

C/M



UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS

DON ENRIQUE HITA VILLAVERDE, PROFESOR ADJUNTO
NUMERARIO Y SECRETARIO DE LA FACULTAD DE CIEN
CIAS DE LA UNIVERSIDAD DE GRANADA,

Núm _____

C E R T I F I C O: Que la presente
tesis doctoral corresponde a la presentada en
esta Facultad por D. Juan de Dios Pérez Jiménez,
que fué calificada con Sobresaliente -
"Cum laude" el día 25 de Marzo de 1.983 por -
el tribunal correspondiente que fué aprobado
en Junta de Facultad celebrada el día 22 de -
Marzo de 1.983, siendo el título "Geometría -
de variedades Kaehlerianas cuaternionicas".

Y para que conste y surta los efec-
tos oportunos se extiende la presente certifi-
cación con el visto bueno del Il^{mo}. Sr. Deca-
no de la Facultad de Ciencias en Granada a -
seis de abril de mil novecientos ochenta y -
tres.

Vº. Bº.

EL DECANO,



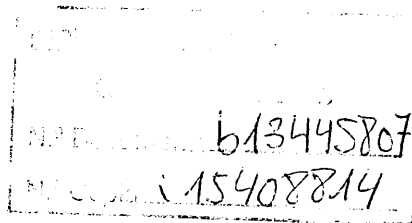
Juan de Dios Pérez Jiménez

E. Hita V.

GEOMETRIA DE VARIEDADES KAHLERIANAS CUATERNIONICAS

Juan de Dios Pérez Jiménez

Tesis doctoral, dirigida por el Prof. Dr. D. F. García Santos, adjunto contratado de Geometría Diferencial de la Universidad de Granada. Fue leída el día 25 de Marzo de 1983, ante el tribunal formado por los Profesores: Etayo Miqueo, Viviente Mateu, Esteban Carrasco, Turiel Sandin, Urbano Pérez-Aranda. Obtuvo la calificación de sobresaliente "cum laude".



D. LUIS ESTEBAN CARRASCO, Catedrático y Director del Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada

CERTIFICA: Que habiendo sido nombrado ponente de la memoria realizada por D. Juan de Dios Pérez Jiménez, bajo el título "Geometría de variedades Kaehlerianas cuaterniónicas", para optar al grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas, ha examinado dicha memoria y ratifica su autorización para que sea presentada por el interesado ante la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firmo el presente certificado en Granada a 21 de Febrero de 1983.

A mis padres

I N D I C E

INTRODUCCION	1
--------------------	---

C A P I T U L O I

VARIEDADES KAEHLERIANAS CUATERNIONICAS DE INDICE $4s$

§1.- Definición y algunas propiedades	14
§2.- Tensor curvatura de una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$	18
§3.- Tensor de Ricci de una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$	23

C A P I T U L O I I

VARIEDADES KAEHLERIANAS CUATERNIONICAS DE INDICE $4s$ CON CURVATURA SECCIONAL CUATERNIONICA CONSTANTE

§1.- Curvatura y curvatura seccional cuaterniónica	30
§2.- Curvatura seccional cuaterniónica y curvatura seccional totalmente real	38
§3.- Algunas condiciones suficientes para la constancia de la curvatura seccional cuaterniónica ..	45
§4.- Comportamiento especial de las curvaturas seccionales cuaterniónica y totalmente real para variedades Kaehlerianas cuaterniónicas de índice estrictamente positivo	48

C A P I T U L O I I I

CURVATURA SECCIONAL CUATERNIONICA Y GEOMETRIA CUATERNIONICA

§1.- Preliminares	53
§2.- Relación entre la curvatura seccional y la curvatura seccional cuaterniónica	54
§3.- Difeomorfismos que conservan la curvatura seccional cuaterniónica	60

C A P I T U L O I V

HIPERSUPERFICIES REALES PSEUDO-EINSTEIN DEL

ESPACIO PROYECTIVO CUATERNIONICO

§1.- Fórmulas básicas	73
§2.- Hipersuperficies reales pseudo-Einstein de una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice 4s con curvatura seccional cuaterniónica constante..	80
§3.- Conjunto focal para una subvariedad del espacio proyectivo cuaterniónico	86
§4.- Estructura de variedad de las hojas del conjunto focal	101
§5.- Una clasificación de hipersuperficies reales pseudo-Einstein del espacio proyectivo cuaterniónico	107
BIBLIOGRAFIA	112

I N T R O D U C C I O N

La idea expuesta por C. Ehresmann en 1950, según la cual sobre una variedad diferenciable de dimensión adecuada pueden ser definidas cierto tipo de estructuras geométricas con sólo dotar a dicha variedad de un fibrado adecuado subordinado al fibrado tangente, es básica para el desarrollo actual de la Geometría Diferencial. En efecto, C. Ehresmann adelanta en ella el importante concepto de G -estructura sobre una variedad diferenciable, concepto que sería formalmente definido por S.S. Chern en 1953, al cual se puede considerar como el auténtico impulsor de la Geometría Diferencial global.

El objetivo principal de la presente memoria es estudiar una cierta G -estructura de una variedad diferenciable, centrandó el problema en un aspecto particular de la misma. Concretamente, nos interesamos, en primer lugar, en el estudio de los llamados invariantes de tipo algebraico (tensor de Ricci y curvatura) de la G -estructura, para, en función de dichos invariantes, obtener información global sobre la misma y, a la vez, tratar de identificar algún elemento característico de la geometría de dicha G -estructura.

Por otro lado, un buen conocimiento de la G -estructura en la línea anteriormente citada facilita el estudio de las subvariedades que admite dicha G -estructura. Como se verá, la G -estructura que en esta memoria se va a considerar impone fuertes restricciones sobre la geometría de sus subvariedades naturales, hasta el extremo de que el estudio de las mismas resulta trivial desde ciertos puntos de vista. Precisamente esas restricciones,

mediante el uso de una técnica adecuada, permiten obtener una importante información acerca de la geometría de una cierta familia de subvariedades en los espacios modelo de esta G-estructura.

Es conocido que una G-estructura sobre una variedad diferenciable M de dimensión n es dar una reducción del grupo estructural del fibrado de las referencias lineales sobre M , $L(M)$, al subgrupo de Lie G de $GL(n, R)$. Así, por ejemplo, si $G = O^s(n)$, una $O^s(n)$ -estructura sobre M es equivalente a dar una métrica pseudo-Riemanniana de índice s sobre M . Si $G = GL(n, C)$, considerado como subgrupo de $GL(n, R)$, dar una $GL(n, C)$ -estructura sobre una variedad diferenciable M , de dimensión $2n$, es equivalente a considerar una estructura casi-compleja sobre M .

La definición que C. Ehresmann dio en 1950 de estructura casi-cuaterniónica sobre una variedad diferenciable M , que consiste en la existencia sobre M de tres campos globales de tensores de tipo $(1,1)$ I, J, K verificando las mismas propiedades que las unidades del álgebra de los cuaternios, es decir, $I^2 = J^2 = K^2 = -Id.$, $IJ = -JI = K$, etc., fuerza a que la dimensión de M sea múltiplo de cuatro, y equivale a dar una $GL(n, Q)$ -estructura sobre M , considerando $GL(n, Q)$ como subgrupo de $GL(4n, R)$. El propio C. Ehresmann ya señaló que, en este caso, la variedad M es localmente afín y, por tanto, trivial en cierto sentido, (ver [15]).

Es conocido, sin embargo, que el espacio proyectivo cuaterniónico no admite ninguna estructura casi-compleja y, por tanto, no puede admitir ninguna casi-cuaterniónica en el sentido de C. Ehresmann.

Si (M, g) es una variedad pseudo-Riemanniana, es decir, una variedad diferenciable M dotada de una $O^s(n)$ -estructura, es

sabido que M. Berger en 1955 estudió qué grupos son admisibles como grupos de holonomía por dicha variedad. Entre ellos se encuentran los grupos $Sp^S(n)$ y $Sp^S(n).Sp(1)=Sp^S(n)\times Sp(1)/\{\pm 1\}$.

Así pues, el primer objetivo de la presente memoria es el estudio geométrico, en el sentido anteriormente expuesto, de las $Sp^S(n).Sp(1)$ -estructuras sobre una variedad diferenciable.

Hasta ahora, diversos autores han estudiado, en distintas direcciones, las $Sp(n).Sp(1)$ -estructuras sobre una variedad diferenciable M . Así, E. Martinelli, en 1959, prueba que al espacio proyectivo cuaterniónico se le puede dotar de una estructura de variedad diferenciable que no es localmente afín y que puede ser dotado de una métrica de forma que la estructura resultante se ajusta en realidad a una $Sp(n).Sp(1)$ -estructura y que él llama estructura casi-hermítica cuaterniónica generalizada, sobre la cual obtiene algunos resultados interesantes que ya señalan diferencias esenciales entre la geometría de las $Sp(n).Sp(1)$ -estructuras y las $U(n)$ -estructuras (ver [31],[32] y [33]).

E. Bonan en 1967, en su tesis dedicada a estudiar diversas G -estructuras de tipo cuaterniónico, define lo que llama variedad casi cuaternal: "Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $Q(M)$ un espacio fibrado localmente trivial definido sobre M , de fibra tipo el álgebra Q de los cuaternios, con grupo estructural isomorfo a $SO(3)$; entonces una estructura casi cuaternal sobre M es dar un campo global R sobre M , que asocia a cada punto $x \in M$ una representación efectiva R_x de la fibra sobre x en $Q(M)$ en la fibra sobre x en TM . Se sigue de forma inmediata que en estas condiciones $n=4m$ ".

Es de especial interés, para un posterior desarrollo tensorial de la geometría de dichas variedades, el siguiente resul-

tado de E. Bonan:

"La variedad diferenciable M es casi cuaternal si y sólo si existe un recubrimiento de M por abiertos U, V, \dots cada uno de los cuales es una variedad casi-cuaterniónica en el sentido de C. Ehresmann. Además, si I^U, J^U, K^U e I^V, J^V, K^V son los correspondientes campos de tensores sobre U y V , para todo punto $x \in U \cap V \neq \emptyset$, las álgebras que engendran I^U, J^U, K^U e I^V, J^V, K^V coinciden".

También E. Bonan define el concepto de estructura casi-hermitial como una estructura riemanniana sobre una variedad casi cuaternal invariante por las estructuras casi-cuaterniónicas. Y demuestra que dar una estructura casi hermitial sobre M equivale a dar una $Sp(m).Sp(1)$ -estructura (ver [6]).

Entre otros autores que han estudiado este tipo de geometría, utilizando distintas técnicas, en años posteriores, cabe citar a V.Y. Kraines, [26], A. Gray, [19], y D.V. Alekseevskii, [1] y [2].

En 1974 S. Ishihara traduce la definición de variedad casi hermitial de E. Bonan a un lenguaje tensorial que le permite obtener, de forma sensiblemente más simple, importantes resultados ya obtenidos con técnicas mucho más sofisticadas por D.V. Alekseevskii ([1]). Además, da el nombre de variedades Kaehlerianas cuaterniónicas a dichas variedades, denominación actualmente utilizada, ([23]).

Precisamente, nuestra definición de las variedades cuya geometría es el objeto de estudio de la presente memoria, va a estar motivada en el tratamiento que da S. Ishihara a las $Sp(m).Sp(1)$ -estructuras.

Así, en el Capítulo I, se da la definición de variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$, como una variedad pseudo-

Riemanniana (M, g) con métrica g de índice t sobre la que está definido un fibrado tensorial de dimensión tres, V , de tensores de tipo $(1,1)$, con base local de estructuras casi hermíticas I, J, K verificando las siguientes condiciones:

a) $IJ = -JI = K$

b) Para toda sección cruzada ϕ de V y todo campo de vectores X sobre M , $\nabla_X \phi$ es otra sección cruzada de V , donde ∇ denota la diferenciación covariante asociada a la conexión de Levi-Civita de (M, g) .

La condición b) es equivalente a la condición

b') $\nabla_X I = r(X)J - q(X)K$

$\nabla_X J = -r(X)I + p(X)K$

$\nabla_X K = q(X)I - p(X)J$

donde p, q y r son 1-formas locales sobre M y X un campo de vectores arbitrario sobre M .

Obsérvese que, de la definición anterior, se deduce que el índice t de g debe ser un múltiplo de cuatro, $t=4s$, y que cuando $t=0$ se tienen las variedades Kaehlerianas cuaterniónicas definidas por S. Ishihara. Asimismo, un proceso análogo al utilizado por E. Bonan prueba la equivalencia de dicha definición con la existencia de una $Sp^S(m).Sp(1)$ -estructura sobre M .

En el caso de admitir el fibrado V una base global de estructuras casi hermíticas, la geometría resultante es trivial, caso que corresponde a las $Sp^S(m)$ -estructuras sobre M .

Teniendo en cuenta el importante resultado obtenido para variedades Kaehlerianas cuaterniónicas, según el cual, si su dimensión es ≥ 8 , todas son espacios Einstein, el Capítulo I está dedicado al estudio del tensor de Ricci de una variedad Kaehle-

riana cuaterniónica de índice $4s$.

A partir de la definición de dichas variedades, se estudia la relación del tensor de curvatura con las bases locales $\{I, J, K\}$ de V , obteniéndose tres 2-formas locales sobre M , expresables en función de las 1-formas locales p, q y r . Estas 2-formas están íntimamente relacionadas con el tensor de Ricci de la variedad y permiten demostrar que este es paralelo.

Dicho paralelismo y la generalización hecha por H. Wu del Teorema de descomposición de de Rham para el caso pseudo-Riemanniano, [47], permiten demostrar el siguiente resultado fundamental de este Capítulo:

TEOREMA.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ y dimensión ≥ 8 . Entonces M es un espacio Einstein.

En el Capítulo II se estudia la curvatura de una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$. En este sentido, cabe resaltar la existencia de secciones que, en cierto modo, son características de dicha geometría y tales que el conocimiento de la curvatura sobre ellas permite obtener información acerca del comportamiento de la curvatura sobre la variedad. Así, dado $X \in T_p M$ y una base local $\{I, J, K\}$ de V en p , los vectores X, IX, JX y KX generan un subespacio de dimensión 4 de $T_p M$ que se puede considerar adaptado a la geometría de M , pues es invariante por V . La curvatura seccional para cualquier sección no degenerada de dimensión dos de dicho subespacio se llama curvatura seccional cuaterniónica y las variedades sobre las cuales esta es constante son destacables en esta geometría.

El Capítulo se inicia dando una caracterización del tensor de curvatura de una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice

$4s$ y de curvatura seccional cuaterniónica constante, si su dimensión es ≥ 8 , expresándose dicho tensor de curvatura en función de la métrica y de las bases locales $\{I, J, K\}$ de V .

A continuación se construye el espacio proyectivo cuaterniónico QP_S^m de índice $4s$ y se calcula su tensor de curvatura, obteniéndose un ejemplo de variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ y curvatura seccional cuaterniónica constante positiva. El espacio hiperbólico cuaterniónico de índice $4s$, QH_S^m , se obtiene a partir de QP_{m-s}^m tomando la métrica opuesta de la obtenida sobre QP_{m-s}^m , siendo un ejemplo de variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ y curvatura seccional cuaterniónica constante negativa. Por último, se obtiene que Q_S^m es una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ y curvatura seccional cuaterniónica constante nula.

Estos espacios son los espacios modelos de la familia de variedades Kaehlerianas cuaterniónicas de índice $4s$ y curvatura seccional cuaterniónica constante que verifican ciertas condiciones topológicas y, debido a la importancia de dichos espacios, el resto del Capítulo está dedicado a obtener condiciones suficientes para que una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ tenga dicha propiedad.

En este sentido, cabe destacar la existencia de las llamadas secciones totalmente reales, ya que si la curvatura seccional sobre ellas es constante, entonces es también constante la curvatura seccional cuaterniónica.

Por último, cabe destacar que si $0 < 4s < \dim M$, las curvaturas seccionales cuaterniónicas y totalmente reales tienen un comportamiento especial, el cual marca diferencias importantes con el

caso de índice $4s=0$. Asimismo, la anulación de la curvatura sobre ciertas secciones degeneradas da una condición suficiente para la constancia de la curvatura seccional cuaterniónica.

Como se ha visto en el Capítulo II, la curvatura seccional cuaterniónica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$, si es constante, determina completamente la curvatura de dicha variedad. Por otro lado, es bien conocido que la curvatura seccional de una variedad de Riemann determina completamente la curvatura de la variedad. La primera parte del Capítulo III está dedicada a probar si la curvatura seccional cuaterniónica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica determina completamente su curvatura.

En efecto, en §2 de dicho Capítulo, se prueba que la curvatura seccional cuaterniónica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica determina, algebraicamente, la curvatura seccional de la misma y, en consecuencia, por el resultado anterior de geometría de Riemann, determina la curvatura de dicha variedad.

Este hecho hace pensar que la curvatura seccional cuaterniónica pueda ser el elemento característico anteriormente citado.

R.S. Kulkarni en 1970 plantea el problema de dar una especie de recíproco al clásico Teorema Egregium de Gauss, en el sentido siguiente: ¿La curvatura seccional de una variedad de Riemann puede determinar completamente la geometría de la misma? En esta línea demuestra el siguiente Teorema, [27],: "Sean M y M' dos variedades de Riemann y f un difeomorfismo entre ellas que conserva las curvaturas seccionales. Si $\dim M \geq 4$, entonces, o bien M y M' son de curvatura seccional constante y, por tanto, localmente isométricas, o f es una isometría".

El mismo R.S. Kulkarni, en 1974,[28], demuestra que la curvatura seccional holomorfa de una variedad Kaehleriana caracteriza su geometría, en el sentido anterior.

La última parte del Capítulo III se dedica a probar que, efectivamente, la curvatura seccional cuaterniónica es el elemento característico de la geometría Kaehleriana cuaterniónica. Concretamente, se prueba el siguiente:

TEOREMA.- Sean M y \bar{M} dos variedades Kaehlerianas cuaterniónicas y f un difeomorfismo entre ellas que conserva las curvaturas seccionales cuaterniónicas. Si la dimensión de M es ≥ 8 , entonces:

- 1) Las curvaturas seccionales cuaterniónicas de M y \bar{M} son constantes, y, por tanto, M y \bar{M} son localmente isométricas, ó
- 2) f es una isometría.

La formulación anterior en términos de aplicaciones que conservan la curvatura seccional cuaterniónica es un tipo de formulación del llamado "problema de equivalencia" para este tipo de G -estructuras. El planteamiento general de dicho problema es debido a E. Cartan, (ver [24]).

Obsérvese que el resultado anteriormente expuesto es válido, trivialmente, en el caso de dimensión 4.

Aunque a lo largo de dicho Capítulo el índice que se ha considerado es 0, los resultados obtenidos son válidos también para variedades Kaehlerianas cuaterniónicas de índice estrictamente positivo, si bien no han sido expuestos en la presente memoria.

El conocimiento de la G -estructura, al nivel hasta aquí desarrollado, permite, en principio, empezar a abordar el estudio de sus subvariedades.

Es conocida la importancia fundamental que tiene para el estudio de la teoría de subvariedades el conocimiento de la segun-

da forma fundamental de la inmersión. En este sentido, la no necesaria diagonalización de la misma, en el caso de que la variedad ambiente esté dotada de una métrica pseudo-Riemanniana, añade nuevos elementos de dificultad a su estudio, por lo que, hasta ahora, sólo se han podido obtener resultados demasiado aislados como para considerar dicho estudio como sistemático.

En el caso de una variedad Kaehleriana cuaterniónica son conocidos bastantes resultados acerca de sus subvariedades, fundamentalmente sobre las subvariedades que, en cierto sentido, responden a un comportamiento lógico de la estructura cuaterniónica sobre ellas (subvariedades cuaterniónicas, totalmente reales, totalmente complejas, CR-subvariedades cuaterniónicas). De entre estas, las subvariedades cuaterniónicas son las más adaptadas a la estructura de la variedad ambiente, ya que heredan totalmente su geometría, como se deduce del hecho de ser todas totalmente geodésicas (ver [11] y [19]).

Este hecho que, en principio, trivializa el estudio de dichas subvariedades será de especial importancia en el estudio de las hipersuperficies reales pseudo-Einstein del espacio proyectivo cuaterniónico, siendo este el objetivo del Capítulo IV.

En 1938, A. Fialkow clasifica las hipersuperficies Einstein de una variedad de Riemann con curvatura seccional constante, (ver [16]). Posteriormente, M. Kon en 1979 se plantea el problema de clasificación de las hipersuperficies Einstein del espacio proyectivo complejo, pero en el desarrollo de dicho problema encuentra que no existen tales hipersuperficies, hecho que le induce a debilitar la condición de que sean Einstein, definiendo una familia más general de hipersuperficies, que llama pseudo-Einstein, familia que clasifica basándose en re-

sultados anteriores de R. Takagi. Para dicha clasificación es fundamental el conocimiento de las álgebras de Lie semisimples hermíticas, y, siendo aún desconocida una clasificación de este tipo para el caso cuaterniónico, la técnica empleada por Kon no es, en principio adaptable para el caso que nos ocupa, (ver [25], [42] y [43]). En 1982, T.E. Cecil y P.J. Ryan, utilizando la teoría de puntos focales, obtienen la misma clasificación que da M. Kon, (ver [10]).

Es bien conocido que toda hipersuperficie totalmente umbilical del espacio euclídeo es un abierto de un hiperplano o de una esfera, hecho fácilmente demostrable teniendo en cuenta que la única curvatura principal λ sobre la hipersuperficie es constante y entonces, si $\lambda=0$ se sigue la primera parte de la afirmación y si $\lambda \neq 0$, se obtiene que los puntos focales $f_{\lambda}(x) = x + \frac{1}{\lambda} \xi$, donde ξ es el normal unitario de la hipersuperficie, coinciden todos, y, en consecuencia, la hipersuperficie queda sobre la esfera de radio $\frac{1}{\lambda}$ centrada en el único punto focal.

Esta idea sugiere una forma de atacar los problemas de clasificación de hipersuperficies en términos de la naturaleza de las curvaturas principales de las mismas. En esta línea, T.E. Cecil y P.J. Ryan demuestran, en [9], que el conjunto de puntos focales correspondientes a una curvatura principal, bajo ciertas condiciones, tiene estructura de variedad diferenciable que la hace subvariedad del espacio ambiente.

Se comienza el Capítulo IV estudiando las fórmulas básicas para una hipersuperficie real de una variedad Kaehleriana cuaterniónica. Sobre tal hipersuperficie existen tres campos de vectores tangentes destacados, correspondientes a las imágenes por las bases del fibrado V del único campo de vectores normales a la

hipersuperficie. Se obtiene el resultado de que si dichos campos de vectores tangentes son autovectores de la segunda forma fundamental de la inmersión con igual autovalor, entonces este es localmente constante sobre la hipersuperficie, resultado de gran importancia para el posterior desarrollo del Capítulo.

A continuación se estudia la segunda forma fundamental de las hipersuperficies pseudo-Einstein de una variedad Kaehleriana cuaterniónica con curvatura seccional cuaterniónica constante, obteniéndose como resultado más general el siguiente:

TEOREMA.- Si M es una hipersuperficie real pseudo-Einstein de una variedad Kaehleriana cuaterniónica de curvatura seccional cuaterniónica constante, entonces M tiene, como máximo, cuatro curvaturas principales distintas.

A continuación, si M es una subvariedad real del espacio proyectivo cuaterniónico, se encuentra una fórmula para la localización de sus puntos focales en función de la segunda forma fundamental de la inmersión. Dicha fórmula da la máxima información en el caso de ser M una subvariedad cuaterniónica o una hipersuperficie real sobre la que los tres campos antes mencionados son principales. Esta información acerca del conjunto focal de una subvariedad cuaterniónica no añade, lógicamente, nada nuevo al conocimiento de la geometría de la subvariedad, pero, no obstante, será de capital importancia en el problema que nos ocupa.

Sobre la estructura del conjunto focal para el caso de una hipersuperficie se obtiene el siguiente resultado:

TEOREMA.- Sea M una hipersuperficie real conexa y orientable de QP^m sobre la que $I\xi, J\xi$ y $K\xi$ son vectores principales con curvatura principal localmente constante $\mu = 2\cot 2r$. Si la aplicación focal ϕ_r correspondiente a dicha curvatura principal tiene rango

constante q sobre M , entonces

a) q es múltiplo de 4 y todo punto $x_0 \in M$ tiene un entorno U tal que $\phi_r U$ es una subvariedad cuaterniónica de dimensión q de QP^m .

b) U queda sobre el tubo de radio r sobre $\phi_r U$.

Con este resultado se está en condiciones de demostrar el Teorema Fundamental del Capítulo:

TEOREMA.- Sea M una hipersuperficie real conexa y pseudo-Einstein del espacio proyectivo cuaterniónico QP^m . Si $I\xi$, $J\xi$ y $K\xi$ son vectores principales con la misma curvatura principal, entonces M es un subconjunto abierto de

a) Una hiperesfera geodésica, ó

b) Un tubo de radio r sobre el espacio proyectivo cuaterniónico QP^k , $0 < k < m-1$, con $0 < r < \pi/2$ y $\cot^2 r = \frac{4k+2}{4m-4k-2}$.

Aunque esta clasificación de hipersuperficies reales pseudo-Einstein de QP^m no es completa, generaliza un resultado de J.S. Pak, en el que clasifica las hipersuperficies Q -casi umbilicales del espacio proyectivo cuaterniónico, (ver [35]).

Deseo hacer constar mi más sincero agradecimiento al Director de esta memoria, Prof. F. García Santos, por su constante ayuda y estímulo durante la elaboración de la misma, así como al Prof. L. Esteban Carrasco, Director del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada.

Finalmente, quisiera agradecer a los Profesores J. Castellano y A. Martínez, su gran ayuda en la realización de la presente memoria.

C A P I T U L O I

VARIEDADES KAEHLERIANAS CUATERNIONICAS DE INDICE 4s

§1.- Definición y algunas propiedades.-

En el presente epígrafe se definen las variedades que van a ser objeto de estudio en la presente memoria.

DEFINICION I.1.1.-[23].- Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y supongamos que existe sobre M un fibrado vectorial, V , de dimensión 3 de tensores de tipo $(1,1)$ tal que en todo entorno coordinado U de M existe una base local de V , $\{I, J, K\}$ verificando

$$a) \quad I^2 = J^2 = K^2 = -Id$$

$$IJ = -JI = K$$

$$b) \quad JK = -KJ = I$$

$$KI = -IK = J$$

donde Id es el tensor identidad de tipo $(1,1)$ sobre M . Con estas condiciones (M, V) se dice una variedad casi cuaterniónica.

A partir de esta definición es fácil ver que la dimensión real, n , de una variedad casi cuaterniónica ha de ser múltiplo de cuatro, $n=4m$ ($m \geq 1$).

Sean U y U' dos entornos coordinados sobre M con $\{I, J, K\}$ e $\{I', J', K'\}$ bases locales de V sobre U y U' , respectivamente. Entonces, sobre $U \cap U'$, I', J' y K' han de ser una combinación lineal de I, J y K , o sea:

$$(I.1.1) \quad \begin{aligned} I' &= a_{11}I + a_{12}J + a_{13}K \\ J' &= a_{21}I + a_{22}J + a_{23}K \\ K' &= a_{31}I + a_{32}J + a_{33}K \end{aligned}$$

donde a_{ij} ($1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3$) son funciones sobre $U \cap U'$. De las condiciones a) y b) en la Definición I.1.1 se sigue fácilmente que la matriz $A=(a_{ij})$ es un elemento del grupo $SO(3)$.

Si se considera Q^n como espacio vectorial a la derecha sobre el álgebra de los cuaternios Q , $Q^n = \{(x^1, \dots, x^n)\}$, donde $x^l = x_1^l + ix_2^l + jx_3^l + kx_4^l$, con $x_i^l \in \mathbb{R}$ para $i=1,2,3,4, l=1, \dots, n$, se puede identificar Q^n con \mathbb{R}^{4n} de la siguiente forma: $(x^1, \dots, x^n) \in Q^n$ se identifica con $(x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n, x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^n, x_3^1, \dots, x_3^n, x_4^1, x_4^2, \dots, x_4^n)$. De esta manera, considerando en Q^n el producto por i, j y k , respectivamente, aparecen sobre \mathbb{R}^{4n} tres endomorfismos que se notarán I, J y K , dados como sigue:

$$I(x_1, x_2, \dots, x_{4n}) = (x_1 + ix_{n+1} + jx_{2n+1} + kx_{3n+1}, x_2 + ix_{n+2} + jx_{2n+2} + kx_{3n+2}, \dots, x_n + ix_{2n} + jx_{3n} + kx_{4n}).$$

$$i = (-x_{n+1} + ix_1 + jx_{3n+1} - kx_{2n+1}, -x_{n+2} + ix_2 + jx_{3n+2} - kx_{2n+2}, \dots, -x_{2n} + ix_n + jx_{4n} - kx_{3n}) = (-x_{n+1}, -x_{n+2}, \dots, -x_{2n}, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{3n+1}, x_{3n+2}, \dots, x_{4n}, -x_{2n+1}, -x_{2n+2}, \dots, -x_{3n}).$$

Es decir, $I(x_1, x_2, \dots, x_{4n}) = (-x_{n+1}, -x_{n+2}, \dots, -x_{2n}, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{3n+1}, x_{3n+2}, \dots, x_{4n}, -x_{2n+1}, -x_{2n+2}, \dots, -x_{3n})$.

Análogamente, $J(x_1, x_2, \dots, x_{4n}) = (-x_{2n+1}, \dots, -x_{3n}, -x_{3n+1}, \dots, -x_{4n}, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n})$

$K(x_1, x_2, \dots, x_{4n}) = (-x_{3n+1}, -x_{3n+2}, \dots, -x_{4n}, x_{2n+1}, x_{2n+2}, \dots, x_{3n}, -x_{n+1}, -x_{n+2}, \dots, -x_{2n}, x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Si sobre \mathbb{R}^{4n} se considera la base canónica, entonces I, J y K se pueden representar, respectivamente, por las siguientes matrices

$$(I.1.2) \quad I \equiv \begin{pmatrix} 0 & -E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & -E & 0 \end{pmatrix}, \quad J \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde E representa la matriz identidad de orden n.

De esta forma, sobre R^{4n} se tienen definidos tres endomorfismos I, J, K que verifican $I^2=J^2=K^2=-Id.$, $IJ=-JI=K$, $JK=-KJ=I$, $KI=-IK=J$.

Sea M una variedad casi cuaterniónica e $\{I, J, K\}$ una base local de V sobre un entorno coordenado U de M. Supongamos que sobre U existe un sistema de coordenadas (x_j) con respecto al cual I, J y K tienen componentes numéricas de la forma (I.1.2). En este caso se dirá que el fibrado V o la base local $\{I, J, K\}$ es integrable.

DEFINICION I.1.2.- Sea M una variedad casi cuaterniónica. Si sobre M se tiene definida una métrica pseudo-Riemanniana g con índice $t \geq 0$ tal que

$$(I.1.3) \quad g(\phi X, Y) + g(X, \phi Y) = 0$$

para cualquier sección cruzada ϕ de V, siendo X, Y campos de vectores arbitrarios sobre M, entonces se dirá que (M, V, g) es una variedad casi cuaterniónica de índice t.

NOTA I.1.3.- En el caso en que $t=0$ se tienen las llamadas variedades métricas casi cuaterniónicas, [23]. Nótese también que $t=4s$, $s \in N \cup \{0\}$.

Sea ∇ la diferenciación covariante asociada a la conexión de Levi-Civita de (M, V, g) .

DEFINICION I.1.4.- Sea (M, V, g) una variedad casi cuaterniónica de índice $4s$. Si se verifica la siguiente condición

(I.1.4) Para toda sección cruzada ϕ del fibrado V, $\nabla_X \phi$ es otra sección cruzada de V, cualquiera que sea el campo de vectores X sobre M,

se dice que (M, V, g) es una variedad Kaehleriana cuaterniónica de

índice 4s.

A partir de las condiciones a) y b) de la Definición I.1.1, es fácil ver que (I.1.4) es equivalente a la siguiente condición:

Si $\{I, J, K\}$ es una base local de V sobre un abierto coordinado U de M , entonces

$$(I.1.5) \quad \begin{aligned} \nabla_X I &= r(X)J - q(X)K \\ \nabla_X J &= -r(X)I + p(X)K \\ \nabla_X K &= q(X)I - p(X)J \end{aligned}$$

para cualquier campo de vectores X sobre M , donde p, q y r son 1-formas locales definidas sobre U .

Consideremos el álgebra de los cuaterniones Q , y sea Q_S^m el espacio Q^m dotado con la forma bilineal

$$b_{S,m}(z,w) = - \sum_{j=1}^S \bar{z}^j w^j + \sum_{k=S+1}^m \bar{z}^k w^k$$

donde $z=(z^1, \dots, z^m)$, $w=(w^1, \dots, w^m)$, con $z^i, w^i \in Q$, $i=1, \dots, m$. Sea $Sp^S(m) = \{A \in GL(m, Q) / b_{S,m}(Az, Aw) = b_{S,m}(z, w)\}$. Se considera la representación real de este grupo, es decir, el subgrupo de $SO^{4S}(4m)$ que deja invariante los tensores I, J y K de componentes respectivas dadas por (I.1.2), respecto de una base ortogonal del espacio vectorial métrico R_{4S}^{4m} , es decir, R^{4m} con la forma

$$t_{4S,4m}(X,Y) = - \sum_{j=1}^{4S} x^j y^j + \sum_{k=4S+1}^{4m} x^k y^k$$

siendo $X=(x^1, \dots, x^{4m})$, $Y=(y^1, \dots, y^{4m})$.

Se denota $Sp^S(m).Sp(1)$ el subgrupo $Sp^S(m) \times Sp(1) / \{\pm Id\}$ de $SO^{4S}(4m)$ y por $Sp^S(m)$ el subgrupo $Sp^S(m).Id$, donde Id es la transformación identidad de R_{4S}^{4m} .

Teniendo en cuenta las representaciones reales de dichos gru-

pos y con un razonamiento análogo al de Bonan [6, pág. 51], se tiene la siguiente

PROPOSICION I.1.5.- Una variedad pseudo-Riemanniana es una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ si y sólo si su grupo de holonomía es un subgrupo de $Sp^S(m).Sp(1)$.

NOTA I.1.6.- En el caso de que la base del fibrado V fuese global, se obtendría que el grupo de holonomía sería un subgrupo de $Sp^S(m)$. Este hecho generaliza la definición de estructura casi cuaterniónica que en principio dio Ehresmann, [15]. Véase también Martinelli, [31],[32],[33] e Ishihara, [23].

§2.- Tensor curvatura de una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$.

A partir de ahora una variedad Kaehleriana cuaterniónica se notará simplemente por M , sin hacer mención a la métrica g ni al fibrado V .

Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$. Sea R su tensor de curvatura Riemanniano, definido por

$$(I.2.1) \quad R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y, Z sobre M . El objetivo del presente epígrafe es estudiar el comportamiento de dicho tensor frente a la estructura cuaterniónica.

Sea $\{I, J, K\}$ una base local de V sobre el abierto U . Teniendo en cuenta las expresiones (I.1.5) y la fórmula de Maurer-Cartan, se tiene sobre U

$$(I.2.2) \quad \begin{aligned} R(X,Y)IZ &= \nabla_X \nabla_Y (IZ) - \nabla_Y \nabla_X (IZ) - \nabla_{[X,Y]} (IZ) = \\ &= \nabla_X (\nabla_Y I)Z + \nabla_X (I \nabla_Y Z) - \nabla_Y (\nabla_X I)Z - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \nabla_Y(I\nabla_X Z) - (\nabla_{[X,Y]}I)Z - I\nabla_{[X,Y]}Z = \\
& = \nabla_X(r(Y)JZ - q(Y)KZ) + \nabla_X(I\nabla_Y Z) - \\
& - \nabla_Y(r(X)JZ - q(X)KZ) - \nabla_Y(I\nabla_X Z) - \\
& - r([X,Y])JZ + q([X,Y])KZ - I\nabla_{[X,Y]}Z = \\
& = X(r(Y))JZ + r(Y)\nabla_X(JZ) - X(q(Y))KZ - \\
& - q(Y)\nabla_X(KZ) + r(X)J\nabla_Y Z - q(X)K\nabla_Y Z + \\
& + I\nabla_X\nabla_Y Z - Y(r(X))JZ - r(X)\nabla_Y(JZ) + \\
& + Y(q(X))KZ + q(X)\nabla_Y KZ - r(Y)J\nabla_X Z + \\
& + q(Y)K\nabla_X Z - I\nabla_Y\nabla_X Z - r([X,Y])JZ + \\
& + q([X,Y])KZ - I\nabla_{[X,Y]}Z = I\nabla_X\nabla_Y Z - \\
& - I\nabla_Y\nabla_X Z - I\nabla_{[X,Y]}Z + X(r(Y))JZ + \\
& + r(Y)(-r(X)IZ + p(X)KZ + J\nabla_X Z) - X(q(Y))KZ - \\
& - q(Y)(q(X)IZ - p(X)JZ + K\nabla_X Z) + r(X)J\nabla_Y Z - \\
& - q(X)K\nabla_Y Z - Y(r(X))JZ - r(X)(-r(Y)IZ + \\
& + p(Y)KZ + J\nabla_Y Z) + Y(q(X))KZ + q(X)(q(Y)IZ - \\
& - p(Y)JZ + K\nabla_Y Z) - r(Y)J\nabla_X Z + q(Y)K\nabla_X Z - \\
& - r([X,Y])JZ + q([X,Y])KZ = I\nabla_X\nabla_Y Z - I\nabla_Y\nabla_X Z - \\
& - I\nabla_{[X,Y]}Z + X(r(Y))JZ - Y(r(X))JZ - r([X,Y])JZ + \\
& + p(X)q(Y)JZ - q(X)p(Y)JZ - X(q(Y))KZ + Y(q(X))KZ + \\
& + q([X,Y])KZ - r(X)p(Y)KZ + r(Y)p(X)KZ = \\
& = IR(X,Y)Z + (dr+p\wedge q)(X,Y)JZ - (dq+r\wedge p)(X,Y)KZ
\end{aligned}$$

Se notará

$$\begin{aligned}
(I.2.3) \quad C(X,Y) &= (dr+p\wedge q)(X,Y) \\
B(X,Y) &= (dq+r\wedge p)(X,Y)
\end{aligned}$$

para cualesquiera X, Y campos de vectores sobre M , donde C y B son 2-formas locales definidas sobre el abierto U para el cual $\{I, J, K\}$ es una base de V .

Así, (I.2.2) puede escribirse en la forma

$$(I.2.4) \quad R(X,Y)IZ = IR(X,Y)Z + C(X,Y)JZ - B(X,Y)KZ$$

Desarrollos análogos dan

$$(I.2.5) \quad R(X,Y)JZ = JR(X,Y)Z - C(X,Y)IZ + A(X,Y)KZ$$

donde

$$(I.2.6) \quad A(X,Y) = (dp+qAr)(X,Y)$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y sobre M , y

$$(I.2.7) \quad R(X,Y)KZ = KR(X,Y)Z + B(X,Y)IZ - A(X,Y)JZ.$$

De (I.2.4), (I.2.5) y (I.2.7) se tiene la

PROPOSICION I.2.1.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice 4s. Entonces se tiene:

$$(I.2.8) \quad \begin{aligned} [R(X,Y), I] &= C(X,Y)J - B(X,Y)K \\ [R(X,Y), J] &= -C(X,Y)I + A(X,Y)K \\ [R(X,Y), K] &= B(X,Y)I - A(X,Y)J \end{aligned}$$

para cualesquiera X, Y campos de vectores sobre M , donde A, B y C son 2-formas locales sobre M dadas por (I.2.3) y (I.2.6).

El tensor de Ricci de una variedad pseudo-Riemanniana M está definido por

$$(I.2.9) \quad S(X,Y) = \text{Traza } \{U \longrightarrow R(U,X)Y\}$$

donde X, Y, U son campos de vectores sobre M .

Si M es una variedad pseudo-Riemanniana y $X, Y \in T_p M$, $p \in M$, se dice que X e Y son vectores ortonormales si $g(X,Y)=0$ y $|g(X,X)| = |g(Y,Y)| = 1$.

Un vector $X \in T_p M$ es definido positivo, definido negativo, o nulo si $g(X,X) > 0$, $g(X,X) < 0$ ó $g(X,X) = 0$, respectivamente. Es fácil ver que estas propiedades se conservan por cualquier base local de V .

Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ y de dimensión $4m$, y sea $\{E_i\}_{i=1, \dots, 4m}$ una base local ortonormal de campos sobre M . Entonces

$$(I.2.10) \quad S(X, Y) = \sum_{i=1}^{4m} \sigma_i R(X, E_i, E_i, Y)$$

para cualesquiera X, Y campos de vectores sobre M , donde $\sigma_i = g(E_i, E_i)$ y $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$, para cualesquiera X, Y, Z, W campos de vectores sobre M .

PROPOSICION I.2.2.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ y dimensión $4m$. Si $4m > 8$, entonces se tienen las siguientes expresiones para A, B y C :

$$A(X, Y) = \frac{S(X, IY)}{m+2}$$

$$(I.2.11) \quad B(X, Y) = \frac{S(X, JY)}{m+2}$$

$$C(X, Y) = \frac{S(X, KY)}{m+2}$$

para cualesquiera X, Y campos de vectores sobre M .

Demostración.- Sean X e Y campos de vectores unitarios sobre M (nótese que esto impide que X e Y sean nulos). Consideramos una base local ortonormal de campos de vectores sobre M de la forma siguiente: $\{Y, E_2, \dots, E_m, IY, IE_2, \dots, IE_m, JY, JE_2, \dots, JE_m, KY, KE_2, \dots, KE_m\}$. Suponiendo que $g(E_i, E_i) = \sigma_i$, que puede ser 1 ó -1 , se tiene

$$(I.2.12) \quad \begin{aligned} S(X, Y) = & g(Y, Y) \{R(X, IY, IY, Y) + R(X, JY, JY, Y) + \\ & + R(X, KY, KY, Y)\} + \sum_{i=2}^m \{R(X, E_i, E_i, Y) + R(X, IE_i, IE_i, Y) + \\ & + R(X, JE_i, JE_i, Y) + R(X, KE_i, KE_i, Y)\} \sigma_i \end{aligned}$$

Sea $i \geq 2$. De (I.2.8) y la primera identidad de Bianchi,

$$(I.2.13) \quad \begin{aligned} R(X, IY, E_i, IE_i) &= -R(X, IE_i, IY, E_i) - R(X, E_i, IE_i, IY) = \\ &= R(X, IE_i, Y, IE_i) - R(X, E_i, E_i, Y) \end{aligned}$$

$$(I.2.14) \quad R(X, IY, JE_i, KE_i) = -R(X, KE_i, IY, JE_i) + R(X, JE_i, IY, KE_i) = \\ = R(X, KE_i, Y, KE_i) + R(X, JE_i, Y, JE_i)$$

De nuevo, por (I.2.8), se tiene

$$(I.2.15) \quad R(X, IY, E_i, IE_i) + R(X, IY, JE_i, KE_i) = R(X, IY, E_i, IE_i) - \\ - R(X, IY, E_i, IE_i) + A(X, IY)\sigma_i = \sigma_i A(X, IY).$$

Por otro lado, desarrollando como antes, se tiene

$$(I.2.16) \quad R(X, IY, Y, IY) = -R(X, IY, IY, Y)$$

$$(I.2.17) \quad R(X, IY, JY, KY) = -R(X, KY, IY, JY) - R(X, JY, KY, IY) = \\ = R(X, KY, Y, KY) - C(X, KY)g(Y, Y) + R(X, JY, Y, JY) - \\ - B(X, JY)g(Y, Y).$$

$$(I.2.18) \quad R(X, IY, Y, IY) + R(X, IY, JY, KY) = R(X, IY, Y, IY) - \\ - R(X, IY, Y, IY) + A(X, IY)g(Y, Y)$$

De (I.2.12), (I.2.13), (I.2.14), (I.2.15), (I.2.16), (I.2.17) y (I.2.18) se sigue que

$$(I.2.19) \quad -S(X, Y) = mA(X, IY) + B(X, JY) + C(X, KY)$$

Aplicando los mismos desarrollos a $R(X, JY, E_i, JE_i)$, $R(X, JY, KE_i, IE_i)$, $R(X, JY, Y, JY)$ y $R(X, JY, KY, IY)$, se tiene

$$(I.2.20) \quad -S(X, Y) = A(X, IY) + mB(X, JY) + C(X, KY)$$

Desarrollando ahora $R(X, KY, E_i, KE_i)$, $R(X, KY, IE_i, JE_i)$, $R(X, KY, Y, KY)$ y $R(X, KY, IY, JY)$, se obtiene

$$(I.2.21) \quad -S(X, Y) = A(X, IY) + B(X, JY) + mC(X, KY)$$

Del sistema formado con las expresiones (I.2.19), (I.2.20) y (I.2.21), y teniendo en cuenta que $4m \geq 8$, se sigue el resultado para campos de vectores X, Y no nulos.

Si se supone que cualquiera de los campos X, Y ó los dos fueren nulos, es decir, por ejemplo, $g(X, X)=0$, entonces, como $g(X, X)$

es una función polinómica de las coordenadas de X en una base fija, el conjunto de ceros de $g(X,X)$ no contiene ningún conjunto abierto. Por lo tanto, debe existir una sucesión de campos no nulos $\{X_n\}$ tales que $\{X_n\} \longrightarrow X$. Por tanto, $\{IX_n\} \longrightarrow IX$, $\{JX_n\} \longrightarrow JX$ y $\{KX_n\} \longrightarrow KX$. Lo mismo sería válido en el caso de que Y fuese nulo. Por lo tanto, y por continuidad, se seguiría el resultado para cualesquiera campos de vectores sobre M .

§3.- Tensor de Ricci de una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$.

En este epígrafe se probará que toda variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ y dimensión $4m \geq 8$ es un espacio Einstein.

LEMA I.3.1.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ y dimensión $4m$. Si $4m \geq 8$, entonces el tensor de Ricci de M es paralelo.

Demostración.- Suponiendo $4m \geq 8$, se tiene, en primer lugar, de (I.2.11) y aplicando que A, B y C son 2-formas

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= -(m+2)A(X,IY) = (m+2)A(IY,X) = S(IY,IX) = \\ &= S(IX,IY) \end{aligned}$$

$$(I.3.1) \quad S(X,Y) = S(JX,JY)$$

$$S(X,Y) = S(KX,KY)$$

De (I.3.1), se tiene

$$S(IX,Y) = -S(X,IY)$$

$$(I.3.2) \quad S(JX,Y) = -S(X,JY)$$

$$S(KX,Y) = -S(X,KY)$$

para cualesquiera X, Y campos de vectores sobre M .

Usando (I.1.5) se obtiene

$$\begin{aligned}
(I.3.3) \quad \nabla_Z(S(X, IY)) &= (\nabla_Z S)(X, IY) + S(\nabla_Z X, IY) + S(X, \nabla_Z IY) = \\
&= (\nabla_Z S)(X, IY) + S(\nabla_Z X, IY) + r(Z)S(X, JY) - \\
&\quad - q(Z)S(X, KY) + S(X, I\nabla_Z Y)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
(I.3.4) \quad \nabla_Z(S(IX, Y)) &= (\nabla_Z S)(IX, Y) + S(\nabla_Z IX, Y) + S(IX, \nabla_Z Y) = \\
&= (\nabla_Z S)(IX, Y) + r(Z)S(JX, Y) - q(Z)S(KX, Y) + \\
&\quad + S(IX, \nabla_Z Y) - S(I\nabla_Z X, Y)
\end{aligned}$$

De (I.3.2), (I.3.3) y (I.3.4) se sigue

$$(I.3.5) \quad (\nabla_Z S)(X, IY) + (\nabla_Z S)(IX, Y) = 0$$

De (I.3.5),

$$(I.3.6) \quad (\nabla_Z S)(X, Y) = (\nabla_Z S)(IX, IY)$$

Razonando análogamente para J y K se tiene

$$\begin{aligned}
(I.3.7) \quad (\nabla_Z S)(X, Y) &= (\nabla_Z S)(JX, JY) \\
(\nabla_Z S)(X, Y) &= (\nabla_Z S)(KX, KY)
\end{aligned}$$

Por otra parte, de (I.2.3) y (I.2.6),

$$\begin{aligned}
(I.3.8) \quad dA + q \wedge C - r \wedge B &= 0 \\
dB + r \wedge A - p \wedge C &= 0 \\
dC + p \wedge B - q \wedge A &= 0
\end{aligned}$$

Entonces, de (I.2.11) y (I.3.8) se sigue

$$\begin{aligned}
(I.3.9) \quad &(\nabla_Z S)(X, IY) + (\nabla_X S)(Y, IZ) + (\nabla_Y S)(Z, IX) = \\
&= (m+2)\{Z(A(X, Y)) + X(A(Y, Z)) + Y(A(X, Z))\} - \\
&- A(\nabla_Z X, Y) - A(\nabla_X Y, Z) - A(\nabla_Y Z, X) - r(Z)B(X, Y) + \\
&+ q(Z)C(X, Y) + A(\nabla_Z Y, X) - r(X)B(Y, Z) + q(X)C(Y, Z) + \\
&+ A(\nabla_X Z, Y) - r(Y)B(Z, X) + q(Y)C(Z, X) + A(\nabla_Y X, Z)\} = \\
&= (m+2)(dA + q \wedge C - r \wedge B)(X, Y, Z) = 0
\end{aligned}$$

Si en (I.3.9) se sustituye Y por IY, se tiene

$$(I.3.10) \quad (\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Z S)(X, Y) = (\nabla_{IY} S)(JZ, KX)$$

Haciendo desarrollos análogos, pero tomando en (I.3.9) J y K en lugar de I se obtienen, respectivamente

$$(I.3.11) \quad (\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Z S)(X, Y) = (\nabla_{JY} S)(KZ, IX)$$

$$(I.3.12) \quad (\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Z S)(X, Y) = (\nabla_{KY} S)(IZ, JX)$$

De (I.3.10), (I.3.11) y (I.3.12),

$$(I.3.13) \quad (\nabla_{IY} S)(JZ, KX) = (\nabla_{JY} S)(KZ, IX) = (\nabla_{KY} S)(IZ, JX)$$

Si en la primera igualdad de (I.3.13) se sustituyen Y por KY, Z por IZ y X por JX, se tiene

$$(I.3.14) \quad -(\nabla_{JY} S)(KZ, IX) = (\nabla_{IY} S)(JZ, KX)$$

De (I.3.13) y (I.3.14), se obtiene

$$(I.3.15) \quad (\nabla_{IY} S)(JZ, KX) = 0$$

Así, como X, Y, Z son arbitrarios, también lo son los campos de vectores que aparecen en (I.3.15), de donde se sigue el resultado.

En la línea de probar el resultado central de este Capítulo se tiene el siguiente

LEMA I.3.2.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice 4s y dimensión $4m \geq 8$. Si el tensor de Ricci de M no es idénticamente nulo, entonces M es irreducible.

Demostración.- Supongamos que el tensor de Ricci de M no es idénticamente nulo y que M sea reducible. En particular, M no es plana. Siendo, además, el tensor de Ricci paralelo, existe, teniendo en cuenta [20] y [47], un entorno coordinado U de M tal que la variedad pseudo-Riemanniana (U, g) se puede descomponer como producto

de variedades pseudo-Riemannianas $(U_1, g_1), (U_2, g_2), \dots, (U_j, g_j)$, con $j \geq 2$, tales que

$$(I.3.16) \quad g(X, Y) = \sum_{i=1}^j g_i(\pi_{i*} X, \pi_{i*} Y)$$

y

$$(I.3.17) \quad S(X, Y) = \sum_{i=1}^j \rho_i g_i(\pi_{i*} X, \pi_{i*} Y)$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y en U , donde las ρ_i son constantes tales que $\rho_1 < \dots < \rho_j$ y π_{i*} es la diferencial de la proyección natural π_i de U sobre U_i .

Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $j=2$. Entonces, como $g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y)$ y $S(\phi X, \phi Y) = S(X, Y)$, para $\phi = I, J, K$, donde $\{I, J, K\}$ forman una base local de V sobre U , de (I.3.16) y (I.3.17) se obtienen

$$(I.3.18) \quad g_1(\pi_{1*} \phi X, \pi_{1*} \phi Y) + g_2(\pi_{2*} \phi X, \pi_{2*} \phi Y) = \\ = g_1(\pi_{1*} X, \pi_{1*} Y) + g_2(\pi_{2*} X, \pi_{2*} Y)$$

y

$$(I.3.19) \quad \rho_1 g_1(\pi_{1*} \phi X, \pi_{1*} \phi Y) + \rho_2 g_2(\pi_{2*} \phi X, \pi_{2*} \phi Y) = \\ = \rho_1 g_1(\pi_{1*} X, \pi_{1*} Y) + \rho_2 g_2(\pi_{2*} X, \pi_{2*} Y)$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y sobre U .

Sea X un campo de vectores sobre U tal que $\pi_{2*} X = 0$. De (I.3.18) y (I.3.19) se sigue que $(\rho_2 - \rho_1)g_2(\pi_{2*} \phi X, \pi_{2*} \phi X) = 0$, y como $\rho_1 < \rho_2$, se tiene que $g_2(\pi_{2*} \phi X, \pi_{2*} \phi X) = 0$. De aquí se obtiene

$$(I.3.20) \quad g_i(\pi_{i*} \phi X, \pi_{i*} \phi Y) = g_i(\pi_{i*} X, \pi_{i*} Y)$$

para $i=1, 2$ y X, Y campos de vectores arbitrarios sobre U .

Sean entonces $(y^\alpha) = (y^1, \dots, y^r)$, $(z^\lambda) = (z^{r+1}, \dots, z^{4m})$ sistemas coordinados sobre U_1 y U_2 , respectivamente. Entonces $(x^h) = (y^\alpha, z^\lambda)$

es un sistema de coordenadas sobre U . Se supone que los índices que se denotan por α, β, γ varían en $\{1, \dots, r\}$ y los λ, μ, ν recorren $\{r+1, \dots, 4m\}$. Entonces, con respecto a este sistema de coordenadas, g tiene componentes de la forma

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{\beta\gamma} & 0 \\ 0 & g_{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

donde $(g_{\beta\gamma})$ y $(g_{\mu\nu})$ son, respectivamente, las componentes de g_1 y g_2 .

Sean entonces $\{E_1, \dots, E_r\}$, $\{E_{r+1}, \dots, E_{4m}\}$ bases ortonormales de campos de vectores sobre U_1 y U_2 , respectivamente.

Por (I.2.11) y (I.3.17) se tiene

$$A(E_\alpha, E_\mu) = \frac{S(E_\alpha, IE_\mu)}{m+2} = \frac{1}{m+2} \{ \rho_1 g_1(\pi_{1*} E_\alpha, \pi_{1*} IE_\mu) + \rho_2 g_2(\pi_{2*} E_\alpha, \pi_{2*} IE_\mu) \}$$

Ahora bien, $\pi_{2*} E_\alpha = 0$, luego

$$A(E_\alpha, E_\mu) = \frac{1}{m+2} \rho_1 g_1(\pi_{1*} E_\alpha, \pi_{1*} IE_\mu)$$

Por (I.3.20),

$$g_1(\pi_{1*} E_\alpha, \pi_{1*} IE_\mu) = -g_1(\pi_{1*} IE_\alpha, \pi_{1*} E_\mu)$$

y de ser $\pi_{1*} E_\mu = 0$, se sigue que

$$A(E_\alpha, E_\mu) = 0$$

Análogamente, se tiene que

$$B(E_\alpha, E_\mu) = C(E_\alpha, E_\mu) = 0$$

Luego

$$(I.3.21) \quad A(E_\alpha, E_\mu) = B(E_\alpha, E_\mu) = C(E_\alpha, E_\mu) = 0$$

Por otro lado, de (I.2.8) se tiene que

$$R(E_\lambda, E_\mu, IE_\alpha, JE_\alpha) + R(E_\lambda, E_\mu, E_\alpha, KE_\alpha) = C(E_\lambda, E_\mu)g(E_\alpha, E_\alpha)$$

y aplicándole la primera identidad de Bianchi se llega a que

$$R(E_\lambda, JE_\alpha, IE_\alpha, E_\mu) - R(E_\lambda, IE_\alpha, JE_\alpha, E_\mu) + R(E_\lambda, KE_\alpha, E_\alpha, E_\mu) - \\ - R(E_\lambda, E_\alpha, KE_\alpha, E_\mu) = C(E_\lambda, E_\mu)g(E_\alpha, E_\alpha)$$

De nuevo por (I.2.8) y (I.3.20),

$$- R(JE_\lambda, E_\alpha, IE_\alpha, E_\mu) + R(E_\lambda, IE_\alpha, E_\alpha, JE_\mu) + R(E_\lambda, KE_\alpha, E_\alpha, E_\mu) - \\ - R(E_\lambda, E_\alpha, KE_\alpha, E_\mu) = C(E_\lambda, E_\mu)g(E_\alpha, E_\alpha)$$

Utilizando otra vez la primera identidad de Bianchi,

$$R(JE_\lambda, E_\mu, E_\alpha, IE_\alpha) + R(JE_\lambda, IE_\alpha, E_\mu, E_\alpha) + R(E_\lambda, JE_\mu, E_\alpha, IE_\alpha) - \\ - R(E_\lambda, E_\alpha, JE_\mu, IE_\alpha) + R(E_\lambda, KE_\alpha, E_\alpha, E_\mu) - R(E_\lambda, E_\alpha, KE_\alpha, E_\mu) = \\ = C(E_\lambda, E_\mu)g(E_\alpha, E_\alpha)$$

Por (I.2.8) se tiene

$$- C(IE_\alpha, E_\alpha)g(IE_\mu, E_\lambda) + A(IE_\alpha, E_\alpha)g(KE_\mu, E_\lambda) + R(E_\mu, E_\alpha, JE_\lambda, IE_\alpha) - \\ - R(E_\lambda, E_\alpha, JE_\mu, IE_\alpha) - R(E_\mu, E_\alpha, E_\lambda, KE_\alpha) + R(E_\lambda, E_\alpha, E_\mu, KE_\alpha) = \\ = C(E_\lambda, E_\mu)g(E_\alpha, E_\alpha)$$

Pero de (I.2.8) y (I.3.21) se sigue que

$$R(E_\mu, E_\alpha, JE_\lambda, IE_\alpha) = R(E_\mu, E_\alpha, E_\lambda, KE_\alpha) \text{ y}$$

$$R(E_\lambda, E_\alpha, JE_\mu, IE_\alpha) = R(E_\lambda, E_\alpha, E_\mu, KE_\alpha)$$

Luego, de la expresión anterior,

$$-C(IE_\alpha, E_\alpha)g(IE_\mu, E_\lambda) + A(IE_\alpha, E_\alpha)g(KE_\mu, E_\lambda) = C(E_\lambda, E_\mu)g(E_\alpha, E_\alpha)$$

Por (I.2.11), (I.3.17) y (I.3.20),

$$C(IE_\alpha, E_\alpha) = \frac{1}{m+2} S(IE_\alpha, KE_\alpha) = \frac{1}{m+2} \{ \rho_1 g_1(\pi_{1*} IE_\alpha, \pi_{1*} KE_\alpha) + \\ + \rho_2 g_2(\pi_{2*} IE_\alpha, \pi_{2*} KE_\alpha) \} = 0$$

Luego $C(IE_\alpha, E_\alpha) = 0$ y, en definitiva, se tiene que

$$A(IE_\alpha, E_\alpha)g(KE_\mu, E_\lambda) = C(E_\lambda, E_\mu)g(E_\alpha, E_\alpha)$$

De (I.2.11), (I.3.16) y (I.3.17) se tiene

$$\rho_1 g(E_\alpha, E_\alpha) g(KE_\mu, E_\lambda) = \rho_2 g(E_\lambda, KE_\mu) g(E_\alpha, E_\alpha)$$

es decir,

$$(\rho_1 - \rho_2) g(E_\lambda, KE_\mu) = 0$$

para cualesquiera λ y μ , lo que implica, necesariamente, que $\rho_1 = \rho_2$. De esta forma se contradice el hecho de que $\rho_1 < \rho_2$ y, en consecuencia, M debe ser irreducible, lo que prueba el Lema.

TEOREMA I.3.3.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ y dimensión $4m \geq 8$. Entonces M es un espacio Einstein.

Demostración.- Por el Lema I.3.1 se ha visto que el tensor de Ricci de M es paralelo.

Si el tensor de Ricci de M no es idénticamente nulo, por el Lema I.3.2 se tiene que M es irreducible.

El Teorema se sigue de estos dos hechos y un resultado bien conocido de [20], que asegura que toda variedad pseudo-Riemanniana con tensor de Ricci paralelo es producto pseudo-Riemanniano de espacios Einstein.

Teniendo en cuenta el Teorema I.3.3 y la Proposición I.2.2 se sigue

COROLARIO I.3.4.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ y dimensión $4m \geq 8$. Entonces

$$\begin{aligned} A(X, Y) &= -\frac{\rho}{m+2} g(IX, Y) \\ (I.3.22) \quad B(X, Y) &= -\frac{\rho}{m+2} g(JX, Y) \\ C(X, Y) &= -\frac{\rho}{m+2} g(KX, Y) \end{aligned}$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y sobre M , donde $4m\rho$ es la curvatura escalar de M .

C A P I T U L O I I

VARIETADES KAEHLERIANAS CUATERNIONICAS DE INDICE 4s CON CURVATURA SECCIONAL CUATERNIONICA CONSTANTE

§1.- Curvatura y curvatura seccional cuaterniónica.-

Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ y dimensión $4m$. A continuación se definirán las secciones adaptadas a esta geometría y la curvatura seccional sobre ellas.

Un subespacio π de $T_p M$, $p \in M$, se llama no degenerado si la restricción de g a π es no degenerada. En particular, un subespacio de dimensión 2, π , en $T_p M$ es no degenerado si y sólo si tiene una base X, Y que verifica

$$\Delta(\pi) = g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2 \neq 0$$

Sea $X \in T_p M$, $p \in M$. Entonces X, IX, JX, KX , donde $\{I, J, K\}$ es una base de V en un entorno U de p , son vectores linealmente independientes que generan un subespacio de dimensión 4 que se notará $Q(X)$. Un subespacio de este tipo se llamará un 4-plano cuaterniónico. Un subespacio de dimensión 2 en $T_p M$, $p \in M$, generado por los vectores X, Y se llamará plano semicuaterniónico si $Q(X) = Q(Y)$, y se dirá plano totalmente real si $Q(X) \perp Q(Y)$. Nótese que si X es un vector no nulo de $T_p M$, entonces $Q(X)$ es un subespacio no degenerado.

Si π es un subespacio no degenerado de dimensión 2 de $T_p M$, generado por X, Y , su curvatura seccional está definida por

$$\sigma(X, Y) = \sigma(\pi) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{\Delta(\pi)}$$

Es conocido que dicha curvatura no depende de la base de π

que se considere.

En particular, la curvatura seccional para un plano semicuaterniónico se llama curvatura seccional cuaterniónica, y la curvatura seccional para un plano totalmente real se llama curvatura seccional totalmente real.

El resto del epígrafe se dedica a estudiar el tensor de curvatura para una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ y con curvatura seccional cuaterniónica constante, esto es, tal que todas las curvaturas seccionales para planos semicuaterniónicos coinciden, para todo punto de M .

Se considera el campo de tensores R_0 sobre M dado por

$$R_0(X,Y)Z = \frac{1}{4} \{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(IY,Z)IX - g(IX,Z)IY + \\ + 2g(X,IY)IZ + g(JY,Z)JX - g(JX,Z)JY + 2g(X,JY)JZ + \\ + g(KY,Z)KX - g(KX,Z)KY + 2g(X,KY)KZ\}$$

para cualesquiera $X,Y,Z \in T_p M$, siendo $\{I,J,K\}$ una base local de V en p .

A partir de la expresión de R_0 se siguen fácilmente las siguientes propiedades:

1) R_0 es independiente de la base $\{I,J,K\}$ de V escogida en un entorno de cada punto.

$$2) R_0(X,Y,Z,W) = -R_0(Y,X,Z,W) = -R_0(X,Y,W,Z)$$

$$3) R_0(X,Y,Z,W) = R_0(Z,W,X,Y)$$

$$4) R_0(X,Y,Z,W) + R_0(X,Z,W,Y) + R_0(X,W,Y,Z) = 0$$

para cualesquiera $X,Y,Z,W \in T_p M$, $p \in M$, donde $R_0(X,Y,Z,W) = g(R_0(X,Y)Z,W)$.

PROPOSICION II.1.1.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ y de dimensión $4m \geq 8$. Entonces todo plano semicuaterniónico no degenerado de $T_p M$, $p \in M$, tiene la misma curvatura seccio-

nal cuaterniónica, c, si y sólo si $R=cR_0$.

Demostración.— Sea $X \in T_p M$, $p \in M$, un vector no nulo y supongamos que la curvatura seccional en $Q(X)$ es c . Sea $R'=R-cR_0$. Entonces $R'(Y,Z,Z,Y)=0$ para cualquier plano $\{Y,Z\}$ en $Q(X)$; en efecto, si $Y,Z \in Q(X)$, entonces $Y=aX+bIX+dJX+eKX$, $Z=a'X+b'IX+d'JX+e'KX$, para ciertos a,b,d,e,a',b',d' y e' números reales.

De la expresión de R_0 se sigue que

$$R_0(Y,Z,Z,Y) = \frac{\{(a^2+b^2+d^2+e^2)(a'^2+b'^2+d'^2+e'^2) - (aa'+bb'+dd'+ee')^2\}}{g(X,X)^2}$$

Por otro lado, de ser la curvatura seccional en $Q(X)$ constante c se tiene que

$$R(Y,Z,Z,Y) = c \frac{\{(a^2+b^2+d^2+e^2)(a'^2+b'^2+d'^2+e'^2) - (aa'+bb'+dd'+ee')^2\}}{g(X,X)^2}$$

Luego $R'(Y,Z,Z,Y)=0$.

Como $g(X,X)$ es una función polinómica de las coordenadas de X en una base fija, el conjunto de ceros de $g(X,X)$ no contiene ningún conjunto abierto. Así, si X es un vector nulo de $T_p M$, existe una sucesión $\{X_n\}$ de vectores no nulos tales que $\{X_n\} \rightarrow X$. Entonces $\{IX_n\} \rightarrow IX$, $\{JX_n\} \rightarrow JX$ y $\{KX_n\} \rightarrow KX$, siendo $\{I,J,K\}$ una base local de V en p .

Supóngase, pues, que Y,Z generan un plano de $Q(X)$. Así, $Y=a_0X+a_1IX+a_2JX+a_3KX$ y $Z=b_0X+b_1IX+b_2JX+b_3KX$.

Considerando entonces los vectores $Y_n=a_0X_n+a_1IX_n+a_2JX_n+a_3KX_n$ y $Z_n=b_0X_n+b_1IX_n+b_2JX_n+b_3KX_n$, el plano $\{Y_n,Z_n\}$ está contenido en $Q(X_n)$, para cada n . Así, $R'(Y_n,Z_n,Z_n,Y_n)=0$.

Se ha demostrado, por tanto, que para cualquier $X \in T_p M$, $p \in M$, y cualquier plano $\{Y,Z\}$ de $Q(X)$, $R'(Y,Z,Z,Y)=0$.

Para terminar la demostración de la Proposición basta con ver que $R'(X,Y,Y,X)=0$ para cualesquiera vectores no nulos $X,Y \in T_p M$. Antes de proseguir la demostración de la Proposición II.1.1 se prueba el siguiente Lema

LEMA II.1.2.- En las condiciones de la Proposición II.1.1 se tiene

$$\begin{aligned} & [R'(X,Y),I] = 0 \\ \text{(II.1.1)} \quad & [R'(X,Y),J] = 0 \\ & [R'(X,Y),K] = 0 \end{aligned}$$

para cualesquiera campos de vectores X,Y sobre M.

Demostración.- Por la Proposición I.2.1, el Corolario I.3.4 y la expresión de R_0 se tiene

$$\begin{aligned} [R'(X,Y),I] &= kg(X,KY)J - kg(X,JY)K \\ [R'(X,Y),J] &= -kg(X,KY)I + kg(X,IY)K \\ [R'(X,Y),K] &= kg(X,JY)I - kg(X,IY)J \end{aligned}$$

donde $k = \frac{\rho}{m+2} - c$.

Sea $X \in T_p M$, $p \in M$, un vector no nulo. Por las expresiones anteriores, y teniendo en cuenta lo ya probado de la Proposición II.1.1, se sigue

$$\begin{aligned} R'(X,IX,JX,KX) &= -R'(X,IX,X,IX) - kg(X,X)^2 = -kg(X,X)^2 \\ R'(X,KX,IX,JX) &= -R'(X,KX,X,KX) - kg(X,X)^2 = -kg(X,X)^2 \\ R'(X,JX,KX,IX) &= -R'(X,JX,X,JX) - kg(X,X)^2 = -kg(X,X)^2 \end{aligned}$$

Sumando las anteriores expresiones y aplicando la primera identidad de Bianchi, se tiene que $kg(X,X)^2=0$. Como X es no nulo, $k=0$, lo que prueba el Lema.

Ahora se continúa con la demostración de la Proposición II.1.1. Sean $X,Y \in T_p M$, $p \in M$, dos vectores arbitrarios. Por el Lema II.1.2 se

tiene

$$(II.1.2) \quad R'(X, IX, JY, KY) = -R'(X, IX, Y, IY)$$

De nuevo por el Lema II.1.2 y la primera identidad de Bianchi, se sigue que

$$(II.1.3) \quad R'(X, IX, JY, KY) = -R'(X, KY, IX, JY) + R'(X, JY, IX, KY) = \\ = R'(X, KY, X, KY) + R'(X, JY, X, JY)$$

y

$$(II.1.4) \quad R'(X, IX, Y, IY) = -R'(X, IY, IX, Y) - R'(X, Y, IY, IX) = \\ = R'(X, IY, X, IY) - R'(X, Y, Y, X)$$

De (II.1.2), (II.1.3) y (II.1.4), aparece

$$(II.1.5) \quad R'(X, Y, Y, X) + R'(X, IY, IY, X) + R'(X, JY, JY, X) + \\ + R'(X, KY, KY, X) = 0$$

Teniendo en cuenta lo ya probado de la Proposición II.1.1, $0=R'(X+Y, IX+IY, IX+IY, X+Y)$, y desarrollándolo y aplicando la primera identidad de Bianchi y el Lema II.1.2, se tiene

$$(II.1.6) \quad 0 = 4R'(X, IX, IX, Y) + 4R'(X, IY, IY, Y) + 2R'(X, Y, Y, X) + \\ + 6R'(X, IY, IY, X)$$

El mismo razonamiento aplicado a $0=R'(X-Y, IX-IY, IX-IY, X-Y)$ da

$$(II.1.7) \quad 0 = -4R'(X, IX, IX, Y) - 4R'(X, IY, IY, Y) + 2R'(X, Y, Y, X) + \\ + 6R'(X, IY, IY, X)$$

De (II.1.6) y (II.1.7),

$$(II.1.8) \quad 0 = R'(X, Y, Y, X) + 3R'(X, IY, IY, X)$$

Aplicando lo anterior a $0=R'(X+JY, IX+KY, IX+KY, X+JY)$ y $0=R'(X-JY, IX-KY, IX-KY, X-JY)$,

$$(II.1.9) \quad 0 = R'(X, JY, JY, X) + 3R'(X, KY, KY, X)$$

Finalmente, $0=R'(X+KY, IX-JY, IX-JY, X+KY)$ y $0=R'(X-KY, IX+JY, IX+JY, X-KY)$ dan

$$(II.1.10) \quad 0 = R'(X, KY, KY, X) + 3R'(X, JY, JY, X)$$

De (II.1.9) y (II.1.10) se sigue que

$$(II.1.11) \quad R'(X, JY, JY, X) = R'(X, KY, KY, X) = 0$$

Ahora, de (II.1.5), (II.1.8) y (II.1.11) se tiene que $R'(X, Y, Y, X)=0$ para cualesquiera vectores $X, Y \in T_p M$, $p \in M$. Pero entonces, es bien conocido por las propiedades que verifica el tensor R' , que $R'(X, Y, Z, W)=0$ para cualesquiera $X, Y, Z, W \in T_p M$, $p \in M$, lo que demuestra la condición necesaria de la Proposición.

El recíproco es trivial y termina la demostración.

De la Proposición II.1.1 y teniendo en cuenta que si la dimensión de M es $4m \geq 8$, entonces M es un espacio Einstein, se tiene el siguiente

TEOREMA II.1.3.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ y dimensión $4m \geq 8$. Entonces M tiene curvatura seccional cuaterniónica constante $c = \frac{\rho}{m+2}$ si y sólo si

$$R(X, Y)Z = \frac{c}{4} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y + g(IY, Z)IX - g(IX, Z)IY + \\ + 2g(X, IY)IZ + g(JY, Z)JX - g(JX, Z)JY + 2g(X, JY)JZ + \\ + g(KY, Z)KX - g(KX, Z)KY + 2g(X, KY)KZ\}$$

para cualesquiera campos X, Y, Z sobre M .

Derivando la expresión de la curvatura que se ha obtenido en el Teorema II.1.3 y teniendo en cuenta (I.1.5) se sigue fácilmente el siguiente

COROLARIO II.1.4.- Toda variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$, dimensión $4m \geq 8$ y de curvatura seccional cuaterniónica

constante es un espacio localmente simétrico.

EJEMPLOS.- Se considera en Q_S^{m+1} , que sería Q^{m+1} con la parte real de la forma

$$b_{S,m+1}(q,w) = - \sum_{k=1}^s \bar{q}_k w_k + \sum_{j=s+1}^{m+1} \bar{q}_j w_j$$

donde $q,w \in Q^{m+1}$, la esfera (ver [46])

$$S_{4s}^{4m+3}(1) = \{q \in Q^{m+1} / b_{S,m+1}(q,q)=1\}$$

Sea $QP_S^m = \{q \in Q^{m+1} / b_{S,m+1}(q,q) > 0\} / Q^*$, $Q^* = Q - \{0\}$. Así, la fibración de Hopf $\pi : S_{4s}^{4m+3}(1) \longrightarrow QP_S^m$, dada por $\pi(q) = q \cdot Q^*$ permite dotar de estructura de variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ a QP_S^m de la siguiente forma: Sea N el vector normal a S_{4s}^{4m+3} en cada punto. Considerando la estructura cuaterniónica natural de Q_S^{m+1} , $\{I,J,K\}$, los campos IN, JN, KN definen una estructura 3-Sasakiana sobre S_{4s}^{4m+3} . A partir de esta se induce una estructura cuaterniónica sobre QP_S^m (ver [22]).

Por otro lado, las fibras de π son $q \cdot S^3$ para $q \in S_{4s}^{4m+3}(1)$ (la distribución $\{IN, JN, KN\}$ es involutiva al definir una estructura 3-Sasakiana); π constituye una "submersión Riemanniana" en el sentido de O'Neill, [34]. Entonces se tiene que si X', Y', Z', W' son levantamientos horizontales a $S_{4s}^{4m+3}(1)$ de campos X, Y, Z, W sobre QP_S^m , es decir, $g(X', IN) = g(X', JN) = g(X', KN) = 0$ y condiciones análogas para Y', Z' y W' , (ver [34], pág. 464)

$$R(X, Y, Z, W) = \bar{R}(X', Y', Z', W') - 2g(A_{X'} Y', A_{Z'} W') + g(A_{Y'} Z', A_{X'} W') - g(A_{X'} Z', A_{Y'} W')$$

donde R es el tensor de curvatura de QP_S^m y \bar{R} el de la esfera y, para campos de vectores arbitrarios U, V sobre $S_{4s}^{4m+3}(1)$,

$$A_U V = V(\bar{\nabla}_{HU}(HV)) + H(\bar{\nabla}_{HU}(VV))$$

donde H y V denotan las correspondientes partes horizontales y ver-

tales de los campos sobre los que se aplican. Así, para X' e Y' horizontales

$$A_{X',IN} = H(\bar{\nabla}_{X',IN}) = H(I\bar{\nabla}_{X'}N) = HIX' = IX'$$

y, análogamente, $A_{X',JN} = JX'$ y $A_{X',KN} = KX'$.

Ahora bien, $A_{X',Y'} = V(\bar{\nabla}_{X',Y'})$, es decir,

$$A_{X',Y'} = g(A_{X',Y',IN})IN + g(A_{X',Y',JN})JN + g(A_{X',Y',KN})KN, \text{ donde}$$

$$\begin{aligned} g(A_{X',Y',IN}) &= g(\bar{\nabla}_{X',Y',IN}) = -g(Y',H(\bar{\nabla}_{X',IN})) = -g(Y',A_{X',IN}) = \\ &= -g(Y',IX'), \end{aligned}$$

y, análogamente, $g(A_{X',Y',JN}) = -g(Y',JX')$ y $g(A_{X',Y',KN}) = -g(Y',KX')$.

De aquí,

$$A_{X',Y'} = -g(Y',IX')IN - g(Y',JX')JN - g(Y',KX')KN$$

Por tanto, teniendo en cuenta la relación de métricas, se tiene

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) &= g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W) - 2g(-g(Y,IX)IN - \\ &- g(Y,JX)JN - g(Y,KX)KN, -g(W,IZ)IN - g(W,JZ)JN - \\ &- g(W,KZ)KN) + g(-g(Z,IY)IN - g(Z,JY)JN - g(Z,KY)KN, \\ &-g(W,IX)IN - g(W,JX)JN - g(W,KX)KN) - g(-g(Z,IX)IN - \\ &- g(Z,JX)JN - g(Z,KX)KN, -g(W,IY)IN - g(W,JY)JN - \\ &- g(W,KY)KN) = g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W) - \\ &- 2g(Y,IX)g(IZ,W) - 2g(Y,JX)g(JZ,W) - 2g(Y,KX)g(KZ,W) + \\ &+ g(Z,IY)g(IX,W) + g(Z,JY)g(JX,W) + g(Z,KY)g(KX,W) - \\ &- g(Z,IX)g(IY,W) - g(Z,JX)g(JY,W) - g(Z,KX)g(KY,W) = \\ &= g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W) + g(IY,Z)g(IX,W) - \\ &- g(IX,Z)g(IY,W) + 2g(X,IY)g(IZ,W) + g(JY,Z)g(JX,W) - \\ &- g(JX,Z)g(JY,W) + 2g(X,JY)g(JZ,W) + g(KY,Z)g(KX,W) - \\ &- g(KX,Z)g(KY,W) + 2g(X,KY)g(KZ,W) \end{aligned}$$

lo que prueba que QP_S^m es una variedad Kaehleriana cuaterniónica de

índice $4s$ con curvatura seccional cuaterniónica constante 4.

El espacio hiperbólico cuaterniónico de índice $4s$, QH_S^m , se obtiene a partir de QP_{m-s}^m tomando la métrica opuesta de la obtenida sobre este y es un ejemplo de variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ y curvatura seccional cuaterniónica constante negativa.

El espacio euclídeo cuaterniónico de índice $4s$, Q_S^m , es un ejemplo de variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ con curvatura seccional cuaterniónica nula.

Estos tres espacios son los espacios modelo para este tipo de geometría; es decir, toda variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ y curvatura seccional cuaterniónica constante, en las condiciones topológicas usuales, es isométrica a uno de los tres espacios anteriores, hecho que se sigue fácilmente por el Teorema II.1.3.

§2.- Curvatura seccional cuaterniónica y curvatura seccional totalmente real.-

En este epígrafe se demostrará la equivalencia entre la constancia de la curvatura seccional cuaterniónica y la curvatura seccional totalmente real para una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ y dimensión $4m \geq 8$.

PROPOSICION II.2.1.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de dimensión $4m \geq 8$ y de índice $4s$. Sea X un vector unitario de $T_p M$, $p \in M$ (es decir, $|g(X,X)|=1$). Si existe una base local de V en p , $\{I,J,K\}$ tal que

i) $\sigma(X,IX) = \sigma(X,JX) = \sigma(X,KX)$

y

ii) $R(X,IX,X,JX) = R(X,IX,X,KX) = R(X,JX,X,KX) = 0$

entonces la curvatura seccional cuaterniónica en $Q(X)$ es constante y su valor es $\rho/m+2$.

Demostración.- De (I.2.8) y el Corolario I.3.4 se tiene

$$\begin{aligned} \sigma(X, IX) &= \frac{\rho}{m+2} g(X, X)^2 + R(X, IX, JX, KX) \\ \text{(II.2.1)} \quad \sigma(X, JX) &= \frac{\rho}{m+2} g(X, X)^2 + R(X, JX, KX, IX) \\ \sigma(X, KX) &= \frac{\rho}{m+2} g(X, X)^2 + R(X, KX, IX, JX) \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro las expresiones de (II.2.1) y aplicando la primera identidad de Bianchi,

$$\text{(II.2.2)} \quad \sigma(X, IX) = \sigma(X, JX) = \sigma(X, KX) = \frac{\rho}{m+2}$$

y

$$\text{(II.2.3)} \quad R(X, IX, JX, KX) = R(X, JX, KX, IX) = R(X, KX, IX, JX) = 0$$

Sean Y, Z dos vectores unitarios en $Q(X)$, es decir,

$$Y = aX + bIX + dJX + eKX$$

$$Z = a'X + b'IX + d'JX + e'KX$$

con $a, b, d, e, a', b', d', e' \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 + b^2 + d^2 + e^2 = a'^2 + b'^2 + d'^2 + e'^2 = 1$.

Desarrollando $\sigma(Y, Z)$ y teniendo en cuenta (II.2.2), (II.2.3) y la hipótesis ii), se obtiene el resultado.

PROPOSICION II.2.2.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ y dimensión $4m \geq 8$, p un punto de M , $X \in T_p M$ un vector unitario e $\{I, J, K\}$ una base local de V en un entorno coordinado de M en p . Si $\sigma(Y, \phi Y)$ es constante para cualquier vector unitario $Y \in Q(X)$ y para algún $\phi = I, J, K$, entonces la curvatura seccional cuaterniónica en $Q(X)$ es constante.

Demostración.- Supóngase que $\sigma(Y, IY) = a = \text{constante}$ para todo vector unitario $Y \in Q(X)$.

Sea el plano de $Q(X)$ generado por los vectores $Y = \cos\theta X + \sin\theta JX$, $IY = \cos\theta IX + \sin\theta KX$. Entonces llamando σ_θ a la curvatura seccional

de este plano, se tiene

$$\begin{aligned}
 a = \sigma_{\theta} &= \cos^4 \theta \sigma(X, IX) + \sin^4 \theta R(JX, KX, KX, JX) + \\
 &+ 2\cos^3 \theta \sin \theta R(X, IX, IX, JX) + 2\cos^3 \theta \sin \theta R(X, IX, KX, X) + \\
 &+ 2\cos^2 \theta \sin^2 \theta R(X, IX, KX, JX) + 2\cos^2 \theta \sin^2 \theta R(X, KX, IX, JX) + \\
 \text{(II.2.4)} \quad &+ \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sigma(X, KX) + 2\cos \theta \sin^3 \theta R(X, KX, KX, JX) + \\
 &+ \cos^2 \theta \sin^2 \theta R(JX, IX, IX, JX) + 2\cos \theta \sin^3 \theta R(JX, IX, KX, JX) = \\
 &= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 \sigma(X, IX) + 4\sin^2 \theta \cos^2 \theta \sigma(X, KX) + \\
 &+ 4 \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) R(KX, X, X, IX)
 \end{aligned}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $\sigma(X, IX) = a$, si en la anterior expresión se toma $\theta = \pi/4$, se obtiene

$$\text{(II.2.5)} \quad \sigma(X, KX) = \sigma(X, IX) = a$$

Sustituyendo (II.2.5) en (II.2.4)

$$0 = 4\sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) R(KX, X, X, IX),$$

lo cual implica

$$\text{(II.2.6)} \quad R(KX, X, X, IX) = 0$$

Si ahora se considera el plano de $Q(X)$ generado por $Y = \cos \theta X + \sin \theta KX$, $IY = \cos \theta IX - \sin \theta JX$ y se repite el razonamiento anterior, se sigue que

$$\text{(II.2.7)} \quad \sigma(X, IX) = \sigma(X, JX) = a \quad \text{y} \quad R(IX, X, X, JX) = 0$$

Finalmente, considerando el plano de $Q(X)$ generado por $Y = 1/(\sqrt{3})(X + JX + KX)$, $IY = 1/(\sqrt{3})(IX + KX - JX)$ y desarrollando $a = \sigma(Y, IY)$, teniendo en cuenta (II.2.5), (II.2.6) y (II.2.7), se obtiene

$$\text{(II.2.8)} \quad R(JX, X, X, KX) = 0$$

El resultado se sigue, entonces, de (II.2.5), (II.2.6), (II.2.7), (II.2.8) y la Proposición II.2.1.

Un 2-plano π de $T_p M$ se llamará de tipo $(\overset{+}{+})$, $(\overset{-}{-})$ ó $(\overset{+}{-})$, respec-

tivamente, si la restricción de g a π es definida positiva, definida negativa o indefinida, respectivamente.

LEMA II.2.3.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$. Si la curvatura seccional totalmente real de M es una constante α , y si $\{X, Y\}$ es un plano totalmente real de tipo $(\underline{+})$, entonces

$$i) R(X, Y, \phi Y, X) = 0$$

$$ii) R(X, \phi X, X, Y) + R(Y, \phi Y, X, Y) = 0$$

para cualquier $\phi = I, J, K$, siendo $\{I, J, K\}$ una base local del fibrado V .

Demostración.- i) Sea $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y + \phi Y)$. Entonces $\{X, Z\}$ es un plano totalmente real también del tipo $(\underline{+})$, y se tiene

$$-\alpha = \frac{1}{2}R(X, Y + \phi Y, Y + \phi Y, X) = -\alpha + R(X, Y, \phi Y, X),$$

luego $R(X, Y, \phi Y, X) = 0$.

ii) Sean $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ tales que $a^2 - b^2 = 1$. Se toman $X' = aX + bY$, $Y' = b\phi X + a\phi Y$. El plano que generan estos vectores es totalmente real y de tipo $(\underline{+})$. De i) se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= R(X', Y', \phi Y', X') = R(aX + bY, b\phi X + a\phi Y, -bX - aY, aX + bY) = \\ &= (-ab^3 + a^3b)R(X, \phi X, X, Y) + (-ab^3 + a^3b)R(Y, \phi Y, X, Y) \end{aligned}$$

Con las condiciones que se han impuesto sobre a y b , se sigue el resultado.

PROPOSICION II.2.4.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ y dimensión $4m \geq 8$. Si para cualquier $p \in M$ existe una base local $\{I, J, K\}$ de V en p tal que para cualesquiera vectores ortonormales $X, Y \in T_p M$ que generen un plano totalmente real, $R(X, Y, \phi X, X) = 0$ para algún $\phi = I, J, K$, entonces M tiene curvatura seccional cuaterniónica constante.

Demostración.- Se supone, en primer lugar, que $\{X, Y\}$ es un plano totalmente real de tipo $(\overset{+}{+})$ ó $(\overset{-}{-})$. Entonces se ve, fácilmente, que para cualquier $\psi=I, J, K$, $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y), \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi X - \psi Y)\}$ es un plano totalmente real del mismo tipo que $\{X, Y\}$. Así, por hipótesis, se sigue

$$0 = R\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{\psi X - \psi Y}{\sqrt{2}}, \frac{\phi X + \phi Y}{\sqrt{2}}, \frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)$$

para cualquier $\psi=I, J, K$.

Si se toma, precisamente, $\psi=\phi$, se tiene

$$0 = R(X+Y, \phi X - \phi Y, \phi X + \phi Y, X+Y) = \sigma(X, \phi X) - \sigma(Y, \phi Y) + 2R(X, \phi X, \phi X, Y) + 2R(Y, \phi Y, Y, \phi X)$$

Aplicando ii) del Lema II.2.3, se sigue que

$$(II.2.9) \quad \sigma(X, \phi X) = \sigma(Y, \phi Y)$$

para algún $\phi=I, J, K$.

Sea ahora $\{X, Y\}$ un plano totalmente real de tipo $(\overset{+}{-})$. Se eligen $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ tales que $a^2 - b^2 = 1$ y $X' = aX + bY$, $Y' = b\phi X + a\phi Y$. Entonces $\{X', Y'\}$ es un plano totalmente real del mismo tipo que $\{X, Y\}$, y, por hipótesis,

$$(II.2.10) \quad 0 = R(X', Y', \phi X', X') = R(aX+bY, b\phi X+a\phi Y, a\phi X+b\phi Y, aX+bY) = \\ = a^2\sigma(X, \phi X) + b^2\sigma(Y, \phi Y) + (a^2 + b^2)\{R(X, \phi X, \phi Y, Y) + \\ + R(X, \phi Y, \phi X, Y) + R(X, \phi Y, \phi Y, X)\}$$

Cambiando X por Y en (II.2.10), se sigue

$$(II.2.11) \quad 0 = a^2\sigma(Y, \phi Y) + b^2\sigma(X, \phi X) + (a^2 + b^2)\{R(Y, \phi Y, \phi X, X) + \\ + R(Y, \phi X, \phi Y, X) + R(Y, \phi X, \phi X, Y)\}$$

Teniendo en cuenta que $R(X, \phi Y, \phi Y, X) = R(Y, \phi X, \phi X, Y)$, restando (II.2.11) de (II.2.10), se obtiene

$$(II.2.12) \quad (a^2 - b^2)\sigma(X, \phi X) + (b^2 - a^2)\sigma(Y, \phi Y) = 0$$

y, por tanto,

$$(II.2.13) \quad \sigma(X, \phi X) = \sigma(Y, \phi Y)$$

para algún $\phi=I, J, K$.

Sea ahora U un vector unitario de $T_p M$ y $Z \in Q(U)^\perp$, donde $Q(U)^\perp$ es el complemento ortogonal de $Q(U)$ en $T_p M$. Entonces, para cualquier $X \in Q(U)$, $\{X, Z\}$ es un plano totalmente real. Así, de (II.2.9) y (II.2.13), se tiene

$$(II.2.14) \quad \sigma(X, \phi X) = \sigma(Z, \phi Z)$$

para algún $\phi=I, J, K$. Así, $\sigma(X, \phi X)$ es constante para cualquier $X \in Q(U)$. Por tanto, de la Proposición II.2.2, la curvatura seccional cuaterniónica en $Q(U)$ ha de ser constante. Como esto es cierto para todos los vectores unitarios $U \in T_p M$ y para cualquier $p \in M$, M tiene curvatura seccional cuaterniónica puntualmente constante, y, en consecuencia, M tiene curvatura seccional cuaterniónica constante por ser Einstein.

TEOREMA II.2.5.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ y dimensión $4m \geq 8$. Entonces M tiene curvatura seccional totalmente real constante si y sólo si M tiene curvatura seccional cuaterniónica constante.

Demostración.- En primer lugar, se supone que M tiene curvatura seccional totalmente real constante.

Sean X, Y vectores ortonormales de $T_p M$ generando un plano totalmente real de tipo $(\overset{+}{+})$ ó $(\overset{-}{-})$. Entonces, para cualquier $\phi=I, J, K$, base local de V en p , $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y), \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi X - \phi Y)\}$ es un plano totalmente real del mismo tipo.

Si la curvatura seccional totalmente real es la constante α , se tiene

$$(II.2.15) \quad \alpha = \sigma(X+Y, \phi X - \phi Y) = R\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{\phi X - \phi Y}{\sqrt{2}}, \frac{\phi X - \phi Y}{\sqrt{2}}, \frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \{ \sigma(X, \phi X) + \sigma(Y, \phi Y) - 2\sigma(X, Y) - 2\sigma(X, \phi Y) \}$$

Como $\sigma(X, Y) = \sigma(X, \phi Y) = \alpha$, de (II.2.15) se sigue

$$(II.2.16) \quad \sigma(X, \phi X) + \sigma(Y, \phi Y) = 8\alpha$$

Sea ahora un plano totalmente real $\{X, Y\}$ de tipo $(\frac{+}{-})$. Sean $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ tales que $a^2 - b^2 = 1$; $X' = aX + bY$, $Y' = b\phi X + a\phi Y$, $\phi = I, J, K$, son vectores que generan un plano totalmente real del mismo tipo. Entonces,

$$(II.2.17) \quad -\alpha = R(aX + bY, b\phi X + a\phi Y, b\phi X + a\phi Y, aX + bY) = a^2 b^2 \sigma(X, \phi X) + \\ + a^2 b^2 \sigma(Y, \phi Y) + (4a^2 b^2 + a^4 + b^4) R(X, \phi Y, \phi Y, X) + \\ + 2a^2 b^2 \sigma(X, Y) + (2ab^3 + 2a^3 b) \{ R(X, \phi X, \phi X, Y) + \\ + R(Y, \phi Y, \phi Y, X) \}$$

De ii) del Lema II.2.3, se tiene que $R(X, \phi X, \phi X, Y) + R(Y, \phi Y, \phi Y, X) = 0$. Por tanto, sustituyendo en (II.2.17), $\sigma(X, Y) = \sigma(X, \phi Y) = -\alpha$, y teniendo en cuenta que $a^2 = 1 + b^2$, se obtiene

$$(II.2.18) \quad \sigma(X, \phi X) + \sigma(Y, \phi Y) = 8\alpha$$

Se toma ahora un vector unitario U de $T_p M$, y sea Z un vector unitario en $Q(U)^\perp$. De (II.2.16) y (II.2.18), se tiene

$$\sigma(X, \phi X) + \sigma(Z, \phi Z) = 8\alpha$$

$$\sigma(Y, \phi Y) + \sigma(Z, \phi Z) = 8\alpha$$

para cualesquiera vectores unitarios $X, Y \in Q(U)$. Por tanto, $\sigma(X, \phi X) = \sigma(Y, \phi Y)$. Entonces, de la Proposición II.2.2 se tiene que la curvatura seccional cuaterniónica en $Q(U)$ es constante. Como esto es cierto para cualquier vector unitario $U \in T_p M$, y para cualquier $p \in M$, M tiene curvatura seccional cuaterniónica puntualmente constante, en consecuencia, M tiene curvatura seccional cuaterniónica constante por ser Einstein.

El recíproco se obtiene directamente del Teorema II.1.3. Con

esto termina la demostración.

§3.- Algunas condiciones suficientes para la constancia de la curvatura seccional cuaterniónica.-

Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$.

Se dice que M verifica el axioma de 4-planos cuaterniónicos si para cada $p \in M$ y cada 4-plano cuaterniónico no degenerado π , existe una subvariedad totalmente geodésica de dimensión 4, N , tal que $p \in N$ y $T_p N = \pi$.

M verifica el axioma de planos semicuaterniónicos si para cada $p \in M$ y cada plano semicuaterniónico π no degenerado, existe una subvariedad totalmente geodésica de dimensión 2, N , tal que $p \in N$ y $T_p N = \pi$.

M verifica el axioma de planos totalmente reales si para cada $p \in M$ y cada plano totalmente real no degenerado, π , existe una subvariedad totalmente geodésica de dimensión 2, N , tal que $p \in N$ y $T_p N = \pi$.

TEOREMA II.3.1.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$. Si la dimensión de M es $4m \geq 8$ y M verifica el axioma de 4-planos cuaterniónicos, entonces M tiene curvatura seccional cuaterniónica constante.

Demostración.- Sea p un punto arbitrario de M , e $\{I, J, K\}$ una base local de V en un entorno coordinado de M en p . Sean X, Y vectores ortonormales en p que generan un plano totalmente real. Entonces $Q(X)$ es un 4-plano cuaterniónico no degenerado. Sea N una subvariedad totalmente geodésica tal que $p \in N$ y $T_p N = Q(X)$. Entonces es conocido que $R(\phi X, X)X \in T_p N$ para cualquier $\phi = I, J, K$. Así, como X e Y generan un plano totalmente real, Y es normal a N , luego $R(\phi X, X, X, Y) = 0$. Así, la Proposición II.2.4 proporciona el resultado.

TEOREMA II.3.2.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice 4s. Si la dimensión de M es $4m \geq 8$ y M verifica el axioma de planos semicuaterniónicos, entonces M tiene curvatura seccional cuaterniónica constante.

Demostración.- Sea $p \in M$, e $\{I, J, K\}$ una base local de V en un entorno coordinado de M en p. Si X e Y son vectores ortonormales en p que generan un plano totalmente real, entonces X y ϕX , $\phi = I, J, K$, generan un plano semicuaterniónico no degenerado π . Por tanto, existe una subvariedad totalmente geodésica N tal que $p \in N$ y $T_p N = \pi$. Así, se verifica que $R(\phi X, X)X \in T_p N$. Al ser Y normal a N, se tiene que $R(\phi X, X, X, Y) = 0$. Por la Proposición II.2.4 se sigue el resultado.

TEOREMA II.3.3.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice 4s. Si la dimensión de M es $4m \geq 8$ y M verifica el axioma de planos totalmente reales, entonces M tiene curvatura seccional cuaterniónica constante.

Demostración.- Sea p un punto arbitrario de M. Sea $\{I, J, K\}$ una base local de V en un entorno de p en M. Sean X e Y vectores ortonormales que generan un plano totalmente real π no degenerado. Existe, pues, una subvariedad totalmente geodésica N tal que $p \in N$ y $T_p N = \pi$. Por tanto, $R(X, Y)X \in T_p N$. Como ϕX es normal a N para cualquier $\phi = I, J, K$, por la Proposición II.2.4 se obtiene el resultado.

A continuación se destacan ciertos tipos de curvaturas cuya constancia es equivalente a la de la curvatura seccional cuaterniónica.

TEOREMA II.3.4.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice 4s y dimensión $4m \geq 8$. Si para alguna base local $\{I, J, K\}$ de V en p y cualquier plano totalmente real $\{X, Y\}$ de $T_p M$, $p \in M$,

las curvaturas del tipo $R(X, \phi X, \phi Y, Y)$, $\phi=I, J, K$, son constantes, entonces M tiene curvatura seccional cuaterniónica constante.

Demostración.- Siendo $\{X, Y\}$ un plano totalmente real, se tienen las siguientes igualdades, aplicando la primera identidad de Bianchi,

$$(II.3.1) \quad R(X, IY, IY, X) = R(X, IX, IY, Y) - R(X, Y, Y, X)$$

$$(II.3.2) \quad R(X, JY, JY, X) = R(X, JX, JY, Y) - R(X, Y, Y, X)$$

$$(II.3.3) \quad R(X, KY, KY, X) = R(X, KX, KY, Y) - R(X, Y, Y, X)$$

Siendo las curvaturas del tipo $R(X, \phi X, \phi Y, Y)$ para un plano totalmente real $\{X, Y\}$ constantes, para $\phi=I, J, K$, se supone que su valor es b . Entonces de (II.3.1), (II.3.2) y (II.3.3), se tiene

$$(II.3.4) \quad 3R(X, Y, Y, X) + R(X, IY, IY, X) + R(X, JY, JY, X) + \\ + R(X, KY, KY, X) = 3b$$

Si se cambia Y por IY en (II.3.4), se obtiene

$$(II.3.5) \quad R(X, Y, Y, X) + 3R(X, IY, IY, X) + R(X, JY, JY, X) + \\ + R(X, KY, KY, X) = 3b$$

De (II.3.4) y (II.3.5), se sigue

$$(II.3.6) \quad R(X, Y, Y, X) = R(X, IY, IY, X)$$

Cambiando en (II.3.4) Y por JY y por KY , respectivamente, se obtiene

$$(II.3.7) \quad R(X, Y, Y, X) = R(X, JY, JY, X)$$

y

$$(II.3.8) \quad R(X, Y, Y, X) = R(X, KY, KY, X)$$

Sustituyendo (II.3.6), (II.3.7) y (II.3.8) en (II.3.4), se sigue

$$(II.3.9) \quad R(X,Y,Y,X) = \frac{b}{2}$$

Por tanto, la curvatura seccional totalmente real de M es constante, y por el Teorema II.2.5 se sigue el resultado.

§4.- Comportamiento especial de las curvaturas seccionales cuaterniónica y totalmente real para variedades Kaehlerianas cuaterniónicas de índice estrictamente positivo.-

En este epígrafe se supondrá que M es una variedad Kaehleriana cuaterniónica indefinida, es decir, se supone que el índice de g es $4 \leq 4s \leq 4m-4$, siendo $4m$ la dimensión de M .

Los resultados que siguen ponen de manifiesto diferencias esenciales entre el caso de variedades Kaehlerianas cuaterniónicas definidas e indefinidas, pues entre otras cosas, el Teorema II.4.3 no tiene sentido plantearlo en el caso definido y el Teorema II.4.1 demuestra que los conocidos problemas de rigidez en términos de la curvatura seccional cuaterniónica no son planteables en el caso indefinido.

TEOREMA II.4.1.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de dimensión $4m \geq 8$ y de índice $0 < 4s < 4m$. Si la curvatura seccional cuaterniónica de M está acotada superior e inferiormente, entonces M tiene curvatura seccional cuaterniónica constante.

Demostración.- Se supone que existe un punto $p \in M$ tal que la curvatura seccional cuaterniónica no tiene el mismo valor para todos los planos semicuaterniónicos no degenerados de $T_p M$.

Sea $\{X, Y\}$ un plano totalmente real de tipo $\begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix}$ de $T_p M$ con $g(X, X) = 1$ y $g(Y, Y) = -1$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Entonces $\lambda X + Y$ es un vector no nulo de $T_p M$.
Entonces

$$(II.4.1) \quad \sigma(\lambda X+Y, \lambda \phi X+\phi Y) = \frac{1}{(\lambda^2-1)^2} \{ \lambda^4 \sigma(X, \phi X) + 4\lambda^3 R(X, \phi Y, \phi X, X) - \\ - 6\lambda^2 \sigma(X, \phi Y) - 2\lambda^2 \sigma(X, Y) + 4\lambda R(Y, \phi Y, \phi X, Y) + \sigma(Y, \phi Y) \}$$

para cualquier $\phi=I, J, K$, base local de V en p .

Por hipótesis, existen $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}$, tales que

$$(II.4.2) \quad \epsilon_1 \leq \sigma(\lambda X+Y, \lambda \phi X+\phi Y) \leq \epsilon_2$$

De (II.4.1) y (II.4.2), se tiene

$$(II.4.3) \quad (\lambda^2-1)^2 \epsilon_1 \leq \lambda^4 \sigma(X, \phi X) + 4\lambda^2 R(X, \phi Y, \phi X, X) - 6\lambda^2 \sigma(X, \phi Y) - \\ - 2\lambda^2 \sigma(X, Y) + 4\lambda R(Y, \phi Y, \phi X, Y) + \sigma(Y, \phi Y) \leq (\lambda^2-1)^2 \epsilon_2$$

Por continuidad, de (II.4.3) se sigue que

$$\lambda^4 \sigma(X, \phi X) + 4\lambda^3 R(X, \phi Y, \phi X, X) - 6\lambda^2 \sigma(X, \phi Y) - 2\lambda^2 \sigma(X, Y) + \\ + 4\lambda R(Y, \phi Y, \phi X, Y) + \sigma(Y, \phi Y) = 0$$

si $\lambda=1$ ó $\lambda=-1$. Sustituyendo estos valores se obtiene

$$(II.4.4) \quad \sigma(X, \phi X) + \sigma(Y, \phi Y) = 6\sigma(X, \phi Y) + 2\sigma(X, Y)$$

y

$$(II.4.5) \quad R(X, \phi Y, \phi X, X) + R(Y, \phi Y, \phi X, Y) = 0$$

Cambiando Y por ϕY en (II.5.4),

$$(II.4.6) \quad \sigma(X, \phi X) + \sigma(Y, \phi Y) = 6\sigma(X, Y) + 2\sigma(X, \phi Y)$$

De (II.4.4) y (II.4.6) se sigue que

$$(II.4.7) \quad \sigma(X, Y) = \sigma(X, \phi Y)$$

y, por tanto, de (II.4.4),

$$(II.4.8) \quad \sigma(X, \phi X) + \sigma(Y, \phi Y) = 8\sigma(X, Y)$$

De (II.4.3), (II.4.5), (II.4.7) y (II.4.8) se sigue

$$\epsilon_1 (\lambda^2-1) \leq (\lambda^2+1) \sigma(X, \phi X) - 8\sigma(X, Y) + 4\lambda R(X, \phi Y, \phi X, X) \leq \epsilon_2 (\lambda^2-1),$$

si $|\lambda| > 1$, y

$$\epsilon_2 (\lambda^2-1) \leq (\lambda^2+1) \sigma(X, \phi X) - 8\sigma(X, Y) + 4\lambda R(X, \phi X, \phi Y, X) \leq \epsilon_1 (\lambda^2-1)$$

si $|\lambda| < 1$. Así, por continuidad, se tiene que

$$(II.4.9) \quad (\lambda^2 + 1)\sigma(X, \phi X) - 8\sigma(X, Y) + 4\lambda R(X, \phi Y, \phi X, X) = 0$$

si $\lambda = 1$ ó $\lambda = -1$. Por tanto, de (II.4.7), (II.4.8) y (II.4.9),

$$(II.4.10) \quad \sigma(X, \phi X) = \sigma(Y, \phi Y) = 4\sigma(X, Y) = 4\sigma(X, \phi Y)$$

y

$$(II.4.11) \quad R(X, Y, \phi X, X) = R(\phi Y, Y, X, Y) = 0$$

para cualquier $\phi = I, J, K$. El resultado se sigue entonces de la Proposición II.2.2.

TEOREMA II.4.2.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de dimensión $4m \geq 12$ e índice $0 < 4s < 4m$. Si M tiene curvatura seccional totalmente real acotada superior ó inferiormente, entonces M tiene curvatura seccional cuaterniónica constante.

Demostración.- Se supone que la curvatura seccional totalmente real está acotada superiormente. Si estuviera acotada inferiormente, la demostración sería análoga.

Sean $X, Y, Z \in T_p M$ tales que $g(X, X) = g(Y, Y) = 1$ y $g(Z, Z) = -1$, y con $Q(X) \perp Q(Y)$, $Q(X) \perp Q(Z)$ y $Q(Y) \perp Q(Z)$. Como la dimensión es ≥ 12 , es posible elegir tales vectores.

Sea $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Entonces $\{\lambda X + Z, Y\}$ es un plano totalmente real no degenerado y, por hipótesis, existe $\epsilon \in \mathbb{R}$ tal que

$$(II.4.12) \quad \sigma(\lambda X + Z, Y) \leq \epsilon$$

De (II.4.12), desarrollando $\sigma(\lambda X + Z, Y)$, se tiene

$$(II.4.13) \quad \lambda^2 \sigma(X, Y) + 2\lambda R(X, Y, Y, Z) - \sigma(Y, Z) \leq \epsilon(\lambda^2 - 1)$$

si $|\lambda| > 1$, y

$$(II.4.14) \quad \epsilon(\lambda^2 - 1) \leq \lambda^2 \sigma(X, Y) + 2\lambda R(X, Y, Y, Z) - \sigma(Y, Z)$$

si $|\lambda| < 1$. Así, de (II.4.13) y (II.4.14), se sigue, por continuidad,

que

$$(II.4.15) \quad \lambda^2 \sigma(X,Y) + 2\lambda R(X,Y,Y,Z) - \sigma(Y,Z) = 0$$

si $\lambda=1$ ó $\lambda=-1$. Sustituyendo estos valores en (II.4.15) se obtiene $\sigma(X,Y)=\sigma(Y,Z)$ y $R(X,Y,Y,Z)=0$.

Análogamente se obtiene que $\sigma(X,Y)=\sigma(X,Z)$. Por tanto, la curvatura seccional totalmente real es constante para todo plano totalmente real no degenerado de $T_p M$ y para cualquier $p \in M$. El resultado se sigue del Teorema II.2.5.

Es claro que una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $0 < 4s < 4m$ con curvatura seccional cuaterniónica constante verifica que $R(X, \phi X, \phi X, X) = 0$ para cualquier vector nulo $X \in T_p M$, $p \in M$, $\phi = I, J, K$.

Recíprocamente, se tiene el siguiente

TEOREMA II.4.3.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de dimensión $4m \geq 8$ e índice $0 < 4s < 4m$. Si para cada $p \in M$ existe una base local $\{I, J, K\}$ de V en p tal que $R(X, \phi X, \phi X, X) = 0$ para cualquier vector nulo $X \in T_p M$ y algún $\phi = I, J, K$, entonces M tiene curvatura seccional cuaterniónica constante.

Demostración.- Sean Y, Z dos vectores ortonormales de $T_p M$ que generan un plano totalmente real de tipo $(\frac{+}{-})$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda Y + Z$ es un vector nulo si y sólo si $\lambda = 1$ ó -1 . Luego, por hipótesis,

$$(II.4.16) \quad R(\lambda Y + Z, \lambda \phi Y + \phi Z, \lambda \phi Y + \phi Z, \lambda Y + Z) = 0$$

para $\lambda = 1$ ó $\lambda = -1$ y algún $\phi = I, J, K$. Desarrollando (II.4.16) y tomando los valores $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$, se tiene

$$(II.4.17) \quad \sigma(Y, \phi Y) + \sigma(Z, \phi Z) = 8\sigma(Y, Z) = 8\sigma(Y, \phi Z)$$

y

$$(II.4.18) \quad R(Y, \phi Z, \phi Y, Y) + R(Z, \phi Z, \phi Y, Z) = 0$$

Sean $\{\beta_n\}$ y $\{\mu_n\}$ dos sucesiones de números reales tales que para cada n , $\beta_n > 1$, $\mu_n < -1$, $\lim_n \beta_n = 1$ y $\lim_n \mu_n = -1$. De (II.4.16) y por continuidad, se tiene

$$(II.4.19) \quad \lim_n R(\beta_n Y+Z, \beta_n \phi Y+\phi Z, \beta_n \phi Y+\phi Z, \beta_n Y+Z) = 0$$

y

$$(II.4.20) \quad \lim_n R(\mu_n Y+Z, \mu_n \phi Y+\phi Z, \mu_n \phi Y+\phi Z, \mu_n Y+Z) = 0$$

Sea ahora $\{\delta_m\}$ una sucesión de números reales positivos, tal que $\lim_n \frac{\delta_n}{\beta_n^2 - 1} = 0$. De (II.4.19), para cada δ_m , existe un $n_0(m)$ tal que

$$(II.4.21) \quad -\delta_m < (\beta_{n(m)}^2 - 1)(\beta_{n(m)}^2 + 1)\sigma(Y, \phi Y) - 8(\beta_{n(m)}^2 - 1)\sigma(Y, \phi Z) + \\ + 4\beta_{n(m)}(\beta_{n(m)}^2 - 1)R(Y, \phi Z, \phi Y, Y) < \delta_m$$

para cualquier $n(m) > n_0(m)$.

Como $\beta_n^2 - 1$ es siempre positivo y si $n \rightarrow \infty$, $n(m) \rightarrow \infty$,

$$\lim_m \frac{\delta_m}{\beta_{n(m)}^2 - 1} = 0, \text{ de (II.4.21) se obtiene}$$

$$(II.4.22) \quad 2\sigma(Y, \phi Y) - 8\sigma(Y, Z) + 4R(Y, \phi Z, \phi Y, Y) = 0$$

De (II.4.20) y con un razonamiento análogo,

$$(II.4.23) \quad 2\sigma(Y, \phi Y) - 8\sigma(Y, Z) - 4R(Y, \phi Z, \phi Y, Y) = 0$$

De (II.4.17), (II.4.18), (II.4.22) y (II.4.23), se tiene que $\sigma(Y, \phi Y) = \sigma(Z, \phi Z) = 4\sigma(Y, Z) = 4\sigma(Y, \phi Z)$, y $R(Y, Z, \phi Y, Y) = R(\phi Z, Z, Y, Z) = 0$, para algún $\phi = I, J, K$. El resultado se sigue de la Proposición II.2.2.

C A P I T U L O I I I

CURVATURA SECCIONAL CUATERNIONICA Y GEOMETRIA CUATERNIONICA

§1.- Preliminares.-

Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$. Sea Q su función curvatura seccional cuaterniónica. Como se ha visto, Q se obtiene de forma canónica a partir de la estructura cuaterniónica de M y de su métrica. A partir de esto es lógico plantearse la siguiente cuestión: ¿Es Q característica de la geometría cuaterniónica? En otras palabras, dadas dos variedades Kaehlerianas cuaterniónicas de índice $4s$ y una función entre ellas que conserve las funciones curvaturas seccional cuaterniónica de ambas variedades, ¿sería dicha función una isometría?

Respuestas a esta pregunta han sido dadas por R.S. Kulkarni para las geometrías Riemanniana y Kaehleriana en [27] y [28], respectivamente.

A lo largo de todo este Capítulo se supone que las variedades son Kaehlerianas cuaterniónicas, aunque los resultados son válidos para el caso de variedades Kaehlerianas cuaterniónicas de índice $4s$, hecho que no se desarrolla en la memoria por facilitar los cálculos.

En §2 se usará la siguiente notación: $\sigma(X,Y)$ denotará la curvatura seccional determinada por los vectores ortonormales X e Y , $K(X,Y) = R(X,Y,Y,X)$, para cualesquiera vectores X,Y ; por $H(X,Y)$ se notará $R(X,Y,Y,X)$ para cualesquiera X,Y que generen un plano semicuaterniónico y, en particular, $H_r(X) = H(X, \phi_r X)$, $r=1,2,3$,

donde $\phi_1=I$, $\phi_2=J$ y $\phi_3=K$.

§2.- Relación entre la curvatura seccional y la curvatura seccional cuaterniónica.-

LEMA III.2.1.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de dimensión $4m \geq 8$. Sean $X, Y \in T_p M$, $p \in M$, dos vectores ortonormales. Entonces

$$\sigma(X, Y) + K(X, IY) + K(X, JY) + K(X, KY) = \frac{\rho}{m+2} + \frac{2\rho}{m+2} \{ g(IX, Y)^2 + g(JX, Y)^2 + g(KX, Y)^2 \}$$

donde $4m\rho$ es la curvatura escalar de M.

Demostración.- De la Proposición I.2.1 y el Corolario I.3.4, se tiene

$$(III.2.1) \quad R(X, IX, JY, KY) = -R(X, IX, Y, IY) - \frac{\rho}{m+2}$$

Por otra parte, también de la Proposición I.2.1 y el Corolario I.3.4, mediante la primera identidad de Bianchi se sigue

$$(III.2.2) \quad R(X, IX, JY, KY) = -R(X, KY, IX, JY) - R(X, JY, KY, IX) = \\ = -K(X, JY) - K(X, KY) + \frac{2\rho}{m+2} g(IX, Y)^2$$

y

$$(III.2.3) \quad R(X, IX, Y, IY) = -R(X, IY, IX, Y) - R(X, Y, IX, IY) = \\ = -K(X, IY) - K(X, Y) + \frac{2\rho}{m+2} \{ g(JX, Y)^2 + g(KX, Y)^2 \}$$

El resultado se obtiene sumando (III.2.2) y (III.2.3) y sustituyendo en (III.2.1).

NOTA.- Obsérvese que en las condiciones del Lema III.2.1, si $X, Y \in T_p M$, $p \in M$, generan un plano totalmente real, entonces

$$\sigma(X, Y) + \sigma(X, IY) + \sigma(X, JY) + \sigma(X, KY) = \frac{\rho}{m+2}$$

LEMA III.2.2.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica con dimensión $4m \geq 8$. Si $X, Y \in T_p M$, $p \in M$, son vectores ortonormales, entonces

$$\begin{aligned}
 & 4 \sum_{r=1}^3 \{H_r(X+Y) + H_r(X-Y)\} + 3 \sum_{r \neq s} \{H_r(X+\phi_s Y) + H_r(X-\phi_s Y)\} = \\
 & = 20 \sum_{r=1}^3 \{H_r(X) + H_r(Y)\} - 96 \sigma(X, Y) + 120 \frac{\rho}{m+2} \{g(IX, Y)^2 + \\
 & + g(JX, Y)^2 + g(KX, Y)^2\} + 144 \frac{\rho}{m+2}
 \end{aligned}$$

Demostración.-

$$\begin{aligned}
 H_1(X+Y) &= R(X+Y, IX+IY, IX+IY, X+Y) = R(X, IX, IX, X) + R(X, IX, IX, Y) + \\
 & + R(X, IX, IY, X) + R(X, IX, IY, Y) + R(X, IY, IX, X) + \\
 & + R(X, IY, IX, Y) + R(X, IY, IY, X) + R(X, IY, IY, Y) + \\
 & + R(Y, IX, IX, X) + R(Y, IX, IX, Y) + R(Y, IX, IY, X) + \\
 & + R(Y, IX, IY, Y) + R(Y, IY, IX, X) + R(Y, IY, IX, Y) + \\
 & + R(Y, IY, IY, X) + R(Y, IY, IY, Y)
 \end{aligned}$$

Agrupando términos en la expresión anterior y teniendo en cuenta que $R(Y, IX, IX, Y) = R(X, IY, IY, X)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \text{(III.2.4)} \quad H_1(X+Y) &= \sigma(X, IX) + 2R(X, IX, IX, Y) + 2R(X, IX, IY, X) + \\
 & + 2R(X, IX, IY, Y) + 2R(X, IY, IX, Y) + 2K(X, IY) + \\
 & + 2R(X, IY, IY, Y) + 2R(Y, IX, IY, Y) + \sigma(Y, IY).
 \end{aligned}$$

Mediante un desarrollo análogo,

$$\begin{aligned}
 \text{(III.2.5)} \quad H_1(X-Y) &= \sigma(X, IX) - 2R(X, IX, IX, Y) - 2R(X, IX, IY, X) + \\
 & + 2R(X, IX, IY, Y) + 2R(X, IY, IX, Y) + 2K(X, IY) - \\
 & - 2R(X, IY, IY, Y) - 2R(Y, IX, IY, Y) + \sigma(Y, IY)
 \end{aligned}$$

Sumando (III.2.4) y (III.2.5), se sigue

$$\begin{aligned}
 \text{(III.2.6)} \quad H_1(X+Y) + H_1(X-Y) &= 2\sigma(X, IX) + 4R(X, IX, IY, Y) + \\
 & + 4R(X, IY, IX, Y) + 4K(X, IY) + 2\sigma(Y, IY)
 \end{aligned}$$

Aplicando la primera identidad de Bianchi, se tiene

$$R(X, IX, IY, Y) = -R(X, Y, IX, IY) - R(X, IY, Y, IX)$$

y así,

$$(III.2.7) \quad H_1(X+Y) + H_1(X-Y) = 2\sigma(X, IX) + 2\sigma(Y, IY) - 4R(X, Y, IX, IY) + \\ + 8R(X, IY, IX, Y) + 4K(X, IY)$$

Sustituyendo

$$R(X, Y, IX, IY) = -\sigma(X, Y) + \frac{\rho}{m+2} \{g(JX, Y)^2 + g(KX, Y)^2\}$$

y

$$R(X, IY, IX, Y) = K(X, IY) - \frac{\rho}{m+2} \{g(JX, Y)^2 + g(KX, Y)^2\}$$

en (III.2.7), se sigue que

$$(III.2.8) \quad 4 H_1(X+Y) + H_1(X-Y) = 8\sigma(X, IX) + 8\sigma(Y, IY) + 16\sigma(X, Y) + \\ + 48K(X, IY) - 48 \frac{\rho}{m+2} \{g(JX, Y)^2 + g(KX, Y)^2\}$$

Análogamente, desarrollando $H_1(X+JY)$ y teniendo en cuenta que $R(JY, IX, IX, JY) = K(X, KY)$ y $R(JY, KY, KY, JY) = \sigma(Y, IY)$, se obtiene

$$(III.2.9) \quad H_1(X+JY) = \sigma(X, IX) + \sigma(Y, IY) + 2R(X, IX, IX, JY) + \\ + 2R(X, IX, KY, X) + 2R(X, IX, KY, JY) + 2R(X, KY, IX, JY) + \\ + 2K(X, KY) + 2R(X, KY, KY, JY) + 2R(JY, IX, KY, JY)$$

Análogamente,

$$(III.2.10) \quad H_1(X-JY) = \sigma(X, IX) + \sigma(Y, IY) - 2R(X, IX, IY, JY) - \\ - 2R(X, IX, KY, X) + 2R(X, IX, KY, JY) + \\ + 2R(X, KY, IX, JY) + 2K(X, KY) - 2R(X, KY, KY, JY) - \\ - 2R(JY, IX, KY, JY)$$

Sumando (III.2.9) y (III.2.10) se tiene

$$(III.2.11) \quad H_1(X+JY) + H_1(X-JY) = 2\sigma(X, IX) + 2\sigma(Y, IY) + \\ + 4R(X, IX, KY, JY) + 4R(X, KY, IX, JY) + \\ + 4K(X, KY)$$

Por la primera identidad de Bianchi, $R(X,IX,KY,JY) = -R(X,JY,IX,KY) - R(X,KY,JY,IX)$. Así, de (III.2.11) se obtiene

$$(III.2.12) \quad H_1(X+JY) + H_1(X-JY) = 2\sigma(X,IX) + 2\sigma(Y,IY) - \\ - 4R(X,JY,IX,KY) + 8R(X,KY,IX,JY) + \\ + 4K(X,KY)$$

Como, por otra parte, $R(X,JY,IX,KY) = -K(X,JY) + \frac{\rho}{m+2} g(IX,Y)^2$, y $R(X,KY,IX,JY) = K(X,KY) - \frac{\rho}{m+2} g(IX,Y)^2$, si se sustituye en (III.2.12), se tiene

$$(III.2.13) \quad 3H_1(X+JY) + 3H_1(X-JY) = 6\sigma(X,IX) + 6\sigma(Y,IY) + \\ + 12K(X,JY) + 36K(X,KY) - 36 \frac{\rho}{m+2} g(IX,Y)^2$$

Siguiendo un proceso análogo para $H_1(X+KY)$ y $H_1(X-KY)$, se tiene

$$(III.2.14) \quad 3H_1(X+KY) + 3H_1(X-KY) = 6\sigma(X,IX) + 6\sigma(Y,IY) + \\ + 12K(X,KY) + 36K(X,JY) - 36 \frac{\rho}{m+2} g(IX,Y)^2$$

Sumando (III.2.8), (III.2.13) y (III.2.14) y aplicando el Lema III.2.1, se obtiene

$$(III.2.15) \quad 4H_1(X+Y) + 4H_1(X-Y) + 3H_1(X+JY) + 3H_1(X+KY) + \\ + 3H_1(X-JY) + 3H_1(X-KY) = 20\sigma(X,IX) + 20\sigma(Y,IY) - \\ - 32\sigma(X,Y) + 48 \frac{\rho}{m+2} \{g(IX,Y)^2 + g(JX,Y)^2 + g(KX,Y)^2\} - \\ - 24 \frac{\rho}{m+2} g(IX,Y)^2 + 48 \frac{\rho}{m+2}$$

Aplicando el mismo razonamiento seguido hasta ahora a $H_2(X+Y)$ y $H_2(X-Y)$, $H_2(X+IY)$ y $H_2(X-IY)$ y $H_2(X+KY)$ y $H_2(X-KY)$ y, de nuevo, por el Lema III.2.1, se obtiene

$$(III.2.16) \quad 4H_2(X+Y) + 4H_2(X-Y) + 3H_2(X+IY) + 3H_2(X-IY) + \\ + 3H_2(X+KY) + 3H_2(X-KY) = 20\sigma(X,JX) + 20\sigma(Y,JY) - \\ - 32\sigma(X,Y) + 48 \frac{\rho}{m+2} \{g(IX,Y)^2 + g(JX,Y)^2 + g(KX,Y)^2\} -$$

$$- 24 \frac{\rho}{m+2} g(JX, Y)^2 + 48 \frac{\rho}{m+2}$$

Análogamente, de $H_3(X+Y)$ y $H_3(X-Y)$, $H_3(X+IY)$ y $H_3(X-IY)$ y $H_3(X+JY)$ y $H_3(X-JY)$, se sigue, aplicando el Lema III.2.1,

$$(III.2.17) \quad 4 H_3(X+Y) + 4 H_3(X-Y) + 3 H_3(X+IY) + 3 H_3(X-IY) + \\ + 3 H_3(X+JY) + 3 H_3(X-JY) = 20 \sigma(X, KX) + 20 \sigma(Y, KY) - \\ - 32 \sigma(X, Y) + 48 \frac{\rho}{m+2} \{g(IX, Y)^2 + g(JX, Y)^2 + g(KX, Y)^2\} - \\ - 24 \frac{\rho}{m+2} g(KX, Y)^2 + 48 \frac{\rho}{m+2}$$

El resultado se sigue de (III.2.15), (III.2.16) y (III.2.17).

LEMA III.2.3.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de dimensión $4m \geq 8$. Entonces, para cualesquiera $X, Y \in T_p M$, $p \in M$, vectores ortonormales, se tiene

$$3g(X, Y) = \frac{3}{2} \frac{\rho}{m+2} \{g(IX, Y)^2 + g(JX, Y)^2 + g(KX, Y)^2\} + \\ + \frac{1}{32} \{3 \sum_{r=1}^3 \{H_r(X + \phi_r Y) + H_r(X - \phi_r Y)\} - \sum_{r=1}^3 \{H_r(X+Y) + \\ + H_r(X-Y)\} - 4 \sum_{r=1}^3 \{H_r(X) + H_r(Y)\}\}$$

Demostración.-

$$H_1(X+IY) = R(X+IY, IX-Y, IX-Y, X+IY) = R(X, IX, IX, X) + \\ + R(X, IX, IX, IY) - R(X, IX, Y, X) - R(X, IX, Y, IY) - \\ - R(X, Y, IX, X) - R(X, Y, IX, IY) + R(X, Y, Y, X) + \\ + R(X, Y, Y, IY) + R(IY, IX, IX, X) + R(IY, IX, IX, IY) - \\ - R(IY, IX, Y, X) - R(IY, IX, Y, IY) - R(IY, Y, IX, X) - \\ - R(IY, Y, IX, IY) + R(IY, Y, Y, X) + R(IY, Y, Y, IY)$$

Agrupando términos en la expresión anterior se tiene

$$(III.2.18) \quad H_1(X+IY) = \sigma(X, IX) + \sigma(Y, IY) + 2R(X, IX, IX, IY) - \\ - 2R(X, IX, Y, X) - 2R(X, IX, Y, IY) - 2R(X, Y, IX, IY) + \\ + 2\sigma(X, Y) + 2R(X, Y, Y, IY) - 2R(IY, IX, Y, IY)$$

Análogamente,

$$(III.2.19) \quad H_1(X-IY) = \sigma(X, IX) + \sigma(Y, IY) - 2R(X, IX, IX, IY) + \\ + 2R(X, IX, Y, X) - 2R(X, IX, Y, IY) - 2R(X, Y, IX, IY) + \\ + 2\sigma(X, Y) - 2R(X, Y, Y, IY) + 2R(IY, IX, Y, IY)$$

De (III.2.18) y (III.2.19) se sigue

$$(III.2.20) \quad H_1(X+IY) + H_1(X-IY) = 2\sigma(X, IX) + 2\sigma(Y, IY) - \\ - 4R(X, IX, Y, IY) - 4R(X, Y, IX, IY) + 4\sigma(X, Y)$$

Por la primera identidad de Bianchi, $R(X, IX, Y, IY) = -R(X, IY, IX, Y) + R(X, Y, IX, IY)$. Así,

$$(III.2.21) \quad H_1(X+IY) + H_1(X-IY) = 2\sigma(X, IX) + 2\sigma(Y, IY) + \\ + 4R(X, IY, IX, Y) - 8R(X, Y, IX, IY) + 4\sigma(X, Y)$$

Como

$$R(X, IY, IX, Y) = K(X, IY) - \frac{\rho}{m+2} \{g(JX, Y)^2 + g(KX, Y)^2\}$$

y

$$R(X, Y, IX, IY) = -\sigma(X, Y) + \frac{\rho}{m+2} \{g(JX, Y)^2 + g(KX, Y)^2\}$$

de (III.2.21), se tiene

$$(III.2.22) \quad 3H_1(X+IY) + 3H_1(X-IY) = 6\sigma(X, IX) + 6\sigma(Y, IY) + \\ + 12K(X, IY) + 36\sigma(X, Y) - 36 \frac{\rho}{m+2} \{g(JX, Y)^2 + g(KX, Y)^2\}$$

De (III.2.8) y (III.2.22), se sigue

$$(III.2.23) \quad \sigma(X, Y) = \frac{1}{32} \{3H_1(X+IY) + 3H_1(X-IY) - H_1(X+Y) - H_1(X-Y) - \\ - 4H_1(X) - 4H_1(Y)\} + \frac{3}{4} \frac{\rho}{m+2} \{g(JX, Y)^2 + \\ + g(KX, Y)^2\}$$

Repitiendo el proceso anterior para $H_2(X+JY)$ y $H_2(X-JY)$, se obtiene

$$(III.2.24) \quad 3H_2(X+JY) + 3H_2(X-JY) = 6\sigma(X, JX) + 6\sigma(Y, JY) + \\ + 12K(X, JY) + 36\sigma(X, Y) - 36 \frac{\rho}{m+2} \{g(IX, Y)^2 + g(KX, Y)^2\}$$

De (III.2.24) y de la expresión análoga a (III.2.8) que se obtiene para J, desarrollando $H_2(X+Y)$ y $H_2(X-Y)$, se sigue

$$(III.2.25) \quad \sigma(X,Y) = \frac{1}{32} \{3H_2(X+JY) + 3H_2(X-JY) - H_2(X+Y) - H_2(X-Y) - 4H_2(X) - 4H_2(Y)\} + \frac{3}{4} \frac{\rho}{m+2} \{g(IX,Y)^2 + g(KX,Y)^2\}$$

Análogamente, si se desarrolla, siguiendo un proceso análogo al anterior, $H_3(X+KY)$ y $H_3(X-KY)$, se obtiene

$$(III.2.26) \quad \sigma(X,Y) = \frac{1}{32} \{3H_3(X+KY) + 3H_3(X-KY) - H_3(X+Y) - H_3(X-Y) - 4H_3(X) - 4H_3(Y)\} + \frac{3}{4} \frac{\rho}{m+2} \{g(IX,Y)^2 + g(JX,Y)^2\}$$

El resultado se sigue de (III.2.23), (III.2.25) y (III.2.26).

De los Lemas III.2.1, III.2.2 y III.2.3 se sigue el siguiente teorema que indica que, algebraicamente, la curvatura seccional cuaterniónica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica determina la curvatura seccional de la misma:

TEOREMA III.2.4.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica de dimensión $4m \geq 8$. Entonces

$$\begin{aligned} \sigma(X,Y) = & \frac{1}{96} \sum_{r=1}^3 \{5H_r(X+\phi_r Y) + 5H_r(X-\phi_r Y) + H_r(X+Y) + H_r(X-Y) - \\ & - 20H_r(X) - 20H_r(Y)\} + \frac{1}{48} \sum_{r \neq s} \{H_r(X+\phi_s Y) + H_r(X-\phi_s Y)\} - \\ & - \frac{\rho}{m+2} \end{aligned}$$

para cualesquiera vectores ortonormales $X, Y \in T_p M$, $p \in M$.

§3.- Difeomorfismos que conservan la curvatura seccional cuaterniónica.-

Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica. Sea $\{E_1, \dots, E_m, IE_1, \dots, IE_m, JE_1, \dots, JE_m, KE_1, \dots, KE_m\}$ una base ortonormal de campos

sobre M localmente definida. A una base de este tipo se le llamará base adaptada sobre M .

Un punto $p \in M$ se dice que es isótropo con respecto a la curvatura seccional cuaterniónica si esta tiene el mismo valor para todos los planos semicuaterniónicos en p .

LEMA III.3.1.- Sea M una variedad Kaehleriana cuaterniónica y $p \in M$ un punto no isótropo. Entonces, si la dimensión de M es $4m \geq 8$, existe una base adaptada en p tal que

1) $R(E_i, \phi E_i, E_j, E_i)^2 + (R(E_i, \phi E_i, \phi E_i, E_i) - R(E_j, \phi E_j, \phi E_j, E_j))^2 \neq 0$
para todo (i, j) con $i \neq j$ y $\phi = I, J, K$. Y existe una base adaptada tal que

2) $R(E_i, \phi E_i, \phi E_j, E_i)^2 + (R(E_i, \phi E_i, \phi E_i, E_i) - R(E_j, \phi E_j, \phi E_j, E_j))^2 \neq 0$
para todo (i, j) con $i \neq j$ y $\phi = I, J, K$.

Demostración.- Si se supone demostrado 1), 2) se sigue fácilmente reordenando la base, y tomando ϕE_j en lugar de E_j .

Para demostrar 1) se puede suponer, sin perderse generalidad, que $m=2$. Supóngase que se tiene una base adaptada en p , $\{E_1, E_2, IE_1, IE_2, JE_1, JE_2, KE_1, KE_2\}$. Al ser p un punto no isótropo, la curvatura seccional cuaterniónica de M no puede ser constante. Entonces, por la Proposición II.2.4, y la definición de base adaptada en p , deben existir dos vectores $\phi E_1, \psi E_2$ (donde ϕ y ψ pueden ser la identidad sobre $T_p M$, I, J ó K) tales que

$$(III.3.1) \quad R(\phi E_1, \psi E_2, I\phi E_1, \phi E_1) \neq 0$$

$$(III.3.2) \quad R(\phi E_1, \psi E_2, J\phi E_1, \phi E_1) \neq 0$$

y

$$(III.3.3) \quad R(\phi E_1, \psi E_2, K\phi E_1, \phi E_1) \neq 0$$

De (III.3.1), (III.3.2) y (III.3.3), si se toma $\bar{E}_1 = \phi E_1, \bar{E}_2 = \psi E_2$, se sigue, obviamente, el resultado.

Se supone ahora que M y \bar{M} son dos variedades Kaehlerianas cuaterniónicas conexas cuyas funciones curvatura seccional cuaterniónica son, respectivamente, Q y \bar{Q} . Se supondrá, además, que $\dim M = \dim \bar{M} = 4m \geq 8$ y que existe un difeomorfismo $f: M \rightarrow \bar{M}$ tal que $f^*\bar{Q}=Q$. De esta segunda condición, se sigue que f aplica 4-planos cuaterniónicos en 4-planos cuaterniónicos.

LEMA III.3.2.- En las condiciones anteriores, f conserva la estructura cuaterniónica.

Demostración.- El Lema se prueba para $4m=8$, pues los demás casos se obtienen, trivialmente, a partir de este. Sea $\{E_1, E_2, IE_1, IE_2, JE_1, JE_2, KE_1, KE_2\}$ una base adaptada en $p \in M$. Sean

$$f_*E_i = \bar{E}_i, \quad f_*IE_i = \bar{H}_i, \quad f_*JE_i = \bar{L}_i \text{ y } f_*KE_i = \bar{M}_i \quad i=1,2$$

donde f_* denota la aplicación inducida por f entre los campos de vectores sobre M y los campos de vectores sobre \bar{M} .

Entonces,

$$\bar{H}_i = a_i \bar{E}_i + b_i \bar{I}\bar{E}_i + c_i \bar{J}\bar{E}_i + d_i \bar{K}\bar{E}_i$$

$$\bar{L}_i = a'_i \bar{E}_i + b'_i \bar{I}\bar{E}_i + c'_i \bar{J}\bar{E}_i + d'_i \bar{K}\bar{E}_i$$

$$\bar{M}_i = a''_i \bar{E}_i + b''_i \bar{I}\bar{E}_i + c''_i \bar{J}\bar{E}_i + d''_i \bar{K}\bar{E}_i$$

$i=1,2$, donde $\{\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}\}$ es una base local del fibrado \bar{V} sobre \bar{M} en $\bar{p}=f(p)$. Entonces

$$\begin{aligned} f_*\{xE_1 + yE_2, xIE_1 + yIE_2, xJE_1 + yJE_2, xKE_1 + yKE_2\} = \\ = \{x\bar{E}_1 + y\bar{E}_2, x\bar{H}_1 + y\bar{H}_2, x\bar{L}_1 + y\bar{L}_2, x\bar{M}_1 + y\bar{M}_2\} \end{aligned}$$

es un 4-plano cuaterniónico si $(x,y) \neq (0,0)$. Por tanto

$$\begin{aligned} x\bar{H}_1 + y\bar{H}_2 &= x(a_1 \bar{E}_1 + b_1 \bar{I}\bar{E}_1 + c_1 \bar{J}\bar{E}_1 + d_1 \bar{K}\bar{E}_1) + \\ &+ y(a_2 \bar{E}_2 + b_2 \bar{I}\bar{E}_2 + c_2 \bar{J}\bar{E}_2 + d_2 \bar{K}\bar{E}_2) = \lambda(x\bar{E}_1 + y\bar{E}_2) + \end{aligned}$$

$$+ \mu(x\bar{I}\bar{E}_1 + y\bar{I}\bar{E}_2) + \gamma(x\bar{J}\bar{E}_1 + y\bar{J}\bar{E}_2) + \delta(x\bar{K}\bar{E}_1 + y\bar{K}\bar{E}_2)$$

para λ, μ, γ y δ adecuados. Esto implica

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = a = \lambda, \quad b_1 = b_2 = b = \mu, \quad c_1 = c_2 = c = \gamma, \\ d_1 = d_2 = d = \delta \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene

$$(III.3.4) \quad \bar{H}_i = a\bar{E}_i + b\bar{I}\bar{E}_i + c\bar{J}\bar{E}_i + d\bar{K}\bar{E}_i$$

y, análogamente,

$$(III.3.5) \quad \bar{L}_i = a'\bar{E}_i + b'\bar{I}\bar{E}_i + c'\bar{J}\bar{E}_i + d'\bar{K}\bar{E}_i$$

$$(III.3.6) \quad \bar{M}_i = a''\bar{E}_i + b''\bar{I}\bar{E}_i + c''\bar{J}\bar{E}_i + d''\bar{K}\bar{E}_i$$

para $i=1,2$.

Se consideran ahora los siguientes 4-planos cuaterniónicos

$$\Pi_1 \equiv \{xE_1 + yIE_2, xIE_1 - yE_2, xJE_1 - yKE_2, xKE_1 + yJE_2\}$$

$$\Pi_2 \equiv \{xE_1 + yJE_2, xIE_1 + yKE_2, xJE_1 - yE_2, xKE_1 - yIE_2\}$$

$$\Pi_3 \equiv \{xE_1 + yKE_2, xIE_1 - yJE_2, xJE_1 + yIE_2, xKE_1 - yE_2\}$$

donde $(x,y) \neq (0,0)$. Entonces, los siguientes 4-planos

$$f_*(\Pi_1) \equiv \{x\bar{E}_1 + y\bar{H}_2, x\bar{H}_1 - y\bar{E}_2, x\bar{L}_1 - y\bar{M}_2, x\bar{M}_1 + y\bar{L}_2\}$$

$$f_*(\Pi_2) \equiv \{x\bar{E}_1 + y\bar{L}_2, x\bar{H}_1 + y\bar{M}_2, x\bar{L}_1 - y\bar{E}_2, x\bar{M}_1 - y\bar{H}_2\}$$

$$f_*(\Pi_3) \equiv \{x\bar{E}_1 + y\bar{M}_2, x\bar{H}_1 - y\bar{L}_2, x\bar{L}_1 + y\bar{H}_2, x\bar{M}_1 - y\bar{E}_2\}$$

son también 4-planos cuaterniónicos, y, por tanto,

$$\begin{aligned} x\bar{H}_1 - y\bar{E}_2 &= x(a\bar{E}_1 + b\bar{I}\bar{E}_1 + c\bar{J}\bar{E}_1 + d\bar{K}\bar{E}_1) - y\bar{E}_2 = \\ &= \lambda(x\bar{E}_1 + y(a\bar{E}_2 + b\bar{I}\bar{E}_2 + c\bar{J}\bar{E}_2 + d\bar{K}\bar{E}_2)) + \\ &+ \mu(x\bar{I}\bar{E}_1 + y(a\bar{I}\bar{E}_2 - b\bar{E}_2 + c\bar{K}\bar{E}_2 - d\bar{J}\bar{E}_2)) + \\ &+ \gamma(x\bar{J}\bar{E}_1 + y(a\bar{J}\bar{E}_2 - b\bar{K}\bar{E}_2 - c\bar{E}_2 + d\bar{I}\bar{E}_2)) + \end{aligned}$$

$$+ \delta(x\bar{K}\bar{E}_1 + y(a\bar{K}\bar{E}_2 + b\bar{J}\bar{E}_2 - c\bar{I}\bar{E}_2 - d\bar{E}_2))$$

para λ, μ, γ y δ adecuados. Entonces, $\lambda=a$, $\mu=b$, $\gamma=c$, $\delta=d$ y

$$-1 = \lambda a - \mu b - \gamma c - \delta d$$

$$0 = \lambda b + \mu a + \gamma d - \delta c$$

$$0 = \lambda c - \mu d + \gamma a + \delta b$$

$$0 = \lambda d + \mu c - \gamma b + \delta a$$

es decir,

$$-1 = a^2 - b^2 - c^2 - d^2$$

$$0 = 2ab$$

$$0 = 2ac$$

$$0 = 2ad$$

y, por consiguiente,

$$(III.3.7) \quad a = 0, \quad b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

Si se aplica el mismo razonamiento a $x\bar{L}_1 - y\bar{E}_2$, se obtiene

$$(III.3.8) \quad a' = 0, \quad b'^2 + c'^2 + d'^2 = 1$$

y de $x\bar{M}_1 - y\bar{E}_2$, se sigue, análogamente,

$$(III.3.9) \quad a'' = 0, \quad b''^2 + c''^2 + d''^2 = 1$$

De (III.3.7), (III.3.8) y (III.3.9), se tiene

$$\begin{aligned} x\bar{L}_1 - y\bar{M}_2 &= x(b'\bar{I}\bar{E}_1 + c'\bar{J}\bar{E}_1 + d'\bar{K}\bar{E}_1) - y(b''\bar{I}\bar{E}_2 + c''\bar{J}\bar{E}_2 + d''\bar{K}\bar{E}_2) = \\ &= \lambda_1(x\bar{E}_1 + y(b\bar{I}\bar{E}_2 + c\bar{J}\bar{E}_2 + d\bar{K}\bar{E}_2)) + \\ &+ \mu_1(x\bar{I}\bar{E}_1 + y(-b\bar{E}_2 + c\bar{K}\bar{E}_2 - d\bar{J}\bar{E}_2)) + \\ &+ \gamma_1(x\bar{J}\bar{E}_1 + y(-b\bar{K}\bar{E}_2 - c\bar{E}_2 + d\bar{I}\bar{E}_2)) + \\ &+ \delta_1(x\bar{K}\bar{E}_1 + y(b\bar{J}\bar{E}_2 - c\bar{I}\bar{E}_2 - d\bar{E}_2)) \end{aligned}$$

para ciertos $\lambda_1, \mu_1, \gamma_1, \delta_1$. Entonces se sigue que $\lambda_1=0$, $\mu_1=b'$, $\gamma_1=c'$, $\delta_1=d'$ y

$$0 = -bb' - cc' - dd'$$

$$-b'' = dc' - d'c$$

$$(III.3.10) \quad -c'' = -db' + bd'$$

$$-d'' = cb' - bc'$$

Por un razonamiento análogo aplicado, respectivamente, a $x\bar{M}_1 + y\bar{L}_2$ y $x\bar{M}_1 - y\bar{H}_2$, se obtiene, respectivamente,

$$0 = -bb'' - cc'' - dd''$$

$$b' = dc'' - cd''$$

$$(III.3.11) \quad c' = -db'' + bd''$$

$$d' = cb'' - bc''$$

y

$$0 = -b'b'' - c'c'' - d'd''$$

$$-b = d'c'' - c'd''$$

$$(III.3.12) \quad -c = -d'b'' + b'd''$$

$$-d = c'b'' - b'c''$$

Las ecuaciones (III.3.4),..., (III.3.12) aseguran que, llamando $I' = b\bar{I} + c\bar{J} + d\bar{K}$, $J' = b'\bar{I} + c'\bar{J} + d'\bar{K}$ y $K' = b''\bar{I} + c''\bar{J} + d''\bar{K}$, verifican

$$(\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}) \begin{pmatrix} b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \\ d & d' & d'' \end{pmatrix} = (I', J', K')$$

y entonces

$$\begin{pmatrix} b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \\ d & d' & d'' \end{pmatrix} \in SO(3)$$

y, además, $I'^2 = J'^2 = K'^2 = -Id$, $I'J' = -J'I' = K'$, $J'K' = -K'J' = I'$,

$K'I' = -I'K' = J'$. Por tanto, $\{I', J', K'\}$ es una base local de \bar{V} en $f(p)$

y se tiene que f_* conserva las estructuras cuaterniónicas de M y

\bar{M} , en el sentido de que $f_*I = I'f_*$, $f_*J = J'f_*$, $f_*K = K'f_*$, donde

$\{I, J, K\}$ es base local de V en $p \in M$ e $\{I', J', K'\}$ es base local de \bar{V} en $f(p) \in \bar{M}$. Esto demuestra el Lema.

Sea, pues, $\{E_1, \dots, E_m, IE_1, \dots, IE_m, JE_1, \dots, JE_m, KE_1, \dots, KE_m\}$ una base adaptada de M en p , donde $\{I, J, K\}$ es una base local de V en p . Sean $f_*E_i = \bar{E}_i$, $i=1, \dots, m$. Del Lema III.3.2, se tiene, $f_*IE_i = \bar{I}\bar{E}_i$, $f_*JE_i = \bar{J}\bar{E}_i$ y $f_*KE_i = \bar{K}\bar{E}_i$, donde $\{\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}\}$ es una base local de \bar{V} en $f(p) \in \bar{M}$.

$$\|\bar{E}_i\|^2 = \|\bar{I}\bar{E}_i\|^2 = \|\bar{J}\bar{E}_i\|^2 = \|\bar{K}\bar{E}_i\|^2 = a_i$$

$$(III.3.13) \quad \bar{g}(\bar{E}_i, \bar{E}_j) = \bar{g}(\bar{I}\bar{E}_i, \bar{I}\bar{E}_j) = \bar{g}(\bar{J}\bar{E}_i, \bar{J}\bar{E}_j) = \bar{g}(\bar{K}\bar{E}_i, \bar{K}\bar{E}_j) = a_{ij}$$

$$\bar{g}(\bar{E}_i, \bar{I}\bar{E}_j) = b_{ij}, \quad \bar{g}(\bar{E}_i, \bar{J}\bar{E}_j) = c_{ij}, \quad \bar{g}(\bar{E}_i, \bar{K}\bar{E}_j) = d_{ij}$$

siempre que $i \neq j$.

LEMA III.3.3.- Si $p \in M$ es no isótropo, entonces $f_* = (df)_p$ es una homotecia.

Demostración.- Con la notación de (III.3.13) se tiene que demostrar que $a_i = a_j$ y que $a_{ij} = b_{ij} = c_{ij} = d_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Como f conserva Q , para cualquier $(x, y) \neq (0, 0)$, $x, y \in \mathbb{R}$, se tendrá que

$$(III.3.14) \quad \frac{R(xE_i + yE_j, xIE_i + yIE_j, xIE_i + yIE_j, xE_i + yE_j)}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{\bar{R}(x\bar{E}_i + y\bar{E}_j, x\bar{I}\bar{E}_i + y\bar{I}\bar{E}_j, x\bar{I}\bar{E}_i + y\bar{I}\bar{E}_j, x\bar{E}_i + y\bar{E}_j)}{(a_i x^2 + 2a_{ij}xy + a_j y^2)^2}$$

El numerador del término superior se escribe en la forma:

$$Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4$$

donde

$$(III.3.15) \quad A = R(E_i, IE_i, IE_i, E_i), \quad B = 4R(E_i, IE_i, IE_j, E_i)$$

$$C = 2(R(E_i, IE_i, IE_j, E_j) + 2R(E_i, IE_j, IE_j, E_i))$$

$$D = 4R(E_j, IE_j, IE_i, E_j), \quad E = R(E_j, IE_j, IE_j, E_j)$$

Análogamente se puede escribir el numerador del término inferior como

$$\bar{A}x^4 + \bar{B}x^3y + \bar{C}x^2y^2 + \bar{D}xy^3 + \bar{E}y^4$$

donde

$$(III.3.16) \quad \begin{aligned} \bar{A} &= \bar{R}(\bar{E}_i, \bar{I}\bar{E}_i, \bar{I}\bar{E}_i, \bar{E}_i) & \bar{B} &= 4\bar{R}(\bar{E}_i, \bar{I}\bar{E}_i, \bar{I}\bar{E}_j, \bar{E}_j) \\ \bar{C} &= 2\bar{R}(\bar{E}_i, \bar{I}\bar{E}_i, \bar{I}\bar{E}_j, \bar{E}_j) + \bar{R}(\bar{E}_i, \bar{I}\bar{E}_j, \bar{I}\bar{E}_i, \bar{E}_j) + \\ &\quad + \bar{R}(\bar{E}_i, \bar{I}\bar{E}_j, \bar{I}\bar{E}_j, \bar{E}_i) \\ \bar{D} &= 4\bar{R}(\bar{E}_j, \bar{I}\bar{E}_j, \bar{I}\bar{E}_i, \bar{E}_j) & \bar{E} &= \bar{R}(\bar{E}_j, \bar{I}\bar{E}_j, \bar{I}\bar{E}_j, \bar{E}_j) \end{aligned}$$

Así, de (III.3.14) se obtiene

$$(III.3.17) \quad \bar{A} = a_i^2 A, \quad \bar{E} = a_j^2 E$$

$$(III.3.18) \quad \bar{B} = a_i^2 B + 4a_i a_{ij} A, \quad \bar{D} = a_j^2 D + 4a_j a_{ij} E$$

$$(III.3.19) \quad \begin{aligned} 2\bar{A} + \bar{C} &= 2(a_i a_j + 2a_{ij}^2)A + 4a_i a_{ij} B + a_i^2 C \\ 2\bar{E} + \bar{C} &= 2(a_i a_j + 2a_{ij}^2)E + 4a_i a_{ij} D + a_j^2 C \end{aligned}$$

$$(III.3.20) \quad 2\bar{B} + \bar{D} = 4a_j a_{ij} A + 2(a_i a_j + 2a_{ij}^2)B + 4a_i a_{ij} C + a_i^2 D$$

$$2\bar{D} + \bar{B} = 4a_i a_{ij} E + 2(a_i a_j + 2a_{ij}^2)D + 4a_j a_{ij} C + a_j^2 B$$

$$(III.3.21) \quad \begin{aligned} \bar{A} + 2\bar{C} + \bar{E} &= a_j^2 A + 4a_j a_{ij} B + 2(a_i a_j + 2a_{ij}^2)C + a_i^2 E + \\ &\quad + 4a_i a_{ij} D \end{aligned}$$

Sustituyendo (III.3.17) en (III.3.19) se sigue que

$$\bar{C} = 2(2a_{ij}^2 + a_i a_j - a_i^2)A + 4a_i a_{ij} B + a_i^2 C$$

$$\bar{C} = 2(2a_{ij}^2 + a_i a_j - a_j^2)E + 4a_j a_{ij} D + a_j^2 C$$

Sustituyendo (III.3.17) y (III.3.22) en (III.3.21), se tiene

$$(III.3.23) \quad \begin{aligned} &(4(2a_{ij}^2 + a_i a_j - a_i^2) + a_i^2 - a_j^2)A + (8a_i a_{ij} - 4a_j a_{ij})B + \\ &+ (2a_i^2 - 2(a_i a_j + 2a_{ij}^2))C - 4a_i a_{ij} D + (a_j^2 - a_i^2)E = 0 \end{aligned}$$

y

$$(III.3.24) \quad (a_i^2 - a_j^2)A - 4a_j a_{ij} B + (2a_j^2 - 2(a_i a_j + 2a_{ij}^2))C + \\ + (8a_j a_{ij} - 4a_i a_{ij})D + (4(2a_{ij}^2 + a_i a_j - a_j^2) + a_j^2 - a_i^2)E = 0$$

Sumando (III.3.23) y (III.3.24), se tiene

$$(III.3.25) \quad (4a_{ij}^2 - (a_i - a_j)^2)(A + E - C) + 4(a_i - a_j)a_{ij}(B - D) = 0$$

Sustituyendo (III.3.18) en (III.3.20) se obtiene

$$(III.3.26) \quad (8a_i a_{ij} - 4a_j a_{ij})A + (2a_i^2 - 2(a_i a_j + 2a_{ij}^2))B - \\ - 4a_i a_{ij} C + (a_j^2 - a_i^2)D + 4a_j a_{ij} E = 0$$

y

$$(III.3.27) \quad 4a_i a_{ij} A + (a_i^2 - a_j^2)B - 4a_j a_{ij} C + \\ + (a_j^2 - 2(a_i a_j + 2a_{ij}^2))D + (8a_j a_{ij} - 4a_i a_{ij})E = 0$$

Restando (III.3.27) de (III.3.26) se obtiene

$$(III.3.28) \quad 4(a_i - a_j)a_{ij}(A + E - C) - (4a_{ij}^2 - (a_i - a_j)^2)(B - D) = 0$$

Considerando (III.3.25) y (III.3.28) como un sistema homogéneo con incógnitas $4a_{ij}^2 - (a_i - a_j)^2$ y $4(a_i - a_j)a_{ij}$ se sigue que, si $(A + E - C)^2 + (B - D)^2 \neq 0$, entonces la única solución del sistema es

$$(III.3.29) \quad 4a_{ij}^2 - (a_i - a_j)^2 = 0, \quad (a_i - a_j)a_{ij} = 0$$

Claramente, de (III.3.29) se sigue que $a_i = a_j$ y $a_{ij} = 0$.

Supóngase, pues, que el determinante del sistema $(A + E - C)^2 + (B - D)^2 = 0$, es decir, $A + E - C = B - D = 0$. Al sustituirlo en las ecuaciones de (III.3.22) se sigue

$$(III.3.30) \quad (4a_{ij}^2 - (a_i - a_j)^2)(A - E) + 4(a_i - a_j)a_{ij} B = 0$$

y sustituyendo en (III.3.26),

$$(III.3.31) \quad 4(a_i - a_j)a_{ij}(A - E) - (4a_{ij}^2 - (a_i - a_j)^2)B = 0$$

Todo lo que se ha hecho hasta ahora es válido para cualquier base adaptada de M en p . A partir de ahora se considera una base adaptada que verifique 2) del Lema III.3.1, lo cual es posible al ser p no isótropo. Esta condición, precisamente, es que $(A - E)^2 + B^2 \neq 0$. Por lo tanto, discutiendo el sistema homogéneo dado por (III.3.30) y (III.3.31) se llega de nuevo a (III.3.29) y, por tanto, $a_i = a_j$, $a_{ij} = 0$.

Análogamente, se considera ahora $(x, y) \neq (0, 0)$, con $x, y \in \mathbb{R}$, y por conservar f la curvatura seccional cuaterniónica,

$$(III.3.32) \quad \frac{R(xE_i + yIE_j, xIE_i - yE_j, xIE_i - yE_j, xE_i + yIE_j)}{(x^2 + y^2)^2} = \\ = \frac{\bar{R}(x\bar{E}_i + y\bar{I}\bar{E}_j, x\bar{I}\bar{E}_i - y\bar{E}_j, x\bar{I}\bar{E}_i - y\bar{E}_j, x\bar{E}_i + y\bar{I}\bar{E}_j)}{((x^2 + y^2)a_i + 2xyb_{ij})^2}$$

El numerador del término superior se puede expresar como

$$Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4$$

donde

$$(III.3.33) \quad \begin{aligned} A &= R(E_i, IE_i, IE_i, E_i) & B &= 4R(E_i, IE_i, E_i, E_j) \\ C &= 2(R(E_i, IE_i, IE_j, E_j) + 2R(E_i, E_j, E_j, E_i)) \\ D &= 4R(E_i, E_j, E_j, IE_j) & E &= R(E_j, IE_j, IE_j, E_j) \end{aligned}$$

Se escribirá también el numerador inferior en la forma

$$\bar{A}x^4 + \bar{B}x^3y + \bar{C}x^2y^2 + \bar{D}xy^3 + \bar{E}y^4$$

donde

$$(III.3.34) \quad \begin{aligned} \bar{A} &= \bar{R}(\bar{E}_i, \bar{I}\bar{E}_i, \bar{I}\bar{E}_i, \bar{E}_i) & \bar{B} &= 4\bar{R}(\bar{E}_i, \bar{I}\bar{E}_i, \bar{E}_i, \bar{E}_j) \\ \bar{C} &= 2(\bar{R}(\bar{E}_i, \bar{I}\bar{E}_i, \bar{I}\bar{E}_j, \bar{E}_i) + \bar{R}(\bar{E}_i, \bar{E}_j, \bar{I}\bar{E}_j, \bar{I}\bar{E}_i) + \\ &+ \bar{R}(\bar{E}_i, \bar{E}_j, \bar{E}_j, \bar{E}_i)) \\ \bar{D} &= 4\bar{R}(\bar{E}_i, \bar{E}_j, \bar{E}_j, \bar{I}\bar{E}_j) & \bar{E} &= \bar{R}(\bar{E}_j, \bar{I}\bar{E}_j, \bar{I}\bar{E}_j, \bar{E}_j) \end{aligned}$$

Por tanto, de (III.3.32) se sigue

$$(III.3.35) \quad \bar{A} = a_i^2 A \quad \bar{E} = a_i^2 E$$

$$(III.3.36) \quad \bar{B} = 4a_i b_{ij} A + a_i^2 B \quad \bar{D} = a_i^2 D + 4a_i b_{ij} E$$

$$(III.3.37) \quad \begin{aligned} 2\bar{A} + \bar{C} &= 2(2b_{ij}^2 + a_i^2)A + 4a_i b_{ij} B + a_i^2 C \\ 2\bar{E} + \bar{C} &= 2(2b_{ij}^2 + a_i^2)E + 4a_i b_{ij} D + a_i^2 C \end{aligned}$$

$$(III.3.38) \quad \begin{aligned} 2\bar{B} + \bar{D} &= 4a_i b_{ij} A + 2(2b_{ij}^2 + a_i^2)B + 4a_i b_{ij} C + a_i^2 D \\ 2\bar{D} + \bar{B} &= 4a_i b_{ij} E + 2(2b_{ij}^2 + a_i^2)D + 4a_i b_{ij} C + a_i^2 B \end{aligned}$$

$$(III.3.39) \quad \bar{A} + 2\bar{C} + \bar{E} = a_i^2 A + 4a_i b_{ij} B + 2(2b_{ij}^2 + a_i^2)C + 4a_i b_{ij} D + a_i^2 E$$

Sustituyendo (III.3.35) en (III.3.37), se sigue que

$$(III.3.40) \quad \begin{aligned} \bar{C} &= 4b_{ij}^2 A + 4a_i b_{ij} B + a_i^2 C \\ \bar{C} &= 4b_{ij}^2 E + 4a_i b_{ij} D + a_i^2 C \end{aligned}$$

Sustituyendo (III.3.35) y (III.3.40) en (III.3.39) se obtiene

$$(III.3.41) \quad 2b_{ij}^2 A + a_i b_{ij} B - b_{ij}^2 C - a_i b_{ij} D = 0$$

y

$$(III.3.42) \quad -a_i b_{ij} B - b_{ij}^2 C + a_i b_{ij} D + 2b_{ij}^2 E = 0$$

Sumando (III.3.41) y (III.3.42), se sigue

$$(III.3.43) \quad b_{ij}^2 (A + E - C) = 0$$

Sustituyendo (III.3.36) en (III.3.38), se tiene

$$(III.3.44) \quad a_i b_{ij} A + a_i b_{ij} E - b_{ij}^2 B - a_i b_{ij} C = 0$$

y

$$(III.3.45) \quad a_i b_{ij} A + a_i b_{ij} E - b_{ij}^2 D - a_i b_{ij} C = 0$$

Restando (III.3.45) de (III.3.44), se sigue

$$(III.3.46) \quad b_{ij}^2 (B - D) = 0$$

De (III.3.43) y (III.3.46), se tiene que $b_{ij}=0$ ó $A + E - C = B - D = 0$. Si se supone esta última posibilidad, es decir, $C = A + E$, $B = D$, entonces sustituyéndolo en (III.3.40) se obtiene

$$(III.3.47) \quad b_{ij}^2(A - E) = 0$$

y sustituyendo en (III.3.44) y (III.3.45) y restando,

$$(III.3.48) \quad b_{ij}^2 B = 0$$

Así, de nuevo, $b_{ij}=0$ o bien, $A - E = B = 0$, pero con el mismo razonamiento anterior, aplicando 1) del Lema III.3.1, se sigue que la posibilidad $A - E = B = 0$ es imposible, en consecuencia, $b_{ij}=0$.

Un proceso análogo al seguido para probar que $b_{ij}=0$, aplicado a $(xE_i + yJE_j, xJE_i - yE_j)$ (respectivamente, a $(xE_i + yKE_j, xKE_i - yE_j)$) demuestra que $c_{ij}=0$ (respectivamente, $d_{ij}=0$).

Todo ello prueba el Lema.

TEOREMA III.3.5.- Sean M y \bar{M} variedades Kaehlerianas cuaterniónicas con funciones curvatura seccional cuaterniónica Q y \bar{Q} , respectivamente. Si la dimensión de M es $4m \geq 8$ y existe un difeomorfismo $f: M \rightarrow \bar{M}$ tal que $f^*\bar{Q}=Q$, entonces

i) $Q=\bar{Q}=\text{constante}$ y, por tanto, M y \bar{M} son localmente isométricas, ó

ii) f es una isometría.

Demostración.- La condición $f^*\bar{Q}=Q$ implícitamente requiere que f aplique 4-planos cuaterniónicos de M en 4-planos cuaterniónicos de \bar{M} y que si $Q=\bar{Q}=\text{constante}$, la condición es redundante y la conclusión de i) es bien conocida.

Además, si todos los puntos de M son isótropos, $Q=\text{constante}$. Así, si $Q \neq \text{constante}$, por analiticidad, los puntos no isótropos formarían un conjunto denso. Por tanto, del Lema III.3.3 se sigue que M es conforme. Si f es conforme y conserva Q entonces, por el Lema III.2.1, se sigue que la curvatura escalar de M es igual

a la curvatura escalar de \bar{M} . Por el Teorema III.2.4 se obtiene que f conserva la curvatura seccional.

Finalmente, el resultado se sigue aplicando el Teorema Fundamental de [27].

CAPITULO IV

HIPERSUPERFICIES REALES PSEUDO-EINSTEIN DEL ESPACIO PROYECTIVO CUATERNIONICO

§1.- Fórmulas básicas.-

Sea \bar{M} una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ y dimensión $4m$ y M una hipersuperficie real no degenerada de \bar{M} . Sea ξ el campo de vectores normal unitario de M en \bar{M} . Se notará por $-U_1=I\xi$, $-U_2=J\xi$, $-U_3=K\xi$.

Sea X un campo de vectores tangente a M arbitrario. Entonces se escribe

$$\begin{aligned} IX &= \phi_1 X + f_1(X)\xi \\ (IV.1.1) \quad JX &= \phi_2 X + f_2(X)\xi \\ KX &= \phi_3 X + f_3(X)\xi \end{aligned}$$

donde $\phi_1 X$, $\phi_2 X$ y $\phi_3 X$ son, respectivamente, la componente tangente de IX , JX y KX , respectivamente.

Entonces, $g(IX, \xi) = -g(X, I\xi) = g(X, U_1) = g(\phi_1 X, \xi) + f_1(X)g(\xi, \xi) = f_1(X)g(\xi, \xi)$.

Análogamente, $g(JX, \xi) = f_2(X)g(\xi, \xi) = g(X, U_2)$, $g(KX, \xi) = f_3(X)g(\xi, \xi) = g(X, U_3)$. Es decir,

$$\begin{aligned} f_1(X) &= g(X, U_1)g(\xi, \xi) \\ (IV.1.2) \quad f_2(X) &= g(X, U_2)g(\xi, \xi) \\ f_3(X) &= g(X, U_3)g(\xi, \xi) \end{aligned}$$

De (IV.1.1) y teniendo en cuenta que $I^2=J^2=K^2=-Id$, se tiene

$$\begin{aligned} \phi_1^2 X &= -X + f_1(X)U_1 \\ (IV.1.3) \quad \phi_2^2 X &= -X + f_2(X)U_2 \\ \phi_3^2 X &= -X + f_3(X)U_3 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 & f_1(\phi_1 X) = 0 \\
 \text{(IV.1.4)} \quad & f_2(\phi_2 X) = 0 \\
 & f_3(\phi_3 X) = 0
 \end{aligned}$$

para cualquier campo de vectores X tangente a M . Además,

$$\begin{aligned}
 IU_1 = -I^2\xi = \xi &= \phi_1 U_1 + f_1(U_1)\xi = \phi_1 U_1 + g(U_1, U_1)g(\xi, \xi)\xi = \\
 &= \phi_1 U_1 + \xi
 \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
 & \phi_1 U_1 = 0 \\
 \text{(IV.1.5)} \quad & \phi_2 U_2 = 0 \\
 & \phi_3 U_3 = 0
 \end{aligned}$$

También se obtiene de (IV.1.1)

$$\begin{aligned}
 \phi_3 X + f_3(X)\xi = KX = IJX = I(\phi_2 X + f_2(X)\xi) &= \phi_1 \phi_2 X + f_1(\phi_2 X)\xi - \\
 &- f_2(X)U_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_2 X + f_2(X)\xi = JX = KIX = K(\phi_1 X + f_1(X)\xi) &= \phi_3 \phi_1 X + f_3(\phi_1 X)\xi - \\
 &- f_1(X)U_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_1 X + f_1(X)\xi = IX = JKX = J(\phi_3 X + f_3(X)\xi) &= \phi_2 \phi_3 X + f_2(\phi_3 X)\xi - \\
 &- f_3(X)U_2
 \end{aligned}$$

De aquí, igualando componentes tangenciales y normales,

$$\begin{aligned}
 \phi_1 X &= \phi_2 \phi_3 X - f_3(X)U_2 = -\phi_3 \phi_2 X + f_2(X)U_3 \\
 \text{(IV.1.6)} \quad \phi_2 X &= \phi_3 \phi_1 X - f_1(X)U_3 = -\phi_1 \phi_3 X + f_3(X)U_1 \\
 \phi_3 X &= \phi_1 \phi_2 X - f_2(X)U_1 = -\phi_2 \phi_1 X + f_1(X)U_2
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 f_1(X) &= f_2(\phi_3 X) = -f_3(\phi_2 X) \\
 \text{(IV.1.7)} \quad f_2(X) &= f_3(\phi_1 X) = -f_1(\phi_3 X) \\
 f_3(X) &= f_1(\phi_2 X) = -f_2(\phi_1 X)
 \end{aligned}$$

Además, teniendo en cuenta que $g(U_1, U_2) = g(U_1, U_3) = g(U_2, U_3) = 0$,

se tiene

$$\begin{aligned}
 (IV.1.8) \quad & \phi_3 U_1 = U_2 = -\phi_1 U_3 \\
 & \phi_1 U_2 = U_3 = -\phi_2 U_1 \\
 & \phi_2 U_3 = U_1 = -\phi_3 U_2
 \end{aligned}$$

De ser $g(IX,Y) = -g(X,IY)$ y análogamente para J y K, se obtiene

$$\begin{aligned}
 (IV.1.9) \quad & g(\phi_1 X, Y) + g(X, \phi_1 Y) = 0 \\
 & g(\phi_2 X, Y) + g(X, \phi_2 Y) = 0 \\
 & g(\phi_3 X, Y) + g(X, \phi_3 Y) = 0
 \end{aligned}$$

para cualesquiera campos de vectores X,Y tangentes a M.

Por otro lado, de (IV.1.1), se obtiene

$$\begin{aligned}
 g(X,Y) &= g(IX,IY) = g(\phi_1 X + f_1(X)\xi, \phi_1 Y + f_1(Y)\xi) = \\
 &= g(\phi_1 X, \phi_1 Y) + f_1(X)f_1(Y)g(\xi, \xi)
 \end{aligned}$$

y expresiones análogas para ϕ_2 y ϕ_3 . Es decir,

$$\begin{aligned}
 (IV.1.10) \quad & g(\phi_1 X, \phi_1 Y) = g(X,Y) - f_1(X)f_1(Y)g(\xi, \xi) \\
 & g(\phi_2 X, \phi_2 Y) = g(X,Y) - f_2(X)f_2(Y)g(\xi, \xi) \\
 & g(\phi_3 X, \phi_3 Y) = g(X,Y) - f_3(X)f_3(Y)g(\xi, \xi)
 \end{aligned}$$

para cualesquiera campos de vectores X,Y tangentes a M.

Sea ahora $\bar{\nabla}$ el operador de diferenciación covariante en \bar{M} y ∇ el inducido sobre M. Las fórmulas de Gauss y Weingarten están dadas por

$$(IV.1.11) \quad \bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(\xi, \xi)g(AX, Y)$$

$$(IV.1.12) \quad \bar{\nabla}_X \xi = -AX$$

para cualesquiera campos de vectores X,Y tangentes a M, donde A es el endomorfismo de Weingarten de la inmersión.

Las ecuaciones de Gauss y Codazzi vienen dadas, respectivamente, por

$$\bar{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + g(\xi, \xi)g(AX,Z)AY - g(\xi, \xi)g(AY,Z)AX$$

y

$$(\bar{R}(X,Y)Z)^\perp = g((\nabla_X A)Y,Z)\xi - g((\nabla_Y A)X,Z)\xi$$

donde \bar{R} y R denotan los tensores de curvatura de \bar{M} y M , respectivamente y \perp denota la componente normal, siendo X,Y,Z campos de vectores arbitrarios tangentes a M .

Se supone ahora que \bar{M} es una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ con curvatura seccional cuaterniónica constante $4c$. Entonces, del Teorema II.1.3, (IV.1.11), (IV.1.12) y las ecuaciones de Gauss y Codazzi se obtiene

$$(IV.1.13) \quad R(X,Y)Z = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(IY,Z)IX - g(IX,Z)IY + \\ + 2g(X,IY)IZ + g(JY,Z)JX - g(JX,Z)JY + 2g(X,JY)JZ + \\ + g(KY,Z)KX - g(KX,Z)KY + 2g(X,KY)KZ\} + g(\xi, \xi)g(AY,Z)AX - \\ - g(\xi, \xi)g(AX,Z)AY - g((\nabla_X A)Y,Z)\xi + g((\nabla_Y A)X,Z)\xi$$

para cualesquiera campos de vectores tangentes a M , X,Y,Z .

Considerando entonces las componentes tangenciales y normales de (IV.1.13), se tiene, si la dimensión de M es $4m \geq 8$,

$$(IV.1.14) \quad R(X,Y)Z = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(\phi_1 Y,Z)\phi_1 X - \\ - g(\phi_1 X,Z)\phi_1 Y + 2g(X,\phi_1 Y)\phi_1 Z + g(\phi_2 Y,Z)\phi_2 X - \\ - g(\phi_2 X,Z)\phi_2 Y + 2g(X,\phi_2 Y)\phi_2 Z + g(\phi_3 Y,Z)\phi_3 X - \\ - g(\phi_3 X,Z)\phi_3 Y + 2g(X,\phi_3 Y)\phi_3 Z\} + g(\xi, \xi)g(AY,Z)AX - \\ - g(\xi, \xi)g(AX,Z)AY$$

y

$$(IV.1.15) \quad (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X = c\{f_1(X)\phi_1 Y - f_1(Y)\phi_1 X + \\ + 2g(\xi, \xi)g(X,\phi_1 Y)U_1 + f_2(X)\phi_2 Y - f_2(Y)\phi_2 X + \\ + 2g(\xi, \xi)g(X,\phi_2 Y)U_2 + f_3(X)\phi_3 Y - f_3(Y)\phi_3 X + \\ + 2g(\xi, \xi)g(X,\phi_3 Y)U_3\}$$

En particular, de (IV.1.15) se obtiene, teniendo en cuenta

todas las fórmulas obtenidas anteriormente,

$$g((\nabla_X A)U_1, U_1) = g((\nabla_{U_1} A)X, U_1)$$

$$g((\nabla_X A)U_2, U_2) = g((\nabla_{U_2} A)X, U_2)$$

$$g((\nabla_X A)U_3, U_3) = g((\nabla_{U_3} A)X, U_3)$$

De (IV.1.14) y escogiendo una base ortonormal $\{E_1, \dots, E_{4m-1}\}$ de campos de vectores tangentes a M, considerando $\sigma_i = g(E_i, E_i) = \pm 1$, se sigue que el tensor de Ricci de la hipersuperficie está dado por

$$(IV.1.16) \quad S(X, Y) = \sum_{i=1}^{4m-1} \sigma_i R(E_i, X, Y, E_i) = (4m-2)cg(X, Y) + \\ + c \sum_{i=1}^{4m-1} \sigma_i \{3g(E_i, \phi_1 Y)g(\phi_1 X, E_i) + 3g(E_i, \phi_2 Y)g(\phi_2 X, E_i) + \\ + 3g(E_i, \phi_3 Y)g(\phi_3 X, Y)\} + g(\xi, \xi) \sum_{i=1}^{4m-1} \sigma_i \{g(AX, Y)g(AE_i, E_i) - \\ - g(E_i, AY)g(AX, E_i)\} = (4m-2)cg(X, Y) + 3c\{g(\phi_1 X, \phi_1 Y) + \\ + g(\phi_2 X, \phi_2 Y) + g(\phi_3 X, \phi_3 Y)\} + g(\xi, \xi)\{\text{traza } Ag(AX, Y) - \\ - g(A^2 X, Y)\}$$

y aplicando (IV.1.2) y (IV.1.10) en (IV.1.6), aparece

$$(IV.1.17) \quad SX = (4m+7)cX - 3c\{f_1(X)U_1 + f_2(X)U_2 + f_3(X)U_3\} + \\ + g(\xi, \xi)\{hAX - A^2 X\}$$

para cualquier campo de vectores X tangente a M, donde $S(X, Y) = g(SX, Y)$ para cualquier Y campo de vectores tangente a M y $h = \text{Traza } A$.

De (I.1.5), (IV.1.11) y (IV.1.12), se tiene

$$\nabla_X U_1 + g(\xi, \xi)g(AX, U_1)\xi = \bar{\nabla}_X U_1 = -\bar{\nabla}_X I\xi = -(\bar{\nabla}_X I)\xi - I\bar{\nabla}_X \xi = -r(X)J\xi + \\ + q(X)K\xi + \phi_1 AX + f_1(AX)\xi$$

y ecuaciones análogas si se deriva U_2 y U_3 . Luego

$$\begin{aligned}
& \nabla_X U_1 = r(X)U_2 - q(X)U_3 + \phi_1 AX \\
(IV.1.18) \quad & \nabla_X U_2 = -r(X)U_1 + p(X)U_3 + \phi_2 AX \\
& \nabla_X U_3 = q(X)U_1 - p(X)U_2 + \phi_3 AX
\end{aligned}$$

Análogamente, se tiene

$$\begin{aligned}
r(X)JY - q(X)KY &= (\bar{\nabla}_X I)Y = \bar{\nabla}_X IY - I\bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X \phi_1 Y + \bar{\nabla}_X f_1(Y)\xi - \\
& - I(\nabla_X Y + g(\xi, \xi)g(AX, Y)\xi) = \nabla_X \phi_1 Y + g(\xi, \xi)g(AX, \phi_1 Y)\xi + \\
& + X(f_1(Y))\xi - f_1(Y)AX - f_1(\nabla_X Y)\xi + \phi_1 \nabla_X Y + g(\xi, \xi)g(AX, Y)U_1
\end{aligned}$$

y expresiones análogas desarrollando $(\bar{\nabla}_X J)Y$ y $(\bar{\nabla}_X K)Y$, de donde, considerando las componentes tangenciales, se sigue

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \phi_1)Y &= r(X)\phi_2 Y - q(X)\phi_3 Y + f_1(Y)AX - \\
& - g(\xi, \xi)g(AX, Y)U_1 \\
(IV.1.19) \quad (\nabla_X \phi_2)Y &= -r(X)\phi_1 Y + p(X)\phi_3 Y + f_2(Y)AX - \\
& - g(\xi, \xi)g(AX, Y)U_2 \\
(\nabla_X \phi_3)Y &= q(X)\phi_1 Y - p(X)\phi_2 Y + f_3(Y)AX - \\
& - g(\xi, \xi)g(AX, Y)U_3
\end{aligned}$$

Se supone, pues, ahora que \bar{M} es una hipersuperficie real del espacio $\bar{M}(4c)$ con $c \neq 0$ y dimensión de $\bar{M}(4c)$ $4m \geq 8$. Entonces, se tiene

LEMA IV.1.1.- En las condiciones anteriores, si A es diagonalizable y U_1, U_2, U_3 son vectores propios de A con la misma curvatura principal α , entonces esta es localmente constante.

Demostración.- Sean U_1, U_2 y U_3 vectores propios de A con valores propios respectivos α_1, α_2 y α_3 . Es decir, $AU_1 = \alpha_1 U_1$, $AU_2 = \alpha_2 U_2$, $AU_3 = \alpha_3 U_3$. Entonces, de (IV.1.18), se tiene

$$(\nabla_X A)U_1 = \nabla_X \alpha_1 U_1 - A\nabla_X U_1 = X(\alpha_1)U_1 + \alpha_1 r(X)U_2 - \alpha_1 q(X)U_3 +$$

$$+ \alpha_1 \phi_1 AX - \alpha_2 r(X)U_2 + \alpha_3 q(X)U_3 - A\phi_1 AX$$

De aquí,

$$(IV.1.20) \quad g((\nabla_X A)Y, U_1) = g(Y, (\nabla_X A)U_1) = X(\alpha_1)g(Y, U_1) + \\ + \alpha_1 g(\phi_1 AX, Y) - g(A\phi_1 AX, Y) + r(X)(\alpha_1 - \alpha_2)g(Y, U_2) + \\ + q(X)(\alpha_3 - \alpha_1)g(Y, U_3)$$

De (IV.1.15) y (IV.1.20) se obtiene

$$(IV.1.21) \quad c\{2g(X, \phi_1 Y) + f_2(X)g(\phi_2 Y, U_1) - f_2(Y)g(\phi_2 X, U_1) + \\ + f_3(X)g(\phi_3 Y, U_1) - f_3(Y)g(\phi_3 X, U_1)\} = X(\alpha_1)g(Y, U_1) + \\ + \alpha_1 g(\phi_1 AX, Y) - g(A\phi_1 AX, Y) + r(X)(\alpha_1 - \alpha_2)g(Y, U_2) + \\ + q(X)(\alpha_3 - \alpha_1)g(Y, U_3) - Y(\alpha_1)g(X, U_1) - \alpha_1 g(\phi_1 AY, X) + \\ + g(A\phi_1 AY, X) - r(Y)(\alpha_1 - \alpha_2)g(X, U_2) - \\ - q(Y)(\alpha_3 - \alpha_1)g(X, U_3)$$

Si en (IV.1.21) se toma $Y=U_1$, se sigue

$$(IV.1.22) \quad X(\alpha_1) = U_1(\alpha_1)f_1(X) + r(U_1)(\alpha_1 - \alpha_2)f_2(X) + \\ + q(U_1)(\alpha_3 - \alpha_1)f_3(X)$$

y expresiones análogas para $X(\alpha_2)$ y $X(\alpha_3)$, siendo X un campo de vectores arbitrario tangente a M .

Así, si $X \perp \langle U_1, U_2, U_3 \rangle$, donde $\langle U_1, U_2, U_3 \rangle$ denota el subespacio generado por U_1 , U_2 y U_3 , se tiene que $X(\alpha_1)=X(\alpha_2)=X(\alpha_3)=0$.

Además, de (IV.1.22) se tiene que

$$U_2(\alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_2)r(U_1)$$

$$U_3(\alpha_1) = (\alpha_3 - \alpha_1)q(U_1)$$

Así, si se supone que $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha$, el resultado se sigue de las expresiones anteriores.

§2.- Hipersuperficies reales pseudo-Einstein de una variedad Kaehleriana cuaterniónica de índice $4s$ con curvatura seccional cuaterniónica constante.-

DEFINICION IV.2.1.- Sea M una hipersuperficie real no degenerada de una variedad Kaehleriana cuaterniónica \bar{M} . Se dice que M es una hipersuperficie pseudo-Einstein si su tensor de Ricci tiene una expresión del tipo siguiente

$$(IV.2.1) \quad SX = aX + b\{f_1(X)U_1 + f_2(X)U_2 + f_3(X)U_3\}$$

para todo campo de vectores X tangente a M , siendo a y b funciones C^∞ -diferenciables sobre M .

En este epígrafe se supondrá que M es una hipersuperficie real pseudo-Einstein de una variedad Kaehleriana cuaterniónica $\bar{M}(4c)$ de curvatura seccional cuaterniónica constante $4c$. Entonces, llamando $\tau = g(\xi, \xi)$, de la Definición anterior y teniendo en cuenta (IV.1.17) se tiene, si la dimensión de $\bar{M}(4c)$ es ≥ 8 ,

$$(IV.2.2) \quad (A^2 - hA + \rho)X = \sigma\{f_1(X)U_1 + f_2(X)U_2 + f_3(X)U_3\}$$

donde $\rho = \tau(a - c(4m+7))$ y $\sigma = -\tau(b+3c)$, siendo $4m$ la dimensión de $\bar{M}(4c)$, la cual, a partir de ahora se supone siempre ≥ 8 .

TEOREMA IV.2.2.- Sea M una hipersuperficie real no degenerada pseudo-Einstein de una variedad Kaehleriana cuaterniónica $\bar{M}(4c)$ de índice $4s$. Si $\sigma \neq 0$ en un abierto U y si el endomorfismo de Weingarten A es diagonalizable, existe una base local de V , $\{I', J', K'\}$, tal que los correspondientes $U_1 = -I'\xi$, $U_2 = -J'\xi$ y $U_3 = -K'\xi$ son principales y, al menos, dos de ellos tienen la misma curvatura principal. Además, en cada punto de U existen, como máximo, cuatro curvaturas principales distintas.

Demostración.— Teniendo en cuenta (IV.2.2) se considera $T=A^2-hA$, que es un tensor simétrico. Entonces se tiene $TU_1=(\sigma-\rho)U_1$, $TU_2=(\sigma-\rho)U_2$, $TU_3=(\sigma-\rho)U_3$. Por lo tanto, U_1, U_2 y U_3 son autovectores de T correspondientes al mismo autovalor $\sigma-\rho$. Si X es ortogonal a U_1, U_2 y U_3 , se tiene que $TX=-\rho X$. Así, siendo $\sigma \neq 0$, $\sigma-\rho$ es un autovalor de T de multiplicidad 3 y $-\rho$ es otro autovalor de T de multiplicidad $4m-4$. Además, claramente si X es un autovector de A también lo es de T . Sea, pues, $\{X_1, \dots, X_{4m-1}\}$ una base ortonormal de autovectores de A . Será también una base ortonormal de autovectores de T . Por tanto, deben existir exactamente tres vectores X_k, X_{k+1} y X_{k+2} tales que $1 \leq k < k+1 < k+2 \leq 4m-1$ y $TX_i=(\sigma-\rho)X_i$, $i=k, k+1, k+2$. Por consiguiente, $\langle X_k, X_{k+1}, X_{k+2} \rangle \cong \langle U_1, U_2, U_3 \rangle$ y así, debe existir una matriz $C \in SO(3)$ tal que

$$\begin{pmatrix} X_k \\ X_{k+1} \\ X_{k+2} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = -C \begin{pmatrix} I \\ J \\ K \end{pmatrix} \quad \xi$$

Así, $C \begin{pmatrix} I \\ J \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I' \\ J' \\ K' \end{pmatrix}$ es una nueva base local del fibrado V .

Si se sigue llamando $U_1=-I'\xi, U_2=-J'\xi$ y $U_3=-K'\xi$, estos son autovectores de A . Como además sus curvaturas principales han de cumplir la condición $\lambda^2 - \lambda h + (\rho - \sigma) = 0$, al menos dos de ellos han de tener la misma curvatura principal.

Si se nota por A_0 la restricción de A al complemento ortogo-

nal a ξ , A_0 deja dicho subespacio invariante y ha de cumplir $\lambda^2 - \lambda h_0 + \rho = 0$, luego A_0 tiene, como máximo, dos cur-

vaturas principales distintas. De aquí se sigue el resultado.

TEOREMA IV.2.3.- Sea M una hipersuperficie real no degenerada pseudo-Einstein de una variedad Kaehleriana cuaterniónica $\bar{M}(4c)$ de índice $4s$. Si $\sigma=0$ sobre un abierto U y A es diagonalizable, entonces existen, como máximo, dos curvaturas principales distintas, λ y μ en cada punto de U, cumpliendo $\lambda+\mu=h$, $\lambda\mu=\rho$. Además, U_1, U_2 y U_3 son autovectores de A.

Demostración.- Siendo $\sigma=0$, de (IV.2.2) se obtiene $(A^2-hA+\rho)X=0$, para cualquier campo de vectores X tangente a M. Así, como máximo, hay dos autovalores distintos de A. Haciendo el mismo razonamiento que en el Teorema IV.2.2, se obtiene que U_1, U_2 y U_3 son también autovectores de A.

En lo que sigue se considera que el endomorfismo de Weingarten A no es diagonalizable, para lo cual $4s>0$.

PROPOSICION IV.2.4.- Sea M una hipersuperficie real pseudo-Einstein no degenerada de una variedad Kaehleriana cuaterniónica $\bar{M}(4c)$ de índice $4s>0$. Si $\sigma\neq 0$ sobre un abierto U y A no es diagonalizable, entonces $A^2\neq 0$.

Demostración.- Se supone que $A^2=0$. Entonces de (IV.2.2) se tiene $(-hA+\rho)X=\sigma\{f_1(X)U_1+f_2(X)U_2+f_3(X)U_3\}$, para todo campo de vectores X tangente a M. Así, sobre U, donde $\sigma\neq 0$, si $h=0$, se tendría $\rho X=\sigma\{f_1(X)U_1+f_2(X)U_2+f_3(X)U_3\}$, lo cual es imposible. Por tanto, $h\neq 0$ y, por continuidad, se tendría que $(A-\frac{\rho}{h})X=-\frac{\sigma}{h}\{f_1(X)U_1+f_2(X)U_2+f_3(X)U_3\}$, con lo cual A sería diagonalizable, en contra de la hipótesis.

TEOREMA IV.2.5.- Sea M una hipersuperficie real pseudo-Einstein no degenerada de una variedad Kaehleriana cuaterniónica $\bar{M}(4c)$, con índice $4s>0$. Si $\sigma=0$ sobre un abierto U y A no es diagonalizable, en cada punto de U, A se puede escribir de la forma

donde $\beta_j \neq 0$ y C_j es de orden $2t_j \times 2t_j$. (Ver también Magid, [30]).

De (IV.2.2), siendo $\sigma=0$, se tiene, sobre U , $\rho \text{Id} = hA - A^2$. Se tiene, además,

$$B_i^2 = \begin{pmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ & & \cdot & & & \cdot \\ & & & \cdot & & 1 \\ & & & & \cdot & 2\lambda_i \\ & & & & & \lambda_i^2 \end{pmatrix}$$

y

$$C_j^2 = \begin{pmatrix} \alpha_j^2 - \beta_j^2 & 2\alpha_j\beta_j & 2\alpha_j & 2\beta_j & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ -2\alpha_j\beta_j & \alpha_j^2 - \beta_j^2 & -2\beta_j & 2\alpha_j & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_j^2 - \beta_j^2 & 2\alpha_j\beta_j & 2\alpha_j & 2\beta_j & 1 & \dots & \dots \\ & & & \cdot & & & & & \cdot \\ & & & & \cdot & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot & & & \cdot \\ & & & & & & \cdot & & \cdot \\ & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & \alpha_j^2 - \beta_j^2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, se tiene que $s_i \leq 2$, $t_j \leq 1$ y los bloques que aparecen en A deben ser de la forma

$$(\mu_i) \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} d_j \lambda_j & d_j \\ 0 & d_j \lambda_j \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}$$

cuyos cuadrados respectivos serán de la forma

$$(\mu_i^2) \quad , \quad \begin{pmatrix} \lambda_j^2 & 2\lambda_j \\ 0 & \lambda_j^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \alpha_k^2 - \beta_k^2 & 2\alpha_k\beta_k \\ -2\alpha_k\beta_k & \alpha_k^2 - \beta_k^2 \end{pmatrix}$$

Cambiando de base, se puede suponer que en A se tienen bloques de la forma

$$(\mu_i) \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}$$

Como $hA - A^2 = \rho \text{Id}$, entonces

$$(IV.2.3) \quad h - 2\lambda_j = 0 \quad , \quad h\beta_k - 2\alpha_k\beta_k = 0$$

y

$$(IV.2.4) \quad h\mu_i - \mu_i^2 = \rho \quad , \quad h\lambda_j - \lambda_j^2 = \rho \quad , \quad h\alpha_k - \alpha_k^2 + \beta_k^2 = \rho$$

Si existe algún bloque del tercer tipo, como $\beta_k \neq 0$, de (IV.2.3) se obtiene $\frac{h}{2} = \lambda_j$, $\frac{h}{2} = \alpha_k$, para cualquier j y k; así, todos los λ_j y α_k son iguales. Por tanto, de (IV.2.4) también todos los β_k serán iguales. Así, (IV.2.3) y (IV.2.4) se transforman en

$$(IV.2.5) \quad h - 2\lambda = 0 \quad , \quad h - 2\alpha = 0$$

y

$$(IV.2.6) \quad h\mu_i - \mu_i^2 = \rho \quad , \quad h\lambda - \lambda^2 = \rho \quad , \quad h\alpha - \alpha^2 + \beta^2 = \rho$$

Sustituyendo (IV.2.5) en (IV.2.6), se tiene

$$(IV.2.7) \quad h\mu_i - \mu_i^2 = \rho \quad , \quad \lambda^2 = \rho \quad , \quad \alpha^2 + \beta^2 = \rho$$

De ser $\lambda = \alpha$, se tendría $\beta^2 = 0$. Así, como $\beta \neq 0$, puede haber bloques con α ó bloques con λ , pero no ambos a la vez. Además, en ambos casos se tiene

$$(IV.2.8) \quad \mu_i = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - 4\rho}}{2}$$

Así, si $\rho = \lambda^2$, como $2\lambda = h$, $4\rho = 4\lambda^2 = h^2$ y, entonces, $\mu_i = \frac{h}{2}$.

$$(p, q) = \sum_{l=0}^m \bar{p}^l q^l$$

donde $p = \sum_{l=0}^m p^l e_l$, $q = \sum_{l=0}^m q^l e_l$ y \bar{p}^l es el conjugado cuaterniónico de p^l .

La métrica euclídea sobre Q^{m+1} viene dada entonces por

$$g(p, q) = \text{Real}(p, q)$$

para cualesquiera $p, q \in Q^{m+1}$.

La esfera unidad $S^{4m+3} = \{q \in Q^{m+1} \mid g(q, q) = 1\}$ es un fibrado principal sobre QP^m con grupo estructural S^3 y proyección π . Con la identificación natural de vectores tangentes a S^{4m+3} y vectores en Q^{m+1} , el espacio tangente en un punto q a S^{4m+3} , representado por $T_q(S^{4m+3})$, es

$$T_q(S^{4m+3}) = \{p \in Q^{m+1} \mid g(p, q) = 0\}$$

$$\text{Sea } T'_q = \{p \in Q^{m+1} \mid g(p, q) = g(p, iq) = g(p, jq) = g(p, kq) = 0\}$$

Este subespacio de $T_q(S^{4m+3})$ tiene por complemento ortogonal un subespacio de dimensión 3 de $T_q(S^{4m+3})$ generado por $\{iq, jq, kq\}$, donde i, j, k son las unidades cuaterniónicas.

La distribución T' define así una conexión en el fibrado principal $S^{4m+3}(QP^m(4), S^3)$ en la que T'_q es complementario del subespacio $\langle iq, jq, kq \rangle$ tangente a la fibra en q , y T'_q es invariante por la acción de S^3 . Así la proyección π induce un isomorfismo $(d\pi)_q$ de T'_q sobre $T_{\pi(q)}QP^m(4)$ tal que $(d\pi)_q$ aplica el subespacio $\langle iq, jq, kq \rangle$ en el cero para cada $q \in S^{4m+3}$.

Se define la métrica natural \bar{g} de curvatura seccional cuaterniónica constante 4 por

$$\bar{g}(X, Y) = 4g(X', Y')$$

para cualesquiera $X, Y \in T_a QP^m(4)$, siendo X' e Y' los levantamientos horizontales de X e Y , respectivamente, a T'_q , donde $\pi(q) = a$.

La estructura cuaterniónica en T'_q definida por multiplicación

por i, j y k , induce la estructura cuaterniónica canónica $\{I, J, K\}$ sobre $QP^m(4)$ de la siguiente forma:

Si $X \in T_a QP^m$, se define

$$IX = (d\pi)_q(iX') \quad JX = (d\pi)_q(jX') \quad KX = (d\pi)_q(kX')$$

donde X' es el levantamiento horizontal a T'_q de X , con $\pi(q)=a$.

Por último, π_* induce la conexión $\bar{\nabla}$ sobre QP^m de la manera siguiente: Si X, Y son dos campos de vectores sobre QP^m y X' e Y' sus respectivos levantamientos horizontales a S^{4m+3} , entonces

$$\bar{\nabla}_X Y = \pi_*(\nabla'_{X'} Y')$$

define la conexión Kaehleriana cuaterniónica en QP^m , siendo ∇' la diferenciación covariante en S^{4m+3} .

Sea ahora M una subvariedad de dimensión n embebida en QP^m . Se notará $T^\perp M = \{(x, \xi) / x \in M, \xi \in T^\perp_x M\}$, donde $T^\perp_x M$ representa el espacio normal en x a M , al fibrado normal de M con proyección P . Sea, para $(x, \xi) \in T^\perp M$, $F(x, \xi)$ el punto de QP^m que se alcanza tomando una distancia $|\xi|$ a lo largo de la geodésica en QP^m que pasa por x en la dirección de ξ .

DEFINICIÓN IV.3.1.- Un punto $p \in QP^m$ se llama un punto focal de multiplicidad $\nu > 0$ de (M, x) si $p = F(x, \xi)$ y el jacobiano de F tiene multiplicidad ν en (x, ξ) .

Sea, pues, ξ un vector arbitrario normal unitario a M en el punto x , y $\omega \in S^{4m+3}$ con $\pi(\omega) = x$. Sea ξ' el levantamiento horizontal de ξ a T'_ω . La geodésica en QP^m en la dirección de ξ viene dada por

$$\gamma(r) = (\cos r \omega + \operatorname{sen} r \xi')$$

Se sigue, naturalmente, que esta geodésica no depende de la

elección de ω . Además, al ser $\gamma(r) = \gamma(r + \pi)$ y usando, si es necesario, $-\xi$ en lugar de ξ , sólo se necesita considerar $r \in [0, \pi/2]$ para calcular $(dF)_{(x, r\xi)}$. Por otro lado, si $r=0$, claramente F_* es la identidad, y en este caso no pueden existir puntos focales. Así, se puede suponer $0 < r \leq \pi/2$.

Sea $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}$ una base ortonormal para el espacio $T_x^\perp M$, con $\xi_1 = \xi$. Sea U un entorno coordinado de x suficientemente pequeño. Se extienden entonces ξ_1, \dots, ξ_k a campos de vectores normales y ortonormales sobre U por traslado paralelo, con respecto a la conexión normal ∇^\perp , a lo largo de geodésicas en M . Sea $u \in U$ y $n \in T_u^\perp M$. Entonces,

$$n = g(n, \xi_1)\xi_1 + g(n, \xi_2)\xi_2 + \dots + g(n, \xi_k)\xi_k$$

Por tanto,

$$\frac{n}{|n|} = \frac{g(n, \xi_1)}{|n|} \xi_1 + \frac{g(n, \xi_2)}{|n|} \xi_2 + \dots + \frac{g(n, \xi_k)}{|n|} \xi_k$$

por lo que

$$1 = \frac{g(n, \xi_1)^2}{|n|^2} + \frac{g(n, \xi_2)^2}{|n|^2} + \dots + \frac{g(n, \xi_k)^2}{|n|^2}$$

Es decir,

$$\frac{g(n, \xi_1)}{|n|} = \sqrt{1 - \sum_{j=2}^k \frac{g(n, \xi_j)^2}{|n|^2}}$$

Llamando $t_j = \frac{g(n, \xi_j)}{|n|}$, $j=2, \dots, k$, se tiene

$$\begin{aligned} n &= |n| \left(\left(1 - \sum_{j=2}^k t_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \xi_1 + t_2 \xi_2 + \dots + t_k \xi_k \right) = \\ &= \mu \left(\left(1 - \sum_{j=2}^k t_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \xi_1 + t_2 \xi_2 + \dots + t_k \xi_k \right) \end{aligned}$$

con $0 < \mu$, $0 \leq |t_j| \leq 1$ para cualquier j y $\sum_{j=2}^k t_j^2 \leq 1$.

O sea, $\mu = |\eta|$ y los t_j son los cosenos directores de η . Así, el espacio tangente a $T^\perp M$ en el punto (u, η) se puede considerar como

$$T_{(u, \eta)}(T^\perp M) = T_u M \oplus \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \right)_{(u, \eta)}, \left(\frac{\partial}{\partial t_2} \right)_{(u, \eta)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial t_k} \right)_{(u, \eta)} \right\rangle$$

donde es claro que, considerando la trivialidad local de $T^\perp M$ por

$$\begin{aligned} U \times \mathbb{R}^k &\xrightarrow{\psi} P^{-1}(U) \\ (u, \mu, t_2, \dots, t_k) &\longrightarrow (u, \eta) \end{aligned}$$

entonces

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_j} \right)_{(u, \eta)} = (d\psi)_{(u, \mu, t_2, \dots, t_k)} \left(\frac{\partial}{\partial r_j} \right)_{(u, \mu, t_2, \dots, t_k)} \quad j=2, \dots, k$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mu} \right)_{(u, \eta)} = (d\psi)_{(u, \mu, t_2, \dots, t_k)} \left(\frac{\partial}{\partial r_1} \right)_{(u, \mu, t_2, \dots, t_k)}$$

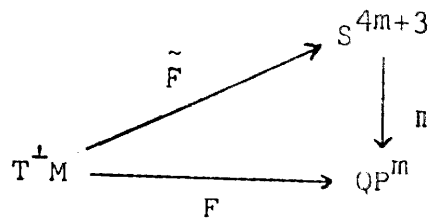
siendo r_1, \dots, r_k las coordenadas usuales de \mathbb{R}^k . Luego

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t_j} \right)_{(u, \eta)} &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi(u, \mu, 0, \dots, t, 0, \dots, 0)) = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (u, \mu(\sqrt{1-t^2} \xi_1 + t\xi_j)) \quad j=2, \dots, k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \right)_{(u, \eta)} &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi(u, \mu + t, 0, \dots, 0)) = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (u, (\mu + t)\xi_1) \end{aligned}$$

Así, $(u, \mu(\sqrt{1-t^2} \xi_1 + t\xi_j))$ y $(u, (\mu + t)\xi_1)$ son las curvas de $T^\perp M$ con condiciones iniciales respectivas $((u, \eta), \left(\frac{\partial}{\partial t_j} \right)_{(u, \eta)})$, $j=2, \dots, k$ y $((u, \eta), \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \right)_{(u, \eta)})$, siendo $\mu = |\eta|$.

El objetivo que se persigue a continuación es identificar los puntos focales de M , para lo cual, en primer lugar, se procede al cálculo de $(dF)_{(x, r\xi)} \left(\frac{\partial}{\partial t_j} \right)_{(x, r\xi)}$. Se considera el diagrama



donde $\tilde{F}(x, r\xi) = z = \cos r\omega + \text{senr } \xi'$, siendo ξ' el levantamiento horizontal a T_ω' de ξ_x , con $\omega \in S^{4m+3}$ tal que $\pi(\omega) = x$. Así, $F(x, r\xi) = \pi \circ \tilde{F}(x, r\xi) = \pi(\cos r\omega + \text{senr } \xi') = \pi(z)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
 (dF)_{(x, r\xi)} \left(\frac{\partial}{\partial t_j} \right)_{(x, r\xi)} &= (d\pi)_z (d\tilde{F})_{(x, r\xi)} \left(\frac{\partial}{\partial t_j} \right)_{(x, r\xi)} = \\
 &= (d\pi)_z \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\tilde{F}(x, r(\sqrt{1-t^2} \xi_1 + t\xi_j)) \right) = \\
 &= (d\pi)_z \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\cos r\omega + \text{senr}(\sqrt{1-t^2} \xi_1' + t\xi_j')) \right) = \\
 &= (d\pi)_z (\text{senr } \xi_j').
 \end{aligned}$$

Ahora bien, $\text{senr} \xi_j'$ no es horizontal en z . Luego, teniendo en cuenta que su parte vertical es $g(\text{senr } \xi_j', iz)iz + g(\text{senr } \xi_j', jz)jz + g(\text{senr } \xi_j', kz)kz$, se tiene

$$\begin{aligned}
 (dF)_{(x, r\xi)} \left(\frac{\partial}{\partial t_j} \right)_{(x, r\xi)} &= (d\pi)_z (\text{senr}(\xi_j' - \text{senr } g(\xi_j', i\xi')iz - \\
 &\quad - \text{senr } g(\xi_j', j\xi')jz - \text{senr } g(\xi_j', k\xi')kz))
 \end{aligned}$$

siendo ξ_j' el levantado a T_ω' de $\xi_j(x)$, y ahora el vector de la derecha pertenece a T_z' .

Análogamente se obtiene

$$\begin{aligned}
 \text{(IV.3.1)} \quad (dF)_{(x, r\xi)} \left(\frac{\partial}{\partial t_\mu} \right)_{(x, r\xi)} &= (d\pi)_z \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\cos(r+t)\omega + \right. \\
 &\quad \left. + \text{sen}(r+t) \xi_1') \right) = (d\pi)_z (-\text{senr } \omega + \cos r \xi_1')
 \end{aligned}$$

donde ahora el vector de la derecha ya está en T_z' .

Sea ahora $X \in T_x M$. A continuación se calcula $(dF)_{(x, r\xi)}(X, 0)$.

Sea $\beta(t)$ una curva en M tal que $\beta(0)=x$ y $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \beta(t) = X$. Sea

$\alpha(t)$ el levantamiento horizontal de β a S^{4m+3} con $\alpha(0)=\omega$ y

$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha(t) = X'_\omega$. Entonces $F(\beta(t), r\xi_1(\beta(t)))$ es la imagen bajo

Π de la curva

$$\eta(t) = \cos r \alpha(t) + \operatorname{sen} r \xi'_1(\alpha(t)) = \tilde{F}(\beta(t), r\xi_1)$$

y, por tanto, se tiene

$$(IV.3.2) \quad (dF)_{(x, r\xi)}(X, 0) = (d\Pi)_Z \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \eta(t) \right)$$

Si se considera ahora $\eta(t)$ como una curva en Q^{m+1} , se tiene que

$$(IV.3.3) \quad \dot{\eta}(0) = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \eta(t) \right) = \cos r X'_\omega + \operatorname{sen} r D_{X'_\omega} \xi'_1$$

siendo D la derivación covariante en R^{4m+4} . Como $g(X'_\omega, \xi'_1)=0$, teniendo en cuenta que la esfera es totalmente umbilical en R^{4m+4} y la fórmula de Gauss, se tiene que $D_{X'_\omega} \xi'_1 = \nabla_{X'_\omega} \xi'_1$. Además, por definición de $\bar{\nabla}$,

$$(d\Pi)_\omega(\nabla_{X'_\omega} \xi'_1) = \bar{\nabla}_X \xi_1$$

pues ξ'_1 es un campo horizontal y $X'_\omega \in T'_\omega$. Por la fórmula de Weingarten,

$$\bar{\nabla}_X \xi_1 = -A_{\xi_1} X + \nabla_X^\perp \xi_1$$

Pero, por construcción del campo ξ_1 , $\nabla_X^\perp \xi_1=0$. Así, representando por $(A_\xi X)'_\omega$ el levantamiento horizontal de $A_\xi X$ a T'_ω , se sigue

$$(IV.3.4) \quad \begin{aligned} \nabla_{X'_\omega} \xi'_1 &= -(A_\xi X)'_\omega + g(\nabla_{X'_\omega} \xi'_1, i\omega)i\omega + g(\nabla_{X'_\omega} \xi'_1, j\omega)j\omega + \\ &+ g(\nabla_{X'_\omega} \xi'_1, k\omega)k\omega \end{aligned}$$

con $(d\pi)_\omega(i\omega) = (d\pi)_\omega(j\omega) = (d\pi)_\omega(k\omega) = 0$, por construcción. Como, además, $g(\xi'_1(\alpha(t)), i\alpha(t)) = g(\xi'_1(\alpha(t)), j\alpha(t)) = g(\xi'_1(\alpha(t)), k\alpha(t)) = 0$, aplicando el razonamiento hecho anteriormente, se obtiene

$$(IV.3.5) \quad \begin{aligned} g(\nabla_{X'_\omega} \xi'_1, i\omega) &= -g(\xi'_1, iX'_\omega) = g(X'_\omega, i\xi'_1) \\ g(\nabla_{X'_\omega} \xi'_1, j\omega) &= -g(\xi'_1, jX'_\omega) = g(X'_\omega, j\xi'_1) \\ g(\nabla_{X'_\omega} \xi'_1, k\omega) &= -g(\xi'_1, kX'_\omega) = g(X'_\omega, k\xi'_1) \end{aligned}$$

Por tanto, de (IV.3.2), (IV.3.3), (IV.3.4) y (IV.3.5), se tiene

$$(dF)_{(X, r\xi)}(X, 0) = (d\pi)_Z(\cos r X'_\omega - \operatorname{senr}((A_\xi X)'_\omega - g(X'_\omega, i\xi'_1)i\omega - g(X'_\omega, j\xi'_1)j\omega - g(X'_\omega, k\xi'_1)k\omega))$$

donde ahora el vector de la derecha no está, necesariamente, en T'_Z . En resumen, se ha demostrado la

PROPOSICION IV.3.2.- Con las notaciones anteriores, y para $0 < r \leq \pi/2$, se tiene

$$a) (dF)_{(X, r\xi)}\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right)_{(X, r\xi)} = (d\pi)_Z(\operatorname{senr}(\xi'_j - \operatorname{senr} g(\xi'_j, i\xi'_1)iz - \operatorname{senr} g(\xi'_j, j\xi'_1)jz - \operatorname{senr} g(\xi'_j, k\xi'_1)kz))$$

$$b) (dF)_{(X, r\xi)}\left(\frac{\partial}{\partial \mu}\right)_{(X, r\xi)} = (d\pi)_Z(-\operatorname{senr} \omega + \cos r \xi'_1)$$

$$c) (dF)_{(X, r\xi)}(X, 0) = (d\pi)_Z(\cos r X'_\omega - \operatorname{senr}((A_\xi X)'_\omega - g(X'_\omega, i\xi'_1)i\omega - g(X'_\omega, j\xi'_1)j\omega - g(X'_\omega, k\xi'_1)k\omega))$$

donde el vector de la derecha está en T'_Z en los casos a) y b), pero no necesariamente en el caso c).

Para calcular los puntos focales se hacen restricciones adicionales sobre la subvariedad. Sólo se tratarán dos casos: Cuando I_ξ, J_ξ y K_ξ son normales (es decir, M es una subvariedad

cuaterniónica) ó cuando $I\xi, J\xi$ y $K\xi$ sean vectores principales de A_ξ , que es el caso de algunas hipersuperficies reales importantes de QP^m .

Caso 1.— Se supone que $\xi_2=I\xi$, $\xi_3=J\xi$, $\xi_4=K\xi$ son normales a M en x .
Entonces

PROPOSICION IV.3.3.— En las condiciones anteriores

- a) $(dF)_{(x, r\xi)}(X, 0) = 0$ si $r=\pi/2$
- b) $(dF)_{(x, r\xi)}\left(\frac{\partial}{\partial t_2}\right)_{(x, r\xi)} = (dF)_{(x, r\xi)}\left(\frac{\partial}{\partial t_3}\right)_{(x, r\xi)} =$
 $= (dF)_{(x, r\xi)}\left(\frac{\partial}{\partial t_4}\right)_{(x, r\xi)} = 0$; para $r=\pi/2$
- c) $(dF)_{(x, r\xi)}(X, V) \neq 0$, excepto en los dos casos anteriores.

Demostración.— De la Proposición IV.3.2 y de ser $\xi_2=I\xi$, $\xi_3=J\xi$ y $\xi_4=K\xi$ normales a M en x , se sigue

$$\begin{aligned} (dF)_{(x, r\xi)}\left(\frac{\partial}{\partial t_2}\right)_{(x, r\xi)} &= (d\pi)_Z(\text{senr}(i\xi' - \text{senr} iz)) = \\ &= (d\pi)_Z(\text{senr}(i\xi' - \text{senr}(\text{cosr} i\omega + \text{senr} i\xi')) = \\ &= (d\pi)_Z(\text{senr} i\xi' - \text{sen}^2 r \text{cosr} i\omega - \text{sen}^3 r i\xi') = \\ &= (d\pi)_Z(\text{sen}^3 r i\xi' + \text{senr} \text{cos}^2 r i\xi' - \text{sen}^2 r \text{cosr} i\omega - \\ &\quad - \text{sen}^3 r i\xi') = (d\pi)_Z(\text{senr} \text{cosr} (-\text{senr} i\omega + \text{cosr} i\xi')) = \\ &= (d\pi)_Z\left(\frac{1}{2} \text{sen}2r (-\text{senr} i\omega + \text{cosr} i\xi')\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (dF)_{(x, r\xi)}\left(\frac{\partial}{\partial t_3}\right)_{(x, r\xi)} &= (d\pi)_Z(\text{senr}(j\xi' - \text{senr} jz)) = \\ &= (d\pi)_Z(\text{senr}(j\xi' - \text{senr}(\text{cosr} j\omega + \text{senr} j\xi')) = \\ &= (d\pi)_Z(\text{senr} j\xi' - \text{sen}^2 r \text{cosr} j\omega - \text{sen}^3 r j\xi') = \\ &= (d\pi)_Z(\text{sen}^3 r j\xi' + \text{senr} \text{cos}^2 r j\xi' - \text{sen}^2 r \text{cosr} j\omega - \\ &\quad - \text{sen}^3 r j\xi') = (d\pi)_Z\left(\frac{1}{2} \text{sen}2r (-\text{senr} j\omega + \text{cosr} j\xi')\right) \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene

$$(dF)_{(x,r\xi)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{(x,r\xi)} = (d\pi)_z \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r (-\operatorname{sen} r k_\omega + \operatorname{cos} r k_\xi') \right)$$

Ahora b) es inmediato de lo anterior.

Por otro lado, al imponer que I_ξ, J_ξ y K_ξ sean normales para cualquier $\xi \in T^\perp M$, se tiene que M es una subvariedad cuaterniónica de QP^m . Es conocido ([11],[19]) que estas subvariedades son totalmente geodésicas. Por tanto, del apartado c) de la Proposición IV.3.2 se sigue a).

c) Los resultados anteriores prueban que si $V = a_1 \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \right) + \sum_{j=2}^k a_j \left(\frac{\partial}{\partial t_j} \right) \in T_{(x,r\xi)}(T^\perp M)$, entonces $(dF)_{(x,r\xi)} V = 0$ sólo si $a_j = 0$ para todo j , en virtud de (IV.3.1)

Si $X = \sum_{j=1}^n b_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \in T_{(x,r\xi)}(T^\perp M)$, es claro que para $0 < r \leq \pi/2$, salvo en los casos ya tratados, $(dF)_{(x,r\xi)}(X,V) \neq 0$.

Los casos degenerados de esta Proposición sólo se obtienen, pues, para $r = \pm\pi/2$, por lo que son independientes de M o del punto $x \in M$. Es decir, no se obtiene información sobre la propia M . Por lo tanto esta técnica no tiene sentido aplicarla para estudiar subvariedades cuaterniónicas.

Se considera ahora el segundo caso:

Caso 2.- Se supone que I_ξ, J_ξ y K_ξ son vectores principales de A_ξ .

Se tiene entonces la

PROPOSICION IV.3.4.- Sean I_ξ, J_ξ y K_ξ autovectores de A_ξ con autovalores λ, μ y ν , respectivamente. Entonces:

a) $(dF)_{(x,r\xi)}(X,0) = 0$ si X es autovector de A_ξ con autovalor $\cot r$, siendo además, X ortogonal a I_ξ, J_ξ y K_ξ .

$$b) (dF)_{(x, r\xi)}(I\xi, 0) = 0 \text{ si } \underline{\lambda = 2\cot 2r}$$

$$c) (dF)_{(x, r\xi)}(J\xi, 0) = 0 \text{ si } \underline{\mu = 2\cot 2r}$$

$$d) (dF)_{(x, r\xi)}(K\xi, 0) = 0 \text{ si } \underline{\nu = 2\cot 2r}$$

$$e) (dF)_{(x, r\xi)}(X, V) \neq 0 \text{ } \underline{\text{excepto para los casos a), b), c) y d).}$$

Demostración. - Del apartado c) de la Proposición IV.3.2 se sigue a)).

Sea, pues, $I\xi$ un autovector de A_ξ con autovalor λ . Entonces, del apartado c) de la Proposición IV.3.2 se sigue, al considerar la componente horizontal,

$$\begin{aligned} (IV.3.6) \quad (dF)_{(x, r\xi)}(I\xi, 0) &= (d\pi)_Z(\cos r i\xi' - \operatorname{senr}(\lambda i\xi'' - i\omega) - \\ &\quad - g(\cos r i\xi' - \operatorname{senr} \lambda i\xi'' + \operatorname{senr} i\omega, \cos r i\omega + \operatorname{senr} i\xi'')) \\ &= (d\pi)_Z((\cos r i\xi' - \lambda \operatorname{senr} i\xi'' + \\ &\quad + \operatorname{senr} i\omega) - (2\cos r \operatorname{senr} - \lambda \operatorname{sen}^2 r)(\cos r i\omega + \operatorname{senr} i\xi')) = \\ &= (d\pi)_Z(\cos r i\xi' - \lambda \operatorname{senr} i\xi'' + \operatorname{senr} i\omega - 2\cos^2 r \operatorname{senr} i\omega - \\ &\quad - 2\cos r \operatorname{sen}^2 r i\xi' + \lambda \operatorname{sen}^2 r \cos r i\omega + \operatorname{sen}^3 r i\xi'') = \\ &= (d\pi)_Z\left(\left(\cos 2r - \lambda \frac{\operatorname{sen} 2r}{2}\right)(-\operatorname{senr} i\omega + \cos r i\xi'')\right) \end{aligned}$$

Por tanto, de (IV.3.6), $(dF)_{(x, r\xi)}(I\xi, 0) = 0$ si

$$\left(\cos 2r - \lambda \frac{\operatorname{sen} 2r}{2}\right)(-\operatorname{senr} i\omega + \cos r i\xi'') = 0, \text{ pues } (d\pi)_Z \text{ es un iso-}$$

morfismo sobre T'_2 , lo que lleva a que $\lambda = 2\cot 2r$.

Si $J\xi$ es un autovector de A_ξ con autovalor μ , mediante un desarrollo análogo se tiene

$$(IV.3.7) \quad (dF)_{(x, r\xi)}(J\xi, 0) = (d\pi)_Z\left(\left(\cos 2r - \mu \frac{\operatorname{sen} 2r}{2}\right)(-\operatorname{senr} j\omega + \cos r j\xi'')\right)$$

y razonando como antes se sigue c).

Análogamente, d) se obtiene de

$$(IV.3.8) \quad (dF)_{(x, r\xi)}(K\xi, 0) = (d\pi)_Z\left(\left(\cos 2r - \nu \frac{\operatorname{sen} 2r}{2}\right)(-\operatorname{senr} k\omega + \cos r k\xi'')\right)$$

Los apartados a) y e) se obtienen directamente del apartado c) de la Proposición IV.3.2.

Nótese que, como $\cot 2(r - \frac{\pi}{2}) = \cot 2r$, existirán entonces dos puntos focales a distancia $\pi/2$ uno del otro correspondiendo a cada una de las curvaturas principales λ, μ y ν a lo largo de cada geodésica normal.

Si M es una subvariedad de dimensión real n de QP^m , se notará por $U(T^\perp M)$ al fibrado de vectores normales unitarios a M .

DEFINICION IV.3.5.- Se define el tubo de radio r sobre M por la aplicación $\phi_r: U(T^\perp M) \longrightarrow QP^m$ dada por $\phi_r(x, \xi) = F(x, r\xi)$.

Nótese que, al ser $\dim U(T^\perp M) = 4m-1$, ϕ_r determina, al menos para valores suficientemente pequeños de r , una hipersuperficie real de QP^m .

Si se parte de una hipersuperficie real M , se suele considerar directamente $\phi_r: M \longrightarrow QP^m$ de la manera siguiente: si ξ es un campo local de vectores normales unitarios, $\phi_r(x) = F(x, r\xi(x))$.

A continuación se calcula el endomorfismo de Weingarten, A_r , para la inmersión ϕ_r en el punto (x, ξ) de $U(T^\perp M)$. Con la trivialización local que antes se hizo para $T^\perp M$, resulta que se puede identificar $T_{(x, \xi)} U(T^\perp M)$ con $T_x M \oplus \langle \frac{\partial}{\partial t_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_k} \rangle$ (ahora es siempre $\mu=1$). Los cálculos de $(d\phi_r)_{(x, \xi)}(\frac{\partial}{\partial t_j})$ y $(d\phi_r)_{(x, \xi)}(X, 0)$ coinciden con los cálculos de $(dF)_{(x, r\xi)}$ sobre los mismos vectores y los resultados se tienen por la Proposición IV.3.2.

El vector $\eta = (d\pi)_z(-\text{sen } \omega + \text{cos } \xi')$, que es tangente en $\pi(z)$ a la geodésica en QP^m que pasa por x en la dirección ξ , es normal unitario a ϕ_r en $\pi(z)$. Para ello basta ver, teniendo en cuenta que para los valores de r que se toman ϕ_r sería una inmersión, que $g(\eta, (d\phi_r)_{(x, \xi)}(Z))=0$ para cualquier $Z \in T_{(x, \xi)} U(T^\perp M)$, y

esto se sigue directamente de la Proposición IV.3.2.

Entonces, para $(X, V) \in T_{(X, \xi)} U(T^\perp M)$, se tiene que

$$(IV.3.9) \quad (d\phi_r)_{(X, \xi)} (A_r(\bar{X}, V)_{(X, \xi)}) = -(\bar{\nu}_{(\phi_r)_*} (X, V)^n)_{\Pi(Z)}$$

siendo n una extensión del vector anterior a un campo de vectores normales unitarios a lo largo de ϕ_r .

Se tiene entonces:

PROPOSICION IV.3.6.- Sean $I\xi=\xi_2$, $J\xi=\xi_3$ y $K\xi=\xi_4$ normales a M en x . Sean X_1, \dots, X_n una base de vectores principales de A_ξ con curvaturas principales $\lambda_j = \cot \pi/2$, $j=1, \dots, n$. Entonces A_r viene dado en términos de sus vectores principales por

$$a) A_r \left(\frac{\partial}{\partial t_2} \right) = -2 \cot 2r \left(\frac{\partial}{\partial t_2} \right)$$

$$b) A_r \left(\frac{\partial}{\partial t_3} \right) = -2 \cot 2r \left(\frac{\partial}{\partial t_3} \right)$$

$$c) A_r \left(\frac{\partial}{\partial t_4} \right) = -2 \cot 2r \left(\frac{\partial}{\partial t_4} \right)$$

$$d) A_r \left(\frac{\partial}{\partial t_j} \right) = -\cot r \left(\frac{\partial}{\partial t_j} \right) \quad 5 \leq j \leq k$$

$$e) A_r(X_j, 0) = \cot \left(\frac{\pi}{2} - r \right) (X_j, 0) \quad 1 \leq j \leq n.$$

Demostración.- De la demostración de la Proposición IV.3.3, se tiene que

$$(d\phi_r)_{(X, \xi)} \left(\frac{\partial}{\partial t_2} \right) = (d\Pi)_Z \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r (-\operatorname{sen} r i\omega + \operatorname{cos} r i\xi') \right)$$

Por tanto, de (IV.3.9) y de la definición de $\bar{\nu}$, para calcular $A_r \left(\frac{\partial}{\partial t_2} \right)$ es preciso conocer $\nu' \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r (-\operatorname{sen} r i\omega + \operatorname{cos} r i\xi') \right)^n$

Nótese que $g \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r (-\operatorname{sen} r i\omega + \operatorname{cos} r i\xi'), n_Z \right) = 0$, luego se puede hacer la derivación en R^{4m+4} , razonando de forma similar a como se ha hecho anteriormente en la Proposición IV.3.2.

Entonces la curva $\alpha_r(t) = \operatorname{cos} r \omega + \operatorname{sen} r (\sqrt{1-t^2} \xi' +$

+ t(-senr cosr i ω + cos²r i ξ')) en K^{4m+4} pasa por z en la dirección $(\frac{1}{2} \text{sen}2r)(-\text{senr } i\omega + \text{cosr } i\xi')$. Así,

$$\begin{aligned} & (\nabla' \left(\frac{1}{2} \text{sen}2r (-\text{senr } i\omega + \text{cosr } i\xi') \right)^n)_z = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{d}{dr} \Big|_r \alpha_r(t) = \\ & = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (-\text{senr } \omega + \text{cosr } (\sqrt{1-t^2}) \xi' + (-2\text{senr } \text{cos}^2r + \text{sen}^3r)ti\omega + \\ & + (\text{cos}^3r - 2\text{cosr } \text{sen}^2r)i\xi') = (-2\text{senr } \text{cos}^2r + \text{sen}^3r)i\omega + \\ & + (\text{cos}^3r - 2\text{cosr } \text{sen}^2r)i\xi' = (2\text{cos}^2r - \text{sen}^2r)(-\text{senr } i\omega) + \\ & + (\text{cos}^2r - 2\text{sen}^2r)(\text{cosr } i\xi') = (\text{cos}2r)(-\text{senr } i\omega + \text{cosr } i\xi') - \\ & - \text{cosr } \text{senr } (\text{cosr } i\omega + \text{senr } i\xi'). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Así, } (d\phi_r)_{(x, \xi)} \left(A_r \left(\frac{\partial}{\partial t_2} \right) \right) &= -(d\pi)_z (\text{cos}2r (-\text{senr } i\omega + \text{cosr } i\xi') - \\ & - \text{cosr } \text{senr } (\text{cosr } i\omega + \text{senr } i\xi')) \end{aligned}$$

Pero el vector de la derecha no es horizontal. Su parte horizontal es, precisamente, $\text{cos}2r (-\text{senr } i\omega + \text{cosr } i\xi')$. Teniendo en cuenta, además, la expresión de $(d\phi_r)_{(x, \xi)} \left(\frac{\partial}{\partial t_2} \right)$ y que ϕ_r es una inmersión, se sigue el apartado a).

Los apartados b) y c) son análogos, teniendo en cuenta las expresiones de $(d\phi_r)_{(x, \xi)} \left(\frac{\partial}{\partial t_3} \right)$ y $(d\phi_r)_{(x, \xi)} \left(\frac{\partial}{\partial t_4} \right)$ que se obtienen en la Proposición IV.3.3.

Sea ahora $5 \leq j \leq k$. Entonces, de la Proposición IV.3.2,

$$(IV.3.10) \quad (d\phi_r)_{(x, \xi)} \left(\frac{\partial}{\partial t_j} \right) = (d\pi)_z (\text{senr } \xi'_j)$$

Así, $\alpha_r(t) = \text{cosr } \omega + \text{senr } (\sqrt{1-t^2} \xi' + t \xi'_j)$ es ahora una curva en S^{4m+3} que pasa por z en la dirección $\text{senr } \xi'_j$. Así,

$$(d\phi_r)_{(x, \xi)} \left(A_r \left(\frac{\partial}{\partial t_j} \right) \right) = -(d\pi)_z (\nabla' \text{senr } \xi'_j)_z = -(d\pi)_z (\text{cosr } \xi'_j)$$

razonando como antes. Teniendo en cuenta, además, (IV.3.10), se

sigue el apartado d).

Para el apartado e), nótese que λ_j , $1 \leq j \leq n$, ha de ser $\cot(\pi/2) = 0$, al ser M totalmente geodésica. De la demostración de la Proposición IV.3.2, se tiene que

$$(IV.3.11) \quad (d\phi_r)_{(x, \xi)}(X_j, 0) = (d\pi)_Z(\cos r X'_\omega)$$

Así, la curva $\cos r \omega + \operatorname{senr}(\sqrt{1-t^2} \xi' + t \cot r X'_\omega)$ es una curva que pasa por z en la dirección $\cos r X'_\omega$ en R^{4m+4} , (se vuelve a tener $g(\cos r X'_\omega, \eta'_z) = 0$, siendo η' el levantamiento horizontal de η), luego

$$(d\phi_r)_{(x, \xi)}(A_r(X_j, 0)) = -(d\pi)_Z(-\operatorname{senr} X'_\omega)$$

y por (IV.3.11),

$$\begin{aligned} (d\phi_r)_{(x, \xi)}(A_r(X_j, 0)) &= \operatorname{tg} r (d\phi_r)_{(x, \xi)}(X_j, 0) = \\ &= \cot\left(\frac{\pi}{2} - r\right) (d\phi_r)_{(x, \xi)}(X_j, 0) \end{aligned}$$

lo que termina la demostración.

Nótese que, teniendo en cuenta la Proposición IV.3.3, se sigue que

$$\begin{aligned} (d\phi_r)_{(x, \xi)}\left(\frac{\partial}{\partial t_2}\right) &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r I_\eta, \quad (d\phi_r)_{(x, \xi)}\left(\frac{\partial}{\partial t_3}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r J_\eta \\ (d\phi_r)_{(x, \xi)}\left(\frac{\partial}{\partial t_4}\right) &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r K_\eta \end{aligned}$$

Se tiene entonces el siguiente

COROLARIO IV.3.7.- Sea V una hipersuperficie real en QP^m que queda sobre un tubo de radio constante sobre una subvariedad cuaterniónica de QP^m . Sea η un vector normal unitario. Entonces, I_η , J_η y K_η son autovectores del operador A_η con el mismo autovalor $-2\cot 2r$.

Demostración.-

$$\begin{aligned}
 A_{\eta} I_{\eta} &= -\bar{\nu} I_{\eta} \eta = -\bar{\nu} \frac{2}{\operatorname{sen} 2r} (\phi_r)_* \left(\frac{\partial}{\partial t_2} \right) \eta = \frac{2}{\operatorname{sen} 2r} (\phi_r)_* (A_r \left(\frac{\partial}{\partial t_2} \right)) = \\
 &= \frac{2}{\operatorname{sen} 2r} (\phi_r)_* ((-2 \cot 2r) \left(\frac{\partial}{\partial t_2} \right)) = \\
 &= \frac{2}{\operatorname{sen} 2r} (-2 \cot 2r) \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2r I_{\eta} = (-2 \cot 2r) I_{\eta}.
 \end{aligned}$$

Análogamente se sigue el resultado para J_{η} y K_{η} .

Sea, pues, M una subvariedad cuaterniónica y r tal que $V = \phi_r M$ es una hipersuperficie real. Se tiene

COROLARIO IV.3.8.- En las condiciones anteriores, el conjunto focal de $\phi_r M$ consiste en la unión del conjunto focal de M y el propio M .

Demostración.- Los puntos focales de M , según la Proposición IV.3.3, se obtienen únicamente para $r = \pi/2$.

Por la Proposición IV.3.4 y teniendo en cuenta el Corolario IV.3.7 se obtienen puntos focales de $\phi_r M$, a distancia $\frac{\pi}{2} - r$ de $\phi_r M$ y según geodésicas de dirección $\eta_{\Pi}(z)$ que corresponden, pues, a los que estaban a distancia $\pi/2$ de M en la dirección de ξ . Es decir, estos primeros puntos focales de $\phi_r M$ son los puntos focales de M . La otra posibilidad correspondería a puntos a distancia r de $\phi_r M$ en la dirección $-\eta_{\Pi}(z)$, y, de nuevo, teniendo en cuenta la Proposición IV.3.4, estos son los puntos de M .

§4.- Estructura de variedad de las hojas del conjunto focal.-

En este epígrafe se consideran las componentes del conjunto focal de una hipersuperficie real M de $Q\mathbb{P}^m$, demostrándose que se pueden considerar como auténticas subvariedades bajo ciertas restricciones. La primera restricción que se impone es que $I\xi, J\xi$

y $K\xi$ sean vectores principales de A_ξ , donde ξ es el campo de vectores normales unitario a M . Por el Corolario IV.3.7, esto se verifica para todo tubo sobre una subvariedad cuaterniónica. La segunda restricción es que la curvatura principal respecto de la cual se obtiene la hoja en cuestión, tenga multiplicidad constante.

Sea, pues, M una hipersuperficie real orientable de QP^m con campo de vectores normal unitario ξ , tal que $I\xi, J\xi$ y $K\xi$ son vectores principales de A_ξ con la misma curvatura principal. Entonces, del Lema IV.1.1, se sigue que dicha curvatura principal ha de ser localmente constante. Se puede escribir, por tanto, esa curvatura principal como $\mu = 2 \cot 2r$, para alguna constante $0 < r < \pi/2$ cuando se hacen cálculos locales. Sea $\phi_r: M \rightarrow QP^m$, donde $\phi_r(x) = F(x, r\xi(x))$. Por tanto, de la Proposición IV.3.4 se obtiene que existen dos conjuntos de puntos focales correspondientes a μ : Una hoja es $\phi_r M$ y la otra $\phi_{r-\frac{\pi}{2}} M$. En lo que sigue, se considera sólo $\phi_r M$, aunque todo es igualmente aplicable a $\phi_{r-\frac{\pi}{2}} M$.

De la Proposición IV.3.4 se sigue que ϕ_r tiene rango constante $4m-4$ en cualquier abierto donde las otras curvaturas principales de A_ξ no tomen el valor $\cot r$. Si alguna de estas curvaturas principales $\lambda = \cot r$ en un abierto U , entonces el rango de ϕ_r en U sería $4m-4-\nu$, siendo ν la multiplicidad de λ .

A continuación se demuestra el siguiente Teorema que prueba que una hoja del conjunto focal tiene estructura de subvariedad cuaterniónica siempre que la aplicación ϕ_r tenga rango constante. Además, la hipersuperficie real sería un tubo de radio constante sobre dicha subvariedad.

TEOREMA IV.4.1.- Sea M una hipersuperficie real conexa y orientable de QP^m sobre la que $I\xi, J\xi$ y $K\xi$ son vectores principales con curvatura principal localmente constante $\mu=2\cot 2r$. Si ϕ_r tiene rango constante q sobre M, entonces:

a) q es múltiplo de 4 y todo punto $x_0 \in M$ tiene un entorno U tal que $\phi_r U$ es una subvariedad cuaterniónica de dimensión cuaterniónica $q/4$, embebida en QP^m .

b) Para todo $x \in U$, la hoja de la distribución $T_0 = \{X \in TM / (\phi_r)_* X = 0\}$ que pasa por x corta a U en un abierto de una hiperesfera geodésica en el $QP^{m-(q/4)}$ totalmente geodésico ortogonal a $T_p(\phi_r U)$ en $p = \phi_r(x)$. Es decir, U queda sobre el tubo de radio r sobre $\phi_r U$.

Demostración.- Si se supone que ϕ_r tiene rango constante q sobre M, es conocido que para todo $x \in M$ existe un entorno coordenado U de x con coordenadas locales u^1, \dots, u^{4m-1} , con origen en x y tal que ϕ_r es un embebimiento de la "slice" $u^{q+1} = \dots = u^{4m-1} = 0$ en QP^m . Así, $\phi_r M$ es una subvariedad de dimensión real q en un entorno de $\phi_r(x)$. (Véase [7], Remark 4.2 y Lemma 5.2). Además, es fácil comprobar que la distribución $T_0(x) = \{X \in T_x M / ((d\phi_r)_* X = 0)\}$ es involutiva y que sus hojas tienen dimensión $4m-1-q$.

Sea $x_0 \in M$ y, según lo anterior, U un entorno de x_0 en M lo suficientemente pequeño para que $V = \phi_r U$ sea una subvariedad embebida de dimensión real q.

Para demostrar que V es una subvariedad cuaterniónica de QP^m lo que se hace es probar que para todo $p \in V$, $T_p^\perp V$ es invariante por I, J y K. En este sentido, se prueba la existencia de una base de $T_p^\perp V$ formada íntegramente por vectores de la forma

$$\eta(x) = (d\eta)_z (-\operatorname{sen} r \omega + \operatorname{cos} r \xi_\omega)$$

donde $x \in U$, ξ es el normal unitario a M en x y el resto de las notaciones son las usadas en §3. Es entonces una aplicación directa de las Proposiciones IV.3.2 y IV.3.4 el comprobar que $I_\eta(x)$, $J_\eta(x)$ y $K_\eta(x)$ son ortogonales a $(\phi_r)_*(T_x U)$ y, por tanto, a $T_p V$.

Para demostrar que existe una base del tipo que se pretende, obsérvese que, en primer lugar, η aplica U en el fibrado $U(T^\perp V)$ de normales unitarios a V . Además, notando por $\psi_r: U(T^\perp V) \longrightarrow QP^m$ la aplicación sobre el tubo de radio r sobre V , es inmediato, según la definición de ψ_r , el que $\psi_r(-\eta(x)) = x$, para todo $x \in U$. Así, η tiene una inversa a la izquierda y es un difeomorfismo sobre un abierto $\eta(U)$ en $U(T^\perp V)$. Notando por $U_p(T^\perp V)$ a la fibra de $U(T^\perp V)$ en p , $\eta(U) \cap U_p(T^\perp V)$ es un abierto en $U_p(T^\perp V)$ que, por tanto, contiene una base para $T_p^\perp V$ de la forma buscada.

Se ha probado, pues, que $T_p^\perp V$ es invariante por I, J y K . Como V es una subvariedad embebida, se sigue que V es una subvariedad cuaterniónica de QP^m . Con esto se concluye la demostración de a).

Para demostrar el apartado b), sea $x \in U$ y a un punto arbitrario de la hoja de T_0 que pasa por x . Por la construcción anteriormente hecha, $\eta(a) \in U_p(T^\perp V)$, por lo que a debe estar a distancia r de p a lo largo de una geodésica de QP^m normal a $\phi_r M$. Por otro lado, $T_p^\perp V$ determina un proyectivo $QP^{m-(q/4)}$ totalmente geodésico en QP^m , y, por lo anterior, la hoja en cuestión es una subvariedad de la hiperesfera geodésica de centro p y radio r en dicho proyectivo. Dicha hoja tiene dimensión $4m-q-1$, que es la dimensión de dicha hiperesfera geodésica, luego ha de ser una subvariedad abierta suya. Esto termina la demostración.

Si se supone ahora que la hipersuperficie M queda sobre el tubo de radio r sobre una subvariedad cuaterniónica \bar{M} , o sea,

$M = \phi_r U$, donde U es un abierto de $U(T^1 \bar{M})$, al ser \bar{M} totalmente geodésica en QP^m la única curvatura principal (que, por tanto, tiene multiplicidad constante $4k$ sobre U) es $\bar{\lambda} = 0 = \cot(\pi/2)$. Así, a $\bar{\lambda}$ le corresponde, por la Proposición IV.3.6, una curvatura principal de M , $\lambda = \cot((\pi/2) - r)$, con la misma multiplicidad. Así, el conjunto de puntos focales determinado por λ es, simplemente, $\phi_{(\pi/2)-r} M$, como se deduce de la Proposición IV.3.4, que es una de las hojas determinadas por $\mu = -2\cot 2r$ discutidas en el anterior Teorema.

En definitiva, el Teorema IV.4.1 está en condiciones de poder aplicarse para toda hipersuperficie real M que quede sobre un tubo obtenido a partir de una subvariedad cuaterniónica, hecho que será utilizado en el siguiente epígrafe.

A continuación se dan dos ejemplos de hipersuperficies reales de QP^m que ilustran la situación descrita por el Teorema IV.4.1 y que, además, dan pie a la clasificación que se llevará a cabo en el siguiente epígrafe.

EJEMPLO IV.3.2.- Hiperesferas geodésicas en QP^m .-

Una hiperesfera geodésica en QP^m de centro el punto $p \in QP^m$ y radio r , $0 < r \leq \pi/2$, es el conjunto de puntos de QP^m a distancia fija r del punto p . Se notará dicha hiperesfera geodésica por $G(p, r)$. Se puede considerar $G(p, r)$ como un tubo de radio r sobre la subvariedad 0-dimensional $\{p\}$. Así, por la Proposición IV.3.6, se tiene que $G(p, r)$ tiene dos curvaturas principales distintas $\lambda = \cot r$, de multiplicidad $4m-4$, y $\mu = 2\cot 2r$, de multiplicidad 3, en cada punto.

Es claro que $G(p, \pi/2) = QP^{m-1}$, también llamado el hiperplano dual en QP^m a distancia $\pi/2$ del punto $p \in QP^m$.

Para $r < \pi/2$ fijo, es claro que $G(p, r)$ es también el tubo de

radio $(\pi/2)-r$ sobre QP^{m-1} y las curvaturas principales sobre $G(p,r)$ se pueden también calcular usando este hecho.

Por el Corolario IV.3.8 se sigue que el conjunto focal de $G(p,r)$ es $\{p\} \cup QP^{m-1}$, donde el punto p , por la Proposición IV.3.4, es un punto focal de multiplicidad $4m-1$ de $(G(p,r),x)$, para todo $x \in G(p,r)$.

Por otro lado, para cada $q \in QP^{m-1}$, existe una esfera de radio $(\pi/2)-r$ de puntos en $G(p,r)$ teniendo a q como punto focal de multiplicidad 1. Esta esfera es una hoja de la foliación $T_\mu = \langle I\xi, J\xi, K\xi \rangle$, intersección de M con el QP^1 totalmente geodésico a través de q y ortogonal a QP^{m-1} en q , hecho que se sigue por aplicación directa del Teorema IV.4.1 al caso de $M=G(p,r)$, y teniendo en cuenta que la aplicación $\phi_{(\pi/2)-r}$ tiene rango constante, $4m-4$, sobre M .

EJEMPLO IV.4.3.- Tubos sobre la subvariedad cuaterniónica QP^k de QP^m ($1 \leq k \leq m-2$).

Sea k un entero fijo con $1 \leq k \leq m-2$ y sea $0 < r < \pi/2$. Sea la hipersuperficie $M'(4m+2, k, r)$ de S^{4m+3} definida por

$$(IV.4.1) \quad \sum_{j=0}^k |q_j|^2 = \cos^2 r, \quad \sum_{j=k+1}^m |q_j|^2 = \sin^2 r$$

Luego $M'(4m+2, k, r)$ es un producto $S^{4k+3}(1/\cos^2 r) \times S^{4l+3}(1/\sin^2 r)$, donde $l = m - k - 1$.

La proyección π sumerge $M'(4m+2, k, r)$ en una hipersuperficie real de QP^m , que se notará por $M(4m-1, k, r)$. Si se toma $r=0$ en (IV.4.1) se obtiene la esfera S^{4k+3} como subvariedad totalmente geodésica en S^{4m+3} , cuya imagen bajo π es la subvariedad cuaterniónica QP^k de QP^m . De esta construcción se sigue que $M(4m-1, k, r)$ es el tubo de radio r sobre QP^k , para lo cual basta tener en

cuenta la definición que se ha dado de los tubos.

De la Proposición IV.3.6, se tiene que $M(4m-1, k, r)$ tiene tres curvaturas principales constantes $\lambda_1 = \cot r$, $\lambda_2 = \cot(r - (\pi/2)) = -\cot((\pi/2) - r)$ y $\mu = 2\cot 2r$, con multiplicidades respectivas $4l$, $4k$ y 3 . Nótese que $M(4m-1, k, r)$ es también un tubo de radio $(\pi/2) - r$ sobre la subvariedad cuaterniónica QP^1 de QP^m , que se obtiene tomando $r = \pi/2$ en (IV.4.1) y proyectando sobre QP^m . Por el Corolario IV.3.8, se tiene que el conjunto focal de $M(4m-1, k, r)$ es $QP^k \cup QP^1$. La foliación T_0 , para la aplicación focal ϕ_r , es $T_{\lambda_1} \oplus T_\mu$ y para $\phi_{r-(\pi/2)}$ es $T_{\lambda_2} \oplus T_\mu$, donde T_ν denota el autoespacio correspondiente al autovalor ν .

NOTA.- En el ejemplo anterior el caso $k=m-1$ coincidiría con el Ejemplo IV.4.2, por lo que no se ha incluido.

§5.- Una clasificación de hipersuperficies reales pseudo-Einstein del espacio proyectivo cuaterniónico.-

Sea M una hipersuperficie real del espacio proyectivo cuaterniónico QP^m . Se dice que M es Q-casi umbilical (ver [21]) si la segunda forma fundamental A de la inmersión verifica

$$(IV.5.1) \quad AX = aX + b\{g(X, U_1)U_1 + g(X, U_2)U_2 + g(X, U_3)U_3\}$$

siendo a y b funciones diferenciables sobre M y X cualquier campo de vectores tangente a M .

Es fácil ver, sustituyendo (IV.5.1) en (IV.1.17), que toda hipersuperficie Q-casi umbilical de QP^m es pseudo-Einstein y que U_1, U_2 y U_3 son principales con la misma curvatura principal. Por tanto, las hipersuperficies reales Q-casi umbilicales y los Ejemplos IV.4.2 y IV.4.3 son hipersuperficies reales de QP^m con U_1, U_2 y U_3 principales y con la misma curvatura principal.

El objetivo del presente epígrafe es obtener la clasificación de las hipersuperficies reales pseudo-Einstein de QP^m que verifiquen la condición anterior sobre U_1, U_2 y U_3 .

TEOREMA IV.5.1.- Sea M una hipersuperficie real, conexa y pseudo-Einstein del espacio proyectivo cuaterniónico QP^m . Si U_1, U_2 y U_3 son principales con la misma curvatura principal, entonces M es un subconjunto abierto de

- a) una hiperesfera geodésica, ó
- b) un tubo de radio r sobre el espacio proyectivo cuaterniónico QP^k , $0 < k < m-1$, donde $0 < r < \pi/2$ y $\cot^2 r = \frac{4k+2}{4m-4k-2}$.

Demostración.- Por el Lema IV.1.1 se tiene que la curvatura principal correspondiente a U_1, U_2 y U_3 es localmente constante.

Al ser U_1, U_2 y U_3 principales con la misma curvatura principal, se sigue de los Teoremas IV.2.2 y IV.2.3 que, como máximo, existen tres curvaturas principales distintas en cada punto de M. Por otro lado, es conocido, [11], que no existen hipersuperficies reales totalmente umbilicales en QP^m . Por tanto, se considerarán dos casos por separado:

- a) Caso en que M tiene, como máximo, dos curvaturas principales distintas en cada punto.

En primer lugar, se prueba que todos los puntos de M son no umbilicales. En efecto, sea $x \in M$ un punto no umbilical de M y sea ξ un campo de vectores normales unitario definido en un entorno del punto x. Se considera $\mu = 2 \cot 2r$, $0 < r < \pi/2$, la curvatura principal de M correspondiente a U_1, U_2 y U_3 en dicho entorno del punto x. Si la otra curvatura principal de M no es $\cot r$ en el punto x, entonces, por la Proposición IV.3.4, se sigue que ϕ_r tiene rango $4m-4$ en x. Por el contrario, si la otra curvatura

principal de M en x es $\cot r$, entonces, por la misma Proposición anterior, ϕ_r tendría rango 0 en x .

Si ϕ_r tiene rango $4m-4$ en x , esto ocurre en algún entorno U del punto x , donde U tiene todos sus puntos no umbilicales. Por el Teorema IV.4.1, U se puede elegir de forma que $N=\phi_r U$ sea una subvariedad cuaterniónica en QP^m de dimensión $4m-4$. Además, U está sobre un tubo de radio r sobre N . Puesto que toda subvariedad cuaterniónica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica es totalmente geodésica, se sigue que N ha de ser un subconjunto abierto de QP^{m-1} , visto como el hiperplano proyectivo cuaterniónico en QP^m .

Por la Proposición IV.3.6, los autovalores del endomorfismo de Weingarten sobre U son $-2\cot 2r=\cot (2(\pi/2)-r)$ y $\cot ((\pi/2)-r)$, ó, lo que es igual, cambiando la dirección del normal, $\mu=2\cot 2r$ y $\lambda=\cot (r-(\pi/2))$. Luego si ϕ_r tiene rango $4m-4$ en el punto no umbilical x , se sigue que las curvaturas principales de M son localmente constantes en x . Por otro lado, si ϕ_r tuviera rango 0 en el punto no umbilical x , por la Proposición IV.3.4, se tendría que $\cot r$ es autovalor de A en x ; entonces, considerando, también en virtud de la Proposición IV.3.4, la aplicación focal $\phi_{r-(\pi/2)}$, se tendría que dicha aplicación ya tiene rango $4m-4$ en x , por lo que se puede utilizar el razonamiento anterior para concluir también que las curvaturas principales de M son localmente constantes en x . Utilizando la conexión de M , se sigue que todo punto de M es no umbilical, lo cual permite definir un campo de vectores normal y unitario sobre todo M , ξ , imponiendo que la curvatura principal λ de multiplicidad $4m-4$ sea positiva, ya que, por la Proposición IV.3.6, no puede ser nula. Por

tanto, se puede escribir $\lambda = \cot s$, $0 < s < \pi/2$, siendo $s = r$ ó $(\pi/2) - r$. En cualquiera de los casos, $\mu = 2 \cot 2s$ y ϕ_s tendría rango 0 sobre todo M . Luego $\phi_s M$ sería un único punto en QP^m y, por el Teorema IV.4.1, M estaría sobre un tubo de radio s sobre el punto $\phi_s M$. Dicho tubo sobre $\phi_s M$ es una hiperesfera geodésica en QP^m centrada en ese punto y, al tener M la misma dimensión que la hiperesfera geodésica, se sigue que M es un abierto de dicha hiperesfera geodésica.

b) Caso en que M tenga, como máximo, tres curvaturas principales distintas en cada punto.

Sea Σ el conjunto de puntos de M sobre el cual existen tres curvaturas principales distintas. Es fácil probar que Σ es abierto en M . Sea ξ un campo de vectores normales unitario definido en un entorno V del punto $x \in \Sigma$. Y sea $\mu = 2 \cot 2r$, $0 < r < \pi/2$, la curvatura principal de U_1 , U_2 y U_3 en dicho entorno V .

Localmente, existen dos aplicaciones focales, ϕ_r y $\phi_{r-(\pi/2)}$, obtenidas a partir de μ , cuyo rango es computable por la Proposición IV.3.2.

Sea j el máximo rango alcanzado por cualquiera de las aplicaciones focales anteriores sobre Σ . El conjunto $\Omega \subset \Sigma$ sobre el cual, al menos una de las aplicaciones focales tiene rango j , es un abierto de M . Sea $x \in \Omega$ y ξ un campo de vectores normales unitario tal que ϕ_r tenga rango j en un entorno de x . Por el Teorema IV.4.1, existe un entorno U de x tal que $N = \phi_r U$ es una subvariedad cuaterniónica de QP^m de dimensión real j y, además, U está sobre un tubo de radio r sobre N .

N no puede ser una hipersuperficie cuaterniónica de QP^m ya que, por la Proposición IV.3.6, U no tendría tres curvaturas

principales distintas en cada punto. Luego, también de la Proposición IV.3.6, se sigue que la única posibilidad para que existan tres curvaturas principales distintas en cada punto de U es que N sea un subconjunto abierto de un QP^k visto como una subvariedad cuaterniónica de QP^m , con $0 < k = j/4 < m-1$.

Así, las tres curvaturas principales son constantes sobre U , y, en consecuencia, localmente constantes sobre Ω . Por las propiedades del rango de una aplicación se sigue que Ω es cerrado en M y, en consecuencia, por la conexión de M , Ω coincide con M . Luego sobre M existen tres curvaturas principales localmente constantes que, debido de nuevo a la conexión de M , son constantes y, por tanto, $\phi_r M$ es un abierto de QP^k . En consecuencia, por el Teorema IV.4.1, se tiene que M sería un abierto del tubo de radio r construido sobre QP^k . De entre todos los tubos construidos sobre QP^k , solamente el dado por el apartado b) del Teorema es pseudo-Einstein, lo cual se sigue de la construcción del Ejemplo IV.4.3, teniendo en cuenta la expresión del tensor de Ricci de la hipersuperficie de S^{4m+3} que se proyecta sobre dicho tubo, las fórmulas de O'Neill, [34], que relacionan las curvaturas de dicha hipersuperficie y del tubo, y el comportamiento respecto a la curvatura de los campos verticales de la hipersuperficie de S^{4m+3} (ver [41]). Esto concluye la demostración.

NOTA.- El Teorema IV.5.1 generaliza la clasificación de hipersuperficies reales Q -casi umbilicales de QP^m dada por Pak en [35], donde sólo aparece el caso a) de dicho Teorema.

COROLARIO IV.5.2.- No existen hipersuperficies reales Einstein de QP^m con U_1, U_2 y U_3 principales con la misma curvatura principal.

B I B L I O G R A F I A

- [1] D.V. ALEKSEEVSKII
"Riemannian spaces with exceptional holonomy groups",
Funkcional. Anal. i Prilozen, 2 (1968), 1-10.
- [2] D.V. ALEKSEEVSKII
"Compact quaternion spaces", Funkcional. Anal. i Prilozen,
2 (1968), 11-20.
- [3] M. BARROS - F. URBANO
"Totally real submanifolds of quaternion Kaehlerian mani-
folds", Soochow J. Math., 5 (1979), 63-78.
- [4] M. BERGER
"Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à
connexion affine et des variétés Riemanniennes", Bull. Soc.
Math. France, 83 (1955), 279-330.
- [5] R.L. BISHOP - S.I. GOLDBERG
"Some implications of the generalized Gauss-Bonnet theorem",
Trans. Amer. Math. Soc., 112 (1964), 508-535.
- [6] E. BONAN
"Sur les G-structurés du type quaternionien", Cahiers de
Topologie et Géométrie Diff., 9 (1967), 389-463.
- [7] W.M. BOOTHBY
An introduction to Differentiable manifolds and Riemannian
Geometry. Academic Press. New York. 1975.

- [8] E. CARTAN
Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann.
Gauthiers-Villars. Paris. 1946.
- [9] T.E. CECIL - P.J. RYAN
"Focal sets of submanifolds", Pacific J. Math., 78
(1978), 27-39.
- [10] T.E. CECIL - P.J. RYAN
"Focal sets and real hypersurfaces in complex projective space", Trans. Amer. Math. Soc., 269(1982), 481-499.
- [11] B.Y. CHEN
"Totally umbilical submanifolds of quaternion space forms", J. Austral. Math. Soc., 26 (1978), 154-162.
- [12] S.S. CHERN
"Pseudo-groupes continus infinis", Colloque de Géométrie Différentielle. Strasbourg (1953), 119-136.
- [13] M. DAJCZER - K. NOMIZU
"On sectional curvature of indefinite metrics II", Math. Ann., 247 (1980), 279-282.
- [14] C. EHRESMANN
"Sur la théorie des espaces fibrés", Coll, Top. Alg. Paris. 1947.
- [15] C. EHRESMANN
"Les connexions infinitésimales dans un espace fibré", Coll. Top. Alg. Bruxelles. 1950.
- [16] A. FIALKOW
"Hypersurfaces of a space of constant curvature", Ann. of Math., 39 (1938), 762-785.

- [17] S. FUNABASHI
"Totally real submanifolds of a quaternionic Kaehlerian manifold", Kodai Math. Sem. Rep., 29(1978), 261-270.
- [18] L. GRAVES - K. NOMIZU
"On sectional curvature of indefinite metrics", Math. Ann., 232 (1978), 267-272.
- [19] A. GRAY
"A note on manifolds whose holonomy group is a subgroup of $Sp(m).Sp(1)$ ", Michigan Math. J., 16 (1969), 125-128.
- [20] A. GRAY
"Einstein-like manifolds which are not Einstein", Geom. Dedicata, 7 (1978), 259-280.
- [21] C.S. HOUH
"On Q-quasi umbilical hypersurfaces of quaternion Kaehler manifolds", Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 8 (1980), 447-456.
- [22] S. ISHIHARA
"Quaternion Kählerian manifolds and fibred Riemannian spaces with Sasakian 3-structure", Kodai Math. Sem. Rep., 25 (1973), 321-329.
- [23] S. ISHIHARA
"Quaternion Kählerian manifolds", J. Differential Geometry, 9 (1974), 483-500.
- [24] S. KOBAYASHI - K. NOMIZU
Foundations of Differential Geometry, Vol. I y II. Interscience. New York. 1963-69.

- [25] M. KON
"Pseudo-Einstein real hypersurfaces in complex space forms",
J. Differential Geometry, 14 (1979), 339-354.
- [26] V.Y. KRAINES
"Topology of quaternionic manifolds", Trans. Amer. Math.
Soc., 122 (1966), 357-367.
- [27] R.S. KULKARNI
"Curvature and metric", Ann. of Math., 91 (1970), 311-331.
- [28] R.S. KULKARNI
"Equivalence of Kähler manifolds and other equivalence
problems", J. Differential Geometry, 9 (1974), 401-408.
- [29] R.S. KULKARNI
"The values of sectional curvature in indefinite metrics",
Comm. Math. Helv., 54 (1979), 173-176.
- [30] M.A. MAGID
"Shape operators of Einstein hypersurfaces in indefinite
space forms", Proc. Amer. Math. Soc., 84 (1982), 237-242.
- [31] E. MARTINELLI
"Modelo metrico reale dello spazio proiettivo quaternionale",
Ann. di Mat. Pura Appl., 49 (1960), 73-90.
- [32] E. MARTINELLI
"Metriche hermitiane sulle varietà a struttura quasi qua-
ternionale generalizzata", Lincei Rend. sc. fis. mat. e
nat., 39(1965), 400-407.
- [33] E. MARTINELLI
"Variétés à structure quaternionienne généralisée", Rev.
Roum. Math. Pures et Appl., 10 (1965), 915-922.

- [34] B. O'NEILL
 "The fundamental equations of a submersion", Michigan Math. J., 13 (1966), 459-469.
- [35] J.S. PAK
 "Real hypersurfaces in quaternionic Kaehlerian manifolds with constant Q -sectional curvature", Kodai Math. Sem. Rep., 29 (1977), 22-61.
- [36] J.D. PEREZ
 "Una caracterización de variedades cuaterniónicas con curvatura seccional cuaterniónica constante", Actas VIII Jornadas Luso-Espanholas Matemática, Vol. I, (1981), 347-351.
- [37] J.D. PEREZ - F.G. SANTOS
 "Diffeomorphisms which preserve quaternionic sectional curvature", Soochow J. Math., 8 (1982), 79-86.
- [38] J.D. PEREZ - F.G. SANTOS
 "Indefinite quaternion space forms", Ann. di Mat. Pura Appl. (a aparecer).
- [39] J.D. PEREZ - F.G. SANTOS - F. URBANO
 "On the axioms of planes in quaternionic geometry", Ann. di Mat. Pura Appl., 130 (1982), 215-221.
- [40] A.Z. PETROV
 Einstein spaces. Pergamon Press. Hungary, Oxford and New York. 1969.
- [41] S. SHIBUYA
 "Real submanifolds in a quaternionic projective space", Kodai Math. J., 1(1978), 421-439.

- [42] R. TAKAGI
"Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvatures", J. Math. Soc. Japan, 27 (1975), 43-53.
- [43] R. TAKAGI
"Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvatures II", J. Math. Soc. Japan, 27 (1975), 507-516.
- [44] J.A. WOLF
"Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces", J. Math. Mech., 14 (1963), 1033-1047.
- [45] J.A. WOLF
"Isotropic manifolds of indefinite metric", Comm. Math. Helv., 39 (1964), 21-64.
- [46] J.A. WOLF
Spaces of constant curvature. Publish or Perish. Berkeley. 1974.
- [47] H. WU
"On the de Rham decomposition theorem", Illinois J. Math., 8 (1964), 291-311.