

t. 8-97

UNIVERSIDAD DE GRANADA



DEPARTAMENTO DE GEODINAMICA

**ANALISIS GEOESTADISTICO EN EL  
ESTUDIO DE LA EXPLOTACION  
DE LOS RECURSOS MINERALES**

MARIO CHICA OLMO

TESIS DOCTORAL

1987

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE GEODINAMICA

ANALISIS GEOESTADISTICO EN EL ESTUDIO  
DE LA EXPLOTACION DE LOS RECURSOS MINERALES

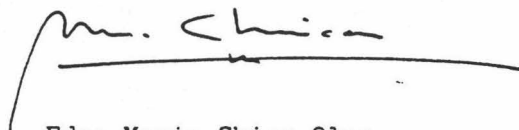


Tesis Doctoral que presenta el  
Lcdo. D. Mario CHICA OLMO, para  
optar al Grado de Doctor en Ciencias  
por la Universidad de Granada.

Vº Bº de los Directores



Fdo: Rafael Fernández Rubio  
Catedrático de Hidrogeología  
Universidad Politécnica de Madrid



Fdo: Mario Chica Olmo



Fdo: Antonio Pulido Bosch  
Profesor Titular de Hidrogeología  
Universidad de Granada

Granada, Febrero de 1987

*"...la tierra no oculta los metales en sus profundidades porque desee que los hombres no los extraigan, sino porque la prudente y sabia Naturaleza ha designado para cada cosa su sitio".*

*AGRICOLA, 1556  
"De Re Metálica"*

*"Razonar sin datos no es más que ilusión..."*

*ARTHUR HOLMES, 1913  
"The Age of the Earth"*

*A Quica y Lucia  
A mis padres*

## AGRADECIMIENTOS

Quisiera manifestar mi más profundo agradecimiento a todas aquellas personas, organismos y empresas que, de muy diversa manera, han colaborado en la realización de este estudio de investigación. Mi deseo más ferviente es que todos y cada uno de ellos encuentren, en estas líneas, la expresión de mi más sincera gratitud.

Mis agradecimientos irán, en primer lugar, a los profesores Dres. D. Rafael Fernández-Rubio y D. Antonio Pulido Bosch, Directores de la investigación, por su constante apoyo moral y crítica del trabajo, y por haber hecho posible mi reincorporación a esta Universidad.

De modo muy especial, expreso mi reconocimiento de gratitud a mi maestro y profesor G. Matheron, Director del Centre de Géostatistique et Morphologie Mathématique de Fontainebleau, quien me ha dado la oportunidad de satisfacer mi gusto por la investigación aplicada; asimismo, de poder realizar en el seno de su equipo mi tesis de Doctor Ingeniero de Minas, presentada hace tres años en la Escuela de Minas de París. No olvidaré que sus constantes comentarios y reflexiones, de carácter a veces físico y otras probabilístico, han influido, a la vez que enriquecido, decisivamente mi concepto e interpretación del fenómeno geológico, tal como puede verse a éste a través del simple cristal que proporciona la información numérica, por cierto, en la mayoría de los casos, escasa.

Tampoco olvidaré lo mucho que debo a mis amigos y compañeros del Dpto. de Geodinámica, especialmente, a los de la "planta baja", que no han cesado nunca de prodigarme ayuda y ánimos. Igualmente, a mis compañeros de Fontainebleau, por la excelente acogida dispensada y por el apoyo constante recibido a lo largo de los cuatro años de estancia en el Centro. Citaré en particular a: A. Maréchal, Director de mi tesis de ingeniero; J. Deraisme, que me ha introducido en el campo de la Geoestadística de simulaciones; M. Armstrong; Ch. de Fouquet; J. Ciruelos; A. Remacre...; por no citar a todos.

Especialmente estoy obligado con L. Salvato, que sin su ayuda y asistencia no habría sido posible la puesta en práctica de un nuevo algoritmo de simulación.

Quiero hacer extensivo mi agradecimiento a los Sres. miembros del Tribunal, por haber aceptado, muy amablemente, ser partícipes del jurado.

La realización de este trabajo no habría sido posible sin el apoyo recibido del Ministerio de Educación y Ciencia Español, que ha puesto los medios económicos para mi reincorporación a esta Universidad, del Ministère des Affaires Etrangères del Gobierno Francés, del cual obtuve una beca de formación investigadora en Francia, y de la Empresa Nacional de Electricidad, S.A. que aportó los medios económicos y la información para llevar a cabo mi Tesis Doctoral.

Quedé aquí constancia de mi reconocimiento a todas las Compañías Mineras y de Investigación Geológica, por la colaboración prestada y por haber puesto a mi disposición sus bancos de datos: ENDESA, PEÑARROYA, COGEMA, CAMSA e INGEMISA...

En fin, no olvido que, en la realización material de la memoria, debo mucho a Mme. Pulido "qui s'est acquittée à merveille de la réalisation matérielle de ce manuscrit", asimismo a J. Medina por su gran talento como dibujante.

## INDICE GENERAL

### PARTE INTRODUCTORIA

#### CAPITULO I: ASPECTOS GENERALES DEL TRABAJO

1. INTRODUCCION.....	3
2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACION.....	5
3. COMPOSICION DE LA MEMORIA.....	7

#### CAPITULO II: BREVE RECORDATORIO DE LA TEORIA DE LAS VARIABLES REGIONALIZADAS

1. CONCEPTOS BASICOS.....	9
1.1. NOCION DE VARIABLE REGIONALIZADA.....	9
1.2. CARACTERISTICAS DE LA VARIABLE REGIONALIZADA.....	11
1.3. LA VARIABLE REGIONALIZADA COMO REALIZACION DE FUNCION ALEATORIA.....	14
1.3.1. Interpretación topo-probabilística de la VR.....	14
1.4. HIPOTESIS RESTRICTIVAS.....	16
1.5. EL VARIOGRAMA.....	19
1.5.1. Principales propiedades del variograma.....	20
1.5.2. Análisis del gráfico del variograma.....	21
1.5.3. Modelos teóricos de variograma.....	28
1.6. VARIANZAS DE DISPERSION Y EXTENSION.....	30
1.6.1. Varianza de Dispersión vs tamaño de soporte.....	30
1.6.2. Varianza de Extensión.....	32
1.7. CAMBIO DE SOPORTE: REGULARIZACION.....	33
1.7.1. El variograma de una función regularizada.....	34

2. ESTIMACION GEOESTADISTICA: EL KRIGEAGE.....	35
2.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DEL KRIGEAGE.....	35
2.2. ECUACIONES DE KRIGEAGE EN EL MODELO ESTACIONARIO.....	36
2.2.1. Caso de una FA estacionaria de esperanza nula o conocida.....	36
2.2.2. Caso de una FA estacionaria de esperanza desconocida..	38
2.2.3. Caso de una FA intrínseca.....	39
2.2.4. Caso de una FA no estacionaria.....	40
2.3. ESCRITURA MATRICIAL Y PROPIEDADES DEL KRIGEAGE.....	44
2.4. RELACION DE ALISADO O SUAVIZADO.....	45
3. EL MODELO GEOESTADISTICO OPERATIVO.....	46
3.1. NATURALEZA Y CARECTERICAS DEL MODELO GEOESTADISTICO....	46
3.2. ETAPAS DEL ESTUDIO GEOESTADISTICO.....	50
3.2.1. El fenómeno geológico y el variograma: el análisis estructural.....	52

**CAPITULO III: LA GEOESTADISTICA A NIVEL DEL DESARROLLO DE UN  
PROYECTO MINERO**

1. ASPECTOS PRELIMINARES.....	55
2. APLICACIONES EN EL DESARROLLO DEL PROYECTO.....	56
3. GEOESTADISTICA Y DECISIONES MINERAS.....	58

**PARTE PRIMERA**

**PREEXPLORACION**

**ESTUDIO DE VIABILIDAD TECNICA Y ECONOMICA**

**CAPITULO IV: ESTUDIO DE VIABILIDAD TECNICA Y ECONOMICA**

1. INTRODUCCION.....	63
2. GEOESTADISTICA Y PROSPECCION MINERA.....	65
2.1. ASPECTOS GENERALES.....	65
2.2. METODOS GEOESTADISTICOS PARA EL RECONOCIMIENTO E INTERPRETACION DE ANOMALIAS.....	67
2.2.1. Validación cruzada: Krigeage Ordinario.....	68
2.2.2. Análisis krigeante.....	70
2.2.3. Krigeage Disyuntivo puntual.....	74



2.3. CARTOGRAFIA AUTOMATICA DE VARIABLES ESPACIALES.....	77
<b>3. RECONOCIMIENTO GEOLOGICO SECUENCIAL.....</b>	<b>80</b>
3.1. FASES DEL RECONOCIMIENTO SECUENCIAL.....	81
3.1.1. Reconocimiento preferencial.....	82
3.1.2. Reconocimiento a malla grande.....	82
3.1.3. Reconocimiento a malla cerrada.....	83
3.2. OPTIMIZACION DE MALLAS DE SONDEOS DE RECONOCIMIENTO.....	84
3.2.1. A nivel global.....	85
3.2.2. A nivel local.....	87
<b>4. ESTIMACION DE RECURSOS Y RESERVAS.....</b>	<b>90</b>
4.1. ESTIMACION GLOBAL.....	91
4.1.1. Cálculo de los recursos in situ globales.....	92
4.1.2. Cálculo de las reservas recuperables globales.....	96
4.2. ESTIMACION LOCAL.....	100
4.2.1. Estimación local de los recursos in situ: el Krigeage Ordinario.....	100
4.2.2. Estimación local de reservas recuperables: el Krigeage Disyuntivo.....	106
<b>5. DISEÑO DE EXPLOTACION.....</b>	<b>116</b>
5.1. INTRODUCCION.....	116
5.2. EL MODELO GEOESTADISTICO DE PARAMETRIZACION TECNICA DE RESERVAS.....	117
<b>6. INFLUENCIA DEL MEDIO GEOLOGICO.....</b>	<b>120</b>
<b>7. ESTUDIO ECONOMICO DEL PROYECTO.....</b>	<b>121</b>
7.1. ANALISIS DEL RIESGO DE UN PROYECTO.....	122

## PARTE SEGUNDA

### PLANIFICACION DE EXPLOTACION

#### ESTUDIO DE SIMULACION DE LOS PROCESOS DE PRODUCCION DEL MINERAL

#### CAPITULO V: PLANIFICACION DE EXPLOTACION

<b>1. GEOESTADISTICA Y PLANIFICACION MINERA.....</b>	<b>131</b>
1.1. CONSIDERACIONES PRELIMINARES.....	131
1.2. DISEÑO DE LA EXPLOTACION.....	133
1.3. CONTROL DE CALIDAD DE LA PRODUCCION.....	134
1.4. PREPARACION Y UTILIZACION DEL PRODUCTO FINAL.....	136

<b>2. LA PRACTICA DE LA SELECCION EN EXPLOTACIONES MINERAS.....</b>	<b>138</b>
2.1. IMPORTANCIA DE LA SELECTIVIDAD MINERA.....	138
2.2. PREVISION DE LA SELECCION EN LA EXPLOTACION.....	141
2.2.1. Efecto de soporte.....	141
2.2.2. Efecto de información.....	144
2.2.3. Efecto de restricciones geométricas.....	148

**CAPITULO VI: ESTUDIO DE SIMULACION DE LOS PROCESOS DE PRODUCCION MINERA**

<b>1. GENERALIDADES.....</b>	<b>149</b>
1.1. OBJETIVOS Y RESULTADOS DE LA SIMULACION.....	149
1.2. EJEMPLOS TIPOS DE PROBLEMAS ESTUDIADOS.....	150
<b>2. ASPECTOS METODOLOGICOS DEL ESTUDIO.....</b>	<b>151</b>
2.1. GENERALIDADES.....	151
2.2. DEFINICION DE PARAMETROS.....	153
2.2.1. Parámetros técnicos de entrada.....	153
2.2.2. Parámetros técnicos de salida.....	154
2.3. UTILES METODOLOGICOS PARA LA SIMULACION.....	157
2.3.1. Medios informáticos.....	157
2.3.2. Utilización de la estimación y simulación geoestadísticas.....	159
2.3.3. Modelización de los procesos reales.....	159
<b>3. ETAPAS BASICAS DE UN ESTUDIO DE SIMULACION DE EXPLOTACION.....</b>	<b>160</b>

**CAPITULO VII: EL MODELO GEOESTADISTICO DE YACIMIENTO**

<b>1. CARACTERISTICAS DEL MODELO.....</b>	<b>165</b>
1.1. VARIABILIDAD.....	166
1.2. DISTRIBUCION.....	167
1.3. CONDICIONAMIENTO DEL MODELO.....	168
<b>2. CONSTRUCCION DEL MODELO.....</b>	<b>169</b>
2.1. ELECCION DEL SOPORTE.....	169
2.2. ANALISIS ESTRUCTURAL DE LAS GAUSIANAS.....	171
2.3. MODELIZACION PROBABILISTICA.....	173
2.4. CONDICIONAMIENTO DEL MODELO A LA INFORMACION EXPERIMENTAL.	174
2.5. MODELO SOBRE LA VARIABLE REAL.....	174
2.6. CONTROL DEL MODELO NUMERICO.....	175

3. EL MODELO GEOMETRICO DE YACIMIENTO.....	176
3.1. SIMULACION DE LA INDICATRIZ.....	177
3.1.1. Simulación condicional de la función $\theta(x)$ .....	179
3.1.2. Un caso de estudio.....	182
4. UN NUEVO METODO DE CONSTRUCCION DEL MODELO DE YACIMIENTO.....	185
4.1. PROBLEMAS PRESENTADOS POR EL METODO CLASICO.....	185
4.2. RESUMEN GENERAL DEL METODO.....	186
4.3. UN EJEMPLO DE APLICACION.....	188
4.3.1. Aspectos básicos del estudio.....	188
4.3.2. Construcción del modelo.....	189

### PARTE TERCERA

#### CASOS DE ESTUDIOS REALIZADOS SOBRE MODELO GEOESTADISTICO DE YACIMIENTO EN LA PLANIFICACION DE EXPLOTACIONES MINERAS

#### CAPITULO VIII: ESTUDIO DE LA EXPLOTACION A CIELO ABIERTO DE UN DEPOSITO DE CARBON

1. ASPECTOS PRELIMINARES.....	199
1.1. CARACTERISTICAS DEL YACIMIENTO.....	199
1.2. DESCRIPCION DEL METODO DE EXPLOTACION "TERRACE MINING"....	200
2. ESTIMACION Y SIMULACION DEL YACIMIENTO.....	201
2.1. GENERALIDADES.....	201
2.1.1. Elección del soporte.....	202
2.1.2. Variables.....	203
2.2. ANALISIS ESTRUCTURAL.....	205
2.2.1. Estudio estadístico preliminar.....	205
2.2.2. Variogramas.....	208
2.3. ESTIMACION DE LOS RECURSOS.....	212
2.3.1. Plan de krigeage.....	212
2.3.2. Resultados.....	213
2.4. SIMULACION CONDICIONAL DEL YACIMIENTO.....	214
2.4.1. Transformaciones de los datos.....	215
2.4.2. Modelización del variograma a simular.....	217

3. SIMULACION DE EXPLOTACION.....	218
3.1. CONSIDERACIONES PRELIMINARES.....	218
3.2. SIMULADOR DE EXPLOTACION.....	219
3.2.1. Objetivos y estructura del programa.....	219
3.3. ESTUDIO POR SIMULACION DE DOS ALTERNATIVAS TECNICAS DE EXPLOTACION.....	221
4. MODELIZACION DEL PARQUE DE ALMACENAMIENTO Y PREHOMOGENEIZACION.	225
4.1. INTRODUCCION.....	225
4.2. MODELO DE ALMACENAMIENTO Y PREHOMOGENEIZACION EN "CHEVRONS".....	226
4.2.1. Objetivos y características del modelo.....	226
4.2.2. Modelos probabilísticos de simulacion de la prehomogeneización.....	228
4.3. MODELO DE SIMULACION DEL ALMACENAMIENTO DE CARBON.....	233
4.3.1. Generalidades.....	233
4.3.2. Generación de datos en el modelo.....	234
4.4. RESULTADOS OBTENIDOS.....	237
5. MODELO DE PREDICCION A CORTO PLAZO DE LA CALIDAD DEL MINERAL...	239
5.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS.....	239
5.2. CARACTERISTICAS DEL MODELO.....	240
5.2.1. Modelo predictivo.....	240
5.2.2. Predicción a corto plazo.....	243
5.2.3. Modelo fácil y rápido de utilización.....	244
5.3. ELECCION DE LOS DATOS PREDICTIVOS.....	244
5.4. SOBRE LA CALIDAD DEL MODELO.....	245
5.5. BUSQUEDA DE UN MODELO DE PREDICCION.....	246
5.5.1. Un modelo posible: la regresión lineal.....	246
5.5.2. Un modelo imposible: la esperanza condicional.....	248
5.5.3. El modelo utilizado: el Krigeage Disyuntivo.....	248
5.6. DESARROLLO DE UN ESTUDIO DE PREDICCION POR KD.....	249
5.6.1. Etapas del estudio.....	250
5.6.2. Un ejemplo de aplicación.....	257

CAPITULO IX: ESTUDIO GEOESTADISTICO DE UN PROYECTO POLIMETALICO

1. INTRODUCCION.....	261
1.1. CARACTERISTICAS GENERALES DEL YACIMIENTO.....	261

2. ESTIMACION LOCAL DE LOS RECURSOS.....	263
2.1. ANALISIS ESTRUCTURAL.....	263
2.1.1. Estadísticos de los datos.....	263
2.1.2. Variogramas.....	266
2.2. KRIGEAGE DE BLOQUES.....	271
2.2.1. Plan de Krigeage.....	271
2.2.2. Resultados de la estimación.....	272
3. PARAMETRIZACION TECNICA DE LAS RESERVAS.....	276
4. SIMULACION CONDICIONAL DEL YACIMIENTO.....	280
4.1. INTRODUCCION.....	280
4.2. CONSTRUCCION DEL MODELO Y RESULTADOS.....	281
4.2.1. Características básicas del modelo.....	281
4.2.2. Anamorfosis y análisis estructural.....	282
4.2.3. Estudio por simulación de la curva tonelaje/ley.....	287

#### CAPITULO X: SIMULACION DE EXPLOTACION DE UN YACIMIENTO DE URANIO

1. INTRODUCCION.....	291
2. SIMULACION CONDICIONAL DEL YACIMIENTO.....	292
3. ESTUDIO DE SIMULACION DE EXPLOTACION.....	294
3.1. INTRODUCCION.....	294
3.2. SIMULACION DE LA SELECCION EN MINA.....	298
3.2.1. Planteamiento de la selección de bloques.....	298
3.2.2. El problema geométrico de la determinación de fosas...	301
3.2.3. Presentación de algunos resultados.....	306

RESUMEN Y CONCLUSIONES.....	313
-----------------------------	-----

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.....	321
---------------------------------	-----

#### ANEXOS

I. ESTUDIO DE LA FUNCION DE ANAMORFOSIS GAUSIANA.....	337
II. CONSTRUCCION DEL MODELO NUMERICO DE YACIMIENTO A PARTIR DEL METODO DE BANDAS ROTANTES Y DEL MODELO GAUSIANO DISCRETO.....	349
III. CONSTRUCCION DE REALIZACIONES DE FA EN EL NUEVO ALGORITMO DE SIMULACION.....	369
IV. EL KRIGEAGE S.L. COMO OPERADOR DE PROYECCION EN ESPACIO VECTORIAL.....	383

## INDICE DE FIGURAS

### PARTE INTRODUCTORIA

#### CAPITULO II: BREVE RECORDATORIO DE LA TEORIA DE LAS VARIABLES REGIONALIZADAS

1. Carácter aleatorio y estructural de la VR.....	12
2. Dependencia de la variable regionalizada con respecto al punto de observación.....	12
3. Histograma de frecuencias de leyes puntuales Z y de bloques $Z_v$ .	13
4. Interpretación topo-probabilística de la variable regionalizada	15
5. Deriva y cuasi-estacionaridad.....	17
6. Hipótesis para la inferencia estadística.....	18
7. Información prestada por el variograma.....	21
8. a) Variograma estacionario y no estacionario. b) Relación entre $\gamma(h)$ y $C(h)$ .....	22
9. Comportamiento del variograma en el origen.....	23
10. Anisotropía geométrica. Elipse de anisotropía geométrica.....	25
11. Efecto proporcional.....	26
12. Anisotropía zonal.....	27
13. Comportamientos particulares del variograma.....	28
14. Modelos de variogramas más frecuentes.....	29
15. Varianza de dispersión vs tamaño de bloque.....	30
16. Varianza de extensión.....	32
17. a) Variograma puntual y regularizado b) Variogramas experimentales regularizados.....	35
18. Planteamiento del problema de krigeage.....	35
19. Krigeage no estacionario, deriva lineal, de datos de fracturación.....	44
20. Histogramas de leyes de bloques de un yacimiento de Plata.....	46
21. Características del Modelo Geoestadístico.....	49

22. Etapas básicas de un estudio geoestadístico.....	51
23. Análisis estructural e interpretación geológica.....	54

## PARTE PRIMERA

### CAPITULO IV: ESTUDIO DE VIABILIDAD TECNICA Y ECONOMICA

1. Objetivos básicos de la preexplotación.....	64
2. Estudios de interés geoestadístico a realizar en el estudio de viabilidad técnica y económica de un proyecto.....	65
3. Variogramas experimentales en prospección geoquímica.....	67
4. Análisis krigeante.....	73
5. Estudio de anomalías por métodos de estimación no lineal.....	76
6. Cartografía automática del contenido en CO <sub>2</sub> .....	79
7. Diseño de mallas de reconocimiento en base a resultados del análisis de los variogramas.....	85
8. a) Varianza de estimación vs costo de la información	
b) Desviación típica vs número de sondeos.....	86
9. Plano de incertidumbre de estimación de las reservas en los bloques.....	87
10. Clasificación de reservas en un yacimiento de Cu.....	88
11. Implantación de un nuevo punto de observación para el reconocimiento pluviométrico de una región del SE de España....	90
12. Estimación global de recursos y reservas.....	91
13. Ponderadores asociados a los puntos de información, correspondientes a la estimación del valor medio de un parámetro en un dominio.....	93
14. Estimación de las reservas recuperables globales en un yacimiento de Cu.....	99
15. Estimación local de los recursos in situ en un yacimiento de carbón	
a) Krigeage del espesor de carbón acumulado.....	103
b y c) Histogramas de valores krigeados y de errores de estimación.....	104
d) Mapa de distribución de los valores krigeados.....	104
e y f). Nubes de correlación entre: $Z_K/Z$ y $\sigma_K^2/(Z-Z_K)^2$ .....	105

16. Estimación local de las funciones de recuperación de mineral y metal.....	107
17. Cálculo por KD de las reservas recuperables locales en un sector de un yacimiento.....	113
18. Cálculo de reservas recuperables en un depósito de carbón por el método de simulación condicional.....	114
19. Parametrización técnica de reservas: relación tonelaje/ley.....	118
20. Parametrización técnica de reservas de un yacimiento de Pb-Zn-Ag.....	119
21. Análisis del riesgo de un proyecto de carbón.....	124

## PARTE SEGUNDA

### CAPITULO V: PLANIFICACION DE EXPLOTACION

1. Control de calidad de la producción en la planificación de minas.....	135
2. Control de la calidad de la producción en la planificación minera: estudio comparativo de dos secuencias de explotación en un depósito de carbón.....	136
3. Preparación y utilización del mineral en la planificación minera.....	138
4. a) Selección de capas explotables sobre sondeo con restricciones técnicas y económicas.....	140
b) Diagrama de recuperación de mineral en función de los parámetros de selección $p_c$ y $p_s$ .....	140
5. Efecto de soporte en la previsión de los resultados sobre la curva tonelaje/ley.....	142
6. Efecto de información: comparación entre estimadores.....	145
7. Efecto de información: influencia de la malla de información en los resultados de la selección.....	147

### CAPITULO VI: ESTUDIO DE SIMULACION DE LOS PROCESOS DE PRODUCCION MINERA

8. Estudio de simulación de explotación.....	151
9. Simulación de explotación: balance global de materiales.....	155
10. Simulación de explotación: secuencias temporales.....	156



11. Simulación de explotación: representación gráfica de resultados.....	158
12. Organigrama del estudio de simulación de explotación.....	161

**CAPITULO VII: EL MODELO GEOESTADISTICO DE YACIMIENTO**

13. a) Ajuste hermitiano del histograma experimental de datos del contenido en azufre.	
b) Funciones de anamorfosis $\phi$ y $\phi_v$ para el contenido en azufre.	168
14. Condicionamiento del modelo.....	169
15. Análisis estructural de las gaussianas.....	172
16. Modelización probabilística.....	174
17. Control numérico del modelo de yacimiento.....	176
18. Función indicatriz $\theta(x)$ .....	178
19. Desarrollo hermitiano de una "función escalón".....	180
20. a) Histogramas acumulados de las variables $Z$ y $Z > z_c$	
b) Variograma experimental de $Z$	
c) Variograma experimental de $Z > z_c$	
d) Comparación de los variogramas de las indicatrices $\theta(x)$ y $\theta_{sc}(x)$ .....	183
21. a) Simulación condicional de la indicatriz, $\theta_{sc}(x)$	
b) Simulación condicional de la variable $Z > z_c$ .....	184
22. Histograma y variograma del recubrimiento de estéril en un depósito sedimentario.....	189
23. Variograma experimental $Y_s(x)$ .....	190
24. Simulación condicional obtenida.....	192
25. Simulación condicional de dos sectores disyuntos.....	194
26. Control de la simulación condicional.....	195

**PARTE TERCERA**

**CAPITULO VIII: ESTUDIO DE LA EXPLOTACION A CIELO ABIERTO DE UN DEPOSITO DE CARBON**

1. Esquema de explotación por rotopala y secuencia de explotación.	201
2. Reconstrucción geométrica de las bancadas de explotación a partir del bloque elemental.....	203

3. Modelo de correlación intrínseca para los variogramas.....	204
4. Histogramas experimentales de los datos brutos.....	206
5. Histogramas variables regularizadas.....	209
6. a) Variogramas experimentales del ratio de carbón.	
b) Ajuste del variograma medio horizontal y vertical.....	210
7. Estimación de recursos: plan de krigeage establecido.....	213
8. Covarianzas de los bloques: real $C_v(h)$ y gaussiana $R(h)$ .....	217
9. Flujo diario de las características del carbón producido en mina por las dos opciones de explotación.....	223
10. Tonelaje producido por cada rotopala B.W.E. correspondiente a cada opción.....	224
11. Sistema general de preparación y homogeneización del carbón....	226
12. Representación esquematizada del almacenamiento longitudinal simple en "chevrons".....	227
13. a) Modelo estadístico gaussiano.....	229
b) Relación $\sigma_0/\sigma_1$ en el modelo gaussiano.....	230
14. Modelo de Monte Carlo.....	231
15. Relación entre el ratio de reducción y el alcance del variograma de los datos de entrada.....	232
16. a) Representación esquematizada de la recogida del mineral por cantidades q.	
b) Cantidad de mineral correspondiente a la iésima capa.....	234
17. Simulación estocástica de variogramas a partir de procesos autorregresivos-medias móviles.....	236
18. Resultados del modelo de almacenamiento y homogeneización del carbón.....	238
19. a) Restitución de una serie económica por krigeage en inter- polación y extrapolación.	
b) Comparación entre la serie real (Z) y estimada en interpolación (Z*).....	241
20. Elección de los datos predictivos.....	244
21. Restitución de una serie por un modelo ARMA (1,1).....	247
22. a) Test de binormalidad de la pareja (Y,X) a partir de los polinomios de Hermite.....	251
b) Test de binormalidad de la pareja (Y,X) a partir del variograma de orden uno $\gamma_1$ . ....	252

23. Datos de calidad del carbón producido en mina.....	253
24. Correlogramas simples y cruzados.....	254
25. Restitución de una serie del poder calorífico por K.D. ....	255
26. Aplicación del KD como modelo predictivo.....	256
27. Histogramas experimentales de las probabilidades de rebasar el límite $z_c$ .....	258

#### CAPITULO IX: ESTUDIO GEOESTADISTICO DE UN PROYECTO POLIMETALICO

28. Estadísticos de los datos: media, varianza y coeficiente de variación.....	264
29. Histogramas de las leyes regularizadas.....	265
30. Ajuste de los variogramas experimentales correspon- dientes al conjunto mineralizado y a los sulfuros pobres.....	269
31. Plan de krigeage.....	272
32. Histogramas de las leyes en Pb estimadas y experimentales.....	273
33. a) Histograma ley Role*. b) Histograma del valor económico de los bloques en pts/t.....	274
34. Funciones de recuperación de mineral deducidas del krigeage de bloques.....	275
35. Corte vertical Y O Z al modelo de yacimiento estimado.....	275
36. a) Cortes verticales seriados según X O Z en la corta 28..... b) Vistas en planta de las cortas 28 y 26..... c) Vista tridimensional de la corta 28.....	278 279 279
37. a) Variogramas experimentales de las gaussianas de las leyes en Pb y Zn, directos y cruzados..... b) Variogramas de las gaussianas de bloque $5 \times 5 \times 8 \text{ m}^3$ de las leyes en Pb y Zn.....	284 285
38. Histogramas de valores simulados de las leyes Pb, Zn y Role....	288
39. Curvas de recuperación de metal en Pb, Zn y Role.....	289

#### CAPITULO X: SIMULACION DE EXPLOTACION DE UN YACIMIENTO DE URANIO

40. Mallas de preexplotación consideradas en el estudio y ponderadores de krigeage asociados a la información.....	293
41. Comparación a nivel global entre las leyes medias verdaderas y estimadas de los bancos de explotación: $E\{\bar{Z}_v/\bar{Z}_v^*\}$ . ....	296

42. Comparación a nivel local entre las leyes medias verdaderas y estimadas de los bloques en un banco: $E\{Z_v/Z_v^*\}$ . . . . .	297
43. Contornos obtenidos por selección libre y con restricciones geométricas de talla. . . . .	302
44. Ejemplo de apertura y cierre de un conjunto A por el elemento estructurante B. . . . .	305

### ANEXOS

1. Anamorfosis gráfica. . . . .	338
2. Casos particulares de funciones $\phi(y)$ . . . . .	341
3. Anamorfosis gaussiana hermitiana. . . . .	348
4. Organigrama para la construcción del modelo de yacimiento sobre soporte de bloque. . . . .	350
5. Distribuciones de las anamorfoseadas de punto y bloque $Y(x)$ , $X(x)$ y de las diferencias $Y(x) - X(x)$ . . . . .	355
6. Cálculo del parámetro de cambio de soporte $r$ . . . . .	358
7. Relación entre $\gamma$ y $\gamma_1$ en el caso bigausiano. . . . .	360
8. Nube de correlación $(Y,X)$ . . . . .	361
9. a) $E\{Z(x)/Z_v(x)\} = Z_v(x)$ b) $E\{Z/X\} = \phi_v$ y $E\{Z_v/X\} = \phi_v$ . . . . .	362
10. Test de binormalidad de la pareja $(X,Y)$ a partir de los polinomios de Hermite. . . . .	364
11. Covarianzas del modelo gaussiano discreto calculadas sobre un modelo numérico. . . . .	368
12. Correlogramas de series generadas de $\xi_n$ y $X_n$ . . . . .	372
13. Ejemplos de realizaciones de FA a partir de los $\xi_n$ , en 1, 2 y 3 dimensiones. . . . .	377
14. El krigeage como operador de proyección en espacio vectorial. . . . .	387

## INDICE DE TABLAS

### PARTE PRIMERA

#### CAPITULO IV: ESTUDIO DE VIABILIDAD TECNICA Y ECONOMICA

1. Varianzas de estimación global de los parámetros medios en un depósito de lignito..... 96

### PARTE SEGUNDA

#### CAPITULO V: PLANIFICACION DE EXPLOTACION

1. Resultados de la homogeneización del mineral recogido por soportes diferentes..... 137
2. Efecto de soporte en la selección de bloques..... 144
3. Resultados económicos en la selección libre..... 144

#### CAPITULO VI: ESTUDIO DE SIMULACION DE LOS PROCESOS DE PRODUCCION MINERA

4. Simulación de explotación: análisis de varianzas de dispersión de la calidad de un carbón..... 156

### PARTE TERCERA

#### CAPITULO VIII: ESTUDIO DE LA EXPLOTACION A CIELO ABIERTO DE UN DEPOSITO DE CARBON

1. Valores de los parámetros  $a_{ij}$  y de los coeficientes de correlación entre las variables..... 205

2. a) Parámetros estadísticos correspondientes a las variables de las capas seleccionadas.....	207
b) Matriz de correlación de los datos brutos.....	207
3. a) Parámetros estadísticos de las variables regularizadas.....	208
b) Matriz de correlación de las variables regularizadas.....	208
4. Valores de la media y varianza del ratio en cada nivel de regularización.....	211
5. Parámetros del ajuste del variograma del ratio.....	211
6. Ajuste de la función $\phi$ puntual.....	216
7. Valores de $C_v(0)$ y del parámetro de cambio de soporte $r$ .....	217
8. Varianzas de dispersión de las características estudiadas para las dos opciones de explotación.....	222
9. Modelos autorregresivos utilizados en el modelo de simulación de un almacenamiento de mineral, en "chevrons".....	235
10. Resultados del estudio de simulación de almacenamiento longitudinal en "chevrons".....	239
11. Ajuste hermitiano de la anamorfosis de las variables.....	252
12. Predicción de valores futuros del contenido en azufre.....	258

#### CAPITULO IX: ESTUDIO GEOESTADISTICO DE UN PROYECTO POLIMETALICO

13. Matriz de correlación de variables "conjunto mineralizado".....	266
14. Modelos ajustados a los variogramas experimentales.....	268
15. Resumen estadístico de los resultados del krigeage de bloques..	273
16. a) Resultados de la anamorfosis de las leyes en Pb y Zn y de los rendimientos $RPb$ y $RZn$ .....	283
b) Coeficientes $a_{ij}$ de ajuste del modelo lineal Pb/Zn.....	285
c) Coeficientes $a_{ij}$ de ajuste del modelo $RPb/RZn$ .....	286
17. Parámetros de las estructuras elementales esféricas simuladas..	286

#### CAPITULO X: SIMULACION DE EXPLOTACION DE UN YACIMIENTO DE URANIO

18. Errores de estimación referidos a las tres mallas de preexplotación contempladas en el estudio.....	298
---	-----

PARTE INTRODUCTORIA

## C A P I T U L O I

### ASPECTOS GENERALES DEL TRABAJO

#### 1. INTRODUCCION

Se constata en la práctica minera de la última década, un interés creciente por la utilización de las técnicas geoestadísticas en la evaluación y planificación de explotaciones mineras, ello es consecuencia de la importancia económica que tiene el disponer de una evaluación previa de la cantidad y calidad de los recursos mineros in situ. Este interés ha sido favorecido, en gran medida, por la crisis económica actual que ha afectado considerablemente a la industria de los metales; ha aumentado con inquietud los costos de explotación, mano de obra, energía, etc, y ha elevado las leyes de corte "cut-off" determinantes del beneficio económico de la explotación. Por todo ello, es cada vez más frecuente que minas, con leyes marginales, vean sus puertas cerrarse como consecuencia de esta situación de riesgo.

Por razones diversas, fáciles de entender, esta situación ha influido notoriamente en el modo de planificación de minas y ha incitado a las empresas mineras a buscar nuevos métodos de cálculo, mejor adaptados



a sus problemas: hoy, se interesan, especialmente, en la Geoestadística como útil metodológico capaz de dar una respuesta satisfactoria a todos y cada uno de ellos. Citaré algunos ejemplos, como son el cálculo de los recursos in situ y de las reservas recuperables, el estudio de planificación de explotación, el control de los procesos mineros de producción de mineral, etc.

Se puede afirmar que el amplio abanico de problemas planteados en la explotación de minas, está íntimamente relacionado con la estimación o simulación de las variables geológico-mineras implicadas en los estudios respectivos, especialmente con las leyes del mineral.

En lo que respecta a los problemas de estimación en minas, éstos están condicionados por dos aspectos fundamentales: de una parte, por los factores geológicos y mineros propios del yacimiento, ligados principalmente con las características y geometría de la mineralización. Por otra parte, a los aspectos técnico-económicos intrínsecos de la explotación, entre los que cabe destacar, por su importancia, la estimación de los recursos y reservas explotables, que como se sabe son función de las leyes de corte aplicadas y de las características técnicas y geométricas de la explotación. También es preciso considerar que en la mina se debe aplicar un control estricto de la calidad de la producción, lo que en definitiva plantea problemas de selección y de planificación.

Además de estos problemas, existen otros que no están ligados directamente con la estimación de leyes, en concreto se piensa en aquellos que derivan de las fluctuaciones de éstas en el yacimiento. El estudio correcto de los mismos pasa por la utilización de un modelo numérico de simulación "equivalente" al verdadero yacimiento, que permita, por ejemplo, estudiar la dispersión de la calidad del mineral extraído o simular los procesos de producción que son, o deben ser, aplicados en la realidad minera (problemas de planificación, almacenamiento y homogeneización, tratamiento, etc).

En el marco de este contexto general, la Geoestadística debe jugar un papel relevante. Estoy convencido, y en ello radica la tesis, que debe ser un útil indispensable para el desarrollo de un proyecto minero, desde la fase de preexplotación hasta la de seguimiento del mismo, día a día. Sus métodos de estimación pueden ser eficazmente aplicados en el estudio de viabilidad, para el reconocimiento geológico sistemático del yacimiento, para el cálculo de los recursos in situ y de las reservas recuperables, para el diseño óptimo de la explotación, etc. Los métodos de simulación pueden ser igualmente eficaces en los estudios relacionados con la dispersión de la calidad del mineral; en este sentido, la Geoestadística de simulaciones o "Geoestadística aval" ha establecido recientemente los principios metodológicos para el análisis y resolución de estos problemas.

Todas estas son las ideas directrices que conforman el marco científico y técnico en el que se ha desarrollado la investigación que, como se verá, tiene unas connotaciones eminentemente aplicadas en el dominio en el que nos movemos. Trataré de exponerlas de forma clara en los siguientes capítulos de que consta este texto.

## 2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACION

La presente memoria constituye el resultado de un proyecto de investigación comenzado hace ocho años sobre el tema de desarrollo de métodos geoestadísticos para el estudio de los recursos naturales, y que es interés del doctorando continuar desde esta Universidad. El trabajo de investigación desarrollado, durante este tiempo, se ha llevado a cabo fundamentalmente en el Centre de Géostatistique et Morphologie Mathématique de la Escuela de Minas de París (C.G.M.M.) en el que he trabajado durante cuatro años.

En el texto se recogen las principales conclusiones metodológicas de índole tanto teórica como práctica, alcanzadas a través de los diferentes estudios y proyectos realizados en el dominio minero.

Dichos proyectos se han llevado a cabo con el apoyo y en estrecha colaboración con diversas sociedades mineras, tanto nacionales como extranjeras, de aquí que este trabajo sea un exponente claro de una labor de equipo y no de una actividad individual aislada. Estas empresas han proporcionado los datos \* de base necesarios en cada caso para la investigación; los ejemplos numéricos citados en el texto provienen de diferentes yacimientos de naturaleza variada: lignito, Pb-Zn-Ag, uranio, cobre, carbón, etc. Además, se ha trabajado con un yacimiento modelizado, ficticio, pero que refleja las características estructurales de uno real de carbón, que ha servido de base para la comprobación de ciertos resultados.

Dado que es una investigación aplicada, su objetivo primordial es ofrecer información que pueda ser de utilidad para un estudio de planificación más eficaz de los recursos mineros de nuestro país. Los resultados obtenidos, en esta investigación, tienen la única pretensión de ser una referencia de las múltiples posibilidades que la Geoestadística ofrece a las Empresas y Organismos que tienen a su cargo la gestión de los recursos naturales, en este caso los minerales.

Como casi siempre que se trata de una investigación de amplia temática general, ha sido preciso pasar por encima de ciertos aspectos, indudablemente interesantes, pero que podrían complicar la mejor comprensión del texto; mi propósito no ha sido hacer un manual de geoestadística, disponible en el mercado, sino de presentar las respuestas que esta ciencia puede dar a muchas de las cuestiones que se plantean en el estudio de los recursos minerales. No obstante, la extensa bibliografía que se aporta, con referencias bibliográficas de estudios de máximo detalle, puede servir al lector interesado para ahondar en este campo.

---

\* Nota: Para guardar la confidencialidad de la información, los datos de base se han modificado por factores multiplicativos, en ciertos casos; en otros, se han cambiado en los gráficos las escalas de variación. Todo ello no modifica las conclusiones generales alcanzadas en cada caso.

Consciente de estas limitaciones, he querido profundizar en aquellos aspectos que creo más interesantes desde el punto de vista metodológico; con ello se cubrirá el objetivo de contribuir a un mejor y más completo conocimiento científico de la Geoestadística Minera.

### 3. COMPOSICION DE LA MEMORIA

La presentación del estudio en el texto se ha hecho considerando tres partes fundamentales; las dos primeras se refieren a los aspectos metodológicos objeto de estudio y la tercera a ejemplos de aplicación de los mismos a casos reales. Estos aspectos metodológicos hacen referencia a las dos etapas básicas de un proyecto: el estudio de viabilidad técnica-económica que tiene lugar en la fase de preexplotación, y la planificación de explotación. Paso a comentar, más detalladamente, las características principales de cada una de ellas.

En la primera parte del texto presento la aplicación de la Geoestadística a la caracterización y valoración de los recursos mineros. Se da una visión general de conjunto de estas aplicaciones, y de detalle en aquellos apartados que recaban mayor interés dada su importancia geológica y minera. Para ello, se analizan las aplicaciones desde que comienza el proyecto, con el reconocimiento geológico del yacimiento, seguido del cálculo de los recursos y de las reservas recuperables, hasta finalizar con el diseño de la explotación y con el estudio económico del proyecto.

La segunda parte de la tesis está dedicada al estudio de planificación de explotación. Se describe el cuadro metodológico en el interior del cual se estudia, mediante simulación, los procesos de producción de mineral en mina; para ello se utilizarán las técnicas de simulación de yacimientos.

La aparición de algunas dificultades de carácter geométrico, durante la etapa de construcción de ciertos tipos de yacimientos, me ha llevado a desarrollar nuevas aproximaciones geoestadísticas para la resolución de tales problemas. También he desarrollado un nuevo método de simulación

de yacimiento, basado en una idea de G. Matheron para la generación de números aleatorios, que tendrá gran utilidad en la modelización de grandes yacimientos. Ambos estudios son presentados en esta segunda parte del texto.

A lo largo de la exposición de estas dos primeras partes se ha compaginado la explicación de los aspectos teóricos, que constituyen la base de la Geoestadística, con pequeños ejemplos didácticos que permitan una mejor asimilación de aquellos. Algunos de ellos se han tomado de aplicaciones no mineras, pero que tenían suficiente interés como para ser presentados.

La tercera parte contiene una serie de casos de estudio, sobre modelo geoestadístico de yacimiento, realizados en la planificación de explotaciones mineras. No se pretende con estos casos cerrar una lista de problemas interesantes que se presentan en el dominio estudiado, por medio de la geoestadística lineal, no lineal, de simulaciones... , se trata de ilustrar, con algunos ejemplos prácticos, el tipo de respuesta que la Geoestadística puede dar a algunas de las cuestiones que se presentan en la explotación de minas.

Por último, señalar que se ha incluido en el preámbulo una amplia parte introductoria a los conceptos básicos de la Teoría de las Variables Regionalizadas, base conceptual de la Geoestadística, que servirá a una mejor comprensión del texto.

## C A P I T U L O   I I

### BREVE RECORDATORIO DE LA TEORIA DE LAS VARIABLES REGIONALIZADAS

#### 1. CONCEPTOS BASICOS

##### 1.1. NOCION DE VARIABLE REGIONALIZADA

"Dans un grand nombre d'activités humaines, notamment dans les Sciences de la Terre, l'art des mines, etc... on s'intéresse à la répartition dans l'espace de certaines grandeurs, que nous appellerons, d'un terme général, des variables régionalisées...", de esta forma MATHERON (1965 a, p.3) introduce el concepto de variable regionalizada. El término de **regionalización** lo propone para cualificar un fenómeno que se distribuye en el espacio y/o tiempo y que presenta una cierta estructura de autocorrelación. Una variable que caracterice tal fenómeno es denominada **variable regionalizada**, en abreviatura VR.

Este tipo de variables es objeto de estudio en campos variados de la investigación aplicada como pueden ser la Minería, Hidrogeología, Agronomía, Economía, etc; encontrándose íntimamente relacionadas con los Recursos Naturales a los que representan y caracterizan tanto desde

el punto de vista cualitativo como cuantitativo; como ejemplos de tales variables, podemos mencionar, entre otras, la ley de un mineral, la permeabilidad de un terreno, el espesor de una capa, etc.

La sociedad se interesa en el estudio de tales variables por razones de índole pragmática; así, para la industria minera es básica la estimación de las leyes del mineral que le conduzca al cálculo de las reservas del yacimiento y del error de estimación, parámetro que tiene una gran importancia cuando se planifica la vida de una explotación; para un teórico el interés tiene una connotación más filosófica de modo que a través de modelos adecuados llegue a comprender el fenómeno "físico" que representan estas variables.

En definitiva, en cualquiera de los casos lo que se busca es extraer de la información experimental, que representa una parte de la realidad desconocida, los rasgos y características principales del fenómeno, de modo que puedan utilizarse en la resolución de problemas de estimación o simulación de estas variables.

La Geoestadística que tiene su base conceptual en la Teoría de las Variables Regionalizadas (MATHERON, 1965 a) es el camino ideal para el análisis de estas variables; su objetivo primordial es la resolución práctica de problemas de estimación y simulación de fenómenos naturales, aplicando herramientas probabilísticas adecuadas.

Propone en sus postulados un conjunto de modelos probabilísticos y de métodos prácticos, entre los que hay que saber elegir aquellos que en cada caso dan la mejor representación de la variable, así como unos resultados realistas y fiables. En efecto, el "savoir faire" del geoestadístico radica en dos aspectos fundamentales, tener un buen conocimiento físico del fenómeno y tener un buen sentido para adaptar todo este aparato teórico a la resolución del problema suscitado.

A mi entender la gran aportación de esta ciencia al estudio de los recursos naturales es la interpretación de carácter topo-probabilístico hecha del fenómeno, en particular de la característica en él observada. Efectivamente, su eficacia emana de este entendimiento, que se fundamenta en el análisis de la variabilidad espacial del fenómeno a través del "variograma"; esta función cuantifica probabilísticamente la dispersión espacial de la variable regionalizada, que debe considerarse como el útil de base de estos métodos.

## 1.2. CARACTERISTICAS DE LA VARIABLE REGIONALIZADA

Desde el punto de vista geoestadístico una VR es una función  $Z(x)$  que da el valor correspondiente a una característica  $Z$  del fenómeno en el punto  $x$ , perteneciente a un espacio  $R^1$ ,  $R^2$  o  $R^3$ .

La VR presenta una distribución espacial (o temporal) dentro del dominio de estudio, caracterizada por dos aspectos fundamentales aparentemente contradictorios:

- el carácter "aleatorio" que induce a la noción de variable aleatoria, pero sin suponer la independencia entre ellas
- el carácter "estructural" que es inherente a cada fenómeno, puesto de manifiesto por la continuidad de la regionalización.

La figura 1 muestra esquemáticamente estos dos caracteres fundamentales de la VR: se ha representado la ley en  $P_b$  de un yacimiento a lo largo de un sondeo.

La dependencia del valor de la variable respecto al punto de observación es lo que caracteriza globalmente a la VR. El siguiente ejemplo servirá para aclaración de este concepto.



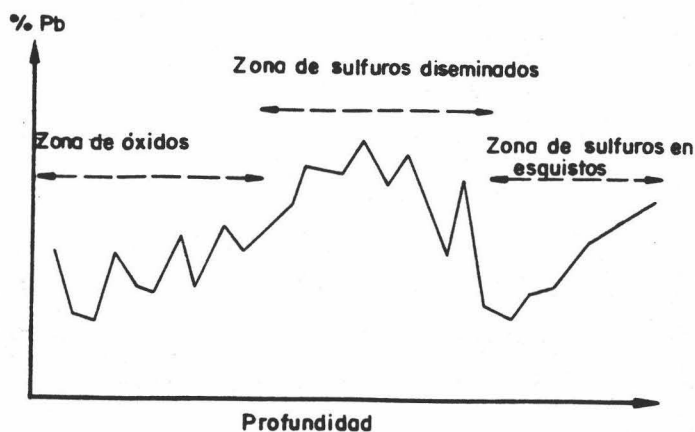


Figura 1.- Carácter aleatorio y estructural de la VR. Evolución de leyes en profundidad en un yacimiento de Pb: el aspecto aleatorio considera las irregularidades locales; el aspecto estructural refleja los rasgos principales de variación del fenómeno.

Supongamos dos líneas de muestreo, indicadas por A y B; en ellas se han tomado muestras de una variable a intervalos de distancia iguales, los resultados son los indicados seguidamente:

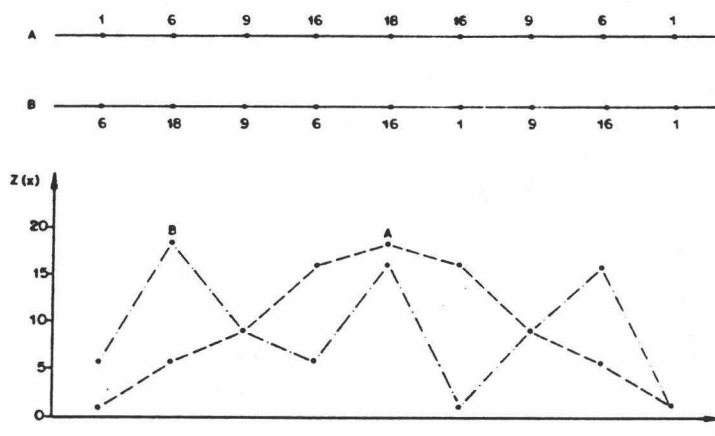


Figura 2.- Dependencia de la variable regionalizada con respecto al punto de observación:  $Z(x) = f(x)$ .

Desde el punto de vista de la estadística clásica los resultados de ambos muestreos no difieren entre sí; así, tienen los mismos parámetros estadísticos, media, varianza, histograma, etc. No obstante, la interpretación física de los dos fenómenos respecto a su distribución son profundamente diferentes, si se observan los perfiles dibujados en la figura 2. Por tanto, está claro que existe un carácter (variable regionalizada) que debe tenerse en cuenta, si se desea hacer un análisis correcto de las dos muestras.

Otras características cualitativas importantes de la VR son las siguientes:

*A) El soporte*

La VR está definida en un dominio o región del espacio y/o del tiempo, denominado **campo geométrico**, como puede ser por ejemplo el área mineralizada de un yacimiento, sobre el cual la variable toma una serie de valores puntuales o medios; el volumen físico sobre el cual se observan los valores de la variable recibe el nombre de **soporte**, parámetro fundamental a tener en cuenta en los estudios geoestadísticos.

Si se modifica el tamaño del soporte se obtiene una regionalización diferente, una nueva VR, pero estrechamente relacionada en sus parámetros con la primera; este hecho que tiene un fundamento físico claro es bien conocido por el minero, quien sabe que los resultados económicos de una explotación son contrarios al tamaño del bloque de selección. De aquí que el histograma de leyes puntuales de testigos de sondeos  $Z$  no pueda utilizarse para la previsión de los resultados de la selección, cuando ésta se realiza en base a las leyes de los bloques  $Z_v$ . En particular, el aspecto discriminatorio de las distribuciones de las variables  $Z$  y  $Z_v$  es la dispersión que éstas presentan en el yacimiento (ver figura 3): la dispersión de las leyes puntuales en el yacimiento es mayor que la dispersión de las leyes de bloques en el mismo.

$$D^2 (Z/G) > D^2 (Z_v/G) \quad \forall x \in v \quad (\text{relación de varianzas de dispersión})$$

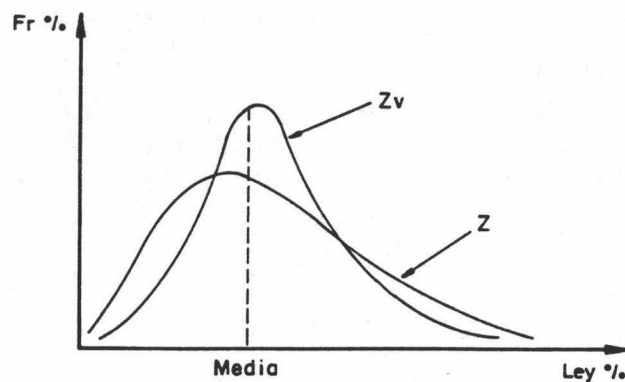


Figura 3.- Histograma de frecuencias de leyes puntuales  $Z$  y de bloques  $Z_v$ .

### B) La continuidad

Esta característica se refiere a la variación espacial de la VR. A pesar de las fluctuaciones que puede experimentar la variable, ésta presenta un carácter general de continuidad en el espacio. Se habla de que una VR es continua si en el límite se obtiene que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} E\{Z(x) - Z(x_0)\} = 0$$

Hay casos en que tal continuidad no se verifica en media cuadrática, entonces el límite tiende a un valor  $C_0$ , distinto de cero, que se denomina "efecto de pepita", del que se hablará más tarde.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} E\{Z(x) - Z(x_0)\}^2 = C_0 \neq 0$$

### C) La anisotropía

La VR puede presentar distintos comportamientos de continuidad según diferentes direcciones. Ese comportamiento anisótropo direccional de la variable tiene siempre un significado geológico, que puede ser interpretado desde la óptica geoestadística.

## 1.3. LA VARIABLE REGIONALIZADA COMO REALIZACION DE FUNCION ALEATORIA

### 1.3.1. Interpretación topo-probabilística de la VR

Una forma cómoda y práctica de poder analizar el doble aspecto aleatorio y estructural de la VR es utilizar al lenguaje probabilístico de la teoría de Funciones Aleatorias.

Para el propósito que nos ocupa una VR es una realización particular  $z(x)$  de una función aleatoria  $Z(x)$  (en abreviatura FA).

Una FA de soporte cualquiera definida en un dominio  $G$  es un conjunto de variables aleatorias (en abreviatura  $VA_S$ ),  $\{Z(x_\alpha), \forall x \in G, \alpha = 1 \text{ a } n\}$ , sea:

$$FA Z(x) = \{Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)\}$$

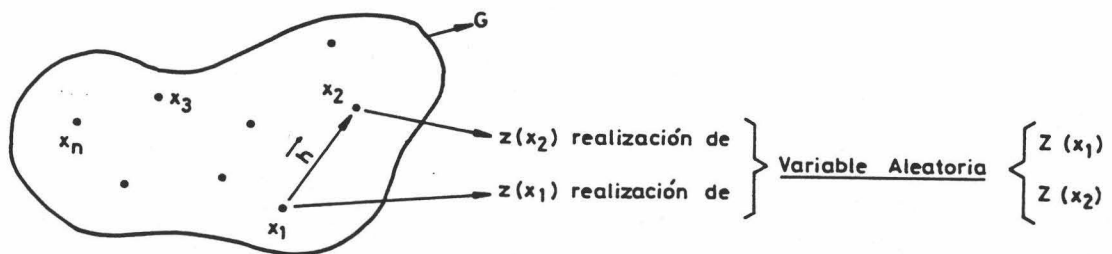
La  $VA Z(x_\alpha)$  es una variable que puede tomar cierto número de valores  $z(x_\alpha)$  con cierta ley de probabilidad,

$$f \{Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)\}$$

Cada uno de los valores  $z(x_\alpha)$  es considerado como una realización particular de la  $VA Z(x_\alpha)$ ; pero el conjunto de valores  $\{z(x_\alpha), \alpha = 1 \text{ a } n\}$  es una realización particular del conjunto de  $VA_S$ , y por definición lo es también de la FA  $Z(x)$ .

La misma expresión "función aleatoria" contiene en sí el doble aspecto aleatorio y estructural de una VR, como he querido expresar en la figura 4:

- localmente  $Z(x_\alpha)$  es una VA
- para dos puntos cualquiera  $x_1, x_2 \in G$ , las  $VA_S Z(x_1)$  y  $Z(x_2)$  no son, en general, independientes; presentan una cierta estructura de autocorrelación.



$z(x) = \{z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n)\}$  realización de Funcion Aleatoria

$Z(x) = \{Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)\}$  Correlación Espacial función de  $\bar{h}$  para  $\{Z(x_1), Z(x_2)\}$

Figura 4.- Interpretación topo-probabilística de la variable regionalizada.

#### 1.4. HIPOTESIS RESTRICTIVAS

Para poder aplicar los resultados de la teoría de funciones aleatorias es necesario conocer, al menos, una parte de la ley de distribución de la FA  $Z(x)$ ; esta aplicación recibe el nombre de inferencia estadística.

Dos caminos diferentes pueden seguirse para realizar la inferencia estadística, sean:

- si se conoce un número suficiente de realizaciones de la FA  $Z(x)$ , se puede entonces estimar las características, momentos, de dicha función con ayuda de las medias obtenidas sobre el conjunto de las diferentes realizaciones.
- si se conoce una única realización, que es el caso presentado por las variables geológicas, no es posible adoptar el camino anterior por lo que es necesario entonces introducir una serie de hipótesis restrictivas, que permitan encontrar una solución a la inferencia estadística (véase figura I.6).

##### 1.4.1. Hipótesis Estacionaria e Intrínseca

Una FA  $Z(x)$  se dice que es estacionaria si su ley de distribución de probabilidad es invariable por traslación, esto es, si:

$$f\{Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)\} = f\{Z(x_1+h), Z(x_2+h), \dots, Z(x_n+h)\}$$

La traslación vendría marcada por el módulo del vector  $h$ .

Dicho de otro modo, un fenómeno es estacionario si tiene una cierta homogeneidad de naturaleza estadística.

Para las aplicaciones, esta hipótesis sólo hace referencia a la estacionaridad de 2º orden de la FA  $Z(x)$ , que asume que los dos primeros momentos de su ley de probabilidad existen y son invariables por traslación:

- la esperanza matemática existe y no depende del punto de apoyo  $x$

$$E\{Z(x)\} = m(x) = m \quad \text{Cte} \quad \forall x \in G$$

- para la pareja de  $VA_S \{Z(x), Z(x+h)\}$ , la covarianza  $C(h)$  existe y sólo depende del vector  $h$  que las separa

$$\text{Cov}\{Z(x), Z(x+h)\} = E\{Z(x) \cdot Z(x+h)\} - m^2 = C(h) \quad \forall x \in G$$

La función vectorial  $C(h)$  no depende de los puntos de apoyo  $x$  y  $x+h$  sino del vector  $h$  que los une.

En la práctica, ocurre que el concepto de estacionaridad está ligado a la escala de trabajo, de forma que fenómenos que reflejan un comportamiento no estacionario a gran escala (presencia de una deriva regional) pueden serlo a escala local  $h \ll d$ , para la cual se verifica la hipótesis de estacionaridad "cuasi-estacionaridad" (figura 5).

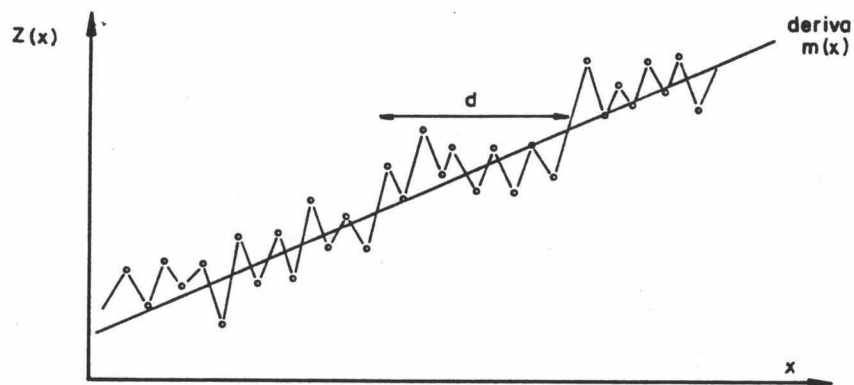


Figura 5.- Deriva y cuasi-estacionaridad. La hipótesis de cuasi-estacionaridad implica un compromiso entre la escala de homogeneidad del fenómeno y la cantidad de información disponible sobre el mismo.

Para realizar la inferencia estadística no es necesario que se verifique en su totalidad la hipótesis anterior; existen fenómenos, como he dicho antes, que presentan una deriva, a los que difícilmente se podría asociar una covarianza estacionaria. Para resolver el problema la Geoestadística considera una hipótesis menos restrictiva que es la hipótesis intrínseca, basándose en la estacionaridad de los incrementos de primer orden de la pareja de  $VA_S \{Z(x), Z(x-h)\}$  y no de la  $VA Z(x)$  en sí misma.

Entonces, una FA  $Z(x)$  se dice que es intrínseca para la pareja  $\{Z(x+h), Z(x)\}$  si:

- la esperanza matemática de los incrementos de primer orden existe y no depende del punto de apoyo  $x$

$$E\{Z(x+h) - Z(x)\} = 0$$

- la varianza de los incrementos de primer orden existe y no depende de los puntos  $x$  y  $x-h$ .

$$\text{Var}\{Z(x+h) - Z(x)\} = 2 \gamma(h)$$

La función  $\gamma(h)$  es llamada "variograma" y es el útil de base para la aplicación de los métodos geoestadísticos, en la resolución de los problemas de estimación y simulación de variables espaciales.

La hipótesis estacionaria de orden 2 implica la intrínseca, pero no al contrario. En el caso de aceptación de algunas de estas hipótesis el conocimiento de una única realización puede permitir la estimación de los primeros momentos de la FA  $Z(x)$  (figura 6).

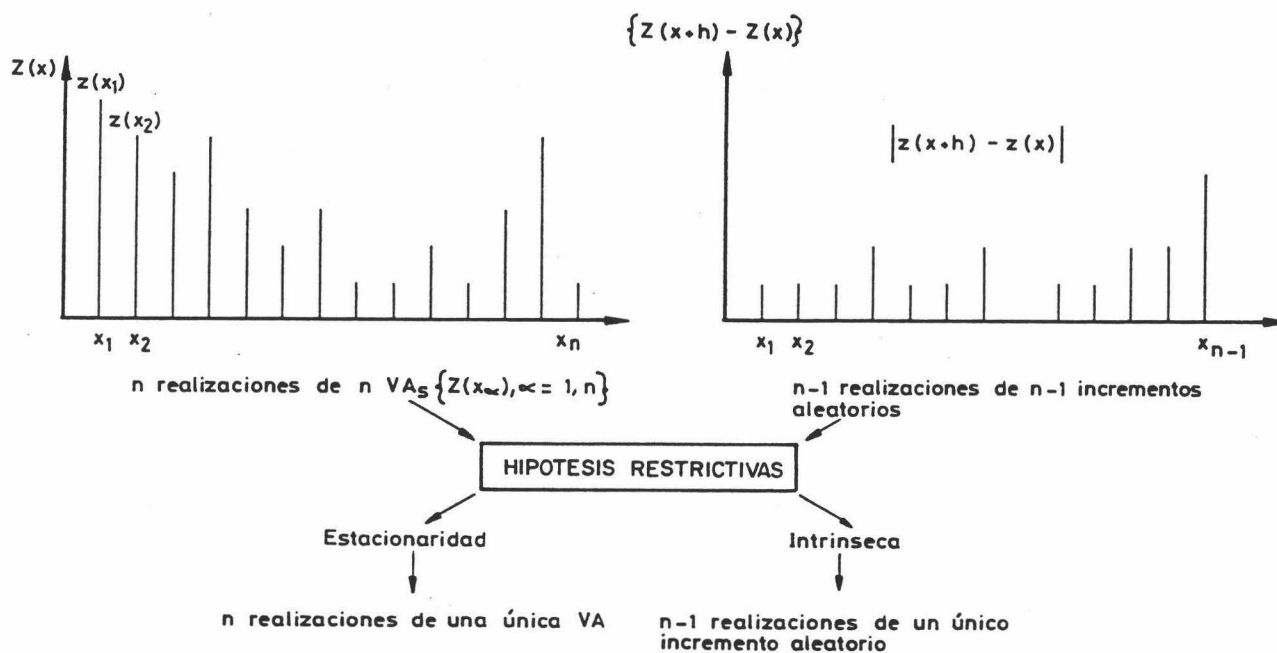


Figura 6.- Hipótesis para la inferencia estadística.

## 1.5. EL VARIOGRAMA

El variograma es una función aleatoria intrínseca que representa la mitad de los incrementos cuadráticos medios de la variable para puntos distantes el vector de distancia  $h$ ,

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{Var}\{Z(x+h) - Z(x)\}$$

Como se ha supuesto que  $E\{Z(x+h) - Z(x)\} = 0$ ,  $\gamma(h)$  vale entonces

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E\{Z(x-h) - Z(x)\}^2 \quad \text{con } \gamma(h) = 0 \quad \text{para } h = 0$$

El estimador experimental del variograma se calcula a partir de los datos experimentales, aplicando la fórmula:

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2 \text{NP}(h)} \sum_{i=1}^{\text{NP}(h)} \{z(x_i+h) - z(x_i)\}^2$$

donde

$z(x_i)$  = datos experimentales

$\text{NP}(h)$  = número de parejas distantes  $h$

$h$  = paso del variograma

$x_i, x_i+h$  = puntos experimentales de un espacio  $n$ -dimensional  $R^n$ , ( $n = 1, 2$  o  $3$ ).

Para variables distribuidas en el plano ( $n=2$ ), el vector  $h$  puede expresarse en coordenadas polares función del módulo  $|h|$  y del ángulo  $\alpha$ :

$$\gamma(h) = \gamma(|h|, \alpha)$$

Para una dirección  $\alpha$  cualquiera, el variograma calculado indica como aumenta la variabilidad, o disminuye la correlación, entre los datos cuando crece la distancia entre los puntos. Calculado el variograma en diferentes direcciones pueden interpretarse los rasgos direccionales principales del fenómeno; de aquí que el variograma sea un útil potente revelador de la estructura del fenómeno.



### 1.5.1. Principales propiedades del variograma

La definición del variograma como varianza de los incrementos de la FA Z implica las siguientes propiedades (véase MATHERON, 1970 pág. 54 y BASS, 1974).

Un variograma al igual que una covarianza son funciones simétricas en h, esto es

$$\gamma(h) = \gamma(-h) \text{ y también } C(h) = C(-h)$$

La covarianza cumple además la desigualdad de Schwarz, que dice que, en términos absolutos, la covarianza para  $h > 0$  es menor o igual que la varianza a priori (covarianza en el origen  $h = 0$ )

$$|C(h)| \geq C(0)$$

Para el variograma, se tiene que es una función no negativa  $\gamma(h) \geq 0$  y  $\gamma(0) = 0$ , mientras que la covarianza puede tomar valores negativos.

Estas condiciones son necesarias pero no suficientes para que exista una FA estacionaria o intrínseca admitiendo una función  $C(h)$  o  $\gamma(h)$  que cumpla dichas propiedades. Es condición necesaria y suficiente para demostrar tal existencia que la función  $C(h)$  sea definida positiva, esto significa que asegure el carácter positivo o nulo de la varianza de toda combinación lineal  $Y = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Z_{\alpha}$

$$\text{Var}(Y) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} C(x_{\alpha} - x_{\beta}) \geq 0$$

En el caso de la función variograma la condición de positividad se refiere a  $-\gamma(h)$ , con la condición de que  $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = 0$

$$\text{Var}(Y) = -\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \gamma(x_{\alpha} - x_{\beta}) \geq 0 / \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = 0$$

Otra propiedad muy interesante, de gran utilidad en las aplicaciones prácticas, es la relación existente entre las funciones  $C(h)$  y  $\gamma(h)$  en el caso estacionario. La existencia de la covarianza  $C(h)$ , caso estacionario, implica la existencia del variograma, caso intrínseco, tal que se cumple la relación:

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \quad (\text{véase figura 8 b}).$$

### 1.5.2. Análisis del gráfico del variograma

El estudio del comportamiento del gráfico del variograma es de gran interés ya que da una descripción sintetizada de la estructura de variación del fenómeno; además, permite conocer, como se verá más tarde, la relación existente entre dicha estructura y la precisión de la estimación de la variable.

La información prestada por el variograma, como útil estructural, se ha resumido en la figura 7, que paso a comentar seguidamente:

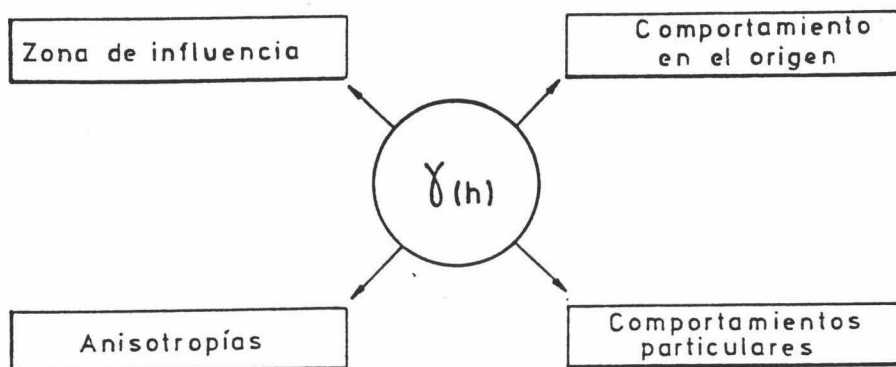


Figura 7.- Información prestada por el variograma.

#### A) Zona de influencia

El crecimiento, más o menos rápido, del variograma refleja el grado de deterioración de la influencia de un dato respecto a otro, a medida que aumenta la distancia que los separa. Cuando el fenómeno es estacionario el variograma crece hasta un límite llamado "meseta", a partir del cual el variograma se estacionariza. La distancia para la cual se alcanza el valor de meseta se denomina "alcance" o "memoria" si se trabaja en el tiempo, y corresponde a la distancia para la cual desaparece la correlación entre  $Z(x)$  y  $Z(x+h)$ . Cuando el fenómeno no es estacionario el variograma no presenta este valor límite, creciendo por encima del valor de dispersión a priori -varianza experimental-.

El alcance tiene un sentido geológico preciso y muy importante, referido al concepto de "zona de influencia" o "continuidad geológica". El valor de meseta coincide teóricamente con el valor de la varianza experimental de los datos  $\sigma^2$ , esto es, con el valor de la covarianza  $C(h)$  en el origen  $C(0)$ ,

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \frac{1}{2} E\{Z(x+h) - Z(x)\}^2 \\ &= \frac{1}{2} [E\{Z(x+h)\}^2 + E\{Z(x)\}^2 - 2 E\{Z(x+h) \cdot Z(x)\}] \end{aligned}$$

si  $Z(x+h)$  y  $Z(x)$  son independientes queda

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{Var}\{Z(x+h)\} + \frac{1}{2} \text{Var}\{Z(x)\} = \frac{2\sigma^2}{2} = \sigma^2 = C(0)$$

De la expresión anterior se deduce igualmente, para el caso estacionario (existe la función  $C(h)$ ), que la relación entre  $C(h)$  y  $\gamma(h)$  viene dada por la relación clásica,

$$\gamma(h) = C(0) - C(h)$$

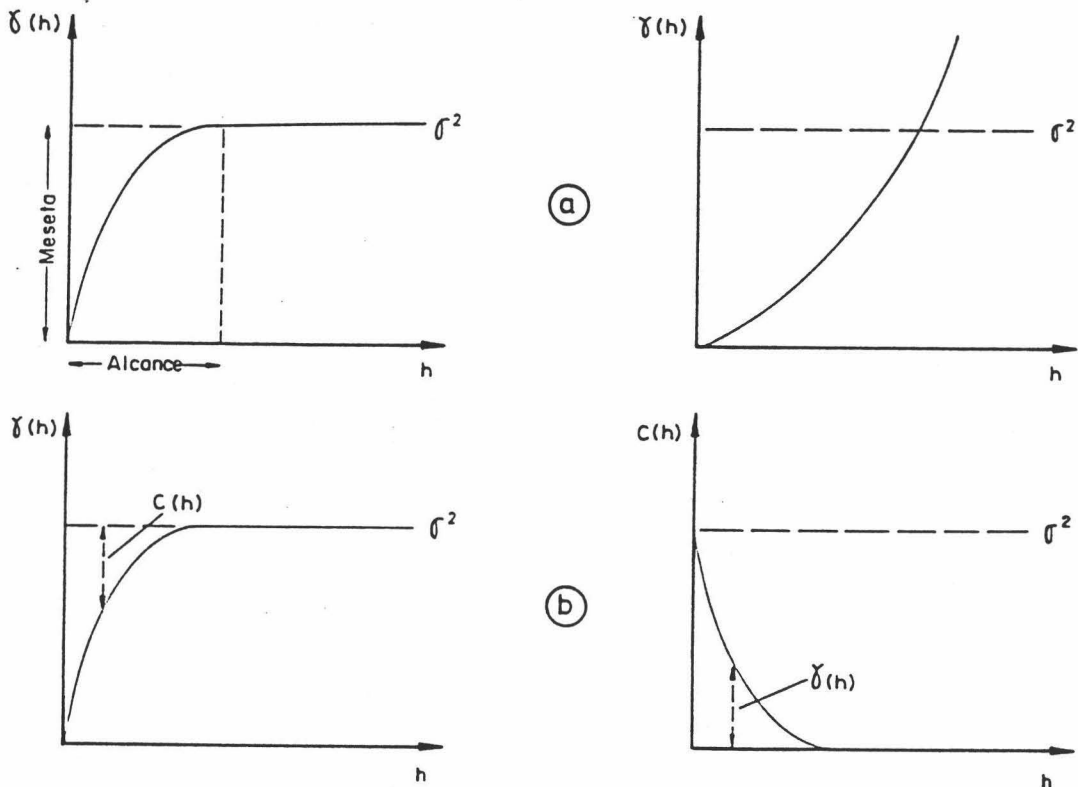


Figura 8.- a) Variograma estacionario y no estacionario  
b) Relación entre  $\gamma(h)$  y  $C(h)$ .

### B) Comportamiento en el origen

Además del estudio del variograma para grandes distancias, también es de gran interés estudiar su comportamiento en origen, esto es, para valores de  $h$  pequeños. Tal comportamiento refleja gráficamente el grado de continuidad y de regularidad del fenómeno.

Es frecuente distinguir, según el grado de continuidad decreciente, cuatro tipos de variogramas referidos a su comportamiento en el origen (DELHOMME, 1976). Estos variogramas pueden verse en la figura 9, cuyas características son:

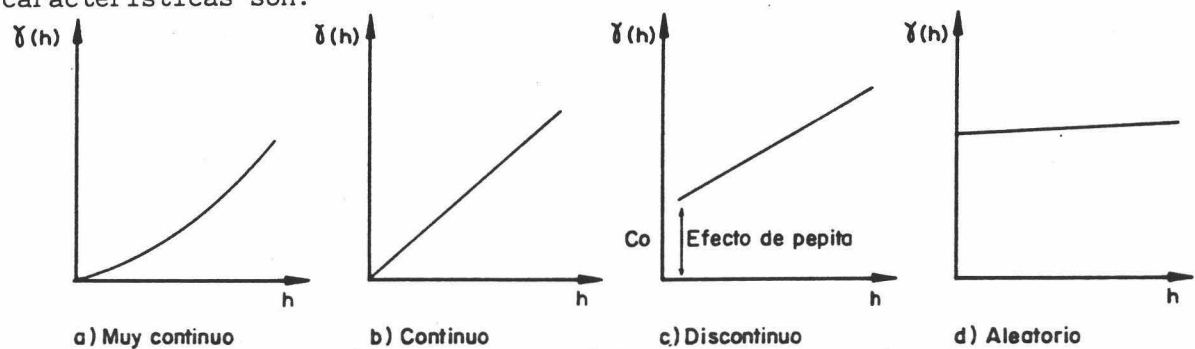


Figura 9.- Comportamiento del variograma en el origen.

- a) El variograma presenta una figura de tipo parabólico; caracteriza a una variable extremadamente regular siendo derivable la VR.
- b) La gráfica del variograma es lineal y parte del origen (para  $h = 0$   $\gamma(h) = 0$ ); caracteriza a una VR continua pero menos regular que el caso anterior. La VR es continua en media cuadrática pero no derivable.
- c) La función  $\gamma(h)$  presenta una discontinuidad en el origen llamada "efecto de pepita"; se tiene entonces que cuando  $h$  tiende a 0,  $\gamma(h)$  no tiende a 0. Esto implica que la VR no es continua en media cuadrática por lo que representa a una variable muy irregular. Así, dos puntos muy próximos presentan una diferencia de varianza al menos igual al valor del efecto de pepita  $C_0$ .

La causa de esta discontinuidad puede ser debida a una de las causas siguientes:

- a errores de medida,
- a una micro-regionalización de escala inferior a la de observación.

En principio, es difícil en la práctica discernir entre estos dos motivos, sólo un buen conocimiento del fenómeno podrá ayudar a hacerlo.

d) El variograma presenta un gráfico al que se puede ajustar una recta paralela al eje de distancias. Corresponde al caso de máxima discontinuidad "aleatorio puro", en el que la pareja  $\{Z(x) - Z(x+h)\}$  no presenta correlación alguna; es el caso límite de ausencia de estructura.

En DELHOMME (1976) y CHICA-OLMO (1981 a) se presentan ejemplos de variogramas experimentales correspondientes a cada uno de estos casos, calculados sobre datos de naturaleza geológica distinta.

### *C) Anisotropías*

Se dice que una VR tiene un comportamiento anisótropo cuando presenta direcciones particulares de variabilidad. Tales direcciones privilegiadas corresponden generalmente a direcciones genéticas o estructurales del fenómeno geológico.

El comportamiento anisótropo es fácilmente detectable calculando variogramas en diferentes direcciones del espacio y representándolos conjuntamente en el mismo gráfico.

Se distinguen, en la práctica, tres tipos de comportamientos anisótropos del variograma, que son:

#### a) Anisotropía geométrica

Se produce cuando los diversos variogramas presentan un mismo valor de meseta; puede corregirse mediante una transformación de tipo afín de las coordenadas.

En la figura 10 se ha esquematizado una anisotropía geométrica para un modelo de variograma estacionario. Es fácil representar los distintos alcances en forma de una elipse de anisotropía, y con sólo una corrección de coordenadas es posible transformar la elipse en un círculo y restaurar la isotropía. El coeficiente de anisotropía necesario para esta transformación viene dado por la relación de alcances,  $k = A_1/A_2$ . En este caso general, donde los ejes principales de anisotropía no coinciden con los ejes de coordenadas se tiene que la corrección afín es:

$$\gamma(h) = \gamma_1 (\sqrt{h'}) \quad h = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$h' = \{(x_1 - x_2) \cos \phi - (y_1 - y_2) \sin \phi\}^2 +$$

$$k^2 \{(y_1 - y_2) \cos \phi - (x_1 - x_2) \sin \phi\}^2$$

$$\text{con } k = A_1/A_2$$

$\phi$  es el ángulo formado entre el eje  $x$  y el eje  $x'$  de la elipse;  $\gamma_1$  es el variograma de la dirección 1.

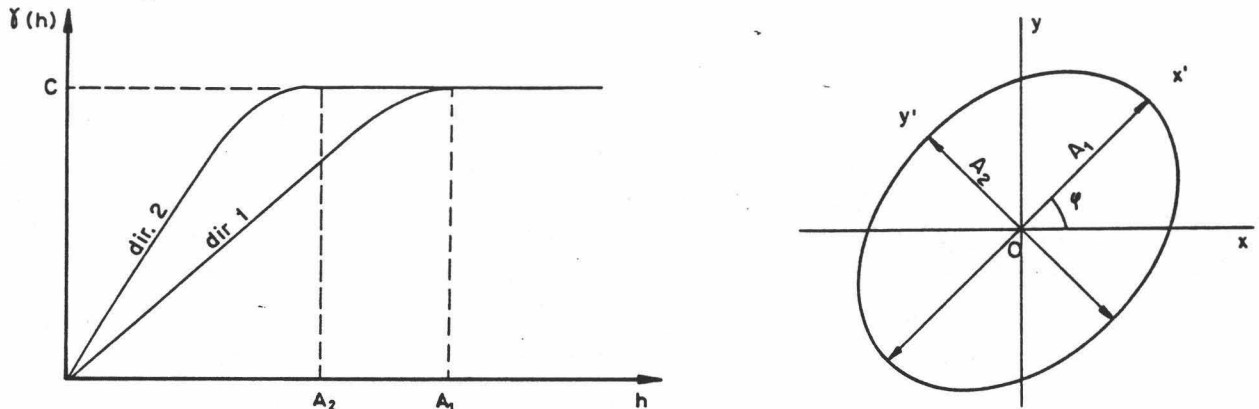


Figura 10.- Anisotropía geométrica. Elipse de anisotropía geométrica.

#### b) Efecto proporcional

Al contrario que el caso anterior, puede ocurrir que los variogramas muestren una afinidad en sus respectivas mesetas, presentando todos el mismo alcance. Este tipo de comportamiento recibe el nombre de "efecto proporcional" (figura 11).

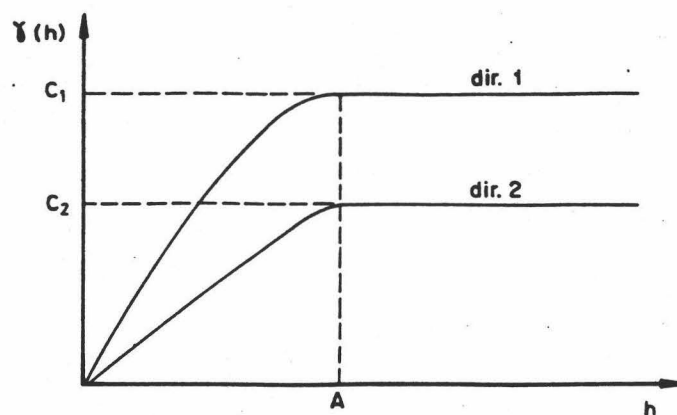


Figura 11.- Efecto proporcional.

En la práctica, se puede utilizar un único variograma de base  $\gamma_0(h)$  a partir del cual se deducen los variogramas direccionales  $\gamma_i(h)$  mediante una corrección lineal del tipo,

$$\gamma_i(h) = f_i \cdot \gamma_0(h)$$

El coeficiente de proporcionalidad  $f_i$  es, en general, función del cuadrado de la media experimental (JOURNEL Y HUIJBREGTS; 1978).

Un ejemplo de aplicación didáctico correspondiente a la utilización de modelos de variogramas proporcionales es presentado en DELHOMME (1976) y CHICA-OLMO (1981 b).

#### c) Anisotropía zonal

Este caso de anisotropía afecta al conjunto de los variogramas obtenidos, de modo que sus características son diferentes entre sí, tanto las de variabilidad, eje  $\gamma(h)$ , como las geométricas, eje  $h$  (figura 12).

Tal tipo de anisotropía puede en ciertos casos deberse a la presencia de una deriva regional en la distribución espacial de la variable. En teoría se demuestra, en base a las propiedades de la función variograma, que si una FA es intrínseca entonces el variograma crece más lentamente que una parábola, es decir que  $h^2$ . Más específicamente, que:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\gamma(h)}{|h|^2} = 0$$

Si ocurre que  $\gamma(h)$  crece más rápidamente que  $h^2$  es probablemente debido a la existencia de una deriva impuesta.

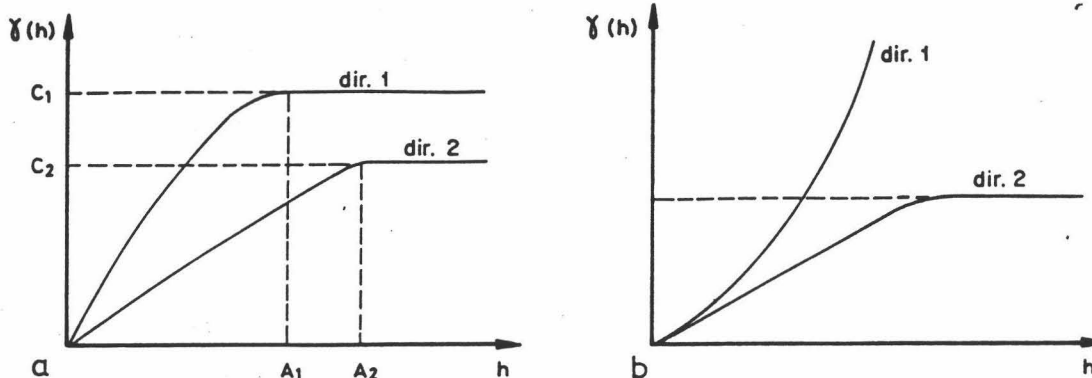


Figura 12.- Anisotropía zonal: a) Variogramas estacionarios, b) Por efecto de una deriva.

#### D) Comportamientos particulares del variograma

Ocurre, con cierta frecuencia, que la VR presenta un variograma diferente a los vistos anteriormente, debido a que el fenómeno acusa periodicidades o superposiciones de estructuras de variación de escalas diferentes. Los comportamientos particulares más frecuentes son:

##### a) Estructuras imbricadas

El origen de este comportamiento está relacionado con la superposición de variaciones diferentes, a escalas distintas, del mismo fenómeno estudiado. El variograma global  $\gamma_o(h)$  estará formado por la suma de variogramas elementales  $\gamma_i(h)$  correspondientes a cada una de las escalas de variación distinguidas (figura 13).

$$\gamma_o(h) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(h)$$

##### b) Estructuras de periodicidad

Tanto el variograma como la covarianza pueden presentar periodos debidos, por ejemplo, a oscilaciones periódicas de las variables, en los que se ponen de manifiesto correlaciones locales positivas y negativas. Este tipo de comportamiento es muy frecuente cuando se estudian series temporales (véase figura 13).



## c) Efecto de pozo

Un variograma se dice que tiene efecto de pozo cuando su crecimiento no es monótono, presentando uno o más saltos, debido a una componente pseudo-periódica de la variable (figura I.13).

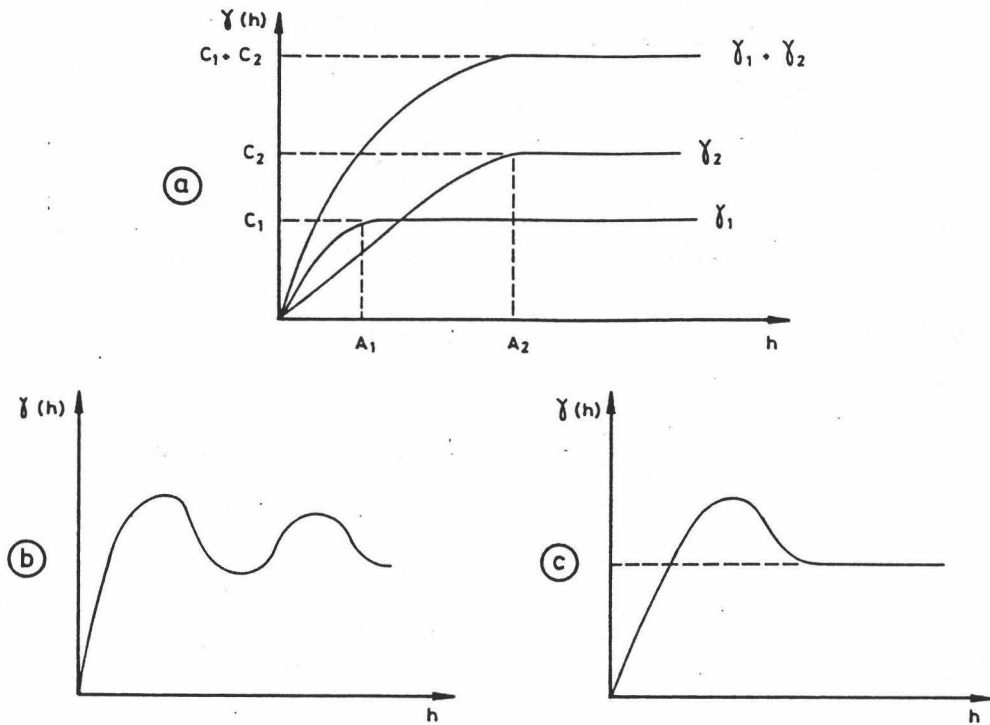


Figura 7.13.- Comportamientos particulares del variograma: a) estructuras imbricadas, b) periodicidad, c) efecto de pozo.

## 1.5.3. Modelos teóricos de variograma

Para los propósitos de estimación o simulación de variables no es posible usar directamente el variograma experimental; previamente deberá ajustarse un modelo teórico al variograma anterior. La razón es que para que una función sea variograma debe cumplir determinadas condiciones de consistencia matemática; lo mismo sucede con la covarianza.

Se demuestra teóricamente (JOURNEL y HUIJBREGTS, 1978) que una función es covarianza si para toda combinación lineal de la FA  $Z(x)$ , sea:

$$Y(x) = \sum_i \lambda_i Z(x_i)$$

la varianza  $\text{Var} \{Y(x)\}$  es  $\geq 0$ . Función que puede expresarse de la forma:

$$\text{Var} \{Y(x)\} = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j C(x_i, x_j) \geq 0$$

Se debe asegurar que para todo conjunto de puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y de números reales  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , la expresión anterior, correspondiente a una varianza, sea positiva o cero. Una función  $C(h)$  que cumpla esta condición se llama **definida positiva**.

En términos de variograma la varianza se expresa de la forma :

$$\text{Var}\{Y(x)\} = - \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i, x_j) \geq 0$$

En este caso se precisa que  $-\gamma(h)$  sea una función definida positiva condicionalmente a que  $\sum_i \lambda_i = 0$ .

Dicha condición es menos restrictiva que la condición impuesta sobre la covarianza, ya que se pide que se cumpla  $\sum_i \lambda_i = 0$  para cualquier sistema de pesos  $\lambda_i$  y no para todos los  $\lambda_i$ . Por esta razón, la clase de variogramas es más rica que la de covarianzas.

En JOURNEL y HUIJBREGTS (1978) se presentan los modelos de variogramas más usuales en la práctica geoestadística. Se ha querido representarlos gráficamente en la figura 14 junto con su fórmula analítica. De todos ellos el más frecuentemente utilizado en la práctica es el modelo esférico o de Matheron que tiene un comportamiento lineal en el origen.

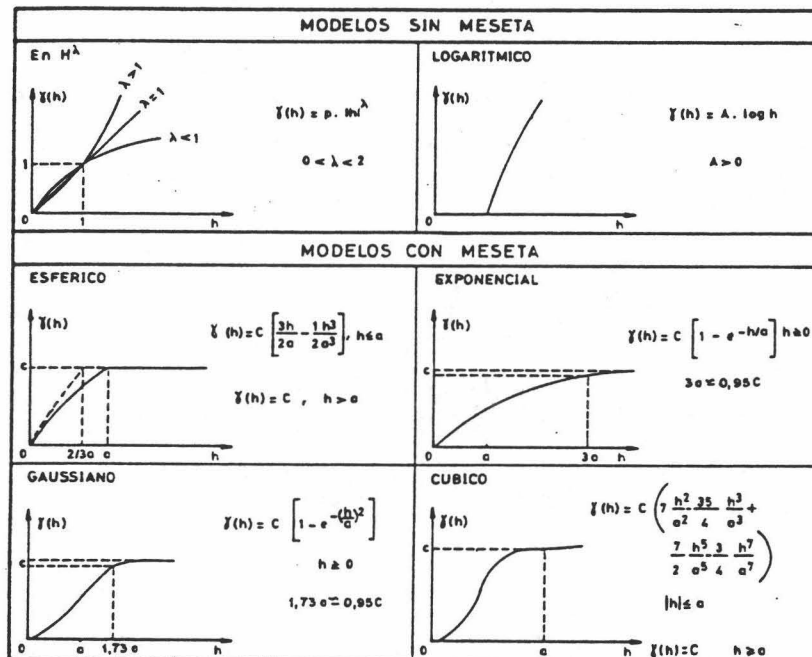


Figura 14.- Modelos de variogramas más frecuentes.

## 1.6. VARIANZAS DE DISPERSION Y EXTENSION

### 1.6.1. Varianza de Dispersión vs tamaño de soporte

Se indicaba anteriormente que si se modifica el soporte de observación de la VR se obtiene una nueva variable relacionada con la primera, pero con diferentes características estructurales: varianza, variograma, histograma, etc.

Así, en la figura 15 se ha representado la varianza experimental de un parámetro en función del tamaño del bloque  $v$  que sirve de soporte a la observación, comprobándose que decrece rápidamente la varianza de dispersión en función del tamaño del bloque.

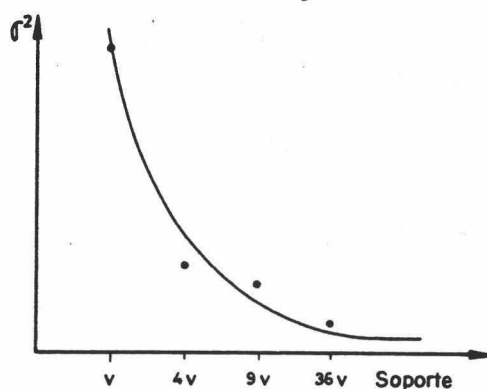


Figura 15.- Varianza de dispersión vs tamaño de bloque.

Supongamos dos VR<sub>s</sub> diferentes  $Z$  y  $Z_v$ , observadas sobre soportes distintos, la primera referida a valores puntuales y la segunda a valores medios en el volumen  $v$ . Desde la óptica geoestadística las dos variables son realizaciones de funciones aleatorias. Si se dispone de todos los valores puntuales  $z(x)$  en el interior de  $v$ , se podrá calcular la media y varianza de  $z(x)$  en  $v$  como:

$$m_v = 1/v \int_v z(x) dx = Z_v$$

$$\sigma^2(0/v) = 1/v \int_v \{(z(x) - m_v)\}^2 dx$$

La varianza de dispersión de  $Z(x)$  en  $v$ ,  $D^2(0/v)$ , está definida como la esperanza de  $\sigma^2(0/v)$  calculada sobre todas las posibles realizaciones:

$$D^2(O/v) = E \{ \sigma^2(O/v) \}$$

Se demuestra que la varianza de dispersión  $D^2(O/v)$  está relacionada con el variograma de  $Z(x)$  por la relación (MATHERON, 1970):

$$D^2(O/v) = 1/v^2 \int_v dx \int_v \gamma(x-y) dy = \gamma(v,v);$$

esta integral representa el valor medio del variograma  $\gamma(x-y)$  cuando  $x$  e  $y$  describen separadamente  $v$ . Por esta razón, se suele escribir por el término  $\gamma(v,v)$ .

Supongamos ahora un soporte  $V$ , tal que  $v \subset V$ . Se interesa en el valor de la varianza de dispersión de la VR  $Z_v$  en el dominio  $V$ , anotada  $D^2(v/V)$ . De manera similar al caso anterior, se puede calcularla como la esperanza matemática

$$D^2(v/V) = E \left[ \frac{1}{V} \int_V \{ Z_v(x) - m_v \}^2 dx \right],$$

obteniéndose que

$$D^2(v/V) = \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V \gamma(x-y) dy - \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v \gamma(x-y) dy$$

En particular, se tiene:

$$D^2(v/V) = \gamma(V,V) - \gamma(v,v) = C(v,v) - C(V,V)$$

$$D^2(v/V) = D^2(O/V) - D^2(v/v)$$

Esta expresión muestra que existe una **relación de aditividad de las varianzas**. Si consideramos tres volúmenes diferentes  $v$ ,  $V$ ,  $G$ , sean por ejemplo:  $v$  bloque de selección,  $V$  panel,  $G$  yacimiento. Se tiene aplicando la relación anterior que

$$v \subset V \subset G$$

$$D^2(v/G) = D^2(v/V) + D^2(V/G)$$

### 1.6.2. Varianza de Extensión

Este concepto se refiere al error de estimación que se comete cuando se "extiende" el valor medio de una variable  $Z_v$ , observada en un dominio  $v$ , al dominio  $V$ ,  $Z_V$  (cf. figura 16):

$$E\{Z_v - Z_V\}^2 = \text{Var}\{Z_v - Z_V\} = \sigma_e^2(v, V)$$

En términos de variograma el valor teórico de la varianza de extensión viene dado por:

$$\sigma_e^2(v, V) = 2/vV \int_v dx \int_V \gamma(x-y) dy - 1/V^2 \int_V dx \int_V \gamma(x-y) dy - 1/v^2 \int_v dx \int_v \gamma(x-y) dy$$

En forma condensada queda,

$$\sigma_e^2(v, V) = 2\gamma(v, V) - \gamma(v, v) - \gamma(V, V)$$

Los términos  $\gamma(v, V)$ ,  $\gamma(v, v)$  y  $\gamma(V, V)$  representan los valores medios del variograma cuando los puntos  $x$  e  $y$  recorren por separado: el volumen  $v$  y  $V$ , el volumen  $v$  y el volumen  $V$ ; como se ha querido representar en la figura 16.

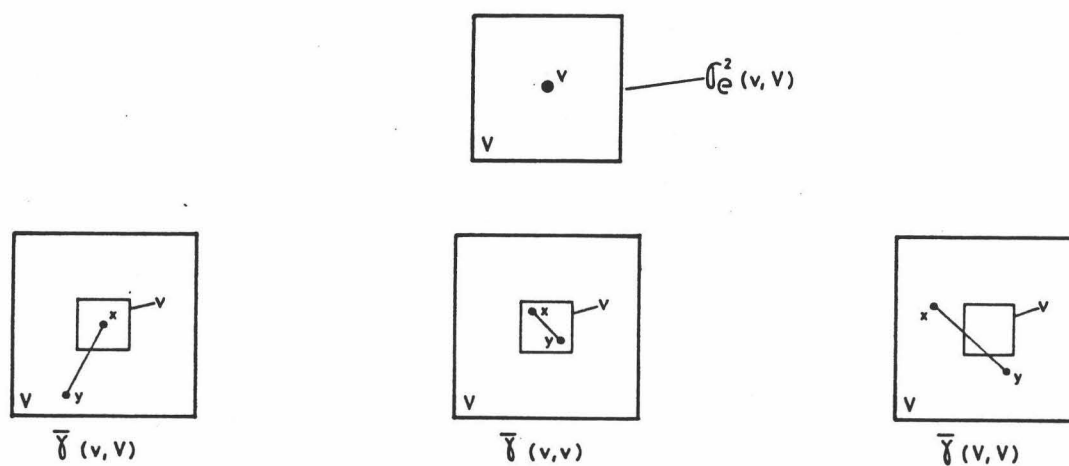


Figura 16.- Varianza de extensión

La expresión de los dos tipos de varianzas descritas son fundamentales y de gran utilidad en las aplicaciones geoestadísticas. La relación que liga a las dos clases de funciones es que  $D^2(v/V)$  representa el valor medio de la varianza de extensión  $\sigma_e^2(v,V)$ , cuando la muestra  $v$  ocupa todas las posiciones posibles en el interior de  $V$ .

$$D^2(v/V) = 1/V \int_V \sigma_e^2(v,V) dx$$

#### 1.7. CAMBIO DE SOPORTE: REGULARIZACION

Sea  $Z(x)$  una VR puntual. Se define su regularizada  $Z_v(x)$  por la función de ponderación  $p(u)$ , como la integral estocástica

$$Z_v(u) = \int_v Z(u) p(u) du$$

$v$  representa el soporte de regularización de  $Z(x)$  y  $p(u)$  una función de ponderación función de  $v$ ; tal que  $\int_v p(u) d(u) = 1$ .

Esta operación es de gran importancia en las aplicaciones mineras. En ellas se dispone, como datos de partida, frecuentemente, de las leyes de testigos de sondeos de longitudes diferentes; es preciso para su utilización geoestadística regularizar las leyes sobre un soporte constante  $l$ , que puede coincidir con la altura del bloque de explotación.

Como puede verse en la integral precedente la regularización es un producto de convolución. Cambiando  $u$  en  $-u$ , y llamando función traspuesta a  $\overset{v}{p}(u) = p(-u)$ , se tiene que

$$Z_v(x) = \int Z(x-u) \overset{v}{p}(u) du = \overset{v}{p} * Z$$

Un aspecto muy interesante de la operación de regularización es que conserva la media; dicho de otro modo que:

$$E\{Z_v(x)\} = E\{Z(x)\}$$

### 1.7.1. El variograma de una función regularizada

Se veía en el caso de una FA  $Z$  intrínseca estacionaria de orden 2 que el variograma puntual  $\gamma(h)$  se relaciona con la covarianza por la expresión

$$\gamma(h) = C(0) - C(h)$$

Igualmente, para la regularizada  $Z_v$  de  $Z$  se tiene que el variograma regularizado vale

$$\gamma_v(h) = C_v(0) - C_v(h)$$

Se puede definir  $\gamma_v(h)$  (o  $C_v(h)$ ) de igual forma que  $Z_v$ , esto es, como un producto de convolución, en cuyo caso la función ponderadora es el covariograma geométrico de la función  $p(u)$ :  $P(u) = \int p(u) p(u-t) du$ .

Se tiene que,

$$\gamma_v(h) = 1/v^2 \int_v \gamma(u+h) P(u) du - 1/v^2 \int_v \gamma(u) P(u) du$$

quedando finalmente la relación

$$\gamma_v(h) = \gamma(v, v_h) - \gamma(v, v)$$

$\gamma(v, v_h)$  representa el valor medio de  $\gamma(x-y)$  cuando  $x$  e  $y$  describen independientemente el volumen  $v$  y el volumen  $v$  trasladado el vector  $h$ ,  $v_h$ . En la práctica, para distancias  $h \gg v$  se obtiene que  $\gamma(v, v_h) \approx \gamma(h)$ , con lo que queda finalmente la expresión clásica:

$$\gamma_v(h) = \gamma(h) - \gamma(v, v) \quad (\text{ver figura 17})$$

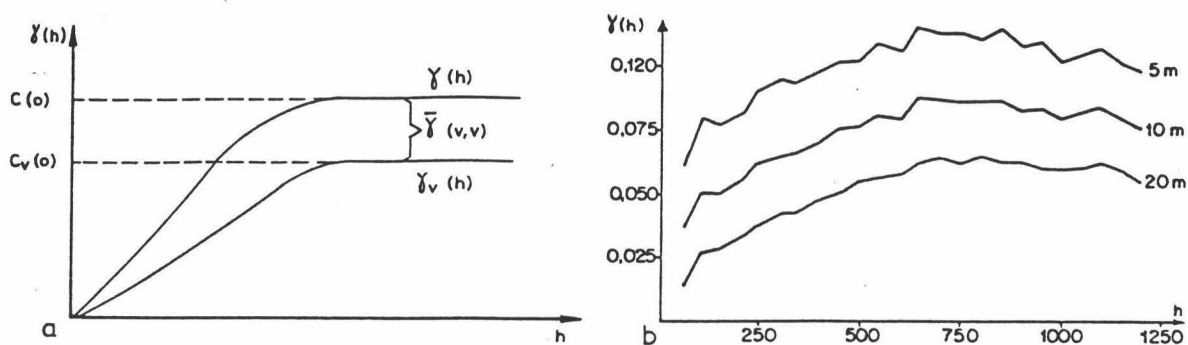


Figura 17.- a) Variograma puntual  $\gamma(h)$  y regularizado  $\gamma_v(h)$   
 b) Variogramas experimentales regularizados  $\gamma_l(h)$ ,  $l=5, 10$  y  $20$  m.

## 2. ESTIMACION GEOESTADISTICA: EL KRIGEAGE

### 2.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DEL KRIGEAGE

En términos geológicos y mineros el problema de **krigeage** consiste en encontrar la mejor estimación posible de una característica considerando la información disponible; por ejemplo, estimar la ley media  $Z_v$  de un panel  $v$  a partir de los datos de testigos de sondeos  $Z(x_\alpha)$  que se encuentran tanto en su interior como externamente (figura 18).

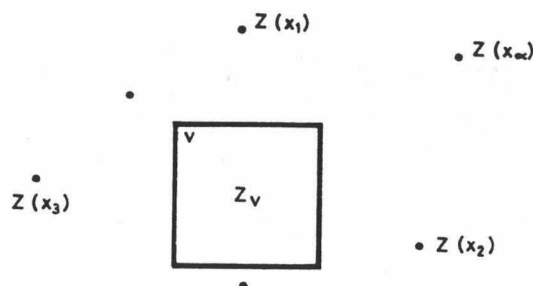


Figura 18.- Planteamiento del problema de krigage.

La información experimental disponible va a consistir fundamentalmente en:

- información experimental; compuesta por una serie de valores numéricos  $\{Z(x_\alpha), \alpha = 1 \text{ a } n\}$ , medidos en distintos puntos del dominio.



- información estructural; relativa a la FA Z e integrada por el variograma o la covarianza.

Analíticamente, el krigage es una ponderación que atribuye a cada punto  $Z(x_\alpha)$  un peso sobre el valor medio  $Z_v$ , o puntual  $Z(x_0)$ , estimado. Estos pesos se calculan de forma que minimizan la varianza de estimación resultante, y teniendo en cuenta las características geométricas del problema (MATHERON, 1970).

Al minimizar la varianza de estimación se asegura la mejor utilización de la información disponible; en consecuencia, se obtiene la mejor estimación posible de las cantidades citadas, lo que evitará errores sistemáticos en la estimación. El método atribuye pesos más débiles a los puntos más alejados del punto  $x_0$  o volumen a estimar, e inversamente. Esta regla general, tan intuitiva, puede sufrir variaciones cuando se dan fenómenos complejos en la regionalización.

## 2.2. ECUACIONES DE KRIGEAGE EN EL MODELO ESTACIONARIO

### 2.2.1. Caso de una FA estacionaria de esperanza nula o conocida

Sea la FA Z estacionaria de orden 2 de soporte puntual, de esperanza nula o conocida a priori y de covarianza  $C(h)$ .

Se busca estimar el valor medio de  $Z(x)$  en el soporte  $v$ , a partir del conjunto de datos  $\{Z(x_\alpha), \alpha = 1 \text{ a } n\}$ .

El estimador de krigage  $Z_K$  es una combinación lineal de los  $Z(x_\alpha)$ , sea:

$$Z_K = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha}) = \lambda^{\alpha} Z(x_{\alpha}) \quad (\lambda^{\alpha} \text{ anotación de Einstein de } \sum_{\alpha})$$

Los ponderadores  $\lambda_{\alpha}$  son calculados imponiendo una única condición, que la varianza de estimación sea mínima:

$$\begin{aligned} E\{Z_v - Z_K\}^2 &= E\{Z_v\}^2 - 2 E\{Z_v \cdot Z_K\} + E\{Z_K\}^2 \\ &= C(v,v) - 2 \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} C(\alpha,v) + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} C(\alpha,\beta) \end{aligned}$$

$$\text{con } C(v,v) = 1/v^2 \int_v dx \int_v C(x-y) dy$$

$$C(\alpha,v) = 1/v \int_v C(x_{\alpha}-y) dy$$

$$C(\alpha,\beta) = C(x_{\alpha}-x_{\beta})$$

Anulando las derivadas parciales en  $\lambda_{\alpha}$  de esta forma cuadrática queda:

$$\frac{\partial [E\{Z_v - Z_K\}^2]}{\partial \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}} = 0$$

$$\sum_{\beta} \lambda_{\beta} C(\alpha,\beta) = C(\alpha,v) \quad \alpha, \beta = 1 \text{ a } n$$

En el óptimo, se tiene la varianza de krigage o del error de estimación:

$$\sigma_K^2 = E\{Z_v - Z_K\}^2 = C(v,v) - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} C(\alpha,v)$$

De este sistema, de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas, se obtienen los ponderadores  $\lambda_{\alpha}$  necesarios en el cálculo de  $Z_K$ .

Si el krigage es puntual, se quiere estimar  $Z(x_0)$  por  $Z_K$ , el sistema correspondiente se simplifica, quedando:

$$\sum_{\beta} \lambda_{\beta} C(\alpha,\beta) = C(\alpha,x_0) \quad \text{con el error de estimación:}$$

$$\sigma_K^2 = C(x_0,x_0) - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} C(\alpha,x_0)$$

Si ahora se supone que  $Y(x)$  admite una covarianza  $C(h)$  y una esperanza constante  $E\{Y(x)\} = m$ , no nula, pero conocida. Todo se reduce al caso anterior razonando con la FA  $Z(x) = Y(x) - m$ . El estimador óptimo que se tiene vale pues:  $Y_K^* = m + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \{Z(x_{\alpha}) - m\}$ .

### 2.2.2. Caso de una FA estacionaria de esperanza desconocida

Supongamos la FA  $Z$  de esperanza constante pero desconocida,  $E\{Z(x)\} = m$ , y de covarianza centrada  $C(h)$ . Se quiere formar de nuevo el estimador de la cantidad

$$Z_v = 1/v \int_v Z(x) dx$$

por la combinación lineal de krigage  $Z_K = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha})$ .

Puesto que no se conoce el valor de  $m$  es necesario imponer la condición de no sesgo del estimador, esto es que  $E\{Z_v\} = E\{Z_K\}$ .

Esto se consigue por medio de la condición de universalidad,  $\sum \lambda_{\alpha} = 1$ :

$$E\{Z_K\} = E\left\{\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha})\right\} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} E\{Z(x_{\alpha})\} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \cdot m, \text{ sea } \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = 1$$

Si se minimiza la varianza de estimación, que se expresaba como se ha visto en forma cuadrática

$$E\{Z_v - Z_K\}^2 = C(v, v) - 2 \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} C(\alpha, v) + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} C(\alpha, \beta)$$

bajo la condición  $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = 1$ ; se obtiene aplicando el formalismo de Lagrange para anular cada una de las derivadas parciales

$$\frac{\partial [E\{Z_v - Z_K\}^2 + 2 \mu \{\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} - 1\}]}{\partial \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}, \mu} = 0$$

el sistema de krigage::

$$\sum_{\beta} \lambda_{\beta} C(\alpha, \beta) = C(\alpha, v) + \mu \quad \alpha, \beta = 1 \text{ a } n$$

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = 1$$

que es un sistema de  $n+1$  ecuaciones con  $n+1$  incógnitas, los  $n$  ponderadores  $\lambda_{\alpha}$  y el parámetro de Lagrange  $\mu$ .

La varianza de estimación o error de krigeage vale

$$\sigma_K^2 = C(v,v) - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} C(\alpha,v) + \mu$$

En el krigeage puntual con media desconocida, donde se desea estimar  $Z(x_0)$  por la combinación lineal  $Z_K = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha})$ , el sistema se escribe:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta} \lambda_{\beta} C(\alpha,\beta) &= C(\alpha,x_0) & \alpha,\beta &= 1 \text{ a } n \\ \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} &= 1 \end{aligned}$$

con el error de estimación:

$$\sigma_K^2 = C(x_0,x_0) - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} C(\alpha,v) + \mu$$

### 2.2.3. Caso de una FA intrínseca

Sea la FA  $Z$  estrictamente intrínseca, sin deriva, dotada de variograma  $\gamma(h)$  pero no de covarianza. Se quiere estimar  $Z_v$ , tal que:

$$Z_v = 1/v \int_v Z(x) dx$$

por la combinación lineal de krigeage  $Z_K = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha})$

Aplicando el mismo procedimiento visto anteriormente, la varianza de estimación se expresa en términos de variograma

$$E\{Z_v - Z_K\}^2 = 2 \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \gamma(\alpha,v) - \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \gamma(\alpha,\beta) - \gamma(v,v)$$

con,

$$\gamma(v,v) = 1/v^2 \int_v \int_v dx \int_v \gamma(x-y) dy$$

$$\gamma(\alpha,v) = 1/v \int_v \gamma(x-y) dy$$

$$\gamma(\alpha,\beta) = \gamma(x_{\alpha} - x_{\beta})$$

Minimizándola bajo la condición de no sesgo  $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = 1$ , queda el sistema de kriging siguiente:

$$\sum_{\beta} \lambda_{\beta} \gamma(\alpha, \beta) + \mu = \gamma(\alpha, v) \quad \alpha, \beta = 1 \text{ a } n$$

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = 1$$

con el error de estimación de kriging igual

$$\sigma_K^2 = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \gamma(\alpha, v) + \mu - \gamma(v, v)$$

En el caso de kriging puntual de  $Z(x_0)$  quedaría

$$\sum_{\beta} \lambda_{\beta} \gamma(\alpha, \beta) + \mu = \gamma(\alpha, x_0) \quad \alpha, \beta = 1 \text{ a } n$$

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = 1$$

con  $\sigma_K^2 = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \gamma(\alpha, x_0) + \mu$ ; puesto que  $\gamma(x_0, x_0) = 0$ .

#### 2.2.4. Caso de una FA no estacionaria

La presencia de derivas regionales, en la distribución espacial de la variable regionalizada, puede imposibilitar la aplicación del método de kriging tal como se ha presentado anteriormente. Así pues, se recordará que las hipótesis planteadas respecto a la FA  $Z$  eran la hipótesis de estacionariedad o bien la hipótesis intrínseca.

Dos aproximaciones geoestadísticas diferentes se han presentado en relación al problema de estimación de fenómenos no estacionarios. La primera en su aparición ha sido el modelo de Kriging Universal propuesto por MATHERON (1969 a, 1970), que parte de una descomposición de la variable  $Z(x)$  en dos términos, uno  $Y(x)$  que representaría una variable aleatoria estacionaria y otro, anotado  $m(x)$ , que representaría la deriva, sea:

$$Z(x) = Y(x) + m(x) \quad (Y(x) = \text{FA residual})$$

La deriva  $m(x)$  debe ser suficientemente regular para ser expresada como una función polinómica de orden  $K$  (orden de la deriva):

$$m(x) = \sum_{l=0}^K a_l f^l(x)$$

donde los  $f^l$  son monomios de grado igual o inferior a  $K$  ( $f^0=1$ ) y los  $a_l$  coeficientes desconocidos.

Se trata de estimar el valor  $Z_v$  por el estimador  $Z_{KU}$  de krigage universal, sea  $Z_{KU} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha})$ ; para ello hay que minimizar la varianza del error  $E\{Z(x_0) - Z_{KU}\}^2$ , en este caso bajo las condiciones de no sesgo:

$$\sum \lambda_{\alpha} f^l(x_{\alpha}) - f^l(x_0) = 0 \quad l = 0 \text{ a } K$$

Se constata que, para una deriva nula  $K = 0$ , se obtiene la condición ya señalada  $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} - 1 = 0$

El resto de cálculos que conducen al sistema de ecuaciones son similares a los ya desarrollados; se trata de minimizar la varianza de estimación bajo las  $K+1$  condiciones anteriores que expresan la condición de no sesgo del estimador  $Z_{KU}$ . El sistema que se obtiene está formado por  $n+K+1$  ecuaciones con otras tantas incógnitas, los  $n$  ponderadores  $\lambda_{\alpha}$  y los  $K+1$  parámetros de Lagrange, sea:

$$\sum_{\beta} \lambda_{\beta} \gamma(x_{\alpha}, x_{\beta}) + \sum_{l=0}^K \mu_l f^l(x_{\beta}) = \gamma(x_{\alpha}, x_0) \quad \alpha, \beta = 1 \text{ a } n$$

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} f^l(x_{\alpha}) = f^l(x_0) \quad - \text{ sistema de krigage universal -}$$

con la varianza de estimación puntual

$$\sigma_{KU}^2 = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \gamma(x_{\alpha}, x_0) + \sum_{l=0}^K \mu_l f^l(x_0)$$

Una serie de cuestiones pueden plantearse acerca de la estructura del modelo; por ejemplo, la descomposición de la función  $Z(x)$  en dos términos, necesarios por razones de cálculo, pero que puede no tener un significado físico definido. Así, en el fenómeno pueden presentarse derivas simples, lineales o cuadráticas ( $K = 1$  y  $2$ ), hasta derivas que

necesitarían para ser representadas un polinomio de alto grado. Como se observa, es difícil, a falta de criterios geológicos que lo acrediten, establecer un criterio suficientemente objetivo como para operar tal descomposición.

Otro problema que se presenta es el cálculo del variograma real  $\gamma(h)$  a introducir en el sistema. Conceptualmente, este debe corresponder al variograma de la F.A. residual  $Y(x)$ :

$$y(x_\alpha) = z(x_\alpha) - m^*(x_\alpha)$$

ello implica una estimación previa  $m^*(x_\alpha)$  de la deriva en cada uno de los puntos  $x_\alpha$ , lo que plantea un problema adicional. Además, se ha demostrado (CHILES, 1977) que este variograma residual es una estimación sesgada del verdadero variograma, lo que añade algunas complicaciones suplementarias al modelo.

Toda esta problemática, que hace dificultosa la inferencia estadística con el Krigeage Universal, ha conducido a MATHERON (1971 y 1973 a) a proponer una segunda aproximación, más general, al estudio de  $FA_S$  no estacionarias; el modelo recibe el nombre de Funciones Aleatorias Intrínsecas de orden K, FAI-K.

El modelo presenta cierta analogía con el de Series Temporales de BOX y JENKINS (1976). La idea de base de las FAI-K estriba en construir incrementos de orden creciente, hasta alcanzar un orden K para el cual dichos incrementos sean estacionarios; se trata, por tanto, de generalizar la hipótesis intrínseca al orden K de la deriva.

Para el orden  $K=0$ , FAI-0, se está en la hipótesis intrínseca s. str. por la que son supuestos estacionarios los incrementos de primer orden, lo que implica la existencia del variograma. Para un orden superior de K, se busca definir una FA intrínseca de incrementos estacionarios de orden K, filtrando una deriva lineal si  $K=1$  o una cuadrática si  $K=2$ . Una FA intrínseca definida sobre estos incrementos es llamada FAI-K.

En este modelo intrínseco generalizado, el krigeage se presenta de la forma siguiente:

Las condiciones de no sesgo se expresan por la relación

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} f^1(x_{\alpha}) - f^1(x_0) = 0 \quad l = 0 \text{ a } K$$

Estas condiciones hacen que el error de estimación  $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha}) - Z(x_0)$  sea una combinación lineal autorizada al orden  $K$ , que da derecho a hablar de varianza de estimación. La varianza correspondiente puede expresarse en términos de una nueva función covarianza  $K(h)$  de los incrementos de orden  $K$ , llamada **covarianza generalizada**.

MATHERON (1972 a) ha demostrado, en teorema, que si  $Z(x)$  es una FAI- $K$ , existe una función simétrica  $K(h)$  llamada covarianza generalizada de  $Z(x)$ , verificando que todas las combinaciones lineales autorizadas de  $Z$ ,  $Z(\lambda)$ , pueden expresarse en términos de  $K(h)$

$$\text{Var}\{Z(\lambda)\} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} K(\alpha, \beta)$$

La covarianza  $K(h)$  está definida a un polinomio par cercano de grado igual o inferior a  $2K$  ( $K(h) = \sum_{p=0}^K (-1)^{p+1} b_p |h|^{2p+1}$ ).

Esto tiene consecuencias interesantes ya que el error de estimación, al ser una combinación lineal autorizada, puede expresarse en función de  $K(h)$ , por lo que:

$$E\left\{\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha}) - Z(x_0)\right\}^2 = K(x_0, x_0) - 2 \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} K(\alpha, x_0) + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} K(\alpha, \beta)$$

La minimización bajo las condiciones de no sesgo indicadas conduce al sistema de kriging

$$\sum_{\beta} \lambda_{\beta} K(\alpha, \beta) = K(\alpha, x_0) + \sum_{l=0}^K \mu_l f^l(x_0) \quad \alpha, \beta = 1 \text{ a } n$$

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} f^l(x_{\alpha}) = f^l(x_0) \quad l = 0 \text{ a } K$$

se tiene la varianza de estimación correspondiente

$$E\{Z_K - Z(x_0)\}^2 = K(x_0, x_0) - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} K(\alpha, x_0) + \sum_{l=0}^K \mu_l f^l(x_0)$$



Para concluir con el desarrollo del kriging en el caso no estacionario, presentaré un caso práctico donde se han aplicado los dos métodos descritos de Kriging, Universal y Covarianza Generalizada, a la cartografía automática de datos de fracturación en un macizo carbonatado (cf. CHICOLMO, 1981 a). Los gráficos obtenidos que resumen los resultados se presentan en la figura 19. Como puede apreciarse, los resultados de uno y otro método son totalmente comparables, en ambos casos se ha filtrado una deriva lineal  $K = 1$ . La ventaja del kriging con covarianza generalizada es que el proceso de identificación de la deriva y de la función  $K(h)$  es completamente automatizable, a diferencia del Kriging Universal, por lo que constituye un método operativo muy interesante en este tipo de aplicaciones cartográficas, particularmente en estudios del petróleo.

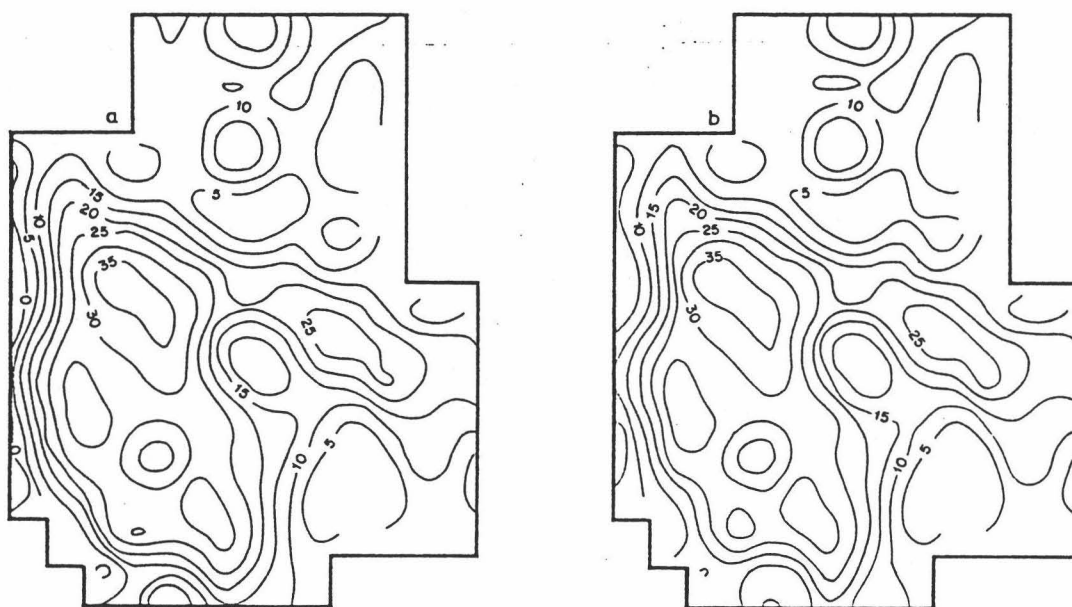


Figura 19.- Kriging no estacionario, deriva lineal, de datos de fracturación  
: a) Kriging Universal b) Covarianza Generalizada,  
 $K|h| = -59.3|h|$ .

### 2.3. ESCRITURA MATRICIAL Y PROPIEDADES DEL KRIGING

Todos los sistemas anteriores pueden expresarse en la forma matricial siguiente:  $[K] \cdot [\lambda] = [M]$ . La solución del sistema será igual a

$$[\lambda] = [K]^{-1} \cdot [M]$$

El error de estimación queda expresado de esta forma

$$\sigma_K^2 = C(v,v) - [\lambda]^t \cdot [M]$$

siendo:

- [K] matriz de covarianzas punto/punto,  $C(\alpha, \beta)$
- [M] matriz de covarianza punto/bloque,  $C(\alpha, v)$
- [ $\lambda$ ] matriz de ponderadores  $\lambda_\alpha$  y del parámetro  $\mu$  de Lagrange.

El sistema de krigage admite una solución única si y sólo si la matriz [K] es estrictamente definida positiva (determinante  $> 0$ ). Esta condición de existencia y de unicidad de solución implica que la varianza de estimación sea positiva o nula.

El krigage es un interpolador exacto; esto es, si el punto de estimación  $x_0$  se confunde con un punto experimental  $x$  entonces el estimador  $Z_K$  coincide con el valor real  $Z(x)$ , o lo que es igual el error de estimación es nulo: el krigage pasa por los puntos experimentales.

Esta propiedad tiene implicaciones prácticas muy interesantes como ya se verá en "cartografía automática" de variables espaciales.

El estimador de krigage y su varianza de estimación sólo dependen de la función estructural  $C(h)$  o  $\gamma(h)$  y de la disposición geométrica de los puntos  $x_\alpha$ ,  $\alpha = 1$  a  $n$  y del dominio a estimar, esto es de:

- . la geometría del dominio a estimar; término  $\gamma(v, v)$ ,  $C(v, v)$
- . la geometría del conjunto estimador; término  $\gamma(\alpha, \beta)$ ,  $C(\alpha, \beta)$
- . la estructura  $\gamma(h)$  o  $C(h)$
- . la geometría entre dominio estimado y el conjunto estimador:  
 $\gamma(\alpha, v)$ ,  $C(\alpha, v)$

Como se habrá observado, el error de estimación  $\sigma_K^2$  no depende de los valores experimentales  $Z(x_\alpha)$ , aspecto interesante de aplicación en problemas de "optimización de mallas de muestreo".

#### 2.4. RELACION DE ALISADO O SUAVIZADO

El estimador de krigage, como cualquier otro estimador, alisa la realidad. La distribución de valores krigeados  $Z_K$  difiere de la distribución de los valores reales  $Z(x_\alpha)$  (cf. figura 20), aunque se cumple

que ambas distribuciones están centradas en su media:  $E\{Z_K\} = E\{Z\}$

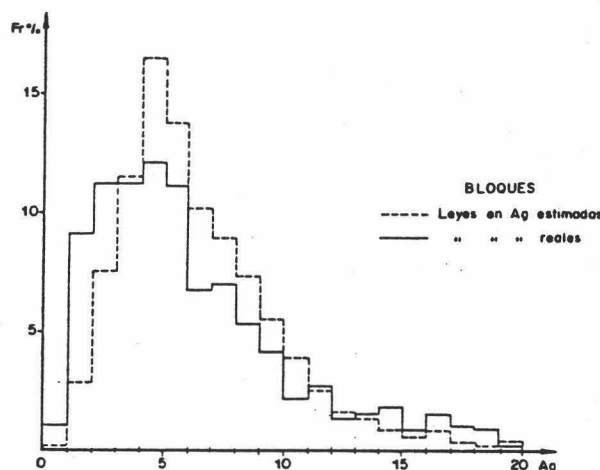


Figura 20.- Histogramas de leyes de bloques de un yacimiento de Plata: dispersión de las leyes reales  $D^2(Z_V/G) = 27.50$ ; dispersión de las leyes estimadas  $D^2(Z_K^*/G) = 20.7$ .

Se demuestra entonces la siguiente relación, conocida como relación de alisado:

$$D^2(v/G) \approx D^2(Z_K/G) + \sigma_K^2$$

$$D^2(v/G) \geq D^2(Z_K/G)$$

$D^2(v/G)$ , varianza de dispersión de las leyes verdaderas  $Z_V$  en el yacimiento  
 $D^2(Z_K/G)$ , varianza de dispersión de las leyes estimadas  $Z_K$  en el yacimiento  
 $\sigma_K^2 = E\{Z_V - Z_K\}^2$ , varianza de krigeage.

Se ve así que la dispersión de las leyes reales es mayor que la de las leyes estimadas, efecto de suavizado que será tanto más pronunciado cuanto mayor sea el error de estimación  $\sigma_K^2$ : lo que es igual, cuanto peor sea la estimación.

### 3. EL MODELO GEOESTADISTICO OPERATIVO

#### 3.1. NATURALEZA Y CARACTERISTICAS DEL MODELO GEOESTADISTICO

La Geoestadística en general como cualquier otra disciplina científica de carácter aplicado, persigue un doble objetivo al que se ha hecho

referencia en el comienzo de este capítulo: por una parte, se busca extraer de la información disponible, de naturaleza numérica o cualitativa, los rasgos y características principales del fenómeno estudiado y a partir de ellos elaborar un **modelo conceptual** tan claro como posible. Por otra parte, se busca **resolver** eficazmente los **problemas** de carácter práctico, concernientes a la **estimación o simulación del fenómeno**, a partir de la información y del modelo anteriores. Evidentemente, es este el objetivo que reviste mayor interés práctico; así, para el minero no importa la naturaleza del modelo aplicado ni el "manejo" que el geoestadístico hace para su utilización, sólo tiene importancia la bondad de los resultados y que estos respondan adecuadamente a sus problemas. Para el geoestadístico, en cambio, reviste tanto interés la elección del modelo como los resultados de él obtenidos, ya que sabe que el primer objetivo conserva una importancia decisiva como vía de acceso a la solución de los problemas; porque solamente en la medida que se disponga de un modelo matemático bien adaptado a la "realidad", se podrán elaborar métodos de estimación o simulación eficaces.

Pues bien, una cuestión importante que se plantea en este momento es elegir la **naturaleza del modelo conceptual** en vistas a su operatividad. Se sabe, como he mostrado anteriormente, que la Geoestadística tiene en su esencia un carácter probabilístico, de hecho el fenómeno es interpretado como una realización particular de una función aleatoria. En otras palabras, la gran cuestión que G. Matheron se ha planteado al respecto es: ¿por qué elegir un modelo probabilista y no determinista?; ¿cuál es el significado epistemológico de esta elección?. Pues bien, con base en la magnífica obra de este autor "Estimer et Choisir" (MATHERON, 1978 a) y en el trabajo presentado por él en el I Congreso de Geoestadística de Roma (MATHERON, 1976 a), trataré de presentar muy brevemente los argumentos de respuesta que aporta a la cuestión suscitada.

Se trata de una elección metodológica razonada en base al pragmatismo. Sólo los modelos probabilísticos pueden dar una respuesta satisfactoria a los problemas de previsión precisa, considerando a la vez los aspectos de variabilidad del fenómeno natural; las fluctuaciones locales de éste sugieren irremediamente una interpretación probabilística del mismo, por lo que parece lógico, por tanto, elegir un modelo de esta naturaleza. En definitiva, se trata de una **decisión constitutiva** y no de una hipótesis susceptible

de ser o no aceptada por la experiencia. Como dice el autor, no se puede imaginar ninguna experiencia cuyos resultados permitieran afirmar que tal o cual yacimiento no es una realización de una función aleatoria. En contrapartida, esta decisión de elección del modelo probabilístico no aporta en sí misma ninguna información positiva.

Es posteriormente, trabajando con una interpretación probabilística del fenómeno, que se podrán plantear hipótesis que conlleven información positiva y que puedan ser sancionadas positivamente por un control experimental. Por consiguiente, la interpretación probabilística es el cuadro conceptual en el que se trabaja y que permite plantear en términos operativos los problemas anteriores, que no se sabrían plantear ni resolver desde la óptica determinista.

La base de la interpretación probabilística, y por tanto del modelo geoestadístico operativo, son los modelos de Funciones Aleatorias, que son, como se ha visto, el apoyo de la Teoría de las Variables Regionalizadas (en abreviatura TVR).

Entre todos los modelos posibles de  $FA_s$  será necesario saber elegir aquél que da una mejor representación del fenómeno y que verifique, por razones prácticas, las condiciones importantes siguientes (ver figura 21).

#### *A) La inferencia estadística*

Ya se ha manifestado que la inferencia estadística es el principal problema que se plantea en la elaboración de un modelo probabilístico; se trata de la estimación numérica de los momentos del modelo de FA Z elegido, necesario para la solución de los problemas planteados. Esta inferencia es posible realizarla en el marco de la TVR, mediando ciertas hipótesis restrictivas, a partir de una única realización de la FA elegida.

#### *B) Modelo operativo*

El modelo debe ser operativo; esto quiere decir que debe resolver los problemas planteados de previsión o simulación, desde el momento que la inferencia estadística ha sido posible. Los parámetros en él

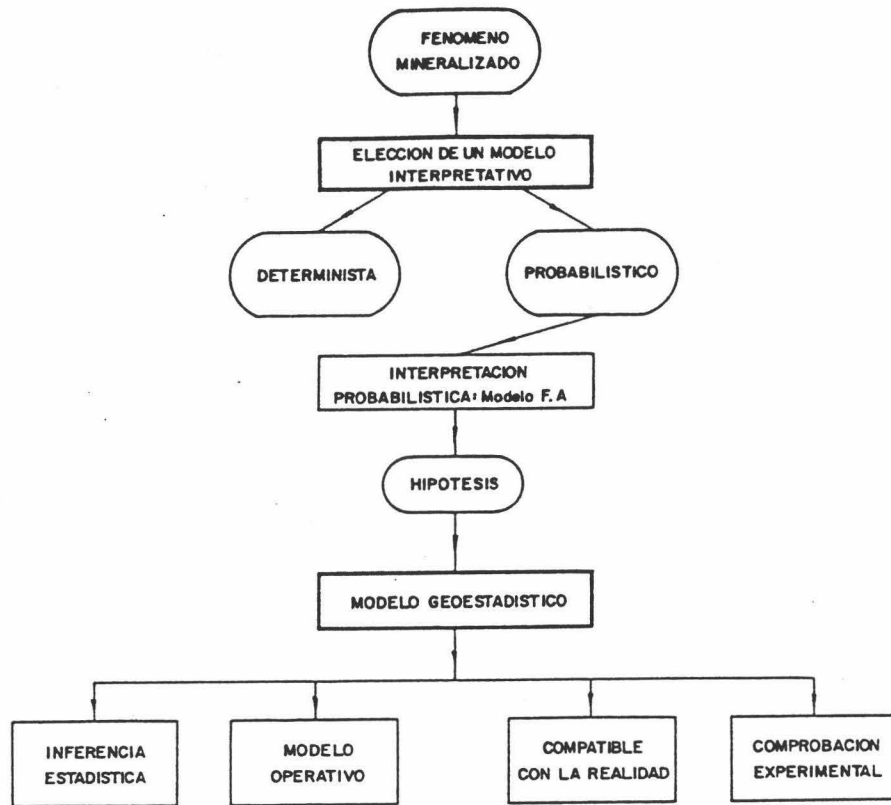


Figura 21.- Características del Modelo Geostatístico (cf. MATHERON, 1976 a).

calculados deben contener toda la información necesaria para la solución de dichos problemas.

### C) Compatibilidad

El modelo propuesto debe ser compatible con la realidad del fenómeno observado. En este sentido, pueden hacerse tests estadísticos para la comprobación de la hipótesis de estacionaridad de la FA Z; el modelo geostatístico permite además trabajar en condiciones menos restrictivas, imponiendo la condición de que la FA Z sea localmente estacionaria "cuasi-estacionaridad". Igualmente, tiene también en cuenta de la presencia de derivas o tendencias regionales del fenómeno.

### D) Comprobación experimental

Los resultados producidos por el modelo deben ser comprobados estadísticamente por la experiencia. Este aspecto raramente se cumple ya que los esfuerzos se dirigen principalmente, por ejemplo, a la estimación

de las leyes de los bloques de explotación a partir de la información disponible en ese momento, no aplicándose ulteriormente control alguno sobre las leyes verdaderas de dichos bloques, que pudiese ser utilizado para la verificación experimental del modelo geoestadístico. En los casos reales en que así se ha hecho, se ha comprobado con gran satisfacción la adaptación de las previsiones geoestadísticas a las leyes reales del yacimiento. Los resultados comparativos son significativamente mejores que los de los otros métodos.

Un magnífico ejemplo tipo de esta comprobación experimental del modelo geoestadístico, se presenta en GUIBAL y REMACRE (1984) y REMACRE (1984) sobre un yacimiento de Cu de tipo "porphyry copper".

Por último, para concluir con esta breve discusión planteada sobre la naturaleza y características del modelo geoestadístico operativo, no me queda más que aconsejar al lector interesado en el tema la lectura reflexiva de la obra "Estimer et Choisir" de MATHERON (1978 a), modelo de ensayo científico en la que se presenta de forma objetiva, con todo lujo de detalles, una defensa perfectamente argumentada de la práctica de los modelos probabilísticos geoestadísticos.

### 3.2. ETAPAS DEL ESTUDIO GEOESTADISTICO

El cumplimiento de las condiciones anteriores dan al modelo geoestadístico un carácter operativo. En la práctica, lo que interesa es conocer las etapas básicas que conduzcan a la elaboración de un estudio geoestadístico; estas etapas varían según el tipo particular del problema a resolver, aunque esquemáticamente pueden distinguirse las siguientes, tal que así se han representado en el organigrama de la figura 22:

1. El análisis estructural o variográfico es el punto de partida de un estudio geoestadístico. Es una etapa fundamental en la que son calculados los variogramas experimentales, en distintas direcciones del espacio, y ajustados a un modelo global de variograma válido para todo el dominio. Dicho modelo debe ser compatible con los conocimientos geológicos del fenómeno. En el siguiente apartado se abordará con más detalle esta relación estrecha entre fenómeno geológico y análisis estructural.

- La estimación de variables es uno de los objetivos básicos de la Geoestadística; a partir de ella se podrán evaluar, por ejemplo, los recursos y las reservas de un yacimiento, tanto a nivel global como local. Existen numerosos métodos de estimación geoestadística, cada uno de ellos adaptado a un problema particular de estimación; todos ellos reciben el nombre genérico de "krigeage", pudiéndose mencionar por su frecuencia de utilización el Krigeage Ordinario (KO) para el cálculo de los recursos locales y el Krigeage Disyuntivo (KD) para el cálculo de las reservas recuperables.
- La simulación, condicional o no, de variables espaciales es el segundo gran objetivo de la geoestadística. Conceptualmente proviene de la simulación de una realización de la FA Z con variograma impuesto; su campo de aplicación es extensivo a aquellos estudios relacionados con las fluctuaciones locales de la variable simulada.

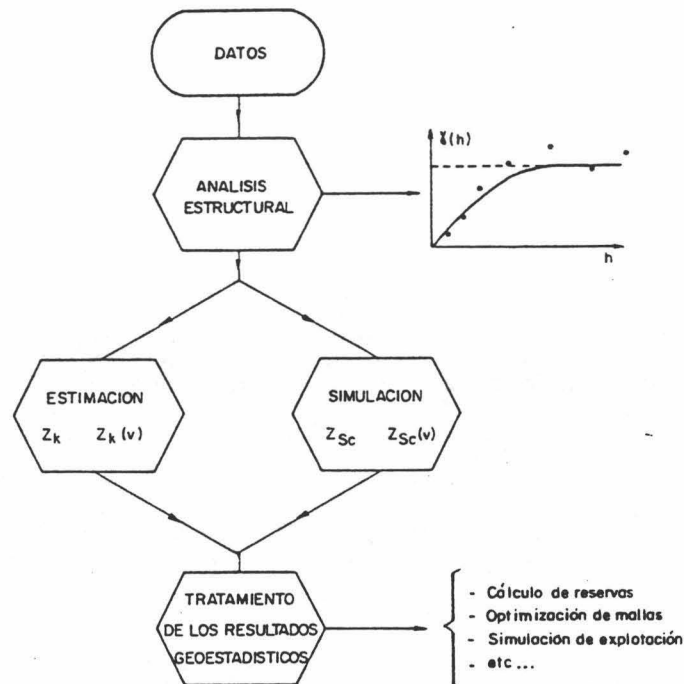


Figura 22.- Etapas básicas de un estudio geoestadístico.

- La última etapa del estudio geoestadístico consiste en el tratamiento adecuado de los resultados geoestadísticos, obtenidos de la estimación y/o simulación de las variables, sobre soporte puntual o de bloque v. Por ejemplo, se podrán estudiar por aplicación del Krigeage Disyuntivo las curvas de recuperación de un yacimiento, tonelaje/ley; se cono-



cerán los resultados económicos de la práctica de tal tipo de selección; se podrán comparar dos métodos de explotación diferentes, en función de las homogeneizaciones de las leyes producidas, etc.

### 3.2.1. El fenómeno geológico y el variograma: el análisis estructural

En gran medida la primera parte de este capítulo giraba en torno a la noción de variograma. Esta función intrínseca es el útil más importante de que dispone el geoestadístico para el análisis del fenómeno mineralizado, dándose una relación estrecha entre las causas geológicas que distribuyen las leyes de un mineral en un yacimiento y el tipo, y características, del variograma ajustado. Así, se recordará que el variograma aporta información sobre la continuidad de la variable, sobre la presencia de anisotropías geométricas o zonales, sobre la existencia de derivas, etc; características que están fuertemente relacionadas con los condicionantes genéticos y estructurales de la mineralización, como puede ser por ejemplo un patrón geométrico de fracturas que ha favorecido la propagación de los fluidos mineralizantes, etc. De aquí, la importancia que tiene el análisis estructural o variográfico en un estudio geoestadístico; los resultados de él obtenidos deben de estar de acuerdo con la interpretación geológica del fenómeno.

Para completar un estudio variográfico se precisa completar al menos tres etapas diferentes relacionadas entre sí: el cálculo del variograma experimental, el ajuste del mismo a un modelo teórico y la interpretación geológica del variograma. A lo largo del mismo debe existir una comunicación de ideas de forma continuada entre el geólogo y el geoestadístico, de forma que sean compatibles las características del variograma ajustado con la interpretación geológica del yacimiento.

En lo referente al cálculo experimental deben considerarse como factores condicionantes, la distribución estadística de las leyes en el yacimiento, la existencia de valores aberrantes o anómalos, la presencia de zonas no homogéneas, posibles zonaciones en la distribución de las leyes, etc. Esta etapa de cálculo del variograma, dada su importancia, ha merecido especial interés por parte de diversos autores. En este sentido, se han propuesto múltiples estudios enfocados al análisis de la robustez del estimador de esta función, a partir de distintos métodos

de cálculo; como ejemplos, caben citar los trabajos de ARMSTRONG y DELFINER (1980), CHAUVET (1982), ALFARO (1984), CRESSIE y HAWKINS (1980) y OMRE (1984), entre otros.

La modelización del variograma se hace, en general, a través de un proceso gráfico interactivo. Existe una gama amplia de modelos teóricos que pueden combinarse entre sí para ajustar mejor un variograma experimental; cada modelo puede interpretarse en términos geológicos, así la interpretación geoestadística puede sugerir una interpretación geológica y viceversa. En muchos casos una apreciación de conjunto de ambos significados, geológico y geoestadístico, será necesaria a la hora de modelizar tal o cual rasgo de un variograma.

En definitiva, modelización geoestadística e interpretación geológica son dos partes integrantes del análisis estructural que no pueden dissociarse, y que por tanto deben ser consideradas conjuntamente.

Se pueden presentar muchos ejemplos que ilustrarían en detalle esta relación entre variograma y fenómeno geológico; prácticamente cada estudio geoestadístico sobre yacimiento sería un ejemplo válido para ello. Al respecto merece ser citado el trabajo realizado por RENDU y READDY (1982); estos autores muestran de forma sintetizada a través de yacimientos de naturaleza diferente la relación intrínseca entre el variograma ajustado y la geología del depósito.

Continúo con un ejemplo de aplicación que servirá de ilustración a lo expuesto anteriormente. Se trata de un yacimiento sedimentario multicapa de carbón, donde las variables estudiadas han sido el espesor de carbón acumulado en cada sondeo y el estéril de recubrimiento. El análisis estructural se ha hecho a partir de 237 sondeos, para lo cual se han calculado los variogramas direccionales que han sido representados en la figura 23 a.

La interpretación de estos variogramas muestra la presencia de una deriva neta en la dirección E-W, coincidente con una dirección en la cual se da un crecimiento continuado de los espesores de las capas de carbón. Las otras direcciones, en particular la N 45 W, presentan una mayor estacionariedad de la variable, debido a que cortan más o menos de forma paralela a las líneas isopacas, que pueden verse en la figura 23 b.

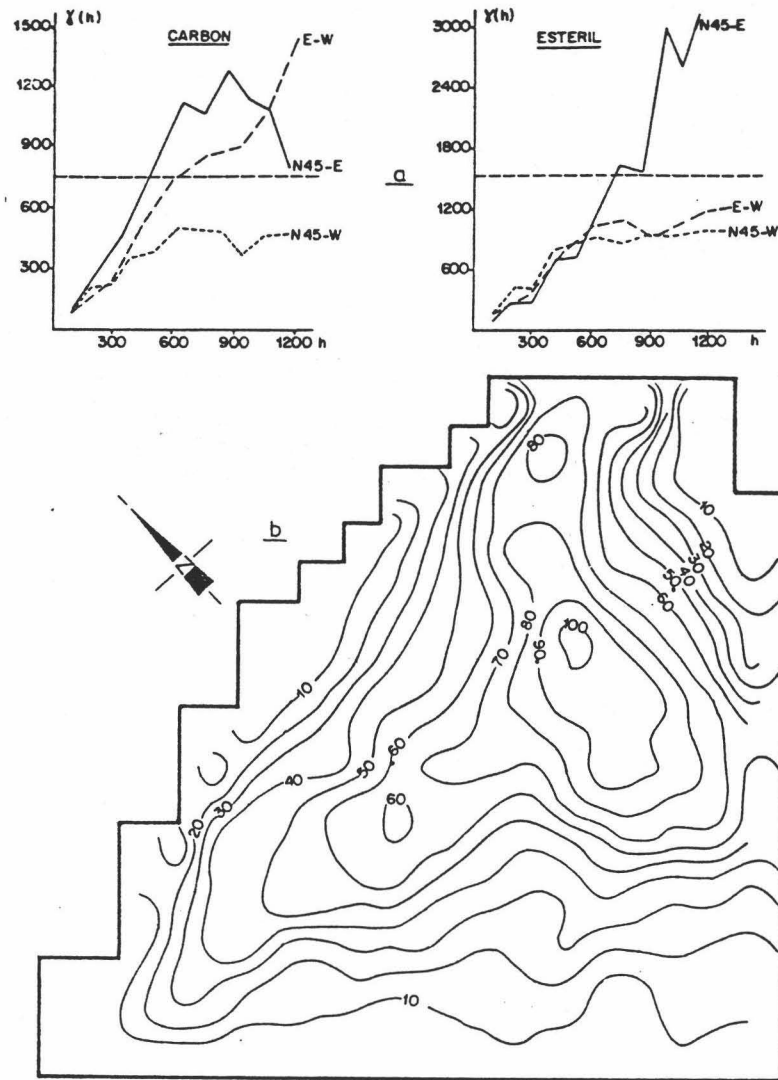


Figura 23.- Análisis estructural e interpretación geológica:  
 a) variogramas experimentales de los espesores de carbón y estéril.  
 b) Cartografía automática de líneas isopacas.

La interpretación geológica y el análisis estructural se han complementado mutuamente. El geólogo, a raíz de estos resultados y de la información geológica, ha sugerido como hipótesis genética que los aportes de material orgánico provenían en su mayor parte del sector S, mientras que los aportes de estéril lo hacían de la zona N (véase variograma del estéril de la figura 23 b), de aquí que la dirección E-W de confrontación de ambos sentidos presenta esta deriva en los espesores del carbón. El análisis estructural ha permitido elaborar la cartografía automática del plano de isopacas presentado.

## C A P I T U L O   I I I

### LA GEOESTADISTICA A NIVEL DEL DESARROLLO DE UN PROYECTO MINERO

#### 1. ASPECTOS PRELIMINARES

Las importantes inversiones puestas en juego en un proyecto minero y las constantes fluctuaciones experimentadas por los precios de mercado, han obligado a los grupos mineros a elegir nuevos métodos de cálculo mejor adaptados a sus problemas, como pueden ser la estimación de recursos y de reservas, los problemas de planificación, etc. Así, no es de extrañar que, considerado el importe total de los gastos implicados, los financieros pidan estimaciones cada vez más precisas concernientes a la cantidad y calidad de las reservas, antes de conceder sus préstamos. Los métodos geoestadísticos, que son objeto de este trabajo, han forjado a lo largo de estos últimos años, no sin esfuerzo, un útil práctico que intuitiva y racionalmente ha permitido pasar de las hipótesis geológicas y de alguna información experimental a la cuantificación del mineral beneficiable.

Previamente, ha sido preciso crear a lo largo de estos años un lenguaje común, un estado de espíritu, entre el geoestadístico y el geólogo o el minero, entre el teórico y el práctico.

A pesar del asentamiento actual de que gozan estos métodos, por parte de la industria minera, ha existido en los inicios una actitud de rechazo hacia los métodos geoestadísticos. Al respecto DAMAY (1976) ha sugerido como argumento histórico de este rechazo la existencia de un diálogo de "sordos" infructuoso entre estos dos personajes: el primero se ha escudado, quizás en demasía, en el rigor teórico de sus métodos; probablemente, también estaba decepcionado por no haberse bien valorado sus posibilidades. El segundo ha concluido, por razones de índole diversa difíciles de analizar, quizás técnicas o por propia ignorancia, en la inutilidad de estos métodos; no ha sabido aprovecharse de las posibilidades ofrecidas y ha infravalorado o mal medido su potencial.

Afortunadamente, este panorama ha cambiado a raíz de la comprobación experimental de la bondad de los resultados obtenidos sobre multitud de casos reales, para bien de las empresas y de los propios métodos. Se ha tomado conciencia en esta última década de su importancia y su aplicabilidad en problemas de naturaleza muy diversa, aparecidos durante la elaboración del estudio de proyecto o en la conducción de la explotación.

En buena parte, esta aceptación se ha visto favorecida por el incremento de publicaciones hechas sobre el tema, por la celebración de dos congresos internacionales, llevados a cabo respectivamente en Roma (1975) y Lake Tahoe (1983) y por la impartición reciente de esta nueva ciencia en universidades y escuelas técnicas.

## 2. APLICACIONES EN EL DESARROLLO DEL PROYECTO

La Geoestadística proporciona un conjunto de métodos y de técnicas que correctamente utilizados pueden proporcionar una mejora sensible de los resultados del proyecto, sea en la etapa de preexplotación participando plenamente en el estudio de viabilidad técnico-económica, como más tarde, si se decide explotar, para el seguimiento de la explotación día a día.

### **Fase de preexplotación: estudio de viabilidad**

En esta fase las primeras aplicaciones se dan ya en los estudios de exploración y de localización de la mineralización, en el tratamiento de los datos de prospección minera y particularmente en cartografía automática de variables, aprovechando la característica del método de krigeage de ser un interpolador exacto.

A nivel de los estudios de reconocimiento, los resultados del análisis estructural pueden ser de gran interés para la optimización de mallas, en sus distintos estadios. En este tipo de estudios la Geoestadística es completamente operacional, como así lo atestiguan los numerosos ejemplos realizados.

En lo que respecta al cálculo de los recursos in situ y de las reservas recuperables, la técnica del krigeage en sus distintos modalidades aporta la respuesta eficaz a la estimación local y global de estas cantidades.

Después de la estimación de las reservas, el problema que se plantea es analizar las condiciones técnicas y geométricas que condicionan la explotabilidad de las mismas. Se trata de un problema de optimización de corta, en el cual se busca el diseño que maximice el beneficio bajo las restricciones que de este tipo son impuestas en la explotación.

El método de parametrización técnica de reservas ha dado una respuesta satisfactoria al problema de diseño de la explotación final; para ello considera, en el algoritmo, los principales factores técnicos y también geométricos que inciden en la explotación, como son la altura del banco de explotación, el tamaño del bloque, leyes de corte, etc. Sobre la base de las leyes medias estimadas por krigeage o de funciones de recuperación estimadas por Krigeage Disyuntivo, el método contribuye al cálculo de las curvas tonelaje/ley del yacimiento.

### **Fase de explotación: seguimiento día a día**

El objetivo básico de las aplicaciones geoestadísticas en la etapa de preexplotación es proporcionar la información necesaria para un

mejor desarrollo del estudio general de viabilidad del proyecto, que finalizará con la decisión última de explotar o no el yacimiento.

En caso afirmativo, en el cual se pasará a explotación, el gran objetivo planteado por el minero es llevar un control de la mina, un seguimiento de la misma lo más detallado posible en el tiempo; de aquí que se desarrollen actividades de planificación minera encaminadas a alcanzar un óptimo económico en la explotación, a corto, medio y largo plazo, lo que plantea problemas relacionados con la calidad del mineral.

El desarrollo del método de simulación condicional ha posibilitado la construcción de un modelo numérico de yacimiento, que refleja idénticas características de variabilidad de leyes que el verdadero depósito, pudiendo ser aplicado, por ejemplo, en estudios de comparación de distintos métodos de explotación; en la reconstrucción de planes de reconocimiento progresivo por fases; en estudios de mezclas de mineral de calidades diferentes; en estudios de homogeneización, considerada la dispersión de las leyes en el momento de la explotación y la tecnología utilizada en la mina; para simular distintas mallas de selección de mineral, etc. En definitiva, en todos aquellos estudios relacionados con los procesos de producción de mineral que se aplican o aplicarán en la realidad minera.

### 3. GEOESTADISTICA Y DECISIONES MINERAS

Antes de pasar al estudio de detalle de estas aplicaciones, es conveniente señalar algunos aspectos interesantes referentes al problema de toma de decisiones durante las etapas de elaboración del proyecto.

En gran medida un proyecto minero es el resultado de un encadenamiento de decisiones, más o menos complejas, que visan alcanzar un óptimo técnico y económico en la explotación. Estas decisiones se suelen tomar sobre la base de estimaciones del fenómeno real estudiado; así, por ejemplo, la evaluación de reservas produce una estimación de las leyes del mineral en el yacimiento, el economista minero la utilizará para el análisis de la rentabilidad económica del proyecto, en función de las condiciones de mercado. Hay por consiguiente una interacción importante en la práctica entre los procesos de estimación y la toma de decisiones.

BOUCHIND'HOMME et al. (1983) han estudiado con cierto detalle el problema de relación entre estimación y decisión; consideran que el problema de fondo se plantea a nivel de la elección de los métodos de cálculo adecuados a la toma de decisiones, especificando que no sólo es importante adaptar los métodos al objetivo final buscado sino también es importante considerar el grado de incertidumbre que afectan a los datos de base. Para ellos, las diferentes técnicas geoestadísticas están perfectamente adaptadas al estudio de este tipo de problemas, basta con recordar que el estimador de krigeage no tiene sesgo y que tiene un error de estimación mínimo.

Dos conclusiones fundamentales deben tenerse en cuenta en los problemas de estimación/decisión:

- La toma de decisiones, en base a criterios objetivos, sobre el fenómeno real dará resultados "diferentes" de los que se hubiesen obtenido aplicando dichos criterios sobre la estimación del fenómeno; estas diferencias serán mayores o menores según las características del estimador utilizado. Este fenómeno es bien conocido por el minero quien sabe, por ejemplo, que los beneficios previstos de la selección en mina son menores que los beneficios realizados; los primeros dependen del criterio de selección aplicado a las leyes estimadas de los bloques, mientras que el segundo se produce por aplicación de dicho criterio sobre las leyes reales. Evidentemente, si se hubiesen conocido las leyes reales de los bloques en el momento de la explotación se podría haber alcanzado un "beneficio máximo", ilusorio de obtener en la práctica.

De todo este razonamiento se deduce que se debe ser precavido a la hora de decidir sobre informaciones estimadas; de nada nos serviría, por ejemplo, llevar a cabo una planificación muy fina con leyes estimadas con un error del 100 %.

- El alisado o suavizado debido al error de estimación es el tributo pagado al trabajar con estimadores de la realidad; este error puede ser interpretado de maneras diferentes: probabilísticamente, cuantifica el desconocimiento que se tiene de la realidad, en base al modelo conceptual utilizado. Desde la óptica de la selección minera limita notoriamente las posibilidades discriminatorias de leyes de bloques,



introduce en el modo operatorio una mayor prudencia en los criterios de selección. Por último, económicamente, afecta como se ha indicado a los beneficios previstos de la explotación disminuyéndolos respecto al valor óptimo.

Utilizando adecuadamente las distintas técnicas disponibles, el geoestadístico puede ayudar a minimizar las pérdidas financieras, ligadas a la toma de decisiones sobre estimadores de la realidad. Las razones son obvias, pues estos métodos tienen en cuenta los factores técnicos principales que pueden afectar al cálculo del óptimo pretendido: el tamaño del soporte de estimación "Efecto de soporte"; el nivel de información disponible para la estimación "Efecto de información"; y las restricciones geométricas de la explotación "Efecto de condicionantes geométricos". Además de que deben considerarse las buenas propiedades del estimador de krigeage, insesgado y con error de estimación mínimo.

P A R T E   P R I M E R A

P R E E X P L O T A C I O N

E S T U D I O   D E   V I A B I L I D A D   T E C N I C A   Y   E C O N O M I C A



## C A P I T U L O I V

## ESTUDIO DE VIABILIDAD TECNICA Y ECONOMICA

## 1. INTRODUCCION

En un proyecto minero los trabajos llevados a cabo durante la etapa de preexplotación tienen como objetivo primordial el estudio de viabilidad técnica y económica de la futura explotación. En él merecen ser indicados dos aspectos fundamentales; el primero se refiere al análisis y selección de los medios técnicos y económicos que pueden disponerse para caracterizar y valorar, en todas las connotaciones que estos términos implican, los recursos minerales investigados. El otro aspecto tiene también un carácter eminentemente económico, se refiere a la previsión del balance económico global de la explotación; en efecto, ya desde esta primera etapa del proyecto hay que prever, al menos globalmente, los resultados económicos que derivarán de la aplicación de los procesos mineros sobre el mineral in situ para la recuperación del metal, como son la selección, la explotación, el tratamiento metalúrgico, etc.

La caracterización y valoración de los recursos minerales, así como la previsión del balance económico, necesitan del desarrollo de útiles metodológicos pertinentes, de los cuales se espera una estimación sin sesgo de los recursos y reservas recuperables, que dependen de las restric-

ciones técnicas previstas para la explotación (diseño de la corta, método de explotación, etc). También se espera de ellos una indicación del nivel de información necesario para llevar a cabo una buena planificación de la futura explotación, en base a estudios de fluctuaciones de la calidad del mineral. Sin dificultad, se comprenderá que dichos útiles tienen su apoyo básico en los métodos clásicos de investigación y reconocimiento geológico-minero y en los métodos y técnicas de ingeniería de minas. Aquí se propone añadir un tercer componente a los dos anteriores: los métodos geoestadísticos, que son objeto de esta investigación y que, por razones que son expuestas con detalle más tarde, se encuentran estrechamente ligados a los imperativos técnicos de la explotación.

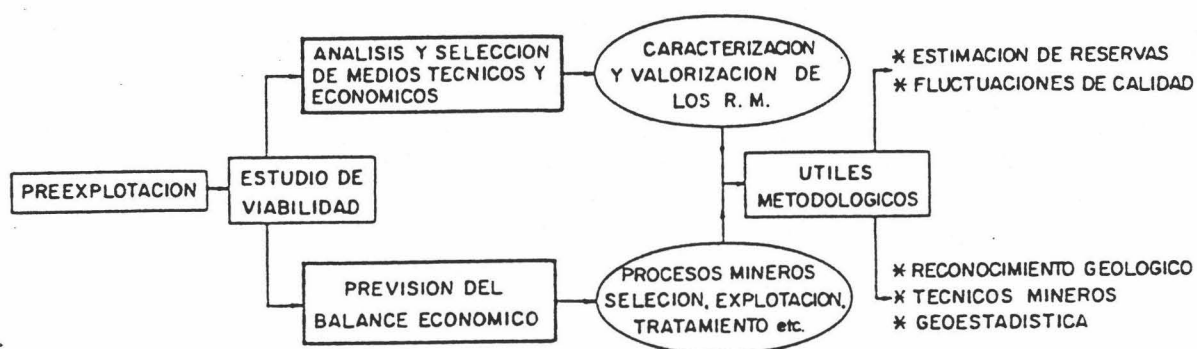
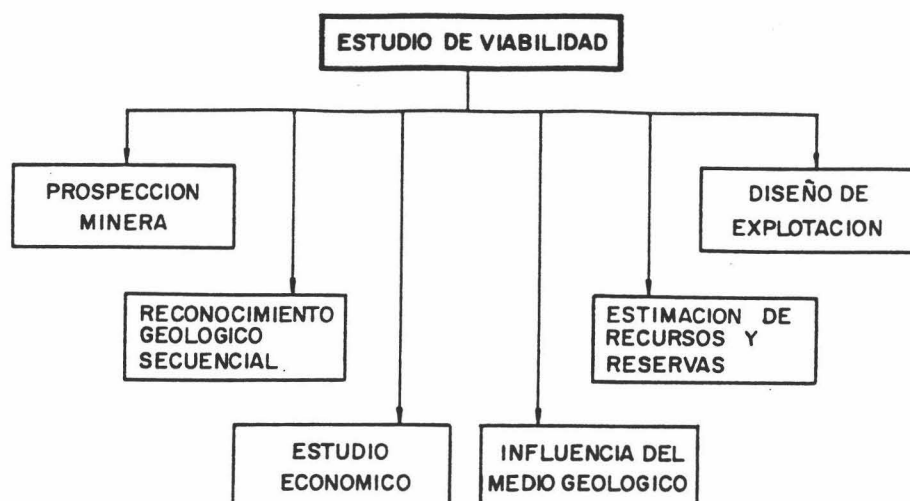


Figura J.1. Objetivos básicos de la preexplotación.

Dentro del estudio general de viabilidad es necesario llevar a cabo una serie de trabajos, de actividades, de índole diversa que permitan analizar, con el suficiente detalle, las condiciones de explotabilidad del proyecto, tanto técnicas como económicas. Si se analizan con detenimiento, se observará que en gran parte de ellos es interesante aplicar la Geoestadística; así he seleccionado los más importantes, de modo que forman un conjunto, una secuencia lógica de estudios, cuyos resultados además de relacionarse son fundamentales para el estudio de viabilidad de la mina. Tales estudios conciernen: a la prospección minera, al reconocimiento geológico de la mineralización, a la estimación de los recursos y reservas, al diseño de la explotación, al medio geológico del yacimiento y finalmente al estudio económico del proyecto.

Las aplicaciones más relevantes de estos métodos, a los estudios especificados, se analizan en los apartados de que consta el presente capítulo; todas ellas hacen referencia a la caracterización y valoración



*Figura 7.2.- Estudios de interés geoestadístico a realizar en el estudio de viabilidad técnica y económica de un proyecto.*

de los recursos minerales. Así pues, he preferido dejar el análisis del balance económico para capítulos siguientes, por la razón de que en ellos se abordan los problemas surgidos en la etapa posterior de explotación, problemas que como es sabido se relacionan estrechamente con la calidad del mineral y que afectan considerablemente al cálculo de dicho balance.

## 2. GEOESTADISTICA Y PROSPECCION MINERA

### 2.1. ASPECTOS GENERALES

Puede decirse que es relativamente reciente la aplicación de los métodos geoestadísticos en el campo de la prospección minera, en particular aquellos que hacen referencia a los métodos de estimación no lineal y de simulación. Sin embargo, los buenos resultados que se vienen alcanzando en ellos han convertido a estos métodos en un útil más de trabajo en este dominio, especialmente en los campos de las prospecciones geoquímica y geofísica.

Como referencias importantes de estas aplicaciones hay que destacar el trabajo de DAVID y DAGBERT (1974) en geoquímica de rocas, y en geoquímica de suelos los trabajos de CROISSANT (1976 y 1977), GARCIA PEREIRA (1980), SUSLICK (1981), SANDJIVY (1984 a, b y c) entre otros importantes. Dentro de los dominios de las prospecciones geofísica, sísmica y gravimétrica

tienen especial interés las investigaciones recientes de CHILES y GUILLEN (1984); GALLI et al. (1984); MURILLO (1982) y MARECHAL (1984), por sólo citar algunos de los trabajos más actuales e importantes.

Existen otros estudios, además de los ya citados en los cuales el aspecto geoestadístico constituía la directriz principal del estudio, que hacen referencia al tratamiento de los datos experimentales por métodos clásicos multivariados, conocidos con el nombre genérico de Análisis de Datos (BENZECRI, 1979), que sirven sin duda alguna como apoyo complementario muy importante al estudio geoestadístico, particularmente en el susodicho caso multivariable.

Puesto que de todos los métodos de prospección minera el geoquímico es quizás el más practicado y el que ha ofrecido mayor interés para el geoestadístico, por su frecuencia de realización y por el carácter multivariable de su información, será el método al que dedicaré mayor atención.

Si centramos las ideas en el tratamiento de la información experimental obtenida en el campo, ésta se lleva a cabo en dos etapas básicas: en la primera se transforman y corrigen los datos originales en valores aptos para su análisis posterior, transformaciones que se dan fundamentalmente en prospección geofísica (anomalías de Bouguer, corrección al polo, gradiente vertical, etc). La segunda etapa del tratamiento, la más importante y compleja de realizar, consiste en separar la distribución espacial de la variable en varias componentes, cada una de ellas asimilable a estructuras geológicas de escala de variación diferentes. Es precisamente este aspecto el que suscita el gran problema en la interpretación de los datos de prospección; se trata, aludiendo al caso geoquímico, de distinguir, separar, lo que puede considerarse como "anomalía" de lo que es el fondo medio o "background" de la variable. La primera es una componente con estructura netamente local y comportamiento errático, que hay que operar su separación "estadística" de la componente de escala regional del fondo, evidentemente más continua tanto en su distribución como en su variación espaciales.

## 2.2. METODOS GEOESTADISTICOS PARA EL RECONOCIMIENTO E INTERPRETACION DE ANOMALIAS

El análisis variográfico es el punto de partida de todas estas aplicaciones. El variograma es el útil estructural que sirve de base al estudio del comportamiento espacial de cada variable y al de relaciones existentes entre parejas de ellas (co-regionalización), a través del variograma cruzado de las variables  $Z_i$  y  $Z_j$ ,  $\gamma_{ij}(h)$  (véase figura I.3):

$$\gamma_{ij}(h) = \frac{1}{2} E \{ [Z_i(x) - Z_i(x+h)] \cdot [Z_j(x) - Z_j(x+h)] \}$$

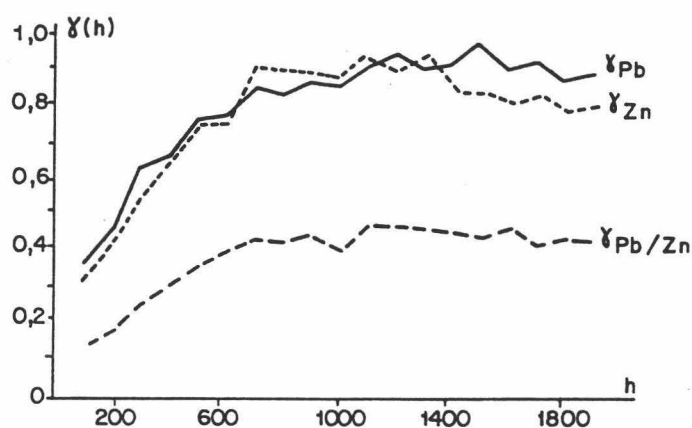


Figura 7.3.- Variogramas experimentales en prospección geoquímica (tomados de SUSLICK, 1981).

El comportamiento isótropo de los variogramas, en algunos elementos, puede constituir en geoquímica un indicador del grado alto de dispersión secundaria de los mismos. Igualmente, dicho comportamiento puede, en situaciones, enmascarar la existencia de controles estructurales en la mineralización como filones, fracturas, etc. El alcance del variograma y las posibles anisotropías geométricas detectadas servirán para planificar futuras campañas de muestreo en el área o en regiones próximas con características geológicas similares. Los posibles comportamientos anisótropos de los variogramas, con presencia de derivas en determinadas direcciones, pueden ser indicativos de que en tales direcciones se está cortando transversalmente a las estructuras mineralizadas, puestas de manifiesto por la mayor dispersión de los elementos geoquímicos.

Todos estos aspectos son importantes de considerar en el desarrollo del análisis estructural. Llevado a cabo éste, se puede pasar a la etapa



interesante del análisis e interpretación de las anomalías, por métodos probabilísticos; veamos algunos de ellos.

### 2.2.1. Validación cruzada: Krigeage Ordinario

El método es clásico y de fácil elaboración, consiste simplemente en estudiar la representatividad de cada muestra o dato en función de la distribución estadística de los errores de estimación de la población. Para ello se construye el estimador  $Z_K(x_\alpha)$  de cada dato experimental  $Z(x_\alpha)$ , de manera que el dato que se estima no interviene en su estimación. El estimador  $Z_K(x_0)$  es el Krigeage Ordinario (K.O.) de valor real  $Z(x_0)$  en el punto  $x_0$ , deducido del sistema de krigeage puntual que, como se recordará, se escribía de la forma:

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\beta} \gamma(\alpha, \beta) + \mu = \gamma(\alpha, x_0) \quad \alpha, \beta = 1 \text{ a } n$$

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = 1 \quad \text{-Sistema de krigeage puntual-}$$

con el error de estimación  $\sigma_K^2$  que vale

$$\sigma_K^2 = \text{Var} \{ Z_K(x_0) - Z(x_0) \} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \gamma(\alpha, x_0) + \mu - \gamma(x_0, x_0)$$

y el estimador  $Z_K = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha})$ .

El criterio de selección de anomalías se basa en trabajar punto por punto, para lo cual se utiliza la distribución supuesta gausiana de los errores experimentales  $Z(x_{\alpha}) - Z_K(x_{\alpha})$ ,  $\alpha = 1$  a  $n$ . Con base en esta situación estadística puede definirse como anomalía aquel conjunto  $\beta$  de valores  $Z(x_{\beta})$ ,  $\beta = 1$  a  $n'$  con  $n > n'$ , cuyos errores de estimación son superiores a  $K$  veces la desviación típica del error de krigeage  $\sigma_K$ , sea:

$$\frac{Z(x) - Z_K(x)}{\sigma_K} > K ; \text{ o bien en valores absolutos } |Z(x) - Z_K(x)| > K\sigma_K$$

El parámetro  $K$  es un valor numérico elegido en función del nivel de probabilidad adoptado; como valores indicativos se pueden tomar  $K = 2$  y  $2,5$  que representan una probabilidad superior al 95 %.

Mediante este método, que es fácil de automatizar (cf. programas BLUEPACK; DELFINER et al., 1979 y GEOSTAT-2D; CHICA-OLMO, 1985), se puede llegar a separar en la población de datos aquellos que son considerados anómalos, en base al modelo probabilístico establecido, y de cartografiarlos en un plano de isovalores que facilite la interpretación de los resultados.

SUSLICK (1981) ha aplicado la metodología descrita en una campaña de geoquímica táctica en Brasil, llegando a la conclusión de que el análisis estructural junto al método de validación cruzada conducen, en una primera aproximación, a la detección de anomalías geoquímicas coherentes con las características geológicas de repartición espacial de los elementos, compatibles a su vez con los resultados de los métodos multivariantes, también aplicados.

El problema más importante que suscita este método radica en el hecho de que se vale de un único variograma global, proveniente de toda la población de datos y por consiguiente de dudosa representatividad de la estructura de la anomalía. Al respecto, GARCIA PEREIRA (1980) propone trabajar con una descomposición de la variable  $Z$ , para lo cual fija arbitrariamente un límite de corte  $z_c$  en distintas posiciones en el histograma acumulado, lo que equivale a trabajar con la variable cortada  $Z > z_c$ .

De esta forma, el fondo quedaría estructurado en términos de variograma por la función  $\gamma(h)$ , por su parte la anomalía  $Z > z_c$  se caracterizaría por un parámetro estadístico de tendencia a formar grupos, ya que lo que se pretende con la descomposición es que los datos anómalos no tengan en la región una distribución poissoniana en el sentido de contigüidad.

A modo de conclusión, puede decirse sobre el método que el análisis estructural es el útil de base para la definición del fondo geoquímico, y que aplicado en combinación con la cartografía de anomalías y el cálculo del parámetro de contigüidad pueden constituir en conjunto un método altamente operativo. El geólogo dispone así de un útil de decisión para el estudio de anomalías basado en criterios objetivos, que en unión con la experiencia geoquímica puede aportar los elementos de respuesta apropiados y precisos en cada caso.

### 2.2.2. Análisis krigeante

Quiero recordar que el objetivo que nos guía es la separación en varias componentes del campo de variación de un parámetro físico, sea la distribución espacial de un elemento geoquímico; problema altamente complejo y delicado que puede encontrar otras aproximaciones diferentes a la dada anteriormente. Una de ellas, bien conocida por físicos y matemáticos, tiene sus raíces en los métodos de análisis espectral, y consistiría en trabajar directamente con el espectro de frecuencias de la variable y en operar su descomposición por el citado método de análisis espectral (transformadas de Fourier), lo cual requiere el cálculo de covarianzas de las variables y de utilización de una malla regular en dos dimensiones.

Recientemente, la Geoestadística ha propuesto un nuevo método para esta aproximación de descomposición de una variable espacial en varias componentes; el método se sitúa dentro de los modelos de co-krigeage y recibe el nombre de "Análisis Krigeante" (MATHERON, 1982 a).

Las investigaciones que se llevan a cabo desde hace unos años han dado ya resultados fructuosos con aplicaciones en campos diversos de la prospección minera, como en geoquímica (SANDJIVY, 1984 a, b y c), en gravimetría (CHILES y GUILLEN, 1984) y en magnetismo (GALLI et al., 1984).

El punto de comienzo de este método es nuevamente el análisis estructural; así el modelo general ajustado está frecuentemente integrado por la suma de varias estructuras imbricadas con o sin efecto de pepita. Aunque la elección del número y tipo de estas estructuras comporta una cierta dosis de arbitrariedad, es también bien cierto -y así lo constatan los estudios realizados por SERRA (1967 y 1968)- que corresponden a escalas de estructuras de variación del parámetro reconocidas por el geólogo.

En base al modelo ajustado, el análisis krigeante permite estimar en un punto cualquiera del dominio variables ficticias  $Y_u(x)$  cuyos variogramas, o covarianzas  $C_u(h)$ , corresponden a los distintos esquemas elementales retenidos en el modelo general. Así, por ejemplo, si dicho modelo está formado por un efecto de pepita y dos modelos esféricos de corto y largo alcances, el análisis krigeante estimará en todo punto cada una de las componentes, la pepítica ( $Y_0, u=0$ ) y las dos esféricas ( $Y_u,$

$u=1$  y  $2$ ), que servirá al propósito de cartografía automática de las mismas (la componente  $Y_0$  sólo puede ser definida en los puntos de observación). Por similitud con el análisis harmónico y con el análisis de datos clásico (componentes principales) se trataría de cartografiar cada componente o banda de frecuencia "harmónico" (índice  $u$ ) que puede distinguirse en la variable  $Z(x)$ ; así para  $u=0$  (efecto de pepita) se tendría la componente  $Y_0$  asociada al dominio de altas frecuencias, la componente  $Y_1$  correspondiente al modelo esférico de corto alcance al dominio de frecuencias medias e  $Y_2$  la componente asociada al modelo esférico de largo alcance en el dominio de frecuencias bajas.

Un resumen breve del método es el siguiente: se parte de la descomposición lineal de la VR  $Z(x)$  en tantas componentes elementales  $Y_u(x)$  como estructuras "harmónicas" se han distinguido en el variograma ajustado (o en el caso general en la covarianza generalizada  $K(h)$  de la FAI-K)

$$Z(x) = \sum_u a_u Y_u(x) \quad (u = 1, 2, \dots, N)$$

relación que en términos de covarianza centrada queda de la forma

$$C(h) = E\{Z(x) \cdot Z(x+h)\} = \sum_u a_u^2 C_u(h) \quad (\text{modelo lineal})$$

$$\text{con } C_u(h) = E\{Y_u(x) \cdot Y_u(x+h)\}$$

Se tiene entonces que las componentes  $Y_u(x)$  son  $FA_S$  intrínsecas del mismo orden  $K$  que  $Z(x)$ , tal que son mutuamente ortogonales (independientes)

$$C_{u,v} = E\{Y_u(x) \cdot Y_v(x+h)\} = 0 \quad \forall u \neq v \quad (u, v = 1, 2, \dots, N)$$

Los  $a_u^2$  son coeficientes numéricos que en el caso monovariable se deducen del análisis estructural de  $Z(x)$ ; así si se supone que  $Z(x)$  proviene de la anamorfosis de la variable experimental, se tiene que los  $a_u^2$  corresponden respectivamente al efecto de pepita y a los valores de meseta ajustados en el variograma.

Con base en el principio de descomposición lineal de la variable, la idea implícita en el método es simple, consiste en estimar cada una

de las componentes  $Y_u(x)$  por co-krigeage (1) de los datos experimentales  $Z(x_\alpha)$ :

$$Y_u^*(x) = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha})$$

Los ponderadores  $\lambda_{\alpha}$  son la solución del sistema de co-krigeage, que se establece a partir de las covarianzas  $C(h)$  y  $C_u(h)$ , sea el sistema

$$\sum_{\beta} \lambda_{\beta} C(\alpha, \beta) = a_u C_u(\alpha, x_0) + \mu \quad \alpha, \beta = 1 \text{ a } n$$

$$\sum_{\beta} \lambda_{\beta} = 0$$

si  $E\{Z(x)\} = m$  es desconocida; o bien el sistema

$$\sum_{\beta} \lambda_{\beta} C(\alpha, \beta) = a_u C_u(\alpha, x_0), \text{ si } m \text{ es conocida.}$$

En la práctica se puede trabajar con  $Y(x_{\alpha})$  deducida por anamorfosis de  $Z(x_{\alpha})$ , tal que  $E\{Y\} = 0$  (cf. Anexo I). El desarrollo formal de estos sistemas puede verse en MATHERON (1982) y SANDJIVY (1984 a y b).

Con esta técnica reciente la Geoestadística ha aportado una solución al problema de descomposición de una VR en varias componentes, que es el problema básico en el estudio de anomalías. El método presenta una analogía profunda con el análisis espectral, incluso a nivel de resultados (CHILES y GUILLEN, 1984); la diferencia básica entre ambos métodos radica en que el análisis espectral constituye una aproximación global en el sentido regional, mientras que el co-krigeage implícito en el análisis krigeante puede además trabajar con vecindad parcial de datos, lo que daría un enfoque local al estudio del problema suscitado, con las ventajas adicionales que ello puede aportar. El lector interesado puede encontrar en los trabajos ya referidos de SANDJIVY (1984 a y b) ejemplos muy interesantes de aplicación del método al tratamiento de datos geoquímicos; en ellos, se aborda tanto el caso monovariable presentado como el caso multivariable,

(1) El término co-krigeage identifica la aplicación del método del krigeage particularizado al caso multivariable (MATHERON, 1970).

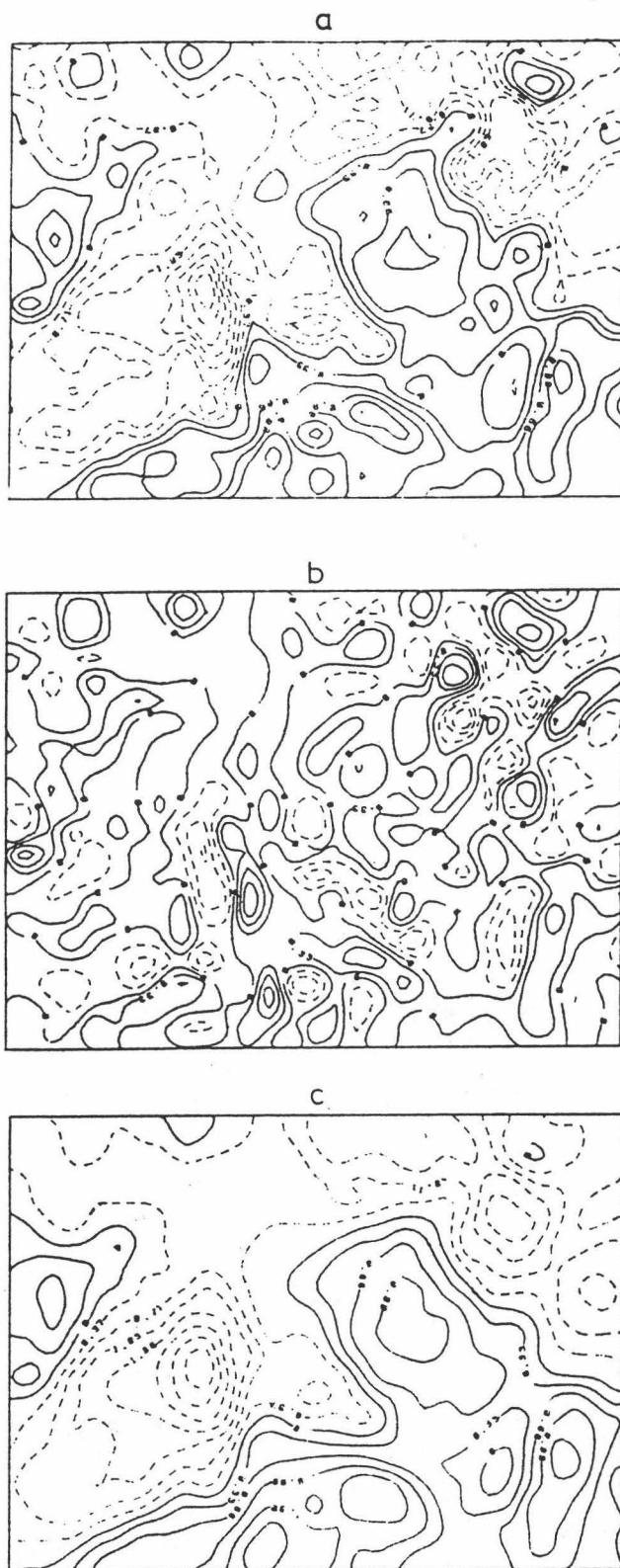


Figura 3.4.- Análisis krigeante (tomado de SANDGIVY, 1984 a)  
a) Mapa de distribución de contenidos en Cu en la región (variable anarmofoseada)  
b) Mapa de variaciones locales (estructura  $Y_1$ )  
c) Mapa de variaciones regionales (estructura  $Y_2$ ).

relativamente más complejo de elaborar. Como muestra de los resultados que pueden obtenerse, se han representado en la figura I.4 los mapas correspondientes a la distribución espacial del contenido en Cu en la región de estudio prospectada, y los mapas de las estructuras elementales  $Y_1$  e  $Y_2$  distinguidas en el modelo de variograma. El mapa de la estructura  $Y_2$ , modelo esférico de gran alcance, representa la componente de fondo regional, en tanto que el mapa de la estructura  $Y_1$ , modelo esférico de pequeño alcance, puede considerarse como el mapa de anomalías que caracteriza las fluctuaciones locales de la variable. A tenor de estos resultados el geólogo puede seleccionar las zonas de anomalías más interesantes, para allí llevar a cabo posteriormente estudios de detalle que conduzcan a la localización de cuerpos mineralizados.

### 2.2.3. Krigeage Disyuntivo puntual

Se trata de un método de estimación no lineal aplicable al cálculo de funciones de la variable experimental  $Z(x_\alpha)$ , cuyo estimador tiene la siguiente estructura general:

$$Z_{KD} = f\{Z(x_\alpha)\}, \quad \alpha = 1 \text{ a } n$$

Las funciones que se muestran particularmente interesantes de calcular en el estudio de anomalías son tres fundamentalmente:

- la función de distribución de la variable  $Z(x_o)$  en el punto de estimación  $x_o$ , condicional a los valores que intervienen en la estimación  $\{Z(x_\beta)\}: \{Z(x_o)/Z(x_\beta), \beta = 1 \text{ a } n', n > n'\}$
- la "función límite" correspondiente a la estimación de la indicatriz  $I(x_o)$
- el valor más probable de la variable condicional vista anteriormente.

Todas estas funciones pueden ser estimadas convenientemente por aplicación del método de Krigeage Disyuntivo (KD) a nivel puntual, método desarrollado conceptualmente por MATHERON (1973 a, 1975 a y 1976 b) que será expuesto con suficiente detalle en el apartado de cálculo de reservas recuperables, que corresponde a su aplicación original.

### A) Estimación de la función de probabilidad

Muy brevemente, se trata de construir por KD un estimador  $f_{KD}$  de la distribución de probabilidad de la variable condicional  $\{Z(x_0)/Z(x_\beta), \beta = 1 \text{ a } n'\}$  en el punto  $x_0$ , tal como se representa en la figura I.5 a. Dicho estimador admite el siguiente desarrollo en polinomios de Hermite,

$$f_{KD}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^*}{n!} H_n(y) g(y) \quad (\text{cfr. 4.2.2})$$

donde  $y$  es una variable  $N(0,1)$ ;  $g(y)$  la densidad de Gauss;  $H_n(y)$  los polinomios de Hermite; y  $H_n^*$  es la estimación por KD de los polinomios de Hermite en el punto  $x_0$ .

### B) Estimación de la "función límite" indicatriz $I(x_0)$

La estimación concierne a la probabilidad de que el valor desconocido  $Z(x_0)$  en el punto  $x_0$  sea superior a un valor límite  $z_c$  elegido convenientemente de acuerdo con criterios geológicos,  $P\{Z(x_0) \geq z_c\}$ ; lo que se busca es estimar la función límite indicatriz  $I(x_0)$  tal que:

$$I(x_0) \begin{cases} = 1 & \text{si } Z(x_0) \geq z_c \\ = 0 & \text{si no} \end{cases}$$

La estimación de dicha probabilidad por KD se hace a partir de la función  $f_{KD}$  definida,

$$\begin{aligned} P^*\{Z > z_c\} &= \int_{z_c}^{\infty} f_{KD}(z) dz = 1 - F_{KD}(z) \\ &= 1 - G(y_c) - g(y_c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(y_c) \cdot H_n^*}{n!} \end{aligned}$$

donde  $y_c$  se deduce por anamorfosis gaussiana del valor  $z_c$ ,  $y_c = \phi^{-1}(z_c)$  (cf. Anexo I);  $G(y_c)$  es la función de repartición de Gauss y los otros parámetros han sido ya señalados anteriormente.

### C) Estimación del valor más probable $Z_{KD}$

Conocidos las  $H_n^*$  por KD se puede pasar a estimar el valor probable de la variable condicional estudiada:  $E\{Z(x_0)/Z(x_\beta)\}$ . El estimador



de esta cantidad, anotado  $Z_{KD}$ , vale

$$Z_{KD} = \int Z \cdot f_{KD}(y) dy$$

para calcularlo se supone que  $Z$  admite al igual que  $f_{KD}$  un desarrollo polinómico hermitiano, tal que  $Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n}{n!} H_n(y)$ . Si se calcula la integral precedente y considerando que la covarianza entre  $\frac{H_n(y)}{n!}$  y  $\frac{H_m(y)}{m!}$  es nula salvo para el caso  $n = m$ , se tiene entonces que

$$Z_{KD} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^* \cdot \psi_n}{n!} \quad (\text{la demostración es inmediata})$$

donde los coeficientes numéricos  $\psi_n$  se deducen del ajuste hermitiano de la función  $\phi$ ,  $Z = \phi(Y)$ .

La figura I.5 b muestra un ejemplo gráfico de los resultados obtenidos en la estimación de estos tres parámetros correspondientes a un estudio del contenido en azufre (% S) en un yacimiento de carbón.

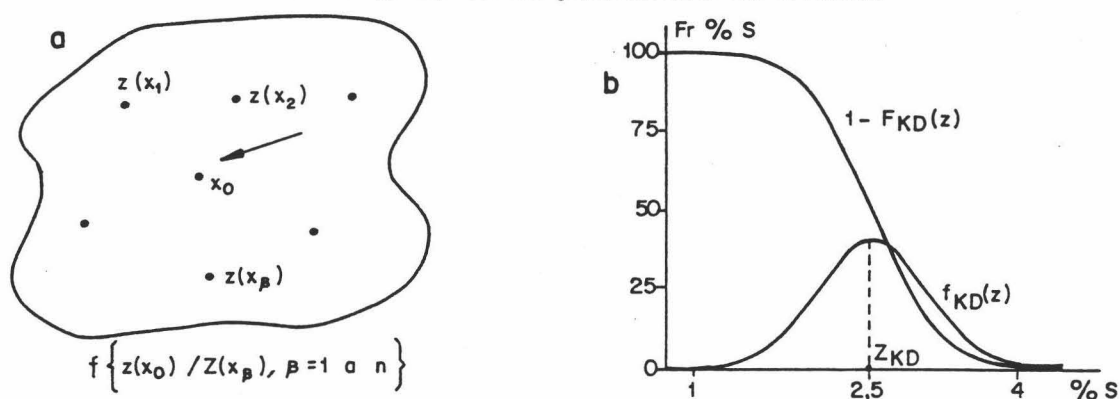


Figura I.5.- Estudio de anomalías por métodos de estimación no lineal: a) Planteamiento del problema. b) Aplicación del método de krigeage disyuntivo en un yacimiento de carbón.

En las aplicaciones del método es conveniente en primer lugar elaborar una cartografía previa del parámetro  $Z_{KD}$ , para así disponer de un conocimiento previo de la distribución de la variable; en segundo lugar, se deben establecer diferentes valores límites  $z_c$  basados en criterios geológicos, sean estos valores límites  $z_c^1, z_c^2, \dots, z_c^n$  escogidos convenientemente del histograma de la variable.

Finalmente, para cada uno de los  $z_c$  se elaboraría, por aplicación del método expuesto, la cartografía de las probabilidades de sobrepasar cada uno de los límites establecidos. Con esta metodología se aporta un nuevo enfoque probabilístico al estudio y definición de anomalías; utilizada conjuntamente con otros métodos puede constituir un útil operativo interesante para el tratamiento de datos de prospección.

### 2.3. CARTOGRAFIA AUTOMATICA DE VARIABLES ESPACIALES

Dentro de la investigación geológica y minera, en general, se tiene la costumbre de sintetizar la información disponible referente a una variable, sea la información experimental o los resultados de una aplicación particular, por medio de planos o mapas de líneas de isovalores. Así, si se escoge como ejemplo de referencia el estudio geoquímico, es frecuente elaborar mapas temáticos referentes a la distribución espacial de cada uno de los elementos; el interés de ello es inmediato, pues con estos gráficos se sintetiza una información espacial, a veces densa, y se facilita la interpretación visual del fenómeno a la vista de la distribución de los máximos y mínimos locales.

El problema subyacente, en este tipo de estudios, se plantea, como a continuación se expone, a nivel de la elección de un método de interpolación entre los datos adecuado, que trabaje sobre la información puntual y consiga los resultados deseados.

Desde el punto de vista práctico, parece lógico imponer como condición al método la de optimizar la información experimental, que en la mayoría de los casos es costosa de obtener y que, en general, tiene una disposición irregular en el espacio. Se debe garantizar la mejor utilización de la misma, para así estar seguros de que los resultados que se obtendrán más tarde serán los más próximos a la realidad desconocida. Lo indicado en último término equivale probabilísticamente a imponer la condición de error nulo en la estimación de  $Z(x)$  por su estimador  $Z^*(x)$ .

Hace poco más de una década que se iniciaron las primeras aplicaciones de la Geoestadística en este dominio, con aprovechamiento de la característica del método del kriging de ser un interpolador exacto (CHILES y MATHERON, 1975; CHILES y CHAUVET, 1975). A continuación voy a analizar

las etapas básicas de este tipo de aplicación, sobre la base de un juego de datos reales.

Los datos corresponden a un estudio de prospección de  $\text{CO}_2$  de origen profundo en el Macizo Central francés realizado por BATARD et al. (1979), que fueron ya tratados para su estudio geoestadístico (CHICA-OLMO, 1982 ayb).

#### *A) Inferencia del modelo geoestadístico: análisis estructural*

Como he explicado en reiteradas ocasiones, se trata de ajustar a los datos un modelo general de variograma. El modelo ajustado es de tipo esférico con un alcance  $A = 50$  m con un valor de meseta  $C = 2.8$  y se ha considerado la isotropía de la variable en el plano.

#### *B) Creación de la malla de estimación*

Consiste simplemente en la elaboración de un mallaje de estimación "Gridding", suficientemente fino para los propósitos de cartografía, aplicando el método de krigeage puntual. Los valores de la variable han sido estimados en los nudos de una malla cuadrada de 10 m de lado.

#### *C) Interpolación*

Constituye la última fase del estudio y quizás sea de todas ellas la más delicada de llevar a cabo. Consiste en aplicar entre los nudos de cada celda de la malla una función interpoladora conveniente, que dé unos resultados a la vez estéticos y fiables; con tal objeto se utilizan con gran frecuencia funciones polinómicas cúbicas o funciones splines (SANCHEZ QUINTANA, 1985; BRUNET y PEREZ VIDAL, 1984). El aspecto analítico de interpolar genera ciertos problemas a la hora de automatizar el proceso, que han sido señalados por MURILLO (1982), como son el cálculo del punto de intersección entre una curva de nivel y la línea que une dos puntos consecutivos de la red, la discriminación de líneas de nivel o el trazado de la línea en el interior de la celdilla unidad. En tal sentido existen programas comercializados que han resuelto de una u otra forma estos problemas del trazado automático; especial interés tiene el programa CARTOLAB desarrollado por MALLETT (1974 y 1976) que he podido utilizar para este estudio. Así, los resultados finales de la cartografía automática

aplicando una interpolación cúbica entre los nudos de la malla se han representado en la figura I.6 b.

Por otra parte, puesto que como se sabe, el krigage permite cuantificar el error de estimación  $\sigma_K^2$ , se puede elaborar al mismo tiempo una cartografía de los errores de estimación, que servirá al conocimiento de la precisión que hay que dar al plano de isovalores calculado. Así, para el ejemplo expuesto se presenta en la figura I.6 c el plano de isovalores de desviaciones típicas del error de estimación  $\sigma_K$ .

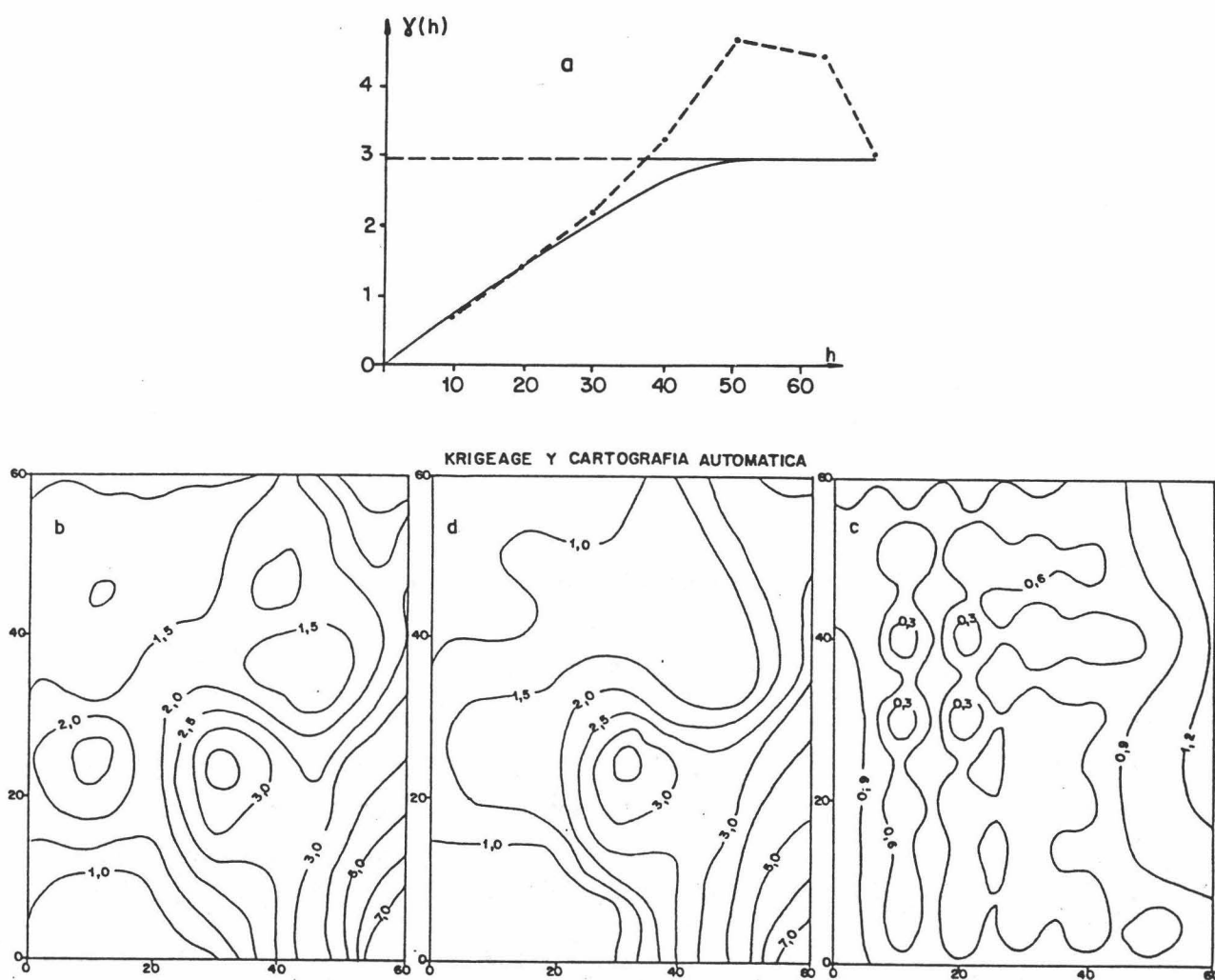


Figura I.6.- Cartografía automática del contenido en  $CO_2$ :

- Variograma ajustado
- Mapa krigado
- Mapa de los errores de estimación
- Aplicación de krigage como función interpoladora.

El método que se acaba de presentar, establecido en tres etapas, tiene su punto de apoyo básico en la elaboración de una malla de estimación como fase previa a la de interpolación. Pues bien, otra ventaja de aplicación de la geoestadística en cartografía automática es la de autorizar un gran número de modelos. En tal sentido MATHERON (1980 b y 1981) ha demostrado la equivalencia formal entre el método de interpolación por splines y el krigeage, lo cual permite interpretar al krigeage como los otros métodos de interpolación, es decir de construir una función de interpolación en lugar de efectuar una interpolación puntual en la malla (mallaje). El desarrollo del método desde el punto de vista práctico se debe a MURILLO (1982) quien lo ha aplicado al tratamiento de datos sísmicos; con él he realizado la aplicación a los datos del ejemplo estudiado con el fin último de comparar los resultados. Como podrá apreciarse, los resultados obtenidos por ambos métodos son parecidos; en ambos casos se han reproducido convenientemente los rasgos estructurales importantes de la distribución de las variables (figura I.6 d).

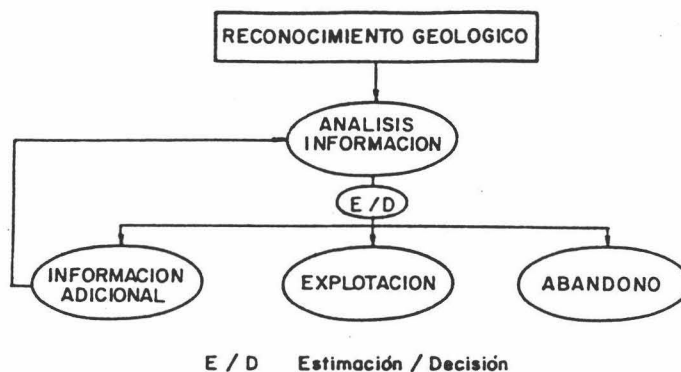
### 3. RECONOCIMIENTO GEOLOGICO SECUENCIAL

Es evidente que el grado de conocimiento de un yacimiento aumenta de modo progresivo a lo largo de su vida, siempre de modo parcial cualquiera que sea el momento de referencia elegido.

La adquisición de la información comienza con la localización de los indicios mineros favorables, detectados por los estudios de prospección, y finaliza una vez que se ha llegado al agotamiento de la mina. A lo largo de esta vida, que puede durar varias decenas de años, se suceden diversas etapas caracterizadas por niveles de información diferentes sobre el yacimiento, que como ya comentaba constituyen la base para la toma de decisiones necesarias para la conducción del proyecto, en base a estimaciones del fenómeno mineralizado.

Ya desde las etapas iniciales del reconocimiento geológico, se busca como objetivo primordial evaluar el potencial del yacimiento; la información experimental recabada debe permitir la decisión de explotar o no el yacimiento, en este último caso se dejará apartado el proyecto hasta que las condiciones económicas sean las más favorables; o bien, que es el caso más

frecuente, se puede solicitar una fase de reconocimiento adicional a cuyo final se planteará idéntico problema de decisión:



Cualquiera que sea la determinación tomada de explotar o no, o de solicitar nueva información, es seguro que tendrá consecuencias económicas importantes debido al montante global de las inversiones a realizar; se comprende pues la importancia que tiene el disponer de un nivel de información suficiente para evaluar correctamente el potencial del yacimiento, de manera a minimizar el riesgo financiero.

Si se dispone de información suficiente, sobre el yacimiento, se puede llegar a construir un modelo probabilístico objetivo, para analizar el valor del proyecto durante las etapas de reconocimiento secuencial; de este modo se reduciría, en parte, el riesgo de la inversión y al mismo tiempo serviría posteriormente para conducir la explotación de la forma mejor posible, tal como ha sido propuesto por MATHERON y FORMERY (1963) y RENDU (1971).

### 3.1. FASES DEL RECONOCIMIENTO SECUENCIAL

Es de común aceptación, por parte de geólogos y mineros, que las campañas de reconocimiento se plantean diferentemente según el tipo de yacimiento investigado: en yacimientos sedimentarios estratiformes, como por ejemplo los depósitos de lignito, pueden utilizarse mallas de información amplias con las cuales se obtiene una precisión suficiente sobre la estimación de las reservas; no es así el caso de los depósitos metálicos fisurados, donde el control estructural juega localmente un papel decisivo en la distribución de las masas mineralizadas, por lo que se precisan mallas de información más cerradas y ajustadas a las características estructurales de tales yacimientos.

En general, el reconocimiento de un yacimiento se lleva a cabo según un esquema secuencial de campañas de trabajos para la toma de información, el caso más frecuente es por medio de campañas de sondeos. La Geoestadística, que sabe caracterizar al fenómeno mineralizado, se muestra como el hilo conductor de estos trabajos a través de la gestión óptima de la información disponible en cada una de las fases (JOURNEL, 1973 y 1975).

### 3.1.1. Reconocimiento preferencial

Los estudios de reconocimiento comienzan con una primera fase de campaña de sondeos implantados preferencialmente en el sector. Dichos sondeos que suelen ser escasos en número están ubicados de forma irregular, atendiendo a criterios geológicos, en zonas de anomalías puestas en evidencia por los estudios de prospección.

Desde el punto de vista cuantitativo el reconocimiento preferencial produce una información numérica referida tanto a la calidad como a la geometría de la mineralización, en aquellos sondeos positivos que atraviesan el mineral. Aunque la información obtenida suele ser escasa en cantidad, es suficientemente útil para que el geólogo confirme o rechace su hipótesis sobre la existencia de indicios de interés en el área; por esta razón el papel de la Geoestadística en esta fase queda un tanto limitado: es imposible con este nivel de información exiguo evaluar de manera precisa y sin sesgo los recursos del yacimiento. En aquellos casos en los que se dispone de información suficiente se puede proceder a un análisis variográfico, que ayudará a la vez a la interpretación geológica del yacimiento y al cálculo de una primera estimación global de los recursos in situ. El variograma así ajustado serviría, como se verá más tarde, para estudios de optimización de mallas de sondeos con la finalidad de determinar la malla necesaria para las fases siguientes del reconocimiento, con mallas cada vez más finas.

### 3.1.2. Reconocimiento a malla grande

Este reconocimiento abarca el área delimitada por los sondeos preferenciales positivos con leyes favorables, sobre la cual se implantarán los sondeos de reconocimiento según una malla amplia. Los objetivos básicos pretendidos son de dos tipos (GUIBAL, 1979; JOURNEL, 1975).

### *A) Geométricos*

Se busca localizar y delimitar el cuerpo mineralizado, su geometría, su tamaño aproximado, las características estructurales del mismo, etc.

### *B) Cálculo*

El nivel de información alcanzado en esta etapa es suficiente para proceder a una primera evaluación global de los parámetros económicos del yacimiento: ley media, tonelaje de mineral y cantidad de metal, con cierta aproximación. La aplicación de la Geoestadística va a permitir la estimación global de estas características y del volumen mineralizado, por medio de los métodos Transitivos (cf. MATHERON, 1970, p. 9).

Uno de los aspectos que ofrece mayor interés para el geólogo se refiere a la precisión de la estimación de dichos parámetros, fundamentalmente de la ley media y de los recursos totales, que depende cuantitativamente del número de sondeos utilizados, del tipo de implantación de los mismos, regular o irregular, y de la continuidad de las leyes en el depósito. Pues bien, además de estos factores, la Geoestadística considera otros que pueden afectar a la precisión de tal estimación; el más importante de ellos es el **error geométrico**, que introduce una incertidumbre adicional sobre los resultados cuando los límites del yacimiento no son conocidos con exactitud (JOURNEL y HUIJBREGTS, 1978).

Al final de este reconocimiento se tiene una idea aproximada del grado de explotabilidad del yacimiento; se plantea otra vez según el esquema visto una situación crítica de continuar o no con el proyecto, o si bien es aconsejable pasar a un reconocimiento adicional con malla más cerrada: reconocimiento a malla cerrada.

#### **3.1.3. Reconocimiento a malla cerrada**

Supuesto que el yacimiento es de interés y que se procede a cerrar la malla de información, lo que se busca ahora son estimaciones, valores más precisos que los obtenidos anteriormente, que ayuden a conformar el marco técnico y económico de la futura explotación. Como objetivos



a alcanzar están: la estimación de los recursos y de las reservas recuperables, el análisis de los criterios de selección a aplicar en la explotación, la parametrización técnica de las reservas, entendiendo por tal el estudio del diseño de explotación en función de parámetros técnicos restrictivos, etc.

La información disponible suele ser suficiente para llevar a cabo estos estudios desde el punto de vista geoestadístico (se dispone en general de varias decenas o centenas de sondeos); así, por ejemplo, el krigeage puede dar una estimación local precisa del metal recuperable en los paneles y, por tanto, puede llevar al cálculo de la función tonelaje/ley, que sintetiza las posibilidades económicas del proyecto: se conocería así el porcentaje de reservas explotables para casos económicos diferentes supuestos, definidos para leyes de corte distintas.

Por último, es conveniente señalar que en yacimientos metálicos con leyes diseminadas, donde se preve la utilización de estos métodos, es recomendable plantear un tipo especial de reconocimiento muy local. Ello se refiere a lo que en términos mineros se denomina "cruz de sondeos", que corresponde a una malla de sondeos de retículo muy fino implantados preferiblemente en un sector homogéneo del yacimiento. El interés que aporta esta información es doble; en primer lugar en el reconocimiento geológico del yacimiento para determinar la estructura de la mineralización con más detalle; en segundo lugar, en el estudio geoestadístico para evaluar el comportamiento del variograma de las leyes en el origen. Este tipo particular de reconocimiento se llevó a cabo en el yacimiento de Pb-Zn-Ag estudiado en el capítulo IX.

### 3.2. OPTIMIZACION DE MALLAS DE SONDEOS DE RECONOCIMIENTO

Es muy probablemente una de las aplicaciones geoestadísticas más conocidas, tradicionales y frecuentes dentro de la práctica minera, especialmente durante la etapa de reconocimiento del yacimiento: la planificación geoestadística de programas o campañas de sondeos.

Con referencia nuevamente al análisis estructural, los resultados en él obtenidos han podido identificar, por ejemplo, una anisotropía geométrica en la distribución de las leyes del mineral como la dibujada

en la figura I.7; es manifiesto entonces que la malla de información debe adaptarse a los ejes de la elipse de anisotropía, en concreto sus lados  $a$  y  $b$  serán proporcionales a los alcances del variograma en las direcciones 1 y 2, sean  $A_1$  y  $A_2$ : se cometería un error importante al considerar una malla de reconocimiento cuadrada en lugar de una rectangular, obviando estos aspectos geométricos proporcionados por el análisis variográfico.

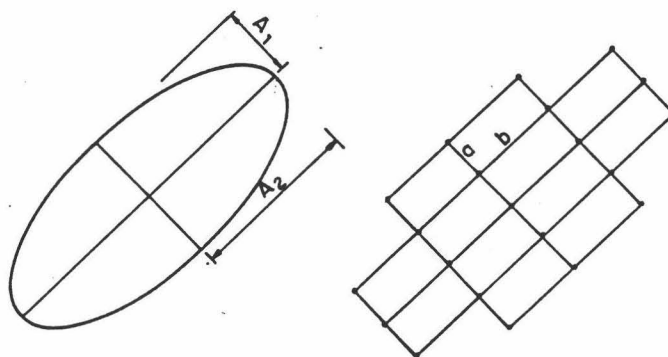


Figura I.7.- Diseño de mallas de reconocimiento en base a resultados del análisis de los variogramas.

No obstante, el planteamiento de la optimización de mallas de muestreo se hace casi siempre a través de la varianza de estimación de las leyes o del parámetro reconocido  $\sigma_e^2$ , varianza que en términos de variograma se expresaba, como se recordará, de la forma:

$$\sigma_e^2 = 2 \gamma(x_0, v) - \gamma(v, v) - \gamma(x_0, x_0)$$
 donde  $x_0$  es el conjunto estimador y  $v$  el volumen estimado. Como también se tendrá presente, dicho error es accesible experimentalmente por krigeage directo del valor  $Z_v$ ,  $\sigma_K^2$ .

Así pues, voy a finalizar con el tema de optimización de malla con la exposición sintetizada de algunos métodos interesantes que hacen referencia al parámetro  $\sigma_K^2$ , y que los clasifico en dos apartados, atendiendo al carácter global o local de la estimación de la variable.

### 3.2.1. A nivel global

A nivel de estimación global, el método que indico, que no es el único posible, consiste en elaborar gráficas como la representada en la figura I.8 a (tomada de CHICA-OLMO, 1982 c), en la que se expresan por un lado, en el eje de ordenadas, la varianza de estimación relativa

al número de sondeos de la malla y por otro lado, en el eje de abscisas, el coste económico de la campaña de sondeos necesaria a la estimación global de las reservas. En el ejemplo presentado proveniente de un yacimiento de lignito también se han estudiado como variables, además de las reservas, la calidad media del lignito por medio de las variables, poder calorífico y contenido en azufre.

Este tipo de gráficas, utilizadas conjuntamente con criterios de índole económica, pueden tener interés para el minero; éste puede analizar en qué circunstancias un incremento de información suplementaria puede llegar a ser o no rentable en relación con la ganancia de precisión aportada.

Otro ejemplo del tipo de resultados que pueden obtenerse por medio de esta aplicación, esta vez referente a un yacimiento de Pb-Zn, se presenta en la figura I.8 b. En ella se ha representado la desviación típica del error de estimación de la ley media, en función del número de sondeos de la malla de estimación.

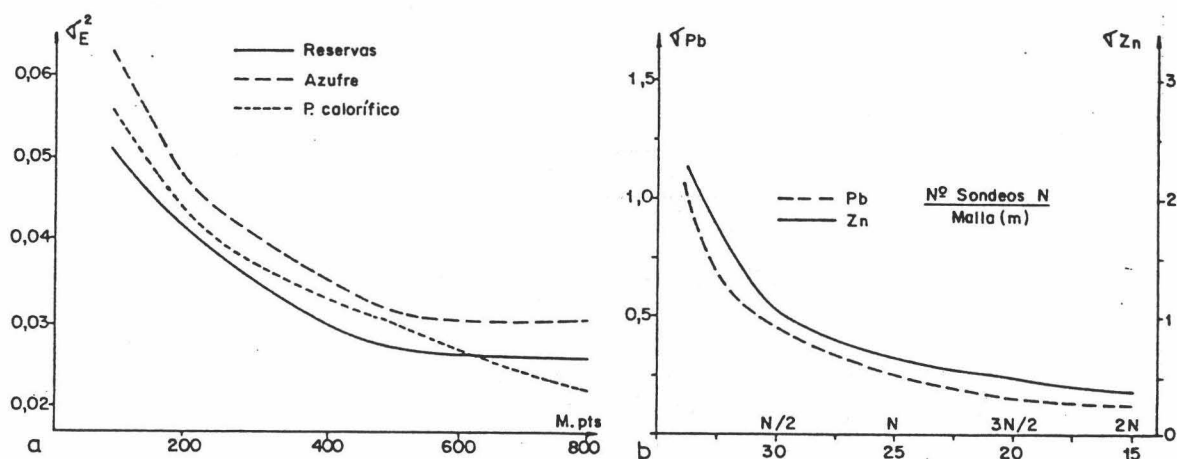


Figura 7.8.- a) Varianza de estimación vs costo de la información  
 b) Desviación típica vs número de sondeos  
 (tomada de CHICA-OLMO et al., 1984).

Es necesario señalar que las varianzas de estimación representadas en estas figuras son calculables desde el momento que son conocidos el variograma de la variable y la configuración de la malla empleada: el error de estimación sólo depende de estos parámetros y no de los

valores reales de la variable. Por consiguiente, el estudio puede llevarse a cabo de modo previo a la realización de la campaña de sondeos cuya precisión sobre la estimación de las reservas se desea analizar.

### 3.2.2. A nivel local

Con referencia a la estimación local de un parámetro o una variable, destaco, como más interesantes, dos métodos que tienen por base la aplicación del método del krigeage local.

El primer procedimiento tiene como finalidad elaborar planos que reflejen la incertidumbre de estimación, de las leyes de los bloques  $Z_v$ , en base al error de krigeage  $\sigma_K^2$ . Vemos un ejemplo de ello en la figura I.9 que presenta un mapa clásico de incertidumbre de estimación. En ella se ha indicado, conjuntamente para cada bloque  $v$ , el tonelaje de mineral estimado por krigeage  $Z_K$  y el porcentaje del error relativo de estimación  $\sigma_K/Z_K$ , donde  $\sigma_K$  es la desviación típica de la varianza de krigeage.

El geólogo puede localizar las zonas donde el valor de este cociente es grande para ahí implantar los próximos sondeos.

2409 19	2259 36	2064 22	2081 39	2153 21	2373 36
2446 33	2399 36	2307 34	2258 39	2276 35	2411 36
2456 18	2500 31	2533 17	2430 32	2357 18	2415 31
2363 34	2468 35	2547 31	2495 35	2413 32	2383 36
2216 20	2342 34	2481 19	2461 32	2395 18	2299 34
2005 39	2184 40	2309 34	2350 37	2294 34	2176 40

BLOQUE

2409  
19

Tm mineral ( $Z_K$ )  
 $Z_K / \sigma_K$  (%)

Figura I.9.- Plano de incertidumbre de estimación de las reservas en los bloques.

Una ventaja adicional que proporciona esta forma de proceder es que, a la vez que se estiman localmente las reservas, se puede utilizar el parámetro  $\sigma_K$  para clasificar las reservas en función del tamaño de bloque  $v$  empleado en la estimación. Así pues, se puede asociar cada

categoría de reservas de interés a intervalos diferentes de valores de la desviación típica relativa de estimación, como se ha hecho en el siguiente ejemplo en un yacimiento de Cu en el cual se han distinguido tres categorías de reservas: probadas (A), probables (B) y posibles (C), según se detalla en la tabla adjunta y en la figura I.10:

$\sigma_K/Z_K$ (%)	Reservas	Frecuencias de bloques (25 x 25 x 10 m <sup>3</sup> ) en %	
< 20	A Probadas	8	8
20 - 40	B Probables	34	42
40 - 60		31	73
60 - 80	C Posibles	10	83
> 80		17	100

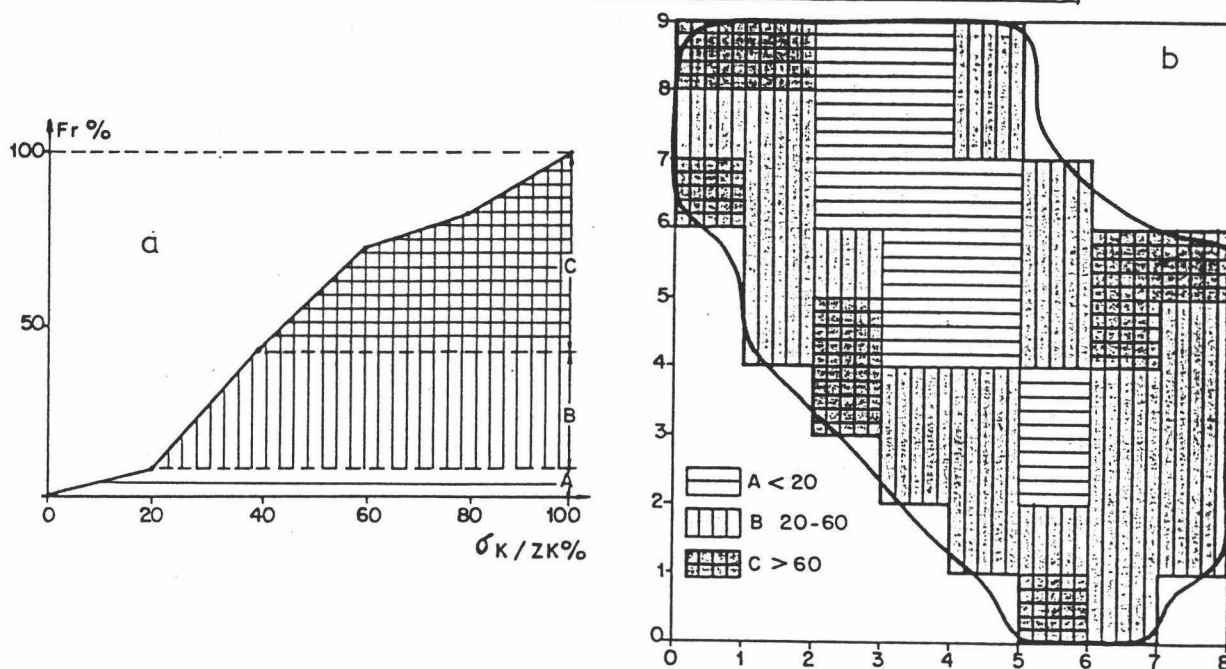


Figura 3.10.- Clasificación de reservas en un yacimiento de Cu  
a) Histograma acumulado de errores relativos  
b) Tipo de reservas en un banco del yacimiento.

Un aspecto muy importante a considerar, en este tipo de clasificaciones, es el soporte del bloque de estimación  $v$  que afecta al cálculo del valor de  $\sigma_K$ ; las relaciones geoestadísticas clásicas ya presentadas muestran que, si el tamaño del soporte  $v$  aumenta el error de estimación decrece, por lo cual parte de las reservas dadas como posibles pasarían a integrar la categoría de probables y parte de éstas a la de probadas. Por consi-

guiente, la clasificación debe ser hecha para diferentes tamaños de bloques v técnicamente posibles en la explotación, como así ha sido propuesto por DIEHL y DAVID (1982).

El otro método que se presenta para el estudio de optimización de campañas de muestreo deriva también de la estimación local por krigage. Quedaba señalado que la varianza de estimación  $\sigma_K$  sólo depende del variograma y de la configuración del conjunto estimador, particularidad que puede aprovecharse para la localización óptima de un nuevo punto de observación en un dominio. El método recibe el nombre del "punto ficticio" y se ha aplicado particularmente en estudios hidrogeológicos por DELHOMME (1976); CHICA-OLMO (1981·b); CHICA-OLMO y BEUCHER (1983) y DELHOMME y DELFINER (1973).

Sea  $\sigma_n^2$  la varianza de estimación de un parámetro en un dominio D a partir de los n datos experimentales disponibles (krigeage en vecindad única). Si implantamos ficticiamente en el punto  $x_o$  perteneciente a D un nuevo sondeo de información, se obtendrá un error  $\sigma_{n+1}(x_o)$  tal que se cumple  $\sigma_n > \sigma_{n+1}(x_o)$ , por lo tanto se puede definir una función de ganancia de información  $G_D(x_o)$ , que expresada en tanto por ciento se escribe,

$$G_D(x_o) = \frac{\sigma_n^2 - \sigma_{n+1}^2(x_o)}{n} \times 100$$

El krigage permitirá buscar el punto  $x_o$ , que se ha hecho pasear ficticiamente por D, donde el valor de la ganancia es máximo.

El ejemplo de la figura I.11, aunque no concierne al dominio minero, es suficientemente explicativo como para dar mayor claridad a los comentarios anteriores: se trata de un estudio meteorológico en el cual se desea reforzar la red de información con la implantación de un pluviómetro adicional en la región (CHICA-OLMO, 1981·b). En la figura I.11 a se dan los sectores que intuitivamente parecen ser los más adecuados para localizar el nuevo punto; en la figura I.11 b se da la cartografía de las líneas de isovalores de la función de ganancia calculada  $G_D(x_o)$ . Es obvio que no presenta gran problema extrapolar los resultados de este ejemplo al caso que ocupa de leyes de mineral.

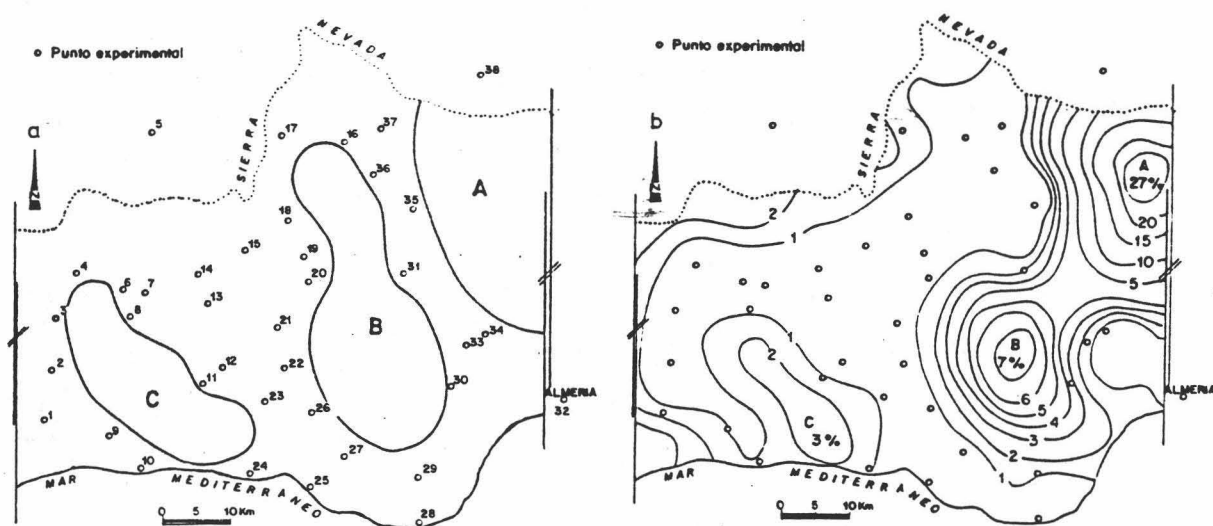


Figura 1.11.- Implantación de un nuevo punto de observación para el reconocimiento pluviométrico de una región del SE de España.  
 a) Sectores más probables para implantar el nuevo punto de medida.  
 b) Resultados del método del "punto ficticio": cartografía de líneas de isogonancias de información  $G_D(x_0)$  expresadas en %.

#### 4. ESTIMACION DE RECURSOS Y RESERVAS

La búsqueda y estimación de los recursos y reservas de mineral es una actividad fundamental que toda empresa minera debe necesariamente llevar a cabo durante la vida de la mina, actividad que está condicionada por el agotamiento progresivo del mineral por causa de la explotación y, por otra parte, por las fluctuaciones de las cotizaciones en los metales, que hacen que un instante dado sea preciso explotar por razones de rentabilidad las zonas más ricas del depósito.

Es conveniente antes de tratar los aspectos de la estimación aclarar lo que se entiende por recursos y reservas. Los recursos mineros definen una acumulación natural de uno o varios elementos, metálicos o no, en el interior de un dominio del espacio y que con frecuencia se les denominan recursos mineros in situ; están controlados por factores naturales causantes de su génesis, por lo que puede decirse que constituyen una ocurrencia geológica de interés económico.

El otro término que se emplea muy frecuentemente en minería para conocer la importancia de una explotación es el de reservas, más concretamente el de reservas recuperables o explotables. Estas reservas surgen del impacto de la actividad de explotación sobre los recursos anteriores y constituyen la fracción de éstos que son, en un momento dado, técnica y económicamente explotables. Por consiguiente, dependen de las condiciones técnicas y económicas en las que se desarrolla el estudio, que a su vez dependen de una serie de factores más o menos complejos de evaluar, como son: el precio del metal, los costos de explotación, las técnicas metalúrgicas de tratamiento de mineral...; parámetros que repercuten, en definitiva, en el valor de la ley de corte "cut-off" de la explotación.

En general, el proceso de estimación de los recursos se sitúa en una fase previa, y diferente en cuanto a los métodos a utilizar, a la de estimación de reservas recuperables. Ambas estimaciones producen cifras de referencia básicas para el desarrollo del proyecto. La Geoestadística, a diferencia de los otros métodos clásicos, proporciona una estimación óptima de estas cantidades, tanto a nivel global como local.

#### 4.1. ESTIMACION GLOBAL

El planteamiento básico del problema de la estimación global es el siguiente. Sea el yacimiento representado esquemáticamente en la figura I.12, discretizado en  $N$  bloques (paneles)  $V$  iguales de talla equivalente a la malla de sondeos utilizada en la estimación. Se desea estimar los tonelajes de mineral  $T_G$  y de metal  $Q_G$  contenidos en el yacimiento.

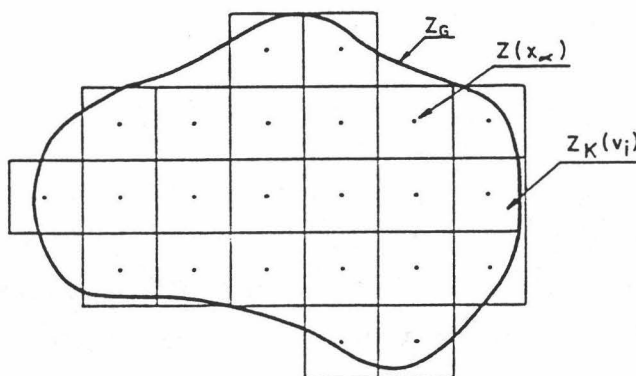


Figura I.12.- Estimación global de recursos y reservas.



#### 4.1.1. Cálculo de los recursos in situ globales

Desde la óptica global que nos ocupa dos aproximaciones geoestadísticas posibilitan la estimación de los recursos globales en un yacimiento, a partir de un krigage de la ley media del yacimiento  $Z_G$ , o bien por composición de krigages locales de las leyes de los bloques  $Z_v$ .

##### *A) Krigage de la ley media del yacimiento $Z_G$*

Se trata de estimar el valor  $Z_G$  por krigage tal que  $Z_G$  representa la ley media del yacimiento; lo expuesto en términos de integración se expresaría del modo

$$Z_G = 1/G \int_G Z(x) dx$$

El estimador lineal de krigage de  $Z_G$  es  $Z_G^* = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^G Z(x_{\alpha})$ . El sistema de krigage global es de inmediata construcción y se deduce del sistema de krigage clásico (cf. Cap. II) reemplazando el índice  $v$  por  $G$ , con lo que se tiene el sistema de ecuaciones ya expuesto

$$\begin{aligned} \sum_{\beta} \lambda_{\beta} \gamma(\alpha, \beta) + \mu_G &= \gamma(\alpha, G) \\ \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^G &= 1 \quad \alpha, \beta = 1 \text{ a } n \end{aligned}$$

y el error de estimación global  $\sigma_{KG}^2 = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^G \gamma(\alpha, G) - \gamma(G, G) + \mu_G$ .

Los recursos de mineral estimados en todo el yacimiento son proporcionados por las expresiones:

$$\begin{aligned} T_G^* &= \sum_{i=1}^N V_i \quad \text{si los } V_i \text{ son iguales queda } T_G^* = N.V \\ Q_G^* &= Z_G^* \cdot T_G^* \end{aligned}$$

La aplicación de este procedimiento, en la práctica minera, no es demasiado frecuente por tres razones que trato de explicar seguidamente. En primer lugar, la estacionaridad a escala global del yacimiento puede en ocasiones no cumplirse, no así a escala local donde las leyes pueden considerarse cuasi-estacionarias, condición menos restrictiva que posibilita

la aplicación de las técnicas de estimación local. En segundo lugar, hay que pensar que el sistema descrito puede ser complejo de resolución debido a causas de inestabilidad numérica, si se considera que el número de informaciones suele ser importante. Y en tercer lugar, se sabe que el estimador global de krigage  $Z_G^*$ , aunque es óptimo en su cálculo, puede no diferir en gran medida de otros estimadores más sencillos de obtener como es el caso de una simple media aritmética de los datos experimentales, si se encuentran repartidos homogéneamente en el espacio. En este sentido, ha sido interesante llevar a cabo una comparación de los resultados de una estimación global por tres estimadores diferentes: el krigage global presentado anteriormente, la media aritmética y los polígonos de Thiessen; otra vez el estudio afecta al mismo parámetro hídrico ya aludido (CHICA-OLMO y BEUCHER, 1983 y CHICA-OLMO, 1986).

De dicho estudio he extraído los valores de los ponderadores asociados a cada punto experimental en la estimación del valor medio del parámetro, que quedan representados en la figura I.13.

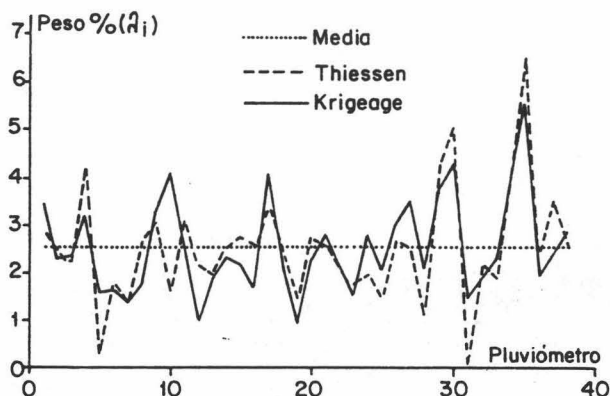


Figura I.13.- Ponderadores asociados a los puntos de información, correspondientes a la estimación del valor medio de un parámetro en un dominio.

Un análisis de dicha figura muestra que sólo los métodos de krigage y de los polígonos han diferenciado la influencia de cada punto experimental; el primero a través del variograma de la variable, el segundo debido a una simple relación de superficies  $S_i/S$ , donde  $S_i$  es el área de influencia del punto  $i$  y  $S$  la superficie total. A nivel de los resultados de la estimación global los métodos de la media aritmética y de los polígonos de Thiessen han sobreestimado un 3,9 y un 2,4 % respectivamente las precipitaciones totales en el área, con respecto al valor proporcionado por el krigage.

Aunque los resultados obtenidos por los tres métodos tienen el mismo orden de magnitud, no hay que olvidar que sólo el krigage ha permitido cuantificar el error de estimación  $\sigma_K^2$  de esas cantidades. Esta cuestión sobre la cuantificación de la confianza de la estimación podía haber quedado en un aspecto puramente teórico, si toda incertidumbre sobre el conocimiento de los recursos hídricos de la región no afectase notablemente al proyecto de gestión de los mismos. El mismo razonamiento llevado al dominio minero significaría el acotamiento de las reservas estimadas por intervalos de confianza, dependientes del error  $\sigma_K^2$ .

### B) Composición de krigages

En la práctica minera en lugar de operar con el método descrito, es más frecuente proceder reagrupando los krigages locales de los bloques  $V_i$ ; ello conduce al mismo tiempo a la estimación local y global del yacimiento o de sectores del mismo; sea:

$$Z_G^* = 1/N \sum_{i=1}^N Z_K(V_i)$$

donde  $Z_K(V_i)$  es la ley krigada del bloque  $V_i$ .

Efectivamente, el teorema de composición de krigages demuestra que se puede formar una combinación lineal de krigages parciales sobre soportes  $V$ , para obtener el krigage sobre un soporte mayor  $G$ , tal que  $G \gg V$  (JOURNEL y HUIJBREGTS, 1978). En términos de ponderadores  $\lambda$ , este teorema implica que los ponderadores  $\lambda_\alpha^G$  del krigage global se deducen por combinación lineal de los ponderadores de krigage local  $\lambda_\alpha(V_i)$  de cada bloque, esto es:

$$\lambda_\alpha^G = 1/G \int_G \lambda_\alpha(x) dx = 1/N \sum_{i=1}^N \lambda_\alpha(V_i)$$

lo mismo ocurre con el parámetro de Lagrange:

$$\mu_G = 1/G \int_G \mu(x) dx = 1/N \sum_{i=1}^N \mu(V_i)$$

El teorema no es aplicable de igual forma al cálculo de la varianza de estimación global  $\sigma_G^2$ :

$$\sigma_G^2 = E\{Z_G - Z_G^*\} = 1/N \sum_i^N \sigma_K^2(V_i) + 1/N^2 \sum_i^N \sum_j^N E\{[Z(V_i) - Z_K(V_j)] \cdot [Z(V_j) - Z_K(V_j)]\}$$

En la expresión anterior aparece en primer término una sumatoria de las varianzas de krigage de los N bloques, en segundo término aparece una sumatoria de correlaciones de errores de estimación de bloques diferentes  $V_i$  y  $V_j$ . El cálculo de este término es complicado de realizar si consideramos que el número de bloques N suele ser grande. Para resolver el problema se puede pensar, en principio, en suponer que los errores de estimación son independientes, lo que anulará el segundo término de la expresión. Mediar tal hipótesis de independencia es indefendible si se sabe a priori que en la estimación de los bloques  $V_i$  y  $V_j$  han intervenido informaciones comunes.

En esta situación compleja, de cálculo de la varianza de estimación global  $\sigma_G^2$ , la solución propuesta consiste entonces en aplicar principios de aproximación que facilitan dicho cálculo. El planteamiento y desarrollo de dichos principios de aproximación se dan con el suficiente detalle en el tratado de JOURNEL y HUIJBREGTS (1978), y que he tenido ocasión de aplicar durante el estudio de un yacimiento de lignito, de cuyos resultados doy cuenta en la tabla I.1.

Un aspecto que también merece ser mencionado en relación con la varianza de estimación global  $\sigma_G^2$ , al cual hacía referencia en apartado previo, es la influencia del error geométrico, factor que añade una incertidumbre adicional a los resultados de la estimación.

Así pues, para un yacimiento de lignito, cuya estimación global de reservas se ha hecho por el método de composición de krigages, se presentan en la tabla I.1 las varianzas de estimación de los cinco parámetros analizados: el espesor total de carbón y los contenidos en poder calorífico, cenizas, volátiles y azufre. He supuesto también interesante mostrar los resultados referidos a los dos casos de conocimiento o no de los límites del yacimiento (el estudio completo puede verse en CHICALMO, 1982 c).

Malla de sondeos	Espesor	P. calorífico x 10 <sup>6</sup>	Cenizas	Volátiles	Azufre
212 m	0,663	3,395	521,4	1.281,4	25,4
	0,883	4,537	697,5	1.701,0	32,9
150 m	0,250	1,214	196,7	483,3	9,6
	0,324	1,624	259,7	633,8	12,3
106 m	0,086	0,444	67,3	165,5	3,3
	0,113	0,598	90,9	221,9	4,3
75 m	0,037	0,165	28,9	71,1	1,3
	0,047	0,224	38,0	92,8	1,7
Dif. relativa %	23,2	25,6	24,9	24,3	22,8

Tabla 3.1.- Varianzas de estimación global de los parámetros medios en un depósito de lignito. La cifra indicada en la parte inferior corresponde al caso cuando los límites del yacimiento no son conocidos a priori "efecto de error geométrico". La diferencia relativa media es aproximadamente del 28%; como se observa, no hay grandes contrastes para los diferentes parámetros, debido a que sus variogramas respectivos tienen alcances muy parecidos. También es de notar que las varianzas decrecen rápidamente con la malla de sondeos utilizada en la estimación global, como era de esperar.

Cuando se trabaja por composición de krigeages locales, como ha sido el caso expuesto, los recursos totales de mineral y metal se calculan de forma similar al primer caso estudiado, sólo que aquí intervienen las leyes estimadas de los bloques para calcular el metal:

$$T_G^* = \sum_{i=1}^N V_i$$

$$Q_G^* = \sum_{i=1}^N Z_K(V_i) \cdot V_i$$

#### 4.1.2. Cálculo de las reservas recuperables globales

El problema específico que plantea el cálculo de reservas recuperables requiere la utilización de modelos más sofisticados que el simple krigeage lineal ya expuesto, principalmente porque dicho problema suscita un planteamiento no lineal de la estimación, por lo que se precisa recurrir a modelos algo más elaborados.

Las reservas recuperables están condicionadas además de por factores geológicos, como puede ser la estructura del yacimiento, por factores técnicos y económicos propios de la explotación, entre los que destacaré por su papel relevante el parámetro de ley de corte, el tamaño del bloque  $V$  de selección minera y las restricciones geométricas impuestas por el método de explotación.

En el presente apartado me ocupo del cálculo del recuperable a nivel global, sin entrar en consideraciones sobre los aspectos geométricos que también son abordados en apartados siguientes. Esto es, analizo la influencia de los parámetros, ley de corte  $z_c$  y tamaño del bloque  $V$  sobre la recuperación de reservas.

Como punto de referencia gráfico puede servir el esquema de la figura I.12. Para el yacimiento representado se desea estimar el mineral  $T_G(z_c)$  y el metal  $Q_G(z_c)$  que se recuperará, al aplicar libremente (sin restricciones geométricas) la ley de corte  $z_c$  a las leyes de los bloques (paneles)  $Z_V$ . Funciones de recuperación que vienen dadas por,

$$T_G(z_c) = T_{MAX} \{1 - F_V(z_c)\}$$

$$Q_G(z_c) = T_{MAX} \int_{z_c} z f_V(z_c)$$

$T_{MAX}$  es el tonelaje máximo del yacimiento y  $F_V$ ,  $f_V$  denotan respectivamente las funciones de distribución y de densidad de las leyes de bloques en el yacimiento.

Como se observará la solución del problema se reduce a modelizar el histograma  $F_V(z)$ , que hay que saber deducir del histograma de datos experimentales puntuales  $F(z)$ ,

$$F_V(z) = \text{Prob}\{Z_V < z\}$$

El modelo propuesto en geoestadística es muy intuitivo; consiste simplemente en realizar el cambio de soporte pertinente para pasar de la ley de probabilidad  $f(z)$  a la ley  $f_V(z)$ ,

$$f(z) \rightarrow f_V(z)$$

Una forma cómoda de llevar a cabo el cambio de soporte indicado la ofrece el modelo gaussiano discreto propuesto por MATHERON (1978 b), que precisa de la ayuda de una transformación gaussiana de los datos experimentales de la que se da cuenta en detalle en el Anexo I (anamorfosis gaussiana).

*A) Modelización del histograma  $F_V(z)$  a partir de  $F(z)$*

Sea  $Z(x_\alpha)$  la variable de soporte puntual con histograma acumulado  $F(z)$ . Sea  $G(y)$  la función de repartición de Gauss centrada reducida (con  $y: N(0,1)$ ). Se puede definir una correspondencia entre las variables  $Z$  y  $Y$  de la forma  $F(z) = G(y)$

$$z = \phi(y) = F^{-1}\{G(y)\}$$

donde  $\phi(y)$  es una función de anamorfosis representable analíticamente por un desarrollo en polinomios de Hermite  $H_n(y)$  y calculable experimentalmente a partir de  $F(z)$ , sea:

$$Z = \phi(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n}{n!} H_n(y) \quad \psi_n = \int H_n(y) f(y) g(y) dy$$

los  $\psi_n$  son coeficientes numéricos que ajustan por mínimos cuadrados el histograma experimental en base a los  $H_n(y)$ .

El problema quedaría resuelto si se define una función equivalente  $\phi_V(X)$  correspondiente a las leyes de los bloques  $Z_V: \phi(Y) \rightarrow \phi_V(X)$ . El modelo gaussiano discreto pone en relación las funciones de anamorfosis puntual y de bloques  $\phi$  y  $\phi_V$  por medio de un coeficiente de cambio de soporte  $r$ , tal que:

$$Z_V = \phi_V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n r^n}{n!} H_n(x) \quad X_V : N(0,1)$$

El coeficiente  $r$  es deducible de la relación siguiente:

$$S_V^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\psi_n r^n)^2}{n!}$$

donde la varianza  $S_V^2 (D^2\{Z_V/G\})$  es la varianza de las leyes de los bloques  $Z_V$ , que se conoce por la fórmula clásica

$$S_V^2 = S^2 - \gamma(V,V)$$

$S^2$  es la varianza de los datos experimentales ( $D^2\{Z/G\}$ ). Conocido el parámetro  $r$  se puede hacer el paso de  $F(z)$  a  $F_V(z)$ , con lo cual se pueden calcular las cantidades  $T_G(z_c)$  y  $Q_G(z_c)$ .

Como  $F_V(z_c) = \text{Prob}\{Z_V < z_c\} = \text{Prob}\{Y < y_c\}$  se tiene que:

$$T_G(z_c) = T_{\text{MAX}} \{1 - G(y_c)\} \quad \text{y para el metal}$$

$$Q_G(z_c) = T_{\text{MAX}} \{ [1 - G(y_c)] \cdot \psi_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n r^n}{n!} H_{n-1}(y_c) g(y_c) \}$$

donde  $y_c = \phi_V^{-1}(z_c)$  es la ley de corte anamorfoseada.

Una vez conocidas las cantidades  $T_G(z_c)$  y  $Q_G(z_c)$  sólo resta construir a nivel global las curvas de recuperación o de transferencia tonelaje/ley. Así, en la figura I.14 se han dibujado las funciones de recuperación global de un yacimiento de Cu; además se ha representado la ley media recuperable  $m(z_c)$  que es una función creciente en  $z_c$ , deducida del cociente:

$$m(z_c) = \frac{Q_G(z_c)}{T_G(z_c)}$$

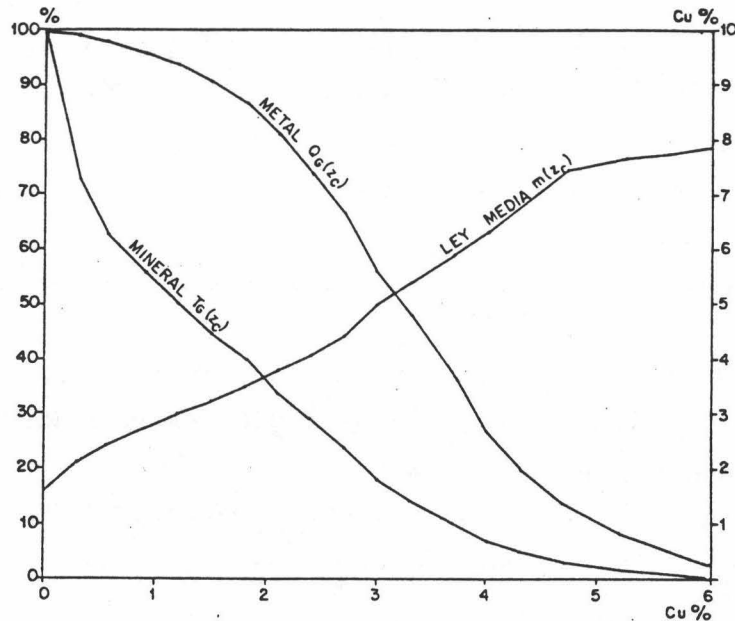


Figura I.14.- Estimación de las reservas recuperables globales en un yacimiento de Cu; el tamaño del bloque es de  $10 \times 10 \times 10 \text{ m}^3$



## 4.2. ESTIMACION LOCAL

El objetivo de la estimación global es evaluar el potencial del conjunto del depósito; se trata básicamente en la estimación local de caracterizar las zonas ricas y pobres del yacimiento en base a la estimación de las leyes de los bloques.

Tres características principales caracterizan a la estimación local: las distancias puestas en juego nunca sobrepasan los límites de cuasi-estacionaridad fijados en el análisis estructural; la vecindad de la estimación que es parcial, por tanto hace uso exclusivo de las informaciones más cercanas al bloque estimado; y finalmente la estimación de bloques, que puede constituirse en un proceso repetitivo a lo largo de la vida de la explotación, en función de los sucesivos niveles de información alcanzados.

El problema de la estimación local consiste en encontrar el mejor estimador de la ley del bloque  $Z_V$  a partir de la información experimental, constituida por las leyes de los testigos de sondeos, localizados tanto dentro como fuera del bloque, y de la información estructural representada por el variograma de las leyes.

El método geoestadístico del krigage, en sus distintas modalidades aplicables a tipos de problemas diferentes, es el mejor método de estimación local, tanto de los recursos como de las reservas explotables; produce una estimación que excluye los errores sistemáticos, que no tiene sesgo y que da un error de estimación mínimo.

### 4.2.1. Estimación local de los recursos in situ: el Krigage Ordinario

La estimación local de los recursos de un yacimiento se hace aplicando el krigage de bloques. Como se recordará el estimador de la ley media del bloque  $Z_V$  es una combinación lineal de los datos experimentales que intervienen en la estimación; se estima la integral estocástica que define  $Z_V$  por una combinación lineal de datos,

$$Z_V = 1/V \int_V z(x) dx \quad + \quad Z_V^* = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha})$$

Los pesos  $\lambda_\alpha$  se obtienen de forma óptima imponiendo las condiciones de:

$$\cdot \text{ estimación sin sesgo } E\{Z_V\} = E\{Z_V^*\}$$

\cdot error de estimación mínimo  $\sigma_K^2 = \sum_\alpha \lambda_\alpha \gamma(\alpha, V) + \mu - \gamma(V, V)$ , donde los  $n$  ponderadores  $\lambda_\alpha$  y el parámetro de Lagrange  $\mu$  se obtienen del sistema de Krigeage Ordinario (K.O.) (si existe deriva se utilizará en su caso el sistema de Krigeage Universal):

$$\sum_\beta \lambda_\beta \gamma(\alpha, \beta) - \mu = \gamma(\alpha, V)$$

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha = 1$$

La práctica, en mina, del krigeage de bloques debe estar precedida de un conocimiento profundo de la mineralización que se estima, con objeto de evitar errores muy frecuentes producidos por mezclas de informaciones provenientes de zonas no homogéneas; de esta forma se evitará realizar estimaciones incorrectas. En cuanto a los costes de utilización del krigeage, éstos no son mucho más elevados que los producidos por cualquiera de los otros métodos clásicos; en este sentido, si se ha tenido la cautela previa de establecer un buen "plan de krigeage" el tiempo de cálculo se verá reducido sensiblemente y por tanto también los costes asociados a la estimación.

En la parte tercera del trabajo se dan varios ejemplos de aplicación del krigeage local en yacimientos de naturaleza variada. De uno de ellos he extraído una serie de resultados que creo interesantes de comentar y que presento gráficamente en las figuras I.15 a-f.

Se trata de un yacimiento de carbón en el cual se han estimado por krigeage los recursos tanto globales como locales; la variable estudiada ha sido el espesor de las capas de carbón. La primera estimación de los recursos se ha hecho en dos dimensiones (2-D) a partir del krigeage del espesor de carbón acumulado en bloques de base  $105 \times 105 \text{ m}^2$ ; al final por composición de los valores estimados se ha obtenido la estimación global del depósito.

En la figura I.15 a se ve un sector amplio del depósito estimado en el que se indica en la parte superior del bloque el valor krigeado  $Z_K$  (espesor de carbón acumulado en el bloque) y en la parte inferior el valor de la varianza de estimación  $\sigma_K^2$ . El error relativo medio cometido  $\sigma_K/Z_K$  se aproxima al 15 %, aunque para determinadas áreas bien informadas puede llegar a ser inferior al 10 %, por lo que se consideran muy satisfactorios los resultados de la estimación.

El segundo tipo de estimación realizada se ha llevado a cabo en tres dimensiones (3-D). En este caso la variable implicada es la proporción de carbón "ratio", en tanto por uno, en bloques de talla  $21 \times 21 \times 10$  m<sup>3</sup> ubicados en una red paralelepípedica de dimensiones  $110 \times 105 \times 28$  bloques, según el sistema de coordenadas XYZ.

El total de bloques estimados ha sido aproximadamente de 180.000 con un tiempo de cálculo de CPU de 1 h 35' 55", que es razonable si se considera el elevado número de bloques estimados. El histograma de los datos krigeados, que se representa en la figura I.15 b, tiene un aspecto fuertemente asimétrico con frecuencia alta de valores pequeños, inferiores a 0,1 (10 %); el valor medio de la variable es  $Z_K = 0,241$  que representa un valor del 24 % de carbón para cada bloque, en media. Se constata que el valor anterior es muy próximo al valor medio experimental de la variable  $Z = 0,245$ ; es por tanto despreciable el sesgo de la estimación, al menos a nivel de valores medios.

El histograma de los errores de krigeage presenta un aspecto bimodal perfectamente definido, cuyos picos se asocian a mallas de información diferentes en el yacimiento, de 106 m y 150 m respectivamente. La desviación típica del error tiene como valor medio  $\sigma_K = 0,179$ , lo cual supone en términos relativos un error del 74 %, valor que a priori parece alto pero que es normal si se tiene en cuenta la amplitud de las mallas de estimación citadas en relación al tamaño del bloque.

Por otra parte, se ha dibujado la nube de correlación entre los datos estimados  $Z_K$  y los datos experimentales para aquellos bloques que contenían un sondeo de información en el interior. Como se observa la correlación  $E\{Z_K \cdot Z\}$  es alta, con un coeficiente de correlación  $r = 0,94$ , como cabía esperar (véase figura I.15 e).



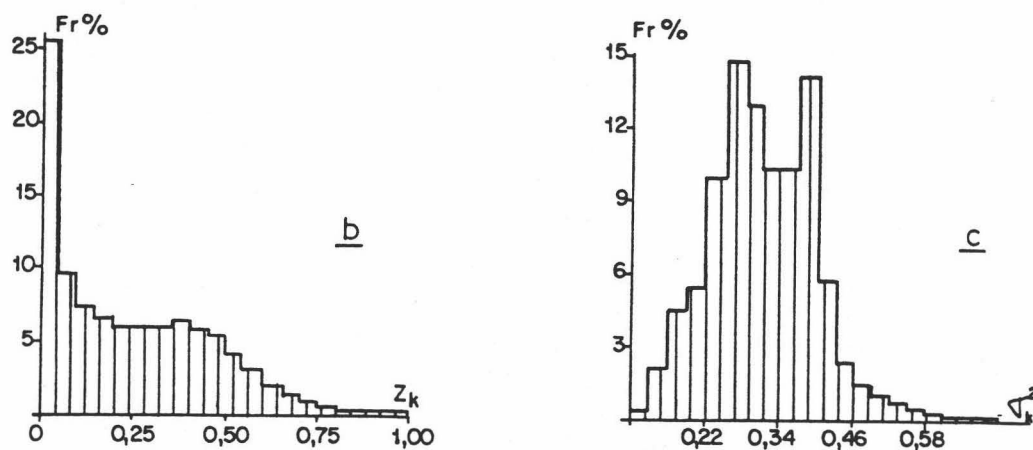


Figura 7.15 b y c.- Histograma de valores krigeados de la proporción de carbón en bloques de  $21 \times 21 \times 10$  m<sup>3</sup>. Histograma de los errores de estimación de kriging.

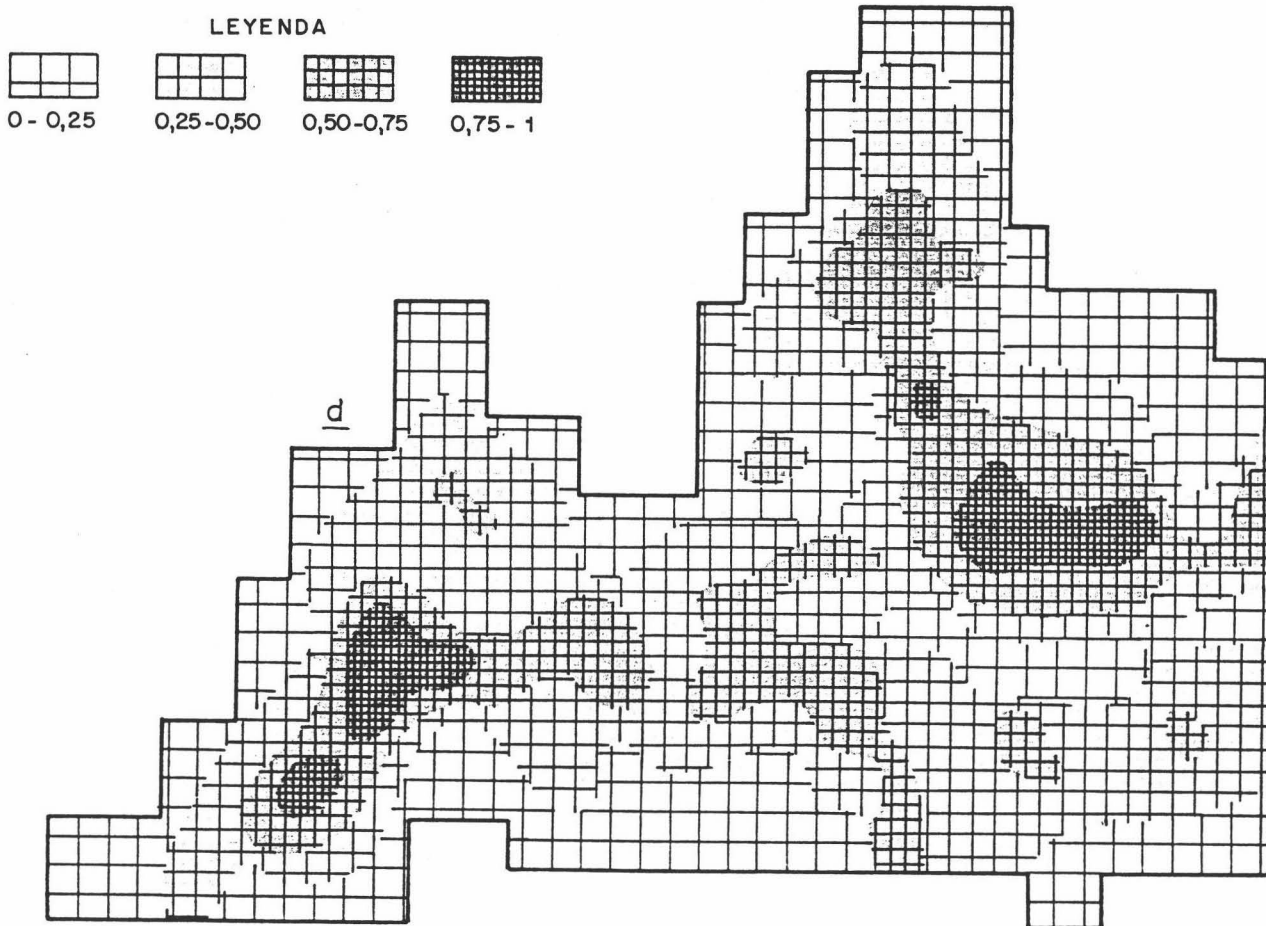


Figura 7.15 d.- Mapa de distribución de los valores krigeados de la proporción de carbón en bloques, para un banco de explotación de la mina.

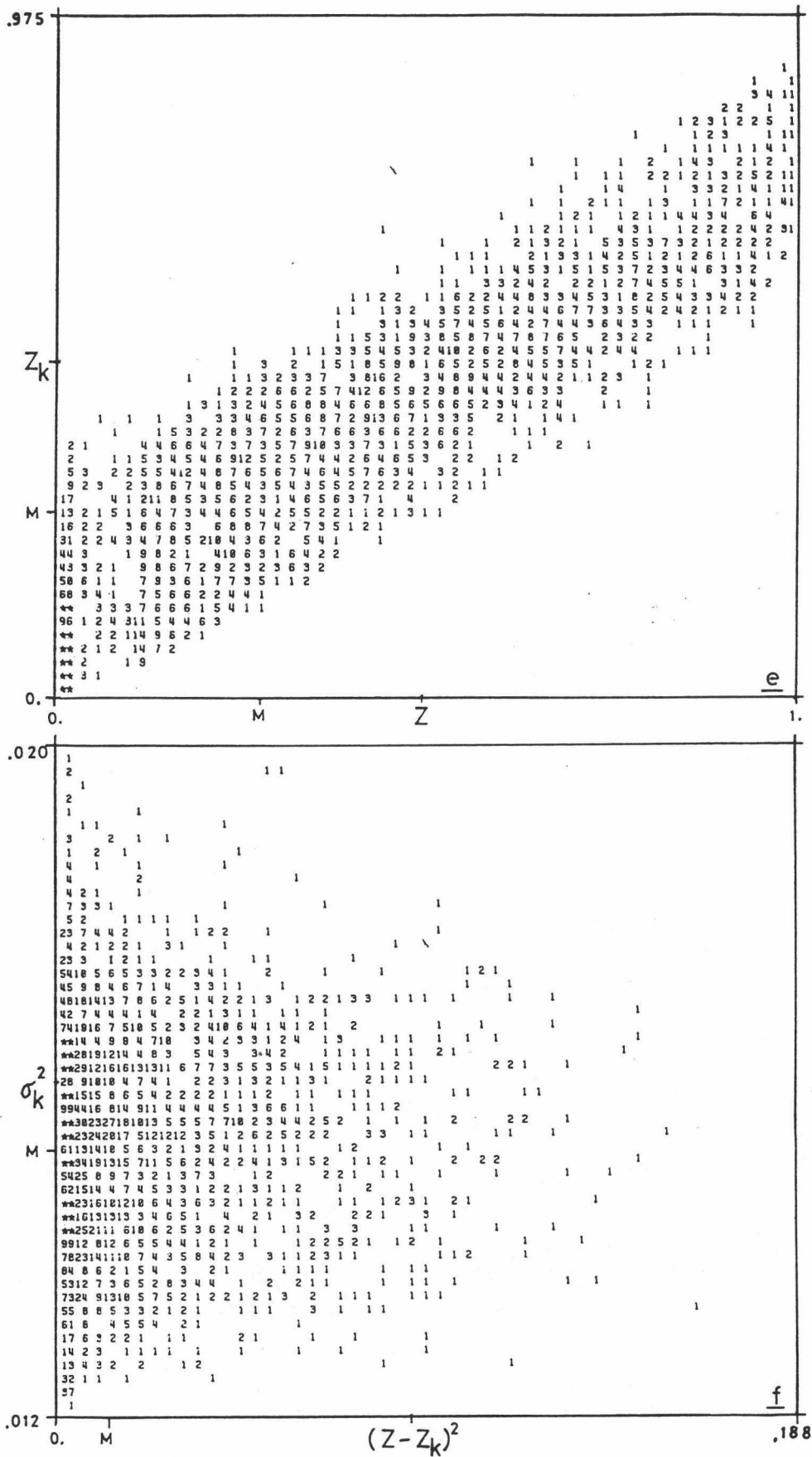


Figura 7.15 e y f.- Nubes de correlación entre:  $Z_k/Z$  y  $\sigma_k^2/(Z-Z_k)^2$ .

También, otro test que es interesante de aplicar, en el estudio de la estimación de bloques, consiste en representar en nube de correlación la diferencia cuadrática  $(Z-Z_K)^2$  y el error  $\sigma_K^2$  (figura I.15 f). Debe entenderse que tal comparación debería hacerse con  $Z_V$ , en lugar de  $Z$ , puesto que lo que se busca es relacionar los errores experimentales cometidos con los errores teóricos. Desgraciadamente,  $Z_V$  tan sólo se conocerá después de la explotación de bloque, con lo cual el estudio se condiciona a la variable experimental  $Z$ . Efectivamente, se observa en la figura una nube de puntos dispersos poco correlacionados ( $r = 0,04$ ), con evidencia de que los errores de estimación son independientes del valor estimado: en términos de proyección en espacio vectorial engendrado por la variable, el error de estimación es ortogonal al estimador de krigage (Anexo IV). Además, el valor medio de la relación de estas variables  $1/N E\{(Z-Z_K)/\sigma_K\}^2$  es 0,93, próxima a 1, indicativo de que el modelo de variograma se ajusta bien a la regionalización.

Finalmente, como se indicaba en el inicio de este apartado, el krigage local debe servir para identificar las zonas ricas y pobres del yacimiento, y un modo gráfico que lo posibilita es elaborar mapas de grises o de sombreados para intervalos de leyes de estimación de bloques, como el dibujado en la figura I.15 d, referente a un nivel de explotación del yacimiento. Con este tipo de gráficos se facilita la localización de los sectores más ricos en el banco, y ayudan por tanto a planificar la explotación a medio y largo plazo.

#### 4.2.2. Estimación local de reservas recuperables: el Krigeage Disyuntivo

Se estudia en este apartado la estimación del recuperable local bajo el supuesto de una selección libre de los bloques de explotación. No se abordan los aspectos geométricos del cálculo del recuperable que serán objeto de estudio más tarde.

La estimación de reservas recuperables se conoce también en términos geoestadísticos con el nombre de cálculo de funciones de recuperación; dentro de éstas se distinguen dos tipos, las directas que suponen la selección sobre la ley verdadera del bloque, y las indirectas que lo hacen sobre el estimador último disponible de la ley del bloque.

Para el planteamiento del problema nos sirve el esquema representado en la figura I.16. Sea un panel de explotación  $V$  de dimensiones equivalentes a la malla de reconocimiento disponible en el momento del estudio, el panel lo componen  $N_v$  bloques elementales  $v_i$  tal que  $V = \cup v_i$ . En la realidad minera  $v$  representa al bloque de selección o unidad mínima que puede afectarse a mineral o estéril atendiendo a las restricciones impuestas por el método de explotación.

Se desea estimar las dos cantidades clásicas a las que se aludía en situaciones anteriores, el mineral y el metal recuperables, esta vez localmente para el panel  $V$ , cuando se seleccionen libremente los bloques  $v_i$  por la ley de corte  $z_c$ ,  $Z_v > z_c$ . Cantidades que se anotan por  $T_V(z_c)$  y  $Q_V(z_c)$ .

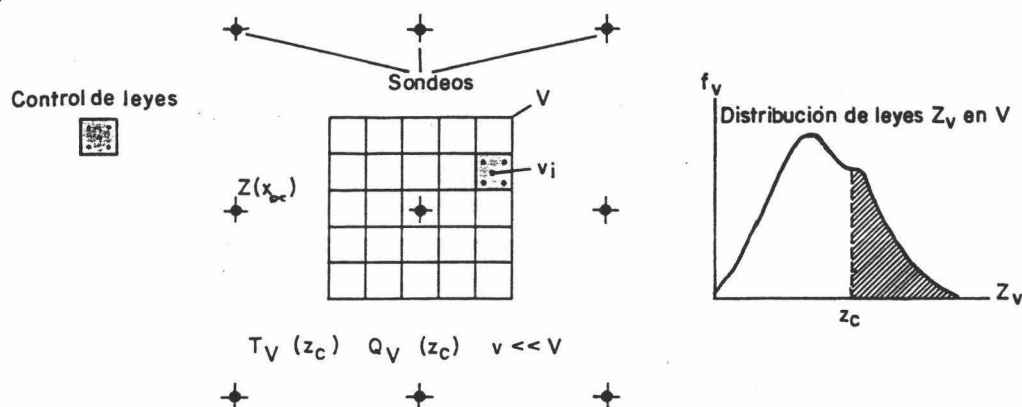


Figura I.16.- Estimación local de las funciones de recuperación de mineral y metal.

#### A) Cálculo de funciones de recuperación directas

Se supone, en el momento de la explotación del bloque  $v$ , que se dispondrá de un estimador  $Z_K$  de su ley media  $Z_v$  suficientemente preciso como para considerar conocida la ley verdadera,  $Z_v = Z_K$  "selección directa" ( $Z_K$  puede venir de la estimación a partir de los datos de la malla de control de leyes).

Hecha esta puntualización, se plantea la cuestión del cálculo del mineral y del metal contenidos en los bloques  $v_i$  que superan la ley  $z_c$ , cantidades que pueden expresarse sin dificultad alguna del modo siguiente:



$$T_V(z_c) = t_V \left\{ \frac{1}{N_V} \sum_i \theta_{z_c}(Z_{vi}) \right\}$$

$$Q_V(z_c) = \frac{t_V}{N_V} \{ \sum_i Z_{vi} \theta_{z_c}(Z_{vi}) \}$$

$$\theta_{z_c}(Z_{vi}) = \begin{cases} 1 & \text{si } Z_{vi} \geq z_c \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$\theta_{z_c}$  es una función indicatriz de la ley del bloque y  $t_V$  es el tonelaje del panel V.

El problema de estimación que se plantea se reduce al cálculo del valor medio de la función  $\theta_{z_c}$  en el panel; o si se quiere exponer el problema de otra forma, se trata de encontrar un estimador local de la función de densidad  $f\{Z_{v_1}/Z(x_\alpha)\}$  de las leyes de los bloques  $Z_{v_1}$  en el panel, condicional a los datos experimentales  $Z(x_\alpha)$ . La complejidad de la cuestión suscitada imposibilita la aplicación de los métodos lineales tal como han sido presentados, por lo que es necesario recurrir a métodos de estimación no lineales que permitan estimar toda función  $f$  de la variable regionalizada,  $f(Z_0)$ .

Teóricamente se sabe que la mejor estimación posible de  $f(Z_0)$  a partir de los datos experimentales  $Z(x_\alpha)$  es la esperanza condicional:

$$E \{ f(Z_0) / Z(x_\alpha), \alpha = 1 \text{ a } n \}$$

es decir, la proyección de  $f(Z_0)$  sobre el espacio de funciones medibles de la forma  $f(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$  que forman un espacio de Hilbert (MATHERON, 1976 b) en el cual hay que encontrar el vector  $f^*(Z_0)$ , función de los  $Z(x_\alpha)$ , que estima a  $f(Z_0)$  con una varianza de error mínima:  $\text{Var}\{f(Z_0) - f^*(Z_0)\}$  mínima. Se demuestra que para obtener esta esperanza condicional es preciso utilizar la ley con  $n-1$  variables  $\{Z_0, Z(x_\alpha), \alpha = 1 \text{ a } n\}$ . Pero en general no es accesible experimentalmente, particularmente si el número de datos  $n$  es un poco grande; por tanto hay necesidad de recurrir a modelos simplificadores.

Para resolver el problema MATHERON (1973 b y 1975 b) ha propuesto un método substitutivo a la esperanza condicional, al que se ha hecho referencia en apartados previos, el Krigeage Disyuntivo (KD). Este es un método algo más complejo de elaborar que el krigeage simple y ordinario, porque obviamente los problemas a los que se debe enfrentar son también más complejos de resolver. No obstante, su desarrollo práctico no tiene mayores

dificultades, con la ventaja de que soluciona los problemas de estimación no lineales como los presentados en el cálculo de reservas recuperables.

La idea directriz del KD es la búsqueda de un estimador no lineal de toda función  $f(Z_0)$  de la forma

$$f^*(Z_0) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(Z_{\alpha})$$

donde las  $f_{\alpha}$  son esta vez funciones de los datos experimentales

$$f^*(Z_0) = \sum_{\alpha} \lambda(Z_{\alpha}) \cdot Z_{\alpha}$$

Las funciones  $f(Z_0)$  a estimar son el mineral y el metal recuperables  $T_V(z_c)$  y  $Q_V(z_c)$ , cuyos estimadores de KD son  $T_V^{KD}(z_c)$  y  $Q_V^{KD}(z_c)$ .

Se consideran las funciones de anamorfosis gaussiana puntual y de bloque  $\phi(y)$  y  $\phi_V(x)$  ya referidas, y se hacen hipótesis diferentes sobre las leyes de probabilidad de las parejas de gaussianas: punto-punto ( $Y_i, Y_j$ ) y punto-bloque ( $Y_i, X_j$ ) necesarias para simplificación del problema (se reduce el problema al estudio de funciones bivariantes).

Con este modelo gaussiano se pueden expresar los estimadores de  $T_V$  y  $Q_V$  como:

$$\begin{aligned} T_V^{KD} &= t_V \int_{y_c}^{\infty} f_V^{KD}(x) dx \\ Q_V^{KD} &= t_V \int_{y_c}^{\infty} \phi_V(x) f_V^{KD}(x) dx \end{aligned} \quad \text{con } y_c = \phi_V^{-1}(z_c)$$

todo se reduce a calcular la función de "densidad" de KD en el panel  $f_V^{KD}$ , que es el estimador de la función de densidad  $f(Z_V/Z_{\alpha})$  de distribución de las leyes  $Z_V$  en el panel, condicionada por los datos  $Z_{\alpha}$ . Tal que  $f_V^{KD}$  admite el desarrollo

$$f_V^{KD}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^{*V}}{n!} H_n(x) g(x)$$

donde los  $H_n^{*V}$  son valores numéricos a estimar (son los factores del desarrollo de la función  $f$  en polinomios de Hermite "modelo isofactorial").

Básicamente existen dos modelos que a través de hipótesis diferentes llevan a la estimación de los  $H_n^{*V}$ , el modelo hermitiano y el modelo gaussiano discreto. Estas son las características principales de cada uno de ellos.

a) Modelo hermitiano

Se parte de la hipótesis de que las densidades de probabilidad a dos variables  $g(Y_i, Y_j)$  y  $g(Y_i, X_j)$  son hermitianas, esto es, admiten un desarrollo en polinomios de Hermite del modo:

$$\text{punto-punto } g(Y_i, Y_j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n(y_i, y_j)}{n!} H_n(Y_i) H_n(Y_j) g(Y_i) g(Y_j)$$

$$\text{punto-bloque } g(Y_i, X_j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n(y_i, x_j)}{n!} H_n(Y_i) H_n(X_j) g(Y_i) g(X_j)$$

(desarrollo isofactorial de las leyes bivariables  $g(Y_i, Y_j)$  y  $g(Y_i, X_j)$ ).

Donde  $g(\ )$  = densidad de Gauss reducida

$g(\ , \ )$  = densidad de Gauss a dos variables reducidas, correlacionadas

$H_n(\ )$  = polinomio de Hermite de orden  $n$

$$T_n(y_i, y_j) = E\{H_n(Y_i) \cdot H_n(Y_j)\} = \rho_{i,j}^n$$

$$T_n(y_i, x_j) = E\{H_n(Y_i) \cdot H_n(X_j)\} = \frac{1}{D_n} \cdot \frac{1}{v} \int_v T_n(y, x) dx$$

con  $D_n = \frac{1}{v} \int_v \int_v T_n(x, y) dy dx$

relaciones que pueden verse en detalle en MATHERON (1974 y 1976 b).

b) Modelo gaussiano discreto

Considera que el yacimiento está discretizado en bloques  $v_i$  de leyes  $Z_{v_i}$ , con la hipótesis adicional de que los puntos de datos  $x_i$  de los valores experimentales  $Z(x_i)$  están implantados aleatoriamente en el volumen  $v_i$  al que pertenecen (randomización de la ley puntual en el bloque). Con este esquema geométrico se hacen las hipótesis siguientes:

- para cualquier  $i$  la pareja de variables  $(Y_i, X_i)$  es bigausiana, con un coeficiente de correlación  $r = E\{Y_i \cdot X_j\}$  (coeficiente de cambio de soporte de punto/bloque)
- si se fija la variable normal del bloque  $X_i$  la variable puntual  $Y_i$  es independiente de los otros  $X_j, Y_j$
- $X_i$  sigue una ley normal con  $n$  variables.

Todas estas hipótesis permiten obtener las funciones de covarianza necesarias al cálculo del KD de las funciones de recuperación, sean:

$$\rho_{i,j} = E\{Y_i \cdot Y_j\} \quad (\text{punto-punto})$$

$$r_{i,vj} = E\{Y_i \cdot X_j\} \quad (\text{punto-bloque})$$

$$R(v_i, v_j) = E\{X_i \cdot X_j\} \quad (\text{bloque-bloque})$$

con  $\rho_{ij} = r^2 R(v_i, v_j)$ ,  $r_{i,vj} = r R(v_i, v_j)$   $i \neq j$

Las covarianzas  $\rho_{ij}$  y  $r_{i,vj}$  son las equivalentes a los términos  $T_n$  del modelo hermitiano.

Una vez elegido el modelo, la estimación de los  $H_n^{*V}$  no presenta mayor dificultad. El cálculo se restringe a realizar  $n$  krigeages simples de los polinomios de Hermite  $H_n(y)$ :

$$H_n^{*V} = \sum \lambda_n^\alpha H_n(y_\alpha)$$

donde los  $\lambda_n^\alpha$  son los ponderadores obtenidos de los  $n$  krigeages simples, explícitos seguidamente según el modelo escogido:

$$\sum_\beta \lambda_n^\beta \rho_{\alpha,\beta}^n = \frac{1}{Nv} \sum_{i=1}^{Nv} (r_{\alpha,vi})^n \quad - \text{Modelo Gaussiano Discreto}$$

$$\sum_\beta \lambda_n^\beta T_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{D_n} \frac{1}{Nv} \sum_{i=1}^{Nv} T_n(\alpha, v_i) \quad - \text{Modelo Hermitiano}$$

-Sistemas de Krigeage Disyuntivo-

Conocidos los  $H_n^{*V}$  se puede pasar al cálculo de las funciones de recuperación directas del panel V.

$$T_V^{KD}(z_c) = t_V \int_{y_c} f_V^{KD}(x) dx = t_V \{1 - G(y_c) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{*V}}{n!} H_{n-1}(y_c) g(y_c)\}$$

$$Q_V^{KD}(z_c) = t_V \int_{y_c} \phi_V(x) f_V^{KD}(x) dx = t_V \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_m r^m H_n^{*V}}{m!n!} \right\} \int_{y_c} H_m(x) H_n(x) g(x) dx$$

En la práctica, el cálculo de la integral del segundo miembro se hace a partir de la fórmula de recurrencia

$$Q_V^{KD}(z_c) = t_V \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_m r^m H_n^{*V}}{m!n!} U_{n,m}(y_c) \right\}$$

donde los coeficientes  $U_{n,m}$  se deducen unos de otros por las relaciones:

$$U_{n,m} = U_{m,n}$$

$$U_{0,0} = 1 - G(y_c) = G(-y_c)$$

$$U_{n,0} = U_{0,n} = -H_{n-1}(y_c) g(y_c) \quad (n > 0)$$

$$U_{n,m} = U_{m,n} = -H_n(y_c) H_{m-1}(y_c) g(y_c) + m H_{n-1,m-1} \quad (n, m > 0)$$

Por último, deducidos los  $H_n^{*V}$  se puede también calcular el estimador de KD del panel V

$$Z_V^{KD} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n r^n}{n!} H_n^{*V}$$

De los dos modelos descritos es quizás el KD en el caso gaussiano discreto el más utilizado en la práctica, debido a las simplificaciones que introduce en el cálculo de covarianzas de los sistemas de krigeage. En cualquier caso, ambos modelos requieren la estacionaridad de las leyes en el yacimiento, de modo que sus resultados dependen del grado de acondicionamiento de esta hipótesis al yacimiento (al menos localmente).

Dentro de las investigaciones que se llevan a cabo en el dominio de la geoestadística no lineal, se han propuesto recientemente otros métodos alternativos al KD, entre los que hay que mencionar el krigeage de indicatrices (JOURNEL, 1982, 1983 y 1984) y el método del krigeage con condicionamiento uniforme (GUIBAL y REMACRE, 1984; REMACRE, 1984). Otra

línea de investigación actual, en este campo, se refiere al desarrollo del KD para el caso de variables discretas, que ofrece un gran interés para la estimación de ciertos tipos de yacimientos cuyo exponente más claro son los depósitos de diamantes (MATHERON, 1984).

En la práctica, son calculadas las funciones de recuperación  $T_V$  y  $Q_V$  para cada panel  $V$ , o conjunto de ellos, que componen el yacimiento. Una forma cómoda y sintetizada de presentar los resultados es mediante gráficas tonelaje/ley como la representada en la figura I.17, correspondiente al cálculo del recuperable en un sector de un yacimiento.

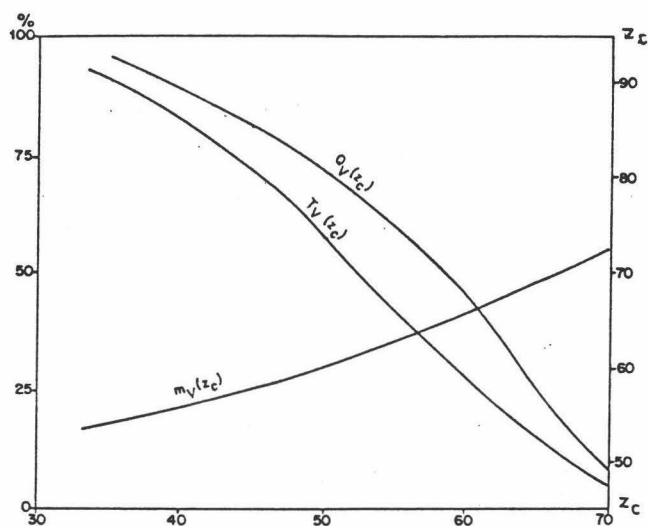


Figura I.17.- Cálculo por KD de las reservas recuperables locales en un sector de un yacimiento.

El estudio del recuperable, tanto global como local, admite otra vía de análisis además de la expuesta en base a la estimación no lineal; esta nueva posibilidad la ofrece el método geoestadístico de simulación condicional (MARECHAL, 1976 a y b). El método de simulación condicional, que se abordará con el suficiente detalle más tarde, conduce al cálculo del valor "real" (simulado) de las leyes de los bloques del panel  $Z_V$ , así pues el recuperable se deduce de inmediato por aplicación de las relaciones:

$$T_V(z_c) = t_V \left\{ \frac{1}{N_V} \sum_{z_c} \theta_{z_c} (Z_{vi}^{SC}) \right\}$$

$$Q_V(z_c) = \frac{t_V}{N_V} \left\{ \sum Z_{vi}^{SC} \cdot \theta_{z_c} (Z_{vi}^{SC}) \right\}$$

$$\text{con } \theta_{z_c} (Z_{vi}^{SC}) = \begin{cases} 1 & \text{si } Z_{vi}^{SC} \geq z_c \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

En la figura I.18 se han dibujado las curvas de recuperación global tonelaje/ley obtenidas por simulación en un depósito de carbón. Se han dibujado las funciones para los soportes de bloque y de panel.

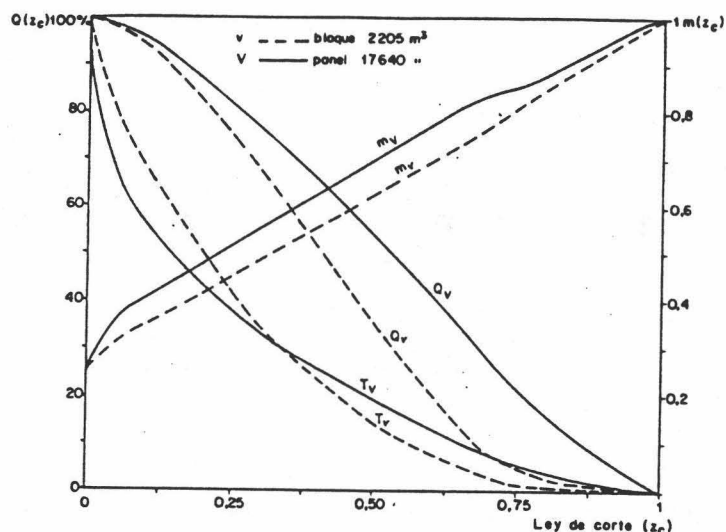


Figura I.18.- Cálculo de reservas recuperables en un depósito de carbón por el método de simulación condicional. El parámetro de corte  $z_c$  es la proporción de carbón en el bloque (en tanto por uno).

Un ejemplo de comparación de resultados obtenidos en el cálculo del recuperable local en un yacimiento de sulfuros (Fe, Pb, Zn), a partir de los métodos de KD y de simulación se da en LIBERTA (1981).

#### *Bi Cálculo de funciones de recuperación indirectas*

En el caso de funciones de recuperación indirectas se estudia el problema de que  $Z_V \neq Z_V^*$ : el estimador que se construirá en el momento de la explotación del bloque es diferente de la ley verdadera del bloque.

La situación que se plantea implica que la selección es hecha indirectamente sobre un estimador de la ley del bloque y no sobre la ley verdadera, como ocurría en el caso previo; aunque presumiblemente el estimador  $Z_V^*$  cumplirá la condición de no sesgo condicional, característica importante para la bondad de los resultados finales de la selección.

$$E\{Z_V/Z_V^*\} = Z_V^*$$

En todo rigor, la cuestión que subyace en el planteamiento previo radica en la estimación por KD de la función de probabilidad de la variable con  $n+1$  componentes  $\{Z_v^*, Z(x_\alpha), \alpha = 1 \text{ a } n\}$ , sea la función  $f_{KD}\{Z_v^*/Z(x_\alpha)\}$ . Otra vez las cantidades a estimar son las mismas, el mineral  $T_V(z_c)$  y el metal  $Q_V(z_c)$ , que se recuperan en el panel al aplicar el parámetro  $z_c$  a las leyes estimadas de los bloques.

$$T_V(z_c) = t_V \{Nv \cdot \sum_i \theta_{z_c}(Z_{vi}^*)\}$$

$$Q_V(z_c) = \frac{t_V}{Nv} \{ \sum_i Z_{vi}^* \cdot \theta_{z_c}(Z_{vi}^*) \}$$

$$\text{con } \theta_{z_c}(Z_{vi}^*) = \begin{cases} 1 & \text{si } Z_{vi}^* \geq z_c \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Se demuestra que el KD de estas expresiones equivale a considerar la función siguiente (MATHERON, 1975 b):

$$\theta_{x_c}(X_i^*/s) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i^*/s \geq x_c \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

siendo  $X_i^*$  el estimador de la gaussiana del bloque  $Z_{vi}$ ;  $s$  un coeficiente numérico de valor  $E\{X_i^*\} = s$  y  $x_c$  la ley de corte anamorfoseada, deducida de la función de anamorfosis del estimador del bloque

$$z_c = \phi_v^*(x_c) \quad \text{y} \quad Z_{vi}^* = \phi_v^*(X_i^*/s)$$

Por aplicación del modelo gaussiano discreto se estiman las cantidades  $\frac{1}{Nv} \sum_i H_n(X_i^*/s)$  necesarias a la construcción del KD, cuyo estimador vale como se recordará:

$$H_n^{*V} = \sum_\alpha \lambda_n^\alpha H_n(Y_\alpha)$$

Las incógnitas  $\lambda_n^\alpha$  son deducidas de los  $n$  sistemas de KD,

$$\sum_\beta \lambda_n^\beta \rho_{\alpha,\beta}^n = \frac{1}{Nv} \sum_i \left( \frac{r_{\alpha,vi}}{s} \right)^n$$

El resto de cálculo para obtener  $T_V(z_c)$  y  $Q_V(z_c)$ , conocidos los  $H_n^{*V}$ , son idénticos a los presentados en el caso de las funciones de recuperación directas. Las diferencias básicas en el cálculo de las funciones directas e indirectas son: en el caso indirecto, la ley de corte  $z_c$  se define por la anamorfosis  $\phi_v^*$  y no por  $\phi_v$  del caso directo.



Los ponderadores  $\lambda_{\alpha}^n$  de KD se obtienen, para ambos casos, de sistemas de ecuaciones que difieren sólo en su parte derecha, en el caso indirecto aparecen las covarianzas  $r_{\alpha,vi/s}$  mientras que en caso directo lo hacen las covarianzas  $r_{\alpha,vi}$ .

## 5. DISEÑO DE EXPLOTACION

### 5.1. INTRODUCCION

En el estudio anterior se analizó el problema del recuperable de un yacimiento en el supuesto de selección libre de bloques en la explotación. Se trata ahora de analizar en qué medida las restricciones geométricas impuestas en la mina (explotaciones a cielo abierto) condicionan el cálculo de tales reservas.

La programación de una explotación minera es una operación evidentemente compleja que se extiende durante varios años y que incluye grandes desembolsos de capital, así como un gran riesgo. Por consiguiente, es importante conocer las características principales que tendrá el proyecto al término de la explotación, sean éstas: el diseño final de la corta, el volumen total extraído, el metal recuperado, el ratio de descubierto estéril/mineral, etc. Todas ellas van a influir de una u otra forma en el beneficio global obtenido, y que a su vez dependerán de factores de naturaleza técnica y económica variada, como por ejemplo el equipo tecnológico escogido, las inversiones realizadas, el periodo de vida de la mina, la dimensión e implantación de las instalaciones, etc; factores que son complejos de analizar y que deben quedar determinados durante el estudio de viabilidad.

Se ve por tanto que desde la fase inicial del proyecto se plantea el problema de **optimizar** la explotación. Su estudio está limitado a la información disponible proveniente del reconocimiento, en general, insuficiente para abordar con el detalle que requiere el problema. De otro lado, se debe considerar también que muchos de los factores indicados son poco o mal conocidos en esta etapa, como por ejemplo las leyes de corte que deberán aplicarse.

Pues bien, es objeto de este apartado el estudio de optimización del diseño de la corta final con referencia a alcanzar un óptimo económico

en la explotación, sea éste el beneficio global. En base a este criterio, la cuestión que se plantea en síntesis es discernir entre los proyectos técnicamente realizables aquél que es el más rentable.

Dar una respuesta rigurosa a la cuestión anterior no es menos que ilusorio, ello por dos razones que me parecen evidentes. Porque difícilmente se podría elaborar un modelo tan sofisticado, en el cual tuviesen cabida el elevado número de parámetros que intervienen. Y porque si fuese posible tal modelo, se produciría una combinación tan grande de posibilidades que imposibilitaría su análisis uno a uno. Hay interés, por tanto, a fin de encontrar una respuesta satisfactoria, en limitar dicha combinatoria y en reducir el número de parámetros a los más fundamentales, uno o dos por ejemplo; entonces proponerse como objetivo encontrar una familia de proyectos posibles y no un único proyecto que parece un tanto utópico de obtener en la práctica.

## 5.2. EL MODELO GEOESTADISTICO DE PARAMETRIZACION TECNICA DE RESERVAS

Las consideraciones expuestas han conducido a MATHERON (1975 c) a formalizar una metodología para el estudio de optimización del diseño de explotaciones a cielo abierto, conocido con el nombre de Parametrización técnica de reservas, el cual trabaja sobre los resultados de la estimación geoestadística del yacimiento. El método ha sido desarrollado en los aspectos de aplicación y computación por FRANCOIS-BONGARCON (1978), MARECHAL y FRANCOIS-BONGARCON (1976 a y b) y GUIBAL (1976), como principales autores participes.

La parametrización técnica busca definir de otra forma a la presentada en apartados anteriores la relación tonelaje/ley de un yacimiento. Así, antes se interesaba en el cálculo de las funciones de recuperación global o local  $Q(z_c)$ ,  $T(z_c)$  y  $m(z_c)$ ; ahora como consecuencia de las restricciones geométricas impuestas se busca definir el óptimo en el yacimiento de las funciones  $Q(T)$ ,  $m(T)$  y  $T(m)$ . Las dos primeras funciones están parametrizadas en  $T$ , que es el mineral del proyecto estudiado, y particularmente  $Q(T)$  dibuja una función creciente y cóncava en  $T$  como se observa en la figura I.19.

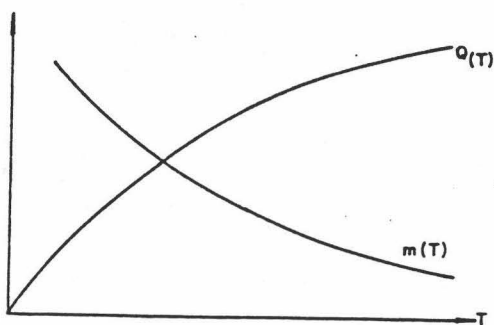


Figura 7.19.- Parametrización técnica de reservas: relación tonelaje/ley.

La curva  $Q(T)$  define el metal contenido en el "mejor" proyecto técnicamente realizable de tonelaje  $T$  fijo. Es necesario para encontrar esta función, objetivo último de la parametrización, definir una función de valoración de cada bloque. Así, globalmente se tiene una función beneficio  $B$  dependiente de  $Q$  y  $T$  y de los parámetros técnicos, que se debe maximizar por medio de algoritmos adecuados. Como función de valoración se puede dar la siguiente

$$B_{MAX} = Q - \lambda V - \theta T$$

donde  $Q$  es el metal,  $T$  el tonelaje de mineral,  $V$  el tonelaje de todo uno (estéril más mineral) y  $\lambda$ ,  $\theta$  parámetros dependientes de los costos de extracción y tratamiento del mineral, que tienen la representatividad de una ley de corte.

La valorización debe definirse para cada bloque (panel) del yacimiento, calculable a partir de la ley estimada por krigeage y más adecuadamente por KD, ya que de este modo se trabaja directamente con funciones de recuperación.

Establecida la función beneficio para cada bloque, cuyo número puede llegar a ser importante como se ha visto, la familia de proyectos óptimos se obtendrá por combinatorias sucesivas de los bloques. Por esta razón el método de parametrización utiliza un algoritmo que simplifica el cálculo combinatorio, dando la solución en un tiempo de trabajo razonable. Al respecto, los trabajos de FRANCOIS-BONGARCON (1978) han demostrado que el método produce resultados al menos tan buenos como los del método clásico de LERSCHS y GROSSMAN (1964), basado en el cierre máximo de un grafo, con tiempos de cálculo numérico muy inferiores y con diferencias en tiempo que crecen con el número de bloques tratados.

El método produce (en la versión del programa MULTIPIT del C.G.M.M.) una familia de proyectos encajados todos óptimos, que van de menor a mayor tonelaje T. Su eficacia radica en que hace intervenir factores tanto técnicos, como son los costos de extracción y tratamiento del mineral, como geométricos, sean la altura del banco de explotación, el número de bancos, el talud o pendiente de la corta, etc.

No es objeto de este trabajo entrar en los detalles del algoritmo matemático de la parametrización, que por otra parte se exponen de forma extensa y precisa en los trabajos referenciados y del cual he presentado los conceptos más básicos. Pero sí quiero comentar que el método ha sido aplicado con ocasión del desarrollo de un proyecto de Pb-Zn-Ag, del cual he entresacado algunas figuras que globalizan esquemáticamente el tipo de resultados que caben esperar de su aplicación práctica.

Así, en la figura I.20 a se ve la familia de proyectos obtenidos, 28 en total, todos ellos óptimos en el sentido que maximizan la cantidad de metal Q(V) para un valor del todo uno V, fijo. Puede observarse la situación que corresponde a cada uno de ellos en la curva Q(V).

La figura I.20 b representa la función Q(T) para la familia anterior, con T el tonelaje de mineral. La pendiente de la función en cada proyecto,  $t_m = Q/T$ , representa la ley media recuperada; parece constatarse en este caso que los proyectos deducidos son poco sensibles a la ley media, ya que se disponen prácticamente según una recta de pendiente constante, cuyo valor coincide con la ley media de la mina (más detalles en Cap. IX).

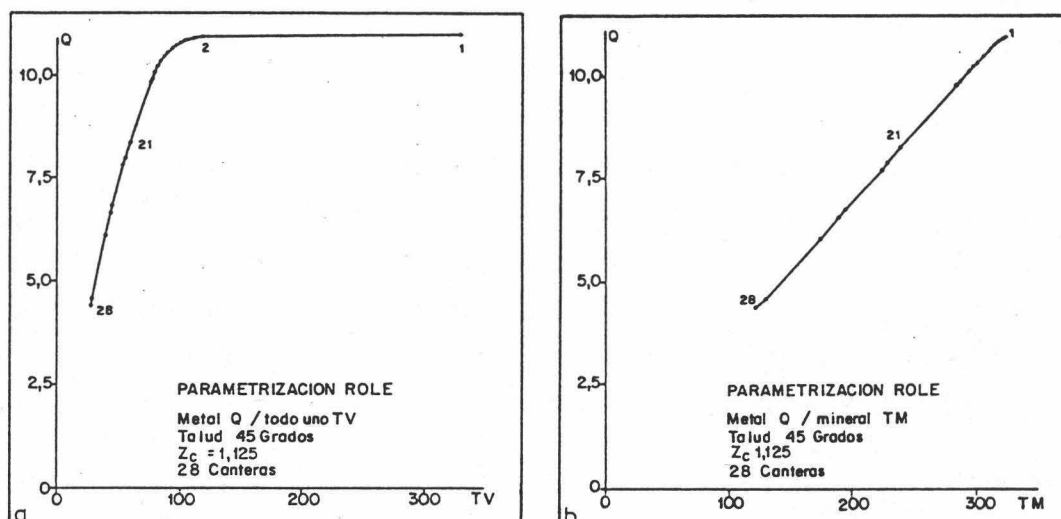


Figura I.20.- Parametrización técnica de reservas de un yacimiento de Pb-Zn-Ag: a) Curva Q(V)/V, b) Curva Q(T)/T. (programa MULTIPIT del C.G.M.M.).

## 6. INFLUENCIA DEL MEDIO GEOLOGICO

La estimación de reservas es una de las etapas más importantes de la caracterización de los recursos mineros; ahora bien, para facilitar la aplicación de estos resultados en el estudio de viabilidad es necesario al mismo tiempo evaluar las dificultades potenciales que puede ocasionar la extracción del mineral. De todas ellas la más notoria es debida al medio geológico en el que encaja el mineral, cuya influencia sobre el proyecto de explotación puede ser en ciertos casos decisiva. El geólogo debe hacer una primera evaluación de estos factores durante la preexplotación con el fin de estudiar las condiciones de explotabilidad del yacimiento.

En el análisis de este problema son muchos y variados los factores que intervienen; interés especial merece el estudio del volumen y la naturaleza del recubrimiento, o del estéril intercalado, a sacar durante la explotación. Hay un interés doble en este estudio, pues de una parte, los resultados obtenidos pueden utilizarse durante la planificación de explotación, por ejemplo, para conocer el ratio de producción en la mina  $m^3$  estéril/t. mineral, o para estudiar el dimensionamiento de las escombreras asociadas a la explotación. De otra parte, el estudio puede tener un interés ecológico, ya que al conocerse con antelación, a través de sus resultados, el volumen y naturaleza del estéril previsto a extraer, se estará en buenas condiciones para conseguir que el impacto ambiental de la explotación sea el menor posible.

Desde hace algunos años los métodos de estimación geoestadísticos vienen siendo aplicados en el estudio de tales problemas, especialmente en las grandes explotaciones de carbón o de lignitos a cielo abierto (KUFFMAN et al., 1981; CHICA-OLMO, 1983 ). Los parámetros estudiados más frecuentemente son el techo y el muro del recubrimiento, así como las características de calidad del estéril. También merece interés el estudio de ciertas variables vectoriales de las rocas, como la fracturación en las capas de carbón, factor particularmente importante en explotaciones subterráneas. Asimismo reviste interés el estudio de las características geotécnicas del mineral y de la roca encajante.

Por último, no se debe olvidar, dentro de este apartado referente al medio geológico de la mineralización, una serie de estudios técnicos relacionados con el drenaje de minas, en los que la Geoestadística puede jugar un papel importante en la elaboración de datos: transmisividad, piezometría, caudales, etc, con el objeto último de construir un modelo de flujo del acuífero presente en el yacimiento (DELHOMME, 1976; YAGÜE, 1980; CHICA-OLMO, 1981 b). En este sentido, la presencia del agua en las labores mineras es un problema grave que es necesario eliminar; puede elevar de forma alarmante los costos de extracción haciendo peligrar la rentabilidad del yacimiento, por lo que es necesario estudiar mediante modelos la simulación de distintos esquemas de drenaje posibles (FERNANDEZ-RUBIO, 1979 y FERNANDEZ-RUBIO y YAGÜE, 1978).

La importancia y amplitud de los estudios a realizar sobre estas variables del medio geológico, de naturalezas diferentes, dependerá del impacto que tengan sobre los aspectos técnicos y financieros del proyecto.

## 7. ESTUDIO ECONOMICO DEL PROYECTO

Para la industria minera, la obtención de los recursos necesarios para el desarrollo de una mina depende en gran medida de la convicción que tengan los financieros sobre la rentabilidad del proyecto. Así, cuando se consideran los gastos importantes a realizar, no es sorprendente que aquellos soliciten estimaciones cada vez más precisas referentes al tonelaje y calidad de las reservas, antes de conceder sus fondos.

Respecto al estudio económico del proyecto, el economista minero hace estimaciones para previsión de la rentabilidad en diferentes estadios del mismo, en particular realiza análisis del riesgo del proyecto y de sensibilidad a la variación de ciertos parámetros económicos. Estos estudios utilizan sistemáticamente una definición en probabilidades de los distintos parámetros, de forma a establecer una distribución de probabilidad de la rentabilidad que integre todas las incertidumbres y desconocimientos que les afectan. Por su parte, dicha distribución de probabilidad permite a su vez definir las probabilidades de ganancia (o de pérdida) y así fundamenta una decisión sobre criterios racionales de cara al riesgo de la inversión.

### 7.1. ANALISIS DEL RIESGO DE UN PROYECTO

He mostrado que la evaluación de todo proyecto es un proceso continuo basado sobre la información obtenida durante el reconocimiento geológico, que debe conducir a la elaboración del informe de viabilidad, a partir del cual se decidirá explotar o no del yacimiento. Uno de los aspectos más interesantes a tener en cuenta es el riesgo financiero del proyecto, factor resultante de las incertidumbres que afectan a los datos disponibles para su evaluación, en particular a nivel del conocimiento del yacimiento.

En la práctica el análisis del riesgo es efectuado en base a modelos probabilísticos que descansan sobre la aplicación del método de simulación de Monte Carlo (ULAM, 1949). Dentro de la aplicación hay que distinguir que ciertos parámetros, en concreto sus distribuciones estadísticas, son introducidos de forma subjetiva; es el caso, entre otros, de los costos de explotación, de la inflación, etc.

Otros parámetros son incorporados al modelo de forma objetiva, como ocurre en las leyes del mineral o las reservas totales del yacimiento que pueden ser estimadas por distintos métodos.

El método de simulación de Monte Carlo permite deducir la distribución probabilística de las variables que dan los criterios de rentabilidad del proyecto, que conocidamente son el valor actual neto (VAN) y la tasa de rentabilidad interna (TRI) de la inversión. Estas son determinadas por las relaciones siguientes (CIRUELOS y DUCHENE, 1983; DUCHENE, 1979 y BRIAN Y ELLIS, 1982):

$$VAN = \sum_{i=1}^N \frac{FT_i}{(1+a)^i} - I$$

$$0 = \sum_{i=1}^N \frac{FT_i}{(1+TRI)^i} - I$$

donde,

- I inversión inicial
- N duración (vida) de la explotación
- $FT_i$  flujo de tesorería del año i
- a tasa de actualización

Desde el punto de vista geoestadístico que nos motiva, las reservas estimadas del yacimiento constituyen una de las variables más importantes implicadas en un tal análisis. En la práctica, las mismas son introducidas en el método de simulación como una función aleatoria caracterizada por su ley de distribución, a menudo normal o lognormal, de parámetros  $m$  y  $\sigma^2$  (media y varianza) obtenidos por cálculos clásicos.

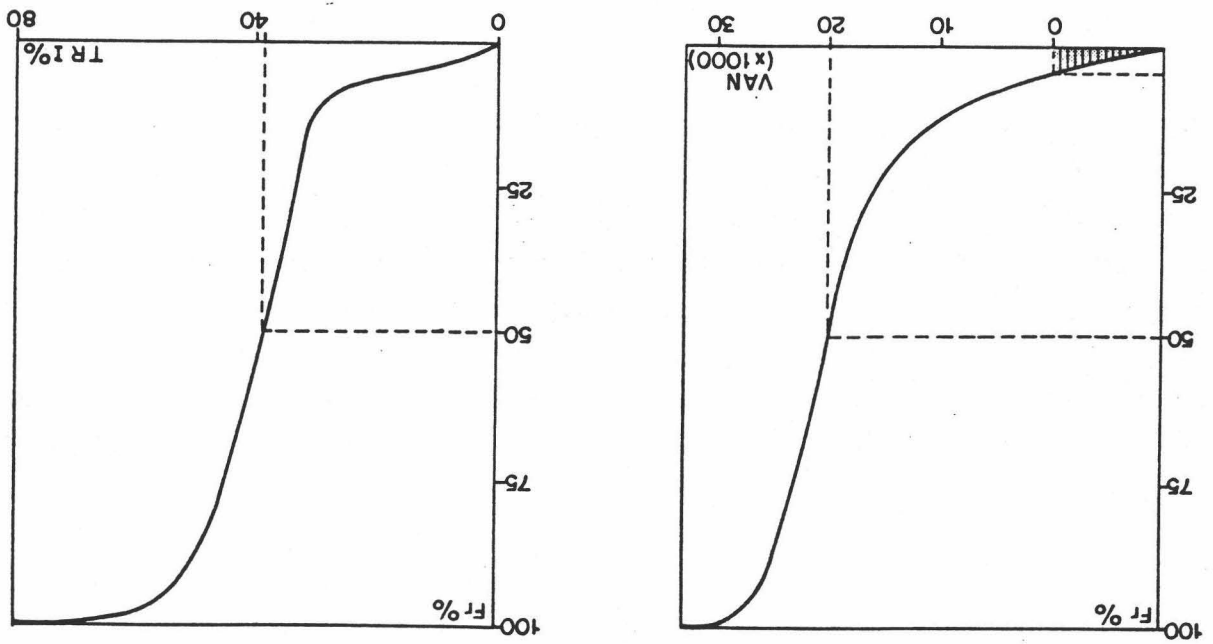
En mi aproximación geoestadística propongo utilizar en el modelo de simulación los parámetros que definen la estimación y el error de estimación de las reservas globales obtenidas precedentemente. Así, el economista puede beneficiarse de estos resultados proporcionados por la geoestadística que, como se sabe, tienen implicaciones decisivas sobre el proyecto y que me consta han sido poco utilizados hasta la fecha.

Un ejemplo de los resultados obtenidos con este modo de operar en un análisis de riesgo se da en la figura I.21. Se han representado las distribuciones de probabilidad de las variables VAN y TRI, obtenidas sobre un total de 1.000 simulaciones; de las curvas dibujadas se deducen los valores más probables de los estimadores de la rentabilidad: se podría concluir de los resultados de este ejemplo, sacado de un yacimiento de carbón, que la inversión se presenta muy interesante, con un valor medio del VAN positivo, 19.814 unidades de moneda, y la TRI igual a 39 % que es muy superior a la tasa de actualización elegida 10 %. Además, se trata de un proyecto en el que el riesgo de pérdida (VAN negativo) es muy pequeño, aproximadamente del 3 %. Estas cifras altamente favorables no deben sorprender pues efectivamente se trata de un proyecto altamente rentable:

Resumen Resultados	Media (50 %)	Varianza
V.A.N. (Millones unidades monetarias)	19.814	7.195
T.R.I. (%)	39,6	7,4
Probabilidades de pérdida (%)	3,2	
Pérdida media	- 4.192	



Figura 3.21.- Análisis del riesgo de un proyecto de carbón (trabajo realizado en colaboración con J. CRUELLOS del CEM de Fontainebleau, en base al programa MATMO de análisis financiero).



P A R T E   S E G U N D A

PLANIFICACION DE EXPLOTACION

ESTUDIO DE SIMULACION DE LOS PROCESOS DE PRODUCCION DE MINERAL



A través de la exposición de los apartados anteriores mostré como la Geoestadística ayuda a caracterizar los recursos minerales, tanto técnica como económicamente. En el caso importante de la estimación de la cantidad y calidad de los recursos y reservas, que es cuestión vital para la mina, la respuesta adecuada se tiene en los métodos de estimación lineal, no lineal y en las técnicas de parametrización de reservas. Parece lógico pensar ahora que se interese en los procesos de explotación de estos recursos, y en la previsión de los resultados de la explotación, en el supuesto que se haya decidido explotar.

La actividad de explotación plantea problemas de índole diversa, que nacen de la propia variabilidad de las leyes en el yacimiento. Su análisis y solución posterior requieren el auxilio de modelos de naturaleza distinta de los métodos de estimación, que reproduzcan la dispersión de las leyes y que sirvan de base para simular los procesos de producción de mineral, que son o serán aplicados en la realidad minera.

En esta segunda parte pretendo examinar precisamente aquellos problemas de planificación de minas relacionados con la dispersión de las leyes del mineral; se estudian bajo la misma óptica metodológica conocida

con el nombre de **simulación de explotación** o también **geoestadística de simulaciones**.

#### **Necesidad de un modelo de yacimiento para la planificación**

De cara a la explotación, y particularmente para su planificación, es importante conocer las características del mineral in situ. La mejor planificación posible supone el conocimiento previo de las leyes de los bloques a extraer, dado que, al trabajar con esta información, inalcanzable en la práctica, se conseguirían los resultados más óptimos. Desgraciadamente, esta solución ideal es imposible de conseguir; las leyes de los bloques sólo se conocerán después de la explotación: ¡demasiado tarde para los intereses de la mina!

La cuestión que cabe plantearse en tal sentido es, ¿por qué no utilizar las leyes krigeadas para conocer la dispersión de los bloques en el yacimiento?. Pues bien, la respuesta es no, por dos razones fáciles de entender que expongo seguidamente: primeramente, porque difícilmente en la práctica se dispone de una información experimental suficientemente fina como para conocer la ley real del bloque; en segundo lugar, porque cualquier estimador que se aplique, incluso al krigeage que es el mejor método de estimación posible, no reproduce la dispersión real de las leyes. A ello obedece la relación de suavizado, a la cual se aludía en apartados anteriores.

Entonces, ¿cómo resolver el problema?. Ante esta dificultad, la Geoestadística ha sustituido el yacimiento real desconocido por un modelo de yacimiento "equivalente", construido no de cualquier forma sino de modo preciso, tal que caracterice la dispersión de las leyes en el depósito. Con el término "equivalente" expreso lo siguiente, que todas las características medias de la mineralización, distribución y variaciones espaciales, coinciden con las identificadas en la realidad experimental.

Con este enfoque del problema, lo expuesto deja plantear el axioma de que el modelo geoestadístico y la realidad minera deben comportarse de igual forma, con respuestas similares, frente al mismo proceso minero. Como corolario, se tiene por tanto que un estudio de simulación de tales procesos sobre la base del modelo, debe servir como método de previsión de las características del mineral extraído.

Es el método geoestadístico de **Simulación Condicional** el que permite construir el modelo numérico de yacimiento; el método recibe el nombre genérico de "simulación geoestadística o probabilística" y ha sido desarrollado conceptualmente por MATHERON (1972 b), JOURNEL (1974) y GUIBAL (1972).

Los principios metodológicos de la geoestadística de simulaciones, también llamada "**Geoestadística aval**" (DERAISME, 1978 a), han abierto un campo de investigación muy importante dentro de la geoestadística aplicada. En ella se dan contribuciones muy notorias como las de DERAISME (1978 a), DUMAY (1981), de FOUQUET et al. (1982), CHICA-OLMO (1983 a), DERAISME y de FOUQUET (1984 a y b), etc.

Así pues, en estos capítulos voy a tratar los aspectos, tanto teóricos como prácticos, referentes a la construcción del modelo de yacimiento por el método de simulación condicional; asimismo desarrollaré los aspectos metodológicos que posibilitan su aplicación en estudios de planificación de minas.



## C A P I T U L O    V

### PLANIFICACION DE EXPLOTACION

#### 1. GEOESTADISTICA Y PLANIFICACION MINERA

##### 1.1. CONSIDERACIONES PRELIMINARES

No cabe duda en que el objetivo primordial de una mina es obtener beneficios de la explotación de los recursos minerales. Los intereses del capital invertido son defendidos a través del consejo de administración de la empresa, el cual debe saber adecuar los medios disponibles, humanos, materiales y económicos, para la consecución de tal fin. Desde esta óptica mercantil, se podría definir a la **planificación minera** como una función gerencial que tiene como objetivo determinar la secuencia de actividades, métodos y recursos necesarios para alcanzar el mayor beneficio de la explotación.

Mi estudio se dirige al análisis de los problemas presentados en la planificación de minas, y contribuye al mismo en el capítulo de métodos que expresamente se ha subrayado en el párrafo anterior.



La variedad y tipo de problemas que se presentan en la etapa de planificación hacen de ella un dominio de alto interés para los métodos geoestadísticos. Las aplicaciones, algunas de ellas ya vistas, se dan en áreas diversas de la planificación, muy especialmente en estudios que relacionan las características medias del mineral in situ y su medio geológico con los procesos de producción de mineral. Dichas áreas de actuación conciernen actividades correspondientes al **diseño de la mina**, a la **producción** y a la **preparación y utilización del mineral**.

Es conveniente dar una idea, aunque sea generalizada, de estas aplicaciones en el contexto de las etapas clásicas distinguidas en la planificación, antes de abordar el estudio de las áreas de trabajo enunciadas.

#### *A) Planificación de preexplotación*

En ella tienen cabida todas aquellas actividades de planificación que ocurren antes de la puesta en explotación de la mina, y que por tanto se analizan dentro del estudio de viabilidad. El minero organiza la vida de la futura explotación, para lo cual estudia en detalle los problemas presentados en la elaboración del proyecto, como por ejemplo: la estimación de los recursos y reservas, la localización de los paneles de producción con leyes más altas, el diseño de la corta, la situación de los paneles en función de las características estructurales importantes del depósito, fallas, pliegues, etc.

Fundamentalmente, es a través de la estimación, como fué visto, que la Geoestadística ayudará a la resolución de tales problemas.

#### *B) Planificación a largo plazo*

Tiene lugar una vez que se ha decidido explotar la nueva mina. Se lleva a cabo, en general, para periodos de varios años con revisión de los objetivos al final de cada periodo, hasta alcanzar el agotamiento de las reservas.

Desde nuestra óptica de investigación geoestadística se distinguen dos objetivos básicos. En el primero de ellos se busca ordenar los sectores

de explotación de tal forma que garanticen y respeten los resultados previstos en la planificación, referentes a tonelajes de mineral, metal, calidades, etc; como puede verse se trata de asegurar que las reservas estimadas soportarán el desarrollo de la explotación para ese periodo. El otro objetivo tiene por motivo la calidad del mineral, por la razón de que a la producción obtenida se le exige una calidad media conforme con las especificaciones del comprador.

Cabía indicar que los resultados de la planificación deben ser lo suficientemente sólidos para que cualquier modificación eventual, que se produzca en la planificación a corto plazo, no cuestione en demasía los objetivos aquí propuestos.

### *C) Planificación a corto plazo*

Se lleva a cabo durante toda la vida de la explotación por periodos cortos de varios meses e incluso de un año. La variabilidad del mineral in situ es la causa fundamental de los problemas que aquí surgen, algunos de ellos son:

- elección entre diferentes estrategias de explotación para alcanzar la mayor homogeneización del mineral
- influencia del almacenamiento y de la mezcla de mineral en la calidad del producto final
- previsión de los resultados, balance económico, de la selección minera, etc.

Un análisis por poco detallado que sea muestra que se puede encontrar una respuesta "satisfactoria" a los mismos, al menos en gran medida, si se emplean conjuntamente las técnicas geoestadísticas de estimación y simulación. En mi opinión, es quizás la etapa de planificación con mayores posibilidades de aplicación de estos métodos, y muy particularmente para la simulación, a través de los estudios de simulación de explotación.

## 1.2. DISEÑO DE LA EXPLOTACION

En este área de actuación de la planificación, los problemas surgidos aparecen ligados a la etapa de preexplotación; por tanto son los mismos

que indiqué anteriormente y que recordaré por su importancia: la estimación de las reservas explotables y la optimización de la corta; también es importante el estudio de las características del recubrimiento a la hora del dimensionamiento de la escombrera.

Pienso que no se precisa abundar más sobre las aplicaciones geoestadísticas en este campo, en particular por los métodos de estimación.

### 1.3. CONTROL DE CALIDAD DE LA PRODUCCION

Otro dominio de gran interés de la planificación es el control de calidad de la producción, por razones económicas muy evidentes que hacen que el beneficio obtenido dependa, en gran medida, de la calidad del mineral; al respecto cabe recordar la influencia negativa de ciertos elementos sobre la calidad del producto.

Veamos con un poco más detalle en qué medida la Geoestadística puede ayudar al planificador de minas en esta labor.

El desarrollo del contrato de compra de mineral establece un compromiso previo entre la compañía minera y el comprador; uno y otro implantan con frecuencia sistemas de penalización y bonificación según criterios basados en las fluctuaciones de variables críticas; pongo como ejemplo el contenido en cenizas o en azufre de un carbón. Criterios que pueden fundamentarse sobre la estimación y simulación de la calidad de las reservas.

Por consiguiente, hay un interés inmediato en utilizar estos métodos, pues ayudan a las dos partes del contrato a configurar la escala de detalle necesaria, en especial con los métodos de simulación. Así, en la figura II.1 se ven las fluctuaciones del contenido en cenizas del carbón producido en una mina durante un periodo de dos meses, valores que han sido previstos por simulación geoestadística; asimismo se indican los límites de calidad especificados por el contrato.

Por otra parte, durante la preexplotación, las estimaciones tenían el objetivo de evaluar global y localmente las reservas; ahora en la explotación es necesario llevar un control estricto de la selección

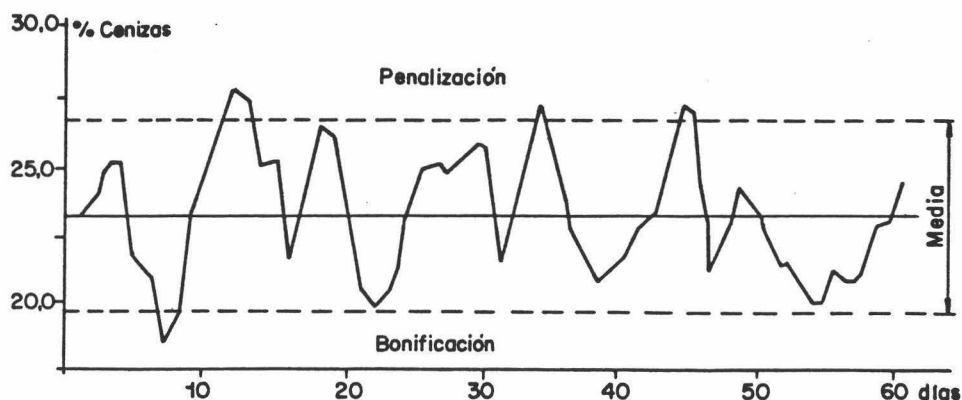


Figura II.1.- Control de calidad de la producción en la planificación de minas.

minera, por tanto de la calidad de la producción. Con este fin, es importante determinar el orden de extracción de los bloques para así disponer de una calidad más homogénea, para periodos de planificación interesantes: la semana, el mes, el trimestre, etc...

La cuestión que se suscita es precisamente la elección de la secuencia de explotación que garantiza la mayor homogeneización. Como primera aproximación valdría pensar en planificar sobre la información prestada por los estimadores de krigage de los bloques; ahora bien, no se debe olvidar la relación de suavizado, tantas veces aludida, que nos dice que la dispersión de las leyes estimadas es menor que la dispersión de las leyes verdaderas y que tanto mayor es la diferencia cuanto más grande es el error de estimación cometido. En conclusión, la secuencia así escogida no respondería plenamente a nuestros objetivos: no hay más remedio que ir a modelos que reproduzcan la dispersión in situ de las leyes de los bloques, para así abordar estos problemas de calidad.

La geoestadística de simulaciones, como se verá, es el útil de base a utilizar; con su ayuda pueden localizarse las zonas que, explotadas estratégicamente, dan previsiones de la calidad dentro de los límites establecidos. La secuencia de explotación que deriva de su aplicación sí que será válida para el examen de tales problemas.

A modo de ilustración de las ideas manifestadas puede verse la figura II.2. En ella se ve la evolución del poder calorífico de un carbón explotado durante un mes, a partir de dos esquemas o secuencias de explotación diferentes; las curvas dibujadas corresponden a las leyes "verdaderas" (simuladas) y estimadas por krigage. Si se comparan ambos resultados,

teniendo en cuenta las restricciones de calidad impuestas, se observa que la producción resultante de la segunda secuencia de explotación se ajusta mejor a las necesidades de la mina.

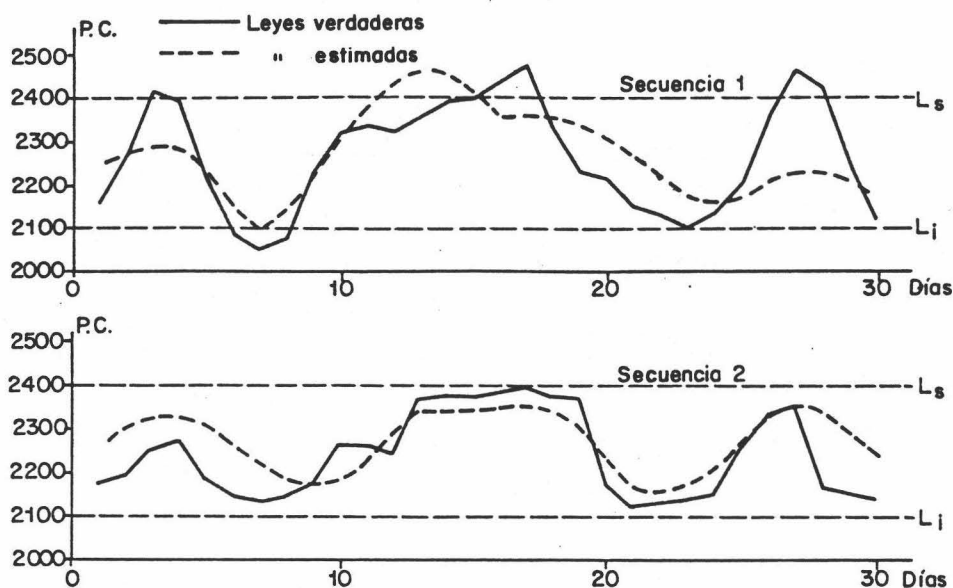


Figura 11.2.- Control de la calidad de la producción en la planificación minera: estudio comparativo de dos secuencias de explotación en un depósito de carbón.

#### 1.4. PREPARACION Y UTILIZACION DEL PRODUCTO FINAL

Extraído el mineral, suele ocurrir que la calidad del mismo es deficiente para su utilización directa, por lo que será necesaria una preparación previa. Ello sucede como consecuencia de una calidad mediocre del mineral, con un alto grado de dispersión de las leyes, o bien al ensuciamiento ocasionado por el estéril durante la extracción. En tales casos, se prevé dentro de las actividades planificadoras estrategias destinadas a obtener un producto de calidad y dispersión adecuadas; entre ellas destaca el almacenamiento con prehomogeneización del mineral y las mezclas con mineral de calidad superior.

Aquí, es de nuevo la metodología de las simulaciones el útil de ayuda al estudio de estos procesos mineros; a través de ella se pueden conocer los resultados que un determinado tipo de almacenamiento produce sobre la homogeneización del mineral, considerando la dispersión de las leyes in situ.

Quisiera comentar el siguiente ejemplo que, aún siendo muy simple, es válido para comprender mejor las ideas expuestas: en un yacimiento de carbón se desea estudiar el efecto de un almacenamiento sobre la homogeneización de la calidad del mineral, en concreto sobre el contenido en azufre. Para ello se observará la dispersión de las leyes diarias cuando se mezcla el mineral por unidades de tonelaje de 4 y 8 respectivamente. Como información se conoce la dispersión diaria de la variable a la entrada del parque,  $0,442 (\% S)^2$ .

El estudio, extremadamente sencillo de hacer pues sólo requiere el cálculo de dispersiones de leyes regularizadas sobre los soportes indicados, ha arrojado los resultados expuestos en la tabla II.1:

Variable % S	Soporte de homogeneización	
	4 t	8 t
Dispersión $(\% S)^2$	0,391	0,379
Ganancia de reducción (%)	11,5	14
Diferencia (%)	Absoluta 2,5	Relativa 17,9

*Tabla II.1.- Resultados de la homogeneización del mineral recogido por soportes diferentes.*

Se podría concluir sobre este ejemplo, un tanto simplista, que la homogeneización ha sido mayor (dispersión menor) para el mayor volumen de regularización, como era de esperar; aunque la diferencia entre ambos soportes parece poco importante, si se piensa que el volumen implicado es doble de un caso a otro, lo que justificaría a priori, a falta de un estudio económico para cada caso, homogeneizar por lotes de 4 t.

Gráficamente, se observa el efecto de reducción de la dispersión si se compara la calidad diaria que entra al parque y la calidad a la salida del mismo, para los dos casos contemplados (figura II.3).

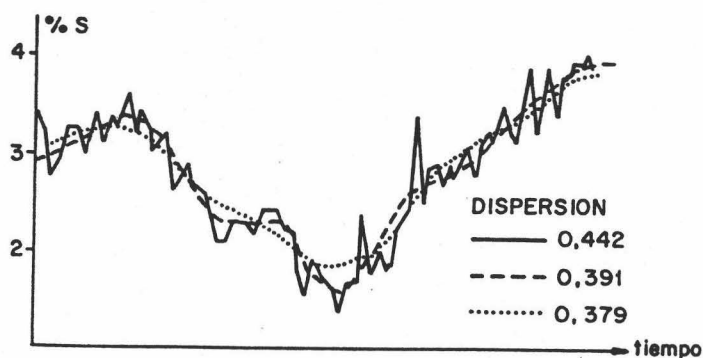


Figura II.3.- Preparación y utilización del mineral en la planificación minera: influencia del almacenamiento en la dispersión de la calidad del mineral.

## 2. LA PRACTICA DE LA SELECCION EN EXPLOTACIONES MINERAS

### 2.1. IMPORTANCIA DE LA SELECTIVIDAD MINERA

De todos es conocido que la concentración de los metales en la corteza terrestre, se hace con leyes medias tan bajas que es ilusorio pensar en su explotación actual, lo que por otro lado generaría unos costos exorbitados. Así, la explotación minera surge cuando el fenómeno geológico ha concentrado el metal en tal magnitud que es posible técnica y económicamente de extraer.

Seleccionado el posible yacimiento por los resultados de las campañas de reconocimiento geológico, se constata a menudo, con gran decepción, que la ley del mineral in situ no paga los costos elevados de una explotación en masa, lo que se impone si se quieren obtener beneficios en una explotación selectiva del yacimiento.

Así pues, se llega a la deducción de que el método de explotación a aplicar debe reducir al máximo los costos de la misma, muy particularmente los gastos ocasionados por la extracción del estéril. De acuerdo con él se fijará en el proyecto un óptimo de recuperación teórica de mineral, un balance económico, que debe cumplirse en la práctica. El mayor o menor desvío observado en dicho ajuste, esto es la diferencia detectada entre el balance previsto y el balance realizado, dependerá en gran medida de la cantidad y calidad de la información disponible para la selección del mineral (efecto de información).

En suma, con este razonamiento, lo que se quiere manifestar es la importancia que tiene la selección minera en el resultado económico de una explotación. Con ella se busca alcanzar el óptimo indicado, pero de modo que satisfaga las restricciones del método de explotación.

Como ejemplo interesante de explotación selectiva, hay que mencionar a los yacimientos de lignito multicapa explotados a cielo abierto, tipo Puentes de García Rodríguez. Con referencia a ellos, la selección se lleva a cabo en dos etapas. En la primera, se trabaja con la información geológica del sondeo de reconocimiento y se tienen en cuenta las restricciones técnicas debidas al método de explotación (por ejemplo, rotopalas); el objetivo es definir las variables que servirán al cálculo de las reservas recuperables.

La segunda etapa de selección tiene lugar en el mismo instante de la explotación; el palista a vista del frente selecciona las capas de mineral y de estéril.

La figura II.4 a presenta un esquema de la selección en el primer nivel indicado. En base a la secuencia geológica se seleccionan las capas de carbón según el contenido en cenizas (parámetro de corte  $z_c$ ) y posteriormente se consideran los espesores de las capas de lignito y de estéril intercalado (parámetros técnicos  $p_c$  y  $p_s$ ). Para la previsión de la recuperación se estudia, por razones de selectividad máquina del método, la dilución de capas de estéril de espesores inferiores a  $p_s$ , entre las capas de carbón explotables, y lo mismo para las capas de carbón inferiores a  $p_c$ , entre capas de estéril.

Los parámetros técnicos de selección  $p_c$  y  $p_s$  definen los espesores mínimos de las capas económicamente explotables como mineral y estéril; por consiguiente, tienen un peso fundamental en los resultados de la explotación, como se deduce de la figura II.4 b. En ella se ha dibujado un diagrama del ratio de recuperación de carbón en el depósito, ratio que viene definido por la relación tonelaje mineral/tonelaje total de todo uno, expresado en tanto por ciento. La gráfica es de doble entrada para los parámetros de espesores de capas  $p_c$  y  $p_s$ .



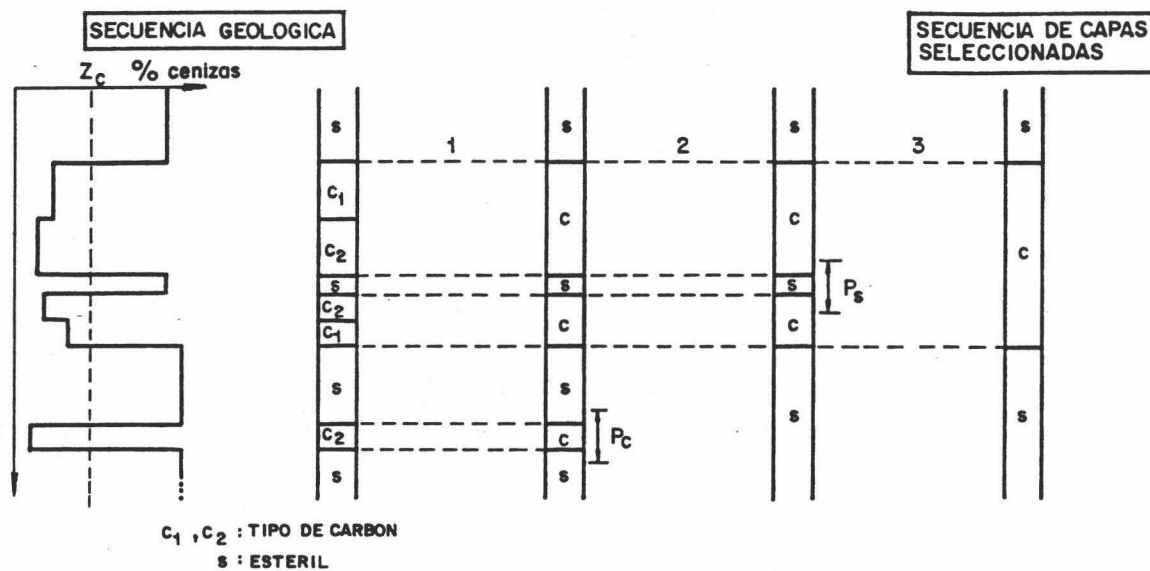


Figura 11.4 a.- Selección de capas explotables sobre sondeo con restricciones técnicas y económicas.

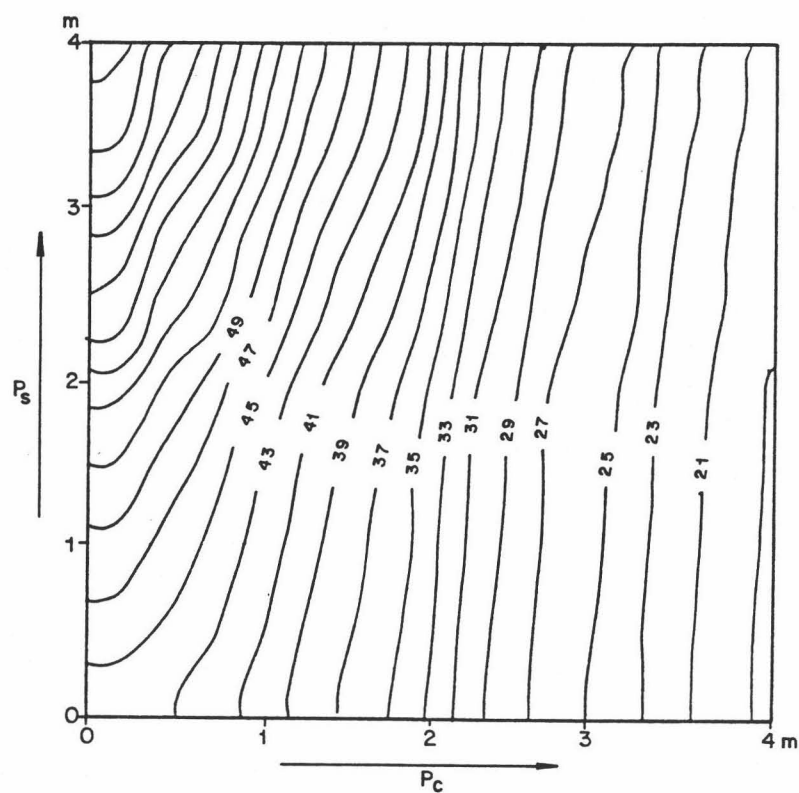


Figura 11.4 b.- Diagrama de recuperación de mineral en función de los parámetros de selección  $p_c$  y  $p_s$ .

## 2.2. PREVISION DE LA SELECCION EN LA EXPLOTACION

Dos tipos de material se extraen simultáneamente durante la explotación: el mineral económico, que no forzosamente coincide con el mineral geológico, como se ha podido comprobar en el ejemplo anterior, y el estéril. La diferencia entre ellos aparece en el instante que se sabe que el yacimiento no es explotable en su integridad y que deberá aplicarse una selección sobre la calidad del mineral. Como se definió, el objetivo de tal selección es maximizar el beneficio de la explotación para la solución minera adoptada (método de explotación).

La dificultad radica entonces en prever del modo más preciso las características de mineral in situ, habida cuenta de la práctica de la explotación, esto es:

- en función del tipo de explotación, la selección se hace sobre un cierto volumen  $v$  y no puntualmente sobre sondeo
- la selección depende de una información con carácter parcial, por ejemplo: los datos del control de leyes.

La influencia del soporte de selección y del nivel de información sobre la economía de la mina no es despreciable, como lo demuestran los estudios realizados; asimismo sucede con las restricciones geométricas. Todos estos factores deben estudiarse detenidamente a la hora de prever los resultados de la selección: el efecto de soporte, el efecto de información y el efecto de restricciones geométricas.

### 2.2.1. Efecto de soporte

Una forma cómoda y efectiva de mostrar las consecuencias de este efecto, sobre el balance económico, es a través del análisis de la curva tonelaje/ley, como se ha dibujado en la figura II.5. Para el yacimiento en cuestión se han calculado las reservas de mineral recuperables para distintos soportes de selección, anotados por  $v$  y  $V$ ; asimismo se tiene la función correspondiente para el soporte puntual (testigos de sondeos).

Surgen algunas reflexiones interesantes del análisis de estas gráficas, para lo cual tomo como referencia el valor de la ley de corte  $z_c = 0,5$ :

se observa que si se hace la previsión sobre la curva de soporte puntual, en lugar de hacerla sobre la curva de bloques  $v$ , se sobreestima en un 6 % el tonelaje efectivamente recuperable, que equivale a una diferencia relativa del 30 %. Si aumenta el tamaño del bloque de selección de  $v$  a  $V$  ( $V$  es cuatro veces mayor que  $v$ ), el efecto señalado crece, la diferencia relativa pasa a ser del 50 %: ¡la mitad del mineral previsto!. La razón obedece simplemente a la mayor dilución de las leyes del mineral en un soporte más grande, el bloque  $V$  es menos selectivo que el bloque  $v$ .

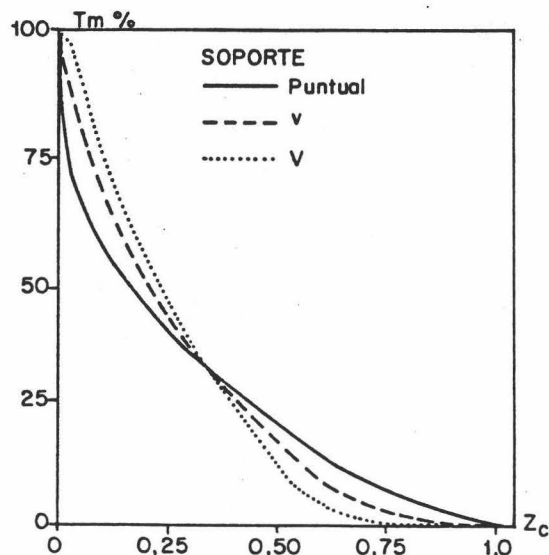


Figura 11.5.- Efecto de soporte en la previsión de los resultados sobre la curva tonelaje/ley.

Aunque en este tipo de análisis hay que estudiar la evolución de la ley de corte, resulta de este ejemplo una conclusión de validez general: la talla del soporte deteriora los resultados de la selección. Se dice entonces que la distribución de leyes  $F_v$  es más selectiva que la distribución  $F_V$  (teoría de la selectividad de las distribuciones; MATHERON, 1983). Por tanto, este factor debe considerarse en el cálculo de las funciones de recuperación  $Q(z_c)$  y  $T(z_c)$  del yacimiento, como así se veía en el capítulo anterior.

Quizás, al planificador le gustaría más analizar este efecto sobre el margen bruto del beneficio obtenido por los dos bloques de selección,  $v$  y  $V$ . Para ello se puede dar una función clásica de valoración del bloque, sea la siguiente:

$$B_V = P \rho Q_V(z_c) - C_t T_V(z_c) - C_e V$$

$$B_V = P \rho Q_V(z_c) - C_t T_V(z_c) - C_e V$$

con los parámetros:

$T(z_c)$  y  $Q(z_c)$ , mineral y metal recuperables para cada soporte (curva tonelaje/ley)

P, precio de venta del concentrado de metal

$\rho$ , recuperación de metal en el lavadero

$C_t$ , costo del tratamiento del mineral

$C_e$ , costo de extracción del todo uno (estéril más mineral)

V, tonelaje de todo uno extraído.

En las fórmulas la densidad del mineral interviene a modo de término multiplicativo implícito en los tonelajes.

Calcular estas funciones es fácil si se conocen las leyes de los bloques. Como ejemplo de trabajo he representado en la tabla II.2 las leyes de un sector de un yacimiento de Cu, para dos bloques de selección de talla  $v = 7,5 \times 7,5 \times 10 \text{ m}^3$  y  $V = 15 \times 15 \times 10 \text{ m}^3$ . Se trata de calcular el beneficio de la selección con los parámetros:  $P = 120.000 \text{ pts/t}$ ;  $C_t = 1.700 \text{ pts/t}$ ;  $V = 10.125 \text{ t}$ ;  $\rho = 95 \%$  y  $C_e = 300 \text{ pts/t}$  y  $225 \text{ pts/t}$  según bloque. La densidad se ha tomado  $1 \text{ t/m}^3$  para simplificar los cálculos.

La ley de corte aplicada es  $z_c = 1,49 \%$ , que está definida por la condición de:  $C_t - z_c \cdot P\rho = 0$ ; relación que iguala en el mínimo los beneficios o los costos de tratamiento.

Los resultados de la selección libre se dan en la tabla II.3.

En los datos anteriores se observa claramente el deterioro de los beneficios debido al aumento del tamaño del bloque. La diferencia relativa del 32 % es el reflejo de que los bloques de menor tamaño se prestan mejor a la selección, consecuencia de la mayor dispersión de las leyes medias; así pues el bloque V es menos selectivo que el bloque v (MATHERON, 1983).

7,5 m			15,0 m		
0,90	4,02	2,86	1,96	2,97	3,40
1,54		2,15		2,28	
0,71	0,51	0,91	2,85	0,85	1,89
4,13	1,36	0,74	0,50	0,48	0,25
2,62		0,44		0,71	
4,00	1,00	0,40	0,13	0,23	1,86

Tabla 22.2.- Efecto de soporte en la selección de bloques: leyes de bloques en un sector de un yacimiento de Cu.

Selección libre $z_c = 1,49 \%$		Bloque v: 7,5x7,5x10 m <sup>3</sup>	Bloque V: 15x15x10 m <sup>3</sup>
Tonelaje total (V)		13.500	13.500
T(z <sub>c</sub> )		5.625	9.000
Q(z <sub>c</sub> )		168	194
m(z <sub>c</sub> )		2,99	2,15
Costos (pts)	Extracción	4.050.000	3.037.500
	Tratamiento	9.562.500	15.300.000
Ingresos (pts)		19.152.000	22.116.000
Beneficios (pts)		5.539.500	3.778.500

Tabla 22.3.- Resultados económicos en la selección libre.

### 2.2.2. Efecto de información

En la práctica, la selección directa sobre la ley real del bloque  $Z_v$  es imposible, ya que los valores  $Z_v$  son desconocidos. El geólogo se ve obligado a seleccionar con apoyo de estimadores  $Z_v^*$  de las leyes

de los bloques (selección indirecta), elaborados, por ejemplo, por krigage de los datos de los barrenos de preexplotación. Ahora bien, se sabe que la distribución de tal estimador no coincide, en general, con la de  $Z_V$ , por lo que económicamente la selección indirecta implica pérdidas de beneficios si se la compara con la selección directa sobre las leyes verdaderas.

El efecto de selección sobre estimador, bien conocido en minería, se caracteriza por la ley de distribución conjunta de las leyes  $\{Z_V, Z_V^*\}$ . La teoría de selección minera demuestra que el beneficio esperado es mayor cuando la regresión de la función condicional,  $E\{Z_V/Z_V^*\}$ , se aproxima a la primera bisectriz de la nube de correlación de la pareja  $\{Z_V, Z_V^*\}$ , o dicho de otra forma cuando el estimador cumple la condición de no sesgo condicional  $E\{Z_V/Z_V^*\} = Z_V^*$ .

En conclusión, los resultados de la selección dependen, además del tamaño del soporte, del tipo y características del estimador aplicado.

En la figura II.6 se muestra una comparación entre diversos estimadores usados frecuentemente en minería, el krigage, los polígonos de influencia y el inverso de la distancia. La función representada es la esperanza condicional  $E\{Z_V/Z_V^*\}$ , dibujada en trazos diferentes para cada estimador, que merece compararse con la primera bisectriz de pendiente unidad que también se representa. Es notoria la aproximación del krigage al criterio de selección óptima, a la condición de no sesgo, luego en todo rigor no hay duda de que su aplicación dará los mejores resultados posibles.

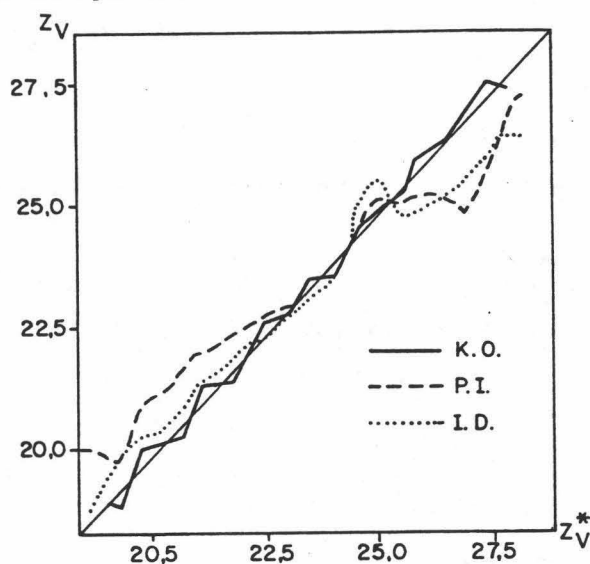


Figura II.6.- Efecto de información: comparación entre estimadores.

Para la práctica de la selección no basta con haber elegido al kriging como método operativo, es necesario también definir el nivel de información para su construcción, con el objetivo de que la selección prevista se aproxime suficientemente a la selección teórica. Al respecto, se comentó acerca del nivel de información en un yacimiento que éste aumenta a la vez que su desarrollo; se comienza con una malla amplia que progresivamente se cierra hasta alcanzar algunos metros en el momento de la explotación. Por consiguiente, es obvio que el primer estimador construido  $Z_{K1}^*$  será menos bueno, de cara a la selección, que el estimador que se obtendrá más tarde  $Z_{K2}^*$ .

El ejemplo siguiente servirá para dar más claridad a la tesis anterior. Sea una capa de carbón cuyo contenido en cenizas se ha simulado en bloques de base  $30 \times 30 \text{ m}^2$ . Se desea estudiar los resultados de la selección indirecta por tres mallas de información,  $30 \times 30 \text{ m}$ ,  $60 \times 60 \text{ m}$  y  $90 \times 90 \text{ m}$ . Según he expuesto, para ello es suficiente dibujar las nubes de correlación entre la "ley verdadera"  $Z_v$  (simulada) y el estimador  $Z_v$  de kriging, para cada malla; resultados que se dan en la figura II.7.

Para comentar estos gráficos basta con escoger una ley de corte cualquiera, sea  $z_c$ . Las unidades (bloques) aceptadas tienen una esperanza condicional  $E \{ Z_v / Z_v^* = z_c \} = f(z_c)$ , cuya condición de no sesgo se da para  $f(z_c) = z_c$ . Condición que en la práctica se cumple con ciertas dificultades y que depende de la magnitud del error de estimación  $\sigma_K^2$ .

Para aproximarse al óptimo de la selección hay que minimizar las áreas A y B de la elipse, que representan, respectivamente, las unidades (bloques) "rechazadas"  $Z_v^* > z_c$  pero de leyes reales  $Z_v < z_c$  y las unidades "aceptadas"  $Z_v^* < z_c$  pero de leyes  $Z_v > z_c$  (el entrecomillado denota que se trata de una variable penalizante del valor del bloque).

Como cabía esperar, se observa para la malla más cerrada de  $30 \times 30 \text{ m}$  una regresión muy próxima a la bisectriz principal, debido a la menor dispersión de los puntos en la elipse, por lo que los resultados alcanzados serán mejores. No obstante, para elegir la malla de selección hay que tener en cuenta otros criterios, además de la ganancia de información analizada, por razones económicas el principal de todos ellos es el costo que deriva de cada malla; en el ejemplo, el número de sondeos

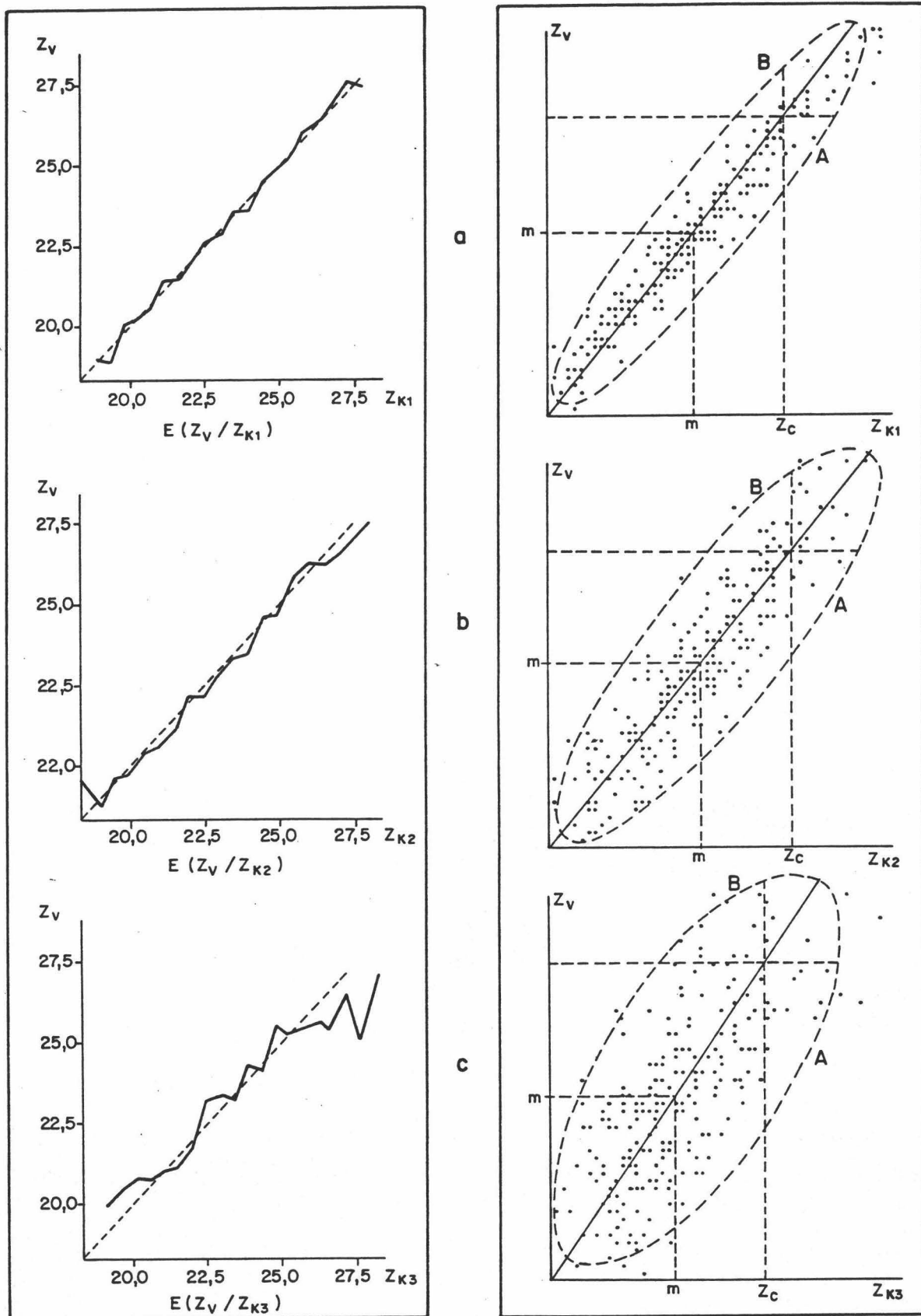


Figura 99.7.- Efecto de información: influencia de la malla de información en los resultados de la selección. a) Malla 30x30 m. b) Malla 60x60 m. c) Malla 90x90 m.



aumenta por cuatro a cada reducción de la malla a la mitad. En definitiva, un estudio económico elaborado conjuntamente con estos resultados ayudará a encontrar la malla óptima para la selección.

### 2.2.3. Efecto de restricciones geométricas

El tercer factor determinante de la selectividad en mina son las restricciones geométricas impuestas por el método de explotación. Se sabe que un bloque cualquiera será abandonado, por rico que sea, si los gastos necesarios para alcanzarlo y explotarlo son excesivos; se deben respetar ciertos condicionantes geométricos en la mina, como las tallas de los pilares y de las cámaras, en subterráneo; el talud de la corta, la altura del banco..., en cielo abierto. Con ellos se limitan los resultados de la selección tanto a nivel local como global, de aquí que su estudio se lleve a cabo por la parametrización técnica de reservas y por los métodos de simulación de explotación que se exponen a continuación.

## C A P I T U L O   V I

### ESTUDIO DE SIMULACION DE LOS PROCESOS DE PRODUCCION MINERA

#### 1. GENERALIDADES

##### 1.1. OBJETIVOS Y RESULTADOS DE LA SIMULACION

El objetivo primordial del estudio de simulación de explotación es prever el balance económico global resultante de aplicar al mineral in situ los diferentes procesos de producción, hasta llegar al metal beneficiable. Como ejemplos de tales procesos hay que señalar la extracción, el transporte, el almacenamiento y el tratamiento metalúrgico, por sólo citar a los más importantes.

Los mecanismos previos modifican, en mayor o menor cuantía, las características de calidad y dispersión del mineral. Se quiere estudiar este efecto después de haber aplicado tal o tal método de explotación, tal o tal tipo de almacenamiento, en definitiva tal o tal proceso. Si ello fuese posible de realizar con antelación, entonces se estaría en situación de elegir el método más beneficioso para la mina.

Para aproximarse a este objetivo es suficiente que de nuestro estudio se obtenga una evaluación sin sesgo, con una cierta aproximación, del impacto de los criterios de explotación seguidos. Es obvio, que en ningún caso se trata de dar los resultados exactos que se obtendrán en la realidad, aunque se trabaje con un modelo de yacimiento que es una imagen del yacimiento real desconocido. A pesar de esta diferencia, imposible de salvar en la práctica, los resultados obtenidos son suficientemente válidos para los objetivos de una mina, así lo comprueban los numerosos estudios ya realizados en este campo (DERAISME, 1978 a; DUMAY, 1981; DERAISME et al., 1982; CHICA-OLMO et al., 1983, etc).

## 1.2. EJEMPLOS TIPOS DE PROBLEMAS ESTUDIADOS

Los estudios de simulación se llevan a cabo en las dos etapas básicas de una mina, en la etapa de proyecto y especialmente en la planificación de una explotación en curso. Estos son algunos de los problemas que pueden estudiarse:

### *A) Estudio de Proyecto*

- . Previsión de los resultados económicos de una explotación
- . Estudio del recuperable local por simulación
- . Comparación de dos métodos de explotación
- . Elección de la secuencia de explotación óptima que reduce la dispersión del mineral
- . Estudio de la altura del banco de explotación
- . Mezcla del mineral de frentes diferentes para el control de calidad, etc.

### *B) Planificación de una explotación*

- . Estudio de los resultados de la selección cuando se aplica un reconocimiento suplementario
- . Estudio de la malla óptima para el control de leyes
- . Estudio de mezclas de mineral para proporcionar una calidad conforme a las necesidades del lavadero, etc.

Con esta serie de ejemplos no intento cerrar una lista de estudios interesantes que se presentan en este dominio; se trata de indicar sólo algunos de ellos, los más representativos, que pueden tener una respuesta satisfactoria a través de la geoestadística de simulaciones.

## 2. ASPECTOS METODOLOGICOS DEL ESTUDIO

### 2.1. GENERALIDADES

La dispersión de las leyes en el yacimiento plantea serios problemas en la explotación de minas, especialmente en las actividades de planificación, como fué visto. En tal sentido, DERAISME (1978 a) expone la tesis de que tales problemas son susceptibles de análisis si se es capaz de modelizar cada una de las técnicas relativas a la explotación, que son o serán aplicadas en la realidad minera. En este apartado se dan los aspectos metodológicos que posibilitan tal análisis, desde la óptica de los estudios sobre modelo de los procesos de producción, que tienen su base en los estudios del autor anterior (figura II.8).

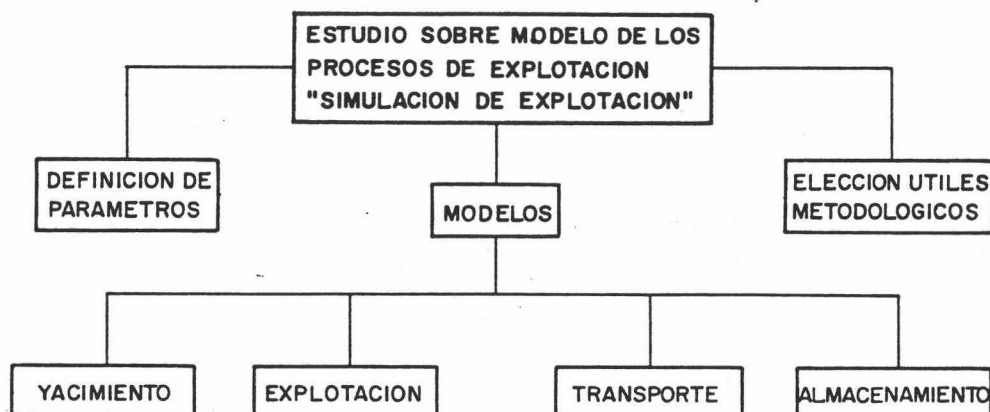


Figura II.8.- Estudio de simulación de explotación.

En primer lugar hay que definir los distintos modelos que intervienen en el estudio, cuyo número dependerá en cada caso del tipo de problema analizado, siendo los más frecuentes:

#### A) Modelo de yacimiento

Este modelo, que es siempre necesario, se construye por simulación geoestadística a partir del método de simulación condicional. Sus caracte-

rísticas más relevantes son que, reproduce las características de variabilidad de las variables simuladas sobre el soporte elegido (leyes, espesores, etc); está condicionado a la realidad experimental, esto es, pasa por los puntos de información, y considera las posibles co-regionalizaciones entre variables.

Dada su importancia he dedicado el capítulo siguiente a los aspectos de construcción del mismo.

### *B) Modelo de Explotación*

Es el modelo de base para simular la secuencia de explotación, por tanto debe reproducir con el mayor detalle posible el método de explotación simulado, roto-palas, dragalinas, block-caving, etc.

### *C) Modelo de Transporte*

Su utilización debe permitir el estudio de los movimientos de mineral y estéril en la mina, sea por camiones, por cintas transportadoras, etc.

### *D) Modelo de Almacenamiento y Homogeneización*

Debe de servir al estudio de estrategias de mezclas de mineral de calidades diferentes (homogeneización), antes de su envío a la planta de tratamiento, a la central termoeléctrica o a cualquier otro punto de utilización.

Una característica que se observa es que hay una relación estrecha entre todos estos modelos, de modo que podrían formar parte integrante de un único macromodelo de simulación de explotación, en particular para minas a cielo abierto, como ha sido propuesto por DERAISME et al. (1985). No obstante, a pesar de esta visión de conjunto, pienso que es preferible elaborar modelos independientes atendiendo exclusivamente a la singularidad del problema planteado en cada caso.

Por otra parte, hay que definir los parámetros y los útiles que intervienen en la simulación. La experiencia adquirida en estos últimos

años en este tipo de trabajos a través de estudios diversos, ha permitido distinguir estas dos etapas básicas del estudio: la **definición de los parámetros técnicos** de la simulación y la **elección de los útiles metodológicos** necesarios.

## 2.2. DEFINICION DE PARAMETROS

Como etapa previa al estudio de simulación sobre modelo hay que definir los distintos parámetros técnicos que intervienen en el mismo, que a modo de clasificación pertenecen a dos grupos principales, los parámetros de entrada y los de salida.

### 2.2.1. Parámetros técnicos de entrada

Son aquellos que tienen una mayor incidencia sobre los resultados finales de la simulación; son parámetros que en el estudio se les hace variar para conocer su efecto sobre los resultados. Como ejemplos de ellos se pueden mencionar el tamaño del bloque de selección, el número de bancos de explotación, la altura del banco, el número de rotopalas utilizadas, dimensiones y características del parque de almacenamiento y otros muchos más.

Ocurre que, como es lógico, a mayor número de parámetros considerados, se tendrá mayor precisión, lo que sucede en la práctica es que, por razones de cálculo combinatorio, se debe llegar a un equilibrio entre el número de estos parámetros y la previsión con la que se quieren dichos resultados. Así pues, conviene elegir los parámetros más interesantes de mayor peso en el estudio; ello por dos razones principales, la primera por la complejidad del trabajo, al manipular muchos parámetros habría multitud de combinatorias posibles que analizar, lo que representaría un esfuerzo excesivo, tanto en trabajo como en tiempo de cálculo; la segunda razón tiene carácter económico, los costos resultantes de toda esta labor serían más que importantes.

Por consiguiente, se debe limitar el número de estos parámetros a unos cuantos, a los principales, e igualmente hacerles variar en el margen de un corto número de posibilidades, para que el número de iteraciones necesarias para el estudio se vea sensiblemente reducido.

### 2.2.2. Parámetros técnicos de salida

Son aquellos que se obtienen como resultado de la simulación, y que permiten su cuantificación de acuerdo a los criterios seguidos en el trabajo. Obtenidos al final de la simulación sirven para comparar numéricamente las diferentes hipótesis de trabajo. Están relacionados con las características medias del mineral, tonelaje, metal, leyes medias, etc; y también con otros factores técnicos de la explotación que afectan claramente a su rentabilidad. Por ejemplo, en un depósito de lignito estudiado, ha sido interesante conocer al final de la explotación de un banco el tiempo real de trabajo de una rotopala y el tiempo de avería, entre otros aspectos interesantes de su funcionamiento.

No hay que olvidar que un aspecto muy importante del estudio se refiere a la presentación de los resultados, cuya exposición debe sintetizarse para facilitar al máximo la comprensión de los mismos. Frecuentemente, estos resultados se dan a través de **balances globales de materiales** en los que se recogen datos del mineral, del metal o del estéril manipulado. También, suelen emplearse las representaciones gráficas de los resultados por medio de **series temporales de la producción**: leyes medias, tonelaje o metal, para intervalos de tiempo fijados por el usuario.

#### *A) Balance global de materiales*

Consiste en un resumen numérico de síntesis de los resultados globales del estudio de simulación; en él podrán indicarse, por ejemplo, cifras referentes al tonelaje total de mineral extraído, al ratio de producción  $m^3$  estéril descubierto/t de mineral, a la ley media del mineral, a la cantidad total de metal y a cualquier otro parámetro que tenga interés.

Así, en la simulación de un yacimiento de uranio filoniano se han estudiado los resultados de una selección libre sobre bloques de  $25 m^3$ . Para ello se han comparado los resultados de la selección directa sobre las leyes verdaderas  $Z_v$  e indirecta sobre las leyes estimadas. La comparación se ha hecho para cada banco de explotación y para diferentes leyes de selección  $z_c$  de interés económico.

Algunos de los resultados obtenidos se han representado en la figura II.9, donde se ve la evolución de las funciones de recuperación  $T(z_c)$ ,  $Q(z_c)$  y  $m(z_c)$  para cada uno de los bancos, correspondientes a los casos de selección ideal y prevista. Como se comprueba la selección indirecta ha dado resultados globales muy próximos a la selección directa, debido a que las leyes de los bloques han sido bien estimadas por la malla de preexplotación (obtenida por simulación condicional).

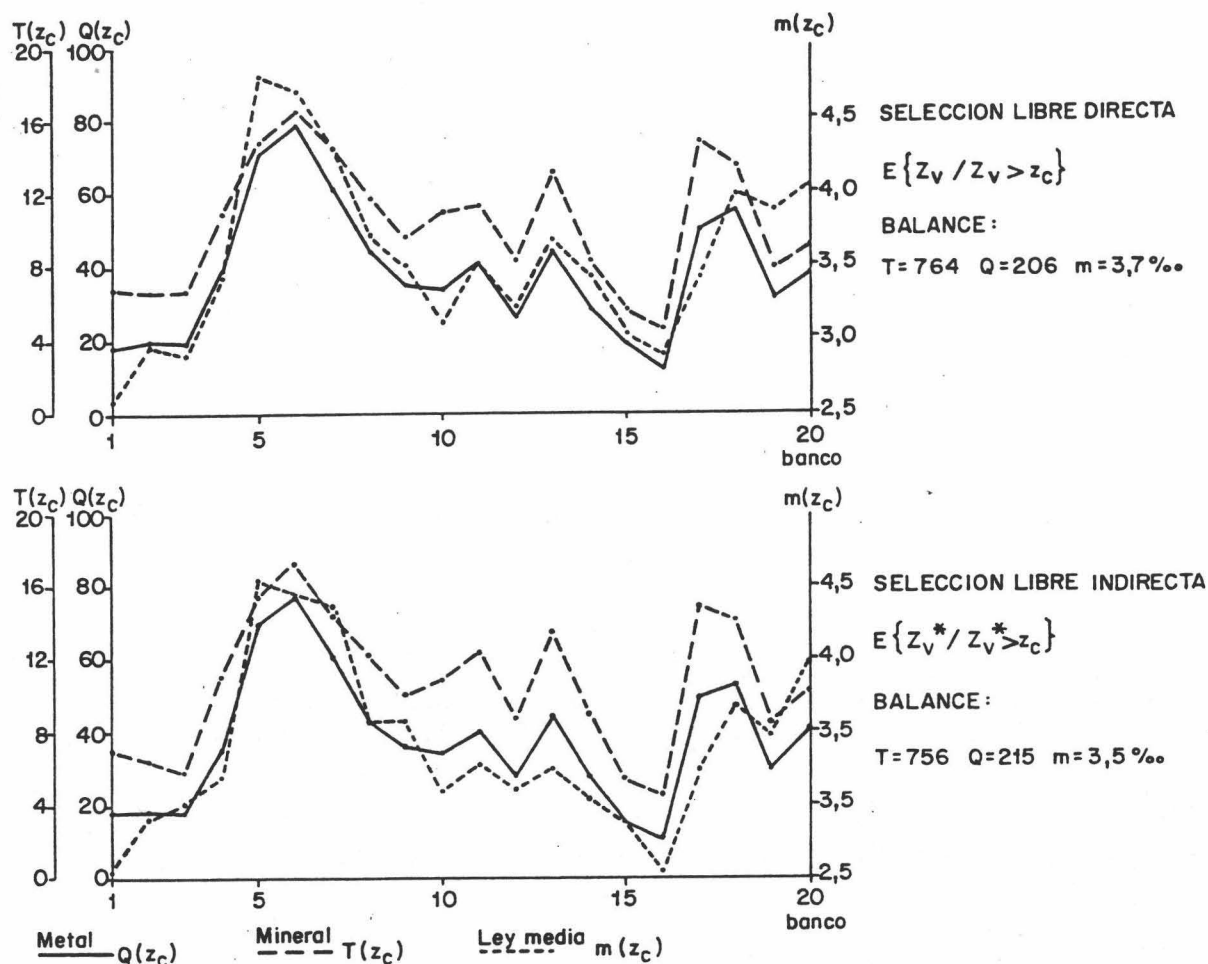


Figura II.9.- Simulación de explotación: balance global de materiales.

### B) Secuencias temporales

La otra forma de presentación de los resultados de la simulación es a través de secuencias de datos temporales, en las cuales el parámetro elegido, tonelaje, metal, ley media, etc, se representa para cada paso del intervalo de tiempo usado en la simulación. Al final, se obtienen curvas de interés para analizar la dispersión de estas características para diferentes periodos de observación, día, semana, mes, etc.



Un ejemplo tipo de estos resultados se da en la figura II.10, en la cual se ha dibujado el tonelaje producido diariamente en un yacimiento de carbón durante un periodo de 140 días.

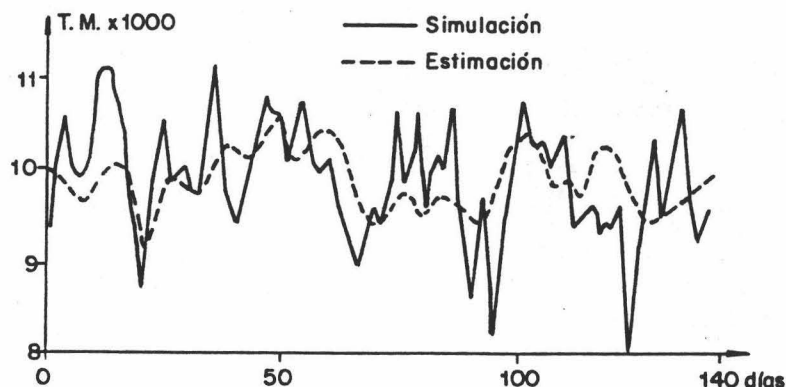


Figura II.10.- Simulación de explotación: secuencias temporales. Se ha representado la evolución diaria del tonelaje de carbón previsto (estimación) y "real" (simulación).

El intervalo de tiempo a utilizar en estos estudios dependerá de los objetivos propuestos y del tamaño del soporte utilizado en la modelización del yacimiento.

Aunque las curvas simuladas no tienen razón de coincidir localmente con las reales, sí que tienen el mismo comportamiento medio, de aquí que sirvan para conocer la dispersión de las leyes para diferentes intervalos de tiempo,  $D^2 (t/T)$  (tabla II.4).

Variable	$D^2 (t/T)$ $t/T$ días		
	1/30	1/60	1/90
Cenizas	0.344	0.381	0.387
	0.082	0.087	0.089
Azufre	0.0140	0.0144	0.0148
	0.0060	0.0061	0.0062

Tabla II.4.- Simulación de explotación: análisis de varianzas de dispersión de la calidad de un carbón. La cifra indicada en la parte superior corresponde a los valores reales (simulados) y la inferior a los valores estimados (krigeados).

El interés de este tipo de datos es manifiesto en el control de calidad de la producción en una mina.

### 2.3. UTILES METODOLOGICOS PARA LA SIMULACION

Para llevar a cabo el estudio, en base a los parámetros definidos, es necesario elegir los útiles metodológicos que permitan su realización; éstos dependen en número y tipo de las características del yacimiento y concretamente del método de explotación simulado, asimismo de las características propias del problema tratado.

A pesar de que cada vez es más frecuente la realización de este tipo de estudios, con referencias tanto a yacimientos metálicos como no metálicos, las herramientas empleadas en su solución difieren de unos casos a otros; de forma que, para cada uno de ellos se ha tenido que elaborar útiles específicos. No obstante, todos estos útiles pueden clasificarse en tres grandes grupos, que son: los medios informáticos, el empleo conjunto de la estimación y simulación geoestadísticas y la modelización de los procesos reales de explotación.

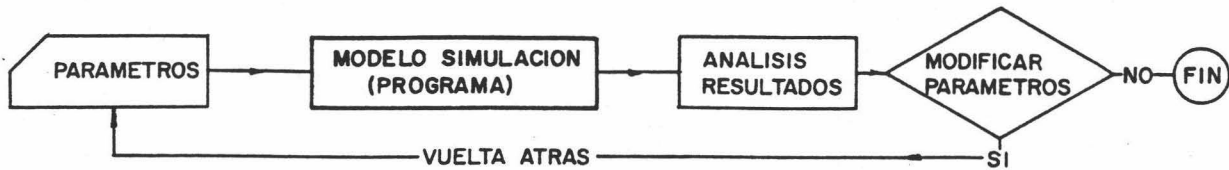
#### 2.3.1. Medios informáticos

Dos aspectos importantes caracterizan el modo de trabajo de un estudio de simulación: su elaboración, que debe hacerse de modo interactivo a través de un mecanismo respuesta/decisión de tipo "feed-back", y la presentación de resultados que debe sintetizarse, resumiendo en lo posible las largas listas de datos que fluyen del ordenador.

Los avances ocurridos en estos últimos años en el campo de la informática han facilitado la práctica de estos estudios, para ser más preciso diré que la llegada del ordenador personal y del equipo medio a las minas han hecho posible su desarrollo actual.

Elaborar un buen programa interactivo de simulación es un aspecto clave del estudio, pues permitirá analizar las respuestas del modelo bajo distintas hipótesis de trabajo con un costo de tiempo y esfuerzo razonables. Como indica el esquema adjunto se establece un "diálogo" entre el práctico y el modelo, aquél introduce los criterios de trabajo

por medio de parámetros, la máquina efectúa los cálculos y transmite los resultados que son analizados. El proceso se repite hasta considerar que los resultados son conformes a los objetivos establecidos:



El empleo de terminales gráficas facilita sobremedida el trabajo a desempeñar, puesto que a través de ellas se visualizan cómodamente los resultados globales de la simulación. En el ejemplo de una explotación de lignito a cielo abierto se ha podido dibujar el frente de explotación correspondiente a cada una de las rotopalas, para intervalos de tiempo escogidos, como puede verse en la figura II.11.

La ventaja esencial de este modo de representación es que los resultados son así más fácilmente comprensibles que una lista extensa de datos numéricos, lo que justifica ampliamente el esfuerzo realizado en este menester.

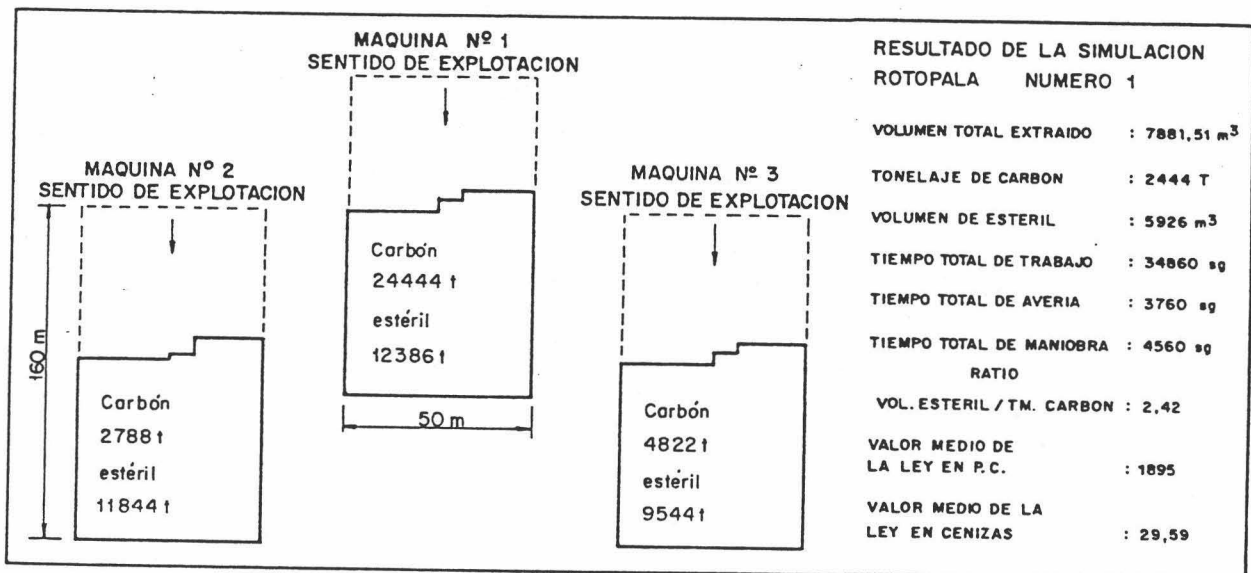


Figura II.11.- Simulación de explotación: representación gráfica de resultados con visualización de los volúmenes explotados al final del tiempo de simulación.

### 2.3.2. Utilización de la estimación y simulación geoestadísticas

Los estudios de simulación de explotación, y en concreto los relacionados con la práctica de la selección minera, necesitan el uso conjunto de los métodos de explotación y simulación geoestadísticas de las leyes medias de los bloques.

La simulación condicional conduce a un modelo de yacimiento que en el estudio reemplaza al yacimiento verdadero, definido sobre el soporte del bloque de explotación; el krigage dará en los mismos bloques las leyes estimadas. Cuando se planifica, se aplican los criterios de selección sobre los datos estimados, comprobando seguidamente el alcance de los mismos con la ayuda de los valores "reales" simulados (comparación entre la selección prevista y realizada).

Para simular la selección en la mina no hace falta conocer los valores exactos de las leyes en la malla de selección, bastará con que los estimadores de los bloques construidos a partir de esta información tengan la misma distribución de probabilidad que los estimadores futuros. Esto es posible de evaluar si se conocen la configuración geométrica de la malla de selección y el variograma de las leyes experimentales. Para ello se simulan los valores de las leyes en los puntos de la malla, los estimadores de krigage de los bloques construidos a partir de ella tendrán la misma ley que la correspondiente a los estimadores futuros. En particular, sus varianzas de dispersión serán iguales, que es lo que interesa en los estudios de calidad del mineral.

Este razonamiento tiene por fundamento el que los datos simulados tienen, por construcción, la misma distribución y el mismo variograma que los datos experimentales, también a que la dispersión del estimador de krigage sólo depende de la configuración de los datos y del variograma. Con lo cual se conoce con antelación la dispersión de las leyes estimadas en el yacimiento  $D^2(Z_v^*/G)$ .

### 2.3.3. Modelización de los procesos reales

Este aspecto metodológico se refiere a la construcción de algoritmos para simular los procesos mineros que intervienen en el estudio, como son la explotación, el transporte o el almacenamiento. El objetivo en

sí no es explicar numéricamente el detalle de los complejos mecanismos físicos que allí se producen, sino considerar las transformaciones fundamentales que sufre el mineral a través de ellos, especialmente las referentes a su calidad.

Así, por ejemplo, para el mismo yacimiento citado se han elaborado algoritmos para simular la explotación mediante rotopaldas y el almacenamiento mediante pilas en "chevrons". En este caso el algoritmo tiene un doble carácter probabilista y determinista: los datos de entrada son proporcionados por el modelo geoestadístico del yacimiento y también pueden corresponder a una simulación de un flujo de leyes de variograma, o covarianza, impuesto. El aspecto determinista proviene de la modelización de los aspectos técnicos del almacenamiento.

La modelización de la recuperación metalúrgica en el tratamiento, conocida la dispersión de los datos de entrada al lavadero, presenta problemas complejos debido a la diversidad de los procesos físicos que intervienen. Los trabajos de DERAISME (1978 b) han demostrado que en una primera aproximación pueden utilizarse los modelos de tipo "caja negra", que buscan calar series experimentales a partir de modelos funcionales o estadísticos; queda no obstante por realizar, en mi opinión, mucho trabajo en este área de investigación.

### 3. ETAPAS BASICAS DE UN ESTUDIO DE SIMULACION DE EXPLOTACION

Es difícil a priori precisar una secuencia fija de operaciones, debido a la tipología de yacimientos existentes y a la diversidad de problemas a la que hay que enfrentarse; incluso a nivel de objetivos, éstos difieren aún tratándose del mismo yacimiento. Así pues, para cada caso hay que encontrar un modo operativo adecuado, adaptando los útiles señalados a los objetivos propuestos. No obstante, se podría establecer el siguiente organigrama que incluye las etapas más frecuentes en estos estudios:

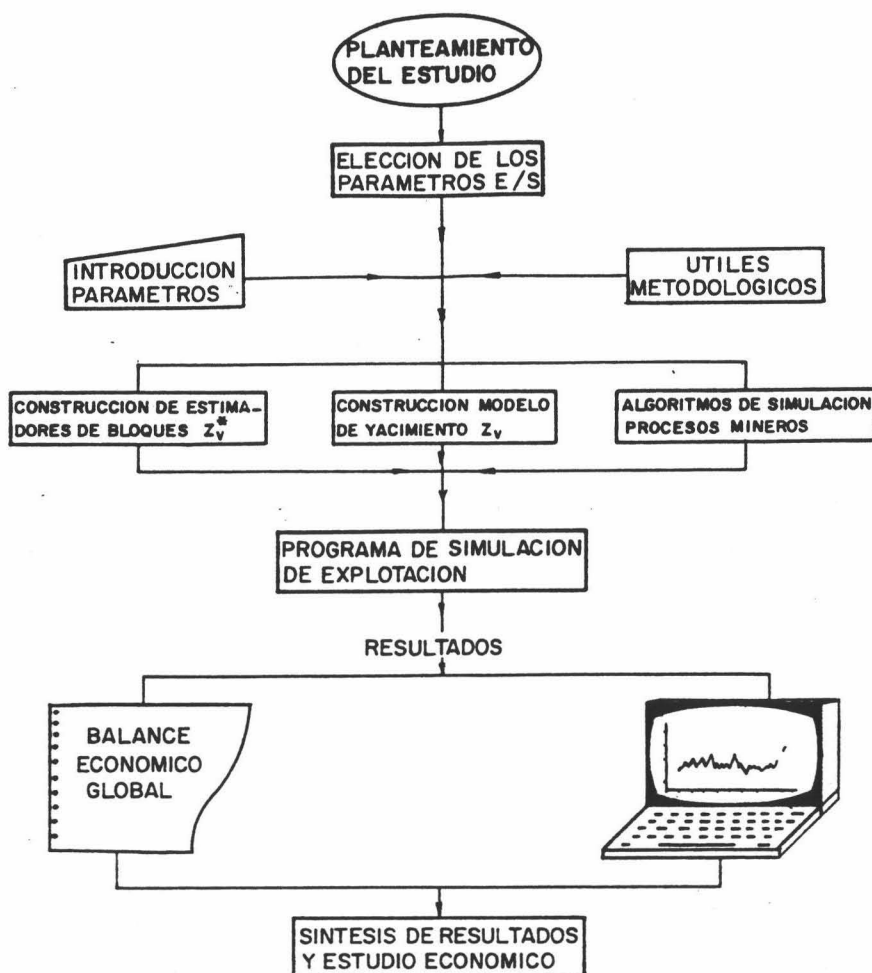


Figura 11.12.- Organigrama del estudio de simulación de explotación.

#### A) Planteamiento del estudio

En esta etapa se fijan los objetivos y analizan los parámetros de entrada/salida de la simulación, tamaño del bloque, malla de información, altura del banco, etc; es decir, todos aquellos parámetros que se desean hacer variar en iteraciones sucesivas, para ver su influencia en los resultados finales, y también aquellos parámetros que miden la calidad de los resultados como leyes medias, tonelajes, ratios, etc.

#### B) Construcción de los estimadores de los bloques

Se refiere a la estimación por krigeage de las leyes de los bloques utilizando el variograma de los datos disponibles en ese momento. Si se está en la fase de proyecto, los datos pertenecerán a los sondeos de reconocimiento; en explotación podrán utilizarse además los datos provenientes del control de leyes.

Estudios realizados por BERNUY et al. (1976) sobre campaña de reconocimiento secuencial, a partir de un modelo de yacimiento, han demostrado que si el reconocimiento inicial ha sido correcto, un suplemento de información no produce cambios sustanciales de los modelos de variogramas ajustados. Existe por tanto una robustez del ajuste del variograma cuando se cierra la malla de información; conclusión que puede no ser válida para todos los yacimientos, pero que en cualquier caso tiene un valor orientativo.

### *C) Construcción del modelo numérico de yacimiento*

Consiste en la obtención del modelo de yacimiento por aplicación del método de simulación condicional. Para cada bloque se tiene la ley simulada "ley verdadera", que en la aplicación representará a la ley verdadera desconocida.

El modelo de variograma a inyectar en la simulación condicional debe corresponder al utilizado en la estimación.

Dada la cantidad y complejidad de cálculos a realizar en esta etapa y en la anterior, es aconsejable efectuarlos una sola vez, a ser posible en un ordenador de capacidad suficiente. Según el caso tratado se podrá trasladar la información necesaria a un equipo personal, donde se obtendrán los resultados finales.

### *D) Algoritmos de simulación de los procesos mineros*

Como ya se ha comentado es necesario construir programas que simulen el proceso minero que se desea estudiar.

### *E) Programa de simulación*

Es el programa que hace de interfase entre la información del sector tratado y el algoritmo de simulación del proceso minero, aplicado éste a dicha información. En cada yacimiento puede construirse un programa de simulación que, con ligeros retoques, servirá para tratar cualquier otro problema.

Como ejemplos de tales programas DUMAY (1981) presenta un programa escrito en BASIC para simular la explotación de un yacimiento de níquel; DERAISME y de FOUQUET (1984 a) han desarrollado un programa para simulación de explotación de yacimientos de uranio fisurados y CHICA-OLMO y LAILLE (1984) han elaborado un programa que simula la explotación de yacimientos sedimentarios multicapa con rotopalas.

*F) Síntesis de resultados y estudio económico*

Al final, los datos numéricos obtenidos deben ser sintetizados para su utilización, si es necesario, en estudios económicos que evalúen los costos y beneficios de cada opción de trabajo. A veces no es suficiente la experiencia del minero para discernir en base a los resultados de dos opciones cual de ellas es más óptima; por otra parte tampoco es evidente que un simple balance de materias o una reducción de la dispersión sea suficiente para encontrar dicho óptimo, de aquí que tenga interés, siempre que sea posible aplicar a los datos obtenidos, un análisis económico que ponga en balanza los costos y los beneficios de cada alternativa.

Con ello se evita muy probablemente cometer errores graves en la toma de decisiones que vendrán a continuación.





## CAPITULO VII

### EL MODELO GEOESTADISTICO DE YACIMIENTO

#### 1. CARACTERISTICAS DEL MODELO

El modelo geoestadístico de yacimiento se interpreta probabilísticamente como una realización particular  $z_s(x)$  de la FA  $Z(x)$  que define a la variable regionalizada simulada, con las mismas propiedades de distribución y dispersión que los datos experimentales  $z(x)$ . Se tiene pues que  $z(x)$  y  $z_s(x)$  son dos realizaciones isomorfas de la misma FA  $Z(x)$ .

Su construcción se hace por el método de simulación condicional (JOURNEL, 1974).

Las características principales de la variable simulada  $Z_s(x)$  son:

. Esperanza,  $E\{Z_s(x)\} = E\{Z(x)\}$

El valor medio simulado coincide con el valor medio de los datos experimentales.

. Varianza,  $\text{Var}\{Z_s(x)\} = \text{Var}\{Z(x)\}$

Las varianzas son igualmente coincidentes.

. Variograma,  $\gamma_s(h) = \gamma(h)$

Hay conservación del variograma en la simulación; se garantiza así que la dispersión de los datos simulados y experimentales sea la misma.

. Distribución,  $F_S(z) = F(z)$

Los histogramas de los datos simulados y experimentales son coincidentes.

. Condicionamiento  $Z_S(x) = Z(x) / \forall x \in G$

Frecuentemente, se exige también al modelo que pase por los puntos experimentales, esto es, que coincidan ambos valores en los puntos de observación  $x$ .

Se comprende pues que el modelo geoestadístico equivale a la realidad en sus parámetros cuantitativos, con la seguridad de que reproduce las estructuras de variabilidad espacial de las leyes. Desde la óptica práctica que nos anima, es correcto interpretar al modelo como una versión posible de la realidad, con la ventaja sobre ésta de conocerse en todos los puntos (bloques) del yacimiento.

Seguidamente, se va a reflexionar más detalladamente sobre las características del modelo.

### 1.1. VARIABILIDAD

La dispersión de la mineralización es reproducida en el modelo si éste reproduce igualmente el variograma simulado. En el caso de estudio de co-regionalizaciones entre variables,  $Z_i(x)$   $Z_j(x)$ , es necesario también que el modelo reproduzca la correlación entre ellas, para ello es suficiente que el modelo tenga cuenta del variograma cruzado  $\gamma_{ij}$ :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E\{Z(x+h) - Z(x)\}^2$$

$$\gamma_{ij}(h) = \frac{1}{2} E\{(Z_i(x+h) - Z_i(x)) \cdot (Z_j(x+h) - Z_j(x))\}$$

El conocimiento de la función  $\gamma(h)$  implica el de la dispersión de las leyes a cualquier escala dentro del yacimiento, y sobre cualquier soporte  $v$ ; bastará con aplicar las relaciones clásicas vistas en la introducción, referentes al cálculo de  $D^2(v/G)$  y del variograma regularizado  $\gamma_v(h)$ .

## 1.2. DISTRIBUCION

Con base en la hipótesis de estacionaridad, la reproducción del histograma experimental en el modelo se hace aplicando la técnica de anamorfosis gaussianana (MATHERON, 1975 b; MARECHAL, 1975; véase Anexo I).

Partiendo de un soporte puntual (leyes de testigos) se busca la función  $\phi(y)$  que establece la correspondencia entre la distribución de la variable experimental  $Z(x)$  y la de una variable normal centrada reducida  $Y(x)$ :  $F(z) = G(y)$ .

En la práctica el conocimiento del histograma experimental  $F(z)$  es suficiente para ajustar la función que establece la biyección  $z \rightleftharpoons y$ . La función admite un desarrollo hermitiano de la forma,

$$Z = \phi(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n}{n!} H_n(Y) \quad \text{con} \quad H_n(y) = e^{y^2/2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2/2}$$

desarrollo que se detiene al orden  $N$  para el cual se consigue un buen ajuste del histograma experimental (véase figura II.13 a), verificándose que:

$$\sum_{n=1}^N \frac{\psi_n^2}{n!} \approx D^2(Z/G)$$

donde  $D(Z/G)$  es la varianza experimental de los datos.

Puesto que, en general, se interesa en los valores medios de los bloques  $v$ , es necesario hacer el cambio de soporte para pasar de la distribución puntual  $F(z)$  a la de bloque  $F_v(z)$ ; el problema consiste en encontrar la función  $\phi_v(x)$  correspondiente; para ello se supone una hipótesis de permanencia de ley de distribución de las variables  $Z(x)$  y  $Z_v(x)$ . Esta hipótesis implica que sólo el parámetro de dispersión será modificado en el cambio de distribución.

La relación que liga la dispersión de las leyes  $Z_v$  en el yacimiento  $D^2(Z_v/G)$ , conocida, con la función  $\phi(y)$  de datos puntuales, también conocida, es:

$$D^2 (Z_v/G) = \sum_{n=1}^N \frac{(\psi_n r^n)^2}{n!}$$

relación que conduce al cálculo numérico del coeficiente de cambio de soporte  $r$ , según el modelo gaussiano discreto de MATHERON (1975 a) al cual he hecho referencias en otras ocasiones. Conocido el valor de  $r$  la función  $\phi_v(X)$  está completamente determinada:

$$Z_v = \phi_v(X) = \sum_{n=0}^N \frac{\psi_n r^n}{n!} H_n(X)$$

donde  $X$  es una variable  $N(0,1)$  asociada a  $Z_v$  (figura II.13 b).

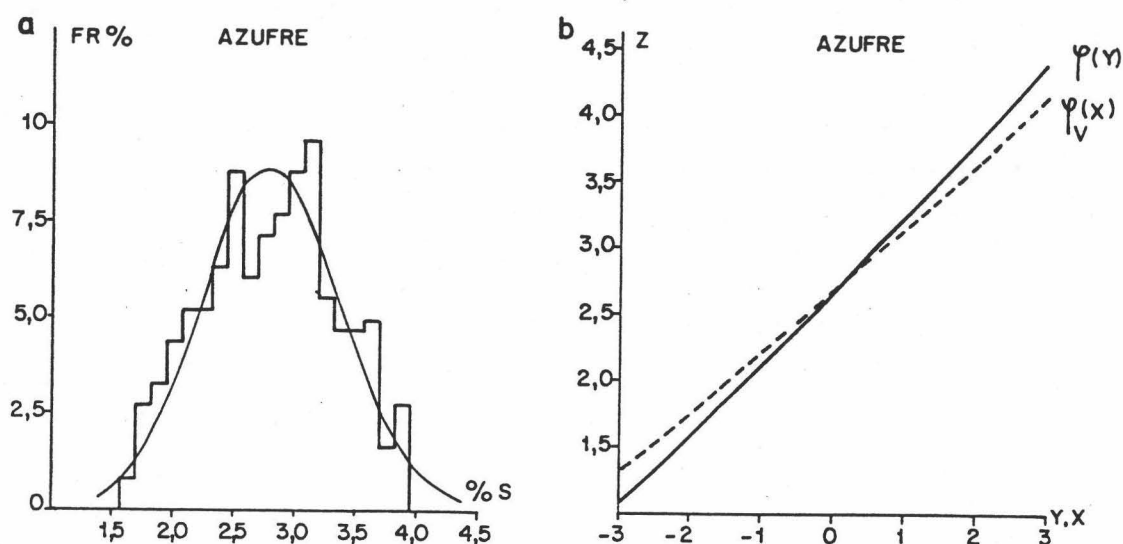


Figura II.13.- a) Ajuste hermitiano del histograma experimental de datos del contenido en azufre.

b) Funciones de anamorfosis  $\phi$  y  $\phi_v$  para el contenido en azufre.

### 1.3. CONDICIONAMIENTO DEL MODELO

Condición que a menudo se impone a la variable simulada es la de tomar el mismo valor que la variable real en los puntos de observación; se dice entonces que la simulación pasa por los puntos experimentales como se ve en la figura II.14.

Más tarde se volverá a hablar del condicionamiento del modelo especificando su modo de realización práctica.

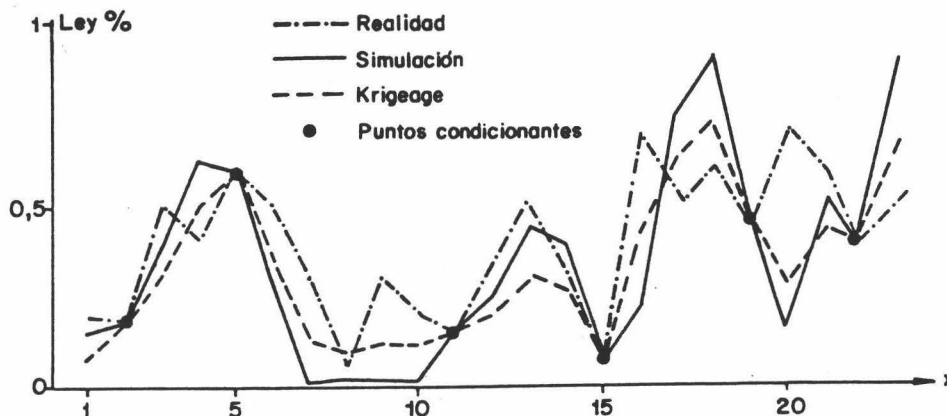
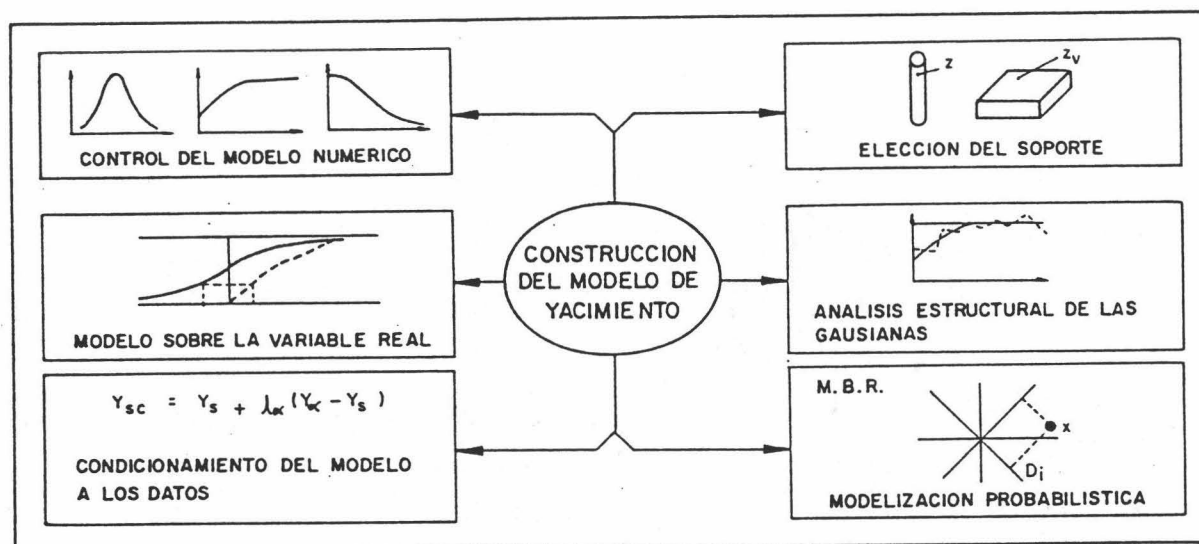


Figura 11.14.- Condicionamiento del modelo.

## 2. CONSTRUCCION DEL MODELO

Las etapas básicas para la construcción del modelo de yacimiento se dan en el esquema adjunto; de cada una de ellas doy las características principales en los párrafos siguientes.



### 2.1. ELECCION DEL SOPORTE

Antes de proceder a la construcción del modelo numérico es necesario elegir el soporte, el volumen sobre el cual se desean simular la o las leyes del mineral, ya que el modelo debe tener en cuenta las relaciones geoestadísticas existentes entre la variable regionalizada y su soporte de observación. El soporte puede ser puntual, correspondiente al de los datos experimentales, o un bloque v.

Es importante este aspecto de definición del soporte, pues no hay que olvidar que se trata de uno de los elementos determinantes de la selectividad en mina y por tanto de los beneficios económicos.

En la elaboración del modelo es conveniente utilizar como soporte un volumen inferior a la unidad de selección contemplada, en el estudio de simulación de explotación, se obtendrá así una discretización suficientemente fina del sector de trabajo y también servirá para obtener información de volúmenes mayores de interés, reagrupando estos soportes elementales. Este ha sido el caso de un yacimiento de uranio estudiado, donde el tamaño del bloque del modelo ha sido de  $1 \times 1 \times 1,5 \text{ m}^3$ , habiéndose estudiado los beneficios de la explotación a partir de dos bloques de selección diferentes, de  $3 \times 3 \times 3 \text{ m}^3$  y  $3 \times 3 \times 4,5 \text{ m}^3$ , obtenidos por reagrupación de  $3 \times 3 \times 2$  y  $3 \times 3 \times 3$  bloques elementales respectivamente.

Describiré dos métodos principales para simular una variable sobre el soporte de bloque  $v$ :  $Z_{vs}$ .

#### *A) A partir del soporte puntual*

El método es simple de poner en práctica; consiste en encontrar una aproximación a la integral que representa la variable regularizada  $Z_v$ , por una suma discreta de datos puntuales simulados  $Z_s(x)$ .

$$Z_{vs} = 1/v \int_v Z_s(x) dx \quad \rightarrow \quad Z_{vs} = 1/N \sum^N Z_s(x)$$

Se da la ventaja de que el método puede proporcionar simultáneamente un modelo de puntos y de bloques sin hacer hipótesis adicionales sobre la distribución de  $Z_v$ . Al contrario, tiene el inconveniente de requerir mucho tiempo de cálculo si el número de puntos simulados es importante. En particular, lo he aplicado en la modelización de yacimientos estratiformes (2-D) de pequeñas dimensiones, con un número de puntos simulado no demasiado importante.

#### *B) Modelización directa de la ley del bloque*

Es sin duda el método más utilizado en la práctica geoestadística; en él se dan hipótesis de permanencia de ley para deducir la distribución de bloques  $F_v(z)$  a partir de la ley de distribución de datos experimentales  $F(z)$ .

El método consiste en modelizar directamente la variable  $Z_v$  por medio del variograma regularizado  $\gamma_v(h)$ , que se sabe obtener a partir del variograma  $\gamma(h)$ .

Con el método se obtiene igualmente un modelo de yacimiento mixto punto/bloque con implicaciones prácticas importantes, simplemente con aplicar la relación siguiente del modelo gaussiano (véase Anexo II):

$$Y_S(x_i) = r X_S(v_i) + \sqrt{1-r^2} U_i \quad U_i = N(0,1) \quad x_i \in v_i$$

donde los  $Y_S(x_i)$  son los valores gaussianos en el punto  $x_i$  deducidos de la gaussiana del bloque simulado  $X_S(v_i)$ . Por otra parte,  $r X_S(v_i)$  y  $(1-r^2)$  definen la media y varianza de la variable puntual simulada en los bloques  $Y_S(x_i)$  y  $r$  el coeficiente de cambio de soporte.

Los  $Y_S(x_i)$  deben calcularse siempre, ya que son necesarios para el condicionamiento del modelo.

## 2.2. ANALISIS ESTRUCTURAL DE LAS GAUSIANAS

En la simulación puntual hay que hacer el análisis estructural directo sobre la variable gaussiana  $Y(x_\alpha)$ , deducida por anamorfosis de los datos experimentales  $Z(x_\alpha)$ ; la covarianza (o el variograma) ajustada  $\rho(h)$  se inyectará en el algoritmo de simulación condicional.

Otra forma, indirecta, de calcular la covarianza puntual  $\rho(h)$  la ofrece el modelo hermitiano por medio del desarrollo de  $\phi(y)$  y de la covarianza experimental  $C(h)$ , mediante la relación:

$$C(h) = \sum_{n=0}^N \frac{\psi_n^2}{n!} \rho^n(h)$$

La robustez del modelo ajustado existe, cualquiera que sea el modo operativo, como puede deducirse del parecido entre el variograma experimental de los  $Y(x_\alpha)$  y el obtenido por la relación teórica que muestro en la figura II.15.

En los estudios de las co-regionalizaciones en los que se simulan varias variables a la vez, se dispone de una relación semejante a la



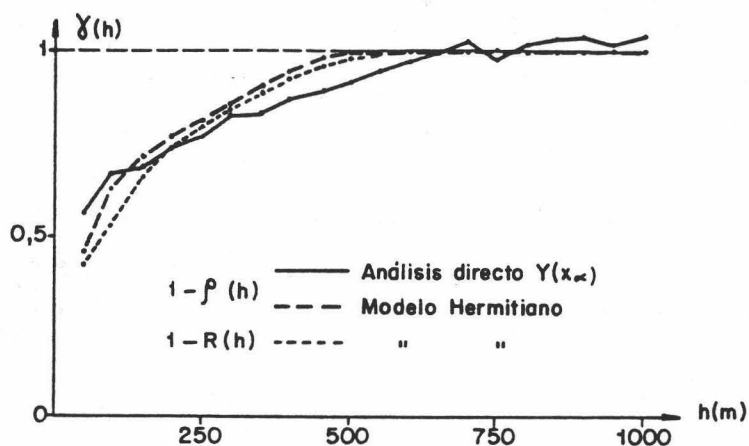


Figura II.15.- Análisis estructural de las gaussianas.

anterior, pero establecida en función de los coeficientes  $\psi_{n,i}$  y  $\psi_{n,j}$  de las anamorfosis  $\phi_i$  y  $\phi_j$  de cada pareja de variables  $Z_i, Z_j$ . La covarianza cruzada  $C_{ij}(h)$  permite el cálculo del correlograma cruzado  $\rho_{ij}(h)$ :

$$C_{ij}(h) = \sum_{n=0}^N \frac{\psi_{n,i} \psi_{n,j}}{n!} \rho_{ij}(h)$$

Si la simulación se hace sobre soporte de bloque, la covarianza (variograma) a inyectar en el algoritmo de simulación condicional debe de ser el correlograma  $R(h)$  de las gaussianas de bloques  $X(v)$  (cf. figura II.15). Al respecto, es preciso indicar que  $X$  no es la regularizada de  $Y$ , o lo que es igual, la gaussiana del bloque no es la regularizada de la gaussiana puntual a diferencia de lo que ocurre entre  $Z_v$  y  $Z$ , donde  $Z_v$  es la regularizada de  $Z$  sobre  $v$ . Se tiene entonces que:

$$Z_v = 1/v \int_v Z(x) dx = 1/v \int_v \phi\{Y(x)\} dx$$

pero que del hecho de la no linealidad de la función de anamorfosis, se tendría que:

$$Z_v \neq \phi_v \left\{ 1/v \int_v Y(x) dx \right\} = Y(v)$$

y por tanto:

$$Y(v) = 1/v \int_v Y(x) dx \neq X(v) = \phi_v^{-1}(Z_v) = \phi_v^{-1} \left\{ 1/v \int_v \phi[Y(x)] dx \right\}$$

En base al modelo hermitiano puede deducirse  $R(h)$  a partir de la covarianza de bloques  $C_v(h)$  que se sabe calcular por regularización de  $C(h)$ , y aplicando la anamorfosis  $\phi_v(X)$ :

$$C_v(h) = \sum_{n=0}^N \frac{(\psi_n r^n)^2}{n!} R^n(h)$$

### 2.3. MODELIZACION PROBABILISTICA

Consiste en la simulación de una realización de una función aleatoria que tiene por estructura de correlación espacial la covarianza gaussiana  $\rho(h)$  o  $R(h)$  a simular, que anotaré seguidamente por  $C(h)$ . La realización,  $y_s(x)$ , se obtiene por el método de "bandas o rectas rotantes" (MATHERON, 1972 b; JOURNEL, 1974; GUIBAL, 1972), que permite simular realizaciones independientes en el espacio  $R^3$  o  $R^2$  a partir de la suma de realizaciones en una dimensión  $R^1$ . Las realizaciones independientes se obtienen sobre un conjunto de rectas que barren homogéneamente el espacio.

De forma breve, en tres dimensiones, el proceso comienza con la generación de realizaciones  $t_i$  de  $VA_s$  independientes  $T_i$ , de igual ley uniforme, sobre cada recta  $d$  y en los puntos de la malla de simulación. La media móvil dada por la expresión  $y_i^d = \sum_{i+k} t_{i+k} f(kb)$  caracteriza una realización de la FA  $Y^d$  de covarianza en una dimensión  $C^1(h)$ , relacionada con la covarianza tridimensional  $C(h)$  por la relación

$$C^1(h) = \frac{\partial}{\partial h} h C(h)$$

$f(kb)$  es una función de ponderación escogida según el tipo de covarianza simulada. Finalmente, para cada punto del espacio simulado se calcula el valor  $y_s(x)$  por contribución de cada una de las realizaciones obtenidas en las rectas, lo que da la solución buscada.

$$y_s(x) = \frac{1}{\sqrt{ND}} \sum_{i=1}^{ND} y_i(x_{di})$$

El método produce realizaciones de  $VA_s$  de distribución normal ya que como es de notar hace uso del teorema central límite para la obtención de los  $y_s(x)$ .

En la figura II.16 queda gráficamente representado el método.

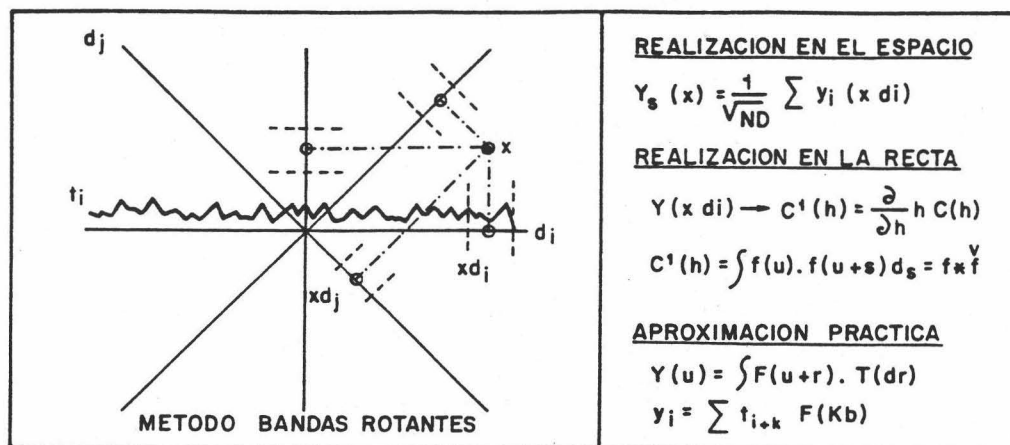


Figura 17.16.- Modelización probabilística.

#### 2.4. CONDICIONAMIENTO DEL MODELO A LA INFORMACION EXPERIMENTAL

Una característica posible del modelo de yacimiento es la de estar condicionado por los datos experimentales. El condicionamiento se hace con la variable  $Y(x_\alpha)$  deducida por anamorfosis de  $Z(x_\alpha)$ , por medio del kriging de la diferencia, en los puntos de observación  $x_\alpha$ , entre los  $y(x_\alpha)$  y los valores simulados no condicionalmente  $y_s(x_\alpha)$  obtenidos en la etapa anterior. La relación de condicionamiento es

$$y_{sc}(x) = y_s(x) + \sum \lambda_\alpha \{y(x_\alpha) - y_s(x_\alpha)\}$$

donde los índices sc y s indican simulación condicional y no condicional. La relación establece que el valor simulado condicionalmente en el punto x es igual al valor simulado no condicional más el valor krigado en dicho punto de las diferencias  $\{y(x_\alpha) - y_s(x_\alpha)\}$ .

#### 2.5. MODELO SOBRE LA VARIABLE REAL

En este momento se dispone de una realización condicional o no de una variable normal sobre soporte puntual o de bloque, ya que la modelización probabilística sólo sabe simular una FA de variables normales.

Si se quiere regresar a la distribución de la variable real Z, o  $Z_v$ , es necesario coger de vuelta el camino andado; todo consiste en aplicar las anamorfosis correspondientes expresadas por sus desarrollos hermitianos:

$$Z_{SC}(x) = \phi\{Y_{SC}(x)\} = \sum_{n=0}^N \frac{\psi_n}{n!} H_n(Y_{SC}(x))$$

$$Z_{SC}(v) = \phi_v\{X_{SC}(v)\} = \sum_{n=0}^N \frac{\psi_n r^n}{n!} H_n(X_{SC}(v))$$

Se obtiene finalmente un modelo que da la imagen correcta del yacimiento, tal como se le ve a través de los datos experimentales.

## 2.6. CONTROL DEL MODELO NUMERICO

El modelo ya está acabado, presentándose como un conjunto de bloques que integran la mineralización informados por valores numéricos de las leyes simuladas; si es posible puede completarse con otro tipo de información que afecte al bloque, por ejemplo de naturaleza geológica.

Ahora bien, antes de que sea utilizado en los estudios se debe comprobar que todas las hipótesis implicadas en su construcción han sido respetadas, por lo que es conveniente hacer un chequeo numérico al modelo. En tal sentido pueden llevarse a cabo diferentes tests geoestadísticos, como por ejemplo:

### *A) Cálculo de histogramas y de funciones de recuperación*

Cálculo que puede efectuarse para soportes distintos, con la comprobación de que el modelo reproduce las leyes del yacimiento, lo que asegura que los resultados posteriores no tendrán sesgo.

### *B) Cálculo de variogramas*

Si la modelización probabilística ha sido correcta, las leyes simuladas tendrán un variograma experimental conforme con el modelo de variograma simulado. Las estructuras elementales deben estar bien reproducidas por sus valores de meseta y de alcance, así como también las posibles anisotropías geométricas o zonales puestas de manifiesto en el análisis estructural.

### C) Visualización de cortes y sondeos

Con ellos se busca representar gráficamente los resultados de la simulación. Son importantes los mapas de evolución de leyes elaborados para las direcciones principales del yacimiento; igualmente, son de interés los sondeos de información, tanto horizontales como verticales, sobre el modelo, constatando que el condicionamiento ha sido respetado.

Algunos de estos resultados obtenidos sobre distintos yacimientos simulados se presentan en la figura II.17.

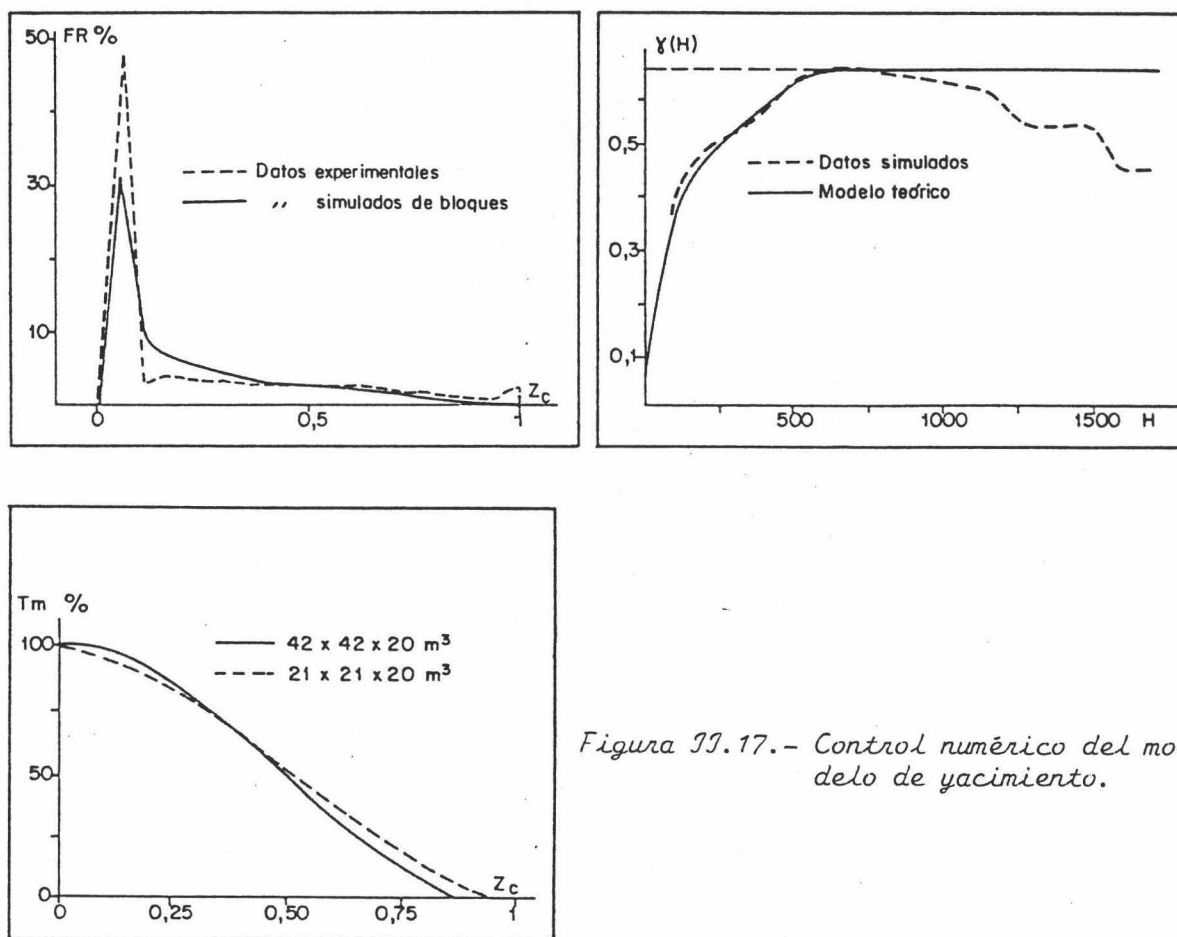


Figura II.17.- Control numérico del modelo de yacimiento.

### 3. EL MODELO GEOMETRICO DE YACIMIENTO

El método descrito es de uso general en geoestadística para simular variables continuas con distribuciones más o menos homogéneas. Sin embargo, puede tener algún problema a la hora de reproducir la geometría de la

mineralización, factor importante a tener en cuenta en el estudio de yacimientos con leyes muy heterogéneas; pienso en concreto en los yacimientos de uranio en los cuales el mineral se asocia principalmente a un determinado patrón de fracturas, o también en depósitos sedimentarios con carácter multicapa. Aplicar el método en estos casos, podría originar un conjunto simulado cuyo aspecto fuese más homogéneo que el yacimiento real, tal como se le ve a través de los datos de sondeos.

Un modelo poco utilizado, pero que reviste un gran interés en aplicaciones sedimentológicas, es el modelo Aleatorio-Genético, propuesto por MATHERON (1969 b) y desarrollado en sus aspectos prácticos por JACOD y JOATHON (1970 a y b y 1971). Permite simular probabilísticamente la geometría especial de capas de facies distintas en un dominio sedimentario, con la intervención de hipótesis genéticas. La construcción del modelo puede presentar ciertos problemas, debido a la complejidad de evaluar ciertos parámetros de índole geológica que en él intervienen, razón que ha llevado a que sea poco utilizado en la práctica. Sin embargo, si ello fuese posible, por ejemplo por disponer de una buena información de datos de sondeos, el modelo se presenta interesante de aplicar fundamentalmente para la simulación de yacimientos de petróleo o sedimentarios multicapa.

### 3.1. SIMULACION DE LA INDICATRIZ

En las aplicaciones mineras, en ciertas situaciones, puede convenir elaborar un modelo de yacimiento en el que se haya tenido en cuenta un corte sobre la variable simulada; el objetivo es la simulación de la variable  $Z \geq z_c$ , de modo a obtener una visión geométrica de la distribución de leyes en el yacimiento, en el sentido de la fracción recuperada.

Una forma posible que he desarrollado para solucionar tal problema, consiste en simular por el método de simulación condicional una variable regionalizada que caracteriza al fenómeno mineralizado como una función "todo o nada"; es decir, en el sentido minero, como mineral o estéril, definidos respectivamente por el parámetro  $z_c$  (figura II.18).

La cuestión de fondo consiste en simular condicionalmente la función indicatriz  $\theta(x)$ , que toma la pareja de valores,

$$\theta(x) \begin{cases} = 1 & \text{si } Z(x) \geq z_c \\ = 0 & \text{si no} \end{cases}$$

La indicatriz simulada  $\theta_{sc}(x) = 1$  representará geoméricamente la parte del yacimiento de leyes superiores a  $z_c$ .

Evidentemente,  $\theta(x)$  tiene la característica de ser una variable útil deducida de  $Z(x)$ , por tanto desde las hipótesis constitutivas de la Geostatística es considerada como una variable regionalizada, dotada de su propio variograma.

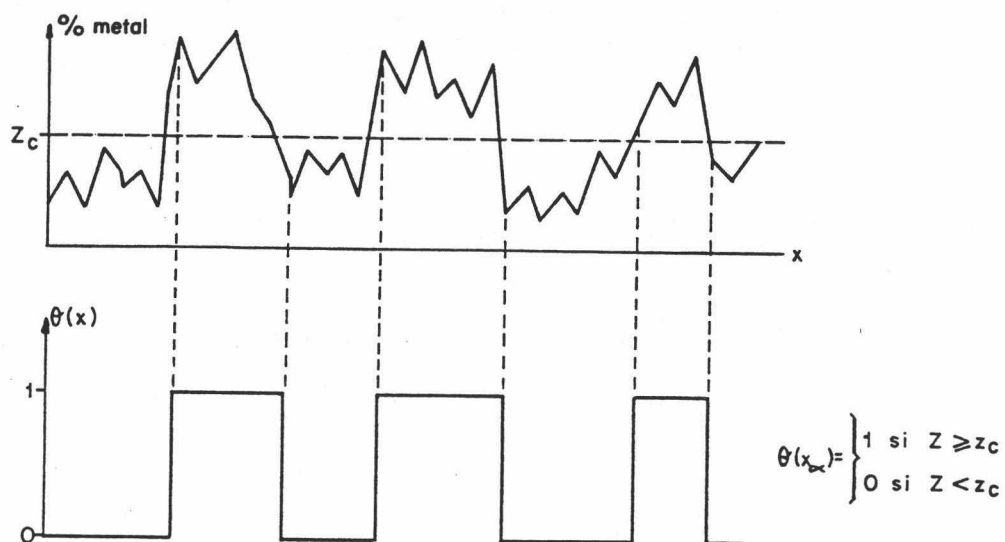


Figura 11.18.- Función indicatriz  $\theta(x)$ .

En la construcción del modelo final de yacimiento se distinguen dos etapas principales:

- en la primera, se procede a simular por el método de bandas rotantes una realización de la función indicatriz  $\theta(x)$  asociada a la variable  $Z(x)$ , anotada por  $\theta_{sc}(x)$ , que tendrá las mismas características de distribución y de variabilidad que la variable experimental  $\theta(x)$
- en segundo lugar, puesto que lo importante es obtener el modelo sobre la variable real  $Z(x)$ , se simulará la variable  $Z(x) \geq z_c$  del modo ya visto, obteniéndose  $Z_{sc}(x)$ . Se hace el producto en los nudos de la malla de simulación de las variables  $\theta_{sc}(x)$  y  $Z_{sc}(x)$ , obteniendo el modelo final de yacimiento; esto equivale

simplemente a simular la variable  $Z(x) \geq z_c$  en los puntos en los que  $\theta_{sc}(x)$  vale 1.

### 3.1.1. Simulación condicional de la función $\theta(x)$

Sea la FA  $Z(x)$  asociada a la variable regionalizada a simular. Sea también la FA  $\theta(x)$  indicatriz, obtenida por la aplicación del parámetro  $z_c$  sobre la función  $Z(x)$ , tal que:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } Z(x) \geq z_c \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Si se trabaja sobre la variable gaussiana  $Y(x)$  deducida de  $Z(x)$  por anamorfosis, se tiene igualmente que:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } Y(x) \geq y_c \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \text{con } y_c = G^{-1}(F(z_c))$$

Es importante notar que la función  $\theta(x)$  tiene una distribución (en escalón) binomial, cuyos momentos y parámetros estadísticos son fácilmente calculables, sean éstos:

- Esperanza matemática

$$\text{media, } E\{\theta(x)\} = P\{Y(x) \geq y_c\} = \int_{y_c}^{\infty} g(y) dy = 1 - G(y_c) = m_I$$

donde  $m_I$  es el valor medio de los datos  $\theta(x_\alpha)$

- Momento de orden 2

$$\text{varianza, } D^2\{\theta(x)\} = G(y_c) \cdot \{1 - G(y_c)\} = m_I \cdot (1 - m_I)$$

- Variograma,  $\gamma_I(h) = \frac{1}{2} E\{\theta(x) - \theta(x+h)\}^2$

Por analogía con la anamorfosis  $\phi(y)$  de la variable real  $Z(x)$ , parece lógico pensar que la función  $\theta(x)$  se deduzca por anamorfosis de una FA gaussiana  $Y_I \sim N(0,1)$ , para lo cual será suficiente tomar como anamorfosis



$$\theta(x) = \theta_{y_c}(Y_I) \begin{cases} = 1 & \text{si } Y_I \geq y_c \\ = 0 & \text{si no} \end{cases}$$

En efecto MATHERON (1974) -trabajo que ha servido de base para el formalismo matemático presentado- ha demostrado que este caso particular de anamorfosis admite también un desarrollo hermitiano, esta vez con coeficientes de desarrollo de una función "escalón" en polinomios de Hermite (figura II.19).

$$\theta(x) = \theta_{y_c}(Y_I) = m_I - g(y_c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(y_c) H_n(Y_I)}{n!}$$

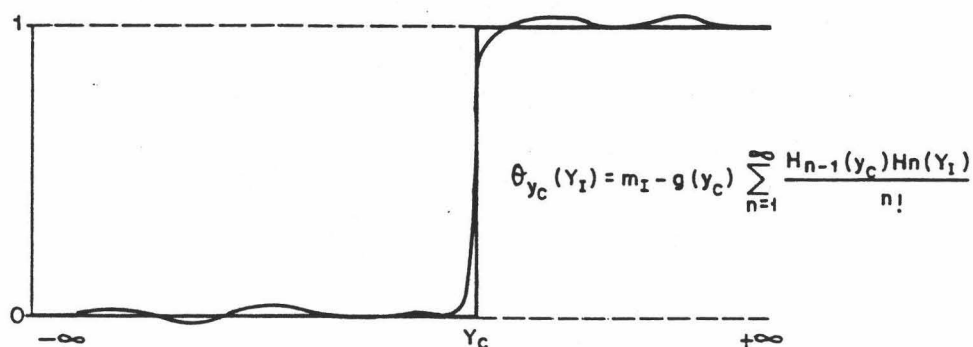


Figura II.19.- Desarrollo hermitiano de una "función escalón".

Desde el punto de vista práctico, lo que interesa es la determinación del correlograma (variograma) de las gaussianas  $Y_I(x)$  e  $Y_I(y)$  a introducir en el método de bandas rotantes. El correlograma, anotado  $\rho_{xy}(h)$ , es función de la covarianza de la indicatriz  $C_I(h)$  conocida experimentalmente (se deduce del variograma  $\gamma_I(h)$ ). La relación que sirve a su cálculo numérico es

$$C_I(h) = (g(y_c))^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_{n-1}(y_c))^2}{n!} \rho_{xy}^n(h)$$

En el origen,  $h=0$ , se tiene que la covarianza  $C_I(0)$  vale,

$$C_I(0) = m_I(1-m_I) = G(y_c)\{1 - G(y_c)\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{n!}$$

con  $C_n^2 = \{H_{n-1}(y_c) g(y_c)\}^2$ .

Los nuevos coeficientes  $C_n$  del desarrollo hermitiano de  $\theta_{y_c}(x)$  están completamente determinados por el valor de  $y_c$ ; por consiguiente, conocidos los coeficientes  $C_n$  se conocerá el correlograma  $\rho_{xy}(h)$  deducible de  $C_I(h)$  por un proceso iterativo, similar al aplicado en la construcción del modelo de yacimiento.

Si la simulación es sobre soporte de bloque, la indicatriz del bloque  $\theta_v = 1/v \int \theta(x) dx$  tiene una varianza  $S_v$  que se expresa a partir del coeficiente de cambio de soporte  $r$ :

$$S_v^2 = (g(y_c))^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n!} (H_{n-1}(y_c))^2$$

En esta situación, la anamorfosis  $\theta_v(X_I)$  tiene la forma

$$\theta_v(X_I) = m_I - g(y_c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!} H_{n-1}(y_c) H_n(X_I)$$

que en forma no desarrollada vale  $G\left[\frac{rX_I - y_c}{1-r^2}\right]$ .

MATHERON (1974) ha demostrado que si el volumen  $v$  es pequeño esta anamorfosis de bloques conduce a una ley próxima a una función indicatriz, de consecuencias interesantes para las aplicaciones prácticas (se puede obtener el modelo sobre bloques).

Finalmente, si se designa por  $Y_s$  los valores gaussianos simulados no condicionales, obtenidos a partir de  $\rho_{xy}(h)$  la indicatriz simulada  $\theta_s(x)$  queda determinada por el valor escogido para  $y_c$ :

$$\theta_s(x) \begin{cases} = 1 & \text{si } Y_s \geq y_c \\ = 0 & \text{si no} \end{cases}$$

El condicionamiento del modelo se hace krigiendo las diferencias  $(Y(x_\alpha) - Y_s(x_\alpha))$  con la covarianza  $\rho_{xy}(h)$ , obteniéndose el modelo final:

$$\theta_{sc}(x) \begin{cases} = 1 & \text{si } Y_{sc}(x) \geq y_c \\ = 0 & \text{si no} \end{cases}$$

### 3.1.2. Un caso de estudio

El ejemplo que presento corresponde a una aplicación del método expuesto a un depósito de carbón (tomado de CHICA-OLMO, 1983 ). El objetivo que se propone es estudiar por simulación la geometría del carbón explotable en una capa, después de aplicar un criterio de selección sobre su calidad, en concreto sobre el poder calorífico.

Se tienen 95 datos del poder calorífico de la capa, distribuidos en un sector de 465x465 m<sup>2</sup>. El valor medio de la variable es de 2.194 Kcal/Kg y la varianza  $\sigma^2 = 18.822$ ; el valor de selección del mineral ha sido  $z_c = 2.100$  Kcal/kg, que corresponde después de la transformación a un valor gaussiano  $y_c = -0,6113$ . La indicatriz experimental, teniendo en cuenta este parámetro, tiene los siguientes estadísticos, media  $m_I = 0,7347$  y varianza  $\sigma_I^2 = 0,1949$  (ambos valores pueden compararse con los valores teóricos,  $1 - G(y_c) = 0,73469$  y  $D^2 = 0,19725$ ).

La figura II.20 a representa las distribuciones acumuladas de las variables  $Z(x)$  y  $Z(x) \geq z_c$ .

El análisis estructural efectuado ha servido para ajustar sendos modelos esféricos a los variogramas de la indicatriz  $\theta(x)$  y de la variable  $Z(x) \geq z_c$  (figura II.20 b y c). A partir del primero se ha deducido por la relación vista el correlograma  $\rho_{xy}(h)$ , que se ha simulado por el método de bandas rotantes. Finalmente, después del condicionamiento, se ha obtenido el valor de la indicatriz simulada  $\theta_{sc}(x)$  dibujado en la figura II.21 a. El chequeo del modelo ha arrojado los siguientes resultados comparando los valores de la indicatriz experimentales  $\theta(x)$  y simulados  $\theta_{sc}(x)$ :

	Indicatriz		
	Experimental	Simulada	Diferencia %
Media	0,734	0,733	0,1
Varianza	0,1944	0,1956	- 6

Como puede comprobarse las diferencias no son demasiado significativas entre valores experimentales y simulados; igual ocurre si se comparan los variogramas respectivos  $\gamma_I(h)$  y  $\gamma_{Isc}$  (figura II.20 d).

Al final, se obtuvo el modelo de yacimiento buscado por simulación clásica de la variable  $Z(x) \geq z_c$  de variograma conocido, en los puntos de la malla en los que la indicatriz simulada vale  $\theta_{sc}(x) = 1$ . Los resultados se han dado en la figura II.21 b.

A guisa de conclusión sobre el método, el modelo de yacimiento obtenido refleja las características geométricas de la variable simulada  $Z \geq z_c$ . Puede convenir en las aplicaciones tomar por valor de  $z_c$  a la ley de corte de selección del mineral.

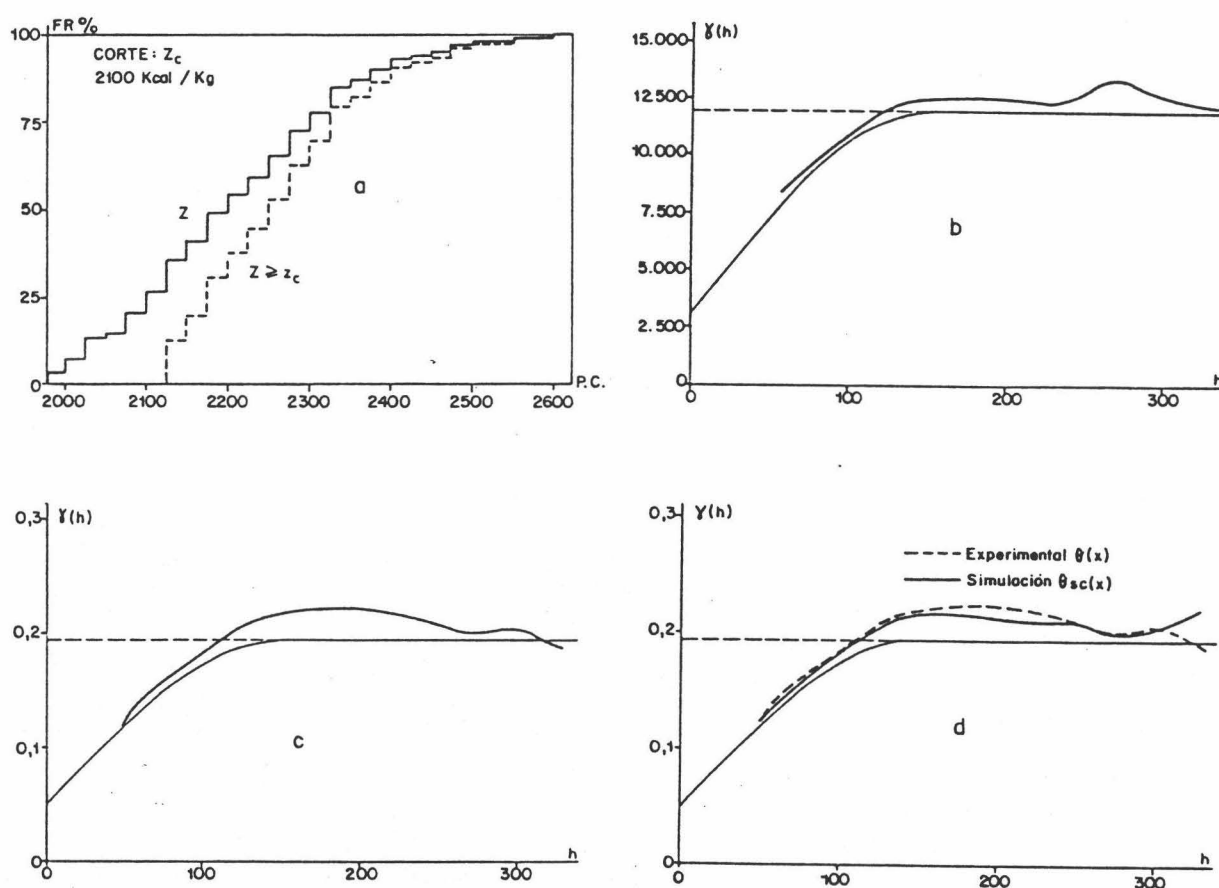


Figura II.20.- a) Histogramas acumulados de las variables  $Z$  y  $Z \geq z_c$ .  
 b) Variograma experimental de  $Z$ .  
 c) Variograma experimental de  $Z \geq z_c$ .  
 d) Comparación de los variogramas de las indicatrices  $\theta(x)$  y  $\theta_{sc}(x)$ .

El método tiene la ventaja de reproducir las geometrías de diferentes fases de una mineralización, caracterizadas por distribuciones de leyes

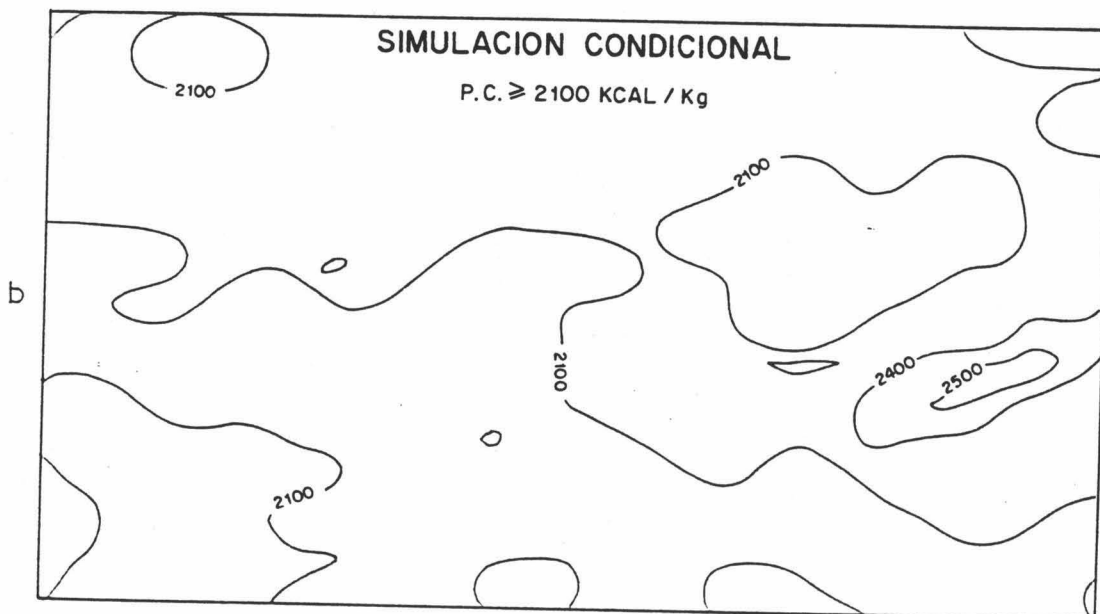
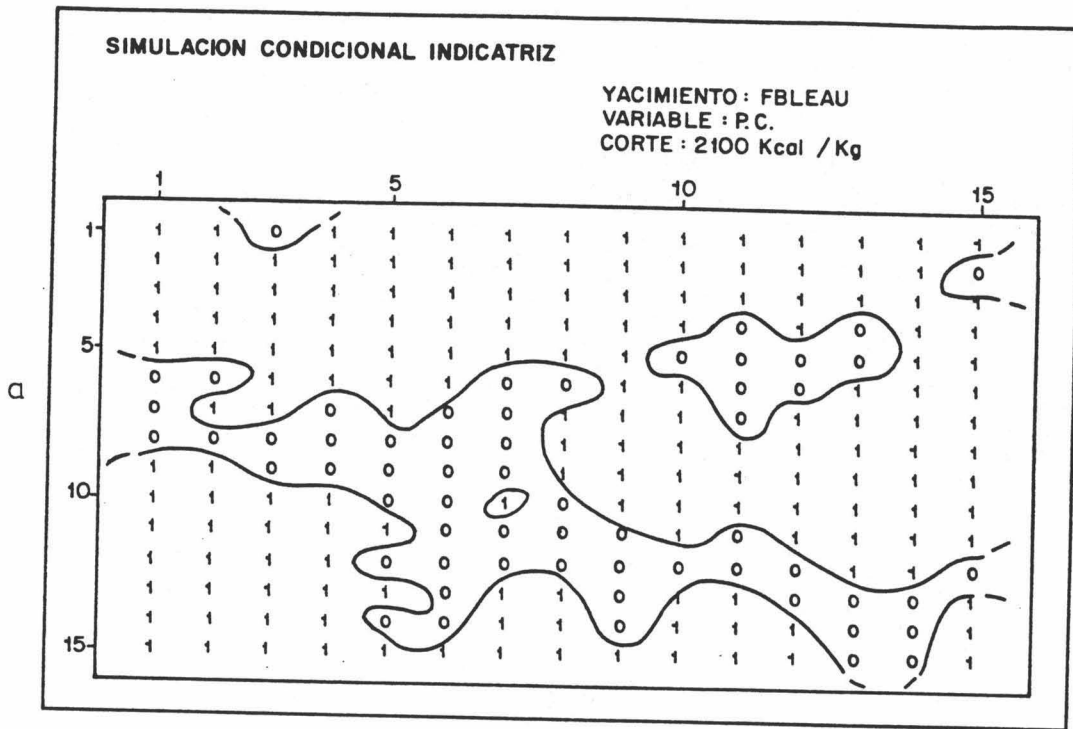


Figura 21.- a) Simulación condicional de la indicatriz,  $\theta(x)$ .  
 b) Simulación condicional de la variable  $Z_{\theta}^{sc}$ .

diferentes, como han sido los casos estudiados por ISAACK (1984) y DERAISME y de FOUQUET (1984 a). Además, el método conduce a un modelo geométrico de yacimiento, de acuerdo con la distribución y dispersión de las leyes observadas.

#### 4. UN NUEVO METODO DE CONSTRUCCION DEL MODELO DE YACIMIENTO

##### 4.1. PROBLEMAS PRESENTADOS POR EL METODO CLASICO

En este capítulo (cfr. 2.3) se presentó que la modelización probabilística requiere la generación de variables aleatorias, independientes y de distribución uniforme, obtenidas a su vez por generación de números al azar, sobre cada una de las rectas. La longitud de las mismas es igual a la diagonal del paralelepípedo en  $R^3$ , o del rectángulo en  $R^2$ , que engloba el área simulada.

Este método, operativo desde hace más de una decena de años, se muestra insuficiente para tratar ciertos problemas de índole práctica que aparecen con cierta frecuencia en la fase de construcción del modelo, provenientes en su mayoría de ampliaciones del área simulada y de simulación de sectores disyuntos.

Así, si después de haber construido la simulación del yacimiento se revela importante ampliar el área, o bien simular un nuevo sector del yacimiento, prácticamente se debe recomenzar todo el procedimiento partiendo de la generación de números al azar; la razón es obvia, hay que garantizar la correlación entre los datos simulados en las áreas.

El aumento del volumen a modelizar puede suponer también problemas de tipo informático, debido al almacenamiento de resultados intermedios necesarios para la construcción de las realizaciones sobre las rectas. Por otra parte, si la modelización de dos áreas vecinas, conexas o no, se hace separadamente, pueden aparecer problemas de correlación, no se garantiza las correlaciones estadísticas entre los datos que les pertenecen.

Con el nuevo método que se presenta, cuyos primeros trabajos se deben a DERAISME et al. (1982) y CHICA-OLMO (1983), quedan solventados estos problemas. El método se sitúa conceptualmente en el marco de utilización del método de bandas rotantes, pero incorpora a la modelización probabilística la técnica de generación de números al azar propuesta por MATHERON (1980 a). Con ella se calcula directamente el valor simulado en un punto  $x$  cualquiera del espacio, con sólo generar los números aleatorios  $(\xi_n)$  precisos en cada punto de proyección  $xd_i$  de cada recta, que como se sabe son función del tipo de variograma simulado (cf. figura II.16).

Seguidamente expongo un resumen general del método, de modo que he preferido dejar para el Anexo III la exposición detallada de la simulación estocástica de realizaciones de  $FA_S$  con variograma impuesto; igualmente, los que gustan de los tests estadísticos encontrarán allí los resultados de comprobación de las buenas propiedades que tienen las  $VA_S$  generadas.

#### 4.2. RESUMEN GENERAL DEL METODO

Se sabía construir una realización  $z(x)$  de una FA  $Z(x)$  en el espacio, a partir de realizaciones independientes  $y_i(xd_i)$  en una dimensión. Los valores  $y_i$  son calculados a su vez por realizaciones  $t_i$  de  $VA_S T_i$  independientes y de distribución uniforme en el intervalo  $[0,1]$ . Es esta particularidad la que marca la diferencia esencial entre el método clásico y el que se presenta; en concreto, ambos métodos difieren en el modo de generar los números "aleatorios" (pseudo-aleatorios)  $t_i$  necesarios al cálculo de los  $y_i(xd_i)$ .

Anteriormente se tomaban las realizaciones  $t_i$  sobre el intervalo  $[0,1]$  obtenidas por aplicación del método de congruencia lineal

$$t_{n+1} = a t_n + b \quad (\text{Mod. } m)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $m$  son valores enteros escogidos convenientemente (KNUTH, 1969):  $a$  y  $b$  para asegurar la pseudo-independencia y la distribución uniforme de los  $t_n$  y  $m$  para dar el periodo más grande posible a la serie, de modo a disponer de un número elevado de valores para el cálculo geoestadístico.

En el nuevo algoritmo de fabricación de números aleatorios, se parte también de una relación de recurrencia pero de tipo multiplicativo ( $b=0$ ):

$$x_n = a x_{n-1} \pmod{m}$$

los valores reales comprendidos entre 0 y 1 se obtienen dividiendo por m

$$X_n = \frac{x_n}{m} = \text{Dec}(a X_{n-1}) \quad 0 \leq X_n \leq 1$$

$\text{Dec}(x)$  designa la parte decimal del número  $x$ .

Si designamos  $X_0$  como valor de inicio del proceso "semilla", es evidente que  $X_n$  se puede expresar en función de  $X_0$  de la forma,

$$X_n = \text{Dec}(a^n X_0)$$

si se escriben estos números en base  $a$  se obtiene

$$X_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{a^n}, \quad \xi_n \in \{0, 1, \dots, a-1\};$$

por tanto el  $K$ ésimo número se obtiene suprimiendo los  $K$  primeros  $\xi_n$ :

$$X_K = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_{n+K}}{a^n}$$

La idea final consiste simplemente en considerar como medida aleatoria los  $\xi_n$  y no los  $X_n$ . En efecto MATHERON (1980 a) ha demostrado que los  $\xi_n$  forman una serie de  $VA_S$  sobre el conjunto  $\{0, 1, \dots, a-1\}$ . En la práctica se tomará  $a=2$  lo que equivale a trabajar con la escritura binaria del número de inicio  $X_0$ , con la ventaja de que el algoritmo es fácil de implementar en el ordenador. De este modo resulta que:

$$x_n = 2 x_{n-1} = 2^n X_0 \pmod{m}$$

$$\xi_n = \text{Int}\left\{\frac{2 x_n}{m}\right\} = \begin{cases} 0 & \text{si } x_n < m/2 \\ 1 & \text{si } x_n > m/2 \end{cases}$$

$\text{Int}(x)$  designa la parte entera del número real  $x$ .



El interés que tiene el algoritmo es su facilidad de manejo y que el proceso se puede invertir sin dificultad. De modo que si se asocia el valor inicial de la serie al origen tomado sobre la recta, entonces son fáciles de calcular los  $\xi_n$  necesarios para obtener la realización sobre la misma. Este aspecto es muy útil porque conduce al cálculo directo del valor simulado de la variable en un punto cualquiera; aún más, permite, como veremos más tarde, simular dos sectores diferentes del yacimiento, independientemente de sus posiciones relativas, utilizando subseries de la misma serie  $\xi_n$ . Así, a condición previa de haber comprobado las propiedades de los  $\xi_n$ , lo que puede hacerse una vez por todas, se garantizan las correlaciones entre los sectores.

Con el método anterior, si se deseaba modelizar un nuevo sector, la solución revestía ciertas complejidades prácticas; había que relanzar el método con un valor de inicio diferente, lo que implicaba operaciones tediosas y a veces complicadas de realizar; por ejemplo, se necesitaba verificar la independencia de los números aleatorios generados, de modo a no introducir correlaciones parásitas. También era prácticamente imposible reproducir las correlaciones reales entre los sectores. Al final, se concluía en recomenzar todo el proceso de construcción del modelo sobre el conjunto de las dos áreas y del espacio intermedio, lo que conducía a la creación de grandes ficheros informáticos sólo utilizables en parte: el interés que hay en utilizar el nuevo algoritmo parece pues evidente.

En lo que respecta a la modelización de variogramas, los resultados obtenidos son al menos tan buenos como los del método anterior (CHICA-OLMO et al., 1987 y Anexo III). Además, dado que el método sirve para simular directamente el valor en un punto servirá para reducir el número de etapas que intervienen en la modelización probabilística.

#### 4.3. UN EJEMPLO DE APLICACION

##### 4.3.1. Aspectos básicos del estudio

El objetivo del estudio es la construcción del modelo condicional del recubrimiento de estéril en un yacimiento, de interés para el estudio posterior de simulación de explotación. El modelo se ha construido a

nivel puntual sobre una malla regular que abarca un sector actualmente en explotación de dimensiones 1.500x1.378 m<sup>2</sup>.

Según el esquema presentado de construcción del modelo es preciso trabajar con variables gaussianas Y deducibles de los datos experimentales Z por anamorfosis. Los resultados de esta transformación han sido:

	Variable		
	Real (Z)	Reconstruida (Z*)	Normal (Y)
Media	14,6	14,6	0
Varianza	130	131	1,03
Número de polinomios N=10			
Varianza acumulada	$\sum_{n=1}^{10} \frac{\psi_n^2}{n!} = 129,5$		

El número de polinomios utilizado (N=10) ha sido suficiente para tener un buen ajuste del histograma. Al variograma experimental se le ha ajustado un modelo esférico de alcance A=500 m y de meseta C=130, equivalente a la varianza de los datos (figura II.22). El modelo ajustado a la variable normal tiene el mismo alcance y por meseta la unidad.

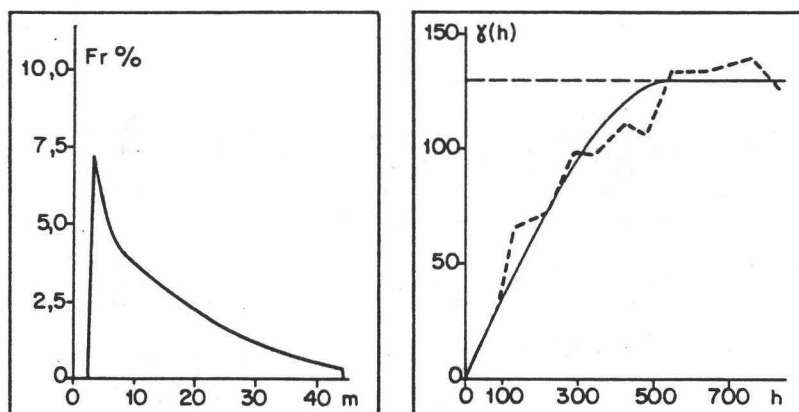


Figura II.22.- Histograma y variograma del recubrimiento de estéril en un depósito sedimentario.

#### 4.3.2. Construcción del modelo

El proceso se inicia con la construcción del modelo no condicional, para ello ha sido preciso calcular sobre las 90 rectas utilizadas las realizaciones  $y_i(xd_i)$ . Como paso previo hay que deducir los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de la función de ponderación que intervienen en dicho cálculo

y que conducen a la realización de una FA con estructura, el variograma esférico ajustado. Así, si ND es el número de rectas, se tiene para un modelo esférico en dos dimensiones que la variable simulada no condicional vale

$$Y_S(x) = 1/\sqrt{ND} \sum_{d=1}^{ND} \sum_{k=0}^{A-1} (\alpha - \beta k) \xi_{nd+k}$$

Para un alcance  $A=500$  m,  $\alpha$  es igual a 0,1169 y  $\beta$  es igual a 0,05226 (véase Anexo III). Los  $\xi_n$  son los números aleatorios definidos anteriormente.

En esta etapa se ha hecho un control numérico sobre la variable  $Y_S$  con el total de datos simulados, que ha consistido en la comparación del variograma experimental  $\gamma_{Y_S}(h)$  y el teórico simulado, que se dan en la figura II.23.

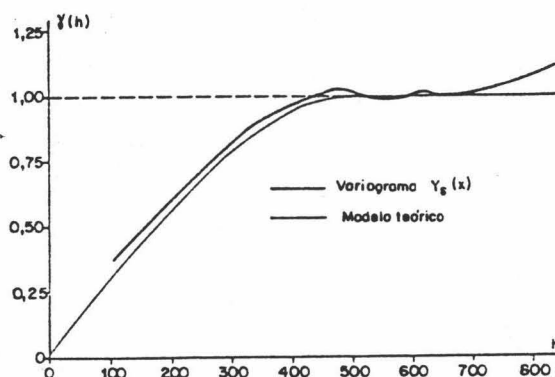


Figura II.23.- Variograma experimental  $\gamma_{Y_S}(x)$ .

El condicionamiento del modelo se ha hecho con los 95 datos disponibles en el área. Se ha simulado en dichos puntos la variable  $Y_S(x_\alpha)$  con el fin de obtener las diferencias  $Y(x_\alpha) - Y_S(x_\alpha)$  necesarias al condicionamiento. El krigage de las diferencias se ha efectuado en vecindad parcial con los 8 puntos más próximos al punto de simulación. Finalmente, para cada punto de la malla se han sumado los valores  $Y_S(x)$  más el krigage de las diferencias, obteniéndose el valor simulado condicional  $Y_{SC}(x)$ .

Los parámetros estadísticos de la variable normal  $Y_{SC}(x)$  y real  $Z_{SC}(x)$ , después de aplicar la transformación gaussiana son:

	Variable			
	Experimental $Z(x_\alpha)$	Simulada $Z_{sc}(x)$	Simulada $Y_{sc}(x)$	Diferencia $Z-Z_{sc}(\%)$
Media	14,6	15,3	0,056	- 4,7
Varianza	130	152	1,069	- 16,9

Las diferencias observadas entre  $Z$  y  $Z_{sc}$  son debidas, en parte, a que  $Y_{sc}$  no corresponde exactamente a una variable  $N(0,1)$ , por lo que en práctica se suele centrar y normalizar dicha variable antes de obtener los resultados finales. Llevado a cabo este proceso, se han mejorado estadísticamente los resultados, que han sido:

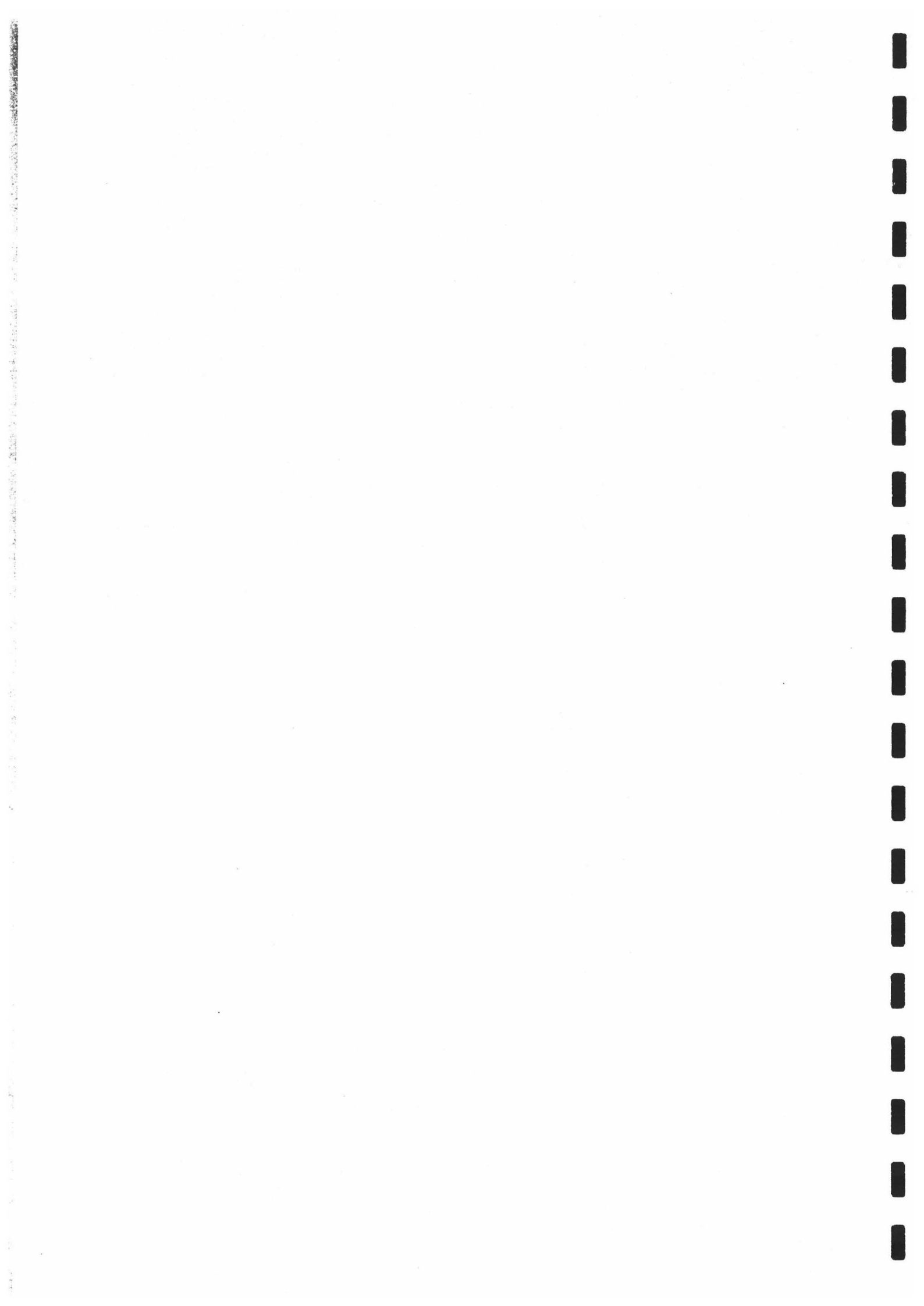
	Variable			
	Experimental $Z(x_\alpha)$	Simulada $Z_{sc}(x)$	Simulada $Y_{sc}(x)$	Diferencia $Z-Z_{sc}(\%)$
Media	14,6	14,6	0	0
Varianza	130	137	1	- 5,4

Muy probablemente, aún se podían haber obtenido mejores resultados si el número de rectas ND hubiese sido mayor, por ejemplo  $ND=180$ , ya que el cálculo numérico de los  $y_s$  hubiese estado más próximo al valor teórico.

#### *A) Comparación con el método clásico*

A fin de estudiar la validez de los resultados se ha obtenido una simulación condicional de la variable con un método de simulación clásico (cf. programa SIMPACK, CHILES y DELHOMME, 1979). La simulación ha sido hecha bajo las mismas condiciones de variograma, número de rectas, vecindad de krigeage, etc.

Los resultados, representados en forma de cartografía, son parecidos en ambos casos, los rasgos estructurales mayores han sido reproducidos como se ve en la figura II.24. Igualmente, se constata que tanto el histograma como el variograma han sido reproducidos correctamente por los dos métodos, aunque parece observarse un mejor ajuste del variograma obtenido por el método nuevo al variograma teórico simulado (figuras II.26 a y b).



### SIMULACION CONDICIONAL RECUBRIMIENTO

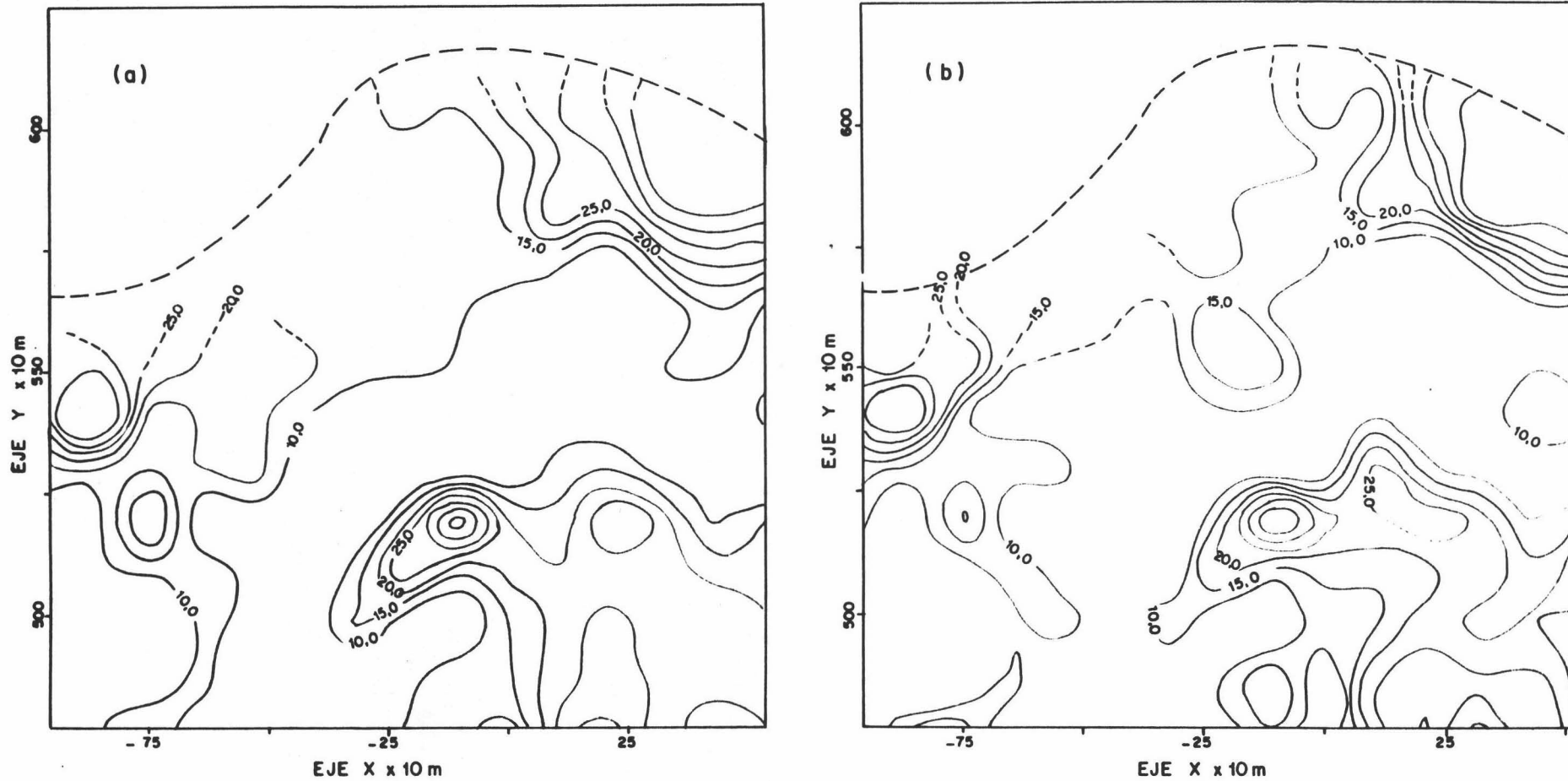
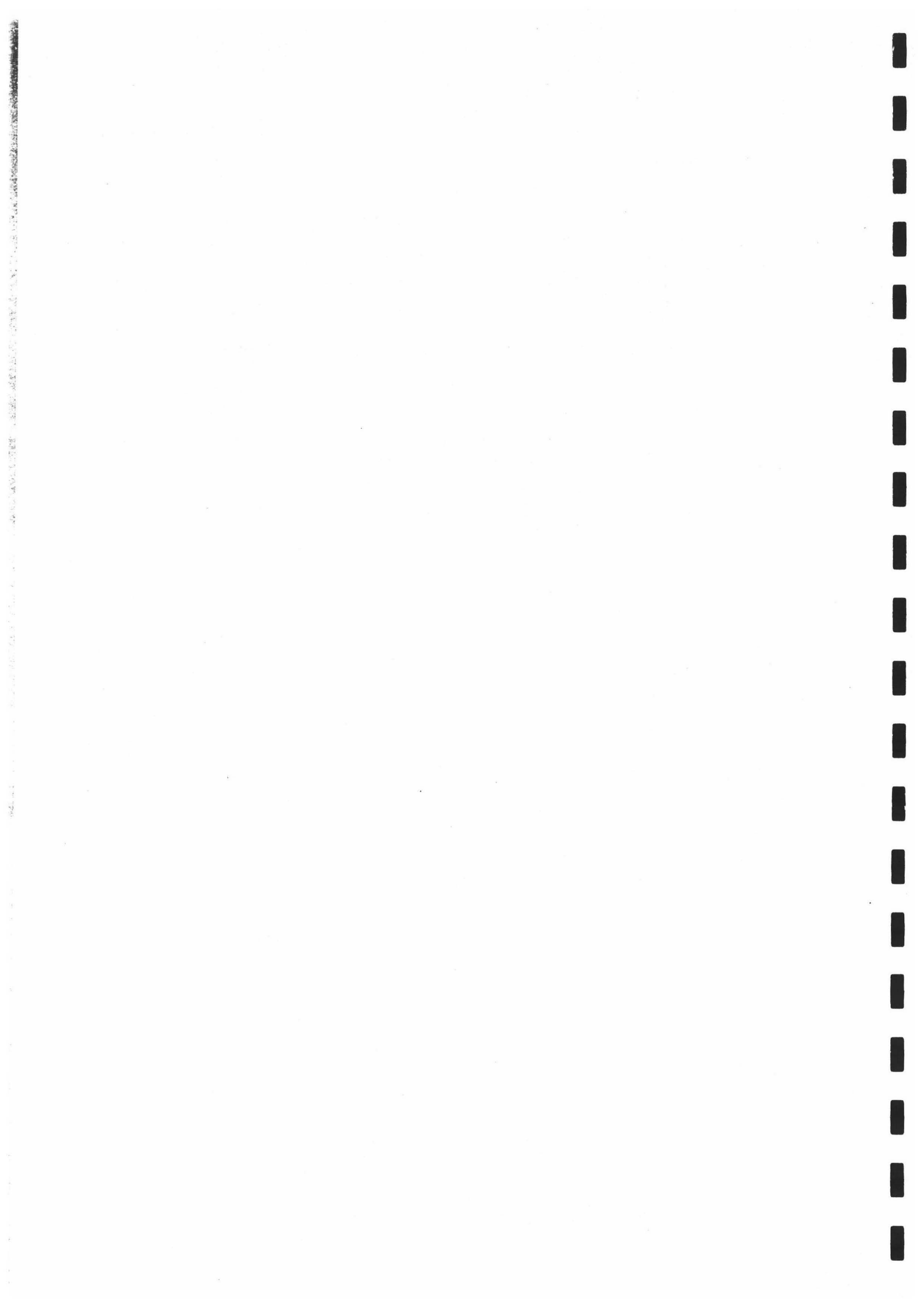


Figura 17.24.- Simulación condicional obtenida: a) con el método precedente (cf. programa SIMPACK del C.G.M.M.), b) con el nuevo método.



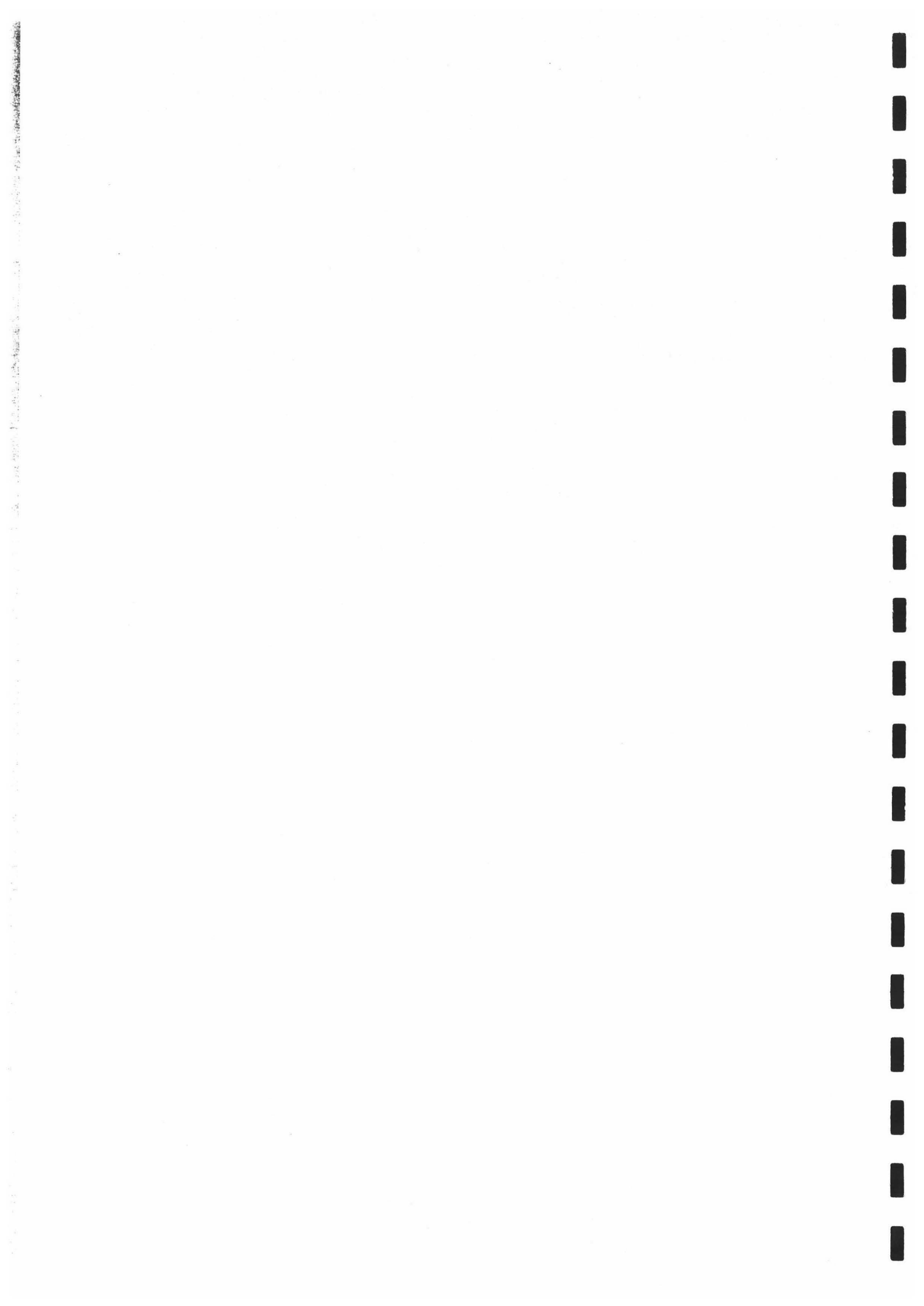
### *B) Simulación de sectores disyuntos*

El objetivo principal de este método es la modelización conjunta de sectores aislados de un mismo yacimiento, sin necesidad de simular el área intermedia. Para ilustrarlo, y para el mismo depósito, se han simulado dos sectores de igual superficie, separados por un área rectangular de aproximadamente 4 km<sup>2</sup> de superficie.

Los aspectos técnicos de construcción son exactamente los mismos que los indicados en el ejemplo anterior; así pues, bastará con sólo presentar los resultados cartográficos de los datos simulados que pueden verse en la figura II.25. El control de la simulación muestra que tanto el histograma como los variogramas obtenidos son parecidos a los experimentales (figuras II.26 c y d).

A tenor de los resultados obtenidos de estos primeros ejemplos de aplicación, se puede ser optimista en cuanto a la bondad del método se refiere; éste consigue resultados al menos tan aceptables que los alcanzados por otros métodos clásicos de uso frecuente en geoestadística. Por otra parte, tiene ventajas que pueden calificarse de muy gratificantes para la práctica de la simulación geoestadística, como es la simulación de sectores independientes de un mismo yacimiento.





SIMULACION CONDICIONAL  
SECTORES : 1 Y 2

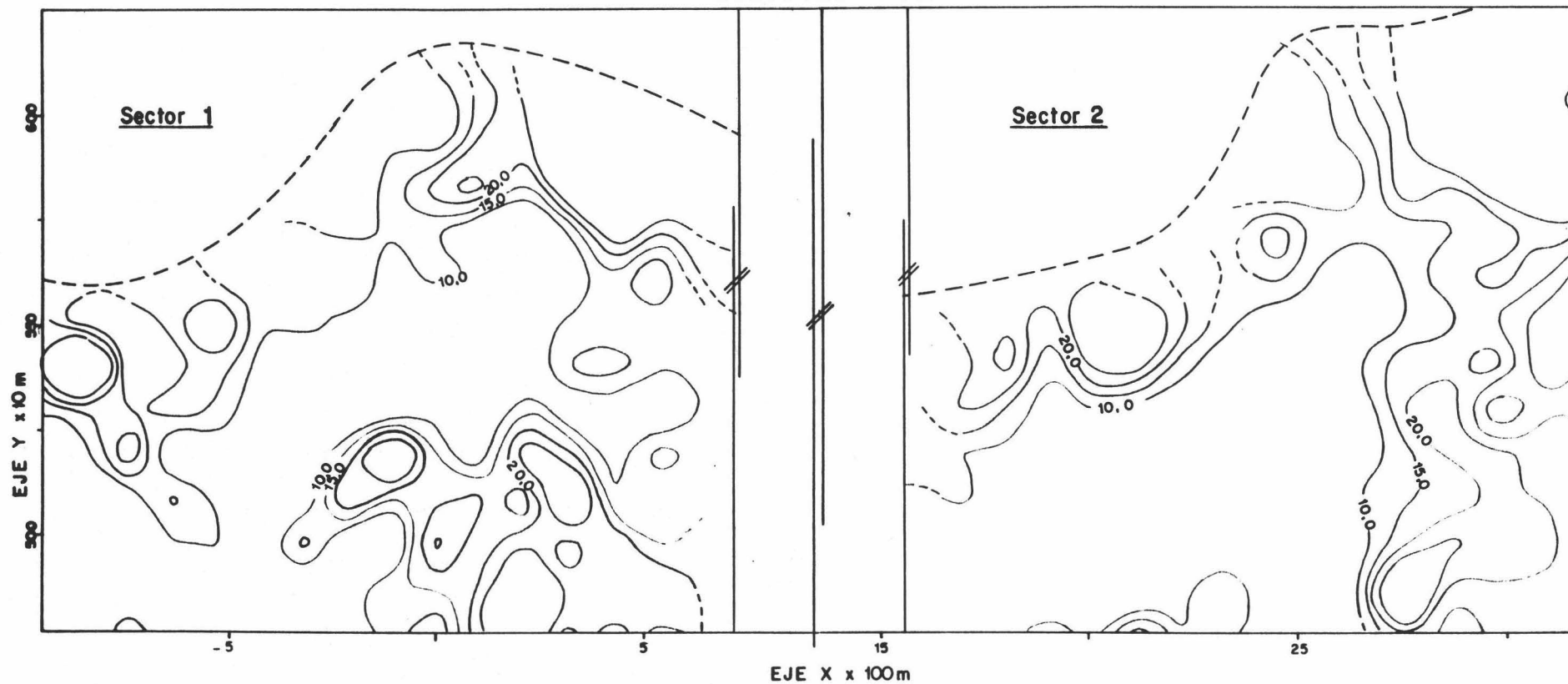
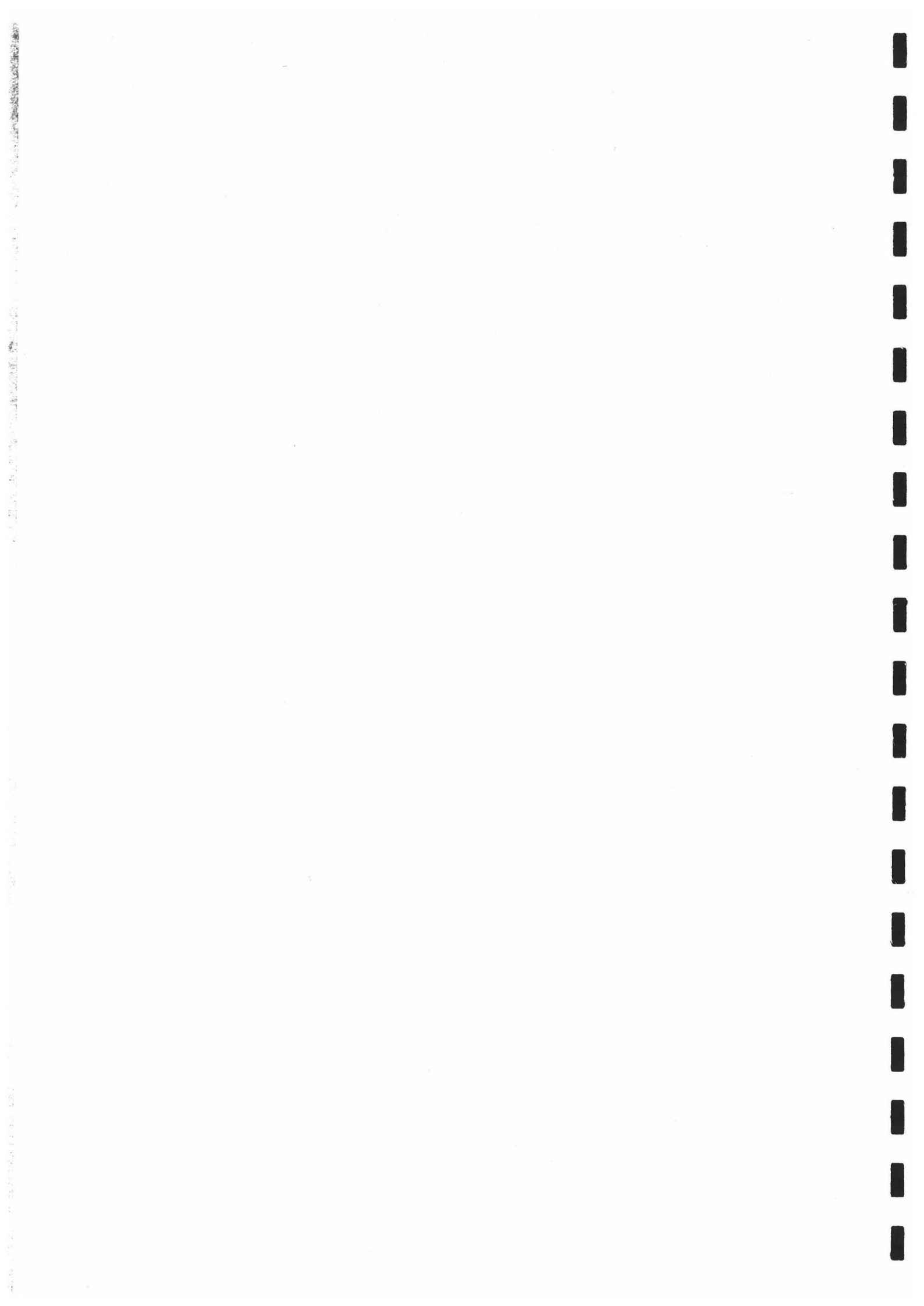


Figura 99.25.- Simulación condicional de dos sectores disyuntos.



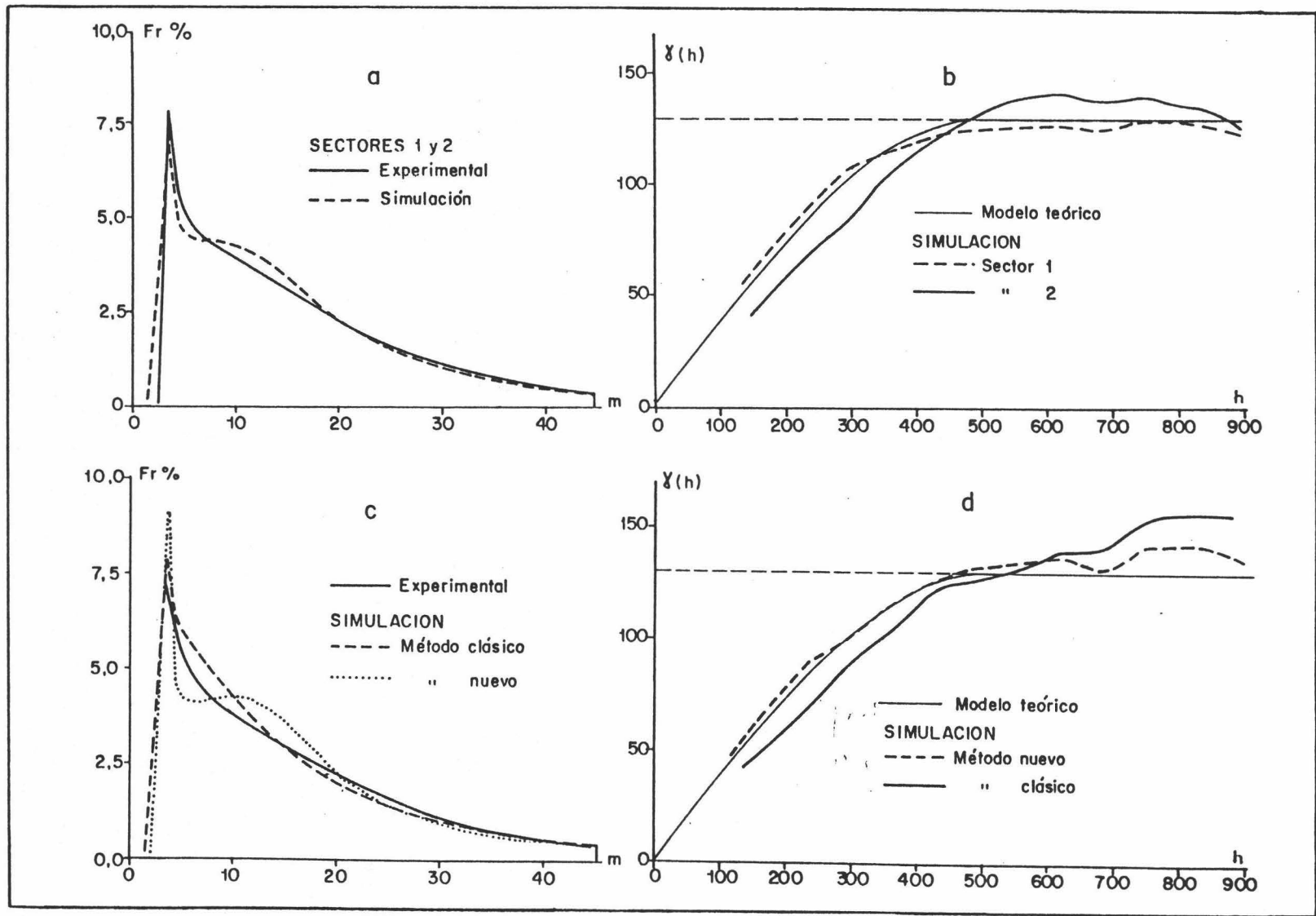
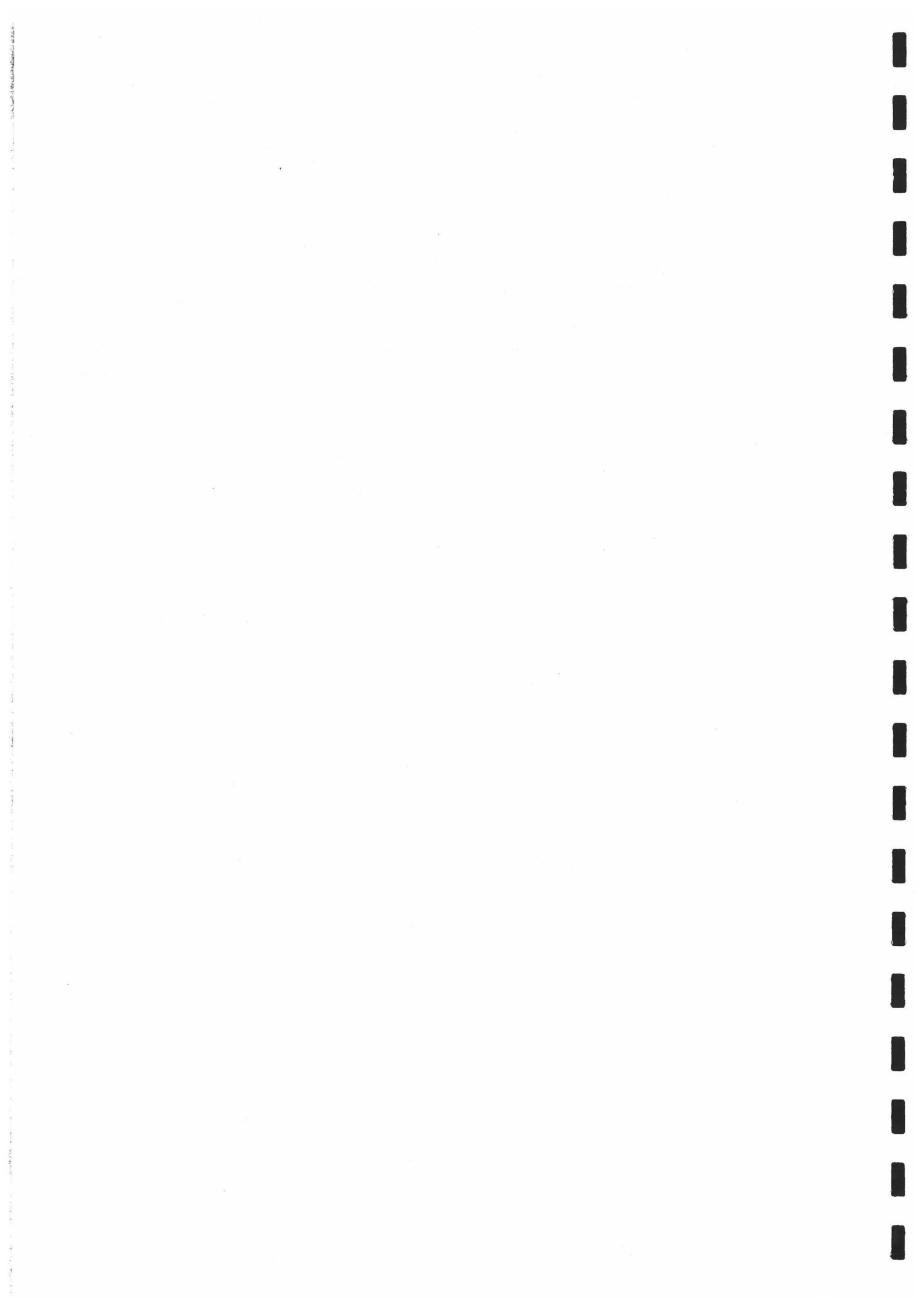
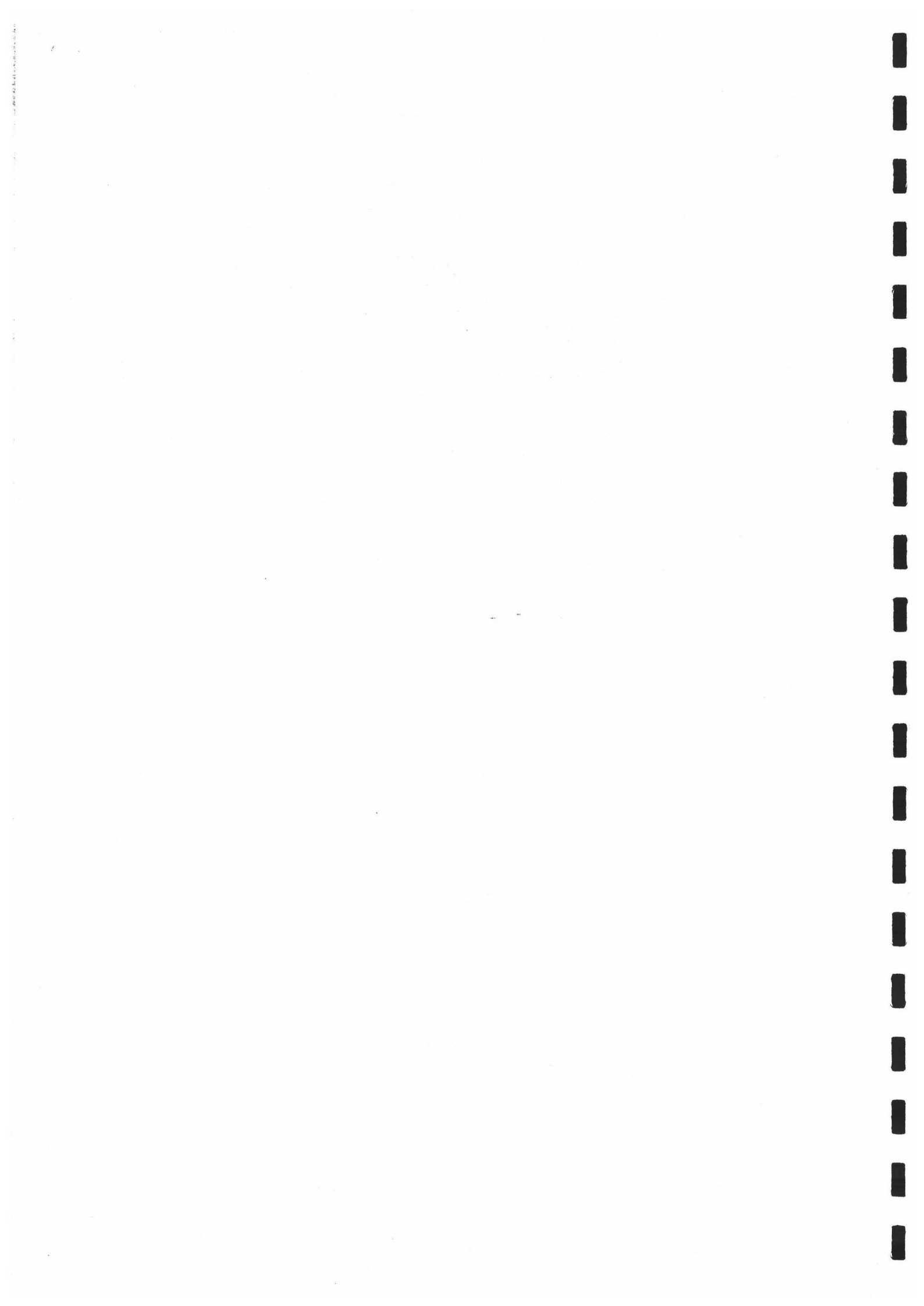


Figura 19.26.- Control de la simulación condicional.



P A R T E   T E R C E R A

CASOS DE ESTUDIOS REALIZADOS SOBRE MODELO  
GEOESTADISTICO DE YACIMIENTO EN LA  
PLANIFICACION DE EXPLOTACIONES MINERAS



## CAPITULO VIII

ESTUDIO DE LA EXPLOTACION A CIELO ABIERTO  
DE UN DEPOSITO DE CARBON

## 1. ASPECTOS PRELIMINARES

## 1.1. CARACTERISTICAS DEL YACIMIENTO

El yacimiento estudiado es el depósito de lignito de Puentes de García Rodríguez, explotado por ENDESA para la producción de electricidad. Se encuentra localizado en una cuenca terciaria rellena de materiales detríticos con edades que van desde el Mioceno hasta el Cuaternario. La característica más notable del yacimiento es el aspecto multicapa que presentan los materiales carbonosos en la cuenca: se distingue una sucesión muy potente de capas de materiales detríticos, arenas, arcillas, conglomerados..., con intercalación de numerosas capas de lignito, cuyos espesores varían entre unos pocos centímetros hasta varios metros.

Las capas se sitúan subhorizontales con un ligero buzamiento hacia el Norte de aproximadamente 6 %. La presencia de ciertos accidentes tectónicos mayores, en el substratum paleozoico, obligan a considerar en la explotación dos sectores, que han debido ser estudiados por separado. A techo de la formación beneficiable se encuentra un recubrimiento potente



de estéril que juega un papel importante en la determinación de ratio de explotabilidad del yacimiento, definido globalmente por la relación  $m^3$  de estéril/tm de carbón, que a su vez constituye uno de los parámetros básicos manejados durante el estudio del proyecto.

El yacimiento ocupa una banda de dirección NW-SE con una longitud aproximada de 8 km y una anchura variable entre 1 y 3 km; ha sido reconocido por varios cientos de sondeos verticales a malla regular de 106 m y se prevé que tendrá una vida de 20 a 25 años, según la cadencia de producción prevista en la planificación.

El tipo de explotación de la mina a cielo abierto viene impuesto por dos factores principales; la estructura multicapa del yacimiento a modo de "hojaldre" y la calidad del lignito, que en conjunto impiden el desarrollo de la explotación en subterráneo. Con respecto a la calidad del lignito, hay que señalar que se trata de un carbón bajo en poder calorífico con valor medio aproximado de 2.100 Kcal/kg, cuya rentabilidad está ligada a una explotación a cielo abierto con un alto grado de mecanización de la mina y a la utilización in situ del mineral para la producción de electricidad; de modo que los costos de transporte no penalicen los beneficios obtenidos y todo ello con un gran volumen de mineral extraído, 12 Mt/año.

#### 1.2. DESCRIPCION DEL METODO DE EXPLOTACION "TERRACE MINING"

La característica principal del yacimiento es la fuerte estratificación de las capas de lignito intercaladas entre capas de estéril de espesores variables. Esta particularidad imposibilita la explotación discontinua mediante dragalinas, por lo que el método más apropiado es la explotación continua con rotopalas. Así, la explotación se hace sobre frentes largos "bancadas" con transporte del mineral y estéril en cintas transportadores (CEREZUELA, 1979; ATKINSON, 1982).

La mina ha sido planificada sobre la base de una utilización continuada de las máquinas, con objeto de obtener de ellas el mayor beneficio y rentabilidad. Por tal motivo, cada rotopala, cinco en total, puede trabajar en dos niveles distintos, normalmente en bancos de 20 m de altura pero también puede trabajarse con altura de banco de 10 m, lo que conlleva a establecer técnicamente diferentes posibilidades de explotación (figura III.1).

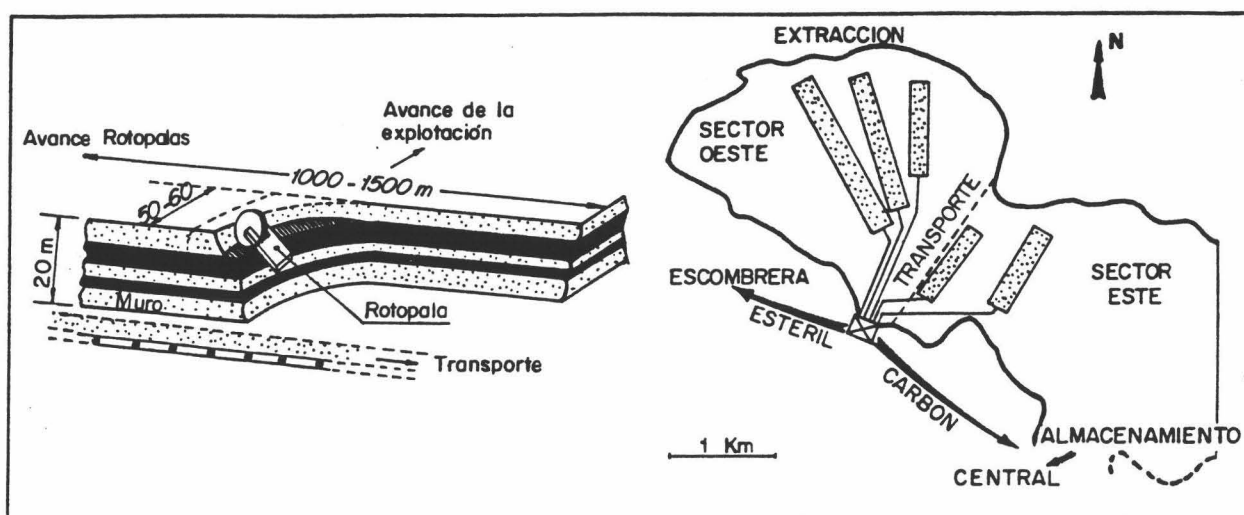


Figura 111.1.- Esquema de explotación por rotopala y secuencia de explotación: extracción, transporte, almacenamiento y utilización.

La práctica de la selección es uno de los aspectos más interesantes de la explotación, con selección del mineral por el operador de máquina sobre el frente, pero previamente se le ha limpiado del estéril superior. En el transporte, tanto el carbón como el estéril se conducen sobre la misma cinta hasta el nudo de distribución donde se separan, el estéril se envía a la escombrera y el mineral se transporta hasta el parque de almacenamiento para su homogeneización.

Para el cálculo de reservas explotables se aplican los condicionantes técnicos de la selección sobre los datos de los sondeos geológicos, así se obtiene la secuencia de capas seleccionadas que sirve de base a dicho cálculo. Los parámetros técnicos que intervienen para la selección de capas son, el poder calorífico y el contenido en cenizas de la capa y los espesores de las capas de lignito y de estéril intercalado, que vienen impuestos por el grado de selectividad mecánica de las rotopalas.

## 2. ESTIMACION Y SIMULACION DEL YACIMIENTO

### 2.1. GENERALIDADES

El estudio se ha llevado a cabo en un sector en explotación que abarca la producción prevista para 2 o 3 años. La información disponible pertenece a 236 sondeos existentes en el sector, implantados según una malla regular cuadrada de 106 m de lado.

### 2.1.1. Elección del soporte

Puesto que el yacimiento está constituido por numerosas alternancias de niveles de lignito y estéril (en algunos sondeos se ha llegado a contabilizar más de cien capas de lignito), es imposible hacer el estudio de estimación/simulación capa por capa, que hubiese sido lo deseable desde el punto de vista operativo. Por consiguiente, es necesario definir un soporte físico "bloque" v, que de acuerdo con los principios metodológico presentados servirá para la estimación y simulación de las leyes, base numérica para el estudio de simulación de explotación.

La elección del tamaño del bloque es un aspecto fundamental pues debe ser suficientemente pequeño para permitir una buena reconstrucción geométrica de las bancadas de explotación, que tienen dimensiones y localizaciones diferentes en el yacimiento (véase figura III.1). De otro lado, también es conveniente que estas unidades elementales se adapten de la mejor forma posible a los aspectos técnicos de la explotación, como por ejemplo a la altura del banco y a las características geométricas de las máquinas de extracción (diámetro de la rueda de la rotopala). Además de todos estos condicionantes, el tamaño del bloque está también controlado por otro tipo de factores de índole geoestadística como pueden ser la malla de la información experimental, el alcance del variograma, etc; además del tiempo de cálculo, que puede verse incrementado notablemente si se escoge un tamaño de bloque demasiado pequeño. En definitiva, la elección del bloque debe encontrar un equilibrio entre todos estos factores que le afectan sensiblemente.

Tomados en consideración dichos factores, se ha escogido el bloque de talla  $21 \times 21 \times 10 \text{ m}^3$ , volumen que corresponde en promedio a la producción de una rotopala en un periodo de seis horas aproximadamente (producción diaria  $\approx 19.000 \text{ m}^3$ ). Intervalo que representa el grado máximo de discretización del tiempo de simulación, para el cual se podrá desarrollar el estudio, respetando la realidad física de la explotación. Además, proporciona una escala de detalle suficiente para el estudio de las fluctuaciones de la calidad del mineral, para periodos de tiempo señalados en la planificación.

Otro aspecto que ha influido en la elección de la talla del bloque, es que se ha querido asociar a cada sondeo el bloque central del "panel" V formado por 5x5 bloques según el sentido de X e Y (figura III.2). De esta forma se asegura que se tiene una única información por bloque, consideración que es importante para la aplicación del modelo gaussiano discreto.

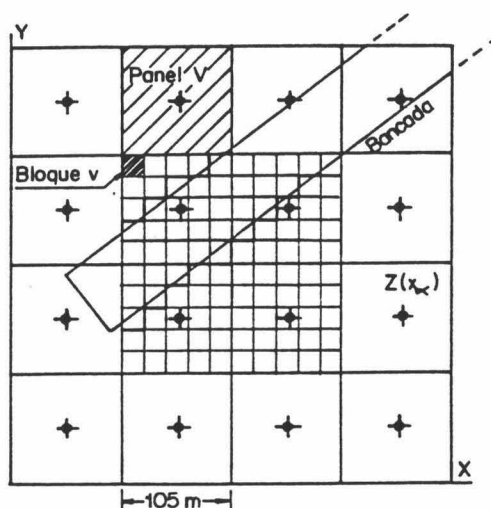


Figura III.2.- Reconstrucción geométrica de las bancadas de explotación a partir del bloque elemental (vista en planta).

### 2.1.2. Variables

En geoestadística se trabaja con valores de la variable regularizados sobre el mismo soporte, para lo cual se obtiene el valor medio de la variable sobre el soporte de regularización escogido. Todas las variables brutas disponibles, después de la aplicación de los criterios de selección en los sondeos de reconocimiento, se han regularizado sobre una longitud de 10 m coincidente con la altura del bloque.

Las variables útiles de trabajo son la proporción de carbón explotable en el soporte "ratio" y las acumulaciones correspondientes al poder calorífico y al contenido en cenizas como variables importantes de la calidad del carbón, que representan la dilución de tales características en el soporte de regularización.

La fuerte correlación existente entre las variables (cf. tabla III.2) ha conducido a adoptar un modelo general de correlación intrínseca

para la simulación, que introduce simplificaciones importantes en los cálculos (MARIN, 1976). Tal modelo de correlación supone que todos los variogramas (o covarianzas) utilizados en la simulación son proporcionales entre sí, con lo cual se llega a un modelo general del tipo

$$\gamma_{ij}(h) = a_{ij} \gamma(h)$$

El parámetro  $a_{ij}$  no corresponde exactamente al coeficiente de correlación entre las variables  $i$  y  $j$ , sino que es preferible estimarlo por la relación siguiente:

$$a_{ij} = \frac{\gamma_{ij}(h)}{\sqrt{\gamma_{ii}(h) \gamma_{jj}(h)}}$$

que debe quedar constante para todo  $h$  (figura III.3). Los variogramas  $\gamma_{ii}$  y  $\gamma_{jj}$  son los variogramas relativos de las variables  $i$  y  $j$ , respectivamente, que deben ser iguales puesto que están normalizados con respecto al valor de sus varianzas.

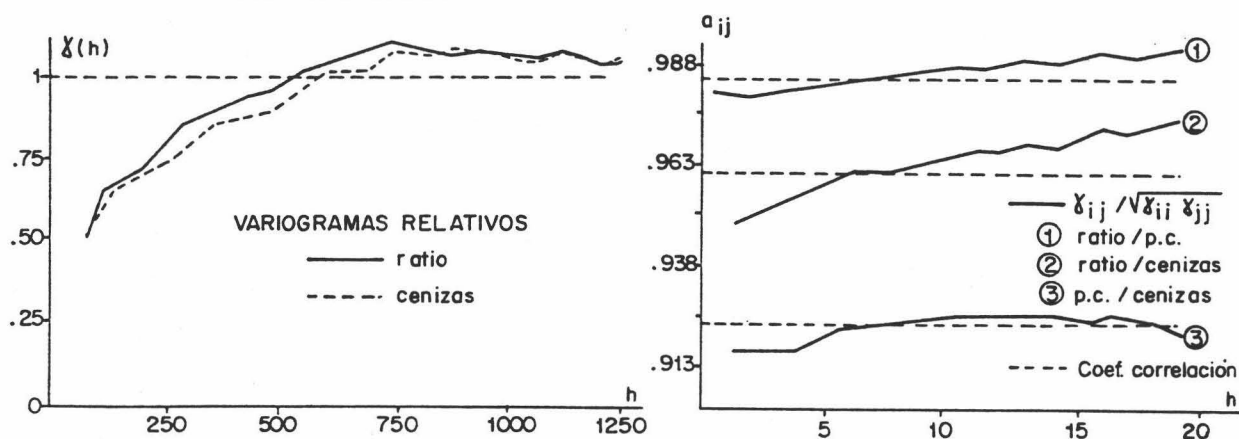


Figura III.3.- Modelo de correlación intrínseca para los variogramas.

Los valores de los parámetros  $a_{ij}$  y de los coeficientes de correlación se dan en la tabla III.1. La cifra indicada en la parte superior de la casilla corresponde al valor del parámetro  $a_{ij}$  y la indicada en la parte inferior al valor del coeficiente de correlación  $\rho$ ; los valores obtenidos para ambos parámetros son muy parecidos.

	Ratio	P.C.	Cenizas
Ratio	1	—	—
P.C.	0,982	1	—
	0,984		
Cenizas...	0,953	0,900	1
	0,961	0,922	

Tabla III.1.- Valores de los parámetros  $a_{ij}$  y de los coeficientes de correlación entre las variables.

## 2.2. ANALISIS ESTRUCTURAL

### 2.2.1. Estudio estadístico preliminar

#### A) Datos brutos

En la figura III.4 se presentan los histogramas calculados para las potencias de las capas de lignito y estéril después de la aplicación del criterio de selección de capas explotables, así como los correspondientes a las características de calidad del lignito. Es de destacar la forma que tienen las distribuciones de las potencias, fuertemente asimétricas. Para el caso del lignito, más del 50 % de las capas son inferiores a 1,5 m, siendo el valor medio 2,28 m. Para los estériles, se observa que el 54 % de las capas tienen espesores inferiores a 3 m, con un valor medio de 6,12 m. Una simple relación de estos valores medios puede dar, a priori, una idea aproximativa del ratio útil estéril/carbón para el sector, cuyo valor es de 2,68.

Los histogramas de las características de calidad tienen un aspecto más simétrico, aunque se debe rechazar toda hipótesis de normalidad de las variables según los resultados de los tests de  $\chi^2$  efectuados.

Los estadísticos elementales calculados sobre la población de datos de capas seleccionadas se expresan en la tabla III.2 a y b. Los valores altos de los coeficientes de correlación indican la dependencia entre el poder calorífico y los contenidos en cenizas y volátiles, así como entre estos dos últimos; sin embargo los espesores de las capas, como cabía esperar, no muestran correlaciones significativas con el resto de los parámetros.

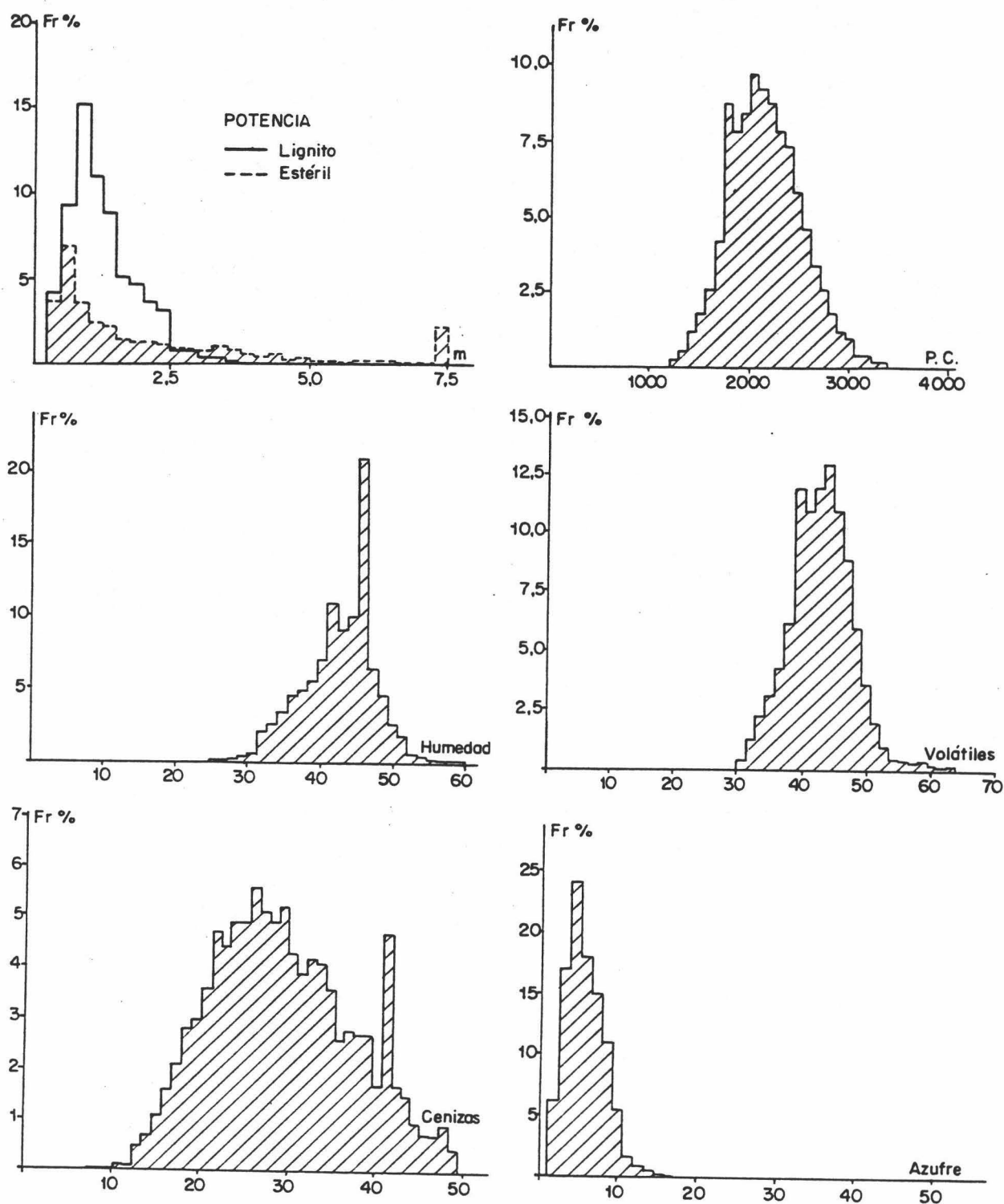


Figura III.4. Histogramas experimentales de los datos brutos.

	m	$\sigma^2$	Min.	Máx.	$\sigma/m$
Lignito	2,28	6,43	0,5	34,	1,11
Estéril	6,12	169,9	0,25	199	2,13
P.C.	2.155	136.980	950	4.462	0,17
Humedad	42,4	23,7	6,6	61,4	0,11
Cenizas	29,5	65,2	7,1	50,4	0,27
Volátiles	42,8	25,2	5,9	65,3	0,12
Azufre	5,8	7,5	1	55,9	0,47

Tabla III.2 a.- Parámetros estadísticos correspondientes a las variables de las capas seleccionadas.

	Lignito	P. C.	Humedad	Cenizas	Volátiles	Azufre
Lignito	1	—	—	—	—	—
P. C.	0,07	1	—	—	—	—
Humedad	0,11	- 0,34	1	—	—	—
Cenizas	- 0,14	- 0,70	- 0,34	1	—	—
Volátiles	0,15	0,69	0,27	- 0,79	1	—
Azufre	0,02	0,06	- 0,13	- 0,04	- 0,02	1

Tabla III.2 b.- Matriz de correlación de los datos brutos.

### B) Datos regularizados

La regularización ha consistido simplemente en cortar cada sondeo por rebanadas de 10 m de espesor, y calcular, para cada una de ellas, la proporción de carbón existente "ratio" y las acumulaciones correspondientes a cada una de las características de calidad. La acumulación se define por el producto del espesor de la capa por el valor de la característica analizada; los productos así obtenidos deben sumarse para el total de capas existentes en la rebanada.

Los parámetros estadísticos calculados para las nuevas variables se dan en las tablas III.3 a y b.



	m	$\sigma^2$	Min.	Máx.	$\sigma/m$
Ratio	0,245	0,099	0	1	1,25
P.C.	549,4	499.510	0	3.749,6	1,29
Humedad	10,8	188,7	0	54,2	1,27
Cenizas	7,1	79,3	0	47,4	1,25
Volátiles	11,0	195,9	0	59,7	1,27
Azufre	1,5	4,3	0	28,4	1,41

Tabla III.3 a.- Parámetros estadísticos de las variables regularizadas.

	Ratio	P.C.	Humedad	Cenizas	Volátiles	Azufre
Ratio	1	—	—	—	—	—
P.C.	0,98	1	—	—	—	—
Humedad	0,99	0,96	1	—	—	—
Cenizas	0,96	0,92	0,95	1	—	—
Volátiles	0,99	0,99	0,99	0,94	1	—
Azufre	0,90	0,91	0,88	0,86	0,90	1

Tabla III.3 b.- Matriz de correlación de las variables regularizadas.

Los histogramas de las variables regularizadas presentan un aspecto fuertemente asimétrico con un coeficiente de variación superior a 1; así, para la variable proporción de carbón "ratio" hay un fuerte pico de valores nulos o muy próximos a cero ( $\approx 47\%$ ), que corresponden a los tramos regularizados que no contienen capas de carbón (figura III.5). El resto de las variables tienen una distribución parecida a la del ratio, hecho que se esperaba ya que se trabaja con variables de acumulación, lo que explica igualmente las altas correlaciones existentes entre ellas.

### 2.2.2. Variogramas

#### A) Cálculo experimental

El objeto del análisis estructural es el cálculo experimental y ajuste a modelos teóricos de los variogramas de las variables. Como

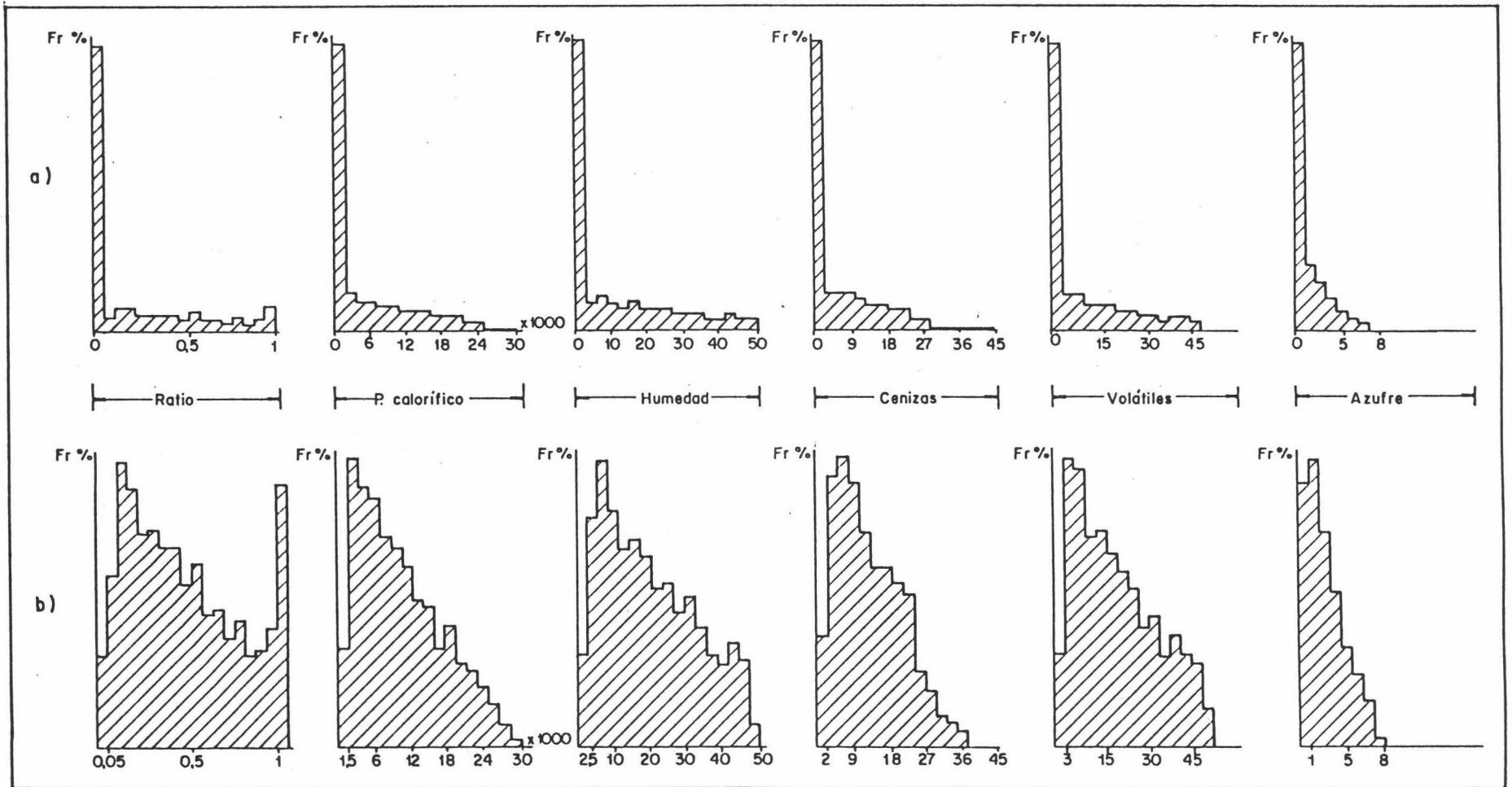


Figura 177.5.- Histogramas variables regularizadas. a) sin eliminación de los valores cero. b) con eliminación de los valores cero.

señala la metodología, los variogramas han sido calculados en distintas direcciones, según el plano horizontal y a lo largo de los sondeos para conocer la variabilidad en el sentido vertical.

En la figura III.6 a se dibujan los variogramas experimentales del ratio en el plano horizontal, la variable tiene un comportamiento estacionario e isótropo al menos hasta la distancia de 350 m -escala de cuasi-estacionaridad-. En cambio, el variograma vertical detecta la presencia de una fuerte anisotropía zonal de la variable, puesto que su valor de meseta no alcanza el valor de la dispersión experimental.

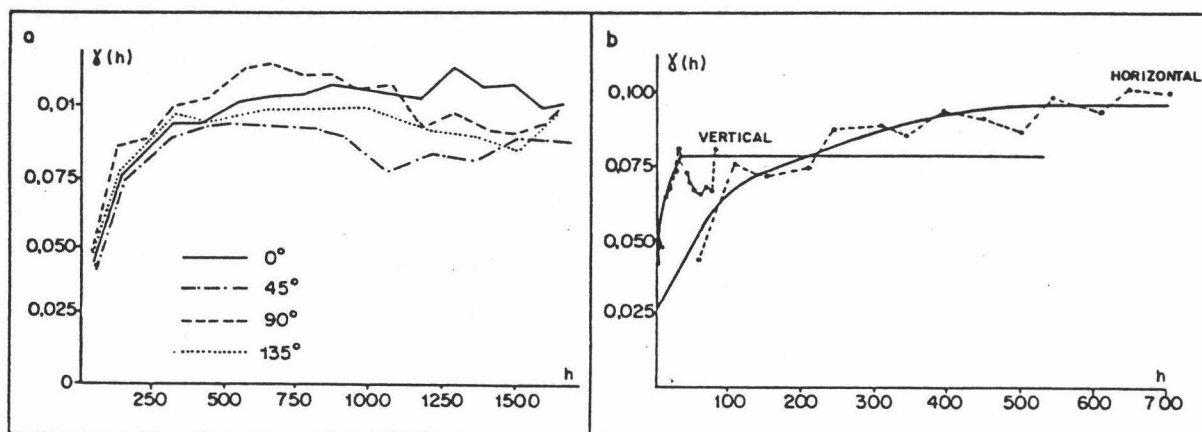


Figura III.6.- a) Variogramas experimentales del ratio de carbón. b) Ajuste del variograma medio horizontal y vertical.

Por otra parte, se pensó en que el carácter sedimentario multicapa del depósito podía influir en la existencia de un efecto proporcional del ratio, según la vertical. Un método práctico de comprobación de esta hipótesis, consiste en calcular la media y varianza de la variable para cada nivel, y comprobar que no se da relación funcional alguna de dependencia entre estos parámetros. En efecto, parece deducirse de los valores obtenidos que no hay, al menos en el sector estudiado, un efecto proporcional de los variogramas; las fluctuaciones de estos parámetros no son grandes con respecto a los valores medios (tabla III.4).

Es conveniente señalar que el primer nivel tiene un comportamiento un tanto anómalo, debido a que ocupa la parte superior del yacimiento, con gran predominio del estéril de recubrimiento, y también debido al número de datos disponibles, sensiblemente inferior a los utilizados

	Sector	Nivel								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	0,245	0,145	0,264	0,285	0,265	0,264	0,270	0,279	0,288	0,277
$\sigma^2$	0,099	0,066	0,105	0,109	0,092	0,090	0,098	0,111	0,113	0,111
$\sigma/m$	1,28	1,77	1,23	1,16	1,14	1,14	1,16	1,19	1,17	1,20

Tabla III.4.- Valores de la media y varianza del ratio en cada nivel de regularización.

en los otros niveles; por estas razones se tiene un valor medio de la variable más bajo que la media del sector.

B) Ajuste a modelos teóricos

El modelo tridimensional ajustado está formado por tres estructuras esféricas más una componente de efecto de pepita  $C_0$ .

$$\gamma(h) = C_0 + C_1 \text{Esf}(A_1) + C_2 \text{Esf}(A_2) + C_3 \text{Esf}(A_3)$$

Las tres estructuras, de alcances diferentes, caracterizan la variabilidad de la proporción a escalas distintas. El efecto de pepita  $C_0$  representaría una microregionalización de escala inferior a la malla de observación, cuyo valor representa el 25 % de la variabilidad total; por tanto, su influencia sobre los resultados de la estimación de los bloques será importante. Los valores de los parámetros del modelo ajustado son (tabla III.5):

$C_0$	Estructura	Tipo	Meseta (C)	Alcance (A)	Anisotropía		
					ax	ay	az
0,025	1	Esférico	0,032	10,5	0,081	0,081	1
	2	"	0,022	43	0,081	0,081	1
	3	"	0,020	530	1	1	0

Tabla III.5.- Parámetros del ajuste del variograma del ratio.

En la figura III.6 b se ha dibujado el ajuste de dicho modelo al variograma medio; como también queda reflejado, se ha reproducido la anisotropía zonal puesta de manifiesto en el análisis variográfico, con sólo asignar el valor  $a_z = 0$  al coeficiente de anisotropía vertical.

El resto de las variables de acumulación, poder calorífico, cenizas, etc, tienen variogramas similares a los de la proporción como consecuencia de las fuertes correlaciones existentes entre ellas, que a la postre han favorecido el ajuste de un modelo de correlación intrínseca entre las variables.

### 2.3. ESTIMACION DE LOS RECURSOS

#### 2.3.1. Plan de krigage

Los recursos locales del yacimiento se han estimado por krigage de las variables analizadas en cada uno de los bloques v considerados.

Puesto que las bancadas de explotación tienen una disposición irregular en el yacimiento, debido al método de explotación utilizado, la estimación de las reservas, para cada una de ellas, se ha hecho por integración de los valores krigados de los bloques que caen en el interior (cf. figura III.2).

Un aspecto importante de la estimación estriba en la elección del plan de krigage que facilite su cálculo y reduzca el tiempo del mismo. Para ello hay que escoger adecuadamente la vecindad local de datos que intervienen en la estimación, procurando establecer simetrías de los ponderadores si el modelo de variograma así lo permite. Con tal motivo se han llevado a cabo diversos ensayos de krigage con diferentes configuraciones; finalmente he escogido la que se muestra en la figura III.7, formada por 18 ponderadores asociados a las informaciones de 19 paneles. En este caso, hacer intervenir más información en la estimación ocasionaba ciertos problemas debido a la aparición de ponderadores negativos y de efectos de pantalla entre las informaciones, ello sin conseguir una mejora sensible del error de estimación.

Un ejemplo de los valores de los ponderadores asociados al plan anterior se da en la citada figura: cabe destacar por su importancia la información ubicada en el interior del bloque a estimar  $v$ , que tiene un peso del 45 % sobre el valor estimado; después le siguen en importancia las informaciones situadas por encima y por debajo del bloque con el 12,5 % de peso cada una.

Por último, solamente queda por señalar que he preferido en este estudio no utilizar la posibilidad que ofrecía el método de establecer simetrías de ponderadores en el plano horizontal; la razón de ello es que realmente no se da simetría geométrica de las informaciones respecto al bloque de estimación, tal simetría sí se verificaría si en lugar de estimar los bloques  $v$  se hubiesen estimado los paneles  $V$ .

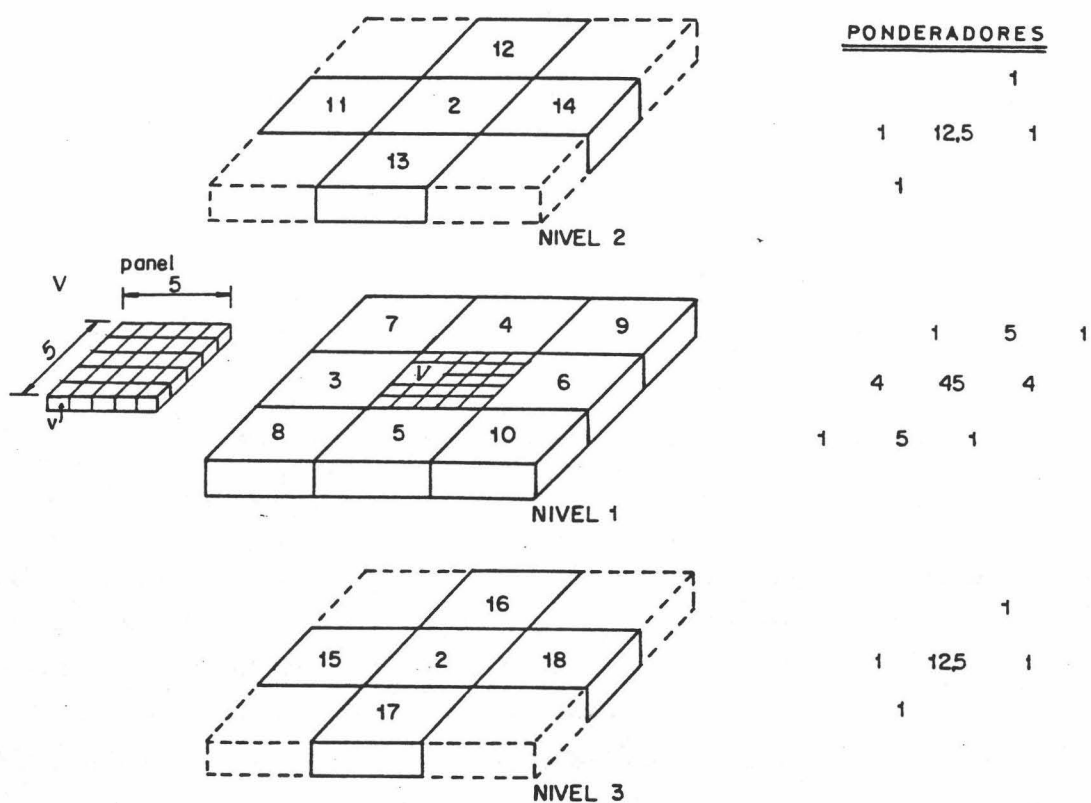


Figura 199.7.- Estimación de recursos: plan de kriging establecido.

### 2.3.2. Resultados

He estimado más de 180.000 bloques, en total 7.353 paneles. El valor medio estimado de la proporción de lignito en el bloque es  $Z_K = 0,241$  con un error medio de estimación  $\sigma_K^2 = 0,032$ ; la varianza de dispersión de los bloques estimados es igual a  $D^2(Z_K/G) = 0,045$ .

Es importante interpretar ciertos resultados numéricos del krigage; por ejemplo, que se tiene una excelente correlación entre la información experimental  $Z(x_\alpha)$  y los valores krigeados  $Z_K(v_\alpha)$ ,  $r = 0,99$ , que corrobora el resultado esperado; asimismo no se aprecia sesgo entre los valores medios tomados por estas variables,  $Z = 0,245$  contra  $Z_K = 0,241$ , lo cual respeta una de las condiciones básicas implícitas en la estimación.

Por otro lado, es notable el suavizamiento producido por la estimación, con un valor de dispersión puntual  $D^2(Z/G)$  aproximadamente doble de la dispersión de los valores estimados  $D^2(Z_K/G)$ . Tal efecto, se debe a la actuación de dos factores principales, el soporte de observación que es diferente para las dos variables  $Z$  y  $Z_K$  y al suavizado que deriva del propio método; se tiene para  $Z$  un soporte de 10 m, dicho puntual, mientras que para  $Z_K$  se tiene un volumen mayor de  $21 \times 21 \times 10 \text{ m}^3$ , que juega a favor de la disminución de la dispersión del estimador. Al respecto, no revestiría problema alguno cuantificar las partes correspondientes a cada uno de los factores, sólo haría falta calcular con ayuda de las relaciones presentadas en los capítulos de la introducción el valor de la dispersión de los bloques  $D^2(Z_V/G)$  y establecer seguidamente la relación de Krige: se dispone para ello de todos los elementos de cálculo necesarios.

Obtenidos los resultados de krigage es inmediata la construcción de las curvas de recursos in situ en función de las variables estimadas.

#### 2.4. SIMULACION CONDICIONAL DEL YACIMIENTO

Se demostraba que la dispersión de los datos estimados es menor que la dispersión de los datos experimentales; por tal motivo el krigage no es válido para interpretar las fluctuaciones reales de las variables en el yacimiento. Tal es el objetivo fundamental de la simulación condicional, elaborar un modelo numérico de yacimiento que reproduzca las dispersiones reales y que sirva de base numérica al estudio de simulación de explotación (véase CHICA-OLMO, 1982 d).

El modelo del yacimiento se ha construido por el método de bandas rotantes, con reproducción de las mismas propiedades geoestadísticas que las variables experimentales, mismos histogramas, variogramas, correlaciones, etc, siendo además condicional en los puntos de información; para su elaboración he considerado el modelo de correlación intrínseca entre las variables.

Por razones prácticas el modelo se ha elaborado sólo para las principales variables estudiadas, la proporción o ratio de carbón y las acumulaciones en poder calorífico y cenizas. Esta limitación no plantea problema alguno para deducir los valores simulados de las variables restantes; si se tuviera necesidad de ello, bastaría con aplicar el método de regresión propuesto por JOURNEL (1978) para variables acumulación, a partir de los datos simulados del ratio.

#### 2.4.1. Transformaciones de los datos

Puesto que el método geoestadístico sólo sabe simular variables con distribución gausiana, es necesaria la transformación de los datos iniciales  $Z$  en valores normales  $Y$ . La función de anamorfosis  $\phi(y)$  puede obtenerse con interpretación del histograma experimental  $F(z)$  de dos maneras diferentes, formado éste por un único valor por clase o con reagrupación de la información por clases. La primera solución conduce al cálculo directo de la variable  $Y$

$$Y = \phi^{-1}(Z) = G^{-1}\{F(z)\}$$

sin que sea preciso el cálculo de la anamorfosis inversa. El segundo procedimiento, aunque es más rápido de elaborar, quita importancia a los valores exactos de la variable  $Z$  y puede tener problemas a la hora de su aplicación, como en el presente caso, cuando se tienen histogramas con picos de valores iguales. Por consiguiente, se ha seguido el primer método para definir el histograma a la vez que se da mayor peso a cada uno de los valores experimentales.

El problema que subyace en el cálculo de la función  $\phi$  es precisamente el porcentaje tan elevado de valores cero, que pueden hacer imposible tal transformación. La razón es evidente, en tal circunstancia no puede establecerse una relación biyectiva entre las variables  $z$  e  $y$ ; por tanto no hay posibilidad de obtener  $\phi$ : la transformación inversa  $Z^* = \phi(Y)$  no permitiría distinguir particularmente cada uno de los valores cero y lo que es más grave  $\phi(y)$  no sería una función creciente. Con motivo de encontrar una solución práctica al problema se pensó en destruir el átomo de valores iguales modificándolos aleatoriamente en valores comprendidos entre el valor 0 y el valor mínimo distinto de cero, 0,002.



Los estadísticos de la nueva variable no se han alterado sustancialmente después de este cambio aleatorio, incluso los histogramas y variogramas coinciden.

A pesar de esta transformación aleatoria de los datos nulos, la anamorfosis puntual  $\phi(y)$  sigue presentando pequeños problemas de decrecimiento para valores del argumento comprendidos entre  $-3,5$  y aproximadamente  $-0,4$ . Afortunadamente desaparecen como consecuencia de la regularización en la anamorfosis de bloque  $\phi_V(x)$ , que interviene en la construcción del modelo (véanse los gráficos de estas funciones en el Anexo I).

El ajuste numérico de la anamorfosis se ha hecho de acuerdo al formalismo expuesto en el Anexo I y con igual número de polinomios considerados para las variables ( $N=13$ ). La tabla III.6 refleja los valores de los parámetros utilizados en dicho ajuste, así como los resultados de los tests numéricos aplicados.

	Intervalo de ajuste				N	$\sigma^2_{exp}$	$\sigma^2_{N=13}$
	Z <sub>min</sub>	Z <sub>max</sub>	Y <sub>min</sub>	Y <sub>max</sub>			
Ratio	0	1	- 3,5	3,5	13	,0801	,0800
P.C.	0	2.800	- 3,5	3,5	13	412.280	412.740
Cenizas	0	45	- 3,5	3,5	13	61,41	61,52

	Y		Z*		Z - Z*	
	m	$\sigma^2$	m	$\sigma^2$	m	$\sigma^2$
Ratio	0	1	0,2886	0,08	$0,27 \times 10^{-4}$	$0,10 \times 10^{-4}$
P.C.	0	0,989	631,5	412.100	0,039	632,7
Cenizas	0	0,989	8,01	61,36	0,002	0,113

Tabla III.6.- Ajuste de la función  $\phi$  puntual ( $Z^*$  es la variable restituida).

El parámetro  $r$  de cambio de soporte se ha obtenido de las covarianzas de bloque  $C_V(0)$  de cada una de las variables, cuyos valores calculados se dan en la tabla III.7.

	$C_v(0)$	$r$	Relaciones utilizadas
Ratio	0,075	0,9732	$C_v(0) = \gamma(\infty) - \gamma(v, v)$ $C_v(0) = \sum_{n=1}^N \frac{\psi_n r^n}{n!}$
P.C.	386.850	0,9733	
Cenizas	57,6	0,9730	

Tabla III.7.- Valores de  $C_v(0)$  y del parámetro de cambio de soporte  $r$ .

Los valores de los coeficientes numéricos  $r$  y  $\psi_n$  conducen al cálculo de la función  $\phi_v(X)$ , pues los coeficientes de su desarrollo polinómico valen  $\psi_n(v) = \psi_n r^n$ .

#### 2.4.2. Modelización del variograma a simular

Se trata de deducir el modelo de la covarianza  $R(h)$  a simular por el método de bandas rotantes, correspondiente a la gaussiana de bloques  $X_v$ . El modo de obtención del mismo se explica con suficiente detalle en el Anexo II, basta simplemente con recordar que se sabe deducir de la covarianza regularizada  $C_v(h)$  conocida y del parámetro  $r$ , aplicando las relaciones dadas por el modelo gaussiano discreto.

En la figura III.8 he dibujado las covarianzas  $C_v(h)$  y  $R(h)$  correspondientes a la variable ratio para el soporte de bloque, real  $Z_v$  y gaussiana  $X_v$ .

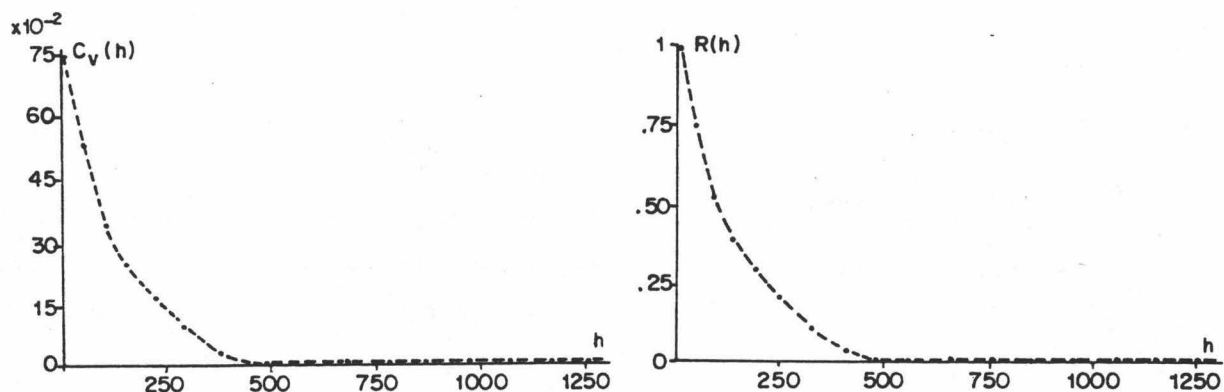


Figura III.8.- Covarianzas de los bloques: real  $C_v(h)$  y gaussiana  $R(h)$ .

### 3. SIMULACION DE EXPLOTACION

#### 3.1. CONSIDERACIONES PRELIMINARES

Para el estudio de simulación de explotación he trabajado directamente con las variables descritas, aunque hubiese sido interesante haber trabajado con variables económicas deducidas de las primeras por relaciones simples. En tal sentido, se podía haber asignado a cada uno de los bloques un valor económico función de la proporción de carbón estimada o simulada, incluso haber buscado otros tipos de valoraciones algo más complejas que hiciesen intervenir las características de calidad del carbón como el poder calorífico, el contenido en cenizas, en azufre, etc, que según su naturaleza darían o quitarían valor al bloque.

El motivo de la reflexión anterior es recalcar que el estudio de simulación de explotación no debe restringirse necesariamente al análisis exclusivo de las variables experimentales, sino que en él tienen cabida otras variables útiles calculadas a partir de aquellas.

Otra consideración a plantear, referente al modelo de yacimiento construido, referida en apartados anteriores, es que obligados a trabajar sobre soporte de bloque, el modelo resultante es una representación esquematizada de la realidad y no contiene por tanto información geológica alguna referente, por ejemplo, al número de capas, espesores y calidades medias de las mismas en cada bloque. Sin embargo, a pesar de esta limitación práctica, la aproximación hecha se muestra más que suficiente para llevar a cabo el estudio de la producción en la mina, para periodos de tiempo escogidos de acuerdo con los criterios de planificación.

Hechas estas observaciones preliminares, dos reglas principales de carácter geométrico rigen la explotación, cuyo cumplimiento debe garantizarse en el estudio de simulación: el depósito se explota simultáneamente en cinco bancadas de 20 m de altura (ocasionalmente pueden tener 10 m), de 50 a 60 m de anchura y de 1.000 a 1.500 m de longitud, en promedio; el conjunto de rotopalas se dispone de modo radial en el sector. En la explotación la rotopala avanza perpendicularmente a la línea del frente hasta llegar al final de la bancada, entonces pasa a explotar la bancada situada en el lateral pero en sentido contrario.

### 3.2. SIMULADOR DE EXPLOTACION

Un programa informático que para tal fin se ha construido simula la explotación del yacimiento mediante rotopalas. Debe ser interpretado principalmente como un útil que realiza la interfase entre el modelo geoestadístico de yacimiento y el método de explotación simulado, aunque también podría aplicarse, con ciertas modificaciones previas, a la simulación de yacimientos que tengan una gran continuidad lateral de las capas mineralizadas; se piensa concretamente en depósitos con morfología estratiforme.

En principio, el programa debe ejecutarse en un ordenador con capacidad de memoria y de cálculo suficientes para generar el conjunto de informaciones geoestadísticas y que igualmente soporte el programa; no obstante estos condicionantes no imposibilitan su aplicación en equipos más pequeños, siempre que se haya escogido la información geoestadística estrictamente necesaria y se hayan modificado ciertos parámetros en el programa.

#### 3.2.1. Objetivos y estructura del programa

El simulador tiene interés diverso según los objetivos propuestos en el estudio. En primer lugar, es capaz de evaluar el potencial de las máquinas que explotan el yacimiento, esto es, lo que las rotopalas han podido producir o consumir durante el tiempo de simulación. Sin embargo, su interés básico es ser un útil de ayuda para la determinación de la secuencia de explotación por el método utilizado, secuencia que sería óptima en el sentido de los criterios fijados en la mina, como por ejemplo la obtención de un carbón de calidad lo más homogénea posible.

La secuencia de explotación es establecida "a mano"; fijada la bancada a explotar se pueden prever con antelación los resultados de la explotación, tanto en tonelaje como en calidad. Se podría incluso pensar en seleccionar aquellos volúmenes cuya explotación diese los resultados más conformes con la planificación; ello depende exclusivamente de la flexibilidad técnica del método de explotación, que a priori parece un tanto rígida.

La estructura del programa es modular con dos módulos de lectura correspondientes, de una parte los parámetros técnicos de las rotopalas y del yacimiento y de otra los parámetros de entrada al estudio (CHICA-OLMO y LAILLE, 1984 y LAILLE, 1983). El sistema simula la explotación, para ello analiza los procesos de extracción y transporte del mineral, controla la planificación a partir de los datos de krigeage y hace el tratamiento de los resultados obtenidos al final del tiempo de simulación.

#### *A) Extracción y transporte del mineral*

Los contornos y situación de las bancadas son introducidos al simulador, quien determina su intersección con la red de bloques de krigeage o de simulación. Los bloques que caen en el interior de dichos contornos se utilizan para el cálculo de los valores medios de las variables para cada intervalo de tiempo fijado, para lo cual se estipula que un bloque es explotado cada seis horas.

Las operaciones básicas de corte propiamente dichas se hacen por cuatro movimientos básicos de la rotopala (LAILLE, 1983): el brazo de la máquina está animado por un movimiento de barrido horizontal/vertical seguido con un avance en el interior del banco, y combinados a la vez con el movimiento de rotación de la rueda. Cuando el brazo ha avanzado una cierta longitud definida como parámetro, un bloque elemental se habrá cortado; la máquina retrocede y se sitúa en posición para comenzar con el corte de un nuevo volumen elemental y así sucesivamente hasta el final de la bancada.

El tiempo de avería se simula aleatoriamente por el método de Monte Carlo con tirada de números aleatorios en el módulo de corte, que es en efecto la sola variable aleatoria del programa.

El mineral y el estéril extraído por cada máquina son transportados por cintas "primarias" hasta un nudo, donde dos cintas "secundarias" conducen el estéril a la escombrera y el carbón al parque de homogeneización.

### *B) Control de la planificación*

En el estudio de simulación el control de la planificación se lleva a cabo sobre los datos estimados por krigage. Las decisiones tomadas sobre estos valores se traducen en la realidad en valores que son sustituidos por los valores geoestadísticos simulados "valores reales".

### *C) Tratamiento de resultados*

El programa elabora los resultados finales del estudio y calcula el balance global de la secuencia de explotación, dando como resultados el tonelaje total extraído y la calidad del carbón por intervalos de tiempo (cf. figura II.11).

## 3.3. ESTUDIO POR SIMULACION DE DOS ALTERNATIVAS TECNICAS DE EXPLOTACION

Antes de la presentación del estudio, es conveniente recordar que el objetivo de una simulación de explotación consiste en dar una aproximación a los resultados que se obtendrán en la realidad minera y no los valores absolutos resultantes. No obstante, con la información numérica obtenida se puede evaluar sin riesgo el impacto que los criterios de explotación tienen sobre las características de la producción.

Con tal fin varias simulaciones han sido realizadas sobre diferentes sectores del yacimiento; en ellas se han hecho varias distintos parámetros técnicos elegidos en el estrecho abanico de posibilidades actuales que ofrece la mina. Como ejemplo de los resultados obtenidos en uno de estos estudios se presenta la comparación entre dos simulaciones realizadas. Cada una de ellas caracteriza técnicamente una posibilidad diferente de trabajar la explotación.

El desarrollo técnico actual de la mina contempla la alternativa de trabajar con altura de banco de 10 m en lugar de 20 m que es lo más frecuente. Ello permite diferenciar una primera opción técnica que consiste en explotar una bancada de dimensiones  $1.200 \times 50 \times 20 \text{ m}^3$ , que una vez finalizada se comenzaría a explotar la bancada situada lateralmente en el mismo plano y en sentido contrario. Una segunda opción se establece si se trabaja con una altura de banco de 10 m, a fin de permitir a la

máquina explotar el nivel inferior, una vez que el primer banco ha sido extraído.

Como criterio de comparación de los resultados alcanzados, por las dos alternativas, se ha escogido el valor de la varianza de dispersión de las características para diferentes periodos de observación, 15 días y 30 días, así como la ganancia de reducción de variabilidad relativa (CHICA-OLMO y LAILLE, 1984).

Se puede concluir a la vista de los resultados expresados en la tabla III.8, que para el área estudiada las dos posibilidades de explotación dan resultados parecidos, aunque se aprecia que la explotación continuada por bancos de 20 m (opción nº 1) produce una dispersión de las variables más baja, del orden del 8 % menor que la otra opción que incluye bancos de 10 m. Estas características se observan en la figura III.9 donde se han representado la evolución de los contenidos en cenizas y en poder calorífico, así como del tonelaje producido cada día en la mina para los dos planes considerados. El flujo de valores representado tendrá el mismo aspecto global que las curvas reales, sin embargo no debe esperarse que ambas coincidan localmente.

Por otra parte, para mejor utilizar estos resultados es conveniente establecer balances técnicos globales para cada uno de los planes. Así, será el estudio económico a realizar sobre ellos quien determine, con la ayuda de estos resultados geoestadísticos, cual de ellos es el más conveniente para la explotación, para cada uno de los casos estudiados.

Varianza de dispersión $D (Z_t/T)$	Característica	Opción 1	Opción 2	Ganancia $\frac{1}{2}$ %
1 día/30 días	ratio	0,0297	0,0317	6,3
	p.c.	146.458	155.250	5,7
	cenizas	26,33	26,63	3,8
1 día/15 días	ratio	0,0182	0,0212	14,1
	p.c.	89.758	103.500	13,2
	cenizas	16,32	17,55	7,0

Tabla III.8.- Varianzas de dispersión de las características estudiadas para las dos opciones de explotación.

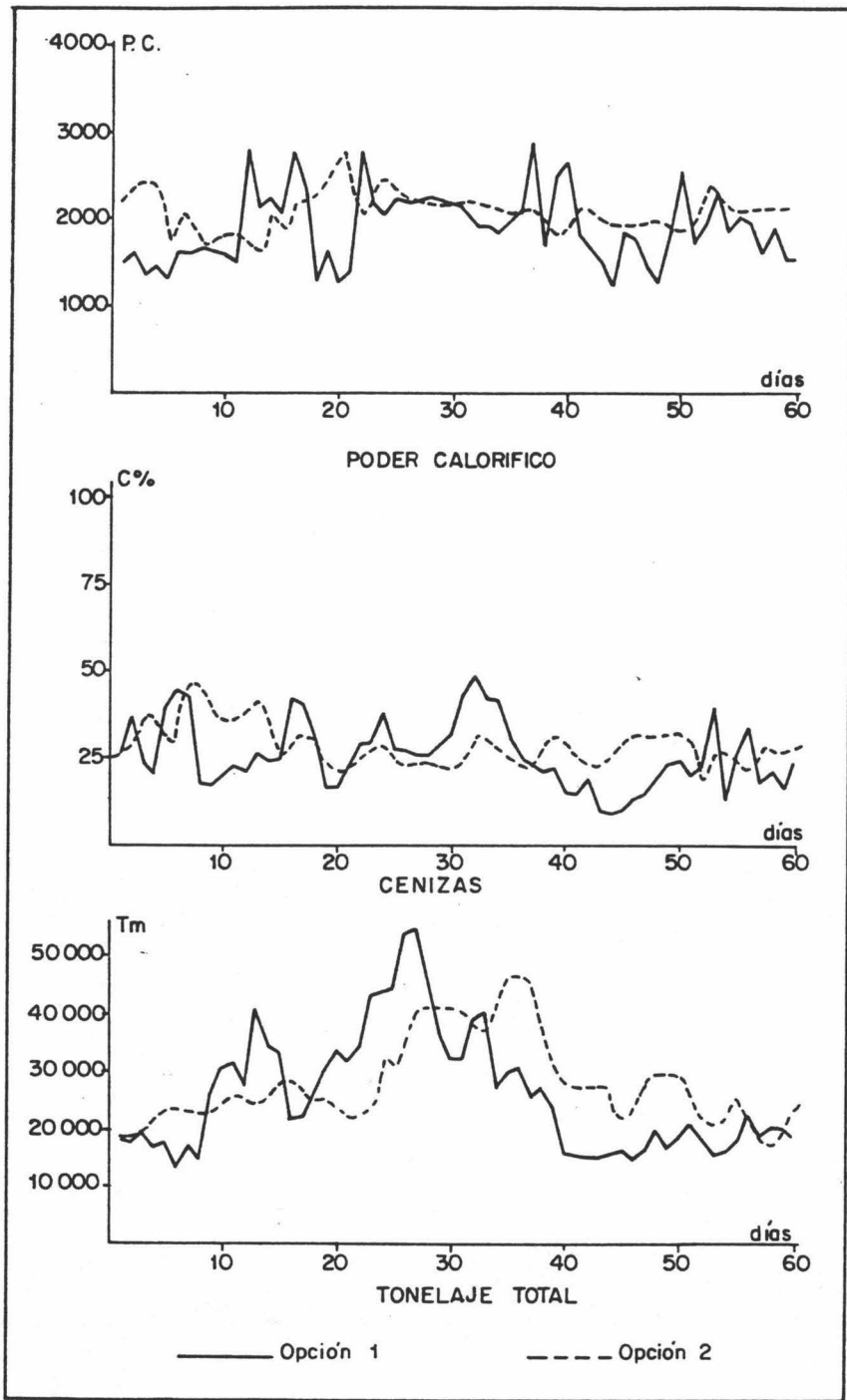


Figura 333.9.- Flujo diario de las características del carbón producido en mina por las dos opciones de explotación.



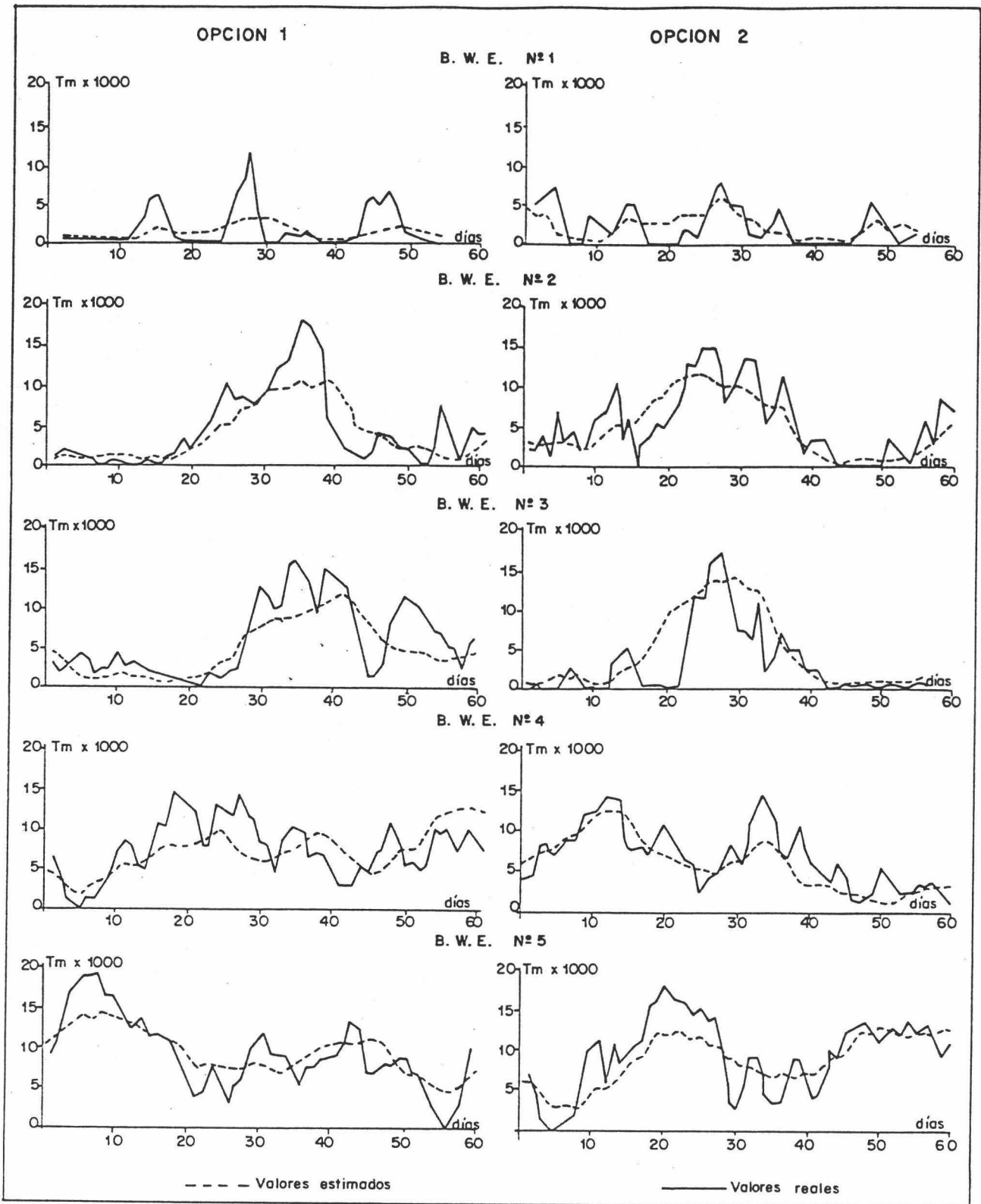


Figura III.10.- Tonelaje producido por cada rotopala B.W.E. correspondiente a cada opción.

Los resultados referentes al tonelaje para cada opción y para cada una de las cinco máquinas pueden verse en la figura III.10.

#### 4. MODELIZACION DEL PARQUE DE ALMACENAMIENTO Y PREHOMOGENEIZACION

##### 4.1. INTRODUCCION

En cualquier yacimiento, el mineral que se extrae puede presentar fuertes variaciones de calidad, por lo que es lógico que se prevean dentro de las actividades de planificación estrategias de almacenamiento para la homogeneización del mismo antes de su utilización, en una central, en una planta de tratamiento, etc.

Dichas estrategias se encuentran integradas dentro de un sistema general, clásico, de preparación que he representado en la figura III.11, particularizado al caso del depósito estudiado. En dicho esquema se indican los procesos más destacables en los cuales se produce homogeneización de calidad: la explotación, el almacenamiento y la trituración.

En la explotación, los propios métodos de selección basados en la información experimental pueden ya originar un producto cuya dispersión de calidad sea sensiblemente inferior a la variabilidad "in situ"; por otra parte, también hay que considerar en la explotación un efecto de homogeneización consecuencia de las posibles mezclas de mineral de calidades diferentes.

El almacenamiento tiene como objetivo prehomogeneizar la calidad, lo cual se traduce en una disminución de la dispersión de las leyes obtenidas en la explotación. Probablemente, el modelo más clásico para ello (es el caso del depósito que se estudia) consiste en depositar el mineral formando una o varias pilas, según el sentido longitudinal de éstas, y en recogerlo perpendicularmente obteniendo así el efecto deseado. El número de pilas y las dimensiones de éstas son parámetros que dependen de las características propias de la explotación, particularmente del tiempo de residencia del mineral en la pila previsto en el proyecto.

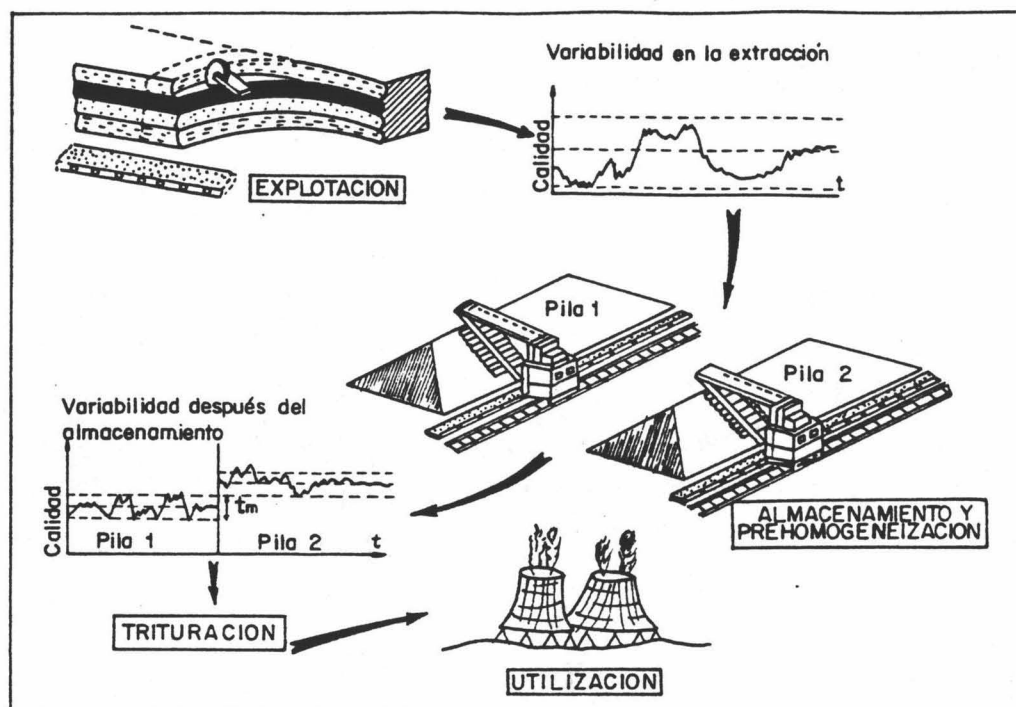


Figura 11.11.- Sistema general de preparación y homogeneización del carbón.

Por último, el tercer aspecto señalado referente a la homogeneización del mineral se refiere al proceso de trituración y molienda del mineral en molinos, en los cuales el tamaño del grano se ve reducido progresivamente hasta alcanzar el tamaño de partícula, consiguiéndose así un producto final altamente homogéneo.

#### 4.2. MODELO DE ALMACENAMIENTO Y PREHOMOGENEIZACION EN "CHEVRONS"

##### 4.2.1. Objetivos y características del modelo

Se plantea aquí la elaboración de un modelo para el estudio de los procesos de prehomogeneización en el almacenamiento del mineral después de la explotación, debiéndose de interpretar fundamentalmente como una herramienta más de trabajo interesante, a través del cual se estudiará dicho proceso mediante técnicas de simulación, en las que la Geoestadística va a jugar un papel importante.

El modelo que se ha investigado corresponde al método de almacenamiento en "chevrns", cuyos aspectos técnicos han sido analizados y descritos por SCHOFIELD (1980). El método, practicado en el yacimiento de lignito estudiado, ha conocido una gran expansión en estos últimos años debido

principalmente a su ratio de reducción de variabilidad del material almacenado y también a la simplicidad del equipo técnico requerido para su práctica.

Como ilustra esquemáticamente la figura III.12, el método consiste en depositar el mineral en pilas, cada una formada por  $N$  capas en total de tonelaje  $Q_c$ . Las variaciones de calidad del mineral se producen de una capa a la siguiente, lo cual se comprueba en secciones transversales a la pila perpendiculares a la dirección de la capa, secciones que identifican el sentido de recogida del material. En el momento de la toma de una rebanada por cantidades unitarias de tonelaje  $q$  se mezclan las calidades del mineral, en este caso del carbón, pertenecientes a la misma rebanada de tonelaje  $Q_t$ . De esta forma se consigue homogeneizar a nivel de cada rebanada pero no se reduce las fluctuaciones de calidad entre las diferentes rebanadas. Es adaptando las cantidades  $Q_c$  y  $Q_t$  como se puede hacer, siendo éste el objetivo del modelo de simulación elaborado.

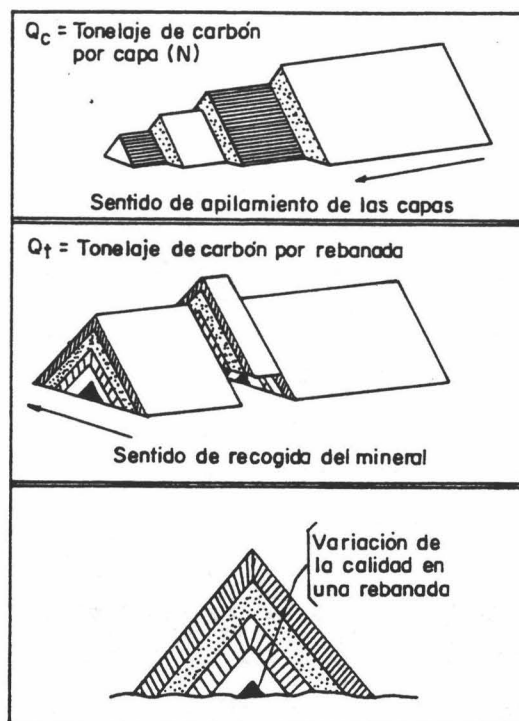


Figura III.12.- Representación esquematizada del almacenamiento longitudinal simple en "chevrans".

Si se fija el valor de la cantidad unitaria de recogida  $q$ , la modelización del método consistirá esencialmente en buscar los valores óptimos de los parámetros correspondientes al número de capas de la pila  $N$  y a las cantidades de material de la capa y de la rebanada  $Q_c$  y  $Q_t$ , puesto que de ellos depende, en gran medida, la dispersión de las características analizadas entre las rebanadas y en el interior de éstas.

Numéricamente la disminución de la dispersión se traduce en un factor de ganancia de reducción de variabilidad GRV, expresada como es costumbre por la relación

$$GRV = \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\sigma_1} \times 100$$

en la que  $\sigma_1$  y  $\sigma_0$  denotan respectivamente las desviaciones típicas de las dispersiones observadas a la entrada y salida del almacenamiento.

El parámetro GRV es función, además de la dispersión inicial  $\sigma_1$ , de los parámetros técnicos anteriores. Se tiene entonces la forma general:

$$GRV \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\sigma_1} \right) = f(N, Q_c, Q_t, q, L, l \text{ y } h)$$

donde  $L$ ,  $l$  y  $h$  son las dimensiones de la pila.

Por último, otro aspecto interesante del modelo es que se podría contemplar en la simulación reducir la diferencia  $t_m$  (cf. figura III.11) entre la calidad media de dos pilas recogidas consecutivamente o al mismo tiempo. El procedimiento tendría indudablemente implicaciones prácticas importantes sobre los resultados de la homogeneización a mayor plazo.

#### 4.2.2. Modelos probabilísticos de simulación de la prehomogeneización

Desde el punto de vista probabilístico, desde el cual he enfocado el estudio, diversas tentativas se han llevado a cabo para simular los almacenamientos de materiales a partir de las muy reconocidas "cajas negras" macroscópicas. Se pueden mencionar como principales alternativas posibles, el modelo estadístico gaussiano, el modelo de autocorrelación

y el modelo de análisis espectral, entre otros; aunque se debe a SERRA (1975), y GY (1981) la propuesta de aplicación de la Geoestadística como vía para la formulación estocástica de los procesos de homogeneización de materiales. Algunas de estas aproximaciones metodológicas son analizadas a continuación.

#### A) Método estadístico gaussiano

Se utiliza en la práctica fundamentalmente para estudiar el número de capas  $N$  juzgadas necesarias, en teoría, para alcanzar un cierto valor del ratio de reducción de la variabilidad en la recogida de la pila.

Es un modelo muy simple de aplicar y las hipótesis implícitas para el cálculo de  $N$  son, de una parte, que la variabilidad del material almacenado tenga carácter aleatorio con una distribución de tipo normal, y, de otra parte, que las muestras sean consideradas estadísticamente independientes (figura III.13 a). Bajo estas suposiciones el empleo de relaciones clásicas de la teoría de muestreo (GY, 1975 y 1979) parece válido.

Como ejemplo, se puede utilizar la relación estadística conocida entre varianzas que da como valor de la varianza de dispersión a la salida:  $\sigma_0^2 = \sigma_1^2 / N$ , fórmula que asigna un comportamiento en  $1/\sqrt{N}$  al ratio de reducción de variabilidad  $\sigma_0 / \sigma_1$ , como puede verse en la figura III.13 b.

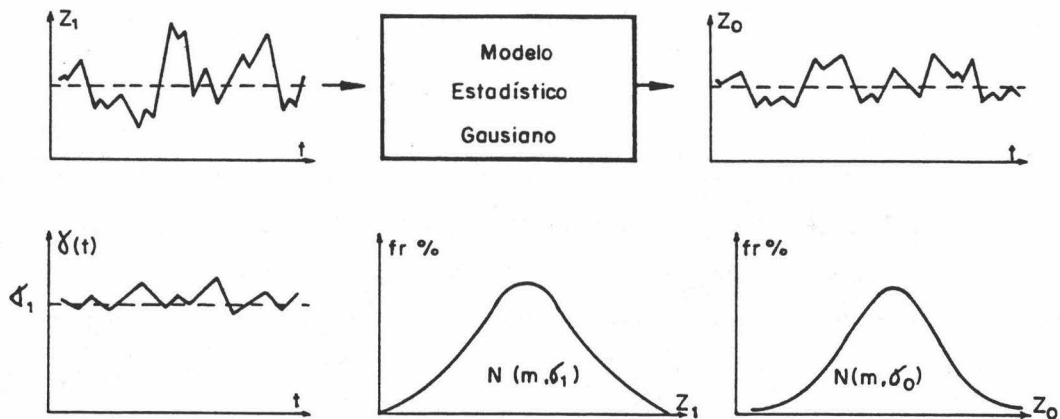


Figura III.13 a.- Modelo estadístico gaussiano.

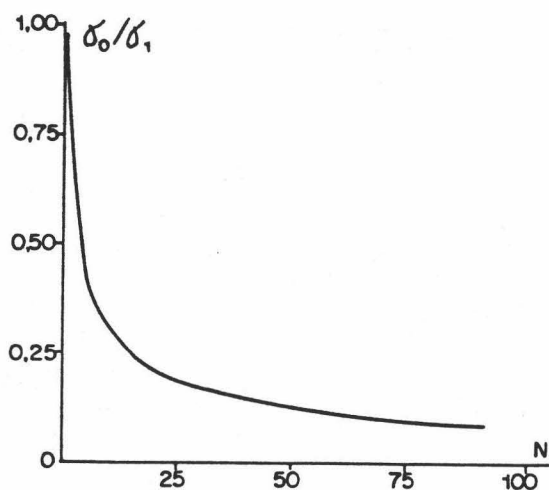


Figura 13 b.- Relación  $\sigma_0/\sigma_1$  en el modelo gaussiano.

### B) Método de Monte Carlo

La experiencia de la realidad minera muestra que muy frecuentemente el mineral tiene una calidad con una distribución cualquiera, a la que no se ajusta ninguna ley de las conocidas en estadística clásica. Para incluir este aspecto dentro de la modelización del almacenamiento PARNABY et al. (1973) han aplicado el conocido método de simulación de Monte Carlo, sobre la base de la distribución experimental de los datos disponibles.

Como ocurría en el método anterior la hipótesis de independencia de los datos se mantiene, pero no así la de distribución gaussiana de la variable que queda sustituida por la distribución de los datos experimentales (figura III.14).

El primer paso en la elaboración del modelo es precisamente el cálculo de la distribución experimental de la variable  $F^*(z)$ . Posteriormente se simulan mediante la generación de números aleatorios los valores necesarios para cada rebanada de la pila; cada valor de la variable se asocia a una de las capas que forman la rebanada. Finalmente el valor simulado de la rebanada es calculado como promedio de los valores simulados en ella.

El estudio de simulación consistirá simplemente en hacer variar el número de capas consideradas, hasta que la dispersión de los valores medios de las rebanadas se sitúe en los límites de tolerancia establecidos.

El método, aunque es fácil de elaborar, tiene el mismo inconveniente que el anterior; desestima la existencia de una eventual estructura de autocorrelación entre los datos. Ambos métodos se basan en hipótesis muy fuertes de independencia que raramente se cumplen (GY, 1981), por tanto es preciso recurrir a modelos más realistas.

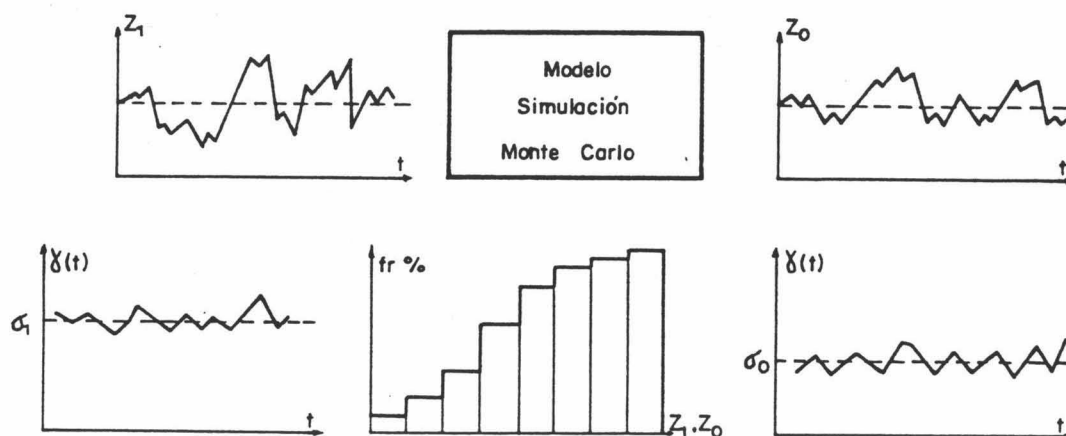


Figura III.14.- Modelo de Monte Carlo.

C) Método basado en el variograma y en funciones de autocorrelación

SERRA (1975) aplica por vez primera la función variograma al estudio de homogeneización de mineral. La relación que utiliza para calcular el ratio de reducción viene dada por:

$$\sigma_0/\sigma_1 = \sqrt{(1/N) (1+e^{-2AL}) (1-e^{-2AL}) - (1/AL)}$$

en la que N es el número de capas, A el alcance del variograma de los datos experimentales ( $Z_1$ ) y L la longitud de la pila de almacenamiento.

A pesar de que la relación hace intervenir el variograma de la variable y algún aspecto geométrico del almacenamiento, es obvio que no considera las mezclas de calidades producidas al recoger la pila por cantidades unitarias q de mineral. Asimismo, se deduce de dicha relación que si el alcance del variograma aumenta, para valores fijos de L y N, se obtiene que la varianza  $\sigma_0^2$  a la salida tiende hacia  $\sigma_1^2/N$ . Dicho razonamiento queda expresado gráficamente en la figura III.15,



en la cual se observa que el ratio de reducción disminuye con el alcance del variograma utilizado para simular los flujos de valores necesarios; en el caso dibujado la variable simulada es el contenido en cenizas del carbón almacenado.

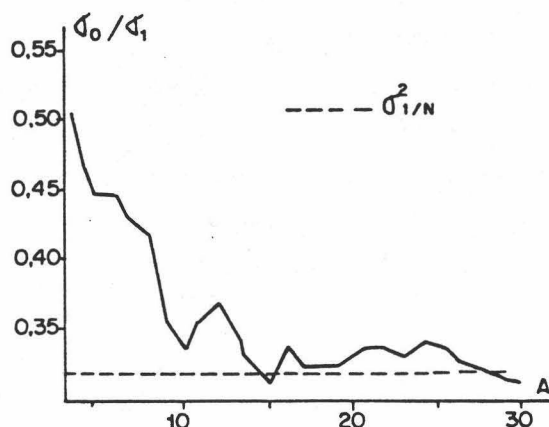


Figura 11.15.- Relación entre el ratio de reducción y el alcance del variograma de los datos de entrada (se han tomado como valores de  $L=60$  m y  $N=10$ ).

Con referencia a la utilización de funciones de autocorrelación VAN DER MOORE (1967) ha sugerido aplicar una relación semejante a la anterior para calcular la dispersión a la salida del almacenamiento  $\sigma_0^2$ ,

$$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 \left( \frac{1}{N} - 2 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(N-k)}{N^2} R(k.Q_c) \right)$$

donde  $R(k.Q_c)$  es la correlación de la calidad del mineral en las capas de la pila.

Los modelos conceptuales expuestos dan una visión generalizada del empleo de métodos probabilísticos en el estudio teórico de los problemas de homogeneización de mineral; sin embargo, adolecen de una visión práctica ya que los aspectos técnicos del método de almacenamiento simulado son obviados en tales aproximaciones. Por tanto, si se desean alcanzar unos resultados más fiables es necesario incorporar dichos aspectos técnicos al modelo conceptual aplicado en cada caso; este ha sido el objetivo del estudio que se presenta en el apartado siguiente.

### 4.3. MODELO DE SIMULACION DEL ALMACENAMIENTO DE CARBON

#### 4.3.1. Generalidades

El modelo ha sido desarrollado a partir de las ideas dadas por SCHOFIELD (1980) para la construcción de un modelo de almacenamiento longitudinal en "chevrons"; incluso utiliza en parte la base informática que el autor da en dicho trabajo ("Homogeneisation/Blending System Design and Control for Minerals Processing"). Las aportaciones más relevantes que se hacen al mismo radican en dos aspectos principales, por un lado, en el modo de generación de los datos que se obtienen por simulación geoestadística de realizaciones de funciones aleatorias, por otro lado, el modelo puede utilizarse con los datos surgidos del estudio de simulación de explotación visto anteriormente. Así se completa el estudio general de los procesos de producción minera en el yacimiento.

Como resultados del modelo se obtienen las fluctuaciones de las características del carbón a la salida del almacenamiento, cuando la pila se ha recogido por cantidades de tonelaje unitario  $q$ . Es obvio que para alcanzar este objetivo se deben de reproducir del modo más exacto los aspectos técnicos del método de almacenamiento estudiado; en particular es necesario calcular para cada posición de la máquina de recogida la proporción exacta de cada capa tomada en la rebanada, así como la variación del ángulo necesario para la toma constante de igual cantidad de mineral  $q$  (Figura III.16). Todos estos aspectos constituyen la esencia determinista del método, que pueden verse con mayor detalle en el trabajo citado de SCHOFIELD (1980), y que he aplicado en el trabajo.

Ya se ha expuesto que la eficacia del método se expresa numéricamente por el ratio de reducción  $\sigma_0/\sigma_1$ , que depende, como factores principales, de los parámetros geométricos del almacenamiento, de las características teóricas del método de apilamiento y recogida y de las propias características del mineral depositado. Los principales parámetros geométricos y técnicos son la longitud y anchura de la pila ( $L, l$ ), la anchura de la rebanada ( $l_t$ ), el tonelaje unitario  $q$  y el número de capas  $N$ . Entre los parámetros intrínsecos al mineral deben señalarse el ángulo de reposo del mineral en la pila, la densidad y las propiedades estadísticas de la calidad del mineral almacenado, distribución y correlación principalmente.

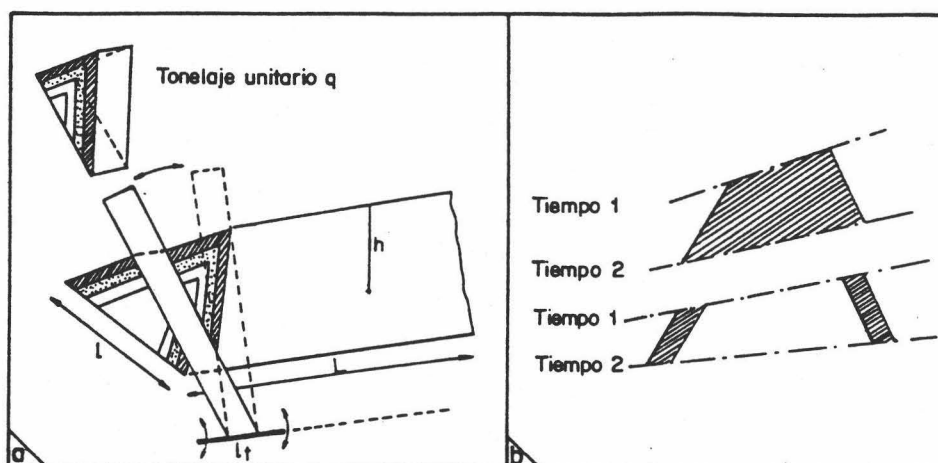


Figura 16.- a) Representación esquematizada de la recogida del mineral por cantidades  $q$ ; b) Cantidad de mineral correspondiente a la  $i$ -ésima capa (según SCHOFIELD, 1980).

#### 4.3.2. Generación de datos en el modelo

Desde la óptica geoestadística, el aspecto más interesante del modelo se refiere al modo de generación de los datos necesarios al estudio, que caracterizarán el flujo de leyes de entrada al almacenamiento. Los datos corresponden a la simulación de series sintéticas, que obtengo por tres métodos diferentes: método geoestadístico, método de Monte Carlo y método de series temporales.

##### A) Método geoestadístico

Consiste simplemente en simular una realización de una función aleatoria en una dimensión con imposición del tipo de variograma a reproducir. Ahora bien, como en geoestadística sólo se sabe simular variables con distribución gaussiana será preciso aplicar la transformación de anamorfosis ya conocida; ello aporta la ventaja adicional de poder reproducir la distribución de los datos experimentales. Pueden emplearse las relaciones dadas en el Anexo III para este tipo de simulación en una dimensión.

##### B) Método de Monte Carlo

Lo he considerado como un caso particular del método anterior, cuando el variograma de la variable corresponde a un efecto de pepita

puro. En él se introduce explícitamente la distribución de los datos experimentales para la generación de los valores por medio de su histograma, así se evita pasar por el ajuste hermitiano de la función  $\phi$ .

### C) Método de series temporales

La base conceptual del método consiste en simular la variable por un proceso autorregresivo clásico del tipo,

$$\bar{Z}_1(t) = \phi_1 \bar{Z}_1(t-1) + \dots + \phi_p \bar{Z}_1(t-p) + \xi_t \quad (\text{BOX y JENKINS, 1970})$$

tal que la covarianza del proceso es igualmente autorregresiva; sea ésta:

$$C(t) = \phi_1 C(t-1) + \dots + \phi_p C(t-p)$$

donde  $\bar{Z}(t) = Z(t) - m$  es el valor simulado en el tiempo  $t$ , centrado respecto a su valor medio;  $\xi_t$  es el residuo aleatorio gaussiano y  $C(t)$  la covarianza de la variable simulada que puede deducirse del correlograma  $\rho(t)$  por la relación  $C(t) = \rho(t) \sigma_Z^2$ . Los términos  $\phi_1, \dots, \phi_p$  son parámetros numéricos a definir a partir de  $\rho(t)$ .

Los modelos de este tipo, más frecuentes, incorporados son (tabla III.9):

Modelo autorregresivo	Relación de recurrencia de la función (cf. BOX-JENKINS, 1970)
ARMA (1,0): $Z_t = \phi Z_{t-1} + \xi_t$	$\rho(t) = \phi \rho(t-1) \quad t \geq 1$ $\rho(0) = 1$
ARMA (2,0): $Z_t = \phi Z_{t-1} + \xi_t - \theta \xi_{t-1}$	$\rho(t) = \phi \rho(t-1) \quad t \geq 2$ $\rho(1) = (1-\phi\theta)(\phi-\theta)/(1-\theta^2-2\phi\theta)$
ARMA (2,0): $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \xi_t$	$\rho(t) = \phi_1 \rho(t-1) + \phi_2 \rho(t-2) \quad t \geq 2$ $\rho(1) = \phi_1/(1-\phi_2)$ $\rho(0) = 1$

Tabla III.9.- Modelos autorregresivos utilizados en el modelo de simulación de un almacenamiento de mineral, en "chevrons".

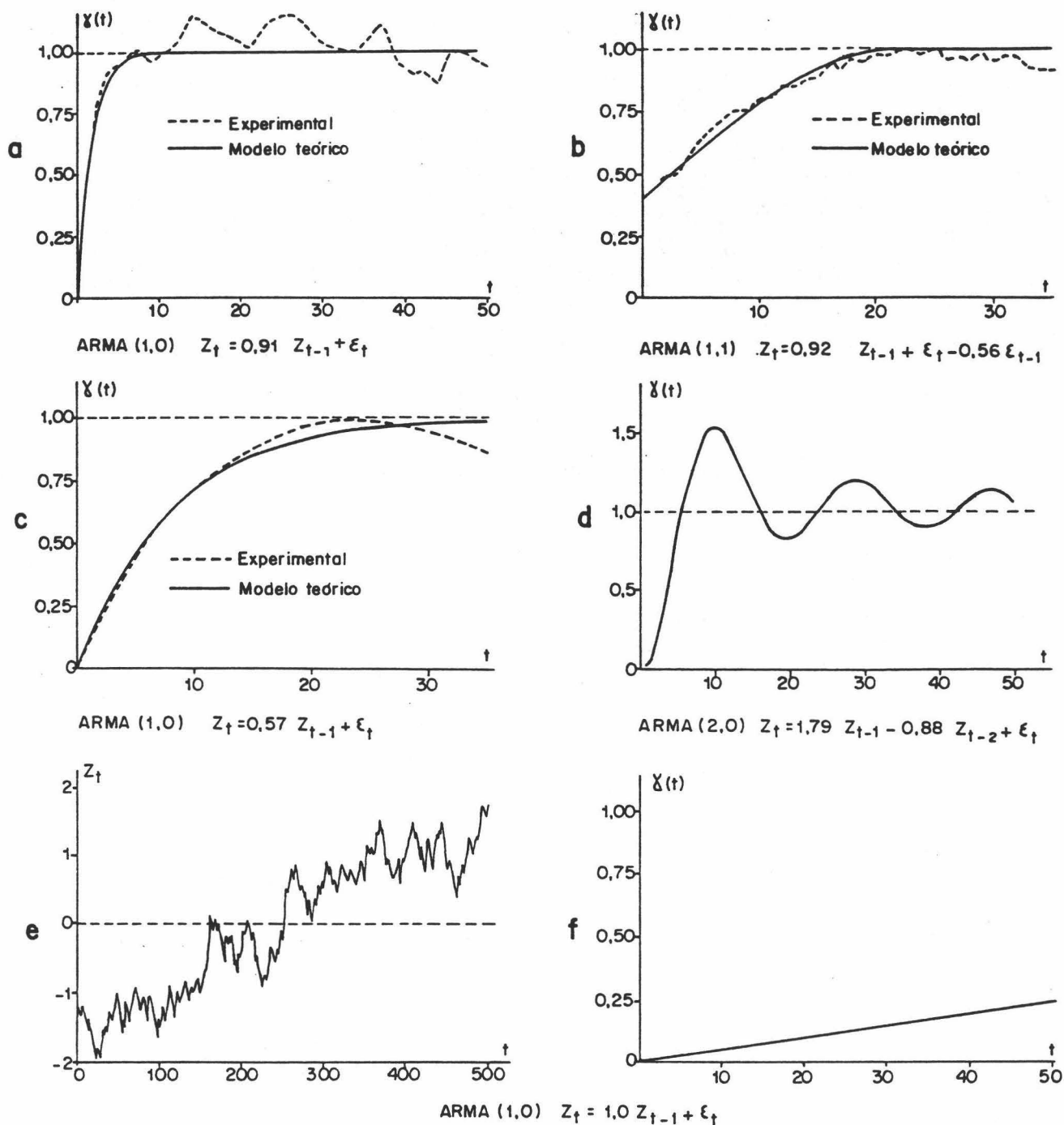


Figura 33.17.- Simulación estocástica de variogramas a partir de procesos autorregresivos-medias móviles: a) Modelo esférico. b) modelo esférico con efecto pepita. c) Modelo exponencial. d) Modelo con efecto pseudo-periódico. e) Serie de un proceso Browniano. f) Variograma correspondiente a la serie anterior.

Una característica interesante de los modelos autorregresivos es que permiten simular, con cierta aproximación, realizaciones de funciones aleatorias en una dimensión correspondiente a un variograma dado, con sólo elegir adecuadamente los parámetros del proceso autorregresivo a simular (SHARP, 1982 a). A título meramente informativo pueden verse algunos de los resultados que he obtenido en la figura III.17, por aplicación del método de SHARP (1982 a) para la generación de series; aunque es evidente la concordancia entre los resultados, desconozco hasta que punto se podría decir que existe una equivalencia formal entre ambos procesos.

#### 4.4. RESULTADOS OBTENIDOS

Como ejemplo de los resultados que pueden obtenerse del modelo, he llevado a cabo un pequeño estudio de interés didáctico en el cual se compara la reducción de la dispersión de la calidad del carbón depositado en una pila, cuando ésta se recoge por unidades de 50 y 56 t, respectivamente. Las variables de calidad son el poder calorífico y los contenidos en cenizas y en azufre, y las series de valores utilizados corresponden a valores tanto reales -simulados- como estimados.

Los resultados se han expuesto resumidamente en la tabla III.10, en la que se indican para cada variable los valores del ratio y de la ganancia de reducción, asimismo se dan las varianzas de dispersión del flujo de valores a la entrada y salida  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_0^2$ . La cifra indicada en la parte superior de la casilla corresponde a la recogida por unidades de 50 t y la inferior a la de 56 t (figura III.18).

Como puede verse la ganancia de reducción ha sido diferente para cada una de las variables, en razón de sus diferentes dispersiones y variogramas; igualmente ha sido diferente para los valores reales y estimados, siendo mayor en el caso de los primeros, debido a su varianza de dispersión que es más grande.

También se observa que la recogida de la pila por unidades de mayor tonelaje (56 t) reduce la dispersión en un 8 % más que el otro caso (50 t).

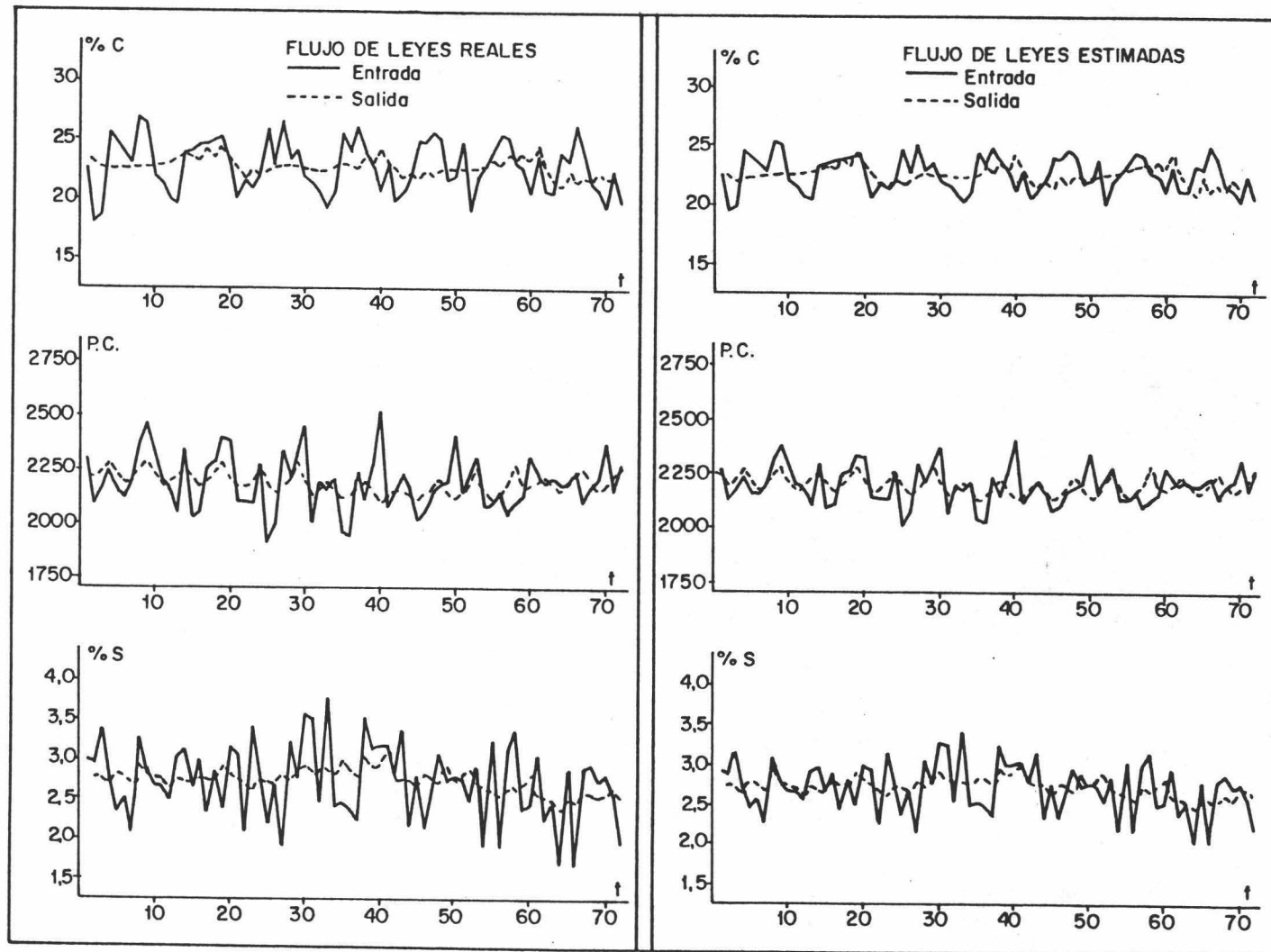


Figura III.18.- Resultados del modelo de almacenamiento y homogeneización del carbón.

Variable	Flujo de valores reales			
	$\sigma_1$	$\sigma_0$	$\sigma_0/\sigma_1$	Ganancia %
Cenizas	2,494	0,835	0,335	66,5
		0,753	0,302	69,8
P.C.	136,41	54,05	0,396	60,4
		48,01	0,352	64,8
Azufre	0,560	0,152	0,272	72,8
		0,138	0,247	75,3

Variable	Flujo de valores estimados			
	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_0/\sigma_1$	Ganancia %
Cenizas	1,690	0,808	0,478	52,2
		0,727	0,430	57,0
P.C.	92,45	48,26	0,522	47,8
		42,90	0,464	53,6
Azufre	0,380	0,118	0,311	68,9
		0,107	0,281	71,9

Tabla 111.10.- Resultados del estudio de simulación de almacenamiento longitudinal en "chevrans". Las características geométricas de la pila son,  $L=60$  m y  $l=20$  m. El talud de reposo del mineral  $35^\circ$  y la densidad del mismo  $1,20$  t/m<sup>3</sup>.

## 5. MODELO DE PREDICCIÓN A CORTO PLAZO DE LA CALIDAD DEL MINERAL

### 5.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS

En la práctica de determinadas explotaciones, como es el caso del yacimiento de lignito estudiado, se lleva a cabo un muestreo regular de la calidad del mineral que llega al punto de utilización, en el ejemplo citado a la central termo-eléctrica. En sentido cronológico, la información así obtenida tiene el aspecto de una serie temporal de las características analizadas en función del instante de observación, a la que interesará aplicar, por razones obvias, modelos para su interpretación y asimilación práctica.



Los datos se toman frecuentemente a ritmo regular durante el periodo de muestreo, con análisis de las diferentes características como el poder calorífico, el contenido en cenizas, en azufre, en materias volátiles, etc. (véase figura III.23).

Nuevamente se plantea el objetivo de construcción de un modelo, esta vez se trata de un **modelo predictivo** de los valores futuros de las variables a partir de la información temporal existente, esto es, utilizando los resultados de la producción, por medio del cual puedan abordarse ciertos problemas de previsión surgidos en la práctica que afectan en mayor o menor grado al funcionamiento de la central.

La idea directriz para la construcción de tal modelo es la de formar una herramienta de **fácil y rápido manejo** para la **previsión a corto plazo** de la calidad del mineral, premisas que obedecen exclusivamente a razones de índole pragmática. El modelo que expongo se sitúa en la línea de los modelos geoestadísticos de predicción propuestos por ORFEUIL (1977); su simplicidad de desarrollo y de utilización práctica, que sólo requiere la utilización de un micro-ordenador, conduce a efectuar economías importantes.

## 5.2. CARACTERISTICAS DEL MODELO

He subrayado intencionadamente en el apartado previo las características más interesantes que en mi opinión deberá tener el modelo, que trataré de analizar a continuación para así dar una idea más concreta del problema que se presenta.

### 5.2.1. Modelo predictivo

Es cierto que los datos experimentales dan una visión del comportamiento temporal de las variables, que el modelo deberá de ser capaz de prever el comportamiento de las mismas en el futuro inmediato, a partir de los valores del pasado. También, es bien cierto que el problema no tiene fácil solución y que todo depende del grado de ajuste del modelo elaborado a la realidad experimental, asimismo de la utilización hecha de los datos disponibles.

Desde el punto de vista del análisis matemático se está frente a un problema clásico de extrapolación de los valores de pasado al futuro próximo, con las limitaciones que ello conlleva. Muy particularmente, el modelo deberá construirse para trabajar en condiciones *ceteris paribus* si se desean alcanzar unos resultados "aceptables", a través de las cuales se supondrá que los factores que actuaron en el pasado afectarán en igual medida al futuro a predecir (p.e. hipótesis de estacionaridad).

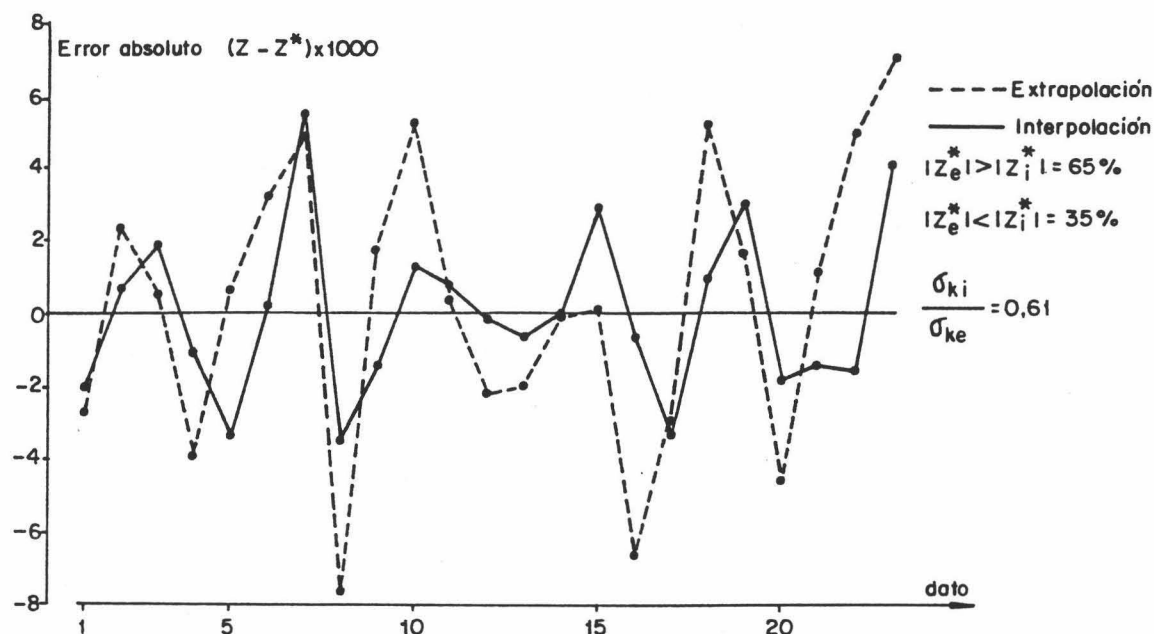


Figura 19.19.- a) Restitución de una serie económica por krigeeage en interpolación y extrapolación. Dibujo de los errores absolutos cometidos. (tomado de CHJCA-OLMO, en prensa).

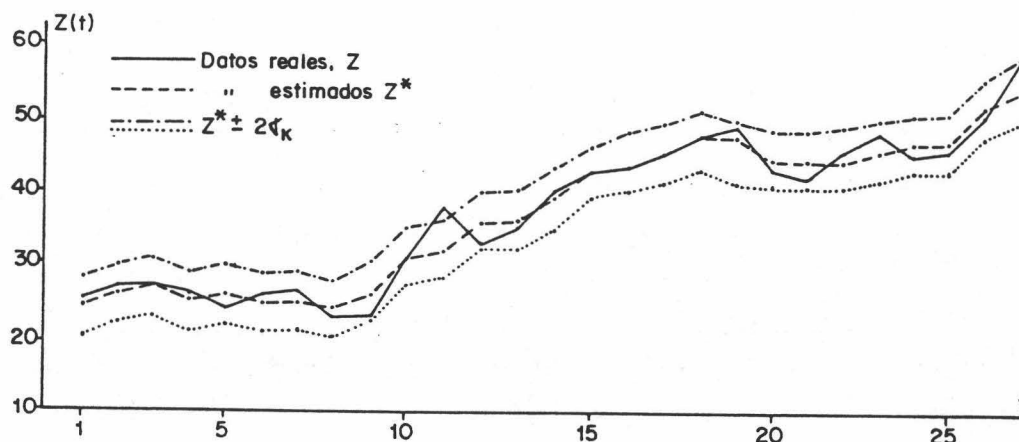


Figura 19.19.- b) Comparación entre la serie real ( $Z$ ) y estimada en interpolación ( $Z^*$ ). Intervalos de confianza de la estimación. (tomado de CHJCA-OLMO, en prensa).

Respecto a la calidad de los resultados, se debe ser cauto a la hora de interpretarlos, debido a que se trabaja en extrapolación; en cualquier caso los resultados que se alcancen serán "menos buenos" que los obtenidos por interpolación, independientemente de la naturaleza del modelo ajustado, como puede verse en el ejemplo de la figura III.19.

En literatura existe una diversidad de métodos para el análisis de variables temporales; entre todos ellos destaca, por su frecuencia de aplicación, el método de BOX y JENKINS (1970 y 1976), bien conocido por los economistas pero que no responde plenamente a algunas de las cuestiones planteadas, como puede ser la estimación de la probabilidad de sobrepasar un límite dado.

Las cantidades interesantes a estimar por el modelo son de dos tipos, los niveles futuros de variación de la calidad y la probabilidad de sobrepasar un cierto límite, que es lo que interesa en un "problema de alerta".

#### *A) Estimación de los niveles futuros de la variable*

Esta es una operación clásica y a la vez delicada que puede realizarse por multitud de métodos diferentes, modelos autorregresivos, regresión lineal, análisis de datos, etc. En todos ellos el estimador que se obtendrá será el mejor estimador posible en el sentido de las hipótesis constitutivas del modelo adoptado y siempre la serie estimada tendrá menor dispersión que la serie real.

Este inconveniente, consecuencia del suavizamiento introducido por el estimador, no tiene demasiada importancia si se interesa exclusivamente en el valor probable de la variable; pero no así si se desea prever los valores extremos, que es el caso más frecuente, en el cual no se puede admitir un estimador que suavice en exceso la realidad: en un problema de alerta, lo que interesa es conocer los valores extremos correspondientes a las crestas y valles de la serie.

Por la razón expuesta, se debe ir a la estimación directa de la probabilidad de sobrepasar el límite dado que plantea la necesidad de recurrir a métodos de estimación no lineal.

*B) Estimación de la probabilidad de rebasar un límite dado*

Expondré a continuación un ejemplo que ayudará a comprender mejor la razón por la cual no es posible usar un estimador lineal para estimar tal probabilidad.

Supongamos un conjunto gaussiano de variables centradas reducidas  $\{Y_0, Y_\alpha\}$ ,  $\alpha = 1$  a  $n$ . Sea  $Y_0$  la variable a predecir e  $\{Y_\alpha\}$  el conjunto predictivo. Con estas premisas se sabe que el mejor estimador  $Y_0^*$  de  $Y_0$  tiene la forma lineal  $Y_0^* = \sum \lambda_\alpha Y_\alpha$  ( $\lambda_\alpha$  anotación abreviada de  $\sum \lambda_\alpha$ ) con un valor de la varianza igual a  $\sum \lambda_\alpha \lambda_\beta \rho_{\alpha,\beta}$ , donde  $\rho_{\alpha,\beta}$  es la correlación entre las variables predictivas  $Y_\alpha$  e  $Y_\beta$ , función del correlograma  $\rho(t)$ . Los  $\lambda_{\alpha,\beta}$  son la solución del sistema lineal clásico

$$\sum \lambda_\alpha \rho_{\alpha,\beta} = \rho_{\beta,0} \quad (\text{sistema de krigage sin condición de universalidad})$$

Si la varianza de dispersión de  $Y_0^*$  es pequeña el estimador suavizará considerablemente la realidad por tanto la probabilidad  $\text{Prob}\{Y_0^* > y_c\}$  de que  $Y_0^*$  sea superior al límite  $y_c$  será muy diferente de la probabilidad real  $\text{Prob}\{Y_0 > y_c\}$ . Al contrario si la varianza de  $Y_0^*$  es grande, entonces la distorsión entre las leyes del estimador  $Y_0^*$  y de  $Y_0$  será poca, con lo que ambas probabilidades se aproximarán.

Así pues, se ve la necesidad imperiosa de estimar directamente la ley de la variable  $Y_0$ , condicionalmente al conjunto de variables predictivas:  $f(Y_0/Y_\alpha, \alpha = 1 \text{ a } n)$ , planteamiento que coincide con el que hacía en la introducción del Krigage Disyuntivo. Por tanto, este método va a constituir la base sustancial del modelo por el cual se obtendrá la estimación sin sesgo de dicha ley de probabilidad: se llega así a lo que puede ser una solución "satisfactoria" al problema de fondo.

### 5.2.2. Predicción a corto plazo

Con este término quiero hacer resaltar que lo que se busca es prever el valor de la variable para el futuro más próximo, definido por una escala de tiempo igual o algo superior a la de toma de datos. Así, si los datos están tomados a nivel diario la predicción se hará para el día siguiente o como máximo para los días siguientes; ir más allá de

este nivel de extrapolación me parece que sería ilusorio, habida cuenta de la información de que dispone y de las características del modelo.

### 5.2.3. Modelo fácil y rápido de utilización

El modelo debe ser ante todo fácil y flexible de utilizar, condiciones impuestas por el carácter sumamente diversificado de situaciones a las que hay que enfrentarse, lo cual implica igualmente que el modelo debe ser suficientemente general como para admitir estos casos diversos.

Por último, un aspecto práctico del modelo a tener en consideración es que los resultados deben presentarse rápidamente dado que las estimaciones se hacen, tomada la expresión del lenguaje informático, en tiempo real.

### 5.3. ELECCION DE LOS DATOS PREDICTIVOS

Recuerdo que el problema planteado consiste en prever en el tiempo  $t$  el valor de la variable en el tiempo siguiente  $t+1$ . Para ello se tiene una información, en general grande, de datos que hace que cualquier modelo predictivo por poco elaborado que sea no los incorpore íntegramente, sino a través de transformaciones previas concretas. Estas transformaciones cuyo objetivo es reducir el número de datos, establecen el conjunto de variables predictivas. Así, los valores relativos al pasado lejano no intervendrán en todo su detalle sino por medio de valores medios; se tomará, como muestra en la figura III.20, un conjunto predictivo formado por los datos diarios, inmediatamente anteriores a  $t$  ( $t-1$ ,  $t-2$ ,  $t-3$ ) y después los datos medios de tres, cuatro días o una semana para las partes más alejadas. De este modo se simplifica y reduce el número de datos sin causar una pérdida importante en su potencial informativo inicial.

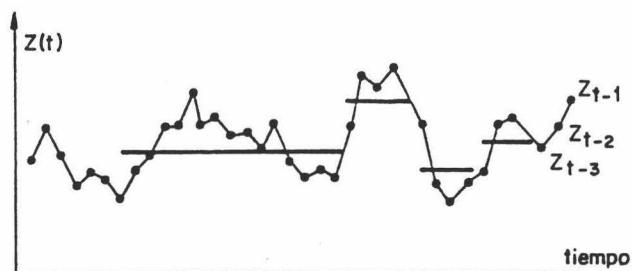


Figura III.20.- Elección de los datos predictivos.

También pueden considerarse como variables predictivas todas aquellas que tengan una correlación importante con la variable principal estudiada. En este sentido, se sabe que todas ellas tienen desigual importancia sobre la variable en cuestión, por lo que se eliminarán aquellas que aportan una información escasa o bien ésta es redundante.

#### 5.4. SOBRE LA CALIDAD DEL MODELO

Bajo un cierto punto de vista un modelo de predicción puede interpretarse por medio de una "caja negra" que realiza la correspondencia entre el pasado, definido por los datos experimentales, y el futuro próximo a predecir. Parece pues lógico que la calidad del modelo se controle por comparación de los valores estimados  $Z_o^*$  con los valores reales  $Z_o$ , esto es, comparando la serie estimada con la serie real (cf. figura III.19 b).

El calibrado del modelo requiere condiciones para comprobar la bondad del ajuste. Las más conocidas y empleadas en geoestadística son:

##### A) La condición de no sesgo

Se expresa del modo  $E\{Z_o - Z_o^*\} = 0$ ; indica que el estimador no se equivoca sistemáticamente, de modo que el error medio es próximo a cero.

##### B) La condición de error cuadrático medio

Indica una varianza de error mínima; equivale a decir que el estimador no se equivoca mucho. La restricción se expresa como es sabido de la forma  $E\{Z_o - Z_o^*\}^2 = 0$ .

##### C) La condición de error cuadrático reducido unitario $E\left\{\frac{Z_o - Z_o^*}{\sigma_k}\right\}^2 = 1$

Condición que relaciona el error de estimación experimental  $Z_o - Z_o^*$  con el error de estimación teórico del modelo  $\sigma_k$ .

Al margen de estas condiciones se podría pensar en expresar otras más, como por ejemplo que al estimar no se sobreestime ni subestime en mucho y de modo sistemático los valores bajos y altos de la variable,

situación que ocurre a menudo en la práctica y que es una razón de más para recurrir a la estimación de la ley de probabilidad del estimador.

## 5.5. BUSQUEDA DE UN MODELO DE PREDICCIÓN

### 5.5.1. Un modelo posible: la regresión lineal

Uno de los modelos matemáticos más clásicos y utilizados es el método de la regresión lineal. La regresión lineal del conjunto  $\{Z_\alpha, \alpha = 1 \text{ a } n\}$  que da el estimador  $Z_0^*$  del valor  $Z_0$ , se expresa por

$$Z_0^* = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha Z_\alpha \quad \alpha = 1 \text{ a } n$$

Encontrar los ponderadores  $\lambda_\alpha$  requiere el cálculo previo de las matrices de covarianzas entre variables del conjunto predictivo  $\{Z_i, Z_j, i, j = 1 \text{ a } n\}$  y entre éste y el valor a estimar  $\{Z_0, Z_i\}$ . El sistema lineal de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas para calcular los  $\lambda_\alpha$  es

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \langle Z_i, Z_j \rangle = \langle Z_0, Z_i \rangle \quad i, j = 1 \text{ a } n$$

El método da un estimador con las características de no sesgo y de varianza de error mínima. Se demuestra además que  $Z_0^*$  es el mejor estimador absoluto de  $Z_0$  si el conjunto con  $n+1$  variables  $\{Z_0, Z_\alpha, \alpha = 1 \text{ a } n\}$  es gaussiano; en tal caso la regresión (krigeage) coincide con el valor de esperanza condicional que es el mejor estimador posible (cf. NEVEU, 1964).

La práctica de este método es fácil y necesita pocos cálculos para su empleo; sólo precisa el cálculo de un corto número de estadísticos, medias, varianzas y covarianzas. Sin embargo, el estimador puede ser poco preciso, tanto más cuanto mayor sea la diferencia que separa al conjunto  $\{Z_0, Z_\alpha\}$  de un comportamiento normal.

La utilización de un estimador lineal de este tipo se justifica cuando las variables predictivas tienen igual naturaleza que la variable estimada; así como ejemplo puede servir para estimar el valor de contenido en azufre en el tiempo  $t+1$ ,  $S_{t+1}$ , conocidos los valores anteriores  $S_t$ ,  $S_{t+1}$ , ...,  $S_{t-i}$ , lo cual, mediando circunstancias particulares, nos conduce a un modelo de los llamados autorregresivos del tipo

$$S_{t+1}^* = \sum_{i=0}^j \lambda_i S_{t-i}$$

En la figura III.21 se puede comparar la serie experimental de esta variable con la serie restituida por medio de un modelo autorregresivo ARMA (1,1) (BOX y JENKINS, 1970). Los parámetros del modelo ajustado han sido:

Modelo	Tipo	Varianza Residual
ARMA (1,1)	$S_{t+1} = \phi S_t + \xi_{t+1} - \theta \xi_t$	$S_r^2 = S_o^2(1-\phi^2)/(1-\theta^2-2\phi\theta)$

El correlograma vale  $\rho_t = \phi \rho_{t-1}$  para  $t \geq 2$ , donde el parámetro  $\phi$  se deduce de la relación  $\phi = \rho_2 / \rho_1$  tal que  $0 < \phi < 1$ . El otro parámetro a calcular  $\theta$  se obtiene de,

$$\theta = (-B - (B^2 - 4)^{1/2}) / 2 \quad \text{con}$$

$$B = (1 + \phi^2 - 2\phi\rho_1) / (\rho_1 - \phi)$$

tal que  $-1 < \theta < 1$  (SHARP, 1982 b).

Los valores calculados para los parámetros han sido

$\rho_1$	$\rho_2$	$\phi$	$\theta$	B
0,6	0,4512	0,7635	0,2621	-4,0774

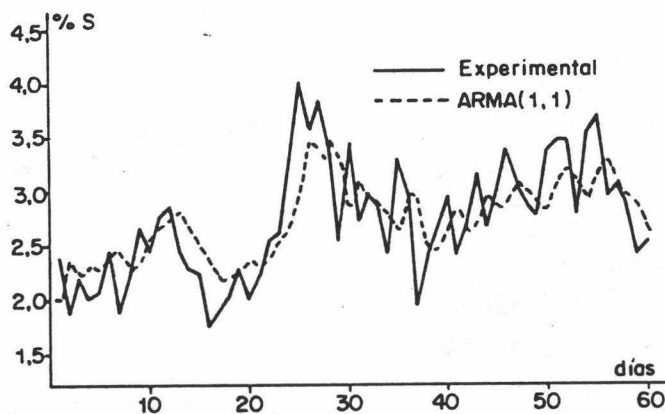


Figura III.21.- Restitución de una serie por un modelo ARMA (1,1).



### 5.5.2. Un modelo imposible: la esperanza condicional

Se demuestra (cf. NEVEU, 1964) que el mejor estimador absoluto de la cantidad  $Z_0$  a partir del conjunto  $\{Z_\alpha\}$ ,  $\alpha = 1$  a  $n$  es la esperanza condicional de  $Z_0$  respecto a los  $\{Z_\alpha\}$ .

$$Z_0^* = E\{Z_0/Z_\alpha, \alpha = 1 \text{ a } n\}$$

La inferencia estadística de  $Z_0$  pasa por el conocimiento previo de la ley simultánea a  $n+1$  variables  $\{Z_0, Z_\alpha\}$ , que plantea problemas que sólo pueden ser resueltos mediando hipótesis fuertes y difícilmente controlables numéricamente, de aquí que se produzcan problemas de robustez del método.

La situación ideal es que el vector multivariable cumpla la hipótesis de normalidad, en cuyo caso la esperanza condicional es una forma lineal de los  $Z_\alpha$  que coincide con el estimador de regresión visto. En conclusión, la esperanza condicional es el mejor estimador absoluto que lleva a la estimación de cualquier función  $f(Z_0)$  de la variable  $Z_0$ . Sin embargo, los cálculos necesarios son prácticamente imposibles de realizar desde el instante que el número de los  $Z_\alpha$  sea un poco grande.

Se conocen ya las ventajas e inconvenientes de un método que se muestra un tanto complejo de practicar debido a la dificultad que revisten sus cálculos, que sólo pueden reducirse por medio de hipótesis fuertes. Estas razones han llevado a MATHERON (1973 b) a proponer el Krigeage Disyuntivo (KD) como método de estimación no lineal intermedio entre los dos métodos expuestos, realista de cara a los problemas a resolver y a las hipótesis implícitas.

### 5.5.3. El modelo utilizado: el Krigeage Disyuntivo

Es el modelo constitutivo elegido para abordar los problemas de previsión planteados. Como ya indiqué en otros apartados de este trabajo, su base conceptual radica en la búsqueda de un estimador de toda función  $f(Z_0)$  de  $Z_0$ , de la forma

$$f(Z_0)^* = \sum_{\beta=1}^N f_\beta(Z_\alpha), \quad \alpha = 1 \text{ a } n$$

Es un estimador construido por combinación lineal de los datos  $Z_\alpha$ , pero donde las incógnitas ya no son simples valores numéricos  $\lambda_\alpha$  sino funciones  $f_\beta$  de cada uno de los  $Z_\alpha$ . Al utilizar la información de modo no lineal es posible calcular la probabilidad  $\text{Prob}\{Z_0 > z_c\}$ .

Otro aspecto interesante es que permite incorporar a la previsión otras variables de naturaleza diferente; así se podrá pensar en estimar los valores futuros del contenido en cenizas a partir de los valores de la propia variable y del poder calorífico, del contenido en materias volátiles, etc, con las que tiene buenas correlaciones (Co-Krigeage Disyuntivo).

En lo referente a las hipótesis, el modelo sólo requiere la inferencia estadística de las leyes a dos variables supuestas binormales (Y, X). Esta hipótesis es razonablemente admisible en la práctica, puesto que se trabaja con variables normales obtenidas por anamorfosis gaussiana (figura III.23).

Bajo la hipótesis anterior el KD se presenta como la mejor respuesta posible a los problemas de estimación planteados, particularmente en estimar toda función  $f(Z_0)$ . En concreto se quiere en un problema de alerta estimar la función indicatriz  $\theta_{z_c}$ , definida por:

$$\theta_{z_c} = \begin{cases} 1 & \text{si } Z_0 > z_c \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \text{"Problema de alerta"}$$

#### 5.6. DESARROLLO DE UN ESTUDIO DE PREDICCIÓN POR KD

La aproximación hecha por el KD es que toda función de Z, y por tanto de su anamorfoseada Y, es dada por su desarrollo al orden N en polinomios de Hermite  $H_n(Y)$ . Se trata de estimar en la práctica estas funciones  $H_n(Y)$  a partir de los datos experimentales.

Los aspectos metodológicos han sido ya descritos de forma detallada en otros apartados, así pues voy a centrarme en las etapas de desarrollo de un estudio de KD en series temporales.

### 5.6.1. Etapas del estudio

#### A) Test de hipótesis

Se refiere a la comprobación de la binormalidad de la pareja  $(Y, X)$ . Este test que es un poco laborioso de realizar sólo se muestra necesario en la etapa inicial del estudio, por consiguiente puede hacerse de una vez para todas.

Un primer modo de chequear esta hipótesis es a partir de los  $H_n(Y)$ : se sabe que los polinomios de Hermite asociados a las variables normales  $Y$  y  $X$  forman una base ortonormada del espacio de las variables aleatorias por ellas engendradas. Si  $(Y, X)$  es bigausiana, entonces la imagen del elemento de orden  $n$  de una base, en relación al esperador de esperanza condicional, es el elemento  $n$  de la otra base, afectado del coeficiente  $\rho^n$  ( $\rho$  es la correlación entre  $Y$  y  $X$ ), sea

$$E\{H_n(Y)/X\} = \rho^n H_n(X)$$

$$E\{H_n(Y)/Y\} = \rho^n H_n(Y)$$

Se observa en la figura III.22 a un ejemplo de los resultados obtenidos sobre el banco de datos de que he dispuesto. A tenor de los mismos es razonable admitir la hipótesis de binormalidad de  $Y_t$  e  $Y_{t+i}$ , que representan los valores normales del contenido en azufre en los tiempos  $t$  y  $t+i$ . El mismo test se ha hecho para parejas de variables diferentes:  $Y_t$  es el contenido en cenizas y  $X_t$  el poder calorífico; las conclusiones alcanzadas son las mismas.

Otro modo de comprobar la binormalidad de la pareja  $(Y, X)$  es por medio del variograma de orden uno  $\gamma_1$ , definido por  $\gamma_1(h) = \frac{1}{2}E |Z(x) - Z(x+h)|$ . Se demuestra (cf. MATHERON, 1982 b) que en el caso bigausiano  $\gamma_1$  es proporcional a la raíz cuadrada de  $\gamma(h)$ :  $\gamma_1^2/\gamma = 1/\pi$ , hipótesis que parece constatarse en los resultados de la figura III.22 b.

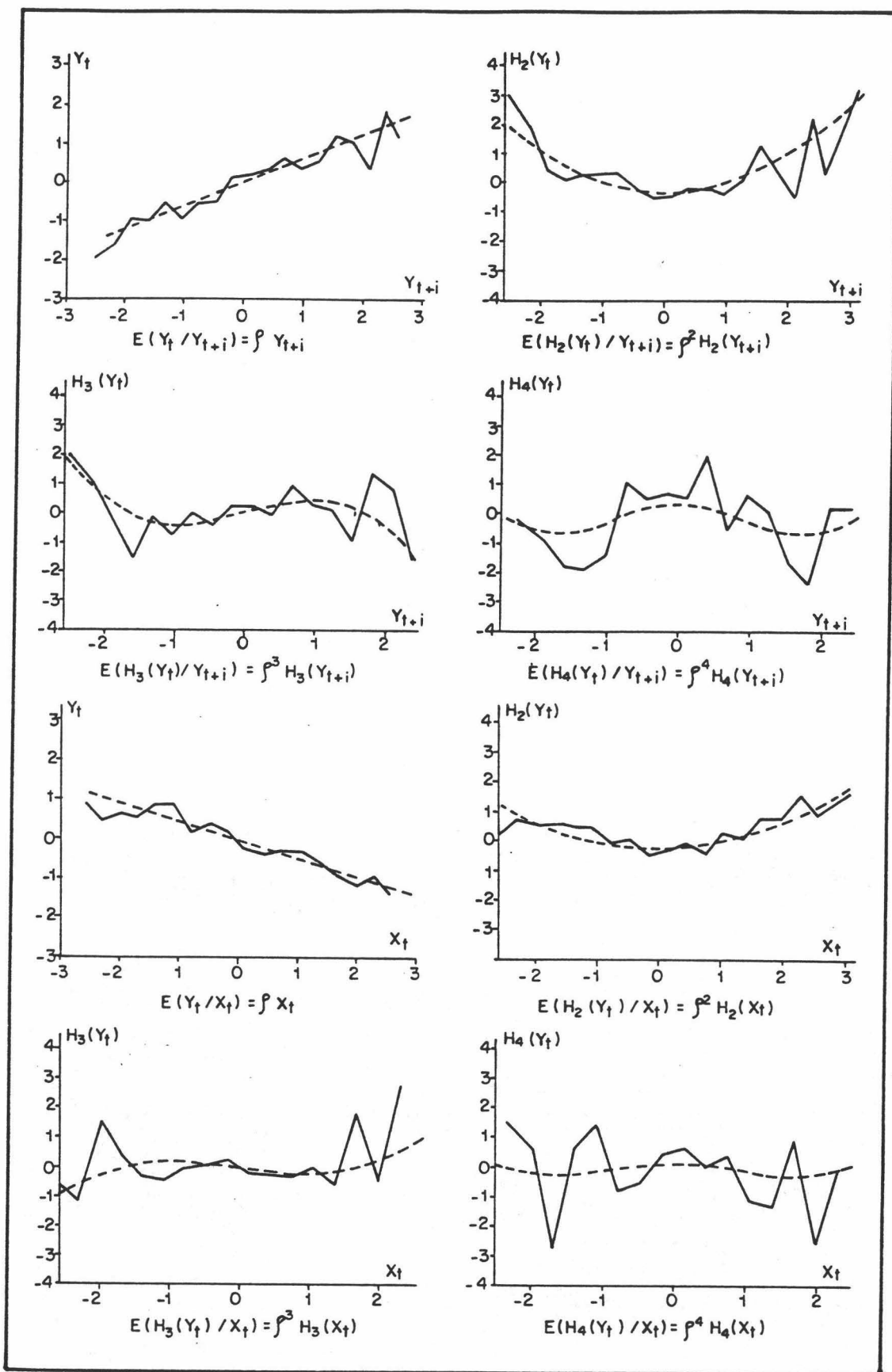


Figura 199.22.- a) Test de binormalidad de la pareja  $(Y, X)$  a partir de los polinomios de Hermite.

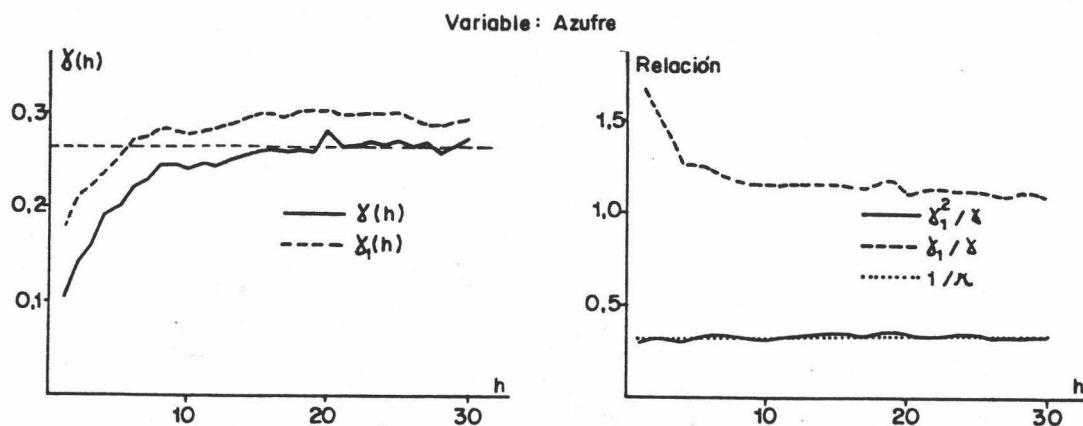


Figura 199.22.- b) Test de binormalidad de la pareja  $(Y, X)$  a partir del variograma de orden uno  $\gamma_1$ .

### B) Análisis estructural

El análisis recae sobre las variables normales  $Y$  deducidas de sus correspondientes funciones de anamorfosis. En él se calculan los variogramas y correlogramas tanto directos como cruzados de las variables, y se ajustan a modelos teóricos.

Los parámetros de ajuste de las funciones de anamorfosis se dan en la tabla III.11 para cada una de las variables.

Variable	N	$\sigma^2$	$\sigma^2_N$	$\sigma_1^2$	Media			Varianza		
					Z	Z*	Y*	Z	Z*	Y*
Humedad	3	1,739	1,740	1,734	40,80	40,80	0	1,739	1,743	1,002
Cenizas	3	6,224	6,223	6,221	22,55	22,55	0	6,224	6,227	1,002
Volátiles	3	1,133	1,134	1,093	21,64	21,64	0	1,133	1,138	1,002
Azufre	2	3,142	3,142	3,41	2,69	2,69	0	3,142	3,149	1,002
P.C.	2	18.676	18.659	18.628	2.207	2.207	0	18.676	18.703	1.002

Tabla 199.11.- Ajuste hermitiano de la anamorfosis de las variables.

El número bajo de polinomios utilizados (N) induce pensar que se tratan de variables con distribuciones muy próximas a una ley normal  $N(m, \sigma)$ . Se tiene en particular que la varianza acumulada por el primer polinomio ( $\sigma_1^2$ ) representa el 99 % de la varianza experimental ( $\sigma^2$ ),

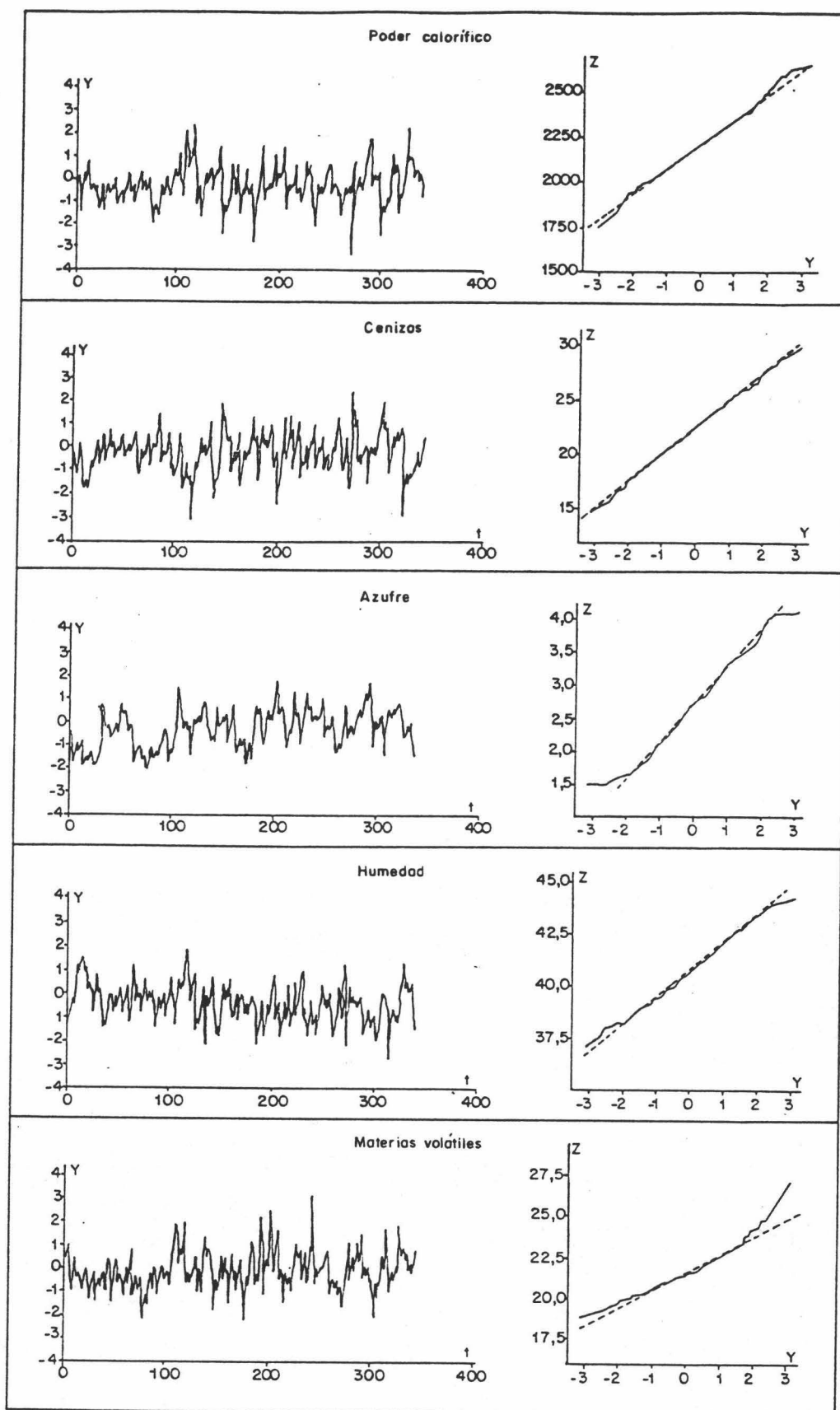


Figura III.23.- Datos de calidad del carbón producido en mina (valores anamorfosados). Comparación entre las anamorfosis hermiteana (trazo continuo) y la de una ley normal (trazo discontinuo).

por tanto, se está muy próximo a una función del tipo  $\phi^{-1}(Z) = Y = \frac{Z-m}{\sigma}$ . En la figura III.23 puede compararse la relación  $Y/Z$ , para los casos en que  $Y$  es deducida por la transformación hermitiana y por la función  $\phi^{-1}$  anterior.

Los correlogramas experimentales simples y cruzados se dan en la figura III.24.

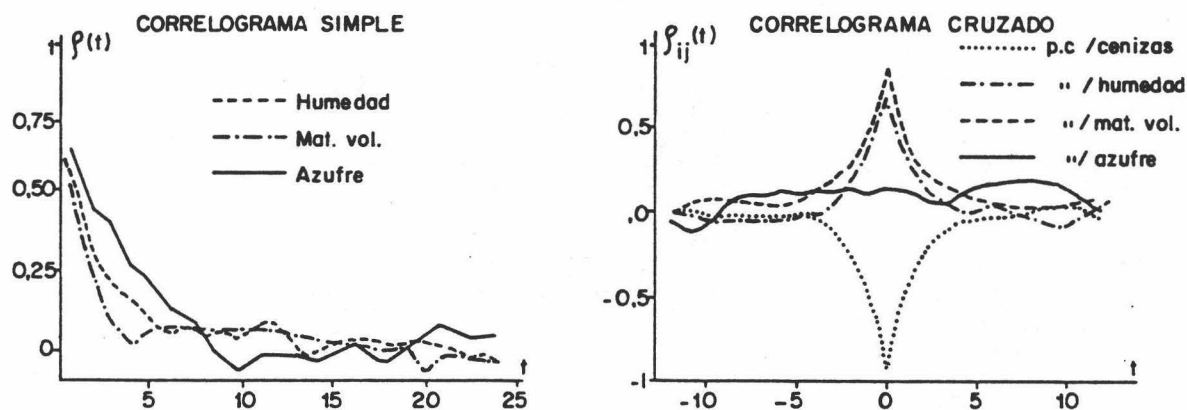


Figura III.24. Correlogramas simples y cruzados.

### C) Resolución del sistema y cálculo de los estimadores

Los correlogramas  $\rho(t)$  de las variables permiten establecer la matriz de correlación entre los datos predictivos  $\{Y_\alpha, Y_\beta\}$ , y entre éstos y la variable estimada  $\{Y_o, Y_\alpha\}$ . Así se tiene el sistema múltiple de KD

$$V_\alpha \sum_n \lambda_n^\alpha \phi_{\alpha,\beta}^n = \rho_{\alpha,Y_o}^n \quad n = 1 \text{ a } N$$

Se resuelven los  $N$  sistemas de ecuaciones, obteniéndose los valores de las incógnitas  $\lambda_n^\alpha$ . Los estimadores  $H_n^*(Y)$  que se buscan se obtienen por la combinación

$$H_n^* = \sum_\alpha \lambda_n^\alpha H_n(Y_\alpha)$$

Deducidos los  $H_n^*$  es inmediato el cálculo de las cantidades a estimar:

a) El valor más probable

Se obtiene de la relación clásica  $Z_{KD} = \sum_{n=0}^N \frac{\psi_n H_n^*}{n!}$  (figura III.25).

El error de estimación vale  $\sigma_{KD}^2 = \sum_{n=1}^N \frac{\psi_n^2}{n!} (1 - \lambda \frac{\alpha n}{\rho_{\alpha,0}})$ .

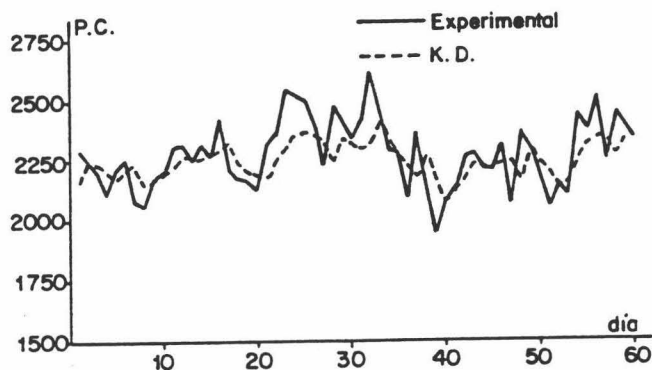


Figura III.25.- Restitución de una serie del poder calorífico por K.D.

b) La probabilidad de rebasar un límite

Se obtiene de la función de "densidad" de K.D.  $f_{KD}(y)$ , que es el estimador de la ley de probabilidad de  $\{Y_0/Y_\alpha, \alpha = 1 \text{ a } n\}$ .

$$f_{KD}(y) = \sum_{n \geq 0}^N \frac{H_n(Y) H_n^*}{n!} g(y)$$

Como aclaración hay que indicar que  $f_{KD}$  no es una verdadera función de densidad en el sentido preciso probabilístico, ya que puede ocurrir que no sea estrictamente reciente para todo  $y$  (figura III.26 c). Se tiene entonces que  $\int f_{KD}(y) dy = 1$ , pero no se garantiza siempre que sea positiva  $\int y^2 f_{KD}(y) dy \geq 0$ , por lo que cabe esperar en situaciones extremas valores de probabilidad negativos: es el precio que se paga por la simplificación hecha por el KD. El problema no tiene consecuencias prácticas importantes pues sólo aparece para valores absolutos del argumento y muy grandes, que afectarían muy ligeramente a los valores de la distribución (cf. figura III.26).

Igualmente se puede estimar la función de alerta  $\theta_{zC}$  descrita, cuya expresión es:



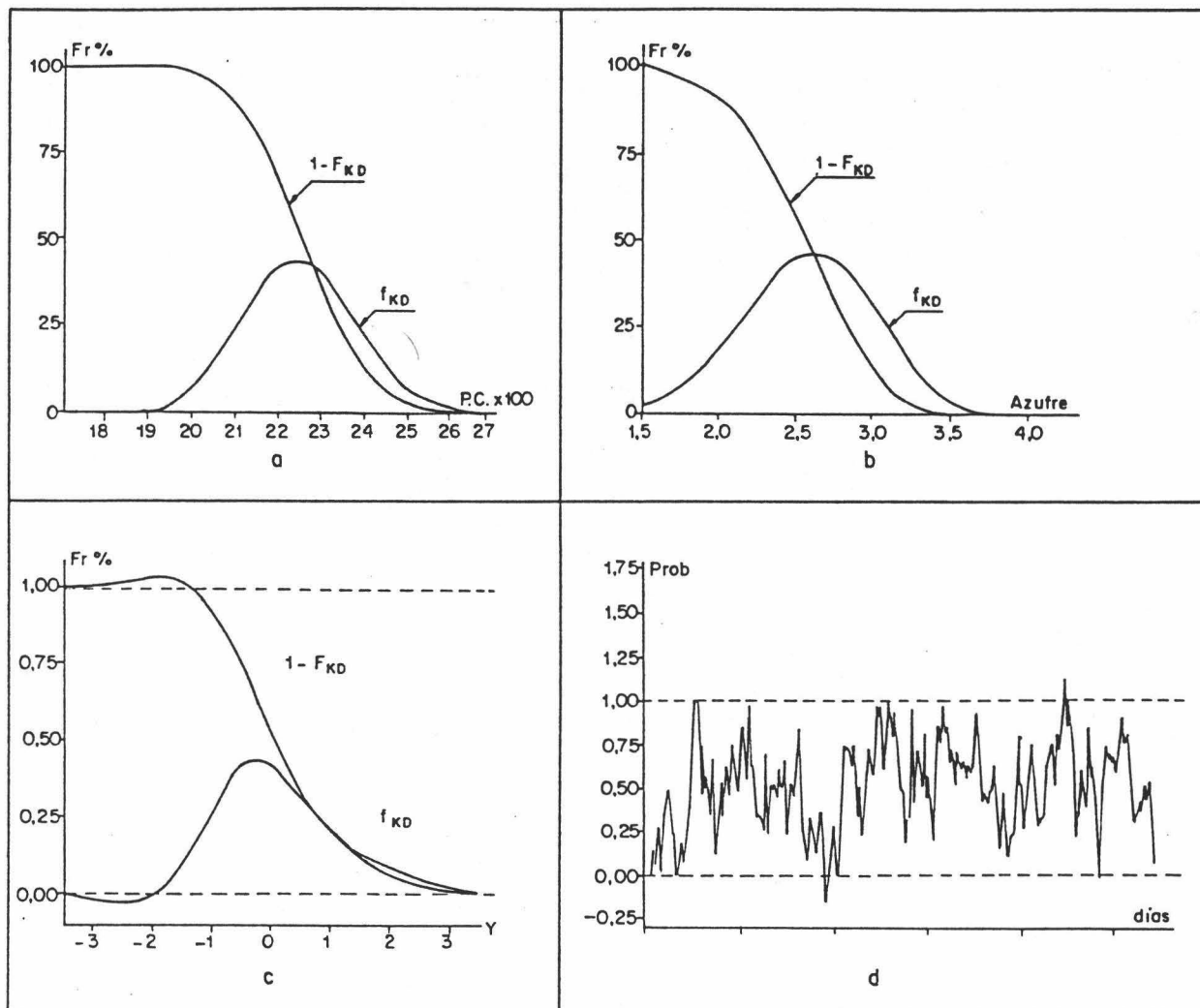


Figura III.26.- Aplicación del KD como modelo predictivo. a y b) Cálculo de las funciones de probabilidad de las variables poder calorífico y azufre, previstas para el tiempo  $t+1$ . c) Problemas presentados por la pseudo-densidad  $f_{KD}$ . d) Estimación de la probabilidad diaria de sobrepasar un valor en azufre del 2,84 %.

$$\theta_{y_c} = 1 - G(y_c) - g(y_c) \sum_{n=1}^N \frac{H_{n-1}(y_c) \cdot H_n(Y)}{n!}$$

El cálculo de la misma es directo con sólo sustituir los  $H_n(Y)$  por sus estimadores  $H_n^*(Y)$ .

### 5.6.2. Un ejemplo de aplicación

Quisiera concluir este capítulo con la presentación de un ejemplo de aplicación referente a la estimación de valores del contenido en azufre que llega a la central. El motivo de su elección es mostrar la precisión que cabe esperar para las previsiones hechas de rebasar un límite, cuando la precisión sobre la estimación de los niveles futuros es mediana, específicamente cuando la desviación típica del error de estimación  $\sigma_{KD}$  es aproximadamente la mitad de la desviación típica de la variable  $\sigma$ .

La correlación de datos diarios  $\rho(1)$  es igual a 0,6. El estudio de correlación cruzada entre el contenido en azufre y el resto de las variables da valores muy pequeños (cf. figura III.24); así pues, el conjunto predictivo queda constituido exclusivamente por la variable estudiada.

Como he dicho, la relación  $\sigma_{KD}/\sigma$  es aproximadamente 0,5 contra 0,8 para la estimación por la regla de permanencia, cuyo estimador del valor en el tiempo  $t$  es el valor observado el día precedente  $t-1$ , ganancia que es netamente aceptable.

A nivel de la predicción de los valores futuros, los resultados obtenidos son comparables con los de otros métodos que he utilizado como referencia. Como puede verse en la tabla III.12, elaborada en base al número de aciertos y de fallos cuando se predecía rebasar el límite  $z_c$ , el método del KD tiene la mayor proporción de aciertos.

El valor escogido para  $z_c$  ha sido de 3,03 ( $y_c = 0,412$ ), que se sitúa un 12 % por encima de la media.

Modelo	Aciertos		Fallos		Total		% aciertos
	$Z \text{ y } Z^* > z_c$	$Z \text{ y } Z^* < z_c$	$Z > z_c \text{ y } Z^* < z_c$	$Z < z_c \text{ y } Z^* > z_c$	A	F	
ARMA (1,1)	46	155	49	22	201	71	74
PERMANENCIA	57	139	38	38	196	76	72
KD	50	153	45	24	203	69	75
KS	49	153	46	24	202	70	74
KO	56	140	39	37	196	76	72

Tabla III.12.- Predicción de valores futuros del contenido en azúfre.

El interés básico del estudio es la estimación de valores de probabilidad; para este caso se ha tomado especialmente el valor  $z_c = 2,84$ . El estimador de la función de alerta  $\theta_{z_c}$ , que vale 1 o 0 según  $Z$  es superior o inferior a  $z_c$ , tiene un valor medio de 0,48 y una varianza de 0,04 cuando realmente  $Z > z_c$ , y una media de 0,036 y varianza de 0,05 cuando es inferior  $Z < z_c$ .

Los histogramas de probabilidades obtenidos indican que si se corta por una probabilidad de 0,45, lo que quiere decir que si el estimador de la probabilidad es inferior a 0,45 se preve que el límite  $z_c$  no será rebasado y si es superior se preve que lo será, entonces las previsiones hechas son correctas 6 veces sobre 8, - lo que da una tasa de error de 14 % (véase figura III.27).

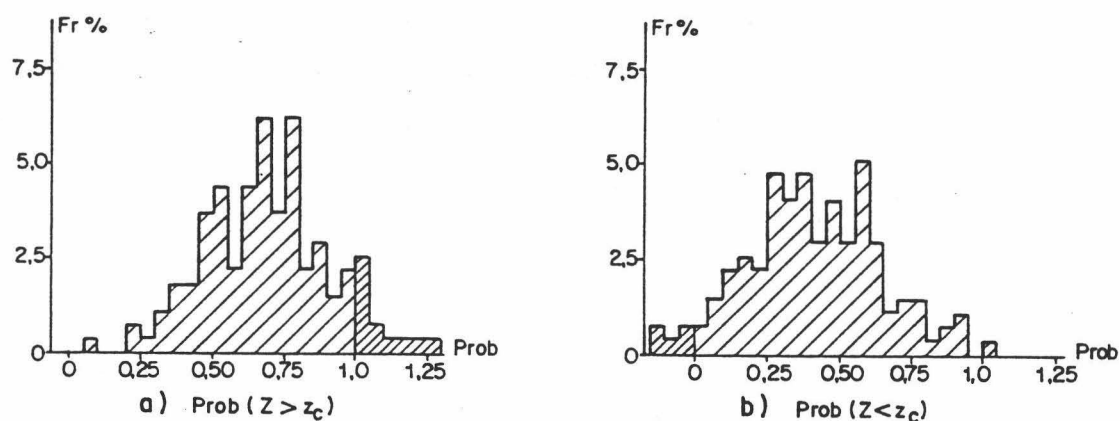
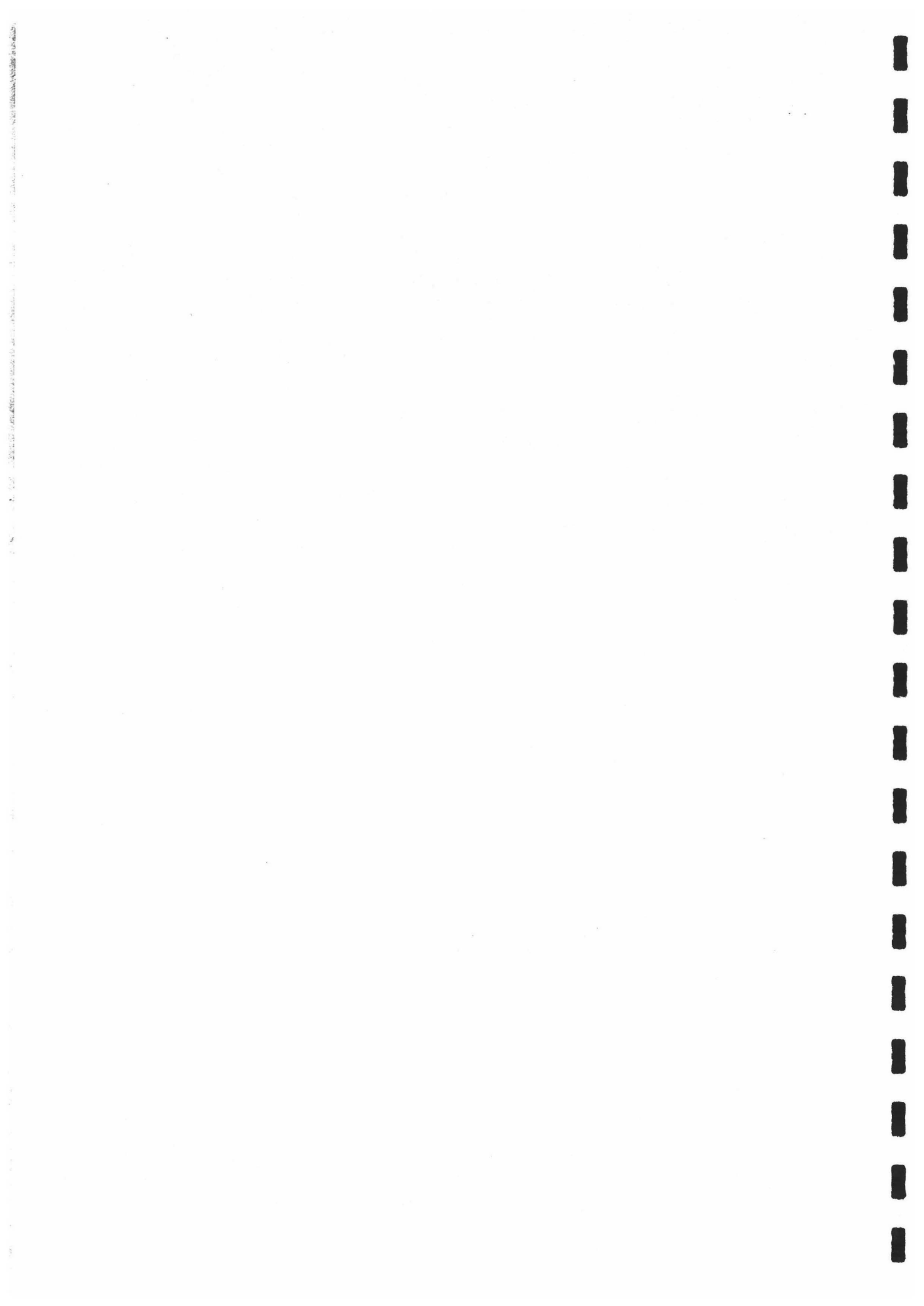


Figura III.27.- Histogramas experimentales de las probabilidades de rebasar el límite  $z_c$ . a) cuando el valor real  $Z$  es superior a  $z_c$ . b) cuando el valor real  $Z$  es inferior a  $z_c$ .

Como aclaración hay que indicar que intencionadamente he escogido un caso práctico difícil de analizar, con un valor límite  $z_c$  coincidente con la mediana de la distribución de la variable, valor que está muy próximo a la moda; esto hace que los datos próximos a  $z_c$  contribuyan notablemente al valor de la tasa de error.

El histograma de probabilidades de sobrepasar el valor  $z_c$  puede verse en la figura III.27.

A tenor de estos resultados, alentadores, se podría concluir que el problema de predicción a corto plazo puede tener una solución "satisfactoria" en el marco del modelo geoestadístico presentado. El término "satisfactorio" tiene obviamente unas connotaciones prácticas difíciles de establecer, que deben ser realistas de cara al tipo de problema estudiado y establecidas de acuerdo a la eficacia solicitada y a los medios de cálculo utilizados. En este sentido, las etapas básicas de cálculo de parámetros y de estimadores son completamente automatizables y pueden llevarse a cabo en un microordenador.



## C A P I T U L O    I X

## ESTUDIO GEOESTADISTICO DE UN PROYECTO POLIMETALICO

## 1. INTRODUCCION

Se trata del estudio geoestadístico de un yacimiento metálico de sulfuros Pb-Zn-Ag en el cual cabe distinguir tres partes principales: el cálculo de los recursos locales in situ, el diseño de la explotación y la simulación condicional del yacimiento. La información obtenida de estos trabajos servirá para llevar a cabo, posteriormente, el estudio de simulación de explotación de la futura mina.

El trabajo que se presenta constituye el resultado de una labor de conjunto de un equipo de investigadores del Centro de Geoestadística de Fontainebleau, a cuyo frente ha estado J. Deraisme como investigador principal, y que ha sido desarrollado en colaboración con la Sociedad Peñarrroya España S.A. que ha facilitado los datos de base (CHICA-OLMO et al., 1984).

## 1.1. CARACTERISTICAS GENERALES DEL YACIMIENTO

El yacimiento se sitúa dentro del complejo metalogenético de Cartagena en el SE de España, cuyos rasgos geológicos más destacables expongo

a continuación (com. pers. de los Sres. A. Gallego e I. Manteca del Dpto. de Planificación Minera de la Compañía).

La mineralización encaja en el interior de una fosa tectónica miocénica rellena de materiales detríticos, encontrándose diseminada o formando estructuras más o menos netas a modo de lentejones. Estructuralmente se distinguen diferentes facies litológicas en la mineralización; así, de techo a muro de la formación geológica se diferencia una zona de óxidos, seguida de una zona de sulfuros y finalmente una zona de esquistos también mineralizados, que constituye el substratum de la formación detrítica. Cada una de ellas tiene asignada un código que las identifica para el tratamiento individual de la información. Dicho sistema de codificación empleado en la mina ha sido de gran utilidad para el desarrollo del estudio geoestadístico.

La zona de óxidos se caracteriza por tener unas leyes medias relativamente importantes con una dispersión localmente baja, pero que técnicamente no son explotables (código 1).

En la zona de sulfuros se han separado dos partes diferentes, la superior con leyes bajas (código 2) y una inferior con leyes altas (código 3). La parte superior presenta una separación geológica neta con los óxidos; en cambio, la transición en el interior de los sulfuros no es tan evidente, al menos si se sigue como criterio la evolución de leyes en profundidad.

La zona de esquistos forma el sustratum del yacimiento y está mineralizada por un sistema de pequeños filones. Igualmente, se distingue una zona superior rica en contacto con los sulfuros (código 5) y una parte inferior con leyes bajas, estéril (código 4).

Los datos de base utilizados corresponden a 109 sondeos ubicados en el sector estudiado, para cada uno de los cuales se dispone de los datos regularizados sobre un soporte de 8 m, altura prevista para el banco de explotación.

Las variables estudiadas han sido las leyes regularizadas en Pb, Zn, Ag y S y los rendimientos metalúrgicos en Pb y Zn, anotados en lo

sucesivo por RPb y RZn. Cada tramo de 8 m tiene asociado un código geológico de acuerdo con los criterios geológicos vistos con anterioridad.

El carácter polimetálico del yacimiento ha hecho necesario introducir en el estudio una variable adicional, quizás la más importante a estudiar, denominada ley "Role". Tiene el significado de una variable útil, que expresa la ley equivalente en Pb del yacimiento, definida a partir de las leyes anteriores y que tiene en consideración de las diferentes valoraciones económicas de dichos elementos beneficios. La relación que da el Role es:

$$\text{Role} = \sum_i k_i \cdot t_i \cdot r_i$$

donde  $t_i$  es la ley del mineral en los diferentes metales,  $r_i$  el rendimiento metalúrgico y  $k_i$  las constantes económicas dependientes del valor de los metales en el mercado. En el estudio geoestadístico se han considerado valores diferentes de los constantes  $k_i$  para analizar distintos esquemas de situaciones económicas plausibles.

## 2. ESTIMACION LOCAL DE LOS RECURSOS

El estudio geológico-minero ha definido como volumen a cubicar el constituido por los sulfuros y esquistos mineralizados (códigos 2, 3 y 5). Por consiguiente, no se considerarán para el cálculo de los recursos los datos referentes a los óxidos y a los esquistos estériles (códigos 1 y 4); se plantea así un primer control importante sobre la estimación.

### 2.1. ANALISIS ESTRUCTURAL

#### 2.1.1. Estadísticos de los datos

Si se observan los valores medios referentes a cada uno de los códigos litológicos, se ve a nivel global, para las leyes en Pb y Zn, una separación neta de las partes rica y pobre en las zonas de sulfuros y de esquistos, es decir entre los códigos 2 y 3 de una parte y 4 y 5 de otra (figura III.28).



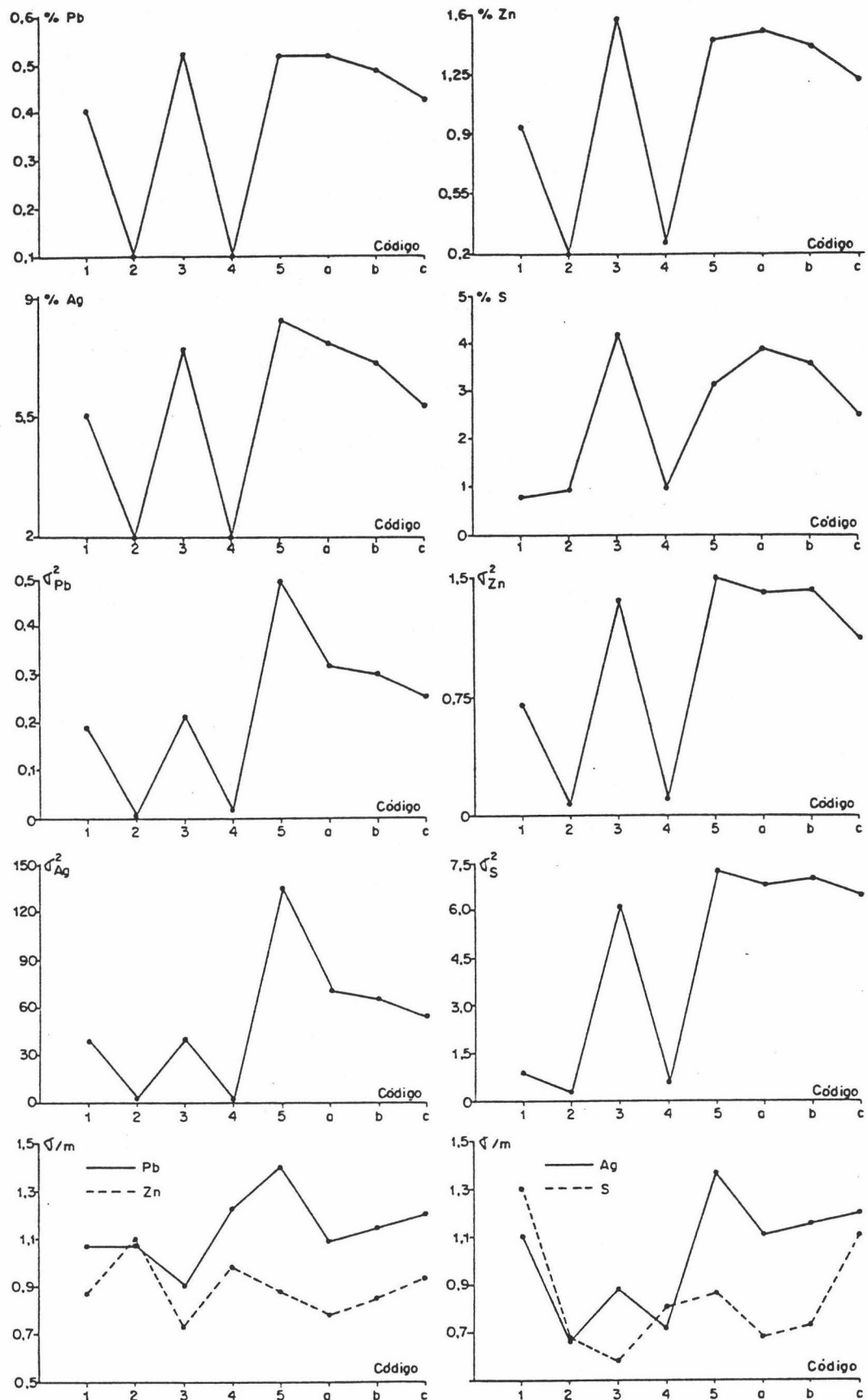


Figura 199.28.- Estadísticos de los datos: media, varianza y coeficiente de variación (a = códigos 3 y 5, b = códigos 2, 3 y 5 y c = códigos 1, 2, 3, 4 y 5).

Para el conjunto de datos de los códigos 2, 3 y 5 se detecta una diferencia clara entre el código 2, sulfuros pobres, y los códigos 3, 5, que componen un conjunto más o menos homogéneo "conjunto mineralizado".

El diferente comportamiento estadístico de estos grupos de datos, particularmente la dispersión, ha jugado un papel decisivo en el análisis estructural de las leyes; así para el conjunto 2, 3, 5 se tienen variogramas muy mal estructurados y difícilmente interpretables debido a la influencia del código 2. Este sesgo no se observa tan claramente si se comparan estrictamente los estadísticos de las poblaciones 3 y 5 y 2, 3 y 5 (códigos a y b en la figura III.28), la razón obedece exclusivamente a la proporción de datos del código 2 que es diez veces menor que la del conjunto 3 y 5.

Las distribuciones experimentales de las leyes pueden verse en la figura III.29.

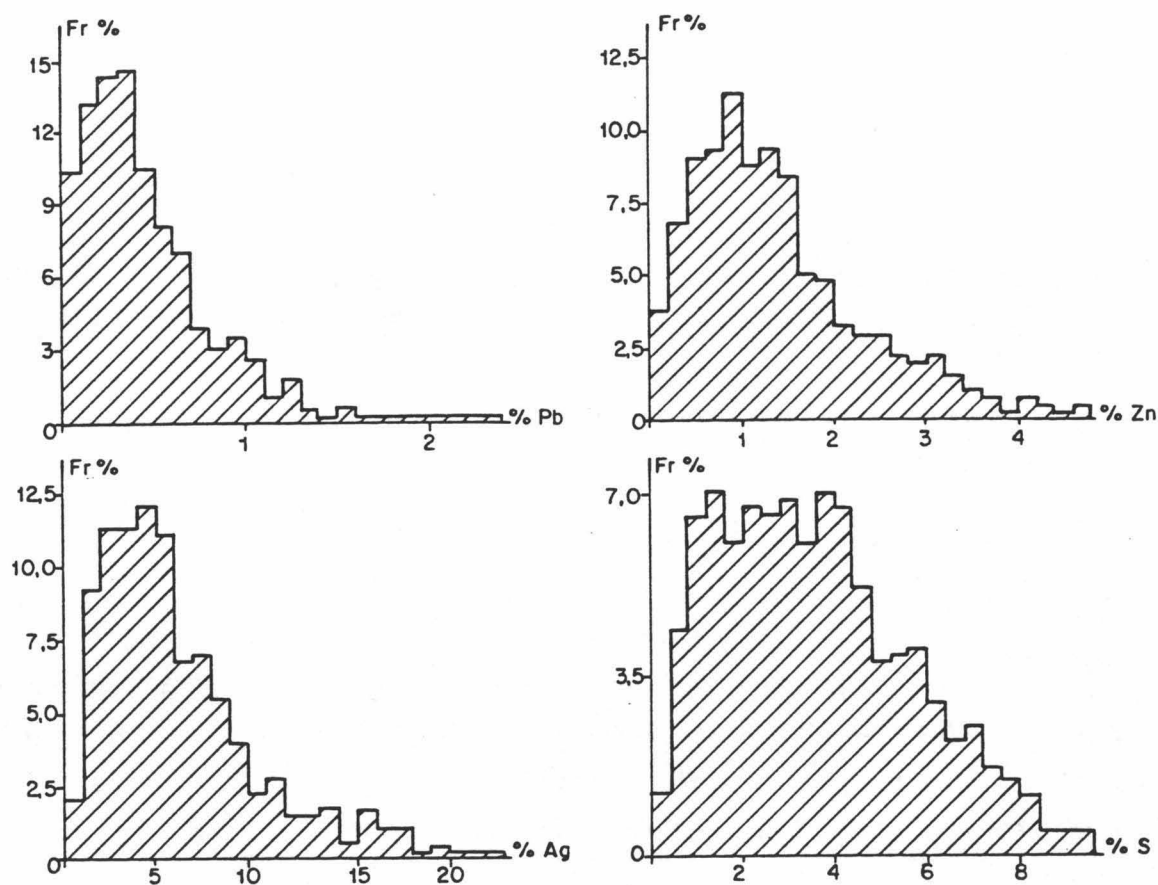


Figura III.29.- Histogramas de las leyes regularizadas.

El análisis de correlación efectuado muestra que la ley en Pb se correlaciona fuertemente, como es lógico, con la ley en Ag, y medianamente con las leyes en Zn y S. Por su parte, la ley en Zn se correlaciona moderadamente con el resto de las leyes.

Los rendimientos RPb y RZn se correlacionan mal con sus leyes respectivas, por lo que serán considerados estadísticamente independientes de las mismas y del resto de las leyes (tabla III.13).

	Pb	Zn	Ag	S	RPb	RZn
Pb	1	—	—	—	—	—
Zn	0,606	1	—	—	—	—
Ag	0,960	0,586	1	—	—	—
S	0,503	0,645	0,461	1	—	—
RPb	0,073	0,023	0,078	0,068	1	—
Rzn	0,227	-0,027	0,204	0,262	0,363	1

Tabla III.13.- Matriz de correlación de variables "conjunto mineralizado" (Códigos 3 y 5).

### 2.1.2. Variogramas

El análisis estructural ha sido difícil, debido a la influencia de los datos correspondientes a los sulfuros pobres sobre el comportamiento del variograma global del conjunto 2, 3 y 5. Por esta razón, ha sido preciso estudiar por separado los variogramas del conjunto mineralizado y de los sulfuros pobres.

#### A) Conjunto mineralizado (códigos 3 y 5)

Para el reconocimiento geológico del yacimiento se dispone de una malla de sondeos a pequeña escala, con sondeos espaciados 10 m aproximadamente. En total hay 20 sondeos dispuestos según cuatro perfiles, paralelos dos a dos a las direcciones principales de la malla de sondeos. Los datos de estos sondeos han servido para el ajuste del variograma horizontal a distancias pequeñas.

Los variogramas calculados en el sentido vertical indican una fuerte variabilidad de las leyes, como consecuencia de la marcada heterogeneidad que ostenta la mineralización en tal dirección. Así, es demostrativo el hecho de que el primer punto del variograma representa para cada una de las leyes, respectivamente, el 70 %, 68 %, 71 % y 65 % de la varianza a priori de los datos.

Los rendimientos en Pb y Zn tienen un comportamiento mucho más continuo en el origen que las leyes. En este caso, el primer punto del variograma sólo representa el 15 % y 24 % de la varianza de los datos.

Los variogramas horizontales han sido calculados en diferentes direcciones con un paso de 50 m y una tolerancia de 25 m.

Los resultados finales del estudio variográfico pueden resumirse en los siguientes términos. Se ha considerado un comportamiento isótropo de las variables según el plano horizontal y una anisotropía geométrica o zonal, según las variables, entre el plano horizontal y el eje vertical (figura III.30). Los modelos teóricos esféricos ajustados se dan en la tabla III.14.

Se constata que los modelos ajustados a las leyes Pb y Ag tienen los mismos alcances y coeficientes de anisotropía, a causa de la fuerte correlación que hay entre las dos variables. También, es destacable que los coeficientes de anisotropía, concretamente la componente vertical, pueden tomar valores cero. La razón de ello es dar facilidad práctica a la modelización de una anisotropía zonal por medio de estos coeficientes numéricos.

Se puede ver en la figura III.30 los ajustes correspondientes a los variogramas experimentales.

#### *B) Variogramas de los sulfuros pobres (código 2)*

Los variogramas de esta facies de la mineralización están mal estructurados y son difícilmente interpretables, sea desde el punto de vista geológico como geoestadístico. Tal comportamiento quizás está ligado, en gran medida, al bajo número de datos disponibles, que imposibilita

Pb	Estructuras			Ag	Estructuras		
	Esf.1	Esf.2	Esf.3		Esf.1	Esf.2	Esf.3
Meseta (C)	0,11	0,15	0,06	Meseta (C)	30,91	27,60	11,47
Alcance (A)	20	125	125	Alcance (A)	20	125	125
Coef. Ax	1	1	0	Coef. Ax	1	1	0
Anis. Ay	1	1	0	Anis. Ay	1	1	0
	2	3	3		2	3	3

Zn	Estructuras		S	Estructuras	
	Esf.1	Esf.2		Esf.1	Esf.2
Meseta (C)	0,55	0,86	Meseta (C)	3	3,79
Alcance (A)	20	56	Alcance (A)	20	56
Coef. Ax	1	1	Coef. Ax	1	1
Anis. Ay	1	1	Anis. Ay	1	1
	2,5	2,5		2	2

RPb	Estructuras		RZn	Estructuras	
	Esf.1	Esf.2		Esf.1	Esf.2
Meseta (C)	55	73,12	Meseta (C)	47	126,3
Alcance (A)	46	400	Alcance (A)	50	210
Coef. Ax	1	1	Coef. Ax	1	1
Anis. Ay	1	1	Anis. Ay	1	1
	2	0		1,5	4,5

Tabla III.14.- Modelos ajustados a los variogramas experimentales.

un análisis variográfico de detalle; además de esta razón habría también que invocar otra de índole puramente geológica referente a la formación del depósito.

Como ejemplo demostrativo se han dibujado los variogramas experimentales de las leyes en Pb y Zn, que muestran un comportamiento aparentemente aleatorio sin estructuras algunas apreciables (figura III.30).

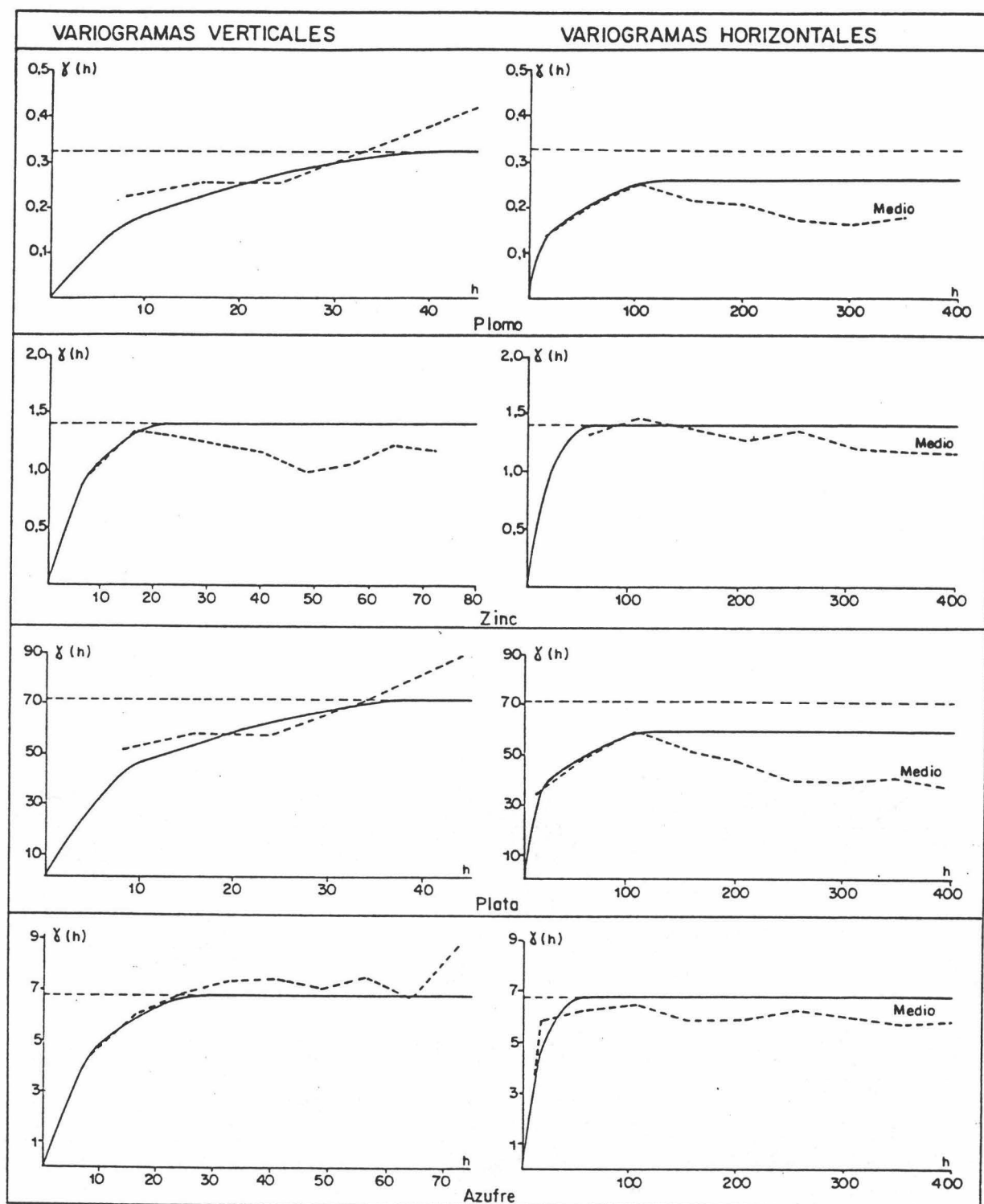


Figura III.30.- Ajuste de los variogramas experimentales correspondientes al conjunto mineralizado y a los sulfuros pobres.

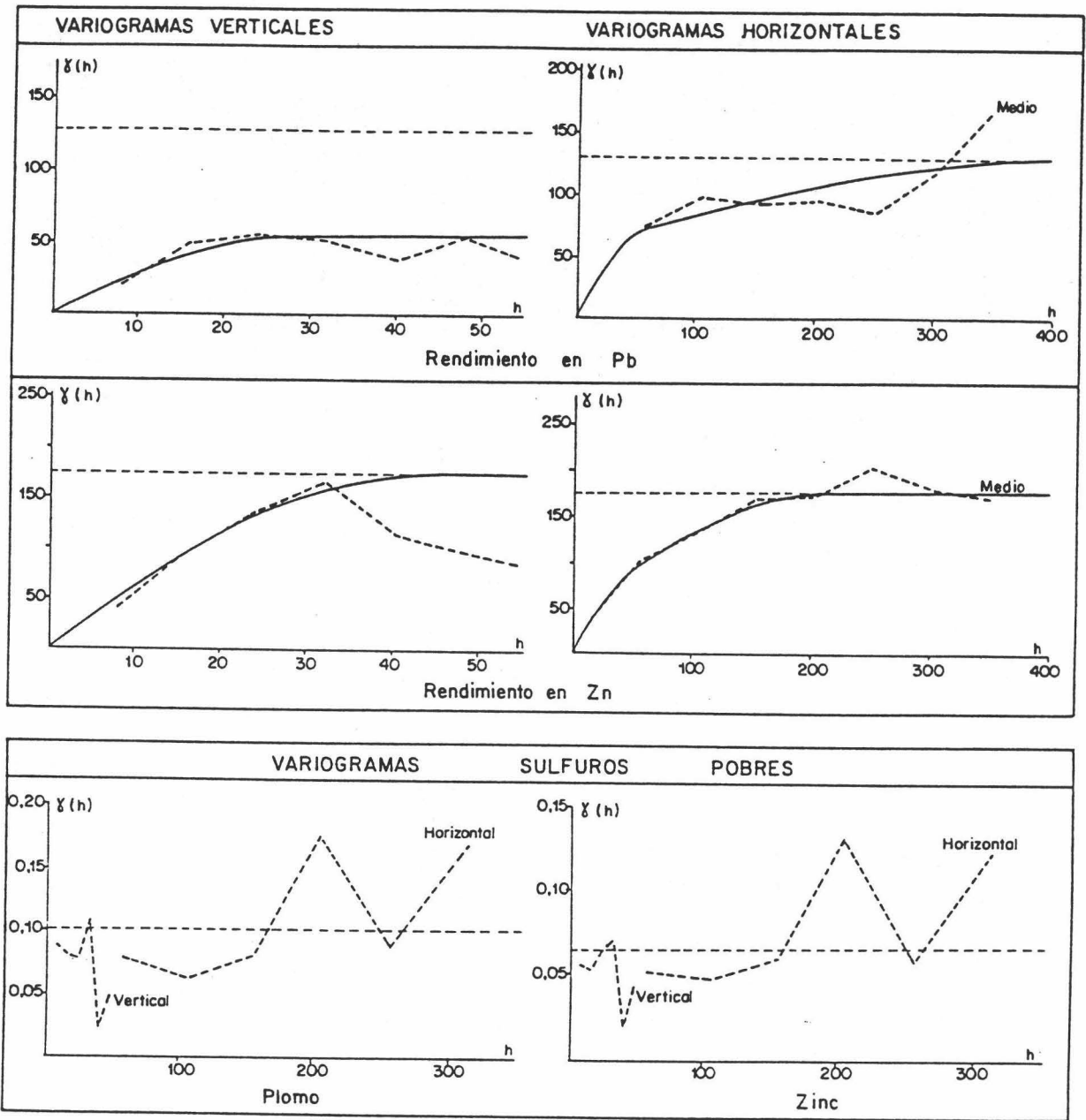


Figura 33.30.- (Continuación).

## 2.2. KRIGEAGE DE BLOQUES

### 2.2.1. Plan de Krigeage

La evaluación económica del yacimiento se fundamenta en la estimación de la ley equivalente Role, en el conjunto de bloques que componen tridimensionalmente el yacimiento, de talla de  $25 \times 35 \times 8 \text{ m}^3$ .

Pueden contemplarse dos alternativas posibles para la estimación local de la variable: por Krigeage directo de la variable Role, calculable experimentalmente en los tramos de sondeos en los cuales coexistan los valores de las leyes y de los rendimientos. El procedimiento implica como es patente el análisis estructural del Role experimental calculado. El otro camino consiste en un krigeage previo de las leyes y de los rendimientos, y en el cálculo del Role por composición de los valores estimados.

La solución primera lleva al krigeage verdadero del Role con todas las ventajas geoestadísticas que ello conlleva, entendiéndose por éstas una estimación sin sesgo con un error mínimo. La solución alternativa garantiza también un estimador sin sesgo, puesto que las leyes y los rendimientos son independientes, pero con toda seguridad la varianza del error de estimación será mayor que la anterior.

Por razones prácticas, fáciles de comprender, se ha escogido la segunda solución para estimar el Role. El motivo inmediato y con mayor peso es que con él se pueden evaluar todos los casos económicos que se precisen, con sólo cambiar las constantes económicas que intervienen, y sólo requiere el esfuerzo de un único krigeage de las variables.

Después de diferentes ensayos de krigeage se ha elegido un sistema que consta de tres niveles formados por  $5 \times 5$  bloques cada uno. Se ha hecho así para tener en cuenta que la malla de sondeos es doble que la talla del bloque y que también cada bloque, en media, está informado por un sondeo localizado en una de sus esquinas. Las informaciones de la vecindad de krigeage han sido agrupadas sólo en el plano vertical.



En total, el plan de krigage consta de 34 ponderadores asociados como máximo a 17 informaciones de bloques, distribuidos como he dicho en tres niveles (figura III.31).

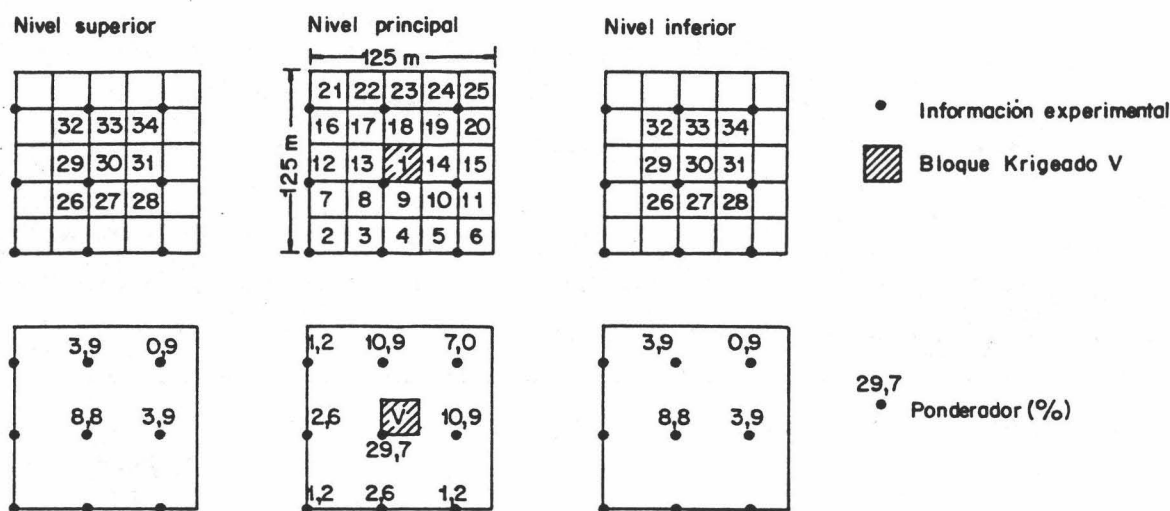


Figura III.31.- Plan de krigage: 34 ponderadores referidos a 17 informaciones.

Para el caso particular de la ley en Pb, se han indicado en dicha figura los ponderadores asociados a las 17 informaciones: destaca el valor de ponderador  $\lambda_1$  asociado al bloque a krigear v, con un peso del 30 %. La varianza de estimación es  $\sigma_K^2 = 0,063$ , que equivale a un error relativo a la media del 48 % (estimación moderadamente aceptable).

Un aspecto fundamental en la estimación de las reservas ha consistido en el diseño del modelo geométrico en bloques del yacimiento. Tal labor ha sido llevada a cabo por el Dpto. de Planificación Minera de la compañía en base a los códigos geológicos de las muestras. El modelo se ubica en una red paralelepípedica formada por 24x27x22 bloques, según los ejes X, Y y Z del sistema de referencia establecido. Del total de 14.256 bloques, se han estimado solamente 2.789 que geológicamente abarcan a la mineralización de interés, códigos 2, 3 y 5. El variograma utilizado ha sido el definido sobre los datos de códigos 3 y 5.

### 2.2.2. Resultados de la estimación

El histograma de las leyes estimadas en Pb se da en la figura III.32, que puede compararse con el experimental. El análisis de estos resultados

muestra que la estimación no ha tenido sesgo importante y que la dispersión de las leyes estimadas  $D^2(Z_K/G)$  es aproximadamente el 35 % de la dispersión de los datos experimentales  $Z$ . Un resumen de los estadísticos de las leyes estimadas puede verse en la tabla III.15.

	Pb		Zn		Ag		S	
	Z	$Z_K$	Z	$Z_K$	Z	$Z_K$	Z	$Z_K$
m	0,488	0,469	1,415	1,358	7,11	6,89	3,63	3,57
$\sigma^2$	0,310	0,113	1,422	0,520	66,27	20,74	6,94	2,64
Min.	0,01	0,03	0,01	0,01	0,3	0,3	0,10	0,11
Max.	8,65	4,34	8,37	5,97	122,9	63,20	17,57	13,06

Tabla III.15.- Resumen estadístico de los resultados del krigeage de bloques.

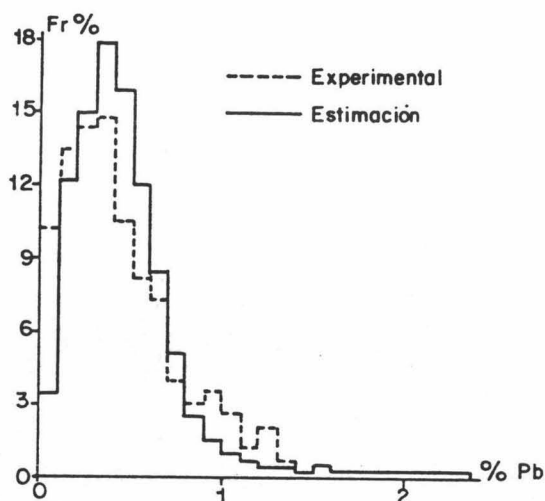


Figura III.32.- Histogramas de las leyes en Pb estimadas y experimentales.

El cálculo del valor Role es inmediato por aplicación de la relación vista donde intervienen las constantes  $k_i$ . La variable se ha estimado para cuatro situaciones económicas diferentes, cada una de ellas referente a distintas leyes del concentrado en Pb:

$$a. \text{ Role}^* = \text{Pb} \times \text{RPb}^* + \text{Zn} \times \text{RZn}^* + \text{Ag} \times 0,9 \times \text{RPb}^* \times 0,09 + \text{Srx}0,03 \times 0,6$$

$$b. \text{ Role}^* = \text{Pb} \times \text{RPb}^* + \text{Zn} \times \text{RZn}^* \times 2,405 + \text{Ag} \times 0,9 \times \text{RPb}^* \times 0,121 + \text{Srx}0,12 \times 0,6$$

- c.  $\text{Role}^* = \text{Pb} \times \text{RPb}^* + \text{Zn} \times \text{RZn}^* \times 1,94 + \text{Ag} \times 0,9 \times \text{RPb}^* \times 0,098 + \text{Sr} \times 0,097 \times 0,6$   
 d.  $\text{Role}^* = \text{Pb} \times \text{RPb}^* + \text{Zn} \times \text{RZn}^* \times 0,9732 + \text{Sr} \times 0,0486 \times 0,6$

La ley en S indicada es la ley residual (Sr) estimada a partir de la ley krigeada  $S^*$  por la relación

$$\text{Sr} = S^* - \text{Pb} \times \text{RPb}^* \times 0,15 - \text{Zn} \times \text{RZn}^* \times 0,49$$

Como ejemplo, se ve en la figura III.33 a el histograma del  $\text{Role}^*$  estimado para uno de los casos estudiados (caso b). Otra forma cómoda de presentar estos resultados consiste en representar el histograma del valor económico de cada bloque estimado, por ejemplo en pts/t, puesto que se conoce el valor de la ley equivalente en Pb. El cálculo es rápido pues basta con multiplicar el valor del  $\text{Role}^*$  estimado por el valor del punto en Pb, establecido en el momento del estudio (figura III.33 b). El histograma de esta nueva función nos indica que cabe esperar en media para el yacimiento un valor de 1.200 pts/t para cada uno de los bloques extraídos.

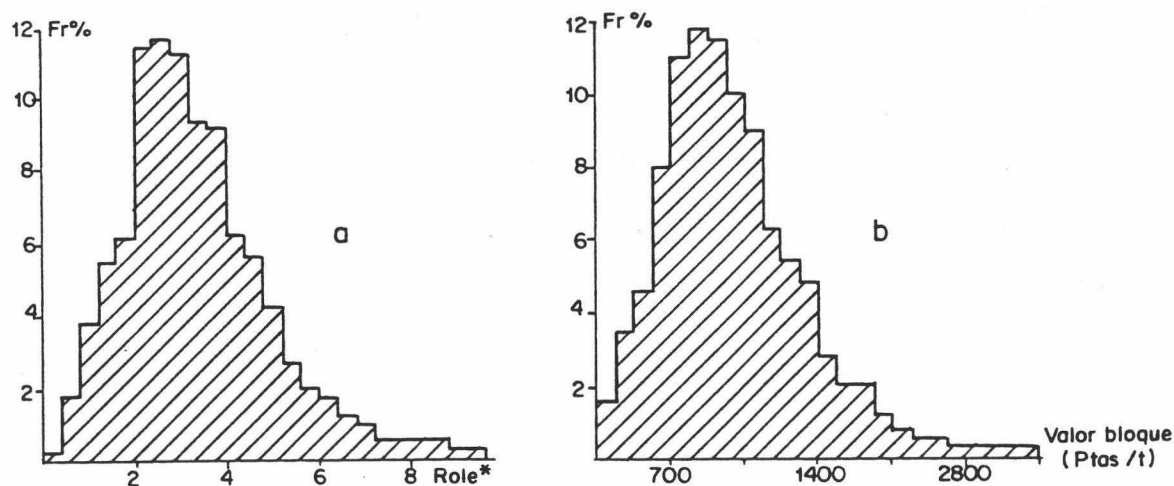


Figura III.33.- a) Histograma ley  $\text{Role}^*$ . b) Histograma del valor económico de los bloques en pts/t.

El objetivo final de la estimación es construir las curvas de recuperación de los recursos in situ en función del  $\text{Role}^*$  estimado, para el tamaño de bloque escogido. Los gráficos dibujados corresponden a las curvas tonelaje de mineral/ley de corte, cantidad de metal/ley de corte y ley



media/ley de corte (figura III.34). Los resultados representados constituyen una primera previsión de lo que se recuperaría si se efectuase la selección de los bloques por el valor del Role\* estimado, sin tener en cuenta la posición de los bloques dentro del yacimiento -selección libre- (véase figura III.35), es decir sin tener en cuenta las restricciones geométricas impuestas por el diseño de la corta, que también deben ser analizadas dada su importancia económica en el conjunto global del proyecto.

### 3. PARAMETRIZACION TECNICA DE LAS RESERVAS

El objetivo del estudio es analizar el efecto que tiene una explotación a cielo abierto del yacimiento sobre las reservas recuperables.

La aproximación hecha al cálculo de reservas recuperables por el método visto anteriormente, basado exclusivamente en el valor del Role, debe ser interpretada como poco realista. En efecto, en mina, se sabe que un bloque de mineral será explotado como tal según el valor de su ley media y de su posición en el yacimiento, existiendo razones evidentes de consistencia económica que obligan a explotar sólo aquellos bloques cuyos costos para alcanzarlos y extraerlos son inferiores a los beneficios aportados.

Dada esta restricción geométrica en la explotación, se tiene que todo tonelaje total  $V$  de todo uno, extraído de la corta, estará formado por un tonelaje de mineral económico  $T$  y una cantidad de estéril igual a la diferencia  $V-T$  (sería nula caso de una selección libre). La fracción  $T$  tendrá asociada una cantidad de metal  $Q$  y una ley media  $t_m$ .

Considerados estos parámetros, el método de la parametrización de las reservas, lo que busca, como ya se vió, es definir un conjunto de proyectos (cortas) técnicamente realizables que maximizan el valor del metal  $Q$  para un valor fijado del material a extraer  $V$ . La curva  $Q(V)$  puede ocurrir que no sea estrictamente creciente y cóncava, la aproximación hecha por el método consiste entonces en buscar por procedimientos combinatorios aquellos proyectos que delimitan la concavidad de la curva  $Q(V)$ . Se establece así una dualidad entre la ley de corte y los tonelajes; los proyectos revisten además un carácter óptimo complementario.

Para el yacimiento estudiado lo que se ha maximizado ha sido la función beneficio dada por la relación

$$B = \gamma Q - \lambda V - \theta T$$

donde:  $\gamma$  es el valor en moneda del punto de metal,  $Q$  es la cantidad de metal calculada por la ley equivalente Role,  $\lambda$  es un parámetro, proporcional a los costos de extracción, que se hace variar y que tiene la representatividad de una ley de corte Role,  $\theta$  es un parámetro fijo correspondiente a la ley de corte aplicada en el lavadero, proporcional a los costos de tratamiento,  $V$  el volumen total de todo uno extraído y  $T$  el tonelaje de mineral.

Los resultados finales de la parametrización han dado 28 proyectos de corta encajados, todos ellos tienen la característica de ser óptimos en el sentido de que maximizan la función  $Q(V)$  para cada uno de los  $V$  implicados. Cada una de las cortas se sitúa en el interior del diseño precedente, siendo el de mayor tonelaje el primero y el de menor el número 28 (véase figura I.20 a). Por otra parte, la curva  $Q(T)$  muestra la evolución de la ley media de los diferentes proyectos  $t_m = Q/T$ ; parece observarse de la figura I.20 b que el yacimiento es poco sensible a la variación del parámetro  $\lambda$  ya que la pendiente de la función permanece casi constante.

El valor económico que discrimina un proyecto respecto del inmediatamente superior viene dado precisamente por el parámetro  $\lambda$ , que se hacía variar y que representa igualmente la ley media del volumen limitado por dos cortas sucesivas, cuya valoración es  $Q - \lambda T$ . La tasa de descubierta vendría expresada por la relación  $(V-T)/T$ .

Los resultados obtenidos, que no son objeto de presentación aquí, dado su volumen y complejidad de interpretación, pues la misma se escapa del ámbito puramente geoestadístico, deben servir finalmente al economista minero para el análisis de viabilidad del proyecto, quien en función de las características globales de las cortas analizadas y de otros aspectos técnicos y económicos asociados, deberá seleccionar el proyecto en apariencia el más rentable. En parte, dichos resultados son susceptibles de representación gráfica por medio de programas de dibujo adaptables a la

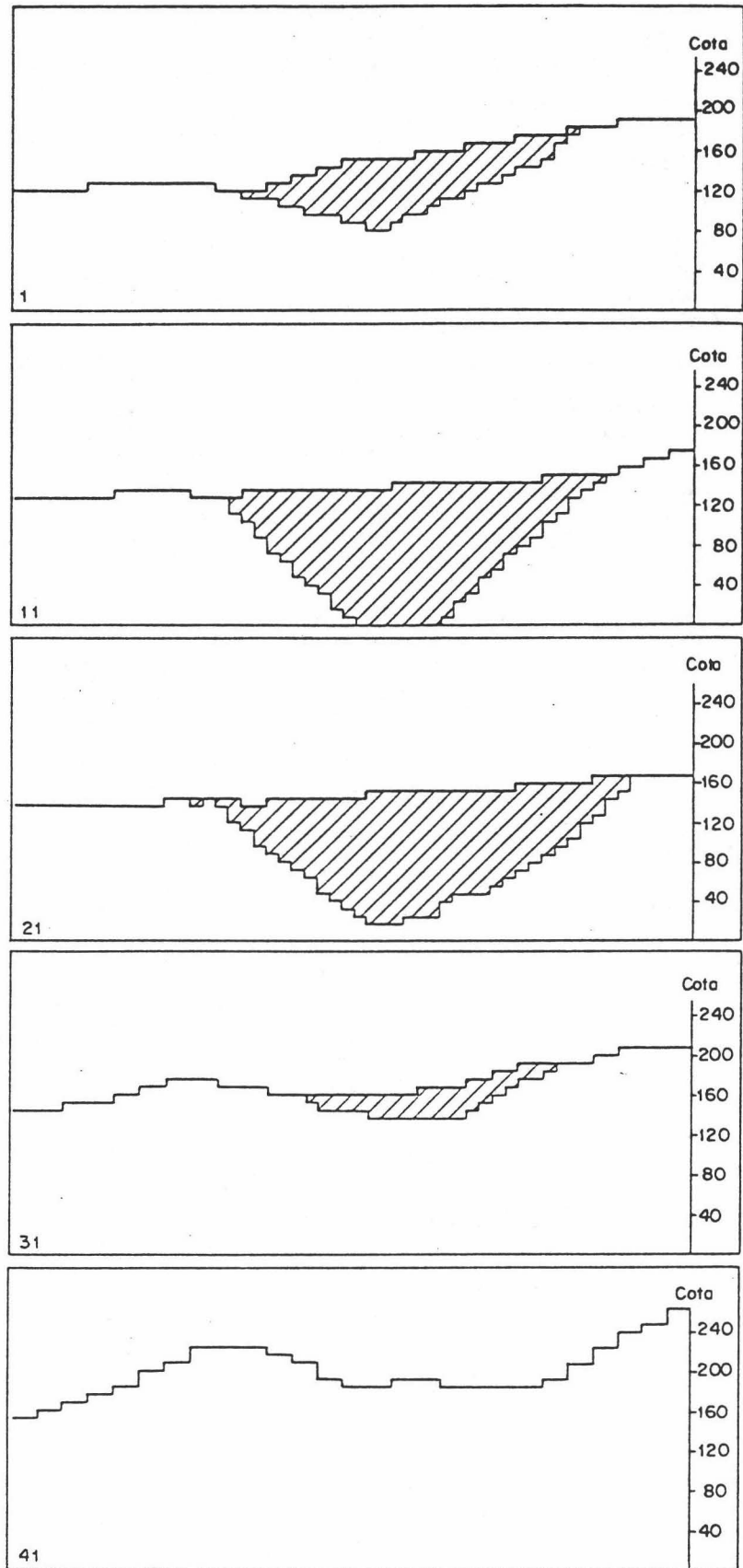


Figura 333.36 a.- Cortes verticales seriados según X O Z en la corta 28.

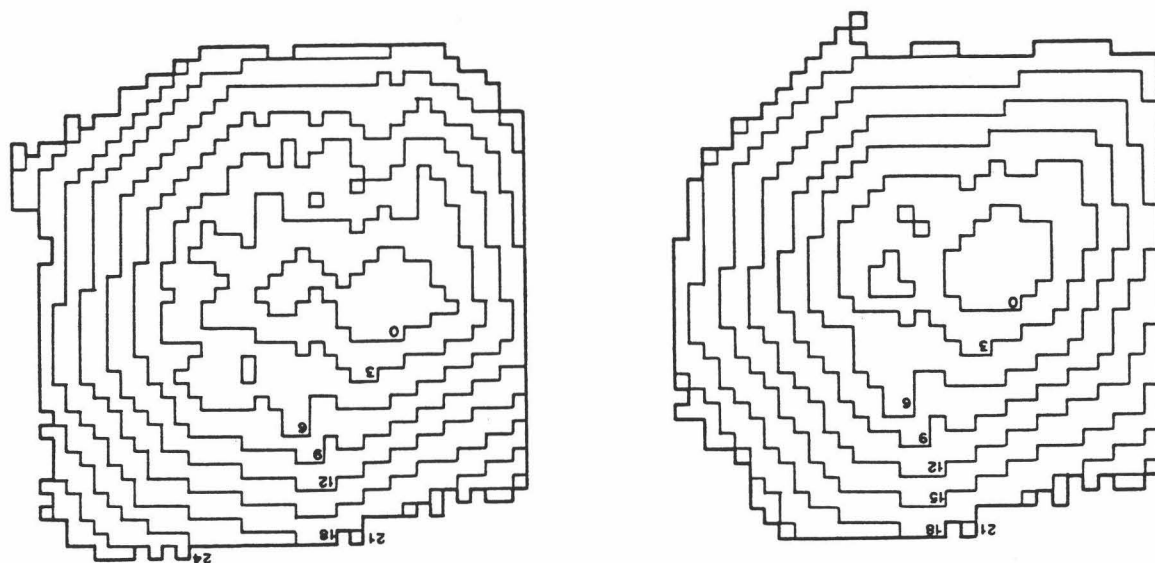


Figura III.36 b.- Vistas en planta de las cortas 28 y 26 (se ha representado un banco sobre tres). Para la utilización de estos resultados los contornos deberán ser, a posteriori, suavizados a mano.

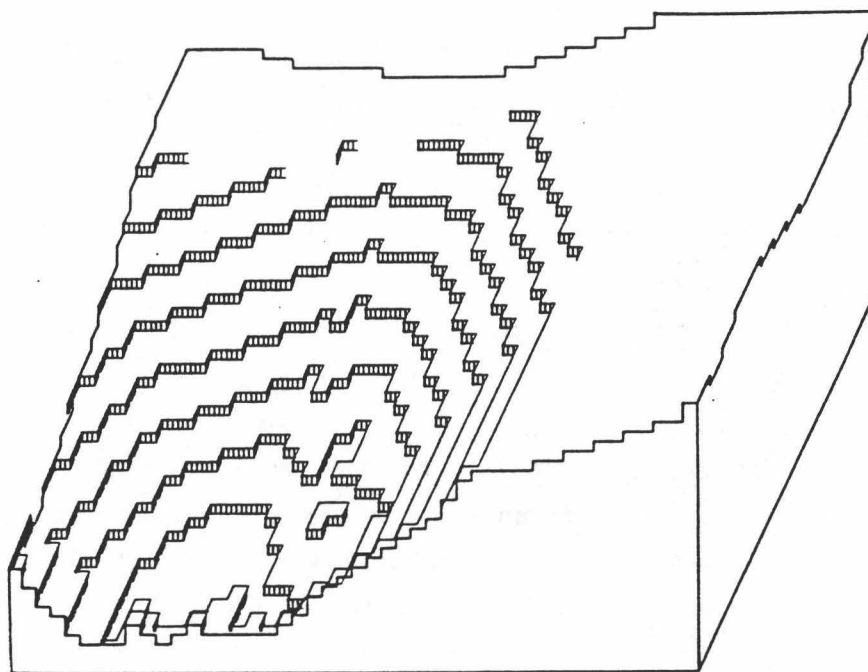


Figura III.36 c.- Vista tridimensional de la corta 28.



estructura de los ficheros de resultados, como puede verse en las figuras III.36 a-c (programa MULTIPIT del C.G.M.M. de Fontainebleau).

#### 4. SIMULACION CONDICIONAL DEL YACIMIENTO

##### 4.1. INTRODUCCION

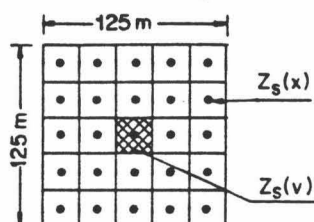
Los estudios anteriores han servido para evaluar las reservas del yacimiento y subsecuentemente establecer la parametrización técnica de las mismas, a partir del krigeage de los paneles de  $25 \times 25 \times 8 \text{ m}^3$ . Se dispone por tanto de un calibrado de las reservas globales in situ del yacimiento. Técnicamente es posible elegir la corta que bajo ciertas hipótesis económicas plausibles permitirá la recuperación máxima de metal.

Supongamos que las principales directrices del proyecto han sido ya establecidas con ayuda de los resultados vistos; es necesario ahora ir más en aval en el proyecto, hay que conocer las reservas efectivamente recuperadas en el instante de la explotación. Se sabe, así se ha querido demostrar en este trabajo, que los criterios de selectividad en mina producen una pérdida de mineral y por tanto de metal importantes, tanto mayores cuanto más alejados se encuentran de la selección ideal.

Además de este problema del recuperable, hay que considerar las calidades diferentes del mineral asociadas a masas mineralizadas; la distribución de éstas en el yacimiento puede influir a la hora de establecer una política de alimentación al lavadero, por ejemplo como se ha visto en el estudio precedente para asegurar un flujo de leyes a la entrada del lavadero lo más homogéneo posible.

En definitiva, se debe analizar en este estadio de continuación del proyecto la variabilidad en el espacio de las masas mineralizadas, las fluctuaciones de calidad del mineral, la degradación de las curvas tonelaje/ley con la talla de la unidad de explotación (efecto de soporte), con la malla de preexplotación utilizada (efecto de información y la pérdida de reservas debida a las restricciones geométricas ligadas al método de explotación contemplado (efecto de restricciones geométricas).

Para alcanzar estos objetivos, se ha visto necesario realizar la simulación condicional del yacimiento sobre bloques unidad de talla  $5 \times 5 \times 8 \text{ m}^3$ , unidad mínima prevista en la selección. Para el estudio del efecto de información se ha construido el modelo mixto sobre punto y bloque: en cada nudo de la malla  $5 \times 5 \times 8 \text{ m}^3$  se ha simulado el valor puntual (del testigo de 8 m)  $Z_S(x)$  y el valor del soporte de bloque  $5 \times 5 \times 8 \text{ m}^3$   $Z_S(v)$ . Los datos puntuales rrepresentarán ulteriormente la información de la malla de preexplotación:



#### 4.2. CONSTRUCCION DEL MODELO Y RESULTADOS

##### 4.2.1. Características básicas del modelo

El modelo de yacimiento se ha construido según el método descrito en el Anexo I, para los soportes de punto y bloque, a través del algoritmo de bandas rotantes y del modelo gaussiano discreto.

El método permite simular en correlación varias variables cuando éstas se encuentran con co-regionalización lineal, es decir cuando sus variogramas directos y cruzados son una combinación lineal de los mismos variogramas de base (el modelo lineal asume la simetría de las covarianzas cruzadas  $C_{ij} = C_{ji}$ ). Se procede entonces del modo siguiente, cada variable gaussiana  $Y_i$  se descompone en una combinación de componentes elementales  $X_i^j$  independientes, caracterizadas por una combinación de unos y otros de los variogramas de base:

$$Y_i = \sum_{j=1}^n a_i^j X_i^j \quad i = 1 \text{ a } k$$

Los coeficientes de la combinación lineal  $a_i^j$  son escogidos de modo que reproduzcan las mesetas de los variogramas directos y cruzados de las variables (MARIN, 1978).

La zona simulada es la misma que la utilizada en la estimación. Por las mismas razones que para el kriging, se han simulado las seis variables estudiadas, las leyes en Pb, Zn, Ag y S y los rendimientos en Pb y Zn; de este modo se obtendrán valores simulados de Role para hipótesis económicas diferentes.

Del total de seis variables se han simulado realmente sólo cuatro, las leyes en Pb y Zn y sus rendimientos respectivos RPb y RZn. La poca importancia del S como elemento de interés ha llevado a la hipótesis de considerarlo como un término constante, de valor su media. En lo que respecta a la Ag su fuerte correlación con el Pb ha permitido simularlo con la ayuda de una correlación estadística simple:

$$Ag = \rho \frac{\sigma_{Ag}}{\sigma_{Pb}} Pb + \epsilon$$

$\epsilon$  es una variable aleatoria independiente de parámetros.

$$m_{\epsilon} = m_{Ag} - \frac{\sigma_{Ag}}{\sigma_{Pb}} m_{Pb} \quad \text{y} \quad \sigma^2(\epsilon) = \sigma_{Ag}^2 - \rho^2 \sigma_{Ag} \cdot \sigma_{Pb}$$

Los rendimientos, que como es sabido se correlacionan mal con sus leyes, se les han simulado independientemente.

#### 4.2.2. Anamorfosis y análisis estructural

La primera etapa en la construcción del modelo es determinar los coeficientes  $\psi_n$  del desarrollo de la función de anamorfosis. Las distribuciones de las variables brutas (figura III.29) no presentan inconvenientes mayores, por lo que ha sido suficiente un corto número de polinomios (N) para el ajuste del histograma y para una buena reconstitución de la varianza de los datos (tabla III.16 a).

Con la anamorfosis se tienen calculadas las variables gaussianas correspondientes, sobre las cuales se calculan los variogramas tanto directos como cruzados. Es de notar en la figura III.37 a que la susodicha transformación ha hecho aparecer con mayor claridad las estructuras espaciales de las variables, parece que los variogramas están mejor estructurados. De igual forma que en el análisis estructural de la variable bruta, visto anteriormente, se ha supuesto la isotropía en el plano

Variable	$\sigma^2 \text{exp.}$	$\sigma^2_N$	N
Pb	0,238	0,238	7
Zn	1,310	1,310	7
RPb	138,5	136,2	10
RZn	186,4	185,8	10

Tabla III.16 a.- Resultados de la anamorfosis de las leyes en Pb y Zn y de los rendimientos RPb y RZn.

horizontal, aunque se ha desestimado la anisotropía zonal vertical en las leyes Pb y Ag.

El coeficiente de correlación de las gaussianas  $Y_{Pb}$  e  $Y_{Zn}$  es de 0,74, lo que justifica el empleo del modelo de co-regionalización lineal para estas variables, sin embargo la baja correlación entre  $Y_{RPb}$  e  $Y_{RZn}$  de 0,41 impide el uso de dicho modelo lineal para las mismas, así pues serán simuladas independientemente. Se ha confiado en el condicionamiento del modelo para reproducir la correlación estadística observada, y parece, a tenor de los resultados finales, que la decisión ha sido acertada.

Los variogramas de las gaussianas ajustados permiten deducir los correlogramas correspondientes  $\rho(h)$ , y a partir de éstos las covarianzas brutas  $C(h)$  implicadas por el modelo gaussiano discreto,

$$C(h) = \sum_{n=0}^N \frac{\psi_n^2}{n!} \rho^n(h)$$

Se regulariza entonces la covarianza  $C(h)$  sobre el soporte  $5 \times 5 \times 8 \text{ m}^3$  y se calculan el coeficiente de cambio de soporte y la covarianza regularizada  $C_V(h)$ . Los valores del parámetro  $r$  son:

$$r_{Pb} = 0,949 \quad r_{Zn} = 0,939 \quad r_{RPb} = 0,984 \quad r_{RZn} = 0,984$$

La covarianza regularizada es entonces invertida según la fórmula clásica para calcular la covarianza gaussiana  $R(h)$  de bloque, que se modelizará y simulará condicionalmente (figura III.37 b).

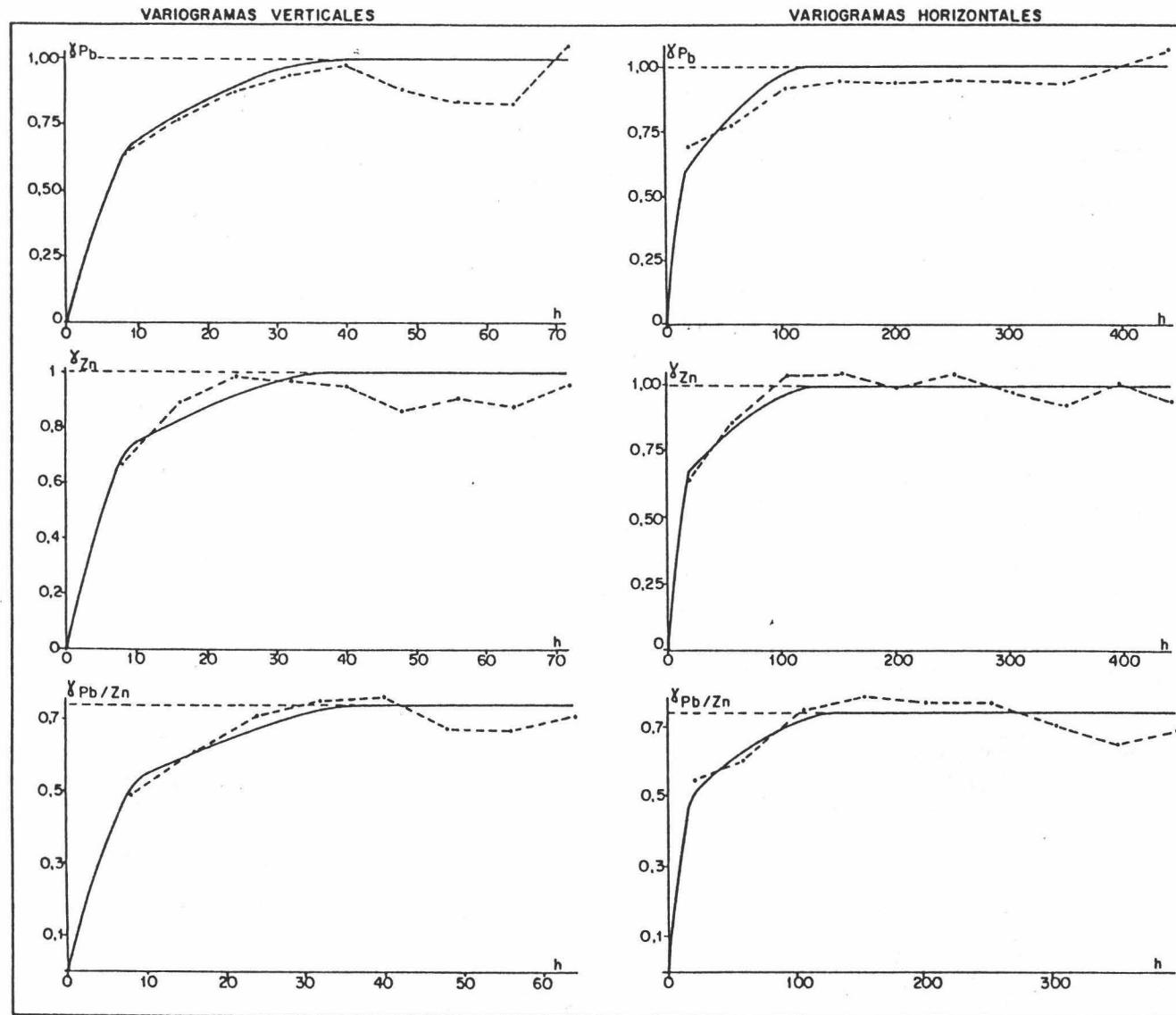


Figura 33.37 a.- Variogramas experimentales de las gaussianas de las leyes en Pb y Zn, directos y cruzados.

$$C_v(h) = \sum_{n=0}^N \frac{\psi^2 r^{2n}}{n!} R^n(h)$$

El modelo lineal ajustado para simular las leyes en Pb y Zn se expresa del modo siguiente:

$$Y_i = \sum a_i^j X_i^j \quad i, j = 1 \text{ a } 4$$

La matriz de coeficientes  $a_i^j$  para la co-regionalización Pb/Zn vale:

Variable	Estructura elemental			
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
Pb	0,6557	—	—	0,7550
Zn	0,6100	0,3973	0,4371	0,5282

Tabla 333.16 b.- Coeficientes  $a_i^j$  de ajuste del modelo lineal Pb/Zn.

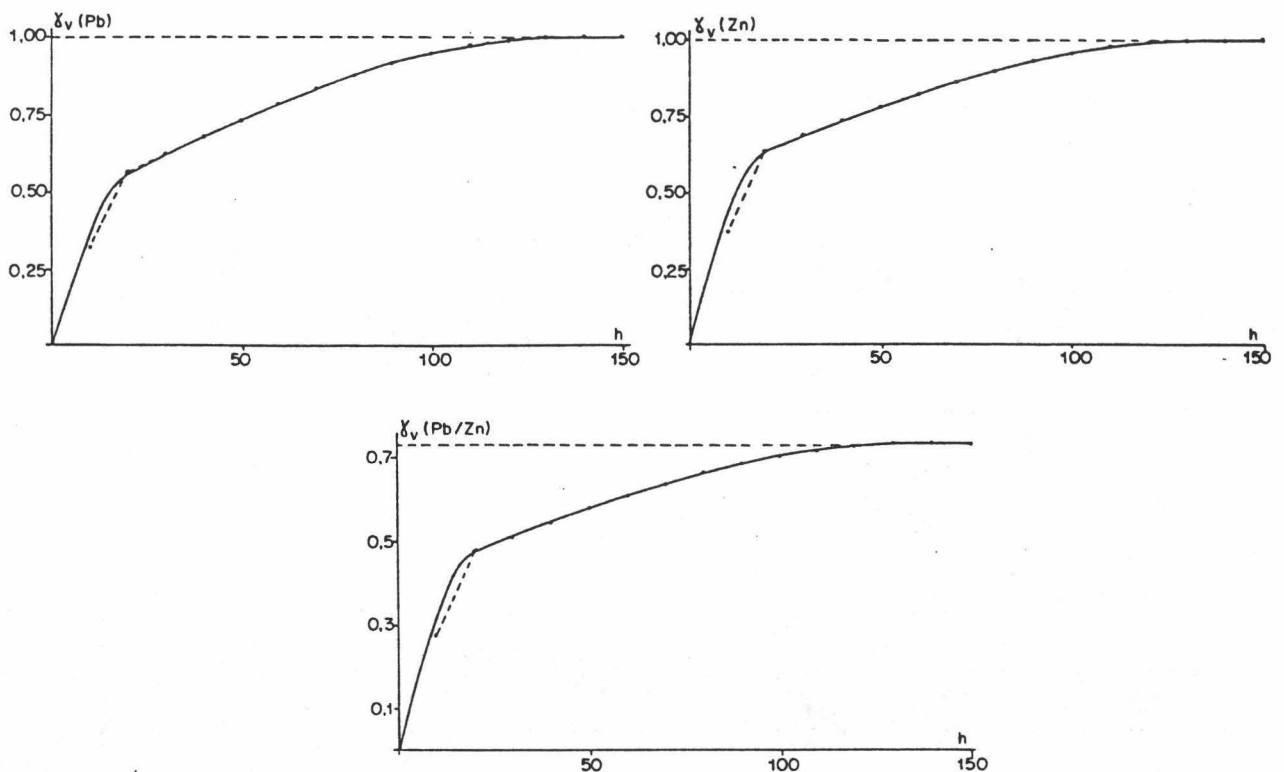


Figura 333.37 b.- Variogramas de las gaussianas de bloque  $5 \times 5 \times 8 \text{ m}^3$  de las leyes en Pb y Zn.

Se observa para cada una de las leyes que la suma  $\sum a_j^2 = 1$  y que  $\sum a_i \times a_j = 0,79$ , que es aproximadamente la meseta del variograma cruzado  $\gamma_{Pb/Zn}$  (coeficiente de correlación de las gaussianas  $\rho = 0,74$ ), condiciones que deben cumplirse en el ajuste de un modelo lineal (MARIN, 1978).

Para los rendimientos se tienen los valores siguientes para la matriz  $a_i^j$ :

Variable	Estructura elemental			
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
RPb	0,6480		0,7620	
RZn		0,5290		0,8490

Tabla III.16 c.- Coeficientes  $a_i^j$  de ajuste del modelo RPb/RZn.

Se observará en este caso que  $\sum a_j^2 = 1$  y  $\sum a_i \cdot a_j = 0$ . Se está obligado a escoger cuatro estructuras elementales para simular independientemente las dos variables.

En cuanto a las estructuras independientes  $X$ , que son un total de 8 a simular para las 4 variables, corresponden a modelos de variogramas esféricos de parámetros (tabla III.17):

Variable	Estructura	Alcance	Meseta	Anisotropía		
				$A_x$	$A_y$	$A_z$
Pb, Zn	$X_1, X_2$	10	0,43	0,5	0,5	1
	$X_3, X_4$	40	0,57	0,5	0,5	1
RPb, RZn	$X_1$	30	0,42	0,5	0,5	1
	$X_2$	30	0,28	0,5	0,5	1
	$X_3$	60	0,72	0,3	0,3	1
	$X_4$	80	0,58	0,2	0,2	1

Tabla III.17.- Parámetros de las estructuras elementales esféricas simuladas.

#### 4.2.3. Estudio por simulación de la curva tonelaje/ley

Al disponer de los valores simulados de las variables, es fácil, por simple combinación lineal de los mismos, deducir los valores correspondientes al Role simulado, indistintamente para al soporte puntual como de bloque  $5 \times 5 \times 8 \text{ m}^3$ .

Como paso previo al uso de los resultados logrados, ha sido conveniente corroborar que el valor del coeficiente de correlación entre las leyes simuladas puntuales de Pb y Zn y, por otro lado, entre los rendimientos metalúrgicos respectivos, se aproxima al valor experimental. Si observamos que efectivamente los valores obtenidos  $\rho_{\text{Pb/Zn}} = 0,78$  y  $\rho_{\text{RPb/RZn}} = 0,31$  son parecidos a los experimentales, puede confirmarse que la simulación ha reproducido correctamente el modelo de co-regionalización inyectado.

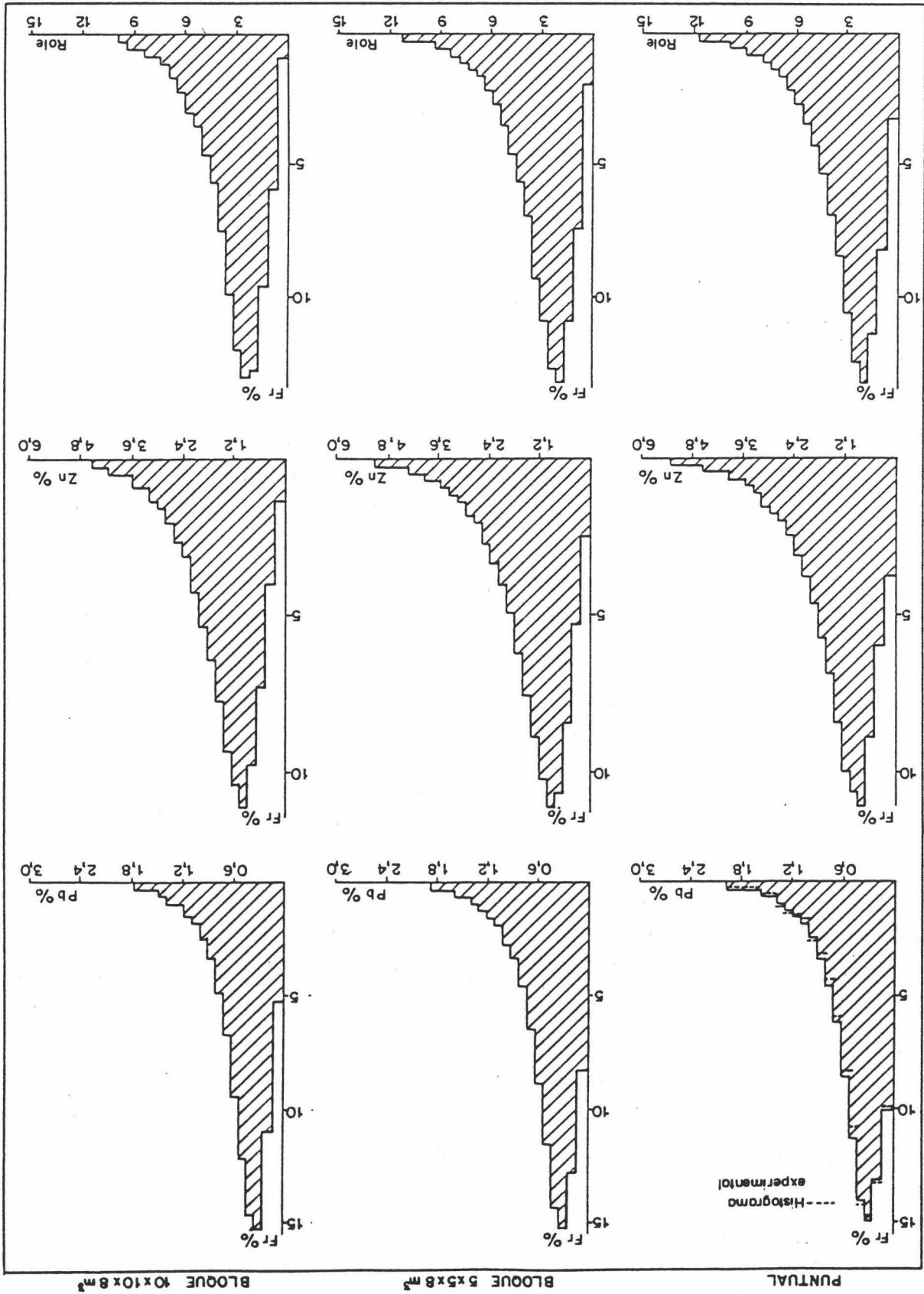
Otro aspecto interesante de comparación de resultados lo ofrece el cálculo de los histogramas de las leyes simuladas. La figura III.38 presenta los histogramas de las leyes simuladas en Pb, Zn y Role, para los dos soportes de información establecidos, puntual (testigo) y bloque. Además, para el caso de la ley en Pb, dicha figura dibuja el histograma de los datos experimentales, que se le puede comparar con el de los datos simulados puntuales, que por construcción deben coincidir. El parecido que reflejan los susodichas distribuciones es grande, por tanto, la información simulada puntual es válida para reemplazar en los cálculos que vienen a continuación a la información experimental.

El estudio del recuperable por simulación se ha llevado a cabo para tamaños de bloques diferentes,  $5 \times 5 \times 8 \text{ m}^3$  y  $10 \times 10 \times 8 \text{ m}^3$ , con el fin de analizar la influencia del efecto de soporte sobre el beneficio total. El modo de selección practicado es libre, sin considerar las restricciones geométricas de la explotación que, en sentido general, fueron ya estudiadas durante la parametrización técnica de reservas.

El estudio del efecto de información, se ha hecho a través de la selección libre de los bloques por el estimador del testigo simulado en su interior, caso de los bloques  $5 \times 5 \times 8 \text{ m}^3$  y  $10 \times 10 \times 8 \text{ m}^3$ . Asimismo, se ha estudiado la recuperación en metal Pb y Zn, en caso de selección libre sobre la ley equivalente Role del bloque de selección.



Figura 33.38.- Histogramas de valores acumulados de las leyes Pb, Zn y Role sobre soportes: puntual, bloque v = 5x5x8 m<sup>3</sup> y bloque V = 10x10x8 m<sup>3</sup>.



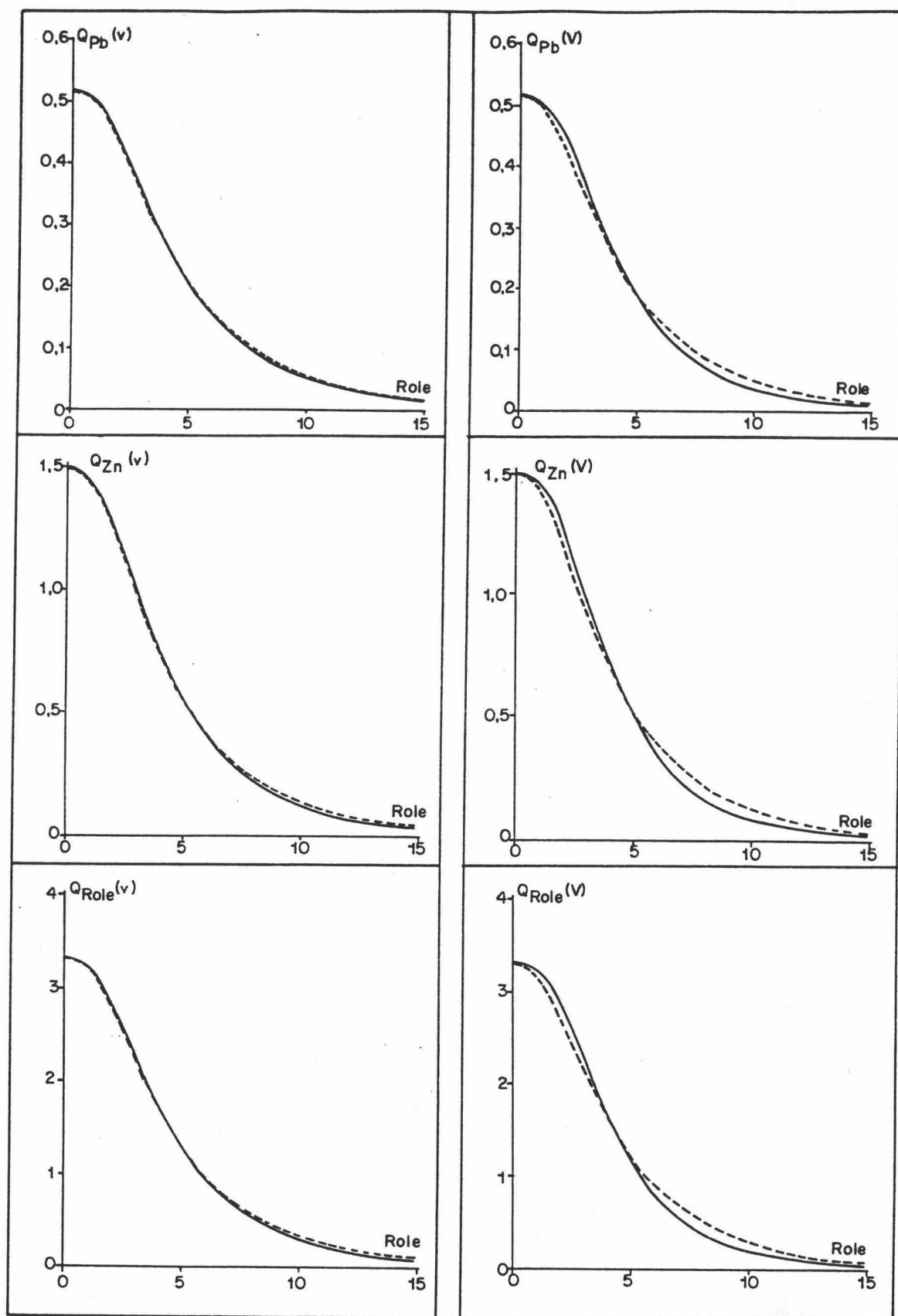


Figura III.39.- Curvas de recuperación de metal en Pb, Zn y Role sobre soportes  $v = 5 \times 5 \times 8$  m y  $V = 10 \times 10 \times 8$  m, para selección libre: sobre Role puntual (trazo discontinuo) y sobre Role bloque (trazo continuo).

- Dada la gran cantidad de resultados obtenidos en el estudio, presentaré sólo algunos de ellos que expuestos gráficamente servirán para ilustrar los comentarios anteriores (figura III.39).

## C A P I T U L O    X

## SIMULACION DE EXPLOTACION DE UN YACIMIENTO DE URANIO

## 1. INTRODUCCION

Se pretende en el estudio explotar, desde el punto de vista numérico, la simulación geoestadística de un yacimiento de uranio con el objetivo de llevar a cabo un análisis de detalle de los problemas de selección minera. Los resultados del mismo han puesto en evidencia, numéricamente, los tres efectos que condicionan los resultados de la selección y por tanto el cálculo del recuperable.

## a) El efecto de soporte

Se han estudiado dos alturas diferentes del banco de explotación 3 m y 4,5 m, para bloques elementales de sección cuadrada 3x3 m<sup>2</sup>.

## b) El efecto de información

Se han simulado tres mallas distintas de selección para cada banco (barrenos de explotación), a saber, la malla 3 m centrada, la malla cuadrada de 3 m y la malla 6 m centrada (véase figura III.40). Para

cada una de ellas, se han estimado las leyes medias de los bloques de sección  $3 \times 3 \text{ m}^2$  por kriging de datos situados en el mismo nivel. La información utilizada en la estimación corresponde a los valores simulados sobre soporte puntual para cada una de las mallas descritas. La vecindad de datos se ha limitado exclusivamente a la primera aureola de información del bloque a estimar.

### c) El efecto geométrico

Se han comparado los resultados de la práctica de una selección libre de bloques, por aplicación de una ley de corte, con aquellos que derivan de la aplicación de restricciones de talla sobre dimensiones horizontales mínimas de los volúmenes de mineral explotables y de estéril. Dimensiones que se especifican por el número de bloques  $n \times m$  en las direcciones  $x$  e  $y$  en cada banco ( $n=2$  y  $m=2$ ).

Por razones obvias de discreción, he preferido para la exposición presentar sólo los aspectos metodológicos más relevantes acompañados de algunos resultados numéricos, que si bien están modificados, éstos no restan interés ni generalidad a las conclusiones finales alcanzadas.

Por último, quiero indicar que el trabajo fué realizado en colaboración con J. Deraisme del C.G.M.M. de Fontainebleau, que actuó como responsable del mismo.

## 2. SIMULACION CONDICIONAL DEL YACIMIENTO

El volumen modelizado del yacimiento se ha escogido de modo a considerar una cantera piloto en su interior, de dimensiones  $60 \times 165 \times 60 \text{ m}^3$ . Los sondeos interiores están dispuestos según una malla de 15 m de lado; además se ha dispuesto de una aureola complementaria de sondeos que ha servido para el condicionamiento del modelo.

La variable estudiada es la ley en uranio reconstituida de los logs radiométricos sobre pasos de 1,5 m.

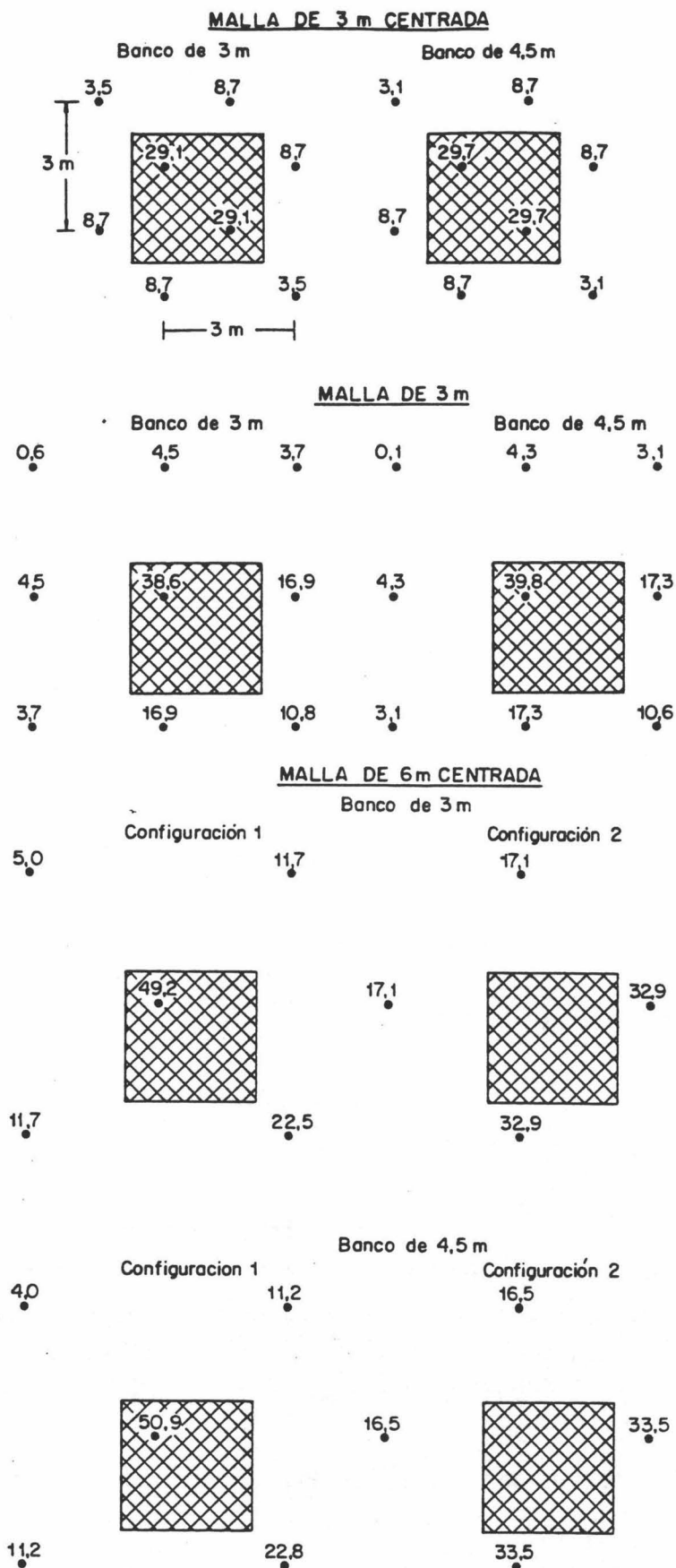


Figura III.40.- Mallas de preexplotación consideradas en el estudio y ponderadores de Krigeage asociados a la información.

Los resultados del análisis estructural han mostrado la existencia de dos estructuras esféricas de alcances 2 m y 11 m en la vertical y una ausencia de correlación entre los datos de sondeos en el plano horizontal. El efecto de pepita observado en la horizontal ha conducido a extrapolar tridimensionalmente las estructuras detectadas sobre la vertical.

El modelo construido se ha hecho sobre dos soportes, puntual y bloque. Los datos puntuales simulados representarán en el estudio de simulación a los datos de leyes de barrenos de preexplotación, que servirán a la selección de los bloques. La metodología de la simulación del yacimiento se ha expuesto con el suficiente detalle en estudios anteriores y en anexo correspondiente, por tanto no se abundará más en su exposición.

La simulación condicional ha proporcionado una información de leyes en uranio ordenada según una malla tridimensional de bloques de talla  $1,5 \times 1,5 \times 1,5 \text{ m}^3$ . Se dispone de las leyes medias simuladas en dichos bloques, que según la metodología de geoestadística aval representarán a las "leyes verdaderas" de los mismos; también, se dispone como información de la ley simulada de una muestra de testigo situada en el centro del bloque que representará a la ley de un testigo de preexplotación.

### 3. ESTUDIO DE SIMULACION DE EXPLOTACION

#### 3.1. INTRODUCCION

El primer paso del estudio ha consistido en reconstituir los datos de bloques y de leyes puntuales necesarios al estudio. Los valores se obtienen por transformación de los datos originales simulados sobre la malla  $1,5 \times 1,5 \times 1,5 \text{ m}^3$ . Así, los bloques  $3 \times 3 \times 3 \text{ m}^3$  y  $3 \times 3 \times 4,5 \text{ m}^3$  estudiados se obtienen por reunión de  $2 \times 2 \times 2$  y  $2 \times 2 \times 3$  bloques elementales, respectivamente. Por otra parte, del fichero de datos simulados puntuales, se han obtenido por selección las tres mallas de información, la malla de 3 m centrada, la malla de 3 m y la malla de 6 m centrada.

Después de la etapa preliminar de elaboración de los datos de base, el proceso siguiente ha consistido en la estimación de las leyes de los bloques  $Z_v^*$ , de alturas 3 m y 4,5 m, por krigeage de los datos simulados,

para cada una de las mallas de preexplotación. Los datos simulados puntuales  $Z_s$ , que intervienen en el krigage, conciernen a la primera aureola de vecindad del bloque estimado y el variograma utilizado el de las leyes puntuales experimentales, pero regularizado sobre soporte de 3 m y 4,5 m.

Si  $l$  es el soporte de referencia del variograma experimental,  $l=1,5$ , se necesita para el krigage la regularización sobre soporte  $2l$  y  $3l$ ; proceso que puede expresarse en términos de la función auxiliar  $F(v)$ , que da el valor medio del variograma en el soporte  $v$  (JOURNEL y HUIGBREGT, 1978):

$$\gamma_l(h) = C_1 \gamma_1(h) + C_2 \gamma_2(h)$$

$$\gamma_{Kl}(h) = C_1 \left( \frac{1-F(Kl)}{1-F(l)} \right) \gamma_1(h) + C_2 \left( \frac{1-F(Kl)}{1-F(l)} \right) \gamma_2(h),$$

para enteros de  $K$ ,  $1$  y  $2$ .

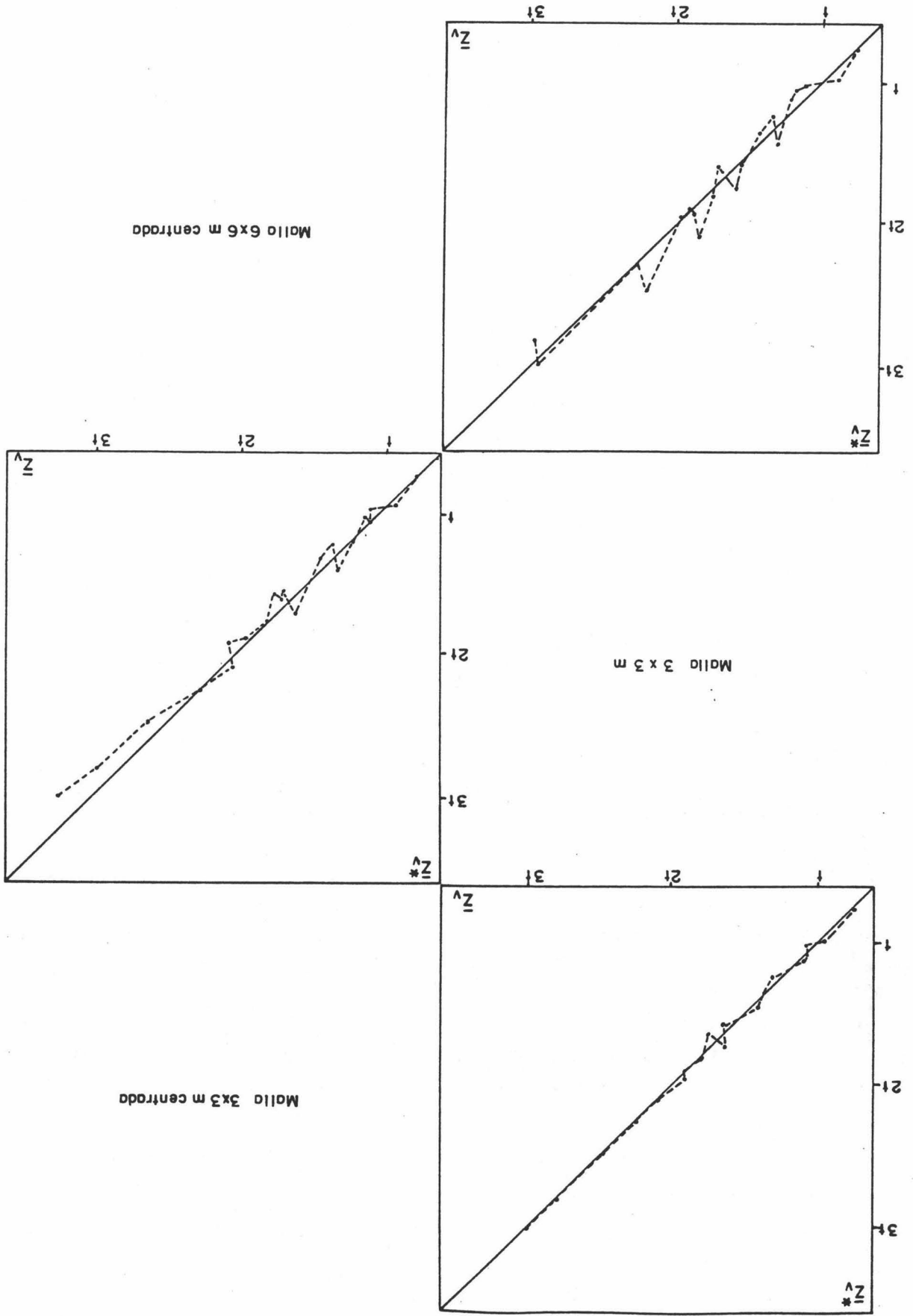
$\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son los modelos de variogramas de base ajustados, de alcances respectivos 2 m y 11 m y con valores de mesetas iguales a la unidad.

En la figura III.40 se dibujan, para cada malla, las configuraciones de krigage retenidas, junto con los ponderadores asociados a la estimación de un bloque no situado en el borde del área estudiada. Se destaca por su importancia el peso del dato interior al bloque, que puede alcanzar hasta un valor del 60 % de la ley estimada. Otra característica importante de la estimación corresponde al error cometido para cada bloque, expresado en la tabla III.18, que oscila entre 0,3 y 1,67, y que en términos relativos significa un error próximo al 75 %. El valor importante del error de estimación obedece a la mala estructuración de las leyes en el yacimiento, puesta de manifiesto por el variograma y coherente con la estructura geológica del yacimiento.

Globalmente, según se observa en la figura III.41 que dibuja la función  $E\{Z_v/Z_v^*\}$ , cabe esperar que la selección sobre el estimador de krigage deducido por la malla más cerrada (3 m centrada) proporcione los mejores resultados, puesto que dicha función se aproxima más a la primera bisectriz, que caracteriza el no sesgo condicional. Los puntos



Figura 555.41.- Comparación a nivel global entre las leyes medias verdaderas y estimadas de los bancos de explotación:  $\{Z^V/Z^*\}$ .



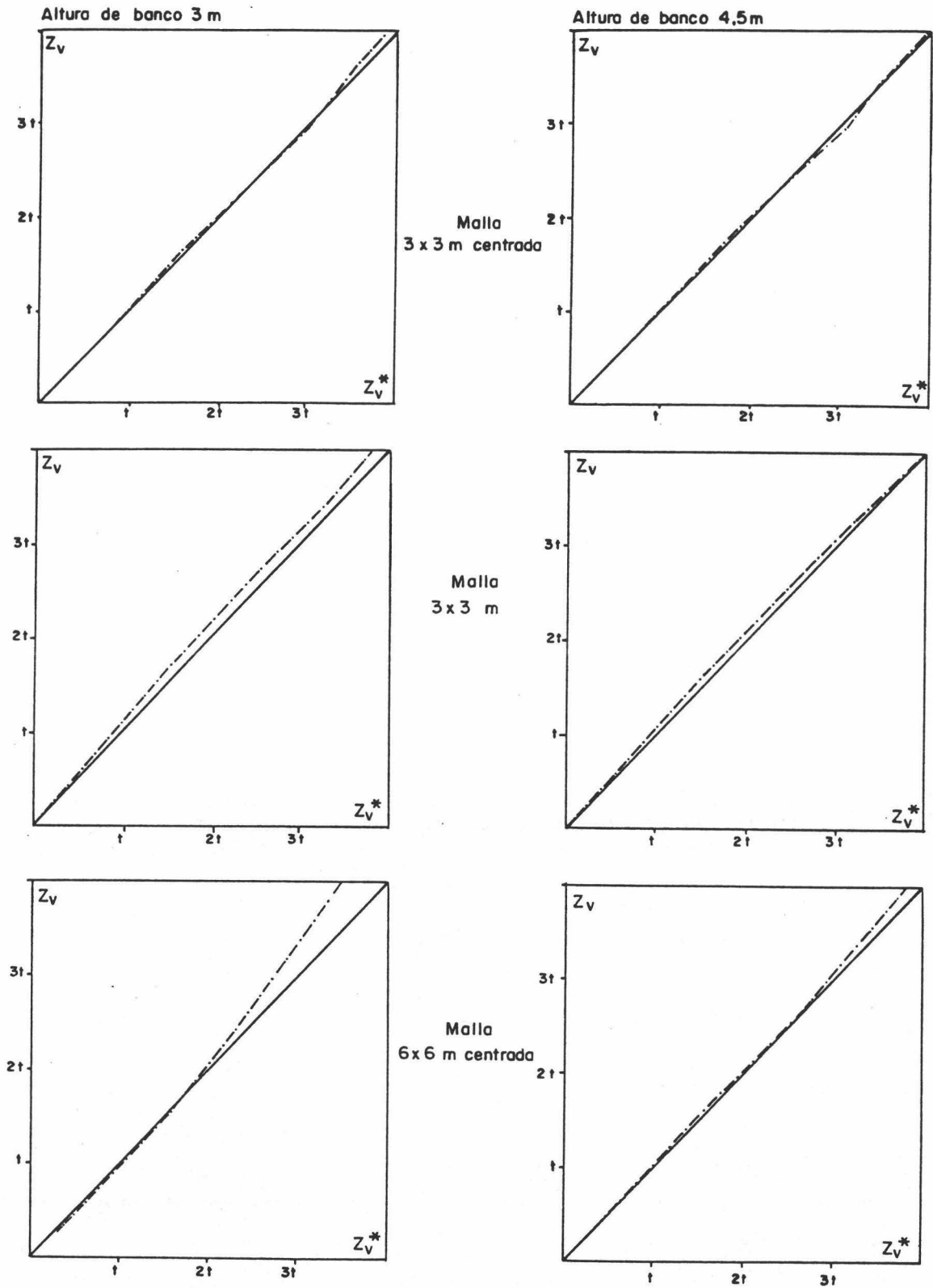


Figura III.42.- Comparación a nivel local entre las leyes medias verdaderas y estimadas de los bloques en un banco:  $E\{Z_v/Z_v^*\}$ .

	Malla de preexplotación			
	3 m centrada	3 m	6 m centrada	
			Conf. 1	Conf. 2
Banco de 3 m (bloque 3x3x3 m <sup>3</sup> )	0,400	0,804	1,175	1,668
Banco de 4,5 m (bloque 3x3x4,5 m <sup>3</sup> )	0,310	0,652	1,084	1,059

Tabla III.18.- Errores de estimación referidos a las tres mallas de preexplotación contempladas en el estudio.

representados corresponden a las leyes medias verdaderas y estimadas de cada banco de explotación, para el bloque de altura 3 m y para cada malla.

Localmente, a nivel de cada banco, las conclusiones alcanzadas son semejantes, como puede verse en la figura III.42 en la que se comparan las leyes verdaderas y estimadas de los bloques, pertenecientes a un banco del yacimiento que ha servido de referencia.

### 3.2. SIMULACION DE LA SELECCION EN MINA

#### 3.2.1. Planteamiento de la selección de bloques

Dos formas posibles de seleccionar los bloques se han estudiado en la mina: la selección libre y la selección con condicionantes geométricos. El objetivo del estudio es conocer el beneficio económico resultante de la práctica en mina de ambos tipos de selección.

##### A) Selección libre

En selección libre se plantea la hipótesis de que todo bloque  $3 \times 3 \times h$  m<sup>3</sup>, donde  $h$  es la altura de banco, es accesible técnicamente, por lo que será tratado como mineral o estéril según su ley media  $Z_v$  sea superior o inferior a la ley de corte aplicada  $z_c$ . Tres leyes de corte  $z_c$  han sido contempladas, que se designarán por  $z_1$ ,  $z_2$  y  $z_3$ .

Un primer tipo de resultado a calcular corresponde a la **selección prevista**. En la selección libre éste viene determinado por el conjunto de  $n$  bloques que cumplen:  $\{Z_{vi}^*, i = 1 \text{ a } n / Z_{vi}^* > z_c\}$ ; a saber, se deduce de aquellos bloques cuyas leyes estimadas  $Z_v^*$  son superiores a  $z_c$ . El cálculo de tal cantidad es interesante puesto que constituye la previsión hecha antes de la explotación, todo se reduce en definitiva al cálculo de la función  $E[Z_v^*/Z_v^* > z_c]$  ( $Z_v^*$  es la ley krigeada de los bloques por los datos simulados de las tres mallas investigadas).

Por otra parte, es sabido que no se envían al lavadero las leyes estimadas  $Z_v^*$  sino las leyes reales de los bloques seleccionados  $Z_v$ , circunstancia que obliga a definir los resultados de la **selección realizada**, que no son otros que los definidos por la función  $E[Z_v/Z_v^* > z_c]$ .

Por último, es conveniente establecer unos resultados de referencia, que sirvan para la comparación de los resultados anteriores. La nueva selección se define como **selección ideal**, basada en la información de las leyes reales de los bloques y que, obviamente, define al máximo que podría recuperarse si se conociese la realidad; la función a calcular esta vez es la esperanza condicional  $E[Z_v/Z_v > z_c]$ . En conclusión, estas funciones indican respectivamente lo que se preve recuperar, lo que se recuperará en la realidad y lo que se podría haber recuperado si se hubiesen conocido las leyes reales.

### *B) Selección con restricciones geométricas*

Este tipo de selección se plantea en dos etapas. En primer lugar se determinan los contornos explotables o fosas que respetan las restricciones de talla impuestas (apertura o talla de las obras de trabajo), y que maximizan el beneficio o margen bruto.

$$B = \begin{cases} P_v \cdot Q \cdot t - T (C_m + C_t) & \text{si } t > t_0 \\ C_e \cdot T & \text{si } t \leq t_0 \end{cases}$$

donde:

$t_0 = C_t/P_v$ , ley que paga los costos de tratamiento del mineral

$t$  = ley media del bloque

$P_v$  = precio de venta del metal  
 $C_m$  = costo de extracción del mineral  
 $C_e$  = costo de extracción del estéril  
 $C_t$  = costo de tratamiento del mineral

La aplicación de la restricción de talla significa que, para toda fosa, todo bloque puede extraerse desplazando un elemento de talla  $mxn$  estrictamente incluido en la fosa. Recíprocamente, todo bloque de estéril puede ser alcanzando desplazando un elemento de talla  $mxn$  estrictamente incluido en él. Como resultado se tiene que las fosas no deben presentar salientes ni entrantes de talla inferior a  $mxn$ .

La segunda etapa de selección minera es libre en el interior de cada contorno explotable; se calcularía entonces las reservas recuperables por aplicación de la ley de corte  $t_o$  a los bloques seleccionados.

La determinación de fosas se realiza en base a las leyes estimadas de los bloques, teniendo en cuenta en la fórmula de valorización del bloque el valor  $Z_v^*$  que sustituye a  $t$ . En cambio, la segunda selección que es libre en el interior de la fosa supone dos casos posibles, que la selección tenga lugar tanto sobre las leyes estimadas  $Z_v^*$  como reales  $Z_v$ ; este último caso correspondería a una hipótesis de selección ideal. Al final, se obtendrán los balances de materias referidos al estéril, al mineral y al metal, a la vez que las valorizaciones económicas correspondientes a cada caso analizado, que a resumidas cuentas son:

- definición de fosas sobre  $Z_v^*$  y previsión de la selección sobre estimación  $Z_v^*$  en el interior de la fosa. El balance económico global vendría dado por

$$\sum_{i=1}^N E\{Z_{vj}^*/Z_{vj}^* > t_o\} \quad v_j \in i \quad i = 1 \text{ a } N \text{ fosas}$$

- definición de fosas sobre  $Z_v^*$  y previsión de la selección sobre realidad  $Z_v$  en el interior de la fosa. El balance económico global vendría dado por la expresión

$$\sum_{i=1}^N E\{Z_{vj}/Z_{vj}^* > t_o\} \quad v_j \in i \quad i = 1 \text{ a } N \text{ fosas}$$

En este caso, también se han calculado, para el conjunto de bancos, los balances de materias correspondientes a las leyes verdaderas de los bloques interiores a las fosas seleccionadas sobre estimadores, para las tres clases de leyes  $z_c: z_1, z_2$  y  $z_3$ .

### 3.2.2. El problema geométrico de determinación de fosas

La primera etapa de la selección con restricciones establece la definición de los contornos de fosas explotables, que suscita un problema de no fácil solución, especialmente si los resultados deben dar un óptimo económico. En la práctica, dos aproximaciones pueden hacerse: los contornos pueden elegirse manualmente por la persona encargada del estudio, o bien por medios automáticos basados en algoritmos geométricos, cuyas soluciones pueden ser eventualmente optimizadas por intervención manual.

#### *A) Determinación manual de contornos de fosa*

La información inicial la componen los valores estimados de los bloques  $3 \times 3 \times 3 \text{ m}^3$  o  $3 \times 3 \times 4,5 \text{ m}^3$  y la función de valorización correspondiente a cada uno de ellos. Según se ve en el ejemplo de la figura III.43, se han representado los bloques por uno de los cinco caracteres gráficos escogidos para indicar las clases de leyes estimadas, que conforman la gráfica de base para la determinación de los contornos explotables.

El proceso de selección de fosa puede facilitarse por medios automáticos de digitalización de los contornos, a través de pantallas gráficas o de mesas de digitalización. Los contornos así elegidos pueden ser estudiados a partir de programas que exploran los ficheros de datos de leyes. El proceso se repetirá para cada criterio adoptado, según modificaciones sugeridas a vista de los planos de leyes de los bancos, hasta alcanzar finalmente la mejor solución de todas las analizadas.

Los contornos así obtenidos tendrán en consideración las restricciones geométricas, pero no presentan en sentido estricto un valor óptimo global. Por esta razón, y también debido al carácter repetitivo del trabajo, es lógico que se hayan buscado algoritmos automáticos para la determinación de las fosas explotables.

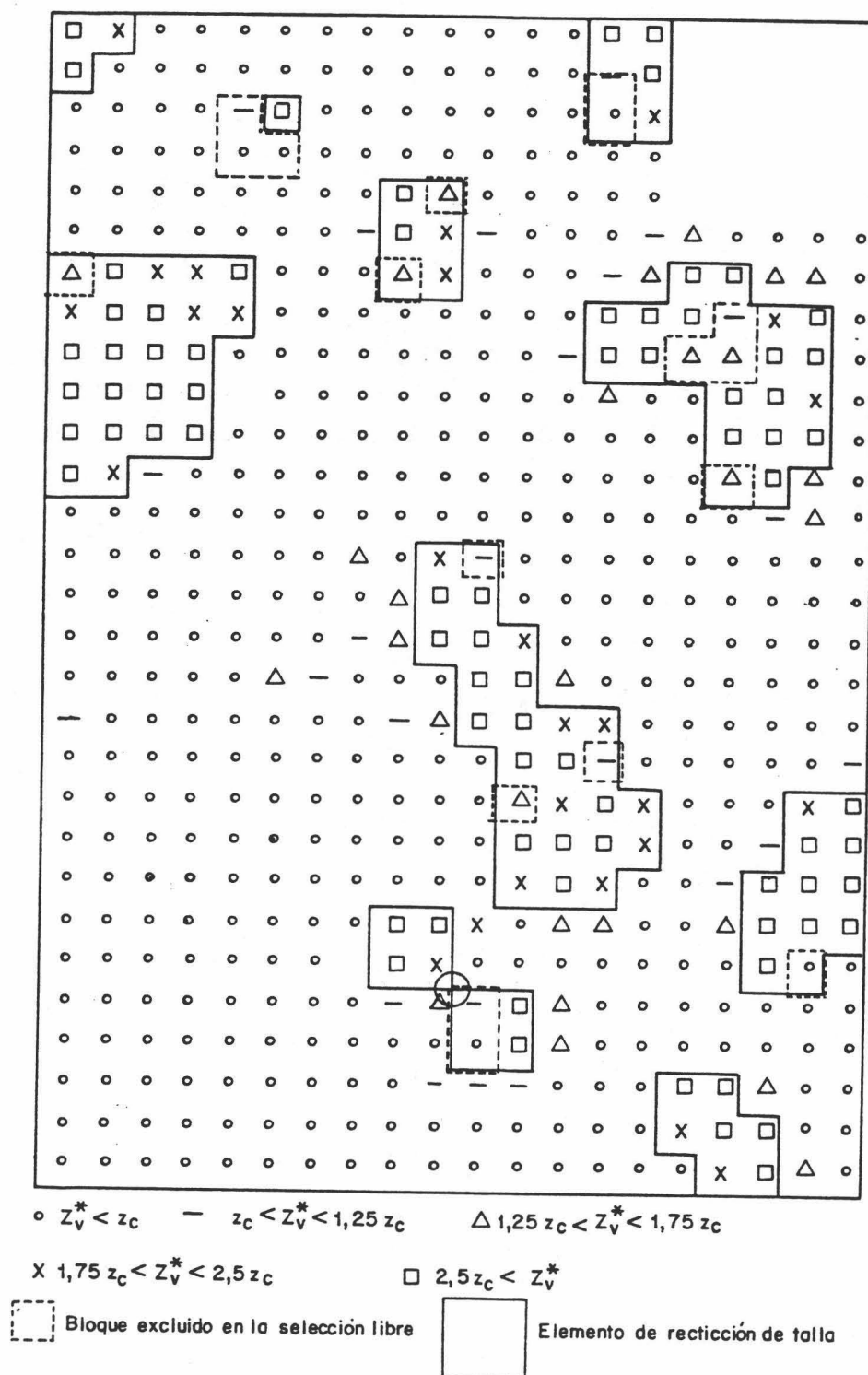


Figura 333.43.- Contornos obtenidos por selección libre y con restricciones geométricas de talla en bloques 2x2 en un banco de explotación, este último obtenido por el algoritmo morfológico descrito en este apartado.

*B) Determinación de los contornos de fosa por algoritmos morfológicos*

La selección con restricciones implica la explotación de bloques estériles y también dejar in situ ciertos bloques de mineral ricos, de modo que sean respetadas las restricciones geométricas impuestas. Se trata de optimizar el valor económico resultante de este proceso, basándose para ello en la obtención automática de las fosas explotables.

Actualmente, las investigaciones que se realizan en tal sentido van dirigidas a la búsqueda de algoritmos que proporcionen, de modo automático, los contornos de fosa explotables. Pretendiéndose que las valorizaciones económicas hechas sobre ellas se aproximen al óptimo y que respeten las restricciones de talla establecidas. Dentro de dichos algoritmos geométricos destacan los desarrollados en base a los conceptos de morfología matemática. Así, el algoritmo utilizado en este estudio tiene su base conceptual en las transformaciones de imágenes binarias de la morfología matemática de MATHERON (1965 b y 1975 d) y SERRA (1982); por aplicación de las operaciones básicas de dilatación y erosión y las operaciones combinadas de abertura y cierre de conjuntos. El desarrollo de la metodología para aplicaciones mineras se debe a DERAISME y de FOUQUET (1984 a), cuyos programas informáticos han sido utilizados para la elaboración del trabajo.

Las restricciones geométricas examinadas aquí son de dos tipos, restricciones de talla debido a las dimensiones necesarias para la abertura de trabajos de explotación y restricciones de continuidad ligadas al avance de la explotación. A continuación se examinan estos problemas ligados a las restricciones geométricas; para ello se ha tomado como referencia el trabajo anteriormente citado.

El problema geométrico de talla encuentra una respuesta inicialmente satisfactoria por las transformaciones de morfología matemática, que se describirán más tarde. Sea el conjunto inicial de bloques A de mineral dado en la figura III.44, que cumplen  $Z_v > z_c$ , y considerese una restricción de talla de abertura de trabajo de dimensiones equivalentes a  $2 \times 2$  bloques en x e y (elemento estructurante). Está claro que el sector no es explotable en su totalidad bajo tal restricción, así se distingue en el contorno cabos de mineral que sólo pueden extraerse si se añaden bloques de estéril que lo rodean. Por otra parte, en el interior del mineral hay bloques



de estéril que sólo pueden abandonarse si se añaden bloques de mineral o bien si son tomados como mineral, dependiendo del balance económico resultante de cada caso (los bloques referenciados son, respectivamente,  $v_0$  y  $v_1$ ).

La solución metodológica propuesta por los mencionados autores consiste en interpretar a dicho conjunto de bloques como una imagen binaria y en operar sobre ella del siguiente modo, suprimiendo las partes mineralizadas de dimensiones inferiores a las supuestas explotables y añadiendo las partes estériles demasiado pequeñas para poder quedar aisladas del mineral. Las operaciones morfológicas necesarias para ello consisten en una **abertura** y luego un **cierre** del conjunto inicial, por un elemento estructurante de dimensiones fijadas por las restricciones de talla. La apertura consiste en una erosión del conjunto inicial seguida de una dilatación, mientras que el cierre consiste en el proceso inverso, primero dilatación y después erosión.

Las operaciones morfológicas de apertura y cierre de un conjunto inicial pueden verse en detalle en la obra de SERRA (1982), básicamente representan los conceptos siguientes: la apertura de un conjunto por un elemento estructurante está formado por el conjunto de elementos estructurantes incluidos en el conjunto inicial. El cierre de un conjunto se reduce a la apertura del conjunto complementario y tomar el complementario del resultado obtenido.

La determinación del contorno explotable se hace por aplicación sucesiva de las transformaciones de apertura y cierre del conjunto inicial. De modo gráfico, he esquematizado tales transformaciones morfológicas del proceso en la figura III.44.

Las restricciones de continuidad están ligadas al avance de la explotación en el interior de la fosa; en efecto puede ocurrir que los resultados de las operaciones no sean estrictamente eficaces desde el punto de vista minero (no es así desde el punto de vista morfológico). Puede ocurrir, como se ve en la figura III.43, que dos fosas conexas tengan sólo una esquina común y que por tanto aparezcan problemas de continuidad entre las fosas. En este caso se contempla la posibilidad de una solución manual, creando un paso de dimensiones suficientes en el punto en cuestión y comprobando los resultados de cada una de las posibilidades, reteniéndose posteriormente aquella solución que da el mejor resultado económico.

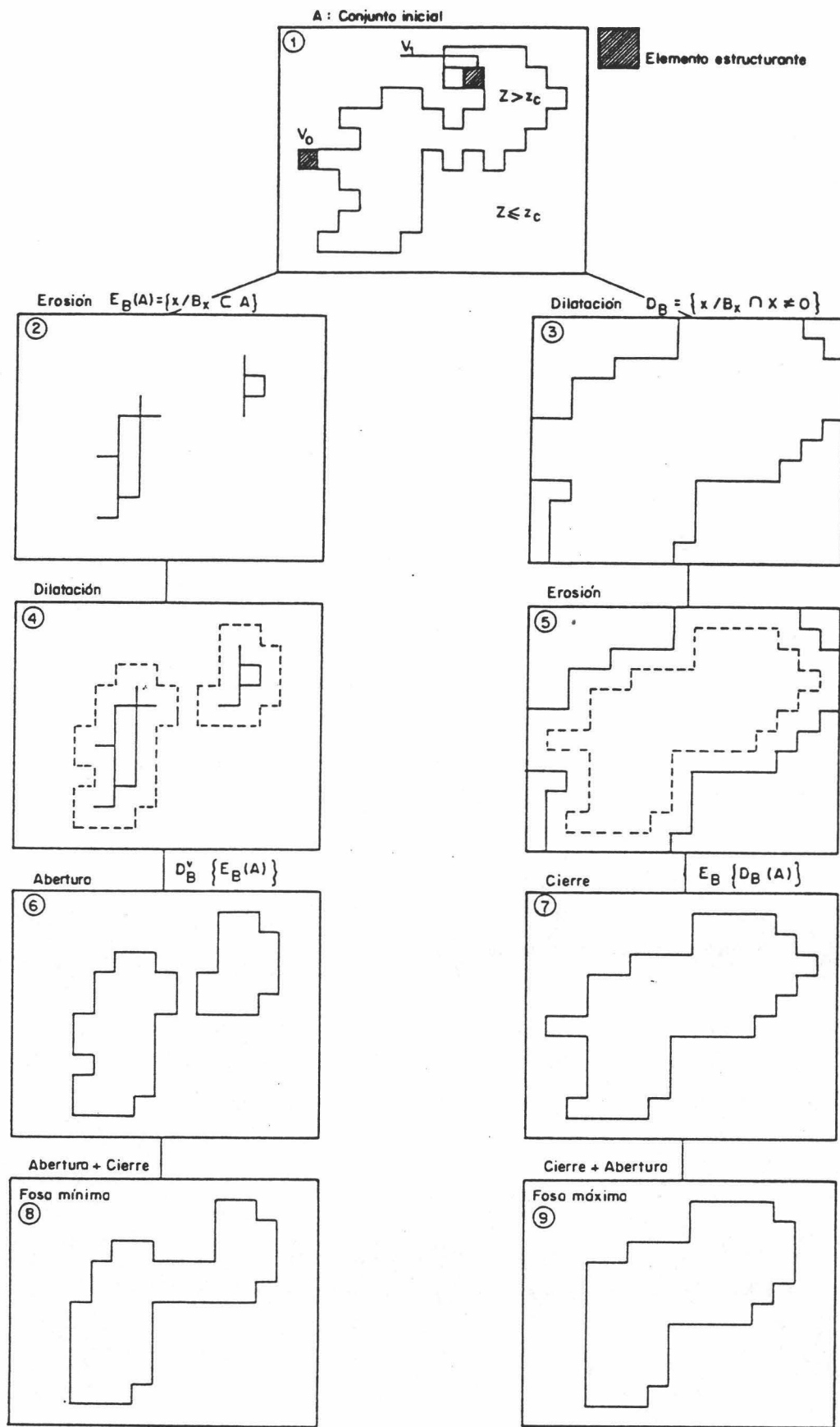


Figura III.44.- Ejemplo de apertura y cierre de un conjunto A por el elemento estructurante  $B/B_x$ , trasladado de B en x;  $\bar{B}$ , complementario de B).

Se concluye pues, que los resultados de las operaciones geométricas pueden llegar a garantizar el cumplimiento de las restricciones geométricas enunciadas, pero no dan en todo rigor la solución económica satisfactoria. Así, si se ve la referida figura III.44, se tiene que la operación de abertura ha eliminado bloques de mineral como el anotado por  $v_0$  que no satisface las restricciones, independientemente de su ley. Está claro, por tanto, que hay que mejorar en parte los resultados de las operaciones morfológicas de modo que se llegue a un mejor balance económico global. En tal sentido, puede suceder, por ejemplo, que la ley de bloque  $v_0$  sea alta y resulte entonces más rentable añadir los bloques de estéril que lo rodean que eliminarlo.

Por las razones expuestas, DERAISME y de FOUQUET (1984 a) han sugerido como etapa posterior, la aplicación de algoritmos de optimización económica que examinan los bloques de mineral rechazados o de estéril añadidos en las operaciones geométricas, de modo que la solución final respete las restricciones de talla y produzca un mayor beneficio.

Así pues, los contornos finalmente obtenidos cumplen las restricciones de talla en  $x$  e  $y$ , unidades seleccionadas como mineral o abandonadas si son de estéril, y son óptimos según los criterios económicos escogidos, por ejemplo el margen bruto.

### 3.2.3. Presentación de algunos resultados

Por razones obvias, los resultados que se presentan seguidamente se dan en porcentajes en relación al valor máximo escogido de referencia. Las tres leyes de corte a las que se hace referencia cumplen  $z_1 > z_2 > z_3$ .

#### *A) Selección libre*

a. Selección libre: comparación respecto a los valores máximos absolutos obtenidos para las tres selecciones estudiadas.

		Selección prevista: $E\{Z_v^*/Z_v^* > t_c\}$								
		Malla 3 m centrada			Malla 3 m			Malla 6 m centrada		
$t_c$	Banco	$T_m$	Q	$t_m$	$T_m$	Q	$t_m$	$T_m$	Q	$t_m$
$z_1$	3 m	94,1	97,3	63,6	100	100	61,5	95,5	96,2	60,8
$z_2$		71,1	89,3	77,3	75,8	91,6	74,3	73,4	87,9	73,7
$z_3$		51,4	79,7	95,4	54,9	81,3	97,6	53,0	78,0	90,5
$z_1$	4,5 m	95,5	94,4	60,8	99,3	97,0	60,0	96,8	93,0	59,1
$z_2$		71,4	86,1	74,1	75,9	88,9	72,0	73,5	84,9	71,0
$z_3$		52,3	76,9	90,3	54,9	78,6	88,0	53,0	74,9	86,9

 $T_m$  = mineral

Q = metal

 $t_m$  = ley media

		Selección realizada: $E\{Z_v/Z_v^* > t_c\}$								
		Malla 3 m centrada			Malla 3 m			Malla 6 m centrada		
$t_c$	Banco	$T_m$	Q	$t_m$	$T_m$	Q	$t_m$	$T_m$	Q	$t_m$
$z_1$	3 m	94,1	97,0	63,3	100	96,1	59,1	97,3	92,0	58,1
$z_2$		71,1	89,2	77,2	75,8	88,7	71,9	73,4	83,4	69,8
$z_3$		51,4	80,1	95,9	54,9	79,3	88,9	53,0	73,7	85,4
$z_1$	4,5 m	95,6	95,1	61,2	99,4	94,0	58,2	96,8	90,0	57,2
$z_2$		71,4	86,9	74,8	75,9	86,1	70,1	73,5	82,1	68,7
$z_3$		52,3	77,9	91,6	54,9	77,2	86,4	53,0	72,2	84,8

		Selección ideal: $E\{Z_v/Z_v^* > t_c\}$					
		Banco 3 m			Banco 4,5 m		
$t_c$		$T_m$	Q	$t_m$	$T_m$	Q	$t_m$
$z_1$		90,3	90,3	66,9	91,5	95,6	64,2
$z_2$		69,2	90,9	89,8	69,2	87,8	61,7
$z_3$		50,1	81,6	100	49,9	78,4	96,5

b. Selección libre: comparación de los resultados de la selección prevista y realizada con respecto a la selección ideal.

$t_c$ Banco		Comparación selección prevista/selección ideal (%)								
		Malla 3 m centrada			Malla 3 m			Malla 6 m centrada		
		$T_m$	Q	$t_m$	$T_m$	Q	$t_m$	$T_m$	Q	$t_m$
$z_1$		104,2	99,0	95,0	110,7	101,7	91,9	107,8	97,9	90,8
$z_2$	3 m	102,6	98,2	95,7	109,6	100,8	91,9	106,1	96,7	91,2
$z_3$		102,5	97,7	95,4	109,5	99,7	97,6	105,6	95,7	90,5
$z_1$		104,4	98,9	94,7	108,6	101,5	93,4	105,8	97,3	92,0
$z_2$	4,5 m	103,1	98,1	95,1	109,7	101,2	92,3	106,2	96,6	91,1
$z_3$		104,8	98,1	93,6	110,1	100,4	91,2	106,1	95,6	90,1
Media		103,6	98,3	94,1	109,7	100,8	93,1	106,3	96,6	91,0

$t_c$ Banco		Comparación selección realizada/selección ideal (%)								
		Malla 3 m centrada			Malla 3 m			Malla 6 m centrada		
		$T_m$	Q	$t_m$	$T_m$	Q	$t_m$	$T_m$	Q	$t_m$
$z_1$		104,0	98,7	94,7	110,7	97,8	88,3	107,8	93,6	86,8
$z_2$	3 m	102,6	98,1	95,6	109,6	97,5	89,0	106,1	91,7	86,4
$z_3$		102,5	98,2	95,9	109,5	97,3	88,9	105,8	90,3	85,4
$z_1$		104,4	99,5	95,3	108,6	98,3	90,5	105,8	94,2	89,0
$z_2$	4,5 m	103,1	98,9	95,9	109,7	98,1	89,9	106,2	93,5	88,1
$z_3$		104,8	99,4	94,8	110,1	98,6	89,5	106,1	92,2	87,8
Media		103,6	98,8	95,4	109,7	97,9	89,4	106,3	92,6	87,3

c. Selección libre: diferencias relativas en % de los resultados realizados y previstos en la selección  $\{(r-p)/r\} \times 100$ . El signo menos denota que se preve más beneficio que el que se obtendrá en la realidad.

$t_c$ Banco		Comparación selección realizada/selección prevista								
		Malla 3x3 centrada			Malla 3x3			Malla 6x6 centrada		
		$T_m$	Q	$t_m$	$T_m$	Q	$t_m$	$T_m$	Q	$t_m$
$z_1$	3 m	0	- 0,3	- 0,3	0	- 4,0	- 4,0	0	- 4,6	- 4,6
$z_2$		0	- 0,1	- 0,1	0	- 3,3	- 3,3	0	- 5,5	- 5,5
$z_3$		0	0,5	0,5	0	- 2,4	- 2,5	0	- 5,9	- 5,9
$z_1$	4,5 m	0	0,6	0,6	0	- 3,1	- 3,2	0	- 3,3	- 3,3
$z_2$		0	0,8	0,8	0	- 3,2	- 2,6	0	- 3,4	- 3,4
$z_3$		0	1,3	1,3	0	- 1,8	- 1,8	0	- 3,6	- 2,5
Media		0	0,5	0,5	0	- 3,0	- 2,9	0	- 4,3	- 4,3

*B) Selección con restricciones geométricas 2x2 bloques en x e y*

Se han aplicado dos leyes de corte, la primera o "ley de fondo", para definir el conjunto de bloques inicial ( $t_f = 1,4\%$ ) sobre el que se aplicará el algoritmo geométrico; la segunda o "ley de día", para selección de bloques en el interior de la fosa ( $t_o$ ). La ley de corte  $t_f$  paga todos los costos de extracción y de tratamiento, y la ley de corte  $t_o$  paga sólo los costos de extracción ( $t_o = 1,2\%$ ). Así pues en el interior de la fosa habrá bloques de leyes superiores a  $t_f$  y bloques que por razones geométricas han sido incluidos y cuyas leyes son inferiores a  $t_f$ ; entre estos últimos habrá bloques cuya ley es superior a  $t_o$  e inferior a  $t_f$ . Así, el estéril en cada losa estará constituido por los bloques de leyes inferiores a  $t_o$  (ley de corte de tratamiento del mineral).

- a. Definición de fosas sobre la base de los valores estimados y previsión sobre los valores estimados, del resultado de la segunda selección efectuada sobre los estimadores:  $E\{Z_v^*/Z_v^* > t_o\}$  hipótesis de selección prevista (los valores expresados en % son relativos a los valores máximos obtenidos en las opciones a y b de este apartado.  $T_e$  = estéril).

Banco	Malla	$T_m$	$T_e$	Q	$t_m$	Valor
3 m	3 m centrada	93,0	100	97,0	100	98,6
	3 m	100	54,6	100	95,9	100
	6 m centrada	97,1	38,4	96,3	95,0	95,9
4,5 m	3 m centrada	92,7	95,2	93,1	96,0	93,0
	3 m	99,9	59,2	96,9	92,9	95,3
	6 m centrada	96,5	31,5	92,3	92,1	90,9

b. Definición de fosas sobre la base de los valores estimados y previsión sobre los valores verdaderos, del resultado de la segunda selección efectuada sobre los valores verdaderos:  $E\{Z_v/Z_v > t_o\}$ , hipótesis de selección ideal (los valores expresados en % son relativos a los valores máximos obtenidos en las opciones a y b de este apartado).

Banco	Malla	$T_m$	$T_e$	Q	$t_m$	Valor
3 m	3 m centrada	99,1	69,3	100	93,9	100
	3 m	95,9	85,4	98,3	95,3	98,6
	6 m centrada	85,4	100	91,2	100	93,5
4,5 m	3 m centrada	100	63,8	96,8	90,0	95,0
	3 m	98,3	79,8	95,4	90,2	93,4
	6 m centrada	87,4	89,2	89,8	95,5	89,9

La comparación relativa entre las dos opciones anteriores a y b es.,

Banco	Malla	Comparación selección prevista/selección ideal (%)				
		$T_m$	$T_e$	Q	$t_m$	Valor
3 m	3 m centrada	110,5	55,8	101,6	91,9	98,4
	3 m	122,8	24,7	106,6	86,8	101,2
	6 m centrada	133,9	14,8	109,8	82,0	102,3
4,5 m	3 m centrada	109,2	57,7	100,8	92,4	97,6
	3 m	119,7	28,7	106,4	88,9	101,7
	6 m centrada	129,9	13,7	108,1	83,2	100,9

c. Balance global de materias (mineral, metal, leyes) correspondientes a los bloques verdaderos en el interior de las fosas seleccionadas sobre estimadores dosificados en tres clases de leyes  $z_1$ ,  $z_2$  y  $z_3$ .

		Banco 3 m			Banco 4,5 m		
		3 m centrada	3 m	6 m centrada	3 m centrada	3 m	6 m centrada
$T_m$	$> z_1$	98,9	95,4	85,6	100	98,6	88,1
	$> z_2$	87,2	84,4	74,8	88,2	86,4	77,2
	$> z_3$	70,6	68,6	61,6	70,5	68,1	62,9
Q	$> z_1$	98,7	98,2	91,8	96,8	95,5	90,0
	$> z_2$	96,8	95,2	88,9	93,6	92,2	87,0
	$> z_3$	90,5	89,2	83,9	87,0	85,3	81,6
$t_m$	$> z_1$	77,4	75,5	78,7	71,1	71,1	74,9
	$> z_2$	81,4	82,7	87,3	77,9	78,3	82,7
	$> z_3$	94,1	95,4	100	90,5	92	95,2

(valores expresados en %, respecto a los valores máximos observados)

*C) Comparación entre selección libre y selección con restricciones*

La comparación se ha hecho a nivel de resultados previstos e ideales. Los resultados de referencia en selección libre corresponden a la ley de corte de fondo 1,4 %.

		Comparación selección con restricciones/selección libre					
Banco	Malla	Previsión			Ideal		
		$T_m$	Q	$t_m$	$T_m$	Q	$t_m$
3 m	3 m centrada	97,7	98,6	100,9	90,7	95,5	105,0
	3 m	98,4	99,1	100,6	87,9	93,7	106,6
	6 m centrada	98,8	99,3	100,6	78,2	87,5	111,8
4,5 m	3 m centrada	97,0	98,1	101,2	91,6	95,5	104,2
	3 m	98,3	99,0	100,7	90,1	94,1	104,5
	6 m centrada	98,0	102,4	104,5	80,1	88,6	110,6



### *D) Conclusiones*

Evidentemente es complejo interpretar en detalle todos estos resultados numéricos surgidos de la simulación, sin duda alguna ello debe ser tarea conjunta del técnico de proyecto y del geoestadístico, quien debe facilitar la mejor comprensión de tal voluminosa cantidad de números. Por esta razón no voy a entrar en consideraciones acerca de las implicaciones económicas de estos resultados en la explotación, me limitaré exclusivamente a comentarlos desde el punto de vista geoestadístico, que a la postre es la óptica que más me interesa.

Con referencia a la selección libre se observa en primer lugar el efecto de soporte sobre la cantidad de metal recuperado, sea cual fuese el tipo de selección estudiada; este efecto se observa también para las tres clases de leyes de corte aplicadas. La comparación de resultados entre mallas nos permite deducir que, globalmente, la malla 3 m centrada da los mejores resultados si se toman como referencia los resultados realizados e incluso los ideales. En este caso, parece que la malla 3 m obtiene como resultados previstos una cantidad de metal media más próxima a la ideal, que la proporcionada por la malla 3 m centrada. Si se observa en detalle, tal efecto se produce a costa de una mayor sobreestimación del mineral y una mayor subestimación de la ley media recuperada. En concreto, se observa, si se hace la comparación entre resultados realizados y previstos, que las dos mallas indicadas dan resultados muy parecidos aunque son mejores los correspondientes a la malla más cerrada (efecto de información).

El efecto de restricciones geométricas se detecta claramente en la comparación de los resultados obtenidos con los de selección libre; se tiene sensiblemente una menor recuperación de metal y de mineral, con una diferencia que crece con la malla estudiada y con el tamaño de bloque de selección (comparación de resultados de la selección ideal).

## RESUMEN Y CONCLUSIONES

A modo de recapitulación, y antes de pasar a la presentación de las conclusiones finales, conviene recordar que el objetivo básico de la tesis ha sido presentar, describir y aplicar un conjunto de modelos, de métodos y de "tours de main" a veces poco ortodoxos (expresión ésta, tomada de G. Matheron -Estimer et Choisir-) que han ido apareciendo a lo largo de los distintos capítulos y que han mostrado sobradamente su plena capacidad para el estudio de los recursos minerales, desde la etapa inicial de preexplotación hasta la de seguimiento de la mina día a día.

Por tanto, la Geoestadística constituye una alternativa eficaz, una herramienta básica, en el estudio y desarrollo de explotaciones mineras, indistintamente de que sean metálicas o no o explotadas a cielo abierto o en subterráneo. Y, en un sentido más extenso, debe servir de apoyo a la investigación geológica-minera cuantitativa que se lleva a cabo en nuestro país, que, es mi opinión, respecto al tema que se trata está un tanto olvidada, quizás debido a una cierta ignorancia.

En otro sentido, la supuesta dificultad matemática que repetida e infundadamente se ha achacado a estos métodos no debe constituir óbice

para su aplicación diaria en tareas de planificación en minas, o en centros de investigación asociados que colaboren con éstas en las indicadas labores.

Hechos los comentarios previos, se llega así a la obligada tarea de hacer síntesis, en este apartado, de los resultados y conclusiones más importantes surgidos de los estudios realizados, que hacen referencia a aspectos tanto metodológicos como prácticos de los mismos.

Puesto que sería extensa la lista de conclusiones y de resultados que resultarían de pormenorizar cada método descrito o cada aplicación realizada, que, por otro lado, en gran medida, he intentado dar a conocer en el transcurso de la exposición de la memoria, al menos los más importantes de ellos, haré seguidamente un resumen básico de aquellos referidos a las dos partes distinguidas en el desarrollo de un proyecto de mina, la preexplotación y la explotación.

#### PREEXPLORACION

En el estudio general de viabilidad del proyecto minero se llevan a cabo trabajos y actividades de naturaleza distinta, todos ellos visan el objetivo del análisis de las condiciones de explotabilidad, tanto técnicas como económicas, de la futura mina. Particularmente, la Geoestadística se muestra interesante de aplicar en muchos de estos estudios, fundamentalmente relacionados con los trabajos de: prospección minera, reconocimiento geológico, estimación de recursos y reservas, diseño de explotación, estudio del medio geológico y, finalmente, estudio económico del proyecto.

- En la prospección, se aporta un nuevo enfoque a la cuestión del reconocimiento e interpretación de anomalías, problema delicado resuelto por un análisis probabilístico.

Tomando como punto de partida inicial los resultados del análisis variográfico, se llega a separar por distintos métodos -Validación cruzada, Análisis Krigeante y Krigeage Disyuntivo-, lo que es el fondo de variación regional de la componente de anomalía, caracterizada por una estructura con variación local y errática.

En esta etapa, la cartografía de variables espaciales por el método de krigeage es una aplicación tradicional con gran interés práctico, pues además de obtener la distribución de líneas de isovalores acorde con la estructura del fenómeno, proporciona la evaluación de la incertidumbre que afecta a dicho mapa, consecuencia lógica de estimar. Tal estudio es completamente automatizable, y a tal efecto se indicaron las etapas básicas de su desarrollo.

- En la etapa de reconocimiento secuencial del yacimiento se dan diversas aplicaciones geoestadísticas, relacionadas principalmente con la determinación de la geometría de la mineralización y con la estimación de sus valores medios, como su ley media, potencia, recursos totales...

La optimización de mallas de sondeos es una aplicación muy frecuente en esta etapa; se ha demostrado que puede esperarse de ella un ahorro sustancial en la inversión y, en todo caso, un aumento de la ganancia de la información obtenida para el mismo presupuesto. En este sentido, jugarán un papel decisivo los resultados del análisis variográfico, especialmente si ha definido posibles anisotropías geométricas en el comportamiento de las leyes.

- La estimación de los recursos y reservas, actividad prioritaria de toda empresa minera, encuentra la solución adecuada a través de los diversos, pero no distintos, métodos de krigeage, enunciados como un estimador, lineal o no, que cumple tal o cual condición de no sesgo.

La estimación global de recursos puede abordarse como un caso particular de la estimación local, por simple composición o agrupación de las leyes estimadas de los bloques o paneles de producción. No ocurre así, con el error de estimación global que debe estudiarse en base a fundamentos diferentes, a partir de los principios de aproximación.

La influencia del error geométrico sobre los resultados de la estimación global -previsión- puede llegar a ser muy importante, según cada caso estudiado.

La estimación local de los recursos se llevará a cabo sin dificultad mayor por simple krigeage de bloques. En tal sentido, dos consideraciones

deben hacerse: la primera, en orden a obtener un mejor beneficio, con la búsqueda de un plan de krigeage adecuado en el cual se tengan en cuenta las posibles simetrías, puestas de manifiesto por los ponderadores. La segunda, viene motivada por la actitud de aquellos que ante todo se fijan en los aspectos crematísticos de las aplicaciones, manifestándoles que los costos de un krigeage de bloques no son mucho más onerosos que los ocasionados por otros métodos, p.e. la triangulación de datos de sondeos, pero en cambio su aplicación es mucho más ventajosa y consigue, a fin de cuentas, que es lo que les interesa, un mayor beneficio económico.

En lo referente al estudio del recuperable global y local, en el caso de selección libre, debido a la influencia de los factores técnicos y económicos que ello implica -tamaño de bloque y ley de corte-, se requiere la ayuda de modelos de estimación más sofisticados, como es el caso del Krigeage Disyuntivo (no es el único método posible) y de una transformación previa de los datos, de la que he dado cuenta en repetidas ocasiones. Con ellos se puede establecer correctamente la curva de recuperación tonelaje/ley, para el conjunto del depósito o por sectores que convengan para la planificación a corto, medio o largo plazo.

Un aspecto muy importante debe señalarse en todas las aplicaciones relacionadas con la estimación (de recursos o reservas) -primera aplicación básica de la Geoestadística-, éste se corresponde con el término, muy usual, de error de estimación y que cuantifica la incertidumbre asociada al valor estimado, por supuesto desde la óptica probabilística del modelo constitutivo que nos hemos impuesto. Este parámetro, junto al tamaño de bloque empleado en la estimación, constituyen dos buenos criterios si se quiere hacer una clasificación de las reservas de cara a una planificación a largo plazo.

- El problema de optimización del diseño de la corta final encuentra una solución satisfactoria con el método de parametrización técnica de reservas, que busca el óptimo económico discerniendo entre todos los proyectos técnicamente realizables aquél que es el más rentable. Para lo cual busca maximizar la función de beneficio establecida para tal fin, que depende a su vez de los parámetros técnicos escogidos, leyes de corte.

Con este método se consigue definir globalmente, para el conjunto del yacimiento, la relación tonelaje/ley de corte, al tiempo que se consideran las restricciones geométricas de la explotación, como la altura del banco, el tamaño del bloque...

- El medio geológico de la mineralización constituye un factor preponderante a la hora de estudiar las condiciones de explotabilidad de un yacimiento. En él concurren y actúan muchos elementos y circunstancias susceptibles de análisis geoestadístico. Conviene destacar entre las características a estudiar en el medio geológico, el volumen y naturaleza del recubrimiento de estéril, por su importancia en el impacto ambiental de la mina; las propiedades geotécnicas de la roca encajante, que actúan sobre la estabilidad del talud; y los parámetros hidrodinámicos de los acuíferos presentes, de interés para el drenaje de mina. Las aplicaciones correspondientes pueden consistir en simples estimaciones de valores puntuales o medios.

- Es importante para el analista de proyecto conocer que en los estudios económicos de yacimientos, la Geoestadística proporciona estimaciones óptimas de valores de parámetros -reservas, error de estimación, ley media,...- que tienen fuertes implicaciones económicas en sus estudios. No puede hacerse un análisis del riesgo del proyecto basándose para ello exclusivamente en valores o en distribuciones supuestas o mal inferidas. Un tal estudio tendrá un alcance mucho más completo si en él intervienen las distribuciones de probabilidad proporcionadas por los métodos en cuestión.

#### SEGUIMIENTO DE LA EXPLOTACION DIA A DIA

En la etapa de explotación es primordial llevar un control de la mina, con un seguimiento de la misma en el tiempo lo más preciso, para lo cual se fomentan actividades planificadoras a corto, medio y largo plazo, que casi siempre tropiezan con dificultades ocasionadas con la dispersión de la calidad del mineral.

La Geoestadística aval ha abierto el camino adecuado para el análisis de tales problemas, por medio de la metodología de simulación de explotación que es suficientemente amplia para que pueda desarrollarse cualquier tipo de estudio al amparo de sus métodos. El punto crucial de tal metodo-

logía estriba en la construcción del modelo numérico de yacimiento, que es posible gracias al método de simulación condicional -segunda aplicación básica de la Geoestadística-. Con él se sustituye el yacimiento real desconocido por un modelo equivalente, construido de forma precisa, y que caracteriza la dispersión in situ de las leyes de los bloques de selección; de aquí su interés en estudios de planificación, por ejemplo en estudios de mezclas de mineral de diferentes calidades, en estudios de homogeneización, en estudios de simulación de la selección a partir de mallas de control diferentes..., en definitiva en aquellos estudios relacionados con los procesos de producción que se aplican o se piensan aplicar en la realidad minera.

- El método de simulación condicional reúne las condiciones adecuadas de operatividad y de manejo para la obtención del modelo numérico de yacimiento. Su validez está suficientemente contrastada y refrendada por los numerosos estudios elaborados.

En los casos donde se precisa simular la geometría de la mineralización en función de un valor de corte, puede aplicarse el método descrito de simulación de la indicatriz. Aunque no he tenido ocasión de aplicarlo en repetidas ocasiones, los primeros resultados de él obtenidos son alentadores, con un modelo de yacimiento que refleja las características geométricas de la variable simulada  $Z \geq z_c$ .

El nuevo algoritmo de simulación presentado obtiene resultados parecidos a los de otros métodos clásicos, con la ventaja adicional de simular al mismo tiempo sectores diferentes de un mismo depósito.

Es correcto interpretar al modelo numérico como una versión posible de la realidad, pero a diferencia de ésta es conocida en todos los puntos o bloques. Por consiguiente, cabe esperarse respuestas similares del modelo y de la realidad frente a la actuación de un mismo proceso minero, de lo cual se interpreta que el modelo puede usarse como herramienta de previsión de resultados.

- En gran medida, los problemas de planificación pueden abordarse por simulación de la selección en mina, ya que en ésta concurren circunstancias directamente relacionadas con la toma de decisiones. Para analizarlos

se debe disponer de la estimación y simulación de los bloques a seleccionar, con una primera fase de selección sobre las leyes estimadas, y, seguidamente, observando el alcance de las decisiones tomadas en el sustituto de la realidad, el modelo.

- Se hacía referencia antes a los problemas de la práctica de la selectividad en mina, que afectan a la planificación. Se ha demostrado, sobre ejemplos reales, que la Geoestadística permite analizar con rigor y profundidad los tres efectos que controlan los resultados de la selección: el efecto de información, consecuencia lógica de la estimación, concluyendo que el estimador de kriging reduce las pérdidas económicas con respecto a los otros estimadores clásicos; el efecto de soporte, ligado al tamaño del bloque seleccionado; y el efecto de restricciones geométricas contemplado globalmente por el método de parametrización técnica, y localmente por los algoritmos morfológicos descritos en el último capítulo.

Los tres condicionantes conducen a la pérdida de beneficios que puede ser más o menos importante, por lo cual se debe estudiar, en cada caso, la situación de trabajo más conveniente referida a estos aspectos, que consiga minimizar dichas pérdidas. Tal estudio es viable técnicamente por la simulación de explotación, que establece, en primer lugar, los resultados de la selección óptima, correspondientes a la selección ideal, y en segundo lugar los resultados de las selecciones prevista y realizada, que podrán ser comparados con los primeros que a tal efecto servirán de referencia, como fue el caso de estudio de un yacimiento de uranio investigado.

- Con referencia a los estudios de simulación realizados sobre yacimientos reales y presentados en la parte tercera de la memoria, se han obtenido de ellos resultados y conclusiones importantes, que pueden verse con suficiente detalle en las exposiciones correspondientes. Bastará con recordar aquí que se ha podido simular la explotación de un depósito sedimentario, con modelización de los aspectos principales de extracción y almacenamiento del carbón. En este caso, y aprovechando los datos de producción, se ha elaborado un modelo de predicción a corto plazo de los valores futuros de la calidad del mineral.



En el caso del yacimiento polimetálico se ha hecho un estudio geoestadístico completo, pero con la particularidad de que se ha estudiado el problema de recuperación de reservas, esto es, la curva tonelaje/ley, por simulación de leyes sobre bloques de tamaños diferentes. En el ejemplo tratado en último lugar, se ha simulado la selección en una cantera piloto para posteriormente extrapolar tales resultados a la explotación real. Todos estos ejemplos de aplicación serían muy interesantes de estudiar sobre otros tipos de yacimientos con características estructurales y de variabilidad diferentes.

Para concluir esta exposición, y con el fin de facilitar una mejor aceptación de la Geoestadística en centros de investigación y en las propias explotaciones, pienso que sería importante redactar un manual de referencia con estas y otras aplicaciones y de elaborar programas generales que faciliten la elaboración de estudios prácticos, asimismo sería conveniente organizar regularmente seminarios destinados a difundir estos métodos entre aquellos especialistas que tienen a su cargo el estudio de los recursos naturales.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

ALFARO, M. (1984). Statistical inference of the semivariogram and the quadratic model. Proc. NATO ASI, Lake Tahoe, Sept. 1983, pp. 45-53.

ARMSTRONG, M. y DELFINER, P. (1980). Towards a more Robust Variogram: a Case Study on Coal. CGMM, ENSMP, N-671, 30 p.

ATKINSON, T. (1982). Lignite Mining Techniques. Rev. The Mining Engineering, Enero 1982, pp. 419-425.

AZCARATE, J.E. (1982). Introducción a la Metodología de investigación minera. Ed. I.G.M.E. Madrid, 594 p.

BASS, J. (1974). Eléments de Calcul des Probabilités. Ed. Masson et Cie, París, 275 p.

BATARD, F., BILLET, C. y RISLER, J.J. (1979). Prospection de CO<sub>2</sub> d'origine profonde dans le Massif Central (France). Ed. BRGM, Hydrogéologie, nº 2: 157-165.

BENZECRI, J.P. (1979). L'Analyse des Données, t. I: La Taxinomie, t. II: L'analyse des Correspondances. Ed. Dunod. París.

BERNUY, O., JOURNEL, A., REBOLLO, J.L. y DERAISME, J. (1977). Utilisation pratiques des modélisations de gisements. Rev. Industrie Minérale, Oct. 1977.

BOUCHIND'HOMME, J.F., JACQUIN, P. y SAYED, P. (1983). Choix des méthodes de calcul en élaboration de projet minier et en conduite d'exploitation. Rev. Sciences de la Terre-Informatique Géologique, n° 18: 7-24.

BOX, G.E.P. y JENKINS, G.M. (1970). Time Analysis Series, forecasting and Control. Ed. Holden Day, San Francisco, 500 p.

BOX, G.E. y JENKINS, G.M. (1976). Time Analysis Series: Forecasting and Control. Ed. Holden Day, San Francisco, 575 p.

BRUNET, P. y PEREZ VIDAL, L. (1984). Smooth Contour Line Construction with spline interpolation. Rev. QUESTIIO, Vol. 8, n° 3: 133-144.

BRYAN, R.C. y ELLIS, J.R. (1982). Economic Sensivity Analysis using Geostatistics. Proc. 17th APCOM, (Golden, Colorado), pp. 1071-1080.

CEREZUELA, J. (1979). El yacimiento de lignito de Puentes de García Rodríguez. Rev. Industria Minera, Madrid.

CIRUELOS, J. y DUCHENE, M. (1983). Modèle sur Micro-Ordinateur pour l'Analyse de Faisabilité d'un Projet Minier. Congrès de l'Industrie Minérale, Oct. 1983, 16 p.

CHAUVET, P. (1982). The variogram cloud. Proc. 17th APCOM Simp., Colorado School of Mines, Golden, Colorado, pp. 757-764.

CHICA OLMO, J.M. (1987). Aplicaciones de la Teoría de las Variables Regionalizadas en Economía. Tesis de Licenciatura. Univ. de Málaga, (inérita).

CHICA-OLMO, M. (1981 a). Aplicaciones de la Geoestadística a la Hidrogeología. Tesis de Licenciatura, Univ. de Granada, 151 p.

CHICA-OLMO, M. (1981 b). Applications de la Géostatistique à l'étude des données pluviométriques (Bassin de Dalías). Etude géostatistique des données de transmissivité de la nappe "Vega de Granada" (Espagne). Ed. CGMM, ENSMP, S-104, 30 p.

CHICA-OLMO, M. (1982 a). Cartografía automática de variables ligadas a la polución de acuíferos subterráneos. Ed. CGMM, ENSMP, N-755, 11 p.

CHICA-OLMO, M. (1982 b). Aproximación geoestadística a la estimación y simulación de características ligadas a las aguas termales. Ed. CGMM, ENSMP, N-756, 11 p.

CHICA-OLMO, M. (1982 c). Estudio comparativo de la Malla Optima de sondeos y Método de Estimación de las reservas de lignito. Ed. CGMM, ENSMP, S-118, 43 p.

CHICA-OLMO, M. (1982 d). Construction du modèle numérique de simulation d'un gisement de lignite. Ed. CGMM, ENSMP, N-782, 28 p.

CHICA-OLMO, M. (1983). Approche Géostatistique de la Caractérisation des Ressources en Charbon. Thèse Docteur-Ingénieur, ENSMP, 135 p.

CHICA-OLMO, M. (1985). Programa GEOSTAT-2 D. Univ. de Granada (inédito).

CHICA-OLMO, M. (1986). Aproximación geoestadística a la estimación del valor medio de un parámetro en un dominio. Una aplicación a la Hidrogeología. II Simp. Agua en Andalucía, pp. 483-493.

CHICA-OLMO, M. y BEUCHER, M. (1983). Using Geostatistics in water resources management. Ed. CGMM, ENSMP, N-814, 14 p.

CHICA-OLMO, M. y LAILLE, J.P. (1984). Simulation of a multi-seam brown coal deposit. Proc. NATO ASI, Lake Tahoe, Sept. 1983, pp. 1001-1013.

CHICA-OLMO, M., LAILLE, J.P. y CABAL, J.M. (1983). Simulation of a Multi-layer Brown Coal deposit using Bucket-Wheel excavators. Proc. 1st conference on use of computers in the coal industry. West Virginia University, pp. 83-86.

CHICA-OLMO, M., DERAISME, J., de CHAMBURE, L., RIVOIRARD, J. y COLEOU, Th. (1984). Etude Géostatistique de la Carrière de Sultana. Informe Técnico realizado para la SMMPE, S.A. (Confidencial). CGMM, ENSMP.

CHICA-OLMO, M., DERAISME, J. y SALVATO, L. (1987). An improved method for conditional simulations. Rev. Mathematical Geology (en revisión).

- CHILES, J.P. (1977). Géostatistique des Phénomènes non Stationnaires. Thèse Docteur-Ingénieur, Univ. de Nancy, 152 p.
- CHILES, J.P. y CHAUVET, P. (1975). Le Krigeage-Méthode pour la cartographie des fonds marins. Rev. Hydrographique Internationale, Vol. LII, n° 1: 29-45.
- CHILES, J.P. y DELHOMME, J.P. (1969). Description du programme SIMPACK. Ed. CGMM, ENSMP, 148 p.
- CHILES, J.P. y GUILLEN, A. (1984). Variogrammes et krigeages pour la Gravimétrie et le Magnétisme. Rev. Sciences de la Terre-Informatique Géologique, vol. n° 20.
- CHILES, J.P. y MATHERON, G. (1979). Interpolation optimale et Cartographie. Ed. C.G.M.M., ENSMP, N-427, 20 p.
- CRESSIE, N. y HAWKINS, O. (1980). Robust estimation of the variogram. Int. Journal of the International Association for Mathematical Geology, Vol. 12: 115-125.
- CROISSANT, A. (1976). Variography study of geochemical soil sampling data in Central Norway. CGMM, ENSMP, N-485.
- CROISSANT, A. (1977). La Géostatistique comme outil dans la prospection géochimique. CGMM, ENSMP, N-503, N-504.
- DAMAY, J. (1976). Application de la Géostatistique au niveau d'un Groupe Minier. Proc. NATO ASI, Roma, Oct. 1975, pp. 313-325.
- DAVID, M. y DAGBERT, M. (1974). Lakeview revisited: variograms and correspondance analysis new tools for the understanding of geochemical data, in Geochemical Exploration. Ed. Elliot y Fletcher, Elsevier, Amsterdam.
- DELFINER, P., DELHOMME, J.P., CHILES, J.P., RENARD, D. e IRIGOIN, F. (1979). Programme BLUEPACK, CGMM, ENMP.
- DELHOMME, J.P. (1976). Applications de la Théorie des Variables Régionalisées dans les sciences de l'eau. Thèse Docteur-Ingénieur, Univ. Pierre et Marie Curie, 130 p.

DELHOMME, J.P. y DELFINER, P. (1973). Application du Krigeage à l'optimisation d'une campagne pluviométrique en zone aride. Centre Informatique Géologique, ENSMP, R/73/74, 13 p.

DERAISME, J. (1978 a). Simulations sur modèle de gisement de processus miniers et minéralurgiques. Thèse Docteur-Ingénieur, ENSMP, 125 p.

DERAISME, J. (1978 b). Simulations des processus d'homogénéisation à l'entrée laverie. Ed. CGMM, ENSMP, N-572.

DERAISME, J., DUMAY, R. y SALVATO, L. (1982). Simulation sur Modèles Géostatistiques du Cycle de Production et de Valorisation des Minerais. Ed. CGMM, ENSMP, N-734, 67 p.

DERAISME, J., de FOUQUET, Ch. y FRAISSE, H. (1982). Développement industriel d'une méthodologie de simulation d'exploitation. Ed. CGMM, ENSMP, N-783, 17 p.

DERAISME, J. y de FOUQUET, Ch. (1984 a). Développement industriel de la méthodologie d'étude d'un projet minier sur modèle géostatistique de gisement. Ed. CGMM, ENSMP, N-867, 45 p.

DERAISME, J. y de FOUQUET, Ch. (1984 b). Recent and Future developments of "Downstream" Geostatistics. Proc. NATO ASI, Lake Tahoe, Sept. 1983, pp. 979-999.

DERAISME, J. PERAUDIN, J.J., de CHAMBURE, L., FRAISSE, H., BOURGINE, B. y ROLLEY, J.P. (1985). Vers une Simulation d'Exploitation à Ciel Ouvert. Rev. Industrie Minérale, Dic. 1985, pp. 500-510.

DIEHL, P. y DAVID, M. (1982). Classification of ore reserves/resources based on geostatistical methods. Bulletin CIM, Feb. 1982, pp. 127-135.

DUCHENE, M. (1979). Estimation de la rentabilité prévisionnelle aux différents stades d'un projet minier. Rev. Industrie Minérale, Enero 1979, pp. 19-38.

DUMAY, R. (1981). Simulations d'exploitations minières sur modèles géostatistiques de gisements. Thèse Docteur-Ingénieur, ENSMP, 137 p.

- FERNANDEZ-RUBIO, R. (1979). El Agua en la Minería y Obras Subterráneas. SIAMOS, Asoc. Nac. de Ing. de Minas, Granada, 3 Vol.: 1550 p.
- FERNANDEZ-RUBIO, R. y YAGÜE, A. (1978). Drenaje de una mina hasta nivel constante. SIAMOS, Granada, Vol. 2, pp. 741-749.
- de FOUQUET, Ch., DERAISME, J. y DUMAY, R. (1982). Ben Lomond-Construction du modèle numérique de gisement. Ed. CGMM, ENSMP, N-763, 75 p.
- FRANCOIS-BONGARCON, D. (1978). Le paramétrage des contours optimaux d'une exploitation à ciel ouvert. Thèse Docteur-Ingénieur. Inst. Nat. Polyt. de Lorraine, 137 p.
- GALLI, A., GERDIL-NEVILLET, F. y DADOU, C. (1984). Factorial Kriging Analysis: a substitute to spectral analysis of magnetic data. Proc. NATO ASI, Lake Tahoe, Sept. 1983, pp. 543-557.
- GARCIA PEREIRA, H. (1980). Traitement de données de prospection géochimique basé sur l'analyse structurale. Rev. Sciences de la Terre, Informatique Géologique, n° 14, pp. 143-160.
- GUIBAL, D. (1972). Simulation de schémas intrinsèques. CGMM, ENSMP, N-291, 38 p.
- GUIBAL, D. (1979). Problèmes d'évaluation des gisements. Ed. CGMM, ENSMP, N-597, 33 p.
- GUIBAL, D. (1976). Modifications au programme de recherche des carrières optimales, exemples d'application. Ed. CGMM, ENSMP, N-534, 12 p.
- GUIBAL, D. y REMACRE, A. (1984). Local estimation of recoverable reserves: comparing various methods with the reality or a porphyry copper. Proc. NATO ASI, Lake Tahoe, Sept. 1983, pp. 435-448.
- GY, P. (1975). Théorie et pratique de l'échantillonnage des matières morcelées. Ed. P. Gy, Francia, 597 p.
- GY, P. (1979). Sampling of Particulate Materials - Theory and Practice. Ed. Elsevier, Amsterdam, 432 p.

GY, P. (1981). Théorie de la préhomogénéisation dérivée de la théorie de l'échantillonnage. Rev. Industrie Minérale, Febrero 1981, pp. 107-125.

ISAACK, E.H. (1984). Indicator simulation: Application to the simulation of a high grade Uranium mineralization. Proc. NATO ASI, Lake Tahoe, Sept. 1983, pp. 1057-1069.

JACOD, J. y JOATHON, P. (1970 a). The use of Random-Genetic Models in the study of sedimentary processes. Ed. CGMM, ENSMP, N-202, 18 p.

JACOD, J. y JOATHON, P. (1970 b). Etude des réservoirs de la structure de Contres. Ed. CGMM, ENSMP, N-211, 26 p.

JACOD, J. y JOATHON, P. (1971). Rapport d'étude sur la structure de Chemery. Ed. CGMM, ENSMP, N-236, 55 p.

JENKINS, G.M. y WATTS, D. (1968). Spectral Analysis and its applications. Ed. Holden Day, USA.

JOURNEL, A. (1973). Geostatistics and Sequential Exploration. Rev. Mining Engineering, Oct. 1973, pp. 44-48.

JOURNEL, A. (1974). Simulation conditionnelle - Théorie et Pratique: Thèse Docteur-Ingénieur, ENSMP, 110 p.

JOURNEL, A. (1975). From Geological Reconnaissance to exploitation - A decade of Applied Geostatistics. Ed. CGMM, ENSMP, 35 p.

JOURNEL, A. (1982). Indicator approach to spatial distributions. Proc. 17th APCOM Symposium, Colorado, Golden, pp. 793-806.

JOURNEL, A. (1983). Non parametric estimation of spatial distributions. Rev. Mathematical Geology, Vol. 15, n° 3, pp. 445-468.

JOURNEL, A. (1984). The place of non-parametric geostatistics. Proc. NATO ASI, Lake Tahoe, Sept. 1983, pp. 307-335.

JOURNEL, A. y HUIJBREGTS, Ch. (1978). Mining Geostatistics. Ed. Acad. Press, New-York, 600 p.



KAUFFMAN, P.W., KIM, Y.C. y MARTINO, F. (1981). Application of Geostatistics to Coal Resource Characterization. USA Dept. of Energy, Final Report, DOE/PC/30/13-T7.

KNUTH, D.E. (1969). Seminumerical Algorithms. The Art of Computer Programming, Vol. 2, Addison Wesley Publ. Co., Reading Mass. USA.

LAILLE, J.P. (1983). Présentation du Programme utilisé pour Simuler l'Exploitation par Roue-Pelle d'un gisement de lignite. Ed. CGMM, ENSMP, N-792, 12 p.

LESCHS, M. y GROSSMAN, I.F. (1964). Optimum design of Open-Pit Mines. Canadian Institute of Mining Bulletin, Enero 1964.

LIBERTA, A. (1981). Modélisation et Estimation Globale des Ressources in situ: Argentario. Ed. CGMM, ENSMP, S-109, 20 p.

MALLET, J.L. (1974). Présentation d'un ensemble de Méthodes et Techniques de la Cartographie Automatique Numérique. Rev. Sciences de la Terre-Informatique Géologique, n° 4.

MALLET, J.L. (1976). Programmes de Cartographie Automatique: Présentation de la Bibliothèque CARTOLAB. Rev. Sciences de la Terre-Informatique Géologique, n° 7.

MARECHAL, A. (1975). Analyse numérique des anamorphoses guassiennes. Ed. CGMM, ENSMP, N-418, 61 p.

MARECHAL, A. (1976 a). The practice of transfert functions: Numerical Methods and their applications. Proc. NATO ASI, Roma, Oct. 1975, pp. 253-276.

MARECHAL, A. (1976 b). Selecting mineable blocks: Experimental results observed on a simulated orebody. Proc. NATO ASI, Roma, Oct. 1975, pp. 135-161.

MARECHAL, A. (1984). Kriging seismic data in presence of faults. Proc. NATO ASI, Lake Tahoe, Sept. 1983, pp. 271-294.

MARECHAL, A. y FRANCOIS-BONGARCON, D. (1976 a). Algorithme d'optimisation de la carrière finale par la méthode du paramétrage des contours optimaux. Ed. CGMM, ENSMP, N-457, 144 p.

MARECHAL, A. y FRANCOIS-BONGARCON, D. (1976 b). A new method for Open-Pit design. Proc. APCOM, 1976, Application of Computers Method in the Mineral Industries.

MARIN, A. (1976). Méthodologie de l'estimation et simulation multivariable des grands gisements tridimensionnels. Thèse Docteur-Ingénieur, ENSMP, 72 p.

MATHERON, G. (1965 a). Les Variables Régionalisées et leur estimation. Ed. Masson et Cie, Paris, 212 p.

MATHERON, G. (1965 b). Eléments pour une théorie des milieux poreux. Ed. Masson et Cie. Paris.

MATHERON, G. (1969 a). Le Krigeage Universel. CGMM, ENSMP, Fasc. n° 1, 82 p.

MATHERON, G. (1969 b). Les processus d'Ambarzoumian et leur application en géologie. Ed. CGMM, ENSMP.

MATHERON, G. (1970). La Théorie des Variables Régionalisées et ses applications. CGMM, ENSMP, Fasc. n° 5, 212 p.

MATHERON, G. (1971). La Théorie des fonctions aléatoires intrinsèques généralisées. ENSMP, CGMM, N-252.

MATHERON, G. (1972 a). Les Covariances Généralisées Polynomiales. CGMM, ENSMP, N-229.

MATHERON, G. (1972 b). The Turning bands: a method for simulating random functions in  $R^n$ . Ed. CGMM, ENSMP, N-303.

MATHERON, G. (1973 a). The intrinsic random functions and their applications. Advances in Applied Probability, Dic. 1973, n° 5, pp. 439-468.

- MATHERON, G. (1973 b). Le Krigeage Disjonctif. CGMM, ENSMP, N-360, 40 p.
- MATHERON, G. (1974). Les Fonctions de transfert des petits panneaux. Ed. CGMM, ENSMP, N-395, 73 p.
- MATHERON, G. (1975 a). The Transfer functions, and their estimations. CGMM, ENSMP, N-423.
- MATHERON, G. (1975 b). Le paramétrage technique des réserves. Ed. CGMM, ENSMP, N-453, 54 p.
- MATHERON, G. (1975 c). Paramétrage des contours optimaux. Ed. CGMM, ENSMP, N-401, 19 p y N-403, 54 p.
- MATHERON, G. (1975 d). Random Sets and Integral Geometry. Ed. Wiley. New-York.
- MATHERON, G. (1976 a). Le Choix des Modèles en Géostatistique. Proc. NATO ASI, Roma, Oct. 1975, pp. 11-27.
- MATHERON, G. (1976 b). A simple substitute for conditional expectation: the Disjunctive Kriging. Proc. NATO ASI, Roma, Oct. 1975, pp. 221-236.
- MATHERON, G. (1976 c). Forecasting block grade distribution: the transfert functions. Proc. NATO ASI, Oct. 1985, Roma, pp. 237-251.
- MATHERON, G. (1978 a). Estimer et Choisir. Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, ENSMP, 175 p.
- MATHERON, G. (1978 b). L'estimation globale des réserves récupérables. Ed. CGMM, ENSMP, C-75, 28 p.
- MATHERON, G. (1980 a). Remarques sur la fabrication des Aléas. Ed. CGMM, ENSMP, N-653, 69 p.
- MATHERON, G. (1980 b). Splines et Krigeage: leur Equivalence Formelle. Ed. CGMM, ENSMP, N-667, 26 p.

MATHERON, G. (1981). Remarques sur le Krigeage et son Dual. Ed. CGMM, ENSMP, N-695, 36 p.

MATHERON, G. (1982 a). Pour une analyse krigeante des données régionalisées. CGMM, ENSMP, N-732, 22 p.

MATHERON, G. (1982 b). La Destructuration des hautes teneurs et le krigeage des Indicatrices. Ed. CGMM, ENSMP, N-761, 33 p.

MATHERON, G. (1983). The Selectivity of the Distributions and the Second Principle of Geostatistics. Ed. CGMM, ENSMP, N-800, 13 p.

MATHERON, G. (1984). Une méthodologie générale pour les modèles isofactoriels discrets. Ed. CGMM, ENSMP.

MATHERON, G. y FORMERY, Ph. (1963). Recherche d'optimum dans la Reconnaissance et la mise en exploitation de gisements miniers. Annales des Mines, Vol. 5, pp. 220-237, Vol. 6, pp. 260-677.

MURILLO, E. (1982). Géostatistique et Cartographie automatique: Application aux données sismiques. Thèse Docteur-Ingénieur, CGMM, ENSMP, 101 p.

NEVEU, J. (1964). Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités. Ed. Masson et Cie, Paris.

OMRE, H. (1984). The variogram and its estimation. Proc. NATO ASI, Lake Tahoe, Sept. 1983, pp. 107-125.

ORFEUIL, J.P. (1977). Etude, Mise en Oeuvre et Test d'un Modèle de Prédiction à Court-Terme de Pollution Atmosphérique. Ed. CGMM, ENSMP, N-498, 120 p.

PARNABY, J., BARRTYE, P.G. y WAITE, G.S. (1973). Optimal Design of Homogenizing Systems Incorporating Layered Stockpiles and Fluidised-Silos for the Control of Raw Materials Quality. Trans. Inst. Chem. Eng.

REMACRE, A. (1984). L'estimation du récupérable local. Le conditionnement uniforme. Thèse Docteur-Ingénieur, CGMM, ENSMP, 99 p.

RENDU, J.M. (1971). Some applications of geostatistics to decision-making in exploration. *Decision-Making in the Mineral Industry*. Canadian Inst. of Min. and Metal, Vol. 12, pp. 175-184.

RENDU, J.M. y READY, L. (1982). Geology and the semivariogram - A critical relationship. *Proc. 17th APCOM Simp.*, Colorado School of Mines, Golden, Colorado, pp. 771-783.

SANCHEZ QUINTANA, A. (1985). Interpolación en tres dimensiones mediante generación de funciones BICUBIC SPLINES y obtención de isolíneas por ordenador. *Boletín Geológico y Minero*. T. XCVI-II, pp. 165-185.

SANDJIVY, L. (1984 a). The Factorial Kriging Analysis of regionalized data. Its application to geochemical prospecting. *Proc. NATO ASI, Lake Tahoe*, Sept. 1983, pp. 559-572.

SANDJIVY, L. (1984 b). Analyse krigeante des données géochimiques (Etude d'un cas monovariante dans le modèle stationnaire). *Rev. Sciences de la Terre, Informatique Géologique*, n° 18, pp. 141-172.

SANDJIVY, L. (1984 c). Etude des données de prospection géochimique stratégique de la région d'Ancenis. *CGMM, ENSMP, N-887*, 41 p.

SCHOFIELD, Ch. G. (1980). Homogeneisation/Blending Systems Design and Control for Minerals Processing. *Series on Bulk Material Handling*, Vol. 2, *Trans. Tech. Pub.*, 315 p.

SERRA, J. (1967). Echantillonnage et estimation locale des phénomènes de transition miniers. *Thèse Docteur-Ingénieur, Univ. de Nancy*, 670 p.

SERRA, J. (1968). Morphologie Mathématique et genèse de concrétion carbonatées des minerais de fer de Lorraine. *Rev. Sedimentology*, pp. 183-208.

SERRA, J. (1975). Laws of Linear Homogeneisation in Use Stockyards. *Proc. 11th Int. Mineral Processing Congress, Cagliari*.

SERRA, J. (1982). *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Ed. Academic Press, London.

SHARP, W.E. (1982 a). Stochastics Simulations of Semivariograms. Rev. Math. Geology, Vol. 14, nº 5, Oct. 1982, pp. 445-456.

SHARP, W.E. (1982 b). Estimation of Semivariograms by the Maximum Entropy Method. Rev. Math. Geology, Vol. 14, nº 5, Oct. 1982, pp. 457-474.

SUSLICK, S. (1981). Etude géostatistique sur données géochimiques. CGMM, ENSMP, Inf. inédito.

ULAM, S. (1949). The Monte Carlo Method. J. Amer. Statistical Assoc., nº 247, pp. 335-341.

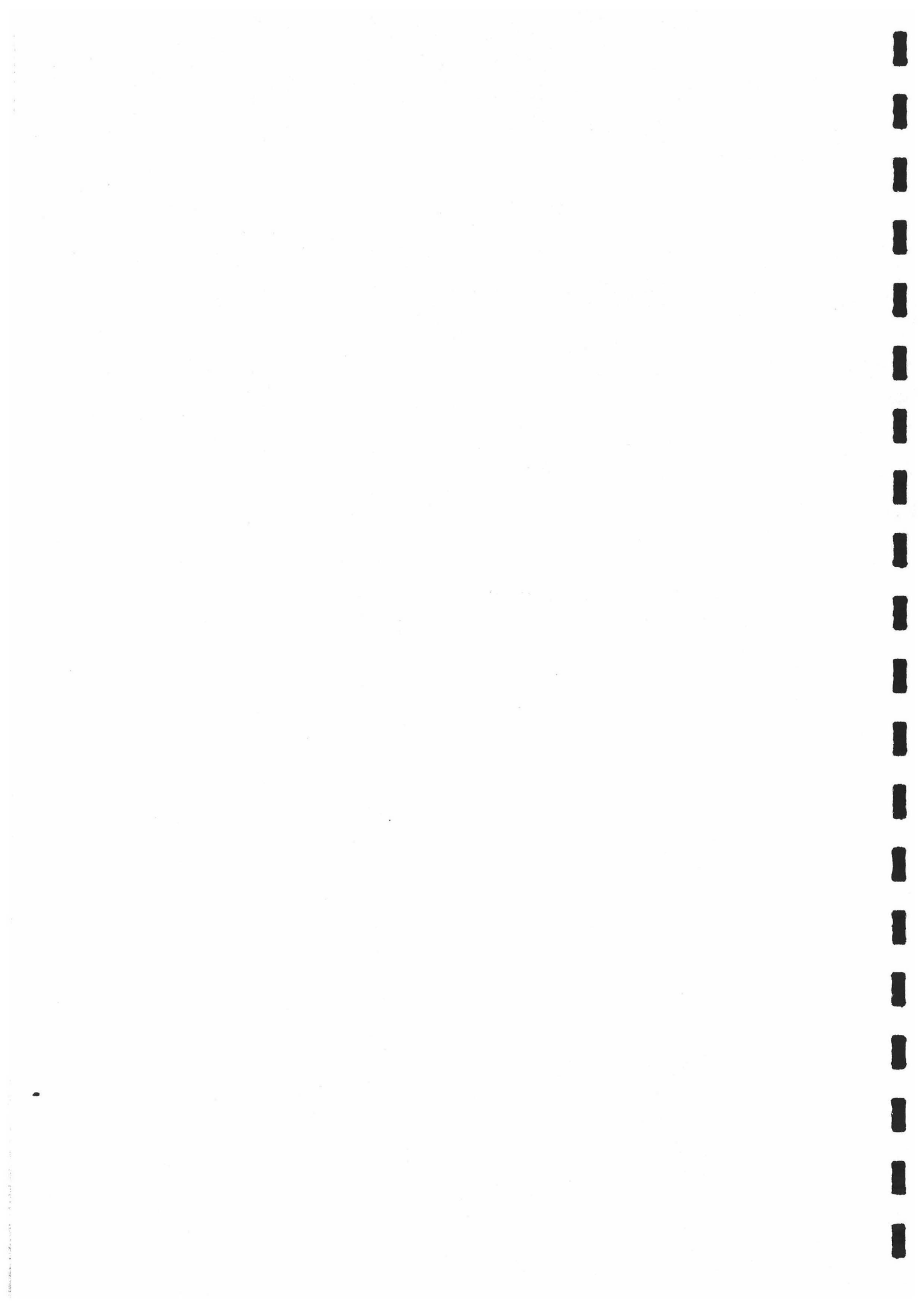
VAN DER MOORE, A.L. (1967). Homogeneisation of Bulk Materials. Ph. D. Dissertation, University of Delft.

YAGÜE, A. (1980). Tratamiento informático de tres técnicas hidrogeológicas y Aplicación a casos de drenaje de minas. Tesis Doctoral, Univ. de Granada, 374 p.

Abreviaturas:

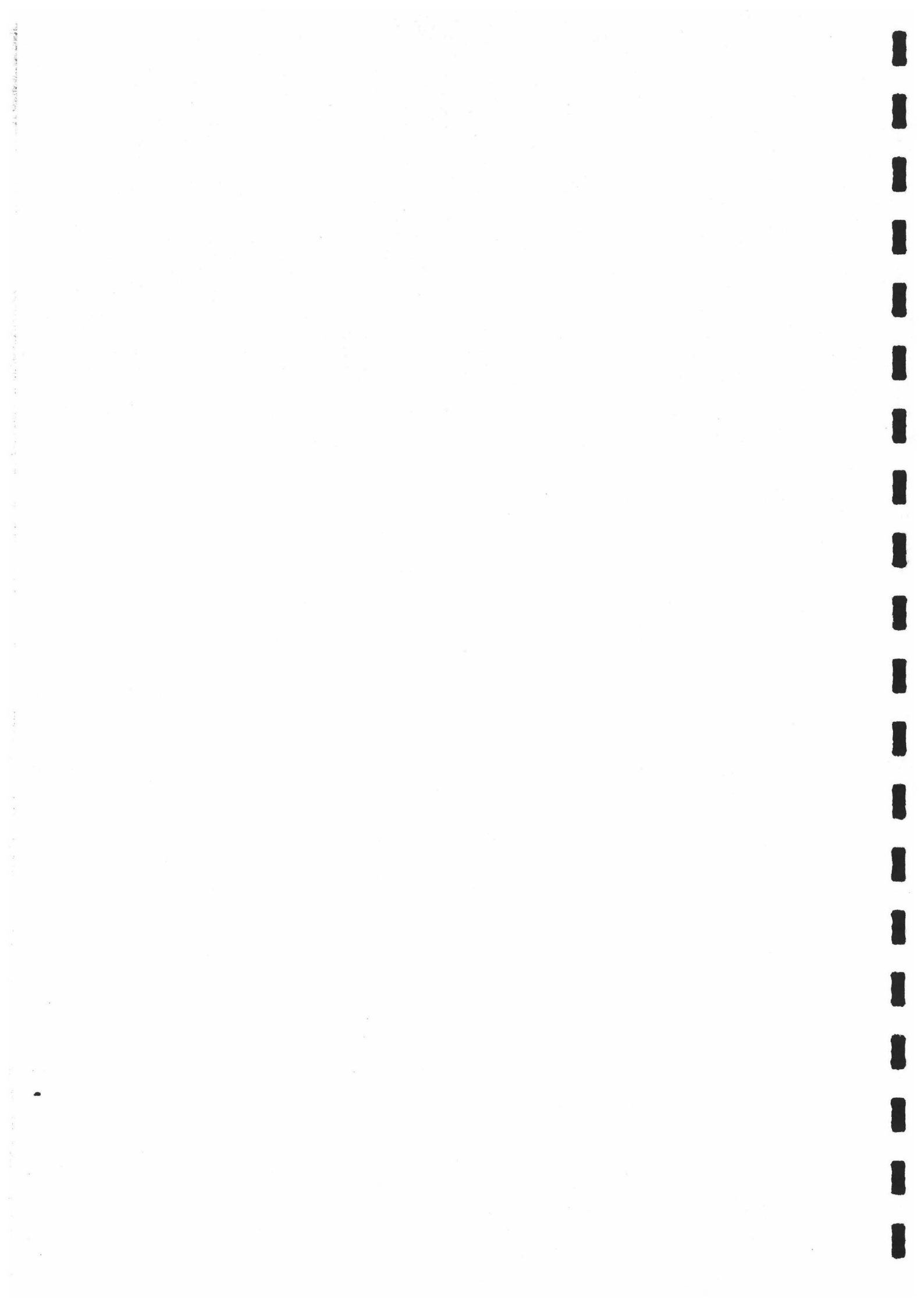
E.N.S.M.P. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

C.G.M.M. Centre de Géostatistique et de Morphologie Mathématique.



A N E X O S





## I. ESTUDIO DE LA FUNCION DE ANAMORFOSIS GAUSIANA

### 1. NECESIDAD DE UNA ANAMORFOSIS DE LOS DATOS REALES

Los estudios geoestadísticos relacionados principalmente con la estimación de las reservas recuperables y con la simulación de variables necesitan, para su solución, recurrir a una transformación de los datos originales. Se mostró que la estimación de las funciones de transferencia, y en general todos los problemas de estimación no lineal, encontraban una solución en el marco de modelos geoestadísticos que utilizaban como variables de trabajo a las transformadas normales de las variables experimentales. El propio método de simulación condicional, se recordará que proporcionaba una realización de una F.A. con distribución normal, que se debía transformar en la variable real simulada de igual distribución que la variable experimental.

Bajo estas condiciones es natural que se adopte un modelo de anamorfosis gaussiana, debido a las buenas propiedades que presenta la ley normal, como base para el planteamiento de los problemas de estimación no lineal y de simulación condicional; obviamente, este modelo normal no es el único posible de modo que se puede pensar, lo que constituye un tema

de investigación interesante, en otros modelos diferentes que permitan en su interior desarrollar estos métodos geoestadísticos.

La transformación gaussiana propuesta por MATHERON (1974) y MARECHAL (1975) se expresa de la forma general,

$$Z = \Phi(Y)$$

donde  $Y$  es una variable normal centrada reducida  $N(0,1)$ , asociada a la variable experimental  $Z$ .

En la práctica, existen dos formas diferentes de calcular tal transformación, de modo gráfico y a partir de un desarrollo polinómico de la función  $\Phi$ .

## 2. METODO DE MONTE CARLO "ANAMORFOSIS GRAFICA"

Cualquier VA continua  $Z$  puede ser representada como una función  $\Phi(Y)$ , por simple anamorfosis deducible por el método de simulación de Monte Carlo.

La determinación gráfica de  $\Phi$  se hace a partir de histograma experimental de los datos experimentales  $z(x)$ , simplemente con hacer corresponder al histograma  $F(z)$  el histograma de frecuencias acumuladas de la ley normal  $G(y)$ :  $F(z) = \text{Prob}\{Z < z\} = G(y) = \text{Prob}\{Y < y\}$

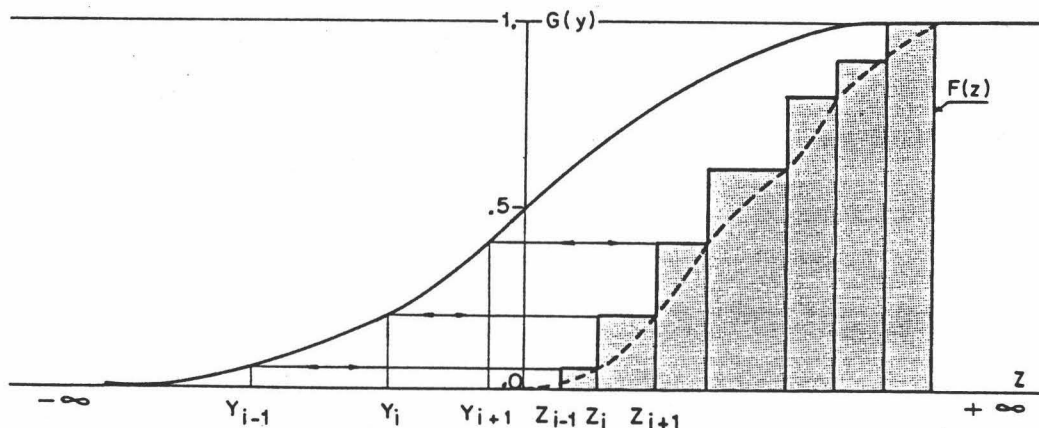


Figura A.1.- Anamorfosis gráfica.

Como se observa en la figura A.1 se dispone de una doble transformación que asocia una variable normal  $Y_i$  de distribución  $G(y)$  a una variable  $Z_i$  de distribución  $F(z)$  y viceversa. Este paso recíproco es posible porque  $G$  y  $F$  son funciones monótonas crecientes, estableciéndose la biyección  $G(y) \rightleftharpoons F(z)$ .

De este modo, a partir del método de simulación de Monte Carlo es posible generar realizaciones de  $VA_S$  normales  $y_\alpha$ , a partir de realizaciones experimentales de  $VA_S$   $z_\alpha$ , de distribución cualquiera.

## 2.1. UNA DEMOSTRACION INTERESANTE

Se puede demostrar que la VA  $Z$  admite una distribución invertible monótona creciente tal que  $F(z) = \text{Prob}\{Z < z\}$ . Para ello, se supondrá que existe una función  $\phi$  tal que realiza la correspondencia entre  $G(y)$  y  $F(z)$

$$Z = \phi(Y) \quad \text{con } Y = N(0,1)$$

Tomando probabilidades queda

$\text{Prob}\{Z < z\} = \text{Prob}\{\phi(Y) < z\}$ , como  $\phi(y)$  es invertible, por definición quedaría

$$\text{Prob}\{Z < z\} = \text{Prob}\{\phi^{-1}(\phi(Y) < \phi^{-1}(z))\} = \text{Prob}\{Y < \phi^{-1}(z)\}$$

A su vez  $Y$  es una VA normal de distribución  $G(y)$ , se tiene entonces que

$$G(y) = \text{Prob}\{Y < y\}$$

$$\text{Prob}\{Y < \phi^{-1}(z)\} = G(\phi^{-1}(z)) = G(y)$$

con lo cual

$F(z) = \text{Prob}\{Z < z\} = \text{Prob}\{Y < y\} = G(y)$ , esto es  $F(z) \rightleftharpoons G(y)$ . Se establece así la unicidad entre la distribución normal  $G(y)$  y la función de distribución experimental  $F(z)$ .

De la demostración se deduce que:

$$Y = G^{-1}(F(z)) = \phi^{-1}(Z) \quad - \text{Anamorfosis directa}$$

$$Z = F^{-1}(G(y)) = \phi(Y) \quad - \text{Anamorfosis inversa}$$

$$G[G^{-1}\{F(z)\}] = F(z)$$

Por último, como se ha supuesto conocidas  $\phi$  y  $G$ , se conocerá también  $F(z)$ . En la práctica, lo que ocurre es que se conocen las funciones  $G$  y  $F$  y hay que determinar  $\phi$ .

En resumen, esta demostración nos enseña que toda VA  $Z$  de ley de distribución  $F(z)$  continua puede representarse como

$$Z = \phi(Y) \quad Y = N(0,1)$$

con  $\phi(y) = F^{-1}(G(y))$  una función invertible, lo que implica que sea monótona, creciente y continua.

Es conveniente indicar en último término que, desde el punto de vista práctico, la correspondencia entre los  $z$  e  $y$  se hace descomponiendo en clases el histograma  $F(z)$  inicial; en el interior de cada clase se procede a una interpolación, en general de tipo lineal, lo que determina gráficamente a la vez los valores  $z = \phi(y)$  e  $y = \phi^{-1}(z)$ .

## 2.2. CASOS PARTICULARES DE ANAMORFOSIS

### *A) Ley normal*

En este caso la transformación es evidente pues es la que liga una variable normal  $Z$  de parámetros  $m$  y  $\sigma$  a una variable normal  $Y$  de media 0 y desviación típica 1 (figura A.2 a).

$$Z:N(m, \sigma) \Leftrightarrow Y:N(0,1)$$

$$Z = m + \sigma Y$$

$$Y = \frac{Z-m}{\sigma}$$

La función  $\phi$  es en este caso una transformación lineal fácil de calcular; es una recta que corta al eje de la variable  $Z$  en el punto  $m$  y que tiene como pendiente el valor  $\sigma$ .

### B) Ley lognormal

La ley lognormal ha tenido aplicaciones muy frecuentes en los estudios geoestadísticos, siendo una de las leyes que mayor interés han suscitado en este tipo de estudios, especialmente en los de estimación (krigeage lognormal).

Por definición  $X$  es una VA lognormal si  $\log X$  es una VA normal,

$$X = m + \sigma Y \quad \text{con} \quad X:N(m, \sigma) \text{ e } Y:N(0, 1)$$

se tiene que

$$X = \log Z = m + \sigma Y$$

Tomando valores exponentes queda

$$e^{\log Z} = e^{m + \sigma Y} \quad \text{luego} \quad Z = e^{m + \sigma Y}$$

por tanto la función de anamorfosis es fácil de calcular,

$$\phi(y) = e^{m + \sigma Y}$$

es una transformación que está definida por una familia de funciones con dos parámetros,  $m$  y  $\sigma$  de la VA  $Z$  (figura A.2 b).

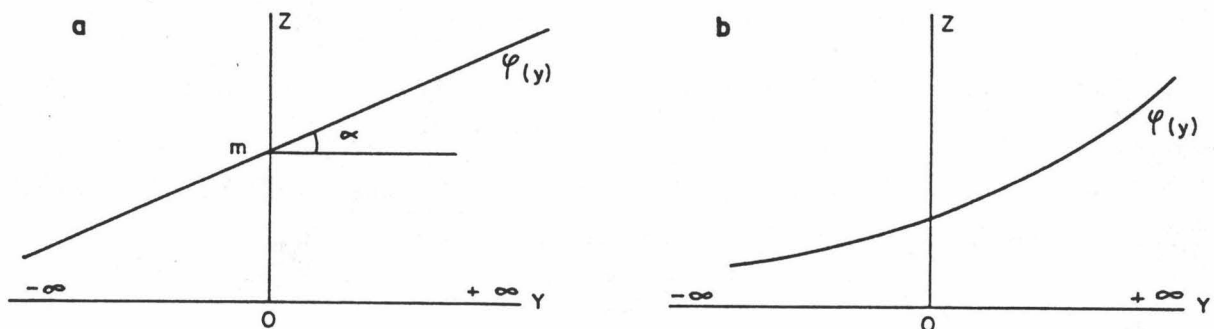


Figura A.2.- Casos particulares de funciones  $\phi(y)$ : a) ley normal, b) ley lognormal.

### C) Ley exponencial

La ley exponencial tiene como función de distribución  $f(z) = \lambda e^{-\lambda z}$ , para valores positivos de  $z$  se tiene que

$$F(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda z}$$

Con la igualdad  $F(z) = G(y)$  se tiene que

$G(y) = x = 1 - e^{-\lambda z} = 1 - x = e^{-\lambda z}$ . Si se toman logaritmos queda:

$$\log(1-x) = \log(e^{-\lambda z}) = -\lambda z$$

$z = -\frac{1}{\lambda} \log(1-x)$ , con lo que finalmente resulta

$$\phi(y) = z = -\frac{1}{\lambda} \log(1-G(y))$$

### 3. ANALISIS MATEMATICO DE LA ANAMORFOSIS GAUSIANA

En la práctica existe, además del método gráfico anterior, otra forma de analizar la anamorfosis gaussiana; ésta consiste en el desarrollo matemático de la función en base a polinomios ortonormados a la densidad de Gauss  $g(y)$ , tal que

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$$

$$\int g(y) dy = 1$$

$$G(y) = \text{Prob}\{Y < y\} = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

Sea  $Z = \phi(Y)$  una FA tal que  $Y$  admite las funciones de densidad y de repartición anteriores. Considerese la condición de que la función  $\phi(y)$  sea de cuadrados integrables (sumable), esto es, que se cumpla que

$$\int Z^2 g(y) dy = \int (\phi(y))^2 g(y) dy < \infty$$

condición que verifica Z si tiene una varianza finita, que es el caso más general en la práctica, donde la varianza puede deducirse del histograma experimental; entonces  $\phi$  pertenece a un espacio vectorial de Hilbert

$$\phi \in \mathcal{L}^2(g)$$

En dicho espacio existe al menos una función de base de modo que la función  $\phi$  es representable de manera polinómica a través de aquella, sea

$$\phi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n f_n(y)$$

donde  $f_n(y)$ ,  $n = 0, 1, \dots, \infty$  es la función de base y los  $C_n$  coeficientes numéricos a calcular.

Desde la óptica práctica, las funciones  $f_n$  que interesan constituyen una base ortonormada formada por polinomios normalizados:

$$\{\eta_n(y)\} \quad n = 0, 1 \text{ a } \infty$$

tal que dichos polinomios son ortogonales a la densidad de Gauss,  $g(y)$ :

$$\int \eta_n(y) \cdot \eta_m(y) g(y) dy = \delta_{n,m}$$

$$E\{\eta_n(y) \eta_m(y)\} = \delta_{n,m}$$

con  $\delta_{n,m}$  igual a 1 si  $n = m$  e igual a 0 si no.

Finalmente se tiene que  $\phi(y)$  vale

$$\phi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \eta_n(y)$$

que es simplemente la representación polinómica de un vector por un vector de base. Las ventajas de esta descomposición polinómica de la función  $\phi$  es que los polinomios  $\eta_n(y)$  son fáciles de calcular numéricamente:



son polinomios de grado  $n$  creciente deducibles unos de otros por relaciones de recurrencia y se da en ellos la ortogonalidad con respecto a la ley normal.

Lo más frecuente en geoestadística es que en lugar de trabajar con los polinomios ortonormados  $\eta_n(y) = H_n(y)/\sqrt{n!}$  se trabaje con los polinomios de Hermite  $H_n(y)$  que son igualmente ortogonales pero no normados. Estos se definen como las derivadas parciales de orden  $n$  de la densidad de Gauss, sea:

$$H_n(y) = \frac{1}{g(y)} \frac{\partial^n}{\partial y^n} g(y)$$

$$H_n(y) = e^{x^2/2} \frac{\partial^n}{\partial y^n} e^{-x^2/2}$$

Los  $H_n(y)$  verifican las propiedades siguientes:

- . son ortogonales a la densidad de Gauss

$$\int H_n(y) H_m(y) g(y) dy = n! \delta_{n,m}$$

con  $\delta_{n,m}$  igual a 1 si  $n=m$  e igual a 0 si no.

- . se puede definir, como he dado, una base ortonormada utilizando los  $\eta_n(y)$  en lugar de los  $H_n(y)$

$$H_n(y) = \sqrt{n!} \eta_n(y)$$

- . Se dispone de una relación de recurrencia para el cálculo

$$H_{n+1}(y) = -y H_n(y) - n H_{n-1}(y)$$

con

$$H_0(y) = 1$$

$$H_1(y) = -y$$

$$H_2(y) = y^2 - 1$$

$$H_3(y) = -y^3 + 3y$$

$$H_4(y) = y^4 - 6y^2 + 3, \text{ etc...}$$

Los parámetros estadísticos de estos polinomios son:

$$E\{H_n(y)\} = 0$$

$$\text{Var}\{H_n(y)\} = n!$$

Así, se llega a que  $\phi$  se expresa como una combinación lineal de los vectores de base  $H_n(y)$ ,

$$Z = \phi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n}{n!} H_n(y)$$

expresión que ya se ha visto aparecer en diversos ocasiones durante la exposición de este trabajo.

Los momentos de la función  $\phi(y)$  en base a los  $H_n(y)$  tienen las siguientes expresiones:

$$\text{la esperanza } E\{Z\} = E\{\phi(y)\} = \int \phi(y) g(y) dy = \psi_0$$

$$\text{la varianza } \text{Var}\{Z\} = \text{Var}\{\phi(y)\} = \int \left(\frac{\psi_n}{n!} H_n(y)\right)^2 g(y) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n^2}{n!}$$

En la práctica, el desarrollo de  $\phi$  se limita a un orden  $N$  tal que la varianza acumulada proporcionada por la suma  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n^2}{n!}$  se aproxima suficiente de la varianza experimental de los datos. Frecuentemente el valor de  $N$  suele ser inferior a 20 o 30 ya que para términos superiores las contribuciones de los  $\psi_n^2/n!$  decrecen rápidamente a cero (véase figura A.3).

Puede decirse que los coeficientes  $\psi_n$  son las incógnitas a deducir, sus valores vienen dados por la relación:

$$\psi_n = \int \phi(y) H_n(y) g(y) dy = E\{\phi(y) \cdot H_n(y)\}$$

### 3.1. CALCULO NUMERICO DE LOS $\psi_n$

El cálculo de los coeficientes numéricos  $\psi_n$  se hace en el sentido del ajuste por mínimos cuadrados de las diferencias entre  $\phi(y)$  y un polinomio de grado  $N$ . Así, si se expresa la función cuadrática  $I$  por:

$$I = \int \left(\phi(y) - \sum_{n=0}^N \frac{\psi_n}{n!} H_n(y)\right)^2 g(y) dy$$

Se puede componer un sistema de ecuaciones que derivan de  $\frac{\partial I}{\partial \psi_n} = 0$ , para cualquier  $n$  del mínimo de  $I$  se cumple la condición de la integral que define el cálculo de  $\psi_n$ .

A continuación se dan dos formas prácticas de resolver el cálculo:

*A) Integración numérica. Método de Gauss*

Conocidos los datos experimentales y los  $Y_\alpha$  por anamorfosis gráfica de los  $Z_\alpha$ , se calculan los  $\psi_n$  por la combinación lineal del método de integración numérica de Gauss:

$$\psi_n^* = \sum w_i \phi(y_i) H_n(y_i)$$

Los  $w_i$  son coeficientes numéricos de ponderación definidos por el método de integración utilizado (los subíndices  $i$  denotan que los valores de  $y$  deben ser escogidos convenientemente para la evaluación de la función).

*B) Por aproximación de la integral que define a los  $\psi_n$*

A través de la suma de las  $K$  contribuciones,

$$\psi_n = \sum_{k=1}^K \psi_n^{(k)} \quad \{ \psi_n^{(k)}, k = 1 \text{ a } K \}$$

$K$  es el número de valores utilizados para la definición del histograma experimental  $F(z)$ .

Tómese un intervalo  $k$  cualquiera del histograma correspondiente a la clase  $\{Z_k, z_{k+1}\}$ , sea aún  $\{y_k, y_{k+1}\}$ , y aplíquese una interpolación lineal en el interior de la misma, esto es para

$$y \in \{y_k, y_{k+1}\} \text{ se tiene que } z = b_k y + a_k$$

o sea que 
$$y = \frac{z + a_k}{b_k}$$

$$\int Z^2 g(y) dy = \int (\phi(y))^2 g(y) dy < \infty$$

condición que verifica  $Z$  si tiene una varianza finita, que es el caso más general en la práctica, donde la varianza puede deducirse del histograma experimental; entonces  $\phi$  pertenece a un espacio vectorial de Hilbert

$$\phi \in \mathcal{L}^2(g)$$

En dicho espacio existe al menos una función de base de modo que la función  $\phi$  es representable de manera polinómica a través de aquella, sea

$$\phi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n f_n(y)$$

donde  $f_n(y)$ ,  $n = 0, 1, \dots, \infty$  es la función de base y los  $C_n$  coeficientes numéricos a calcular.

Desde la óptica práctica, las funciones  $f_n$  que interesan constituyen una base ortonormada formada por polinomios normalizados:

$$\{\eta_n(y)\} \quad n = 0, 1 \text{ a } \infty$$

tal que dichos polinomios son ortogonales a la densidad de Gauss,  $g(y)$ :

$$\int \eta_n(y) \cdot \eta_m(y) g(y) dy = \delta_{n,m}$$

$$E\{\eta_n(y) \eta_m(y)\} = \delta_{n,m}$$

con  $\delta_{n,m}$  igual a 1 si  $n = m$  e igual a 0 si no.

Finalmente se tiene que  $\phi(y)$  vale

$$\phi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \eta_n(y)$$

que es simplemente la representación polinómica de un vector por un vector de base. Las ventajas de esta descomposición polinómica de la función  $\phi$  es que los polinomios  $\eta_n(y)$  son fáciles de calcular numéricamente:

son polinomios de grado  $n$  creciente deducibles unos de otros por relaciones de recurrencia y se da en ellos la ortogonalidad con respecto a la ley normal.

Lo más frecuente en geoestadística es que en lugar de trabajar con los polinomios ortonormados  $\eta_n(y) = H_n(y)/\sqrt{n!}$  se trabaje con los polinomios de Hermite  $H_n(y)$  que son igualmente ortogonales pero no normados. Estos se definen como las derivadas parciales de orden  $n$  de la densidad de Gauss, sea:

$$H_n(y) = \frac{1}{g(y)} \frac{\partial^n}{\partial y^n} g(y)$$

$$H_n(y) = e^{x^2/2} \frac{\partial^n}{\partial y^n} e^{-x^2/2}$$

Los  $H_n(y)$  verifican las propiedades siguientes:

- . son ortogonales a la densidad de Gauss

$$\int H_n(y) H_m(y) g(y) dy = n! \delta_{n,m}$$

con  $\delta_{n,m}$  igual a 1 si  $n=m$  e igual a 0 si no.

- . se puede definir, como he dado, una base ortonormada utilizando los  $\eta_n(y)$  en lugar de los  $H_n(y)$

$$H_n(y) = \sqrt{n!} \eta_n(y)$$

- . Se dispone de una relación de recurrencia para el cálculo

$$H_{n+1}(y) = -y H_n(y) - n H_{n-1}(y)$$

con

$$H_0(y) = 1$$

$$H_1(y) = -y$$

$$H_2(y) = y^2 - 1$$

$$H_3(y) = -y^3 + 3y$$

$$H_4(y) = y^4 - 6y^2 + 3, \text{ etc...}$$

Los parámetros estadísticos de estos polinomios son:

$$E\{H_n(y)\} = 0$$

$$\text{Var}\{H_n(y)\} = n!$$

Así, se llega a que  $\phi$  se expresa como una combinación lineal de los vectores de base  $H_n(y)$ ,

$$Z = \phi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n}{n!} H_n(y)$$

expresión que ya se ha visto aparecer en diversos ocasiones durante la exposición de este trabajo.

Los momentos de la función  $\phi(y)$  en base a los  $H_n(y)$  tienen las siguientes expresiones:

$$\text{la esperanza } E\{Z\} = E\{\phi(y)\} = \int \phi(y) g(y) dy = \psi_0$$

$$\text{la varianza } \text{Var}\{Z\} = \text{Var}\{\phi(y)\} = \int \left(\frac{\psi_n}{n!} H_n(y)\right)^2 g(y) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n^2}{n!}$$

En la práctica, el desarrollo de  $\phi$  se limita a un orden  $N$  tal que la varianza acumulada proporcionada por la suma  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n^2}{n!}$  se aproxima suficiente de la varianza experimental de los datos. Frecuentemente el valor de  $N$  suele ser inferior a 20 o 30 ya que para términos superiores las contribuciones de los  $\psi_n^2/n!$  decrecen rápidamente a cero (véase figura A.3).

Puede decirse que los coeficientes  $\psi_n$  son las incógnitas a deducir, sus valores vienen dados por la relación:

$$\psi_n = \int \phi(y) H_n(y) g(y) dy = E\{\phi(y) \cdot H_n(y)\}$$

### 3.1. CALCULO NUMERICO DE LOS $\psi_n$

El cálculo de los coeficientes numéricos  $\psi_n$  se hace en el sentido del ajuste por mínimos cuadrados de las diferencias entre  $\phi(y)$  y un polinomio de grado  $N$ . Así, si se expresa la función cuadrática  $I$  por:

$$I = \int \left(\phi(y) - \sum_{n=0}^N \frac{\psi_n}{n!} H_n(y)\right)^2 g(y) dy$$

Se puede componer un sistema de ecuaciones que derivan de  $\frac{\partial I}{\partial \psi_n} = 0$ , para cualquier  $n$  del mínimo de  $I$  se cumple la condición de la integral que define el cálculo de  $\psi_n$ .

A continuación se dan dos formas prácticas de resolver el cálculo:

*A) Integración numérica. Método de Gauss*

Conocidos los datos experimentales y los  $Y_\alpha$  por anamorfosis gráfica de los  $Z_\alpha$ , se calculan los  $\psi_n$  por la combinación lineal del método de integración numérica de Gauss:

$$\psi_n^* = \sum w_i \phi(y_i) H_n(y_i)$$

Los  $w_i$  son coeficientes numéricos de ponderación definidos por el método de integración utilizado (los subíndices  $i$  denotan que los valores de  $y$  deben ser escogidos convenientemente para la evaluación de la función).

*B) Por aproximación de la integral que define a los  $\psi_n$*

A través de la suma de las  $K$  contribuciones,

$$\psi_n = \sum_{k=1}^K \psi_n^{(k)} \quad \{ \psi_n^{(k)}, k = 1 \text{ a } K \}$$

$K$  es el número de valores utilizados para la definición del histograma experimental  $F(z)$ .

Tómese un intervalo  $k$  cualquiera del histograma correspondiente a la clase  $\{z_k, z_{k+1}\}$ , sea aún  $\{y_k, y_{k+1}\}$ , y aplíquese una interpolación lineal en el interior de la misma, esto es para

$$y \in \{y_k, y_{k+1}\} \text{ se tiene que } z = b_k y + a_k$$

o sea que 
$$y = \frac{z + a_k}{b_k}$$

Se obtiene que la componente buscada  $\psi_n^{(k)}$  vale

$$\psi_n^{(k)} = \int_{y_k}^{y_{k+1}} (b_k y + a_k) H_n(y) g(y) dy$$

es decir que cada contribución al cálculo de  $\psi_n$  se deduce por integración en cada segmento de recta (la integral se sustituye por una suma discreta de valores).

Una anotación final importante para llevar a cabo este cálculo es que dado que se trabaja con un histograma acumulado es necesario definir previamente para las clases inferior y superior los valores máximos y mínimos que puede tomar la variable (no necesariamente estos valores deben corresponder con los observados experimentalmente).

Como ejemplo didáctico presento en las figuras A.3 a-d el ajuste hermitiano de un histograma experimental complejo, en el sentido que tiene un fuerte pico de valores bajos, con base en una función de anamorfosis desarrollada en 10 polinomios de Hermite.

Es importante resaltar dos aspectos importantes en el ajuste, en primer lugar, que el histograma teórico, restituido, prácticamente coincide con el experimental a pesar del fuerte pico de valores señalado, con el valor medio y la varianza de la variable reproducidos correctamente y, en segundo lugar, que como consecuencia de la frecuencia importante de valores bajos ( $\approx 45\%$ ) la función  $\phi(y)$  presenta problemas de decrecimiento para ciertos intervalos de valores que, aunque en este caso no ha tenido consecuencias importantes para el estudio geoestadístico (se trata de la simulación por bloques de un yacimiento) si nos muestra que se debe ser precavido a la hora de modelizar histogramas que presentan átomos en la distribución de la variable por este método. En este sentido, las investigaciones actuales se dirigen al estudio de nuevas funciones de anamorfosis aplicables a variables discretas; con ello el problema suscitado de la presencia de "átomos" o "bastones" en la distribución de la variable quedaría resuelto.



Media ( $\Psi_0$ ) = 0.2460

Parámetro  $\Psi_0 = 0.2458$

Valores de  $\Psi(n)$

$\Psi(1) = -.27383$

$\Psi(2) = 0.15841$

$\Psi(3) = 0.11637$

$\Psi(4) = -.29005$

$\Psi(5) = -.12070$

$\Psi(6) = 0.86901$

$\Psi(7) = 0.16674$

$\Psi(8) = -.36241$

$\Psi(9) = -.73501$

$\Psi(10) = 19.9290$

$\Psi(11) = 13.4980$

$\Psi(12) = -145.19$

$\Psi(13) = -259.63$

$\Psi(14) = 1437.60$

$\Psi(15) = 4699.30$

a

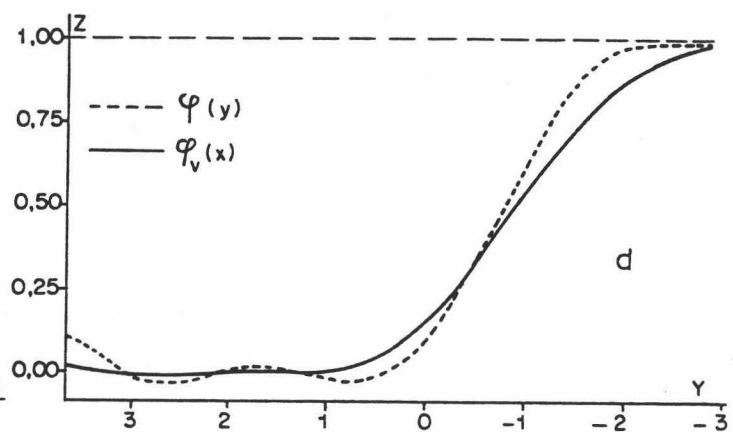
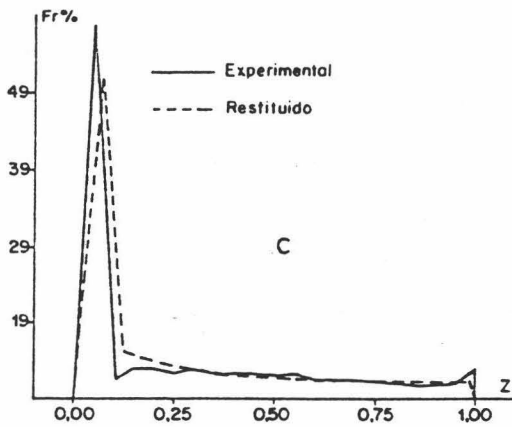
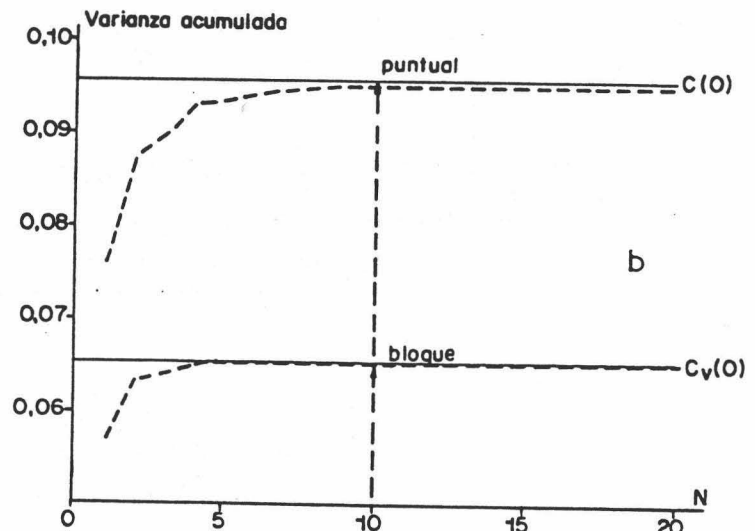


Figura A.3.- Anamorfosis gaussiana:

a) Tabla de los coeficientes numéricos  $\psi_n$  ( $n \leq 15$ )

b) Reconstitución de la varianza puntual  $\sum_{n=1}^N \frac{\psi_n^2}{n!}$  y de bloque  $\sum_{n=1}^N \frac{(\psi_n n^n)^2}{n!}$

c) Función de anamorfosis puntual  $\phi(y)$  y de bloque  $\phi_v(x)$

d) Ajuste del histograma teórico, restituido, al histograma experimental.

## II. CONSTRUCCION DEL MODELO NUMERICO DE YACIMIENTO A PARTIR DEL METODO DE BANDAS ROTANTES Y DEL MODELO GAUSIANO DISCRETO

### 1. ASPECTOS METODOLOGICOS

El objetivo de este anexo es presentar la marcha general a seguir para la construcción del modelo de yacimiento simultáneamente sobre soportes de punto y bloque, en base al método de bandas o rectas rotantes y del modelo gaussiano discreto, cuyo organigrama general puede verse en la figura A.4.

#### 1.1. RECORDATORIO DEL METODO DE BANDAS ROTANTES

Este método, debido conceptualmente a MATHERON (1972 b) y desarrollado principalmente por JOURNEL (1974) y GUIBAL (1972), permite como se recordará simular una realización  $z_s(x)$  no condicional de una FA  $Z(x)$  con distribución gaussiana. Como es de suponer no es el único método posible de simulación probabilística, pero es un método que básicamente reúne unas condiciones de facilidad de manejo tan aceptables que lo convierten en un método muy utilizado en la práctica. Así, en bibliografía de procesos estocásticos se ha descrito diferentes métodos probabilísticos para la simulación de FA en 1-D  $\{z_s(x), x \in R^1\}$  con función de covarianza impuesta  $C^1(h)$ ,

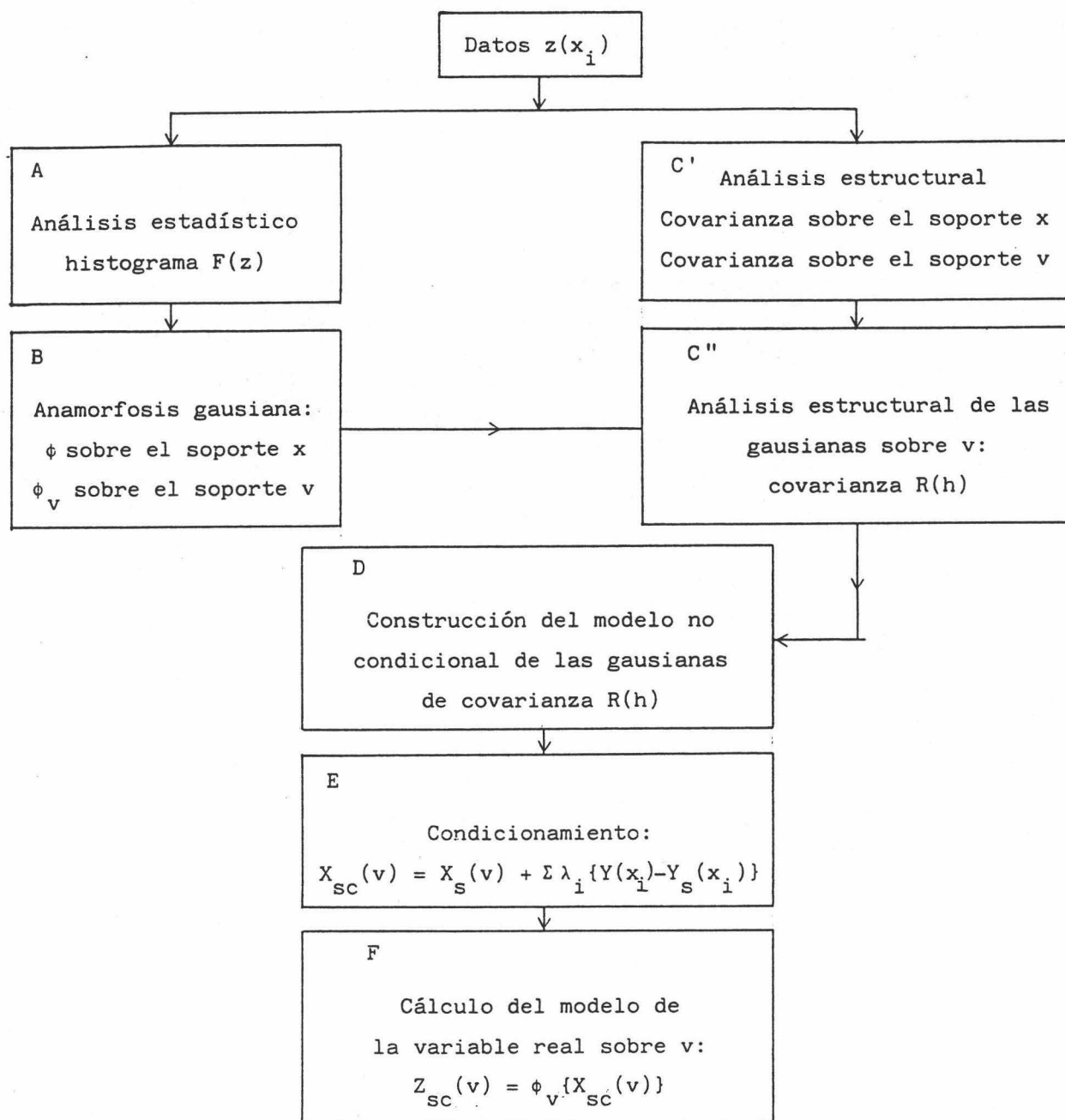


Figura A.4.- Organigrama para la construcción del modelo de yacimiento sobre soporte de bloque.

pero que en la práctica son poco aplicados para simulaciones en espacios de dimensiones mayores ( $R^2$  o  $R^3$ ), debido al tiempo de cálculo requerido. Estos métodos se basan principalmente en la:

- aplicación de la teoría del análisis armónico con aplicaciones de las transformadas de Fourier, que pueden verse en los trabajos de JENKINS y WATIS(1968) y JOURNAL (1974).

- aplicación del método de medias móviles aplicable para aquellas familias de covarianzas que se escriben en forma de un producto de convolución

$$C(h) = f \times \overset{Y}{f} = \int f(x) f(x+h) dx,$$

que es un método que puede generalizarse a n dimensiones.

Precisamente, el método de bandas rotantes tiene su base en esta aplicación de las medias móviles; su originalidad estriba en reducir la simulación en 3 o 2 dimensiones en varias simulaciones independientes en 1 dimensión, obtenidas sobre rectas que se hacen rotar en el espacio  $R^3$  o  $R^2$ . Con ello se construye una realización de una FA Z en el plano o en el espacio de covarianza  $C_2(h)$  o  $C_3(h)$  con realizaciones independientes de una FA Y en una dimensión, con costos de trabajo y de tiempo de ordenador razonables.

Las realizaciones independientes, anotadas  $y_i$ , de covarianza  $C_1(h)$  se deducen sobre rectas que compartimentan de forma isótropa el espacio, de modo que se asegure la isotropía de las covarianzas  $C_2(h)$  o  $C_3(h)$ . En tres dimensiones, el número de estas rectas es de 15; éstas unen los puntos centrales de las aristas opuestas de un icosaedro regular (GUIBAL, 1972), cuyo número es suficiente para alcanzar una buena aproximación a la función teórica. En dos dimensiones el número de rectas suele ser de 90 a 180.

En una simulación tridimensional, se impone la covarianza  $C_3(h)$  y se deduce la covarianza a una dimensión a simular  $C_1(h)$ , sobre cada una de las ND rectas, por la derivada parcial,

$$C_1(h) = \frac{\partial}{\partial h} (h C_3(h))$$

sea al contrario

$$C_3(h) = 1/h \int_0^h C_1(s) ds$$

que es la integración de  $C_1(h)$  sobre la esfera unidad.

En dos dimensiones, se tiene

$$C_2(h) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} C(h \cos \theta) d\theta$$

La mayoría de las covarianzas  $C_1(h)$ , asociadas a los modelos de variogramas más usuales en geoestadística, se ponen bajo la forma de un producto de convolución de una función  $f$  por su traspuesta  $\overset{v}{f}$ :

$$C_1(h) = f * \overset{v}{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot f(x+h) dx$$

con  $\overset{v}{f}(x) = f(-x)$

### A) Teorema

Sea  $T(x)$  una FA que tiene por covarianza una medida de Dirac y que presenta las características siguientes:

$$E\{T(x)\} = 0$$

$$E\{T(x) T(x+h)\} = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{si } h \neq 0 \end{cases}$$

Sea la función de ponderación vista  $f(u)$ , entonces aplicando las medias móviles se tiene que la FA  $Y$  definida por

$$Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) T(u+x) du$$

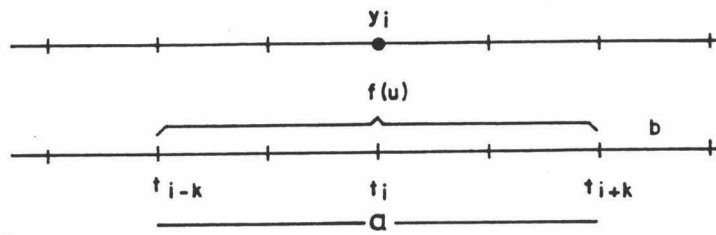
verifica que tiene esperanza nula  $E\{Y(x)\} = 0$  y como covarianza  $C_1(h)$

$$C_1(h) = E\{Y(x) Y(x+h)\} = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) f(u+h) du = \sigma^2 \cdot f * \overset{v}{f}$$

En la práctica se utiliza como  $T(x)$   $VA_S$  discretas independientes  $T_i$  distribuidas en el intervalo  $[0,1]$ ; se considera entonces la media móvil siguiente para el cálculo de los  $y$ :

$$y_i = \sum_{k=-a/2}^{a/2} t_{i+k} f(k.b)$$

expresión discretizada de la integral anterior. Donde  $a$  es el alcance de la covarianza modelizada  $-C_2(h)$  o  $C_3(h)$ ,  $b$  el paso de discretización y  $f$  la función de ponderación asociada:



### b) Simulación en tres dimensiones

#### . Covarianza esférica

Si  $C_3(h) = C \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{h}{a} + \frac{1}{2} \frac{h^3}{a^3} \right]$ , derivando parcialmente respecto a  $h$  el producto de  $h$  por  $C(h)$  obtenemos que

$$C_1(h) = C \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{h}{a} + \frac{2}{3} \frac{h^3}{a^3} \right] \quad \text{si } |h| \leq a$$

esta covarianza es simplemente el producto de covolución  $f \times f^v$  con la función de ponderación  $f(u)$ , tal que

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{12C}{a^3}} u & \text{si } u \in [-a/2, a/2] \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

#### . Covarianza exponencial

Si  $C_3(h) = C e^{-ah}$  entonces  $C_1(h) = C(1-ah)e^{-ah}$  para  $h \geq 0$ . Con  $C_1(h) = f^v \times f$  expresada a partir de la función de ponderación

$$f(u) = \begin{cases} 2e\sqrt{Ca} (1-au) e^{-au} & u \geq 0 \\ 0 & u < 0 \end{cases}$$

## 1.2. RESUMEN DEL PROCESO DE CONSTRUCCION DEL MODELO

Expongo seguidamente las etapas de la simulación de una realización  $z_s(x)$  de una FA  $Z(x)$  tridimensional por el método de las bandas rotantes:

- a. Calcular la covarianza  $C_1(h)$  asociada a  $C_3(h)$  por la relación

$$C_1(h) = \frac{\partial}{\partial h} h C(h)$$

y calcular la función de ponderación  $f$  tal que  $C_1(h) = f \times f^v$

- b. Elegida una recta  $d_i$  del icosaedro regular y adoptando un paso de discretización  $b$  tirar realizaciones de  $VA_S$  independientes  $T_i$  de distribución uniforme  $[0,1]$  (en práctica se tomará  $[-.5, .5]$  para que  $E\{T_i\} = 0$ ), implantándolas en los nudos de discretización de malla  $b$
- c. Calcular la media móvil  $y_i^d = \sum_{t_{i+k}} f(k.b)$ , siendo  $y^d$  una realización de la FA  $Y^d$  sobre la recta  $d$  de covarianza  $C_1(h)$
- d. Proyectar cada punto  $x$  del espacio a simular sobre las 15 rectas de modo a obtener los valores de  $y_i^d$  para cada una de ellas, y obtener finalmente la media

$$y_s(x) = 1/\sqrt{15} \sum_{d=1}^{15} y_i^d$$

Como se ve el método consiste en sumar 15 realizaciones independientes a una dimensión generando una única realización tridimensional de una función de ley gaussiana (aplicación del teorema central límite); por esta razón es necesario transformar dichos valores por la función  $\phi$  de anamorfosis para obtener la realización sobre la variable real.

## 2. SIMULACION DE VALORES DE BLOQUES Y PUNTOS

Este método se basa en el modelo gaussiano discreto introducido inicialmente por MATHERON (1975 a) para responder al problema de la parametrización local y global de las reservas recuperables (estimación de funciones de recuperación o de transferencia), que se aplica ventajosamente para la simulación condicional de yacimientos.

Se quiere simular la variable simultáneamente sobre soporte puntual y de bloque,  $Z(x)$  y  $Z_v(x)$ . Puesto que el modelo geoestadístico las inter-

preta como  $FA_S$ , se necesita un modelo probabilístico que fije la ley de probabilidad del conjunto de estas variables.

Bajo la restricción de situarse en el marco de posibilidades de la simulación de  $FA_S$  gaussianas, se interpretará ambas variables como anamorfoseadas de sus variables gaussianas asociadas, sea entonces

$$Z(x) = \phi\{Y(x)\} \quad y \quad Z_v(x) = \phi_v\{X(x)\}$$

Sucede que mientras que  $Z_v$  es la regularizada de  $Z$  sobre  $v$ , no ocurre así tal caso para las variables  $X$  e  $Y$ , verificándose que,

$$X(x) \neq 1/v \int_v Y(x) d_x,$$

aunque se observa en la figura A.5 que las distribuciones de las variables  $Y(x)$  e  $X(x)$  tienen aspectos semejantes y con los mismos parámetros estadísticos, media nula y dispersión igual a 1.

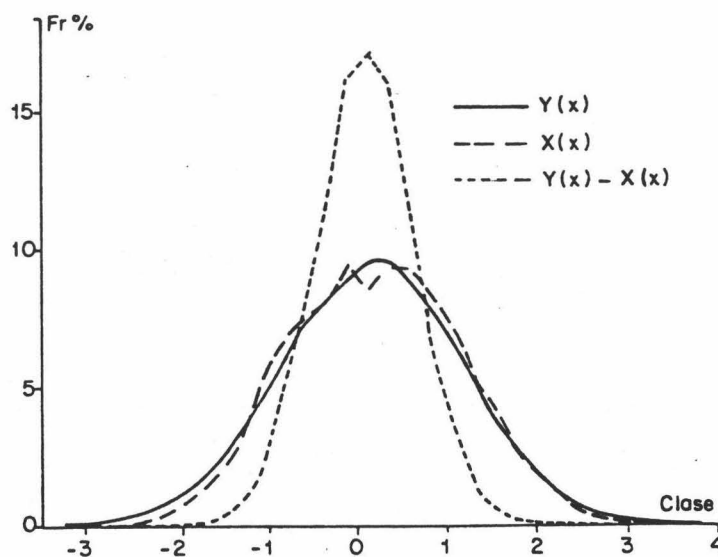


Figura A.5.- Distribuciones de las anamorfoseadas de punto y bloque  $Y(x)$ ,  $X(x)$  y de las diferencias  $Y(x) - X(x)$ .

El cálculo de la función  $\phi$  no presenta ningún problema ya que se sabía deducir del histograma experimental. Por su parte, la función  $\phi_v$  buscada admite el mismo desarrollo hermitiano que  $\phi$ , pudiendo ser calculada a partir de ella y mediando ciertas hipótesis, en particular la de respetar una permanencia de ley entre  $Z$  y  $Z_v$  en el cambio de soporte.



A condición de que se cumpla lo anterior, el modelo queda fijado por la ley multivariable de las gaussianas  $Y(x)$  y  $X(x)$  y por sus covarianzas respectivas:

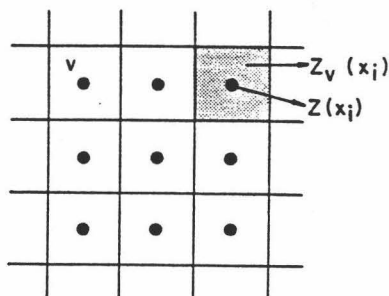
$$\begin{array}{ll} \text{bloque/bloque} & E\{X_i \cdot X_j\} = R(h) \\ \text{punto/bloque} & E\{Y_\alpha \cdot X_j\} = r(h) \\ \text{punto/punto} & E\{Y_\alpha \cdot Y_\beta\} = \rho(h) \end{array}$$

el vector  $h$  se define por la distancia entre los puntos de apoyo de la pareja de variables respectivas.

## 2.1. LEY DE LAS VARIABLES ANAMORFOSEADAS $X, Y$

El aspecto básico del modelo gaussiano discreto es el modo como fija la ley multivariable de  $Y, X$ . Se dan las siguientes hipótesis:

- El área simulada la compone un conjunto de  $N$  bloques iguales  $v_i$ , tales que  $Z_v(x_i) = \phi_v\{X(x_i)\}$  para  $i = 1$  a  $N$ :



- Los valores puntuales  $Z(x_i)$  se relacionan con los valores  $Z_v(x_i)$  que los contienen del modo que la posición del punto  $x_i$  en el bloque  $v_i$  es aleatoria uniforme (randomización de la ley puntual  $Z$  en el bloque), lo que implica

$$E\{Z(x_i)/Z_v(v_i)\} = Z_v(v_i)$$

$$E[\phi\{Y(x_i)\}/X(v_i)] = \phi_v\{X(v_i)\}$$

Para cada uno de los bloques la ley a dos variables ( $Y, X$ ) es gaussiana. Como tanto  $Y$  como  $X$  son  $N(0,1)$ , la ley binormal queda definida por el coeficiente de correlación  $r$  entre  $X$  e  $Y$ .

Bajo esta hipótesis la relación anterior determina completamente la función  $\phi_v$ , siendo conocidos  $r$  y  $\phi$ ; de esta forma al modelo liga la forma de  $\phi_v$  a la de  $\phi$  a través del parámetro  $r$  de cambio de soporte (cf. figura A.3). Las expresiones polinómicas de  $\phi$  y  $\phi_v$  serían

$$\phi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n}{n!} H_n(y) \quad \phi_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n(v)}{n!} H_n(x)$$

con  $\psi_n(v) = \psi_n r^n$  y  $r = E\{X, Y\}$

En este marco probabilístico, si se fija la variable  $X(v_i)$  la gaussiana puntual  $Y(x_i)$ , tal que  $x_i \in v_i$ , es independiente de los otros  $Y(x_j)$  y  $X(v_j)$ ; es más, la normal  $Y$  cuando se fija el valor de  $X$  tiene una esperanza  $rX$  y una varianza  $1-r^2$  (ley binormal)

$$E\{Y/X\} = r.X$$

Es este algoritmo de cambio de soporte del modelo gaussiano discreto el que interesa aplicar para la simulación conjunta de bloque y punto. Es suficiente simular en primer lugar, no condicionalmente, una realización  $x_s(v_i)$  de  $X_s(v_i)$  de covarianza  $R(h)$  y deducir el valor puntual  $y_s(x_i)$  de  $Y_s(x_i)$  por la relación clásica

$$y_s(x_i) = r x_s(v_i) + \sqrt{1-r^2} U_i \text{ con } U_i = N(0,1)$$

$x_s(v_i)$  se obtiene de la simulación por el método de bandas rotantes de la covarianza  $R(h)$ , que se sabe deducir del desarrollo hermitiano del cambio de soporte,  $\psi_n(v)$ :

$$C_v(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n^2(v)}{n!} R^n(h)$$

donde  $C_v(h)$  es la covarianza regularizada de  $Z_v$  que se deduce a partir del variograma puntual

$$C_v(h) = \gamma(\infty) - \gamma(v, v_h)$$

Otro modo de calcular  $R(h)$  es a partir de la covarianza puntual  $\rho(h)$  y del parámetro  $r$  como se verá más tarde.

La relación que liga  $C_V(h)$  a  $R(h)$  es siempre creciente al menos para el caso que nos interesa  $r \geq 0$ , y puede resolverse la ecuación por aproximaciones sucesivas para un cierto número de pasos de  $h$ . El mismo método es válido para calcular el parámetro  $r$  de la relación (figura A.6),

$$C_V(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\psi_n r^n)^2}{n!} \quad (\text{cf. figura A.3 b})$$

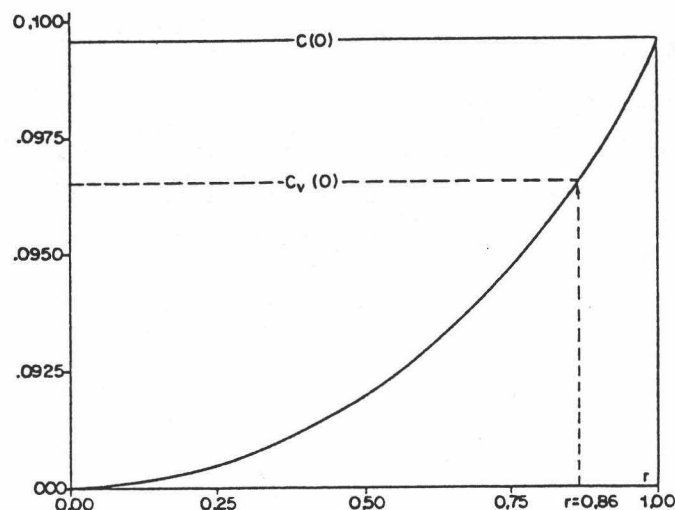


Figura A.6.- Cálculo del parámetro de cambio de soporte  $r$ , conocidos los  $\psi_n$  y la covarianza  $C_V(0)$ .

### 3. CONDICIONAMIENTO DEL MODELO

La simulación no condicional de la covarianza  $R(h)$  obtiene los valores gaussianos de bloques  $X_S(v_i)$  y por aplicación de la relación vista con anterioridad los valores puntuales  $Y_S(x_i)$  asociados. Queda solamente condicionar el modelo a los valores experimentales  $Y_\alpha$  que se hace por la relación de condicionamiento:

$$Y_{sc}(v_i) = X_S(v_i) + [X_k(v_i) - X_{sk}(v_i)]$$

$$X_{sc}(v_i) = X_S(v_i) + \sum \lambda_\alpha [Y(x_\alpha) - Y_S(x_\alpha)]$$

donde los  $\lambda_\alpha$  son los ponderadores de krigage del bloque  $v_i$  a partir de los datos puntuales, conocidos en los puntos de información  $x_\alpha$  ( $Y$  e  $Y_S$ ), y con la ayuda de la covarianza puntual  $\rho(h)$  de los  $Y$ :  $\rho(h) = r^2 R(h)$ .

Finalmente, se restituyen los valores de bloques con la ayuda de  $\phi_v \{X_S(v_i)\} = Z_{sc}(v_i)$  y se podrá asociar un valor puntual al bloque  $Z_{sc}(v_i)$  con la ayuda de  $\phi \{Y_S(x_i)\} = Z_S(x)$  a condición de simular en todo bloque un valor gaussiano  $Y_S(x_i) = N(r X_S(v_i), 1-r^2)$ .

La ventaja principal de este método de construcción del modelo de yacimiento es que es fácil de implantar en el ordenador, al tiempo que permite la simulación a la vez de puntos y bloques; los cálculos de covarianzas son rápidos de hacer debido a las simplificaciones introducidas por el modelo gaussiano discreto. Lo ideal para obtener un buen modelo es que la talla del bloque sea pequeña en relación a la malla de sondeos y al alcance del variograma, debido a las hipótesis enunciadas.

#### 4. ALGUNOS TESTS SOBRE EL MODELO CONSTRUIDO

Presentaré los resultados de diferentes tests elaborados sobre un modelo de yacimiento construido de esta forma, en base al modelo gaussiano discreto. Quiero con ello mostrar experimentalmente que todas las hipótesis implícitas han sido conservadas por el modelo numérico.

##### *A) El variograma de orden 1*

Este variograma se define por las diferencias absolutas de la variable,

$$\gamma_1(h) = \frac{1}{2} E \{ |Z(x) - Z(x+h)| \}$$

$\gamma_1$  que es un verdadero variograma en el sentido de que  $-\gamma_1$  es una función de tipo positivo condicional.

Un test interesante sobre la binormalidad de la pareja (X,Y) puede hacerse utilizando este variograma (MATHERON, 1982 b): en el caso bigausiano, hipótesis asumida por el modelo, este variograma es proporcional al variograma clásico  $\gamma(h)$ , si son calculados a partir de la variable normal experimental  $Y(x_\alpha)$

$$\frac{(\gamma_1(h))^2}{\gamma(h)} \approx C^{te} = 1/\pi$$

Con el banco de datos del yacimiento simulado se han calculado estos variogramas y su relación cociente, que vemos en la figura A.7. Se observa que las fluctuaciones de tal relación de variogramas no superan el 10 % del valor teórico  $1/\pi$ ; por tanto, se podría concluir a la vista de estos resultados que es válido aplicar un modelo bigausiano para la modelización.

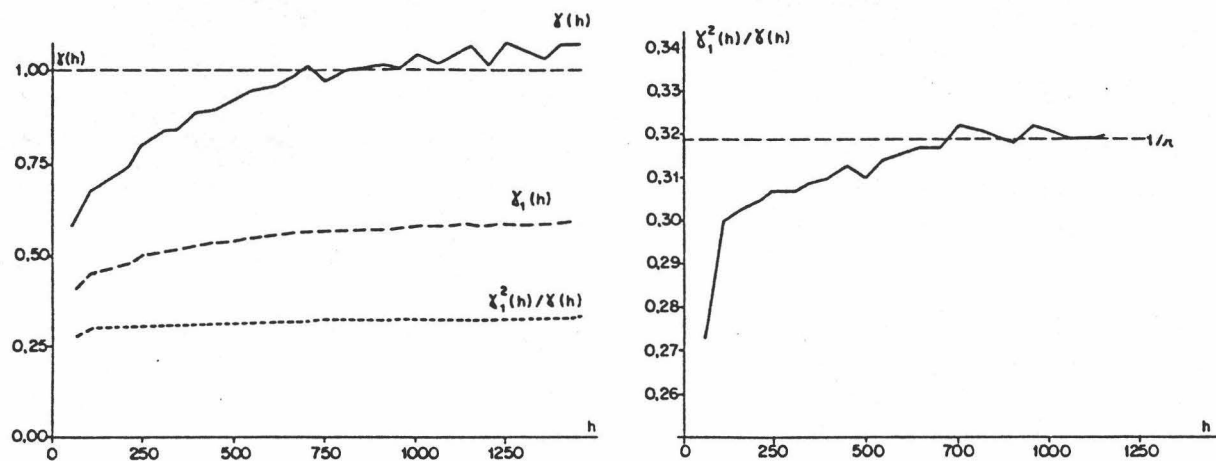


Figura A.7.- Relación entre  $\gamma$  y  $\gamma_1$  en el caso bigausiano.

B) Correlación de las gaussianas  $Y$  y  $X$

Según el modelo gaussiano discreto el valor de la correlación entre el valor puntual  $Y$  y de bloque  $X$  es igual al valor del parámetro de cambio de soporte  $r$ . Con los valores del modelo construido se ha obtenido un valor de  $r = 0,84$  que es próximo al valor teórico deducido de relaciones anteriores  $r = E\{X.Y\} = 0,86$  (figura A.8).

En cuanto a las diferencias  $(Y-X)$  se ha obtenido un valor de la varianza de 0,303, próximo al valor deducido del modelo gaussiano  $(1-r^2)$  igual a 0,253. El sesgo se debe a que para el test se ha trabajado con los datos experimentales  $Y_\alpha$  y no con los  $Y_S(x_i)$ , lo que hubiese dado una diferencia más pequeña.

C) Correlación entre  $Z$  y  $Z_v$

Una de las hipótesis hechas al comienzo era que el punto de observación  $x$  se consideraba aleatorio en el bloque  $v$  al que pertenecía.

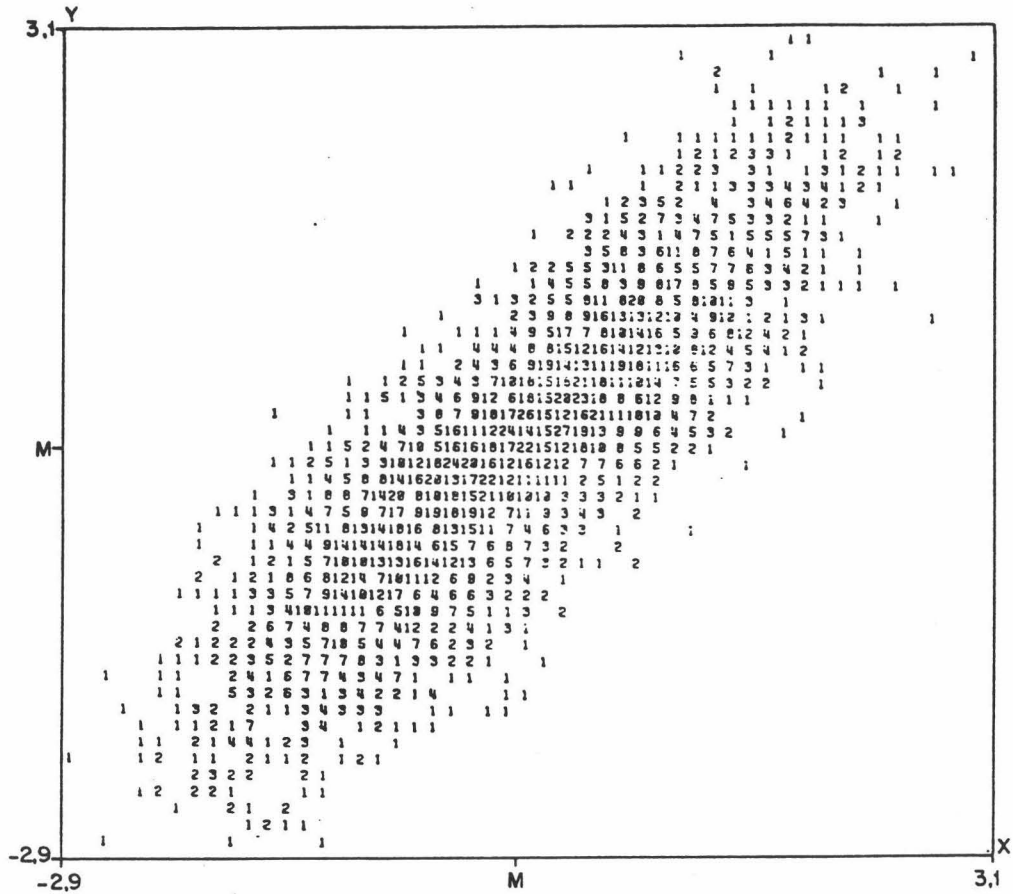


Figura A.8.- Nube de correlación (Y,X).

Tal hipótesis implica que (relación de Cartier):

$$E\{Z(\underline{x})/Z_v\} = Z_v$$

Si se razona con  $Z_{sc}(v)$ , en lugar de  $Z_v$ , se observa para el modelo simulado que tal relación se verifica con cierta aproximación (figura A.9 a).

Por otra parte, también se constata que al condicionamiento de las variables  $Z(x)$  o  $Z_v$  -sea en su lugar  $Z_{sc}(v)$ - por la gaussiana de bloque X corresponde bien a la función de anamorfosis  $\phi_v$  (figura A.9 b).

$$E\{Z(x)/X\} = \phi_v(X) \quad \text{y} \quad E\{Z_v(x)/X\} = \phi_v(X)$$

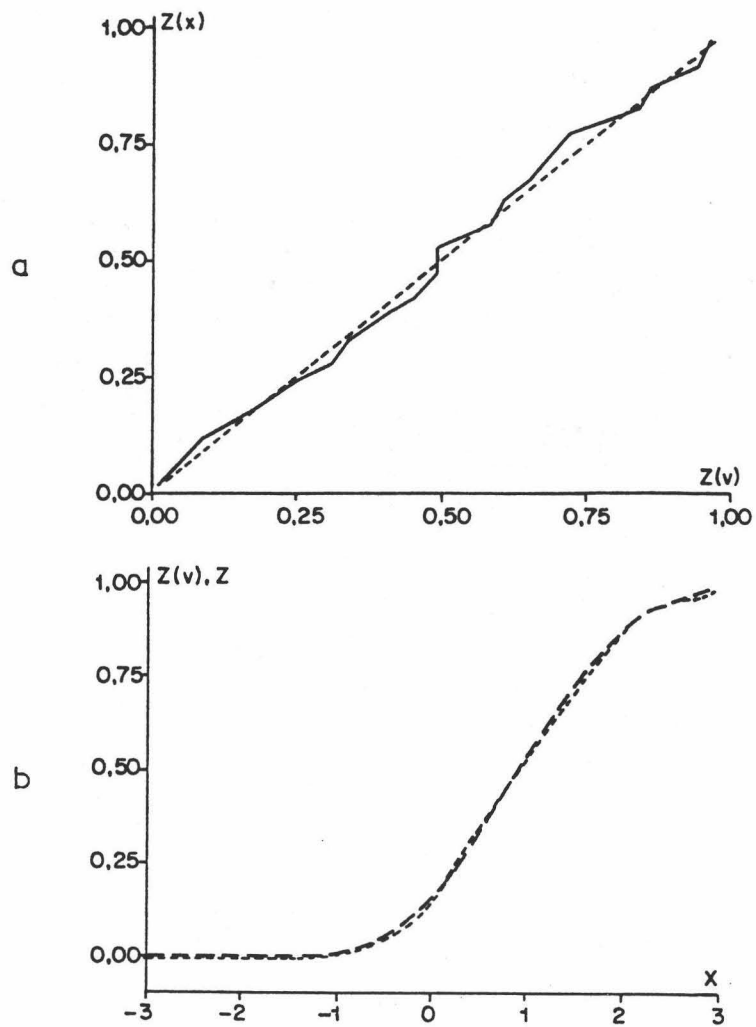


Figura A.9.- a)  $E\{Z(x)/Z(v)\} = Z(x)$   
 b)  $E\{Z/X\} = \phi_v$  y  $E\{Z^v/X\} = \phi_v$

#### D) Otro test al modelo bigausiano

En apartados anteriores se ha indicado el interés que hay en conocer la ley bivariable de la pareja  $(Y, X)$ , que en el modelo adoptado se ha supuesto binormal. Bajo esta hipótesis se sabe que:

- . cada una de las leyes marginales  $Y$  y  $X$  son normales centradas reducidas
- . los polinomios de Hermite verifican para todo  $n$  que

$$E\{H_n(Y)/X_h\} = \rho^n H_n(X_h)$$

$$E\{H_n(X)/Y_h\} = \rho^n H_n(Y_h)$$

la condición primera se cumple de inmediato ya que se dispone de las funciones de anamorfosis  $\phi$  y  $\phi_v$  que dan los valores de las variables Y y X asociadas a las variables reales Z y  $Z_v$ , ya vistas.

Lo importante es analizar si la segunda de las condiciones se cumple en el modelo elaborado. Los tests que se dan a continuación se han hecho hasta el grado  $n = 4$  de los polinomios, para distintas distancias h y para las variables condicionantes Y e X (véanse los gráficos A. 10). Un simple examen visual de dichas figuras permite deducir que: para valores de  $h = 0$  se tiene una buena correspondencia entre la relación experimental y teórica, especialmente para grados de n pequeños. Igual ocurre para valores de distancias pequeñas, así para  $h = 50$  m se tiene el mismo comportamiento que en el caso anterior pero con mayores fluctuaciones, tanto más cuanto mayor es el grado de n. Para distancias grandes,  $h = 250$  m, se observa un notable efecto de suavizado de la curva experimental por la teórica debido al valor pequeño del coeficiente de correlación  $\rho$  entre las variables.

Finalmente, las mismas conclusiones pueden darse para el caso del estudio de dichas expresiones cuando el condicionamiento se hace por la misma variable,

$$E\{H_n(X)/X_h\} = \rho^n H_n(X_h)$$

$$E\{H_n(Y)/Y_h\} = \rho^n H_n(Y_h)$$

## 5. LAS COVARIANZAS GAUSIANAS

Para que el modelo gaussiano discreto quede completamente definido es suficiente además que se cumplan las correlaciones entre las variables. Las covarianzas se expresan en función de la covarianza entre bloques  $R(h)$  y del parámetro  $r$  por medio de las relaciones:

$$\begin{aligned} R_{ij}(h) &= E\{X_i \cdot X_j\} \\ r_{\alpha j}(h) &= E\{Y_\alpha \cdot X_j\} \\ \rho_{\alpha\beta}(h) &= E\{Y_\alpha \cdot Y_\beta\} \end{aligned} \quad \text{para} \quad \begin{array}{l} i \neq j \\ \alpha \neq \beta \end{array} \quad h \neq 0$$

o lo que es lo mismo en términos de variograma ( $h \neq 0$ )



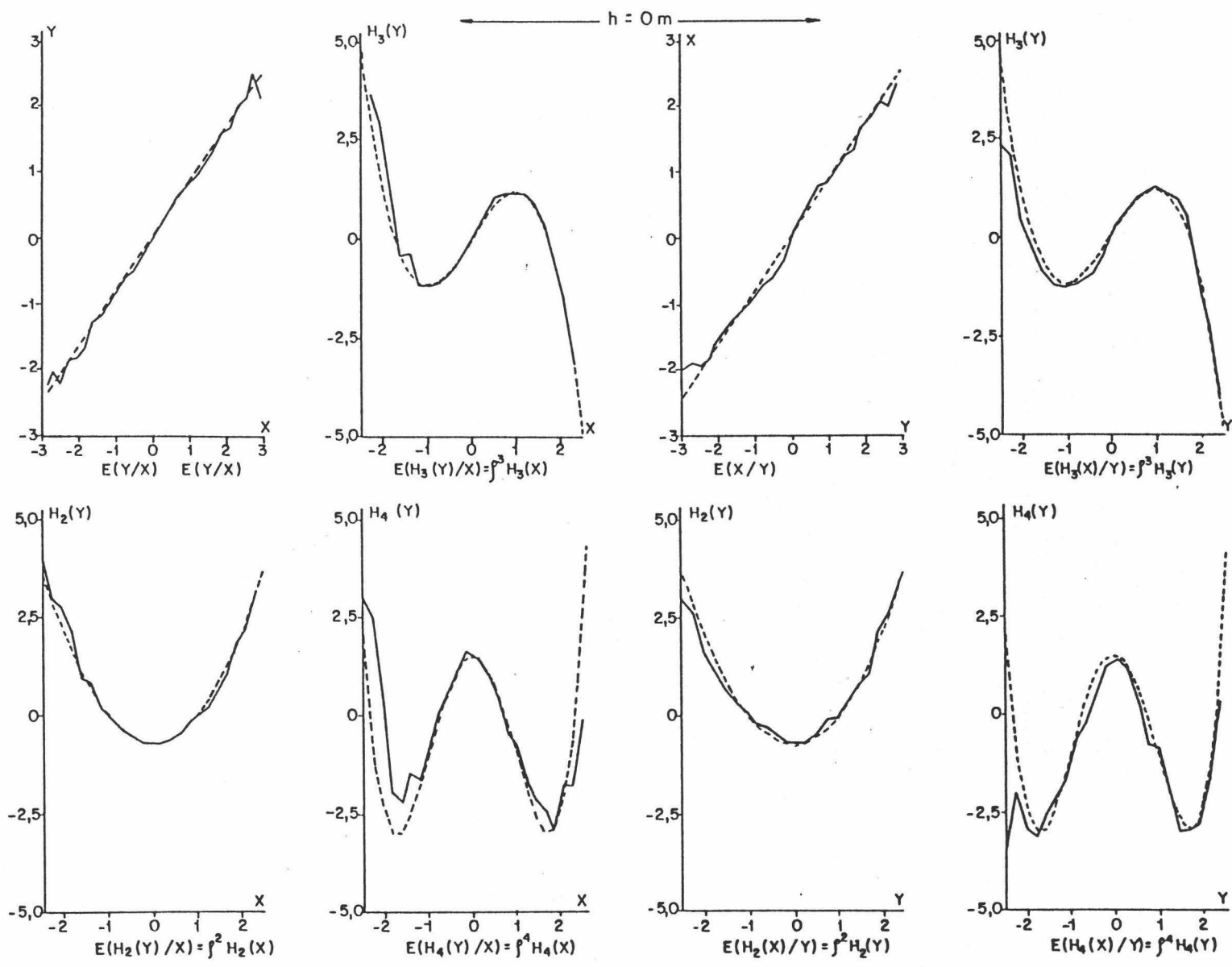


Figura A.10.- Test de binormalidad:  $E\{H_n(X)/X_h\} = \rho^n H_n(X_h)$  y  $E\{H_n(Y)/Y_h\} = \rho^n H_n(Y_h)$

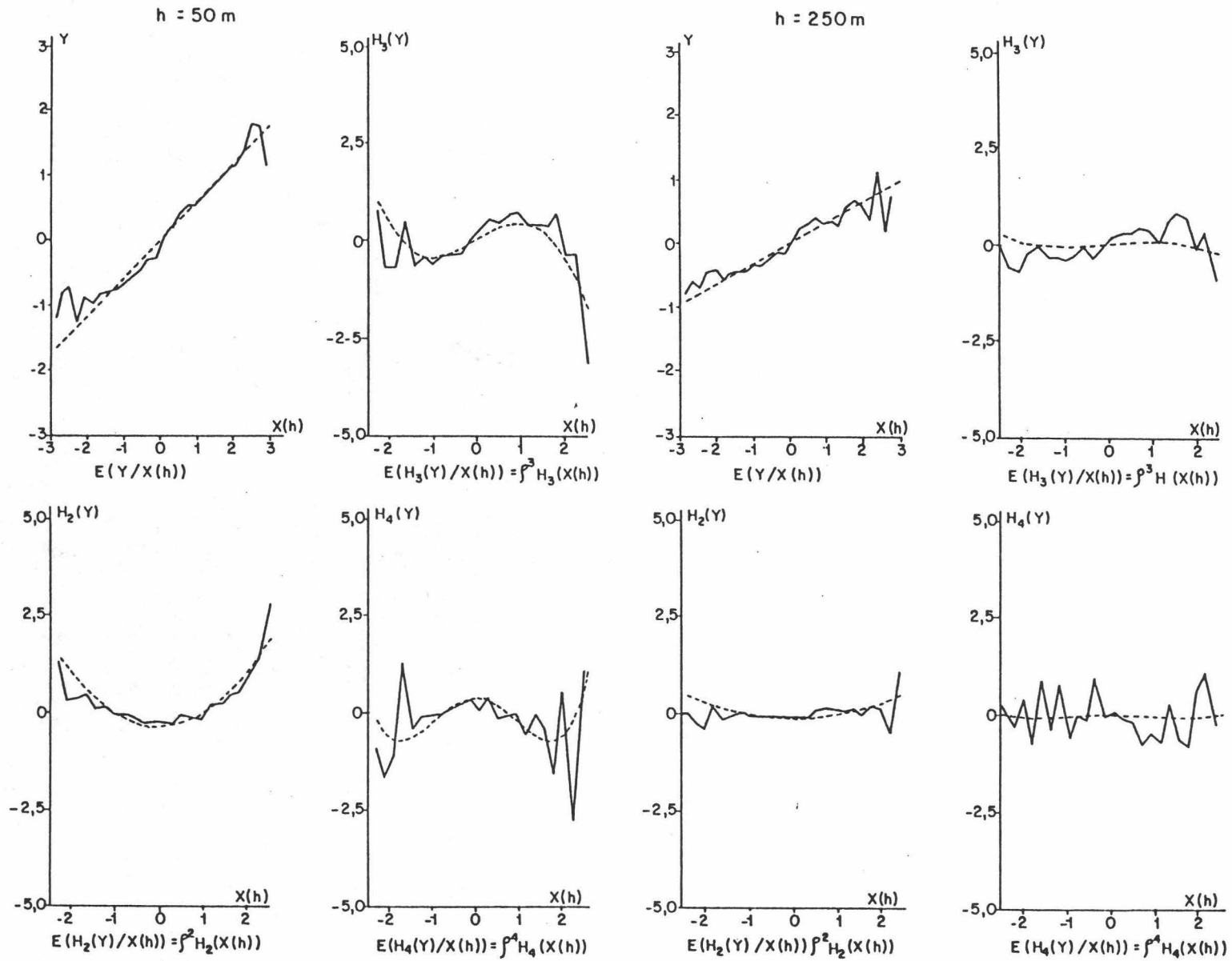


Figura A.10.- (Continuación).

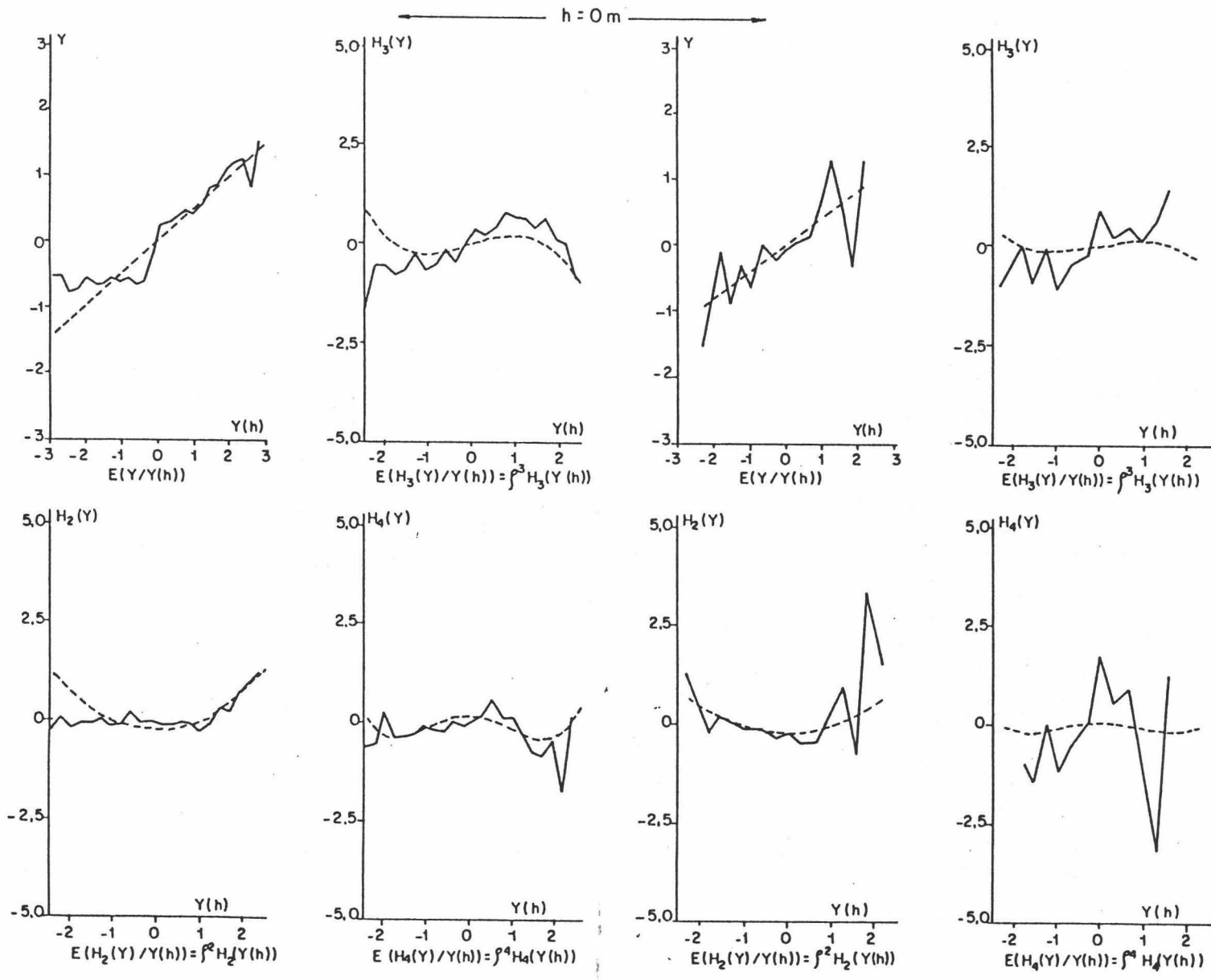


Figura A.10.- (Continuación).

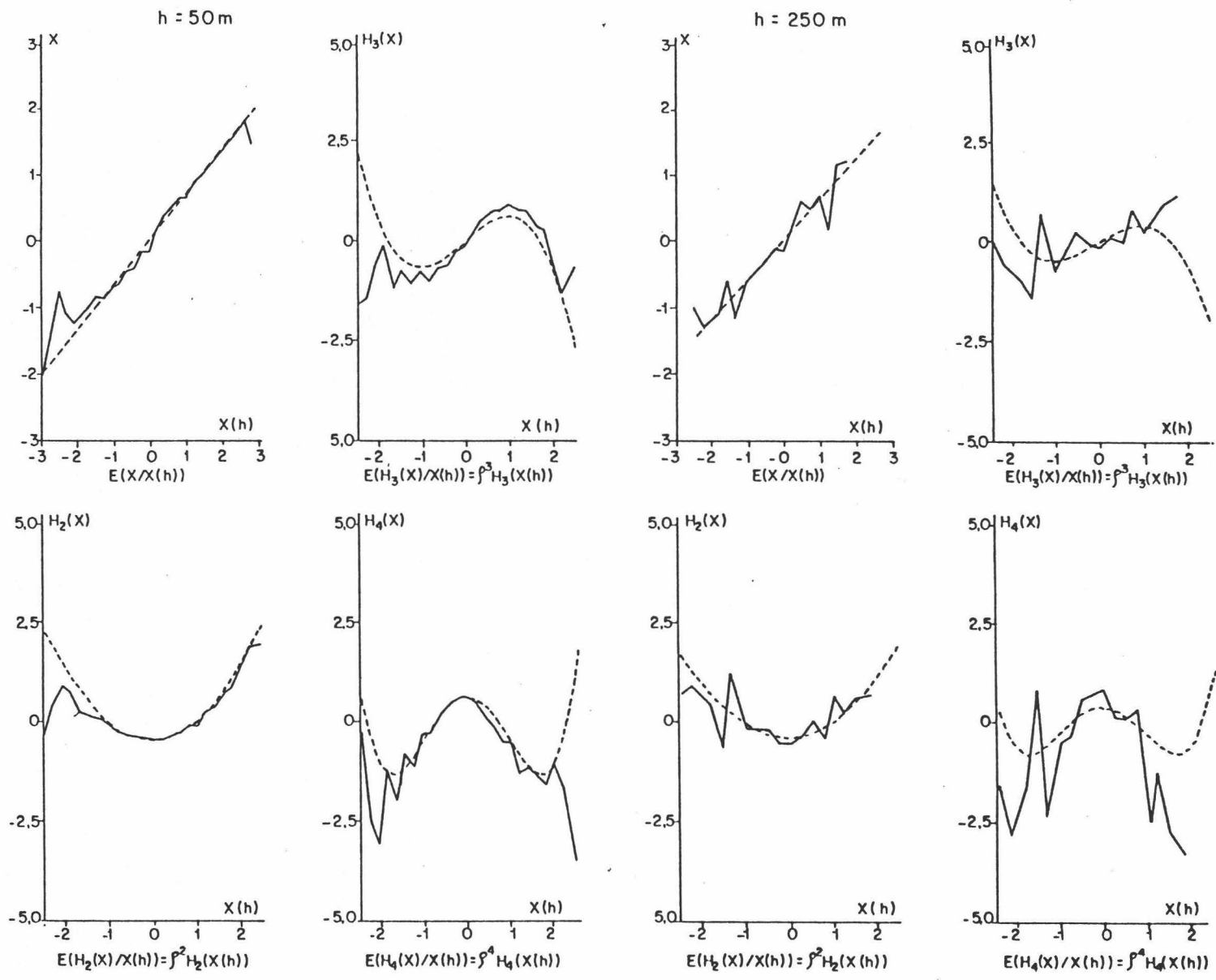


Figura A.10.- (Continuación).

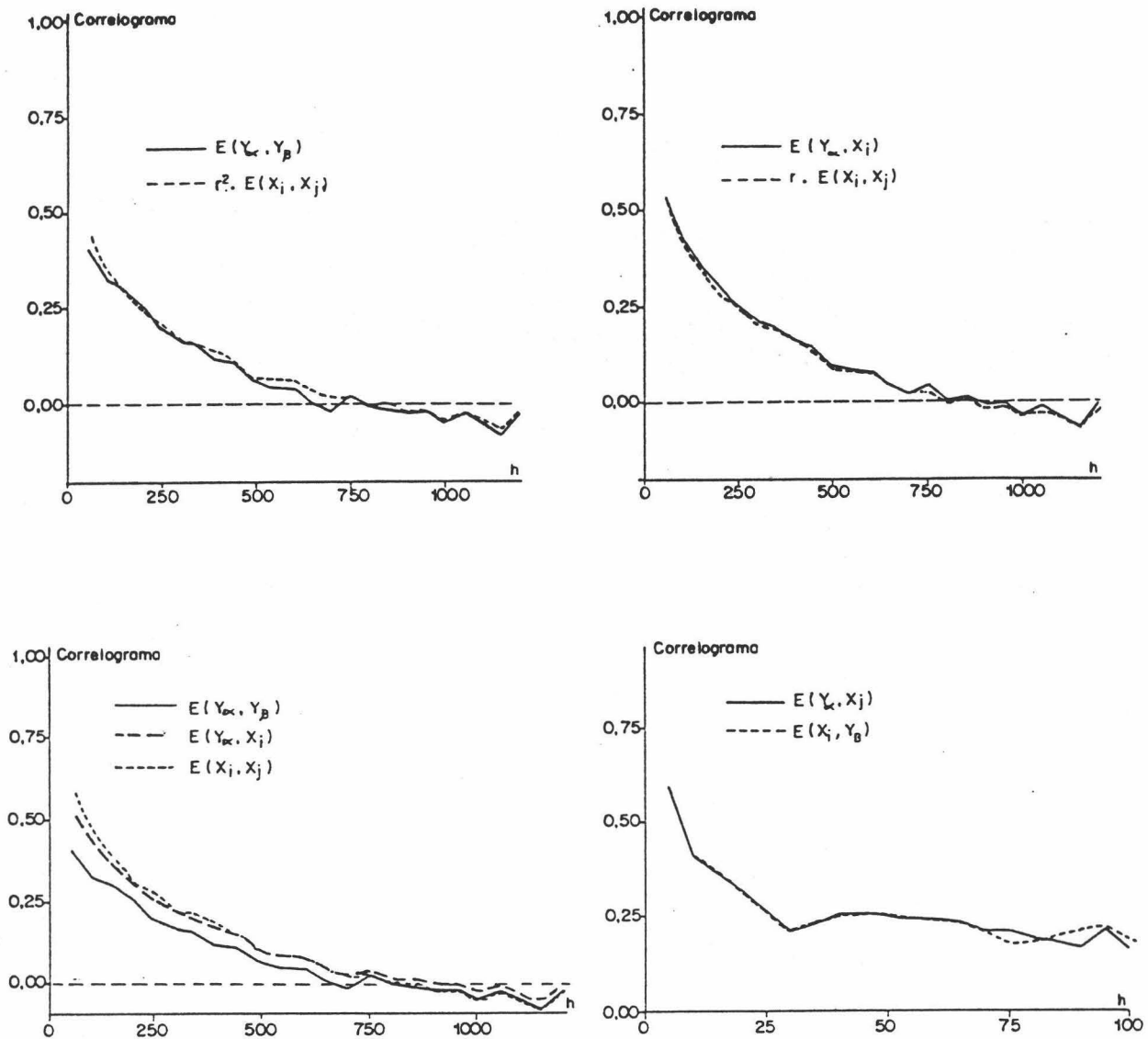


Figura A.11.- Covarianzas del modelo gaussiano discreto calculadas sobre un modelo numérico.

$$\gamma_{ij}(h) = 1 - R_{ij}(h)$$

$$\gamma_{\alpha\beta}(h) = 1 - \rho_{\alpha\beta}(h) = 1 - r^2 R_{ij}(h) = (1 - r^2) + r^2 \gamma_{ij}(h)$$

$$\gamma_{\alpha j}(h) = r - r_{\alpha j}(h) = r\gamma_{ij}(h) \quad \text{si } r_{\alpha j} = r_{j\alpha}$$

Estas covarianzas han sido calculadas sobre el modelo numérico disponible y representadas sus relaciones en la figura A.11.

### III. CONSTRUCCION DE REALIZACIONES DE FA EN EL NUEVO ALGORITMO DE SIMULACION

#### 1. TESTS ESTADISTICOS SOBRE EL ALGORITMO DE GENERACION DE $\epsilon_n$

Antes de presentar la construcción de realizaciones de FA expondré los resultados de algunos tests estadísticos realizados sobre series generadas de variables  $\epsilon_n$ .

Considerando que el método de simulación de bandas o rectas rotantes proporciona realizaciones con ley gaussiana, centradas y reducidas, para pasar después por anamorfosis a la distribución real, tomaremos  $\epsilon_n = -1$  en lugar de  $\epsilon_n = 0$  de forma que esta VA esté centrada.

Los dos aspectos básicos a contemplar son la independencia y distribución uniforme de la VA  $\epsilon_n \{-1,1\}$ .

En la hipótesis de independencia se debe tener que  $\sigma_{\epsilon_n} = 1$ , con un correlograma que indique la ausencia de correlación entre  $\epsilon_n$  y  $\epsilon_{n+h}$ ,  $E[\epsilon_n \cdot \epsilon_{n+h}] = 0$ . En tal sentido, se han construido series de diferentes longitudes con un valor de inicialización del proceso  $I_0 = 6\ 002\ 093$  y el módulo  $m = 10\ 999\ 063$ , deduciendo sus correspondientes correlogramas.

Posteriormente, se ha dividido la serie de 5000  $\epsilon_n$  en subseries y obtenido los correlogramas cruzados entre estas subseries (figuras A.12 a y b). Los correlogramas directos calculados sobre las distintas series generadas muestran la ausencia de correlación entre los  $\epsilon_n$ , especialmente cuando la serie generada es suficientemente representativa en número de valores. Se ha hecho diferentes ensayos con valores  $I_0$  diferentes, obteniéndose resultados parecidos, como se infiere de los estadísticos obtenidos:

Series de 1000 $\epsilon_n$					
$I_0$	Media	Varianza	$\epsilon_n = 1$	$\epsilon_n = -1$	
6 002 093	0,024	0,9994	512	488	$E[\epsilon_n] = 0$
1	- 0,006	0,9999	497	503	
9 003 707	0,002	0,9995	489	511	$\text{Var}[\epsilon_n] = 1$

Para poder modelizar varias variables independientes entre ellas, con objeto de reproducir variogramas con estructuras imbricadas o bien de ajustar modelos de co-regionalización, ha sido preciso estudiar la independencia entre series de  $\epsilon_n$  generadas a partir del mismo valor de inicio  $I_0$  pero con diferentes módulos. En la figura A.12 c se expone un ejemplo de simulación en una dimensión de dos variables que siguen un modelo de correlación intrínseca. Se detecta una buena concordancia entre el correlograma cruzado experimental de las dos variables y el correlograma cruzado experimental calculado sobre las dos series simuladas de cada una de las variables.

Por último, se sabe que los  $x_n = 2 X_{n-1} \pmod{m}$  no son estrictamente independientes entre sí, su covarianza centrada vale  $\sigma_\rho = 2^{-\rho}/12$ . Sin embargo, si se toma un valor sobre  $K$  valores de la serie, se puede obtener una cuasi-independencia, con lo cual puede utilizarse la nueva serie resultante para generar una variable distribuida uniformemente en el intervalo  $[0,1]$ ,  $X_n$ . Una relación como la expresada a continuación sería suficiente para tal propósito:

$$x_n = 2 x_{n-1}^1 \pmod{m} \quad l = 7$$

Con la relación previa se han generado distintas series de  $X_n[0,1]$ . Los tests de independencia y de distribución han dado resultados satisfactorios, que quedan expuestos gráficamente en las figuras A.12 d y e y en la siguiente tabla de valores:

$I_o$	l = 6		l = 7		
	$\bar{x}$	$\sigma^2$	$\bar{x}$	$\sigma^2$	
1	0.4945	0.0853	0.5000	0.0841	$E[X_n] = 0,5$ $Var[X_n] = 0,083$
6.002.093	0.5021	0.0838	0.4962	0.0807	
9.003.707	0.4956	0.0814	0.4856	0.0817	
9.029.003	0.5044	0.0827	0.5187	0.0827	
9.019.499	0.4853	0.0815	0.4931	0.0815	
216.916	0.4911	0.0862	0.4961	0.0856	
141.592	0.4974	0.0806	0.5049	0.0836	

## 2. REALIZACIONES DE FUNCIONES ALEATORIAS

Los modelos de covarianza que se han estudiado corresponden con los modelos más frecuentes utilizados en la práctica geoestadística (este trabajo ha sido realizado con la colaboración de L. Salvato de Mining Italiana Spa).

### 2.1. SIMULACION DE ESTRUCTURAS EN $R^1$

#### A) Efecto de pepita (figura A.13 a)

Para simular un efecto de pepita se utilizarán las series de la VA  $X_n$  tal como se definieron anteriormente, tomando un valor sobre l en la serie, de manera a obtener la cuasi-independencia; para el cálculo se ha utilizado l = 7, que equivale a tomar un valor sobre cada 128 valores de la serie.



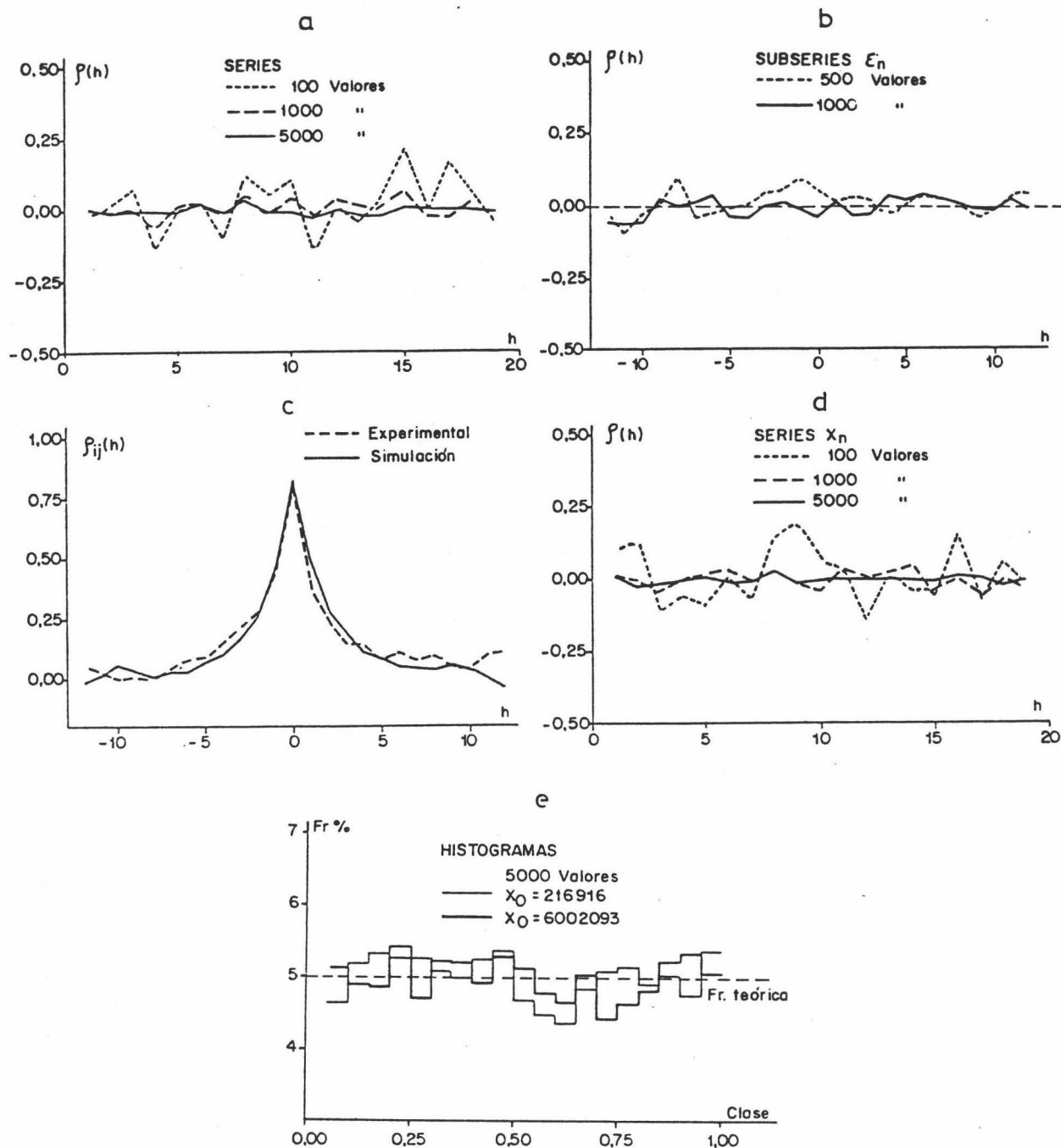


Figura A.12.- a) Correlogramas de series de  $\xi_n$ . b) Correlogramas cruzados de subseries de  $\xi_n$ . c) Correlograma cruzado de dos variables simuladas en correlación intrínseca. d) Correlograma de series de  $X_n [0,1]$ . e) Histogramas de series de  $X_n$  (frecuencia teórica 5%).

B) Modelo esférico (figura A.13 b-d)

Sea  $a$  el alcance del variograma a simular, si se toma

$$y_i = \sum_{k=0}^{a-1} (\alpha + \beta k) \epsilon_{i+k}$$

se obtiene para la covarianza centrada teórica la expresión siguiente

$$C(h) = \frac{\beta^2 a^3}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{h}{a} + \frac{1}{2} \frac{h^3}{a^3}\right) + (a-h) \left(\alpha^2 - \alpha\beta + \frac{\beta^2}{6}\right)^2 + a^2 \left(1 - \frac{h}{a}\right) \left(\alpha\beta - \frac{\beta^2}{2\alpha}\right)$$

Si se escogen como parámetros,

$$\beta = \sqrt{\frac{3C}{a^3}}$$

$$\alpha = \frac{\beta}{2} \left[ (1-a) + \sqrt{(1-a)^2 + 2(1/3-a)} \right]$$

$C$  = meseta del variograma

se encuentra la covarianza esférica:

$$C(h) = C \left(1 - \frac{3}{2} \frac{h}{a} + \frac{1}{2} \frac{h^3}{a^3}\right)$$

C) Modelo exponencial (figura A.13 e)

En este caso la realización  $y_i$  se obtiene de la relación

$$y_i = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha e^{-\beta k/a'} \epsilon_{i+k}$$

deduciéndose la covarianza teórica

$$C(h) = \frac{\alpha^2}{1 - e^{-2\beta/a'}} e^{-\beta h/a'}$$

Con  $\beta = 3$  y  $a'$  (alcance práctico) igual a  $3a$ , se tiene una covarianza exponencial  $C e^{-h/a}$ . En la práctica, es suficiente limitar la sumatoria a los  $2a'$  primeros términos, lo que corresponde a un intervalo de  $6a$ ,  $a$  es el alcance del variograma. La meseta es dada por el coeficiente  $\alpha$ ,

$$\alpha = \sqrt{C(1 - e^{-6/a'})}$$

D) Modelo lineal (figura A.13 f)

Se simula a partir de un proceso de Wiener-Levy discreto. Implantando en una recta un origen  $Y_0$  y una malla regular de puntos, se construye la VA  $Y_i$  por la relación

$$Y_0 = 0 \quad Y_i = Y_{i-1} + R_i \quad \text{con } R_i = \alpha \epsilon_i$$

El variograma  $\gamma(h)$  asociado a  $Y_i$  será dado por

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E(Y_i - Y_{i+h})^2 = \frac{1}{2} \alpha^2 h$$

tomando  $\alpha = \sqrt{2p}$  se obtiene un modelo lineal de pendiente  $p$ .

E) Modelo triangular (figura A.13 g)

Este modelo de variograma sólo es válido a una dimensión, simulándose con la relación

$$y_i = \sum_{k=0}^{a-1} \alpha \epsilon_{i+k}$$

Para un alcance  $a$  se tiene la covarianza:

$$C(h) = \alpha^2(a-h) \quad \text{con } \alpha = \sqrt{C/a} \quad \text{y } C \text{ el valor de meseta.}$$

## 2.2. SIMULACION DE ESTRUCTURAS EN $R^2$ y $R^3$

A) Modelo esférico (figuras A.13 h-j)

En 2 o 3 dimensiones los valores  $y_i$  sobre las rectas son calculados por la relación vista en el caso del modelo esférico en  $R^1$ , pero con un coeficiente  $\alpha$  tal que el término lineal  $(1-h/a)$  contribuya a dar una aproximación numérica del modelo a reproducir.

Si anotamos como ND el número de rectas utilizadas por el método de rectas giratorias (en  $R^2$  ND = 90 o 180, en  $R^3$  ND = 15), se tiene para el valor simulado en el espacio

$$y_i = 1/\sqrt{ND} \sum_{d=1}^{ND} \sum_{k=0}^{a-1} (\alpha - \beta_k) \epsilon_{i_d+k}$$

Se pueden deducir las covarianzas teóricas asociadas a esta variable:

- en 2 dimensiones

$$C(h) = (A+B) \left[ 1 - \frac{3A + 2B}{\pi(A+B)} \frac{h}{a} + \frac{2 Ah^3}{3\pi(A+B) a^3} \right]$$

- en 3 dimensiones

$$C(h) = (A+B) \left[ 1 - \frac{3A + 2B}{4(A+B)} \frac{h}{a} + \frac{A}{8(A+B)} \frac{h^3}{a^3} \right]$$

Los parámetros A y B son proporcionados por

$$A = \frac{\beta^2 a^2}{3} \quad \text{y} \quad B = a \left( \alpha^2 - \alpha\beta + \frac{\beta^2}{6} \right) + a^2 \left( \alpha\beta - \frac{\beta^2}{2} \right)$$

$\alpha$  y  $\beta$  son coeficientes determinados por los valores de meseta C y alcance a,

- en 2 dimensiones

$$\beta = \sqrt{\frac{6 C}{a^3}} \quad \alpha = \frac{\beta}{2} \left[ (1-a) + \sqrt{(1-a)^2 - \frac{2}{3} (1 - 3 a + a^2)} \right]$$

- en 3 dimensiones

$$\beta = \sqrt{\frac{12 C}{a^3}} \quad \alpha = \frac{\beta}{2} \left[ (1-a) + \sqrt{(1-a)^2 - \frac{1}{3} (2 - 6 a - 3 a^2)} \right]$$

B) Modelo exponencial (figura A.13 k)

En 3 dimensiones se toma la relación siguiente

$$y_i = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha + \beta k) e^{-3 h/a} \epsilon_{i+k}$$

Se tiene entonces la covarianza  $C(h) = A(1 - Bh) e^{-3 h/a}$ , con

$$A = \frac{1}{1 - e^{-6/a}} \left[ \alpha^2 + \beta (2\alpha + \beta) \frac{e^{-6/a}}{1 - e^{-6/a}} + 2 \beta^2 \left( \frac{e^{-6/a}}{1 - e^{-6/a}} \right)^2 \right]$$

$$B = \frac{1}{A} \frac{\beta}{1 - e^{-6/a}} \left( \alpha + \beta \frac{e^{-6/a}}{1 - e^{-6/a}} \right),$$

los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  están determinados por

$$\beta = \sqrt{\frac{\Lambda}{2T(1+T)} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{36}{a^2} T(1+T)} \right]}$$

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \left( 3 \frac{\Lambda}{a} + \beta^2 T \right)$$

siendo

$$\Lambda = C[1 - e^{-6/a}] \text{ y } T = \frac{e^{-6/a}}{1 - e^{-6/a}}$$

Finalmente, se obtiene  $C(h) = C[1 - 3 \frac{h}{a}] e^{-3 h/a}$  que es la covarianza a una dimensión que es preciso reproducir por el método de bandas rotantes, para tener una covarianza exponencial en 3 dimensiones.

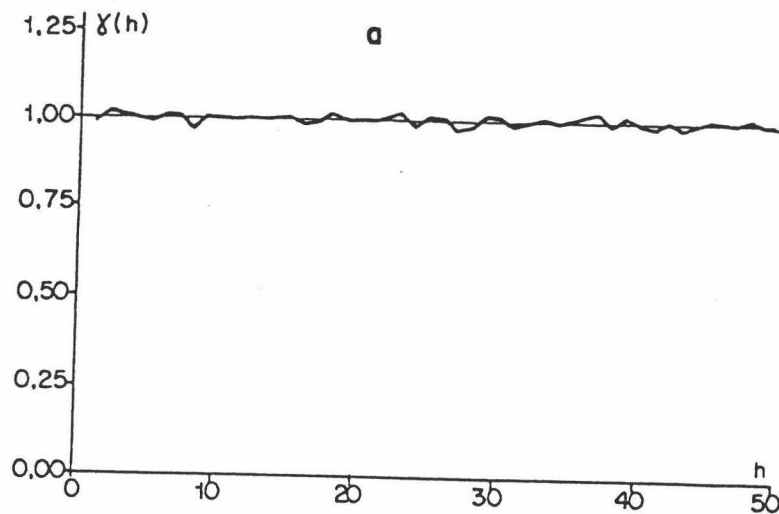


Figura A.13 a. - Simulación de un efecto de pepita en 1-D.

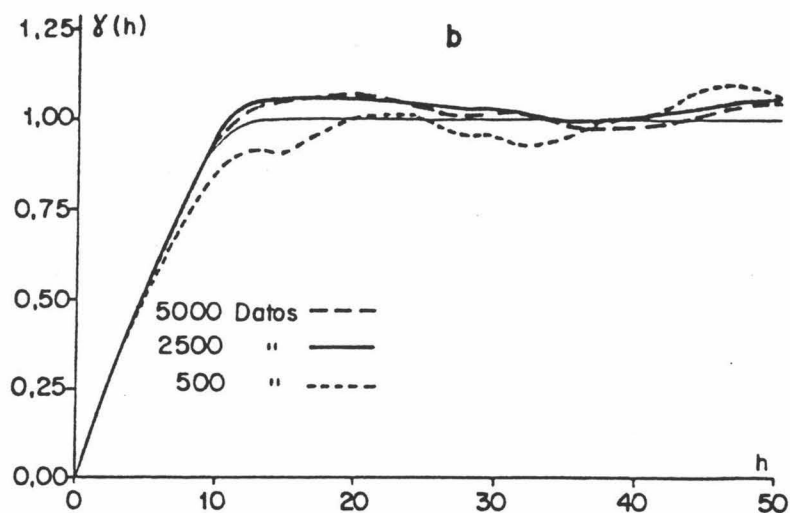


Figura A.13 b.- Simulación de un modelo esférico en 1-D.

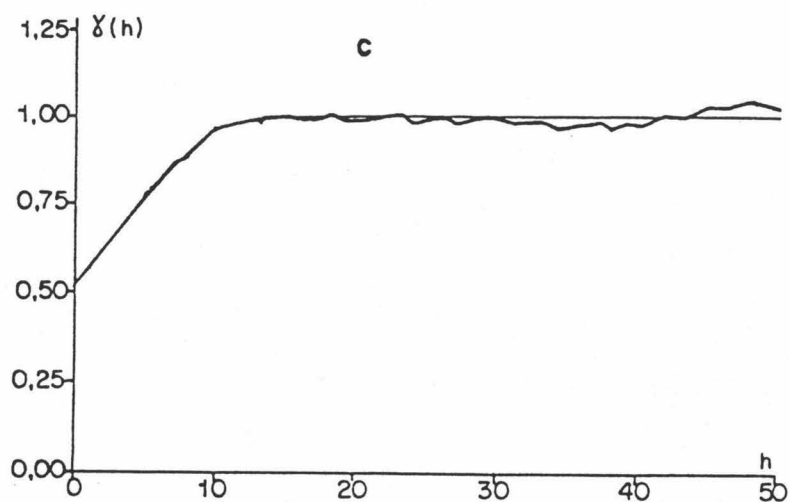


Figura A.13 c.- Simulación de un efecto de pepita y de un modelo esférico en 1-D.

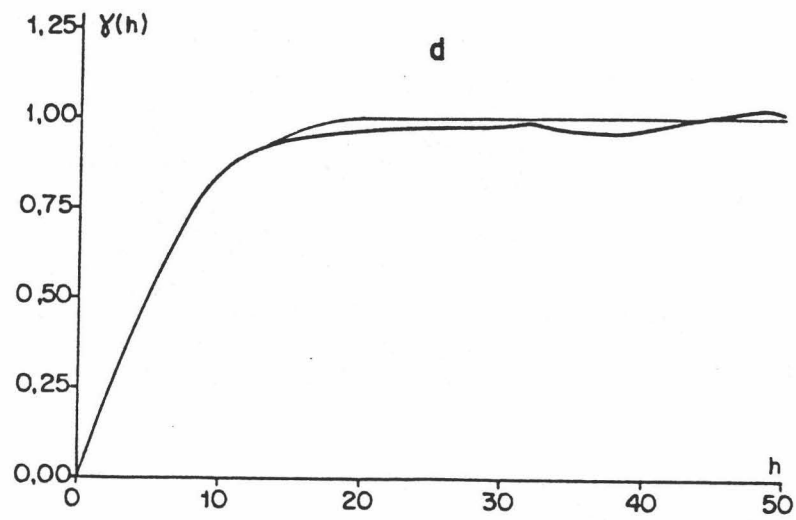


Figura A.13 d.- Simulación de una estructura imbricada en 1-D: dos modelos esféricos.

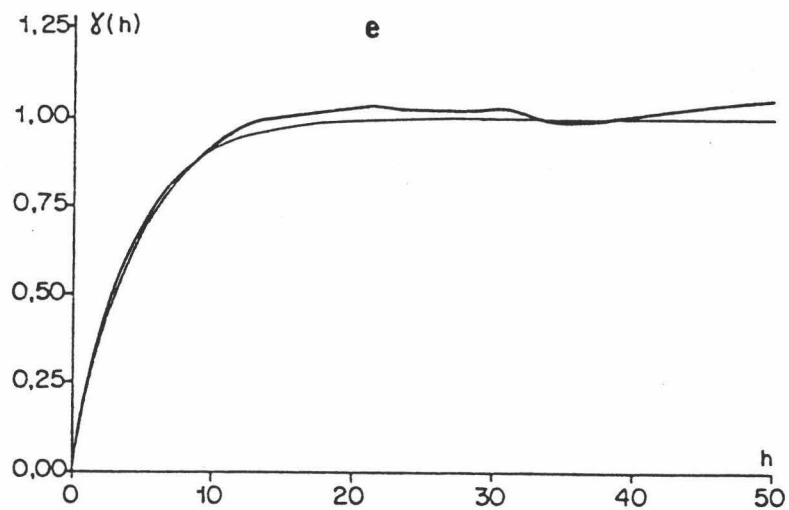


Figura A.13 e.- Simulación de un modelo exponencial en 1-D.

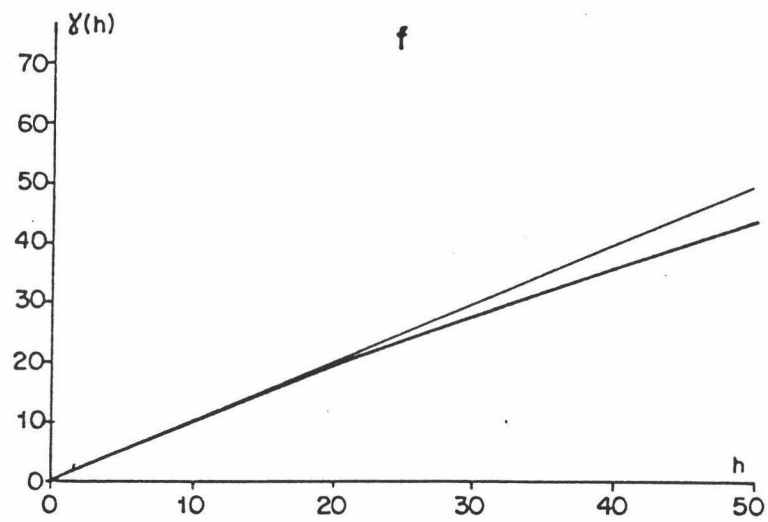


Figura A.13 f.- Simulación de un modelo lineal en 1-D.

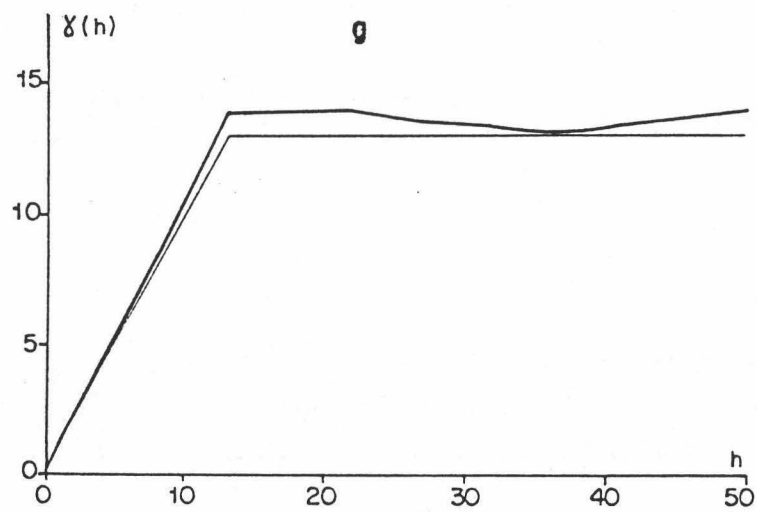


Figura A.13 g.- Simulación de un modelo triangular en 1-D.



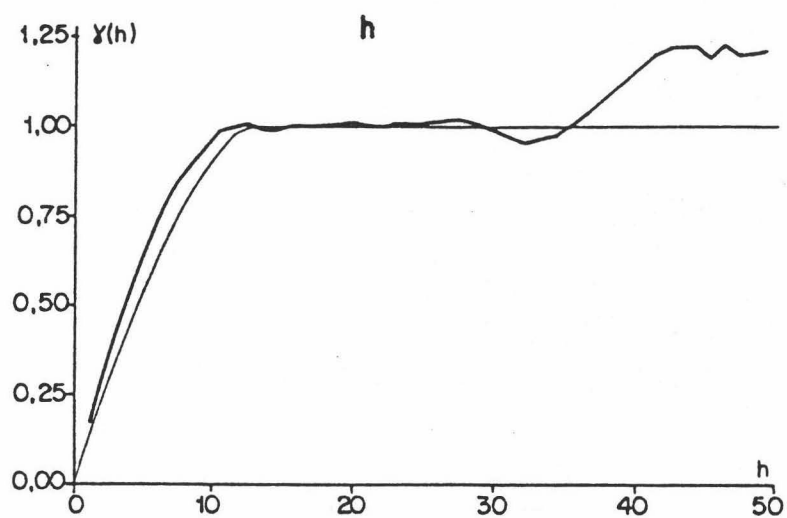


Figura A.13 h.- Simulación de un modelo esférico en 2-D.

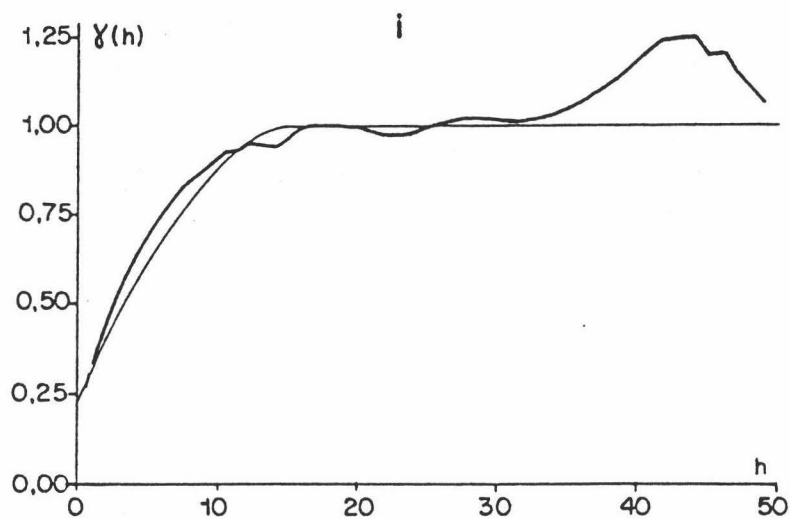


Figura A.13 i.- Simulación de un efecto de pepita y un modelo esférico en 2-D.

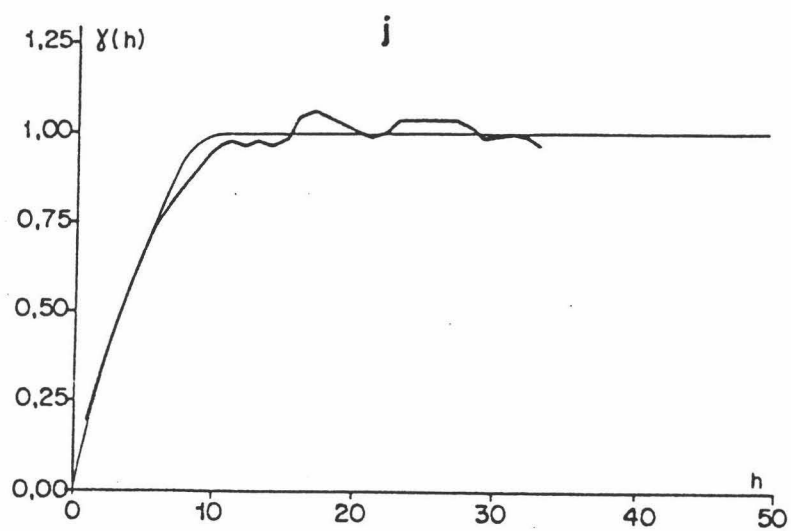


Figura A.13 j.- Simulación de un modelo esférico 3-D.

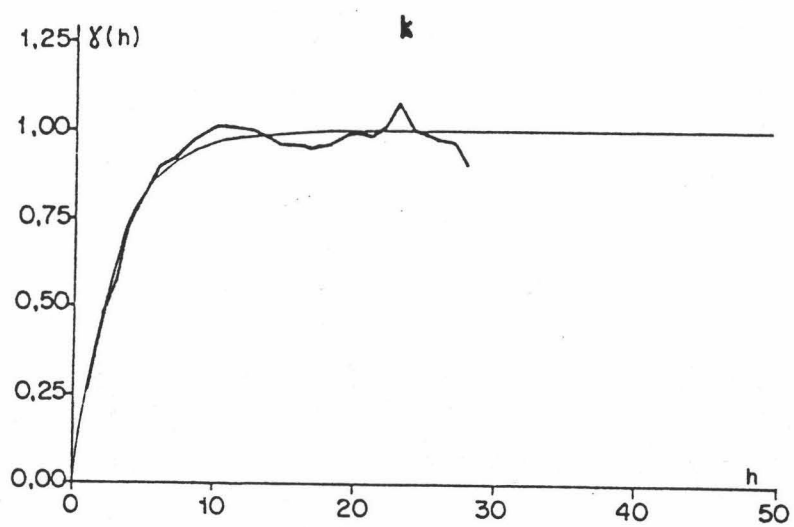


Figura A.13 k.- Simulación de un modelo exponencial en 3-D.



#### IV. EL KRIGEAGE S.L. COMO OPERADOR DE PROYECCION EN ESPACIO VECTORIAL

##### 1. EL KRIGEAGE COMO OPERADOR DE PROYECCION EN ESPACIO VECTORIAL

A lo largo de la exposición de la memoria se presentó un conjunto de métodos de estimación que recibían el mismo nombre genérico de "Krigeage". Desde el punto de vista de la teoría de las proyecciones, todos ellos tienen la particularidad de corresponder a la proyección de valor desconocido  $Z(x_0)$ , a estimar en cada caso, en un espacio vectorial (EV) más o menos vasto según las hipótesis hechas en la inferencia estadística. Aún, diferenciándose en las dimensiones del EV de referencia escogido, todos ellos tienen el mismo fin, señalado repetidamente: minimizar la norma de un vector diferencia  $Z(x_0) - Z_k$  "varianza de estimación", esto es, la proyección en EV.

Sea  $Z(x_0)$  el valor o función a estimar, en general, perteneciente al espacio  $\xi$  engendrado por el conjunto de combinaciones lineales finitas de las  $n$   $VA_S$ , y sea, también, el subespacio  $\xi' \subset \xi$  en el cual se busca el estimador  $Z_k$  de  $Z(x_0)$ .

Se dota al EV  $\xi$  del producto escalar,  $\langle Z(x_i), Z(x_j) \rangle$ , coincidente con la covarianza  $C(h)$ , estacionaria o no:

$$\langle Z(x_i), Z(x_j) \rangle = C(h) = E \{ Z(x_i) \cdot Z(x_j) \}$$

La norma  $\|Z(x)\|$  de un vector cualquiera  $Z(x) \in \xi$  vale entonces la raíz cuadrada del producto escalar  $\langle Z(x), Z(x) \rangle$

$$\|Z(x)\|^2 = \langle Z(x), Z(x) \rangle$$

Y, por tanto, la diferencia entre dos vectores  $Z(x_i)$  y  $Z(x_j)$  se establece análogamente como la norma, módulo,  $\|Z(x_i) - Z(x_j)\|$  del vector diferencia.

El planteamiento anterior es simple, pero permite analizar al krigage como un operador de proyección del valor  $Z(x_0)$  en el subespacio  $\xi'$  en el cual se busca el estimador óptimo  $Z'_k$ .

La varianza de estimación vale entonces la medida  $\|Z(x_0) - Z'_k\|^2 = E\{Z(x_0) - Z'_k\}^2$ , que no es otra cosa que la varianza de krigage,  $\sigma_k^2$  (figura A.14 a).

Desde esta óptica geométrica es fácil comprender que existirán tantos estimadores de krigage como subespacios  $\xi' \subset \xi$  seamos capaces de construir para la inferencia estadística, y sobre los cuales se busca la proyección del valor incógnita  $Z(x_0)$ . Ocurre, y es demostrable, que existe la transitividad de las proyecciones -teorema de las tres perpendiculares-, que implica que para dos subespacios lineales  $\xi'$  y  $\xi''$  que cumplen  $\xi' \subset \xi'' \subset \xi$ , se tiene que el estimador  $Z'_k$  es mejor que el estimador  $Z''_k$ , o sea que:

$$\|Z(x_0) - Z'_k\| \leq \|Z(x_0) - Z''_k\|$$

por tanto, cuanto más "vasto" es el EV en el cual se hace la inferencia mejor será la estimación (figura A.14 b).

Es posible particularizar el estudio de proyección o cada uno de los estimadores de krigage vistos, incluso a la Esperanza Condicional que es el mejor estimador absoluto (cf. JOURNEL y HUIJBREGTS, 1978):

### A) El estimador de Esperanza Condicional

Se sabe que el mejor estimador absoluto de la cantidad  $Z(x_0)$  es una función  $f(Z(x_\alpha))$ ,  $\alpha = 1$  a  $n$ , en general, no lineal.

Si  $H_n$  es el EV engendrado por todas las funciones  $f\{Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)\}$  de las  $n$   $VA_S$  dadas, el mejor estimador de  $Z(x_0)$ , en dicho espacio, es la proyección de  $Z(x_0)$  en  $H_n$ , que cumple por definición que:

$$E\{(Z(x_0) - Z^*) \cdot f(Z(x_1), \dots, Z(x_n))\} = 0$$

Como la esperanza condicional  $E_n Z_0 = E [Z(x_0)/Z(x_\alpha)]$ ,  $\alpha = 1$  a  $n$  cumple que  $E\{(Z(x_0) - E[Z(x_0)/Z(x_\alpha), \alpha = 1 \text{ a } n]) \cdot f(Z(x_1), \dots, Z(x_n))\} = 0$ , se tiene que tal esperanza es la proyección de  $Z(x_0)$  en  $H_n$  (figura A.14 c).

Es de fácil entender que dicho estimador necesita la inferencia estadística de la ley multivariable a  $n+1$  componentes.

### B) El Krigeage Simple y Ordinario

El estimador de krigeage simple es la proyección de  $Z(x_0)$  en el subespacio  $\xi_{n+1}$ , engendrado por las combinaciones lineales de las  $n$   $VA_S$   $Z(x_\alpha)$ :  $\sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha Z_\alpha + \lambda_0 \cdot 1$  (1 es la VA constante). La proyección de  $Z(x_0)$  es única y está caracterizada por la ortogonalidad del vector  $Z(x_0) - Z_{KS}$  a cada uno de los  $n+1$  vectores que engendran  $\xi_{n+1}$  (figura A.14 d):

$$\langle Z(x_0) - Z_{KS}, 1 \rangle = 0$$

$$\langle Z(x_0) - Z_{KS}, Z(x_\alpha) \rangle = 0 \quad \forall \alpha = 1 \text{ a } n$$

En el krigeage ordinario, las condiciones de no sesgo del estimador implican que  $\lambda_0 = 0$  y  $\sum \lambda_\alpha = 1$ . La primera condición implica que se reduce el espacio  $\xi_{n+1}$  a  $\xi_n$ , engendrado sólo por las combinaciones lineales de los  $n$  datos. La segunda condición implica reducir el espacio  $\xi_n$  al subespacio  $C_1$ , definido por la condición  $\sum \lambda_\alpha = 1$  sobre los pesos:  $C_1 \subset \xi_n \subset \xi_{n+1}$ .

Se tiene que la ortogonalidad de  $Z(x_0) - Z_{KO}$  se cumple para los  $n$  vectores que engendran  $C_1$ , con la condición sobre los pesos ya vista (figura A.14 e).

*C) El Krigage Disyuntivo*

El KD se presenta como un estimador intermedio entre el krigage lineal y la esperanza condicional. El espacio de referencia,  $D_n$ , está engendrado por la suma de  $n$  funciones medibles de una variable  $D_n = \{f_1(Z_1) + f_2(Z_2) + \dots, f_n(Z_n)\}$ , con  $C_1 \subset \xi_n \subset \xi_{n+1} \subset D_n \subset H_n$ . El estimador  $Z_{KD}$  es la proyección de  $Z(x_0)$  en  $D_n$  (figura A.14 f). La ortogonalidad del vector  $Z(x_0) - Z_{KD}$  se cumple para toda función  $f$  de una sola variable

$$\langle Z(x_0) - Z_{KD}, f(Z_\alpha) \rangle = 0$$

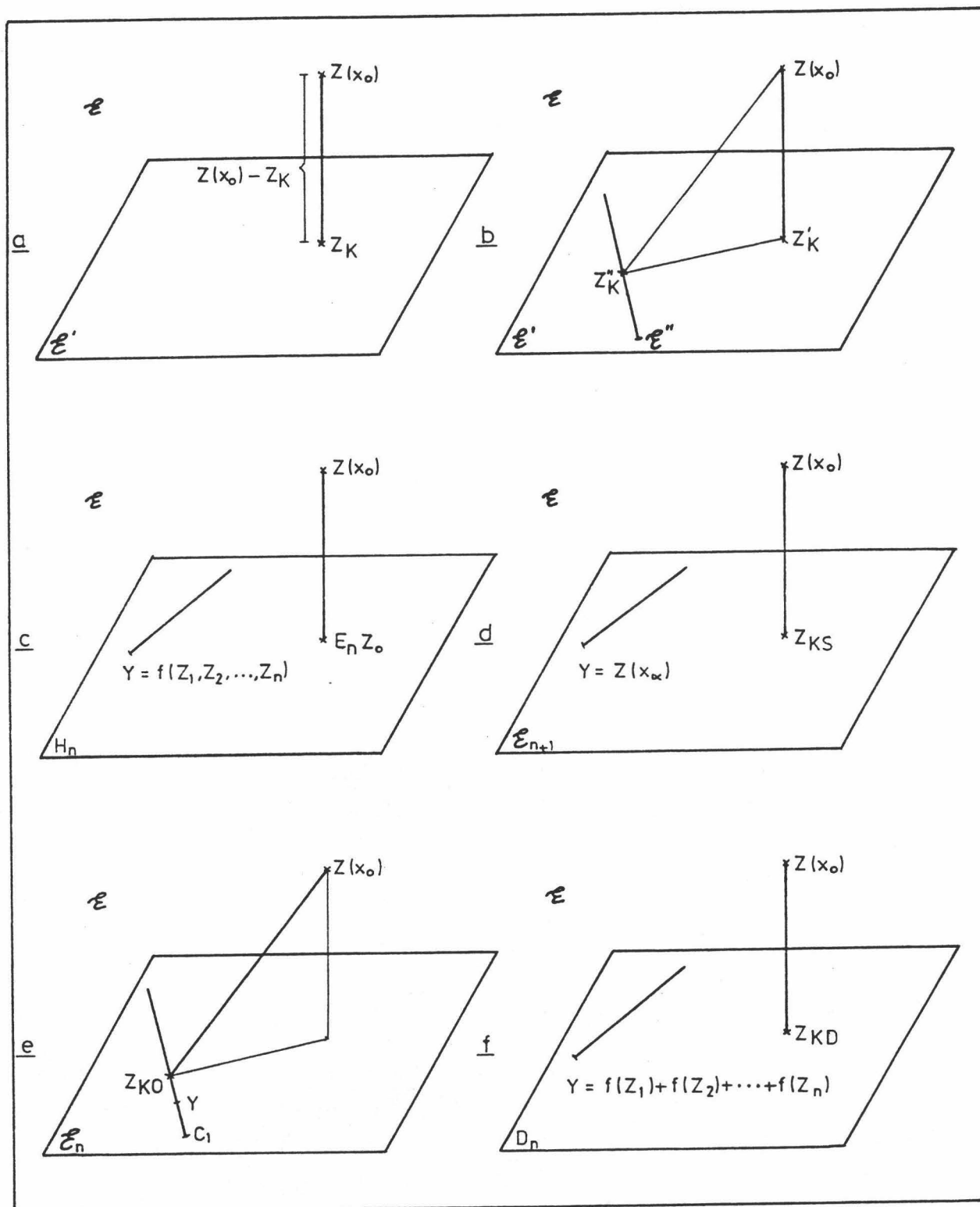


Figura A.14.- El kriging como operador de proyección en espacio vectorial.



