C/M

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

DON ENRIQUE F. HITA VILLAVERDE, PROFESOR AGREGADO INTERINO Y SECRETARIO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD DE GRANADA,

Núm. 116

C E R T I F I C O: Que la presente Tesis Doctoral corresponde a la presentada en esta Facultad por D. Antonio López Carmona, que fué calificada con Sobresaliente "cum laude" el día 7 de Abril de 1.981, por el tribunal correspondiente que fue aprobado en Junta de Facultad celebrada el día 25 de Marzo de 1.981, siendo el título de la Tesis "Interpolación por recurrencia en varias variables".

Y para que conste y surta los efectos correspondientes se extiende la presente certificación con el visto bueno del Iltmo. Sr. Decano en Granada a ocho de abril de mil novecientos ochenta y uno.

Vº. Bº.
EL DECANO,

E. Hita V.

FACULTAD DE CIENCIAS — UNIVERSIDAD DE GRANADA

Tesis doctoral, dirigida por el Prof. Dr. D. Mariano Gasca González, Catedrático de Análisis Matemático III de la Universidad de Granada. Fué leida el 7 de Abril de 1981 ante el tribunal formado por los profesores: Fuentes Mira, Nácere Hayek, Gasca Gonzáles, José Cortés y Martinez Amores. Obtuvo la calificación de sobresaliente "cum laude".

INTERPOLACION POR RECURRENCIA EN VARIAS VARIABLES

POR

ANTONIO LOPEZ CARMONA

Memoria realizada en el Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, bajo la dirección del profesor M. Gasca González, catedrático de Análisis Matemático III de la Universidad de Granada, para obtener el grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas, por la Universidad de Granada.

Vº.Bº

El Director

Mariano Gasca

Fdo. M. Gasca González.

Aspirante al Grado de Doctor en Ciencias.

Fdo. Antonio López Carmona.

A mis padres,

a Flor y Pedro

INDICE

INTRODUCCION.. 4

CAPITULO I: PRELIMINARES, TERMINOLOGIA Y NOTACION

1.- Introducción.. 18
2.- Orígenes del problema.. 24

CAPITULO II: FORMULA GENERAL DE INTERPOLACION POR RECURRENCIA

1.- Establecimiento de la fórmula.. 34
2.- Condiciones prácticas suficientes para la fórmula 42
3.- Obtención de las diferencias divididas.. 47
4.- Casos particulares interesantes.. 62
5.- Posibles extensiones de la fórmula (2.4).. 63

CAPITULO III: CASOS PARTICULARES IMPORTANTES

1.- Introducción.. 71
2.- Fórmula de Aitken-Neville generalizada.. 73
3.- Fórmula de Newton generalizada.. 85
4.- Fórmula de interpolación de Lagrange.. 94

CAPITULO IV: APLICACIONES A LA INTERPOLACION EN VARIAS VARIABLES

1.- Referencias a otros resultados útiles relacionados con el tema 99
2.- Ejemplos de aplicación de la fórmula general a la interpolación de Lagrange 108
3.- Un ejemplo de aplicación de la fórmula a un problema de interpolación de Hermite típico en la teoría de elementos finitos 121
4.- Interpolación de Lagrange y Hermite en seis puntos cualesquiera de R^2. Otro enfoque del problema 137

CAPITULO V: OTRA FORMA DE OBTENCION DE FORMULAS DE INTERPOLACION

1.- Introducción 155
2.- Generalización de la identidad de Sylvester para determinantes 157
3.- Aplicaciones de la identidad a problemas de interpolación 167

APENDICE 190

BIBLIOGRAFIA 199

I N T R O D U C C I O N

INTRODUCCION

Los algoritmos de Newton y de Aitken-Neville para la resolución del problema de interpolación polinomial clásico son bien conocidos.

La fórmula de Newton para el polinomio de grado no mayor que n que interpola a una función f en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ es una fórmula recurrente, en el sentido de que ese polinomio se calcula añadiéndole al de grado no mayor que n-1 que interpola a f en un punto menos un nuevo término que requiere el cálculo de diferencias divididas. Su ventaja sobre la fórmula de Lagrange, por ejemplo, radica en el hecho de que se puede ir aumentando el número de puntos de interpolación sin gran coste y además es programable para cálculos en computadora de manera muy simple.

Sin embargo, en los años 1932 y 1934, respectivamente, Aitken y Neville introducen unas nuevas fórmulas de interpolación por recurrencia que evitan el cálculo explícito de las diferencias divididas. Para ello construyen el polinomio de interpolación citado a partir de otros dos de grado no mayor que n-1 que interpolan a f en un dato menos. Dado que también su programación en una computadora es bastante simple, la idea ha sido bastante utilizada.

La diferencia entre ambos autores es que Aitken, que fué quien primero publicó su trabajo [1], hace una determinada elección de los dos conjuntos de puntos cuyos polinomios de interpolación se utilizan: $\{x_0,..,x_{n-2},x_{n-1}\}$ y $\{x_0,...,x_{n-2},x_n\}$, mientras que Neville en [42] elige los conjuntos $\{x_0,...,x_{n-1}\}$ y $\{x_1,...,x_n\}$. No hay ventaja de uno sobre el otro: únicamente sucede que al reiterar el proceso partiendo de polinomios de interpolación de grado cero hasta llegar al de grado n se van utilizando conjuntos de datos distintos para llegar al mismo conjunto final.

Todos estos métodos se hicieron exclusivamente para polinomios. Posteriormente ha habido diversos intentos de otros autores para utilizar esas ideas en otros espacios. Sin embargo ha sido G. Mühlbach quién en los últimos siete años ha realizado una serie de trabajos que amplían fuertemente los resultados de Aitken y Neville a espacios de Chebyshev.

Siguiendo en orden cronológico los trabajos de G. Mühlbach, en un primer artículo [35] da unos resultados relativos a sistemas de Chebyshev y como corolario obtiene un algorítmo de Aitken-Neville para sistemas completos de Chebyshev sobre un conjunto G.

Posteriormente establece una formulación general del algoritmo de Aitken-Neville clásico aplicable cuando una función se interpola por medio de combinaciones lineales de funciones tales que forman un sistema de Chebyshev de manera que alguno de sus subsistemas sea de nuevo sistema de Chebyshev.

En [36] obtiene una fórmula de interpolación de Newton generalizada para sistemas de Chebyshev tales que al menos uno de sus subsistemas también lo sea. Así mismo, obtiene las diferencias divididas asociadas a dicha fórmula de Newton.

Por otra parte en [41], aún sin publicar, se extiende la fórmula de Newton al caso del problema general de interpolación lineal finita.

En la presente memoria, de una parte pretendemos extender los resultados de G. Mühlbach bajo una formulación netamente algebraica que evita el centrar la atención en los sistemas de Chebyshev y en el caso de una variable. Se consigue así una formulación general que deja las fórmulas utilizadas normalmente: Newton, Lagrange, Aitken, Neville, como casos particulares.

Así mismo, debido a esa formulación es posible la aplicación de los resultados a la interpolación en varias variables sin excesivas dificultades. Concretamente, al aplicar nuestros métodos a la interpolación multivariada, queremos dar una manera alternativa unas veces y complementaria otras, de una serie de trabajos [14], [18], [34], [43] que se han venido realizando en los últimos años en el Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Facultad de Ciencias de Granada.

A punto de finalizar esta memoria tuvimos noticias de la obtención de algunos de los resultados de G.

Mühlbach por C. Brezinski y T. Håvie, separadamente, aunque ellos siguen haciendo uso de la idea de sistema de Chebyshev (completo ó no, según los casos), así como el uso de algoritmos de extrapolación. Nosotros en el capítulo V de la presente memoria extendemos los resultados de Brezinski [6], consiguiendo una interesante identidad para determinantes que generaliza la de Sylvester [13] y llegando a una expresión de una fórmula general análoga a la obtenida en el capítulo II y que coincide con ésta en los casos particulares más importantes.

A continuación describimos el contenido de cada capítulo de esta memoria.

En el capítulo I establecemos las notaciones que usaremos en toda la memoria así como algunos resultados que nos serán útiles en lo sucesivo. Respecto a las notaciones hemos seguido la idea de G. Mühlbach en [35]. También recogemos en este capítulo algunos de los resultados más significativos establecidos, en orden cronológico, por G. Mühlbach y que nosotros hemos generalizado en sucesivos capítulos.

En el capítulo II, en una primera etapa, se establece una fórmula general de interpolación por recurrencia bajo condiciones suficientes bastante simples como son la no anulación de ciertos determinantes. Tal fórmula, con las notaciones del capítulo I y las condiciones anteriores, es

$$(0.1) \qquad L\left(pf\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i . L\left(pf\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right) + $$

$$+ \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=n+s}^{n+m} \lambda_i . a_k . L\left(r\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right)$$

con $s \geqslant 2$ y siendo los λ_i la única solución del sistema

$$(0.2) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \lambda_i . L\left(p\phi_{n+h}\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right) = L(\phi_{n+h}), \quad h=1,\dots,s-1 \end{cases}$$

y los a_k la k-ésima diferencia dividida de f. Aquí L es una forma lineal cualquiera, aunque en el caso más habitual será valor de la función en ciertos puntos ó derivadas parciales en determinadas direcciones.

Es claro que una vez establecida la fórmula (0.1) nos preguntemos si existen condiciones suficientes fácilmente observables en la práctica, para que tal fórmula tenga sentido. La respuesta es afirmativa y se recoge en el teorema 2.2 de este capítulo.

La última parte del capítulo está dedicada al cálculo de las diferencias divididas a_k de (0.1). Tales diferencias divididas las obtendremos como solución de un sistema lineal. En primer lugar, en las condiciones del teorema 2.1, habrá que resolver un sistema de ecuaciones de orden mxm e incógnitas a_i, con $n+1 \leq i \leq n+m$. Para ello tomamos uno cualquiera de los $\mathcal{L}_{n,j}$ y aplicamos el teorema 2.1 con $s = 1$ (fórmula de Newton generalizada) ya que los a_i son independientes de k y dependen tan sólo de f, $\{\phi_j\}$, $j=1,\ldots,n+m$ y $\mathcal{L}_{n+m}$.

No obstante, a la vista de la fórmula (0.1), es claro que nos interesan las a_k con $n+s \leq k \leq n+m$ por lo que estamos resolviendo un sistema "superabundante" ya que se puede reducir a resolver otro sistema pero de orden $(m-s+1)\times(m-s+1)$. Efectivamente ésto puede hacerse con frecuencia y así lo demostramos estableciendo el teorema 2.4 de este capítulo.

Por último, damos un teorema relativo a la obtención de las diferencias divididas como solución de un sistema de más ecuaciones que incógnitas, bajo adecuadas condiciones. Omitimos su demostración detallada por ser de análoga formulación, salvo notaciones, a otro teorema dado por G. Mühlbach en su último trabajo que conocemos, aún no publicado, al extender la fórmula de Newton al problema general de interpolación lineal finita. Este teorema ya había sido demostrado por nosotros con anterioridad siguiendo las líneas expuestas en [36].

Concluimos el capítulo indicando posibles extensiones de la fórmula (0.1) viendo que, en general, no son útiles en la práctica.

En el capítulo III obtenemos los casos particulares más interesantes de la fórmula (0.1).

Si $s = m+1$, desaparece el doble sumatorio y se obtiene la fórmula que llamamos de Aitken-Neville generalizada. El nombre se justifica por que eligiendo los conjuntos $\mathcal{L}_{n,i}$ tales que

$$\operatorname{card}(\mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1}) = n-1, \qquad i=1,\ldots,m$$

y

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} \mathcal{L}_{n,i}\right) = n + m$$

y con

$$\mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1} = \mathcal{L}_{n,j} \cap \mathcal{L}_{n,j+1}, \quad \forall i,j$$

se sigue la idea del algoritmo de Aitken original, mientras que si fuera

$$\mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1} \neq \mathcal{L}_{n,j} \cap \mathcal{L}_{n,j+1}, \quad \forall i \neq j$$

seguimos la idea del algoritmo de Neville.

A partir de la fórmula obtenida es inmediato, por ejemplo, obtener el algoritmo de Aitken clásico.

La fórmula puede ser usada recurrentemente si las circunstancias lo permiten, obteniéndose un algoritmo que es, formalmente, análogo al obtenido por C. Brezinski en [6], aunque obtenido por caminos totalmente distintos a los que él utiliza.

Un algoritmo análogo se obtiene si seguimos la idea de Neville, es decir si

$$\mathcal{L}_{h,j} = \mathcal{L}_{h-1,j-1} \cup \mathcal{L}_{h-1,j}\ , \quad j \geqslant h,\ h=2,3,\ldots$$

Obsérvese que tales algoritmos pueden ser perfectamente llevados a cabo mediante una computadora.

Si $s = 1$ obtenemos la fórmula

$$(0.3) \qquad pf\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{bmatrix}(x) = pf\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_n \end{bmatrix}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \cdot r\phi_k\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_n \end{bmatrix}(x)$$

que llamamos fórmula de Newton generalizada pues permite el paso de un problema con datos $\mathcal{L}_n$ y espacio de interpolación $\{\phi_1,\ldots,\phi_n\}$ a otro con datos $\mathcal{L}_{n+m}$ y espacio de interpolación $\{\phi_1,\ldots,\phi_{n+m}\}$.

A partir de la fórmula (0.3) se puede también deducir fácilmente la fórmula de Aitken-Neville generalizada anterior.

Se discute en esta parte del capítulo el paralelismo entre la fórmula (0.3) y la correspondiente fórmula de Newton de interpolación polinomial en una variable.

Por último, si $s = m+1$ y $n = 1$ obtenemos como caso particular de interés de (0.1) una fórmula de interpolación de Lagrange.

El capítulo IV lo dedicamos a extender los resultados de los capítulos precedentes a la interpolación en dos variables. Lo hacemos en varias etapas. En primer lugar establecemos la fórmula de Aitken-Neville y la de Newton en dos variables y hacemos uso de algunos resultados recientes en la teoría de interpolación multivariada, en particular del trabajo de Gasca & Maeztu [14].

Se estudia la interpolación lagrangiana en seis datos arbitrarios de R^2, viendo casos de interpolación tipo Aitken, tipo Neville e intermedios. Se generaliza al caso de tener n datos sobre una recta, n-1 sobre otra distinta de la anterior, y así sucesivamente hasta tener un solo dato sobre la última recta.

En los ejemplos que damos podemos observar que nuestro método es algo laborioso debido a los determinantes funcionales que aparecen en el cálculo de los $\lambda_i(x,y)$, aunque ello no resta interés a nuestro procedimiento.

Podría pensarse que cuando un problema se sabe que tiene solución única porque podemos hacer una construcción como la indicada en [14] con un conjunto de datos asociado que es el dado y un espacio de interpolación que es el que nos interesa, la obtención de la solución es mucho más práctica allí lo que, en principio, desplaza en interés a la construcción por recurrencia que nosostros hacemos a partir de otros problemas más simples.

Sin embargo ésto no quita interés a los resultados obtenidos en esta memoria porque ambos planteamientos pueden complementarse.

Concretamente, si consideramos el anterior problema de interpolación lagrangiana sobre seis puntos de R^2 no situados sobre una cónica y usando como espacio de interpolación $P_2(x,y)$, si no hay tres puntos alineados, mediante el proceso de construcción de la solución dado por [14] es imposible obtener la misma en $P_2(x,y)$ sino en un subespacio de $P_3(x,y)$. Sin embargo este problema de interpolación tiene solución única en $P_2(x,y)$. Podemos pues aplicar nuestra fórmula de Aitken-Neville generalizada conjugando ambos métodos, con $n = 5$, $m = 1$, $s = 2$.

Es decir, vemos cuándo la resolución más práctica del problema sería mediante el procedimiento de [14] ó cuándo dicha construcción es imposible para resolver el problema total pero posible y aconsejable para la resolución de dos problemas más simples que a su vez pueden ser utilizados para el planteamiento de una fórmula del tipo Aitken-Neville generalizado y así obtener la resolución del problema total mediante un procedimiento simple que muestra cómo ambas técnicas se pueden complementar.

Por último, volvemos a usar, complementariamente, la técnica de [14] y la nuestra en el estudio de elementos finitos clásicos en la bibliografía de Ciarlet, Raviart, Zienkiewicz, etc. En concreto se estudia uno con diez datos Lagrange-Hermite sobre los vértices e interior de un triángulo y que tiene unisolvencia en $P_3(x,y)$. Además, se resuelve un caso concreto del mismo elemento finito.

El capítulo V recoge dos partes bien diferenciadas. De un lado una generalización de una identidad de Sylvester para determinantes (ver [13]) y, de otro, la aplicación de la misma a problemas de interpolación para obtener una fórmula del tipo (0.1) que en los casos particulares de Aitken, Neville y Newton coincide con la obtenida en capítulos anteriores.

La idea de este capítulo surgió a raíz del trabajo de C. Brezinski [6] en que obtiene el algoritmo de Mühlbach-Neville-Aitken (algoritmo MNA) aplicando la identidad de Sylvester para determinantes. Posteriormente lo generaliza aplicando el E-algoritmo de extrapolación obtenido por dicho autor y, simultáneamente, por T. Håvie [25]. Nosotros pretendimos extender estos resultados para lo cual fué necesario modificar la identidad de Sylvester obteniendo una nueva identidad mucho más general.

La aplicación de la misma a nuestros problemas de interpolación ha dado como resultado la obtención de una fórmula de interpolación muy general, análoga a la (0.1) y que en los casos particulares interesantes, s= m+1 y s = 1 sí coincide con ella, pero en general no ocurrirá así como lo probamos con un contraejemplo. Además, con ella, se hace innecesario el recurrir al E-algoritmo de extrapolación, habiendo dejado el trabajo de C. Brezinski [6] como un caso particular de nuestra formulación.

Por último se da un apéndice que muestra cómo puede programarse en un ordenador la interpolación lagrangiana en seis puntos cualesquiera de R^2, $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento al director de esta memoria, Dr. Gasca González, por su continuo estímulo y ejemplo, su útil crítica y su paciencia, sin los cuales no hubiera sido posible concluirla.

Así mismo quiero manifestar mi gratitud a todos los compañeros del Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Facultad de Ciencias de Granada por su constante apoyo y, en particular, al Dr. Ramirez González por su colaboración a lo largo de la elaboración de esta memoria.

GRANADA, MARZO DE 1981

ANTONIO LOPEZ CARMONA

CAPITULO I

PRELIMINARES, TERMINOLOGIA Y NOTACION

CAPITULO I

PRELIMINARES, TERMINOLOGIA Y NOTACION

1.-INTRODUCCION

Sea W un espacio vectorial sobre un cuerpo K conmutativo y de característica cero, V un subespacio suyo de dimensión $n+m$, $n,m \in N$, y consideremos $f \in W$ y $L_1, L_2, \ldots, L_{n+m}$ formas lineales sobre W.

Se llamará problema de interpolación general P a un problema planteado en los siguientes términos:

Hallar

(1.1) $\phi \in V \, / \, L_i(\phi) = L_i(f), \quad i=1,2,\ldots,n+m$

Refiriéndonos al caso en que W y V sean espacios vectoriales de funciones, el problema anterior será de interpolación lagrangiana si $\{L_i\}$, $i=1,2,\ldots,n+m$ son valores de la función en puntos distintos del conjunto de definición de las funciones de W y diremos que es un problema de Hermite si las L_i corresponden a valores de la función y/o valores de ciertas derivadas de orden cualquiera en puntos dados de aquel conjunto.

El resultado básico en esta teoría es el conocido

TEOREMA 1.1.- *Sean $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+m}$ elementos de V y sea*

$$det(L_i(\phi_j))_{i,j=1,2,\ldots,n+m} \neq 0$$

Entonces $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+m}\}$ *es una base de* V *y el problema* P *admite una única solución,* $\forall f \in W$.

Nos será útil, en lo sucesivo, tener en cuenta también el siguiente resultado:

<u>LEMA 1.1</u>.- *Sean* $L_1, L_2, \ldots, L_r$ *r formas lineales sobre* W *y* $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r$ *r elementos pertenecientes al espacio* W*, tales que*

$$\det(L_i(\phi_j))_{i,j=1,2,\ldots,r} \neq 0$$

Entonces, si las formas lineales L *y* L' *son tales que*

$$L = \sum_{i=1}^{r} A_i L_i$$

$$L' = \sum_{i=1}^{r} B_i L_i$$

y se verifica

$$L(\phi_i) = L'(\phi_i), \quad i=1,2,\ldots,r,$$

se tiene $L=L'$.

<u>Demostración</u>

En efecto, si

$$L(\phi_i) = L'(\phi_i), \quad i=1,2,\ldots,r$$

entonces

$$(L-L')(\phi_i) = 0, \quad i=1,2,\ldots,r$$

que es un sistema homogéneo de r ecuaciones y r incógnitas $C_i = A_i - B_i$, $i=1,2,\ldots,r$.

Este sistema tiene solamente la solución trivial ya que el

$$\det(L_i(\phi_j))_{i,j=1,2,\ldots,r} \neq 0$$

y por lo tanto L=L'.

Una aplicación directa de este lema es la siguiente:

Sea G un conjunto arbitrario de puntos de cardinal r, al menos, y E el espacio vectorial de las funciones con valores en K definidas sobre G. Un funcional lineal L sobre E se dice que tiene soporte en $G_r=\{x_1,x_2,\ldots,x_r\} \subset G$, si

$$Lf = \sum_{i=1}^{r} a_i f(x_i) \quad , \qquad \forall f \in E$$

Pues bien, si $\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_r$ son funciones de E tales que

(1.2) $$\det(\phi_i(x_j))_{i,j=1,2,\ldots,r} \neq 0$$

y

$$L'f = \sum_{i=1}^{r} b_i f(x_i)$$

es otro funcional lineal con soporte en G_r, el hecho de que

$L(\phi_i) = L'(\phi_i)$, $\forall i=1,2,\ldots,r$, implica que L=L'

El punto de arranque de nuestro trabajo es la generalización de los resultados obtenidos por G. Mühlbach en [35]-[41], así como continuar la línea de investigación abierta en dichos trabajos.

Notaremos por

$$\mathcal{L}_{n+m} = \{L_i,\ i=1,2,\ldots,n+m\}$$

a un conjunto de n+m formas lineales sobre el espacio W, que mientras no se diga lo contrario consideraremos ordenado según los subíndices crecientes.

Sea $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+m}\}$ una familia de elementos de W linealmente independientes tales que

$$\det\begin{pmatrix}\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m}\end{pmatrix} = \det(L_i(\phi_j))_{i,j=1,\ldots,n+m} \neq 0$$

y llamemos V al espacio vectorial engendrado por $\{\phi_1, \phi_2, \ldots$ $\ldots, \phi_{n+m}\}$ que denotaremos también por

$$\overline{\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+m}\}}$$

Notemos, de forma parecida a Mühlbach,

$$(1.3) \qquad pf\begin{bmatrix}\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix}$$

al elemento de V que es solución única del problema

$$(1.4) \qquad L_i\left(pf\begin{bmatrix}\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix}\right) = L_i(f), \quad i=1,2,\ldots,n+m$$

para un cierto elemento f del espacio W, y lo llamaremos <u>elemento interpolador de f</u> en V respecto al conjunto de datos de interpolación $\mathcal{L}_{n+m}$.

Sean

$$\mathcal{L}_{n,i}, \quad i=1,2,\ldots,s, \quad 1 \leqslant s \leqslant m+1$$

s subconjuntos de n elementos cada uno de $\mathcal{L}_{n+m}$, que consideraremos también ordenados como $\mathcal{L}_{n+m}$. Supongamos que

$$(1.5) \qquad \det\begin{pmatrix}\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i}\end{pmatrix} \neq 0, \quad i=1,2,\ldots,s$$

Análogamente a (1.3),

$$(1.6) \qquad pf\begin{bmatrix} \phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{bmatrix}$$

indicará el elemento de $\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n\}$ que resuelve el siguiente problema de interpolación:

$$(1.7) \qquad L_r\left(pf\begin{bmatrix} \phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{bmatrix}\right) = L_r(f), \quad \forall L_r \in \mathcal{L}_{n,i}$$

Denotamos por

$$(1.8) \qquad \left[\begin{array}{c|c} \phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{n+m} & f \\ \mathcal{L}_{n+m} & k \end{array}\right], \quad k=1,2,\ldots,n+m$$

al coeficiente de ϕ_k en el elemento (1.3), que llamaremos k-ésima diferencia dividida generalizada de f respecto a $\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{n+m}\}$ y $\mathcal{L}_{n+m}$. Análogamente se define

$$\left[\begin{array}{c|c} \phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n & f \\ \mathcal{L}_{n,i} & k \end{array}\right], \quad k=1,2,\ldots,n$$

El error de interpolación de f lo notaremos, según el problema, por

$$rf\begin{bmatrix} \phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{bmatrix} = f-pf\begin{bmatrix} \phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{bmatrix}$$

(1.9) ó

$$rf\begin{bmatrix} \phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{bmatrix} = f-pf\begin{bmatrix} \phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{bmatrix}, i=1,\ldots,s$$

<u>Observación</u>.- La diferencia dividida (1.8) tal como se ha definido aquí depende tanto de $\{\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_{n+m}\}$ como de $\mathcal{L}_{n+m}$. Es el coeficiente de ϕ_k al resolver el sistema a que da origen el problema de interpolación planteado, y depende de la totalidad del problema en el sentido de que incluso no tiene por qué existir

$$\left[\begin{array}{c|c} \phi_1,\phi_2,\dots,\phi_k & f \\ L_1,L_2,\dots,L_k & k \end{array}\right]$$

por ejemplo.

Así la diferencia dividida clásica con cuatro argumentos x_1,x_2,x_3,x_4 verifica

$$[x_1,x_2,x_3,x_4]f = \left[\begin{array}{c|c} 1,\ x,x^2,x^3 & f \\ x_1,x_2,x_3,x_4 & 4 \end{array}\right]$$

y es el coeficiente de x^3 en el polinomio de interpolación de f en x_1,x_2,x_3,x_4, pero ya no es

$$[x_1,x_2,x_3]f = \left[\begin{array}{c|c} 1,\ x,x^2,x^3 & f \\ x_1,x_2,x_3,x_4 & 3 \end{array}\right]$$

sino

$$[x_1,x_2,x_3]f = \left[\begin{array}{c|c} 1,\ x,x^2 & f \\ x_1,x_2,x_3 & 3 \end{array}\right]$$

Lo que hemos pretendido con esta definición es extender la clásica de manera que cuando las condiciones sean similares a las que se producen en el caso de aquella el comportamiento sea también similar, en el sentido que ya precisaremos.

En el capítulo segundo se indicará la forma de calcular las diferencias divididas como solución de un sistema lineal bajo ciertas condiciones.

2.-ORIGENES DEL PROBLEMA.

La búsqueda de construcciones de soluciones de problemas de interpolación que sean simples de llevar a cabo es una cuestión clásica, que además ha sido reforzada con el desarrollo del Análisis Numérico.

La conocida fórmula de Newton para el polinomio de grado n que interpola a f en $x_0,...,x_n$ es una fórmula recurrente en el sentido de que ese polinomio se calcula añadiéndole al de grado n-1 que interpola en un punto menos un nuevo término. Su ventaja sobre otras construcciones radica en el hecho de que se puede ir ampliando fácilmente el número de nodos de interpolación y además es programable para cálculos en computadora de manera simplísima.

Sin embargo hacia los años 1930 dos autores introducen unas nuevas fórmulas de interpolación por recurrencia que evitan el cálculo explícito de diferencias divididas: para ello construyen el polinomio de interpolación citado a partir de otros dos de grado n-1 que interpolan en un punto menos. Como su programación también es tremendamente simple su idea ha sido ampliamente utilizada aunque en definitiva no trae grandes ventajas ni inconvenientes sobre la otra: es simplemente, otra forma análoga de construcción. La diferencia entre los dos autores es que el primero que cronológicamente publicó su trabajo, A.G. Aitken, hace una determinada elección de los dos conjuntos de puntos cuyos polinomios de interpolación se utilizan: $\{x_0,x_1,...,x_{n-1}\}$ y $\{x_0,...,x_{n-2},x_n\}$, y el segundo, E.H. Neville elige

$\{x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}\}$ y $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$. La reiteración del proceso muestra una filosofía distinta en cada caso, pero sin ventaja de uno sobre otro. La idea ha sido utilizada también en algoritmos de extrapolación y aceleración de la convergencia de sucesiones y series.

Sin embargo esos autores hicieron sus trabajos para polinomios. Tras varios intentos de otros autores ya en fechas recientes para utilizar esas ideas en otros espacios, G. Mühlbach ha realizado en estos últimos siete años una serie de trabajos, algunos aún sin publicar como [41], en los que ha conseguido interesantes resultados que amplían fuertemente los resultados de Aitken y Neville a espacios de Chebyshev. Por otra parte elabora una teoría para el cálculo de las consiguientes diferencias divididas generalizadas aplicables para construir una fórmula de Newton generalizada.

C.Brezinski y T. Håvie han visto en otros artículos cómo se puede llegar a algunos de los resultados de Mühlbach a través de razonamientos relacionados con algoritmos de extrapolación.

Vamos a exponer aquí brevemente los principales resultados de Mühlbach que generalizamos en los siguientes capítulos de esta memoria.

En [35] se da una fórmula general de un algoritmo de Aitken-Neville para interpolación de funciones por combinaciones lineales de funciones formando un sistema de Chebyshev.

Se demuestra que si $m,n \in N$ y $\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n\}$, $\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{n+m}\}$ son sistemas de Chebyshev sobre un conjunto

G, entonces para cualquier $f: G \to K$, para cualquier subconjunto $G_{n+m} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}\} \subset G$ de cardinal $n+m$ y cualquier $x \in G$ se verifica una relación de recurrencia

$$(1.10) \qquad \mathrm{pf}\begin{bmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_{n+m} \\ x_1, \ldots, x_{n+m} \end{bmatrix}(x) = \sum_{\mu=0}^{m} \lambda_\mu(x) . \mathrm{pf}\begin{bmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_n \\ x_{\mu+1}, \ldots, x_{\mu+n} \end{bmatrix}(x)$$

Las funciones λ_μ, $\mu=0,\ldots,m$, son independientes de f y verifican

$$(1.11) \qquad \sum_{\mu=0}^{m} \lambda_\mu(x) = 1, \qquad \forall x \in G,$$

y si llamamos

$$\alpha_{0,\mu} = 1, \quad \text{para } \mu=0,\ldots,m$$

y

$$\alpha_{\nu,\mu} = r\phi_{n+\nu}\begin{bmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_n \\ x_{\mu+1}, \ldots, x_{\mu+n} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \nu=1,\ldots,m \\ \mu=0,\ldots,m \end{matrix}$$

tenemos, $\forall x \in G - \{x_2, \ldots, x_{n+m-1}\}$, que

$$(1.12) \qquad N(x) = \det(\alpha_{\nu,\mu}(x))_{\substack{\nu=0,\ldots,m \\ \mu=0,\ldots,m}} \neq 0$$

y para esas x únicamente y $\mu=0,\ldots,m$,

$$(1.13) \qquad \lambda_\mu(x) = \frac{(-1)^\mu}{N(x)} . \det(\alpha_{\nu,\sigma}(x)), \quad \begin{matrix} \nu=1,\ldots,m \\ \sigma=0,\ldots,\mu-1,\mu+1,\ldots,m \end{matrix}$$

Para $x \in \{x_2,\ldots,x_{n+m-1}\}$, $\lambda_\mu(x) \in K$, $\mu=0,\ldots,m$ pueden ser elegidos arbitrariamente verificando

$$\sum_{\mu=0}^{m} \lambda_\mu(x) = 1, \text{ y si } m \geq 2, \text{ para } k=2,\ldots,m \tag{1.14}$$

$$\lambda_\mu(x_{n+k-1}) = 0 \quad (\mu=0,\ldots,k-2) \text{ y } \lambda_\mu(x_k) = 0 \quad (\mu=k,\ldots,m)$$

Como consecuencia de este resultado se obtiene el siguiente corolario o algoritmo de Aitken-Neville para sistemas completos de Chebyshev, es decir para sistemas $\{\phi_1,\ldots,\phi_n\}$ tales que $\{\phi_1,\ldots,\phi_i\}$, $i=1,2,\ldots,n$ son también sistemas de Chebyshev sobre G.

Si $\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n\}$ es un sistema completo de Chebyshev sobre G entonces para cualquier $f: G \to K$ y cualquier conjunto $G_n = \{x_1,x_2,\ldots,x_n\} \subset G$ de cardinal n y cualquier $x \in G$,

$$pf\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ x_1,\ldots,x_n \end{bmatrix}(x)$$

se puede calcular por recurrencia comenzando con

$$pf\begin{bmatrix} \phi_1 \\ x_j \end{bmatrix}(x) = \frac{f(x_j)}{\phi_1(x_j)}.\phi_1(x), \quad j=1,2,\ldots,n$$

y usando

$$pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{k+1}\\ x_1,\ldots,x_{k+1}\end{bmatrix}(x) = \lambda(x).pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_k\\ x_2,\ldots,x_{k+1}\end{bmatrix}(x) +$$

$$+(1-\lambda(x)).pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_k\\ x_1,\ldots,x_k\end{bmatrix}(x)$$

donde la función $\lambda(x)$ verifica

$$\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{r\phi_{k+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_k\\ x_1,\ldots,x_k\end{bmatrix}(x)}{r\phi_{k+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_k\\ x_1,\ldots,x_k\end{bmatrix}(x) - r\phi_{k+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_k\\ x_2,\ldots,x_{k+1}\end{bmatrix}(x)}, & x \in G-\{x_2,\ldots,x_k\} \\ \in K \text{ arbitrario}, & x \in \{x_2,\ldots,x_k\} \end{cases}$$

y donde, llamando

$$r_{ik}f = rf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{k-i+1}\\ x_i,\ldots,x_k\end{bmatrix}(x), \quad 1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$$

se tiene

$$r_{ik}\phi_j = \frac{(r_{i+1k}\phi_{k-i+1})(r_{ik-1}\phi_j) - (r_{ik-1}\phi_{k-i+1})(r_{i+1k}\phi_j)}{(r_{i+1k}\phi_{k-i+1}) - (r_{ik-1}\phi_{k-i+1})}$$

$$1\leqslant i,j,k\leqslant n \;;\quad 0 < k-i+1 < j \leqslant n$$

Así mismo, se da una relación de recurrencia para diferencias divididas, que generalizaremos en esta memoria posteriormente. La relación es la siguiente:

Sea $n \geqslant 2$ un número natural. Si $\{\phi_1,\ldots,\phi_n\}$

y $\{\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}\}$ (y, en el caso $n > 2$, también $\{\phi_1,\ldots,\phi_{n-2}\}$) son sistemas de Chebyshev sobre un conjunto G, entonces para cualquier $f: G \to K$ y cualquier conjunto $G_n=\{x_1,\ldots,x_n\}\subset G$ de cardinal n se verifica la relación de recurrencia

$$(1.15)\qquad \begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ x_1,\ldots,x_n \end{bmatrix} f \Bigg] = \frac{\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_{n-1} \\ x_2,\ldots,x_n \end{bmatrix} f \Bigg] - \begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_{n-1} \\ x_1,\ldots,x_{n-1} \end{bmatrix} f \Bigg]}{\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_{n-1} \\ x_2,\ldots,x_n \end{bmatrix} \phi_n \Bigg] - \begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_{n-1} \\ x_1,\ldots,x_{n-1} \end{bmatrix} \phi_n \Bigg]}$$

donde

$$\left[\begin{matrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ x_1,\ldots,x_n \end{matrix}\right| f \Bigg]$$

denota, para Mühlbach, el coeficiente de ϕ_n en la función $\alpha_1\phi_1+\ldots+\alpha_n\phi_n$ que interpola a f en $x_1,\ldots,x_n$, es decir la n-ésima diferencia dividida.

Por otra parte, Mühlbach en [36] establece una fórmula general de interpolación de Newton y una relación de recurrencia para diferencias divididas aplicable cuando una función se interpola por medio de combinaciones lineales de funciones que forman un sistema de Chebyshev tal que al menos uno de sus subsistemas sea de nuevo sistema de Chebyshev.

Cuando esta memoria estaba prácticamente terminada hemos tenido conocimiento de la extensión por Mühlbach

[41] de este último resultado al problema general de interpolación lineal finita.

El resultado establecido en [36] es el siguiente:

Sean m y n números naturales tales que $m<n$. Supongamos que $\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n\}$ es un sistema de Chebyshev sobre un conjunto G tal que su subsistema $\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_m\}$ es también de Chebyshev sobre G. Entonces para cada función $f: G \to K$ y cualquier subconjunto $G_n = \{x_1,x_2,\ldots,x_n\} \subset G$ de cardinal n y cualquier $x \in G$ se verifica

$$(1.16)\qquad pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ x_1,\ldots,x_n\end{bmatrix}(x) = pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_m\\ x_1,\ldots,x_m\end{bmatrix}(x) + \sum_{k=m+1}^{n}\left[\begin{array}{c|c}\phi_1,\ldots,\phi_n & f\\ x_1,\ldots,x_n & k\end{array}\right].r\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_m\\ x_1,\ldots,x_m\end{bmatrix}(x)$$

Para la demostración de este teorema es necesario hacer uso del lema 1.1 en la particularización que hemos hecho anteriormente.

La construcción de las diferencias divididas puede hacerse de forma más general que (1.15) mediante el siguiente resultado [36]:

Sean l, m, n enteros con $0\leq l < m < n$. Supongamos que $\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n\}$ es un sistema de Chebyshev sobre un conjunto G tal que también sus subsistemas $\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_m\}$ y $\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_l\}$ son sistemas de Chebyshev sobre G (si $l = 0$, entonces solamente $\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_m\}$ se supone que es un subsistema de Chebyshev de $\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n\}$ sobre G). Para cualquier $f: G \to K$ y cualquier subconjunto $G_n=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\} \subset G$ de cardinal n, notemos por a el vector de orden (n-m), de componentes

$$a_k = \begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n & f \\ x_1,\ldots,x_n & m+k \end{bmatrix}, \quad k=1,2,\ldots,n-m$$

Entonces a está unívocamente determinado como solución del sistema de (m-1).(n-m) ecuaciones

$$(1.17) \qquad C.a = b$$

siendo b el vector de orden (m-1).(n-m)

$$b = \left(\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_m & f \\ x_{1+i},\ldots,x_{i+m} & 1+j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_m & f \\ x_i,\ldots,x_{i+m-1} & 1+j \end{bmatrix}\right)$$

$$i = 1,2,\ldots,n-m, \quad j = 1,2,\ldots,m-1$$

y C la matriz de orden (m-1).(n-m)x(n-m) cuya k-ésima columna t_k, k = 1,2,...,n-m es

$$t_k = \left(\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_m & \phi_{m+k} \\ x_{i+1},\ldots,x_{i+m} & 1+j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_m & \phi_{m+k} \\ x_i,\ldots,x_{i+m-1} & 1+j \end{bmatrix}\right)$$

$$i = 1,2,\ldots,n-m, \quad j = 1,2,\ldots,m-1.$$

La teoría de los espacios de Chebyshev ha sido muy desarrollada últimamente (véase, por ejemplo, Karlin& Studden [28]). Pero así como en el caso de una variable G suele ser un intervalo de R, y existen abundantes ejemplos, en Davis [10] puede verse que si $G \subset R^k$, $k \geqslant 2$ tiene un punto interior (ó más aún, lo que él llama punto de ramificación) no existen sistemas de funciones continuas verificando (1.2).

La utilización de sistemas de Chebyshev por Mühlbach en sus trabajos hace que la atención se desvíe hacia aquellos y se esté pensando siempre en el caso de una variable. Además, las demostraciones hacen uso continuado de la definición de sistema de Chebyshev en el sentido de que si $\{\phi_1,\phi_2,...,\phi_n\}$ es un sistema de Chebyshev sobre un conjunto G de n puntos al menos, una combinación lineal no idénticamente nula de $\phi_1,\phi_2,...,\phi_n$ no puede tener más de n-1 ceros en G. Nosotros hemos partido, como más fácilmente generalizable de la propiedad equivalente de que para $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ puntos cualesquiera de G se verifica

$$\det(\phi_i(x_j))_{i,j=1,2,...,n} \neq 0$$

Con ello las demostraciones pasan a tener un aspecto enteramente algebraico en el que no influye el hecho de que los elementos ϕ_i sean ó no funciones, o que lo sean de una ó varias variables, y los resultados se muestran más fácilmente aplicables a casos que de la otra forma quedan semiocultos.

En el último trabajo de Mühlbach aún no publicado, sin embargo, ya se extiende el resultado (1.16) al problema general de interpolación lineal finita. Nuestro propósito en esta memoria es ver que las fórmulas como la (1.10) y (1.16) son simples casos particulares de una misma familia general de fórmulas aplicable además al citado problema general.

CAPITULO II

FORMULA GENERAL DE INTERPOLACION POR RECURRENCIA

CAPITULO II

FORMULA GENERAL DE INTERPOLACION POR RECURRENCIA

1.- ESTABLECIMIENTO DE LA FORMULA

En el presente capítulo vamos a dar una expresión muy general de la forma de construir la solución del problema de interpolación $\mathcal{P}$, que engloba como casos particulares a las fórmulas de Newton y Lagrange y la fórmula de recurrencia de Aitken-Neville establecidas por G. Mühlbach generalizando las clásicas. No nos pararemos aquí a analizar los casos particulares sino que solamente daremos dos teoremas fundamentales en todo lo que sigue, dejando aquellos para extendernos sobre ellos en el capítulo siguiente. Dichos teoremas proporcionan condiciones suficientes para el establecimiento de la fórmula general citada. La expresión y demostraciones son netamente algebraicas, lo que permite su aplicación a la interpolación en varias variables sin excesivas dificultades.

Sea $\mathcal{L}_{n+m}$ un conjunto de $n+m$ formas lineales definidas sobre un espacio vectorial W sobre K, cuerpo conmutativo de característica cero, y V el subespacio vectorial engendrado por los elementos $\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{n+m} \in W$, y supongamos que se verifica la condición

$$(2,1) \qquad \det\begin{pmatrix}\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{pmatrix} = \det(L_i(\phi_j))_{i,j=1,\ldots,n+m} \neq 0$$

Sean

$$\mathcal{L}_{n,i}\ , \quad i = 1,2,\ldots,s, \quad 1 \leqslant s \leqslant m+1,$$

s subconjuntos de formas lineales de $\mathcal{L}_{n+m}$, verificando

$$1)\quad \operatorname{card}(\mathcal{L}_{n,i}) = n$$

(2.2)

$$2)\quad \det\begin{pmatrix}\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{pmatrix} \neq 0, \quad i = 1,2,\ldots,s$$

Con estas hipótesis los problemas de interpolación (1.1) y (1.7) tienen solución única que de acuerdo con (1.3) y (1.6) denotaremos

$$pf\begin{bmatrix}\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix}$$

y

$$pf\begin{bmatrix}\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix},$$

respectivamente.

Si $s \geqslant 2$, sea L una forma lineal sobre W verificando que el determinante numérico

$$(2.3)\qquad D_L = \begin{vmatrix} 1 & ,\ldots\ldots\ldots, & 1 \\ L\left(p\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix}\right) & ,\ldots\ldots, & L\left(p\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,s}\end{bmatrix}\right) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ L\left(p\phi_{n+s-1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix}\right) & ,\ldots\ldots, & L\left(p\phi_{n+s-1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,s}\end{bmatrix}\right) \end{vmatrix} \neq 0$$

En estas condiciones se tiene:

TEOREMA 2.1.- *Sea* $s \geq 2$. *Bajo las hipótesis* (2.1), (2.2) *y* (2.3) *anteriores, se verifica*

$$(2.4) \qquad L\left(p\left[\begin{matrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{matrix}\right]\right) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i . L\left(p\left[\begin{matrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{matrix}\right]\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=n+s}^{n+m} \lambda_i . a_k . L\left(r\phi_k\left[\begin{matrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{matrix}\right]\right)$$

(Si $s = m+1$ *el doble sumatorio no aparece),*
siendo los λ_i *la única solución del sistema de orden sxs siguiente:*

$$(2.5) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \lambda_i . L\left(p\phi_{n+h}\left[\begin{matrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{matrix}\right]\right) = L(\phi_{n+h}), \quad h=1,\ldots,s-1; \end{cases}$$

a_k *es la k-ésima diferencia dividida de* f,

$$a_k = \left[\begin{matrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}f\\ k\end{matrix}\right]$$

según la hemos definido en el capítulo I, y por tanto no depende de L.

Si $s = 1$, *bajo las hipótesis* (2.1) *y* (2.2) *se verifica*

$$(2.6)\qquad p\delta\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix}=p\delta\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix}+\sum_{k=n+1}^{n+m}a_k(\phi_k-p\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix})$$

Demostración

Sea $s\geqslant 2$. Los dos miembros de (2.4) son formas lineales sobre W aplicadas a $f\in W$, que representaremos por $L^{(1)}$ y $L^{(2)}$, respectivamente, y que pueden expresarse como combinaciones lineales de las correspondientes $L_i(f)$, $i=1,2,\dots,n+m$.

En efecto, el primer miembro es la composición de una proyección de W sobre V

$$\xrightarrow{p}\sum_{i=1}^{n+m}L_i(f).p_i$$

donde p_i verifica

$$L_j(p_i)=\delta_{ij}$$

con una forma lineal L sobre W. En total tendríamos

$$f\rightarrow\sum_{i=1}^{n+m}L_i(f).L(p_i)$$

donde $L(p_i)=b\in K$.

En el segundo miembro de (2.4), en el primer sumatorio ocurre lo mismo exactamente que en el primer miembro, ya que los . son números que dependen solamente de L y de los ϕ_i y no de f. Y en el doble sumatorio, lo único que depende de f es a_k : la aplicación

$$f \to \begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_{n+m} & f \\ \mathcal{L}_{n+m} & k \end{bmatrix}$$

es una forma lineal sobre W como es evidente, que además puede expresarse

$$f \to \sum_{i=1}^{n+m} c_i . L_i (f)$$

Debido a (2.1) y al lema 1.1, las formas lineales $L^{(1)}$, $L^{(2)}$ serán la misma si al ser aplicadas a cada una de las $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+m}$ se obtienen los mismos resultados.

Tomando $f = \phi_j$, $j = 1,2,\ldots,n+m$, en (2.4) por ser

$$p\phi_j \begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{bmatrix} = \phi_j$$

el primer miembro verifica

$$L(p\phi_j \begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{bmatrix}) = L(\phi_j)$$

mientras que en el segundo hay que distinguir varios casos:

a) Si $j = 1,2,\ldots,n$, por ser

$$\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_{n+m} & f \\ \mathcal{L}_{n+m} & k \end{bmatrix} = \delta_{jk} \tag{2.7}$$

obtenemos en el segundo miembro

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i . L(p\,\phi_j\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}) + \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=n+s}^{n+m} \lambda_i . \delta_{jk} . L(r\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}) =$$

$$= (\sum_{i=1}^{s} \lambda_i) . L(\phi_j)$$

ya que $\delta_{jk} = 0$, pues aquí $j < k, \forall k$.

De la primera ecuación de (2.5) se deduce que los valores de ambos miembros coinciden.

b) Si $j = n+1,\ldots,n+s-1$, aplicando las segundas ecuaciones de (2.5) en el primer sumatorio del segundo miembro, se tiene

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i . L(p\phi_j\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}) = L(\phi_j) \quad , \quad j = n+1,\ldots,n+s-1$$

En cuanto al segundo sumatorio, sigue siendo nulo por la misma razón que en a). Por tanto también coinciden los valores de los dos miembros.

c) Por último, tomando $j = n+s,\ldots,n+m$, y teniendo en cuenta (2.7), resulta

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i . L(p\phi_j\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i . L(r\phi_j\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \lambda_i . L(p\phi_j \begin{bmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{bmatrix}) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i . L(\phi_j - p\phi_j \begin{bmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{bmatrix}) =$$

$$= (\sum_{i=1}^{s} \lambda_i) . L(\phi_j) = L(\phi_j)$$

Luego también en este caso coinciden los dos miembros.

Así pues, por el lema 1.1 las formas lineales $L^{(1)}$ y $L^{(2)}$ coinciden, y la igualdad (2.4) es válida $\forall f \in W$.

Para s = 1, basta repetir el razonamiento anterior teniendo en cuenta que en este caso no es necesario considerar la condición (2.3) puesto que el determinante D_L se reduce a la unidad, y además el sistema (2.5) se reduce a $\lambda_1 = 1$. Así pues, para L se cumplirá

$$L(pf \begin{bmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{bmatrix}) = L(pf \begin{bmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,1} \end{bmatrix}) + \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k . L(\phi_k - p\phi_k \begin{bmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,1} \end{bmatrix})$$

y como ésto es cierto para toda L (en el caso anterior las λ_i dependían de L), resulta ya (2.6), con lo que el teorema queda probado.

<u>Observación</u>.- El sistema (2.5) también puede escribirse de forma equivalente como

$$(2.8)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \lambda_i . L(r\phi_{n+h}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}) = 0, \quad h=1,2,\ldots,s-1 \end{cases}$$

El utilizar la forma lineal L en este teorema se debe a que como no hemos dicho que los elementos ϕ sean funciones, sino elementos de un espacio vectorial cualquiera, en el cálculo de las λ_i del determinante que resultaría en lugar del (2.3) y en la misma fórmula (2.4) aparecerían productos dificiles de justificar. Sin embargo, como veremos posteriormente, en el caso más habitual será

$$L(f) = f(x)$$

y la fórmula (2.4) se convierte en

$$pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix}(x) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i(x).pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}(x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=n+s}^{n+m} \lambda_i(x).a_k.r\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}(x)$$

Las formas lineales L y L_i más usadas son, evidentemente, valores de la función en ciertos puntos y derivadas parciales en determinadas direcciones. En resumen pues, los casos más usuales serán los de datos lagrangianos ó hermíticos.

2.- CONDICIONES PRACTICAS SUFICIENTES PARA LA FORMULA

Veamos ahora un nuevo teorema que nos garantiza hipótesis suficientes para que se dé $D_L \neq 0$, con lo cual tendremos un resultado útil para la aplicación del teorema 2.1, en el cual el hecho de que $D_L \neq 0$ se tomaba como hipótesis.

TEOREMA 2.2.- *Sean L y $\mathcal{L}_{n,i}$ como en el teorema 2.1 y $s \geqslant 2$. Supongamos que se verifica*

1) $\mathrm{card}(\mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1}) = n-1, \quad i=1,2,\ldots,s-1$

2) $\mathrm{card}(\bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_{n,i}) = n+s-1$

(2.9) 3) $$\det\begin{pmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+s-1} \\ \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_{n,i}\end{pmatrix} \neq 0$$

4) $$\det\begin{pmatrix}\phi_1,\ldots\ldots,\phi_n \\ (\mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1}) \cup \{L\}\end{pmatrix} \neq 0, \quad i=1,2,\ldots,s-1$$

Bajo estas condiciones se verifica que $D_L \neq 0$.

Demostración

Supongamos que $D_L = 0$. Restando de cada columna la siguiente y desarrollando este determinante por la primera fila se tiene:

$$\left|\begin{matrix} 0 & ,\ldots\ldots\ldots\ldots, & 1 \\ L\left(p\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix}-p\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,2}\end{bmatrix}\right), & \ldots\ldots, & L\left(p\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,s}\end{bmatrix}\right) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ L\left(p\phi_{n+s-1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix}-p\phi_{n+s-1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,2}\end{bmatrix}\right), & \ldots, & L\left(p\phi_{n+s-1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,s}\end{bmatrix}\right) \end{matrix}\right| =$$

$$=(-1)^{s+1}.\det\left(L\left(p\phi_{n+j}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}-p\phi_{n+j}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i+1}\end{bmatrix}\right)\right)_{i,j=1,\ldots,s-1}=0.$$

Entonces existen constantes c_j, no todas nulas, tales que

$$\sum_{j=1}^{s-1} c_j.L\left(p\phi_{n+j}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}-p\phi_{n+j}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i+1}\end{bmatrix}\right)=0,\quad i=1,\ldots,s-1,$$

es decir que

$$L\left\{\sum_{j=1}^{s-1} c_j.\left(p\phi_{n+j}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}-p\phi_{n+j}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i+1}\end{bmatrix}\right)\right\}=0,\quad i=1,\ldots,s-1.$$

Por la linealidad de la interpolación, tenemos

$$L\left\{p(c_1\phi_{n+1}+\ldots+c_{s-1}\phi_{n+s-1})\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}-p(c_1\phi_{n+1}+\ldots+c_{s-1}\phi_{n+s-1})\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i+1}\end{bmatrix}\right\}=0$$

$i=1,2,\ldots,s-1.$

Llamemos Ψ a la función perteneciente a $\{\phi_{n+1},\ldots,\phi_{n+s-1}\}$ definida por

$$\Psi = \sum_{j=1}^{s-1} c_j \cdot \phi_{n+j}$$

Evidentemente es no nula por ser los c_j no todos nulos y los ϕ_{n+j} linealmente independientes.

Entonces, para cada $i=1,2,\ldots,s-1$ se tiene

$$L(p\Psi\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix} - p\Psi\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i+1}\end{bmatrix}) = 0$$

$$L_j(p\Psi\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix} - p\Psi\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i+1}\end{bmatrix}) = 0,$$

$$\forall L_j \in \mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1}$$

Tenemos, pues, una combinación lineal de $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ nula para $(\mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1}) \cup \{L\}$, luego por la hipótesis (2.9),4) ha de ser idénticamente nula, y ésto para todo i.

Así pues se tendría

$$p\Psi\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix} - p\Psi\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i+1}\end{bmatrix} = 0, \quad i=1,\ldots,s-1,$$

es decir,

$$(2.10) \qquad p\Psi\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix} = p\Psi\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,2}\end{bmatrix} = \ldots = p\Psi\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,s}\end{bmatrix} = \sum_{l=1}^{n} a_l \cdot \phi_l$$

De (2.10) y de las (2.9),1) y 2) se deduce que

$$L_h\left(\sum_{l=1}^{n} a_l \cdot \phi_l\right) = L_h(\Psi) = L_h\left(\sum_{j=1}^{s-1} c_j \cdot \phi_{n+j}\right), \qquad \forall L_h \in \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_{n,i}$$

es decir,

$$L_h(a_1\phi_1+\ldots+a_n\phi_n-c_1\phi_{n+1}-\ldots-c_{s-1}\phi_{n+s-1})=0,$$

$$\forall L_h \in \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_{n,i}$$

y así llegamos a una contradicción puesto que por (2.9),3) se tiene

$$\det\begin{pmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_{n+s-1} \\ \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_{n,i} \end{pmatrix} \neq 0$$

y en cambio tenemos una combinación lineal no nula que se anula $\forall L_h \in \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_{n,i}$.

Por tanto concluimos que $D_L \neq 0$ y los λ_i se pueden obtener unívocamente resolviendo el sistema (2.5).

El interés de este teorema es que con cierta frecuencia sus hipótesis pueden ser fácilmente contrastadas, con lo que aseguramos el cumplimiento del teorema 2.1.

Pongamos un ejemplo aclaratorio en funciones de dos variables.

Sean $n = 3 = m$, $s=4$, y consideremos como formas lineales L_i el valor de la función en seis puntos,

(2.11) $\qquad L_i(f) = f(P_i), \quad i=1,2,\ldots,6$

donde los puntos P_i son puntos distintos del plano. Consideremos el espacio vectorial $V = P_2(x,y)$ engendrado por

$$\{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$$

Los "paquetes" de formas lineales pueden ser los siguientes:

$$\mathcal{L}_{3,1} = \{L_1, L_2, L_3\}$$
$$\mathcal{L}_{3,2} = \{L_2, L_3, L_4\}$$
$$\mathcal{L}_{3,3} = \{L_2, L_3, L_5\}$$
$$\mathcal{L}_{3,4} = \{L_2, L_3, L_6\}$$

Evidentemente estas $\mathcal{L}_{3,i}$, $i=1,2,3,4$, verifican las hipótesis 1) y 2) de (2.9).

Es bien conocido en la teoría de interpolación en dos variables, Isaacson & Keller [27], Berezin & Zhidkov [3], Gasca & Maeztu [14], etc, que si consideramos los puntos P_i de manera que P_4, P_5, P_6 estén situados en una recta r, P_2, P_3 en otra recta distinta r' cuya intersección con r, si no es paralela a ella, no es ninguno de los P_i anteriores, y P_1 un punto no situado en r ni en r', el problema (2.11) admite una única solución en el espacio $P_2(x,y)$, luego (2.1) se cumple, es decir que (2.9),3) se cumple.

Considerando la forma lineal L como $L(f)=L(P)$, siempre que el punto P no pertenezca a r' puede asegurarse que se cumple la hipótesis 4) de (2.9) pues se tendría

$$\det \begin{pmatrix} 1, & x, & y \\ P_2, & P_3, & P \end{pmatrix} \neq 0$$

por no estar los tres puntos alineados.

Así pues, se cumpliría $D_L \neq 0$ y todas las hipótesis del teorema 2.1. Mediante la fórmula (2.4) podemos escribir, por tanto, el polinomio de interpolación de grado dos de una función dada en los puntos $\{P_i\}$, $i=1,\ldots,6$ mediante cuatro polinomios de grado uno que la interpolan en cuatro conjuntos distintos de tres puntos cada uno.

Posteriormente veremos los casos más interesantes de la fórmula (2.4), que corresponden a $s = m+1$ con n cualquiera, $s = m+1$ con $n = 1$, aparte del caso $s = 1$ que ya se ha señalado en el mismo teorema, dando lugar a lo que podemos llamar fórmula de Newton generalizada.

3.- OBTENCION DE LAS DIFERENCIAS DIVIDIDAS

El objetivo de este apartado es la obtención de las diferencias divididas por procedimientos lo más simples posible.

Las diferencias divididas

$$a_k = \left[\begin{array}{c|c} \phi_1,\ldots,\phi_{n+m} & f \\ \mathcal{L}_{n+m} & k \end{array}\right]$$

que aparecen en (2.4) para $k=n+s,\ldots,n+m$, si $s < m+1$, podrían ser calculadas resolviendo el problema de interpolación $\mathcal{P}$, pero nuestro objetivo es obtenerlas por procedimientos que no hagan necesaria esa resolución, puesto que precisamente las utilizamos en (2.4) para descomponer el problema "grande" en otros más "pequeños".

En las condiciones del teorema 2.1 vamos a recurrir a un sistema de mxm ecuaciones e incógnitas, $a_{n+1},\dots,a_{n+m}$, mientras que en las del teorema 2.2 es un sistema de orden (m-s+1)x(m-s+1), interviniendo sólo las $a_{n+s},\dots,a_{n+m}$ que son lás únicas que realmente interesan a nuestros efectos.

En el primer caso, tomando uno cualquiera de los $\mathcal{L}_{n,i}$ y aplicando el teorema 2.1 con s = 1 (fórmula de Newton generalizada) se tiene

$$(2.12)\qquad pf\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix} = pf\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix} + \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\cdot\left(\phi_k - p\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right)$$

donde las a_k son independientes de i. Sólo dependen de f, $\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_{n+m}$ y $\mathcal{L}_{n+m}$. De ahí que se tenga el siguiente teorema.

TEOREMA 2.3.- *Consideremos la diferencia dividida de orden k de f respecto a los datos del problema (1.1):*

$$(2.13)\qquad a_k = \left[\begin{matrix}\phi_1,\dots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}f\\ k\end{matrix}\right]$$

Entonces, con las condiciones dadas en los apartados anteriores para el teorema 2.1 tenemos que las diferencias divididas (2.13), k = n+1,...,n+m, son la única solución del sistema lineal

$$(2.14)\qquad \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\cdot L_j\left(\phi_k - p\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right) = L_j(f) - L_j\left(pf\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right),$$

$\forall L_j \in \mathcal{L}_{n+m} - \mathcal{L}_{n,i}$, donde $\mathcal{L}_{n,i}$ es uno cualquiera de los $\mathcal{L}_{n,1}, \ldots \mathcal{L}_{n,s}$.

Demostración

Aplicando a (2.12) cada uno de los $L_j \in \mathcal{L}_{n+m} - \mathcal{L}_{n,i}$ se tiene

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k . L_j\left(\phi_k - p\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right) = L_j\left(pf\begin{bmatrix}\phi_1, \ldots, \phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix} - pf\begin{bmatrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right) =$$

$$= L_j(f) - L_j\left(pf\begin{bmatrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right)$$

con lo que teniendo en cuenta que

$$\operatorname{card}(\mathcal{L}_{n+m} - \mathcal{L}_{n,i}) = m$$

resulta un sistema de orden mxm. Supongamos que fuera

$$\det\left(L_j\left(\phi_k - p\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right)\right) = 0, \qquad L_j \in \mathcal{L}_{n+m} - \mathcal{L}_{n,i}$$
$$k = n+1, \ldots, n+m$$

Entonces existirían constantes d_k, $k=n+1,\ldots,n+m$, no todas nulas, tal que una combinación lineal de filas ó columnas del determinante anterior sería nula. Es decir tenemos

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} d_k . L_j\left(\phi_k - p\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right) = 0, \quad \forall L_j \in \mathcal{L}_{n+m} - \mathcal{L}_{n,i} \tag{2.15}$$

Consideremos la función auxiliar ξ definida por

$$\xi = \sum_{k=n+1}^{n+m} d_k . (\phi_k - p\phi_k \begin{bmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{bmatrix})$$

Está claro que $\xi \neq 0$, puesto que las d_k no son todas nulas y las ϕ_i son linealmente independientes. Además se verifica,

$$L_h(\xi) = 0, \qquad \forall L_h \in \mathcal{L}_{n+m} - \mathcal{L}_{n,i}$$

por (2.15).

Por otra parte, para todo $L_h \in \mathcal{L}_{n,i}$, se verifica

$$L_h(\xi) = \sum_{k=n+1}^{n+m} d_k . L_h(\phi_k - p\phi_k \begin{bmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{bmatrix}) = 0$$

ya que

$$L_h(\phi_k) = L_h(p\phi_k \begin{bmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{bmatrix}), \quad \forall L_h \in \mathcal{L}_{n,i}.$$

Luego concluimos que $L_h(\xi) = 0$, $i=1,2,\ldots,n+m$ y por la hipótesis (2.1) tenemos que

$$\det \begin{pmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{pmatrix} \neq 0$$

La única posibilidad que nos queda es que debe ser $\xi = 0$, lo cual contradice lo anterior. Por tanto debe ser

$$\det(L_j(\phi_k - p\phi_k \begin{bmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{bmatrix})) \neq 0$$

Probado este teorema surge una observación inmediata. Puesto que en la fórmula (2.4) solo nos hace falta conocer las diferencias divididas a_k con k comprendido entre n+s y n+m, parece lógico obtenerlas sólo a ellas y no desde n+1 hasta n+m, como ocurre con el teorema anterior.

Efectivamente, ésto puede hacerse con frecuencia, como se indica en el siguiente teorema:

TEOREMA 2.4.- *Bajo las hipótesis (2.9),2) y (2.9),3), si $s<m+1$, las $a_{n+s},\ldots,a_{n+m}$ de la fórmula (2.4) pueden obtenerse resolviendo el sistema*

$$(2.16)\qquad \sum_{k=n+s}^{n+m} a_k \cdot L_j\left(\phi_k - p\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+s-1}\\ \bigcup_{i=1}^{s}\mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right) = L_j\left(f - pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+s-1}\\ \bigcup_{i=1}^{s}\mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right)$$

$$L_j \in \mathcal{L}_{n+m} - \bigcup_{i=1}^{s}\mathcal{L}_{n,i}$$

Demostración

En efecto, si se verifican (2.9),2) y (2.9),3) por la fórmula de Newton (2.6) aplicada al problema con datos $\bigcup_{i=1}^{s}\mathcal{L}_{n,i}$ se tiene:

$$pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix} = pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+s-1}\\ \bigcup_{i=1}^{s}\mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix} + \sum_{k=n+s}^{n+m} a_k\cdot\left(\phi_k - p\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+s-1}\\ \bigcup_{i=1}^{s}\mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right)$$

Entonces $a_{n+s},\ldots,a_{n+m}$ son la única solución del sistema

$$(2.17)\qquad \sum_{k=n+s}^{n+m} a_k . L_j\left(\phi_k - p\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+s-1}\\ \bigcup_{i=1}^{s}\mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right) = L_j(f) - L_j\left(pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+s-1}\\ \bigcup_{i=1}^{s}\mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right) =$$

$$= L_j\left(f - pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+s-1}\\ \bigcup_{i=1}^{s}\mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right)$$

$$L_j \in \mathcal{L}_{n+m} - \bigcup_{i=1}^{s}\mathcal{L}_{n,i}$$

por la misma razón que en el teorema 2.3.

Obsérvese que aquí habríamos de calcular previamente

$$(2.18)\qquad L_j\left(p\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+s-1}\\ \bigcup_{i=1}^{s}\mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right),\quad k=n+s,\ldots,n+m$$

y

$$(2.19)\qquad L_j\left(pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+s-1}\\ \bigcup_{i=1}^{s}\mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right)$$

lo cual alarga los cálculos que pretendiamos simplificar. Sin embargo, hay que tener en cuenta que el cálculo de (2.18) y (2.19) puede hacerse aplicando la fórmula (2.4) si

$$\begin{vmatrix} 1 & ,\ldots\ldots, & 1 \\ L_j\left(p\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix}\right) & ,\ldots, & L_j\left(p\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,s}\end{bmatrix}\right) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ L_j\left(p\phi_{n+s-1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix}\right) & ,\ldots, & L_j\left(p\phi_{n+s-1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,s}\end{bmatrix}\right) \end{vmatrix} \neq 0.$$

En efecto, se tiene

$$L_j\left(p\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+s-1}\\ \bigcup_{i=1}^{s}\mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right)=\sum_{i=1}^{s}\mu_i^{(j)}.L_j\left(p\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right)$$

donde los $\mu_i^{(j)}$ son solución del sistema

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{s}\mu_i^{(j)}=1\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{s}\mu_i^{(j)}.L_j\left(p\phi_{n+h}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right)=L_j(\phi_{n+h})\end{cases}$$

$$h=1,\ldots,s-1$$

Los mismos $\mu_i^{(j)}$ nos servirán para

$$L_j\left(pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+s-1}\\ \bigcup_{i=1}^{s}\mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right)=\sum_{i=1}^{s}\mu_i^{(j)}.L_j\left(pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right)$$

EJEMPLO 2.1

Sean $n = 1$, $m = s = 2$ y las funciones

$\phi_1 = 1$, $\phi_2 = x$, $\phi_3 = y$

y consideremos las siguientes formas lineales

$L_1(f) = f(0,0)$, $L_2(f) = f(1,0)$, $L_3(f) = f(0,1)$, $L(f) = f(x,y)$

Entonces se tiene:

$$pf\begin{bmatrix} 1, & x, & y \\ L_1, & L_2, & L_3 \end{bmatrix}(x,y) = \lambda_1(x,y).f(0,0) + \lambda_2(x,y).f(1,0) +$$

$$+a_3(\lambda_1(x,y).y + \lambda_2(x,y).y)$$

Resolviendo en este caso el sistema (2.5), que resulta ser

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \qquad \lambda_2 = x \end{cases}$$

se obtiene

$$\lambda_1 = 1-x, \quad \lambda_2 = x.$$

Por lo tanto,

$$pf\begin{bmatrix} 1, & x, & y \\ L_1, & L_2, & L_3 \end{bmatrix}(x,y) = (1-x).f(0,0) + x.f(1,0) + a_3.y$$

Para aplicar el teorema 2.4 tenemos que calcular

$$py\begin{bmatrix} 1 & , & x \\ (0,0) & , & (1,0) \end{bmatrix}(0,1) = \mu_1.py\begin{bmatrix} 1 \\ (0,0) \end{bmatrix}(0,1)+\mu_2.py\begin{bmatrix} 1 \\ (1,0) \end{bmatrix}(0,1)$$

con

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = 1 \\ \qquad \mu_2 = 0 \end{cases}$$

es decir $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$. Resulta

$$py\begin{bmatrix} 1 & , & x \\ (0,0) & , & (1,0) \end{bmatrix}(0,1) = 1.0 = 0$$

Análogamente,

$$pf\begin{bmatrix} 1 & , & x \\ (0,0) & , & (1,0) \end{bmatrix}(0,1) = 1.f(0,0)$$

con lo que

$$a_3(1-0) = f(0,1) - f(0,0)$$

es decir,

$$a_3 = f(0,1) - f(0,0)$$

Por el teorema 2.3 habría que resolver un sistema de orden 2x2, aunque en este caso también sale muy simple:

$$\sum_{k=2}^{3} a_k . L_j(\phi_k - p\phi_k \begin{bmatrix} 1 \\ (0,0) \end{bmatrix}) = L_j(f - pf \begin{bmatrix} 1 \\ (0,0) \end{bmatrix})$$

que resulta ser

$$\begin{cases} a_2 . 1 + a_3 . 0 = f(1,0) - f(0,0) \\ a_2 . 0 + a_3 . 1 = f(0,1) - f(0,0) \end{cases}$$

<u>EJEMPLO 2.2</u>

Sean $n = 3 = m$, $s = 2$ y consideremos las funciones $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = x$, $\phi_3 = y$, $\phi_4 = x^2$, $\phi_5 = xy$, $\phi_6 = y^2$, y las formas lineales siguientes

$$L_1(f) = f(0,0), \quad L_2(f) = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}, \quad L_3(f) = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y},$$

$$L_4(f) = f(0,1), \quad L_5(f) = f(1,0), \quad L_6(f) = f(1,1)$$

Sean $\mathcal{L}_{3,1} = \{L_1, L_2, L_3\}$, $\mathcal{L}_{3,2} = \{L_1, L_4, L_5\}$, $L(f) = f(x,y)$.

Entonces

$$pf\begin{bmatrix} \phi_1, \phi_2, \phi_3 \\ \mathcal{L}_{3,1} \end{bmatrix}(x,y) = f(0,0) + x\,\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} + y\,\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$$

$$pf\begin{bmatrix} \phi_1, \phi_2, \phi_3 \\ \mathcal{L}_{3,2} \end{bmatrix}(x,y) = f(0,0) + x(f(1,0)-f(0,0)) + \\ + y(f(0,1)-f(0,0))$$

con los valores de λ_1 y λ_2 que resultan de plantear el sistema (2.5), que en este caso es

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ 0.\lambda_1 + x.\lambda_2 = x^2 \end{cases}$$

y por tanto $\lambda_1 = 1-x$, $\lambda_2 = x$.

La fórmula (2.4) quedaría

$$pf\begin{bmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_6 \\ \mathcal{L}_6 \end{bmatrix}(x,y) = (1-x).pf\begin{bmatrix} \phi_1, \phi_2, \phi_3 \\ \mathcal{L}_{3,1} \end{bmatrix}(x,y) + x.pf\begin{bmatrix} \phi_1, \phi_2, \phi_3 \\ \mathcal{L}_{3,2} \end{bmatrix}(x,y) +$$

$$+ a_5.xy + a_6.(y^2-xy)$$

Aquí <u>no</u> se puede aplicar el teorema 2.4. Sin embargo se puede recurrir al 2.3 tomando como $\mathcal{L}_{n,i} = \mathcal{L}_{3,1}$ ó $\mathcal{L}_{3,2}$.

Obsérvese que estamos siguiendo procedimientos para el cálculo de diferencias divididas totalmente similares al caso de la interpolación polinomial en una variable. Así, estos procedimientos anteriores para construir las diferencias divididas son los análogos al que nos permite construir las diferencias divididas de una variable mediante el uso de polinomios de interpolación más simples que el que se está calculando:

$$(2.20)\qquad \left[\begin{matrix} 1, x, \dots, x^n \\ x_0, x_1, \dots, x_n \end{matrix}\middle| \begin{matrix} f \\ n \end{matrix}\right] = \frac{f(x_n) - pf\left[\begin{matrix} 1, x, \dots, x^{n-1} \\ x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \end{matrix}\right](x_n)}{\prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i)}$$

Con la notación (1.9) los sistemas de los teoremas 2.3 y 2.4 podrían escribirse

$$(2.21)\qquad \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k . L_j\left(r\phi_k\left[\begin{matrix} \phi_1, \dots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{matrix}\right]\right) = L_j\left(rf\left[\begin{matrix} \phi_1, \dots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{matrix}\right]\right)$$

y

$$(2.22)\qquad \sum_{k=n+s}^{n+m} a_k . L_j\left(r\phi_k\left[\begin{matrix} \phi_1, \dots, \phi_{n+s-1} \\ \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_{n,i} \end{matrix}\right]\right) = L_j\left(rf\left[\begin{matrix} \phi_1, \dots, \phi_{n+s-1} \\ \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_{n,i} \end{matrix}\right]\right)$$

respectivamente.

En el caso particular $m = 1$, $s = 1$, $\mathcal{L}_{n,1} = \{L_1, \dots, L_n\}$,

$$a_{n+1} = \frac{L_{n+1}\left(rf\left[\begin{matrix} \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \\ L_1, L_2, \dots, L_n \end{matrix}\right]\right)}{L_{n+1}\left(r\phi_{n+1}\left[\begin{matrix} \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \\ L_1, L_2, \dots, L_n \end{matrix}\right]\right)}$$

que es la fórmula análoga a la (2.20), ya que en aquel caso

$$rf\begin{bmatrix} 1,\dots,x^{n-1} \\ x_0,\dots,x_{n-1} \end{bmatrix}(x_n) = f(x_n) - pf\begin{bmatrix} 1,\dots,x^{n-1} \\ x_0,\dots,x_{n-1} \end{bmatrix}(x_n)$$

y

$$rx^n\begin{bmatrix} 1,\dots,x^{n-1} \\ x_0,\dots,x_{n-1} \end{bmatrix}(x_n) = \prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i)$$

Sin embargo también pueden ser construidas las diferencias divididas por recurrencia sobre otras diferencias divididas más simples, como sucede en una variable con la fórmula recurrente

$$[x_0,\dots,x_n]f = \frac{[x_0,\dots,x_{n-1}]f - [x_1,\dots,x_n]f}{x_0 - x_n}$$

que con nuestra notación sería

$$(2.23)\qquad \left[\begin{array}{c|c} 1,\dots,x^n & f \\ x_0,\dots,x_n & n \end{array}\right] = \frac{\left[\begin{array}{c|c} 1,\dots,x^{n-1} & f \\ x_0,\dots,x_{n-1} & n-1 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c|c} 1,\dots,x^{n-1} & f \\ x_1,\dots,x_n & n-1 \end{array}\right]}{x_0 - x_n}$$

<u>TEOREMA 2.5</u>.- *Sean* $\mathcal{L}_{n,1}, \mathcal{L}_{n,2},\dots,\mathcal{L}_{n,m+1}$ *tales que:*

a) $\mathrm{card}(\mathcal{L}_{n,i}) = n, \quad i=1,\ldots,m+1$

b) $\bigcup_{i=1}^{m+1} \mathcal{L}_{n,i} = \mathcal{L}_{n+m}$

c) $n > \mathrm{card}(\mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1}) \geq r \geq 0, \quad i=1,\ldots,m$

d) $\det \begin{pmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{pmatrix} \neq 0, \quad i=1,\ldots,m+1$

Entonces las diferencias divididas

$$a_k = \left[\begin{matrix} \phi_1,\ldots,\phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} f \\ k \end{matrix}\right], \quad k = n+1,\ldots,n+m$$

están unívocamente determinadas como solución del sistema de n.m ecuaciones y m incógnitas siguiente

$$(2.24) \qquad \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \cdot \left(\left[\begin{matrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i+1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \phi_k \\ j \end{matrix}\right] - \left[\begin{matrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \phi_k \\ j \end{matrix}\right] \right) =$$

$$= \left[\begin{matrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i+1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} f \\ j \end{matrix}\right] - \left[\begin{matrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} f \\ j \end{matrix}\right] \qquad \begin{matrix} i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n \end{matrix}$$

Si además $r > 0$ y para cada $i=1,\ldots,m$ se verfica que existe

$$\mathcal{L}_{r,i} \subset \mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1}$$

con

$$\mathrm{card}(\mathcal{L}_{r,i}) = r$$

y

$$\det \begin{pmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_r \\ \mathcal{L}_{r,i} \end{pmatrix} \neq 0,$$

entonces el sistema anterior puede reducirse al subsistema de la misma formulación con $i=1,\dots,m$, $j=r+1,\dots,n$.

Este teorema había sido demostrado por nosotros siguiendo las líneas del teorema 3.1 de [36], con las modificaciones necesarias. Sin embargo, cuando esta memoria estaba prácticamente acabada, en el último trabajo [41] que conocemos de Mühlbach, todavía no publicado, al extender la fórmula de Newton al problema general de interpolación finita su teorema 2 ya tiene esta misma formulación, salvo notaciones, por lo que nos limitaremos a dar un esquema de la demostración.

Esta consiste en plantear la fórmula de Newton

$$pf\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix} = pf\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix} + \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\left(\phi_k - p\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right)$$

e igualar los coeficientes de ϕ_j, $j=1,\dots,n$ en ambos miembros:

$$\text{(2.25)}\qquad \left[\begin{array}{c|c}\phi_1,\dots,\phi_{n+m} & f\\ \mathcal{L}_{n+m} & j\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}\phi_1,\dots,\phi_n & f\\ \mathcal{L}_{n,i} & j\end{array}\right] - \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\cdot\left[\begin{array}{c|c}\phi_1,\dots,\phi_n & \phi_k\\ \mathcal{L}_{n,i} & j\end{array}\right]$$

Escribiendo esta misma expresión para $\mathcal{L}_{n,i+1}$, tendríamos:

$$\text{(2.26)}\qquad \left[\begin{array}{c|c}\phi_1,\dots,\phi_{n+m} & f\\ \mathcal{L}_{n+m} & j\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}\phi_1,\dots,\phi_n & f\\ \mathcal{L}_{n,i+1} & j\end{array}\right] - \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\cdot\left[\begin{array}{c|c}\phi_1,\dots,\phi_n & \phi_k\\ \mathcal{L}_{n,i+1} & j\end{array}\right]$$

Restando (2.25) y (2.26), tendremos:

$$\begin{bmatrix} \phi_1,\dots,\phi_n & f \\ \mathcal{L}_{n,i+1} & j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_1,\dots,\phi_n & f \\ \mathcal{L}_{n,i} & j \end{bmatrix} = \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \cdot \left(\begin{bmatrix} \phi_1,\dots,\phi_n & \phi_k \\ \mathcal{L}_{n,i+1} & j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_1,\dots,\phi_n & \phi_k \\ \mathcal{L}_{n,i} & j \end{bmatrix} \right)$$

que es precisamente el sistema (2.24). Como las diferencias divididas a_k verifican este sistema, queda por ver únicamente que éste no conduce a una indeterminación, es decir que el rango de la matríz de coeficientes es precisamente m.

Se razona por reducción al absurdo: suponiendo que tuviera rango menor que m existiría una combinación lineal nula de las columnas

$$(2.27) \qquad \sum_{k=n+1}^{n+m} d_k \cdot t_k = 0$$

con los d_k no todos nulos, donde t_k indica la columna cuyos elementos son:

$$(2.28) \qquad \begin{bmatrix} \phi_1,\dots,\phi_n & \phi_k \\ \mathcal{L}_{n,i+1} & j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_1,\dots,\phi_n & \phi_k \\ \mathcal{L}_{n,i} & j \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \end{matrix}$$

Se construiría la función

$$\Psi = \sum_{k=n+1}^{n+m} d_k \cdot t_k$$

no nula, que por (2.27) y (2.28) verifica

$$\begin{bmatrix} \phi_1,\dots,\phi_n & \Psi \\ \mathcal{L}_{n,i} & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1,\dots,\phi_n & \Psi \\ \mathcal{L}_{n,i+1} & j \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \end{matrix}$$

por lo que $\forall i$,

$$p\Psi\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix} \equiv p\Psi\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i+1}\end{bmatrix}$$

y se concluiría como en el teorema 2.2.

Si $r > 0$ y se verifica la última hipótesis del teorema, el razonamiento se repite para $j=r+1,\ldots,n$ y se llega a que

$$p\Psi\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix} - p\Psi\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i+1}\end{bmatrix} \in \overline{\{\phi_1,\ldots,\phi_r\}}$$

y de ahí a que

$$p\Psi\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix} \equiv p\Psi\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i+1}\end{bmatrix}$$

concluyendo igual que antes. Por tanto en el sistema en este caso bastaría considerar las ecuaciones con $j=r+1,\ldots,n$.

4.- CASOS PARTICULARES INTERESANTES

1) El caso particular más sencillo será aquel en que $r=n-1$ y, por lo tanto,

$$\mathcal{L}_{r,i} = \mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1}, \qquad \forall i$$

ya que entonces quedará un sistema cuadrado $m\times m$. Es el correspondiente a nuestro teorema 2.2

2) Si $m = 1$, $s = 2$ y $r = n-1$, se tiene

$$(2.29)\quad \begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_{n+1} & f \\ \mathcal{L}_{n+1} & n+1 \end{bmatrix} = a_{n+1} = \frac{\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n & f \\ \mathcal{L}_{n,2} & n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n & f \\ \mathcal{L}_{n,1} & n \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n & \phi_{n+1} \\ \mathcal{L}_{n,2} & n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n & \phi_{n+1} \\ \mathcal{L}_{n,1} & n \end{bmatrix}}$$

que es una generalización de (2.23).

5.-POSIBLES EXTENSIONES DE LA FORMULA (2.4)

Las circunstancias en que se ha planteado la fórmula (2.4) podrían ampliarse en algún sentido, como por ejemplo el considerar en su segundo miembro distintos conjuntos $\Phi_{n,i} \subset W$ como bases de los espacios de interpolación correspondientes a los datos $\mathcal{L}_{n,i}$ en lugar de considerar siempre $\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n\}$. Sin embargo ello no proporciona ventajas en general, como vamos a ver a continuación.

Sea W un espacio de funciones de una ó varias variables y $L(f) = f(x)$ donde x es un punto en el conjunto de definición de las funciones de W. Planteamos la existencia de fórmulas del tipo

$$\text{(2.30)} \qquad pf\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix}(x) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i(x).pf\begin{bmatrix}\Phi_{n,i}\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}(x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=n+s}^{n+m} \lambda_i(x).a_k.r\phi_k\begin{bmatrix}\Phi_{n,i}\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}(x)$$

siendo $\Phi_{n,i}$ s $(1\leqslant s\leqslant m+1)$ subconjuntos de elementos de W verificando

$$\text{(2.31)} \qquad \begin{aligned} &1) \quad \operatorname{card}(\Phi_{n,i}) = \operatorname{card}(\mathcal{L}_{n,i}) = n \\ &2) \quad \det\begin{pmatrix}\Phi_{n,i}\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{pmatrix} \neq 0, \quad i=1,\dots,s \end{aligned}$$

Supondremos también que

$$\text{(2.32)} \qquad \det\begin{pmatrix}\phi_1,\dots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{pmatrix} \neq 0$$

Al pedir en (2.30) que la fórmula sea exacta para ϕ_j, $j=1,2,\dots,n+m$ el sistema que han de verificar las λ_i queda con más ecuaciones que el (2.5), como puede verse repitiendo los razonamientos de la demostración del teorema 2.1:

$$\text{(2.33)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \lambda_i(x).p\phi_j\begin{bmatrix}\Phi_{n,i}\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}(x) = \phi_j(x), \quad j=1,\dots,n+s-1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \lambda_i(x) = 1 \end{cases}$$

sistema de s incógnitas y $n+s$ ecuaciones. El número de ecuaciones puede disminuir si alguno de los $\phi_1,\dots,\phi_{n+s-1}$ pertenece a todos los $\Phi_{n,i}$, porque entonces la correspondiente ecuación se transforma en

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i(x) = 1$$

que ya figuraba en (2.33). A pesar de ello dificilmente pueden salir sistemas que tengan solución, salvo en casos casi triviales ó que volvamos a pedir que

$$\Phi_{n,i} = \Phi_{n,j} , \qquad \forall i \neq j,$$

es decir (2,4)
Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 2.3

Sean $n = 2$, $m = 1$, $s = 2$. Consideremos el espacio engendrado por $\{1,x,y\}$ y los datos

$L_1(f) = f(P_1)$, $L_2(f) = f(P_2)$, $L_3(f) = f(P_3)$

$P_i = (x_i,y_i)$, $i=1,2,3$ puntos de R^2,

y sean

$$\Phi_{2,1} = \{1,x\} , \quad \Phi_{2,2} = \{1,y\}$$

$$\mathcal{L}_{2,1} = \{L_1,L_2\}, \mathcal{L}_{2,2} = \{L_1,L_3\}$$

Para que se cumpla la condición (2.31),2) hemos de suponer:

a) P_1 y P_2 no tienen la misma abcisa.

b) P_1 y P_3 no tienen la misma ordenada.

y para que se cumpla (2.32) supondremos que los tres puntos no están alineados.

El sistema (2.33) sería

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 \cdot px\begin{bmatrix} 1,x \\ \mathcal{L}_{2,1} \end{bmatrix}(x,y) + \lambda_2 px\begin{bmatrix} 1,y \\ \mathcal{L}_{2,2} \end{bmatrix}(x,y) = x \\ \lambda_1 \cdot py\begin{bmatrix} 1,x \\ \mathcal{L}_{2,1} \end{bmatrix}(x,y) + \lambda_2 py\begin{bmatrix} 1,y \\ \mathcal{L}_{2,2} \end{bmatrix}(x,y) = y \end{cases}$$

ya que como

$$p1\begin{bmatrix} 1,x \\ \mathcal{L}_{2,1} \end{bmatrix}(x,y) = 1 = p1\begin{bmatrix} 1,y \\ \mathcal{L}_{2,2} \end{bmatrix}(x,y) \; ,$$

por ser $\phi_1 \in \Phi_{2,1} \cap \Phi_{2,2}$ la cuarta ecuación de (2.33) vuelve a coincidir con la primera.

Se tiene

$$px\begin{bmatrix} 1,x \\ \mathcal{L}_{2,1} \end{bmatrix}(x,y) = x, \quad py\begin{bmatrix} 1,y \\ \mathcal{L}_{2,2} \end{bmatrix}(x,y) = y$$

$$px\begin{bmatrix} 1,y \\ \mathcal{L}_{2,2} \end{bmatrix}(x,y) = x_1 - \frac{x_1-x_3}{y_1-y_3} \cdot y_1 + \frac{x_1-x_3}{y_1-y_3} \cdot y$$

$$py\begin{bmatrix} 1,x \\ \mathcal{L}_{2,1} \end{bmatrix}(x,y) = y_1 - \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \cdot x_1 + \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \cdot x$$

con lo que el sistema se reduce a

$$\left\{\begin{array}{lll} \lambda_1 & + \quad \lambda_2 & = 1 \\ x\lambda_1 & +\left(x_1-\dfrac{x_1-x_3}{y_1-y_3}.y_1+\dfrac{x_1-x_3}{y_1-y_3}.y\right)\lambda_2 & = x \\ \left(y_1-\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.x_1+\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.x\right)\lambda_1 & + \quad y.\lambda_2 & = y \end{array}\right.$$

El determinante de la matríz ampliada es

$$N(x,y)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1-\dfrac{x_1-x_3}{y_1-y_3}.y_1+\dfrac{x_1-x_3}{y_1-y_3}.y & x \\ y_1-\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.x_1+\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.x & y & y \end{vmatrix}=$$

$$=\left(y-y_1+\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.x_1-\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.x\right).\left(x_1-x-\frac{x_1-x_3}{y_1-y_3}.y_1+\frac{x_1-x_3}{y_1-y_3}.y\right)$$

Para que el rango de la matríz ampliada no sea tres es necesario que $N(x,y) = 0$, lo cual ocurre si

(2.34) $$y-y_1+\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.x_1-\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.x = 0$$

ó si

(2.35) $$x_1-x-\frac{x_1-x_3}{y_1-y_3}.y_1+\frac{x_1-x_3}{y_1-y_3}.y = 0$$

Si se da (2.34) estamos sobre la recta que pasa por P_1 y P_2 y que denominaremos r_1, mientras que si es (2.35) se trata de la recta que pasa por P_1 y P_3 y que denominaremos r_3; r_2 será la recta que pasa por P_2 y P_3.

Luego $N(x,y) = 0$ sobre las rectas r_1 y r_3. Si el punto $(x,y) \in r_1$ ó $(x,y) \in r_2$ la matríz de coeficientes es de rango dos salvo que $(x,y) = P_1$. Por tanto si $(x,y) \in (r_1 \cup r_2) - \{P_1\}$ existen λ_1, λ_2 únicos. Ahora bien, si $(x,y) \in r_1$ la solución es $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0$, mientras que si $(x,y) \in r_2$ es $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$.

Lo que ocurre es que por ejemplo en el primer caso

$$(2.36) \qquad pf\begin{bmatrix} 1,x,y \\ \mathcal{L}_3 \end{bmatrix}(x,y) \equiv pf\begin{bmatrix} 1,x \\ \mathcal{L}_{2,1} \end{bmatrix}(x,y).$$

En efecto, el primer miembro de (2.36) para los puntos P_1 y P_2 es $\alpha + \beta x + \gamma y$ tal que

$$(2.37) \qquad \begin{cases} \alpha + \beta x_1 + \gamma y_1 = f(P_1) \\ \alpha + \beta x_2 + \gamma y_2 = f(P_2) \end{cases}$$

mientras que el segundo miembro es $A + Bx$ tal que

$$(2.38) \qquad \begin{cases} A + Bx_1 = f(P_1) \\ A + Bx_2 = f(P_2) \end{cases}$$

Como la ecuación paramétrica de r_1 es

$$\begin{cases} x = (1-t)x_1 + tx_2 \\ y = (1-t)y_1 + ty_2 \end{cases}$$

basta multiplicar la primera ecuación de (2.37) por (1-t) y la segunda por t y sumarlas para obtener

$$\alpha + \beta((1-t)x_1+tx_2) + \gamma((1-t)y_1+ty_2) = (1-t)f(P_1) + tf(P_2)$$

Repitiendo el proceso con (2.38) obtenemos

$$A + B((1-t)x_1 + tx_2) = (1-t)f(P_1) + tf(P_2)$$

Por tanto el valor de $\alpha + \beta x + \gamma y$ y el de $A + Bx$ coincidirán en todos los puntos de la recta r_1.

Así pues las posibles extensiones de la fórmula (2.4), en el sentido aquí indicado, carecen de interés en la práctica.

CAPITULO III

CASOS PARTICULARES IMPORTANTES

CAPITULO III

CASOS PARTICULARES IMPORTANTES

1.-INTRODUCCION

En el capítulo que nos ocupa vamos a estudiar aquellos casos particulares más importantes que aparecen en la fórmula (2.4).

En el caso más frecuente, W es un espacio de funciones de una ó varias variables y $L(f) = f(x)$. También las L_i suelen ser valores de la función ó de alguna de sus derivadas en puntos P_i. Concretamente, supongamos que es $L(f) = f(x)$ donde x es un punto en el conjunto de definición de las funciones de W. Entonces (2.3) queda de la forma

$$
(3.1) \qquad D(x) = \begin{vmatrix} 1 & ,\dots\dots\dots, & 1 \\ p\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix}(x) & ,\dots\dots, & p\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,s}\end{bmatrix}(x) \\ \dots\dots \quad \dots\dots & \dots\dots \quad \dots\dots & \dots\dots \quad \dots\dots \\ p\phi_{n+s-1}\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix}(x) & ,\dots, & p\phi_{n+s-1}\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,s}\end{bmatrix}(x) \end{vmatrix} \neq 0
$$

y la fórmula (2.4) quedaría

$$
(3.2) \qquad pf\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix}(x) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i(x).pf\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}(x) +
$$

$$
+ \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=n+s}^{n+m} \lambda_i(x).a_k.r\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}(x)
$$

siendo $\lambda_1(x),\ldots,\lambda_s(x)$ la única solución del sistema

$$(3.3)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \lambda_i(x) = 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \lambda_i(x).p\phi_j\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}(x) = \phi_j(x), \quad j=n+1,\ldots,n+s-1 \end{cases}$$

En el resto de este capítulo, y mientras no se diga lo contrario, continuaremos en esta situación.

Una observación interesante es que nos vamos a encontrar con frecuencia con fórmulas que nos dan la expresión del polinomio de interpolación, en principio salvo en un conjunto de puntos en los que se anula una determinada función. Por ejemplo en dos variables, es posible que lleguemos a una expresión del tipo

$$(3.4)\qquad \frac{p_1(x,y)}{p_2(x,y)} \equiv p_3(x,y), \qquad \forall (x,y) \in R^2-B$$

donde

$$B = \{(x,y) \in R^2 \ / \ p_2(x,y) = 0\}$$

y $p_i(x,y)$, $i=1,2,3$ son polinomios. Sin embargo, tomando un punto cualquiera $(\bar{x},\bar{y}) \in B$, existe una sucesión de puntos $\{(x_n,y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ en R^2-B tal que

$$\lim_{n\to\infty} (x_n,y_n) = (\bar{x},\bar{y})$$

Como para esa sucesión se cumple (3.4), por paso al límite obtendremos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1(x_n,y_n)}{p_2(x_n,y_n)} = p_3(\bar{x},\bar{y})$$

Es decir, que el valor del polinomio de interpolación en $(\bar{x},\bar{y})$ se obtiene por paso al límite de su valor en los puntos (x_n,y_n). Realmente, ésto se traduce en la práctica en situaciones en las que el paso al límite consiste en suprimir en el numerador y denominador un cierto factor, con lo cual queda directamente la expresión del polinomio, válida para todo (x,y) de R^2.

2.- FORMULA DE AITKEN-NEVILLE GENERALIZADA

Sea $s = m+1$; como se ha dicho en el teorema 2.1 el doble sumatorio del segundo miembro de (2.4) desaparece obteniéndose la fórmula

$$\text{(3.5)} \qquad pf\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{bmatrix}(x) = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i(x).pf\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{bmatrix}(x)$$

que puede llamarse fórmula de Aitken-Neville generalizada, ó de Mühlbach-Aitken-Neville. La razón del nombre es que bajo las hipótesis del teorema 2.2 aparecen dos casos particulares que son generalización directa de las ideas desarrolladas en los algoritmos de Aitken [1] y de Neville [42] clásicos.

Así, eligiendo los conjuntos $\mathcal{L}_{n,i}$, $i=1,\ldots,m+1$ que verifiquen (2.9),1) y (2.9),2) con $s = m+1$ (obsérvese que (2.9),3) es en este caso la hipótesis de partida (2.1)) y con

$$\mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1} = \mathcal{L}_{n,j} \cap \mathcal{L}_{n,j+1}, \quad \forall i,j$$

seguimos la idea del algoritmo de Aitken original, mientras que si fuera

$$\mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1} \neq \mathcal{L}_{n,j} \cap \mathcal{L}_{n,j+1}, \quad \forall i \neq j$$

seguimos la del algoritmo de Neville.

En otras palabras, si es

$$\mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1} = P, \qquad \forall i=1,\ldots,m$$

y sin perder generalidad supondremos

$$P = \{L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}\}$$

entonces la fórmula (3.5) proporciona el elemento de interpolación a partir de elementos de interpolación cuyos datos son $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ y otro dato más, con lo cual aparece la idea del algoritmo de Aitken, expresada en éste solo para el caso $L_i(f) = f(x_i)$ y una variable. Este caso no fué tratado en los trabajos de Mühlbach.

Análogamente, si

$$\mathcal{L}_{n,i} = \{L_i, L_{i+1}, \ldots, L_{i+n-1}\}, \quad i=1,\ldots,m+1$$

entonces la fórmula (3.5) nos proporciona el elemento de interpolación según la idea de Neville, con la misma observación anterior. Es esta fórmula concreta la que obtuvo Mühlbach [35] con los $L_i(f) = f(x_i)$ y una variable, pero generalizando respecto a Neville en el sentido de que era válida en sistemas de Chebyshev.

Evidentemente otros casos intermedios entre éstos quedan incluidos en la fórmula anterior y tampoco eran contemplados por Mühlbach.

Como <u>ejemplo</u> vamos a obtener la fórmula del algoritmo de interpolación de Aitken clásico.

Sean dos conjuntos S y T de puntos distintos, siendo

$$S = \{x_0, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}\}$$

y

$$T = \{x_0, \ldots, x_{n-2}, x_n\}$$

con

$$S \cap T = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}\}$$

Es claro que

$$\text{card}(S) = \text{card}(T) = n$$

y

$$\text{card}(S \cap T) = n-1.$$

Sean $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\} = \{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$ y $\phi_{n+1} = x^n$. Aquí tenemos que es $m = 1$ con lo cual $s = 2$, luego el sistema (2.5) queda en la forma

$$(3.6)\quad \begin{cases} \lambda_1(x) + \lambda_2(x) = 1 \\ \lambda_1(x).px^n\begin{bmatrix} 1, x, \ldots, x^{n-1} \\ x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \end{bmatrix}(x) + \lambda_2(x).px^n\begin{bmatrix} 1, \ldots, x^{n-2}, x^{n-1} \\ x_0, \ldots, x_{n-2}, x_n \end{bmatrix}(x) = x^n \end{cases}$$

La condición (2.3) es aquí

$$px^n \begin{bmatrix} 1, & x, \ldots, x^{n-1} \\ x_0, & x_1, \ldots, x_{n-1} \end{bmatrix}(x) \neq px^n \begin{bmatrix} 1, \ldots, x^{n-2}, x^{n-1} \\ x_0, \ldots, x_{n-2}, x_n \end{bmatrix}(x)$$

Esto se cumple salvo para $x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}$, ya que en caso contrario si fuera $\bar{x} \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}\}$ un punto en donde se verifica la igualdad, la diferencia sería un polinomio de grado $n-1$ que se anula en n puntos $x_0, \ldots, x_{n-2}, \bar{x}$, por lo que sería el polinomio cero. Esto no es posible pues significaría que

$$px^n \begin{bmatrix} 1, & x, \ldots, x^{n-1} \\ x_0, & x_1, \ldots, x_{n-1} \end{bmatrix}(x)$$

interpola a x^n en x_n también; entonces

$$x^n - px^n \begin{bmatrix} 1, & x, \ldots, x^{n-1} \\ x_0, & x_1, \ldots, x_{n-1} \end{bmatrix}(x)$$

sería un polinomio de grado n, con coeficiente director uno, nulo en $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y por tanto idénticamente nulo, lo que es absurdo.

Si $x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, naturalmente

$$pf \begin{bmatrix} 1, & x, \ldots, x^n \\ x_0, & x_1, \ldots, x_n \end{bmatrix}(x) = f(x),$$

ó dicho de otra manera, basta tomar $\lambda_1(x)$ y $\lambda_2(x)$ cualesquiera tales que su suma $\lambda_1(x) + \lambda_2(x) = 1$.

La solución del sistema (3.6) es

$$\lambda_1(x) = \frac{px^n\begin{bmatrix}1,\dots,x^{n-2},x^{n-1}\\ x_0,\dots,x_{n-2},x_n\end{bmatrix}(x)-x^n}{px^n\begin{bmatrix}1,\dots,x^{n-2},x^{n-1}\\ x_0,\dots,x_{n-2},x_n\end{bmatrix}(x)-px^n\begin{bmatrix}1,\dots,x^{n-1}\\ x_0,\dots,x_{n-1}\end{bmatrix}(x)}$$

$$\lambda_2(x) = -\frac{px^n\begin{bmatrix}1,\dots,x^{n-1}\\ x_0,\dots,x_{n-1}\end{bmatrix}(x)-x^n}{px^n\begin{bmatrix}1,\dots,x^{n-2},x^{n-1}\\ x_0,\dots,x_{n-2},x_n\end{bmatrix}(x)-px^n\begin{bmatrix}1,\dots,x^{n-1}\\ x_0,\dots,x_{n-1}\end{bmatrix}(x)}$$

Para obtener una expresión de λ_1 y λ_2 válida para cualquier x, y más simple que la que tenemos, observamos que el numerador de $\lambda_2(x)$ es un polinomio de grado n en x que se anula en $x_0,x_1,\dots,x_{n-1}$ luego se puede expresar como

$$A(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

mientras que el denominador es un polinomio de grado $n-1$ en x que se anula en $x_0,x_1,\dots,x_{n-2}$, luego se expresa como

$$B(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-2})$$

Por tanto para $x \neq x_0,x_1,\dots,x_{n-2}$ podemos escribir

$$\lambda_2(x) = -k_2(x-x_{n-1})$$

Un razonamiento análogo conduciría a que

$$\lambda_1(x) = k_1(x-x_n)$$

Como se ha de verificar $\lambda_1(x) + \lambda_2(x) = 1$, se tendrá

$$k_1(x-x_n) - k_2(x-x_{n-1}) = 1,$$

y para que ésto sea válido para todo x

$$k_1 - k_2 = 0$$

$$-k_1 . x_n + k_2 x_{n-1} = 1$$

es decir

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{x_{n-1} - x_n}$$

Por tanto,

$$\lambda_1(x) = \frac{x - x_n}{x_{n-1} - x_n}$$

y

$$\lambda_2(x) = \frac{x_{n-1} - x}{x_{n-1} - x_n}$$

y nos queda la bien conocida fórmula:

$$pf\begin{bmatrix} 1,x,..,x^n \\ S \cup T \end{bmatrix}(x) = \frac{(x-x_n)\,pf\begin{bmatrix} 1,x,..,x^{n-1} \\ S \end{bmatrix}(x) - (x-x_{n-1})\,pf\begin{bmatrix} 1,x,..,x^{n-1} \\ T \end{bmatrix}(x)}{x_{n-1} - x_n}$$

Obsérvese que la fórmula sigue siendo válida en los puntos $x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}$ que habíamos excluido en principio.

Volviendo a la fórmula (3.5), si $m = 1$, en general se obtiene

$$(3.7)\qquad pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+1}\\ \mathcal{L}_{n+1}\end{bmatrix}(x) =$$

$$= \frac{(p\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix}(x) - \phi_{n+1}(x)).pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,2}\end{bmatrix}(x) -}{p\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix}(x) - p\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,2}\end{bmatrix}(x)}$$

$$\frac{-(p\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,2}\end{bmatrix}(x) - \phi_{n+1}(x)).pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix}(x)}{p\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix}(x) - p\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,2}\end{bmatrix}(x)}$$

válida siempre que

$$p\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix}(x) \neq p\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,2}\end{bmatrix}(x)$$

Esta fórmula puede ser usada de manera recurrente si las circunstancias lo permiten. Por ejemplo, sean $\{L_1,L_2,\ldots,L_{n+1},\ldots\}$ una sucesión de formas lineales sobre el espacio W y $\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{n+1},\ldots\}$ una sucesión de elementos de W y sean

$\mathcal{L}_{1,j} = \{L_j\}$, $j \geq 1$

$\mathcal{L}_{2,j} = \{L_1,L_j\} = \mathcal{L}_{1,1} \cup \mathcal{L}_{1,j}$, $j \geq 2$

$\mathcal{L}_{3,j} = \{L_1,L_2,L_j\} = \mathcal{L}_{2,2} \cup \mathcal{L}_{2,j}$, $j \geq 3$

....

$\mathcal{L}_{n+1,j} = \{L_1,\dots,L_n,L_j\} = \mathcal{L}_{n,n} \cup \mathcal{L}_{n,j}$, $j \geq n+1$

....

tales que

$$(3.8) \qquad \det\begin{pmatrix}\phi_1,\dots,\phi_h\\ \mathcal{L}_{h,j}\end{pmatrix} \neq 0, \quad \forall h=1,2,\dots, \quad j \geq h$$

Evidentemente, por construcción se verifica

$$(3.9) \qquad \begin{array}{ll} \text{i)} & \operatorname{card}(\mathcal{L}_{h,j}) = h \\ \text{ii)} & \operatorname{card}(\mathcal{L}_{h,j} \cap \mathcal{L}_{h,j+1}) = h-1, \quad j=1,2,\dots \\ \text{iii)} & \mathcal{L}_{h,j} = \mathcal{L}_{h-1,h-1} \cup \mathcal{L}_{h-1,j}, \quad h=2,3,\dots, \quad j \geq h \end{array}$$

Por otra parte la fórmula (3.7) también puede expresarse como

$$(3.10) \qquad pf\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_{n+1}\\ \mathcal{L}_{n+1}\end{bmatrix}(x) = (1-\lambda(x))\,pf\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix}(x) + \lambda(x)\,pf\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,2}\end{bmatrix}(x)$$

donde

$$(3.11) \qquad \lambda(x) = \frac{r\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix}(x)}{r\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix}(x) - r\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,2}\end{bmatrix}(x)}$$

Notamos por

$$(3.12) \qquad r_{k,h,j}(x) = \phi_k(x) - p\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_h\\ \mathcal{L}_{h,j}\end{bmatrix}(x)$$

Aplicándole (3.10) con $\mathcal{L}_{h,j}$ en lugar de $\mathcal{L}_{n+1}$ se tiene

$$(3.13) \qquad r_{k,h,j}(x) = \phi_k(x) - p\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_h\\ \mathcal{L}_{h,j}\end{bmatrix}(x) =$$

$$= \phi_k(x) - ((1-\mu(x))p\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{h-1}\\ \mathcal{L}_{h-1,h-1}\end{bmatrix}(x) + \mu(x)p\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{h-1}\\ \mathcal{L}_{h-1,j}\end{bmatrix}(x)) = \phi_k(x)(1-\mu(x)) +$$

$$+\mu(x)\phi_k(x) - (\mu(x)p\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{h-1}\\ \mathcal{L}_{h-1,j}\end{bmatrix}(x) + (1-\mu(x))p\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{h-1}\\ \mathcal{L}_{h-1,h-1}\end{bmatrix}(x)) =$$

$$= \mu(x)(\phi_k(x) - p\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{h-1}\\ \mathcal{L}_{h-1,j}\end{bmatrix}(x)) + (1-\mu(x))(\phi_k(x) - p\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{h-1}\\ \mathcal{L}_{h-1,h-1}\end{bmatrix}(x)) =$$

$$= \mu(x).r_{k,h-1,j}(x) + (1-\mu(x))r_{k,h-1,h-1}(x) =$$

$$= r_{k,h-1,h-1}(x) + \mu(x)(r_{k,h-1,j}(x) - r_{k,h-1,h-1}(x))$$

donde $\mu(x)$ viene dado por

$$(3.14) \qquad \mu(x) = \frac{r_{h,h-1,h-1}(x)}{r_{h,h-1,h-1}(x) - r_{h,h-1,j}(x)}$$

Sustituyendo (3.14) en (3.13) y operando se tiene

$$(3.15) \qquad r_{k,h,j}(x) = \frac{(r_{k,h-1,j}(x))(r_{h,h-1,h-1}(x))-(r_{k,h-1,h-1}(x))(r_{h,h-1,j}(x))}{(r_{h,h-1,h-1}(x))-(r_{h,h-1,j}(x))}$$

$$h \leqslant j, \quad 1 \leqslant k, \quad k > h.$$

Si notamos

$$(3.16) \qquad p_{h,j}f(x) = pf\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_h \\ \mathcal{L}_{h,j} \end{bmatrix}(x), \quad h=1,2,\ldots,j \geqslant h$$

también se tiene, como consecuencia de (3.10),

$$(3.17) \qquad pf\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_h \\ \mathcal{L}_{h,j} \end{bmatrix}(x)=(1-\mu(x))pf\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_{h-1} \\ \mathcal{L}_{h-1,h-1} \end{bmatrix}(x)+\mu(x)pf\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_{h-1} \\ \mathcal{L}_{h-1,j} \end{bmatrix}(x)$$

Operando se tiene

$$(3.18) \qquad p_{h,j}f(x)= \frac{(p_{h-1,j}f(x))(r_{h,h-1,h-1}(x))-(p_{h-1,h-1}f(x))(r_{h,h-1,j}(x))}{(r_{h,h-1,h-1}(x))-(r_{h,h-1,j}(x))}$$

$$h=2,3,\ldots, \quad j \geqslant h.$$

Luego en resumen, $pf\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_{n+1} \\ \mathcal{L}_{n+1} \end{bmatrix}(x)$ puede ser calculado por recurrencia mediante el algoritmo

$$p_{1,j}f(x) = \frac{L_j(f)}{L_j(\phi_1)}\cdot\phi_1(x), \qquad j \geqslant 1$$

$$r_{k,1,j}(x) = \phi_k(x) - \frac{L_j(\phi_k)}{L_j(\phi_1)}\cdot\phi_1(x), \quad k > 1, \; j \geqslant 1$$

$$p_{h,j}f(x) = \frac{(p_{h-1,j}f(x))(r_{h,h-1,h-1}(x))-(p_{h-1,h-1}f(x))(r_{h,h-1,j}(x))}{(r_{h,h-1,h-1}(x))-(r_{h,h-1,j}(x))}$$

$h \geqslant 2,\ j \geqslant h$

$$r_{k,h,j}(x)= \frac{(r_{k,h-1,j}(x))(r_{h,h-1,h-1}(x))-(r_{k,h-1,h-1}(x))(r_{h,h-1,j}(x))}{(r_{h,h-1,h-1}(x))-(r_{h,h-1,j}(x))}$$

$j \geqslant h \geqslant 2,\quad k > h$

Mediante este proceso seguimos la idea del algoritmo de Aitken.

Si por el contrario hubiéramos hecho la siguiente elección

$\mathcal{L}_{1,j} = \{L_j\},\ j \geqslant 1$

$\mathcal{L}_{2,j} = \mathcal{L}_{1,j-1} \cup \mathcal{L}_{1,j},\quad j \geqslant 2$

$\mathcal{L}_{3,j} = \mathcal{L}_{2,j-1} \cup \mathcal{L}_{2,j},\quad j \geqslant 3$

... ...

$\mathcal{L}_{n+1,j} = \mathcal{L}_{n,j-1} \cup \mathcal{L}_{n,j},\quad j \geqslant n+1$

... ...

en general se tendría

(3.19) $$\mathcal{L}_{h,j} = \mathcal{L}_{h-1,j-1} \cup \mathcal{L}_{h-1,j}\quad ,\ j \geqslant h,\ h=2,3,....$$

Suponemos también que se verifica (3.8). Además por la construcción hecha se verifica (3.9),i) y (3.9),ii).

Usando la misma notación (3.12) y repitiendo el razonamiento anterior teniendo en cuenta (3.19) con

(3.20) $$\mu(x) = \frac{r_{h,h-1,j-1}(x)}{r_{h,h-1,j-1}(x)-r_{h,h-1,j}(x)}$$

se tiene:

(3.21)

$$r_{k,h,j}(x)=\frac{(r_{k,h-1,j}(x))(r_{h,h-1,j-1}(x))-(r_{k,h-1,j-1}(x))(r_{h,h-1,j}(x))}{(r_{h,h-1,j-1}(x))-(r_{h,h-1,j}(x))}$$

$j \geqslant h \geqslant 2,\ k > h$

y

$$(3.22)\qquad p_{h,j}f(x)=\frac{(p_{h-1,j}f(x))(r_{h,h-1,j-1}(x))-(p_{h-1,j-1}f(x))(r_{h,h-1,j}(x))}{(r_{h,h-1,j-1}(x))-(r_{h,h-1,j}(x))}$$

$j \geqslant h,\ h=2,3,\ldots\ldots$

En este caso $pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+1}\\ \mathcal{L}_{n+1}\end{bmatrix}(x)$ se puede calcular por recurrencia mediante el algoritmo

$$p_{1,j}f(x) = \frac{L_j(f)}{L_j(\phi_1)}.\phi_1(x), \qquad j \geqslant 1$$

$$r_{k,1,j}(x)=\phi_k(x)-\frac{L_j(\phi_k)}{L_j(\phi_1)}.\phi_1(x), \quad k > 1, \quad j \geqslant 1$$

$$p_{h,j}f(x)=\frac{(p_{h-1,j}f(x))(r_{h,h-1,j-1}(x))-(p_{h-1,j-1}f(x))(r_{h,h-1,j}(x))}{(r_{h,h-1,j-1}(x))-(r_{h,h-1,j}(x))}$$

$j \geqslant h,\ h=2,3,\ldots$

$$r_{k,h,j}(x)=\frac{(r_{k,h-1,j}(x))(r_{h,h-1,j-1}(x))-(r_{k,h-1,j-1}(x))(r_{h,h-1,j}(x))}{(r_{h,h-1,j-1}(x))-(r_{h,h-1,j}(x)}$$

$j \geqslant h \geqslant 2,\ k > h$

De esta manera seguimos el proceso del algoritmo de Neville.

Por último, es claro que haciendo otras elecciones de los $\mathcal{L}_{h,j}$ obtendremos casos intermedios entre los de Aitken y Neville aquí estudiados y que no detallaremos.

3.- FORMULA DE NEWTON GENERALIZADA

Sea $s = 1$ con lo cual se tiene $\lambda_1 = 1$, desapareciendo la condición (2.3) como vimos en el capítulo II. Entonces para todo x resulta la fórmula

$$(3.23)\qquad pf\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix}(x) = pf\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_n\end{bmatrix}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\cdot r\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_n\end{bmatrix}(x)$$

que podemos llamar, siguiendo a Mühlbach, fórmula de Newton generalizada ya que permite el paso de un problema con datos $\mathcal{L}_n$ y espacio de interpolación engendrado por $\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$ a otro con datos $\mathcal{L}_{n+m}$ y espacio de interpolación engendrado por $\{\phi_1,\dots,\phi_{n+m}\}$.

Es de resaltar que a partir de esta fórmula puede llegarse fácilmente a la de Aitken-Neville también. En efecto, sea

$$(3.24)\qquad pf\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix}(x) = pf\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\cdot r\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}(x)$$

$$i=1,\dots,m+1$$

Multipliquemos los dos miembros de (3.24) por $\lambda_1(x),\ldots,\lambda_{m+1}(x)$ verificando (2.5) con $s = m+1$, es decir, (3.3), que equivale a este otro

$$(3.25)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i(x) = 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i(x)\,.\,r\phi_j \begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{bmatrix}(x) = 0, \quad j=n+1,\ldots,n+m \end{cases}$$

Si sumamos en i las igualdades resultantes nos quedaría

$$\Big(\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i(x)\Big).pf \begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{bmatrix}(x) = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i(x).pf \begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{bmatrix}(x) +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i(x).r\phi_k \begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{bmatrix}(x)$$

que teniendo en cuenta (3.25) resulta ser

$$pf \begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{bmatrix}(x) = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i(x).pf \begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{bmatrix}(x)$$

como queríamos.

<u>Observación.-</u> Una vez establecida la fórmula de Newton (3.23) surge la cuestión de si se comportará ó no igual que la fórmula de interpolación polinomial de Newton en una variable en el siguiente sentido: Si

$$(3.26)\qquad p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

es el polinomio de interpolación de una función f de grado no mayor que n en los puntos x_i, $i=0,1,\ldots,n$ distintos, entonces eliminando por ejemplo el último sumando de (3.26) obtenemos el polinomio $p_{n-1}(x)$, y así sucesivamente se puede reiterar el proceso.

Para ello consideremos el siguiente caso. Sea $m=1$. Entonces (3.23) es:

$$\text{(3.27)} \qquad pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+1}\\ \mathcal{L}_{n+1}\end{bmatrix}(x) = pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_n\end{bmatrix}(x) +$$

$$+b_{n+1}\left(\phi_{n+1}(x)-p\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_n\end{bmatrix}(x)\right)$$

Si ahora en (3.27) pasamos de n a n+1 y suponemos que se verifica

$$\det\begin{pmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+2}\\ \mathcal{L}_{n+2}\end{pmatrix} \neq 0$$

entonces podemos establecer la fórmula

$$\text{(3.28)} \qquad pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+2}\\ \mathcal{L}_{n+2}\end{bmatrix}(x) = pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+1}\\ \mathcal{L}_{n+1}\end{bmatrix}(x) +$$

$$+c_{n+2}\left(\phi_{n+2}(x)-p\phi_{n+2}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+1}\\ \mathcal{L}_{n+1}\end{bmatrix}(x)\right) =$$

$$=pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_n\end{bmatrix}(x)+b_{n+1}\Big(\phi_{n+1}(x)-$$

$$-p\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_n\end{bmatrix}(x)\Big) +$$

$$+ c_{n+2}(\phi_{n+2}(x) - p\phi_{n+2}\begin{bmatrix}\phi_1, \dots, \phi_{n+1} \\ \mathcal{L}_{n+1}\end{bmatrix}(x)).$$

Por otra parte, aplicando directamente (3.23) con $m = 2$, se tiene

$$(3.29) \qquad pf\begin{bmatrix}\phi_1, \dots, \phi_{n+2} \\ \mathcal{L}_{n+2}\end{bmatrix}(x) = pf\begin{bmatrix}\phi_1, \dots, \phi_n \\ \mathcal{L}_n\end{bmatrix}(x) +$$

$$+a_{n+1}(\phi_{n+1}(x) - p\phi_{n+1}\begin{bmatrix}\phi_1, \dots, \phi_n \\ \mathcal{L}_n\end{bmatrix}(x))+$$

$$+a_{n+2}(\phi_{n+2}(x) - p\phi_{n+2}\begin{bmatrix}\phi_1, \dots, \phi_n \\ \mathcal{L}_n\end{bmatrix}(x))$$

Comparando (3.28) y (3.29) es claro que $c_{n+2} = b_{n+2}$ debido a que son, en ambos casos, el coeficiente de $\phi_{n+2}(x)$ en la expresión de $pf\begin{bmatrix}\phi_1, \dots, \phi_{n+2} \\ \mathcal{L}_{n+2}\end{bmatrix}(x)$ y este elemento aparece una sola vez en estas expresiones. No obstante será $b_{n+1} \neq a_{n+1}$, en general. Veámoslo con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.1

Consideremos las funciones

$$\phi_1 = 1, \quad \phi_2 = x, \quad \phi_3 = x^2, \quad \phi_4 = x^3 \quad y \quad f(x) = x^4 - x^3$$

siendo las formas lineales

$$L_1(f) = f(2), \quad L_2(f) = f(1)$$

$$L_3(f) = f(-1), \quad L_4(f) = f(-2)$$

y los conjuntos de datos

$\mathcal{L}_2 = \{L_1, L_2\}$, $\mathcal{L}_3 = \{L_1, L_2, L_3\}$ y $\mathcal{L}_4 = \{L_1, L_2, L_3, L_4\}$

Con $n = 2 = m$,

$$pf\begin{bmatrix} 1,x,x^2,x^3 \\ \mathcal{L}_4 \end{bmatrix}(x) = pf\begin{bmatrix} 1,x \\ \mathcal{L}_2 \end{bmatrix}(x) + a_3\left(x^2 - px^2\begin{bmatrix} 1,x \\ \mathcal{L}_2 \end{bmatrix}(x)\right) + a_4\left(x^3 - px^3\begin{bmatrix} 1,x \\ \mathcal{L}_2 \end{bmatrix}(x)\right)$$

Es inmediato que

$$pf\begin{bmatrix} 1,x \\ \mathcal{L}_2 \end{bmatrix}(x) = 8x - 8$$

$$px^2\begin{bmatrix} 1,x \\ \mathcal{L}_2 \end{bmatrix}(x) = 3x - 2 \quad , \qquad px^3\begin{bmatrix} 1,x \\ \mathcal{L}_2 \end{bmatrix}(x) = 7x - 6$$

Resolviendo el sistema (2.14) para obtener a_3 y a_4, tenemos:

$$\begin{cases} 6.a_3 + 12.a_4 = 18 \\ 12.a_3 + 12.a_4 = 48 \end{cases}$$

de donde se obtiene $a_3 = 5$, $a_4 = -1$ y por tanto

$$pf\begin{bmatrix} 1,x,x^2,x^3 \\ \mathcal{L}_4 \end{bmatrix}(x) = -x^3 + 5x^2 - 4.$$

Por otra parte, considerando ahora $m=1$, $n=2$, tenemos

$$pf\begin{bmatrix} 1,x,x^2 \\ \mathcal{L}_3 \end{bmatrix}(x) = pf\begin{bmatrix} 1,x \\ \mathcal{L}_2 \end{bmatrix}(x) + b_3\left(x^2 - px^2\begin{bmatrix} 1,x \\ \mathcal{L}_2 \end{bmatrix}(x)\right) \tag{3.30}$$

Repitiendo el proceso para la obtención de (3.28), sean $m=1$, $n=3$, con lo que

$$pf\begin{bmatrix} 1,x,x^2,x^3 \\ \mathcal{L}_4 \end{bmatrix}(x) = pf\begin{bmatrix} 1,x,x^2 \\ \mathcal{L}_3 \end{bmatrix}(x) + c_4\left(x^3 - px^3\begin{bmatrix} 1,x,x^2 \\ \mathcal{L}_3 \end{bmatrix}(x)\right) = \tag{3.31}$$

$$= pf\begin{bmatrix}1,x\\ \mathcal{L}_2\end{bmatrix}(x)+b_3(x^2-px^2\begin{bmatrix}1,x\\ \mathcal{L}_2\end{bmatrix}(x)) + c_4(x^3-px^3\begin{bmatrix}1,x,x^2\\ \mathcal{L}_3\end{bmatrix}(x)).$$

Es inmediato que

$$px^3\begin{bmatrix}1,x,x^2\\ \mathcal{L}_3\end{bmatrix}(x) = 2x^2+x-2$$

De (2.14), aplicada primero a (3.30) y luego a la primera igualdad de (3.31), obtenemos $b_3 = 3$, $c_4 = -1$.

Se observa que $c_4 = a_4$ y $b_3 \neq a_3$. Además en esta última fórmula, suprimiendo el sumando en c_4 obtenemos el polinomio de interpolación de $f(x)$ en $1,x,x^2$, cosa que no ocurre haciendo lo mismo con la primera fórmula del ejemplo (fórmula de Newton (3.23) con $n = m = 2$).

Podemos decir que en una fórmula como la (3.28) eliminando el término en c_{n+2} se tiene el elemento de interpolación de f mediante las funciones $\{\phi_1,\ldots,\phi_{n+1}\}$ y los datos $\mathcal{L}_{n+1}$, cosa que en general no ocurrirá con la fórmula (3.29).

En general, consideremos un conjunto de problemas escalonados cuyos datos son, respectivamente,

$$\begin{array}{l}\mathcal{L}_n = \{L_1,L_2,\ldots,L_n\}\\ \mathcal{L}_{n+1} = \{L_1,L_2,\ldots,L_{n+1}\}\\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\\ \mathcal{L}_{n+m} = \{L_1,L_2,\ldots,L_{n+m}\}\end{array}$$

verificando que

$$\det \begin{pmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_i \\ \mathcal{L}_i \end{pmatrix} \neq 0, \quad i=n,n+1,\ldots,n+m \tag{3.32}$$

Si aplicamos la fórmula de Newton (3.23), de lo que hemos dicho antes resulta que no será posible, en general, que al ir eliminando los términos en $a_{n+m},\ldots,a_{n+1}$ obtengamos el elemento de interpolación de f en el espacio $\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{n+m-1}\}$, etc. Ello depende de quiénes son las ϕ_i. Por éso, sustituyamos $\{\phi_1,\ldots,\phi_{n+m}\}$ por otra base equivalente $\{f_1,f_2,\ldots,f_{n+m}\}$:

$$pf \begin{bmatrix} f_1, \ldots, f_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{bmatrix} = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_{n+m} f_{n+m} \tag{3.33}$$

donde las f_i las elegimos a partir de las ϕ_i iniciales de manera que si eliminamos los términos en a_{n+m}, a_{n+m-1}, etc, obtengamos el elemento de interpolación de f con uno, dos, etc, elementos menos que de partida.

Sean $f_1 = \phi_1,\ldots,f_n = \phi_n$, y f_{n+1} una combinación lineal de $\{\phi_1,\ldots,\phi_n\}$ y de ϕ_{n+1}; análogamente, sea f_{n+2} una combinación lineal de $\{\phi_1,\ldots,\phi_{n+1}\}$ y el elemento ϕ_{n+2} y así sucesivamente. Si las elegimos, concretamente verificando:

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_{n+1} = \phi_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \phi_i & / \ L_i(f_{n+1}) = 0, \ \forall i \leq n \\ f_{n+2} = \phi_{n+2} + \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \cdot \phi_i & / \ L_i(f_{n+2}) = 0, \ \forall i \leq n+1 \\ \vdots \quad \cdots\cdots & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f_{n+m} = \phi_{n+m} + \sum_{i=1}^{n+m-1} \alpha_i \cdot \phi_i & / \ L_i(f_{n+m}) = 0, \ \forall i \leq n+m-1 \end{array} \right. \tag{3.34}$$

tales f_{n+i} pueden construirse y están unívocamente determinadas. Por ejemplo en la primera igualdad (3.34) tendriamos

$$\begin{cases} L_1(\alpha_1\phi_1+\ldots+\phi_{n+1}) = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ L_n(\alpha_1\phi_1+\ldots+\phi_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

ó sea

$$\begin{cases} \alpha_1 L_1(\phi_1)+\ldots+\alpha_n L_1(\phi_n) = -L_1(\phi_{n+1}) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \alpha_1 L_n(\phi_1)+\ldots+\alpha_n L_n(\phi_n) = -L_n(\phi_{n+1}) \end{cases}$$

sistema que tiene una única solución y que por las condiciones anteriores lleva consigo el que

$$pf_{n+1}\begin{bmatrix} f_1,\ldots,f_n \\ \mathcal{L}_n \end{bmatrix} \equiv 0.$$

Lo mismo ocurriría con los demás.

Consideremos ahora el conjunto $\{f_1,\ldots,f_n, f_{n+1},\ldots,f_{n+m}\}$ en lugar de $\{\phi_1,\ldots,\phi_{n+m}\}$. Es evidente que

$$pf\begin{bmatrix} f_1,\ldots,f_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{bmatrix} = pf\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n, f_{n+1},\ldots,f_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{bmatrix}.$$

Además, al aplicar la fórmula de Newton ahora se tiene

$$pf_{n+1}\begin{bmatrix} f_1,\ldots,f_n \\ \mathcal{L}_n \end{bmatrix} \equiv 0,\ pf_{n+2}\begin{bmatrix} f_1,\ldots,f_{n+1} \\ \mathcal{L}_{n+1} \end{bmatrix} \equiv 0,\ldots, pf_{n+m}\begin{bmatrix} f_1,\ldots,f_{n+m-1} \\ \mathcal{L}_{n+m-1} \end{bmatrix} \equiv 0$$

es decir

$$pf\begin{bmatrix} f_1,\ldots,f_n,f_{n+1},\ldots,f_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{bmatrix} = pf\begin{bmatrix} f_1,\ldots,f_n \\ \mathcal{L}_n \end{bmatrix} + a_{n+1}f_{n+1}+\ldots+a_{n+m}f_{n+m} \tag{3.35}$$

Aplicando L_{n+1} a (3.34), teniendo en cuenta que por (3.33)

$$L_{n+1}(f_i) = 0, \quad i=n+2,\ldots,n+m$$

resulta

$$L_{n+1}(f) = L_{n+1}\left(pf\begin{bmatrix} f_1,\ldots,f_n \\ \mathcal{L}_n \end{bmatrix}\right) + a_{n+1}L_{n+1}(f_{n+1})$$

es decir

$$a_{n+1} = \frac{L_{n+1}(f)-L_{n+1}\left(pf\begin{bmatrix} f_1,\ldots,f_n \\ \mathcal{L}_n \end{bmatrix}\right)}{L_{n+1}(f_{n+1})} \tag{3.36}$$

Hay que observar que

$$pf\begin{bmatrix} f_1,\ldots,f_n \\ \mathcal{L}_n \end{bmatrix} + a_{n+1}f_{n+1} \in \overline{\{f_1,\ldots,f_{n+1}\}}$$

y coincide con f al aplicarle $L_1,\ldots,L_{n+1}$ por lo que

$$pf\begin{bmatrix} f_1,\ldots,f_n \\ \mathcal{L}_n \end{bmatrix} + a_{n+1}f_{n+1} = pf\begin{bmatrix} f_1,\ldots,f_{n+1} \\ \mathcal{L}_{n+1} \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

Aplicando ahora L_{n+2} a (3.35), por (3.37) resulta

$$a_{n+2} = \frac{L_{n+2}(f)-L_{n+2}\left(pf\begin{bmatrix} f_1,\ldots,f_{n+1} \\ \mathcal{L}_{n+1} \end{bmatrix}\right)}{L_{n+2}(f_{n+2})}$$

con lo que se repite el proceso de (3.36). En general se tiene (3.35) con

$$a_i = \frac{L_i(f)-L_i\left(pf\begin{bmatrix} f_1,\ldots,f_{i-1} \\ \mathcal{L}_{i-1} \end{bmatrix}\right)}{L_i(f_i)} \tag{3.38}$$

para $i=n+1,\ldots,n+m$, y si las hipótesis (3.32) se verifican desde $n=1$,

$$pf\begin{bmatrix} f_1,\ldots,f_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{bmatrix} = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_{n+m} f_{n+m}$$

con a_i dada por (3.38) para $i \geqslant 2$ y $a_1 = \dfrac{L_1(f)}{L_1(f_1)}$, resultando una fórmula del mismo tipo exactamente que la bien conocida fórmula de Newton para interpolación polinomial en una variable.

4.- FORMULA DE INTERPOLACION DE LAGRANGE

Sean $\underline{s = m+1}$, $\underline{n = 1}$, $\mathcal{L}_{1,i} = \{L_i\}$, $i=1,\ldots,m+1$. La condición (2.2),2) queda reducida a $L_i(\phi_1) \neq 0$, $i=1,\ldots,m+1$ y la (2.3) puede escribirse de una forma más simple ya que hemos de tener en cuenta lo siguiente:

$$p\phi_2\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \mathcal{L}_{1,1} \end{bmatrix}(x) = b_{11}\cdot\phi_1(x)$$

con

$$L_1(b_{11}\phi_1(x)) = b_{11}L_1(\phi_1(x)) = L_1(\phi_2(x))$$

es decir

$$b_{11} = \frac{L_1(\phi_2(x))}{L_1(\phi_1(x))}$$

Análogamente sucede con los demás $p\phi_i\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \mathcal{L}_{1,j} \end{bmatrix}(x)$, hasta el último, que puede expresarse

$$p\phi_{m+1}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \mathcal{L}_{1,m+1}\end{bmatrix}(x) = b_{mm}\cdot\phi_1(x)$$

con

$$b_{mm}=\frac{L_{m+1}(\phi_{m+1}(x))}{L_{m+1}(\phi_1(x))}$$

Con todo ello la condición (3.1) puede escribirse:

$$D(x) = \begin{vmatrix} \dfrac{L_1(\phi_1)}{L_1(\phi_1)}, & \ldots\ldots\ldots, & \dfrac{L_{m+1}(\phi_1)}{L_{m+1}(\phi_1)} \\ \dfrac{L_1(\phi_2)}{L_1(\phi_1)}\cdot\phi_1(x), & \ldots, & \dfrac{L_{m+1}(\phi_2)}{L_{m+1}(\phi_1)}\cdot\phi_1(x) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{L_1(\phi_{m+1})}{L_1(\phi_1)}\cdot\phi_1(x), & \ldots, & \dfrac{L_{m+1}(\phi_{m+1})}{L_{m+1}(\phi_1)}\cdot\phi_1(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} L_1(\phi_1) & L_2(\phi_1)\ldots & L_{m+1}(\phi_1) \\ L_1(\phi_2) & L_2(\phi_2)\ldots & L_{m+1}(\phi_2) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ \ldots\ldots & \ldots \\ L_1(\phi_{m+1}) & L_2(\phi_{m+1})\ldots\ldots & L_{m+1}(\phi_{m+1}) \end{vmatrix} \frac{\phi_1^m(x)}{\prod_{k=1}^{m+1} L_k(\phi_1)} \neq 0$$

que por la condición (2.1) y teniendo en cuenta que es $\prod_{k=1}^{m+1} L_k(\phi_1) \neq 0$ por (2.2),2), se reduce a $\phi_1(x) \neq 0$.

Pero además, las ecuaciones del sistema (2.5) son:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i(x) = 1 \\[2ex] \displaystyle\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i(x) . \frac{L_i(\phi_j)}{L_i(\phi_1)} . \phi_1(x) = \phi_j(x), \quad j=2,\ldots,m+1 \end{cases}$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{m+1} \left(\frac{\lambda_i(x) . \phi_1(x)}{L_i(\phi_1)}\right) . L_i(\phi_j) = \phi_j(x), \quad j=1,\ldots,m+1$$

Así pues $\lambda_i(x) . \phi_1(x)$ puede expresarse en la forma

(3.39)

$$\lambda_i(x)\phi_1(x) = \frac{\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & i & \end{array} \\ \begin{vmatrix} \frac{L_1(\phi_1)}{L_1(\phi_1)} & \frac{L_2(\phi_1)}{L_2(\phi_1)} & \cdots\cdots\phi_1(x)\cdots\cdots & \frac{L_{m+1}(\phi_1)}{L_{m+1}(\phi_1)} \\ \frac{L_1(\phi_2)}{L_1(\phi_1)} & \frac{L_2(\phi_2)}{L_2(\phi_1)} & \cdots\cdots\phi_2(x)\cdots\cdots & \frac{L_{m+1}(\phi_2)}{L_{m+1}(\phi_1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \quad \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{L_1(\phi_{m+1})}{L_1(\phi_1)} & \frac{L_2(\phi_{m+1})}{L_2(\phi_1)} & \cdots\phi_{m+1}(x)\cdots & \frac{L_{m+1}(\phi_{m+1})}{L_{m+1}(\phi_1)} \end{vmatrix} \end{array}}{\begin{vmatrix} \frac{L_1(\phi_1)}{L_1(\phi_1)} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \frac{L_i(\phi_1)}{L_i(\phi_1)} \cdots\cdots & \frac{L_{m+1}(\phi_1)}{L_{m+1}(\phi_1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \quad \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{L_1(\phi_{m+1})}{L_1(\phi_1)} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \frac{L_i(\phi_{m+1})}{L_i(\phi_1)} \cdots\cdots & \frac{L_{m+1}(\phi_{m+1})}{L_{m+1}(\phi_1)} \end{vmatrix}}$$

Supongamos que $\phi_1(x) \neq 0$, $\forall x$; al ir variando x obtendremos pues que $\lambda_i(x).\phi_1(x)$ es una función de V, por ser combinación lineal de $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{m+1}$, según (3.39).

Lo mismo sucede con

$$\frac{\lambda_i(x).\phi_1(x)}{L_i(\phi_1)} :$$

es una función de V, que podemos llamar $l_i(x)$ y que verifica

$$L_j(l_i) = \delta_{ij}, \quad \forall i,j.$$

Luego realmente (2.4) puede escribirse también en la forma

$$\text{(3.40)} \qquad pf\begin{bmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_{m+1} \\ \mathcal{L}_{m+1} \end{bmatrix}(x) = \sum_{i=1}^{m+1} l_i(x).L_i(f)$$

que es la fórmula de Lagrange del elemento de interpolación.

Recordemos, por ejemplo, que en el caso más simple de interpolación polinomial ó trigonométrica en una variable, $\phi_1(x) \equiv 1$, por lo que $\phi_1(x) \neq 0$, $\forall x$.

CAPITULO IV

APLICACIONES A LA INTERPOLACION EN VARIAS VARIABLES

CAPITULO IV

APLICACIONES A LA INTERPOLACION EN VARIAS VARIABLES

1.-REFERENCIAS A OTROS RESULTADOS UTILES RELACIONADOS CON EL TEMA.

Puesto que los trabajos en que nos hemos basado para generalizarlos se referían a funciones de una variable, y en muy contadas ocasiones y para un determinado resultado al problema general de interpolación lineal finita, el terreno en el que más hemos avanzado con nuestra exposición es el de la interpolación en varias variables con datos valores de la función ó de ciertas derivadas en unos puntos dados. De ahí que en este capítulo profundicemos especialmente en ese campo.

En la aplicación de los resultados de los capítulos anteriores a la interpolación multivariada se parte de unas hipótesis previas, entre las que aparece que unos determinados problemas de interpolación tengan solución única, y entonces se encuentra una relación existente entre los problemas simples y el problema más complejo. Por éso es interesante ver algunas formas sencillas para comprobar aquellas hipótesis en muchos casos habituales y para ello vamos a hacer referencia sobre todo a los resultados recientes obtenidos por Gasca & Maeztu [14], Maeztu [34] y Ramirez [43].

Por simplicidad lo haremos en R^2. Elegimos un conjunto de rectas r_i en R^2, cada una asociada a un polinomio de grado uno en "x" e "y" que también denominaremos r_i, siendo $r_i = 0$ la ecuación de la recta. Para cada recta r_i consideremos un conjunto de rectas r_{ij}, $j=0,\dots,m(i)$ tales que las intersecciones de r_{ij} con r_i, $j=0,\dots,m(i)$ son puntos de R^2 en los que se dan los datos de interpolación. Las rectas r_i y/ó r_{ij} pueden aparecer repetidas, dando valores de derivadas como datos de interpolación.

Un dato derivada puede aparecer también porque r_{ij} y r_{ik} se corten en un punto de r_i, ó bien si existe $h < i$ tal que r_h pasa por el punto de corte de r_i con alguna r_{ij} como veremos más adelante en la definición 4.3.

En general, esta formulación da lugar al problema de interpolación de Hermite, y en el caso más simple se reduce a la interpolación de Lagrange. En cualquier caso construimos productos de rectas r_i, r_{ij} para obtener un conjunto de polinomios engendrando un espacio vectorial en el que el problema de interpolación es unisolvente.

Obsérvese que la libertad en la elección de las rectas r_i, r_{ij} puede dar lugar a distintos espacios de interpolación para un conjunto de datos dado. En la práctica, un problema de interpolación viene definido por sus datos y por el correspondiente espacio de interpolación. En tal situación se eligen las rectas r_i,r_{ij} basadas sobre los puntos de interpolación dados, de manera que, si es posible, el espacio obtenido a partir de ellas sea el dado.

El polinomio de interpolación se construye siguiendo la idea de la construcción del polinomio de interpolación en la forma de Newton en una variable (diferencias divididas). Esto es posible porque el procedimiento da lugar a una base $\{\psi_i\}$ del espacio de interpolación para la cual la matríz $(L_i(\psi_j))$ es triangular como en el caso de la fórmula de Newton.

a) Definiciones y planteamiento del problema

DEFINICION 4.1.- El conjunto

$$S = \{(r_0,\Gamma_0),(r_1,\Gamma_1),\dots,(r_n,\Gamma_n)\} \tag{4.1}$$

donde r_i, $i=0,1,\dots,n$ son rectas de ecuación

$$r_i \equiv a_i x+b_i y+c_i = 0, \quad |a_i| + |b_i| \neq 0$$

y Γ_i, $i=0,1,\dots,n$ es un conjunto de rectas

$$\Gamma_i = \{r_{i0}, r_{i1},\dots,r_{im(i)}\} \tag{4.2}$$

de ecuaciones

$$r_{ij} \equiv a_{ij}x+b_{ij}y+c_{ij} = 0, \quad |a_{ij}| + |b_{ij}| \neq 0,$$

se dice que es un sistema de Hermite en R^2 si se verifica la siguiente condición:

Para $i=0,1,\dots,n$, $j=0,1,\dots,m(i)$, la recta r_i corta a cada r_{ij} en un solo punto de R^2, denotado por P_{ij}.

Resaltemos que ni las rectas r_i ni las r_{ij} han de ser diferentes y que por ello los puntos P_{ij} pueden repetirse. Observemos también que la única condición para que S sea un sistema es que para cada i la recta r_i no sea paralela a ninguna de las $r_{i0},\dots,r_{im(i)}$.

Una recta r_i ó r_{ij} puede ser asociada con cualquiera de sus ecuaciones y consecuentemente la coincidencia de las rectas r_i, r_j, por ejemplo, es tomada como que las ecuaciones $r_i = 0$, $r_j = 0$ son equivalentes.

Notaremos por I al conjunto

(4.3) $\quad I = \{(i,j) \; / \; i=0,1,\dots,n, \; j=0,1,\dots,m(i)\}$

ordenado como sigue

$$(i,j) < (i',j') \Leftrightarrow \begin{cases} i < i' \\ \text{ó} \\ i=i', \; j<j' \end{cases}$$

La notación $(i,j) \leqslant (i',j')$ equivale a $(i,j) < (i',j')$ ó $(i,j) = (i',j')$.

Sean ρ_i, ρ_{ij} los vectores $(-b_i,a_i)$, $(-b_{ij},a_{ij})$ cuyas direcciones son, respectivamente, las de r_i, r_{ij} y

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_i} = -b_i \frac{\partial f}{\partial x} + a_i \frac{\partial f}{\partial y}$$

(4.4)

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_{ij}} = -b_{ij} \frac{\partial f}{\partial x} + a_{ij} \frac{\partial f}{\partial y}$$

<u>DEFINICION 4.2.</u>- Sea S un sistema de Hermite en R^2. Llamaremos base princ pal B(S) asociada a S al conjunto de poli-

nomios

$$\psi_{ij} = r_0 \cdots r_{i-1} \cdot r_{i0} \cdots r_{ij-1}, \quad (i,j) \in I \tag{4.5}$$

en donde entenderemos que $r_{-1} \equiv r_{i,-1} \equiv 1$. Notaremos por $\overline{B(S)}$ al espacio vectorial de los polinomios engendrado por $B(S)$.

DEFINICION 4.3.- Definimos el conjunto de datos $L(S)$ asociado al sistema S como el conjunto de formas lineales L_{ij}, $(i,j) \in I$ definidas por

$$L_{ij}(f) = \left. \frac{\partial^{s+t_1+t_2} f}{\partial \rho_{ij}^{s} \, \partial \rho_i^{t_1+t_2}} \right|_{P_{ij}} \tag{4.6}$$

donde

s es el número de rectas entre $\{r_0, \ldots, r_{i-1}\}$ que coinciden con r_i, si $i > 0$; $s=0$, si $i=0$.

t_1 es el número de rectas entre $\{r_{i0}, \ldots, r_{ij-1}\}$ que contienen a P_{ij}, si $j > 0$; $t_1=0$, si $j=0$.

t_2 es el número de rectas entre $\{r_0, \ldots, r_{i-1}\}$ que no coinciden con r_i pero que contienen a P_{ij}, si $i > 0$; $t_2=0$ si $i=0$.

Con estas formas lineales, construiremos un problema de interpolación unisolvente en $\overline{B(S)}$. Además podemos ver que si existen dos ó más rectas r_i, r_k, $k < i$ que coinciden, entonces aparece un dato derivada en la dirección

ρ_{ij} y que si las rectas r_{ik}, con $k<j$, pasan por P_{ij} y las rectas r_k, con $k<i$, no coinciden con r_i pero pasan por aquel punto, entonces aparece un dato derivada en la dirección ρ_i.

<u>DEFINICION 4.4.</u>- Llamaremos problema de interpolación $P(S)$ asociado a S al siguiente problema:

Hallar $p \in \overline{B(S)}$ tal que

$$L_{ij}(p) = z_{ij}, \quad \forall (i,j) \in I \tag{4.7}$$

donde $\{z_{ij}\}$, $(i,j) \in I$ es un conjunto de números reales dados arbitrariamente.

<u>TEOREMA 4.1.</u>- Si L_{ij} y ψ_{ij} están definidas como anteriormente

$$L_{ij}(\psi_{ij}) \neq 0 \text{ y } L_{ij}(\psi_{hk}) = 0, \text{ si } (i,j) < (h,k) \tag{4.8}$$

<u>Corolario 1.</u> Los elementos de $B(S)$ son linealmente independientes.

<u>Corolario 2.</u> El problema $P(S)$ es unisolvente.

La demostración puede verse en [14] ó en [34].

b) Construcción del polinomio de interpolación.

Sea S el sistema considerado en la definición 4.1 y consideremos el problema asociado $P(S)$. El hecho de que la matríz $(L_{ij}(\psi_{hk}))$ sea triangular nos permite obtener el polinomio de interpolación de una manera simple por recurrencia.

Escribiendo $p(x,y)$ como

(4.9) $$p(x,y) = \sum_{(i,j) \in I} a_{ij} \cdot r_0 \cdots r_{i-1} \cdot r_{i0} \cdots r_{ij-1}$$

con el orden establecido en I, y poniendo para $(h,k) \in I$,

(4.10) $$q_{hk} = \sum_{\substack{(i,j) \in I \\ (i,j) \leq (h,k)}} a_{ij} \cdot r_0 \cdots r_{i-1} \cdot r_{i0} \cdots r_{ij-1}$$

de (4.8) obtenemos

$$L_{ij}(p) = L_{ij}(q_{hk}), \qquad \forall (i,j) < (h,k)$$

$$L_{hk}(p) = L_{hk}(q_{hk})$$

y

(4.11) $$p = q_{nm(n)}$$

Claramente se tiene $q_{00}=a_{00}=z_{00}=p(P_{00})$ y con la ordenación anterior, cuando q_{hk} ha sido calculado, pasamos a q_{hk+1} si $k<m(h)$ ó a q_{h+10} si $k = m(h)$. Se obtiene, respectivamente,

(4.12) $$q_{hk+1} = q_{hk} + a_{hk+1} r_0 \cdots r_{h-1} r_{h0} \cdots r_{hk}$$

ó

(4.13) $$q_{h+10} = q_{hk} + a_{h+10} \cdot r_0 \cdots r_h$$

y entonces las relaciones

$$L_{hk+1}(q_{hk+1}) = L_{hk+1}(p) = z_{hk+1}$$

ó

$$L_{h+10}(q_{h+10}) = L_{h+10}(p) = z_{h+10}$$

conducen a

$$a_{hk+1} = \frac{z_{hk+1} - L_{hk+1}(q_{hk})}{L_{hk+1}(r_0 \cdot\cdot r_{h-1} r_{h0} \cdot\cdot r_{hk})} \qquad (4.14)$$

ó

$$a_{h+10} = \frac{z_{h+10} - L_{h+10}(q_{hk})}{L_{h+10}(r_0 \cdots r_h)} \qquad (4.15)$$

Los denominadores de (4.14) ó de (4.15) son no nulos por (4.5) y (4.8) y fáciles de calcular.

c) Un caso particular: interpolación de Lagrange.

Diremos que el sistema S de la definición 4.1 es un sistema de Lagrange, si se verifica la siguiente condición:

$\forall (i,j) \in I$ la intersección P_{ij} de r_i con r_{ij}, con $i+j \neq 0$, no pertenece a ninguna de las rectas $r_0, \ldots, r_{i-1}, r_{i0}, \ldots, r_{ij-1}$.

Es evidente que en este caso se tiene $s=t_1=$ $=t_2=0$ en la definición 4.3, y por tanto cada L_{ij} es de la forma

$$L_{ij}(f) = f(P_{ij})$$

dando lugar al problema de interpolación de Lagrange para los puntos P_{ij}. Bajo estas circunstancias la obtención de a_{ij} a partir de (4.14) ó de (4.15) es bastante sencilla.

d) Sistemas de orden N

Con frecuencia en la práctica es interesante que $B(S) = P_N(x,y)$, espacio de polinomios en "x" e "y" de grado no mayor que N. Con la formulación que acabamos de ver las relaciones

$$(4.16) \qquad \left| \begin{array}{l} m(i) = N-i \\ \quad n = N \end{array} \right.$$

son necesarias y suficientes para obtener como espacio de interpolación $P_N(x,y)$.

A aquellos sistemas que verifican (4.16) los llamaremos sistemas de orden N.

Las relaciones (4.16) nos ponen de manifiesto una disposición de los datos como sigue:

N+1 de ellos sobre r_0, N en r_1,...,uno en r_N.

Esto vale tanto para problemas de Lagrange como de Hermite y es ésta principalmente la situación que aludiremos en los ejemplos.

Lo expuesto en esta sección ha sido generalizado últimamente en [43], permitiendo la construcción de otros espacios, no necesariamente polinomiales, y la resolución de problemas no resueltos en [34], pero para nuestros efectos es suficiente seguir las líneas de este último.

2.-EJEMPLOS DE APLICACION DE LA FORMULA GENERAL A LA INTERPOLACION DE LAGRANGE

Por simplicidad en la exposición y en los cálculos nos vamos a centrar en el caso de interpolación en dos variables independientes x e y. De forma similar sucedería en más de dos variables.

Una particularización de la fórmula general a la interpolación multivariada lagrangiana consiste en lo siguiente: seguimos considerando un espacio W de funciones y un subespacio V de él de dimensión n+m, con $n,m \in N$. Sea

$$G_{n+m} = \{P_1, P_2, \ldots, P_{n+m}\} \subset R^2$$

un conjunto de n+m puntos distintos en el dominio de definición Ω de las funciones de W. Consideremos m+1 subconjuntos de G_{n+m} que notaremos por $G_{n,i}$, $i=1,\ldots,m+1$ tales que

$$\text{(4.17)} \qquad \begin{aligned} &\text{i)} \quad \mathrm{card}(G_{n,i} \cap G_{n,i+1}) = n-1, \quad i=1,\ldots,m \\ &\text{ii)} \quad \mathrm{card}(G_{n,i}) = n \\ &\text{iii)} \quad \bigcup_{i=1}^{m+1} G_{n,i} = G_{n+m} \end{aligned}$$

Si identificamos a la forma lineal sobre W

$$f \to f(P_i)$$

con el punto P_i, podemos identificar a los conjuntos $\mathcal{L}_{n+m}$, $\mathcal{L}_{n,i}$ de capítulos anteriores con los conjuntos G_{n+m}, $G_{n,i}$, respectivamente, con lo cual entendemos por ejemplo que

$$\det\begin{pmatrix}\phi_1,\dots,\phi_{n+m}\\ G_{n+m}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\phi_1,\dots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}\phi_1(P_1) & \phi_2(P_1)\dots\dots & \phi_{n+m}(P_1)\\ \phi_1(P_2) & \phi_2(P_2)\dots\dots & \phi_{n+m}(P_2)\\ \dots & \dots\quad\dots & \dots\quad\dots\\ \phi_1(P_{n+m}) & \phi_2(P_{n+m})\dots\dots & \phi_{n+m}(P_{n+m})\end{vmatrix}$$

Supongamos pues que se tiene

$$\det\begin{pmatrix}\phi_1,\dots,\phi_{n+m}\\ G_{n+m}\end{pmatrix} \neq 0 \tag{4.18}$$

con $\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_{n+m} \in W$ y que

$$\det\begin{pmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ G_{n,i}\end{pmatrix} \neq 0, \quad \forall i \tag{4.19}$$

si

$$G=\{P \in \Omega \subset R^2 \;/\; \det\begin{pmatrix}\phi_1,\phi_2,\dots\dots,\phi_n\\ (G_{n,i}\cap G_{n,i+1})\cup\{P\}\end{pmatrix} \neq 0,\ i=1,\dots,m\}$$

y f es una función de W, entonces para todo $P=(x,y) \in G$ se pueden aplicar los resultados de los capítulos anteriores obteniéndose la fórmula

$$(4.20) \qquad pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+m}\\ G_{n+m}\end{bmatrix}(x,y)=\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i(x,y).pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ G_{n,i}\end{bmatrix}(x,y)$$

como una particularización de (3.5) siendo los $\lambda_i(x,y)$, $i=1,\ldots,m+1$ solución del sistema (3.3).

Si los puntos sòn tales que

$$G_{n,1}\cap G_{n,2} = G_{n,2}\cap G_{n,3}=\ldots\ldots$$

ó lo que es lo mismo, que $G_{n,i}\cap G_{n,i+i}$ son n-1 puntos fijos para $i=1,2,\ldots,m$, la fórmula puede llamarse fórmula de interpolación de Aitken generalizada.

Si se verificara que

$$G_{n,1}\cap G_{n,2} = \{P_1,P_2,\ldots,P_{n-1}\}$$
$$G_{n,2}\cap G_{n,3} = \{P_2,P_3,\ldots,P_n\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$G_{n,i}\cap G_{n,i+1} = \{P_i,P_{i+1},\ldots,P_{i+n-2}\},\quad i=1,\ldots,m$$

entonces la fórmula puede ser llamada fórmula de interpolación de Neville generalizada, y en general la fórmula (4.20) podría ser llamada fórmula de Mühlbach-Aitken-Neville para varias variables.

En cuanto a la fórmula de Newton se puede expresar como

$$(4.21) \qquad pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+m}\\ G_{n+m}\end{bmatrix}(x,y)=pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ G_n\end{bmatrix}(x,y)+\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k.r\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ G_n\end{bmatrix}(x,y)$$

bajo las condiciones (4.18), (4.19) con $G_{n,i} = G_n$.

Como ejemplo vamos a ver la aplicación de la fórmula (4.20) a la construcción del polinomio de interpolación para seis datos lagrangianos no situados sobre una cónica utilizando como espacio de interpolación el engendrado por

$$\{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$$

En el capítulo II hemos visto, brevemente, un ejemplo sencillo de la aplicación del teorema 2.2 en donde podiamos escribir la expresión del polinomio de interpolación de grado dos de una función dada en seis puntos formando un simplex generalizado mediante cuatro interpolaciones con polinomios de grado uno que la interpolan en cuatro conjuntos distintos de tres puntos cada uno.

En general, si tenemos n puntos sobre una recta r_n, n-1 sobre otra recta r_{n-1}, de los cuales ninguno está en r_n, n-2 sobre otra recta, ninguno de ellos sobre r_n ni sobre r_{n-1} y así sucesivamente hasta r_1,(es decir tenemos un sistema de orden n-1), el problema de interpolación lagrangiana correspondiente es unisolvente en $P_{n-1}(x,y)$, todo ello de acuerdo con lo expuesto en la sección 1 de este capítulo.

Si tomamos los puntos citados sobre las rectas $r_2,\dots,r_{n-1}$ y el de r_1, tenemos un problema unisolvente en $P_{n-2}(x,y)$ y análogamente con los de $r_2,\dots,r_{n-1}$ y cada uno de los de r_n. Podemos aplicar el teorema 2.2 para obtener la solución del problema en $P_{n-1}(x,y)$ a partir de los n+1 problemas en $P_{n-2}(x,y)$, y así sucesivamente, resultando un algoritmo de Aitken-Neville para este problema; concretamente con nuestra elección tenemos un algoritmo de Aitken.

Para seis puntos, tomemos en (4.20) n=3 y m=3; así llegamos a la fórmula (tipo Aitken)

$$\text{pf}\begin{bmatrix} 1, x, y, x^2, xy, y^2 \\ P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 \end{bmatrix}(x,y) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i(x,y) . \text{pf}\begin{bmatrix} 1, x, y \\ G_{3,i} \end{bmatrix}(x,y) \tag{4.22}$$

En la figura 4.1 puede verse cómo se pueden elegir los $G_{3,i}$.

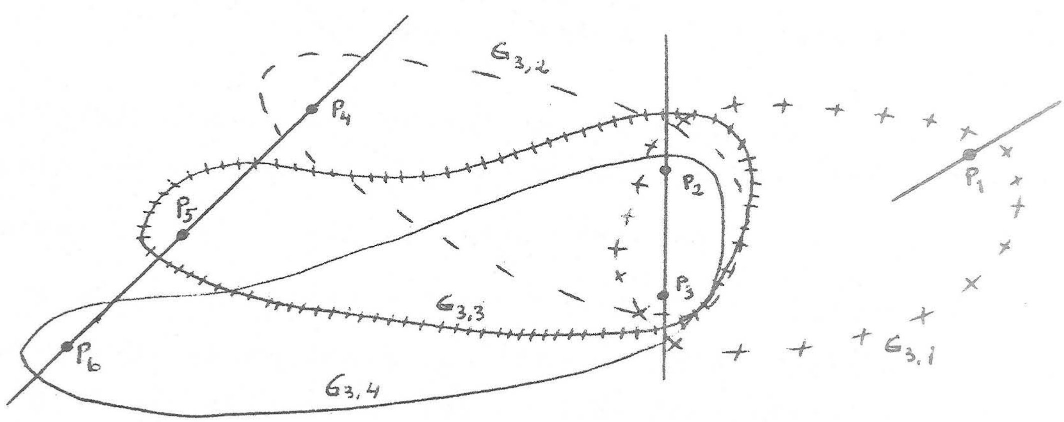


Fig. 4.1

En esta primera posibilidad los dos puntos comunes a los $G_{3,i}$ no están alineados con ningún otro. Si los puntos están situados como en la figura 4.2, hay posibilidad de renumerarlos y elegir los $G_{3,i}$ como antes, pero también es válida una elección como la indicada en la misma figura

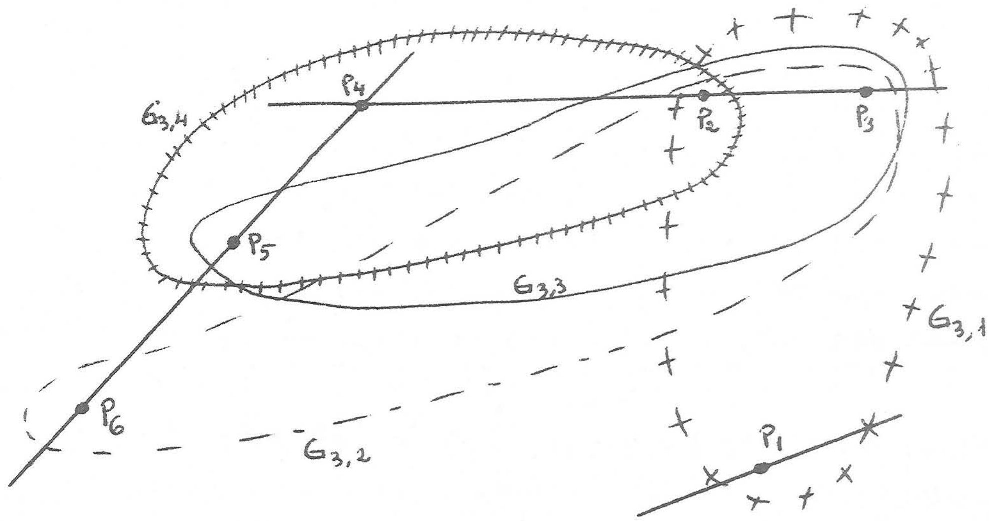


Fig. 4.2

En esta segunda oportunidad se tiene un caso intermedio entre los casos de Aitken y de Neville, ya que no mantenemos fija la intersección de los $G_{3,i}$.

También se pueden elegir los $G_{3,i}$ de manera que den lugar al algoritmo de Neville, en cualquiera de los casos anteriores. Así, en el primero podría ser

$$G_{3,1}=\{P_6,P_1,P_2\}\ ,\quad G_{3,2}=\{P_1,P_2,P_3\}$$

$$G_{3,3}=\{P_2,P_3,P_4\}\ ,\quad G_{3,4}=\{P_3,P_4,P_5\}$$

y en el segundo

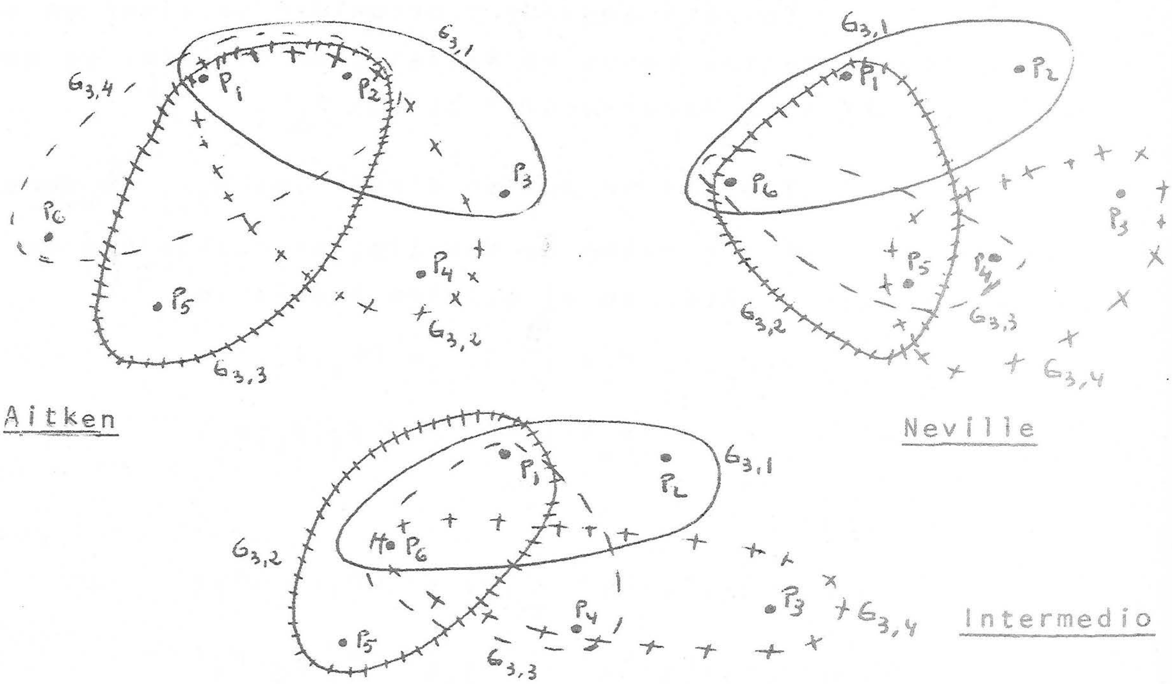
$$G_{3,1}=\{P_6,P_1,P_2\}\ ,\quad G_{3,2}=\{P_1,P_2,P_3\}$$

$$G_{3,3}=\{P_2,P_3,P_5\}\ ,\quad G_{3,4}=\{P_3,P_5,P_4\}$$

Si tres de los puntos están alineados, los otros tres no lo pueden estar ya que si fuera así los seis estarían en una cónica y el problema de interpolación no tendría solución ó no sería única. Por tanto considerado ya el caso de tres puntos alineados veamos ahora qué puede hacerse cuando no existen tales tres puntos alineados entre los seis dados. En este caso basta elegir como fijos dos cualesquiera de los puntos, ya que unidos sucesivamente con cada uno de los restantes verificarán que el

$$\det \begin{pmatrix} 1, & x, & y \\ P_1, & P_2, & P_j \end{pmatrix} \neq 0, \quad j = 3,4,5,6.$$

Así estaríamos en el caso del algoritmo de Aitken, siendo igualmente posible obtener el de Neville y cualquier otro intermedio, como se muestra gráficamente en la siguiente figura.



Aitken

Neville

Intermedio

Fig. 4.3

Para el caso de un número de puntos mayor que seis, las posibilidades son ya muy numerosas, siendo la más simple la que hemos indicado anteriormente de n puntos situados sobre una recta, n-1 en otra, etc.

EJEMPLO 4.1

Dados los puntos de R^2

$$\{P_1=(0,1),\ P_2=(0,2),\ P_3=(1,0),\ P_4=(1,1),\ P_5=(2,0),\ P_6=(0,0)\}$$

y la función $f(x,y) = x^2-y$, queremos obtener el polinomio que la interpola en dichos puntos siguiendo el proceso de Neville generalizado en el espacio $P_2(x,y)$.

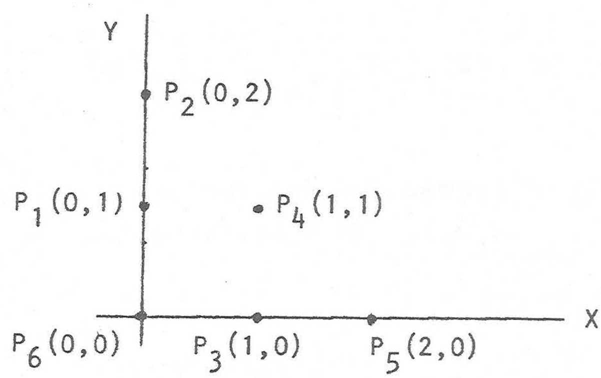


Fig. 4.4

$$n = 3 = m$$
$$G_6 = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$$
$$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\} = \{1, x, y\}$$
$$\{\phi_1, \dots, \phi_6\} = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$$

Los valores de la función sobre los puntos dados son
$f(P_1)=-1$, $f(P_2)=-2$, $f(P_3)=1$, $f(P_4)=0$, $f(P_5)=4$, $f(P_6)=0$.

Vamos a efectuar cuatro interpolaciones con polinomios de grado uno en cuatro conjuntos distintos de tres puntos cada uno. El polinomio de interpolación será, por tanto, del tipo $a + bx + cy$ sometido a las condiciones de interpolación

$$a + bx_1 + cy_1 = f(P_1)$$
$$a + bx_2 + cy_2 = f(P_2)$$
$$a + bx_3 + cy_3 = f(P_3)$$

y por tanto se tiene:

$$pf\begin{bmatrix} 1, & x, & y \\ P_1, & P_2, & P_3 \end{bmatrix}(x,y) = x-y \quad ; \quad pf\begin{bmatrix} 1, & x, & y \\ P_2, & P_3, & P_4 \end{bmatrix}(x,y) = x-y$$

$$pf\begin{bmatrix} 1, & x, & y \\ P_3, & P_4, & P_5 \end{bmatrix}(x,y) = 3x-y-2 \quad ; \quad pf\begin{bmatrix} 1, & x, & y \\ P_4, & P_5, & P_6 \end{bmatrix}(x,y) = 2(x-y)$$

Teniendo en cuenta la observación del teorema 2.1 aplicamos

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \lambda_i(x,y) = 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \lambda_i(x,y) \,.\, r\phi_j\begin{bmatrix} \phi_1, \phi_2, \phi_3 \\ G_{3,i} \end{bmatrix}(x,y) = 0, \quad j=4,5,6' \end{cases}$$

Resulta así

$$r\phi_4\begin{bmatrix} 1, & x, & y \\ P_1, & P_2, & P_3 \end{bmatrix}(x,y) = x^2 - px^2\begin{bmatrix} 1, & x, & y \\ P_1, & P_2, & P_3 \end{bmatrix}(x,y) = x^2 - x$$

$$r\phi_4\begin{bmatrix}1, & x, & y\\ P_2, & P_3, & P_4\end{bmatrix}(x,y) = x^2-px^2\begin{bmatrix}1, & x, & y\\ P_2, & P_3, & P_4\end{bmatrix}(x,y) = x^2-x$$

$$r\phi_4\begin{bmatrix}1, & x, & y\\ P_3, & P_4, & P_5\end{bmatrix}(x,y) = x^2-px^2\begin{bmatrix}1, & x, & y\\ P_3, & P_4, & P_5\end{bmatrix}(x,y) = x^2-3x+2$$

$$r\phi_4\begin{bmatrix}1, & x, & y\\ P_4, & P_5, & P_6\end{bmatrix}(x,y) = x^2-px^2\begin{bmatrix}1, & x, & y\\ P_4, & P_5, & P_6\end{bmatrix}(x,y) = x^2-2x+y$$

Análogamente, tendremos:

$$r\phi_5\begin{bmatrix}1, & x, & y\\ P_1, & P_2, & P_3\end{bmatrix}(x,y) = xy \quad , \quad r\phi_5\begin{bmatrix}1, & x, & y\\ P_2, & P_3, & P_4\end{bmatrix}(x,y) = xy-2x-y+2$$

$$r\phi_5\begin{bmatrix}1, & x, & y\\ P_3, & P_4, & P_5\end{bmatrix}(x,y) = xy-y \quad , \quad r\phi_5\begin{bmatrix}1, & x, & y\\ P_4, & P_5, & P_6\end{bmatrix}(x,y) = xy-y$$

$$r\phi_6\begin{bmatrix}1, & x, & y\\ P_1, & P_2, & P_3\end{bmatrix}(x,y)=y^2-3y-2x+2, \quad r\phi_6\begin{bmatrix}1, & x, & y\\ P_2, & P_3, & P_4\end{bmatrix}(x,y)=y^2-y+2x-2$$

$$r\phi_6\begin{bmatrix}1, & x, & y\\ P_3, & P_4, & P_5\end{bmatrix}(x,y) = y^2-y \quad , \quad r\phi_6\begin{bmatrix}1, & x, & y\\ P_4, & P_5, & P_6\end{bmatrix}(x,y) = y^2-y$$

El determinante asociado es

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ x^2-x & x^2-x & x^2-3x+2 & x^2-2x+y\\ xy & xy-2x-y+2 & xy-y & xy-y\\ y^2-3y-2x+2 & y^2-y+2x-2 & y^2-y & y^2-y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x-y & x-y & -x-y+2 & x^2-2x+y \\ y & -2x+2 & 0 & xy-y \\ -2y-2x+2 & 2x-2 & 0 & y^2-y \end{vmatrix} =$$

$$= -2(x+y-2)(x-1)(2x+y-2)$$

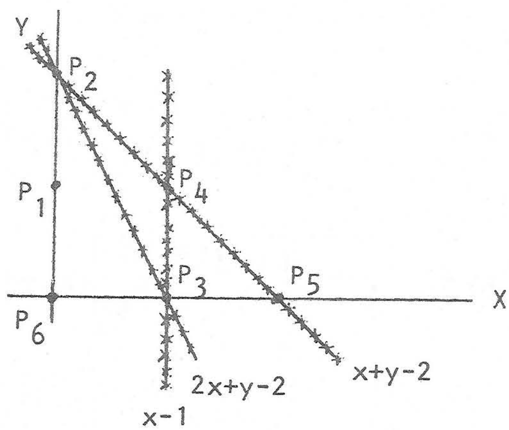


Fig. 4.5

El conjunto G queda determinado al eliminar de R^2 las tres rectas indicadas en la figura 4.5, en donde es $D(x,y) = 0$. Se tiene así:

$$\lambda_1(x,y) = \frac{y^2+xy-2y}{2x+y-2}$$

$$\lambda_2(x,y) = \frac{y^3-3y^2+2xy^2+2x^2y-4xy+2y}{2(x-1)(2x+y-2)}$$

$$\lambda_3(x,y) = \frac{2x^3-y^3-6x^2+4x+3y^2-xy-xy^2-2y+2x^2y}{2(x-1)(x+y-2)}$$

$$\lambda_4(x,y)=\frac{x^2+y^2+2xy-3x-3y+2}{x+y-2}$$

El polinomio de interpolación buscado es

$$pf\begin{bmatrix}1,x,y,x^2,xy,y^2\\ G_6\end{bmatrix}(x,y)=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i(x,y)\,.\,pf\begin{bmatrix}1,x,y\\ G_{3,i}\end{bmatrix}(x,y),$$

siendo $G_{3,i}=\{P_i,P_{i+1},P_{i+2}\}$, $i=1,2,3,4$.

Sustituyendo las $\lambda_i(x,y)$ y los $pf\begin{bmatrix}1,x,y\\ G_{3,i}\end{bmatrix}(x,y)$ y simplificando queda:

$$pf\begin{bmatrix}1,x,y,x^2,xy,y^2\\ G_6\end{bmatrix}(x,y) = x^2-y$$

EJEMPLO 4.2

Dada la función $f(x,y) = x^2-y$ y los puntos $\{P_1,P_2,\ldots,P_6\}$ del ejemplo 4.1, vamos a hallar su polinomio de interpolación en $\mathcal{P}_2(x,y)$ mediante el procedimiento de Newton. Tendríamos

$$n = m = 3$$

$$G_6=\{P_1,P_2,\ldots,P_6\}=\{(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(2,0),(0,0)\}$$

y por ejemplo $G_3=\{P_1,P_2,P_3\}=\{(0,1),(0,2),(1,0)\}$

El polinomio de interpolación en la forma de Newton se escribe:

$$pf\begin{bmatrix}1,x,y,x^2,xy,y^2\\ G_6\end{bmatrix}(x,y)=pf\begin{bmatrix}1,x,y\\ G_3\end{bmatrix}(x,y)+\sum_{k=4}^{6} a_k\cdot r\phi_k\begin{bmatrix}1,x,y\\ G_3\end{bmatrix}(x,y)$$

Inmediatamente se tiene:

$$pf\begin{bmatrix}1,x,y\\ G_3\end{bmatrix}(x,y) = x-y$$

Análogamente,

$$p\phi_4\begin{bmatrix}1,x,y\\ G_3\end{bmatrix}(x,y) = px^2\begin{bmatrix}1,x,y\\ G_3\end{bmatrix}(x,y) = x$$

$$p\phi_5\begin{bmatrix}1,x,y\\ G_3\end{bmatrix}(x,y) = pxy\begin{bmatrix}1,x,y\\ G_3\end{bmatrix}(x,y) = 0$$

$$p\phi_6\begin{bmatrix}1,x,y\\ G_3\end{bmatrix}(x,y) = py^2\begin{bmatrix}1,x,y\\ G_3\end{bmatrix}(x,y) = -2 + 2x + 3y$$

Luego,

$$pf\begin{bmatrix}1,x,y,x^2,xy,y^2\\ G_6\end{bmatrix}(x,y)=x-y+a_4(x^2-x)+a_5(xy-0)+$$
$$+a_6(y^2+2-2x-3y)$$

Para determinar a_4,a_5,a_6 resolvemos el sistema lineal

$$\sum_{k=4}^{6} a_k\cdot L_i(\phi_k-p\phi_k\begin{bmatrix}1,x,y\\ G_3\end{bmatrix}) = L_i(f-pf\begin{bmatrix}1,x,y\\ G_3\end{bmatrix}),\quad i=4,5,6$$

siendo

$$L_4(f) = f(1,1),\quad L_5(f) = f(2,0),\quad L_6(f) = f(0,0)$$

Operando se tiene

$$\begin{cases} 0.a_4 + a_5 - 2a_6 = 0 \\ 2.a_4 + 0.a_5 - 2a_6 = 2 \\ 0.a_4 + 0.a_5 + 2a_6 = 0 \end{cases}$$

con lo que la solución es

$$a_4 = 1, \ a_5 = 0 = a_6$$

Por tanto nos queda

$$pf\begin{bmatrix} 1,x,y,x^2,xy,y^2 \\ G_6 \end{bmatrix}(x,y) = x^2-y$$

3.-UN EJEMPLO DE APLICACION DE LA FORMULA A UN PROBLEMA DE INTERPOLACION DE HERMITE TIPICO EN LA TEORIA DE ELEMENTOS FINITOS

Pretendemos aplicar el método de Aitken-Neville dado por la fórmula (4.20) para resolver el problema expresado en la figura 4.6 adjunta (ó lo que es lo mismo, la 4.7). Es un problema de interpolación clásico en la teoría de elementos finitos, como puede verse en los trabajos de Ciarlet [7], Raviart [8], etc, sobre elementos finitos.

Se conoce sobradamente que hay existencia y unicidad de solución del problema de interpolación que determina en $P_3(x,y)$.

A efectos de notación indicaremos que, gráficamente, los datos de interpolación que son tomados en cada punto se representan por:

- • valor de la función en el punto.
- o derivada de primer orden.
- ↗ derivada en la dirección indicada.

Consideremos pues, el problema esquematizado en las figuras 4.6 ó 4.7.

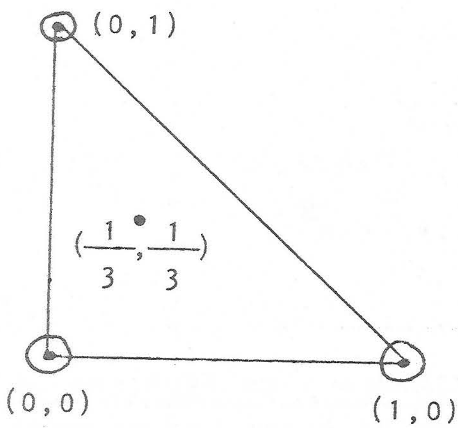


Fig. 4.6

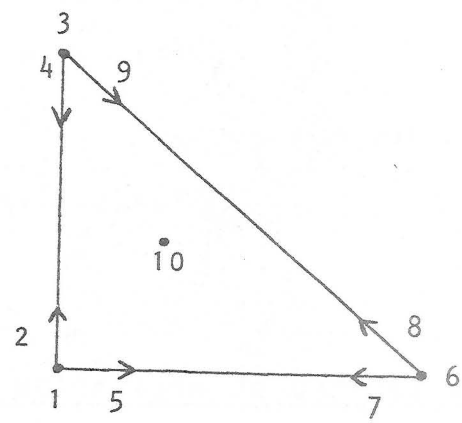


Fig. 4.7

Para fijar ideas, supongamos que queremos buscar el polinomio $p(x,y) \in P_3(x,y)$ que verifique los datos anteriores mediante interpolaciones en $P_2(x,y)$ eligiendo seis datos para los que haya unisolvencia. Hay que observar que en total tendremos que hacer $m+1$ interpolaciones en $P_2(x,y)$, donde $n+m = 10$, $n= 6$ y $m+1 = 5$. Para estar en condiciones de poder aplicar el teorema 2.2 hay,pues, que elegir cinco grupos de seis datos en la figura 4.7 tales que para todos haya unisolvencia en $P_2(x,y)$, que dos grupos consecutivos tengan $n-1$ datos comunes (en nuestro caso serían cinco) y que entre los cinco grupos abarquemos los diez datos de la figura.

Una posible elección de estos cinco grupos es:

$\mathcal{L}_{6,1} = \{1,2,3,5,6,10\}$

$\mathcal{L}_{6,2} = \{1,2,3,6,7,10\}$

$\mathcal{L}_{6,3} = \{1,2,3,6,7,8\}$

$\mathcal{L}_{6,4} = \{1,2,3,6,7,9\}$

$\mathcal{L}_{6,5} = \{1,2,4,6,7,9\}$

Evidentemente, su unión es el total de datos y la intersección de los $\mathcal{L}_{6,i}$, $i=1,2,\ldots,5$ es cinco datos. Necesitamos, para poder aplicar los resultados relativos a la fórmula de Mühlbach-Aitken-Neville en dos variables, la unisolvencia de estos datos en $P_2(x,y)$. Teniendo en cuenta lo dicho en la sección 1 de este capítulo, intentaremos ver si para cada grupo se puede construir un sistema de orden dos.

En efecto, esquemáticamente tenemos:

1°) $\mathcal{L}_{6,1} = \{1,2,3,5,6,10\}$

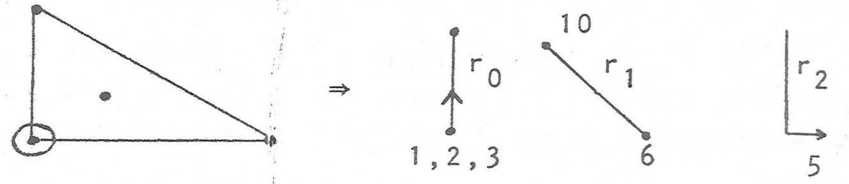


Fig. 4.8

2°) $\mathcal{L}_{6,2} = \{1,2,3,6,7,10\}$

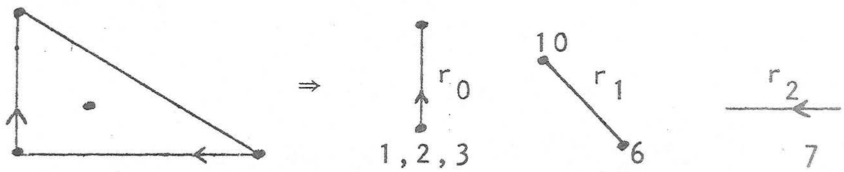


Fig. 4.9

3°) $\mathcal{L}_{6,3} = \{1,2,3,6,7,8\}$

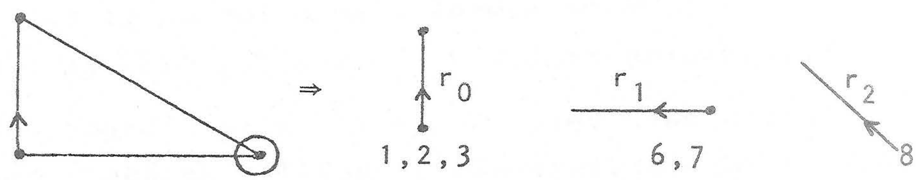


Fig. 4.10

4°) $\mathcal{L}_{6,4} = \{1,2,3,6,7,9\}$

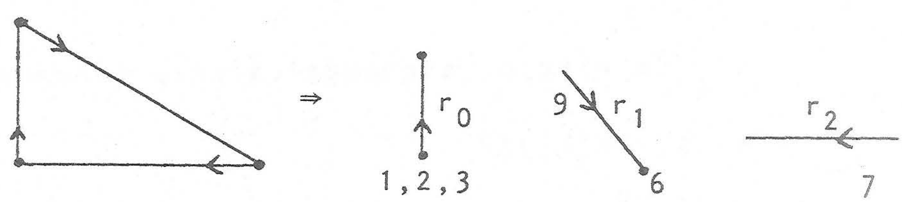


Fig. 4.11

5°) $\mathcal{L}_{6,5} = \{1,3,4,6,7,9\}$

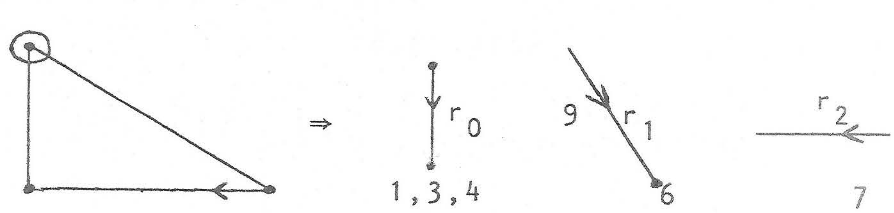


Fig. 4.12

En los cinco casos está garantizada, por tanto, la unisolvencia en $P_2(x,y)$.

Explicando un poco estos simbolismos, diremos por ejemplo que en el caso 1°), es decir al tomar $\mathcal{L}_{6,1}$, los datos son

$$\{f(0,0), f(0,1), f(1,0), f(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}), \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\}$$

Está garantizada la unisolvencia de este problema en $P_2(x,y)$, porque podemos construir un sistema de interpolación como los indicados en la sección 1 de este capítulo así: la recta r_0 pasa por (0,0) y (0,1) y sobre ella se toman los puntos (0,0), (0,0) (repetido) y (0,1). La recta r_1 es la que pasa por los puntos (1,0) y $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y sobre ella se toman los puntos (1,0) y $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Por último r_2 es la misma r_0 y sobre ella se toma el punto (0,0). Así se consigue un sistema de orden dos y los datos de interpolación son los de la figura 4.8 debido a la repitición de puntos y rectas.

En los otros casos los razonamientos son similares.

Pretendemos ahora reiterar el proceso, ésto es, si cada polinomio de $P_2(x,y)$ de los cinco anteriores podemos obtenerlo a partir de cuatro polinomios obtenidos en $P_1(x,y)$ con tres datos y después aplicar los resultados antes establecidos para obtener el correspondiente polinomio en $P_2(x,y)$ que interpola a los seis datos.

En efecto, cada problema $\mathcal{L}_{6,1}$ a $\mathcal{L}_{6,5}$ puede disociarse en otros cuatro, según se expresa en los siguientes esquemas:

1°) $\mathcal{L}_{6,1} = \{1,2,3,5,6,10\}$

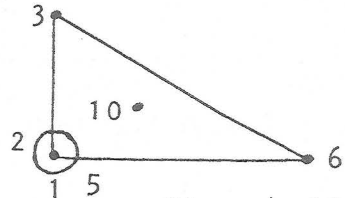
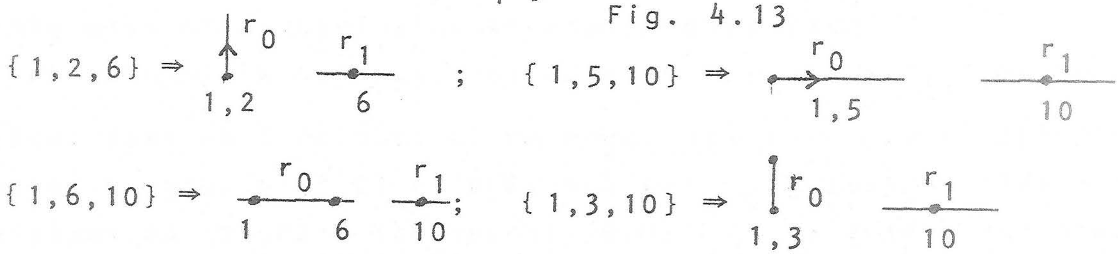


Fig. 4.13



2°) $\mathcal{L}_{6,2} = \{1,2,3,6,7,10\}$

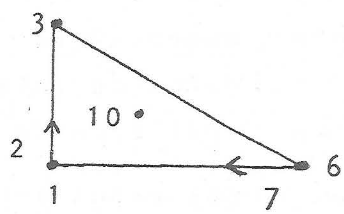
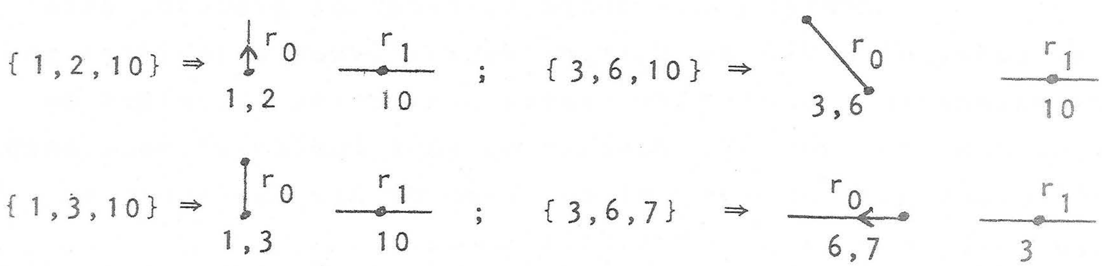


Fig. 4.14



3°) $\mathcal{L}_{6,3} = \{1,2,3,6,7,8\}$

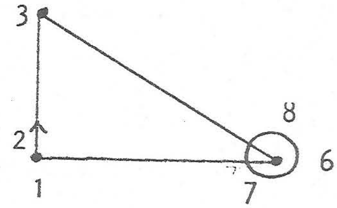
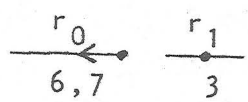
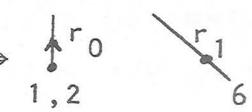
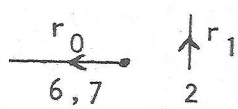


Fig. 4.15

$\{3,6,7\} \Rightarrow$ 

; $\{1,2,6\} \Rightarrow$ 

$\{2,6,7\} \Rightarrow$ 

; $\{1,6,8\} \Rightarrow$ 

4°) $\mathcal{L}_{6,4} = \{1,2,3,6,7,9\}$

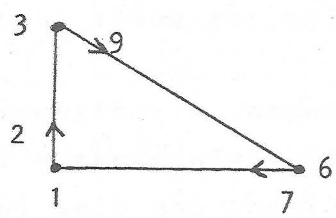
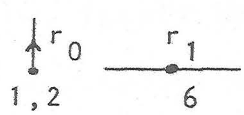
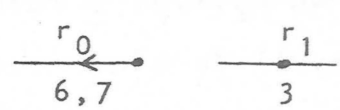
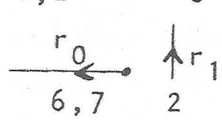


Fig. 4.16

$\{1,2,6\} \Rightarrow$ 

; $\{3,6,7\} \Rightarrow$ 

$\{2,6,7\} \Rightarrow$ 

; $\{3,7,9\} \Rightarrow$ 

5°) $\mathcal{L}_{6,5} = \{1,3,4,6,7,9\}$

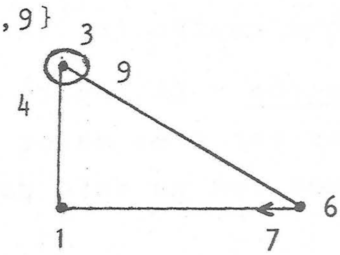
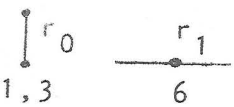
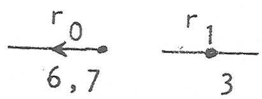
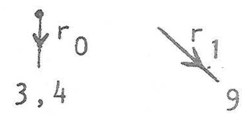


Fig.4.17

$\{1,3,6\} \Rightarrow$ 

; $\{3,4,6\} \Rightarrow$ 

$\{3,6,7\} \Rightarrow$ 

; $\{3,4,9\} \Rightarrow$ 

Explicando un poco también el primer esquema como ejemplo, consideremos el caso $\{1,2,6\}$; basta tomar una recta r_0 que pase por el punto $(0,0)$ y sobre ella los puntos $(0,0)$, $(0,0)$ y otra distinta r_1 que pase por el punto $(1,0)$ con lo que tenemos dos datos en una recta y otro en otra recta distinta, es decir, tenemos un sistema de orden uno y está garantizada la unisolvencia en $P_1(x,y)$. De forma análoga se harían los demás casos.

En resumen, el polinomio de interpolación del problema total que daría lugar a la resolución de un sistema de diez ecuaciones con diez incógnitas se obtiene a partir de cinco problemas de interpolación con seis datos en $P_2(x,y)$ y resolviendo un sistema lineal (el de las $\lambda_i(x,y)$) de cinco ecuaciones con cinco incógnitas. A su vez, cada uno de estos cinco problemas más simples pueden resolverse a partir de cuatro problemas de interpolación con tres datos en $P_1(x,y)$ y resolviendo un sistema lineal de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

<u>Observación</u>.- Es lógico preguntarse si a su vez todos los problemas con tres datos pueden obtenerse a partir de tres problemas con <u>un</u> solo dato y luego resolver

un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas. La respuesta es negativa dado que por el proceso descrito en la sección 1 de este capítulo es imposible resolver problemas tan simples como aquel en que como único dato se da $\{\frac{\partial f}{\partial x}(P)\}$, por ejemplo, y datos de este tipo aparecen al intentar descomponer los problemas de interpolación con tres datos en tres problemas con un dato. No obstante esta cuestión se resuelve en el trabajo de Ramirez [43] que generaliza a [34].

Como se ve el procedimiento resulta largo, pero no presenta dificultad.

Veamos un ejemplo concreto:

Datos:

$$\{f(0,0),\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\ f(0,1),\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,1),\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0), f(1,0),\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,0),$$

$$(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})f(1,0),\ (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})f(0,1),\ f(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3})\} = \{0,0,-1,-3,0,1,3,3,3,0\}$$

Llamando $\mathcal{L}_{10} = \{1,2,\dots,9,10\}$ y considerando los anteriores $\mathcal{L}_{6,i}$, $i=1,\dots,5$ resultan cinco problemas cuya resolución es muy simple, obteniéndose:

(4.23) $$pf\begin{bmatrix} 1,x,y,x^2,xy,y^2 \\ \mathcal{L}_{6,1} \end{bmatrix}(x,y) = x^2-y^2$$

(4.24) $$pf\begin{bmatrix} 1,x,y,x^2,xy,y^2 \\ \mathcal{L}_{6,2} \end{bmatrix}(x,y) = -x+2x^2+2xy-y^2$$

$$(4.25)\qquad pf\begin{bmatrix} 1,x,y,x^2,xy,y^2 \\ \mathcal{L}_{6,3} \end{bmatrix}(x,y) = -x+2x^2-y^2$$

$$(4.26)\qquad pf\begin{bmatrix} 1,x,y,x^2,xy,y^2 \\ \mathcal{L}_{6,4} \end{bmatrix}(x,y) = -x+2x^2+2xy-y^2$$

$$(4.27)\qquad pf\begin{bmatrix} 1,x,y,x^2,xy,y^2 \\ \mathcal{L}_{6,5} \end{bmatrix}(x,y) = -x+y+2x^2+xy-2y^2$$

Las $\lambda_1(x,y),\dots,\lambda_5(x,y)$ de (3.3) son las soluciones del sistema siguiente (teniendo en cuenta la observación del teorema 2.1):

$$(4.28)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{5} \lambda_i(x,y) = 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{5} \lambda_i(x,y).\alpha_{ji} = 0, \quad j=1,\dots,4 \end{cases}$$

siendo

$$\alpha_{ji} = r\phi_{n+j}\begin{bmatrix} \phi_1,\dots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{bmatrix}, \quad n=6.$$

$$\alpha_{11}=x^3-px^3\begin{bmatrix} 1,x,\dots,y^2 \\ \mathcal{L}_{6,1} \end{bmatrix}(x,y) = x^3-x^2+\frac{2}{3}xy$$

$$\alpha_{12}=x^3-px^3\begin{bmatrix} 1,x,\dots,y^2 \\ \mathcal{L}_{6,2} \end{bmatrix}(x,y) = x^3+x-2x^2-\frac{4}{3}xy$$

$$\alpha_{13}=x^3-px^3\begin{bmatrix} 1,x,\dots,y^2 \\ \mathcal{L}_{6,3} \end{bmatrix}(x,y) = x^3+x-2x^2$$

$$\alpha_{14}=x^3-px^3\begin{bmatrix}1,x,\ldots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,4}\end{bmatrix}(x,y) = x^3+x-2x^2-xy$$

$$\alpha_{15}=x^3-px^3\begin{bmatrix}1,x,\ldots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,5}\end{bmatrix}(x,y) = x^3+x-2x^2-xy$$

$$\alpha_{21}=x^2y-px^2y\begin{bmatrix}1,x,\ldots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,1}\end{bmatrix}(x,y) = x^2y-\frac{1}{3}xy$$

$$\alpha_{22}=x^2y-px^2y\begin{bmatrix}1,x,\ldots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,2}\end{bmatrix}(x,y) = x^2y-\frac{1}{3}xy$$

$$\alpha_{23}=x^2y-px^2y\begin{bmatrix}1,x,\ldots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,3}\end{bmatrix}(x,y) = x^2y-xy$$

$$\alpha_{24}=x^2y-px^2y\begin{bmatrix}1,x,\ldots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,4}\end{bmatrix}(x,y) = x^2y$$

$$\alpha_{25}=x^2y-px^2y\begin{bmatrix}1,x,\ldots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,5}\end{bmatrix}(x,y) = x^2y$$

$$\alpha_{31}=xy^2-pxy^2\begin{bmatrix}1,x,\ldots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,1}\end{bmatrix}(x,y) = xy^2-\frac{1}{3}xy$$

$$\alpha_{32}=xy^2-pxy^2\begin{bmatrix}1,x,\ldots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,2}\end{bmatrix}(x,y) = xy^2-\frac{1}{3}xy$$

$$\alpha_{33}=xy^2-pxy^2\begin{bmatrix}1,x,\ldots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,3}\end{bmatrix}(x,y) = xy^2$$

$$\alpha_{34}=xy^2-pxy^2\begin{bmatrix}1,x,\ldots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,4}\end{bmatrix}(x,y) = xy^2-xy$$

$$\alpha_{35}=xy^2-pxy^2\begin{bmatrix}1,x,\ldots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,5}\end{bmatrix}(x,y) = xy^2-xy$$

$$\alpha_{41}=y^3-py^3\begin{bmatrix}1,x,\dots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,1}\end{bmatrix}(x,y) = y^3-y^2+\frac{2}{3}xy$$

$$\alpha_{42}=y^3-py^3\begin{bmatrix}1,x,\dots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,2}\end{bmatrix}(x,y) = y^3-y^2+\frac{2}{3}xy$$

$$\alpha_{43}=y^3-py^3\begin{bmatrix}1,x,\dots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,3}\end{bmatrix}(x,y) = y^3-y^2$$

$$\alpha_{44}=y^3-py^3\begin{bmatrix}1,x,\dots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,4}\end{bmatrix}(x,y) = y^3-y^2+xy$$

$$\alpha_{45}=y^3-py^3\begin{bmatrix}1,x,\dots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,5}\end{bmatrix}(x,y) = y^3+y-2y^2$$

Llamando D al determinante de coeficientes del sistema (4.28) resulta ser

$$D = -\frac{(x+2y-1)x^3y^3(1-x-y)}{3}$$

y

$$\lambda_1(x,y)=\frac{1}{3D}\,(x+y-1)x^3y^3(x+2y-1)(1-x-y)= -(x+y-1)$$

$$\lambda_2(x,y)=\frac{1}{3D}\,2(x+y-1)x^3y^3(x+2y-1)(1-x-y) = -2(x+y-1)$$

$$\lambda_3(x,y)=\frac{1}{3D}\,x^3y^3(x+2y-1)(y-1+2x)(x+y-1) = 2x+y-1$$

$$\lambda_4(x,y)=\frac{1}{3D}\,x^3y^3(1-x-2y)(y+2x-1)(1-x-y) = 2x+y-1$$

$$\lambda_5(x,y)=\frac{1}{3D}\,x^3y^3(x+2y-1)(1-x-y)(x-y) = y-x$$

Por lo tanto el polinomio de interpolación buscado sería:

$$p(x,y) = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i(x,y).pf\begin{bmatrix} 1,x,y,x^2,xy,y^2 \\ \mathcal{L}_{6,i} \end{bmatrix}(x,y) = x^3 - y^3$$

También, a su vez, podríamos haber calculado los polinomios (4.23) a (4.27) y los α_{ji}, $j=1,\ldots,4$, $i=1,\ldots,5$, a través de los de grado uno mediante los esquemas que hemos visto,etc.

Utilización de la fórmula de Newton.

Si quisiéramos resolver el mismo problema mediante la fórmula de Newton (4.21), tomaríamos unos de los cinco $\mathcal{L}_{6,i}$ para los que había unisolvencia del problema inicial.

Sea éste $\mathcal{L}_{6,1} = \{1,2,3,5,6,10\}$. Entonces tendríamos, por ejemplo

$$pf\begin{bmatrix} 1,x,\ldots,xy^2,y^3 \\ \mathcal{L}_{10} \end{bmatrix}(x,y)=pf\begin{bmatrix} 1,x,\ldots,y^2 \\ \mathcal{L}_{6,1} \end{bmatrix}(x,y)+\sum_{k=7}^{10} a_k \cdot r\phi_k\begin{bmatrix} 1,x,\ldots,y^2 \\ \mathcal{L}_{6,1} \end{bmatrix}(x,y)$$

Ya hemos calculado

$$pf\begin{bmatrix} 1,x,\ldots,y^2 \\ \mathcal{L}_{6,1} \end{bmatrix}(x,y) = x^2-y^2,$$

y por otra parte se tiene

$$r\phi_7\begin{bmatrix} 1,x,\ldots,y^2 \\ \mathcal{L}_{6,1} \end{bmatrix}(x,y)=x^3-px^3\begin{bmatrix} 1,x,\ldots,y^2 \\ \mathcal{L}_{6,1} \end{bmatrix}(x,y) = x^3-x^2+\frac{2}{3}xy$$

$$r\phi_8\begin{bmatrix}1,x,\ldots,y^2\\ \mathcal{L}_{61}\end{bmatrix}(x,y)=x^2y-px^2y\begin{bmatrix}1,x,\ldots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,1}\end{bmatrix}(x,y)= x^2y-\frac{1}{3}xy$$

$$r\phi_9\begin{bmatrix}1,x,\ldots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,1}\end{bmatrix}(x,y)=xy^2-pxy^2\begin{bmatrix}1,x,\ldots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,1}\end{bmatrix}(x,y)= xy^2-\frac{1}{3}xy$$

$$r\phi_{10}\begin{bmatrix}1,x,\ldots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,1}\end{bmatrix}(x,y)=y^3-py^3\begin{bmatrix}1,x,\ldots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,1}\end{bmatrix}(x,y)= y^3-y^2+\frac{2}{3}xy.$$

Para determinar los a_k resolvemos el sistema lineal

$$\sum_{k=7}^{10} a_k . L_i(\phi_k-p\phi_k\begin{bmatrix}1,x,\ldots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,1}\end{bmatrix}) = L_i(f-pf\begin{bmatrix}1,x,\ldots,y^2\\ \mathcal{L}_{6,1}\end{bmatrix})$$

$$i=4,7,8,9$$

siendo

$$L_4(f) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)= -3, \qquad L_7(f) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 3$$

$$L_8(f) =(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})f(1,0)= 3, \quad L_9(f) =(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})f(0,1)= 3$$

Sustituyendo y operando, llegamos al sistema:

$$\begin{cases} 0.a_7+0.a_8+0.a_9+1.a_{10} = -3+2 = -1 \\ 1.a_7+0.a_8+0.a_9+0.a_{10} = 3-2 = 1 \\ \frac{1}{3}.a_7-\frac{2}{3}a_8+\frac{1}{3}a_9-\frac{2}{3}a_{10} = 3-2 = 1 \\ \frac{2}{3}.a_7-\frac{1}{3}a_8+\frac{2}{3}a_9-\frac{1}{3}a_{10} = 3-2 = 1 \end{cases}$$

que da inmediatamente

$$a_7 = 1, \; a_8 = 0 = a_9, \; a_{10}= -1$$

Luego nos queda

$$p(x,y)=pf\left[\begin{matrix}1,x,\ldots,xy^2,y^3\\ \mathcal{L}_{10}\end{matrix}\right](x,y)= x^2-y^2+(x^3-x^2+\frac{2}{3}xy)-(y^3-y^2+\frac{2}{3}xy)=$$

$$= x^3 - y^3$$

Esto se ha hecho basándose en la unisolvencia en $\mathcal{P}_2(x,y)$ de los problemas cuyos datos corresponden a $\mathcal{L}_{6,1}$, ..., $\mathcal{L}_{6,5}$.

También hay unisolvencia en $\mathcal{P}_2(x,y)$ por ejemplo, como puede verse por análogos procedimientos, en los casos de las figuras 4.18 y 4.19 adjuntas. Todos ellos tienen un conjunto de datos contenido en el problema considerado anteriormente.

i) Sean los datos $\{1,2,3,6,8,10\}$ que simbólicamente los representaremos por

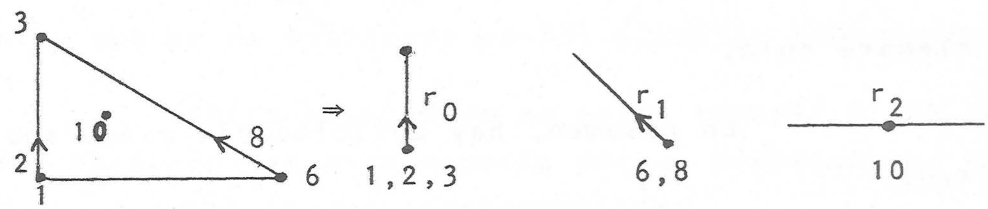


Fig. 4.18

ii) Sean los datos $\{1,2,3,5,9,10\}$ que simbólicamente representaremos por

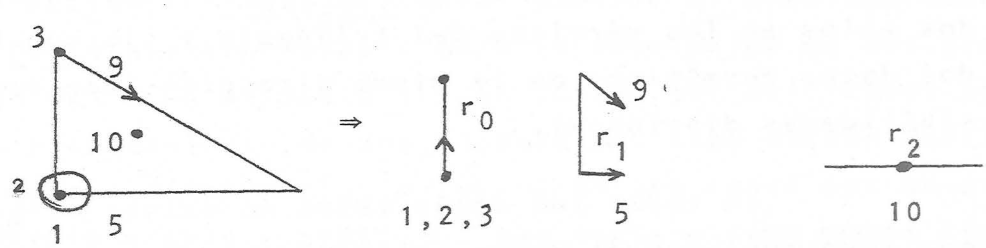


Fig. 4.19

No obstante hay casos muy típicos en que no hay unisolvencia en $P_2(x,y)$ como el que simbolizamos en la figura 4.20.

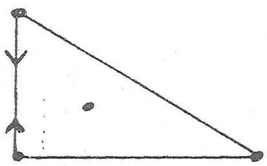


Fig. 4.20

En este caso no solo no se puede encontrar una descomposición del problema en un sistema de orden dos sino que cualesquiera que sean los puntos de R^2 sobre los que estén dados los datos el correspondiente determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1, & x, & y, & x^2, & xy, & y^2 \\ P_1, & P_2, & P_3, & P_4, & P_5, & P_6 \end{pmatrix}$$

es siempre nulo.

En resumen, hay unisolvencia asegurada en $P_2(x,y)$

a) Si cuatro datos son lagrangianos y dos hermíticos, siempre que éstos no estén dados en la misma dirección (hay tres posibilidades distintas).

b) Si tres datos son lagrangianos y tres hermíticos, todos ellos en los vértices del triángulo y sin que haya dos datos hermíticos en la misma dirección (hay dos posibilidades distintas).

En todos los demás casos no existe ningún sistema cuyo conjunto de datos asociado sea el que buscamos y cuyo espacio asociado sea $P_2(x,y)$.

4.-INTERPOLACION DE LAGRANGE Y HERMITE EN SEIS PUNTOS CUALESQUIERA DE R^2. OTRO ENFOQUE DEL PROBLEMA.

En todo lo anteriormente visto nos hemos apoyado con frecuencia en los métodos de construcción de la solución dados en [14], [34] y [43] y de los que hemos hecho una breve descripción en la sección 1 de este capítulo. Pero resulta que cuando un problema se sabe que tiene solución única porque se puede construir un sistema con un conjunto de datos asociado que es el dado y un espacio de interpolación que es el que nos interesa también, la construcción de la solución es mucho más práctica allí y ésto desplaza en interés a la construcción por recurrencia a partir de otros problemas más simples, y éstos a partir de otros, etc, que es lo que se ha explicado en los ejemplos anteriores.

Ahora bien, ésto no quita interés a los resultados obtenidos en esta memoria porque precisamente ambos planteamientos pueden complementarse.

Así, vamos a ver, volviendo a los ejemplos anteriores, cuándo la resolución más práctica sería mediante la construcción de un sistema adecuado ó cuándo dicha construcción es imposible para resolver el problema total pero posible y aconsejable para la resolución de dos problemas más simples que a su vez pueden ser utilizados para el planteamiento de una fórmula del tipo Aitken-Neville y así obtener la resolución del problema total por un procedimiento simple y práctico, que muestra cómo ambas técnicas pueden complementarse sin dificultad.

Volvamos por ejemplo al problema de interpolación lagrangiana sobre seis puntos de R^2 no situados en una cónica y usando como espacio de interpolación $P_2(x,y)$.

Es bien conocido que:

a) Si hay cuatro ó más puntos alineados el problema de interpolación no tiene solución en general.

b) Si hay tres puntos en una recta y tres en otra, tampoco hay solución en general.

c) Si hay tres puntos en una recta, dos en otra distinta de la anterior y uno en una tercera distinta de las otras dos, está demostrado [34] que el problema tiene solución en $P_2(x,y)$. Precisamente en este caso el problema está completamente resuelto de una forma muy práctica mediante el proceso de construcción de la solución descrito en la sección 1 anterior.

d) Si no hay tres puntos alineados, es decir tenemos dos en una recta r_0, dos en otra recta r_1 y los dos últimos en una tercera recta r_2 mediante el proceso de construcción de la solución anteriormente descrito <u>no</u> se puede obtener la misma en el espacio $P_2(x,y)$ sino en un subespacio de $P_3(x,y)$.

Sin embargo, si los seis puntos no están situados en una cónica el problema de interpolación en $P_2(x,y)$ tiene solución única. Lo que ocurre es que no se puede utilizar para resolverlo el procedimiento antes citado.

Es claro que podemos aplicar, exhaustivamente, las fórmulas anteriores a los casos c) y d) pero el proceso a seguir es algo laborioso y puesto que el caso c) está resuelto de forma muy práctica en [34] y el d) no lo está en $P_2(x,y)$, vamos a conjugar ambos métodos para el problema planteado en d).

Efectivamente mediante el proceso descrito en la sección 1 se puede obtener de forma simple el polinomio de interpolación en los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 en un subespacio de $P_2(x,y)$ y también en los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 y P_6 en el mismo subespacio. Por tanto, ahora estamos en condiciones de aplicar la fórmula de Mühlbach-Aitken-Neville con n = 5, m = 1, s = 2 con lo que resolveremos el problema d) en $P_2(x,y)$.

Consideremos los seis puntos P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6 de R^2 en las condiciones de d).

Por no haber tres puntos alineados, P_1 y P_2 pueden unirse con otros dos sin que las correspondientes rectas sean paralelas al eje OY, por ejemplo. Sean P_3 y P_4 los puntos que poseen esta propiedad. Vamos a aplicar la fórmula de Mühlbach-Aitken-Neville en estas condiciones (n=5, m=1, s=2) a este problema, en donde consideramos que los datos serán

$$\mathcal{L}_{5,1} = \{ f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4), f(P_5) \}$$

y

$$\mathcal{L}_{5,2} = \{ f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4), f(P_6) \}$$

donde como es lógico hemos tomado

$$L_i(f) = f(P_i), \quad i=1,2,\ldots,6$$

Las dos interpolaciones con estos cinco datos se pueden hacer de forma sencilla siguiendo la idea de construcción del polinomio de interpolación dada anteriormente [34].

En nuestra situación consideremos $P_i=(x_i,y_i)$, $i=1,\ldots,6$,

$$r_0 = \overline{P_1P_3} \equiv (x-x_1)(y_3-y_1)-(y-y_1)(x_3-x_1), \quad (x_3-x_1 \neq 0)$$

$$r_1 = \overline{P_2P_4} \equiv (x-x_2)(y_4-y_2)-(y-y_2)(x_4-x_2), \quad (x_4-x_2 \neq 0)$$

y sean, por ejemplo

$$r_{00} \equiv x-x_1 \quad , \quad r_{01} \equiv x-x_3$$

$$r_{10} \equiv x-x_2 \quad , \quad r_{11} \equiv x-x_4$$

Considerando el problema de interpolación en los puntos P_1,P_2,P_3,P_4,P_5, construimos la base asociada, según [34],

$$B(S) = \{1,r_{00},r_0,r_0\cdot r_{10},r_0\cdot r_1\}= \{\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4,\phi_5\} \tag{4.29}$$

y entonces el problema tiene solución única en el espacio que engendra esta base $\overline{B(S)}$.

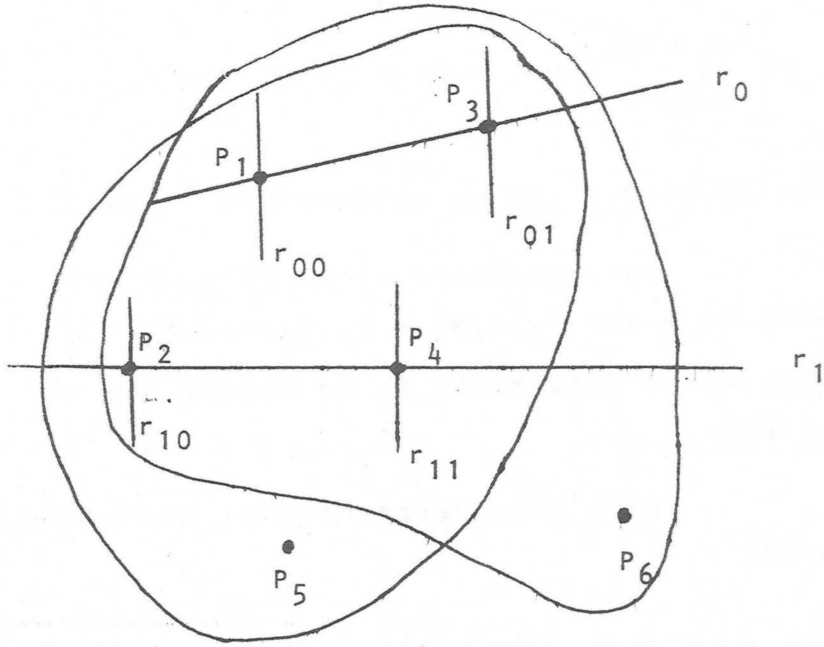


Fig. 4.21

Para el problema con los puntos P_1, P_2, P_3, P_4, P_6, la construcción es exactamente la misma. Por tanto la solución de ambos problemas se encuentra inmediatamente así:

$$(4.30) \quad pf\begin{bmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_5 \\ \mathcal{L}_{5,1} \end{bmatrix}(x,y) = a'_1 + a'_2 \cdot r_{00} + a'_3 \cdot r_0 + a'_4 \cdot r_0 \cdot r_{10} + a'_5 \cdot r_0 \cdot r_1$$

donde los coeficientes a'_i, $i=1,\ldots,5$ se obtienen a partir de (4.14) ó (4.15).

Análogamente se obtiene la solución del otro problema de interpolación

$$(4.31) \qquad pf\begin{bmatrix} \phi_1,\dots,\phi_5 \\ \mathcal{L}_{5,2} \end{bmatrix}(x,y) = a''_1+a''_2.r_{00}+a''_3.r_0+a''_4.r_0.r_{10}+a''_5.r_0.r_1$$

donde los a''_i, $i=1,\dots,5$ se obtienen de forma análoga a los a'_i.

Para plantear ahora el problema total, como el espacio va a ser $P_2(x,y)$ y $\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_5$ son las anteriores, necesitamos determinar ϕ_6 de manera que los seis engendren $P_2(x,y)$.

Para ello desarrollemos los elementos de la base (4.29)

$$\begin{aligned} B(S) = \{ & 1,\ x-x_1,\ (x-x_1)(y_3-y_1)-(y-y_1)(x_3-x_1), \\ & (x-x_2)((x-x_1)(y_3-y_1)-(y-y_1)(x_3-x_1)), \\ & ((x-x_1)(y_3-y_1)-(y-y_1)(x_3-x_1)).((x-x_2)(y_4-y_2)-(y-y_2)(x_4-x_2))\} \end{aligned}$$

El espacio que engendran es el mismo que el engendrado por

$$(4.32) \qquad \begin{aligned} \{ & 1,\ x,\ y,\ -xy(x_3-x_1)+x^2(y_3-y_1),\ x^2(y_3-y_1)(y_4-y_2)- \\ & -xy((x_3-x_1)(y_4-y_2)+(y_3-y_1)(x_4-x_2))+y^2(x_4-x_2)(x_3-x_1)\} \end{aligned}$$

que fácilmente se ve que junto con $\phi_6 = x^2$ engendran el espacio $P_2(x,y) = \{1,\ x,\ y,\ x^2,\ y^2,\ xy\}$.

La fórmula de Mühlbach-Aitken-Neville en este caso quedaría

$$\text{(4.33)} \qquad pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_6\\ \mathcal{L}_6\end{bmatrix}(x,y) = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i(x,y).pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_5\\ \mathcal{L}_{5,i}\end{bmatrix}(x,y)$$

donde

$$\text{(4.34)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \lambda_i(x,y) = 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \lambda_i(x,y).px^2\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_5\\ \mathcal{L}_{5,i}\end{bmatrix}(x,y) = x^2 \end{cases}$$

y

$$\mathcal{L}_6 = \mathcal{L}_{5,1} \cup \mathcal{L}_{5,2}$$

El determinante de coeficientes de (4.34) sería

$$\text{(4.35)} \qquad px^2\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_5\\ \mathcal{L}_{5,2}\end{bmatrix}(x,y) - px^2\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_5\\ \mathcal{L}_{5,1}\end{bmatrix}(x,y)$$

Si fuera

$$\text{(4.36)} \qquad px^2\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_5\\ \mathcal{L}_{5,1}\end{bmatrix}(x,y) = px^2\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_5\\ \mathcal{L}_{5,2}\end{bmatrix}(x,y)$$

en algún punto $(\bar{x},\bar{y})$ no perteneciente a r_0 ni a r_1, ambos polinomios de interpolación serían idénticos. En efecto, tendríamos como diferencia un polinomio perteneciente a $\overline{B(S)}$ y nulo en los puntos P_1, P_2, P_3, P_4, $(\bar{x},\bar{y})$. Si $(\bar{x},\bar{y}) \notin (r_0 \cup r_1)$, la situación es la misma que con P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 ó

P_1, P_2, P_3, P_4, P_6, y existe un único polinomio perteneciente a $\overline{B(S)}$ nulo en P_1, P_2, P_3, P_4, $(\bar{x},\bar{y})$, que es el nulo, ya que el problema de interpolar en $\overline{B(S)}$ y en esos cinco puntos tendría solución única. Entonces, al ser idénticos

$$(4.37) \qquad px^2\begin{bmatrix} \phi_1, \dots, \phi_5 \\ \mathcal{L}_{5,1} \end{bmatrix} \equiv px^2\begin{bmatrix} \phi_1, \dots, \phi_5 \\ \mathcal{L}_{5,2} \end{bmatrix}$$

existirían $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ tales que

$$\sum_{i=1}^{5} \alpha_i \cdot \phi_i(P_j) - \phi_6(P_j) = 0, \quad j=1,\dots,6$$

y por tanto

$$(4.38) \qquad \det\begin{pmatrix} \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_6 \\ \mathcal{L}_6 \end{pmatrix} = 0$$

por lo que el problema de partida no tendría solución en general. Recíprocamente, si se verifica (4.38) deshaciendo el camino se tiene (4.37). Así pues, si al hallar (4.30) y (4.31) salen idénticos el problema no tiene solución en general, y si la tiene tendría infinitas. Mientras que si no se verifica (4.37), para todo $(x,y) \notin (r_0 \cup r_1)$ se tiene (4.33).

Resolviendo el sistema (4.34) los valores de $\lambda_1(x,y)$ y $\lambda_2(x,y)$ son

$$\lambda_1(x,y) = \frac{px^2\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_5\\ \mathcal{L}_{5,2}\end{bmatrix}(x,y)-x^2}{px^2\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_5\\ \mathcal{L}_{5,2}\end{bmatrix}(x,y)-px^2\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_5\\ \mathcal{L}_{5,1}\end{bmatrix}(x,y)}$$

$$\lambda_2(x,y) = \frac{x^2-px^2\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_5\\ \mathcal{L}_{5,1}\end{bmatrix}(x,y)}{px^2\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_5\\ \mathcal{L}_{5,2}\end{bmatrix}(x,y)-px^2\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_5\\ \mathcal{L}_{5,1}\end{bmatrix}(x,y)}$$

que sustituidos en (4.33) darían la solución del problema total

$$pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_6\\ \mathcal{L}_6\end{bmatrix}(x,y)$$

Veamos un segundo ejemplo con seis datos también pero apareciendo alguna derivada. Sean por ejemplo cuatro puntos sin que tres de ellos estén alineados. En dos de ellos, P_1 y P_2, los datos de interpolación son el valor de la función y el de una cierta derivada direccional de primer orden, mientras que en P_3 y P_4 es simplemente el valor de la función.

Supongamos además que ni P_3 ni P_4 están en las rectas que pasan por P_1 (respectivamente por P_2) y tienen la dirección dada por la derivación en ese punto. Por ejemplo la situación de la figura 4.22

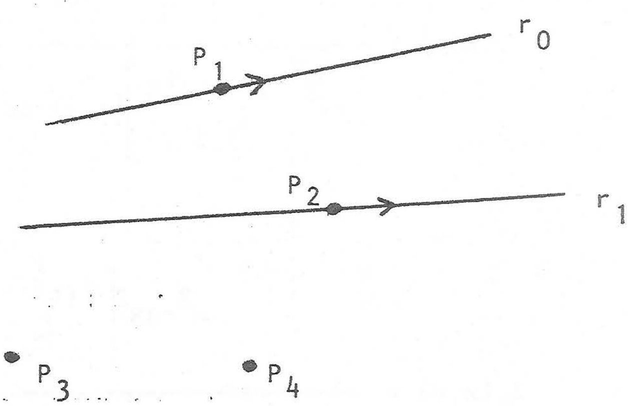


Fig. 4.22

Entonces puede verse fácilmente que no es posible construir un sistema de orden dos (para que el espacio resultante sea $\mathcal{P}_2(x,y)$) cuyo conjunto de datos asociado sea el dado. En cambio escogiendo solamente los datos correspondientes a P_1, P_2, P_3 hay un sistema cuyos datos asociados son ésos. Basta tomar

$$r_0 \equiv Ax+By+C \quad , \quad |A| + |B| \neq 0$$

$$r_1 \equiv A'x+B'y+C' \quad , \quad |A'| + |B'| \neq 0$$

Supongamos por ejemplo que $B \neq 0$. Entonces podemos tomar

$$r_{00} = r_{01} \equiv x-x_1$$

i) Si $B' \neq 0$, elegimos

$$r_{10} = r_{11} \equiv x-x_2$$

y entonces la base asociada es

$$(4.39) \qquad B(S) = \{1, r_{00}, r_0, r_{10}\cdot r_0, r_o\cdot r_1\} =$$

$$= \{1,\ x-x_1,\ r_0,\ (x-x_2)r_0,\ r_0\cdot r_1\}$$

El espacio engendrado es el mismo que el que engendran

$$(4.40) \qquad \{1,\ x,\ y,\ Ax^2+Bxy,\ AA'x^2+(AB'+A'B)xy+BB'y^2\}$$

ii) Si $B' = 0$, entonces $A' \neq 0$ y tomamos, por ejemplo

$$r_{10} = r_{11} \equiv y-y_2$$

siendo entonces la base asociada

$$(4.41) \qquad B(S) = \{1,\ x-x_1,\ r_0,\ (y-y_2)r_0,\ r_o\cdot r_1\}$$

El espacio engendrado es el mismo que el que engendran

$$(4.42) \qquad \{1,\ x,\ y,\ By^2+Axy,\ AA'x^2+BA'xy\}$$

Se ve fácilmente que adjuntando a dicha base la función x^2 el espacio engendrado es $\mathcal{P}_2(x,y)$.

Lo mismo sucede si se toman los datos correspondientes a P_1, P_2, P_4, resultando la misma base asociada y por tanto el mismo espacio de interpolación.

<u>Observación</u>.- Si se hubiera supuesto $A \neq 0$ en lugar de B, entonces con los mismos razonamientos se llega a que adjuntando a la base formada la función y^2 el espacio engendrado es $\mathcal{P}_2(x,y)$.

Concretamente consideremos que la situación es la marcada en la figura 4.23.

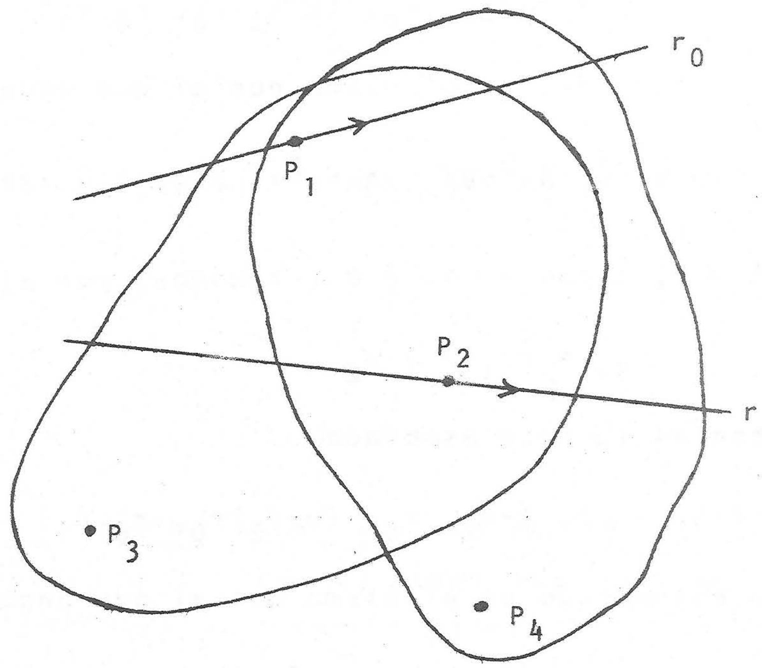


Fig. 4.23

Entonces volviendo al planteamiento utilizado en el teorema 2.2, tomando n=5, m=1, s=2 y los datos

$$\mathcal{L}_{5,1} = \{ f(P_1), \frac{\partial f}{\partial \rho_1}(P_1), f(P_2), \frac{\partial f}{\partial \rho_2}(P_2), f(P_3)\}$$

y

$$\mathcal{L}_{5,2} = \{ f(P_1), \frac{\partial f}{\partial \rho_1}(P_1), f(P_2), \frac{\partial f}{\partial \rho_2}(P_2), f(P_4)\}$$

la fórmula de Mühlbach-Aitken-Neville quedaría

$$(4.43) \qquad pf\begin{bmatrix} \phi_1, \dots, \phi_6 \\ \mathcal{L}_6 \end{bmatrix}(x,y) = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i(x,y) . pf\begin{bmatrix} \phi_1, \dots, \phi_5 \\ \mathcal{L}_{5,i} \end{bmatrix}(x,y)$$

donde

$$(4.44)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \lambda_i(x,y) = 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \lambda_i(x,y)\,.\,px^2\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_5\\ \mathcal{L}_{5,i}\end{bmatrix}(x,y)=x^2 \end{cases}$$

El determinante de coeficientes de (4.44) es análogo a (4.35). Si fuera

$$px^2\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_5\\ \mathcal{L}_{5,1}\end{bmatrix}(x,y) = px^2\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_5\\ \mathcal{L}_{5,2}\end{bmatrix}(x,y)$$

en algún punto (x,y) fuera de r_0 ó r_1, entonces serían idénticos y el problema total no tiene solución, de forma análoga a como ocurría en el caso de la interpolación lagrangiana.

Consideremos un caso concreto como el que simbolizamos en la figura 4.24.

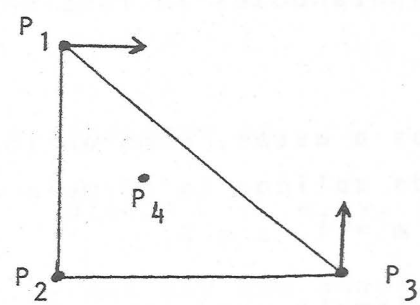


Fig. 4.24

Es evidente que el problema simbolizado en la figura 4.24 no puede representarse mediante un sistema de orden dos.

Dados unos datos de interpolación $\mathcal{L}_{5,1}$ y $\mathcal{L}_{5,2}$, el método antes descrito [14] y [34] para obtener la solución consiste en encontrar unas funciones $\{\phi_i\}, i=1,..,5$ que constituyan la base del sistema encontrado. En nuestro caso,

$$\mathcal{L}_{5,1} = \{ f(P_1), \frac{\partial f}{\partial x}(P_1), f(P_3), \frac{\partial f}{\partial y}(P_3), f(P_2)\}$$

y

$$\mathcal{L}_{5,2} = \{ f(P_1), \frac{\partial f}{\partial x}(P_1), f(P_3), \frac{\partial f}{\partial y}(P_3), f(P_4)\}$$

Unas funciones $\{\phi_i\}$, $i=1,..,5$ adecuadas son por ejemplo:

$$B(S) = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5\} =$$

$$= \{1, x-x_1, y-y_1, (y-y_1)(y-y_3), (y-y_1)(x-x_3)\}$$

Es inmediato comprobar que engendran un subespacio de $P_2(x,y)$ y que adjuntándoles la función $\phi_6 = x^2$ engendran todo $P_2(x,y)$.

Así volvemos a estar, como en los casos anteriores, en condiciones de aplicar la fórmula de Mühlbach-Aitken-Neville con $n = 5$, $m = 1$, $s = 2$.

Veamos un ejemplo concreto.

EJEMPLO 4.3

Sean los puntos $P_1(0,1)$, $P_2(0,0)$, $P_3(1,0)$, $P_4(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y los datos asociados al problema de la figura 4.24:

$$\{f(0,1), \frac{\partial f}{\partial x}(0,1), f(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0), f(0,0), f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$$

Supongamos que la función a interpolar en $\mathcal{P}_2(x,y)$ es

$$f(x,y) = x^3 - y^3$$

Sean

$$n = 5, \ m = 1, \ s = 2$$

$$\mathcal{L}_{5,1} = \{f(0,1), \frac{\partial f}{\partial x}(0,1), f(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0), f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})\} =$$

$$= \{ -1, 0, 1, 0, 0\}$$

$$\mathcal{L}_{5,2} = \{f(0,1), \frac{\partial f}{\partial x}(0,1), f(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0), f(0,0)\} =$$

$$= \{-1, 0, 1, 0, 0\}$$

Tomemos

$$r_0 \equiv y - 1 , \quad r_{00} = r_{01} \equiv x$$

$$r_1 \equiv x - 1 , \quad r_{10} = r_{11} \equiv y$$

La base correspondiente es

$$B(S) = \{ 1, x, y, y^2, xy\}$$

y la función ϕ_6 que hay que añadir para obtener el espacio $\mathcal{P}_2(x,y)$ es $\phi_6 = x^2$.

El sistema (4.44) correspondiente es:

$$\begin{cases} \lambda_1(x,y) + \lambda_2(x,y) = 1 \\ \lambda_1(x,y).px^2\begin{bmatrix} 1,x,y,y^2,xy \\ \mathcal{L}_{5,1} \end{bmatrix}(x,y)+\lambda_2(x,y).px^2\begin{bmatrix} 1,x,y,y^2,xy \\ \mathcal{L}_{5,2} \end{bmatrix}(x,y)=x^2 \end{cases}$$

Inmediatamente se obtiene

$$px^2\begin{bmatrix} 1,x,y,y^2,xy \\ \mathcal{L}_{5,1} \end{bmatrix}(x,y) = -\frac{3}{4} + \frac{7}{4}x + \frac{7}{4}y - y^2 - \frac{7}{4}xy$$

$$px^2\begin{bmatrix} 1,x,y,y^2,xy \\ \mathcal{L}_{5,2} \end{bmatrix}(x,y) = x + y - y^2 - xy$$

Por otra parte se tiene

$$p(x^3-y^3)\begin{bmatrix} 1,x,y,y^2,xy \\ \mathcal{L}_{5,1} \end{bmatrix}(x,y) = a_1^!.1+a_2^!.x+a_3^!(y-1)+a_4^!(y-1)y+$$
$$+a_5^!(y-1)(x-1)$$

donde los $a_i^!$, $i=1,2,\dots,5$ se obtienen a partir de (4.14), (4.15), siendo

$$a_1^! = -1,\ a_2^! = 0,\ a_3^! = -2,\ a_4^! = -2,\ a_5^! = -\frac{7}{4}$$

con lo que

$$p(x^3-y^3)\begin{bmatrix} 1,x,y,y^2,xy \\ \mathcal{L}_{5,1} \end{bmatrix}(x,y) = -2y^2 - \frac{7}{4}xy + \frac{7}{4}x + \frac{7}{4}y - \frac{3}{4}$$

Análogamente,

$$p(x^3-y^3)\begin{bmatrix} 1,x,y,y^2,xy \\ \mathcal{L}_{5,2} \end{bmatrix}(x,y) = x + y - xy - 2y^2$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos

$$\lambda_1(x,y) = \frac{4x^2+4y^2+4xy-4y-4x}{3(x+y-xy-1)}$$

$$\lambda_2(x,y) = \frac{7x+7y-7xy-4x^2-4y^2-3}{3(x+y-xy-1)}$$

Operando se tiene

$$p(x^3-y^3)\begin{bmatrix} 1,x,y,y^2,xy,x^2 \\ \mathcal{L}_6 \end{bmatrix}(x,y) = x^2 - y^2$$

Análogamente se podrían estudiar otros casos.

C A P I T U L O V

OTRA FORMA DE OBTENCION DE FORMULAS DE INTERPOLACION

CAPITULO V

OTRA FORMA DE OBTENCION DE FORMULAS DE INTERPOLACION

1.-INTRODUCCION

Muy recientemente C. Brezinski [6] ha publicado un artículo relativo a la construcción de algoritmos del tipo Aitken-Neville (algoritmo MNA) siguiendo un camino distinto al de G. Mühlbach. Para su obtención aplica una identidad de Sylvester para determinantes llegando al mismo algoritmo de Aitken-Neville que Mühlbach en [35], salvo notaciones. Posteriormente lo generaliza usando el E-algoritmo de extrapolación [5],[6]. No obstante en los razonamientos se hace necesario suponer que las funciones $\phi_1, \phi_2, \ldots$ que intervienen formen un sistema de Chebyshev completo en un cierto intervalo.

La identidad de Sylvester utilizada por Brezinski consiste en lo siguiente: sea $|A|$ un determinante nxn de números reales ó complejos

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

y

$$A\begin{pmatrix}1,2,\dots,p\\1,2,\dots,p\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp}\end{vmatrix}.$$

Entonces, si para $h, k > p$ denotamos

$$b_{hk} = A\begin{pmatrix}1,2,\dots,p,h\\1,2,\dots,p,k\end{pmatrix},$$

y

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{p+1\,p+1} & b_{p+1\,p+2} & \cdots & b_{p+1\,n}\\ b_{p+2\,p+1} & b_{p+2\,p+2} & \cdots & b_{p+2\,n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{n\,p+1} & b_{n\,p+2} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}$$

se tiene:

$$(5.1)\qquad |B| = |A|\,.\,A\begin{pmatrix}1,2,\dots,p\\1,2,\dots,p\end{pmatrix}^{n-p-1}$$

En particular, él utiliza la identidad

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1}\end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n-12} & a_{n-13} & \cdots & a_{n-1n}\end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1}\\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1}\end{vmatrix} =$$

$$= |A| . \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1}\\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n-12} & a_{n-13} & \cdots & a_{n-1n-1}\end{vmatrix}$$

obtenida de (5.1) para $p = n-2$ habiendo cambiado previa y adecuadamente el orden de filas y columnas en A.

Nosotros generalizamos aquí la identidad de Sylvester para determinantes (5.1) y posteriormente la aplicamos para generalizar y extender los resultados de Brezinski [6]. En particular se llega a una fórmula general similar a la (2.4) que coincide con ella en los casos de Newton y Aitken-Neville.

2.-GENERALIZACION DE LA IDENTIDAD DE SYLVESTER PARA DETERMINANTES

Consideremos una matríz A de orden $(n+m)\times(n+m)$ de elementos de un cuerpo conmutativo K de característica cero. Siguiendo las notaciones de Gantmacher [13] podemos escribir

$$(5.2) \qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n+m} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+m1} & a_{n+m2} \cdots & a_{n+mn+m} \end{vmatrix} = A \begin{pmatrix} 1,2,\ldots,n+m \\ 1,2,\ldots,n+m \end{pmatrix}$$

Sean

$$(5.3) \qquad I_j = \{r_{j1}, r_{j2}, \ldots, r_{jn+1}\}, \quad j=1,\ldots,m$$

m subconjuntos de $\{1,2,\ldots,n+m\}$ de cardinal $n+1$ cada uno tales que

$$(5.4) \qquad \mathrm{card}(I_j \cap I_{j+1}) = n, \quad j=1,\ldots,m-1$$

siendo

(5.5) $$I_j \cap I_{j+1} = \{c_{j1}, c_{j2}, \ldots, c_{jn}\}$$.

Formemos el determinante $|B|$ cuyos elementos b_{ij}, $i,j=1,\ldots,m$ son

(5.6) $$b_{ij} = A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n, & n+i \\ r_{j1}, & r_{j2}, & \ldots, & r_{jn}, & r_{jn+1} \end{pmatrix}$$

donde el segundo miembro indica, como es evidente de (5.2), el determinante formado por las filas $1,\ldots,n,n+i$ y las columnas r_{j1}, $r_{j2},\ldots,r_{jn+1}$ de A.

Entonces vamos a demostrar el siguiente teorema:

TEOREMA 5.1.- *Bajo las hipótesis anteriores se tiene*

(5.7) $$|B| = c.|A|.\prod_{j=1}^{m-1} A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ c_{j1}, & c_{j2}, & \ldots, & c_{jn} \end{pmatrix}$$

donde c *es una constante que no depende de los* a_{ij} *de* $|A|$ *y que toma los valores cero, uno ó menos uno según la fórmula*

(5.8) $$c = \begin{cases} 0, & \text{si } \bigcup_{j=1}^{m} I_j \neq \{1,2,\ldots,n+m\} \\ (-1)^{\sigma_\theta + \sum_{j=1}^{m}\sigma_j + \sum_{j=1}^{m-1}\rho_j}, & \text{si } \bigcup_{j=1}^{m} I_j = \{1,2,\ldots,n+m\} \end{cases}$$

donde σ_θ, σ_j *y* ρ_j *representan las signaturas de ciertas ordenaciones que especificaremos en la demostración.*

Demostración.

a) El determinante $|B|$ es un polinomio homogéneo en las variables a_{hk}, con $h,k= 1,2,...,n+m$, y de grado $(n+1)m$ en ellas dado que cada elemento de $|B|$ es de grado $n+1$ y $|B|$ es de orden m.

Veamos que contiene como factor al polinomio $|A|$ que es de grado $n+m$ en las mismas variables.

Si $|A|= 0$ para algún valor de (a_{ij}), $i,j=1,...,n+m$ deberá existir una combinación lineal nula de las filas de $|A|$ con coeficientes α_i, $i=1,...,n+m$ no todos nulos.

Llamemos $a_i = (a_{i1},a_{i2},...,a_{in+m})$. Se tendrá que

$$\sum_{i=1}^{n+m} \alpha_i . a_i = 0.$$

Consideremos $s = \text{máx}\{ i / \alpha_i \neq 0\}$. Entonces se tiene que despejando en el anterior sumatorio quedaría

$$a_s = - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_s} . a_i \tag{5.9}$$

Podemos distinguir dos casos:

i) $s \leqslant n$.

La primera fila de $|B|$ es nula pues está formada por determinantes cuyas filas son linealmente dependientes. Luego

$$b_{1j} = 0, \forall j$$

lo que implica que $|B|= 0$.

ii) $s > n$.

Supongamos $s = n+e$, $e > 0$. Fijémonos en la fila e de $|B|$. La fila $n+1$-ésima del determinante b_{ej} puede ser sustituida por la suma de ella más la primera multiplicada por $-\frac{\alpha_1}{\alpha_s}$, la segunda por $-\frac{\alpha_2}{\alpha_s}$, ..., y la n-ésima por $-\frac{\alpha_n}{\alpha_s}$ (ver (5.9)). Con ello los valores de los determinantes b_{ej} no varían. Si ahora sumamos a la fila e de $|B|$ la primera, segunda, ..., $(e-1)$-ésima multiplicadas por $-\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_s}, \ldots, -\frac{\alpha_{n+e-1}}{\alpha_s}$ resultan ceros, luego $|B|=0$.

Así pues el polinomio $|B|$ contiene como factor a $|A|$, ya que $|A|$ es irreducible.

b) Veamos que también contiene a los factores

$$A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ c_{j1}, & c_{j2}, & \ldots, & c_{jn} \end{pmatrix} \qquad j=1,\ldots,m-1$$

Vamos a hacer algunas hipótesis intrascendentes con objeto de fijar ideas, sin que ello suponga ninguna restricción. Así, sea

$$|B| = \begin{vmatrix} A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n, & n+1 \\ r_{11}, & r_{12}, & \ldots, & r_{1n}, & r_{1n+1} \end{pmatrix}, & A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n, & n+1 \\ r_{21}, & r_{22}, & \ldots, & r_{2n}, & r_{2n+1} \end{pmatrix}, & A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n+1 \\ r_{31}, & r_{32}, & \ldots, & r_{3n+1} \end{pmatrix} \cdots \\ A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n, & n+2 \\ r_{11}, & r_{12}, & \ldots, & r_{1n}, & r_{1n+1} \end{pmatrix}, & A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n, & n+2 \\ r_{21}, & r_{22}, & \ldots, & r_{2n}, & r_{2n+1} \end{pmatrix}, & A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n+2 \\ r_{31}, & r_{32}, & \ldots, & r_{3n+1} \end{pmatrix} \cdots \\ A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n, & n+3 \\ r_{11}, & r_{12}, & \ldots, & r_{1n}, & r_{1n+1} \end{pmatrix}, & A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n, & n+3 \\ r_{21}, & r_{22}, & \ldots, & r_{2n}, & r_{2n+1} \end{pmatrix}, & A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n+3 \\ r_{31}, & r_{32}, & \ldots, & r_{3n+1} \end{pmatrix} \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

Razonemos suponiendo que es el primer factor el que se anula, es decir

$$A\begin{pmatrix} 1 & , 2 & ,\ldots, & n \\ c_{11}, & c_{12}, & \ldots, & c_{1n}\end{pmatrix} = 0. \qquad (5.10)$$

Análogo razonamiento se haría para los demás sin más que tomar otras columnas de $|B|$. Supongamos, así mismo, que las columnas $c_{11}, c_{12},\ldots,c_{1n}$ comunes entre I_1 e I_2 son las primeras $r_{11}, r_{12},\ldots, r_{1n}$.

De (5.10) se deduce que existe una columna que es combinación lineal de las demás. Para fijar ideas supongamos que es también la primera.

$$1^a \text{ col.} = -\beta_2 . \text{col.}2^a - \ldots - \beta_n . \text{col.} n^a$$

Se tendría

$$A\begin{pmatrix} 1 & , 2 & ,\ldots, & n & , n+1 \\ r_{11}, & r_{12}, & \ldots, & r_{1n}, & r_{1n+1}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1c_{11}} & \ldots & a_{1c_{1n}} & a_{1r_{1n+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{nc_{11}} & \ldots & a_{nc_{1n}} & \ldots \\ a_{n+1c_{11}} & \ldots & a_{n+1c_{1n}} & a_{n+1r_{1n+1}} \end{vmatrix}$$

Sumándole a la primera columna la segunda por β_2, la tercera por $\beta_3,\ldots$ y la n-ésima por β_n queda

$$(-1)^n(a_{n+1c_{11}} + \beta_2 . a_{n+1c_{12}} + \ldots + \beta_n . a_{n+1c_{1n}}) \begin{vmatrix} a_{1c_{12}} \ldots a_{1c_{1n}} & a_{1r_{1n+1}} \\ \ldots\ldots & \ldots \\ a_{nc_{12}} \ldots a_{nc_{1n}} & a_{nr_{1n+1}} \end{vmatrix} = k_1 . D_1$$

llamando k_1 al paréntesis y D_1 al determinante.

Análogamente en

$$A\begin{pmatrix} 1\ , & 2\ ,\ldots, & n\ , & n+1 \\ r_{21}, & r_{22},\ldots, & r_{2n}, & r_{2n+1}\end{pmatrix},$$

salvo una reordenación de columnas, podemos suponer que $r_{21}=c_{11},\ r_{22}=c_{12},\ldots,r_{2n}=c_{1n}$, con lo que

$$A\begin{pmatrix} 1\ , & 2\ ,\ldots, & n\ , & n+1 \\ r_{21}, & r_{22},\ldots, & r_{2n}, & r_{2n+1}\end{pmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|c} a_{1c_{11}} & \cdots & a_{1c_{1n}} & a_{1r_{2n+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nc_{11}} & \cdots & a_{nc_{1n}} & \cdots \\ \hline a_{n+1c_{11}} & \cdots & a_{n+1c_{1n}} & a_{n+1r_{2n+1}} \end{array}\right|$$

Por la misma razón que antes resulta

$$(-1)^n(a_{n+1c_{11}}+\beta_2.a_{n+1c_{12}}+\ldots+\beta_n.a_{n+1c_{1n}})\begin{vmatrix} a_{1c_{12}}\ldots a_{1c_{1n}} & a_{1r_{2n+1}} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{nc_{12}}\ldots a_{nc_{1n}} & a_{nr_{2n+1}}\end{vmatrix}=k_1.D_2.$$

Y también,

$$A\begin{pmatrix} 1\ , & 2\ ,\ldots, & n\ , & n+2 \\ r_{11}, & r_{12},\ldots, & r_{1n}, & r_{1n+1}\end{pmatrix} =$$

$$=(-1)^n(a_{n+2c_{11}}+\beta_2.a_{n+2c_{12}}+\ldots+\beta_n.a_{n+2c_{1n}})\begin{vmatrix} a_{1c_{12}}\ldots a_{1c_{1n}} & a_{1r_{1n+1}} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{nc_{12}}\ldots a_{nc_{1n}} & a_{nr_{1n+1}}\end{vmatrix} =$$

$$= k_2.D_1,$$

$$A\begin{pmatrix}1 & , & 2 & ,\ldots, & n & , & n+2\\ r_{21}, & & r_{22}, & \ldots, & r_{2n}, & & r_{2n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1 & , & 2 & ,\ldots, & n & , & n+2\\ c_{11}, & & c_{12}, & \ldots, & c_{1n}, & & r_{2n+1}\end{pmatrix} = k_2 . D_2$$

y así sucesívamente.

Con todo ello nos queda:

$$|B| = \begin{vmatrix} k_1 . D_1 & k_1 . D_2 & \ldots\ldots\\ k_2 . D_1 & k_2 . D_2 & \ldots\ldots\\ k_3 . D_1 & k_3 . D_2 & \ldots\ldots\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ k_m . D_1 & k_m . D_2 & \ldots\ldots \end{vmatrix} = 0$$

De la irreducibilidad de $A\begin{pmatrix}1 & , & 2 & ,\ldots, & n\\ c_{11}, & & c_{12}, & \ldots, & c_{1n}\end{pmatrix}$ se deduce que $|B|$ lo contiene como factor.

Si hubiéramos supuesto nulo el siguiente factor

$$A\begin{pmatrix}1 & , & 2 & ,\ldots, & n\\ c_{21}, & & c_{22}, & \ldots, & c_{2n}\end{pmatrix} = 0,$$

bastaría repetir el razonamiento con las columnas segunda y tercera de $|B|$ y así sucesivamente.

Luego llegamos a la conclusión que $|B|$ contiene como factor a

$$\prod_{j=1}^{m-1} A\begin{pmatrix}1 & , & 2 & ,\ldots, & n\\ c_{j1}, & & c_{j2}, & \ldots, & c_{jn}\end{pmatrix}.$$

c) Respecto a la constante c tenemos:

i) Si $\bigcup_{j=1}^{m} I_j \neq \{1,2,\ldots,n+m\}$ entonces $c=0$, puesto que en el primer miembro de (5.7) no aparece ningún elemento de una cierta columna de $|A|$ y no obstante dándole valores arbitrarios a esa columna variaría el valor del segundo miembro de (5.7) porque sólo aparecería en $|A|$, lo cual es absurdo.

ii) Si $\bigcup_{j=1}^{m} I_j = \{1,2,\ldots,n+m\}$, entonces c toma los valores uno ó menos uno, según los casos.

El signo de c depende: de los elementos $c_{j1},\ldots,c_{jn+1}$ que constituyen cada I_j; del orden en que son tomados estos elementos para obtener

$$A\begin{pmatrix}1,2,\ldots,n,k\\ I_j\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\ ,\ 2\ ,\ldots,\ n\ ,\ k\\ c_{j1},c_{j2},\ldots,c_{jn},c_{jn+1}\end{pmatrix},$$

y del orden en que son tomados los elementos de $I_j \cap I_{j+1}$, $j=1,\ldots,m-1$ para obtener

$$A\begin{pmatrix}1,2,\ldots,n\\ I_j \cap I_{j+1}\end{pmatrix}$$

Para obtener el valor de c en función de las distintas situaciones que hemos indicado resulta útil considerar la siguiente ordenación Θ de $\{1,2,\ldots,n+m\}$:

1) Los $n+1$ primeros elementos de Θ son los $n+1$ elementos de I_1 con una ordenación cualquiera: $c_1,\ldots,c_{n+1}$

2) El elemento de lugar $n+j$, c_{n+j}, de Θ es aquel elemento de I_j que no pertenece a I_{j-1}, $j=2,\ldots,m$

$$\Theta = \{c_1,\ldots,c_{n+1},c_{n+2},\ldots,c_{n+m}\}$$

Así pues, $c_1,\ldots,c_{n+1} \in I_1$; $c_{n+2} \in I_2$, $c_{n+2} \notin I_1$; $c_{n+3} \in I_3$, $c_{n+3} \notin I_2$, etc.

Supuesto un orden arbitrario en I_j e $I_j \cap I_{j+1}$ dado en (5.3) y (5.5), sean:

(5.11)
- σ_θ: la signatura de la ordenación θ respecto a $\{1,2,\ldots,n+m\}$.
- σ_j: la signatura de I_j respecto a la ordenación de estos elementos en θ, $j=1,\ldots,m$
- ρ_j: la signatura de $I_j \cap I_{j+1}$ respecto a la ordenación de estos elementos en θ, $j=1,\ldots,m-1$

Así pues si reordenamos los elementos de I_j e $I_j \cap I_{j+1}$ de tal forma que queden con el mismo orden con que se encuentran en θ, entonces en (5.7) se dan los cambios de signo:

$$(-1)^{\sum_{j=1}^{m} \sigma_j} \quad \text{y} \quad (-1)^{\sum_{j=1}^{m-1} \rho_j}$$

en el primer y segundo miembro, respectivamente.

Para conocer el valor de c vamos a dar unos valores a los a_{ij} de A y despejar en (5.7). Estos valores han sido pensados de forma que resulte sencilla la evaluación de los determinantes de (5.7). Así pues, sea A una matriz cuyas columnas son las siguientes.

Las columnas cuya posición es $c_1, c_2, \ldots, c_n$, van a ser, respectivamente

$$\left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \end{matrix}\right\} \text{n unos}$$
$$\begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}$$

La columna c_{n+j}, $j=1,\dots,m-1$ tiene:

i) sus n primeros elementos iguales a cero si $c_{n+j} \notin I_{j+1}$, e iguales a los de la columna c_i, (siendo $c_i \in I_j, c_i \notin I_{j+1}$), en caso contrario.

ii) El resto de los elementos de c_{n+j} son cero salvo el que ocupa la posición n+j que se toma igual a uno.

(La columna c_{n+m} tendrá un uno en la última posición y los demás ceros).

Si notamos

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{n+1n+1} \dots b_{n+1n+m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{n+mn+1} \dots b_{n+mn+m} \end{vmatrix}$$

con la elección de A que hemos considerado se tiene:

1) $b_{n+1n+1} = 1$

2) $b_{ij} = 0$, si $i > j$, porque tiene la última fila de ceros.

3) $b_{n+1+jn+1+j} = 1.A\begin{pmatrix} 1,2,\dots,n \\ I_j \cap I_{j+1} \end{pmatrix}$ sin más que desarrollar por la fila n+j, $j=1,\dots,m-1$. Además $A\begin{pmatrix} 1,2,\dots,n \\ I_j \cap I_{j+1} \end{pmatrix}$, $j=1,\dots,m-1$ es distinto de cero pues es un determinante que tiene por columnas a

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}$$

en un determinado orden, por lo tanto su valor será más ó menos uno.

Por tanto (5.7) queda como sigue:

$$(-1)^{\sum_{j=1}^{m}\sigma_j} .1.\prod_{j=1}^{m-1} A\begin{pmatrix}1,2,\ldots,n\\ I_j\cap I_{j+1}\end{pmatrix} = (-1)^{\sum_{j=1}^{m-1}\rho_j} .|A|.\prod_{j=1}^{m-1} A\begin{pmatrix}1,2,\ldots,n\\ I_j\cap I_{j+1}\end{pmatrix}.c$$

Ahora bien,

$$|A| = (-1)^{\sigma_\theta}$$

luego nos queda

$$c = (-1)^{\sigma_\theta+\sum_{j=1}^{m}\sigma_j + \sum_{j=1}^{m-1}\rho_j}$$

<u>Observación</u>.- Un caso importante es aquel en que

$$I_j = \{1,2,\ldots,n,n+j\} \ , \ j=1,\ldots,m$$

En él todas las signaturas antes reseñadas en (5.11) son cero por lo que la fórmula (5.7) es la citada identidad de Sylvester para determinantes

$$|B| = |A|.A\begin{pmatrix}1,2,\ldots,n\\ 1,2,\ldots,n\end{pmatrix}^{m-1}$$

<u>3.-APLICACION DE LA IDENTIDAD A PROBLEMAS DE INTERPOLACION</u>

Consideremos el problema general de interpolación finita: dado un espacio vectorial E de dimensión finita t sobre un cuerpo K conmutativo y de característica cero y $\{L_i\}$, $i=1,\ldots,t$ formas lineales sobre E y $z_i \in K$, $i=1,2,\ldots,t$, hallar $p \in E$ tal que

(5.12) $$L_i(p) = z_i, \ i=1,2,\ldots,t$$

Sea $\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_t\}$ una base de E y L una forma lineal cualquiera sobre E. Si

(5.13) $$\det(L_i(\phi_j))_{i,j=1,\ldots,t} \neq 0$$

el problema (5.12) tiene una única solución que se puede expresar como

$$p = \sum_{j=1}^{t} \alpha_j . \phi_j$$

con lo que

(5.14) $$L(p) = \sum_{j=1}^{t} \alpha_j . L(\phi_j)$$

Determinamos los coeficientes α_j a partir del sistema

(5.15) $$\sum_{j=1}^{t} \alpha_j \, L_i(\phi_j) = z_i, \quad i=1,\ldots,t.$$

Consideremos las matrices de orden t+1 siguientes

$$A = \begin{bmatrix} L_1(\phi_1)\ldots L_t(\phi_1) & L(\phi_1) \\ L_1(\phi_2)\ldots L_t(\phi_2) & L(\phi_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ L_1(\phi_t)\ldots L_t(\phi_t) & L(\phi_t) \\ -z_1 \quad \ldots \quad -z_t & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$A' = \begin{bmatrix} L_1(\phi_1) & \dots & L_t(\phi_1) & L(\phi_1) \\ L_1(\phi_2) & \dots & L_t(\phi_2) & L(\phi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_1(\phi_t) & \dots & L_t(\phi_t) & L(\phi_t) \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema (5.14), (5.15) considerando como incógnitas $\alpha_1,\dots,\alpha_t$, $L(p)$,

$$\begin{cases} \alpha_1 . L(\phi_1) + \dots + \alpha_t . L(\phi_t) - L(p) = 0 \\ \alpha_1 . L_1(\phi_1) + \dots + \alpha_t . L_1(\phi_t) = z_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 . L_t(\phi_1) + \dots + \alpha_t . L_t(\phi_t) = z_t \end{cases}$$

se tiene que

(5.16) $$L(p) = \frac{|A|}{|A'|}$$

Consideremos ahora un espacio vectorial E de dimensión $n+m$ $(n,m \in N)$ sobre K, $\{\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_{n+m}\}$ una base del mismo y $\mathcal{L}_{n+m} = \{L_1,L_2,\dots,L_{n+m}\}$ un conjunto de formas lineales linealmente independientes sobre E, es decir que verifica

(5.17) $$\det(L_i(\phi_j))_{i,j=1,\dots,n+m} \neq 0$$

Sea el problema de interpolación sobre E, según nuestras notaciones,

(5.18) $$L_i\left(pf\begin{bmatrix} \phi_1,\dots,\phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{bmatrix}\right) = z_i, \quad i=1,\dots,n+m,$$

y L una forma lineal cualquiera sobre E.

Notemos por J_i, $i=1,\dots,s$, $1 \leqslant s \leqslant m+1$ a unos subconjuntos de $\{1,2,\dots,n+m\}$ que verifican

i) $\operatorname{card}(J_i) = n$, $i+1,\dots,s$

ii) $\operatorname{card}(J_i \cap J_{i+1}) = n-1$, $i=1,\dots,s-1$, $(s>1)$

iii) $\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{s} J_i\right) = n+s-1$

En lo que sigue representaremos a J_i por

$J_i = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$

ordenado de forma natural $j_1 < j_2 < \dots < j_n$.

Sean $\mathcal{L}_{n,i}$, $i=1,\dots,s$, $1 \leqslant s \leqslant m+1$, s subconjuntos de formas lineales de $\mathcal{L}_{n+m}$ que representaremos por

$$\mathcal{L}_{n,i} = \{L_{j_1}, L_{j_2}, \dots, L_{j_n}\}$$

Así mismo notaremos por $\{z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_n}\}$ los valores de las formas lineales de $\mathcal{L}_{n,i}$ sobre el elemento f.

Supondremos en lo que sigue que

$$1) \quad \det\begin{pmatrix} \phi_1, \dots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{pmatrix} \neq 0, \quad i=1,\dots,s$$

$$(5.19) \qquad 2) \quad \det\begin{pmatrix} \phi_1, \dots\dots, \phi_n \\ (\mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1}) \cup \{L\} \end{pmatrix} \neq 0, \quad i=1,\dots,s-1, (s>1)$$

Construimos las matrices

$$A = \begin{bmatrix} L_1(\phi_1) & \dots & L_{n+m}(\phi_1) & L(\phi_1) \\ L_1(\phi_2) & \dots & L_{n+m}(\phi_2) & L(\phi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_1(\phi_{n+m}) & \dots & L_{n+m}(\phi_{n+m}) & L(\phi_{n+m}) \\ -z_1 & \dots & -z_{n+m} & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$A' = \begin{bmatrix} L_1(\phi_1) & \dots & L_{n+m}(\phi_1) & L(\phi_1) \\ L_1(\phi_2) & \dots & L_{n+m}(\phi_2) & L(\phi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_1(\phi_{n+m}) & \dots & L_{n+m}(\phi_{n+m}) & L(\phi_{n+m}) \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos a aplicar a A y A' la generalización de la identidad de Sylvester (5.7) que hemos obtenido anteriormente y así obtener una relación entre

$$L\left(pf\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix}\right)$$

y

$$L\left(pf\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_{n}\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}\right)$$

También nos será útil en lo sucesivo la construcción de los conjuntos I_i, $i=1,\dots,s$ de la manera siguiente:

$$I_i = J_i \cup \{n+m+1\}, \quad i=1,\dots,s.$$

Puesto que por construcción de los J_i tenemos

$$\operatorname{card}(\{1,2,\ldots,n+m\} - \bigcup_{i=1}^{s} J_i) = n+m-(n+s-1) = m-s+1$$

entonces sea

$$\{1,2,\ldots,n+m\} - \bigcup_{i=1}^{s} J_i = \{t_{s+1},\ldots,t_{m+1}\} \tag{5.20}$$

un conjunto que nos será de utilidad más adelante.

Llamemos ahora

$$I_i = J_s \cup \{t_i\}, \quad i=s+1,\ldots,m+1$$

Por la construcción hecha se tiene

i) $\operatorname{card}(I_i) = n+1, \quad i=1,\ldots,m+1$

ii) $\operatorname{card}(I_i \cap I_{i+1}) = n, \quad i=1,\ldots,m$

iii) $\bigcup_{i=1}^{m+1} I_i = \{1,2,\ldots,n+m,n+m+1\}$

Al aplicar a A y A' (5.7) con los I_i que acabamos de formar tenemos que para ambas es la misma constante $c \neq 0$ y los mismos factores

$$A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ c_{j1}, & c_{j2}, & \ldots, & c_{jn} \end{pmatrix} = A'\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ c_{j1}, & c_{j2}, & \ldots, & c_{jn} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{5.21}$$

pues (5.21) es del tipo (5.19),1) ō (5.19),2). Podemos dividir las dos identidades, pues $|A'| \neq 0$ por (5.17), y se tiene

$$\frac{|B|}{|B'|} = \frac{|A|}{|A'|} \tag{5.22}$$

Por (5.16)

$$L\left(pf\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix}\right) = \frac{|A|}{|A'|}$$

luego (5.22) da

$$(5.23)\qquad L\left(pf\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix}\right) = \frac{|B|}{|B'|}\,.$$

Los elementos de B y de B' son del tipo

$$b_{ij} = A\begin{pmatrix}1,2,\dots,n,n+i\\ I_j\end{pmatrix}$$

y

$$b'_{ij} = A'\begin{pmatrix}1,2,\dots,n,n+i\\ I_j\end{pmatrix}$$

respectivamente, donde los elementos de I_j están ordenados según el índice creciente.

Entonces dividimos la columna j de B y de B' en (5.23) por

$$A'\begin{pmatrix}1,2,\dots,n,n+m+1\\ I_j\end{pmatrix}$$

que es distinto de cero porque

$$A'\begin{pmatrix}1,2,\dots,n,n+m+1\\ I_j\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1,2,\dots,n\\ J_j\end{pmatrix}.$$

Entonces se tiene:

Para $j=1,2,\dots,s$, $\quad i=1,2,\dots,m$

$$\frac{b_{ij}}{A'\begin{pmatrix}1,2,\dots,n,n+m+1\\ l_j\end{pmatrix}} = \frac{A\begin{pmatrix}1,2,\dots,n,n+i\\ l_j\end{pmatrix}}{A'\begin{pmatrix}1,2,\dots,n,n+m+1\\ l_j\end{pmatrix}}$$

y

$$\frac{b'_{ij}}{A'\begin{pmatrix}1,2,\dots,n,n+m+1\\ l_j\end{pmatrix}} = \frac{A'\begin{pmatrix}1,2,\dots,n,n+i\\ l_j\end{pmatrix}}{A'\begin{pmatrix}1,2,\dots,n,n+m+1\\ l_j\end{pmatrix}}$$

que son una expresión del tipo

$$(5.24)\qquad \frac{\begin{vmatrix} L_{j_1}(\phi_1) & \dots & L_{j_n}(\phi_1) & L(\phi_1)\\ L_{j_1}(\phi_2) & \dots & L_{j_n}(\phi_2) & L(\phi_2)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ L_{j_1}(\phi_n) & \dots & L_{j_n}(\phi_n) & L(\phi_n)\\ L_{j_1}(\phi_{n+i}) & \dots & L_{j_n}(\phi_{n+i}) & L(\phi_{n+i})\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_{j_1}(\phi_1) & L_{j_2}(\phi_1) & \dots & L_{j_n}(\phi_1)\\ L_{j_1}(\phi_2) & L_{j_2}(\phi_2) & \dots & L_{j_n}(\phi_2)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ L_{j_1}(\phi_n) & L_{j_2}(\phi_n) & \dots & L_{j_n}(\phi_n)\end{vmatrix}}$$

Desarrollando el numerador por la última columna y dividiendo por el denominador queda:

$$L(\phi_{n+i}) - L\left(p\phi_{n+i}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,j}\end{bmatrix}\right), \quad \begin{matrix} i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,s \end{matrix}$$

es decir,

$$\frac{b_{ij}}{A'\begin{pmatrix}1,2,\ldots,n,n+m+1\\ I_j\end{pmatrix}} = \frac{b'_{ij}}{A'\begin{pmatrix}1,2,\ldots,n,n+m+1\\ I_j\end{pmatrix}} =$$

$$= L(\phi_{n+i}) - L\left(p\phi_{n+i}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,j}\end{bmatrix}\right)$$

Para $i = m+1$, $j=1,\ldots,s$, de (5.16) se deduce que

$$\frac{b_{m+1\,j}}{A'\begin{pmatrix}1,2,\ldots,n,n+m+1\\ I_j\end{pmatrix}} = \frac{A\begin{pmatrix}1,2,\ldots,n,n+m+1\\ I_j\end{pmatrix}}{A'\begin{pmatrix}1,2,\ldots,n,n+m+1\\ I_j\end{pmatrix}} = L\left(pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,j}\end{bmatrix}\right)$$

mientras que

$$\frac{b'_{m+1\,j}}{A'\begin{pmatrix}1,2,\ldots,n,n+m+1\\ I_j\end{pmatrix}} = \frac{A'\begin{pmatrix}1,2,\ldots,n,n+m+1\\ I_j\end{pmatrix}}{A'\begin{pmatrix}1,2,\ldots,n,n+m+1\\ I_j\end{pmatrix}} = 1$$

Por otra parte, si $s < m+1$, $j=s+1,\ldots,m+1$, $i=1,\ldots,m$, se tiene

$$\frac{b_{ij}}{A'\begin{pmatrix}1,2,\dots,n,n+m+1\\ l_j\end{pmatrix}} = \frac{b'_{ij}}{A'\begin{pmatrix}1,2,\dots,n,n+m+1\\ l_j\end{pmatrix}}$$

que admite una expresión análoga a (5.24) pero cambiando la última columna del numerador $L(\phi_k)$ por una del tipo $L_{t_j}(\phi_k)$, con t_j perteneciente al conjunto (5.20). (No debe estar en el mismo sitio pero ésto no debe importar pues lo único que ello implica es un cambio de signo que es el mismo en $|B|$ y en $|B'|$).

Así pues, para $i=1,2,\dots,m$, $j=s+1,\dots,m+1$

$$\frac{b_{ij}}{A'\begin{pmatrix}1,2,\dots,n,n+m+1\\ l_j\end{pmatrix}} = \frac{b'_{ij}}{A'\begin{pmatrix}1,2,\dots,n,n+m+1\\ l_j\end{pmatrix}} =$$

$$= L_{t_j}(\phi_{n+i}) - L_{t_j}(p\phi_{n+i}\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,s}\end{bmatrix})$$

Para $i = m+1$, $j= s+1,\dots,m+1$, tenemos que

$$\frac{b_{m+1\,j}}{A'\begin{pmatrix}1,2,\dots,n,n+m+1\\ l_j\end{pmatrix}}$$

será de la forma

$$(5.25) \qquad \frac{\begin{vmatrix} L_{j_1}(\phi_1) & \dots & L_{j_n}(\phi_1) & L_{t_j}(\phi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{j_1}(\phi_n) & \dots & L_{j_n}(\phi_n) & L_{t_j}(\phi_n) \\ -z_{j_1} & \dots & -z_{j_n} & -z_{t_j} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_{j_1}(\phi_1) & \dots\dots & L_{j_n}(\phi_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{j_1}(\phi_n) & \dots\dots & L_{j_n}(\phi_n) \end{vmatrix}}$$

y como el numerador se puede expresar de la forma

$$\begin{vmatrix} L_{j_1}(\phi_1) & \dots & L_{j_n}(\phi_1) & L_{t_j}(\phi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{j_1}(\phi_n) & \dots & L_{j_n}(\phi_n) & L_{t_j}(\phi_n) \\ 0 & \dots & 0 & -z_{t_j} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_{j_1}(\phi_1) & \dots & L_{j_n}(\phi_1) & L_{t_j}(\phi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{j_1}(\phi_n) & \dots & L_{j_n}(\phi_n) & L_{t_j}(\phi_n) \\ -z_{j_1} & \dots & -z_{j_n} & 0 \end{vmatrix}$$

tendremos en definitiva que

$$\frac{b_{m+1\,j}}{A'\begin{pmatrix} 1,2,\dots,n,n+m+1 \\ l_j \end{pmatrix}} = -z_{t_j} + L_{t_j}\left(pf\begin{bmatrix} \phi_1,\dots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,s} \end{bmatrix}\right)$$

$$i=m+1, \quad j=s+1,\dots,m+1$$

Análogamente, para $i= m+1$, $j= s+1,\dots,m+1$,

$$\frac{b'_{m+1\,j}}{A'\begin{pmatrix}1,2,\ldots,n,n+m+1\\ l_j\end{pmatrix}} = 0$$

por tener el determinante del numerador la última fila de ceros.

Siguiendo notaciones similares en cierto modo a las de G. Mühlbach [35], llamemos

$$r_{n+i,n,j} = \phi_{n+i} - p\phi_{n+i}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,j}\end{bmatrix}$$

y así la relación que buscamos entre

$$L(pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix})$$

y

$$L(pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix})$$

sería

(5.26)

$$L\left(\mathrm{pf}\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix}\right)=\frac{\begin{vmatrix} L(r_{n+1,n,1}) & \cdots & L(r_{n+1,n,s}), & L_{t_{s+1}}(r_{n+1,n,s}) & \cdots & L_{t_{m+1}}(r_{n+1,n,s})\\ L(r_{n+2,n,1}) & \cdots & L(r_{n+2,n,s}), & L_{t_{s+1}}(r_{n+2,n,s}) & \cdots & L_{t_{m+1}}(r_{n+2,n,s})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ L(r_{n+m,n,1}) & \cdots & L(r_{n+m,n,s}), & L_{t_{s+1}}(r_{n+m,n,s}) & \cdots & L_{t_{m+1}}(r_{n+m,n,s})\\ L\left(\mathrm{pf}\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix}\right) & \cdots & L\left(\mathrm{pf}\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,s}\end{bmatrix}\right), & -z_{t_{s+1}}+L_{t_{s+1}}\left(\mathrm{pf}\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,s}\end{bmatrix}\right) & \cdots & -z_{t_{m+1}}+L_{t_{m+1}}\left(\mathrm{pf}\begin{bmatrix}\phi_1,\dots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,s}\end{bmatrix}\right)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L(r_{n+1,n,1}) & \cdots & L(r_{n+1,n,s}), & L_{t_{s+1}}(r_{n+1,n,s}) & \cdots & L_{t_{m+1}}(r_{n+1,n,s})\\ L(r_{n+2,n,1}) & \cdots & L(r_{n+2,n,s}), & L_{t_{s+1}}(r_{n+2,n,s}) & \cdots & L_{t_{m+1}}(r_{n+2,n,s})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ L(r_{n+m,n,1}) & \cdots & L(r_{n+m,n,s}), & L_{t_{s+1}}(r_{n+m,n,s}) & \cdots & L_{t_{m+1}}(r_{n+m,n,s})\\ 1 & \cdots & 1, & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}}$$

para $s < m+1$. Si $s=m+1$, la fórmula sigue siendo válida pero las columnas en el numerador y denominador son del mismo tipo de las s primeras de (5.26).

Los <u>casos particulares más interesantes</u> son aquellos en que $s= m+1$ y $s = 1$.

a) Si $s = m+1$, las elecciones más usuales de los conjuntos J_i son

$$J_i = \{1,2,\ldots,n-1,n+i-1\} \ , \ i=1,\ldots,m+1$$

que corresponde al algoritmo de Aitken, y

$$J_i = \{i,i+1,\ldots,i+n-1\} \ , \ i=1,\ldots,m+1$$

que corresponde al algoritmo de Neville.

b) Si $s = 1$, desaparece la condición (5.19),2) sobre L y en (5.26) solo hay una columna, la primera, con la forma lineal L. No obstante en el denominador desaparece, desarrollando por la última fila.

Luego tenemos en (5.26) el valor de L aplicado a un elemento de E igual al valor de L aplicado a otro elemento de E. Como L es una forma lineal arbitraria, ambos elementos de E son el mismo. Haciendo ahora una descomposición como la hecha en (5.25), es decir

$$\begin{vmatrix} L(r_{n+1,n,1}) & L_{t_2}(r_{n+1,n,1}) & \cdots & L_{t_{m+1}}(r_{n+1,n,1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L(r_{n+m,n,1}) & L_{t_2}(r_{n+m,n,1}) & \cdots & L_{t_{m+1}}(r_{n+m,n,1}) \\ L\left(pf\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,1} \end{bmatrix}\right) & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} L(r_{n+1,n,1}) & L_{t_2}(r_{n+1,n,1}) & \cdots & L_{t_{m+1}}(r_{n+1,n,1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L(r_{n+m,n,1}) & L_{t_2}(r_{n+m,n,1}) & \cdots & L_{t_{m+1}}(r_{n+m,n,1}) \\ 0 & -z_{t_2}+L_{t_2}\left(pf\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,1} \end{bmatrix}\right) & \cdots & -z_{t_{m+1}}+L_{t_{m+1}}\left(pf\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,1} \end{bmatrix}\right) \end{vmatrix}$$

obtenemos

$$pf\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{bmatrix} = pf\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,1} \end{bmatrix} +$$

$$+(-1)^m \frac{\begin{vmatrix} r_{n+1,n,1} & L_{t_2}(r_{n+1,n,1}) & \cdots & L_{t_{m+1}}(r_{n+1,n,1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n+m,n,1} & L_{t_2}(r_{n+m,n,1}) & \cdots & L_{t_{m+1}}(r_{n+m,n,1}) \\ 0 & -z_{t_2}+L_{t_2}\left(pf\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,1} \end{bmatrix}\right) & \cdots & -z_{t_{m+1}}+L_{t_{m+1}}\left(pf\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,1} \end{bmatrix}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_{t_2}(r_{n+1,n,1}) & \cdots & L_{t_{m+1}}(r_{n+1,n,1}) \\ L_{t_2}(r_{n+2,n,1}) & \cdots & L_{t_{m+1}}(r_{n+2,n,1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{t_2}(r_{n+m,n,1}) & \cdots & L_{t_{m+1}}(r_{n+m,n,1}) \end{vmatrix}}$$

que es una fórmula de Newton generalizada, como la dada por G. Mühlbach en [36].

Observación.- Una vez establecida la fórmula (5.26) se puede demostrar de forma muy sencilla. Sus dos miembros son formas lineales sobre K^{n+m} y la igualdad será cierta si al aplicar dichas formas lineales a una base de K^{n+m} los resultados coinciden. Pero por (5.17),

$$\{L_1(\phi_i),\ldots,L_{n+m}(\phi_i),\quad i=1,\ldots,n+m\}$$

es una base de K^{n+m}.

Sustituyendo en el primer miembro de (5.26) f por ϕ_j se tiene

$$L(p\phi_j\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix}) = L(\phi_j)$$

En el segundo miembro hay que distinguir dos casos:

a) Si $j=1,2,\ldots,n$, la última fila del numerador es

$$(L(\phi_j),L(\phi_j),\ldots,L(\phi_j),0,\ldots,0)$$

pues

$$-z_{t_{s+i}}+L_{t_{s+i}}(p\phi_j\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,s}\end{bmatrix})= -L_{t_{s+i}}(\phi_j)+L_{t_{s+i}}(\phi_j)=0$$

Llamando D al determinante del denominador, el numerador se expresa como

$$L(\phi_j).D$$

por lo que el cociente es $L(\phi_j)$.

b) Si $j = n+h$, $h > 0$, los ceros anteriores no aparecen directamente en la última fila, pero sumándole a ésta la h-ésima se obtiene nuevamente

$$(L(\phi_j), L(\phi_j), \ldots, L(\phi_j), 0, \ldots, 0)$$

Por consiguiente la fórmula (5.26) es válida bajo la única condición de que su denominador no se anule. Sin embargo en nuestras condiciones podemos garantizar su no anulación.

Por otra parte, en el capítulo II establecíamos en el teorema 2.2 la condición, adicional a las impuestas hasta ahora a los $\mathcal{L}_{n,i}$, de que

$$\det \begin{pmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_{n+s-1} \\ \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_{n,i} \end{pmatrix} \neq 0$$

Surge de manera natural la pregunta de que si la fórmula (5.26) (y su particularización para s=1) coincide ó no con la fórmula (2.4) (y su particularización para s=1) y por tanto, si nos sobraban hipótesis ó no.

Para verlo, desarrollamos el segundo miembro de (5.26) por la última fila del numerador y dividimos por el denominador, llegando a obtenerse lo siguiente

$$\sum_{i=1}^{s} \gamma_i . L(pf \begin{bmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{bmatrix}) + H$$

donde en H incluimos los términos que proceden de las últimas m-s+1 columnas. De acuerdo con lo anteriormente dicho, ¿son estos γ_i los mismos λ_i que aparecían en la fórmula (2.4) y eran solución del sistema (2.5) ó no?. La respuesta es, en general, negativa. Basta escribir su valor

$$(5.27)\qquad \gamma_i=\frac{\begin{vmatrix} L(r_{n+1,n,1})..L(r_{n+1,n,i})..L(r_{n+1,n,s}) & L_{t_{s+1}}(r_{n+1,n,s})..L_{t_{m+1}}(r_{n+1,n,s}) \\ \cdots & \cdots \\ L(r_{n+m,n,1})..L(r_{n+m,n,i})..L(r_{n+m,n,s}) & L_{t_{s+1}}(r_{n+m,n,s})..L_{t_{m+1}}(r_{n+m,n,s}) \\ 0 \quad .. \quad 1 \quad .. \quad 0 & 0 \quad \cdots \quad 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L(r_{n+1,n,1})\ldots L(r_{n+1,n,s}) & L_{t_{s+1}}(r_{n+1,n,s})..L_{t_{m+1}}(r_{n+1,n,s}) \\ \cdots & \cdots \\ L(r_{n+m,n,1})\ldots L(r_{n+m,n,s}) & L_{t_{s+1}}(r_{n+m,n,s})..L_{t_{m+1}}(r_{n+m,n,s}) \\ 1 \quad \ldots \quad 1 & 0 \quad \cdots \quad 0 \end{vmatrix}}$$

Es claro que

$$(5.28)\qquad \sum_{i=1}^{s}\gamma_i = 1$$

pero, en general, ya no tiene por qué cumplirse

$$\sum_{i=1}^{s}\gamma_i . L(p\phi_{n+h}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix}) = L(\phi_{n+h}),\quad h=1,..,s-1$$

como para los λ_i. Veámoslo con un contraejemplo.

Sean $n=1$, $m=2$, $s=2$, $\phi_1=1$, $\phi_2=x$, $\phi_3=x^2$. Las formas lineales $\{L_i\}$, $i=1,2,3$ serán el valor de la función en x_i, $i=1,2,3$, puntos distintos y $L(f)=f(x)$.

De (5.27) se tiene

$$\gamma_1 = \frac{\begin{vmatrix} x - x_1 & x - x_2 & x_3 - x_2 \\ x^2 - x_1^2 & x^2 - x_2^2 & x_3^2 - x_2^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x - x_1 & x - x_2 & x_3 - x_2 \\ x^2 - x_1^2 & x^2 - x_2^2 & x_3^2 - x_2^2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(x-x_2)(x_3-x)}{(x_1-x_2)(x_3-x_1)} ,$$

$$\gamma_2 = \frac{\begin{vmatrix} x - x_1 & x - x_2 & x_3 - x_2 \\ x^2 - x_1^2 & x^2 - x_2^2 & x_3^2 - x_2^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x - x_1 & x - x_2 & x_3 - x_2 \\ x^2 - x_1^2 & x^2 - x_2^2 & x_3^2 - x_2^2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(x-x_1)(x+x_1-x_2-x_3)}{(x_1-x_2)(x_3-x_1)}$$

Por otra parte se tiene

$$px\begin{bmatrix} 1 \\ \mathcal{L}_{1,1} \end{bmatrix}(x) = x_1, \qquad px\begin{bmatrix} 1 \\ \mathcal{L}_{1,2} \end{bmatrix}(x) = x_2$$

con

$$\mathcal{L}_{1,1} = \{L_1\} \quad , \quad \mathcal{L}_{1,2} = \{L_2\} .$$

Las γ_1, γ_2 no verifican el sistema (2,5) porque debería ser:

$$\gamma_1 . x_1 + \gamma_2 . x_2 = x,$$

y en cambio se tiene

$$\gamma_1 . x_1 + \gamma_2 . x_2 = \frac{x^2 - x(x_2+x_3) + x_1 . x_2}{x_1 - x_3} \neq x$$

En este caso el sistema (2.5) es:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ x_1 . \lambda_1 + x_2 . \lambda_2 = x \end{cases}$$

cuya solución es

$$\lambda_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

La fórmula (2.4) sería:

$$pf\begin{bmatrix} 1, x, x^2 \\ L_1, L_2, L_3 \end{bmatrix}(x) = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i(x) . pf\begin{bmatrix} 1 \\ \mathcal{L}_{1,i} \end{bmatrix}(x) + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i(x) . a_3 . rx^2\begin{bmatrix} 1 \\ \mathcal{L}_{1,i} \end{bmatrix}(x)$$

La diferencia dividida a_3 se obtiene de

$$a_3 . L_3 (x^2 - px^2\begin{bmatrix} 1, x \\ L_1, L_2 \end{bmatrix}) = L_3 (f - pf\begin{bmatrix} 1, x \\ L_1, L_2 \end{bmatrix})$$

resultando ser

$$a_3 = \frac{f(x_1)(x_2-x_3)+f(x_2)(x_3-x_1)+f(x_3)(x_1-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_1-x_2)}$$

Por tanto la fórmula (2.4) quedaría como

$$pf\begin{bmatrix} 1, x, x^2 \\ L_1, L_2, L_3 \end{bmatrix}(x) = \frac{x_2-x}{x_2-x_1} . f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} . f(x_2) +$$

$$+ \frac{f(x_1)(x_2-x_3)+f(x_2)(x_3-x_1)+f(x_3)(x_1-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_1-x_2)} . (x-x_1)(x-x_2)$$

Por otra parte, la fórmula (5.26) es:

$$
pf\begin{bmatrix} 1,\ x, x^2 \\ L_1, L_2, L_3 \end{bmatrix}(x) = \frac{\begin{vmatrix} r_{2,1,1}(x) & r_{2,1,2}(x) & L_3(r_{2,1,2}) \\ r_{3,1,1}(x) & r_{3,1,2}(x) & L_3(r_{3,1,2}) \\ pf\begin{bmatrix} 1 \\ \mathcal{L}_{1,1} \end{bmatrix}(x) & pf\begin{bmatrix} 1 \\ \mathcal{L}_{1,2} \end{bmatrix}(x) & -f(x_3)+L_3(pf\begin{bmatrix} 1 \\ \mathcal{L}_{1,2} \end{bmatrix}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_{2,1,1}(x) & r_{2,1,2}(x) & L_3(r_{2,1,2}) \\ r_{3,1,1}(x) & r_{3,1,2}(x) & L_3(r_{3,1,2}) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} =
$$

$$
= \frac{\begin{vmatrix} x - x_1 & x - x_2 & x_3 - x_2 \\ x^2 - x_1^2 & x^2 - x_2^2 & x_3^2 - x_2^2 \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_2) - f(x_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x - x_1 & x - x_2 & x_3 - x_2 \\ x^2 - x_1^2 & x^2 - x_2^2 & x_3^2 - x_2^2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} =
$$

$$
= \frac{f(x_1)(x-x_2)(x_3-x)}{(x_3-x_1)(x_1-x_2)} + \frac{f(x_2)(x-x_3)(x-x_1)}{(x_3-x_2)(x_1-x_2)} + \frac{f(x_3)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}
$$

No obstante en los casos particulares interesantes antes citados <u>sí</u> coinciden ambas fórmulas.

Así, si <u>$s = m+1$</u>, tenemos que para $j=n+h$,

$h=1,\ldots,m,$

$$(5.29)\qquad \sum_{i=1}^{m+1} \gamma_i . L(p\phi_{n+h}\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,i}\end{bmatrix})$$

es un cociente de determinantes. Si en él sumamos a la última fila del numerador la h-ésima, dicha fila se convertirá en

$$(L(\phi_{n+h}),L(\phi_{n+h}),\ldots,L(\phi_{n+h}))$$

con lo cual nos queda que (5.29) valdrá $L(\phi_{n+h})$.

Si s = 1, desarrollando el segundo miembro de (5.26) por la primera columna del numerador nos queda

$$(5.30)\qquad L(pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_{n+m}\\ \mathcal{L}_{n+m}\end{bmatrix}) = L(pf\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix})+\sum_{k=n+1}^{n+m} \mu_k . L(r\phi_k\begin{bmatrix}\phi_1,\ldots,\phi_n\\ \mathcal{L}_{n,1}\end{bmatrix})$$

donde los μ_k son el cociente

$$\mu_k = \frac{\begin{vmatrix} L_{n+1}(r_{n+1,n,1}) & \cdots\cdots & L_{n+m}(r_{n+1,n,1}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ L_{n+1}(r_{k-1,n,1}) & \cdots\cdots & L_{n+m}(r_{k-1,n,1}) \\ L_{n+1}(r_{k+1,n,1}) & \cdots\cdots & L_{n+m}(r_{k+1,n,1}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ L_{n+1}(r_{n+m,n,1}) & \cdots\cdots & L_{n+m}(r_{n+m,n,1}) \\ -z_{n+1}+L_{n+1}\left(pf\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,1} \end{bmatrix}\right) & \cdots\cdots & -z_{n+m}+L_{n+m}\left(pf\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_n \\ \mathcal{L}_{n,1} \end{bmatrix}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_{n+1}(r_{n+1,n,1}) & \cdots\cdots & L_{n+m}(r_{n+1,n,1}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ L_{n+1}(r_{k-1,n,1}) & \cdots\cdots & L_{n+m}(r_{k-1,n,1}) \\ L_{n+1}(r_{k,n,1}) & \cdots\cdots & L_{n+m}(r_{k,n,1}) \\ L_{n+1}(r_{k+1,n,1}) & \cdots\cdots & L_{n+m}(r_{k+1,n,1}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ L_{n+1}(r_{n+m,n,1}) & \cdots\cdots & L_{n+m}(r_{n+m,n,1}) \end{vmatrix}}$$

Como en (5.30) se puede prescindir de la forma lineal L ya que no hay ninguna condición sobre ella y los μ_k son los coeficientes de ϕ_k, $k=n+1,\ldots,n+m$ en la expresión de

$$L\left(pf\begin{bmatrix} \phi_1,\ldots,\phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{bmatrix}\right)$$

es decir, son la diferencias divididas de orden k

$$a_k = \left[\begin{matrix} \phi_1,\ldots,\phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} f \\ k \end{matrix}\right]$$

obtenemos la fórmula de Newton generalizada (3.23).

A P E N D I C E

APENDICE

Como un pequeño ejemplo de aplicación, al que ya hemos aludido en el capítulo IV, planteamos aquí un problema de interpolación lagrangiana en seis puntos de R^2,

En primer lugar detectamos si los seis puntos están sobre dos rectas, en cuyo caso el problema no tendría solución ó estaría indeterminada. Si los puntos forman un sistema de orden dos en el sentido del §1 del capítulo IV, entonces el problema planteado tiene solución única en $P_2(x,y)$ y se resuelve de forma iterativa siguiendo el proceso descrito en el capítulo IV, §1. Si no hay tres puntos alineados, desdoblamos el problema inicial en dos nuevos problemas con cinco datos cada uno

$$\mathcal{L}_{5,1} = \{f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4), f(P_5)\}$$

y

$$\mathcal{L}_{5,2} = \{f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4), f(P_6)\}$$

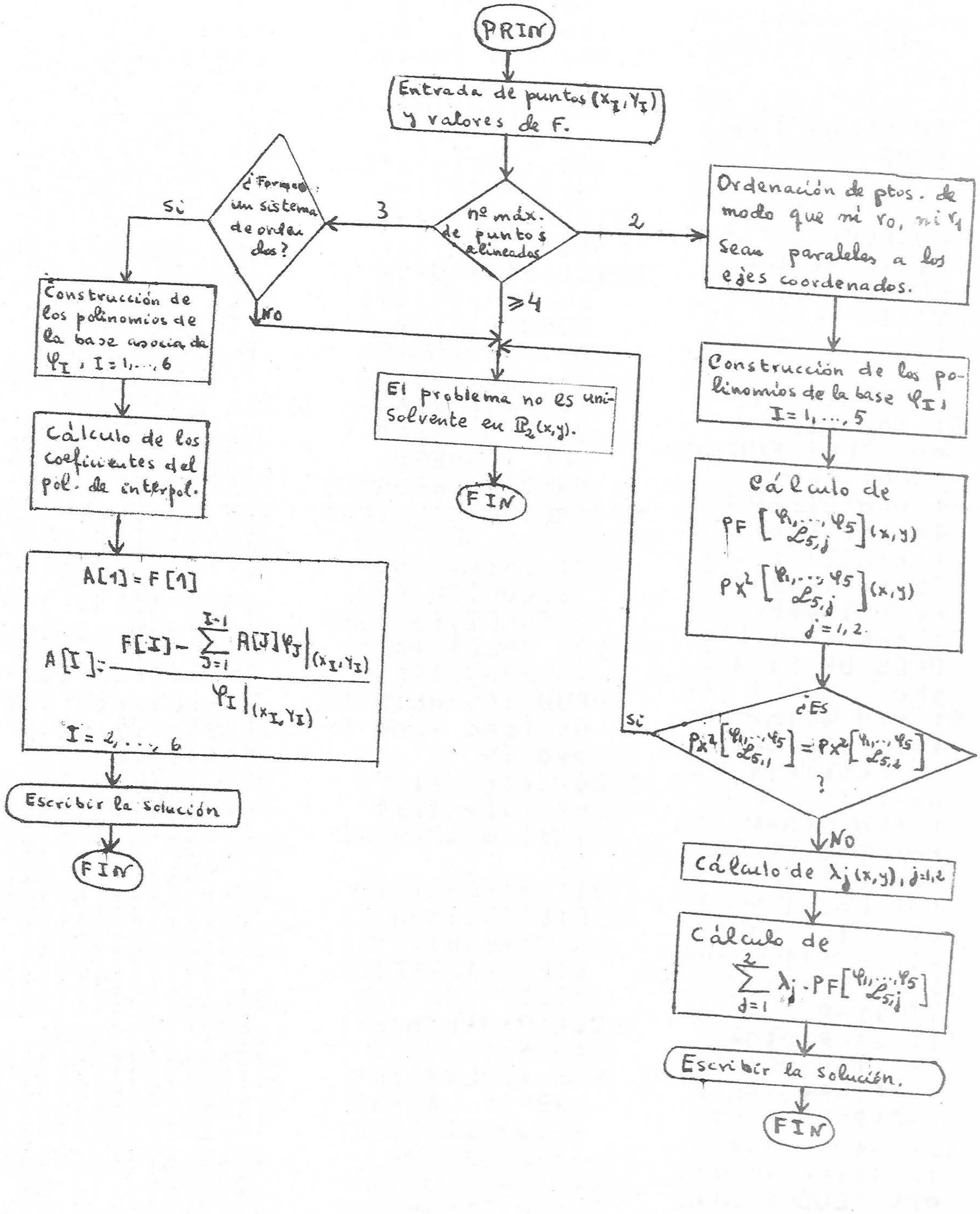
y aplicamos la fórmula de Mühlbach-Aitken-Neville en dos variables con $n = 5$, $m = 1$, $s = 2$ para obtener la solución del problema total, si ésta existe. También se puede detectar la no existencia de solución.

Este problema se resuelve, igualmente, de forma iterativa pero siguiendo el procedimiento dado en el

∮4 del mismo capítulo IV.

El organigrama que se da muestra, de la forma más esquemática posible, los pasos a seguir para resolver el problema planteado. Por último digamos que el programa ha sido realizado en leguaje HPL y su computación se ha hecho en un ordenador HP-9825.A.

ORGANIGRAMA



```
0: prt "INTERPOL
 ACION   LAGRANG
 IANA EN 6PUNTOS
  DE R"&char(29)
1: dim X[6],Y[6]
 ,F[6],A[6],C[6]
 ,B[6]
2: dsp "ENTRADA
 DE DATOS";wait
 1500
3: for I=1 to 6;
 ent "PRIMERA
 COORDENADA",
 X[I],"SEGUNDA
 COORDENADA",
 Y[I]
4: ent "VALOR
 DE LA FUNCION",
 F[I];next I
5: spc ;spc ;
 prt "LOS PUNTOS
  SON:";spc
6: fxd 2;for
 I=1 to 6;prt
 str(X[I])&",
 "&str(Y[I]);
 next I;spc
7: spc ;prt "VAL
 ORES DE F:";
 spc
8: fxd 4;for
 I=1 to 6;prt "
  "&str(F[I]);
 next I
9: fxd 2;0→V;
 for I=1 to 4;
 for J=I+1 to 5;
 for K=J+1 to 6
10: (Y[K]-Y[I])(
 X[J]-X[I])-(X[K
 ]-X[I])(Y[J]-
 Y[I])→R
11: if R=0;3+
 T→T;1+V→V;if
 V=1;I→A;J→B;
 K→C;3→W
12: next K;if
 T>=4;spc ;spc ;
 prt "LOS PUNTOS
  ESTANSOBRE
 UNA CONICA";end
13: 0→T;next J;
 next I;if W#3;
 spc ;gto "ALLI"
14: for I=C+1
 to 4;for J=I+1
 to 5;for K=J+1
 to 6
15: (Y[K]-Y[I])(
 X[J]-X[I])-(X[K
 ]-X[I])(Y[J]-
 Y[I])→R
16: if R=0;spc ;
 spc ;prt "LOS
 PUNTOS ESTANSOB
 RE UNA CONICA
 ";end
17: next K;next
 J;next I;spc ;
 prt "NUMERO
 MAXIMO DEPUNTOS
  ALINEADOS TRES
  "
18: spc ;prt
 "SOLUCION POR
   [G-M]";gto 20
19: "ALLI":prt
 "NO HAY TRES
 PUN-TOS ALINEAD
 OS";spc ;spc ;
 gto 65
20: for I=1 to
 6;X[I]→A[I];
 Y[I]→B[I];next
 I
21: A[A]→X[1];
 A[B]→X[2];A[C]→
 X[3];B[A]→Y[1];
 B[B]→Y[2];B[C]→
 Y[3]
22: 0→J;for L=1
 to 6
23: if L#A;if
 L#B;if L#C;A[L]
 →X[J+4];B[L]→Y[
 J+4];1+J→J
24: next L
25: 0→Q;for J=1
 to 6;F[J]→B[J];
 next J
26: B[A]→F[1];
 B[B]→F[2];B[C]→
 F[3]
27: for L=1 to
 6;if L#A;if
 L#B;if L#C;B[L]
 →F[4+Q];1+Q→Q
28: next L
29: 1→r1
30: if Y[1]=Y[2]
 ;-X[1]→r7;1→r8;
 X[1]X[2]→r13;-
 (X[1]+X[2])→r14
 ;1→r15;gto +2
31: -Y[1]→r7;
 Y[1]Y[2]→r13;
 1→r10;1→r17;-
 (Y[1]+Y[2])→r16
32: X[1]Y[2]-
 Y[1]X[2]→r19;
 Y[1]-Y[2]→r20;
 X[2]-X[1]→r22
33: if Y[4]=Y[5]
 ;r19-X[4]r20→r2
 6;r20→r27;-X[4]
 r22→r28;r22→r30
 ;gto +2
34: -Y[4]r20→r26
 ;-Y[4]r22+r19→r
 28;r22→r29;r20→
 r30;-Y[4]r19→r2
 5;gto +2
35: -X[4]r19→r25
36: (Y[4](X[5]-
 X[4])-X[4](Y[5]
 -Y[4]))r19→r31
37: (Y[5]-Y[4])r
 19+(Y[4](X[5]-
 X[4])-X[4](Y[5]
 -Y[4]))r20→r32
38: (Y[5]-Y[4])r
 20→r33
39: (X[4]-X[5])r
 19+(Y[4](X[5]-
 X[4])-X[4](Y[5]
 -Y[4]))r22→r34
40: (X[4]-X[5])r
 22→r35
41: (Y[5]-Y[4])r
 22+(X[4]-X[5])r
 20→r36
```

```
42: 1→Z
43: for J=0 to 4;7+6J→K;for I=J+2 to 6
44: rK+r(K+1)X[I]+r(K+2)X[I]↑2+r(K+3)Y[I]+r(K+4)Y[I]↑2→r(36+Z)
45: r(K+5)X[I]Y[I]+r(36+Z)→r(36+Z);1+Z→Z;next I;next J
46: F[1]→A[1];(F[2]-A[1])/r37→A[2]
47: (F[3]-A[1]-A[2]r38)/r42→A[3]
48: (F[4]-A[1]-A[2]r39-A[3]r43)/r46→A[4]
49: (F[5]-A[1]-A[2]r40-A[3]r44-A[4]r47)/r49→A[5]
50: (F[6]-A[1]-A[2]r41-A[3]r45-A[4]r48-A[5]r50)/r51→A[6]
51: spc ;spc ;prt "EL POLINOMIO ES:";spc
52: A[1]+A[2]r7+A[3]r13+A[4]r19+A[5]r25+A[6]r31→C[1]
53: prt "TERMINO INDEPEN.",C[1]
54: A[2]r8+A[3]r14+A[4]r20+A[5]r26+A[6]r32→C[2]
55: prt "COEF. DE X :",C[2]
56: A[2]r9+A[3]r15+A[4]r21+A[5]r27+A[6]r33→C[3]
57: prt "COEF. DE X↑2 :",C[3]
58: A[2]r10+A[3]r16+A[4]r22+A[5]r28+A[6]r34→C[4]
59: prt "COEF. DE Y :",C[4]
60: A[2]r11+A[3]r17+A[4]r23+A[5]r29+A[6]r35→C[5]
61: prt "COEF. DE Y↑2 :",C[5]
62: A[2]r12+A[3]r18+A[4]r24+A[5]r30+A[6]r36→C[6]
63: prt "COEF. DE XY :",C[6]
64: spc ;spc ;prt "FIN DE LA SOLUC.";end
65: dim D[5],E[6],G[5]
66: for I=1 to 5;for J=I+1 to 6
67: if X[I]#X[J] and Y[I]#Y[J];I→A;J→B;gto "&"
68: next J;next I
69: "&":for I=1 to 6;X[I]→A[I];Y[I]→B[I];next I
70: A[A]→X[1];A[B]→X[2];B[A]→Y[1];B[B]→Y[2]
71: 0→J;for L=1 to 6
72: if L#A;if L#B;A[L]→X[J+3];B[L]→Y[J+3];1+J→J
73: next L
74: 0→Q;for J=1 to 6;F[J]→B[J];next J
75: B[A]→F[1];B[B]→F[2];for L=1 to 6
76: if L#A;if L#B;B[L]→F[3+Q];1+Q→Q
77: next L
78: 1→r1;-X[1]→r7;1→r8;Y[1]X[2]-X[1]Y[2]→r13;Y[2]-Y[1]→r14
79: X[1]-X[2]→r16
80: for I=3 to 5;for J=I+1 to 6
81: if X[I]#X[J] and Y[I]#Y[J];I→A;J→B;gto "$"
82: next J;next I
83: "$":for I=3 to 6;X[I]→A[I];Y[I]→B[I];next I
84: A[A]→X[3];A[B]→X[4];B[A]→Y[3];B[B]→Y[4]
85: 0→J;for L=3 to 6
86: if L#A;if L#B;A[L]→X[J+5];B[L]→Y[J+5];1+J→J
87: next L
88: 0→Q;for J=3 to 6;F[J]→B[J];next J;B[A]→F[3];B[B]→F[4]
89: for L=3 to 6;if L#A;if L#B;B[L]→F[5+Q];1+Q→Q
90: next L
91: -X[3]r13→r19;-X[3]r14+r13→r20;r14→r21;-X[3]r16→r22;r16→r24
```

```
92: (Y[3]X[4]-
 X[3]Y[4])r13→r2
 5;(Y[4]-Y[3])r1
 3+r14(Y[3]X[4]-
 X[3]Y[4])→r26
93: (Y[4]-Y[3])r
 14→r27;r16(Y[3]
 X[4]-X[3]Y[4])+
 r13(X[3]-X[4])→
 r28
94: r16(X[3]-
 X[4])→r29;(-
 X[4]+X[3])r14+
 r16(Y[4]-Y[3])→
 r30
95: F[1]→C[1];
 X[1]↑2→E[1]
96: 1→Z;for J=0
 to 4;7+6J→K;
 for I=J+2 to 6
97: rK+r(K+1)X[I
 ]+r(K+2)X[I]↑2+
 r(K+3)Y[I]+r(K+
 4)Y[I]↑2→r(30+
 Z)
98: r(K+5)Y[I]X[
 I]+r(30+Z)→r(30
 +Z);1+Z→Z;next
 I;next J
99: sfg 1;0→Y
100: Y+1→Y;(flg1
 (F[2]-C[1])+(1-
 flg1)(X[2]↑2-
 X[1]↑2))/r31→N
101: if flg1;
 N→C[2];gto +2
102: N→E[2]
103: ((F[3]-C[1]
 -C[2]r32)flg1+
 (1-flg1)(X[3]↑2
 -X[1]↑2-E[2]r32
 ))/r36→N
104: if flg1;
 N→C[3];gto +2
105: N→E[3]
106: (F[4]-F[1]-
 C[2]r33-C[3]r37
 )flg1→N
107: (N+(1-flg1)
 (X[4]↑2-X[1]↑2-
 E[2]r33-E[3]r37
 ))/r40→N
```

```
108: if flg1;
 N→C[4];gto +2
109: N→E[4]
110: if Y=1;cfg
 1;gto 100
111: for I=1 to
 4;C[I]→D[I];
 E[I]→G[I];next
 I
112: 0→Y
113: dim N[2];
 sfg 1
114: for I=1 to
 2
115: 1+Y→Y;flg1(
 F[4+I]-C[1]-
 C[2]r(33+I)-
 C[3]r(37+I)-
 C[4]r(40+I))→N[
 I]
116: N[I]+(1-
 flg1)(X[4+I]↑2-
 X[1]↑2-E[2]r(33
 +I)-E[3]r(37+
 I)-E[4]r(40+
 I))→N[I]
117: N[I]/r(42+
 I)→N[I]
118: if flg1;
 N[I]→C[4+I];
 gto +2
119: N[I]→E[I+4]
120: cmf 1;if
 Y=1;gto 115
121: if Y=3;gto
 115
122: next I;C[6]
 →D[5];E[6]→G[5]
123: for I=1 to
 5;if prnd(E[I],
 -10)#prnd(G[I],
 -10);gto 126
124: next I
125: spc ;spc ;
 prt "LOS PUNTOS
  ESTANSOBRE
 UNA CONICA ";
 end
126: 0→K;for
 I=8 to 12
```

```
127: G[2]rI+G[3]
 r(I+6)+G[4]r(I+
 12)+G[5]r(I+
 18)→r(46+K);1+
 K→K
128: next I;r47-
 1→r47
129: G[1]+G[2]r7
 +G[3]r13+G[4]r1
 9+G[5]r25→r45
130: C[1]+C[2]r7
 +C[3]r13+C[4]r1
 9+C[5]r25→r51
131: 0→K;for
 J=8 to 12
132: C[2]rJ+C[3]
 r(J+6)+C[4]r(J+
 12)+C[5]r(J+
 18)→r(52+K);1+
 K→K
133: next J
134: r45r51→r57;
 r46r51+r52r45→r
 58;r46r52+r47r5
 1+r45r53→r59
135: r46r53+r47r
 52→r60;r47r53→r
 61;r45r54+r51r4
 8→r62
136: r45r55+r49r
 51+r48r54→r63;
 r48r55+r49r54→r
 64;r49r55→r65
137: r45r56+r50r
 51+r46r54+r48r5
 2→r66;r47r54+
 r50r52+r46r56+
 r48r53→r67
138: r47r56+r50r
 53→r68;r46r55+
 r50r54+r49r52+
 r48r56→r69;r50r
 55+r49r56→r70
139: r47r55+r49r
 53+r50r56→r71
140: -(E[1]+E[2]
 r7+E[3]r13+E[4]
 r19+E[5]r25)→r7
 2
141: 0→K;for
 I=8 to 12
```

```
142: -(E[2]rI+E[3]r(I+6)+E[4]r(I+12)+E[5]r(I+18))→r(73+K);1+K→K
143: next I;1+r74→r74
144: D[1]+D[2]r7+D[3]r13+D[4]r19+D[5]r25→r78
145: 0→K;for I=8 to 12
146: D[2]rI+D[3]r(I+6)+D[4]r(I+12)+D[5]r(I+18)→r(79+K);1+K→K
147: next I
148: r72r78→r84;r72r79+r73r78→r85;r72r80+r73r79+r74r78→r86
149: r73r80+r74r79→r87;r74r80→r88;r72r81+r75r78→r89
150: r72r82+r76r78+r75r81→r90;r75r82+r76r81→r91
151: r76r82→r92;r72r83+r75r79+r73r81+r78r77→r93;r74r83+r77r80→r95
152: r74r81+r73r83+r77r79+r75r80→r94;r73r82+r77r81+r76r79+r75r83→r96
153: r77r82+r76r83→r97;r74r82+r76r80+r77r83→r98
154: 0→K;for J=1 to 15;r(56+J)+r(83+J)→r(99+K);1+K→K;next J
155: spc ;spc ;prt "EL POLINOMIO DELNUMERADOR ES:"
156: spc ;prt "TERMINO INDEPEN.",r99
157: prt "COEF. DE X :",r100
158: prt "COEF. DE X↑2 :",r101;prt "COEF. DE X↑3 :",r102
159: prt "COEF. DE X↑4 :",r103;prt "COEF. DE Y :",r104
160: prt "COEF. DE Y↑2 :",r105;prt "COEF. DE Y↑3 :",r106
161: prt "COEF. DE Y↑4 :",r107;prt "COEF. DE XY :",r108
162: prt "COEF.DE (X↑2)Y :",r109;prt "COEF. DE (X↑3)Y :",r110
163: prt "COEF.DE X(Y↑2) :",r111;prt "COEF. DE X(Y↑3) :",r112
164: prt "COEF.DE (XY)↑2 :",r113
165: spc ;spc ;prt "EL POLINOMIO DELDENOMINADOR ES:"
166: spc ;prt "TERMINO INDEPEN.",r45+r72
167: prt "COEF. DE X :",r46+r73
168: prt "COEF. DE X↑2 :",r47+r74
169: prt "COEF. DE Y :",r48+r75
170: prt "COEF. DE Y↑2 :",r49+r76
171: prt "COEF. DE XY :",r50+r77
*10990
```

```
RESOLUCION DE
DOS EJEMPLOS

INTERPOLACION
LAGRANGIANA EN 6
PUNTOS DE R²


LOS PUNTOS SON:

 0.00, 0.00
 1.00, 1.00
 2.00, 2.00
 3.00, 1.00
 3.00,-1.00
-1.00, 0.00


VALORES DE F:

     8.0000
    -2.0000
   -22.0000
    22.0000
   120.0000
    12.0000

NUMERO MAXIMO DE
PUNTOS ALINEADOS
 TRES

SOLUCION POR
[G-M]


EL POLINOMIO ES:

TERMINO INDEPEN.
            8.00
COEF. DE X :
            2.00
COEF. DE X↑2 :
            6.00
COEF. DE  Y :
           -7.00
COEF. DE Y↑2 :
            3.00
COEF. DE XY :
          -14.00


FIN DE LA SOLUC.
```

INTERPOLACION
LAGRANGIANA EN 6
PUNTOS DE R^2

LOS PUNTOS SON:

```
-1.00, 0.00
 0.00, 1.00
 0.00,-1.00
 2.00, 0.00
 3.00, 1.00
 4.00, 3.00
```

VALORES DE F:

```
1.0000
1.0000
1.0000
4.0000
7.0000
13.0000
```

NO HAY TRES PUNTOS ALINEADOS

EL POLINOMIO DEL NUMERADOR ES:

```
TERMINO INDEPEN.
          0.00
COEF. DE X :
          0.00
COEF. DE X↑2 :
          1.00
COEF. DE X↑3 :
          0.50
COEF. DE X↑4 :
         -0.50
COEF. DE Y :
          0.00
COEF. DE Y↑2 :
          1.00
COEF. DE Y↑3 :
          0.00
COEF. DE Y↑4 :
         -1.00
COEF. DE XY :
         -1.00
COEF.DE (X↑2)Y :
         -0.50
COEF.DE (X↑3)Y :
          2.00
COEF.DE X(Y↑2) :
          0.50
COEF.DE X(Y↑3) :
          2.50
COEF.DE (XY)↑2 :
         -3.00
```

EL POLINOMIO DEL DENOMINADOR ES:

```
TERMINO INDEPEN.
          1.00
COEF. DE X :
          0.50
COEF. DE X↑2 :
         -0.50
COEF. DE Y :
          0.00
COEF. DE Y↑2 :
         -1.00
COEF. DE XY :
          1.50
```

FIN DE LA SOLUC.

EL POLINOMIO ES:
X↑2-XY+Y↑2

B I B L I O G R A F I A

BIBLIOGRAFIA

[1] AITKEN,A.G.:"On interpolation by iteration of proportional parts without the use of differences". Proc. Edimburgh Math. Soc. 3.(1932)

[2] ATKINSON,K.E.:"An introduction to Numerical Analysis". John Wiley&Sons.(1978)

[3] BEREZIN,I.S. & ZHIDKOV,N.P.:"Computing methods I". Addison-Wesley.(1965)

[4] BLUM,E.K.:"Numerical analysis and computation. Theory and practice". Addison-Wesley.(1972)

[5] BREZINSKI,C.:"A general extrapolation algorithm". Num. Math. 35. (1980)

[6] BREZINSKI,C.:"The Mühlbach-Neville-Aitken algorithm and some extensions". Publication A.N.O. 19. Université de Lille I. (1980)

[7] CIARLET,P.G.:"Numerical analysis of the finite element method". Presses de l'Université de Montreal.(1977)

[8] CIARLET,P.G. & RAVIART,P.A.:"General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods". Arch. Rat. Mech. Anal. 46. (1972)

[9] DAHLQHIST,G & BJORCK,A.:"Numerical methods". Prentice Hall. (1974)

[10] DAVIS,P.J.:"Interpolation and approximation". Blaisdell. (1963)

[11] DE BOOR,C.:"Polynomial interpolation". Proceed. of the Int. Con. of Mathem. Helsinki. (1978)

[12] ENGELS,H.:"Eine verallgemeinerung von Newton-interpolation und Neville-Aitken-algorithmus und deren anwendung auf die Richardson-extrapolation". Computing. 10. (1972)

[13] GANTMACHER,F.R.:"Théorie des matrices". Tomo 1. Dunod. (1966)

[14] GASCA,M & MAEZTU,J.I.:"On Lagrange and Hermite interpolation in R^k". Aceptado para publicación en Num. Math.

[15] GASCA,M & MAEZTU,J.I.:"Interpolación en R^n con valores medios". Contribuciones en Probab. y Estadística Matem. Enseñanza de la Matemática y Análisis. Universidad de Granada. (1979)

[16] GASCA,M & LOPEZ CARMONA,A.:"A general recurrence interpolation formula and its applications to multivariate interpolation". Remitido a Journal of Approx. Theory. (1980)

[17] GASCA,M & LOPEZ CARMONA,A.:"Interpolación por recurrencia: una fórmula general". Actas VII Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas. (1980)

[18] GASCA,M & RAMIREZ,V.:"Sistemas de interpolación en R^2". Actas VII Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas. (1980)

[19] GORDON,W.J. & WIXOM, J.A.:"Shepard's method of "metric interpolation" to bivariate and multivariate interpolation". Mathematics of computation. 32. (1978)

[20] GORDON,W.J.:"Distributive lattices and the approximation

of multivariate functions". Proc. Symp. Approximation with special emphasis on spline functions. Academic Press (1969)

[21] GORDON,W.J.:"Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation". SIAM J. Num. Anal. 8. (1971)

[22] GORDON,W.J. & HALL,C.A.:"Transfinite element methods: Blending function methods over arbitrary curved element domains". Num. Math. 21. (1973)

[23] HANDSCOMB,D.C.(Editor).:"Multivariate approximation". Academic Press. (1978)

[24] HÅVIE,T.:"Generalized Neville type extrapolations schemes". BIT. 19. (1979)

[25] HÅVIE,T.:"Remarks on the Mühlbach-Neville-Aitken algorithm". Depto. of Mathematics the University of Trondhein. Norway. (1980)

[26] HENRICI,P.:"Elementos de Análisis Numérico". Trillas. (1972)

[27] ISAACSON,E. & KELLER, H.B.:"Analysis of numerical methods". John Wiley & Sons. (1966)

[28] KARLIN,S. & STUDDEN,W.:"Tchebycheff systems:with applications in Analysis and Statistics". Interscience. (1966)

[29] KERGIN,P.:"A natural interpolation of C^k functions". Será publicado en J. of Approx. Theory.

[30] LANCASTER,P. & WATKINS,D.S.:"Interpolation in the plane and rectangular finite elements". Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. (1976)

[31] LANCASTER,P. & WATKINS,D.S.:"Some families of finite ele ments". J. Inst. Maths. Applics. 19. (1977)

[32] LAW,A.G. & SAHNEY,B.N.(edit).:"Theory of approximation with applications". Academic Press. (1976)

[33] LYCHE,T.:"A Newton form for trigonometric Hermite interpolation". Research report in informatics. University of Oslo. (1978)

[34] MAEZTU,J.I.:"Interpolación de Lagrange y Hermite en R^k". Tesis. Universidad de Granada. (1979)

[35] MUHLBACH,G.:"The general Neville-Aitken-algorithm and so me applications". Num. Math. 31. (1978)

[36] MUHLBACH, G.:"The general recurrence relation for divided differences and the general Newton-interpolation algorithm with applications to trigonometric interpolation". Num. Math. 32. (1979)

[37] MUHLBACH,G.:"An algorithmic approach to Hermite-Birkhoff-interpolation". Num. Math. (1979)

[38] MUHLBACH,G.:"Neville-Aitken algorithms for interpolation by functions of Cebysev-systems in the sense of Newton and in a generalized sense of Hermite". Theory of approximation with applications. Academic Press. (1976)

[39] MUHLBACH,G.:"A recurrence formula for generalized divided differences and some applications". J. Approx. Theory. 9. (1973)

[40] MUHLBACH,G.:"Newton und Hermite-interpolation mit Cebysev-systemen". Z. Ang. Math. Mech. 54. (1974)

[41] MUHLBACH,G.:"An algorithmic approach to finite linear interpolation". Proc. Symp. on Approx. Theory. Austin.(1980)

[42] NEVILLE,E.H.:"Iterative interpolation". J. Indian Math. Soc. 20. (1934)

[43] RAMIREZ,V.:"Interpolación de Hermite en varias variables". Tesis. Universidad de Granada. (1980)

[44] SALZER,H.E.:"Divided differences for functions of two variables for irregularly spaced arguments". Num. Math. 6. (1964)

[45] SCHEMP,W. & ZELLER,K.(edit).:"Constructive theory of functions of several variables". Proceed. Oberwolfach 1976. Lecture Note in Math. vol 571. Springer Verlag. (1977)

[46] SCHEMP ,W. & ZELLER,K.(edit).:"Multivariate approximation theory". Proceed. Oberwolfach 1979. Birkhäuser Verlag. (1980)

[47] WATSON, G.A.:"Approximation theory and numerical methods" John Wiley & Sons. (1980)

[48] WIXOM,J.A.:"Interpolation to networks of curves in E^3". SIAM J. Num. Anal. 15. (1978)

[49] ZIENKIEWICZ,O.C.:"The finite element method in engineering science." Mc Graw-Hill. (1971)