoren-90], [Louden-79], [Merino-Verschoren-90a], [Mulet-Verschoren-90], [Verschoren-90]) considerar subtopologías de la de Zariski, que se reduzcan a esta en el caso conmutativo y con las cuales θ_M tenga estructura de haz.

Solucionado en diversas direcciones el problema anterior, se plantea el problema de la funtorialidad, se necesita que morfismos de anillos induzcan aplicaciones continuas entre los espectros y posteriormente morfismos de espacios anillados entre los correspondientes haces. Como ya se justifica en [Van Oystaeyen-Verschoren-81], no es esperable que esto sea posible para morfismos arbitrarios de anillos, por lo que la clase de morfismos a considerar será la de los morfismos centralizantes. No obstante, las topologías que resuelven el problema del haz estructura se comportan mal, salvo restricciones de la clase de anillos, a este respecto. Sólo la recientemente introducida topología asociada a los birradicales fuertes salva el primer obstaculo (morfismos centralizantes inducen aplicaciones continuas), pero sólo en parte el segundo (la funtorialidad se obtiene sólo para anillos primos). Vamos a exponer en este capítulo la situación de este problema junto con nuestras contribuciones a la solución del mismo.

4.1.2.

Estudiamos primeramente la construcción de topologías en Spec(R). Dada una familia $\mathcal{S}$ de radicales simétricos en un anillo noetheriano R, notaremos $T(\mathcal{S}) = \{\mathcal{K}(\sigma) \mid \sigma\in\mathcal{S}\}$; vamos a estudiar cuando $T(\mathcal{S})$ determina una topología en Spec(R). Para ello comenzamos con el siguiente lema:

LEMA. *Dado un anillo noetheriano* a la derecha R *y una familia* $\{\sigma_i \mid i\in\Lambda\}$ *de radicales en* R, *se verifica:*

1. $\cup\mathcal{K}(\sigma_i)= \mathcal{K}(\wedge\sigma_i)$.

2. $\cap\mathcal{K}(\sigma_i) = \mathcal{K}(\vee\sigma_i)$.

Demostración. (1) Tenemos

$P\in\cup\mathcal{K}(\sigma_i)$ si y sólo si

existe $i\in\Lambda$ tal que $P\in\mathcal{K}(\sigma_i)$, si y sólo si

existe $i\in\Lambda$ tal que $R/P\in F_{\sigma_i}$, si y sólo si

$R/P\in\cup F_{\sigma_i}$, si y sólo si

$R/P\in F_{\wedge\sigma_i}$, esto es consecuencia del lema 1.1.7.A, si y sólo si

$P\in\mathcal{K}(\wedge\sigma_i)$.

(2) Tenemos

$P\in\mathcal{K}(\wedge\sigma_i)$ si y sólo si

$R/P\in\mathcal{F}_{\wedge\sigma_i}$, si y sólo si

$R/P\in\cap\mathcal{F}_{\sigma_i}$, si y sólo si

$R/P\in\mathcal{F}_{\sigma_i}$ para cada $i\in\Lambda$, si y sólo si

$P\in\mathcal{K}(\sigma_i)$ para cada $i\in\Lambda$, si y sólo si

$P\in\cap\mathcal{K}(\sigma_i)$.

Como consecuencia tenemos:

PROPOSICION. *Sea* R *un anillo noetheriano a derecha y* $\mathcal{S}$ *una familia de radicales simétricos en* mod-R, *cerrada para ínfimos y supremos finitos entonces* $T(\mathcal{S})$ *es una familia de abiertos para una topología sobre* Spec(R).

Demostración. Basta usar el resultado anterior y considerar que ya que R es un anillo noetheriano derecha, entonces $\sigma_1 \vee \sigma_2$ es también simétrica.

COROLARIO. T($\mathcal{S}$) *es una topología en* Spec(R), *para cada uno de los siguientes casos:*

1. $\mathcal{S}$ *es el conjunto de todos los radicales* κ_I *estables en* mod-R.

2. $\mathcal{S}$ *es el conjunto de todos los radicales* κ_I *en* mod-R *con la propiedad débil de Artin-Rees.*

3. $\mathcal{S}$ *es el conjunto de todos los* κ_I *que son birradicales en* mod-R.

4. $\mathcal{S}$ *es el conjunto de todos los* κ_I *que son birradicales en* mod-R.

Demostración. Bastará ver que en cada caso se verifican las condiciones del lema anterior. Para el primer caso, puede verse en (1.1.9). Los casos 2 y 3 son consecuencia de (3.2.4) y finalmente el caso 4 puede verse en [Mulet-Verschoren-91].

4.1.3.

Estudiamos ahora la construcción del prehaz. Para cada R-módulo M consideramos un prehaz θ_M sobre Spec(R) definido por:

$$\theta_M(\mathcal{K}(\sigma))=Q_\sigma(M)$$

Este prehaz θ_M es siempre separado, como prueba el siguiente resultado.

LEMA. *Sea* R *un anillo noetheriano, y sea* $\mathcal{S}$ *una familia de radicales simétricos en* mod-R, *cerrada para ínfimos y supremos finitos, entonces el prehaz* θ_M *es separado, para la topología* T($\mathcal{S}$).

Demostración. Supongamos que $\mathcal{K}(\sigma)=\cup\mathcal{K}(\sigma_i)=\mathcal{K}(\cap\sigma_i)$, entonces tenemos $\sigma=\cap\sigma_i\leq\sigma_i$. Considemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Q_\sigma(M) & \xrightarrow{\phi} & \prod Q_{\sigma_i}(M) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \pi_i} \\ & & Q_{\sigma_i}(M) \end{array}$$

y veamos que ϕ es inyectiva. Para ello, sea $x\in Ker(\phi)$, entonces existe $I\in\mathcal{L}(\sigma)$ de forma que $xI\subseteq M/\sigma(M)$, y por tanto si para cada i definimos $\phi_i = \pi_i\phi$, tenemos $\phi_i(xI)=\pi_i\phi(xI)=0$. Así, $xI\subseteq Ker(\phi_i)$, para cada i, y entonces $xI\in\sigma(Q_\sigma(M))=0$, de aquí $x\in\sigma(Q_\sigma(M))$, y por tanto $x=0$.

4.1.4.

Falta ahora ver cuando es θ_M un haz. Para ello, hagamos primero una reducción del problema.

Si consideramos un R-módulo derecha M y una sucesión exacta

$0 \to M \to E \to F$

con E y F R-módulos derecha inyectivos, entonces tenemos una sucesión exacta de prehaces

$0 \to \theta_M \to \theta_E \to \theta_F$.

Luego probar que θ_M es un haz es equivalente a probarlo para θ_E, con E inyectivo. Como R es noetheriano a derecha, entonces E es isomorfo a una suma directa de R-módulos derecha inyectivos indescomponibles, y será suficiente probar que θ_E es un haz para cada inyectivo indescomponible E. Supongamos que $\sigma=\wedge\sigma_i$ son elementos de $\mathcal{S}$, entonces el problema se reduce a estudiar para cada inyectivo indescomponible E la exactitud de la sucesión

$$0 \to Q_{\sigma}(E) \to \prod_i Q_{\sigma_i}(E) \to \prod_{i,j} Q_{\sigma_i \vee \sigma_j}(E)$$

Vamos a exigir también la hipótesis de que cada $\mathcal{K}(\sigma)$ sea cuasicompacto; esto nos permite una última reducción referente esta vez a la familia $\{\sigma_i \mid i\in\Lambda\}$; es suficiente probar la exactitud de la sucesión

$$0 \to Q_{\sigma\wedge\tau}(E) \to Q_{\sigma}(E) x Q_{\tau}(E) \to Q_{\sigma\vee\tau}(E)$$

para cada par de elementos σ y τ de la familia y cada R-módulo E inyectivo indescomponible, y esta última condición es equivalente a que σ, τ sean mutuamente compatibles [Mulet-Verschoren-90]. Tenemos por tanto el siguiente teorema:

TEOREMA. *Sea* R *un anillo noetheriano a derecha, y sea* $\mathcal{S}$ *una familia de radicales simétricos en* mod-R *cerrada para ínfimos y supremos finitos. Entonces* θ_M *es un haz si y solamente si* $\mathcal{S}$ *está formada por radicales mutuamente compatibles dos a dos.*

Tenemos entonces como consecuencia el siguiente corolario. Notese que el apartado (3) generaliza [Verschoren 7.13]

COROLARIO. *Sea* R *un anillo noetheriano. Entonces* θ_M *es un haz para cada una de las siguientes topologías en* Spec(R).

1. *La inducida por los radicales* κ_I *estables.*

2. La inducida por los radicales κ_I con la propiedad débil de Artin-Rees.

3. La inducida por los κ_I que son birradicales .

4. La inducida por los κ_I que son birradicales fuertes.

Demostración. Hemos visto en (3.2.4) que dos radicales simétricos cualesquiera, con la propiedad débil de Artin-Rees son mutuamente compatibles, puesto que cada radical estable, birradical o birradical fuerte verifica tal propiedad, basta aplicar el anterior resultado para tener lo pedido, ya que para cada ideal I de R se tiene que $\mathcal{K}(\kappa_I) = X(I)$ es cuasi-compacto para estas topologías.

4.1.5.

El siguiente problema a tratar es cuando morfismos entre anillos inducen aplicaciones continuas entre los correspondientes espectros. Es en este punto donde empiezan a surgir mayores problemas, pues la continuidad de tal aplicación es obviamente equivalente a que la propiedad definitoria de la clase $\mathcal{S}$ se mantenga por el morfismo de anillos y en general no son conocidos teoremas de cambio de anillo para la estabilidad, ni la propiedad débil de Artin-Rees, ni por tanto para los birradicales. Los birradicales fuertes muestran un comportamiento mucho mejor a este respecto, como prueba el siguiente resultado.

PROPOSICION. [Mulet-Verschoren-91] *Cada morfismo centralizante de anillos noetherianos* $f:R\to S$, *induce una aplicación* $\bar{f}:\mathrm{Spec}(S)\to\mathrm{Spec}(R)$, *dada por* $\bar{f}(Q)=f^{-1}(Q)$, *que es continua para la topología inducida por los birradicales fuertes.*

Demostración. Claramente es suficiente comprobar que dado un birradical fuerte (τ,σ) en R, entonces $(\bar{\tau},\bar{\sigma})$ es un birradical fuerte en S, y esto último es evidente en vista de que cada S-bimódulo centralizante es también R-bimódulo centralizante por restricción de escalares.

Respecto a la funtorialidad, ha aquí el resultado al que antes haciamos mención.

PROPOSICION. [Mulet-Verschoren-91] *Para la topología inducida por los birradicales fuertes, cada morfismo centralizante de anillos noetherianos primos $f:R\to S$, induce un único morfismo de espacios anillados*

$$(Spec(S),\theta_S) \to (Spec(R),\theta_R)$$

con aplicación continua subyacente $\bar{f}:Spec(S)\to Spec(R)$, e induciciendo f en secciones globales.

4.2.

UN HAZ ESTRUCTURA EN SPEC(R).

4.2.1.

Nos proponemos en esta última sección dar una nueva solución a los problemas planteados en la sección anterior. Notese que en todo lo hecho allí se consideraba la localización con respecto a teorías de torsión simétricas, y esto, debido básicamente a la inaccesibilidad de la localización en primos en el sentido del capítulo 2. No obstante los últimos avances en este tema nos permiten construir un haz de estructura con localización no simétrica, para una clase relativamente amplia de anillos; los anillos noetherianos con la condición de second layer en los que cada clique es localizable.

Lo primero que hemos de notar es que en esta clase de anillos, a partir de nuestros resultados del capítulo 3, coinciden las diversas topologías introducidas en la sección anterior. En lo que sigue consideraremos la topología cuyos abiertos son los conjuntos X(I) para los cuales la teoría de torsión κ_I es estable a ambos lados, o equivalentemente birradical o birradical fuerte.

4.2.2.

Empezamos con unos resultados técnicos. El siguiente generaliza en parte [Verschoren-90, 5.12].

TEOREMA. *Sea* R *un anillo noetheriano, y sea* $\{\sigma_i \mid i\in\Lambda\}$ *una familia dirigida inferiormente de radicales en* mod-R *verificando la propiedad de Artin-Rees.*

Entonces, si $\sigma=\wedge\sigma_i$ *se verifica:* $Q_\sigma(R)=\varprojlim\{Q_{\sigma_i} \mid i\in\Lambda\}$.

Demostración. En un primer paso, veamos que para cada $i\in\Lambda$, se tiene $\sigma_i(E(R))=E(\sigma_i(R))$. Puesto que R es noetheriano a la izquierda, $\sigma_i(R)$ es finitamente generado y existe por tanto $I\in\mathcal{L}(\sigma_i)$ de forma que $\sigma_i(R)I=0$, por tanto de (3.1.2.) se deduce que $E(\sigma_i(R))$ es $\sigma_i$torsión y tenemos $E(\sigma_i(R))\subseteq\sigma_i(E(R))$. Ahora, si la inclusión fuese estricta, entonces sería $\sigma_i(E(R))=E(\sigma_i(R))\oplus F$, para cierto $0\neq F\subseteq\sigma_i(E(R))$. Para $0\neq f\in F$, tenemos que existe $r\in R$ de forma que $0\neq fr\in R$ y así $fr\in\sigma_i(R)$ con lo cual $F\cap\sigma_i(R)\neq 0$, en contradicción con lo supuesto. Ahora, puesto que R es noetheriano, E(R) es isomorfo a una suma directa finita de inyectivos indescomponibles, y en particular verifica la CCD para submódulos inyectivos. Por tanto, existe $k\in\Lambda$ de forma que $\sigma_k(E(R))$ es un elemento minimal de $\{\sigma_i(E(R))/i\in\Lambda\}$. Veamos que entonces $\sigma_k(E(R))=\sigma(E(R))$. Ya que σ verifica la propiedad de Artin-Rees tenemos igual que antes que $\sigma(E(R))=E(\sigma(R))$ y por tanto este es un submódulo inyectivo de $\sigma_k(E(R))$. Pongamos pues $\sigma_k(E(R))=\sigma(E(R))\oplus F$, si es $F\neq 0$, entonces existe $i\in\Lambda$ de forma que F no es σ_i-torsión, ya que si F fuese σ_i-torsión para cada i, sería σ-torsión y tendríamos $F\subseteq\sigma(E(R))$, contradicción. Ya que la familia de radicales es dirigida inferiormente, existe $j\in\Lambda$ tal que $\sigma_j\leq\sigma_k\wedge\sigma_i$. Entonces F no es σ_j-torsión y tenemos por tanto que $\sigma_j(E(R))$ es estrictamente menor que $\sigma_k(E(R))$, en contradicción con la elección de k. Por tanto, ha de ser F=0 y $\sigma_k(E(R))=\sigma(E(R))$. Ahora, para cada $i\in\Lambda$ tal que $\sigma_i\leq\sigma_k$, se tiene que $\sigma_i(E(R))=\sigma(E(R))$, y en particular, para R, tenemos: $\sigma_i(R)=\sigma_i(E(R))\cap R=\sigma(E(R))\cap R=\sigma(R)$. Como consecuencia, para estos σ_i, se verifica: $Q_\sigma(R)\subseteq Q_{\sigma_i}(R)\subseteq E(R/\sigma(R))$. Sea ahora M un R-módulo a derecha y supongamos que para cada $i\in\Lambda$ se tiene un morfismo $f_i:M\to Q_\sigma(R)$ tal que si $\sigma_i \leq \sigma_j$ y $g_{ij}:Q_{\sigma_i}(R) \to Q_{\sigma_j}(R)$ es el morfismo canónico, se verifica $f_j = g_{ij} f_i$. Entonces para ver que $Q_\sigma(R) = \varprojlim\{Q_{\sigma_i} \mid i\in\Lambda\}$, consideramos los morfismos canónicos $g_i:Q_\sigma(R) \to Q_{\sigma_i}(R)$. Tenemos que para $\sigma_i \leq \sigma_k$ los morfismos g_i son las inclusiones y además $Q_\sigma(R) = \cap\{Q_{\sigma_i}(R) \mid \sigma_i \leq \sigma_k,\ i\in\Lambda\}$. Entonces definimos $f:M \to Q_\sigma(R)$ mediante $f(m)=f_i(m)$ para cada i tal que $\sigma_i \leq \sigma_k$. Así f está bien definido y es el único morfismo que verifica $g_i f = f_i$, para cada $i\in\Lambda$.

4.2.3.

LEMA A. *Sea* R *un anillo noetheriano, y sean* σ *y* τ *radicales en* mod-R *verificando la propiedad de Artin-Rees. Entonces:*

$\sigma\vee\tau(E(R)) = \sigma(E(R))+\tau(E(R))$ *y es inyectivo.*

Demostración. Puesto que $\sigma(E(R))$ y $\tau(E(R))$ estan incluidos en $\sigma\vee\tau(E(R))$, tenemos tambien $\sigma(E(R))+\tau(E(R)) \leq \sigma\vee\tau(E(R))$. Por otra parte, ya que $\sigma\wedge\tau$ es Artin-Rees, tenemos como antes que $\sigma\wedge\tau(E(R))=E(\sigma\wedge\tau(R))$ es inyectivo, luego existen R-módulos F_1,F_2 de forma que $\sigma(E(R))=\sigma\wedge\tau(E(R))\oplus F_1$, y $\tau(E(R))=\sigma\wedge\tau(E(R))\oplus F_2$. Y puesto que $\sigma\wedge\tau(E(R))=\sigma(E(R))\cap\tau(E(R))$, entonces tenemos $\sigma(E(R))+\tau(E(R))=\sigma(E(R))\oplus F_2$, y en particular es inyectivo, por ser suma directa de inyectivos. Existe una sucesión exacta:

$$0 \to F_2 \to E(R)/\sigma(E(R)) \to E(R)/(\sigma(E(R))+\tau(E(R))) \to 0$$

Pero, en nuestras hipótesis F_2 es inyectivo, luego la sucesión escinde y por tanto $E(R)/(\sigma(E(R))+\tau(E(R)))$ es isomorfo a un sumando directo de $E(R))/\sigma(E(R))$, en particular es libre de σ-torsión. De forma analoga se obtiene que es libre de τ-torsión y así $\sigma\vee\tau(E(R)) \leq \sigma(E(R))+\tau(E(R))$.

LEMA B. *Sea* R *un anillo noetheriano, y* σ *un radical en* mod-R *verificando la propiedad de Artin-Rees. Entonces:*

$E(R/\sigma(R)) \cong E(R)/\sigma(E(R))$.

Demostración. Sea $f: E(R) \to E(R/\sigma(R))$ el morfismo inducido por la proyección canónica $R \to R/\sigma(R)$, y sea $N = Ker(f)$. Consideremos el morfismo inducido $f': E(R)/N \to E(R/\sigma(R))$. Tenemos que $E(R)/N$ es libre de σ-torsión, luego $\sigma(E(R)) \subseteq N$. Ya que $\sigma(E(R)) = E(\sigma(R))$ es inyectivo, debe existir F de forma que $N = \sigma(E(R)) \oplus F$. Si $F \neq 0$, entonces existe $0 \neq x \in F \cap R$ y entonces $f(x) = 0$ con lo cual $x \in \sigma(R) \cap F = 0$, lo que es una contradicción. Por tanto debe ser $N = \sigma(E(R))$. Tenemos entonces que $f(E(R)) \cong E(R)/N \cong E(R)/\sigma(E(R))$ es inyectivo por serlo E(R) y $\sigma(E(R))$ y se verifica $R/\sigma(R) \subseteq f(E(R))$, luego ha de ser $f(E(R)) = E(R/\sigma(R))$. Puesto que f es sobreyectiva, el primer teorema de isomorfía nos proporciona ahora el resultado.

Este resultado es válido también para el supremo de dos radicales que verifican la condición de Artin-Rees por ser $\sigma \vee \tau(E(R))$ inyectivo según el lema anterior; otra forma de ver que se tiene el Lema para el supremo de dos radicales que verifican la condición de Artin-Rees es comprobar que bajo la propiedad fuerte de second layer el supremo verifica la condición de Artin-Rees, lo que se deduce fácilmente del Corolario 3.2.2.

4.2.4.

Asociada a un conjunto $X \subseteq Spec(R)$ cerrado para links consideremos el radical σ_X en mod-R (resp $\tau_X$en R-mod) definido por $\sigma_X = \wedge\{\sigma_P \mid P \in X\}$ (resp $\tau_X = \wedge\{\tau_P \mid P \in X\}$). Entonces, bajo nuestras hipótesis sobre el anillo R, se tiene X será una unión de cliques $X=\cup\{X_i \mid i\in\Lambda\}$, y entonces, puesto que cada clique tiene la condición débil de intersección:

$$\sigma_X = \wedge\{\sigma_P \mid P\in X\} = \wedge\{\sigma_{X_i} \mid i\in\Lambda\} = \wedge\{\sigma_{\mathcal{C}(X_i)} \mid i\in\Lambda\}$$

Puesto que cada clique X_i es localizable, cada $\mathcal{C}(X_i)$ es un conjunto de Ore. Así el par $(\tau_{\mathcal{C}(X_i)},\sigma_{\mathcal{C}(X_i)})$ es un birradical.

En particular, para cada abierto X(I) de Spec(R), podemos considerar el radical $\sigma_I=\sigma_{X(I)}$.

Definimos ahora un prehaz sobre Spec(R) por $\theta_R(X(I))=Q_{\sigma_I}(R)$, para cada abierto X(I). Veamos primeramente que este es un prehaz separado.

PROPOSICION. *Sea* R *un anillo noetheriano con la propiedad fuerte de second layer y en el que cada clique es localizable. Entonces el prehaz* θ_R *es separado.*

Demostración. Supongamos que $X(I)=\cup\{X(I_i) \mid i\in\Lambda\}$. Tenemos entonces, para cada $i\in\Lambda$, el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Q_I(R) & \xrightarrow{\alpha} & \prod Q_{I_i}(R) \\ & & \downarrow{\scriptstyle p_i} \\ & & Q_{I_i}(R) \end{array}$$

donde notamos $Q_J(R)=Q_{\sigma_J}(R)$ para cada ideal J de R. Tenemos que $\sigma_I=\wedge\{\sigma_{I_i} / i\in\Lambda\}$.

Vamos a comprobar que α es un monomorfismo. Ya que es un morfismo de grupos, basta ver que para cada $m\in Q_I(R)$ se tiene que $\alpha(m)=0$ implica $m=0$. Pero si $\alpha(m)=0$, entonces $mJ\in R/\sigma_I(R)$ para algún $J\in\mathcal{L}(\sigma_I)$. Para $y\in mJ$, tenemos $y=x+\sigma_I(R)$ con $x\in R$ y el morfismo canónico $\alpha_{II_i}:Q_I(R) \to Q_{I_i}(R)$ extiende el morfismo $R/\sigma_I(R) \to R/\sigma_{I_i}(R)$. Así, tenemos:

$$\alpha_{II_i}(y) = \alpha_{II_i}(x+\sigma_I(R)) = \alpha_{II_i}(x+\sigma_I(R)).$$

Por otro lado $y=mj$ para algún $j\in J$, luego:

$$\alpha_{II_i}(y) = \alpha_{II_i}(mj) = p_i\alpha(mj) = p_i\alpha(m)j =0$$

Por tanto, para cada $i\in\Lambda$ tenemos $\alpha_{II_i}(y)=0$, luego $x\in\sigma_{I_i}(R)$, para cada $i\in\Lambda$ y entonces $x\in\wedge\sigma_{I_i}(R)=\sigma(R)$ con lo cual $y=0$.

4.2.5.

Veamos ahora que efectivamente θ_R es un haz.

PROPOSICION. *Sea* R *un anillo noetheriano con la propiedad fuerte de second layer y en el que cada clique es localizable. Entonces el prehaz* θ_R *es un haz.*

Demostración. Ya que cada X(I) es cuasicompacto, podemos reducir el problema al caso en que X(I) es unión de dos abiertos X(J) y X(K). Tenemos que probar que la sucesión:

$$0\to Q_{\sigma_J\wedge\sigma_K}(R) \xrightarrow{\alpha} Q_{\sigma_J}(R)\times Q_{\sigma_K}(R) \xrightarrow{\beta} Q_{\sigma_J\vee\sigma_K}(R)$$

es exacta, siendo α y β los morfismos obvios. Por ser un prehaz separado, α

es monomorfismo. Llamemos $E_J=\sigma_J(E(R))$ y $E_K=\sigma_K(E(R))$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} E(R)/E_J\cap E_K \arrow[r] \arrow[d] & E(R)/E_J \arrow[d] \\ E(R)/E_K \arrow[r] & E(R)/E_J+E_K \end{tikzcd}$$

Este diagrama es un pull-back y se verifica

$$E_J\cap E_K = \sigma_J(E(R))\cap\sigma_K(E(R)) = (\sigma_J\wedge\sigma_K)(E(R))$$

$$E_J+E_K = (\sigma_J\vee\sigma_K)(E(R))$$

ya que σ_I y σ_J son débilmente Artin-Rees, aplicando el lema anterior.

Tenemos entonces:

$$E(R)/(E_J\cap E_K) \cong E(R/(\sigma_J\wedge\sigma_K(R))$$

$$E(R)/(E_J+E_K) \cong E(R/(\sigma_J\vee\sigma_K(R))$$

$$E(R)/E_J \cong E(R/(\sigma_J(R))$$

$$E(R)/E_K \cong E(R/(\sigma_K(R))$$

Los morfismos del anterior diagrama inducen un nuevo diagrama commutativo:

$$\begin{tikzcd} Q_{\sigma_J\wedge\sigma_K}(R) \arrow[r] \arrow[d] & Q_{\sigma_J}(R) \arrow[d] \\ Q_{\sigma_K}(R) \arrow[r] & Q_{\sigma_J\vee\sigma_K}(R) \end{tikzcd}$$

Este diagrana es también un pullback y por tanto aplicando (4.2.9) se obtiene lo buscado.

4.2.6.

Para cada morfimo centralizante de anillos $f:R\to S$, tenemos inducida una aplicación continua entre los espectros $\bar{f}$:Spec(S)→Spec(R), ver (4.1.5). Nos dedicamos ahora a estudiar el problema de la funtorialidad, esto es; de cuándo se obtienen morfismos de haces. Con este fin tenemos los siguientes resultados.

LEMA. *Sea* R *un anillo noetheriano, y sea* C *un conjunto de Ore a derecha en* R. *Entonces para cada* R*-bimódulo centralizante* M *finitamente generado, se verifica:*

1. *Para cada* $m\in M$ *y cada* $c\in C$, *existen* $m'\in M$, $d\in C$ *de forma que* $md=cm'$.
2. *Para cada* $m\in M$ *y cada* $c\in C$, *tales que* $cm=0$, *existe* $d\in C$ *tal que* $md=0$.

Demostración. (1) Dado $m\in M$, m se puede escribir en la forma $m=\sum_{i=1}^{n} r_i m_i$, con cada $m_i\in M$ R-centralizante. Entonces dado $c\in C$, aplicando y la propiedad de común denominador para $r_1,\dots,r_n\in R$ y $c\in C$, existen $r'_1,\dots,r'_n\in R$, $d\in C$ de forma que $r_i d=cr'_i$, para cada $i=1,\dots,n$. Así considerando $m'=\sum_{i=1}^{n} r'_i m_i$, tenemos:

$$cm'=c(\sum_{i=1}^{n} r'_i m_i)=\sum_{i=1}^{n} cr'_i m_i=\sum_{i=1}^{n} r_i d m_i=(\sum_{i=1}^{n} r_i m_i)d=md.$$

(2) Consideremos, para cada entero positivo p, el R-submódulo a la derecha I_p de M definido por $I_p=\{m\in M/c^p m=0\}$. Estos submódulos forman una cadena ascendente de submódulos de M, que debe estabilizarse, puesto que M es un R-módulo a la derecha noetheriano. Existe, por tanto, un entero n de forma que $I_n=I_{n+1}$. Entonces aplicando (1) a $c^n\in C$, $m\in M$, obtenemos $d\in C$, $m'\in M$ de forma que $c^n m'=md$. Tenemos entonces que $c^{n+1}m'=cmd=0$. Por tanto $m'\in I_{n+1}=I_n$, luego $md=c^n m'=0$.

TEOREMA. *Sea* R *un anillo noetheriano con la condición fuerte de second layer y en el que cada clique es localizable. Si* $X\subseteq\mathrm{Spec}(R)$ *es cerrado para links,* *entonces para cada R-bimódulo centralizante, los R-módulos bilateros* $Q^l_X(M)$ *y* $Q^r_X(M)$ *son naturalmente isomorfos.*

Demostración. Puesto que X es cerrado para links, se puede escribir como una unión de cliques $X=\cup\{X_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}$. Puesto que cada X_α verfica la condición débil de intersección, se tiene entonces $\tau_X = \bigwedge_{P\in X}\tau_P = \bigwedge_\alpha(\bigwedge_{P\in X_\alpha}\tau_P) = \bigwedge_\alpha\tau_{X_\alpha}$, y similarmente para σ_X. Puesto que X_α es una clique, se sigue que cada par $(\tau_{X_\alpha},\sigma_{X_\alpha})$ es un birradical, y por tanto (τ_X,σ_X) también lo es. Tenemos que (τ_X,σ_X) es un birradical fuerte, con lo cual $\tau_X(M)=\sigma_X(M)$, y podemos por tanto suponer que M es (τ_X,σ_X)-libre de torsión. Por otra parte, puesto que R es noetheriano, la localización commuta con uniones directas y podemos, sin perdida de generalidad que M es un R-bimódulo finitamente generado. Sea ahora $Q=Q^l_X(M)$, entonces Q/M es τ_X-torsión como R-módulo a izquierda. Probemos que Q/M es también de σ_X-torsión como R-módulo a derecha. Para ello, es suficiente probar que es σ_{X_α}-torsión para cada α. Fijemos pues α, y sea $q\in Q$. Entonces existe $c\in\mathcal{C}(X_\alpha)$ de forma que $cq=m\in M$. Aplicando el lema, para c y m, existen $d\in\mathcal{C}(X_\alpha)$, $m'\in M$ tales que $md=cm'$y por tanto, si llamamos $\bar{q}=qd-m'$ se tiene que $c\bar{q}=0$. Por otra parte, puesto que $\bar{q}\in Q$, existe $I\in\mathcal{L}(\tau_X)$ de forma que $I\bar{q}\subseteq M$. Puesto que R es noetheriano, I será un ideal a izquierda finitamente generado, sea $I=Ry_1+\ldots+Ry_n$. Consideremos ahora, para cada i, el elemento $x_i=y_i\bar{q}\in M$. Entonces, usando la propiedad de común denominador para $y_1,\ldots,y_n\in R$, $c\in\mathcal{C}(X_\alpha)$, existen $y'_1,\ldots,y'_n\in R$, $c'\in\mathcal{C}(X_\alpha)$ de forma que $c'y_i=y'_ic$, para cada $i=1,\ldots,n$. Luego $c'x_i=c'y_i\bar{q}=y'_ic\bar{q}=0$. Usando el lema anterior, existe $c''\in\mathcal{C}(X_\alpha)$ de forma que $x_ic''=0$, esto es $y_i\bar{q}c''=0$, y esto para cada $i=1,\ldots,n$. Luego $I\bar{q}c''=0$ y por tanto $\bar{q}c''\in\tau_X(Q)=0$. Por tanto $(qd-m')c''=0$ y así $qdc''=m'c''\in M$, y puesto que $dc''\in\mathscr{C}(X_\alpha)$, obtenemos que $q\in\sigma_{X_\alpha}(Q/M)$ y esto para cada α, con lo cual $q\in\sigma_X(Q/M)$. Para terminar, veamos que M es esencial en Q como R-módulo a la derecha. Si $0\neq q\in Q$, entonces existe $J\in\mathscr{L}(\sigma_X)$ de forma que $qJ\subseteq M$. Si fuese $qJ=0$, entonces considerando $I\in\mathscr{L}(\tau_X)$ tal que $Iq\subseteq M$, obtendriamos $IqJ=0$ y por tanto $Iq\subseteq\sigma(M)=0$, con lo cual $q\in\tau(M)=0$ y por tanto $q=0$, contadicción. Esto prueba que $Q=Q^l_X(M)\subseteq Q^l_X(M)$, por simetría se tiene la igualdad.

COROLARIO A. *Sea* $f:R\to S$ *una extensión de anillos noetherianos con la condición fuerte de second layer y en los que cada clique es localizable. Si* $X\subseteq \mathrm{Spec}(R)$ *es cerrado para links, entonces* $Q_X(S)$ *tiene de forma natural, estructura de S-módulo bilatero que extiende la de S.*

Demostración. Estudiamos la estructura a la derecha, a la izquierda se hace de forma totalmente similar.Podemos, sin perdida de generalidad, suponer que S es (τ,σ)-libre de torsión. Dado $s\in S$, la multiplicación a derecha por s es un endomorfismo de S como R-módulo a la izquierda, luego se extiende univocamente a un endomorfismo λ_s de $Q^l_X(S)$ como R-módulo a la izquierda. Entonces, se define una estructura de S-módulo a la derecha en $Q^r_X(S)$, por $qs=\lambda_s(q)$. Es rutinario (ver [B,J,V]) que con esta estructura el morfismo de localización $j:S\to Q^l_X(S)$ es S-lineal a la derecha.

COROLARIO B. *Sea* $f:R\to S$ *una extensión de anillos noetherianos con la condición fuerte de second layer y en los que cada clique es localizable. Si* $X\subseteq \mathrm{Spec}(R)$

es cerrado para links, entonces, los S*-módulos biláteros* $Q_X(S)$ *y* $Q_{\bar{X}}(S)$ *son naturalmente isomorfos.*

Demostración. Probamos que $Q_X(S)$ *y* $Q_{\bar{X}}(S)$, coinciden como S-módulos a la derecha, siendo analoga la demostración para la izquierda. Veamos primero que $Q_X(S)$ es $\bar{\sigma}_X$-inyectivo. Para ello, consideremos una morfismo $f:N\to M$ de S-módulos a derecha, con núcleo y conúcleo de $\bar{\sigma}_X$-torsión y un morfismo de S-módulos derecha $g:N\to Q_{\sigma_X}(S)$. Puesto que Ker(f) y Coker(f) son σ-torsión como R-módulos a la derecha, g se extiende a un morfismo de R-módulos derecha $h:M\to Q_\sigma(S)$. Veamos que h es también morfismo de S-módulos. Sean $n\in N$ y $s\in S$ y pongamos $h_s(m)=h(ms)-h(m)s$. Claramente $h_s(m)=0$ si $s=f(r)$ para algún $r\in R$. Por otra parte, si S es R-centralizante, entonces h_s puede considerarse como un morfismo de R-módulos $M\to Q_\sigma(S)$. Puesto que h_s se anula en la imagen de N, factoriza a traves de $\bar{h}_s:\mathrm{Coker}(f)\to Q_\sigma(S)$. Sin embargo, puesto que $\mathrm{Coker}(f)\in\mathcal{T}_\sigma$, se sigue que $\bar{h}_s=0$, y por tanto $h_s=0$. Luego $h(ms)=h(m)s$ si $s\in f(R)$ o s es R-centralizante y puesto que estos elementos generan S, se obtiene que h es morfismo de S-módulos a la derecha. Finalmente, puesto que el núcleo y el conúcleo de la aplicación canónica $j:S\to Q_{\sigma_X}(M)$ son de σ_X-torsión y por tanto de $\bar{\sigma}_X$-torsión, esto prueba que $Q_{\sigma_X}(S)$ coincide con $Q_{\bar{\sigma}_X}(S)$.

COROLARIO C. *Sea* $f:R\to S$ *una extensión de anillos noetherianos con la condición fuerte de second layer y en los que cada clique es localizable. Si* $X\subseteq\mathrm{Spec}(R)$ *es cerrado para links, entonces* f *se extiende a un único morfismo de anillos* $\bar{f}:Q_X(R)\to Q_{\bar{X}}(S)$.

REFERENCIAS

Anderson, F.W. and Fuller, K.R.

Rings and categories of modules. Springer Verlag. 1974.

Beachy, J.

Stable torsion radicals over F.B.N. rings. J. Pure Appl. Algebra, vol.24, 1982, pp. 235-244

Bell, A.D.

Notes on localization in noncommutative noetherian rings, Cuadernos de Alegra 9, Universidad de Granada, Granada, 1988.

Bit-David, J. and J.C. Robson (a)

Normalizing estensions I. Lect. Notes in Math., 825, 1980.

Bit-David, J. and J.C. Robson (b)

Normalizing extensions II. Lect. Notes in Math., 825, 1980.

Braun, A. and R. Warfield

Symmetry and localization in noetherian prime PI rings, J. Algebra, vol. 118, 1988, pp. 322-335.

Brown, K.

The representation theory of noetherian rings, preprint, University of Glasgow, Department of Math., 1990.

Bueso, J.L., P. Jara and A.Verschoren

Extensions and localization, Comm. Algebra, to appear.

Bueso, J.L., M.I. Segura and A. Verschoren

Strong stability and sheaves, to appear.

Bueso, J.L., B. Torrecillas and A. Verschoren

Local cohomology and Localization, Pitman Research Notes in Math., vol. 226, 1990.

Golan, J.

Localization in Noncommutative Rings, M. Dekker, New York, 1975.

Golan, J.

Structura sheaves over a noncommutative ring, M. Dekker, New York, 1980.

Golan, J.

Torsion Theories, Longman, 1986.

Goodearl, K.R. and R.B. Warfield

An introduction to noncommutative noetherian rings, London Math. Society Student Text Series, Cambridge University Press, 1989.

Heinicke, A.G. and J.C Robson

Normalizing extensions: prime ideals and incomparability. J. Algebra, 72, 1981, pp. 237-268.

Heinicke, A.G. and J.C Robson

Normalizing extensions: prime ideals and incomparability II. J. Algebra, 1984, pp. 142-264.

Jategaonkar, A.V.

Injective modules and clasical localization in noetherian rings, Bull. Am. Math. Soc., vol 79, pp. 152-157, 1973.

Jategaonkar, A.V.

Localization in noetherian rings, London Math. Soc. Lecture Notes, vol. 98, Cambridge Univ. Press, London, 1986.

Lambek, J. and G. Michler

The torsion theory at a prime ideal of right noetherian ring, J. Algegra, vol. 25, 1973, pp. 364-389.

Letzter, E.S.

Prime ideals in finite estensions of noetherian rings, J. Algebra, vol 135, 1990, pp. 412-439.

Louden, K.

Stable torsion and the spectrum of an FBN ring, J. Pure Appl. Algebra, vol 17, pp. 173-180, 1979.

McConnell, J. and J.C. Robson

Noncommutative noetherian rings, Wiley Interscience, Chichester, 1988.

Merino, L. M.

Radicales y extensiones de anillos, memoria de licenciatura. Granada, 1987.

Merino, L. M.

Compatibilidad de teorías de torsión, Actas de las XIII Jornadas Hispano-Lusas de Matematicas. Valladolid, 1988.

Merino, L. M.

Strongly prime radical and ring extensions, Proc. First Belgian-Spanish week on algebra and geometry. Amberes, 1988, 100-105.

Merino, L. M. and A. Verschoren

Symmetry and localization, preprint, 1990.

Merino, L. M. and A. Verschoren

Strongly normalizing extensions, preprint, 1990.

Mulet, J. and A. Verschoren

On compatibility II, preprint, 1990.

Mulet, J. and A. Verschoren

Strong birradical and sheaves, preprint, 1991.

Müller, B. (= Mueller, B.)

Localization in noncommutative noetherian rings, Canad. J. Math, vol. 28, 1976, pp. 600-610.

Müller, B. (= Mueller, B.)

Localization in fully bounded rings, Pacific. J. Math., vol. 67, 1976, pp. 233-245.

Müller, B. (= Mueller, B.)

Twosided localization in Noetherian PI-rings, J. Algebra, vol. 63, 1980, pp. 359-373.

Page, A.

Extensions normalisantes et condition de Goldie, Comm. Algebra, vol 15(8), pp. 1599-1606, 1987.

Segura, M. I., D. Tarazona and A. Verschoren

On compatibility, Comm. Algebra, vol. 17, pp. 677-690, 1989.

Smith, P.F.

The Artin-Rees property, Seminaired'Algèbre P. Dubreil et M.P. Malliavin 1981, Springer Lecture Notes in Mathematics 924, 1982, pp. 197-240.

Soueif, L.

Normalizing extensions and injective modules, essentially bounded normalizing extensions, Comm. Algebra, vol 15(8), pp. 1607-1619, 1987.

Stenstróm, B.

Rings of Quotients, Springer Verlag, Berlin, 1975.

Van Oystaeyen, F.

Prime Spectra in Non-Commutative Algebra, Lect. Notes in Math., vol. 444, Springer Verlag, Berlin, 1975.

Van Oystaeyen, F.

Compatibility of kernel functors and localization funtors. Bull. Soc. Math. Belg., 28, pp. 131-137, 1976.

Van Oystaeyen, F. and A. Verschoren

Noncommutative Algebraic Geometry, Lecture Notes in Mathematics, vol. 887, Springer Verlag, Berlin, 1981.

Verschoren, A.

Compatibility and stability, Notas de Matematica 3, Murcia, 1990.

Warfield, R.B.

Noncommutative localized rings, Séminaire d'Algèbre P. Dubreil el M.P. Malliavin 1985, Springer Lecture Notes in Mathematics 1220, pp. 178-200, 1986.

Warfield, R. B.

Book Review of "*Localization in Noetherian rings*, by A. V. Jategaonkar". Bull. Amer. Math. Soc., 17, pp. 396-400, 1987.