5/170

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Departamento de Análisis Matemático



# ÍNDICE NUMÉRICO DE UN ESPACIO DE BANACH





Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada.

EL DOCTORANDO

Fdo.: MIGUEL MARTÍN SUÁREZ

Vº Bº DEL DIRECTOR

Fdo.: RAFAEL PAYÁ ALBERT

**Granada, junio de 2.000**

# Índice General

# Introducción

El objetivo de la presente memoria es estudiar el "índice numérico" de los espacios de Banach. Este concepto aparece al extender al ambiente general de los operadores lineales y continuos, una noción originariamente definida para matrices cuadradas: el rango numérico. Permítasenos introducir estos conceptos antes de comentar el contenido de la memoria.

El *rango numérico* de una matriz $A$, real o compleja, cuadrada de orden $n$, se define (Toeplitz, 1918) como la imagen, por la forma cuadrática asociada a la matriz $A$, de la esfera unidad del espacio euclídeo $n$-dimensional:

$$W(A) = \{(Ax|x) \ : \ (x|x) = 1\},$$

donde $(\cdot|\cdot)$ denota el producto interior de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$. Ya en el contexto del Análisis Funcional, la definición de Toeplitz se generaliza literalmente para obtener el rango numérico $W(T)$ de un operador lineal y continuo $T$ en un espacio de Hilbert arbitrario $H$:

$$W(T) = \{(Tx|x) \ : \ x \in H, \ \|x\| = 1\}.$$

En este ambiente ha proliferado una vasta teoría de rango numérico, concepto que ha recibido otros nombres, como "campo de valores", "rango de valores" o "dominio de Hausdorff". Esta teoría ha demostrado ser útil en diversos campos de la Matemática; obsérvese que los valores propios de un operador siempre pertenecen a su rango numérico, lo que da una clara conexión con la teoría espectral de operadores y sus aplicaciones. Comentamos, como anécdota curiosa, que el rango numérico se usa en la llamada "teoría de estabilidad robusta de sistemas físicos". Una exposición más detallada de todas estas ideas puede encontrarse en [40, 55].

De manera más general, el *rango numérico* de un operador lineal y continuo $T$ en un espacio de Banach $X$, se define (Lumer, 1961; Bauer, 1962) de la siguiente forma:

$$W(T) = \{x^*(Tx) \ : \ x \in X, \ x^* \in X^*, \ \|x^*\| = \|x\| = x^*(x) = 1\},$$

donde $X^*$ es el espacio dual. En analogía con el radio espectral, el *radio numérico de $T$* será

$$v(T) = \sup\{|\lambda| \ : \ \lambda \in W(T)\},$$

y $v$ es claramente una seminorma continua en $L(X)$, el álgebra de los operadores lineales y continuos en $X$. Muchas veces el radio numérico es de hecho una norma equivalente a la norma usual de operadores, y para cuantificar este hecho definimos el *índice numérico de $X$* (Lumer, 1968) como el número real

$$n(X) = \max\{k \geq 0 \ : \ k\|T\| \leq v(T) \ \ \forall T \in L(X)\}.$$

Es claro que siempre se tendrá $0 \leq n(X) \leq 1$; el valor $n(X) = 1$ significa que radio numérico y norma coinciden en $L(X)$, mientras que se tiene $n(X) = 0$ cuando $v$ no es una norma equivalente a la usual de operadores. No nos detenemos aquí a presentar con detalle los resultados conocidos sobre el índice numérico, fruto del trabajo de numerosos autores, ya que las secciones 1.1 y 1.2 contienen una exposición sistemática, con las oportunas referencias. Sólo comentaremos brevemente algunos hechos conocidos que ayudarán a comprender nuestras aportaciones. En primer lugar, era conocido aún antes de la definición de índice numérico, que para un espacio de Hilbert $H$, de dimensión mayor que 1, se tiene $n(H) = 0$ en caso real y $n(H) = 1/2$ si $H$ es complejo. Este resultado pone ya de manifiesto la diferencia cualitativa en el comportamiento del índice numérico entre los espacios de Banach reales y los complejos: para éstos últimos, el índice numérico es siempre positivo. De hecho, se sabe que si $X$ es un espacio de Banach complejo, entonces $n(X) \geq e^{-1}$, siendo ésta la única restricción adicional que tiene el conjunto de posibles valores del índice numérico. Concretamente:

$$\{n(X) \ : \ X \text{ espacio de Banach complejo } \} = [e^{-1}, 1],$$
$$\{n(X) \ : \ X \text{ espacio de Banach real } \} = [0, 1].$$

Por otra parte, para cualquier espacio de Banach $X$, se verifica que $n(X^*) \leq n(X)$, y no sabemos si se da siempre la igualdad.

Parece el momento oportuno de comentar algunos ejemplos de espacios de Banach "clásicos" cuyo índice numérico es conocido. Se sabe que $n\big(C(K)\big) = 1$ para cualquier compacto $K$; más aún, la desigualdad del párrafo anterior nos dice entonces que, para cualquier medida $\mu$, el espacio $L_1(\mu)$ y todos sus preduales isométricos, tienen índice numérico 1. En el caso complejo, las álgebras de funciones tienen igualmente índice numérico 1. En dimensión finita, los espacios con índice numérico 1 pueden incluso caracterizarse de forma intrínseca, sin necesidad de usar operadores: un espacio de dimensión finita $X$ verifica que $n(X) = 1$ si, y sólo si, $|x^*(x)| = 1$ para cualesquiera puntos extremos $x$ y $x^*$ de la bola unidad de $X$ y $X^*$ respectivamente. Esto da ejemplos de espacios de dimensión finita con índice numérico 1 que no son $l_1$-espacios ni $l_\infty$-espacios.

Podría objetar el lector, y no le faltaría razón, que en la anterior lista de ejemplos sólo aparecen espacios con índice numérico 1. La realidad es que calcular índices numéricos en espacios concretos no es sencillo y, de hecho, no se conoce el índice numérico de algunos espacios muy familiares, como $l_p$ para $p \neq 1, 2, \infty$. Podríamos decir que, salvo en unos pocos ejemplos, cuando se conoce el índice numérico de un espacio, es porque vale 1.

Esta era la situación, a grosso modo, cuando comenzó el trabajo que ha dado lugar a la presente memoria. En ella hemos tratado de contribuir a una mejor comprensión del índice numérico de los espacios de Banach. Por una parte, se han extendido algunos resultados ya comentados sobre cálculo de índices numéricos a "sumas" de espacios de Banach, o a espacios de funciones con valores vectoriales. Por otra parte, también hemos estudiado las implicaciones, tanto de tipo isométrico como isomórfico, que tiene el índice numérico. Comentemos con un poco más de detalle el contenido de la memoria:

Como ya se ha dicho, las secciones 1.1 y 1.2 tratan de hacer una exposición sistemática de los resultados previamente conocidos sobre el índice numérico, y sirven además como secciones preliminares, pues los resultados que contienen son usados frecuentemente a lo largo de toda la memoria. En las secciones 1.3 y 1.4 se estudia la relación entre el índice numérico de un espacio y el de algunos tipos de subespacios. Partiendo de que el índice numérico de un espacio y el de un subespacio suyo (incluso si está 1-complementado) no guardan relación, se demuestra que el índice numérico de un espacio de Banach es siempre menor o igual que el de cualquier sumando absoluto. En sentido contrario, se calcula el índice numérico de las $c_0$, $l_1$ y $l_\infty$ sumas de espacios de Banach en términos de los índices de los sumandos y se obtienen numerosas consecuencias. Destacamos entre ellas la existencia de un espacio de Banach real para el que el radio numérico es una norma no equivalente a la usual de operadores. Por último, la sección 1.5 está dedicada al estudio del índice numérico de algunos espacios de funciones con valores vectoriales y contiene la principal aportación del primer capítulo. Concretamente, para cualquier compacto $K$, cualquier medida positiva $\mu$ y cualquier espacio de Banach $X$, probamos que

$$n\big(C(K,X)\big) = n\big(L_1(\mu,X)\big) = n(X).$$

La mayoría de los resultados novedosos de este capítulo aparecerán en [79].

Dedicamos el capítulo 2 al estudio del índice numérico desde un punto de vista isomórfico. Consideramos, para cada espacio de Banach, el conjunto de valores del índice numérico que pueden obtenerse por renormación equivalente, y estudiamos sus propiedades. Obviamente, en dimensión uno, el único valor posible del índice numérico es 1, por lo que todo el estudio se restringe a espacios de dimensión mayor que uno. En la primera sección se prueba que dicho conjunto es siempre un intervalo que contiene a $[0,1/3[$ en caso real y a $[1/e,1/2[$ en caso complejo. Más aún, para una amplia clase de espacios de Banach, que incluye a todos los reflexivos y a todos los separables, el conjunto de valores del índice numérico salvo renormación contiene a $[0,1[$ en caso real y a $[e^{-1},1[$ en caso complejo. El contenido de esta sección es fruto de un trabajo conjunto con C. Finet y R. Payá [42].

La sección 2.2 trata sobre espacios de Banach con índice numérico 1. Se estudian condiciones necesarias para que el índice tome este valor, y se demuestra que no todo espacio de Banach admite una norma equivalente con índice numérico 1. Por ejemplo, los espacios reflexivos reales de dimensión infinita, no admiten una tal norma; más aún, si un espacio de Banach real $X$, de dimensión infinita, tiene índice numérico 1, entonces $X^{**}/X$ no es separable. Esto generaliza un resultado debido a J. Lindenstrauss y R. Phelps [73], quienes en 1968 demostraron que los espacios reflexivos reales, de dimensión infinita, no pueden tener una propiedad estrictamente más restrictiva que la de tener índice numérico 1. Estos resultados se han obtenido en colaboración con G. López y se han publicado en [75].

Hasta la aparición del artículo recién citado, el índice numérico no había sido estudiado desde un punto de vista isomórfico. Podemos mencionar, por ejemplo, que no era conocido si un espacio de Hilbert, de dimensión infinita, admite una norma equivalente con índice numérico 1. Queda claro que se ha avanzado bastante en el caso real pero, lamentablemente, casi nada en caso complejo. La pregunta así planteada y otras cuestiones de interés referentes al estudio isomórfico del índice numérico, se recopilan en una sección de problemas abiertos que cierra el capítulo 2.

El último capítulo de la memoria es una miscelánea de propiedades de tipo isométrico relacionadas, de una u otra forma, con el índice numérico. La primera sección trata sobre CL-espacios y una generalización de éstos, los casi-CL-espacios, que son ejemplos destacados de espacios de Banach con índice numérico 1. Comenzamos la sección dando ejemplos de uno y otro tipo y viendo algunas propiedades isomórficas de los casi-CL-espacios. Concretamente, se prueba que el dual de cualquier casi-CL-espacio real debe contener a $l_1$ y, si además dicho dual es separable, el espacio contiene a $c_0$. Se acaba la sección discutiendo la "estabilidad" de ambas clases por $c_0$ y $l_1$ sumas, así como por paso a espacios de funciones continuas con valores vectoriales. Un resumen de los resultados de esta sección y de los primeros dos capítulos apareció en [78].

La sección 3.2 está dedicada a la propiedad de Daugavet, que se define mediante la ecuación de operadores que lleva el mismo nombre y que ha recibido bastante atención en los últimos años. Concretamente, un espacio de Banach $X$ tiene la propiedad de Daugavet cuando todo operador compacto $T$ en $X$ verifica la ecuación:

$$\|Id + T\| = 1 + \|T\|.$$

Hay cierto paralelismo entre esta propiedad y los espacios con índice numérico 1, pues estos últimos pueden caracterizarse mediante otra ecuación de operadores, muy parecida a la de Daugavet. Concretamente, un espacio de Banach $X$ verifica $n(X) = 1$ si, y sólo si,

$$\max_{|\lambda|=1} \|Id + \lambda T\| = 1 + \|T\|$$

para todo $T \in L(X)$. Sin embargo, no hay ninguna implicación entre la propiedad de Daugavet y la de tener índice numérico 1. Hacemos una modesta contribución a la propiedad de Daugavet caracterizando los espacios de tipo $C(K,X)$ que la tienen. Intentando englobar, de manera natural, a los espacios con índice numérico 1 y a los que verifican la propiedad de Daugavet, introducimos en la sección 3.3 el índice numérico compacto: se trata ahora de considerar la mejor constante de equivalencia entre el radio numérico y la norma de los operadores compactos. Estudiamos las propiedades de este nuevo índice, que son bastante similares a las obtenidas anteriormente para el índice numérico, consiguiendo en ocasiones algún refinamiento de los resultados de los dos primeros capítulos. En particular, estudiamos la clase de los espacios de Banach con índice numérico compacto igual a 1, que incluye a los espacios que verifican la propiedad de Daugavet y a los que tienen índice numérico 1. Algunos resultados sobre la propiedad de Daugavet se pueden trasladar a este ambiente más general. Por ejemplo, para que un espacio de Banach tenga índice numérico compacto 1, es suficiente que el radio numérico y la norma coincidan sobre los operadores de rango uno.

Por último, la sección 3.4 contiene algunas caracterizaciones de los espacios de Banach con índice numérico 1 que nos parecen interesantes. Se prueba también que un espacio de Banach real $X$, con la propiedad de Radon-Nikodým, verifica que $n(X^*) = 1$ si (y sólo si) $n(X) = 1$, siendo éste, con todas sus limitaciones, nuestro único resultado sobre la relación entre el índice numérico de un espacio y el de su dual.

Quiero aprovechar este momento para expresar mi más sincera gratitud a todos aquellos que han contribuido, de una u otra forma, al desarrollo de este trabajo de investigación.

En primer lugar, a mi Director, Rafael Payá Albert, quien ha guiado mi trabajo de investigación desde que llegué a este departamento. A él debo agradecer su dedicación constante a esta memoria, tanto en la consecución de los resultados que la forman, como en su redacción final. Las innumerables sesiones de trabajo y discusión matemática que he tenido el privilegio de compartir con él, son, sin duda alguna, la base de todos mis conocimientos en el campo del Análisis Funcional. En suma, afirmar que este proyecto nunca hubiese visto la luz sin él es sencillamente ocioso.

Quiero dar las gracias a Ginés López por su permanente apoyo y su completa disponibilidad para discutir cualquier tema, ya sea matemático o no. Algunos de los principales resultados que aparecerán han sido obtenidos en colaboración con él. También agradezco a Catherine Finet su aportación al contenido de la memoria.

Asimismo, quiero dar las gracias a todos los miembros del Departamento de Análisis Matemático, por el ánimo y apoyo que he encontrado siempre en ellos. Especialmente:

A Francisco Aguirre, con quien he tenido el placer de compartir mis primeros años como docente.

A Camilo Aparicio y Javier Pérez, quienes, junto con Rafael Payá, despertaron en mí el interés por el Análisis Funcional.

A Jerónimo Alaminos, José Luis Gámez, Antonio Peralta y Luis Ángel Sánchez, habituales compañeros de café y de tertulia.

A María Dolores Acosta, Ángel Rodríguez y Manuel Ruiz, por el interés que siempre han mostrado.

En otro orden de cosas, no hubiese sido posible la realización de este trabajo sin el apoyo de muchas personas que poco o nada tienen que ver con el Análisis Matemático. Entre ellas quiero destacar, por su importancia durante los últimos cuatro años, a: Manuel Barbero, Manolo Berrio, Loly Blanca, Raquel Castro, Emilio Corral, Diego García, Fran Guerrero, David Jodar, José Luis Martín, María del Carmen Páez, Gonzalo de la O, Lidia de la O, Mariano Romero, Escolástico Sánchez, Beatriz Santisteban, José Soriano, Mónica Vázquez, Blas Vílchez, José Vílchez. Gracias a todos.

Finalmente, quiero agradecer a mis padres, hermanos y hermanos políticos, su ánimo constante y su ilimitada confianza en mí. Ellos saben mejor que nadie lo que ha costado realizar esta tesis doctoral. A ellos está dedicada especialmente.

Capítulo 1

# Resultados generales sobre índice numérico

Dedicamos este primer capítulo a presentar resultados generales, tanto conocidos como novedosos, sobre el índice numérico de un espacio de Banach. Comenzamos con una introducción histórica en la que aparecerán las definiciones necesarias, así como algunos resultados clásicos de la teoría de rango numérico que usaremos en esta memoria. A continuación mostramos resultados originales sobre el comportamiento del índice numérico con respecto a "operaciones" tales como $c_0$, $l_1$ y $l_\infty$ sumas, y calculamos el índice numérico para algunos espacios de funciones con valores vectoriales.

A lo largo de toda la memoria, $\mathbb{K}$ denotará indistintamente el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales o el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, y $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| = 1\}$. Usaremos en $\mathbb{K}$ la función parte real que, naturalmente, no es otra que la identidad cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Si $X$ es un espacio de Banach real o complejo con norma $\|\cdot\|$, $B_X$ y $S_X$ serán, respectivamente, su bola cerrada unidad y su esfera unidad:

$$B_X = \{x \in X \,:\, \|x\| \leq 1\} \qquad\qquad S_X = \{x \in X \,:\, \|x\| = 1\}.$$

Denotaremos $X^*$ al dual (topológico) de $X$, provisto siempre de la norma dual

$$\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)| \,:\, x \in B_X\} \qquad (x^* \in X^*),$$

y $L(X)$ será el álgebra de Banach de todos los operadores lineales y continuos de $X$ en sí mismo, portadora de la norma usual de operadores

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \,:\, x \in B_X\} \qquad (T \in L(X)).$$

Finalmente, $Id$ será el operador identidad en $X$.

## 1.1 Rango numérico de un operador

En los primeros estudios sobre espacios de Hilbert realizados, entre otros, por Hilbert, Hellinger y Toeplitz, se presta especial atención, como es natural, a las formas cuadráticas. Posteriormente, con el nacimiento de la teoría de operadores lineales, muchos conceptos definidos para formas cuadráticas fueron trasladados a este nuevo ambiente, mediante el sencillo proceso de considerar, de manera natural, la forma cuadrática asociada a un operador en un espacio de Hilbert. Este es el caso del rango numérico de operadores, definido por O. Toeplitz en 1918 [103]. Sea $H$ un espacio de Hilbert con producto interior $(\cdot|\cdot)$. El *rango numérico* de un operador $T \in L(H)$ es, por definición, el conjunto de escalares

$$W(T) = \{(Tx|x) \,:\, x \in S_H\},$$

es decir, $W(T)$ es la imagen de la esfera unidad del espacio por la forma cuadrática asociada al operador $T$. Existe una vasta teoría de rango numérico en espacios de Hilbert, parte de la cual puede ser consultada en la monografía de P. Halmos [57, §17]. Resultados más recientes aparecen en el libro publicado en 1997 por K. Gustafson y D. Rao [55].

En contraste con la larga historia del rango numérico en espacios de Hilbert, el nacimiento de una teoría general en espacios de Banach se retrasa hasta los años sesenta. No encontramos ninguna generalización válida para espacios de Banach cualesquiera hasta 1961 y 1962, cuando, en trabajos independientes, G. Lumer [77] y F. Bauer [13] introducen sendos conceptos de rango numérico de un operador en un espacio de Banach. Aunque el trabajo de Lumer es más importante en el desarrollo posterior de la teoría, la definición de Bauer, por la que optamos en esta memoria, resulta mucho más clara y es la universalmente aceptada. De cualquier forma, más adelante veremos que, a efectos prácticos, ambas definiciones son igualmente útiles.

**1.1.1. Definición.** Dado un espacio de Banach $X$ y un operador $T \in L(X)$, se define su *rango numérico* como el conjunto de escalares

$$W(T) = \{x^*(Tx) \ : \ x \in S_X,\ x^* \in S_{X^*},\ x^*(x) = 1\}.$$

Escribiremos, por comodidad,

$$\Pi(X) = \{(x,x^*) \in S_X \times S_{X^*} \ : \ x^*(x) = 1\},$$

subconjunto de $X \times X^*$ que no es vacío gracias al Teorema de Hahn-Banach. Con esta notación, podemos escribir el rango numérico de un operador $T \in L(X)$ como

$$W(T) = \{x^*(Tx) \ : \ (x,x^*) \in \Pi(X)\}.$$

Observemos que si $H$ es un espacio de Hilbert, la condición $(x,x^*) \in \Pi(H)$ obliga a que $x^*$ sea el funcional $(\cdot|x)$, y por tanto este nuevo rango numérico coincide con el definido por Toeplitz. Esta relación con el rango numérico en espacios de

Hilbert queda todavía más clara si atendemos a la definición introducida por Lumer. Éste, en lugar de generalizar el concepto de rango numérico, generaliza en cierta forma el concepto de espacio de Hilbert, definiendo lo que él llama "semi-productos interiores", que desempeñan el papel del producto interior y existen en cualquier espacio de Banach (ver [77]). En lo que a nosotros interesa, si $X$ es un espacio de Banach, para cada $x$ en $S_X$ se selecciona arbitrariamente un funcional $f_x$ tal que $(x,f_x) \in \Pi(X)$ y, extendiendo por homogeneidad la aplicación

$$(y,x) \longmapsto [y|x] := f_x(y) \quad (y \in X,\ x \in S_X),$$

obtenemos lo que Lumer llama un *semi-producto interior*. Fijado un tal semi-producto, podemos asociar de forma natural a cada operador $T \in L(X)$ una "imagen numérica":

$$W_{[\cdot|\cdot]}(T) = \{[Tx|x]\ :\ x \in S_X\} = \{f_x(Tx)\ :\ x \in S_X\}.$$

Nótese que el rango numérico $W(T)$ no es otra cosa que la unión de todos los conjuntos $W_{[\cdot|\cdot]}(T)$ para todas las posibles elecciones del semi-producto interior $[\cdot|\cdot]$. Por supuesto, el principal inconveniente de la definición de Lumer es su dependencia de la elección no canónica del semi-producto interior, problema que Lumer resuelve en gran medida demostrando [77, Lemma 12] que para cualquier operador $T \in L(X)$ y cualquier elección de semi-producto interior $[\cdot|\cdot]$, se tiene que

$$\sup \operatorname{Re} W_{[\cdot|\cdot]}(T) = \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\|Id+\alpha T\|-1}{\alpha}, \tag{1.1}$$

de donde se deduce fácilmente, como veremos, que la envolvente convexo-cerrada de $W_{[\cdot|\cdot]}(T)$ es independiente del semi-producto interior elegido [77, Theorem 14]. Por otra parte, en [13, Theorem 4.3] se prueba la misma fórmula para el rango numérico, esto es

$$\sup \operatorname{Re} W(T) = \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\|Id+\alpha T\|-1}{\alpha}. \tag{1.2}$$

De hecho, es posible demostrar un resultado que generaliza ambas fórmulas. Por su posterior utilidad en esta memoria lo enunciamos explícitamente y, por complitud, incluimos una demostración, tomada de [20, Lemma 9.2].

**1.1.2. Proposición.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $\Gamma$ un subconjunto de $\Pi(X)$ cuya proyección sobre la primera coordenada sea densa en $S_X$. Entonces se tiene que*

$$\sup \operatorname{Re}\{x^*(Tx) \ : \ (x,x^*) \in \Gamma\} = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|Id+\alpha T\|-1}{\alpha}$$

*para todo operador $T \in L(X)$.*

*Demostración.* Para $T \in L(X)$ y $(x,x^*) \in \Gamma$, se tiene que

$$\operatorname{Re} x^*(Tx) = \frac{\operatorname{Re}\left(x^*\left((Id+\alpha T)x\right)\right)-1}{\alpha} \leq \frac{\|Id+\alpha T\|-1}{\alpha}$$

para todo número positivo $\alpha$. Tomando supremo con $(x,x^*) \in \Gamma$ y límite con $\alpha \downarrow 0$, obtenemos que

$$\sup \operatorname{Re}\{x^*(Tx) \ : \ (x,x^*) \in \Gamma\} \leq \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|Id+\alpha T\|-1}{\alpha}.$$

Nótese que la existencia del límite está asegurada, ya que se trata de la derivada por la derecha en el origen de una función convexa.

Para la otra desigualdad, llamemos $\gamma = \sup \operatorname{Re}\{x^*(Tx) \ : \ (x,x^*) \in \Gamma\}$, y sea $\alpha > 0$ suficientemente pequeño para que $\alpha\gamma < 1$. Si $(x,x^*)$ es un elemento de $\Gamma$, se tiene que

$$\|(Id-\alpha T)x\| \geq \operatorname{Re}\left[x^*\left((Id-\alpha T)x\right)\right] = 1-\alpha \operatorname{Re} x^*(Tx) \geq 1-\alpha\gamma,$$

pero como la proyección de $\Gamma$ sobre la primera coordenada es densa en $S_X$, de hecho la desigualdad anterior es cierta para todo $x$ en $S_X$, y con ello

$$\|x\| \leq \frac{\|(Id-\alpha T)x\|}{(1-\alpha\gamma)}$$

para todo $x \in X$. Apliquemos entonces esta desigualdad a $x = (Id + \alpha T)y$, donde $y$ es un elemento arbitrario de la esfera de $X$:

$$\|(Id + \alpha T)y\| \leq \frac{\|(Id - \alpha^2 T^2)y\|}{1 - \alpha\gamma} \leq \frac{1 + \alpha^2 \|T\|^2}{1 - \alpha\gamma}.$$

Tomando supremo con $y \in S_Y$ obtenemos

$$\|Id + \alpha T\| \leq \frac{1 + \alpha^2 \|T\|^2}{1 - \alpha\gamma},$$

o equivalentemente,

$$\frac{\|Id + \alpha T\| - 1}{\alpha} \leq \frac{\alpha \|T\|^2 + \gamma}{1 - \alpha\gamma}.$$

Basta tomar límite con $\alpha \downarrow 0$ en la expresión anterior para obtener la desigualdad buscada. □

Las fórmulas (1.1) y (1.2) son ahora consecuencias inmediatas de la proposición anterior; para la segunda basta tomar $\Gamma = \Pi(X)$, mientras que, para la primera, si el semi-producto interior tiene la forma $[x|y] = f_x(y)$ con $(x, f_x) \in \Pi(X)$ para cada $x \in S_X$, basta tomar $\Gamma = \{(x, f_x) : x \in S_X\}$.

La relación entre los conceptos introducidos por Lumer y Bauer se puede ahora aclarar completamente. Recordemos que, si $E$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{K}$, la función $\varphi_E : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_E(\lambda) = \sup \operatorname{Re} \lambda E \qquad (\lambda \in \mathbb{T})$$

determina a la envolvente convexo-cerrada de $E$ por la fórmula:

$$\overline{\text{co}}(E) = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{T}} \{z \in \mathbb{K} : \operatorname{Re} z \leq \varphi_E(\lambda)\}.$$

En el caso real ésto es prácticamente obvio, y en el caso complejo es consecuencia inmediata del teorema de separación de conjuntos convexos. Puesto que

$$W(\lambda T) = \lambda W(T) \qquad \text{y} \qquad W_{[\cdot|\cdot]}(\lambda T) = \lambda W_{[\cdot|\cdot]}(T)$$

para cualquier operador $T \in L(X)$ y cualquier escalar $\lambda$, la igualdad

$$\sup \operatorname{Re} W(\lambda T) = \sup \operatorname{Re} W_{[\cdot|\cdot]}(\lambda T),$$

que se deduce de (1.1) y (1.2), nos permite concluir que

$$\overline{\mathrm{co}}\, W_{[\cdot|\cdot]}(T) = \overline{\mathrm{co}}\, W(T) \tag{1.3}$$

cualquiera que sea el semi-producto interior $[\cdot|\cdot]$.

En resumen, siguiendo la idea de Lumer podemos asociar a un mismo operador muchas imágenes numéricas diferentes, dependiendo del semi-producto interior elegido, pero todas ellas tienen la misma envolvente convexo-cerrada, que coincide con la envolvente convexo-cerrada del rango numérico.

Por otra parte, la Proposición 1.1.2 contiene información adicional que merece la pena resaltar. Dado un operador $T \in L(X)$ la expresión

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|Id + \alpha T\| - 1}{\alpha}$$

no es más que la derivada radial de la norma de $L(X)$ en el punto $Id$ según la dirección $T$. Es un hecho bien conocido, consecuencia otra vez del teorema de Hahn-Banach y básico en el estudio de la diferenciabilidad de la norma, que en cualquier espacio normado, las derivadas radiales de la norma en puntos de la esfera unidad se relacionan directamente con los funcionales de soporte de la bola unidad en tales puntos (véase por ejemplo [36, Theorem V.9.5]). Más concretamente, en el caso que nos ocupa, se tiene

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|Id + \alpha T\| - 1}{\alpha} = \max \operatorname{Re} V(T) \tag{1.4}$$

donde

$$V(T) = \{\phi(T) \,:\, \phi \in L(X)^*, \|\phi\| = \phi(Id) = 1\}. \tag{1.5}$$

El conjunto $V(T)$ recibe el nombre de *rango numérico de álgebra* del operador $T$. Notemos que $V(T)$ es convexo y compacto, ya que el conjunto

$$\{\phi \in L(X)^* : \|\phi\| = \phi(Id) = 1\}$$

es un subconjunto convexo y $w^*$-compacto de $L(X)^*$, mientras que la aplicación $\phi \longmapsto \phi(T)$ es lineal y $w^*$-continua. En vista de (1.2) y (1.4) tenemos

$$\sup \operatorname{Re} W(T) = \max \operatorname{Re} V(T).$$

Como quiera que nuevamente $\lambda V(T) = V(\lambda T)$ para cualquier escalar $\lambda$, deducimos como ya hicimos antes que

$$\overline{\text{co}}\, W(T) = \overline{\text{co}}\, V(T) = V(T) \tag{1.6}$$

para cualquier operador $T \in L(X)$. La importancia de esta igualdad radica en el hecho de que podemos determinar “abstractamente” la envolvente convexo-cerrada del rango numérico de un operador $T \in L(X)$ en términos del álgebra de Banach unital $L(X)$, olvidando en cierto modo la acción de $T$ como operador en $X$. De hecho, la fórmula (1.5) motiva una definición natural de rango numérico (de álgebra) para un elemento $a$ de un álgebra de Banach unital $A$, con unidad $I$:

$$V(a) = \{\phi(a) : \phi \in A^*, \|\phi\| = \phi(I) = 1\},$$

concepto muy útil en la teoría general de álgebras de Banach.

Concluimos aquí nuestra presentación del concepto de rango numérico de un operador. Referencias obligadas sobre este tema son las monografías de F. Bonsall y J. Duncan [20, 21] que estudian sistemáticamente dicho concepto y algunas conexiones con la teoría espectral de operadores. Una visión más sintética y actualizada puede encontrarse en un artículo expositivo de los mismos autores [22]. Citemos también algunos trabajos más recientes sobre rango numérico de operadores [24, 29, 30, 39, 53, 92, 109].

Los libros de Bonsall y Duncan ya citados son también la mejor referencia para el estudio del rango numérico de álgebra y sus aplicaciones a la teoría general de álgebras de Banach, entre las que cabe destacar la caracterización geométrica de las $C^*$-álgebras unitales conocida como Teorema de Vidav-Palmer (ver [20, §5,§6]). Por otro lado, las técnicas de rango numérico han resultado especialmente útiles en el contexto no asociativo, existiendo una muy abundante literatura sobre el tema. Remitimos al lector interesado al excelente artículo expositivo de A. Rodriguez-Palacios [94] y su exhaustiva bibliografía.

## 1.2 Radio numérico e índice numérico

Definimos a continuación el radio numérico de un operador, en claro paralelismo con el radio espectral:

**1.2.1. Definición.** Dado un espacio de Banach $X$ y un operador $T \in L(X)$, el *radio numérico* de $T$ se define como

$$\begin{aligned} v(T) &= \sup\{|\lambda| \ : \ \lambda \in W(T)\} \\ &= \sup\{|x^*(x)| \ : \ (x,x^*) \in \Pi(X)\}. \end{aligned}$$

Es fácil ver que $v$ es una seminorma continua en $L(X)$; de hecho se tiene que

$$v(T) \leq \|T\|$$

para todo operador $T \in L(X)$.

En vista de (1.3), el radio numérico no cambia si sustituimos en su definición $W(T)$ por $W_{[\cdot|\cdot]}(T)$ para cualquier semi-producto interior $[\cdot|\cdot]$ en $X$. Más aún, de la Proposición 1.1.2 deducimos que el radio numérico puede calcularse usando solamente puntos en un subconjunto denso de la esfera unidad:

**1.2.2. Corolario.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $\Gamma$ un subconjunto de $\Pi(X)$ cuya proyección sobre la primera coordenada sea densa en $S_X$. Entonces*

$$v(T) = \sup\{|x^*(Tx)| \ : \ (x,x^*) \in \Gamma\}$$

*para todo operador $T \in L(X)$.*

Por otro lado, la igualdad (1.6) nos da otra fórmula para el radio numérico de un operador.

**1.2.3. Corolario.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Entonces*

$$\begin{aligned} v(T) &= \max\{|\lambda| : \lambda \in V(T)\} \\ &= \max\{|\phi(T)| \ : \ \phi \in L(X)^*, \ \|\phi\| = \phi(Id) = 1\} \end{aligned}$$

*para todo operador $T \in L(X)$.*

En los últimos años han aparecido numerosos trabajos referidos al radio numérico, y en especial a problemas referentes al conjunto de operadores que alcanzan su radio numérico, esto es, operadores $T$ tales que el supremo que define a $v(T)$ es un máximo. El lector encontrará más información en las referencias [4, 5, 6, 7, 8, 9, 25, 26, 28, 87, 97].

Con bastante frecuencia, el radio numérico es una norma equivalente a la norma usual de operadores, equivalencia que puede ser cuantificada mediante el llamado índice numérico del espacio.

**1.2.4. Definición.** El *índice numérico* de un espacio de Banach $X$ es el número real $n(X)$ dado por

$$n(X) = \inf\{v(T) \ : \ T \in S_{L(X)}\},$$

o, de forma equivalente,

$$n(X) = \max\{k \geq 0 \ : \ k\|T\| \leq v(T) \ \ \forall T \in L(X)\}.$$

Así pues, asignamos a cada espacio de Banach $X$ un número real comprendido entre 0 y 1, de forma que el valor extremo $n(X) = 0$ significa que el radio numérico no es norma equivalente a la norma usual de operadores en $L(X)$, mientras que el otro valor extremo, $n(X) = 1$, se da cuando radio numérico y norma de operadores coinciden. Los valores entre 0 y 1 cuantifican la proximidad del radio numérico a dicha norma de operadores.

El concepto de índice numérico fue introducido por G. Lumer en 1968. En aquel tiempo era conocido que si $H$ es un espacio de Hilbert complejo, de dimensión mayor que 1, entonces

$$\|T\| \leq 2v(T)$$

para todo $T \in L(H)$, siendo además la constante 2 óptima. Esta desigualdad viene de la teoría general de formas cuadráticas, y se puede encontrar una demostración sencilla en [56, §18] (ver también [57, página 114]). Así tenemos que $n(H) = 1/2$ y, en particular, el radio numérico es una norma equivalente a la norma usual de operadores en $L(H)$. Sin embargo, en caso real la situación es bien distinta: en todo espacio de Hilbert real $H$, de dimensión mayor que 1, podemos encontrar un operador no nulo $T \in L(H)$ tal que $Tx$ es ortogonal a $x$ para cada $x \in X$; es claro que $W(T) = \{0\}$, luego $v(T) = 0$. Por tanto, $n(H) = 0$ para todo espacio de Hilbert real $H$ de dimensión mayor que 1.

La diferencia cualitativa entre los casos real y complejo en espacios de Hilbert no es un hecho aislado, sino que responde a un resultado más general. Ya en el trabajo de Lumer de 1961 se demuestra que para espacios de Banach complejos el radio numérico es siempre una norma equivalente, lo cual es falso en caso real, como ya hemos visto. Concretamente, Lumer [77, Theorem 5] prueba que si $X$ es un espacio de Banach complejo, entonces

$$\|T\| \leq 4v(T)$$

para todo $T \in L(X)$. En 1970, B. Glickfeld [49] observa que esta propiedad puede ser mejorada sin más que interpretar en términos de radio numérico una desigualdad clásica para álgebras normadas debida a H. Bohnenblust y S. Karlin [18]:

**1.2.5. Teorema.** *Sea $X$ un espacio de Banach complejo. Entonces*

$$\|T\| \leq e\, v(T)$$

*para todo operador $T \in L(X)$. Equivalentemente, $n(X) \geq e^{-1}$.*

El propio Glickfeld demuestra en [49, §2] que $e^{-1}$ es la mejor constante posible, ya que pueden darse ejemplos de espacios de Banach complejos con índice numérico $e^{-1}$. Ese mismo año, J. Duncan, C. McGregor, J. Pryce y A. White determinan totalmente el conjunto de posibles valores del índice numérico:

**1.2.6. Teorema.** [35, Theorems 3.5 and 3.6]

*a)* *Para cada $t \in [0,1]$ existe un espacio de Banach real $X_t$, de dimensión dos, tal que $n(X_t) = t$.*

*b)* *Para cada $s \in [e^{-1},1]$ existe un espacio de Banach complejo $X_s$, de dimensión dos, tal que $n(X_s) = s$.*

Los dos teoremas anteriores se resumen, de forma quizá más sugerente, en las siguientes igualdades:

$$\{n(X) \ : \ X \text{ espacio de Banach complejo }\} = [e^{-1},1],$$
$$\{n(X) \ : \ X \text{ espacio de Banach real }\} = [0,1].$$

La aparición, de alguna manera sorprendente, del número $e$ en este ambiente se debió al uso de técnicas de holomorfía en la demostración del Teorema de Bohnenblust-Karlin (ver [18] para más detalles). Sin embargo, el resultado de Glickfeld antes mencionado [49, §2] nos dice que esta aparición era obligada.

Permítasenos una última observación que resalta aún más la diferencia existente entre los espacios de Banach reales y complejos en relación al índice numérico. Si $X$ es un espacio de Banach complejo y notamos por $X_{\mathbb{R}}$ al espacio real subyacente, entonces se tiene que $n(X_{\mathbb{R}}) = 0$. La comprobación de este hecho es sencilla: el operador $x \longmapsto ix$ tiene norma 1 y radio numérico 0 cuando lo vemos como operador sobre $X_{\mathbb{R}}$.

Pasemos ahora a comentar algunos ejemplos de espacios de Banach "clásicos" para los que el índice numérico es conocido. El primer ejemplo interesante de espacio de Banach en el que radio numérico y norma de operadores coinciden (es decir, con índice numérico 1) aparece en el citado trabajo de Duncan, McGregor, Pryce y White [35]. Tal ejemplo es $C(K)$, el espacio de Banach de las funciones continuas sobre un espacio compacto de Hausdorff $K$, dotado de la norma uniforme. Para encontrar nuevos ejemplos, podemos, como se hace en [35], estudiar la relación entre el índice numérico de un espacio y el de su dual.

Dado un espacio de Banach $X$ y un operador $T \in L(X)$, denotaremos por $T^*$ al operador *adjunto* de $T$:

$$[T^*(x^*)](x) = x^*(Tx) \qquad (x \in X,\, x^* \in X^*),$$

y es bien sabido que $T^* \in L(X^*)$ con $\|T^*\| = \|T\|$. Viendo a $X$ como subespacio de $X^{**}$, es claro que $(x^*,x) \in \Pi(X^*)$ para cualquier par $(x,x^*) \in \Pi(X)$, de donde deducimos que

$$W(T) \subseteq W(T^*)$$

para todo operador $T \in L(X)$. Además, usando la igualdad (1.2) obtenemos que

$$\sup \operatorname{Re} W(T) = \sup \operatorname{Re} W(T^*),$$

de donde se sigue, como ya el lector habrá adivinado, que

$$\overline{\text{co}}\, W(T) = \overline{\text{co}}\, W(T^*),$$

y por tanto

$$v(T^*) = v(T)$$

para todo operador $T \in L(X)$. Finalmente, tenemos

$$\begin{aligned} n(X^*) &= \inf\{v(S) \,:\, S \in L(X^*),\, \|S\| = 1\} \\ &\leq \inf\{v(T^*) \,:\, T \in L(X),\, \|T\| = 1\} = n(X). \end{aligned}$$

Para uso posterior enunciamos explícitamente lo recién demostrado:

**1.2.7. Proposición.** *Si $X$ es un espacio de Banach, entonces:*

(*i*) $v(T) = v(T^*)$ *para todo* $T \in L(X)$.

(*ii*) $n(X^*) \leq n(X)$.

**1.2.8. Nota.** Obsérvese que la igualdad entre el radio numérico de un operador y el de su adjunto podía haber sido obtenida del Corolario 1.2.2, sin más que recordar la densidad del conjunto de funcionales que alcanzan la norma en cualquier espacio de Banach (Teorema de Bishop-Phelps [17]). De hecho, gracias a un refinamiento del Teorema de Bishop-Phelps debido a B. Bollobás [19], se puede mejorar la relación obtenida entre el rango numérico de un operador y el de su adjunto (ver [21, Corollary 17.3]): si $X$ es un espacio de Banach, entonces

$$W(T) \subseteq W(T^*) \subseteq \overline{W(T)}$$

para todo operador $T \in L(X)$.

No sabemos si la desigualdad que aparece en el segundo apartado de la Proposición 1.2.7 es siempre una igualdad. Se trata de un problema abierto desde hace bastante tiempo. No obstante, es claro que tendremos $n(X) = 1$ siempre que sea $n(X^*) = 1$. En particular, un espacio de Banach tendrá índice numérico 1 si alguno de sus sucesivos duales es isométrico a un espacio del tipo $C(K)$. Así, los espacios de la forma $L_1(\mu)$ ($\mu$ medida positiva) y sus preduales isométricos tienen todos índice numérico 1 [35, Theorem 2.2]. Nótese que los espacios $C(K)$ son un tipo especial de preduales isométricos de espacios $L_1(\mu)$. La monografía de H. Lacey [65] contiene abundante información sobre espacios $L_1(\mu)$ y sus preduales.

Englobando los espacios reales de tipo $C(K)$ y $L_1(\mu)$, J. Lindenstrauss introdujo en 1964 una amplia clase de espacios de Banach reales definidos por una propiedad de intersección de bolas [71]:

**1.2.9. Definición.** Un espacio de Banach real verifica la *propiedad de intersección 3.2* (*3.2.I.P.* para abreviar) si cualquier terna de bolas cerradas en el espacio, que se corten dos a dos, tiene intersección no vacía.

De hecho O. Hanner [58] había hecho en 1956 un amplio estudio de esta propiedad en dimensión finita, y el interés de J. Lindenstrauss en ella se debe a su relación con problemas de extensión de operadores compactos (ver [71] para más detalles). Más información sobre la 3.2.I.P. puede encontrarse en los trabajos [59, 66, 67, 71, 89, 91].

No es fácil explicar cómo se demuestra que un espacio de Banach con la 3.2.I.P. tiene índice numérico 1, pues no existe, que sepamos, una mención explícita de este resultado en la literatura. Las demostraciones que conocemos exigen dar un pequeño rodeo y utilizar alguna propiedad más débil que la 3.2.I.P. que siga implicando índice numérico 1. Uno de estos caminos pasa por una clase de espacios de Banach reales introducida por R. Fullerton [48] en 1960, que contiene a los espacios con la 3.2.I.P. y está formada por espacios con índice numérico 1. Su definición puede darse también en caso complejo:

**1.2.10. Definición.** Un espacio de Banach real o complejo $X$ es un *CL-espacio* si para todo subconjunto convexo maximal $F$ de $S_X$ se verifica que $B_X$ es la envolvente absolutamente convexa de $F$, es decir, $B_X = \text{co}\,(\mathbb{T}F)$.

Nótese que si $F$ es un subconjunto convexo de $S_X$, el Teorema de Hahn-Banach proporciona un funcional $x^* \in S_{X^*}$ que toma el valor 1 en todo punto de $F$; por tanto, si $F$ es maximal se deberá tener $F = \{x \in S_X : x^*(x) = 1\}$. Esto explica que los subconjuntos convexos maximales de $S_X$ reciban frecuentemente el nombre de "caras" maximales de $B_X$.

En 1977, Å Lima demuestra que los espacios reales con la 3.2.I.P. son CL-espacios [66, Corollary 3.6]. En sentido contrario, ya en 1956 O. Hanner [58, Remark 3.5] había dado un ejemplo de un CL-espacio real 5-dimensional que no verifica la 3.2.I.P., ejemplo que estudiaremos por otras razones más adelante (ver Ejemplo 1.3.1). Los CL-espacios complejos no han recibido por ahora mucha atención; no es difícil comprobar que incluyen a los espacios complejos $C(K)$, pero no al espacio $l_1$ complejo. Consideraremos en el Capítulo 3 una generalización natural que sí incluye a los espacios complejos $L_1(\mu)$.

El hecho de que todo CL-espacio tiene índice numérico 1 fue demostrado por M. Acosta en 1990. Su demostración contempla sólo el caso real, pero puede ser fácilmente adaptada al caso complejo:

**1.2.11. Proposición.** [5, Teorema 5.5] *Si $X$ es un CL-espacio, entonces $n(X) = 1$.*

En el caso finito-dimensional, los CL-espacios agotan de hecho los ejemplos de espacios con índice numérico 1. Más concretamente, uniendo resultados de J. Lindenstrauss [71] y C. McGregor [80] obtenemos el siguiente enunciado, que es una útil caracterización de los espacios de dimensión finita con índice numérico 1:

**1.2.12. Proposición.** *Sea $X$ un espacio de Banach de dimensión finita. Son equivalentes:*

(*i*) $n(X) = 1$.

(*ii*) $|x^*(x)| = 1$ *para cualesquiera puntos extremos* $x \in B_X$ *y* $x^* \in B_{X^*}$.

(*iii*) *$X$ es un CL-espacio.*

La lista de espacios complejos con índice numérico 1 también se engrosa con otros espacios clásicos como el Álgebra del Disco [21, Theorem 32.9]. De hecho, se sigue de un resultado reciente de D. Werner [107] que cualquier álgebra de funciones tiene índice numérico 1. Comentaremos ampliamente este resultado en el capítulo 3 de la presente memoria.

Para finalizar nuestra presentación del concepto de índice numérico, en la que hemos tratado de reseñar todos los precedentes, queremos resaltar que hay muchos problemas abiertos sobre el cálculo efectivo de índices numéricos en espacios concretos. Baste como ejemplo el hecho de que el índice numérico de los espacios $l_p$ ($p \neq 1, 2, \infty$) no es conocido. Sólo recientemente han aparecido trabajos [43, 44] en los que se calcula el rango numérico de algunos operadores en $L_p[0,1]$. Puede ser una primera aproximación al cálculo del índice numérico de los $L_p$-espacios, pero por ahora se dispone de poca información.

## 1.3 Proyecciones absolutas e índice numérico

Dado un subespacio cerrado $Y$ de un espacio de Banach $X$, ¿podemos esperar alguna relación entre los índices numéricos de $X$ e $Y$? Basta considerar el caso trivial de que $Y$ tenga dimensión 1 (y con ello $n(Y) = 1$) para concluir que la única relación esperable sería $n(X) \leq n(Y)$. Pero también esta desigualdad está muy lejos de ser cierta en general: cualquier espacio de Banach $Y$ es isométrico a un subespacio de $C(K)$ para conveniente compacto $K$, sabemos que $n(C(K)) = 1$ y no podemos esperar que ello implique $n(Y) = 1$. No obstante, si somos capaces de extender cada operador en $Y$ a un operador en $X$, conservando norma y radio numérico, sí tendremos, claramente, la desigualdad $n(X) \leq n(Y)$. Para extender conservando la norma es suficiente que $Y$ esté 1-complementado en $X$; conservar también el radio numérico parece más complicado.

Antes de continuar conviene quizá precisar nuestra terminología, aunque sea bastante usual. Una *proyección* en un espacio de Banach $X$ es un operador $P \in L(X)$ tal que $P^2 = P$. Una proyección $P$ es *contractiva* si $\|P\| = 1$, y es *bicontractiva* cuando $\|P\| = \|Id - P\| = 1$. Decimos que un subespacio $Y$ de $X$ está *complementado* (resp. *1-complementado*) en $X$ si existe una proyección (resp. proyección contractiva) de $X$ sobre $Y$.

Retomando nuestros comentarios anteriores, hay cierta esperanza de que un subespacio 1-complementado $Y$ de un espacio de Banach $X$ deba verificar $n(Y) \geq n(X)$, pues cada operador $S \in L(Y)$ tiene una extensión $T = S \circ P \in L(X)$ con $\|T\| = \|S\|$, donde $P$ es una proyección contractiva de $X$ sobre $Y$. Por ejemplo, volviendo al caso antes comentado, los subespacios 1-complementados de espacios $C(K)$ continúan siendo preduales de espacios $L_1(\mu)$ [65] y, por tanto, tienen índice numérico 1. Sin embargo, la 1-complementación no es suficiente en general para conseguir la deseada desigualdad entre índices numéricos: en un trabajo publicado en 1991, S. Reisner muestra un CL-espacio real de dimensión 5 conteniendo un subespacio 1-complementado que no es CL-espacio [93, Example 3.4]; este espacio es contraejemplo a nuestra conjetura ya que, en dimensión finita, ser CL-espacio equivale a tener índice numérico 1 (Proposición 1.2.12). El trabajo de S. Reisner utiliza el lenguaje de la teoría de grafos, lo que puede dificultar la comprensión de sus resultados. Incluimos aquí otro contraejemplo del mismo tipo para el que las comprobaciones nos parecen más fáciles.

**1.3.1. Ejemplo.** *Un espacio de Banach $X$ y una proyección bicontractiva $P$ en $X$ tal que $n(P(X)) < n(X)$.*

Sea $X$ el espacio de Banach obtenido dotando a $\mathbb{R}^5$ de la norma

$$\|(x_1,x_2,\ldots,x_5)\| = \max\left\{ |x_1|,|x_2|,|x_3|,|x_4|,|x_5|,\left|\sum_{k=1}^{5} x_k\right| \right\},$$

y veamos en primer lugar que $n(X)=1$. Para ello, en virtud de la Proposición 1.2.12, basta comprobar que cada punto extremo de $B_{X^*}$ está obligado a tomar los valores $\pm 1$ en los puntos extremos de $B_X$. Notando $e_k^*(x_1,\ldots,x_5)=x_k$ para $1\leq k\leq 5$ y $e_0^* = \sum_{k=1}^{5} e_k^*$, se deduce directamente de la definición de la norma de $X$ que el conjunto de puntos extremos de $B_{X^*}$ viene dado por

$$\mathrm{ex}\,(B_{X^*}) = \{\pm e_k^* \,:\, 0\leq k\leq 5\}.$$

Se comprueba entonces, sin dificultad, que

$$\mathrm{ex}\,(B_X) = \{x\in B_X \,:\, |e_k^*(x)|=1,\ \ 0\leq k\leq 5\},$$

equivalentemente, $|x^*(x)|=1$ para cualesquiera $x\in \mathrm{ex}\,(B_X)$ y $x^*\in \mathrm{ex}\,(B_{X^*})$, como se quería.

Consideremos ahora la aplicación $P\in L(X)$, dada por

$$P(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_3+x_4}{2},\frac{x_3+x_4}{2},x_5\right).$$

Es inmediato comprobar que $P$ es una proyección bicontractiva en $X$ con

$$P(X) = \{(x_1,x_2,\ldots,x_5) \,:\, x_1=x_2,\ x_3=x_4\}.$$

Así pues, $P(X)$ es isométricamente isomorfo a $(\mathbb{R}^3, |||\cdot|||)$, donde

$$|||(y_1,y_2,y_3)||| = \max\{|y_1|,|y_2|,|y_3|,|2y_1+2y_2+y_3|\}.$$

Nuevamente es fácil comprobar que $y = (0,1,-1)$ es un punto extremo de $B_{P(X)}$ y que $y^* = (1,0,0) \in \mathrm{ex}\left(B_{P(X)^*}\right)$. Como $y^*(y) = 0$, la Proposición 1.2.12 nos dice que $n(P(X)) < 1$.

Puede ser interesante hacer algún comentario sobre este contraejemplo. El espacio $X$ definido en él es un CL-espacio que no satisface la 3.2.I.P. Esta observación, realizada por O. Hanner en su trabajo pionero sobre propiedades de intersección de bolas [58], resulta ser crucial en la existencia de un ejemplo de este tipo, ya que la propiedad de intersección 3.2 se hereda por subespacios 1-complementados [71, Lemma 5.1] y, en consecuencia, un subespacio 1-complementado de un espacio con la 3.2.I.P. tiene índice numérico 1. Más aún, S. Reisner demuestra que un espacio de Banach real, de dimensión finita, con base 1-incondicional, satisface la 3.2.I.P. si, y sólo si, todo subespacio 1-complementado suyo es un CL-espacio [93, Theorem 3.6]. Por otro lado, la coincidencia de dimensión entre el contraejemplo de Reisner y el aquí dado no es casual: los CL-espacios de dimensión menor o igual que 4 verifican la 3.2.I.P. [58, Remark 3.6], y por tanto 5 es la mínima dimensión que puede tener un espacio de Banach $X$ con $n(X) = 1$ que contenga un subespacio 1-complementado $Y$ con $n(Y) < 1$.

A la vista del ejemplo anterior, para que una proyección $P$ en un espacio de Banach $X$ verifique la esperada desigualdad $n(P(X)) \geq n(X)$, no es suficiente que $P$ sea bicontractiva, pero podemos pensar en propiedades más restrictivas. Se dice que una proyección $P$ es *incondicional* (ver [51, §3]) cuando $\|Id - 2P\| = 1$ o, equivalentemente, cuando $\|y+z\| = \|y-z\|$ para cualesquiera $y \in P(X)$, $z \in \ker P$. Se comprueba fácilmente que las proyecciones incondicionales son bicontractivas, siendo falso el recíproco. La proyección $P$ considerada en el Ejemplo 1.3.1 es incondicional, así que, nuevo intento fallido: la incondicionalidad tampoco es suficiente. No obstante, fortaleciéndola convenientemente, hallaremos por fin una condición suficiente.

Se dice que una norma $|\cdot|$ en $\mathbb{R}^2$ es *absoluta* cuando verifica

$$|(\alpha,\beta)| = |(|\alpha|,|\beta|)| \tag{1.7}$$

para cualesquiera $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, y

$$|(1,0)| = |(0,1)| = 1. \tag{1.8}$$

Geométricamente (1.7) significa que la bola unidad de $\mathbb{R}^2$ para la norma $|\cdot|$ es simétrica respecto de los ejes de coordenadas, mientras que (1.8) es una normalización natural. En [21, §21] el lector encontrará un detenido estudio de las normas absolutas en $\mathbb{R}^2$, que tienen utilidad en bastantes cuestiones relacionadas con el rango numérico.

Pues bien, se dice que una proyección $P$ en un espacio de Banach $X$ es una *proyección absoluta* cuando existe una norma absoluta $|\cdot|$ en $\mathbb{R}^2$ verificando que

$$\|x\| = |(\|Px\|,\|x-Px\|)|$$

para todo $x \in X$. En tal caso, se dice también que $P(X)$ es un *sumando absoluto* de $X$. La noción general de proyección absoluta fue introducida por R. Evans [38] y estudiada con más detenimiento en [85, 86]. Los casos particulares más importantes se presentan cuando la norma absoluta $|\cdot|$ es una de las clásicas, y han recibido mucha más atención. Cuando $|\cdot|$ es la norma de la suma (resp. la del máximo) se habla de *L-proyecciones* y *L-sumandos* (resp. *M-proyecciones* y *M-sumandos*), conceptos que marcan el punto de partida de una extensa e importante teoría [14, 60]. Las *$L_p$-proyecciones*, para $1 < p < \infty$, también han sido ampliamente estudiadas [15].

Es claro que toda proyección absoluta es incondicional, pero el recíproco está muy lejos de ser cierto. Veamos ya que la desigualdad $n(P(X)) \geq n(X)$ es cierta para proyecciones absolutas:

**1.3.2. Proposición.** *Si $Y$ es un sumando absoluto de un espacio de Banach $X$, entonces $n(X) \leq n(Y)$.*

*Demostración.* Llamando $Z$ al núcleo de la proyección absoluta cuya imagen es $Y$, proyección que, por definición, lleva asociada una norma absoluta $|\cdot|$, identificamos $X$ con el producto $Y \times Z$ dotado de la norma

$$\|(y,z)\| = |(\|y\|,\|z\|)| \qquad (y \in Y,\ z \in Z).$$

Entonces, no es difícil comprobar (véase [85, Proposición 8.2] si se quiere) que $X^*$ se identifica de manera natural con $Y^* \times Z^*$ cuya norma es

$$\|(y^*,z^*)\| = |(\|y\|,\|z\|)|' \qquad (y^* \in Y^*,\ z^* \in Z^*),$$

siendo $|\cdot|'$ la norma dual de $|\cdot|$.

Ahora, a cada operador $S \in L(Y)$ le vamos a asociar una extensión $T \in L(X)$ conservando norma y radio numérico. La manera de hacerlo no puede ser más obvia: $T$ es el operador dado por

$$T(y,z) = (Sy,0) \quad (y \in Y,\ z \in Z).$$

Es inmediato que la norma de $T$ y la de $S$ coinciden y, gracias a que tenemos una proyección absoluta, los radios numéricos también coincidirán.

En efecto, tomemos $x = (y,z) \in S_X$, $x^* = (y^*,z^*) \in S_{X^*}$ con

$$x^*(x) = y^*(y) + z^*(z) = 1$$

y observemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{Re}\,(y^*(y)+z^*(z)) \leq \|y^*\|\|y\| + \|z^*\|\|z\| \\ &\leq |(\|y^*\|,\|z^*\|)|'\,|(\|y\|,\|z\|)| = \|x^*\|\|x\| \leq 1, \end{aligned}$$

luego todas las desigualdades anteriores se convierten en igualdades, y con ello

$$y^*(y) = \|y^*\|\|y\|.$$

Entonces, si $y \neq 0$ e $y^* \neq 0$, tenemos $\left(\frac{y}{\|y\|}, \frac{y^*}{\|y^*\|}\right) \in \Pi(Y)$, con lo cual

$$v(S) \geq \frac{y^*}{\|y^*\|}\left(S\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right) \geq |y^*(Sy)| = |x^*(Tx)|,$$

desigualdad que es obviamente cierta si $y = 0$ o $y^* = 0$. Tomando entonces supremo con $(x, x^*) \in \Pi(X)$, se tiene

$$v(S) \geq v(T).$$

La desigualdad contraria es inmediata: para cada $(y, y^*) \in \Pi(Y)$, tomando $x = (y, 0)$ y $x^* = (y^*, 0)$, tenemos que $(x, x^*) \in \Pi(X)$, luego $|y^*(Sy)| = |x^*(Tx)| \leq v(T)$.

En resumen, hemos obtenido que $v(T) = v(S)$, de donde

$$n(X)\|S\| = n(X)\|T\| \leq v(T) = v(S),$$

y la arbitrariedad de $S \in L(Y)$ nos permite concluir $n(X) \leq n(Y)$. □

Obviamente, si $P$ es una proyección absoluta en un espacio de Banach $X$, la proyección $Id - P$ también es absoluta, luego la Proposición 1.3.2 nos permite de hecho afirmar que

$$n(X) \leq \min\{n(P(X)), n(\ker P)\}.$$

En general, esta desigualdad puede ser estricta (tómese $X = \mathbb{R}^2$ con la norma euclídea) pero, como caso particular de los resultados que obtendremos en la próxima sección, tendremos igualdad para $L$-proyecciones y $M$-proyecciones.

## 1.4 Sumas de espacios de Banach

Nos proponemos ahora mostrar que el índice numérico de una $c_0$, $l_1$ o $l_\infty$ suma de espacios de Banach puede ser calculado en términos de los índices numéricos de los sumandos, generalizando el resultado conocido

$$n(c_0) = n(l_1) = n(l_\infty) = 1.$$

Dada una familia arbitraria $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de espacios de Banach, llamamos $l_\infty$ *suma* de dicha familia, y denotamos $[\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{l_\infty}$, al subespacio del producto cartesiano $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ formado por las familias $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tales que el conjunto $\{\|x_\lambda\| : \lambda \in \Lambda\}$ está acotado, que es un espacio de Banach con la norma

$$\|(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\| = \sup\{\|x_\lambda\| : \lambda \in \Lambda\}.$$

Como subespacio cerrado de dicha $l_\infty$ suma encontramos la $c_0$ *suma*, denotada $[\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{c_0}$; por definición, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ pertenece a la $c_0$ suma cuando el conjunto $\{\lambda \in \Lambda : \|x_\lambda\| \geq \varepsilon\}$ es finito para todo $\varepsilon > 0$. Finalmente, la $l_1$ *suma* $[\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{l_1}$ está formada por las familias $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tales que $(\|x_\lambda\|)_{\lambda\in\Lambda}$ es sumable, y la norma que la convierte en espacio de Banach es

$$\|(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\| = \sum_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\|.$$

En algún caso, la notación anterior es innecesariamente complicada. Por ejemplo, para la $c_0$ suma de dos espacios $Y, Z$ (que es igual a la $l_\infty$ suma) escribiremos simplemente $Y \oplus_\infty Z$; si se trata de la $l_1$ suma, escribiremos $Y \oplus_1 Z$.

**1.4.1. Teorema.** *Si* $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *una familia de espacios de Banach, entonces*

$$n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{c_0}\Big) = n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{l_1}\Big) = n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{l_\infty}\Big) = \inf_\lambda n(X_\lambda).$$

*Demostración.* Veamos primero que el índice numérico de una $c_0$ suma es siempre menor o igual que el de cualquiera de los sumandos. Para ello observamos que, fijado $\lambda_0 \in \Lambda$, se tiene

$$[\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{c_0} = X_{\lambda_0} \oplus_\infty \left[\oplus_{\lambda\neq\lambda_0} X_\lambda\right]_{c_0},$$

luego $X_{\lambda_0}$ es un $M$-sumando de la $c_0$ suma y la Proposición 1.3.2 nos dice que

$$n\left([\oplus_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda]_{c_0}\right) \leq n(X_{\lambda_0}).$$

Por tanto,

$$n\left([\oplus_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda]_{c_0}\right) \leq \inf_\lambda n(X_\lambda).$$

Con idéntico razonamiento obtenemos la desigualdad análoga para $l_1$ sumas y $l_\infty$ sumas.

Establezcamos ahora la desigualdad contraria para $c_0$ y $l_\infty$ sumas, casos que podremos resolver con un mismo argumento. Llamemos $X$ a cualquiera de las dos sumas y observemos que, en ambos casos, un operador $T \in L(X)$ puede verse como una familia de operadores $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, donde $T_\lambda \in L(X,X_\lambda)$ para todo $\lambda$, y $\|T\| = \sup\{\|T_\lambda\| : \lambda \in \Lambda\}$, para lo cual basta componer el operador $T$ con las proyecciones naturales de $X$ sobre cada uno de los $X_\lambda$. Fijado $\varepsilon > 0$, podemos pues encontrar $\lambda_0 \in \Lambda$ de forma que $\|T_{\lambda_0}\| > \|T\| - \varepsilon$, y la clave de la demostración consistirá en construir a partir de $T_{\lambda_0}$ un operador $S \in L(X_{\lambda_0})$ cuya norma y radio numérico estén relacionados con los de $T$. Para simplificar la notación, escribiremos $Y = X_{\lambda_0}$, $Z = \left[\oplus_{\lambda\neq\lambda_0}X_\lambda\right]_{c_0}$ o $Z = \left[\oplus_{\lambda\neq\lambda_0}X_\lambda\right]_{l_\infty}$ según sea el caso, e identificaremos a $X$ con $Y \times Z$, dotando al producto de la norma del máximo. Puesto que, claramente, $B_X = \mathrm{co}(S_Y \times S_Z)$, podemos encontrar $y_0 \in S_Y$, $z_0 \in S_Z$ tales que

$$\|T_{\lambda_0}(y_0,z_0)\| > \|T\| - \varepsilon.$$

Obsérvese que la definición del operador $S$ que parecería más obvia, consistente en restringir $T_{\lambda_0}$ a $Y$, no daría resultado, pues no tendríamos relación entre las normas de $S$ y $T$. En lugar de eso, fijamos $y_0^* \in S_{Y^*}$ verificando $y_0^*(y_0) = 1$, y definimos $S \in L(X_{\lambda_0})$ de la siguiente forma:

$$Sy = T_{\lambda_0}(y,0) + y_0^*(y)T_{\lambda_0}(0,z_0) = T_{\lambda_0}(y,y_0^*(y)z_0) \qquad (y \in Y). \tag{1.9}$$

Tenemos así, claramente,

$$\|S\| \geq \|Sy_0\| = \|T_{\lambda_0}(y_0,z_0)\| > \|T\| - \varepsilon.$$

Por otra parte, dado $(y,y^*) \in \Pi(Y)$ escribimos $x = (y, y_0^*(y)z_0)$, $x^* = (y^*,0)$ y, usando que en $X = Y \times Z$ tenemos la norma del máximo, comprobamos sin dificultad que $(x,x^*) \in \Pi(X)$, con lo cual

$$v(T) \geq |x^*(Tx)| = \left|y^* \left[T_{\lambda_0}(y, y_0^*(y)z_0)\right]\right)\right| = |y^*(Sy)|.$$

Deducimos que

$$v(T) \geq v(S) \geq n(Y)\|S\| \geq n(Y)\left[\|T\| - \varepsilon\right].$$

Deshaciendo la sustitución $Y = X_{\lambda_0}$, hemos probado que

$$v(T) \geq n(X_{\lambda_0})[\|T\| - \varepsilon], \tag{1.10}$$

donde $\lambda_0$ depende de $\varepsilon$, pero con más razón se tendrá

$$v(T) \geq \inf_{\lambda} n(X_\lambda)[\|T\| - \varepsilon],$$

y haciendo ahora $\varepsilon \downarrow 0$,

$$v(T) \geq \inf_{\lambda} n(X_\lambda)\|T\|,$$

lo que implica $n(X) \geq \inf_\lambda n(X_\lambda)$ en vista de la arbitrariedad de $T \in L(X)$.

La demostración para la $l_1$ suma consistirá, de alguna manera, en un argumento "dual" del anterior. Escribamos esta vez $X = [\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{l_1}$, y cada operador $T \in L(X)$ como una familia $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, donde ahora cada $T_\lambda \in L(X_\lambda, X)$ se obtiene componiendo con $T$ la inclusión canónica de $X_\lambda$ en $X$. Usando la definición de $l_1$ suma, comprobamos sin dificultad que, también en este caso, $\|T\| = \sup\{\|T_\lambda\| : \lambda \in \Lambda\}$. Fijado $\varepsilon > 0$, encontramos $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\|T_{\lambda_0}\| > \|T\| - \varepsilon$ y escribimos, como antes, $Y = X_{\lambda_0}$, $Z = \left[\oplus_{\lambda\neq\lambda_0} X_\lambda\right]_{l_1}$; identificamos $X$ con $Y \times Z$, ahora con la norma de la suma, y el operador $T_{\lambda_0}$ tendrá la forma $(A,B)$ con $A \in L(Y)$, $B \in L(Y,Z)$. Igual que en el caso de las $c_0$ o $l_\infty$ sumas, construiremos un operador $S \in L(Y)$ cuya norma y radio numérico guarden relación con los de $T$. Para ello elegimos $y_0 \in S_Y$ tal que

$$\|T_{\lambda_0} y_0\| = \|Ay_0\| + \|By_0\| > \|T\| - \varepsilon,$$

encontramos $a_0 \in S_Y$, $z^* \in S_{Z^*}$ verificando

$$Ay_0 = \|Ay_0\|a_0 \qquad \text{y} \qquad z^*(By_0) = \|By_0\|,$$

y definimos un operador $S \in L(Y)$ por

$$Sy = Ay + [z^*(By)]\,a_0 \qquad (y \in Y). \tag{1.11}$$

Por una parte, es claro que

$$\|S\| \geq \|Sy_0\| = \left\|Ay_0 + z^*(By_0)a_0\right\| = \|Ay_0\| + \|By_0\| > \|T\| - \varepsilon$$

y, por otra, para cada $(y, y^*) \in \Pi(Y)$ podemos tomar $x = (y, 0)$, $x^* = (y^*, y^*(a_0)z^*)$ para tener, usando esta vez que en $X^* = Y^* \times Z^*$ tenemos la norma del máximo, que $(x, x^*) \in \Pi(X)$, con lo que

$$\begin{aligned} v(T) &\geq |x^*(Tx)| = |x^*(T_{\lambda_0}y)| \\ &= |y^*(Ay) + y^*(a_0)z^*(By)| = |y^*(Ay + z^*(By)a_0)| \\ &= |y^*(Sy)|, \end{aligned}$$

luego $v(T) \geq v(S)$. Nuevamente concluimos que

$$v(T) \geq n(X_{\lambda_0})\,[\|T\| - \varepsilon], \tag{1.12}$$

de donde

$$v(T) \geq \inf_\lambda n(X_\lambda)\|T\|$$

y $n(X) \geq \inf_\lambda n(X_\lambda)$. □

Es obligado comentar que en la primera parte de la demostración anterior no se usa el hecho de que tenemos $c_0$, $l_1$ o $l_\infty$ sumas, sino más bien la Proposición 1.3.2 sobre proyecciones absolutas y una especie de asociatividad que tienen dichas sumas. Lo mismo ocurre con las $l_p$ sumas ($1 < p < \infty$), cuya definición es una obvia adaptación del concepto de $l_1$ suma. Se tiene por tanto la desigualdad

$$n\left([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{l_p}\right) \leq \inf_\lambda n(X_\lambda)$$

para cualquier familia $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de espacios de Banach y $1 < p < \infty$. Obsérvese que, como ya se comentó en la sección anterior, en este caso la desigualdad contraria no es cierta en general. El cálculo del índice numérico de una $l_p$ suma puede considerarse un problema abierto; recuérdese que incluso el valor exacto de $n(l_p)$ para $1 < p < \infty$ $(p \neq 2)$ es desconocido.

El lector habrá observado que en la parte más sustanciosa de la demostración anterior se trabaja en realidad con dos sumandos, y la clave está en probar que $n(X) \geq \min\{n(Y), n(Z)\}$ tanto para $X = Y \oplus_\infty Z$ como para $X = Y \oplus_1 Z$. No hemos tratado de enmascarar este hecho, más bien hemos usado una notación que lo pone claramente de manifiesto. No parece, sin embargo, que la desigualdad general $n(X) \geq \inf_{\lambda\in\Lambda} n(X_\lambda)$ pueda deducirse directamente del caso en que $\Lambda$ tiene dos elementos, como sí ocurría con la desigualdad contraria.

Merece la pena destacar el caso particular del teorema anterior que se presenta cuando todos los sumandos tienen índice numérico 1:

**1.4.2. Corolario.** *La clase de espacios de Banach con índice numérico 1 es estable por $c_0$, $l_1$ y $l_\infty$ sumas.*

Este corolario nos proporciona la forma más sencilla de construir ejemplos de espacios de Banach con índice numérico 1 que no sean espacios del tipo $L_1(\mu)$ o preduales de los mismos, sin entrar en consideraciones sobre los CL-espacios o la 3.2.I.P. A título de curiosidad, cuando los autores de [35] buscan un primer ejemplo de este tipo, encuentran $\mathbb{R} \oplus_\infty (\mathbb{R} \oplus_1 \mathbb{R} \oplus_1 \mathbb{R})$. Por otra parte, veremos en el capítulo 3 que el corolario anterior, convenientemente reformulado, contesta una pregunta planteada por Y. Abramovich [2].

Otro caso particular interesante del Teorema 1.4.1 se presenta cuando $\Lambda = \mathbb{N}$ y todos los sumandos $X_\lambda$ son iguales. Como es habitual, denotamos por $c_0(X)$, $l_1(X)$

y $l_\infty(X)$ a la $c_0$, $l_1$ y $l_\infty$ suma, respectivamente, de una cantidad numerable de copias de un espacio de Banach $X$.

**1.4.3. Corolario.** *Para cualquier espacio de Banach $X$, se tiene:*

$$n\big(c_0(X)\big) = n\big(l_1(X)\big) = n\big(l_\infty(X)\big) = n(X).$$

Siguiendo en el caso de que todos los sumandos sean iguales, hay otro subespacio de la $l_\infty$ suma que merece la pena considerar. Concretamente, dado un espacio de Banach $X$, consideramos el espacio $c(X)$ formado por todas las sucesiones convergentes de elementos de $X$, que es un subespacio cerrado de $l_\infty(X)$. La demostración del Teorema 1.4.1 para $c_0$ o $l_\infty$ sumas puede seguirse literalmente para probar que

$$n\big(c(X)\big) = n(X),$$

hecho que será caso particular de los resultados de la próxima sección.

Queremos mostrar ahora, como otra consecuencia del Teorema 1.4.1, que los espacios de Banach $c_0$, $l_1$ y $l_\infty$ pueden ser renormados equivalentemente para conseguir que su índice numérico tome cualquiera de los valores posibles. El resultado de J. Duncan, C. McGregor, J. Pryce y A. White dado en el Teorema 1.2.6 usa sólo espacios finito-dimensionales, pero nuestro Teorema 1.4.1 nos va a permitir construir ejemplos en dimensión infinita. Veremos en la sección 2.1 de esta memoria hasta qué punto estos ejemplos responden a resultados más generales.

**1.4.4. Ejemplo.** *Para cada $t \in [0,1]$ en caso real (resp. $t \in [e^{-1},1]$ en caso complejo) existe un espacio de Banach $X$, isomorfo a $c_0$, con $n(X) = t$.*

En efecto: usando el Teorema 1.2.6 encontramos un espacio de Banach $Y$, real o complejo según convenga, de dimensión 2 y tal que $n(Y) = t$; tomamos entonces $X = c_0(Y)$, que es claramente isomorfo a $c_0$ por ser $Y$ finito-dimensional, y verifica

$n(X) = t$ gracias al Corolario 1.4.3. El resultado sigue siendo válido si cambiamos $c_0$ por $l_1$ o $l_\infty$. □

El último resultado de la sección es otro ejemplo que servirá para resaltar, aún más, la diferencia de comportamiento entre los espacios reales y los complejos respecto al índice numérico. Como ya hemos comentado, para espacios de Banach complejos el radio numérico es siempre una norma equivalente a la norma usual de operadores, mientras que en el caso real puede no ser una norma. El siguiente ejemplo muestra una nueva patología posible en espacios de Banach reales: el radio numérico puede ser una norma no equivalente a la usual de operadores. Nótese que el radio numérico es una norma equivalente a la usual de operadores si (y sólo si) es una norma completa.

**1.4.5. Ejemplo.** *Existe un espacio de Banach real $X$ tal que el radio numérico es una norma en $L(X)$, pero $n(X) = 0$, es decir, radio numérico y norma usual de operadores no son equivalentes. Además, dicho espacio puede tomarse isomorfo a $c_0$, $l_1$ o $l_\infty$.*

Comencemos la construcción de nuestro ejemplo usando el Teorema 1.2.6 para encontrar una sucesión $\{X_k\}$ de espacios de Banach reales de dimensión 2 con $n(X_k) = 1/k$ para cada $k$. Si consideramos $X = [\oplus_{k\in\mathbb{N}} X_k]_{c_0}$, entonces $n(X) = 0$ por el Teorema 1.4.1, y claramente $X$ es isomorfo a $c_0$. Para ver que el radio numérico es una norma en $L(X)$, fijamos un operador no nulo $T \in L(X)$, tomamos $0 < \varepsilon < \|T\|$, y seguimos la demostración del Teorema 1.4.1 hasta llegar a la desigualdad (1.10), que en nuestro caso tomaría la forma:

$$v(T) \geq \frac{1}{k_0}\left[\|T\| - \varepsilon\right],$$

de donde $v(T) > 0$. La misma prueba se adapta fácilmente para que $X$ sea isomorfo a $l_1$ o a $l_\infty$, cambiando en el primer caso la desigualdad (1.10) por la (1.12). □

## 1.5 Espacios de funciones con valores vectoriales

Trataremos ahora de generalizar algunos de los resultados de la sección anterior, calculando el índice numérico en espacios de funciones continuas con valores vectoriales y en espacios de funciones Bochner-integrables.

Dado un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff $L$ y un espacio de Banach $X$, denotaremos $C_0(L,X)$ al espacio de Banach de todas las funciones continuas $f$ de $L$ en $X$ que "se anulan en el infinito", esto es, tales que el conjunto $\{t \in L \,:\, \|f(t)\| \geq \varepsilon\}$ es compacto para todo $\varepsilon > 0$, con norma dada por

$$\|f\| = \max\{\|f(t)\| : t \in L\} \qquad \big(f \in C_0(L,X)\big).$$

Si $L$ es compacto, $C_0(L,X)$ no es más que el espacio de Banach de todas las funciones continuas de $L$ en $X$, y se denota simplemente por $C(L,X)$.

Un espacio de este tipo es $c_0(X)$ con $X$ un espacio de Banach cualquiera, ya que podemos verlo como $C_0(\mathbb{N},X)$ dando a $\mathbb{N}$ la topología discreta. Otro ejemplo es $c(X) \equiv C(\alpha\mathbb{N},X)$ donde $\alpha\mathbb{N}$ representa la compactación de Aleksandrov de $\mathbb{N}$. Vimos en la sección anterior que en ambos casos el índice numérico coincide con el de $X$. Conseguiremos generalizar este resultado probando que $C_0(L,X)$ tiene el mismo índice numérico que $X$, sin más hipótesis sobre $L$. En la demostración usaremos un subconjunto de $\Pi\,(C_0(L,X))$ que sirve para calcular radios numéricos, y que presentamos previamente. Para cada función $f \in S_{C_0(L,X)}$ deben existir un punto $t_0 \in L$ y un funcional $x_0^* \in S_{X^*}$ tales que $x_0^*(f(t_0)) = 1$; por tanto $(f, x_0^* \otimes \delta_{t_0})$ es un elemento de $\Pi(C_0(L,X))$, donde, para cada $t \in L$ y $x^* \in X^*$, denotamos $x^* \otimes \delta_t$ al funcional definido por

$$[x^* \otimes \delta_t](g) = x^*(g(t)) \qquad (g \in C_0(L,X)).$$

De esta forma, el subconjunto de $C_0(L,X) \times C_0(L,X)^*$ dado por

$$\big\{(f, x^* \otimes \delta_t) \,:\, f \in S_{C_0(L,X)},\ x^* \in S_{X^*},\ t \in L,\ x^*(f(t)) = 1\big\}$$

está contenido en $\Pi(C_0(L,X))$ y su proyección sobre la primera coordenada es toda la esfera unidad de $C_0(L,X)$. En virtud del Corolario 1.2.2, dicho conjunto puede usarse para calcular el radio numérico de cualquier operador en $C_0(L,X)$:

**1.5.1. Lema.** *Sea $L$ un espacio localmente compacto de Hausdorff y $X$ un espacio de Banach. Entonces, para todo $T \in L(C_0(L,X))$, se tiene*

$$v(T) = \sup\left\{\left|x^*\left([Tf](t)\right)\right| \ : \ f \in S_{C_0(L,X)},\ t \in L,\ x^* \in S_{X^*},\ x^*(f(t)) = 1\right\}.$$

Podemos ya, sin más, enunciar y demostrar el resultado prometido:

**1.5.2. Teorema.** *Sea $L$ un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff. Entonces*

$$n(C_0(L,X)) = n(X)$$

*para todo espacio de Banach $X$.*

*Demostración.* Para probar que $n(C_0(L,X)) \geq n(X)$, fijemos $T \in L(C_0(L,X))$ con $\|T\| = 1$, y bastará ver que $v(T) \geq n(X)$. Dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar una función $f_0 \in C_0(L,X)$ con $\|f_0\| = 1$, y un punto $t_0 \in L$ tales que

$$\|[Tf_0](t_0)\| > 1 - \varepsilon. \tag{1.13}$$

Nos vendría bien, como se verá, que fuese $\|f_0(t_0)\| = 1$, condición que, a priori, no tiene por qué cumplirse. Sin embargo, haciendo uso del Lema de Urysohn, vamos a poder cambiar $f_0$ por otra función verificando lo que queremos. Para ello, empezamos por encontrar una función continua de soporte compacto $\phi : L \longrightarrow [0,1]$ tal que

$$\phi(t_0) = 1 \qquad \text{y} \qquad \phi(t) = 0 \ \text{ si } \ \|f_0(t) - f_0(t_0)\| \geq \varepsilon. \tag{1.14}$$

Por otra parte, siempre podremos expresar $f_0(t_0)$ como combinación convexa de dos elementos de la esfera unidad de $X$, esto es, existen $x_1, x_2 \in S_X$ y $\lambda \in [0,1]$ tales que $f_0(t_0) = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$. Con estos puntos construimos las funciones $f_1, f_2 \in C_0(L,X)$ dadas por

$$f_j(t) = (1-\phi(t))f_0(t) + \phi(t)x_j \qquad (t \in L,\ j = 1,2).$$

Si llamamos $g = (1-\lambda)f_1 + \lambda f_2$, para $t \in L$ se tiene claramente

$$g(t) = \big(1-\phi(t)\big)f_0(t) + \phi(t)f_0(t_0),$$

luego

$$g(t) - f_0(t) = \phi(t)\big(f_0(t_0) - f_0(t)\big),$$

y usando (1.14) vemos fácilmente que $\|g - f_0\| < \varepsilon$. Como consecuencia, de la ecuación (1.13) obtenemos que $\|[Tg](t_0)\| > 1 - 2\varepsilon$ y, por convexidad, se deberá tener

$$\|[Tf_1](t_0)\| > 1 - 2\varepsilon \qquad \text{o} \qquad \|[Tf_2](t_0)\| > 1 - 2\varepsilon.$$

En resumen, haciendo la elección correcta de $x_0 = x_1$ o $x_0 = x_2$, se tiene que $\|x_0\| = 1$ y

$$\Big\|\Big[T\Big((1-\phi)f_0 + \phi x_0\Big)\Big](t_0)\Big\| > 1 - 2\varepsilon.$$

Comparando esta última desigualdad con (1.13), podemos observar que la función $(1-\phi)f_0 + \phi x_0$ cumple (salvo $\varepsilon$) la misma condición que $f_0$, pero toma en el punto $t_0$ un valor $x_0 \in S_X$.

En un segundo paso, fijamos $x_0^* \in S_{X^*}$ tal que $x_0^*(x_0) = 1$ y consideramos el operador $S \in L(X)$ definido por

$$Sx = \Big[T\Big(x_0^*(x)(1-\phi)f_0 + \phi x\Big)\Big](t_0) \qquad (x \in X), \tag{1.15}$$

que claramente verifica

$$1 \geq \|S\| \geq \|Sx_0\| = \Big\|\Big[T\Big((1-\phi)f_0 + \phi x_0\Big)\Big](t_0)\Big\| > 1 - 2\varepsilon. \tag{1.16}$$

Por otra parte, dado un par $(x,x^*) \in \Pi(X)$, consideramos la función $g \in C_0(L,X)$ definida por

$$g(t) = x_0^*(x)(1-\phi(t))f_0(t) + \phi(t)x \qquad (t \in L), \tag{1.17}$$

junto con el funcional $g^* = x^* \otimes \delta_{t_0} \in C_0(L,X)^*$ y comprobamos sin dificultad que $(g,g^*) \in \Pi\left(C_0(L,X)\right)$, con lo cual

$$v(T) \geq |g^*(Tg)| = \left| x^*\left(\left[T\left(x_0^*(x)(1-\phi)f_0 + \phi x\right)\right](t_0)\right)\right| = |x^*(Sx)|.$$

Se sigue que

$$v(T) \geq v(S) \geq n(X)\|S\| \geq (1-2\varepsilon)n(X),$$

y haciendo $\varepsilon \downarrow 0$ obtenemos $v(T) \geq n(X)$ como se quería.

Para obtener la desigualdad contraria, $n(X) \geq n(C_0(L,X))$, a cada $S \in L(X)$ le asociamos el operador $T \in L(C_0(L,X))$ dado por la fórmula

$$[T(f)](t) = S(f(t)) \qquad \big(t \in L,\ f \in C_0(L,X)\big)$$

y es fácil comprobar que $\|T\| = \|S\|$. Por otra parte, para estimar $v(T)$ usaremos el Lema 1.5.1: dados $f \in S_{C_0(L,X)}$, $t \in L$, $x^* \in S_{X^*}$ verificando $x^*(f(t)) = 1$, tenemos claramente que $(f(t),x^*) \in \Pi(X)$, con lo cual

$$\left|x^*\left([Tf](t)\right)\right| = |x^*(S(f(t)))| \leq v(S),$$

y el lema nos dice que $v(T) \leq v(S)$. Entonces

$$v(S) \geq v(T) \geq n\big(C_0(L,X)\big)\|T\| = n\big(C_0(L,X)\big)\|S\|,$$

y concluimos que $n(X) \geq n\big(C_0(L,X)\big)$. □

En [79] aparece el resultado anterior para el caso en que $L$ es compacto y la demostración del caso general dada aquí es literalmente la misma. Con muy poco esfuerzo adicional, podemos dar una generalización alternativa del resultado de

[79]. Concretamente, dado un espacio topológico de Hausdorff $\Omega$ y un espacio de Banach $X$, consideramos el espacio de Banach $C_b(\Omega,X)$ de todas las funciones continuas y acotadas de $\Omega$ en $X$, dotado de la norma del supremo.

**1.5.3. Teorema.** *Sea $\Omega$ un espacio topológico de Hausdorff, completamente regular. Entonces*

$$n\big(C_b(\Omega,X)\big) = n(X)$$

*para todo espacio de Banach $X$.*

*Demostración.* Se usan exactamente los mismos argumentos de la demostración del teorema anterior, con un par de salvedades que pasamos a comentar. En primer lugar, nótese que no podemos usar el Lema de Urysohn para construir la función $\phi$ que aparece en (1.14), pero en el caso presente no necesitamos una función con soporte compacto sino solamente una función continua con valores en $[0,1]$ que valga 1 en un punto y 0 en un conjunto cerrado que no contiene a dicho punto; la existencia de funciones de este tipo está asegurada, por definición, en los espacios completamente regulares. La segunda salvedad se refiere al uso del Lema 1.5.1 que hacemos al final de la demostración. Bastará observar que el lema sigue siendo cierto, mutatis mutandis, para el caso que ahora nos ocupa; más concretamente, para $T \in L(C_b(\Omega,X))$ se sigue teniendo

$$v(T) = \sup\left\{ \left|x^*\left([Tf](t)\right)\right| \ : \ f \in S_{C_b(\Omega,X)},\ t \in \Omega,\ x^* \in S_{X^*},\ x^*(f(t)) = 1 \right\}.$$

Para comprobarlo, al igual que en el Lema 1.5.1, consideramos el subconjunto de $\Pi\big(C_b(\Omega,X)\big)$ dado por

$$\Gamma = \left\{ (f, x^* \otimes \delta_t) \ : \ f \in S_{C_b(\Omega,X)},\ t \in \Omega,\ x^* \in S_{X^*},\ x^*(f(t)) = 1 \right\},$$

con la intención de aplicar el Corolario 1.2.2, y para ello basta ver que la proyección de $\Gamma$ en primera coordenada es densa en la esfera unidad de $C_b(\Omega,X)$. En efecto:

dados $g \in S_{C_b(\Omega,X)}$ y $0 < \varepsilon < 1$, encontramos $t_0 \in \Omega$ tal que $\|g(t_0)\| > 1 - \varepsilon$ y una función continua $\psi : \Omega \longrightarrow [0,1]$ verificando

$$\psi(t_0) = 1 \qquad \text{y} \qquad \psi(t) = 0 \quad \text{si} \quad \|g(t) - x_0\| \geq \varepsilon,$$

donde $x_0 = \dfrac{g(t_0)}{\|g(t_0)\|}$. Definiendo entonces

$$f(t) = (1 - \psi(t))g(t) + \psi(t)x_0 \qquad (t \in \Omega),$$

es inmediato comprobar, por una parte, que $\|f\| = \|f(t_0)\| = 1$, con lo que $f$ está en la proyección de $\Gamma$ en primera coordenada y, por otra, que $\|g - f\| \leq \varepsilon$. □

Presentamos a continuación un resultado análogo a los dos anteriores, en este caso para espacios de funciones integrables. Dados un espacio de medida $(\Omega, \Sigma, \mu)$ y un espacio de Banach $X$, denotamos por $L_1(\mu, X)$ al espacio de Banach de todas las funciones Bochner-integrables de $\Omega$ en $X$, con la norma integral:

$$\|f\| = \int_\Omega \|f(t)\| \, d\mu(t) \qquad (f \in L_1(\mu, X)).$$

En la monografía de J. Diestel y J. Uhl sobre medidas vectoriales [34] puede encontrarse información general sobre este tipo de espacios, en particular el siguiente lema, que se deduce sin dificultad de la densidad en $L_1(\mu, X)$ de las funciones simples, y que nos será útil para probar que $L_1(\mu, X)$ tiene el mismo índice numérico que $X$.

**1.5.4. Lema.** [34, Lemma III.2.1] *Sea $(\Omega, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida finita. Para cada partición finita $\pi$ de $\Omega$ en conjuntos medibles, de medida positiva, dos a dos disjuntos, definimos un operador $P_\pi : L_1(\mu, X) \longrightarrow L_1(\mu, X)$ por*

$$P_\pi f = \sum_{A \in \pi} \left( \frac{1}{\mu(A)} \int_A f(t) \, d\mu(t) \right) \chi_A \qquad (f \in L_1(\mu, X)).$$

*Entonces $P_\pi$ es una proyección contractiva y, si convertimos al conjunto de todas las particiones $\pi$ del tipo descrito en un conjunto dirigido vía refinamiento, se tiene que*

$$\lim_{\pi} \|P_\pi f - f\| = 0$$

*para cada $f \in L_1(\mu, X)$.*

Observemos que la imagen de la proyección $P_\pi$ del lema anterior está formada por las funciones de $\Omega$ en $X$ que son constantes en cada uno de los conjuntos de la partición $\pi$, luego dicha imagen es isométricamente isomorfa a una $l_1$ suma de tantas copias de $X$ como conjuntos formen la partición $\pi$. Por tanto, aplicando el Corolario 1.4.3 tenemos

$$n\big(P_\pi(L_1(\mu,X))\big) = n(X). \tag{1.18}$$

Pasamos pues a enunciar y demostrar el resultado prometido sobre el índice numérico de un espacio $L_1(\mu, X)$:

**1.5.5. Teorema.** *Sea $(\Omega, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida. Entonces*

$$n(L_1(\mu,X)) = n(X)$$

*para cada espacio de Banach $X$.*

*Demostración.* Es suficiente considerar el caso en que la medida $\mu$ es finita, ya que en otro caso podemos descomponer $L_1(\mu, X)$ en la forma

$$L_1(\mu,X) \equiv [\oplus_{\lambda\in\Lambda} L_1(\nu_\lambda, X)]_{l_1},$$

donde $(\nu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una conveniente familia de medidas finitas. Esta descomposición, si bien no es difícil de obtener, puede encontrarse en [32, pp. 501]. Una vez establecido el teorema para medidas finitas, basta hacer uso del Teorema 1.4.1 para obtener el caso general.

Sea pues $\mu$ una medida finita, y probemos primeramente que $n(L_1(\mu,X)) \geq n(X)$. Para ello, fijemos un operador $T \in L(L_1(\mu,X))$ con $\|T\| = 1$, y bastará ver que $v(T) \geq n(X)$. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $f \in S_{L_1(\mu,X)}$ tal que $\|Tf\| > 1-\varepsilon$, y aplicamos el Lema 1.5.4 para encontrar una partición $\pi$ de $\Omega$, del tipo descrito en dicho lema, tal que

$$\|f - P_\pi f\| < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \|Tf - P_\pi Tf\| < \varepsilon.$$

Tenemos de forma clara

$$\begin{aligned}\|P_\pi T P_\pi f\| &\geq \|P_\pi T f\| - \|P_\pi T f - P_\pi T P_\pi f\| \\ &\geq \|P_\pi T f\| - \|f - P_\pi f\| \\ &\geq \|Tf\| - \|Tf - P_\pi Tf\| - \|f - P_\pi f\| \\ &> 1 - 3\varepsilon,\end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad se ha usado que $\|P_\pi T\| \leq 1$. Llamando ahora $Y = P_\pi(L_1(\mu,X))$ para abreviar, definimos un operador $S \in L(Y)$ por

$$Sh = P_\pi Th \qquad (h \in Y),$$

y se tiene, usando la desigualdad anterior, que

$$\|S\| \geq \|S(P_\pi(f))\| = \|P_\pi T P_\pi f\| > 1 - 3\varepsilon.$$

Por otro lado, dado un par $(y,y^*) \in \Pi(Y)$, consideramos la función $g = y \in L_1(\mu,X)$ junto con el funcional $g^* = P_\pi^* y^* \in L_1(\mu,X)^*$ y comprobamos sin dificultad que $(g,g^*) \in \Pi(L_1(\mu,X))$, con lo cual

$$v(T) \geq |g^*(Tg)| = |y^*(P_\pi Ty)| = |y^*(Sy)|.$$

Se sigue que

$$v(T) \geq v(S) \geq n(Y)\|S\| \geq (1-3\varepsilon)n(Y).$$

Obsérvese que el espacio $Y = P_\pi(L_1(\mu,X))$ depende de $\varepsilon$, pero en vista de (1.18) su índice numérico es siempre $n(X)$, lo que permite hacer $\varepsilon \downarrow 0$ para obtener la desigualdad buscada: $v(T) \geq n(X)$.

Para obtener la desigualdad contraria, $n(X) \geq n(L_1(\mu,X))$, a cada $S \in L(X)$ le asociamos el operador $T \in L(L_1(\mu,X))$ definido por

$$[T(f)](t) = S(f(t)) \qquad (t \in \Omega,\ f \in L_1(\mu,X))$$

y es inmediato comprobar que $\|T\| = \|S\|$. Por otra parte, para calcular $v(T)$ podemos usar sólo funciones simples, sin más que recordar la densidad de éstas en $L_1(\mu,X)$ y el Corolario 1.2.2. Fijemos entonces una función simple $f \in S_{L_1(\mu,X)}$ que será de la forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\mu(A_i)} \chi_{A_i}$$

para cierta familia $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de subconjuntos disjuntos de $\Omega$ con medida positiva y ciertos vectores no nulos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ verificando $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| = 1$. Consideremos también el funcional $f^* \in L_1(\mu,X)^*$ dado por

$$f^*(h) = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \left( \int_{A_i} h(t)\, d\mu(t) \right) \qquad (h \in L_1(\mu,X)),$$

donde $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* \in S_{X^*}$ se eligen de forma que $x_i^*(x_i) = \|x_i\|$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, con lo que es inmediato comprobar que $(f, f^*) \in \Pi(L_1(\mu,X))$. Veamos que

$$|f^*(Tf)| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \left| x_i^* \left( S \frac{x_i}{\|x_i\|} \right) \right|. \tag{1.19}$$

En efecto, de la definición de $f$ deducimos claramente que

$$S \circ f = \sum_{i=1}^{n} \frac{Sx_i}{\mu(A_i)} \chi_{A_i},$$

con lo cual

$$\int_{A_i} S(f(t))\, d\mu(t) = Sx_i$$

para $i = 1, 2, \dots, n$, pero entonces

$$\begin{aligned} f^*(Tf) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^* \left( \int_{A_i} [Tf](t)\, d\mu(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^* \left( \int_{A_i} S(f(t))\, d\mu(t) \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^*(Sx_i), \end{aligned}$$

de donde se deduce claramente (1.19). Por convexidad deberá existir $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que

$$\left| x_k^* \left( S \frac{x_k}{\|x_k\|} \right) \right| \geq |f^*(Tf)|$$

y, como $x_k^*(x_k) = \|x_k\|$, se sigue que $v(S) \geq |f^*(Tf)|$. La arbitrariedad de $f$, junto con la aplicación ya comentada del Corolario 1.2.2, nos permiten concluir

$$v(S) \geq v(T) \geq n(L_1(\mu, X))\|T\| = n(L_1(\mu, X))\|S\|.$$

Es claro entonces que $n(X) \geq n(L_1(\mu, X))$. □

Para acabar esta sección, presentamos un ejemplo que muestra la imposibilidad de generalizar los Teoremas 1.5.2 y 1.5.5 en una cierta dirección. Es un resultado clásico en la teoría isométrica de espacios de Banach que los espacios $C_0(L, X)$ y $L_1(\mu, X)$ son, respectivamente, el producto tensorial inyectivo de $C_0(L)$ y $X$, y el producto tensorial proyectivo de $L_1(\mu)$ y $X$ (véase por ejemplo [34, Chapter VIII]). Podría pensarse entonces que la igualdad

$$n\big(C_0(L, X)\big) = n\big(L_1(\mu, X)\big) = n(X)$$

sea caso particular de un resultado más general que establezca una fórmula para el índice numérico de un producto tensorial en términos de los índices de los factores. Nada más lejos de la realidad; veremos mediante dos contraejemplos que el índice numérico de un producto tensorial no puede expresarse como una función que dependa sólo de los índices de los factores. Puede decirse entonces que los resultados sobre la "estabilidad" del índice numérico aquí obtenidos para espacios $C_0(L, X)$ y

$L_1(\mu, X)$ responden a las especiales características de estos espacios, y no a que puedan expresarse como productos tensoriales. Para más información sobre productos tensoriales remitimos al lector interesado a las monografías [32] y [34]. De la primera de ellas tomamos la notación que usaremos: para dos espacios de Banach $X$ e $Y$, escribiremos $X\tilde{\otimes}_\varepsilon Y$ para el *producto tensorial inyectivo* de $X$ e $Y$, y $X\tilde{\otimes}_\pi Y$ para el *producto tensorial proyectivo*. Los ejemplos que anunciamos surgen, curiosamente, cuando tomamos cambiados los productos tensoriales inyectivo y proyectivo y los espacios $C(K)$ y $L_1(\mu)$. Estos ejemplos están basados en resultados de un trabajo de Å. Lima [68] publicado en 1981.

**1.5.6. Ejemplo.** Vamos a probar que

$$n(l_1^4\tilde{\otimes}_\varepsilon l_1^4) < 1 \quad \text{y} \quad n(l_\infty^4\tilde{\otimes}_\pi l_\infty^4) < 1, \tag{1.20}$$

donde $l_1^m$ y $l_\infty^m$ representan al espacio $\mathbb{R}^m$ provisto de, respectivamente, la norma de la suma y la norma del máximo. Sin embargo, intercambiando los productos tensoriales, se tiene $n(l_1^4\tilde{\otimes}_\pi l_1^4) = n(l_\infty^4\tilde{\otimes}_\varepsilon l_\infty^4) = 1$, ya que $l_1^4\tilde{\otimes}_\pi l_1^4 \equiv l_1^{16}$ y $l_\infty^4\tilde{\otimes}_\varepsilon l_\infty^4 \equiv l_\infty^{16}$. De esta forma quedará claro que no se puede calcular en general el índice numérico de un producto tensorial en función de los índices de los factores.

Comprobemos pues (1.20). Se sigue de [68, Lemma 3.2, Proposition 2.4] que el espacio de Banach $L(l_\infty^4, l_1^4)$ no es un CL-espacio, luego, usando la Proposición 1.2.12, obtenemos

$$n\big(L(l_\infty^4, l_1^4)\big) < 1.$$

Pero es bien sabido que

$$L(l_\infty^4, l_1^4) \equiv l_1^4\tilde{\otimes}_\varepsilon l_1^4 \equiv (l_\infty^4\tilde{\otimes}_\pi l_\infty^4)^*,$$

luego

$$n(l_1^4\tilde{\otimes}_\varepsilon l_1^4) = n(l_\infty^4\tilde{\otimes}_\pi l_\infty^4) = n(L(l_\infty^4, l_1^4)) < 1,$$

como se quería. □

Capítulo 2

# Estudio isomórfico del índice numérico

Como quiera que el índice numérico de un espacio de Banach depende de la norma concreta con la que dotemos al espacio, es natural considerar, para cada espacio de Banach, el conjunto de valores del índice numérico que pueden obtenerse por renormación equivalente. Veremos que dicho conjunto, para espacios de Banach de dimensión mayor que uno, es siempre un intervalo no trivial, e incluso, para una amplia clase de espacios de Banach, contiene a $[0,1[$ en caso real y a $[e^{-1},1[$ en caso complejo. Obviamente, en dimensión uno el único valor posible del índice numérico es 1. Por otra parte, veremos también que no todo espacio de Banach admite una norma equivalente con índice numérico 1. Tal cosa les ocurre, por ejemplo, a los espacios reflexivos reales de dimensión infinita. Concluimos el capítulo con una colección de problemas abiertos que nos parecen interesantes.

## 2.1 El conjunto de valores del índice numérico salvo renormación equivalente

Dados dos espacios de Banach $X$ e $Y$, escribiremos $X \simeq Y$ cuando $X$ e $Y$ sean (topológicamente) isomorfos y, con esta notación, el conjunto de valores del índice numérico que pueden obtenerse renormando equivalentemente $X$ será

$$\mathcal{N}(X) = \{n(Y) \ : \ Y \simeq X\}.$$

Nuestro primer resultado muestra que los mínimos valores posibles del índice numérico, esto es, 0 en caso real y $e^{-1}$ en caso complejo, "siempre" pueden obtenerse por renormación equivalente.

**2.1.1. Proposición.** *Todo espacio de Banach $X$ de dimensión mayor que uno es isomorfo a un espacio con índice numérico 0 en caso real, $e^{-1}$ en caso complejo. Equivalentemente, $0 \in \mathcal{N}(X)$ si $X$ es real y $e^{-1} \in \mathcal{N}(X)$ si $X$ es complejo.*

*Demostración.* Si la dimensión de $X$ es dos, el Teorema 1.2.6 nos da el resultado. En otro caso, tomamos un subespacio bidimensional de $X$, llámese $Y$, que necesariamente estará complementado, es decir, $X = Y \oplus Z$ para conveniente $Z$. Si ahora $W$ es un espacio bidimensional con $n(W) = 0$ en caso real o $n(W) = e^{-1}$ en caso complejo, por un lado se tiene $X \simeq W \oplus_1 Z$ y, por otro, la Proposición 1.3.2 nos dice que

$$n(W \oplus_1 Z) \leq n(W),$$

lo que acaba la prueba, en vista de la minimalidad de $n(W)$. □

La proposición anterior aparece en un trabajo de K. Tillekeratne [102, Theorem 3.1], esencialmente con la misma demostración, aunque sólo en caso complejo.

De hecho, el autor usa una versión ad hoc de la Proposición 1.3.2 para el caso de $L$-sumandos, esto es, el hecho de que $n(W \oplus_1 Z) \leq n(W)$.

Nuestro próximo objetivo es probar que $\mathcal{N}(X)$ es un intervalo para cualquier espacio de Banach $X$, hecho que deduciremos de la continuidad de la aplicación que lleva cada norma equivalente en su índice numérico asociado, con respecto a la métrica que pasamos a presentar. Para un espacio de Banach $X$, denotamos por $\mathcal{E}(X)$ al conjunto de todas las normas sobre $X$ equivalentes a la de partida, que es un espacio métrico con la distancia definida por

$$d(p,q) = \log\left(\min\left\{k \geq 1 \ : \ \frac{1}{k}p \leq q \leq kp\right\}\right) \qquad (p,q \in \mathcal{E}(X)).$$

Por comodidad de notación, utilizaremos el mismo símbolo para una norma sobre $X$ y su correspondiente norma dual, y es claro que el paso de una norma a su dual es una isometría de $\mathcal{E}(X)$ a $\mathcal{E}(X^*)$, hecho que usaremos en lo que sigue sin más comentario. Por otro lado, cualquier norma $p \in \mathcal{E}(X)$ da lugar de manera natural a una norma de operadores en $L(X)$, a la que continuaremos llamando $p$, y es también fácil comprobar que, si $q \in \mathcal{E}(X)$ y $d(p,q) = \log k$ con $k \geq 1$, entonces

$$\frac{1}{k^2}p(T) \leq q(T) \leq k^2 p(T) \qquad (T \in L(X)).$$

Para $p \in \mathcal{E}(X)$, escribiremos

$$\Pi(X,p) = \{(x,x^*) \in X \times X^* \ : \ p(x) = p(x^*) = x^*(x) = 1\},$$

el radio numérico de un operador $T \in L(X)$ referido al espacio de Banach $(X,p)$ será entonces

$$v_p(T) = \sup\{|x^*(Tx)| \ : \ (x,x^*) \in \Pi(X,p)\}.$$

El índice numérico de $(X,p)$ vendrá dado por

$$n(X,p) = \inf\{v_p(T) \ : \ T \in L(X),\ p(T) = 1\},$$

con lo que

$$\mathcal{N}(X) = \{n(X,p) \ : \ p \in \mathcal{E}(X)\}.$$

El siguiente lema puede deducirse de los resultados de [21, § 18] pero incluimos aquí una demostración directa, que nos parece más sencilla.

**2.1.2. Lema.** *Dado un espacio de Banach $X$, la aplicación de $\mathcal{E}(X) \times L(X)$ en $\mathbb{R}$ dada por*

$$(p,T) \longmapsto v_p(T) \qquad (p \in \mathcal{E}(X), T \in L(X)),$$

*es uniformemente continua en cada subconjunto acotado de $\mathcal{E}(X) \times L(X)$.*

*Demostración.* Conviene precisar que, ni los subconjuntos acotados de $L(X)$ ni la continuidad uniforme de la aplicación en cuestión, dependen de la norma que fijemos en $X$, pues a normas equivalentes en $X$ corresponden normas equivalentes en $L(X)$, como ya se ha comentado. Naturalmente, en $\mathcal{E}(X) \times L(X)$ podemos usar cualquiera de las distancias naturales en un producto de espacios métricos, todas ellas uniformemente equivalentes; usaremos la del máximo.

Fijemos pues una norma $p_0 \in \mathcal{E}(X)$, un número $k > 1$, escribamos

$$G(p_0,k) = \{p \in \mathcal{E}(X) \ : \ d(p,p_0) < \log k\}$$

y observemos que cualquier subconjunto acotado de $\mathcal{E}(X) \times L(X)$ estará contenido en uno de la forma

$$G(p_0,k) \times \{T \in L(X) \ : \ p_0(T) \leq N\}$$

para convenientes constantes $k > 1$ y $N > 0$, por lo que bastará establecer el lema para este tipo de conjuntos.

Fijemos $p,q \in G(p_0,k)$ con $d(p,q) < \log(1+\delta)$, donde $\delta > 0$ está por determinar, y operadores $T,S \in L(X)$ verificando

$$p_0(T) \leq N, \qquad p_0(S) \leq N, \qquad p_0(S-T) < \delta. \tag{2.1}$$

La idea es asociar a cada par $(x,x^*) \in \Pi(X,p)$ otro par $(y,y^*) \in \Pi(X,q)$ de forma que $|x^*(Tx) - y^*(Sy)|$ se mantenga controlado, para así estimar la diferencia entre $v_p(T)$ y $v_q(S)$. Tomemos pues $(x,x^*) \in \Pi(X,p)$, sean $z = \dfrac{x}{q(x)}$, $z^* = \dfrac{x^*}{q(x^*)}$ y observemos que, por ser $d(p,q) < \log(1+\delta)$, se tendrá

$$z^*(z) = \frac{1}{q(x)q(x^*)} > \frac{1}{(1+\delta)^2}.$$

Si $\eta > 0$ verifica que

$$\frac{1}{(1+\delta)^2} = 1 - \frac{\eta^2}{4}, \tag{2.2}$$

el Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás (ver [21, Theorem 16.1]) nos proporciona un par $(y,y^*) \in \Pi(X,q)$ tal que $q(y-z) < \eta$ y $q(y^* - z^*) < \eta$. Puesto que

$$1 - \delta \leq \frac{1}{1+\delta} \leq q(x) \leq 1 + \delta,$$

tenemos también $q(z-x) = |1 - q(x)| \leq \delta$ y, análogamente, $q(z^* - x^*) \leq \delta$, luego

$$q(y-x) \leq q(y-z) + q(z-x) \leq \eta + \delta$$

e igualmente, $q(y^* - x^*) \leq \eta + \delta$. Usamos ahora que $q \in G(p_0, k)$ para sustituir $q$ por $p_0$ obteniendo

$$p_0(y-x) \leq k(\eta+\delta) \qquad \text{y} \qquad p_0(y^* - x^*) \leq k(\eta+\delta). \tag{2.3}$$

Finalmente, usando nuevamente que $p, q \in G(p_0, k)$, tenemos también

$$p_0(x^*) \leq kp(x^*) = k \qquad \text{y} \qquad p_0(y) \leq kq(y) = k. \tag{2.4}$$

Podemos ya estimar la distancia de $y^*(Sy)$ a $x^*(Tx)$ como sigue:

$$\begin{aligned} |x^*(Tx) - y^*(Sy)| &\leq |x^*(T(x-y))| + |x^*((T-S)y)| + |(x^* - y^*)(Sy)| \\ &\leq p_0(x^*)p_0(T)p_0(x-y) + p_0(x^*)p_0(T-S)p_0(y) \\ &\quad + p_0(x^* - y^*)p_0(S)p_0(y) \\ &\leq k^2(\delta + 2N(\eta+\delta)), \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde hemos usado (2.1), (2.3) y (2.4). Puesto que, en vista de (2.2), $\eta$ sólo depende de $\delta$ y tiende a cero con $\delta$, podríamos haber elegido $\delta > 0$ de forma que el último miembro de (2.5) sea menor que un $\varepsilon > 0$ prefijado. Entonces, de la desigualdad

$$|x^*(Tx)| \leq |y^*(Sy)| + \varepsilon \leq v_q(S) + \varepsilon,$$

válida para todo par $(x,x^*) \in \Pi(X,p)$, deducimos

$$v_p(T) \leq v_q(S) + \varepsilon,$$

e intercambiando los papeles de $p$ y $q$, así como los de $S$ y $T$, concluimos

$$|v_p(T) - v_q(S)| \leq \varepsilon$$

para acabar la prueba. □

Veamos la prometida "continuidad" del índice numérico:

**2.1.3. Proposición.** *Dado un espacio de Banach $X$, la aplicación $\Phi : \mathcal{E}(X) \to [0,1]$, definida por*

$$\Phi(p) = n(X,p) \qquad (p \in \mathcal{E}(X)),$$

*es continua.*

*Demostración.* Fijamos $p_0 \in \mathcal{E}(X)$, $k > 1$, y bastará trabajar en el entorno de $p_0$ dado por

$$G = \{p \in \mathcal{E}(X) : d(p,p_0) < \log k)\}.$$

Pongamos también $E = \{T \in L(X) : p_0(T) = 1\}$, que es un subconjunto acotado de $L(X)$, y consideremos la función $f : G \times E \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(p,T) = \frac{v_p(T)}{p(T)} \qquad (p \in G,\ T \in E).$$

Por el lema anterior, el numerador es una función uniformemente continua en $G \times E$, y es evidente que lo mismo le ocurre al denominador. Puesto que, además,

$$\frac{1}{k^2} \leq p(T) \qquad \text{y} \qquad v_p(T) \leq p(T) \leq k^2,$$

para cualesquiera $p \in G$, $T \in E$, deducimos que $f$ es uniformemente continua en $G \times E$. Ello hace que al tomar ínfimo en la segunda variable obtengamos una función continua de la primera, pero es claro que, para cualquier $p \in G$,

$$\begin{aligned} \inf\{f(p,T) \ : \ T \in E\} &= \inf\left\{ v_p\left(\frac{T}{p(T)}\right) \ : \ T \in E \right\} \\ &= \inf\{v_p(S) \ : \ S \in L(X),\ p(S) = 1\} = \Phi(p). \end{aligned}$$

En suma, $\Phi$ es continua en $G$ como se quería. □

Obsérvese que el espacio métrico $\mathcal{E}(X)$ es conexo, ya que, dadas dos normas $p, q \in \mathcal{E}(X)$, la aplicación

$$t \longmapsto tp + (1-t)q \in \mathcal{E}(X) \qquad (t \in [0,1])$$

es una curva continua que las une. Por tanto:

**2.1.4. Corolario.** *Para cualquier espacio de Banach $X$, el conjunto $\mathcal{N}(X)$ es un intervalo.*

**2.1.5. Nota.** Queremos comentar que la demostración de este corolario no necesita el Lema 2.1.2 ni la Proposición 2.1.3 si sólo consideramos espacios de Banach que sean isomorfos a sus subespacios cerrados de codimensión 2. En efecto, si $X$ es un tal espacio de Banach, escribamos $X = Y \oplus Z$ con $\dim(Y) = 2$ y $Z \simeq X$, y para $p \in \mathcal{E}(X)$ y $\lambda \in [0, n(X,p)]$ o $\lambda \in [e^{-1}, n(X,p)]$ respectivamente en caso real o complejo, sea $W$ un espacio de Banach de dimensión dos con $n(W) = \lambda$. Entonces $X \simeq W \oplus_1 (X,p)$ y $n(W \oplus_1 (X,p)) = \lambda$ gracias al Teorema 1.4.1, luego $\lambda \in \mathcal{N}(X)$.

Se sigue claramente que $\mathcal{N}(X)$ es un intervalo. Durante mucho tiempo se conjeturó (el famoso problema del hiperplano) que cualquier espacio de Banach de dimensión infinita es isomorfo a sus hiperplanos cerrados y, por tanto, a todos sus subespacios cerrados de codimensión finita. Recientemente, W. Gowers [54] ha probado que la conjetura es falsa, pero no por ello deja de ser difícil toparse con un espacio de Banach que no sea isomorfo a sus subespacios cerrados de codimensión finita. Aparte de darnos el Corolario 2.1.4 a plena generalidad, la Proposición 2.1.3 tiene interés en sí misma.

Como consecuencia de la Proposición 2.1.1 y el Corolario 2.1.4, el resultado obtenido en el Ejemplo 1.4.4,

$$\mathcal{N}(c_0) = \mathcal{N}(l_1) = \mathcal{N}(l_\infty) = \begin{cases} [0,1] & \text{en caso real} \\ [e^{-1},1] & \text{en caso complejo,} \end{cases}$$

se puede generalizar a cualquier espacio de Banach que admita una norma equivalente con índice numérico 1:

**2.1.6. Corolario.** *Sea $X$ un espacio de Banach de dimensión mayor que uno. Si $1 \in \mathcal{N}(X)$, entonces $\mathcal{N}(X) = [0,1]$ en caso real, y $\mathcal{N}(X) = [e^{-1},1]$ en caso complejo.*

Usando, por ejemplo, que $n(l_1^m) = 1$ para cualquier natural $m$, podemos extender el Teorema 1.2.6 a cualquier dimensión finita. Este resultado aparece (aunque sólo se enuncia el caso complejo) en [102, Theorem 3.2].

**2.1.7. Corolario.** *Para todo número natural $m \geq 2$, se tiene*

$$\mathcal{N}(\mathbb{R}^m) = [0,1] \qquad y \qquad \mathcal{N}(\mathbb{C}^m) = [e^{-1},1].$$

En general, la Proposición 2.1.1 y el Corolario 2.1.4 dejan abierta la posibilidad de que existan, aparte del cuerpo escalar, espacios de Banach $X$ tales que $\mathcal{N}(X)$ se reduzca a un punto. Veremos que esto no es así demostrando, por un lado, que para todo espacio de Banach $X$ de dimensión mayor que 1, el intervalo $\mathcal{N}(X)$ tiene interior no vacío y, por otro, que bajo condiciones isomórficas bastante generales sobre un espacio de Banach $X$, se puede renormar equivalentemente $X$ para conseguir cualquier valor posible del índice numérico, salvo eventualmente el valor 1. Todo esto lo conseguiremos estudiando la repercusión sobre el índice numérico de dos propiedades muy generales desde el punto de vista isomórfico, las propiedades $(\alpha)$ y $(\beta)$ de Lindenstrauss. Ello nos permitirá aprovechar importantes teoremas de renormación debidos a B. Godun y S. Troyanski [52], J. Partington [84] y W. Schachermayer [98]. Veamos la definición de dichas propiedades y algunos comentarios.

**2.1.8. Definición.** Para $0 \leq \rho < 1$, se dice que un espacio de Banach $X$ tiene la *propiedad* $(\alpha)$ *con constante* $\rho$ cuando existe una familia $\{(x_i, x_i^*)\}_{i\in I} \subset \Pi(X)$ verificando:

*(i)* Si $i \neq j$, entonces $|x_i^*(x_j)| \leq \rho$.

*(ii)*$_\alpha$ Para todo $x^* \in X^*$ se tiene que $\|x^*\| = \sup\{|x^*(x_i)| \,:\, i \in I\}$.

Si cambiamos la condición *(ii)*$_\alpha$ por

*(ii)*$_\beta$ Para todo $x \in X$ se tiene que $\|x\| = \sup\{|x_i^*(x)| \,:\, i \in I\}$,

decimos que el espacio $X$ tiene la *propiedad* $(\beta)$ *con constante* $\rho$.

El nombre de propiedades $(\alpha)$ y $(\beta)$ se debe a W. Schachermayer [98], quien toma las definiciones de un trabajo publicado en 1963 por J. Lindenstrauss [72], sobre operadores que alcanzan su norma. Más información sobre estas propiedades puede encontrarse en los citados artículos [52, 72, 84, 98], así como en [41, 81, 82].

Intuitivamente, la bola unidad de un espacio de Banach con una de estas propiedades es una especie de "poliedro" (de hecho en espacios reales de dimensión finita "es" un poliedro) y, de manera muy poco rigurosa, un espacio de Banach con la propiedad $(\alpha)$ se parece a $l_1$, mientras que, si un espacio tiene la propiedad $(\beta)$, su geometría se asemeja a la de $c_0$. Nótese que $l_1$ tiene la propiedad $(\alpha)$ y $c_0$ la $(\beta)$, ambos con constante 0. Tales parecidos pueden cuantificarse en términos de índice numérico mostrando que, si un espacio de Banach tiene la propiedad $(\alpha)$ o la propiedad $(\beta)$ con constante "pequeña", entonces tendrá índice numérico "grande". Concretamente:

**2.1.9. Proposición.** *Si un espacio de Banach $X$ verifica la propiedad $(\alpha)$ o la $(\beta)$ con constante $\rho$, entonces*

$$n(X) \geq \frac{1-\rho}{1+\rho}.$$

*En el caso complejo, se tiene de hecho:*

$$n(X) \geq 1-\rho.$$

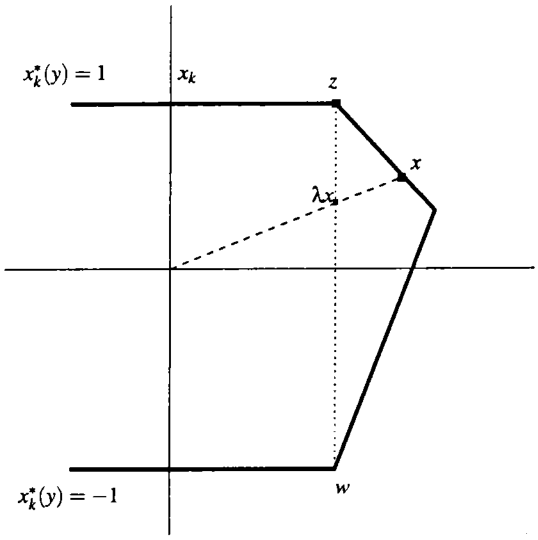
*Demostración.* Consideremos primeramente el caso de un espacio de Banach real $X$ que verifique la propiedad $(\beta)$ con constante $\rho$, y sea $\{(x_i,x_i^*)\}_{i\in I}$ la familia en $\Pi(X)$ que nos da la definición de la propiedad $(\beta)$. Fijados un operador $T \in L(X)$ y $\varepsilon > 0$, tomamos $x \in S_X$ tal que $\|Tx\| > \|T\| - \varepsilon$. La propiedad $(\beta)$ nos dice que

$$\|Tx\| = \sup\{|x_i^*(Tx)| \ : \ i \in I\},$$

con lo podemos encontrar $k \in I$ tal que

$$|x_k^*(Tx)| > \|T\| - \varepsilon. \tag{2.6}$$

Si ahora tuviésemos que $|x_k^*(x)| = 1$, la ecuación anterior daría $v(T) > \|T\| - \varepsilon$. Incluso, mediante un simple razonamiento de convexidad, lo mismo pasaría si pudiésemos expresar $x$ como combinación convexa de dos elementos de la esfera unidad, $z$ y $w$, tales que $|x_k^*(z)| = |x_k^*(w)| = 1$. Parece claro que esto no será cierto en general, puesto que entonces se tendría $n(X) = 1$, y eso es más de lo que queremos conseguir. No obstante, la propiedad ($\beta$) nos va a permitir expresar de esa forma un conveniente múltiplo $\lambda x$ con $0 < \lambda \leq 1$, controlando el valor de $\lambda$ mediante la constante $\rho$. Un dibujo puede ayudar a comprender mejor el comentario y la demostración ulterior:




Escribamos entonces, siguiendo el esquema dado,

$$\lambda x = tz + (1-t)w,$$

donde los escalares $\lambda, t \in [0,1]$, y los vectores $z, w \in S_X$ están por determinar. Nos interesará además, para mantenernos en el subespacio bidimensional que generan $x_k$ y $x$, que $z$ y $w$ sean de la forma

$$z = \lambda x + \mu x_k \qquad \text{y} \qquad w = \lambda x + \nu x_k,$$

para convenientes $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Todo este mare mágnum de constantes quedará perfectamente determinado cuando impongamos las condiciones que tienen que cumplir los puntos $z$ y $w$. Primero calculamos $\mu$ y $\nu$ imponiendo que $x_k^*(z) = 1$ y $x_k^*(w) = -1$, con lo que obtenemos:

$$z = \lambda x + (1 - \lambda x_k^*(x))\, x_k \qquad \text{y} \qquad w = \lambda x - (1 + \lambda x_k^*(x))\, x_k.$$

Podemos ya calcular $t$ de forma que $\lambda x = tz + (1-t)w$, quedando

$$t = \frac{1 + \lambda x_i^*(x)}{2},$$

y es claro que $t \in [0,1]$ siempre que sea $0 \leq \lambda \leq 1$. Por último, necesitamos que $z$ y $w$ se queden en la esfera de $X$, para lo que será crucial la propiedad $(\beta)$. Gracias a ella, sólo tendremos que imponer que $|x_j^*(z)| \leq 1$ y $|x_j^*(w)| \leq 1$ para todo $j \in I$. Para $j = k$ esto está asegurado y, para $j \neq k$, se tiene

$$|x_j^*(z)| \leq \lambda |x_j^*(x)| + |1 - \lambda x_k^*(x)| |x_j^*(x_k)| \leq \lambda + (1+\lambda)\rho$$

y análogamente $|x_j^*(w)| \leq \lambda + (1+\lambda)\rho$. Basta pues conseguir que $\lambda + (1+\lambda)\rho \leq 1$, y para ello tomamos

$$\lambda = \frac{1-\rho}{1+\rho}. \tag{2.7}$$

Para resumir, quedémonos con que, para el valor de $\lambda$ recién fijado, hemos expresado $\lambda x$ como combinación convexa de puntos $z, w \in S_X$ que verifican

$$x_k^*(z) = 1 \qquad \text{y} \qquad x_k^*(w) = -1. \tag{2.8}$$

Como anunciábamos, un simple razonamiento de convexidad aplicado a la desigualdad (2.6) nos dice que

$$|x_k^*(Tz)| > \lambda[\|T\| - \varepsilon] \qquad \text{o} \qquad |x_k^*(Tw)| > \lambda[\|T\| - \varepsilon].$$

En cualquiera de los dos casos, usando (2.7) y (2.8), obtenemos que

$$v(T) \geq \frac{1-\rho}{1+\rho}[\|T\| - \varepsilon].$$

La arbitrariedad de $T \in L(X)$ y $\varepsilon > 0$ nos da

$$n(X) \geq \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

como se quería.

La mejora de este resultado en caso complejo viene de la forma especial en que podemos expresar un múltiplo de $x$ como combinación convexa de dos elementos $z$ y $w$ de $S_X$ verificando que $|x_i^*(z)| = |x_i^*(w)| = 1$. Veamos los detalles:

Podemos suponer, girando si es necesario, que en la desigualdad (2.6) el punto $x \in S_X$ verifica que $x_k^*(x)$ es un número real. Expresamos entonces el número real $\lambda x_k^*(x)$ (nuevamente $\lambda \in \mathbb{R}$ está por determinar) como media de dos complejos de módulo 1, $\mu$ y $\nu$, que tengan parte real igual a $\lambda x_k^*(x)$. Concretamente, escribimos $\lambda x_k^*(x) = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu$ donde

$$\mu = \lambda x_k^*(x) + ia \qquad \text{y} \qquad \nu = \lambda x_k^*(x) - ia,$$

y $a \in [0,1]$ hace que $|\mu| = |\nu| = 1$. Esto nos permite tomar

$$z = \lambda x + aix_k \qquad \text{y} \qquad w = \lambda x - aix_k$$

para tener

$$\lambda x = \frac{z+w}{2} \tag{2.9}$$

con

$$|x_k^*(z)| = |x_k^*(w)| = 1. \tag{2.10}$$

Igual que en caso real, obtenemos que $\|z\| = \|w\| = 1$ sin más que imponer $|x_j^*(z)| \leq 1$ y $|x_j^*(w)| \leq 1$ para todo $j \neq k$. En este caso,

$$|x_j^*(z)| \leq \lambda |x_j^*(x)| + a|x_j^*(x_i)| \leq \lambda + \rho,$$

y análogamente $|x_j^*(w)| \leq \lambda + \rho$. La desigualdad $\lambda + \rho \leq 1$ nos lleva a $\lambda = 1 - \rho$ y, como en el caso real, las fórmulas (2.6), (2.9) y (2.10) nos dan

$$n(X) \geq 1 - \rho.$$

Finalmente, si $X$ verifica la propiedad $(\alpha)$ con constante $\rho$, es evidente que $X^*$ tiene la propiedad $(\beta)$ con la misma constante, luego

$$n(X^*) \geq \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

y en caso complejo $n(X^*) \geq 1 - \rho$, con lo que basta aplicar que $n(X) \geq n(X^*)$ (Proposición 1.2.7). Puesto que no sabemos si, en general, $n(X) = n(X^*)$, no podemos asegurar que lo obtenido para la propiedad $(\alpha)$ sea más fuerte que lo que se afirma en el enunciado. □

Como consecuencia inmediata obtenemos:

**2.1.10. Corolario.** *Si un espacio de Banach $X$ verifica la propiedad $(\alpha)$ con constante 0 o la propiedad $(\beta)$ con constante 0, entonces $n(X) = 1$.*

Puesto que los ejemplos más sencillos de espacios de Banach que verifican las propiedades $(\alpha)$ y $(\beta)$ con constante 0 son, respectivamente, $l_1$ y $c_0$, el corolario anterior generaliza el hecho de que $n(l_1) = n(c_0) = 1$. No obstante, la generalización no llega demasiado lejos y, en realidad, el resultado era conocido:

No es difícil probar (véase [81, Proposition 2.3]) que un espacio de Banach que verifique la propiedad $(\alpha)$ con constante 0 es isométricamente isomorfo a $l_1(\Gamma)$ para conveniente conjunto $\Gamma$, esto es, a la $l_1$ suma de tantas copias del cuerpo escalar como elementos tenga $\Gamma$. Análogamente se describen los espacios $l_\infty(\Gamma)$ y $c_0(\Gamma)$. La situación con respecto a la propiedad $(\beta)$ no es tan restrictiva: un espacio de Banach tiene la propiedad $(\beta)$ con constante 0 si, y sólo si, es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de $l_\infty(\Gamma)$ que contiene a $c_0(\Gamma)$, para conveniente conjunto $\Gamma$. El hecho de que un tal espacio tiene índice numérico 1 aparece en la tesis doctoral de M. Acosta [5, Teorema 5.9].

Volviendo a nuestro estudio sobre el conjunto $\mathcal{N}(X)$, la utilidad de la proposición anterior se debe, como habíamos anunciado, a que las propiedades $(\alpha)$ y $(\beta)$ son muy generales desde el punto de vista isomórfico. J. Partington demostró en 1982 que todo espacio de Banach admite una norma equivalente con la propiedad $(\beta)$ [84]. Analizando cuidadosamente la demostración de Partington, se observa que pueden conseguirse normas equivalentes verificando la propiedad $(\beta)$ con constante arbitrariamente próxima a $1/2$. Más concretamente, dados un espacio de Banach arbitrario $X$ y $\varepsilon > 0$, podemos conseguir $p \in \mathcal{E}(X)$ tal que $(X,p)$ tiene la propiedad $(\beta)$ con constante $\frac{1+\varepsilon}{2}$. Aplicando la Proposición 2.1.9, tenemos $n(X,p) \geq \frac{1-\varepsilon}{3+\varepsilon}$ y, haciendo $\varepsilon \downarrow 0$, deducimos que

$$\sup \mathcal{N}(X) \geq 1/3.$$

En el caso complejo, la última desigualdad no nos dice nada nuevo, pero la Proposición 2.1.9 nos da $n(X,p) \geq \frac{1-\varepsilon}{2}$, con lo que

$$\sup \mathcal{N}(X) \geq 1/2.$$

Puesto que $\mathcal{N}(X)$ es un intervalo cuyo mínimo conocemos, hemos probado:

**2.1.11. Teorema.** *Para cualquier espacio de Banach $X$, de dimensión mayor que 1, se tiene $\mathcal{N}(X) \supseteq [0,1/3[$ en caso real y $\mathcal{N}(X) \supseteq [1/e,1/2[$ en caso complejo.*

La propiedad $(\alpha)$ nos va a dar mejor información, pero perdiendo algo de generalidad. En 1983, W. Schachermayer demuestra que todo espacio de generación débilmente compacta (una amplia clase de espacios de Banach que contiene a los separables y a los reflexivos) admite normas equivalentes con la propiedad $(\alpha)$ y constante arbitrariamente próxima a cero [98]. Por la Proposición 2.1.9, tales normas tendrán índices numéricos arbitrariamente próximos a 1. En 1993, B. Godun y S. Troyanski generalizan el resultado de Schachermayer, obteniendo la misma tesis para espacios de Banach que admitan un sistema biortogonal largo [52]. Dado un espacio de Banach $X$, una familia $\{(x_\lambda, x_\lambda^*)\}_{\lambda\in\Lambda} \subset X \times X^*$ es un *sistema biortogonal largo* si verifica que

$$x_\lambda^*(x_\mu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \mu \\ 0 & \text{si } \lambda \neq \mu, \end{cases}$$

y el cardinal de $\Lambda$ es el máximo posible, es decir, coincide con el carácter de densidad de $X$. Para más información sobre espacios de generación débilmente compacta y otras clases más amplias, sistemas biortogonales, etc. remitimos al lector a [33]. En virtud de todo lo dicho anteriormente, obtenemos:

**2.1.12. Teorema.** *Si un espacio de Banach $X$, de dimensión mayor que 1, admite un sistema biortogonal largo, entonces $\mathcal{N}(X) \supseteq [0,1[$ en caso real y $\mathcal{N}(X) \supseteq [e^{-1},1[$ en caso complejo.*

Como casos particulares más naturales, destacamos:

**2.1.13. Corolario.** *Sea $X$ un espacio de Banach reflexivo o separable de dimensión mayor que 1. Entonces $\mathcal{N}(X) \supseteq [0,1[$ en caso real y $\mathcal{N}(X) \supseteq [e^{-1},1[$ en caso complejo.*

Conviene comentar que se conocen ejemplos de espacios de Banach para los que la Proposición 2.1.9 no da información ya que no admiten ninguna norma equivalente con la propiedad $(\alpha)$, aunque no se ha conseguido, que sepamos, construir ninguno usando solamente los axiomas habituales de la teoría de conjuntos. Curiosamente, el ejemplo de este tipo más conocido es un espacio de funciones continuas sobre un compacto construido por K. Kunen usando la hipótesis del continuo (ver [52, p. 124] y [83]). Dicho espacio tiene índice numérico 1 en su norma natural y el Corolario 2.1.6 nos dice que puede ser renormado con cualquier valor del índice numérico.

Los resultados de esta sección nos invitan a conjeturar que cualquier espacio de Banach puede renormarse equivalentemente para conseguir valores del índice numérico arbitrariamente próximos a 1, quedando el valor 1 como el único que puede tener implicaciones isomórficas. De hecho, como veremos en la siguiente sección, las tiene.

## 2.2 Propiedades isomórficas de los espacios de Banach con índice numérico 1

Un espacio de Banach $X$ tiene índice numérico 1 si, y sólo si, para todo operador $T \in L(X)$, su norma puede calcularse como

$$\|T\| = \sup\{|x^*(Tx)| \ : \ x \in S_X, \ x^* \in S_{X^*}, \ x^*(x) = 1\}.$$

Nos preguntamos en esta sección cuáles son las implicaciones isomórficas que pueden deducirse del hecho de que un espacio de Banach tenga índice numérico 1.

Obviamente, el problema sólo tendrá interés en dimensión infinita. No obstante, volvemos por un momento al caso finito-dimensional para recordar una interesante propiedad de los espacios con índice numérico 1. Si notamos por $\operatorname{ex}(B_X)$ al conjunto de puntos extremos de la bola unidad de un espacio $X$, la Proposición 1.2.12 nos da una caracterización debida a C. McGregor [80] de este tipo de espacios:

*Un espacio de Banach de dimensión finita $X$ verifica que $n(X) = 1$ si, y sólo si, $|x^*(x)| = 1$ para cualesquiera $x \in \operatorname{ex}(B_X)$ y $x^* \in \operatorname{ex}(B_{X^*})$.*

Así, en dimensión finita, la propiedad de tener índice numérico 1 puede expresarse de forma intrínseca al espacio, sin necesidad de usar operadores. Sin embargo, no encontramos en la literatura ninguna caracterización de este tipo que sea válida en general. Incluso, no parece claro cómo debería expresarse la condición de McGregor para espacios de dimensión infinita, ya que el conjunto $\mathrm{ex}(B_X)$ puede ser vacío (por ejemplo en $c_0$). Una forma sencilla de extender dicha condición consiste en reformularla en términos de puntos extremos de $B_{X^*}$ y de $B_{X^{**}}$, con lo que se mantiene, en general, la suficiencia:

**2.2.1. Proposición.** *Sea $X$ un espacio de Banach verificando que $|x^{**}(x^*)| = 1$ para cualesquiera $x^* \in \mathrm{ex}(B_{X^*})$ y $x^{**} \in \mathrm{ex}(B_{X^{**}})$. Entonces $n(X) = 1$.*

*Demostración.* Fijados $T \in L(X)$ y $\varepsilon > 0$, el Teorema de Krein-Milman nos proporciona un $x^* \in \mathrm{ex}(B_{X^*})$ tal que $\|T^*(x^*)\| > \|T\| - \varepsilon$ y, seguidamente, también nos proporciona un $x^{**} \in \mathrm{ex}(B_{X^{**}})$ verificando

$$|x^{**}(T^*x^*)| > \|T\| - \varepsilon.$$

Por hipótesis se tiene que $|x^{**}(x^*)| = 1$ y, salvo un giro, podemos conseguir que $(x^*, x^{**}) \in \Pi(X^*)$, con lo cual $v(T^*) > \|T\| - \varepsilon$. Como $v(T) = v(T^*)$ por la Proposición 1.2.7, basta hacer $\varepsilon \downarrow 0$. $\square$

No sabemos si esta condición suficiente es también necesaria. En cualquier caso, considerando una clase especial de puntos extremos, los puntos dientes, vamos a obtener una condición necesaria, formalmente un poco más débil. Empecemos recordando la definición de punto diente:

Dado un espacio de Banach $X$, decimos que un punto $x_0 \in B_X$ es un *punto diente*, y escribimos $x_0 \in \mathrm{dent}(B_X)$, si pertenece a rebanadas de $B_X$ de diámetro arbitrariamente pequeño. De forma más precisa, $x_0 \in \mathrm{dent}(B_X)$ cuando para cada

$\varepsilon > 0$, existen $x^* \in S_{X^*}$ y $\alpha > 0$, tales que la rebanada

$$S(B_X, x^*, \alpha) = \{x \in B_X \ : \ \operatorname{Re} x^*(x) > 1 - \alpha\}$$

está contenida en la bola cerrada de centro $x_0$ y radio $\varepsilon$. Si $X = Y^*$ es un espacio dual y los funcionales $x^*$ pueden tomarse $w^*$-continuos, decimos que $x_0$ es un *punto $w^*$-diente*, y escribimos $x_0 \in w^*\!-\!\operatorname{dent}(B_{Y^*})$. Usando el Teorema de Hahn-Banach, es fácil ver que $x_0 \in \operatorname{dent}(B_X)$ si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$, se verifica que

$$x_0 \notin \overline{\operatorname{co}}\left(B_X \setminus (x_0 + \varepsilon B_X)\right).$$

Obsérvese también que un punto $x_0 \in B_X$ es extremo cuando

$$x_0 \notin \operatorname{co}\left(B_X \setminus \{x_0\}\right).$$

Con esta observación, es fácil comprobar que todo punto diente es un punto extremo, y el recíproco es cierto en dimensión finita. La bola unidad de $l_\infty$ carece de puntos dientes y, por tanto, de puntos $w^*$-dientes, pero tiene abundantes puntos extremos.

**2.2.2. Lema.** *Sea $X$ un espacio de Banach con índice numérico 1. Entonces:*

(*i*) $|x^*(x)| = 1$ *para cualesquiera* $x^* \in \operatorname{ex}(B_{X^*})$ *y* $x \in \operatorname{dent}(B_X)$.

(*ii*) $|x^{**}(x^*)| = 1$ *para cualesquiera* $x^{**} \in \operatorname{ex}(B_{X^{**}})$ *y* $x^* \in w^*\!-\!\operatorname{dent}(B_{X^*})$.

*Demostración.* Comencemos probando una propiedad de los puntos extremos de la bola unidad de un espacio dual, que guarda cierto parecido con la condición de punto $w^*$-diente. Esta propiedad puede encontrarse en [70] en un ambiente un poco más general, pero incluimos su demostración por complitud. Si $x_0^*$ es un punto extremo de $B_{X^*}$, para cada $\varepsilon > 0$ y cada $x \in S_X$ podemos encontrar una rebanada $S(B_{X^*}, y, \alpha)$ con $y \in S_X$, $\alpha > 0$, tal que

$$S(B_{X^*}, y, \alpha) \subseteq \{x^* \in B_{X^*} \ : \ |(x^* - x_0^*)(x)| < \varepsilon\}. \tag{2.11}$$

La demostración es bien sencilla. Consideremos el conjunto $w^*$-cerrado

$$F = \{x^* \in B_{X^*} : |(x^* - x_0^*)(x)| \geq \varepsilon\},$$

y llamemos $K$ a la envolvente convexa y $w^*$-cerrada de $F$. Entonces $x_0^* \notin K$, puesto que de otra manera $x_0^*$ sería un punto extremo de $K$ y en virtud del Teorema de Krein-Milman "revertido" (ver [27, Theorem 7.8]) tendríamos $x_0^* \in F$, lo que es imposible. De esta forma el Teorema de Hahn-Banach nos permite encontrar $y \in S_X$ y $\alpha > 0$ tales que

$$\operatorname{Re} x_0^*(y) > 1 - \alpha \geq \operatorname{Re} x^*(y)$$

para todo $x^* \in K$ y, en particular, para $x^* \in F$, es decir, tenemos (2.11).

Estamos ya en condiciones de demostrar el lema. Para la primera parte, fijemos un punto diente $x_0 \in B_X$ y un punto extremo $x_0^* \in B_{X^*}$. Gracias al comentario anterior, podemos encontrar $y \in S_X$ y $\alpha > 0$ tales que

$$x^* \in B_{X^*},\ \operatorname{Re} x^*(y) > 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad |(x^* - x_0^*)(x_0)| < \varepsilon. \tag{2.12}$$

Aplicando la definición de punto diente a $x_0$, encontramos $y^* \in S_{X^*}$ y $\beta > 0$ tales que

$$x \in B_X,\ \operatorname{Re} y^*(x) > 1 - \beta \quad \Rightarrow \quad \|x - x_0\| < \varepsilon. \tag{2.13}$$

Considérese ahora el operador de rango uno $T \in L(X)$ definido por

$$Tx = y^*(x)y \qquad (x \in X).$$

Como $n(X) = 1$, tenemos $v(T) = \|T\| = 1$, y la definición de radio numérico nos permite, tomando $\delta = \min\{\alpha, \beta\}$, encontrar una pareja $(x, x^*) \in \Pi(X)$ tal que

$$|x^*(Tx)| = |y^*(x)|\,|x^*(y)| > 1 - \delta.$$

Eligiendo convenientemente dos escalares de módulo 1, $s$ y $t$, se tiene

$$\begin{cases} \operatorname{Re} y^*(sx) = |y^*(x)| > 1 - \delta \geq 1 - \alpha \\ \operatorname{Re} tx^*(y) = |x^*(y)| > 1 - \delta \geq 1 - \beta. \end{cases}$$

Se sigue de (2.12) y (2.13) que

$$|tx^*(x_0) - x_0^*(x_0)| < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \|sx - x_0\| < \varepsilon,$$

luego

$$\begin{aligned} 1 - |x_0^*(x_0)| &\leq |tx^*(sx) - x_0^*(x_0)| \\ &\leq |tx^*(sx) - tx^*(x_0)| + |tx^*(x_0) - x_0^*(x_0)| \\ &< 2\varepsilon, \end{aligned}$$

y hacemos $\varepsilon \downarrow 0$.

La segunda parte del lema se demuestra de igual forma. Por ser $x_0^{**}$ un punto extremo de $B_{X^{**}}$, dado $\varepsilon > 0$ existen $y^* \in S_{X^*}$ y $\alpha > 0$ tales que

$$x^{**} \in B_{X^{**}},\ \operatorname{Re} x^{**}(y^*) > 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad |(x^{**} - x_0^{**})(x_0^*)| < \varepsilon. \tag{2.12'}$$

Como $x_0^*$ es un punto $w^*$-diente de $B_{X^*}$, encontramos un funcional $w^*$-continuo $y \in S_X$, y un número positivo $\beta > 0$, tales que

$$x^* \in B_{X^*},\ \operatorname{Re} x^*(y) > 1 - \beta \quad \Rightarrow \quad \|x^* - x_0^*\| < \varepsilon. \tag{2.13'}$$

El resto de la demostración es idéntica a la del apartado $(i)$, usando (2.12') y (2.13') en lugar de (2.12) y (2.13). □

Claramente, el lema anterior sólo tendrá utilidad cuando el espacio (o su dual) tenga "suficientes" puntos dientes (o $w^*$-dientes), en cuyo caso se pueden obtener aplicaciones importantes. Para ello, usaremos un resultado, de interés en sí mismo, que es consecuencia de dos teoremas "clásicos": el Teorema $l_1$ de Rosenthal [95] y el Teorema de Fonf sobre contención de $c_0$ [46]. En lo que sigue, cuando digamos que un espacio de Banach $X$ *contiene* a $c_0$ (o a $l_1$), deberá entenderse que $c_0$ (o $l_1$) es isomorfo a un subespacio de $X$, y a veces escribiremos simplemente $X \supset c_0$ (o $X \supset l_1$).

**2.2.3. Proposición.** *Sea $X$ un espacio de Banach real y supongamos que existe un conjunto infinito $A \subset S_X$ tal que $|x^*(a)| = 1$ para cualesquiera $a \in A$ y $x^* \in \mathrm{ex}(B_{X^*})$. Entonces $X$ contiene a $c_0$ o a $l_1$.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ no contiene a $l_1$ y apliquemos el Teorema-$l_1$ de Rosenthal [95], obteniendo que cualquier sucesión acotada en $X$ admite una sucesión parcial que es de Cauchy en la topología débil ($w$-Cauchy). Siendo el conjunto $A$ infinito y acotado, podremos pues conseguir una sucesión $\{a_n\}$ de elementos distintos de $A$ que sea $w$-Cauchy. Como el conjunto $\mathrm{ex}(B_{X^*})$ separa los puntos de $X$, para $n \neq m$ deberá existir $x^* \in \mathrm{ex}(B_{X^*})$ tal que $x^*(a_n) \neq x^*(a_m)$, pero $|x^*(a_n)| = |x^*(a_m)| = 1$ y el cuerpo base es $\mathbb{R}$, luego

$$\|a_n - a_m\| \geq |x^*(a_n) - x^*(a_m)| = 2;$$

esto implica claramente que el subespacio cerrado generado por la sucesión $\{a_n\}$, llámese $Y$, tiene dimensión infinita. Concluiremos la demostración viendo que $Y$ contiene a $c_0$, para lo cual bastará probar que el conjunto $\mathrm{ex}(B_{Y^*})$ es numerable y aplicar un Teorema debido a V. Fonf [46].

En efecto, es un hecho bien conocido, consecuencia de los teoremas de Hahn-Banach y Krein-Milman, que cada punto extremo $y^* \in \mathrm{ex}(B_{Y^*})$ es la restricción a $Y$ de algún punto extremo de $B_{X^*}$. Por tanto, de nuestra hipótesis obtenemos que $|y^*(a_n)| = 1$ para todo $n$. Ahora bien, dado que $\{a_n\}$ es $w$-Cauchy en $X$, y por tanto en $Y$, la sucesión convergente $\{y^*(a_n)\}$ deberá ser constantemente igual a $1$ o $-1$ a partir de un término en adelante. Ello nos permite expresar el conjunto $\mathrm{ex}(B_{Y^*})$ en la forma

$$\mathrm{ex}(B_{Y^*}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \cup -E_k),$$

donde $E_k = \{y^* \in \mathrm{ex}(B_{Y^*}) \ : \ y^*(a_n) = 1 \ \text{ para } n > k\}$. Puesto que la sucesión $\{a_n\}$ separa los puntos de $Y^*$ y dos elementos de $E_k$ sólo pueden diferir en un conjunto finito de términos de dicha sucesión, sobre los que sólo pueden tomar los valores 1 y $-1$, deducimos que el conjunto $E_k$ tiene, a lo sumo, $2^k$ elementos, luego ex$(B_{Y^*})$ es numerable. □

**2.2.4. Nota.** La demostración anterior es "esencialmente real" y no parece fácil trasladarla al caso complejo. El problema no es tanto la validez de los Teoremas de Fonf y Rosenthal en caso complejo, para los que existen extensiones válidas, sino cómo aprovechar el hecho de tener una sucesión de Cauchy con módulo constante. Merece la pena exponer otra demostración de esta proposición que, si bien tampoco es aplicable en caso complejo, parece involucrar un poco menos al cuerpo de los números reales. Veámosla:

Comenzamos suponiendo que $X$ no contiene a $l_1$ y, al igual que en la demostración anterior, conseguimos una sucesión $\{a_n\}$ formada por puntos distintos de $A$ que es $w$-Cauchy y, por tanto, verifica $\|a_n - a_m\| = 2$, con lo que la serie $\sum(a_{n+1} - a_n)$ no converge en norma. Un resultado clásico de C. Bessaga y A. Pelczynski [16] nos da la contención de $c_0$ sin más que probar que $\sum|x^*(a_{n+1} - a_n)| < \infty$ para todo $x^* \in X^*$. Más aún, una variante de este teorema debida a J. Elton [37, Theorem 1] nos permite limitarnos al caso en que $x^* \in$ ex$(B_{X^*})$. En tal caso, lo que se quiere es evidente, ya que la sucesión $\{x^*(a_{n+1} - a_n)\}$ se anula a partir de un término en adelante. □

La condición isomórfica más natural que asegura la abundancia de puntos dientes en la bola unidad de un espacio de Banach es la propiedad de Radon-Nikodým. Como es bien sabido, esta propiedad tiene su origen en la teoría de medidas vectoriales y, esencialmente, el que un espacio la posea significa que el Teorema de Radon-Nikodým es válido para medidas vectoriales con valores en él. Omitimos una definición rigurosa en estos términos, dado que aquí sólo usaremos una caracterización intrínseca, de naturaleza geométrica, resultado de trabajos de W. Davis, H. Maynard, R. Phelps y M. Rieffel. Así pues, diremos que un espacio de Banach

$X$ tiene la *propiedad de Radon-Nikodým* (*RNP* para abreviar) si la bola unidad de $X$, para cualquier norma equivalente, es la envolvente convexo-cerrada de sus puntos dientes (ver [34, Corollary VII.3.4 and Theorem VII.4.2]). En particular, la bola unidad de cualquier espacio de Banach de dimensión infinita con la RNP, tiene infinitos puntos dientes.

El ambiente isomórfico más natural para asegurar la abundancia de puntos $w^*$-dientes está en los espacios de Asplund. Tomamos la definición original del propio E. Asplund [12], aunque obviamente él les daba otro nombre. Decimos que un espacio de Banach $X$ es un *espacio de Asplund* si toda función real, convexa y continua, definida en un subconjunto abierto y convexo del espacio, es Fréchet diferenciable en un subconjunto denso de su dominio. Como consecuencia, la norma de $X$ será Fréchet diferenciable en un subconjunto denso de $S_X$, y su derivada en un punto de $S_X$, cuando existe, es un punto $w^*$-diente (de hecho más que eso) de $B_{X^*}$. Ello obliga a que el conjunto $w^*\!-\!\text{dent}(B_{X^*})$ genere $B_{X^*}$ por envolvente convexa y $w^*$-cerrada, lo que claramente implica que dicho conjunto es infinito, siempre que estemos en dimensión infinita. Usaremos también dos importantes caracterizaciones de los espacios de Asplund, conseguidas por C. Stegall [101] culminando el trabajo previo de varios autores: un espacio de Banach $X$ es un espacio de Asplund si, y sólo si, $X^*$ tiene la RNP, lo que a su vez equivale a que todo subespacio separable de $X$ tenga dual separable.

Más información sobre la RNP y los espacios de Asplund puede encontrarse en las monografías de R. Bourgin [23], R. Deville, G. Godefroy y V. Zizler [33], J. Diestel y J. Uhl [34], R. Phelps [88] y el artículo expositivo de D. Yost [110].

Presentamos ya el resultado principal de esta sección:

**2.2.5. Teorema.** *Sea $X$ un espacio de Banach real, de dimensión infinita, tal que $n(X) = 1$. Si $X$ tiene la RNP, entonces $X$ contiene a $l_1$. Si $X$ es un espacio de Asplund, entonces $X^*$ contiene a $l_1$.*

*Demostración.* Si $X$ tiene la RNP, el conjunto $\mathrm{dent}(B_X)$ es infinito, con lo que el Lema 2.2.2 y la Proposición 2.2.3 nos dicen que $X \supset c_0$ o $X \supset l_1$, pero es bien sabido que un espacio con la RNP no puede contener a $c_0$.

Si $X$ es un espacio de Asplund, el conjunto $w^*\text{-}\mathrm{dent}(B_{X^*})$ es infinito y, como antes, $X^* \supset c_0$ o $X^* \supset l_1$, pero ahora es $X^*$ quien tiene la RNP. □

No sabemos si la segunda parte del teorema anterior se puede deducir directamente de la primera. Cierto que $X^*$ tiene la RNP siempre que $X$ sea un espacio de Asplund, pero no sabemos si la condición $n(X) = 1$ implica $n(X^*) = 1$, como ya se comentó en la sección 1.2.

Dado que un espacio de Asplund no puede contener a $l_1$ (un espacio separable cuyo dual no lo es), deducimos:

**2.2.6. Corolario.** *Sea $X$ un espacio de Asplund real con la RNP. Si $n(X) = 1$, entonces $X$ tiene dimensión finita.*

Como caso especial de este corolario podemos deducir que los espacios reflexivos o casi-reflexivos reales, con índice numérico 1, tienen dimensión finita. Más aún, si un espacio de Banach $X$ verifica que $X^{**}/X$ es separable, entonces $X$ es un espacio de Asplund y tiene la RNP (ver [34, pp. 217]). Obtenemos así el siguiente resultado, que nos dice cuán lejos de ser reflexivo está un espacio de Banach real, de dimensión infinita, con índice numérico 1.

**2.2.7. Corolario.** *Si $X$ es un espacio de Banach real, de dimensión infinita, con $n(X) = 1$, entonces $X^{**}/X$ no es separable.*

**2.2.8. Nota.** Como caso particular de este corolario obtenemos que si $X$ es un espacio de Banach real, de dimensión infinita, con la propiedad de intersección 3.2, entonces $X^{**}/X$ no es separable. El hecho de que un tal espacio no puede ser reflexivo fue demostrado por J. Lindenstrauss y R. Phelps en 1968 [73, Corollary 2.4].

Queda de manifiesto, en vista de los resultados anteriores, la existencia de espacios de Banach que no admiten una norma equivalente con índice numérico 1. Como caso más interesante, uniendo el corolario anterior con el Teorema 2.1.12, obtenemos una amplia gama de espacios que pueden renormarse equivalentemente con cualquier valor del índice numérico excepto, precisamente, el valor 1:

**2.2.9. Corolario.** *Sea $X$ un espacio de Banach real, de dimensión infinita, tal que $X^{**}/X$ es separable. Entonces $\mathcal{N}(X) = [0,1[$.*

*Demostración.* Si $X^{**}/X$ es separable, un resultado de M. Valdivia [104] asegura que $X$ puede escribirse como suma topológico-directa de un espacio reflexivo y otro separable. Como consecuencia, $X$ admite un sistema biortogonal largo, con lo que el Teorema 2.1.12 nos dice que $\mathcal{N}(X) \supseteq [0,1[$. Por otra parte, el Corolario 2.2.7 nos asegura que $1 \notin \mathcal{N}(X)$. □

Para concluir esta sección, conviene comentar que en la demostración del Lema 2.2.2 sólo se usan operadores de rango uno y que, en los resultados posteriores, la hipótesis de que el espacio tenga índice numérico 1 sólo se utiliza para poder aplicar dicho lema. Por tanto, el lema y todas las consecuencias que hemos deducido de él mantienen su validez con sólo suponer que $v(T) = \|T\|$ para todo operador $T$ de rango uno. No obstante, esta observación no mejora sustancialmente nuestros resultados, ya que, en el ambiente en que hemos trabajado, dicha suposición obliga ya al espacio a tener índice numérico 1. En concreto, podemos demostrar:

**2.2.10. Proposición.** *Sea $X$ un espacio de Banach real o complejo verificando que $v(T) = \|T\|$ para todo operador $T \in L(X)$ de rango uno. Entonces, si $X$ es un espacio* *de Asplund o $X$ verifica la RNP, se tiene que $n(X) = 1$.*

*Demostración.* Ya se ha comentado que, si $X$ es un espacio de Asplund, entonces $B_{X^*}$ es la envolvente convexa y $w^*$-cerrada de sus puntos $w^*$-dientes. Por tanto, para cada operador $T \in L(X)$ y cada $\varepsilon > 0$, existe $x^* \in w^*\!-\!\mathrm{dent}\,(B_{X^*})$ tal que

$$\|T^*x^*\| > \|T\| - \varepsilon.$$

Tomemos ahora $x^{**} \in \mathrm{ex}\,(B_{X^{**}})$ de forma que $|x^{**}(T^*x^*)| = \|T^*x^*\| > \|T\| - \varepsilon$. Con la observación hecha en el párrafo anterior, el Lema 2.2.2 nos asegura que $|x^{**}(x^*)| = 1$ y, salvo un giro, obtenemos que $v(T^*) \geq \|T\| - \varepsilon$. Basta ahora hacer $\varepsilon \downarrow 0$ y recordar que $v(T) = v(T^*)$.

Si $X$ verifica la RNP, la envolvente convexa de $\mathrm{dent}\,(B_X)$ es densa en $B_X$ y, por el Teorema de Goldstine, $w^*$-densa en $B_{X^{**}}$. Por el Teorema de Krein-Milman "revertido" tenemos que $\mathrm{ex}\,(B_{X^{**}}) \subseteq \overline{\mathrm{dent}\,(B_X)}^{w^*}$. Por tanto, usando el Lema 2.2.2, concluimos que $|x^{**}(x^*)| = 1$ para cualesquiera $x^* \in \mathrm{ex}\,(B_{X^*})$ y $x^{**} \in \mathrm{ex}\,(B_{X^{**}})$, con lo que basta aplicar la Proposición 2.2.1. □

## 2.3 Problemas abiertos

Vamos a comentar brevemente las cuestiones que quedan sin respuesta en nuestro estudio del índice numérico desde el punto de vista isomórfico. En este capítulo han aparecido también algunas preguntas de naturaleza isométrica que tendremos ocasión de comentar con detenimiento más adelante.

En primer lugar, no parece muy arriesgado conjeturar que el valor 1 del índice numérico sea el único que tenga implicaciones isomórficas. Más concretamente:

**2.3.1. Problema.** *¿Es cierto que todo espacio de Banach admite normas equivalentes con índice numérico arbitrariamente próximo a 1?*

Equivalentemente, nos estamos preguntando si la hipótesis de existencia de un sistema biortogonal largo puede suprimirse en el Teorema 2.1.12. Recuérdese que dicha hipótesis nos proporciona normas equivalentes verificando la propiedad ($\alpha$) con constante arbitrariamente pequeña. No es fácil encontrar ejemplos de espacios de Banach que no posean sistemas biortogonales largos, e incluso, como ya se comentó, el ejemplo más conocido es un espacio de funciones continuas, que tiene índice numérico 1 en su norma natural. Por otra parte, lo mejor que hemos conseguido para espacios de Banach arbitrarios es el Teorema 2.1.11. Recordando cómo se obtuvo dicho teorema, es lógico pensar que una respuesta afirmativa al Problema 2.3.1 pueda conseguirse mejorando el resultado de J. Partington [84]; más concretamente, demostrando que todo espacio de Banach admite normas equivalentes que verifican la propiedad ($\beta$) con constante arbitrariamente pequeña, pero esta conjetura es aún más ambiciosa.

Una respuesta afirmativa al problema anterior reduciría el estudio isomórfico del índice numérico a conseguir una caracterización de los espacios de Banach que admiten una norma equivalente con índice numérico 1, caracterización que, en cualquier caso, sería deseable. Hemos de reconocer que estamos muy lejos de ese objetivo. Por una parte, no tenemos condiciones suficientes que permitan renormar con índice numérico 1, que no sean triviales (dimensión finita) o, en cierto modo, tautológicas (espacios concretos que tienen índice numérico 1 en su norma natural). Por otra parte, sólo tenemos condiciones necesarias en caso real. Nuestro desconocimiento de la situación en caso complejo se puede poner de manifiesto formulando la siguiente pregunta:

**2.3.2. Problema.** *¿Existe algún espacio de Banach complejo que no admita una norma equivalente con índice numérico 1?*

En caso real, las condiciones necesarias que hemos conseguido sólo son válidas dentro de ciertas clases de espacios de Banach (como los espacios de Asplund o los que verifican la RNP). Sería deseable conseguir alguna otra condición necesaria que sea aplicable en general, como podría ser la siguiente:

**2.3.3. Problema.** *Sea $X$ un espacio de Banach real, de dimensión infinita, con $n(X) = 1$. ¿Se puede asegurar que $X$ contiene a $c_0$ o a $l_1$?*

Esta pregunta, que nos fue sugerida hace tiempo por el Profesor G. Godefroy, ha sido en gran medida el incentivo de la investigación que ha dado lugar a esta memoria. En vista del Lema 2.2.2 y de la Proposición 2.2.3, tenemos respuesta afirmativa siempre que el conjunto $\mathrm{dent}(B_X)$ sea infinito, pero este resultado parcial no parece ir en la dirección correcta, ya que excluye al propio $c_0$. Por ahora, no hemos conseguido, en realidad, ningún resultado satisfactorio sobre contención de $c_0$. En el ambiente de los espacios de Asplund, que puede parecer el más propicio, sólo conseguimos una copia de $l_1$ en el dual, que es necesaria, pero no suficiente, para tener una copia de $c_0$ en el espacio. Nótese, por otra parte, que $X^*$ contiene a $l_1$ siempre que $X$ lo contenga. Así pues, podemos plantear una pregunta un poco menos ambiciosa que la anterior:

**2.3.4. Problema.** *¿Debe contener a $l_1$ el dual de todo espacio de Banach real, de dimensión infinita, con índice numérico 1?*

Obtendríamos una respuesta afirmativa a esta pregunta si fuésemos capaces de demostrar el recíproco de la Proposición 2.2.1, esto es, que $|x^{**}(x^*)| = 1$ para cualesquiera $x^* \in \mathrm{ex}(B_{X^*})$ y $x^{**} \in \mathrm{ex}(B_{X^{**}})$, siempre que $n(X) = 1$. En efecto, como el conjunto $\mathrm{ex}(B_{X^*})$ es infinito ($X$ tiene dimensión infinita), la Proposición 2.2.3 nos diría (en caso real) que $X^*$ contiene a $c_0$ o $l_1$, y en el primer caso bastaría recordar que un espacio de Banach dual contiene a $l_\infty$ (luego a $l_1$) en cuanto contenga a $c_0$.

Capítulo 3

# Otras propiedades isométricas relacionadas con el índice numérico

Consideramos en este último capítulo algunas propiedades de los espacios de Banach que tienen un marcado carácter isométrico y guardan cierta relación con el índice numérico. En primer lugar profundizaremos en el estudio de la conexión existente entre los CL-espacios y los espacios con índice numérico 1, que ya comenzamos en la sección 1.2. La segunda sección trata sobre la llamada propiedad de Daugavet, que, en cierto sentido, está relacionada con el índice numérico. Introducimos en la siguiente sección el índice numérico compacto, y estudiamos sus similitudes y diferencias con el índice numérico. Aparecerá de forma natural una clase de espacios de Banach que engloba, por una parte, a los que tienen índice numérico 1 y, por otra, a los que verifican la propiedad de Daugavet. Concluimos la memoria con algunas caracterizaciones interesantes de los espacios de Banach con índice numérico 1.

## 3.1 CL-espacios y casi-CL-espacios

En la sección 1.2 aparecieron ya los CL-espacios como ejemplos de espacios de Banach con índice numérico 1. Pretendemos en esta sección hacer un estudio más detallado de este tipo de espacios, así como de una clase un poco más general, los llamados casi-CL-espacios, que tendrán más interés en caso complejo.

**3.1.1. Definición.** Un espacio de Banach $X$, real o complejo, es un *casi-CL-espacio* cuando, para todo subconjunto convexo maximal $F$ de $S_X$, se verifica que $B_X$ es la envolvente absolutamente convexa y cerrada de $F$.

Conviene precisar algunas cuestiones relacionadas con la definición anterior. Fijemos un espacio de Banach $X$ y un conjunto convexo $F \subseteq S_X$; usando el Teorema de Hahn-Banach, podemos separar $F$ de la bola unidad abierta, esto es, existe un funcional $f \in S_{X^*}$ tal que

$$F \subseteq \{x \in B_X \ : \ f(x) = 1\}.$$

El conjunto de funcionales $f$ que hacen cierta la inclusión anterior es un subconjunto $w^*$-cerrado de $B_{X^*}$, luego el Teorema de Krein-Milman nos asegura que contiene un punto extremo, que obligatoriamente será también punto extremo de $B_{X^*}$. Por otra parte, cuando $F$ sea maximal, la inclusión anterior será una igualdad. Por comodidad de notación damos nombre a los funcionales que han aparecido en la discusión anterior: diremos que $x^* \in \operatorname{ex}(B_{X^*})$ es un *punto extremo maximal*, y escribiremos $x^* \in \operatorname{exm}(B_{X^*})$, si $\{x \in S_X \ : \ x^*(x) = 1\}$ es un subconjunto convexo maximal (y en particular no vacío) de $S_X$. Nótese que $\operatorname{exm}(B_{X^*})$ es una *frontera* para $X$, es decir, para cada $x \in X$ existe $x^* \in \operatorname{exm}(B_{X^*})$ tal que $x^*(x) = \|x\|$. En particular, se verifica que

$$B_{X^*} = \overline{\operatorname{co}}^{w^*}(\operatorname{exm}(B_{X^*}))$$

y, si $X$ tiene dimensión infinita, entonces $\operatorname{exm}(B_{X^*})$ es un conjunto infinito. Con la notación recién introducida, un espacio de Banach $X$ es un CL-espacio (resp. un casi-CL-espacio) si, y sólo si, para cada $x^* \in \operatorname{exm}(B_{X^*})$, la bola cerrada unidad de $X$ se obtiene como envolvente convexa (resp. convexa y cerrada) del conjunto $\{x \in S_X : |x^*(x)| = 1\}$.

Como ya comentamos en la sección 1.2, el concepto de CL-espacio real fue introducido por R. Fullerton en 1960 [48], mientras que los casi-CL-espacios reales aparecen por vez primera en un trabajo de Å. Lima [67] publicado en 1978. No obstante, la primera referencia a la condición que define a un casi-CL-espacio aparece ya en 1964, en un trabajo de J. Lindenstrauss [71]. También comentamos que los espacios reales que verifican la 3.2.I.P. son CL-espacios [66, Corollary 3.6] y que el recíproco no es cierto [58, Remark 3.5]. En particular, los espacios reales $L_1(\mu)$ y sus preduales isométricos son CL-espacios. Más información sobre CL-espacios, casi-CL-espacios y 3.2.I.P., siempre en caso real, puede encontrarse en las referencias [5, 10, 48, 58, 59, 66, 67, 68, 71, 93].

No conocemos ningún ejemplo de casi-CL-espacio real que no sea CL-espacio, por lo que incluso ambas propiedades podrían ser equivalentes. Para espacios de Banach complejos la situación es bien distinta, como muestra el siguiente resultado.

**3.1.2. Proposición.**

$(i)$ *Para cualquier compacto $K$, el espacio complejo $C(K)$ es un CL-espacio.*

$(ii)$ *Para cualquier medida positiva y finita $\mu$, el espacio complejo $L_1(\mu)$ es un casi-CL-espacio.*

$(iii)$ *Los espacios complejos $l_1$ y $L_1[0,1]$ no son CL-espacios.*

Para demostrar el primer apartado de la proposición, necesitamos un lema previo sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. Usaremos, por comodidad, la notación $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$.

**3.1.3. Lema.** *Para cada $z_0 \in \mathbb{D}$, podemos escribir $z = \dfrac{\varphi(z)+\psi(z)}{2}$ para todo $z \in \mathbb{D}$, donde $\varphi, \psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ son funciones continuas verificando que* $|\varphi(z_0)| = |\psi(z_0)| = 1$.

*Demostración.* Si $\operatorname{Re} z_0 = 0$, tomamos

$$\varphi_0(z) = 2(\operatorname{Re} z)^+ - \sqrt{1-(\operatorname{Im} z)^2} + i\operatorname{Im} z \quad (z \in \mathbb{D}),$$

$\psi_0 = 2Id - \varphi_0$ y se comprueba rutinariamente que $\varphi_0$ y $\psi_0$ cumplen las condiciones requeridas. Para $z_0 \in \mathbb{D}$ arbitrario, escribimos $z_0 = i|z_0|e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$, y basta considerar

$$\varphi(z) = e^{i\theta}\varphi_0(e^{-i\theta}z), \quad \psi(z) = e^{i\theta}\psi_0(e^{-i\theta}z) \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

□

*Demostración de la Proposición 3.1.2.* ($i$). Recordemos que todo punto extremo $x^*$ de $B_{C(K)^*}$ coincide, salvo un giro, con el funcional de evaluación en un punto de $K$. Bastará pues probar que, fijado $t_0 \in K$, cada función $f \in B_{C(K)}$ puede expresarse en la forma $f = \dfrac{f_1+f_2}{2}$ con

$$\|f_1\| = \|f_2\| = |f_1(t_0)| = |f_2(t_0)| = 1.$$

Para ello basta tomar $f_1 = \varphi \circ f$, $f_2 = \psi \circ f$ donde $\varphi, \psi$ son las funciones que nos proporciona el lema anterior para $z_0 = f(t_0)$.

($ii$). En la identificación $L_1(\mu)^* \equiv L_\infty(\mu)$, los puntos extremos de la bola unidad de $L_1(\mu)^*$ se convierten en funciones de módulo 1 c.p.d. Por tanto, salvo un isomorfismo isométrico de $L_1(\mu)$, basta trabajar con la función igual a 1 c.p.d., esto es, basta probar que

$$B_{L_1(\mu)} = \overline{\text{co}}\left(\mathbb{T}\{f \in L_1(\mu) \ : \ \|f\| = 1,\ f \geq 0 \ \text{ c.p.d.}\}\right),$$

lo cual es inmediato, ya que el segundo miembro de la igualdad anterior contiene claramente a todas las funciones simples que pertenezcan a $B_{L_1(\mu)}$.

$(iii)$. Hacemos la demostración para $L_1[0,1]$; el caso de $l_1$ se puede tratar de manera similar. De todas formas, en el apartado $(iii)$ de la Proposición 3.1.10 veremos un resultado más general.

Empezamos precisando una idea que estaba ya implícita en la demostración del apartado anterior. Sea $X$ un espacio de Banach con la propiedad siguiente: para cualesquiera $x^*, y^* \in \mathrm{ex}(B_{X^*})$, existe un isomorfismo isométrico $\Phi$ de $X$ sobre sí mismo tal que $\Phi^*(x^*) = y^*$. Es claro entonces que $x^*$ es maximal si, y sólo si, lo es $y^*$; puesto que $\mathrm{exm}(B_{X^*})$ nunca es vacío, se sigue que $\mathrm{exm}(B_{X^*}) = \mathrm{ex}(B_{X^*})$. Esto le ocurre, en particular, al espacio $X = L_1[0,1]$, luego el conjunto

$$F = \{f \in L_1[0,1] \ : \ \|f\| = 1, \ f \geq 0 \ \text{c.p.d.}\}$$

es un subconjunto convexo maximal de $S_{L_1[0,1]}$. Para probar que $L_1[0,1]$ no es un CL-espacio, bastará pues encontrar una función $f \in B_{L_1[0,1]}$ que no pueda obtenerse como combinación absolutamente convexa de elementos de $F$.

En efecto, consideremos la función $f \in S_{L_1[0,1]}$ dada por

$$f(t) = e^{2\pi i t} \qquad (t \in [0,1])$$

y, razonando por reducción al absurdo, supongamos que $f$ puede escribirse en la forma

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \lambda_j f_j,$$

donde $a_j \in [0,1]$, $\lambda_j \in \mathbb{T}$, $f_j \in F$, para $j = 1,2,\ldots,n$, y $\sum_{j=1}^{n} a_j = 1$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i t}\, dt = \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^1 \lambda_j e^{-2\pi i t} f_j(t)\, dt \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^1 |f_j(t)|\, dt = \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^1 f_j(t)\, dt = \sum_{j=1}^{n} a_j = 1, \end{aligned}$$

con lo que eligiendo $j$ de forma que sea $a_j > 0$, obtenemos

$$\lambda_j e^{-2\pi i t} f_j(t) = f_j(t)$$

para casi todo $t \in [0,1]$, lo que lleva a que $f_j$ sea nula c.p.d., una flagrante contradicción. □

En su tesis doctoral [5], M. Acosta probó que los CL-espacios reales tienen índice numérico 1. Vamos a generalizar este resultado, consiguiendo la misma tesis para casi-CL-espacios reales o complejos. Ello será consecuencia del siguiente lema, que guarda cierto paralelismo con el Lema 2.2.2 y nos permitirá también deducir algunas propiedades isomórficas de los casi-CL-espacios reales.

**3.1.4. Lema.** *Sea $X$ un casi-CL-espacio. Entonces $|x^{**}(x^*)| = 1$ para cualesquiera $x^{**} \in \mathrm{ex}\,(B_{X^{**}})$ y $x^* \in \mathrm{exm}\,(B_{X^*})$.*

*Demostración.* Fijado $x^* \in \mathrm{exm}\,(B_{X^*})$, la bola cerrada unidad de $X$ es la envolvente convexa y cerrada del conjunto $\{x \in B_X \, : \, |x^*(x)| = 1\}$ y, usando el Teorema de Goldstine, se tendrá que

$$B_{X^{**}} = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}\left(\{x \in B_X \, : \, |x^*(x)| = 1\}\right).$$

El Teorema de Krein-Milman "revertido" nos dice que, entonces,

$$\mathrm{ex}\,(B_{X^{**}}) \subseteq \overline{\{x \in B_X \, : \, |x^*(x)| = 1\}}^{w^*},$$

de donde se deduce claramente que $|x^{**}(x^*)| = 1$ para todo $x^{**} \in \mathrm{ex}\,(B_{X^{**}})$. □

**3.1.5. Proposición.** *Si $X$ es un casi-CL-espacio, entonces $n(X) = 1$.*

*Demostración.* Como ya comentamos, el conjunto $\mathrm{exm}\,(B_{X^*})$ es una frontera para $X$ y, en particular, $B_{X^*} = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(\mathrm{exm}\,(B_{X^*}))$. Ello nos permite, fijados $T \in L(X)$ y

$\varepsilon > 0$, encontrar $x^* \in \text{exm}(B_{X^*})$ tal que $\|T^*x^*\| > \|T^*\| - \varepsilon$. Si ahora tomamos $x^{**} \in \text{ex}(B_{X^{**}})$ tal que

$$|x^{**}(T^*x^*)| = \|T^*x^*\| > \|T^*\| - \varepsilon,$$

el lema anterior nos da $|x^{**}(x^*)| = 1$ y deducimos que $v(T^*) = \|T^*\|$. □

Como anunciábamos, el Lema 3.1.4 nos va a permitir obtener propiedades isomórficas de los casi-CL-espacios reales, mejorando los resultados obtenidos para espacios con índice numérico 1 en la sección 2.2.

**3.1.6. Teorema.** *Si $X$ es un casi-CL-espacio real, de dimensión infinita, entonces $X^* \supset l_1$. Si además $X^*$ es separable, entonces $X \supset c_0$.*

*Demostración.* El conjunto $\text{exm}(B_{X^*})$ es infinito, por ser una frontera para $X$, y el Lema 3.1.4 nos permite aplicar la Proposición 2.2.3 para obtener que $X^* \supset l_1$ o $X^* \supset c_0$. En el segundo caso, usamos que un espacio dual contiene a $l_\infty$ (luego a $l_1$) en cuanto contenga a $c_0$ (véase [74, Proposition 2.e.8], por ejemplo).

Usando que $\text{ex}(B_{X^{**}})$ separa los puntos de $X^*$, el Lema 3.1.4 implica que

$$\|x^* - y^*\| = 2 \qquad (x^*, y^* \in \text{exm}(B_{X^*}),\ x^* \neq y^*).$$

Por tanto, si $X^*$ es separable, el conjunto $\text{exm}(B_{X^*})$ será numerable. Basta entonces aplicar el teorema de Fonf [47, Remark 2] según el cual, todo espacio de Banach real, de dimensión infinita, que admita una frontera numerable, contiene a $c_0$. □

La primera afirmación del teorema anterior es una respuesta parcial al Problema 2.3.4 en el que nos preguntábamos si el dual de cualquier espacio de Banach real, de dimensión infinita, con índice numérico 1, contiene a $l_1$. De hecho, no conocemos ningún espacio de este tipo que no sea un casi-CL-espacio. Por otro lado, la segunda afirmación del Teorema 3.1.6 es el primer resultado sobre contención de

$c_0$ que hemos obtenido, y cabe preguntarse si la hipótesis de tener dual separable puede debilitarse, exigiendo solamente que $X$ sea un espacio de Asplund.

Como los espacios de Banach reales que verifican la 3.2.I.P. son CL-espacios, el teorema anterior les es aplicable y mejora la información dada en la Nota 2.2.8.

**3.1.7. Corolario.** *Si $X$ es un espacio de Banach real, de dimensión infinita y que verifique la 3.2.I.P., entonces $X^* \supset l_1$. Si además $X^*$ es separable, entonces $X \supset c_0$.*

**3.1.8. Nota.** Aún a riesgo de incurrir en alguna repetición, puesto que muchas de las ideas que van a aparecer han sido ya mencionadas, merece la pena detenerse a comentar la relación entre las propiedades isométricas que hasta ahora hemos manejado como condiciones suficientes para que un espacio tenga índice numérico 1. Para un espacio de Banach real $X$, consideremos las siguientes afirmaciones:

(1) *$X$ verifica la 3.2.I.P.*

(2) *$X$ es un CL-espacio.*

(3) *Para cualesquiera $x^* \in \mathrm{ex}\,(B_{X^*})$ y $x^{**} \in \mathrm{ex}\,(B_{X^{**}})$, se tiene $|x^{**}(x^*)| = 1$.*

(4) *$X$ es un casi-CL-espacio.*

(5) $n(X) = 1$.

Se verifican las siguientes implicaciones:

$$\begin{tikzcd}
(1) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (2) \arrow[d, Rightarrow] & \\
(3) \arrow[r, Rightarrow] & (4) \arrow[r, Rightarrow] & (5).
\end{tikzcd}$$

La afirmación (1) $\Rightarrow$ (2) se debe a Å. Lima [66, Corollary 3.6]. (2) $\Rightarrow$ (4) es trivial, mientras que (4) $\Rightarrow$ (5) es nuestra Proposición 3.1.5. Para demostrar que (1) $\Rightarrow$ (3), usamos primero otro resultado de Å. Lima [66, Corollary 3.3] que afirma que la 3.2.I.P. es autodual. Sabiendo ya que $X^*$ tiene la 3.2.I.P., podemos obtener (3) aplicando directamente un resultado de J. Lindenstrauss [71, Theorem 4.7], o bien podemos pensar que $X^*$ es un CL-espacio y entonces (3) se comprueba fácilmente: para $x^{**} \in \operatorname{exm}(B_{X^{**}})$, se tiene que

$$B_{X^*} = \operatorname{co}\{x^* \in B_{X^*} \ : \ |x^{**}(x^*)| = 1\},$$

luego claramente $|x^{**}(x^*)| = 1$ para cualquier $x^* \in \operatorname{ex}(B_{X^*})$; para obtener (3) basta ahora recordar que

$$\operatorname{ex}(B_{X^{**}}) \subseteq \overline{\operatorname{exm}(B_{X^{**}})}^{w^*}.$$

Finalmente, la afirmación (3) $\Rightarrow$ (4) también se debe a Å. Lima [67, Corollary 3.6].

Con respecto a las posibles implicaciones en sentido contrario, conviene empezar recordando que, en dimensión finita, las afirmaciones (2), (3), (4) y (5) son equivalentes (ver Proposición 1.2.12) y no implican (1) (ver Ejemplo 1.3.1). Por lo que nosotros sabemos, la situación podría ser exactamente la misma en general. Sin embargo, no está de más recordar que (4) no implica (2) en caso complejo, y más adelante tendremos ocasión de comentar las dificultades con las que uno se encontraría si intenta probar que (5) implica (3).

Por último, puede ser interesante comentar un resultado de S. Reisner [93] que enfatiza aún más la diferencia existente entre los espacios de Banach que verifican la 3.2.I.P. y los CL-espacios. En un trabajo de A. Hansen y Å. Lima [59] se demuestra que todo espacio de Banach, de dimensión finita, que tenga la 3.2.I.P., puede ser obtenido realizando $l_1$ y/o $l_\infty$ sumas de la recta real, mientras que S. Reisner [93] demuestra que no es posible establecer un resultado parecido para CL-espacios. En palabras del propio Reisner, el resultado de Hansen y Lima establece que los espacios de dimensión finita con la 3.2.I.P. pueden ser construidos usando dos "herramientas de construcción": $l_1$ y $l_\infty$ sumas, y un tipo de "ladrillo": la recta real. Sin embargo, para CL-espacios la situación es bien distinta, ya que Reisner encuentra una familia infinita de CL-espacios finito-dimensionales que no contienen $L$-sumandos ni $M$-sumandos no triviales y, por tanto, no pueden ser obtenidos usando estas "herramientas" a partir de una cantidad finita de tipos de "ladrillo".

Dedicamos el resto de esta sección a estudiar la estabilidad de las clases de los CL-espacios y casi-CL-espacios por $c_0$ y $l_1$ sumas, y discutimos la posibilidad de que determinados espacios de funciones con valores vectoriales pertenezcan a dichas clases. Con respecto a las $c_0$ sumas la situación es diáfana:

**3.1.9. Proposición.** *Sea $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia de espacios de Banach y notemos $X = [\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{c_0}$. Entonces $X$ es un casi-CL-espacio (resp. un CL-espacio) si, y sólo si, $X_\lambda$ es un casi-CL-espacio (resp. un CL-espacio) para todo $\lambda \in \Lambda$.*

*Demostración.* Para cada $\lambda \in \Lambda$ denotaremos por $I_\lambda$ a la inyección de $X_\lambda$ en $X$ y $P_\lambda$ será la proyección de $X$ sobre $X_\lambda$. Mediante la identificación

$$X^* \equiv \left[\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda^*\right]_{l_1},$$

es claro que $P_\lambda^*$ se convierte en la inyección de $X_\lambda^*$ en $X^*$. Usaremos el hecho bien conocido de que un punto extremo en la bola unidad de una $l_1$ suma sólo puede tener una coordenada no nula; con más precisión, tenemos

$$\mathrm{ex}\,(B_{X^*}) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda^*\left(\mathrm{ex}\left(B_{X_\lambda^*}\right)\right).$$

De hecho, los argumentos que siguen probarán que se mantiene la misma relación para los puntos extremos maximales.

Supongamos que $X_\lambda$ es un casi-CL-espacio para todo $\lambda \in \Lambda$ y sea $F$ un subconjunto convexo maximal de $S_X$, que será de la forma

$$F = \{x \in S_X \ : \ e^*(x) = 1\}$$

para conveniente $e^* \in \operatorname{exm}(B_{X^*})$. Sean $\lambda \in \Lambda$ y $e^*_\lambda \in \operatorname{ex}\left(B_{X^*_\lambda}\right)$ tales que $e^* = P^*_\lambda(e^*_\lambda)$; definimos

$$F_\lambda = \{x_\lambda \in S_{X_\lambda} \ : \ e^*_\lambda(x_\lambda) = 1\}$$

y comprobamos sin dificultad que

$$F_\lambda = P_\lambda(F) \qquad \text{y} \qquad F = P_\lambda^{-1}(F_\lambda) \cap B_X.$$

Si ahora tenemos un conjunto convexo $G_\lambda$ verificando que $F_\lambda \subseteq G_\lambda \subseteq S_{X_\lambda}$, tomando $G = P_\lambda^{-1}(G_\lambda) \cap B_X$, es claro que $G$ es convexo y $F \subseteq G \subseteq S_X$. La maximalidad de $F$ nos dice que $G = F$, luego $G_\lambda = P_\lambda(G) = P_\lambda(F) = F_\lambda$ y hemos obtenido que $F_\lambda$ también es maximal; por ser $X_\lambda$ un casi-CL-espacio se tendrá entonces

$$B_{X_\lambda} = \overline{\operatorname{co}}(\mathbb{T}F_\lambda).$$

Fijados $x \in B_X$ y $\varepsilon > 0$, podemos pues encontrar $y_\lambda \in \operatorname{co}(\mathbb{T}F_\lambda)$ tal que

$$\|y_\lambda - P_\lambda(x)\| < \varepsilon$$

y, tomando $y = x - I_\lambda(P_\lambda(x)) + I_\lambda(y_\lambda)$, es claro que $y \in B_X$ y que $P_\lambda(y) = y_\lambda$, de donde se deduce que $y \in \operatorname{co}(\mathbb{T}F)$. Finalmente, es también claro que

$$\|y - x\| = \|y_\lambda - P_\lambda(x)\| < \varepsilon,$$

y hemos probado que $B_X = \overline{\operatorname{co}}(\mathbb{T}F)$; por tanto $X$ es un casi-CL-espacio. De haber supuesto que cada $X_\lambda$ es un CL-espacio, hubiésemos tenido que $B_{X_\lambda} = \operatorname{co}(\mathbb{T}F)$ y el mismo razonamiento anterior, con $\varepsilon = 0$, nos hubiese dado que $B_X = \operatorname{co}(\mathbb{T}F)$, probando así que $X$ es un CL-espacio.

Recíprocamente, supongamos ahora que $X$ es un casi-CL-espacio, fijemos $\lambda \in \Lambda$ y sea $F_\lambda$ un subconjunto convexo maximal de $S_{X_\lambda}$, que tendrá la forma

$$F_\lambda = \{x_\lambda \in S_{X_\lambda} \ : \ e^*_\lambda(x_\lambda) = 1\}$$

con $e_\lambda^* \in \text{exm}\left(B_{X_\lambda^*}\right)$. Tomando $e^* = P_\lambda^*(e_\lambda^*)$, tendremos $F_\lambda = P_\lambda(F)$ donde

$$F = \{x \in S_X \ : \ e^*(x) = 1\} = P_\lambda^{-1}(F_\lambda) \cap B_X$$

y veremos que $F$ es un subconjunto convexo maximal de $S_X$. Sea $G$ un conjunto convexo verificando que $F \subseteq G \subseteq S_X$ y observemos que $P_\lambda(G) \subseteq S_{X_\lambda}$. En efecto, si $x \in G$ verificase que $\|P_\lambda(x)\| < 1$, tomando $y = I_\lambda(x_\lambda)$ con $x_\lambda \in F_\lambda$, $z = \dfrac{x+y}{2}$, tendríamos claramente $y \in F \subseteq G$, luego $z \in G$ por ser $G$ convexo, pero

$$\|P_\lambda(z)\| \leq \frac{1}{2}\left(\|P_\lambda(x)\| + 1\right) < 1$$

y, para $\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$, se tiene que

$$\|P_\mu(z)\| \leq \frac{1}{2}\|P_\mu(x)\| \leq \frac{1}{2},$$

luego $\|z\| < 1$, lo que contradice la hipótesis $G \subseteq S_X$. Así pues, $F_\lambda \subseteq P_\lambda(G) \subseteq S_{X_\lambda}$ y la maximalidad de $F_\lambda$ nos da $F_\lambda = P_\lambda(G)$ y $G \subseteq P_\lambda^{-1}(F_\lambda) \cap B_X = F$. En suma, $F$ es maximal como se quería y tendremos $B_X = \overline{\text{co}}(\mathbb{T}F)$.

Dados $x_\lambda \in B_{X_\lambda}$ y $\varepsilon > 0$, existirá $y \in \text{co}(\mathbb{T}F)$ tal que $\|y - I_\lambda(x_\lambda)\| < \varepsilon$; entonces

$$P_\lambda(y) \in \text{co}(\mathbb{T}F_\lambda) \qquad \text{y} \qquad \|P_\lambda(y) - x_\lambda\| < \varepsilon,$$

lo que prueba que $B_{X_\lambda} = \overline{\text{co}}(\mathbb{T}F_\lambda)$ y $X_\lambda$ es un casi-CL-espacio. El mismo razonamiento, con $\varepsilon = 0$, nos hubiese dado que $X_\lambda$ es un CL-espacio, supuesto que $X$ lo sea. □

Los ejemplos de CL-espacios y casi-CL-espacios complejos dados en la Proposición 3.1.2 nos avisan de que no podemos esperar para $l_1$ sumas exactamente el mismo resultado que en el caso anterior. Concretamente, se tiene:

**3.1.10. Proposición.** *Sea $\{X_\lambda \ : \ \lambda \in \Lambda\}$ una familia de espacios de Banach y notemos $X = [\oplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda]_{l_1}$. Entonces:*

(*i*) *$X$ es un casi-CL-espacio si, y sólo si, $X_\lambda$ es un casi-CL-espacio para todo $\lambda \in \Lambda$.*

(*ii*) *En el caso real, $X$ es un CL-espacio si, y sólo si, $X_\lambda$ es un CL-espacio para todo $\lambda \in \Lambda$.*

(*iii*) *En el caso complejo, $X$ es un CL-espacio si, y sólo si, el conjunto $\Lambda$ es finito y $X_\lambda$ es un CL-espacio para todo $\lambda \in \Lambda$.*

*Demostración.* Como en la proposición anterior, para cada $\lambda \in \Lambda$, notamos $I_\lambda$ a la inyección de $X_\lambda$ en $X$ y $P_\lambda$ a la proyección de $X$ sobre $X_\lambda$. Ahora tenemos

$$X^* \equiv \left[\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda^*\right]_{l_\infty}$$

y, en esta identificación, $I_\lambda^*$ se convierte en la proyección canónica de $X^*$ sobre $X_\lambda^*$, a la que por comodidad denotaremos por $Q_\lambda$. La relación entre puntos extremos se describe de la siguiente forma: dado $e^* \in B_{X^*}$, se tiene $e^* \in \operatorname{ex}(B_{X^*})$ si, y sólo si, $Q_\lambda(e^*) \in \operatorname{ex}\left(B_{X_\lambda^*}\right)$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Veamos ahora la relación entre el conjunto $F = \{x \in S_X \,:\, e^*(x) = 1\}$ y los definidos por

$$F_\lambda = \{x_\lambda \in S_{X_\lambda} \,:\, e_\lambda^*(x_\lambda) = 1\} \qquad (\lambda \in \Lambda).$$

Dado $x \in F$, tenemos claramente

$$1 = e^*(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda^*(P_\lambda(x)) \leq \sum_{\lambda\in\Lambda} \|P_\lambda(x)\| = \|x\| = 1,$$

luego $e_\lambda^*(P_\lambda(x)) = \|P_\lambda(x)\|$ y, por tanto, $P_\lambda(x) \in \|P_\lambda(x)\| F_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Recíprocamente, es claro que si $x \in S_X$ y $P_\lambda(x) \in \|P_\lambda(x)\| F_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$, entonces $x \in F$. En resumen,

$$F = \{x \in S_X \,:\, P_\lambda(x) \in \|P_\lambda(x)\| F_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda\}. \tag{3.1}$$

Vamos a ver ahora que $F$ es un subconjunto convexo maximal de $S_X$ si, y sólo si, $F_\lambda$ lo es de $S_{X_\lambda}$ para todo $\lambda \in \Lambda$:

Supongamos que $F$ es maximal y, fijado $\lambda \in \Lambda$, sea $G_\lambda$ un conjunto convexo tal que $F_\lambda \subseteq G_\lambda \subseteq S_{X_\lambda}$. Para probar que $G_\lambda = F_\lambda$, podemos claramente suponer que $G_\lambda$ tiene la forma

$$G_\lambda = \{x_\lambda \in S_{X_\lambda} \ : \ x_\lambda^*(x_\lambda) = 1\}$$

donde $x_\lambda^* \in \operatorname{ex}\left(B_{X_\lambda^*}\right)$. Sea ahora $x^* \in \operatorname{ex}(B_{X^*})$ tal que $Q_\lambda(x^*) = x_\lambda^*$ y $Q_\mu(x^*) = e_\mu^*$ para $\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$, y consideremos el conjunto convexo $G = \{x \in S_X \ : \ x^*(x) = 1\}$. El mismo razonamiento usado para $F$ nos dice que

$$G = \{x \in S_X \ : \ P_\mu(x) = \|P_\mu(x)\| \, G_\mu \quad \forall \mu \in \Lambda\}$$

donde, para $\mu \neq \lambda$ hemos escrito $G_\mu = F_\mu$. Puesto que $F \subseteq G \subseteq S_X$, la maximalidad de $F$ nos da $G = F$, de donde, claramente,

$$I_\lambda(G_\lambda) = G \cap I_\lambda(X_\lambda) = F \cap I_\lambda(X_\lambda) = I_\lambda(F_\lambda)$$

y, recordando que $I_\lambda$ es una isometría, hemos probado la maximalidad de cada conjunto $F_\lambda$.

Recíprocamente, supongamos que $F_\lambda$ es maximal para todo $\lambda \in \Lambda$ y sea $G$ un conjunto convexo tal que $F \subseteq G \subseteq S_X$. Para probar que $G = F$, podemos suponer que $G$ es de la forma

$$G = \{x \in S_X \ : \ x^*(x) = 1\}$$

con $x^* \in \operatorname{ex}(B_{X^*})$ y, por tanto,

$$G = \{x \in S_X \ : \ P_\lambda(x) \in \|P_\lambda(x)\| \, G_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda\}$$

donde, para cada $\lambda \in \Lambda$, hemos escrito

$$G_\lambda = \{x_\lambda \in S_{X_\lambda} \ : \ Q_\lambda(x^*)(x_\lambda) = 1\}.$$

La maximalidad de $F_\lambda$ implica $G_\lambda = F_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$, de donde $F = G$ y $F$ es maximal.

$(i)$. Supongamos que $X$ es un casi-CL-espacio, fijemos $\mu \in \Lambda$ y un subconjunto convexo maximal $F_\mu$ de $S_{X_\mu}$. Para $\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}$, fijemos también un subconjunto convexo maximal $F_\lambda$ de $S_{X_\lambda}$. Los razonamientos anteriores nos permiten asegurar que el conjunto $F$ dado por la fórmula (3.1) es un subconjunto convexo maximal de $S_X$. Observemos que, si $z \in F$, entonces $\|P_\mu(z)\| \leq 1$ y, por tanto,

$$P_\mu(z) \in \|P_\mu(z)\| F_\mu \subseteq \mathrm{co}(\mathbb{T}F_\mu),$$

luego $P_\mu(F) \subseteq \mathrm{co}(\mathbb{T}F_\mu)$, de donde deducimos que

$$P_\mu\big(\mathrm{co}(\mathbb{T}F)\big) \subseteq \mathrm{co}(\mathbb{T}F_\mu).$$

Usando finalmente que $B_X = \overline{\mathrm{co}}(\mathbb{T}F)$, obtenemos

$$B_{X_\mu} = P_\mu(B_X) = P_\mu\big(\overline{\mathrm{co}}(\mathbb{T}F)\big) \subseteq \overline{P_\mu(\mathrm{co}(\mathbb{T}F))} \subseteq \overline{\mathrm{co}}(\mathbb{T}F_\mu).$$

Nótese, para uso posterior, que en caso de ser $X$ un CL-espacio las cosas son aún más fáciles:

$$B_{X_\mu} = P_\mu\big(\mathrm{co}(\mathbb{T}F)\big) \subseteq \mathrm{co}(\mathbb{T}F_\mu),$$

y obtenemos que $X_\mu$ es un CL-espacio, para todo $\mu \in \Lambda$.

Recíprocamente, supongamos que cada $X_\lambda$ es un casi-CL-espacio y sea $F$ un subconjunto convexo maximal de $S_X$ que responderá al esquema dado en (3.1), donde cada $F_\lambda$ es un subconjunto convexo maximal de $S_{X_\lambda}$. Para todo $\lambda \in \Lambda$, tenemos $B_{X_\lambda} = \overline{\mathrm{co}}(\mathbb{T}F_\lambda)$, y es claro que $I_\lambda(F_\lambda) \subseteq F$, luego

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda(B_{X_\lambda}) \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{\mathrm{co}}\big(\mathbb{T}I_\lambda(F_\lambda)\big) \subseteq \overline{\mathrm{co}}(\mathbb{T}F).$$

Basta ahora tener en cuenta que, por tratarse de una $l_1$ suma, $B_X$ es la envolvente convexa y cerrada de $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda(B_{X_\lambda})$, para obtener $B_X \subseteq \overline{\mathrm{co}}(\mathbb{T}F)$, con lo que hemos probado que $X$ es un casi-CL-espacio. Nótese que, aún cuando hubiésemos tenido

$B_{X_\lambda} = \mathrm{co}(\mathbb{T}F_\lambda)$ para todo $\lambda \in \Lambda$, sólo hubiésemos podido concluir $B_X = \overline{\mathrm{co}}(\mathbb{T}F)$. No obstante, cuando el conjunto $\Lambda$ sea finito, sí se tendrá

$$B_X = \mathrm{co}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda(B_{X_\lambda})\right)$$

y se podrá concluir $B_X = \mathrm{co}(\mathbb{T}F)$.

$(ii)$. Una implicación ya se ha comentado. Para probar el recíproco, supongamos que cada $X_\lambda$ es un CL-espacio real y, al igual que en $(i)$, sea $F$ un subconjunto convexo maximal de $S_X$ que tendrá la forma dada por (3.1), donde cada $F_\lambda$ es un subconjunto convexo maximal de $S_{X_\lambda}$. Fijado $x \in B_X$, podemos escribir, usando que $B_{X_\lambda} = \mathrm{co}(F_\lambda \cup -F_\lambda)$,

$$P_\lambda(x) = \|P_\lambda(x)\|\big(t_\lambda y_\lambda - (1-t_\lambda)z_\lambda\big) \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

con $y_\lambda, z_\lambda \in F_\lambda$ y $0 \le t_\lambda \le 1$. Notemos $t = \sum_{\lambda\in\Lambda} \|P_\lambda(x)\|\, t_\lambda$ y, suponiendo primeramente que $0 < t < 1$, escribamos $x = ty - (1-t)z$, donde

$$y = \frac{1}{t}\sum_{\lambda\in\Lambda} \|P_\lambda(x)\| t_\lambda I_\lambda(y_\lambda),$$
$$z = \frac{1}{1-t}\sum_{\lambda\in\Lambda} \|P_\lambda(x)\|(1-t_\lambda) I_\lambda(z_\lambda).$$

Se comprueba fácilmente que $y,z \in F$, luego $x \in \mathrm{co}(F \cup -F)$; si $t = 0$, tenemos $x \in -F$ y, si $t = 1$, entonces $x \in F$. En cualquier caso, se tiene $B_X = \mathrm{co}(F \cup -F)$.

$(iii)$. Ya se ha visto que si $X$ es un CL-espacio entonces $X_\lambda$ también lo es para todo $\lambda \in \Lambda$, y que el recíproco es cierto, incluso en caso complejo, cuando el conjunto $\Lambda$ es finito. Sólo queda pues demostrar que, si $\Lambda$ es infinito, $X$ no puede ser un CL-espacio. Eligiendo un subconjunto infinito numerable $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ tenemos claramente

$$[\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{l_1} = [\oplus_{\lambda\in\Lambda_0} X_\lambda]_{l_1} \oplus_1 Z$$

para conveniente espacio de Banach $Z$ y, por lo ya demostrado, si $X$ fuese un CL-espacio, también lo sería $\left[\oplus_{\lambda\in\Lambda_0}X_\lambda\right]_{l_1}$, luego podemos suponer, sin perder generalidad, que $\Lambda = \mathbb{N}$. Supongamos pues que $X = [\oplus_{k\in\mathbb{N}}X_k]_{l_1}$ es un CL-espacio, buscando una contradicción. Para cada $k \in \mathbb{N}$, fijamos $e_k^* \in \operatorname{exm}\left(B_{X_k^*}\right)$, con lo que el conjunto

$$F = \{x \in S_X \ : \ e_k^*(P_k(x)) = \|P_k(x)\| \quad \forall k \in \mathbb{N}\}$$

es un subconjunto convexo maximal de $S_X$. Sea ahora

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k} I_k(e_k),$$

donde $\{\alpha_k\}$ es una sucesión de elementos distintos de $\mathbb{T}$ (cosa sólo posible en caso complejo) y $e_k \in S_{X_k}$, $e_k^*(e_k) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Usando que $B_X = \operatorname{co}(\mathbb{T}F)$ podemos escribir $x$ en la forma

$$x = \sum_{j=1}^{m} \beta_j x^{(j)} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in \mathbb{C}, \\ \sum_{j=1}^{m} |\beta_j| = 1 \ \text{ y} \\ x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)} \in F. \end{cases}$$

Deducimos que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\alpha_k}{2^k} = e_k^*\big(P_k(x)\big) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j e_k^*\big(P_k(x^{(j)})\big) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \|P_k(x^{(j)})\|,$$

con lo cual

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha_k}\, \beta_j \|P_k(x^{(j)}\| \\ &\le \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_j| \, \|P_k(x^{(j)})\| \\ &= \sum_{j=1}^{m} |\beta_j| \, \|x^{(j)}\| = 1. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\overline{\alpha_k}\,\beta_j\|P_k(x^{(j)}\| = |\beta_j|\,\|P_k(x^{(j)})\| \tag{3.2}$$

para cualesquiera $j \in \{1,2,\dots,m\}$ y $k \in \mathbb{N}$. Fijado $k \in \mathbb{N}$, puesto que

$$0 \neq P_k(x) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j P_k(x^{(j)}),$$

debe existir un $j \in \{1,2,\dots,m\}$ tal que $\beta_j P_k(x^{(j)}) \neq 0$ y deducimos de (3.2) que $\alpha_k = \dfrac{\beta_j}{|\beta_j|}$. Esta es la contradicción que estábamos buscando, ya que el conjunto $\{\alpha_k \, : \, k \in \mathbb{N}\}$ era infinito. Como caso particular de este último resultado se obtiene que el espacio complejo $l_1(\Gamma)$ es un CL-espacio si, y sólo si, $\Gamma$ es finito. □

Para espacios de funciones continuas con valores vectoriales tenemos el siguiente resultado:

**3.1.11. Proposición.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $L$ un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff. Entonces:*

(*i*) *$X$ es un casi-CL-espacio si, y sólo si, $C_0(L,X)$ lo es.*

(*ii*) *Si $C_0(L,X)$ es un CL-espacio, entonces $X$ también es un CL-espacio.*

*Demostración.* Llamemos por comodidad $Y = C_0(L,X)$ y recordemos que, para $x^* \in X^*$ y $t \in L$, el funcional $x^* \otimes \delta_t \in Y^*$ viene dado por

$$[x^* \otimes \delta_t](f) = x^*(f(t)) \qquad (f \in Y).$$

Es un hecho bien conocido [96, Theorem 1.1] que

$$\mathrm{ex}\,(B_{Y^*}) = \left\{x^* \otimes \delta_t \, : \, x^* \in \mathrm{ex}\,(B_{X^*}),\, t \in L\right\}.$$

(*i*). Supongamos primeramente que $X$ es un casi-CL-espacio y sea $\mathcal{F}$ un subconjunto convexo maximal de $S_Y$, que será de la forma

$$\mathcal{F} = \{f \in S_Y \, : \, x^*(f(t)) = 1\}$$

para convenientes $x^* \in \mathrm{ex}\,(B_{X^*})$ y $t \in L$. Tomamos

$$F = \{x \in S_X \, : \, x^*(x) = 1\},$$

con lo que $\mathcal{F} = \{f \in B_Y \, : \, f(t) \in F\}$ y es fácil comprobar que $F = \{f(t) \, : \, f \in \mathcal{F}\}$. Si ahora $G$ es un conjunto convexo tal que $F \subseteq G \subseteq S_X$, tomando

$$\mathcal{G} = \{f \in B_Y \, : \, f(t) \in G\}$$

es claro que $\mathcal{G}$ es convexo y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq S_Y$. La maximalidad de $\mathcal{F}$ nos dice que $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, luego $G = F$ y hemos obtenido que $F$ también es maximal; por ser $X$ un casi-CL-espacio, se tendrá $B_X = \overline{\mathrm{co}}(\mathbb{T}F)$.

Fijados $f \in S_Y$ y $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $x \in \mathrm{co}(\mathbb{T}F)$ tal que

$$\|x - f(t)\| < \varepsilon.$$

Tomemos una función continua de soporte compacto $\phi : L \longrightarrow [0,1]$ tal que

$$\phi(t) = 1 \qquad \text{y} \qquad \phi(s) = 0 \quad \text{si} \ \|x - f(s)\| \geq \varepsilon$$

y consideremos la función $g \in S_Y$ dada por

$$g(s) = \phi(s)x + (1 - \phi(s))f(s) \qquad (s \in L).$$

Usando que $g(t) = x \in \mathrm{co}(\mathbb{T}F)$, se comprueba sin dificultad que $g \in \mathrm{co}(\mathbb{T}\mathcal{F})$ y es también fácil ver que $\|f - g\| \leq \varepsilon$, luego $B_Y = \overline{\mathrm{co}}\,(\mathbb{T}\mathcal{F})$, con lo que $Y$ es un casi-CL-espacio. Nótese que, aún teniendo $B_X = \mathrm{co}(\mathbb{T}F)$, necesitamos usar la función $\phi$ y sólo obtenemos $B_Y = \overline{\mathrm{co}}\,(\mathbb{T}\mathcal{F})$.

Recíprocamente, supongamos ahora que $Y$ es un casi-CL-espacio y veamos que $X$ también lo es. Fijemos $t \in L$ arbitrario y, para cada subconjunto convexo maximal $F$ de $S_X$, veamos que

$$\mathcal{F} = \{f \in S_Y \, : \, f(t) \in F\}$$

es un subconjunto convexo maximal de $S_Y$. Sea $\mathcal{G}$ un conjunto convexo verificando que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq S_Y$, llamemos $G = \{f(t) \ : \ f \in \mathcal{G}\}$ y observemos que $G \subseteq S_X$. En efecto, si $f \in \mathcal{G}$ verifica que $\|f(t)\| < 1$, tomamos $x \in F$ y una función continua de soporte compacto $\phi : L \to [0,1]$ tal que

$$\phi(t) = 1 \qquad \text{y} \qquad \phi(s) = 0 \ \text{ si } \ \|f(s)\| = 1, \tag{3.3}$$

y definimos $g \in \mathcal{F}$ por

$$g(s) = \phi(s)x \qquad (s \in L).$$

Llamando $h = \dfrac{f+g}{2}$, tendríamos $h \in \mathcal{G}$ por ser $\mathcal{G}$ convexo, pero (3.3) nos da

$$\|h(s)\| \leq \frac{1}{2}(\|f(s)\| + |\phi(s)|) < 1$$

para todo $s \in L$, contra la hipótesis $\mathcal{G} \subseteq S_Y$. Así pues, se tiene que $F \subseteq G \subseteq S_X$ y la maximalidad de $F$ nos da $G = F$, luego $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. En suma, $\mathcal{F}$ es maximal como queríamos, y tendremos $B_Y = \overline{\mathrm{co}}(\mathbb{T}\mathcal{F})$. Si ahora $\varphi : L \to [0,1]$ es cualquier función continua de soporte compacto que verifique $\varphi(t) = 1$, dados $x \in B_X$ y $\varepsilon > 0$, definimos $f \in B_Y$ por

$$f(s) = \varphi(s)x \qquad (s \in L)$$

y existirá $g \in \mathrm{co}(\mathbb{T}\mathcal{F})$ tal que $\|g - f\| < \varepsilon$; entonces $g(t) \in \mathrm{co}(\mathbb{T}F)$ y

$$\|g(t) - x\| = \|g(t) - f(t)\| \leq \|f - g\| < \varepsilon,$$

lo que prueba que $B_X = \overline{\mathrm{co}}(\mathbb{T}F)$ y $X$ es un casi-CL-espacio. En este caso, el mismo razonamiento con $\varepsilon = 0$, nos hubiese dado que $X$ es un CL-espacio cuando $Y$ lo sea, lo que prueba $(ii)$. $\square$

## 3.2 La propiedad de Daugavet

Si $X$ es un espacio de Banach, se dice que un operador $T \in L(X)$ satisface la *ecuación de Daugavet* si

$$\|Id + T\| = 1 + \|T\|. \tag{DE}$$

Esta ecuación recibe su nombre en honor del matemático I. Daugavet, quien en 1963 demostró que los operadores compactos en el espacio de Banach $C[0,1]$ la satisfacen [31]. Poco después, C. Foias y I. Singer [45] extienden el resultado a operadores débilmente compactos y G. Lozanovskii [76] demuestra que también los operadores compactos en $L_1[0,1]$ verifican la ecuación (DE).

A lo largo de los años, y en especial durante la década de los 80, han aparecido numerosos artículos tratando de extender los resultados anteriores a clases más amplias de espacios de Banach, cuyas conclusiones pueden resumirse de la siguiente forma: *Si $X = C(K)$ con $K$ un espacio compacto de Hausdorff sin puntos aislados o $X = L_1(\mu)$ para una medida positiva $\mu$ libre de átomos, entonces todo operador débilmente compacto en $X$ satisface la ecuación de Daugavet.*

Remitimos al lector interesado a los trabajos [3, 106], donde pueden encontrarse referencias precisas sobre el desarrollo de la teoría. Resultados más recientes pueden encontrarse en [11, 105, 107]. De [3] tomamos la siguiente propiedad:

**3.2.1. Definición.** Un espacio de Banach $X$ verifica la *propiedad de Daugavet* cuando todo operador compacto $T \in L(X)$ satisface la ecuación de Daugavet.

En [64] se demuestra que, para que un espacio de Banach tenga la propiedad de Daugavet, es suficiente que los operadores de rango uno verifiquen (DE). De hecho, en dicho trabajo se prueba que, en ese caso, también los operadores débilmente compactos satisfacen (DE). Obsérvese que, como consecuencia, ningún espacio reflexivo puede tener la propiedad de Daugavet.

Esta propiedad ha sido ampliamente estudiada durante la década de los 90, y algunas referencias interesantes son, además de las ya citadas, [2, 62, 63, 100, 108]. Se han obtenido numerosas consecuencias de tipo isomórfico de la propiedad de Daugavet, entre las que destacamos las siguientes:

Si $X$ es un espacio de Banach real con la propiedad de Daugavet, entonces: $X$ contiene a $l_1$; los conjuntos $\text{dent}(B_X)$ y $w^*-\text{dent}(B_{X^*})$ son vacíos; el espacio $X$ no es isomorfo a ningún subespacio de un espacio de Banach con base incondicional. Esta última afirmación ya era conocida para $C[0,1]$ y $L_1[0,1]$ pero, incluso en estos casos, la propiedad de Daugavet permite dar una demostración unificada.

En los últimos años también se ha ampliado la clase de los espacios de Banach que verifican la propiedad de Daugavet, ya que se han probado resultados sobre la "estabilidad" de dicha clase por ciertas "operaciones". Resaltamos en primer lugar un resultado debido a P. Wojtaszczyk [108], que usaremos más adelante:

**3.2.2. Proposición.** [108, Theorem 1] *La $c_0$, $l_1$ o $l_\infty$ suma de una familia de espacios de Banach verifica la propiedad de Daugavet si, y sólo si, la verifican todos los sumandos.*

Por otro lado, resultados recientes de I. Nazarenko y V. Kadets (ver [62] y [64]) extienden la propiedad de Daugavet a algunos espacios de funciones con valores vectoriales:

**3.2.3. Teorema.** [64] *Sea $X$ un espacio de Banach arbitrario, $K$ un espacio compacto de Hausdorff sin puntos aislados y $\mu$ una medida positiva libre de átomos. Entonces los espacios $C(K,X)$ y $L_1(\mu,X)$ tienen la propiedad de Daugavet.*

Se preguntará a estas alturas el lector por qué destacamos la propiedad de Daugavet en una memoria dedicada al índice numérico de un espacio de Banach. La razón es que existe una cierta relación entre el radio numérico de operadores y la ecuación de Daugavet, que pasamos a comentar.

Fijemos un espacio de Banach $X$ y un operador $T \in L(X)$. Dado $(x,x^*) \in \Pi(X)$, se tiene que

$$\max_{\lambda\in\mathbb{T}} \|Id+\lambda T\| \geq \max_{\lambda\in\mathbb{T}} |x^*(x)+\lambda x^*(Tx)| = 1+|x^*(Tx)|$$

y, tomando supremo en $(x,x^*) \in \Pi(X)$, se tendrá

$$\max_{\lambda\in\mathbb{T}} \|Id+\lambda T\| \geq 1+v(T).$$

Con esta desigualdad obtenemos que, si $v(T) = \|T\|$, entonces

$$\max_{\lambda\in\mathbb{T}} \|Id+\lambda T\| \geq 1+\|T\|,$$

pero la desigualdad contraria es evidente, luego

$$\max_{\lambda\in\mathbb{T}} \|Id+\lambda T\| = 1+\|T\|,$$

es decir, algún girado del operador $T$ verifica la ecuación de Daugavet.

Para obtener el recíproco, supongamos primeramente que $T \in L(X)$ verifica (DE) y, mediante un sencillo argumento de convexidad, observemos que lo mismo le ocurre a cualquier múltiplo positivo de $T$ (véase [3, Lemma 2.1] si se quiere):

$$\|Id+\alpha T\| = 1+\alpha\|T\| \qquad (\alpha > 0).$$

Recordando la fórmula que nos permite calcular el supremo de la parte real del rango numérico (véase la ecuación (1.2) de la página 4), obtenemos

$$\sup \operatorname{Re} W(T) = \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\|Id+\alpha T\|-1}{\alpha} = \|T\|$$

y, por tanto, $v(T) = \|T\|$. Si para algún $\lambda \in \mathbb{T}$, es $\lambda T$ quien verifica (DE), obtenemos obviamente la misma conclusión.

Para futuras referencias, damos nombre a la debilitación de (DE) que acabamos de poner en relación con el radio numérico y enunciamos explícitamente dicha relación. Diremos que un operador $T \in L(X)$ satisface la *ecuación de Daugavet salvo rotación* si verifica

$$\max_{\lambda \in \mathbb{T}} \|Id + \lambda T\| = 1 + \|T\|. \tag{DEr}$$

**3.2.4. Proposición.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Entonces $v(T) = \|T\|$ si, y sólo si, $T$ satisface (DEr). Por tanto, $n(X) = 1$ si, y sólo si, todo operador $T \in L(X)$ satisface la ecuación de Daugavet salvo rotación.*

La primera referencia a este resultado podemos encontrarla en el trabajo pionero de Duncan, McGregor, Pryce y White [35] sobre índice numérico, aunque curiosamente, la propiedad de Daugavet y el índice numérico han vivido hasta ahora en mundos separados.

La proposición anterior establece un cierto paralelismo entre los espacios de Banach con la propiedad de Daugavet y los que tienen índice numérico 1. Obsérvese que para tener índice numérico 1 se exige la condición más débil (DEr) a todos los operadores, mientras que la propiedad de Daugavet exige la condición más fuerte (DE) pero sólo a los operadores compactos. De hecho, no se tiene ninguna inclusión entre estas dos clases de espacios: por un lado, $n(c_0) = 1$ aunque $c_0$ no verifica la propiedad de Daugavet (por ejemplo, por tener base incondicional); por otro, $n(C([0,1],l_2)) = n(l_2) < 1$ (Teorema 1.5.2) aún cuando $C([0,1],l_2)$ tiene la propiedad de Daugavet (Teorema 3.2.3).

En varios trabajos dedicados a la ecuación de Daugavet los autores muestran que ciertos espacios tienen índice numérico 1 viendo que todos los operadores definidos en ellos satisfacen (DEr). La mayoría de estos artículos no aportan nuevos ejemplos, sino que dan otras demostraciones del hecho, conocido desde 1971, de que los espacios $L_1(\mu)$ y sus preduales isométricos tienen índice 1 (ver [1, 3, 61, 99, 106] y los comentarios de [60, p. 342]). No obstante, en un excelente trabajo publicado en 1997, D. Werner [107] encuentra una nueva gama de espacios complejos que tienen índice numérico 1: las álgebras de funciones. Recuérdese que un *álgebra de funciones* sobre un compacto $K$ es una subálgebra cerrada de $C(K)$ que contiene a las constantes y separa los puntos de $K$. De hecho, la gama es más amplia, como comentaremos más adelante.

En este ambiente, queremos comentar que los resultados de la sección 1.4 sobre $c_0$, $l_1$ y $l_\infty$ sumas responden a una cuestión planteada por Y. Abramovich en 1991. En [2] el autor pregunta si todos los operadores definidos en un espacio construido mediante $c_0$, $l_1$ y/o $l_\infty$ sumas de espacios de tipo $C(K)$ o $L_1(\mu)$ satisfacen la ecuación (DEr). En vista de la Proposición 3.2.4, ello equivale a preguntar si tales espacios tienen índice numérico 1, con lo que la respuesta afirmativa a la pregunta de Abramovich es caso particular de nuestro Corolario 1.4.2. A este respecto, es obligado reconocer que la demostración del Teorema 1.4.1 toma ideas de un trabajo de P. Wojtaszczyk [108] sobre la estabilidad de la propiedad de Daugavet para $c_0$, $l_1$ y $l_\infty$ sumas. En dirección contraria, parte de los argumentos usados en nuestro estudio del índice numérico de los espacios de funciones continuas con valores vectoriales pueden adaptarse para conseguir un resultado original sobre la propiedad de Daugavet: caracterizar cuándo los espacios $C(K,X)$ y $L_1(\mu,X)$ la verifican. Nuestra aportación consiste en probar que $C(K,X)$ tiene la propiedad de Daugavet en cuanto la tenga $X$, sin hipótesis sobre $K$.

**3.2.5. Teorema.** *Sea $K$ un espacio topológico compacto de Hausdorff, $\mu$ una medida positiva y $X$ un espacio de Banach. Entonces:*

$(i)$ *El espacio $C(K,X)$ verifica la propiedad de Daugavet si, y sólo si, $K$ es perfecto o $X$ verifica la propiedad de Daugavet.*

$(ii)$ *El espacio $L_1(\mu,X)$ verifica la propiedad de Daugavet si, y sólo si, $\mu$ no tiene átomos o $X$ verifica la propiedad de Daugavet.*

*Demostración.* $(i)$. Si $C(K,X)$ verifica la propiedad de Daugavet y $K$ tiene un punto aislado, entonces se tiene $C(K,X) = X \oplus_\infty Z$ para un cierto espacio de Banach $Z$ y, usando la Proposición 3.2.2, obtenemos que $X$ también satisface la propiedad de Daugavet. Esto demuestra una implicación. Para la otra, si $K$ es perfecto se aplica el Teorema 3.2.3, luego sólo resta probar que si $X$ tiene la propiedad de Daugavet entonces lo mismo le ocurre a $C(K,X)$ sea cual sea $K$. La demostración es una adaptación de la dada para el Teorema 1.5.2, así que sólo comentaremos los cambios necesarios.

Supongamos pues que $X$ satisface la propiedad de Daugavet, fijemos un operador compacto $T \in L(C(K,X))$ con $\|T\| = 1$, y bastará ver que $T$ verifica (DE). Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $f_0 \in C(K,X)$ con $\|f_0\| = 1$ y $t_0 \in K$, tales que

$$\|[Tf_0](t_0)\| > 1 - \varepsilon.$$

Seguidamente podemos encontrar, como se hace en la demostración de 1.5.2 una función continua $\phi : K \to [0,1]$, un vector $x_0 \in S_X$ y un funcional $x_0^* \in S_{X^*}$ con $x_0^*(x_0) = 1$, tales que el operador $S \in L(X)$ definido como en (1.15), esto es

$$Sx = \left[T\left(x_0^*(x)(1-\phi)f_0 + \phi x\right)\right](t_0) \qquad (x \in X),$$

verifica (1.16), es decir, $\|S\| > 1 - 2\varepsilon$. Obsérvese que $S$ es compacto, por serlo $T$, luego la propiedad de Daugavet nos dice que $\|Id + S\| > 2 - 2\varepsilon$ y podemos encontrar $x \in S_X$ tal que

$$\|x + Sx\| > 2 - 2\varepsilon.$$

Definimos ahora una función $g \in C(K,X)$ como en (1.17), esto es,

$$g(t) = x_0^*(x)(1-\phi(t))f_0(t) + \phi(t)x \qquad (t \in L),$$

con lo que se tiene claramente $\|g\| = 1$ y, por tanto,

$$\|Id + T\| \geq \|[g + Tg](t_0)\| = \|x + Sx\| > 2 - 2\varepsilon.$$

Haciendo $\varepsilon \downarrow 0$ concluimos la prueba de $(i)$.

$(ii)$. Este resultado es esencialmente conocido: podemos escribir

$$L_1(\mu, X) \equiv L_1(\nu, X) \oplus_1 [\oplus_{i \in I} X]_{l_1}$$

para cierto conjunto $I$ (posiblemente vacío) y conveniente medida positiva $\nu$, libre de átomos. Con esta observación, el resultado se sigue fácilmente de la Proposición 3.2.2 y del Teorema 3.2.3. □

Puede plantearse, como hicimos al final del primer capítulo para el índice numérico, si este teorema es caso particular de un resultado general sobre productos tensoriales. No sabemos en este caso la respuesta:

**3.2.6. Problema.** *Caracterizar los pares de espacios de Banach $(X,Y)$ tales que el producto tensorial inyectivo $X\widetilde{\otimes}_\varepsilon Y$ (resp. el proyectivo $X\widetilde{\otimes}_\pi Y$) tiene la propiedad de Daugavet.*

## 3.3 Índice numérico compacto

Dedicamos esta sección a introducir una nueva constante, análoga al índice numérico, pero referida sólo a operadores compactos. Denotamos por $K(X)$ al álgebra de Banach de los operadores lineales y compactos en un espacio de Banach $X$, dotada con su norma natural, la que hereda de $L(X)$.

**3.3.1. Definición.** Llamamos *índice numérico compacto* de un espacio de Banach $X$ al número real

$$n_{\mathrm{K}}(X) = \inf\{v(T)\ :\ T \in S_{K(X)}\},$$

o, equivalentemente,

$$n_{\mathrm{K}}(X) = \max\{m \geq 0\ :\ m\|T\| \leq v(T)\ \ \forall T \in K(X)\}.$$

Es claro de la definición que, para cualquier espacio de Banach $X$, siempre será

$$n(X) \leq n_{\mathrm{K}}(X) \leq 1$$

y, en analogía con el índice numérico, $n_{\mathrm{K}}(X)$ representa la mejor constante de equivalencia entre la norma usual de $K(X)$ y el radio numérico. El caso $n_{\mathrm{K}}(X) = 0$ significa que el radio numérico no es una norma equivalente en $K(X)$, mientras que el otro caso extremo, $n_{\mathrm{K}}(X) = 1$, se presenta cuando radio numérico y norma de operadores coinciden en $K(X)$. Los posibles valores del índice numérico compacto coinciden con los del índice numérico, debido a la desigualdad $n \leq n_{\mathrm{K}}$, que es igualdad en dimensión finita:

$$\{n_{\mathrm{K}}(X)\ :\ X \text{ espacio de Banach complejo}\} = [e^{-1}, 1],$$
$$\{n_{\mathrm{K}}(X)\ :\ X \text{ espacio de Banach real}\} = [0, 1].$$

Obsérvese que $n_{\mathrm{K}}(X) = 1$ tanto si $n(X) = 1$ como si $X$ verifica la propiedad de Daugavet (Proposición 3.2.4). Así pues, el índice numérico compacto permite englobar de manera natural las dos clases de espacios de Banach que comparábamos en la sección anterior.

En la Proposición 2.2.10 demostrábamos que si $X$ es un espacio de Asplund, o bien $X$ verifica la RNP, entonces se tiene $n(X) = 1$ en cuanto radio numérico y norma coincidan en el conjunto de los operadores de rango uno. Cabría preguntarse si los operadores compactos, o incluso los de rango uno, son suficientes, en general, para calcular índices numéricos o, al menos, para probar que un espacio tiene índice numérico 1. Más concretamente, estamos preguntando si $n_K(X) = n(X)$ o, al menos, si $n(X) = 1$ siempre que $n_K(X) = 1$. La respuesta es negativa:

**3.3.2. Ejemplo.** *Espacios de Banach $X$ que verifican $n(X) < n_K(X)$.*

Sea $W$ un espacio bidimensional tal que $n(W) = 0$ (caso real) o $n(W) = e^{-1}$ (caso complejo) y tomemos $X = C([0,1],W)$ o bien $X = L_1([0,1],W)$. En todos los casos tenemos $n_K(X) = 1$, ya que $X$ satisface la propiedad de Daugavet (Teorema 3.2.3), pero, aplicando los Teoremas 1.5.2 y 1.5.5, obtenemos que $n(X) = n(W)$. Así pues, hemos encontrado espacios reales $X$, con $0 = n(X) < n_K(X) = 1$, y complejos con $e^{-1} = n(X) < n_K(X) = 1$.

Estos ejemplos dan pie a dos comentarios interesantes. En primer lugar, cuando calculábamos índices numéricos de espacios de funciones con valores vectoriales en la sección 1.5, usábamos de forma esencial operadores no compactos, aún en el caso de que el espacio en el que toman valores las funciones tuviese dimensión finita. Por otro lado, observemos que, en el caso real, podemos tomar en los ejemplos anteriores $W = l_2^2$; entonces, si llamamos $Y$ a cualquiera de los espacios complejos $C[0,1]$ o $L_1[0,1]$, tenemos que nuestro $X$ es isométricamente isomorfo al espacio real $Y_{\mathbb{R}}$ subyacente a $Y$. Ya comentamos que el espacio real subyacente a un espacio de Banach complejo tiene siempre índice numérico 0 y ahora vemos que puede tener índice numérico compacto 1.

Nos proponemos ahora estudiar algunas propiedades del índice numérico compacto, análogas a las estudiadas en los capítulos 1 y 2 para el índice numérico. La mayoría de los resultados se prueban repitiendo, mutatis mutandis, las demostraciones dadas para el índice numérico. Los cambios consisten en restringirse a operadores compactos, observando que, en tal caso, todos los operadores que se manejan en los distintos razonamientos son también compactos. No daremos las demostraciones cuando respondan a este esquema.

En primer lugar, el índice numérico compacto no disminuye al pasar a sumandos absolutos.

**3.3.3. Proposición.** *Sea $X$ un espacio de Banach e $Y$ un sumando absoluto suyo. Entonces* $n_K(X) \leq n_K(Y)$.

Obsérvese que tampoco en este caso podemos extender el resultado anterior a proyecciones incondicionales, ya que en el Ejemplo 1.3.1 encontrábamos un espacio de Banach $X$, de dimensión finita, y una proyección incondicional $P \in L(X)$, tales que $n(P(X)) < n(X)$; equivalentemente, $n_K(P(X)) < n_K(X)$.

También podemos calcular el índice numérico compacto de las $c_0$, $l_1$ y $l_\infty$ sumas de espacios de Banach en términos de los índices de los sumandos:

**3.3.4. Proposición.** *Sea $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia de espacios de Banach. Entonces*

$$n_K\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{c_0}\Big) = n_K\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{l_1}\Big) = n_K\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{l_\infty}\Big) = \inf_\lambda n_K(X_\lambda).$$

Como consecuencia inmediata de esta proposición se obtiene, para cualquier espacio de Banach $X$, que

$$n_K\big(c_0(X)\big) = n_K\big(l_1(X)\big) = n_K\big(l_\infty(X)\big) = n_K(X).$$

También podemos usar la proposición anterior para probar que el espacio de Banach $X$ descrito en el Ejemplo 1.4.5, no sólo verifica $n(X) = 0$, sino también $n_K(X) = 0$. Por tanto, el radio numérico es una norma en $L(X)$ que no es equivalente a la norma de operadores, ni siquiera cuando la restringimos a $K(X)$.

Podría pensarse ahora que también vamos a poder trasladar los resultados de la sección 1.5 sobre cálculo de índices numéricos en espacios de funciones con valores vectoriales. Sin embargo, sabemos ya que esto no es posible: si $W$ es un espacio de dimensión finita, con $n(W) < 1$, se tiene que

$$n_{\mathrm{K}}\big(C([0,1],W)\big) = n_{\mathrm{K}}\big(L_1([0,1],W)\big) = 1,$$

ya que ambos espacios tienen la propiedad de Daugavet, pero $n_{\mathrm{K}}(W) = n(W) < 1$.

En general, la situación es la siguiente:

**3.3.5. Proposición.** *(i) Sea $K$ un espacio topológico compacto de Hausdorff y $X$ un espacio de Banach. Entonces:*

$$n_{\mathrm{K}}\big(C(K,X)\big) = \begin{cases} 1 & \textit{si } K \textit{ es perfecto} \\ n_{\mathrm{K}}(X) & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

*(ii) Si $\mu$ es una medida positiva y $X$ un espacio de Banach, entonces:*

$$n_{\mathrm{K}}\big(L_1(\mu,X)\big) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \mu \textit{ está libre de átomos} \\ n_{\mathrm{K}}(X) & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

*Demostración.* Si $K$ es perfecto y $\mu$ libre de átomos, $C(K,X)$ y $L_1(\mu,X)$ tienen la propiedad de Daugavet (Teorema 3.2.3), luego

$$n_{\mathrm{K}}\big(C(K,X)\big) = n_{\mathrm{K}}\big(L_1(\mu,X)\big) = 1.$$

En otro caso, una parte de las demostraciones de los Teoremas 1.5.2 y 1.5.5 se puede repetir para obtener las desigualdades

$$n_{\mathrm{K}}\big(C(K,X)\big) \geq n_{\mathrm{K}}(X) \qquad \text{y} \qquad n_{\mathrm{K}}\big(L_1(\mu,X)\big) \geq n_{\mathrm{K}}(X).$$

Para las desigualdades contrarias, usamos que $X$ es un $M$-sumando de $C(K,X)$ y un $L$-sumando de $L_1(\mu,X)$, con lo que basta aplicar la Proposición 3.3.3. $\square$

Se puede discutir, como se hizo en la sección 2.1 para el índice numérico, el conjunto $\mathcal{N}_{\kappa}(X)$ de los valores del índice numérico compacto que pueden conseguirse renormando equivalentemente un espacio de Banach $X$, obteniendo idénticos resultados. Una obvia adaptación de las Proposiciones 2.1.1 y 2.1.3 nos permite asegurar que $\mathcal{N}_{\kappa}(X)$ es un intervalo cuyo mínimo es 0 en caso real y $e^{-1}$ en caso complejo. Si a ello añadimos la desigualdad $n \leq n_{\kappa}$, obtenemos claramente que $\mathcal{N}(X) \subseteq \mathcal{N}_{\kappa}(X)$. Por tanto, los Teoremas 2.1.11 y 2.1.12 siguen siendo válidos cuando se sustituye $\mathcal{N}(X)$ por $\mathcal{N}_{\kappa}(X)$.

El valor 1 del índice numérico compacto es nuevamente el único que parece tener implicaciones isomórficas. De hecho, sabemos ya que las tiene, puesto que un espacio de Banach $X$ con $n_{\kappa}(X) = 1$ verifica $n(X) = 1$, tanto si $X$ tiene la RNP como si es un espacio de Asplund. Se sigue, por ejemplo, que no existe ningún espacio reflexivo real, de dimensión infinita, con índice numérico compacto igual a 1.

Nos concentramos pues en la clase de los espacios de Banach con índice numérico compacto 1 que, como ya comentamos, incluye a los espacios con índice numérico 1 y a los que tienen la propiedad de Daugavet. Comenzamos dando a esta clase un nombre que nos parece sugerente:

**3.3.6. Definición.** Diremos que un espacio de Banach $X$ verifica la *propiedad de Daugavet salvo rotación* si $n_{\kappa}(X) = 1$ o, equivalentemente, si todo $T \in K(X)$ satisface la ecuación (DEr).

Como consecuencia inmediata de la Proposición 3.3.4, esta clase de espacios de Banach es estable por $c_0$, $l_1$ y $l_\infty$ sumas, lo que nos proporciona ejemplos de espacios de Banach con la propiedad de Daugavet salvo rotación, que no tienen índice numérico 1 y no verifican la propiedad de Daugavet. En efecto, tómese $X = c_0 \oplus_\infty C([0,1], l_2)$, que verifica $n_{\kappa}(X) = 1$ por la razón recién comentada; por un lado, $n(X) = n(l_2) < 1$ y, por otro, $X$ no verifica la propiedad de Daugavet por no hacerlo $c_0$.

Por otra parte, la Proposición 3.3.5 caracteriza la propiedad de Daugavet salvo rotación en ciertos espacios de funciones con valores vectoriales: $C(K,X)$ *(resp. $L_1(\mu,X)$) tiene dicha propiedad si, y sólo si, el compacto $K$ es perfecto (resp. la medida $\mu$ está libre de átomos) o el espacio de Banach $X$ la tiene.*

Nos proponemos estudiar ahora propiedades de la clase recién introducida que, en algunos casos, recordarán a resultados previamente conocidos para la propiedad de Daugavet o para los espacios de Banach con índice numérico 1. Comenzamos viendo que, análogamente a lo que ocurre con la ecuación de Daugavet, es suficiente que los operadores de rango uno satisfagan (DEr) para que el espacio tenga la propiedad de Daugavet salvo rotación. La demostración de este hecho es una fácil adaptación de la dada en [64, Theorem 2.3] para la ecuación de Daugavet.

**3.3.7. Proposición.** *Sea $X$ un espacio de Banach tal que todo operador de rango uno $T \in L(X)$ verifica $v(T) = \|T\|$. Entonces $X$ tiene la propiedad de Daugavet salvo rotación.*

*Demostración.* Fijemos $T \in K(X)$ con $\|T\| = 1$ para probar que $v(T) = 1$. Por el Teorema de Krein-Milman, el conjunto convexo y compacto $K = \overline{T(B_X)}$ tendrá un punto extremo $x_0$ tal que $\|x_0\| = 1$. Fijado $\varepsilon > 0$, sea

$$F = \{x \in K \ : \ \|x - x_0\| \geq \varepsilon\}$$

y observemos que $x_0 \notin \overline{\text{co}}(F)$ pues, de lo contrario, $x_0$ sería un punto extremo de $\overline{\text{co}}(F)$ y el Teorema de Krein-Milman "revertido" nos daría $x_0 \in F$, que es imposible. Entonces, el Teorema de separación Hahn-Banach nos proporciona un funcional $y^* \in X^*$ y un número real $\delta > 0$ tales que

$$\max\{\operatorname{Re} y^*(x) \ : \ x \in F\} < \operatorname{Re} y^*(x_0) - \delta.$$

Mediante una normalización, podemos conseguir que $x_0^* = T^* y^*$ verifique $\|x_0^*\| = 1$, y tampoco hay problema en suponer $\delta < \varepsilon$. Si ahora $x \in B_X$ verifica $\operatorname{Re} x_0^*(x) > 1 - \delta$, se tendrá

$$\operatorname{Re} y^*(Tx) > 1 - \delta \geq \operatorname{Re} y^*(x_0) - \delta,$$

luego $Tx \notin F$ y, por tanto, $\|Tx - x_0\| < \varepsilon$. En resumen:

$$x \in B_X,\ \operatorname{Re} x_0^*(x) > 1 - \delta \qquad \Rightarrow \qquad \|Tx - x_0\| < \varepsilon. \tag{3.4}$$

Consideremos ahora el operador de rango uno $S \in L(X)$ dado por

$$Sx = x_0^*(x)x_0 \qquad (x \in X)$$

y usemos que $v(S) = \|S\| = 1$ para encontrar $(x, x^*) \in \Pi(X)$ tal que

$$|x^*(Sx)| = |x_0^*(x)|\,|x^*(x_0)| > 1 - \delta.$$

Mediante un giro, podemos conseguir que

$$\operatorname{Re} x^*(x_0) = |x^*(x_0)| > 1 - \delta$$

y, usando (3.4) obtenemos $\|Tx - x_0\| < \varepsilon$. Finalmente,

$$\begin{aligned} v(T) &\geq |x^*(Tx)| \geq |x^*(x_0)| - \varepsilon \\ &> 1 - \delta - \varepsilon > 1 - 2\varepsilon, \end{aligned}$$

lo que acaba la demostración. □

Podría ahora pensarse que el índice numérico compacto coincida con la constante análoga para operadores de rango uno. Esto es falso en general, incluso en dimensión finita:

**3.3.8. Ejemplo.** *Existe un espacio de Banach $X$ verificando que $v(T) \geq \frac{1}{2}\|T\|$ para todo operador $T$ de rango uno, pero $n_K(X) = 0$.*

Sea $X = \mathbb{R}^2$ con la norma euclídea, que verifica $n_K(X) = n(X) = 0$. Cualquier operador de rango uno $T \in L(X)$ con $\|T\| = 1$, tendrá la forma $Tx = (x|x_1)x_2$ para ciertos vectores $x_1, x_2 \in S_X$. Cambiando $T$ por $-T$ si fuese necesario, podemos suponer que $(x_2|x_1) \geq 0$ y, en este caso, tomamos $x = \dfrac{x_1 + x_2}{\|x_1 + x_2\|}$ para obtener que

$$v(T) \geq (Tx|x) = \frac{\left[1 + (x_2|x_1)\right]^2}{\|x_1 + x_2\|^2} \geq \frac{1 + (x_2|x_1)}{2} \geq 1/2.$$

El siguiente resultado permitirá calcular radios numéricos usando sólo puntos extremos. Lo utilizaremos para demostrar una caracterización intrínseca de los espacios que tienen la propiedad de Daugavet salvo rotación, que no involucra operadores. En su momento lamentábamos no haber conseguido una caracterización del mismo tipo para los espacios con índice numérico 1.

**3.3.9. Lema.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Entonces:*

$$v(T) = \sup\{|x^{**}(T^*x^*)| : x^* \in \operatorname{ex}(B_{X^*}), x^{**} \in \operatorname{ex}(B_{X^{**}}), x^{**}(x^*) = 1\}.$$

Este hecho puede deducirse de un resultado de Å. Lima [69, Theorem 8] usando el Corolario 1.2.3, pero incluimos una demostración directa, quizá más sencilla.

*Demostración.* Escribimos $v(T) = \sup\{\varphi(x) : x \in S_X\}$, donde

$$\varphi(x) = \sup\{|x^*(Tx)| : x^* \in S_{X^*}, x^*(x) = 1\} \qquad (x \in S_X).$$

Puesto que, fijado $x \in S_X$, el conjunto $\{x^* \in S_{X^*} : x^*(x) = 1\}$ es convexo y $w^*$-compacto, es claro que el supremo que define a $\varphi(x)$ ha de alcanzarse en un punto extremo de dicho conjunto que, forzosamente, es también punto extremo de $B_{X^*}$. Por tanto, tenemos:

$$v(T) = \sup\{|x^*(Tx)| : x^* \in \operatorname{ex}(B_{X^*}), x \in S_X, x^*(x) = 1\}.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} v(T) &\leq \sup\{|x^{**}(T^*x^*)| \ : \ x^* \in \operatorname{ex}(B_{X^*}), x^{**} \in S_{X^{**}}, x^{**}(x^*) = 1\} \\ &\leq v(T^*) = v(T), \end{aligned}$$

con lo que podemos escribir $v(T) = \sup\{\psi(x^*) \ : \ x^* \in \operatorname{ex}(B_{X^*})\}$, donde ahora

$$\psi(x^*) = \sup\{|x^{**}(T^*x^*)| \ : \ x^{**} \in S_{X^{**}}, x^{**}(x^*) = 1\} \qquad (x^* \in \operatorname{ex}(B_{X^*})).$$

La prueba se concluye aplicando a $\psi$ el mismo razonamiento usado con $\varphi$. □

La caracterización anunciada es la siguiente:

**3.3.10. Proposición.** *Un espacio de Banach $X$ tiene la propiedad de Daugavet salvo rotación si, y sólo si, se verifica que*

$$B_{X^*\oplus_\infty X^{**}} = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}\left(\{(x^*,x^{**}) \ : \ x^* \in \operatorname{ex}(B_{X^*}), x^{**} \in \operatorname{ex}(B_{X^{**}}), \ |x^{**}(x^*)| = 1\}\right).$$

*Demostración.* Sea $Y = X \oplus_1 X^*$, con lo que $Y^* = X^* \oplus_\infty X^{**}$, y notemos

$$A = \{(x^*,x^{**}) \ : \ x^* \in \operatorname{ex}(B_{X^*}), x^{**} \in \operatorname{ex}(B_{X^{**}}), \ |x^{**}(x^*)| = 1\}.$$

Por el Teorema del bipolar, la condición del enunciado, $B_{Y^*} = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(A)$, equivale a que, para todo $y_0 \in Y$ se tenga $\|y_0\| = \sup\{|y^*(y_0)| \ : \ y^* \in A\}$, es decir, notando $y_0 = (x_0, x_0^*)$,

$$\|x_0\| + \|x_0^*\| = \sup\{|x^*(x_0) + x^{**}(x_0^*)| \ : \ (x^*,x^{**}) \in A\}. \tag{3.5}$$

Por tanto, deberemos probar que $n_\kappa(X) = 1$ si, y sólo si, se verifica (3.5) para cualesquiera $x_0 \in X$, $x_0^* \in X^*$.

Supongamos en primer lugar que $n_\kappa(X) = 1$ y, fijados $x_0 \in X$, $x_0^* \in X^*$, consideremos el operador de rango uno $T \in L(X)$ dado por

$$Tx = x_0^*(x)x_0 \qquad (x \in X),$$

que verificará $v(T) = \|T\| = \|x_0\| \, \|x_0^*\|$. Usando el lema anterior, para cada $\varepsilon > 0$, encontramos $(x^*, x^{**}) \in A$ tal que

$$(1-\varepsilon)\|x_0\| \, \|x_0^*\| \leq |x^{**}(T^*x^*)| = |x^{**}(x_0^*)| \, |x^*(x_0)|,$$

luego

$$|x^{**}(x_0^*)| \geq (1-\varepsilon)\|x_0^*\| \qquad \text{y} \qquad |x^*(x_0)| \geq (1-\varepsilon)\|x_0\|.$$

Cambiando $x^*$ y $x^{**}$ por convenientes girados, el par $(x^*, x^{**})$ se mantiene en $A$ y conseguimos

$$\left|x^*(x_0) + x^{**}(x_0^*)\right| \geq (1-\varepsilon)\left(\|x_0\| + \|x_0^*\|\right).$$

Recíprocamente, cualquier operador $T$ de rango uno en $X$ tiene la forma

$$Tx = x_0^*(x)x_0 \qquad (x \in X),$$

donde $x_0 \in X$ y $x_0^* \in X^*$. Fijado $\varepsilon > 0$, (3.5) nos da un par $(x^*, x^{**}) \in A$ tal que

$$|x^*(x_0) + x^{**}(x_0^*)| \geq \left(\|x_0\| + \|x_0^*\|\right) - \varepsilon,$$

de donde

$$|x^*(x_0)| \geq \|x_0\| - \varepsilon \qquad \text{y} \qquad |x^{**}(x_0^*)| \geq \|x_0^*\| - \varepsilon.$$

Como quiera que $|x^{**}(x^*)| = 1$, las desigualdades anteriores nos dicen que

$$v(T) = v(T^*) \geq |x^{**}(x_0^*)| \, |x^*(x_0)| \geq \left(\|x_0\| - \varepsilon\right)\left(\|x_0^*\| - \varepsilon\right)$$

y, haciendo $\varepsilon \downarrow 0$, obtenemos

$$v(T) \geq \|x_0\| \, \|x_0^*\| = \|T\|.$$

En suma, hemos probado que el radio numérico y la norma de operadores coinciden sobre los operadores de rango uno. Es el momento de aplicar la Proposición 3.3.7 para concluir que coinciden en $K(X)$, esto es, que $X$ tiene la propiedad de Daugavet salvo rotación. $\square$

Concluimos nuestra discusión del índice numérico compacto haciendo notar que los resultados obtenidos en la sección 2.2 para espacios de Banach con índice numérico 1 pueden extenderse a la propiedad de Daugavet salvo rotación, ya que la herramienta básica (el Lema 2.2.2) sólo necesitaba que norma y radio numérico coincidan sobre los operadores de rango uno. No obstante, como quiera que si $X$ es un espacio de Asplund o $X$ verifica la RNP, entonces $n(X) = 1$ en cuanto $n_K(X) = 1$, reescribiendo el Teorema 2.2.5 o sus corolarios en términos de la propiedad de Daugavet salvo rotación no conseguiríamos generalizarlos. En lugar de eso, merece la pena enunciar dicho teorema con las hipótesis estrictamente necesarias (infinitos puntos dientes o $w^*$-dientes). Con ello recopilamos lo mejor que hemos podido probar para espacios con índice numérico 1, pero ahora puede ser útil exigir solamente la propiedad de Daugavet salvo rotación.

**3.3.11. Teorema.** *Sea $X$ un espacio de Banach real con la propiedad de Daugavet salvo rotación.*

(*i*) *Si el conjunto* $\mathrm{dent}(B_X)$ *es infinito, entonces* $X \supset c_0$ *o* $X \supset l_1$.

(*ii*) *Si* $w^*-\mathrm{dent}(B_{X^*})$ *es infinito, entonces* $X^* \supset l_1$.

Recuérdese que para espacios de Banach $X$ que verifiquen la propiedad de Daugavet se tiene un resultado mejor: $X \supset l_1$ [64, Theorem 2.9]. Sin embargo, este resultado no puede ser óptimo desde el punto de vista isomórfico y, en cierto modo, resulta engañoso, ya que $l_1$ no tiene la propiedad de Daugavet.

## 3.4 Espacios de Banach con índice numérico 1: algunas propiedades isométricas

Acabamos esta memoria comentando algunos resultados de tipo isométrico sobre espacios de Banach con índice numérico 1. En cierto modo, esta discusión evocará ideas que aparecieron fugazmente muy al principio de la memoria, como la visión abstracta del rango numérico en términos del álgebra de operadores o el problema de la relación entre el índice numérico de un espacio y el de su dual.

Comencemos pues con una caracterización de los espacios de Banach $X$ con $n(X) = 1$ en términos de la geometría de $L(X)$, que se demuestra sin dificultad. Fijados $x^* \in X^*$ y $x^{**} \in X^{**}$, escribiremos, como es usual,

$$[x^* \otimes x^{**}](T) = x^{**}(T^* x^*) \qquad (T \in L(X)).$$

Es claro que $x^* \otimes x^{**} \in L(X)^*$ y $\|x^* \otimes x^{**}\| = \|x^*\| \, \|x^{**}\|$.

**3.4.1. Teorema.** *Sea $X$ un espacio de Banach real o complejo. Son equivalentes:*

(*i*) $n(X) = 1$.

(*ii*) $B_{L(X)^*} = \overline{co}^{w^*}\left(\{x^* \otimes x^{**} : x^* \in \mathrm{ex}\,(B_{X^*}), x^{**} \in \mathrm{ex}\,(B_{X^{**}}), |x^{**}(x^*)| = 1\}\right)$.

(*iii*) $|\phi(Id)| = 1$ *para todo* $\phi \in \mathrm{ex}\left(B_{L(X)^*}\right)$.

(*iv*) *Existe un compacto de Hausdorff $K$ y una isometría lineal $J : L(X) \to C(K)$ tal que $J(Id)$ es la función constantemente igual a 1 en $K$ y $J(L(X))$ separa los puntos de $K$.*

(*v*) *Todo operador $T \in L(X)$ verifica la ecuación (DEr), esto es,*

$$\max_{\lambda \in \mathbb{T}} \|Id + \lambda T\| = 1 + \|T\| \qquad (T \in L(X)).$$

$(vi)$ *La bola unidad cerrada de* $L(X)$ *es la intersección de todas las bolas cerradas que contienen al conjunto* $\{\lambda Id : \lambda \in \mathbb{T}\}$.

$(vii)$ *Cualquier subconjunto convexo maximal de* $B_{L(X)}$ *contiene un girado del operador identidad.*

*Demostración.* $(i) \Rightarrow (ii)$. Si $n(X) = 1$, el Lema 3.3.9 nos dice que

$$\|T\| = \sup\{|x^{**}(T^*x^*)| : x^* \in \mathrm{ex}\,(B_{X^*}), x^{**} \in \mathrm{ex}\,(B_{X^{**}}), x^{**}(x^*) = 1\},$$

con lo que $(ii)$ se deduce del Teorema del bipolar.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Basta usar el Teorema de Krein-Milman "revertido".

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Tomamos $K = \{\phi \in L(X)^* : \|\phi\| = \phi(Id) = 1\}$, que es un subconjunto $w^*$-compacto de $L(X)^*$, y definimos $J : L(X) \to C(K)$ por

$$[J(T)](\phi) = \phi(T) \qquad (\phi \in K,\ T \in L(X)).$$

La condición $(iii)$ nos dice que $J$ es isométrica, y el resto es claro.

$(iv) \Rightarrow (v)$. Basta observar que para cualquier $f \in C(K)$ se tiene

$$\max_{\lambda \in \mathbb{T}} \|I + \lambda f\| = 1 + \|f\|$$

donde $I$ es la función constantemente igual a 1 en $K$.

$(v) \Rightarrow (i)$. Se aplica la Proposición 3.2.4.

$(v) \Rightarrow (vi)$. Es claramente suficiente probar que $B_{L(X)}$ está contenida en cualquiera de las bolas que se consideran en $(vi)$. Para ello, comenzamos reescribiendo $(v)$ en la forma

$$\max_{\lambda \in \mathbb{T}} \|\lambda Id - T\| = 1 + \|T\| \qquad (T \in L(X)).$$

Si ahora $\rho$ es el radio de una bola cerrada de centro $T \in L(X)$ que contiene al conjunto $\{\lambda Id : \lambda \in \mathbb{T}\}$, deberá ser $\rho \geq 1 + \|T\|$, con lo que dicha bola contiene a $B_{L(X)}$, como se quería.

$(vi) \Rightarrow (v)$. Fijado $T \in L(X)$ y notando

$$\rho = \max_{\lambda \in \mathbb{T}} \|Id + \lambda T\| = \max_{\lambda \in \mathbb{T}} \|\lambda Id - T\|,$$

es claro que la bola cerrada de centro $T$ y radio $\rho$ contiene al conjunto $\{\lambda Id : \lambda \in \mathbb{T}\}$ luego, por $(vi)$, también contendrá a $B_{L(X)}$, lo que claramente implica $\rho \geq 1 + \|T\|$; la desigualdad contraria es evidente.

$(iii) \Leftrightarrow (vii)$. Usando que

$$\operatorname{exm}\left(B_{L(X)^*}\right) \subseteq \operatorname{ex}\left(B_{L(X)^*}\right) \subseteq \overline{\operatorname{exm}\left(B_{L(X)^*}\right)}^{w^*},$$

la afirmación $(iii)$ equivale a que $|\phi(Id)| = 1$ para todo $\phi \in \operatorname{exm}\left(B_{L(X)^*}\right)$, que es exactamente lo que se afirma en $(vii)$, en vista de la relación entre subconjuntos convexos maximales y puntos extremos maximales. □

Nótese el parecido entre la condición $(ii)$ del teorema anterior y la que, según la Proposición 3.3.10, caracteriza a los espacios con índice numérico compacto 1. En ambos casos se parte esencialmente del mismo conjunto, las parejas de puntos $x^* \in \operatorname{ex}(B_{X^*})$, $x^{**} \in \operatorname{ex}(B_{X^{**}})$ tales que $|x^{**}(x^*)| = 1$, visto en un caso como subconjunto de $L(X)^*$ y en otro caso dentro de $X^* \oplus_\infty X^{**} = (X \oplus_1 X^*)^*$, y se toma la envolvente convexa y $w^*$-cerrada. Cabe preguntarse si dicha condición $(ii)$ puede ser útil en el intento de probar que un espacio de Banach $X$ con $n(X) = 1$ ha de verificar $|x^{**}(x^*)| = 1$ para cualesquiera $x^* \in \operatorname{ex}(B_{X^*})$ y $x^{**} \in \operatorname{ex}(B_{X^{**}})$ (el recíproco de la Proposición 2.2.1 o la afirmación (5) $\Rightarrow$ (3) en la Nota 3.1.8). Ahora podemos explicar la dificultad que tiene dicho intento. Sin ninguna información adicional sobre el espacio de Banach $X$, difícilmente podremos usar operadores no compactos en $X$, luego de la hipótesis $n(X) = 1$ sólo aprovecharemos que se tiene $v(T) = \|T\|$ para $T \in K(X)$, es decir, sólo usaremos $n_K(X) = 1$; pero la hipótesis $n_K(X) = 1$ no nos puede llevar a la conclusión deseada, pues entonces se tendría (por la Proposición 2.2.1) que $n(X) = 1$ siempre que $n_K(X) = 1$, lo cual es falso, como sabemos.

De las restantes caracterizaciones de los espacios con índice numérico 1 que aparecen en el Teorema 3.4.1, la condición $(iv)$ es probablemente la más sugestiva, pues muestra a $L(X)$ como un "espacio de funciones". De hecho se puede afinar más, ya que en la demostración de $(iii) \Rightarrow (iv)$ se observa que $K$ es convexo y que, para cada $T \in L(X)$, $J(T)$ es una función afín en $K$; no hemos querido profundizar en esta dirección. Las condiciones $(iii)$, $(v)$, $(vi)$ y $(vii)$ son propiedades geométricas muy intuitivas de los "espacios de funciones" que se trasladan a $L(X)$ cuando $n(X) = 1$. Sobre la posibilidad de que un espacio de operadores se identifique totalmente con un espacio del tipo $C(K)$ puede consultarse [90].

En otro orden de cosas, recordemos que en la sección 3.2 comentamos que las álgebras de funciones tienen índice numérico 1. Podemos generalizar este resultado a ciertos subespacios de espacios de funciones continuas:

**3.4.2. Proposición.** *Si $\Omega$ un espacio topológico de Hausdorff, $X$ un espacio de Banach y $J : X \to C_b(\Omega)$ una isometría lineal tal que*

$$|x^{**}(J^*\delta_s)| = 1 \qquad (s \in \Omega,\ x^{**} \in \operatorname{ex}(B_{X^{**}})),$$

*entonces $n(X) = 1$.*

*Demostración.* No es difícil comprobar que, para $T \in L(X)$, se tiene

$$\|T\| = \sup\{\|T^*(J^*\delta_s)\| \,:\, s \in \Omega\}.$$

Fijado $s \in \Omega$, podemos encontrar $x^{**} \in \operatorname{ex}(B_{X^{**}})$ tal que

$$|x^{**}[T^*(J^*\delta_s)]| = \|T^*(J^*\delta_s)\|$$

y como hemos supuesto que $|x^{**}(J^*\delta_s)| = 1$, deducimos

$$v(T) = v(T^*) \geq \|T^*(J^*\delta_s)\|.$$

La arbitrariedad de $s \in \Omega$ nos permite concluir $v(T) = \|T\|$. $\square$

En su trabajo de 1997, D. Werner [107] introduce la siguiente definición: si $\Omega$ es un espacio topológico de Hausdorff, se dice que un espacio de Banach $X$ está *bien incrustado* en $C_b(\Omega)$ si existe una isometría lineal $J : X \to C_b(\Omega)$ tal que, para todo $s \in \Omega$, notando $p_s = J^*\delta_s$, se tiene:

(N1) $\|p_s\| = 1$

(N2) La recta generada por $p_s$ es un $L$-sumando de $X^*$,

Nótese que, identificando $X$ con $J(X)$, $p_s$ no es otra cosa que la restricción a $X$ de $\delta_s$. En [107, Corollary 2.2] se prueba que todo espacio de Banach $X$ que esté bien incrustado en $C_b(\Omega)$ tiene índice numérico 1. Este resultado se puede deducir de la proposición anterior. De hecho, usando una debilitación de los $L$-sumandos debida a Å. Lima [66] podremos entender mejor la situación. Un subespacio cerrado $Y$ de un espacio de Banach $X$ es un *semi-L-sumando* de $X$ si para cada $x \in X$, existe un $y \in Y$ que verifica

$$\|x - z\| = \|x - y\| + \|y - z\|$$

para todo $z \in Y$. Si $P$ es una $L$-proyección de $X$ sobre $Y$, la condición anterior se cumple tomando $y = Px$, luego los $L$-sumandos son semi-$L$-sumandos, no siendo cierto el recíproco. En [67, Theorem 3.1] se demuestra que, dado un espacio de Banach real $X$, para que la recta generada por $x \in S_X$ sea un semi-$L$-sumando de $X$, es condición necesaria y suficiente que $|x^*(x)| = 1$ para todo $x^* \in \mathrm{ex}\,(B_{X^*})$. En caso complejo, esta última condición sigue siendo necesaria pero no es, en general, suficiente. En un alarde de imaginación, si $\Omega$ es un espacio topológico de Hausdorff, diremos que un espacio de Banach $X$, real o complejo, está *casi bien incrustado* en $C_b(\Omega)$ cuando exista una isometría lineal $J : X \to C_b(\Omega)$ tal que, para todo $s \in \Omega$, se tiene (N1) y

(N2') La recta generada por $p_s$ es un semi-$L$-sumando de $X^*$.

En vista de los comentarios anteriores, de la Proposición 3.4.2 podemos deducir la siguiente consecuencia, que en caso real es de hecho equivalente a dicha proposición.

**3.4.3. Corolario.** *Si $\Omega$ es un espacio topológico de Hausdorff y $X$ un espacio de Banach casi bien incrustado en $C_b(\Omega)$, entonces $n(X) = 1$.*

Existen, como veremos enseguida, espacios casi bien incrustados que no pueden estar bien incrustados. Por tanto, el corolario anterior mejora el resultado de D. Werner ya comentado. De hecho, para espacios de Banach con la RNP, dicho corolario agota todos los espacios reales con índice numérico 1, mientras que, en el caso complejo es la Proposición 3.4.2 la que los agota:

**3.4.4. Teorema.** *Sea $X$ un espacio de Banach tal que $B_X = \overline{co}(\mathrm{dent}(B_X))$. Entonces, la siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(i)* $n(X) = 1$.

*(ii)* *$X$ es un casi-CL-espacio.*

*(iii)* *$|x^{**}(x^*)| = 1$ para cualesquiera $x^* \in \mathrm{ex}(B_{X^*})$ y $x^{**} \in \mathrm{ex}(B_{X^{**}})$.*

*(iv)* *Existe un espacio topológico compacto de Hausdorff $K$ y una isometría lineal $J : X \to C(K)$ tal que $|x^{**}(J^*\delta_s)| = 1$ para cualesquiera $x^{**} \in \mathrm{ex}(B_{X^{**}})$ y $s \in \Omega$.*

*En el caso real, las cuatro afirmaciones anteriores son equivalentes a que exista un compacto de Hausdorff $K$, tal que $X$ está casi bien incrustado en $C(K)$.*

*Demostración.* Supongamos primero que $n(X) = 1$ y veamos que entonces $(ii)$, $(iii)$ y $(iv)$ son ciertas. Fijado $x^* \in B_{X^*}$, observemos que

$$x^* \in \mathrm{ex}(B_{X^*}) \quad \Leftrightarrow \quad |x^*(x)| = 1 \ \text{ para todo } x \in \mathrm{dent}(B_X). \tag{3.6}$$

La implicación hacia la derecha es parte del Lema 2.2.2; recíprocamente, si escribimos $x^* = \dfrac{y^* + z^*}{2}$ con $y^*, z^* \in B_{X^*}$, la condición $|x^*(x)| = 1$ implica evidentemente que $y^*(x) = z^*(x)$ para todo $x \in \operatorname{dent}(B_X)$, luego $y^* = z^*$ ya que $\operatorname{dent}(B_X)$ separa los puntos de $X^*$.

Si ahora $F$ es un subconjunto convexo maximal de $S_X$, que tendrá la forma $F = \{x \in S_X \ : \ x^*(x) = 1\}$ para algún $x^* \in \operatorname{exm}(B_{X^*})$, (3.6) nos dice que

$$\operatorname{dent}(B_X) \subseteq \mathbb{T}F,$$

luego $B_X = \overline{\operatorname{co}}(\mathbb{T}F)$ y $X$ es un casi-CL-espacio. Por otro lado, como

$$B_{X^{**}} = \overline{\operatorname{co}}^{w^*}(\operatorname{dent}(B_X)),$$

el Teorema de Krein-Milman "revertido" nos dice que

$$\operatorname{ex}(B_{X^{**}}) \subseteq \overline{\operatorname{dent}(B_X)}^{w^*},$$

con lo que $(iii)$ se deduce de (3.6). Para obtener $(iv)$, obsérvese que la caracterización dada por (3.6) nos dice que el conjunto $K = \operatorname{ex}(B_{X^*})$ es $w^*$-compacto, y tenemos una obvia inyección isométrica $J$ de $X$ en $C(K)$. Puesto que $J^*\delta_s = s$ para todo $s \in K$, la condición $(iii)$, ya probada, nos dice que $|x^{**}(J^*\delta_s)| = 1$ para cualesquiera $x^{**} \in \operatorname{ex}(B_{X^{**}})$ y $s \in K$, con lo que hemos probado $(iv)$. Es ya sabido que $(ii) \Rightarrow (i)$ (Proposición 3.1.5), $(iii) \Rightarrow (i)$ (Proposición 2.2.1) y $(iv) \Rightarrow (i)$ (Proposición 3.4.2).

Finalmente, en caso real, $(iv)$ es equivalente a que $X$ esté casi bien incrustado en $C(K)$ por el resultado de Lima [67, Theorem 3.1] ya comentado. □

Podemos ya obtener fácilmente los ejemplos prometidos:

**3.4.5. Ejemplo.** *Espacios casi bien incrustados que no pueden ser bien incrustados.*

Según acabamos de ver, cualquier espacio de Banach real $X$, que tenga la RNP y verifique $n(X) = 1$, está casi bien incrustado en $C(\operatorname{ex}(B_{X^*}))$. Por ejemplo, $l_1$ está casi bien incrustado en $C(\Delta)$, donde $\Delta$ es el conjunto de Cantor. Sin embargo, $l_1$ no puede estar bien incrustado en $C_b(\Omega)$ para ningún espacio topológico de Hausdorff $\Omega$, por la sencilla razón de que $l_1^* = l_\infty$ no contiene $L$-sumandos no triviales. Esto último es caso muy particular del Teorema $L$-$M$ de E. Behrends [14, Theorem 1.13] pero, en realidad aquí sólo precisamos que la recta generada por un $y \in \mathrm{ex}\,(B_{l_\infty})$ no sea un $L$-sumando de $l_\infty$, y esto se puede comprobar directamente.

Podemos también dar un ejemplo de dimensión finita: el CL-espacio real $X$, de dimensión 5, descrito en el Ejemplo 1.3.1. Nuevamente es fácil comprobar que $X^*$ no tiene $L$-sumandos no triviales, equivalentemente, que $X$ no contiene $M$-sumandos no triviales.

Sin salirnos del ambiente de los espacios de Banach reales con la RNP, podemos "dualizar" la propiedad de tener índice numérico 1, aunque no sabemos, aún en este caso, si el índice numérico de un espacio coincide con el de su dual.

**3.4.6. Proposición.** *Si $X$ es un espacio de Banach real, con la RNP y $n(X) = 1$, entonces $n(X^*) = 1$.*

*Demostración.* Fijamos $x \in \mathrm{dent}\,(B_X)$ y el Lema 2.2.2 nos dice que $|x^*(x)| = 1$ para todo $x^* \in \mathrm{ex}\,(B_{X^*})$. Por estar en caso real, podemos aplicar [67, Theorem 3.1] para obtener que la recta generada por $x$ es un semi-$L$-sumando de $X$ y, gracias a [66, Theorem 6.14], también es un semi-$L$-sumando de $X^{**}$. Usando de nuevo [67, Theorem 3.1] pero en la dirección opuesta, obtenemos que $|x^{***}(x)| = 1$ para todo $x^{***} \in \mathrm{ex}\,(B_{X^{***}})$. En suma, hemos probado que

$$|x^{***}(x)| = 1 \tag{3.7}$$

para cualesquiera $x^{***} \in \mathrm{ex}\,(B_{X^{***}})$ y $x \in \mathrm{dent}\,(B_X)$.

Para $S \in L(X^*)$, usamos que $B_{X^{**}} = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}\,(\mathrm{dent}\,(B_X))$ y el Teorema de Krein-

Milman, para obtener

$$\|S^*\| = \sup\{|x^{***}(S^*x)| : x^{***} \in \mathrm{ex}\,(B_{X^{***}}),\, x \in \mathrm{dent}\,(B_X)\},$$

lo que unido a (3.7) nos dice que $\|S^*\| \leq v(S^*)$, luego $\|S\| = v(S)$ y hemos probado que $n(X^*) = 1$. □

En esta línea puede también conseguirse que, bajo condiciones de tipo isomórfico, la propiedad de ser un casi-CL-espacio pase al dual.

**3.4.7. Proposición.** *Si $X$ es un casi-CL-espacio que no contiene a $l_1$, entonces $X^*$ también es un casi-CL-espacio.*

*Demostración.* Fijamos un subconjunto convexo maximal $F$ de $S_{X^*}$, tomamos un punto extremo $x^{**} \in B_{X^{**}}$ tal que $F = \{x^* \in S_{X^*} \,:\, x^{**}(x^*) = 1\}$ y el Lema 3.1.4 nos dice que

$$\mathrm{exm}\,(B_{X^*}) \subseteq \mathbb{T}F.$$

Ahora bien, puesto que $\mathrm{exm}\,(B_{X^*})$ es una frontera para $X$, y $X$ no contiene a $l_1$, podemos usar un resultado de G. Godefroy [50, Theorem III.1] para obtener que

$$B_{X^*} = \overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{exm}\,(B_{X^*})),$$

donde el cierre se toma en la topología de la norma de $X^*$, y esto es lo importante. Deducimos que $B_{X^*} = \overline{\mathrm{co}}(\mathbb{T}F)$ y $X^*$ es un casi-CL-espacio. □

# Bibliografía


[1] Y. ABRAMOVICH, *A generalization of a theorem of J. Holub*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 937–939.

[2] Y. ABRAMOVICH, *New classes of spaces on which compact operators satisfy the Daugavet equation*, J. Operator Theory **25** (1991), 331–345.

[3] Y. A. ABRAMOVICH, C. D. ALIPRANTIS, AND O. BURKINSHAW, *The Daugavet equation in uniformly convex Banach spaces*, J. Funct. Analysis **97** (1991), 215–230.

[4] M. D. ACOSTA, *Operator that attain its numerical radius and CL-spaces*, Extracta Mathematicae **5** (1990), 138–140.

[5] M. D. ACOSTA, *Operadores que alcanzan su radio numérico*, Tesis doctoral, Secretariado de Publicaciones, Universidad de Granada 1990.

[6] M. D. ACOSTA, *Every real Banach space can be renormed to satisfy the denseness of numerical radius attaining operators*, Israel J. Math. **81** (1993), 273–280.

[7] M. D. ACOSTA, AND R. PAYÁ, *Denseness of operators whose second adjoints attains their numerical radii*, Proc. Amer. Math. Soc. **105** (1989), 97–101.

[8] M. ACOSTA, AND R. PAYÁ, *Numerical radius attaining operators and the Radon-Nikodým property*, Bull. London Math. Soc. **25** (1993), 67–73.

[9] M. D. ACOSTA, AND M. RUIZ-GALÁN, *A version of James' Theorem for numerical radius*, Bull. London Math. Soc. **31** (1999), 67–74.

[10] E. ALFSEN, AND E. EFFROS, *Structure in real Banach spaces*, Ann. of Math. **96** (1972), 98–173.

[11] S. I. ANSARI, *Essential disjointness and the Daugavet equation*, Houston J. Math. **19** (1993), 587–601.

[12] E. ASPLUND, *Fréchet differentiability of convex functions*, Acta Math. **121** (1968), 31–47.

[13] F. L. BAUER, *On the field of values subordinate to a norm*, Numer. Math. **4** (1962), 103–111.

[14] E. BEHRENDS, *M-structure and the Banach-Stone Theorem*, Lecture Notes in Math. **736**, Springer-Verlag, Berlin 1979.

[15] E. BEHRENDS ET AL., *$L^p$-structure in real Banach spaces*, Lecture Notes in Math. **613**, Springer-Verlag, Berlin 1977.

[16] C. BESSAGA, AND A. PELCZYNSKI, *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*, Studia Math. **17** (1958), 151–164.

[17] E. BISHOP, AND R. R. PHELPS, *A proof that every Banach space is subreflexive*, Bull. Amer. Math. Soc **67** (1961), 97–98.

[18] H. F. BOHNENBLUST, AND S. KARLIN, *Geometrical properties of the unit sphere in Banach algebras*, Ann. of Math. **62** (1955), 217–229.

[19] B. BOLLOBÁS, *An extension to the theorem of Bishop and Phelps*, Bull. London Math. Soc. **2** (1970), 181–182.

[20] F. F. BONSALL, AND J. DUNCAN, *Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras*, London Math. Soc. Lecture Note Series **2**, Cambridge 1971.

[21] F. F. BONSALL, AND J. DUNCAN, *Numerical Ranges II*, London Math. Soc. Lecture Note Series **10**, Cambridge 1973.

[22] F. F. BONSALL, AND J. DUNCAN, Numerical ranges, In: *Studies in functional analysis* (R. Bartle, Ed.), pp. 1–49, MAA Studies in Math. **21**, 1980.

[23] R. R. BOURGIN, *Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon-Nikodym Property*, Lecture Notes in Math. **993**, Springer-Verlag, Berlin 1983.

[24] J. BUNCE, *Shorted operators and the structure of operators with numerical radius one*, Integral Equations Oper. Theory **11** (1988), 287–291.

[25] C. CARDASSI, *Numerical radius attaining operators on $C(K)$*, Proc. Amer. Math. Soc. **95** (1985), 537–543.

[26] C. CARDASSI, *Density of numerical radius attaining operators on some reflexive spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. **31** (1985), 1–3.

[27] J. B. CONWAY, *A Course in Functional Analysis*, Graduate Texts in Math. **96**, Springer-Verlag, New York, 1985.

[28] Y. S. CHOI, AND S. G. KIM, *Norm or numerical radius attaining multilinear mappings and polynomials*, J. London Math. Soc. **54** (1996), 135–147.

[29] K. DAS, S. MAJUMDAR, AND B. SIMS, *Subsets characterizing the closure of the numerical range*, J. Aust. Math. Soc., **40** (1986), 1–4.

[30] K. DAS, S. MAJUMDAR, AND B. SIMS, *Restricted numerical range and weak convergence on the boundary of the numerical range*, J. Math. Phys. Sci. **21** (1987), 35–42.

[31] I. K. DAUGAVET, *On a property of completely continuous operators in the space C*, Uspekhi Mat. Nauk **18** (1963), 157–158 (Russian).

[32] A. DEFANT, AND K. FLORET, *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland Math. Studies **176**, Amsterdam 1993.

[33] R. DEVILLE, G. GODEFROY, AND V. ZIZLER, *Smoothness and Renormings in Banach spaces*, Pitman Monographs 64, New York 1993.

[34] J. DIESTEL, AND J. J. UHL, *Vector Measures*, Math. Surveys **15**, AMS, Providence 1977.

[35] J. DUNCAN, C. M. MCGREGOR, J. D. PRYCE, AND A. J. WHITE, *The numerical index of a normed space*, J. London Math. Soc. **2** (1970), 481–488.

[36] N. DUNFORD, AND J. T. SCHWARTZ, *Linear operators. Part I: General theory*, John Wiley & Sons, New York 1957.

[37] J. ELTON, *Extremely weakly unconditionally convergent series*, Israel J. Math. **40** (1981), 255–258.

[38] R. EVANS, *Projectionen mit normbedingungen in reellen Banachraumen*, Disertation, Freie Universitat Berlin 1974.

[39] M. FAN, *A result about the numerical range of operators*, Chin. Ann. Math. **7** (1986), 408–412.

[40] A. FEINTUCH, AND A. MARKUS, *The Toeplitz-Hausdorff Theorem and robust stability theory*, Math. Intelligencer **21** (1999), 33–37.

[41] C. FINET, AND W. SCHACHERMAYER, *Equivalent norms on separable Asplund spaces*, Studia Math. **92** (1989), 275–283.

[42] C. FINET, M. MARTÍN, AND R. PAYÁ, *Numerical index and renorming*, preprint.

[43] U. FIXMAN, *On the numerical range of a Volterra operator in $L_p$*, aparecerá en Int. Eq. Oper. Theory.

[44] U. FIXMAN, F. OKOH, AND G. K. R. RAO, *An eigenvalue problem for the numerical range of a bounded linear operator*, Int. Eq. Oper. Theory **31** (1998), 421–435.

[45] C. FOIAS, AND I. SINGER, *Points of diffusion of linear operators and almost diffuse operators in spaces of continuous functions*, Math. Z. **87** (1965), 434–450.

[46] V. P. FONF, *One property of Lindenstrauss-Phelps spaces*, Funct. Anal. Appl. **13** (1979), 66–67.

[47] V. P. FONF, *Weakly extremal properties of Banach spaces*, Math. Notes **45** (1989), 488–494.

[48] R. E. FULLERTON, *Geometrical characterization of certain function spaces.* In: Proc. Inter. Sympos. Linear spaces (Jerusalem 1960), pp. 227–236. Pergamon, Oxford 1961.

[49] B. W. GLICKFELD, *On an inequality of Banach algebra geometry and semi-inner-product space theory*, Illinois J. Math. **14** (1970), 76–81.

[50] G. GODEFROY, *Boundaries of a convex set an interpolation sets*, Math. Ann. **277** (1987), 173–184.

[51] G. GODEFROY, N. J. KALTON, AND P. D. SAPHAR, *Unconditional ideals in Banach spaces*, Studia Math. **104** (1993), 13–59.

[52] B. V. GODUN, AND S. L. TROYANSKI, *Renorming Banach spaces with fundamental biorthogonal system*, Contemporary Math. **144** (1993), 119–126.

[53] H. GOWDA, AND C. PUTTAMADAIAH, *On spatial numerical range of operators on Banach spaces*, Indian J. Pure Appl. Math. **19** (1988), 177–182.

[54] W. T. GOWERS, *A solution to Banach's hyperplane problem* Bull. London Math. Soc. **26** (1994), 523–530.

[55] K. E. GUSTAFSON, AND D. K. M. RAO, *Numerical range. The field of values of linear operators and matrices*, Springer-Verlag, New York 1997.

[56] P. HALMOS, *Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity*, Chelsea Publisihg Company, New York 1951.

[57] P. HALMOS, *A Hilbert space problem book*, Van Nostrand, New York, 1967.

[58] O. HANNER, *Intersections of translates of convex bodies*, Math. Scand. **4** (1956), 65–87.

[59] A. B. HANSEN, AND Å. LIMA, *The structure of finite dimensional Banach spaces with the 3.2. intersection property*, Acta Math. **146** (1981), 1–23.

[60] P. HARMAND, D. WERNER, AND D. WERNER, *M-ideals in Banach spaces and Banach algebras*, Lecture Notes in Math. **1547**, Springer-Verlag, Berlin 1993.

[61] J. R. HOLUB, *A property of weakly compact operators on* $C[0,1]$, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 396–398.

[62] V. M. KADETS, *Some remarks concerning the Daugavet equation*, Quaestiones Math. **19** (1996), 225–235.

[63] V. M. KADETS, *A Generalization of a Daugavet Theorem with Applications to the Space C Geometry*, Funct. Anal. Appl. **31** (1997), 207–209.

[64] V. M. KADETS, R. V. SHVIDKOY, G. G. SIROTKIN, AND D. WERNER, *Banach spaces with the Daugavet property*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 855–873.

[65] H. E. LACEY, *The isometric theory of classical Banach spaces*, Springer-Verlag, Berlin 1972.

[66] Å. LIMA, *Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **227** (1977), 1–62.

[67] Å. LIMA, *Intersection properties of balls in spaces of compact operators*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **28** (1978), 35–65.

[68] Å. LIMA, *On extreme operators on finite-dimensional Banach spaces whose unit balls are polytopes*, Ark. Mat., **19** (1981), 97–116.

[69] Å. LIMA, *The metric approximation property, norm-one projections and intersection properties of balls*, Israel J. Math. **84** (1993), 451–475.

[70] B. L. LIN, P. K. LIN, AND S. L. TROYANSKI, *Characterizations of denting points*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), 526–528.

[71] J. LINDENSTRAUSS, *Extension of compact operators*, Memoirs Amer. Math. Soc. **48**, Providence 1964.

[72] J. LINDENSTRAUSS, *On operators which attain their norm*, Israel J. Math. **1** (1968), 139–148.

[73] J. LINDENSTRAUSS, AND R. R. PHELPS, *Extreme point properties of convex bodies in reflexive Banach spaces*, Israel J. Math. **6** (1968), 39–48.

[74] J. LINDENSTRAUSS, AND L. TZAFRIRI, *Clasical Banach Spaces I: Sequence Spaces*, Springer-Verlag, Berlin 1977.

[75] G. LÓPEZ, M. MARTÍN, AND R. PAYÁ, *Real Banach spaces with numerical index 1*, Bull. London Math. Soc. **31** (1999), 207–212.

[76] G. Y. LOZANOVSKII, *On almost integral operators in KB-spaces*, Vestnik Leningrad Univ. Mat. Mekh. Astr. **7** (1966), 35–44.

[77] G. LUMER, *Semi-inner-product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **100** (1961), 29–43.

[78] M. MARTÍN, *A survey on the numerical index of a Banach space*, aparecerá en Extracta Math.

[79] M. MARTÍN, AND R. PAYÁ, *Numerical index of vertor-valued function spaces*, aparecerá en Studia Math.

[80] C. M. MCGREGOR, *Finite dimensional normed linear spaces with numerical index* 1, J. London Math. Soc. (2), **3** (1971), 717–721.

[81] J. P. MORENO, *On geometry of Banach spaces with property* $\alpha$, J. Math. Anal. App. **201** (1996), 600–608.

[82] J. P. MORENO, *Geometry of Banach spaces with* $(\alpha,\varepsilon)$*-property or* $(\beta,\varepsilon)$*-property*, Rocky Mountain J. Math. **27** (1997), 241–256.

[83] S. NEGREPONTIS, *Banach spaces and topology*, in: "Handbook of set theoretic topology" (K. Kunen and J. E. Vaughan, eds.), North Holland, Amsterdam, 1984.

[84] J. R. PARTINGTON, *Norm attaining operators*, Israel J. Math. **43** (1982), 273–276.

[85] R. PAYÁ, *Técnicas de rango numérico y estructura en espacios normados*, Tesis doctorales de la Universidad de Granada **319**, 1980.

[86] R. PAYÁ, *Numerical range of operators and structure in Banach spaces*, Quart. J. Math. Oxford **33** (1982), 357–364.

[87] R. PAYÁ, *A counterexample on numerical radius attaining operators*, Israel J. Math. **79** (1992), 83–101.

[88] R. R. PHELPS, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, Lecture Notes in Math. **1364**, Springer-Verlag, Berlin 1993.

[89] T. S. S. R. K. RAO, *Intersection properties of balls in tensor products of some Banach spaces – II*, Indian J. pure appl. Math. **21** (1990), 275–284.

[90] T. S. S. R. K. RAO, *Spaces of operators as continuous functions spaces*, Extracta Math. **12** (1997), 251–253.

[91] T. S. S. R. K. RAO, A. K. ROY, AND K. SUNDARESAN, *Intersection properties of balls in tensor products of some Banach spaces*, Math. Scand. **65** (1989), 103–118.

[92] S. REICH, *Product formulas, nonlinear semigroups, and accretive operators*, J. Funct. Anal. **36** (1980), 147–168.

[93] S. REISNER, *Certain Banach spaces associated with graphs and CL-spaces with 1-unconditonal bases*, J. London Math. Soc (2) **43** (1991), 137–148.

[94] A. RODRIGUEZ-PALACIOS, Jordan structures in Analysis. In: *Jordan Algebras* (W. Kaup, K. McCrimmon, H. Petersson Eds.). Walter de Gruyter, Berlin, New York 1994, pp. 97–186.

[95] H. P. ROSENTHAL, *A characterization of Banach spaces containing $l_1$*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **71** (1974), 2411–2413.

[96] W. M. RUESS, AND C. P. STEGALL, *Extreme points in duals of operator spaces*, Math. Ann. **261** (1982), 535–546.

[97] M. RUIZ-GALÁN, *Caracterizaciones de la reflexividad*, Tesis doctoral, Secretariado de Publicaciones, Universidad de Granada 1999.

[98] W. SCHACHERMAYER, *Norm attaining operators and renormings of Banach spaces*, Israel J. Math **44** (1983), 201–212.

[99] K. D. SCHMIDT, *Daugavet's equation and orthomorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 905–911.

[100] R. V. SHVIDKOY, *Geometric aspects of the Daugavet property*, aparecerá en J. Funct. Anal.

[101] C. STEGALL, *The duality between Asplund spaces and spaces with the Radon-Nikodým property*, Israel J. Math. **29** (1978), 408–412.

[102] K. TILLEKERATNE, *Spatial numerical range of an operator*, Proc. Camb. Phil. Soc. **76** (1974), 515–520.

[103] O. TOEPLITZ, *Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer*, Math. Zeit. **2** (1918), 187–197.

[104] M. VALDIVIA, *Topological direct sum decomposition of Banach spaces*, Israel J. Math. **71** (1990), 289–296.

[105] L. WEIS, AND D. WERNER, *The Daugavet equation for operators not fixing a copy of* $C[0,1]$, J. Operator Theory **39** (1998), 89–98.

[106] D. WERNER, *An elementary approach to the Daugavet equation*, in: "Interaction between Functional Analysis, Harmonic Analysis and Probability" (N. Kalton, E. Saab and S. Montgomery-Smith editors). Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **175** (1994), 449–454.

[107] D. WERNER, *The Daugavet equation for operators on function spaces*, J. Funct. Anal. **143** (1997), 117–128.

[108] P. WOJTASZCZYK, *Some remark on the Daugavet equation*, Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992), 1047–1052.

[109] Y. YANG, *Numerical ranges of operators on Hilbert* $C^*$*-modules*, Bull. Korean Math. Soc. **24** (1987), 52–52.

[110] D. T. YOST, *Asplund spaces for beginners*, Acta Univ. Carolinae Math. Phys. **34** (1993), 159–177.

# Glosario