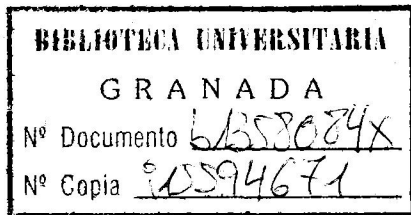
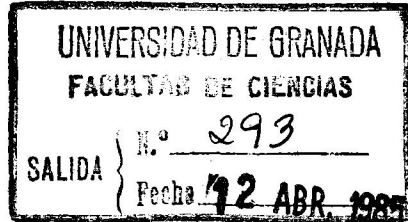


HIPERSUPERFICIES REALES ISOPARAMETRICAS  
DEL ESPACIO PROYECTIVO CUATERNIONICO

Por  
ANTONIO MARTINEZ LOPEZ



Memoria realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, bajo la dirección de los Profesores, Dr. D. Florentino García Santos, Profesor Titular de Geometría y Topología de la Universidad de Granada y Dr. D. Juan de Dios Pérez Jiménez, Profesor Interino del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, para obtener el Grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas, por la Universidad de Granada.

Vº Bº

El Director

El Codirector

Aspirante al grado de Doctor en Ciencias

UNIVERSIDAD DE GRANADA
LIBRO DE TESIS
GRANADA
Edición 6
Folio 3
Nº 137-

*Tesis doctoral dirigida por los profesores Dr. D. Florentino García Santos, profesor Titular de Geometría Diferencial y Dr. D. Juan de Dios Pérez Jiménez, profesor Interino de Geometría Diferencial, del Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada. Fue leída el día 23 de marzo de 1985, ante el Tribunal formado por los profesores: Luis Esteban Carrasco, Francisco Gómez Ruiz, Ceferino Ruiz Garrido, Jose Luis Cabrerizo Jaraiz y José Castellano Alcántara. Obtuvo la calificación de Apto "cum laude".*



A Margarita

# INDICE

INTRODUCCION .....	1
--------------------	---

## CAPITULO I

### SUBVARIEDADES REALES DE UNA VARIEDAD KAEHLERIANA CUATERNIONICA.

§1.- Variedades Kaehlerianas cuaterniónicas. Conceptos básicos .....	14
§2.- Subvariedades genéricas de una variedad Kaehleriana cuaterniónica .....	17
§3.- Integrabilidad de las distribuciones de una subvariedad genérica. Productos genéricos .....	24
§4.- Sobre la segunda forma fundamental de una subvariedad en una variedad Kaehleriana cuaterniónica ....	29

## CAPITULO II

### EJEMPLOS DE SUBVARIEDADES DEL ESPACIO PROYECTIVO CUATERNIONICO.

§1.- El espacio proyectivo cuaterniónico y su primer em- bebimiento estándar .....	41
§2.- Puntos focales de una subvariedad en $QP^m$ .....	47
§3.- Estructura del conjunto focal de algunas subvarie- dades de $QP^m$ . Ejemplos .....	57
§3A.- Puntos focales de subvariedades cuaterni- ónicas de $QP^m$ .....	57
§3B.- Conjunto focal del espacio proyectivo com- plejo .....	62

§3C.- Conjunto focal de una CR-subvariedad cuaterniónica $(4m-3)$ -dimensional totalmente geodésica mixta de $QP^m$ .....	75
---	----

CAPITULO III

HIPERSUPERFICIES REALES ISOPARAMETRICAS EN EL ESPACIO PROYECTIVO CUATERNIONICO.

§1.- Hipersuperficies reales del espacio proyectivo cuaterniónico .....	89
§2.- Hipersuperficies reales isoparamétricas de $QP^m$ verificando $g(\Delta D, D')=0$ .....	92
§2A.- Caso en el que al menos dos de las curvaturas principales correspondientes a $U_1, U_2$ y $U_3$ son iguales .....	95
§2B.- Caso en el que las tres curvaturas principales correspondientes a $U_1, U_2$ y $U_3$ sean distintas dos a dos .....	102
§3.- Hipersuperficies reales del espacio proyectivo cuaterniónico con dos curvaturas principales distintas .....	108

CAPITULO IV

SOBRE EL TENSOR DE RICCI DE LAS HIPERSUPERFICIES REALES EN EL ESPACIO PROYECTIVO CUATERNIONICO.

§1.- Hipersuperficies reales casi-Einstein en $QP^m$ .....	117
§2.- Hipersuperficies reales pseudo-Einstein de $QP^m$ ...	125
BIBLIOGRAFIA .....	130



## I N T R O D U C C I O N

=====

Es obligado, al tratar un problema de la teoría de subvariedades de una variedad de Riemann, hacer mención especial a ciertos resultados sobre las hipersuperficies reales de la misma, máxime cuando nuestro objetivo es plantear y resolver un determinado problema en hipersuperficies.

De hecho, la teoría de hipersuperficies de una variedad de Riemann no sólo se puede considerar como directriz de la teoría de subvariedades, sino que la propia Geometría Diferencial moderna hoy lo es gracias a los estudios clásicos realizados en la teoría de hipersuperficies. Bastaría, a este respecto, citar el llamado problema de Beltrami que es fundamental para sentar la diferencia entre las geometrías Euclídeas y no Euclídeas, impulsando además el desarrollo de la propia Geometría de Riemann.

El Teorema Egregium de Gauss es otro de los resultados obtenidos en hipersuperficies que ha sido de gran trascendencia en el desarrollo de la Geometría Diferencial global posterior. Igualmente, problemas relativos a rigidez y embimbimientos isométricos se han resuelto primeramente en hipersuperficies de  $R^n$  y posteriormente se han tratado en subva-

riedades de codimensión superior en distintos espacios ambiente. Este tratamiento, consistente en aumentar la codimensión, sigue siendo utilizado actualmente para resolver ciertos problemas de clasificación de subvariedades cuando son conocidos en hipersuperficies.

Son muchos e importantes los ejemplos de hipersuperficies conocidas en geometría real; entre ellos son destacables las hipersuperficies de nivel definidas por una función diferenciable, cuyo estudio, aparte del interés geométrico, tiene grandes aplicaciones en el análisis y en la física.

Precisamente, E. Cartan, [C], realizó una serie de trabajos sobre el estudio de la familia de hipersuperficies de nivel definidas por una función diferenciable sobre un espacio de curvatura constante cuyo gradiente y laplaciano verifican una determinada condición. Concretamente, prueba que el estudio de dicha familia de hipersuperficies es equivalente al estudio de una familia paralela de hipersuperficies obtenida a partir de una hipersuperficie con curvaturas principales constantes.

Los trabajos de Cartan fueron precedidos por otros de Levi-Civita y M.B. Segre. Levi-Civita, en 1937, demostró que las únicas familias de superficies isoparamétricas, o superficies de nivel del tipo anterior, de  $R^3$  son familias de planos paralelos, de esferas concéntricas o de cilindros de revolución coaxiales. Segre, un año después, generalizó estos resultados a hipersuperficies de nivel de  $R^n$ , obteniendo que las únicas familias de hipersuperficies isoparamétricas de  $R^n$  tienen sus puntos situados a una distancia dada de una

variedad plana fija de dimensión variable.

Cartan clasifica estas familias en el espacio no Euclídeo Hiperbólico, obteniendo resultados análogos a los de Segre en  $R^n$ . Sin embargo, en el espacio no Euclídeo esférico observa que pueden existir varias soluciones para el problema de clasificación y, aunque obtiene algunos resultados parciales muy interesantes, deja planteados varios problemas, entre ellos determinar el número de curvaturas principales distintas que puede tener una hipersuperficie isoparamétrica de  $S^n$ .

Los problemas planteados por Cartan permanecen abiertos bastantes años, y es hacia 1970 cuando una serie de autores se interesan directamente por los mismos. Entre estos cabe destacar a H.F. Münzer, K. Nomizu, H. Ozeki, P.J. Ryan, R. Takagi, T. Takahashi, M. Takeuchi. El principal objetivo de los mismos es resolver el problema de clasificación de las hipersuperficies isoparamétricas o hipersuperficies con curvaturas principales constantes de la geometría esférica planteado por Cartan. Es Münzer, [Mu1, Mu2], quien da una solución satisfactoria del mismo probando que en  $S^n$  las únicas familias de hipersuperficies isoparamétricas tienen 1, 2, 3, 4 ó 6 curvaturas principales constantes y distintas. Además, todas ellas están definidas por un cierto polinomio. Al estudio de la homogeneidad de las mismas le dedican bastante atención el resto de los autores (ver [TO], [TO1], [Ry1], [TT], [N]).

Todos estos resultados, en la línea comenzada por Cartan dan origen a una amplia y variada serie de trabajos en



la teoría de subvariedades. La idea de generalizarlos a subvariedades de codimensión superior, como es el caso de T. Otsuki, H. Reckziegel y L.P. Jorge-F. Mercuri, ([Ot], [R], [JM]), motiva un estudio importante del fibrado normal de una subvariedad. Así mismo, adquiere una gran importancia el estudio de las subvariedades de curvatura media constante, siendo destacables en este sentido los resultados de B. Smyth, [Sm], que dan un gran impulso a la teoría de subvariedades minimales y al análisis armónico de la aplicación de Gauss.

El desarrollo de las geometrías compleja y cuaterniónica durante el último cuarto de siglo y el hecho de que las estructuras de las correspondientes variedades introducen sobre sus subvariedades nuevos elementos no contemplados en la Geometría de Riemann, motiva un estudio amplio de dichas subvariedades que generalmente ha sido planteado en el caso de codimensión mayor que uno a partir de los ejemplos que proporcionan los embebimientos estándar en los espacios modelo de dichas geometrías.

La obtención por H.B. Lawson, [L], de los primeros ejemplos de hipersuperficies reales en los espacios proyectivos complejo,  $CP^m$ , y cuaterniónico,  $QP^m$ , los conocidos ecuadores generalizados, que son, además, hipersuperficies isoparamétricas, motivó el estudio de las hipersuperficies reales de las geometrías Kaehleriana y cuaterniónica. Concretamente, varios autores, mediante el uso de las fibraciones de Hopf y la teoría de submersiones de O'Neill, se dedican a dar distintas caracterizaciones de dichos ejemplos en ambas geometrías. Recientemente, S. Montiel, [Mo], ha obtenido también

ejemplos de hipersuperficies reales isoparamétricas del espacio Hiperbólico complejo.

El problema de clasificación de las hipersuperficies reales isoparamétricas de  $CP^m$  sería abordado a partir de la clasificación obtenida por R. Takagi ([Ta1], [Ta2], [Ta3]), de las hipersuperficies reales homogéneas de  $CP^m$ , siendo M. Kimura, [K], quien resuelve este problema con toda la generalidad que le permite la propia lista de Takagi.

En cuanto a las hipersuperficies reales isoparamétricas de  $QP^m$  el problema no había sido tratado, quizás por no conocer en este espacio resultados del tipo de los de Takagi. El objetivo fundamental de la presente memoria es atacar el problema de clasificación de las hipersuperficies reales isoparamétricas del espacio proyectivo cuaterniónico.

Teniendo en cuenta algunos de los razonamientos geométricos que Cartan hace en sus trabajos, se puede observar el papel tan importante que juegan las variedades focales de una familia isoparamétrica. Así por ejemplo, el conocido resultado de que las únicas hipersuperficies totalmente umbilicales del espacio Euclídeo son hiperplanos o esferas se puede razonar fácilmente mediante técnicas de puntos focales. De hecho, bajo ciertas condiciones, al conjunto de puntos focales de una subvariedad se le puede dotar de estructura de variedad diferenciable, como prueban T.E. Cecil-P.J. Ryan en [CR1] y H. Reckziegel en [R], que da suficiente información sobre la misma.

Según esto, cabe pensar en la teoría de puntos focales como una forma adecuada de estudio que permita obtener sufi-

cientes ejemplos tanto de hipersuperficies reales isoparamétricas como de otro tipo de subvariedades de  $QP^m$ .

Ahora bien, en el desarrollo de la teoría de puntos focales en el espacio proyectivo cuaterniónico, que en principio es aplicable a cualquier subvariedad real del mismo, se observa que no siempre se obtiene una información adecuada sobre los conjuntos focales de estas subvariedades. Esto obliga a restringir la familia de subvariedades de dicho espacio a aquellas en las que la estructura cuaterniónica del espacio ambiente sobre el fibrado normal de la subvariedad tenga un determinado comportamiento. Así, teniendo en cuenta que el espacio proyectivo cuaterniónico es un espacio modelo de las denominadas variedades Kaehlerianas cuaterniónicas, se inicia esta memoria con un estudio de las subvariedades en este tipo de espacios ambiente.

Es conocido que una variedad Kaehleriana cuaterniónica no es más que una variedad de Riemann  $4m$ -dimensional y orientable, cuyo grupo de holonomía es un subgrupo de  $Sp(1)Sp(m) = Sp(1) \times_{\mathbb{Z}_2} Sp(m)$ . La importancia de este tipo de variedades radica en que  $Sp(1)Sp(m)$  es uno de los grupos que aparecen en la lista que dan M. Berger, [Bg], y D.V. Alekseevskii, [A], acerca de los posibles grupos de holonomía que puede admitir una variedad de Riemann.

Las variedades Kaehlerianas cuaterniónicas han sido estudiadas por varios autores ( ver [Kr],[I1],[I2],[Mr],[Pe],[Sl2]) tanto en su aspecto topológico como en el geométrico y, en cuanto a este último, cabe destacar que toda variedad Kaehleriana cuaterniónica  $4m$ -dimensional,  $m \geq 2$ , es una varie-

dad Einstein. De entre los ejemplos de variedades Kaehlerianas cuaterniónicas se resaltan los dados por J.A. Wolf, [W], en la clasificación de espacios simétricos de tipo compacto, así como sus duales no compactos.

Fué S. Ishihara, [I2], quien dió una interpretación tensorial del concepto de variedad Kaehleriana cuaterniónica probando que sobre una variedad Kaehleriana cuaterniónica existe un fibrado vectorial 3-dimensional,  $\hat{V}$ , con base local de estructuras casi-Hermiticas,  $\{J_1, J_2, J_3\}$ , en general no paralelas y verificando ciertas condiciones, que determinan la estructura cuaterniónica de la variedad. A raíz de este trabajo, numerosos autores estudian, atendiendo a un determinado comportamiento de la estructura cuaterniónica sobre los fibrados tangente y normal, los distintos tipos de subvariedades conocidos hasta ahora, esto es, las subvariedades cuaterniónicas ([Ch2], [G]), las subvariedades totalmente reales ([CH], [Fu1]), las subvariedades totalmente complejas ([Fu2]) y las CR-subvariedades cuaterniónicas ([BCU]).

En la línea de unificar todos estos tipos de subvariedades de una variedad Kaehleriana cuaterniónica, en el Capítulo I se hace un estudio de las subvariedades en estos espacios ambiente dando, como generalización del comportamiento que tiene la estructura cuaterniónica sobre el fibrado tangente de una hipersuperficie real, el concepto de subvariedad genérica, concepto que engloba los distintos tipos de subvariedades mencionados anteriormente y que, en cierto sentido, es el más general que se puede dar atendiendo al comportamiento de la estructura cuaterniónica sobre el fibrado

tangente de la subvariedad, tal como se pone de manifiesto en §2.

En §3 de este Capítulo se analizan, mediante el estudio de los productos genéricos, las posibles inmersiones de subvariedades genéricas de una variedad Kaehleriana cuaterniónica que pueden ser dadas como una inmersión producto. En este sentido, se obtiene el Teorema I.3.8 que se puede interpretar como una obstrucción a la existencia de ciertos productos Riemannianos atendiendo al signo de la curvatura escalar del espacio ambiente. Como consecuencia del mismo, es de destacar, por ejemplo, que el producto Riemanniano del espacio proyectivo complejo y del espacio proyectivo cuaterniónico no puede ser embebido en una variedad Kaehleriana cuaterniónica con curvatura escalar no nula.

Finalmente, en §4 se estudia la segunda forma fundamental de una inmersión en una variedad Kaehleriana cuaterniónica generalizando los resultados obtenidos por B.Y. Chen, [Ch2], que clasifica las subvariedades totalmente umbilicales de una variedad Kaehleriana cuaterniónica con curvatura seccional cuaterniónica constante no nula, y los obtenidos por J.S. Pak, [P], que calcula el módulo de la derivada de la segunda forma fundamental de una hipersuperficie real en una variedad Kaehleriana cuaterniónica con curvatura seccional cuaterniónica constante. Concretamente, motivados por la existencia de variedades Kaehlerianas cuaterniónicas con curvatura escalar no nula que no tienen curvatura seccional cuaterniónica constante ( ver [W]), se estudian las subvariedades totalmente umbilicales en este tipo de espacios obte-

niendo el siguiente resultado:

COROLARIO I.4.5.- Sea  $M$  una subvariedad  $n$ -dimensional totalmente umbilical de una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$  con curvatura escalar no nula. Si  $n > 3m$ , donde  $m$  es la dimensión cuaterniónica de  $\bar{M}$ , entonces  $M$  es una subvariedad cuaterniónica y por tanto totalmente geodésica.

Además, teniendo en cuenta que para toda subvariedad de una variedad Kaehleriana cuaterniónica de curvatura seccional cuaterniónica constante no nula que no sea ni cuaterniónica, ni totalmente real, ni totalmente compleja, el módulo de la segunda forma fundamental es siempre positivo, se obtiene la expresión del mismo para una subvariedad cualquiera de una variedad Kaehleriana cuaterniónica de curvatura seccional cuaterniónica constante  $\bar{M}(c)$ , dando la mejor cota de éste para hipersuperficies reales y CR-subvariedades cuaterniónicas de  $\bar{M}(c)$ .

En el Capítulo II se obtienen ejemplos de hipersuperficies reales del espacio proyectivo cuaterniónico. Esto se consigue combinando adecuadamente el concepto de punto focal y de tubo sobre una subvariedad (es conocido que un tubo sobre una subvariedad viene a ser una generalización del clásico concepto de hipersuperficie paralela).

Así, en §2, mediante la inmersión dada por S. Tai, [T], del espacio proyectivo cuaterniónico en un espacio Euclídeo, inmersión de la que se conoce la expresión de sus geodésicas, se desarrolla la teoría de puntos focales para dicho espacio, observándose que para que la segunda forma fundamental de un tubo sobre una subvariedad de  $QP^m$  tenga un buen

comportamiento es necesario que la estructura cuaterniónica de  $QP^m$  actúe análogamente al caso de que ésta sea una subvariedad cuaterniónica ó una hipersuperficie real ó una subvariedad totalmente compleja de codimensión mínima. Aplicando estos resultados, en §3 se obtienen los siguientes ejemplos de hipersuperficies reales isoparamétricas de  $QP^m$ ,

a) Hiperesferas geodésicas, que son hipersuperficies reales con dos curvaturas principales constantes y distintas, que se describen como tubos a distancia  $r$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{2}$ , sobre una subvariedad cuaterniónica de dimensión cuaterniónica  $0$  ó  $m-1$ .

b) Tubos a distancia  $r$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{2}$ , sobre una subvariedad cuaterniónica de dimensión cuaterniónica  $k$ ,  $0 < k < m-1$ , que son hipersuperficies reales con tres curvaturas principales constantes y distintas.

c) Tubos a distancia  $r$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{4}$  ó  $\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$ , sobre el espacio proyectivo complejo  $CP^m$ , que son hipersuperficies reales con cuatro curvaturas principales constantes y distintas.

También en este epígrafe se prueba que el tubo a distancia  $\frac{\pi}{4}$  sobre  $CP^m$  es una CR-subvariedad cuaterniónica de codimensión 3 cuya segunda forma fundamental tiene ciertas propiedades que la caracterizan.

El capítulo termina dando una descripción detallada del conjunto focal de este tipo de CR-subvariedades cuaterniónicas de  $QP^m$ .

Sea  $M$  una hipersuperficie real orientable de  $QP^m$  con campo de vectores normales unitario  $N$ . Si  $\{J_1, J_2, J_3\}$  es una base local de  $\hat{V}$ , los campos de vectores  $U_k = -J_k N, k=1, 2, 3$  son tangentes a dicha hipersuperficie y generan una distribución

$D'$  en  $M$ . En los ejemplos obtenidos en el Capítulo II se observa que  $D'$  es invariante por el endomorfismo de Weingarten de la hipersuperficie; esto es, los vectores  $U_k$ ,  $k=1,2,3$  son principales. El Capítulo III se dedica, pues, a obtener la clasificación de las hipersuperficies reales isoparamétricas de  $QP^m$  que verifican la condición anterior y a caracterizar las hipersuperficies reales de  $QP^m$  con dos curvaturas principales distintas. Así, en §2, utilizando de nuevo la teoría de puntos focales, se prueba que no existen hipersuperficies reales isoparamétricas de  $QP^m$  con  $U_k$ ,  $k=1,2,3$ , principales con curvaturas principales distintas dos a dos, obteniéndose la siguiente clasificación:

TEOREMA FUNDAMENTAL III.2.3.- Sea  $M$  una hipersuperficie real isoparamétrica de  $QP^m$  tal que  $g(\Delta D, D')=0$ . Sea  $s$  el número de curvaturas principales distintas de  $M$ . Entonces  $s \in \{2,3,4\}$  y además,

- i) Si  $s=2$ ,  $M$  es una parte abierta de una hiperesfera geodésica.
- ii) Si  $s=3$ ,  $M$  es una parte abierta de un tubo de radio  $r$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{2}$ , sobre  $QP^k$ ,  $0 < k < m-1$ .
- iii) Si  $s=4$ ,  $M$  es una parte abierta de un tubo de radio  $r$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{4}$  ó  $\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$ , sobre el espacio proyectivo complejo  $CP^m$ .

Finalmente, en §3 se caracterizan las hiperesferas geodésicas como las únicas hipersuperficies reales conexas de  $QP^m$ ,  $m \geq 3$ , con dos curvaturas principales distintas.

Dada una hipersuperficie real del espacio proyectivo cuaterniónico, se observa que existe una relación estrecha entre su tensor de Ricci y la segunda forma fundamental de



la misma. Así, teniendo en cuenta los resultados de los Capítulos II y III, en el Capítulo IV se estudian las hipersuperficies reales de  $QP^m$  atendiendo a ciertos comportamientos de su tensor de Ricci.

En esta línea, en [Pe] se estudiaron las hipersuperficies reales de  $QP^m$  para las cuales su tensor de Ricci verifica la condición

$$(B) \quad SX = aX + b \sum_{k=1}^3 g(X, U_k) U_k,$$

conocidas como hipersuperficies reales pseudo-Einstein, y se clasificaron en el caso particular de ser  $U_k$  principales con la misma curvatura principal.

En esta memoria se introduce la condición,

$$(A) \quad SX = aX + b \sum_{k=1}^3 g(\lambda X, U_k) U_k,$$

denominando hipersuperficies reales casi-Einstein a aquellas hipersuperficies reales de  $QP^m$  cuyo tensor de Ricci verifica (A). Nótese que esta condición generaliza la condición (B) en el sentido de que cuando  $U_k$ ,  $k=1,2,3$  sean principales con la misma curvatura principal las dos coinciden.

En §1 se obtiene la clasificación de las hipersuperficies reales casi-Einstein de  $QP^m$ . Concretamente, se prueba:  
TEOREMA IV.1.3.- Sea  $M$  una hipersuperficie real conexa y casi-Einstein del espacio proyectivo cuaterniónico  $QP^m$ . Entonces  $M$  es una parte abierta de:

- i) Una hiperesfera geodésica, o de
- ii) Un tubo de radio  $r$  sobre  $QP^k$ ,  $0 < k < m-1$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{2}$  y  $\text{ctg}^2 r = \frac{4k+2}{4m-4k-2}$ , o de

iii) Un tubo de radio  $r$  sobre el espacio proyectivo complejo  $CP^m$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{4}$  ó  $\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$  con  $\operatorname{ctg}^2 2r = \frac{1}{m-1}$ .

En §2 se obtiene, así mismo, la clasificación de las hipersuperficies reales pseudo-Einstein de  $QP^m$ , completando la obtenida en [Pe]. Esto es,

TEOREMA IV.2.4.- Sea  $M$  una hipersuperficie real conexa del espacio proyectivo cuaterniónico  $QP^m$ ,  $m \geq 3$ . Entonces,  $M$  es pseudo-Einstein si y sólo si  $M$  es una parte abierta de

- i) Una hiperesfera geodésica, ó de
- ii) Un tubo de radio  $r$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{2}$ , sobre  $QP^k$ ,  $0 < k < m-1$ , con  $\operatorname{ctg}^2 r = \frac{4k+2}{4m-4k-2}$ .

Finalmente, como ninguna de las hipersuperficies reales que aparecen en las clasificaciones anteriores es Einstein, se concluye que no existen hipersuperficies reales Einstein en el espacio proyectivo cuaterniónico.

Deseo hacer constar mi más sincero agradecimiento a los Directores de esta memoria, Prof. F. García Santos y Prof. J.D. Pérez Jiménez, por su constante ayuda y estímulo durante la elaboración de la misma, así como al Prof. L. Esteban Carrasco, Director del Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada.

También desearía expresar mi agradecimiento al resto de los profesores de este Departamento por sus comentarios referentes a este trabajo.

# C A P I T U L O I

## SUBVARIEDADES REALES DE UNA VARIEDAD KAEHLERIANA CUATERNIÓNICA,-

En este capítulo se dan los conceptos necesarios y notaciones a seguir en el estudio de subvariedades de una variedad Kaehleriana cuaterniónica, que serán utilizados a lo largo de la presente memoria. También, atendiendo al comportamiento de la estructura cuaterniónica sobre el fibrado tangente a la subvariedad, se engloban los distintos tipos de subvariedades de una variedad Kaehleriana cuaterniónica, conocidos hasta ahora, en el concepto de subvariedad genérica. Estas inmersiones son, en cierto sentido, las más generales en este tipo de geometría. Finalmente, las inmersiones en una variedad Kaehleriana cuaterniónica son estudiadas atendiendo a su posible descomposición como una inmersión producto y a su segunda forma fundamental.

### §1. VARIEDADES KAEHLERIANAS CUATERNIONICAS. CONCEPTOS BASICOS.-

Sea  $Q$  el álgebra de los cuaternios. Sobre  $Q^m$  se considera el producto simpléctico usual definido por

$$(I.1.1) \quad \langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^m \bar{a}_i b_i$$

para cualesquiera  $a=(a_1, \dots, a_m)$ ,  $b=(b_1, \dots, b_m)$  en  $Q^m$  y siendo  $\bar{a}_i$  el conjugado cuaterniónico de  $a_i$ .

DEFINICION I.1.1, [I1]. Sea  $S_p(m)$  el grupo simpléctico ortogonal de orden  $m$ , esto es, el conjunto de matrices cuaterniónicas que dejan invariante el producto (I.1.1). Entonces, se dice que una variedad de Riemann  $(\bar{M}, g)$  es una variedad Kaeh-

leriana cuaterniónica si su grupo de holonomía es un subgrupo de  $Sp(1)Sp(m) = Sp(1) \times_{\mathbb{Z}_2} Sp(m)$ .

Ishihara en 1974, [I2], traduce esta definición a un lenguaje tensorial probando que  $(\bar{M}, g)^{(*)}$  es una variedad Kaehleriana cuaterniónica si sobre  $\bar{M}$  existe un fibrado vectorial  $\hat{V}$  3-dimensional de tensores de tipo (1.1) verificando que en todo entorno coordenado  $U$  de  $\bar{M}$  existe una base local de estructuras casi-Hermiticas  $\{J_1, J_2, J_3\}$  tal que,

$$(I.1.2) \quad \begin{aligned} (a) \quad & J_1 J_2 = -J_2 J_1 = J_3 \\ (b) \quad & \text{Para toda sección cruzada } \phi \text{ de } \hat{V}, \bar{\nabla}_X \phi \text{ es} \\ & \text{otra sección cruzada de } \hat{V}. \end{aligned}$$

donde  $X$  es un campo de vectores diferenciable sobre  $\bar{M}$  y  $\bar{\nabla}$  es la diferenciación covariante asociada a la conexión de Levi-Civita de  $(\bar{M}, g)$ .

La condición (b) en (I.1.2) es equivalente a

(b') Si  $\{J_1, J_2, J_3\}$  es una base local de estructuras casi-Hermiticas de  $\hat{V}$  sobre un abierto coordenado  $U$  de  $\bar{M}$ , se verifica,

$$(I.1.3) \quad \bar{\nabla}_X J_i = -p_j(X) J_k + p_k(X) J_j$$

para todo campo de vectores  $X$  sobre  $\bar{M}$  ( $X \in T\bar{M}$ ), siendo  $(i, j, k)$  una permutación cíclica de  $(1, 2, 3)$  y  $p_1, p_2, p_3$  1-formas locales sobre  $U$ .

De (I.1.2) se sigue fácilmente que dimensión de  $\bar{M}$  es un múltiplo de 4, esto es,  $\dim \bar{M} = 4m$ . A  $m$  se le llama dimensión cuaterniónica de  $\bar{M}$ . En la presente memoria se considerarán siempre variedades Kaehlerianas cuaterniónicas de dimensión

(\*) Todos los objetos considerados en esta memoria serán  $C^\infty$ -diferenciables.

cuaterniónica mayor o igual que dos.

De entre las propiedades más importantes de una variedad Kaehleriana cuaterniónica merecen ser destacadas las siguientes:

PROPOSICION I.1.2, [I2]. Sea  $\bar{M}$  una variedad kaehleriana cuaterniónica. Entonces  $\bar{M}$  es una variedad Einstein, esto es,

$$(I.1.4) \quad \bar{S}(X, Y) = \bar{\rho}g(X, Y),$$

para cualesquiera  $X, Y \in T\bar{M}$ , donde por  $\bar{S}$  se designa el tensor de Ricci de  $\bar{M}$  y  $4m\bar{\rho}$  es la curvatura escalar de  $\bar{M}$ .

PROPOSICION I.1.3, [I2]. Sea  $\bar{M}$  una variedad kaehleriana cuaterniónica y sea  $\bar{R}$  su tensor de curvatura Riemanniano. Entonces,

$$(I.1.5) \quad [\bar{R}(X, Y), J_i] = -C_j(X, Y)J_k + C_k(X, Y)J_j$$

donde

$$(I.1.6) \quad C_i(X, Y) = (dp_i + p_j \wedge p_k)(X, Y) = \frac{\bar{\rho}}{m+2} g(X, J_i Y),$$

para cualesquiera  $X, Y \in T\bar{M}$ , donde  $(i, j, k)$  es una permutación cíclica de  $(1, 2, 3)$ .

Sea  $X \in T\bar{M}$  un campo de vectores unitario sobre  $\bar{M}$ , se designa por  $Q(X)$  el 4-plano generado por  $X, J_1 X, J_2 X$  y  $J_3 X$ . A  $Q(X)$  se le denomina sección cuaterniónica generada por  $X$ . Dados  $X, Y \in T\bar{M}$  unitarios, se dice que el plano  $\pi(X, Y)$  generado por  $X$  e  $Y$  es cuaterniónico ( respectivamente, totalmente real ) si  $Q(X) = Q(Y)$ , ( respectivamente, si  $Q(X)$  es ortogonal a  $Q(Y)$  ). La curvatura seccional de un plano cuaterniónico ( respectivamente, de un plano totalmente real ) se denomina curvatura seccional cuaterniónica ( respectivamente, curvatura seccional totalmente real ) y se tiene la siguiente

PROPOSICION I.1.4, [I2]. Sea  $\bar{M}$  una variedad Kaehleriana cuaterniónica. Entonces  $\bar{M}$  tiene curvatura seccional cuaterniónica constante c si y sólo si su tensor curvatura de Riemann viene dado por

$$(I.1.7) \quad \bar{R}(X, Y)Z = \frac{c}{4} \{ g(Y, Z)X - g(X, Z)Y + \sum_{k=1}^3 (g(J_k Y, Z)J_k X - g(J_k X, Z)J_k Y + 2g(X, J_k Y)J_k Z) \},$$

para cualesquiera  $X, Y, Z \in T\bar{M}$ .

Finalmente, se hace mención de una propiedad obtenida en [PS2] acerca de la curvatura seccional,

PROPOSICION I.1.5, [PSU]. Sea  $\bar{M}$  una variedad Kaehleriana cuaterniónica . Entonces

$$(I.1.8) \quad \frac{\bar{R}(X, Y, Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y)} + \sum_{k=1}^3 \bar{R}(X, J_k Y, J_k Y, X) = \\ = \frac{\bar{p}}{m+2} + \frac{2\bar{p}}{m+2} \sum_{k=1}^3 g(X, J_k Y)^2,$$

para cualesquiera  $X, Y \in T\bar{M}$  ortogonales.

Para un estudio más detallado de las variedades Kaehlerianas cuaterniónicas así como para la construcción de los espacios modelos de esta geometría, esto es, las variedades Kaehlerianas cuaterniónicas de curvatura seccional cuaterniónica constante ver [Bo], [I1], [I2], [Mr], [S11], [S12], [Pe].

## §2. SUBVARIEDADES GENERICAS DE UNA VARIEDAD KAEHLERIANA CUATERNIONICA.-

En este epígrafe se estudia el comportamiento de la estructura cuaterniónica sobre el fibrado tangente de una subvariedad en una variedad Kaehleriana cuaterniónica. Atendiendo al mismo, se definen las subvariedades genéricas de una variedad Kaehleriana cuaterniónica y se dan algunas de las

propiedades verificadas por éstas.

Sea  $M$  una subvariedad<sup>(\*)</sup> de una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$ . Se designan por  $TM$  y  $T^\perp M$  los fibrados tangente y normal a  $M$  respectivamente, y por  $\nabla$ ,  $\nabla^\perp$ ,  $R$  y  $R^\perp$  la derivación covariante en  $TM$ , la derivación covariante en  $T^\perp M$ , el tensor de curvatura de Riemann correspondiente a  $\nabla$  y el tensor de curvatura de Riemann correspondiente a  $\nabla^\perp$ , respectivamente. Con estas notaciones, las fórmulas de Gauss y Weingarten vienen dadas, respectivamente, por

$$(I.2.1) \quad \begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + \sigma(X, Y) \\ \bar{\nabla}_X \xi &= -\Lambda_\xi X + \nabla_X^\perp \xi, \end{aligned}$$

para cualesquiera  $X, Y \in TM$ ,  $\xi \in T^\perp M$ , siendo  $\sigma$  la segunda forma fundamental de la inmersión y  $\Lambda_\xi$  el endomorfismo de Weingarten correspondiente a  $\xi$ .

Además, las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci están dadas, respectivamente, por

$$(I.2.2) \quad \bar{R}(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) + g(\sigma(X, Z), \sigma(Y, W)) - g(\sigma(X, W), \sigma(Y, Z)),$$

$$(I.2.3) \quad (\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = (\bar{\nabla}_X^\perp \sigma)(Y, Z) - (\bar{\nabla}_Y^\perp \sigma)(X, Z),$$

$$(I.2.4) \quad \bar{R}(X, Y, \xi, \eta) = R^\perp(X, Y, \xi, \eta) - g([\Lambda_\xi, \Lambda_\eta]X, Y),$$

para cualesquiera  $X, Y, Z, W \in TM$  y  $\xi, \eta \in T^\perp M$ , donde

$$(I.2.5) \quad (\bar{\nabla}_X^\perp \sigma)(Y, Z) = \nabla_X^\perp \sigma(Y, Z) - \sigma(\nabla_X Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z).$$

Es lógico pensar en estudiar las subvariedades de una variedad Kaehleriana cuaterniónica atendiendo al comportamiento de la estructura cuaterniónica sobre el fibrado tan-

---

(\*) Para los resultados generales acerca de subvariedades ver [Ch1],[Ch3].

gente de la subvariedad. En esta línea, numerosos autores han definido y estudiado diversos tipos de subvariedades los cuales quedan englobados en el concepto de subvariedad genérica (ver por ejemplo, [Ch2],[CH],[Fu1],[Fu2],[BCU] ).

DEFINICION I.2.2.- Sea  $M$  una subvariedad de una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$ . Se define el espacio tangente cuaterniónico a  $M$  en un punto  $x \in M$  como el subespacio  $D_x$  de  $T_x M$  dado por

$$(I.2.6) \quad D_x = T_x M \cap J_1(T_x M) \cap J_2(T_x M) \cap J_3(T_x M).$$

Los espacios tangentes holomorfos a  $M$  en  $x$ , se definen por

$$(I.2.7) \quad D_\phi(x) = T_x M \cap \phi(T_x M),$$

donde  $\phi$  es una sección cruzada de  $\hat{V}$ .

Se dice que  $M$  es una subvariedad genérica de  $\bar{M}$  si se verifican las siguientes condiciones

$$(I.2.8) \quad \begin{array}{l} 1.- D: x \longrightarrow D_x \text{ define una distribución sobre} \\ M. \end{array}$$

$$2.- D_\phi: x \longrightarrow D_\phi(x) \text{ define una distribución sobre } M \text{ para alguna sección cruzada } \phi \text{ de } \hat{V}.$$

A la distribución  $D$  se le denomina distribución cuaterniónica y a la distribución  $D_\phi$  distribución holomorfa.

PROPOSICION I.2.3.- Sea  $M$  una subvariedad genérica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$ . Entonces las distribuciones cuaterniónica y holomorfa son siempre diferenciables.

Demostración.- Se considera la suma de Whitney  $TM \oplus TM \oplus TM \oplus TM$ , que es un fibrado vectorial diferenciable sobre  $M$  y se define la aplicación diferenciable  $\psi$  de  $TM \oplus TM \oplus TM \oplus TM$  en



$T\bar{M} \oplus T\bar{M} \oplus T\bar{M}$  dada por  $\psi(X, Y_1, Y_2, Y_3) = (X - J_1 Y_1, X - J_2 Y_2, X - J_3 Y_3)$ . Entonces, calculando la diferencial de  $\psi$  en un punto  $q$  de  $\psi^{-1}(0, 0, 0)$ , se tiene que, por ser  $M$  genérica, el rango de  $\psi$  en  $q$  es constante. En consecuencia, mediante el uso del Teorema de la función implícita, se deduce que  $\text{Ker}\psi$  es una subvariedad de  $TM \oplus TM \oplus TM \oplus TM$  y por tanto una variedad diferenciable.

Sea  $\pi_1: TM \oplus TM \oplus TM \oplus TM \longrightarrow TM$  la primera proyección dada por  $\pi_1(X, Y_1, Y_2, Y_3) = X$ . Entonces  $\pi_1$  restringido al  $\text{Ker}\psi$  es inyectiva y como  $D = \pi_1(\text{Ker}\psi)$  se concluye que  $D$  es una distribución diferenciable sobre  $M$ .

Análogamente, se define  $\psi_\phi: TM \oplus TM \longrightarrow T\bar{M}$  por  $\psi_\phi(X, Y) = X - \phi Y$ , entonces, de forma análoga a lo anterior, se obtiene que  $\text{Ker}\psi_\phi$  es una subvariedad de  $TM \oplus TM$  y como  $\pi'_1(\text{Ker}\psi_\phi) = D_\phi$ , donde  $\pi'_1$  es la proyección de  $TM \oplus TM$  en  $TM$  dada por  $\pi'_1(X, Y) = X$ , se deduce que también  $D_\phi$  es una distribución diferenciable sobre  $M$ , lo que concluye la demostración.

Como consecuencia de esta Proposición se obtiene fácilmente que, en cierto sentido, las subvariedades genéricas son las más generales de las subvariedades de una variedad Kaehleriana cuaterniónica. Concretamente, se tiene:

PROPOSICION I.2.4.- Toda subvariedad real  $M$  de una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$  es la clausura de la unión de algunas subvariedades abiertas de  $M$  que son genéricas en  $\bar{M}$ .

De entre todas las subvariedades genéricas de una variedad Kaehleriana cuaterniónica se van a destacar los siguientes tipos:

DEFINICION I.2.5.- Sea  $M$  una subvariedad genérica de una va-

riedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$ . Se dice que  $M$  es una subvariedad

- a) Cuaterniónica de  $\bar{M}$  si se verifica que  $D=TM$ ,
- b) Puramente real de  $\bar{M}$  si se verifica que  $D=D_\phi=\{0\}$ ,
- c) Puramente compleja de  $\bar{M}$  si se verifica que  $D=\{0\}$  y  $D_\phi=TM$ ,
- d) q-genérica de  $\bar{M}$  si se verifica que  $D=D_\phi$ .

Se dice que una subvariedad genérica  $M$  es propia si no es ni cuaterniónica ni puramente real ni puramente compleja.

Las subvariedades cuaterniónicas de una variedad Kaehleriana han sido estudiadas por varios autores entre los que se pueden destacar a B.Y. Chen y A. Gray ([Ch2],[G]). En esta línea, merece ser destacado el siguiente resultado:

TEOREMA I.2.6, [G].- Toda subvariedad cuaterniónica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica es totalmente geodésica, esto es,  $\sigma = 0$ .

Sin embargo, el resto de los distintos tipos de subvariedades descritos en la Definición I.2.5 han sido estudiados, hasta ahora, en algunos casos particulares que a continuación se describen:

DEFINICION I.2.7.- Sea  $M$  una subvariedad de una variedad Kaehleriana cuaterniónica. Se dice que  $M$  es una subvariedad

- (A) Totalmente real de  $\bar{M}$  si  $M$  es puramente real y se verifica que  $J_k(TM) \subset T^\perp M$  para todo  $k=1,2,3$  ([CH]),
- (B) Totalmente compleja de  $\bar{M}$  si  $M$  es puramente compleja y se verifica que existe una estructura casi-Hermítica  $\phi \in \text{Sec}\hat{V}$  tal que:

B.1.-  $\bar{\nabla}_X \phi = 0$ , para todo  $X$  de  $TM$ , y

B.2.-  $\psi(TM) \subseteq T^\perp M$  para todo  $\psi \in \text{Sec } \hat{V}$ ,  $\psi$  ortogonal a  $\phi$ , ([Fu2]).

(C) CR-subvariedad cuaterniónica de  $\bar{M}$  si  $M$  es  $q$ -genérica y se verifica que  $J_k(D^\perp) \subseteq T^\perp M$ , para todo  $k=1,2,3$ , ([BCU]).

A continuación se va a estudiar el comportamiento de la estructura cuaterniónica sobre las distintas distribuciones de una subvariedad genérica en una variedad Kaehleriana cuaterniónica.

En general, si  $M$  es una subvariedad de una variedad kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$ , para todo  $X \in TM$ ,  $\xi \in T^\perp M$ ,  $J_k X$  y  $J_k \xi$  se pueden descomponer en la forma:

$$(I.2.9) \quad \begin{aligned} J_k X &= P_k X + F_k X, \\ J_k \xi &= t_x \xi + f_k \xi, \end{aligned} \quad k=1,2,3$$

donde por  $P_k X$ ,  $t_x \xi$  (respectivamente, por  $F_k X$ ,  $f_k \xi$ ) se designan las componentes tangenciales ( respectivamente, normales) de  $J_k X$  y  $J_k \xi$ ,  $k=1,2,3$ .

Sea  $M$  una subvariedad genérica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$ . Sin pérdida de generalidad se puede suponer que la distribución holomorfa integrable es  $D_1 = D_{J_1}$ . Entonces, por la Proposición I.2.3 se tiene que si para todo  $x \in M$ ,  $\Gamma(x)$  designa al complemento ortogonal de  $D_x$  en  $D_1(x)$ ,  $\Gamma: x \longrightarrow \Gamma(x)$  define una distribución diferenciable sobre  $M$  y además con las notaciones anteriores se tiene:

$$TM = D \oplus \Gamma \oplus D_1^\perp \quad \text{y} \quad D^\perp = \Gamma \oplus D_1^\perp.$$

Por otra parte, si para todo  $x \in M$ ,  $v_x$  designa el subespa-

cio de  $T_x^{\dot{M}}$  dado por

$$(I.2.10) \quad v_x = T_x^{\dot{M}} \cap J_1(T_x^{\dot{M}}) \cap J_2(T_x^{\dot{M}}) \cap J_3(T_x^{\dot{M}}),$$

se tiene que

$$(I.2.11) \quad T_x^{\dot{M}} = FD_x^{\dot{M}} \oplus v_x,$$

donde por  $FD_x^{\dot{M}}$  se designa  $F_1 D_x^{\dot{M}} + F_2 D_x^{\dot{M}} + F_3 D_x^{\dot{M}}$ , para todo  $x \in M$ .

Como consecuencia inmediata de (I.2.9) y de las definiciones anteriores se tiene que:

LEMA I.2.8.- Sea M una subvariedad genérica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$ . Entonces,

i)  $g(D_x, \Gamma(x)) = g(D_1^{\dot{M}}(x), \Gamma(x)) = g(D_x, D_1^{\dot{M}}(x)) = g(D_x, D_x^{\dot{M}}) = 0$ ,  
para todo  $x \in M$ .

ii)  $P_k D^{\dot{M}} \subseteq D^{\dot{M}}$ ,  $k=1,2,3$ .

iii)  $P_1 D_1^{\dot{M}} \subseteq D_1^{\dot{M}}$ .

iv)  $t_1(T_x^{\dot{M}}) \subseteq D_1^{\dot{M}}(x)$ , para todo  $x \in M$ .

v)  $g(FD_x^{\dot{M}}, v_x) = 0$ , para todo  $x \in M$ .

vi)  $t_1(T_x^{\dot{M}}) + t_2(T_x^{\dot{M}}) + t_3(T_x^{\dot{M}}) = D_x^{\dot{M}}$ , para todo  $x \in M$ .

Además se tienen los siguientes resultados:

LEMA I.2.9.- Sea M una subvariedad genérica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$ . Entonces:

$$(I.2.12) \quad g(\sigma(J_k X, U), \xi) = g(J_k \sigma(X, U), \xi), \quad k=1,2,3,$$

para todo  $X \in D, \xi \in v$  y  $U \in TM$ .

Demostración.- Por las definiciones de  $D$  y  $v$ , y teniendo en cuenta (I.1.3) y (I.2.1) se tiene:

$$\begin{aligned} g(\sigma(J_k X, U), \xi) &= g(\bar{\nabla}_U J_k X, \xi) = g(J_k \bar{\nabla}_U X, \xi) = \\ &= -g(\bar{\nabla}_U X, J_k \xi) = g(J_k \sigma(X, U), \xi), \end{aligned}$$

para todo  $k=1,2,3$ , lo que prueba el lema.

LEMA I.2.10.- Sea M una subvariedad genérica de una variedad

Kaehleriana cuaterniónica. Entonces,

$$(I.2.13) \quad \sigma(D, D) \subseteq F D^\perp.$$

Demostración.- Del Lema I.2.9 y teniendo en cuenta (I.2.2), se deduce:

$$\begin{aligned} g(\sigma(J_1 X, J_2 Y), \xi) &= g(J_1 J_2 \sigma(X, Y), \xi) = \\ &= -g(J_2 J_1 \sigma(X, Y), \xi) = -g(\sigma(J_1 X, J_2 Y), \xi), \end{aligned}$$

para cualesquiera  $X, Y \in D, \xi \in v$ . Luego  $g(\sigma(D, D), v) = 0$  y se concluye la demostración.

### §3. INTEGRABILIDAD DE LAS DISTRIBUCIONES DE UNA SUBVARIEDAD GENERICA. PRODUCTOS GENERICOS.-

En este epígrafe se estudian condiciones sobre la integrabilidad de las distribuciones de una subvariedad genérica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica. Además, definiendo el concepto de producto genérico se dan obstrucciones a la existencia de inmersiones producto en una variedad Kaehleriana cuaterniónica en función de la curvatura escalar de la variedad ambiente.

LEMA I.3.1.- Sea  $M$  una subvariedad genérica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) La distribución cuaterniónica es integrable.
- b) La distribución cuaterniónica es integrable y sus hojas son totalmente geodésicas en  $\bar{M}$ .
- c)  $\sigma(D, D) = \{0\}$ .

Demostración.- De la definición de  $D$ , se sigue,  $D$  es integrable si y sólo si  $F_k[X, Y] = 0$  para cualesquiera  $X, Y \in D$ ,  $k=1, 2, 3$ . En consecuencia, si  $\sigma(D, D) = \{0\}$ , de (I.1.3) y (I.2.1)



se tiene:

$$\begin{aligned} g(F_k[X, Y], \xi) &= g(J_k(\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X), \xi) = g(\bar{\nabla}_X J_k Y, \xi) - \\ &\quad - g(\bar{\nabla}_Y J_k X, \xi) = g(\sigma(X, J_k Y), \xi) - g(\sigma(J_k X, Y), \xi) \\ &= 0, \quad k=1, 2, 3, \end{aligned}$$

para cualesquiera  $X, Y \in D, \xi \in T^{\perp} M$ , lo cual demuestra que c) implica a).

Del Teorema I.2.5 se deduce fácilmente que a) implica b). Finalmente, b) implica c) es inmediato.

LEMA I.3.2.- Sea M una subvariedad genérica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$ . Entonces  $D^{\perp}$  es integrable si y sólo si se verifica:

$$(I.3.1) \quad \nabla_Z P_k W - \nabla_W P_k Z + \Lambda_{F_k} Z W - \Lambda_{F_k} W Z \in D^{\perp}, \quad k=1, 2, 3,$$

para cualesquiera  $Z, W \in D^{\perp}$ .

Demostración.- De la definición de  $D^{\perp}$  se tiene que  $D^{\perp}$  es integrable si y sólo si  $g([Z, W], J_k X) = 0$  para todo  $X \in D$ . En consecuencia, de (I.1.3), (I.2.1) y (I.2.10),  $D^{\perp}$  es integrable si y sólo si

$$\begin{aligned} 0 &= g([Z, W], J_k X) = g(\bar{\nabla}_Z W, J_k X) - g(\bar{\nabla}_W Z, J_k X) = \\ &= g(\bar{\nabla}_W J_k Z, X) - g(\bar{\nabla}_Z J_k W, X) = g(\nabla_W P_k Z, X) - \\ &\quad - g(\nabla_Z P_k W, X) + g(\Lambda_{F_k} W Z, X) - g(\Lambda_{F_k} Z W, X), \end{aligned}$$

para todo  $k=1, 2, 3$  y para cualesquiera  $Z, W \in D^{\perp}$  y  $X \in D$ , lo que concluye la demostración.

Como consecuencia de este Lema se deduce de forma inmediata:

COROLARIO I.3.3.- Sea M una CR-subvariedad cuaterniónica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica. Entonces  $D^{\perp}$  es siempre integrable.

Nota. - El Corolario I.3.3 ha sido también probado en [BCU].

De forma totalmente análoga a la demostración de los Lemas I.3.1 y I.3.2 puede probarse, ver [MPS2]

LEMA I.3.4.- Sea M una subvariedad genérica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$ . Entonces,

i) La distribución  $D_1$  es integrable si y sólo si se verifica:

$$(I.3.2) \quad \sigma(X, J_1 Y) - \sigma(Y, J_1 X) = p_3(X)F_2 Y - p_2(X)F_3 Y - \\ - p_3(Y)F_2 X + p_2(Y)F_3 X,$$

para cualesquiera  $X, Y \in D_1$ .

ii) La distribución  $D_1^\perp$  es integrable si y sólo si se verifica:

$$(I.3.3) \quad \nabla_Z P_1 W - \Lambda_{F_1} W Z + \Lambda_{F_1} Z W - \nabla_W P_1 Z - p_3(Z)P_2 W + \\ + p_2(Z)P_3 W + p_3(W)P_2 Z - p_2(W)P_3 Z \in D_1^\perp,$$

para cualesquiera  $Z, W \in D_1^\perp$ .

DEFINICION I.3.5.- Sea M una subvariedad genérica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$ . Se dice que M es un producto genérico si las distribuciones  $D$  y  $D^\perp$  son integrables con hojas totalmente geodésicas en M.

En la línea de poder obtener resultados acerca de los productos genéricos, mediante la utilización de (I.1.3), (I.2.1) y (I.2.10) se puede deducir fácilmente el siguiente resultado, ver [MPS2]

PROPOSICION I.3.6.- Sea M una subvariedad genérica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$ . Entonces,

i) Si la distribución  $D^\perp$  es integrable con hojas totalmente geodésicas en M, se verifica:

$$(I.3.4) \quad g(\sigma(D, D^\perp), F_k D^\perp) = 0, \quad k=1,2,3.$$

ii) Si la distribución  $D_1$  es integrable con hojas totalmente geodésicas en  $M$ , se verifica:

$$(I.3.5) \quad \begin{aligned} g(\sigma(D, D_1), F_1 D_1) &= 0, \\ g(\sigma(X, Y), J_1 Z) &= p_3(X)g(P_2 Y, Z) - p_2(X)g(P_3 Y, Z) \end{aligned}$$

para cualesquiera  $X, Y \in D_1$  y  $Z \in D_1^\perp$ .

iii) Si la distribución  $D_1^\perp$  es integrable con hojas totalmente geodésicas en  $M$ , se verifica:

$$(I.3.6) \quad \begin{aligned} g(\sigma(X, Z), F_1 W) &= -p_3(Z)g(P_2 W, X) + p_2(Z)g(P_3 W, X) \\ g(\sigma(D, D_1^\perp), F_1 D_1^\perp) &= 0 \end{aligned}$$

para cualesquiera  $X \in D_1$ ,  $Z, W \in D_1^\perp$ .

COROLARIO I.3.7, [BCU].- Sea  $M$  una CR-subvariedad cuaterniónica de una variedad kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$ . Entonces  $D^\perp$  es integrable con hojas totalmente geodésicas en  $M$  si y sólo si se verifica (I.3.4).

Obsérvese que la existencia de productos genéricos en una variedad Kaehleriana cuaterniónica está asegurada mediante la inmersión de  $Q^p \times C^q \times R^h$  en  $Q^{p+q+h}$ , sin embargo, y aunque aparentemente estas subvariedades serían las de más fácil estudio pues sus distribuciones son integrables con hojas totalmente geodésicas, cuando el espacio ambiente es el espacio proyectivo cuaterniónico, la no existencia de un embebimiento análogo al de Segre, dificulta la obtención de ejemplos en este espacio.

TEOREMA I.3.8.- Sea  $M$  una subvariedad genérica con distribución cuaterniónica no nula de una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$  con curvatura escalar  $\bar{\rho}$ . Entonces.



- i) Si M es un producto genérico con  $D \neq D_1$ , entonces  $\bar{\rho}=0$ .  
 ii) Si M es un producto genérico con  $D = D_1$ , entonces  $\bar{\rho} \geq 0$  y además  $\|\sigma\|^2 \geq \frac{2hp\bar{\rho}}{m+2}$ , donde h es la dimensión cuaterniónica de D y p la dimensión de  $D^\perp$ .

Demostración.- De ser M un producto genérico se sigue que D y  $D^\perp$  son integrables con hojas totalmente geodésicas en M. Así, de la ecuación de Gauss y del Lema I.3.1 se tiene,

$$(I.3.7) \quad \bar{R}(X, Z, Z, X) = \|\sigma(X, Z)\|^2,$$

para todo  $X \in D$  y  $Z \in D^\perp$ .

Ahora bien, (I.3.7) y la Proposición I.1.5 implican que

$$(I.3.8) \quad \frac{\bar{\rho}}{m+2} = \|\sigma(X, Z)\|^2$$

para todo  $X \in D$  y  $Z \in D^\perp$  unitarios.

Por otra parte, de la Proposición I.3.6 se deduce:

$$(I.3.9) \quad g(\sigma(D, D_1), F_k D^\perp) = 0$$

$$(I.3.10) \quad g(\sigma(D, D_1^\perp), F_k D^\perp) = 0$$

para todo  $k=1, 2, 3$ .

CASO I.- Si  $D \neq D_1$ , entonces de (I.3.8) y (I.3.9) se obtiene que  $\frac{\bar{\rho}}{m+2} = \|\sigma(X, W)\|^2$  y  $\sigma(X, W) \in \nu$  para cualesquiera  $X \in D$  y  $W \in \Gamma$  unitarios. Además, de (I.1.3), (I.2.1) y como  $\sigma(X, W) \in \nu$ , se deduce,

$$\sigma(X, J_1 W) = J_1 \sigma(X, W) \text{ y } \sigma(J_k X, W) = J_k \sigma(X, W)$$

para todo  $k=1, 2, 3$  y para cualesquiera  $X \in D$  y  $W \in \Gamma$  unitarios.

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \sigma(X, W) &= \sigma(J_2^2 X, J_1^2 W) = J_2 J_1 \sigma(J_2 X, J_1 W) = \\ &= -J_1 J_2 \sigma(J_2 X, J_1 W) = -\sigma(X, W), \end{aligned}$$

de donde  $\sigma(X, W)=0$ , para todo  $X \in D$  y  $W \in \Gamma$  unitarios, que junto con (I.3.8) prueba i).

CASO II.- Si  $D = D_1$ , entonces de (I.3.8),  $\bar{\rho} \geq 0$ . Para demostrar que  $\|\sigma\|^2 \geq \frac{2hp\bar{\rho}}{m+2}$  basta aplicar la definición de  $\|\sigma\|^2$  y tener en cuenta (I.3.8).

Nota.- El Teorema I.3.8 generaliza los resultados obtenidos por M.Barros, B.Y. Chen y F. Urbano en [BCU] para CR-productos cuaterniónicos.

También hay que resaltar la importancia del apartado i) del Teorema anterior, pues como consecuencia del mismo se obtiene, por ejemplo, que el producto Riemanniano del espacio proyectivo cuaterniónico y del espacio proyectivo complejo no puede embeberse en el espacio proyectivo cuaterniónico.

Para concluir este epígrafe se resalta que la demostración del Teorema I.3.8 permite refinar el caso i) del mismo en el siguiente sentido:

COROLARIO I.3.9.- Sea M un producto genérico en una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$ . Si  $\{0\} \neq D$  y  $D \neq D_k$  para algún  $k=1,2,3$ , entonces  $\bar{\rho}=0$ .

#### §4. SOBRE LA SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL DE UNA SUBVARIEDAD EN UNA VARIEDAD KAEHLERIANA CUATERNIONICA.-

En este epígrafe se estudian las subvariedades totalmente umbilicales de una variedad Kaehleriana cuaterniónica y se calcula el módulo de la derivada de la segunda forma fundamental de una subvariedad en una variedad Kaehleriana cuaterniónica de curvatura seccional cuaterniónica constante, dando una cota del mismo para CR-subvariedades cuaterniónicas e hipersuperficies reales.

DEFINICION I.4.1.- Sea M una subvariedad n-dimensional de una

variedad de Riemann  $\bar{M}$ , se dice que  $M$  es una subvariedad totalmente umbilical en  $\bar{M}$  si se verifica que

$$\sigma(X, Y) = g(X, Y)H,$$

para cualesquiera  $X, Y \in TM$  y donde por  $H$  se designa el vector curvatura media de la inmersión, esto es,

$$H = \text{traza } \sigma.$$

Como consecuencia de (I.2.2) y (I.2.3), las ecuaciones de Gauss y Codazzi de una subvariedad totalmente umbilical,  $M$ , en una variedad de Riemann  $\bar{M}$  vienen dadas, respectivamente, por:

$$(I.4.1) \quad \bar{R}(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) + \alpha^2 \{g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z)\},$$

$$(I.4.2) \quad (\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = g(Y, Z)\nabla_X^\perp H - g(X, Z)\nabla_Y^\perp H,$$

para cualesquiera  $X, Y, Z, W \in TM$ , donde  $\alpha = \|H\|$ .

Las subvariedades totalmente umbilicales de una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$  han sido clasificadas para el caso particular de que  $\bar{M}$  sea una variedad Kaehleriana cuaterniónica con curvatura seccional cuaterniónica constante no nula. Concretamente, B.Y. Chen probó el siguiente resultado: **TEOREMA I.4.2, [Ch2].-** Sea  $M$  una subvariedad  $n$ -dimensional ( $n > 4$ ) totalmente umbilical de una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}(c)$  de curvatura seccional cuaterniónica constante  $c$ ,  $c \neq 0$ . Entonces  $M$  es una de las siguientes subvariedades:

- i) Una subvariedad cuaterniónica, o bien
- ii) Una subvariedad totalmente real y totalmente geodésica de  $\bar{M}(c)$ , o bien
- iii) Una subvariedad totalmente compleja y totalmente geodésica de  $\bar{M}(c)$ , o bien

iv) Un espacio de curvatura constante inmerso en  $\bar{M}(c)$  como una subvariedad totalmente real con vector curvatura media paralelo.

Para el caso general en que  $\bar{M}$  sea una variedad Kaehleriana cuaterniónica se tienen los siguientes resultados:

LEMA I.4.3.- Sea M una subvariedad genérica totalmente umbilical de una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$ . Entonces:

- i) La distribución  $D^\perp$  es integrable con hojas totalmente geodésicas en M.
- ii) Si la distribución cuaterniónica es no nula se verifica que  $H \in FD^\perp$ .
- iii)  $\nabla_X^\perp H = 0$ , para todo  $X \in D$ .

Demostración.- De (I.1.3), de las fórmulas de Gauss y Weingarten y de la Definición I.4.1 se deduce,

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z t_k \xi, X) &= g(\bar{\nabla}_Z t_k \xi, X) = g(\bar{\nabla}_Z J_k \xi, X) - g(\bar{\nabla}_Z f_k \xi, X) = \\ &= -g(\bar{\nabla}_Z \xi, J_k X) - g(\bar{\nabla}_Z f_k \xi, X) = g(\Lambda_\xi Z, J_k X) + g(\Lambda_{f_k \xi} Z, X) = 0 \end{aligned}$$

para todo  $k=1,2,3$  y para cualesquiera  $X \in D$ ,  $Z \in D^\perp$  y  $\xi \in T^\perp M$ , que junto con el apartado vi) del Lema I.2.7 demuestra i).

ii) se sigue fácilmente de i) y del Lema I.2.9.

Finalmente, de (I.1.5) y (I.4.2) se tiene,

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{R}(J_1 X, J_2 X, J_3 X, \xi) = \bar{R}(J_3 X, \xi, J_1 X, J_2 X) = -\bar{R}(J_3 X, \xi, X, J_3 X) = \\ &= -\bar{R}(X, J_3 X, J_3 X, \xi) = -g(\nabla_X^\perp H, \xi), \end{aligned}$$

para todo  $X \in D$  unitario y  $\xi \in T^\perp M$ , con lo cual se concluye la demostración.

TEOREMA I.4.4.- Sea M una subvariedad genérica totalmente umbilical de una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$  con tensor de Ricci no nulo. Entonces  $D = \{0\}$  o bien  $D^\perp = \{0\}$ .

Demostración.- Si se supone que  $D \neq \{0\}$  y  $D^\perp \neq \{0\}$  y si  $X \in D$   $Z \in D^\perp$  son dos campos de vectores unitarios, de (I.1.5), (I.2.9) y (I.4.2) se sigue,

$$(I.4.3) \quad 0 = \bar{R}(J_k X, Z, X, F_k Z) = \bar{R}(X, F_k Z, J_k Z, X) = \\ = \bar{R}(X, F_k Z, P_k Z, X) + \bar{R}(X, F_k Z, F_k Z, X) = \\ = g(\nabla_{P_k Z}^\perp H, F_k Z) + \bar{R}(X, F_k Z, F_k Z, X),$$

y

$$(I.4.4) \quad \bar{R}(J_k X, Z, Z, J_k X) = \bar{R}(J_k X, Z, X, J_k Z) = \\ = \bar{R}(X, P_k Z, P_k Z, X) - \bar{R}(X, P_k Z, X, F_k Z) = \\ = \bar{R}(X, P_k Z, P_k Z, X) + g(\nabla_{P_k Z}^\perp H, F_k Z)$$

para todo  $k=1,2,3$ . Así, de (I.4.3) y (I.4.4), despejando  $g(\nabla_{P_k Z}^\perp H, F_k Z)$ , se obtiene,

$$(I.4.5) \quad \bar{R}(J_k X, Z, Z, J_k X) - \bar{R}(X, P_k Z, P_k Z, X) = -\bar{R}(X, F_k Z, F_k Z, X)$$

para todo  $k=1,2,3$ . Sustituyendo en (I.4.5)  $X$  por  $J_1 X, J_2 X$  y  $J_3 X$  se obtiene,

$$(I.4.6) \quad \bar{R}(J_s X, Z, Z, J_s X) - \bar{R}(J_1 X, P_k Z, P_k Z, J_1 X) = \\ = -\bar{R}(J_1 X, F_k Z, F_k Z, J_1 X)$$

donde  $J_s = J_k J_1$ ,  $k, 1=1,2,3$ .

Fijando  $k$  y sumando en 1 (I.4.5) y (I.4.6) se sigue, de la Proposición I.1.5, que

$$\frac{\bar{\rho}}{m+2} - \|P_k Z\|^2 \frac{\bar{\rho}}{m+2} = -\|F_k Z\|^2 \frac{\bar{\rho}}{m+2},$$

y por ser  $1 = \|P_k Z\|^2 + \|F_k Z\|^2$ ,  $k=1,2,3$ , se deduce

$$2\|F_k Z\|^2 \frac{\bar{\rho}}{m+2} = 0$$

de donde, como  $\bar{\rho} \neq 0$ , se obtiene  $F_k Z = 0$  para todo  $k=1,2,3$  lo cual es una contradicción. Así,  $D = \{0\}$  o bien  $D^\perp = \{0\}$  y se concluye la demostración.

COROLARIO I.4.5.- Sea  $M$  una subvariedad  $n$ -dimensional totalmente umbilical de una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$  con curvatura escalar no nula. Si  $n > 3m$ , donde  $m$  es la dimensión cuaterniónica de  $\bar{M}$ , entonces  $M$  es una subvariedad cuaterniónica y por tanto totalmente geodésica.

Demostración.- Por la Proposición I.2.4,  $M$  es la clausura de la unión de algunas subvariedades abiertas  $M_i$  de  $M$  que son genéricas en  $\bar{M}$ . Además, cada  $M_i$  es totalmente umbilical y como  $\dim M_i > 3m$ , la distribución cuaterniónica de  $M_i$  ha de ser no nula. En consecuencia, por el Teorema I.4.4,  $M_i$  ha de ser una subvariedad cuaterniónica y por tanto totalmente geodésica. El resultado se sigue entonces por continuidad.

Como consecuencia del Corolario I.4.5 se obtiene el siguiente:

COROLARIO I.4.6.- No existen hipersuperficies reales totalmente umbilicales en una variedad Kaehleriana cuaterniónica con curvatura escalar no nula.

Nota.- El Corolario I.4.6 ha sido también obtenido por C.S. Houh, [H1], por un camino diferente. No obstante los resultados aquí obtenidos, son más generales ya que, por ejemplo, el Corolario I.4.5 prueba también la no existencia de subvariedades totalmente umbilicales de codimensión dos en variedades Kaehlerianas cuaterniónicas de dimensión cuaterniónica mayor que dos y con curvatura escalar no nula.

A continuación se pasa a estudiar el comportamiento de la derivada de la segunda forma fundamental de una inmersión en una variedad Kaehleriana cuaterniónica de curvatura sec-

cional cuaterniónica constante.

Sea  $M$  una subvariedad de una variedad Kaehleriana cuaterniónica,  $\bar{M}(c)$ , de curvatura seccional cuaterniónica constante  $c$ , y sea  $\sigma$  la segunda forma fundamental de la inmersión, se designa por  $\nabla'\sigma$  el tensor dado por

$$(I.4.7) \quad \nabla'\sigma(X, Y, Z) = (\bar{\nabla}_X \sigma)(Y, Z),$$

para cualesquiera  $X, Y, Z \in TM$ .

Es fácil ver de (I.1.7) que si  $M$  es una subvariedad paralela, esto es  $\nabla'\sigma=0$ , de una variedad Kaehleriana cuaterniónica,  $\bar{M}(c)$ , de curvatura seccional cuaterniónica constante no nula, entonces  $M$  ha de ser o una subvariedad cuaterniónica o una subvariedad totalmente real o una subvariedad totalmente compleja. Este tipo de subvariedades han sido, recientemente, clasificadas por K. Tsukada, [Ts]. Una debilitación de las mismas son las siguientes:

DEFINICION I.4.7.- Sea  $M$  una subvariedad de una variedad de Riemann,  $\bar{M}$ , se dice que  $M$  es cíclica paralela si se verifica que  $\nabla'\sigma(X, X, X)=0$  para todo  $X \in TM$ . Esto es, si y sólo si todas las geodésicas de  $M$  tienen primera curvatura constante.

LEMA I.4.8.- Sea  $M$  una subvariedad de una variedad Kaehleriana cuaterniónica con curvatura seccional cuaterniónica constante  $\bar{M}(c)$ . Entonces  $M$  es cíclica paralela si y sólo si se verifica:

$$(I.4.8) \quad \nabla'\sigma(X, Y, Z) = \frac{c}{4} \sum_{k=1}^3 \{g(X, P_k Y) F_k Z + g(X, P_k Z) F_k Y\},$$

para cualesquiera  $X, Y, Z \in TM$ .

Demostración.- Se supone que  $M$  es cíclica paralela. Entonces de la Definición I.4.7 se tiene

$$\mathcal{C}_{X,Y,Z} \nabla' \sigma(X,Y,Z) = 0,$$

para cualesquiera  $X, Y, Z \in TM$  y donde  $\mathcal{C}$  designa la suma cíclica. En consecuencia, por la ecuación de Codazzi y (I.1.7) se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla' \sigma(X, Y, Z) + \nabla' \sigma(Y, Z, X) + \nabla' \sigma(Z, X, Y) = \\ &= 3 \nabla' \sigma(X, Y, Z) + (\bar{R}(Y, X)Z)^{\perp} + (\bar{R}(Z, X)Y)^{\perp} = \\ &= 3 \nabla' \sigma(X, Y, Z) + \frac{c}{4} \sum_{k=1}^3 \{g(P_k X, Z) F_k Y - g(P_k Y, Z) F_k X + \\ &+ 2g(Y, P_k X) F_k Z + g(P_k X, Y) F_k Z - g(P_k Z, Y) F_k X + \\ &+ 2g(Z, P_k X) F_k Y\} = 3 \nabla' \sigma(X, Y, Z) + \\ &+ \frac{c}{4} \sum_{k=1}^3 \{3g(P_k X, Z) F_k Y + 3g(Y, P_k Z) F_k X\}, \end{aligned}$$

para cualesquiera  $X, Y, Z \in TM$ , lo que prueba (I.4.8).

El recíproco es evidente.

Sea por tanto,  $M$  una subvariedad de una variedad Kaehleriana cuaterniónica con curvatura seccional cuaterniónica constante  $\bar{M}(c)$ . Sobre  $M$  se define el siguiente tensor simétrico:

$$(I.4.9) \quad T(X, Y, Z) = \nabla' \sigma(X, Y, Z) - \frac{c}{4} \sum_{k=1}^3 \{g(X, P_k Z) F_k Y + g(X, P_k Y) F_k Z\},$$

para cualesquiera  $X, Y, Z \in TM$ . Entonces del Lema I.4.8 se tiene que  $M$  es cíclica paralela si y sólo si  $T=0$ . Además el módulo de  $\nabla' \sigma$  viene dado por:

TEOREMA I.4.9.- Sea  $M$  una subvariedad de una variedad Kaehleriana cuaterniónica de curvatura seccional cuaterniónica constante,  $\bar{M}(c)$ . Entonces,

$$(I.4.10) \quad \|\nabla' \sigma\|_x^2 = \|T\|_x^2 + \frac{c^2}{8} \sum_{k=1}^3 \|P_k\|^2 \|F_k\|^2 +$$



$$+ \frac{6c^2}{8} \text{traza } P_1 P_2 P_3 - \frac{c^2}{8} \sum_{k=1}^3 \sum_{\alpha=1}^p g((P_k^2 + P_k^4) Z_\alpha, Z_\alpha) -$$

$$- \frac{c^2}{8} \left\{ \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^3 \left( \sum_{\alpha=1}^p g(P_k P_l Z_\alpha, Z_\alpha) \right)^2 + \sum_{\alpha=1}^p g((P_k P_l)^2 Z_\alpha, Z_\alpha) \right\},$$

para todo  $x \in M$ , donde  $\{Z_1, \dots, Z_p\}$  es una base ortonormal del subespacio ortogonal a  $D_x$  en  $T_x M$ ,  $D_x^\perp$ .

Demostración.- Sea  $\{X_1, \dots, X_{4q}\}$  una base de  $D_x$ , se supone que  $i, j, h \in \{1, \dots, 4q\}$  son subíndices de los elementos de  $D_x$  y que  $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, \dots, p\}$  lo son de los elementos de  $D_x^\perp$ .

Designando por  $T_{ij\alpha}$  el correspondiente valor de  $T$  sobre los elementos de la base  $\{X_1, \dots, X_{4q}, Z_1, \dots, Z_p\}$  de  $T_x M$  y por  $T_{ij\alpha}^2 = g(T_{ij\alpha}, T_{ij\alpha})$ , y usando notaciones análogas para  $(\nabla'\sigma)_{ij\alpha}$  y  $(\nabla'\sigma)_{ij\alpha}^2$ , entonces de (I.4.9) y las definiciones de  $D_x$  y  $D_x^\perp$  se deduce.

$$(I.4.11) \quad \begin{aligned} T_{ijh}^2 &= (\nabla'\sigma)_{ijh}^2 \\ T_{\alpha ij}^2 &= (\nabla'\sigma)_{\alpha ij}^2 \\ T_{i\alpha\beta}^2 &= (\nabla'\sigma)_{i\alpha\beta}^2 \\ T_{\alpha\beta i}^2 &= (\nabla'\sigma)_{\alpha\beta i}^2 \end{aligned}$$

Además, de ser  $T_{ij\alpha} = (\nabla'\sigma)(X_i, X_j, Z_\alpha) - \frac{c}{4} \sum_{k=1}^3 g(X_i, P_k X_j) F_k Z_\alpha$  se sigue

$$(I.4.12) \quad \begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{4q} \sum_{\alpha=1}^p T_{ij\alpha}^2 &= \sum_{i,j=1}^{4q} \sum_{\alpha=1}^p (\nabla'\sigma)_{ij\alpha}^2 - \\ &- \frac{c}{2} \left\{ \sum_{i,j=1}^{4q} \sum_{\alpha=1}^p \left( \sum_{k=1}^3 g(\nabla'\sigma(X_i, X_j, Z_\alpha), F_k Z_\alpha) g(X_i, P_k X_j) \right) + \right. \\ &+ \frac{c}{8} \sum_{k,l=1}^3 g(X_i, P_k X_j) g(X_i, P_l X_j) g(F_k Z_\alpha, F_l Z_\alpha) \left. \right\} = \\ &= \sum_{i,j=1}^{4q} \sum_{\alpha=1}^p \left\{ (\nabla'\sigma)_{ij\alpha}^2 - \frac{c}{2} \sum_{k=1}^3 g(\nabla'\sigma(J_k X_j, X_j, Z_\alpha), F_k Z_\alpha) \right\} \\ &+ \frac{c^2}{4} q (\|F_1\|^2 + \|F_2\|^2 + \|F_3\|^2). \end{aligned}$$

Ahora bien, de (I.1.7), (I.2.3) y de ser  $\sigma$  simétrico se tiene:

$$(I.4.13) \quad \sum_{j=1}^{4q} \sum_{\alpha=1}^p g(\nabla' \sigma(X_j, J_k X_j, Z_\alpha), F_k Z_\alpha) = \\ = \sum_{j=1}^{4q} \sum_{\alpha=1}^p \{ \bar{R}(J_k X_j, Z_\alpha, X_j, F_k Z_\alpha) + g(\nabla' \sigma(Z_\alpha, J_k X_j, X_j), F_k Z_\alpha) \} = \\ = c q \|F_k\|^2 + \sum_{\alpha=1}^p \sum_{j=1}^{4q} g(\nabla' \sigma(Z_\alpha, J_k X_j, X_j), F_k Z_\alpha),$$

y como,  $\sum_{j=1}^{4q} g(\nabla' \sigma(Z_\alpha, J_k X_j, X_j), F_k Z_\alpha) = \sum_{j=1}^{4q} g(\nabla' \sigma(Z_\alpha, J_k^2 X_j, J_k X_j), F_k Z_\alpha) = - \sum_{j=1}^{4q} g(\nabla' \sigma(Z_\alpha, J_k X_j, X_j), F_k Z_\alpha)$ , de (I.4.12) y (I.4.13) se sigue,

$$(I.4.14) \quad \sum_{i,j=1}^{4q} \sum_{\alpha=1}^p (\nabla' \sigma)_{ij\alpha}^2 = \sum_{i,j=1}^{4q} \sum_{\alpha=1}^p (\nabla' \sigma)_{i\alpha j}^2 = \\ = \sum_{i,j=1}^{4q} \sum_{\alpha=1}^p T_{ij\alpha}^2 + \frac{c^2}{4} q \sum_{k=1}^3 \|F_k\|^2.$$

Análogamente, de ser  $T_{\alpha\beta\gamma} = \nabla' \sigma(Z_\alpha, Z_\beta, Z_\gamma) - \frac{c}{4} \sum_{k=1}^3 \{ g(Z_\alpha, P_k Z_\beta) F_k Z_\gamma + g(Z_\alpha, P_k Z_\gamma) F_k Z_\beta \}$ , se tiene

$$(I.4.15) \quad \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^p T_{\alpha\beta\gamma}^2 = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^p (\nabla' \sigma)_{\alpha\beta\gamma}^2 - c \sum_{k=1}^3 \sum_{\beta,\gamma=1}^p \\ g(\nabla' \sigma(P_k Z_\beta, Z_\beta, Z_\gamma) F_k Z_\gamma) + \frac{c^2}{8} \sum_{k,l=1}^3 (A_{kl} + B_{kl}),$$

donde

$$(I.4.16) \quad A_{kl} = \sum_{\beta,\gamma=1}^p g(P_k Z_\beta, P_l Z_\beta) g(F_k Z_\gamma, F_l Z_\gamma), \\ B_{kl} = \sum_{\beta,\gamma=1}^p g(P_l Z_\gamma, P_k Z_\beta) g(F_k Z_\gamma, F_l Z_\beta).$$

Por otra parte, de la ecuación de Codazzi y de (I.1.7) se deduce,

$$(I.4.17) \quad \sum_{\beta,\gamma=1}^p g(\nabla' \sigma(P_k Z_\beta, Z_\beta, Z_\gamma), F_k Z_\gamma) = \\ \sum_{\beta,\gamma=1}^p g(\nabla' \sigma(Z_\gamma, P_k Z_\beta, Z_\beta), F_k Z_\gamma) + \bar{R}(P_k Z_\beta, Z_\gamma, Z_\beta, F_k Z_\gamma) =$$

$$= \sum_{\beta, \gamma=1}^p g(\nabla' \sigma(Z_\gamma, P_k Z_\beta, Z_\beta), F_k Z_\gamma) + \frac{c}{4} \sum_{l=1}^3 (A_{kl} + B_{kl}),$$

Ahora bien, como  $\sigma$  es simétrico y  $P_k$  antisimétrico se verifica que

$$\sum_{\beta=1}^p g(\nabla' \sigma(Z_\gamma, P_k Z_\beta, Z_\beta), F_k Z_\gamma) = 0.$$

Según esto, de (I.4.15) y (I.4.17) se deduce,

$$(I.4.18) \quad \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^p T_{\alpha\beta\gamma}^2 = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^p (\nabla' \sigma)_{\alpha\beta\gamma}^2 - \frac{c}{4} \sum_{k, l=1}^3 (A_{kl} + B_{kl}).$$

En consecuencia, de (I.4.11), (I.4.14) y (I.4.18) se obtiene,

$$(I.4.19) \quad \|\nabla' \sigma\|_x^2 = \|T\|_x^2 + \frac{c^2}{2} \sum_{k=1}^3 \|F_k\|_x^2 + \frac{c^2}{8} \sum_{k, l=1}^3 (A_{kl} + B_{kl}).$$

Es fácil ver de (I.1.2) y (I.2.9) que,

$$(I.4.20) \quad \sum_{k, l=1}^3 A_{kl} = \sum_{k=1}^3 \|P_k^\perp\|_x^2 \|F_k\|_x^2 - \sum_{k, l=1}^3 \left( \sum_{\substack{\beta=1 \\ k \neq l}}^p g(P_k P_l Z_\beta, Z_\beta) \right)^2,$$

donde por  $P_k^\perp$  se denota la componente de  $P_k$  en  $D_x^\perp$ .

Por tanto, de (I.4.19) se sigue,

$$(I.4.21) \quad \|\nabla' \sigma\|_x^2 = \|T\|_x^2 + \frac{c^2}{8} \sum_{k=1}^3 \|P_k\|_x^2 \|F_k\|_x^2 - \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^3 \left( \sum_{\beta=1}^p g(P_k P_l Z_\beta, Z_\beta) \right)^2 + \frac{c^2}{8} \sum_{k, l=1}^3 B_{kl}.$$

De forma análoga, de (I.1.2), (I.2.9) y (I.4.16) puede deducirse,

$$(I.4.22) \quad \sum_{k, l=1}^3 B_{kl} = \sum_{k, l=1}^3 \sum_{\beta=1}^p g(F_k P_l Z_\beta, F_l P_k Z_\beta) = \\ = - \sum_{k=1}^3 \sum_{\beta=1}^p g((P_k^2 + P_k^4) Z_\beta, Z_\beta) - \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^3 \sum_{\beta=1}^p \{g((P_l P_k)^2 Z_\beta, Z_\beta) - \\ - g(P_l P_s P_k Z_\beta, Z_\beta)\},$$

donde  $J_l J_k = J_s$ .

Así, de (I.4.21) y (I.4.22) se obtiene (I.4.10) lo que

concluye la demostración.

Para el caso particular de que  $M$  sea una CR-subvariedad cuaterniónica, (ver Definición I.2.7), como  $P_k Z = 0$ ,  $k=1,2,3$  para todo  $Z \in D^\perp$ , (I.4.10) queda en la forma

$$\|\nabla' \sigma\|^2 = \|\tau\|^2 + \frac{3c^2}{2} qp,$$

donde  $q$  es la dimensión cuaterniónica de  $D$  y  $p$  es la dimensión de  $D^\perp$ . Así, se obtiene el siguiente resultado:

COROLARIO I.4.10.- Sea  $M$  una CR-subvariedad cuaterniónica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica con curvatura seccional cuaterniónica constante  $\bar{M}(c)$ . Entonces

$$(I.4.23) \quad \|\nabla' \sigma\|^2 \geq \frac{3c^2}{2} qp.$$

Además en (I.4.23) se da la igualdad si y sólo si  $M$  es cíclica paralela.

También como consecuencia del Teorema I.4.9 se obtiene,

COROLARIO I.4.11.- Sea  $M$  una hipersuperficie real de una variedad Kaehleriana cuaterniónica con curvatura seccional cuaterniónica constante,  $\bar{M}(c)$ . Entonces

$$(I.4.24) \quad \|\nabla' \sigma\|^2 \geq \frac{3c^2}{2} (m-1),$$

donde  $m$  es la dimensión cuaterniónica de  $\bar{M}(c)$ .

Además en (I.4.24) se da la igualdad si y sólo si  $M$  es cíclica paralela.

Demostración.- Es claro que si  $N$  es un vector normal a  $M$  en un punto  $x$  de  $M$ , entonces  $D_x$  es el complemento ortogonal del subespacio generado por  $J_1 N$ ,  $J_2 N$  y  $J_3 N$  en  $T_x M$ . Por tanto, traza  $P_1 P_2 P_3 = \sum_{k=1}^3 g(P_1 P_2 P_3 J_k N, J_k N) = -1$  y como

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \sum_{\alpha=1}^3 g((P_k^2 + P_k^4)Z_\alpha, Z_\alpha) &= \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^3 \left( \sum_{\alpha=1}^3 g(P_k P_l Z_\alpha, Z_\alpha) \right)^2 = \\ &= \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^3 \sum_{\alpha=1}^3 g((P_k P_l)^2 Z_\alpha, Z_\alpha) = 0, \end{aligned}$$

si se sustituye en (I.4.10) se obtiene,

$$\|\nabla'\sigma\|_x^2 = \|T\|_x^2 + \frac{3c^2}{2} (m-1),$$

de donde se sigue el resultado.

Nota. - Obsérvese que en los Corolarios I.4.10 y I.4.11 se obtiene la mejor cota para el módulo de  $\nabla'\sigma$  pues existen CR-subvariedades cuaterniónicas, por ejemplo las subvariedades cuaterniónicas, donde (I.4.23) es alcanzado. Además, existen hipersuperficies reales del espacio proyectivo cuaterniónico, por ejemplo la proyección mediante la fibración de Hopf de  $M_{p,r} = \{q=(q_0, \dots, q_m) \in S^{4m+3} / |q_0|^2 = \cos^2 r\}$ , siendo  $S^{4m+3}$  la esfera unidad de  $Q^{m+1}$ , donde (I.4.24) es alcanzado.

Para concluir este Capítulo se resalta que los resultados obtenidos en esta sección acerca de módulo de  $\nabla'\sigma$  para una subvariedad de una variedad Kaehleriana cuaterniónica de curvatura seccional cuaterniónica constante,  $\bar{M}(c)$ , extienden los resultados obtenidos por J.S. Pak, [P], para hipersuperficies reales de  $\bar{M}(c)$  a cualquier subvariedad en este tipo de espacios ambiente.

## CAPITULO II

---

### EJEMPLOS DE SUBVARIETADES DEL ESPACIO PROYECTIVO

---

#### CUATERNIÓNICO.-

---

Este capítulo, previa descripción de las distintas formas de considerar el espacio proyectivo cuaterniónico y mediante el desarrollo de la teoría de puntos focales en este espacio, está dedicado a la obtención de ejemplos de subvariedades reales del espacio proyectivo cuaterniónico. Concretamente, se dan ejemplos de hipersuperficies reales isoparamétricas del mencionado espacio con dos, tres y cuatro curvaturas principales. También se construye y se clasifica un ejemplo de CR-subvariedad cuaterniónica de codimensión tres.

#### §1. EL ESPACIO PROYECTIVO CUATERNIONICO Y SU PRIMER EMBEBIMIENTO ESTANDAR.-

Sea  $S^{4m+3} = \{q \in Q^{m+1} / g_0(q,q)=1\}$  la esfera unidad en  $Q^{m+1}$ , donde

$$(II.1.1) \quad g_0(p,q) = \text{Real} \langle p,q \rangle ,$$

para cualesquiera  $p,q \in Q^{m+1}$ , siendo  $\langle , \rangle$  como en (I.1.1).

Entonces el espacio proyectivo cuaterniónico  $4m$ -dimensional,  $QP^m$ , se puede obtener de la esfera unidad  $S^{4m+3}$  mediante la identificación de  $x$  con  $\lambda x$ ,  $\lambda \in Q$ ,  $|\lambda|=1$ . Por tanto,  $S^{4m+3}$  puede ser considerado como un fibrado principal sobre  $QP^m$  con grupo estructural  $S^3$  y donde por  $\Pi$  se va a designar

a su proyección.

Sea  $x=(x_0, x_1, \dots, x_m)$  un punto de  $S^{4m+3}$ . A  $(x_0, \dots, x_m)$  se les denomina coordenadas homogéneas del punto  $\Pi(x) \in QP^m$ . Claramente, el subespacio horizontal de  $T_x S^{4m+3} = \{p \in Q^{m+1} / g_0(p, x) = 0\}$  viene dado por,

$$(II.1.2) \quad T'_x = \{p \in Q^{m+1} / \langle p, x \rangle = 0\}$$

y el subespacio vertical en  $x$  es el subespacio de  $T_x S^{4m+3}$  generado por  $j_1 x$ ,  $j_2 x$  y  $j_3 x$ , donde  $j_1$ ,  $j_2$  y  $j_3$  designan las unidades cuaterniónicas.

La distribución  $T'$  define una conexión en el fibrado principal  $S^{4m+3}(QP^m, S^3)$ , en la cual  $T'_x$  es el subespacio complementario de  $Sp\{j_1 x, j_2 x, j_3 x\}$ . Por consiguiente, la proyección  $\Pi$  de  $S^{4m+3}$  a  $QP^m$  induce un isomorfismo  $(\Pi_*)_x$  de  $T'_x$  en  $T_{\Pi(x)} QP^m$  tal que  $(\Pi_*)_x$  aplica el subespacio vertical  $Sp\{j_1 x, j_2 x, j_3 x\}$  en el vector cero.

Si sobre  $QP^m$  se considera el fibrado vectorial 3-dimensional  $\hat{V}$  de tensores de tipo  $(1,1)$  con base local de estructuras casi-Hermiticas  $\{J_1, J_2, J_3\}$  dada por

$$(II.1.3) \quad J_k X = \Pi_*(j_k X'), \quad k=1,2,3,$$

y la métrica

$$(II.1.4) \quad \bar{g}(X, Y) = g_0(X', Y'),$$

para cualesquiera  $X, Y \in TQP^m$ , donde por  $'$  se designa el correspondiente levantamiento horizontal, entonces se tiene que  $QP^m$  es una variedad Kaehleriana cuaterniónica con curvatura seccional cuaterniónica constante e igual a 4. Además la derivación covariante asociada a la conexión de Levi-Civita viene dada por:



$$(II.1.5) \quad \bar{\nabla}_X Y = \pi_* (\nabla'_X Y')$$

para cualesquiera  $X, Y \in TQP^m$ , donde  $\nabla'$  es la derivación covariante sobre  $S^{4m+3}$ .

Obsérvese que, de ser las fibras de la submersión  $\pi$  totalmente geodésicas, la geodésica  $\gamma$  de  $QP^m$  partiendo de  $p = \pi(x)$  en la dirección de un vector unitario  $X \in T_p QP^m$  viene dada por

$$(II.1.6) \quad \gamma(t) = \pi (\cos t x + \operatorname{sen} t X').$$

Otra forma de considerar el espacio proyectivo cuaterniónico es como un espacio simétrico de rango uno. Concretamente, si sobre  $QP^m$  se considera la acción del grupo simpléctico ortogonal  $Sp(m+1)$ , dada por

$$(II.1.7) \quad P(\pi(x)) = \pi(xP),$$

para todo  $P \in Sp(m+1)$  y para todo  $x \in S^{4m+3}$ , es evidente que esta acción está bien definida y es transitiva. Además, designando por  $O$  el punto de  $QP^m$  de coordenadas homogéneas  $(1, 0, \dots, 0)$ , el subgrupo de isotropía de  $Sp(m+1)$  en  $O$  es  $Sp(1) \times Sp(m)$ , por lo que se tiene el difeomorfismo

$$(II.1.8) \quad QP^m = \frac{Sp(m+1)}{Sp(1) \times Sp(m)},$$

del espacio proyectivo cuaterniónico sobre el espacio simétrico de rango uno  $\frac{Sp(m+1)}{Sp(1) \times Sp(m)}$ . Puede verse fácilmente que la métrica inducida en este espacio simétrico por (II.1.8) es  $Sp(m+1)$ -invariante.

Estas dos formas de considerar el espacio proyectivo cuaterniónico son, quizás, las más conocidas y ha sido con ellas con las que usualmente se ha trabajado la geometría



diferencial de este espacio. No obstante, en 1.968, S. Tai, [T], da una nueva interpretación del espacio proyectivo cuaterniónico que a continuación se describe.

Sea  $gl(m, Q)$  el conjunto de matrices cuadradas sobre  $Q$  de orden  $m$ ,  $gl(m, Q)$  puede ser considerado como un espacio Euclídeo  $4m^2$ -dimensional y su producto interno usual viene dado por

$$(II.1.9) \quad g(A, B) = \frac{1}{2} \text{Real}(\text{traza } AB^*),$$

para cualesquiera  $A, B \in gl(m, Q)$ , siendo  $B^* = \bar{B}^t$ , donde  $\bar{\phantom{x}}$  es el conjugado cuaterniónico.

Designando por  $HM(m, Q)$  el espacio de todas las matrices Hermíticas sobre  $Q$  de orden  $m$ , esto es,

$$(II.1.10) \quad HM(m, Q) = \{ A \in gl(m, Q) / A^* = A \},$$

se tiene, de (II.1.9), que el producto interno usual sobre  $HM(m, Q)$  es:

$$(II.1.11) \quad g(A, B) = \frac{1}{2} \text{traza}(AB),$$

para cualesquiera  $A, B \in HM(m, Q)$ .

Además, la aplicación  $\psi: S^{4m+3} \longrightarrow HM(m+1, Q)$ , dada por  $\psi(x) = x * x$ , induce una aplicación  $\tilde{\psi}: QP^m \longrightarrow HM(m+1, Q)$ , dada por,

$$(II.1.12) \quad \tilde{\psi}(\Pi(x)) = x * x = \begin{bmatrix} |x_0|^2 & \bar{x}_0 x_1 & \dots & \bar{x}_0 x_m \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \bar{x}_m x_0 & \bar{x}_m x_1 & \dots & |x_m|^2 \end{bmatrix}$$

donde  $(x_0, \dots, x_m)$  son las coordenadas homogéneas de  $\Pi(x)$ .

De (II.1.4), (II.1.10), (II.1.11) y (II.1.12) se sigue que  $\tilde{\psi}$  verifica:

$$(II.1.13) \quad \tilde{\psi}(QP^m) = \{A \in HM(m+1, Q) / A^2 = A, \text{ traza } A = 1\},$$

(II.1.14)  $\tilde{\psi}$  es un embebimiento isométrico y total sobre  $H_1(m+1, Q) = \{A \in HM(m+1, Q) / \text{traza } A = 1\}$ .

A este embebimiento se le conoce como primer embebimiento estándar de  $QP^m$ , el cual es equivariante con respecto a  $Sp(m+1)$  e invariante bajo la acción de  $Sp(m+1)$  sobre  $HM(m+1, Q)$  dada por

$$(II.1.15) \quad P(A) = PAP^{-1},$$

para cualesquiera  $P \in Sp(m+1)$  y  $A \in HM(m+1, Q)$ . Es decir,

$$(II.1.16) \quad \tilde{\psi}(xP) = P(\tilde{\psi}(x)) \in \tilde{\psi}(QP^m),$$

para todo  $x \in QP^m$  y  $P \in Sp(m+1)$ .

De (II.1.3), (II.1.13) y (II.1.14) se tiene que  $M = \tilde{\psi}(QP^m)$  es una variedad Kaehleriana cuaterniónica, donde una base local de la estructura cuaterniónica viene dada por:

$$(II.1.17) \quad J_k X = j_k (I - 2A)X, \quad k=1,2,3,$$

para todo  $X \in T_A QP^m$ , siendo  $I$  la matriz identidad de  $HM(m+1, Q)$ .

En lo que sigue se considerará identificado  $QP^m$  a  $\tilde{\psi}(QP^m)$ . Así, si  $A \in QP^m$  y  $A(t)$  es una curva diferenciable en  $QP^m$  con  $A(0) = A$  y  $A'(0) = X$ , de ser  $A(t)^2 = A(t)$  se sigue que  $AX + XA = X$  y como la dimensión de  $\{X \in HM(m+1, Q) / XA + AX = X\}$  es  $4m$ , se obtiene,

$$(II.1.18) \quad T_A QP^m = \{A \in HM(m+1, Q) / XA + AX = X\}.$$

De forma análoga se puede concluir que,

$$(II.1.19) \quad T_A^\perp QP^m = \{Z \in HM(m+1, Q) / ZA = AZ\}.$$

Además, de (II.1.1), (II.1.18) y (II.1.19) puede verse fácilmente,

$$(II.1.20) \quad \tilde{\sigma}(X, Y) = (XY + YX)(I - 2A),$$

$$(II.1.21) \quad \tilde{\lambda}_Z X = (XZ - ZX)(I - 2A),$$

para cualesquiera  $X, Y \in T_A QP^m$ ,  $Z \in T_A^{\perp} QP^m$ , donde por  $\tilde{\sigma}$  y  $\tilde{\lambda}_Z$  se designan la segunda forma fundamental y el endomorfismo de Weingarten correspondiente a  $Z$ , respectivamente.

Sea  $A \in QP^m$ , entonces de (II.1.10) y (II.1.11) se tiene

$$g\left(A - \frac{1}{m+1}I, A - \frac{1}{m+1}I\right) = \frac{m}{2(m+1)},$$

en consecuencia,  $QP^m$  está embebido en una hiperesfera de  $HM(m+1, Q)$  de radio  $r = (m/(2m+2))^{1/2}$  y centro  $\frac{1}{m+1}I$ . Además, de (II.1.20), si  $\tilde{H}$  es el vector curvatura media de  $QP^m$  en  $HM(m+1, Q)$  se sigue

$$(II.1.22) \quad \tilde{H}_A = \frac{2}{m} (I - (m+1)A),$$

de donde se obtiene que  $QP^m$  queda embebido en la hiperesfera  $S(r)$  centrada en  $\frac{1}{m+1}I$  como una subvariedad minimal.

De (II.1.17) y (II.1.20) se sigue fácilmente,

$$(II.1.23) \quad \tilde{\sigma}(J_k Y, J_k X) = \tilde{\sigma}(Y, X), \quad k=1, 2, 3,$$

para cualesquiera  $X, Y \in TQP^m$ .

Además, de (II.1.20),  $g(\tilde{\sigma}(X, X), \tilde{\sigma}(X, X)) = 4$  para todo  $X$  unitario en  $TQP^m$ . Así, por linealidad y mediante la utilización de la ecuación de Gauss, se sigue,

$$(II.1.24) \quad g(\tilde{\sigma}(X, Y), \tilde{\sigma}(V, W)) = 2g(X, Y)g(V, W) + \\ + g(X, V)g(Y, W) + g(X, W)g(Y, V) + \\ + \sum_{k=1}^3 \{g(J_k V, X)g(J_k W, Y) + g(J_k W, X)g(J_k V, Y)\},$$

para cualesquiera  $X, Y, V, W \in TQP^m$ .

Es de resaltar también que de (II.1.23) puede deducirse:

$$(II.1.25) \quad \bar{\nabla} \tilde{\sigma} = 0,$$

esto es, la segunda forma fundamental  $\tilde{\sigma}$  es paralela.

La inmersión de  $QP^m$  en  $HM(m+1, Q)$  tiene la propiedad de ser geodésica plana en el sentido de que toda geodésica de  $QP^m$  es aplicada, localmente, sobre una subvariedad totalmente geodésica 2-dimensional de  $HM(m+1, Q)$ . En consecuencia, la geodésica  $\gamma$  de  $QP^m$  partiendo de  $A \in QP^m$  en la dirección de un vector unitario  $X \in T_A QP^m$  viene dada por:

$$(II.1.26) \quad \gamma(t) = A + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t X + \frac{1 - \cos 2t}{4} \tilde{\sigma}(X, X).$$

Nota.- Para un estudio mas detallado de lo tratado en este epígrafe pueden consultarse [Ch4], [Li], [S], [T].

## §2. PUNTOS FOCALES DE UNA SUBVARIEDAD EN $QP^m$ .

En este epígrafe, considerando  $QP^m$  identificado con  $\tilde{\psi}(QP^m)$ , se estudia el conjunto de puntos focales de una subvariedad  $M$  del espacio proyectivo cuaterniónico.

Sea  $M$  una subvariedad  $n$ -dimensional embebida en  $QP^m$ . Entonces, para todo  $(A, \xi)$  de  $T_A^{\perp} M$  se considera  $F(A, \xi)$  como el punto de  $QP^m$  alcanzado a distancia  $\|\xi\|$  sobre la geodésica  $\gamma$  de  $QP^m$  pasando por  $A$  en la dirección de  $\xi$ , esto es,  $F(A, \xi) = \exp_A \|\xi\| \xi$ .

DEFINICION II.2.1.- Un punto  $B$  de  $QP^m$  se dice un punto focal de multiplicidad  $\nu > 0$  de  $(M, A)$ , si  $B = F(A, \xi)$  para algún  $\xi \in T_A^{\perp} M$  y el jacobiano de  $F$  tiene nulidad  $\nu$  en  $(A, \xi)$ .

Es claro de (II.1.26) que si  $\xi \in T_A^{\perp} M$ , y  $\|\xi\| = 1$ , entonces,

$$(II.2.1) \quad F(A, r\xi) = A + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r \xi + \frac{1 - \cos 2r}{4} \tilde{\sigma}(\xi, \xi), \quad r \geq 0.$$

Además, si  $r=0$ , se obtiene que  $F$  es la identidad en  $M$ ,

por tanto, de ser las geodésicas de  $QP^m$  periódicas de periodo  $\pi$ , y tomando  $-\xi$  en lugar de  $\xi$  si fuera necesario, para calcular  $(F_*)_{(A, r\xi)}$  basta considerar  $r \in (0, \pi/2]$ .

Sea  $\{X_1, \dots, X_n, \xi, \eta_1, \dots, \eta_p\}$ ,  $p=4m-1-n$ , una base ortonormal de  $T_{(A, r\xi)}(T_A^{\perp}M)$ , donde  $\{X_1, \dots, X_n\}$  (respectivamente,  $\{\eta_1, \dots, \eta_p\}$ ) es una base ortonormal de  $T_A M$  (respectivamente, de  $T_{r\xi}(U(T_A^{\perp}M))$ , siendo  $U(T_A^{\perp}M)$  los vectores de módulo uno normales a  $M$  en  $A$ ). Entonces, se tiene,

PROPOSICION II.2.2.- Con las notaciones anteriores,

$$i) (F_*)_{(A, r\xi)}(X_i) = \frac{1+\cos 2r}{2} X_i + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r \tilde{\sigma}(X_i, \xi) - \\ - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r \Lambda_{\xi} X_i + \frac{\cos 2r - 1}{2} \sum_{k=1}^3 g(J_k \xi, X_i) J_k \xi - \\ - \frac{1 - \cos 2r}{2} \tilde{\sigma}(\Lambda_{\xi} X_i, \xi), \quad i=1, \dots, n.$$

$$ii) (F_*)_{(A, r\xi)}(\xi) = \cos 2r \xi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r \tilde{\sigma}(\xi, \xi).$$

$$iii) (F_*)_{(A, r\xi)}(\eta_j) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r \eta_j + \frac{1 - \cos 2r}{2} \tilde{\sigma}(\xi, \eta_j), \quad j=1, \dots, p,$$

donde por  $\Lambda_{\xi}$  se designa al endomorfismo de Weingarten de  $M$  en  $QP^m$  correspondiente a  $\xi$ .

Demostración.- Sea  $X \in T_A QP^m$  unitario y sea  $\alpha(t)$  la geodésica de  $M$  que pasa por  $A$  en la dirección de  $X$ . Si  $\xi(t)$  es el desplazado paralelo en  $T^{\perp}M$  a lo largo de  $\alpha(t)$  del vector  $\xi$ , entonces, de (I.2.1), (II.1.23), (II.1.24) y (II.1.25) se tiene,

$$(F_*)_{(A, r\xi)}(X) = \frac{d}{dt}(\alpha(t) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r \xi(t) + \frac{1 - \cos 2r}{4} \tilde{\sigma}(\xi(t), \\ , \xi(t))) \Big|_{t=0} = X + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r (-\Lambda_{\xi} X + \tilde{\sigma}(X, \xi)) + \frac{1 - \cos 2r}{4} ( \\ - \tilde{\Lambda} \tilde{\sigma}(\xi, \xi) X + 2 \tilde{\sigma}(-\Lambda_{\xi} X, \xi)) = X - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r \Lambda_{\xi} X + \\ + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r \tilde{\sigma}(X, \xi) - \frac{1 - \cos 2r}{4} \{ 2X + 2 \sum_{k=1}^3 g(J_k \xi, X) J_k \xi -$$

$$\begin{aligned}
& - \tilde{\sigma}(\Lambda_\xi X, \xi) \} = \frac{1+\cos 2r}{2} X + \frac{1}{2} \sin 2r \tilde{\sigma}(X, \xi) - \\
& - \frac{1}{2} \sin 2r X + \frac{\cos 2r - 1}{2} \sum_{k=1}^3 g(J_k \xi, X) J_k \xi - \\
& - \frac{1-\cos 2r}{4} \tilde{\sigma}(\Lambda_\xi X, \xi),
\end{aligned}$$

de donde se sigue i).

Análogamente, si  $\eta$  es un vector unitario en  $T_{r\xi}(U(T_A^\perp M))$  y  $\alpha(t)$  una curva diferenciable en  $U(T_A^\perp M)$  tal que  $\alpha(0)=A$  y  $\alpha'(0)=r\xi$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
(F_*)_{(A, r\xi)}(\eta) &= \left. \frac{d}{dt}(F(A, r\alpha(t))) \right|_{t=0} = \\
&= A + \frac{1}{2} \sin 2r \eta + \frac{1-\cos 2r}{2} \tilde{\sigma}(\eta, \xi),
\end{aligned}$$

lo que prueba iii).

Finalmente, de (II.1.1), se obtiene,

$$\begin{aligned}
(F_*)_{(A, r\xi)}(\xi) &= \left. \frac{d}{dt}(A + \frac{1}{2} \sin 2t \xi + \frac{1-\cos 2t}{4} \tilde{\sigma}(\xi, \xi)) \right|_{t=r} \\
&= \cos 2r \xi + \sin 2r \tilde{\sigma}(\xi, \xi).
\end{aligned}$$

DEFINICION II.2.3.- Sea  $U(T^\perp M)$  el fibrado normal unitario a  $M$  y  $0 < r \leq \pi/2$ . Se considera la aplicación  $\phi_r: U(T^\perp M) \longrightarrow QP^m$ , dada por

$$(II.2.2) \quad \phi_r(A, \xi) = F(A, r\xi).$$

A  $\phi_r(U(T^\perp M))$  se le llama tubo de radio  $r$  sobre  $M$  o tubo sobre  $M$  a distancia  $r$  y en lo que sigue será denotado por  $\phi_r(M)$ .

Obsérvese que, para valores suficientemente pequeños de  $r$ ,  $\phi_r(M)$  es una hipersuperficie real de  $QP^m$ . Además, en el caso particular de que  $M$  sea una hipersuperficie real de  $QP^m$  y si  $\phi_r(M)$  es también una hipersuperficie real de  $QP^m$  se dice que  $\phi_r(M)$  es una hipersuperficie real paralela a  $M$ .

Sea  $\bar{M} = \phi_r(M)$  una hipersuperficie real de  $QP^m$  obtenida

como el tubo sobre  $M$  a distancia  $r$ . De la Proposición II.2.2 y de ser  $\bar{M}$  una hipersuperficie real se sigue que el espacio tangente a  $\bar{M}$  en un punto  $\bar{A} = \phi_r(A, \xi)$  viene dado por,

$$\begin{aligned}
 (II.2.3) \quad T_{\bar{A}} \bar{M} &= Sp\{\bar{X}_i / \bar{X}_i = (F_*)_{(A, r\xi)} X_i, i=1, \dots, n\} + \\
 &+ Sp\{\bar{n}_j / \bar{n}_j = (F_*)_{(A, r\xi)} n_j, j=1, \dots, p\} = \\
 &= Sp\{\bar{X}_i / \bar{X}_i = \frac{1+\cos 2r}{2} X_i + \frac{1}{2} \text{sen} 2r \tilde{\sigma}(X_i, \xi) - \\
 &- \frac{1}{2} \text{sen} 2r \Lambda_{\xi} X_i + \frac{\cos 2r - 1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^3 g(J_k \xi, X_i) J_k \xi + \right. \\
 &+ \left. \tilde{\sigma}(\Lambda_{\xi} X_i, \xi) \right\}, i=1, \dots, n\} + Sp\{\bar{n}_j / \bar{n}_j = \\
 &= \frac{1}{2} \text{sen} 2r n_j + \frac{1}{2} (1 - \cos 2r) \tilde{\sigma}(\xi, n_j), j=1, \dots, p\},
 \end{aligned}$$

donde  $\{X_i\}_{i=1, \dots, n}, \{n_j\}_{j=1, \dots, p}$  son como en la Proposición II.2.2.

Obsérvese también que del apartado ii) de la Proposición II.2.2 y de (II.1.24) se sigue que el vector normal unitario a  $\bar{M}$  en  $\bar{A}$  es:

$$(II.2.4) \quad N_{\bar{A}} = \cos 2r \xi + \frac{1}{2} \text{sen} 2r \tilde{\sigma}(\xi, \xi).$$

Además, de (II.1.2) y (II.1.12) se puede considerar que  $\xi = z*a + a*z$ , donde  $A = a*a$ ,  $a, z \in Q^{m+1}$  y  $a, z$  verifican,  $aa^* = zz^* = 1$  y  $az^* = za^* = 0$ . En consecuencia, de (II.1.17), (II.1.20), (II.2.1) y (II.2.4) se sigue,

$$\begin{aligned}
 J_k N_{\bar{A}} &= j_k (I - 2\bar{A}) N_{\bar{A}} = j_k (I - 2A - 2\text{sen} 2r \xi - \frac{1 - \cos 2r}{2} \tilde{\sigma}(\xi, \xi)) \\
 &(\cos 2r \xi + \frac{1}{2} \text{sen} 2r \tilde{\sigma}(\xi, \xi)) = j_k (I - 2a*a - 2\text{sen} 2r (z*a + \\
 &+ a*z) - (1 - \cos 2r) (z*z - a*a)) (\cos 2r (z*a + a*z) + \\
 &+ \text{sen} 2r (z*z - a*a)) = j_k (z*a - a*z) = j_k (I - 2A) \xi,
 \end{aligned}$$

para todo  $k=1, 2, 3$  y por tanto, se obtiene que

$$(II.2.5) \quad J_k N_{\bar{A}} = J_k \xi, \quad k=1, 2, 3$$

Obsevando el comportamiento de la estructura cuaterniónica sobre el fibrado normal de las subvariedades cuaterniónicas, de las subvariedades totalmente complejas y de las hipersuperficies reales de  $QP^m$ , se pasa a continuación a estudiar el rango de  $(F_*)$  y el endomorfismo de Weingarten de  $\bar{M} = \phi_r(M)$  en los casos siguientes,

- i) Caso en el que  $J_k \xi$ ,  $k=1,2,3$  son normales a  $M$ .
- ii) Caso en el que  $J_k \xi$ ,  $k=1,2,3$  son tangentes a  $M$ .
- iii) Caso en el que  $J_1 \xi$  es normal a  $M$  y  $J_2 \xi$ ,  $J_3 \xi$  son tangentes a  $M$ .

Así, designando por  $\bar{\Lambda}_r$  el endomorfismo de Weingarten de  $\bar{M}$  y siendo  $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ ,  $\{\eta_j\}_{j=1,\dots,p}$  como en la Proposición II.2.2 se tienen,

LEMA II.2.4.- Sea  $\xi \in U(T_A^{\perp} M)$ , se supone que  $J_1 \xi$ ,  $J_2 \xi$  y  $J_3 \xi$  son vectores normales a  $M$ . Entonces,

- i)  $(F_*)_{(A,r\xi)}(X_i) = 0$  si y sólo si  $r=\pi/2$  ó  $X_i$  es un autovector de  $\Lambda_\xi$  con autovalor  $\text{ctg } r$ ,  $i=1,\dots,n$ .
- ii)  $(F_*)_{(A,r\xi)}(\eta_j) = 0$  si y sólo si  $r=\pi/2$ ,  $j=1,\dots,p$ .
- iii)  $(F_*)_{(A,r\xi)}(W) \neq 0$  en cualquier otro caso.

Demostración.- Por la Proposición II.2.2 y por ser  $J_1 \xi$ ,  $J_2 \xi$  y  $J_3 \xi$  normales a  $M$  en  $A$ , se sigue

$$\begin{aligned} (F_*)_{(A,r\xi)}(X_i) &= \frac{1+\cos 2r}{2} X_i - \frac{1}{2} \text{sen} 2r \Lambda_\xi X_i + \\ &+ \frac{1}{2} \text{sen} 2r \tilde{\sigma}(X_i, \xi) - \frac{1-\cos 2r}{2} \tilde{\sigma}(\Lambda_\xi X_i, \xi) = \frac{1}{2} \text{sen} 2r (\text{ctg } r X_i - \\ &- \Lambda_\xi X_i) + \frac{1}{2} (1-\cos 2r) \tilde{\sigma}(\text{ctg } r X_i - \Lambda_\xi X_i, \xi), \end{aligned}$$

de donde se concluye i).

Análogamente,

$$(F_*)_{(A,r\xi)}(\eta_j) = \frac{1}{2} \text{sen} 2r \eta_j + \frac{1}{2} (1-\cos 2r) \tilde{\sigma}(\xi, \eta_j)$$



de donde se concluye ii).

iii) se deduce fácilmente de (II.2.3), de i) y de ii).

PROPOSICION II.2.5.- Sea  $\xi \in U(T_A^{\perp} M)$ , se supone que  $J_1 \xi$ ,  $J_2 \xi$  y  $J_3 \xi$  son normales a  $M$  en  $A$ . Si  $\{\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n\}$  es una base de autovectores de  $\Lambda_{\xi}$  con curvaturas principales  $\lambda_i = \text{ctg} \theta_i$ ,  $0 < \theta_i < \pi$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , entonces el endomorfismo  $\bar{\Lambda}_r$  del tubo  $\phi_r(M)$  verifica,

- i)  $\bar{\Lambda}_r(J_k \xi) = -2 \text{ctg} 2r \overline{J_k \xi}$ ,  $k=1, 2, 3$ ,
- ii)  $\bar{\Lambda}_r(\bar{\eta}_j) = -\text{ctg} r \bar{\eta}_j$ ,  $j=1, \dots, p-3$ ,
- iii)  $\bar{\Lambda}_r(\bar{X}_i) = \text{ctg}(\theta_i - r) \bar{X}_i$ ,  $i=1, \dots, n$ ,

donde  $\{\eta_1, \dots, \eta_{p-3}, J_1 \xi, J_2 \xi, J_3 \xi\}$  es una base ortonormal de  $T_A^{\perp} M$ .

Demostración.- Sea  $B$  un punto de  $QP^m$  y  $D \in \text{HM}(m+1, Q)$ . De (II.1.18) se deduce que,

$$(II.2.6) \quad D_B^{\top} = BD + DB - 2BDB$$

es un vector tangente en  $B$  a  $QP^m$ , que es la componente de  $D$  en  $T_B QP^m$ .

Sea  $X \in U(T_A M)$  tal que  $\Lambda_{\xi} X = \text{ctg} \theta X$  y sea  $\alpha(t)$  una curva diferenciable en  $M$  tal que  $\alpha(0) = A$  y  $\alpha'(0) = X$ . Si  $\xi(t)$  es el desplazamiento paralelo de  $\xi$  a lo largo de  $\alpha(t)$  en  $T^{\perp} M$ , entonces de (II.2.3), (II.2.4) y de la fórmula de Weingarten se sigue,

$$\begin{aligned} -\bar{\Lambda}_r \bar{X} &= \left( \frac{d}{dt} (N_{\phi_r}(\alpha(t), \xi(t))) \Big|_{t=0} \right)_{\phi_r(A, \xi)}^{\top} = \\ &= (\cos 2r (-\Lambda_{\xi} X + \tilde{\sigma}(X, \xi)) + \frac{1}{2} \text{sen} 2r (-\tilde{\lambda}_{\tilde{\sigma}(\xi, \xi)} X + \\ &+ 2 \tilde{\sigma}(-\Lambda_{\xi} X, \xi))_{\phi_r(A, \xi)}^{\top}, \end{aligned}$$

de donde, teniendo en cuenta (II.1.24) y las hipótesis de la Proposición, se sigue,

$$(II.2.7) \quad -\bar{\Lambda}_r \bar{X} = ((-\cos 2r \operatorname{ctg} \theta - \operatorname{sen} 2r)X + (\cos 2r - \operatorname{sen} 2r \operatorname{ctg} \theta) \bar{\sigma}(X, \xi)) \bar{\phi}_r(A, \xi).$$

De (II.1.2), (II.1.12) y por ser  $J_1 \xi, J_2 \xi$  y  $J_3 \xi$  normales se puede considerar

$$(II.2.8) \quad \begin{aligned} X &= a*x + x*a, \\ \xi &= z*a + a*z, \end{aligned}$$

donde  $A=a*a$  y  $z, x \in Q^{m+1}$  y  $a \in S^{4m+3}$  verifican,

$$(II.2.9) \quad xx^* = zz^* = aa^* = 1, \quad xz^* = zx^* = ax^* = xa^* = za^* = az^* = 0.$$

Por consiguiente, de (II.1.20), (II.2.1), (II.2.2), (II.2.8) y (II.2.9) se tiene,

$$(II.2.10) \quad \begin{aligned} \phi_r(A, \xi) &= a*a + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r (z*a + a*z) + \\ &+ \frac{1 - \cos 2r}{2} (z*z - a*a), \end{aligned}$$

$$(II.2.11) \quad \begin{aligned} -(\cos 2r \operatorname{ctg} \theta + \operatorname{sen} 2r)X + (\cos 2r - \operatorname{sen} 2r \operatorname{ctg} \theta) \\ (\bar{\sigma}(X, \xi)) &= -(\cos 2r \operatorname{ctg} \theta + \operatorname{sen} 2r)(x*a + a*x) + \\ &+ (\cos 2r - \operatorname{sen} 2r \operatorname{ctg} \theta)(x*z + z*x), \end{aligned}$$

y de (II.2.7), se concluye que si  $P = (\cos 2r \operatorname{ctg} \theta + \operatorname{sen} 2r)(x*a + a*x) + (\operatorname{sen} 2r \operatorname{ctg} \theta - \cos 2r)(x*z + z*x)$ , entonces,

$$(II.2.12) \quad \bar{\Lambda}_r \bar{X} = \bar{A}P + P\bar{A} - 2\bar{A}P\bar{A},$$

donde  $\bar{A} = \phi_r(A, \xi)$ .

De (II.2.9), (II.2.10) y (II.2.11) se tiene,

$$(II.1.13) \quad \begin{aligned} \bar{A}P &= \frac{(1 + \cos 2r) \operatorname{ctg} \theta + \operatorname{sen} 2r}{2} a*x + \\ &+ \frac{1 - \cos 2r + \operatorname{sen} 2r \operatorname{ctg} \theta}{2} z*x, \end{aligned}$$

$$(II.1.14) \quad \begin{aligned} P\bar{A} &= \frac{(1 + \cos 2r) \operatorname{ctg} \theta + \operatorname{sen} 2r}{2} x*a + \\ &+ \frac{1 - \cos 2r + \operatorname{sen} 2r \operatorname{ctg} \theta}{2} x*z, \end{aligned}$$

$$(II.2.15) \quad \bar{A}P\bar{A} = 0.$$

Así, sumando (II.2.13) y (II.2.14),

$$(II.2.16) \quad \begin{aligned} \bar{\Lambda}_r \bar{X} &= \frac{(1+\cos 2r)\operatorname{ctg}\theta + \operatorname{sen} 2r}{2} (a*x+x*a) + \\ &+ \frac{1-\cos 2r + \operatorname{sen} 2r \operatorname{ctg}\theta}{2} (z*x+x*z) = \\ &= -\operatorname{ctg}(\theta - r)\bar{X}, \end{aligned}$$

lo que prueba iii).

Análogamente, de (II.1.23), (II.2.3), (II.2.4) y de ser  $J_k \xi, k=1,2,3$ , normales a  $M$  en  $A$ , se obtiene,

$$(II.2.17) \quad \begin{aligned} -\bar{\Lambda}_r(\overline{J_k \xi}) &= (\cos 2r J_k \xi + \operatorname{sen} 2r \tilde{\sigma}(J_k \xi, \xi)) \bar{\phi}_r(A, \xi) = \\ &= (\cos 2r J_k \xi) \bar{\phi}_r(A, \xi) = 2 \operatorname{ctg} 2r \overline{J_k \xi}, \quad k=1,2,3, \end{aligned}$$

con lo cual se prueba i).

Por último, sea  $n \in T_A^\perp M$ ,  $n$  ortogonal a  $J_k \xi, k=1,2,3$ , de (II.2.4) se sigue,

$$(II.2.18) \quad -\bar{\Lambda}_r(\bar{n}) = (\cos 2r n + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r \tilde{\sigma}(n, \xi)) \bar{\phi}_r(A, \xi).$$

De (II.1.2), (II.1.12) y por ser  $J_1 \xi, J_2 \xi$  y  $J_3 \xi$  ortogonales a  $n$ , se puede considerar,

$$(II.2.19) \quad n = w*a + a*w$$

donde  $w \in Q^{m+1}$  y  $wz^* = zw^* = wa^* = aw^* = 0$ . Así,

$$(II.2.19) \quad -\bar{\Lambda}_r(\bar{n}) = (\cos 2r(w*a + a*w) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r(w*z + z*w)) \bar{\phi}_r(A, \xi)$$

y razonando como en la demostración de iii) se deduce que,

$$-\bar{\Lambda}_r(\bar{n}) = \operatorname{ctg} r \bar{n},$$

lo que concluye la demostración.

LEMA II.2.6.- Sea  $\xi$  un vector normal unitario a  $M$  en  $A$ , se supone que  $J_1 \xi, J_2 \xi$  y  $J_3 \xi$  son tangentes a  $M$  en  $A$ . Entonces,

i)  $(F_*)_{(A, r\xi)}(X) = 0$  si y sólo si  $r = \pi/2$  o bien  $X$  es un autovector de  $\Lambda_\xi$  con autovalor  $\operatorname{ctg} r$ .

- ii)  $(F_*)_{(A, r\xi)}(J_k \xi) = 0$  si y sólo si  $r = \pi/2$  o bien  $J_k \xi$  es autovector de  $\Lambda_\xi$  con autovalor  $2\text{ctg}2r$ ,  $k=1,2,3$ .
- iii)  $(F_*)_{(A, r\xi)}(\eta_j) = 0$  si y sólo si  $r = \pi/2$ ,  $j=1, \dots, p$ .
- iv)  $(F_*)_{(A, r\xi)}(W) \neq 0$  en cualquier otro caso,  
donde  $X$  es un vector unitario en  $T_A M$  ortogonal a  $J_k \xi$ ,  $k=1,2,3$ .

Demostración.- Por la Proposición II.2.2 y por las hipótesis del Lema, se tiene,

$$\begin{aligned} (F_*)_{(A, r\xi)} X &= \frac{1+\cos 2r}{2} X + \frac{1}{2} \text{sen} 2r \tilde{\sigma}(X, \xi) - \frac{1}{2} \text{sen} 2r \Lambda_\xi X - \\ &- \frac{1-\cos 2r}{2} \tilde{\sigma}(\Lambda_\xi X, \xi) = \frac{1}{2} \text{sen} 2r (\text{ctg} r - \Lambda_\xi X) + \\ &+ \frac{1}{2} (1-\cos 2r) \tilde{\sigma}(\text{ctg} r X - \Lambda_\xi X, \xi). \end{aligned}$$

Así,  $(F_*)_{(A, r\xi)} X = 0$  si y sólo si  $r = \pi/2$  o bien  $\Lambda_\xi X = \text{ctg} r X$ , lo que prueba i).

Análogamente, de (II.1.23) y la Proposición II.2.2,

$$\begin{aligned} (F_*)_{(A, r\xi)}(J_k \xi) &= \cos 2r J_k \xi - \frac{1}{2} \text{sen} 2r \Lambda_\xi J_k \xi + \\ &+ \frac{1-\cos 2r}{2} \tilde{\sigma}(\Lambda_\xi J_k \xi, \xi), \quad k=1,2,3, \end{aligned}$$

de donde se concluye ii).

iii) y iv) son inmediatos a partir de la Proposición II.2.2.

PROPOSICION II.2.7.- Sea  $\xi$  un vector normal unitario a  $M$  en  $A$ , se supone que  $J_1 \xi$ ,  $J_2 \xi$  y  $J_3 \xi$  son vectores principales de  $\Lambda$  con curvaturas principales  $2\text{ctg}2\mu_1$ ,  $2\text{ctg}2\mu_2$  y  $2\text{ctg}2\mu_3$ , respectivamente,  $0 < \mu_k \leq \pi/2$ ,  $k=1,2,3$ . Entonces, si  $\{X_1, \dots, X_{n-3}, J_1 \xi, J_2 \xi, J_3 \xi\}$  es una base ortonormal de autovectores de  $\Lambda_\xi$  con  $\Lambda_\xi X_i = \text{ctg} \theta_i X_i$ ,  $0 < \theta_i < \pi$ ,  $i=1, \dots, n-3$ , se tiene,

$$a) \bar{\Lambda}_r(\bar{X}_i) = \text{ctg}(\theta_i - r) \bar{X}_i, \quad i=1, \dots, n-3.$$

$$b) \bar{\Lambda}_r(\overline{J_k \xi}) = 2 \operatorname{ctg}(2(\mu_k - r)) \overline{J_k \xi}, \quad k=1,2,3.$$

$$c) \bar{\Lambda}_r(\bar{\eta}_j) = -\operatorname{ctg} r \bar{\eta}_j, \quad j=1, \dots, p.$$

Demostración.- c) y a) se siguen de forma análoga a los apartados ii) y iii) de la Proposición II.2.5.

Para probar b), se toma  $\alpha_k(t)$  una curva sobre  $M$  con  $\alpha_k(0)=A$  y  $\alpha'_k(0)=J_k \xi$ . Entonces, si  $\xi(t)$  es el desplazamiento paralelo a lo largo de  $\alpha_k(t)$  en  $T^{\perp}M$ , de (II.1.23), (II.2.3), (II.2.4) y la fórmula de Weingarten se tiene,

$$\begin{aligned} \text{(II.2.20)} \quad -\bar{\Lambda}_r(\overline{J_k \xi}) &= \left( \frac{d}{dt} (N_{\phi_r}(\alpha_k(t), \xi(t))) \Big|_{t=0} \right)^{\top}_{\phi_r(A, \xi)} = \\ &= (\cos 2r (-\Lambda_{\xi} J_k \xi) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r (-\tilde{\lambda}_{\sigma(\xi, \xi)} J_k \xi + \\ &+ 2\tilde{\sigma}(-\Lambda_{\xi} J_k \xi, \xi))^{\top}_{\phi_r(A, \xi)} = ((-2 \operatorname{ctg} 2\mu_k \cos 2r - \\ &- 2 \operatorname{sen} 2r) J_k \xi)^{\top}_{\phi_r(A, \xi)} = -2 \operatorname{ctg}(2(\mu_k - r)) \overline{J_k \xi}, \end{aligned}$$

con lo que se concluye la demostración.

LEMA II.2.8.- Sea  $\xi$  un vector normal unitario a  $M$  en  $A$  tal que  $J_1 \xi \in T^{\perp}_A M$  y  $J_2 \xi, J_3 \xi \in T_A M$ . Entonces,

i)  $(F_*)_{(A, r\xi)}(X) = 0$  si y sólo si  $r = \pi/2$  o bien  $X$  es un autovector de  $\Lambda_{\xi}$  con autovalor  $\operatorname{ctg} r$ , para todo  $X \in U(T_A M)$ .

ii)  $(F_*)_{(A, r\xi)}(J_k \xi) = 0$  si y sólo si  $r = \pi/2$  o bien  $J_k \xi$  es un autovector de  $\Lambda_{\xi}$  con autovalor  $2 \operatorname{ctg} 2r$ ,  $k=2,3$ .

iii)  $(F_*)_{(A, r\xi)}(\eta) = 0$  si y sólo si  $r = \pi/2$ , para todo  $\eta \in U(T^{\perp}_A M)$ .

iv)  $(F_*)_{(A, r\xi)}(W) \neq 0$  en cualquier otro caso.

Demostración.- Se sigue fácilmente de la Proposición II.2.2, teniendo en cuenta que  $J_1 \xi$  es normal a  $M$  en  $A$  y que  $J_k \xi$  son tangentes a  $M$  en  $A$ ,  $k=2,3$ .

PROPOSICION II.2.9.- Sea  $\xi$  un vector normal unitario a  $M$  en

A tal que  $J_1 \xi \in T_A^1 M$  y  $J_2 \xi, J_3 \xi$  son autovectores de  $\Lambda_\xi$  con autovalores  $2\text{ctg} 2\mu_2$  y  $2\text{ctg} 2\mu_3$ , respectivamente,  $0 < \mu_k < \pi/2$ ,  $k=2,3$ . Entonces, si  $\{X_1, \dots, X_{n-2}, J_2 \xi, J_3 \xi\}$  es una base ortonormal de autovectores de  $\Lambda_\xi$  con  $\Lambda_\xi X_i = \text{ctg} \theta_i X_i$ ,  $0 < \theta_i < \pi$ ,  $i=1, \dots, n-2$ , se tiene,

- i)  $\bar{\Lambda}_r(\bar{X}_i) = \text{ctg}(\theta_i - r) \bar{X}_i$ ,  $i=1, \dots, n-2$ .
- ii)  $\bar{\Lambda}_r(\overline{J_2 \xi}) = 2\text{ctg}(2(\mu_2 - r)) \overline{J_2 \xi}$ .
- iii)  $\bar{\Lambda}_r(\overline{J_3 \xi}) = 2\text{ctg}(2(\mu_3 - r)) \overline{J_3 \xi}$ .
- iv)  $\bar{\Lambda}_r(\overline{J_1 \xi}) = 2\text{ctg} 2r \overline{J_1 \xi}$ .
- v)  $\bar{\Lambda}_r(\bar{n}) = -\text{ctg} r \bar{n}$ ,

para todo  $n$  unitario normal a  $M$  en  $A$  y ortogonal a  $\xi$  y a  $J_1 \xi$ .

Demostración.- De ser  $X_i$  ortogonales a  $J_1 \xi, J_2 \xi$  y  $J_3 \xi$   $i=1, \dots, n-2$  y por un razonamiento análogo al hecho en iii) de la Proposición II.2.5, se sigue i).

ii) y iii) se siguen de igual forma que en el apartado b) de la Proposición II.2.7.

Finalmente, iv) y v) se demuestran como i) y ii) de la Proposición II.2.5.

### §3. ESTRUCTURA DEL CONJUNTO FOCAL DE ALGUNAS SUBVARIETADES DE $QP^m$ . EJEMPLOS.-

En este epígrafe se estudia la estructura de los puntos focales a una cierta distancia de algunas subvariedades totalmente geodésicas de  $QP^m$  y de algunas CR-subvariedades cuaterniónicas de este espacio.

#### §3A. PUNTOS FOCALES DE SUBVARIETADES CUATERNIONICAS DE $QP^m$ .-

Sea  $QP^n = \{A \in \text{HM}(n+1, \mathbb{Q}) / A^2 = A \text{ y traza } A = 1\}$ . La inclu-

si3n de  $HM(n+1, Q)$  en  $HM(m+1, Q)$ ,  $n < m$ , induce un embebimiento  $i$  de  $QP^n$  en  $QP^m$  dado por

$$(II.3A.1) \quad i(A) = \left[ \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

el cual es totalmente geod3sico y hace de  $QP^n$  una subvariedad cuaterni3nica de  $QP^m$ .

Sea  $M^n$  una subvariedad cuaterni3nica de  $QP^m$  de dimensi3n cuaterni3nica  $n$ . Entonces de la Definici3n I.2.5 se tiene,

$$(II.3A.2) \quad J_k(T_A^\perp M) = T_A^\perp M, \quad k=1,2,3.$$

Adem3s, por el Teorema I.2.6,  $M$  es una subvariedad totalmente geod3sica de  $QP^m$  y por consiguiente un abierto de  $QP^n$  embebido como en (II.3A.1) en  $QP^m$ . As3, para estudiar los puntos focales de  $M$  en  $QP^m$  basta estudiar los de  $QP^n$  en  $QP^m$ .

En este sentido, de (II.3A.2) y del Lema II.2.4 se deduce,

LEMA II.3A.1.- Sea  $M$  una subvariedad cuaterni3nica de dimensi3n cuaterni3nica  $n$  del espacio proyectivo cuaterni3nico  $QP^m$ . Entonces  $(F_*)_{(A, r\xi)} W = 0$  si y s3lo si  $r = \pi/2$  para todo  $W \in T_{(A, r\xi)}(U(T^\perp M))$ .

Por consiguiente, de la Proposici3n II.2.5 y del Lema II.3A.1, se obtiene,

PROPOSICION II.3A.2.- Sea  $M$  una subvariedad cuaterni3nica de  $QP^m$  de dimensi3n cuaterni3nica  $n$ . Entonces para  $0 < r < \pi/2$ ,  $\phi_r(M) = \bar{M}$  es una hipersuperficie real de  $QP^m$  y el endomorfismo de Weingarten  $\bar{\Lambda}_r$  de  $\bar{M}$  verifica:

$$\bar{\lambda}_r(\overline{J_k \xi}) = -2\text{ctg}2r \overline{J_k \xi}^{(*)},$$

$$\bar{\lambda}_r(\bar{n}_j) = -\text{ctg} r \bar{n}_j,$$

$$\bar{\lambda}_r(\bar{X}) = \text{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - r\right)\bar{X},$$

para todo  $X$  tangente unitario a  $M$  y donde  $\{n_1, \dots, n_{4(m-n-1)}\}$ ,  $\{J_1 \xi, J_2 \xi, J_3 \xi\}$  es una base ortonormal de  $T^\perp M$ .

Como consecuencia de lo anterior se tiene,

**COROLARIO II.3A.3.-** Sea  $V$  una hipersuperficie real de  $QP^m$  que se queda sobre el tubo de radio  $r$ ,  $0 < r < \pi/2$ , de una subvariedad cuaterniónica  $M$  de  $QP^m$ . Si  $N_B$  es el vector normal a  $V$  en  $B \in V$ , entonces  $J_1 N_B$ ,  $J_2 N_B$  y  $J_3 N_B$  son principales con la misma curvatura principal  $\mu = -2\text{ctg}2r$ .

Demostración.- Por quedar  $V$  sobre  $\phi_r(M)$ , se tiene que  $B = \phi_r(A, \xi)$  para algún  $A \in M$ ,  $\xi \in U(T_A^\perp M)$ . Así, de (II.2.4),  $N_B = N_{\phi_r(A, \xi)}$  salvo un signo, y teniendo en cuenta (II.2.3) y (II.2.5), de la Proposición anterior se tiene,

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_r J_k N_B &= \bar{\lambda}_r J_k \xi = \bar{\lambda}_r \frac{\text{sen}2r}{2} \overline{J_k \xi} = -\text{sen}2r \text{ctg}2r \overline{J_k \xi} = \\ &= -2\text{ctg}2r J_k N_B, \end{aligned}$$

lo que prueba el corolario.

**COROLARIO II.3A.4.-** Sea  $M$  una subvariedad cuaterniónica de  $QP^m$ . Entonces, para  $0 < r < \pi/2$ , el conjunto focal de  $\phi_r(M)$  es la unión de  $M$  con el conjunto focal de  $M$ .

Demostración.- Por ser  $0 < r < \pi/2$ ,  $\phi_r(M)$  es una hipersuperficie real de  $QP^m$  y por tanto, del Corolario II.3A.3, si  $N$  es un campo de vectores normales a  $\phi_r(M)$ ,  $J_k N$ ,  $k=1,2,3$ , son principales con la misma curvatura principal  $-2\text{ctg}2r$ .

(\*) La  $\bar{\phantom{x}}$  sobre los campos de vectores designará lo mismo que en §2 de este Capítulo.



Por el Lema II.2.6 se obtienen puntos focales de  $\phi_r(M)$  a distancia  $\frac{\pi}{2} - r$  en la dirección de  $N_{\phi_r}(A, \xi)$  y a distancia  $r$  en la dirección de  $-N_{\phi_r}(A, \xi)$ . Ahora bien, los puntos focales de  $\phi_r(M)$  a distancia  $\frac{\pi}{2} - r$ , a lo largo de geodésicas en la dirección de  $N_{\phi_r}(A, \xi)$ , son puntos focales de  $M$  y los puntos focales de  $\phi_r(M)$  a lo largo de geodésicas en la dirección de  $-N_{\phi_r}(A, \xi)$ , son los puntos de  $M$ , con lo cual se concluye la demostración.

Estos resultados proporcionan los siguientes ejemplos de hipersuperficies reales con curvaturas principales constantes:

EJEMPLO II.3A.5. - Se considera  $M = \{A\} \in QP^m$ , una subvariedad 0-dimensional de  $QP^m$ . Entonces,  $\phi_r(M) = G(A, r)$  no es más que el conjunto de puntos a distancia  $r$  de  $A$ , esto es, la hiper-esfera geodésica de centro  $A$  y radio  $r$ , en  $QP^m$ .

De la Proposición II.3A.2, salvo la elección del campo de vectores normales a la hipersuperficie, se sigue que  $G(A, r)$ ,  $0 < r < \pi/2$  es una hipersuperficie real de  $QP^m$  con dos curvaturas principales constantes y distintas  $\nu = 2 \operatorname{ctg} 2r$  de multiplicidad 3 y  $\alpha = \operatorname{ctg} r$  de multiplicidad  $4m-4$ .

De (II.1.11), se puede suponer  $A = a * a$ ,  $a \in S^{4m+3}$ . Entonces, por (II.1.19), se tiene ,

$$(II.3A.3) \quad U(T_A^{\perp} M) = U(T_A QP^m) = \{X \in HM(m+1, Q) / X = x * a + a * x, \\ \langle x, a \rangle = \langle a, x \rangle = 0, x \in S^{4m+3}\} = S^{4m+3},$$

y por tanto, si se aplica la definición de  $\phi_r$ , y (II.1.20), se deduce que

$$(II.3A.4) \quad \phi_{\pi/2}(A, X) = A + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}(X, X) = a * a +$$

$$\begin{aligned}
& + (x*a + a*x)(x*a + a*x)(I-2a*a) = \\
& = a*a + (x*x - a*a) = x*x = \tilde{\psi}(x).
\end{aligned}$$

Luego,  $\phi_{\pi/2}(\{A\}) = \{x*x \in HM(m+1, Q) / \langle x, a \rangle = 0, x \in S^{4m+3}\} = \{x*x \in HM(m, Q) / x \in S^{4m-1}\} = QP^{m-1}$ , y se concluye que  $QP^{m-1} = \phi_{\pi/2}(\{A\})$ . En consecuencia,  $G(x, r)$  es también el tubo a distancia  $\frac{\pi}{2} - r$  sobre  $QP^{m-1}$  embebido por (II.3A.1) en  $QP^m$  de forma totalmente geodésica como una subvariedad cuaterniónica de  $QP^m$ .

EJEMPLO II.3A.6.- Sea  $M = QP^n$ ,  $0 < n < m-1$ , embebido según (II.3A.1) en  $QP^m$ . Entonces, de la Proposición II.3A.2,  $\phi_r(QP^m)$ ,  $0 < r < \pi/2$ , es una hipersuperficie real de  $QP^m$  con tres curvaturas principales constantes y distintas,  $\mu = 2 \operatorname{ctg} 2r$  de multiplicidad 3,  $\lambda_1 = \operatorname{ctg} r$  de multiplicidad  $4(m-n-1)$  y  $\lambda_2 = -\operatorname{tg} r$  de multiplicidad  $4n$ .

De forma análoga al Ejemplo II.3A.5 y aplicando la definición de  $\phi_r$  se tiene,

$$(II.3A.5) \quad \phi_{\pi/2}(A, Z) = A + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}(Z, Z) = A + Z^2(I-2A),$$

para todo  $A \in QP^n$ , siendo  $Z$  un vector normal unitario a  $QP^m$  en  $A$ . Como  $\dim U(T_A^\perp QP^n) = 4(m-n-1)$ , razonando de igual forma que en (II.3A.3) y (II.3A.4) se deduce,

$$\phi_{\pi/2}(QP^n) = QP^{m-n-1},$$

y por tanto,  $\phi_r(QP^n) = \phi_{\frac{\pi}{2}-r}(QP^{m-n-1})$ . Esto es, si  $0 < r < \pi/2$ , el tubo de radio  $r$  sobre  $QP^n$  se obtiene también como el tubo de radio  $\frac{\pi}{2} - r$  sobre  $QP^{m-n-1}$ , siendo, por tanto, este último una hipersuperficie real con tres curvaturas principales constantes y distintas.

Una interpretación en la esfera unidad de los ejemplos

anteriores es la siguiente:

Se considera la hipersuperficie real  $M(p,r)$  de  $S^{4m+3}$  dada por,

$$(II.3A.6) \quad M(p,r) = \{q=(q_0, q_1, \dots, q_m) \in S^{4m+3} / \sum_{i=0}^p \|q_i\|^2 = \cos^2 r\},$$

con  $1 \leq p$  y  $0 < r < \pi/2$ . Entonces, es fácil probar que

$$(II.3A.7) \quad \phi_r(QP^{p-1}) = \Pi(M(p,r)),$$

siendo  $\Pi$  la proyección de Hopf de  $S^{4m+3}$  sobre  $QP^m$ .

### §3B. CONJUNTO FOCAL DEL ESPACIO PROYECTIVO COMPLEJO.-

Sea  $C$  el cuerpo de los números complejos. Sobre  $C^{m+1}$  se considera el producto Hermítico usual,

$$(II.3B.1) \quad \langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^m \bar{z}_j w_j,$$

donde  $z=(z_0, \dots, z_m)$ ,  $w=(w_0, \dots, w_m) \in C^{m+1}$  y aquí  $\bar{\phantom{z}}$  denota el conjugado complejo. Es claro que  $C^{m+1}$  es un espacio Euclídeo con producto interno usual,

$$(II.3B.2) \quad \bar{g}_1(z, w) = \text{Real} \langle z, w \rangle,$$

para cualesquiera  $z, w \in C^{m+1}$ .

Si por  $S^{2m+1}$  se designa la esfera unidad en  $C^{m+1}$ , esto es,  $S^{2m+1} = \{z \in C^{m+1} / \bar{g}_1(z, z) = 1\}$ , es conocido que el espacio proyectivo complejo  $m$ -dimensional,  $CP^m$ , puede obtenerse de  $S^{2m+1}$  mediante la identificación de  $z$  con  $\lambda z$ ,  $\lambda \in C$ ,  $|\lambda|=1$ .

Así,  $S^{2m+1}$  es un fibrado principal de  $CP^m$  con grupo estructural  $S^1$  y donde por  $\pi_1$  se va a designar a la proyección de  $S^{2m+1}$  sobre  $CP^m$ . Además, el subespacio horizontal en un punto  $z \in S^{2m+1}$  viene dado por

$$(II.3B.3) \quad T_z = \{w \in C^{m+1} / \langle z, w \rangle = 0\}.$$

y el subespacio vertical en  $z \in S^{2m+1}$  está generado por  $j_1 z$ , siendo  $j_1$  la unidad imaginaria de  $C$ .

Se considera  $Q^{m+1}$  identificado con  $C^{m+1} \times C^{m+1}$  en el siguiente sentido,

$$(II.3B.4) \quad (z_1, z_2) \in C^{m+1} \times C^{m+1} \text{ se identifica con } z_1 + j_2 z_2 \text{ de } Q^{m+1},$$

donde  $j_1, j_2, j_3$  son las unidades cuaterniónicas,  $j_1 j_2 = j_3$ .

Con esta identificación, la acción de  $S^3$  sobre  $S^{4m+3}$  viene dada por,

$$(II.3B.5) \quad (p, q) \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} p & -\bar{q} \\ q & \bar{p} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

para todo  $(z, w) \in S^{4m+3}$  y  $(p, q) \in S^3$ . En consecuencia dicha acción es la dada por  $SU(2) = \{A \in gl(2, C) / A\bar{A}^t = I, \det A = 1\}$ .

De la esfera unidad  $S^{2m+1}$  de  $C^{m+1}$  en la esfera unidad de  $S^{4m+3}$  de  $Q^{m+1}$  se define la aplicación  $\hat{j}: S^{2m+1} \longrightarrow S^{4m+3}$  dada por,

$$(II.3B.6) \quad \hat{j}(z) = (z, \bar{0}),$$

para todo  $z \in S^{2m+1}$ . Así, mediante  $\hat{j}$ ,  $S^{2m+1}$  es embebido en  $S^{4m+3}$  de forma totalmente geodésica y la fibración  $\Pi$  de la esfera  $S^{4m+3}$  sobre  $QP^m$  induce  $\Pi_1$  de  $S^{2m+1}$  sobre  $CP^m$ .

Consecuentemente, el espacio proyectivo complejo  $CP^m$  queda embebido en el espacio proyectivo cuaterniónico  $QP^m$  mediante  $j: CP^m \longrightarrow QP^m$  dada por,

$$(II.3B.7) \quad j(\Pi_1(z)) = (z, 0),$$

para todo  $z \in S^{2m+1}$ . Además  $j$  hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S^{2m+1} & \xrightarrow{\hat{j}} & S^{4m+3} \\ \Pi_1 \downarrow & & \downarrow \Pi \\ CP^m & \xrightarrow{j} & QP^m \end{array}$$

Con la identificación (II.3B.4), si  $X \in TQP^m$ ,  $X = \pi_*(a,b)$ , con  $(a,b)$  en el subespacio horizontal de  $S^{4m+3}$ . Así, de (II.1.3) se sigue,

$$(II.3B.8) \quad \begin{aligned} J_1 X &= \pi_*(j_1 a, -j_1 b), \\ J_2 X &= \pi_*(-b, a), \\ J_3 X &= \pi_*(-j_1 b, j_2 a), \end{aligned}$$

donde  $\{J_1, J_2, J_3\}$  es una base local de la estructura cuaterniónica de  $QP^m$ .

El embebimiento (II.3B.7) ha sido estudiado por Funabashi en [Fu2], donde se prueba que, mediante este embebimiento, el espacio proyectivo complejo queda isométricamente inmerso en el espacio proyectivo cuaterniónico,  $QP^m$ , de forma totalmente compleja y totalmente geodésica (ver la Definición I.2.7). Es decir, con las notaciones anteriores, se verifica,

$$(II.3B.9) \quad \begin{aligned} J_1(TCP^m) &= TCP^m, \\ J_2(TCP^m) &= J_3(TCP^m) = T^\perp CP^m, \\ p_2 &= p_3 = 0, \end{aligned}$$

donde  $p_2$  y  $p_3$  son como en (I.1.3).

Otra forma de obtener el espacio proyectivo complejo es la siguiente:

Se considera el conjunto de las matrices Hermíticas complejas  $HM(m+1, C) = \{A \in gl(m+1, C) / \bar{A}^t = A\}$ , con el producto interno

$$g_1(A, B) = \frac{1}{2} \text{traza } AB$$

para cualesquiera  $A, B \in HM(m+1, C)$ . Entonces de forma análoga a §1 de este Capítulo puede verse, [T], que  $\psi_1: CP^m \longrightarrow$

$HM(m+1, C)$  dado por,

$$(II.3B.10) \quad \tilde{\psi}_1(\Pi_1(z)) = \bar{z}^t z, \quad z \in S^{2m+1}$$

es un embebimiento isométrico de  $CP^m$  en  $HM(m+1, C)$  tal que,

$$(II.3B.11) \quad \tilde{\psi}_1(CP^m) = \{A \in HM(m+1, C) / A^2 = A, \text{ traza } A = 1\},$$

y

$$(II.3B.12) \quad J_1 X = j_1(I - 2A)X,$$

para todo  $X \in T_A CP^m$  y donde  $I$  es la matriz identidad de  $HM(m+1, C)$ .

Las propiedades de esta inmersión son análogas a las descritas en §1 de este Capítulo para el caso de  $QP^m$ . Por consiguiente, se puede trabajar con el espacio proyectivo complejo o bien como obtenido de  $S^{2m+1}$  o bien como obtenido mediante (II.3B.11).

Considerando  $CP^m$  obtenido por (II.3B.11) y teniendo en cuenta la identificación (II.3B.4), se sigue que el embebimiento  $j$  de  $CP^m$  en  $QP^m$  viene dado por

$$(II.3B.13) \quad j(A) = (A, 0) \in QP^m.$$

Además de (II.1.14) y (II.3B.4) se tiene,

$$(II.3B.14) \quad \begin{aligned} QP^m &= \{(A, B) / A, B \in gl(m+1, C), A + j_2 B \in QP^m\} = \\ &= \{(A, B) / A \in HM(m+1, C), B \in gl(m+1, C), \\ &B^t + B = 0, A^2 - \bar{B}B = A, \bar{A}B + BA = B, \text{ traza}(A + \\ &+ j_2 B) = 0\}. \end{aligned}$$

Por cualquiera de estas formas de considerar  $CP^m$  se obtiene la siguiente

PROPOSICION II.3B.1.- Sea  $CP^m$  el espacio proyectivo complejo embebido mediante (II.3B.7) en  $QP^m$ . Entonces, para  $0 < r < \pi/4$

o bien  $\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$ ,  $\phi_r(\mathbb{C}P^m)$  es una hipersuperficie real de  $QP^m$  donde el endomorfismo de Weingarten  $\bar{\Lambda}_r$  de  $\phi_r(\mathbb{C}P^m)$  verifica,

$$\bar{\Lambda}_r(\overline{J_1 \xi}) = -2\text{ctg} 2r \overline{J_1 \xi},$$

$$\bar{\Lambda}_r(\overline{J_k \xi}) = 2\text{ctg}(2(\frac{\pi}{4} - r)) \overline{J_k \xi}, \quad k=2,3,$$

$$\bar{\Lambda}_r(\bar{\eta}_j) = -\text{ctg} r \bar{\eta}_j, \quad j=1, \dots, 2m-2,$$

$$\bar{\Lambda}_r(\bar{X}_i) = \text{ctg}(\frac{\pi}{2} - r) \bar{X}_i, \quad i=1, \dots, 2m-2,$$

donde  $\xi \in T^\perp \mathbb{C}P^m$  es unitario y  $\{X_1, \dots, X_{2m-2}, J_2 \xi, J_3 \xi\}$  (respectivamente,  $\{\eta_1, \dots, \eta_{2m-2}, \xi, J_1 \xi\}$ ) es una base ortonormal de  $T\mathbb{C}P^m$  (respectivamente, de  $T^\perp \mathbb{C}P^m$ ).

Demostración.- Sea  $\xi \in T^\perp \mathbb{C}P^m$  unitario, de (II.3B.9),  $J_1 \xi$  es normal y  $J_2 \xi, J_3 \xi$  son tangentes. Además, como  $\mathbb{C}P^m$  es embebido en  $QP^m$  de forma totalmente geodésica, del Lema II.2.8 y de la definición de  $\phi_r$ , se deduce que, para  $0 < r < \pi/4$  o bien para  $\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$ , el tubo de radio  $r$  sobre  $\mathbb{C}P^m$  es una hipersuperficie real de  $QP^m$ . Por tanto, si  $\{X_1, \dots, X_{2m-2}, J_2 \xi, J_3 \xi\}$  es una base ortonormal de  $T\mathbb{C}P^m$ ,  $\Lambda_\xi X_i = \text{ctg} \frac{\pi}{2} X_i$  y  $\Lambda_\xi J_k \xi = 2\text{ctg} 2\frac{\pi}{4} J_k \xi$   $k=2,3$ , y el resultado se sigue entonces de la Proposición II.2.9.

EJEMPLO II.3B.2.- Considerando el espacio proyectivo complejo  $\mathbb{C}P^m$  inmerso en el espacio proyectivo cuaterniónico  $QP^m$  de forma totalmente compleja y totalmente geodésica se sigue que para  $0 < r < \frac{\pi}{4}$  o bien,  $\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$ ,  $\phi_r(\mathbb{C}P^m)$  es una hipersuperficie real de  $QP^m$  con cuatro curvaturas principales constantes y distintas,  $\mu_1 = 2\text{ctg} 2r$  de multiplicidad uno,  $\mu_2 = -2\text{tg} 2r$  de multiplicidad 2,  $\lambda_1 = \text{ctg} r$  de multiplicidad  $2(m-1)$  y  $\lambda_2 = -\text{tg} r$  de multiplicidad  $2(m-1)$ .

Además, de (II.2.3), (II.2.5) y de la Proposición II.

3B.1, se deduce,

COROLARIO II.3B.2.- Sea M una hipersuperficie real de  $QP^m$  que queda sobre el tubo de radio r,  $0 < r < \frac{\pi}{4}$  ó  $\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$ , sobre el espacio proyectivo complejo  $CP^m$ . Entonces, si N es un campo de vectores normales a M,  $J_1N$ ,  $J_2N$  y  $J_3N$  son principales con curvaturas principales  $2\text{ctg}2r$ ,  $-2\text{tg}2r$  y  $-2\text{tg}2r$ , respectivamente.

Nótese que del Lema II.2.8 y de la Definición II.2.1 se obtienen puntos focales del espacio proyectivo complejo a distancia  $\frac{\pi}{4}$  y que, además,  $\phi_{\pi/4}(CP^m)$  no es una hipersuperficie real de  $QP^m$ . Cabe entonces preguntarse:

- a) ¿ Es  $\phi_{\pi/4}(CP^m)$  una subvariedad de  $QP^m$ ?
- b) En caso afirmativo, ¿De qué tipo de subvariedad se trata?.

En lo que sigue se da solución a estas dos cuestiones. Con este objetivo, se va a considerar el espacio proyectivo complejo obtenido de la esfera unidad  $S^{2m+1}$  de  $C^{m+1}$  y el espacio proyectivo cuaterniónico obtenido de la esfera unidad  $S^{4m+3}$  de  $Q^{m+1}$ .

Sea x un punto de  $CP^m$  y  $z \in S^{2m+1}$  tal que  $\pi_1(z) = x$ . Si  $y \in U(T_x^i CP^m)$ , de (II.3B.9) se tiene que  $y = J_2 a$  para algún vector tangente unitario a en  $T_x CP^m$ . Esto es, de (II.3B.3),

$$(II.3B.15) \quad a = (\pi_{1*})_z w, \quad \langle z, w \rangle = 0.$$

Por consiguiente, de (II.1.6), de la Definición II.2.3 y teniendo en cuenta la identificación (II.3B.4) se deduce que un punto  $A \in QP^m$  es un punto focal de  $(CP^m, x)$  a distancia  $\frac{\pi}{4}$  si,



$$(II.3B.16) \quad A = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi_*(z + j_2 w) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi_*(z, w),$$

para algún  $w \in C^{m+1}$  con  $\langle z, w \rangle = 0$ ,  $\|z\| = \|w\|$ .

Así, si se toma,

$$(II.3B.17) \quad M^* = \{(z, w) \in S^{4m+3} / \|z\| = \|w\|, \langle z, w \rangle = 0\},$$

de (II.3B.16) se obtiene que  $\phi_{\pi/4}(CP^m) \subseteq \pi(M^*)$ , pero claramente, todo punto de  $\pi(M^*)$  es un punto focal de  $(CP^m, x)$  para algún  $x \in CP^m$ . Por tanto, el conjunto de puntos focales de  $CP^m$  a distancia  $\frac{\pi}{4}$  en  $QP^m$  es  $\pi(M^*)$ .

TEOREMA II.3B.3.-  $M^*$  es invariante por la acción de  $S^3$  sobre  $S^{4m+3}$ .

Demostración.- Por la identificación (II.3B.4), de (II.3B.1), (II.3B.2) y la definición de  $M^*$  se tiene que si  $(p, q) \in S^3$  y  $(z, w) \in M^*$ , entonces  $(p, q) \begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix} = (pz - \bar{q}w, qz + \bar{p}w)$  verifica,

$$(II.3B.18) \quad \begin{aligned} \|pz - \bar{q}w\|^2 &= g_1(pz - \bar{q}w, pz - \bar{q}w) = g_1(pz, pz) - \\ &- 2g_1(\bar{q}w, pz) + g_1(\bar{q}w, \bar{q}w) = |p|^2 \|z\|^2 + |q|^2 \|w\|^2 = \\ &= |p|^2 \|w\|^2 + |q|^2 \|z\|^2 = \|qz + \bar{p}w\|^2, \end{aligned}$$

y

$$(II.3B.19) \quad \begin{aligned} \langle pz - \bar{q}w, qz + \bar{p}w \rangle &= \langle pz, qz \rangle - \langle \bar{q}w, \bar{p}w \rangle + \langle pz, \bar{q}w \rangle - \\ &- \langle \bar{q}w, qz \rangle = p\bar{q} \|z\|^2 - \bar{q}p \|w\|^2 = 0, \end{aligned}$$

lo que prueba el teorema.

COROLARIO II.3B.4.-  $N^* = \pi(M^*)$  es una subvariedad compacta del espacio proyectivo cuaterniónico,  $QP^m$ .

A continuación se pasa a ver qué tipo de subvariedad es  $N^*$  dentro de  $QP^m$ .

TEOREMA II.3B.5.- Sea  $N^* = \phi_{\pi/4}(CP^m)$ . Entonces,

i)  $N^*$  es una CR-subvariedad cuaterniónica  $(4m-3)$ -dimensional.

nal de  $QP^m$ .

ii)  $N^*$  es minimal en  $QP^m$ .

iii) Si  $D$  es la distribución cuaterniónica de  $N^*$  y  $D^\perp$  es la distribución complemento ortogonal de  $D$  en  $TN^*$ , entonces,

a)  $\sigma(D, D^\perp) = \{0\}$ ,

b)  $\sigma(D^\perp, D^\perp) = \{0\}$ ,

c)  $\wedge_{j,k}^2 Z^X = X, \quad k=1,2,3,$

para todo  $X \in D$ , donde  $Z$  es un campo de vectores unitario de  $D^\perp$  y  $\sigma$  es la segunda forma fundamental de la inmersión de  $N^*$  en  $QP^m$ .

Demostración.- Por ser  $M^*$  una subvariedad  $4m$ -dimensional de  $S^{4m+3}$ , del Teorema II.3B.3 se sigue que  $N^*$  es una subvariedad  $(4m-3)$ -dimensional de  $QP^m$ . Sea  $(z,w) \in M^*$ , entonces  $(a,b) \in T_{(z,w)}M^*$  si y sólo si existe una curva  $\alpha(t)$  diferenciable sobre  $M^*$ ,  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$  tal que  $(\alpha_1(0), \alpha_2(0)) = (z,w)$  y  $(\alpha_1'(0), \alpha_2'(0)) = (a,b)$ . Por tanto, de (II.3B.17),

(II.3B.20)  $\|\alpha_1(t)\| = \|\alpha_2(t)\|, \quad \langle \alpha_1(t), \alpha_2(t) \rangle = 0,$

para todo  $t$ .

Diferenciando en (II.3B.20), se sigue,

(II.3B.21)  $g_0(z, a) = g_0(w, b),$   
 $g_0(z, b) = g_0(w, a),$   
 $g_0(j_1 z, b) + g_0(j_1 w, a) = 0.$

En consecuencia, si  $\xi_1^* = (w, z)$ ,  $\xi_2^* = (-z, w)$  y  $\xi_3^* = (-j_1 w, j_1 z)$ , de (II.3B.21) y como  $g_0((w, z), (z, w)) = g_0((-z, w), (z, w)) = g_0((-j_1 w, j_1 z), (z, w))$ , se sigue que  $\xi_1^*$ ,  $\xi_2^*$  y  $\xi_3^*$  son vectores normales a  $M^*$  en  $S^{4m+3}$ . Claramente,  $\{\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*\}$  son ortonormales, y por tanto, de ser la codimensión de  $M^*$  en  $S^{4m+3}$  tres,

se deduce,

$$(II.3B.22) \quad T_{(z,w)}^\perp M^* = \text{Sp}\{\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*\}.$$

Por el Teorema II.3B.3,  $M^*$  es invariante por la fibración de Hopf. Luego, el espacio tangente a la fibra, esto es, el espacio vertical del fibrado principal  $M^*(N^*, S^3)$  en  $(z,w)$  viene dado por,

$$(II.3B.23) \quad V_{(z,w)} = \text{Sp}\{j_1(z,w), j_2(z,w), j_3(z,w)\} = \\ = \text{Sp}\{(j_1 z, -j_1 w), (-w, z), (j_1 w, j_1 z)\},$$

y además el fibrado normal a  $N^*$  en  $\Pi(z,w)$  es,

$$(II.3B.24) \quad T_{(z,w)}^\perp N^* = \text{Sp}\{\pi_* \xi_1^* = \xi_1, \pi_* \xi_2^* = \xi_2, \pi_* \xi_3^* = \xi_3\}.$$

Ahora bien, de (II.3B.8) y (II.3B.24), se tiene,

$$(II.3B.25) \quad \begin{aligned} J_1 \xi_1 &= \pi_*(j_1 w, -j_1 z) = -\xi_3, & J_1 \xi_2 &= J_2 \xi_3 = Z, \\ J_2 \xi_1 &= \pi_*(-z, w) = \xi_2, & J_2 \xi_2 &= -J_1 \xi_3 = -\xi_1, \\ J_3 \xi_1 &= \pi_*(-j_1 z, -j_1 w) = Z, & J_3 \xi_2 &= \xi_3. \end{aligned}$$

Como  $(-j_1 z, -j_1 w)$  es ortogonal a  $V_{(z,w)}$  y verifica las ecuaciones dadas en (II.3B.21), se tiene que  $Z = \pi_*(-j_1 z, -j_1 w)$  es un vector unitario tangente a  $N^*$  en  $\Pi(z,w)$ .

De (II.3B.25), se deduce que si  $D_{\Pi(z,w)}^\perp = \text{Sp}\{Z\}$  y  $D_{\Pi(z,w)}$  es el complemento ortogonal de  $D_{\Pi(z,w)}^\perp$  en  $T_{\Pi(z,w)} N^*$ , entonces,

$$(II.3B.26) \quad \begin{aligned} D : (z,w) &\longrightarrow D_{\Pi(z,w)} \text{ define una distribución} \\ &\text{cuaterniónica sobre } N^*, \\ J_k D^\perp &\subseteq T^\perp N^*, \quad k=1,2,3, \end{aligned}$$

lo que prueba que  $N^*$  es una CR-subvariedad cuaterniónica  $(4m-3)$ -dimensional de  $QP^m$  y se concluye i).

Como las fibras de la fibración  $\Pi: M^* \longrightarrow N^*$  son total-

mente geodésicas, se tiene ( ver [On]),

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{\xi_1}(\Pi_*(a,b)) &= \Pi_*(\Lambda_{(w,z)}^*(a,b))^H, \\
 \text{(II.3B.27)} \quad \Lambda_{\xi_2}(\Pi_*(a,b)) &= \Pi_*(\Lambda_{(-z,w)}^*(a,b))^H, \\
 \Lambda_{\xi_3}(\Pi_*(a,b)) &= \Pi_*(\Lambda_{(-j_1 w, j_1 z)}^*(a,b))^H,
 \end{aligned}$$

para todo  $(a,b) \in T_{(z,w)} M^*$ , donde por  $( )^H$  se designa el correspondiente levantamiento horizontal y  $\Lambda$  (respectivamente,  $\Lambda^*$ ) es el endomorfismo de Weingarten de  $N^*$  en  $QP^m$  (respectivamente, de  $M^*$  en  $S^{4m+3}$ ).

Para probar iii) se procede como sigue,

1.- Si  $(a,b) = (-j_1 z, -j_1 w)$ , entonces, de la fórmula de Weingarten, dada una curva diferenciable  $\alpha(t)$  sobre  $M^*$ ,  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ , con condiciones,  $(\alpha_1(0), \alpha_2(0)) = (z, w)$  y  $(\alpha_1'(0), \alpha_2'(0)) = (-j_1 z, -j_1 w)$  y designando por  $\xi_k^*(t)$  el representante de  $\xi_k^*$  en  $\alpha(t)$ ,  $k=1,2,3$ , se tiene,

$$\begin{aligned}
 \text{(II.3B.28)} \quad -\Lambda_{\xi_1^*}^*(-j_1 z, -j_1 w) &= (-j_1 w, j_1 z) \in V_{(z,w)}, \\
 -\Lambda_{\xi_2^*}^*(-j_1 z, -j_1 w) &= (j_1 z, j_1 w) \in V_{(z,w)}, \\
 -\Lambda_{\xi_3^*}^*(-j_1 z, -j_1 w) &= (-w, z) \in V_{(z,w)},
 \end{aligned}$$

por tanto, de (II.3B.27) y (II.3B.28) se concluye,

$$\text{(II.3B.29)} \quad \Lambda_{\xi_1} D^{\perp} = \Lambda_{\xi_2} D^{\perp} = \Lambda_{\xi_3} D^{\perp} = \{0\},$$

de donde se deducen a) y b).

2.- Sea  $(a,b) \in T_{(z,w)} M^*$ ,  $(a,b)$  ortogonal a  $V_{(z,w)} \oplus \text{Sp}\{(j_1 z, j_1 w)\}$ , un vector unitario. Se supone que  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$  es una curva diferenciable sobre  $M^*$  tal que  $(\alpha_1(0), \alpha_2(0)) = (z, w)$  y  $(\alpha_1'(0), \alpha_2'(0)) = (a, b)$ , si  $\xi_1^*(t) = (\alpha_2(t), \alpha_1(t))$ , entonces, de la fórmula de Weingarten, se sigue,

$$\text{(II.3B.30)} \quad -\Lambda_{(w,z)}^*(a,b) = \left( \frac{d}{dt}(\xi_1^*(t)) \Big|_{t=0} \right)^T,$$

donde por  $\bar{\tau}$  se designa la componente en  $T_{(z,w)}^{M^*}$ . Así,

$$(II.3B.31) \quad \Lambda_{(w,z)}^*(a,b) = (b,a) + g_0((b,a),(-z,w))(-z,w) + g_0((b,a),(-j_1w,j_1z))(-j_1w,j_1z),$$

y de forma análoga,

$$(II.3B.32) \quad (\Lambda_{(w,z)}^*)^2(a,b) = (a,b) - g_0((b,a),(-z,w))(-z,w) - g_0((b,a),(-j_1w,j_1z))(j_1z,-j_1w) = (a,b) + Y,$$

donde  $Y \in V_{(z,w)}$ . Por consiguiente, de (II.3B.27) se concluye que,

$$(II.3B.33) \quad \Lambda_{\xi_1}^2 X = X$$

para todo  $X$  en  $D$ .

De forma similar, se prueba,

$$(II.3B.34) \quad \Lambda_{\xi_2}^2 X = X, \quad \Lambda_{\xi_3}^2 X = X,$$

para todo  $X \in D$ , con lo cual se concluye la demostración de c).

Finalmente, de (I.1.3), (I.2.1), (II.3B.25) y (II.3B.29) se sigue,

$$g(\Lambda_{J_1 Z} J_2 X, Y) = -g(J_2 X, \bar{\nu}_Y J_1 Z) = -g(X, \bar{\nu}_Y J_3 Z) = g(\Lambda_{J_3 Z} Y, X) = g(\Lambda_{J_3 Z} X, Y) = g(\bar{\nu}_X J_2 J_1 Z, Y) = -g(J_2 \Lambda_{J_1 Z} X, Y),$$

para cualesquiera  $X, Y \in D$ . Por consiguiente,

$$(II.3B.35) \quad \Lambda_{J_1 Z} J_2 = -J_2 \Lambda_{J_1 Z} \quad \text{sobre } D,$$

y análogamente,

$$(II.3B.36) \quad \Lambda_{J_3 Z} J_1 = -J_1 \Lambda_{J_3 Z}, \quad \Lambda_{J_2 Z} J_3 = -J_3 \Lambda_{J_2 Z},$$

sobre  $D$ .

De (II.3B.29), (II.3B.35) y (II.3B.36) se deduce que  $\text{traza } \Lambda_{J_1 Z} = \text{traza } \Lambda_{J_2 Z} = \text{traza } \Lambda_{J_3 Z} = 0$ , lo que prueba ii) y

se concluye la demostración del teorema.

Una interpretación como espacio homogéneo de  $N^*$  es la dada en el siguiente,

TEOREMA II.3B.6.-  $N^*$  es una CR-subvariedad cuaterniónica de  $QP^m$  difeomorfa a  $\frac{SU(m+1)}{SU(2) \times SU(m-1)}$ .

Demostración.- Del Teorema II.3B.3 y de (II.3B.5) bastará probar que  $M^*$  es difeomorfa a  $\frac{SU(m+1)}{SU(m-1)}$ . Así, con este objetivo, se considera la acción de  $SU(m+1)$  sobre  $M^*$  dada por

$$(II.3B.36) \quad P((z,w)) = (zP, wP),$$

para todo  $P \in SU(m+1)$  y para todo  $(z,w) \in M^*$ .

De (II.3B.17) se sigue que dicha acción está bien definida y que es una acción transitiva. Sea  $(z_0, w_0) \in M^*$ , con  $z_0 + j_2 w_0 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0) + j_2(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0)$ , entonces el subgrupo de isotropía de  $SU(m+1)$  en  $(z_0, w_0)$  viene dado por,

$$(II.3B.27) \quad \begin{aligned} H_{(z_0, w_0)} &= \{P \in SU(m+1) / z_0 P = z_0, w_0 P = w_0\} = \\ &= \{P \in SU(m+1) / P = \begin{bmatrix} 1 & | & 0 \\ \hline 0 & | & P' \end{bmatrix}, P' \in SU(m-1)\} = \\ &= SU(m-1), \end{aligned}$$

de donde se deduce que  $M^*$  es difeomorfo a  $\frac{SU(m+1)}{SU(m-1)}$ .

EJEMPLO II.3B.7.- Se considera  $CP^m$  isométricamente inmerso en  $QP^m$  de forma totalmente compleja y totalmente geodésica. Por el Teorema II.3B.5 se sigue que si  $M^* = \{(z,w) \in S^{4m+3} / \|z\| = \|w\|, \langle z, w \rangle = 0\}$ , entonces  $N^* = \Pi(M^*)$  es una CR-subvariedad cuaterniónica de  $QP^m$ , compacta, minimal y tal que que la segunda forma fundamental  $\sigma$  de  $N^*$  en  $QP^m$  verifica que  $\sigma(D, D^\perp) = \{0\}$ . Además, esta CR-subvariedad cuaterniónica es el conjunto de puntos del espacio proyectivo cuaterniónico

que están a una distancia  $\pi/4$  a lo largo de las geodésicas de  $QP^m$  partiendo de los puntos de  $CP^m$  en una dirección normal a  $CP^m$ .

Como consecuencia de esto, se obtiene que en el Ejemplo II.3B.2 todo tubo de radio  $r$  sobre el espacio proyectivo complejo,  $\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$ , es también un tubo sobre  $N^*$  de radio  $r - \frac{\pi}{4}$  y recíprocamente. Esto es, para todo  $r$ ,  $\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$ , se sigue que el tubo de radio  $r$  sobre  $CP^m$  es el tubo de radio  $\frac{\pi}{4} - r$  sobre  $N^*$ , y además, si  $0 < r < \frac{\pi}{4}$ , el tubo de radio  $r$  sobre  $CP^m$  puede ser considerado como un tubo de radio  $\frac{\pi}{4} - r$  sobre  $N^*$  cuyos vectores normales son los opuestos de los anteriores.

Sea  $x \in CP^m$ ,  $z \in S^{2m+1}$  tal que  $\pi_1(z) = x$ . Si  $y \in T_x^{\perp} CP^m$ , de (II.3B.8) se sigue que  $y = j_2 a$ ,  $a \in U(T_x CP^m)$ , esto es,  $a = (\pi_{1*})_z w$ ,  $\langle z, w \rangle = 0$ . Por tanto, de (II.1.6), de la Definición II.3.2 y teniendo en cuenta la identificación II.3B.4, se deduce que un punto  $A \in QP^m$  es un punto focal de  $(CP^m, x)$  a distancia  $\frac{\pi}{2}$  si,

$$(II.3B.38) \quad A = \pi_*(j_2 w) = \pi_*(0, w),$$

con  $\langle z, w \rangle = 0$  para  $z \in S^{2m+1}$ . Ahora bien, dado  $w \in S^{2m+1}$ , siempre existe  $z \in S^{2m+1}$  tal que  $\langle z, w \rangle = 0$ . Así se concluye que,

$$(II.3B.39) \quad \phi_{\frac{\pi}{2}}(CP^m) = CP^m.$$

Resumiendo, todo tubo de radio  $r$  sobre  $CP^m$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{4}$  ó  $\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$ , es también un tubo de radio  $\frac{\pi}{2} - r$  sobre  $CP^m$  y es a su vez un tubo sobre la CR-subvariedad cuaterniónica  $N^*$ .

COROLARIO II.3B.8.- Sea  $r > 0$ , tal que  $\phi_r(CP^m)$  es una hipersuperficie real de  $QP^m$ . Entonces, el conjunto focal de  $\phi_r(CP^m)$  es la unión de  $N^*$  con el conjunto focal de  $N^*$ .

Demostración.— Por el Lema II.2.8, basta considerar  $0 < r < \frac{\pi}{4}$  ó  $\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$ . Por el Corolario II.3B.2, si  $N$  es un campo de vectores normales a  $\phi_r(\mathbb{C}P^m)$ ,  $J_k N$ ,  $k=1,2,3$ , son principales con curvaturas principales  $2\operatorname{ctg}2r$ ,  $-2\operatorname{tg}2r$  y  $-2\operatorname{tg}2r$ , respectivamente. Así del Lema II.2.8, si  $0 < r < \frac{\pi}{4}$  se obtienen puntos focales a distancia  $\frac{\pi}{4}-r$ ,  $\frac{\pi}{2}-r$  y  $r$ . Ahora bien, los puntos focales a distancia  $\frac{\pi}{4}-r$  están en  $N^*$  y los puntos focales a distancia  $\frac{\pi}{2}-r$  y  $r$  son puntos focales de  $N^*$ , de donde se concluye el corolario en este caso.

Si  $\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$ , el corolario se demuestra de forma análoga.

§3C. CONJUNTO FOCAL DE UNA CR-SUBVARIEDAD CUATERNIONICA  
(4m-3)-DIMENSIONAL TOTALMENTE GEODESICA MIXTA DE  $QP^m$ .—

El ejemplo de CR-subvariedad cuaterniónica de  $QP^m$  obtenido en §3B de este Capítulo, motiva el estudio de las CR-subvariedades cuaterniónicas totalmente geodésicas mixtas del espacio proyectivo cuaterniónico.

En este sentido, y para el caso de que  $M$  sea una CR-subvariedad cuaterniónica de  $QP^m$ , M. Barros, B.Y. Chen y F. Urbano en [BCU], estudian la condición

$$(II.3C.1) \quad g(\sigma(D, D^\perp), J_k D^\perp) = 0, \quad k=1,2,3,$$

que, por el Corolario I.3.7, es equivalente a que  $D^\perp$  sea integrable con hojas totalmente geodésicas en  $M$ . Entre las propiedades obtenidas por los anteriores autores merecen ser destacadas:

LEMA II.3C.1.— Sea  $M$  una CR-subvariedad cuaterniónica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$ . Entonces para todo  $X \in \epsilon D$ ,  $Z \in D^\perp$  se tiene,



$$\begin{aligned}\Lambda_{J_i} Z^X &= \Lambda_{J_j} Z^{J_k X}, \\ \Lambda_{J_i} Z^{J_j X} &= -\Lambda_{J_j} Z^{J_i X}, \\ \Lambda_{J_i} Z^{J_i X} &= \Lambda_{J_j} Z^{J_j X},\end{aligned}$$

para todo  $i \neq j$ ,  $J_i J_j = J_k$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , donde por  $\Lambda$  se designa el endomorfismo de Weingarten de  $M$ .

LEMA II.3C.2.- Sea  $M$  una CR-subvariedad cuaterniónica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica  $\bar{M}$ . Entonces, para todo  $X, Y \in D$ ,  $Z \in D^\perp$  se tiene,

$$g(\Lambda_{J_k} Z^{J_i X}, Y) = -g(J_i \Lambda_{J_k} Z^X, Y),$$

$$g(\Lambda_{J_k} Z^{J_k X}, Y) = g(J_k \Lambda_{J_k} Z^X, Y),$$

para todo  $k \neq i$ ,  $k, i = 1, 2, 3$ .

LEMA II.3C.3.- Sea  $M$  una CR-subvariedad cuaterniónica del espacio proyectivo cuaterniónico. Si las hojas de  $D^\perp$  son totalmente geodésicas en  $M$ , entonces se tiene,

$$\|\sigma(X, Z)\|^2 + \|\Lambda_{J_k} Z^X\|^2 = 1, \quad k=1, 2, 3,$$

$$g(\sigma(X, X), J_k \Lambda_{J_k} Z^W) = 0, \quad k=1, 2, 3,$$

para cualesquiera  $X \in D$ ,  $Z, W \in D^\perp$  unitarios.

Los resultados obtenidos en esta línea en [BCU], están enfocados a probar la no existencia de CR-subvariedades cuaterniónicas curvadas negativamente en  $QP^m$  que puedan ser foliadas por subvariedades totalmente reales totalmente geodésicas, si bien, en dicho trabajo no se da ningún ejemplo de CR-subvariedad cuaterniónica de  $QP^m$  verificando la condición (II.3C.1).

Por el Teorema II.3B.7, la subvariedad  $N^*$  obtenida en §3B es una CR-subvariedad cuaterniónica verificando (II.3C.1).

Resulta, por tanto, de interés estudiar si existen muchas CR-subvariedades cuaterniónicas de  $QP^m$  verificando dicha condición.

DEFINICION II.3C.4.- Sea  $M$  una CR-subvariedad cuaterniónica de  $QP^m$ , se dice que  $M$  es totalmente geodésica mixta si se verifica,

$$(II.3C.2) \quad \sigma(D, D^\perp) = \{0\}.$$

Obsérvese que, si  $\dim M = 4m-3$ , entonces las condiciones (II.3C.1) y (II.3C.2) son equivalentes.

TEOREMA II.3C.5.- Sea  $M$  una CR-subvariedad cuaterniónica  $(4m-3)$ -dimensional y totalmente geodésica mixta del espacio proyectivo cuaterniónico  $QP^m$ . Entonces la segunda forma fundamental de  $M$  tiene el mismo comportamiento que la segunda forma fundamental de la subvariedad  $N^*$ .

Demostración.- Por el Lema II.3C.3 y por ser  $M$  totalmente geodésica mixta se tiene,

$$(II.3C.3) \quad \|\Lambda_{J_k Z} X\|^2 = 1, \quad k=1,2,3,$$

$$(II.3C.4) \quad g(\sigma(X, X), J_k \Lambda_{J_k Z}) = 0, \quad k=1,2,3,$$

para cualesquiera  $X \in D$ ,  $Z \in D^\perp$  unitarios.

Como  $\dim M = 4m-3$ , entonces  $\dim D^\perp = 1$  y por tanto,  $D^\perp = \text{Sp}\{Z\}$ . Así, de ser  $\sigma(D, D^\perp) = \{0\}$ ,  $\Lambda_{J_1 Z}$  deja invariantes las distribuciones  $D$  y  $D^\perp$ ; esto es, se puede escoger una base ortonormal de autovectores de  $\Lambda_{J_1 Z}$  de la forma  $\{X_1, \dots, X_{4m-4}, Z\}$  tal que,

$$(II.3C.5) \quad \Lambda_{J_1 Z} Z = \alpha_1 Z, \quad \Lambda_{J_1 Z} X_i = \beta_i X_i, \quad i=1, \dots, 4m-4.$$

Claramente  $D = \text{Sp}\{X_1, \dots, X_{4m-4}\}$ , luego, teniendo en cuenta (II.3C.4) y (II.3C.5), se deduce,

$$(II.3C.6) \quad \alpha_1 g(\sigma(X_i, X_i), J_1 Z) = \alpha_1 \beta_i = 0, \quad i=1, \dots, 4m-4.$$

Si  $\alpha_1 \neq 0$ , de (II.3C.6),  $\beta_i = 0$  para todo  $i=1, \dots, 4m-4$  y por consiguiente  $\|\Lambda_{J_1 Z} X_i\|^2 = 0$ ,  $i=1, \dots, 4m-4$ , lo cual contradice (II.3C.3); en consecuencia,  $\alpha_1 = 0$  y por tanto,

$$(II.3C.7) \quad \Lambda_{J_1 Z} Z = 0$$

De forma análoga se prueba que,

$$(II.3C.8) \quad \Lambda_{J_2 Z} Z = \Lambda_{J_3 Z} Z = 0.$$

Finalmente, de (II.3C.3),  $\beta_i^2 = 1$  y por consiguiente,

$$(II.3C.9) \quad \Lambda_{J_1 Z}^2 X = X,$$

para todo  $X \in D$ . Análogamente a (II.3C.9) puede deducirse,

$$(II.3C.10) \quad \Lambda_{J_2 Z}^2 X = \Lambda_{J_3 Z}^2 X = X,$$

para todo  $X \in D$ .

La minimalidad se sigue del Lema II.3C.2 y de ser  $0 = \Lambda_{J_1 Z} Z$ .

Para concluir la demostración basta tener en cuenta (II.3C.7), (II.3C.8), (II.3C.9), (II.3C.10) y el Teorema II.3B.5.

Se pasa a continuación a estudiar los puntos focales sobre una CR-subvariedad cuaterniónica  $(4m-3)$ -dimensional y totalmente geodésica mixta del espacio proyectivo cuaterniónico  $QP^m$ .

PROPOSICION II.3C.6.- Sea  $M$  una CR-subvariedad cuaterniónica  $(4m-3)$ -dimensional totalmente geodésica mixta de  $QP^m$ . Si  $0 <$

$< r < \frac{\pi}{4}$ , entonces el tubo de radio  $r$  sobre  $M$  es una hipersuperficie real de  $QP^m$  con cuatro curvaturas principales constantes y distintas,  $\mu_1 = -2\text{ctg}2r$  de multiplicidad 2,  $\mu_2 = 2\text{tg}2r$  de multiplicidad 1,  $\lambda_1 = \text{ctg}(\frac{\pi}{4} - r)$  de multiplicidad  $2(m-1)$  y  $\lambda_2 = -\text{tg}(\frac{\pi}{4} - r)$  de multiplicidad  $2(m-1)$ .

Demostración.- Sea  $A \in M$  y  $\xi \in U(T_A^{\perp}M)$ . Por el Teorema II.3C.5 se puede escoger en  $T_A^{\perp}M$  una base de autovectores de  $\Lambda_{\xi}$ ,  $\{X_1, \dots, X_{4m-4}, Z\}$  verificando,  $D_A^{\perp} = \{Z\}$  y

$$(II.3C.11) \quad \begin{aligned} \Lambda_{\xi} X_i &= X_i, & i=1, \dots, 2(m-1), \\ \Lambda_{\xi} X_j &= X_j, & j=2m-1, \dots, 4(m-1), \\ \Lambda_{\xi} Z &= 0. \end{aligned}$$

Entonces, de la Proposición II.2.2, de (II.1.23), (II.3C.11) y como  $\xi = a_1 J_1 Z + a_2 J_2 Z + a_3 J_3 Z$  con  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ , se deduce que,

$$(II.3C.12) \quad \begin{aligned} (\phi_r)_*(A, \xi)(X_i) &= \cos r (\cos r - \text{sen} r) X_i + \\ &+ \text{sen} r (\cos r - \text{sen} r) \tilde{\sigma}(X_i, \xi), \quad i=1, \dots, 2m-2, \end{aligned}$$

$$(II.3C.13) \quad \begin{aligned} (\phi_r)_*(A, \xi)(X_j) &= \cos r (\cos r + \text{sen} r) X_j + \\ &+ \text{sen} r (\cos r + \text{sen} r) \tilde{\sigma}(X_j, \xi), \quad j=2m-1, \dots, 4m-4, \end{aligned}$$

$$(II.3C.14) \quad \begin{aligned} (\phi_r)_*(A, \xi)(Z) &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2r)Z + \frac{1}{2}(\cos 2r - 1) \left( \sum_{k=1}^3 g(J_k \xi, Z) J_k \xi \right) \\ &= \cos 2r Z. \end{aligned}$$

Además, si  $\eta_1$  y  $\eta_2$  son dos vectores ortonormales en  $T_A^{\perp}M$  tales que  $\{\xi, \eta_1, \eta_2\}$  forman una base ortonormal de  $T_A^{\perp}M$ , entonces,  $\eta_i = b_{i1} J_1 Z + b_{i2} J_2 Z + b_{i3} J_3 Z$ ,  $i=1, 2$ , donde

$$(II.3C.15) \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \in SO(3),$$

Así, por la Proposición II.2.2 y por (II.1.23) se tendrá que,

$$(II.3C.16) \quad (\phi_r)_*(A, \xi)(\eta_i) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r \eta_i, \quad i=1,2.$$

En consecuencia, de ser  $0 < r < \frac{\pi}{4}$  y de (II.3C.13), (II.3C.14) y (II.3C.16) se obtiene que  $\operatorname{rango}(\phi_r)_* = 4m-1$ , por lo que  $\phi_r(M)$  es una hipersuperficie real de  $QP^m$ .

Se estudia a continuación el comportamiento del endomorfismo de Weingarten  $\bar{\lambda}_r$  de  $\phi_r(M)$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{4}$ .

Sea  $\bar{A} = \phi_r(A, \xi)$ ; de lo anterior y de (II.2.4), el vector normal a  $\phi_r(M)$  en  $\bar{A}$  viene dado por,

$$(II.3C.17) \quad N_{\bar{A}} = \cos 2r \xi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r \tilde{\sigma}(\xi, \xi),$$

por consiguiente, si se sigue la misma notación que en §2 de este Capítulo, se tiene, por ser  $\{X_1, \dots, X_{4m-4}\}$  ortonormales a  $\operatorname{Sp}\{J_1 \xi, J_2 \xi, J_3 \xi\}$ , y de forma análoga al apartado iii) de la Proposición II.2.5 que,

$$(II.3C.18) \quad \begin{aligned} \bar{\lambda}_r \bar{X}_i &= \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - r\right) \bar{X}_i, & i=1, \dots, 2m-2, \\ \bar{\lambda}_r \bar{X}_j &= -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - r\right) \bar{X}_j, & j=2m-1, \dots, 4m-4. \end{aligned}$$

Además, si  $\alpha(t)$  es una curva diferenciable sobre  $M$  tal que  $\alpha(0)=A$  y  $\alpha'(0)=Z$ , si se denota por  $\xi(t)$  el desplazamiento paralelo de  $\xi$  en  $T^{\perp}M$  a lo largo de  $\alpha$ , entonces, de (II.1.23), (II.1.24), (II.2.5), (II.3C.11), (II.3C.14) y (II.3C.17) se sigue,

$$(II.3C.19) \quad \begin{aligned} -\bar{\lambda}_r \bar{Z} &= \left( \frac{d}{dt} (N_{\phi_r(\alpha(t), \xi(t))}) \Big|_{t=0} \right)^{\top} = \\ &= \left( \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r (-\tilde{\lambda}_{\tilde{\sigma}(\xi, \xi)} Z) \right)^{\top} = -2 \operatorname{sen} 2r Z = \\ &= -2 \operatorname{ctg} 2r \bar{Z}. \end{aligned}$$

Finalmente, si  $\beta_i(t)$  es una curva diferenciable en  $U(T_A^{\perp}M)$

tal que  $\beta_i(0)=\xi$  y  $\beta'_i(0)=\eta_i$ ,  $i=1,2$ , entonces, análogamente a (II.3C.19), se tiene,

$$(II.3C.20) \quad -\bar{\lambda}_r \bar{\eta}_i = \cos 2r \eta_i = 2 \operatorname{ctg} 2r \bar{\eta}_i, \quad i=1,2.$$

El resultado se sigue entonces de (II.3C.18), (II.3C.19) y (II.3C.20).

De la demostración del Teorema II.3C.6, se tiene que  $\bar{Z}$ ,  $\bar{\eta}_1$  y  $\bar{\eta}_2$  son principales. Así, de (II.2.5), como  $\operatorname{Sp}\{J_1\xi, J_2\xi, J_3\xi\} = \operatorname{Sp}\{\bar{Z}, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2\}$ , se obtiene que el operador  $\bar{\lambda}_r$  del tubo de radio  $r$  sobre  $M$ ,  $\phi_r(M)$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{4}$ , verifica,

$$(II.3C.21) \quad g(\bar{\lambda}_r(\operatorname{Sp}\{J_1N_{\bar{A}}, J_2N_{\bar{A}}, J_3N_{\bar{A}}\}), D_{\bar{A}}(r)) = 0,$$

donde  $D_{\bar{A}}(r)$  es el complemento ortogonal de  $\operatorname{Sp}\{J_1N_{\bar{A}}, J_2N_{\bar{A}}, J_3N_{\bar{A}}\}$  en  $T_{\bar{A}}(\phi_r(M))$ . En consecuencia, si se denota por  $D_{\bar{A}}^{\perp}(r)$  al espacio generado por  $J_1N_{\bar{A}}$ ,  $J_2N_{\bar{A}}$  y  $J_3N_{\bar{A}}$ , la matriz del endomorfismo  $\bar{\lambda}_r$  de  $\phi_r(M)$  en  $\bar{A}$  viene dada por

$$(II.3C.22) \quad \bar{\lambda}_r = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4}-r) & & & & & \\ & \cdot & (2m-2) & & & \\ & & \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4}-r) & & & \\ & & & -\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-r) & & \\ & & & & \cdot & (2m-2) \\ & & & & & -\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-r) \\ \hline & & & & & 2\operatorname{tg}2r \\ & & & & & -2\operatorname{ctg}2r \\ & & & & & -2\operatorname{ctg}2r \end{array} \right]$$

respecto de una base de  $D_{\bar{A}}(r) \oplus D_{\bar{A}}^{\perp}(r)$ . Así, de (II.3C.5), si se toma como nueva base local de la estructura cuaterniónica

$$\{J'_1, J'_2, J'_3\}, \text{ donde, } \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J'_1 \\ J'_2 \\ J'_3 \end{bmatrix}$$

De esta forma, los correspondientes  $-J_1'N_{\bar{A}}$ ,  $-J_2'N_{\bar{A}}$  y  $-J_3'N_{\bar{A}}$  son principales con curvaturas principales  $2tg2r$ ,  $-2ctg2r$  y  $-2ctg2r$ , respectivamente, con lo que se concluye,

COROLARIO II.3C.7.- Sea M una CR-subvariedad cuaterniónica (4m-3)-dimensional totalmente geodésica mixta de  $QP^m$ . Entonces, si  $0 < r < \frac{\pi}{4}$ ,  $\phi_r(M)$  es una hipersuperficie real de  $QP^m$  con cuatro curvaturas principales constantes y distintas, verificando que existe una base local de la estructura cuaterniónica,  $\{J_1', J_2', J_3'\}$ , de  $QP^m$ , tal que, si N es un campo de vectores normales a  $\phi_r(M)$ , los correspondientes  $J_1'N$ ,  $J_2'N$  y  $J_3'N$  son principales con curvaturas principales  $2tg2r$ ,  $-2ctg2r$  y  $-2ctg2r$ , respectivamente. Además, las curvaturas principales respecto de una base ortonormal de campos de vectores de  $D(r)$  son  $\lambda_1 = ctg(\frac{\pi}{4}-r)$  y  $\lambda_2 = -tg(\frac{\pi}{4}-r)$  ambas de multiplicidad  $2m-2$ .

Nota.- Obsérvese de la Proposición II.3B.1 y de (II.3C.22) que las curvaturas principales de  $\phi_r(CP^m)$  son las mismas, salvo la elección del normal, que las de  $\phi_{r-\frac{\pi}{4}}(M)$  para todo  $r$  tal que  $\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$ .

TEOREMA II.3C.8.- Sea M una CR-subvariedad cuaterniónica (4m-3)-dimensional totalmente geodésica mixta de  $QP^m$  y sea  $\bar{M}$  una hipersuperficie real conexa y orientable de  $QP^m$  la cual se queda en el tubo de radio  $r$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{4}$ , sobre M. Entonces  $\bar{M}$  se queda en el tubo de radio  $r' = \frac{\pi}{4} - r$  sobre el espacio proyectivo complejo  $CP^m$ .

Demostración.- Por estar  $\bar{M}$  sobre  $\phi_r(M)$  para algún  $r$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{4}$ , entonces del Teorema II.3C.6 y del Corolario II.3C.7 se deduce que  $\bar{M}$  tiene curvaturas principales constantes y

además, si  $N$  es un campo de vectores normales a  $\bar{M}$  se puede escoger, localmente, la estructura cuaterniónica de  $QP^m$  de forma que si  $\bar{N}$  es un campo de vectores normales a  $\bar{M}$ , existe una base  $\{\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_{4m-4}, J_1\bar{N}, J_2\bar{N}, J_3\bar{N}\}$  ortonormal de autovectores de  $T\bar{M}$  tal que el endomorfismo de Weingarten  $\bar{\lambda}$  de  $\bar{M}$  está dado, respecto de esta base, por,

$$(II.3C.23) \quad \begin{aligned} \bar{\lambda}(\bar{X}_i) &= \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-r\right)\bar{X}_i, & i=1, \dots, 2m-2, \\ \bar{\lambda}(\bar{X}_j) &= -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-r\right)\bar{X}_j, & j=2m-1, \dots, 4m-4, \\ \bar{\lambda}(J_1\bar{N}) &= 2\operatorname{tg}2rJ_1\bar{N}, \\ \bar{\lambda}(J_k\bar{N}) &= -2\operatorname{ctg}2rJ_k\bar{N}, & k=2, 3. \end{aligned}$$

En consecuencia, del Lema II.2.6, si se considera el tubo de radio  $r' = \frac{\pi}{4} - r$  sobre  $\bar{M}$ ,  $\phi_{r'}: \bar{M} \longrightarrow QP^m$ , se tiene que  $\phi_{r'}$  tiene rango constante sobre  $\bar{M}$  e igual a  $2m$ . Por tanto, mediante el uso del Teorema de la función inversa (ver [Bt]) para cada  $A \in \bar{M}$  existe un entorno coordinado  $U$  de  $A$  en  $\bar{M}$  con coordenadas locales  $u^1, u^2, \dots, u^{4m-1}$  con origen en  $A$  tal que  $\phi_{r'}$  es un embebimiento de la slice  $u^{2m+1} = \dots = u^{4m-1} = 0$  sobre  $QP^m$ . Luego  $\phi_{r'}(\bar{M})$  es una subvariedad  $2m$ -dimensional en un entorno de  $\phi_{r'}(A)$ . Además la distribución,

$$(II.3C.24) \quad T_0 = \{X \in T_A \bar{M} / (\phi_{r'})_* X = 0\},$$

es integrable con hojas  $(2m-1)$ -dimensionales sobre  $\bar{M}$ .

Por consiguiente, existe un entorno  $U$  en  $\bar{M}$ ,  $A \in U$ , suficientemente pequeño tal que  $\phi_{r'}(U) = V$  es una subvariedad  $2m$ -dimensional embebida en  $QP^m$ .

Si  $V_1$  y  $V_2$  son los autoespacios correspondientes a los autovectores  $\operatorname{ctg} r'$  y  $-\operatorname{tg} r'$ , respectivamente, en  $A$ , entonces, de ser  $T_0$  integrable y del Lema II.2.6 se deduce,



$$g([X, Y], J_k \bar{N}) = 0, \quad k=2, 3,$$

$$g([X, J_1 \bar{N}], J_k \bar{N}) = 0, \quad k=2, 3,$$

para cualesquiera  $X, Y \in V_1$ .

De esto, de (I.1.3), (I.2.1) y (II.3C.23) se sigue,

$$(II.3C.25) \quad g(X, J_k Y) = 0, \quad k=2, 3,$$

$$p_2(X) = p_3(X) = 0,$$

para cualesquiera  $X, Y \in V_1$ .

Si se toma ahora el tubo de radio  $\frac{\pi}{2} - r'$  sobre  $\bar{M}$ , entonces, por un razonamiento análogo a la obtención de (II.3C.25) se deduce,

$$(II.3C.26) \quad g(Z, J_k W) = 0, \quad k=2, 3,$$

$$p_2(Z) = p_3(W) = 0,$$

para cualesquiera  $Z, W \in V_2$ .

De lo anterior, de ser  $\dim V_1 = \dim V_2$  y de las propiedades de la estructura cuaterniónica se tiene,

$$(II.3C.27) \quad J_k V_1 = V_2, \quad k=2, 3,$$

$$J_1 V_1 = V_2,$$

$$J_1 V_2 = V_2.$$

Además, de la ecuación de Codazzi, se sigue que

$$g((\bar{\nabla}_X \wedge)Z, Y) = g((\bar{\nabla}_Z \wedge)X, Y),$$

para cualesquiera  $Z \in V_1$ ,  $X, Y \in V_2$ , siendo  $\bar{\nabla}$  la derivación covariante de  $\bar{M}$ , en consecuencia,

$$(II.3C.28) \quad g(\bar{\nabla}_X Z, Y) = 0$$

para cualesquiera  $X, Y \in V_2$ ,  $Z \in V_1$ .

Por otra parte, de (I.1.7) y (I.2.10) se deduce,

$$g((\bar{\nabla}_{J_1 \bar{N}} \wedge)J_2 \bar{N}, J_3 \bar{N}) = g((\bar{\nabla}_{J_2 \bar{N}} \wedge)J_1 \bar{N}, J_3 \bar{N})$$

$$g((\bar{v}_{J_1 \bar{N}_A})_{J_3 \bar{N}, J_2 \bar{N}}) = g((\bar{v}_{J_3 \bar{N}_A})_{J_1 \bar{N}, J_2 \bar{N}}),$$

$$g((\bar{v}_{J_2 \bar{N}_A})_{J_3 \bar{N}, J_1 \bar{N}}) = g((\bar{v}_{J_3 \bar{N}_A})_{J_2 \bar{N}, J_1 \bar{N}}),$$

y mediante el uso de (II.1.3) y (II.3C.23) se concluye,

$$(II.3C.29) \quad p_2(J_3 \bar{N}) = p_3(J_3 \bar{N}) = 2 \operatorname{tg} 2r'.$$

De la Proposición II.2.2 y de (II.3C.23) se tiene que si  $\bar{A} = \phi_r(A, \bar{N}_A)$ , entonces  $T_{\bar{A}}V$  es el subespacio de  $T_{\bar{A}}QP^m$  generado por  $\tilde{V}_2 = \operatorname{Sp}\{\bar{X} + \operatorname{tgr}' \tilde{\sigma}(\bar{X}, N_A) / \bar{X} \in V_2\}$  y por  $\{J_k \bar{N}_A, k=2,3\}$ . En consecuencia, de (II.1.24), si  $\{\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_{2(m-1)}\}$  es una base ortonormal de  $V_2$ , entonces,

$$(II.3C.30) \quad \{\bar{Z}_1 + \operatorname{tgr}' \tilde{\sigma}(\bar{Z}_1, \bar{N}_A), \dots, \bar{Z}_{2m-2} + \operatorname{tgr}' \tilde{\sigma}(\bar{Z}_{2m-2}, \bar{N}_A), \\ J_2 \bar{N}_A, J_3 \bar{N}_A\},$$

es una base ortogonal de  $T_{\bar{A}}V$ .

Ahora bien, de (II.1.18), es fácil deducir que para todo  $X \in V_1 \oplus V_2$ ,  $X + \operatorname{tgr}' \tilde{\sigma}(X, \bar{N}_A) \in T_{\bar{A}}QP^m$ . Por tanto, de (II.1.24) y (II.3C.24) se sigue que,

$$(II.3C.31) \quad \tilde{V}_1 = \operatorname{Sp}\{\bar{X} + \operatorname{tgr}' \tilde{\sigma}(\bar{X}, \bar{N}_A) / \bar{X} \in V_1\} \subseteq T_{\bar{A}}^{\perp} V,$$

y como, claramente, de (II.1.18) y (II.2.4),  $J_1 \bar{N}_A$  y  $\cos 2r' N_A + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r' \tilde{\sigma}(N_A, N_A)$  se quedan en  $T_{\bar{A}}^{\perp} V$ , se puede concluir,

$$(II.3C.32) \quad T_{\bar{A}}^{\perp} V = \tilde{V}_1 \oplus \operatorname{Sp}\{J_1 \bar{N}_A, \cos 2r' \bar{N}_A + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r' \tilde{\sigma}(\bar{N}_A, \bar{N}_A)\}.$$

Razonando como en (II.2.5), es fácil deducir de (II.3C.27), (II.3C.30) y (II.3C.31) que,

$$(II.3C.33) \quad \begin{aligned} J_1(T_{\bar{A}}V) &= T_{\bar{A}}V, \\ J_2(T_{\bar{A}}V) &= T_{\bar{A}}^{\perp} V, \\ J_3(T_{\bar{A}}V) &= T_{\bar{A}}^{\perp} V, \end{aligned}$$

por lo que  $T_{\bar{A}}V$  es un subespacio totalmente complejo en el

sentido de Funabashi, [Fu2].

En lo que sigue se va a probar que  $V$  es una subvariedad totalmente geodésica de  $QP^m$ , para lo cual se designa por

$$(II.3C.34) \quad \begin{aligned} \xi^* &= \cos 2r \bar{N}_A + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r \tilde{\sigma}(\bar{N}_A, \bar{N}_A), \\ X^* &= X + \operatorname{tgr}' \tilde{\sigma}(X, \bar{N}_A), \end{aligned}$$

para todo  $X \in V_1 \oplus V_2$ .

Con este objetivo y razonando de igual forma que en la Proposición II.2.7, se deduce,

$$(II.3C.35) \quad \Lambda^*_{\xi^*} = 0,$$

donde por  $\Lambda^*$  se denota el endomorfismo de Weingarten de  $V$ .

Sean  $Z, W \in V_2$  y sea  $\alpha(t)$  una curva diferenciable sobre  $M$  tal que  $\alpha(0)=A$  y  $\alpha'(0)=W$ , entonces, de (I.2.1), (II.1.24) y (II.3C.23), denotando por  $\sigma^*$  la segunda forma fundamental de  $V$  en  $QP^m$ , se tiene,

$$(II.3C.36) \quad \begin{aligned} \sigma^*(Z^*, W^*) &= (\tilde{\nabla}_Z W + \tilde{\sigma}(Z, W) - \operatorname{tgr}' \tilde{\chi}_{\tilde{\sigma}(W, \bar{N}_A)} Z + \\ &+ \operatorname{tgr}' (\tilde{\sigma}(\tilde{\nabla}_Z W, \bar{N}_A) + \tilde{\sigma}(\tilde{\nabla}_Z \bar{N}_A, W)))^{\perp} = \\ &= (\nabla_Z W + (1 + \operatorname{tg}^2 r') \tilde{\sigma}(Z, W) - 2 \operatorname{tgr}' g(W, Z) \bar{N}_A - \\ &- \operatorname{tgr}' g(J_1 W, Z) J_1 \bar{N}_A + \operatorname{tgr}' \tilde{\sigma}(\nabla_Z W, \bar{N}_A) - \\ &- \operatorname{tg}^2 r' g(W, Z) \tilde{\sigma}(\bar{N}_A, \bar{N}_A))^{\perp} \end{aligned}$$

donde por  $^{\perp}$  se designa la componente en  $T_A^{\perp} V$ .

Como, por (II.3C.35),  $\sigma^*(Z^*, W^*)$  no va en la dirección de  $\xi^*$ , basta probar que tampoco va en la dirección de  $J_1 \bar{N}_A$  ni en la dirección de  $\bar{X}^*$ , con  $\bar{X} \in V_1$ .

Ahora bien, de (II.1.24), (II.3C.28) y (II.3C.36) se tiene,

$$(II.3C.37) \quad g(\sigma^*(Z^*, W^*), \bar{X}^*) = g(\nabla_Z W, \bar{X}) = 0$$

para todo  $\bar{X} \in V_1$ , y

$$(II.3C.38) \quad g(\sigma^*(W^*, Z^*), J_1 \bar{N}_A) = g(\nabla_Z W - \text{tgr}'g(J_1 W, Z) J_1 \bar{N}_A, J_1 \bar{N}_A) = \text{tgr}'g(J_1 W, Z) - \text{tgr}'g(J_1 W, Z) = 0.$$

En consecuencia, de (II.3C.37) y (II.3C.38) se sigue,

$$(II.3C.39) \quad \sigma^*(\tilde{V}_2, \tilde{V}_2) = \{0\}.$$

Se considera ahora  $Z \in V_2$ . Entonces, de (I.2.3), (II.2.1) (II.2.24); (II.3C.23) y (II.3C.26), se deduce,

$$(II.3C.40) \quad \begin{aligned} \sigma^*(Z^*, J_2 \bar{N}_A) &= (\tilde{\nabla}_Z J_2 \bar{N}_A + \tilde{\sigma}(Z, J_2 \bar{N}_A))^\perp = \\ &= (p_1(Z) J_3 \bar{N}_A + \text{tgr}'J_2 Z - \tilde{\sigma}(J_2 Z, \bar{N}_A))^\perp, \end{aligned}$$

y como si  $C = p_1(Z) J_3 \bar{N}_A + \text{tgr}'J_2 Z - \tilde{\sigma}(J_2 Z, \bar{N}_A)$ , se tiene que

$$(II.3C.41) \quad g(C, X^*) = \text{tgr}'g(J_2 Z, X) - \text{tgr}'g(J_2 Z, X) = 0$$

para todo  $X \in V_1$ , y

$$(II.3C.42) \quad g(C, J_1 \bar{N}_A) = 0,$$

entonces, de (II.3C.40), (II.3C.41) y (II.3C.42) se concluye que,

$$(II.3C.43) \quad \sigma^*(\tilde{V}_2, J_2 \bar{N}_A) = \{0\}.$$

De forma análoga a la obtención de (II.3C.43), se obtiene,

$$(II.3C.44) \quad \sigma^*(\tilde{V}_2, J_3 \bar{N}_A) = \{0\}.$$

Finalmente, de (I.2.3), (II.1.23), (II.3C.23) y (II.3C.29), se sigue,

$$(II.3C.45) \quad \begin{aligned} \sigma^*(J_3 \bar{N}_A, J_2 \bar{N}_A) &= (\tilde{\nabla}_{J_3 \bar{N}_A} J_2 \bar{N}_A)^\perp = \\ &= (p_1(J_3 \bar{N}_A) J_3 \bar{N}_A)^\perp = 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, de (II.3C.39), (II.3C.43), (II.3C.44) y (II.3C.45),  $V$  es una subvariedad totalmente geodésica de

$QP^m$  y por tanto, localmente simétrica. Así,  $(V, J_1)$  es una variedad Kaehleriana inmersa de forma totalmente compleja y totalmente geodésica en  $QP^m$ , y por un resultado de rigidez de Funabashi, [Fu2],  $V$  ha de ser un abierto de  $CP^m$ .

Es claro entonces que  $U$  se queda sobre el tubo de radio  $\frac{\pi}{4}-r$  sobre un espacio proyectivo complejo  $CP^m$ . Además por ser  $\bar{M}$  conexa con curvaturas principales constantes,  $\bar{M}$  se queda en el tubo de radio  $\frac{\pi}{4}-r$  sobre  $CP^m$ , lo que concluye la demostración.

Como consecuencia inmediata de este Teorema se sigue,  
COROLARIO II.3C.9.- Sea  $M$  una CR-subvariedad cuaterniónica  $(4m-3)$ -dimensional conexa y totalmente geodésica mixta de  $QP^m$ . Entonces  $M$  se queda sobre  $N^*$ , siendo  $N^*$  la CR-subvariedad cuaterniónica dada en §2B de este Capítulo.

## CAPITULO III

### HIPERSUPERFICIES REALES ISOPARAMÉTRICAS EN EL ESPACIO PROYECTIVO CUATERNIÓNICO.-

Todos los ejemplos de hipersuperficies reales del espacio proyectivo cuaterniónico obtenidos en el Capítulo II tienen curvaturas principales constantes. En este capítulo se prueba que éstos son los únicos ejemplos de hipersuperficies reales con curvaturas principales constantes de  $QP^m$  tales que su endomorfismo de Weingarten deja invariante la distribución cuaterniónica asociada a las mismas. También se da una caracterización de las hiperesferas geodésicas en este espacio. Concretamente se prueba que, localmente, éstas son las únicas hipersuperficies reales del espacio proyectivo cuaterniónico, de dimensión cuaterniónica mayor o igual que tres, con dos curvaturas principales distintas en cada punto.

#### §1. HIPERSUPERFICIES REALES DEL ESPACIO PROYECTIVO CUATERNIÓNICO. FORMULAS BASICAS.-

Sea  $M$  una hipersuperficie real<sup>(\*)</sup> del espacio proyectivo cuaterniónico  $QP^m$  y sea  $N$  un campo de vectores normales unitario a  $M$  en  $QP^m$ . Por  $U_k$  se designará a  $-J_k N$ ,  $k=1,2,3$ . Como para todo  $X \in TM$ ,  $F_k X$  va en la dirección de  $N$ ,  $k=1,2,3$ , entonces (I.2.9) se puede escribir en la forma,

---

(\*) Las hipersuperficies reales estudiadas en esta memoria serán siempre orientables.

$$(III.1.1) \quad J_k X = P_k X + f_k(X)N, \quad k=1,2,3,$$

donde  $F_k X = f_k(X)N$ ,  $k=1,2,3$ , esto es,

$$(III.1.2) \quad f_k(X) = g(U_k, X), \quad k=1,2,3,$$

De (III.1.1), (III.1.2) y teniendo en cuenta que  $J_1$ ,  $J_2$  y  $J_3$  son estructuras casi-Hermiticas, se deduce,

$$(III.1.3) \quad P_k^2 X = -X + f_k(X)U_k, \quad k=1,2,3,$$

$$(III.1.4) \quad g(P_k X, Y) + g(X, P_k Y) = 0, \quad k=1,2,3,$$

$$(III.1.5) \quad g(P_k X, P_k Y) = g(X, Y) - f_k(X)f_k(Y), \quad k=1,2,3,$$

para cualesquiera  $X, Y \in TM$ .

Obsérvese también, de (III.1.2), que,

$$(III.1.6) \quad f_k(P_k X) = 0, \quad k=1,2,3,$$

para todo  $X \in TM$ , y que

$$(III.1.7) \quad P_k U_k = 0, \quad k=1,2,3,$$

De (I.1.2),  $J_1 J_2 = -J_2 J_1 = J_3$ , Por lo que utilizando (III.1.1) e igualando las componentes tangenciales y normales, se tiene,

$$(III.1.8) \quad \begin{aligned} P_1 X &= P_2 P_3 X - f_3(X)U_2 = -P_3 P_2 X + f_2(X)U_3, \\ P_2 X &= P_3 P_1 X - f_1(X)U_3 = -P_1 P_3 X + f_3(X)U_1, \\ P_3 X &= P_1 P_2 X - f_2(X)U_1 = -P_2 P_1 X + f_1(X)U_2, \end{aligned}$$

y

$$(III.1.9) \quad f_i(X) = f_j(P_k X) = -f_k(P_j X),$$

para todo  $X \in TM$ , siendo  $(i, j, k)$  una permutación cíclica de  $(1, 2, 3)$ .

Las fórmulas de Gauss y Weingarten, en este caso, vienen dadas por

$$(III.1.10) \quad \begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + g(\Lambda X, Y)N \\ \bar{\nabla}_X N &= -\Lambda X \end{aligned}$$

para cualesquiera  $X, Y \in TM$ , donde por  $\Lambda$  se designa el endomorfismo de Weingarten de  $M$ .

Las ecuaciones de Gauss y Codazzi vienen dadas, respectivamente, por

$$(III.1.11) \quad \begin{aligned} \bar{R}(X, Y, Z, W) &= R(X, Y, Z, W) + g(\Lambda X, Z)g(\Lambda Y, W) - \\ &\quad - g(\Lambda X, W)g(\Lambda Y, Z), \end{aligned}$$

$$(III.1.12) \quad (\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = g((\nabla_X \Lambda)Y, Z) - g((\nabla_Y \Lambda)X, Z),$$

para cualesquiera  $X, Y, Z, W \in TM$ , donde

$$(III.1.13) \quad (\nabla_X \Lambda)Y = \nabla_X \Lambda Y - \Lambda \nabla_X Y.$$

Sustituyendo (I.1.7) en (III.1.11) y teniendo en cuenta (III.1.1), se tiene,

$$(III.1.14) \quad \begin{aligned} R(X, Y)Z &= g(Y, Z)X - g(X, Z)Y + \sum_{k=1}^3 \{g(P_k Y, Z)P_k X - \\ &\quad - g(P_k X, Z)P_k Y + 2g(X, P_k Y)P_k Z\} + g(\Lambda Y, Z)\Lambda X - \\ &\quad - g(\Lambda X, Z)\Lambda Y, \end{aligned}$$

para cualesquiera  $X, Y, Z \in TM$ .

De (I.1.3), (III.1.10) y teniendo en cuenta la definición de  $U_k$ , se tiene,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X U_i &= -\bar{\nabla}_X J_i N = -J_i \bar{\nabla}_X N + p_j(X)J_k N - p_k(X)J_j N = \\ &= J_i \Lambda X - p_j(X)U_k + p_k(X)U_j = P_i \Lambda X - p_j(X)U_k + \\ &\quad + p_k(X)U_j + f_i(\Lambda X)N. \end{aligned}$$

Así, igualando componentes tangenciales en la expresión anterior, se concluye,

$$(III.1.15) \quad \nabla_X U_i = -p_j(X)U_k + p_k(X)U_j + P_i \Lambda X,$$



para todo  $X \in TM$  y donde  $(i, j, k)$  es una permutación cíclica de  $(1, 2, 3)$ .

Finalmente, de ser  $QP^m$  de curvatura seccional cuaterniónica constante e igual a 4, de (I.1.7) y (III.1.12) se deduce,

$$(III.1.16) \quad (\nabla_X \Lambda)Y - (\nabla_Y \Lambda)X = \sum_{k=1}^3 \{f_k(X)P_k Y - f_k(Y)P_k X + 2g(X, P_k Y)U_k\},$$

para cualesquiera  $X, Y \in TM$ .

## §2. HIPERSUPERFICIES REALES ISOPARAMETRICAS DE $QP^m$ VERIFICANDO $g(\Lambda D, D')=0$ .

Sea  $M$  una hipersuperficie real de  $QP^m$  con campo de vectores normales  $N$ ; si se designa por  $D'$  al subespacio generado por  $U_1, U_2$  y  $U_3$ , y por  $D$  al complemento ortogonal de  $D'$  en  $TM$ , claramente, se obtiene que  $D$  y  $D'$  son distribuciones diferenciables sobre  $M$ .

En este epígrafe se clasifican las hipersuperficies reales isoparamétricas, verificando que  $g(\Lambda D, D')=0$ , del espacio proyectivo cuaterniónico.

Una caracterización de la condición anterior viene dada por,

LEMA III.2.1.- Sea  $M$  una hipersuperficie real de  $QP^m$ . Entonces  $g(\Lambda D, D')=0$  si y sólo si existe una base local de  $\hat{V}$ ,  $\{J'_1, J'_2, J'_3\}$ , tal que los correspondientes  $U'_k = -J'_k N$ ,  $k=1, 2, 3$  son principales.

Demostración.- Si se supone que existe una base local  $\{J'_1, J'_2, J'_3\}$  de  $\hat{V}$  tal que los correspondientes  $U'_k$  son principales, es claro que por ser  $D' = Sp\{U'_1, U'_2, U'_3\}$ , se verifica

que  $g(\Lambda D, D') = 0$ .

Recíprocamente, si  $g(\Lambda D, D') = 0$ , entonces,  $\Lambda D \subseteq D$  y  $\Lambda D' \subseteq D'$ , y de ser  $\Lambda$  diagonalizable, existen  $X_1, X_2$  y  $X_3 \in D'$  tales que  $X_1, X_2$  y  $X_3$  son autovectores de  $\Lambda$  y además,  $D' = \text{Sp}\{X_1, X_2, X_3\}$ . Por tanto, existe  $P \in \text{SO}(3)$  tal que,

$$P \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

según esto, escogiendo como nueva base local de estructuras casi-Hemíticas de  $\hat{V}$ ,  $\{J'_1, J'_2, J'_3\}$ , con

$$P \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J'_1 \\ J'_2 \\ J'_3 \end{bmatrix}$$

se tiene que los correspondientes  $U'_k = -J'_k N$ ,  $k=1,2,3$  son principales y se concluye la demostración.

LEMA III.2.2.- Sea  $M$  una hipersuperficie real de  $Q^m$ . Si  $U_1, U_2$  y  $U_3$  son principales con curvaturas principales  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$ , respectivamente, entonces

$$X(\alpha_i) = U_i(\alpha_i) f_i(X) - p_j(U_i)(\alpha_i - \alpha_k) f_k(X) + \\ + p_k(U_i)(\alpha_i - \alpha_j) f_j(X),$$

donde  $(i, j, k)$  es una permutación cíclica de  $(1, 2, 3)$ ,  $X \in TM$ .

Demostración.- Bajo las hipótesis del lema,  $\Lambda U_i = \alpha_i U_i$ ,  $i=1,2,3$ . Así de (III.1.15), se tiene

$$(\nabla_X \Lambda) U_i = \nabla_X \alpha_i U_i - \Lambda \nabla_X U_i = X(\alpha_i) U_i - \alpha_i p_j(X) U_k + \\ + \alpha_i p_k(X) U_j + \alpha_i P_i \Lambda X + p_j(X) \alpha_k U_k - p_k(X) \alpha_j U_j - \Lambda P_i \Lambda X,$$

y de aquí,

$$\begin{aligned}
g((\nabla_X \Lambda)Y, U_i) &= g(Y, (\nabla_X \Lambda)U_i) = X(\alpha_i)f_i(Y) - \\
&- \alpha_i p_k(X)f_k(Y) + \alpha_i p_k(X)f_j(Y) + \alpha_i g(P_i \wedge X, Y) + \\
&+ p_j(X)\alpha_k f_k(Y) - \alpha_j p_k(X)f_j(Y) - g(\Lambda P_i \wedge X, Y) = \\
&= X(\alpha_i)f_i(Y) + (\alpha_k - \alpha_i)p_j(X)f_k(Y) + (\alpha_i - \alpha_j)p_k(X)f_j(Y) - \\
&- g(\Lambda P_i \wedge X, Y) + \alpha_i g(P_i \wedge X, Y),
\end{aligned}$$

$i=1,2,3$ , para cualesquiera  $Y, X \in TM$ , donde  $(i,j,k)$  es una permutación cíclica de  $(1,2,3)$ . En consecuencia, de lo anterior y de (III.1.16) se deduce,

$$\begin{aligned}
g((\nabla_X \Lambda)U_i, U_i) - g((\nabla_{U_i} \Lambda)X, U_i) &= 0 = X(\alpha_i) - \\
&- g((\nabla_{U_i} \Lambda)X, U_i),
\end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}
X(\alpha_i) &= g((\nabla_{U_i} \Lambda)X, U_i) = U_i(\alpha_i)f_i(X) + \\
&+ (\alpha_k - \alpha_i)p_j(U_i)f_k(X) + (\alpha_i - \alpha_j)p_k(U_i)f_j(X),
\end{aligned}$$

con lo que concluye la demostración.

DEFINICION III.2.3.- Sea  $M$  una hipersuperficie real de  $QP^m$ , se dice que  $M$  es isoparamétrica si sus curvaturas principales son constantes.

De ser las funciones curvatura principal continuas, no es restricción a la hora de estudiar hipersuperficies reales isoparamétricas, el considerarlas conexas. Así, en todo lo que sigue, las hipersuperficies reales consideradas en este Capítulo serán siempre conexas.

Sea, por tanto,  $M$  una hipersuperficie real isoparamétrica de  $QP^m$ ; se va a suponer también que  $U_1, U_2$  y  $U_3$  son principales con curvaturas principales  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$ , respectiva-

mente, esto es,

$$\begin{aligned} \Lambda U_1 &= \alpha_1 U_1, \\ \text{(III.2.1)} \quad \Lambda U_2 &= \alpha_2 U_2, \\ \Lambda U_3 &= \alpha_3 U_3. \end{aligned}$$

A continuación se van a clasificar este tipo de hipersuperficies reales para lo cual se distinguen,

§2A. CASO EN EL QUE AL MENOS DOS DE LAS CURVATURAS PRINCIPALES CORRESPONDIENTES A  $U_1, U_2$  y  $U_3$  SON IGUALES.-

En este caso, no hay restricción en suponer que  $\alpha_1 = \alpha_2$ , y por tanto, de ser  $M$  isoparamétrica, se puede considerar

$$\text{(III.2A.1)} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 2 \operatorname{ctg} 2r,$$

para algún  $r$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{2}$ .

Del Lema II.2.6, se sigue que  $\phi_r: M \longrightarrow QP^m$  tiene rango constante  $q$ , y por el Teorema de la función inversa ([Bt]) para cada punto  $A \in M$ , existe un entorno  $U$  de  $A$  en  $M$  tal que  $\phi_r(U) = V$  es una subvariedad  $q$ -dimensional embebida en  $QP^m$  y además, la distribución,

$$\text{(III.2A.2)} \quad T_0 = \{X \in TM / (\phi_r)_* X = 0\},$$

es integrable con hojas  $(4m - q - 1)$ -dimensionales.

Considerando la aplicación  $\eta: U \longrightarrow T^\perp V$  dada por

$$\text{(III.2A.3)} \quad \eta(A) = \cos 2r N_A + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r \tilde{\sigma}(N_A, N_A),$$

entonces  $\eta$  está bien definida y además de (II.2.5),

$$\text{(III.2A.4)} \quad J_k \eta(A) = J_k N_A, \quad k=1, 2, 3.$$

LEMA III.2A.1.- Con estas notaciones y bajo las condiciones anteriores se tiene,

- i) rango  $n_* = 4m-1$  si  $\alpha_3 \neq -2\text{tg}2r$ ,  
 ii) rango  $n_* = 4m-2$  si  $\alpha_3 = -2\text{tg}2r$ .

Demostración.- Sea  $\{X_1, \dots, X_{4m-4}, U_1, U_2, U_3\}$  una base ortogonal de autovectores de  $\Lambda$ , se supone que  $\Lambda X_i = \gamma_i X_i$ ,  $i=1, \dots, 4m-4$ . Entonces, de (II.1.24), de las fórmulas de Gauss y Weingarten y de (III.2A.3) se tiene,

$$\begin{aligned} \text{(III.2A.5)} \quad n_*(X_i) &= -\cos 2r \Lambda X_i + \cos 2r \tilde{\sigma}(X_i, N) - \\ &- \sin 2r \tilde{\sigma}(\Lambda X_i, N) - \frac{1}{2} \sin 2r \lambda_{\tilde{\sigma}(N, N)} X_i = -\gamma_i \cos 2r X_i - \\ &- \frac{1}{2} \sin 2r 2X_i + \cos 2r \tilde{\sigma}(X_i, N) - \sin 2r \gamma_i \tilde{\sigma}(X_i, N) = \\ &= -(\gamma_i \cos 2r + \sin 2r) X_i + (\cos 2r - \sin 2r \gamma_i) \tilde{\sigma}(X_i, N), \end{aligned}$$

$i=1, \dots, 4m-4$ .

Claramente, de (II.1.24) y (III.2A.5),  $g(n_*(X_i), n_*(X_j)) = 0$  para todo  $i \neq j$ ,  $i, j=1, \dots, 4m-4$ . En consecuencia,  $n_*(X_1), \dots, n_*(X_{4m-4})$  son linealmente independientes salvo que alguno de ellos sea 0. Ahora bien, de (III.2A.5),  $n_*(X_i) = 0$  si y sólo si,

$$\text{(III.2A.6)} \quad \gamma_i = -\text{tg}2r \text{ y } \gamma_i = \text{ctg}2r,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto  $n_*(X_1), \dots, n_*(X_{4m-4})$  son linealmente independientes.

Análogamente, de (II.1.24), de las fórmulas de Gauss y Weingarten, de (III.2.1) y (III.2.4), se deduce,

$$\begin{aligned} \text{(III.2A.7)} \quad n_*(U_k) &= -\cos 2r \Lambda U_k + \cos 2r \tilde{\sigma}(U_k, N) - \\ &- \frac{1}{2} \sin 2r \lambda_{\tilde{\sigma}(N, N)} U_k - \sin 2r \tilde{\sigma}(\Lambda U_k, N) = \\ &= (-\cos 2r \alpha_k - 2 \sin 2r) U_k, \quad k=1, 2, 3, \end{aligned}$$

y, como antes,  $n_*(U_k) = 0$  si y sólo si  $\alpha_k = -2\text{tg}2r$ . Como  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2\text{ctg}2r$ , de (III.2A.5) y (III.2A.7) se concluye que  $\text{rango } n_* =$

$4m-1$  si y sólo si  $\alpha_3 \neq -2\text{tg}2r$  y  $\text{rangon}_* = 4m-2$  si y sólo si  $\alpha_3 = -2\text{tg}2r$ , con lo que se concluye la demostración.

LEMA III.2A.2.- En las condiciones del Lema anterior, si  $\text{rangon}_* = 4m-1$ , entonces  $\alpha_2 = \alpha_3$  y  $M$  es un abierto de,

- i) Una hiperesfera geodésica o de,
- ii) Un tubo de radio  $r$  sobre  $QP^k$ ,  $0 < k < m-1$ .

Demostración.- De la definición de  $n$ , se observa que, denotando por  $\Psi_r$  el tubo de radio  $r$  sobre  $V$ , entonces  $\Psi_r(-n(A)) = A$ . Así,  $n$  tiene inversa a la izquierda. Como  $\text{rangon}_* = 4m-1$ , y además,  $n$  tiene inversa a la izquierda, necesariamente  $n$  es un difeomorfismo sobre un subconjunto abierto  $n(U)$  de  $U(T^\perp V)$ . Por tanto, designando por  $U_{n(B)}(T^\perp V)$  la fibra de  $U(T^\perp V)$ , se sigue que  $n(U) \cap U_{n(B)}(T^\perp V)$  es un abierto de  $U_{n(B)}(T^\perp V)$  y, por consiguiente, ha de contener una base de  $T_{\phi_r(A)}^\perp V$  generada por elementos de la forma  $\{n(A) / A \in V\}$ , esto es,

$$(III.2A.8) \quad T_{\phi_r(A)}^\perp V = \text{Sp}\{n(A) / A \in U' \subseteq U\}.$$

Sea  $\{X_1, \dots, X_{4m-4}, U_1, U_2, U_3\}$  una base ortonormal en  $T_A^M$  de autovectores de  $\Lambda$ . Entonces, de la Proposición II.2.2, (II.4.5) y (III.2.1) se sigue:

$$(III.2A.9) \quad g((\phi_r)_* X_i, J_k n(A)) = -g((\phi_r)_* X_i, U_k) = 0,$$

$k=1, 2, 3, i=1, \dots, 4m-4$ , y

$$(III.2A.10) \quad g((\phi_r)_* U_l, J_k n(A)) = \left(\frac{1}{2} \text{sen} 2r\alpha_1 - \cos 2r\right) g(U_l, U_k),$$

$l, k=1, 2, 3$ .

Por (III.2A.8), (III.2A.9), (III.2A.10) y por ser  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2\text{ctg}2r$ , se tiene que  $T_{\phi_r(A)}^\perp V$  es invariante por  $J_1, J_2$ . Así, por las propiedades de la estructura cuaterniónica, ha

de ser invariante por  $J_3$  y de (III.2A.10), se concluye que  $\alpha_3 = 2\text{ctg}2r = \alpha_1 = \alpha_2$ .

Según lo anterior,  $U$  es una hipersuperficie real isoparamétrica de  $QP^m$  con  $U_1, U_2$  y  $U_3$  principales con la misma curvatura principal y  $\phi_r(U) = V$  es una subvariedad cuaterniónica de  $QP^m$ .

Sea  $A \in U$  y  $B$  un punto arbitrario de la hoja  $T_0$  que pasa por  $A$ . Por lo anterior,  $n(B) \in U_{n(A)}(T_0^\perp V)$  por lo que  $B$  debe de estar a distancia  $r$  de  $\phi_r(A)$  a lo largo de una geodésica de  $QP^m$  normal a  $\phi_r(U)$ . Además,  $T_{\phi_r(A)}^\perp V$  determina un espacio proyectivo cuaterniónico  $QP^{m-(q/4)}$  totalmente geodésico en  $QP^m$ . Así, la hoja  $T_0$  es una subvariedad de la hiperesfera geodésica de centro  $\phi_r(A)$  y radio  $r$  en  $QP^{m-(q/4)}$  y como  $\dim T_0 = 4m - q - 1$  igual a la dimensión de la hiperesfera geodésica, se sigue que  $T_0$  ha de ser una subvariedad abierta suya. Luego  $U$  queda sobre el tubo de radio  $r$  sobre  $V$ .

Por ser  $V$  una subvariedad cuaterniónica de  $QP^m$  y, por tanto, un abierto de  $QP^k$ ,  $4k=q$ ,  $U$  es uno de los Ejemplos II.3A.5 ó II.3A.6. La demostración del lema se concluye ahora del hecho de ser  $M$  isoparamétrica.

LEMA III.2A.3.- Si  $\text{rangon}_* = 4m - 2$ , entonces  $M$  se queda en un tubo de radio  $r$  sobre el espacio proyectivo complejo  $CP^m$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{4}$  ó  $\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$ .

Demostración.- Como  $\text{rangon}_* = 4m - 2$ , del Lema III.2A.1,  $\alpha_3 = -2\text{tg}2r$ , de donde  $r \neq \frac{\pi}{4}$ . Además, (III.2.1) puede escribirse en la forma:

$$(III.2A.11) \quad \begin{aligned} \Lambda U_k &= 2\text{ctg}2r U_k, & k=1,2, \\ \Lambda U_3 &= -2\text{tg}2r U_3, \end{aligned}$$

para  $0 < r < \frac{\pi}{4}$  ó  $\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$ .

Sean  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  las curvaturas principales distintas correspondientes a autovectores de  $D$ . Se van a distinguir dos casos,

A1. Que para todo  $t \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\gamma_t \neq \text{ctgr}$ .

Entonces, del Lema II.2.6, se sigue que  $\phi_r(U) = V$  es una subvariedad  $(4m-3)$ -dimensional de  $QP^m$ , y de (III.2A.3), (III.2A.4) y (III.2A.11),  $\{\eta(A), J_1 N, J_2 N\}$  son ortogonales a  $V$  en  $\phi_r(A, N)$ . En consecuencia,  $T_{\phi_r(A, N)}^\perp V = \text{Sp}\{\eta(A), J_1 \eta(A), J_2 \eta(A)\}$ , para todo punto  $A \in U$ , y de la Definición I.2.6 se deduce que  $\phi_r(U)$  es una CR-subvariedad cuaterniónica  $(4m-3)$ -dimensional de  $QP^m$ .

Por un razonamiento análogo al de la demostración de la Proposición II.2.7, se prueba que,  $\phi_r(U)$  es totalmente geodésica mixta. Así, por el Corolario II.3C.9  $\phi_r(U)$  es un abierto de la CR-subvariedad cuaterniónica  $N^*$  de §3B del Capítulo II, y se concluye que  $U$  se queda en el tubo de radio  $r$  sobre  $N^*$ . Luego, por el Teorema II.3C.8,  $U$  se queda en un tubo construido sobre  $CP^m$ . Esto, junto con el hecho de ser  $M$  isoparamétrica, prueba el lema en este caso.

A2. Que exista algún  $t \in \{1, \dots, p\}$  tal que  $\gamma_t = \text{ctgr}$ .

Sin perder generalidad, se puede suponer  $t=1$ . Sea  $V_t$  el autoespacio correspondiente al autovalor  $\gamma_t$ ,  $t=1, \dots, p$ . Entonces como  $T_0$  es integrable, del Lema II.2.6 y (III.2A.11) se sigue que para cualesquiera  $X, Y \in V_1$ ,

$$\begin{aligned} \text{(III.2A.12)} \quad g([X, Y], U_3) &= g([X, U_1], U_3) = \\ &= g([X, U_2], U_3) = 0, \end{aligned}$$

y además, de (III.1.16),



$$(III.2A.13) \quad (ctgrI - \Lambda)[X, Y] = 2 \sum_{k=1}^3 g(X, J_k Y) U_k,$$

donde por I se denota el automorfismo identidad de  $TM$ .

De (III.1.15), (III.2A.12) y (III.2A.13),  $g(X, J_3 Y) = 0$  y  $p_1(X) = p_2(X) = 0$ , para cualesquiera  $X, Y \in V_1$ . Esto es,

$$(III.2A.14) \quad J_3 V_1 \subseteq V_1^\perp.$$

$$(III.2A.15) \quad p_1(V_1) = p_2(V_2) = \{0\}.$$

Por otra parte, si en (III.1.16) se toma  $X, Y \in \{U_1, U_2, U_3\}$ , entonces,

$$\begin{aligned} g((\nabla_{U_1} \Lambda)U_2, U_3) &= g((\nabla_{U_2} \Lambda)U_1, U_3), \\ g((\nabla_{U_1} \Lambda)U_3, U_2) &= g((\nabla_{U_3} \Lambda)U_1, U_2), \\ g((\nabla_{U_2} \Lambda)U_3, U_1) &= g((\nabla_{U_3} \Lambda)U_2, U_1), \end{aligned}$$

y utilizando (III.2A.11), se concluye,

$$(III.2A.16) \quad \begin{aligned} (2ctg2r + 2tg2r)g(\nabla_{U_1} U_2, U_3) &= 0, \\ (2ctg2r + 2tg2r)g(\nabla_{U_2} U_1, U_3) &= 0. \end{aligned}$$

Como  $2ctg2r + 2tg2r \neq 0$ , de (III.2A.16),  $g(\nabla_{U_1} U_2, U_3) = g(U_3, \nabla_{U_2} U_1) = 0$  y de (III.1.15),

$$(III.2A.17) \quad p_1(U_1) = p_2(U_2) = 2ctg2r.$$

Como del Lema III.2.2 se sigue,

$$(III.2A.18) \quad \begin{aligned} 0 &= U_3(2ctg2r) = (2ctg2r + 2tg2r)p_2(U_1), \\ 0 &= U_3(2ctg2r) = -(2ctg2r + 2tg2r)p_1(U_2), \end{aligned}$$

entonces,

$$(III.2A.19) \quad p_2(U_1) = p_1(U_2) = 0.$$

Multiplicando escalarmente (III.2A.13) por  $U_k$ ,  $k=1, 2$ , se obtiene,

$$(III.2A.20) \quad g([X, Y], U_k) = 2ctg r g(X, J_k Y), \quad k=1, 2,$$

para cualesquiera  $X, Y \in V_1$ .

Ahora bien, de (I.1.16), (III.2A.15), (III.2A.17), (III.2A.19) y (III.2A.20),

$$(III.2A.21) \quad 4g(X, J_i Y) = \frac{\bar{p}}{m+2} g(X, J_i Y) = (dp_i + p_j \wedge p_k)(X, Y) = -p_i([X, Y]) = -2ctgr 2ctg 2rg(X, J_i Y),$$

$i=1,2$ , para cualesquiera  $X, Y \in V_1$  y donde  $(i, j, k)$  es una permutación cíclica de  $(1, 2, 3)$ . Con lo que,

$$(III.2A.22) \quad \begin{aligned} J_1 V_1 &\subseteq V_1^\perp, \\ J_2 V_1 &\subseteq V_1^\perp. \end{aligned}$$

Sea  $X \in V_1$ , de (III.2A.22) debe existir un  $Z \in V_t$ ,  $t \neq 1$ , tal que  $g(X, J_i Z) \neq 0$ ,  $i=1,2$ . Así, aplicando (III.1.16) a  $X$  y a  $Z$  se tiene,

$$(III.2A.23) \quad \begin{aligned} (\gamma_t I - \Lambda) \nabla_X Z - (ctgr I - \Lambda) \nabla_Z X &= \\ = \sum_{k=1}^3 2g(X, J_k Z) U_k, \end{aligned}$$

y multiplicando escalarmente (III.2A.23) por  $U_1$  se obtiene,

$$(III.2A.24) \quad \begin{aligned} (\gamma_t - 2ctg 2r) g(\nabla_X Z, U_1) - (ctgr - 2ctg 2r) g(U_1, \\ \nabla_Z X) = 2g(X, J_1 Z). \end{aligned}$$

De (III.1.15) y (III.2A.24),

$$(III.2A.25) \quad \begin{aligned} (\gamma_t - 2ctg 2r) g(X, J_1 Z) ctgr + \\ + (ctgr - 2ctg 2r) \gamma_t g(X, J_1 Z) = 2g(X, J_1 Z), \end{aligned}$$

y como  $g(X, J_1 Z) \neq 0$ , se concluye,

$$(III.2A.25) \quad (\gamma_t - 2ctg 2r) ctgr + (ctgr - 2ctg 2r) \gamma_t = 2.$$

Así,  $\gamma_t = ctgr$  para algún  $t \neq 1$ ; como se está suponiendo  $\gamma_1 = ctgr$ , esto contradice el que las curvaturas  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  sean distintas y se concluye la demostración.

De los Lemas III.2A.1, III.2A.2 y III.2A.3 se sigue,

TEOREMA III.2A.4.- Sea M una hipersuperficie real isoparamétrica de  $QP^m$  con  $U_1, U_2$  y  $U_3$  principales. Si las curvaturas principales correspondientes a  $U_1, U_2$  y  $U_3$  verifican que al menos dos de ellas son iguales, entonces M es un abierto de,

- i) Una hiperesfera geodésica, o de,
- ii) Un tubo de radio r sobre  $QP^k$ ,  $0 < k < m-1$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{2}$ , o de,
- iii) Un tubo de radio r,  $0 < r < \frac{\pi}{4}$  ó  $\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$ , sobre el espacio proyectivo complejo  $CP^m$ .

§2B. CASO EN EL QUE LAS TRES CURVATURAS PRINCIPALES CORRESPONDIENTES A  $U_1, U_2$  Y  $U_3$  SEAN DISTINTAS DOS A DOS.-

Por ser M isoparamétrica,  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$  son constantes y  $\alpha_i \neq \alpha_j$  para todo  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

Sean  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  las curvaturas principales distintas correspondientes a autovectores en D. Se designan por  $V_1, \dots, V_p$  los correspondientes autoespacios en D. Entonces, de (III.1.16) se sigue,

$$(III.2B.1) \quad (\alpha_i I - \Lambda) \nabla_{X_i} U_i - (\gamma_j I - \Lambda) \nabla_{U_i} X = -J_i X,$$

$i=1, 2, 3$ , para todo  $X \in V_j$  y donde por I se designa el endomorfismo identidad de TM.

Como  $U_1, U_2$  y  $U_3$  son principales, de las fórmulas de Gauss y Weingarten se deduce que  $\nabla_D D \subseteq D$ . En consecuencia, de (III.1.15) y (III.2B.1),

$$(III.2B.2) \quad (\alpha_i I - \Lambda)(-p_j(X)U_k + p_k(X)U_j + P_i \Lambda X) - (\gamma_l I - \Lambda) \nabla_{U_i} X = -J_i X, \quad l=1, \dots, p,$$

para todo  $X \in D$ , y donde  $(i, j, k)$  es una permutación cíclica de  $(1, 2, 3)$ .

Igualando en (III.2B.2) las componentes en  $D'$ , se tiene que  $(\alpha_k - \alpha_i)p_j(X)U_k + (\alpha_i - \alpha_j)p_k(X)U_j = 0$ , luego,

$$(III.2B.3) \quad p_k(X) = 0, \quad k=1,2,3,$$

para todo  $X \in D$ .

Así, de (III.1.15) y (III.2B.3),

$$(III.2B.4) \quad \nabla_X U_k = J_k \wedge X, \quad k=1,2,3. \quad X \in D.$$

Del Lema III.2.2 y mediante un cálculo directo se deduce,

$$(III.2B.5) \quad U_j(\alpha_i) = (\alpha_i - \alpha_j)p_k(U_i),$$

donde  $(i,j,k)$  es una permutación cíclica de  $(1,2,3)$ ; en este caso, de ser  $M$  isoparamétrica y  $\alpha_i \neq \alpha_j$  para todo  $i \neq j$ ,  $i,j=1,2,3$ , se sigue,

$$(III.2B.6) \quad p_k(U_i) = 0, \quad k \neq i, \quad k,i=1,2,3.$$

Según las consideraciones anteriores se tiene,

LEMA III.2B.1.- Si  $J_k V_j \subseteq V_j^{\perp}$  para algún  $k=1,2,3$  y para algún  $j=1,\dots,p$ , entonces existe un único  $n \neq j$ ,  $n \in \{1,\dots,p\}$  tal que  $J_k V_j \subseteq V_n$ .

Demostración.- Sea  $X \in V_j$  y se supone que para algún  $k=1,2,3$ ,  $J_k X$  tiene componente en  $V_n$  y  $V_m$ ,  $n,m \neq j$ . Entonces bastará probar que  $n=m$ .

Sean  $Y \in V_n$ ,  $\bar{Y} \in V_m$  tales que  $g(X, J_k Y) \neq 0$  y  $g(X, J_k \bar{Y}) \neq 0$ . Entonces, aplicando (III.1.16) a  $X, Y$  y a  $X, \bar{Y}$  se tiene,

$$(III.2B.7) \quad \begin{aligned} (\gamma_n I - \Lambda) \nabla_X Y - (\alpha_j I - \Lambda) \nabla_Y X &= 2 \sum_{k=1}^3 g(X, J_k Y) U_k, \\ (\gamma_m I - \Lambda) \nabla_X \bar{Y} - (\alpha_j I - \Lambda) \nabla_{\bar{Y}} X &= 2 \sum_{k=1}^3 g(X, J_k \bar{Y}) U_k. \end{aligned}$$

Además, si se multiplica escalarmente (III.2B.7) por  $U_k$ , de (III.2B.4) teniendo en cuenta (III.2.1), se deduce,

$$(III.2B.8) \quad \begin{aligned} (\gamma_n - \alpha_k) \gamma_j + (\gamma_j - \alpha_k) \gamma_n &= 2, \\ (\gamma_m - \alpha_k) \gamma_j + (\gamma_j - \alpha_k) \gamma_m &= 2. \end{aligned}$$

Restando las dos expresiones de (III.2B.8), se sigue que  $(\gamma_n - \gamma_m) \gamma_j + (\gamma_n - \gamma_m)(\gamma_j - \alpha_k) = 0$ . Luego si  $n \neq m$ ,  $\alpha_k = 2\gamma_j$ , y sustituyendo en (III.2B.8),  $2 + 2\gamma_j^2 = 0$ , lo cual es una contradicción. Consecuentemente,  $n = m$  y se concluye la demostración.

TEOREMA III.2B.2.- No existen hipersuperficies reales isoparamétricas de  $QP^m$  tales que  $U_1, U_2$  y  $U_3$  sean principales con curvaturas principales distintas dos a dos.

Demostración.- Por ser  $\alpha_i$  constantes, se puede suponer que  $\alpha_i = 2ctg 2r_i$ ,  $0 < r_i < \frac{\pi}{2}$ , con  $r_i \neq r_j$  para todo  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Siguiendo la notación anterior, se distinguen dos casos,

B1. Que  $\gamma_t = ctgr_i$ , para algún  $t = 1, \dots, p$  y para algún  $i = 1, 2, 3$ .

Sin perder generalidad se supone  $t = 1$ ,  $i = 1$  y se considera el tubo de radio  $r_1$  sobre  $M$ , esto es,  $\phi_{r_1}: M \longrightarrow QP^m$ . Entonces, de la Proposición II.2.2 y de ser  $M$  isoparamétrica  $\phi_{r_1}$  tiene rango constante  $q$  sobre  $M$ . Luego aplicando el Teorema de la función inversa, ([Bt]), existe un entorno  $W_1$  de  $M$  tal que  $\phi_{r_1}(W_1)$  es una subvariedad  $q$ -dimensional de  $QP^m$  y además, la distribución,

$$(III.2B.9) \quad T_0^1 = \{ X \in TM / (\phi_{r_1})_* X = 0 \},$$

es integrable con hojas  $(4m - q - 1)$ -dimensionales en  $M$ .

Según esto, del Lema II.2.6 y de ser  $\gamma_1 = ctgr_1$ , se sigue

$$(III.2B.10) \quad g([X, Y], U_2) = g([X, Y], U_3) = 0,$$

para cualesquiera  $X, Y \in V_1$ .

Como de (III.1.16),  $(\gamma_1 I - \Lambda)[X, Y] = 2 \sum_{k=1}^3 g(X, J_k Y) U_k$ , entonces por (III.2B.10), se tiene,

$$(III.2B.11) \quad \begin{aligned} J_2 V_1 &\subseteq V_1^\perp, \\ J_3 V_1 &\subseteq V_1^\perp. \end{aligned}$$

Ahora bien, de (III.2B.8) si  $J_1 V_1$  tuviera componente en algún  $V_n$ ,  $n \in \{1, \dots, p\}$ , se tendría que,  $(\gamma_n - \alpha_1) \gamma_1 + (\gamma_1 - \alpha_1) \gamma_n = 2$ , esto es, como  $\alpha_1 = 2 \operatorname{ctgr} 2r_1$  y  $\gamma_1 = \operatorname{ctgr} r_1$ ,  $\gamma_n = \operatorname{ctgr} r_1 = \gamma_1$ . Luego,

$$(III.2B.12) \quad J_1 V_1 = V_1.$$

por el Lema II.3B.1 y por (III.2B.11), existen  $n, m \in \{2, \dots, p\}$  tales que  $J_2 V_1 \subseteq V_n$  y  $J_3 V_1 \subseteq V_m$ , y como  $J_1 V_1 = V_1$ , se sigue,

$$J_2 V_1 = J_2 J_1 V_1 = J_3 V_1 \subseteq V_m,$$

por lo que  $n=m$ . En consecuencia, existe  $n \in \{2, \dots, p\}$  tal que,

$$(III.2B.12) \quad J_2 V_1 \subseteq V_n, \quad J_3 V_1 \subseteq V_n.$$

Finalmente, de (III.2B.8) y (III.2B.13), se deduce,

$$(III.2B.14) \quad \begin{aligned} (\gamma_n - \alpha_2) \operatorname{ctgr} r_1 + (\operatorname{ctgr} r_1 - \alpha_2) \gamma_n &= 2, \\ (\gamma_n - \alpha_3) \operatorname{ctgr} r_1 + (\operatorname{ctgr} r_1 - \alpha_3) \gamma_n &= 2, \end{aligned}$$

y como  $\alpha_2 \neq \alpha_3$ , si se restan las dos expresiones de (III.2B.14) se sigue que  $\gamma_n = \operatorname{ctgr} r_1 = \gamma_1$ , lo que contradice el que  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  sean distintas y se concluye la demostración en este caso.

B2. Que  $\gamma_t \neq \operatorname{ctgr} r_i$ ,  $i=1,2,3$  para todo  $t \in \{1, \dots, p\}$ .

En este caso, de (III.1.16) se deduce que para cualesquiera  $X, Y \in V_t$ ,

$$(III.2B.15) \quad (\gamma_t I - \Lambda)[X, Y] = 2 \sum_{k=1}^3 g(X, J_k Y) U_k.$$

Multiplicando escalarmente (III.2B.15) por  $U_k$ ,  $k=1,2,3$

y teniendo en cuenta (III.2B.11),

$$(III.2B.16) \quad (2\gamma_t(\gamma_t - 2ctgr_k) - 2)g(X, J_k Y) = 0, \quad X, Y \in V_t,$$

$k=1, 2, 3$ . Como  $2\gamma_t(\gamma_t - 2ctgr_k) - 2 = 0$  si y sólo si  $\gamma_t = ctgr_k$  ó  $\gamma_t = -tgr_k$ , y como  $\gamma_t \neq ctgr_k$  y se puede, también, suponer que  $\gamma_t \neq -tgr_k$ ,  $k=1, 2, 3$  (si no, se aplica el caso B1. al tubo de radio  $\frac{\pi}{2} - r_k$ ), entonces, de (III.2B.16), se sigue,

$$(III.2B.17) \quad J_k V_t \subseteq V_t^{\perp}, \quad t=1, \dots, p, \quad k=1, 2, 3,$$

y del Lema III.2B.1 y (III.2B.17) se tiene que existen  $n, m, q \in \{2, \dots, p\}$  (no es restricción en suponer  $n=2, m=3, q=4$ ), tales que

$$(III.2B.18) \quad \begin{aligned} J_1 V_1 &= V_2, \\ J_2 V_1 &= V_3, \\ J_3 V_1 &= V_4. \end{aligned}$$

Además, por las propiedades de la estructura cuaterniónica, también se verifica,

$$(III.2B.19) \quad \begin{aligned} J_2 V_2 &= \overline{V_4}, \\ J_1 V_3 &= V_4. \end{aligned}$$

De (I.1.6), (III.1.15), (III.2B.3), (III.2B.16) y (III.2B.18) se sigue

$$(III.2B.20) \quad \begin{aligned} 4g(X, J_1 Y) &= \frac{\overline{p}}{m+2} g(X, J_1 Y) = (dp_1 + p_2 \wedge p_3)(X, Y) = \\ &= -p_1([X, Y]) = -g([X, Y], U_1) p_1(U_1) = \\ &= -(\gamma_1 + \gamma_2) g(X, J_1 Y) p_1(U_1), \end{aligned}$$

para todo  $X \in V_1, Y \in V_2$ . Así, de (III.2B.18) y (III.2B.20) se sigue,

$$(III.2B.21) \quad p_1(U_1) = -\frac{4}{\gamma_1 + \gamma_2},$$

Análogamente,  $4g(X, J_2 Y) = (dp_2 + p_3 \wedge p_1)(X, Y) = -p_2([X, Y]) = -g([X, Y], U_2) p_2(U_2) = -(\gamma_1 + \gamma_3) p_2(U_2)$  para cualesquiera  $X \in V_1$ ,  $Y \in V_3$ , de donde,

$$(III.2B.22) \quad p_2(U_2) = \frac{-4}{\gamma_1 + \gamma_3}.$$

Similarmente, de (I.1.6), (III.1.15), (III.2B.3), (III.2B.6) y (III.2B.19), se sigue,

$$(III.2B.23) \quad p_1(U_1) = -\frac{4}{\gamma_3 + \gamma_4},$$

y

$$(III.2B.24) \quad p_2(U_2) = -\frac{4}{\gamma_2 + \gamma_4}.$$

En consecuencia, de (III.2B.21), (III.2B.22), (III.2B.23) y (III.2B.24), se deduce,

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_3 + \gamma_4,$$

$$\gamma_2 + \gamma_4 = \gamma_1 + \gamma_3,$$

de donde  $\gamma_1 = \gamma_4$ , lo cual contradice que  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  sean distintas y se concluye la demostración.

De §2A y §2B se deduce el siguiente Teorema de clasificación,

**TEOREMA FUNDAMENTAL III.2.3.**— Sea  $M$  una hipersuperficie real isoparamétrica de  $QP^m$  tal que  $g(\Delta D, D') = 0$ . Sea  $s$  el número de curvaturas principales distintas de  $M$ . Entonces  $s \in \{2, 3, 4\}$  y además,

i) Si  $s=2$ ,  $M$  es una parte abierta de una hiperesfera geodésica.

ii) Si  $s=3$ ,  $M$  es una parte abierta de un tubo de radio  $r$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{2}$ , sobre  $QP^k$ ,  $0 < k < m-1$ .

iii) Si  $s=4$ ,  $M$  es una parte abierta de un tubo de radio  $r$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{4}$  ó  $\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$  sobre el espacio proyectivo complejo  $CP^m$ .



Demostración.- Por ser  $g(\Lambda D, D')=0$ , entonces del Lema III.2.1 existe una base local  $\{J'_1, J'_2, J'_3\}$  de  $\hat{V}$  tal que los correspondientes  $U'_1, U'_2$  y  $U'_3$  son principales. El teorema se sigue entonces de los Teoremas III.2A.4 , III.2B.2 y del estudio sobre el número de curvaturas principales de los Ejemplos II.3A.5, II.3A.6 y II.3B.2.

### §3. HIPERSUPERFICIES REALES DEL ESPACIO PROYECTIVO CUATERNIONICO CON DOS CURVATURAS PRINCIPALES DISTINTAS.-

El objetivo fundamental de este epígrafe es determinar las hipersuperficies reales conexas y orientables con dos curvaturas principales distintas en cada punto del espacio proyectivo cuaterniónico  $QP^m$ ,  $m \geq 3$ .

PROPOSICION III.3.1.- Sea M una hipersuperficie real de  $QP^m$ ,  $m \geq 3$  con dos curvaturas principales distintas,  $\lambda$  y  $\mu$ , en cada punto de M. Entonces existe una base local  $\{J'_1, J'_2, J'_3\}$  de  $\hat{V}$  tal que los correspondientes  $U'_1, U'_2$  y  $U'_3$  son principales con la misma curvatura principal.

Demostración.- Sean  $T_\lambda$  y  $T_\mu$  los autoespacios asociados a  $\lambda$  y a  $\mu$ , respectivamente. De ser  $TM=T_\lambda \oplus T_\mu$ , se puede suponer que,

$$(III.3.1) \quad U_k = a_k X_k + b_k V_k, \quad k=1,2,3,$$

donde  $X_k$  y  $V_k$  son campos de vectores unitarios en  $T_\lambda$  y  $T_\mu$ , respectivamente,  $k=1,2,3$ .

En primer lugar, se va a hacer la demostración para el caso particular de que  $a_k, b_k \neq 0$ ,  $k=1,2,3$  sobre un abierto de M.

Bajo esta hipótesis, sean  $\Sigma = \{X \in T_\lambda / g(X, X_k) = 0, k=1,2,3 \}$

y  $\Omega = \{V \in T_\mu / g(V, V_k) = 0, k=1,2,3\}$ ; como  $m \geq 3$ , o bien  $\Sigma$  o bien  $\Omega$  ha de tener dimensión mayor o igual que 2. Se supone, por ejemplo,  $\dim \Sigma \geq 2$  (si no es así, se discutiría análogamente con  $\Omega$ ). Entonces, si  $X, Y$  son dos campos de vectores ortonormales de  $\Sigma$ , por (III.1.16), se tiene,

$$(III.3.2) \quad (\lambda I - \Lambda)[X, Y] + X(\lambda)Y - Y(\lambda)X = 2 \sum_{k=1}^3 g(X, J_k Y) U_k,$$

y multiplicando escalarmente (III.3.2) por  $X$  e  $Y$  se sigue,  $X(\lambda) = Y(\lambda) = 0$ . Luego (III.3.2) queda en la forma

$$(III.3.3) \quad (\lambda I - \Lambda)[X, Y] = 2 \sum_{k=1}^3 g(X, J_k Y) U_k.$$

Haciendo el producto escalar de (III.3.3) por  $X_1, X_2$  y  $X_3$  se obtiene el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales con variables  $g(X, J_k Y)$ ,

$$(III.3.4) \quad \begin{aligned} 0 &= a_1 g(X, J_1 Y) + a_2 g(X_1, X_2) g(X, J_2 Y) + a_3 g(X_1, X_3) g(X, J_3 Y) \\ 0 &= a_1 g(X_1, X_2) g(X, J_1 Y) + a_2 g(X, J_2 Y) + a_3 g(X_2, X_3) g(X, J_3 Y) \\ 0 &= a_1 g(X_1, X_2) g(X, J_1 Y) + a_2 g(X_2, X_3) g(X, J_2 Y) + a_3 g(X, J_3 Y) \end{aligned}$$

el cual admite como única solución la trivial si y sólo si  $X_1, X_2$  y  $X_3$  son linealmente independientes.

Se distinguen dos casos,

CASO I.- Caso en que  $X_1, X_2, X_3$  sean linealmente independientes.

En este caso, de (III.3.4) se tiene  $g(X, J_k Y) = 0, k=1,2,3$  para cualesquiera  $X, Y \in \Sigma$ . Por tanto

$$(III.3.5) \quad J_k X \in T_\mu \oplus \text{Sp}\{X_1, X_2, X_3\},$$

$k=1,2,3$  para todo  $X \in \Sigma$ .

Por otra parte, aplicando (III.1.6) a  $X, X_k, k=1,2,3$  y siendo  $X \in \Sigma$  unitario, se sigue,

$$(\lambda I - \Lambda)[X, X_k] + X_k(\lambda)X = \sum_{i=1}^3 \{-f_i(X_k)J_i X - 2g(J_i X, X_k)U_i\},$$

$k=1,2,3$ , de donde multiplicando escalarmente por  $X$ ,  $X_k(\lambda)=0$   
 $k=1,2,3$ , y la expresión anterior queda en la forma,

$$(III.3.6) \quad (\lambda I - \Lambda)[X, X_k] = \sum_{i=1}^3 \{-f_i(X_k)J_i X - 2g(X_k, J_i X)U_i\},$$

para todo  $k=1,2,3$ .

Mediante un cálculo directo, si se efectúa el producto escalar de (III.3.6) por  $X_j$ ,  $j=1,2,3$ , se deduce fácilmente,

$$(III.3.7) \quad \begin{aligned} 0 &= a_1 g(J_1 X, X_1) + a_2 g(X_1, X_2) g(X_1, J_2 X) + \\ &\quad + a_3 g(X_1, X_3) g(J_3 X, X_1), \\ 0 &= a_1 g(X_1, X_2) g(J_1 X, X_1) + a_2 g(J_2 X, X_1) + \\ &\quad + a_3 g(X_2, X_3) g(J_3 X, X_1), \\ 0 &= a_1 g(X_1, X_3) g(J_1 X, X_1) + a_2 g(X_2, X_3) g(J_2 X, X_1) + \\ &\quad + a_3 g(J_3 X, X_1), \end{aligned}$$

y sistemas similares para  $X_2$  y  $X_3$ .

Como  $X_1, X_2$  y  $X_3$  son linealmente independientes, (III.3.7) admite sólo la solución trivial. Así,

$$(III.3.8) \quad g(J_k X, X_i) = 0, \quad k, i=1,2,3,$$

y por tanto,  $0 = g(J_k X, U_i) = a_i g(J_k X, X_i) + b_i g(J_k X, V_i) = b_i g(J_k X, V_i)$ ,  
 $k=1,2,3$ . En consecuencia, de esto y (III.3.5) se sigue,

$$(III.3.9) \quad J_k \Sigma \subseteq \Omega, \quad k=1,2,3.$$

Si  $V_1, V_2$  y  $V_3$  fueran también linealmente independientes, de forma análoga a la obtención de (III.3.9) se podría deducir que,

$$(III.3.10) \quad J_k \Omega \subseteq \Sigma, \quad k=1,2,3.$$

Por consiguiente, de (III.3.9) y (III.3.10),  $\dim \Omega +$



$\dim \Sigma$  sería par y como  $\dim M = \dim \Sigma + \dim \Omega + 6$ ,  $M$  no podría ser una hipersuperficie real de  $Q P^m$ . En consecuencia,  $V_1, V_2$  y  $V_3$  han de ser linealmente dependientes.

Por (III.3.9), al menos existen dos vectores ortonormales  $V, W$  en  $\Omega$ , así, de (III.1.16) y análogamente a (III.3.3) se obtiene,

$$(III.3.11) \quad (\mu I - \Lambda)[V, W] = 2 \sum_{k=1}^3 g(V, J_k W) U_k.$$

Ahora, aplicando  $(\lambda I - \Lambda)$  a (III.3.11) y teniendo en cuenta que las únicas curvaturas principales de  $M$  son  $\lambda$  y  $\mu$ , se sigue,

$$0 = 2 \sum_{k=1}^3 g(V, J_k W) (\lambda I - \Lambda) U_k,$$

esto es, de (III.3.1) y lo anterior,

$$(III.3.12) \quad 0 = b_1 g(V, J_1 W) V_1 + b_2 g(V, J_2 W) V_2 + b_3 g(V, J_3 W) V_3.$$

Como por (III.3.9)  $V, W$  se pueden escoger en  $\{J_1 X, J_2 X, J_3 X\}$ ,  $X \in \Sigma$ , entonces de (III.3.12) se deduce,

$$(III.3.13) \quad V_1 = V_2 = V_3 = \bar{0},$$

lo que concluye la demostración en este caso.

CASO II. Caso en el que  $X_1, X_2$  y  $X_3$  sean linealmente dependientes.-

En este caso, si  $V_1, V_2$  y  $V_3$  fueran linealmente independientes se seguiría de forma análoga al Caso I. En consecuencia, se supone que  $V_1, V_2$  y  $V_3$  son también linealmente dependientes. Entonces, bajo estas hipótesis, (III.3.4) admite solución distinta de la trivial y se tiene que para cualesquiera  $X, Y$  ortonormales en  $\Sigma$ ,  $g(X, J_k Y) \neq 0$  para algún  $k=1, 2, 3$ ; no es restricción el considerar  $k=1$ .

Aplicando  $(\mu I - \Lambda)$  a (III.3.3) y teniendo en cuenta (III.3.1), se tiene,

$$(III.3.14) \quad 0 = \sum_{k=1}^3 a_k g(X, J_k Y) X_k,$$

de donde,

$$(III.3.15) \quad X_1 = \frac{a_2 g(X, J_2 Y)}{a_1 g(X, J_1 Y)} X_2 - \frac{a_3 g(X, J_3 Y)}{a_1 g(X, J_1 Y)} X_3,$$

y tomando  $\bar{U}_1 = U_1 + \frac{g(X, J_2 Y)}{g(X, J_1 Y)} U_2 + \frac{g(X, J_3 Y)}{g(X, J_1 Y)} U_3$ , de (III.3.1) y

(III.3.15) se deduce fácilmente,

$$(III.3.16) \quad \Lambda \bar{U}_1 = \mu \bar{U}_1,$$

esto es,  $\bar{U}_1$  es principal con curvatura principal  $\mu$ .

Según esto, si se escoge una nueva base ortonormal de  $D'$ ,  $\{U'_1, U'_2, U'_3\}$ , donde  $U'_1 = (\bar{U}_1 / \|\bar{U}_1\|)$  y se designa por  $C$  la matriz de  $SO(3)$  que da el cambio de base, entonces,

$$C \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_1 \\ \bar{J}_2 \\ \bar{J}_3 \end{bmatrix}$$

es una nueva base local de  $\hat{V}$  tal que los correspondientes  $U'_k = -\bar{J}_k N$ ,  $k=1,2,3$  verifican,

$$(III.3.17) \quad \begin{aligned} U'_1 &= U'_1, \\ U'_2 &= a'_2 X'_2 + b'_2 V'_2, \\ U'_3 &= a'_3 X'_3 + b'_3 V'_3, \end{aligned}$$

siendo  $U'_1, V'_2, V'_3$  campos de vectores unitarios en  $T_\mu$  y  $X'_2, X'_3$  campos de vectores unitarios en  $T_\lambda$ .

Para el caso de que  $U'_1, V'_2, V'_3$  fueran linealmente independientes, razonando como en el Caso I, se concluiría la demostración. Se supone, por tanto, que  $U'_1, V'_2$  y  $V'_3$  son lineal-

mente dependientes, entonces de ser  $g(U'_1, U'_k) = 0$ ,  $k=2,3$ , se sigue que si  $b'_k \neq 0$ ,  $k=2,3$ ,  $g(U'_1, V'_k) = 0$ ,  $k=2,3$ , y por tanto se tiene que  $V'_3 = \gamma V'_2$ . Esto es, o bien  $U'_2 \in T_\lambda$ , o bien  $U'_3 \in T_\lambda$ , o bien  $V'_3 = \gamma V'_2$  para alguna función valuada real  $\gamma$  sobre un abierto de  $M$ . Además, en caso de verificarse que  $V'_3 = \gamma V'_2$ , de (III.3.17) se deduce que,

$$-\frac{b'_3}{b'_2} \gamma U'_2 + U'_3 = a'_3 X'_3 - \frac{b'_3}{b'_2} \gamma a'_2 X'_2 \in T_\lambda,$$

y si  $\bar{U}_2 = (-b'_3/b'_2)U'_2 + U'_3$ , entonces se tiene que  $\bar{U}_2$  es principal con curvatura principal  $\lambda$ .

Según esto, siempre existe un campo de vectores  $\bar{U}_2$  en  $D'$  que está en  $T_\lambda$ .

Escogiendo ahora una nueva base ortonormal de  $D'$ ,  $\{U''_1, U''_2, U''_3\}$  donde  $U''_2 = (\bar{U}_2 / \|\bar{U}_2\|)$  y  $U''_1 = U'_1$ , y designando por  $C'$  la nueva matriz en  $SO(3)$  del cambio de base, se tiene que,

$$C' \begin{bmatrix} \bar{J}_1 \\ \bar{J}_2 \\ \bar{J}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J'_1 \\ J'_2 \\ J'_3 \end{bmatrix}$$

es una nueva base local de  $\hat{V}$  tal que los correspondientes  $U''_k = -J'_k N$ ,  $k=1,2,3$ , verifican que  $U''_1 \in T_\mu$  y  $U''_2 \in T_\lambda$ . Así, la descomposición (III.3.1) puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} (III.3.18) \quad U''_1 &= 0 + U''_1, \\ U''_2 &= U''_2 + 0, \\ U''_3 &= aX' + bV', \end{aligned}$$

donde  $U''_2, X' \in T_\lambda$  y  $U''_1, V' \in T_\mu$  son unitarios.

De forma análoga a la obtención de (III.3.3) y (III.3.6) y teniendo en cuenta (III.3.18), puede deducirse,

$$(III.3.19) \quad (\lambda I - \Lambda)[X, Y] = 2 \sum_{k=1}^3 g(X, J'_k Y) U''_k,$$

y

$$(III.3.20) \quad (\lambda I - \Lambda)[X, X'] = -f_3(X)J_3'X - 2g(J_3'X, X')U_3'',$$

para cualesquiera  $X, Y$  ortonormales en  $\Sigma$ .

Según esto, si en (III.3.19) se multiplica escalarmente por  $U_2'$  y en (III.3.20) por  $X'$ , entonces se verifica,

$$(III.3.21) \quad J_2'\Sigma \subseteq \Sigma^\perp, \quad J_3'\Sigma \subseteq \Omega,$$

o bien,

$$(III.3.22) \quad a=0.$$

En el caso de que (III.3.21) sea cierto,  $\dim \Omega$  es también mayor o igual que 2 y razonando como en (III.3.19) y (III.3.20) se tiene que, o bien

$$(III.3.23) \quad J_1'\Omega \subseteq \Omega^\perp, \quad J_3'\Omega \subseteq \Sigma,$$

o bien,

$$(III.3.24) \quad b=0.$$

Ahora bien,  $\dim M = \dim \Sigma + \dim \Omega + \dim \text{Sp}\{U_1'', U_2'', aX', bV'\}$ , y por tanto, de (III.3.21), (III.3.22), (III.3.23) y (III.3.24) y de ser  $M$  una hipersuperficie real, ha de verificarse que  $a=0$  o bien  $b=0$ .

Se supone, por ejemplo que  $b=0$  (análogamente se discute el caso  $b \neq 0$ ). Entonces, de (III.3.18),

$$(III.3.25) \quad \begin{aligned} \Lambda U_1'' &= \mu U_1'', \\ \Lambda U_2'' &= \lambda U_2'', \\ \Lambda U_3'' &= \lambda U_3'', \end{aligned}$$

y, de (III.3.16) se deduce,

$$(III.3.26) \quad J_2'\Sigma \subseteq \Omega, \quad J_3'\Sigma \subseteq \Omega, \quad J_1'\Omega \subseteq \Sigma.$$

Así, por las propiedades de la estructura cuaterniónica

$$J_2' \Sigma = J_1' J_3' \Sigma \subseteq J_1' \Omega \subseteq \Sigma,$$

lo cual contradice (III.3.26) y se prueba también la proposición en este caso.

Finalmente, en el caso de que algún  $a_k$  o algún  $b_k$ ,  $k=1, 2, 3$  en (III.3.1) sea nulo, la demostración se sigue aplicando el Caso II.

Como consecuencia de esta Proposición se deduce,

TEOREMA FUNDAMENTAL III.3.2.- Sea M una hipersuperficie real de  $QP^m$ ,  $m \geq 3$ . Entonces M tiene dos curvaturas principales distintas si y sólo si M es, localmente, un abierto de una hiperesfera geodésica.

Demostración.- Por la Proposición (III.3.1), M es una hipersuperficie real con  $U_1, U_2$  y  $U_3$  principales con la misma curvatura principal  $\alpha$ . Así, del Lema III.2.2  $\alpha$  es localmente constante y se puede suponer  $\alpha = 2 \operatorname{ctg} 2r$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{2}$ .

Si se designa por  $\lambda$  la otra curvatura principal de M y por V el conjunto de puntos donde  $\lambda \neq \alpha$ , claramente, V es un abierto de M. Además, si se escoge el máximo rango de las foliaciones  $\phi_r$  y  $\phi_{\frac{\pi}{2}-r}$ , se sigue que existe un abierto U de V donde  $\phi_r$  tiene rango constante q y por consiguiente, mediante el uso del Teorema de la función inversa, ([Bt]),  $\phi_r(U)$  es una subvariedad q-dimensional de  $QP^m$ . Razonando entonces como en los Lemas II.3A.1 y II.3A.2 se deduce que rango  $n_x = 4m-1$  sobre U y  $\phi_r(U)$  es una subvariedad cuaterniónica de  $QP^m$ . (Obsérvese que en los Lemas II.3A.1 y II.3A.2 sólo se utiliza el que  $\phi_r$  tiene rango constante sobre U). En consecuencia, M es localmente un abierto de un tubo de



radio  $r$  sobre el espacio proyectivo cuaterniónico  $QP^k$ ,  $0 \leq k \leq m-1$ , con dos curvaturas principales distintas. Así, del Ejemplo II.3A.5,  $M$  ha de ser, localmente, un abierto de una hiperesfera geodésica de  $QP^m$  y se concluye la demostración.

El recíproco es evidente por el Ejemplo II.3A.5.

Nota.- Obsérvese que, como en este Capítulo se están considerando todas las hipersuperficies reales de  $QP^m$  conexas, el Teorema fundamental III.3.2 puede ser expresado en forma global.

## C A P I T U L O    I V

### SOBRE EL TENSOR DE RICCI DE LAS HIPERSUPERFICIES REALES EN EL ESPACIO PROYECTIVO CUATERNIÓNICO.-

En este capítulo se clasifican las hipersuperficies reales del espacio proyectivo cuaterniónico atendiendo a un determinado comportamiento de su tensor de Ricci. Más concretamente, previo estudio de las hipersuperficies reales casi-Einstein y pseudo-Einstein de este espacio, se prueba la no existencia de hipersuperficies reales Einstein del espacio proyectivo cuaterniónico.

#### §1. HIPERSUPERFICIES REALES CASI-EINSTEIN EN $QP^m$ .

El objetivo fundamental de este epígrafe es aplicar los resultados del Capítulo III a la obtención de hipersuperficies reales  $M$  en el espacio proyectivo cuaterniónico cuyo tensor de Ricci verifica,

$$(A) \quad SX = aX + b \sum_{k=1}^3 g(\Delta X, U_k) U_k,$$

para todo campo de vectores  $X$  tangente a  $M$ , siendo  $a$  y  $b$  constantes y donde  $S(X, Y) = g(SX, Y)$  para cualesquiera  $X, Y \in TM$ .

Con este fin, se considera  $M$  una hipersuperficie real de  $QP^m$  y  $\{E_1, \dots, E_{4m-1}\}$  una base ortonormal de  $TM$ . Por (III.1.14) el tensor de Ricci de  $M$  viene dado por,

$$(IV.1.1) \quad S(X, Y) = \sum_{i=1}^{4m-1} R(X, E_i, E_i, Y) = (4m-2)g(X, Y) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{4m-1} \sum_{k=1}^3 g(P_k Y, E_i) g(P_k X, E_i) + \sum_{i=1}^{4m-1} (g(\Lambda X, Y) g(\Lambda E_i, E_i) - \\
& - g(E_i, \Lambda X) g(E_i, \Lambda Y)) = (4m-2)g(X, Y) + 3 \sum_{k=1}^3 g(P_k X, P_k Y) + \\
& + \text{traza } \Lambda g(\Lambda X, Y) - g(\Lambda^2 X, Y),
\end{aligned}$$

para cualesquiera  $X, Y \in TM$ .

Teniendo en cuenta (III.1.2) y (III.1.5) se obtiene que (IV.1.1) puede ser expresado en la forma,

$$(IV.1.2) \quad SX = (4m+7)X - 3 \sum_{k=1}^3 f_k(X) U_k + h\Lambda X - \Lambda^2 X,$$

para todo  $X \in TM$ , donde  $h = \text{traza } \Lambda$ .

DEFINICION IV.1.1.- Sea  $M$  una hipersuperficie real del espacio proyectivo cuaterniónico  $QP^m$ . Se dice que  $M$  es una hipersuperficie real casi-Einstein si el tensor de Ricci de  $M$  verifica la condición (A).

Se tiene así, el siguiente resultado acerca de las hipersuperficies reales casi-Einstein,

LEMA IV.1.2.- Sea  $M$  una hipersuperficie real casi-Einstein de  $QP^m$ . Entonces existe una base local de la estructura cuaterniónica de  $QP^m$ ,  $\{J'_1, J'_2, J'_3\}$ , definida sobre un subconjunto abierto  $U'$  de  $QP^m$  tal que los correspondientes  $U'_k = -J'_k N$  son principales y al menos dos de ellos tienen la misma curvatura principal. Además sobre  $U'$  existen, como máximo, cuatro curvaturas principales distintas.

Demostración.- Por ser  $M$  casi-Einstein,  $M$  verifica la condición (A), y por tanto, de (IV.1.2), se deduce que,

$$(IV.1.3) \quad (\Lambda^2 - h\Lambda)X + b \sum_{k=1}^3 g(\Lambda X, U_k) U_k = (4m+7-a)X,$$

y

$$(IV.1.4) \quad (\Lambda^2 - h\Lambda)Z + b \sum_{k=1}^3 g(\Lambda Z, U_k) U_k = (4m+4-a)Z,$$

para cualesquiera campos de vectores  $X \in D$  y  $Z \in D'$ .

Según esto, multiplicando escalarmente (IV.1.3) por  $Z$ , se obtiene,

$$g((\Lambda^2 - (h-b)\Lambda)X, Z) = 0,$$

y por tanto, el endomorfismo  $T = \Lambda^2 - (h-b)\Lambda$  de  $TM$  verifica,

$$(IV.1.5) \quad g(TD, D') = 0.$$

Ahora bien,  $\Lambda$  es diagonalizable, en consecuencia  $T$  también lo es y por (IV.1.5) se deduce,

$$(IV.1.6) \quad TD \subseteq D, \quad TD' \subseteq D'.$$

De (IV.1.4),

$$\begin{aligned} TZ &= (\Lambda^2 - (h-b)\Lambda)Z = (\Lambda^2 - h\Lambda)Z + b\Lambda Z = (4m+4-a)Z + \\ &+ b(\Lambda Z - \sum_{k=1}^3 g(\Lambda Z, U_k) U_k) = (4m+4-a)Z + b(\Lambda Z)^T, \end{aligned}$$

para todo  $Z \in D'$ , donde por  $(\Lambda Z)^T$  se designa la componente de  $\Lambda Z$  en  $D$ . Así, teniendo en cuenta (IV.1.6), de lo anterior se deduce,

$$(IV.1.7) \quad b(\Lambda Z)^T = 0,$$

para todo  $Z \in D'$ .

Se distinguen dos casos,

CASO I.  $b \neq 0$ .- En este caso, por (IV.1.7), se deduce que,  $g(\Lambda D, D') = 0$ . En consecuencia, del Lema III.2.2 existe una base local de la estructura cuaterniónica,  $\{J'_1, J'_2, J'_3\}$  tal que los correspondientes  $U'_k = -J'_k N$ ,  $k=1,2,3$ , son principales y, por (IV.1.4) al menos dos de ellos tienen la misma curvatura principal lo que, junto a (IV.1.3), concluye la demostración en este caso.

CASO II.  $b=0$ .- En este caso, (IV.1.3) y (IV.1.4) pueden ser expresados, respectivamente, en la forma,

$$(IV.1.8) \quad (\Lambda^2 - h\Lambda)X = (4m+7-a)X,$$

y

$$(IV.1.9) \quad (\Lambda^2 - h\Lambda)Z = (4m+4-a)Z,$$

para cualesquiera  $X \in D$  y  $Z \in D'$ .

Así, si se toma el endomorfismo  $T' = \Lambda^2 - h\Lambda$  de  $TM$ , entonces por un razonamiento similar al anterior se deduce que

$$(IV.1.10) \quad T'D \subseteq D, \quad T'D' \subseteq D'.$$

Sea  $\{X'_1, \dots, X'_{4m-1}\}$  una base ortonormal en  $TM$  de autovectores de  $D$ . Por la definición de  $T'$ ,  $\{X'_1, \dots, X'_{4m-1}\}$  es una base ortonormal de autovectores de  $T'$  y como, de (IV.1.8), (IV.1.9) y (IV.1.10),  $T'$  deja invariantes las distribuciones  $D$  y  $D'$  con distinto autovalor, entonces han de existir tres campos de vectores  $X'_1, X'_2$  y  $X'_3$  tales que,

$$(IV.1.11) \quad T'X'_k = (4m+4-a)X'_k, \quad k=1,2,3,$$

$$(IV.1.12) \quad \text{Sp}\{X'_1, X'_2, X'_3\} = D'.$$

Según esto, si se designa por  $C'$  la matriz de  $SO(3)$  que cambia la base  $\{U_1, U_2, U_3\}$  a  $\{X'_1, X'_2, X'_3\}$ , entonces la nueva base local de  $\hat{V}$ ,  $\{J'_1, J'_2, J'_3\}$  definida sobre  $U'$  y dada por,

$$C' \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J'_1 \\ J'_2 \\ J'_3 \end{bmatrix}$$

verifica que los correspondientes  $U'_k = -J'_k N$  son principales y además, de (IV.1.8) y (IV.1.9), se tiene que al menos dos de ellos tienen la misma curvatura principal y en cada punto de

$U'$  existen como máximo 4 curvaturas principales distintas, con lo que concluye la demostración.

TEOREMA IV.1.3.- Sea  $M$  una hipersuperficie real conexa y casi-Einstein del espacio proyectivo cuaterniónico  $QP^m$ . Entonces  $M$  es una parte abierta de,

- i) Una hiperesfera geodésica, o de
- ii) Un tubo de radio  $r$  sobre  $QP^k$ ,  $0 < k < m-1$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{2}$  y  $\text{ctg}^2 r = \frac{4k+2}{4m-4k-2}$ , o de
- iii) Un tubo de radio  $r$  sobre el espacio proyectivo complejo  $CP^m$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{4}$  ó  $\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$  con  $\text{ctg}^2 2r = \frac{1}{m-1}$ .

Demostración.- Por el Lema IV.1.2, se puede suponer que  $U_1, U_2$  y  $U_3$  son principales sobre un subconjunto abierto  $U$  de  $M$  y que al menos dos de ellos tienen la misma curvatura principal  $\alpha_1$ . Por tanto no es restricción el considerar,

$$\begin{aligned} \Lambda U_1 &= \alpha_1 U_1, \\ \Lambda U_2 &= \alpha_2 U_2, \\ \Lambda U_3 &= \alpha_3 U_3, \end{aligned} \tag{IV.1.13}$$

con  $\alpha_1 = \alpha_2$  sobre  $U$ .

Del Lema III.2.2 se tiene que

$$\begin{aligned} \text{(IV.1.14)} \quad X(\alpha_i) &= U_i(\alpha_i) f_i(X) - p_j(X)(\alpha_i - \alpha_k) p_k(X) + \\ &+ p_k(U_i)(\alpha_i - \alpha_j) f_j(X), \end{aligned}$$

para todo  $X \in TM$ , siendo  $(i, j, k)$  una permutación cíclica de  $(1, 2, 3)$ . Se distinguen dos casos,

CASO I. Que  $U_1, U_2$  y  $U_3$  sean principales con la misma curvatura principal.-

En este caso  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ , y de (IV.1.4)  $\alpha$  es localmente

constante y por tanto de (IV.1.3) y (IV.1.4) como  $a$  y  $b$  son constantes se deduce que  $U$  es una hipersuperficie real isoparamétrica de  $QP^m$  con  $U_1, U_2$  y  $U_3$  principales con la misma curvatura principal. Luego de los Lemas III.2A.1 y III.2A.2 y teniendo en cuenta la conexión de  $M$  se sigue que  $M$  ha de ser un abierto de,

- i) Una hiperesfera geodésica, o bien, de
- ii) Un tubo de radio  $r$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{2}$ , sobre  $QP^k$ ,  $0 < k < m-1$ , que por (IV.1.3) y teniendo en cuenta el Ejemplo II.3A.6, ha de verificar,  $\text{ctg}^2 r = \frac{4k+2}{4m-4k-2}$ , y se concluye la demostración en este caso.

CASO II. Se supone que  $\alpha_1 \neq \alpha_3$  en algún punto  $A$  de  $U$ .

Entonces de la continuidad de  $\alpha_1$  y  $\alpha_3$ , existe un entorno  $V$  de  $A$  en  $U$  tal que  $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3$  sobre  $V$ . Se supone, por tanto,

$$(IV.1.15) \quad \Lambda U_k = \alpha_k U_k, \quad k=1,2,3, \quad \alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3,$$

sobre  $V$ . De (IV.1.14) se obtiene,

$$(IV.1.16) \quad Y(\alpha_k) = 0, \quad k=1,2,3,$$

para todo  $Y \in D$ , y

$$(IV.1.17) \quad \begin{aligned} U_1(\alpha_1) &= U_1(\alpha_2) = U_2(\alpha_1) = 0, \\ U_1(\alpha_3) &= -p_2(U_3)(\alpha_3 - \alpha_1), \\ U_2(\alpha_3) &= p_1(U_3)(\alpha_1 - \alpha_3). \end{aligned}$$

Ahora bien, de (IV.1.4),  $(\Lambda^2 - (h-b)\Lambda)Z = (4m+4-a)Z$  para todo  $Z \in D'$ ; así, teniendo en cuenta (IV.1.15), se obtiene,

$$(IV.1.18) \quad \alpha_1^2 - (h-b)\alpha_1 = 4m+4-a,$$

$$(IV.1.19) \quad \alpha_1 + \alpha_3 = h-b.$$

Como  $a$  y  $b$  son constantes, si se deriva (IV.1.18) respecto de  $U_1$  y  $U_2$ , de (IV.1.17), se deduce,

$$(IV.1.20) \quad \alpha_1 U_1(h) = \alpha_1 U_2(h) = 0.$$

II.1.- Se supone en primer lugar que  $\alpha_1 \neq 0$  en un punto  $B$  de  $V$ ; como antes, de la continuidad de  $\alpha_1$ , existe un entorno de  $B$  en  $V$  que se seguirá designando por  $V$  tal que  $\alpha_1 \neq 0$  sobre  $V$ . Por consiguiente de (IV.1.20),

$$U_1(h) = U_2(h) = 0,$$

de donde, si se deriva (IV.1.19) respecto de  $U_1$  y  $U_2$  se obtiene,

$$(IV.1.21) \quad U_1(\alpha_3) = U_2(\alpha_3) = 0.$$

Así, de (IV.1.17),  $p_1(U_1) = p_2(U_3) = 0$ , luego, de (III.1.15) y (IV.1.15),

$$(IV.1.22) \quad \nabla_{U_3} U_3 = 0.$$

De las fórmulas de Gauss y Weingarten y de la definición del gradiente de una función, se deduce fácilmente que,

$$(IV.1.23) \quad g(\nabla_X \text{grad} \alpha_3, Y) = g(\nabla_Y \text{grad} \alpha_3, X),$$

para cualesquiera  $X, Y \in TM$ .

Por tanto, de (IV.1.23) y teniendo en cuenta (I.1.3), (IV.1.16) y (IV.1.17), se sigue,

$$(IV.1.24) \quad X(\beta) f_3(Y) + g(\nabla_X U_3, Y) = Y(\beta) f_3(X) + g(\nabla_Y U_3, X),$$

para cualesquiera  $X, Y \in TM$ , siendo  $\beta = U_3(\alpha_3)$ .

Tomando  $X = U_3$  e  $Y = U_3$  en (IV.1.24), entonces de (IV.1.22) se obtiene,

$$(IV.1.25) \quad U_3(\beta) f_3(Y) = Y(\beta) + g(\nabla_Y U_3, U_3)$$



y expresión análoga para X. En consecuencia, de (IV.1.23) y (IV.1.25), se tiene,

$$(IV.1.26) \quad \beta g(\nabla_X U_3, Y) = \beta g(\nabla_Y U_3, X)$$

para cualesquiera  $X, Y \in TM$ .

De (IV.1.15) y (IV.1.26) se sigue,  $\beta g(J_3 \wedge X, Y) = \beta g(J_3 \wedge Y, X)$ , luego,

$$(IV.1.27) \quad \beta g((J_3 \wedge + \wedge J_3)X, Y) = 0,$$

para cualesquiera  $X, Y \in D$ .

Usando la ecuación de Codazzi, (I.1.7), (III.1.15) y (IV.1.15) se obtiene que,

$$g(X, J_3 Y) = \bar{R}(X, J_3 Y, U_3, N) = g(J_3 \wedge X, Y) - g(J_3 \wedge Y, X)$$

para cualesquiera  $X, Y \in D$ . Por tanto, de la expresión anterior y (IV.1.27), se deduce que  $\beta = U_3(\alpha_3) = 0$  lo que junto a (IV.1.16) y (IV.1.21) prueba que  $\alpha_3$  es constante sobre V.

Así, como, de (IV.1.4),  $\alpha_1 \alpha_3 = a - (4m+4)$ , se concluye que  $\alpha_1$  también es constante y por consiguiente, de (IV.1.13), se obtiene que V es una hipersuperficie real isoparamétrica de  $QP^m$  con  $U_1, U_2$  y  $U_3$  principales donde dos de sus curvaturas principales son distintas. Por consiguiente, teniendo en cuenta la conexión de M, del Teorema fundamental III.2.3 se concluye que M es una parte abierta de un tubo de radio r,  $0 < r < \frac{\pi}{4}$  ó  $\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$  sobre  $CP^m$  que, además, del Ejemplo II.3B.2 y de (IV.1.3), verifica que  $\text{ctg}^2 r = \frac{1}{m-1}$ , lo que concluye la demostración en este caso.

II.2.- Se supone que  $\alpha_1 = 0$  sobre V, entonces  $\alpha_1 = 2 \text{ctg} 2 \frac{\pi}{4}$  y si se toma el tubo de radio  $\frac{\pi}{4}$  sobre V, y si  $\Sigma$  es un abierto conexo de V donde  $\phi_{\frac{\pi}{4}}$  tiene rango máximo, entonces por

el Lema II.2.6 , de ser  $\alpha_1 \neq \alpha_3$  sobre  $V$  y mediante el uso del Teorema de la función inversa, se deduce que existe un abierto  $\Sigma'$  contenido en  $\Sigma$  tal que  $\phi_{\frac{\pi}{4}}(\Sigma')$  es una subvariedad de  $QP^m$ . Entonces, definiendo  $n$  como en (III.2A.3) y por un razonamiento similar al utilizado para probar el Lema II.3A.1 puede verse fácilmente que de ser  $\alpha_3 \neq -2\text{tg}2\frac{\pi}{4}$ , rango  $n_* = 4m-1$ , y de forma análoga al Lema II.3A.2 se deduce que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$  lo cual es una contradicción y se concluye la demostración del Teorema.

Del Teorema anterior, se sigue que en todas las hipersuperficies reales casi-Einstein del espacio proyectivo cuaterniónico  $b$  es necesariamente distinto de cero . Por tanto, se tiene el siguiente,

COROLARIO IV.1.4.- No existen hipersuperficies reales Einstein del espacio proyectivo cuaterniónico.

## §2. HIPERSUPERFICIES REALES PSEUDO-EINSTEIN DE $QP^m$ .

J.D. Pérez, en [Pe], estudia las hipersuperficies reales,  $M$ , del espacio proyectivo cuaterniónico cuyo tensor de Ricci verifica la siguiente condición,

$$(B) \quad SX = aX + b \sum_{k=1}^3 g(X, U_k) U_k,$$

para todo  $X \in TM$ , en el caso particular de que  $U_1, U_2$  y  $U_3$  sean principales con la misma curvatura principal, siendo  $a$  y  $b$  funciones diferenciables sobre  $M$ .

En este epígrafe se obtiene la clasificación de este tipo de hipersuperficies reales de  $QP^m$  cuando en la condición (B),  $a$  y  $b$  son constantes, completando así, los resultados obtenidos en [Pe].

DEFINICION IV.2.1.- Sea  $M$  una hipersuperficie real del espacio proyectivo cuaterniónico  $QP^m$ . Se dice que  $M$  es una hipersuperficie real pseudo-Einstein si el tensor de Ricci de  $M$  verifica la condición (B) con  $a$  y  $b$  constantes sobre  $M$ .

En cuanto a las hipersuperficies reales pseudo-Einstein de  $QP^m$  se tiene,

LEMA IV.2.2.- Sea  $M$  una hipersuperficie real pseudo-Einstein de  $QP^m$ ,  $m \geq 3$ . Entonces existe una base local de  $\hat{V}$ ,  $\{J'_1, J'_2, J'_3\}$ , definida sobre un abierto  $U$  de  $M$ , tal que los correspondientes  $U'_k = -J'_k N$ ,  $k=1,2,3$ , son principales y al menos dos de ellos tienen la misma curvatura principal. Además, en cada punto de  $U$  existen a lo más cuatro curvaturas principales distintas.

Demostración.- Por verificar  $M$  la condición (B) y por (IV.1.2) se deduce,

$$(IV.2.1) \quad (\Lambda^2 - h\Lambda)X = (4m+7-a)X,$$

$$(IV.2.2) \quad (\Lambda^2 - h\Lambda)Z = (4m+4-(a+b))Z,$$

para cualesquiera  $X \in D$ ,  $Z \in D'$ .

Sea  $T = \Lambda^2 - h\Lambda$ , claramente  $T$  es un endomorfismo de  $TM$  simétrico y además,

$$(IV.2.3) \quad TD \subseteq D, \quad TD' \subseteq D'.$$

Si  $\{X_1, \dots, X_{4m-1}\}$  es una base ortonormal en  $TM$  de autovectores de  $\Lambda$ , de la definición de  $T$ ,  $\{X_1, \dots, X_{4m-1}\}$  es también una base de autovectores de  $T$ . Se distinguen dos casos: CASO I.  $b \neq -3$ . Entonces, de (IV.2.1), (IV.2.2) y (IV.2.3),  $T$  deja invariantes las distribuciones  $D$  y  $D'$  con distintos au-

tovalores,  $4m+7-a$  y  $4m+4-(a+b)$ , respectivamente, esto es, existen exactamente tres campos de vectores  $X_1, X_2$  y  $X_3$  tales que,

$$(IV.2.4) \quad TX_k = (4m+4-a)X_k, \quad k=1,2,3,$$

$$(IV.2.5) \quad D' = Sp\{X_1, X_2, X_3\},$$

y el lema se sigue entonces como en el Caso II del Lema IV. 1.2.

CASO II.  $b=-3$ . Entonces, de (IV.2.1) y (IV.2.2),  $U$  tiene a lo más dos curvaturas principales distintas, de donde, por la Proposición III.3.1, por (IV.2.1) y (IV.2.2) se concluye también la demostración en este caso.

Del Lema anterior, toda hipersuperficie real pseudo-Einstein de  $QP^m$ ,  $m \geq 3$ , verifica que, localmente,  $U_1, U_2$  y  $U_3$  son principales y, en el caso de que tengan la misma curvatura principal, por el Lema III.1.2, ésta es localmente constante; por tanto, la condición (B) con  $a$  y  $b$  constantes es equivalente a la condición (A), esto es, en este caso toda hipersuperficie real pseudo-Einstein de  $QP^m$  es una hipersuperficie real casi-Einstein y recíprocamente. Así, debido a la clasificación dada en §1 de este Capítulo de las hipersuperficies reales casi-Einstein, el interés de las hipersuperficies reales pseudo-Einstein se centra en saber cuáles de ellas verifican que  $U_1, U_2$  y  $U_3$  son principales con al menos dos curvaturas principales distintas.

A este respecto se tiene el siguiente,

LEMA IV.2.3.- No existen hipersuperficies reales pseudo-Einstein de  $QP^m$ ,  $m \geq 3$ , donde al menos dos de las curvaturas prin-

principales correspondientes a  $U_1$ ,  $U_2$  y  $U_3$  sean distintas sobre un abierto  $U$  de  $M$ .

Demostración.- Se supone que existe una hipersuperficie real  $M$  pseudo-Einstein verificando las condiciones del lema, entonces del Lema IV.2.2 existe un abierto  $V$  contenido en  $U$  tal que  $U_1$ ,  $U_2$  y  $U_3$  son principales y al menos dos de ellos tienen la misma curvatura principal. Así, se puede considerar,

$$(IV.2.6) \quad \begin{aligned} \Lambda U_1 &= \alpha_1 U_1, \\ \Lambda U_2 &= \alpha_2 U_2, \\ \Lambda U_3 &= \alpha_3 U_3, \end{aligned}$$

con  $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3$  sobre  $V$ .

Entonces de forma similar al Caso II del Teorema IV.1.3 se deduce que  $V$  es un abierto del tubo de radio  $r$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{4}$ , ó  $\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$ , sobre  $CP^m$ , con  $\text{ctg}^2 2r = \frac{1}{m-1}$ .

Es claro, del Ejemplo II.3B.2, que los tubos construidos sobre  $CP^m$  no verifican la condición (B) para ningunas constantes  $a$  y  $b$ . En consecuencia, se llega a una contradicción y se concluye la demostración del lema.

Del Teorema IV.1.3 y del Lema IV.2.3 se deduce,

TEOREMA IV.2.4.- Sea  $M$  una hipersuperficie real conexa del espacio proyectivo cuaterniónico  $QP^m$ ,  $m \geq 3$ . Entonces,  $M$  es pseudo-Einstein si y sólo si  $M$  es una parte abierta de

- i) Una hiperesfera geodésica, o de
- ii) Un tubo de radio  $r$ ,  $0 < r < \frac{\pi}{2}$ , sobre  $QP^k$ ,  $0 < k < m-1$  con  $\text{ctg}^2 r = \frac{4k+2}{4m-4k-2}$ .

Nota.- Obsérvese que del Teorema IV.2.4 las únicas hipersu-

perficiees reales pseudo-Einstein de  $QP^m$ ,  $m \geq 3$ , tienen  $U_1$ ,  $U_2$  y  $U_3$  principales con la misma curvatura principal.

Nótese también que el Corolario IV.1.4, que da la no existencia de hipersuperficiees reales Einstein en  $QP^m$ , puede obtenerse también del Teorema IV.2.4 para  $m \geq 3$ .

## B I B L I O G R A F I A

- [A] D.V. ALEKSEEVSKII, "Riemannian spaces with exceptional holonomy groups", *Func. Anal. App.*, 2(1968), 97-105.
- [BCU] M. BARROS, B.Y. CHEN and F. URBANO, "Quaternion CR-submanifolds of quaternion manifolds", *Kodai Math. J.*, 4(1981), 399-417.
- [Be] A. BEJANCU, "Hypersurfaces of quaternion spaces forms", *Anale Stient. Univ. Al I Cuza, Iasi*, 27(1981), 291-296.
- [Bg] M. BERGER, "Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés Riemanniennes", *Bull. Soc. Math. France*, 83(1955), 279-330.
- [Bo] E. BONAN, "Sur les G-structures du type quaternionien", *Cahiers de Top. et Geom. Diff.*, 9(1967), 389-463.
- [Bt] W. M. BOOTHBY, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975.
- [C] E. CARTAN, "Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques", *Math. Zeit.*, 45(1939), 335-367, (Obras completas).
- [CR1] T.E. CECIL and P.J. RYAN, "Focal set of submanifolds", *Pacific J. Math.*, Vol. 78, 1(1978), 27-39.
- [CR2] T.E. CECIL and P.J. RYAN, "Focal sets and real hyper-

surfaces in complex projective space ", Trans. A. M.S., Vol 269, 2(1982), 481-499.

- [Ch1] B.Y. CHEN, Geometry of submanifolds, M. Dekker, New York, 1973.
- [Ch2] B.Y. CHEN, "Totally umbilical submanifolds of quaternion-space-forms", J. Austral Math. Soc.,(Series A), 26(1978), 154-162.
- [Ch3] B.Y. CHEN, Geometry of submanifolds and its applications, Sci. Univ. Tokyo, 1981.
- [Ch4] B.Y. CHEN, "On the first eigenvalue of Laplacian of compact minimal submanifolds of rank one symmetric spaces", Chin. J. Math., 11(1984), 259-273.
- [CH] B.Y. CHEN and C.S. HOUH, "Totally real submanifolds of quaternion projective space", Ann. Mat. Pura appl., 120(1979), 175-189.
- [CLM] B.Y. CHEN, G.D. LUDDEN and S. MONTIEL, "Real submanifolds of a Kaehler manifolds", Algebras, Groups and Geometries, 1(1984), 176-212.
- [F] A. FIALKOW, "Hypersurfaces of a space of constant curvature", Ann. of Math., Vol. 2, 39(1938), 762-785.
- [Fu1] S. FUNABASHI, "Totally real submanifolds of a quaternionic Kaehlerian manifolds", Kodai Math. Sem. Rep., 29(1978), 261-270.
- [Fu2] S. FUNABASHI, "Totally complex submanifolds of quaternion Kaehler manifolds", Kodai Math. J., 2(1979), 314-336.



- [G] A. GRAY, "A note on manifolds whose holonomy group is a subgroup of  $Sp(m)Sp(1)$ ", Michigan Math. J., 16(1969) 125-128.
- [H1] C.S. HOUH, "On Q-quasiumbilical hypersurfaces of quaternion Kaehler manifolds", Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 8(1980), 447-456.
- [H2] C.S. HOUH, "Some totally real submanifolds in a quaternion projective space", Rocky Mountain J. Math, Vol. 10, 3(1980), 509-515.
- [I1] S. ISHIHARA, "Quaternion Kählerian manifolds and fibred Riemannian spaces with Sasakian 3-structure", Kodai Math. Sem. Rep., 25(1973), 321-329.
- [I2] S. ISHIHARA, "Quaternion Kählerian manifolds", J. Differential Geometry, 9(1974), 483-500.
- [JM] L.P. JORGE and F. MERCURI, "Minimal immersions into space forms with two principal curvatures", Math. Z., 187(1984), 325-333.
- [K] M. KIMURA, "Real hypersurfaces and complex submanifolds in complex projective space", Comunicación personal.
- [KM] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU, Foundations of Differential Geometry, Vol. I, II, Intersciencie New York, 1963, 1969.
- [Kn] M. KON, "Pseudo-Einstein real hypersurfaces in complex-space-forms", J. Differential Geometry, 14(1979), 339-354.
- [Kr] V.Y. KRAINES, "Topology of quaternionic manifolds" Trans.

A.M.S., 122(1966), 357-367.

[L] H.B. LAWSON Jr., "Rigidity theorems in rank-1 symmetric spaces", J. Differential Geometry, 4(1970), 187-197.

[Li] J.A. LITTLE, "Manifolds with planar geodesic", J. Differential Geometry, 11(1976), 265-285.

[M] S. MAEDA, "Real hypersurfaces of complex projective space", Math. Ann., 263(1983), 473-478.

[Ma] Y. MAEDA, "On real hypersurfaces of complex projective space", J. Math. Soc. Japan, 28(1976), 529-540.

[Mk] S. MARCHIAFAVA, "Sulle varietà a struttura quaternionale generalizzata", Rend. Mat., Vol.6, 3(1970), 529-545.

[Mr] E. MARTINELLI, "Modelo métrico reale dello spazio proiettivo quaternionale", Ann. Mat. Pura Appl., 49(1960) 73-90.

[MP] A. MARTINEZ and J.D. PEREZ, "On focal sets and real hypersurfaces in quaternionic projective space", V Int. Coll. Diff. Geom., Santiago de Compostela, 1984.

[MPS1] A. MARTINEZ, J.D. PEREZ and F.G. SANTOS, "On the normal connection of quaternion CR-submanifolds", Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, Vol.12, 3(1984), 237-247.

[MPS2] A. MARTINEZ, J.D. PEREZ and F.G. SANTOS, "Generic submanifolds of a quaternion Kaehlerian manifolds", Soochow J. Math., 10(1984), 25-44.

[MR] A. MARTINEZ and A. ROS, "On real hypersurfaces of finite type of  $CP^M$ ", Kodai Math. J., a aparecer.

- [Mo] S. MONTIEL, Hipersuperficies reales del espacio Hiperbólico complejo, Tesis doctorales de la Univ. de Granada, 1984.
- [Mu1] H.F. MUNZER, "Isoparametrische hyperflächen in sphären" Math. Ann., 251(1980), 57-71.
- [Mu2] H.F. MUNZER, "Isoparametrische hyperflächen in sphären" Math. Ann., 256(1981), 215-232.
- [N] K. NOMIZU, "Elie Cartan's work on isoparametric families of hypersurfaces", Proc. Symposia in Pure Math., Vol. 27, Parte I., A.M.S. Provid. R.I., (1974), 191-200.
- [O1] M. OKUMURA, "On some real hypersurfaces of a complex projective space", Trans. A.M.S., 212(1975), 355-364.
- [O2] M. OKUMURA, "Compact real hypersurfaces with constant mean curvature of a complex projective space", J. Differential Geometry, 13(1978), 43-50.
- [On] B. O'NEILL, "The fundamental equations of a submersion", Michigan Math. J., 13(1966), 459-469.
- [Ot] T. OTSUKI, "Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature", Amer. J. Math., Vol. 92 1(1970).
- [P] J.S. PAK, "Real hypersurfaces in quaternionic Kaehlerian manifolds with constant Q-sectional curvature", Kodai Math. Sem. Rep., 29(1977), 22-61.
- [Pe] J.D. PEREZ, Geometría de variedades Kaehlerianas cuaterniónicas", Tesis doctorales de la Univ. de Gra-

nada, 1983.

- [PS1] J.D. PEREZ and F.G. SANTOS, "Indefinite quaternion space forms" *Ann. Mat. Pura Appl.*, 132(1982), 383-398.
- [PS2] J.D. PEREZ and F.G. SANTOS, "Diffeomorphisms which preserve quaternionic sectional curvature", *Soochow J. Math.*, 8(1982), 171-178.
- [PSU] J.D. PEREZ, F.G. SANTOS and F. URBANO, "On the axioms of planes in quaternionic geometry", *Ann. Mat. Pura Appl.*, 130(1982), 215-221.
- [R] H. RECKZIEGEL, "On the eigenvalues of the shape operator of an isometric immersion into a space of constant curvature", *Math. Ann.*, 243(1979), 71-82.
- [Ry1] P.J. RYAN, "Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces", *Tôhoku Math. J.*, 21(1969), 363-388.
- [Ry2] P.J. RYAN, "Hypersurfaces with parallel Ricci tensor", *Osaka J. Math.*, 8(1971), 251-259.
- [S] K. SAKAMOTO, "Planar geodesic immersions", *Tôhoku Math. J.*, 29(1977), 25-56.
- [S11] S. SALAMON, "Quaternionic manifolds", *Inst. Naz. di Alta Mat. Francesco Severi, Symp. Math.*, 26(1982), 139-151.
- [S12] S. SALAMON, "Quaternionic Kähler manifolds", *Inv. Math.* 67(1982), 143-171.
- [Sh] Y. SHIBUYA, "Real submanifolds in a quaternionic pro-

- jective space", Kodai Math. J., 1(1978), 421-439.
- [Sm] B. SMYTH, "Submanifolds of constant mean curvature",  
Math. Ann., 205(1973), 265-280.
- [T] S. TAI, "Minimal imbedding of compact symmetric spaces  
of rank one", J. Differential Geometry, 2(1968),  
55-66.
- [Ta1] R. TAKAGI, "On homogeneous real hypersurfaces in a  
complex projective space", Osaka Math. J., 10(1973),  
495-506.
- [Ta2] R. TAKAGI, "Real hypersurfaces in a complex projective  
space with constant principal curvatures", J. Math.  
Soc. Japan, Vol. 27, 1(1975), 43-53.
- [Ta3] R. TAKAGI, "Real hypersurfaces in a complex projective  
space with constant principal curvatures II", J.  
Math. Soc. Japan., Vol. 27, 1(1975), 507-516.
- [TT] R. TAKAGI and T. TAKAHASHI, On the principal curvatu-  
res of homogeneous hypersurfaces in a sphere , Diff.  
Geom. in honor of K. Yano, Tokyo, Kinokuniya, 1972.
- [TO] M. TAKEUCHI and H. OZEKI,, "On some types of isoparame-  
tric hypersurfaces in spheres", Tôhoku Math. J.,  
27(1975), 515-559.
- [TO1] M. TAKEUCHI and H. OZEKI, "On some types of isoparame-  
tric hypersurfaces in spheres II", Tôhoku Math. J.,  
28(1976), 7-56.
- [Ts] K. TSUKADA, "Parallel submanifold in a quaternion pro-  
jective space", Comunicación personal.

[W] J.A. WOLF, "Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces". J. Math. Mech., Vol. 14, 6(1965), 1033-1047.