

T 9-109

T. PROV. 21/20

SUPERFICIES MINIMALES EN \mathbb{R}^3

Joaquín Pérez Muñoz

Tesis Doctoral

UNIVERSIDAD DE GRANADA
13-2-96
292



DEPARTAMENTO DE GEOMETRIA Y TOPOLOGIA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE GRANADA

UNIVERSIDAD DE GRANADA
6150052837
116298020

UNIVERSIDAD DE GRANADA
6 FEB. 1996
COMISION DE DOCTORADO

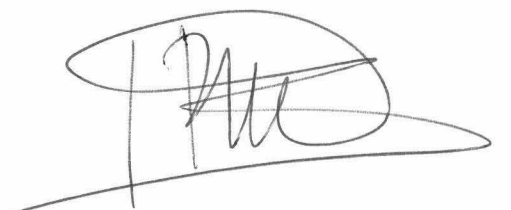
Superficies Minimales en \mathbb{R}^3

Joaquín Pérez Muñoz

SUPERFICIES MINIMALES EN \mathbb{R}^3

JOAQUIN PEREZ MUÑOZ

Memoria realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, bajo la dirección del Profesor Antonio Ros Mulero, Catedrático del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, para obtener el Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada.



Joaquín Pérez Muñoz



Antonio Ros Mulero

Agradezco sinceramente a Antonio Ros, director de esta memoria, su ayuda constante, sin la cual la misma no hubiese podido realizarse. Asimismo, mi reconocimiento por la paciencia empleada en estos años.

También quiero expresar mi gratitud a Francisco José López, Sebastián Montiel y Francisco Urbano por su inestimable apoyo, en especial al primero, que tuvo que soportar varios años de consultas y discusiones.

También daré las gracias a Damían Ballesteros, Ildefonso Castro, Manuel Ritoré y Miguel Sánchez por el apoyo brindado, además de ratos entrañables, agradecimiento que hago extensivo a todos y cada uno de los miembros del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada.

Finalmente, pero también en especial, a María José y a toda mi familia, que hicieron más agradable el trabajo.

A María José.
A mis padres.

Contenidos

Introducción.	i
1 Preliminares.	1
1.1 Generalidades.	1
1.2 La representación de Weierstrass.	3
1.3 Superficies con curvatura total finita.	8
1.4 Superficies periódicas.	10
1.4.1 Finales de tipo Scherk.	13
1.4.2 Finales de tipo helicoides.	16
1.5 Principios del máximo.	18
2 Superficies con flujo vertical.	21
2.1 La deformación ψ_λ , $\lambda > 0$	22
2.2 Superficies minimales con curvatura total finita.	31
2.3 Superficies minimales simplemente periódicas.	35
3 Condiciones de equilibrio.	43
3.1 Una fórmula integral.	44
3.2 Superficies con curvatura total finita.	48
3.2.1 El vector torque en un final.	48
3.2.2 Una nueva fórmula para superficies con curvatura total finita y aplicaciones.	56
3.3 Superficies periódicas.	62
3.3.1 Superficies con finales planos.	62
3.3.2 Superficies con finales de tipo helicoides.	66
3.3.3 Superficies con finales de tipo Scherk.	68

4	El espacio de superficies minimales con curvatura total finita.	83
4.1	La coordenada grafo en un final embebido.	84
4.2	El operador curvatura media en un final de curvatura total finita. .	86
4.3	Topología del espacio de superficies minimales.	90
4.4	El operador de Jacobi compactificado.	94
4.5	El espacio de superficies minimales como variedad.	99
4.6	Aplicaciones y resultados relacionados.	106
4.6.1	Superficies minimales con simetrías.	106
4.6.2	Superficies con finales no paralelos.	109
4.7	La estructura de subvariedad Lagrangiana.	110
5	El espacio de minimales periódicas con finales planos.	113
5.1	Planteamiento del problema.	114
5.2	Estudio del operador \bar{L}	120
5.3	Los teoremas de estructura.	123
5.4	Superficies invariantes por un movimiento helicoidal.	134
	Bibliografía.	139

Introducción.

Uno de los temas más profundamente estudiados en la Geometría Diferencial es la teoría de las superficies minimales. A continuación expondremos brevemente los orígenes y el desarrollo de esta teoría, centrándonos en aquellos aspectos que están más relacionados con nuestro trabajo.

Una superficie minimal se caracteriza por que cada punto de la misma posee un entorno que tiene la menor área de entre todas las superficies con su misma frontera. De este modo, las superficies minimales del espacio euclídeo \mathbb{R}^3 aparecen como generalización 2-dimensional de las líneas rectas en el plano, y por tanto su estudio debió surgir ya en los primeros momentos de la Geometría Diferencial. Tenemos a los planos como los ejemplos más sencillos de superficies minimales. Pero a diferencia del caso 1-dimensional, la colección de todas las superficies minimales es enormemente variada. Además, la definición anterior enlaza con otra fuente de la que bebió originalmente la Geometría: el Cálculo Variacional. Ya en 1740, Euler resolvió el problema de encontrar la generatriz $y = f(x)$ de la superficie de revolución de forma que la primera derivada del área $A(f)$ de dicha superficie respecto de la generatriz f sea cero: Esencialmente, la respuesta a este problema es una catenaria, que genera por revolución lo que se llamó la *Catenoide*.

Siguiendo con la línea del Análisis Variacional, el funcional área para superficies dadas como grafo de una función $f(x, y)$ tiene la siguiente ecuación de Euler-Lagrange:

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_{xy}f_x f_y + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0, \quad (0.1)$$

que es una ecuación semilineal elíptica de segundo orden. Dicha ecuación fue caracterizada geoméricamente en 1770 por Meusnier como la de aquellas superficies cuya curvatura media de anula idénticamente. También fue capaz de encontrar otro ejemplo de superficie de este tipo, llamado el *Helicoide*, que posteriormente se

caracterizaría junto con el plano como las únicas superficies minimales que admiten una foliación por rectas.

Pero la ecuación (0.1) era demasiado complicada para las herramientas disponibles al final del siglo XVIII. No fue hasta 1835 cuando Scherk descubrió nuevas soluciones, de hecho familias completas de ellas, de entre las que destacan dos que veremos posteriormente y que llamaremos *las superficies de Scherk simplemente periódica y doblemente periódica*. Más o menos al mismo tiempo se estableció una relación entre las superficies minimales y la teoría de funciones armónicas, que resultó ser de crucial importancia para posteriores avances: *la minimalidad de una superficie equivale a que sus funciones coordenadas sean armónicas respecto de la estructura conforme asociada a la métrica inducida*. Esto llevó a conectar la teoría de las superficies minimales con la de las funciones analíticas, lo que permitió avanzar en lo que se llama el *Problema de Plateau*, en honor de un investigador belga que se interesó por las películas formadas por un medio jabonoso cuyo borde es un alambre de forma dada —la ecuación de Laplace $p = TH$, donde p es la diferencia de presiones entre ambas caras de la película, que en nuestro caso vale cero, T denota la tensión superficial y H la curvatura media de la película, nos muestra que estos modelos son ejemplos experimentales de superficies minimales—. Concretamente, el problema de Plateau dice: *Determinar si toda curva cerrada en \mathbb{R}^3 es la frontera de una superficie minimal*. En 1865, Schwarz describió analíticamente la solución al problema de Plateau para las aristas de un tetraedro. También Riemann y Weierstrass resolvieron problemas de Plateau para ciertos bordes poligonales.

Existe otra conexión entre las superficies minimales y la teoría de las funciones analíticas: *una superficie es minimal si y sólo si su aplicación de Gauss es anticonforme: en puntos no singulares preserva los ángulos e invierte la orientación*. De hecho, Enneper y Weierstrass probaron que a partir de dos funciones meromorfas sobre una superficie de Riemann M que verifiquen ciertas condiciones de compatibilidad, puede construirse —al menos, localmente— una superficie minimal que tiene a una de estas funciones por aplicación de Gauss, si identificamos el plano complejo extendido con la esfera unidad en \mathbb{R}^3 por medio de la proyección estereográfica. Esta es la famosa *Representación de Enneper-Weierstrass*, que permite encontrar una gran variedad de ejemplos de superficies minimales y que trataremos con más rigor en el capítulo 1. En 1915, Bernstein probó que *las únicas soluciones de la ecuación (0.1) definidas en todo el plano son las afines, $f(x, y) = ax + by + c$* . Esta afirmación ha servido como punto de partida para varios problemas de la

teoría de superficies minimales: notemos que un grafo es una superficie completa con la propiedad de que su aplicación de Gauss toma valores en un hemisferio. Con ello, por un lado se introducía un concepto de globalidad, que posteriormente fue generalizado por el de la completitud de la métrica inducida sobre la superficie, y por otro se abría el estudio de la imagen de la aplicación de Gauss de una superficie minimal completa y no llana en \mathbb{R}^3 . Durante los años 50 y 60 se avanzó notablemente en estos problemas, principalmente por parte de Osserman [47]. Este autor dio la versión global de la Representación de Weierstrass, que permite expresar superficies minimales completas en términos de una función meromorfa g —esencialmente, la aplicación de Gauss— y de una diferencial holomorfa ω definidas sobre una superficie de Riemann M . Usando esta representación de Weierstrass generalizada, Osserman dio sucesivos teoremas que iban concretando qué conjuntos son los permitidos para la imagen por la aplicación de de una superficie minimal completa y no llana. Este problema fue definitivamente cerrado por Fujimoto [16] en 1988, al probar que dicha imagen ha de ser la esfera salvo a lo más cuatro puntos, que es el mejor resultado posible ya que se conocen ejemplos cuya imagen omite cero, uno, dos o tres puntos de la esfera.

Otro producto de las investigaciones de Osserman fue un conocimiento más exhaustivo de las superficies minimales completas que tienen curvatura total finita, definiendo esta cantidad como la integral sobre la superficie de su curvatura de Gauss K , ver el teorema 1.3.1. Brevemente, dicho resultado asegura que la estructura conforme de una superficie minimal completa y con curvatura total finita M es la de una superficie de Riemann compacta \overline{M} menos una cantidad finita de puntos, que se llaman *finales*, y que la representación de Weierstrass (g, ω) de M puede extenderse a una función meromorfa y una diferencial también meromorfa sobre \overline{M} . Y recíprocamente, datos meromorfos del tipo (g, ω) sobre \overline{M} verificando ciertas condiciones de compatibilidad producen inmersiones minimales, completas y con curvatura total finita $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Estas condiciones de compatibilidad afectan a la no degeneración de la métrica inducida y a que la inmersión ψ , que se define mediante integración de ciertas diferenciales sobre M , sea univaluada. También es importante resaltar el hecho de que en la familia de las superficies minimales con curvatura total finita, la completitud equivale a que la inmersión ψ sea propia.

De esta manera, a cada superficie minimal con curvatura total finita M le asociamos el *género* —que se define como el género de la compactificación \overline{M} —,

el número de finales y el grado de la aplicación de Gauss, vista como aplicación holomorfa entre las superficies de Riemann compactas \overline{M} y $\overline{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, y una forma natural de clasificarlas es fijando alguno de estos números, que además están relacionados por una igualdad algebraica —ver la fórmula de Jorge y Meeks en el teorema 1.3.1—. Es también habitual trabajar bajo la condición geométrica natural de considerar superficies sin autointersecciones, llamadas *embebidas*, o al menos, superficies inmersas pero con finales embebidos. En 1983, Schoen [55] demostró que todo final minimal, completo, embebido y con curvatura total finita ha de ser asintótico a una semi-Catenoide —*final de tipo catenoide*— o a un plano —*final plano*—. En ambos casos, el final puede expresarse como grafo sobre el exterior de un disco del plano tangente límite Π —que se define como el plano ortogonal al valor tomado por la aplicación de Gauss extendida en el final— de una función del tipo

$$x_3(x_1, x_2) = a \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + b(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Pi, \quad \|(x_1, x_2)\| \leq R,$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y $b(x_1, x_2)$ es una función acotada cuando $\|(x_1, x_2)\| \rightarrow \infty$. Al coeficiente a se le llama el *crecimiento logarítmico* del final. De esta manera, el final es de tipo catenoide si y sólo si su crecimiento logarítmico es distinto de cero. En el capítulo 1 desarrollamos éstos y otros hechos conocidos de la teoría de superficies minimales, que nos servirán de apoyo para obtener resultados en posteriores capítulos.

Tras más de dos siglos sin disponer de ninguna superficie minimal completa, embebida en \mathbb{R}^3 y con curvatura total finita que no fuera la Catenoide o el plano, Costa [9] encontró en 1984 un ejemplo con género uno y tres finales, dos de ellos de tipo catenoide y un tercero de tipo plano. De hecho, fueron Hoffman y Meeks [22] los que demostraron que el toro de Costa está embebido, y generalizando esta construcción presentaron para cada entero positivo k una superficie minimal completa y embebida de género k , con dos finales de tipo catenoide y uno plano. Posteriormente, Costa, Hoffman, Karcher y Meeks [11, 19, 20] han deformado estos ejemplos dentro de familias 1-paramétricas de la misma clase, pero con tres finales de tipo catenoide. Puede encontrarse una bonita caracterización de cada una de estas superficies en términos de su grupo de isometrías en el trabajo de López, Martín y Rodríguez [35].

Quizás los dos resultados más importantes de clasificación de superficies minimales completas y con curvatura total finita en \mathbb{R}^3 son el debido a Schoen [55],

que asegura que *la Catenoide es la única superficie minimal completa y con curvatura total finita en \mathbb{R}^3 con dos finales embebidos*, y un teorema de López y Ros [37] que clasifica los ejemplos embebidos con la topología más sencilla posible. Concretamente, *las únicas superficies minimales propiamente embebidas en \mathbb{R}^3 , con curvatura total finita y género cero son la Catenoide y el plano*. En el capítulo 2 damos una demostración distinta, más geométrica e intuitiva que la original de este resultado, mediante el estudio de una deformación 1-paramétrica de una superficie minimal M en términos de la representación de Weierstrass. De hecho, la demostración de López y Ros también se basa en dicha deformación, pero nosotros abordaremos un estudio detallado de la misma que nos permitirá aplicarla a otras situaciones. Esta deformación conserva la estructura conforme y tiene sentido cuando para cada curva cerrada sobre M , la integral del conormal unitario a lo largo de la curva lleve una dirección fija, que podremos suponer vertical tras una rotación de la superficie en \mathbb{R}^3 . Dada una curva cerrada $\Gamma \subset M$, esta integral del conormal se llama el *flujo a lo largo de Γ* . Una forma de ver el flujo asociado a una curva cerrada en una superficie minimal es como una fuerza ejercida por el conormal a lo largo de dicha curva. Es fácil comprobar que si $M \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie minimal compacta y con borde, entonces la suma de los flujos a lo largo de las componentes de dicho borde es cero, lo cual se interpreta desde el punto de vista de la Mecánica como una condición de equilibrio. La premisa bajo la cual la deformación 1-paramétrica anterior está bien definida se expresa entonces diciendo que *la superficie tiene flujo vertical*. De esta forma, probaremos la siguiente generalización del resultado anterior de López y Ros, ver el teorema 2.2.1:

Las únicas superficies minimales propiamente embebidas en \mathbb{R}^3 , con curvatura total finita y flujo vertical son el plano y la Catenoide.

Este método también nos permite obtener teoremas para embebimientos minimales y completos con frontera, como por ejemplo el teorema 2.2.2:

Si M es una superficie minimal no llana, propiamente embebida en un semiespacio de \mathbb{R}^3 , con curvatura total finita, frontera formada por una curva de Jordan convexa contenida en el borde del semiespacio y flujo ortogonal a dicho borde, entonces M es un anillo.

Damos otra versión del resultado anterior para superficies minimales propiamente embebidas en la banda determinada por dos planos paralelos de \mathbb{R}^3 , con frontera formada por dos curvas de Jordan convexas, una en cada plano —teorema 2.2.3—.

Volvamos a la representación de Weierstrass. Decíamos arriba que cada pareja de datos meromorfos del tipo (g, ω) sobre una superficie de Riemann M producía una superficie minimal bajo ciertas condiciones de compatibilidad, una de las cuales afectaba a la multivaluación de la inmersión minimal producida. Cuando esta condición no se verifica, la inmersión es multivaluada, y está bien definida sobre un cierto recubridor de M . Otra manera de ver estas superficies es dentro de cocientes apropiados de la variedad ambiente \mathbb{R}^3 . Más generalmente, las superficies minimales *periódicas* se definen como aquellas que son conexas e invariantes por un grupo discreto infinito G de isometrías de \mathbb{R}^3 que actúe libremente sobre éste, y que por tanto pueden verse canónicamente como superficies minimales en la 3-variedad llana y completa \mathbb{R}^3/G . Como cada 3-variedad llana y completa está finitamente recubierta por \mathbb{R}^3/T , \mathbb{R}^3/S_θ , $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ ó por \mathbb{T}^3 , donde T es una traslación no trivial, S_θ un movimiento helicoidal alrededor del eje x_3 de ángulo $\theta \in]0, \pi]$ y \mathbb{T}^2 , \mathbb{T}^3 son respectivamente, toros llanos de dimensiones dos y tres, el problema se reduce esencialmente a estudiar superficies minimales propiamente embebidas en cada uno de estos ambientes. Como en el caso de \mathbb{R}^3 , nos dedicaremos al estudio de las superficies *no compactas*, lo que excluye el ambiente \mathbb{T}^3 —dicho tipo de superficies han sido estudiadas por Meeks [40] y por Pirola [52]—.

A diferencia de lo que ocurre en \mathbb{R}^3 , un resultado de Meeks y Rosenberg [42] establece la equivalencia entre la finitud de la topología —esto es, género y número de finales finito— y la finitud de la curvatura total en ambientes no simplemente conexos —ver teorema 1.4.1—. También estos autores estudiaron el comportamiento asintótico de una superficie minimal propiamente embebida y con topología finita, demostrando que sólo hay tres tipos posibles de finales permitidos: pueden ser asintóticos a anillos llanos —*finales de tipo Scherk*, en los ambientes \mathbb{R}^3/S_θ con θ racional ó $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ —, a planos —*finales planos*, en los ambientes \mathbb{R}^3/T ó \mathbb{R}^3/S_θ — ó a finales de Helicoides —*finales de tipo helicoides*, sólo en el espacio \mathbb{R}^3/S_θ , con θ posiblemente cero—. Además, todos los finales de una superficie son del mismo tipo, con lo cual podemos plantear cuestiones de clasificación en cada 3-variedad ambiente, atendiendo al tipo de los finales y a la topología de la superficie. En este sentido, probamos resultados de unicidad y de no existencia de ejemplos, ver teoremas 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 y corolario 2.3.2:

No existen toros minimales propiamente embebidos con un número finito de finales planos en \mathbb{R}^3/S_θ , $\theta \neq 0$.

No existen toros minimales propiamente embebidos con un número

finito de finales planos horizontales en \mathbb{R}^3/T cuyo levantamiento a \mathbb{R}^3 tenga flujo vertical.

La única superficie minimal propiamente embebida $M \subset \mathbb{R}^3$, invariante por un movimiento helicoidal S_θ , $0 \leq \theta \leq \pi$, con flujo vertical y tal que M/S_θ tiene topología finita y finales de tipo helicoides es el Helicoide.

La única superficie minimal propiamente embebida en \mathbb{R}^3/T con género cero y un número finito de finales de tipo helicoides es el Helicoide.

Riemann [53] describió una familia 1-paramétrica $\{M_\lambda\}_{\lambda>0}$ de superficies minimales que caen de forma natural en cocientes del tipo \mathbb{R}^3/T_λ para ciertas traslaciones T_λ . Todas estas superficies tienen género uno y dos finales planos, y si consideramos recubridores suyos eligiendo múltiplos del vector período que define la traslación T_λ , obtenemos toros propiamente embebidos en \mathbb{R}^3/T_λ^k con $2k$ finales planos, para cualquier k entero positivo. De esta forma, el primer enunciado anterior es una respuesta parcial a la siguiente conjetura:

Los ejemplos de Riemann y sus recubridores finitos deben ser los únicos toros propiamente embebidos en cocientes cíclicos de \mathbb{R}^3 con un número finito de finales planos.

Nótese también que el cuarto enunciado es la versión en \mathbb{R}^3/T con finales de tipo helicoides del teorema de género cero de López y Ros.

Otro interesante problema relacionado con las superficies minimales completas es el de la rigidez: Una inmersión minimal $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ se dice *rígida* si no existe otra inmersión minimal e isométrica de M en \mathbb{R}^3 , salvo movimientos rígidos. Más generalmente, decimos que ψ es *débilmente rígida* si toda isometría intrínseca de M se extiende a una isometría de \mathbb{R}^3 . Choi, Meeks y White [7] prueban que si $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un embebimiento propio y M tiene más de un final, entonces ψ es rígida. Otro resultado de Meeks [40] asegura que toda superficie minimal conexa y propiamente embebida $M \subset \mathbb{R}^3$, invariante por un grupo infinito discreto G de isometrías de \mathbb{R}^3 y tal que M/G tiene topología finita, es débilmente rígida. El Helicoide asegura que la tesis de este enunciado no puede fortalecerse hasta alcanzar la rigidez. Probaremos —corolario 2.3.4— que salvo en este caso concreto, la rigidez es una propiedad genérica de la familia de superficies contempladas en el anterior teorema de Meeks:

Si $M \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie minimal conexa, propiamente embebida e invariante por un grupo infinito discreto G de isometrías de \mathbb{R}^3 tal que M/G tiene topología finita, entonces M es rígida o es el Helicoide.

Cada superficie minimal $M \subset \mathbb{R}^3$ define una clase de cohomología \mathbb{R}^3 -valuada a la que llamamos *Flujo*, que asocia a cada clase de homología de curvas cerradas $[\Gamma]$ sobre M el flujo de la superficie a lo largo de Γ . El rango de la clase *Flujo* sólo puede ser cero en el caso del plano, y uno en el caso de la Catenoide, como consecuencia del teorema 2.2.1. El caso de rango dos se estudia en el capítulo 3, corolario 3.2.2, obteniendo una distribución muy restrictiva de los finales de nuestra superficie; entre otras condiciones, se demuestra que

Si una superficie minimal propiamente embebida $M \subset \mathbb{R}^3$ tiene curvatura total finita, un número impar de finales y $\text{rango}(\text{Flujo})=2$, entonces los finales de tipo catenoide se distribuyen por parejas, cada una de ellas formada por dos finales con el mismo crecimiento logarítmico. En particular, si M tiene tres finales, entonces $\text{rango}(\text{Flujo})=3$.

Este y otros resultados del capítulo 3 se obtienen explotando la relación existente entre las superficies minimales y la teoría de las superficies de Riemann. Concretamente, aplicando las relaciones bilineales de Riemann —ver por ejemplo [14]— a la representación de Weierstrass, podemos obtener relaciones entre magnitudes que dependen de la topología de la superficie y de sus finales, y que tienen su correspondiente versión para cualquier 3-variedad ambiente en la que tenga sentido la representación de Weierstrass. Podemos enunciar como ejemplo el teorema 3.2.2:

Sea M una superficie minimal propiamente inmersa en \mathbb{R}^3 , con curvatura total finita y finales embebidos horizontales. Denotaremos por $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ a una base canónica de homología de la compactificación \bar{M} de M , donde k es el género de \bar{M} , y por a_1, \dots, a_r a los crecimientos logarítmicos de los finales de M . Entonces,

$$\sum_{i=1}^k \langle \mathbf{F}(\gamma_i) \wedge \mathbf{F}(\Gamma_i), e_3 \rangle = \pi \left(\sum_{C_\infty} a_j^2 - \sum_{C_0} a_j^2 \right),$$

donde $\mathbf{F}(\gamma_i), \mathbf{F}(\Gamma_i)$ son los vectores flujo de M a lo largo de γ_i, Γ_i respectivamente, $e_3 = (0, 0, 1)$ y C_0 (resp. C_∞) representa el conjunto de finales de tipo catenoide donde la aplicación de Gauss extendida apunta al polo Sur (resp. al polo Norte).

Además, el método de las relaciones bilineales de Riemann también permite avanzar en el estudio de la conjetura anterior sobre los ejemplos de Riemann, ver el teorema 3.3.2:

Si $M \subset \mathbb{R}^3/T$ es un toro minimal propiamente embebido, con dos finales planos y una simetría respecto de un plano, entonces M es un ejemplo de Riemann.

Otras consecuencias del método se demuestran para superficies minimales propiamente embebidas en cualquier 3-variedad llana no compacta y para cualquier tipo de finales, en los teoremas 3.3.1, 3.3.3, 3.3.4 y 3.3.5.

Una vez que se tuvo constancia de la abundancia de ejemplos de superficies minimales propiamente embebidas y con curvatura total finita, ver [11, 20, 23], surgió la necesidad de estudiar las propiedades del espacio de superficies de este tipo, fijando la topología. En esta línea cabe destacar los resultados de Choi y Schoen [8], Costa [11], Ros [54] y White [63]. Por otro lado, existen otras familias naturales de superficies minimales *compactas y con frontera* que admiten una estructura de variedad diferenciable —infinito dimensional—, y este hecho es fundamental porque permite aplicar poderosas herramientas de la topología diferencial en dichos espacios, ver los trabajos de Bohme y Tromba [2] Meeks y White [44], Tomi y Tromba [58], Tromba [59] y White [64, 65, 66]. En el capítulo cuatro introducimos este punto de vista en la clase de las superficies minimales completas en \mathbb{R}^3 con curvatura total finita: Llamemos \mathcal{M} al espacio de las superficies minimales con curvatura total finita, género k y r finales —suponemos $k \geq 1$ y $r \geq 3$ para evitar casos triviales—, propiamente inmersas en \mathbb{R}^3 y con finales embebidos y horizontales, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de \mathbb{R}^3 . Dada $M \in \mathcal{M}$, las deformaciones infinitesimales de M en \mathcal{M} se corresponden con el espacio $\mathcal{J}(M)$ de las funciones de Jacobi sobre M , esto es, de las soluciones de la ecuación $Lu = 0$, donde $L = \Delta + \|\sigma\|^2$ es el operador de Jacobi de M —aquí Δ es el laplaciano de la métrica inducida y $\|\sigma\|^2$ la norma al cuadrado de la segunda forma fundamental de la superficie—. Probaremos en el lema 4.4.2 que la dimensión de $\mathcal{J}(M)$ es al menos, $r + 3$, para cualquier $M \in \mathcal{M}$. Definiendo el subconjunto de las superficies no degeneradas como $\mathcal{M}^* = \{M \in \mathcal{M} / \dim \mathcal{J}(M) = r + 3\}$, veremos en el teorema 4.5.1 que \mathcal{M}^* es un abierto de \mathcal{M} y que si $\mathcal{M}^* \neq \emptyset$, entonces

\mathcal{M}^ es una variedad real analítica de dimensión $r + 3$.*

La idea principal de este resultado es parametrizar las superficies próximas a una dada como grafos sobre ésta, y luego localizar las que sean minimales imponiendo que la curvatura media se anule sobre ellas. Como nuestras superficies son no compactas y crecen a lo más logarítmicamente en los finales, esto nos obliga a considerar deformaciones que presenten este tipo de crecimiento en infinito. Una vez hecho esto, el enunciado se demuestra a partir del Teorema de la Función Implícita, lo cual exige un estudio detallado del operador curvatura media para grafos definidos fuera de un disco y con crecimiento de tipo logarítmico.

A partir de la estructura de variedad de \mathcal{M}^* , deducimos resultados de “conservación de simetrías” por deformaciones, como por ejemplo

Si $M \in \mathcal{M}^$ es invariante por una isometría de \mathbb{R}^3 que conserve el semiespacio superior, entonces todas las superficies próximas a M tienen simetrías del mismo tipo.*

Para un resultado más preciso de esta conservación de simetrías, consultar el corolario 4.6.1. Otros resultados relacionados con simetrías y con la estructura de variedad pueden encontrarse en los teoremas 4.6.1 y 4.6.2. Además, podemos realizar un cierto cociente de \mathcal{M}^* por el grupo de Lie 3-dimensional \mathcal{G} de los movimientos rígidos de \mathbb{R}^3 que conservan el semiespacio superior, y damos explícitamente una inmersión real analítica de la variedad cociente $\mathcal{M}^*/\mathcal{G}$ en el espacio euclídeo complejo \mathbb{C}^7 , que resulta ser Lagrangiana respecto de la estructura simpléctica estándar. Todo ello se recoge en el teorema 4.7.1. Kusner, Mazzeo, Pollack y Uhlenbeck [32, 39] obtienen resultados análogos a los nuestros en relación con los espacios de moduli de dos problemas geométricos sobre variedades no compactas: las superficies completas y embebidas en \mathbb{R}^3 con curvatura media constante no nula y topología finita, y las métricas completas y conformes con curvatura escalar constante positiva en $M^n - \Lambda$, donde M^n es una variedad Riemanniana compacta de dimensión $n \geq 3$ y $\Lambda \subset M$ es un cerrado de ésta. Nuestra estrategia coincide con la de estos autores aunque las técnicas analíticas que utilizamos son distintas a las suyas. Para más información sobre estos problemas puede consultarse el trabajo [38].

El quinto y último capítulo se ha dedicado a extender los resultados de estructura anteriores a dos espacios de superficies minimales simplemente periódicas y con finales planos. Concretamente, si \mathcal{M}_t —resp. \mathcal{M}_s — denota el espacio de superficies minimales propiamente embebidas en cocientes de \mathbb{R}^3 por traslaciones que

dependen de cada superficie —resp. por movimientos helicoidales—, con género $k \geq 1$ y r finales planos horizontales —un resultado de Meeks y Rosenberg [42] nos asegura que r ha de ser par—, ahora el espacio de deformaciones infinitesimales $\mathcal{J}(M)$ de una superficie tiene dimensión mayor ó igual que seis y que cuatro, según que estemos considerando un elemento $M \in \mathcal{M}_t$ ó bien $M \in \mathcal{M}_s$, respectivamente. Definiendo los correspondientes subespacios \mathcal{M}_t^* y \mathcal{M}_s^* de superficies no degeneradas como aquellos cuyos elementos hacen mínima la dimensión de $\mathcal{J}(M)$, probaremos en los teoremas 5.3.2 y 5.4.1 que

\mathcal{M}_t^ —resp. \mathcal{M}_s^* — es un abierto de \mathcal{M}_t —resp. de \mathcal{M}_s —, y si es no vacío, tiene una estructura natural de variedad real analítica de dimensión seis —resp. cuatro—.*

También se proporcionan inmersiones Lagrangianas de las variedades cocientes $\mathcal{M}_t^*/\mathcal{G}_t$ y $\mathcal{M}_s^*/\mathcal{G}_s$ en \mathbb{C}^3 y \mathbb{C}^2 respectivamente, donde \mathcal{G}_t es el grupo de las traslaciones y \mathcal{G}_s el de los movimientos helicoidales con eje vertical en \mathbb{R}^3 . Como aplicación de estos resultados, damos otro paso en la resolución de la conjetura sobre los ejemplos de Riemann, desde el punto de vista de la no degeneración estudiada en este capítulo, ver el teorema 5.3.3:

Si $M \in \mathcal{M}_t^$ tiene género uno y cualquier número de finales, entonces ha de ser un recubridor de uno de los ejemplos de Riemann.*

Por último mencionaremos que en cada uno de los capítulos 2, 3, 4 y 5 se desarrolla aproximadamente el contenido de las referencias [50, 48, 51, 49], respectivamente. Cada capítulo se divide en secciones y éstas a su vez en subsecciones, y la numeración utilizada en los enunciados está compuesta de tres cifras, de forma que la primera de ellas hace referencia al capítulo en que se encuentra el resultado y la segunda a la sección correspondiente.



Capítulo 1

Preliminares.

Dedicaremos este capítulo a introducir la notación, los conceptos fundamentales y algunos resultados básicos en los que nos apoyaremos posteriormente. Como referencia general, pueden seguirse [19, 47].

1.1 Generalidades.

Denotaremos por $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ a los espacios euclídeos real y complejo de dimensión n , y por $S^2 = S^2(1)$ a la esfera unidad $\{x \in \mathbb{R}^3 / \|x\| = 1\}$ en \mathbb{R}^3 .

Sea (M, ds^2) una superficie Riemanniana, que supondremos siempre orientada. Llamaremos J a la rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ en cada espacio tangente orientado $T_p M$, $p \in M$. Dada una función diferenciable (o al menos, de clase C^2) $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, denotaremos por $df, \nabla f, \Delta f$ a su diferencial, gradiente y laplaciano respectivamente, estos dos últimos respecto de ds^2 . Se dice que f es una función *armónica* cuando verifica $\Delta f = 0$. Es bien conocido que la armonicidad de f no depende de la métrica ds^2 sino de la clase conforme de ésta, entendiéndose por ello el conjunto de todas las métricas del tipo λds^2 , con λ función diferenciable y positiva sobre M , y dicha armonicidad equivale a que $J\nabla f$ sea, localmente, el gradiente de una función diferenciable f^* , que se llama una *conjugada* de f , y que está definida salvo constantes aditivas.

A menudo realizaremos nuestra superficie M a través de una inmersión orientada $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, de forma que $g = ds^2$ sea la métrica inducida por ψ a partir de la métrica llana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de \mathbb{R}^3 . De esta forma, ψ es una inmersión isométrica, y si

∇ es la conexión en M asociada a ds^2 , se cumple la ecuación de Gauss

$$X(d\psi(Y)) = d\psi(\nabla_X Y) + \sigma(X, Y)N = d\psi(\nabla_X Y) + g(AX, Y)N,$$

donde X, Y son campos tangentes a M , σ es la *segunda forma fundamental* de la inmersión, $N : M \rightarrow S^2$ es la *aplicación de Gauss* que orienta a ψ y A es el *campo de endomorfismos autoadjuntos de Weingarten* para esa aplicación de Gauss, esto es, $d\psi(AX) = -dN(X)$, para todo campo tangente X a M . Los valores propios k_1, k_2 de A se llaman *curvaturas principales* y a partir de ellas obtenemos la *curvatura de Gauss* $K = k_1 k_2$ y la *curvatura media* $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$.

Una inmersión $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ se dice *minimal* cuando su curvatura media H se anula idénticamente.

Si llamamos (x_1, x_2, x_3) a las funciones coordenadas de nuestra inmersión ψ y $\Delta\psi = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$, entonces una fórmula que tendrá consecuencias esenciales en la teoría de superficies minimales es

$$\Delta\psi = 2HN. \quad (1.1)$$

Fijemos una inmersión minimal $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. De (1.1) se deduce que las funciones coordenadas de ψ son armónicas. Por otro lado, por ser M una superficie Riemanniana orientada, admite un atlas orientado formado por parametrizaciones isotermales, que induce una estructura de superficie de Riemann sobre M . Es conveniente recordar que dicha estructura conforme no depende de la métrica inducida ds^2 sino de la clase conforme de métricas que contiene a ds^2 , como ocurría con el concepto de función armónica.

De la minimalidad de ψ se deduce que $A^2 = -K \cdot I$, siendo I la identidad en el fibrado tangente, luego $\langle dN(X), dN(Y) \rangle = -K g(X, Y)$, para cada par de campos tangentes a M . Por tanto, N es una aplicación *conforme* y si orientaremos S^2 con el normal exterior, de forma que su curvatura de Gauss sea constantemente uno, el que $\det(dN) = K = -k_1^2 < 0$ nos dice que N invierte la orientación. Como la proyección estereográfica desde el polo Norte $\pi : S^2 \rightarrow \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\pi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$ también invierte la orientación, deducimos que $g = \pi \circ N$ es una aplicación *holomorfa* entre superficies de Riemann. De esta forma, se nos empieza a mostrar la íntima relación existente entre las superficies minimales y el análisis complejo. El objetivo de la próxima sección será explotar esta relación.

1.2 La representación de Weierstrass.

Continuemos estudiando nuestra inmersión minimal $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Ya que las funciones coordenadas x_i , $i = 1, 2, 3$ son armónicas, podemos considerar la aplicación $\psi^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ cuyas coordenadas son las conjugadas armónicas de dichas funciones, que no ha de ser univaluada sobre M , sino sobre cierto recubridor de ésta. Así, $\psi + i\psi^*$ es una curva holomorfa en \mathbb{C}^3 , y se tiene

$$d(\psi + i\psi^*) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - i \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) dz,$$

donde $z = x + iy$ es una coordenada local holomorfa, luego $\Phi = d(\psi + i\psi^*) = 2 \frac{\partial\psi}{\partial z} dz$ es una diferencial holomorfa \mathbb{C}^3 -valuada sobre M , que se denomina la *1-forma de Weierstrass* de la inmersión ψ . Nótese que

$$\operatorname{Re} \int \Phi = \operatorname{Re} \int d(\psi + i\psi^*) = \psi,$$

y que escribiendo $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, se tienen

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 = \left\| \frac{\partial\psi}{\partial x} \right\|^2 - \left\| \frac{\partial\psi}{\partial y} \right\|^2 - 2i \left\langle \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y} \right\rangle = 0,$$

porque (x, y) son parámetros isotermos para nuestra inmersión. Además,

$$\sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2 = \left\| \frac{\partial\psi}{\partial x} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial\psi}{\partial y} \right\|^2 \neq 0. \quad (1.2)$$

Por ello, $\psi + i\psi^*$ es lo que se llama una *curva holomorfa nula* en \mathbb{C}^3 . El recíproco es cierto: La parte real de una curva holomorfa nula en \mathbb{C}^3 tiene funciones coordenadas armónicas, y por consiguiente produce una inmersión minimal en \mathbb{R}^3 supuesto que se verifica (1.2).

Recordemos que $g = \pi \circ N$ era una aplicación meromorfa sobre M . A partir de la diferencial de Weierstrass se define otra diferencial holomorfa en M :

$$\omega = \phi_1 - i\phi_2. \quad (1.3)$$

El par (g, ω) se conoce con el nombre de la *representación de Weierstrass* de ψ . De hecho, toda superficie minimal puede recuperarse a partir de unos datos de

tipo (g, ω) . Antes de dar un enunciado exacto de esta propiedad, definiremos una *inmersión ramificada* como una aplicación diferenciable $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ que es una inmersión salvo en un conjunto discreto de puntos, donde se anula la diferencial de ψ .

Teorema 1.2.1 (Representación de Weierstrass, [47])

i) Sea $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal y conforme con aplicación de Gauss $g = \pi \circ N$. Entonces, existe una 1-forma holomorfa ω en M tal que ψ se escribe

$$\psi = \operatorname{Re} \int \Phi, \quad (1.4)$$

donde $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ verifica

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)\omega, \quad \phi_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)\omega, \quad \text{y} \quad \phi_3 = g\omega. \quad (1.5)$$

ii) Recíprocamente, sea M una superficie de Riemann, g una función meromorfa y ω una 1-forma holomorfa sobre M . Entonces, la aplicación $\psi = \operatorname{Re} \int \Phi$ con $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ definida por (1.5) es una inmersión minimal conforme y ramificada de algún recubridor de M en \mathbb{R}^3 . Además,

- ψ es una inmersión $\iff \sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2$ no tiene ceros en M .
- ψ es univaluada sobre M $\iff \begin{cases} \forall \Gamma \subset M \text{ curva cerrada,} \\ \text{período}(\psi, \Gamma) = \operatorname{Re} \int_{\Gamma} \Phi = 0. \end{cases}$

Nótese que la representación de Weierstrass determina a ψ salvo una constante aditiva. La condición “ $\sum |\phi_k|^2$ no tiene ceros en M ” equivale a que los polos de g coincidan con los ceros de ω , y que si g tiene un polo de orden k en $p \in M$, entonces el orden del cero de ω en p es $2k$. En cuanto a la segunda condición del apartado ii) del teorema 1.2.1, llamando $H_1(M, \mathbb{Z})$ al primer grupo de homología de M , podemos considerar el homomorfismo de grupos —que está bien definido porque Φ es una diferencial holomorfa sobre M —

$$\begin{aligned} H_1(M, \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ [\Gamma] &\longmapsto \text{período}(\psi, \Gamma) = \operatorname{Re} \int_{\Gamma} \Phi. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Si llamamos Λ a la imagen de este morfismo de grupos, el teorema 1.2.1 recoge la posibilidad $\Lambda = \{0\}$. En otro caso, podemos recurrir a estudiar inmersiones minimales en cocientes de \mathbb{R}^3 sobre subgrupos generados por una, dos o tres traslaciones de vectores linealmente independientes. Esta situación se generaliza a otros cocientes llanos de \mathbb{R}^3 , como veremos en la sección 1.4.

Por otro lado, como la representación de Weierstrass determina salvo constantes aditivas a la superficie minimal inmersa, es lógico pensar que los invariantes geométricos de la inmersión se escriban en términos de g, ω . Concretamente, la métrica ds^2 , la aplicación de Gauss N y la curvatura de Gauss K vienen dadas, respectivamente, por

$$ds^2 = \frac{1}{4} (1 + |g|^2)^2 |w|^2, \quad (1.7)$$

$$N = \left(\frac{2 \operatorname{Re}(g)}{1 + |g|^2}, \frac{2 \operatorname{Im}(g)}{1 + |g|^2}, \frac{|g|^2 - 1}{1 + |g|^2} \right), \quad (1.8)$$

$$K = - \left(\frac{4|dg|}{(1 + |g|^2)^2 |w|} \right)^2. \quad (1.9)$$

De las fórmulas (1.4) y (1.5) se tiene que si ψ es una inmersión minimal con representación de Weierstrass (g, ω) y $\lambda > 0$, entonces $(g, \lambda\omega)$ determina una homotecia de ψ de razón λ , y que $(e^{i\theta}g, e^{-i\theta}\omega)$ son los datos de la superficie minimal que se obtiene rotando ψ mediante un ángulo θ alrededor del eje x_3 .

Haciendo uso de la representación de Weierstrass, podemos introducir algunos de los ejemplos clásicos más representativos de superficies minimales, como pueden ser los siguientes, ver figuras 1.1-5:

- EL PLANO.

$$M = \mathbb{C}, \quad g(z) \equiv 0, \quad \omega = dz, \quad z \in \mathbb{C}.$$

- LA CATENOIDE.

$$M = \mathbb{C} - \{0\}, \quad g(z) = z, \quad \omega = \frac{dz}{z^2}, \quad z \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

- EL HELICOIDE.

$$M = \mathbb{C} - \{0\}, \quad g(z) = z, \quad \omega = i \frac{dz}{z^2}, \quad z \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

En este ejemplo, el lazo $\{|z| = 1\}$ produce un período vertical, de longitud 2π .

- LOS EJEMPLOS DE RIEMANN [24, 53].

$$\forall \lambda > 0, M_\lambda = \{(z, w) \in \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} / w^2 = z(z - \lambda)(\lambda z + 1)\} - \{(0, 0), (\infty, \infty)\},$$

$$g(z, w) = z, \omega = A \frac{dz}{zw}, \text{ donde } A^2 \in \mathbb{R}.$$

Puede comprobarse que el período de M_λ a lo largo de uno de los dos generadores de la homología del toro $\{w^2 = z(z - \lambda)(\lambda z + 1)\}$ es un vector no nulo, mientras que el otro generador de la homología no produce período. Tampoco los lazos alrededor de $(0, 0)$ y de (∞, ∞) producen períodos. Esto nos dice que el subgrupo imagen Λ del homomorfismo de grupos dado por (1.6) es cíclico, como ocurre en el Helicoide.

- LA SUPERFICIE DE SCHERK SIMPLEMENTE PERIÓDICA [47].

$$M = \mathbb{C} - \{1, -1, i, -i\}, g(z) = z, \omega = i \frac{dz}{z^4 - 1}, z \in M.$$

En esta superficie, los lazos alrededor de 1 y de -1 tienen vector período $(0, 0, -\frac{\pi}{2})$, mientras que los lazos alrededor de i y de $-i$ producen el período opuesto. Por tanto, también el subgrupo generado por los períodos es cíclico.

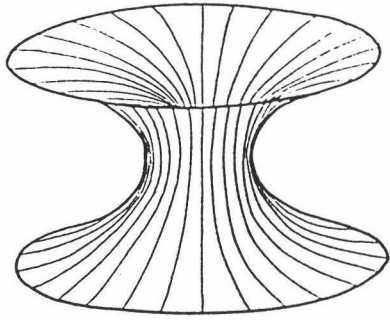
- LA SUPERFICIE DE SCHERK DOBLEMENTE PERIÓDICA [41, 47].

$$M = \mathbb{C} - \{1, -1, i, -i\}, g(z) = z, \omega = \frac{dz}{z^4 - 1}, z \in M.$$

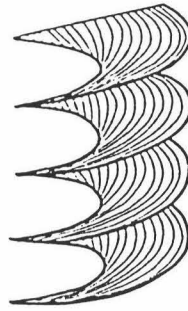
En este caso, los lazos alrededor de 1 y de -1 producen los vectores período $(0, -\frac{\pi}{2}, 0)$ y $(0, \frac{\pi}{2}, 0)$ respectivamente, mientras que los que rodean a i y a $-i$ tienen asociados los períodos $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ respectivamente. De esta forma, el subgrupo de períodos está generado por dos vectores linealmente independientes.

Observemos que los datos de Weierstrass de la Catenoide y del Helicoide son idénticos, salvo que la 1-forma ω de este último se obtiene multiplicando la de la Catenoide por la unidad imaginaria, y lo mismo puede decirse del par de superficies de Scherk. Esta construcción se generaliza de la siguiente forma:

Si $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión minimal con representación de Weierstrass (g, ω) , entonces los datos $(g, i\omega)$ determinan otra inmersión minimal —generalmente multivaluada sobre M —, que recibe el nombre de *superficie conjugada de ψ* , y que tiene por funciones coordenadas a conjugadas armónicas de las funciones coordenadas de ψ . En los capítulos 2 y 3 veremos más información sobre la inmersión conjugada.



1.1.



1.2.

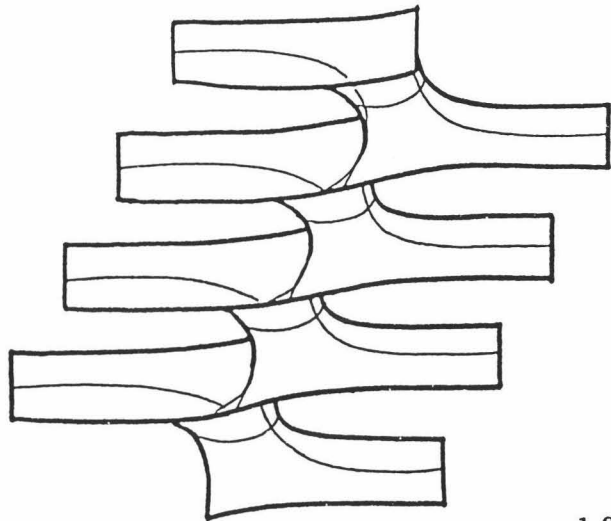
1.1. La Catenoide.

1.2. El Helicoide.

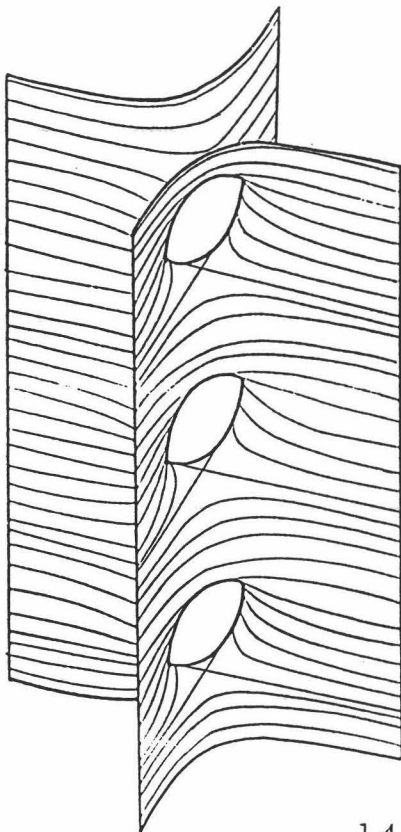
1.3. Un ejemplo de Riemann.

1.4. Superficie de Scherk simplemente periódica.

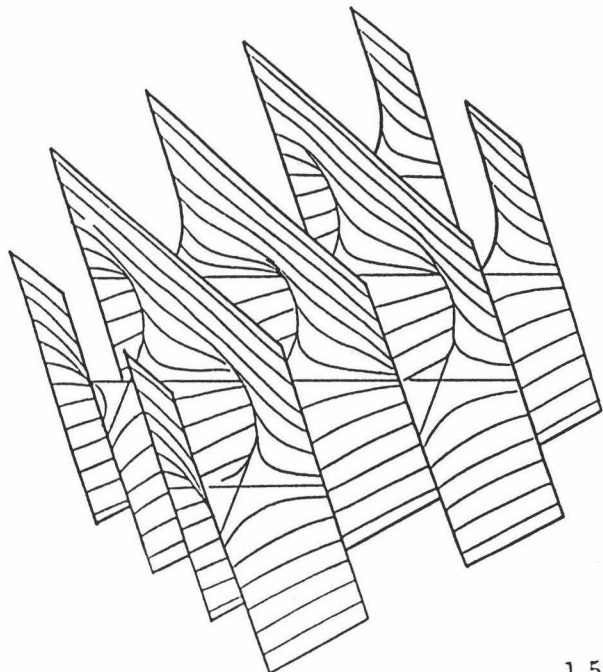
1.5. Superficie de Scherk doblemente periódica.



1.3.



1.4.



1.5.

1.3 Superficies con curvatura total finita.

La *curvatura total* de una inmersión minimal $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ se define como la integral sobre M de su curvatura de Gauss,

$$C(M) = \int_M K dA.$$

Aquí dA denota el elemento de área asociado a la métrica inducida ds^2 . Como la curvatura de Gauss es no positiva, tenemos $-\infty \leq C(M) \leq 0$. Además, como $K = \det(dN)$, la curvatura total coincide con el opuesto del área esférica de la imagen por la aplicación de Gauss de M . Por ejemplo, es fácil probar que las curvaturas totales del plano, Catenoide y Helicoide vienen dadas, respectivamente, por 0 , -4π y $-\infty$. Diremos que la inmersión ψ tiene *curvatura total finita* cuando $C(M) > -\infty$. La familia de superficies minimales completas con curvatura total finita ha sido profundamente estudiada en el transcurso de los últimos años, siendo el punto de partida de dicho estudio la siguiente mejora del conocimiento sobre la representación de Weierstrass:

Teorema 1.3.1 ([17, 27, 47]) *Sea $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal, conforme, completa y con curvatura total finita. Entonces,*

- i) M es conformemente equivalente a $\overline{M} - \{p_1, \dots, p_r\}$, donde \overline{M} es una superficie de Riemann compacta y p_1, \dots, p_r son puntos en \overline{M} , $r \geq 1$.
- ii) ψ es propia.
- iii) Si la representación de Weierstrass de ψ es (g, ω) , entonces g se extiende a una función meromorfa sobre \overline{M} y ω a una diferencial meromorfa sobre \overline{M} .
- iv) Sea D_j un entorno de un punto $p_j \in \overline{M} - M$. Dado $R > 0$ grande, si llamamos $S_{R,j} = \{q \in S^2 / Rq \in \psi(D_j - \{p_j\})\}$, entonces $S_{R,j}$ converge cuando $R \rightarrow \infty$ a un círculo máximo de S^2 recorrido un número entero d_j de veces, y la curvatura total de ψ es un múltiplo entero de 4π dado por

$$C(M) = -4\pi \text{ grado}(g) = 2\pi \left(\chi(M) - \sum_{j=1}^r d_j \right), \quad (1.10)$$

donde $\chi(M)$ es la característica de Euler de M .

En particular, en la familia de las inmersiones minimales y conformes con curvatura total finita en \mathbb{R}^3 , son equivalentes la completitud y el que la inmersión sea propia.

En la situación del teorema 1.3.1, un *final de ψ* se define como un conjunto del tipo $\psi(D_j - \{p_j\})$, para D_j entorno suficientemente pequeño de un punto $p_j \in \overline{M} - M$. En rigor, se dice que dos subconjuntos de este tipo representan al mismo final cuando son imágenes por ψ de sendos entornos del mismo punto p_j de $\overline{M} - M$. De hecho, a menudo identificaremos el punto p_j con el final.

Los apartados *i)* y *iii)* del teorema 1.3.1 pueden probarse en una versión local, que sólo afecta al comportamiento de un final minimal con curvatura total finita:

Proposición 1.3.1 ([27]) *Sea $\psi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal, conforme, propia y con curvatura total finita de un anillo A que sea difeomorfo a $D^* = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z| \leq 1\}$. Entonces, existe un subanillo $A' \subset A$ que se puede parametrizar conformemente por D^* , y la representación de Weierstrass (g, ω) de ψ se extiende de forma meromorfa a datos definidos en $D = D^* \cup \{0\}$.*

Una superficie minimal $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ se dice *embebida* cuando ψ sea un homeomorfismo de M sobre su imagen. También hablaremos de que ψ es un embebimiento. En el caso de superficies minimales embebidas, a menudo identificaremos M con su imagen por ψ .

Es posible caracterizar los finales embebidos con curvatura total finita como aquellos donde la multiplicidad del final $d_j = \lim_{R \rightarrow \infty} S_{R,j}$ vale uno. La fórmula de Jorge y Meeks (1.10) nos dice que para superficies minimales propiamente inmersas en \mathbb{R}^3 con curvatura total finita y finales embebidos, se cumple

$$\text{grado}(g) = \text{género}(\overline{M}) + \#\{\text{finales}\} - 1, \quad (1.11)$$

donde \overline{M} es la compactificación de M dada por el teorema 1.3.1.

En un final embebido y con curvatura total finita p , podemos suponer tras una conveniente rotación en \mathbb{R}^3 que el valor de la aplicación de Gauss en p es vertical. Los dos ejemplos más sencillos son un plano horizontal y cada uno de los finales de una Catenoides vertical; ambos son grafos sobre el plano (x_1, x_2) , siendo el primero acotado mientras que el segundo crece logarítmicamente. Esto es todo lo que puede ocurrir:

Proposición 1.3.2 ([47, 55]) *Sea $\psi : D - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un final minimal, embebido, completo y con curvatura total finita, siendo $N(p) = (0, 0, \pm 1)$. Entonces, fuera de un cierto compacto, $\psi(D - \{p\})$ es el grafo sobre el plano (x_1, x_2) de una función del tipo*

$$x_3(x_1, x_2) = a \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + b + \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\right),$$

donde $a, b, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{O}(\varepsilon^k)$ es una función que cumple $\varepsilon^{-k} \mathcal{O}(\varepsilon^k) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Además, las dos primeras componentes de la 1-forma de Weierstrass Φ tienen polos dobles sin residuos en p y la tercera componente de Φ es ó bien regular en p (cuando $a = 0$) ó tiene un polo simple en p con residuo $-a \in \mathbb{R}$.

En el caso $a \neq 0$, decimos que el final es de *tipo catenoide*, ya que es asintótico a la semi-Catenoide dada por el grafo $x_{3,\infty}(x_1, x_2) = a \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + b$. Al número real a se le llama el *crecimiento logarítmico* del final. En el caso $a = 0$, el final se dice de *tipo plano*, o simplemente *final plano*, siendo asintótico al plano $x_{3,\infty}(x_1, x_2) \equiv b$. La representación de Weierstrass (g, ω) también caracteriza el tipo del final: en un final plano la aplicación de Gauss g tiene ramificación, mientras que en un final de tipo catenoide no la tiene. El comportamiento de ω se deduce de (1.5) y del comportamiento de ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 en el final, dado por la proposición 1.3.2.

1.4 Superficies periódicas.

Dada una superficie de Riemann M , sabemos que unos datos de Weierstrass (g, ω) inducen una inmersión minimal bien definida sobre M cuando el subgrupo imagen Λ del homomorfismo dado en (1.6) se reduzca a $\{0\}$. En este caso suele decirse que el par (g, ω) *resuelve el problema de períodos para M* . Sin embargo, vimos en la sección 1.2 ejemplos de superficies minimales donde dicho problema no se resolvía. Por ejemplo, en el caso del Helicoide, Λ está generado por el vector $P = (0, 0, 2\pi)$, luego una forma de ver dicha superficie de forma univaluada es considerarla dentro de la 3-variedad llana \mathbb{R}^3/T , donde T es la traslación de vector P . Vamos a generalizar esta situación:

Una superficie de \mathbb{R}^3 se dice *periódica* si es conexa e invariante por la acción de un grupo G de isometrías de \mathbb{R}^3 que actúe libremente sobre éste.

Una forma natural de analizar tales superficies es estudiando sus cocientes en \mathbb{R}^3/G . De la clasificación afín de las 3-variedades completas y llanas —ver por ejemplo [67], teoremas 3.3.1 y 3.5.1— se tiene que toda 3-variedad completa, llana y no simplemente conexa está finitamente recubierta por una de las variedades siguientes: \mathbb{R}^3/S_θ , donde S_θ es el movimiento helicoidal obtenido componiendo una rotación de ángulo $\theta \in [0, \pi]$ alrededor del eje x_3 con una traslación no trivial en la dirección de dicho eje, o $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, donde \mathbb{T}^2 es un toro llano dos dimensional, o \mathbb{T}^3 , siendo este último un toro llano tridimensional.

Una superficie $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^3$ se dice *simplemente periódica* cuando es invariante por un grupo cíclico infinito de isometrías G de \mathbb{R}^3 . Según lo anterior, dicha superficie cae de forma natural en una 3-variedad que está finitamente recubierta por \mathbb{R}^3/S_θ , para algún θ . Pero como estamos interesados en identificar *métricamente* las 3-variedades ambiente, debemos distinguir en este caso entre \mathbb{R}^3/S_θ , con $\theta \in [0, \pi]$ y \mathbb{R}^3/T , siendo T el grupo generado por una traslación no vertical. De forma análoga, la superficie \tilde{M} se dice *doblemente periódica* cuando sea invariante por un grupo generado por dos traslaciones de vectores linealmente independientes, siendo el espacio ambiente natural el espacio producto $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$. Por último, M es *triplemente periódica* cuando es invariante por un grupo de isometrías G generado por tres traslaciones independientes. En este último caso, como el espacio cociente $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/G$ es compacto, la superficie inducida en éste también lo será. A lo largo de este trabajo estudiaremos superficies minimales *no compactas* en cocientes llanos de \mathbb{R}^3 , por lo que prescindiremos de las triplemente periódicas. Un estudio bastante detallado de estas últimas puede encontrarse en [40].

Claramente y salvo en el caso del plano, una superficie minimal completa y periódica $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^3$ ha de tener curvatura total infinita. Sin embargo, la superficie minimal inducida M en el correspondiente cociente \mathbb{R}^3/G podría tener curvatura total finita, como ocurre con los ejemplos periódicos presentados en la sección 1.2. Un teorema de Huber [26] nos dice que bajo esta hipótesis de curvatura total finita, M también ha de tener topología finita —o sea, es homeomorfa a una superficie compacta finitamente punteada—. A diferencia de lo que ocurre en \mathbb{R}^3 , donde el Helicoide tiene topología finita pero curvatura total infinita, estas dos condiciones son equivalentes en cocientes no simplemente conexos de \mathbb{R}^3 :

Teorema 1.4.1 ([42]) *Una superficie minimal M propiamente embebida en una*

3-variedad completa, llana y no simplemente conexa tiene curvatura total finita si y sólo si tiene topología finita.

Por tanto, el ámbito de trabajo natural en la teoría de las superficies minimales periódicas es el de aquellas cuyos cocientes en \mathbb{R}^3/G son propiamente embebidos y tienen topología finita. Una superficie minimal $M \subset \mathbb{R}^3/G$ de este tipo tendrá la estructura conforme de una superficie de Riemann compacta menos una cantidad finita de puntos, que también reciben el nombre de *finales*, como ocurría en la sección anterior. Meeks y Rosenberg [41, 42] han estudiado el comportamiento asintótico permitido en el caso periódico:

Teorema 1.4.2 ([41, 42])

i) Sea $M \subset \mathbb{R}^3/G$ una superficie minimal propiamente embebida y con topología finita, donde G es el grupo generado por una traslación no trivial de vector P no horizontal —posiblemente vertical— o por un movimiento helicoidal S_θ , con $\theta \in]0, \pi]$. Entonces:

- 1. Todos los finales de M son asintóticos a planos paralelos, como en los ejemplos de Riemann. Dichos finales se levantan a finales planos en \mathbb{R}^3 . Si $M \subset \mathbb{R}^3/S_\theta$, estos finales han de ser necesariamente horizontales.*
- 2. Todos los finales de M son asintóticos a anillos llanos, como ocurre en la superficie de Scherk simplemente periódica. Este caso no puede darse para superficies $M \subset \mathbb{R}^3/S_\theta$ con θ irracional.*
- 3. Todos los finales de M son asintóticos a finales de Helicoides. Un ejemplo de superficie en estas condiciones es el propio Helicoide.*

ii) Sea $M \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ una superficie minimal propiamente embebida y con topología finita, siendo \mathbb{T} un toro llano bidimensional. Si M es no llana, entonces cada uno de sus finales es asintótico a un cilindro llano, como en la superficie de Scherk doblemente periódica.

Cuando la superficie M del teorema 1.4.2 sea simplemente periódica, llamaremos a sus finales *de tipo plano, Scherk o helicoide* según estemos en el caso 1,2 ó 3

del apartado *i*) de dicho teorema. Si M es doblemente periódica solo hay un tipo de finales permitido, que también recibe el nombre de *finales de tipo Scherk*.

Como ya hemos dicho, los finales planos de una superficie minimal simplemente periódica se levantan a finales planos en \mathbb{R}^3 , y por tanto su comportamiento se describe en la proposición 1.3.2. Desarrollaremos a continuación un estudio similar para los otros tipos de finales periódicos, que en su mayor parte puede encontrarse en [41, 42]. Antes de ello, es conveniente notar que una superficie en \mathbb{R}/T o en $T \times \mathbb{R}$, donde T es una traslación no trivial, tiene una aplicación de Gauss bien definida —y por tanto, también una representación de Weierstrass (g, ω) —, pero que esto no es cierto para superficies $M \subset \mathbb{R}^3/S_\theta$, $\theta \in]0, \pi]$, ya que en este último caso los valores que toma la aplicación de Gauss del levantamiento de M a \mathbb{R}^3 en puntos homólogos por S_θ se relacionan mediante una rotación de ángulo θ alrededor del eje x_3 .

1.4.1 Finales de tipo Scherk.

Como ya hemos indicado, los finales de tipo Scherk pueden aparecer tanto en superficies simplemente periódicas como en doblemente periódicas. Sin embargo, todo final de tipo Scherk es simplemente periódico, esto es, el grupo de traslaciones por el que es invariante es cíclico. Tomemos un final propiamente embebido de tipo Scherk $A \subset \mathbb{R}^3/T$, siendo T una traslación de vector \mathbf{P} no trivial. Por tener A curvatura total finita, podemos parametrizarlo conformemente por $D^* = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z| \leq 1\}$ y su aplicación de Gauss g se extiende meromórficamente a $z = 0$. Salvo una rotación en \mathbb{R}^3 , podemos suponer $g(0) = e^{i\theta_0}$, para cierto $\theta_0 \in [0, 2\pi[$. En estas condiciones, Meeks y Rosenberg [42] probaron que la tercera componente ϕ_3 de la 1-forma de Weierstrass, que es univaluada en $A \cong D^*$, tiene un polo simple en $z = 0$. Pongamos $\phi_3 = \left(\frac{R}{z} + f(z)\right) dz$, con $R \in \mathbb{C} - \{0\}$ y f holomorfa en $D = D^* \cup \{0\}$. Usando (1.5) es fácil llegar a $\phi_1 = \left(\frac{-iR \operatorname{sen}\theta_0}{z} + f_1(z)\right) dz$, $\phi_2 = \left(\frac{iR \operatorname{cos}\theta_0}{z} + f_2(z)\right) dz$, para ciertas funciones holomorfas f_1, f_2 en D . Como el vector período en el final es

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{\{|z|=1\}} (\phi_1, \phi_2, \phi_3) &= -2\pi \operatorname{Im} [\operatorname{Res}_0 (\phi_1, \phi_2, \phi_3)] = \\ &= -2\pi (-\operatorname{Re}(R) \operatorname{sen}\theta_0, \operatorname{Re}(R) \operatorname{cos}\theta_0, \operatorname{Im}(R)), \end{aligned}$$

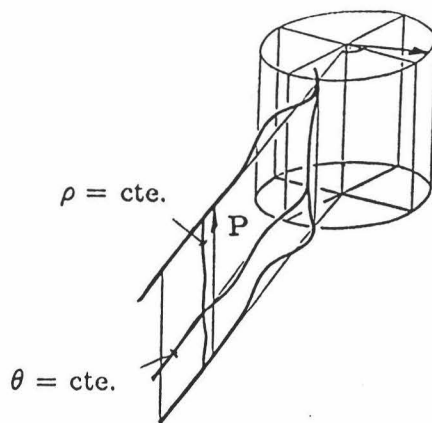


Figura 1.6: Final de tipo Scherk.

tenemos que dicho vector período es perpendicular al vector normal límite $N(p)$. Tras un giro en \mathbb{R}^3 alrededor de $N(p)$, podemos suponer que el vector período es vertical, y por tanto $R \in i\mathbb{R}$, pongamos $R = ai$ con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Así, la 1-forma de Weierstrass se escribe

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \left(\frac{a \operatorname{sen} \theta_0}{z} + f_1(z), \frac{-a \operatorname{cos} \theta_0}{z} + f_2(z), \frac{ia}{z} + f(z) \right) dz, \quad z \in D. \quad (1.12)$$

Integrando (1.12) y tomando partes reales, llegamos a la siguiente expresión para el levantamiento periódico de A a \mathbb{R}^3 :

$$(x_1, x_2, x_3)(\rho, \theta) = (a \operatorname{sen} \theta_0 \log \rho, -a \operatorname{cos} \theta_0 \log \rho, -a\theta) + (t_1, t_2, t_3),$$

donde $z = \rho e^{i\theta} \in D^*$ y t_1, t_2, t_3 son funciones diferenciables en D . De esta forma, sólo x_3 es multivaluada, el vector período es $\mathbf{P} = (0, 0, -2\pi a)$, la imagen de la curva $\{|z| = \rho\}$ con ρ suficientemente pequeño es tan próxima como queramos a un segmento vertical de longitud $2\pi|a|$, y la imagen del rayo $\{\rho e^{i\theta} / 0 < \rho \leq 1\}$ con θ fijo es asintótica a una semirrecta horizontal en la dirección de $(\operatorname{sen} \theta_0, -\operatorname{cos} \theta_0, 0)$, que es ortogonal al vector normal límite, ver figura 1.6.

Si ahora consideramos superficies doblemente periódicas, no perdemos generalidad suponiendo que los dos vectores linealmente independientes cuyas traslaciones asociadas generan el grupo G de isometrías que definen el espacio ambiente

$\mathbb{R}^3/G = \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ son horizontales, luego en dicho espacio tenemos bien definida la tercera función coordenada. Si $M \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ es una superficie minimal propiamente embebida y con topología finita, llamaremos $x_3 : M \rightarrow \mathbb{R}$ a dicha tercera función coordenada, vista sobre la superficie. Aunque los finales de M son de tipo Scherk y por tanto su comportamiento asintótico ha sido descrito ya, es conveniente mencionar el siguiente resultado debido a Meeks y Rosenberg [41], que nos permitirá definir los finales superiores e inferiores de una superficie de este tipo.

Proposición 1.4.1 ([41]) *Sea $\psi : A \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ un embebimiento minimal, conforme y propio de un anillo A que es difeomorfo a D^* . Entonces, A contiene un subanillo propio A' que puede parametrizarse conformemente por D^* . En esta parametrización de A' , la tercera función coordenada se escribe*

$$x_3(z) = k \log |z| + k', \quad z \in D^*, \quad (1.13)$$

donde k y k' son números reales, $k \neq 0$. Además, el vector normal límite no es vertical y $\psi(A)$ es asintótico a un cilindro llano.

Si (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) es la 1-forma de Weierstrass del final $A \equiv D^*$ de la proposición anterior y llamamos x_1, x_2, x_3 a las funciones coordenadas de su levantamiento a \mathbb{R}^3 , de (1.13) se tiene

$$\phi_3 = \frac{k}{z} dz, \quad z \in D. \quad (1.14)$$

Por otro lado, tras una rotación en \mathbb{R}^3 alrededor del eje x_3 , podemos suponer que $g(0) = \rho_0 \in \mathbb{R}$, donde g es la aplicación de Gauss del final. Usando (1.5) es fácil llegar a

$$(x_1, x_2, x_3)(\rho, \theta) = \left(\frac{k}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} - \rho_0 \right) \log \rho, -\frac{k}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} + \rho_0 \right) \theta, k \log \rho \right) + (t_1, t_2, k'),$$

donde $z = \rho e^{i\theta} \in D^*$ y t_1, t_2 son funciones diferenciables en D . Por tanto, x_2 es multivaluada y el vector período en el final es $\mathbf{P} = \left(0, -k\pi \left(\frac{1}{\rho_0} + \rho_0 \right), 0 \right)$. Eligiendo $\rho > 0$ suficientemente pequeño, la imagen de la curva $\{|z| = \rho\}$ es tan próxima como queramos a un segmento paralelo al eje x_2 de longitud $\|\mathbf{P}\|$, y la imagen del rayo $\{\rho e^{i\theta} / 0 < \rho \leq 1\}$ con θ fijo es asintótica a una recta contenida en un plano $\{x_2 = \text{constante}\}$, cuya pendiente es $\frac{2\rho_0}{1-\rho_0^2}$, esto es, perpendicular al vector normal límite $N(0) = \left(\frac{2\rho_0}{1+\rho_0^2}, 0, \frac{\rho_0^2-1}{\rho_0^2+1} \right)$.

Con la notación de la proposición 1.4.1, es razonable llamar a un final con $k < 0$ (resp. $k > 0$) un *final superior* (resp. un *final inferior*).

El siguiente resultado nos da obstrucciones topológicas y geométricas para que una superficie M de tipo topológico finito dado pueda embeberse propiamente como superficie minimal en un $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ también dado. Obviamente, la condición de embebimiento fuerza a que todos los finales superiores sean paralelos entre sí, y lo mismo puede decirse de los finales inferiores.

Teorema 1.4.3 ([41]) *Sea $M \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ una superficie minimal (orientable), propiamente embebida, con topología finita y no llana. Entonces,*

- i) M separa a $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ en dos componentes conexas y tanto el número de finales superiores como el de finales inferiores es par.*
- ii) Si los finales superiores son paralelos a los finales inferiores, entonces el número de finales superiores es igual al de finales inferiores.*
- iii) Si los finales superiores no son paralelos a los inferiores, entonces todos son verticales, y el retículo Λ que define a $\mathbb{T} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 / \Lambda$ contiene a dos vectores linealmente independientes de igual longitud.*

1.4.2 Finales de tipo helicoides.

Proposición 1.4.2 ([42]) *Sea A un final de tipo helicoides de una superficie minimal propiamente embebida en \mathbb{R}^3 / S_θ , $0 \leq \theta \leq \pi$. Entonces, A tiene la estructura conforme de un disco punteado $D^* = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z| \leq 1\}$ y llamando $\phi_3 = 2 \frac{\partial x_3}{\partial z} dz$ con x_3 la tercera función coordenada (multivaluada), tenemos que ϕ_3 es una diferencial meromorfa en $D = D^* \cup \{0\}$ del tipo*

$$\phi_3 = \left(\frac{-i\beta}{z} + f(z) \right) dz, \quad |z| \leq 1, \quad (1.15)$$

donde β es un número real no nulo y f una función holomorfa en D . Además,

- i) Si $\theta > 0$, la aplicación de Gauss g es multivaluada en A , pero admite una extensión continua a $z = 0$, con vector normal límite vertical. Si $g(0) = 0$,*

podemos escribir $g(z) = z^{k+a}h_1(z)$, siendo k un número entero no negativo, $a = \frac{\theta}{2\pi}$ y h_1 una función holomorfa en D con $h_1(0) \neq 0$. Si $g(0) = \infty$, la expresión de g es del tipo $g(z) = z^{-(k+a)}h_1(z)$, con k, a, h_1 como antes.

- ii) Si $\theta = 0$, g es univaluada sobre A y las demás afirmaciones del apartado i) siguen siendo ciertas (tomando $a = 0$). Si g tiene un cero de orden k en el final, entonces $\frac{1}{g}\phi_3$ tiene un polo de orden $k + 1$ sin residuo en dicho punto. Simétricamente, si g tiene un polo de orden k en $z = 0$, entonces $\frac{1}{g}\phi_3$ tiene un cero de orden $k - 1$ y $g\phi_3$ no tiene residuo en el final.

A partir de la proposición anterior, es fácil obtener expresiones para las funciones coordenadas (multivaluadas) del final: cuando $g(0) = 0$, se tienen

$$\begin{cases} (x_1 + ix_2)(z) = \frac{1}{2} \int^z \frac{1}{g} \phi_3 - \frac{1}{2} \int^z g \phi_3 = c + \frac{h_2(z)}{z^{k+a}} + z^{k+a} h_3(z), \\ x_3(z) = \alpha + \beta \arg(z) + t(z), \end{cases}$$

donde $c \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, h_2, h_3 son funciones holomorfas en D con $h_2(0), h_3(0) \neq 0$ y t es una función armónica y acotada en D . Cuando $g(0) = \infty$, podemos llegar a

$$(x_2 + ix_1)(z) = c + \frac{h_2(z)}{z^{k+a}} + \overline{z^{k+a} h_3(z)},$$

y a la misma expresión para x_3 , donde c, h_2, h_3 son como arriba. Por tanto, la traza de un final sobre un cilindro vertical C_R de radio muy grande consiste en una curva tan próxima como queramos a una hélice de pendiente β , que da $k + a$ vueltas alrededor del origen al recorrer $\{|z| = 1\}$. Notemos que la proyección de dicha hélice sobre el (x_1, x_2) -plano rota en un sentido o en otro según que el final tenga $g(0) = 0$ ó $g(0) = \infty$. Esto nos dice que si $M \subset \mathbb{R}^3/S_\theta$ es una superficie minimal propiamente embebida con topología finita y finales de tipo helicoidal, todos los coeficientes k son iguales, y los coeficientes β son iguales salvo el signo, coincidiendo en dos finales si y sólo si los normales límite en dichos finales son iguales. Además, como la suma de los residuos de ϕ_3 ha de anularse, también tenemos que el número de finales con coeficiente β positivo coincide con el número de finales con β negativo. Llamaremos a dicho coeficiente la *pendiente del final*, y también usaremos el nombre de *eje del final* para referirnos al eje del Helicoidal al que éste es asintótico.

1.5 Principios del máximo.

Hasta ahora hemos prestado atención a la relación entre las superficies minimales y el análisis complejo. Desde el punto de vista de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, las superficies minimales pueden verse localmente como grafos de funciones $f(x, y)$ que satisfacen la siguiente ecuación semilineal elíptica:

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0,$$

que se obtiene de anular la expresión de la curvatura media para la superficie $z = f(x, y)$. Esta naturaleza analítica permite derivar dos principios del máximo que han demostrado ser de capital importancia en el estudio de las superficies minimales. El primero, llamado *principio del máximo clásico*, es debido a Hopf y nos informa sobre la intersección de dos superficies minimales, mientras que el segundo, que se conoce con el nombre de *principio del máximo en el infinito*, fue obtenido por Meeks y Rosenberg [43] y por Langevin y Rosenberg [34] y nos asegura que dos superficies minimales propiamente inmersas en cualquier 3-variedad llana y completa no pueden ser nunca asintóticas:

Teorema 1.5.1 ([55]) *Sean $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos superficies minimales conexas y $p \in M_1 \cap M_2$ tal que M_1, M_2 son tangentes en p . Así, M_1 y M_2 vendrán dadas localmente sobre el plano tangente común en p como grafos de funciones $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$, respectivamente. Si $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$ en un entorno de p , entonces M_1 y M_2 coinciden.*

Teorema 1.5.2 ([34, 43]) *Sean M_1, M_2 superficies minimales conexas, disjuntas, con borde compacto (posiblemente vacío) y propiamente inmersas en una 3-variedad llana y completa. Entonces:*

- i) Si M_1 ó M_2 tienen borde no vacío, entonces la distancia de M_1 a M_2 se alcanza en un par de puntos $x \in M_1, y \in M_2$, de forma que al menos uno de ellos está en el borde de la correspondiente superficie.*
- ii) Si M_1 y M_2 carecen de borde, entonces ambas son llanas.*

Como consecuencia, tenemos que toda superficie minimal no llana y propiamente embebida en una 3-variedad llana y completa se levanta a una superficie minimal periódica (conexa) y propiamente embebida en \mathbb{R}^3 .



Capítulo 2

Superficies con flujo vertical.

Veremos en este capítulo que bajo una condición geométrica natural, es posible definir una deformación 1-paramétrica de una superficie minimal M . Concretamente, si el vector *flujo* a lo largo de cualquier curva cerrada $\Gamma \subset M$, definido como la integral a lo largo de Γ del conormal unitario, lleva siempre una dirección fija —que podemos suponer vertical, salvo un giro en \mathbb{R}^3 —, entonces vía la representación de Weierstrass deformaremos M por superficies minimales conservando ciertas características de ésta, como por ejemplo la completitud, la curvatura total y la tercera función coordenada. Encontraremos condiciones que aseguren que cuando M está embebida, todas las superficies a lo largo de la deformación también sean sin autointersecciones, y esto último será una fuerte restricción sobre los finales de M y sobre su aplicación de Gauss. Este planteamiento nos permitirá demostrar que *el plano y la Catenoide son las únicas superficies minimales propiamente embebidas en \mathbb{R}^3 , con curvatura total finita y flujo vertical*, generalizando un resultado de López y Ros [37]. También probaremos que *si M es una superficie minimal con borde, propiamente embebida en un semiespacio ó en una banda de \mathbb{R}^3 a los que llamaremos N , con flujo vertical, curvatura total finita y cuya frontera esté constituida por una curva de Jordan convexa en cada componente del borde de N , entonces M es un anillo*. Además, usando el levantamiento de una superficie simplemente periódica a \mathbb{R}^3 podremos establecer resultados en los ambientes \mathbb{R}^3/T , \mathbb{R}^3/S_θ , donde T es una traslación no trivial y S_θ un movimiento helicoidal alrededor del eje x_3 de ángulo θ : en el primer ambiente, probaremos que *si $M \subset \mathbb{R}^3/T$ es una superficie minimal propiamente embebida, con género cero y una cantidad finita de finales de tipo helicoides ha de ser el Helicoide; y que si tiene género uno y una cantidad finita de finales planos horizontales entonces su flujo*

no puede ser vertical. En el caso de que M esté propiamente embebida en \mathbb{R}^3/S_θ con $\theta > 0$, veremos que si M tiene un número finito de finales planos entonces es un plano ó tiene género mayor estricto que uno; y que si M posee un número finito de finales de tipo helicoides y su levantamiento a \mathbb{R}^3 tiene flujo vertical entonces M es el Helicoides —este último resultado se extiende también al caso $\theta = 0$ —. Por último, obtendremos una generalización de un resultado de Meeks [40] sobre rigidez: Este autor prueba que si $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie minimal propiamente embebida, lo llana e invariante por un grupo discreto infinito G de isometrías de \mathbb{R}^3 tal que \tilde{M}/G tiene topología finita, entonces toda isometría intrínseca de \tilde{M} se extiende a una isometría de \mathbb{R}^3 . Bajo las mismas condiciones, fortaleceremos la hipótesis asegurando que o bien \tilde{M} es el Helicoides, o bien no existe ninguna otra inmersión isométrica minimal de \tilde{M} en \mathbb{R}^3 , salvo movimientos rígidos del ambiente —la Catenoide muestra que la última afirmación no es compartida por el Helicoides—.

2.1 La deformación ψ_λ , $\lambda > 0$.

Sea M una superficie de Riemann y $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal y conforme de M en el espacio euclídeo tridimensional. Si Γ es una curva cerrada en M parametrizada por $\gamma(s)$, donde s es el parámetro arco de $\psi \circ \gamma$, denotaremos por $\eta(s) = -d\psi(J\gamma'(s))$ al conormal de ψ a lo largo de Γ , siendo J la estructura compleja de M . El flujo de ψ a lo largo de Γ se define como

$$\text{flujo}(\psi, \Gamma) = \int_{\Gamma} \eta(s) ds.$$

Este flujo no depende de la curva Γ dentro de una misma clase de homología: de hecho, puede considerarse como la clase de cohomología \mathbb{R}^3 -valuada sobre M determinada por la 1-forma cerrada $-(d\psi) \circ J$. Si llamamos ψ^* a la inmersión minimal conjugada de ψ —que en general es multivaluada sobre M —, tendremos

$$\int_{\Gamma} d\psi^*(\gamma'(s)) ds = - \int_{\Gamma} (d\psi)(J\gamma'(s)) ds = \text{flujo}(\psi, \Gamma).$$

De esta forma, el flujo de ψ a lo largo de Γ coincide con el vector período de la inmersión conjugada ψ^* . Equivalentemente, si usamos la 1-forma de Weierstrass $(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} dz$, se tiene

$$\int_{\Gamma} (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = i \text{flujo}(\psi, \Gamma). \quad (2.1)$$

Nótese que la parte real de la integral anterior se anula porque ψ sí está bien definida.

Desde un punto de vista físico, el conormal puede interpretarse como una fuerza que actúa sobre cada punto de $\psi(\Gamma)$, identificando el flujo a lo largo de Γ como la tensión que dicha curva ejerce sobre la superficie minimal.

A partir de la representación de Weierstrass (teorema 1.2.1) sabemos que ψ viene determinada por una función meromorfa g y una 1-forma holomorfa ω sobre M mediante las relaciones dadas por (1.5). Recordemos que g es la proyección estereográfica desde el polo Norte de la aplicación de Gauss de ψ .

Lema 2.1.1 *Sea $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal y conforme con representación de Weierstrass (g, ω) . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) Para cada curva cerrada Γ en M , el flujo de ψ a lo largo de Γ vale cero.*
- ii) Las componentes ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 de la 1-forma de Weierstrass de ψ son exactas.*
- iii) Las 1-formas holomorfas $\omega, g\omega, g^2\omega$ son exactas.*
- iv) La inmersión conjugada ψ^* está bien definida sobre M .*

Demostración.

i) \iff ii) De (2.1) deducimos que anular el flujo de ψ a lo largo de una curva cerrada Γ equivale a que ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 no tengan períodos a lo largo de Γ . Si esto ocurre para cada curva cerrada, las expresiones $\int \phi_i$ son univaluadas sobre M , $i = 1, 2, 3$.

ii) \iff iii) Basta tener en cuenta (1.3) y (1.5).

i) \iff iv) Es consecuencia de que el flujo de ψ a lo largo de Γ coincide con el vector período de ψ^* sobre dicha curva.

Una inmersión minimal y conforme $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ se dice *rígida* si para cualquier inmersión isométrica y minimal $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ existe una isometría F de \mathbb{R}^3 tal que $F \circ \psi = f$. Por otro lado, si ψ tiene representación de Weierstrass (g, ω) , en par $(g, e^{i\theta}\omega)$, $0 \leq \theta < 2\pi$ define vía el teorema 1.2.1 una inmersión minimal,

generalmente multivaluada, $\psi_\theta : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. El conjunto $\{\psi_\theta\}_{\theta \in [0, 2\pi[}$ se llama la familia de asociadas de ψ . Nótese que para $\theta = \frac{\pi}{2}$ obtenemos la inmersión conjugada.

Lema 2.1.2 *Sea $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal y conforme. Entonces, son equivalentes:*

- i) ψ es rígida.
- ii) La única asociada a ψ que está bien definida sobre M es la propia ψ .
- iii) Existe una curva cerrada Γ sobre M tal que el flujo de ψ a lo largo de Γ no se anula.

Demostración.

- i) \implies ii) De (1.7) se deduce que cada asociada ψ_θ es isométrica a ψ . Si ψ_θ es univaluada sobre M , entonces por rigidez existirá una isometría F_θ de \mathbb{R}^3 tal que $\psi_\theta = F_\theta \circ \psi$. Como las aplicaciones de Gauss de ψ y de ψ_θ coinciden, F_θ ha de ser una traslación, luego $\omega_\theta = \omega$.
- ii) \implies iii) Es consecuencia directa del lema 2.1.1.
- iii) \implies i) Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal e isométrica a ψ . Por un resultado de Calabi [3], f ha de ser congruente a una asociada ψ_θ de ψ . En particular, dicha asociada está bien definida sobre M . Como la 1-forma de Weierstrass de ψ_θ es $\Phi_\theta = e^{i\theta}\Phi$, dada cualquier curva cerrada $\Gamma \subset M$ se tiene

$$0 = \operatorname{Re} \int_{\Gamma} \Phi_\theta = -\operatorname{sen}\theta \operatorname{Im} \int_{\Gamma} \Phi.$$

Como por hipótesis podemos elegir Γ de forma que $\operatorname{Im} \int_{\Gamma} \Phi \neq 0$, deducimos que $\theta = 0, \pi$, luego f es congruente a ψ .

Este concepto de rigidez puede relajarse de la siguiente forma: Diremos que una inmersión minimal y conforme $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ es débilmente rígida si toda isometría intrínseca de M se extiende a una isometría de \mathbb{R}^3 . En esta línea, Meeks ([40], teorema 11.3) probó el siguiente enunciado:

Sea M una superficie minimal conexa y propiamente embebida en \mathbb{R}^3 , invariante por un subgrupo discreto infinito G de isometrías de \mathbb{R}^3 . Si M/G tiene topología finita, entonces M es débilmente rígida.

Este resultado asegura que el Helicoide es débilmente rígido, pero al ser simplemente conexo no puede ser rígido. Cabe preguntarse si existen más contraejemplos a la rigidez dentro de la familia descrita por el anterior enunciado de Meeks. Veremos más adelante (corolario 2.3.4) que la respuesta a esta pregunta es negativa, caracterizando de esta forma al Helicoide en términos de rigidez.

Volvamos a nuestra inmersión minimal y conforme $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Para cada número real positivo λ , definimos sobre M la función meromorfa $g_\lambda = \lambda g$ y la 1-forma holomorfa $\omega_\lambda = \frac{1}{\lambda} \omega$. Vía la representación de Weierstrass, g_λ y ω_λ definen una inmersión minimal y conforme, generalmente multivaluada, $\psi_\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. El siguiente lema establece las condiciones en las que ψ_λ es univaluada:

Lema 2.1.3 Sea $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal y conforme con representación de Weierstrass (g, ω) . Entonces, son equivalentes:

- i) Para cada curva cerrada Γ en M , el flujo de ψ a lo largo de Γ es un vector vertical.
- ii) Las componentes ϕ_1, ϕ_2 de la 1-forma de Weierstrass de ψ son exactas.
- iii) Las 1-formas holomorfas ω y $g^2\omega$ son exactas.
- iv) Para cada $\lambda > 0$, la inmersión ψ_λ está bien definida sobre M .

Demostración. La equivalencia entre i), ii), iii) se prueba análogamente a como se hizo en el lema 2.1.1. Si $\Phi_\lambda = (\phi_{1,\lambda}, \phi_{2,\lambda}, \phi_{3,\lambda})$ es la 1-forma de Weierstrass de ψ_λ , entonces usando (1.5) es fácil llegar a

$$\int_\Gamma \Phi_\lambda = \frac{1}{\lambda} \int_\Gamma (\phi_1, \phi_2, \lambda \phi_3) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda \right) \int_\Gamma (1, -i, 0) g^2 \omega,$$

para cualquier curva cerrada $\Gamma \subset M$. El vector período de ψ_λ a lo largo de Γ viene dado por la parte real de la expresión anterior:

$$\operatorname{Re} \int_\Gamma \Phi_\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda \right) \left(\operatorname{Re} \int_\Gamma g^2 \omega, \operatorname{Im} \int_\Gamma g^2 \omega, 0 \right).$$

De forma parecida se llega a

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma} \Phi_{\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda \right) \left(\operatorname{Re} \int_{\Gamma} \omega, -\operatorname{Im} \int_{\Gamma} \omega, 0 \right),$$

lo que demuestra la equivalencia entre *iii*) y *iv*).

Nota 2.1.1 Cuando la inmersión verifique *i*), diremos que el flujo de ψ es vertical.

A lo largo de esta sección, supondremos que $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión orientada, minimal y conforme con flujo vertical y representación de Weierstrass dada por la aplicación meromorfa g y la 1-forma holomorfa ω . Llamemos

$$F = \int \frac{\omega}{2}, \quad G = \int \frac{g^2 \omega}{2}, \quad \text{y} \quad x_3 = \operatorname{Re} \int g \omega.$$

Entonces, la inmersión se escribe

$$\psi = (\overline{F} - G, x_3) : M \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^3. \quad (2.2)$$

De la misma forma, para cada $\lambda > 0$ la inmersión $\psi_{\lambda} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ vendrá dada por

$$\psi_{\lambda} = \left(\frac{1}{\lambda} \overline{F} - \lambda G, x_3 \right). \quad (2.3)$$

A continuación veremos algunas propiedades básicas de la familia 1-paramétrica $\{\psi_{\lambda}\}_{\lambda > 0}$. Primeramente, haremos notar que la tercera función coordenada de ψ_{λ} no depende de λ .

Recordemos que la métrica inducida y la curvatura de Gauss de ψ se escriben en términos de la representación de Weierstrass, ver (1.7) y (1.9). De ese par de fórmulas se obtiene inmediatamente el siguiente lema:

Lema 2.1.4 Sean ds_{λ}^2 y K_{λ} la métrica inducida sobre M por ψ_{λ} y su curvatura de Gauss, respectivamente. Entonces, existen constantes reales positivas $c_1(\lambda), c_2(\lambda)$ tales que

$$c_1(\lambda) ds^2 \leq ds_{\lambda}^2 \leq c_2(\lambda) ds^2, \\ c_1(\lambda) |K| \leq |K_{\lambda}| \leq c_2(\lambda) |K|.$$

En particular, si ds^2 es completa lo mismo ocurrirá con ds_λ^2 . También deducimos que $\int_M K dA$ es finita si y sólo si $\int_M K_\lambda dA_\lambda$ lo es.

Sea Π un plano horizontal en \mathbb{R}^3 cuya intersección con $\psi(M)$ sea transversal. Entonces, su intersección con $\psi_\lambda(M)$ también ha de ser transversal. Denotaremos por C a una curva contenida en $\psi(M) \cap \Pi$, y por C_λ a la curva correspondiente en $\psi_\lambda(M) \cap \Pi$. Sean también ν y ν_λ los vectores normales a C y a C_λ —como curvas planas—, respectivamente. Ambos son campos de vectores horizontales, que apuntan a la misma dirección que g y g_λ —vistas éstas como vectores en el plano—. Como $g_\lambda = \lambda g$, se tiene que $\nu_\lambda = \nu$. En particular, podemos concluir el lema siguiente:

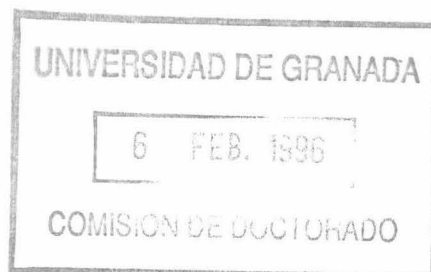
Lema 2.1.5

- i) Si C es un segmento, entonces C_λ es un segmento paralelo a C . Además, si C es una línea recta, lo mismo le ocurre a C_λ .*
- ii) Si C es una curva de Jordan convexa, entonces C_λ también lo es.*

La última afirmación de *i)* se deduce del lema 2.1.4.

El último lema también se verifica si C forma parte de la frontera de la superficie minimal. Si dicha frontera es analítica, la demostración anterior sigue valiendo. Para el caso en que la frontera sea sólo diferenciable, podemos usar el siguiente razonamiento: La aplicación de Gauss \bar{C} -valuada g y la tercera función coordenada x_3 se extienden de forma diferenciable a la frontera. Por lo tanto, podemos asegurar la misma propiedad para $\phi_3 = 2 \frac{\partial x_3}{\partial z} dz$ y para $\omega = \phi_3/g$. De esta manera, también $F = \int \omega/2$ y $G = \int g^2 \omega/2$ se extienden diferenciablemente y por último se concluye que $\psi_\lambda = \left(\frac{1}{\lambda} \bar{F} - \lambda G, x_3 \right)$ es diferenciable en la frontera para cada $\lambda > 0$. Ahora ya podemos aplicar los argumentos de la demostración del lema 2.1.5.

El siguiente resultado nos muestra el comportamiento de $\{\psi_\lambda\}_{\lambda>0}$ a partir de simetrías de ψ . Nótese que al estar definidas las inmersiones ψ_λ por medio de la representación de Weirstrass, dichas superficies están determinadas salvo una constante aditiva.



Lema 2.1.6

- i) Si ψ es invariante por la reflexión en un plano vertical de \mathbb{R}^3 y no es un trozo de plano, entonces todas las inmersiones ψ_λ se pueden elegir invariantes por la reflexión en dicho plano.
- ii) Si ψ es invariante por una traslación que induce una transformación holomorfa de M , entonces a todas las inmersiones ψ_λ les ocurre lo mismo —en realidad, esta traslación depende de λ —.
- iii) Si ψ es invariante por un movimiento helicoidal S_θ obtenido mediante la composición de una rotación de ángulo $\theta \in]0, \pi]$ alrededor del eje x_3 con una traslación —posiblemente trivial— a lo largo de dicho eje, y dicho movimiento helicoidal induce una transformación holomorfa de M , entonces todas las ψ_λ pueden elegirse invariantes por S_θ .

Demostración. Primero supondremos que ψ es invariante por la reflexión R_Π en un plano vertical Π de \mathbb{R}^3 . Sea S la transformación conforme inducida sobre M por dicha simetría. Como la superficie no está contenida en Π , la intersección $\psi(M) \cap \Pi$ tendrá dimensión uno. Por tanto, S ha de ser antiholomorfa. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que Π es el plano (x_1, x_3) . De (2.2) se deduce que $\overline{F} \circ S - G \circ S = F - \overline{G}$: Si ahora agrupamos los sumandos holomorfos y los antiholomorfos en miembros distintos de la igualdad, tendremos que existe una constante compleja a que cumple

$$\overline{F} \circ S - F \equiv a \equiv G \circ S - \overline{G}.$$

Además, a tiene parte real nula —esto puede verificarse tomando un punto $p \in M$ tal que $\psi(p)$ esté en Π —; como F y G están determinadas salvo una constante aditiva, podemos elegir los parámetros de integración de manera que $\overline{F} \circ S - F \equiv 0 \equiv G \circ S - \overline{G}$. De aquí se tiene $(\frac{1}{\lambda}\overline{F} - \lambda G) \circ S = \frac{1}{\lambda}F - \lambda\overline{G}$, luego $\psi_\lambda \circ S = R_\Pi \circ \psi_\lambda$, para cada $\lambda > 0$. Esto prueba i).

Tomemos ahora ψ invariante por una traslación T_v de vector $v = (u, v_3) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Dicha traslación induce una transformación conforme $S : M \rightarrow M$, definida por la ecuación $\psi \circ S = T_v \circ \psi$. Supongamos que S es holomorfa; usando (2.2) deducimos

$$\overline{F} \circ S - G \circ S = \overline{F} - G + u, \quad x_3 \circ S = x_3 + v_3.$$

La ecuación de la izquierda implica que existe una constante compleja a verificando

$$\overline{F} \circ S - \overline{F} \equiv a \equiv G \circ S - G + u.$$

De esta forma,

$$\left(\frac{1}{\lambda}\overline{F} - \lambda G\right) \circ S = \frac{1}{\lambda}\overline{F} - \lambda G + a\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right) + \lambda u,$$

luego si llamamos T_v^λ a la traslación de vector $\left(a\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right) + \lambda u, v_3\right) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, tendremos $\psi_\lambda \circ S = T_v^\lambda \circ \psi_\lambda$, lo cual demuestra *ii*).

Finalmente, si $\psi \circ S = S_\theta \circ \psi$ para un $\theta \neq 0$, entonces (2.2) nos dice que

$$\overline{F} \circ S - G \circ S = e^{i\theta}\overline{F} - e^{i\theta}G, \quad x_3 \circ S = x_3 + v_3,$$

donde v_3 es la componente vertical de la traslación asociada a S_θ . Agrupando como antes, obligaremos a que ciertas dos expresiones sean constantes y ésta constante se puede elegir como cero, obteniendo $\overline{F} \circ S - e^{i\theta}\overline{F} \equiv 0 \equiv G \circ S - e^{i\theta}G$. La afirmación *iii*) es consecuencia inmediata de esta ecuación.

El siguiente paso será poner de manifiesto dos obstrucciones a que todos los elementos de la deformación estén embebidos, y que serán herramientas esenciales de ahora en adelante: Notemos primeramente que el conjunto de puntos de M donde el normal es vertical es independiente de λ . Supongamos que ψ no es un plano, y sea $p \in M$ un punto donde el normal sea vertical, pongamos por ejemplo $N(p) = (0, 0, -1)$. Tomemos una coordenada local holomorfa $(D(\varepsilon), z)$ centrada en p que haga

$$g(z) = z^k, \quad \omega = (a + z h(z)) dz,$$

donde a es un número complejo no nulo, h una función holomorfa en el disco $D(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < \varepsilon\}$ y k un número entero positivo. Para estudiar la inmersión ψ_λ alrededor de p , consideremos la nueva coordenada local holomorfa $(D(\lambda^{\frac{1}{k}}\varepsilon), \xi)$, $\xi = \lambda^{\frac{1}{k}}z$. De esta forma, ψ_λ está determinada por

$$g_\lambda(\xi) = \xi^k, \quad \omega_\lambda = \frac{1}{\lambda^{1+\frac{1}{k}}} \left(a + \frac{\xi}{\lambda^{\frac{1}{k}}} h\left(\frac{\xi}{\lambda^{\frac{1}{k}}}\right) \right) d\xi.$$

Si ahora dilatamos ψ_λ mediante una homotecia de razón $\lambda^{1+\frac{1}{k}}$, obtendremos una nueva superficie minimal $\tilde{\psi}_\lambda = \lambda^{1+\frac{1}{k}}\psi_\lambda$. Cuando λ tiende a infinito, $\tilde{\psi}_\lambda$ converge uniformemente sobre compactos de \mathbb{C} a la superficie minimal $\psi_\infty : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuyos datos de Weierstrass son

$$g_\infty(\xi) = \xi^k, \quad \omega_\infty = a d\xi.$$

Esta superficie límite es completa, tiene curvatura total finita y su único final no está embebido —tiene autointersecciones transversales—. Por tanto, podemos decir lo mismo de ψ_λ para λ suficientemente grande.

Si $N(p) = (0, 0, 1)$, se puede probar la misma conclusión de forma análoga. En resumen, podemos enunciar el siguiente

Lema 2.1.7 *Si $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión minimal no llana con flujo vertical y $p \in M$ es un punto donde la aplicación de Gauss de ψ es vertical, entonces para cada entorno D de p existe un número real $\lambda > 0$ tal que $\psi_\lambda|_D$ no está embebida.*

Tomemos ahora un final minimal propiamente embebido y con curvatura total finita ψ en \mathbb{R}^3 , que no sea un trozo de plano y tal que el vector normal límite es $(0, 0, -1)$. Por las proposiciones 1.3.1, 1.3.2, podemos parametrizar dicho final por el disco punteado $D^*(\varepsilon) = D(\varepsilon) - \{0\}$, y su representación de Weierstrass en cierta coordenada local holomorfa será del tipo

$$g(z) = z^k, \quad \omega = \left(\frac{\alpha}{z^2} + h(z) \right) dz, \quad z \in D^*(\varepsilon), \quad (2.4)$$

donde $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$, h es una función holomorfa en $D(\varepsilon)$ y k es un entero positivo. Cuando $k = 1$, el final es de tipo catenoide y α debe ser un número real, cuyo opuesto definíamos como el crecimiento logarítmico del final en el capítulo anterior. Si $k > 1$, el final es de tipo plano. El flujo de ψ en este final se anula en el caso del final plano, y es un vector vertical y no cero en el caso catenoide. Por ello, ψ_λ está bien definida sobre $D^*(\varepsilon)$. Además, si ψ es un final plano—resp. de tipo catenoide—, ψ_λ ha de ser también un final plano—resp. de tipo catenoide—. En el primer caso, la altura de ψ_λ no depende de λ y en el segundo podemos decir lo mismo del crecimiento logarítmico de ψ_λ .

Usando (2.4) y el teorema 1.2.1 se tiene que $\psi_\lambda(z) = A_\lambda(z) + B_\lambda(z)$, donde

$$A_\lambda(z) = \operatorname{Re} \int^z \left((1 - \lambda^2 u^{2k}) \frac{\alpha}{2\lambda u^2}, i(1 + \lambda^2 u^{2k}) \frac{\alpha}{2\lambda u^2}, \alpha u^{k-2} \right) du,$$

$$B_\lambda(z) = \operatorname{Re} \int^z \left((1 - \lambda^2 u^{2k}) \frac{h(u)}{2\lambda}, i(1 + \lambda^2 u^{2k}) \frac{h(u)}{2\lambda}, u^k h(u) \right) du.$$

Si $k = 1$, $A_\lambda : D^*(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie minimal con representación de Weierstrass $g_{A_\lambda}(z) = \lambda z$, $\omega_{A_\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda z^2} dz$, esto es, un final de una Catenoide vertical

con crecimiento logarítmico $-\alpha$, y $H(z, \lambda) = B_\lambda(z)$ es una función diferenciable y finita en $D(\varepsilon) \times]0, \infty[$. Si $k > 1$, A_λ tiene representación de Weierstrass $g_{A_\lambda}(z) = \lambda z^k$, $\omega_{A_\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda z^2} dz$, que es un final plano horizontal mientras que $B_\lambda(z)$ es diferenciable y finita en $D(\varepsilon) \times]0, \infty[$. Esto permite escribir

$$\psi_\lambda(z) = \phi_\lambda(z) + H(z, \lambda), \quad (2.5)$$

donde $\phi_\lambda : D^*(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es o bien una parametrización del final del plano (x_1, x_2) o bien una parametrización de un final de una Catenoide vertical simétrica respecto del origen y con crecimiento logarítmico $-\alpha$, y $H(z, \lambda)$ es una función diferenciable y finita definida en $D(\varepsilon) \times]0, \infty[$. Consideremos ahora la coordenada local conforme $(D^*(\lambda^{\frac{1}{k}}\varepsilon), \xi)$, $\xi = \lambda^{\frac{1}{k}}z$. La representación de Weierstrass de ψ_λ es

$$g_\lambda(\xi) = \xi^k, \quad \omega_\lambda = \frac{1}{\lambda^{1-\frac{1}{k}}} \left(\frac{\alpha}{\xi^2} + \frac{1}{\lambda^{\frac{2}{k}}} h \left(\frac{\xi}{\lambda^{\frac{1}{k}}} \right) \right) d\xi.$$

Después de aplicar una homotecia de razón $\lambda^{1-\frac{1}{k}}$, aparece una nueva inmersión minimal $\tilde{\psi}_\lambda(\xi) = \lambda^{1-\frac{1}{k}}\psi_\lambda(\xi)$. Cuando λ tiende a infinito, $\tilde{\psi}_\lambda(\xi)$ converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C} - \{0\}$ a la superficie minimal $\psi_\infty : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$g_\infty(\xi) = \xi^k, \quad \omega_\infty = \frac{\alpha}{\xi^2} d\xi, \quad \xi \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Esta superficie es una Catenoide vertical cuando $k = 1$. Si $k \geq 2$, tiene un final embebido en el origen y otro no embebido en infinito. Por tanto, para λ suficientemente grande, ψ_λ no puede estar embebida. El caso $g(0) = \infty$ se razona de manera parecida. Esto termina de probar la siguiente propiedad:

Lema 2.1.8 *Si $\psi : D^*(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un final plano con vector normal límite vertical que no es un trozo de plano, entonces ψ_λ no está embebida para algún valor de $\lambda > 0$.*

2.2 Superficies minimales con curvatura total finita.

Tanto en esta sección como en la próxima usaremos la deformación que acabamos de estudiar para obtener resultados globales sobre superficies minimales propia-

mente embebidas. Otro ingrediente fundamental en el método a seguir será el principio del máximo en el infinito, ver teorema 1.5.2.

Teorema 2.2.1 *Las únicas superficies minimales completas, embebidas, con curvatura total finita y flujo vertical en \mathbb{R}^3 son el plano y la Catenoide.*

Demostración. Consideremos un embebimiento minimal y completo $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura total finita y flujo vertical, que no sea un plano. M será conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta \bar{M} menos una cantidad finita de puntos $\{p_1, \dots, p_r\}$ que se corresponden con los finales de ψ , siendo éstos de tipo plano o catenoide. Como ψ tiene flujo vertical, la deformación $\psi_\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\lambda > 0$, nos da una familia 1-paramétrica de inmersiones minimales, completas y con curvatura total finita. La afirmación 2.2.1 que demostraremos a continuación y los lemas 2.1.7 y 2.1.8 demuestran que ψ no puede tener finales planos ni puntos donde el normal sea vertical. Por tanto, la tercera función coordenada de ψ es propia y no tiene puntos críticos, luego M es un anillo. Pero el único anillo minimal, completo, embebido y con curvatura total finita en \mathbb{R}^3 es la Catenoide [55], lo cual prueba el teorema.

Afirmación 2.2.1 *En las condiciones del teorema anterior, todas las inmersiones ψ_λ son embebimientos.*

Demostración. Sea $B = \{\lambda > 0 / \psi_\lambda \text{ es inyectiva}\}$. Si $\lambda_0 \in B$, entonces por el principio del máximo en el infinito (teorema 1.5.2) tenemos que la distancia entre dos finales cualesquiera de ψ_{λ_0} ha de ser estrictamente positiva. A partir de (2.5) se deduce que dicha distancia es o bien infinita para todo $\lambda > 0$ o es una función finita y continua de λ . Así, tomando λ suficientemente cerca de λ_0 , ψ_λ será embebida, con lo que B es abierto. Tomemos ahora una sucesión $\{\lambda_n\}_n \subset B$ que converja a $\lambda_0 > 0$. Si ψ_{λ_0} no es inyectiva, entonces $\psi_{\lambda_0}(x) = \psi_{\lambda_0}(y)$ para ciertos dos puntos distintos $x, y \in M$. La convergencia uniforme sobre compactos de M de $\{\psi_{\lambda_n}\}_n$ a ψ_{λ_0} y el principio del máximo clásico (teorema 1.5.1) aseguran que existen entornos de x y de y con la misma imagen por ψ_{λ_0} , luego la imagen de ψ_{λ_0} , como conjunto de puntos, es una superficie minimal con curvatura total finita, embebida en \mathbb{R}^3 y $\psi_{\lambda_0} : M \rightarrow \psi_{\lambda_0}(M)$ es una proyección recubridora con un número finito de hojas. Por el principio del máximo en el infinito, podemos tomar un entorno tubular embebido U de radio ε de $\psi_{\lambda_0}(M)$. Sean $\pi : U \rightarrow \psi_{\lambda_0}(M)$ y

$l : U \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección ortogonal de U sobre $\psi_{\lambda_0}(M)$ y la distancia orientada a $\psi_{\lambda_0}(M)$, respectivamente. De (2.5) se sigue que para cada n suficientemente grande, $\psi_{\lambda_n}(M) \subset U$ y que $\pi \circ \psi_{\lambda_n} : M \rightarrow \psi_{\lambda_0}(M)$ es un difeomorfismo local y propio, y por tanto una aplicación recubridora con un número finito de hojas. El hecho de que ψ_{λ_n} esté embebida implica que la aplicación continua $l \circ \psi_{\lambda_n}$ separe los puntos en las fibras del recubridor $\pi \circ \psi_{\lambda_n}$, luego dicho recubridor sólo puede tener una hoja. Como $\pi \circ \psi_{\lambda_n}$ converge uniformemente sobre compactos de M a $\pi \circ \psi_{\lambda_0} = \psi_{\lambda_0}$, también $\psi_{\lambda_0} : M \rightarrow \psi_{\lambda_0}(M)$ tendrá una sola hoja. Esta contradicción prueba que B es cerrado en $]0, +\infty[$.

Por último, el que $1 \in B$ implica que ψ_λ esté embebida para cada $\lambda > 0$, lo cual prueba la afirmación.

Como consecuencia directa del teorema 2.2.1, podemos obtener el resultado de unicidad de López y Ros [37]:

Corolario 2.2.1 *Las únicas superficies minimales completas, embebidas, con curvatura total finita y género cero en \mathbb{R}^3 son el plano y la Catenoide.*

Demostración. Basta notar que si $\psi : \bar{C} - \{p_1, \dots, p_r\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ está en las hipótesis del corolario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la aplicación de Gauss extendida toma valores verticales en los finales. Ya que el flujo a lo largo de curvas que rodeen a los finales es o bien cero o un vector vertical, deducimos que ψ tiene flujo vertical y sólo queda aplicar el teorema 2.2.1.

Veremos a continuación dos resultados para superficies minimales propiamente embebidas y con frontera diferenciable y compacta. Primeramente, llamemos $H^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_3 \geq 0\}$ al semiespacio superior de \mathbb{R}^3 .

Teorema 2.2.2 *Sea $\psi : M \rightarrow H^+$ un embebimiento minimal, completo, con curvatura total finita y frontera dada por una curva de Jordan convexa en el plano (x_1, x_2) , que no sea un trozo de plano. Si ψ tiene flujo vertical, entonces M es un anillo.*

Demostración. Por tener ψ flujo vertical, la deformación $\{\psi_\lambda\}_{\lambda>0}$ está bien definida sobre M . Veamos que la afirmación 2.2.1 sigue siendo válida en esta situación: Si llamamos B como antes, el mismo razonamiento de la afirmación 2.2.1 prueba que B es abierto. Consideremos una sucesión $\{\lambda_n\}_n \subset B$ que converja a $\lambda_0 > 0$, tal que

ψ_{λ_0} no sea inyectiva. De la misma forma que en la afirmación 2.2.1 llegaremos a que $\psi_{\lambda_0} : M \rightarrow \psi_{\lambda_0}(M)$ es un recubridor con un número finito de hojas. Además, el principio del máximo clásico implica que la superficie ψ_λ sólo corta al plano (x_1, x_2) a lo largo de su frontera. Ya que el lema 2.1.5 nos dice que ψ_{λ_0} no tiene autointersecciones en la frontera ∂M , dicho recubridor sólo puede tener una hoja, contradicción. Por tanto, B es cerrado en $]0, +\infty[$ luego ψ_λ es un embebimiento para todo $\lambda > 0$. Aplicando ahora los lemas 2.1.7 y 2.1.8 llegamos a que ψ no tiene finales planos ni puntos con normal vertical, luego su tercera función coordenada es propia y no tiene puntos críticos. Esto termina la demostración del teorema.

Sean Π_1 y Π_2 dos planos horizontales en \mathbb{R}^3 a diferentes alturas, y sea E la banda cuya frontera son dichos planos.

Teorema 2.2.3 *Sea $\psi : M \rightarrow E$ un embebimiento minimal, completo, con curvatura total finita y frontera dada por un par de curvas de Jordan convexas, una de ellas contenida en Π_1 y la otra en Π_2 . Si ψ tiene flujo vertical, entonces M es un anillo.*

Demostración. Por nuestra hipótesis sobre el flujo, la deformación $\{\psi_\lambda\}_{\lambda>0}$ está bien definida sobre M . Si ψ tiene finales, éstos han de estar en cantidad finita y deben ser de tipo plano, contenidos en la banda E . De manera análoga a como se hizo en la demostración del teorema 2.2.2 se concluye que ψ_λ está embebida para cada $\lambda > 0$, luego los lemas 2.1.7 y 2.1.8 implican que no existen finales planos ni puntos con normal vertical. De aquí se tiene directamente que M es un anillo, lo cual demuestra el teorema.

La hipótesis “ ψ tiene flujo vertical” del teorema 2.2.3 se verifica en ciertas situaciones geométricas. Por ejemplo, podemos enunciar el siguiente

Corolario 2.2.2 *Sea $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ un embebimiento minimal, completo, con género cero, curvatura total finita y frontera dada por un par de curvas de Jordan convexas, una de ellas contenida en Π_1 y la otra en Π_2 . Si $\psi(M)$ es invariante por una rotación no trivial alrededor del eje x_3 , o bien es la intersección de una superficie minimal completa, embebida y con curvatura total finita en \mathbb{R}^3 con la banda E , entonces M es un anillo.*

Demostración. Según el comentario anterior a este corolario, basta asegurar que las hipótesis del mismo implican que ψ tiene flujo vertical. Esto es claro bajo la suposición de invarianza por rotación. En el segundo supuesto, basta demostrar que el flujo a lo largo de una de las curvas frontera, pongamos $\Gamma_1 \subset \Pi_1$, es un vector vertical. Para ello, consideremos la superficie minimal completa, embebida y con curvatura total finita S que contiene a $\psi(M)$. Sea Ω_R la región de S encerrada por un cilindro vertical C_R de radio R muy grande y que queda a un lado del plano Π_1 . Podemos suponer, tomando R suficientemente grande, que Γ_1 está incluida en la componente simplemente conexa de $\mathbb{R}^3 - C_R$ y que cada curva de $S \cap C_R$ tiene flujo vertical (los finales de S han de ser horizontales). Ahora basta aplicar que el flujo total sobre la frontera de Ω_R se anula para concluir la verticalidad del flujo a lo largo de Γ_1 .

2.3 Superficies minimales simplemente periódicas.

Sea S_θ , $0 \leq \theta \leq \pi$, el movimiento helicoidal de \mathbb{R}^3 que se obtiene componiendo la rotación de ángulo θ alrededor del eje x_3 con una traslación vertical no trivial. Si $\theta = 0$, denotaremos por T a la traslación vertical S_0 . Sea $\psi : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie minimal propiamente embebida invariante por S_θ , y denotemos por S la transformación conforme de \widetilde{M} que viene definida por

$$S_\theta \circ \psi = \psi \circ S. \quad (2.6)$$

Entonces, ψ se induce al cociente $M = \widetilde{M}/S$ produciendo una superficie minimal propiamente embebida en \mathbb{R}^3/S_θ . Y recíprocamente, el principio del máximo en infinito —teorema 1.5.2— nos asegura que cualquier superficie minimal propiamente embebida y no llana $M \subset \mathbb{R}^3/S_\theta$ se levanta a una superficie minimal conexa simplemente periódica y propiamente embebida $\psi : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que se relaciona con S mediante la fórmula (2.6). Nótese que en el caso $\theta = 0$, cuando la superficie cociente M sea orientable, la representación de Weierstrass de ψ se induce a M . Supongamos que la superficie minimal propiamente embebida M tiene topología finita. Por el teorema 1.4.1, M también tendrá curvatura total finita. Además, el comportamiento de M en infinito ha de ser uno de los tres que aparecían en el apartado i) del teorema 1.4.2.

En [28], Karcher exhibió ejemplos de superficies minimales en \mathbb{R}^3/T con género cero y $2k$ finales asintóticos a anillos llanos verticales —esto es, de tipo Scherk—,

para cada entero k mayor que uno. Asimismo, demostró que en el caso $k = 2$, estas superficies pueden deformarse por superficies minimales embebidas con finales de tipo helicoides en \mathbb{R}^3/S_θ , $\theta \neq 0$.

Un argumento elemental sobre levantamiento asegura que la única superficie minimal propiamente embebida, con género cero y un número finito de finales planos en un cociente simplemente periódico de \mathbb{R}^3 es el plano. Por tanto, la topología más simple donde cabe buscar un resultado no trivial de clasificación para superficies con este tipo de finales es la de género uno. La conjetura razonable en este caso diría que las únicas superficies de esta clase son recubridores finitos de los ejemplos de Riemann que veíamos en el capítulo 1. Iremos dando a lo largo de la memoria aproximaciones a este resultado. La primera de ellas restringe sustancialmente el campo de búsqueda, diciendo que esa unicidad sólo hay que intentarla entre minimales invariantes por una traslación:

Teorema 2.3.1 *No existe ningún toro minimal propiamente embebido con un número finito de finales planos en \mathbb{R}^3/S_θ , $0 < \theta \leq \pi$.*

Demostración. Sea $M \subset \mathbb{R}^3/S_\theta$ una superficie minimal propiamente embebida, con curvatura total finita y finales planos, y supongamos que M es un toro finitamente punteado. Usando la misma notación que hasta ahora, llamemos $\psi : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ al levantamiento minimal simplemente periódico. La hipótesis de embebimiento implica que los finales son horizontales. Además, la proyección recubridora $\widetilde{M} \rightarrow M$ se extiende sin ramificación a los finales. Así, \widetilde{M} es conformemente equivalente al cilindro $\mathbb{C} - \{0\}$ menos una cantidad infinita de puntos que se corresponden con los finales planos de ψ . Por otro lado, la tercera componente ϕ_3 de la 1-forma de Weierstrass, que está globalmente definida sobre M , se extiende de forma holomorfa al toro. Por tanto, la tercera función coordenada de ψ viene dada, salvo constantes multiplicativas, por $x_3 = \log |z|$. Como el vector flujo vale cero en los finales planos, para poder asegurar que ψ tiene flujo vertical sólo necesitamos considerar el flujo a lo largo del generador de la homología del cilindro $\mathbb{C} - \{0\}$, que puede venir representado por cualquier sección horizontal de ψ , $\Gamma = \{x_3 = \text{constante}\} \subset \widetilde{M}$, cuya altura no coincida con la altura de ningún final plano. Como $S(\Gamma)$ es otra sección horizontal, tendremos

$$\text{flujo}(\psi, S(\Gamma)) = \text{flujo}(\psi, \Gamma).$$

Pero los conormales a las curvas Γ y $S(\Gamma)$ difieren en una rotación R_θ de ángulo θ alrededor del eje x_3 , luego de la definición de flujo se deduce que

$$\text{flujo}(\psi, S(\Gamma)) = R_\theta(\text{flujo}(\psi, \Gamma)).$$

Las dos últimas igualdades y nuestra hipótesis sobre θ aseguran que el flujo de ψ a lo largo de Γ es vertical, luego la deformación $\{\psi_\lambda\}_{\lambda>0}$ está bien definida sobre \widetilde{M} . Aplicando el lema 2.1.6 tenemos que todas las ψ_λ son invariantes por el mismo movimiento helicoidal. Si probamos que todas las ψ_λ son embebimientos, habremos encontrado una contradicción con el lema 2.1.8. Dicha condición de embebimiento a lo largo de la deformación se prueba modificando ligeramente la demostración de la afirmación 2.2.1: siguiendo la notación de ésta, la prueba de que B es abierto sigue siendo válida. Si $\{\lambda_n\}_n \subset B$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_0 > 0$ y suponemos que ψ_{λ_0} no está embebida, entonces $\psi_{\lambda_0} : \widetilde{M} \rightarrow \psi_{\lambda_0}(\widetilde{M})$ es un recubridor topológico. Como los finales son horizontales y la tercera coordenada es fija a lo largo de la deformación se concluye que sobre cada final de $\psi_{\lambda_0}(\widetilde{M})$ sólo puede aplicarse un final de \widetilde{M} por ψ_{λ_0} , luego esta proyección recubridora tiene una sólo hoja, contradicción. Esto termina la demostración del teorema.

Nota 2.3.1 *Los ejemplos de Riemann prueban que el teorema anterior no es cierto para cocientes de \mathbb{R}^3 por traslaciones.*

Volvamos a considerar la banda E determinada por un par de planos horizontales y distintos Π_1 y Π_2 .

Corolario 2.3.1 *No existe ningún anillo minimal propiamente embebido en E , con curvatura total finita y frontera dada por dos líneas rectas no paralelas, una sobre Π_1 y la otra sobre Π_2 .*

Demostración. Si existiera tal anillo, usando el principio de reflexión de Schwarz —ver por ejemplo [47]— podríamos construir un toro con dos finales planos en \mathbb{R}^3/S_θ para un cierto $\theta \in]0, \pi]$, lo cual es imposible por el teorema 2.3.1.

Nota 2.3.2 Toubiana [61] obtuvo este mismo resultado usando otros argumentos. Cuando las rectas fronteras son paralelas, Hoffman, Karcher y Rosenberg [21] demostraron que el único anillo minimal propiamente embebido en E con esta frontera es un trozo de un ejemplo de Riemann.

La hipótesis $\theta \neq 0$ del teorema 2.3.1 nos sirve para probar que una superficie minimal de género uno y finales planos en \mathbb{R}^3/S_θ tiene flujo vertical. Por tanto, razonando de forma análoga podemos probar que

Teorema 2.3.2 No existe ningún toro minimal propiamente embebido en \mathbb{R}^3/T con un número finito de finales planos horizontales cuyo levantamiento a \mathbb{R}^3 tenga flujo vertical, siendo T cualquier vector no nulo de \mathbb{R}^3 .

Este último resultado supone la primera aproximación a la resolución de la conjetura sobre los ejemplos de Riemann que planteábamos antes del teorema 2.3.1, en el ambiente donde ésta quedó sin resolver, para superficies invariantes por una traslación.

Consideremos ahora un final de tipo helicoides A de una superficie minimal propiamente embebida en \mathbb{R}^3/S_θ , $0 \leq \theta \leq \pi$. Sabemos por la subsección 1.4.2 que A es conformemente equivalente a $D^* = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z| \leq 1\}$ y que si el normal límite es $(0, 0, -1)$, A está determinado por los datos

$$g(z) = z^{k+a} h_1(z), \quad \phi_3 = \left(\frac{-i\beta}{z} + f(z) \right) dz, \quad z \in D^*,$$

donde g es la aplicación de Gauss de A , $\phi_3 = 2 \frac{\partial x_3}{\partial z} dz$, $a = \frac{\theta}{2\pi}$, k es un entero no negativo, β un número real y h_1, f son funciones holomorfas en $D = D^* \cup \{0\}$, siendo $h_1(0) \neq 0$. Sea $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ el levantamiento simplemente periódico de A . Como E es simplemente conexo (puede parametrizarse conformemente por el semiplano $H = \{\xi \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(\xi) \leq 0\}$), la deformación $\{\psi_\lambda\}_{\lambda > 0}$ está bien definida en E . Además, al ser la tercera función coordenada invariante por la deformación y $g_\lambda(z) = z^{k+a} \lambda h_1(z)$, concluimos que g_λ, ϕ_3 representan un final de tipo helicoides en el mismo espacio ambiente \mathbb{R}^3/S_θ , con plano tangente límite horizontal y pendiente

β . En particular, todas las ψ_λ son S_θ -invariantes (nótese que para $\theta = 0$, esto no se deduce de la invarianza de $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}^3$, ver lema 2.1.6).

A continuación usaremos la deformación $\{\psi_\lambda\}_{\lambda>0}$ para dar una caracterización del Helicoide:

Teorema 2.3.3 *Sea $\psi : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie minimal propiamente embebida, invariante por un movimiento helicoidal S_θ , $0 \leq \theta \leq \pi$ y con flujo vertical. Si \widetilde{M}/S_θ tiene topología finita y finales de tipo helicoide, entonces es el Helicoide.*

Demostración. Como ψ tiene flujo vertical, la deformación $\{\psi_\lambda\}_{\lambda>0}$ está bien definida sobre \widetilde{M} . Además, el estudio previo sobre los finales de tipo helicoide nos dice que ψ_λ es S_θ -invariante, para cada $\lambda > 0$. El próximo paso será probar que a lo largo de la deformación sólo encontramos superficies embebidas:

Afirmación 2.3.1 *Para todo $\lambda > 0$, ψ_λ es un embebimiento propio.*

Demostración. Sea $B = \{\lambda > 0 / \psi_\lambda \text{ es inyectiva}\}$. Notemos primeramente que tanto los tipos de finales como sus pendientes son independientes de λ . Si $\lambda_0 \in B$, sabemos que dos finales distintos de ψ_{λ_0} tienen la misma pendiente salvo el signo, y por el principio del máximo en el infinito (teorema 1.5.2) están a distancia positiva. Además, puede probarse como en la demostración de la afirmación 2.2.1 que esta distancia viene dada por una función continua de λ . Por tanto, ψ_λ está embebida para λ cerca de λ_0 luego B es abierto. Si seguimos la demostración de la afirmación 2.2.1 pero razonando en \mathbb{R}^3/S_θ en lugar de en \mathbb{R}^3 , obtendremos que B es cerrado, lo cual prueba lo que se buscaba.

Como consecuencia de la afirmación anterior y del lema 2.1.7 aplicado al embebimiento ψ , concluimos que no existen puntos en \widetilde{M} con normal vertical. Por tener $M = \widetilde{M}/S_\theta$ topología finita, el teorema 1.4.1 asegura que su curvatura total también es finita, luego M es conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta \overline{M} finitamente punteada. La diferencial meromorfa $\phi_3 = 2 \frac{\partial x_3}{\partial z} dz$ está globalmente definida sobre \overline{M} y en los finales presenta polos simples, luego no puede tener ceros en \overline{M} (un cero de ϕ_3 en M produciría un punto finito con vector normal vertical, contradicción). Por tanto, la característica de Euler de \overline{M} es $\chi(\overline{M}) = \#\{\text{polos de } \phi_3\} > 0$, luego $\chi(\overline{M}) = 2$, M tiene género cero y dos

finales, luego por resultados de Toubiana [60] y Meeks y Rosenberg [42] tenemos que ψ es el Helicoide.

Una primera consecuencia del teorema 2.3.3 es la correspondiente versión del teorema de clasificación de ejemplos con género cero en la familia de superficies minimales invariantes por una traslación con finales de tipo helicoide:

Corolario 2.3.2 *La única superficie minimal propiamente embebida en \mathbb{R}^3/T , para T cualquier traslación no trivial, con género cero y un número finito de finales de tipo helicoide es el Helicoide.*

Demostración. Consideremos una superficie minimal $M \subset \mathbb{R}^3/T$ en las condiciones del teorema y sea $\psi : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ su levantamiento simplemente periódico a \mathbb{R}^3 . Por hipótesis, M es una esfera menos una cantidad finita de puntos, $M = \overline{C} - \{p_1, \dots, p_r\}$, y sus finales son de tipo helicoide. Esta superficie minimal está determinada globalmente por su representación de Weierstrass $(g, \omega = \frac{1}{g}\phi_3)$, que también determina a ψ . La proposición 1.4.2 nos dice que ω es holomorfa en \overline{C} salvo en aquellos finales en los que $g(p_i) = 0$, en los que tiene un polo sin residuo. Simétricamente, $g^2\omega$ no tiene residuo en los finales p_i con $g(p_i) = \infty$ y es holomorfa en los finales con normal opuesto. Así, el que nuestra superficie tenga género cero implica que ω y $g^2\omega$ son exactas sobre M , y por tanto también sobre \widetilde{M} . De este forma, el flujo de ψ es vertical y el teorema 2.3.3 nos dice que M es un Helicoide.

Nota 2.3.3 *La hipótesis " $\theta = 0$ " es imprescindible: basta considerar la familia 1-paramétrica de ejemplos obtenida por Karcher en [28].*

Meeks y Rosenberg [41] y Meeks [40] demostraron que si $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie minimal propiamente embebida, doblemente o triplemente periódica y no llana, entonces ψ es rígida. Esto es, salvo congruencias, no existe otra inmersión isométrica minimal de M en \mathbb{R}^3 . En particular, el lema 2.1.2 nos dice que en ambos casos existe una curva cerrada $\Gamma \subset M$ cuyo flujo no se anula. Esta última afirmación —y por tanto, también la rigidez— se demuestra en la prueba del teorema 11.3 de [40] cuando ψ es simplemente periódica con finales planos o con finales de tipo Scherk. Sin embargo, el que el Helicoide sea simplemente conexo

muestra que esta propiedad no puede extenderse al caso de finales de tipo helicoides. Cabe preguntarse si esta propiedad sólo deja de cumplirse para el Helicoides, siendo cierta para cualquier otra superficie simplemente periódica y con finales de tipo helicoides:

Corolario 2.3.3 *Sea $\psi : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie minimal propiamente embebida, no llana, invariante por un grupo discreto infinito G de isometrías de \mathbb{R}^3 , tal que \widetilde{M}/G tiene topología finita. Si el flujo de ψ a lo largo de cualquier curva cerrada se anula, entonces ψ es el Helicoides.*

Demostración. Según el comentario anterior al corolario, podemos reducirnos al caso en que G es un grupo cíclico generado por un movimiento helicoidal S_θ , $0 \leq \theta \leq \pi$, y los finales de M son de tipo helicoides. En estas condiciones, el corolario es consecuencia directa del teorema 2.3.3.

Terminaremos este capítulo reformulando el corolario anterior en términos de rigidez:

Corolario 2.3.4 *Sea $\psi : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie minimal propiamente embebida, no llana, invariante por un grupo discreto infinito G de isometrías de \mathbb{R}^3 , tal que \widetilde{M}/G tiene topología finita. Entonces, ψ es rígida o es el Helicoides.*

Nota 2.3.4 *El último corolario generaliza el teorema 11.3 de Meeks [40], que bajo las mismas hipótesis asegura la rigidez débil de la superficie, esto es, que toda isometría intrínseca de M se extiende a una isometría de \mathbb{R}^3 .*

Capítulo 3

Condiciones de equilibrio.

Dedicaremos este capítulo a poner de manifiesto cómo ciertas magnitudes que dependen de la topología de una superficie minimal propiamente embebida y con curvatura total finita en \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^3/T ó $T \times \mathbb{R}$, crean condiciones sobre su comportamiento en infinito. Para superficies completas, embebidas y con curvatura total finita en \mathbb{R}^3 , damos una fórmula que relaciona los crecimientos logarítmicos en los finales con los flujos a lo largo de los generadores de la homología de la superficie. Como aplicación obtenemos una consecuencia fuerte cuando el rango de la clase de cohomología \mathbb{R}^3 -valuada *Flujo* es a lo más dos. También obtenemos consecuencias en el caso periódico, como un resultado de unicidad para los ejemplos de Riemann, o relaciones entre la posición de los finales de una superficie minimal con topología finita, propiamente embebida en $T \times \mathbb{R}$ y los flujos y períodos de la misma a lo largo de generadores de su homología. Desde un punto de vista físico, comprobaremos cómo el sistema de fuerzas producido por los vectores flujo en los finales de una superficie minimal con curvatura total finita está en equilibrio, para lo cual necesitaremos considerar el momento total de dicho sistema. Este último resultado ya fue obtenido por Kusner [30], así como las expresiones del vector torque asociado a un final plano y a uno de tipo Catenoide, pero aquí abordamos un método de trabajo diferente que nos llevará a otros enunciados, por lo que incluiremos dichos resultados ya conocidos por completitud en la exposición.

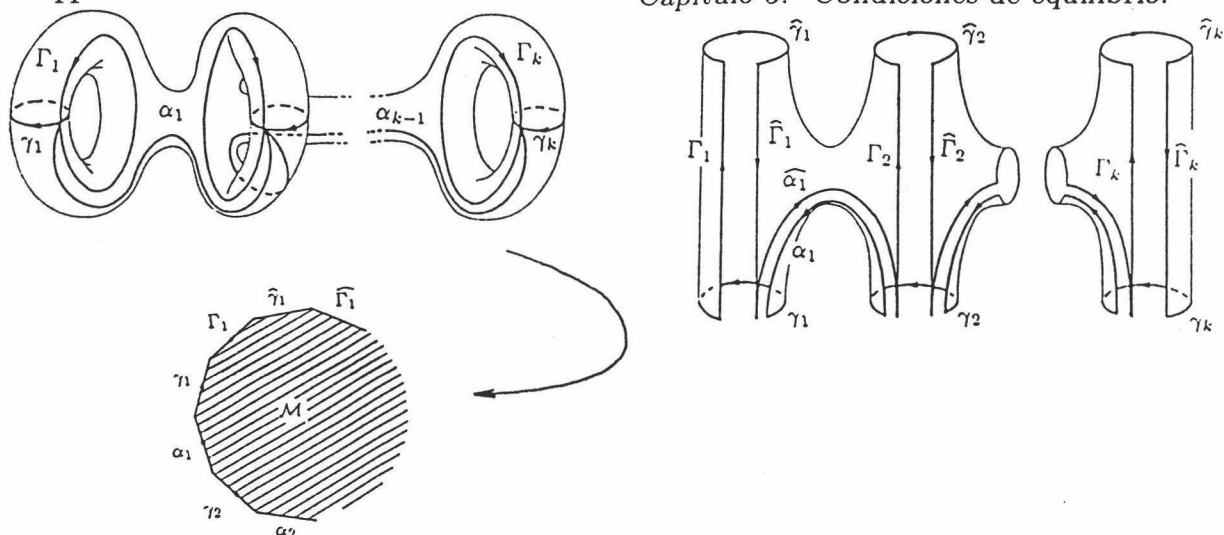


Figura 3.1: Formación del dominio simplemente conexo \mathcal{M} .

3.1 Una fórmula integral.

Sea \overline{M} una superficie de Riemann compacta de género k y $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ una diferencial meromorfa \mathbb{C}^3 -valuada sobre \overline{M} . Vamos a integrar Φ . Como ésta no tiene por qué ser exacta, construiremos un dominio simplemente conexo cortando \overline{M} por ciertas curvas. Tomemos sobre dicha superficie $2k$ curvas cerradas $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ que verifiquen las siguientes condiciones, ver figura 3.1:

1. Para cualquier $i \in \{1, \dots, k\}$, γ_i corta una sólo vez a Γ_i , siendo esta intersección transversal, y γ_i no corta a ninguna de las $2k - 2$ curvas restantes;
2. Para cualquier $i \in \{1, \dots, k - 1\}$, podemos elegir una curva α_i sobre \overline{M} que una los puntos de intersección $\gamma_i \cap \Gamma_i$ con $\gamma_{i+1} \cap \Gamma_{i+1}$, y tal que α_i no corte a $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{k-1}$ excepto en los puntos $\gamma_i \cap \Gamma_i$, $\gamma_{i+1} \cap \Gamma_{i+1}$;
3. Si cortamos \overline{M} a lo largo de $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$, obtenemos un dominio simplemente conexo \mathcal{M} cuya frontera denotaremos por $\partial\mathcal{M}$.

$\partial\mathcal{M}$ consiste en un par de copias de cada una de las curvas anteriores, copias que llamaremos

$$\begin{array}{ccc} \gamma_1, \dots, \gamma_k, & \Gamma_1, \dots, \Gamma_k, & \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \\ \widehat{\gamma}_1, \dots, \widehat{\gamma}_k, & \widehat{\Gamma}_1, \dots, \widehat{\Gamma}_k, & \widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_{k-1}, \end{array}$$

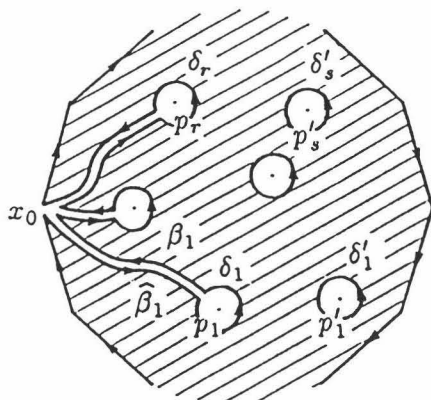


Figura 3.2: El dominio $\mathcal{M}'' = \mathcal{M} - \cup_{j=1}^s D'_j$.

donde $\widehat{\gamma}_i$ es la copia correspondiente de γ_i , y el mismo convenio se aplica a las restantes curvas. Consideremos sobre dichas curvas la orientación especificada en la figura 3.1. Aunque lo que haremos a continuación depende de la orientación escogida, al final obtendremos una fórmula independiente de la orientación. Identificando las copias $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ sobre $\partial\mathcal{M}$ con las curvas originales sobre $\overline{\mathcal{M}}$, tendremos una orientación sobre este último conjunto de curvas. Sea $\{p_1, \dots, p_r\} = \{p \in \overline{\mathcal{M}} / \text{Res}_p \Phi \neq 0\}$. Podemos suponer que p_i cae en el interior de \mathcal{M} , $1 \leq i \leq r$. Consideremos una pequeña curva cerrada δ_i alrededor de p_i , contenida en el interior de \mathcal{M} y de forma que $\delta_i \cap \delta_j = \emptyset$, $i \neq j$. Cada una de estas curvas será la frontera de un cierto disco D_i conteniendo a p_i —del cual podemos suponer que es un disco conforme para $\overline{\mathcal{M}}$ —. Con la orientación elegida, las curvas δ_i se recorren en el sentido antihorario. Elijamos un punto $x_0 \in \partial\mathcal{M}$, y tomemos r curvas $\beta_1, \dots, \beta_r \subset \mathcal{M}$ tales que

4. Para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, β_i une a p_i con x_0 , $\beta_i \cap \partial\mathcal{M} = \{x_0\}$, β_i corta una sola vez a δ_i , pero no corta a ninguna de las restantes curvas δ_j , $j \neq i$;
5. Dos cualesquiera de estas curvas β_i, β_j sólo pueden cortarse en x_0 .

Si ahora cortamos \mathcal{M} a lo largo de las curvas $\delta_1, \dots, \delta_r, \beta_1, \dots, \beta_r$ y eliminamos los discos D_1, \dots, D_r , habremos obtenido otro dominio simplemente conexo $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, cuya frontera consiste en

$$\partial\mathcal{M}' = \partial\mathcal{M} \cup \left(\bigcup_{j=1}^r \delta_j \cup \beta_j \cup \widehat{\beta}_j \right),$$

donde ahora $\widehat{\beta}_j$ representa una copia de β_j obtenida cortando \mathcal{M} a lo largo de β_j , ver figura 3.2. Por otro lado, Φ es una diferencial meromorfa sobre \mathcal{M}' sin residuos en sus polos, luego existirá una aplicación meromorfa \mathbb{C}^3 -valuada H sobre \mathcal{M}' que verifique $dH = \Phi$ en \mathcal{M}' .

Estamos interesados en aplicar a $H \wedge \Phi$ el teorema de la divergencia. Para ello, llamemos $\{p'_1, \dots, p'_s\} = \{p \in \overline{\mathcal{M}} / p \text{ es polo de } \Phi \text{ y } \text{Res}_p \Phi = 0\}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\{p'_1, \dots, p'_s\}$ está contenido en el interior de \mathcal{M}' . Para cada $i \in \{1, \dots, s\}$, sea δ'_i una pequeña curva cerrada que rodee a p'_i , contenida en el interior de \mathcal{M}' , y tal que $\delta'_i \cap \delta'_j = \emptyset$, siempre que $i \neq j$, ver figura 3.2. Cada curva δ'_i es frontera de un disco conforme D'_i que contiene a p'_i . Eliminando también los discos D'_1, \dots, D'_s de \mathcal{M}' , encontramos un nuevo dominio compacto $\mathcal{M}'' \subset \mathcal{M}'$ cuya frontera es $\partial\mathcal{M}'' = \partial\mathcal{M}' \cup \left(\bigcup_{j=1}^s \delta'_j\right)$. La orientación que habíamos elegido induce de forma natural otra orientación sobre $\partial\mathcal{M}''$, que hace que los discos conformes D'_j también tengan la orientación clásica antihoraria. De esta forma hemos orientado las curvas $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k, \delta_1, \dots, \delta_r, \delta'_1, \dots, \delta'_s$, a las que también podemos ver sobre $\overline{\mathcal{M}}$. Por otro lado, el teorema de la divergencia en \mathcal{M}'' puede aplicarse a la diferencial holomorfa $H \wedge \Phi$, dando

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{j=1}^s \int_{\delta'_j} H \wedge \Phi + \sum_{i=1}^k \left(\int_{\gamma_i} + \int_{\widehat{\gamma}_i} + \int_{\Gamma_i} + \int_{\widehat{\Gamma}_i} \right) + \\ & + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\int_{\alpha_i} + \int_{\widehat{\alpha}_i} \right) + \sum_{j=1}^r \left(\int_{\beta_j} + \int_{\widehat{\beta}_j} + \int_{\delta_j} \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde cada integral se recorre con la orientación que le corresponde como subconjunto de $\partial\mathcal{M}''$ —el argumento en todas las integrales anteriores es siempre el mismo—. Además, las integrales sobre las “ $\widehat{}$ ”-curvas se pueden expresar en función de los restantes sumandos: Para $i \in \{1, \dots, k\}$ fijo, las curvas γ_i y $\widehat{\gamma}_i$ proceden de la misma curva en $\overline{\mathcal{M}}$. De esta manera, podemos considerar un difeomorfismo que invierte la orientación $f: \gamma_i \rightarrow \widehat{\gamma}_i$ y que aplica cada punto de γ_i en el mismo punto visto en la otra copia $\widehat{\gamma}_i$, y

$$H \circ f = H + \int_{\Gamma_i} \Phi, \quad f^* \Phi = \Phi, \quad (3.2)$$

(nótese que la primera ecuación depende de la orientación elegida). Por tanto, tenemos

$$\int_{\widehat{\gamma}_i} H \wedge \Phi = - \int_{\gamma_i} f^* (H \wedge \Phi) = - \int_{\gamma_i} H \wedge \Phi - \int_{\Gamma_i} \Phi \wedge \int_{\gamma_i} \Phi. \quad (3.3)$$

Un argumento similar puede aplicarse a cada pareja de curvas, obteniendo

$$\int_{\widehat{\Gamma}_i} H \wedge \Phi = - \int_{\Gamma_i} H \wedge \Phi + \int_{\gamma_i} \Phi \wedge \int_{\Gamma_i} \Phi, \quad \int_{\widehat{\alpha}_i} H \wedge \Phi = - \int_{\alpha_i} H \wedge \Phi$$

$$\int_{\widehat{\beta}_j} H \wedge \Phi = - \int_{\beta_j} H \wedge \Phi + \int_{\delta_j} \Phi \wedge \int_{\beta_j} \Phi.$$

De esta manera,

$$0 = \sum_{j=1}^s \int_{\delta'_j} H \wedge \Phi + 2 \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \Phi \wedge \int_{\Gamma_i} \Phi + \sum_{j=1}^r \left(\int_{\delta_j} H \wedge \Phi + \int_{\delta_j} \Phi \wedge \int_{\beta_j} \Phi \right).$$

Si cambiamos de orientación, cada término de la última ecuación cambia de signo. Esto nos dice que dicha fórmula no depende de la orientación. Además, si cambiamos el papel de las curvas γ_i por el de las Γ_i , el segundo término de la última expresión cambia de signo, pero los otros no. Pero la ecuación (3.2) que usábamos para obtener (3.3) es cierta cuando γ_i atraviesa a Γ_i de izquierda a derecha, si es que vemos ambas curvas sobre \overline{M} . O dicho de otra manera, estamos exigiendo a $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ que sea una *base canónica de homología de \overline{M}* , ver por ejemplo [14]. Ahora podemos enunciar la siguiente *fórmula integral general*:

$$2 \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \Phi \wedge \int_{\Gamma_i} \Phi = - \sum_{j=1}^r \left(\int_{\delta_j} \Phi \wedge \int_{\beta_j} \Phi + \int_{\delta_j} H \wedge \Phi \right) - \sum_{j=1}^s \int_{\delta'_j} H \wedge \Phi. \quad (3.4)$$

Podemos obtener una versión escalar de (3.4) que nos permitirá eliminar el primer término del miembro de la derecha bajo ciertas condiciones. Para ello, consideremos dos diferenciales meromorfas ϕ_a, ϕ_b sobre \overline{M} , y llamemos $\{p_1, \dots, p_r\} = \{p \in \overline{M} / \text{Res}_p \phi_a \neq 0\}$. Razonando como antes, obtendremos un dominio simplemente conexo \mathcal{M}' y una función meromorfa h_a sobre dicho dominio, que verifique $dh_a = \phi_a$ en \mathcal{M}' . Consideremos los puntos $\{p'_1, \dots, p'_s\} = \{\text{polos de } h_a \phi_b \text{ en } \mathcal{M}'\}$. Si ahora cortamos \mathcal{M}' como antes y aplicamos el teorema de la divergencia a $h_a \phi_b$, tendremos

$$\sum_{i=1}^k \left(\int_{\gamma_i} \phi_a \int_{\Gamma_i} \phi_b - \int_{\Gamma_i} \phi_a \int_{\gamma_i} \phi_b \right) = - \sum_{j=1}^r \left(\int_{\delta_j} \phi_a \int_{\beta_j} \phi_b + \int_{\delta_j} h_a \phi_b \right) - \sum_{j=1}^s \int_{\delta'_j} h_a \phi_b. \quad (3.5)$$

Sea $\psi : \overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow N$ una inmersión minimal, conforme y propia de una superficie de Riemann compacta \overline{M} de género k menos n puntos en la 3-variedad $N = \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3/T$ ó $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$, donde T denota una traslación no trivial en \mathbb{R}^3 y $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ es el cociente de \mathbb{R}^3 por el grupo de isometrías generado por dos traslaciones linealmente independientes. Supongamos que ψ tiene curvatura total finita —en los casos $N = \mathbb{R}^3/T$ ó $N = \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ esta condición se verifica si imponemos que ψ sea inyectiva, por el teorema 1.4.1—. Sea $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ la 1-forma de Weierstrass de ψ , que está bien definida en todos estos casos, ver el comentario después del teorema 1.4.2. En este contexto, se verifican (3.4) y (3.5). Por otro lado,

$$\sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \Phi \wedge \int_{\Gamma_i} \Phi = \sum_{i=1}^k \left(\int_{\gamma_i} \phi_2 \int_{\Gamma_i} \phi_3 - \int_{\Gamma_i} \phi_2 \int_{\gamma_i} \phi_3, \right. \\ \left. \int_{\gamma_i} \phi_3 \int_{\Gamma_i} \phi_1 - \int_{\Gamma_i} \phi_3 \int_{\gamma_i} \phi_1, \quad \int_{\gamma_i} \phi_1 \int_{\Gamma_i} \phi_2 - \int_{\Gamma_i} \phi_1 \int_{\gamma_i} \phi_2 \right), \quad (3.6)$$

y podemos usar (3.5) sobre cada componente de la expresión anterior. Nótese que los puntos p_j y los p'_j podrían ser diferentes para cada componente. Si la geometría de la superficie determina una “dirección especial” —por ejemplo, cuando $N = \mathbb{R}^3$ y ψ tiene finales embebidos y paralelos—, podremos suponer que sólo una de las diferenciales ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 tiene residuos en sus polos —salvo rotación en \mathbb{R}^3 , no perdemos generalidad suponiendo que todos los finales tienen vector normal límite vertical, de forma que sólo ϕ_3 tiene residuos en los finales de tipo catenoide—, obteniendo la fórmula completa (3.6) pero integrando sólo aquellas diferenciales que no tengan residuos, con lo cual el primer sumando del miembro de la derecha de (3.5) no aparecerá en ninguna componente.

3.2 Superficies con curvatura total finita.

3.2.1 El vector torque en un final.

En esta subsección aplicaremos lo anterior para obtener resultados debidos a Kusner [30]. Sea $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal y conforme de una superficie de Riemann M y sea $\Gamma \subset M$ una curva cerrada que parametrizaremos por $\gamma(s)$, donde s es el parámetro arco en la métrica inducida. Si llamamos $\eta(s) = -d\psi(J\gamma'(s))$ al conormal a ψ a lo largo de Γ , siendo J la estructura compleja en M , entonces la

integral

$$\mathbf{T}(\psi, \Gamma) = \int_{\Gamma} \psi(s) \wedge \eta(s) ds$$

se llama el *vector torque de ψ asociado a la curva Γ* . Como la diferencial \mathbb{R}^3 -valuada $\psi \wedge d\psi$ tiene divergencia cero —por la minimalidad de ψ —, el vector torque no depende de la curva Γ dentro de una misma clase de homología. Notemos que si trasladamos ψ mediante un vector $v \in \mathbb{R}^3$, el nuevo vector torque $\mathbf{T}_v = \int_{\Gamma} (\psi(s) + v) \wedge \eta(s) ds$ verifica $\mathbf{T}_v = \mathbf{T} + v \wedge \mathbf{F}$, siendo \mathbf{F} el vector flujo de ψ asociado a Γ —que podría valer cero—. De esta manera, \mathbf{T} no depende de traslaciones en la dirección de \mathbf{F} . Claramente, \mathbf{T} cambia de signo al cambiar la elección del conormal. Para más detalles, consultar [29, 30, 31].

Dado $\rho \in]0, 1]$, denotaremos por $D^*(\rho) = \{\xi \in \mathbb{C} / 0 < |\xi| \leq \rho\}$, y por $D^* = D^*(1)$. Usaremos también la identificación $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ cuando sea conveniente. Tomemos una inmersión minimal, conforme y propia $\psi : D^* \rightarrow \mathbb{R}^3$. El *vector torque asociado a ψ* se define como $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\psi, \Gamma_{\rho})$, donde $\Gamma_{\rho} = \{|\xi| = \rho\}$ y el conormal elegido es el exterior a $\psi|_{D^*(\rho)}$ a lo largo de Γ_{ρ} , con $\rho \in]0, 1]$. De esta forma, la integral a lo largo de Γ_{ρ} que define a $\mathbf{T}(\psi, \Gamma_{\rho})$ se recorre en sentido antihorario.

Este vector torque tiene un interesante sentido físico: El momento de una fuerza F que actúa sobre un punto $p \in \mathbb{R}^3$ respecto a un eje dado $\langle v \rangle$, con $v \in S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 / \|x\| = 1\}$, se define como $M(v) = \langle d \wedge F, v \rangle v$, donde d es el vector de posición de p respecto de un origen arbitrariamente elegido sobre el eje $\langle v \rangle$. $M(v)$ es independiente de la elección del origen en el eje y de la componente de la fuerza F en la dirección de dicho eje, y mide la tendencia de un cuerpo situado en p a rotar alrededor de $\langle v \rangle$ como consecuencia de la aplicación de F sobre él. Si volvemos a la inmersión minimal $\psi : D^* \rightarrow \mathbb{R}^3$, en el capítulo 2 veíamos el conormal $\eta(s)$ como una fuerza que actúa sobre cada punto de $\psi(\Gamma_{\rho})$ y que representa la tensión que ψ produce sobre una superficie minimal que contenga a $\psi(D^*)$ dentro de ella. El momento de $\eta(s)$ respecto de un eje $\langle v \rangle$, $v \in S^2$, vendrá dado por $M(s, v) = \langle \psi(s) \wedge n(s), v \rangle v$, luego el momento total o resultante se puede ver como una aplicación de S^2 en \mathbb{R}^3 que lleva cada $v \in S^2$ en $M(v) = \int_{\Gamma_{\rho}} M(s, v) ds = \langle \mathbf{T}, v \rangle v$. El valor máximo de $\|M(v)\|$ se alcanza cuando $v = \pm \frac{\mathbf{T}}{\|\mathbf{T}\|}$, luego el vector torque apunta en la dirección de mayor tendencia de giro de $\psi(D^*)$ a su alrededor. Además la longitud del vector torque coincide con el momento escalar que produce la fuerza conormal respecto del eje dado por dicho vector torque.

Recordemos de la sección 1.3 que un anillo minimal propiamente embebido en \mathbf{R}^3 , con curvatura total finita y frontera compacta ha de ser un disco punteado, que su representación de Weierstrass $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ se extiende de forma meromorfa al final y que es asintótico al final de una Catenoide o de un plano. Supongamos ahora que $\psi : D^* \rightarrow \mathbf{R}^3$ es un final plano y no llano. Si llamamos ψ^* a una conjugada de ψ —que está bien definida, de forma univaluada—, podremos calcular el vector torque asociado a ψ como

$$\mathbf{T} = - \int_{\Gamma_\rho} \psi \wedge (d\psi)_\gamma (J\gamma') ds = \int_{\Gamma_\rho} \psi \wedge (d\psi^*)_\gamma (\gamma') ds = \int_{\Gamma_\rho} \psi \wedge d\psi^*,$$

donde $\Gamma_\rho = \{|\xi| = \rho\}$, J denota la estructura compleja en D^* y γ es una parametrización por el arco de $\psi(\Gamma_\rho)$. Además, el teorema de la divergencia aplicado a la 1-forma exacta $d(\psi \wedge \psi^*)$ nos dice que

$$\mathbf{T} = \int_{\Gamma_\rho} \psi \wedge d\psi^* = \int_{\Gamma_\rho} \psi^* \wedge d\psi.$$

Por otro lado, la aplicación meromorfa \mathbb{C}^3 -valuada $H = (h_1, h_2, h_3) = \psi + i\psi^*$ es una primitiva de la 1-forma de Weierstrass $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ de ψ , y

$$\text{Im} \int_{\Gamma_\rho} H \wedge \Phi = \text{Im} \int_{\Gamma_\rho} H \wedge dH = \int_{\Gamma_\rho} (\psi \wedge d\psi^* + \psi^* \wedge d\psi) = 2\mathbf{T},$$

luego

$$\mathbf{T} = \pi \text{Re} [\text{Res}_0(h_2\phi_3 - h_3\phi_2, h_3\phi_1 - h_1\phi_3, h_1\phi_2 - h_2\phi_1)], \quad (3.7)$$

donde $\text{Res}_0(\bullet)$ denota el residuo en cero de la diferencial correspondiente, calculado con la orientación clásica antihoraria a lo largo de $\{|\xi| = \rho\}$. La última expresión nos permite calcular analíticamente el vector torque \mathbf{T} en un final plano: Tras una rotación en \mathbf{R}^3 , podemos suponer $g(0) = 0$, siendo g la proyección estereográfica desde el polo Norte de la aplicación de Gauss de ψ . Tomemos una coordenada conforme $(D(\varepsilon), z)$ centrada en el origen de \mathbb{C} , tal que $g(z) = z^k$. Por la proposición 1.3.2, podemos escribir ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 como sigue:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_{k-2}}{z^2} + a_k + \mathcal{O}_1(z) \right) dz, \\ \phi_2 &= \frac{i}{2} \left(\frac{a_{k-2}}{z^2} + a_k + \mathcal{O}_2(z) \right) dz, \\ \phi_3 &= \left(a_{k-2} z^{k-2} + \mathcal{O}_3(z^k) \right) dz, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

donde $\mathcal{O}_n(z^l)$ denota una función holomorfa que tiene un cero de orden l en $z = 0$ —por simplicidad en la notación, omitiremos el subíndice—, y a_{k-2}, a_k son

dos números complejos, siendo $a_{k-2} \neq 0$. De esta manera, las primitivas h_1, h_2, h_3 de ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 se expresan

$$\left. \begin{aligned} h_1(z) &= c_1 - \frac{a_{k-2}}{2z} + \frac{a_k}{2}z + \mathcal{O}(z^2), \\ h_2(z) &= c_2 - \frac{ia_{k-2}}{2z} + \frac{ia_k}{2}z + \mathcal{O}(z^2), \\ h_3(z) &= c_3 + \frac{a_{k-2}}{k-1}z^{k-1} + \mathcal{O}(z^{k+1}), \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

para ciertas constantes de integración $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, (3.7) se transforma ahora en

$$\mathbf{T} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 2, \\ \pi (\operatorname{Im}(a_0^2), \operatorname{Re}(a_0^2), 0) \equiv \pi (ia_0^2, 0) & \text{si } k = 2. \end{cases} \quad (3.10)$$

Esta expresión es válida cuando $g(0) = 0$. Si $g(0) = \infty$, entonces

$$\mathbf{T} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 2, \\ \pi (\operatorname{Im}(a_0^2), -\operatorname{Re}(a_0^2), 0) \equiv -\pi (ia_0^2, 0) & \text{si } k = 2. \end{cases} \quad (3.11)$$

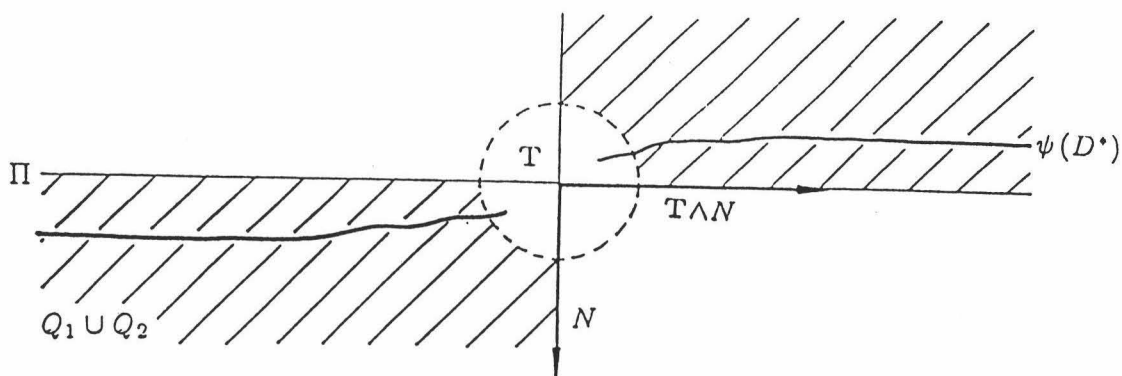
Así, los únicos finales planos que producen un vector torque no nulo son aquellos donde el número de ramificación de la aplicación de Gauss es mínimo. En este caso, dicho vector describe la intersección del final con el plano afín tangente límite, como pone de manifiesto el siguiente lema, ver también la figura 3.3:

Lema 3.2.1 *Sea $\psi : D^* \rightarrow \mathbb{R}^3$ un final plano cuya aplicación de Gauss tiene orden de ramificación 2 en $z = 0$. Entonces, la intersección de $\psi(D^*)$ con el plano afín tangente límite Π es asintótica a una línea recta $r = \{p_0 + \lambda \mathbf{T} / \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \Pi$ que lleva la dirección del vector torque \mathbf{T} asociado a ψ . Además, los puntos de $\psi(D^*)$ fuera de un cierto entorno tubular de r están situados dentro de los cuadrantes opuestos*

$$Q_1 \cup Q_2 = \{p \in \mathbb{R}^3 / \langle p - p_0, N \rangle \cdot \det(p - p_0, \mathbf{T}, N) < 0\},$$

donde N es el vector normal límite en el final.

Demostración. Después de una conveniente rotación, podemos suponer $g(0) = 0$. Tomemos una coordenada local conforme (D, z) centrada en el origen, donde la aplicación de Gauss se escriba $g(z) = z^2$. En estas condiciones, (3.8), (3.9) se verifican y podemos escribir Π como $\{x_3 = \operatorname{Re}(c_3)\}$, de forma que los puntos que

Figura 3.3: T apunta hacia fuera de la hoja.

se aplican en $\psi(D^*) \cap \Pi$ son $\{z / \operatorname{Re}(a_0 z) + \mathcal{O}(z^3) = 0\}$, siendo $\mathcal{O}(z^k)$ una función diferenciable tal que $z^{-k} \mathcal{O}(z^k) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow 0$. Si ahora tomamos z muy cerca del origen tendremos $z \sim \frac{\mu i}{a_0}$, $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$, $|\mu| \ll 1$. Llamando $x_1(z)$, $x_2(z)$ a las funciones coordenadas correspondientes de ψ , se tiene de (3.9) que

$$(x_1, x_2) \left(\frac{\mu i}{a_0} \right) = \operatorname{Re}(c_1, c_2) - \frac{1}{2\mu} \left(\operatorname{Im}(a_0^2), \operatorname{Re}(a_0^2) \right) + \mathcal{O} \left(\frac{\mu i}{a_0} \right).$$

Sea $p_0 = (\operatorname{Re}(c_1), \operatorname{Re}(c_2), \operatorname{Re}(c_3))$. Usando (3.10), $\psi(D^*) \cap \Pi$ será asintótico a la línea recta r que aparece en el enunciado. Si ahora tomamos $\varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\}$ cerca de cero, los puntos que se aplican en $\psi(D^*) \cap \{x_3 = \operatorname{Re}(c_3) + \varepsilon\}$ son $\{z / \operatorname{Re}(a_0 z) + \mathcal{O}(z^3) = \varepsilon\}$. Considerando z cerca del origen y razonando como antes, llegaremos a $z \sim \frac{\varepsilon + \mu i}{a_0}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| \ll 1$, y

$$(x_1, x_2) \left(\frac{\varepsilon + \mu i}{a_0} \right) = \operatorname{Re}(c_1, c_2) - \frac{1}{2} \left(\operatorname{Re} \left(\frac{a_0^2}{\varepsilon + \mu i} \right), -\operatorname{Im} \left(\frac{a_0^2}{\varepsilon + \mu i} \right) \right) + \mathcal{O} \left(\frac{\varepsilon + \mu i}{a_0} \right).$$

A partir de la última expresión y de (3.10), deducimos

$$\langle \psi \left(\frac{\varepsilon + \mu i}{a_0} \right) - p_0, N \rangle = -\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon, \mu),$$

$$\langle \psi \left(\frac{\varepsilon + \mu i}{a_0} \right) - p_0, T \wedge N \rangle = \frac{\pi |a_0^2|^2}{2(\varepsilon^2 + \mu^2)} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon, \mu),$$

donde $\mathcal{O}(\varepsilon, \mu)$ denota en ambos casos una función continua que se anula en $(0, 0)$. Si tomamos ε, μ suficientemente pequeños, el signo de

$$\langle \psi \left(\frac{\varepsilon + \mu i}{a_0} \right) - p_0, N \rangle \det \left(\psi \left(\frac{\varepsilon + \mu i}{a_0} \right) - p_0, T, N \right)$$

será negativo, lo cual termina de probar el lema.

Nota 3.2.1 Para un final plano que no sea llano, podemos obtener fácilmente a partir de (3.8), (3.9) que $\text{Res}_0(h_i\phi_j) = -\text{Res}_0(h_j\phi_i)$, $i, j = 1, 2, 3$, luego

$$\mathbf{T} = 2\pi \text{Re} [\text{Res}_0(h_2\phi_3, -h_1\phi_3, h_1\phi_2)]. \quad (3.12)$$

Sea $\psi : D^* \rightarrow \mathbf{R}^3$ un final de tipo catenoide, con aplicación de Gauss g . Tras una rotación, supondremos que $g(0) = 0$. Tomemos una coordenada local conforme $(D(\varepsilon), z)$ que haga

$$g(z) = z, \quad \phi_3 = \left(-\frac{a}{z} + cz + \mathcal{O}(z^2) \right) dz, \quad (3.13)$$

donde $a \in \mathbf{R} - \{0\}$ es el crecimiento logarítmico del final (ver proposición 1.3.2) y $c \in \mathbf{C}$. El vector torque \mathbf{T} en dicho final se calcula como $\mathbf{T} = \int_{\Gamma_\rho} \psi \wedge \left(\frac{d\gamma}{ds} \wedge N \right) ds$, donde $\Gamma_\rho = \{z = \rho e^{i\theta} / \theta \in [0, 2\pi]\}$, N es la aplicación de Gauss de ψ valuada sobre la esfera S^2 y γ es una parametrización por el arco de $\psi(\Gamma_\rho)$. Por consiguiente, $\mathbf{T} = \int_0^{2\pi} \psi \wedge \left(\frac{d\gamma}{d\theta} \wedge N \right) d\theta$. Usando (3.13) deducimos después de un cálculo largo pero sencillo que

$$\mathbf{T} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \psi(\rho e^{i\theta}) \wedge \left(\frac{d\gamma}{d\theta}(\rho e^{i\theta}) \wedge N(\rho e^{i\theta}) \right) d\theta = 2\pi a (-\text{Re}(c_2), \text{Re}(c_1), 0),$$

donde c_1, c_2 son números complejos que aparecen como constantes de integración de ϕ_1, ϕ_2 , respectivamente. Llamando $E = (\text{Re}(c_1), \text{Re}(c_2), 0)$, $\mathbf{F} = \mathbf{Flujo}(\psi) = (0, 0, -2\pi a)$, el eje de simetría de la semi-Catenoide asintótica a ψ será $E + \langle \mathbf{F} \rangle$. Nos referiremos a esta línea recta como el *eje del final* ψ . Además, $E \wedge \mathbf{F} = 2\pi a (-\text{Re}(c_2), \text{Re}(c_1), 0)$. Esto demuestra el siguiente

Lema 3.2.2 Sea $\psi : D^* \rightarrow \mathbf{R}^3$ un final de tipo catenoide con vector flujo \mathbf{F} y eje $E + \langle \mathbf{F} \rangle$. Entonces, el vector torque \mathbf{T} asociado a ψ viene dado por

$$\mathbf{T} = E \wedge \mathbf{F}. \quad (3.14)$$

Nota 3.2.2 El vector flujo $F = \int_{\Gamma_\rho} \eta(s) ds$ en un final de tipo catenoide, visto como fuerza actuando sobre cualquier punto del eje de dicho final, representa la tensión que el final produce sobre una superficie minimal "completa" que lo contenga. De esta forma, el momento de dicha fuerza F respecto del eje dado por el vector torque es $\langle E \wedge F, \frac{\mathbf{T}}{\|\mathbf{T}\|} \rangle \frac{\mathbf{T}}{\|\mathbf{T}\|} = \mathbf{T}$, luego el vector torque mide la tendencia de giro del final alrededor del eje dado por dicho vector torque. Además, ya que dicho momento se expresa como $E \wedge F$, tenemos que en un final catenoide,

$$\int_{\Gamma_\rho} \psi(s) \wedge \eta(s) ds = \int_{\Gamma_\rho} \psi(s) ds \wedge \int_{\Gamma_\rho} \eta(s) ds,$$

lo cual evidentemente no es cierto en general —piénsese en un final plano con número de ramificación mínimo—.

Sea $\psi : \overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal, conforme y propia, con curvatura total finita y n finales embebidos, siendo \overline{M} una superficie de Riemann compacta con género k . Si usamos la misma notación de la sección 3.1, los puntos $p \in \overline{M}$ donde $\text{Res}_p \Phi \neq 0$ son los finales de tipo catenoide, y los polos de Φ con residuo cero coinciden con los finales planos. Denotaremos por $F(\gamma_i) = \text{Im} \int_{\gamma_i} \Phi$ al vector período asociado a la curva γ_i , y análogamente para las curvas Γ_i . Llamaremos también $\mathbf{T}_j, \mathbf{F}_j$ a los vectores torque y flujo asociados al final p_j de ψ —todos estos vectores se calculan mediante integrales a lo largo de curvas que se recorren con la orientación que heredan como parte de la frontera de cierto dominio \mathcal{M}'' que aparecía en la sección 3.1—. Ya que $\Phi = d\psi + id\psi^*$, siendo ψ^* una inmersión conjugada de ψ —conjugada que está bien definida en \mathcal{M}'' , por ser éste simplemente conexo—, si tomamos partes imaginarias en (3.4) obtendremos

$$0 = - \sum_{\substack{\text{finales} \\ \text{catenoide}}} \left[\int_{\delta_j} d\psi^* \wedge \int_{\beta_j} d\psi + \int_{\delta_j} (\psi \wedge d\psi^* + \psi^* \wedge d\psi) \right] - \sum_{\substack{\text{finales} \\ \text{planos}}} \text{Im} \int_{\delta'_j} H \wedge \Phi.$$

Como el vector torque en un final plano viene dado por $2\mathbf{T} = \text{Im} \int_{\Gamma_\rho} H \wedge \Phi$, siendo Γ_ρ una curva que rodee al final, el último sumando de la expresión de arriba es $-2 \sum_{\substack{\text{finales} \\ \text{planos}}} \mathbf{T}_j$. Por otra parte, el corchete anterior puede escribirse

$$\mathbf{F}_j \wedge \int_{\beta_j} d\psi + 2 \int_{\delta_j} \psi \wedge d\psi^* - \int_{\delta_j} d(\psi \wedge \psi^*) = \mathbf{F}_j \wedge \psi(x_0) + 2\mathbf{T}_j,$$

donde x_0 es el extremo común de todas las curvas β_j , ver sección 3.1. Si llamamos $E_j + \langle F_j \rangle$ al eje del final de tipo catenoide p_j y usamos el lema 3.2.2 tendremos el siguiente

Teorema 3.2.1 *Sea $\psi : \overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal, conforme y propia, con curvatura total finita y finales embebidos. Entonces,*

$$\sum_{\substack{\text{finales} \\ \text{catenoide}}} E_j \wedge F_j + \sum_{\substack{\text{finales} \\ \text{planos}}} T_j = 0. \quad (3.15)$$

Nota 3.2.3 *La ecuación (3.15) expresa el momento angular total del sistema consistente en una superficie minimal completa, inmersa, con curvatura total finita y finales embebidos $S \subset \mathbb{R}^3$, sometida a las fuerzas que sobre ésta ejercen sus finales. Nótese que dicha ecuación es invariante frente a traslaciones de la superficie.*

Corolario 3.2.1 *Sea ψ una inmersión minimal, conforme y propia en \mathbb{R}^3 con curvatura total finita y exactamente dos finales de tipo catenoide. Entonces,*

- i) *Si ψ no tiene finales planos con número de ramificación mínimo de su aplicación de Gauss, los finales de tipo catenoide tienen el mismo eje.*
- ii) *Si ψ sólo tiene un final plano con número de ramificación mínimo de la aplicación de Gauss —posiblemente tenga otros finales planos—, entonces los finales de tipo catenoide tienen ejes distintos, que cortan ortogonalmente a un plano que contenga al vector torque asociado al final plano en dos puntos A, B de forma que el segmento \overline{AB} es perpendicular a dicho vector torque —ver figura 3.4—.*

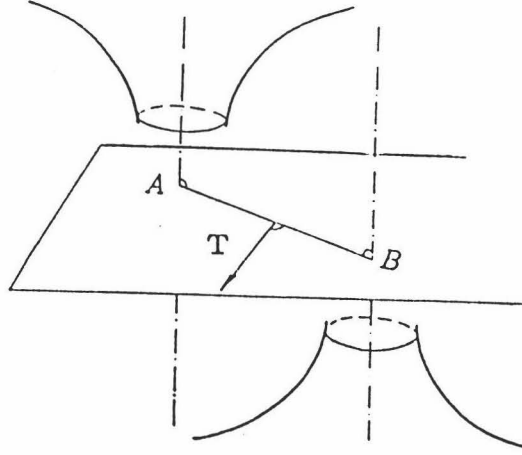


Figura 3.4: T es perpendicular al segmento \overline{AB} .

3.2.2 Una nueva fórmula para superficies con curvatura total finita y aplicaciones.

Sea $\psi : \overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal, conforme y propia, con curvatura total finita y finales embebidos y paralelos —esta última condición no se exigía en el último teorema—. Rotemos la superficie de manera que el normal en los finales sea vertical. Tomando partes reales en (3.6) y usando (3.5), llegaremos a

$$-\sum_{i=1}^k \mathbf{F}(\gamma_i) \wedge \mathbf{F}(\Gamma_i) = -2\pi \sum_{j=1}^n \operatorname{Im} \left[\operatorname{Res}_{p_j}(h_2\phi_3, -h_1\phi_3, h_1\phi_2) \right]. \quad (3.16)$$

Si p_j es un final plano con $g(p_j) = 0^k$, entonces a partir de (3.8),(3.9),(3.10) no es difícil concluir que

$$\operatorname{Im} \left[\operatorname{Res}_{p_j}(h_2\phi_3, -h_1\phi_3, h_1\phi_2) \right] = \frac{1}{2\pi} \mathbf{T}_j \wedge N(p_j), \quad (3.17)$$

donde \mathbf{T}_j es el vector torque asociado al final p_j . Esto también es válido para finales planos cuyo vector normal límite apunte al polo Norte. Además, si p_j es un final de tipo catenoide con $g(p_j) = 0$, podemos usar (3.13) para deducir que

$$\operatorname{Res}_{p_j}(h_2\phi_3, -h_1\phi_3, h_1\phi_2) = (-ac_2, ac_1, -\frac{i}{2}a^2),$$

siendo a el crecimiento logarítmico del final y c_1, c_2 dos constantes complejas que aparecen en las expresiones locales de las primitivas h_1, h_2 de ϕ_1, ϕ_2 , respectivamente:

$$(h_1, h_2)(z) = (c_1, c_2) + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{z} + (c+a)z, \frac{ia}{z} + (c-a)iz \right) + \mathcal{O}(z^2).$$

Una idea análoga aplicada a un final de tipo catenoide con $g(p_j) = \infty$ nos da

$$\text{Res}_{p_j}(h_2\phi_3, -h_1\phi_3, h_1\phi_2) = (-ac_2, ac_1, \frac{i}{2}a^2).$$

Y por tanto,

$$\text{Im} \left[\text{Res}_{p_j}(h_2\phi_3, -h_1\phi_3, h_1\phi_2) \right] = \frac{1}{2\pi} E^*(p_j) \wedge F_j \mp \frac{1}{2} a^2 e_3,$$

donde F_j es el vector flujo en el final p_j , $e_3 = (0, 0, 1)$, “-” (resp. “+”) se da cuando $g(p_j) = 0$ (resp. $g(p_j) = \infty$), y $E^*(p_j) = (\text{Im}(c_1), \text{Im}(c_2), 0)$. Llamemos ψ^* a una inmersión minimal conjugada de ψ , que no está bien definida sobre $\overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\}$, pero sí lo está sobre un cierto recubridor de esta superficie. Cada final de tipo catenoide de ψ produce un final de tipo helicoides sobre ψ^* , el cual tiene un eje vertical, que tampoco está bien definido en \mathbb{R}^3 , pero sí que lo está la posición relativa entre todos estos ejes verticales —si trasladamos uno de estos ejes mediante un cierto vector fijo, todos los ejes restantes quedarán trasladados según dicho vector—. Como $\psi^* = \text{Im} \int \Phi$, el eje de un final de tipo helicoides p_j de ψ^* vendrá dado por $E^*(p_j) + \langle F_j \rangle$. Notemos también que

$$\sum_{\substack{\text{finales} \\ \text{catenoide}}} E^*(p_j) \wedge F_j$$

no presenta problemas de multivaluación, porque $\sum F_j = 0$. Como consecuencia, tenemos el siguiente

Lema 3.2.3 *Sea $\psi : \overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal, conforme y propia, con curvatura total finita y finales embebidos horizontales. Entonces,*

$$\sum_{i=1}^k F(\gamma_i) \wedge F(\Gamma_i) = \sum_{\substack{\text{finales} \\ \text{planos}}} T_j \wedge N(p_j) + \sum_{\substack{\text{finales} \\ \text{catenoide}}} E^*(p_j) \wedge F_j - \pi \left(\sum_{C_0} a_j^2 - \sum_{C_\infty} a_j^2 \right) e_3, \tag{3.18}$$

donde C_0 (resp. C_∞) representa el conjunto de finales de tipo catenoide donde la aplicación de Gauss extendida apunta al polo Sur (resp. al polo Norte).

Nota 3.2.4 Como el residuo de la 1-forma de Weierstrass Φ en un final plano se anula, el lema anterior se extiende directamente al caso en que sólo los finales de tipo catenoide son paralelos.

El segundo sumando del miembro de la derecha de (3.18) es horizontal, y lo mismo puede decirse del primero en el caso de que todos los finales sean paralelos. Bajo estas condiciones, si tomamos la componente vertical de (3.18) podremos obtener una ecuación escalar en términos de ψ :

Teorema 3.2.2 Sea $\psi : \overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal, conforme y propia, con curvatura total finita y finales embebidos horizontales. Entonces,

$$\sum_{i=1}^k \langle F(\gamma_i) \wedge F(\Gamma_i), e_3 \rangle = \pi \left(\sum_{C_\infty} a_j^2 - \sum_{C_0} a_j^2 \right). \quad (3.19)$$

La ecuación (3.19) nos informa sobre la aplicación *Flujo* asociada a un embebimiento minimal y completo $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura total finita, que se define como la clase de cohomología \mathbb{R}^3 -valuada sobre M determinada por la 1-forma cerrada $-(d\psi) \circ J$, donde J es la estructura compleja de M . El principio del máximo para funciones armónicas implica que el plano es la única superficie donde el rango de la aplicación *Flujo* es cero, y según el teorema 2.2.1, la Catenoide se puede caracterizar como el único ejemplo con rango uno. Si estudiamos el caso de rango dos, todos los vectores flujo han de pertenecer a un mismo plano vertical de \mathbb{R}^3 , ya que tras una rotación, podemos suponer que la aplicación de Gauss extendida toma valores verticales en los finales, de manera que el miembro de la izquierda de (3.19) se anula. Esto nos da una obstrucción bastante restrictiva sobre la distribución de los finales en una tal superficie:

Corolario 3.2.2 Sea $\psi : \overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie minimal propiamente embebida con curvatura total finita y finales horizontales.

i) Si $\text{rango}(\text{Flujo}) = 2$, entonces $\sum_{C_\infty} a_j^2 = \sum_{C_0} a_j^2$.

ii) Si $\text{rango}(\text{Flujo}) = 2$ y n es impar, entonces los finales de tipo catenoide se pueden asociar en parejas con el mismo crecimiento logarítmico, de manera que siguiendo el orden natural creciente según la tercera coordenada, vamos encontrando primero b parejas de finales de tipo catenoide con crecimientos logarítmicos negativos, después p finales planos —con p impar— y por último, t parejas de finales de tipo catenoide con crecimientos logarítmicos positivos, siendo $n = 2b + p + 2t$.

iii) Si ψ tiene tres finales, entonces $\text{rango}(\text{Flujo}) = 3$.

Demostración. El comentario anterior al enunciado de este corolario prueba *i*). Si escribimos los finales mediante el orden creciente de la tercera coordenada, nos encontramos los crecimientos logarítmicos ordenados de la siguiente forma:

$$a_1 \leq \dots \leq a_r \leq 0 < b_{n-r} \leq \dots \leq b_1,$$

donde a_1 es el crecimiento logarítmico del final situado más abajo, y b_1 se define de forma análoga para el final más alto. Nótese que los finales planos —caso de existir— están incluidos en los valores a_i . Como n es impar, los finales que corresponden a a_1, b_1 tienen el mismo vector normal límite, luego podemos reescribir *i*) como

$$(a_1^2 - a_2^2) + (a_3^2 - a_4^2) + \dots + (b_1^2 - b_2^2) + (b_3^2 - b_4^2) + \dots = 0.$$

Si tenemos en cuenta esta ecuación y la ordenación anterior de los coeficientes a_i, b_j tendremos probada la segunda afirmación de este corolario. En cuanto a la tercera, es consecuencia inmediata de la segunda.

Terminaremos esta sección obteniendo un par de resultados sobre superficies con finales planos con ramificación mínima. Tomemos una inmersión minimal, conforme y propia $\psi : \overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura total finita, cuyos finales son todos planos y con número de ramificación mínimo de la aplicación de Gauss extendida. De (3.15) y (3.18) podemos deducir que

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{T}_j = 0, \quad (3.20)$$

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{F}(\gamma_i) \wedge \mathbf{F}(\Gamma_i) = \sum_{j=1}^n \mathbf{T}_j \wedge N(p_j). \quad (3.21)$$

Supongamos que el miembro de la izquierda de (3.21) vale cero. De esta forma, $N(p_n) = -\frac{1}{\|\mathbf{T}_n\|^2} \mathbf{T}_n \wedge \left(\sum_{j=1}^{n-1} N(p_j) \wedge \mathbf{T}_j \right)$. Si $N(p_1), \dots, N(p_{n-1})$ son paralelos, entonces

$$N(p_n) = \frac{-1}{\|\mathbf{T}_n\|^2} \mathbf{T}_n \wedge (N(p_1) \wedge T) = \frac{-1}{\|\mathbf{T}_n\|^2} [\langle \mathbf{T}_n, T \rangle N(p_1) - \langle \mathbf{T}_n, N(p_1) \rangle T],$$

donde T es una cierta combinación lineal de $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_{n-1}$. Como (3.20) nos dice que el último término del miembro de la derecha se anula, tenemos que todos los finales son paralelos, por lo que el principio del máximo para funciones armónicas asegura que ψ es un plano. De esta manera, hemos probado la siguiente

Proposición 3.2.1 *Sea $\psi : \overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ una inmersión minimal, conforme y propia con curvatura total finita, tal que todos sus finales son de tipo plano y tienen número de ramificación mínimo de la aplicación de Gauss extendida. Si*

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{F}(\gamma_i) \wedge \mathbf{F}(\Gamma_i) = 0, \quad (3.22)$$

entonces ψ no puede tener $n - 1$ finales paralelos.

Esto nos dice en las condiciones de la proposición anterior, el menor número de finales a considerar es tres, y que dos de ellos no pueden ser paralelos. ¿Qué ocurre cuando hay tres finales? Una inmersión minimal completa en \mathbf{R}^3 con curvatura total finita, exactamente tres finales de “ramificación mínima” y que verifique (3.22) nos dará una solución del siguiente sistema —seguimos con la misma notación que hasta ahora—:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3 = 0, \\ \mathbf{T}_1 \wedge N(p_1) + \mathbf{T}_2 \wedge N(p_2) + \mathbf{T}_3 \wedge N(p_3) = 0. \end{cases}$$

Afirmamos que cualquier solución del sistema anterior tiene necesariamente dos de los vectores $N(p_i)$ colineales: Si $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ son colineales, tendremos $\mathbf{T}_2 = a\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_3 = -(1+a)\mathbf{T}_1$, con $a \in \mathbf{R} - \{0, -1\}$. Sustituyendo en el sistema anterior nos queda $\mathbf{T}_1 \wedge [N(p_1) + aN(p_2) - (1+a)N(p_3)] = 0$, pero este último corchete es perpendicular a \mathbf{T}_1 , luego $(1+a)N(p_3) = N(p_1) + aN(p_2)$. Tomando normas y aplicando la desigualdad de Schwarz se deduce que $N(p_1)$ y $N(p_2)$ son paralelos.

Supongamos ahora que T_1 y T_2 generan un plano U . El sistema anterior asegura que podemos encontrar una isometría f de \mathbb{R}^3 que lleva cada T_i en $T_i \wedge N(p_i)$, $i = 1, 2, 3$. De aquí es fácil concluir que $(f + f^{-1})(U) \subseteq U^\perp$, siendo esta última la recta ortogonal a U . Por tanto, el rango de $f + f^{-1}$ ha de ser 0, 1 ó 2. Claramente, lo primero no puede ocurrir. Si dicho rango es dos, entonces el núcleo de $f + f^{-1}$ cumple $\ker(f + f^{-1}) \subset U$ —en caso contrario, su intersección con U sería cero, luego $(f + f^{-1})|_U$ sería biyectiva, en contradicción con que $(f + f^{-1})(U) \subseteq U^\perp$ —. A partir de esta inclusión se prueba que $f + f^{-1}$ tiene tres valores propios distintos, 0, λ_1, λ_2 . Por otro lado, f ha de tener un valor propio $\mu = \pm 1$ y el subespacio propio de f asociado a μ ha de coincidir con el subespacio propio de $f + f^{-1}$ asociado al valor propio $\mu + \frac{1}{\mu} \neq 0$. De aquí no es difícil concluir que uno de los valores propios λ_1, λ_2 de $f + f^{-1}$ es cero, contradicción. Por tanto, $f + f^{-1}$ tiene rango uno y $\ker(f + f^{-1}) = U$, luego U^\perp es el único subespacio propio de $f + f^{-1}$ asociado a un valor propio no nulo. Como f ha de tener un valor propio no nulo μ , U^\perp es también el subespacio propio de f para μ . En particular, f deja invariante a U^\perp y por consiguiente también a U . Así, $T_1, T_1 \wedge N(p_1), T_2$ y $T_2 \wedge N(p_2)$ están en U , de donde $N(p_1), N(p_2) \in U^\perp$ luego son colineales. En resumen,

Proposición 3.2.2 *No existe ninguna inmersión minimal en \mathbb{R}^3 con curvatura total finita y exactamente tres finales planos con "número de ramificación mínimo" que verifique (3.22).*

Nota 3.2.5 *Como consecuencia de (3.21) también puede probarse que un toro minimal propiamente inmerso en \mathbb{R}^3 con curvatura total finita y todos sus finales de tipo plano con número de ramificación de la aplicación de Gauss extendida mayor que dos tiene todo su flujo en la misma dirección luego admite una deformación que conserva la estructura conforme y el tipo de los finales —tras una conveniente rotación que haga que dicho flujo sea vertical, podremos aplicar a ψ la deformación $\psi_\lambda \equiv (\lambda g, \frac{1}{\lambda} \omega)$, $\lambda > 0$ del capítulo 2—.*

3.3 Superficies periódicas.

3.3.1 Superficies con finales planos.

Sea $M \subset \mathbb{R}^3/T$ una superficie minimal propiamente embebida, con curvatura total finita y finales planos horizontales, siendo T una traslación de vector $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$. M ha de ser conformemente equivalente a $\overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\}$, donde \overline{M} es una superficie de Riemann compacta de género k , luego usando la notación de la sección 3.1, a partir de (3.5) y (3.6) se tiene

$$\sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \Phi \wedge \int_{\Gamma_i} \Phi = -2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}_{p_j}(h_2\phi_3, -h_1\phi_3, h_1\phi_2). \quad (3.23)$$

Si separamos partes reales e imaginarias en la ecuación anterior y tenemos en cuenta (3.12), (3.17), llegaremos a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \mathbf{F}(\gamma_i) \wedge \mathbf{F}(\Gamma_i) &= - \sum_{j=1}^n \mathbf{T}_j \wedge N(p_j), \\ \sum_{i=1}^k [\mathbf{P}(\gamma_i) \wedge \mathbf{F}(\Gamma_i) + \mathbf{F}(\gamma_i) \wedge \mathbf{P}(\Gamma_i)] &= - \sum_{j=1}^n \mathbf{T}_j, \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde $\mathbf{P}(\gamma_i)$, $\mathbf{F}(\gamma_i)$ son los vectores período y flujo asociados a la curva γ_i respectivamente, de forma análoga para las curvas Γ_i , y \mathbf{T}_j es el vector torque asociado al final p_j , que se levanta a un final plano en \mathbb{R}^3 . Nótese que en principio, el vector torque podría depender de la elección del levantamiento del final. Pero como dos levantamientos del mismo final están relacionados por una traslación de vector un múltiplo de \mathbf{P} , los vectores torque asociados \mathbf{T}_j , \mathbf{T}'_j verifican $\mathbf{T}'_j = \mathbf{T}_j + m\mathbf{P} \wedge \mathbf{F}_j$, para un cierto número entero m . Como el vector flujo \mathbf{F}_j en un final plano vale cero, obtenemos $\mathbf{T}_j = \mathbf{T}'_j$.

La fórmula (3.24) se puede simplificar si elegimos una base de homología conveniente $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ de \overline{M} : M se levanta a una superficie minimal simplemente periódica $S \subset \mathbb{R}^3$. Tomemos un dominio fundamental en S delimitado por dos planos horizontales Π_1 y $\Pi_2 = \Pi_1 + \mathbf{P}$. Podemos escoger estos planos de manera que $S \cap \Pi_1$ consista en una cantidad finita de curvas de Jordan $\gamma_1, \dots, \gamma_s$. Las curvas γ_i y $\gamma_i + \mathbf{P}$ determinan la misma curva no nulhomotópica sobre \overline{M} , a la cual también llamaremos γ_i . Por otro lado, el dominio fundamental entre Π_1, Π_2 sobre S es una superficie no compacta Δ y con frontera, con género $k - s$.

Tomemos un punto q_i sobre cada γ_i , y una curva Γ_i contenida en Δ , uniendo q_i con $q_i + \mathbf{P}$, $1 \leq i \leq s$. Ahora podemos elegir una base de homología de Δ , $\gamma_{s+1}, \dots, \gamma_k, \Gamma_{s+1}, \dots, \Gamma_k$, tal que γ_i, Γ_j , $i, j = 1, \dots, k$ verifiquen las propiedades de la sección 3.1. Además,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}(\gamma_1) = \dots = \mathbf{P}(\gamma_s) = \mathbf{P}(\gamma_{s+1}) = \dots = \mathbf{P}(\gamma_k) = 0, \\ \mathbf{P}(\Gamma_{s+1}) = \dots = \mathbf{P}(\Gamma_k) = 0, \\ \mathbf{P}(\Gamma_1) = \dots = \mathbf{P}(\Gamma_s) = \mathbf{P}. \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

De esta forma tenemos el siguiente

Teorema 3.3.1 *Sea $M = \overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^3/T$ una superficie minimal propiamente embebida, con género k y n finales planos, siendo T una traslación de vector $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$. Entonces,*

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{F}(\gamma_i) \wedge \mathbf{F}(\Gamma_i) = \sum_{j=1}^n N(p_j) \wedge \mathbf{T}_j, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{P} \wedge \mathbf{F}(C) = \sum_{j=1}^n \mathbf{T}_j, \quad (3.27)$$

donde $\mathbf{F}(C)$ es el flujo a lo largo del ciclo C que se obtiene al cortar la superficie con un plano horizontal y transversal.

Los ejemplos de Riemann $\{M_\lambda\}_{\lambda>0}$ que veíamos en la sección 1.2 cumplen las hipótesis del teorema anterior. Dichos ejemplos son topológicamente toros menos dos puntos, que se aplican en finales planos. Además, cada M_λ presenta una simetría respecto a un plano vertical y otra respecto a una línea recta que atraviesa ortogonalmente a este plano y que intercambia los finales, de forma que los vectores torque asociados a los finales coinciden. Por lo tanto, de (3.26) deducimos que los vectores flujo en homología $\mathbf{F}(\gamma)$ y $\mathbf{F}(\Gamma)$ son colineales. De hecho, no es difícil probar que uno de estos vectores flujo vale cero. Esta simetría respecto de un plano caracteriza a los ejemplos de Riemann:

Teorema 3.3.2 *Sea $M \subset \mathbb{R}^3/T$ una superficie minimal propiamente embebida, con género uno y dos finales planos. Si M es simétrica respecto de un plano de \mathbb{R}^3 , entonces es un ejemplo de Riemann.*

Demostración. Sea $M = \overline{M} - \{p_1, p_2\} \subset \mathbb{R}^3$ en las hipótesis del teorema. Podemos suponer que la aplicación de Gauss g de M cumple $g(p_1) = 0$, $g(p_2) = \infty$. Además, del teorema 4 en [42] se deduce que g tiene grado dos. Así, g ha de tener orden de ramificación mínimo en los finales, y (3.26),(3.27) se escriben ahora

$$\mathbf{F}(\gamma) \wedge \mathbf{F}(\Gamma) = e_3 \wedge (\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1), \quad \mathbf{P} \wedge \mathbf{F}(\gamma) = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2. \quad (3.28)$$

Salvo una transformación conforme, tenemos

$$\overline{M} = \{(z, w) \in \overline{\mathbb{C}}^2 / w^2 = z(z - a)(bz + 1)\}, \quad g(z, w) = z, \quad (z, w) \in \overline{M}, \quad (3.29)$$

donde $a, b \in \mathbb{C} - \{0\}$. Por tanto, $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (\infty, \infty)$. Como ϕ_3 es holomorfa en \overline{M} se tiene que $\phi_3 = A \frac{dz}{w}$, con $A \in \mathbb{C} - \{0\}$. Además, M se levanta a una superficie minimal simplemente periódica $S \subset \mathbb{R}^3$ que es simétrica respecto de la reflexión en un cierto plano Π . Como los finales son horizontales, Π sólo puede ser horizontal o vertical. Lo primero no puede ser, porque en tal caso el flujo de S podría calcularse como el flujo a lo largo de $\Pi \cap S$, y este vector es vertical, lo cual contradice el teorema 2.3.2. Luego Π ha de ser vertical, y salvo una rotación alrededor del eje x_3 podemos suponer que $\Pi = \{x_2 = 0\}$. La reflexión en Π produce una involución antiholomorfa B sobre \overline{M} tal que

$$B^* \phi_1 = \overline{\phi_1}, \quad B^* \phi_2 = -\overline{\phi_2}, \quad B^* \phi_3 = \overline{\phi_3}.$$

De esta última expresión podemos deducir fácilmente que $B(z, w) = (\overline{z}, \frac{A}{\overline{A}} \overline{w})$. Por tanto, $(\frac{A}{\overline{A}})^2 \overline{w}^2 = \overline{z}(\overline{z} - a)(b\overline{z} + 1)$, $(z, w) \in \overline{M}$, y usando (3.29) obtenemos

$$\left(\frac{\overline{A}}{A}\right)^2 (z - a)(bz + 1) = (z - \overline{a})(\overline{b}z + 1), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.30)$$

Evaluando en $z = a$ y $z = -\frac{1}{b}$ tenemos

$$(a - \overline{a})(a\overline{b} + 1) = 0, \quad (b - \overline{b})(a\overline{b} + 1) = 0. \quad (3.31)$$

Y comparando coeficientes en (3.30) se deduce que $\frac{A^2}{a}, \frac{A^2}{b} \in \mathbb{R}$. Por otro lado, (3.12) nos da las siguientes expresiones para los vectores torque asociados a finales:

$$\mathbf{T}_1 = -4\pi \left(0, \frac{A^2}{a}, 0\right), \quad \mathbf{T}_2 = -4\pi \left(0, \frac{A^2}{b}, 0\right).$$

Luego de (3.28) se deduce que

$$\mathbf{F}(\gamma) \wedge \mathbf{F}(\Gamma) = 4\pi \left(\frac{A^2}{b} - \frac{A^2}{a}, 0, 0 \right). \quad (3.32)$$

S corta al plano horizontal $\{x_3 = t\}$ en una curva simple γ_t que es cerrada para t distinto de las alturas de los finales. Cada curva compacta γ_t cortará al plano de simetría Π dos veces —por ser S simétrica respecto de Π , γ_t ha de cortar al menos dos veces a Π ; pero $\gamma_t \cap \Pi$ no puede tener más de dos puntos porque los puntos de $\gamma_t \cap \Pi$ pueden emparejarse de forma que cada pareja esté en el cierre de la misma componente de $\gamma_t - (\Pi \cap \gamma_t)$, y la simetría de γ_t respecto de Π fuerza a que sólo haya una de estas parejas—. Para una altura t de un final, γ_t sólo corta una vez a Π —uno de los puntos de $\gamma_t \cap \Pi$ diverge cuando t se aproxima a la altura de un final—. De esta forma, podemos definir dos curvas $\Gamma_1 = \Gamma_1(t), \Gamma_2 = \Gamma_2(t)$ contenidas en Π , que pueden verse como curvas cerradas en \overline{M} pasando por los finales. Tomemos ahora $\gamma = \gamma_{t_0}$ una de las curvas compactas anteriores. Así, Γ_1 corta una sólo vez a γ , $\{\gamma, \Gamma_1\}$ forman una base canónica de homología para \overline{M} y

$$B_*[\gamma] = -[\gamma], \quad B_*[\Gamma_1] = [\Gamma_1], \quad \operatorname{Re} \int_{\gamma} \Phi = 0.$$

Elegimos una curva Γ en la misma clase de homología que Γ_1 modificando ligeramente ésta en un entorno de cada final, de manera que la fórmula integral pueda ser aplicada a $\{\gamma, \Gamma\}$. Además,

$$\int_{\gamma} \Phi = - \int_{\gamma} B^* \Phi = - \int_{\gamma} (\overline{\phi}_1, -\overline{\phi}_2, \overline{\phi}_3),$$

luego $\mathbf{F}(\gamma) = (\alpha, 0, \beta)$ para ciertos números reales α, β . Análogamente se obtiene $\mathbf{F}(\Gamma) = (0, \delta, 0)$, con $\delta \in \mathbb{R}$. Como consecuencia, $\mathbf{F}(\gamma) \wedge \mathbf{F}(\Gamma) = (-\beta\delta, 0, \alpha\delta)$. Pero $\alpha \neq 0$, ya que por el teorema 2.3.2, $\mathbf{F}(\gamma)$ no puede ser vertical, luego (3.32) nos dice que $\delta = 0$ y que $a = b$. Si $a\bar{b} + 1 \neq 0$, de (3.31) se deduce que $a = b \in \mathbb{R}$, luego $A^2 \in \mathbb{R}$ y M es un ejemplo de Riemann. Y si $a\bar{b} + 1 = 0$, entonces $\frac{A^2}{a} = -|b|^2 \frac{A^2}{b}$, luego (3.32) implica

$$\mathbf{F}(\gamma) \wedge \mathbf{F}(\Gamma) = 4\pi (1 + |b|^2) \frac{A^2}{b} (1, 0, 0),$$

lo cual contradice que $\delta = 0$. Esto prueba el teorema.

Nota 3.3.1 Con este teorema damos otra respuesta parcial afirmativa a la conjetura planteada en la sección 2.3, que afirmaba que los ejemplos de Riemann son las únicas superficies minimales propiamente embebidas en un cociente de \mathbb{R}^3 por una traslación, con género uno y una cantidad finita de finales planos. Recientemente, este resultado ha sido mejorado por López, Ritoré y Wei [36], eliminando del mismo la hipótesis sobre la simetría respecto de un plano, aunque conservando el que el número de finales sea dos. En el capítulo 5 obtendremos información para el caso de cualquier tipo de finales.

3.3.2 Superficies con finales de tipo helicoides.

Sea $M = \overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^3/T$ una superficie minimal propiamente embebida de género k y con n finales de tipo helicoides, donde T es la traslación de vector $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ vertical. El desarrollo que hicimos en la subsección 1.4.2 nos dice que la aplicación de Gauss toma valores verticales en los finales, en cada final p_j el vector flujo es cero, las componentes ϕ_1, ϕ_2 de la 1-forma de Weierstrass de M no tienen residuo y podemos elegir una coordenada local holomorfa z alrededor alrededor de p_j que haga

$$\phi_3 = \frac{-i\beta}{z} dz, \quad (3.33)$$

donde β es un número real que mide la pendiente del Helicoides asintótico al final. Como consecuencia, podemos aplicar (3.5) y (3.6) integrando ϕ_1 y ϕ_2 , y (3.23) se verifica. Supongamos ahora que la aplicación de Gauss g toma el valor cero en un final p_j , luego localmente podemos expresarla como

$$g(z) = z^k t(z), \quad (3.34)$$

siendo $k \in \mathbb{N}$ el número de vueltas del final y t una función holomorfa tal que $t(0) \neq 0$. (3.33) y (3.34) nos dicen ahora que

$$\frac{1}{g} \phi_3 = \left(\frac{-i\beta}{t(0)z^{k+1}} + \sum_{i=-k}^{\infty} a_i z^i \right) dz, \quad g \phi_3 = \left(-i\beta t(0) z^{k-1} + \mathcal{O}(z^k) \right) dz.$$

Así,

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{-i\beta}{t(0)z^{k+1}} + \sum_{i=-k}^{k-2} a_i z^i + (a_{k-1} + i\beta t(0)) z^{k-1} + \mathcal{O}(z^k) \right) dz,$$

$$\phi_2 = \frac{i}{2} \left(\frac{-i\beta}{t(0)z^{k+1}} + \sum_{i=-k}^{k-2} a_i z^i + (a_{k-1} - i\beta t(0)) z^{k-1} + \mathcal{O}(z^k) \right) dz,$$

donde $a_{-1} = 0$ porque ϕ_1, ϕ_2 no tienen residuos en p_j . Si integramos estas expresiones, se obtienen

$$h_1(z) = c_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{i\beta}{kt(0)z^k} + \sum_{i=-k}^{k-2} \frac{a_i z^{i+1}}{i+1} + \frac{a_{k-1} + i\beta t(0)}{k} z^k + \mathcal{O}(z^{k+1}) \right),$$

$$h_2(z) = c_2 + \frac{i}{2} \left(\frac{i\beta}{kt(0)z^k} + \sum_{i=-k}^{k-2} \frac{a_i z^{i+1}}{i+1} + \frac{a_{k-1} - i\beta t(0)}{k} z^k + \mathcal{O}(z^{k+1}) \right),$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Por lo tanto,

$$\text{Res}_{p_j}(h_2\phi_3, -h_1\phi_3, h_1\phi_2) = \left(-i\beta c_2, i\beta c_1, \frac{i\beta^2}{2k} \right) \quad \text{si } g(p_j) = 0^k, \quad (3.35)$$

Análogamente,

$$\text{Res}_{p_j}(h_2\phi_3, -h_1\phi_3, h_1\phi_2) = \left(-i\beta c_2, i\beta c_1, -\frac{i\beta^2}{2k} \right) \quad \text{si } g(p_j) = \infty^k. \quad (3.36)$$

Vimos en la subsección 1.4.2 que la hipótesis de embebimiento de M implica que todas las pendientes en los finales coinciden salvo el signo, todos los números de vueltas también son iguales, el número de finales con pendiente positiva $\beta > 0$ es el mismo que el número de finales con pendiente negativa $-\beta$, y que todos los finales con $g(p_j) = 0$ tienen la misma pendiente, por ejemplo β , siendo los finales con $g(p_j) = \infty$ los de pendiente opuesta $-\beta$. Denotemos por k el número de vueltas común de todos los finales. De (3.23), (3.35) y (3.36) se deduce que

$$\sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \Phi \wedge \int_{\Gamma_i} \Phi = 2\pi \left[\sum_{E_\infty} (\beta c_{2,j}, -\beta c_{1,j}, 0) - \sum_{E_0} (\beta c_{2,j}, -\beta c_{1,j}, 0) \right], \quad (3.37)$$

donde $c_{1,j}, c_{2,j} \in \mathbb{C}$ aparecen expresando localmente h_1, h_2 alrededor del final p_j y E_0 (resp. E_∞) es el conjunto de finales donde $g(p_j) = 0$ (resp. $g(p_j) = \infty$). Si $E(p_j) = (\text{Re}(c_{1,j}), \text{Re}(c_{2,j}), 0)$, el eje del final de tipo helicoides es $E(p_j) + \langle \mathbf{P} \rangle$. En nuestra situación, si tenemos en cuenta que $\mathbf{P}_j = (0, 0, \pm 2\pi\beta)$, donde “+” se da si y sólo si $g(p_j) = 0$, y tomamos partes reales en (3.37) deducimos que

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{F}(\gamma_i) \wedge \mathbf{F}(\Gamma_i) = \sum_{E_0} E(p_j) \wedge \mathbf{P}_j + \sum_{E_\infty} E(p_j) \wedge \mathbf{P}_j.$$

Si escribimos todos los vectores período en términos de un período fijo \mathbf{P} , tendremos

Teorema 3.3.3 *Sea $M = \overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^3/T$ una superficie minimal propiamente embebida, de género k y con n finales de tipo helicoides, siendo T la traslación de vector $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$. Entonces,*

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{F}(\gamma_i) \wedge \mathbf{F}(\Gamma_i) = \left[\sum_{E_{\mathbf{P}}} E(p_j) - \sum_{E_{-\mathbf{P}}} E(p_j) \right] \wedge \mathbf{P}, \quad (3.38)$$

donde $E_{\mathbf{P}}$ (resp. $E_{-\mathbf{P}}$) es el conjunto de finales con vector período \mathbf{P} (resp. $-\mathbf{P}$) y $E(p_j) + \langle \mathbf{P} \rangle$ el eje del final de tipo helicoides p_j .

3.3.3 Superficies con finales de tipo Scherk.

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie minimal doblemente periódica y propiamente embebida. Podemos suponer que el retículo generado por las traslaciones que dejan invariante a S está formado sólo por vectores horizontales. Consideremos un dominio fundamental D en S . Si pegamos los lados de la frontera de D que estén relacionados por el retículo, obtendremos una superficie minimal propiamente embebida en el cociente $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ de \mathbb{R}^3 sobre dos traslaciones independientes que generen dicho retículo. Durante toda esta subsección supondremos que esta última superficie es orientable y tiene topología finita. Por el teorema 1.4.1 tenemos un embebimiento minimal y propio $M \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R}$, cuya estructura conforme es la de una superficie de Riemann compacta finitamente punteada, $M = \overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\}$. Llamemos k al género de \overline{M} . Si tomamos una base de homología $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ en \overline{M} que satisfaga las condiciones de la sección 3.1 y cortamos \overline{M} a lo largo de ciertas curvas de la base de homología de forma que las restantes curvas cerradas no produzcan períodos de M , obtendremos una superficie compacta con frontera —posiblemente vacía— \overline{M}_1 , que contendrá en su interior a los finales. Consideremos n curvas β_1, \dots, β_n que unan un mismo punto $x_0 \in \partial \overline{M}_1$ con cada uno de los finales —si $\partial \overline{M}_1$ fuera vacía, elegiríamos $x_0 \in \overline{M}_1 - \{p_1, \dots, p_n\}$ —, de forma que las curvas β_j no corten a las curvas de la base de homología —salvo posiblemente en x_0 —. Ahora cortemos \overline{M}_1 a lo largo de estas curvas, con lo que aparece una nueva superficie

con borde M_2 , con la propiedad de que podemos levantar M a un embebimiento minimal bien definido ψ en \mathbb{R}^3 tal que $\psi(M_2) = D$.

En la situación anterior, vimos en la subsección 1.4.1 que M tiene curvatura total finita, separa a $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ en dos componentes y la aplicación de Gauss g de M puede extenderse de forma holomorfa —y no cero— a los finales. Cada uno de estos finales puede parametrizarse conformemente por $D^* = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z| \leq 1\}$, de forma que la tercera función coordenada se escriba $x_3(z) = k \log |z| + k'$, $z \in D^*$, donde $k, k' \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, luego la tercera componente de la 1-forma de Weierstrass de M se escribe $\phi_3 = \frac{k}{z} dz$. La intersección de cada final superior con $\mathbb{T} \times \{t\}$ converge cuando $t \rightarrow \infty$ a una geodésica sobre el toro llano \mathbb{T} con longitud $\|\mathbf{P}\|$, donde \mathbf{P} es el vector período asociado al final. $\|\mathbf{P}\|$ no depende de dicho final superior, y todos los vectores período en los finales superiores son iguales salvo el signo. Lo mismo puede decirse de los finales inferiores. Además, el número de finales superiores (resp. de finales inferiores) es par, y lo denotaremos por $2n(S)$ (resp. $2n(I)$).

Sea W la componente de $(\mathbb{T} \times \mathbb{R}) - M$ hacia donde apunta la S^2 -aplicación de Gauss. $M \cap (\mathbb{T} \times \{t\})$, $t \gg 0$, se aproxima tanto como queramos a una colección de $2n(S)$ geodésicas paralelas en $\mathbb{T} \times \{t\}$. Si asignamos a cada geodésica el valor de la aplicación de Gauss en el final correspondiente, podremos emparejar los finales superiores formando $n(S)$ pares, de manera que en cada par tenemos dos finales con vector normal límite opuesto, cuyas trazas en $\mathbb{T} \times \{t\}$ son frontera de una componente de $W \cap (\mathbb{T} \times \{t\})$. Cuando $t \rightarrow \infty$, esta componente converge a una banda horizontal cuya frontera consiste en las dos geodésicas paralelas que se obtienen como límite de los conjuntos de nivel de los correspondientes finales. De esta forma conseguimos $n(S)$ *bandas superiores*, todas paralelas. Si llamamos B^S a cualquiera de estas bandas, podemos definir su *anchura* $W(B^S)$ como la distancia —medida en $\mathbb{T} \times \{t\}$ — entre las geodésicas que forman ∂B^S . Las *bandas inferiores* y sus anchuras se definen de forma análoga. Por ejemplo, las bandas superiores y las inferiores en la superficie de Scherk doblemente periódica —o en cualquier recubridor de ésta— tienen todas la misma anchura, y podemos encontrar ejemplos donde esto no se cumple en las superficies doblemente periódicas de Wei [62]. Estamos interesados en obtener una expresión analítica para la anchura de una de estas bandas. Tomemos un final p parametrizado por

$$g(z) = a + z^m t(z), \quad \phi_3 = \frac{k}{z} dz, \quad z \in D^*, \quad (3.39)$$

donde $a \in \mathbb{C} - \{0\}$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, y t es una función holomorfa en D tal que $t(0) \neq 0$. Así, el residuo R de $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ en el final es $R = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - a\right) k, \frac{i}{2} \left(\frac{1}{a} + a\right) k, k\right)$, luego los vectores período y flujo vienen dados, respectivamente, por

$$\mathbf{P} \equiv -\pi k \left(i \left(\frac{1}{a} + a \right), 0 \right) \equiv \frac{2\pi k}{1 - N_3^2} (N_2, -N_1, 0), \quad (3.40)$$

$$\mathbf{F} \equiv \pi k \left(\frac{1}{a} - a, 2 \right) \equiv \frac{-2\pi k}{1 - N_3^2} (N_1 N_3, N_2 N_3, N_3^2 - 1), \quad (3.41)$$

donde $N(p) = (N_1, N_2, N_3)$ es el valor que toma la aplicación de Gauss en el final. Por tanto,

$$\|\mathbf{P}\| = \pi |k| \left(\frac{1}{|a|} + |a| \right) = 2\pi \frac{|k|}{(1 - N_3^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.42)$$

Ya que dos finales del mismo tipo —o sea, ambos superiores o ambos inferiores— tienen iguales $\|\mathbf{P}\|$ y N_3^2 , de (3.42) se deduce que sus respectivos coeficientes k coincidirán. Llamemos $k_S < 0$ (resp. $k_I > 0$) al coeficiente k de cualquier final superior (resp. final inferior). A partir de (3.40) y de (3.41) se tiene que dos finales del mismo tipo tienen iguales sus vectores flujo, y que sus vectores período coinciden si y sólo si la aplicación de Gauss toma los mismos valores en dichos finales. En caso contrario, los vectores período son opuestos. Sea \mathbf{F}_S (resp. \mathbf{F}_I) el vector flujo en cualquiera de los finales superiores (resp. inferiores). Como el flujo total en los finales ha de anularse,

$$n(S)\mathbf{F}_S + n(I)\mathbf{F}_I = 0. \quad (3.43)$$

Además, el teorema 1.4.3 nos decía que cuando los finales superiores son paralelos a los inferiores, es $n(S) = n(I)$. En este caso, $\mathbf{F}_S = -\mathbf{F}_I$ y de (3.41) tenemos $k_S = -k_I$. Por otro lado, si los finales no fueran paralelos entonces serían verticales, y (3.41) nos daría $\mathbf{F} = 2\pi k e_3$, luego de (3.43) tendríamos $n(S)k_S + n(I)k_I = 0$, lo que generaliza la ecuación obtenida en el caso de finales paralelos. Nótese también que si todos los finales son paralelos entonces los vectores período asociados a finales de tipos distintos coincidirán si y sólo si sus vectores normales límite son opuestos.

Podemos escribir nuestra superficie minimal localmente alrededor de un final p como

$$\psi(z) = \operatorname{Re} \int^z (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \operatorname{Re} (C + \log z R + \mathcal{O}(z)), \quad z \in D^*$$

donde $C = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^3$ y $\mathcal{O}(z)$ es una aplicación holomorfa \mathbb{C}^3 -valuada que se anula en $z = 0$. De esta forma,

$$\psi(z) = \operatorname{Re}(C) + \frac{1}{2\pi} \log |z| \mathbf{F} + \frac{1}{2\pi} \arg(z) \mathbf{P} + \operatorname{Re}(\mathcal{O}(z)). \quad (3.44)$$

Supongamos que el final que estamos considerando es un final superior. Para una altura t positiva y muy grande, la traza del final sobre $\mathbb{T} \times \{t\}$ tiene la forma $\psi(\rho e^{i\theta}) = \alpha(\theta) + \operatorname{Re}(\mathcal{O}(\rho e^{i\theta}))$, $\theta \in [0, 2\pi]$, donde $\rho \in]0, 1[$ depende de t , y $\alpha(\theta) = \operatorname{Re}(C) + \frac{1}{2\pi} \log \rho \mathbf{F} + \frac{\theta}{2\pi} \mathbf{P}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ es una parametrización de un segmento horizontal a altura t , en la dirección de \mathbf{P} y con longitud $\|\mathbf{P}\|$. Por lo tanto, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\theta) d\theta$ es el vector de posición del centro de dicho segmento, que también depende de t . Si llamamos $N(p)$ al vector normal límite, el número real

$$d = \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\theta) d\theta, N(p) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\psi(\rho e^{i\theta}) - \operatorname{Re}(\mathcal{O}(\rho e^{i\theta}))] d\theta, N(p) \right\rangle$$

mide la distancia con signo desde el origen de \mathbb{R}^3 al plano afín tangente límite en dicho final, visto éste en el dominio D de la superficie doblemente periódica S como al principio de esta subsección. Claramente, esta distancia ya no depende de t , luego tomando límites cuando ρ tiende a cero llegamos a

$$d = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\rho e^{i\theta}) d\theta, N(p) \right\rangle. \quad (3.45)$$

La distancia anterior depende de la elección del origen de coordenadas, pero si consideramos dos finales superiores p_1, p_2 que determinen una banda superior B^S y llamamos d_1, d_2 a las distancias correspondientes definidas como arriba, la anchura de dicha banda viene dada por

$$W(B^S) = d_1 + d_2, \quad (3.46)$$

que ya no depende de la elección del origen.

Supongamos ahora que los finales son todos paralelos, luego $n(S) = n(I)$. Podremos agrupar ahora los finales en $2n(S)$ parejas, de manera que cada pareja contenga a dos finales de tipos distintos con el mismo normal límite: Consideremos un dominio fundamental D en la superficie doblemente periódica S como al principio de esta subsección. Sea Π_0 un plano paralelo al plano tangente límite en los finales, de forma que $\Pi_0 \cap S$ sea transversal. Denotaremos por $\{\Pi_d / d \in \mathbb{R}\}$ a la

foliación de \mathbb{R}^3 por planos paralelos a Π_0 con distancia $(\Pi_d, \Pi_0) = d \in \mathbb{R}$. Podemos suponer que $D \subset \cup_{d>0} \Pi_d$ eligiendo convenientemente Π_0 . De esta forma, existen números reales positivos $d_1^S < d_2^S < \dots < d_{2n(S)}^S$, $d_1^I < d_2^I < \dots < d_{2n(S)}^I$, tales que $\Pi_{d_1^S}, \dots, \Pi_{d_{2n(S)}^S}$ (resp. $\Pi_{d_1^I}, \dots, \Pi_{d_{2n(S)}^I}$) coinciden con los planos afines tangentes límite en los finales superiores (resp. inferiores) que están en D . También podemos elegir D de manera que los finales correspondientes a $\Pi_{d_1^S}, \Pi_{d_1^I}$ tengan el mismo vector normal límite. Por lo tanto los finales correspondientes a $\Pi_{d_j^S}, \Pi_{d_j^I}$ también tendrán el mismo vector normal límite, $1 \leq j \leq 2n(S)$. Esta es una de las parejas que queríamos definir. Nótese que esta pareja define una banda vertical $S_j \subset \mathbb{R}^3$ cuya frontera es $\Pi_{d_j^S} \cup \Pi_{d_j^I}$, y que la anchura de dicha banda vertical vale $A(S_j) = d_j^S - d_j^I$, entendiendo que esta anchura podría ser negativa o cero, con el consiguiente significado. Podemos obtener el valor de $A(S_j)$ a partir de (3.45): Llamando p_j^S, p_j^I al final superior y al inferior que determinan la banda vertical S_j y d^S, d^I a sus correspondientes distancias definidas como en (3.45), tenemos

$$A(S_j) = d^S - d^I. \quad (3.47)$$

Planteamiento general.

Nuestro próximo objetivo es relacionar las anchuras de las bandas definidas hasta ahora, que informan sobre la posición relativa de los finales en nuestra superficie, con datos que involucren la topología de la misma. Esto se conseguirá aplicando la fórmula integral de la sección 3.1 a las componentes de la 1-forma de Weierstrass. Por otro lado, en una superficie minimal propiamente embebida en \mathbb{R}^3/T o en $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ y con finales de tipo Scherk, siempre podemos suponer que dichas tres diferenciales ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 tienen polos simples en los finales. Vamos ahora a estudiar (3.5) en ambos ambientes, por lo que trabajaremos en una situación algo más general que nos permita englobar las dos situaciones. Sea \overline{M} una superficie de Riemann compacta de género k , y sean ϕ_a, ϕ_b dos diferenciales meromorfas sobre \overline{M} que satisfagan

1. $\text{Polos}(\phi_a) = \text{Polos}(\phi_b) = \{p_1, \dots, p_n\}$.
2. En cada p_j , ϕ_a y ϕ_b tienen polo simple.

Usando la misma notación de la sección 3.1, (3.5) nos da

$$\sum_{i=1}^k \left(\int_{\gamma_i} \phi_a \int_{\Gamma_i} \phi_b - \int_{\Gamma_i} \phi_a \int_{\gamma_i} \phi_b \right) = - \sum_{j=1}^n \left(\int_{\delta_j} \phi_a \int_{\beta_j} \phi_b + \int_{\delta_j} h_a \phi_b \right). \quad (3.48)$$

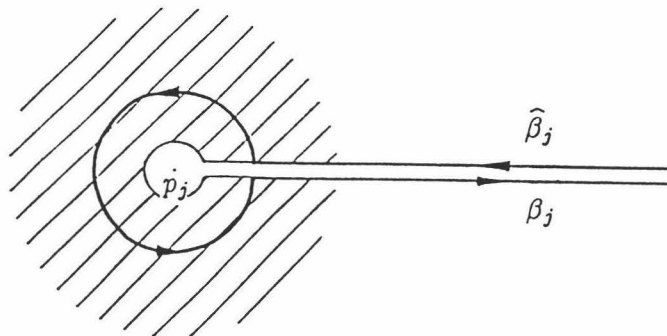


Figura 3.5:

Vamos a estudiar el miembro de la derecha de (3.48). Sea $R_j(a)$ el residuo de ϕ_a en p_j , y $(D^*(1 + \varepsilon), z)$ una coordenada local holomorfa centrada en p_j . Entonces,

$$\phi_a = \left(\frac{R_j(a)}{z} + f_{a,j}(z) \right) dz, \quad z \in D^*(1 + \varepsilon), \quad (3.49)$$

siendo $f_{a,j}$ una función holomorfa en $D(1 + \varepsilon)$. Así, una primitiva h_a de ϕ_a será

$$h_a(z) = c_{a,j} + R_j(a) \log z + \mathcal{O}_a(z), \quad (3.50)$$

donde $c_{a,j} \in \mathbb{C}$, $\mathcal{O}_a(z)$ es una función holomorfa que se anula en $z = 0$ y $\log z$ es la rama del logaritmo definida en $D(1 + \varepsilon) - \{z \in \mathbb{R} / 0 \leq |z| < 1 + \varepsilon\}$ que satisface —ver figura 3.5—

$$\log(\text{extremo inicial de } \beta_j) = 2\pi i, \quad \log(\text{extremo final de } \hat{\beta}_j) = 0.$$

Y podemos escribir expresiones similares para ϕ_b . De esta forma,

$$\begin{aligned} & \int_{\delta_j} \phi_a \int_{\beta_j} \phi_b + \int_{\delta_j} h_a \phi_b = \\ & = 2\pi i R_j(a) [h_b(\text{extremo final de } \beta_j) - h_b(\text{extremo inicial de } \beta_j)] + \\ & \quad + 2\pi i c_{a,j} R_j(b) - 2\pi^2 R_j(a) R_j(b) + R_j(a) \int_{\{|z|=1\}} f_{b,j}(z) \log z \, dz. \end{aligned}$$

Llamando F_b a una primitiva de $f_{b,j}$ en $D(1 + \varepsilon)$, se tiene que $\int_{\{|z|=1\}} f_{b,j}(z) \log z \, dz = 2\pi i [F_b(1) - F_b(0)]$. (3.50) nos dice que podemos tomar $F_b(z) = c_{b,j} + \mathcal{O}_b(z)$, y teniendo en cuenta cómo se ha elegido la rama del logaritmo,

$$\int_{\{|z|=1\}} f_{b,j}(z) \log z \, dz = 2\pi i [h_b(\text{extremo final de } \hat{\beta}_j) - c_{b,j}] =$$

$$= 2\pi i [-2\pi i R_j(b) + h_b(\text{extremo inicial de } \beta_j) - c_{b,j}].$$

Por otro lado, $h_b(\text{extremo final de } \beta_j) = h_b(x_0) + 2\pi i \sum_{h \leq j} R_h(b)$. Las últimas tres ecuaciones nos permiten reescribir (3.48) como

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \left(\int_{\gamma_i} \phi_a \int_{\Gamma_i} \phi_b - \int_{\Gamma_i} \phi_a \int_{\gamma_i} \phi_b \right) = \\ & = -2\pi i \sum_{j=1}^n (c_{a,j} R_j(b) - c_{b,j} R_j(a)) + 2\pi^2 \sum_{h < j} (R_j(a) R_h(b) - R_h(a) R_j(b)). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Tomemos ahora tres diferenciales meromorfas ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 sobre \overline{M} , de forma que

$$1'. \text{ Polos}(\phi_1) = \text{Polos}(\phi_2) = \text{Polos}(\phi_3) = \{p_1, \dots, p_n\},$$

$$2'. \text{ En cada } p_j, \phi_i \text{ tiene polo simple, } 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq n.$$

De aquí al final de esta subsección usaremos la siguiente notación:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= (\phi_1, \phi_2, \phi_3), \quad H = (h_1, h_2, h_3) = \int \Phi, \\ R_j &= (R_j(1), R_j(2), R_j(3)) = \text{Res}_{p_j} \Phi \\ P_j &= \text{Re} \int_{\delta_j} \Phi = -2\pi \text{Im}(R_j) \\ F_j &= \text{Im} \int_{\delta_j} \Phi = 2\pi \text{Re}(R_j) \end{aligned} \right\} \quad 1 \leq j \leq n \quad (3.52)$$

$$\left. \begin{aligned} P(\gamma_i) &= \text{Re} \int_{\gamma_i} \Phi \\ F(\gamma_i) &= \text{Im} \int_{\gamma_i} \Phi \end{aligned} \right\} \text{ y lo mismo para } \Gamma_i, \quad 1 \leq i \leq k$$

Localmente en un polo p_j , H se puede escribir como

$$H(z) = C_j + \log z R_j + \mathcal{O}(z), \quad (3.53)$$

donde $C_j = (c_{1,j}, c_{2,j}, c_{3,j}) \in \mathbb{C}^3$, $\log z$ es la rama del logaritmo con la que venimos trabajando y $\mathcal{O}(z)$ es una aplicación holomorfa y \mathbb{C}^3 -valuada que se anula en $z = 0$. Ahora podemos escribir (3.51) como

$$\sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \Phi \wedge \int_{\Gamma_i} \Phi = -2\pi i \sum_{j=1}^n C_j \wedge R_j + 2\pi^2 \sum_{h < j} R_j \wedge R_h. \quad (3.54)$$

Nótese que C_j depende de la coordenada local z , pero esto no ocurre con $C_j \wedge R_j$.

Caso doblemente periódico.

Tomemos S , D y M como al principio de esta subsección. Si usamos la notación de arriba, (3.53) nos dice que

$$C_j \wedge R_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z|=\rho\}} \frac{C_j \wedge R_j}{z} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\rho e^{i\theta}) d\theta \wedge R_j.$$

Obsérvese que la expresión anterior no depende de ρ . Separando partes real e imaginaria,

$$\operatorname{Re}(C_j \wedge R_j) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_0^{2\pi} \psi(\rho e^{i\theta}) d\theta \wedge F_j + \int_0^{2\pi} \psi^*(\rho e^{i\theta}) d\theta \wedge P_j \right), \quad (3.55)$$

$$\operatorname{Im}(C_j \wedge R_j) = \frac{1}{4\pi^2} \left(- \int_0^{2\pi} \psi(\rho e^{i\theta}) d\theta \wedge P_j + \int_0^{2\pi} \psi^*(\rho e^{i\theta}) d\theta \wedge F_j \right), \quad (3.56)$$

siendo ψ^* la inmersión conjugada. Además,

$$R_j \wedge R_h = -\frac{1}{4\pi^2} P_j \wedge P_h - \frac{i}{4\pi^2} (F_j \wedge P_h + P_j \wedge F_h),$$

donde hemos usado (3.43) para cancelar $F_j \wedge F_h$. Si ahora separamos también (3.54) en partes real e imaginaria, tendremos

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^k [P(\gamma_i) \wedge P(\Gamma_i) - F(\gamma_i) \wedge F(\Gamma_i)] = \\ & = \frac{-1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^{2\pi} \psi(\rho e^{i\theta}) d\theta \wedge P_j - \int_0^{2\pi} \psi^*(\rho e^{i\theta}) d\theta \wedge F_j \right) - \frac{1}{2} \sum_{h < j} P_j \wedge P_h \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^k [P(\gamma_i) \wedge F(\Gamma_i) + F(\gamma_i) \wedge P(\Gamma_i)] = \\ & = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^{2\pi} \psi(\rho e^{i\theta}) d\theta \wedge F_j + \int_0^{2\pi} \psi^*(\rho e^{i\theta}) d\theta \wedge P_j \right) - \\ & \quad - \frac{1}{2} \sum_{h < j} (F_j \wedge P_h + P_j \wedge F_h). \end{aligned} \right\} \quad (3.58)$$

Reenumerando convenientemente, podemos suponer que $p_1, \dots, p_{2n(S)}$ son los finales superiores y $p_{2n(S)+1}, \dots, p_n$ los inferiores. Así, el último término del miembro de la derecha de (3.57) vale cero. Por otro lado, podemos eliminar en (3.57),

(3.58) aquellos sumandos donde aparezca ψ^* si consideramos las componentes de las fórmulas en direcciones convenientes: Sea $\mathbf{F} = n(S)\mathbf{F}_S = -n(I)\mathbf{F}_I$. Entonces,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{P}(\gamma_i) \wedge \mathbf{P}(\Gamma_i) - \mathbf{F}(\gamma_i) \wedge \mathbf{F}(\Gamma_i), \mathbf{F} \rangle = \\ & = -n(S) \sum_{\substack{\text{finales} \\ \text{superiores}}} \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\rho e^{i\theta}) d\theta, \mathbf{P}_j \wedge \mathbf{F}_S \right\rangle + \\ & + n(I) \sum_{\substack{\text{finales} \\ \text{inferiores}}} \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\rho e^{i\theta}) d\theta, \mathbf{P}_j \wedge \mathbf{F}_I \right\rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado, (3.40), (3.41), (3.42) nos dicen que

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}_j \wedge \mathbf{F}_S &= -\|\mathbf{P}_j\|^2 N(p_j) & \text{si } p_j \text{ es un final superior,} \\ \mathbf{P}_j \wedge \mathbf{F}_I &= -\|\mathbf{P}_j\|^2 N(p_j) & \text{si } p_j \text{ es un final inferior.} \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

Luego el miembro de la derecha de la última expresión es

$$\begin{aligned} & n(S) \|\mathbf{P}\|_S^2 \sum_{\substack{\text{finales} \\ \text{superiores}}} \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\rho e^{i\theta}) d\theta, N(p_j) \right\rangle - \\ & - n(I) \|\mathbf{P}\|_I^2 \sum_{\substack{\text{finales} \\ \text{inferiores}}} \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\rho e^{i\theta}) d\theta, N(p_j) \right\rangle, \end{aligned}$$

donde $\|\mathbf{P}\|_S$ es la longitud del vector período en cualquier final superior, y $\|\mathbf{P}\|_I$ se define análogamente para finales inferiores. Tomando límites cuando ρ tiende a cero, (3.45) y (3.46) nos dan

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{P}(\gamma_i) \wedge \mathbf{P}(\Gamma_i) - \mathbf{F}(\gamma_i) \wedge \mathbf{F}(\Gamma_i), \mathbf{F} \rangle = \\ & = n(S) \|\mathbf{P}\|_S^2 \sum_{\substack{\text{finales} \\ \text{superiores}}} d_j - n(I) \|\mathbf{P}\|_I^2 \sum_{\substack{\text{finales} \\ \text{inferiores}}} d_j = \\ & = n(S) \|\mathbf{P}\|_S^2 \sum_{j=1}^{n(S)} W(B_j^S) - n(I) \|\mathbf{P}\|_I^2 \sum_{j=1}^{n(I)} W(B_j^I), \end{aligned}$$

donde $W(B_j^S), W(B_j^I)$ son las anchuras de las bandas superiores e inferiores, respectivamente. Si ahora queremos eliminar los términos con ψ^* de (3.58) necesitaremos que todos los vectores período lleven la misma dirección. Por lo tanto, supondremos que todos los finales son paralelos. De esta forma, $n(S) = n(I)$ y $F_S = -F_I$. Fijemos un final, por ejemplo superior, p_1 , y sea P_1 su vector período. A partir de (3.58) tenemos que

$$\sum_{i=1}^k \langle P(\gamma_i) \wedge F(\Gamma_i) + F(\gamma_i) \wedge P(\Gamma_i), P_1 \rangle = - \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\rho e^{i\theta}) d\theta, F_j \wedge P_1 \right\rangle.$$

Y de (3.59) se deduce que

$$F_j \wedge P_1 = \begin{cases} \|P_j\|^2 N(p_j) & \text{si } p_j \text{ es un final superior con } N(p_j) = N(p_1), \text{ ó} \\ & p_j \text{ es un final inferior con } N(p_j) = -N(p_1), \\ -\|P_j\|^2 N(p_j) & \text{si } p_j \text{ es un final superior con } N(p_j) = -N(p_1), \text{ ó} \\ & p_j \text{ es un final inferior con } N(p_j) = N(p_1). \end{cases}$$

$$\text{Así, } \sum_{i=1}^k \langle P(\gamma_i) \wedge F(\Gamma_i) + F(\gamma_i) \wedge P(\Gamma_i), P_1 \rangle =$$

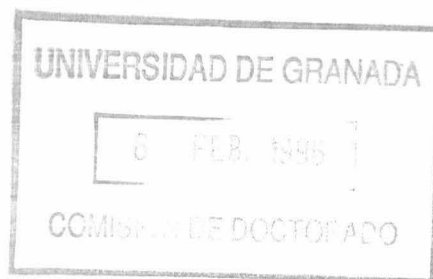
$$= \|P_1\|^2 \left[- \sum_{S_+} \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\rho e^{i\theta}) d\theta, N(p_j) \right\rangle + \sum_{S_-} \langle \cdot, \cdot \rangle + \sum_{I_+} \langle \cdot, \cdot \rangle - \sum_{I_-} \langle \cdot, \cdot \rangle \right],$$

donde S_+ (resp. S_-) es el conjunto de finales superiores con $N(p_j) = N(p_1)$ (resp. $N(p_j) = -N(p_1)$), y I_+, I_- se definen de forma análoga para finales inferiores, y todos los productos escalares de la última expresión tienen el mismo argumento. Si ahora tomamos límites cuando ρ tiende a cero y usamos (3.47), el miembro de la derecha se transforma en

$$\|P_1\|^2 \left[- \sum_{N(p_j)=N(p_1)} A(S_j) + \sum_{N(p_j)=-N(p_1)} A(S_j) \right],$$

donde $A(S_j)$ es la anchura de la banda vertical S_j definida como en (3.47) y la suma anterior se realiza en todo el conjunto de finales. Con esto, ya podemos enunciar el siguiente

Teorema 3.3.4 Sea $M = \overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ una superficie minimal propiamente embebida de género k y n finales. Entonces,



$$\begin{aligned}
 i) \quad \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{P}(\gamma_i) \wedge \mathbf{P}(\Gamma_i) - \mathbf{F}(\gamma_i) \wedge \mathbf{F}(\Gamma_i), \mathbf{F} \rangle = \\
 = n(S) \|\mathbf{P}\|_S^2 \sum_{j=1}^{n(S)} W(B_j^S) - n(I) \|\mathbf{P}\|_I^2 \sum_{j=1}^{n(I)} W(B_j^I),
 \end{aligned}$$

siendo $2n(S)$ el número de finales superiores, $2n(I)$ el número de finales inferiores, $\|\mathbf{P}\|_S, \|\mathbf{P}\|_I$ las longitudes de los vectores período en los finales superiores e inferiores, $\mathbf{F} = n(S)\mathbf{F}_S = -n(I)\mathbf{F}_I$ y $W(B_j^S), W(B_j^I)$ las anchuras de las bandas superiores e inferiores, respectivamente.

ii) Además, si todos los finales son paralelos,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{P}(\gamma_i) \wedge \mathbf{F}(\Gamma_i) + \mathbf{F}(\gamma_i) \wedge \mathbf{P}(\Gamma_i), \mathbf{P}_1 \rangle = \\
 = -\|\mathbf{P}_1\|^2 \left[\sum_{\substack{\text{finales con} \\ N(p_j)=N(p_1)}} A(S_j) - \sum_{\substack{\text{finales con} \\ N(p_j)=-N(p_1)}} A(S_j) \right],
 \end{aligned}$$

donde $A(S_j)$ es la anchura de cada banda determinada por dos finales paralelos en el sentido de (3.47).

Caso simplemente periódico.

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie minimal no llana, propiamente embebida e invariante por una traslación T de vector $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, que supondremos vertical. S induce de forma natural una superficie minimal orientable en el cociente \mathbb{R}^3/T . Supongamos que dicha superficie tiene topología finita, luego por el teorema 1.4.1 será conformemente equivalente a una superficie de Riemann finitamente punteada, y tendremos una superficie minimal propiamente embebida $M \subset \mathbb{R}^3/T$, siendo $M = \overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\}$, donde \overline{M} es una superficie de Riemann compacta de género k y $\{p_1, \dots, p_n\}$ son los finales de M . Vamos a suponer que los finales son de tipo Scherk, o sea, son asintóticos a anillos llanos verticales. Como vimos en la subsección 1.4.1, tras una rotación alrededor del eje x_3 en \mathbb{R}^3 podemos suponer sin pérdida de generalidad que las tres diferenciales ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 de la 1-forma de Weierstrass de M —que está bien definida en \overline{M} — tienen polos simples en los finales, y

si el vector límite es $g(p_j) = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ entonces de (1.12) se tiene que

$$\left. \begin{aligned} R_j &= a(\sin \theta, -\cos \theta, i), \\ \mathbf{P}_j &= (0, 0, -2\pi a), \quad \mathbf{F}_j = 2\pi a(\sin \theta, -\cos \theta, 0), \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

donde hemos usado la notación de (3.52). Por tanto, todos los coeficientes a son iguales salvo el signo. Podemos hablar de finales consecutivos cortando la superficie simplemente periódica S con un cilindro vertical C_R de radio R muy grande de forma que las trazas sobre C_R de los finales sean aproximadamente líneas rectas verticales. Como el vector flujo en cada final apunta a la componente simplemente conexa de $\mathbb{R}^3 - C_R$ y la aplicación de Gauss apunta a una componente fija de $\mathbb{R}^3 - S$, tenemos que dos finales consecutivos tendrán siempre coeficientes a opuestos y vectores período también opuestos. En particular, el número de finales ha de ser par, y hay tantos con coeficiente a positivo como con dicho coeficiente negativo. Nótese también que de $\sum \mathbf{F}_j = 0$ y (3.60) tenemos

$$\sum_{j=1}^n a_j N(p_j) = 0, \quad (3.61)$$

donde a_j es el coeficiente a en el final p_j . Sea $a > 0$ el a -coeficiente positivo. (3.44) sigue siendo válida, y razonando como al principio de esta subsección, la distancia d_j definida en (3.45) mide la distancia con signo desde el origen de \mathbb{R}^3 hasta el plano afín tangente límite de la superficie levantada en el final p_j . Tal distancia depende de la elección del origen de coordenadas, pero (3.61) implica la independencia de dicha elección de

$$\sum_{\langle \mathbf{P}_j, \mathbf{e}_3 \rangle > 0} d_j - \sum_{\langle \mathbf{P}_j, \mathbf{e}_3 \rangle < 0} d_j. \quad (3.62)$$

Esta última expresión tiene también un significado físico en términos de la resultante de un sistema de fuerzas: Para ello, consideremos un cilindro vertical C_R de radio R muy grande, de forma que S sólo corte a C_R en un entorno de cada final. Así tenemos una superficie minimal no compacta $S_R \subset S$ dentro de la componente convexa de $\mathbb{R}^3 - C_R$, cuya frontera consiste en n curvas sobre C_R muy similares a líneas rectas verticales, y cada vector flujo en los finales puede verse como la tensión producida por el correspondiente final sobre S_R . Tomemos un final p_j con vectores período y flujo $\mathbf{P}_j, \mathbf{F}_j$ respectivamente. El momento de \mathbf{F}_j respecto del eje x_3 vendrá dado por $M_j = d_j N(p_j) \wedge \mathbf{F}_j = d_j \mathbf{P}_j$, donde hemos usado (3.60),

luego el momento resultante es

$$\sum_{i=1}^n M_j = \left(\sum_{\langle \mathbf{P}_j, \mathbf{e}_3 \rangle > 0} d_j - \sum_{\langle \mathbf{P}_j, \mathbf{e}_3 \rangle < 0} d_j \right) \mathbf{P},$$

supuesto que $\langle \mathbf{P}, \mathbf{e}_3 \rangle > 0$. De esta forma, una condición de equilibrio para S sería $\sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j = 0$, $\sum_{j=1}^n M_j = 0$. La primera ecuación se cumple trivialmente. La segunda es consecuencia del siguiente resultado:

Teorema 3.3.5 *Sea $M = \overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^3/T$ una superficie minimal propiamente embebida de género k , donde T es una traslación de vector $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, con n finales de tipo Scherk. Entonces,*

$$\sum_{\mathbf{P}_j = \mathbf{P}} d_j = \sum_{\mathbf{P}_j = -\mathbf{P}} d_j,$$

donde \mathbf{P}_j es el vector período en el final p_j y d_j la distancia con signo desde el origen hasta el plano afín tangente límite en dicho final, definida en (3.45).

Demostración. Volvamos a la ecuación (3.54). Las expresiones (3.55), (3.56) siguen siendo ciertas, y:

$$R_j \wedge R_h = \frac{1}{4\pi^2} \mathbf{F}_j \wedge \mathbf{F}_h - \frac{i}{4\pi^2} (\mathbf{F}_j \wedge \mathbf{P}_h + \mathbf{P}_j \wedge \mathbf{F}_h).$$

Tomando partes imaginarias en (3.54),

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k [\mathbf{P}(\gamma_i) \wedge \mathbf{F}(\Gamma_i) + \mathbf{F}(\gamma_i) \wedge \mathbf{P}(\Gamma_i)] = \\ & = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^{2\pi} \psi(\rho e^{i\theta}) d\theta \wedge \mathbf{F}_j + \int_0^{2\pi} \psi^*(\rho e^{i\theta}) d\theta \wedge \mathbf{P}_j \right) \\ & \quad - \frac{1}{2} \sum_{h < j} (\mathbf{F}_j \wedge \mathbf{P}_h + \mathbf{P}_j \wedge \mathbf{F}_h). \end{aligned}$$

Luego $0 = \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\rho e^{i\theta}) d\theta, \mathbf{F}_j \wedge \mathbf{P} \right\rangle$. Además, (3.60) nos da

$$\mathbf{F}_j \wedge \mathbf{P}_j = \|\mathbf{P}\|^2 N(p_j),$$

luego la última expresión se transforma en

$$0 = \|\mathbf{P}\|^2 \left[\sum_{\mathbf{P}_j=\mathbf{P}} \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\rho e^{i\theta}) d\theta, N(p_j) \right\rangle - \sum_{\mathbf{P}_j=-\mathbf{P}} \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\rho e^{i\theta}) d\theta, N(p_j) \right\rangle \right].$$

Tomando límites cuando ρ tiende a cero y usando (3.45) se termina la demostración.

Capítulo 4

El espacio de superficies minimales con curvatura total finita.

Los trabajos de Bohme, Tomi, Tromba, White y otros [2, 58, 59, 64, 65, 66] han puesto de manifiesto la utilidad de disponer de una estructura de variedad diferenciable —de dimensión infinita— sobre ciertos espacios de superficies minimales compactas y con borde. Dedicaremos este capítulo a estudiar bajo este punto de vista el espacio \mathcal{M} de superficies minimales propiamente inmersas en \mathbb{R}^3 , con curvatura total finita y finales embebidos horizontales, fijando la topología de las mismas pero no la estructura conforme. Empezaremos estudiando la topología natural de dicho espacio y localizaremos los elementos de \mathcal{M} próximos a uno dado M como grafos sobre éste, centrándonos en el comportamiento de dichos grafos en un entorno de los finales. Esto permitirá escribir las superficies próximas a M como los ceros de un cierto operador real analítico cuya diferencial está íntimamente relacionada con el *operador de Jacobi* clásico. Usando argumentos del tipo del Teorema de la función Implícita probaremos que bajo hipótesis de no degeneración, el espacio \mathcal{M} tiene una estructura natural de variedad analítica finito-dimensional y daremos explícitamente una inmersión Lagrangiana de la misma en un cierto espacio Euclídeo complejo. Como aplicación, veremos que si una superficie minimal no degenerada presenta una simetría que conserva el semiespacio superior, entonces todas las superficies de \mathcal{M} próximas a ésta poseen simetrías del mismo tipo. También obtendremos resultados de estructura para espacios de moduli de superficies con simetrías o de superficies con finales no paralelos y direcciones nor-

males límite prescritas.

4.1 La coordenada grafo en un final embebido.

Consideremos una inmersión minimal, conforme, completa y con curvatura total finita $\psi : M \rightarrow \mathbf{R}^3$ de una superficie orientable M . Como hasta ahora, llamaremos g y ω a la función meromorfa y la 1-forma holomorfa determinadas por la representación de Weierstrass de ψ ,

$$\psi = \left(\frac{1}{2} \left(\overline{\int \omega} - \int g^2 \omega \right), \operatorname{Re} \int g \omega \right) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R} \equiv \mathbf{R}^3. \quad (4.1)$$

El teorema 1.3.1 nos dice que la estructura conforme de M es la de una superficie de Riemann compacta menos un número finito de puntos $\overline{M} - \{p_1, \dots, p_r\}$, y que su representación de Weierstrass se extiende de forma meromorfa a \overline{M} . Supongamos que los finales de ψ son embebidos y paralelos —estas condiciones han de verificarse cuando ψ sea un embebimiento—. Tras una conveniente rotación de nuestra superficie en \mathbf{R}^3 , podemos también suponer que su aplicación de Gauss N toma en los finales valores verticales. En tales condiciones, la proposición 1.3.2 nos asegura que cada final ha de ser asintótico a un final de una Catenoide o de un plano, y si el vector normal límite en un final p_i es $(0, 0, 1)$, la representación de Weierstrass de ψ se escribe, en una coordenada local holomorfa centrada z centrada en p_i , como

$$g(z) = \frac{g_1(z)}{z^k}, \quad \omega = f(z)z^{2(k-1)}dz, \quad |z| < \varepsilon,$$

donde $k \in \mathbf{N}$ y g_1, f son funciones holomorfas que verifican $g_1(0) \neq 0, f(0) \neq 0$. De esta forma, (4.1) implica

$$\psi(z) = \left(\frac{1}{2} \left(\overline{f_1(z)} - \int \frac{g_1^2 f}{z^2} dz \right), \operatorname{Re} \int g_1 f z^{k-2} dz \right),$$

siendo f_1 una función holomorfa en $\{|z| < \varepsilon\}$. Para asegurar que la expresión anterior esté bien definida, debemos imponer $(g_1^2 f)'(0) = 0$ y, cuando $k = 1$, también que $(g_1 f)(0) \in \mathbf{R}$. Y por tanto, podemos escribir

$$\psi(z) = \left(\frac{t(z)}{z}, -a \log |z| + t_1(z) \right), \quad (4.2)$$

donde $a \in \mathbb{R}$, t es una función diferenciable, valuada compleja y sin ceros definida en $\{|z| < \varepsilon\}$ y t_1 es una función armónica en $\{|z| < \varepsilon\}$. Si $k = 1$, a no puede anularse y ψ es asintótico a un final de una Catenoide vertical con crecimiento logarítmico a . Cuando $k \geq 2$, la tercera función coordenada está acotada y ψ es asintótico a un plano horizontal. Simétricamente, si el normal límite en el final viene dado por $(0, 0, -1)$, la representación de Weierstrass será del tipo $g(z) = g_1(z)z^k$, $\omega = f(z)z^{-2}dz$ y razonando de manera parecida llegamos a $\psi(z) = \left(\frac{t(z)}{\bar{z}}, -a \log |z| + t_1(z)\right)$, donde a, t, t_1 son como arriba.

Tomemos un final p_i de ψ donde N apunte a $(0, 0, 1)$. De (4.2) tenemos que, con la notación $\psi = (x_1 + ix_2, x_3)$ y después de aplicar la inversión en \mathbb{C} de $x_1 + ix_2$, obtenemos una nueva coordenada local w sobre \overline{M} , no conforme, que cumple $w = \frac{1}{x_1 + ix_2} = \frac{\bar{z}}{t(z)}$ y tal que ψ ahora se escribe

$$\psi(w) = \left(\frac{1}{w}, -a \log |w| + h(w)\right),$$

siendo h una función valuada real y diferenciable en $\{|w| < \delta\}$. Si fuera $N(p_i) = (0, 0, -1)$ habríamos llegado a $\psi(z) = \left(\frac{t(z)}{\bar{z}}, -a \log |z| + t_1(z)\right)$, luego en función de $w = \frac{1}{x_1 + ix_2} = \frac{\bar{z}}{t(z)}$, la expresión anterior para $\psi(w)$ sigue siendo cierta. Con esto tenemos la siguiente

Proposición 4.1.1 *Sea A un final minimal propiamente embebido en \mathbb{R}^3 , con curvatura total finita y vector normal límite vertical. Entonces, existe un número real positivo δ tal que A se parametriza por*

$$\psi(w) = \left(\frac{1}{w}, -a \log |w| + h(w)\right), \quad 0 < |w| < \delta, \quad (4.3)$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es el crecimiento logarítmico de A y h es una función diferenciable en $\{|w| < \delta\}$.

En la situación anterior, llamaremos a w la *coordenada grafo* en el final. Además del crecimiento logarítmico, podemos asociar a cada final su *altura* $h(0)$: Si el final es de tipo catenoide, su crecimiento logarítmico coincide con el de la semi-Catenoide a la que es asintótico y su altura difiere de la tercera coordenada del centro de dicha semi-Catenoide en el término $a \log \left|\frac{a}{2}\right|$, como puede comprobarse

usando la coordenada grafo de esta semi-Catenoide. Cuando A es un final plano, el crecimiento logarítmico vale cero y su altura es la del plano asintótico. Nótese también que si $\gamma \subset A$ es una curva cerrada no nulhomotópica, el crecimiento logarítmico puede recuperarse a partir de la fórmula $\int_{\gamma} \eta \, ds = -2\pi a e_3$, donde η es el vector conormal unitario a lo largo de γ y $e_3 = (0, 0, 1)$.

Para un embebimiento minimal, conforme, propio y con curvatura total finita $\psi : M = \overline{M} - \{p_1, \dots, p_r\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ con finales horizontales, usaremos la notación $\log(\psi) = (a_1, \dots, a_r)$, $\text{altura}(\psi) = (b_1, \dots, b_r)$ para las listas de crecimientos logarítmicos y de alturas de los finales de ψ . En estas condiciones, podemos ordenar de forma natural estos finales respecto de la tercera coordenada x_3 . Este orden ya se usó en la demostración del corolario 3.2.2, y coincide con el orden lexicográfico sobre los pares (crecimiento logarítmico, altura) en los finales. El principio del máximo en el infinito —teorema 1.5.2— implica que para finales distintos de ψ , los pares anteriores han de ser también distintos.

Recordemos que toda superficie minimal que se escriba como grafo sobre el dominio $\{|x_1 + ix_2| > \frac{1}{\delta}\}$ es completa y estable, luego por [15] tiene curvatura total finita, y por tanto admite la representación dada por (4.3).

4.2 El operador curvatura media en un final de curvatura total finita.

Sean $\varepsilon > 0$ y $\psi : \{0 < |w| < \varepsilon\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión no necesariamente minimal del tipo

$$\psi(w) = \left(\frac{1}{w}, -a \log |w| + h(w) \right), \quad (4.4)$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y $h \in C^{2,\alpha}(\{|w| < \varepsilon\})$, siendo éste último el espacio de Hölder usual. Sean $\rho = |w|$ y $u = -a \log \rho + h$. La métrica inducida $ds^2 = (g_{ij})_{i,j}$ viene dada por

$$g_{ij}(w) = \frac{1}{\rho^4} (\delta_{ij} + \rho^4 D_i u D_j u), \quad (4.5)$$

donde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ es el delta de Kronecker, y $D_i u$ representa la primera derivada parcial correspondiente de u . Llamando dA —resp. dA_0 — al elemento

de área asociado a la métrica ds^2 —resp. $|dw|^2$ —, (4.5) implica que

$$dA = \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{\rho^4} dA_0, \quad \text{donde} \quad Q = 1 + \rho^4 \|\nabla_0 u\|^2, \quad (4.6)$$

y el subíndice \bullet_0 quiere decir que el objeto correspondiente ha sido calculado respecto de la métrica llana del w -plano. Como $u = -a \log \rho + h$, tenemos que $\rho^2 D_i u = -a \langle w, e_i \rangle + \rho^2 D_i h$ pertenece a $C^{1,\alpha}(\{|w| < \varepsilon\})$ y que depende analíticamente de sus tres variables a, w y $\nabla_0 h$. Además, $Q = 1 + \rho^2 Q_1$, donde

$$Q_1 = \rho^2 \|\nabla_0 u\|^2 = a^2 + \rho^2 \|\nabla_0 h\|^2 - 2a \langle w, \nabla_0 h \rangle.$$

Y por tanto, $Q, Q_1 \in C^{1,\alpha}$, y Q, Q_1, g_{ij}, dA son también analíticos en sus tres variables.

Por otro lado, la aplicación de Gauss de ψ se escribe

$$N = Q^{-\frac{1}{2}} (\bar{w}^2 \nabla_0 u, 1) = Q^{-\frac{1}{2}} (-a\bar{w} + \bar{w}^2 \nabla_0 h, 1), \quad (4.7)$$

donde $\bar{w}^2 \nabla_0 u$ denota el producto de los números complejos \bar{w}^2 y $\nabla_0 u$.

Lema 4.2.1 *En la situación anterior,*

- i) $N \in C^{1,\alpha}(\{|w| < \varepsilon\}, \mathbf{R}^3)$ y depende analíticamente de sus tres variables, $(a, w, \nabla_0 h) \in \mathbf{R} \times \{|w| < \varepsilon\} \times \mathbf{C}$.
- ii) Si $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base usual de \mathbf{R}^3 , entonces las funciones $\langle N, e_1 \rangle, \langle N, e_2 \rangle, \det(\psi, N, e_3)$ están en $C^{1,\alpha}(\{|w| < \varepsilon\})$, dependen analíticamente de sus variables a, w y $\nabla_0 h$ y se anulan en $w = 0$.
- iii) La función soporte de ψ es del tipo $\langle \psi, N \rangle = -a \langle N, e_3 \rangle \log \rho + f(a, w, h, \nabla_0 h)$, donde $f \in C^{1,\alpha}(\{|w| < \varepsilon\})$, toma el valor $-a + h(0)$ en $w = 0$ y depende analíticamente de sus variables $(a, w, h, \nabla_0 h) \in \mathbf{R} \times \{|w| < \varepsilon\} \times \mathbf{R} \times \mathbf{C}$.

Demostración. i) es consecuencia inmediata de (4.7) y del comentario anterior a este lema sobre Q . En cuanto a ii), sólo tenemos que calcular $\det(\psi, N, e_3)$ a partir de (4.4) y (4.7):

$$\det(\psi, N, e_3) = \det \left(\left(\frac{1}{w}, 0 \right), Q^{-\frac{1}{2}} (-a\bar{w} + \bar{w}^2 \nabla_0 h, 0), (0, 1) \right) =$$

$$= Q^{-\frac{1}{2}} \left\langle \frac{i}{w}, -a\bar{w} + \bar{w}^2 \nabla_0 h \right\rangle = -Q^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Re} (i\bar{w} \nabla_0 h):$$

Finalmente, de (4.4) y (4.7) se deduce que

$$\langle \psi, N \rangle = -a \langle N, e_3 \rangle \log \rho + \langle N, e_3 \rangle (-a + \operatorname{Re} (\bar{w} \nabla_0 h) + h).$$

Esto termina la demostración.

Por otro lado, ya que podemos ver ψ como el grafo de la función $u(x_1 + ix_2)$ con $x_1 + ix_2 = \frac{1}{w}$, su curvatura media vendrá dada por

$$2H(x_1 + ix_2) = \operatorname{div}_1 \left(\frac{\nabla_1 u}{\sqrt{1 + \|\nabla_1 u\|^2}} \right),$$

donde el subíndice \bullet_1 significa que el objeto correspondiente se calcula respecto de la métrica llana usual en el plano $x_1 + ix_2$. Usando que

$$\rho^4 (\nabla_0 u)(w) = (\nabla_1 u)(x_1 + ix_2) \quad \text{y} \quad \operatorname{div}_1(\rho^4 Y) = \rho^4 \operatorname{div}_0 Y$$

para cualquier campo de vectores Y definido en $\{0 < |w| < \varepsilon\}$, concluimos que la curvatura media de ψ en función del parámetro w viene dada por

$$2H = \rho^4 \operatorname{div}_0 \left(\frac{\nabla_0 u}{\sqrt{1 + \rho^4 \|\nabla_0 u\|^2}} \right) = \rho^4 \operatorname{div}_0 (Q^{-\frac{1}{2}} \nabla_0 u). \quad (4.8)$$

El siguiente resultado, que nos habla de la estructura del operador curvatura media en un final, jugará un papel fundamental tanto en lo que resta de este capítulo cuarto como en el quinto.

Proposición 4.2.1 Sean $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbf{R}$ y $h \in C^{2,\alpha}(\{|w| < \varepsilon\})$. Llamemos H a la función curvatura media de la inmersión $\psi : \{0 < |w| < \varepsilon\} \rightarrow \mathbf{R}^3$ dada por $\psi(w) = \left(\frac{1}{w}, -a \log \rho + h(w)\right)$, donde $\rho = |w|$. Entonces, $\frac{1}{\rho^4} H$ es un operador del tipo

$$\frac{1}{\rho^4} H = \sum_{i,j} a_{ij}(w, a, \nabla_0 h) D_{ij} h + b(w, a, \nabla_0 h), \quad (4.9)$$

que depende analíticamente de sus variables $a \in \mathbf{R}$, $|w| < \varepsilon$, $\nabla_0 h \in \mathbf{C}$ y $\nabla_0^2 h \in S_2(\mathbf{R})$, el espacio de las matrices reales simétricas de orden 2. En particular, dicho operador es $C^\alpha(\{|w| < \varepsilon\})$ -valuado.

Demostración. De (4.8) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{2}{\rho^4}H &= \operatorname{div}_0 \left(Q^{-\frac{1}{2}} \nabla_0 u \right) = Q^{-\frac{1}{2}} \Delta_0 u + \langle \nabla_0(Q^{-\frac{1}{2}}), \nabla_0 u \rangle = \\ &= Q^{-\frac{1}{2}} \Delta_0 h - \frac{1}{2} Q^{-\frac{3}{2}} \langle \nabla_0 Q, \nabla_0 u \rangle. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para probar la analiticidad de $\frac{1}{\rho^4}H$ sólo tenemos que comprobar dicho extremo sobre el último producto escalar de la expresión anterior. Pero

$$\begin{aligned} \langle \nabla_0 Q, \nabla_0 u \rangle &= \langle \nabla_0(\rho^2 Q_1), \nabla_0(-a \log \rho + h) \rangle = \langle 2Q_1 w + \rho^2 \nabla_0 Q_1, -\frac{aw}{\rho^2} + \nabla_0 h \rangle = \\ &= -2aQ_1 - a \langle \nabla_0 Q_1, w \rangle + \langle 2wQ_1 + \rho^2 \nabla_0 Q_1, \nabla_0 h \rangle, \end{aligned} \quad (4.11)$$

que es analítico, como se pretendía. Por tanto, $\frac{1}{\rho^4}H$ toma valores en C^α y la expresión (4.9) se deduce directamente de (4.10) y (4.11), lo cual termina la demostración.

Lema 4.2.2 Sean $\varepsilon' > \varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$ y $h \in C^\infty(\{|w| < \varepsilon'\})$ tales que la inmersión $\psi : \{0 < |w| < \varepsilon'\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\psi(w) = \left(\frac{1}{w}, -a \log \rho + h(w)\right)$ es minimal. Entonces, la aplicación

$$\begin{aligned} E : \mathbb{R} \times C^{k,\alpha}(\{|w| \leq \varepsilon\}) &\longrightarrow \mathbb{R} \times C^{k-2,\alpha}(\{|w| \leq \varepsilon\}) \times C^{k,\alpha}(\{|w| = \varepsilon\}) \\ (b, f) &\longmapsto \left(b, \frac{1}{\rho^4}H(b, f), f|_{\{|w|=\varepsilon\}}\right), \end{aligned}$$

donde $H(b, f)$ denota la función curvatura media de la inmersión definida por $w \mapsto \left(\frac{1}{w}, -b \log \rho + h(w) + \frac{f(w)}{\langle N, e_3 \rangle}\right)$, $0 < |w| \leq \varepsilon$, es un difeomorfismo local analítico alrededor de $(a, 0)$, para cada $k \geq 2$.

Demostración. De la proposición 4.2.1 tenemos que E es analítica. Para calcular la diferencial de E en $(a, 0)$ necesitaremos la siguiente fórmula, que probaremos en la sección 4.5:

$$d \left(\frac{1}{\rho^4}H \right)_{(a,0)}(b, f) = \frac{1}{2} \bar{L} (-b \langle N, e_3 \rangle \log \rho + f), \quad (4.12)$$

para cada $(b, f) \in \mathbb{R} \times C^{k,\alpha}(\{|w| \leq \varepsilon\})$, donde $\bar{L} = \bar{\Delta} + \|\bar{\nabla} N\|^2$ es el operador de Schrödinger asociado a la aplicación de Gauss extendida $N : \{|w| < \varepsilon'\} \rightarrow S^2(1)$

de ψ , siendo $\bar{\Delta}$, $\|\bar{\nabla}N\|^2$ el laplaciano y la norma al cuadrado del gradiente de N calculados respecto de la métrica Riemanniana $d\bar{s}^2 = \rho^4 ds^2$ que se obtiene a partir de (4.5). Por tanto, (4.12) nos dice que

$$dE_{(a,0)}(b, f) = \left(b, \frac{1}{2}\bar{L}(-b\langle N, e_3 \rangle \log \rho + f), f|_{\{|w|=\varepsilon\}} \right).$$

Si $(b, f) \in \text{Kernel}(dE_{(a,0)})$, entonces $b = 0$ y f es solución del problema

$$\begin{cases} \bar{L}f = 0 & \text{en } \{|w| \leq \varepsilon\} \\ f = 0 & \text{en } \{|w| = \varepsilon\}. \end{cases}$$

Como $\langle N, e_3 \rangle$ es positiva en $\{|w| \leq \varepsilon\}$ y $\bar{L}\langle N, e_3 \rangle = 0$, por un resultado clásico el primer valor propio del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \bar{L}u + \lambda u = 0 & \text{en } \{|w| \leq \varepsilon\} \\ u = 0 & \text{en } \{|w| = \varepsilon\} \end{cases}$$

es positivo. Así, f se anula idénticamente luego $dE_{(a,0)}$ es inyectiva. De la proposición 4.2.1 y de (4.12) deducimos que $\bar{L}(-b\langle N, e_3 \rangle \log \rho) \in C^{k-2,\alpha}(\{|w| \leq \varepsilon\})$. Luego dados $b \in \mathbb{R}$, $v \in C^{k-2,\alpha}(\{|w| \leq \varepsilon\})$ y $\varphi \in C^{k,\alpha}(\{|w| = \varepsilon\})$, sabemos por teoría de ecuaciones lineales elípticas [18] que existe una función $f \in C^{k,\alpha}(\{|w| \leq \varepsilon\})$ que verifica

$$\begin{cases} \bar{L}f = 2v - \bar{L}(-b\langle N, e_3 \rangle \log \rho) & \text{en } \{|w| \leq \varepsilon\} \\ f = \varphi & \text{en } \{|w| = \varepsilon\}, \end{cases}$$

y por tanto $dE_{(a,0)}(b, f) = (b, v, \varphi)$. Ahora sólo nos queda aplicar el Teorema de la función Inversa para terminar la demostración del lema.

Nota 4.2.1 *El principio del máximo en infinito de Langevin y Rosenberg [34] implica que dados $b \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C^{k,\alpha}(\{|w| = \varepsilon\})$, existe a lo más una función $f \in C^{k,\alpha}(\{|w| \leq \varepsilon\})$ tal que $E(b, f) = (b, 0, \varphi)$.*

4.3 Topología del espacio de superficies minimales.

Sea \mathcal{E} el espacio de superficies minimales propiamente embebidas en \mathbb{R}^3 con curvatura total finita, finales horizontales y topología fija —género $k \geq 1$ y r finales, con $r \geq 3$ —. La fórmula de Jorge y Meeks (1.11) nos dice que la curvatura total absoluta de las superficies de \mathcal{E} es $4\pi(k + r - 1)$. En esta sección demostraremos que los conceptos naturales de convergencia en el espacio \mathcal{E} son equivalentes, lo cual permitirá tratar cómodamente la topología de dicho espacio en posteriores secciones. Sean $M_n \in \mathcal{E}$, $n = 1, 2, \dots$, y $M_\infty \in \mathcal{E}$.

1. Diremos que $\{M_n\}_n$ converge a M_∞ puntualmente si $M_\infty = \{p \in \mathbb{R}^3 / \text{existe una sucesión } p_n \in M_n \text{ con } p_n \rightarrow p\}$. Esta es la convergencia para la distancia de Hausdorff en compactos de \mathbb{R}^3 .
2. Diremos que $\{M_n\}_n$ converge a M_∞ diferenciablemente si para cada subdominio relativamente compacto Ω de M_∞ , para cada entorno tubular embebido de Ω en \mathbb{R}^3 , $\Omega(\varepsilon) = \{p + tN_\infty(p) / p \in \Omega, |t| < \varepsilon\}$, con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, siendo N_∞ la aplicación de Gauss de M_∞ , y para cada n suficientemente grande se tiene que $\Omega_n = M_n \cap \Omega(\varepsilon)$ consiste en un sólo grafo sobre Ω , $p \in \Omega \mapsto p + u_n(p)N_\infty(p)$, y la sucesión $\{u_n\}_n$ converge a cero en $C^k(\Omega)$, para todo $k \geq 0$.
3. Sean $\overline{M}_n, \overline{M}_\infty$ las compactificaciones de M_n, M_∞ , respectivamente. Consideremos el espacio vectorial r -dimensional, siendo r el número de finales de M_∞ , que generan las funciones f_1, \dots, f_r definidas como sigue:
 - 3.a. $f_i \in C^\infty(\overline{M}_\infty - \{p_i\})$, donde p_1, \dots, p_r son los finales de M_∞ .
 - 3.b. En la coordenada grafo w para M_∞ alrededor de p_i , f_i se escribe $f_i(w) = \log |w|$, y f_i se anula en todo un entorno de cada p_j , para cada $j \neq i$.

Diremos que la sucesión $\{\overline{M}_n\}_n$ converge a \overline{M}_∞ diferenciablemente si existe un campo de vectores $\tilde{N} \in C^\infty(\overline{M}_\infty, \mathbb{R}^3)$ transversal a M_∞ que tome los valores $\pm e_3$ fuera de un compacto de M_∞ , tal que para cada n suficientemente grande, M_n es un \tilde{N} -grafo global sobre M_∞ , $p \in M_\infty \mapsto p + u_n(p)\tilde{N}(p)$, donde $u_n = \varphi_n + v_n$, $\varphi_n \in \text{Span}\{f_1, \dots, f_r\}$, $v_n \in C^\infty(\overline{M}_\infty)$, $\varphi_n \rightarrow 0$ en $\text{Span}\{f_1, \dots, f_r\}$ y $v_n \rightarrow 0$ en $C^k(\overline{M}_\infty)$, para todo $k \geq 0$. Nótese que esta convergencia no depende de la elección del campo \tilde{N} .

El siguiente teorema pone de manifiesto cuál es la relación entre los tres tipos anteriores de convergencia:

Teorema 4.3.1 *Dadas $\{M_n\}_n \subset \mathcal{E}$ y $M_\infty \in \mathcal{E}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) $M_n \rightarrow M_\infty$ puntualmente.*
- ii) $M_n \rightarrow M_\infty$ diferenciablemente.*
- iii) $\overline{M}_n \rightarrow \overline{M}_\infty$ diferenciablemente.*

Demostración. Es claro que $iii) \implies ii) \implies i)$. Supongamos que $i)$ es cierta. De los trabajos de Choi y Schoen [8], White [63] y también Ros [54], se deduce que existe una parcial $\{M_{n'}\}_{n'} \subset \{M_n\}_n$ tal que $M_{n'}$ converge diferenciablemente y con multiplicidad finita sobre compactos de $\mathbb{R}^3 - X$, siendo X un subconjunto finito, a una superficie minimal propiamente embebida M'_∞ . Claramente $M'_\infty = M_\infty$. Además, si $X \neq \emptyset$, sabemos que dado un pequeño entorno U de X , la curvatura total absoluta de $U \cap M_{n'}$ es muy próxima a un múltiplo positivo de 4π para n' suficientemente grande. Como $C(M_{n'}) = C(M_\infty)$, donde $C(\bullet)$ representa la curvatura total absoluta encerrada en el dominio correspondiente, concluimos que $X = \emptyset$ y que $M_{n'}$ converge a M_∞ uniformemente sobre compactos de \mathbb{R}^3 con multiplicidad uno, o sea, $M_{n'} \rightarrow M_\infty$ diferenciablemente. Nótese que este razonamiento también demuestra que cada subsucesión de $\{M_n\}_n$ tiene una parcial diferenciablemente convergente a M_∞ . Esto último equivale a que $M_n \rightarrow M_\infty$ diferenciablemente, con lo que hemos probado que $i)$ implica $ii)$.

Supongamos ahora que se tiene $ii)$. Notemos primero que todas las superficies M_n, M_∞ tienen la misma curvatura total absoluta. Tomemos $\delta > 0$ pequeño y consideremos el subdominio relativamente compacto $\Omega(R) \subset M_\infty$ obtenido al cortar M_∞ con un cilindro sólido vertical $\{|x_1 + ix_2| \leq R\} \times \mathbb{R}$, con R lo suficientemente grande como para asegurar que $C(M_\infty) - C(\Omega(R)) < \frac{\delta}{2}$. De esta forma, para n suficientemente grande, el subdominio $\Omega_n(R)$ que se obtiene cortando M_n con el mismo cilindro verificará $C(M_n) - C(\Omega_n(R)) < \delta$, y $\Omega_n(R)$ será un grafo sobre un subdominio relativamente compacto de M_∞ muy próximo a $\Omega(R)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que a lo largo de la frontera $\partial\Omega_n(R)$ es cierta la relación $|\langle N_n, e_3 \rangle| \geq 1 - \delta$, donde N_n es la aplicación de Gauss de M_n , y que cada componente de $\partial\Omega_n(R)$ se proyecta de forma inyectiva sobre el plano $(x_1 + ix_2)$.

Como N_n es una aplicación abierta, se tiene que ó bien $|\langle N_n, e_3 \rangle| \geq 1 - \delta$ en $M_n - \Omega_n(R)$ ó la imagen esférica $N_n(M_n - \Omega_n(R))$ tiene área cercana a 4π . Como esta segunda posibilidad no puede ocurrir, concluimos que la proyección de cada componente de $M_n - \Omega_n(R)$ sobre $\{|x_1 + ix_2| > R\}$ es un difeomorfismo local y propio, y por tanto dicha proyección es globalmente inyectiva sobre cada componente. O dicho de otro modo, para n suficientemente grande, M_n es un \widetilde{N} -grafo global sobre M_∞ para una conveniente elección de una sección transversal \widetilde{N} que cumpla las condiciones de la definición 3. Sea u_n la función definida por este grafo. A partir de la convergencia diferenciable de M_n a M_∞ deducimos la convergencia de los crecimientos logarítmicos de los finales de M_n a los crecimientos logarítmicos de los finales de M_∞ —esto se verifica porque dichos crecimientos logarítmicos se pueden calcular mediante integrales a lo largo de cada componente de $\partial\Omega_n(R)$ del vector conormal—. Por tanto, y siguiendo la notación de la definición 3, la componente de u_n en el espacio vectorial $\text{Span}\{f_1, \dots, f_r\}$ converge a cero. Usando ahora la notación del lema 4.2.2, esto implica que para n suficientemente grande, si M_n se escribe $w \mapsto \left(\frac{1}{w}, -b_n \log \rho + h(w) + \frac{v_n(w)}{\langle N, e_3 \rangle}\right)$ alrededor de un final p_i , donde $b_n \in \mathbb{R}$ y $v_n \in C^\infty(\{|w| \leq \varepsilon\})$, entonces $\{b_n\}_n \rightarrow a$ y $v_n|_{\{|w|=\varepsilon\}} \rightarrow 0$ en $C^k(\{|w|=\varepsilon\})$ para cada $k \geq 0$, donde M_∞ viene dada por $w \mapsto \left(\frac{1}{w}, -a \log \rho + h(w)\right)$ alrededor de p_i . Por tanto, $E(b_n, v_n) = (b_n, 0, v_n|_{\{|w|=\varepsilon\}})$ cae en un entorno de $(a, 0, 0)$ en $\mathbb{R} \times C^{k-2,\alpha}(\{|w| \leq \varepsilon\}) \times C^{k,\alpha}(\{|w|=\varepsilon\})$ donde la aplicación E del lema 4.2.2 es biyectiva. Como el principio del máximo en el infinito de Langevin y Rosenberg [34] nos asegura que $b_n, v_n|_{\{|w|=\varepsilon\}}$ determinan de forma única a $v_n(w), \{|w| \leq \varepsilon\}$ —ver nota 4.2.1—, del lema 4.2.2 se tiene que $\{v_n\}_n$ converge a cero en $C^{k,\alpha}(\{|w| \leq \varepsilon\})$ para cada $k \geq 2$. Esto termina la demostración.

Aunque por claridad hemos demostrado el teorema 4.3.1 para superficies minimales propiamente embebidas, dicho resultado puede extenderse al espacio \mathcal{M} de inmersiones simples y propias con curvatura total finita, finales embebidos y horizontales y topología fija. Una superficie inmersa se dice *simple*, siguiendo [66], cuando existe un subconjunto abierto y denso de la superficie donde la misma está embebida. Cuando la inmersión es minimal y propia, esto equivale a decir que la inmersión no se recubre a sí misma. En \mathcal{M} consideraremos la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, de manera que $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ es un subespacio topológico. Usando por ejemplo el teorema 2 de [54], puede demostrarse que \mathcal{E} es cerrado en \mathcal{M} . Sin embargo, podría ocurrir que tan cerca como quisiéramos de

una superficie embebida encontraríamos superficies no embebidas sino simplemente inmersas, cosa que sólo pasaría si dos finales distintos de la superficie embebida tuvieran el mismo crecimiento logarítmico. Por ello, y aunque estamos principalmente interesados en el caso embebido, consideraremos durante el resto del capítulo esta clase de inmersiones. Así, de ahora en adelante, una *inmersión minimal y propia* significará una *inmersión minimal, simple y propia*, y esta superficie se representará indistintamente por $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ o simplemente por $M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Y ya que no existe un orden natural para los finales de una superficie en \mathcal{M} , consideraremos todos los órdenes posibles, viendo órdenes diferentes como superficies distintas. La topología de \mathcal{M} se tendrá que modificar de manera natural para que sea sensible al orden de los finales.

4.4 El operador de Jacobi compactificado.

Sea $M \in \mathcal{M}$ y llamemos $\overline{M} = M \cup \{p_1, \dots, p_r\}$ a la superficie de Riemann compacta asociada, $N : \overline{M} \rightarrow S^2(1)$ a la aplicación de Gauss extendida y ds^2 a la métrica inducida sobre M . Tomemos una función positiva $\lambda \in C^\infty(M)$ tal que alrededor de cada final p_i , $\lambda(w) = \rho^{-4}$ en términos de la coordenada grafo en p_i . (4.5) implica que $d\overline{s}^2 = \frac{1}{\lambda} ds^2$ es una métrica Riemanniana sobre \overline{M} , compatible con su estructura conforme. El *operador de Jacobi de M* es $L = \Delta + \|\sigma\|^2 = \Delta + \|\nabla N\|^2$, donde Δ es el Laplaciano de ds^2 y $\|\sigma\|^2$ la norma al cuadrado de la segunda forma fundamental de la superficie. Este operador puede verse como el Hessiano del funcional área, y geoméricamente puede interpretarse de la siguiente forma: Tomemos una deformación diferenciable de M , $\{M_t\}_{|t|<\varepsilon}$, $M_0 = M$ y llamemos $H(t)$ a la curvatura media de M_t . Si $u = \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi_t, N \right\rangle$, donde $\psi_t : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una familia de inmersiones diferenciable en t de forma que ψ_t parametriza a la superficie M_t , entonces se tiene —ver por ejemplo [64]—

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} H(t) = \frac{1}{2} Lu. \quad (4.13)$$

En particular, la *ecuación de Jacobi* $Lu = 0$ corresponde a una deformación infinitesimal de M por superficies minimales. Una función u que cumpla dicha ecuación se dice una *función de Jacobi* en M . Este operador L se puede “compactificar” a un operador de Schrödinger $\overline{L} = \lambda L = \overline{\Delta} + \|\overline{\nabla} N\|^2$ en \overline{M} , donde $\overline{\bullet}$ significa que el objeto correspondiente está referido a la métrica $d\overline{s}^2$.

Sea $\mathcal{B} = \mathcal{B}(M) \subset C^{2,\alpha}(M)$ el espacio vectorial de las funciones v que en la coordenada grafo w alrededor del final p_i , $i = 1, \dots, r$, vienen dadas por

$$v(w) = -a_i \langle N, e_3 \rangle \log \rho + u(w), \quad (4.14)$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ y $u \in C^{2,\alpha}(\{|w| < \varepsilon\})$. Consideremos el espacio vectorial $V = V(M) = \{u_{\mathbf{a}} / \mathbf{a} \in \mathbb{R}^r\} \subset \mathcal{B}$ de dimensión r cuyas funciones vienen dadas por

$$u_{\mathbf{a}} = -\langle N, e_3 \rangle \sum_{i=1}^r a_i f_i,$$

donde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ y f_1, \dots, f_r son las funciones que aparecían en la definición 3 de la sección 4.3. Por tanto, alrededor de cada p_i , $u_{\mathbf{a}}$ se escribe $u_{\mathbf{a}}(w) = -a_i \langle N, e_3 \rangle \log \rho$. Claramente,

$$\mathcal{B} = V \oplus C^{2,\alpha}(\overline{M}) = \{u_{\mathbf{a}} + u / \mathbf{a} \in \mathbb{R}^r, u \in C^{2,\alpha}(\overline{M})\},$$

luego \mathcal{B} es un espacio de Banach si en cada sumando consideramos la norma natural, y la topología de \mathcal{B} no depende de la elección de f_1, \dots, f_r . Identificando \mathcal{B} con $\mathbb{R}^r \oplus C^{2,\alpha}(\overline{M})$, veremos en la sección 4.5 que \overline{L} es la diferencial de un operador analítico definido en un entorno de $(\log(M), 0)$ en $\mathbb{R}^r \oplus C^{2,\alpha}(\overline{M})$ que toma valores en $C^\alpha(\overline{M})$, luego $\overline{L} : \mathcal{B} \rightarrow C^\alpha(\overline{M})$ será un operador lineal y continuo. En particular, $u\overline{L}v$ —resp. uLv — es $d\overline{s}^2$ -integrable —resp. ds^2 -integrable—, para cualquier par de funciones $u, v \in \mathcal{B}$.

Dada una función $v \in \mathcal{B}$, $v = u_{\mathbf{a}} + u \in V \oplus C^{2,\alpha}(\overline{M})$, definimos

$$\text{Log}(v) = \mathbf{a}, \quad \text{Altura}(v) = (u(p_1) \langle N(p_1), e_3 \rangle, \dots, u(p_r) \langle N(p_r), e_3 \rangle).$$

Así, tenemos dos operadores lineales y continuos $\text{Log}, \text{Altura} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^r$. El lema 4.2.1 nos dice que $\langle N, e_1 \rangle, \langle N, e_2 \rangle, \det(p, N, e_3)$ están en \mathcal{B} , donde p es el vector de posición en M , y $\text{Log}, \text{Altura}$ se anulan sobre estas funciones. Además, es claro que $\langle N, e_3 \rangle \in \mathcal{B}$ y que $\text{Log}(\langle N, e_3 \rangle) = (0, \dots, 0)$, $\text{Altura}(\langle N, e_3 \rangle) = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^r$. Por otro lado, también la función soporte $\langle p, N \rangle$ pertenece a \mathcal{B} y $\text{Log}(\langle p, N \rangle) = \log(M)$, $\text{Altura}(\langle p, N \rangle) = \text{altura}(M) - \log(M)$, donde \log, altura se definieron en la sección 4.1. Los operadores $\text{Log}, \text{Altura}$ se pueden relacionar con el operador diferencial \overline{L} mediante la siguiente forma bilineal antisimétrica:

Lema 4.4.1 *Dados $u, v \in \mathcal{B}$, se tiene*

$$\begin{aligned} \int_M (uLv - vLu) dA &= \int_{\bar{M}} (u\bar{L}v - v\bar{L}u) d\bar{A} = \\ &= -2\pi [\langle \text{Log}(u), \text{Altura}(v) \rangle - \langle \text{Log}(v), \text{Altura}(u) \rangle], \end{aligned} \quad (4.15)$$

Demostración. Supongamos que respecto de la coordenada grafo w alrededor del final p_i , $i = 1, \dots, r$, las funciones u y v se escriben $u(w) = -a_i \langle N, e_3 \rangle \log \rho + u'_i(w)$, $v(w) = -b_i \langle N, e_3 \rangle \log \rho + v'_i(w)$, siendo u'_i, v'_i funciones de clase $C^{2,\alpha}$ en un entorno de $w = 0$. Así,

$$\begin{aligned} \text{Log}(u) &= (a_1, \dots, a_r), & \text{Altura}(u) &= (u'_1(0) \langle N(p_1), e_3 \rangle, \dots, u'_r(0) \langle N(p_r), e_3 \rangle), \\ \text{Log}(v) &= (b_1, \dots, b_r), & \text{Altura}(v) &= (v'_1(0) \langle N(p_1), e_3 \rangle, \dots, v'_r(0) \langle N(p_r), e_3 \rangle). \end{aligned}$$

Tomemos una coordenada local holomorfa z centrada en p_i . La relación entre w y z será del tipo $w = t(z)z$ ó $w = t(z)\bar{z}$ para cierta función diferenciable valuada compleja t tal que $t(0) \neq 0$. En este nuevo parámetro alrededor de p_i , $u(z) = -a_i \langle N, e_3 \rangle \log |z| + u''_i(z)$, $v(z) = -b_i \langle N, e_3 \rangle \log |z| + v''_i(z)$, donde $u''_i = u'_i - a_i \langle N, e_3 \rangle \log |t(z)|$ y $v''_i = v'_i - b_i \langle N, e_3 \rangle \log |t(z)|$. Nótese que la suma del miembro de la derecha de (4.15) vale

$$-2\pi \sum_{i=1}^r (a_i v''_i(0) - b_i u''_i(0)) \langle N(p_i), e_3 \rangle.$$

Sea $D(p_i, r)$ el disco conforme $\{|z| < r\}$ alrededor de p_i y $M(r) = M - \cup_{i=1}^r D(p_i, r)$. Entonces,

$$\int_{M(r)} (uLv - vLu) dA = \int_{\partial M(r)} \left(u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) ds,$$

donde dA , ds están medidas respecto de la métrica inducida por ψ , y η es el conormal exterior a $\psi(M(r))$ a lo largo de $\partial M(r)$. Como la última integral es invariante frente a cambios conformes de métricas, podemos escribirla sobre cada disco como $-\int_{\{|z|=r\}} \left(u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} \right) |dz|$, donde $z = re^{i\theta}$. Si usamos la expresión local anterior para v tendremos

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -b_i \langle N, e_3 \rangle \frac{1}{r} + \text{términos de orden inferior},$$

donde los términos que no han sido especificados crecen a lo más, logarítmicamente. Para u podríamos llegar a una expresión del mismo tipo. De esta forma,

$$\begin{aligned}
& - \int_{\{|z|=r\}} \left(u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} \right) |dz| = \\
& = - \int_{\{|z|=r\}} \left(-u(z)b_i \langle N, e_3 \rangle \frac{1}{r} + v(z)a_i \langle N, e_3 \rangle \frac{1}{r} + \text{términos orden inferior} \right) |dz| = \\
& = \frac{1}{r} \int_{\{|z|=r\}} (u''_i(z)b_i \langle N, e_3 \rangle - v''_i(z)a_i \langle N, e_3 \rangle) |dz| + \mathcal{O}(r) = \\
& = 2\pi (u''_i(0)b_i - v''_i(0)a_i) \langle N, e_3 \rangle + \mathcal{O}(r),
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{O}(r)$ es una expresión que converge a cero cuando r tiende a cero. Esto termina la demostración del lema.

Nuestro siguiente objetivo será estudiar el núcleo y la imagen del operador $\bar{L} : \mathcal{B} \rightarrow C^\alpha(\bar{M})$. Si consideramos un subconjunto $X \subset C^\alpha(\bar{M})$, representaremos por $X^\perp \subset C^\alpha(\bar{M})$ a su ortogonal respecto de la métrica L^2 asociada a $d\bar{s}^2$ intersecado con $C^\alpha(\bar{M})$. Notemos que para un subespacio vectorial de dimensión finita $W \subset C^\alpha(\bar{M})$ se tiene que $C^\alpha(\bar{M}) = W \oplus W^\perp$ y que $W^{\perp\perp} = W$. Además, si $W' \subset C^\alpha(\bar{M})$ es un subespacio tal que $W^\perp \subset W'$, entonces también son ciertas las igualdades $C^\alpha(\bar{M}) = W' \oplus W'^\perp$ y $W'^{\perp\perp} = W'$. Consideremos en el espacio de Banach \mathcal{B} los subespacios

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(M) = \text{Kernel}(\bar{L}), \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}(M) = C^{2,\alpha}(\bar{M}) \cap \mathcal{J}, \text{ y } \mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_0(M) = \bar{L}(\mathcal{B})^\perp.$$

Un resultado clásico de teoría de ecuaciones diferenciales elípticas [18] nos dice que $\mathcal{K} = \text{Kernel}(\bar{L}|_{C^{2,\alpha}(\bar{M})}) \subset C^\infty(\bar{M})$ tiene dimensión finita y que $\bar{L}(C^{2,\alpha}(\bar{M})) = \mathcal{K}^\perp$. Por tanto, $\mathcal{K}_0 = \bar{L}(\mathcal{B})^\perp \subset \bar{L}(C^{2,\alpha}(\bar{M}))^\perp = \mathcal{K}^{\perp\perp} = \mathcal{K}$. Además, como $\bar{L}(\mathcal{B})$ contiene a \mathcal{K}^\perp , se tiene que $\bar{L}(\mathcal{B}) = \bar{L}(\mathcal{B})^{\perp\perp} = \mathcal{K}_0^\perp$. El subespacio \mathcal{K} consiste en las funciones de Jacobi sobre M que son acotadas en los finales.

Lema 4.4.2 *En la situación anterior,*

- i) $\mathcal{K}_0 = \{v \in \mathcal{K} / v(p_i) = 0, 1 \leq i \leq r\}$,
- ii) $\dim \mathcal{J} = r + \dim \mathcal{K}_0$.

Demostración. Dado $v \in \mathcal{K}$, tendremos que $v \in \mathcal{K}_0$ si y sólo si $\int_M v \bar{L} u d\bar{A} = 0$, $\forall u \in \mathcal{B}$. Usando (4.15), esta última ecuación equivale a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M u \bar{L} v d\bar{A} + 2\pi [\langle \text{Log}(u), \text{Altura}(v) \rangle - \langle \text{Log}(v), \text{Altura}(u) \rangle] = \\ &= 2\pi \langle \text{Log}(u), \text{Altura}(v) \rangle, \end{aligned}$$

para cada $u \in \mathcal{B}$. Esto prueba *i*). En cuanto a *ii*), consideremos en el espacio vectorial r -dimensional V que se definió justo antes de lema 4.4.1 la descomposición $V = V_1 \oplus V_2$, donde $V_1 = \{u_a / \bar{L}u_a \in \bar{L}(C^{2,\alpha}(\bar{M}))\}$ y V_2 es un subespacio suplementario. De esta forma, \bar{L} es inyectivo sobre V_2 y $\bar{L}(\mathcal{B}) = \bar{L}(V_2) \oplus \bar{L}(C^{2,\alpha}(\bar{M}))$. En particular, $\dim \mathcal{K}_0 = \text{codim } \bar{L}(\mathcal{B}) = \text{codim } \bar{L}(C^{2,\alpha}(\bar{M})) - \dim \bar{L}(V_2) = \dim \mathcal{K} - \dim V_2$, luego

$$\dim \mathcal{K}_0 = \dim \mathcal{K} - r + \dim V_1. \quad (4.16)$$

Consideremos la proyección natural $\mathcal{B} \rightarrow V$ restringida a \mathcal{J} , $\pi : \mathcal{J} \rightarrow V$. Es claro que $\text{Kernel}(\pi) = \mathcal{K}$. Además, dado $v \in \mathcal{J}$, $v = u_a + u$, $u_a \in V$, $u \in C^{2,\alpha}(\bar{M})$, se tiene $0 = \bar{L}v = \bar{L}u_a + \bar{L}u$ y por tanto, $\pi(v) = u_a \in V_1$. Por otro lado, para cada $u_a \in V_1$ existe $u \in C^{2,\alpha}(\bar{M})$ tal que $\bar{L}u = \bar{L}u_a$, esto es, $u_a - u \in \mathcal{J}$. Así, $\pi(\mathcal{J}) = V_1$ y entonces

$$\dim \mathcal{J} = \dim \mathcal{K} + \dim V_1. \quad (4.17)$$

De (4.16) y (4.17) se concluye la demostración del lema.

Sabemos que los campos de vectores en \mathbb{R}^3 que tengan flujo uniparamétrico formado por isometrías —campos de Killing— o por homotecias inducen sobre M funciones de Jacobi. El que nuestra superficie tenga sus finales horizontales asegura que disponemos del siguiente conjunto de funciones de Jacobi acotadas, ver lema 4.2.1:

$$\text{Killing} = \text{Span}\{\langle N, e_1 \rangle, \langle N, e_2 \rangle, \langle N, e_3 \rangle, \det(p, N, e_3)\} \subset \mathcal{K},$$

siendo p el vector de posición en M . Llamaremos $\text{Killing}_0 = \text{Killing} \cap \mathcal{K}_0$. Entonces, se tiene

$$\text{Killing}_0 = \text{Span}\{\langle N, e_1 \rangle, \langle N, e_2 \rangle, \det(p, N, e_3)\} \subset \mathcal{K}_0.$$

Además, la función soporte $\langle p, N \rangle$ está en \mathcal{J} pero no en \mathcal{K} . Si $\text{Killing}_0 = \mathcal{K}_0$, diremos que M es una superficie minimal *no degenerada*. Esta condición nos va a

asegurar un comportamiento regular del conjunto de inmersiones minimales cerca de M , como se verá en el teorema 4.5.1. Nótese que al estar suponiendo que el género de M es por lo menos uno y que el número de finales es al menos tres, el grupo de simetrías de M ha de ser siempre finito y por tanto, $\dim \text{Killing} = 4$ y $\dim \text{Killing}_0 = 3$. Destacaremos también que la hipótesis $\mathcal{K} = \text{Killing}$ implica que $\mathcal{K}_0 = \text{Killing}_0$. Como consecuencia directa del lema 4.4.2 tenemos

Proposición 4.4.1 $\dim \mathcal{J}(M) \geq r + 3$, y la igualdad es cierta si y sólo si M es no degenerada.

Marc Soret [56] demostró que $\dim \mathcal{J}(M) \geq r - 5 - 2k$, donde k es el género de la superficie.

4.5 El espacio de superficies minimales como variedad.

Volvamos a nuestra inmersión minimal orientable, propia, con curvatura total finita y finales embebidos horizontales, $\psi : M = \overline{M} - \{p_1, \dots, p_r\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ó bien $M \in \mathcal{M}$. Sea $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_r) = \log(M)$ la lista de los crecimientos logarítmicos de los finales de ψ . Como vimos en la sección 4.1, ψ puede escribirse en términos de la coordenada grafo w alrededor de cada final p_i como

$$\psi(w) = \left(\frac{1}{w}, -c_i \log |w| + h(w) \right), \quad (4.18)$$

donde $h \in C^\infty(\{|w| < \varepsilon\})$. Consideremos una familia de inmersiones $\psi_{\mathbf{a}} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r)$ varía en un entorno $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^r$ de \mathbf{c} , verificando

1. La familia es diferenciable en $\mathcal{A} \times M$,
2. En cada final p_i , la expresión de $\psi_{\mathbf{a}}$ respecto de la coordenada grafo w , $0 < |w| < \varepsilon$, viene dada por $\psi_{\mathbf{a}}(w) = \left(\frac{1}{w}, -a_i \log |w| + h(w) \right)$.
3. $\psi_{\mathbf{c}} = \psi$.

Sea $\widetilde{N} : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación diferenciable tal que $\langle N, \widetilde{N} \rangle = 1$ en \overline{M} , y $\widetilde{N} = \frac{1}{\langle N, e_3 \rangle} e_3$ en $\{|w| < \varepsilon\}$ para cada final. El teorema 4.3.1 nos asegura que dada $M \in \mathcal{M}$, existe un entorno de M en \mathcal{M} de forma que cada superficie minimal dentro de este entorno puede representarse por $\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N}$ para ciertos $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^r$ y $u \in C^\infty(\overline{M})$ cerca de $\mathbf{c} = \log(M)$ y cero, respectivamente.

Tomemos $u \in C^{2,\alpha}(\overline{M})$ pequeña y \mathbf{a} cerca de \mathbf{c} y consideremos la inmersión $\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N}$. Sea $\overline{H}(\mathbf{a}, u) = \lambda H(\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N})$, donde $H(\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N}) \in C^\alpha(M)$ es la curvatura media de $\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N}$, y $\lambda \in C^\infty(M)$ se definió al principio de la sección 4.4. Notemos que alrededor de cada final p_i de ψ , $\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N}$ se escribe en función de la coordenada grafo w como

$$(\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N})(w) = \left(\frac{1}{w}, -a_i \log \rho + h + \frac{u}{\langle N, e_3 \rangle} \right). \quad (4.19)$$

Como $\overline{H}(\mathbf{a}, u) = \rho^{-4} H(\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N})$, la proposición 4.2.1 nos permite asegurar que

Lema 4.5.1 *Existen entornos \mathcal{U} del origen en $C^{2,\alpha}(\overline{M})$ y \mathcal{A} de \mathbf{c} en \mathbb{R}^r tales que la aplicación $\overline{H} : \mathcal{A} \times \mathcal{U} \rightarrow C^\alpha(\overline{M})$ es un operador real analítico.*

Denotaremos por $M_{\mathbf{a},u}$ la superficie que viene determinada por la inmersión $\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(\mathbf{a}, u) \in \mathcal{A} \times \mathcal{U}$. Todas las superficies minimales suficientemente próximas a M en \mathcal{M} pueden representarse por puntos de $\mathcal{A} \times \mathcal{U}$ (ver la sección 4.3) y en este entorno, al que llamaremos $\mathcal{M} \cap (\mathcal{A} \times \mathcal{U})$, ambas topologías coinciden. Dada $M_{\mathbf{a},u} \in \mathcal{M} \cap (\mathcal{A} \times \mathcal{U})$ podemos realizar el espacio vectorial r -dimensional $V(M_{\mathbf{a},u}) = \{u_{\dot{\mathbf{a}}} / \dot{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^r\}$ de la sección 4.4 de la siguiente forma: Consideremos la curva $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a} + t\dot{\mathbf{a}}$ con $\dot{\mathbf{a}} = (\dot{a}_1, \dots, \dot{a}_r) \in \mathbb{R}^r$, y la función sobre M , $u_{\dot{\mathbf{a}}} = \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi_{\mathbf{a}(t)}, N_{\mathbf{a},u} \right\rangle$, donde $N_{\mathbf{a},u}$ es la aplicación de Gauss de $M_{\mathbf{a},u}$. Usando cómo es la deformación $\psi_{\mathbf{a}}$ en los finales deducimos que en la coordenada grafo para M alrededor de p_i ,

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi_{\mathbf{a}(t)} = (0, 0, -\dot{a}_i \log \rho).$$

Y por tanto, $u_{\dot{\mathbf{a}}}(w) = -\dot{a}_i \langle N_{\mathbf{a},u}, e_3 \rangle \log \rho$ tiene la forma que exigíamos en términos de la coordenada grafo w , ver la sección 4.4. Así, $\mathcal{B}(M_{\mathbf{a},u}) = V(M_{\mathbf{a},u}) \oplus C^{2,\alpha}(\overline{M}_{\mathbf{a},u})$.

Dada $\dot{u} \in C^{2,\alpha}(\bar{M})$, de (4.13) tenemos que

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} H(\psi_{\mathbf{a}(t)} + (u + t\dot{u})\tilde{N}) = \frac{1}{2} L_{\mathbf{a},u}(u_{\dot{\mathbf{a}}} + \dot{u}\langle \tilde{N}, N_{\mathbf{a},u} \rangle),$$

donde $L_{\mathbf{a},u}$ es el operador de Jacobi de $M_{\mathbf{a},u}$. Por medio de los isomorfismos $\dot{\mathbf{a}} \mapsto u_{\dot{\mathbf{a}}}$ y $\dot{u} \mapsto \dot{u}\langle \tilde{N}, N_{\mathbf{a},u} \rangle$ —nótese que $\langle \tilde{N}, N_{\mathbf{a},u} \rangle$ puede suponerse positiva y diferenciable en todo punto—, podemos identificar \mathbb{R}^r con $V(M_{\mathbf{a},u})$ y $C^{2,\alpha}(\bar{M})$ con $C^{2,\alpha}(\bar{M}_{\mathbf{a},u})$. Con estas identificaciones y los razonamientos de arriba podemos enunciar el siguiente

Lema 4.5.2 *Si $M_{\mathbf{a},u} \in \mathcal{M} \cap (\mathcal{A} \times \mathcal{U})$, entonces la diferencial de \bar{H} en (\mathbf{a}, u) viene dada por*

$$2d\bar{H}_{(\mathbf{a},u)} = \bar{L}_{\mathbf{a},u} : \mathcal{B}(M_{\mathbf{a},u}) \longrightarrow C^\alpha(\bar{M}_{\mathbf{a},u}),$$

donde $\bar{L}_{\mathbf{a},u} = \lambda L_{\mathbf{a},u}$ es el operador de Jacobi compactificado de $\bar{M}_{\mathbf{a},u}$.

Este mismo argumento prueba también la ecuación (4.12) que usábamos en la demostración del lema 4.2.2, y que $\bar{L} : \mathcal{B}(M) \longrightarrow C^\alpha(\bar{M})$ es acotada, como afirmábamos en la sección 4.4.

Lema 4.5.3 *Sean \mathcal{A}, \mathcal{U} como en el lema 4.5.1. Entonces, la función curvatura media $H(\mathbf{a}, u)$ de $\psi_{\mathbf{a}} + u\tilde{N}$, $(\mathbf{a}, u) \in \mathcal{A} \times \mathcal{U}$, es ortogonal a $\langle N_{\mathbf{a},u}, e_1 \rangle$, $\langle N_{\mathbf{a},u}, e_2 \rangle$, $\det(\psi_{\mathbf{a}} + u\tilde{N}, N_{\mathbf{a},u}, e_3)$, donde $N_{\mathbf{a},u}$ es la aplicación de Gauss de $\psi_{\mathbf{a}} + u\tilde{N}$.*

Demostración. Tomemos un elemento $(\mathbf{a}, u) \in \mathcal{A} \times \mathcal{U}$, que produce una inmersión $\psi_{\mathbf{a}} + u\tilde{N}$. Dado $\varepsilon > 0$ pequeño, consideremos el dominio compacto $M(\varepsilon)$ en M que se obtiene eliminando alrededor de cada final p_i , $1 \leq i \leq r$, un entorno $\{|w| < \varepsilon\}$, donde w es la coordenada grafo para ψ en p_i . De esta forma, $\psi_{\mathbf{a}} + u\tilde{N}$ tiene r componentes fuera de $M(\varepsilon)$, y cada una de ellas puede escribirse como

$$(\psi_{\mathbf{a}} + u\tilde{N})(w) = \left(\frac{1}{w}, -a \log |w| + h_1(w) \right), \quad 0 < |w| \leq \varepsilon,$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y $h_1 \in C^{2,\alpha}(\{|w| \leq \varepsilon\})$. De la fórmula (1.1) tenemos

$$2 \int_{M(\varepsilon)} H(\mathbf{a}, u) N_{\mathbf{a},u} dA_{\mathbf{a},u} = \int_{M(\varepsilon)} \Delta_{\mathbf{a},u}(\psi_{\mathbf{a}} + u\tilde{N}) dA_{\mathbf{a},u} = \int_{\partial M(\varepsilon)} \eta_{\mathbf{a},u} ds_{\mathbf{a},u},$$

donde el subíndice $\bullet_{\mathbf{a},u}$ significa que el objeto correspondiente se calcula respecto de la métrica inducida por la inmersión $\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N}$, y $\eta_{\mathbf{a},u}$ denota el conormal exterior a $(\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N})(M(\varepsilon))$ a lo largo de $\partial M(\varepsilon)$. Análogamente, se prueba que

$$2 \int_{M(\varepsilon)} H(\mathbf{a}, u) \det(\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N}, N_{\mathbf{a},u}, e_3) dA_{\mathbf{a},u} = \int_{\partial M(\varepsilon)} \det(\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N}, \eta_{\mathbf{a},u}, e_3) ds_{\mathbf{a},u}.$$

Parametrizaremos $\partial M(\varepsilon)$ por r copias disjuntas de $w = \varepsilon e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Llamemos

$$\alpha_{\varepsilon}(\theta) = (\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N})(\varepsilon e^{i\theta}) = \left(\frac{1}{w}, v(w) \right),$$

donde $v = -a \log |w| + h_1$. Entonces, $\eta_{\mathbf{a},u} ds_{\mathbf{a},u} = \alpha'_{\varepsilon} \wedge N_{\mathbf{a},u} d\theta$. Por otro lado, (4.7) nos dice que

$$N_{\mathbf{a},u} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 Q_1}} (\bar{w}^2 \nabla_0 v, 1).$$

Si derivamos α_{ε} respecto a θ obtendremos $\alpha'_{\varepsilon} = \left(\frac{-i}{w}, \langle iw, \nabla_0 v \rangle \right)$, luego

$$\alpha'_{\varepsilon} \wedge N_{\mathbf{a},u} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 Q_1}} \left(\langle iw, \nabla_0 v \rangle i \bar{w}^2 \nabla_0 v - \frac{1}{w}, \varepsilon^2 \operatorname{Re} \left(\frac{\nabla_0 v}{w} \right) \right).$$

Y de $\nabla_0 v = -\frac{a}{\varepsilon^2} w + \nabla_0 h_1$, podemos deducir que

$$\eta_{\mathbf{a},u} ds_{\mathbf{a},u} = \left[- \left(\frac{1}{w}, a \right) + \left(\frac{\mathcal{O}_1(\varepsilon^2)}{w} + \mathcal{O}_2(\varepsilon^2), \mathcal{O}_3(\varepsilon) \right) \right] d\theta, \quad (4.20)$$

donde $\mathcal{O}_i(\varepsilon^k)$ es una función de ε, θ tal que $\varepsilon^{-k} \mathcal{O}_i(\varepsilon^k)$ es acotada cuando ε tiende a cero, y $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_3$ son valuadas reales. De aquí se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{|w|=\varepsilon\}} \eta_{\mathbf{a},u} ds_{\mathbf{a},u} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{w}, a \right) d\theta + \int_0^{2\pi} \mathcal{O}(\varepsilon) d\theta \right] = -2\pi a e_3,$$

lo cual prueba que $H(\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N})$ es ortogonal a $\langle N_{\mathbf{a},u}, e_i \rangle$, $i = 1, 2$. Finalmente,

$$\begin{aligned} & \int_{\{|w|=\varepsilon\}} \det(\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N}, \eta_{\mathbf{a},u}, e_3) ds_{\mathbf{a},u} = \\ & = \int_{\{|w|=\varepsilon\}} \det \left(\left(\frac{1}{w}, 0 \right), \left(\frac{-1 + \mathcal{O}_1(\varepsilon^2)}{w} + \mathcal{O}_2(\varepsilon^2), 0 \right), (0, 1) \right) d\theta = \end{aligned}$$

$$= \int_{\{|w|=\varepsilon\}} \det \left(\left(\frac{1}{w}, 0 \right), (\mathcal{O}_2(\varepsilon^2), 0), (0, 1) \right) d\theta.$$

Como la última expresión converge a cero cuando ε tiende a cero, el lema está probado.

La representación de Weierstrass nos dice que las superficies minimales de \mathcal{M} se expresan por medio de datos meromorfs que verifiquen un cierto número de relaciones de tipo analítico —sobre el orden de polos, residuos, períodos,...—. Por consiguiente, \mathcal{M} es un conjunto real-analítico. Podría ser interesante tener una descripción global explícita de \mathcal{M} desde este punto de vista, ver Pirola [52] para una situación relacionada con esto. Además, aparece de forma natural la necesidad de obtener condiciones naturales que impliquen que \mathcal{M} sea una auténtica variedad alrededor de uno de sus elementos. Denotaremos por $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{M}$ el subconjunto de superficies minimales no degeneradas.

Teorema 4.5.1 \mathcal{M}^* es un abierto dentro de \mathcal{M} . Además, si \mathcal{M}^* es no vacío, es una variedad analítica real de dimensión $r + 3$.

Demostración. Consideremos una superficie $M \in \mathcal{M}^*$, y tomemos entornos \mathcal{U} del origen en $C^{2,\alpha}(\overline{M})$ y \mathcal{A} de $\mathbf{c} = \log(M)$ en \mathbb{R}^r tales que el lema 4.5.1 se verifique. Consideremos la aplicación

$$F : \mathbb{R}^3 \times \mathcal{A} \times \mathcal{U} \longrightarrow C^\alpha(\overline{M})$$

$$(d_1, d_2, d_3, \mathbf{a}, u) \longmapsto \overline{H}(\mathbf{a}, u) - \sum_{i=1}^2 d_i \langle N_{\mathbf{a},u}, e_i \rangle - d_3 \det(\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N}, N_{\mathbf{a},u}, e_3)$$

donde $N_{\mathbf{a},u}$ es la aplicación de Gauss de $\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N}$. Como \overline{H} es regular, se sigue que F es también real analítica. Si $(\mathbf{a}, u) \in \mathcal{M} \cap (\mathcal{A} \times \mathcal{U})$ representa una superficie minimal cerca de M y usamos las identificaciones del lema 4.5.2 deducimos que la diferencial de F en $(0, \mathbf{a}, u)$, $dF_{(0,\mathbf{a},u)} : \mathbb{R}^3 \times \mathcal{B}(M_{\mathbf{a},u}) \longrightarrow C^\alpha(\overline{M}_{\mathbf{a},u})$ viene dada por

$$dF_{(0,\mathbf{a},u)}(d_1, d_2, d_3, v) = \frac{1}{2} \overline{L}_{\mathbf{a},u} v - \sum_{i=1}^2 d_i \langle N_{\mathbf{a},u}, e_i \rangle - d_3 \det(\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N}, N_{\mathbf{a},u}, e_3).$$

Como $\overline{L}_{\mathbf{a},u}(\mathcal{B}(M_{\mathbf{a},u})) = \mathcal{K}_0(M_{\mathbf{a},u})^\perp$, es $\text{Kernel}(dF_{(0,\mathbf{a},u)}) = \{0\} \times \mathcal{J}(M_{\mathbf{a},u}) = \mathcal{J}(M_{\mathbf{a},u})$. Evaluando en M , o sea, tomando $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ y $u = 0$, la hipótesis de no

degeneración en el enunciado del teorema nos dice que $dF_{(0,c,0)}$ es sobreyectiva y que su núcleo tiene dimensión $r+3$. El Teorema de la Función Implícita nos da un entorno \mathcal{W} de $(0, c, 0)$ en $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{A} \times \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{V} := F^{-1}(0) \cap \mathcal{W}$ es una subvariedad real-analítica de \mathcal{W} de dimensión $r+3$. Por el lema 4.5.3, \mathcal{V} sólo contiene superficies minimales, luego $\mathcal{V} \subset \{0\} \times \mathcal{A} \times \mathcal{U} = \mathcal{A} \times \mathcal{U}$. Además, el espacio tangente a \mathcal{V} en $M_{a,u}$ es $\mathcal{J}(M_{a,u})$ y por tanto, $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}^*$. En particular, \mathcal{M}^* es abierto. Para terminar la demostración del teorema probaremos que todas las estructuras analíticas que acabamos de encontrar, y que están definidas sólo en un entorno de cada punto de \mathcal{M}^* , son compatibles entre sí y que por consiguiente, definen una estructura analítica global sobre \mathcal{M}^* . Es más: razonablemente, dada $M \in \mathcal{M}^*$, la estructura analítica alrededor de M que se acaba de construir debe ser independiente de las elecciones particulares de ψ_a y de \tilde{N} . Todas estas afirmaciones se derivan del siguiente razonamiento: Recordemos primero que una inmersión determina unívocamente la estructura diferenciable de la variedad inmersa. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\mathcal{M}_\varepsilon^*$ el conjunto de aquellas superficies $M \in \mathcal{M}$ a las que puede aplicárseles el procedimiento anterior, esto es, la elección de ψ_a y de \tilde{N} y la construcción del entorno analítico $\mathcal{V} = \mathcal{V}_M$, usando la coordenada grafo w alrededor de cada final de M sobre el disco $\{|w| < \varepsilon\}$. De esta forma, $\mathcal{M}_\varepsilon^*$ es un abierto en \mathcal{M} . Consideremos la aplicación continua $j : \mathcal{M}_\varepsilon^* \rightarrow \mathbb{R} \times C^{2,\alpha}(\{|w| \leq \delta\})$, con $\delta \in]0, \varepsilon[$, dada por $j(M) = (a_1, u_1)$, si es que M viene representada respecto a la coordenada grafo w alrededor del final p_1 , $|w| < \varepsilon$, por $w \mapsto \left(\frac{1}{w}, -a_1 \log \rho + u_1\right)$. Si $\mathcal{V}_M \subset \mathcal{M}_\varepsilon^*$, entonces j es claramente analítica sobre \mathcal{V}_M — j es restricción de una aplicación lineal en (a, u) en virtud de (4.19)—. Además, $v \in \mathcal{J}(M_{a,u})$, $M_{a,u} \in \mathcal{V}_M$, pertenece a $\text{Kernel}(dj_{M_{a,u}})$ si y sólo si v se anula en todo un entorno del primer final de $M_{a,u}$. El principio de continuación analítica para la ecuación de Jacobi [1] nos dice que j es una inmersión al restringirla a \mathcal{V}_M —la condición adicional sobre splitting para inmersiones en variedades de Banach, ver por ejemplo [33], se cumple en nuestra situación porque \mathcal{M}^* tiene dimensión finita—. Como dadas $M_1, M_2 \in \mathcal{M}^*$ se tiene que sus entornos analíticos $\mathcal{V}_{M_1}, \mathcal{V}_{M_2}$ están contenidos en $\mathcal{M}_\varepsilon^*$ para cierto $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, concluimos que ambas estructuras analíticas son compatibles en los puntos de $\mathcal{V}_{M_1} \cap \mathcal{V}_{M_2}$. Este mismo argumento prueba que dos estructuras analíticas alrededor de una superficie $M \in \mathcal{M}^*$ son compatibles, lo que termina de demostrar el teorema.

Lema 4.5.4 Sean $\delta > 0$, $M \in \mathcal{M}^*$ y $\psi_t : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $|t| < \delta$, una familia diferenciable de inmersiones —en el sentido de que $(t, p) \mapsto \psi_t(p)$ es diferenciable—

tal que ψ_t representa un elemento $M_t \in \mathcal{M}^*$ con $M_0 = M$. Entonces, la curva $t \mapsto M_t \in \mathcal{M}^*$ es diferenciable y su vector tangente en $t = 0$ es $u = \left\langle \frac{d\psi_t}{dt} \Big|_{t=0}, N \right\rangle \in \mathcal{J}(M)$, donde N es la aplicación de Gauss de M . Además, si la familia ψ_t es analítica, esto es, $(t, p) \mapsto \psi_t(p)$ es analítica en $\mathbb{R} \times M$, entonces $t \mapsto M_t$ es también analítica.

Demostración. Probaremos el lema para un $\delta > 0$ suficientemente pequeño. El caso general se prueba directamente a partir de éste. Es claro que $M_t \rightarrow M$ diferenciablemente cuando t tiende a cero. Por el teorema 4.5.1, con la notación que venimos usando hasta ahora y tomando δ suficientemente pequeño, se tiene que $M_t \in \mathcal{V} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{U}$, $|t| < \delta$. Por lo tanto M_t se puede representar mediante un par $(a_t, u_t) \in \mathcal{A} \times \mathcal{U}$. Como las componentes de a_t se pueden calcular mediante integrales a lo largo de ciertas curvas fijas en M de una expresión que depende diferenciablemente de t , se tiene que a_t también depende diferenciablemente de t . El que u_t sea diferenciable en t en un dominio acotado de M es trivial. Queda entonces estudiar cómo dependen de t las funciones u_t en un entorno de cada final p_i de M . En la coordenada grafo w alrededor de p_i , las superficies M_t se escriben $\phi_t(w) = \left(\frac{1}{w}, -a_t \log \rho + h(w) + \frac{u_t(w)}{\langle N, e_3 \rangle} \right)$, $0 < |w| \leq \varepsilon$, donde M viene dada por $w \mapsto \left(\frac{1}{w}, -c \log \rho + h(w) \right)$, $0 < |w| \leq \varepsilon$, y u_t es de clase C^∞ en $\{|w| \leq \varepsilon\}$. Tanto a_t como $u_t|_{\{|w|=\varepsilon\}}$ dependen diferenciablemente de t . Para ε suficientemente pequeño el lema 4.2.2 puede aplicarse, luego con la notación de éste, la curva $(a_t, v_t) = E^{-1}(a_t, 0, u_t|_{\{|w|=\varepsilon\}})$ depende de t de forma diferenciable. Como el principio del máximo en infinito de Langevin y Rosenberg —ver nota 4.2.1— implica que $u_t(w)$, $|w| \leq \varepsilon$ está unívocamente determinada por a_t y por $u_t|_{\{|w|=\varepsilon\}}$, deducimos que $v_t = u_t$ en $\{|w| \leq \varepsilon\}$, luego hemos probado que la curva $t \mapsto M_t$ es diferenciable. El hecho de que su vector velocidad valga lo que asegura el enunciado se sigue de que la parte normal del campo variacional de una deformación no depende de la elección de las inmersiones ψ_t , sino de las propias superficies M_t . Si ψ_t es analítica, notemos que el razonamiento anterior no puede repetirse, por no ser \tilde{N} ni $(a, p) \mapsto \psi_a(p)$ analíticas. Sin embargo, en este caso a_t y $u_t|_{\{|w|=\varepsilon\}}$ dependen analíticamente de t y por tanto, lo mismo puede decirse de la curva $t \mapsto (a_t, u_t|_{\{|w|\leq\varepsilon\}}) = E^{-1}(a_t, 0, u_t|_{\{|w|=\varepsilon\}})$. En particular, $t \mapsto j(M_t) \in \mathbb{R} \times C^{2,\alpha}(\{|w| \leq \varepsilon\})$ es analítica, siendo j la inmersión de $\mathcal{M}_\varepsilon^*$ que aparecía en la demostración del teorema 4.5.1, y ahora la última parte del enunciado se deduce de propiedades estándar de subvariedades. Esto prueba el lema.

En [23], Hoffman y Meeks presentaron para cada género $k \geq 1$ una superficie minimal M_k propiamente embebida en \mathbb{R}^3 , con curvatura total finita y tres finales. En el caso $k = 1$, la superficie M_1 fue originalmente descubierta por Costa [9], quien con posterioridad [11] ha podido encontrar una deformación 1-paramétrica de M_1 , probando además que el espacio de toros minimales propiamente embebidos en \mathbb{R}^3 , con curvatura total finita y tres finales se reduce a esta familia 1-paramétrica. En esta línea, Hoffman y Karcher [19] muestran una deformación 1-paramétrica de las superficies de Hoffman-Meeks M_k , $k \geq 2$, y conjeturan que el resultado de unicidad anterior de Costa puede extenderse a géneros superiores, esto es, el espacio de las superficies minimales propiamente embebidas, con curvatura total finita, género $k \geq 2$ y tres finales debería ser igual a la familia 1-paramétrica de superficies descrita en [19]. Veamos una respuesta afirmativa parcial a dicha conjetura:

Corolario 4.5.1 *Salvo dilataciones en \mathbb{R}^3 , cada superficie de Hoffman-Meeks M_k con $2 \leq k \leq 37$ sólo puede deformarse por una familia 1-paramétrica de superficies.*

Demostración. Un resultado de Nayatani [46] nos dice que para $2 \leq k \leq 37$, cada superficie de Hoffman-Meeks M_k tiene $\dim \mathcal{K} = 4$ y por tanto es no degenerada. En estas condiciones, el teorema 4.5.1 implica que alrededor de M_k , el correspondiente espacio \mathcal{M} de superficies minimales tiene dimensión 6. Obviando las traslaciones, giros alrededor del eje x_3 y homotecias deducimos nuestro enunciado.

4.6 **Aplicaciones y resultados relacionados.**

Es posible aplicar los métodos anteriores para obtener información adicional sobre superficies minimales con curvatura total finita en \mathbb{R}^3 . Primeramente veremos cómo las superficies próximas a una superficie no degenerada “heredan” algunas de las simetrías de ésta, y extenderemos la estructura de variedad analítica tanto para superficies simétricas respecto de un cierto grupo fijo G de movimientos rígidos como para superficies propiamente inmersas en \mathbb{R}^3 con curvatura total finita y finales embebidos no paralelos.

4.6.1 Superficies minimales con simetrías.

Sea $\tilde{\mathcal{G}}$ el subgrupo de isometrías de \mathbb{R}^3 que conservan el semiespacio superior y sea \mathcal{G} la componente conexa de la identidad en $\tilde{\mathcal{G}}$. \mathcal{G} es un grupo de Lie de dimensión tres, generado por las traslaciones horizontales y los giros alrededor del eje x_3 . Consideremos un grupo discreto G de movimientos rígidos que conserven el semiespacio superior, esto es, $G \subset \tilde{\mathcal{G}}$. Una inmersión minimal y propia $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ se llamará G -invariante cuando para todo elemento $\phi \in G$ exista un difeomorfismo conforme $S_\phi : M \rightarrow M$ tal que $\psi \circ S_\phi = \phi \circ \psi$. Si imponemos a ψ que tenga curvatura total finita y finales embebidos con vector normal límite vertical, nuestro grupo no puede contener traslaciones y podremos suponer por tanto que G fija el origen de \mathbb{R}^3 . G es finito y está generado por una rotación R_θ de ángulo $\theta = \frac{2\pi}{k}$ alrededor del eje x_3 , $k \in \mathbb{N}$, o por una reflexión ϕ en un plano vertical de \mathbb{R}^3 , o por dos reflexiones ϕ_1, ϕ_2 en planos verticales distintos. Además, el grupo G conserva cada final de ψ y S_ϕ se extiende a \overline{M} produciendo un difeomorfismo conforme, que pudiera ser holomorfo ó antiholomorfo, al que denotaremos también por S_ϕ . Nótese que si escribimos la inmersión ψ alrededor de un final p_i en la coordenada grafo w como hacíamos en (4.4), entonces $h \circ S_\phi = h$, para cada $\phi \in G$. Esto nos permite elegir la familia ψ_a de la sección 4.5 de forma que las condiciones 1,2,3 sigan verificándose y además $\psi_a \circ S_\phi = \phi \circ \psi_a$, para cada $a \in \mathcal{A}$. Sea $d\bar{s}^2$ una métrica Riemanniana en la estructura compleja de \overline{M} que sea S_ϕ -invariante para cada $\phi \in G$, de manera que el factor conforme λ entre $d\bar{s}^2$ y la métrica inducida por ψ también será S_ϕ -invariante, para cada $\phi \in G$. Tomaremos el campo transversal \tilde{N} también invariante por G . Si ahora consideramos el subespacio cerrado $C^{k,\alpha}(\overline{M})^G = \{u \in C^{k,\alpha}(\overline{M}) / u \circ S_\phi = u, \forall \phi \in G\}$. Entonces $\psi_a + u\tilde{N}$ es una inmersión G -invariante, cualquiera que sea $(a, u) \in \mathcal{A} \times \mathcal{U}^G$, para ciertos entornos convenientemente elegidos \mathcal{A} de $\mathfrak{c} = \log(M)$ en \mathbb{R}^r y \mathcal{U}^G de cero en $C^{2,\alpha}(\overline{M})^G$. Por tanto, $\mathbb{R}^r \times C^{2,\alpha}(\overline{M})^G$ es un espacio de Banach y si razonamos como en el lema 4.5.1 llegaremos a que tomando $\mathcal{A}, \mathcal{U}^G$ más pequeños si fuera necesario, el operador $\overline{H} : \mathcal{A} \times \mathcal{U}^G \rightarrow C^\alpha(\overline{M})^G$ es analítico. También podemos identificar el espacio tangente a $\mathcal{A} \times \mathcal{U}^G$ en $(c, 0)$ con el espacio $\mathcal{B}^G = \{v = u_a + u \in \mathcal{B} / a \in \mathbb{R}^r, u \in C^{2,\alpha}(\overline{M})^G\} \subset \mathcal{B}$, donde u_a se define como en la sección 4.5. Consideremos el operador lineal y continuo

$$\overline{L} = 2d\overline{H}_{(c,0)} : \mathcal{B}^G \rightarrow C^\alpha(\overline{M})^G.$$

Veamos que $\overline{L}(\mathcal{B}^G) = \overline{L}(\mathcal{B}) \cap C^\alpha(\overline{M})^G$: claramente el primer espacio está contenido en el segundo. Recíprocamente, dada $v \in \overline{L}(\mathcal{B}) \cap C^\alpha(\overline{M})^G$, existe una función $u \in \mathcal{B}$ tal que $\overline{L}u = v$. Entonces $u^G = \frac{1}{|G|} \sum_{\phi \in G} (u \circ S_\phi)$ pertenece a \mathcal{B}^G —aquí $|G|$

representa el número de elementos de G , y $\bar{L}(u^G) = v$ lo cual prueba lo deseado. Consideremos ahora los espacios de funciones de Jacobi

$$\mathcal{J}^G = \mathcal{J} \cap \mathcal{B}^G, \quad \mathcal{K}^G = \mathcal{K} \cap \mathcal{B}^G, \quad \mathcal{K}_0^G = \bar{L}(\mathcal{B}^G)^\perp \cap C^\alpha(\bar{M})^G.$$

Así, $\mathcal{K}_0^G \subset \mathcal{K}^G$ y repitiendo los argumentos de la demostración del lema 4.4.2 obtenemos $\mathcal{K}_0^G = \mathcal{K}_0 \cap \mathcal{B}^G$ y $\dim \mathcal{J}^G = r + \dim \mathcal{K}_0^G$. Por otra parte, dado $a \in \mathbb{R}^3$, se tiene que $\langle N, a \rangle \in \mathcal{B}^G$ si y sólo si $\phi(a) = a$ para cada $\phi \in G$, y que $\det(\psi, N, e_3) \in \mathcal{B}^G$ si y sólo si $\det \phi = 1$ para cada $\phi \in G$. De esta manera podemos encontrarnos tres posibilidades:

1. G está generado por una rotación R_θ de ángulo θ alrededor del eje x_3 . En este caso, las funciones del espacio Killing que son G -invariantes son $\text{Killing}^G = \text{Span}\{\det(\psi, N, e_3), \langle N, e_3 \rangle\}$, luego definiendo $\text{Killing}_0^G = \text{Killing}^G \cap \mathcal{K}_0$, se tiene que $\text{Killing}_0^G = \text{Span}\{\det(\psi, N, e_3)\}$.
2. $G = \{1, \phi\}$, donde ϕ es una reflexión en un plano vertical, que tras una rotación puede suponerse como el plano (x_1, x_3) . En estas condiciones, los correspondientes espacios son $\text{Killing}^G = \text{Span}\{\langle N, e_1 \rangle, \langle N, e_3 \rangle\}$ y $\text{Killing}_0^G = \text{Span}\{\langle N, e_1 \rangle\}$.
3. G está generado por dos reflexiones en planos verticales distintos. En este caso, $\text{Killing}^G = \text{Span}\{\langle N, e_3 \rangle\}$ y $\text{Killing}_0^G = \{0\}$.

Siguiendo los pasos de la demostración del teorema 4.5.1, pero cambiando cada espacio por su correspondiente versión G -invariante, se puede probar el siguiente resultado:

Teorema 4.6.1 *Sea G un grupo finito de movimientos rígidos que conservan el semiespacio superior. Sea \mathcal{M}^G el conjunto de las inmersiones minimales, propias y G -invariantes en \mathbb{R}^3 , con curvatura total finita, topología fija y finales embebidos con vectores normales límite verticales, dotado de la topología inducida como subconjunto de \mathcal{M} . Sea $\mathcal{M}^{G,*} = \{M \in \mathcal{M}^G / \mathcal{K}_0^G(M) = \text{Killing}_0^G(M)\}$. Entonces, $\mathcal{M}^{G,*}$ es un abierto de \mathcal{M}^G que ó bien es vacío ó admite una estructura natural de variedad analítica real de dimensión $(r + \dim \text{Killing}_0^G)$, y el espacio tangente en un punto M de $\mathcal{M}^{G,*}$ viene dado por $\mathcal{J}^G(M)$.*

Nota 4.6.1

1. La condición $\mathcal{K}_0(M) = \text{Killing}_0(M)$ implica $\mathcal{K}_0^G(M) = \text{Killing}_0^G(M)$. En general el recíproco no debería ser cierto.

2. Consideremos la acción

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{G} \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (\phi, M) &\longmapsto \phi(M) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Del lema 4.5.4 se tiene que Ψ es analítica cuando la restringimos a \mathcal{M}^* . El espacio tangente a \mathcal{G} en la identidad I está generado por las traslaciones infinitesimales a lo largo de cualquier vector horizontal x , \dot{T}_x , y por la rotación infinitesimal alrededor del eje x_3 , \dot{R} . El lema 4.5.4 nos dice que $(D_1\Psi)_{(I,M)}(\dot{T}_x) = \langle N, x \rangle$ y $(D_1\Psi)_{(I,M)}(\dot{R}) = \det(p, N, e_3)$, siendo N y p la aplicación de Gauss y el vector de posición en M , respectivamente. Estas ecuaciones implican que $(D_1\Psi)_{(I,M)}$ es inyectiva.

Corolario 4.6.1 *Supongamos que una superficie $M \in \mathcal{M}^*$ es invariante por un subgrupo finito G de $\tilde{\mathcal{G}}$. Entonces, cada superficie M' en la misma componente conexa que M —en el espacio \mathcal{M}^* — es invariante por un cierto subgrupo $G' \subset \tilde{\mathcal{G}}$ que es conjugado con G .*

Demostración. De la nota 4.6.1.1 se tiene que $\mathcal{M}^G \cap \mathcal{M}^*$ es abierto en $\mathcal{M}^{G,*}$. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos las inmersiones $j : \mathcal{M}_\varepsilon^* \longrightarrow \mathbb{R} \times C^{2,\alpha}(\{|w| \leq \varepsilon\})$ y su restricción a $\mathcal{M}^G \cap \mathcal{M}_\varepsilon^*$, $j^G : \mathcal{M}^G \cap \mathcal{M}_\varepsilon^* \longrightarrow \mathbb{R} \times C^{2,\alpha}(\{|w| \leq \varepsilon\})$. Nótese que en $\mathcal{M}^G \cap \mathcal{M}_\varepsilon^*$ tenemos la estructura analítica inducida de la de $\mathcal{M}^{G,*}$, que no coincide con la de $\mathcal{M}_\varepsilon^*$, que es la que hace a j inmersión. El que j^G sea también inmersión se prueba como en el caso de j , ver la demostración del teorema 4.5.1. Como la imagen de la primera inmersión contiene a la imagen de la segunda, concluimos que $\mathcal{M}^G \cap \mathcal{M}^*$ es una subvariedad de \mathcal{M}^* . Si ahora nos fijamos en la diferencial en el punto (I, M) de la aplicación $\Psi : \mathcal{G} \times (\mathcal{M}^G \cap \mathcal{M}^*) \longrightarrow \mathcal{M}^*$ dada por $(\phi, M) \mapsto \phi(M)$, veremos usando la nota 4.6.1 que en las tres posibilidades que estamos manejando su imagen es $\text{Killing}_0(M) + \mathcal{J}^G(M) = \mathcal{J}(M)$. Esta última igualdad puede justificarse calculando la dimensión del miembro de la izquierda y teniendo en cuenta que $\text{Killing}_0(M) \cap \mathcal{J}^G(M) = \mathcal{K}_0^G(M)$. Por tanto Ψ es una aplicación abierta. En particular, $\{\phi(M) / \phi \in \mathcal{G}, M \in \mathcal{M}^G \cap \mathcal{M}^*\}$ es un abierto

de \mathcal{M}^* . Pero dicho conjunto es trivialmente cerrado y por hipótesis no vacío, con lo que terminamos la demostración de este corolario.

Nota 4.6.2 Este fenómeno de “conservación de simetrías a lo largo de deformaciones” se puede observar en las superficies minimales $M_{k,x}$, $x \geq 1$ del trabajo de Hoffman y Karcher [19]: Esta es una familia 1-paramétrica de superficies minimales propiamente embebidas con género k y tres finales. Las superficie $M_{k,1}$ es la obtenida por Hoffman y Meeks en [23]. Estas superficies $M_{k,x}$ son invariantes por un subgrupo de \mathcal{G} de orden $2(k+1)$. Sin embargo, la superficie $M_{k,1}$ tiene simetrías adicionales que no caen en \mathcal{G} y que desaparecen al deformar por dicha familia.

4.6.2 Superficies con finales no paralelos.

Las ideas desarrolladas hasta ahora en este capítulo pueden también aplicarse, con pequeñas modificaciones, al caso en que $M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ sea una inmersión minimal, propia, con curvatura total finita y con finales embebidos no paralelos. La única diferencia sustancial aparece en el espacio Killing_0 porque

1. Si M tiene tres finales donde la aplicación de Gauss extendida toma direcciones linealmente independientes, entonces $\text{Killing}_0 = \{0\}$.
2. Si todas las direcciones normales límite caen en un plano, pongamos el plano (x_1, x_2) , entonces $\text{Killing}_0 = \text{Span}\{\langle N, e_3 \rangle\}$.

Notemos que en las dos situaciones, es $\text{Killing} = \{\langle N, e_1 \rangle, \langle N, e_2 \rangle, \langle N, e_3 \rangle\}$. Por tanto, podemos enunciar el siguiente

Teorema 4.6.2 *Sea \mathcal{M} el espacio de las inmersiones minimales y propias en \mathbb{R}^3 con topología fija, curvatura total finita y finales embebidos y no paralelos con vectores normales límite prescritos, dotado de la topología uniforme sobre conjuntos compactos. Dada $M \in \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{K}_0 = \text{Killing}_0$, el espacio \mathcal{M} es una variedad analítica real de dimensión $r + \dim \text{Killing}_0$ en un entorno de M .*

Como ya ocurría en la última sección, la hipótesis de regularidad que aparece en el último enunciado se tiene cuando $\text{Killing} = \mathcal{K}$. Esta última igualdad viene implicada por la condición geométrica de que la aplicación de Gauss extendida $N : \overline{M} \rightarrow S^2(1)$ tenga todos sus valores de ramificación localizados en un ecuador de $S^2(1)$, según un resultado de Montiel y Ros [45]. Por ejemplo, la superficie M definida por Jorge y Meeks en [27] con género cero y r finales de tipo catenoide distribuidos simétricamente en el plano horizontal tiene nulidad tres porque su aplicación de Gauss viene dada por $z \in \overline{\mathbb{C}} \mapsto z^{r+1} \in \overline{\mathbb{C}}$. Por tanto, el último teorema describe el espacio de superficies minimales propiamente inmersas con curvatura total finita, género cero y r finales embebidos paralelos a los de M , próximas a esta superficie.

4.7 La estructura de subvariedad Lagrangiana.

Recordemos que si en $\mathbb{R}^{2r} = \mathbb{R}^r \oplus \mathbb{R}^r$ consideramos la 2-forma simpléctica canónica Ω dada por

$$\Omega((a, b), (a', b')) = \langle a, b' \rangle - \langle a', b \rangle,$$

para todo par de vectores $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R}^r \oplus \mathbb{R}^r$, una inmersión de una r -variedad $f : N^r \rightarrow \mathbb{R}^{2r}$ se dice una *inmersión Lagrangiana* cuando $f^*\Omega = 0$.

Continuaremos con la misma notación que hasta ahora. Consideremos la aplicación continua

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2r} \\ M &\longmapsto (\log(M), \text{altura}(M)), \end{aligned}$$

donde \log, altura se definen como en la sección 4.1. Sea $M \in \mathcal{M}^*$ una superficie no degenerada y $\mathcal{V} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{U}$ el entorno analítico de M que se obtuvo en la demostración del teorema 4.5.1. Dada $M_{a,u} \in \mathcal{V}$, de (4.19) tenemos

$$\left. \begin{aligned} \log(M_{a,u}) &= a, \\ \text{altura}(M_{a,u}) &= \left(h(p_1) + \frac{u(p_1)}{\langle N(p_1), e_3 \rangle}, \dots, h(p_r) + \frac{u(p_r)}{\langle N(p_r), e_3 \rangle} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Como f es la restricción a \mathcal{V} de una aplicación analítica definida sobre $\mathcal{A} \times \mathcal{U}$, $f : \mathcal{M}^* \rightarrow \mathbb{R}^{2r}$ también es analítica. Además, (4.22) implica que la diferencial de f en M viene dada, para cada $v = u_{\dot{a}} + \dot{u} \in \mathcal{J}(M)$, por

$$\begin{aligned} d\log_M(v) &= \dot{a} = \text{Log}(v), \\ d\text{altura}_M(v) &= (\dot{u}(p_1)\langle N(p_1), e_3 \rangle, \dots, \dot{u}(p_r)\langle N(p_r), e_3 \rangle) = \text{Altura}(v). \end{aligned}$$

Por tanto, $df_M : \mathcal{J}(M) \rightarrow \mathbb{R}^{2r}$ se puede escribir $df_M = (\text{Log}, \text{Altura})|_{\mathcal{J}(M)}$, lo cual unido a (4.15) nos da $f^*\Omega = 0$. Por otra parte, como $\text{Kernel}(df_M) = \mathcal{K}_0(M)$, concluimos que el rango de df_M es r para cualquier $M \in \mathcal{M}^*$. Además, la nota 4.6.1 nos dice que la aplicación $\Phi : \mathcal{G} \times \mathcal{M}^* \rightarrow \mathcal{M}^* \times \mathcal{M}^*$ dada por $(\phi, M) \mapsto (M, \phi(M))$ es una inmersión. Ahora podemos probar el resultado principal de esta sección:

Teorema 4.7.1 *Si \mathcal{M}^* es no vacío, entonces $\mathcal{M}^*/\mathcal{G}$ tiene una estructura natural de variedad real analítica de dimensión r y la aplicación $f : \mathcal{M}^*/\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^{2r}$ definida por $f([M]) = (\log(M), \text{altura}(M))$, donde $[M]$ es la clase de M en $\mathcal{M}^*/\mathcal{G}$, es una inmersión Lagrangiana analítica.*

Demostración. Veamos que Φ es una inmersión propia. Tomemos sucesiones $\{M_n\}_n \subset \mathcal{M}^*$ y $\{\phi_n\}_n \subset \mathcal{G}$ tales que $M_n \rightarrow M_\infty \in \mathcal{M}^*$ y $\phi_n(M_n) \rightarrow M'_\infty \in \mathcal{M}^*$. Entonces, la parte en traslación de ϕ_n ha de ser necesariamente acotada. Esto puede verificarse tomando un plano horizontal cuyas intersecciones con M_∞ y M'_∞ sean compactas y transversales, y fijándonos en las secciones que las superficies M_n y $\phi_n(M_n)$ producen sobre este plano: como todas estas secciones están contenidas en un compacto fijo de \mathbb{R}^3 , deducimos que Φ es propia. El corolario 4.6.1 garantiza que el número de preimágenes por Φ de los puntos de $\Phi(\mathcal{G} \times \mathcal{M}^*)$ es finito y localmente constante —este número coincide, dada $M \in \mathcal{M}^*$, con el orden del grupo $\{\phi \in \mathcal{G} / \phi(M) = M\}$ —. Por tanto $\Phi(\mathcal{G} \times \mathcal{M}^*)$, o lo que es lo mismo el grafo de la relación definida sobre \mathcal{M}^* por el grupo \mathcal{G} , es una subvariedad cerrada de $\mathcal{M}^* \times \mathcal{M}^*$. El teorema 16.10.3 en [12] nos dice que esto es equivalente a la existencia de una estructura analítica sobre $\mathcal{M}^*/\mathcal{G}$ que hace a la proyección $\mathcal{M}^* \rightarrow \mathcal{M}^*/\mathcal{G}$ una submersión. En nuestro caso, $\mathcal{M}^*/\mathcal{G}$ tiene dimensión r y la aplicación de rango constante $f : \mathcal{M}^* \rightarrow \mathbb{R}^{2r}$ factoriza a través de dicho cociente. Las propiedades ya demostradas de f sobre \mathcal{M}^* implican directamente que $f : \mathcal{M}^*/\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^{2r}$ es una inmersión Lagrangiana analítica, y el teorema está probado.

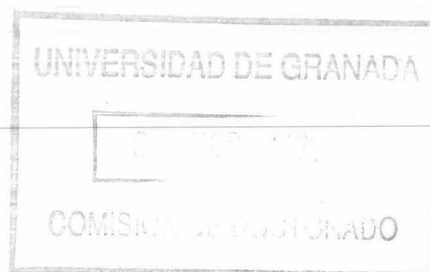
Nota 4.7.1 *El espacio tangente a la variedad cociente en $[M] \in \mathcal{M}^*/\mathcal{G}$ se identifica de forma natural con el cociente $\mathcal{J}(M)/\mathcal{K}_0(M)$.*

Nota 4.7.2 El que la suma de los residuos de una 1-forma meromorfa sobre una superficie de Riemann compacta sea cero implica que la aplicación $\log : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^r$ tome valores en el hiperplano $\mathbb{R}_0^{r-1} = \{(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r / a_1 + \dots + a_r = 0\}$. Si $M \in \mathcal{M}$ y $\dim \mathcal{K}(M) = 4$, entonces $M \in \mathcal{M}^*$ y $d\log_M : \mathcal{J}(M) \rightarrow \mathbb{R}_0^{r-1}$ es sobreyectiva. De aquí se deduce directamente que las superficies en \mathcal{M}^* cercanas a M se parametrizan, salvo traslaciones y rotaciones alrededor del eje x_3 , por los crecimientos logarítmicos en sus finales.

Capítulo 5

El espacio de minimales periódicas con finales planos.

En este último capítulo nos disponemos a encontrar condiciones para que ciertos espacios de superficies minimales propiamente embebidas y simplemente periódicas tengan una estructura de variedad, de forma parecida a como se hizo en el capítulo anterior con el caso de curvatura total finita. Los espacios \mathcal{M}_t , \mathcal{M}_s en los que desarrollaremos esta teoría son los de las superficies minimales propiamente embebidas en cocientes de \mathbb{R}^3 por traslaciones no triviales o por movimientos helicoidales alrededor del eje x_3 , que en ambos casos dependen de la superficie, con topología fija y finita y finales planos horizontales. Dada $M \in \mathcal{M}_t$, el espacio $\mathcal{J}(M)$ de deformaciones infinitesimales de M en \mathcal{M}_t tiene dimensión mayor o igual que 6, y diremos que M es *no degenerada* cuando esta dimensión sea mínima. En tal caso, dentro del espacio $\mathcal{J}(M)$ encontramos tres direcciones correspondientes a deformaciones que conservan el ambiente —concretamente, traslaciones de M — y otras tres que lo varían —homotecias y giros de M alrededor del eje x_3 , y una dirección de deformación no trivial—. Cuando M está en \mathcal{M}_s , la dimensión mínima posible de $\mathcal{J}(M)$ es cuatro, con dos direcciones que fijan el ambiente —la traslación vertical y los giros respecto al eje x_3 — y otras dos que lo cambian —homotecias y una deformación no trivial—. Dotaremos de estructura de variedad real analítica a los espacios de superficies no degeneradas en \mathcal{M}_t y \mathcal{M}_s y caracterizaremos a los ejemplos de Riemann —ver sección 1.2— y a sus recubridores finitos como los únicos toros minimales no degenerados en los espacios \mathcal{M}_t para cualquier número de finales. También proporcionaremos estructuras de subvariedad Lagrangiana a los cocientes de los espacios de superficies no degeneradas en \mathcal{M}_t , \mathcal{M}_s por los



grupos de isometrías de \mathbb{R}^3 que conservan el espacio ambiente en cada caso.

5.1 Planteamiento del problema.

Sea $\psi : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal, orientable y propia. Tomemos un ciclo compacto $\Gamma \subset \widetilde{M}$, elijamos un conormal unitario η a lo largo de Γ y consideremos el flujo de ψ a lo largo de Γ ,

$$\text{flujo}(\psi, \Gamma) = \int_{\Gamma} \eta \, ds,$$

donde ds se mide con la métrica inducida por ψ . Sabemos que el flujo no depende del ciclo elegido dentro de una misma clase de homología. Ahora tomemos una deformación diferenciable $\{\psi_t : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3\}_{|t| < \varepsilon}$ por inmersiones no necesariamente minimales —con ello queremos decir que $(t, p) \mapsto \psi_t(p)$ es diferenciable—, tal que $\psi_0 = \psi$. Estamos interesados en el vector velocidad de la curva $t \mapsto \int_{\Gamma} \eta_t \, ds_t$, donde el subíndice \bullet_t significa que el objeto correspondiente está calculado respecto de la métrica inducida por ψ_t . Aunque no estamos exigiendo que la deformación ψ_t sea por minimales, también denotaremos a esta última integral por $\text{flujo}(\psi_t, \Gamma)$. Llamando $\gamma_t = \gamma_t(s_t)$ a una parametrización de Γ por el arco respecto de ψ_t y N_t a su aplicación de Gauss, tendremos

$$\text{flujo}(\psi_t, \Gamma) = \int_{\Gamma} d\psi_t(\gamma'_t) \wedge N_t \, ds_t = \int_{\Gamma} d\psi_t(\gamma') \wedge N_t \, ds.$$

Como veníamos haciendo, denotaremos por un punto “ $\dot{}$ ” a la derivada respecto a t en $t = 0$. De esta forma,

$$\text{flujo} \dot{=} \int_{\Gamma} dV(\gamma') \wedge N \, ds + \int_{\Gamma} d\psi(\gamma') \wedge \dot{N} \, ds,$$

donde V es el campo variacional de ψ_t . Como \dot{N} es un vector tangente, la segunda integral se puede escribir

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \langle \dot{N}, d\psi(J\gamma') \rangle d\psi(\gamma') \wedge d\psi(J\gamma') \, ds = \\ & = \int_{\Gamma} \langle \dot{N}, d\psi(J\gamma') \rangle N \, ds = - \int_{\Gamma} \langle N, dV(J\gamma') \rangle N \, ds, \end{aligned}$$

siendo J la estructura compleja de \widetilde{M} . Por tanto, deducimos

$$\text{fluj}\ddot{o} = \int_{\Gamma} [dV(\gamma') \wedge N - \langle N, dV(J\gamma') \rangle N] ds.$$

En particular, $\text{fluj}\ddot{o}$ no depende de la deformación, sino sólo del campo variacional. Como la última expresión es lineal en V , podemos estudiar por separado los casos en que V sea tangente o normal a ψ . En el primer caso, podremos elegir la deformación como una reparametrización de ψ luego el que ésta sea minimal implica que $\text{fluj}\ddot{o}(\psi_t, \Gamma)$ será constante en t , luego $\text{fluj}\ddot{o}$ vale cero. Si $V = hN$ para cierta función h de clase C^1 sobre \widetilde{M} , entonces $dV(\gamma') \wedge N - \langle N, dV(J\gamma') \rangle N = hdN(\gamma') \wedge N - dh(J\gamma')N = h dN(J\gamma') + \frac{\partial h}{\partial \eta} N = -h \frac{\partial N}{\partial \eta} + \frac{\partial h}{\partial \eta} N$. Por tanto,

$$\text{fluj}\ddot{o} = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} N - h \frac{\partial N}{\partial \eta} \right) ds. \quad (5.1)$$

Podemos resumir esto en el siguiente lema:

Lema 5.1.1 *Dada una deformación $C^\infty \{\psi_t : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3\}_{|t| < \varepsilon}$ de una superficie minimal $\psi_0 = \psi$, con campo variacional $V = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi_t$, la derivada de la aplicación flujo a lo largo de un ciclo compacto $\Gamma \subset \widetilde{M}$ viene dada por*

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{fluj}\ddot{o}(\psi_t, \Gamma) = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} (\langle V, N \rangle) N - \langle V, N \rangle \frac{\partial N}{\partial \eta} \right) ds.$$

Como consecuencia, si $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ y elegimos la deformación $\psi_t = \psi + t\mathbf{a}$ para t pequeño, el flujo no depende de t , luego el lema anterior nos dice que

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} (\langle \mathbf{a}, N \rangle) N - \langle \mathbf{a}, N \rangle \frac{\partial N}{\partial \eta} \right) ds = 0. \quad (5.2)$$

El operador de Jacobi de ψ se definía como $L = \Delta + \|\sigma\|^2 = \Delta + \|\nabla N\|^2$, donde Δ es el Laplaciano de la métrica inducida ds^2 y $\|\sigma\|^2$ la norma al cuadrado de la segunda forma fundamental. Las funciones del núcleo de este operador se llaman *funciones de Jacobi*. También sabemos que aquellos campos de vectores sobre \mathbb{R}^3 cuyos flujos consistan en dilataciones o en isometrías inducen sobre nuestra superficie funciones de Jacobi, como por ejemplo $\langle p, N \rangle$, $\det(p, N, e_3)$, $\langle N, \mathbf{a} \rangle$, siendo

p el vector de posición sobre \widetilde{M} , $e_3 = (0, 0, 1)$ y a cualquier vector de \mathbb{R}^3 . El primer ejemplo es la *función soporte* de ψ , y el último se denomina normalmente una *función lineal*. Montiel y Ros probaron [45] que dada una función de Jacobi no lineal u , existe una inmersión minimal, completa y posiblemente ramificada $X(u) : \widetilde{M} - B(N) \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $B(N)$ es el conjunto de puntos de ramificación de N , cuya aplicación de Gauss es N y cuya función soporte es u . En particular, se tiene

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} N - u \frac{\partial N}{\partial \eta} \right) ds = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta_u} N - u \frac{\partial N}{\partial \eta_u} \right) ds_u,$$

donde el subíndice \bullet_u denota que el cálculo se hace respecto a la métrica inducida por $X(u)$. Si cambiamos u por la función soporte $\langle p_u, N \rangle$ de $X(u)$, la última expresión se transforma en

$$\int_{\Gamma} \left(\langle p_u, \frac{\partial N}{\partial \eta_u} \rangle N - \langle p_u, N \rangle \frac{\partial N}{\partial \eta_u} \right) ds_u = \int_{\Gamma} p_u \wedge \left(N \wedge \frac{\partial N}{\partial \eta_u} \right) ds_u = - \int_{\Gamma} p_u \wedge \frac{\partial N}{\partial \gamma'_u} ds_u,$$

donde γ'_u es una parametrización por el arco según $X(u)$ de Γ . Finalmente, el teorema de la divergencia nos dice que la última integral es igual a

$$\int_{\Gamma} \gamma'_u \wedge N ds_u = \int_{\Gamma} \eta_u ds_u = \text{flujo}(X(u), \Gamma).$$

Y con ello hemos probado el siguiente

Lema 5.1.2 *En la situación anterior, sea $X(u)$ la inmersión minimal ramificada de Montiel-Ros asociada a una función de Jacobi no lineal u . Tomemos una deformación diferenciable $\{\psi_t : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3\}_{|t| < \varepsilon}$, $\psi_0 = \psi$, cuyo campo variacional tenga parte normal u . Dado un ciclo compacto $\Gamma \subset \widetilde{M}$, se tiene*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{flujo}(\psi_t, \Gamma) = \text{flujo}(X(u), \Gamma).$$

Sea $\psi : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un embebimiento minimal, propio y no llano, invariante por una traslación de vector $T \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, o sea, existe una transformación conforme $S : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ tal que $\psi \circ S = \psi + T$. ψ induce una superficie minimal propiamente embebida $M \subset \mathbb{R}^3/T$, donde $M = \widetilde{M}/S$. Y recíprocamente, el teorema 1.5.2 asegura que toda superficie minimal propiamente embebida y no llana

$M \subset \mathbb{R}^3/T$ se levanta a una superficie minimal simplemente periódica (conexa) ψ que se relaciona con M de la forma anterior. Supongamos que M es orientable y que tiene topología finita, luego será homeomorfa a una superficie compacta finitamente punteada $\overline{M} - \{p_1, \dots, p_r\}$. En la sección 1.4 vimos que M tiene curvatura total finita, que su estructura conforme viene inducida por otra sobre \overline{M} , que su aplicación de Gauss —la cual está bien definida— se extiende de forma meromorfa a \overline{M} y que M tiene un comportamiento controlado en infinito: todos sus finales han de ser simultáneamente asintóticos a planos paralelos, anillos llanos verticales o a finales de Helicoides. Aquí estudiaremos el primer caso, que recibían el nombre de *finales planos*. Consideremos ψ , M como antes, tales que los finales p_1, \dots, p_r son planos. Dichos finales se levantan a finales planos en \mathbb{R}^3 . Tomaremos T no horizontal, de forma que los finales siempre podrán suponerse asintóticos a planos horizontales.

Lema 5.1.3 *Existe un entorno $B(T)$ de T en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ y una familia de clase C^∞ $\psi_a : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $a \in B(T)$, de inmersiones propias simplemente periódicas con finales asintóticos a planos horizontales, tal que $\psi_T = \psi$ y $\psi_a \circ S = \psi_a + a$, para cualquier $a \in B(T)$.*

Demostración. Consideremos la aplicación lineal sobreyectiva $\Phi : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\Phi(B) = BT$, donde $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ es el conjunto de matrices cuadradas reales de orden tres. Sea E un subespacio suplementario del núcleo de Φ en $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, tal que $I_3 \in E$. Por tanto, la aplicación de clase C^∞ $\Psi : \mathbb{R}^3 \times E \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\Psi(a, A) = AT - a$ verifica $\Psi(T, I_3) = 0$ y $D_2\Psi_{(T, I_3)}$ es un isomorfismo. El teorema de la función Implícita nos da un entorno $B(T)$ de T en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ y una aplicación de clase C^∞ φ definida sobre $B(T)$ por $a \in B(T) \mapsto \varphi(a) = A_a \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $A_a T = a$ para cada $a \in B(T)$ y $A_T = I_3$. Sea Ω un dominio fundamental de ψ con frontera compacta contenida en la unión de dos planos horizontales $\Pi, \Pi + T$, y tomemos dos cilindros finitos C_{R_1}, C_{R_2} de radios $R_1 < R_2$ grandes, paralelos al vector período T , tales que $\partial C_{R_1} \subset \Pi \cup (\Pi + T)$, $\partial C_{R_2} \subset (\Pi - \varepsilon T) \cup (\Pi + (1 + \varepsilon)T)$ con $\varepsilon > 0$ pequeño, y fuera de C_{R_1} , ψ es unión de grafos horizontales. Sea Ω_1 la parte de Ω encerrada por C_{R_1} . Para cada $a \in B(T)$ suficientemente cerca de T , $A_a(\Omega_1)$ es una superficie con borde contenida en el cilindro sólido cuya frontera es C_{R_2} , y que puede extenderse a una superficie a -periódica y con frontera, contenida en un cierto cilindro sólido infinito paralelo al vector a . Si pegamos $A_a(\Omega_1)$ con los finales de Ω fuera de C_{R_2} , obtendremos una superficie diferenciable comprendida entre los

planos $\Pi - \varepsilon T$, $\Pi + (1 + \varepsilon)T$, y que coincide con la superficie original fuera de un compacto. Si ahora extendemos esta superficie mediante la traslación de vector \mathbf{a} habremos conseguido una aplicación diferenciable \mathbf{a} -periódica $\psi_{\mathbf{a}} : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que verifica $\psi_{\mathbf{a}} \circ S = \psi_{\mathbf{a}} + \mathbf{a}$. Además, podemos suponer que $\psi_{\mathbf{a}}$ es una inmersión que depende de \mathbf{a} de forma C^∞ y que $\psi_T = \psi$.

Nota 5.1.1

1. Si $\mathbf{a}(t)$, $|t| < \varepsilon$, es una curva diferenciable contenida en $B(T)$ con $\mathbf{a}(0) = T$ y denotamos la derivada respecto a t en $t = 0$ por un punto, entonces la aplicación lineal $\dot{\mathbf{a}} \mapsto \dot{\psi} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi_{\mathbf{a}(t)}$ es inyectiva, porque la multivaluación de $\dot{\psi}$ es del tipo $\dot{\psi} \circ S = \dot{\psi} + \dot{\mathbf{a}}$, como se comprueba derivando la ecuación de periodicidad de $\psi_{\mathbf{a}}$, ver el lema 5.1.3.
2. Cada $\psi_{\mathbf{a}}$ induce una superficie propiamente inmersa $M_{\mathbf{a}} \subset \mathbb{R}^3/\mathbf{a}$ con r finales asíntóticos a planos horizontales. Los finales de $M_{\mathbf{a}}$ son los mismos de M , pero vistos en ambientes distintos, \mathbb{R}^3/T y \mathbb{R}^3/\mathbf{a} . En particular, dichos finales son minimales.

Como cada final de ψ tiene curvatura total finita, es embebido, de tipo plano y horizontal, usando la coordenada grafo w —ver el capítulo anterior—, podemos escribirlo de la forma

$$\psi(w) = \left(\frac{1}{w}, h(w) \right), \quad 0 < |w| < \varepsilon,$$

donde $\varepsilon > 0$ y h es una función diferenciable valuada real y definida en $\{|w| < \varepsilon\}$. Sean $\rho = |w|$ y ds^2 la métrica inducida, que se escribe en términos de w como

$$g_{ij}(w) = \frac{1}{\rho^4} \left(\delta_{ij} + \rho^4 D_i h D_j h \right), \quad (5.3)$$

donde δ_{ij} es el delta de Kronecker y $D_i h$ es la correspondiente derivada parcial de h . Nótese que la métrica ds^2 se puede inducir sobre M y que las coordenadas grafo w , w' en finales homólogos de ψ se relacionan por una transformación de Möbius del tipo $w' = \frac{w}{1+aw}$, siendo a un número complejo. Tomemos una función positiva $\lambda \in C^\infty(M)$ tal que alrededor de cada final p_i de M se escriba

$\lambda(w) = f(w)\rho^{-4}$ en función de la coordenada grafo en cualquier levantamiento del final p_i a \mathbb{R}^3 , donde f es una función diferenciable y positiva en $\{|w| < \varepsilon\}$, que dependerá del levantamiento elegido. El comentario de arriba sobre finales homólogos nos permite elegir una función de este tipo. Además, (5.3) implica que $d\bar{s}^2 = \frac{1}{\lambda}ds^2$ es una métrica Riemanniana sobre la compactificación de \bar{M} , compatible con su estructura compleja. Llamemos N a la aplicación de Gauss de ψ , que puede inducirse sobre M y extenderse a \bar{M} por la suposición sobre la finitud de la curvatura total. Sea $\tilde{N} : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación diferenciable que verifique $\langle N, \tilde{N} \rangle = 1$ en \bar{M} y $\tilde{N} = \frac{1}{\langle N, e_3 \rangle} e_3$ en un entorno de cada final, donde $e_3 = (0, 0, 1)$. También llamaremos \tilde{N} a su levantamiento S -invariante a \bar{M} . Dado \mathbf{a} cerca de T , consideremos la inmersión \mathbf{a} -periódica $\psi_{\mathbf{a}} : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por el lema 5.1.3. Identificaremos cuando sea conveniente el espacio de Hölder usual $C^{k,\alpha}(\bar{M})$ con el de las funciones S -invariantes de clase $C^{k,\alpha}$ definidas sobre \bar{M} y que pueden extenderse de forma $C^{k,\alpha}$ a los finales. Eligiendo $u \in C^{2,\alpha}(\bar{M})$ suficientemente pequeña, podemos suponer que $\psi_{\mathbf{a}} + u\tilde{N}$ también es una inmersión, y por tanto \mathbf{a} -periódica. Sea $H(\psi_{\mathbf{a}} + u\tilde{N})$ su función curvatura media, que está bien definida sobre M . Como el número de finales de M es finito, podemos suponer que las coordenadas grafo en los finales de un dominio fundamental de la superficie levantada a \mathbb{R}^3 están todas definidas en el mismo disco punteado $\{0 < |w| < \varepsilon\}$, para un cierto número real positivo ε . Ahora podemos aplicar la proposición 4.2.1 a cada final de este dominio fundamental, y teniendo en cuenta que la función curvatura media está bien definida sobre M deducimos la siguiente

Proposición 5.1.1 *Existen entornos \mathcal{U} de 0 en $C^{2,\alpha}(\bar{M})$ y \mathcal{A} de T en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ tales que la aplicación*

$$\begin{aligned} \bar{H} : \mathcal{A} \times \mathcal{U} &\longrightarrow C^\alpha(\bar{M}) \\ (\mathbf{a}, u) &\longmapsto \lambda H(\psi_{\mathbf{a}} + u\tilde{N}) \end{aligned}$$

es un operador real analítico.

Vamos a estudiar ahora la diferencial de \bar{H} . Tomemos una curva diferenciable $t \mapsto (\mathbf{a}(t), u(t))$ en $\mathcal{A} \times \mathcal{U}$ que pase por $(T, 0)$ en el instante $t = 0$, y denotemos por un punto a la derivada respecto de t en $t = 0$. El campo variacional de $\psi_{\mathbf{a}(t)} + u(t)\tilde{N}$ es $\dot{\psi} + \dot{u}\tilde{N}$, y su proyección normal $\langle \dot{\psi}, N \rangle + \dot{u}$. Nótese que \dot{u} está bien definida

sobre \overline{M} pero no así el primer sumando, que presenta la siguiente multivaluación:

$$\langle \dot{\psi}, N \rangle \circ S = \langle \dot{\psi}, N \rangle + \langle \dot{a}, N \rangle. \quad (5.4)$$

Sea L el operador de Jacobi de ψ . También usaremos la misma notación L para el operador de Jacobi que se induce en M . Como $L\langle \dot{a}, N \rangle = 0$, la función

$$d\overline{H}_{(T,0)}(\dot{a}, \dot{u}) = \lambda \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(\psi_{\mathbf{a}(t)} + u(t)\widetilde{N}) = \frac{1}{2}\lambda L(\langle \dot{\psi}, N \rangle + \dot{u}), \quad (5.5)$$

está bien definida sobre \overline{M} , y por la proposición 5.1.1, cae en $C^\alpha(\overline{M})$. Por otro lado, de (5.4) se deduce que la aplicación lineal $\dot{a} \mapsto \langle \dot{\psi}, N \rangle$ es inyectiva.

Sea $V = V(M) = \{ \langle \dot{\psi}, N \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi_{\mathbf{a}(t)}, N \} / \dot{a} \in \mathbb{R}^3 \} \subset C^\infty(\overline{M})$, espacio vectorial que se puede identificar con \mathbb{R}^3 por medio de la aplicación inyectiva anterior. Definimos el espacio vectorial $\mathcal{B} = \mathcal{B}(M) = V \oplus C^{2,\alpha}(\overline{M}) \subset C^{2,\alpha}(\overline{M})$, que tiene estructura de espacio de Banach si consideramos la norma natural sobre cada factor. (5.5) nos permite definir el siguiente operador lineal y acotado:

$$\begin{aligned} \overline{L} = \lambda L : \quad \mathcal{B}(M) &\longrightarrow C^\alpha(\overline{M}) \\ \langle \dot{\psi}, N \rangle + \dot{u} &\longmapsto 2d\overline{H}_{(T,0)}(\dot{a}, \dot{u}), \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde $\dot{\psi} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi_{\mathbf{a}(t)}$. De esta manera, \overline{L} es la "compactificación" sobre la superficie de Riemann \overline{M} del operador de Jacobi L , o sea, $\overline{L} = \lambda L = \overline{\Delta} + \|\overline{\nabla} N\|^2$, donde $\overline{\cdot}$ denota que se refiere a la métrica $d\overline{s}^2$. Como ya ocurrió en el capítulo anterior, este operador de Jacobi compactificado jugará un papel fundamental en lo que sigue, porque de su núcleo e imagen dependerá fuertemente el hecho de que el espacio de superficies minimales propiamente embebidas en cocientes de \mathbb{R}^3 por traslaciones, con topología fija y finita y finales planos sea una variedad alrededor de una de estas superficies.

5.2 Estudio del operador \overline{L} .

Continuamos con nuestra superficie minimal propiamente embebida $M \subset \mathbb{R}^3/T$. Tomemos dos curvas diferenciables $(\mathbf{a}(t), u(t))$, $(\mathbf{b}(t), v(t))$ en un entorno $\mathcal{A} \times \mathcal{U}$ de $(T, 0)$ en $(\mathbb{R}^3 - \{0\}) \times C^{2,\alpha}(\overline{M})$ donde la proposición 5.1.1 sea cierta, que en el instante cero pase por $(T, 0)$. Así, $\psi_{\mathbf{a}(t)} + u(t)\widetilde{N}$, $\psi_{\mathbf{b}(t)} + v(t)\widetilde{N}$ son inmersiones

propias, no necesariamente minimales, con finales asintóticos a planos horizontales. Trabajaremos en un dominio fundamental Ω de ψ cuya frontera sea compacta y esté contenida en dos planos horizontales $\Pi, \Pi + T$. Llamemos $\partial\Omega = \Gamma \cup (\Gamma + T)$, y notemos que aunque \dot{u}, \dot{v} toman cada una de ellas los mismos valores sobre Γ y sobre $\Gamma + T$, esto no puede asegurarse de $\dot{\psi} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi_{\mathbf{a}(t)}$, $\dot{\psi}' = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi_{\mathbf{b}(t)}$, sino que sus valores sobre $\Gamma, \Gamma + T$ se relacionan mediante (5.4). Sean $dA, d\bar{A}$ los elementos de área asociados a las métricas ds^2 y $d\bar{s}^2$, respectivamente. Como $\bar{L}d\bar{A} = LdA$, el teorema de la divergencia nos dice que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[(\langle \dot{\psi}, N \rangle + \dot{u}) \bar{L}(\langle \psi', N \rangle + \dot{v}) - (\langle \psi', N \rangle + \dot{v}) \bar{L}(\langle \dot{\psi}, N \rangle + \dot{u}) \right] d\bar{A} = \\ & = \int_{\partial\Omega} \left[(\langle \dot{\psi}, N \rangle + \dot{u}) \frac{\partial}{\partial \eta} (\langle \psi', N \rangle + \dot{v}) - (\langle \psi', N \rangle + \dot{v}) \frac{\partial}{\partial \eta} (\langle \dot{\psi}, N \rangle + \dot{u}) \right] ds, \end{aligned}$$

donde η es el conormal exterior a Ω a lo largo de su frontera. Por simplicidad, denotaremos por $\text{flujo}(\bullet)$ a $\text{flujo}(\bullet, \Gamma)$ de ahora en adelante. Usando (5.4) y el lema 5.1.1, la última expresión se puede escribir

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \text{flujo}(\psi_{\mathbf{a}(t)} + u(t)\tilde{N}), \dot{\mathbf{b}} \right\rangle - \left\langle \dot{\mathbf{a}}, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \text{flujo}(\psi_{\mathbf{b}(t)} + v(t)\tilde{N}) \right\rangle - \\ & - \int_{\Gamma} \left(\langle \dot{\mathbf{a}}, N \rangle \frac{\partial}{\partial \eta} (\langle \dot{\mathbf{b}}, N \rangle) - \langle \dot{\mathbf{b}}, N \rangle \frac{\partial}{\partial \eta} (\langle \dot{\mathbf{a}}, N \rangle) \right) ds. \end{aligned}$$

Y la última integral se anula por (5.2), luego hemos obtenido una forma bilineal antisimétrica definida sobre el espacio \mathcal{B} que nos relaciona el operador diferencial \bar{L} con las aplicaciones flujo y período:

Lema 5.2.1 Sean ψ, M como hasta ahora. Consideremos un entorno $\mathcal{A} \times \mathcal{U}$ de $(T, 0)$ en $(\mathbb{R}^3 - \{0\}) \times C^{2,\alpha}(\bar{M})$ donde se verifique la proposición 5.1.1. Dadas dos curvas diferenciables $(\mathbf{a}(t), u(t)), (\mathbf{b}(t), v(t))$ en $\mathcal{A} \times \mathcal{U}$ que pasen por $(T, 0)$ en $t = 0$, si V_1, V_2 son los campos variacionales respectivos de $\psi_{\mathbf{a}(t)} + u(t)\tilde{N}$ y de $\psi_{\mathbf{b}(t)} + v(t)\tilde{N}$, y Ω es un dominio fundamental de ψ , entonces

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\Omega} (\langle V_1, N \rangle \bar{L}\langle V_2, N \rangle - \langle V_2, N \rangle \bar{L}\langle V_1, N \rangle) d\bar{A} = \\ & = \left\langle \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \text{flujo}(\psi_{\mathbf{a}(t)} + u(t)\tilde{N}), \dot{\mathbf{b}} \right\rangle - \left\langle \dot{\mathbf{a}}, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \text{flujo}(\psi_{\mathbf{b}(t)} + v(t)\tilde{N}) \right\rangle. \end{aligned} \right\} (5.7)$$

Vamos a determinar el núcleo y la imagen del operador \bar{L} . Tal y como hacíamos en el capítulo anterior, representaremos por $X^\perp \subset C^\alpha(\bar{M})$ el ortogonal de un subconjunto $X \subset C^\alpha(\bar{M})$ respecto de la métrica L^2 asociada a $d\bar{s}^2$, intersecado con $C^\alpha(\bar{M})$. Consideremos en el espacio de Banach \mathcal{B} los subespacios

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(M) = \text{Kernel}(\bar{L}), \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}(M) = C^{2,\alpha}(\bar{M}) \cap \mathcal{J}, \quad \text{y} \quad \mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_0(M) = \bar{L}(\mathcal{B})^\perp.$$

De esta forma, \mathcal{K} consiste en aquellas funciones de \mathcal{J} que se pueden inducir al cociente \bar{M} .

Lema 5.2.2

$$i) \quad \mathcal{K}_0 = \left\{ u \in \mathcal{K} \mid \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} N - u \frac{\partial N}{\partial \eta} \right) ds = 0 \right\}.$$

$$ii) \quad \dim \mathcal{J} = 3 + \dim \mathcal{K}_0.$$

Nota 5.2.1 Nótese que la condición *i)* y el lema 5.1.1 nos dicen que si $u \in \mathcal{K}_0$ es la parte normal del campo variacional para una deformación ψ_t de nuestra superficie, entonces la derivada de la aplicación flujo a lo largo de la deformación se anula.

Demostración del lema 5.2.2. Sabemos por teoría clásica de ecuaciones diferenciales elípticas [18] que $\mathcal{K} = \text{Kernel}(\bar{L}|_{C^{2,\alpha}(\bar{M})}) \subset C^\infty(\bar{M})$ tiene dimensión finita y que $\bar{L}(C^{2,\alpha}(\bar{M})) = \mathcal{K}^\perp$. Por lo tanto, $\mathcal{K}_0 = \bar{L}(\mathcal{B})^\perp \subset \bar{L}(C^{2,\alpha}(\bar{M}))^\perp = \mathcal{K}^{\perp\perp} = \mathcal{K}$. Dada ahora $u \in \mathcal{K}_0$ —en particular, u está bien definida sobre \bar{M} —, $u \in \mathcal{K}_0$ si y sólo si

$$\int_{\bar{M}} u \bar{L}(\langle \dot{\psi}, N \rangle + \dot{v}) d\bar{A} = 0, \quad \text{para cualquier } \langle \dot{\psi}, N \rangle + \dot{v} \in \mathcal{B}.$$

Usando el lema 5.2.1 con $\mathbf{a}(t) \equiv T$, esta integral vale $\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{flujo}(\psi + u(t)\bar{N}), \dot{\mathbf{b}} \rangle$, donde $\{u(t)\}_t$ es una curva en $\mathcal{U} \subset C^{2,\alpha}(\bar{M})$ que pasa por cero con vector velocidad u en el instante $t = 0$ y $\dot{\psi} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi_{\mathbf{b}(t)}$. Por el lema 5.1.1, esta expresión es igual a $\int_{\Gamma} \left[\langle \dot{\mathbf{b}}, N \rangle \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial}{\partial \eta} (\langle \dot{\mathbf{b}}, N \rangle) \right] ds$, lo cual prueba *i)*. La demostración de *ii)* es análoga a la segunda parte del lema 4.4.2, pero con la salvedad de que ahora V tiene dimensión tres.

Nota 5.2.2 Las funciones de Jacobi sobre \widetilde{M} que provienen de dilataciones o isometrías de \mathbb{R}^3 , o sea, $\langle p, N \rangle$, $\det(p, N, e_3)$, $\langle N, a \rangle$ con $a \in \mathbb{R}^3$, están en \mathcal{J} . Como la aplicación de Gauss sí está bien definida sobre \overline{M} , la tercera función está en \mathcal{K} . De hecho, el lema 5.2.2 y (5.2) implican que $\langle N, a \rangle \in \mathcal{K}_0$, y por tanto $\dim \mathcal{K}_0 \geq 3$. Sin embargo, $\det(p, N, e_3)$ no está bien definida en el cociente a menos que T sea vertical. Nótese que la función soporte $\langle p, N \rangle$ nunca está bien definida sobre M .

Diremos que una superficie minimal propiamente embebida $M \subset \mathbb{R}^3/T$ con topología finita y finales planos es *no degenerada* si $\mathcal{K}_0(M) = \{\langle N, a \rangle / a \in \mathbb{R}^3\}$, donde N es su aplicación de Gauss, o sea, si $\dim \mathcal{K}_0(M) = 3$.

5.3 Los teoremas de estructura.

Sea \mathcal{M} el espacio de superficies minimales conexas y no llanas M , propiamente embebidas en un cociente de \mathbb{R}^3 por una traslación no horizontal T —que depende de la superficie—, con topología fija y finita, y finales planos horizontales. Para dotar a \mathcal{M} de una estructura topológica, primero estudiaremos la relación entre dos nociones de convergencia distintas en dicho espacio. Como siempre, denotaremos por \widetilde{M} el levantamiento periódico a \mathbb{R}^3 de un elemento $M \in \mathcal{M}$. Sean $M_n \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, \dots$ y $M_\infty \in \mathcal{M}$.

1. Diremos que $\{M_n\}_n$ converge a M_∞ *diferenciabilmente* si para cada subdominio relativamente compacto Ω de \widetilde{M}_∞ , para cada entorno tubular embebido de Ω en \mathbb{R}^3 , $\Omega(\varepsilon) = \{p + tN_\infty(p) / p \in \Omega, |t| < \varepsilon\}$, con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, siendo N_∞ la aplicación de Gauss de \widetilde{M}_∞ , y para cada n suficientemente grande se tiene que $\Omega_n = \widetilde{M}_n \cap \Omega(\varepsilon)$ consiste en un sólo grafo sobre Ω , $p \in \Omega \mapsto p + u_n(p)N_\infty(p)$, y la sucesión $\{u_n\}_n$ converge a cero en $C^k(\Omega)$, para todo $k \geq 0$.
2. Sean $\overline{M}_n, \overline{M}_\infty$ las compactificaciones de $M_n = \widetilde{M}_n/T_n$ y de $M_\infty = \widetilde{M}_\infty/T_\infty$, respectivamente. Consideremos la familia ψ_a del lema 5.1.3 alrededor de M_∞ . Diremos que la sucesión $\{\overline{M}_n\}_n$ converge a \overline{M}_∞ *diferenciabilmente* cuando $T_n \rightarrow T_\infty$, existe un campo de vectores $\widetilde{N} \in C^\infty(\widetilde{M}_\infty, \mathbb{R}^3)$ que verifica $\langle N_\infty, \widetilde{N} \rangle = 1$ sobre \overline{M}_∞ y $\widetilde{N} = \frac{1}{\langle N_\infty, e_3 \rangle} e_3$ en un entorno de cada final de

M_∞ , y existe una sucesión $\{u_n\}_n \subset C^\infty(\overline{M_\infty})$ tal que \widetilde{M}_n se puede escribir como $\psi_{T_n} + u_n \widetilde{N}$ con $u_n \rightarrow 0$ en $C^k(\overline{M_\infty})$, para cualquier $k \geq 0$.

Teorema 5.3.1 Sean $\{M_n\}_n \subset \mathcal{M}$ y $M_\infty \in \mathcal{M}$ con vectores período T_n, T_∞ , respectivamente. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $M_n \rightarrow M_\infty$ diferenciablemente y $T_n \rightarrow T_\infty$.

ii) $\overline{M}_n \rightarrow \overline{M}_\infty$ diferenciablemente.

Demostración. Como ii) \implies i) es claro, partiremos de que i) es cierto. Sea S_∞ una banda en \mathbb{R}^3 determinada por dos planos horizontales $\Pi, \Pi + T_\infty$, que encierren un dominio fundamental Ω de $\overline{M_\infty}$ con frontera compacta. Tomemos un cilindro sólido vertical infinito C_R de radio R suficientemente grande como para que contenga a $\partial\Omega$ en su interior y llamemos $\Omega(R) = \overline{M_\infty} \cap S_\infty \cap C_R$. Podemos suponer que para $\delta > 0$ pequeño, $C(M_\infty) - C(\Omega(R)) < \frac{\delta}{2}$, donde $C(\bullet)$ es la curvatura total absoluta del correspondiente dominio. Sea S_n una banda entre planos horizontales que determine un dominio fundamental de \widetilde{M}_n . Podemos también suponer que $S_n \rightarrow S_\infty$ y que $\widetilde{M}_n \cap \partial S_n$ es compacta y está contenida en C_R para todo n suficientemente grande. Sea $\Omega_n(R) = \widetilde{M}_n \cap S_n \cap C_R$. Usando i) podemos suponer que $C(M_n) - C(\Omega_n(R)) < \delta$, y que sobre $\partial\Omega_n(R) \cap \partial C_R$ se cumple que $|\langle N_n, e_3 \rangle| \geq 1 - \delta$, siendo N_n la aplicación de Gauss de \widetilde{M}_n . Como N_n es una aplicación abierta y casi toda la curvatura total absoluta de M_n está dentro de $\Omega_n(R)$, tendremos que $|\langle N_n, e_3 \rangle| \geq 1 - \delta$ en $(\widetilde{M}_n \cap S_n) - \Omega_n(R)$, luego la proyección de $(\widetilde{M}_n \cap S_n) - \Omega_n(R)$ sobre el plano $(x_1 + ix_2)$ es un difeomorfismo local y propio, inyectivo sobre cada componente conexa. Así, $\widetilde{M}_n \cap S_n$ es un \widetilde{N} -grafo sobre $\psi_{T_n}(\overline{M_\infty})$ mediante una cierta función que se extiende diferenciablemente a los finales, para una elección conveniente de la aplicación transversal \widetilde{N} bajo las condiciones de la definición 2, siendo ψ_{T_n} la inmersión T_n -periódica del lema 5.1.3 alrededor de M_∞ . La construcción de ψ_{T_n} en la demostración del lema 5.1.3 prueba que \widetilde{M}_n es un N -grafo global sobre $\psi_{T_n}(\overline{M_\infty})$ de una función $u_n \in C^\infty(\overline{M_\infty})$. Nos queda probar que $u_n \rightarrow 0$ en $C^k(\overline{M_\infty})$. Nuestra hipótesis nos dice que podemos limitarnos a estudiar la situación alrededor de cada final p_i de M_∞ , luego consideremos la coordenada grafo w en un levantamiento de dicho final a \mathbb{R}^3 , de forma que el final se escriba $w \mapsto \left(\frac{1}{w}, h(w)\right)$, $0 < |w| < \varepsilon$, donde h es una función diferenciable en $\{|w| < \varepsilon\}$. Podemos suponer que esta misma expresión también

parametriza el final correspondiente de ψ_{T_n} , ver la demostración del lema 5.1.3. Por tanto, \widetilde{M}_n se escribe $w \mapsto \left(\frac{1}{w}, h(w) + \frac{u_n(w)}{\langle N_{\infty}, e_3 \rangle}\right)$, $0 < |w| < \varepsilon$, y por hipótesis $u_n|_{\{|w|=\varepsilon\}} \rightarrow 0$ en $C^k(\{|w|=\varepsilon\})$ para todo $k \geq 0$. Aplicando el lema 4.2.2 y siguiendo el razonamiento del final de la demostración del teorema 4.3.1 llegaremos a que $\{u_n\}_n$ converge a cero en $C^{k,\alpha}(\{|w| \leq \varepsilon\})$ para todo $k \geq 2$, lo cual termina la demostración.

Nota 5.3.1 *En particular, este teorema prueba que la segunda noción de convergencia definida antes no depende ni de la familia ψ_a del lema 5.1.3 alrededor de M_∞ ni de la aplicación transversa \widetilde{N} . También implica que dada $M \in \mathcal{M}$, $M \subset \mathbb{R}^3/T$, existe un entorno de M en \mathcal{M} —en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos— tal que cada superficie minimal de este entorno puede representarse como $\psi_a + u\widetilde{N}$ para ciertos a en un entorno \mathcal{A} de T en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ y u en un entorno \mathcal{U} de cero en $C^\infty(\overline{M})$, donde ψ es el levantamiento de M a \mathbb{R}^3 y \widetilde{N} es una aplicación global transversal definida como en la sección 5.1, y que en dicho entorno, al que denotaremos por $\mathcal{M} \cap (\mathcal{A} \times \mathcal{U})$, las dos topologías coinciden.*

Sea $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{M}$ el subconjunto de las superficies no degeneradas con vector período no vertical. El teorema de estructura en este caso nos dice que

Teorema 5.3.2 *\mathcal{M}^* es un abierto dentro de \mathcal{M} . Además, o bien \mathcal{M}^* es vacío o es una variedad analítica real de dimensión 6.*

Demostración. Adaptaremos las ideas que nos sirvieron para probar el teorema 4.5.1. Sea $M \in \mathcal{M}^*$, $M \subset \mathbb{R}^3/T$. Tomemos entornos \mathcal{U} de cero en $C^{2,\alpha}(\overline{M})$ y \mathcal{A} de T en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ donde se verifique la proposición 5.1.1, y consideremos la aplicación

$$F : \mathbb{R}^3 \times \mathcal{A} \times \mathcal{U} \longrightarrow C^\alpha(\overline{M})$$

$$(d_1, d_2, d_3, a, u) \longmapsto \overline{H}(a, u) - \sum_{i=1}^3 d_i \langle N_{a,u}, e_i \rangle$$

donde $N_{a,u}$ es la aplicación de Gauss de $\psi_a + u\widetilde{N}$ y $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base usual de \mathbb{R}^3 . La proposición 5.1.1 nos dice que F es real analítica. Como M viene representada en $\mathcal{M} \cap (\mathcal{A} \times \mathcal{U})$ por $(T, 0)$, se tiene $F(0, T, 0) = 0$. Si $(a, u) \in \mathcal{M} \cap (\mathcal{A} \times \mathcal{U})$ representa

una superficie minimal $M_{\mathbf{a},u}$ cercana a M con aplicación de Gauss $N_{\mathbf{a},u}$, entonces el espacio de Banach $\mathcal{B}(M_{\mathbf{a},u}) = V(M_{\mathbf{a},u}) \oplus C^{2,\alpha}(\overline{M}_{\mathbf{a},u})$, donde

$$V(M_{\mathbf{a},u}) = \left\{ \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi_{\mathbf{a}(t)}, N_{\mathbf{a},u} \right\rangle / \dot{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{a}(0) = \mathbf{a} \right\},$$

se puede identificar con $\mathbb{R}^3 \oplus C^{2,\alpha}(\overline{M})$, utilizando para ello los isomorfismos $\dot{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi_{\mathbf{a}(t)}, N_{\mathbf{a},u} \right\rangle \in V(M_{\mathbf{a},u})$, $\dot{u} \in C^{2,\alpha}(\overline{M}) \mapsto \dot{u} \langle \widetilde{N}, N_{\mathbf{a},u} \rangle$, nótese que $\langle \widetilde{N}, N_{\mathbf{a},u} \rangle$ puede suponerse positiva y diferenciable en todo punto. Con esta identificación podemos calcular la diferencial de F en $(0, \mathbf{a}, u)$ como

$$dF_{(0,\mathbf{a},u)}(d_1, d_2, d_3, v) = \frac{1}{2} \overline{L}_{\mathbf{a},u} v - \sum_{i=1}^3 d_i \langle N_{\mathbf{a},u}, e_i \rangle,$$

para cualesquiera $(d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3$, $v \in \mathcal{B}(M_{\mathbf{a},u})$, donde $\overline{L}_{\mathbf{a},u}$ es el operador de Jacobi compactificado de la superficie minimal $M_{\mathbf{a},u}$. También usaremos notaciones similares para los espacios $\mathcal{J}(M_{\mathbf{a},u})$, $\mathcal{K}(M_{\mathbf{a},u})$ y $\mathcal{K}_0(M_{\mathbf{a},u})$, véase la sección 5.2. Notemos también que $\overline{L}_{\mathbf{a},u}(\mathcal{B}(M_{\mathbf{a},u}))$ contiene al subespacio ortogonal del espacio finito-dimensional $\mathcal{K}(M_{\mathbf{a},u})$, y por tanto,

$$\overline{L}_{\mathbf{a},u}(\mathcal{B}(M_{\mathbf{a},u})) = \overline{L}_{\mathbf{a},u}(\mathcal{B}(M_{\mathbf{a},u}))^{\perp\perp} = \mathcal{K}_0(M_{\mathbf{a},u})^{\perp},$$

luego se concluye que $\text{Kernel}(dF_{(0,\mathbf{a},u)}) = \{0\} \times \mathcal{J}(M_{\mathbf{a},u}) = \mathcal{J}(M_{\mathbf{a},u})$. Además, el que $M \in \mathcal{M}^*$ nos dice que $dF_{(0,T,0)}$ es sobreyectiva y por el lema 5.2.2 su núcleo tiene dimensión 6. Por el Teorema de la Función Implícita, existe un entorno \mathcal{W} de $(0, T, 0)$ en $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{A} \times \mathcal{U}$ de forma que $\mathcal{V} := F^{-1}(0) \cap \mathcal{W}$ es una subvariedad real-analítica de \mathcal{W} con dimensión 6. Además, \mathcal{V} sólo contiene superficies minimales: tomemos un elemento $(\mathbf{a}, u) \in \mathcal{A} \times \mathcal{U}$ y consideremos la inmersión $\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N}$. Tomemos un dominio fundamental Ω obtenido cortando esta superficie con una banda entre dos planos horizontales $\Pi, \Pi + \mathbf{a}$, que tenga frontera compacta $\partial\Omega = \Gamma \cup (\Gamma + \mathbf{a})$ y denotemos por $\Omega(R)$ el trozo de este dominio fundamental que quede dentro de un cilindro sólido vertical C_R de radio R lo suficientemente grande como para que contenga a $\partial\Omega$ en su interior. Entonces,

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega(R)} H(\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N}) N_{\mathbf{a},u} dA_{\mathbf{a},u} &= \int_{\Omega(R)} \Delta_{\mathbf{a},u}(\psi_{\mathbf{a}} + u\widetilde{N}) dA_{\mathbf{a},u} = \\ &= \int_{\partial\Omega(R) \cap \partial C_R} \eta_{\mathbf{a},u} ds_{\mathbf{a},u} + \int_{\Gamma} \eta_{\mathbf{a},u} ds_{\mathbf{a},u} + \int_{\Gamma + \mathbf{a}} \eta_{\mathbf{a},u} ds_{\mathbf{a},u}, \end{aligned}$$

donde el subíndice $\bullet_{\mathbf{a},u}$ quiere decir que dicho objeto está expresado en la métrica inducida por $\psi_{\mathbf{a}} + u\tilde{N}$ y $\eta_{\mathbf{a},u}$ es el conormal exterior a $\Omega(R)$ a lo largo de su frontera. Las dos últimas integrales son opuestas, y si razonamos como en la demostración del lema 4.5.3 llegaremos a que la primera integral converge a cero cuando R tiende a infinito —en dicho lema 4.5.3 se probó esta misma propiedad para las componentes horizontales de esta integral en un caso más general, para finales embebidos con curvatura total finita, vector normal límite vertical y crecimiento logarítmico posiblemente no nulo, pero una lectura cuidadosa de dicha demostración nos asegura que podemos extender la propiedad a la componente vertical si sólo tenemos finales de tipo plano—. Por tanto, la función curvatura media $H(\mathbf{a}, u)$ es ortogonal a $\langle N_{\mathbf{a},u}, e_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$, y tenemos lo que queríamos. Esto nos dice que $\mathcal{V} \subset \{0\} \times \mathcal{A} \times \mathcal{U} = \mathcal{A} \times \mathcal{U}$. Como el espacio tangente a \mathcal{V} en $M_{\mathbf{a},u}$ es $\mathcal{J}(M_{\mathbf{a},u})$, deducimos que $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}^*$ luego \mathcal{M}^* es abierto. De esta manera tenemos una estructura analítica en un entorno de cada punto de \mathcal{M}^* . Para terminar, debemos probar la compatibilidad de todas estas estructuras. También aquí el razonamiento es parecido al que se hizo en el teorema 4.5.1: Dado $\varepsilon > 0$, sea $\mathcal{M}_\varepsilon^*$ el conjunto de superficies $M \in \mathcal{M}^*$ en las que la construcción del entorno analítico $\mathcal{V} = \mathcal{V}_M$ puede hacerse usando la coordenada grafo alrededor de cada final de un dominio fundamental de la superficie levantada a \mathbb{R}^3 , definida sobre el disco punteado $\{0 < |w| < \varepsilon\}$; ver el comentario justo antes de la proposición 5.1.1. De esta forma, $\mathcal{M}_\varepsilon^*$ es un abierto dentro de \mathcal{M}^* , y las superficies en $\mathcal{M}_\varepsilon^*$ son, en particular, inmersiones minimales de $M = \overline{M} - \{p_1, \dots, p_r\}$ en ciertos cocientes de \mathbb{R}^3 por traslaciones no horizontales. Dada $M \in \mathcal{M}_\varepsilon^*$, consideremos un dominio fundamental sobre la superficie levantada $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^3$. El final que este dominio fundamental tiene alrededor de p_1 se podrá escribir de la forma $w \mapsto \left(\frac{1}{w}, h(w)\right)$, $0 < |w| < \varepsilon$, para cierta función $h \in C^\infty(\{|w| < \varepsilon\})$ y podemos suponer que cada superficie minimal $M_{\mathbf{a},u}$ en \mathcal{V}_M se escribe alrededor de p_1 como $w \mapsto \left(\frac{1}{w}, h(w) + \frac{u(w)}{\langle N, e_3 \rangle}\right)$, $0 < |w| < \varepsilon$, véase la demostración del lema 5.1.3. Esto nos permite considerar la aplicación analítica

$$\begin{aligned} j: \mathcal{V}_M \subset \mathcal{M}_\varepsilon^* &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \times C^{2,\alpha}(\{|w| < \varepsilon\}) \\ M_{\mathbf{a},u} &\longmapsto (\mathbf{a}, u). \end{aligned}$$

Afirmamos que j es una inmersión: si $v \in \mathcal{J}(M_{\mathbf{a},u})$ está en el núcleo de $dj_{M_{\mathbf{a},u}}$, entonces v es una función bien definida sobre \overline{M} , que cumple $Lv = 0$ en M y $v = 0$ en un entorno de p_1 , luego $v = 0$. Como \mathcal{M}^* tiene dimensión finita, esto es suficiente para probar nuestra afirmación. Como una inmersión determina

unívocamente la estructura diferenciable de la variedad inmersa; el teorema queda demostrado.

Nota 5.3.2

1. Esta demostración también nos asegura que el procedimiento para construir el entorno analítico \mathcal{V}_M de una superficie $M \in \mathcal{M}^*$ no depende de la familia ψ_a del lema 5.1.3 ni de la aplicación transversa \widetilde{N} .
2. Cuando el vector período T es vertical, la función de Jacobi $\det(p, N, e_3)$, con p el vector de posición en la superficie levantada $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^3$, está bien definida sobre \widetilde{M} y por tanto pertenece a \mathcal{K} . Además, dicha función está en \mathcal{K}_0 si y sólo si el flujo de \widetilde{M} a lo largo de una sección horizontal es vertical —este flujo no depende de la altura de la sección, como justificaremos algo más adelante—. La verticalidad del flujo de una sección horizontal es imposible bajo ciertas condiciones, como por ejemplo cuando \widetilde{M} tenga género uno (teorema 2.3.2) o también cuando el número de finales de M con orden de ramificación mínimo de la aplicación de Gauss sea uno (teorema 3.3.1). El teorema 5.3.2 puede extenderse con la misma demostración alrededor de una superficie no degenerada con vector período vertical pero flujo no vertical a lo largo de una sección horizontal. Sin embargo, alrededor de una superficie M donde tanto el vector período como el anterior flujo sean verticales, el espacio de superficies minimales próximas donde $\mathcal{K}_0(M)$ coincida con el espacio de funciones generadas por las que proceden de campos de Killing no puede ser una variedad, porque la dimensión de dicho espacio en M es estrictamente mayor que la dimensión del espacio correspondiente para las superficies cercanas. Podemos encontrar ejemplos de tales superficies para cualquier género impar mayor o igual que tres en el trabajo de Callahan, Hoffman y Meeks [5]. Estas superficies tienen dos finales planos y un plano de simetría horizontal que obliga tanto al vector período como al vector flujo en una sección horizontal a ser verticales.

Volvamos a nuestro viejo problema de decidir si los ejemplos de Riemann M_λ , $\lambda > 0$ son las únicas superficies minimales propiamente embebidas en un cociente simplemente periódico de \mathbb{R}^3 con género uno y una cantidad finita de finales planos. Vimos resultados que tienden a la respuesta afirmativa de esta cuestión en los

teoremas 2.3.1, 2.3.2 y 3.3.2. Vamos a examinarla ahora desde el punto de vista de este capítulo. Sabemos que cada M_λ es un toro menos dos finales planos y que su aplicación de Gauss tiene sus valores de ramificación sobre un ecuador de la esfera —esto se puede comprobar por ejemplo en la demostración del teorema 3.3.2—. Según Montiel y Ros [45], esto basta para asegurar que el espacio \mathcal{K} tiene dimensión tres, y por tanto podemos decir lo mismo de \mathcal{K}_0 , luego el teorema 5.3.2 puede aplicarse. Esto implica que, salvo traslaciones, dilataciones y rotaciones alrededor del eje x_3 , la única manera de deformar un ejemplo de Riemann es por la familia 1-paramétrica de los ejemplos de Riemann, que por tanto, es una familia aislada dentro del correspondiente espacio \mathcal{M} de superficies con género uno y dos finales. Este resultado se extiende directamente a cualquier recubrimiento con un número finito de hojas de los ejemplos de Riemann obtenido al considerar un múltiplo del vector período, en el espacio de superficies de género uno y cualquier número par de finales. De hecho, esta propiedad de no degeneración caracteriza a los ejemplos de Riemann:

Teorema 5.3.3 *Si $M \in \mathcal{M}^*$ tiene género uno, entonces es un recubrimiento finito de uno de los ejemplos de Riemann.*

Demostración. Sea $M \in \mathcal{M}^*$ con género uno. Podemos parametrizar nuestro problema de la siguiente forma: Sea $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}$ el retículo de \mathbb{C} generado por $\{a, 2\pi i\}$, $a \in \mathbb{C} - \{0\}$, de forma que \mathbb{C}/\mathcal{L} es conformemente equivalente a la compactificación \widetilde{M} de M , la tercera función coordenada de la superficie levantada $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^3$ se escribe $x_3(\xi) = k \operatorname{Re}(\xi)$, donde k es un número real no nulo, y el segmento $\Gamma = \{it / t \in [0, 2\pi]\}$ se aplica sobre una curva cerrada en \widetilde{M} que sea no nulhomotópica en el cilindro que se obtiene “pegando” a ésta última sus finales. Sea g la aplicación de Gauss vía la proyección estereográfica desde el polo Norte de la esfera. En el parámetro ξ , la ecuación de Jacobi $Lu = 0$ se escribe

$$u_{\xi\bar{\xi}} + 2 \frac{|g'|^2}{(1 + |g|^2)^2} u = 0. \quad (5.8)$$

Un cálculo directo nos dice que la función

$$f = \frac{3}{2} \left(\frac{g'}{g} \right)^2 - \frac{g''}{g} - \frac{1}{|g|^2 + 1} \left(\frac{g'}{g} \right)^2$$

es una función de Jacobi valuada compleja y acotada sobre \overline{M} , esto es, tanto su parte real como su parte imaginaria cumplen (5.8). La parte imaginaria de f es la función de Jacobi clásica de Shiffman, que expresa la derivada de la curvatura como curva plana de cada sección horizontal de la superficie respecto de la dirección imaginaria de \mathbb{C} multiplicada por una cierta función positiva, ver por ejemplo [13, 57]. Nótese que el conormal a lo largo del segmento Γ apunta siempre en la dirección del eje x , donde $\xi = x + iy$. Un cálculo largo pero sencillo asegura que

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} N - f \frac{\partial N}{\partial \eta} \right) ds = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial x} N - f \frac{\partial N}{\partial x} \right) d\xi = 0. \quad (5.9)$$

Podemos evitar el desarrollo de la última integral si razonamos de la siguiente forma: Si descomponemos $f = u + iv$ en partes real e imaginaria, la última condición se reduce a probar la correspondiente ecuación integral sustituyendo f por u y por v . Según el lema 5.1.1, esto equivale a que la derivada del flujo a lo largo de Γ para una variación diferenciable de nuestra superficie que tenga por parte normal de su campo variacional a u se anule, y lo mismo para v . Aplicando el lema 5.1.2, si llamamos $X(u)$ a la inmersión minimal ramificada de Montiel-Ros asociada a la función de Jacobi u , necesitamos probar que el flujo de $X(u)$ a lo largo de Γ se anula. No es difícil ver que la inmersión minimal ramificada $X(v)$ asociada a $v = \text{Im}(f)$ es conjugada de $X(u)$ y que la 1-forma de Weierstrass (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) de $X(u)$ es exacta, lo cual implica que el flujo de $X(u)$ y el de $X(v)$ a lo largo de Γ se anulan, como queríamos.

Ahora el lema 5.2.2 implica que $u, v \in \mathcal{K}_0(M)$. Como nuestra superficie es no degenerada deducimos que ambas funciones son lineales, luego $f = \langle N, z_0 \rangle$ para cierto $z_0 \in \mathbb{C}^3$. Como

$$\begin{aligned} \langle N, z_0 \rangle &= \frac{2}{1 + |g|^2} [\text{Re}(ag) + i \text{Re}(bg)] + C \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{|g|^2 + 1} (Ag + B\bar{g}) + C \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1}, \end{aligned}$$

donde a, b, A, B, C son números complejos, deducimos que

$$\frac{3}{2} \left(\frac{g'}{g} \right)^2 - \frac{g''}{g} - \frac{1}{|g|^2 + 1} \left(\frac{g'}{g} \right)^2 = \frac{1}{|g|^2 + 1} (Ag + B\bar{g}) + C \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1},$$

y por tanto,

$$\bar{g} \left(\frac{3}{2} \frac{(g')^2}{g} - g'' - B - Cg \right) = \frac{g''}{g} - \frac{1}{2} \left(\frac{g'}{g} \right)^2 + Ag - C.$$

Como g es no constante, la última ecuación nos dice que

$$\frac{3}{2} \frac{(g')^2}{g} - g'' - B - Cg = 0, \quad \frac{g''}{g} - \frac{1}{2} \left(\frac{g'}{g} \right)^2 + Ag - C = 0,$$

luego $(g')^2 = g(\alpha g^2 + \beta g + \delta)$, para ciertos $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$. Tenemos así un recubridor holomorfo posiblemente ramificado $\pi = (g, g')$ de $\overline{M} = \mathbb{C}/\mathcal{L}$ en la superficie de Riemann $\Sigma = \{(z, w) \in \overline{\mathbb{C}}^2 / w^2 = z(\alpha z^2 + \beta z + \delta)\}$. Veamos que Σ tiene género uno: Si Σ fuera una esfera, la fórmula de Riemann-Hurwitz [14] nos diría que el número de ramificación total de π es $B(\pi) = 2 \text{ grado}(g)$. Por otra parte, el pullback por π de la diferencial meromorfa $\frac{dz}{w}$ sobre Σ es $\frac{dg}{g'} = d\xi$, que no tiene polos ni ceros, luego $B(\pi) = \#\{\text{polos de } \frac{dz}{w}\} = 2$, lo cual implica que π tendría grado uno, contradicción. Por tanto, Σ es un toro y π un recubridor holomorfo no ramificado. Nótese que la representación de Weierstrass $(g, \phi_3 = k d\xi)$ de M se puede inducir sobre Σ como $(z, k \frac{dz}{w})$ y que por tanto obtenemos un toro minimal propiamente embebido en un cierto cociente \mathbb{R}^3/T con curvatura total -8π , y este último ha de ser un ejemplo de Riemann por un teorema de López, Ritoré y Wei [36]. Esto termina la demostración.

Sea \mathcal{G} el grupo de Lie 3-dimensional de las traslaciones de \mathbb{R}^3 . \mathcal{G} actúa de forma natural sobre \mathcal{M} :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{G} \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (\phi, M) &\longmapsto \phi(M). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Para saber algo sobre la regularidad de Ψ , necesitamos la versión correspondiente del lema 4.5.4:

Lema 5.3.1 Sean $\delta > 0$, $M = \widetilde{M}/S \in \mathcal{M}^*$ y $\psi_t : \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $|t| < \delta$, una familia diferenciable de inmersiones, en el sentido de que $(t, p) \longmapsto \psi_t(p)$ es diferenciable, donde ψ_t representa el levantamiento \mathfrak{a}_t -periódico de un elemento $M_t \in \mathcal{M}^*$ con $M_0 = M$. Entonces, la curva $t \longmapsto M_t \in \mathcal{M}^*$ es diferenciable y su vector velocidad en $t = 0$ es $v = \langle \frac{d\psi_t}{dt} \Big|_{t=0}, N \rangle \in \mathcal{J}(M)$, siendo N la aplicación de Gauss de M . Además, si $(t, p) \longmapsto \psi_t(p)$ es analítica, se tiene que $t \longmapsto M_t$ también lo es.

La demostración es análoga a la del lema 4.5.4 si nos damos cuenta de que las superficies M_t para δ suficientemente pequeño se pueden representar por pares (\mathfrak{a}_t, u_t) en un cierto entorno analítico \mathcal{V} de M dado por la demostración del teorema

5.3.2, y que \mathbf{a}_t depende diferenciablemente de t porque dado un punto $p \in \widetilde{M}$, se tiene que $\mathbf{a}_t = \psi_t(Sp) - \psi_t(p)$. Para buscar la analiticidad de $t \mapsto M_t$ también razonaremos como en el lema 4.5.4.

Por lo tanto, la acción Ψ es analítica cuando la restringimos a \mathcal{M}^* . Además, como el espacio tangente a \mathcal{G} en la identidad I está generado por las traslaciones infinitesimales en la dirección de cualquier vector x , \dot{T}_x , el lema 5.3.1 nos dice que $(D_1\Psi)_{(I,M)}(\dot{T}_x) = \langle N, x \rangle$, luego $(D_1\Psi)_{(I,M)}$ es inyectiva. Esto implica que la aplicación $\Phi : \mathcal{G} \times \mathcal{M}^* \rightarrow \mathcal{M}^* \times \mathcal{M}^*$ definida por $(\phi, M) \mapsto (M, \phi(M))$ es una inmersión. Veamos que su imagen es cerrada en $\mathcal{M}^* \times \mathcal{M}^*$: Tomemos $\{M_n\}_n \subset \mathcal{M}^*$ y $\{\phi_n\}_n \subset \mathcal{G}$ sucesiones tales que $M_n \rightarrow M_\infty \in \mathcal{M}^*$ y $\phi_n(M_n) \rightarrow M'_\infty \in \mathcal{M}^*$. ϕ_n será una traslación de vector $v_n \in \mathbb{R}^3$. Como para cualquier $M \in \mathcal{M}$, $M \subset \mathbb{R}^3/T$ se tiene que $M + v = M + v + kT$ para cualesquiera $v \in \mathbb{R}^3$ y $k \in \mathbb{Z}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la sucesión de las terceras coordenadas $\{v_{n,3}\}_n$ de v_n converge a un número real $v_{\infty,3}$. Como siempre, usaremos la notación \widetilde{M} para el levantamiento a \mathbb{R}^3 de la correspondiente superficie $M \in \mathcal{M}^*$. Tomemos un plano horizontal Π en \mathbb{R}^3 tal que las intersecciones $\Pi \cap \widetilde{M}_\infty$ y $(\Pi + v_{\infty,3}) \cap \widetilde{M}'_\infty$ son compactas. Si nos fijamos en las secciones $\Pi \cap \widetilde{M}_n$ y $(\Pi + v_{n,3}) \cap (\widetilde{M}_n + v_n)$ deduciremos que $\{v_n\}_n$ ha de ser acotada, como se quería demostrar. El teorema 16.10.3 en [12] asegura que en estas condiciones, existe una única estructura de variedad analítica sobre $\mathcal{M}^*/\mathcal{G}$ que convierte a la proyección $\mathcal{M}^* \rightarrow \mathcal{M}^*/\mathcal{G}$ en una submersión. Como el grupo de isotropía en cualquier punto de \mathcal{M}^* es claramente discreto, esta variedad cociente tiene dimensión tres.

Como habíamos afirmado anteriormente, dada $M \in \mathcal{M}$, el flujo de su levantamiento periódico $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^3$ a lo largo de una sección horizontal compacta no depende de la altura del plano que la produce —esto es obvio para dos secciones horizontales que no encierren entre ellas a ningún final de \widetilde{M} ; en otro caso, como el flujo alrededor de un final plano vale cero, basta calcular el flujo a lo largo de la frontera del trozo de superficie que queda encerrado por dos planos horizontales y un cilindro de radio muy grande paralelo al vector período—. Este vector flujo no puede ser horizontal, como puede comprobarse tomando una sección horizontal y transversal, y por tanto podemos definir $\text{flujo}(M)$ como el flujo de \widetilde{M} a lo largo de cualquier sección horizontal y compacta, con tercera coordenada positiva. Tomemos ahora una superficie no degenerada $M \in \mathcal{M}^*$, $M = \widetilde{M}/S \subset \mathbb{R}^3/T$. Sea Π un plano horizontal en \mathbb{R}^3 cuya intersección Γ con la superficie levantada sea

compacta, y consideremos el entorno analítico $\mathcal{V} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{U}$ de M en \mathcal{M}^* que se obtuvo en la demostración del teorema 5.3.2, de manera que las superficies de \mathcal{V} se representan por $(\mathbf{a}, u) \equiv M_{\mathbf{a},u}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que Γ se aplica en un ciclo compacto sobre cada $\widetilde{M}_{\mathbf{a},u}$, y por tanto la aplicación flujo se puede escribir $\text{flujo}(M_{\mathbf{a},u}) = \int_{\Gamma} \eta_{\mathbf{a},u} ds_{\mathbf{a},u}$, con la notación de la demostración del teorema 5.3.2. Si $t \mapsto (\mathbf{a}_t, u_t)$ es una curva analítica dentro de \mathcal{V} , la expresión $\eta_{\mathbf{a}_t, u_t} ds_{\mathbf{a}_t, u_t}$ depende analíticamente de t luego podemos decir lo mismo de $\text{flujo}(M_{\mathbf{a}_t, u_t})$. Como consecuencia, la aplicación flujo es real analítica al restringirla a \mathcal{M}^* . Además, el lema 5.1.1 nos permite calcular su diferencial en M :

$$d\text{flujo}_M(v) = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} N - v \frac{\partial N}{\partial \eta} \right) ds, \quad \text{para cualquier } v \in \mathcal{J}(M), \quad (5.11)$$

donde N es la aplicación de Gauss de M . También tenemos otra aplicación real analítica natural $M \in \mathcal{M}^* \mapsto \text{período}(M) \in \mathbb{R}^3$, donde $\text{período}(M)$ es el generador del grupo cíclico de traslaciones que dejan la superficie invariante, con tercera coordenada positiva. La analiticidad de esta aplicación período se sigue directamente de la demostración del teorema 5.3.2. Podemos reunir estas dos aplicaciones definiendo

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}^* &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ M &\longmapsto (\text{período}(M), \text{flujo}(M)). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Consideremos sobre $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$ la 2-forma simpléctica usual Ω dada por

$$\Omega((\mathbf{a}, \mathbf{b}), (\mathbf{a}', \mathbf{b}')) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}' \rangle - \langle \mathbf{a}', \mathbf{b} \rangle,$$

para todo par de vectores $(\mathbf{a}, \mathbf{b}), (\mathbf{a}', \mathbf{b}') \in \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$. Recordemos que una inmersión de una tres-variedad $f : N^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$ se decía *Lagrangiana* cuando $f^*\Omega = 0$.

Si $(\dot{\mathbf{a}}, \dot{u}) \in \text{Kernel}(df_M)$, entonces $\dot{\mathbf{a}} = 0$ y $\dot{u} \in \mathcal{K}(M)$ luego (5.11) implica que $\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial \eta} N - \dot{u} \frac{\partial N}{\partial \eta} \right) ds = 0$, luego por el lema 5.2.2 se tiene que $\text{Kernel}(df_M) = \mathcal{K}_0(M)$. Por otro lado, el lema 5.2.1 nos da $f^*\Omega = 0$, y claramente f puede inducirse sobre la variedad cociente $\mathcal{M}^*/\mathcal{G}$. Vamos a resumir todo esto en el siguiente

Teorema 5.3.4 *Supongamos que \mathcal{M}^* es no vacío. Entonces, $\mathcal{M}^*/\mathcal{G}$ es una variedad real-analítica de dimensión tres, y la aplicación $f : \mathcal{M}^*/\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^6$ dada por $f([M]) = (\text{período}(M), \text{flujo}(M))$, donde $[M]$ es la clase de M en $\mathcal{M}^*/\mathcal{G}$, es una inmersión Lagrangiana analítica. Además, el espacio tangente a $T_{[M]}(\mathcal{M}^*/\mathcal{G})$ se puede identificar de forma natural con el espacio cociente $\mathcal{J}(M)/\mathcal{K}_0(M)$.*

Nota 5.3.3 Es fácil probar que aplicación período es una carta local para $\mathcal{M}^*/\mathcal{G}$ alrededor de un elemento $[M]$ si y sólo si las únicas funciones de Jacobi univaluadas sobre M son las lineales. Esto es lo que ocurre en los ejemplos de Riemann.

5.4 Superficies invariantes por un movimiento helicoidal.

Podemos estudiar de forma parecida el espacio de embebimientos minimales y propios que son invariantes por un movimiento helicoidal no trivial: Sea $S_{\theta,\lambda}$ la composición de una rotación R_θ de ángulo $\theta \in]0, \pi]$ alrededor del eje x_3 con una traslación de vector λe_3 , $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Sea $\psi : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un embebimiento minimal y propio tal que existe un difeomorfismo conforme S de \widetilde{M} que verifica $\psi \circ S = S_{\theta,\lambda} \circ \psi$, luego ψ induce una superficie minimal propiamente embebida $M = \widetilde{M}/S \subset \mathbb{R}^3/S_{\theta,\lambda}$. Supongamos que M es orientable y que tiene topología finita, $M = \overline{M} - \{p_1, \dots, p_r\}$. En este caso no tenemos una aplicación de Gauss univaluada en M , ya que la aplicación de Gauss N de ψ cumple $N \circ S = R_\theta \circ N$. Sin embargo, gracias a los teoremas 1.4.1 y 1.4.2 sabemos que M tiene curvatura total finita, que su estructura conforme se induce a partir de otra sobre \overline{M} y que tiene un comportamiento controlado en infinito: Todos sus finales han de ser simultáneamente asintóticos a planos horizontales, anillos llanos verticales o finales de Helicoides. Supondremos que estamos en el primer caso. Como las ideas que vamos a desarrollar son similares a las del caso \mathbb{R}^3/T , daremos un breve resumen de la teoría, insistiendo sólo en aquellos detalles característicos de este ambiente.

Fijemos $\psi : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $M = \widetilde{M}/S \subset \mathbb{R}^3/S_{\theta,\lambda}$ como antes. Primeramente, existe un entorno \mathcal{A} de (θ, λ) en \mathbb{R}^2 y una familia de clase C^∞ de inmersiones propias simplemente periódicas $\psi_{\theta',\lambda'} : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(\theta', \lambda') \in \mathcal{A}$, tales que $\psi_{\theta,\lambda} = \psi$, $\psi_{\theta',\lambda'} \circ S = S_{\theta',\lambda'} \circ \psi_{\theta',\lambda'}$, $\psi_{\theta',\lambda'}$ es minimal fuera de un cilindro sólido vertical y sus finales son esencialmente los mismos que los de ψ . Por tanto, su aplicación de Gauss $N_{\theta',\lambda'}$ verifica $N_{\theta',\lambda'} \circ S = R_{\theta'} \circ N_{\theta',\lambda'}$. Como cada final de $\psi_{\theta',\lambda'}$ es plano, podemos modificar $N_{\theta',\lambda'}$ definiendo una nueva aplicación transversa $\widetilde{N}_{\theta',\lambda'}$ sobre \widetilde{M} con las propiedades $\widetilde{N}_{\theta',\lambda'} \circ S = R_{\theta'} \circ \widetilde{N}_{\theta',\lambda'}$, $\widetilde{N}_{\theta',\lambda'} = \frac{1}{\langle N, e_3 \rangle} e_3$ alrededor de cada final —nótese que esta ecuación es compatible con los comportamientos de N y de

$\widetilde{N}_{\theta', \lambda'}$ respecto de S —, y $\langle \widetilde{N}, N \rangle \equiv 1$ en \widetilde{M} , donde $\widetilde{N} = \widetilde{N}_{\theta, \lambda}$ y N es la aplicación de Gauss de ψ . Dada $u \in C^{2, \alpha}(\overline{M})$ suficientemente pequeña, $\psi_{\theta', \lambda'} + u\widetilde{N}_{\theta', \lambda'}$ es una inmersión propia que cumple $(\psi_{\theta', \lambda'} + u\widetilde{N}_{\theta', \lambda'}) \circ S = S_{\theta', \lambda'} \circ (\psi_{\theta', \lambda'} + u\widetilde{N}_{\theta', \lambda'})$, luego induce una superficie propiamente inmersa en $\mathbb{R}^3/S_{\theta', \lambda'}$. La curvatura media $H(\psi_{\theta', \lambda'} + u\widetilde{N}_{\theta', \lambda'})$ sí está bien definida sobre M , luego podemos considerar el operador $\overline{H}(\theta', \lambda', u) = \lambda H(\psi_{\theta', \lambda'} + u\widetilde{N}_{\theta', \lambda'})$ —aquí λ es un factor conforme como en el caso de traslación—, que resulta ser un operador analítico $C^\alpha(\overline{M})$ -valuado, definido sobre el producto $\mathcal{A} \times \mathcal{U}$ de ciertos entornos de (θ, λ) en \mathbb{R}^2 y de cero en $C^{2, \alpha}(\overline{M})$. Si tomamos una curva $(\theta(t), \lambda(t), u(t))$ en $\mathcal{A} \times \mathcal{U}$ tal que $(\theta(0), \lambda(0), u(0)) = (\theta, \lambda, 0)$, el campo variacional V de $\psi_{\theta(t), \lambda(t)} + u(t)\widetilde{N}_{\theta(t), \lambda(t)}$ verifica $\langle V, N \rangle = \langle \dot{\psi}, N \rangle + \dot{u}$, donde el punto significa derivada respecto a t en $t = 0$ y $\dot{\psi} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi_{\theta(t), \lambda(t)}$. Además, \dot{u} es univaluada sobre \overline{M} , pero el otro sumando de $\langle V, N \rangle$ tiene la siguiente multivaluación:

$$\langle \dot{\psi}, N \rangle \circ S = \langle \dot{\psi}, N \rangle + \dot{\theta} \det(p, N, e_3) + \dot{\lambda} \langle e_3, N \rangle,$$

donde p es el vector de posición en \widetilde{M} . Como $L(\det(p, N, e_3)) = L\langle e_3, N \rangle = 0$, siendo L el operador de Jacobi de ψ , la función $L(\langle \dot{\psi}, N \rangle + \dot{u})$ está bien definida en M y $d\overline{H}_{(\theta, \lambda, 0)}(\dot{\theta}, \dot{\lambda}, \dot{u}) = \frac{1}{2} \lambda L(\langle \dot{\psi}, N \rangle + \dot{u})$, para todo $(\dot{\theta}, \dot{\lambda}, \dot{u}) \in \mathbb{R}^2 \times C^{2, \alpha}(\overline{M})$. Sea $V = V(M) = \{ \langle \dot{\psi}, N \rangle = \langle \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi_{\theta(t), \lambda(t)}, N \rangle / (\dot{\theta}, \dot{\lambda}) \in \mathbb{R}^2 \} \subset C^\infty(\widetilde{M})$ —que puede identificarse de forma natural con \mathbb{R}^2 —, $B = B(M) = V \oplus C^{2, \alpha}(\overline{M}) \subset C^{2, \alpha}(\widetilde{M})$, espacio de Banach, y $\overline{L} = \lambda L = 2d\overline{H}_{(\theta, \lambda, 0)} : B(M) \rightarrow C^\alpha(\overline{M})$ el operador de Jacobi compactificado.

Como en la última sección, podemos considerar el flujo de una superficie a lo largo de una sección compacta, horizontal y orientada, que no depende de la altura. También necesitaremos la aplicación torque a lo largo de una sección de este tipo, que fue definida en el capítulo 3 como

$$\text{torque}(\psi_t) = \int_{\Gamma} \psi_t \wedge \eta_t ds_t,$$

para una deformación ψ_t de nuestra superficie minimal periódica original ψ por inmersiones cuyos finales sean asintóticos a planos horizontales. De hecho, estamos interesados en la tercera coordenada de este vector torque para una superficie minimal, que no dependerá de la altura de la sección compacta Γ , ya que si tomamos dos secciones que no dejen finales entre ellas, esto se deduce del hecho de que la diferencial \mathbb{R}^3 -valuada $\psi \wedge d\psi$ tenga divergencia cero; en el caso de que sí haya

finales entre las secciones, la propiedad se tiene porque [30] ó (3.10) aseguran que el vector torque en un final plano con vector límite vertical es siempre un vector horizontal. Aplicando argumentos similares a los que aparecen en el lema 5.1.1 podremos calcular la derivada de la aplicación torque, obteniendo

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{torque}(\psi_t) = \int_{\Gamma} \langle V, N \rangle d\psi(\gamma') ds + \int_{\Gamma} \psi \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \eta} (\langle V, N \rangle) N - \langle V, N \rangle \frac{\partial N}{\partial \eta} \right) ds,$$

donde como siempre, V es el campo variacional de ψ_t y $\gamma(s)$ es una parametrización por el arco según ψ de Γ . Como la primera integral es horizontal, es fácil deducir la siguiente expresión para la derivada de la tercera componente de la aplicación torque:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{torque}_3(\psi_t) = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} (\langle V, N \rangle) \det(p, N, e_3) - \langle V, N \rangle \frac{\partial}{\partial \eta} (\det(p, N, e_3)) \right) ds. \quad (5.13)$$

Si definimos $\mathcal{J}(M)$, $\mathcal{K}(M)$ y $\mathcal{K}_0(M)$ como en el caso traslación —nótese que ahora el espacio $\mathcal{B}(M)$ ha cambiado—, se puede probar análogamente que

$$\mathcal{K}_0(M) = \left\{ u \in \mathcal{K}(M) \left/ \begin{array}{l} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \det - u \frac{\partial \det}{\partial \eta} \right) ds = 0 \\ \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \langle N, e_3 \rangle - u \frac{\partial \langle N, e_3 \rangle}{\partial \eta} \right) ds = 0 \end{array} \right. \right\},$$

donde \det representa a la función $\det(p, N, e_3)$, y que $\dim \mathcal{J}(M) = 2 + \dim \mathcal{K}_0(M)$. De esta descripción de $\mathcal{K}_0(M)$, el lema 5.1.1 y (5.13) se deduce que $\det(p, N, e_3)$, $\langle N, e_3 \rangle \in \mathcal{K}_0(M)$, luego el espacio de funciones de Jacobi $\mathcal{J}(M)$ tiene por lo menos dimensión cuatro. Nuestra superficie minimal M se dirá *no degenerada* cuando $\mathcal{K}_0(M)$ tenga dimensión dos.

En el espacio \mathcal{M} de las superficies minimales conexas, no llanas, propiamente embebidas en cocientes de \mathbb{R}^3 por movimientos helicoidales no triviales $S_{\theta, \lambda}$ —que dependen de la superficie—, con topología fija y finita y finales planos, podemos considerar dos tipos de convergencia: Sean $M_n \subset \mathbb{R}^3 / S_{\theta_n, \lambda_n}$, $M_{\infty} \subset \mathbb{R}^3 / S_{\theta_{\infty}, \lambda_{\infty}}$ superficies en \mathcal{M} , $n = 1, 2, \dots$. La definición de *convergencia diferenciable* de $\{M_n\}_n$ a M_{∞} es la misma que se expuso en la sección 5.3. Si llamamos \overline{M}_n , \overline{M}_{∞} a las compactificaciones respectivas de $M_n = \overline{M}_n / S_{\theta_n, \lambda_n}$ y de $M_{\infty} = \overline{M}_{\infty} / S_{\theta_{\infty}, \lambda_{\infty}}$, usando la familia de clase C^{∞} $\psi_{\theta', \lambda'}$ del principio de esta sección alrededor de

M_∞ y llamando N_∞ a la aplicación de Gauss de $\widetilde{M}_\infty \subset \mathbb{R}^3$, diremos que la sucesión $\{\widetilde{M}_n\}_n$ converge a \widetilde{M}_∞ diferenciablemente si $(\theta_n, \lambda_n) \rightarrow (\theta_\infty, \lambda_\infty)$, existe una sucesión $\{\widetilde{N}_n\}_n \subset C^\infty(\widetilde{M}_\infty, \mathbb{R}^3)$ tal que $\widetilde{N}_n = \frac{1}{\langle N_\infty, e_3 \rangle} e_3$ en un entorno de cada final, $\widetilde{N}_n \circ S = R_{\theta_n} \circ \widetilde{N}_n$ en \widetilde{M}_∞ y existe una sucesión $\{u_n\}_n \subset C^\infty(\widetilde{M}_\infty)$ tal que \widetilde{M}_n se puede expresar como $\psi_{\theta_n, \lambda_n} + u_n \widetilde{N}_n$ con $u_n \rightarrow 0$ en $C^k(\widetilde{M}_\infty)$, para cada $k \geq 0$. El teorema 5.3.1 sigue siendo cierto en esta situación, afirmando que estos dos tipos de convergencia son equivalentes para sucesiones en \mathcal{M} con (θ_n, λ_n) convergiendo a $(\theta_\infty, \lambda_\infty)$, y por consiguiente la segunda noción de convergencia no depende de las familias $\psi_{\theta', \lambda'}, \widetilde{N}_n$. Si también denotamos por \mathcal{M}^* el conjunto de superficies no degeneradas en \mathcal{M} , el resultado de estructura en esta situación es el siguiente:

Teorema 5.4.1 \mathcal{M}^* es abierto en \mathcal{M} . En el caso no vacío, \mathcal{M}^* es una variedad analítica real de dimensión cuatro.

La demostración de este resultado es análoga a la del caso traslación. Las únicas diferencias están al probar la ortogonalidad de la curvatura media y de la función $\det(p, N, e_3)$, y al demostrar la compatibilidad de las estructuras analíticas, que se definen localmente. El primer problema se resuelve razonando como en la demostración del lema 4.5.3, y en cuanto al segundo, basta usar la correspondiente inmersión analítica j definida en un entorno \mathcal{V} de un elemento de \mathcal{M}^* y que lleva superficies minimales no degeneradas $M_{\theta', \lambda', u}$ de dicho entorno en $(\theta', \lambda', u) \in \mathbb{R}^2 \times C^{2, \alpha}(\{|w| < \varepsilon\})$.

Nota 5.4.1 En el caso $\theta = 0$, encontramos nuevamente superficies $M \subset \mathbb{R}^3/T$, donde T es una traslación vertical, con topología finita y finales planos horizontales. Cada superficie de éstas sí tiene bien definida la aplicación de Gauss N , y es fácil probar que $\langle N, e_1 \rangle, \langle N, e_2 \rangle, \langle N, e_3 \rangle, \det(p, N, e_3)$ están en $\mathcal{K}_0(M)$ cuando $\text{flujo}(M)$ es vertical, y que $\langle N, e_3 \rangle, \langle N, \text{flujo}(M) \rangle, \det(p, N, e_3) \in \mathcal{K}_0(M)$ si dicho flujo no es vertical —aquí $\text{flujo}(M)$ se define como en la sección 5.3—. Esto implica que el espacio de las superficies minimales no degeneradas y con finales planos que son invariantes por un movimiento helicoidal no puede ser una variedad alrededor de un ejemplo con $\theta = 0$.

Por último, el lema 5.3.1 puede extenderse al caso de movimiento helicoidal, expresando la diferenciabilidad (resp. analiticidad) en la variedad \mathcal{M}^* en términos de las superficies levantadas a \mathbb{R}^3 . La únicas novedades en la prueba de esta afirmación son que las superficies M_t cercanas a $M \subset \mathbb{R}^3/S_{\theta,\lambda}$ en \mathcal{M}^* se pueden representar mediante ternas $(\theta'_t, \lambda'_t, u_t)$ en un entorno analítico de $(\theta, \lambda, 0)$, que θ'_t y λ'_t dependen diferenciablemente (resp. analíticamente) de t porque $\lambda'_t = \langle \psi_t(Sp) - \psi_t(p), e_3 \rangle$ y $(x_t^2(p) + y_t^2(p)) \operatorname{sen} \theta'_t = -\det(\psi_t(Sp), \psi_t(p), e_3)$ para un punto cualquiera p en M —hemos denotado por x_t, y_t las dos primeras componentes del levantamiento ψ_t de M_t y conservamos la misma notación usada hasta ahora—. Además, llamando \mathcal{G} al grupo de Lie dos-dimensional de los movimientos helicoidales verticales, la existencia de una estructura real analítica sobre $\mathcal{M}^*/\mathcal{G}$ se prueba como en el caso traslación aunque ahora tiene dimensión dos. Esta variedad cociente también puede aplicarse de forma inmersa y Lagrangiana en $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$ por medio de la aplicación $f : \mathcal{M}^*/\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $f([M]) = (\operatorname{helic}(M), \operatorname{torque}_3(M), \operatorname{flujo}_3(M))$, donde $\operatorname{helic}(M) = (\theta, \lambda)$ si es que $M \subset \mathbb{R}^3/S_{\theta,\lambda}$, $\lambda > 0$, y el subíndice \bullet_3 representa la tercera coordenada del vector correspondiente.

Bibliografía

- [1] N. Aronszajn, *A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order*, J. Math. Pures Appl. **36** (1957) 235-249.
- [2] R. Bohme & A. J. Tromba, *The index theorem for classical minimal surfaces*, Ann. of Math. **113** (1981) 447-499.
- [3] E. Calabi, *Quelque applications de l'Analyse complex aux surfaces d'Aire minimal*, Topics in Complex Manifolds, Les Presses de l'Université de Montréal (1968).
- [4] M. Callahan, D. Hoffman & H. Karcher, *A family of singly-periodic minimal surfaces invariant under a screw-motion*, Experiment. Math. **3(2)** (1993) 157-182.
- [5] M. Callahan, D. Hoffman & W. H. Meeks III, *Embedded minimal surfaces with an infinite number of ends*, Invent. Math. **96** (1989) 459-505.
- [6] M. Callahan, D. Hoffman & W. H. Meeks III, *The structure of singly periodic minimal surfaces*, Invent. Math. **99** (1990) 455-481.
- [7] H. Choi, W. H. Meeks III & B. White, *A rigidity theorem for properly embedded minimal surfaces in \mathbb{R}^3* , J. Differential Geometry **32** (1990) 65-76.
- [8] H. Choi & R. Schoen, *The space of minimal embeddings of a surface into a three dimensional manifold of positive Ricci curvature*, Invent. Math. **81** (1985) 387-394.
- [9] C. Costa, *Example of a complete minimal immersion in \mathbb{R}^3 of genus one and three embedded ends*, Bull. Soc. Bras. Mat. **15** (1984) 47-54.

- [10] C. Costa, *Uniqueness of minimal surfaces embedded in \mathbb{R}^3 with total curvature 12π* , J. Differential Geometry **30**(3) (1989) 597-618.
- [11] C. Costa, *Uniqueness of complete and minimal surfaces in \mathbb{R}^3 of genus one and three ends of Catenoid types*, preprint.
- [12] J. Dieudonné, *Éléments d'Analyse*, vol. III Gauthier-Villars, Paris (1970).
- [13] Y. Fang & F. Wei, *On Uniqueness of Riemann's examples*, preprint.
- [14] H. M. Farkas & I. M. Kra, *Riemann surfaces*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1979).
- [15] D. Fischer-Colbrie, *On complete minimal surfaces with finite Morse index in three manifolds*, Invent. Math. **82** (1985) 121-132.
- [16] H. Fujimoto, *On the number of exceptional values of minimal surfaces*, J. Math. Soc. Japan **40**(2) (1988) 235-247.
- [17] F. Gackstatter, *Über die dimension einer minimalfläche und zur Ungleichung von St. Cohn-Vossen*, Arch. Rational Mech Anal. **61**(2) (1976) 141-152.
- [18] D. Gilbarg & N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd edit. Springer Verlag (1983).
- [19] D. Hoffman & H. Karcher, *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*, preprint.
- [20] D. Hoffman, H. Karcher & W. H. Meeks III, *One-parameter families of embedded complete minimal surfaces of finite topology*, preprint.
- [21] D. Hoffman, H. Karcher & H. Rosenberg, *Embedded minimal annuli in \mathbb{R}^3 bounded by a pair of straight lines*, Comment. Math. Helv. **66**(4) (1991) 599-617.
- [22] D. Hoffman & W. H. Meeks III, *A complete minimal surface in \mathbb{R}^3 with genus one and three ends*, J. Differential Geometry **21** (1985) 109-127.
- [23] D. Hoffman & W. H. Meeks III, *Embedded minimal surfaces of finite topology*, Ann. Math. **131** (1990) 1-34.

- [24] D. Hoffman & W. H. Meeks III, *Minimal surfaces based on the catenoid*, Amer. Math. Monthly, Special Geometry Issue **97**(8) (1990) 702-730.
- [25] D. Hoffman & W. H. Meeks III, *The strong halfspace theorem for minimal surfaces*, Invent. Math. **101** (1990) 373-377.
- [26] A. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv. **32** (1957) 13-72.
- [27] L. Jorge & W. H. Meeks III, *The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature*, Topology **2** (1983) 203-221.
- [28] H. Karcher, *Embedded minimal surfaces derived from Scherk's examples*, Manuscripta Math. **62** (1988) 83-114.
- [29] N. Korevaar & R. Kusner, *The global structure of constant mean curvature surfaces*, Invent. Math. **114** (1993) 311-332.
- [30] R. Kusner, *Global geometry of extremal surfaces in three-space*, PhD thesis, University of California, Berkeley, 1988.
- [31] R. Kusner, *Bubbles, conservation laws and balanced diagrams*, Geometric Analysis and Computer Graphics, Sci. Res. Inst. Publ., Springer-Verlag **17** (1990) 103-108.
- [32] R. Kusner, R. Mazzeo & D. Pollack, *The moduli space of complete embedded constant mean curvature surfaces*, aparecerá en Geom. and Funct. Analysis.
- [33] S. Lang, *Introduction to differentiable manifolds*, Interscience Publishers (1967).
- [34] R. Langevin & H. Rosenberg, *A maximum principle at infinity for minimal surfaces and applications*, Duke Math. J. **57** (1988) 819-828.
- [35] F. J. López, F. Martín & D. Rodríguez, *Complete embedded minimal surfaces with three ends*, preprint.
- [36] F. J. López, M. Ritoré & F. Wei, *A characterization of Riemann's minimal surfaces*, preprint.

- [37] F. J. López & A. Ros, *On embedded complete minimal surfaces of genus zero*, J. Differential Geometry **33** (1991) 293-300.
- [38] R. Mazzeo & D. Pollack, *Gluing and moduli for noncompact geometric problems*, preprint.
- [39] R. Mazzeo, D. Pollack & K. Uhlenbeck, *Moduli spaces of singular Yamabe metrics*, aparecerá en J. Amer. Math. Soc.
- [40] W. H. Meeks III, *The theory of triply periodic minimal surfaces*, Indiana Univ. Math. J. **39** (1990) 877-936.
- [41] W. H. Meeks III & H. Rosenberg, *The global theory of doubly periodic minimal surfaces*, Invent. Math. **97** (1989) 351-379.
- [42] W. H. Meeks III & H. Rosenberg, *The geometry of periodic minimal surfaces*, Comm. Math. Helv. **68** (1993) 538-578.
- [43] W. H. Meeks III & H. Rosenberg, *The maximum principle at infinity for minimal surfaces in flat three manifolds*, Comm. Math. Helv. **65**, 2 (1990) 255-270.
- [44] W. H. Meeks III & B. White, *Minimal surfaces bounded by convex curves in parallel planes*, Comment. Math. Helv. **66**(2) (1991) 263-278.
- [45] S. Montiel & A. Ros, *Schrödinger operators associated to a holomorphic map*, Proceedings Conference on Global Differential Geometry and Global Analysis, Berlin, 1990, Lecture Notes in Math. **1481** 147-174.
- [46] S. Nayatani, *Morse index and Gauss maps of complete minimal surfaces in Euclidean 3-space*, Comment. Math. Helv. **68** (1993) 511-537.
- [47] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, vol. 1, Cambridge Univ. Press, New York (1989).
- [48] J. Pérez, *Riemann bilinear relations on minimal surfaces*, preprint.
- [49] J. Pérez, *On singly-periodic minimal surfaces with planar ends*, preprint.
- [50] J. Pérez & A. Ros, *Some uniqueness and nonexistence theorems for embedded minimal surfaces*, Math. Ann. **295**(3) (1993) 513-525.

- [51] J. Pérez & A. Ros, *The space of properly embedded minimal surfaces with finite total curvature*, aparecerá en Indiana Univ. Math. J.
- [52] G. P. Pirola, *The infinitesimal variation of the spin abelian differentials and periodic minimal surfaces*, preprint.
- [53] B. Riemann, *Gesammelte mathematische Werke*, 2nd edition, B.G. Teubner, Leipzig (1892).
- [54] A. Ros, *Compactness of space of properly embedded minimal surfaces with finite total curvature*, Indiana Univ. Math. J. 44 (1995) 139-152.
- [55] R. Schoen, *Uniqueness, Symmetry and embeddedness of minimal surfaces*, J. Differential Geometry 18 (1983) 701-809.
- [56] M. Soret, *Deformations des surfaces minimales*, PhD Thesis, University of Paris VII (1993).
- [57] M. Shiffman, *On surfaces of stationary area bounded by two circles, or convex curves, in parallel planes*, Ann. of Math. 63 (1956) 77-90.
- [58] F. Tomi & A. J. Tromba, *Extreme curves bound embedded minimal surfaces of the type of the disc*, Math. Z. 158 (1978) 137-145.
- [59] A. J. Tromba, *Degree theory on oriented infinite dimensional varieties and the Morse number of minimal surfaces spanning a curve in \mathbb{R}^n* . Part I: No. 4, Trans. Amer. Math. Soc. 290 (1985) 385-413.
- [60] E. Toubiana, *Un théorème d'unicité de l'hélicoïde*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 38, 4 (1988) 121-132.
- [61] E. Toubiana, *On the minimal surfaces of Riemann*, Comment. Math. Helv. 67(4) (1992) 546-570.
- [62] F. Wei, *Some existence and uniqueness theorems for doubly periodic minimal surfaces*, Invent. Math. 109 (1992) 113-136.
- [63] B. White, *Curvature estimates and compactness theorems in 3-manifolds for surfaces that are stationary for parametric elliptic functionals*, Invent. Math. 88 (1987) 243-256.

- [64] B. White, *The space of m -dimensional surfaces that are stationary for a parametric elliptic functional*, Indiana Univ. Math. J. **36** (1987) 567-603.
- [65] B. White, *New applications of mapping degrees to minimal surface theory*, J. Diff. Geom. **29** (1989) 143-162.
- [66] B. White, *The space of minimal submanifolds for varying Riemannian metrics*, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991) 161-200.
- [67] J. A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics (1967).