

Q. 26.935

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE GEOMETRIA Y TOPOLOGIA

BIBLIOTECA	
FACULTAD DE CIENCIAS	
GRANADA	
Estante	6
Tabla	2
Núm.	35

VARIETADES DE KÄHLER INDEFINIDAS

ALFONSO ROMERO SARABIA

Tesis Doctoral

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA	
GRANADA	
Nº Documento	613577505
Nº Copia	115588737

UNIVERSIDAD DE GRANADA
1983



Tesis doctoral, dirigida por el Profesor Dr. D. Manuel Barros Díaz, adjunto numerario de Topología del Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada. Fue leída el día 17 de Diciembre de 1982, ante el tribunal formado por los profesores: Esteban Carrasco; Girbau Badó; Martínez Naveira; Gómez Ruiz y Barros Díaz. Obtuvo la calificación de Sobresaliente cum laude.

A mi esposa, Ana María.

INDICE

Introducción.....	I - IX
Capítulo I: Variedades de Kähler indefinidas. Espacios modelos.	
§1. Introducción.....	1
§2. Sobre la curvatura seccional holomorfa.....	3
§3. Ejemplos de variedades kählerianas indefinidas sim- plemente conexas y con curvatura seccional holomor- fa constante.....	5
§4. Algunas propiedades topológicas de $P_S^n(\mathbb{C})$	11
§5. Ejemplos de variedades kählerianas indefinidas.....	13
Capítulo II: Curvatura seccional de una variedad de Kähler indefinida .	
§6. Una extensión del criterio de Cartan a variedades de Kähler indefinidas.....	25
§7. Curvatura seccional totalmente real.....	28
§8. Curvatura biseccional totalmente real.....	30
§9. Comportamiento especial de la función curvatura sec- cional holomorfa de una variedad kähleriana indefi- nida.....	32
§10. Comportamiento de las funciones curvatura seccional totalmente real y biseccional totalmente real de una variedad de Kähler indefinida.....	37
§11. Un criterio, específico de variedades de Kähler in- definidas, para que la curvatura seccional holomor- fa sea constante.....	39

Capítulo III: Geometría de las variedades de Grassmann
complejas indefinidas.

§12. Introducción.....	42
§13. Resultados previos.....	43
§14. El teorema de clasificación.....	46
§15. Secciones holomorfas de máxima y mínima curvatura..	47

Capítulo IV: Topología de variedades de Kähler indefinidas.

§16. Introducción.....	50
§17. El teorema de la equivalencia homotópica.....	51
§18. Números de Betti de variedades de banderas complejas indefinidas.....	54
Referencias.....	65

INTRODUCCION

Sea M una variedad diferenciable con dimensión n . Es conocido que la existencia de una métrica de Riemann (en general indefinida y con índice s , $0 \leq s \leq n$) sobre M es equivalente a la existencia de una $O^s(n)$ -estructura sobre la misma. Además, cuando $s = 0$, la paracompacidad de la variedad garantiza dicha existencia. También el hecho de existir una estructura casicompleja J sobre M , lo que obliga a que $n = 2m$, es equivalente a la existencia de una $Gl(m, \mathbb{C})$ -estructura sobre la misma. Además, la integrabilidad de J (su torsión es cero) o la integrabilidad de la $Gl(m, \mathbb{C})$ -estructura es equivalente a que J esté definida a partir de una estructura compleja sobre la variedad. Esto no es más que el teorema de Newlander y Nirenberg, [20], Cap. IX, p. 149.

Una $U^s(m)$ -estructura sobre M se llama una estructura casihermítica y puesto que $U^s(m) = Gl(m, \mathbb{C}) \cap O^{2s}(2m)$ se tiene que, esencialmente, una $U^s(m)$ -estructura se puede considerar como un híbrido de una estructura casicompleja y una $O^{2s}(2m)$ -estructura verificándose una bien conocida condición de compatibilidad. Las variedades que la admiten serán llamadas variedades casihermíticas (en general indefinidas y con índice $2s$). El elemento geométrico esencial que aparece en toda $U^s(m)$ -estructura y que enlaza las dos estructuras básicas existentes sobre la misma (estructura casicompleja y métrica) es una 2-forma diferenciable conocida con el nombre de forma fundamental o forma de Kähler. Por otro lado, se dice que la $U^s(m)$ -estructura es integrable cuando lo sea la correspondiente $Gl(m, \mathbb{C})$ -estructura.

Las variedades kählerianas indefinidas son variedades diferenciables que admiten una $U^S(m)$ -estructura integrable y con forma fundamental cerrada. Cuando $s = 0$, la variedad se dirá kähleriana definida o simplemente kähleriana.

El origen de las variedades kählerianas hay que buscarlo en una nota de Kähler en 1933 (Hamb. Abh., 9, p. 173). Sin embargo fueron los trabajos de Hodge ("The theory and applications of harmonic integrals", Cambridge Univ. Press, 1941) donde se inicia un estudio sistemático de algunas variedades kählerianas. Concretamente, es conocido que \mathbb{C}^n no admite subvariedades kählerianas compactas (las subvariedades kählerianas, por supuesto no compactas, de \mathbb{C}^n son conocidas con el nombre de variedades de Stein y juegan un papel en el análisis de varias variables complejas). Entonces, es natural plantearse el siguiente problema: ¿cuándo una variedad compleja y compacta puede ser embebida en $P^N(\mathbb{C})$? Esto es, ¿cuándo es una variedad proyectiva algebraica de acuerdo con el teorema clásico de Chow?

Sea M una variedad compleja y compacta y sea α una forma cerrada sobre M , α se dice entera si su clase de cohomología pertenece a la imagen de la aplicación natural

$$j^*: H^*(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(M, \mathbb{C})$$

En particular, si M es una variedad kähleriana compacta y F es su forma fundamental, entonces, si F es entera se dice que M es una variedad de Hodge. Tanto $P^N(\mathbb{C})$ como las variedades algebraicas proyectivas compactas son variedades de Hodge. El recíproco fue conjeturado por Hodge y resuelto por Kodaira en su celebrado teorema de embebimiento: "Una variedad compleja y compacta es proyectiva algebraica si y sólo si es una variedad de Hodge".

Este resultado junto con el Teorema de Yau-Aubin-Calabi, que resuelve la famosa conjetura de Calabi (ver "Première classe de Chern et courbure de Ricci: preuve de la conjeture de Calabi" Sémin. Palaiseau, 1978), constituye un buen ejemplo de la entidad propia de la teoría de variedades kählerianas independiente de su carácter híbrido como intersección de dos G-estructuras. (Una buena exposición del Teorema de Kodaira se puede ver en el libro de Wells "Differential Analysis on complex manifolds", Springer Verlag, 1980).

No obstante, fue Weil en 1958, [30], el que inició un estudio sistemático de la geometría kähleriana. Desde esta fecha hasta el presente han sido numerosos los autores que se preocuparon por problemas en este campo. Una buena reseña y abundante bibliografía, hasta el año 1970, puede encontrarse en [20], tomo II.

El principal propósito de este trabajo es iniciar un estudio sistemático de las variedades kählerianas indefinidas. Estos espacios se pueden mirar bajo dos puntos de vista:

(1) Como una extensión del concepto de variedad kähleriana. En este sentido, veremos que muchos resultados conocidos en la Teoría de variedades kählerianas se extienden, con un poco más de trabajo, al caso de variedades kählerianas indefinidas. Sin embargo el ingrediente de tener una métrica indefinida permite obtener un buen número de resultados que dan diferencias esenciales con respecto al caso definido. Así, por ejemplo, al calcular los espacios modelos (variedades kählerianas indefinidas completas, conexas, simplemente conexas y con curvatura seccional holomorfa constante) ninguno de los tres es compacto, aunque los de curvatura positiva y negativa admi-

ten retratos de deformación compactos. En el caso de curvatura positiva se tiene, además, que el retrato de deformación es el correspondiente modelo definido con dimensión apropiada y embebido de una manera totalmente geodésica. Este resultado se extiende en el capítulo IV a gran cantidad de variedades kählerianas indefinidas e incluso no kählerianas verificando una apropiada condición de homogeneidad.

Además, en esta línea, se obtienen también resultados que no tienen sentido en el caso definido, ejemplo de lo cual es un criterio para que sea constante la curvatura seccional holomorfa, en el que los vectores nulos juegan un papel esencial.

(2) Como variedades que son complejas y riemannianas indefinidas a la vez. Es decir, como una versión compleja de las variedades de Riemann indefinidas. En este sentido, se obtienen versiones complejas de resultados correspondientes a la Teoría de variedades de Riemann indefinidas. Así, por ejemplo, el criterio mencionado arriba tiene un antecedente real para la curvatura seccional de una variedad de Riemann indefinida en [12]. Pero además, y esto es esencial, existen diferencias muy importantes con respecto al caso riemanniano indefinido. Por ejemplo, un resultado de Kulkarni, [21], que mejora considerablemente uno anterior de Wolf al evitar una incómoda condición de homogeneidad, no es ahora válido como se demostrará mediante un contraejemplo; además, se obtendrá el mejor resultado posible en esta línea.

Antes de hacer un somero desglose del contenido de cada capítulo, hay que destacar, por otro lado, la posible aplicación física de esta teoría. Como es sabido, la física matemática utiliza dos



importantes fuentes geométricas clásicas. De un lado, la geometría Lorentz del "espacio tiempo", de otro la geometría simpléctica del "espacio fase". La geometría kähleriana indefinida podría considerarse como síntesis de estas dos. En este sentido, por ejemplo, la forma de Kähler tendría el papel de la clásica forma simpléctica. Es más, parece natural generalizar de este modo el "espacio fase", reemplazándolo por una variedad de Kähler indefinida no llana, (ver [19], p. 142).

El desarrollo de esta memoria es como sigue:

En el capítulo I se establecen algunos resultados que se usarán en el resto del trabajo, y, fundamentalmente, se dan los modelos de este tipo de geometría. En primer lugar, se tiene una variedad kähleriana indefinida y llana, \mathbb{C}_S^n (Ejemplo 3.1). Dado $c \in \mathbb{R}_+$ (de forma análoga al espacio proyectivo complejo de curvatura seccional holomorfa c) se da una variedad kähleriana indefinida con curvatura seccional holomorfa c , a la que se le llama espacio proyectivo complejo indefinido y se representa por $P_S^n(\mathbb{C})$ (Ejemplo 3.2). También se define una variedad de Kähler indefinida de curvatura seccional holomorfa $-c$, esta se llama el espacio hiperbólico complejo indefinido y se representa por $H_S^n(\mathbb{C})$ (Ejemplo 3.3); naturalmente, llegado este punto se establece el correspondiente teorema de clasificación (Teorema 3.4) similar al resultado que establecieron (independientemente) Hawley e Igusa en el caso definido (ver [20], Cap. IX, Teorema 7.9)

A continuación se estudian varios ejemplos más. Las variedades de Grassmann complejas indefinidas, $G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C})$, entre las cuales se encuentra $P_S^n(\mathbb{C})$ (Ejemplo 5.2); la cuádrlica compleja indefinida $Q_S^n(\mathbb{C})$ (Ejemplo 5.3, (1)) y una hipersuperficie compleja Einstein $Q_S^*(\mathbb{C})$ de

$P_{s+1}^{2s+1}(\mathbb{C})$, que tiene particularidades que impiden que tal espacio tenga uno paralelo en geometría definida (Ejemplo 5.3, (2)). Todos estos ejemplos son variedades kählerianas indefinidas. Por contra, en los Ejemplos 5.1 y 5.2 se exhiben espacios más generales que las variedades de Kähler indefinidas (son variedades casi kählerianas indefinidas de diversos tipos) lo cual da pie a pensar en su estudio sistemático.

El propósito del capítulo II es doble. Por un lado se extienden resultados, ya conocidos en geometría kähleriana clásica, que caracterizan cuando la curvatura seccional holomorfa de una variedad de Kähler indefinida es constante. Por otro, se estudia el comportamiento de las diversas funciones curvatura (seccional holomorfa, seccional totalmente real y biseccional totalmente real) asociadas a cada uno de estos espacios.

En este primer punto se tiene el Teorema 6.1, que puede considerarse como la versión compleja de un resultado de Graves y Nomizu, [15], para el caso real (indefinido), análogo al conocido criterio de Cartan, [8]. También se incluyen generalizaciones a trabajos de Chen y Ogiue, [10], y Houh, [18], donde se establece la equivalencia entre curvatura seccional totalmente real constante (repec. curvatura biseccional totalmente real constante) y curvatura seccional holomorfa constante. Concretamente, los Teoremas 7.2 y 8.1 combinados, prueban que, para una variedad kähleriana indefinida y conexa, M , con dimensión compleja $n \geq 3$, son equivalentes:

- i) M tiene curvatura seccional holomorfa constante c .
- ii) M tiene curvatura seccional totalmente real constante $c/4$.
- iii) M tiene curvatura biseccional totalmente real constante $c/2$.

Además, se estudia el comportamiento especial de la función curvatura seccional holomorfa de una variedad de Kähler indefinida. Se parte de un importante resultado de Kulkarni, [21], que establece condiciones para que la curvatura seccional de una variedad de Riemann indefinida sea constante. En concreto, él demuestra que si la función curvatura seccional, K , de una variedad de Riemann indefinida conexa y con dimensión $n \geq 3$, está acotada bien superior o bien inferiormente, entonces K es constante. El Contraejemplo 9.2 prueba que este resultado no es ahora válido, siendo el mejor en esta dirección el siguiente

Teorema 9.3.- Sea M una variedad de Kähler indefinida, conexa, con dimensión compleja $n \geq 2$ e índice $2s > 0$. Si la función curvatura seccional holomorfa h de M está acotada superior e inferiormente, entonces M tiene curvatura seccional holomorfa constante.

Se encuentra, por contra, (Teoremas 10.1 y 10.2) que las funciones curvatura seccional totalmente real y biseccional totalmente real, se ajustan al comportamiento de la función curvatura seccional de una variedad de Riemann indefinida, descrito en el Teorema de Kulkarni. Es decir, imponiendo a cualquiera de ellas sólo acotación por un lado se logra inferir que sea constante (lo cual implica también que la curvatura seccional holomorfa es constante).

Por último, se da un criterio, también específico de variedades de Kähler indefinidas, para que H sea constante. En concreto,

Teorema 11.1.- Sea M una variedad de Kähler indefinida, conexa, con dimensión compleja $n \geq 2$ e índice $2s > 0$. Si su tensor curvatura R verifica

$$R_{uu^*u^*u} = 0$$

para todo vector nulo $u \in T_m M$, $m \in M$, entonces M tiene curvatura seccional holomorfa constante.

Este resultado, que tiene su antecedente en geometría de Riemann indefinida, en [12], pone de manifiesto un contenido geométrico más que aceptable de los planos holomorfos degenerados de T_{III}^M .

En el capítulo III, se hace una clasificación de las variedades de Grassmann complejas indefinidas $G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C})$, definidas en el Ejemplo 5.2, atendiendo al comportamiento de su función curvatura seccional holomorfa H . En el caso definido, Wong, en [34], calcula el máximo y el mínimo de la función H de una variedad de Grassmann compleja: tales valores existen ya que, en este caso, H es una función continua sobre un conjunto compacto. Pero aquí se pierde tal propiedad.

Dada una variedad de Grassmann $G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C})$, a los enteros $s_1, s_2, n_1 - s_1, n_2 - s_2$ se les llama números característicos. Además, se dice que s_1 (respec. s_2) y $n_1 - s_1$ (respec. $n_2 - s_2$) son números complementarios. Se definen entonces, las siguientes cuatro familias de variedades de Grassmann complejas indefinidas:

\mathcal{E}_1 : con H acotada.

\mathcal{E}_2 : con H acotada inferiormente pero no superiormente.

\mathcal{E}_3 : con H acotada superiormente pero no inferiormente.

\mathcal{E}_4 : con H no acotada por ambos lados.

Así, se tiene el siguiente teorema de clasificación:

Teorema 14.1.- i) La familia \mathcal{E}_1 consiste exclusivamente en espacios proyectivos complejos indefinidos. ii) En \mathcal{E}_2 están las variedades $G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C})$, con algún número característico nulo y su complementario mayor que 1, y sólo ellas. iii) \mathcal{E}_3 consiste tan solo en la variedad $G_{2, 2}^{1, 1}(\mathbb{C})$. iv) En \mathcal{E}_4 están las variedades $G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C})$, con números característicos no nulos y alguno mayor que 1, y sólo ellas.

Para la familia \mathcal{C}_3 y muchos casos de la familia \mathcal{C}_2 , se caracterizan las secciones holomorfas (no degeneradas) que alcanzan los valores extremos (Teoremas 15.1 y 15.2).

El capítulo IV está dedicado al estudio topológico de variedades de Kähler indefinidas. Este se hace atendiendo una doble vertiente, por un lado al tipo homotópico, por otro al cálculo de números de Betti. En este primer punto se define el concepto de variedad homogénea indefinida (sobre \mathbb{R} , \mathbb{C} o \mathbb{H}) que incluye, como casos particulares, a las variedades de banderas indefinidas sobre \mathbb{R} , \mathbb{C} o \mathbb{H} (Ejemplo 16.1), en particular variedades kählerianas indefinidas (Ejemplo 5.2) y casi kählerianas indefinidas (Ejemplo 5.4). También a otras variedades kählerianas indefinidas, como son las dadas en el Ejemplo 5.3.

Se llega a probar que ciertos espacios homogéneos indefinidos contienen una subvariedad totalmente geodésica, definida positiva y tal que el correspondiente embebimiento es una equivalencia homotópica (Teorema 17.1). En el caso simétrico se tiene un resultado similar al dado por Berger en [5], Corolario, p. 166.

Utilizando el teorema 17.1, la fórmula de Künnet y las técnicas de Teoría de Morse de [6] y [23], se calculan explícitamente los números de Betti de una variedad de banderas complejas indefinidas (Teorema 18.8).

Un resumen de los resultados de este trabajo se encuentra en [2], [3] y [24].

Quiero hacer patente mi agradecimiento al director de esta tesis doctoral Dr. D. Manuel Barros Díaz, así como al Prof. D. Sebastián Montiel Gómez por su ayuda y ánimo prestados. También al Director del Departamento de Geometría y Topología, Dr. D. Luis Esteban Carrasco y a todos mis compañeros del mismo. Por último, también quisiera agradecer la labor mecanográfica de D^{ña}. María Isabel Fernández Sáez.

CAPITULO I

VARIEDADES DE KÄHLER INDEFINIDAS, ESPACIOS MODELOS.

§1. Introducción.-

Sobre una variedad casi compleja, (M, J) , se considera una métrica de Riemann indefinida, g , que satisfaga $g(Ju, Jv) = g(u, v)$ para cualesquiera $u, v \in T_m M$ y todo $m \in M$. En este caso, se dirá que (M, J, g) , o simplemente M , es una variedad casi hermitica indefinida.

El índice de g es constante en un entorno de cada punto $m \in M$, debido a que g varía diferenciablemente con m (todas las variedades, aplicaciones, campos de tensores, etc., se considerarán de clase C^∞); así, g tiene índice constante y par $2s$, $0 \leq s \leq n$, $n = \dim_{\mathbb{C}} M$, en la componente conexa de m . Si M es conexa, lo anterior es válido en todo M .

En particular, si la conexión de Riemann ∇ de g cumple $\nabla J = 0$, se dirá que g es una métrica kähleriana indefinida y M una variedad kähleriana indefinida. Además, como en el caso definido positivo (ver [20], Cap. IX, Teorema 2.5) J es integrable, es decir, M es compleja.

Sea R el tensor curvatura de g . Como en [20], Cap. IX, §7, R verifica las siguientes propiedades:

$$(1.1) \quad R_{uv} \text{ es un endomorfismo de } T_m M \text{ antisimétrico relativo a } g_m.$$

$$(1.2) \quad R_{uv} = -R_{vu}$$

$$(1.3) \quad R_{uv} w + R_{vw} u + R_{wu} v = 0$$

$$(1.4) \quad R_{uv} \cdot J = J \cdot R_{uv}$$

para cualesquiera $u, v, w \in T_m M$ y todo $m \in M$. En lo que sigue se representará g_m por g y J_u por u^* .

Un plano π en $T_m M$ se dice no degenerado si la restricción de g a π es una métrica no degenerada. Si este es el caso, $T_m M$ se descompone en suma directa de π y de su complemento ortogonal π^\perp , que también es no degenerado. Además, π es no degenerado si y sólo si tiene una base $\{u, v\}$ que verifica

$$(1.5) \quad \Delta(u, v) = g(u, u)g(v, v) - g(u, v)^2 \neq 0$$

Cuando π es no degenerado, se dirá de tipo $(+, +)$, $(-, -)$ o $(+, -)$ según que la restricción de g a π sea definida positiva, definida negativa o indefinida respectivamente. Si un plano π tiene por base $\{u, v\}$ se representará por $u \wedge v$.

La curvatura seccional de un plano no degenerado $\pi = u \wedge v$ viene dada por

$$(1.6) \quad K(\pi) = \frac{g(R_{uv} v, u)}{\Delta(u, v)}$$

Si $\pi = J\pi$, se dice que π es un plano holomorfo, y, caso de ser π no degenerado, a $K(\pi)$ se le llama curvatura seccional holomorfa de π . Si π es perpendicular a $J\pi$, se dice que π es un plano totalmente real, y, caso de ser π no degenerado, a $K(\pi)$ se le llama curvatura seccional totalmente real de π .

Un plano holomorfo π es no degenerado si y sólo si contiene algún vector no nulo u . En este caso, si $\pi = u \wedge u^*$, se representará $K(u \wedge u^*)$ por H_u .

Si H_u tiene el mismo valor para todo vector no nulo $u \in T_m M$ y todo $m \in M$, se dirá que M es una variedad de Kähler indefinida de curvatura seccional holomorfa constante.

Si M es una variedad de Kähler indefinida entonces, la curvatura biseccional totalmente real de un plano totalmente real no degenerado $u \wedge v$ en $T_m M$ se define por

$$(1.7) \quad B_{uv} = \frac{g(R_{uu^*v^*}, v)}{\Delta(u, v)}$$

y, como en [20], Nota 23, p. 372, se obtiene

$$(1.8) \quad B_{uv} = K_{uv} + K_{uv^*}$$

donde K_{uv} representa a $K(u \wedge v)$ y K_{uv^*} a $K(u \wedge v^*)$. En lo sucesivo se escribirá R_{uvwz} en lugar de $g(R_{uv}w, z)$.

§2. Sobre la curvatura seccional holomorfa.-

Sea M una variedad kähleriana indefinida y $m \in M$; se define sobre M un campo de tensores R° como sigue:

$$(2.1) \quad R_{uv}^\circ w = (1/4) \{g(v, w)u - g(u, w)v + g(v^*, w)u - g(u^*, w)v^* + 2g(u, v^*)w^*\}$$

para cualesquiera $u, v, w \in T_m M$.

R° verifica (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4). Además, se tiene

Proposición 2.1.- (Comparese con [20], Cap. IX, Proposición 7.3)

Sea M una variedad de Kähler indefinida y $m \in M$. Todos los planos holomorfos no degenerados en $T_m M$ tienen la misma curvatura seccional $c \in \mathbb{R}$ si y sólo si $R = cR^\circ$.

Demostración. Supongase $H_u = c$ para todo vector no nulo $u \in T_m M$, y sea $R' = R - cR^0$, que satisface (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4); por lo tanto

$$(2.2) \quad R'_{uu*u*u} = 0$$

para todo vector u no nulo. Sea ahora C_m el cono de luz de g en $T_m M$, esto es.

$$C_m = \{v \in T_m M / g(v, v) = 0\}.$$

Puesto que C_m se puede mirar como el conjunto de ceros de una función polinómica, resulta que no tiene ningún punto interior. Así, su complemento es denso en $T_m M$, y, entonces, para cualquier $v \in C_m$ se puede elegir una sucesión de vectores no nulos $\{v_n\}$ tal que $\{v_n\} \rightarrow v$. Además $\{v_n^*\} \rightarrow v^*$. Como consecuencia de esto, utilizando (2.2) se obtiene

$$(2.3) \quad R'_{vv*v*v} = 0$$

Ahora, aplicando un argumento algebraico directamente relacionado con las propiedades que cumple R' (ver [20], Cap. IX, Proposición 7.1) se obtiene $R' = 0$. El recíproco es trivial.

De la Proposición 2.1 se tiene la siguiente consecuencia, análoga al conocido Teorema de Schur en su versión compleja ([20], Cap. IX, p. 168),

Corolario 2.2.- Si una variedad de Kähler indefinida, M , conexa, con dimensión compleja $n \geq 2$, admite una función $\gamma: M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $H_u = \gamma(m)$ para todo vector no nulo $u \in T_m M$, entonces γ debe ser una constante $c \in \mathbb{R}$; es decir, M tiene curvatura seccional holomorfa constante c .



3. Ejemplos de variedades kählerianas indefinidas simplemente conexas y con curvatura seccional holomorfa constante.-

Se considera el cuerpo de los números complejos \mathbb{C} . Como es usual, $a \mapsto \bar{a}$ representa la conjugación de \mathbb{C} sobre \mathbb{R} y \mathbb{C}^* el grupo multiplicativo $\mathbb{C} - \{0\}$.

Ejemplo 3.1.- En \mathbb{C}^n se considera la forma hermitica b_n^s definida por

$$(3.1) \quad b_n^s(z, w) = - \sum_{k=1}^s \bar{z}_k w_k + \sum_{j=s+1}^n \bar{z}_j w_j$$

donde $0 \leq s \leq n$, $z = (z_1, \dots, z_n)$ y $w = (w_1, \dots, w_n)$. Sea \mathbb{C}_s^n la variedad de Riemann obtenida al considerar sobre \mathbb{C}^n la métrica inducida por la parte real de b_n^s . Entonces, \mathbb{C}_s^n es una variedad de Kähler indefinida de índice $2s$ y con curvatura seccional holomorfa igual a cero.

Ejemplo 3.2.- Para cada $c \in \mathbb{R}_+$ (analogamente al espacio proyectivo complejo de curvatura seccional holomorfa c) se define una variedad kähleriana indefinida de dimensión (compleja) n , índice $2s$ y curvatura seccional holomorfa constante c .

El grupo de Lie \mathbb{C}^* actúa libremente sobre $\mathbb{C}^{n+1} - k_s$, donde

$$k_s = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / b_{n+1}^s(z, z) \leq 0\}.$$

Esta actuación, que viene dada por $(a, z) \mapsto a.z$, $a \in \mathbb{C}^*$, $z \in \mathbb{C}^{n+1} - k_s$, induce un cociente $\mathbb{C}^{n+1} - k_s / \mathbb{C}^*$ al cual llamaremos espacio proyectivo complejo indefinido $P_s^n(\mathbb{C})$. Es claro que si $s=0$, entonces $P_0^n(\mathbb{C})$ es el espacio proyectivo complejo usual $P^n(\mathbb{C})$. Además, $P_s^n(\mathbb{C})$ está embebido en $P^n(\mathbb{C})$ como una subvariedad abierta; en efecto, la inclusión de $\mathbb{C}^{n+1} - k_s$ en $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ es compatible con la actuación de

de \mathbb{C}^* e induce un embebimiento de $P_S^n(\mathbb{C})$ en $P^n(\mathbb{C})$.

Sea ahora

$$(3.2) \quad S_{2s}^{2n+1} = \{ z \in \mathbb{C}^{n+1} / b_{n+1}^s(z, z) = 1 \}.$$

El grupo de Lie S^1 actúa libremente sobre S_{2s}^{2n+1} e induce un cociente difeomorfo de manera holomorfa con $P_S^n(\mathbb{C})$, así $P_S^n(\mathbb{C}) = S_{2s}^{2n+1}/S^1$, y se tiene una proyección

$$(3.3) \quad \begin{aligned} p : S_{2s}^{2n+1} &\longrightarrow P_S^n(\mathbb{C}), \text{ dada por} \\ p(z) &= z \cdot \mathbb{C}^* \text{ para todo } z \in S_{2s}^{2n+1}. \end{aligned}$$

Sea $U^s(n+1)$ el grupo de automorfismos de \mathbb{C}^{n+1} que conservan b_{n+1}^s , (ver [33], p. 377), es decir

$$U^s(n+1) = \{ A \in Gl(n+1, \mathbb{C}) / b_{n+1}^s(Az, Aw) = b_{n+1}^s(z, w), \text{ para cualesquiera } z, w \in \mathbb{C}^{n+1} \}.$$

$U^s(n+1)$ es un grupo de Lie y como $b_{n+1}^s(z, w) = \bar{z}^t G_{n+1}^s w$ siendo $G_{n+1}^s = \text{diag}(-I_s, I_{n-s+1})$ e I_s, I_{n-s+1} matrices identidad de órdenes respectivos $s, n-s+1$, puede escribirse

$$(3.4) \quad U^s(n+1) = \{ A \in Gl(n+1, \mathbb{C}) / \bar{A}^t G_{n+1}^s A = G_{n+1}^s \}$$

Si $s=0$, $G_{n+1}^0 = I_{n+1}$ y $U^0(n+1)$ es el grupo unitario usual $U(n+1)$.

$U^s(n+1)$ actúa sobre $P_S^n(\mathbb{C})$ como sigue

$$(3.5) \quad U^s(n+1) \times P_S^n(\mathbb{C}) \longrightarrow P_S^n(\mathbb{C}), (A, p(z)) \longmapsto p(Az)$$

para todo $z \in S_{2s}^{2n+1}$, donde p es la proyección dada en (3.3).

No es difícil ver que esta actuación es transitiva y que el subgrupo de isotropía H de $U^s(n+1)$ en el punto $p(z_0)$, con $z_0 = (0, \dots, 0, 1)$, viene dado por

$$(3.6) \quad H = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & e^{i\theta} \end{array} \right) / \theta \in \mathbb{R}, B \in U^S(n) \right\}$$

Esto es, $H = U^S(n) \times U(1)$ embebido en $U^S(n+1)$. Así, $P_S^n(\mathbb{C})$ se identifica con el espacio simétrico

$$(3.7) \quad \frac{U^S(n+1)}{U^S(n) \times U(1)}$$

(Comparese con [20], p. 275 y [33], p. 378).

A partir de (3.4) se obtiene que el álgebra de Lie $u^S(n+1)$ de $U^S(n+1)$ está dada por

$$(3.8) \quad u^S(n+1) = \{A \in gl(n+1, \mathbb{C}) / {}^t \bar{A} G_{n+1}^S + G_{n+1}^S A = 0\}$$

Se tiene la siguiente descomposición

$$u^S(n+1) = u^S(n) + u(1) + m$$

donde $u(1)$ es el álgebra de Lie del grupo $U(1)$ y

$$(3.9) \quad m = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \text{O} & \begin{array}{c} \bar{a}_1 \\ \vdots \\ \bar{a}_s \\ -\bar{a}_{s+1} \\ \vdots \\ -\bar{a}_n \end{array} \\ \hline a_1, \dots, a_s, a_{s+1}, \dots, a_n & 0 \end{array} \right) / a_j \in \mathbb{C} \right\}$$

Este espacio vectorial m se identifica con el espacio tangente a $P_S^n(\mathbb{C})$ (dado por (3.7)) en el origen $T_0 P_S^n(\mathbb{C})$. Por otro lado m se identifica a \mathbb{C}^n , tomando como representante de cada matriz A de m , el vector de \mathbb{C}^n naturalmente obtenido de su última fila. Teniendo en cuenta lo anterior, la representación adjunta de $U^S(n) \times U(1)$

viene dada por

$$(3.10) \quad \text{ad} \begin{pmatrix} B & | & 0 \\ \hline 0 & | & e^i \end{pmatrix} . A = e^{i\theta} A G_n^S t \bar{B} G_n^S$$

Sobre m se considera el siguiente producto interno

$$(3.11) \quad (A, B) = -\frac{1}{2} \text{Traza } A \cdot B$$

para cualesquiera $A, B \in m$. Un fácil cálculo prueba que este coincide con $\text{Real } b_n^S$ (ver (3.1)).

Usando (3.10) y (3.11) se prueba que este producto interno es invariante frente a la acción adjunta de $H = U^S(n) \times U(1)$. Por lo tanto, si $c \in \mathbb{R}_+$ y se define

$$(3.12) \quad B_n^S(A, B) = (4/c) \text{Real } b_n^S(A, B)$$

entonces, B_n^S es una forma bilineal simétrica, no degenerada e invariante frente a la acción adjunta de $U^S(n) \times U(1)$ sobre m . Como consecuencia (ver [20], Cap. X, Proposición 3.1) existe una única métrica de Riemann indefinida $g_{S,n}$, invariante por $U^S(n+1)$, sobre $P_S^n(\mathbb{C})$, que, en el origen, viene dada por

$$(3.13) \quad g_{S,n}(u, v)_0 = B_n^S(u, v)$$

La estructura compleja, J , de $P_S^n(\mathbb{C})$ se define (teniendo en cuenta la anterior identificación) mediante el siguiente automorfismo, invariante frente a la acción adjunta de $U^S(n) \times U(1)$, J_0 sobre m

$$(3.14) \quad J_0(A) = \sqrt{-1} \cdot A$$

Se cumple en el origen (y por tanto en todo punto $m \in P_S^n(\mathbb{C})$)

$g_{S,n}(J_0 u, J_0 v)_0 = g_{S,n}(u, v)_0$, para todos $u, v \in T_0 P_S^n(\mathbb{C})$. Además, la conexión de Riemann ∇ de $g_{S,n}$ coincide con la conexión canónica (ver

[20], Cap. XI, Teorema 3.3) y cumple $\forall J = 0$. Así, $(P_S^n(\mathbb{C}), J, g_{s,n})$ es una variedad de Kähler indefinida, de dimensión n e índice $2s$.

El tensor curvatura R de ∇ satisface

$$(3.15) \quad g_{s,n}(R_{AB}^B, A)_0 = -B_n^S([[A, B], B], A)$$

para cualesquiera $A, B \in m$.

Si $A \in m$ es un vector no nulo y $H_{s,n}(A)$ la curvatura seccional del plano holomorfo engendrado por A , entonces de (3.15) se obtiene

$$(3.16) \quad H_{s,n}(A) = - \frac{B_n^S([[A, A^*], A^*], A)}{(B_n^S(A, A))^2}$$

y, mediante un cálculo directo, resulta $H_{s,n}(A) = c$. Así, se prueba que $P_S^n(\mathbb{C})$ tiene curvatura seccional holomorfa constante c .

De otra forma, lo anterior puede contemplarse como sigue:

Consideremos la subvariedad

$$S_{2s}^{2n+1}(c/4) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / b_{n+1}^S(z, z) = 4/c\}$$

de \mathbb{T}_S^{n+1} . Con la métrica inducida de la de \mathbb{C}_S^{n+1} , $S_{2s}^{2n+1}(c/4)$ es una variedad de Riemann indefinida, con curvatura seccional constante $c/4$ (ver [33], p. 67) que recibe el nombre de esfera indefinida.

La aplicación

$$(3.17) \quad \begin{aligned} p' : S_{2s}^{2n+1}(c/4) &\longrightarrow P_S^n(\mathbb{C}), \text{ dada por} \\ p'(z) &= z \cdot \mathbb{C}^*, \text{ para todo } z \in S_{2s}^{2n+1}(c/4) \end{aligned}$$

es una submersión, la "fibración de Hopf" indefinida de $P_S^n(\mathbb{C})$ con fibra $z \cdot \mathbb{S}^1$ para cada $z \in S_{2s}^{2n+1}(c/4)$. Entonces, como en [20], Cap. X, Ejemplo 10.5, existe una única métrica de Kähler indefinida, de índice $2s$, sobre $P_S^n(\mathbb{C})$ de tal forma que p' es una submersión de Riemann en el sentido de O'Neill, [26]. Como en [26], p. 465-466,

puede verse que, con dicha métrica, $P_S^n(\mathbb{C})$ tiene curvatura seccional holomorfa c . Es fácil ver que la métrica y la estructura compleja dadas por (3.13) y (3.14) coinciden con las obtenidas de esta forma.

Ejemplo 3.3. - Para cada $c \in \mathbb{R}_+$ se define una variedad de Kähler indefinida de dimensión n , índice $2s$ y curvatura seccional holomorfa constante $-c$.

En \mathbb{C}^{n+1} se considera

$$k'_{S+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / b_{n+1}^{S+1}(z, z) \geq 0\}.$$

Como en el Ejemplo 3.2 se obtiene un cociente $\mathbb{C}^{n+1} - k'_{S+1} / \mathbb{C}^*$, al que se le llama espacio hiperbólico complejo indefinido y se representa por $H_S^n(\mathbb{C})$. También, si consideramos

$$(3.18) \quad H_{2S+1}^{2n+1}(-c/4) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / b_{n+1}^{S+1}(z, z) = -4/c\}$$

que es una subvariedad de Riemann indefinida (llamada espacio hiperbólico real indefinido) de \mathbb{C}_{S+1}^{n+1} , con curvatura seccional constante $-c/4$ (ver [33], p. 67), se obtiene una submersión

$$(3.19) \quad p' : H_{2S+1}^{2n+1}(-c/4) \longrightarrow H_S^n(\mathbb{C})$$

análoga a la dada en (3.17); concluyendo con la existencia sobre $H_S^n(\mathbb{C})$ de una única métrica de Kähler indefinida, de índice $2s$, tal que p' es una submersión de Riemann y $H_S^n(\mathbb{C})$ tiene curvatura seccional holomorfa constante $-c$. Además, como $S_{2(n-s)}^{2n+1}(c/4)$ es difeomorfo con $H_{2S+1}^{2n+1}(-c/4)$, mediante

$$\phi : S_{2(n-s)}^{2n+1}(c/4) \longrightarrow H_{2S+1}^{2n+1}(-c/4),$$

$$\phi(z_1, \dots, z_{n-s}, z_{n-s+1}, \dots, z_{n+1}) = (z_{n-s+1}, \dots, z_{n+1}, z_1, \dots, z_{n-s})$$

(ver [33], Lema 2.4.6) resulta que $H_S^n(\mathbb{C})$ es difeomorfo con $P_{n-s}^n(\mathbb{C})$, y su métrica se obtiene de la de este último cambiándole el signo.

Los Ejemplos 3.1, 3.2 y 3.3 son espacios "modelos" para este tipo de geometría en el siguiente sentido

Teorema 3.4.- (Compárese con [20], Cap. IX, Teorema 7.9)

Si $c \in \mathbb{R}$, entonces toda variedad de Kähler indefinida conexa, simplemente conexa, completa, con dimensión compleja n , índice $2s$ y curvatura seccional holomorfa c es isométrica de manera holomorfa con $P_S^n(\mathbb{C})$, $H_S^n(\mathbb{C})$ o \mathbb{C}_S^n según que sea $c > 0$, $c < 0$ o $c = 0$.

Tras haber probado la Proposición 2.1, la demostración de este Teorema es, esencialmente, la misma que en el caso definido positivo y por ello se omite. Además, también como en este caso, si se eliminan las hipótesis topológicas en el Teorema 3.4, se obtiene localmente el mismo resultado.

§4. Algunas propiedades topológicas de $P_S^n(\mathbb{C})$.

A diferencia de la geometría kähleriana (definida positiva) donde el espacio modelo de curvatura seccional holomorfa constante positiva es compacto, $P_S^n(\mathbb{C})$ no es compacto si $s \neq 0$. Por ejemplo, si se considera $S_2^5 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 / -|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1\}$ y la recta compleja r dada por $z_1 = \lambda$, $z_2 = 1$, $z_3 = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, es claro que r está contenida en S_2^5 , lo cual prueba que S_2^5 no es compacto. Por otro lado, como $p^{-1}p(r)$ (siendo p la proyección dada en (3.3)) es cerrado en S_2^5 , resulta que $p(r)$ es un subconjunto cerrado de $P_1^2(\mathbb{C})$. Si este fuera compacto también lo sería $p(r)$, pero $p|_r : r \longrightarrow p(r)$ es un homeomorfismo y esto impide que sea $p(r)$ compacto. El anterior argumento es general; así, $P_S^n(\mathbb{C})$, con $s \neq 0$, no es compacto.

Considérese ahora el espacio fibrado principal $S_{2s}^{2n+1}(P_S^n(\mathbb{C}), S^1)$ establecido en el Ejemplo 3.2 y la aplicación

$$\beta : S_{2s}^{2n+1} \longrightarrow S^{2(n-s)+1} \times \mathbb{C}^s \quad \text{definida por}$$

$$\beta(z_1, \dots, z_s, z_{s+1}, \dots, z_{n+1}) = \left(\frac{z_{s+1}}{q(z)}, \dots, \frac{z_{n+1}}{q(z)}, z_1, \dots, z_s \right)$$

donde $q(z) = \left(1 + \sum_{j=1}^s |z_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Esta aplicación β es un difeomorfismo (ver [33], Lema 2.4.6) y verifica $e^{i\theta} \cdot \beta(z) = \beta(e^{i\theta} \cdot z)$ para todo $z \in S_{2s}^{2n+1}$. Con ello, $S^{2(n-s)+1} \times \mathbb{C}^s$ se puede considerar como un fibrado sobre $P_S^n(\mathbb{C})$ con grupo estructural S^1 .

Sea $j : S^{2(n-s)+1} \longrightarrow S^{2(n-s)+1} \times \mathbb{C}^s$ definida por

$$j(z_1, \dots, z_{n-s+1}) = (z_1, \dots, z_{n-s+1}, 0, \dots, 0).$$

Es claro que j es continua. Además, j es una equivalencia homotópica. En efecto, si $r : S^{2(n-s)+1} \times \mathbb{C}^s \longrightarrow S^{2(n-s)+1}$ es la proyección natural, es continua y cumple $r \circ j = 1_{S^{2(n-s)+1}}$. Por otro lado, $F : S^{2(n-s)+1} \times \mathbb{C}^s \times [0, 1] \longrightarrow S^{2(n-s)+1} \times \mathbb{C}^s$ dada por $F(z, w, t) = (z, tw)$ es una homotopía entre $j \circ r$ y $1_{S^{2(n-s)+1} \times \mathbb{C}^s}$.

Considérese ahora el siguiente diagrama conmutativo

$$(4.1) \quad \begin{array}{ccc} S^{2(n-s)+1} & \xrightarrow{j} & S^{2(n-s)+1} \times \mathbb{C}^s \cong S_{2s}^{2n+1} \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ P^{n-s}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\tilde{j}} & P_S^n(\mathbb{C}) \end{array}$$

donde \tilde{j} es la aplicación inducida entre los cocientes por j . Como, claramente, j es un embebimiento, también lo es \tilde{j} ; así, se puede identificar $P^{n-s}(\mathbb{C})$ con su imagen mediante \tilde{j} en $P_S^n(\mathbb{C})$ y se tiene

Proposición 4.1. - $P^{n-s}(\mathbb{C})$ es un retracto de deformación de $P_S^n(\mathbb{C})$.

Demostración. Se puede representar $P_S^n(\mathbb{C})$ por $\{[(z, w)] / z \in S^{2(n-s)+1}, w \in \mathbb{C}^s\}$, y definir $\tilde{r} : P_S^n(\mathbb{C}) \longrightarrow P^{n-s}(\mathbb{C})$ mediante $\tilde{r}([(z, w)]) = [z]$.

La aplicación \tilde{r} está bien definida, es continua y cumple $\tilde{r} \circ \tilde{j} = 1_{P^{n-s}(\mathbb{C})}$.

Finalmente, sea $\tilde{F} : P_S^n(\mathbb{C}) \times [0,1] \longrightarrow P_S^n(\mathbb{C})$ dada por $\tilde{F}([(z,w)],\tau) = [(z,tw)]$, que es continua y cumple $\tilde{F}([(z,w)],0) = \tilde{j}.\tilde{r}([(z,w)])$, $\tilde{F}([(z,w)],1) = [(z,w)]$. Esto prueba que \tilde{F} es una homotopía entre $\tilde{j}.\tilde{r}$ y $1_{P_S^n(\mathbb{C})}$.

Teniendo en cuenta la Proposición 4.1, la característica de Euler de $P_S^n(\mathbb{C})$, $\chi(P_S^n(\mathbb{C}))$, es $n-s+1$, resulta de ello de forma inmediata el siguiente

Corolario 4.2.- $P_S^n(\mathbb{C})$ y $P_S^{n'}(\mathbb{C})$ son del mismo tipo de homotopía si y solo si $\chi(P_S^n(\mathbb{C})) = \chi(P_S^{n'}(\mathbb{C}))$.

Nota 4.3.- El embebimiento \tilde{j} de $P^{n-s}(\mathbb{C})$ en $P_S^n(\mathbb{C})$ definido por (4.1) también es isométrico y holomorfo. Dicho de otro modo, si se identifica $P^{n-s}(\mathbb{C})$ con $\tilde{j}(P^{n-s}(\mathbb{C}))$ en $P_S^n(\mathbb{C})$, puede afirmarse que la métrica (definido positiva) y la estructura compleja de $P^{n-s}(\mathbb{C})$, son las restricciones de las correspondientes a $P_S^n(\mathbb{C})$, dadas en (3.13) y (3.14). Por último, $P_S^n(\mathbb{C})$ es un fibrado vectorial sobre $P^{n-s}(\mathbb{C})$ con fibra tipo \mathbb{C}^s .

§5. Ejemplos de variedades de Kähler indefinidas.-

Ejemplo 5.1.- En este ejemplo se utilizan notación y definiciones de [35].

(a) Sea (M,J,g) una variedad casi hermitica indefinida con $\dim_{\mathbb{C}} M = n$. Si TM es el fibrado tangente de M y c el levantamiento completo a TM de estructuras geométricas de M , entonces (TM,J^c,g^c) es una variedad casi hermitica indefinida de índice $2n$ (ver [35], Proposición 5.9). Si ∇ es la conexión de Riemann de g , entonces ∇^c es la conexión de Riemann de g^c (ver [35], Proposición 6.6.) y cumple $\nabla^c J^c = (\nabla J)^c$. Así, (TM,J^c,g^c) es una variedad de Kähler indefinida con índice $2s$, $0 \leq s \leq n$.

(b) Si (M, g) es una variedad de Riemann indefinida de dimensión n e índice s , $0 < s < n$, entonces la métrica de Sasaki, g^D , sobre TM es una métrica indefinida de índice $2s$, [27]. Sea J' la estructura casi compleja natural de TM , dada por Dombrowski en [13]. Entonces (TM, J', g^D) es una variedad de tipo AK (esto es, su forma de Kähler es cerrada) indefinida. Además, es kähleriana si y solo si M es localmente llana, [29].

(c) Supóngase una variedad de Kähler indefinida (M, J, g) y sea J^H el levantamiento horizontal de J . Entonces (TM, J^H, g^D) es una variedad hermitica indefinida, que es kähleriana si y solo si M es localmente llana (ver [35], p. 103).

Ejemplo 5.2. - Dado \mathbb{C}^n , se consideran enteros s_1, s_2, n_1, n_2 tales que $0 < s_1 < n_1, 0 < s_2 < n_2$ y $n_1 + n_2 = n$. Sea en \mathbb{C}^n , la forma hermitica de expresión

$$(5.1) \quad b_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(z, w) = -\sum_{j=1}^{s_1} \bar{z}_j w_j + \sum_{j=s_1+1}^{n_1} \bar{z}_j w_j - \sum_{j=n_1+1}^{n_1+s_2} \bar{z}_j w_j + \sum_{j=n_1+s_2+1}^n \bar{z}_j w_j$$

y $U^{s_1+s_2}(n_1+n_2)$ el grupo de automorfismo de \mathbb{C}^n que conservan $b_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}$.

Es claro, a partir de (5.1), que

$$(5.2) \quad U^{s_1+s_2}(n_1+n_2) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) / {}^t \bar{A} G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2} A = G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}\}$$

siendo $G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2} = \text{diag}(-I_{s_1}, I_{n_1-s_1}, -I_{s_2}, I_{n_2-s_2})$. En particular, si $s_2 = n_2 = 0$ entonces $G_{n_1, 0}^{s_1, 0} = G_{n_1}^{s_1}$ y (5.2) coincide con $U^{s_1}(n_1)$ (ver (3.4)).

Si se representa por $V_{s'}^{n'}$ cualquier subespacio vectorial (métrico) de dimensión n' e índice $2s'$ del espacio vectorial \mathbb{C}_s^n , entonces la colección de todos los subespacios $V_{s'}^{n'}$ se identifica al cociente

$$(5.3) \quad \frac{U^{s_1+s_2}(n_1+n_2)}{U^{s_1}(n_1) \times U^{s_2}(n_2)}$$

y se llama variedad de Grassmann compleja indefinida $G_{n_1, n_2}^{S_1, S_2}(\mathbb{C})$ (ver [33], p. 378); en particular $G_{n_1, n_2}^{0, 0}(\mathbb{C})$ es la variedad de Grassmann compleja usual $G_{n_1, n_2}(\mathbb{C})$ (ver [20], Cap. XI, Ejemplo 10.8).

$G_{n_1, n_2}^{S_1, S_2}(\mathbb{C})$ es un espacio simétrico y la descomposición canónica del álgebra de Lie $u^{S_1+S_2}(n_1+n_2)$ de $U^{S_1+S_2}(n_1+n_2)$ viene dada por

$$u^{S_1+S_2}(n_1+n_2) = u^{S_1}(n_1) + u^{S_2}(n_2) + m$$

donde

$$(5.4) \quad m = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -G_{n_1}^{S_1} \bar{X} G_{n_2}^{S_2} \\ X & 0 \end{pmatrix} / X \in \mathcal{M}_{n_2 \times n_1}(\mathbb{C}) \right\}.$$

Si se identifica cada elemento de m , dado por (5.4), con la correspondiente matriz de $\mathcal{M}_{n_2 \times n_1}(\mathbb{C})$, la acción adjunta de $U^{S_1}(n_1) \times U^{S_2}(n_2)$ se escribe

$$(5.5) \quad \text{ad} \begin{pmatrix} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{pmatrix} X = C X G_{n_1}^{S_1} \bar{B} G_{n_2}^{S_2}.$$

Se define ahora un automorfismo J de m que, con la anterior identificación, es el producto por la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$. Es inmediato que $J^2 = -1_m$ y que J es invariante por la acción adjunta (5.5). Esto prueba que J define una estructura casicompleja sobre $G_{n_1, n_2}^{S_1, S_2}(\mathbb{C})$. También a partir de la forma de Killing, como en (3.11), se puede definir una métrica sobre m que, con $\mathcal{M}_{n_2 \times n_1}(\mathbb{C}) = m$, se escribe

$$(5.6) \quad g(X, Y) = \text{Real Traza } G_{n_1}^{S_1} \bar{X} G_{n_2}^{S_2} Y$$

(compárese con [20], Cap. XI, p. 287). Un cálculo fácil prueba que g es invariante por la acción adjunta (5.5). Así, teniendo en cuenta [20], Cap. X, Proposición 3.1, existe una única métrica de Riemann



indefinida, invariante por $U^{s_1+s_2}(n_1+n_2)$, sobre $G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C})$ tal que sobre m está dada por (5.6). Además, se tiene $g(JX, JY) = g(X, Y)$, para cualesquiera $X, Y \in m$, y $\nabla J = 0$ siendo ∇ la conexión de Riemann de g . Con todo ello, $G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C})$ es una variedad de Kähler indefinida de dimensión compleja $n_1 n_2$ e índice $2s_1(n_2 - s_2) + 2s_2(n_1 - s_1)$.

Si R representa el tensor curvatura correspondiente, un teorema conocido (ver [20], Cap. XI, Teorema 3.2) establece que, sobre m , R viene dado por

$$R_{XY}Z = -[[X, Y], Z]$$

para cualesquiera $X, Y, Z \in m$; es decir

$$(5.7) \quad R_{XY}Z = X G_{n_1}^{s_1} {}^t \bar{Y} G_{n_2}^{s_2} Z - Y G_{n_1}^{s_1} {}^t \bar{X} G_{n_2}^{s_2} Z + Z G_{n_1}^{s_1} {}^t \bar{Y} G_{n_2}^{s_2} X - Z G_{n_1}^{s_1} {}^t \bar{X} G_{n_2}^{s_2} Y$$

En este punto, es conveniente describir ciertas isometrías holomorfas, que surgen de una forma natural, entre variedades de Grassmann indefinidas y que serán utilizadas posteriormente en este trabajo.

Consideramos las matrices D_j , $j=1, 2$, de órdenes n_j , dadas por

$$D_j = \begin{pmatrix} 0 & I_{s_j} \\ I_{n_j - s_j} & 0 \end{pmatrix}$$

y las aplicaciones lineales

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \phi_1 : T_0 G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C}) &\longrightarrow T_0 G_{n_2, n_1}^{s_2, s_1}(\mathbb{C}), & \phi_1(X) &= {}^t X \\ \phi_2 : T_0 G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C}) &\longrightarrow T_0 G_{n_1, n_2}^{n_1 - s_1, n_2 - s_2}(\mathbb{C}), & \phi_2(X) &= {}^t D_2 X D_1 \end{aligned}$$

A partir de (5.6), (5.7) y la propiedad $D_j G_{n_j}^{n_j - s_j} {}^t D_j = -G_{n_j}^{s_j}$, se prueba que las aplicaciones de (5.8) son isometrías lineales complejas y que conservan la curvatura; esto es, cumplen

$$J \cdot \phi_j = \phi_j \cdot J \quad \text{y} \quad \phi_j(R_{XY}Z) = R_{\phi_j(X) \phi_j(Y) \phi_j(Z)}$$

para cualesquiera $X, Y, Z \in T_{\mathbb{O}} G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C})$. Entonces, por [20], Cap. VI, Teorema 7.4, (ver tambien [9], Teorema de Ambrose, Cartan y Hicks) existen isometrías holomorfas

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \psi_1 &: G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C}) \longrightarrow G_{n_2, n_1}^{s_2, s_1}(\mathbb{C}) \\ \psi_2 &: G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C}) \longrightarrow G_{n_1, n_2}^{n_1-s_1, n_2-s_2}(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

tales que $(d\psi_1)_{\mathbb{O}} = \phi_1$ y $(d\psi_2)_{\mathbb{O}} = \phi_2$. Así pues, $G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C})$, $G_{n_2, n_1}^{s_2, s_1}(\mathbb{C})$ y $G_{n_1, n_2}^{n_1-s_1, n_2-s_2}(\mathbb{C})$ son identificables. En particular, $G_{1, n}^{0, s}(\mathbb{C}) = G_{n, 1}^{s, 0}(\mathbb{C}) = P_S^n(\mathbb{C})$, (ver (3.7)); es decir, la colección de todas las rectas complejas positivas $V_{\mathbb{O}}^1$ en \mathbb{C}_S^{n+1} coincide con el espacio complejo indefinido de dimensión n e índice $2s$; por otro lado, $G_{1, n}^{1, s}(\mathbb{C})$, tomando por métrica la opuesta de (5.6), se identifica con $H_S^n(\mathbb{C})$; esto es, la colección de todas las rectas complejas negativas V_1^1 en \mathbb{C}_{s+1}^{n+1} es el espacio hiperbólico complejo indefinido. Hay que hacer notar que $G_{1, n}^{0, s}(\mathbb{C}) = P_S^n(\mathbb{C})$ significa que ambos espacios tienen idénticos elementos geométricos; sin embargo, $G_{1, n}^{1, s}(\mathbb{C}) = G_{1, n}^{0, n-s}(\mathbb{C}) = P_{n-s}^n(\mathbb{C})$ según (5.9), y de aquí, al cambiar la métrica de signo, se obtiene $H_S^n(\mathbb{C})$.

Ejemplo 5.3.— Sea (M', J', g') una variedad de Kähler indefinida, (M, J) una variedad compleja y $f : M \longrightarrow M'$ una inmersión compleja. Si $df_m(T_m M)$ es un subespacio no degenerado de $T_{f(m)}^{M'}$, para todo $m \in M$, entonces $g = f^*g'$ es una métrica de Kähler sobre M .

(1) La hipersuperficie compleja no degenerada de $P_S^{n+1}(\mathbb{C})$ obtenida mediante proyección de $N = \{z \in S_{2s}^{2n+3} \mid -z_1^2 - \dots - z_s^2 + z_{s+1}^2 + \dots + z_{n+2}^2 = 0\}$ por p (ver (3.3)) es una variedad de Kähler indefinida de dimensión n e índice $2s$ (su fibrado normal en $P_S^{n+1}(\mathbb{C})$ es definido positivo)

Dicha variedad no tiene curvatura seccional holomorfa constante, aunque es Einstein. Por analogía con [20], Cap. XI, Ejemplo 10.6, a este espacio se llama la cuádrica compleja indefinida $Q_S^n(\mathbb{C})$.

Sea el grupo de Lie

$$SO^S(n+2) = \{A \in GL(n+2, \mathbb{R}) / {}^t A G_{n+2}^S A = G_{n+2}^S \text{ y } \det A = 1\}$$

$0 \leq s \leq n$, que, considerado como subgrupo de $U^S(n+2)$, actúa sobre $P_S^{n+1}(\mathbb{C})$ y deja invariante $Q_S^n(\mathbb{C})$. Por ello, esta acción se puede inducir en $Q_S^n(\mathbb{C})$, resultando ser transitiva. El subgrupo de isotropía en un punto de $Q_S^n(\mathbb{C})$ es isomorfo a $SO^S(n) \times SO(2)$. Por lo tanto, $Q_S^n(\mathbb{C})$ es difeomorfo al espacio simétrico

$$(5.10) \quad \frac{SO^S(n+2)}{SO^S(n) \times SO(2)}$$

La descomposición canónica del álgebra de Lie $\mathfrak{so}^S(n+2)$ de $SO^S(n+2)$ viene dada por

$$\mathfrak{so}^S(n+2) = \mathfrak{so}^S(n) + \mathfrak{so}(2) + \mathfrak{m}$$

donde

$$(5.11) \quad \mathfrak{m} = \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} 0 & a_1 & b_1 \\ & \vdots & \vdots \\ & a_s & b_s \\ & -a_{s+1} & -b_{s+1} \\ & \vdots & \vdots \\ & -a_n & -b_n \\ \hline a_1, \dots, a_n & & \\ b_1, \dots, b_n & & 0 \end{array} \right) / a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\}$$

Si se identifica cada elemento de \mathfrak{m} , dado por (5.11), con la correspondiente submatriz $2 \times n$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, la acción adjunta de $SO^S(n) \times SO(2)$ sobre \mathfrak{m} se expresa

$$(5.12) \quad \text{ad} \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & R(\theta) \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} G_n^S {}^t B G_n^S$$

donde $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ es cualquier elemento de $SO(2)$.

Se definen sobre m el producto interno

$$(5.13) \quad g \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \right) = (4/c) \{ b_n^S(a, a') + b_n^S(b, b') \}$$

donde b_n^S es la métrica indefinida de \mathbb{R}_S^n (ver (16.1)), y el automorfismo

$$(5.14) \quad J \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

En definitiva, se ha puesto m de la forma $\mathbb{R}_S^n + \mathbb{R}_S^n$ para expresar g y J cómodamente mediante (5.13) y (5.14).

Tanto g como J son invariantes por la acción adjunta (5.12), por ello definen, respectivamente, una métrica de Riemann indefinida y una estructura casi compleja, con las cuales el espacio simétrico (5.10) es una variedad kähleriana indefinida, isométrica de manera holomorfa con $Q_S^n(\mathbb{C})$.

(2) La hipersuperficie compleja no degenerada de $P_{S+1}^{2s+1}(\mathbb{C})$ obtenida de $N' = \{ z \in S_{2s+2}^{4s+3} / z_1 z_{s+2} + z_2 z_{s+3} + \dots + z_s z_{2s+2} = 0 \}$ mediante la proyección (3.3), es una variedad kähleriana indefinida de dimensión compleja $2s$ e índice $2s$ (su fibrado normal en $P_{S+1}^{2s+1}(\mathbb{C})$ es definido negativo). Además, dicha variedad es Einstein y su curvatura seccional holomorfa no es constante. Se representará por $Q_S^*(\mathbb{C})$.

Sea $SO^*(2s+2)$ el subgrupo de $U^{s+1}(2s+2)$ dado por

$$(5.15) \quad SO^*(2s+2) = \{ A \in U^{s+1}(2s+2) / {}^t A P_{s+1} A = P_{s+1} \}$$

donde $P_{s+1} = \begin{pmatrix} 0 & I_{s+1} \\ I_{s+1} & 0 \end{pmatrix}$ (ver [5], p. 113).

Este grupo actúa sobre $P_{s+1}^{2s+1}(\mathbb{C})$ y deja invariante a $Q_s^*(\mathbb{C})$, ya que N' puede escribirse como $N' = \{z \in S_{2s+2}^{4s+3} / {}^t_z P_{s+1} z = 0\}$, donde ${}^t_z = (z_1, \dots, z_{2s+2})$. Esta acción inducida sobre $Q_s^*(\mathbb{C})$ es transitiva y el subgrupo de isotropía en un punto de $Q_s^*(\mathbb{C})$ es isomorfo a $SO^*(2s) \times SO(2)$ embebido en $SO^*(2s+2)$ como

$$(5.16) \quad \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 & A_{12} \\ 0 & 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & A_{21} & 0 & A_{22} \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in SO^*(2s), \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

donde todas las submatrices A_{j1} son cuadradas de orden s . Así, $Q_s^*(\mathbb{C})$ es difeomorfo al espacio simétrico

$$(5.17) \quad \frac{SO^*(2s+2)}{SO^*(2s) \times SO(2)}$$

El álgebra de Lie $\mathfrak{so}^*(2s+2)$ de $SO^*(2s+2)$ viene dada por

$$\mathfrak{so}^*(2s+2) = \left\{ \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ {}^t\bar{X}_{12} & -X_{11} \end{pmatrix} / \begin{array}{l} X_{11} \text{ antihermítica de orden } s+1 \\ X_{12} \text{ antisimétrica compleja de} \\ \text{orden } s+1 \end{array} \right\}$$

Por tanto, se tiene la descomposición canónica

$$\mathfrak{so}^*(2s+2) = \mathfrak{so}^*(2s) + \mathfrak{so}(2) + \mathfrak{m}$$

donde

$$\mathfrak{so}^*(2s) + \mathfrak{so}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} i\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{11} & 0 & Y_{12} \\ 0 & 0 & -i\lambda & 0 \\ 0 & {}^t\bar{Y}_{12} & 0 & -Y_{11} \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ {}^t\bar{Y}_{12} & -Y_{11} \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}^*(2s), \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

en virtud de (5.16), y

$$(5.18) \quad m = \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & a & 0 & b \\ \bar{t}_a & 0 & \bar{t}_b & 0 \\ 0 & -\bar{b} & 0 & \bar{a} \\ \bar{t}_b & 0 & \bar{t}_a & 0 \end{array} \right\} / \left. \begin{array}{l} a = (a_1, \dots, a_s) \\ b = (b_1, \dots, b_s) \end{array} \right\} ; a_j, b_k \in \mathbb{C}$$

Si se identifica cada elemento de m , dado por (5.18), con la correspondiente matriz $1 \times 2s$ (a, b) , la acción adjunta de $SO^*(2s) \times SO(2)$ sobre m se expresa por

$$(5.19) \quad \text{ad}(A, e^{i\theta})(a, b) = e^{i\theta} (a, b) G_{2s}^S \bar{A} G_{2s}^S$$

para cualquier $A \in SO^*(2s)$, $e^{i\theta} \in SO(2)$.

Se definen sobre m el producto interno

$$(5.20) \quad g((a, b), (a', b')) = (4/c) \text{Real} \{ b_S^0(a, a') - b_S^0(b, b') \}$$

donde b_S^0 está definido por (3.1), y el automorfismo

$$(5.21) \quad J(a, b) = (ia, ib).$$

Tanto g como J son invariantes por la acción adjunta (5.19) y por ello definen, respectivamente, una métrica de Riemann indefinida y una estructura casicompleja, con las cuales el espacio simétrico (5.17) es isométrico de manera holomorfa con $Q_S^*(\mathbb{C})$.

Un cálculo directo a partir de la ecuación que define $Q_S^*(\mathbb{C})$, demuestra que el endomorfismo de Weingarten asociado a un campo vectorial normal ξ , A_ξ , (ver [20], Cap. VII, p. 13), a $Q_S^*(\mathbb{C})$ en $P_{s+1}^{2s+1}(\mathbb{C})$ verifica $A_\xi^2 = -b^2 I$, donde I es la transformación identidad y $b^2 = c/4$. Por tanto $J' = A/b$ es una estructura casicompleja sobre $Q_S^*(\mathbb{C})$ que cumple $J.J' = -J'.J$ y además, $g(J'X, J'Y) = -g(X, Y)$, para cualesquiera campos vectoriales X, Y tangentes a $Q_S^*(\mathbb{C})$. Por ello podría hablarse de $Q_S^*(\mathbb{C})$ como de una variedad "antikähleriana" cuaterniónica (véase M. A. Magid, "Indefinite Einstein hypersurfaces with $A^2 = -b^2 I$ ", preprint).

Ejemplo 5.4.- Este ejemplo generaliza al anterior Ejemplo 5.2 y tiene su precedente en el caso definido positivo en [1] y [4].

Se considera el espacio homogéneo

$$(5.22) \quad M = \frac{U^{S_1+S_2+S_3}(n_1+n_2+n_3)}{U^{S_1}(n_1) \times U^{S_2}(n_2) \times U^{S_3}(n_3)}$$

donde los grupos unitarios que aquí aparecen se definen de forma análoga que en (5.2). Tenemos también la descomposición canónica del álgebra de Lie $u^{S_1+S_2+S_3}(n_1+n_2+n_3)$, y, como en (5.4), m resulta

$$(5.23) \quad \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & -G_{n_1}^{S_1} \bar{X}_{21} G_{n_2}^{S_2} & -G_{n_1}^{S_1} \bar{X}_{31} G_{n_3}^{S_3} \\ X_{21} & 0 & -G_{n_2}^{S_2} \bar{X}_{32} G_{n_3}^{S_3} \\ X_{31} & X_{32} & 0 \end{pmatrix} / X_{jk} \in \mathcal{M}_{n_j \times n_k}(\mathbb{C}) \right\}$$

La acción adjunta de $U^{S_1}(n_1) \times U^{S_2}(n_2) \times U^{S_3}(n_3)$ sobre m viene dada por

$$(5.24) \quad \text{ad} \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix} X =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -B_1 G_{n_1}^{S_1} \bar{X}_{21} G_{n_2}^{S_2} & -B_1 G_{n_1}^{S_1} \bar{X}_{31} G_{n_3}^{S_3} \\ B_2 X_{21} G_{n_1}^{S_1} \bar{B}_1 G_{n_1}^{S_1} & 0 & -B_2 G_{n_2}^{S_2} \bar{X}_{32} G_{n_3}^{S_3} \\ B_3 X_{31} G_{n_1}^{S_1} \bar{B}_1 G_{n_1}^{S_1} & B_3 X_{32} G_{n_2}^{S_2} \bar{B}_2 G_{n_2}^{S_2} & 0 \end{pmatrix}$$

Así se prueba que $\text{ad}(U^{S_1}(n_1) \times U^{S_2}(n_2) \times U^{S_3}(n_3)) m \subset m$, y, en definitiva, que M es un espacio homogéneo reductivo en el sentido de

[20], Cap. X, p. 190. Se define sobre m el producto interno

$$g(X, Y) = -\frac{1}{2} \text{Real Traza } X \cdot Y$$

para cualesquiera $X, Y \in m$, que, teniendo en cuenta (5.23), puede expresarse por

$$(5.25) \quad g(X, Y) = \text{Real Traza } G_{n_1}^S \bar{X}_{21} G_{n_2}^S Y_{21} + \\ + \text{Real Traza } G_{n_1}^S \bar{X}_{31} G_{n_3}^S Y_{31} + \\ + \text{Real Traza } G_{n_2}^S \bar{X}_{32} G_{n_3}^S Y_{32}.$$

Esta forma bilineal simétrica no degenerada sobre m es invariante por la acción adjunta (5.24) y, por ello, da lugar a una única métrica de Riemann indefinida sobre M , invariante por $U^{S_1+S_2+S_3}(n_1+n_2+n_3)$, que sobre m viene dada por (5.25). La conexión de Riemann de g coincide con la canónica (ver [20], Cap. X, p. 197).

Identificando el elemento X de m con la terna de matrices (X_{21}, X_{31}, X_{32}) puede definirse un automorfismo J de m mediante la multiplicación por $\sqrt{-1}$. De esta forma existe una única estructura casi-compleja sobre M asociada a J que verifica $g(JX, JY) = g(X, Y)$ para cualesquiera $X, Y \in m$. Sea ahora ∇ la conexión de Riemann de g . Ocurre que $(\nabla_{JX} J) JY = (\nabla_X J) Y$. Se dice por esto que M es una variedad hermítica indefinida.

A continuación vamos a dar una familia de estructuras casi hermiticas sobre M a la cual pertenece J , que se pueden definir debido a la forma que tienen los vectores de m . Los resultados que ahora se enuncian son extensiones del caso definido obtenidos en [4].

Consideramos la siguiente descomposición de m ,

$$(5.26) \quad m = m_{21} + m_{31} + m_{32}$$

donde

$$m_{21} = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -G_{n_1}^{s_1} \bar{x}_{21} & G_{n_2}^{s_2} & 0 \\ x_{21} & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \end{array} \right) / x_{21} \in \mathcal{M}_{n_2 \times n_1}(\mathbb{C}) \right\}$$

y m_{31}, m_{32} se definen de forma análoga. Como en (5.6), se tienen aplicaciones lineales $J_{kl} : m_{kl} \longrightarrow m_{kl}$ tales que $J_{kl}^2 = -1_{m_{kl}}$. Sea J la aplicación lineal $a_{21} J_{21} + a_{31} J_{31} + a_{32} J_{32}$. Se verifica que $J^2 = -1_m$ si y solo si $a_{kl} = \pm 1$. En este caso J es invariante por la acción adjunta (5.24) y por lo tanto, define una estructura casi compleja sobre M . Sea \mathfrak{J} la familia de estructuras casi complejas así obtenidas, entonces se verifica:

i) M con cualquier J de \mathfrak{J} y la métrica g , es una variedad casi hermítica indefinida con dimensión (compleja) $n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3$ e índice $2 \cdot \sum_{k \neq 1} s_k \cdot (n_1 - s_1)$.

ii) No existe en \mathfrak{J} ninguna estructura kähleriana.

iii) Las únicas J de \mathfrak{J} que satisfacen $(\nabla_X J)X = 0$ (de tipo NK) se obtienen para $a_{21} = a_{32} = -a_{31} = 1$ y $a_{21} = a_{32} = -a_{31} = -1$.

iv) El resto de estructuras J de \mathfrak{J} son hermíticas.

CAPITULO II

CURVATURA SECCIONAL DE UNA VARIEDAD DE KÄHLER INDEFINIDA

§6. Una extensión del criterio de Cartan a variedades de Kähler indefinidas.-

En [8], Cartan estableció un criterio, en el cual daba una condición necesaria y suficiente para que la curvatura seccional de una variedad de Riemann sea constante. Nomizu, en [25], ha dado su versión compleja, para la curvatura seccional holomorfa de una variedad kähleriana. Más reciente ha sido la extensión de este criterio al caso de una variedad de Riemann indefinida, dado por Graves y Nomizu en [15]. En este epígrafe damos justamente, su versión compleja para variedades de Kähler indefinidas.

Teorema 6.1.- Sea M una variedad de Kähler indefinida, conexa, con dimensión compleja $n \geq 2$. Entonces M tiene curvatura seccional holomorfa constante si y sólo si

$$(6.1) \quad R_{uvu^*} = 0$$

para cualesquiera vectores u, v, u^* ortonormales tangentes a M en un punto.

Demostración. Si M tiene curvatura seccional holomorfa constante, R es de la forma $c \cdot R^0$, con $c \in \mathbb{R}$ y R^0 dado por (2.1). Entonces, resulta inmediatamente (6.1).

Recíprocamente, supongamos ahora cierto (6.1). Sea $u \wedge v$ cualquier plano totalmente real no degenerado. Vamos a considerar dos casos:



i) Si $u \wedge v$ es de tipo $(+,+)$ o $(-,-)$ se eligen $\tilde{u} = (u+v)/\sqrt{2}$ y $\tilde{v} = (u^*-v^*)/\sqrt{2}$. Entonces, el plano $u \wedge v$ es totalmente real no degenerado; así, $R_{\tilde{u}\tilde{v}\tilde{u}^*\tilde{v}^*} = 0$ de desarrollado da lugar a $H_u = H_v$.

ii) Si $u \wedge v$ es de tipo $(+,-)$, se eligen $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ tales que $a^2 - b^2 = 1$, y se pone ahora $\tilde{u} = au + bv$ y $\tilde{v} = bu^* + av^*$. De $R_{\tilde{u}\tilde{v}\tilde{u}^*\tilde{v}^*} = 0$, se obtiene

$$(6.2) \quad a^2 H_u + b^2 H_v = (a^2 + b^2) \{K_{uv} + 3K_{uv^*}\}$$

Pero, intercambiando los papeles de u y v en (6.2), resulta

$$(6.3) \quad a^2 H_v + b^2 H_u = (a^2 + b^2) \{K_{uv} + 3K_{uv^*}\}$$

Ahora bien, (6.2) y (6.3) implican $H_u = H_v$.

Supongamos $n \geq 3$ y u, v dos vectores no nulos en $T_m M$, $m \in M$. Puede suceder:

(1) $g(u, u) = -g(v, v)$, entonces $\Delta(u, v) \neq 0$ (ver (1.5)) y $\Pi = u \wedge v$ es un plano no degenerado. También, el complemento ortogonal Π^\perp de Π en $T_m M$, es no degenerado y $T_m M = \Pi + \Pi^\perp$. Sea $\{x, y\}$ una base ortonormal de Π , y

$$(6.4) \quad x^* = t_{x^*} + n_{x^*}, \quad y^* = t_{y^*} + n_{y^*}$$

donde t (respec. n) representa la componente en Π (respec. la componente en Π^\perp). Como $g(x, x^*) = g(y, y^*) = 0$, se tiene

$$(6.5) \quad n_{x^*} = x^* - \alpha y, \quad n_{y^*} = y^* - \beta x$$

con $\alpha = -g(t_{x^*}, y) = -g(x^*, y) = g(x, y^*) = g(t_{y^*}, x) = \beta$.

Así, $\Delta(n_{x^*}, n_{y^*}) = -(1 + \alpha^2)^2$ y esto implica que $\omega = n_{x^*} \wedge n_{y^*}$ es un plano no degenerado. Sea ω^\perp el complemento ortogonal de ω en Π^\perp . Es claro que ω^\perp es invariante frente a la estructura compleja J de $T_m M$, y además, no degenerado. Como $n \geq 3$ entonces $\dim_{\mathbb{R}} \Pi^\perp \geq 4$ y es posible en-

contrar un vector $w \in \omega^\perp$ no nulo. Como $u \wedge w$ y $v \wedge w$ son planos totalmente reales no degenerados, se concluye $H_u = H_w = H_v$.

(2) $g(u,u) = g(v,v)$ y alguno de los planos $u \wedge v$, $u \wedge v^*$ es no degenerado; en este caso, un razonamiento como en (1) prueba que $H_u = H_v$.

(3) $g(u,u) = g(v,v)$ y los planos $u \wedge v$, $u \wedge v^*$ son degenerados, es decir, $\Delta(u,v) = \Delta(u,v^*) = 0$. Elegimos $w = (v+v^*)/\sqrt{2}$ y el plano $\omega = u \wedge w$; entonces, ω es no degenerado y $g(u,u) = g(w,w)$. Utilizando ahora el apartado anterior se obtiene $H_u = H_w$. Un argumento similar prueba que $H_v = H_w$, que junto a lo anterior implica que $H_u = H_v$.

Finalmente, si $n=2$, se elige una base ortonormal $\{u, u^*, v, v^*\}$ de $T_x M$ (necesariamente $g(u,u) = -g(v,v) = -1$ o bien $g(u,u) = -g(v,v) = 1$, pues en este caso M tiene índice 2; se supondrá, sin pérdida de generalidad, esto último) y, como en el caso ii) se obtiene $H_u = H_v$. Por otro lado, (6.2) o (6.3) implica $K_{uv} = K_{uv^*}$ y $H_u = 4K_{uv}$. También se tiene $B_{uv} = 2K_{uv}$, donde B_{uv} representa la curvatura biseccional del plano totalmente real $u \wedge v$ (ver (1.7) y (1.8)). En resumen, si se pone $H_u = c$, resulta

$$(6.6) \quad R_{uu^*u^*u} = R_{vv^*v^*v} = c$$

$$(6.7) \quad R_{uvvu} = R_{uv^*v^*u} = -c/4$$

$$(6.8) \quad R_{uu^*v^*v} = -c/2$$

Así, utilizando (6.6), (6.7), (6.8) conjuntamente con (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4), pueden conocerse todas las componentes de R (no nulas) con respecto a la base ortonormal dada. Pero cR^0 (ver (2.1)) tiene las mismas componentes que R ; es decir,

$$(6.9) \quad R_{u_1 u_2 u_3 u_4} = c R_{u_1 u_2 u_3 u_4}^o$$

para cuales quiera vectores u_j tomados en la base $\{u, u^*, v, v^*\}$. Entonces, (6.9) también es válida para vectores arbitrarios en $T_m M$. Ahora, utilizando la Proposición 2.1, resulta que H_u es el mismo valor para cualquier vector no nulo $u \in T_m M$.

Nota 6.2.— El Teorema 6.1 se puede aplicar para obtener nuevas caracterizaciones para que la curvatura seccional holomorfa de una variedad de Kähler indefinida sea constante. Estas son los axiomas de planos y los axiomas de esferas (indefinidas), que se pueden establecer como en [14], [15], [22] y [25], donde se dan para el caso definido positivo.

§7. Curvatura seccional totalmente real.—

Es conocida la equivalencia existente entre el hecho de que una variedad kähleriana tenga curvatura seccional holomorfa constante y, curvatura seccional totalmente real constante (ver [10]). En este epígrafe se extiende este resultado al caso de una variedad de Kähler indefinida. Es conveniente establecer primero el siguiente

Lema 7.1.— Sea M una variedad kähleriana indefinida conexa. Si M tiene curvatura seccional totalmente real constante α , entonces para cualquier base ortonormal $\{u, v\}$ de un plano totalmente real $u \wedge v$ de tipo $(+, -)$, en $T_m M$, $m \in M$, se cumple

$$(7.1) \quad R_{uvv^*u} = 0$$

$$(7.2) \quad R_{uu^*uv} + R_{vv^*uv} = 0$$

Demostración. Si $w = (v+v^*)/\sqrt{2}$, $u \wedge w$ es un plano totalmente real de tipo $(+, -)$; así, $R_{uwwu} = -\alpha$, pero desarrollando se obtiene

$$R_{uwwu} = -\alpha + R_{uvv^*u}$$

Con esto queda probado (7.1).

Sean $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ tales que $a^2 - b^2 = 1$. Si se toma $u_1 = au + bv$ y $v_1 = bu^* + av^*$, entonces el plano $u_1 \wedge v_1$ es totalmente real de tipo $(+, -)$. Haciendo uso de (7.1), resulta

$$(7.3) \quad R_{u_1 v_1 v_1^* u_1} = 0$$

que, desarrollado da lugar a

$$ab(R_{uu^*uv} + R_{vv^*uv}) = 0$$

lo cual prueba (7.2).

Teorema 7.2.- Sea M una variedad de Kähler indefinida conexa, con dimensión compleja $n \geq 3$. Entonces, M tiene curvatura seccional holomorfa constante c si y sólo si tiene curvatura seccional totalmente real constante $c/4$.

Demostración. Sea $m \in M$. Se va a probar que H_u es igual a c para cualquier vector no nulo $u \in T_m M$ si y sólo si K_{uv} es igual a $c/4$ para cualquier plano totalmente real no degenerado $u \wedge v$.

La condición necesaria es consecuencia inmediata de la Proposición 2.1. Recíprocamente, supóngase que $K_{uv} = \alpha$, donde $\{u, v\}$ es una base ortonormal de $\pi = u \wedge v$. Se consideran dos casos:

i) Si π es de tipo $(+, +)$ o $(-, -)$, se eligen $u_1 = (u+v)/\sqrt{2}$ y $v_1 = (u^*-v^*)/\sqrt{2}$, con lo que $u_1 \wedge v_1$ es también totalmente real del mismo tipo que π . Así,

$$(7.4) \quad \alpha = K_{u_1 v_1} = (1/4) \{H_u + H_v - 2K_{uv} - 2K_{uv^*}\}$$

Por lo tanto

$$(7.5) \quad H_u + H_v = 8\alpha.$$

ii) Si n es de tipo $(+,-)$ se eligen $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ tales que $a^2 - b^2 = 1$ y se definen ahora $u_2 = au + bv$, $v_2 = bu^* + av^*$, con lo que

$$\begin{aligned}
 (7.6) \quad \alpha &= -R_{u_2 v_2 v_2 u_2} = \\
 &= -a^2 b^2 (H_u + H_v) + 2a^2 b^2 K_{uv} + (a^4 + b^4 + 4a^2 b^2) K_{uv^*} \\
 &\quad - (2ab^3 + 2a^3 b) (R_{uu^* u^* v} + R_{uv^* v^* v})
 \end{aligned}$$

Pero, usando (7.2) en esta igualdad se obtiene de nuevo (7.5).

Por ser $n \geq 3$, dados dos vectores no nulos $u, v \in T_{\mathbb{M}}$, tales que $u \wedge v$ es no degenerado, es posible encontrar $w \in T_{\mathbb{M}}$, no nulo que sea perpendicular a $u \wedge v$, y tal que $u \wedge w$ y $v \wedge w$ sean planos totalmente reales no degenerados. Teniendo en cuenta (7.5), se concluye $H_u = H_w = H_v = 4\alpha$. Finalmente, si $u \in T_{\mathbb{M}}$ es no nulo, es posible encontrar $v \in T_{\mathbb{M}}$, también no nulo, en las anteriores condiciones, con lo cual $H_u = 4\alpha$. Así, se completa la demostración.

§8. Curvatura biseccional totalmente real.-

Sea M una variedad de Kähler indefinida. Si $u \wedge v$ es un plano totalmente real no degenerado en $T_{\mathbb{M}}$, se define su curvatura biseccional totalmente real B_{uv} mediante (1.7). Es conocido (ver (1.8)) que B_{uv} es suma de dos curvaturas seccionales correspondientes a planos totalmente reales no degenerados. Este hecho, junto con el Teorema 7.2, sugiere el siguiente teorema (extensión de un resultado de Houh, [18], en el caso definido).

Teorema 8.1.- Sea M una variedad de Kähler indefinida, conexa, con dimensión compleja $n \geq 3$. Entonces, M tiene curvatura seccional holomorfa constante c si y sólo si tiene curvatura biseccional totalmente real constante $c/2$.

Demostración. La condición necesaria es consecuencia inmediata de (1.8) y el Teorema 7.2.

Recíprocamente, supongamos que M tiene curvatura biseccional totalmente real constante β . Sea $\pi = u \wedge v$ un plano totalmente real no degenerado en $T_{\mathbb{H}}M$, $m \in M$, donde $\{u, v\}$ es una base ortonormal de π . Se consideran dos casos:

i) Si π es de tipo $(+, +)$ o $(-, -)$, se ponen $u_1 = (u+v)/\sqrt{2}$ y $v_1 = (u^*-v^*)/\sqrt{2}$, con lo cual el plano $u_1 \wedge v_1$ es del mismo tipo que π . Según la hipótesis, $\beta = R_{u_1 u_1^* v_1^* v_1}$ que, desarrollado, da lugar a

$$(8.1) \quad 2\beta = H_u + H_v - 4K_{uv^*}$$

Cambiando v por v^* en esta fórmula, se obtiene

$$(8.2) \quad 2\beta = H_u + H_v - 4K_{uv}$$

Ahora, (8.1) y (8.2) implican

$$(8.3) \quad K_{uv} = K_{uv^*} = \beta/2 \quad \text{y} \quad H_u + H_v = 4\beta.$$

ii) Si π es de tipo $(+, -)$ se eligen $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ tales que $a^2 - b^2 = 1$ y se definen $u_2 = au + bv$, $v_2 = bu^* + av^*$. Entonces, $u_2 \wedge v_2$ es totalmente real de tipo $(+, -)$. Según la hipótesis, $\beta = -R_{u_2 u_2^* v_2^* v_2}$ que, desarrollado, da lugar a

$$(8.4) \quad H_u + H_v = 4K_{uv^*} + \frac{a^4 + b^4 - 1}{a^2 b^2} \beta + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) (R_{uu^*vu^*} + R_{vu^*vv^*})$$

Por otro lado, si ahora se toman $u_3 = au - bv$, $v_3 = bu^* - av^*$ y se considera $u_3 \wedge v_3$, que está en la misma situación anterior, resulta

$$(8.5) \quad H_u + H_v = 4K_{uv^*} + \frac{a^4 + b^4 - 1}{a^2 b^2} \beta - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) (R_{uu^*vu^*} + R_{vu^*vv^*})$$

De (8.4) y (8.5) se llega a

$$(8.6) \quad H_u + H_v = 4K_{uv^*} + 2\beta$$

Cambiando v por v^* en esta fórmula, se obtiene

$$(8.7) \quad H_u + H_v = 4K_{uv} + 2\beta$$

y, comparando (8.6) con (8.7), de nuevo resulta (8.3).

Así, M tiene curvatura seccional totalmente real constante $\beta/2$. Por ser $n \geq 3$, el Teorema 7.2 implica que M tiene curvatura seccional holomorfa constante $4 \cdot (\beta/2) = 2\beta$. Con lo cual queda probado el teorema.

§9. Comportamiento especial de la función curvatura seccional holomorfa de una variedad kähleriana indefinida.-

Sea M una variedad de Riemann indefinida, $m \in M$ y $G_2^N(T_m M)$ la grassmanniana de planos no degenerados en $T_m M$. La curvatura seccional en el punto $m \in M$ puede mirarse como una función K sobre $G_2^N(T_m M)$ con valores en \mathbb{R} . Si se pone $G_2^N(M) = \bigcup_{m \in M} G_2^N(T_m M)$ entonces K es una función sobre el fibrado $G_2^N(M)$ (sobre M) que se llama la función curvatura seccional de M .

Si M es una variedad de Kähler indefinida y $G_2^H(M) = \bigcup_{m \in M} G_2^H(T_m M)$ es el fibrado de grassmannianas de planos holomorfos no degenerados, a la restricción de K a $G_2^H(M)$ se le llama la función curvatura seccional holomorfa de M .

En [32] y [33], Wolf ha demostrado que el signo de la función curvatura seccional de una variedad de Riemann indefinida no es siempre el mismo, salvo en el caso que esta sea constante. Por ello, no cabe, en este tipo de geometría, hablar de una variedad de Riemann indefinida curvada positiva o negativamente si no tiene curvatura seccional constante. Sin duda, esto constituye una diferencia importante con el caso definido.

En concreto, él demuestra que entre las variedades isotrópicas con métrica indefinida, solamente las de curvatura seccional constante tienen su función curvatura seccional acotada. Para variedades de dimensión 2 este hecho es obvio.

Kulkarni ha obtenido posteriormente, en [21], un resultado más preciso, prescindiendo de la hipótesis de homogeneidad. En efecto, él ha demostrado el siguiente

Teorema 9.1-(Kulkarni, [21]). Sea M una variedad de Riemann indefinida, conexa y con dimensión $n \geq 3$. Si la función curvatura seccional K de M está acotada bien superior o bien inferiormente, entonces M tiene curvatura seccional constante.

En vista de esto, es natural plantearse el siguiente problema: "Sea M una variedad de Kähler indefinida, conexa, con dimensión compleja $n \geq 2$ e índice $2s > 0$. Si la función curvatura seccional holomorfa H de M está acotada superior o inferiormente, ¿tendrá M curvatura seccional holomorfa constante?". A continuación se da un contraejemplo que prueba que este problema tiene respuesta negativa.

Contraejemplo 9.2.- Sea M la variedad de Grassmann indefinida $G_{2,2}^{1,0}(\mathbb{C})$ (ver Ejemplo 5.2). En este caso, los vectores del espacio tangente en el origen a M se puede representar por matrices complejas 2×2 , y la métrica dada en (5.6) se escribe ahora

$$(9.1) \quad g(A, B) = \text{Real}(-\bar{a}_{31}b_{31} - \bar{a}_{41}b_{41} + \bar{a}_{32}b_{32} + \bar{a}_{42}b_{42})$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}$$

La estructura compleja viene dada mediante multiplicación por $i = \sqrt{-1}$.

Con esta métrica y estructura compleja, M es una variedad de Kähler indefinida con dimensión compleja 4 e índice 4. A partir de (5.7), se obtiene la siguiente expresión para la curvatura seccional holomorfa del plano holomorfo generado por un vector $X \in m = T_0 M$, no nulo,

$$(9.2) \quad H_A = 4 \frac{\text{Traza } (G_2^1 \bar{t} A A)^2}{(\text{Traza } G_2^1 \bar{t} A A)^2}$$

Ahora se establecen las siguientes afirmaciones:

1) La función curvatura seccional holomorfa H de M no está acotada superiormente. En efecto, se considera la sucesión $\{A_n\}$ en m , donde $A_n = \text{diag}(\sqrt{n}, \sqrt{n+1})$. Entonces $g(A_n, A_n) = 1$ para todo n , y de (9.2) se obtiene $H_{A_n} = 4(n^2 + (n+1)^2)$.

2) La función curvatura seccional holomorfa H de M está acotada inferiormente. En concreto vamos a probar que $H_A \geq 4$, para todo $A \in m$. En efecto, si $A = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$ es un vector no nulo de m , entonces se consideran los siguientes vectores de \mathbb{C}^2 , $u = (a_{31}, a_{41})$, $v = (a_{32}, a_{42})$. Si en \mathbb{C}^2 se define $\langle u, v \rangle = a_{31} \bar{a}_{32} + a_{41} \bar{a}_{42}$, se puede poner

$$G_2^1 \bar{t} A A = \begin{pmatrix} -\langle u, u \rangle & -\langle v, u \rangle \\ \langle u, v \rangle & \langle v, v \rangle \end{pmatrix}$$

y con ello,

$$(9.3) \quad (\text{Traza } G_2^1 \bar{t} A A)^2 = \langle u, u \rangle^2 + \langle v, v \rangle^2 - 2\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

$$\text{Traza } (G_2^1 \bar{t} A A)^2 = \langle u, u \rangle^2 + \langle v, v \rangle^2 - 2\langle u, v \rangle \langle v, u \rangle.$$

Ahora, si se usa la desigualdad de Schwarz y (9.3) en (9.2), fácilmente se obtiene $H_A \geq 4$.

El siguiente resultado es, en virtud del Contraejemplo 9.2, el

mejor posible en esta dirección. Además, en él queda patente una clara diferencia con respecto al caso definido.

Teorema 9.3.- Sea M una variedad de Kähler indefinida, conexa, con dimensión compleja $n \geq 2$ e índice $2s > 0$. Si la función curvatura seccional holomorfa H de M está acotada superior e inferiormente, M tiene curvatura seccional holomorfa constante.

Demostración. Si H no es constante, por el lema de Schur, existe un punto $m \in M$ de tal forma que H no toma el mismo valor sobre todos los planos holomorfos no degenerados de $T_m M$. Sea Π un plano totalmente real de tipo $(+,-)$ en $T_m M$ y $\omega = \Pi + \Pi^*$. Si $\{u, v\}$ es una base ortonormal de Π y $x \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$, entonces el vector $xu + v$ es no nulo y

$$(9.4) H_{xu+v} = \frac{x^4 H_u + 4x^3 R_{uv^*u^*u} - 6x^2 K_{uv^*} - 2x^2 K_{uv} + 4x R_{vv^*u^*v} + H_v}{(x^2 - 1)^2}$$

Por hipótesis existen $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$(9.5) \delta_1 (x^2 - 1)^2 \leq x^4 H_u + 4x^3 R_{uv^*u^*u} - 6x^2 K_{uv^*} - 2x^2 K_{uv} + 4x R_{vv^*u^*v} + H_v \leq \delta_2 (x^2 - 1)^2$$

Además, por continuidad se tiene

$$(9.6) x^4 H_u + 4x^3 R_{uv^*u^*u} - 6x^2 K_{uv^*} - 2x^2 K_{uv} + 4x R_{vv^*u^*v} + H_v = 0$$

si $x = 1$ o $x = -1$ y esto implica

$$(9.7) H_u + H_v = 6K_{uv^*} + 2K_{uv}$$

$$(9.8) R_{uv^*u^*u} + R_{vv^*u^*v} = 0$$

Si se intercambia u con v^* en (9.7) y se combina esta fórmula con la nueva así obtenida resulta



$$(9.9) \quad H_u + H_v = 8K_{uv}$$

$$(9.10) \quad K_{uv} = K_{uv^*}$$

Ahora, si se utilizan (9.8), (9.9) y (9.10) en (9.5) se tiene

$$(9.11) \quad \delta_1(x^2-1)^2 \leq (x^4-1)H_u - 8(x^2-1)K_{uv} + 4x(x^2-1)R_{uv^*u^*u} \leq \delta_2(x^2-1)^2$$

que implica

$$(9.12) \quad \delta_1(x^2-1) \leq (x^2+1)H_u - 8K_{uv} + 4xR_{uv^*u^*u} \leq \delta_2(x^2-1) \quad \text{si } |x| > 1$$

$$(9.13) \quad \delta_2(x^2-1) \leq (x^2+1)H_u - 8K_{uv} + 4xR_{uv^*u^*u} \leq \delta_1(x^2-1) \quad \text{si } |x| < 1$$

Pero, tambien por continuidad, se tiene

$$(9.14) \quad (x^2+1)H_u - 8K_{uv} + 4xR_{uv^*u^*u} = 0 \quad \text{si } x = 1 \text{ o } x = -1,$$

de donde

$$(9.15) \quad H_u = H_v = 4K_{uv} = 4K_{uv^*}$$

$$(9.16) \quad R_{uv^*u^*u} = R_{vv^*u^*v} = R_{uvu^*u} = R_{v^*vuv} = 0.$$

Supongamos $n \geq 3$ y un plano totalmente real no degenerado arbitrario $\Pi = u\wedge v$, donde $\{u, v\}$ representa una base ortonormal de Π . Se va a probar que $H_u = H_v$. En efecto, de acuerdo con (9.15) es suficiente establecer la igualdad anterior en los casos que Π sea de tipo $(+, +)$ o $(-, -)$. Como $n \geq 3$ es posible encontrar un vector w perpendicular a Π y tal que los planos $u\wedge w$ y $v\wedge w$ sean totalmente reales de tipo $(+, -)$. Así, puede aplicarse (9.15) a estos dos plano y obtener $H_u = H_w = H_v$. Si llamamos c al valor $H_u = H_v$, entonces $H_x = c$ para todo vector no nulo $x \in T_{\Pi}M$. Para ver esto, dado el vector x se eligen u y v tales que $\{x, x^*, u, u^*, v, v^*\}$ sea un sistema ortonormal de vectores. Entonces, los planos $x\wedge u$ y $u\wedge v$ son totalmente reales no degenerados.

rados; así, $H_X = H_U = H_V = c$.

Si $n = 2$, se toma una base ortonormal $\{u, u^*, v, v^*\}$ de $T_m M$; entonces, $u \wedge v$ es totalmente real de tipo $(+, -)$ y se le puede aplicar las fórmulas (9.15) y (9.16). Razonando como al final del Teorema 7.2, se obtienen las fórmulas (6.6), (6.7) y (6.8) y en consecuencia (6.9). Esto prueba que el tensor curvatura R de M , en el punto m , es proporcional mediante una constante a R° (ver (2.1)). Ahora, la Proposición 2.1 concluye la demostración del teorema.

§10. Comportamiento de las funciones curvatura seccional totalmente real y biseccional totalmente real de una variedad de Kähler indefinida.-

Sea M una variedad de Kähler indefinida y $G_2^T(M)$ el fibrado de Grassmann sobre M de planos totalmente reales no degenerados. La restricción de K a $G_2^T(M)$ es llamada la función curvatura seccional totalmente real de M . Análogamente, la curvatura biseccional totalmente real se puede mirar como una función sobre $G_2^T(M)$ (ver (1.7)) que representaremos por B .

En virtud de los Teoremas 7.2 y 8.1 cuando una de las funciones curvatura seccional holomorfa, curvatura seccional totalmente real y curvatura biseccional totalmente real es constante, lo son las otras dos, sin embargo, sus comportamientos son muy diferentes. En efecto, el siguiente teorema demuestra que sólo las variedades kählerianas indefinidas con curvatura seccional totalmente real acotada superior o inferiormente tienen curvatura seccional holomorfa constante. A continuación se da un teorema similar para la función curvatura biseccional totalmente real. Estos resultados ponen de manifiesto que dichas funciones se comportan, formalmente, como la fun-

ción curvatura seccional de una variedad de Riemann indefinida.
(Comparese el siguiente resultado con el Teorema de Kulkarni).

Teorema 10.1.- Sea M una variedad de Kähler indefinida, conexa, con dimensión compleja $n \geq 3$ e índice $2s > 0$. Si la función curvatura seccional totalmente real de M está acotada superior o inferiormente, entonces M tiene curvatura seccional holomorfa constante.

Demostración. Se hará una prueba similar a la dada para el Teorema 9.3. En efecto, si H no es constante, por el Lema de Schur, existe un punto $m \in M$ tal que H no toma el mismo valor sobre todos los planos holomorfos no degenerados. Por el Teorema 7.2, no todos los planos totalmente reales en $T_m M$ tienen igual curvatura seccional.

Supongamos, por ejemplo, que $K_{uv} \leq \delta$, $\delta \in \mathbb{R}$, para todo plano totalmente real u, v (el argumento es similar si se da la otra acotación). Sean $u, v, w \in T_m M$ tales que

$$(10.1) \quad \begin{aligned} g(u, u) &= g(v, v) = -g(w, w) = 1 \\ g(u, v) &= g(u, w) = g(u, v^*) = g(u, w^*) = g(v, w^*) = 0 \end{aligned}$$

Si se toma $x \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$; entonces el plano $(xu+w) \wedge v$ es totalmente real no degenerado, y por lo tanto

$$(10.2) \quad K_{xu+w, v} = \frac{R_{xu+w, v, v, xu+w}}{x^2 - 1} \leq \delta$$

Desarrollando en (10.2) se obtiene

$$(10.3) \quad x^2 K_{uv} + 2x R_{uvvw} - K_{vw} \leq \delta(x^2 - 1) \quad \text{si } |x| > 1$$

$$(10.4) \quad x^2 K_{uv} + 2x R_{uvvw} - K_{vw} \geq \delta(x^2 - 1) \quad \text{si } |x| < 1$$

y por continuidad

$$(10.5) \quad x^2 K_{uv} + 2xR_{uvvu} - K_{vw} = 0 \quad \text{si } x = 1 \text{ o } x = -1$$

que implica

$$(10.6) \quad K_{uv} = K_{vw} \quad \text{y} \quad R_{uvvw} = 0$$

De igual forma, ocurre $K_{uw} = K_{vw}$ que, junto a (10.6), implica $K_{uv} = K_{uw} = K_{vw}$. En este punto, la demostración se concluye de modo análogo que en el Teorema 9.3. Así, se llega a que K es constante sobre $G_2^T(T_M)$. Esta contradicción finaliza la prueba.

Teorema 10.2.- Sea M una variedad de Kähler indefinida, conexa, con dimensión compleja $n \geq 3$ e índice $2s > 0$. Si la función B está acotada superior o inferiormente, entonces M tiene curvatura seccional holomorfa constante.

La demostración se omite pues es similar a la del Teorema 10.1.

§11. Un criterio, específico de variedades de Kähler indefinidas, para que la curvatura seccional holomorfa sea constante.-

Sea M una variedad kähleriana indefinida con curvatura seccional holomorfa constante c . Entonces, según la Proposición 2.1 su tensor de curvatura R satisface $R = cR^0$, donde R^0 está dado por (2.1), y esto implica

$$(11.1) \quad R_{uu^*u^*u} = 0$$

para todo vector nulo $u \in T_M$ y todo punto $m \in M$.

En este epígrafe se prueba el recíproco de este hecho. Esto pone de manifiesto un contenido geométrico superior al que cabría esperar de los planos holomorfos nulos (para los cuales no está definida la curvatura seccional). Hay que hacer notar que el miembro izquierdo de (11.1) es el numerador del cociente que define H_u cuando este tiene sentido.

El siguiente teorema se puede considerar como la versión compleja del criterio obtenido por Dajczer y Nomizu, en [12], para que la curvatura seccional de una variedad de Riemann indefinida sea constante.

Teorema 11.1.- Sea M una variedad de Kähler indefinida, conexa, con dimensión compleja $n \geq 2$ e índice $2s > 0$. Si se verifica (11.1) entonces M tiene curvatura seccional holomorfa constante.

Demostración. Teniendo en cuenta el Lema de Schur, es suficiente probar que H es constante en $m \in M$. Pero esto es consecuencia del siguiente

Lema 11.2.- Bajo las mismas condiciones del Teorema 11.1, si $\{u, v\}$ es una base ortonormal de un plano $\pi = u \wedge v$ totalmente real de tipo $(+, -)$ en $T_m M$, entonces

$$(11.2) \quad H_u = H_v.$$

Demostración del Lema 11.2. Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera el vector $au + v$, que es no nulo si y sólo si $a = 1$ o $a = -1$. Entonces, de (11.1) se tiene

$$(11.3) \quad R_{au+v, au^*+v^*, au^*+v^*, au+v} = 0 \quad \text{si } a = 1 \text{ o } a = -1,$$

y esto implica

$$(11.4) \quad H_u + H_v = 8K_{uv} = 8K_{uv^*} \quad \text{y} \quad R_{uv^*u^*u} + R_{vv^*u^*v} = 0.$$

Ahora se eligen dos sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ de números reales tales que $a_n > 1$, $b_n < -1$, para todo n , y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -1$. Debido a la continuidad de la aplicación

$$x \longmapsto R_{xu+v, xu^*+v^*, xu^*+v^*, xu+v}$$

se tiene

$$(11.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_{a_n u+v, a_n u^*+v^*, a_n u^*+v^*, a_n u+v} = 0$$

$$(11.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_{b_n u+v, b_n u^*+v^*, b_n u^*+v^*, b_n u+v} = 0$$

Se considera además una sucesión de números reales positivos $\{\delta_n\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n / (a_n^2 - 1) = 0$. Entonces, dado $\delta_m > 0$, por (11.5),

existe un número natural $n_0(m)$ tal que

$$(11.7) \quad |R_{a_n u+v, a_n u^*+v^*, a_n u^*+v^*, a_n u+v}| < \delta_m$$

con tal que $n > n_0(m)$, y esto implica

$$(11.8) \quad -\delta_m < (a_n^2 - 1)(a_n^2 + 1)H_u - 8(a_n^2 - 1)K_{uv^*} + 4a_n(a_n^2 - 1)R_{uv^*u^*u} < \delta_m$$

Como $n \rightarrow \infty$ implica $n \rightarrow \infty$, resulta que $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_m / (a_{n(m)}^2 - 1) = 0$. Por esto

y al ser $a_n^2 - 1 > 0$, de (11.8) se obtiene

$$(11.9) \quad 2H_u - 8K_{uv} + 4R_{uv^*u^*u} = 0$$

De modo análogo, de (11.6) resulta

$$(11.10) \quad 2H_u - 8K_{uv} - 4R_{uv^*u^*u} = 0$$

Finalmente, de (11.4), (11.9) y (11.10)

$$H_u = H_v = 4K_{uv} = 4K_{uv^*}$$

$$R_{uv^*u^*u} = R_{vv^*u^*v} = R_{uvu^*u} = R_{v^*vuv} = 0$$

lo cual prueba el Lema 11.2.

El Teorema 11.1 se sigue del lema, utilizando un argumento similar al dado en la demostración del Teorema 6.1.

CAPITULO III

GEOMETRIA DE LAS VARIEDADES DE GRASSMANN COMPLEJAS INDEFINIDAS.

§12. Introducción.-

En el Capítulo II hemos estudiado las variedades de Kähler indefinidas, desde el punto de vista de su curvatura (seccional holomorfa, seccional totalmente real y biseccional totalmente real). En el Contraejemplo 9.2 se estudia la curvatura seccional holomorfa de la variedad de Grassmann $G_{2,2}^{1,0}(\mathbb{C})$. Ahora, se va a hacer un estudio general para $G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C})$ (ver Ejemplo 5.2). Concretamente, se clasifican las variedades de Grassmann complejas indefinidas (siempre se supondrá $s_1(n_2 - s_2) + s_2(n_1 - s_1) > 0$) en cuatro familias, de acuerdo con el comportamiento de su (función) curvatura seccional holomorfa.

Este estudio tiene su precedente, en el caso definido en [34], donde Wong calcula el máximo y el mínimo de la función curvatura seccional holomorfa, H , de una variedad de Grassmann compleja; tales valores siempre existen en el caso definido, pero para una variedad de Grassmann compleja indefinida esto no ocurre, como se pone de manifiesto en el citado contraejemplo (se pierde la compacidad del dominio de definición de H).

También, se caracterizan en muchos casos las secciones holomorfas de máxima o mínima curvatura (cuando estas existan).

En orden a una mayor brevedad, en lo sucesivo, a los enteros $s_1, s_2, n_1 - s_1$ y $n_2 - s_2$, correspondientes a $G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C})$, se les llamará números característicos de dicha grassmanniana. Además, se dirá que

s_1 (respec. s_2) y $n_1 - s_1$ (respec. $n_2 - s_2$) son números complementarios.

Se definen las cuatro siguientes familias de variedades de Grassmann complejas indefinidas:

\mathcal{G}_1 formada por todas las que tienen H acotada.

\mathcal{G}_2 formada por las que tienen H acotada inferiormente pero no superiormente.

\mathcal{G}_3 aquellas que tienen H acotada superiormente pero no inferiormente.

\mathcal{G}_4 las que tienen H no acotada por ambos lados.

§13. Resultados previos.-

En primer lugar, de (5.7), se tiene que la curvatura seccional holomorfa correspondiente al plano holomorfo engendrado por $X_{\epsilon m}$ (ver (5.4)) no nulo, es

$$(13.1) \quad H_X = 4 \frac{\text{Traza } (G_{n_1}^{s_1} \bar{t}_X G_{n_2}^{s_2} X)^2}{(\text{Traza } G_{n_1}^{s_1} \bar{t}_X G_{n_2}^{s_2} X)^2}$$

(Comparese esta fórmula con (7) de [34]).

A continuación se establecen dos lemas.

Lema 13.1.- La condición necesaria y suficiente para que la función H , correspondiente a $G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C})$, no esté acotada inferiormente es que todos sus números característicos sean no nulos.

Demostración. Supongamos que todos los números característicos sean no nulos. Entonces, se elige una sucesión $\{X_n\}$ en m (ver (5.4)), definida mediante



$$(13.2) \quad X_n = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{n} & 0, \dots, 0 & & & & \\ 0 & 0, \dots, 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0, \dots, 0 & & & & \\ \hline 0 & 0, \dots, 0 & 0, \dots, 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0, \dots, 0 & 0, \dots, 0 & 0 & & \\ \sqrt{n} & 0, \dots, 0 & 0, \dots, 0 & 0 & & 1 \end{array} \right)$$

donde las submatrices de X_n tienen órdenes $s_2 \times s_1$, $s_2 \times (n_1 - s_1)$, $(n_2 - s_2) \times s_1$ y $(n_2 - s_2) \times (n_1 - s_1)$, respectivamente. Un cálculo directo a partir de (13.1) prueba que $H_{X_n} = 4(-2n + 1)$ y, en consecuencia, H no está acotada inferiormente.

Recíprocamente, si $s_1 = 0$ o $n_1 - s_1 = 0$, entonces $G_{n_1}^{s_1} = I_{n_1}$ o $G_{n_1}^{s_1} = -I_{n_1}$; por lo tanto, si se pone $A = {}^t \bar{X} G_{n_2}^{s_2} X$, resulta que esta matriz es hermitica de orden $n_1 \times n_1$, y por ello ocurre

$$(13.3) \quad (\text{Traza } A)^2 \leq n_1 \text{ Traza } A^2$$

En efecto,

$$(\text{Traza } A)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n_1} A_{jj} \right)^2 \leq n_1 \sum_{j=1}^{n_1} A_{jj}^2 \leq n_1 \sum_{j=1}^{n_1} |A_{jj}|^2 = n_1 \text{ Traza } A^2$$

Entonces, utilizando (13.3) en (13.1), se obtiene $H \geq 4/n_1$. De forma similar resulta $H \geq 4/n_2$ cuando $s_2 = 0$ o $n_2 - s_2 = 0$. Así, queda probado el lema.

Lema 13.2.- Si algún número característico de $G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C})$ es mayor o igual a 1, entonces H no está acotada superiormente o es constante.

Demostración. Debido a (5.9) puede suponerse $n_2 - s_2 > 1$ o $n_1 - s_1 > 1$, por ejemplo sea $n_2 - s_2 > 1$. Ahora, se consideran los siguientes casos:

a) Si $s_1 > 0$, $n_1 - s_1 > 0$ y $s_2 > 0$, entonces se toma la sucesión $\{X_n\}$ en m , donde

$$(13.4) \quad X_n = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \sqrt{n} & 0, \dots, 0 & 0, \dots, 0 & 0 \\ 0 & 0, \dots, 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0, \dots, 0 & 0 \\ 0 & 0, \dots, 0 & 0, \dots, 0 & \sqrt{n+1} \end{matrix} \end{array} \right)$$

y las submatrices tienen órdenes como en el Lema 13.1.

b) Si $s_1 > 0$, $n_1 - s_1 > 0$ y $s_2 = 0$, entonces se elige en m la sucesión $\{Y_n\}$ dada por

$$(13.5) \quad Y_n = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \sqrt{n} & 0, \dots, 0 \\ 0 & 0, \dots, 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0, \dots, 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0, \dots, 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0, \dots, 0 & 0 \\ 0, \dots, 0 & \sqrt{n+1} \end{matrix} \end{array} \right)$$

y las submatrices de Y_n tienen órdenes $n_2 \times s_1$ y $n_2 \times (n_1 - s_1)$.

c) Si $s_1 = 0$ y $n_1 = 1$, se toma la sucesión $\{Z_n\}$ en m , siendo

$$(13.6) \quad Z_n = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \sqrt{n} & 0, \dots, 0 \\ 0 & 0, \dots, 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0, \dots, 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0, \dots, 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0, \dots, 0 & 0 \\ 0, \dots, 0 & \sqrt{n+1} \end{matrix} \end{array} \right)$$

y las submatrices de Z_n tienen órdenes $s_2 \times n_1$ y $(n_2 - s_2) \times n_1$.

d) Si $s_1 > 1$ y $n_1 - s_1 = 0$, se elige una sucesión $\{W_n\}$ en m como en (13.6); pero en este caso, las submatrices de W_n tienen órdenes $s_2 \times s_1$ y $(n_2 - s_2) \times s_1$.

En a), b), c) y d) resulta $H_{X_n} = H_{Y_n} = H_{Z_n} = H_{W_n} = 4(n^2 + (n+1)^2)$, directamente de (13.1).

e) Si $s_1 = 0$ y $n_1 = 1$, se obtiene $G_{1,n_2}^{0,s_2}(\mathbb{C}) = P_{s_2}^{n_2}(\mathbb{C})$, que tiene curvatura seccional holomorfa constante 4 (ver Ejemplo 3.2).

f) Por último, si $s_1 = 1$ y $n_1 - s_1 = 0$, entonces $G_{1,n_2}^{1,s_2}(\mathbb{C}) = G_{1,n_2}^{0,n_2-s_2}(\mathbb{C}) = P_{n_2-s_2}^{n_2}(\mathbb{C})$, en virtud de (5.9), y ocurre como en el caso e). Así, acaba la demostración.

§14. El Teorema de clasificación.-

En este epígrafe se establece el siguiente

Teorema 14.1.- i) La familia \mathcal{G}_1 consiste exclusivamente en espacios proyectivos complejos indefinidos. ii) En \mathcal{G}_2 están las variedades $G_{n_1,n_2}^{s_1,s_2}(\mathbb{C})$, con algún número característico nulo y su complementario mayor que 1, y sólo ellas. iii) \mathcal{G}_3 consiste tan sólo en $G_{2,2}^{1,1}(\mathbb{C})$. iv) En \mathcal{G}_4 están las variedades $G_{n_1,n_2}^{s_1,s_2}(\mathbb{C})$ con todos sus números característicos no nulos y alguno mayor que 1, y sólo ellas.

Demostración. La afirmación i) es inmediata a partir del Teorema 9.3.

ii) Si $G_{n_1,n_2}^{s_1,s_2}(\mathbb{C})$ pertenece a \mathcal{G}_2 , por el Lema 13.1, alguno de sus números característicos es nulo. Si su complementario fuera igual a 1, entonces $G_{n_1,n_2}^{s_1,s_2}(\mathbb{C})$ es un espacio proyectivo complejo indefinido, lo cual es una contradicción. Recíprocamente, supóngase que algún número característico es cero y su complementario mayor que 1, entonces, según el Lema 13.2, H no está acotada superiormente. Además, si H no estuviera acotada inferiormente, por el Lema 13.1, todos los números característicos son no nulos, lo cual es imposible.

iii) Si $G_{n_1,n_2}^{s_1,s_2}(\mathbb{C})$ pertenece a \mathcal{G}_3 , como H está acotada superiormente, por el Lema 13.2, todos sus números característicos son menores o iguales a 1. Por otro lado, al no estar H acotada inferiormente, del Lema 13.1, todos sus números característicos son no nulos; lo

que, unido a lo anterior, implica que $s_1 = s_2 = n_1 - s_1 = n_2 - s_2 = 1$.

Sólo resta probar que $G_{2,2}^{1,1}(\mathbb{C})$ pertenece realmente a \mathcal{G}_3 . De acuerdo con el Lema 13.1, la curvatura seccional holomorfa de $G_{2,2}^{1,1}(\mathbb{C})$ no está acotada inferiormente. Además, si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es un vector no nulo de m , a partir de (13.1) resulta

$$(13.7) \quad H_X = \frac{(|a|^2 - |c|^2)^2 + (|d|^2 - |b|^2)^2 - 2|a|^2|b|^2 - 2|c|^2|d|^2 + 4\text{Real } \bar{a}bc\bar{d}}{(|a|^2 - |c|^2 + |d|^2 - |b|^2)^2}$$

Es claro que $(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})(ad - bc) \geq 0$, lo cual junto con (13.7) implica $H_X \leq 4$.

iv) Si $G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C})$ pertenece a \mathcal{G}_4 , entonces, por el Lema 13.1, todos sus números característicos son no nulos. Si todos fueran menores o iguales a 1 se obtendría $G_{2,2}^{1,1}(\mathbb{C})$ o un espacio proyectivo complejo indefinido. El recíproco es inmediato de los Lemas 13.1 y 13.2.

§15. Secciones holomorfas de máxima y mínima curvatura.-

El siguiente teorema da una caracterización completa para las secciones holomorfas no degeneradas de máxima curvatura en \mathcal{G}_3 .

Teorema 15.1.- Una sección holomorfa no degenerada en $G_{2,2}^{1,1}(\mathbb{C})$ alcanza su máxima curvatura 4 si y sólo si es tangente a una subvariedad compleja totalmente geodésica que es isométrica de manera holomorfa con $P_1^2(\mathbb{C})$.

Demostración. De (13.7) se ve que una sección holomorfa no degenerada \mathbb{H} , engendrada por $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tiene curvatura máxima 4 si y sólo si $a\bar{d} = b\bar{c}$. Pero una tal matriz X , necesariamente ha de pertenecer a alguno de los subespacios siguientes

$$a_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{C} \right\} \quad b_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ a & b \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

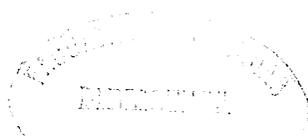
$$c_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} a & \lambda a \\ b & \lambda b \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{C} \right\} \quad d_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda a & a \\ \lambda b & b \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \neq 1$. Todos estos subespacios son sistemas triples de Lie en el sentido de [20], Cap. XI, p. 237; debido a ello, existe una subvariedad compleja totalmente geodésica y completa, M , de $G_{2,2}^{1,1}(\mathbb{C})$ tal que el espacio tangente en el origen de M , $T_0 M$, coincide con el subespacio correspondiente de los dados arriba. Así, $\dim_{\mathbb{R}} M = 4$ e índice $m = 2$. mediante un cálculo directo se prueba que $a_\lambda + [a_\lambda, a_\lambda], \dots, d_\lambda + [d_\lambda, d_\lambda]$ son subálgebras de $u^2(4)$ (ver (3.8)) isomorfas a $u^1(3)$. Entonces, $M = U^1(3)/U^1(2) \times U(1)$ es simplemente conexo, y se concluye la demostración sin más que aplicar el Teorema 3.4.

De (13.3) se observa que la cota inferior para $G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C})$ se alcanza si y sólo si $A = \lambda I_{n_1}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir, si y sólo si es posible elegir n_1 vectores del mismo módulo e independientes en el espacio vectorial $\mathbb{C}_{s_2}^{n_2}$. Pero esto equivale a que sea $n_1 \leq n_2 - s_2$ o $n_1 \leq s_2$. Ahora, para una cierta subfamilia de \mathcal{G}_2 , se van a caracterizar las secciones holomorfas no degeneradas en las que H alcanza dicha cota inferior. En efecto,

Teorema 15.2.- En $G_{n,2}^{0,1}(\mathbb{C})$ se tiene $H \geq 4$ y una sección holomorfa no degenerada tiene curvatura seccional mínima 4 si y sólo si es tangente a una subvariedad compleja totalmente geodésica, que es isométrica de manera holomorfa con $P^n(\mathbb{C})$, $P_n^n(\mathbb{C})$ o $P_1^2(\mathbb{C})$.

Demostración. La curvatura de una sección holomorfa no degenerada



engendrada por $X = \begin{pmatrix} a_1, a_2, \dots, a_n \\ b_1, b_2, \dots, b_n \end{pmatrix}$, a partir de (13.1), es

$$H_X = \frac{4 \sum_{j,k=1}^n | -\bar{a}_j a_k + \bar{b}_j b_k |^2}{\left(-\sum_{j=1}^n |a_j|^2 + \sum_{j=1}^n |b_j|^2 \right)^2}$$

Entonces, $H_X \geq 4$ y $H_X = 4$ si y sólo si $a_j b_k - a_k b_j = 0$, $1 \leq j, k \leq n$. Pero esto solo ocurre cuando X pertenece a uno de los siguientes subespacios

$$p_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} a_1, a_2, \dots, a_n \\ \lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n \end{pmatrix} / a_j \in \mathbb{C} \right\}$$

$$q_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda b_1, \lambda b_2, \dots, \lambda b_n \\ b_1, b_2, \dots, b_n \end{pmatrix} / b_j \in \mathbb{C} \right\}$$

$$t_\lambda^i = \left\{ \begin{pmatrix} \tau_1 \lambda a, \dots, \overset{(i)}{a}, \dots, \tau_n \lambda a \\ \tau_1 \lambda b, \dots, b, \dots, \tau_n \lambda b \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

donde $\tau_k = 0, 1$, $1 \leq i, k \leq n$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \neq 1$. Así, la demostración se completa de forma similar al Teorema 15.1, teniendo en cuenta que, en este caso, la subvariedad compleja totalmente geodésica tiene índice 0 (definida positiva), $2n$ (definida negativa) o 2.

CAPITULO IV

TOPOLOGIA DE VARIEDADES DE KÄHLER INDEFINIDAS.

§16. Introducción.-

Sea G un subgrupo del grupo lineal general $Gl(n, K)$, donde $K = \mathbb{R}$, \mathbb{C} o \mathbb{H} . Si G es semisimple (ver [17], Cap. II, §6) y H es un subgrupo cerrado suyo, la proyección de la forma opuesta a la de Killing, $-B$, correspondiente al álgebra de Lie \mathfrak{g} de G , sobre G/H es una métrica de Riemann, que es indefinida si G no es compacto, [20]. En estas condiciones, se dirá que G/H es un espacio homogéneo indefinido. Considérese el siguiente

Ejemplo 16.1.- Como en (3.1), sea b_n^s la forma hermitica sobre K^n definida por

$$(16.1) \quad b_n^s(z, w) = - \sum_{j=1}^s \bar{z}_j w_j + \sum_{j=s+1}^n \bar{z}_j w_j$$

donde se supone que, en el caso $K = \mathbb{R}$, la conjugación $a \rightarrow \bar{a}$ es la aplicación identidad en \mathbb{R} .

Sean (n_1, n_2, \dots, n_k) y (s_1, s_2, \dots, s_k) listas de números enteros que cumplen $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, $0 \leq s_j \leq n_j$, $1 \leq j \leq k$ y $s_1 + s_2 + \dots + s_k = s$. Por una bandera en el espacio vectorial K_S^n (K_S^n representa K^n junto con b_n^s) se entenderá una colección de subespacios $W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_k$ en K_S^n de tal forma que $\dim_K W_i = \sum_{j=1}^i n_j$ e índice $W_i = d \cdot \sum_{j=1}^i s_j$, siendo

$d = \dim_{\mathbb{R}} K$. Se representará por $\mathbb{B}_{n_1, n_2, \dots, n_k}^{s_1, s_2, \dots, s_k}(K)$ el conjunto de todas

las banderas correspondientes a las listas $(n_1, n_2, \dots, n_k), (s_1, s_2, \dots, s_k)$.

Sea $U^S(n, K)$ el grupo de Lie de todos los automorfismos de K^n que conservan la forma hermítica (16.1). Formalmente, $U^S(n, K)$ es dado por (3.4); no obstante, $U^S(n, \mathbb{C}) = U^S(n)$ es el grupo unitario indefinido; $U^S(n, \mathbb{R}) = O^S(n)$, el grupo ortogonal indefinido y $U^S(n, \mathbb{H}) = Sp^S(n)$ es el grupo simpléctico indefinido. (Ver [33], p. 377).

La variedad de banderas indefinida (definida si $s = 0$) $B_{n_1, \dots, n_k}^{s_1, \dots, s_k}(K)$ se representa como un espacio homogéneo. En efecto,

$$(16.2) \quad B_{n_1, \dots, n_k}^{s_1, \dots, s_k}(K) = \frac{U^S(n, K)}{U^{s_1}(n_1, K) \times \dots \times U^{s_k}(n_k, K)}$$

que es un espacio homogéneo indefinido en el sentido anteriormente dicho. Además, si $K = \mathbb{C}$ y $k = 2$, $B_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C})$ resulta ser la variedad

de Grassmann compleja indefinida $G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C})$, y si $k = 3$, entonces

$B_{n_1, n_2, n_3}^{s_1, s_2, s_3}(\mathbb{C})$ es el espacio homogéneo estudiado en el Ejemplo 5.4.

§17. El Teorema de la equivalencia homotópica.-

El siguiente resultado describe totalmente la topología de espacios homogéneos indefinidos. En el caso particular en que G/H sea simétrico, Berger, en [5], Corolario p. 166, demostró un resultado similar al teorema siguiente. No obstante, la técnica que aquí se utiliza para la demostración es muy diferente a la de dicho autor.

Se define $\mu : Gl(n, K) \longrightarrow Gl(n, K)$ por $\mu(A) = {}^t\bar{A}$ para todo $A \in Gl(n, K)$, donde tA representa la matriz traspuesta de A y \bar{A} la obtenida de A conjugando todos sus elementos.

Teorema 17.1.- Sea $M = G/H$ un espacio homogéneo indefinido, donde G es un subgrupo de $Gl(n, K)$ semisimple y pseudoalgebraico (ver [17], p.450 o [11] p. 201) que es invariante por μ y H en las mismas hipótesis que G . Entonces, existe un espacio homogéneo $M' = G'/H'$, con G' compacto, que es una subvariedad totalmente geodésica embebida en M . Además, M y M' tienen el mismo tipo de homotopía.

Demostración. Se considera $G' = G \cap U(n, K)$, que es un subgrupo compacto de $Gl(n, K)$. Como G es un subgrupo de $Gl(n, K)$ pseudoalgebraico e invariante por μ , según [17], Cap. IX, Lema 2.3, existe un entero positivo q tal que G es homeomorfo al producto topológico de G' y K^q ; en consecuencia, la aplicación de inclusión $j : G' \rightarrow G$ es una equivalencia homotópica.

Sean ahora $H' = G' \cap H$ y $\tilde{j} : M' \rightarrow M$ el embebimiento inducido por j . Como G' es compacto, la métrica inducida en M' mediante \tilde{j} es definida positiva. Tanto M como M' son espacios homogéneos naturalmente reductivos, en el sentido de [20], Cap. X, p. 202, en efecto, si al álgebra de Lie \mathfrak{g} de G se le dota de la forma opuesta a la de Killing, $-B$, que es no degenerada por ser G semisimple, resulta ser esta invariante por $\text{ad}(G)$ y su restricción al álgebra de Lie \mathfrak{h} de H es no degenerada, pues también se supone H semisimple. Así, utilizando la conclusión (2) del Teorema 3.5 en [20], Cap. X, se obtiene que el espacio homogéneo es naturalmente reductivo con respecto a la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, siendo

$$\mathfrak{m} = \{ X \in \mathfrak{g} / B(X, Y) = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{h} \},$$

y la métrica, invariante por G , definida por $-B$. Análogamente se razona para M' .

Por otro lado, M' es totalmente geodésica en M . Para ello, sea $\alpha(t) = \exp tX$ la geodésica en M' pasando por el origen o de M' en la dirección de $X \in m'$ (m' definido anteriormente m). Como $m' \subset m$, resulta que X también es un vector de m , y según [20], Cap. X, Corolario 2.5 (2), $\alpha(t)$ es la geodésica sobre M pasando por $o \in M$ en la dirección de $X \in m$.

Finalmente, se observa que G es un fibrado principal sobre M con grupo estructural H , análogamente G' sobre M' con grupo H' . Por lo tanto, se pueden considerar las correspondientes sucesiones de homotopía (ver [28], p. 377), que, teniendo en cuenta

$$\pi_\ell(G, H) \cong \pi_\ell(M) \quad \pi_\ell(G', H') \cong \pi_\ell(M')$$

y que la sucesión de homotopía de una fibración de Serre (fibración débil, en el sentido de Spanier, [28], p. 375) es funtorial, da lugar a

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_\ell(H') & \longrightarrow & \pi_\ell(G') & \longrightarrow & \pi_\ell(M') & \longrightarrow & \pi_{\ell-1}(H') & \longrightarrow & \pi_{\ell-1}(G') & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow j_* & & \downarrow j_* & & \downarrow \tilde{j}_* & & \downarrow j_* & & \downarrow j_* & & \\ \dots & \longrightarrow & \pi_\ell(H) & \longrightarrow & \pi_\ell(G) & \longrightarrow & \pi_\ell(M) & \longrightarrow & \pi_{\ell-1}(H) & \longrightarrow & \pi_{\ell-1}(G) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Ahora bien, j_* es un isomorfismo, lo cual, por la exactitud de las dos sucesiones, implica que \tilde{j}_* también lo es. Como M y M' son CW-complejos, por un resultado clásico de Whitehead (ver [31], Teorema 1) se concluye que $\tilde{j} : M' \longrightarrow M$ es una equivalencia homotópica.

Corolario 17.2.- Sea la variedad de banderas $M = \mathbb{P}_{n_1, \dots, n_k}^{s_1, \dots, s_k}(K)$. Entonces $M' = \mathbb{P}_{s_1, \dots, s_k}(K) \times \mathbb{P}_{n_1-s_1, \dots, n_k-s_k}(K)$ es una subvariedad totalmente geodésica embebida en M , definida positiva y con su mismo tipo de homotopía.



Nota 17.3. - Si $M = G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C})$, entonces $M' = G_{s_1, s_2}(\mathbb{C}) \times G_{n_1-s_1, n_2-s_2}(\mathbb{C})$ es una subvariedad totalmente geodésica embebida en $G_{n_1, n_2}^{s_1, s_2}(\mathbb{C})$, definida positiva y con su mismo tipo de homotopía. La Proposición 4.1 queda como un caso particular de este hecho. Además, el Teorema 17.1 se aplica a muchos mas espacios que los comprendidos en el Ejemplo 16.1. A título de ejemplo, considerese la hipersuperficie $Q_S^n(\mathbb{C})$ de $P_S^{n+1}(\mathbb{C})$ (ver Ejemplo 5.3, (1)). Entonces, $Q^{n-s}(\mathbb{C})$ es una subvariedad totalmente geodésica y compleja embebida en $Q_S^n(\mathbb{C})$. Además, tiene su mismo tipo de homotopía. Finalmente, la hipersuperficie $Q_S^*(\mathbb{C})$ de $P_{s+1}^{2s+1}(\mathbb{C})$ (ver Ejemplo 5.3, (2)) contiene a $P^s(\mathbb{C})$ como una subvariedad compleja totalmente geodésica. Como antes, $Q_S^*(\mathbb{C})$ y $P^s(\mathbb{C})$ tienen el mismo tipo de homotopía (ver tambien [5], Corolario p. 166).

§18. Números de Betti de variedades de banderas complejas indefinidas.

En este epígrafe se van a calcular explícitamente los números de Betti de una variedad de banderas $B_{n_1, \dots, n_k}^{s_1, \dots, s_k}(\mathbb{C})$. Según el Corolario 17.2, el problema se reduce al cálculo de números de Betti del espacio producto $B_{s_1, \dots, s_k}(\mathbb{C}) \times B_{n_1-s_1, \dots, n_k-s_k}(\mathbb{C})$. Pero, en virtud de la fórmula de Künnet (ver [28], Cap. 5, Sec. 3, Teorema 10), para ello es suficiente calcular los números de Betti de $B_{s_1, \dots, s_k}(\mathbb{C})$ y de $B_{n_1-s_1, \dots, n_k-s_k}(\mathbb{C})$, lo cual se va a hacer utilizando técnicas de Teoría de Morse elemental.

En primer lugar, como en [6], p. 33, se va a dar un embebimiento topológico de $B_{n_1, \dots, n_k}(\mathbb{C})$ en un cierto espacio euclídeo. En efecto, dotando al álgebra de Lie $\mathfrak{u}(n)$ de $U(n)$ con el producto interno

$$(18.1) \quad \langle X, Y \rangle = - \text{Traza } X.Y$$

para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{u}(n)$, se convierte a $\mathfrak{u}(n)$ en un espacio euclídeo. $U(n)$ opera sobre $\mathfrak{u}(n)$ mediante la acción adjunta $\text{ad}(U(n))$, es decir $\text{ad}(A)X = AXA^{-1}$, $A \in U(n)$, $X \in \mathfrak{u}(n)$. Esta acción deja invariante al producto interno (18.1), por lo cual $\text{ad}(U(n))$ da una representación de $U(n)$ como grupo de transformaciones ortogonales de $\mathfrak{u}(n)$.

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión n . Sobre V actúan $U(n)$ y $\mathfrak{u}(n)$; entonces, si $X \in \mathfrak{u}(n)$ existe una descomposición ortogonal de V en subespacios invariantes por X . Los elementos de $U(n)$ que dejan fijo X , mediante la acción adjunta, son exactamente las matrices unitarias que dejan invariantes dichos subespacios. Entonces, elegida una base conveniente, el subgrupo de $U(n)$ que deja a X fijo es de la forma $U(n_1) \times \dots \times U(n_k)$, con $n_1 + \dots + n_k = n$, embebido en $U(n)$. Por ello, la órbita a través de X , es decir

$$M_X = \{ \text{ad}(A)X / A \in U(n) \},$$

es la variedad de banderas $B_{n_1, \dots, n_k}(\mathbb{C})$; además, es claro que todos estos espacios aparecen de esta forma.

Sea \mathfrak{h} el subespacio de $\mathfrak{u}(n)$ formado por las matrices diagonales, es decir

$$(18.2) \quad \mathfrak{h} = \left\{ \theta = \begin{pmatrix} i\theta_1 & & & \\ & i\theta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & i\theta_n \end{pmatrix} / \theta_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq n \right\}$$

Se representará por $\pi_{j\ell}$, $j < \ell$, el hiperplano de \mathfrak{h} definido por $\theta_j = \theta_\ell$. Es fácil ver que existen $\frac{1}{2}n(n-1)$ hiperplanos de este tipo en \mathfrak{h} . Sea ω el complemento de $\bigcup_{j < \ell} \pi_{j\ell}$ en \mathfrak{h} , entonces ω consiste en "casi todos" los puntos de \mathfrak{h} . Además, las órbitas a través de cada $X \in \omega$ son varie-

dades de banderas de dimensión máxima

Dado $X \in u(n)$, se considera la función L_X definida como el cuadrado de la distancia a X en $u(n)$ (según (18.1)). Se va a tener en cuenta el siguiente lema (ver [6], Lema 5.2)

Lema 18.1.- Sea M una órbita de $U(n)$ en $u(n)$ y sea $X \in \omega$. Considerese un punto crítico $Y \in M$ de la función $L_X : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces, un punto $Z \in u(n)$ de la recta determinada por X e Y es un punto focal de multiplicidad ν si y sólo si $\dim M_X - \dim M_Z = \nu$.

Nota 18.2.- Este lema es un caso especial de un resultado más general, obtenido al reemplazar $U(n)$ por un grupo de Lie conexo. Hay que puntualizar que, en este lema, "punto focal" se entiende en el sentido de punto crítico de la aplicación "punto final" (ver [23], Cap. I, §6).

Nota 18.3.- Como consecuencia inmediata del Lema 18.1, se tiene que las funciones L_X con $X \in \omega$ son funciones de Morse sobre las variedades de banderas complejas. Como tales espacios tienen dimensión (real) par, el índice de L_X en cualquier punto crítico es par, y por lo tanto la homología en dimensiones impares es trivial. Aplicando ahora el Corolario 17.2 y la fórmula de Künnet, resulta que este hecho también es cierto para variedades de banderas complejas indefinidas.

A continuación se calculan los números de Betti de $B_{n_1, \dots, n_k}(\mathbb{C})$. En efecto este espacio se identifica a la órbita M_X a través de $X \in u(n)$ de la forma

$$(18.3) \quad X = \text{diag}(it_1 I_{n_1}, it_2 I_{n_2}, \dots, it_k I_{n_k})$$

donde $t_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq k$ y $t_j \neq t_\ell$ si $j \neq \ell$.

Sea $Y \in \omega$ y la función de Morse $L_Y : M_X \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces, el siguiente resultado permite calcular los puntos críticos de L_Y .

Teorema 18.4.- Los puntos críticos de $L_Y : M_X \longrightarrow \mathbb{R}$ son los puntos de $M_X \cap h$ y se obtienen de X (ver (18.3)) haciendo todas las permutaciones posibles entre los elementos que aparecen en su diagonal.

Demostración. Sea Z un punto crítico de $L_Y : M_X \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces la recta determinada por Y y Z , \overline{YZ} , es perpendicular a M_X en Z . Como el producto interno (18.1) verifica la propiedad

$$(18.4) \quad \langle [W_1, W_2], W_3 \rangle = \langle W_1, [W_2, W_3] \rangle$$

para cualesquiera $W_j \in u(n)$, $j=1,2,3$, donde $[W_1, W_2]$ representa el corchete usual de matrices cuadradas. Y, además, el espacio tangente a M_Y en el punto Y es

$$(18.5) \quad T_Y M_Y = \{ [W, Y] / W \in u(n) \}$$

según el Lema 5.3 de [6], resulta que la recta \overline{YZ} también es perpendicular a M_Y en Y . Ahora bien, M_Y tiene dimensión máxima con lo que $T_Y M_Y$ es el complemento ortogonal de h en $u(n)$, y, entonces, la recta \overline{YZ} está contenida en h , en particular $Z \in h$.

Recíprocamente, si $Z \in M_X \cap h$ entonces, por (18.2), se obtiene $[Z, W] = 0$ para todo $W \in h$, y así, cada recta que pase por Z y esté contenida en h es perpendicular a M_X en Z .

Observese que, por ser cada órbita compacta, la función L_Y sobre M_X tiene algún punto crítico, de manera que cualquier órbita inercial a h . También hay que hacer notar que los puntos críticos de $L_Y : M_X \longrightarrow \mathbb{R}$ son independientes de la elección de Y en ω .

Para finalizar la prueba del Teorema 18.4 se va a ver como, a partir de X , se obtienen todos los puntos críticos. Cada órbita M_X viene dada por matrices de la forma $A X A^{-1}$ con $A \in U(n)$ cualesquiera. Si se pone $A X A^{-1} = \theta \in \mathfrak{h}$, entonces

$$(18.6) \quad \begin{pmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} it_1 (n_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & it_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & it_k (n_k) \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & it_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\theta_1 & & & \\ & i\theta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & i\theta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix}$$

donde $A = (a_{j\ell})$. Esto implica que cada θ_ℓ , $1 \leq \ell \leq n$, debe coincidir con algún t_j , $1 \leq j \leq k$. En efecto, tras algunos cálculos a partir de la igualdad (18.6), se prueba que si $\theta_\ell \neq t_j$ para todo j , $1 \leq j \leq k$, la fila ℓ de la matriz A estaría formada exclusivamente por ceros, lo cual contradice que A sea regular. Por otra parte, como $t_j \neq t_\ell$ si $j \neq \ell$ y $\det X = \det \theta$, de nuevo (18.6) implica que θ se obtiene de X permutando los elementos de su diagonal principal.

Recíprocamente, cualquier elemento de \mathfrak{h} que se obtenga a partir de X permutando los elementos de su diagonal principal pertenece a la órbita de X y es un punto crítico de $L_Y : M_X \longrightarrow \mathbb{R}$. Así, concluye la demostración del Teorema 18.4.

A partir de ahora, en

$$X = \text{diag} (it_1 I_{n_1}, \dots, it_k I_{n_k})$$

se supondrá, sin pérdida de generalidad, que $t_1 > t_2 > \dots > t_k > 0$. En esta situación, si se toma

$$Y = \text{diag} (iI_{n_1}, 2iI_{n_2}, \dots, kiI_{n_k})$$

resulta que $Y \in \omega$ y $L_Y : M_X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse.

Sea Z un punto crítico de L_Y . Se representará por $\delta(Z)$ el número de veces que se produce un descenso en la permutación correspondiente a Z , entendiendo que existe un descenso entre los lugares j y ℓ , $j < \ell$, si el elemento que aparece en el lugar (j, j) de la diagonal de Z es mayor que el que aparece en el lugar (ℓ, ℓ) . Por otro lado, $\lambda(Z)$ será el índice de L_Y en Z . Estos dos números se relacionan en el siguiente

Teorema 18.5.- Si Z es un punto crítico de $L_Y : M_X \longrightarrow \mathbb{R}$, se verifica

$$\lambda(Z) = 2\delta(Z)$$

Demostración. El teorema del índice para la función L_Y (ver [23], Cap. I, Lema 6.9) afirma que $\lambda(Z) = \sum_j v(F_j)$ donde F_j representa un punto focal del segmento abierto comprendido entre Y y Z , y $v(F_j)$ la multiplicidad de dicho punto focal. Puesto que tanto Z como Y pertenecen a h , los puntos F_j también están en h . Además, según el Lema 18.1, $\dim M_X - \dim M_{F_j} = v(F_j)$. Esto prueba que los puntos F_j son precisamente los que se obtienen intersecando el segmento abierto de extremos Y y Z con los hiperplanos $\pi_{j\ell}$, $j < \ell$, y así $v(F_j)$ es dos veces el número de tales hiperplanos que pasan por F_j .

El segmento abierto determinado por Y y Z corta al hiperplano $\pi_{j\ell}$, $j < \ell$, si y sólo si existe un descenso entre los lugares j y ℓ de Z . En efecto, sea

$$Z = \text{diag}(i\theta_1, \dots, i\theta_n)$$

obtenido permutando los elementos de la diagonal de X ; entonces dicho segmento viene dado por

$$\text{diag } i.(\alpha\theta_1+(1-\alpha), \alpha\theta_2+2(1-\alpha), \dots, \alpha\theta_n+n(1-\alpha))$$

donde $0 < \alpha < 1$. Entonces, corta a $\pi_{j\ell}$ si y sólo si

$$\alpha\theta_j + j(1-\alpha) = \alpha\theta_\ell + \ell(1-\alpha) \quad \text{es decir } \alpha = \frac{\ell - j}{\ell - j + \theta_j - \theta_\ell}.$$

Por lo tanto, existe tal corte si y sólo si $\theta_j > \theta_\ell$. Con lo que queda probado el Teorema 18.5.

Puesto que los número de Betti en dimensiones impares de las variedades de banderas complejas son nulos, utilizando las desigualdades de Morse (ver [23], Cap. I, §5) se obtiene que el número de Betti de orden $2p$ de tales espacios es justamente el número de puntos críticos de L_Y que tienen índice $2p$.

Como una primera aplicación del desarrollo teórico precedente, se van a calcular los número de Betti de variedades de Grassmann $G_{n_1, n_2}(\mathbb{C})$ (comparese con [16]). Tal espacio puede mirarse como la órbita en $u(n)$, $n = n_1 + n_2$, a través de $X \in u(n)$ de la forma

$$X = \text{diag } (it_1 I_{n_1}, it_2 I_{n_2})$$

con $t_1 > t_2$. Se considera $Y \in \omega$, como antes, de manera que

$L_Y : G_{n_1, n_2}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$ sea una función de Morse. Si $h(n_1, n_2, p)$ representa el número de puntos críticos Z de L_Y tales que $\delta(Z) = p$, automáticamente se tiene

$$h(n_1, n_2, p) = 0 \quad \text{si } p < 0 \text{ o } p > n_1 n_2$$

(18.7)

$$\beta_{2p}(G_{n_1, n_2}(\mathbb{C})) = h(n_1, n_2, p)$$

Además,

Teorema 18.6.- Los números de Betti de $G_{n_1, n_2}(\mathbb{C})$ vienen dados por

$$\beta_{2p+1}(G_{n_1, n_2}(\mathbb{C})) = 0$$

$$\beta_{2p}(G_{n_1, n_2}(\mathbb{C})) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_{n_1}} \beta_{2\psi_{i_1, i_2, \dots, i_{n_1}}}^{(P)} \quad (P)$$

donde $\psi_{i_1, i_2, \dots, i_{n_1}} = p - n_1 n_2 - \frac{1}{2} n_1 (n_1 + 1) + \sum_{k=1}^{n_1} i_k$,

$i_1 = 1, 2, \dots, n_2 + 1$; $i_2 = 2, 3, \dots, n_2 + 2$; ...; $i_{n_1} = n_1, n_1 + 1, \dots, n$ y

P es un espacio con un solo punto.

La característica de Euler de $G_{n_1, n_2}(\mathbb{C})$ por

$$\chi(G_{n_1, n_2}(\mathbb{C})) = \binom{n}{n_1}$$

Demostración. El número de puntos críticos Z de L_Y que tienen n_1 coordenadas t_1 en los lugares i_1, i_2, \dots, i_{n_1} con $i_1 < i_2 < \dots < i_{n_1}$ está dado por

$$(18.8) \quad h(0, n_2, \psi_{i_1, i_2, \dots, i_{n_1}}) = \beta_{2\psi_{i_1, i_2, \dots, i_{n_1}}}^{(P)}$$

Entonces, $\beta_{2p}(G_{n_1, n_2}(\mathbb{C})) = h(n_1, n_2, p)$ es la suma de los valores (18.8) con los rangos de variación posibles para los índices i_1, i_2, \dots, i_{n_1} .

Finalmente, $\chi(G_{n_1, n_2}(\mathbb{C})) = \sum_p h(n_1, n_2, p)$ y tras un fácil cálculo, se concluye la demostración.

Nota 18.7.- Como consecuencia de el teorema precedente, se puede afirmar que $\beta_{2p}(G_{n_1, n_2}(\mathbb{C}))$ es el número de veces que la suma $\sum_{j=1}^{n_1} i_k$ toma el valor $n_1 n_2 + \frac{1}{2} n_1 (n_1 + 1) - p$.

Considerese ahora el caso general $B_{n_1, \dots, n_k}(\mathbb{C})$ y sea $h(n_1, \dots, n_k, p)$ el número de puntos críticos Z de L_Y sobre este espacio con $\delta(Z) = p$. Entonces

$$h(n_1, \dots, n_k, p) = 0 \text{ si } p < 0 \text{ o } p > \sum_{j \neq k} n_j n_k \quad (18.9)$$

$$\beta_{2p}(B_{n_1, \dots, n_k}(\mathbb{C})) = h(n_1, \dots, n_k, p)$$

Además, se tiene

Teorema 18.8.- Los números de Betti de $M = B_{n_1, \dots, n_k}(\mathbb{C})$ vienen dados por

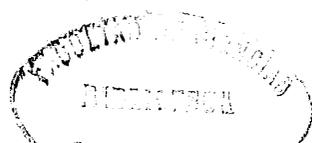
$$\beta_{2p+1}(M) = 0$$

$$\beta_{2p}(M) = \sum_{\substack{i_{1,1} < \dots < i_{1,n_1} \\ i_{2,1} < \dots < i_{2,n_2} \\ \vdots \\ i_{k-1,1} < \dots < i_{k-1,n_{k-1}}} \beta_{2p} \psi_{i_{1,1}, \dots, i_{1,n_1}, \dots, i_{k-1, n_{k-1}}} \quad (P)$$

donde P es un espacio con un solo punto, y

$$\begin{aligned} \psi_{i_{1,1}, \dots, i_{1,n_1}, \dots, i_{k-1, n_{k-1}}} &= p - n_1(n_2 + \dots + n_k) - n_2(n_3 + \dots + n_k) - \\ &- \dots - n_{k-1}n_k - \frac{1}{2}n_1(n_1+1) - \frac{1}{2}n_2(n_2+1) - \\ &- \dots - \frac{1}{2}n_{k-1}(n_{k-1}+1) + \sum_{j_1=1}^{n_1} i_{1,j_1} + \\ &+ \sum_{j_2=1}^{n_2} i_{2,j_2} + \dots + \sum_{j_{k-1}=1}^{n_{k-1}} i_{k-1,j_{k-1}} \end{aligned}$$

siendo los rangos de variación de índices los siguientes



$$i_{1,r_1} = r_1, r_1+1, \dots, r_1 + \sum_{j=2}^k n_j ; \quad 1 \leq r_1 \leq n_1$$

$$i_{2,r_2} = r_2, r_2+1, \dots, r_2 + \sum_{j=3}^k n_j ; \quad 1 \leq r_2 \leq n_2$$

.....

$$i_{k-1,r_{k-1}} = r_{k-1}, r_{k-1}+1, \dots, r_{k-1} + n_k ; \quad 1 \leq r_{k-1} \leq n_{k-1}$$

y la característica de Euler por

$$\chi(M) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Demostración. Se va a hacer por inducción sobre k . En efecto, es claro que el teorema es válido para $k=2$, pues en este caso, se reduce al Teorema 18.6. Supóngase el resultado válido para $k-1$, y sea $M = U(n) / U(n_1) \times \dots \times U(n_2)$. Entonces, el número de puntos críticos Z de $L_Y : M \rightarrow \mathbb{R}$ con $\delta(Z) = p$ tales que t_1 aparece en los lugares $i_{1,1}, \dots, i_{1,n_1}$ con $i_{1,1} < \dots < i_{1,n_1}$, es igual a

$$h(n_2, \dots, n_k, p - n_1(n_2 + \dots + n_k) - \frac{1}{2}n_1(n_1+1) + \sum_{j_1=1}^{n_1} i_{1,j_1}) =$$

$$= \beta_{2(p - n_1(n_2 + \dots + n_k) - \frac{1}{2}n_1(n_1+1) + \sum_{j_1=1}^{n_1} i_{1,j_1})} (B_{n_2, \dots, n_k}(\mathbb{C}))$$

y usando la hipótesis de inducción se concluye el teorema.

Corolario 18.9.- Sea $M = B_{1, \dots, 1}(\mathbb{C})$, $n \geq 1$, una variedad de banderas de dimensión máxima en \mathbb{C}^n . Entonces, para cada entero positivo p , el $2p$ ésimo número de Betti de M es igual al coeficiente de z^p en el siguiente polinomio

$$p(z) = (1+z)(1+z+z^2) \dots (1+z+z^2+\dots+z^{n-1}).$$

Para finalizar este epígrafe se da el siguiente

Ejemplo 18.10..- Sea $M = B_{3,2,2}^{1,1,1}(\mathbb{C})$. Según el Corolario 17.2, M tiene el tipo de homotopía de $M_1 \times M_2$, siendo

$$M_1 = \frac{U(3)}{U(1) \times U(1) \times U(1)} \quad \text{y} \quad M_2 = \frac{U(4)}{U(2) \times U(1) \times U(1)}$$

Para calcular los números de Betti de M_1 se considera el polinomio

$$p(z) = 1 + 2z + 2z^2 + z^3$$

y, según el Corolario 18.9,

$$\beta_0(M_1) = \beta_6(M_1) = 1; \quad \beta_2(M_1) = \beta_4(M_1) = 2; \quad \beta_1(M_1) = \beta_3(M_1) = \beta_5(M_1) = 0.$$

A partir del Teorema 18.8 se calculan los de M_2 ,

$$\beta_0(M_2) = \beta_{10}(M_2) = 1; \quad \beta_2(M_2) = \beta_8(M_2) = 2; \quad \beta_4(M_2) = \beta_6(M_2) = 3$$

$$\beta_j(M_2) = 0 \quad \text{para } j = 1, 3, 5, 7, 9.$$

y, teniendo en cuenta la fórmula de Künnet,

$$\beta_0(M) = \beta_{16}(M) = 1; \quad \beta_2(M) = \beta_{14}(M) = 4; \quad \beta_4(M) = \beta_{12}(M) = 9$$

$$\beta_6(M) = \beta_{10}(M) = 14; \quad \beta_8(M) = 16; \quad \beta_j(M) = 0 \quad \text{para cualquier otro valor}$$

de j . Por último,

$$\chi(M) = \chi(M_1) \cdot \chi(M_2) = 6 \cdot 12 = 72.$$

REFERENCIAS

- [1] M. Barros, "On the almost Hermitian structures of a differentiable manifold", *Ann. Mat. Pura ed Appl.* 123(1980), 27-33.
- [2] M. Barros, S. Montiel and A. Romero, "The topology of indefinite flag manifolds", (pendiente de publicación)
- [3] M. Barros and A. Romero, "Indefinite Kähler manifolds", *Math. Ann.* 261(1982), 55-62.
- [4] M. Barros and F. Urbano, "Diferential geometry of $U(p+q+r)/U(p)\times U(q)\times U(r)$ ", *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 30(1981), 83-96.
- [5] M. Berger, "Les espaces symétriques non compacts", *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 12(1957), 85-177.
- [6] R. Bott, Morse theory and its applications to Homotopy Theory, (Notas de A. van de Ven), Als manuskript vervielfältigt im Mathematischen Institut der Universität Bonn, 1960.
- [7] R. Bott and H. Samelson, "Applications of the theory of Morse to symmetric spaces", *Amer. J. Math.* 80(1958), 964-1029.
- [8] E. Cartan, *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, 1946.
- [9] J. Cheeger and D. G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian geometry*, North-Holland, Mathematical library, Vol. 9, Amsterdam-Oxford, 1975.
- [10] B. Y. Chen and K. Ogiue, "Some characterizations of complex space forms", *Duke Math. J.* 40(1973), 797-799.
- [11] C. Chevalley, *Theory of Lie Groups I*, Princ. Univ. Press. 1946.
- [12] M. Dajczer and K. Nomizu, "On sectional curvature of indefinite metrics II", *Math. Ann.* 247(1980), 279-282.

- [13] P. Dombrowski; "On the geometry of the tangent bundle", J. Reine Angew. Math. 210(1962), 73-88.
- [14] S. I. Golberg and E. M. Moskal, "The axioms of spheres in Kaehler Geometry", Kōdai Math. Sem. Rep. 27(1976), 188-192.
- [15] L. Graves and K. Nomizu, "On sectional curvature of indefinite metrics", Math. Ann. 232(1978), 267-272.
- [16] T. Hangan, "A Morse function on Grassmann manifolds", J. Differential Geometry 2(1968), 363-367.
- [17] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1978.
- [18] C. S. Houh, "On totally real bisectional curvature", Proc. Amer. Math. Soc. 56(1976), 261-263.
- [19] G. Kaiser, "Holomorphic Gauge theory", Lecture Notes in Math. nº 775, 1979, 122-143.
- [20] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry I y II, Interscience, 1963, 1969.
- [21] R. S. Kulkarni, "The values of sectional curvature in indefinite metrics", Comm. Math. Helv. 54(1979), 173-176.
- [22] D. S. Leung and K. Nomizu, "The axiom of spheres in Riemannian Geometry", J. Differential Geometry 5(1971), 487-489.
- [23] J. W. Milnor, Morse theory, annals of Math. stud. 51, Princ. Univ. Press. 1963.
- [24] S. Montiel and A. Romero, "Holomorphic sectional curvatures of indefinite complex Grassmann manifolds" aparecerá en Proc. Math. Cambridge Phil. Soc., (1983).
- [25] K. Nomizu, "Conditions for constancy of the holomorphic sectional curvature", J. Differential Geometry 8(1973), 335-339.

- [26] B. O'Neill, "The fundamental equations of a submersion", Michigan Math. J. 13(1966), 459-469.
- [27] S. Sasaki, "On the Differential Geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds", Tôhoku Math. J. 10(1958), 238-254.
- [28] E. H. Spanier, Algebraic Topology, Tata McGraw-Hill, New Delhi, 1978.
- [29] S. Tachibana and M. Okumura, "On the almost complex structure of tangent bundles of Riemannian spaces", Tôhoku Math. J. 14 (1962), 156-161.
- [30] A. Weil, Introduction à l'étude des Variétés Kähleriennes, Hermann, Paris, 1958.
- [31] J. H. C. Whitehead, "Combinatorial Homotopy I", Bull. of Amer. Math. Soc. 55(1949), 213-245.
- [32] J. A. Wolf, "Isotropic manifolds of indefinite metric", Comm. Math. Helv. 39(1964), 21-64.
- [33] J. A. Wolf, Spaces of constant curvature, McGraw-Hill, 1967.
- [34] Y. C. Wong, "Sectional curvatures of Grassmann manifolds", Proc. N. A. S. 60(1968), 75-79.
- [35] K. Yano and S. Ishihara, Tangent and Cotangent bundles. Marcel Dekker, New York, 1973.