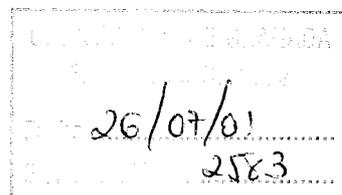
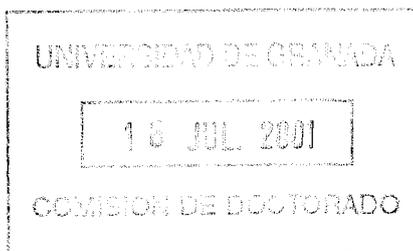
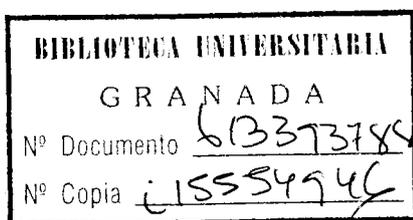


T S 110

Métodos asintóticos en ecuaciones en derivadas parciales originadas en teoría cinética y cuántica



JUAN JOSÉ MUÑOZ NIETO



DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

A mis tres mujeres

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento a todas aquellas personas que con paciencia, interés, trabajo, tiempo y hasta sentido del humor han contribuido de forma directa o indirecta en la realización de cada trabajo contenido en esta memoria, sin todos ellos nunca habría sido posible elaborarla.

Gracias...

al Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada y en particular a cada uno de mis compañeros, por facilitarme un estupendo material científico, un ambiente idóneo de trabajo y por haberme acogido como uno más de la gran familia que constituye,

al proyecto europeo TMR (*Training Movility and Research program*), *Asymptotic Methods in Kinetic Theory* de la Unión Europea, por haber puesto a mi disposición los medios necesarios para colaborar con Universidades de toda Europa,

a todos los miembros del *Laboratoire Jean Alexandre Dieudonné* de Niza, por su calurosa acogida durante las estancias que allí he realizado, por ofrecerme la posibilidad de conocer y colaborar en proyectos, discusiones y trabajos de diversa índole que han marcado fuertemente mi formación científica y personal,

al Profesor Luis Bonilla y sus colaboradores de la Universidad Carlos III de Madrid, por acogerme durante mi breve estancia entre ellos y orientarme en el comienzo de mi actividad investigadora,

a los Profesores Thierry Goudon y Giuseppe Toscani, por acceder gentilmente a evaluar esta tesis para obtener la mención de *Doctor Europeo*,

a los Profesores Robert T. Glassey, Frédéric Poupaud, Yann Brenier, Juan José López Velázquez y Enrique Ruiz Arriola por haber aceptado formar parte del tribunal de esta tesis,

También quiero expresar mi más sincera gratitud...

a mi familia y amigos, especialmente a mi madre y a Nona, por haberme dado tanto apoyo y ánimos durante estos años, por haber depositado toda su confianza en mí y por haber soportado con paciencia y cariño tantas ausencias, desvelos y malhumores,

a aquellos que me animaron y apoyaron con todas sus fuerzas durante tanto tiempo y que sólo puedo ya guardar en el recuerdo,

a Frédéric, por haber despertado en mí inquietudes matemáticas que han sido y serán motor de mi trayectoria investigadora, por hacerme aprender de los errores, y por su calidad humana y científica que desborda a cuantos tenemos la oportunidad de tratar con él,

a Enrique, por darme una nueva perspectiva científica con la que enfocar los problemas y por su tremenda capacidad y dedicación que invita a ser tomada como ejemplo por los que aún estamos empezando,

a José Luis, por haber sido compañero y amigo inseparable en este tiempo y por infundirme desde la cercanía la pasión por el trabajo bien hecho,

a Juan, porque siendo mi *jefe* ha sido mi compañero, siendo mi director ha sido mi amigo, siendo mi maestro ha sido mi guía, siendo mi ejemplo ha sido mi motivación, porque con su grandeza me ha enseñado el valor de la humildad, con su experiencia me ha mostrado el camino del buen investigador y porque con su excelente condición humana y científica, su dedicación y su espíritu creativo me ha inculcado valores y conocimientos que espero y deseo sean el germen de una trayectoria personal e investigadora merecedora de la confianza puesta en mí.

Índice General

1	Introducción general	5
1.1	Ecuaciones de los semiconductores	5
1.2	Modelos para el polarón	9
1.3	Ecuaciones cinéticas	12
1.3.1	Cambio de escala para VFPF	16
1.3.2	Ecuaciones cinéticas estudiadas	18
2	Límite de campo alto para el sistema de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck	21
2.1	Introducción y principales resultados	21
2.2	Ecuación límite en una dimensión	28
2.3	Existencia y unicidad de la ecuación límite	33
2.3.1	Existencia de soluciones ε -aproximadas	34
2.3.2	Estimaciones <i>a priori</i>	38
2.3.3	Paso al límite. Existencia de soluciones regulares	43
2.3.4	Unicidad	45
2.3.5	Existencia de solución con dato inicial en L^1	47
2.3.6	Conexión con la ecuación de Hopf-Burgers	55
3	Unicidad de soluciones débiles en ecuaciones cuasi-lineales de primer orden	61
3.1	Introducción y principales resultados	61
3.2	La desigualdad de entropía	64
3.3	Unicidad y continuidad en tiempo	67
3.4	Aproximación por el método de partículas	70
3.4.1	El método de partículas	71
3.4.2	Características generalizadas de Filippov	72
3.4.3	Convergencia del método de partículas	74

4	Límite hidrodinámico de sistemas de <i>drift-diffusion</i> que modelan la dinámica de grandes poblaciones	79
4.1	Introducción	80
4.2	Existencia y propiedades de compacidad	82
4.2.1	Cotas uniformes y existencia	83
4.2.2	Soluciones globales para fuerzas atractivas en dimensión dos	86
4.2.3	Cotas para el campo y los momentos	87
4.3	Paso al límite	88
5	Sobre la evolución del polarón en una aproximación de campo medio	93
5.1	Introducción	93
5.2	Derivación de un modelo para el polarón	95
5.3	Formulación variacional y leyes de conservación	97
5.4	Existencia y unicidad de soluciones	99
5.4.1	Existencia y unicidad en $H^1(\mathbb{R}^3)$	100
5.4.2	Existencia y unicidad en $L^2(\mathbb{R}^3)$	104
5.5	Mínimo estacionario. Estabilidad de Liapunov	110
5.6	Estabilidad lineal para el polarón	112
6	Modelo generalizado de campo medio para el polarón	117
6.1	Introducción y comentarios	117
6.2	Un modelo generalizado para el polarón	118
6.3	Buen planteamiento del modelo, existencia y unicidad	121
	Bibliografía	129

Capítulo 1

Introducción general

1.1 Ecuaciones de los semiconductores

Esta memoria tiene como objetivo el estudio de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) no lineales que se pueden enmarcar en dos campos: la teoría cinética y la teoría cineto-cuántica. El lazo de unión entre los diferentes sistemas objeto de nuestro análisis es su motivación en la modelización en *teoría de semiconductores*. En el estudio de los fenómenos de transporte de carga a través de un semiconductor es necesario generalmente considerar varias etapas de diversa naturaleza, en las cuales han de utilizarse distintas aproximaciones para describir lo más fielmente su comportamiento. Por supuesto, estas consideraciones dependen en gran medida de los componentes del semiconductor (arseniuro de galio, arseniuro de aluminio, silicio,...) y del potencial externo aplicado.

En una de estas etapas los electrones atraviesan una barrera cuántica que produce interacciones entre el campo generado por la carga del electrón y los iones que vibran en torno a su posición de equilibrio (ver Figura 1.1). Si la barrera cuántica es suficientemente gruesa, es decir, si su anchura es similar o superior a la longitud media de onda asociada a los electrones, entonces tenemos el llamado *polarón*, es decir, un electrón en un cristal ionizado. El modelo matemático que habitualmente describe la evolución del polarón es el sistema de Schrödinger-Poisson

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\psi + V\psi, \\ \Delta_x V &= -|\psi|^2,\end{aligned}$$

cuya solución es una *función de ondas* compleja $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ y un potencial autoconsistente real $V : [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que depende de ψ ,

$V \equiv V[\psi]$. La constante \hbar es la *constante de Planck* y m es la masa de la partícula. En la siguiente Sección daremos algunos datos más sobre este sistema.

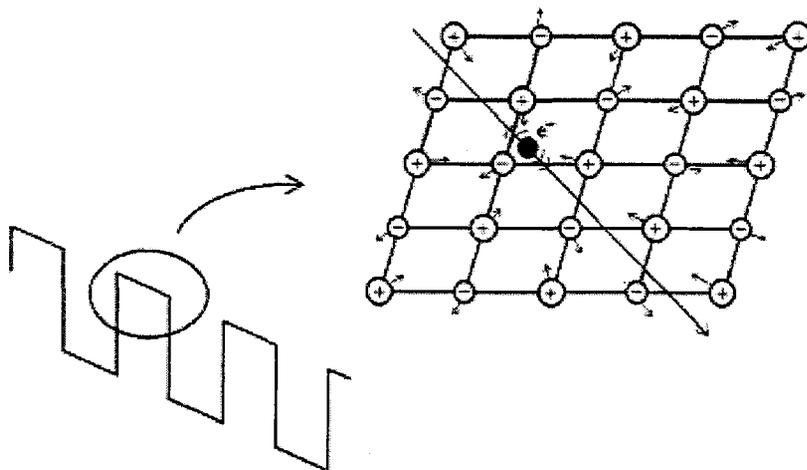


Figura 1.1: Sección del semiconductor

Otra descripción cineto-cuántica habitual para estudiar los fenómenos dinámicos que ocurren en los semiconductores consiste en plantear el sistema no a través de una función de ondas compleja $\psi(t, x)$, como en el caso de la ecuación de Schrödinger, sino a través de una *matriz de densidad* $\rho[\psi](t, x, y) = \psi(t, x)\bar{\psi}(t, y)$ obteniendo la ecuación de Von Newman. A partir de la matriz de densidad y haciendo una transformación de Fourier se obtiene la llamada *función de Wigner*

$$W[\psi](t, x, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \rho[\psi]\left(t, x + \frac{\hbar}{2m}y, x - \frac{\hbar}{2m}y\right) e^{-iy \cdot \xi} dy,$$

que introduce una nueva variable de velocidad ξ . Al contrario que para la función de ondas ψ , la transformada de Wigner $W[\psi]$ es real, aunque en general puede tomar valores negativos, por lo que no llega a alcanzar el rango de función de densidad propiamente dicha. No obstante, permite describir el sistema a través de una ecuación de Liouville clásica, que retiene los efectos cuánticos a través de un operador pseudo-diferencial construido sobre el potencial V que determina la dinámica del sistema. Más concretamente, si ψ es solución de la ecuación de Schrödinger y $W \equiv W[\psi]$ es su transformada de Wigner, entonces W verifica la ecuación de Wigner (ver [82, 54]):

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (\xi \cdot \nabla_x)W + \Theta[V]W = 0,$$

donde $\Theta[V]W$ es el operador pseudo-diferencial definido por:

$$\Theta[V]W(t, x, \xi) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{V(t, x + \frac{\hbar}{2m}\eta) - V(t, x - \frac{\hbar}{2m}\eta)}{\hbar} \\ \times W(t, x, \xi') e^{-i(\xi - \xi') \cdot \eta} d\xi' d\eta.$$

De esta forma se obtiene una formulación cineto-cuántica equivalente al sistema de Schrödinger-Poisson. Se trata del sistema de Wigner-Poisson

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (\xi \cdot \nabla_x)W + \Theta[V]W = 0, \\ \Delta_x V = -n, \quad n(t, x) := \int_{\mathbb{R}^3} W(t, x, \xi) d\xi.$$

La transformada de Wigner es muy útil en el paso al límite semiclásico (véase [51]), que consiste en hacer tender a cero una constante sin dimensiones que hace un papel similar al de la constante de Planck \hbar . La ventaja de $W[\psi]$ sobre la función de ondas ψ es que la segunda suele ser altamente oscilatoria y magnitudes observables relevantes como la densidad de carga $n = |\psi|^2$ o la corriente $j = (\hbar/m) \mathcal{I}m(\bar{\psi} \nabla_x \psi)$ son funciones cuadráticas de la misma mientras que en el formalismo de Wigner y en su correspondiente límite semiclásico pasan a ser funciones lineales de la función de Wigner. Es decir, si $W(t, x, \xi)$ converge en algún sentido hacia una función de densidad $f(t, x, \xi)$, se tiene

$$n(t, x) = |\psi(t, x)|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} W[\psi](t, x, \xi) d\xi, \\ n(t, x) \xrightarrow{\text{límite semiclásico}} \rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, \xi) d\xi$$

para la densidad, mientras que para la corriente se verifica

$$j(t, x) = \frac{\hbar}{m} \mathcal{I}m(\overline{\psi(t, x)} \nabla_x \psi(t, x)) = \int_{\mathbb{R}^3} \xi W(t, x, \xi) d\xi, \\ j(t, x) \xrightarrow{\text{límite semiclásico}} j(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} \xi f(t, x, \xi) d\xi.$$

Además, en el límite semiclásico el operador pseudo-diferencial se transforma en un término convectivo

$$\Theta[V]W(t, x, \xi) \xrightarrow{\text{límite semiclásico}} -\frac{1}{m} \nabla_x V \cdot \nabla_\xi f.$$

En resumen, en el régimen semiclásico se obtiene la ecuación de Vlasov para la distribución de densidad límite:

$$\frac{\partial}{\partial t} f + (\xi \cdot \nabla_x) f - \frac{1}{m} \nabla_x \Phi \cdot \nabla_\xi f = 0,$$

acoplada con la ecuación de Poisson para el potencial:

$$\Delta_x V(t, x) = -\rho(t, x) = - \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, \xi) d\xi.$$

A menudo las magnitudes más interesantes a estudiar en superredes semiconductoras son los observables físicos como la corriente eléctrica y la densidad de carga.

Por ello, y dado que en el límite semiclásico sabemos que estas funciones verifican ecuaciones clásicas de evolución, es habitual debido a su simplicidad utilizar estas mismas ecuaciones para su modelado. Se dice entonces que se desprecian los efectos cuánticos y se trabaja con la función de densidad límite f en lugar de la función de ondas original ψ . Algunas de estas ecuaciones cinéticas son la ecuación de Vlasov, el sistema de Vlasov-Poisson con segundo miembro de tipo Fokker-Planck, el sistema de Boltzmann-Poisson (véase [21, 35, 54]) o ecuaciones de tipo *drift-diffusion*.

El sistema de Vlasov-Poisson aparece cuando se considera que el campo eléctrico $-\nabla_x V$ es el generado por los propios electrones. Esta consideración de autoconsistencia será una constante a lo largo de esta memoria y aportará una de las mayores dificultades para el estudio matemático de todos los modelos: en efecto, hace que las ecuaciones sean no locales y las convierte en no lineales.

Para añadir un rozamiento viscoso de los electrones con su entorno se suele introducir un segundo miembro de tipo Fokker-Planck a la ecuación de Vlasov,

$$L_{FP}[f](t, x, \xi) \stackrel{def}{=} (\Delta_\xi f + \text{div}_\xi(\xi f))(t, x, \xi).$$

En la Sección 1.3 estudiaremos con algo más de detalle este operador, aunque referimos aquí a H. Risken [71] para un estudio completo de la ecuación de Fokker-Planck.

La ecuación de Boltzmann surge bajo la hipótesis de que la densidad de electrones es baja, de forma que las colisiones son poco habituales y se pueden considerar como binarias. En este caso se introduce un segundo miembro de tipo integral en la ecuación de Vlasov. Como no es el tema que nos ocupa en esta memoria, referimos a los trabajos de C. Cercignani [20], C. Cercignani, R. Illner y M. Pulvirenti [21] o P. Markowich, C.A. Ringhofer y C. Schmeiser [54] para un estudio más amplio sobre la ecuación de Boltzmann.

A continuación profundizaremos en los modelos mencionados en esta sección incluyendo datos de interés para su posterior desarrollo a lo largo de esta memoria. En primer lugar nos dedicaremos a las descripciones cuánticas a través de los modelos para el polarón y seguidamente dedicaremos una sección al estudio de los modelos cinéticos de Vlasov acoplados con la ecuación

de Poisson y con operador de colisiones de tipo Fokker-Planck y a modelos de tipo *drift-diffusion*.

1.2 Modelos para el polarón

En esta Sección pretendemos desarrollar la notación que se usará a lo largo de la memoria para estudiar el comportamiento de un electrón que atraviesa un cristal iónico y realizar un breve estudio del modelo matemático que se usa para el estudio de este fenómeno.

En primer lugar, observamos que, puesto que el tipo de partículas portadoras de carga serán electrones, tendremos que tener en cuenta los efectos cuánticos que ocurren a nivel microscópico por medio de una función de ondas compleja ψ . Pero dado que el medio en que consideramos el transporte, el cristal iónico, es relevante a una escala macroscópica, el modelo matemático para describir de una forma completa este transporte de electrones a través del cristal, será una combinación de procesos cuánticos y clásicos.

Para describir un primer modelo discreto simplificado para el polarón, consideraremos un único electrón en movimiento a través de un cristal formado por iones positivos y negativos. En la Figura 1.2 se muestra la disposición alternativa de iones sobre una malla que cubre todo el espacio \mathbb{R}^3 generada por la base $\{a_1, a_2, a_3\}$, de manera que cada ion se encuentra rodeado por otros seis de carga opuesta.

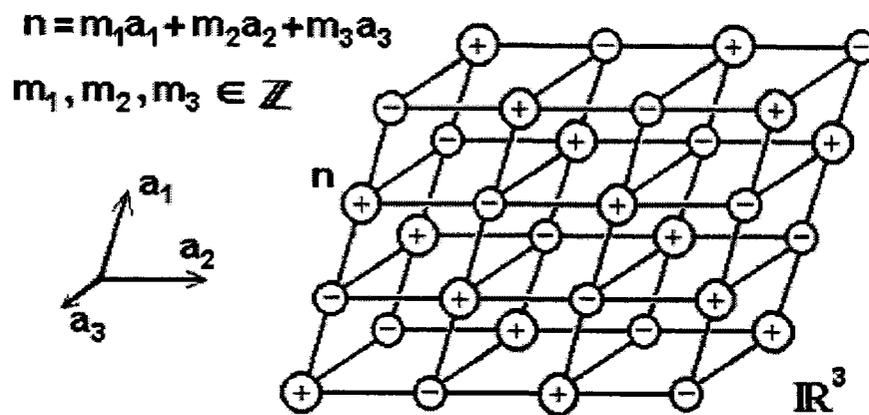


Figura 1.2: Cristal ionizado

Debido a su carga, se produce una interacción electrostática entre el

electrón y los iones que componen la red cristalina. Esta interacción se produce a través del campo eléctrico de polarización creado por el electrón, es decir, el electrón en su movimiento va polarizando los iones que encuentra a su alrededor como consecuencia de la vibración que sufren en torno a sus posiciones de equilibrio. Pero además este campo de polarización ejerce una fuerza sobre el electrón que modifica su estado. Estas interacciones recíprocas hacen que el conjunto formado por el electrón y la polarización se consideren como un único fenómeno mecano-cuántico al que conoce con el nombre de *polarón*. Por lo tanto, el polarón quedará descrito en cuanto se conozca la función de ondas ψ asociada al electrón y el campo clásico de polarización P . El modelo matemático que habitualmente se utiliza para describir la evolución del polarón es el sistema de Schrödinger-Poisson, es decir, para la función de ondas ψ asociada al electrón cuántico se propone la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x \psi + V\psi, \quad (1.1)$$

con un potencial electrostático V asociado al campo de polarización ($P = -\nabla V$) que se considera producido por la densidad de carga $-|\psi|^2$ y que, por tanto, vendrá dado por la ecuación de Poisson

$$\Delta_x V = -|\psi|^2.$$

Evidentemente, esta deducción es excesivamente simple y deja sin justificar muchas cuestiones básicas. Nuestro trabajo en este contexto consiste en deducir de forma rigurosa modelos matemáticos que describan la evolución del polarón (para un cristal iónico con la estructura simplificada de la Figura 1.2) y posteriormente hacer un estudio matemático completo de los mismos. A esta tarea dedicamos los Capítulos 5 y 6 de esta memoria. El concepto de solución que usaremos para la ecuación de Schrödinger es el de *solución integral*: diremos que una función de ondas $\psi \in L^\infty(0, \infty; L^2(\mathbb{R}^3))$ es una solución integral de la ecuación de Schrödinger (1.1) si verifica la *ecuación integral de Schrödinger*:

$$\psi(t, x) = U(t)\varphi(x) - i \int_0^t U(t-s)V(s, x)\psi(s, x) ds,$$

donde $U(t)$ (véase [62]) es el propagador de la ecuación libre de Schrödinger, es decir, el grupo uniparamétrico de operadores generado por $(i\hbar/2m)\Delta_x$. Con este concepto de solución demostraremos que la continuidad es automática y que aunque la regularidad de condición inicial sea tan sólo L^2 la solución está globalmente definida y gana algo de regularidad en cualquier instante positivo $t > 0$.

Este modelo para el polarón ha sido estudiado no sólo desde la perspectiva de su sino también porque es uno de los ejemplos matemáticos más simples de interacción entre una partícula y un campo.

Hemos de destacar el método variacional de las integrales de camino propuesto por R.P Feynman y A.R. Hibbs [28] para la resolución del modelo para el polarón. Pero el problema del polarón también ha sido tratado a lo largo de la literatura en otros contextos.

El Hamiltoniano de Fröhlich para el polarón ha sido muy estudiado como modelo para la interacción Coulombiana de uno o más electrones con los fonones cuantizados del cristal iónico. De esta manera B. Gerlach y H. Löwen estudiaron en [33] algunas propiedades cualitativas del sistema del polarón, demostrando en particular que no pueden existir transiciones de fase salvo en el caso de potenciales de corto alcance. En la misma línea, E.H. Lieb y L.E. Thomas estudiaron en [50] algunos regímenes asintóticos del Hamiltoniano de Fröhlich.

Por otro lado, el sistema de Schrödinger-Poisson se considera como una aproximación clásica a este problema en el marco del formalismo de Schrödinger/Wigner. En esta dirección, en [44], R. Illner, F. Zweifel y H. Lange, demuestran la existencia global de soluciones y la unicidad para los sistemas de Wigner-Poisson y Schrödinger-Poisson, tanto para fuerzas repulsivas como atractivas, con datos iniciales regulares. Otra contribución importante podemos encontrarla en [51], donde P. L. Lions y T. Paul estudian propiedades generales de las medidas de Wigner y de la transformada de Wigner de una función de ondas en L^2 independientes de la constante de Planck \hbar para establecer, entre otras cosas, el límite semiclásico de la ecuación de Schrödinger. También P. Gérard, P. Markowich, N. Mauser y F. Poupaud hacen en [32] un estudio sobre límites de homogeneización de un sistema general y lo aplican al caso particular de Wigner o de Schrödinger obteniendo el límite semiclásico. Es destacable, por último, el análisis llevado a cabo por F. Castella en [18], quien demuestra la existencia y unicidad de solución del sistema de Schrödinger-Poisson para datos iniciales en el espacio natural de definición L^2 .

Referimos de modo particular las contribuciones de E.H. Lieb, quien probó en [49] la existencia de una única solución en H^1

$$\psi_L(t, x) = e^{-\frac{i\epsilon L t}{\hbar}} \phi_L(x),$$

del sistema de Schrödinger-Poisson tal que ϕ_L minimiza el funcional de energía de Choquard

$$E[\phi] = \int_{\mathbb{R}_x^3} \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}_{x'}^3} \frac{|\phi(x)|^2 |\phi(x')|^2}{|x - x'|} dx' \right) dx,$$

siendo el valor propio ϵ_L el multiplicador de Lagrange y la función propia $\phi_L(x)$ una solución de la ecuación estacionaria de Schrödinger

$$\epsilon_L \phi_L = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x \phi_L + V_L \phi_L, \quad (1.2)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi_L = 0, \quad (1.3)$$

acoplada con la ecuación de Poisson

$$\Delta_x V_L = |\phi_L|^2, \quad (1.4)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V_L = 0. \quad (1.5)$$

Nótese que se han introducido aquí condiciones de decrecimiento en infinito para poder obtener propiedades de integración sobre las soluciones y, a la vez, unicidad de las mismas. Estas soluciones estacionarias de Lieb volverán a aparecer en el Capítulo 5 como mínimos de la energía asociada al modelo que presentamos para la evolución del polarón.

1.3 Ecuaciones cinéticas

A un nivel clásico, utilizando simplemente las leyes de Newton, podemos describir el movimiento de un conjunto de partículas en el espacio euclídeo, conociendo simplemente su distribución inicial de posiciones y velocidades y el campo de fuerzas que las gobierna. Si consideramos que la partícula i con masa m sigue una trayectoria $x_i(t) \in \mathbb{R}^N$, para cada $1 \leq i \leq k$, y que el conjunto está sometido a un campo de fuerzas conservativo U generado por un potencial Φ (a lo largo de toda esta memoria el convenio sobre el signo del potencial será $U = -\nabla_x \Phi$), aplicando la tercera Ley de Newton obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_i(t) &= v_i(t), & i &= 1, \dots, k, \\ \frac{d}{dt} v_i(t) &= \frac{1}{m} U(t, x_i(t), v_i(t)), & i &= 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (1.6)$$

(a nivel clásico de descripción, las velocidades se suelen denotar por v en lugar de ξ). El inconveniente suele surgir del gran número de ecuaciones que se tienen, ya que la cantidad de partículas a considerar suele ser del orden de $k \sim 10^{23}$. Para resolver este problema, en lugar de estudiar el movimiento determinista de cada partícula se suele considerar una función de distribución de partículas $f = f(t, x, v) \geq 0$ de manera que

$$\frac{1}{m} \int_A \int_B f(t, x, v) dv dx$$

sea una buena aproximación del número esperado de partículas en el volumen $A \subset \mathbb{R}^N$ con velocidades en el conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$ en un instante t . Entonces, aunque las posiciones y velocidades de cada partícula no sean explícitamente conocidas, se puede exigir formalmente que f sea constante a lo largo de la hipotética trayectoria seguida por cada una de dichas partículas (puesto que es lo que ocurriría en el caso determinista en que todas las trayectorias fuesen conocidas, siendo f una Delta de Dirac sobre las trayectorias: $f(t, x, v) = m \sum_{i=1}^k \delta(x - x_i(t)) \times \delta(v - v_i(t))$). Esta condición se puede formular de la forma

$$\frac{d}{dt} (f(t, x_i(t), v_i(t))) = 0, \quad \forall \{x_i, v_i\}_i \text{ solución de (1.6).}$$

Si suponemos pues cierta regularidad para la densidad f y el hecho de que k sea *tan grande* que las trayectorias ocupen *casi todo* el espacio $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, se obtiene la conocida ecuación de Vlasov:

$$\frac{\partial}{\partial t} f + v \cdot \nabla_x f - \frac{1}{m} \nabla_x \Phi \cdot \nabla_v f = 0. \quad (1.7)$$

Evidentemente esta es una ecuación lineal bastante simplificada puesto que no tiene en cuenta los efectos que las partículas producen sobre el campo $-\nabla_x \Phi$ ni las colisiones entre ellas mismas. Una aproximación más completa viene dada por la llamada ecuación de Boltzmann (véase [21]), que introduce las colisiones entre partículas añadiendo un término de tipo integral en la ecuación que la convierte en no lineal. En esta memoria se considerarán también estos efectos de colisión pero a través del operador de Fokker Planck, que es de tipo diferencial y lineal, y puede ser descrito como

$$L[f] = \frac{\mu}{\tau} \operatorname{div}_v (e^{-\frac{|v|^2}{2\mu}} \nabla_v (e^{\frac{|v|^2}{2\mu}} f)) = \frac{1}{\tau} (\mu \Delta_v f + \operatorname{div}_v (vf)),$$

donde τ es el *tiempo de relajación* y $\sqrt{\mu}$ la *velocidad térmica*, que es una medida experimental de la variación media microscópica de la velocidad v y tiene por tanto dimensiones de velocidad. Veamos brevemente una deducción elemental de este término y de las constantes que en él intervienen. Despreciamos por el momento el efecto del potencial para centrarnos en el efecto del rozamiento sobre las partículas. Si cada partícula está sometida a un rozamiento (que supondremos por el momento uniforme) debido a la propia fricción con el resto, regido por la Ley de Stokes (*la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad y de sentido contrario*), aplicando la tercera ley de Newton se tendría

$$m \frac{d}{dt} v_i = -\alpha v_i, \quad v_i(0) = v_{i0}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (1.8)$$

Definiendo $\tau = \frac{m}{\alpha}$, que tiene unidades de tiempo, obtenemos que las soluciones vienen dadas por

$$v_i(t) = v_{i0} e^{-t/\tau},$$

por lo que $v_i(t)$ se aproxima a 0 y τ resulta ser una medida del tiempo relativo de relajación de v_i . Por ello se llama a τ tiempo de relajación.

Pero la ecuación determinista (1.8) no es un modelo realista, ya que ni se conocen con exactitud las velocidades iniciales v_{i0} ni la ley de rozamiento es exactamente la ley de Stokes. En realidad, la ecuación (1.8) sólo es válida si la masa de las partículas es tan grande que se puede despreciar el efecto de las fluctuaciones de la temperatura sobre su velocidad. Por ello es usual introducir fluctuaciones aleatorias y trabajar con los promedios de las magnitudes. En este sentido, hacemos un paréntesis para introducir una de las constantes físicas relevantes en esta memoria: la velocidad térmica media. Aunque la energía cinética media $\frac{1}{2}m \langle v_i^2 \rangle$ no es directamente calculable en función de las v_i , al menos en dimensión uno tenemos

$$\frac{1}{2}m \langle v_i^2 \rangle = \frac{1}{2}kT,$$

donde k es la constante de Boltzmann, T la temperatura absoluta y el promedio $\langle \cdot \rangle$ está tomado sobre todos los índices $i = 1, \dots, k$. De esta expresión se deduce que, aunque las v_i no sean totalmente conocidas, una buena aproximación de su velocidad media viene dada por la *velocidad térmica media*

$$v_{\text{ter}} = \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad (= \sqrt{\langle v_i^2 \rangle}),$$

que es relevante cuando la masa m de las partículas (escalada con la constante de Boltzmann) es pequeña frente a la temperatura T .

La modificación de la que hablábamos respecto de la ecuación determinista (1.8) consiste en introducir una fluctuación aleatoria o ruido en torno a la fuerza de rozamiento:

$$\frac{d}{dt}v_i + \frac{1}{\tau}v_i = G_i(t).$$

Aquí $G_i(t)$ es una fuerza aleatoria de fluctuación por unidad de masa (generalmente una Gaussiana) que normalmente se llama *fuerza de Langevin*. Como el estudio de ecuaciones estocásticas no es el tema que nos ocupa en esta memoria, sólo mostraremos a grandes rasgos el proceso para llegar a la ecuación de Fokker-Planck. Primero consideramos de nuevo la función de densidad asociada al conjunto de partículas omitiendo la dependencia respecto de la variable espacial x , esto es $f(t, x, v) = f(t, v)$. Puesto que la

probabilidad total ha de conservarse, se propone para f una ecuación en forma de ley de conservación

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \operatorname{div} S,$$

donde S ha de ser interpretada como una densidad de corriente. Haciendo el desarrollo de *Kramers-Moyal* (véase [71] para más detalles) y haciendo ciertas hipótesis sobre la fuerza de Langevin se puede deducir finalmente que S tiene la forma

$$S = \frac{\mu}{\tau} \nabla_v f + \frac{1}{\tau} v f.$$

Recuperando por último el efecto del potencial ϕ y la dependencia respecto de x obtenemos la ecuación lineal de Vlasov-Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial t} f + v \cdot \nabla_x f - \frac{1}{m} \nabla_x \Phi \cdot \nabla_v f = \frac{1}{\tau} (\mu \Delta_v f + \operatorname{div}_v(vf)).$$

Por último, para concluir la presentación del modelo que nos ocupará durante los primeros capítulos de esta memoria, consideraremos que el potencial Φ está generado por las propias partículas, es decir, está dado por la ecuación de Poisson a partir de la densidad de masa asociada a f . Además consideraremos simultáneamente el caso descrito anteriormente en que el potencial es de tipo atractivo y el caso en que el potencial es de tipo electrostático o repulsivo. Así, la ecuación de acoplamiento de Poisson se escribe como

$$-\epsilon_0 \Delta_x \Phi = \theta \rho, \quad \rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t, x, v) dv,$$

siendo ϵ_0 la permitividad en el vacío y θ será $+1$ ó 1 según el potencial sea repulsivo o atractivo respectivamente. Finalmente, ρ representará la densidad (de carga o de masa respectivamente) asociada a la distribución de partículas f . El sistema acoplado resultante es no-lineal, recibe el nombre de sistema de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck (VPFP) y es el siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f + v \cdot \nabla_x f - \frac{q}{m} \nabla_x \Phi \cdot \nabla_v f &= L[f] \\ -\epsilon_0 \Delta_x \Phi &= \theta \rho, \quad \rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t, x, v) dv, \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde se ha denotado por q la carga de las partículas.

Existe una considerable literatura matemática concerniente al estudio del sistema de VPFP que pasamos a describir brevemente. En [27], P. Degond analiza la ecuación lineal de Vlasov-Fokker-Planck (VFP) demostrando existencia global de soluciones regulares en dimensión uno y dos y sólo local

en dimensión tres. Además prueba que las soluciones convergen hacia la solución de Vlasov cuando el término de viscosidad del operador de Fokker-Planck tiende a cero. En [81] H. D. Victory y B. P. O'Dwyer obtienen el mismo tipo de resultados de existencia para el sistema de VPFP, construyendo la solución fundamental para el sistema linealizado de VFP para un campo electromagnético dado. En [80] H. D. Victory demuestra la existencia global de soluciones débiles de la ecuación lineal de VFP en dimensión superior o igual a tres. F. Bouchut analiza en [6] el modelo repulsivo de VPFP en tres dimensiones y prueba la existencia de soluciones regulares y unicidad en L^1 , mientras que en [7] analiza el efecto regularizante que el sistema de VPFP tiene sobre el potencial y la función de densidad. Y. X. Zheng y A. Majda en [83], estudian la existencia de solución para el sistema de Vlasov-Poisson con condiciones iniciales medidas y periódicas en la variable $x \in \mathbb{R}$.

Recientemente J. A. Carrillo y J. Soler demuestran en [15] la existencia global de soluciones para el sistema VPFP hasta dimensión 4, con datos iniciales $L^1 \cap L^p$. Además muestran cómo estas soluciones convergen hacia las soluciones de Vlasov-Poisson cuando el término de Fokker-Planck tiende a cero. En [16], los mismos autores reducen la regularidad de la condición inicial hasta espacios de Morrey, mostrando existencia local de soluciones en tres dimensiones y global cuando la masa inicial es suficientemente pequeña.

Otros trabajos recientes de interés en los que se analizan diversas propiedades sobre cambios de escala y comportamiento asintótico sobre este sistema son los realizados por A. Carpio [14], L.L. Bonilla, J.A. Carrillo y J. Soler [4], K. Ono y W.A. Strauss [61], G. Rein y J. Weckler [70] o J.A. Carrillo, J. Soler y J.L. Vázquez en [17].

1.3.1 Cambio de escala para VPFP

En el Capítulo 2 de esta memoria se pretende estudiar la estabilidad del sistema de VPFP con respecto a dos parámetros físicos relevantes: la *velocidad térmica media*, presentada anteriormente, y el *recorrido libre térmico medio* que pasaremos a presentar inmediatamente. Para ello y para evitar problemas con las escalas físicas, pasamos a “adimensionalizar” el sistema (1.9). Introducimos la masa del sistema $M := \int \int f(0, x, v) dx dv$, que se conserva durante la evolución temporal, y una medida de la velocidad media macroscópica característica del sistema:

$$v_0 := \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} v f(0, x, v) dv dx.$$

A continuación elegimos los valores característicos para el tiempo T y para el espacio R de manera que $v_0 = \frac{R}{T}$. Proponemos el siguiente cambio de escala

$$t = T \hat{t}, \quad x = R \hat{x}, \quad v = \sqrt{\mu} \hat{v},$$

donde $\sqrt{\mu}$ es la velocidad térmica media. De esta forma conseguimos que las nuevas variables independientes \hat{t} , \hat{x} y \hat{v} no tengan dimensiones. Seguidamente introducimos el cambio en la distribución f y el potencial Φ tal que

$$f(t, x, v) = f_0 \hat{f}(\hat{t}, \hat{x}, \hat{v}), \quad \Phi(t, x) = \Phi_0 \hat{\Phi}(\hat{t}, \hat{x}),$$

donde Φ_0 es una medida de la variación característica del potencial sobre la longitud típica R y f_0 es una densidad característica por determinar. Imponemos la condición $\epsilon_0 \Phi_0 = f_0 \sqrt{\mu^N} R^2$, que nos permite obtener una ecuación escalada de Poisson de la forma

$$-\Delta_{\hat{x}} \hat{\Phi} = \theta \hat{\rho}, \quad \hat{\rho}(\hat{t}, \hat{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\hat{t}, \hat{x}, \hat{v}) d\hat{v}.$$

Usando la regla de la cadena obtenemos, a partir de (1.9), la ecuación adimensionalizada:

$$\frac{d}{d\hat{t}} \hat{f} + \frac{v_0}{\sqrt{\mu}} \hat{v} \cdot \nabla_{\hat{x}} \hat{f} - \frac{qT f_0 \sqrt{\mu^N} R}{m \sqrt{\mu} \epsilon_0} \nabla_{\hat{x}} \hat{\Phi} \cdot \nabla_{\hat{v}} \hat{f} = \frac{T}{\tau} (\Delta_{\hat{v}} \hat{f} + \text{div}_{\hat{v}}(\hat{v} \hat{f})). \quad (1.10)$$

Si observamos el proceso desarrollado hasta ahora hemos introducido cinco variables adicionales: v_0 , R , T , Φ_0 y f_0 , y sólo hemos impuesto dos condiciones sobre ellas. Antes de introducir una tercera restricción definiremos las dos nuevas variables con las que pretendemos finalmente describir el sistema de VFPF: la *velocidad térmica media escalada*

$$\alpha = \frac{\sqrt{\mu}}{v_0},$$

y el *recorrido libre térmico medio escalado*

$$\beta = \frac{\tau \sqrt{\mu}}{R},$$

cociente entre el recorrido libre medio microscópico $\tau \sqrt{\mu}$ y la longitud típica macroscópica R . Por lo tanto, ambas variables son adimensionales. Imponiendo la condición de normalización $\Phi_0 = \frac{v_0 m R}{\tau q}$ el sistema resultante es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \alpha(v \cdot \nabla_x) f + \frac{1}{\beta} (\nabla_x \Phi \cdot \nabla_v) f &= \frac{\alpha}{\beta} L[f], \\ -\Delta_x \Phi &= \theta \rho, \quad \rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t, x, v) dv, \end{aligned}$$

donde hemos omitido la notación “ $\hat{\cdot}$ ” para simplificar la escritura y donde el operador escalado de Fokker-Planck $L[f]$ viene dado por

$$L[f] := \operatorname{div}_v(e^{-\frac{|v|^2}{2}} \nabla_v(e^{\frac{|v|^2}{2}} f)) = \Delta_v f + \operatorname{div}_v(vf).$$

Nuestro trabajo consistirá en estudiar la estabilidad de este sistema respecto de las constantes α y β dependiendo del régimen que sigan cada una de ellas. Este problema fue planteado en [65] por F. Poupaud y J. Soler, quienes analizan el caso en que α es inversamente proporcional a β y esta segunda converge a cero. Bajo este régimen asintótico muestran que las soluciones de VPFP convergen hacia una función cuya densidad de masa asociada verifica una ecuación parabólica de tipo *drift-diffusion*. Nosotros estudiaremos este sistema en el Capítulo siguiente suponiendo también que la velocidad térmica β converge a cero pero considerando que el recorrido libre térmico tiene un orden constante de magnitud respecto de β .

1.3.2 Ecuaciones cinéticas estudiadas

En los Capítulos 3 y 4 de esta memoria trataremos otras ecuaciones clásicas relacionadas directa o indirectamente con la Teoría de Semiconductores y, en todo caso, con el anterior sistema de VPFP. En el cuadro de la página siguiente mostramos el esquema de conexión entre los trabajos realizados.

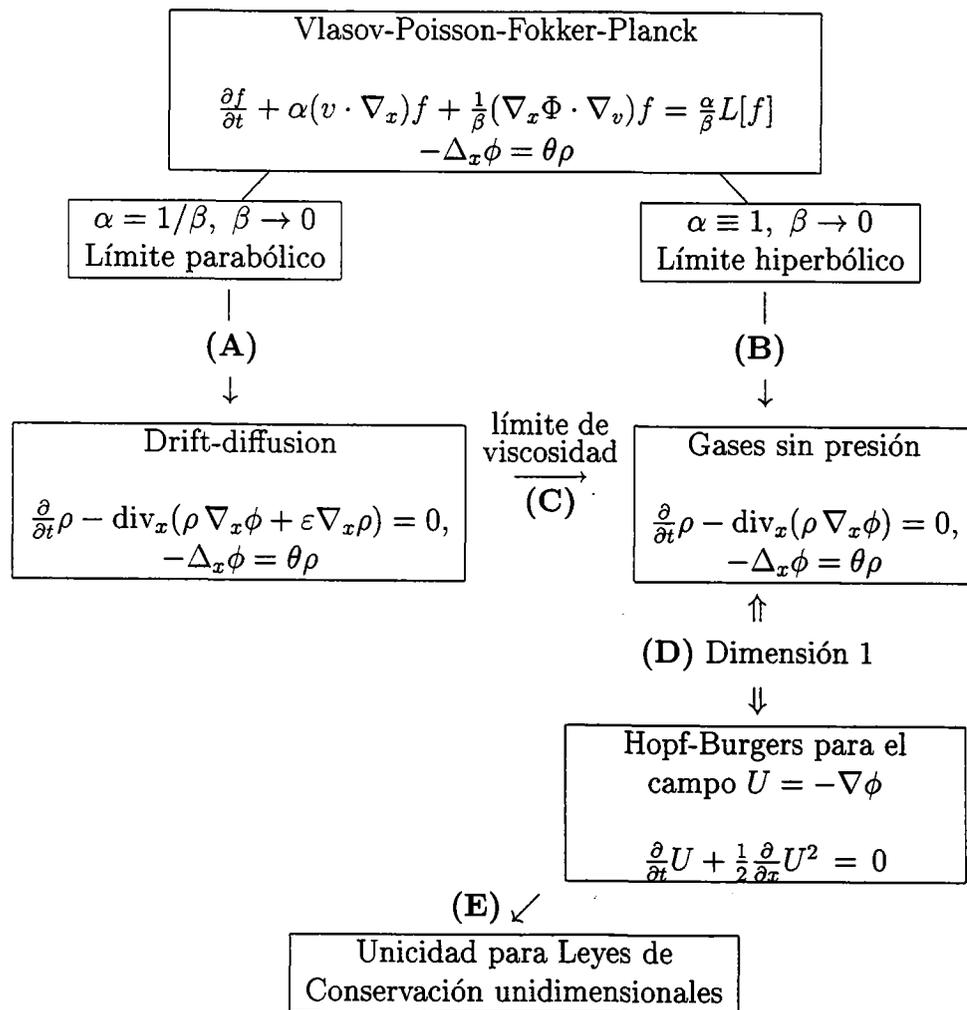
El estudio del límite parabólico (**A**) fue analizado en [65]. Nosotros realizaremos en el siguiente Capítulo el estudio del límite hiperbólico o de campo-alto (**B**) en dimensión 1, ya que las técnicas usadas sólo son aplicables en este caso. En ese mismo Capítulo estudiamos el problema de valores iniciales asociado a la ecuación límite, que puede verse como la ecuación cinética de los gases sin presión y tiene interés por sí misma dada su aplicación directa en Teoría de Semiconductores y la conexión que la vincula con otros sistemas de la Mecánica de Fluidos y Teoría Cinética de Transporte.

La no unicidad de solución para esta ecuación con condiciones iniciales débiles nos llevará a estudiar las propiedades de unicidad con respecto al campo asociado $U = -\nabla_x \phi$. En dimensión uno mostramos la conexión (**D**), es decir, que el campo verifica la ecuación de Hopf-Burgers, la cual podemos ver como una ley de conservación no lineal. Demostraremos que la sucesión de soluciones de VPFP converge hacia la única solución cuyo campo asociado es la única solución de la ecuación de Hopf-Burgers según el criterio de O. Oleinik [60] o S.N. Kruzhkov [47].

Dado el interés general por la unicidad de soluciones haremos una generalización (**E**) de este estudio para leyes de conservación más generales en el

Capítulo 3, y en el caso particular de la ecuación de Hopf-Burgers mostraremos cómo el método de partículas es un método numérico que aproxima en nuestro ambiente a la solución única obtenida.

Finalmente, en el Capítulo 4 estudiamos el sistema de drift-diffusion obtenido en (A) con el objeto de relacionar los límites parabólico e hiperbólico del sistema de VPFP descritos a través del límite de viscosidad (C). El estudio de este sistema se aplicará no sólo a la Teoría de Semiconductores que nos ocupa, sino también a la dinámica de grandes poblaciones de cultivos bacteriológicos, ya que esta ecuación en el caso atractivo es un caso particular del modelo de Keller-Segel [46].



Capítulo 2

Límite de campo alto para el sistema de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck

En este Capítulo pretendemos hacer un estudio sobre la estabilidad del sistema de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck (VPFP) con respecto a las dos constantes físicas introducidas en el primer Capítulo, el recorrido libre medio térmico β y la velocidad media térmica α . Consideraremos el régimen en que β es muy pequeña y α se mantiene constante, obteniendo un límite hiperbólico para el límite de la densidad. Veremos de forma rigurosa cómo se produce el paso al límite y asimismo haremos un estudio de existencia y unicidad de soluciones para la ecuación límite en L^1 . Consideraremos no sólo el potencial repulsivo de Coulomb que modela el fenómeno de conducción en semiconductores, sino también el caso atractivo, mostrando cómo en este segundo caso se producen explosiones en tiempo finito incluso para condiciones iniciales regulares. Por último, veremos que en dimensión 1 se puede definir un cierto concepto de solución débil cuya existencia será global tanto en el caso repulsivo como en el atractivo. Veremos que este concepto de solución es equivalente al de solución entrópica para sistemas hiperbólicos de Leyes de Conservación y en el siguiente Capítulo estudiaremos ampliamente la unicidad de estas soluciones así como su aproximación por el método de partículas. Los contenidos de este Capítulo han sido desarrollados a modo de artículo en [59].

2.1 Introducción y principales resultados

Como hemos dicho, el sistema de VPFP describe el movimiento Browniano de un sistema numeroso de partículas en un baño térmico a través de su fun-

ción de distribución $f : (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_+$. Si consideramos que las partículas están sometidas a la acción de un potencial autoconsistente Φ (atractivo $\theta = -1$ o repulsivo $\theta = 1$) como consecuencia de la adimensionalización del Capítulo 1 podemos escribir nuestro sistema como:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \alpha(v \cdot \nabla_x)f - \frac{1}{\beta}(\nabla_x \Phi \cdot \nabla_v)f = \frac{\alpha}{\beta}L(f), \quad (2.1)$$

$$\Delta_x \Phi = -\theta \rho, \quad \rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t, x, v) dv, \quad (2.2)$$

$$f(0, x, v) = f_0(x, v), \quad (2.3)$$

donde

$$L(f) = \nabla_v \left(e^{-\frac{|v|^2}{2}} \nabla_v \left(e^{\frac{|v|^2}{2}} f \right) \right).$$

La teoría de existencia de soluciones clásicas y débiles de este sistema ha sido ampliamente tratada y nosotros sólo referimos algunos resultados ya comentados en la introducción [27, 81, 80, 6, 7, 83, 15, 16] como bases bibliográficas.

Nuestro análisis de estabilidad de las soluciones respecto de las constantes físicas α y β es un importante problema que conecta varias áreas de Matemáticas y Física y que, como anunciábamos, es especialmente relevante en la Teoría de Semiconductores. Si elegimos $\alpha = 1/\beta$, el límite del sistema (2.1)-(2.3) cuando β tiende a cero es una ecuación parabólica del tipo *drift-diffusion* para la densidad límite ρ . Este caso ha sido estudiado recientemente en [65] y en el cuarto Capítulo analizaremos más extensamente la ecuación parabólica límite. El límite hiperbólico o de campo alto consiste en suponer que la velocidad media térmica (escalada) α es una constante positiva y que el recorrido libre medio térmico (escalado) β es muy pequeño. En este caso, las técnicas utilizadas en [65] no son aplicables, puesto que sería necesario controlar la energía cinética, potencial y la entropía del sistema y en nuestro caso la energía potencial es de orden $1/\beta$. Además, en el caso atractivo, la densidad límite explota en tiempo finito, lo que no es posible en el contexto de un límite parabólico en el que las soluciones suelen estar globalmente definidas. Resolveremos estos problemas al menos en dimensión uno conectando nuestra ecuación límite con un sistema hiperbólico de Leyes de Conservación y trasladando el concepto de solución entrópica a nuestro campo límite, que desarrollará ondas de choque a lo largo de su evolución.

Pasamos a estudiar el comportamiento asintótico del sistema VPFP con respecto al parámetro $\epsilon \equiv \beta$ suponiendo que α permanece normalizada a 1. Así, podemos escribir el sistema VPFP en términos de la función de distribución $f_\epsilon(t, x, v) \geq 0$ y del potencial Φ_ϵ como sigue:

$$\epsilon \left(\frac{\partial f_\epsilon}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x)f_\epsilon \right) - (\nabla_x \Phi_\epsilon \cdot \nabla_v)f_\epsilon = L(f_\epsilon), \quad (2.4)$$

$$L(f_\epsilon) \stackrel{def}{=} \Delta_v f_\epsilon + \operatorname{div}_v(v f_\epsilon) = \operatorname{div}_v \left(e^{-\frac{v^2}{2}} \nabla_v \left(e^{\frac{v^2}{2}} f_\epsilon \right) \right), \quad (2.5)$$

$$\nabla_x \Phi_\epsilon = \theta \nabla \Gamma_N * \rho_\epsilon, \quad \rho_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^N} f_\epsilon dv, \quad (2.6)$$

$$f_\epsilon(0, x, v) = f_{0,\epsilon}(x, v), \quad (2.7)$$

donde la sucesión $f_{0,\epsilon}(x, v)$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}^{2N})$ y suponemos que converge en este mismo espacio a una función $f_0(x, v)$. El núcleo Γ_N es la solución fundamental de $-\Delta$ en \mathbb{R}^N que se define como

$$\Gamma_N(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}|x| & \text{si } N = 1 \\ -\frac{1}{2\pi} \ln|x| & \text{si } N = 2 \\ \frac{1}{4\pi|x|} & \text{si } N = 3. \end{cases} \quad (2.8)$$

A lo largo de este Capítulo trataremos con soluciones débiles del sistema VPFP $_\epsilon$. Diremos que el par $(f_\epsilon, \phi_\epsilon)$ es solución débil de (2.4)-(2.7) si se verifican las siguiente propiedades

$$\begin{aligned} (i) \quad & f_\epsilon \in L^\infty(0, \infty; L^1(\mathbb{R}^{2N})) \\ (ii) \quad & \Phi_\epsilon = \theta \Gamma_N * \rho_\epsilon \\ (iii) \quad & f_\epsilon |\nabla_x \Phi_\epsilon| \in L^1_{loc}(0, \infty; L^1(\mathbb{R}^{2N})), \end{aligned} \quad (2.9)$$

y para cada función test $\psi \in C_0^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^{2N})$ se verifica la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{2N}} f_\epsilon \left[\epsilon \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) \psi \right) - (\nabla_x \Phi_\epsilon \cdot \nabla_v) \psi + \Delta_v \psi \right. \\ & \left. - (v \cdot \nabla_v) \psi \right] d(t, x, v) = -\epsilon \int_{\mathbb{R}^{2N}} f_{0,\epsilon}(x, v) \psi(0, x, v) d(x, v). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Presentamos en primer lugar los principales resultados probados en este Capítulo.

Teorema 2.1 (*Caso uno dimensional*). *Suponemos que para cada $\epsilon > 0$ se verifica la siguiente propiedad*

$$f_{0,\epsilon} \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |x| + |v|^2) f_{0,\epsilon} d(x, v) < C < \infty,$$

siendo C una constante positiva independiente de ϵ . Gracias a la cota de la norma en L^1 , podemos suponer también sin pérdida de generalidad que

$$\int_{\mathbb{R}} f_{0,\epsilon} dv \rightarrow \rho_0 \text{ en } \mathcal{M}_+(\mathbb{R}) - \text{débil}^*,$$

donde $\mathcal{M}_+(\mathbb{R})$ es el espacio de las medidas de Radon positivas. Entonces, salvo subsucesión, las soluciones f_ϵ de VPPF $_\epsilon$ verifican para todo $T > 0$

$$\begin{aligned}\rho_\epsilon &= \int_{\mathbb{R}} f_\epsilon dv \rightarrow \rho && \text{en } \mathcal{D}'([0, T] \times \mathbb{R}), \\ j_\epsilon &= \int_{\mathbb{R}} v f_\epsilon dv \rightarrow \rho \partial_x \Phi && \text{en } \mathcal{D}'([0, T] \times \mathbb{R}),\end{aligned}$$

siendo (ρ, Φ) solución del siguiente sistema:

$$\partial_t \rho(t, x) - \partial_x (\rho \partial_x \Phi(t, x)) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.11)$$

$$\Phi(t, x) = \theta \Gamma_1 *_x \rho(t, x), \quad (2.12)$$

con condición inicial $\rho(0, x) = \rho_0$. La densidad límite ρ es continua con valores en el espacio de las medidas de Radon, $\rho \in C^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{M}_+(\mathbb{R}))$ y el primer momento $|x|\rho \in L^\infty([0, T]; \mathcal{M}_+(\mathbb{R}))$. El producto $\rho \partial_x \Phi$ ha de ser entendido en el sentido débil que enunciaremos más adelante en la Definición 2.1. Además, en el caso gravitacional $\theta = -1$, la solución del sistema límite es única y, por lo tanto, toda la sucesión converge.

Como consecuencia directa del Teorema 2.1 tenemos el siguiente resultado de existencia.

Teorema 2.2 (Existencia de soluciones con condición inicial en $L^1(\mathbb{R})$). Supongamos que $\rho_0 \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R})$ (o $L^1(\mathbb{R})$). Entonces existe una solución débil $\rho \in C^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{M}_+(\mathbb{R}))$ de la ecuación (2.11) con condición inicial ρ_0 y Φ dada por (2.12), independientemente del carácter atractivo o repulsivo del modelo. Además, en el caso de fuerzas atractivas esta solución será la única solución entrópica global en tiempo asociada con la ecuación de Burgers-Hopf verificada por el campo $U = -\partial_x \Phi$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{U^2}{2} = 0, \quad (2.13)$$

quedando la densidad calculada de forma distribucional como $\rho = -\partial_x U$. La misma conclusión sigue siendo cierta en el caso repulsivo sobre la clase de soluciones que verifican $\rho(t, x) \leq \frac{1}{t}$ para todo $t > 0$.

Consideramos ahora el sistema límite:

$$\partial_t \rho(t, x) - \operatorname{div}_x (\rho \nabla_x \Phi(t, x)) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (2.14)$$

$$U \stackrel{\text{def}}{=} -\nabla_x \Phi(t, x) = -\theta \nabla_x \Gamma_N *_x \rho(t, x). \quad (2.15)$$

Los siguientes Teoremas nos dan los resultados análogos de existencia y unicidad para cualquier dimensión.

Teorema 2.3 (*Existencia de soluciones para fuerzas repulsivas*).

En el caso de fuerzas repulsivas de Coulomb ($\theta = 1$) se verifica que:

- Si $\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$, entonces existe una única $\rho \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N)$ solución débil del sistema (2.14)-(2.15) con dato inicial ρ_0 . Esta solución verifica

$$\rho(t, x) \leq \frac{1}{t} \quad \text{para todo } t > 0, \quad (2.16)$$

lo que implica

$$\|\rho(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty. \quad (2.17)$$

- Si

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |x| + |\log \rho_0(x)|) \rho_0(x) dx < \infty, \quad (2.18)$$

entonces existe una solución débil (ρ, U) del sistema (2.14)-(2.15) con dato inicial ρ_0 verificando (2.17) y $\rho \in C(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^N))$ – débil).

Además la solución satisface (2.16)-(2.17) y bajo la hipótesis adicional $\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ podemos demostrar que esta solución débil es única en $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$.

Teorema 2.4 (*Existencia de soluciones para fuerzas atractivas*).

En el caso atractivo o gravitacional ($\theta = -1$) tenemos:

- Si $\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$, entonces existe una única solución débil (ρ, U) del sistema (2.14)-(2.15) con dato inicial ρ_0 que verifica

$$\begin{cases} \rho \in W^{1,\infty}([0, T'] \times \mathbb{R}^N), \\ U \in L^\infty(0, T'; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)^N), \end{cases}$$

donde

$$0 < T' < T^* = \frac{1}{\|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}.$$

- Si $\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ y su primer momento está acotado, entonces existe una única solución débil del problema (2.14)-(2.15) con condición inicial ρ_0 tal que $\rho \in L^\infty(0, T'; L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}))$ y Φ viene dada por (2.15).

Como hemos dicho, el sistema (2.14)-(2.15) tiene dos significados físicos diferentes dependiendo del carácter repulsivo ($\theta = 1$) o atractivo ($\theta = -1$) de las fuerzas. El primer caso modela el transporte de electrones en un semiconductor o de un gas débilmente ionizado. Entonces el sistema obtenido es el límite de campo alto. Este ya ha sido obtenido en el caso lineal en [63] a partir de la ecuación de Boltzmann de los semiconductores. En el caso atractivo el sistema (2.14)-(2.15) es un modelo de colapso gravitacional, por lo tanto está muy ligado al sistema de partículas viscosas estudiado por Y. Brenier y E. Grenier en [10]. Este sistema da lugar a la ecuaciones de gas sin presión. Ha sido estudiado en diferentes contextos, observando principalmente las propiedades de las soluciones del problema estacionario (ρ independiente de t). En esta dirección hemos de mencionar el trabajo de H.A. Herrero, B. Medina y J.J.L. Velázquez [43], quienes prueban la explosión de las soluciones en tiempo finito, y el trabajo de P. Constantin, A.J. Majda y E. Tabak [22] como ejemplo de fluido en el que aparece la formación de frentes. El problema de existencia y unicidad en una dimensión para el problema dependiente del tiempo del sistema de gas sin presión ha sido también estudiado por F. Bouchut y F. James en [8]. Su teoría también puede ser aplicada en nuestro contexto para obtener el Teorema 2.2.

Un problema relacionado con el límite de campo alto de VPFP estudiado aquí es el límite asintótico del sistema de Vlasov-Poisson con un fuerte campo magnético estudiado por F. Golse y L. Saint-Raymond en [39] y en la misma línea Y. Brenier en [9] analiza algunos límites destacados desde Vlasov-Poisson hacia soluciones de la ecuación de Euler en dimensión dos. Otro análisis asintótico del mismo tipo de la ecuación de Vlasov-Poisson o Vlasov-Stokes con rozamiento ha sido realizado por P. E. Jabin en [45]. En este caso, el límite es obtenido para toda dimensión pero usando un núcleo de Poisson regularizado. En todos estos trabajos se asumen condiciones de regularidad muy superiores a las exigidas en nuestro caso.

Pasamos a exponer un pequeño esquema de los argumentos utilizados para probar los anteriores resultados. En el caso uno dimensional el sistema VPFP se escribe como:

$$\epsilon(\partial_t f_\epsilon + v\partial_x f_\epsilon) - (\partial_x \Phi_\epsilon \partial_v) f_\epsilon = \partial_{vv} f_\epsilon + \partial_v(v f_\epsilon). \quad (2.19)$$

Si, de manera formal, multiplicamos por v e integramos sobre \mathbb{R}_v obtenemos

$$\epsilon(\partial_t j_\epsilon + \partial_x q_{2,\epsilon}) + \partial_x \Phi_\epsilon \rho_\epsilon + j_\epsilon = 0, \quad (2.20)$$

donde $q_{k,\epsilon}(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} v^k f_\epsilon(t, x, v) dv$ es el momento de orden k respecto de v , y el primero de ellos, también llamado corriente, se nota de forma especial

$j_\epsilon = q_{1,\epsilon}$. Del mismo modo, solamente integrando con respecto a v obtenemos la llamada ecuación de continuidad

$$\partial_t \rho_\epsilon + \partial_x j_\epsilon = 0. \quad (2.21)$$

Una vez que controlemos el primer y segundo momento de f_ϵ en alguna norma, ya que en la ecuación (2.20) aparecen multiplicados por ϵ , podremos pasar al límite cuando ϵ tiende a cero en (2.20) y deducir que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\partial_x \Phi_\epsilon \rho_\epsilon + j_\epsilon) = 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'.$$

Con ello identificamos el límite de j_ϵ que, sustituido en (2.21), nos permitirá poner el límite en términos exclusivos de la densidad y del potencial. Para ello, hemos de darle sentido a este producto límite $\lim(\partial_x \Phi_\epsilon \rho_\epsilon)$. En una dimensión esto será posible ya que la hipótesis $\rho_\epsilon \in L^1$ implica que $\partial_x \Phi_\epsilon \in L^\infty$ y nos permite hacer la siguiente definición.

Definición 2.1 *Sea $(1 + |x|)g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ y Φ tales que $\partial_x \Phi = -\frac{1}{2} \text{sign} * g$, (que no es más que la expresión en convolución para la solución de la ecuación de Poisson $-\partial_{xx}^2 \Phi = g$). Entonces, para cada test $\eta \in C_0(\mathbb{R})$ definimos*

$$\int_{\mathbb{R}} (\partial_x \Phi g) \eta dx \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \text{sign}(x - y) \left(\frac{\eta(x) - \eta(y)}{4} \right) dg(y) dg(x),$$

que es una extensión natural del caso regular.

Para hacer esta definición es esencial que $N = 1$, ya que la forma del núcleo Γ_1 implica que $\partial_x \Phi$ esté acotada.

Con este argumento haremos el paso al límite, tanto en el caso atractivo como en el repulsivo, hacia un par (ρ, Φ) solución del sistema (2.11)-(2.12). Puesto que este sistema límite tendrá solución global (en tiempo) en el caso repulsivo pero sólo local en el caso atractivo, daremos un nuevo concepto de solución global relacionado con las soluciones entrópicas de (2.13) para el campo $-\nabla_x \phi$.

Este Capítulo se organiza como sigue: en la Sección 2.2 deduciremos rigurosamente las ecuaciones de continuidad asociadas al sistema VPFP_ϵ . Como consecuencia, obtendremos la ecuación límite en el caso uno dimensional, ya que en dimensión mayor (como veremos en el Capítulo 4) se produce explosión en tiempo finito. Nuestra dificultad estriba en que trabajamos sólo con funciones en L^1 . La Sección 2.3 está dedicada a probar existencia y unicidad de soluciones débiles para la ecuación límite en varios pasos. Pasaremos desde datos iniciales muy regulares hasta condiciones solamente en L^1 , haciendo distinción entre fuerzas repulsivas y atractivas. La existencia local en tiempo de soluciones débiles en el caso atractivo motivará un nuevo concepto de solución basado en el de solución entrópica para Leyes de Conservación aplicado al campo U .

2.2 Ecuación límite en una dimensión

Primero veamos las expresiones de las ecuaciones para los momentos independientemente de la dimensión $N \geq 1$. Definimos los tres primeros momentos de la función de distribución como:

$$\begin{aligned} j_\epsilon(t, x) &= q_{1,\epsilon}(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} v f_\epsilon(t, x, v) dv, \\ q_{2,\epsilon}(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^N} v \otimes v f_\epsilon(t, x, v) dv, \\ (q_{3,\epsilon})_{(i,j,k)}(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^N} v_i v_j v_k f_\epsilon(t, x, v) dv. \end{aligned}$$

Entonces, haciendo elecciones particulares de las funciones test en (2.10), podemos deducir fácilmente el resultado:

Lema 2.1 *Las siguientes ecuaciones se verifican en el sentido de las distribuciones:*

(i) *La ley de conservación para la carga (masa):*

$$\frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial t} + \operatorname{div}_x j_\epsilon = 0. \quad (2.22)$$

(ii) *La ecuación de continuidad para la densidad de corriente:*

$$\epsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} j_\epsilon + \operatorname{Div}_x q_{2,\epsilon} \right) + \rho_\epsilon \nabla_x \Phi_\epsilon + j_\epsilon = 0. \quad (2.23)$$

Aquí Div_x denota la divergencia matricial que no es más que la divergencia escalar usual aplicada una a una a las filas de la matriz (por tanto $\operatorname{Div}_x(\text{matriz}) = (\text{vector})$).

(iii) *La ecuación de continuidad para el momento de segundo orden:*

$$\begin{aligned} \epsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} q_{2,\epsilon} + \mathbb{D}\operatorname{iv}_x q_{3,\epsilon} \right) + j_\epsilon \otimes \nabla_x \Phi_\epsilon \\ + \nabla_x \Phi_\epsilon \otimes j_\epsilon - 2\rho_\epsilon I_N + 2q_{2,\epsilon} = 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde $\mathbb{D}\operatorname{iv}_x$ es la divergencia usual tomada sobre las primeras componentes de $q_{3,\epsilon}$ e I_N es la matriz identidad de orden N .

El núcleo Γ_N en el caso uno dimensional (2.8) tiene ciertas propiedades especiales que hacen el paso al límite más fácil que en el caso $N \geq 2$, que merece ser analizado aparte. A partir de la ecuación (2.22) se sabe que la carga total se conserva. Esto implica que

$$\|f_\epsilon(t, \cdot, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} = \|f_{0,\epsilon}\|_{L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} \leq M, \quad (2.25)$$

donde

$$M := \sup_{\epsilon > 0} \|f_{0,\epsilon}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} < \infty.$$

Por lo tanto, se tienen las siguientes cotas para el campo:

$$\begin{aligned} \|\partial_x \Phi(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2} \|\text{sign} * \rho_\epsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\rho_\epsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \frac{1}{2} \|f_\epsilon(t, \cdot, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{M}{2}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

En dimensión uno la ecuación (2.24) se escribe como

$$\epsilon(\partial_t q_{2,\epsilon} + \partial_x q_{3,\epsilon}) + 2(\partial_x \Phi_\epsilon)j_\epsilon - 2\rho_\epsilon + 2q_{2,\epsilon} = 0$$

en el sentido distribucional. Eligiendo de nuevo funciones test adecuadas con soporte en $[0, T] \times \mathbb{R}$ podemos obtener fácilmente la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} &\epsilon \int_{\mathbb{R}} q_{2,\epsilon}(T, x) dx - \epsilon \int_{\mathbb{R}} q_{2,\epsilon}(0, x) dx + 2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} q_{2,\epsilon}(t, x) d(t, x) \\ &= 2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon d(t, x) - 2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\partial_x \Phi_\epsilon)j_\epsilon d(t, x). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Teniendo en cuenta la no negatividad del momento de orden 2, $q_{2,\epsilon}$ junto con (2.26) deducimos

$$2\|q_{2,\epsilon}\|_{L^1([0,T] \times \mathbb{R})} \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}} q_{2,\epsilon}(0, x) dx + 2TM + M \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |j_\epsilon| d(t, x). \quad (2.28)$$

Usando ahora la desigualdad $|v| = \sqrt{b} \frac{|v|}{\sqrt{b}} \leq \frac{1}{2} \left(b + \frac{|v|^2}{b} \right)$, obtenemos

$$\|j_\epsilon\|_{L^1([0,T] \times \mathbb{R})} \leq \frac{b}{2} TM + \frac{1}{2b} \|q_{2,\epsilon}\|_{L^1([0,T] \times \mathbb{R})}. \quad (2.29)$$

Hacemos notar que usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz también podemos acotar el primer momento de la forma

$$\begin{aligned} \|j_\epsilon\|_{L^2(0,T;L^1(\mathbb{R}))}^2 &= \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} v f_\epsilon(t, x, v) dv \right| dx \right)^2 dt \\ &\leq \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} v \sqrt{f_\epsilon(t, x, v)} \sqrt{f_\epsilon(t, x, v)} dv \right| dx \right)^2 dt \\ &\leq \int_0^T \left(\|q_{2,\epsilon}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \right)^2 dt \leq M \|q_{2,\epsilon}\|_{L^1([0,T] \times \mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Si ahora elegimos $b = M/2$ y sustituimos la estimación (2.29) en (2.28) obtendremos

$$\|q_{2,\epsilon}\|_{L^1([0,T]\times\mathbb{R})} \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}} q_{2,\epsilon}(0,x) dx + 2TM + \frac{TM^3}{4}. \quad (2.31)$$

Esta desigualdad nos da simultáneamente una cota para $q_{2,\epsilon}$ y, usando (2.29) ó (2.30), una cota para j_ϵ . Por lo tanto, los dos primeros términos de la ecuación (2.23) son de orden ϵ y podemos concluir que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\partial_x \Phi_\epsilon \rho_\epsilon + j_\epsilon) = 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'.$$

Así hemos probado el siguiente resultado.

Lema 2.2 *Bajo las hipótesis del Teorema 2.1, la densidad de corriente j_ϵ y el segundo momento $q_{2,\epsilon}$ están acotados en $L^2(0,T;L^1(\mathbb{R}))$ y $L^1([0,T]\times\mathbb{R})$ respectivamente, uniformemente en ϵ . Por lo tanto se verifica que*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\partial_x \Phi_\epsilon \rho_\epsilon + j_\epsilon) = 0 \quad (2.32)$$

en el sentido de las distribuciones.

Como ya anunciábamos, para dar sentido a la ecuación límite, hemos de identificar el límite de la sucesión $\partial_x \Phi_\epsilon \rho_\epsilon$ como $\partial_x \Phi \rho$ en el sentido de la Definición 2.1. Primero escribimos el término no lineal de la ecuación de continuidad de la siguiente forma débil:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \partial_x \Phi_\epsilon(t,x) \rho_\epsilon(t,x) \eta(t,x) d(t,x) = \\ & - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \theta \text{sign}(x-y) \left(\frac{\eta(t,x) - \eta(t,y)}{4} \right) \rho_\epsilon(t,y) \rho_\epsilon(t,x) d(t,x,y), \end{aligned} \quad (2.33)$$

para todo $\eta \in C_0^\infty([0,\infty]\times\mathbb{R})$. Dado que la carga total se conserva y que la sucesión $\{\rho_{0,\epsilon}\}_{\epsilon>0}$ converge en L^1 , gracias a (2.25) deducimos que ρ_ϵ está acotada en $L^\infty(0,\infty;L^1(\mathbb{R}))$. Por lo tanto, según el Teorema de Banach-Alaouglu, existe una subsucesión de $\{\rho_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ que converge como medida con la topología débil* en $L^\infty(0,\infty;\mathcal{M}(\mathbb{R}))$ hacia una cierta medida ρ . Hemos de hacer notar en este punto que, en general, el producto de dos medidas $\rho_\epsilon(t,y)\rho_\epsilon(t,x)$ no converge al producto de los límites en la topología débil*, pero en nuestras condiciones, usando la ecuación de continuidad (2.21) y el hecho de que j_ϵ esté acotada en $L^2(0,T;L^1(\mathbb{R}))$, sí se obtiene la convergencia del producto. Veamos este resultado para cualquier dimensión.

Lema 2.3 Sea $T > 0$ y sean $\{\rho_\epsilon\}_\epsilon$ y $\{j_\epsilon\}_\epsilon$ sendas sucesiones acotadas en $L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{R}^N))$ y $L^2(0, T; L^1(\mathbb{R}^N)^N)$ respectivamente, que verifican (2.22) en el sentido de las distribuciones.

Entonces, salvo subsucesión, $\rho_\epsilon \rightarrow \rho$ en $C(0, T; \mathcal{M}(\mathbb{R}^N) - \text{débil}^*)$ y

$$\rho_\epsilon(t, x)\rho_\epsilon(t, y) \rightarrow \rho(t, x)\rho(t, y) \quad \text{en } C(0, T; \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2N}) - \text{débil}^*).$$

Demostración. Dado $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\epsilon(t, x)\eta(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} j_\epsilon(t, x) \cdot \nabla \eta(x) dx.$$

Entonces, la función $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\epsilon(t, x)\eta dx$ está uniformemente acotada en $H^1(0, T)$ y, por lo tanto, usando el embebimiento compacto $H^1(0, T) \hookrightarrow C([0, T])$, está en un compacto de $C(0, T)$. Puesto que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ es separable y denso en $C_0(\mathbb{R}^N)$, la cota para ρ_ϵ nos da la convergencia (salvo posible subsucesión) en $C(0, T; \mathcal{M}(\mathbb{R}^N) - \text{débil}^*)$. Tomando entonces otra función test $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ se tiene

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \eta(x)\mu(y)\rho_\epsilon(t, x)\rho_\epsilon(t, y) dx dy \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \eta(x)\rho_\epsilon(t, x) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu(y)\rho_\epsilon(t, y) dy \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \eta(x)\mu(y)\rho(t, x)\rho(t, y) dx dy, \end{aligned}$$

uniformemente en $[0, T]$. Dado que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ es denso en $C_0(\mathbb{R}^{2N})$ se deduce finalmente la convergencia de $\rho_\epsilon(t, x)\rho_\epsilon(t, y)$. \square

Sin embargo, el paso al límite en (2.33) requiere de alguna precisión, ya que

$$\psi(t, x, y) = \theta \text{sign}(x - y) \left(\frac{\eta(t, x) - \eta(t, y)}{4} \right)$$

es una función continua pero con soporte no acotado y, por lo tanto, no podemos pasar al límite usando dualidad entre funciones continuas con soporte compacto y medidas de Radon. Para solventar este problema tomamos una función de truncamiento $\mu_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| + |y| \leq R \\ 0 & \text{si } |x| + |y| > 2R \\ 0 \leq \mu_R(x, y) \leq 1 & \text{si } R < |x| + |y| \leq 2R. \end{cases}$$

Entonces escribimos (2.33) como sigue:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \psi(t, x, y) \rho_\epsilon(t, x) \rho_\epsilon(t, y) dx dy dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \mu_R(x, y) \psi(t, x, y) \rho_\epsilon(t, x) \rho_\epsilon(t, y) dx dy dt \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \mu_R(x, y)) \psi(t, x, y) \rho_\epsilon(t, x) \rho_\epsilon(t, y) dx dy dt, \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde suponemos que el soporte de ψ está en $[0, T]$. Puesto que la función test $(\psi \mu_R)$ sí tiene soporte compacto, la primera integral del término de la derecha de (2.34) converge a $\int \psi \mu_R \rho(x) \rho(y)$ para cada $R > 0$ fijo. Pasando ahora al límite cuando $R \rightarrow \infty$ obtenemos que $\int \psi \mu_R \rho(x) \rho(y)$ converge a $\int \psi \rho(x) \rho(y)$ que es la expresión débil para el producto $\partial_x \phi \rho$ dada en la Definición 2.1. Por lo tanto, sólo resta probar que el segundo término del miembro derecho de (2.34) converge a 0 cuando $R \rightarrow \infty$ uniformemente en $\epsilon > 0$. Para ello estimamos como sigue:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi(t, x, y) (1 - \mu_R(x, y)) \rho_\epsilon(t, x) \rho_\epsilon(t, y) dx dy dt \right| \\ & \leq \|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \frac{1}{R} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (|x| + |y|) \rho_\epsilon(t, x) \rho_\epsilon(t, y) dx dy dt \\ & \leq \|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \frac{2}{R} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(t, y) \int_{\mathbb{R}} |x| \rho_\epsilon(t, x) dx dy dt. \end{aligned}$$

Para acotar el primer momento de la densidad ρ_ϵ respecto de x , es decir $\int |x| \rho_\epsilon(t, x) dx$, en $[0, T]$ usamos la ecuación de continuidad

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |x| \rho_\epsilon(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}} j_\epsilon(t, x) \frac{x}{|x|} dx.$$

Podemos pues deducir que

$$\int_{\mathbb{R}} |x| \rho_\epsilon(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}} |x| \rho_{0, \epsilon}(x) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} j_\epsilon(s, x) \frac{x}{|x|} dx ds.$$

De donde, usando las hipótesis sobre la condición inicial del Teorema 2.1, inducimos la siguiente estimación:

$$\int_{\mathbb{R}} |x| \rho_\epsilon(t, x) dx \leq C + \|j_\epsilon\|_{L^1([0, T] \times \mathbb{R})} = C(T).$$

Con todo ello cerramos la cadena de demostraciones para pasar al límite en la ecuación de continuidad (2.22) y obtener

$$\partial_t \rho - \partial_x (\partial_x \Phi \rho) = 0, \quad (2.35)$$

en el sentido de la Definición 2.1 con condición inicial ρ_0 . Por lo tanto, hemos probado el Teorema 2.1.

2.3 Existencia y unicidad de la ecuación límite

El proceso del paso al límite nos ha proporcionado al mismo tiempo un resultado de existencia para la ecuación límite. Sin embargo, es interesante hacer un análisis específico de las propiedades de la ecuación límite por sí misma, sobre todo por su aplicación directa en la Teoría de Semiconductores que nos ocupa (ver también [63]) y por conexiones con otros sistemas de la Mecánica de Fluidos y Teoría Cinética de Transporte. Consideramos pues el sistema de transporte

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) - \operatorname{div}(\rho \nabla_x \Phi(t, x)) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (2.36)$$

$$\Phi(t, x) = \theta \Gamma_N *_x \rho(t, x), \quad (2.37)$$

$$\rho(0, x) = \rho_0(x). \quad (2.38)$$

Denotamos el campo autoconsistente como $U = -\nabla \Phi$. Entonces, el sistema (2.36)-(2.37) se escribe como

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + U \cdot \nabla \rho + \theta \rho^2 = 0, \quad (2.39)$$

$$U = -\theta(\nabla \Gamma_N) * \rho, \quad (2.40)$$

que tiene la forma de una ecuación de transporte con un segundo miembro del tipo $\theta \rho^2$. Por ello estudiaremos la posible información que nos den las curvas características asociadas al campo U . La ecuación de estas curvas características, que está bien definida para campos U regulares, es

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = U(t, X(t)), & t \in \mathbb{R}^+ \\ X(s) = x, & s \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}^N \text{ fijos.} \end{cases} \quad (2.41)$$

Si notamos como $X(t; s, x)$ a la solución de (2.41) y en particular, para $s = 0$, $X(t) = X(t; 0, x)$ obtendremos, al menos formalmente,

$$\frac{d}{dt}(\rho(t, X(t))) + \theta \rho^2(t, X(t)) = 0.$$

Esta ecuación ordinaria puede ser fácilmente resuelta, obteniendo

$$\rho(t, X(t)) = \frac{\rho_0(x)}{1 + \theta \rho_0(x)t}, \quad \text{para } \begin{cases} t \in [0, \infty), & \text{si } \theta = 1 \\ t \in [0, \frac{1}{\rho_0(x)}), & \text{si } \theta = -1. \end{cases}$$

Sobre esta solución explícita podemos observar la diferencia esencial entre el caso electrostático y el gravitacional ya que en el segundo caso el denominador puede anularse para tiempos finitos produciendo la explosión. Nuestro primer objetivo es probar el primer punto del Teorema 2.3, es decir, la existencia y unicidad de solución en el caso repulsivo ($\theta = 1$) con datos iniciales regulares. Este resultado será el primer paso para establecer la existencia de solución con datos iniciales solamente en L^1 y para ambos tipos de fuerzas, repulsivas y atractivas.

2.3.1 Existencia de soluciones ε -aproximadas

Tomamos una función $U \in L^\infty(0, \infty; (W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N))^N)$ dada y consideramos la ecuación de las características (2.41) asociada a U . Gracias al teorema de Cauchy-Lipschitz, sabemos que existe una solución $X(t; s, x)$ en el espacio $C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N)$.

Siguiendo las ideas formales que acabamos de escribir, parece obvio definir el *candidato* a solución de (2.36) como

$$\rho(t, x) = \frac{\rho_0(X(0; t, x))}{1 + \rho_0(X(0; t, x))t}, \quad (2.42)$$

que depende de U a través de las líneas características. Ahora intentamos cerrar el proceso recuperando de nuevo el campo U por convolución, pero lo haremos con un núcleo regularizado para ganar la regularidad necesaria para aplicar un resultado de punto fijo. Dado $\varepsilon > 0$ y una función no negativa y simétrica $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ definimos la *aproximación de la unidad* $\zeta^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \zeta(\frac{x}{\varepsilon})$. El núcleo regularizado será $\Gamma_N^\varepsilon = \Gamma_N * \zeta^\varepsilon$ y el campo final vendrá dado por la función $F_\varepsilon(U)$ definida como

$$F_\varepsilon(U) \stackrel{def}{=} -\nabla \Gamma_N^\varepsilon * \rho.$$

Vamos a aplicar un método iterativo (para ε fijo) para llegar a un punto fijo de F_ε , que corresponderá con una solución aproximada U_ε del problema (2.39)-(2.40). Finalmente, probaremos que la sucesión de soluciones aproximadas $\{U_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ converge cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ hacia una solución del problema original.

Precisemos el conjunto de Σ_ε funciones en el que F^ε está definida:

$$\Sigma_\varepsilon = \left\{ U \in L^\infty(\mathbb{R}^+; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)^N) : \sup_{(t,x)} \left| \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right| \leq M_\varepsilon, \right. \\ \left. \sup_{(t,x)} |U_i| \leq M_\varepsilon, 1 \leq i, j \leq N \right\},$$

donde la constante M_ε será elegida más adelante. Sobre el conjunto Σ_ε consideramos la topología del espacio de Banach $L^1_{\beta_\varepsilon}(0, \infty; L^\infty(\mathbb{R}^N)^N)$ dotado de la norma

$$\|U\|_{\beta_\varepsilon} = \int_0^\infty \beta_\varepsilon(t) \|U(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} dt, \quad (2.43)$$

donde β_ε es una función no negativa que deduciremos más adelante.

Primero, probaremos que $F_\varepsilon(\Sigma_\varepsilon) \subset \Sigma_\varepsilon$ y, después, que el conjunto Σ_ε es cerrado en $L^1_{\beta_\varepsilon}(0, \infty; L^\infty(\mathbb{R}^N)^N)$. El paso final consiste en demostrar que F_ε es una contracción para poder aplicar el Teorema del punto fijo de Banach.

Lema 2.4 *Existe una constante $M_\varepsilon > 0$ tal que $F_\varepsilon(\Sigma_\varepsilon) \subset \Sigma_\varepsilon$.*

Demostración. Sea $U \in L^\infty(\mathbb{R}^+; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)^N)$. Entonces, se verifica la siguiente estimación

$$\begin{aligned} \|F_\varepsilon(U)(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &= \|(\nabla\Gamma_N^\varepsilon * \rho)(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|\nabla\Gamma_N^\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|\rho(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Young para estimar la convolución. Tomando $C_\varepsilon^0 = \|\nabla\Gamma_N^\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ y usando la desigualdad

$$\|\rho(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \quad (2.44)$$

que es consecuencia de la definición (2.42), obtenemos que

$$\|F_\varepsilon(U)(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_\varepsilon^0 \|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

Para estimar las derivadas razonamos análogamente. Definimos, para cada j entre 1 y N , la constante $C_\varepsilon^j = \left\| \frac{\partial \nabla\Gamma_N^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ y usando de nuevo la desigualdad de Young obtenemos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} F_\varepsilon(U)(t, \cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &= \left\| \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \nabla\Gamma_N^\varepsilon * \rho \right)(t, \cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C_\varepsilon^j \|\rho(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_\varepsilon^j \|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, eligiendo M_ε como el máximo de todas las constantes, es decir, $M_\varepsilon \stackrel{def}{=} \|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \times \max_{j=0, \dots, N} \{C_\varepsilon^j\}$ concluimos que $F_\varepsilon(U) \in \Sigma_\varepsilon$. \square

Hacemos notar que la regularización del núcleo Γ_N es necesaria, ya que $\|\nabla\Gamma_N\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \left\| \frac{\partial \nabla\Gamma_N}{\partial x_j} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \infty$. Veamos a continuación que el conjunto Σ_ε es cerrado.

Lema 2.5 Σ_ε es cerrado en $L^1_{\beta_\varepsilon}(\mathbb{R}^+; L^\infty(\mathbb{R}^N)^N)$, para todo peso medible β_ε no negativo y localmente acotado.

Demostración. Sea $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones contenida en Σ_ε que converja hacia una función $U \in L^1_{\beta_\varepsilon}(\mathbb{R}^+; L^\infty(\mathbb{R}^N)^N)$. Veamos que U se queda dentro de Σ_ε . La convergencia en $L^1_{\beta_\varepsilon}(\mathbb{R}^+; L^\infty(\mathbb{R}^N)^N)$ implica claramente que, para casi todo t ,

$$\|U_n - U(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0,$$

y, por lo tanto, que $|U| \leq M_\varepsilon$. Además, usando esta convergencia uniforme deducimos también que para cada $j = 1, \dots, N$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_j} U_n(t, x) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} U(t, x),$$

en el sentido de las distribuciones, para casi todo t . Como además estas derivadas están uniformemente acotadas por M_ε , se verifica que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} U_n(t, x) \rightarrow V^j(t, x), \quad \text{en } L^\infty(\mathbb{R}^N)^N - \text{débil}^*,$$

para casi todo t . Por lo tanto, existen las derivadas débiles de U , coinciden con las V^j y están acotadas por la misma constante M_ε . En resumen hemos demostrado que $U \in \Sigma_\varepsilon$ y por lo tanto que Σ_ε es cerrado. \square

En el tercer y último Lema veremos que la aplicación F_ε es una contracción con la norma del espacio $L^1_{\beta_\varepsilon}(\mathbb{R}^+; L^\infty(\mathbb{R}^N)^N)$ para una función peso β_ε concreta.

Lema 2.6 Sea $\varepsilon > 0$ fijo. Entonces la aplicación F_ε es una contracción sobre el conjunto Σ_ε con la norma (2.43) inducida del espacio $L^1_{\beta_\varepsilon}(\mathbb{R}^+; L^\infty(\mathbb{R}^N)^N)$ y con $\beta_\varepsilon(t)$ definida por

$$\beta_\varepsilon(t) = \exp \left\{ -\frac{2C_\varepsilon}{M_\varepsilon} e^{M_\varepsilon t} \right\}, \quad (2.45)$$

donde la constante M_ε es la dada en el Lema 2.4 y $C_\varepsilon > 0$, al igual que M_ε , depende exclusivamente de la condición inicial ρ_0 y de ε .

Demostración. Sean U y V pertenecientes a Σ_ε . Notemos X_U, X_V, ρ_U y ρ_V las soluciones de (2.41) (con el mismo dato inicial $x \in \mathbb{R}^N$) y (2.42) correspondientes a U y V , respectivamente. A partir de (2.41) deducimos que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(X_U - X_V)(t; s, x) &= U(t, X_U(t; s, x)) - V(t, X_V(t; s, x)) \\ (X_U - X_V)(s; s, x) &= 0. \end{cases}$$

Integrando entre s y t observamos que

$$\begin{aligned} |X_U(t) - X_V(t)| &\leq \left| \int_s^t |U(\tau, X_U(\tau)) - V(\tau, X_V(\tau))| d\tau \right| \\ &\leq \int_s^t (|U(\tau, X_U(\tau)) - V(\tau, X_U(\tau))| + |V(\tau, X_U(\tau)) - V(\tau, X_V(\tau))|) d\tau \\ &\leq \int_s^t \|U - V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}(\tau) d\tau + M_\varepsilon \int_s^t |X_U - X_V|(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

donde hemos escrito $X_V(t)$, $X_U(t)$ en lugar de $X_V(t; s, x)$ y $X_U(t; s, x)$ por simplificar la notación. Usando el Lema de Gronwall deducimos

$$|X_U - X_V|(t; s, x) \leq e^{M_\varepsilon|t-s|} \int_s^t \|U - V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}(\tau) d\tau. \quad (2.46)$$

Ahora analizamos la relación entre ρ_U y ρ_V . Primero observamos que la expresión que nos da estas densidades en función de las curvas características

$$x \mapsto f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\rho_0(x)}{1 + \rho_0(x)t}$$

es una función Lipschitziana. De hecho, para todo $t > 0$ se verifica que $\|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|\nabla \rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \stackrel{\text{def}}{=} C_1$. Aplicando esta estimación a la expresión (2.42) y usando (2.46) hallamos

$$|(\rho_U - \rho_V)(t, x)| \leq C_1 |(X_U - X_V)(0; t, x)| \leq e^{M_\varepsilon t} \int_0^t \|(U - V)(\tau, \cdot)\|_{L^\infty} d\tau.$$

Finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} \|(F_\varepsilon(U) - F_\varepsilon(V))(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &= \|(\nabla \Gamma_N^\varepsilon *_{x} (\rho_U - \rho_V))(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C_\varepsilon^0 \|(\rho_U - \rho_V)(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_\varepsilon^0 C_1 \|(X_U - X_V)(0; t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C_\varepsilon^0 C_1 e^{M_\varepsilon t} \int_0^t \|(U - V)(s, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds. \end{aligned}$$

Definimos en este punto la constante C_ε que interviene en la definición de β_ε como $C_\varepsilon = C_\varepsilon^0 C_1$. Consideramos la función auxiliar $w(t) = C_\varepsilon e^{M_\varepsilon t}$ y escribimos

$$\begin{aligned} \|F_\varepsilon(U) - F_\varepsilon(V)\|_{\beta_\varepsilon} &\leq \int_0^\infty \beta_\varepsilon(t) w(t) \int_0^t \|(U - V)(s, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds dt \\ &= \int_0^\infty \beta_\varepsilon(s) \|(U - V)(s, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \frac{1}{\beta_\varepsilon(s)} \int_s^\infty w(t) \beta_\varepsilon(t) dt ds. \end{aligned}$$

Eligiendo β_ε como en (2.45) obtenemos

$$\frac{1}{\beta_\varepsilon(s)} \int_s^\infty w(t) \beta_\varepsilon(t) dt = \frac{1}{2}, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+$$

y, por lo tanto, hemos probado la contractividad de F_ε . \square

Con estos tres Lemas deducimos el siguiente resultado:

Proposición 2.1 *Dado $\varepsilon > 0$ fijo, existe un par*

$$\begin{aligned} U_\varepsilon &\in L^\infty(0, \infty; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)^N), \\ \rho_\varepsilon &\in L^\infty(0, \infty; L^\infty(\mathbb{R}^N)), \end{aligned}$$

que es la única solución de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho_\varepsilon + U_\varepsilon \cdot \nabla \rho_\varepsilon + (\rho_\varepsilon)^2 = 0, \\ U_\varepsilon = -(\nabla \Gamma_N^\varepsilon) * \rho_\varepsilon, \end{cases}$$

con condición inicial no negativa $\rho_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$. Además, ρ_ε queda dada en función de las curvas características asociadas a U_ε a través de la expresión

$$\rho_\varepsilon(t, x) = \frac{\rho_0(X_\varepsilon(0; t, x))}{1 + \rho_0(X_\varepsilon(0; t, x))t}, \quad (2.47)$$

y se tiene que $\rho_\varepsilon \geq 0$.

Demostración. La demostración es consecuencia inmediata de los Lemas 2.4, 2.5 y 2.6 y del Teorema de Punto Fijo de Banach. \square

En las siguientes Secciones analizaremos las condiciones necesarias y la forma en que $\{U_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ converge hacia una solución del problema (2.39)-(2.40).

2.3.2 Estimaciones *a priori*

En la sección anterior hemos deducido las siguientes propiedades para las funciones U_ε y ρ_ε :

$$\begin{aligned} U_\varepsilon &\in L^\infty(0, \infty; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)^N), \\ \rho_\varepsilon &\in L^\infty(0, \infty; L^\infty(\mathbb{R}^N)), \end{aligned}$$

que además satisfacen (2.39) y $U_\varepsilon = -\nabla \Gamma_N^\varepsilon * \rho_\varepsilon = -\nabla \Gamma_N * (\zeta_\varepsilon * \rho_\varepsilon)$. Como consecuencia

$$\operatorname{div} U_\varepsilon = \zeta_\varepsilon * \rho_\varepsilon \quad (2.48)$$

y, usando la desigualdad de Young, obtenemos

$$\|\operatorname{div} U_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}. \quad (2.49)$$

Podemos escribir de nuevo (2.39) de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_\varepsilon + \operatorname{div}(U_\varepsilon \rho_\varepsilon) + (\rho_\varepsilon)^2 = \operatorname{div} U_\varepsilon \rho_\varepsilon.$$

Entonces, integrando por partes obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(t, x) dx = - \int_{\mathbb{R}^N} (\rho_\varepsilon)^2(t, x) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div} U_\varepsilon(t, x) \rho_\varepsilon(t, x) dx.$$

Seguidamente, usando (2.49) deducimos

$$\frac{\partial}{\partial t} \|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq 2 \|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Aplicando el Lema de Gronwall llegamos a la siguiente estimación para cada $t \in [0, T]$:

$$\|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|\rho_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} e^{T \|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}. \quad (2.50)$$

Finalmente, de (2.44) y (2.50) obtenemos

$$\|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C, \quad (2.51)$$

para todo $t \in [0, T]$ y $p \in [1, \infty]$, donde C es una constante positiva que sólo depende de T y ρ_0 . Por lo tanto, hemos deducido el siguiente resultado.

Lema 2.7 *La densidad de carga ρ_ε pertenece al espacio $L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^N))$ y la cota (2.51) es independiente de ε , para todo $p \in [1, \infty]$.*

Necesitamos también estimar las cotas en $L^\infty(0, T; W^{1, \infty}(\mathbb{R}^N)^N)$ de la familia de campos aproximados $\{U_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ de forma uniforme en ε , por lo que no podemos usar la cota M_ε . Con ello concluiremos algún tipo de convergencia fuerte de la sucesión $\{\rho^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ y podremos pasar al límite en el término no lineal. Presentamos uno de los resultados clásicos del análisis armónico, consecuencia directa de la desigualdad de Young.

Lema 2.8 *Sean $T > 0$ y r tales que*

$$\begin{cases} \frac{N}{N-1} < r \leq \infty & \text{si } N > 1 \\ r = \infty & \text{si } N = 1. \end{cases}$$

Entonces, existe una constante $C(r, T)$, independiente de ε , tal que para todo $t \in [0, T]$,

$$\|U_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leq C(r, T). \quad (2.52)$$

Demostración. Primero notamos por χ_A la función característica asociada a un conjunto medible A . Ahora partimos U_ε en dos trozos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(t, x) &= -\nabla\Gamma_N * (\zeta_\varepsilon * \rho_\varepsilon(t, x)) \\ &= -(\chi_{|x|\leq 1}\nabla\Gamma_N + \chi_{|x|>1}\nabla\Gamma_N) * (\zeta_\varepsilon * \rho_\varepsilon(t, x)). \end{aligned}$$

La clave está en que, para $N > 1$, $\chi_{|x|>1}\nabla\Gamma_N$ está en L^r si y solamente si $N < r(N-1)$. Entonces, podemos usar esta descomposición para estimar U_ε en L^r de la forma

$$\begin{aligned} &\|U_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|\nabla\Gamma_N\|_{L^1(|x|<1)}\|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla\Gamma_N\|_{L^r(|x|>1)}\|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \end{aligned}$$

en el caso $N > 1$. El caso $N = 1$ es más simple ya que el núcleo $\nabla\Gamma_1$ está acotado. Estimamos en este caso de la forma siguiente

$$\|U_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|\nabla\Gamma_1\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Usando la estimación uniforme para la densidad (2.51) concluimos la demostración. \square

Hacemos notar que el Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev de integración fraccional también permite deducir este resultado.

Para las derivadas de U_ε demostraremos el siguiente resultado.

Lema 2.9 *Existe una constante $C(N) > 0$, independiente de ε , tal que para cada $j = 1, \dots, N$ se verifica*

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\partial}{\partial x_j} U_\varepsilon(t, \cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C(N) \left[1 + \|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right. \\ &\left. + \|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \left(1 + \log \left(1 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} \rho_\varepsilon \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Demostración. Para ser en cierta medida autoconsistentes daremos una demostración de este resultado, aunque el mismo tipo de técnica puede verse en [27]. Para estimar las derivadas de U_ε necesitamos introducir algunas funciones auxiliares. Dados dos números reales positivos r y R tales que $0 < 2r \leq R < \infty$, consideramos las funciones η_r , $\mu_{r,R}$ y ν_R en $C^\infty(\mathbb{R})$ con valores en $[0, 1]$ que verifican

$$\begin{aligned} \text{sop}(\eta_r) &\subset (-\infty, 2r], & \eta_r &\equiv 1, & \text{sobre } [0, r] \\ \text{sop}(\nu_R) &\subset [R, \infty), & \nu_R &\equiv 1, & \text{sobre } [2R, \infty) \\ \text{sop}(\mu_{r,R}) &\subset [r, 2R], & \mu_{r,R} &\equiv 1, & \text{sobre } [2r, R], \end{aligned}$$

y tales que $\eta_r + \mu_{r,R} + \nu_R = 1$. Podemos además suponer que sus derivadas están acotadas de la forma

$$|\eta'_r(t)| \leq C \frac{1}{r}, \quad |\nu'_R(t)| \leq C \frac{1}{R},$$

donde $C > 0$ es una constante independiente de r y R . Ahora, usando estas funciones, descomponemos $\frac{\partial}{\partial x_j} U_\varepsilon$ como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} U_\varepsilon &= -\frac{\partial}{\partial x_j} [\nabla \Gamma_N * (\zeta_\varepsilon * \rho_\varepsilon)] \\ &= -\left[(\nabla \Gamma_N \eta_r) * \frac{\partial}{\partial x_j} (\zeta_\varepsilon * \rho_\varepsilon) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \Gamma_N \mu_{r,R}) * (\zeta_\varepsilon * \rho_\varepsilon) \right] \\ &\quad - \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \Gamma_N \nu_R) * (\zeta_\varepsilon * \rho_\varepsilon) \right] = \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}, \end{aligned}$$

donde η_r , $\mu_{r,R}$ y ν_R están evaluadas en $|x|$. Usando en cada término \mathcal{A} , \mathcal{B} y \mathcal{C} que el núcleo verifica $|\nabla \Gamma_N| = C_N/|x|^{N-1}$ obtenemos las siguientes cotas

$$\text{Para } \mathcal{A}: |\nabla \Gamma_N \eta_r| \leq C(1/|x|)^{N-1} \chi_{|x| < 2r}.$$

Para \mathcal{B} :

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \Gamma_N \mu_{r,R}) \right| \leq C \frac{1}{|x|^N} \mu_{r,R} + C \frac{1}{|x|^{N-1}} \left(\frac{1}{r} \chi_{r < |x| < 2r} + \frac{1}{R} \chi_{R < |x| < 2R} \right).$$

Para \mathcal{C} :

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \Gamma_N \nu_R) \right| \leq C \frac{1}{|x|^N} \nu_R + C \frac{1}{|x|^{N-1}} \frac{1}{R} \chi_{R < |x| < 2R} \leq \frac{1}{R^N} \chi_{R < |x|}.$$

Entonces, se verifican las siguientes estimaciones

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq \|\nabla \Gamma_N \eta_r\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|\zeta_\varepsilon * \frac{\partial}{\partial x_j} \rho_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq Cr \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} \rho_\varepsilon \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \\ \|\mathcal{B}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \Gamma_N \mu_{r,R}) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|\zeta_\varepsilon * \rho_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C(\log(2R/r) + 1) \|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \\ \|\mathcal{C}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \Gamma_N \nu_R) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|\zeta_\varepsilon * \rho_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq 1/R^N \|\rho_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_j} U_\varepsilon(t, \cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C \left[r \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} \rho_\varepsilon(t, \cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + (1 + \log(R/r)) \|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{R^N} \|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right].$$

Eligiendo aquí $r = 1/(1 + \|\frac{\partial}{\partial x_j} \rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})$ y $R = 2$ concluimos la demostración del Lema. \square

En el siguiente resultado deduciremos que $\frac{\partial}{\partial x_j} U_\varepsilon$ está acotada para cada índice j entre 1 y N .

Lema 2.10 *Existe una constante C independiente de ε tal que*

$$\|\nabla U_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C, \quad (2.54)$$

$$\|\nabla \rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C \quad (2.55)$$

para todo $t \in [0, T]$.

Demostración. Si derivamos en (2.39) respecto de cada x_j obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho_\varepsilon + U_\varepsilon \cdot \nabla \rho_\varepsilon + (\rho_\varepsilon)^2 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_j} \right) + (U_\varepsilon \cdot \nabla) \left(\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_j} \right) + 2\rho_\varepsilon \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial U_{i\varepsilon}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \rho_\varepsilon = 0. \end{aligned}$$

Evaluando las derivadas a lo largo de las características obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_j}(t, X_\varepsilon) \right) = - \left(2\rho_\varepsilon \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial U_{i\varepsilon}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \rho_\varepsilon \right) (t, X_\varepsilon),$$

de donde deducimos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|\nabla \rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ & \leq \left(\|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla U_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right) \|\nabla \rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \end{aligned}$$

lo que, combinado con (2.51) y (2.53), nos da

$$\frac{d}{dt} \|\nabla \rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C \left(1 + \log(1 + \|\nabla \rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}) \right) \|\nabla \rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty},$$

con $t \in [0, T]$ y C dependiente sólo de $T > 0$, de la condición inicial ρ_0 y de la dimensión N . Aplicamos ahora el criterio de comparación entre las soluciones de esta desigualdad diferencial y las funciones $z(t) = \exp\{ae^{Ct} - 1\} - 1$ soluciones de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} z'(t) = C\{1 + \log[1 + z(t)]\}(1 + z(t)) \\ z(0) = z_0 = \|\nabla\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \end{cases}$$

donde $a = 1 + \log(1 + z_0)$. Deducimos entonces que

$$\|\nabla\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \exp\{ae^{CT} - 1\} - 1 = C_1.$$

Usando (2.53) y (2.51) hallamos fácilmente

$$\|\nabla U_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_2,$$

lo que concluye la demostración. \square

2.3.3 Paso al límite. Existencia de soluciones regulares

A partir del concepto de solución débil se tiene que,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \rho_\varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \rho_\varepsilon U_\varepsilon \cdot \nabla_x \Psi + \rho_\varepsilon \operatorname{div} U_\varepsilon \Psi - (\rho_\varepsilon)^2 \Psi \right\} (t, x) d(t, x) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0(x) \Psi(0, x) dx, \end{aligned} \quad (2.56)$$

para toda función test $\Psi \in C_0^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^N)$. Pretendemos ver que la sucesión ρ_ε converge hacia cierta función ρ uniformemente sobre compactos como consecuencia de aplicar el Teorema de Ascolí a la sucesión $\{X_\varepsilon\}_\varepsilon$.

Para cada $\varepsilon, s, t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^N$, el difeomorfismo X_ε verifica

$$X_\varepsilon(t; s, X_\varepsilon(s; t, x)) = x.$$

Entonces, derivando con respecto a s y evaluando en $x = X_\varepsilon(t; s, y)$ tenemos

$$\frac{\partial X_\varepsilon}{\partial s}(t; s, y) + U_\varepsilon(s, y) \cdot \nabla_x X_\varepsilon(t; s, y) = 0. \quad (2.57)$$

Del mismo modo, diferenciando respecto de x en (2.41) hallamos

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_x X_\varepsilon(t; s, x) = \nabla_x X_\varepsilon(t; s, x) \cdot \nabla_x U_\varepsilon(t, X_\varepsilon(t; s, x)). \quad (2.58)$$

Desde estas ecuaciones, usando las estimaciones de los Lemas 2.8 y 2.10, deducimos para todo $t, s < T$ y $x \in \mathbb{R}^N$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} X_\varepsilon(t; s, x) \right| \leq C(T),$$

$$|\nabla_x X_\varepsilon(t; s, x)| \leq C(T)$$

y

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} X_\varepsilon(t; s, x) \right| \leq C(T).$$

Integrando (2.41) sobre $[s, t]$, obtenemos

$$|X_\varepsilon(t; s, x) - x| \leq \left| \int_s^t |U_\varepsilon(\tau, X_\varepsilon(\tau; s, x))| d\tau \right|,$$

de donde deducimos la acotación uniforme sobre compactos

$$|X(t; s, x)| \leq R + C(T),$$

para $|x| \leq R$ y $R > 0$. Estas estimaciones nos llevan a concluir que $\{X_\varepsilon\}_\varepsilon$ es una familia uniformemente equicontinua en $(t; s, x)$ y, por lo tanto, vía Teorema de Ascolí, podemos extraer una subsucesión (que notaremos igualmente $\{X_\varepsilon\}_\varepsilon$ para simplificar) que converge uniformemente sobre compactos hacia X .

Como consecuencia de esa convergencia de $\{X_\varepsilon\}_\varepsilon$, del hecho que ρ_0 sea continua y de la expresión explícita (2.47) para ρ_ε concluimos

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon(t, x) & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(t, x) & \text{uniformemente sobre compactos,} \\ \rho_\varepsilon & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \rho & \text{en } L^p_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N), \text{ para } 1 \leq p < \infty, \end{cases}$$

y la densidad límite ρ verifica (2.42).

Para pasar al límite en (2.56) hemos de probar que $\text{div} U_\varepsilon \rightarrow \rho$. Sea K un conjunto compacto de $([0, \infty) \times \mathbb{R}^N)$ y sea $p < \infty$. Se tiene:

$$\begin{aligned} \|\text{div} U_\varepsilon - \rho\|_{L^p(K)} &= \|(\zeta_\varepsilon * \rho_\varepsilon) - \rho\|_{L^p(K)} \\ &\leq \|\zeta_\varepsilon * (\rho_\varepsilon - \rho)\|_{L^p(K)} + \|(\zeta_\varepsilon * \rho) - \rho\|_{L^p(K)}, \end{aligned}$$

y este último término converge a cero. De la misma forma y descomponiendo $\nabla \Gamma_N$ igual que en la demostración del Lema 2.8, podemos deducir

$$U_\varepsilon = -\nabla \Gamma_N * (\zeta_\varepsilon * \rho_\varepsilon) \longrightarrow -\nabla \Gamma_N * \rho \quad \text{en } L^r_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N),$$

donde r satisface

$$\begin{cases} \frac{N}{N-1} < r \leq \infty & \text{si } N > 1 \\ r = \infty & \text{si } N = 1. \end{cases}$$

De esta forma podemos además recuperar la ecuación de Poisson (2.40) para las funciones límite. Entonces, tomando límite en (2.56) se tiene

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \rho \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \rho U \cdot \nabla_x \Psi \right\} (t, x) d(t, x) = - \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0(x) \Psi(0, x) dx,$$

que no es más que la versión distribucional de (2.36). Como también hemos obtenido la ecuación de Poisson

$$U = -\nabla \Gamma_N * \rho,$$

hemos probado las afirmaciones de existencia así como las propiedades de las soluciones enunciadas en la primera parte del Teorema 2.3.

2.3.4 Unicidad

Comenzamos el análisis de la unicidad introduciendo el siguiente Lema sobre de regularidad de soluciones.

Lema 2.11 (Calderon-Zygmund) *Sea $\rho \in L^p(\mathbb{R}^N)$, con $2 \leq p < \infty$, y sea $\Phi = \Gamma_N * \rho$, entonces*

$$\|D^2 \Phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C p \|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

donde D^2 denota cualquier derivada parcial de segundo orden y C es una constante universal positiva.

Demostración. Para el caso en que $\text{supp}(\rho)$ sea compacto la demostración puede encontrarse, por ejemplo, en el libro de D. Gilbarg y N.S. Trudinger [34], Teorema 9.9. Este resultado afirma que

$$\|D^2 \Phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C(p, R) \|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

siendo R el radio de una bola suficientemente grande como para que contenga al soporte de ρ . Veamos que un razonamiento de homogeneidad nos lleva a que la constante $C(p, R)$ no depende realmente de R . Dada ρ con soporte en la bola de centro 0 y radio R , tomamos $\rho_R(x) = \rho(r/R)$ para reducirnos al caso en que el soporte está en la bola unidad. Usando que $\phi_R = \Gamma_N * \rho_R$ (o

equivalentemente $-\Delta\phi_R = \rho_R$) obtenemos que $\phi_R(x) = R^2\phi(x/R)$, de donde finalmente concluimos

$$\begin{aligned} \|D^2\Phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \frac{1}{R^{N/p}} \|D^2\Phi_R\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \frac{C(p, 1)}{R^{N/p}} \|\rho_R\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = C(p, 1) \|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \end{aligned}$$

y por lo tanto $C(p, R) = C(p)$. El resultado se extiende de forma inmediata a cualquier $\rho \in L^p(\mathbb{R}^N)$ independientemente de su soporte. Por otro lado, se puede comprobar también a partir de la constante obtenida en [34] que $C(p) \leq Cp$. \square

Ahora probaremos la unicidad para soluciones débiles pertenecientes al espacio $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}))$. El argumento que vamos a usar ha sido desarrollado para el análisis de la ecuación incompresible de Euler y también ha sido aplicado por R. Robert en [72] para la ecuación de Vlasov-Poisson.

Sean U_1 y U_2 dos soluciones del problema (2.36)-(2.38) y sean Φ_1, Φ_2 y ρ_1, ρ_2 sus potenciales y densidades asociadas respectivamente. Escribiendo

$$\rho = \rho_1 - \rho_2, \quad \Phi = \Phi_1 - \Phi_2, \quad \text{y} \quad U = -\nabla\Phi = U_1 - U_2,$$

obtenemos la siguiente ecuación para ρ :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}(\rho_1 U) + \operatorname{div}(\rho U_2) = 0.$$

Tras multiplicar por Φ e integrar sobre \mathbb{R}^N obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Phi \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(\rho_1 \nabla \Phi) \Phi \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(\rho U_2) \Phi \, dx = 0.$$

Estudiamos separadamente estos tres términos. Para el primero obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Phi \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \theta \frac{\partial(-\Delta\Phi)}{\partial t} \Phi \, dx = \frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^N} |U|^2 \, dx. \quad (2.59)$$

El segundo puede ser escrito como

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(\rho_1 \nabla \Phi) \Phi \, dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_1 |\nabla \Phi|^2 \, dx \right| \leq \|\rho_1\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |U|^{2p'} \, dx \right)^{\frac{1}{p'}},$$

donde, extrayendo $|U|^{\frac{2}{p}(p'-1)}$ de la integral obtenemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(\rho_1 \nabla \Phi) \Phi \, dx \right| \leq C(\rho_0) p \|U\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |U|^2 \, dx \right)^{\left(1 - \frac{1}{p}\right)}. \quad (2.60)$$

Finalmente, el tercero puede ser estimado como

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(\rho U_2) \Phi \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \rho \nabla \Phi_2 \cdot \nabla \Phi \, dx = - \int_{\mathbb{R}^N} \Delta \Phi \nabla \Phi_2 \cdot \nabla \Phi \, dx \\
&= \sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \Delta \Phi_2 |U|^2 dx \\
&\leq C \|D^2 \Phi_2\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |U|^{2p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}$$

Entonces, usando el Lema 2.11 deducimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(\rho U_2) \Phi \, dx \leq C(\rho_0) p \|U\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |U|^2 dx \right)^{\left(1 - \frac{1}{p}\right)}. \quad (2.61)$$

Puesto que las U_i están acotadas en L^∞ y $p \in [2, \infty)$, combinando (2.59), (2.60) y (2.61) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha \leq Cp \alpha^{(1 - \frac{1}{p})}, \quad \alpha(0) = 0,$$

donde $\alpha = \int |U|^2 dx$. A partir de esta desigualdad diferencial y comparando con las soluciones exactas de la ecuación asociada a la igualdad deducimos la cota

$$\alpha(t) \leq (Ct)^p, \quad \forall p \in [2, \infty),$$

donde $C > 0$ no depende de p . Usando la arbitrariedad de p deducimos que $\alpha \equiv 0$ en $[0, 1]$ y repitiendo el argumento con dato inicial $\alpha(1) = 0$, $\alpha(2) = 0$, etc, deducimos que $\alpha \equiv 0$ en \mathbb{R}^+ , o equivalentemente $U_1 \equiv U_2$. Con ello, concluimos la demostración de la unicidad.

2.3.5 Existencia de solución con dato inicial en L^1

En esta Sección probaremos la existencia de solución con dato inicial ρ_0 verificando (2.18) y así completaremos la demostración del Teorema 2.3.

Demostración del Teorema 2.3. Elegimos una sucesión que aproxime a la condición inicial, $\{\rho_0^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que

$$\begin{cases} \rho_0^n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \\ \rho_0^n \rightarrow \rho_0 \text{ en } L^1(\mathbb{R}^N), \\ \|\rho_0^n\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|\rho_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \\ \rho_0^n \geq 0. \end{cases}$$

A partir de los resultados demostrados deducimos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una única $\rho^n \in L^\infty(0, \infty; L^1(\mathbb{R}^N))$ solución clásica del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho^n + \operatorname{div}_x(\rho^n U^n) = 0, \\ U^n = -\nabla \Gamma_N * \rho^n, \\ \rho^n(t=0) = \rho_0^n. \end{cases} \quad (2.62)$$

Puesto que ρ^n viene dada en función de ρ_0^n en la forma (2.42) observamos que $\rho^n(t, \cdot)$ y por lo tanto $\rho^n U^n(t, \cdot)$ tienen soporte compacto. Entonces, integrando sobre \mathbb{R}_x^N y aplicando el teorema de la divergencia deducimos la ley de conservación de la carga

$$\|\rho^n(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \|\rho_0^n\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Como consecuencia, ρ^n permanece acotada en $L^\infty(0, \infty; \mathcal{M}(\mathbb{R}^N))$, donde $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ es el espacio de las medidas de Radon. Por lo tanto, la sucesión converge con la topología débil* a una medida ρ en $L^\infty(0, \infty; \mathcal{M}(\mathbb{R}^N))$. Veamos que esta ρ es solución y que, de hecho, pertenece a $L^\infty(0, \infty; L^1(\mathbb{R}^N))$.

Puesto que la solución ρ^n puede ser escrita explícitamente como en (2.42) la estimación de decrecimiento en infinito (2.16) también se verifica en este contexto y entonces, para $\alpha > 0$ tenemos que

$$\rho^n \text{ está acotada en } L^\infty(\alpha, \infty; L^\infty(\mathbb{R}^N)).$$

Esto implica que $\rho(t, \cdot)$ es una función y no sólo una medida y por lo tanto está en $L^1(\mathbb{R}^N)$ para tiempos $t \geq \alpha$. La arbitrariedad de α nos permite concluir que $\rho \in L^\infty(0, \infty; L^1(\mathbb{R}^N))$. Hacemos notar que este argumento no se puede usar para acotar uniformemente ρ pues la cota usada explota cuando α se aproxima a cero.

Sea ahora Ψ una función test. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left(\rho^n(t, x) \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, x) + \rho^n(t, x) U^n(t, x) \cdot \nabla_x \Psi(t, x) \right) dx dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0^n(x) \Psi(0, x) dx. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Usando que $U^n = -\nabla \Gamma_N * \rho^n$, escribimos el segundo término de miembro de la izquierda como

$$C_N \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{2N}} \rho^n(t, x) \rho^n(t, y) \frac{y-x}{|x-y|^N} \nabla_x \Psi(t, x) dy dx dt. \quad (2.64)$$

De la antisimetría de núcleo Γ_N se deduce que (2.64) toma la forma

$$C_N \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{2N}} \rho^n(t, x) \rho^n(t, y) (y-x) \cdot \left(\frac{\nabla_x \Psi(t, x) - \nabla_x \Psi(t, y)}{2|x-y|^N} \right) dy dx dt.$$

Así, la forma débil de la ecuación (2.63) se escribe como

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0^n(x) \Psi(0, x) dx &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \rho^n(t, x) \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, x) dx dt \\ &+ C_N \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{2N}} \rho^n(t, x) \rho^n(t, y) (y - x) \left(\frac{\nabla_x \Psi(t, x) - \nabla_x \Psi(t, y)}{2|x - y|^N} \right) d(t, x, y). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Analizamos ahora el paso al límite en (2.65) según la dimensión del espacio.

Caso uno dimensional

En dimensión uno ya hemos probado un resultado general de existencia en el Teorema 2.2 que es consecuencia del proceso de paso al límite desde la regularización de Fokker-Planck y que nos proporciona una solución medida a partir de datos iniciales débiles. Ahora podemos también tomar límite directamente en (2.65) mostrando, al igual que en la Sección 2.2, que el producto $\rho^n(t, x) \rho^n(t, y)$ converge débil* en $C([0, T]; \mathcal{M}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y))$ al producto de los límites. Para ello bastará usar la ecuación (2.62) para acotar el primer momento de la densidad. Veámoslo con más detalle.

La función

$$\Phi(t, x, y) = (y - x) \cdot \frac{\nabla \Psi(t, x) - \nabla \Psi(t, y)}{2|x - y|^N}$$

es continua para $N = 1$, por lo que intentaremos de nuevo pasar al límite usando la dualidad entre las medidas de Radon y las funciones continuas con soporte compacto. Puesto que el producto $\rho^n(t, x) \rho^n(t, y)$ está acotado en $L^\infty(0, \infty; L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y))$ sabemos que converge en $\mathcal{M}([0, T] \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)$ con la topología débil*. Veamos que converge al producto de los límites. Dada $\eta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \eta(x) \rho^n(t, x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \rho^n(t, x) U^n(t, x) \frac{\partial \eta}{\partial x}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{-\text{sign}(x - y)}{2} \rho^n(t, y) \rho^n(t, x) \eta'(x) dy dx \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(t), \end{aligned}$$

y por lo tanto $\|\alpha\|_{L^\infty(0, T)} \leq \|\eta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\rho^n\|_{L^1(\mathbb{R})}^2$. En consecuencia la familia de aplicaciones

$$\left\{ t \mapsto \int_{\mathbb{R}} \eta(x) \rho^n(t, x) dx \right\}_n$$

es acotada y equicontinua y por lo tanto, gracias al Teorema de Ascolí, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta(x) \rho^n(t, x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \eta(x) \rho(t, x) dx$$

uniformemente en $[0, T]$. Tomando la función test $\mu(t, y) \in C_0^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R})$ obtenemos

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \eta(x) \mu(t, y) (\rho^n(t, x) \rho^n(t, y) - \rho(t, x) \rho(t, y)) dx dy dt \rightarrow 0.$$

Esta convergencia junto con la densidad del producto de espacios de funciones test en el espacio $C_0^0([0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ nos permite concluir que $\rho^n(t, x) \rho^n(t, y)$ converge a $\rho(t, x) \rho(t, y)$ en $C(0, T; \mathcal{M}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) - \text{débil}^*)$.

No obstante, el paso al límite en (2.65) requiere de alguna precisión ya que ϕ no tiene soporte compacto, al igual que ocurría en la segunda sección de este Capítulo. Tomamos de nuevo una función de truncamiento $\eta_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\eta_R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| + |y| \leq R \\ 0 & \text{si } |x| + |y| > 2R \\ 0 \leq \eta_R(x, y) \leq 1 & \text{si } R < |x| + |y| \leq 1. \end{cases}$$

Entonces podemos descomponer el último término de (2.65) como sigue:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x, y) \rho^n(t, x) \rho^n(t, y) dx dy dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \eta_R(x, y) \Phi(t, x, y) \rho^n(t, x) \rho^n(t, y) dx dy dt \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (1 - \eta_R(x, y)) \Phi(t, x, y) \rho^n(t, x) \rho^n(t, y) dx dy dt, \end{aligned} \quad (2.66)$$

donde T está elegido para contener el soporte en tiempo de Φ . Puesto que $\Phi \eta_R$ sí que tiene soporte compacto, la primera integral converge hacia $\int \Phi \eta_R \rho \rho$, para $R > 0$ fijo. Tomando el segundo límite $R \rightarrow \infty$ obtenemos $\int \eta_R \Phi \rho \rho \rightarrow \int \Phi \rho \rho$. Por lo tanto, para concluir basta con probar que el segundo término de la derecha de (2.66) converge a cero cuando $R \rightarrow \infty$, uniformemente en $n \in \mathbb{N}$. Para ello, observamos que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x, y) (1 - \eta_R(x, y)) \rho^n(t, x) \rho^n(t, y) dx dy dt \right| \\ & \leq \|\Phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \frac{1}{R} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (|x| + |y|) \rho^n(t, x) \rho^n(t, y) dx dy dt \\ & \leq 2 \|\Phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \frac{1}{R} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho^n(t, y) \int_{\mathbb{R}} |x| \rho^n(t, x) dx dy dt, \end{aligned}$$

y, por lo tanto, basta controlar el primer momento de la densidad en $[0, T]$. Usamos la ecuación de continuidad (2.62) para obtener

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |x| \rho^n(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}} \rho^n(t, x) \frac{x \cdot U^n}{|x|} dx.$$

De aquí deducimos que

$$\int_{\mathbb{R}} |x| \rho^n(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}} |x| \rho_0^n(x) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \rho^n \frac{x \cdot U^n}{|x|} dx,$$

y puesto que en dimensión uno se tiene $\|U^n(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq 1/2 \|\rho^n(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}$, concluimos

$$\int_{\mathbb{R}} |x| \rho^n(t, x) dx \leq C(\rho_0) + \frac{T}{2} \|\rho_0\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 = C(T).$$

De esta forma finaliza la demostración en una dimensión.

Demostración independiente de N para $\theta = 1$

La demostración que sigue es independiente de la dimensión N e incluye el caso uno dimensional, aunque ya hemos comentado las diferencias especiales de este caso. Veamos algunas estimaciones para ρ^n en $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^N)$ usando solamente la cota L^1 de ρ_0 , la del momento de orden 1 y las hipótesis de entropía sobre la densidad inicial (2.18). Recordamos que este resultado no puede ser obtenido por interpolación entre L^1 y la cota L^∞ que es del tipo $1/t$. Observamos que ρ^n verifica (2.36) en sentido clásico, por lo que podemos multiplicar (2.62) por $|x|$ y $(1 + \log \rho^n)$ e integrar sobre \mathbb{R}^N y, aplicando el teorema de la divergencia, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} |x| \rho^n(t, x) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \rho^n(t, x) \frac{x \cdot U^n(t, x)}{|x|} dx, \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} (\rho^n \log \rho^n)(t, x) dx &+ \int_{\mathbb{R}^N} (\rho^n(t, x))^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Hacemos notar que en el caso atractivo el último término del miembro de la izquierda de la segunda ecuación es negativo y el argumento que sigue *no puede ser extendido a este caso*. Integrando ahora entre 0 y t , con $t \leq T$, obtenemos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} |x| \rho^n(t, x) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |x| \rho_0^n(x) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \rho^n(\tau, x) |U^n(\tau, x)| dx d\tau, \end{aligned} \quad (2.67)$$

y

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} (\rho^n \log \rho^n)(t, x) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (\rho^n(\tau, x))^2 dx d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\rho_0^n \log \rho_0^n)(x) dx. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Dividimos U^n en dos partes $U^n = U_1^n + U_2^n$, de forma que se verifique:

$$\begin{cases} \|U_1^n(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \|\rho^n(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \\ \|U_2^n(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{4} \|\rho^n(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \end{cases} \quad (2.69)$$

donde C_1 es la norma uniforme de $\nabla\Gamma_N$ en el exterior de una bola de un determinado radio y $1/4$ es la norma en L^1 del mismo núcleo en el interior de esa misma bola. Por lo tanto, las constantes C_1 y $1/4$ de las estimaciones de U_1^n y U_2^n están muy relacionadas. De hecho, si hacemos la segunda de ellas igual a un parámetro δ , la primera C_1 será una constante que depende sólo de N multiplicada por el factor $1/\delta^{(N-1)}$.

Entonces, a partir de (2.67) podemos deducir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |x| \rho^n(t, x) dx &\leq C_2 + \int_0^t \|U_1^n(\tau, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|\rho^n(\tau, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} d\tau \\ &+ \int_0^t \|U_2^n(\tau, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\rho^n(\tau, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} d\tau \\ &\leq C_3 + \frac{1}{4} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (\rho^n(\tau, x))^2 dx d\tau, \end{aligned} \quad (2.70)$$

donde C_3 depende sólo de ρ_0 y T . Sumando (2.68) y dos veces (2.70) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\rho^n \log \rho^n + 2|x| \rho^n)(t, x) dx + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (\rho^n(\tau, x))^2 dx d\tau \leq C_4. \quad (2.71)$$

Si escribimos $\rho^n |\log \rho^n|$ en la forma

$$\begin{aligned} \rho^n |\log \rho^n| &= \rho^n \log \rho^n \chi_{\{\rho^n > 1\}} - \rho^n \log \rho^n \chi_{\{\rho^n < 1\}} \\ &= \rho^n \log \rho^n - 2\rho^n \log \rho^n \chi_{\{\rho^n < 1\}} \\ &= \rho^n \log \rho^n - 2\rho^n \log \rho^n \chi_{\left\{e^{-\frac{|x|}{2}} < \rho < 1\right\}} - 2\rho^n \log \rho^n \chi_{\left\{\rho \leq e^{-\frac{|x|}{2}}\right\}}, \end{aligned}$$

usando la siguiente desigualdad $-s \log(s) \leq \sqrt{s}$ para $0 \leq s \leq 1$ obtenemos

$$\rho^n |\log \rho^n| \leq \rho^n \log \rho^n + |x| \rho^n + 2e^{-\frac{|x|}{4}}.$$

Por lo tanto, de esta desigualdad junto con (2.71) deducimos finalmente la siguiente estimación:

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} (\rho^n |\log \rho^n| + |x| \rho^n)(t, x) dx + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (\rho^n(t, x))^2 dx dt \leq C_5, \quad (2.72)$$

donde C_5 se escribe como

$$C_5 = \int_{\mathbb{R}^N} \left(2e^{-\frac{|x|}{4}} + (C_1 T \|\rho_0\|_{L^1} + 2|x| + |\log \rho_0(x)|) \rho_0(x) \right) dx.$$

Con estas propiedades estamos justo en las condiciones para aplicar el Teorema de Dunford-Pettis y obtener convergencia débil en L^1 ; no obstante, estamos interesados en la estimación en $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^N)$ que nos dará convergencia débil en este espacio. Veamos que la sucesión U^n converge fuertemente en $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, para cada $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ compacto. Para ello usaremos el siguiente resultado (véase [1], [75]).

Lema 2.12 Sean X, Y y Z tres espacios de Banach tales que las inclusiones $X \subset Z \subset Y$ son continuas y tal que $X \hookrightarrow Z$ sea compacta. Se considera una familia acotada de funciones $\mathcal{F} \subset L^p(0, T; X)$ con $1 \leq p < \infty$. Si se verifica que

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} : f \in \mathcal{F} \right\} \text{ es acotada en } L^1(0, T; Y),$$

entonces la familia \mathcal{F} es fuertemente relativamente compacta en $L^p(0, T; Z)$.

Probemos, en primer lugar, que la sucesión de campos U^n permanece acotada en $L^2(0, T; H^1(\Omega)^N)$ uniformemente en n .

Lema 2.13 Sea $\rho^n \in L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{R}^N)) \cap L^2((0, T) \times \mathbb{R}^N)$. Entonces, para cada abierto acotado y regular $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, U^n pertenece a $(L^2(0, T; H^1(\Omega)))^N$ y $\frac{\partial}{\partial t} U^n$ pertenece a $(L^1(0, T; L^q(\Omega)))^N$ con $1 < q < 1 + \frac{1}{N-1}$ para $N \geq 2$ y $1 < q \leq 2$ para $N = 1$.

Demostración. Primero observamos que, gracias al Lema 2.11, una vez se tiene que $\rho^n \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^N)$ se deduce que $\nabla U^n \in (L^2((0, T) \times \mathbb{R}^N))^{N \times N}$. Usando este hecho y la estimación (2.69) concluimos que

$$\|U^n\|_{(L^2(0, T; H^1(\Omega)))^N} \leq C,$$

con la constante C independiente de n . Con ello probamos la primera afirmación del Lema.

Usando las desigualdades de Sobolev podemos también deducir que

$$\|U^n\|_{L^2(0, T; L^p(\Omega))} \leq C,$$

con $p = \infty$ para $N = 1$ y $p < 2 + \frac{2}{N-2}$ para $N \geq 2$. Eligiendo $p > 2$ estimamos

$$\|\rho_n U^n\|_{L^1(0, T; L^q(\Omega))} \leq C, \quad (2.73)$$

donde $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$. Se verifica entonces que $1 < q < 1 + \frac{1}{N-1}$ si $N \geq 2$ y $1 < q \leq 2$ si $N = 1$. A partir de la ecuación (2.62), mediante la convolución con el núcleo $\nabla\Gamma_N$, deducimos

$$\frac{\partial}{\partial t} U^n = -\nabla\Gamma_N * \frac{\partial}{\partial t} \rho^n = \nabla\Gamma_N * (\operatorname{div}_x \rho^n U^n).$$

Para estimar este segundo miembro usamos la versión dual del Lema 2.11. Sea η una función test con soporte en Ω . Entonces

$$\langle \nabla\Gamma_N * (\operatorname{div}_x \rho^n U^n(t, \cdot)), \eta \rangle = \int_{\Omega} \rho^n U^n(t, x), D^2\Gamma_N * \eta(x) dx,$$

y, aplicando el Lema 2.11 a $(\Gamma_N * \eta)$, obtenemos

$$|\langle \nabla\Gamma_N * (\operatorname{div}_x \rho^n U^n(t, \cdot)), \eta \rangle| \leq Cq' \|\rho^n U^n(t, \cdot)\|_{L^q(\Omega)} \|\eta\|_{L^{q'}(\Omega)},$$

donde q' es el exponente conjugado de q : $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Con ello deducimos finalmente la estimación de $\frac{\partial}{\partial t} U_n$ en $(L^1(0, T; L^q(\Omega)))^N$. \square

Ahora aplicamos el Lema 2.12 con $X = H^1(\Omega)$, $Z = L^2(\Omega)$ e $Y = L^q(\Omega)$, para cada $\Omega \in \mathbb{R}^N$ compacto, para obtener la compacidad relativa de U^n en $L^2((0, T) \times \Omega)$ y con ello la posibilidad de pasar al límite en (2.63) combinando la convergencia fuerte de U^n y la débil de ρ^n en $L^2([0, T] \times \Omega)$.

También observamos que la propiedad de compacidad demostrada nos permite recuperar la ecuación de Poisson para las funciones límite ρ y U , lo que concluye la demostración de existencia en el caso repulsivo.

Continuidad de las soluciones

Veamos qué propiedades de compacidad poseen las soluciones débiles que acabamos de construir. Aplicando el Lema 2.3 obtenemos que $\rho_n \rightarrow \rho$ en $C(0, T; \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)\text{-débil}^*)$. Pero además, gracias a la estimación (2.71), la familia $\{\rho_n(t, \cdot) : n = 1, 2, \dots, t \geq 0\}$ está en un subconjunto débilmente compacto de $L^1(\mathbb{R}^N)$. Si, para cada $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, usamos un argumento clásico para aproximar uniformemente en t y n la integral $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(t, x) g(x) dx$ por integrales de la forma $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(t, x) \eta(x) dx$ con $\eta \in C_0(\mathbb{R}^N)$, concluimos la continuidad de $\rho(t, \cdot)$ en $L^1(\mathbb{R}^N)$ -débil.

Soluciones débiles en el caso atractivo

Para analizar el caso atractivo podemos intentar aplicar el mismo tipo de ideas usadas en el caso repulsivo, pero no obtendríamos más que soluciones

L^1 locales en tiempo. Por otro lado, usando la regularización de Fokker-Planck obtenemos directamente una solución medida global sin necesidad de controlar el momento inicial y la entropía.

Todos los argumentos usados en las anteriores Secciones pueden ser directamente adaptados para analizar el caso atractivo con dos únicas restricciones: los resultados serán locales en tiempo y la Sección 2.3.5 no puede ser extendida a este caso. De hecho, para $t \in [0, T']$ con $T' = \alpha T^*$ y $0 < \alpha < 1$ se tienen la cota

$$\|\rho(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{1 - \alpha} \|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

que conecta con la primera parte del Teorema 2.4.

2.3.6 Conexión con la ecuación de Hopf-Burgers

En el caso uno dimensional, probaremos en esta sección que la solución (ρ, U) de (2.11), (2.12) verifica que U es además solución de la ecuación de Hopf-Burgers. El problema (2.11), (2.12) junto a la Definición 2.1 nos dará pues una nueva formulación para la ecuación de Burgers. El problema consistirá en identificar la solución débil con la solución entrópica. Esto será siempre cierto en el caso atractivo ($\theta = -1$) y en el caso repulsivo siempre que se verifique la condición adicional $\rho(t, x) \leq 1/t$. A lo largo de esta sección definiremos los diferentes conceptos de solución involucrados y daremos respuesta a la cuestión de la unicidad. En el siguiente capítulo analizaremos en un ambiente más general las cuestiones de unicidad, por lo que aquí sólo damos un pequeño resumen aplicado a este caso particular.

Primero mostramos que el sistema puede ser reformulado en términos del campo U , conectando nuestro problema con la ecuación de Hopf-Burgers. Haciendo la convolución con $\theta \nabla \Gamma_N$ en (2.36) obtenemos la identidad

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\theta \frac{1}{2} \text{sign} * \partial_x(\rho U) = \theta \rho U,$$

donde el producto ha de ser entendido en sentido de la Definición 2.1, es decir, para cada $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} (\rho U) \eta \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \theta \text{sign}(x - y) \frac{1}{4} (\eta(x) - \eta(y)) \rho(t, dx) \rho(t, dy).$$

Vamos a intentar expresar este producto sólo en términos de U . Para ello tomamos ahora una sucesión aproximante $(\rho_n)_{n>0}$ regular que verifica

$$\rho_n \rightarrow \rho \text{ en } C^0(0, T; \mathcal{M}(\mathbb{R})\text{-débil}^*)$$

y con $((1 + |x|)\rho_n)_{n>0}$ acotada en $L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{R}))$. Tomamos también $U_n := \theta(1/2)\text{sign} * \rho_n$, para que la definición del producto coincida con el producto punto a punto. Se verifica que:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \theta \text{sign}(x - y) \frac{1}{4} (\eta(x) - \eta(y)) \rho_n(t, x) \rho_n(t, y) d(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho_n(t, x) U_n(t, x) \eta(x) dx = -\theta \int_{\mathbb{R}} \partial_x \left(\frac{U_n^2(t, x)}{2} \right) \eta(x) dx \\ &= \theta \int_{\mathbb{R}} \frac{U_n^2(t, x)}{2} \partial_x \eta(x) dx. \end{aligned}$$

La convergencia de ρ_n implica que U_n está acotado en $L^\infty(0, T; BV(\mathbb{R}))$ donde $BV(\mathbb{R})$ es el espacio de funciones de $L^1(\mathbb{R})$ cuya derivada es una medida finita. Usando el Teorema de Helly y la convergencia de ρ_n obtenemos que U_n converge en $C^0(0, T; L^p(I))$, para todo intervalo compacto I . Por lo tanto, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{U_n^2(t, x)}{2} \partial_x \eta(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{U^2(t, x)}{2} \partial_x \eta(x) dx.$$

En resumen, hemos probado que $\rho U = -\theta \frac{\partial_x U^2}{2}$ al menos en un sentido distribucional. Entonces, reencontramos como anunciábamos, la ecuación de Hopf-Burgers

$$\frac{\partial}{\partial t} U + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} U^2 = 0, \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} U = \theta \rho, \quad (2.75)$$

$$U(0, x) = U_0. \quad (2.76)$$

Las soluciones de este sistema han de ser entendidas en sentido débil. Una condición necesaria para tener soluciones clásicas de (2.74) y (2.76) es que U sea una función monótona creciente, pero ni siquiera en este caso (que corresponde con el repulsivo $\theta = 1$) se tiene unicidad de solución. En el caso atractivo $\theta = -1$, el campo es no creciente y por lo tanto desarrollará ondas de choque incluso para condiciones iniciales muy regulares. El instante crítico antes del cual existen soluciones clásicas puede ser construido por el método de las características para datos regulares y viene dado por

$$T^* = -\frac{1}{\min_{x \in \mathbb{R}} \{\partial_x U_0(x), 0\}}.$$

Por lo tanto, el concepto adecuado de solución para la evolución del campo es el concepto de solución entrópica introducido por S. N. Kruzhkov (véase

[47]). Ésta será una solución distribucional de (2.74), (2.76) que verifique además la desigualdad de entropía:

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(U) + \frac{\partial}{\partial x}q(U) \leq 0, \quad (2.77)$$

para cada función convexa η y $\frac{d}{du}q(u) = u \frac{d}{du}\eta(u)$ y una condición de continuidad en L^1 en el instante 0. Realmente, Chen y Rascole [23] han probado recientemente que la desigualdad de entropía implica continuidad fuerte en tiempo en L^1 , lo que hace esta condición innecesaria. En nuestro caso uno dimensional, si $\rho_0 \in L^1(\mathbb{R})$ o $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, el dato inicial U_0 está en $L^\infty(\mathbb{R})$. Con esta condición (véase [47], Teorema 5.1 en [37] y [23]), existe una única solución entrópica $U \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$ para todo $T > 0$. La densidad ρ quedaría pues determinada por la derivada distribucional del campo entrópico U .

Entonces, la cuestión que de forma natural se nos presenta es si la solución obtenida previamente es la solución entrópica. La respuesta está, de hecho, en el trabajo de O. Oleinik [60]. Para ella una solución admisible es una solución distribucional de (2.74)-(2.76) que satisface la siguiente desigualdad:

$$\frac{\partial}{\partial x}U \leq K(t, x), \quad (2.78)$$

para una función continua K sobre $(0, T] \times \mathbb{R}$ (no necesariamente continua en $t = 0$ como nos muestra el ejemplo típico $K(t, x) = 1/t$). Ella prueba la existencia y unicidad de solución usando el método “vanishing viscosity” que consiste en añadir un término viscoso del tipo $\nu \Delta U$ y luego hacer la constante de viscosidad ν tender a cero. Por lo tanto, su solución coincide con la entrópica, que también puede ser obtenida por este método. En el caso atractivo, en vista de (2.75), tenemos $K = 0$. Resulta pues que la solución obtenida en el Teorema 2.2 es la única solución admisible de Oleinik. La misma suposición $\rho \leq K(t, x)$ es necesaria para obtener este resultado en el caso repulsivo, ya que esta condición no ha sido deducida en nuestro análisis asintótico del sistema VPFP.

La relación entre soluciones admisibles de Oleinik y soluciones entrópicas será analizada en el siguiente Capítulo. Aquí sólo lo haremos en el caso atractivo y para esta ecuación. Para demostrar la desigualdad de entropía (2.77) tomamos una aproximación de la unidad $\delta_n(x) = n\delta(nx)$ con $n \in \mathbb{N}$ y δ una función positiva regular y normalizada. Escribiendo $U_n := U *_x \delta_n$ y haciendo la convolución de (2.74) con δ_n , obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}U_n + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U^2}{2} * \delta_n \right) = 0. \quad (2.79)$$

De aquí deducimos que la derivada temporal de U_n es suficientemente regular como para aplicar la regla de la cadena respecto a t o x . Para hacer aparecer U_n^2 en el segundo miembro procedemos como sigue. Primero observamos que

$$\begin{aligned} (U^2 * \delta_n)(x) &= \int_{\mathbb{R}} U^2(x-y)\delta_n(y)dy = \int_{\mathbb{R}^2} U^2(x-y)\delta_n(y)\delta_n(z)dydz \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} U(x-y)U(x-z)\delta_n(y)\delta_n(z)dydz \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} U(x-y)[U(x-y) - U(x-z)]\delta_n(y)\delta_n(z)dydz. \end{aligned}$$

Entonces, usando la antisimetría del segundo término tenemos

$$(U^2 * \delta_n)(x) = U_n(x)^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} [U(x-y) - U(x-z)]^2 \delta_n(y)\delta_n(z)dydz.$$

Tomando el resto

$$R_n(t, x) := \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} [U(x-y) - U(x-z)]^2 \delta_n(y)\delta_n(z)dydz \geq 0,$$

e insertando esta expresión en (2.79) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} U_n + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U_n^2}{2} + R_n \right) = 0.$$

Multiplicando ahora por $\eta_u(U_n)$ (donde los subíndices de η indican derivadas respecto de u) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(U_n) + \frac{\partial}{\partial x} q(U_n) + \frac{\partial}{\partial x} (R_n \eta_u(U_n)) = R_n \eta_{uu}(U_n) \frac{\partial}{\partial x} U_n \leq 0, \quad (2.80)$$

donde la no positividad del último término viene dada por (2.75) con $\theta = -1$ y la convexidad de η . Entonces, puesto que $2R_n = (U^2 * \delta_n - (U * \delta_n)^2)$ converge a 0 en $L^p(\Omega)$ para cada conjunto compacto Ω , podemos tomar el límite débil en (2.80) para obtener la propiedad de entropía (2.77).

Así, cualquier solución débil es una solución entrópica y es única. Por lo tanto, la sucesión de soluciones del sistema VFPF $_\epsilon$ converge hacia la única solución entrópica de la ecuación de Hopf-Burgers.

Los argumentos usados no pueden ser extendidos a dimensiones mayores $N > 1$. De hecho, si $N > 1$ el campo inicial U_0 está sólo en el espacio de Marcinkiewicz $M^{N/(N-1)}(\mathbb{R}^N)^N$ para una densidad $\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, y esto no basta para definir soluciones entrópicas, ya que se necesita la propiedad $U_0 \in L^\infty$.

Veremos en el Capítulo siguiente que el argumento usado para demostrar que cualquier solución débil de nuestro sistema (2.74)-(2.76) es la única solución entrópica bajo la condición (2.75) puede ser generalizado a ecuaciones cuasi-lineales más generales para obtener una clase mayor que la de Oleinik sobre la cual haya unicidad. De hecho, sólo hará falta que la función K de (2.78) esté en $L^1_{loc}([0, T] \times \mathbb{R})$.

Capítulo 3

Unicidad de soluciones débiles en ecuaciones cuasi-lineales de primer orden

En este Capítulo daremos un criterio para distinguir la solución entrópica de entre las soluciones débiles de ecuaciones cuasi-lineales de primer orden. Este resultado de unicidad será una generalización del criterio de Oleinik referido al control del crecimiento de las soluciones débiles. Clarificaremos la relación entre el criterio de Oleinik y la condición de entropía de Kruzhkov. Por último, daremos una aplicación de este análisis a la convergencia método de partículas en Leyes de Conservación. Los contenidos de este Capítulo han sido desarrollados a modo de artículo en [58].

3.1 Introducción y principales resultados

El problema de unicidad de soluciones débiles para el problema de Cauchy en sistemas de Leyes de Conservación es físicamente relevante para lograr discriminar “la solución admisible” que tenga sentido en cada modelo considerado, ya que en general, es posible construir una gran cantidad de soluciones débiles. Por lo tanto, es necesario tener una buena teoría matemática sobre “soluciones admisibles” (véase [76, 37]). Uno de los mayores avances en este campo se debe al trabajo de S. N. Kruzhkov, quien probó la existencia y unicidad de soluciones admisibles de ecuaciones cuasi-lineales de primer orden en varias dimensiones [47]. En dimensión uno, que es la que nos ocupa en este Capítulo, la ecuación genérica se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial t} U + \frac{\partial}{\partial x} f(t, x, U) + g(t, x, U) = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

donde f y g son funciones *regulares* dadas. La solución admisible en el sentido de Kruzhkov se llamará solución entrópica. Será una solución débil (que verifique (3.1) en el sentido de las distribuciones) y que satisfaga además la desigualdad de entropía

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(t, x, U) + \frac{\partial}{\partial x}q(t, x, U) + h(t, x, U) \leq 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

para cualquier función $\eta = \eta(t, x, u)$ convexa respecto a la última variable u y $q_u = \eta_u f_u$, $h = g + f_x \eta_u - q_x - \eta_t$. La notación q_x (resp. q_{xu} , ...) denotará la derivada de q con respecto a x (resp. la derivada segunda de q con respecto a x y u , ...). Estas ecuaciones han de ser completadas con un dato inicial:

$$U(0, x) = U_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}). \quad (3.3)$$

En el trabajo de Kruzhkov [47] se demuestra que el problema (3.1)-(3.3) está bien planteado en la clase de funciones acotadas *casi por doquier* $U \in L^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$ continuas en el instante $t = 0$ con la topología de $L^1(\Omega)$ para cada dominio $\Omega \subset \mathbb{R}$ acotado. Además esta solución es continua en el espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En un trabajo reciente de G.-Q. Chen y M. Rascle [23] se prueba que la condición de entropía (3.2) implica la continuidad en L^1_{loc} en tiempo para el caso $f(t, x, u) = f(u)$ y $g = 0$ (aunque su resultado puede ser extendido al caso general). Este resultado ha sido generalizado por A. Vasseur para el p-sistema (con $\gamma = 3$) en [78] y para Leyes escalares de Conservación multidimensionales en [79]. La demostración de Vasseur está basada en la formulación cinética de Leyes de Conservación escalares y en un método de localización. Por todo ello, el ambiente para la existencia y unicidad de soluciones entrópicas es la clase $L^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$.

Por otro lado, O. Oleinik en su trabajo pionero [60] introdujo otro concepto de solución admisible que pasamos a presentar. A partir de ahora supondremos que el flujo f es convexo con respecto a u ($f_{uu} \geq 0$). Las soluciones admisibles de Oleinik siguen siendo soluciones débiles de (3.1)-(3.3) en $L^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$ de las que se puede controlar el crecimiento respecto de x de la siguiente forma:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(t, x) \leq K(t, x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

en el sentido de las distribuciones, donde K es una función continua en $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ (no necesariamente en $t = 0$). Oleinik también probó que el problema (3.1)-(3.4) está bien planteado en $L^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$.

En ambas teorías, la existencia de soluciones admisibles puede ser obtenida a través del método de viscosidad ("vanishing viscosity method") que

consiste en tomar el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ de las soluciones U_ε de la ecuación perturbada por un término viscoso ($\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_\varepsilon$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(t, x, U_\varepsilon) + g(t, x, U_\varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_\varepsilon &= 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \\ U_\varepsilon(0, x) &= U_0(x), \end{aligned}$$

De hecho, ambos conceptos de solución coinciden. Sin embargo, es interesante obtener una relación más directa entre ambas. Otra cuestión relacionada es si se puede relajar la hipótesis de continuidad que requiere K en (3.4). Puesto que se conocen soluciones no admisibles que verifican (3.4) para una medida K , la solución óptima sería

$$K \in L^1_{loc}((0, \infty) \times \mathbb{R}). \quad (3.5)$$

Hacemos notar que no se ha supuesto que K sea integrable en $t = 0$ (piénsese en el caso anterior y más habitual $K = \frac{C}{t}$).

En este Capítulo pretendemos responder a estas cuestiones, y nuestra motivación principal está en problemas asintóticos como el tratado en el anterior capítulo, ya que si U se obtiene como límite de un sistema perturbado, en ocasiones es más fácil probar (3.4) con la hipótesis de regularidad (3.5) que probar (3.2). El motivo es que las desigualdades son estables en el espacio de distribuciones, pero no las no linealidades.

Respecto al problema de unicidad en sistemas de Leyes de Conservación, diversos autores han introducido varias clases de soluciones que incluyen regularidad adicional y condiciones de entropía para encontrar la única solución de Leyes de Conservación hiperbólicas. Estas clases de soluciones son estrictamente más pequeñas que la introducida por J. Glimm en [36]).

El enfoque dado por C. Dafermos en [24] consiste en definir características generalizadas asociadas a soluciones de variación acotada que son interpretadas en el sentido de Filippov. Estas características permiten seguir la solución a través de ella misma y obtener algunos resultados de unicidad (véase [24] y [25]).

Recientemente A. Bressan en [11] probó que el límite de soluciones aproximadas obtenido por el esquema de Glimm es único. Este resultado lleva a definir el semigrupo *standard* de Riemann generado por el sistema hiperbólico que lleva el dato inicial a la única solución obtenida por el esquema de Glimm. Siguiendo este enfoque, en [12] se define una clase de funciones en la cual se demuestra unicidad. Remitimos al lector a [12] para más detalles y referencias.

Por último, mencionamos de nuevo el resultado de A. Vasseur [78] para el caso particular del p -sistema. Usa la formulación cinética de este sistema

para probar, como en el trabajo de G.-Q. Chen y M. Rascle [23], que no se producen capas límite en el instante inicial y muestran que toda solución débil entrópica es continua en tiempo.

El principal resultado de este capítulo es:

Teorema 3.5 *Sea $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable y convexa respecto de su último argumento y sea $g : [0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Entonces, una solución débil $U \in L^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^N)$ de la ecuación cuasi-lineal (3.1) que satisface (3.4) y (3.5) es una solución entrópica, o sea, verifica (3.2) para cada η dos veces diferenciable y convexa respecto de su último argumento y con $q_u = \eta_u s f_u$ y $h = g \eta_u + f_x \eta_u - q_x - \eta_t$.*

Nuestra técnica está basada en una regularización conveniente de la solución. La solución regularizada verificará una desigualdad de entropía aproximada que será consecuencia de la desigualdad de Jensen y de la convexidad de f y η . Tras pasar al límite en el parámetro de regularización deduciremos que una solución débil que satisfaga (3.4) y (3.5) es una solución entrópica. La demostración será dada en la siguiente Sección. La Sección 3.3 está dedicada a algunas puntualizaciones sobre unicidad y continuidad en tiempo. Finalmente, en la Sección 3.4 daremos una aplicación del Teorema 3.5 a la convergencia del método de partículas para resolver Leyes de Conservación escalares en el caso compresible.

3.2 La desigualdad de entropía

Consideramos una aproximación usual de la unidad δ_n definida como $\delta_n(x) = n\delta(nx)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y donde $\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\delta \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \delta(y) dy = 1$. Definimos $U_n := U *_x \delta_n$. Entonces, una solución débil de la ecuación (3.1) satisface

$$\frac{\partial}{\partial t} U_n + \frac{\partial}{\partial x} (f(t, x, U) *_x \delta_n) + g(t, x, U) *_x \delta_n = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

Primero, observamos que U_n es regular con respecto a x y que su derivada distribucional con respecto al tiempo está localmente acotada en virtud de la ecuación anterior. Por lo tanto, $U_n \in W_{loc}^{1, \infty}([0, \infty) \times \mathbb{R})$ y todas las reglas de derivación que vamos a usar en lo que sigue son correctas. El flujo regularizado puede ser escrito como

$$\begin{aligned} (f(t, x, U) *_x \delta_n)(t, x) &= \int_{\mathbb{R}} f(t, x - y, U(t, x - y)) \delta_n(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t, x, U(t, x - y)) \delta_n(y) dy + \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 f_x(t, x - sy, U(t, x - y)) y \delta_n(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t, x, U(t, x - \frac{y}{n})) \delta(y) dy + \frac{1}{n} a_n, \end{aligned}$$

donde el resto a_n es

$$a_n = - \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 f_x(t, x - s \frac{y}{n}, U(t, x - \frac{y}{n})) y \delta(y) ds dy.$$

Entonces, podemos estimarlo como

$$|a_n(t, x)| \leq \|f_x(t, \cdot, U(t, \cdot))\|_{L^\infty(B(x,1))},$$

de donde deducimos que a_n está uniformemente acotada en $L^\infty(\Omega)$ para cada Ω compacto de $[0, \infty) \times \mathbb{R}$.

El punto clave de este estudio es el siguiente. La función $f(t, x, u)$ es convexa con respecto a u y la función δ es no negativa con integral 1, por lo que al aplicar la desigualdad de Jensen obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} f(t, x, U(t, x - \frac{y}{n})) \delta(y) dy - f\left(t, x, \int_{\mathbb{R}} U(t, x - \frac{y}{n}) \delta(y) dy\right) \\ & \stackrel{\text{def}}{=} R_n(t, x) \geq 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Se tiene que $f(t, x, U) *_x \delta_n = f(t, x, U_n) + R_n + \frac{1}{n} a_n$. Hacemos una descomposición similar para g de la forma $S_n(t, x) = g(t, x, U) *_x \delta_n - g(t, x, U_n)$. Usando las propiedades de la convolución observamos que

$$R_n \rightarrow 0, \quad S_n \rightarrow 0 \quad \text{en } L^p_{loc}((0, \infty) \times \mathbb{R}) \quad \text{para todo } 1 < p < \infty. \quad (3.7)$$

Veamos este paso con más detalle. Clásicamente, dado que δ_n es una aproximación de la unidad, se tiene $U_n \rightarrow U$ en $L^p_{loc}((0, \infty) \times \mathbb{R})$ y, de la misma forma, para cada función continua genérica F se tiene también $F(t, x, U) *_x \delta_n \rightarrow F(t, x, U)$. Por lo tanto, salvo subsucesión, $U_n \rightarrow U$ c.p.d. y, entonces, gracias a la continuidad de F , $F(t, x, U_n) \rightarrow F(t, x, U)$ c.p.d. Entonces, usando el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue concluimos que la misma parcial de $F(t, x, U_n)$ converge a $F(t, x, U)$ en el espacio $L^p_{loc}((0, \infty) \times \mathbb{R})$. Puesto que el límite está determinado independientemente de la parcial, un argumento usual de topología nos da la convergencia de toda la sucesión.

La solución regularizada satisface

$$\frac{\partial}{\partial t} U_n + \frac{\partial}{\partial x} \left(f(t, x, U_n) + R_n + \frac{1}{n} a_n \right) + g(t, x, U_n) + S_n = 0 \quad (3.8)$$

en el sentido de las distribuciones. Dada $\eta = \eta(t, x, u)$ una función convexa respecto a u (a la que llamaremos entropía), definimos el flujo entrópico asociado a la entropía η como

$$q(t, x, u) = \int_0^u \eta_u(t, x, v) f_u(t, x, v) dv.$$

Definimos $h = g \eta_u - \eta_t - q_x + f_x \eta_u$. Entonces, multiplicando (3.8) por $\eta_u(t, x, U_n)$ y usando la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \eta(t, x, U_n) + \frac{\partial}{\partial x} \left(q(t, x, U_n) + \eta_u(t, x, U_n) \left(R_n + \frac{1}{n} a_n \right) \right) + h(t, x, U_n) \\ = -S_n \eta_u(t, x, U_n) + \left(R_n + \frac{1}{n} a_n \right) \frac{\partial}{\partial x} \eta_u(t, x, U_n). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Resta sólo tomar límite $n \rightarrow \infty$ en esta expresión. Gracias a la convergencia de $F(t, x, U_n)$ hacia $F(t, x, U)$ en $L^p_{loc}([0, \infty) \times \mathbb{R})$ para funciones continuas F y usando (3.7) obtenemos fácilmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \eta(t, x, U_n) + \frac{\partial}{\partial x} \left(q(t, x, U_n) + \eta_u(t, x, U_n) \left(R_n + \frac{1}{n} a_n \right) \right) + h(t, x, U_n) \\ \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \eta(t, x, U) + \frac{\partial}{\partial x} q(t, x, U) + h(t, x, U), \\ S_n \eta_u(t, x, U_n) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde la convergencia se entiende en el sentido de las distribuciones en $(0, \infty) \times \mathbb{R}$. Para obtener la convergencia del último término de (3.9) usamos la condición (3.4). La distribución $K - \frac{\partial}{\partial x} U$ es no negativa y por lo tanto es una medida no negativa μ (véase [74]). Tomando $K_n = K * \delta_n$, $\mu_n = \mu * \delta_n$ tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x} U_n = K_n - \mu_n,$$

donde las sucesiones K_n y μ_n están uniformemente acotadas en $L^1(\Omega)$ para cada Ω subconjunto compacto de $(0, \infty) \times \mathbb{R}$. Tenemos pues

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta_u(t, x, U_n) = \eta_{ux}(t, x, U_n) + \eta_{uu}(t, x, U_n) (K_n - \mu_n),$$

acotada en $L^1(\Omega)$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{n} a_n \frac{\partial}{\partial x} \eta_u(t, x, U_n) \rightarrow 0 \quad \text{en } L^1(\Omega). \quad (3.11)$$

Además, las propiedades de convergencia descritas en (3.7) nos permiten concluir que

$$R_n \eta_{ux}(t, x, U_n) \rightarrow 0 \quad \text{en } L^p(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty. \quad (3.12)$$

El análisis del término restante $\eta_{uu}(t, x, U_n) R_n (K_n - \mu_n)$ requiere una atención especial. Escribimos

$$\eta_{uu}(t, x, U_n) R_n K_n = \eta_{uu}(t, x, U_n) R_n K + \eta_{uu}(t, x, U_n) R_n (K_n - K).$$

Salvo sucesión parcial, $\eta_{uu}(t, x, U_n)R_n K \rightarrow 0$ c.p.d. y está acotada por CK sobre Ω para cierta constante C . Por lo tanto, el Teorema de la Convergencia Dominada implica que esa parcial

$$R_n \eta_{uu}(t, x, U_n)K \rightarrow 0 \quad \text{en } L^1(\Omega),$$

y, dado que el límite es único, toda la sucesión converge. Tenemos $K_n \rightarrow K$ en $L^1(\Omega)$ y así $R_n \eta_{uu}(t, x, U_n)(K_n - K) \rightarrow 0$ en $L^1(\Omega)$. Concluimos que

$$R_n \eta_{uu}(t, x, U_n)K_n \rightarrow 0 \quad \text{en } L^1(\Omega). \quad (3.13)$$

No es posible obtener la misma convergencia para la parte singular de la medida μ , pero sin embargo (y este es otro punto clave de nuestra demostración) la desigualdad

$$R_n \eta_{uu}(t, x, U_n)\mu_n \geq 0$$

sigue siendo cierta gracias a (3.6), a la convexidad de η y al hecho de que μ_n es no negativa. En realidad, el límite (no negativo) de este término nos da la variación de entropía. Así, tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ en (3.9) y usando (3.10), (3.11), (3.12) y (3.13) obtenemos finalmente que U verifica la desigualdad

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(t, x, U) + \frac{\partial}{\partial x} q(t, x, U) + h(t, x, U) \leq 0 \quad (3.14)$$

en sentido distribucional.

3.3 Unicidad y continuidad en tiempo

Partimos de que la desigualdad de entropía (3.14) se verifica. Siguiendo el trabajo de Chen y Rascle [23] hacemos notar que

$$\nu = -\frac{\partial}{\partial t} \eta(t, x, U) - \frac{\partial}{\partial x} q(t, x, U) - h(t, x, U) \quad (3.15)$$

es en realidad una medida acotada sobre $(0, T] \times [-R, R]$, para cada $T > 0$ y $R > 0$. Por lo tanto, no existe explosión en $t = 0$. Veámoslo brevemente. Dada χ_α una función regular no negativa que sea igual a 1 sobre $[\alpha, T] \times [-R, R]$ y se anule fuera de $[\frac{\alpha}{2}, T + \frac{\alpha}{2}] \times [-R - \frac{\alpha}{2}, R + \frac{\alpha}{2}]$ con

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial}{\partial t} \chi_\alpha(t, x) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x} \chi_\alpha(t, x) \right| dt dx \leq C,$$

para cierta constante $C > 0$ independiente de α . Usando χ_α como función test en (3.15) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \nu, \chi_\alpha \rangle &= \int \eta(t, x, U(t, x)) \frac{\partial}{\partial t} \chi_\alpha(t, x) dx dt \\ &\quad + \int q(t, x, U(t, x)) \frac{\partial}{\partial x} \chi_\alpha(t, x) dx dt - \int h(t, x, U(t, x)) \chi_\alpha(t, x) dx dt \end{aligned}$$

y usando las propiedades de χ_α podemos estimar

$$\langle \nu, \chi_\alpha \rangle \leq C',$$

donde $C' > 0$ es otra constante positiva independiente de α . Por lo tanto,

$$\nu([\alpha, T] \times [-R, R]) \leq \langle \nu, \chi_\alpha \rangle \leq C'$$

para cada $\alpha > 0$. De ello deducimos, usando la regularidad de las medidas sobre \mathbb{R}^2 , que $\nu((0, T] \times [-R, R]) \leq C'$, lo cual prueba resultado buscado.

El segundo paso es dar una versión punto a punto en tiempo de la desigualdad de entropía (3.14). Como ya hemos mencionado, la solución U ha de ser al menos continua en tiempo con valores en las distribuciones. Denotamos por $U(t)$ esta distribución en el instante t . Para *todo* instante t , $U(t)$ define una función de $L^\infty(\mathbb{R})$ y, modificándola sobre un conjunto de medida nula si fuese necesario, podemos suponer que $U(t)$ se aplica punto a punto respecto de x , $U(t) : x \mapsto U(t, x)$. En particular, usando la regularización anterior $U_n = U * \delta_n$, se tiene

$$\forall t \geq 0, \quad U_n(t, \cdot) \rightarrow U(t, \cdot) \quad \text{en } L^p_{loc}(\mathbb{R}). \quad (3.16)$$

Consideramos ahora una función $\eta(t, x, u)$ convexa con respecto a u y con soporte compacto en $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ con la idea de que η tome la forma $\eta(t, x, u) = u^p \eta(t, x)$. Entonces q y h tienen también soporte compacto. Si integramos (3.9) sobre $(s, t) \times \mathbb{R}$ para cada $0 < s < t$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} \eta(t, x, U_n) dx - \int_{\mathbb{R}} \eta(s, x, U_n) dx + \int_s^t \int_{\mathbb{R}} h(\sigma, x, U_n) dx d\sigma \leq \varepsilon_n \quad (3.17)$$

donde $\varepsilon_n \rightarrow 0$ gracias a la convergencia demostrada en la primera sección. Ahora, (3.16) permite pasar al límite en (3.17) para *todo* tiempo t y s . Se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} \eta(t, x, U) dx - \int_{\mathbb{R}} \eta(s, x, U) dx + \int_s^t \int_{\mathbb{R}} h(\sigma, x, U) dx d\sigma \leq 0. \quad (3.18)$$

para todo $t > s > 0$. Esta desigualdad punto a punto nos permitirá obtener un resultado de continuidad para la topología fuerte. De hecho, tomando $\eta(t, x, u) = u\phi(t)\psi(x)$ con $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ y $\phi(\tau) = 1$ en $[s, s + \epsilon]$, se tiene $U(t) \rightarrow U(s)$ cuando $t \rightarrow s$ en sentido distribucional. Puesto que además están uniformemente acotadas en $L^\infty(\mathbb{R})$ también obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow s} U(t) = U(s) \quad \text{en } L^\infty(\mathbb{R}) - \text{débil}^*. \quad (3.19)$$

Por otro lado, usando (3.18) vemos que la aplicación $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} \eta(t, x, U(t, x)) dx$ tiene variación acotada. Por lo tanto, gracias al Teorema de Helly, es continua salvo eventualmente en un conjunto numerable de puntos en los que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta(s+, x, U) dx \leq \int_{\mathbb{R}} \eta(s, x, U) dx \leq \int_{\mathbb{R}} \eta(s-, x, U) dx.$$

La notación $s+$ (resp. $s-$) denota el límite $t \rightarrow s$, $t > s$ (resp. $t \rightarrow s$, $t < s$). Tomando ahora $\eta(t, x, u) = u^p \eta(t, x)$ con $p > 1$, obtenemos la convergencia de las normas $\|U(t)\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow{t \rightarrow s} \|U(s)\|_{L^p(\Omega)}$ y, usando que existe la convergencia débil se obtiene para todo $s > 0$ salvo un conjunto numerable, la continuidad

$$\lim_{t \rightarrow s} U(t) \rightarrow U(s)$$

en $L^p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$ y, para todo $s > 0$ la continuidad superior

$$\lim_{t \rightarrow s, t > s} U(t) \rightarrow U(s) \quad (3.20)$$

en $L^p(\Omega)$, para todo dominio acotado Ω . Veamos que, de hecho, esto nos lleva a la continuidad total en $(0, \infty)$ en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. En efecto, si partimos de (3.18) y usamos el método de Kruzhkov (véase [47]) obtenemos que si U y V son dos soluciones débiles dadas por el Teorema 3.5, para todo $t > s > 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) |U(t, x) - V(t, x)| dx \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) |U(s, x) - V(s, x)| dx - \int_s^t \int_{\mathbb{R}} h(\sigma, x, U, V) dx d\sigma, \end{aligned}$$

donde φ es una función regular con soporte compacto y

$$\begin{aligned} h(t, x, u, v) &= \varphi(x) [(g - f_x)(t, x, u) - (g - f_x)(t, x, v)] \text{sign}(u - v) \\ & \quad + \varphi_x(x) [f(t, x, u) - f(t, x, v)] \text{sign}(u - v). \end{aligned}$$

Fijado t_0 y cualquier $h < t_0/2$ elegimos $t = t_0 - h$ y $V(t, x) = U(t + h, x)$ para obtener que para cada $s < t_0 - h$ se verifica

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) |U(t_0 - h, x) - U(t_0, x)| dx \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) |U(s, x) - U(s + h, x)| dx - \int_s^t \int_{\mathbb{R}} h(\sigma, x, U, V) dx d\sigma. \end{aligned}$$

Falta elegir un punto s de continuidad de U para obtener la continuidad inferior de U para $t \rightarrow t_0$ con $t < t_0$ que junto con la continuidad superior (3.20) finalizará la demostración. Resumimos este resultado en la siguiente Proposición.

Proposición 3.2 *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 3.5, una solución débil U es fuertemente continua para tiempos positivos, es decir:*

$$\forall t_0 > 0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} U(t) = U(t_0) \quad \text{en } L^1_{loc}(\mathbb{R}).$$

Por último, hagamos algunas puntualizaciones. La continuidad fuerte en tiempo no se obtiene en el instante $t_0 = 0$. Esto es debido a que en las hipótesis (3.4) y (3.5) no hemos supuesto que K sea integrable en tiempo. Si $K \in L^1([0, T] \times I)$ para cada intervalo acotado I de \mathbb{R} , entonces la misma demostración nos da la continuidad en $t_0 = 0$ y llegamos a las condiciones de unicidad de Kruzhkov.

Los resultados de Chen y Rascle [23] o Vasseur [79] son más fuertes en el sentido de que prueban que toda solución entrópica es continua en tiempo y por lo tanto única. No obstante, la demostración de nuestro resultado es mucho más simple que las de [23, 79]. Además, los resultados de [23, 79] están descritos para flujos independientes del tiempo.

3.4 Aproximación por el método de partículas

En esta Sección veremos una aplicación del Teorema 3.5 mostrando que el método de partículas nos conduce a la única solución entrópica de una Ley de Conservación escalar. Centramos nuestra atención en el caso particular obtenido en el anterior Capítulo $f(t, x, U) = \frac{1}{2}U^2$ y $g(t, x, U) = 0$, es decir, la ecuación de Hopf-Burgers:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{U^2}{2} = 0, \quad U(t=0) = U_0. \quad (3.21)$$

En una primera aproximación, consideraremos que la condición inicial U_0 es suficientemente regular y, para aplicar la desigualdad (3.4) con $K = 0$ (que es el caso que obtuvimos con la perturbación de Fokker-Planck), supondremos que U_0 es no creciente. Es conocido que existe una función $U \in L^\infty((0, T) \times \mathbb{R})$, para todo $T > 0$, solución de la ecuación de Burgers (3.21), aunque (véase [47]) para datos iniciales decrecientes no se mantiene regular a lo largo de su evolución desarrollando ondas de choque en tiempo finito. Para

aproximar esta solución acotada y no continua por el método de partículas consideraremos primero el siguiente sistema *formalmente* equivalente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U) = 0, \quad \rho(t=0) = \rho_0 := -\frac{\partial U_0}{\partial x}, \quad (3.22)$$

$$U = \Upsilon *_x \rho, \quad (3.23)$$

donde $\Upsilon(x) := -\frac{1}{2}\text{sign}(x)$ es el gradiente de la solución fundamental Γ_1 introducida en el capítulo anterior. Este sistema puede ser obtenido, al menos formalmente, tomando $\rho = -\frac{\partial U}{\partial x}$ y derivando en (3.21). De hecho, en los dominios de regularidad de U podemos escribir

$$U(t, x) = -\frac{1}{2}\text{sign} * \rho(t, x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \rho(t, y) dy - \int_{-\infty}^x \rho(t, y) dy.$$

Puesto que U_0 es no creciente, obtenemos que $\rho_0 \geq 0$ es una función de densidad. Como vimos en el Capítulo 2, existe una solución medida $\rho \in C(0, \infty; \mathcal{M}^+(\mathbb{R}) - \text{débil}^*)$ que es solución clásica en los dominios de regularidad. Además, gracias a (3.23), U verifica (3.4) para $K = 0$ y por lo tanto es la única solución entrópica de la ecuación de Hopf-Burgers (3.21). Ahora proponemos un método aproximado para construir la solución: el método de partículas.

3.4.1 El método de partículas

Introducimos el método de partículas considerando, para cada $n \in \mathbb{N}$, la aproximación usual de la condición inicial ρ_0 como combinación lineal de Deltas de Dirac,

$$\rho_0^n(x) = \sum_{j \in J^n} w_j^n \delta(x - x_j^n), \quad w_j^n = \frac{\rho_0(x_j^n)}{n}, \quad x_j^n = \frac{j}{n}, \quad J^n = [-n^2, n^2] \cap \mathbb{Z}, \quad (3.24)$$

siendo U^n una aproximación regular de U . Seguidamente, podemos definir ρ^n como la única solución medida de

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho^n U^n) &= 0, \\ \rho^n(t=0, \cdot) &= \rho_0^n. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Más precisamente, resolviendo la ecuación de las características

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X^n(t; s, x) = U^n(t, X^n(t; s, x)), \\ X^n(s; s, x) = x, \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.26)$$

y usando la notación $X_j^n(t) \equiv X^n(t; 0, x_j^n)$ podemos escribir ρ^n como

$$\rho^n(t, x) = \sum_{j \in J^n} w_j^n \delta(x - X_j^n(t)).$$

Resta pues relacionar U^n con la medida ρ^n . Recordamos que $U = \Upsilon * \rho$, por lo tanto, ésta parece ser la forma natural de conectarlos. Para obtener un campo regular U y dar sentido a la ecuación (3.26) primero aproximamos el núcleo Υ . Tomamos de nuevo una aproximación de la unidad $\zeta^n(x) = n\zeta(nx)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ con $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ normalizada. Definimos $\Upsilon^n(x) = \Upsilon * \zeta^n(x)$ y

$$U^n(t, x) = (\Upsilon^n * \rho^n)(t, x) = \sum_{j \in J^n} w_j^n \Upsilon^n(x - X_j^n(t)). \quad (3.27)$$

El método de partículas queda pues dado por las ecuaciones (3.26) y (3.27). La primera tarea es probar que el sistema (3.26)-(3.27) tiene una única solución y esto es una consecuencia directa del Teorema de Cauchy-Lipschitz que podemos aplicar al “sistema equivalente”

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X_j^n(t) = \sum_{i \in J^n} w_i^n \Upsilon^n(X_j^n(t) - X_i^n(t)), \\ X_j^n(0) = x_j^n, \end{cases} \quad \forall j \in J^n.$$

Entonces, usando que $\sum_j w_j^n < \infty$ y las propiedades de regularidad de Υ^n , podemos deducir las condiciones necesarias sobre los coeficientes para tener una solución regular.

El problema es que en el límite el campo U no es Lipschitz, de hecho, ni siquiera es continuo y por ello las curvas características (en un sentido clásico) no están definidas. Entonces, es preciso generalizar este concepto de características para que tenga sentido en nuestro límite.

3.4.2 Características generalizadas de Filippov

Introducimos brevemente la notación necesaria para definir las características generalizadas en el sentido de Filippov para nuestro caso (véase [30] ó [64] para más detalles). Dada una función medible V definida sobre \mathbb{R} , definimos las funciones *mínimo esencial* y *máximo esencial* asociadas a V como

$$\begin{aligned} m[V](x) &= \sup_{r>0} \left\{ \inf_y \text{es} \{V(y) : |x - y| < r\} \right\}, \\ M[V](x) &= \inf_{r>0} \left\{ \sup_y \text{es} \{V(y) : |x - y| < r\} \right\}, \end{aligned}$$

(donde “ $\inf_y \text{es}$ ” y “ $\sup_y \text{es}$ ” denotan respectivamente el ínfimo y el supremo esencial en la variable y). Es evidente que V será continua en x si y sólo si $m(V)(x) = V(x) = M(V)(x)$. Con estas nociones podemos generalizar el concepto de curva característica (3.26) como sigue.

Definición 3.2 Dada $V \in L^1_{loc}((0, \infty) \times \mathbb{R})$, diremos que $X(t) \equiv X(t; s, x)$ es la característica de Filippov asociada a V que pasa por el punto $x \in \mathbb{R}$ en el instante $s \in \mathbb{R}$ si es absolutamente continua respecto de t y verifica

$$m[V(t, \cdot)](X(t; s, x)) \leq \frac{\partial X}{\partial t}(t; s, x) \leq M[V(t, \cdot)](X(t; s, x)), \text{ c.p.d. } t \in \mathbb{R},$$

$$X(s; s, x) = x.$$

Primero hacemos notar que para funciones continuas V esta definición coincide con el concepto clásico. Además, bajo ciertas hipótesis adicionales sobre V se verifican las siguientes propiedades (véanse las demostraciones en [30] y [64]).

Teorema 3.6 Sea V una función medible y $B \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tales que

$$(V(t, x) - V(t, y))(x - y) \leq B(t)(x - y)^2, \quad (3.28)$$

para casi todo $t > s$ y para todo x e y en \mathbb{R} , y

$$|V(t, x)| \leq B(t), \quad (3.29)$$

para casi todo $t > s$ y para todo x en \mathbb{R} . Entonces, para cada $s \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$, existe al menos una característica de Filippov $X(t; s, x)$ únicamente definida para $t \geq s$. Además se tiene:

i) Existe una función $\tilde{V} = V$ c.p.d. tal que

$$\frac{\partial X}{\partial t}(t; s, x) = \tilde{V}(t, X(t, s, x)),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y para casi todo $t > s$.

ii) para todos $x, y \in \mathbb{R}$ y $t > s$ se verifica

$$\frac{\partial}{\partial t} |X(t; s, x) - X(t; s, y)|^2 \leq B(t) |X(t; s, x) - X(t; s, y)|.$$

Como consecuencia, la aplicación $(t, x) \mapsto X(t; s, x)$ es uniformemente acotada y Lipschitz sobre conjuntos compactos de $[s, \infty] \times \mathbb{R}$ y tanto la cota como la constante de Lipschitz dependen sólo de B .

iii) Para cada $p_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, existe una única medida $p \in C_w(0, \infty; \mathcal{M}(\mathbb{R}))$, "solución" de $\partial_t p + \partial_x(Vp) = 0$ con dato inicial p_0 , dada por

$$p(t) = X(t; 0, \cdot)(p_0),$$

que actúa de la siguiente forma sobre funciones continuas

$$\langle \phi, p(t) \rangle = \langle \phi(X(t; 0, \cdot)), p_0 \rangle, \quad \forall \phi \in C_0^0(\mathbb{R}),$$

donde $C_w(0, \infty; \mathcal{M}(\mathbb{R})) = C(0, \infty; \mathcal{M}(\mathbb{R}) - \text{débil}^*)$.

Veamos ahora el resultado de convergencia de esta Sección.

3.4.3 Convergencia del método de partículas

Nuestro objetivo es demostrar que la sucesión U^n dada por el método de partículas (3.27) converge fuertemente en $L_{loc}^p(\mathbb{R})$ hacia la única solución entrópica de (3.21) para todo p tal que $1 \leq p < \infty$. Para ello, usaremos las propiedades de las características de Filippov asociadas a U y U^n y, especialmente, el no crecimiento de U . Demostraremos el siguiente resultado.

Proposición 3.3 Sea $U_0 \in W^{1,1}(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R})$ una condición inicial no creciente y U^n dada por la expresión (3.27). Entonces, $U^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} U$ fuertemente en $L_{loc}^p([0, \infty) \times \mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$, siendo U la única solución entrópica de (3.21). Además, la densidad aproximada ρ^n converge a ρ en $\mathcal{M}^+(\mathbb{R})$ uniformemente en intervalos acotados de tiempo, es decir,

$$\rho^n \rightarrow \rho \text{ en } C_w(0, T; \mathcal{M}^+(\mathbb{R})),$$

y el par (ρ, U) verifica (3.22)-(3.23).

Demostración. En principio, a partir de (3.27) observamos que

$$\frac{\partial U^n}{\partial x}(t, x) = -\zeta^n * \rho^n(t, x) = - \sum_{j \in J^n} w_j^n \zeta^n(x - X_j^n(t)) \leq 0.$$

Como consecuencia, se verifica la propiedad (3.28) tomando por ejemplo $B = 0$. Además, usando la desigualdad de Young obtenemos

$$|U^n(t, x)| \leq \sum_{j \in J^n} w_j^n |\Upsilon^n(x - X_j^n(t))| \leq \|\Upsilon\|_\infty \|\zeta^n\|_{L^1(\mathbb{R})} \sum_{j \in J^n} w_j^n \leq \frac{1}{2} \sum_{j \in J^n} w_j^n.$$

Basándonos en resultados de cuadratura numérica (véase [68]) sabemos que para cada $\rho_0 \in L^1 \cap W^{1,2}(\mathbb{R})$ se verifica

$$\sum_{j \in J^n} w_j^n = \sum_{j \in J^n} \frac{1}{n} \rho_0(x_j^n) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \rho_0(x) dx.$$

Por lo tanto, U^n verifica (3.28) y (3.29) con $B(t) = B = \|\rho_0\|_{L^1(\mathbb{R})}$ para n suficientemente grande. Entonces, las características clásicas asociadas a U^n son de hecho las características de Filippov y, por lo tanto, podemos aplicar el Teorema 3.6 para deducir que la sucesión $X^n(t; s, x)$ es uniformemente equicontinua en (t, x) . Aplicando pues el Teorema de Ascolí, salvo subsucesión, X^n converge uniformemente sobre compactos de $[s, \infty)_t \times \mathbb{R}_x$ a alguna función continua \bar{X} .

Para obtener ahora la convergencia de la densidad usamos la parte *iii*) del Teorema 3.6 para escribir $\rho^n = X^n(t; 0, \cdot)(\rho_0^n)$. De esta expresión y para deducir la convergencia necesitamos que, para cada $\phi \in C_0^0(\mathbb{R})$, se verifique

$$\langle \phi(X^n(t; 0, \cdot)), \rho_0^n \rangle \rightarrow \langle \phi(X(t; 0, \cdot)), \rho_0 \rangle$$

uniformemente en compactos de t . Observamos que, usando de nuevo la convergencia de la cuadratura numérica, la sucesión ρ_0^n converge a ρ en $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ – débil*. Por lo tanto, sólo necesitamos demostrar que $\phi(X^n(t; 0, x))$ converge hacia $\phi(X(t; 0, x))$ uniformemente en t y x , pero esto es consecuencia directa de la convergencia de X^n y de que ϕ es uniformemente continua. Con ello hemos probado que la sucesión ρ^n converge en $C_w(0, T; \mathcal{M}^+(\mathbb{R}))$ hacia una medida $\tilde{\rho}$ dada por $\tilde{\rho} = \bar{X}(t; 0, \cdot)(\rho_0)$.

Para obtener la convergencia de U^n usamos la ecuación acoplada en forma de convolución $U^n = \Upsilon^n * \rho^n$. Enunciamos el resultado en el siguiente Lema:

Lema 3.14 *Sea ρ^n una sucesión que converge a $\tilde{\rho}$ en $C_w(0, T; \mathcal{M}^+(\mathbb{R}))$ y tal que*

$$\langle |x|, \rho^n(t, \cdot) \rangle \leq C < \infty, \quad (3.30)$$

con C independiente de n y t . Entonces, las sucesiones $\Upsilon^n * \rho^n$ y $\Upsilon * \rho^n$ convergen a $\Upsilon * \tilde{\rho}$ en $L^p([0, T] \times \Omega)$ para cada $\Omega \subset \subset \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Bastará probar el resultado para $\Upsilon * \rho^n$ ya que $\Upsilon^n * \rho^n = \Upsilon * (\zeta^n * \rho^n)$ y la sucesión $\zeta^n * \rho^n$ también converge a $\tilde{\rho}$ en el espacio de las medidas de Radon con la topología débil*.

Primero identificamos el límite débil de $\Upsilon * \rho^n$. Sea $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ y $\chi_R \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\chi_R(x) = 1$ para $|x| \leq R$ y $|\chi_R| \leq 1$ en otro caso. Entonces, usando la antisimetría de Υ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \phi(\Upsilon * \rho^n) dx &= -\langle \rho^n, \Upsilon * \phi \rangle \\ &= -\langle \rho^n, \chi_R(\Upsilon * \phi) \rangle + \langle \rho^n, (\chi_R - 1)(\Upsilon * \phi) \rangle. \end{aligned}$$

El primer término converge a $\langle \tilde{\rho}, \chi_R(\Upsilon * \phi) \rangle$. Usando la hipótesis (3.30) acotamos el segundo término uniformemente en n de tal modo que

$$\left| \langle \rho^n, (\chi_R - 1)(\Upsilon * \phi) \rangle \right| \leq \frac{C}{R} \|\Upsilon * \phi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < |x|, \rho^n(t, \cdot) \rangle \leq \frac{C'}{R}.$$

Entonces, podemos tomar límite cuando $R \rightarrow \infty$ y deducir que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi(\Upsilon * \rho^n) dx dt \rightarrow - \int_0^T \langle \tilde{\rho}, (\Upsilon * \phi) \rangle dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi(\Upsilon * \tilde{\rho}) dx dt.$$

Por un argumento sencillo de densidad deducimos que $\Upsilon * \rho^n \rightharpoonup \Upsilon * \tilde{\rho}$ débilmente en $L^p([0, T] \times \Omega)$ para todo $1 < p < \infty$. Si usamos ahora que $\partial_x(\Upsilon * \rho^n) = -\rho^n$ en el sentido de las distribuciones y la cota uniforme $\|\Upsilon * \rho^n(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|\rho^n(t, \cdot)\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R})}$ podemos deducir que

$$\Upsilon * \rho^n \text{ está acotada en } L^\infty(0, T; BV(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})).$$

Entonces, para cada $t \in [0, T]$ fijo, la sucesión está acotada en $BV(\mathbb{R})$ y por lo tanto, usando el Teorema de Helly, hallamos una subsucesión (que en principio depende del instante t) que converge c.p.d. y, como consecuencia, $\Upsilon * \rho^n(t)$ converge fuertemente en $L^p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$. Notemos que este argumento no sirve para L^∞ ya que para que la convergencia puntual unida a la débil nos de convergencia fuerte necesitamos que $p < \infty$. Como este límite ha de coincidir con el límite débil, que ya está fijado, toda la sucesión converge independientemente del instante elegido t . Usando finalmente la cota uniforme en tiempo deducimos el resultado anunciado. \square

El siguiente paso es probar que el par $(\tilde{\rho}, \tilde{U} = \Upsilon * \tilde{\rho})$ es la solución débil de (3.22)-(3.23). Para ello, tomaremos límite en la ecuación (3.25) en sentido débil. Razonando como en el Capítulo 2, usando las propiedades de antisimetría de Υ (y por lo tanto de Υ^n ya que ζ^n es simétrica), caracterizamos las soluciones débiles de (3.25) de la forma

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \left\langle \rho^n \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle dt - \langle \rho_0^n \psi(0, \cdot) \rangle \\ &+ \int_0^\infty \left\langle \left\langle \frac{\partial_x \psi(t, x) - \partial_x \psi(t, y)}{2} \Upsilon^n(x - y), \rho^n(t, y) \right\rangle_y, \rho^n(t, y) \right\rangle_x dt, \end{aligned} \quad (3.31)$$

para cada $\psi \in \mathcal{D}([0, \infty) \times \mathbb{R})$. Para poder tomar límite razonamos como en resultado de compacidad dado por el Lema 2.3, y deducimos que el producto $\rho^n(t, x)\rho^n(t, y)$ converge al producto de los límites, es decir,

$$\rho^n(t, x)\rho^n(t, y) \rightarrow \tilde{\rho}(t, y)\tilde{\rho}(t, y) \text{ en } C_w(0, T; \mathcal{M}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)).$$

Entonces, haciendo la siguiente descomposición en funciones continuas

$$\frac{\partial_x \psi(t, x) - \partial_x \psi(t, y)}{2} \Upsilon^n(x-y) = -\frac{\partial_x \psi(t, x) - \partial_x \psi(t, y)}{2|x-y|^{1/2}} (|x-y|^{1/2} \Upsilon^n(x-y)),$$

y usando la estimación $\| |\cdot|^{1/2} \Upsilon^n(\cdot) - |\cdot|^{1/2} \Upsilon(\cdot) \|_\infty \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ concluimos que

$$\frac{\partial_x \psi(t, x) - \partial_x \psi(t, y)}{2} \Upsilon^n(x-y) \rightarrow \frac{\partial_x \psi(t, x) - \partial_x \psi(t, y)}{2} \Upsilon(x-y),$$

uniformemente en $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$. Observamos que esta función continua no tiene soporte compacto, pero podemos truncarla. Primero observamos que $U_0 \in L^1(\mathbb{R})$ implica que $\int |x| \rho_0(x) dx < \infty$ y multiplicando en (3.25) por $|x|$ e integrando deducimos (3.30). Por lo tanto, razonando como en la demostración del Teorema 2.1 podemos tomar límite en (3.31) y obtener la misma expresión para el límite,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \left\langle \tilde{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle dt - \langle \rho_0 \psi(0, \cdot) \rangle \\ &+ \int_0^\infty \left\langle \left\langle \frac{\partial_x \psi(t, x) - \partial_x \psi(t, y)}{2} \Upsilon(x-y), \tilde{\rho}(t, y) \right\rangle_y, \tilde{\rho}(t, y) \right\rangle_x dt. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ya hemos demostrado que $(\tilde{\rho}, \tilde{U})$ verifican (3.22)-(3.23) en el sentido de las distribuciones, pero para usar la propiedad de unicidad y concluir nuestro argumento tenemos que probar primero que \tilde{U} resuelve la ecuación (3.21). Aunque se puede adaptar la demostración del Capítulo 2, damos una demostración rigurosa más adaptada a este ambiente. Para ello, tomamos un test $\psi \in \mathcal{D}([0, \infty) \times \mathbb{R})$ y escribimos

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \tilde{U} \frac{\partial \psi}{\partial t} dt = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (\Upsilon * \tilde{\rho}) \frac{\partial \psi}{\partial t} dt = - \int_0^\infty \left\langle \tilde{\rho}, \frac{\partial}{\partial t} (\Upsilon * \psi) \right\rangle_x dt$$

que está bien definido aunque $\Upsilon * \psi$ no tenga soporte compacto. Si usamos ahora la igualdad (3.32), tras aproximar $\Upsilon * \psi$ por tests de soporte compacto, podemos obtener

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \tilde{U} \frac{\partial \psi}{\partial t} dt &= \int_{\mathbb{R}} U^0(x) \psi(0, x) dx \\ &+ \int_0^\infty \left\langle \left\langle \frac{-\psi(t, x) + \psi(t, y)}{2} \Upsilon(x-y), \tilde{\rho}(t, y) \right\rangle_y, \tilde{\rho}(t, x) \right\rangle_x dt, \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde hemos usado que $\partial_x (\Upsilon * \psi) = -\psi$. Finalmente, vamos a escribir el último término de (3.33) en términos de \tilde{U} . Dado, que las manipulaciones con $\tilde{\rho}$ son muy complicadas puesto que sólo es una medida, tomamos una

última aproximación de ésta que pueda ser tratada. Sea $\tilde{\rho}^h$ una sucesión en $C(0, \infty; \mathcal{D}(\mathbb{R}))$ que converja a $\tilde{\rho}$ en $C(0, T; \mathcal{M}(\mathbb{R}) - \text{débil}^*)$ y con primer momento acotado. Entonces, por una lado, observamos que la sucesión

$$\alpha^h := - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi(t, x) - \psi(t, y)}{2} \Upsilon(x - y) \tilde{\rho}^h(t, y) \tilde{\rho}^h(t, x) dx dy dt,$$

converge al segundo término de (3.33). Pero, por otro lado, deshaciendo la simetrización y usando la ecuación $\partial_x(\Upsilon * \tilde{\rho}^h) = -\tilde{\rho}^h$ en su formulación débil podemos escribir α^h como sigue

$$\begin{aligned} \alpha^h &= - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \psi(\Upsilon * \tilde{\rho}^h) \tilde{\rho}^h dx dt \\ &= - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} (\psi(\Upsilon * \tilde{\rho}^h)) (\Upsilon * \tilde{\rho}^h) dx dt = - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} (\Upsilon * \tilde{\rho}^h)^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dt. \end{aligned}$$

Usando ahora el Lema 3.14 deducimos el límite

$$\alpha^h \rightarrow \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} (\tilde{U})^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dt.$$

Como ambos límites de α^h han de ser iguales, deducimos finalmente, usando (3.33), que

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \tilde{U} \frac{\partial \psi}{\partial t} dt = \int_{\mathbb{R}} U_0(x) \psi(0, x) dx - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \tilde{U}^2 \partial_x \psi dx dt,$$

que es la formulación débil de (3.21). Así, \tilde{U} es efectivamente la única solución de la ecuación (3.21) y la aproximación del método de partículas converge en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ hacia ella. Con ello concluimos la demostración de la Proposición 3.3. \square

Capítulo 4

Límite hidrodinámico de sistemas de *drift-diffusion* que modelan la dinámica de grandes poblaciones

En este capítulo estudiaremos la estabilidad del sistema parabólico no lineal de tipo *drift-diffusion*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}_x(\rho U - \varepsilon \nabla_x \rho) &= 0, \\ \operatorname{div} U &= \theta \rho.\end{aligned}$$

respecto al parámetro de viscosidad ε . El signo θ nos indicará el carácter atractivo o repulsivo del campo U . En el caso repulsivo, el sistema ha sido obtenido en [65] como límite hidrodinámico del sistema de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck y, por lo tanto, representa un cierto régimen de comportamiento para sistemas con muchas partículas que es a menudo utilizado en Teoría de Semiconductores. En el caso atractivo este sistema es un caso particular del modelo de Keller-Segel que se utiliza para modelar el fenómeno de agregación en ciertos cultivos biológicos.

Daremos una demostración rigurosa de las propiedades de compacidad de las soluciones y de la convergencia cuando el parámetro de viscosidad tiende a cero. En el caso atractivo además analizaremos la pérdida de compacidad debido a la explosión de las soluciones en tiempo finito dependiendo de su masa inicial y de la dimensión espacial. Los contenidos de este Capítulo han sido desarrollados a modo de artículo en [57].

4.1 Introducción

El sistema habitual para modelar la dinámica de un sistema numeroso de partículas en un baño térmico es el conocido sistema de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck. En términos de la velocidad térmica y del camino medio térmico escalado, F. Poupaud y J. Soler en [65] analizaron un límite de campo bajo, obteniendo un sistema límite parabólico que conserva un término de viscosidad

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_\varepsilon + \operatorname{div}_x(\rho_\varepsilon U_\varepsilon - \varepsilon \nabla_x \rho_\varepsilon) = 0, \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^N, \quad (4.1)$$

$$U_\varepsilon = -\nabla_x \phi_\varepsilon, \quad -\Delta_x \phi_\varepsilon = \theta \rho_\varepsilon, \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^N, \quad (4.2)$$

$$\rho_\varepsilon(0, \cdot) = \rho_{0,\varepsilon} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (4.3)$$

donde ε es la constante de viscosidad positiva y θ es igual a 1 cuando consideramos que el campo autoconsistente U es de tipo electrostático y generado por una densidad de carga ρ (que corresponde a fuerzas repulsivas) o θ es igual a -1 si consideramos el caso atractivo en el que el campo es debido a una distribución de masas.

El límite de campo alto del sistema de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck se corresponde con otro régimen de las constantes (velocidad térmica y camino libre medio térmico) que ha sido analizado en el Capítulo 2 obteniendo las ecuaciones concernientes a la dinámica de gases sin presión:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}_x(\rho U) = 0, \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^N, \quad (4.4)$$

$$U = -\nabla_x \phi, \quad -\Delta_x \phi = \theta \rho, \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^N$$

$$\rho(0, \cdot) = \rho_0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (4.5)$$

Entonces, podemos considerar el sistema (4.1)-(4.3) como una perturbación de (4.4)-(4.5) en la cual ha sido introducido el término de viscosidad $\varepsilon \Delta$, que produce un efecto de regularización sobre la densidad ρ . Por lo tanto, intentaremos conectar estos dos diferentes regímenes demostrando que las soluciones del primero convergen hacia soluciones del segundo cuando ε tiende a 0, o, en otras palabras, que el segundo es estable bajo perturbaciones de tipo viscoso.

De hecho, como veremos en la Sección 4.3, en dimensión uno, el campo U solución de (4.4)-(4.5) resuelve la ecuación de Hopf-Burgers y U_ε será la solución aproximada dada por el método de viscosidad. Para justificar el interés del límite ε tendiendo a 0, que es el objetivo de este Capítulo, veamos algunos fenómenos interesantes modelados por este sistema.

Ambos sistemas son límites hidrodinámicos del sistema de Vlasov-Poisson Fokker-Planck y como consecuencia, modelan regímenes macroscópicos de

sistemas con gran número de partículas. Por otro lado, en el caso atractivo, el sistema (4.1)-(4.3) es un caso particular del modelo de Keller-Segel (ver [46]) que describe la agregación producida en ciertos cultivos de amebas debida a una sustancia quimioattractiva que algunos de los propios organismos segregan cuando escasea el alimento. Cuando la dimensión es mayor o igual que dos, esta agregación puede producir una concentración en torno al agente quimiotáctico segregado dependiendo de la masa total de la población (la norma L^1 de la densidad $\rho_{0,\varepsilon}$), produciendo cierto tipo de explosión en un tiempo finito. Esta explosión ha sido extensamente analizada por M. A. Herrero, E. Medina y J. J. L. Velázquez en [41] y [42] en dimensión $N = 2$ y $N = 3$ respectivamente, y por T. Nagai en [55], quien estudia la explosión de soluciones con simetría radial en dominios acotados de cualquier dimensión. Hacemos notar que nuestro sistema está considerado en todo el espacio Euclídeo \mathbb{R}^N y esto contrasta con la mayoría de trabajos precedentes concernientes a modelos quimiotácticos.

El segundo sistema en el caso atractivo es también un caso particular del modelo de Keller-Segel, que sigue siendo un modelo quimiotáctico bajo ciertas hipótesis sobre la concentración de microorganismos ρ y la concentración del agente quimioattractivo U . Finalmente, referimos el trabajo de M. Rascle y C. Ziti [67] para el estudio de estos dos modelos, especialmente el estudio de la explosión en tiempo finito.

Para fuerzas repulsivas el sistema (4.1)-(4.3) ha sido usado en la modelización de dispositivos electrónicos semiconductores cuando la longitud típica es suficientemente grande con respecto al tiempo de tuneo que es, por ejemplo, el caso del silicio. Pero este sistema (4.1)-(4.3) deja de ser útil cuando el régimen del transporte es de tipo hiperbólico. Entonces, (4.4)-(4.5) aparece como el modelo macroscópico natural para el transporte de la densidad de electrones que es de carácter más hiperbólico en este régimen.

El objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento del sistema (4.1)-(4.3) cuando el parámetro de viscosidad ε tiende a cero y recuperar en el límite el sistema (4.4)-(4.5). Para ello, consideraremos una sucesión de condiciones iniciales $\rho_{0,\varepsilon}$ regulares que converjan a ρ_0 en un espacio apropiado que más adelante determinaremos. Estudiaremos la sucesión asociada ρ_ε de soluciones de (4.1)-(4.3) con dato inicial $\rho_{0,\varepsilon}$. Aplicaremos las técnicas de compacidad usadas en el Capítulo 1 y en [65] en dimensión uno y en dimensión superior cuando sea posible. Así, en dimensión uno probaremos usando las propiedades de antisimetría del núcleo de Poisson y las cotas uniformes para el campo, que se puede pasar al límite en el espacio de las medidas de Radon con la topología débil* y uniformemente en intervalos acotados de tiempo. Este primer resultado será demostrado suponiendo que las condiciones iniciales convergen sólo en $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ – débil* y tienen acotado

el primer momento. En dimensión uno el caso atractivo y el repulsivo serán tratados simultáneamente. Para dimensiones superiores, pasaremos al límite usando una cota uniforme para $\|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $t \in [0, T^*)$. En el caso de fuerzas electrostáticas repulsivas ($\theta = 1$) la cota será global, $T^* = \infty$, pero para fuerzas de tipo atractivo ($\theta = -1$) sólo tendremos una cota local en tiempo dependiente de la norma uniforme del dato inicial, $T^* = (\sup_{\varepsilon > 0} \|\rho_{0,\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})^{-1} < \infty$.

El Capítulo está estructurado como sigue. En la Sección 4.2 estudiaremos las propiedades de compacidad de las soluciones ρ_ε dependiendo de la dimensión del espacio y del carácter atractivo o repulsivo de las fuerzas. Analizaremos tanto resultados de existencia y regularidad dependientes de ε como propiedades uniformes en este parámetro que nos permitan pasar al límite. La Sección 4.3 está dedicada a tomar el límite riguroso cuando ε tiende a cero y demostrar el resultado principal de este Capítulo.

4.2 Existencia y propiedades de compacidad

En trabajos previos podemos encontrar resultados de existencia del sistema (4.1)-(4.3), pero nosotros presentaremos aquí ciertas propiedades cualitativas independientes de ε y algunas respuestas relacionadas con la posible explosión de las soluciones en el caso atractivo. Más concretamente, en esta Sección demostraremos el siguiente resultado:

Proposición 4.4 *Sea $\rho_{0,\varepsilon}$ una sucesión de datos iniciales no negativos que cumpla*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |x|)\rho_{0,\varepsilon}(x)dx + \|\rho_{0,\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C < \infty,$$

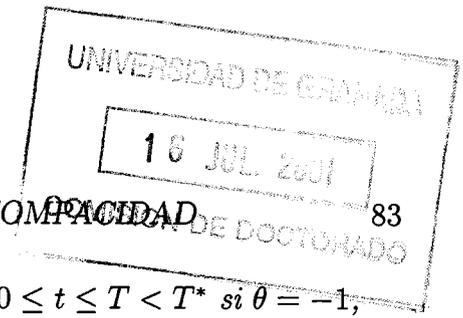
para cierta constante $C > 0$ independiente de ε . Entonces, existe un par $(\rho_\varepsilon, U_\varepsilon)$ solución global de (4.1)-(4.3) que, además, en dimensión 2 verifica:

$$\text{si } \left(M_\varepsilon = \|\rho_{0,\varepsilon}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} < 4\varepsilon \frac{p}{(p+1)^2} \right) \Rightarrow \|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \|\rho_{0,\varepsilon}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)},$$

para todo $t > 0$. Esta solución satisface las siguientes propiedades uniformes en ε :

- i) *Conservación de la masa:* $\|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = M_\varepsilon \leq C$, $t \geq 0$.
- ii) *Para $N = 1$,* $\int_{\mathbb{R}} |x|\rho_\varepsilon(t, x)dx + \|U_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C$, $t \geq 0$.
- iii) *Para $N > 1$,*

$$\|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|U_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \int_{\mathbb{R}^N} |x|\rho_\varepsilon(t, x)dx \leq C,$$



4.2. EXISTENCIA Y PROPIEDADES DE COMPACTIDAD

globalmente en tiempo si $\theta = 1$ y para $0 \leq t \leq T < T^*$ si $\theta = -1$,
donde $T^* = (\sup_{\varepsilon > 0} \|\rho_{0,\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})^{-1}$.

4.2.1 Cotas uniformes y existencia

Primero observamos que el campo definido por (4.2) puede ser descrito de forma equivalente en forma de convolución $U_\varepsilon(t, x) = \theta K_N *_x \rho_\varepsilon(t, x)$, donde

$$K_N = C_N \frac{x}{|x|^N}, \quad (4.6)$$

y C_N es una constante *positiva* que sólo depende de la dimensión del espacio.

Definiremos T^* como el máximo instante de tiempo hasta el que esperamos que la cota uniforme exista, es decir

$$T^* = \begin{cases} (\sup_{\varepsilon > 0} \|\rho_{0,\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})^{-1} & \text{si } \theta = -1 \\ \infty & \text{si } \theta = 1. \end{cases}$$

Ahora fijamos $T < T^*$ y $\varepsilon > 0$ y consideramos, para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ y para cada $j = 0, \dots, n$ la partición del intervalo $[0, T]$: $t_j = j \frac{T}{n}$. Entonces, consideramos el sistema *linealizado de retraso en tiempo*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_\varepsilon^{n,j} &= \varepsilon \Delta_x \rho_\varepsilon^{n,j} - \operatorname{div}(U_\varepsilon^{n,j-1} \rho_\varepsilon^{n,j}), \quad \text{en } [t_{j-1}, t_j] \times \mathbb{R}^N, \\ \rho_\varepsilon^{n,j}(t_{j-1}) &= \rho_\varepsilon^{n,j-1}(t_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde

$$U_\varepsilon^{n,j}(t, x) := \theta (K_N *_x \zeta^n) *_x \rho_\varepsilon^{n,j}(t - T/n, x), \quad \rho_\varepsilon^{n,0}(t, x) \equiv \rho_{0,\varepsilon}(x),$$

y, para regularizar el campo U_ε^n , hemos introducido una aproximación de la unidad no negativa $\zeta^n(x) = 1/n^N \zeta(x/n)$ con $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $\int \zeta = 1$. Si desarrollamos el segundo término de (4.7) podemos escribirlo de la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_\varepsilon^{n,j} + U_\varepsilon^{n,j-1} \nabla \rho_\varepsilon^{n,j} - \varepsilon \Delta_x \rho_\varepsilon^{n,j} = -\theta (\zeta^n * \rho_\varepsilon^{n,j-1}) \rho_\varepsilon^{n,j}. \quad (4.8)$$

Para estudiar la ecuación *linealizada* (4.7), centramos la atención en una ecuación parabólica genérica del tipo

$$\frac{\partial p}{\partial t} + a \cdot \nabla p - \varepsilon \Delta_x p = -\theta f, \quad p(t_0, x) = p_0(x), \quad (4.9)$$

con datos regulares a , f y p_0 , y donde f es no negativa. Un resultado clásico basado, por ejemplo, en la construcción de una solución fundamental (véase

por ejemplo [48]) nos da la existencia de una solución regular uniformemente acotada en cada intervalo de tiempo $[0, T]$, pero con una cota que *a priori* depende fuertemente de ε y del campo a . Para evitar esta dependencia usamos el principio del máximo como sigue: definimos \bar{p} como $\bar{p}(t, x) = p(t, x) - \|p_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ si $\theta = 1$ y $\bar{p}(t, x) = p(t, x) - (\|p_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \int_{t_0}^t \|f(s, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds)$ si $\theta = -1$. En ambos casos obtenemos fácilmente que \bar{p} verifica

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + a \cdot \nabla \bar{p} - \varepsilon \Delta_x \bar{p} \leq 0 \quad \text{y} \quad p(t_0, x) = p_0(x) - \|p_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq 0.$$

Ahora, usando la cota uniforme para p deducimos la siguiente condición de decrecimiento en infinito

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \left(e^{-R^2} \sup \{ \bar{p}(t, x) : t \in [t_0, T], |x| \leq R \} \right) = 0,$$

que nos permite concluir que $\bar{p}(t, x) \leq 0$ en $[0, T] \times \mathbb{R}^N$ (ver Teorema 10, §3 de [66]) o equivalentemente, que la solución de (4.9) verifica

$$p(t, x) \leq \|p_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \int_{t_0}^t \|f(s, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds, \quad \text{si } \theta = -1, \quad (4.10)$$

$$p(t, x) \leq \|p_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \quad \text{si } \theta = 1. \quad (4.11)$$

Usamos esta cota para la solución de (4.8) con p igual a cada $\rho_\varepsilon^{n,j}$, $a = U_\varepsilon^{n,j-1}$ y $f = -\theta(\zeta^n * \rho_\varepsilon^{n,j-1})\rho_\varepsilon^{n,j}$. Entonces, concluimos que existe una función $\rho_\varepsilon^{n,j} \in C(t_{j-1}, t_j; L^\infty(\mathbb{R}^N))$ solución de (4.8) que verifica

$$\begin{aligned} \|\rho_\varepsilon^{n,j}(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq \|\rho_\varepsilon^{n,j-1}(t_{j-1}, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ &+ \int_{t_{j-1}}^t \|\rho_\varepsilon^{n,j-1}(s - T/n, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|\rho_\varepsilon^{n,j}(s, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds \end{aligned} \quad (4.12)$$

en el caso atractivo $\theta = -1$ y

$$\|\rho_\varepsilon^{n,j}(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|\rho_\varepsilon^{n,j-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|\rho_{0,\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \quad (4.13)$$

en el caso repulsivo. Entonces, para el caso atractivo razonamos de la siguiente forma. Sea $k = \sup_{\varepsilon > 0} \|\rho_{0,\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$, entonces probamos por inducción sobre j que

$$\|\rho_\varepsilon^{n,j}(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{k}{1 - tk}, \quad \forall t_{j-1} \leq t \leq t_j. \quad (4.14)$$

Para $j = 0$ tenemos

$$\|\rho_\varepsilon^{n,0}(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \|\rho_{0,\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq k \leq \frac{k}{1 - tk}.$$

Seguidamente suponemos que (4.14) es cierto hasta $j - 1$ y usando (4.12) deducimos

$$\begin{aligned} \|\rho_\varepsilon^{n,j}(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq \frac{k}{1 - t_{j-1}k} + \int_{t_{j-1}}^t \frac{k}{1 - (s - T/n)k} \|\rho_\varepsilon^{n,j}(s, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds \\ &\leq \frac{k}{1 - t_{j-1}k} + \int_{t_{j-1}}^t \frac{k}{1 - sk} \|\rho_\varepsilon^{n,j}(s, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds \end{aligned}$$

Finalmente, el Lema de Gronwall nos proporciona la estimación

$$\|\rho_\varepsilon^{n,j}(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{k}{1 - t_{j-1}k} \exp\left\{\int_{t_{j-1}}^t \frac{k}{1 - sk} ds\right\} = \frac{k}{1 - tk}$$

que demuestra (4.14). Ahora, definimos

$$\rho_\varepsilon^n(t, x) = \rho_\varepsilon^{n,j}(t, x), \text{ en } [t_{j-1}, t_j],$$

que es una función continua en $[0, T]$. Entonces, usando la formulación débil de (4.7) podemos escribir

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta_x \psi + U^n \cdot \nabla_x \psi\right) \rho_\varepsilon^n dx dt, \quad (4.15)$$

para todo $\psi \in \mathcal{D}([0, T] \times \mathbb{R}^N)$. Para tomar el límite cuando $n \rightarrow \infty$ en (4.15) necesitaremos algunas cotas adicionales de ρ_ε^n . Primero, usando (4.14) y el principio del máximo que acabamos de usar (Teorema 10, §3 de [66]), deducimos que $\rho_\varepsilon^n \geq 0$, entonces podemos estimar su norma L^1 integrando en (4.7). De hecho, se tiene la conservación de la masa

$$\|\rho_\varepsilon^n(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \|\rho_{0,\varepsilon}^n\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq M.$$

Esta estimación, junto con la Ley de Conservación lineal (4.7) nos lleva a que $\partial_t \rho_\varepsilon^n(t, \cdot)$ está acotada en $W^{-2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ uniformemente con respecto a t y n . Un argumento clásico de densidad nos permite entonces asegurar que la sucesión ρ_ε^n constituye un conjunto precompacto de $C([0, T]; L^p(\mathbb{R}^N) - \text{débil}^*)$ para todo $1 < p \leq \infty$, donde $T < T^*$. Entonces, salvo subsucesión, converge en $C([0, T]; L^2(\mathbb{R}^N) - \text{débil}^*)$ y U_ε^n converge en $L^2_{loc}([0, T] \times \mathbb{R}^N)$ cuando $n \rightarrow \infty$ (véase por ejemplo el Lema 3.14 del Capítulo 3).

Combinando la convergencia débil de ρ_ε^n y la fuerte de U_ε^n podemos pasar al límite débilmente en (4.7) para obtener la solución de (4.1). Además, podemos tomar el límite en (4.14) para el caso atractivo y en (4.13) para el repulsivo y concluir que

$$\begin{aligned} \text{para } \theta = -1, \quad \|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq \frac{k}{1 - tk}, \quad \forall 0 \leq t < T^* = \frac{1}{k}, \\ \text{para } \theta = 1, \quad \|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq k \quad \forall 0 \leq t. \end{aligned}$$

De los resultados del Capítulo 2 sabemos que esta cota con la norma uniforme es óptima ya que en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ es también óptima para soluciones del sistema (4.4)-(4.5).

4.2.2 Soluciones globales para fuerzas atractivas en dimensión dos

Para $\varepsilon > 0$ fijo podemos hacer un pequeño estudio de la posible explosión de las soluciones en el caso atractivo. En [42] se demuestra que, para $N \geq 3$, existen soluciones radiales de (4.1)-(4.3) cuya norma L^∞ explota en tiempo finito independientemente de la masa inicial. En el contexto de la dinámica de un cultivo de amebas, podemos justificar esta propiedad a través del colapso quimiotáctico, es decir, incluso si $\varepsilon > 0$, el término convectivo $\operatorname{div}_x(\rho_\varepsilon U_\varepsilon)$ induce un movimiento hacia los puntos en que hay concentraciones de la sustancia quimioatractiva que predomina sobre la difusión producida por $\varepsilon \Delta_x \rho_\varepsilon$. Hemos de hacer notar aquí el papel del parámetro θ , ya que U_ε es, salvo constante positiva, proporcional a la velocidad de agregación hacia el origen. En [55] se demuestra que en dominios acotados de \mathbb{R}^2 , la solución explota en norma L^∞ si y sólo si la masa total está por encima de una cierta *masa crítica* que depende de la medida del dominio considerado y de la constante ε . Extenderemos este resultado en la medida de lo posible a todo el espacio \mathbb{R}^2 , pero controlando la explosión sólo en norma L^p .

Primero damos un resultado técnico del tipo de las desigualdades de Sobolev.

Lema 4.15 *Sea ρ una función positiva de $L^1 \cap L^{(p+1)}(\mathbb{R}^2)$ con $2 \leq p < \infty$ y tal que $\nabla \rho \in L^{\frac{2}{3}(p+1)}(\mathbb{R}^2)$. Entonces, se verifica la siguiente desigualdad*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho^{p+1}(x) dx \leq C(p) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \rho(x) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(\rho^{\frac{p}{2}})(x)|^2 dx \right), \quad (4.16)$$

para $C(p) = \left(\frac{p+1}{p}\right)^2$.

Demostración. Comenzamos usando una desigualdad de Sobolev-Galiardo-Nirenberg (véase [13], Capítulo IX.3.) que nos asegura que para toda función f de clase C^1 con soporte compacto en \mathbb{R}^N ($N \geq 2$) se verifica

$$\|f\|_{L^{\alpha N(N-1)}(\mathbb{R}^N)}^\alpha \leq \alpha \|f\|_{L^{(\alpha-1)\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)}^{\alpha-1} \|\nabla f\|_{L^N(\mathbb{R}^N)},$$

para toda $\alpha \geq 1$. Entonces, eligiendo $N = 2$, el parámetro $\alpha = 1 + \frac{1}{p}$ y la función $f = \rho^{\frac{p}{2}}$ obtenemos (4.16) para funciones suficientemente regulares ρ . Un argumento usual de densidad nos permite concluir que la misma

estimación sigue siendo cierta bajo la regularidad exigida en la hipótesis del Lema sobre la función ρ . \square

Ahora, multiplicamos (4.1) por ρ_ε^{p-1} para obtener

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{p-1} \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon^p dx + \frac{4\varepsilon}{p} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(\rho_\varepsilon^{\frac{p}{2}})|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon^{p+1} dx.$$

Entonces, usando (4.16) y la conservación de la masa podemos deducir que

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{p-1} \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon^p dx \leq \left(C(p) M - \frac{4\varepsilon}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(\rho_\varepsilon^{\frac{p}{2}})|^2 dx. \quad (4.17)$$

Aquí podemos observar que el control de la masa inicial nos permite igualmente el de la variación de la norma L^p de ρ_ε . De hecho, tenemos que si

$$M < 4\varepsilon \frac{p}{(p+1)^2}$$

el segundo término de (4.17) se vuelve negativo y concluimos que

$$\|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \|\rho_{0,\varepsilon}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall t \geq 0.$$

Además, integrando (4.17) entre 0 y t podemos controlar el gradiente de ρ_ε de la siguiente forma

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(\rho_\varepsilon^{\frac{p}{2}})(s, x)|^2 dx ds \leq \frac{2p^2}{M(p-1)^3 - 4\varepsilon p(p-1)} \|\rho_{0,\varepsilon}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)},$$

y con ello concluimos la demostración de la Proposición 4.4.

4.2.3 Cotas para el campo y los momentos

Para estimar el campo usamos la siguiente estimación propia del análisis armónico que ya ha aparecido varias veces en esta memoria

$$\|U_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C \left(\|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \right), \quad r > N,$$

y, en particular, en el caso de dimensión uno usamos una cota uniforme

$$\|U_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2} \|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

independientemente del carácter atractivo o repulsivo de las fuerzas.

Finalmente, queremos acotar el primer momento de la densidad ρ_ε para evitar que la masa puede irse al infinito y, en consecuencia, tener propiedades

de compacidad en L^1 . Para ello tomamos una función no negativa $g \in C^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $g(x) \geq |x|$ para todo x y tal que se dé la igualdad para $|x| \geq 1$ (notemos que esto implica que ∇g y Δg están acotadas). Entonces, usando la ecuación (4.1) deducimos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |x| \rho_\varepsilon(t, x) dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} g(x) \rho_\varepsilon(t, x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} g(x) \rho_{\varepsilon,0}(x) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (U_\varepsilon(t, x) \cdot \nabla g(x) - \varepsilon \Delta g(x)) \rho_\varepsilon(t, x) dx. \end{aligned}$$

Como consecuencia, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x| \rho_\varepsilon(t, x) dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x| \rho_{0,\varepsilon} dx + \|U_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right),$$

lo que nos proporciona una cota global en tiempo cuando U_ε esté acotada, lo que sabemos que ocurre tanto en el caso de fuerzas repulsivas ($\theta = 1$) como en dimensión uno para los dos tipos de campo. De la misma forma, para fuerzas atractivas ($\theta = -1$) obtenemos en general una cota local en tiempo.

El siguiente paso es pasar al límite en (4.1)-(4.3) en sentido débil demostrando rigurosamente que cuando el término de viscosidad se hace pequeño las soluciones tienden a una solución del sistema (4.4)-(4.5).

4.3 Paso al límite

Comenzamos la Sección presentando el principal resultado de este Capítulo.

Teorema 4.7 *Sea $\rho_{0,\varepsilon}$ tal que verifica las hipótesis del Lema 4.4 y sea $(\rho_\varepsilon, U_\varepsilon)$ la solución asociada del sistema (4.1)-(4.3) con condición inicial $\rho_{0,\varepsilon}$. Entonces, se tiene*

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon &\rightharpoonup \rho, \quad \text{en } C(0, T; (L^p(\mathbb{R}^N) \text{ débil}^*) \cap (L^1(\mathbb{R}^N) \text{ débil})), \quad 1 < p \leq \infty, \\ U_\varepsilon &\rightarrow U, \quad \text{en } L^q(0, T; L^p(\Omega)^N \cap C(\Omega)^N), \quad 1 \leq q, p < \infty, \end{aligned}$$

para cada subconjunto compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y para cada $T > 0$ en el caso de fuerzas repulsivas ($\theta = 1$) y para cada $T < T^*$ en el caso de fuerzas atractivas ($\theta = -1$). El límite (ρ, U) es la única solución de (4.4)-(4.5). Además, en el caso uno dimensional se tiene

$$\rho_\varepsilon \rightharpoonup \rho, \quad \text{en } C(0, T; \mathcal{M}(\mathbb{R}) - \text{débil}^*),$$

para cada $T > 0$ independientemente de θ .

Demostración. Consideramos en primer lugar el sistema (4.1)-(4.3) en su forma débil, es decir, para cada función test $\psi \in \mathcal{D}([0, \infty) \times \mathbb{R}^N)$ se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_{0,\varepsilon}(x) \psi(0, x) dx = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \varepsilon \Delta_x \psi + U_\varepsilon \cdot \nabla \psi \right) dx dt. \quad (4.18)$$

Observamos que la cota L^1 basta para pasar al límite, débilmente como medidas, en los tres primeros términos, pero no en el último de ellos: el no lineal. Esta sección está esencialmente destinada a pasar al límite en este término. La idea será usar las propiedades de antisimetría del núcleo (4.6) en el caso uno dimensional como en el primer Capítulo y en los demás casos, mostrar la convergencia fuerte del campo de forma local o global según su carácter atractivo o repulsivo.

El caso uno dimensional. En el caso uno dimensional podemos usar las técnicas introducidas en el primer Capítulo o en [65] basadas en las propiedades de antisimetría del núcleo. Usando la forma la expresión de U_ε como convolución del núcleo K_1 y la densidad, podemos reescribir el término no lineal de (4.18) como sigue

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(t, x) U_\varepsilon(t, x) \frac{\partial}{\partial x} \psi(t, x) dx dt \\ &= \frac{\theta}{2} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_x} \int_{\mathbb{R}_y} \frac{x-y}{2|x-y|} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, y) \right) \rho_\varepsilon(t, x) \rho_\varepsilon(t, y) dy dx dt, \end{aligned} \quad (4.19)$$

Podemos observar aquí que la función

$$\Psi(t, x, y) = \frac{\theta}{4} \frac{x-y}{|x-y|} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, y) \right) \quad (4.20)$$

es continua y acotada y, por lo tanto, podemos pasar al límite usando la dualidad con la medida $\rho_\varepsilon(t, x) \rho_\varepsilon(t, y)$. El primer paso es probar que ρ_ε converge a alguna medida ρ con la topología débil* y uniformemente en tiempo. Para ello, tomamos una función test $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ y observamos que

$$\begin{aligned} \alpha_\varepsilon[\phi](t) &:= \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(t, x) \phi(x) dx \leq \|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \alpha_\varepsilon[\phi](t) &= \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(\varepsilon \phi'' + U_\varepsilon \phi') dx \leq C \|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} (1 + \|U_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}). \end{aligned}$$

Usando el Lema 4.4, *i)* y *ii)* concluimos que $\alpha_\varepsilon[\phi](\cdot)$ es una familia de funciones de $C(0, \infty)$ uniformemente equicontinua en ε . Por lo tanto, vía Teorema de Ascoli, existe una subsucesión “dependiente de ϕ ” tal que $\alpha_\varepsilon[\phi](\cdot)$ converge a algún $\alpha[\phi](\cdot)$ en $C(0, T)$ para cada $T > 0$. Usando ahora la separabilidad

de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ podemos deducir que la subsucesión no depende realmente del test seleccionado ϕ . Por último, usando la densidad de las funciones test en el espacio $C_{00}(\mathbb{R})$ concluimos que la función ϕ puede ser tomada sobre todo el espacio $C_{00}(\mathbb{R})$. Entonces, $\alpha[\cdot](t)$ es en realidad un operador continuo sobre el espacio $C_{00}(\mathbb{R})$ para cada t y puede ser identificado con una medida que llamaremos $\rho(t)$. De hecho, hemos probado que, salvo una subsucesión,

$$\rho_\varepsilon \rightharpoonup \rho, \text{ en } C(0, T; \mathcal{M}(\mathbb{R}) - \text{débil}^*). \quad (4.21)$$

Nota 4.1 Usando las cotas uniformes del Lema 4.4, iii) para ρ_ε y U_ε observamos que $\alpha_\varepsilon[\phi](\cdot)$ (definida de forma análoga en dimensión N) sigue siendo una familia uniformemente ε -equicontinua de $C(0, \infty)$ (o $C(0, T^*)$ si $\theta = -1$), pero, además, $\alpha_\varepsilon[\cdot](t)$ constituye una familia de operadores continuos sobre los espacios $L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p < \infty$ (no incluimos de momento $p = \infty$ porque el argumento de densidad usado no funciona ya que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ no es denso en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$). Entonces, el mismo argumento basado en la separabilidad y densidad de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ nos permite concluir

$$\rho_\varepsilon \rightharpoonup \rho, \text{ en } C(0, T; L^p(\mathbb{R}^N) - \text{débil}^*), \quad (4.22)$$

para cada $T > 0$ si $\theta = 1$ o para $0 < T \leq T^*$ si $\theta = -1$. El mismo resultado se mantiene cierto para $p = 1$ (con la convergencia débil) usando la cota para el momento de primer orden y el Teorema de Egorov para poder aplicar resultados de tipo Dunford-Pettis (véase [65]).

Usando ahora (4.21) podemos fácilmente concluir que

$$\rho_\varepsilon(t, x)\rho_\varepsilon(t, y) \rightharpoonup \rho(t, x)\rho(t, y), \text{ en } C(0, T; \mathcal{M}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y) - \text{débil}^*).$$

Entonces, usando un argumento de truncamiento como en el primer Capítulo, esta propiedad de convergencia junto con las estimaciones del momento de primer orden dadas en el Lema 4.4 ii) y en (4.19), podemos pasar al límite en (4.18) obteniendo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \rho_0(x)\psi(0, x)dx &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} dx dt \\ &+ \frac{\theta}{2} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_x} \int_{\mathbb{R}_y} \frac{x-y}{2|x-y|} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, y) \right) \rho(t, x)\rho(t, y) dy dx dt, \end{aligned}$$

para toda función test $\psi \in \mathcal{D}([0, \infty) \times \mathbb{R})$. Entonces, definiendo el producto $U\rho$ en sentido débil como en la Definición 2.1 recuperamos el sistema (4.4)-(4.5).

Nota 4.2 Las técnicas de antisimetría nos han permitido pasar al límite en la densidad ρ_ε y dar sentido al producto ρU . Pero podemos olvidar momentáneamente el papel de la densidad y centrarnos en el comportamiento de del campo U_ε . Si hacemos en toda la ecuación (4.1) la convolución con θK_1 obtenemos, al menos formalmente,

$$\frac{\partial}{\partial t} U_\varepsilon = -\partial_x(\theta K_N *_{x}(\rho_\varepsilon U_\varepsilon)) + \varepsilon \partial_{xx} U_\varepsilon = -\theta \rho_\varepsilon U_\varepsilon + \varepsilon \partial_{xx} U_\varepsilon = -U_\varepsilon \partial_x U_\varepsilon + \varepsilon \partial_{xx} U_\varepsilon$$

que es la ecuación de Hopf-Burgers. Como hemos tratado en el Capítulo 2, el método de viscosidad ha sido usado para probar la existencia de soluciones en cierta clase del espacio de las funciones acotadas. En esta clase se ha demostrado unicidad de solución bajo el concepto de solución entrópica dado por N. Kruzhkov en [47] o el equivalente de solución admisible dado por O. Oleinik en [60]. Entonces, en este caso uno dimensional, el método de antisimetría presentado aquí es equivalente al método clásico de viscosidad. Notamos que la ecuación de Poisson $\partial U = \pm \rho$ produce un campo acotado U a partir de una medida ρ .

Caso general $N \geq 2$. Para pasar al límite en una dimensión arbitraria N no podemos usar el mismo argumento ya que la función $\Psi(t, x, y)$ pierde su continuidad cuando $N > 1$. Entonces, usaremos las estimaciones uniformes para obtener convergencia fuerte del campo U . A partir del Lema 4.4, *iii*) y las estimaciones del análisis armónico sabemos que

$$U_\varepsilon \text{ está uniformemente acotada en } L^\infty(0, T; (W^{1,p}(\mathbb{R}^N))^N), \quad 2 \leq p < \infty, \quad (4.23)$$

Entonces, $U_\varepsilon(t \cdot)$ es relativamente compacta en $L^p(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ para cada conjunto compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y para cada $t \in [0, T]$. Entonces, para todo $t \in [0, T]$ existe una subsucesión (que, a priori, depende de t) que converge a algún $U(t)$ en $L^p(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Pero ahora, usando la ecuación (4.3) y la convergencia de ρ_ε (4.22) obtenemos la forma explícita del límite: $U(t, x) = K_N *_{x} \rho(t, x)$, por lo que deducimos que toda la sucesión converge y, por lo tanto, no depende del instante t . Además, $\|U_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)}$ para cada $1 \leq p \leq \infty$, converge para cada $t \in [0, T]$ hacia $\|U(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)}$ y está uniformemente acotada. Entonces,

$$U_\varepsilon \rightarrow U, \text{ en } L^q(0, T; L^p(\Omega)^N \cap C(\Omega)^N), \quad \forall q, p : 1 \leq q, p < \infty, \quad (4.24)$$

con $T \leq T^*$ en el caso atractivo. La convergencia (4.22) y (4.24) basta para tomar el límite en (4.18) y obtener el resultado anunciado. Finalmente, la unicidad de las soluciones débiles del sistema (4.4)-(4.5) en $L^1 \cap L^\infty$ mostrada en el Capítulo 2, nos permite concluir que toda la sucesión converge y con ello cerramos la demostración. \square

Capítulo 5

Sobre la evolución del polarón en una aproximación de campo medio

En este Capítulo propondremos una teoría de campo medio para modelar la evolución de un electrón en un cristal ionizado bajo el formalismo cuántico de Schrödinger. Tras deducir el modelo veremos como su formulación variacional nos lleva a deducir las leyes de conservación asociadas mas importantes. Asimismo, se estudiará el buen planteamiento del problema tanto en el caso regular H^1 como en el más débil L^2 . Por último, demostraremos la existencia de una solución que minimiza la energía, estudiaremos su estabilidad desde varios puntos de vista y, para concluir, presentaremos un breve estudio del límite semiclásico. Los contenidos de este Capítulo han sido desarrollados a modo de artículo en [3].

5.1 Introducción

Los fenómenos de transporte en sólidos tienen una gran aplicación e importancia en los Semiconductores. Desde diversos campos (física, matemática o ingeniería) se ha mostrado el interés por estos modelos, motivados sobre todo por su aplicación en la miniaturización de dispositivos electrónicos. Ya que las escalas relevantes son del orden de los nanómetros, los efectos cuánticos son bastante considerables y han de ser tenidos en cuenta. Bajo estas circunstancias, los portadores de carga (electrones generalmente) deben ser tratados desde una perspectiva mecano cuántica. El problema general es bastante complicado de describir a partir de principios básicos por lo que a menudo se utilizan modelos simplificados para descripción de estos fenómenos. Un

ejemplo destacado bastante realista y simple nos lo da el movimiento de un electrón en un cristal polarizado. El efecto de la interacción atractiva electrón-ion envuelve al electrón de tal forma que se convierte en un objeto diferente: el polarón. En nuestro intento de establecer una teoría rigurosa matemática para este sistema, estudiaremos en primer lugar la evolución en tiempo de un sólo electrón en un estado cuántico puro caracterizado por su función de ondas $\psi(t, x)$ que interacciona con un continuo de iones cargados, que vendrá descrito por un campo clásico medio de polarización $\mathcal{P}(t, x)$.

El movimiento de los iones se considerará clásico y en el límite del continuo se corresponderá con un campo de polarización clásico. En un enfoque más realista se debería tener también en cuenta la naturaleza cuántica de los iones. En nuestro caso, la aproximación de campo medio del vector de polarización puede justificarse en el límite en el que los electrones interactúan fuertemente con los iones.

Veamos un esquema de los principales resultados de este Capítulo. En la Sección 5.2 deduciremos el modelo para la evolución de un electrón en un cristal usando la aproximación de campo medio. Consiste en acoplar la ecuación de Schrödinger con una ecuación para el potencial en la que el efecto de las interacciones electromagnéticas entre el electrón y los fonones no será instantánea e incorporará un nuevo término de memoria a la ecuación de acoplamiento de Poisson. En la Sección 5.3 estudiaremos el Funcional Acción asociado al sistema, deducido en la Sección 5.2, que posee una interpretación Lagrangiana. Por medio del Teorema de Noether identificaremos las constantes del movimiento tales como la masa, la energía, el momento lineal y el momento angular. El método de los corchetes de Poisson no produce ninguna propiedad de conservación adicional. La Sección 5.4 está dedicada al estudio del buen planteamiento del sistema: existencia y unicidad de soluciones. Primero probaremos el resultado de existencia en H^1 , que justificará la buena definición del funcional energía, y luego extenderemos este resultado al contexto natural L^2 . En la Sección 5.5 probaremos que la solución de Lieb es también el mínimo absoluto del problema del polarón y su estabilidad en el sentido de Liapunov. En la Sección 5.6 analizaremos la estabilidad de la solución de mínima energía bajo perturbaciones lineales.

A lo largo de este Capítulo consideramos el caso de una partícula simple, aunque podemos tratar con las dificultades propias el caso más general de un conjunto de electrones. La idea clave será que en el límite de acoplamiento fuerte entre el electrón y el fonón el desplazamiento relativo de los iones puede ser considerado como clásico, aunque el electrón conserve su comportamiento cuántico.

5.2 Derivación de un modelo para el polarón

La derivación del modelo para el polarón es conocida y se pueden encontrar algunas variantes en la literatura existente, véanse por ejemplo [26] o [29]. Es un modelo simple a la vez que no trivial de la interacción de una partícula con un campo. Supongamos que los iones oscilan en torno a su posición de equilibrio debido a la presencia de un electrón cargado que al mismo tiempo se ve afectado por el potencial electrostático creado por los iones. Esto nos dará un sistema de ecuaciones en derivadas parciales para la función de ondas del electrón $\psi(t, x)$ y el potencial electrostático $V(t, x)$. Finalmente, formularemos de nuevo nuestras ecuaciones en términos del campo vectorial de polarización \vec{P} .

Estudiaremos la dinámica de un cristal iónico. Sea L la red sobre \mathbb{R}^3 con respecto a la base (a_1, a_2, a_3) descrita en la Figura 1.2, es decir

$$L = \{n = m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3, \text{ con } (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3\}.$$

Consideramos aquí este modelo simplificado para una mejor comprensión del mismo, si bien podemos extender nuestra teoría a modelos con otras estructuras. Así, nos centramos en el caso de un cristal cúbico tridimensional con dos tipos de iones cargados. En el equilibrio, los iones positivos con masa M_+ están en los nodos de la red $n \in L$ correspondientes a coordenadas que verifican $m_1 + m_2 + m_3$ par y los iones negativos con masa M_- están sobre el resto de los nodos de la red L . Notaremos por n^+ o n^- a las posiciones de un ion positivo o negativo respectivamente. Supondremos que cada ion está interaccionando sólo con los iones situados inmediatamente a su lado en la red. Por lo tanto, cada ion interacciona con los 6 iones inmediatos de carga opuesta. Esta interacción será elástica y con una constante de recuperación uniforme k . Además, suponemos que existe un campo externo que actúa sobre los iones (a posteriori, el campo producido por el movimiento del electrón).

El movimiento de los iones cargados positiva y negativamente con masas M_+ y M_- en presencia de un campo externo queda descrito entonces por

$$M_+ \xi''_{n^+} = -k \sum_l (\xi_{n^+} - \xi_{n^++l}) + e \mathcal{E}_{n^+}(t), \quad (5.1)$$

$$M_- \xi''_{n^-} = -k \sum_l (\xi_{n^-} - \xi_{n^-+l}) - e \mathcal{E}_{n^-}(t), \quad (5.2)$$

para cada $n^+, n^- \in L$, siendo e una constante positiva relacionada con la carga del electrón ($= -e$). Aquí, ξ_{n^+} y ξ_{n^-} son los vectores de desplazamiento dependientes del tiempo con respecto a la posición de equilibrio n^+ y n^- ,

ocupadas respectivamente por un ion positivo y uno negativo. $\mathcal{E}_n(t)$ es el campo eléctrico en el punto n y l recorre las 6 posibilidades indicadas $l \in \{\pm a_i, i = 1, 2, 3\}$. Si tomamos el límite del continuo $a_1, a_2, a_3 \rightarrow 0$ y $n \rightarrow x$, siendo x cualquier punto del espacio, obtenemos

$$\begin{aligned}\xi''_+(t, x) &= -\frac{k}{M_+} \sum_l (\xi_+(t, x) - \xi_-(t, x)) + \frac{e}{M_+} \mathcal{E}(t, x), \\ \xi''_-(t, x) &= -\frac{k}{M_-} \sum_l (\xi_-(t, x) - \xi_+(t, x)) - \frac{e}{M_-} \mathcal{E}(t, x),\end{aligned}$$

donde

$$\xi_+(t, x) = \lim_{n^+ \rightarrow x} \xi_{(n^+)}(t), \quad \xi_-(t, x) = \lim_{n^- \rightarrow x} \xi_{(n^-)}(t) \text{ y } a_1, a_2, a_3 \rightarrow 0.$$

Restando ambas ecuaciones deducimos

$$\partial_t^2 \xi(t, x) + \Omega^2 \xi(t, x) = \frac{e}{M} \mathcal{E}(t, x), \quad (5.3)$$

donde M es la media armónica de M_+ y M_- , $M^{-1} = M_+^{-1} + M_-^{-1}$, $\Omega^2 = 6k/M$ y el campo de desplazamiento $\xi(t, x)$ está definido por $\xi(t, x) = \xi_+(t, x) - \xi_-(t, x)$.

No daremos aquí la justificación rigurosa de estos límites para simplificar el razonamiento de la exposición.

La polarización del cristal iónico (momento dipolar por unidad de volumen) es debida al desplazamiento relativo de las cargas eléctricas del cristal (iones), representado por el campo $\xi(t, x)$, y a la deformación de los propios iones, es decir, al desplazamiento de los electrones respecto de su núcleo. Si despreciamos por el momento esta última contribución tendremos $\mathcal{P}(t, x) = e\bar{\rho}\xi(t, x)$, siendo $\bar{\rho}$ el número de iones por unidad de volumen. Volveremos después sobre este punto.

El campo eléctrico producido por un electrón mecano cuántico libre en movimiento con densidad de carga $\rho_e(t, x) = -e|\psi(t, x)|^2 < 0$, viene dado por la ley de Gauss: $\mathcal{E} = -\nabla V_{\mathcal{E}}$, con el potencial $V_{\mathcal{E}}$ dado por la ecuación de Poisson $\Delta V_{\mathcal{E}} = e|\psi(t, x)|^2$. Así, $\mathcal{E}(t, x)$ queda expresado como

$$\mathcal{E}(t, x) = \frac{e}{4\pi} \nabla \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi(t, x')|^2}{|x - x'|} dx'. \quad (5.4)$$

Por lo tanto, en términos del campo de polarización, obtenemos

$$\partial_t^2 \mathcal{P}(t, x) + \Omega^2 \mathcal{P}(t, x) = \frac{e}{4\pi\mu} \nabla \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi(t, x')|^2}{|x - x'|} dx', \quad (5.5)$$

donde $\mu = M/(\bar{\rho}e^2)$. Complementamos esta ecuación con la ecuación de Schrödinger para el electrón sometido a un potencial $V(t, x) = -eV_{\mathcal{P}}(t, x)$, donde $V_{\mathcal{P}}(t, x)$ es el potencial electrostático producido por la polarización de los iones $\mathcal{P}(t, x)$. Usando la relación $\nabla V_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$, que implica $\Delta V_{\mathcal{P}} = \text{div}\mathcal{P}$, y tomando la divergencia en (5.5) obtenemos finalmente el siguiente sistema acoplado de ecuaciones en derivadas parciales:

$$(\partial_t^2 + \Omega^2)\Delta V = \frac{e^2}{\mu}|\psi|^2, \quad (5.6)$$

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi. \quad (5.7)$$

Hasta ahora hemos despreciado la deformación intrínseca de los iones, lo que convierte al modelo en algo menos realista. Un análisis más detallado nos muestra que este efecto puede ser incluido, véase [26], tomando

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\bar{\rho}e^2}{M} = \Omega^2\left(\frac{1}{\epsilon_\infty} - \frac{1}{\epsilon_0}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Omega^2}{\bar{\epsilon}}, \quad (5.8)$$

donde ϵ_0 y ϵ_∞ son las constantes dieléctricas (medibles experimentalmente) de baja y alta frecuencia, respectivamente. También hemos introducido la constante dieléctrica efectiva $\bar{\epsilon}$. Se tiene $\epsilon_0 > \epsilon_\infty$ y por lo tanto $\bar{\epsilon} > 0$.

Para concluir esta Sección notamos que en el límite $\Omega^2 \rightarrow \infty$ se recupera el sistema de Schrödinger-Poisson (SP) ya que el nuevo término que contiene la derivada segunda en tiempo queda dividido por Ω^2 y se anula en el límite. En ese caso, a partir de la solución de la primera ecuación vemos que el potencial $V(t, x)$ que interviene en la ecuación de Schrödinger se vuelve negativo, o sea, corresponde al caso atractivo.

5.3 Formulación variacional y leyes de conservación

Si escribimos las ecuaciones (5.6) y (5.7) en términos de \mathcal{P} y ψ , éstas pueden ser deducidas minimizando el Funcional Acción

$$S[\psi, \psi^*, \mathcal{P}] = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{L}(t, x) dx dt \quad (5.9)$$

con respecto a ψ , su conjugada ψ^* y a la polarización \mathcal{P} . Aquí, la densidad del Lagrangiano está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, x) = & \frac{\mu}{2}(|\partial_t\mathcal{P}|^2 - \Omega^2|\mathcal{P}|^2) + i\hbar\psi^*\partial_t\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\nabla\psi \\ & - \frac{e}{4\pi}\text{div}\mathcal{P} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi(t, x')|^2}{|x - x'|} dx'. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Usando el Teorema de Noether (véase [73]), es sencillo deducir las cantidades conservadas. Éstas son la energía total, los momentos lineal y angular totales y la masa total, que pueden ser deducidas respectivamente de la invariancia del funcional acción bajo:

- Traslaciones en tiempo $\psi(t, x) \rightarrow \psi(t+s, x)$ que implican la conservación de la energía total

$$E = \frac{\mu}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (|\partial_t \mathcal{P}|^2 + \Omega^2 |\mathcal{P}|^2) dx + \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \psi^* \nabla \psi dx + \frac{e}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div} \mathcal{P} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi(t, x')|^2}{|x - x'|} dx' \right) dx, \quad (5.11)$$

que es suma de la energía de polarización, la energía cinética del electrón y la energía de interacción entre el electrón y los fonones.

- Traslaciones espaciales $\psi(t, x) \rightarrow \psi(t, x - a)$ que producen la conservación del momento lineal, vector cuyas componentes cartesianas vienen dadas por

$$P_j = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{k=1}^3 \mu \partial_t \mathcal{P}_k \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{P}_k + \frac{\hbar}{i} \psi^* \frac{\partial}{\partial x_j} \psi \right) dx \quad (5.12)$$

que son aditivas en las contribuciones del fonón y del electrón.

- Rotaciones espaciales $\psi(t, x) \rightarrow \psi(t, R^{-1}x)$ que implican la conservación del momento angular que en coordenadas cartesianas se escribe como

$$L_j = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{k=1}^3 \mu \partial_t \mathcal{P}_k (x \wedge \nabla)_j \mathcal{P}_k + \frac{\hbar}{i} \psi^* (x \wedge \nabla)_j \psi \right) dx \quad (5.13)$$

y son también cantidades aditivas.

- Finalmente, transformaciones de fase $\psi(t, x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(t, x)$ que producen la conservación de la carga (masa) total

$$N = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(t, x)|^2 dx, \quad (5.14)$$

que típicamente se normaliza a 1.

El conjunto de las cantidades conservadas constituye un álgebra cerrada con el producto del corchete de Poisson (ver [73]), isomorfa al álgebra de Lie asociada al producto directo del grupo Euclídeo tridimensional y el grupo de fase, $E(3) \otimes U(1)$.

Como la energía total se conserva, podemos imaginar una situación en la que los fonones y el electrón oscilan los unos a expensas de los otros. Ilustraremos esta posibilidad en la Sección 5.6 analizando la estabilidad lineal del problema. En realidad, probaremos que se producen pequeñas oscilaciones armónicas si estamos muy cerca del mínimo de la energía.

5.4 Existencia y unicidad de soluciones

Como hemos visto, el movimiento de un electrón que interacciona con los fonones de una red cristalina puede ser descrito por el siguiente sistema de Schrödinger-Poisson “con memoria” (SPM):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x \psi + V[\psi] \psi, \quad (5.15)$$

$$\psi(0, x) = \varphi(x), \quad (5.16)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(t, x) = 0, \quad (5.17)$$

donde $V = V[\psi]$ verifica

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Omega^2 \right) \Delta_x V = -\gamma \frac{e^2 \Omega^2}{\bar{\epsilon}} |\psi|^2, \quad (5.18)$$

con $x \in \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$ y donde Ω es la pulsación de los fonones. La carga total puede ser normalizada

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(t, x)|^2 dx = 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Aunque hemos derivado el modelo para un potencial de Coulomb atractivo, en esta Sección extenderemos el análisis de este modelo al caso repulsivo introduciendo el parámetro γ , que toma el valor 1 en el caso repulsivo y -1 en el atractivo. Las ecuaciones (5.15)-(5.18) serán entendidas en sentido débil (distribucional). En lo sucesivo, no expresaremos la dependencia del potencial respecto de la función de ondas $V = V[\psi]$ a menos que de lugar a confusión. Resolviendo la ecuación (5.18) con $V(0, \cdot) = \partial_t V(0, \cdot) \equiv 0$, obtenemos la siguiente expresión para el potencial V

$$V(t, x) = \gamma \frac{e^2 \Omega}{4\pi \bar{\epsilon}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \text{sen}(\Omega(t-s)) \frac{|\psi(s, x')|^2}{|x-x'|} dx' ds. \quad (5.19)$$

Recordamos ahora que la energía, en términos de ψ y V , se escribe como

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \psi(t, x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(t, x) |\psi(t, x)|^2 dx \\ &\quad - \gamma \frac{\bar{\epsilon}}{2e^2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x V(t, x)|^2 dx - \gamma \frac{\bar{\epsilon}}{2e^2 \Omega^2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x V_t(t, x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Mostraremos que la energía está bien definida para ψ en $H^1(\mathbb{R}^3)$. Llevaremos a cabo dos teorías diferentes de existencia de soluciones del sistema (5.15)-(5.18). Para ello, comenzamos con el concepto de solución a considerar.

Definición 5.3 Una solución “mild” del sistema de SPM será un par (ψ, V) tal que $\psi \in C(0, T; X)$ (con $X = H^1(\mathbb{R}^3)$ o $L^2(\mathbb{R}^3)$) para todo $T > 0$ y verifica la siguiente ecuación integral de Schrödinger:

$$\psi(t, x) = U(t)\varphi(x) - i \int_0^t U(t-s)(V[\psi]\psi)(s, x) ds, \quad (5.21)$$

donde $V[\psi]$ está dado por (5.19) y $U(t)$ es el propagador de la ecuación libre de Schrödinger (véase [62]).

El primer resultado a probar será la existencia de soluciones en $H^1(\mathbb{R}^3)$. Para la existencia y unicidad en $L^2(\mathbb{R}^3)$ necesitaremos usar las desigualdades de Strichartz en espacio-tiempo dadas en [18], que nos permitirán controlar el término no lineal $V[\psi]\psi$. Para ello, usaremos una regularización en H^1 del dato inicial y aplicaremos un argumento de punto fijo sobre (5.21). En ambos casos, mostraremos que $V[\psi]\psi$ es localmente Lipschitziana, uniformemente en tiempo y con ello deduciremos la existencia.

5.4.1 Existencia y unicidad en $H^1(\mathbb{R}^3)$

Estudiaremos separadamente el potencial dentro y fuera de una bola (denotados respectivamente por V_1 y V_2). Primero, escribimos el potencial en forma de convolución como sigue:

$$V[\psi] = \gamma \operatorname{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma \star_x |\psi|^2, \quad (5.22)$$

donde $\Gamma(x) = \frac{e^2 \Omega}{\epsilon} \frac{1}{4\pi|x|}$ es el núcleo asociado a $-(e^2 \Omega / \epsilon) \Delta$ en \mathbb{R}^3 . Nótese que \star_t no es exactamente una convolución en t ya que el rango de integración no es todo \mathbb{R} , pero la notaremos así por simplicidad. Consideramos ahora $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, con $\Gamma_1 = \chi \Gamma$ y $\Gamma_2 = (1 - \chi) \Gamma$, siendo χ una función C^∞ que vale $\chi = 1$ si $|x| \leq 1$ y $\chi = 0$, si $|x| > 2$. Así definimos la siguiente descomposición para V :

$$V[\psi] = V_1[\psi] + V_2[\psi] \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \operatorname{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma_1 \star_x |\psi|^2 + \gamma \operatorname{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma_2 \star_x |\psi|^2.$$

Llamaremos *potencial de corto alcance* a V_1 y a V_2 *potencial de largo alcance*. Enunciamos ahora el principal resultado de esta Sección.

Teorema 5.8 Sea $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Entonces, el sistema de SPM tiene una única solución global $\psi \in C(0, \infty; H^1(\mathbb{R}^3))$ y el funcional energía (5.20) está bien definido para todo $t \in [0, \infty)$.

Antes de demostrar el Teorema necesitamos el siguiente resultado técnico.

Lema 5.16 Sea $T > 0$ y u, v, w funciones en $L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))$. Entonces, existe una constante C tal que se verifica la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} & \left\| \left((\text{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma \star_x uv) w \right) (t, \cdot) \right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq CT \|u\|_{L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))} \|v\|_{L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))} \|w\|_{L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))}, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$.

Demostración. En primer lugar, probaremos las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned} & \left\| \left((\text{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma \star_x uv) w \right) (t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq C_1 T \|u\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))} \|v\|_{L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))} \|w\|_{L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))}, \quad (5.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\| \left((\text{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma \star_x uv) w \right) (t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq C_2 T \|u\|_{L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))} \|v\|_{L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))} \|w\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))}. \quad (5.24) \end{aligned}$$

Para la primera de ellas usamos la desigualdad Minkowski y después la descomposición de Γ para obtener

$$\begin{aligned} & \left\| \left((\text{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma \star_x uv) w \right) (t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq |\text{sen}(\Omega t)| \star_t \left\| (\Gamma \star_x uv) w(t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq |\text{sen}(\Omega t)| \star_t \left\| (\Gamma_1 \star_x uv) w(t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ & \quad + |\text{sen}(\Omega t)| \star_t \left\| (\Gamma_2 \star_x uv) w(t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Ahora, aplicamos la desigualdad de Hölder con $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ para el primer término y con $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ para el segundo de manera que

$$\begin{aligned} & \left\| \left((\text{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma \star_x uv) w \right) (t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq |\text{sen}(\Omega t)| \star_t \left\| (\Gamma_1 \star_x uv)(t, \cdot) \right\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \|w(t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} \\ & \quad + |\text{sen}(\Omega t)| \star_t \left\| (\Gamma_2 \star_x uv)(t, \cdot) \right\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \|w(t, \cdot)\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Aplicando aquí la desigualdad de Young con $1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{5}{6}$ y Hölder con $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ deducimos,

$$\left\| (\Gamma_1 \star_x uv)(t, \cdot) \right\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \leq \|\Gamma_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|v(t, \cdot)\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}$$

y para el segundo término, aplicamos la desigualdad de Young con $1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4}$ y de Hölder con $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ obteniendo

$$\left\| (\Gamma_2 \star_x uv)(t, \cdot) \right\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \leq \|\Gamma_2\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Estimando el seno por 1 y usando las desigualdades de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^3) \subset L^2 \cap L^6(\mathbb{R}^3)$ obtenemos por fin (5.23) con

$$C_1 = \text{máx}\{\|\Gamma_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \|\Gamma_2\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}\}.$$

Un razonamiento análogo usando las desigualdades de Minkowski, Young y Hölder nos proporcionará la estimación (5.24) con la constante C_2 dada por $C_2 = \text{máx}\{\|\Gamma_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \|\Gamma_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\}$.

Para las derivadas podemos escribir

$$\begin{aligned} \nabla_x((\text{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma \star_x uv)w) &= (\text{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma \star_x uv) \nabla_x w \\ &+ (\text{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma \star_x (\nabla_x u)v)w + (\text{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma \star_x u(\nabla_x v))w. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Usando (5.23)-(5.24) para estimar la norma L^2 de (5.25) obtenemos

$$\begin{aligned} \|\nabla_x((\text{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma \star_x uv)w)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &= \|(\text{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma \star_x uv) \nabla_x w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C_2 T \|u\|_{L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))} \|v\|_{L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))} \|\nabla w\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))} \\ &+ C_1 T \|\nabla u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))} \|v\|_{L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))} \|w\|_{L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))} \\ &+ C_2 T \|u\|_{L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))} \|\nabla v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))} \|w\|_{L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))}, \end{aligned}$$

lo que combinado con (5.23) ó (5.24) nos permite estimar la norma en H^1 y concluir la demostración. \square

Demostración del Teorema 5.8. Usando la desigualdad triangular y el Lema 5.16 obtenemos

$$\begin{aligned} &\|(V[\psi_1]\psi_1 - V[\psi_2]\psi_2)(t, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq 3Ct \text{máx}\left\{\|\psi_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;H^1(\mathbb{R}^3))}, \|\psi_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;H^1(\mathbb{R}^3))}\right\} \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;H^1(\mathbb{R}^3))}. \end{aligned}$$

Como consecuencia, la aplicación $(t, u) \mapsto (V[u]u)(t)$ es localmente Lipschitziana en u , uniformemente en t en intervalos acotados $[0, T]$. Usando el Teorema 6.1.4 de [62], sabemos que existe una única solución $\psi \in \mathcal{C}(0, T_{max}; H^1(\mathbb{R}^3))$ tal que, o bien $T_{max} = \infty$ o bien $\|\psi(t, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}$ explota cuando $t \rightarrow T_{max}$ por la izquierda. Entonces, probar que $T_{max} = \infty$ equivale a demostrar que $\|\psi(t, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}$ no puede explotar en tiempo finito. Para ello, hemos de usar la conservación de la energía por lo que tenemos que demostrar a la vez que el funcional (5.20) está bien definido. Veamos las siguientes propiedades:

$$V(t, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \nabla_x V(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \nabla_x V}{\partial t}(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3).$$

La norma L^∞ de $V(t, \cdot)$ puede ser estimada como en el Lema 5.16 usando la desigualdades de tipo Young

$$\begin{aligned} & \|V(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq \int_0^t |\text{sen}(\Omega(t-s))| \left(\|\Gamma_1\|_{L^2} \|\psi(s, \cdot)\|_{L^4}^2 + \|\Gamma_2\|_{L^\infty} \|\psi(s, \cdot)\|_{L^2}^2 \right) ds. \end{aligned}$$

Hacemos notar aquí la necesidad de descomponer el núcleo Γ ya que $\Gamma_1 \in L^p(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow p \in [1, 3)$ y $\Gamma_2 \in L^q(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow q \in (3, \infty]$. Usando el embebimiento $H^1 \subset L^2 \cap L^6$ y la conservación de la masa obtenemos

$$\|V(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C t + C \int_0^t \|\psi(s, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2 ds, \quad (5.26)$$

para cierta constante positiva C . Esto implica que $V(t, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ para todo t tal que $0 \leq t \leq T < T_{max}$. Para los otros términos a estimar escribimos:

$$\nabla_x V = \gamma(\text{sen}(\Omega t) \star_t \nabla_x \Gamma \star_x |\psi|^2)$$

y

$$\frac{\partial \nabla_x V}{\partial t} = \gamma \Omega (\cos(\Omega t) \star_t \nabla_x \Gamma \star_x |\psi|^2).$$

Dado que ambos términos son análogos (ya que tanto del correspondiente al que incluye al seno como al coseno sólo usaremos el hecho de que están acotados) razonamos sólo con el primero. De igual modo que en el Lema 5.16 estimamos

$$\begin{aligned} & \|(\text{sen}(\Omega t) \star_t \nabla_x \Gamma \star_x |\psi|^2)(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq |\text{sen}(\Omega t)| \star_t \|\nabla_x \Gamma_1\|_{L^{6/5}(\mathbb{R}^3)} \|\psi\|^2(t, \cdot)\|_{L^{3/2}(\mathbb{R}^3)} \\ & + |\text{sen}(\Omega t)| \star_t \|\nabla_x \Gamma_2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\psi\|^2(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

que es finito gracias a que $\psi \in H^1(\mathbb{R}^3) \subset L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^6(\mathbb{R}^3)$. Recordamos también el hecho fundamental de que $\nabla \Gamma_1 \in L^p(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow p \in [1, 3/2)$ y $\nabla \Gamma_2 \in L^q(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow q \in (3/2, \infty]$. Por lo tanto, el funcional de energía está bien definido.

Nuestro objetivo es probar que $\nabla_x \psi$, en norma L^2 no explota en tiempo finito (ya que la masa total se conserva). Esto es fácil de demostrar en el caso repulsivo pero veamos un argumento válido en los dos casos, atractivo y repulsivo. Usando un argumento de interpolación y de nuevo la inclusión de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$ obtenemos

$$\|\psi\|^2(t, \cdot)\|_{L^{3/2}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\psi(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\psi(t, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}.$$

Entonces, usando (5.27) y la conservación de la masa, observamos que

$$\begin{aligned} & \text{máx} \left\{ \|\nabla_x V(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2, \|\nabla_x V_t(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right\} \\ & \leq \left(CT + C \int_0^t \|\psi(s, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} ds \right)^2. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Por otro lado, a partir de (5.20) escribimos

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m} \|\nabla_x \psi(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 & \leq E(0) + \left| \int_{\mathbb{R}^3} V(t, x) |\psi(t, x)|^2 dx \right| \\ & \quad + \frac{\bar{\epsilon}}{2e^2} \|\nabla_x V(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{\bar{\epsilon}}{2e^2 \Omega^2} \|\nabla_x V_t(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \end{aligned}$$

lo que, combinado con (5.26) y (5.28), proporciona

$$\begin{aligned} \|\nabla_x \psi(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 & \leq C(1+T) + \int_0^t \|\psi(s, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\ & \quad + \left(CT + \int_0^t \|\psi(s, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} ds \right)^2. \end{aligned}$$

Usando entonces la conservación de la masa podemos deducir

$$\|\psi(t, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2 \leq C \left(1 + T + T^2 + (1+T) \int_0^t \|\psi(s, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2 ds \right).$$

El Lema de Gronwall finalmente nos da

$$\|\psi(t, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2 \leq C(1+T+T^2)e^{CT},$$

para todo $0 < T < T_{max}$ y, por lo tanto, $T_{max} = \infty$. \square

5.4.2 Existencia y unicidad en $L^2(\mathbb{R}^3)$

Vamos a extender los resultados obtenidos al caso en que la condición inicial está solamente en $L^2(\mathbb{R}^3)$. Para el sistema de Schrödinger-Poisson la teoría L^2 ha sido recientemente estudiada por F. Castella en [18]. Nosotros vamos a extender esos mismos resultados a nuestro modelo de Polarón. Comenzamos con alguna notación y definiciones necesarias.

Definición 5.4 Dado $T > 0$ y $p, q \in [1, \infty]$, definimos los siguientes espacios:

$$\begin{aligned} L_T^{q,p} & \stackrel{def}{=} L^q(0, T; L^p(\mathbb{R}^3)), \\ L_{loc}^{q,p} & \stackrel{def}{=} L_{loc}^q(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^3)), \\ L^{q,p} & \stackrel{def}{=} L^q(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^3)), \\ X_T^{q,p} & \stackrel{def}{=} L_T^{q,p} \cap L_T^{\infty,2}, \text{ con la norma } \|\psi\|_{X_T^{q,p}} \stackrel{def}{=} \|\psi\|_{L_T^{q,p}} + \|\psi\|_{L_T^{\infty,2}}, \\ Y_T^{q,p} & \stackrel{def}{=} L_T^{q',p'} + L_T^{1,2}, \text{ con la norma} \\ & \quad \|\psi\|_{Y_T^{q,p}} \stackrel{def}{=} \inf_{\psi_1+\psi_2=\psi} \left\{ \|\psi_1\|_{L_T^{q',p'}} + \|\psi_2\|_{L_T^{1,2}} \right\}. \end{aligned}$$

Definición 5.5 Diremos que un par (q, p) es admisible, y lo denotaremos en la forma $(q, p) \in A$, si se verifica que:

$$2 \leq p < 6 \quad \text{y} \quad \frac{2}{q} = 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right).$$

El siguiente resultado está basado en las desigualdades de Strichartz y referimos el trabajo de T. Cazenave [19] para su demostración.

Teorema 5.9 Sea $T > 0$ y (q, p) un par admisible. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

(i) Existe una constante positiva $C(q)$ tal que

$$\|U(t)\varphi\|_{L_T^{q,p}} \leq C(q)\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

para toda $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

(ii) Para cada $(a, b) \in A$, existe una constante $C(a, q)$ tal que

$$\left\| \int_0^t U(t-s) f(s) ds \right\|_{L_T^{a,b}} \leq C(a, q) \|f\|_{L_T^{q',p'}},$$

para toda $f \in L_T^{q',p'}$.

(iii) En particular, existe una constante $C(q)$ que sólo depende de q tal que

$$\left\| \int_0^t U(t-s) f(s) ds \right\|_{X_T^{q,p}} \leq C(q) \|f\|_{Y_T^{q,p}},$$

para todo $f \in Y_T^{q,p}$.

Usando (i) podemos controlar la norma $L^2(\mathbb{R}^3)$ del primer término de la ecuación integral (5.21). Ahora, la aplicación $\psi \mapsto V[\psi]\psi$ ya no será Lipschitziana en $L^2(\mathbb{R}^3)$ pero lo será en $L_T^{q,p}$ para cada $T > 0$ y algún par admisible $(q, p) \in A$.

Teorema 5.10 (Existencia y unicidad de solución del sistema SPM en L^2). Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $\sigma \in]3/2, 3[$, $p = 2\sigma/(\sigma - 1) > 3$, y q tal que (q, p) sea un par admisible. Entonces, existe una única función

$$\psi \in L_{loc}^{q,p} \cap C(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3))$$

solución del sistema de SPM (5.15)-(5.18) con condición inicial φ . En este caso, el término no lineal $V[\psi]\psi$ está en $L_T^{q',p'} + L_T^{1,2}$ para todo $T > 0$. Además se verifica:

- (i) Para todo $t \geq 0$, $\|\psi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$.
- (ii) Para todo $(a, b) \in A$, se tiene $\psi \in L_{loc}^{a,b}$.
- (iii) Si $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de condiciones iniciales que convergen en $L^2(\mathbb{R}^3)$ a φ , entonces la correspondiente sucesión de soluciones $\{\psi_n\}$ del sistema de SPM cumplen:

$$\psi_n \rightarrow \psi \text{ en } L_{loc}^{a,b}$$

para todo par admisible (a, b) .

Para demostrar este Teorema necesitaremos un resultado técnico que, esencialmente, nos proporciona la propiedad de Lipschitzianidad en $L_T^{q,p}$. Mostraremos que los potenciales V_1 y V_2 son Lipschitz y que su constante de Lipschitz converge a 0 cuando $T \rightarrow 0$.

Lema 5.17 Sean ψ y $\tilde{\psi}$ dos soluciones del sistema de SPM con datos iniciales φ y $\tilde{\varphi}$, respectivamente. Sea $M = \max\{\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \|\tilde{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\}$, y T, σ, p y q dadas en el Teorema 5.10. Entonces se verifica:

- (i) $\|V_1[\psi]\psi - V_1[\tilde{\psi}]\tilde{\psi}\|_{L_T^{q,p'}} \leq C(p)M^2T^{2-\frac{2}{q}}\|\psi - \tilde{\psi}\|_{L_T^{q,p}}$.
- (ii) $\|V_2[\psi]\psi - V_2[\tilde{\psi}]\tilde{\psi}\|_{L_T^{1,2}} \leq CM^2T^2\|\psi - \tilde{\psi}\|_{L_T^{\infty,2}}$.
- (iii) En particular, tenemos

$$\|V[\psi]\psi - V[\tilde{\psi}]\tilde{\psi}\|_{Y_T^{q,p}} \leq C(p)M^2\max\{T^2, T^{2-\frac{2}{q}}\}\|\psi - \tilde{\psi}\|_{X_T^{q,p}}.$$

Demostración. Recordamos que $\|\psi(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ y $\|\tilde{\psi}(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ son constantes a lo largo del tiempo y, como consecuencia, M es una cota superior para estas cantidades. En primer lugar observamos por definición de σ que $\Gamma_1 \in L^\sigma(\mathbb{R}^3)$. Usando la desigualdad de Hölder con $\frac{1}{p'} = \frac{1}{2\sigma} + \frac{1}{2}$, obtenemos

$$\begin{aligned} & \left\| \left((\text{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma_1 \star_x uv)w \right) (t, \cdot) \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq \|\text{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma_1 \star_x uv\|_{L^{2\sigma}(\mathbb{R}^3)} \|w(t, \cdot)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)}, \end{aligned}$$

para todo $u \in L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^3))$ y $v, w \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))$. Seguidamente aplicamos la desigualdad de Minkowski para obtener

$$\begin{aligned} & \left\| \left((\text{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma_1 \star_x uv)w \right) (t, \cdot) \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq |\text{sen}(\Omega t)| \star_t \|\Gamma_1 \star_x uv\|_{L^{2\sigma}(\mathbb{R}^3)} \|w(t, \cdot)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Aplicando ahora la desigualdad de Young con $1 + \frac{1}{2\sigma} = \frac{1}{\sigma} + \frac{2\sigma-1}{2\sigma}$ y tomando $C(p) \equiv C(\sigma) = \|\Gamma_1\|_{L^\sigma(\mathbb{R}^3)}$ obtenemos

$$\begin{aligned} & \left\| \left((\text{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma_1 \star_x uv) w \right) (t, \cdot) \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq C(p) |\text{sen}(\Omega t)| \star_t \|uv\|_{L^{\frac{2\sigma}{2\sigma-1}}(\mathbb{R}^3)} \|w(t, \cdot)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)} \end{aligned}$$

y usando finalmente la desigualdad de Hölder con $\frac{2\sigma-1}{2\sigma} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$ deducimos

$$\begin{aligned} & \left\| \left((\text{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma_1 \star_x uv) w \right) (t, \cdot) \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq C(p) (|\text{sen}(\Omega t)| \star_t \|u(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \|v(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}) \|w(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad (5.29) \end{aligned}$$

También para todo $u, v \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))$ y $w \in L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^3))$ podemos obtener de forma análoga

$$\begin{aligned} & \left\| \left((\text{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma_1 \star_x uv) w \right) (t, \cdot) \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq C(p) (|\text{sen}(\Omega t)| \star_t \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|v(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}) \|w(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \quad (5.30) \end{aligned}$$

Notemos que la definición de p en función de σ es esencial para aplicar las desigualdades usadas. Una desigualdad adicional que usaremos es que, dada cualquier $f \in L^{q'}(0, T)$ con $1 \leq q' \leq \infty$, se verifica de forma clara

$$\|\text{sen}(\Omega t) \star_t f\|_{L^{q'}(0, T)} \leq T \|f\|_{L^{q'}(0, T)}. \quad (5.31)$$

Usando ahora la desigualdad triangular hacemos la siguiente descomposición

$$\begin{aligned} & \|V_1[\psi]\psi - V_1[\tilde{\psi}]\tilde{\psi}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq \left\| \left(\text{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma_1 \star_x (\psi - \tilde{\psi})\tilde{\psi} \right) \psi \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)} \\ & \quad + \left\| \left(\text{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma_1 \star_x \tilde{\psi}(\bar{\psi} - \tilde{\bar{\psi}}) \right) \psi \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)} \\ & \quad + \left\| \left(\text{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma_1 \star_x |\tilde{\psi}|^2 \right) (\tilde{\psi} - \psi) \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)}, \end{aligned}$$

donde “ $\bar{\cdot}$ ” expresa el conjugado complejo. Por lo tanto, usando (5.29) y (5.30) obtenemos las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned} & \|V_1[\psi]\psi - V_1[\tilde{\psi}]\tilde{\psi}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq C(p) \left(|\text{sen}(\Omega t)| \star_t \|\psi - \tilde{\psi}\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \|\tilde{\psi}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ & \quad + C(p) \left(|\text{sen}(\Omega t)| \star_t \|\tilde{\psi}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\psi - \tilde{\psi}\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \right) \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ & \quad + C(p) \left(|\text{sen}(\Omega t)| \star_t \|\tilde{\psi}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right) \|\psi - \tilde{\psi}\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

De (5.31) y de la cota para la masa M se obtiene

$$\|V_1[\psi]\psi - V_1[\tilde{\psi}]\tilde{\psi}\|_{L_T^{q',p'}} \leq C(p)M^2T\|\psi - \tilde{\psi}\|_{L_T^{q,p}}.$$

Aplicando por último la desigualdad de Hölder en tiempo con $\frac{1}{q'} = \frac{1}{q} + (1 - \frac{2}{q})$, se verifica

$$\|V_1[\psi]\psi - V_1[\tilde{\psi}]\tilde{\psi}\|_{L_T^{q',p'}} \leq C(p)M^2T^{(2-\frac{2}{q})}\|\psi - \tilde{\psi}\|_{L_T^{q,p}}.$$

Argumentos similares permiten demostrar (ii), puesto que

$$\begin{aligned} & \left\| \left((\text{sen}(\Omega t) \star_t \Gamma_2 \star_x uv) w \right) (t, \cdot) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq C(|\text{sen}(\Omega t)| \star_t \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|v(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}) \|w(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \end{aligned}$$

para todo $u, v, w \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))$, siendo $C = \|\Gamma_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$. \square

Demostración del Teorema 5.10. Primero probaremos la existencia de solución. Tomamos una sucesión de datos iniciales $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que verifica

$$\varphi_n \in H^1(\mathbb{R}^3) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \varphi_n \rightarrow \varphi \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}^3) \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Sea $\psi_n(t) \in H^1(\mathbb{R}^3)$ la sucesión de soluciones correspondiente al dato inicial φ_n , que tiene pleno sentido gracias al resultado de existencia demostrado en H^1 . Sea M tal que $\|\psi_n(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq M$ para todo $t > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Queremos mostrar que ψ_n es una sucesión de Cauchy en el espacio $L_T^{a,b}$ para cada par admisible (a, b) y para T suficientemente pequeño. A partir de la forma integral de la ecuación de Schrödinger (5.21) y descomponiendo V como en el Lema 5.16 obtenemos

$$\begin{aligned} \psi_m(t) - \psi_n(t) &= U(t)(\varphi_m - \varphi_n) \\ &\quad - i \int_0^t U(t-s)(V_1[\psi_m]\psi_m - V_1[\psi_n]\psi_n)(s) ds \\ &\quad - i \int_0^t U(t-s)(V_2[\psi_m]\psi_m - V_2[\psi_n]\psi_n)(s) ds \stackrel{\text{def}}{=} \alpha + \beta + \eta. \end{aligned}$$

Entonces, estimamos la norma $L_T^{a,b}$ de α usando la parte (i) del Teorema 5.9 como

$$\|\alpha\|_{L_T^{a,b}} \leq C(a)\|\varphi_m - \varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \quad (5.32)$$

Para estimar β usamos la parte (ii):

$$\|\beta\|_{L_T^{a,b}} \leq C(a, q)\|V_1[\psi_m]\psi_m - V_1[\psi_n]\psi_n\|_{L_T^{q',p'}},$$

donde (q, p) es el par admisible del enunciado. A partir de la estimación (i) del Lema 5.17 obtenemos

$$\|\beta\|_{L_T^{a,b}} \leq C(a, q, p) M^2 T^{2-\frac{2}{q}} \|\psi_m - \psi_n\|_{L_T^{q,p}}. \quad (5.33)$$

Finalmente, usando el Teorema 5.9 (ii) y el Lema 5.17 (ii), tenemos

$$\|\eta\|_{L_T^{a,b}} \leq C \|V_2[\psi_m]\psi_m - V_2[\psi_n]\psi_n\|_{L_T^{1,2}} \leq C M^2 T^2 \|\psi_m - \psi_n\|_{L_T^{\infty,2}}. \quad (5.34)$$

Combinando (5.32), (5.33) y (5.34) llegamos a la siguiente desigualdad:

$$\|\psi_m - \psi_n\|_{L_T^{a,b}} \leq C \left(\|\varphi_m - \varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + T^{2-\frac{2}{q}} \|\psi_m - \psi_n\|_{L_T^{q,p}} \right) \quad (5.35)$$

$$+ T^2 \|\psi_m - \psi_n\|_{L_T^{\infty,2}}, \quad (5.36)$$

válida para cualquier par admisible (a, b) , donde $C = C(a, p, q)$. Eligiendo $(a, b) = (q, p)$ y $(a, b) = (\infty, 2)$ en (5.36) hallamos

$$\|\psi_m - \psi_n\|_{X_T^{a,b}} \leq C \left(\|\varphi_m - \varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \max\{T^{2-\frac{2}{q}}, T^2\} \|\psi_m - \psi_n\|_{X_T^{a,b}} \right).$$

Entonces, tomando $T_0 < \min\{1, C^{-1/(2-\frac{2}{q})}\}$ obtenemos

$$\|\psi_m - \psi_n\|_{X_{T_0}^{a,b}} \leq C(p, q) \|\varphi_m - \varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \quad (5.37)$$

Finalmente, usando (5.36) y (5.37) y las inyecciones continuas de $L_T^{q,p}$ y $L_T^{\infty,2}$ en $X_T^{q,p}$ deducimos

$$\|\psi_m - \psi_n\|_{L_{T_0}^{a,b}} \leq C(a, p, q) \|\varphi_m - \varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Por tanto, hemos probado la existencia de una función de ondas límite ψ tal que

$$\psi_n \rightarrow \psi \text{ en } L_{T_0}^{a,b} \cap L_{T_0}^{\infty,2}. \quad (5.38)$$

Puesto que la sucesión ψ_n pertenece a $\mathcal{C}([0, T_0]; L^2(\mathbb{R}^3))$ y la norma L^2 se conserva, la convergencia en $L_{T_0}^{\infty,2}$ implica que

$$\psi \in \mathcal{C}([0, T_0]; L^2(\mathbb{R}^3)), \quad \|\psi(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq M. \quad (5.39)$$

Iterando el proceso anterior con datos iniciales $\psi(T_0), \psi(2T_0), \dots$, podemos cubrir toda la recta real y obtener (5.38) y (5.39) para todo $T_0 > 0$ de manera que

$$\psi_n \rightarrow \psi \text{ en } L_{loc}^{a,b} \text{ y } \psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3)).$$

Veamos que la función límite ψ verifica la ecuación de Schrödinger. Para $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}_+$ tenemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_n = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x \psi_n + V_1[\psi_n] \psi_n + V_2[\psi_n] \psi_n. \quad (5.40)$$

Las propiedades de convergencia de ψ_n en $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3))$ nos proporciona

$$\psi_n \rightarrow \psi, \quad \Delta \psi_n \rightarrow \Delta \psi \text{ en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3), \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (5.41)$$

Además, el Lema 5.17 (ii) implica que

$$V_2[\psi_n] \psi_n \rightarrow V_2[\psi] \psi \text{ en } L_{loc}^{1,2}. \quad (5.42)$$

Por otro lado, la convergencia $\psi_n \rightarrow \psi$ en $L_{loc}^{q,p}$ nos conduce a

$$V_1[\psi_n] \psi_n \rightarrow V_1[\psi] \psi \text{ en } L_{loc}^{q',p'}, \quad (5.43)$$

donde se ha usado 5.17 (i). Puesto que todas las convergencias (5.40)-(5.43) se mantienen al menos en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$, la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x \psi + V(\psi) \psi$$

se verifica en el sentido de las distribuciones. Esto concluye la primera parte de la demostración. Para probar unicidad tomamos dos soluciones ψ y $\tilde{\psi}$ en principio diferentes. Estimando de la misma forma que en la parte de existencia podemos demostrar que

$$\|\psi - \tilde{\psi}\|_{X_{T_0}^{a,b}} \leq C(q,p) \|\psi(0, \cdot) - \tilde{\psi}(0, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

lo que implica que, si verifican la misma condición inicial, han de ser iguales en $[0, T_0]$. Iterando el argumento y usando la continuidad demostrada concluimos que la unicidad es global. La dependencia continua respecto de los datos iniciales también se puede demostrar fácilmente aplicando las mismas técnicas usadas para demostrar existencia. \square

5.5 Mínimo estacionario. Estabilidad de Liapunov

En las secciones restantes centraremos nuestra atención en el modelo atractivo. Mostraremos que la solución estacionaria de Lieb del sistema de Schrödinger-Poisson es también un mínimo para nuestro funcional de energía (5.11)

y que es estable en el sentido de Liapunov. Obsérvese en primer lugar que toda solución estacionaria del sistema SP lo es también del sistema SPM, entendiendo por solución estacionaria aquella en que el potencial V es independiente de t y la función de ondas es de la forma $\psi(t, x) = e^{-i\epsilon t}\phi(x)$ para cierto parámetro real ϵ .

Teorema 5.11 *La energía asociada al sistema SPM formulado en $H^1(\mathbb{R}^3)$ tiene un mínimo dado por la solución de Lieb ψ_L . Además, el funcional de energía es un funcional de Liapunov y por lo tanto ψ_L es un mínimo estable del sistema SPM en $H^1(\mathbb{R}^3)$.*

Demostración. A partir de la definición de la energía total (5.11) de nuestro sistema observamos que el término $\frac{\mu}{2} \int |\partial_t \mathcal{P}|^2$ es positivo y, por lo tanto, es evidente que

$$\begin{aligned} E[\psi, \mathcal{P}] &\geq \bar{E} \stackrel{\text{def}}{=} E[\psi, \mathcal{P}] \Big|_{\partial_t \mathcal{P}=0} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi|^2 dx + \frac{e}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div} \mathcal{P} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi(t, x')|^2}{|x - x'|} dx' \right) dx + \frac{\mu}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \Omega^2 \mathcal{P}^2 dx. \end{aligned}$$

Minimizamos entonces el funcional auxiliar \bar{E} y luego comprobamos que el mínimo coincide. Calculamos la primera componente de la ecuación de Euler-Lagrange por variación de \bar{E} respecto de \mathcal{P} y obtenemos

$$D_{\mathcal{P}} \bar{E} \equiv -\frac{e}{4\pi} \nabla \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi(t, x')|^2}{|x - x'|} dx' + \mu \Omega^2 \mathcal{P} = 0, \quad (5.44)$$

donde $D_{\mathcal{P}}$ denota la derivada de Fréchet respecto de \mathcal{P} . A partir de la ecuación (5.44) deducimos la relación $\operatorname{div} \mathcal{P} = -(e/\bar{\epsilon})|\psi|^2$. Por lo tanto, sustituyendo este valor, obtenemos que

$$\min_{\psi, \mathcal{P}} \bar{E} \geq \min_{\psi} \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi(t, x)|^2 dx - \frac{e^2}{2\bar{\epsilon}} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{|\psi(t, x)|^2 |\psi(t, x')|^2}{4\pi |x - x'|} d(x, x') \right\}, \quad (5.45)$$

que es justo el funcional de energía de Choquard. Como hemos anunciado en la introducción de esta memoria, este funcional tiene un ínfimo ψ_L construido por E. Lieb en [49]. Puesto que este valor mínimo se alcanza en una solución estacionaria, que por lo tanto es solución del sistema de SPM, el funcional de energía asociado al sistema de SPM, toma también este valor y, dado que está por encima de \bar{E} , éste es también su mínimo.

Veamos que E es un funcional de Liapunov. Puesto que ψ_L es un mínimo de E en $H^1(\mathbb{R}^3)$, ello implica que E es definida positiva en un entorno de ψ_L .

Además, puesto que la energía se conserva, se tiene que la variación total respecto del tiempo es nula

$$\frac{d}{dt}E[\psi(t), \mathcal{P}[\psi](t)] = 0,$$

para cada ψ solución del sistema SPM y por lo tanto E es un funcional de Liapunov. Con ello, concluimos la estabilidad de la solución estacionaria de Lieb. \square

La solución de Lieb posee algunas propiedades de simetría respecto de la función de ondas, a saber: transformaciones de fase, traslaciones y rotaciones. Esto significa que si llamamos al mínimo como $\psi_L(x)$ con energía $E_L = E[\psi_L]$, entonces $e^{i\alpha}\psi_L$, $\psi_L(x - a)$ y $\psi_L(R^{-1}x)$ tienen la misma energía E_L , independientemente de la fase α , el vector de traslación a y la matriz de rotación R . Estas propiedades concuerdan con las propiedades de invariancia del funcional Acción estudiado en la Sección 5.3, y son válidas para cualquier función de ondas, sea o no el mínimo. Esto significa que existen ciertas variaciones en torno a ψ_L que verifican

$$\frac{dE}{d\alpha} = \frac{dE}{da} = \frac{dE}{dR} = 0, \quad \forall \alpha, a \text{ y } R,$$

lo que hace que la segunda variación (y de hecho todos los órdenes) entorno a la solución de Lieb sean cero. Existen pues $1 + 3 + 3 = 7$ formas nulas, correspondientes a transformaciones de simetría del mínimo que no corresponden con verdaderas deformaciones. En lo que sigue identificaremos cualesquiera dos soluciones que difieran en una transformación de simetría del tipo descrito como pertenecientes a una misma clase.

5.6 Estabilidad lineal para el polarón

Nos proponemos establecer la estabilidad lineal del polarón dependiente del tiempo en torno a la solución de Lieb. Recordamos el sistema acoplado de ecuaciones

$$\begin{aligned} \partial_t^2(\Delta V) + \Omega^2(\Delta V) &= \frac{\Omega^2 e^2}{\bar{\epsilon}} |\psi|^2, \\ i\hbar \partial_t \psi &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi. \end{aligned}$$

Una solución estacionaria, como acabamos de ver, es la solución de Lieb

$$\begin{aligned} \psi_L(t, x) &= e^{-i\epsilon_L t} \phi_L(x), \\ V(t, x) &= V_L(x), \end{aligned}$$

que verifica el problema no lineal de valores propios. Ello sugiere tomar una linealización en torno a esta solución y demostrar la estabilidad lineal de la solución de mínima energía. Para ello, proponemos una solución de la forma

$$\begin{aligned}\psi(t, x) &= e^{-i\epsilon_L t} (\phi_L(x) + \eta(t, x)), \\ V(t, x) &= V_L(x) + \xi(t, x),\end{aligned}$$

siendo $\eta(t, x)$ y $\xi(t, x)$ fluctuaciones en torno a la solución de Lieb. Suponiendo que estas fluctuaciones son pequeñas obtenemos el sistema linealizado de ecuaciones

$$\begin{aligned}\partial_t^2(\Delta\xi) + \Omega^2(\Delta\xi) &= 2\frac{\Omega^2 e^2}{\bar{\epsilon}} \phi_L \operatorname{Re}(\eta) \\ i\hbar\partial_t\eta &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\eta + (V_L - \epsilon_L)\eta + \phi_L\xi.\end{aligned}$$

Descomponiendo la fluctuación η en parte real e imaginaria, $\eta = \operatorname{Re}(\eta) + i\operatorname{Im}(\eta)$, proponemos la siguiente forma para η :

$$\operatorname{Re}(\eta)(t, x) = \alpha(x)e^{-i\omega t} + \bar{\alpha}(x)e^{i\omega t}, \quad (5.46)$$

$$\operatorname{Im}(\eta)(t, x) = \beta(x)e^{-i\omega t} + \bar{\beta}(x)e^{i\omega t}, \quad (5.47)$$

$$\xi(t, x) = \sigma(x)e^{-i\omega t} + \bar{\sigma}(x)e^{i\omega t}, \quad (5.48)$$

de manera que obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}-i\hbar\omega\alpha &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\beta + (V_L - \epsilon_L)\beta \\ +i\hbar\omega\beta &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\alpha + (V_L - \epsilon_L)\alpha + \phi_L\sigma \\ (\Omega^2 - \omega^2)\Delta\sigma &= 2\frac{\Omega^2 e^2}{\bar{\epsilon}}\alpha\phi_L\end{aligned} \quad (5.49)$$

Eliminando σ de (5.49) obtenemos la siguiente ecuación para α ,

$$\hbar^2\omega^2\mathcal{B}^{-1}\alpha = \mathcal{B}\alpha + 2\frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\frac{e^2}{\bar{\epsilon}}\phi_L\Delta^{-1}(\phi_L\alpha), \quad (5.50)$$

donde \mathcal{B} es el operador

$$\mathcal{B} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x + (V_L - \epsilon_L),$$

que es definido positivo en un entorno de 0 como veremos de inmediato en la Proposición 5.5. Multiplicando (5.50) por $\bar{\alpha}$ e integrando con respecto a x

obtenemos la siguiente ecuación bicuadrática para ω

$$\begin{aligned} & \hbar^2 \omega^4 \langle \mathcal{B}^{-1} \alpha, \alpha \rangle - \omega^2 (\langle \mathcal{B} \alpha, \alpha \rangle + \hbar^2 \Omega^2 \langle \mathcal{B}^{-1} \alpha, \alpha \rangle) \\ & + \Omega^2 (\langle \mathcal{B} \alpha, \alpha \rangle + 2 \frac{e^2}{\epsilon} \langle \Delta^{-1}(\phi_L \alpha), \phi_L \alpha \rangle) = 0. \end{aligned} \quad (5.51)$$

El discriminante de esta ecuación

$$\Delta = (\langle \mathcal{B} \alpha, \alpha \rangle - \hbar^2 \Omega^2 \langle \mathcal{B}^{-1} \alpha, \alpha \rangle)^2 - 8 \frac{\hbar^2 e^2 \Omega^2}{\epsilon} \langle \Delta^{-1}(\Psi_L \alpha), \Psi_L \alpha \rangle \langle \mathcal{B}^{-1} \alpha, \alpha \rangle$$

es estrictamente positivo, lo que nos dice que ω^2 es real.

Veamos que, de hecho, ω es real. Para ello basta ver que $\omega_1^2 + \omega_2^2$ y $\omega_1^2 \omega_2^2$ son positivas, siendo ω_1^2 y ω_2^2 las dos soluciones de la ecuación cuadrática. Primero calculamos

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{\langle \mathcal{B} \alpha, \alpha \rangle + \hbar^2 \Omega^2 \langle \mathcal{B}^{-1} \alpha, \alpha \rangle}{\hbar^2 \langle \mathcal{B}^{-1} \alpha, \alpha \rangle} \geq 0, \quad (5.52)$$

y por otro lado

$$\omega_1^2 \omega_2^2 = \frac{\Omega^2}{\hbar^2 \langle \mathcal{B}^{-1} \alpha, \alpha \rangle} (\langle \mathcal{B} \alpha, \alpha \rangle + 2 \frac{e^2}{\epsilon} \langle \Delta^{-1}(\phi_L \alpha), \phi_L \alpha \rangle). \quad (5.53)$$

En el siguiente resultado se demuestra finalmente que $\omega_1^2 \omega_2^2$ es positiva y que \mathcal{B} es definido positivo.

Proposición 5.5 *En un entorno de 0 se verifica*

$$\langle \mathcal{B} \alpha, \alpha \rangle + 2 \frac{e^2}{\epsilon} \langle \Delta^{-1}(\phi_L \alpha), \phi_L \alpha \rangle \geq 0.$$

Como consecuencia, \mathcal{B} es definido positivo en el mismo entorno de 0.

Demostración. Consideramos una pequeña perturbación $\delta(t, x) \in \mathbb{R}$ de la energía en torno a ϕ_L . Puesto que la energía de Lieb está dada por (5.45):

$$E(\psi) = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \psi|^2 dx - \frac{e^2}{8\pi\epsilon} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{|\psi(t, x)|^2 |\psi(t, x')|^2}{|x - x'|} dx dx' \geq E(\phi_L) = E_L,$$

podemos calcular la energía total de $\psi = \phi_L + \delta$:

$$\begin{aligned} E(\phi_L + \delta) &= \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \phi_L|^2 dx - \frac{e^2}{8\pi\epsilon} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{|\phi_L(x)|^2 |\phi_L(x')|^2}{|x - x'|} dx dx' \\ &+ 2 \int_{\mathbb{R}^3} \left(\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi_L + V_L \phi_L \right) \delta(x) - \epsilon_L \phi_L \delta(x) \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \delta|^2 dx - \frac{e^2}{4\pi\bar{\epsilon}} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{|\phi_L(x)|^2 |\delta(x')|^2}{|x-x'|} dx dx' \\
& - \frac{e^2}{2\pi\bar{\epsilon}} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{\phi_L(x)\delta(x)\phi_L(x')\delta(x')}{|x-x'|} dx dx' \\
& - \epsilon_L \int_{\mathbb{R}^3} |\delta(x)|^2 dx - o(\delta^2), \tag{5.54}
\end{aligned}$$

donde hemos sumado y restado la cantidad

$$-2\epsilon_L \int_{\mathbb{R}^3} \phi_L(x) \operatorname{Re}(\delta(x)) dx = \epsilon_L \int_{\mathbb{R}^3} |\delta(x)|^2 dx,$$

cuya doble expresión es consecuencia de la normalización $\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\phi + \delta\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1$. Notemos que los dos primeros términos de (5.54) constituyen la energía asociada a la solución de Lieb (E_L) y que el tercero es nulo puesto que ψ_L es una función propia solución del problema de valores propios

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi_L + V_L \phi_L = \epsilon_L \phi_L.$$

Por tanto, gracias al resultado de Lieb el resto de la expresión (5.54) ha de ser estrictamente positivo, pero como los últimos términos son de segundo orden en δ , para $|\delta|$ suficientemente pequeño, ha de verificarse

$$\left\langle \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \delta + (V_L - \epsilon_L) \delta, \delta \right\rangle + \left\langle \frac{2e^2}{\bar{\epsilon}} \Delta^{-1}(\phi_L \delta), \phi_L \delta \right\rangle \geq 0.$$

Tomando $\delta = \operatorname{Re}(\alpha)$ y $\delta = \operatorname{Im}(\alpha)$ y sumando obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}
0 & \leq \langle \mathcal{B} \operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\alpha) \rangle + 2 \frac{e^2}{\bar{\epsilon}} \langle \Delta^{-1}(\phi_L \operatorname{Re}(\alpha)), \phi_L \operatorname{Re}(\alpha) \rangle \\
& + \langle \mathcal{B} \operatorname{Im}(\alpha), \operatorname{Im}(\alpha) \rangle + 2 \frac{e^2}{\bar{\epsilon}} \langle \Delta^{-1}(\phi_L \operatorname{Im}(\alpha)), \phi_L \operatorname{Im}(\alpha) \rangle \\
& = \langle \mathcal{B} \alpha, \alpha \rangle + 2 \frac{e^2}{\bar{\epsilon}} \langle \Delta^{-1}(\phi_L \alpha), \phi_L \alpha \rangle,
\end{aligned}$$

que es el resultado deseado. \square

La información obtenida en (5.52) y (5.53) nos permite concluir que ω ha de ser real. Entonces, a partir de las expresiones (5.46)-(5.48) deducimos el siguiente resultado de estabilidad.

Teorema 5.12 *La solución de mínima energía del sistema SPM es linealmente estable en H^1 .*

Capítulo 6

Modelo generalizado de campo medio para el polarón

En este Capítulo generalizaremos el modelo propuesto en el Capítulo anterior, también con un enfoque de campo medio, para estudiar el movimiento de cargas a través de un cristal ionizado. Consideraremos el caso más general en que los iones interactúen todos con todos de forma elástica a través de una constante de elasticidad dependiente de la distancia entre ellos, lo que dará lugar, en el límite del continuo, a un término no local de convolución con el núcleo de recuperación. Tras la deducción del modelo realizaremos un estudio riguroso de existencia y unicidad, así como su formulación variacional. Los contenidos de este Capítulo han sido desarrollados a modo de artículo en [56].

6.1 Introducción y comentarios

Al igual que en el Capítulo anterior, consideramos que el campo eléctrico producido por el electrón que atraviesa el cristal, produce en este una polarización local. Recíprocamente, el campo total de polarización ejercerá una fuerza sobre el electrón. La fuerza ejercida por el electrón es de tipo electrostático, por lo que repelerá los iones negativos y atraerá a los positivos. Consideraremos que los iones se comportan como osciladores clásicos acoplados, de tal manera que, no sólo interactúan dos a dos con sus inmediatos en la red cristalina como en el caso estudiado en el anterior Capítulo, sino que cada ion interactúa con todos los demás iones de la red. Con la idea de buscar el máximo realismo, consideraremos que iones de igual carga se repelen y los de distinta carga se atraen. Pero evidentemente la interacción ha de depender de la distancia entre los iones; para denotar esta dependencia intro-

ducimos un núcleo de recuperación $K(r)$ que medirá la constante elástica de recuperación entre iones a distancia r . El resultado, como veremos, será la aparición de un término de convolución con este núcleo en la ecuación para el potencial, manteniendo el término de “memoria” que habíamos deducido en el Capítulo 5.

Organizaremos este Capítulo como sigue. En la Sección 6.2 daremos la deducción del modelo a partir de los principios básicos expuestos y considerando de nuevo que en el límite del continuo el movimiento de los iones se corresponderá con el campo clásico de polarización. Veremos brevemente como el modelo generaliza tanto al usual sistema de Schrödinger-Poisson (véase por ejemplo [18]) como al deducido el Capítulo previo. Daremos también, para completar el modelo, su formulación variacional y deduciremos las cantidades conservadas asociadas usando el Teorema de Noether. En la Sección 6.3 estudiaremos la existencia y unicidad de soluciones con condición inicial en H^1 . Mostraremos que el sistema está bien planteado bajo la suposición natural de que el núcleo de recuperación es L^1 de forma que decrezca en infinito. Asimismo mostraremos que la energía está bien definida y se conserva a lo largo de la evolución temporal.

6.2 Un modelo generalizado para el polarón

Recordamos brevemente la notación utilizada para mostrar la dinámica del cristal de iones. Tomamos de nuevo una red L en \mathbb{R}^3 con respecto de la base (a_1, a_2, a_3) , dada por

$$L = \{n \in \mathbb{R}^3 : n = m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3 \text{ con } (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3\}.$$

Dividimos los nodos de la red según la siguiente descomposición

$$\begin{aligned} L^+ &= \{n \equiv (m_1, m_2, m_3) \in L \text{ tales que } m_1 + m_2 + m_3 \text{ sea par } \}, \\ L^- &= L \setminus L^+, \end{aligned}$$

de manera que los iones con carga positiva y con masa M_+ , en el equilibrio, estén colocados en los nodos de L^+ y los iones de carga negativa y masa M_- sobre los nodos de L^- . Por lo tanto, la red es tal que cada ion positivo está rodeado por 6 negativos y viceversa. Suponemos ahora que cada ion interactúa con todos los demás iones de L con interacción elástica y con una constante de recuperación K que sólo depende de la distancia a cada ion. Como ya adelantábamos, y parece natural, esta interacción será atractiva entre iones de distinta carga y repulsiva entre iones de igual carga. Entonces, la dinámica de los iones cargados negativa o positivamente, con cargas M_-

y M_+ respectivamente, en presencia de un campo eléctrico externo \mathcal{E} queda descrita por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} M_+ \xi''_{n^+} &= - \sum_{l \in L^-} K(|n^+ - l|)(\xi_{n^+} - \xi_l) \\ &\quad + \sum_{l \in L^+} K(|n^+ - l|)(\xi_{n^+} - \xi_l) + e\mathcal{E}_{n^+}(t), \\ M_- \xi''_{n^-} &= - \sum_{l \in L^+} K(|n^+ - l|)(\xi_{n^-} - \xi_l) \\ &\quad + \sum_{l \in L^-} K(|n^- - l|)(\xi_{n^-} - \xi_l) - e\mathcal{E}_{n^-}(t), \end{aligned}$$

para cada $n^+ \in L^+$ y $n^- \in L^-$, donde $(-e)$ es la carga de los electrones. Como en el anterior Capítulo, las funciones ξ_{n^+} y ξ_{n^-} son los vectores desplazamiento respecto de la posición equilibrio, dependientes del tiempo, en los nodos n^+ y n^- respectivamente. En el equilibrio los nodos n^+ están ocupados por iones positivos y los nodos n^- por iones negativos. $\mathcal{E}_n(t)$ es de nuevo el campo eléctrico externo ejercido sobre el punto n y $K(d)$ es la constante de recuperación entre iones a distancia $d > 0$. Restando ambas ecuaciones y tomando el límite del continuo: $a_1, a_2, a_3 \rightarrow 0$ llegamos ahora a la siguiente ecuación

$$M \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(t, x) + \int_{\mathbb{R}^3} K(|x - y|) \xi(t, y) dy = e\mathcal{E}(t, x), \quad (6.1)$$

donde $M^{-1} = M_+^{-1} + M_-^{-1}$ y el campo de desplazamiento está definido como

$$\xi(t, x) = \lim_{a_1, a_2, a_3 \rightarrow 0} (\xi_{n^+}(t) - \xi_{n^-}(t)).$$

En primer lugar, hacemos notar que en el caso de interacciones sólo de corto alcance entre los iones (lo que en el límite del continuo equivaldría a un núcleo K cercano a la Delta de Dirac) recuperamos, salvo constante, el modelo obtenido en el Capítulo 5.

La polarización del cristal iónico es debida tanto a las vibraciones de los iones con respecto de su posición de equilibrio, representada por el vector $\xi(t, x)$, como a su propia deformación. No obstante, despreciaremos esta segunda causa para poder escribir de nuevo $\mathcal{P}(t, x) = e\bar{\rho}\xi(t, x)$, siendo $\bar{\rho}$ el número de iones por unidad de volumen.

El campo producido por el electrón con densidad de carga $-e|\psi(t, x)|^2 < 0$ está dado por la ley de Gauss $\mathcal{E} = -\nabla V_{\mathcal{E}}$, mientras que el potencial electrostático se obtiene a partir de la ecuación de Poisson $\Delta V_{\mathcal{E}} = e|\psi(t, x)|^2$. Así, el campo eléctrico se escribe como

$$\mathcal{E}(t, x) = e \nabla_x (\Gamma *_x |\psi|^2) = \frac{e}{4\pi} \nabla_x \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi(t, x')|^2}{|x - x'|} dx',$$

donde $\Gamma(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$ es la solución fundamental de $-\Delta$ en el espacio euclídeo tridimensional \mathbb{R}^3 . Finalmente, llamamos $V_{\mathcal{P}}(t, x)$ al potencial electrostático producido por la polarización de los iones $\mathcal{P}(t, x)$ (que satisface $\nabla V_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$). Tomando divergencia en la ecuación (6.1) obtenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta V_{\mathcal{P}}(t, x) + \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{K}(|x-y|) \Delta V_{\mathcal{P}}(t, y) dy = -\frac{e}{\mu} |\psi(t, x)|^2,$$

donde la constante μ viene dada por $\mu = M/(\bar{\rho}e^2)$ y el nuevo núcleo es $\mathcal{K} = K/M$ que hemos modificado para simplificar la notación. De nuevo, hemos de complementar esta ecuación con la ecuación de Schrödinger para la función de ondas del electrón con un potencial $V(t, x) = -\mu V_{\mathcal{P}}(t, x)$, donde μ es otra constante introducida para simplificar (notamos que estas simplificaciones no son las mismas que las del Capítulo anterior). Hemos obtenido finalmente el siguiente sistema acoplado de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} V(t, x) + \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{K}(|x-y|) V(t, y) dy = V_{\mathcal{E}}(\psi)(t, x), \quad (6.2)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi. \quad (6.3)$$

Por lo tanto, el nuevo sistema de ecuaciones a estudiar como modelo para aproximar al problema del polarón es (6.2)-(6.3). Analizaremos las hipótesis sobre la función de ondas inicial $\psi(0, x) = \varphi(x)$ y sobre el núcleo \mathcal{K} para el buen planteamiento del problema. A la función \mathcal{K} la llamaremos núcleo clásico de interacción elástica o simplemente núcleo de recuperación. De momento hacemos notar que, por construcción, \mathcal{K} es no negativo y tiene simetría radial.

Veamos a continuación cual es la *formulación variacional* asociada a este sistema. Definimos el Funcional Acción:

$$\mathcal{S} = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, V) dx dt,$$

donde la densidad de Lagrangiana está dada por

$$\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, V) = i\hbar \bar{\psi} \frac{\partial}{\partial t} \psi - \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 - V |\psi|^2 + \frac{1}{2} |\nabla V_t|^2 - \frac{1}{2} (\mathcal{K} *_x \nabla V) \cdot \nabla V,$$

bajo la notación $V_t = \frac{\partial}{\partial t} V$. Efectivamente, minimizando el Funcional Acción \mathcal{S} o, equivalentemente, calculando las derivadas en el sentido de Fréchet (respecto del potencial V y del conjugado complejo de la función de ondas $\bar{\psi}$) e igualando a cero, obtenemos el sistema (6.2)-(6.3).

Usando de nuevo el Teorema de Noether (véase [38] ó [73]) obtenemos, para cada grupo uniparamétrico de transformaciones que deje invariante el funcional acción \mathcal{S} , una ley de conservación asociada al sistema (6.2)-(6.3).

En realidad, la variación respecto del modelo anterior no afecta a las simetrías o invariancias del Funcional Acción, por lo que las cantidades conservadas son las mismas: la energía, la carga, el momento lineal y el momento angular. Desarrollemos un poco los resultados de conservación que usaremos más adelante.

Gracias a la invariancia con respecto a traslaciones en tiempo $T_\tau\psi(t, x) = \psi(t + \tau, x)$, se obtiene la conservación de la energía total

$$E = \frac{\hbar}{2m} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V |\psi|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla V_t|^2 + (\mathcal{K} *_x \nabla V) \cdot \nabla V. \quad (6.4)$$

El primer término es la energía cinética del electrón, el segundo es la energía de interacción entre el electrón y la red y el último es la energía debida a las vibraciones de la red.

A partir de la invariancia de \mathcal{S} respecto de transformaciones de fase $T_\alpha\psi = e^{i\alpha}\psi$, deducimos la conservación de la carga total,

$$N = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(t, x)|^2 dx, \quad (6.5)$$

que consideraremos normalizada a 1.

Las otras cantidades conservadas, que no usaremos en nuestro estudio en este Capítulo, son el momento angular y el momento escalar, que se obtienen respectivamente gracias a la invariancia respecto de rotaciones espaciales y traslaciones espaciales (ver detalles en Capítulo 5).

6.3 Buen planteamiento del modelo, existencia y unicidad

Como acabamos de ver, el movimiento de un electrón que interacciona con los fonones de un cristal iónico puede ser descrito por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x \psi + V\psi, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(t, x) = 0, \quad (6.6)$$

$$\psi(0, x) = \varphi(x),$$

con un potencial $V = V(\psi)$ dado por la ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} V + \mathcal{K} *_x V = V_\mathcal{E}(\psi), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(t, x) = 0, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} V(0, \cdot) = V(0, \cdot) = 0, \quad (6.8)$$

estando ambos sistemas planteados para todo $x \in \mathbb{R}^3$ y $t \geq 0$. La hipótesis (6.8) no resta generalidad al planteamiento general pues, como veremos, poniendo otras condiciones de contorno genéricas pero con buenas propiedades de regularidad, los resultados que mostraremos siguen siendo ciertos. Diremos pues que $V \in C(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3))$ es solución de (6.7)-(6.8) si verifica.

$$V(t, x) = \int_0^t (t-s) (V_{\mathcal{E}}(\psi)(s, x) - \mathcal{K} *_x V(s, x)) ds, \quad (6.9)$$

para todo $t \in [0, T]$. La diferencia esencial con el sistema de SP o el de SPM que podemos apreciar aquí, es que en este caso el potencial no está dado explícitamente en función de la función de ondas, sino sólo de forma implícita, lo que supondrá una dificultad añadida para el estudio que pretendemos realizar.

Comenzamos el estudio de la ecuación (6.7). Para ello, y dado que la expresión para V es sólo implícita, comenzaremos con un resultado puramente técnico que nos simplificará la demostraciones posteriores de este Capítulo.

Proposición 6.6 *Sea $\mathcal{K} \in L^1(\mathbb{R}^3)$ y $f \in L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^3))$, para algún $p \in [1, \infty]$ y $T > 0$. Entonces, existe una función $Z \in C(0, T; L^p(\mathbb{R}^3))$ única solución de la ecuación*

$$Z(t, x) = \int_0^t (t-s) (f(s, x) - \mathcal{K} *_x Z(s, x)) ds, \quad (6.10)$$

y una función creciente y finita $C(t)$ tal que

$$(i) \quad \|Z(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C(t) \int_0^t \|f(s, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} ds,$$

$$(ii) \quad \left\| \frac{\partial}{\partial t} Z(t, \cdot) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C(t) \int_0^t \|f(s, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} ds.$$

Por lo tanto, se verifica que

$$\|Z\|_{W^{1,\infty}(0,T;L^p(\mathbb{R}^3))} \leq C(T) \|f(s, \cdot)\|_{L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^3))} ds,$$

para todo $T < \infty$.

Demostración. Observamos en primer lugar que, una vez que se haya probado la existencia, la cota (ii) es una consecuencia directa de (i) usando

$$\frac{\partial Z}{\partial t}(t, x) = \int_0^t (f(s, x) - \mathcal{K} *_x Z(s, x)) ds$$

y la hipótesis asumida sobre f . A continuación fijamos un $T^* > 0$ tal que $T^{*2}\|\mathcal{K}\|_{L^1} < 1$ y probamos existencia y unicidad en $[0, T^*]$ usando un argumento de punto fijo. Definimos el operador

$$F : \mathcal{C}(0, T^*; L^\infty(\mathbb{R}^3)) \rightarrow \mathcal{C}(0, T^*; L^\infty(\mathbb{R}^3)),$$

dado por

$$F(Z)(t, x) = \int_0^t (t-s) (f(s, x) - \mathcal{K} *_x Z(s, x)) ds.$$

Observamos, en principio, que F está bien definido puesto que $\mathcal{K} \in L^1(\mathbb{R}^3)$ y $f \in L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^3))$. Demostremos pues que F es una contracción sobre el espacio de Banach $\mathcal{C}(0, T^*; L^p(\mathbb{R}^3))$. Tomamos Z_1 y Z_2 en $\mathcal{C}(0, T^*; L^p(\mathbb{R}^3))$, entonces usando por este orden las desigualdades de Minkowski y Young obtenemos

$$\begin{aligned} \|F(Z_1)(t, \cdot) - F(Z_2)(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} & \\ & \leq \int_0^t (t-s) \|\mathcal{K} *_x (Z_1 - Z_2)\|(s, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} ds \\ & \leq \frac{T^{*2}}{2} \|\mathcal{K}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \|Z_1 - Z_2\|_{L^\infty((0, T^* \times \mathbb{R}^3))}, \end{aligned}$$

para $t \in [0, T^*]$. Por lo tanto, F es contractiva y sabemos que tiene un único punto fijo $Z_0 \in \mathcal{C}(0, T^*; L^p(\mathbb{R}^3))$ que será la única solución de (6.10) en $[0, T^*]$. Veamos ahora la propiedad (i) sobre este intervalo $t \in [0, T^*]$ y, como hemos mencionado, tendremos también demostrado (ii). Usando de nuevo las desigualdades de Minkowski y Young sobre (6.10) obtenemos

$$\|Z_0(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq \int_0^t (t-s) \|f(s, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + T^{*2} \|\mathcal{K}\|_{L^1} \|Z_0\|_{L^\infty(0, t; L^p(\mathbb{R}^3))}.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\|Z_0\|_{L^\infty(0, t; L^p(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{T^*}{1 - T^{*2} \|\mathcal{K}\|_{L^1}} \int_0^t \|f(s, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)},$$

que, en particular, implica (i). Para extender el intervalo a $[0, 2T^*]$ definimos un operador análogo \tilde{F} sobre $\mathcal{C}(T^*, 2T^*; L^p(\mathbb{R}^3))$ como

$$\tilde{F}(Z)(t, x) = Z_0(T^*, x) + (t - T^*) \frac{\partial Z_0}{\partial t}(T^*, x) + \int_{T^*}^t (t-s) (f - \mathcal{K} *_x Z)(s, x) ds,$$

que también está bien definido gracias a las estimaciones hechas sobre Z_0 . En este punto hacemos notar que si $V(0)$ o $\partial_t V(0)$ no fuesen nulas bastaría

que estuviesen en L^p y aplicar la misma técnica de demostración comenzando con el operador de tipo \tilde{F} en lugar de F para obtener el mismo resultado. De igual forma que analizamos F podemos fácilmente demostrar que \tilde{F} es una contracción. Por lo tanto, existe una única solución $Z_1 \in \mathcal{C}(T^*, 2T^*; L^p(\mathbb{R}^3))$. Definiendo Z como Z_0 sobre $[0, T^*]$ y como Z_1 en $[T^*, 2T^*]$ y usando las propiedades de continuidad en el punto de conexión T^* vemos que Z es la única solución de (6.10) en $\mathcal{C}(0, 2T^*; L^p(\mathbb{R}^3))$. Para mostrar (i) en este nuevo intervalo estimamos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \|Z(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} &\leq \|Z_0(T^*, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + T^* \left\| \frac{\partial}{\partial t} Z_0(T^*, \cdot) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \\ &\quad + \int_{T^*}^t (t-s) \|f(s, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} ds + T^{*2} \|\mathcal{K}\|_{L^1} \|Z\|_{L^\infty(T^*, t; L^p(\mathbb{R}^3))}. \end{aligned}$$

Razonando de la misma forma y usando las estimaciones demostradas para Z_0 obtenemos igualmente

$$\|Z\|_{L^\infty(0, t; L^p(\mathbb{R}^3))} \leq C(T^*, \|\mathcal{K}\|_{L^1}) \int_0^t \|f(s, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)},$$

y por lo tanto (i) e (ii).

Iterando este argumento T/T^* veces se deduce la existencia de una solución $Z \in \mathcal{C}(0, T; L^p(\mathbb{R}^3))$ que es única y verifica las estimaciones (i) e (ii) enunciadas. \square

La primera consecuencia de la Proposición 6.6 es que para una función de ondas ψ suficientemente regular y un núcleo de interacción \mathcal{K} en L^1 existe un único potencial V con buenas propiedades. Más concretamente, usando las estimaciones para el potencial electrostático (de Poisson) $V_\mathcal{E} := -e\Gamma *_x(\psi\phi)$ demostradas por Illner, Zweifel y Lange en [44]:

$$\|V_\mathcal{E}(\psi, \phi)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\phi\|_{H^1(\mathbb{R}^3)},$$

obtenemos el siguiente resultado

Corolario 6.1 *Dadas ψ y ϕ en el espacio $L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))$, entonces el problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} V + \mathcal{K} *_x V &= V_\mathcal{E}(\psi, \phi), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(t, x) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} V(0, \cdot) &= V(0, \cdot) = 0, \end{aligned} \quad (6.11)$$

tiene una única solución $V \equiv V(\psi, \phi)$ en $\mathcal{C}(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3))$ que verifica

$$\begin{aligned} \|V(\psi, \phi)\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3))} \\ \leq C(T, \|\mathcal{K}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}) \|\psi\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))} \|\phi\|_{L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Además, esta solución es simétrica y bilineal con respecto a ψ y ϕ , es decir, para cada $\psi, \phi \in \mathcal{C}(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))$,

$$V(\psi, \phi) = V(\phi, \psi), \quad V(\psi_1 + \psi_2, \phi) = V(\psi_1, \phi) + V(\psi_2, \phi).$$

En particular, (6.7) tiene una única solución dada por $V(\psi) := V(\psi, \bar{\psi})$.

Antes de pasar al estudio de existencia y unicidad global de soluciones del sistema (6.6)-(6.8) veamos algunas estimaciones adicionales sobre el potencial, descomponiéndolo, al igual que en Capítulo anterior, en potencial de corto y largo alcance. Usamos la misma descomposición para el núcleo Γ dentro y fuera de una bola

$$\Gamma_1 = \Gamma \zeta, \quad \Gamma_2 = \Gamma(1 - \chi), \quad \text{donde } \begin{cases} 0 \leq \chi \in \mathcal{C}_0^\infty \\ \chi(x) = 1, |x| \leq 1, \end{cases}$$

de manera que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Definimos ahora el potencial de corto y largo alcance (cuya existencia estará dada por la Proposición 6.6).

Definición 6.6 Dadas ψ y ϕ en $L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))$, los potenciales de corto y largo alcance $V_1 = V_1(\psi, \phi)$ y $V_2 = V_2(\psi, \phi)$ son respectivamente las soluciones de

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} V_1 + \mathcal{K} *_x V_1 = -\Gamma_1 *_x (\psi\phi) \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} V_2 + \mathcal{K} *_x V_2 = -\Gamma_2 *_x (\psi\phi) \quad (6.14)$$

y verifican las condiciones iniciales (6.8). Además V_1 y V_2 son simétricas y bilineales respecto de ψ y ϕ , y V , definida como

$$V(\psi, \phi) = V_1(\psi, \phi) + V_2(\phi, \psi),$$

es la solución de (6.11), para toda $\psi, \phi \in \mathcal{C}(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))$.

Usaremos también algunas estimaciones para las derivadas del potencial para poder demostrar el resultado final de existencia y unicidad.

Lema 6.18 Consideramos de nuevo $\psi, \phi \in H^1(\mathbb{R}^3)$ y V_1, V_2 los potenciales de corto y largo alcance. Entonces se verifica que:

- (i) $\|\nabla_x V_1(\psi, \phi)\|_{L^\infty(0, T; L^3(\mathbb{R}^3))} \leq C(T, \|\mathcal{K}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}) (\|\nabla_x \psi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^3} + \|\psi\|_{L^3} \|\nabla_x \phi\|_{L^2}),$
- (ii) $\|\nabla_x V_2(\psi, \phi)\|_{L^\infty(0, T; L^4(\mathbb{R}^3))} \leq C(T, \|\mathcal{K}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}) (\|\nabla_x \psi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2} \|\nabla_x \phi\|_{L^2}),$

Demostración. Usando la Proposición 6.6, sabemos que las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}U_1 + \mathcal{K} *_x U_1 &= -\Gamma_1 *_x \nabla(\psi\phi), \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}U_2 + \mathcal{K} *_x U_2 &= -\Gamma_2 *_x \nabla(\psi\phi),\end{aligned}$$

con datos iniciales (6.8), tienen una única solución U_1 y U_2 . Derivando en sentido distribucional en las ecuaciones (6.13)-(6.14), deducimos que, en realidad, U_1 y U_2 son las derivadas distribucionales de V_1 y V_2 respectivamente y, por lo tanto, usando las siguientes estimaciones (consecuencia de aplicar de nuevo las desigualdades de Young y Hölder),

$$\begin{aligned}\|\Gamma_1 *_x \nabla(\psi\phi)\|_{L^3} &\leq \|\Gamma_1\|_{L^2} \left(\|\nabla_x \psi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^3} + \|\psi\|_{L^3} \|\nabla_x \phi\|_{L^2} \right), \\ \|\Gamma_2 *_x \nabla(\psi\phi)\|_{L^4} &\leq \|\Gamma_2\|_{L^\infty} \left(\|\nabla_x \psi\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2} \|\nabla_x \phi\|_{L^2} \right),\end{aligned}$$

deducimos (i) y (ii). □

Ya estamos en condiciones de enunciar y demostrar el principal resultado de este Capítulo.

Teorema 6.13 *Sea φ la función de ondas inicial en $H^1(\mathbb{R}^3)$. Entonces, existe una única solución “mild” (ψ, V) del sistema (6.6)-(6.8) que verifica*

$$\begin{aligned}\psi &\in \mathcal{C}(0, \infty; H^1(\mathbb{R}^3)) \\ V &\in \mathcal{C}(0, \infty; L^\infty(\mathbb{R}^3)).\end{aligned}$$

Además, es única en esta clase de funciones, el funcional energía (6.4) está bien definido y la energía se conserva a lo largo de la evolución temporal.

Demostración. En primer lugar demostraremos la existencia de una única solución en cierto intervalo maximal $[0, T_{max})$ (véase [62]) y posteriormente demostraremos la existencia global en tiempo (esto es $T_{max} = \infty$) mostrando de nuevo que no puede haber explosión de la norma $\|\cdot\|_{H^1}$ de ψ en tiempo finito.

Parte 1. (Existencia local.) Demostraremos que existe un $T_{max} > 0$ y un par (ψ, V) solución del sistema que verifica

$$\psi \in \mathcal{C}(0, T_{max}; H^1(\mathbb{R}^3)), \quad V \in \mathcal{C}(0, T_{max}; L^\infty(\mathbb{R}^3)).$$

Para ello, usaremos el Teorema 6.1.4 del libro de A. Pazy [62]. Entonces, sólo hemos de mostrar que el operador $J(\psi) = V(\psi)\psi$ es localmente Lipschitziano

en ψ pertenecientes a $H^1(\mathbb{R}^3)$ uniformemente sobre intervalos compactos de tiempo.

A partir de ahora omitiremos el espacio \mathbb{R}^3 en las normas $L^p(\mathbb{R}^3)$, $H^1(\mathbb{R}^3)$, etc, para simplificar la notación. Sean $\psi, \phi \in H^1$, entonces tenemos

$$\|J(\psi) - J(\phi)\|_{H^1}^2 = \|J(\psi) - J(\phi)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_x J(\psi) - \nabla_x J(\phi)\|_{L^2}^2 =: a^2 + b^2.$$

Para el primer término se tiene

$$\begin{aligned} a &\leq \|(V(\psi) - V(\phi))\psi\|_{L^2} + \|V(\phi)(\psi - \phi)\|_{L^2} \\ &\leq \|V(\psi) - V(\phi)\|_{L^\infty} \|\psi\|_{L^2} + \|V(\phi)\|_{L^\infty} \|\psi - \phi\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Entonces, usando (6.12) y la propiedad de bilinealidad mostrada en el Corolario 6.1 concluimos

$$\|J(\psi) - J(\phi)\|_{L^2} \leq C(T, \|\mathcal{K}\|_{L^1}, \|\psi\|_{H^1}^2, \|\phi\|_{H^1}^2) \|\psi - \phi\|_{H^1}.$$

Para estimar b procedemos como sigue

$$\begin{aligned} b &\leq \|\nabla_x V(\psi)\psi - \nabla_x V(\phi)\phi\|_{L^2} + \|V(\psi)\nabla_x \psi - V(\phi)\nabla_x \phi\|_{L^2} \\ &\leq \|(\nabla_x V(\psi) - \nabla_x V(\phi))\psi\|_{L^2} + \|\nabla_x V(\phi)(\psi - \phi)\|_{L^2} \\ &\quad + \|(V(\psi) - V(\phi))\nabla_x \psi\|_{L^2} + \|V(\phi)(\nabla_x \psi - \nabla_x \phi)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Descomponiendo V en potencial de corto y largo alcance V_1 y V_2 podemos escribir

$$\begin{aligned} b &\leq \|(\nabla_x V_1(\psi) - \nabla_x V_1(\phi))\|_{L^3} \|\psi\|_{L^6} + \|\nabla_x V_2(\psi) - \nabla_x V_2(\phi)\|_{L^4} \|\psi\|_{L^4} \\ &\quad + \|\nabla_x V_1(\phi)\|_{L^3} \|\psi - \phi\|_{L^6} + \|\nabla_x V_2(\phi)\|_{L^4} \|\psi - \phi\|_{L^4} \\ &\quad + \|V(\psi) - V(\phi)\|_{L^\infty} \|\nabla_x \psi\|_{L^2} + \|V(\phi)\|_{L^\infty} \|\nabla_x \psi - \nabla_x \phi\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, las estimaciones (i) y (ii) del Lema 6.18, la bilinealidad, la desigualdad triangular y la inclusión de Sobolev $H^1 \subset L^2 \cap L^6$ nos proporcionan

$$b \leq C(T, \|\mathcal{K}\|_{L^1}, \|\psi\|_{H^1}^2, \|\phi\|_{H^1}^2) \|\psi - \phi\|_{H^1}.$$

Combinando ahora las estimaciones de a y b deducimos la propiedad de Lipschitzianidad anunciada

$$\|J(\psi) - J(\phi)\|_{H^1} \leq C(T, \|\mathcal{K}\|_{L^1}, \|\psi\|_{H^1}^2, \|\phi\|_{H^1}^2) \|\psi - \phi\|_{H^1},$$

que concluye la demostración de existencia y unicidad local de solución.

Parte 2. (Existencia global.) Sabemos que $T_{max} < \infty$ si y sólo si la solución explota en norma H^1 en tiempo finito. Por lo tanto, sólo hemos de demostrar

que $\|\psi(t, \cdot)\|_{H^1}$ está acotada sobre intervalos acotados de tiempo para concluir que nuestra solución local es, en realidad, global y única en $\mathcal{C}(0, \infty; H^1(\mathbb{R}^3))$.

Recordamos en primer lugar que $\|\psi(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ ya que la carga total se conserva (6.5). Por lo tanto bastará con controlar el gradiente de ψ . Usaremos para ello la conservación de la energía total y demostraremos simultáneamente que la energía está bien definida y que $\|\psi(t, \cdot)\|_{H^1}$ está acotada en intervalos compactos. Usando la desigualdad de Young obtenemos

$$\|V_{\mathcal{E}}(\psi)(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq \|\Gamma_1\|_{L^2} \|\psi(t, \cdot)\|_{L^4}^2 + \|\Gamma_2\|_{L^\infty} \|\psi(t, \cdot)\|_{L^2}^2.$$

Recordamos que $\Gamma_1 \in L^p(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow p \in [1, 3)$ y $\Gamma_2 \in L^q(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow q \in (3, \infty]$. Entonces, usando la Proposición 6.6, la conservación de la carga y el embebimiento $H^1 \subset L^2 \cap L^6$ obtenemos

$$\|V(\psi)(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C(t) \int_0^t (1 + \|\psi(s, \cdot)\|_{H^1}^2) ds. \quad (6.15)$$

Análogamente, para las derivadas, obtenemos

$$\|\nabla V_{\mathcal{E}}(\psi)(t, \cdot)\|_{L^2} \leq \|\nabla \Gamma_1\|_{L^{6/5}} \|\psi(t, \cdot)\|_{L^3}^2 + \|\nabla \Gamma_2\|_{L^2} \|\psi(t, \cdot)\|_{L^2}^2,$$

donde es esencial que $\nabla \Gamma_1 \in L^p(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow p \in [1, 3/2)$ y $\nabla \Gamma_2 \in L^q(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow q \in (3/2, \infty]$. Usando ahora que $\|\psi\|_{L^3}^2 \leq \|\psi\|_{L^2} \|\psi\|_{L^6} \leq \|\psi\|_{L^2} \|\psi\|_{H^1}$, la conservación de la masa y aplicando la Proposición 6.6 deducimos

$$\|\nabla V(\psi)(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C(t) \int_0^t (1 + \|\psi(s, \cdot)\|_{H^1}) ds, \quad (6.16)$$

$$\|\nabla V_t(\psi)(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C(t) \int_0^t (1 + \|\psi(s, \cdot)\|_{H^1}) ds. \quad (6.17)$$

Las cotas (6.15), (6.16) y (6.17) dan inmediatamente la buena definición del funcional de energía

$$E(t) = \frac{\hbar}{2m} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V |\psi|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla V_t|^2 + (\mathcal{K} *_x \nabla V) \cdot \nabla V.$$

Entonces, usando la conservación de la energía (6.4), podemos estimar como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{2m} \|\nabla \psi(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &\leq E(0) + \|V(\psi)(t, \cdot)\|_{L^\infty} \|\psi(t, \cdot)\|_{L^2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\nabla V_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\mathcal{K}\|_{L^1} \|\nabla V(t, \cdot)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Finalmente, usando (6.15), (6.16) y (6.17) y la conservación de la masa obtenemos

$$\|\psi(t, \cdot)\|_{H^1}^2 \leq C(t) + C(t) \int_0^t \|\psi(s, \cdot)\|_{H^1}^2 ds,$$

lo que implica el resultado deseado, vía el Lema de Gronwall. \square

Nota Podemos extender el resultado de existencia y unicidad al sistema con dato inicial en el espacio natural de definición $L^2(\mathbb{R}^3)$. Es consecuencia inmediata de las técnicas aplicadas en el Capítulo anterior a través de las desigualdades de Strichartz en espacio y tiempo y de la Proposición técnica 6.6. Podemos probar de igual modo que los potenciales de corto y largo alcance satisfacen propiedades de Lipschitzianidad en los mismos espacios $L^q(0, T; L^p(\mathbb{R}^3))$ del Capítulo 5, con (q, p) pares admisibles. También se ganará cierta regularidad para la función de ondas ψ , resultando $\psi(t, \cdot) \in L^2 \cap L^6(\mathbb{R}^3)$ para todo $t > 0$ bajo hipótesis de acotación de $|x|\psi$ en L^2 . Puesto que este resultado es una mera extensión técnica no lo desarrollaremos en esta memoria.

Bibliografía

- [1] AUBIN J.P., Un théorème de compacité, *C. R. Acad. Sci. Sér. I* **256**, (1963), 5042-5044.
- [2] BECHOUCHE P., Semi-classical limits in a crystal with a Coulombian self-consistent potential: Effective mass theorems, *Asymptotic Analysis* **19**, (1999), 95-116.
- [3] BECHOUCHE P., NIETO, J., RUIZ-ARRIOLA E., SOLER J., On the time evolution of the mean-field polaron, *J. Math. Phys.* Vol **41**, No. 7, (2000), 4293-4312.
- [4] BONILLA L.L., CARRILLO J.A., SOLER J., Asymptotic behaviour of the initial boundary value problem for the three dimensional Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system, *SIAM J. Appl. Math.* **57-5**, (1997), 1343-1372.
- [5] BONILLA, L., SOLER, J., High-field limit of the Vlasov-Fokker-Planck system. A comparison of different perturbations methods, por aparecer en *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*
- [6] BOUCHUT F., Existence and Uniqueness of a Global Smooth Solution for the VPFP System in Three Dimensions, *J. Func. Anal.* **111**, (1993), 239-258.
- [7] BOUCHUT F., Smoothing effect for the non-linear VPFP system, *J. Diff. Equations* **122**, (1995), 225-238.
- [8] BOUCHUT F., JAMES F., Duality solutions for pressureless gases, monotone scalar conservation laws, and uniqueness, *Comm. Partial Differential Equations* **24** no. 11-12, (1999), 2173-2189.
- [9] BRENIER Y., Convergence of the Vlasov-Poisson system to the incompressible Euler equations., *Comm. in Partial Diff. Eq.* **25**, no. 3-4, (2000), 737-754.

- [10] BRENIER Y., GRENIER E., Sticky particles and scalar conservation laws, *SIAM J. Numer. Anal.* **35**, no. 6, (1998), 2317-2328.
- [11] BRESSAN, A., The unique limit of the Glimm scheme, *Arch. Rational Mech. Anal.* **130**, (1995), 205-230.
- [12] BRESSAN, A., LEFLOCH, PH. Uniqueness of weak solutions to systems of conservation laws, *Arch. Rational Mech. Anal.* **140**, (1997), 301-317.
- [13] BRÉZIS, H., *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, (1983).
- [14] CARPIO, A., Long-time Behaviour for Solutions of the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck Equation, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **21**, (1997), 985-1014.
- [15] CARRILLO J.A., SOLER J., On the initial value problem for the VPFP system with initial data in L^p spaces, *Math. Meth. in the Appl. Sci.* **18** (1995), 825-839.
- [16] CARRILLO J.A., SOLER J., On the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck equations with measures in Morrey spaces as initial data, *J. Math. Anal. Appl.* **207** (1997), 475-495.
- [17] CARRILLO J.A., SOLER J., VÁZQUEZ, J.L., Asymptotic behaviour and self-similarity for the three-dimensional Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system, *J. Funct. Anal.* **141** (1996), no. 1, 99-132.
- [18] CASTELLA, F., L^2 Solutions to the Schrödinger-Poisson System: Existence, Uniqueness, Time Behaviour, and Smoothing Effects, *Math. Methods Appl. Sci.*, **8**, (1997) 1051-1083.
- [19] CAZENAVE, T., *An introduction to nonlinear Schrödinger Equation*, Second Edition, Textos de Métodos Matemáticas 26, Universidade Federal do Rio de Janeiro (1993).
- [20] CERCIGNANI, C., *The Boltzmann equation and its Applications*, Series: Applied mathematical sciences (Springer-Verlag, New York, 1988).
- [21] CERCIGNANI, C., ILLNER, R., PULVIRENTI, M., *The Mathematical Theory of Dilute Gases*, Series: Applied mathematical sciences (Springer-Verlag New York, Inc., 1994).
- [22] CONSTANTIN P., MAJDA A.J., TABAK E., Formation of Strong Fronts in the 2 - D Quasigeostrophic Thermal Active Scalar, *Nonlinearity* **7**, (1994), 1945-1533.

- [23] CHEN G.-Q., RASCLE M., Initial layers and uniqueness of solutions to conservation laws *Arch. Rational Mech. Anal.* **153**, (2000), 205-220.
- [24] DAFERMOS, C., Generalized characteristics in hyperbolic systems of conservation laws, *Arch. Rational Mech. Anal.* **107**, (1989), 127-155.
- [25] DAFERMOS, C., GENG, X., Generalized characteristics, uniqueness and regularity of solutions in a hyperbolic systems of conservation laws, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Nonlinéaire* **8**, (1991), 231-269.
- [26] DAVIDOV, *Theorie du Solide*, Mir, Moscow, (1976).
- [27] DEGOND, P., Global existence of smooth solutions for the Vlasov-Fokker-Planck equation in 1 and 2 space dimensions, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4)* **19**, (1986), 519-542.
- [28] FEYNMAN R.P, HIBBS, A.R. *Quantum mechanics and path integrals*, (1965).
- [29] FEYNMAN R.P *Statistical mechanics. A set of lectures*, Addison-Wesley, New York, (1972).
- [30] FILIPPOV, A.F., Differential equation with discontinuous right-hand side, *A.M.S. Translations, Series 2*, Vol. **42**, (1962), 199-231.
- [31] GÉRARD P., Mesures semi-classiques et ondes de Bloch, *Sem. Ecole Polytechnique. XVI* (1991), 1-19.
- [32] GÉRARD P., MARKOWICH P., MAUSER N., POUPAUD F., Homogenization limits and Wigner transforms, *Commun. Pure Appl. Math.* **50**, (1997), 323-379.
- [33] GÉRLACH B., LÖWEN H., Analytical properties of polaron system or: Do polaronic phase transitions exist or not?, *Rev. Mod. Phys.* **63**, (1991), 63-90.
- [34] GILBARG D., TRUDINGER N. D., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo. (1983).
- [35] GLASSEY, R., *The Cauchy Problem in Kinetic Theory*, S.I.A.M., Philadelphia, (1996).
- [36] GLIMM, J., Solutions in the large for nonlinear hyperbolic system of equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **18**, (1965), 697-715.

- [37] GODLEWSKI E., RAVIART P.A., *Hyperbolic systems of conservation laws*, SMAI no. 3/4, Paris, (1991).
- [38] GOLDSTEIN H., *Classical Mechanics, Second edition*, Addison-Wesley P.C., Inc. Reading, Massachusetts, U.S.A., (1980)
- [39] GOLSE F., SAINT-RAYMOND L., The Vlasov-Poisson system with strong magnetic field., *J. Math. Pures Appl.* **78**, (1999), 798-817.
- [40] HAUG H., JAUHO A.P., *Quantum Kinetics in Transport and Optics of Semiconductors*, Springer-Verlag, Berlin, (1998).
- [41] HERRERO, M.A., VELÁZQUEZ, J.J.L., Singularity patterns in a chemotaxis model, *Math. Ann.* **306**, (3), (1996), 583-623.
- [42] HERRERO, M.A., MEDINA, E., VELÁZQUEZ, J.J.L., Finite time aggregation into a single point in a reaction-diffusion system, *Nonlinearity* **10**, (1997), 1739-1754.
- [43] HERRERO M.A., MEDINA B., VELÁZQUEZ J.J.L., Self-similar Blow-up for a Reaction-Diffusion System, *J. Comp. App. Math.* **97**, (1998), 99-119.
- [44] ILLNER R., ZWEIFEL F., LANGE H., Global Existence, Uniqueness and Asymptotic Behaviour of Solutions of the Wigner-Poisson and Schrödinger-Poisson Systems, *Math. Methods Appl. Sci.*, **17**, (1994), 349-376.
- [45] JABIN P.E., Macroscopic limit of Vlasov type equations with friction, *Annales Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire*, **17**, no. 5, (2000), 651-672.
- [46] KELLER, E.F., SEGEL, L.A., Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability, *J. Theor. Biol.* **26**, (1970), 399-415.
- [47] KRUSHKOV S.N., First order quasilinear equations in several independent variables, *Math. URSS Sbornik* **10**, (1970), 217-243.
- [48] LADYŽENSKAJA, O.A., SOLONNIKOV, V.A.; URAL'CEVA, N.N., *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, (Russian). Translations of Mathematical Monographs, Vol. **23** American Mathematical Society, Providence, R.I. (1967) xi+648 pp.

- [49] LIEB E.H., Existence and Uniqueness of the Minimizing Solution of Choquard's Nonlinear Equation, *Studies in Applied Mathematics*, **57**, (1977), 93-105.
- [50] LIEB E.H., THOMAS L.E., Exact Ground State Energy of the Strong-Coupling Polaron, *Commun. Math. Phys.*, **183**, 511-519, (1997); **188**, (1997), 499-500.
- [51] LIONS P.L., PAUL T., Sur les mesures de Wigner, *Rev. Mat. Iberoamericana* **9**, (1993), 553-618.
- [52] MARKOWICH P., MAUSER N.J., The classical limit of a quantum self-consistent quantum-Vlasov equation in 3-D, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **3**, (1993), 109-124.
- [53] MARKOWICH P., MAUSER N.J., POUPAUD F., Wigner series and semiclassical limits with periodic potential, *Journées EDP (Saint Jean de Monts 1993)* **XVII**, (1993), 1-13.
- [54] MARKOWICH, P., RINGHOFER, C.A., SCHMEISER, C., *Semiconductors equations*, Springer-Verlag, Wien (1990).
- [55] NAGAI, T., Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system, *Adv. Math. Sci. Appl.* **5**, no. 2, (1995), 581-601.
- [56] NIETO, J., *A generalized model to the polaron*, aceptado en *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*
- [57] NIETO, J., Hydrodynamical limit for a drift-diffusion system modeling large-populations dynamics, preprint.
- [58] NIETO, J., POUPAUD, F., SOLER, J., About uniqueness of weak solutions to quasi-linear equations of first order, sometido.
- [59] NIETO, J., POUPAUD, F., SOLER, J., High-Field Limit for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck System, *Arch. Rational Mech. Anal.* **158**, *1*, (2001), 29-59.
- [60] OLEINIK, O. A., Discontinuous solutions of non-linear differential equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **109**, (1956), 1098-1101, (Russian) and *A.M.S. Translation* **26**, (1963), 95-172.
- [61] ONO, K., STRAUSS, W.A., Regular solutions of the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system, *Discrete Contin. Dynam. System*, **6**, no. 4, (2000), 751-772.

- [62] PAZY A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 44, Springer-Verlag, New York Inc. (1983).
- [63] POUPAUD F., Runaway phenomena and fluid approximation under high fields in semiconductor kinetic theory, *Z. Angew. Math. Mech.* **72**, (1992), 359-372.
- [64] POUPAUD, F. & RASCLE, M., Measure solutions to the linear multi dimensional transport equation with non-smooth coefficients, *Comm. Partial Dif. Eq.* **22**, No. 1-2, (1997), 337-358.
- [65] POUPAUD F., SOLER J., Parabolic Limit and Stability of the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system, *Math. Mod. Meth. in App. Sci.*, **10**, no. 7, (2000), 1027-1045.
- [66] PROTTER M.H., WEINBERGER H.F., *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer-Verlag, New York Inc., (1984).
- [67] RASCLE M, ZITI C., Finite time blow-up in some models of chemotaxis, *J. Math. Biol.*, **33**, (1995), 388-414.
- [68] RAVIART, P.A., An analysis of particle method, *Lect. Notes Math.* **1127**, (1985), 243-324.
- [69] REED M., SIMON B., *Methods of modern mathematical physics*, Vol. 1, Academic Press, (1980).
- [70] REIN, G., WECKLER, J., Generic global classical solutions of the Vlasov-Fokker-Planck-Poisson system in three dimensions, *J. Differential Equations*, **99**, no. 1, (1992), 59-77.
- [71] RISKEN, H., *The Fokker-Planck equation. Methods of Solutions and Applications*, Springer-Verlag, Berlin Inc., (1988).
- [72] ROBERT R., Unicité de la solution faible à support compact de l'équation de Vlasov Poisson, *C. R. Acad. Sci., Sér. I*, **324**(8), (1997), 873-877.
- [73] RUIZ-ARRIOLA E., SOLER J., A variational Approach to the Schrödinger Poisson System: Asymptotic Behaviour, Breathers and Stability, *Jour. Stat. Phys.*, Vol. **113**, (2001), 1069-1105.
- [74] SCHWARTZ, L., *Théorie des distributions*, (2 volumes), *Actualités scientifiques et industrielles* **1091**, **1122**, Herman, (Paris 1950-51).

- [75] SIMON J., Compact Sets in the Space $L^p(0, T; B)$, *Annali di Matematica Pura ed Applicata, Serie IV* **146**, (1987), 65-96.
- [76] SERRE, D., *Système de lois de conservation I et II*, Diderot, Paris, New York, Amsterdam (1996).
- [77] STEIN E.M., *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.
- [78] VASSEUR, A., Time regularity for the system of isentropic gas dynamics with $\gamma = 3$, *Comm. Partial Diff. Eqs* **24**, (1999), 1987-1997.
- [79] VASSEUR, A., Strong traces for solutions to multidimensional scalar conservation laws, *Preprint Mathématiques, Université de Nice*, **593** (2000).
- [80] VICTORY H.D., On the existence of global weak solutions for VPF systems, *J. Math. Anal. and Appl.* **160**, (1991), 515-553.
- [81] VICTORY H.D., O'DWYER B.P., On Classical Solutions of VPF Systems, *Indiana Univ. Math. J.* **39**, (1990), 105-157.
- [82] WIGNER E., On the Quantum Correction for the Thermodynamic Equilibrium, *Phys. Rev.* **40**, (1932), 749-759.
- [83] ZHENG Y., MAJDA A., Existence of global weak solutions to one-component Vlasov-Poisson and Fokker-Planck-Poisson systems in one space dimension with measures as initial data, *Comm. Pure Appl. Math.* **47**, (1994), 1365-1401.



Biblioteca Universitaria de Granada



01066397