# SEMISUMANDOS, SEMIIDEALES Y SEMIIDEALOIDES EN ESPACIOS NORMADOS



JUAN FRANCISCO MENA JURADO

Departamento de Teoría de Funciones

Facultad de Ciencias

Universidad de Granada

1984

Tesis doctoral dirigida por los doctores Rafael Payá Albert y Angel Rodríguez Palacios, Profesores titulares del Departamento de Teoría de Funciones, defendida por Don Juan Francisco Mena - Jurado el día 9 de Julio de 1.984, ante el tribunal formado por los Profesores: Presidente, Don Manuel Valdivia Ureña; Vocales, Don Juan Arias de Reyna, Don Pedro Martínez Amores, Don Angel Rodríguez Palacios; Secretario, Don Rafael Payá Albert. Obtuvo la calificación de sobresaliente "cum laude".

*A mis padres*

# I N D I C E


INTRODUCCION.................................................. i

CAPITULO I : SEMISUMANDOS..................................... 1

CAPITULO II : SEMIIDEALES..................................... 27

CAPITULO III : SEMIIDEALOIDES................................. 54

CAPITULO IV : EL TEOREMA FINAL................................ 77

BIBLIOGRAFIA.................................................. 82

# I N T R O D U C C I O N

El tema objeto de esta memoria se encuadra dentro de una sugestiva línea de investigación de amplio desarrollo en los últimos años y que constituye una parcela con entidad propia dentro de la Geometría de los espacios de Banach. El punto de partida de esta línea puede situarse en dos trabajos de Cunningham [13,14] en los que se introducen y estudian los conceptos de *L-sumando* y *M-sumando*, si bien la teoría no se consolida hasta la aparición en 1972 de dos importantes trabajos de Alfsen y Effros [1,2] en los que aparece por primera vez uno de los más fructíferos conceptos en este campo de ideas, a saber, el de *M-ideal* (ver, por ejemplo [5,21,34]). Sucesivas ampliaciones de los anteriores conceptos son los *$L^p$-sumandos* de Behrends [3,4,6] y los *semi-L-sumandos* y *semi-M-ideales* de Lima [22,24,36,37,38]. Algunas patologías de comportamiento de los conceptos hasta ahora nombrados invitan a la consideración de un ambiente más general en el que dichas patologías encuentren una explicación coherente. Este ambiente general se consigue mediante la introducción del concepto de *semisumando* y sus sucesivas predualizaciones. Un tratamiento sistemático de estas ideas se inicia en la tesis de R. Payá [29,30] existiendo otros precedentes en los trabajos de Evans [16] y Volkmann [35].

Para poder entrar en el contenido y objetivos de la presente memoria necesitamos centrar el concepto fundamental de semisumando, previamente mencionado.

A partir de este momento $X$ denotará un espacio normado real o complejo. Por *semiproyección* en $X$ entenderemos una aplicación $\pi$ de $X$ en $X$ verificando:

$$\pi(x+\pi(y)) = \pi(x)+\pi(y) \quad (x,y\in X)$$

$$\pi(\lambda x) = \lambda\pi(x) \quad (\lambda \text{ escalar}, \ x\in X)$$

Una semiproyección $\pi$ se llama *absoluta* si la norma de cada vector $x$ depende únicamente de las normas de $\pi(x)$ y $x-\pi(x)$, en cuyo caso existe una norma absoluta $|\cdot|$ en $\mathbb{R}^2$ (única si $\pi$ es no trivial) verificando:

$$\|x\| = |(\|\pi(x)\|, \|x-\pi(x)\|)| \quad \forall x\in X$$

y decimos que $\pi$ es una *semi-*$|\cdot|$*-proyección* cuando queremos enfatizar dicha norma absoluta.

La imagen de $\pi$ por una semiproyección (resp. proyección) absoluta recibe el nombre de *semisumando* (resp. *sumando*) de $X$. Los términos *semi-*$|\cdot|$*-sumando* y $|\cdot|$*-sumando* se explican por sí solos.

Los semi-$L$-sumandos de Lima son los semi-$|\cdot|$-sumandos con

$$|(r,s)| = L(r,s) = |r|+|s| \quad ((r,s)\in\mathbb{R}^2).$$

Los $L^p$-sumandos de Behrends son los $|\cdot|$-sumandos con

$$|(r,s)| = L^p(r,s) = (|r|^p+|s|^p)^{1/p} \quad (1\leq p<\infty).$$

y los $M$-sumandos a los que a veces se llamará $L^{\infty}$-sumandos son los $|\cdot|$-sumandos con

$$|(r,s)| = M(r,s) = L^{\infty}(r,s) = Máx\{|r|,|s|\}$$

Para abarcar el concepto clásico de $M$-ideal y su posterior generalización, el de semi-$M$-ideal, es necesario "predualizar" el concepto de semisumando como sigue:

Un *semiideal* (resp. *ideal*) de $X$ es por definición un subespacio cerrado $M$ de $X$ cuyo polar $M^{o}$ es un semisumando (resp. sumando) del espacio dual $X'$. Más concretamente, se dice que $M$ es un *semi-$|\cdot|$-ideal* de $X$ si $M^{o}$ es un semi-$|\cdot|^{*}$-sumando de $X'$ donde $|\cdot|^{*}$, la norma conjugada de $|\cdot|$, viene dada por

$$|(r,s)|^{*} = Máx\{|rb+sa|: |(a,b)| \leq 1\}.$$

En particular, reencontramos el concepto clásico de semi-$M$-ideal: subespacio cerrado cuyo polar es un semi-$L$-sumando del dual.

Predualizando, análogamente, ahora el concepto de semiideal obtenemos el de *semiidealoide*. Concretamente, un *semi-$|\cdot|$-idealoide* de $X$ es un subespacio cerrado $M$ de $X$ tal que $M^{o}$ es un semi-$|\cdot|^{*}$-ideal de $X'$.

Para $X$ completo es fácilmente deducible de resultados conocidos [18,22,29,35] que todo semi-$L^{p}$-idealoide $(1 \leq p \leq \infty)$ es semi-$L$-sumando $(p=1)$, $L^{p}$-sumando $(1<p<\infty)$ o $M$-ideal $(p=\infty)$ con lo que en el caso completo, que es el tratado usualmente en la literatura, el concepto de semiidealoide no tiene precedente clásico. Por nuestra parte creemos que el concepto de semiidealoide es el más sugestivo de los que se tratan en la memoria debido a las dos razones siguientes:

- En nuestra situación general hemos demostrado la existencia de espacios de Banach con semiidealoides *propios* (es decir, que no son ni semisumandos ni semiideales).

- Existen espacios normados (necesariamente no completos) con semi-$L$-idealoides propios.

El lector podría esperar ahora la predualización del concepto de semiidealoide que condujera a un cuarto concepto, incluso podría esperarse una sucesión infinita de conceptos obtenidos por sucesivas predualizaciones del concepto inicial de semisumando. Esto forzaría a esta memoria a tener infinitos capítulos y, en consecuencia, a ver indefinidamente aplazada su presentación. Afortunadamente, la predualización del concepto de semiidealoide no da lugar a un concepto nuevo puesto que hemos demostrado :

TEOREMA A: *El polar de un subespacio cerrado $M$ de $X$ es un semiidealoide de $X'$ si y sólo si $M$ es un semiideal de $X$.*

El resultado anterior aparece como teorema final de esta memoria y es, en nuestra opinión, uno de los más importantes de la misma.

En vista del teorema anterior son sólo tres los conceptos a tener en cuenta: semisumando, semiideal y semiidealoide. A ellos dedicamos, respectivamente, los capítulos I, II y III de la memoria. Antes de entrar en la exposición detallada del contenido de cada capítulo destacaremos, con el fin de clarificar la relación entre los tres conceptos antes mencionados, el siguiente resultado que hemos obtenido:

TEOREMA B: *Los sumandos de X son los subespacios de X que son simultáneamente semisumandos y semiideales de X. En consecuencia los ideales de X son los subespacios de X que son simultáneamente semiideales y semiidealoides.*

Como consecuencia de los teoremas A y B se obtiene que todo ideal débil * cerrado en un espacio dual es sumando. Ello resuelve el problema 9.3 de [29] y justifica el que no se haya introducido el concepto de idealoide que coincide con el de ideal.

Los teoremas A y B que se han expuesto anticipadamente con objeto de proporcionar al lector una visión global clara del contenido de la memoria han necesitado para su demostración de un minucioso estudio de cada uno de los conceptos que involucran, incluyendo el análisis de la influencia que la norma absoluta concreta $|\cdot|$ tiene sobre el concepto correspondiente. Dicho análisis fue iniciado en [29] (ver también [30,35]) y en esta memoria se concluye totalmente mediante potentes técnicas de renormación.

Pasamos a comentar el contenido del primer capítulo dedicado al estudio de los semisumandos. Un semisumando se dice *propio* cuando no es sumando.

Es conocido [29,35] que, dada una norma absoluta $|\cdot|$, una condición necesaria para la existencia de semi-$|\cdot|$-sumandos propios es que $(1,0)$ sea un vértice de la bola unidad de $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ (norma absoluta de *tipo 1*). Probamos que esta condición es también suficiente. Más concretamente se tiene:

TEOREMA C: *Sean X un espacio normable,* $\pi$ *una semiproyección en X y* $|\cdot|$ *una norma absoluta de tipo 1. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

*i)* $\pi$ *es una semi-*$|\cdot|$*-proyección para alguna norma en X generadora de su topología.*

*ii)* $\pi$ *es una semi-L-proyección para alguna norma en X generadora de su topología.*

La existencia de semi-$|\cdot|$-sumandos propios para cada norma absoluta $|\cdot|$ de tipo *1* se obtiene del teorema anterior y de la existencia de semi-*L*-sumandos propios.

En aras de una mayor claridad en la exposición, en el comentario de los resultados del segundo y tercer capítulo supondremos que el espacio ambiente *X* es un espacio de Banach.

El segundo capítulo se dedica al estudio de semiideales e ideales. Convendremos que un semiideal es *propio* cuando no es ideal, mientras que un ideal es *propio* cuando no es un sumando.

Es conocido [29,30] que, dada una norma absoluta $|\cdot|$, una condición necesaria para la existencia de semi-$|\cdot|$-ideales o de $|\cdot|$-ideales propios es que $(0,1)$ no sea un punto extremo de la bola unidad de $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ (norma absoluta de *cotipo* $\infty$). Probamos que esta condición es también suficiente. Esto es consecuencia del siguiente teorema:

TEOREMA D: *Sea $X$ un espacio normable completo, $M$ un subespacio cerrado de $X$ y $|\cdot|$ una norma absoluta de cotipo $\infty$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

*i) $M$ es semi-$|\cdot|$-ideal (resp. $|\cdot|$-ideal) propio para alguna norma en $X$ generadora de su topología.*

*ii) $M$ es semi-$M$-ideal (resp. $M$-ideal) propio para alguna norma en $X$ generadora de su topología.*

La existencia de semi-$|\cdot|$-ideales y de $|\cdot|$-ideales propios para cada norma absoluta $|\cdot|$ de cotipo $\infty$ se sigue del teorema anterior y de la existencia de semi-$M$-ideales y de $M$-ideales propios.

En el tercer capítulo comenzamos demostrando que todo semisumando es un semiidealoide, resolviendo así un problema planteado en [29].

En [29] se conoce que una condición necesaria para la existencia de semi-$|\cdot|$-idealoides que no sean semi-$|\cdot|$-sumandos ni semi-$|\cdot|$-ideales (a los que llamaremos *propios*) es que $|\cdot|$ sea de tipo $1$ y cotipo $\infty$. Esto descarta, como ya hemos comentado, la existencia de semi-$L^p$-idealoides propios con lo que el concepto de semiidealoide propio es un concepto sin precedentes clásicos. Así, se nos plantea aquí un problema de existencia cuyo análogo en los capítulos anteriores se tenía resuelto de antemano. De hecho hemos probado que la anterior condición sobre la norma absoluta $|\cdot|$ es también suficiente para la existencia de semi-$|\cdot|$-idealoides propios. La demostración de este resultado precisa establecer en una primera etapa la existencia de semiidealoides propios para toda una gama de normas absolutas, a saber, las normas hexagonales $|\cdot|_\gamma$ $(0<\gamma<1)$ definidas por

$$|(r,s)|_\gamma = Máx\{|s|, |r|+\gamma|s|\}.$$

Estas normas hexagonales juegan en este capítulo el papel codificador análogo al desempeñado por las normas $L$ y $M$ en el primer y segundo capítulo, respectivamente.

Una vez establecida la existencia de semiidealoides propios para el caso particular de las normas hexagonales el teorema de existencia de semi-$|\cdot|$-idealoides propios para cada norma absoluta $|\cdot|$ de tipo $1$ y cotipo $\infty$ es consecuencia del siguiente resultado:

TEOREMA E: *Sea $X$ un espacio normable completo y $M$ un subespacio cerrado de $X$. A cada norma absoluta $|\cdot|$ de tipo 1 y cotipo $\infty$ puede asociarse un número $\gamma$ con $0<\gamma<1$ tal que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*i) $M$ es semi-$|\cdot|$-idealoide propio para alguna norma en $X$ generadora de su topología.*

*ii) $M$ es semi-$|\cdot|_{\gamma}$-idealoide propio para alguna norma en $X$ generadora de su topología.*

La presente memoria incluye otros resultados interesantes y no resistimos la tentación de enunciar algunos de ellos en esta introducción.

Así, por ejemplo, hemos demostrado que todo semi-$|\cdot|$-sumando, semi-$|\cdot|$-ideal o semi-$|\cdot|$-idealoide completo $M$ de $X$ es un subespacio proximinal de $X$. Más concretamente, si para cada $x$ en $X$, $P_M(x)$ denota el conjunto de puntos de $M$ que materializan la distancia de $x$ a $M$, se tiene que $P_M(x)$ es no vacío y que

$$\{m\in M:\ \|m\| < K\|x+M\|\} \subset P_M(x)-P_M(x) \subset \{m\in M:\ \|m\| \leq K\|x+M\|\}$$

donde $K$ es una constante que sólo depende de la norma absoluta $|\cdot|$. Esto extiende un resultado de semi-$M$-ideales ([24], Teorema 1.2).

El hecho de que los semisumandos, semiideales y semiidealoides tengan ésta y otras propiedades comunes sugiere la conveniencia de considerar un concepto unificador definido de manera natural en el que todas las coincidencias tengan una explicación satisfactoria. En esta línea estamos trabajando intensamente habiendo conseguido hasta el momento resultados muy prometedores.

Terminamos este resumen de la memoria citando un resultado que hemos conseguido que afirma que todo espacio de Banach que sea semisumando de su bidual es necesariamente semi-$L$-sumando. Esto extiende el correspondiente resultado para sumandos debido a Godefroy ([20], Teorema 6). Para el caso de que $X$ sea semiideal o semiidealoide de su bidual hemos demostrado que entonces es un semi-$|\cdot|_\gamma$-ideal o semi-$|\cdot|_\gamma$-idealoide para algún $\gamma$ tal que $0 \leqq \gamma \leqq 1$ (obsérvese que $|\cdot|_0 = M$ y $|\cdot|_1 = L$).

Es sabido que $l^1$ es un $L$-sumando de su bidual y que $c_0$ es un $M$-ideal de su bidual. Incluso se sabe que si un espacio de Banach $X$ es semi-$M$-ideal de su bidual $X''$, entonces $X$ es, de hecho un $M$-ideal de $X''$([24], Proposición 1.5).

Nuestros resultados anteriormente citados hacen especialmente deseable la resolución de los siguientes problemas:

1) ¿Existe un espacio de Banach que sea semi-$L$-sumando propio de su bidual?

2) Para cada $\gamma$ con $0 < \gamma < 1$ ¿existe un espacio de Banach que sea $|\cdot|_\gamma$-ideal (resp. semi-$|\cdot|_\gamma$-ideal propio, semi-$|\cdot|_\gamma$-idealoide) propio de su bidual?

Finalmente, sólo me queda manifestar mi más profundo agradecimiento:

Al profesor Angel Rodríguez Palacios sin cuyo concurso (y discurso) esta memoria ni siquiera se hubiera comenzado. Su labor en la dirección de este trabajo ha sido ímproba y abnegada.

Al profesor Rafael Payá Albert sin cuya colaboración, esta memoria, probablemente, no se hubiera finalizado. De sus brillantes sugerencias y certeras orientaciones se encuentra impregnada toda esta memoria.

A los profesores Camilo Aparicio, Miguel Cabrera y Juan Martínez, que leyeron con gran cuidado la presente memoria y contribuyeron con sus útiles consejos al perfeccionamiento de la misma.

Al profesor D. José Ramón Fuentes Miras, Director del Departamento de Teoría de Funciones, y a mis compañeros de Departamento por su constante ayuda y estímulo.

Granada, Junio de 1984

Juan Francisco Mena Jurado

# C A P I T U L O   I

# S E M I S U M A N D O S

Comenzamos introduciendo los conceptos y resultados básicos de la Teoría General de Rango Numérico que utilizaremos constantemente en la presente memoria. Dicha teoría, salvo escasas excepciones (ver [8], [12], [25] y [28] ), sólo se ha estudiado en el caso de álgebras asociativas unitales, siendo, en este tema, referencias obligadas [10] y [11]. Recientemente, las técnicas de rango numérico han demostrado ser de gran utilidad en el estudio de las álgebras normadas no asociativas (ver [9], [26], [27], [32], [33] y [39] ).

En lo que sigue $X$ denotará un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, el cuerpo de los números reales o complejos indistintamente, salvo especificación en contrario. $X'$, $X''$ denotarán los espacios de Banach dual y bidual de $X$, respectivamente. Notaremos

$$B(X) = \{x \in X: \ \|x\| \leq 1\}$$

$$S(X) = \{x \in X: \ \|x\| = 1\}$$

1 DEFINICION: Sea $X$ un espacio normado, $x \in S(X)$ y $x' \in X'$. Diremos que $x'$ es un *estado* relativo a $x$ si verifica:

$$x'(x) = 1 \quad \text{y} \quad \|x'\| \leq 1$$

Notaremos $D(X,x)$ al conjunto de los estados de $X$ relativos a $x$.

Para cada $x$ en $S(X)$, $D(X,x)$ es una parte no vacía por el teorema de Hahn-Banach, convexa y débil-*-compacta de $X'$

por el teorema de Banach-Alaoglu.

2 DEFINICION: Dado $x \in S(X)$, diremos que $x$ es un *vértice* de $B(X)$ si $D(X,x)$ separa los puntos de $X$. Diremos que $x$ es un *punto suave* de $B(X)$ si $D(X,x)$ tiene un solo elemento.

3 DEFINICION: Llamaremos *espacio de rango numérico* a un par $(X,u)$ donde $X$ es un espacio normado y $u \in S(X)$. Al elemento $u$ se le llama *elemento distinguido* del espacio de rango numérico.

Si $(X,u)$ es un espacio de rango numérico, el convexo compacto $D(X,u)$ se llamará *espacio de estados* de dicho espacio de rango numérico, se denotará por $D(X)$ y sus elementos se llamarán estados de $X$.

Para cada $x$ en $X$, el conjunto:

$$V(X,x) = \{x'(x) : x' \in D(X)\}$$

se llamará *rango numérico* del elemento $x$ y, cuando $X$ se sobreentienda, se notará $V(x)$.

Para cada $x$ en $X$, $V(x)$ es un subconjunto no vacío, convexo y compacto de $\mathbb{K}$. Además, se verifica:

$$V(x + y) \subset V(x) + V(y) \quad (x,y \in X)$$

$$V(\lambda x + \mu u) = \lambda V(x) + \mu \quad (x \in X;\ \lambda,\mu \in \mathbb{K})$$

4 DEFINICION: Si $(X,u)$ es un espacio de rango numérico y $x \in X$, definimos:

$$v(x) = Máx\{|\lambda|: \lambda \in V(x)\}$$

El número $v(x)$ se llama *radio numérico* del elemento $x$. La función radio numérico, $x \to v(x)$ de $X$ en $\mathbb{R}$ es una seminorma en $X$ que, además, es continua pues, evidentemente:

$$v(x) \leq \|x\| \qquad (x \in X)$$

5 DEFINICION: Si $(X,u)$ es un espacio de rango numérico, se define su *índice numérico*, $n(X)$, mediante:

$$n(X) = Inf\{v(x): x \in S(X)\}$$

O, equivalentemente, $n(X)$ es el mayor de los reales no negativos $K$ tales que: $K\|x\| \leq v(x) \quad (x \in X)$.

6 PROPOSICION: *Sea $(X,u)$ un espacio de rango numérico.*

*i) La función radio numérico es una norma si y sólo si $u$ es un vértice de $B(X)$.*

*ii) $0 \leq n(X) \leq 1$ y $n(X) > 0$ si y sólo si la función radio numérico es una norma en $X$ equivalente a la inicial.*

DEMOSTRACION: *i)* $v(x) = 0$ si y sólo si $x'(x) = 0$ $\forall x' \in D(X,u)$. Luego $v(.)$ es una norma si y sólo si $D(X,u)$ separa puntos de $X$ o, lo que es lo mismo, si y sólo si $u$ es un vértice de $B(X)$.

*ii)* Evidente.

Acabamos esta introducción de rango numérico con un teorema que es una de las más importantes herramientas de la teoría general de rango numérico ya que nos va a permitir calcular el máximo de la parte real de $V(x)$ sin más que conocer la norma en algún entorno de $u$ en el subespacio engendrado por $u$ y $x$. Esto nos permite conocer $MáxRe\left[zV(x)\right]$ para $z \in \mathbb{K}$ con $|z| = 1$, lo que, por ser $V(x)$ convexo y compacto, equivale al conocimiento de $V(x)$. Esta afirmación es trivial en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, en el caso complejo la demostración puede verse en [7].

7 TEOREMA: ([29], Teorema 3.6). *Sea $(X,u)$ un espacio de rango numérico y $x \in X$. Se verifica:*

$$Máx\ Re\ V(x) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|u+\alpha x\|-1}{\alpha} = Inf\{\frac{\|u+\alpha x\|-1}{\alpha} : \alpha > 0\}$$

8 DEFINICION: Una norma, $|.|$, en $\mathbb{R}^2$ se llamará *absoluta* si verifica:

$$i)\ |(r,s)| = |(|r|,|s|)| \qquad \forall (r,s) \in \mathbb{R}^2$$

$$ii)\ |(1,0)| = |(0,1)| = 1.$$

Como ejemplos de normas absolutas en $\mathbb{R}^2$ destacaremos las normas clásicas, dadas por:

$$L(r,s) = |r| + |s| \ ; \ (r,s) \in \mathbb{R}^2$$

Para $p > 1$, $$L^p(r,s) = (|r|^p + |s|^p)^{1/p}; \ (r,s) \in \mathbb{R}^2$$

$$M(r,s) = \text{Máx}\{|r|,|s|\}; \ (r,s) \in \mathbb{R}^2$$

9 LEMA: ([11], Lemas 21.1 y 21.2). *Sea* $|.|$ *una norma absoluta en* $\mathbb{R}^2$, *se verifica:*

*i)* $\text{Máx}\{|r|,|s|\} \leq |(r,s)| \leq |r| + |s| \quad \forall (r,s) \in \mathbb{R}^2$

*ii) Si* $r,s,u,v \in \mathbb{R}$ *y* $|r| \leq |u|$, $|s| \leq |v|$, *entonces:* $|(r,s)| \leq |(u,v)|$. *Además, si las dos desigualdades de partida son estrictas, se concluye la desigualdad estricta.*

10 DEFINICION: Sea $|.|$ una norma absoluta y consideremos $\mathbb{R}^2$ como espacio normado con dicha norma absoluta. Al índice numérico del espacio de rango numérico formado por este espacio normado y el punto $(1,0)$ se le llamará *índice de la norma absoluta* $|.|$ y se le notará por $n(|.|)$.

En la proposición que sigue llamaremos $Y$ al espacio de rango numérico descrito en la definición anterior.

11 PROPOSICION: ([29], Proposición 4.8). *Sea* $|.|$ *una norma absoluta en* $\mathbb{R}^2$, *si* $K = \lim_{t \to 0^+} \frac{|(1,t)| - 1}{t}$, *se tiene:*

$$i)\ V(Y,(r,s)) = [r - K|s|,\ r + K|s|] \quad ((r,s)\in \mathbb{R}^2)$$

$$ii)\ v(Y,(r,s)) = |r| + K|s| \quad ((r,s)\in \mathbb{R}^2)$$

$$iii)\ n(|.|) = K \quad y \quad |r| + n(|.|)|s| \leq |(r,s)| \quad ((r,s)\in \mathbb{R}^2)$$

Para una norma en $\mathbb{R}^2$, cualquier punto de su esfera es un vértice o un punto suave. Un vértice es, necesariamente, punto extremo de la bola unidad ([29], Proposición 1.5) pero un punto suave puede ser, o no, un punto extremo.

En [29] se clasifican las normas absolutas atendiendo a la situación de *(1,0)* y *(0,1)* con respecto a las tres posibilidades anteriores. La clasificación,que ha demostrado ser muy útil en el estudio de semisumandos y conceptos relacionados, es la siguiente

12 DEFINICION: Diremos que una norma absoluta, $|.|$, es de *tipo* *1*, *2* ó $\infty$ según que el punto *(1,0)* sea un vértice, un punto suave que sea punto extremo o un punto no extremo, respectivamente, de $B(\mathbb{R}^2, |.|)$. Nótese que, en vista de la proposición 11, una norma absoluta es de tipo *1* si y sólo si $n(|.|) > 0$.

Análogamente se define el *cotipo* de $|.|$ con arreglo a su comportamiento en el punto *(0,1)*. Evidentemente, el cotipo de una norma, $|.|$, es igual al tipo de su revertida, $|.|^R$, definida por:

$$|(r,s)|^R = |(s,r)| \quad ((r,s) \in \mathbb{R}^2).$$

13 EJEMPLOS: Las normas clásicas coinciden con sus revertidas y tienen, por tanto, tipo igual al cotipo. $L$ es de tipo $1$ (de hecho $L$ es la única norma absoluta con índice uno); $L^p$ es de tipo $2$ para $1<p$ y $M$ es de tipo $\infty$.

Dada una norma absoluta, $|\cdot|$, en $\mathbb{R}^2$, obtenemos dos nuevas normas absolutas, la *norma dual* y la *norma conjugada*, respectivamente, como sigue

$$|(r,s)|' = \text{Máx}\{|ar+bs| : |(a,b)| = 1\} \quad ((r,s) \in \mathbb{R}^2)$$

$$|(r,s)|^* = |(s,r)|' = (|(r,s)|^R)' \quad ((r,s) \in \mathbb{R}^2)$$

Evidentemente, $(|\cdot|')' = |\cdot| = (|\cdot|^*)^*$

La siguiente proposición nos da la relación entre el cotipo de una norma absoluta y el tipo de su norma conjugada.

14 PROPOSICION: ([29], Proposición 5.6). *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta en* $\mathbb{R}^2$. *Si* $p$ *es el tipo de* $|\cdot|^*$ *y* $q$ *el cotipo de* $|\cdot|$, *se verifica, con las convenciones usuales, que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

El lector avezado habrá comprobado ya que nuestras normas absolutas de tipo $\infty$ se corresponden con las normas absolutas de tipo *3* en [29]. Este cambio de terminología que pudiera parecer caprichoso, y probablemente lo sea, queda justificado por la anterior proposición. De haber mantenido la terminología original, el enunciado de la proposición anterior sería que $p + q = 4$ con lo que quedaríamos desasistidos de cualquier razón de tipo moral para llamar a $|\cdot|^*$ la norma conjugada de $|\cdot|$, más bien habría que llamar a $|\cdot|^*$ la norma "tetracomplementaria" de $|\cdot|$. Se comprenderá fácilmente que el evitar tan terrible cacofonía justifica un simple cambio de notación.

Pasamos ya a presentar los conceptos fundamentales que serán objeto de estudio en esta memoria.

15 DEFINICION: Sea $X$ un espacio normado, se llamará *semiproyección* en $X$ a una aplicación $\pi$ de $X$ en $X$ que verifica:

$i)$ $\pi(x + \pi(y)) = \pi(x) + \pi(y);\ \forall x,y \in X$

$ii)$ $\pi(\lambda x) = \lambda\pi(x);\ \forall x \in X, \forall\lambda \in \mathbb{K}$

Haciendo $\lambda = 0$ en $ii)$, $\pi(0) = 0$ y, haciendo $x = 0$ en $i)$, $\pi(\pi(y)) = \pi(y)$ $(y \in X)$, con lo cual $\pi$ es idempotente. Una semiproyección lineal se llamará *proyección*. Obsérvese que una proyección no es otra cosa que una aplicación lineal idempotente.

16 DEFINICION: Sea $|\cdot|$ una norma absoluta en $\mathbb{R}^2$ y $\pi$ una semiproyección en $X$. Diremos que $\pi$ es una *semi-*$|\cdot|$*-proyección* si

verifica:

$$\|x\| = |(\|\pi(x)\|, \|x - \pi(x)\|)| \qquad (x \in X)$$

Si $\pi$ es lineal, diremos que es una $|\cdot|$-*proyección*. Diremos que $\pi$ es una *semiproyección* (resp. *proyección*) *absoluta*, si existe una norma absoluta, $|\cdot|$, tal que $\pi$ es una semi-$|\cdot|$-proyección (resp. $|\cdot|$-proyección).

Las aplicaciones $\pi_1(x) = x$ y $\pi_0(x) = 0$ $(x \in X)$ son, evidentemente, $|\cdot|$-proyecciones para cualquier norma absoluta $|\cdot|$. Cuando se hable de una semiproyección absoluta $\pi$, se entenderá que $\pi \neq \pi_0$ y $\pi \neq \pi_1$.

Descartados los casos triviales anteriores, si $\pi$ es una semiproyección absoluta, entonces $\pi$ es una semi-$|\cdot|$-proyección para una única norma absoluta $|\cdot|$. En efecto:

Sean $x \in \pi(X)$, $y \in Ker(\pi)$ con $\|x\| = \|y\| = 1$. Entonces

$$\|\alpha x + \beta y\| = |(|\alpha|, |\beta|)| = |(\alpha, \beta)| \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

17 DEFINICION: Llamaremos *semi-*$|\cdot|$*-sumando* (resp. $|\cdot|$*-sumando*) de $X$ a la imagen de $X$ por una semi-$|\cdot|$-proyección (resp. $|\cdot|$-proyección). En general, la imagen de $X$ por una semiproyección (resp. proyección) absoluta recibirá el nombre de *semisumando* (resp. *sumando*) de $X$. Evidentemente, si $\pi$ es una $|\cdot|$-proyección en $X$, $I - \pi$ es una $|\cdot|^R$-proyección en $X$, con lo que $(I - \pi)(X) = Ker(\pi)$ es un

$|\cdot|^R$-sumando.

Nuestro primer objetivo será establecer las propiedades de aproximación de los semisumandos para lo cual concretamos la notación a seguir y recordamos algunos conceptos conocidos.

18 DEFINICION: Si $M$ es un subespacio de $X$, para $x$ en $X$, será $r_x = Inf\{\|x-m\| : m\in M\}$. Notamos $P_M(x)$ al conjunto de puntos de $M$ que materializan la distancia de $x$ a $M$, es decir

$$P_M(x) = \{m\in M: \|x-m\| = r_x\}.$$

Se dirá que $M$ es un subespacio *proximinal* de $X$ si, para $x$ en $X$, $P_M(x)$ es no vacío. Se dirá que $M$ es un subespacio de *Chebyshev* de $X$ si, para cada $x$ en $X$, $P_M(x)$ se reduce a un punto. Evidentemente, si $M$ es un subespacio proximinal de $X$, $M$ es un subespacio cerrado y $r_x = \|x+M\| \quad (x\in X)$.

Por otro lado, para $m_0$ en $M$ y $r\geq 0$ notaremos

$$B_M(m_0,r) = \{m\in M: \|m-m_0\|\leq r\}$$

El próximo lema, que nos será de gran utilidad a lo largo de toda la memoria, se utilizará para demostrar el teorema de aproximación de los semisumandos. Es éste el primer resultado novedoso que aparece en lo expuesto hasta ahora.

19 LEMA: *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta en* $\mathbb{R}^2$, *entonces:*

$$n(|\cdot|^*) = \text{Máx}\{\beta \geq 0:\ |(\beta,1)| = 1\}$$

DEMOSTRACION: Cada elemento $(a,b)$ de $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ se puede identificar con el funcional lineal continuo en $(\mathbb{R}^2, |\cdot|^*)$

$$(r,s) \to br + as\ ;\ (r,s) \in \mathbb{R}^2$$

Con esta identificación en mente, se tiene que, en el espacio de Banach $(\mathbb{R}^2, |\cdot|^*)$,

$$D((1,0)) = \{(\beta,1):\ |(\beta,1)| = 1\}$$

Sea $\alpha = \text{Máx}\{\beta \geq 0:\ |(\beta,1)| = 1\}$, por la proposición 11 $n(|\cdot|^*) \in V((0,1))$, luego $(n(|\cdot|^*),1) \in D((1,0))$ con lo cual $n(|\cdot|^*) \leq \alpha$. Por otro lado es claro que $(\alpha,1) \in D((1,0))$ y, nuevamente, por la proposición 11: $\alpha \leq v((0,1)) = n(|\cdot|^*)$

Pasamos ya a describir $P_M(x)$ con $x$ en $X$ y $M$ semisumando de $X$. Este resultado, hasta ahora desconocido, nos dará todas las propiedades de aproximación de los semisumandos conocidas anteriormente y nos dará una nueva demostración del hecho conocido de que dos semiproyecciones absolutas con la misma imagen deben coincidir.

20 TEOREMA: *Sea* $\pi$ *una semi-*$|\cdot|$*-proyección en* $X$ *y sea* $M = \pi(X)$. *Entonces, para* $x$ *en* $X$, *se tiene*

$$P_M(x) = B_M(\pi(x), n(|\cdot|^*)r_x).$$

DEMOSTRACION: Para $m$ en $M$, se tiene, por ser $\pi$ semi-$|\cdot|$-proyección:

$$\| x-m \| = |(\| \pi(x)-m \|, \| x-\pi(x) \|)| \geqq \| x-\pi(x) \|$$

Luego $\| x-\pi(x) \| = r_x$.

Sea $x \notin M$ y sea $m$ en $M$ tal que $\| x-m \| = r_x = \| x-\pi(x) \| > 0$ será, igual que antes, $\| x-\pi(x) \| = |(\| \pi(x)-m \|, \| x-\pi(x) \|)|$ luego $1 = |(\frac{\| \pi(x)-m \|}{\| x-\pi(x) \|}, 1)|$, y por el lema anterior esto equivale a $\| \pi(x)-m \| \leqq n(|\cdot|^*) \| x-\pi(x) \| = n(|\cdot|^*) r_x$.

21 COROLARIO: ([29], Proposiciones 7.8 y 7.9). *Sea $M$ un semi-$|\cdot|$-sumando de $X$. Entonces, $M$ es un subespacio proximinal de $X$ y, en particular, $M$ es cerrado. Además, $M$ es un subespacio de Chebyshev de $X$ si y sólo si $|\cdot|$ es de cotipo distinto de $\infty$.*

DEMOSTRACION: La primera parte se sigue directamente del teorema anterior. $M$ será un subespacio de Chebyshev de $X$ si y sólo si $n(|\cdot|^*) = 0$ lo que equivale, por la proposición 11, a que $|\cdot|^*$ tenga tipo distinto de $1$, lo que a su vez equivale, por la proposición 14, a que $|\cdot|$ tenga cotipo distinto de $\infty$.

22 COROLARIO: ([29], Teorema 11.1). *Si $M$ es un semisumando de $X$, existe una única semiproyección absoluta en $X$ con imagen $M$.*

DEMOSTRACION: Si $\pi_1$ y $\pi_2$ son semiproyecciones absolutas en $X$ con $\pi_1(X) = \pi_2(X) = M$, para $x$ en $X$, por el teorema anterior, el conjunto de puntos que materializan la distancia de $x$ a $M$ es una bola en $M$ y tanto $\pi_1(x)$ como $\pi_2(x)$ han de ser el centro de dicha bola con lo que $\pi_1(x) = \pi_2(x)$.

El corolario anterior fue primeramente demostrado para $L$-sumandos por Cunningham ([13], Lema 2.1). Behrends lo demuestra posteriormente para $L^p$-sumandos ([3], Lema 2.1). En el trabajo de Lima ([22], Teorema 5.6), está implícito que dos semi-$L$-proyecciones en un espacio de Banach con la misma imagen deben coincidir. Finalmente, el resultado a nivel general es establecido por R. Payá en el trabajo reseñado.

Los resultados que vamos a obtener a continuación se pueden vertebrar en torno al siguiente enunciado.

23 TEOREMA: *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta en* $\mathbb{R}^2$ . *Son equivalentes:*

*i)* $|\cdot|$ *no es de tipo 1.*

*ii) Toda semi-*$|\cdot|$*-proyección es lineal.*

De la anterior equivalencia, la implicación de *i)* a *ii)* fue resuelta por R. Payá en ([29], Teorema 10.6). Recientemente, P. Volkmann, usando una definición de semi-$|\cdot|$-proyección equivalente a la nuestra, ha dado una nueva demostración del hecho de que toda semi-$|\cdot|$-proyección con $|\cdot|$ de tipo distinto de *1* es lineal ([35]). Este resultado implica, en particular, que todo semi-$L^p$-sumando ($1 < p$) es un $L^p$-sumando y que los semi-$M$-sumandos son $M$-sumandos. Este último resultado se encuentra ímplicito en ([17], Teorema).

La existencia de semi-$L$-proyecciones que no son $L$-proyecciones muestra que la hipótesis de que el tipo de $|\cdot|$ no sea $1$ no se puede suprimir en la anterior implicación. El ejemplo más sencillo de semi-$L$-proyección no lineal es el siguiente:

En $\mathbb{R}^3$ con la norma del máximo,

$$\|(x,y,z)\| = Máx\{|x|,|y|,|z|\} \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

la aplicación $\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\pi(x,y,z) = \frac{1}{2}(Máx\{x,y,z\} + Mín\{x,y,z\})(1,1,1)$$

es una semi-$L$-proyección no lineal.

En [29] la herramienta utilizada para la demostración de *i)* implica *ii)* fue la seminorma que definimos a continuación y que jugará un papel preponderante en la presente memoria.

24 DEFINICION: Sea $M$ un subespacio no cero de $X$. Para $x$ en $X$, definimos:

$$\rho_M(x) = Sup\{|u'(x)|: u' \in D(X,u),\ u \in S(M)\}$$

Si, para $u \in S(M)$ y $x \in X$, notamos $v(u,x)$ al radio numérico de $x$ en el espacio de rango numérico $(X,u)$; se tiene

$$\rho_M(x) = Sup\{v(u,x) : u \in S(M)\}$$

Así, $\rho_M$ es una seminorma en $X$, continua ya que $\rho_M(x) \leq \|x\|$ $(x \in X)$. Se define el *índice de M en X*, $n(X,M)$, mediante

$$n(X,M) = Máx\{K \in \mathbb{R}_0^+ : K\|x\| \leq \rho_M(x) \ \forall x \in X\}$$

Claramente $0 \leq n(X,M) \leq 1$.

El teorema que sigue nos describe $\rho_M$ cuando $M$ es un semi-sumando de $X$.

25 TEOREMA: ([29], Lema 10.5). *Sea* $\pi$ *una semi-*$|\cdot|$*-proyección en* $X$ *y* $M = \pi(X)$. *Entonces,*

$$\rho_M(x) = \|\pi(x)\| + n(|\cdot|)\|x - \pi(x)\| = \|\pi(x)\| + n(|\cdot|)\|x + M\| \quad (x \in X)$$

Para enunciar los corolarios a este teorema como conviene a nuestros propósitos necesitamos el siguiente lema sobre normas absolutas que será de gran importancia en toda la memoria.

26 LEMA: *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta en* $\mathbb{R}^2$. *Existe una única norma absoluta,* $|\cdot|^+$, *verificando que si* $r,s \geq 0$, *entonces*

$$|(r + n(|\cdot|)s, s)|^+ = |(r,s)|$$

DEMOSTRACION: Definamos $\Phi: [0,1] \to \mathbb{R}$, mediante

$$\Phi(t) = \begin{cases} |(1-(1+n(|\cdot|))t,t)|, & si \ 0 \leq t \leq \frac{1}{1+n(|\cdot|)} \\ t, & si \ \frac{1}{1+n(|\cdot|)} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$\Phi$ es, evidentemente, continua y se comprueba fácilmente que es convexa. Teniendo en cuenta que $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+n(|\cdot|)}$ y la proposición 11, *iii)* se obtiene que

$$Máx\{1-t,t\} \leq \Phi(t) \leq 1 \quad (t \in [0,1])$$

Por ([6], Lema 21.3), existe una única norma absoluta, $|\cdot|^+$, tal que $\Phi(t) = |(1-t,t)|^+$ $(t \in [0,1])$. Más concretamente,

$$|(r,s)|^+ = (|r| + |s|)\Phi(\frac{|s|}{|r| + |s|}) \text{ si } (r,s) \neq (0,0) \text{ y } |(0,0)|^+ = 0.$$

Veamos que $|\cdot|^+$ así definida es la que vamos buscando. En efecto, si $r,s \geq 0$, se tiene $\frac{s}{r+(1+n(|\cdot|))s} \leq \frac{1}{1+n(|\cdot|)}$ y, por tanto

$$|(r+n(|\cdot|)s,s)|^+ = (r+(1+n(|\cdot|))s)|(1-\frac{(1+n(|\cdot|))s}{r+(1+n(|\cdot|))s}, \frac{s}{r+(1+n(|\cdot|))s})| =$$

$$= |(r,s)|.$$

Veamos ahora que $|\cdot|^+$ es la única norma absoluta que verifica la anterior igualdad.

Sea $|\cdot|_0$ una norma absoluta tal que si $r,s \geq 0$ se tenga

$$|(r,s)| = |(r+n(|\cdot|)s,s)|_0$$

Sea $\Psi(t) = |(1-t,t)|_0$. Para $t \in [0,1]$, si $0 \leq t \leq \frac{1}{1+n(|\cdot|)}$, es

$\Psi(t) = |(1-(1+n(|\cdot|))t,t)|$. Luego $\Psi(\frac{1}{1+n(|\cdot|)}) = \frac{1}{1+n(|\cdot|)}$ y

$\Psi(1) = 1$, como $\Psi$ es convexa y debe ser $t \leq \Psi(t)$ para $t \geq \frac{1}{2}$, se tiene

que ha de ser $\Psi(t) = t$ para $\frac{1}{1+n(|\cdot|)} \leq t \leq 1$. Con lo cual $\Psi(t) = \Phi(t)$

$t \in [0,1]$ y $|\cdot|^+$ era la única norma absoluta tal que

$\Phi(t) = |(1-t,t)|^+ \ \forall t \in [0,1]$.

27 DEFINICION: Sea $|\cdot|$ una norma absoluta en $\mathbb{R}^2$. A la norma absoluta, $|\cdot|^+$, descrita en el lema anterior se le llamará la norma absoluta *asociada* a $|\cdot|$.

Pasamos ya a enunciar los corolarios al teorema 25.

28 COROLARIO: *Si $M$ es un semi-$|\cdot|$-sumando de $X$, se verifica:*

$\rho_M(x) - n(|\cdot|)\|x+M\| \geq 0$ *y* $\|x\| = |(\rho_M(x), \|x+M\|)|^+ \ (x \in X)$

DEMOSTRACION: Teorema 25 y lema 26.

29 COROLARIO: *Si $M$ es semi-$|\cdot|$-sumando de $X$, se tiene*

$$n(X,M) = n(|\cdot|).$$

DEMOSTRACION: Sea $\pi$ la semi-$|\cdot|$-proyección de $X$ sobre $M$, entonces, para $x$ en $X$,

$$n(|\cdot|)\,\|x\| \leq n(|\cdot|)\,\|\pi(x)\| + n(|\cdot|)\,\|x-\pi(x)\| \leq$$

$$\leq \|\pi(x)\| + n(|\cdot|)\,\|x-\pi(x)\| = \rho_M(x).$$

Luego $n(|\cdot|) \leq n(X,M)$.

Sea, ahora, $x \in Ker(\pi)$ con $\|x\| = 1$, entonces, por el teorema 25, es $\rho_M(x) = n(|\cdot|)$, con lo cual $n(X,M) \leq n(|\cdot|)$.

Para un espacio normado $X$, notaremos por $J_X$ la inyección canónica de $X$ en su espacio bidual, $X''$, es decir

$$\langle J_X(x), x' \rangle = x'(x); \quad x' \in X', \; x \in X.$$

30 TEOREMA: *Si $X$ es un espacio de Banach, se verifica que $n(X'', J_X(X)) = 1$. En particular, si $J_X(X)$ es semisumando de $X''$, $J_X(X)$ es semi-L-sumando de $X''$.*

DEMOSTRACION: Sea $x \in S(X)$ y $x' \in D(X,x)$, entonces, evidentemente $J_{X'}(x') \in D(X'', J_X(x))$, con lo que para $x''$ en $X''$ se tiene

$$|\langle J_{X'}(x'), x'' \rangle| = |x''(x')| \leq \rho_{J_X(X)}(x'').$$

Por el teorema de Bishop-Phelps (ver [19], página 179), obtenemos

$$|x''(x')| \leq \rho_{J_X(X)}(x'') \quad \forall x' \in S(X').$$

Luego $\|x''\| \leq \rho_{J_X(X)}(x'')$ y $n(X'', J_X(X)) = 1$.

Si $J_X(X)$ es semi-$|\cdot|$-sumando de $X''$, se verifica por el corolario anterior que $n(|\cdot|) = 1$ y, por la proposición 11 y el lema 9, es $|\cdot| = L$.

Godefroy en ([20], Teorema 6) demuestra que si $X$ es un espacio de Banach tal que $J_X(X)$ es un sumando de $X''$, entonces $J_X(X)$ es un $L$-sumando de $X''$.

Vamos ya a acabar la demostración del teorema 23 para lo cual demostraremos que, si $\pi$ es una semi-$|\cdot|_1$-proyección en $X$ y $|\cdot|_2$ es otra norma absoluta de tipo $1$, se puede renormar $X$ equivalentemente de forma que $\pi$ pase a ser una semi-$|\cdot|_2$-proyección en la renormación.

En primer lugar, haremos notar que si $|\cdot|_1$ es de tipo distinto de $1$, entonces $\pi$ es lineal y lo que se pretende demostrar es evidente (incluso sin ser $|\cdot|_2$ de tipo $1$) sin más que definir en $X$ la norma

$$|||x||| = |(\|\pi(x)\|, \|x - \pi(x)\|)|_2 \qquad (x \in X).$$

Por ello nos limitaremos a considerar el caso en que $|\cdot|_1$ es de tipo $1$.

En segundo lugar, la hipótesis de que $|\cdot|_2$ sea de tipo $1$ viene obligada por el hecho de que si $\pi$ no es lineal, $\pi$ no puede ser semi-$|\cdot|_2$-proyección para ninguna norma (equivalente o no) en $X$ ya que en caso contrario sería $\pi$ lineal en contra de lo supuesto.

31 TEOREMA: *Sean* $|\cdot|_1$ *y* $|\cdot|_2$ *dos normas absolutas de tipo 1. Sea* $\pi$ *una semi-*$|\cdot|_1$*-proyección en* $X$ *con* $\pi(X) = M$ *y se define*

$$|||x||| = |(\rho_M(x), \frac{n(|\cdot|_1)}{n(|\cdot|_2)}\|x+M\|)|_2^+ \quad (x\in X).$$

*Entonces* $|||\cdot|||$ *es una norma en* $X$ *equivalente a la inicial y* $\pi$ *es una semi-*$|\cdot|_2$*-proyección en* $(X, |||\cdot|||)$.

DEMOSTRACION: Notaremos, por comodidad, $n_1 = n(|\cdot|_1)$ y $n_2 = n(|\cdot|_2)$.

Se comprueba fácilmente que $|||\cdot|||$ es una norma en $X$. Veamos que es equivalente a la inicial. Para $x$ en $X$, se tiene

$$|||x||| \leq \rho_M(x) + \frac{n_1}{n_2}\|x+M\| \leq (1+\frac{n_1}{n_2})\|x\|$$

Por otra parte, aplicando el corolario 29:

$$n_1\|x\| \leq \rho_M(x) \leq |||x|||.$$

Luego $|||\cdot|||$ es una norma equivalente en $X$. Veamos que $\pi$ es una semi-$|\cdot|_2$-proyección en $(X, |||\cdot|||)$. Por el teorema 25, para $x\in X$, tenemos

$$|||x||| = |(\|\pi(x)\| + n_1\|x+M\|, \frac{n_1}{n_2}\|x+M\|)|_2^+$$

Y por el lema 26, se obtiene

$$(*) \qquad |||x||| = |(\|\pi(x)\|, \frac{n_1}{n_2}\|x+M\|)|_2$$

Sustituyendo $x$ por $\pi(x)$ y por $x-\pi(x)$, obtenemos

$$|||\pi(x)||| = \|\pi(x)\| \quad \text{y} \quad |||x-\pi(x)||| = \frac{n_1}{n_2}\|x+M\|$$

lo que sustituido en (*) nos da

$$|||x||| = |(|||\pi(x)|||, |||x - \pi(x)|||)|_2$$

como se quería demostrar.

32 COROLARIO: ([29], Teorema 10.12). *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta de tipo 1 y* $\pi$ *una semi-*$|\cdot|$*-proyección en* $X$ *con imagen* $M$. *Entonces,* $\rho_M$ *es una norma equivalente en* $X$ *y* $\pi$ *es una semi-*$L$*-proyección en* $(X, \rho_M)$.

DEMOSTRACION: Tomando $|\cdot|_1 = |\cdot|$ y $|\cdot|_2 = L$ en el teorema anterior tenemos $n_2 = 1$ y la expresión (*) junto con el teorema 25 nos da

$$|||x||| = \|\pi(x)\| + n_1\|x + M\| = \rho_M(x) \quad (x \in X).$$

33 COROLARIO: *Sea* $\pi$ *una semi-*$L$*-proyección en* $X$ *con imagen* $M$ *y* $|\cdot|$ *una norma absoluta de tipo 1. Definiendo*

$$|||x||| = |(\|x\|, \tfrac{1}{n(|\cdot|)}\|x + M\|)|^+ =$$
$$= |(\|\pi(x)\|, \tfrac{1}{n(|\cdot|)}\|x + M\|)| \quad (x \in X)$$

*se obtiene que* $|||\cdot|||$ *es una norma equivalente en* $X$ *y* $\pi$ *es una semi-*$|\cdot|$*-proyección en* $X$.

DEMOSTRACION: Tomando $|\cdot|_1 = L$ y $|\cdot|_2 = |\cdot|$ tenemos $n_1 = 1$ y el resultado se sigue del teorema anterior y del teorema 25. Para la segunda igualdad basta tener en cuenta la expresión (*).

Puesto que existen semi-$L$-proyecciones no lineales, el corolario anterior nos asegura la existencia, para cualquier norma absoluta, $|\cdot|$, de tipo $1$, de semi-$|\cdot|$-proyecciones no lineales. Con ello se concluye la demostración del teorema 23.

34 NOTA: Si $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ son dos normas absolutas de tipo $1$ y $\pi$ una semi-$|\cdot|_1$-proyección en $X$ con imagen $M$, entonces, por el teorema anterior, $\pi$ es una semi-$|\cdot|_2$-proyección en $(X, |||\cdot|||)$ siendo

$$|||x||| = |(\|\pi(x)\|, \frac{n_1}{n_2}\|x+M\|)|_2 \quad (x\in X)$$

Podemos aplicar otra vez el teorema para obtener una nueva norma, $||||\cdot||||$, para la cual $\pi$ vuelve a ser una semi-$|\cdot|_1$-proyección. Obsérvese cómo esta nueva norma vuelve a ser la de partida:

$$||||x|||| = |(|||\pi(x)|||, \frac{n_2}{n_1}|||x+M|||)|_1 =$$

$$= |(\|\pi(x)\|, \|x-\pi(x)\|)|_1 = \|x\| .$$

Donde, en la última igualdad, se ha usado que $\pi$ es una semi-$|\cdot|_1$-proyección en $(X, \|\cdot\|)$. En particular, los procesos de renormación descritos en los corolarios 32 y 33 son uno inverso del otro.

Conseguido el objetivo fundamental del capítulo, pasamos ahora, para terminarlo, a analizar la interrelación de nuestros semisumandos con una propiedad de intersección de bolas que ha sido introducida por Yost en [36] y [37] y que definimos a continuación.

En lo que sigue, para $x$ en $X$ y $r \geq 0$, será

$$B(x,r) = \{y\in X: \|y-x\| \leq r\}.$$

35 DEFINICION: Sea $X$ un espacio normado y $M$ un subespacio cerrado de $X$, diremos que $M$ verifica la *propiedad de la bola y media* si las condiciones $m \in M$, $B(x,r_1) \cap M \neq \emptyset$ y $\|x-m\| < r_1 + r_2$ implican que $M \cap B(x,r_1) \cap B(m,r_2) \neq \emptyset$.

Si en la anterior definición se sustituye $\|x-m\| < r_1 + r_2$ por $\|x-m\| \leq r_1 + r_2$, se dice que $M$ tiene la *propiedad de la bola y media fuerte*.

36 PROPOSICION: *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta en* $\mathbb{R}^2$; *entonces* $n(|\cdot|) + n(|\cdot|^*) = 1$ *si y sólo si existe* $\gamma$ *con* $0 \leqq \gamma \leqq 1$ *tal que*

$$|(r,s)| = \text{Máx}\{|s|, |r| + \gamma|s|\}; \quad (r,s) \in \mathbb{R}^2$$

DEMOSTRACION: Para abreviar, notaremos $n = n(|\cdot|)$ y $n^* = n(|\cdot|^*)$. Supongamos que $|(r,s)| = \text{Máx}\{|s|, |r| + \gamma|s|\}$ con $0 \leqq \gamma \leqq 1$. Por la proposición 11, se tiene

$$n = \lim_{t \to 0^+} \frac{|(1,t)| - 1}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1 + \gamma t - 1}{t} = \gamma$$

Para $\beta \geqq 0$ se tiene $|(\beta,1)| = \text{Máx}\{1, \beta + \gamma\}$ luego $|(\beta,1)| = 1$ si y sólo si $\beta \leqq 1 - \gamma$ con lo que, por el lema 19, es $n^* = 1 - \gamma$.

Sea, ahora, $n + n^* = 1$. Por el lema 9 y la proposición 11, se verifica

$$\text{Máx}\{|s|, |r| + n|s|\} \leqq |(r,s)| \qquad ((r,s) \in \mathbb{R}^2)$$

Sea $|r| \leqq n^*|s|$, entonces, por el lema 19, se tiene

$$|s| \leqq |(r,s)| = |(|r|,|s|)| \leqq |s|\,|(n^*,1)| = |s|$$

Si $|r| \geqq n^*|s|$, se verifica, otra vez por el lema 19, que

$$|(r,s)| = |(|r|,|s|)| = |(|r|-n^*|s|,0)+(n^*|s|,|s|)| \leqq$$

$$\leqq |r|-n^*|s| + |s| = |r|+n|s|.$$

Esto junto con lo anteriormente demostrado nos da

$$|(r,s)| = Máx\{|s|, |r|+n|s|\} \quad ((r,s) \in \mathbb{R}^2)$$

Y la proposición queda demostrada.

Las normas absolutas que aparecen en la proposición anterior verifican que su bola unidad es un hexágono (salvo las normas del máximo y de la suma que son los dos casos extremos) y, aunque esta propiedad también la verifican las normas revertidas de las anteriores, destacamos sólo las normas presentadas, en la siguiente definición.

37 DEFINICION: Sea $|\cdot|$ una norma absoluta en $\mathbb{R}^2$, diremos que $|\cdot|$ es una norma *hexagonal* si verifica cualquiera de las afirmaciones equivalentes de la anterior proposición.

38 TEOREMA: *Sea X un espacio normado y M un semi-$|\cdot|$-sumando de X. Entonces, son equivalentes:*

*i) M tiene la propiedad de la bola y media fuerte.*

*ii) M tiene la propiedad de la bola y media.*

*iii)* $|\cdot|$ *es una norma hexagonal.*

DEMOSTRACION: Sea $\pi$ la semi-$|\cdot|$-proyección en $X$ con imagen $M$, y notemos $n = n(|\cdot|)$ y $n^* = n(|\cdot|^*)$.

*i)*$\Rightarrow$*ii)* Es evidente.

*ii)*$\Rightarrow$*iii)* Sean $t > 0$, $0 < \varepsilon < 1$ y sea $x \in X$ tal que $\|x - \pi(x)\| = t$, $\|x\| = 1 + t - \varepsilon$, con lo que $B(x,t) \cap M \neq \phi$; por la propiedad de la bola y media, existe $m$ en $M$ tal que $\|m\| \leq 1$ y $\|x - m\| \leq t$. Entonces $m \in P_M(x)$ y, aplicando el teorema 20, tenemos: $\|\pi(x) - m\| \leq n^*t$ de donde $\|\pi(x)\| \leq \|m\| + \|\pi(x) - m\| \leq 1 + n^*t$ y

$$1 + t - \varepsilon = \|x\| = |(\|\pi(x)\|, \|x - \pi(x)\|)| \leq |(1 + n^*t, t)| \leq |(1,t)| + n^*t$$

De donde se obtiene $1 + t \leq |(1,t)| + n^*t$, con lo que

$$1 \leq \lim_{t \to 0^+} \frac{|(1,t)| - 1}{t} + n^* = n + n^*$$

De la proposición 11 y del lema 19, se obtiene $n + n^* \leq |(n^*,1)| = 1$. De las dos desigualdades obtenidas se concluye que $|\cdot|$ es una norma hexagonal.

*iii)*$\Rightarrow$*i)* Sea $|(r,s)| = \text{Máx}\{|s|, |r| + \gamma|s|\}$; $(r,s) \in \mathbb{R}^2$ con $0 \leq \gamma \leq 1$. Para ver que $M$ tiene la propiedad de la bola y media fuerte bastará demostrar que si $\|x\| \leq 1 + r_0$ y $B(x,r_0) \cap M \neq \phi$, entonces $M \cap B(x,r_0) \cap B(0,1) \neq \emptyset$. Si $\|\pi(x)\| \leq 1$, entonces $\pi(x) \in M \cap B(x,r_0) \cap B(0,1)$ ya que, por el teorema 20 y ser

$M \cap B(x,r_0) \neq \emptyset$, es $\| x-\pi(x)\| = \| x+M\| \leqq r_0$. Supongamos, pues, que $\|\pi(x)\| > 1$, sea $y = \frac{\pi(x)}{\|\pi(x)\|}$. Entonces

$$\|\pi(x)-y\| = \left\|\pi(x)-\frac{\pi(x)}{\|\pi(x)\|}\right\| = \|\pi(x)\| \left|1-\frac{1}{\|\pi(x)\|}\right| = \|\pi(x)\| - 1.$$

Por otro lado

$$\|x\| = |(\|\pi(x)\|, \|x-\pi(x)\|)| = \text{Máx}\{\|x-\pi(x)\|, \|\pi(x)\| + \gamma\|x-\pi(x)\|\}$$

luego $\|x-y\| = |(\|\pi(x)-y\|, \|x-\pi(x)\|)| =$

$$= \text{Máx}\{\|x-\pi(x)\|, \|\pi(x)\| - 1 + \gamma\|x-\pi(x)\|\} \leqq$$

$$\leqq \text{Máx}\{\|x-\pi(x)\|, \|x\| - 1\} \leqq r_0$$

Con lo que $y \in M \cap B(x,r_0) \cap B(0,1)$ y la demostración queda concluida.

# C A P I T U L O  II

# S E M I I D E A L E S

Si $X$ es un espacio normado y $M$ un subespacio de $X$, se notará $M^{\circ}$ al anulador de $M$, es decir

$$M^{\circ} = \{x' \in X' : x'(m) = 0 \ \forall m \in M\}$$

En [1] se introducen los $M$-ideales de un espacio de Banach como aquellos subespacios cuyo anulador es un $L$-sumando del dual. De la misma forma, en [22], Lima introduce los semi-$M$-ideales de un espacio de Banach como aquellos subespacios cerrados cuyo anulador es un semi-$L$-sumando del dual. En [29], Rafael Payá introduce el concepto de semiideal, que damos a continuación, que engloba y generaliza los $M$-ideales y semi-$M$-ideales.

1 DEFINICION: Sea $M$ un subespacio cerrado de $X$ y $|\cdot|$ una norma absoluta. Diremos que $M$ es un *semi*-$|\cdot|$-*ideal* (resp. $|\cdot|$-*ideal*) de $X$ si $M^{\circ}$ es un semi-$|\cdot|^{*}$-sumando (resp. $|\cdot|^{*}$-sumando) de $X'$. Diremos que $M$ es un *semiideal* (resp. *ideal*) si es un semi-$|\cdot|$-ideal (resp. $|\cdot|$-ideal) para alguna norma absoluta, $|\cdot|$.

Todo semiideal es semi-$|\cdot|$-ideal para una única norma absoluta, $|\cdot|$, en virtud del corolario I.22.

Sean $E$ y $F$ espacios normados, $|\cdot|$ una norma absoluta, y consideremos en $E \times F$ la norma:

$$(1) \quad \|(x,y)\| = |(\|x\|, \|y\|)| \quad ((x,y) \in E \times F)$$

y en $E' \times F'$ la norma

$$(2) \quad \| (x',y') \| = |(\|y'\|, \|x'\|)|^{*} \quad ((x',y') \in E' \times F')$$

Pues bien, la expresión

$$< (x',y'),(x,y) > = x'(x) + y'(y)$$

permite identificar totalmente el espacio dual de $E \times F$ con el espacio $E' \times F'$.

La afirmación anterior, cuya prueba no ofrece dificultad, fue establecida en [29] en la siguiente versión equivalente a la dada.

2 PROPOSICION: ([29], Corolario 8.4). *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta. Si* $M$ *es un* $|\cdot|$*-sumando de* $X$, $M^{o}$ *es un* $|\cdot|^{*}$*-sumando de* $X'$.

El anterior resultado muestra que los ideales, y por tanto los semiideales, son una generalización de los sumandos. Sin embargo un semi-$|\cdot|$-sumando no tiene por qué ser un semi-$|\cdot|$-ideal como se pone de manifiesto a continuación.

Sea $X$ un espacio de Banach con un semi-$L$-sumando, $M$, que no sea $L$-sumando. Si $M$ fuese semi-$L$-ideal de $X$, $M^{o}$ sería semi-$M$-sumando de $X'$ y, por el teorema I.23, $M^{o}$ sería un $M$-sumando de $X'$ con lo cual $M$ sería $L$-ideal de $X$ y, por ([15], Teorema 1), $M$ sería un $L$-sumando de $X$ en contra de lo supuesto.

Por tanto los semisumandos y los semiideales son dos generalizaciones diferentes de los sumandos. Nuestro primer objetivo en este capítulo será clarificar la relación entre los conceptos de sumando, ideal y semiideal que quedará establecida en el corolario 5. Empezaremos recordando los precedentes al respecto.

3 TEOREMA: ([29], Corolario 10.7 y Teorema 10.8). *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta. Si* $M$ *es semi-*$|\cdot|$*-ideal de* $X$ *y* $|\cdot|$ *es de cotipo distinto de* $\infty$, $M$ *es* $|\cdot|$*-ideal de* $X$*. Si, además,* $M$ *es completo, entonces* $M$ *es* $|\cdot|$*-sumando de* $X$*.*

En $\mathbb{R}^3$ con la norma de la suma, es decir

$$\|(x,y,z)\| = |x| + |y| + |z| \ ; \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

el subespacio $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$ es un semi-$M$-ideal que no es $M$-ideal lo que muestra que, en el teorema anterior, la hipótesis de que el cotipo de $|\cdot|$ no sea $\infty$ no se puede suprimir.

La hipótesis de complitud en la última parte del teorema anterior es esencial, para cualquier norma absoluta $|.|$ existe un $|.|$-ideal que no es $|.|$-sumando. En efecto:

Sea $X$ un espacio normado y $M$ un $L^2$-ideal de $X$ que no sea $L^2$-sumando ([29], página 90). Sea $\hat{X}$ la completación de $X$

y $\overline{M}$ el cierre de $M$ en $\hat{X}$ . Aplicando el teorema 3, $\overline{M}$ es un $L^2$-sumando de $\hat{X}$ ; sea $\pi$ la $L^2$-proyección en $\hat{X}$ con $\pi(\hat{X}) = \overline{M}$ y definamos

$$|||\hat{x}||| = |(\|\pi(\hat{x})\|, \|\hat{x} - \pi(\hat{x})\|)| \qquad (\hat{x} \in \hat{X})$$

Obviamente $|||.|||$ es una norma equivalente en $\hat{X}$ y $\overline{M}$ es un $|.|$-sumando de $(\hat{X}, |||.|||)$ con lo que $M^o = (\overline{M})^o$ es $|.|^*$-sumando de $(X', |||.|||) = (\hat{X}', |||.|||)$ luego $M$ es $|.|$-ideal de $(X, |||.|||)$ Si $M$ fuese $|.|$-sumando de $(X, |||.|||)$, $M$ sería invariante por $\pi$ y tendríamos que $M$ es un $L^2$-sumando de $(X, \|.\|)$ contra lo supuesto.

Hasta aquí queda expuesta la situación tal como se conocía en [29] . A continuación probamos que la condición suficiente sobre la norma $|.|$ dada en el teorema anterior es de hecho necesaria. Ello se consigue mediante el siguiente teorema de renormación.

4 TEOREMA: *Sea $X$ un espacio normado y $M$ un semi-M-ideal de $X$ . Sea $|.|$ una norma absoluta de cotipo $\infty$ . Definimos*

$$|||x||| = |(n(|.|^*)\|x\|, \|x+M\|)| \qquad (x \in X)$$

*Entonces* $|||\cdot|||$ *es una norma en* $X$ *equivalente a la inicial y* $M$ *es un semi-*$|\cdot|$*-ideal de* $(X,|||\cdot|||)$. *Además,* $M$ *es un* $|\cdot|$*-ideal de* $(X,|||\cdot|||)$ *si y sólo si* $M$ *es un M-ideal de* $(X,\|\cdot\|)$ *y* $M$ *es un* $|\cdot|$*-sumando de* $(X,|||\cdot|||)$ *si y sólo si* $M$ *es un M-sumando de* $(X,\|\cdot\|)$

DEMOSTRACION: En primer lugar si $|\cdot|$ es de cotipo $\infty$, por la proposición I.14 es $|\cdot|^*$ de tipo $1$ y así $n(|\cdot|^*) > 0$. Notemos $n^* = n(|\cdot|^*)$. Consideremos el espacio $Y = X \times X/M$ con la norma

$$\|(x,y+M)\| = |(n^*\|x\|, \|y+M\|)| \quad (x,y \in X)$$

La aplicación $\Phi\colon X \to Y$ definida por $\Phi(x) = (x,x+M)$ es lineal e inyectiva, en particular $|||\cdot|||$ es una norma en $X$ que hace isométrica a $\Phi$. Por otro lado, se tiene

$$n^*\|x\| \leq |(n^*\|x\|, \|x+M\|)| = |||x||| \leq \|x\|\,|(n^*,1)| = \|x\|$$

Donde, en la última igualdad, se ha utilizado el lema I.19.
Con lo cual $|||\cdot|||$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|$.

Vamos ahora a calcular la norma dual de $|||\cdot|||$ en términos de la norma dual de $\|\cdot\|$.

Si identificamos $Y'$ con $X' \times M^0$, se tiene, por la proposición 2, que la norma dual en $Y'$ viene dada por

$$\|(x',w')\| = |(\|w'\|, \tfrac{1}{n^*}\|x'\|)|^* \quad (x' \in X',\ w' \in M^0)$$

Consideremos ahora $\Phi$ como una biyección lineal isométrica de $(X, |||\cdot|||)$ sobre $\Phi(X)$. Entonces $\Phi^t$ es una biyección lineal isométrica de $\Phi(X)'$ sobre $(X', |||\cdot|||)$. Sea $x' \in X'$ y definamos $\hat{x}'(x, x+M) = x'(x)$ $(x \in X)$. Es claro que $\hat{x}' \in \Phi(X)'$ y $\Phi^t(\hat{x}') = x'$. Luego $|||x'||| = \|\hat{x}'\|$. Si tenemos en cuenta la identificación usual de $\Phi(X)'$ con $Y'/\Phi(X)^{\circ} \equiv (X' \times M^{\circ})/\Phi(X)^{\circ}$, $\hat{x}'$ se identifica con $(x', 0) + \Phi(X)^{\circ}$ con lo cual, $|||x'||| = \|(x', 0) + \Phi(X)^{\circ}\|$.

Por otro lado se obtiene fácilmente que

$$\Phi(X)^{\circ} = \{(w', -w') : w' \in M^{\circ}\}$$

Si $\pi$ es la semi-$L$-proyección de $(X', \|\cdot\|)$ sobre $M^{\circ}$, para $x'$ en $X'$, tenemos

$$|||x'||| = \|(x', 0) + \Phi(X)^{\circ}\| =$$

$$= Inf\{\|(x' + w', -w')\| : w' \in M^{\circ}\} =$$

$$= Inf\{|(\|w'\|, \tfrac{1}{n^*}\|x' + w'\|)|^* : w' \in M^{\circ}\} =$$

$$= Inf\{|(\|w'\|, \tfrac{1}{n^*}(\|\pi(x') + w'\| + \|x' - \pi(x')\|))|^* : w' \in M^{\circ}\}.$$

Sin más que tomar $w' = -\pi(x')$, se obtiene

$$(1) \quad |||x'||| \leq |(\|\pi(x')\|, \tfrac{1}{n^*}\|x' - \pi(x')\|)|^*.$$

Por otra parte, para $w' \in M^{\circ}$, aplicando el lema I.26 a $|\cdot|^*$ se tiene

$$|(\|w'\|, \tfrac{1}{n^*}\|\pi(x') + w'\| + \tfrac{1}{n^*}\|x' - \pi(x')\|)|^* =$$

$$= |(\|w'\| + \|\pi(x') + w'\| + \|x' - \pi(x')\|, \tfrac{1}{n^*}\|\pi(x') + w'\| + \tfrac{1}{n^*}\|x' - \pi(x')\|)|^{*+} \geq$$

$$\geq |(\|\pi(x')\| + \|x' - \pi(x')\|, \tfrac{1}{n^*}\|x' - \pi(x')\|)|^{*+} =$$

$$= |(\|\pi(x')\|, \tfrac{1}{n^*}\|x' - \pi(x')\|)|^*.$$

Tomando ínfimos, con $w' \in M^{o}$, junto con (1), nos da

$$(2)\quad |||x'||| = \left|\left(\|\pi(x')\|, \frac{1}{n^*}\|x' - \pi(x')\|\right)\right|^* \quad (x' \in X')$$

Sustituyendo en (2) $x'$ por $\pi(x')$ y por $x' - \pi(x')$, respectivamente, se obtiene $|||x'||| = |(|||\pi(x')|||, |||x' - \pi(x')|||)|^*$, con lo cual $\pi$ es una semi-$|\cdot|^*$-proyección en $(X', |||\cdot|||)$ y, por tanto, $M$ es un semi-$|\cdot|$-ideal de $(X, |||\cdot|||)$.

Ya que la semiproyección absoluta sobre $M^{o}$ no cambia en el proceso de renormación anterior, $M$ es $|\cdot|$-ideal de $(X, |||\cdot|||)$ si y sólo si $M$ es $M$-ideal de $(X, \|\cdot\|)$ .

Supongamos que $M$ es $M$-sumando de $(X, \|\cdot\|)$ y sea $P$ la $M$-proyección en $X$ con $P(X) = M$. Para $x$ en $X$ se tiene

$$|||x||| = |(n^*\|x\|, \|x+M\|)| =$$

$$= |(n^* \text{Máx}\{\|P(x)\|, \|x - P(x)\|\}, \|x+M\|)| =$$

$$= \text{Máx}\{|(n^*\|P(x)\|, \|x+M\|)|, |(n^*\|x+M\|, \|x+M\|)|\} =$$

$$\text{Máx}\{|(n^*\|P(x)\|, \|x+M\|)|, \|x+M\|\,|(n^*,1)|\} =$$

$$= |(n^*\|P(x)\|, \|x+M\|)|$$

Donde en la última igualdad se ha usado el lema I.19. Sustituyendo $x$ por $P(x)$ y por $x - P(x)$ en la anterior igualdad, la demostración queda concluida.

Supongamos que $M$ es $|\cdot|$-sumando de $(X, |||\cdot|||)$ y sea $P$ la $|\cdot|$-proyección en $(X, |||\cdot|||)$ con imagen $M$. Entonces, por ([29], Proposición 8.2), $I - P^t$ es una $|\cdot|^*$-proyección en $(X', |||\cdot|||)$

con imagen $M^{\circ}$. Si $\pi$ es la semi-$L$-proyección en $(X', \|\cdot\|)$ con imagen $M^{\circ}$, se tiene por lo demostrado que $\pi$ es una semi-$|\cdot|^{*}$-proyección en $(X', |||\cdot|||)$ así, por el corolario I.22, es $I - P^{t} = \pi$ con lo cual $\pi$ es lineal y es una $L$-proyección en $(X', \|\cdot\|)$, luego $P$ es una $M$-proyección en $(X, \|\cdot\|)$ y $M$ es un $M$-sumando de $(X, \|\cdot\|)$.

El teorema anterior permite, para cada norma absoluta de cotipo $\infty$, $|\cdot|$, construir semi-$|\cdot|$-ideales que no son $|\cdot|$-ideales y $|\cdot|$-ideales completos que no son $|\cdot|$-sumandos, bastará para ello renormar un espacio normado con un semi-$M$-ideal que no sea $M$-ideal y un espacio de Banach con un $M$-ideal que no sea $M$-sumando. Se tiene por tanto:

5 COROLARIO: *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*i) Todo semi-*$|\cdot|$*-ideal es un* $|\cdot|$*-ideal.*

*ii) Todo semi-*$|\cdot|$*-ideal completo es un* $|\cdot|$*-sumando.*

*iii) Todo* $|\cdot|$*-ideal completo es un* $|\cdot|$*-sumando.*

*iv) El cotipo de* $|\cdot|$ *es distinto de* $\infty$.

Clarificada la relación entre los conceptos de sumando, ideal y semiideal pasamos a un segundo objetivo de este capítulo, consistente en la "codificación" de los semiideales. Descartado el caso patológico de un ideal para una norma de cotipo *1* ó *2* que no es sumando por no ser completo, para el que pueden usarse argumentos standard de completación, sólo podemos tener ideales y semiideales "propios" (que no sean sumandos) para normas de cotipo $\infty$. Los ejemplos de que hasta ahora disponemos proceden de la renormación de espacios con semi-$M$-ideales. De hecho vamos a probar que todos se obtienen por este procedimiento, es decir, si $X$ es un espacio con un semi-$|\cdot|$-ideal $M$ y $|\cdot|$ tiene cotipo $\infty$ puede renormarse equivalentemente $X$ de forma que $M$ sea un semi-$M$-ideal.

Obsérvese el paralelismo existente con los resultados del capítulo I. Allí sólo había semisumandos no sumandos para normas de tipo *1* y todos ellos se obtenían renormando espacios con semi-$L$-sumandos quedando los semi-$L$-sumandos como "prototipo" de semisumandos. Ahora el prototipo de semiideal será el semi-$M$-ideal.

Así pues sea $X$ un espacio normado, $|\cdot|$ una norma absoluta de cotipo $\infty$ y $M$ un semi-$|\cdot|$-ideal de $X$. Pretendemos renormar $X$ para convertir $M$ en un semi-$M$-ideal. Ahora bien, puesto que $M^o$ es un semi-$|\cdot|^*$-sumando de $X'$ y $|\cdot|^*$ tiene tipo *1*, el corolario I.32 nos asegura que $\rho_{M^o}$ es una norma equivalente en $X'$ para la cual $M^o$ es un semi-$L$-sumando. El único problema (y no fácil) que queda por resolver es que $\rho_{M^o}$ sea una norma dual en el siguiente sentido:

6 DEFINICION: Dado un espacio normado $X$, una norma, $|||\cdot|||$ , en $X'$ se llamará una *norma dual* en $X'$ si existe una norma, $|||\cdot|||$, en

$X$ equivalente a la inicial tal que $(X', |||\cdot|||)$ es el dual de $(X, |||\cdot|||)$.

7 LEMA: *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta,* $X$ *un espacio normado y* $\pi$ *una semi-*$|\cdot|$*-proyección en* $X'$. *Si* $\{y'_\alpha\} \overset{w^*}{\to} x' + y'$ *con* $y'_\alpha, y' \in Ker(\pi)$, $x' \in \pi(X')$, $\|y'_\alpha\| \leq 1$, *entonces, se verifica*

$$\|x'\| + n(|\cdot|)\|y'\| \leq n(|\cdot|)$$

DEMOSTRACION: Para $t > 0$ la red $\{t\|x'\|y'_\alpha + x'\}$ converge a $t\|x'\|(x'+y') + x'$ en la topología débil *.

$$\|t\|x'\|y'_\alpha + x'\| = |(\|x'\|, t\|x'\|\,\|y'_\alpha\|)| \leq \|x'\|\,|(1,t)|$$

Teniendo en cuenta la semicontinuidad inferior de la norma para la topología débil *, se tiene

$$\|t\|x'\|(x'+y') + x'\| = \|(1+t\|x'\|)x' + t\|x'\|y'\| \leq \|x'\|\,|(1,t)|$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la proposición I.11

$$\|(1+t\|x'\|)x' + t\|x'\|y'\| = |((1+t\|x'\|)\|x'\|, t\|x'\|\,\|y'\|)| \geq$$

$$\geq (1+t\|x'\|)\|x'\| + tn(|\cdot|)\|x'\|\,\|y'\|$$

Con lo cual se obtiene (si $x' = 0$ el resultado es claro)

$$1 + t\|x'\| + tn(|\cdot|)\|y'\| \leq |(1,t)| \quad \text{luego}$$

$$\|x'\| + n(|\cdot|)\|y'\| \leq \frac{|(1,t)| - 1}{t}$$

Basta ya tener en cuenta la proposición I.11 para acabar la demostración.

8 TEOREMA: *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta de cotipo* $\infty$ *y sea* $M$ *un semi-*$|\cdot|$*-ideal de* $X$, *entonces* $\rho_{M^o}$ *es una norma dual en* $X'$. *En consecuencia, existe una norma equivalente,* $|||\cdot|||$, *en* $X$ *para la cual* $M$ *es semi-M-ideal . Se tiene además*

$$\|x\| = |(n(|\cdot|^*)|||x|||, |||x+M|||)| \quad (x \in X)$$

*y, como consecuencia,* $\|x+M\| = |||x+M||| \quad (x \in X)$.

DEMOSTRACION: $M^o$ es semi-$|\cdot|^*$-sumando de $X'$ y, por la proposición I.14, $|\cdot|^*$ es de tipo *1*, con lo que por el corolario I.32, $\rho_{M^o}$ es una norma equivalente en $X'$ y $M^o$ es un semi-*L*-sumando de $(X', \rho_{M^o})$. Así pues para ver que $\rho_{M^o}$ es una norma dual, bastará demostrar que la bola unidad para $\rho_{M^o}$ es débil * cerrada (ver [19], página 105). Sea $\pi$ la semiproyección absoluta de $X'$ sobre $M^o$. Sea $\{z'_\alpha\} \overset{w^*}{\to} z'$ con $\rho_{M^o}(z'_\alpha) \leq 1$. Sea $z'_\alpha = x'_\alpha + y'_\alpha$ con $x'_\alpha \in M^o$, $y'_\alpha \in Ker(\pi)$. Si notamos $n^* = n(|\cdot|^*)$, por el teorema I.25 es

$$\rho_{M^o}(z'_\alpha) = \|x'_\alpha\| + n^*\|y'_\alpha\|$$

con lo que se tiene $\|x'_\alpha\| \leq 1$, $\|y'_\alpha\| \leq \frac{1}{n^*}$ . Así pues podemos acumular en la topología débil * la red $(x'_\alpha, y'_\alpha, \|x'_\alpha\|, \|y'_\alpha\|)$ con lo que, considerando una conveniente subred, se obtiene

$$\{x'_\alpha\} \overset{w^*}{\to} x'_0 \ , \ \{y'_\alpha\} \overset{w^*}{\to} x' + y' \ , \ \{\|x'_\alpha\|\} \to a \ , \ \{\|y'_\alpha\|\} \to b$$

Siendo $a, b \geq 0$; $x'_0, x' \in M^o$, $y' \in Ker(\pi)$. Se verifica:

*i)* $z' = x'_0 + x' + y'$

*ii)* $a+n^*b \leq 1$ ya que $\|x'_\alpha\| + n^*\|y'_\alpha\| = \rho_{M^0}(z'_\alpha) \leq 1$

*iii)* $\|x'_0\| \leq a$ . En efecto: dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, \alpha_0$ tal que si $\alpha \geq \alpha_0$ se tiene $\|x'_\alpha\| \leq a+\varepsilon$, por la semicontinuidad inferior de la norma para la topología débil * se tiene $\|x'_0\| \leq a+\varepsilon$ .

*iv)* $\|x'\| + n^*\|y'\| \leq n^*b$. En efecto: dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, \alpha_0$ tal que si $\alpha \geq \alpha_0$ se tiene $\|y'_\alpha\| \leq b+\varepsilon$, luego $\left\|\dfrac{y'_\alpha}{b+\varepsilon}\right\| \leq 1$ y

$\left\{\dfrac{y'_\alpha}{b+\varepsilon}\right\} \overset{w^*}{\to} \dfrac{x'}{b+\varepsilon} + \dfrac{y'}{b+\varepsilon}$ . Por el lema anterior:

$\dfrac{\|x'\|}{b+\varepsilon} + n^* \dfrac{\|y'\|}{b+\varepsilon} \leq n^*$ luego $\|x'\| + n^*\|y'\| \leq n^*(b+\varepsilon)$

Teniendo en cuenta *i), ii), iii), iv)* y el teorema I.25, deducimos

$\rho_{M^0}(z') = \|x'_0 + x'\| + n^*\|y'\| \leq \|x'_0\| + \|x'\| + n^*\|y'\| \leq a + n^*b \leq 1$

y la demostración queda concluida.

Si $|||\cdot|||$ es la norma en $X$ cuya norma dual es $\rho_{M^0}$ se tiene que $M$ es un semi-$M$-ideal de $(X, |||\cdot|||)$. Teniendo en cuenta ahora la norma dual obtenida para la norma definida en el teorema 4 y la nota I.34 resulta que

$$\|x\| = |(n^*|||x|||, |||x+M|||)| \quad (x \in X)$$

De aquí se obtiene que para $x$ en $X$ y $m$ en $M$:

$$\|x-m\| = |(n^*|||x-m|||, |||x+M|||)|$$

con lo que tomando ínfimos con $m \in M$,

$$\| x + M \|' = |||x + M||| \, |(n^*, 1)| = |||x + M|||$$

Donde, en la última igualdad, se ha usado el lema I.19.

9 NOTA: Obsérvese cómo los procesos de renormación descritos en los teoremas 4 y 8 se obtienen sin más que aplicar las renormaciones descritas en los corolarios I.32 y I.33 a un espacio dual con un semisumando débil * cerrado y demostrar que las normas obtenidas son normas duales. En el teorema 4 se tiene la ventaja de contar con una descripción explícita de la norma predual mientras que en el teorema 8 la renormación viene dada en forma implícita. No obstante, obtendremos más adelante una formulación explícita de esta renormación.

Para mostrar la potencia de las técnicas utilizadas anteriormente, demostramos a continuación algunos resultados sobre semisumandos en espacios duales. Necesitaremos el siguiente análogo del lema 7.

10 LEMA: *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta,* $X$ *un espacio normado y* $\pi$ *una semi-*$|\cdot|$*-proyección en* $X'$*. Si* $\{x'_\alpha\} \overset{w^*}{\to} x' + y'$ *con* $x'_\alpha, x' \in \pi(X')$*,* $y' \in Ker(\pi)$ *y* $\| x'_\alpha \| \leq 1$*, entonces* $\| y' \| + n(|\cdot|^R) \| x' \| \leq n(|\cdot|^R)$.

DEMOSTRACION: Análoga a la del lema 7 considerando, para $t > 0$, la red $\{t \| y' \| x'_\alpha + y'\}$.

Del anterior lema se deduce que si $M$ es semi-$|\cdot|$-sumando de $X'$ y $|\cdot|$ no es de cotipo *1*, entonces $n(|\cdot|^R)=0$ y $M\cap B(X')$ es débil * cerrado. En particular, si $X$ es un espacio de Banach, $M$ es débil * cerrado por el teorema de Krein-Smulyan con lo que obtenemos el teorema 9.5 de [29] que es la implicación de *i)* a *ii)* en el siguiente corolario.

11 COROLARIO: *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*i)* $|\cdot|$ *es de cotipo 2 ó* $\infty$.

*ii) Todo semi-*$|\cdot|$*-sumando en el dual de un espacio de Banach es débil * cerrado.*

DEMOSTRACION: Sea $|\cdot|$ una norma absoluta de cotipo *1*, entonces por la proposición I.14, $|\cdot|^*$ tiene tipo $\infty$ con lo que $|\cdot|'$ tiene cotipo $\infty$ por lo que es posible encontrar un espacio de Banach $X$ con un $|\cdot|'$-ideal $M$ que no es $|\cdot|'$-sumando (corolario 5), luego $M^o$ es $|\cdot|^R$-sumando de $X'$, así si $\pi$ es la proyección absoluta en $X'$ con imagen $M^o$, $Ker(\pi)$ es un $|\cdot|$-sumando de $X'$ que no es débil * cerrado ya que, si lo fuera, $\pi$ sería débil * continua ([31], Lema 4.9) con lo que $M$ sería un $|\cdot|'$-sumando, por ([29], Proposición 8.2), en contra de lo supuesto.

Como otra aplicación del lema 10, damos una nueva demostración de la segunda parte del teorema I.30:

Sea $\pi$ una semi-$|\cdot|$-proyección en $X''$ con imagen $J_X(X)$ y sea $x'' \in Ker(\pi)$ con $\|x''\| = 1$. Existe una red $\{x_\alpha\}$ de elementos de $B(X)$ tal que $\{J_X(x_\alpha)\} \overset{w^*}{\to} x''$. Por el lema 10 se tiene $1 \leq n(|\cdot|^R)$, luego $n(|\cdot|^R) = 1$ y, por la proposición I.11 y el lema I.9, se tiene $|\cdot|^R = L = |\cdot|$ con lo que $\pi$ es una semi-$L$-proyección.

El resto del presente capítulo se dedica a analizar diferentes propiedades de los semiideales en claro paralelismo con las obtenidas en el capítulo anterior para semisumandos. La herramienta fundamental para ello serán los teoremas de renormación obtenidos anteriormente.

Comenzamos analizando las propiedades de aproximación de los semiideales. Para un semisumando $M$ de un espacio normado $X$ el conjunto $P_M(x)$ de mejor aproximación de un $x \in X$ desde $M$ era una bola cerrada. Para semiideales se consigue la siguiente información algo más débil:

12 TEOREMA: *Sea $M$ semi-$|\cdot|$-ideal completo de $X$, entonces $M$ es un subespacio proximinal de $X$. Además, para $x$ en $X$ se verifica*

$$B_M^{int}(0, 2n(|\cdot|^*)\|x+M\|) \subset P_M(x) - P_M(x) \subset B_M(0, 2n(|\cdot|^*)\|x+M\|)$$

DEMOSTRACION: Supongamos, en primer lugar que $X$ es un espacio de Banach. Por el teorema 3 y el teorema I.20 podemos suponer que $|\cdot|$

es de cotipo $\infty$. Por el teorema 8, existe una norma, $|||\cdot|||$, equivalente en $X$ tal que $M$ es semi-$M$-ideal de $(X, |||\cdot|||)$ y además

$$\|x\| = |(n(|\cdot|^*)|||x|||, |||x+M|||)| \quad \text{y} \quad \|x+M\| = |||x+M||| \quad (x \in X)$$

Sean $x \notin M$ y $m \in M$ tal que $\|x-m\| = \|x+M\|$, se tiene que

$$\|x-m\| = \|x+M\| = |||x+M||| = |(n(|\cdot|^*)|||x-m|||, |||x+M|||)| =$$

$$= |||x+M|||\,|(n(|\cdot|^*)\frac{|||x-m|||}{|||x+M|||}, 1)|$$

Lo que equivale por el lema I.19 a que $|||x-m||| \leq |||x+M|||$ o lo que es lo mismo $|||x-m||| = |||x+M|||$ . Hemos demostrado así que el conjunto de puntos que materializan la distancia de $x$ a $M$ en $(X, \|\cdot\|)$ coincide con el conjunto de puntos que materializan la distancia de $x$ a $M$ en $(X, |||\cdot|||)$, considerando que para $m$ en $M$ es $\|m\| = n(|\cdot|^*)|||m|||$ , se sigue de ([24], Teorema 1.2) que

$$B_M^{int}(0, 2n(|\cdot|^*)\|x+M\|) \subset P_M(x) - P_M(x) \subset B_M(0, 2n(|\cdot|^*)\|x+M\|)$$

Por último, si $X$ no es completo, basta considerar la completación de $X$, $\hat{X}$, y, por ser $M$ completo, $M$ será semi-$|\cdot|$-ideal de $\hat{X}$ y aplicando lo ya demostrado se obtiene el resultado.

Nuestro próximo objetivo es obtener para semiideales completos la misma fórmula obtenida para semisumandos en el corolario I.28. Recuérdese que dicha fórmula fue muy útil en el estudio de los semisumandos, por lo que no será extraño que de la misma se deduzcan importantes consecuencias para los semiideales. Necesitaremos la siguiente generalización del teorema I.7:

13 TEOREMA: ([29], Teorema 3.9). *Sea $(X,u)$ un espacio de rango numérico, $\delta>0$ y $f\colon [0,\delta] \to X$ una función derivable por la derecha en cero con $f(0)=u$. Entonces la función $\alpha \to \|f(\alpha)\|$ de $[0,\delta]$ en $\mathbb{R}$ es derivable por la derecha en cero con derivada igual a $\text{Máx Re } V(f'(0))$.*

14 LEMA: *Sea $|\cdot|$ una norma absoluta de cotipo $\infty$ y $M$ un semi-$|\cdot|$-ideal de $(X,\|\cdot\|_0)$. Sea $\|\cdot\|_1$ la norma equivalente en $X$ para la cual $M$ es semi-$M$-ideal. Entonces se verifica:*

$$\rho_M^{(0)}(x) = n(|\cdot|^*)\rho_M^{(1)}(x) + n(|\cdot|)\|x+M\| \quad (x\in X)$$

*donde para $i=0,1$, $\rho_M^{(i)}$ denota la seminorma definida en I.24 en el espacio normado $(X,\|\cdot\|_i)$.*

DEMOSTRACION: Obsérvese que no se utilizan subíndices para la norma cociente, pues las dos posibles normas cocientes a considerar son iguales según el teorema 8.

Sea $m\in M$ con $\|m\|_0=1$ y, por tanto, $\|n(|\cdot|^*)m\|_1=1$. Notaremos $V_0$ (resp. $V_1$) a los rangos numéricos en el espacio de rango numérico $(X,\|\cdot\|_0,m)$ (resp. $(X,\|\cdot\|_1,n(|\cdot|^*)m)$).

Según el teorema 8, para $x\in X$ y $\alpha>0$, se tiene

$$(1)\quad \|m+\alpha x\|_0 = |(n(|\cdot|^*)\|m+\alpha x\|_1, \alpha\|x+M\|)|$$

Consideremos la aplicación $f\colon [0,1] \to (\mathbb{R}^2,|\cdot|)$ definida por

$$f(\alpha) = (n(|\cdot|^*)\|m+\alpha x\|_1, \alpha\|x+M\|)$$

Se tiene que $f(0) = (1,0)$ y, por el teorema I.7, $f$ es diferenciable en cero con

$$f'(0) = (\text{Máx}\ Re\ V_1(n(|\cdot|^*)x), \|x+M\|)$$

Para $r \geq 0$ notemos $E(0,r) = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq r\}$. Podemos aplicar el teorema anterior a $f$ y, en vista de (1) y del teorema I.7, obtenemos

$$\text{Máx}\ Re\ V_0(x) = \text{Máx}\ Re(V_1(n(|\cdot|^*)x) + E(0,n(|\cdot|)\|x+M\|))$$

donde, en la última igualdad, hemos aplicado la proposición I.11. Cambiando $x$ por $zx$ con $z \in \mathbb{K}$ y $|z| = 1$, se tiene

$$\text{Máx}\ Re[zV_0(x)] = \text{Máx}\ Re[z(V_1(n(|\cdot|^*)x) + E(0,n(|\cdot|)\|x+M\|))]$$

Con lo cual (ver comentario anterior al teorema I.7)

$$V_0(x) = n(|\cdot|^*)V_1(x) + E(0,n(|\cdot|)\|x+M\|)$$

luego $v_0(m,x) = n(|\cdot|^*)v_1(n(|\cdot|^*)m,x) + n(|\cdot|)\|x+M\|$

Tomando supremos con $m$ en $M$ y $\|m\|_0 = 1$ y teniendo en cuenta que la aplicación $m \to n(|\cdot|^*)m$ es una biyección de la esfera de $M$ para $\|\cdot\|_0$ sobre la esfera de $M$ para $\|\cdot\|_1$ se obtiene la fórmula buscada.

15 LEMA: *Sea $M$ un semi-M-ideal completo de $X$. Entonces*

$$\|x\| = \text{Máx}\{\rho_M(x), \|x+M\|\} \quad (x \in X)$$

DEMOSTRACION: Podemos suponer que $\|x\| = 1$ ; supongamos además que $\| x + M\| < 1$ y deberemos probar que $\rho_M(x) = 1$.

Si existiese un $x' \in D(X,x) \cap M^o$, considerando a $x'$ como elemento de $(X/M)'$ se tendría:

$$1 = x'(x) = x'(x+M) \leq \| x+M\| < 1$$

luego $D(X,x) \cap M^o = \emptyset$. Sea $\pi$ la semi-$L$-proyección en $X'$ con imagen $M^o$, entonces para $x' \in D(X,x)$ se tiene

$$1 = x'(x) = \pi(x')(x) + (x' - \pi(x'))(x) \leq |\pi(x')(x)| + |(x' - \pi(x'))(x)| \leq$$
$$\leq \| \pi(x')\| + \| x' - \pi(x')\| = \| x'\| = 1$$

Con lo cual $\pi(x')(x) = \| \pi(x')\|$ y, por ser $D(X,x) \cap M^o = \emptyset$, ha de ser $\pi(x') = 0$, luego $D(X,x) \subset Ker(\pi)$.

Sea $x' \in D(X,x)$ entonces $\| x' + M^o\| = \| x' - \pi(x')\| = \| x'\| = 1$. Si $f_0 = x'|_M \in M'$, se tiene $\| f_0\| = \| x'|_M\| = \| x' + M^o\| = 1$, por el teorema de Bishop-Phelps aplicado a $M'$ (ver [19], página 179) dado $\varepsilon > 0$ existe $m \in S(M)$ y $g_0 \in D(M,m)$ tal que $\| f_0 - g_0\| < \varepsilon$. Por ([36], Corolario 1.4) existe una aplicación $\Psi: M' \to E'$ tal que para cada $f \in M'$, $\Psi(f)$ es la única extensión Hahn-Banach de $f$ a $E$. Además verifica que:

$$\| \Psi(f) - \Psi(g)\| \leq 2\| f - g\| \qquad (f,g \in M')$$

Es claro que $\Psi(f_0) = x'$ y que $\Psi(g_0) \in D(X,m)$ con lo que $\| x' - \Psi(g_0)\| < 2\varepsilon$ . Además

$\rho_M(x) \geq |\Psi(g_0)(x)| \geq |x'(x)| - |\Psi(g_0)(x) - x'(x)| \geq 1 - 2\varepsilon$ con lo cual $\rho_M(x) = 1$.

16 TEOREMA: *Sea $M$ un semi-$|\cdot|$-ideal completo de $X$. Se verifica:*

$\rho_M(x) - n(|.|)\| x+M\| \geqq 0$ y $\|x\| = |(\rho_M(x), \| x+M\| )|^+ \quad (x\in X)$.

DEMOSTRACION: Por el teorema 3 y el corolario I.28, podemos suponer que $|\cdot|$ es de cotipo $\infty$ en cuyo caso el lema 14 nos da $\rho_M(x) - n(|\cdot|)\| x+M\| \geqq 0$ . Por el teorema 8, existe una norma equivalente, $|||\cdot|||$, en $X$ tal que $M$ es semi-$M$-ideal de $(X, |||\cdot|||)$ y $\|x\| = |(n(|\cdot|^*)|||x|||, \| x+M\| )|$ .

Si notamos $\rho_M^{(1)}$ a la seminorma de la definición I.24 para $|||\cdot|||$, por el lema 14 la igualdad a demostrar es

$$\|x\| = |(n(|\cdot|^*)\rho_M^{(1)}(x) + n(|\cdot|)\| x+M\| ; \| x+M\| )|^+ =$$
$$= |(n(|\cdot|^*)\rho_M^{(1)}(x), \| x+M\| )|.$$

Es decir, $|(n(|.|^*)|||x|||, \| x+M\| )| = |(n(|\cdot|^*)\rho_M^{(1)}(x), \| x+M\| )|$

Si $|||x||| = \rho_M^{(1)}(x)$ no hay nada que demostrar. Si $|||x||| \neq \rho_M^{(1)}(x)$, por el lema anterior es $|||x||| = \| x+M\| > \rho_M^{(1)}(x)$. En este caso $|(n(|\cdot|^*)|||x|||, \| x+M\| )| = \| x+M\|$ por el lema I.19.

Por otro lado

$$\| x+M\| \leqq |(n(|\cdot|^*)\rho_M^{(1)}(x), \| x+M\| )| \leqq |(n(|\cdot|^*)\| x+M\| , \| x+M\| )| =$$
$$= \| x+M\| .$$

Donde, de nuevo, se ha aplicado el lema I.19 y el teorema queda demostrado.

Como primera aplicación del teorema anterior obtenemos la prometida expresión explícita de la renormación dada por el teorema 8:

17 COROLARIO: *Sea $M$ un semi-$|\cdot|$-ideal completo de $X$ con $|\cdot|$ de cotipo $\infty$. Sea $|||\cdot|||$ la norma equivalente en $X$ para la que $M$ es semi-$M$-ideal dada por el teorema 8. Se verifica:*

$$|||x||| = Máx\{\frac{1}{n(|\cdot|^*)}(\rho_M(x) - n(|\cdot|)\|x+M\|), \|x+M\|\} \quad (x\in X)$$

DEMOSTRACION: Si $\rho_M^{(1)}$ es la seminorma definida en I.24 para $|||\cdot|||$, por ser $M$ semi-$M$-ideal completo de $(X,|||\cdot|||)$, por el lema 15, se tiene

$$|||x||| = Máx\{\rho_M^{(1)}(x), |||x+M|||\} \quad (x\in X).$$

Teniendo en cuenta que $|||x+M||| = \|x+M\|$, el resultado se sigue del lema 14.

Como segunda consecuencia importante del teorema 16 obtenemos ahora información sobre $n(X,M)$ en el caso de que $M$ sea un semiideal de $X$. Necesitamos para ello el siguiente lema elemental:

18 LEMA: *Sea $|\cdot|$ una norma absoluta. Se verifica que:*

$$n(|\cdot|^{+*}) = n(|\cdot|) + n(|\cdot|^*).$$

*Como consecuencia, $|\cdot|$ es hexagonal si y sólo si $|\cdot|^+ = M$.*

DEMOSTRACION: Sea $\beta \geqq n(|\cdot|)$, entonces $|(\beta,1)|^+ = |(\beta - n(|\cdot|),1)|$ con lo que, por el lema I.19 aplicado a $|\cdot|$, $|(\beta,1)|^+ = 1$ si y sólo si $\beta \leqq n(|\cdot|) + n(|\cdot|^*)$ de donde se sigue el resultado aplicando el lema I.19 a $|\cdot|^+$.

19 COROLARIO: *Si $M$ es un semi-$|\cdot|$-ideal completo de $X$, entonces se tiene:* $n(|\cdot|) \leqq n(X,M) \leqq n(|\cdot|) + n(|\cdot|^*)$.

DEMOSTRACION: Aplicando el teorema 16, para $x \in X$, se tiene:

$n(|\cdot|)\|x\| = |(n(|\cdot|)\rho_M(x), n(|\cdot|)\|x+M\|)|^+ \leqq \rho_M(x)|(n(|\cdot|),1)|^+ = \rho_M(x)$

De donde $n(|\cdot|) \leqq n(X,M)$.

Notemos $\rho_M(x+M) = Inf\{\rho_M(x+m):\ m \in M\}$ $(x \in X)$.

De $n(X,M)\|x+m\| \leqq \rho_M(x+m)$ se deduce, tomando ínfimos en $m$: (1) $n(X,M)\|x+M\| \leqq \rho_M(x+M)$.

Por otro lado, de la fórmula

$$\|x+m\| = |(\rho_M(x+m), \|x+M\|)|^+$$

se deduce, de la misma forma:

$$\|x+M\| = |(\rho_M(x+M), \|x+M\|)|^+$$

y el lema I.19 nos da

$$(2)\quad \rho_M(x+M) \leqq n(|\cdot|^{+*})\|x+M\| = (n(|\cdot|) + n(|\cdot|^*))\|x+M\|$$

donde la última igualdad procede del lema anterior. Enlazando (1) y (2), obtenemos: $n(X,M) \leqq n(|\cdot|) + n(|\cdot|^*)$.

20 COROLARIO: *Si $X$ es un espacio de Banach tal que $J_X(X)$ es semi-$|\cdot|$-ideal de $X''$, entonces $|\cdot|$ es una norma hexagonal.*

DEMOSTRACION: Por el teorema I.30, se tiene $n(X'',J_X(X))=1$ con lo que, por el corolario anterior, es $n(|\cdot|)+n(|\cdot|^*)\geqq 1$, y basta aplicar el lema 18.

La cota inferior que aparece en el corolario 19 es óptima ya que para cada norma absoluta, $|\cdot|$, si $M$ es $|\cdot|$-sumando (por tanto semi-$|\cdot|$-ideal) de $X$ se tiene que $n(X,M)=n(|\cdot|)$ por el corolario I.29. Veamos que la cota superior también es óptima.

21 PROPOSICION: *Para cada norma absoluta $|\cdot|$, existe un espacio de Banach $X$ y un $|\cdot|$-ideal, $M$, de $X$ tal que $n(X,M)=n(|\cdot|)+n(|\cdot|^*)$.*

DEMOSTRACION: Si $n(|\cdot|^*)=0$ la desigualdad del corolario 19 degenera en $n(X,M)=n(|\cdot|)$. Sean, pues, $n^*=n(|\cdot|^*)>0$ y $n=n(|\cdot|)$.

En ([23], Teorema 3) aparece una gama de espacios de Banach $Y$ tal que $J_Y(Y)$ es $M$-ideal de $Y''$. El ejemplo más sencillo de esta gama es considerar $Y$ como el espacio de Banach de las sucesiones convergentes a cero. Por el teorema I.30, es $n(Y'',J_Y(Y))=1$. Sea $X=Y''$ y $M=J_Y(Y)$. Si definimos

$$|||x||| = |(n^*\|x\|,\|x+M\|)| \quad (x\in X)$$

por el teorema 4, $|||\cdot|||$ es una norma equivalente en $X$ y $M$ es un

$|\cdot|$-ideal de $(X, |||\cdot|||)$. Denotemos $\rho_M^{(0)}$ y $n_0(X,M)$ la seminorma y el índice de la definición I.24 para $|||\cdot|||$. Por el lema 14, se tiene

$$\rho_M^{(0)}(x) = n^*\rho_M(x) + n\| x + M\| \quad (x \in X).$$

Por ser $n(X,M) = 1$, obtenemos

$$\rho_M^{(0)}(x) = n^*\|x\| + n\| x + M\| \quad (x \in X)$$

Se tiene entonces, usando la desigualdad triangular y el hecho de que $n + n^* \leq 1$ y $|(n^*,1)| = 1$, que:

$$|||x||| = |(n^*\|x\|, \| x + M\| )| \leq |(n^*\| x + M\| , \| x + M\| )| + n^*(\|x\| - \| x + M\| ) =$$

$$= \| x + M\| + n^*(\|x\| - \| x + M\| ) \leq$$

$$\leq \| x + M\| + \frac{n^*}{n + n^*}(\|x\| - \| x + M\| ) =$$

$$= \frac{n^*}{n + n^*}\|x\| + \frac{n}{n + n^*}\| x + M\| = \frac{\rho_M^{(0)}(x)}{n + n^*}$$

lo que demuestra que $n_0(X,M) \geq n + n^*$. En vista del corolario 19 deberá ser $n_0(X,M) = n + n^*$ como queríamos.

Al introducir el concepto de semiideal se puso de manifiesto que un semisumando no tenía por qué ser semiideal. De hecho, vamos a probar que un semisumando, que no sea sumando, nunca puede ser semiideal.

22 PROPOSICION: *Sea $X$ un espacio normado y $M$ un semi-$|\cdot|$-sumando de $X$. Sea $Y$ un subespacio cerrado de $X$ tal que $Y$ está contenido en $M$. Entonces, $M/Y$ es semi-$|\cdot|$-sumando de $X/Y$.*

DEMOSTRACION: Sea $\pi$ la semi-$|\cdot|$-proyección en $X$ con imagen $M$. Definimos $\tilde{\pi}: X/Y \to X/Y$ , como $\tilde{\pi}(x+Y) = \pi(x) + Y \quad (x \in X)$.

Si $x-y \in Y$, se tiene $\pi(x-y) = x-y$ ya que $Y \subset M$ y

$$\pi(x) - \pi(y) = \pi(x - \pi(y)) = \pi(y + \pi(x-y) - \pi(y)) = x - y \in Y$$

Así pues $\tilde{\pi}$ está bien definida y, evidentemente, es una semiproyección en $X/Y$ con imagen $M/Y$. Sea $x \in X$, se tiene

$$\| x+Y \| = Inf\{ \| x+y \| : y \in Y\} =$$

$$= Inf\{ |(\| \pi(x)+y \| , \| x-\pi(x) \| )| : y \in Y\} = |(\| \pi(x)+Y \| , \| x-\pi(x) \| )|$$

con lo cual: $\quad \| x+Y \| = |(\| \tilde{\pi}(x+Y) \| , \| x-\pi(x) \| )|$.

Sustituyendo, en la anterior igualdad, $x$ por $x-\pi(x)$ se obtiene

$$\| x+Y-\tilde{\pi}(x+Y) \| = \| x-\pi(x)+Y \| = \| x-\pi(x) \|$$

y la demostración queda concluida.

23 COROLARIO: *Sea $X$ un espacio normado y $M$ semi-$|\cdot|$-ideal de $X$. Sea $X_1$ un subespacio de $X$ que contiene a $M$. Entonces $M$ es semi-$|\cdot|$-ideal de $X_1$.*

DEMOSTRACION: En la identificación usual de $X_1'$ con $X'/X_1^o$ el anulador de $M$ en $X_1$ es $M^o/X_1^o$. Como $M^o$ es semi-$|\cdot|^*$-sumando de $X'$, por la proposición anterior $M^o/X_1^o$ es semi-$|\cdot|^*$-sumando de $X'/X_1^o$ con lo que $M$ es semi-$|\cdot|$-ideal de $X_1$.

24 TEOREMA: *Sea $X$ un espacio normado y $M$ un subespacio completo de $X$ que sea, a la vez, semisumando y semiideal de $X$, entonces $M$ es sumando de $X$.*

DEMOSTRACION: Supongamos que $M$ es semi-$|\cdot|_0$-sumando y semi-$|\cdot|_1$-ideal de $X$. Veamos, en primer lugar, que $|\cdot|_1 = |\cdot|_0$.

Sea $x_0 \notin M$ y sea $X_1 = \mathbb{K} x_0 + M$; es evidente que $M$ es semi-$|\cdot|_0$-sumando de $X_1$ y, por ser $M$ un hiperplano de $X_1$, $M$ es un $|\cdot|_0$-sumando de $X_1$, luego un semi-$|\cdot|_0$-ideal de $X_1$. Por otra parte, según el corolario anterior $M$ es un semi-$|\cdot|_1$-ideal de $X_1$, así que $|\cdot|_0 = |\cdot|_1$.

Sea pues, $M$ semi-$|\cdot|$-sumando y semi-$|\cdot|$-ideal de $(X, \|\cdot\|_0)$. Podemos suponer que $|\cdot|$ es de cotipo $\infty$ ya que si no el resultado se sigue del teorema 3. A continuación utilizaremos la misma notación que en el lema 14.

Sea $\pi$ la semi-$|\cdot|$-proyección en $(X, \|\cdot\|_0)$ con imagen $M$, por el teorema I.25, se tiene

$$\rho_M^{(0)}(x) = \|\pi(x)\|_0 + n(|\cdot|)\|x+M\| \qquad (x \in X)$$

Por otro lado, por ser $M$ semi-$|\cdot|$-ideal de $(X, \|\cdot\|_0)$ con $|\cdot|$ de cotipo $\infty$, se sigue del lema 14 que

$$\rho_M^{(0)}(x) = n(|\cdot|^*)\rho_M^{(1)}(x) + n(|\cdot|)\|x+M\| \quad (x \in X)$$

con lo cual $\|\pi(x)\|_0 = n(|\cdot|^*)\rho_M^{(1)}(x) \quad (x \in X)$ y

$Ker(\pi) = \{x \in X : \rho_M^{(1)}(x) = 0\}$. Luego $Ker(\pi)$ es un subespacio de $X$ y $\pi$ es lineal.

En el teorema anterior, la hipótesis de que $M$ sea completo se puede suprimir como veremos más adelante.

Para finalizar detectamos los semiideales que verifican la propiedad de la bola y media.

25 TEOREMA: *Sea $X$ un espacio normado y $M$ un semi-$|\cdot|$-ideal completo de $X$. Entonces $M$ posee la propiedad de la bola y media si y sólo si $|\cdot|$ es una norma hexagonal.*

DEMOSTRACION: En ([37], Teorema 3) Yost demuestra que si $Y$ es un espacio de Banach y $N$ es un subespacio cerrado de $Y$, entonces $N$ posee la propiedad de la bola y media en $Y$ si y sólo si $N^{o}$ posee la propiedad de la bola y media en $Y'$. Analizando la demostración, se comprueba que el resultado es cierto si $Y$ es un espacio normado y $N$ es un subespacio completo de $Y$.

Como $M^{o}$ es semi-$|\cdot|^{*}$-sumando de $X'$, por el teorema I.38, $M^{o}$ tiene la proiedad de la bola y media si y sólo si $|\cdot|^{*}$ es una norma hexagonal lo que a su vez equivale a que $|\cdot|$ sea una norma hexagonal, lo que finaliza la demostración sin más que tener en cuenta el resultado de Yost citado.

# C A P I T U L O   III

# S E M I I D E A L O I D E S

El concepto de semiideal es una "predualización" del de semisumando en el sentido de que $M$ es un semiideal de $X$ cuando $M^{o}$ es un semisumando de $X'$. De la misma forma, en la siguiente definición predualizamos el concepto de semiideal, obteniendo un nuevo tipo de subespacios para los que no hay precedentes clásicos por razones que más adelante se comprenderán.

1 DEFINICION: Sea $|\cdot|$ una norma absoluta y $M$ un subespacio cerrado de un espacio normado, $X$. Diremos que $M$ es un *semi-*$|\cdot|$*-idealoide* de $X$ si $M^{o}$ es un semi-$|\cdot|^{*}$-ideal de $X'$. Diremos que $M$ es un *semiidealoide* de $X$ si es un semi-$|\cdot|$-idealoide para alguna norma absoluta, $|\cdot|$; norma absoluta que es única.

Evidentemente, por la proposición II.2, todo ideal (por tanto todo sumando) es un semiidealoide.

En [29] (ver comentario que sigue al Corolario 8.4) quedó planteado el problema de si dado un semi-$|\cdot|$-sumando $M$ de $X$ puede asegurarse que $M^{oo}$ es un semi-$|\cdot|$-sumando de $X''$. Equivalentemente se preguntaba allí si todo semi-$|\cdot|$-sumando es un semi-$|\cdot|$-idealoide. Resolveremos afirmativamente este problema haciendo uso de la única respuesta afirmativa conocida hasta la fecha, dada por Lima ([22], Teorema 6.14). El siguiente lema no es más que la adaptación a espacios normados cualesquiera del teorema de Lima.

2 LEMA: *Sea $M$ un semi-L-sumando de un espacio normado $X$, entonces $M^{oo}$ es un semi-L-sumando de $X''$. Además, si $P$ es la semi-L-proyección de $X''$ sobre $M^{oo}$ y $\pi$ la semi-L-proyección de $X$ sobre $M$, se verifica que $PJ_X = J_X\pi$.*

DEMOSTRACION: Si $X$ es un espacio de Banach, el resultado es el teorema 6.14 de [22].

Si $X$ no es completo, por ([36], Teorema 1.3) se tiene

$$\| \pi(x) - \pi(y) \| \leq \| x - y \| \quad (x,y \in X)$$

con lo cual podemos extender $\pi$ a la completación, $\hat{X}$, de $X$. La extensión de $\pi$ será una semi-$L$-proyección en $\hat{X}$ con imagen $\overline{M}$ (cierre de $M$ en $\hat{X}$). Así, por el teorema de Lima citado, $(\overline{M})^{oo} = M^{oo}$ es un semi-$L$-sumando de $(\hat{X})'' = X''$.

Finalmente, para $x$ en $X$, por el teorema I.20, se tiene

$$\| J_X(x) - J_X\pi(x) \| = \| x - \pi(x) \| = \| x + M \| = \| J_X(x) + M^{oo} \| .$$

Como $PJ_X(x)$ es el único punto de $M^{oo}$ que materializa la distancia de $J_X(x)$ a $M^{oo}$, se obtiene que $PJ_X(x) = J_X\pi(X)$.

3 LEMA: *Sean $X$, $Y$, $Z$ espacios normados y sean $S: X \to Y$ y $T: Y \to Z$ aplicaciones lineales y continuas. Supongamos que la aplicación $x \to (S(x),T(x))$ de $X$ en $Y \times Z$ es isométrica cuando en $Y \times Z$ se considera la norma $\| (y,z) \| = |(\|y\|, \|z\|)|$, siendo $|\cdot|$ una norma absoluta. Entonces $\| x'' \| = |(\| S^{tt}(x'') \| , \| T^{tt}(x'') \| )|$ $(x'' \in X'')$.*

DEMOSTRACION: Por la proposición II.2 se tiene que

$$\| (x'',y'') \| = |(\| y'' \|, \| z'' \|)| \quad ((y'',z'') \in Y'' \times Z'')$$

Consideremos $\Phi: X \to Y \times Z$ dada por $\Phi(x) = (S(x),T(x))$. Es de comprobación inmediata que $\Phi^{tt}(x'') = (S^{tt}(x''),T^{tt}(x''))$ $(x'' \in X'')$. Ya que $\Phi$ es isométrica, $\Phi^{tt}$ es isométrica y la demostración queda concluida.

4 TEOREMA: *Sea $M$ un semi-$|\cdot|$-sumando de $X$, entonces $M$ es un semi-$|\cdot|$-idealoide de $X$. Además, si $\pi$ es la semiproyección absoluta de $X$ sobre $M$ y $P$ la semiproyección absoluta de $X''$ sobre $M^{oo}$, se verifica $PJ_X = J_X\pi$.*

DEMOSTRACION: Por el teorema I.23 y los comentarios hechos anteriormente, podemos suponer que $|\cdot|$ es de tipo *1*. Por el corolario I.32 $\rho_M$ es una norma equivalente en $X$ y $M$ es un semi-$L$-sumando de $(X,\rho_M)$ y, por el lema 2, se tiene que $M^{oo}$ es semi-$L$-sumando de $(X'',\rho_M'')$. Teniendo en cuenta el corolario I.33 se obtiene que $M^{oo}$ es semi-$|\cdot|$-sumando de $(X'', |||\cdot|||)$, siendo

$$|||x''||| = |(\rho_M''(x''),\frac{1}{n(|\cdot|)}\rho_M''(x''+M^{oo}))|^+ \quad (x'' \in X'').$$

Por el teorema I.25 es $\rho_M(x+M) = n(|\cdot|)\| x+M\|$, con lo cual $\rho_M''(x''+M^{oo}) = n(|\cdot|)\| x''+M^{oo}\|$, así pues

$$|||x''||| = |(\rho_M''(x''), \| x''+M^{oo}\|)|^+ \quad (x'' \in X'').$$

Por otro lado, por el corolario I.28, se tiene

$$\|x\| = |(\rho_M(x), \| x+M\| )|^+ \quad (x \in X).$$

Por el lema anterior, se tiene

$$\| x''\| = |(\rho''_M(x''), \| x''+M^{oo}\| )|^+ \quad (x'' \in X'')$$

de donde $\| x''\| = |||x''|||$ $(x'' \in X'')$ y $M^{oo}$ es semi-$|\cdot|$-sumando de $(X'', \|\cdot\|)$ .

Finalmente, si $\pi$ es lineal es $P=\pi^{tt}$ por ([29], Proposición 8.2) y, evidentemente, $PJ_X = J_X\pi$. Si $\pi$ no es lineal basta tener en cuenta la demostración anterior y el lema 2 para concluir que $PJ_X = J_X\pi$.

El teorema anterior permite demostrar, como ya anunciamos, el teorema II.24 sin suponer que $M$ sea completo.

5 TEOREMA: *Sea $X$ un espacio normado y $M$ un subespacio suyo que sea a la vez un semisumando y un semiideal, entonces $M$ es un sumando de $X$.*

DEMOSTRACION: Al igual que en el teorema II.24, $M$ es semi-$|\cdot|$-sumando y semi-$|\cdot|$-ideal de $X$ para una misma norma absoluta, $|\cdot|$. Por el teorema anterior $M^{oo}$ es semi-$|\cdot|$-sumando y semi-$|\cdot|$-ideal de $X''$. Por el teorema II.24 $M^{oo}$ es $|\cdot|$-sumando de $X''$ y, además, si $P$ es la proyección absoluta de $X''$ sobre $M^{oo}$ y $\pi$ la semiproyección absoluta de $X$ sobre $M$ se verifica $PJ_X = J_X\pi$ lo que fuerza la linealidad de $\pi$ y el teorema queda demostrado.

La predualización del teorema anterior da lugar a la siguiente consecuencia:

6 COROLARIO: *Sea $X$ un espacio normado y $M$ un subespacio suyo que sea a la vez semisumando y semiidealoide, entonces $M$ es ideal de $X$.*

Según acabamos de demostrar los semisumandos y los ideales son semiidealoides. Veamos que, con ciertas hipótesis sobre la norma absoluta $|\cdot|$, todo semi-$|\cdot|$-idealoide es un $|\cdot|$-ideal o un semi-$|\cdot|$-sumando.

7 TEOREMA: *Sea $|\cdot|$ una norma absoluta de tipo distinto de 1. Si $M$ es un semi-$|\cdot|$-idealoide de $X$, entonces $M$ es un $|\cdot|$-ideal de $X$.*

DEMOSTRACION: Por la proposición I.14, $|\cdot|^*$ es de cotipo distinto de $\infty$. Como $M^0$ es semi-$|\cdot|^*$-ideal de $X'$, por el teorema II.3, $M^0$ es $|\cdot|^*$-sumando de $X'$ y, por tanto, $M$ es $|\cdot|$-ideal de $X$.

8 TEOREMA: ([29], Teorema 8.7). *Sea $|\cdot|$ una norma absoluta de cotipo distinto de $\infty$ y $M$ un subespacio completo de $X$. Si $M$ es semi-$|\cdot|$-idealoide de $X$, entonces $M$ es semi-$|\cdot|$-sumando de $X$.*

9 NOTA: Las hipótesis de los teoremas 7 y 8 son esenciales. Si $|\cdot|$ es una norma absoluta de tipo *1*, por el teorema I.23 existe

un espacio de Banach, $X$, con un semi-$|\cdot|$-sumando, $M$, (por tanto un semi-$|\cdot|$-idealoide por el teorema 4) que no es $|\cdot|$-sumando con lo que $M$ no puede ser ideal por el teorema 5. De la misma manera, si $|\cdot|$ es una norma absoluta de cotipo $\infty$, por el corolario II.5 existe un espacio de Banach, $X$, con un $|\cdot|$-ideal, $M$, (por tanto un semi-$|\cdot|$-idealoide) que no es $|\cdot|$-sumando con lo que $M$ no puede ser semisumando de $X$ por el teorema 5.

Particularizando los teoremas anteriores a las normas clásicas obtenemos que el concepto de semiidealoide completo para dichas normas se reduce a conceptos anteriores:

10 COROLARIO:

*i) Todo semi-L-idealoide completo es un semi-L-sumando.* ([22], Teorema 6.14).

*ii) Para $1 < p < \infty$ todo semi-$L^p$-idealoide (resp. semi-$L^p$-idealoide completo) es un $L^p$-ideal (resp. $L^p$-sumando).*

*iii) Todo semi-M-idealoide es un M-ideal.*

A diferencia de los capítulos anteriores en los que los semi-$L$-sumandos eran el prototipo de semisumandos y los semi-$M$-ideales el prototipo de semiideales, nos encontramos ahora en virtud del corolario anterior que no hay precedente en las normas clásicas para los semiidealoides. Los semi-$|\cdot|$-idealoides que sirvan de modelo a los semiidealoides deben ser tales que $|\cdot|$ tenga tipo $1$ y cotipo $\infty$. Las normas absolutas que verifican esto más sencillas son las normas hexagonales, aparecidas en sesiones anteriores.

El objetivo fundamental de este capítulo es demostrar que para cada norma absoluta $|\cdot|$ de tipo $1$ y cotipo $\infty$ existe un semi-$|\cdot|$-idealoide que no es semi-$|\cdot|$-sumando ni $|\cdot|$-ideal (por tanto tampoco semi-$|\cdot|$-ideal), es decir, lo que podemos llamar un semi-$|\cdot|$-idealoide "propio". Empezaremos resolviendo este problema para el caso de una norma hexagonal y después el caso general se resolverá mediante un teorma de renormación.

En lo que sigue, para $0 \leq \gamma \leq 1$, $|\cdot|_\gamma$ denotará la norma hexagonal dada por:

$$|(r,s)|_\gamma = Máx\{|s|, |r| + \gamma|s|\} \quad ((r,s) \in \mathbb{R}^2)$$

Recuérdese que $n(|\cdot|_\gamma) = \gamma$ y que $|\cdot|_\gamma^* = |\cdot|_{1-\gamma}$ .

Pretendemos, según se ha dicho, construir, para $0 < \gamma < 1$ un semi-$|\cdot|_\gamma$-idealoide propio. Ello se conseguirá por un proceso de "apareamiento" de un semi-$|\cdot|_\gamma$-sumando con un $|\cdot|_\gamma$-ideal. De manera más general, vamos a obtener un procedimiento para "aparear" semi-$|\cdot|_\gamma$-idealoides. Ello revierte en el bidual en "aparear" semi-$|\cdot|_\gamma$-sumandos y por ahí vamos a empezar.

11 TEOREMA: *Sean $X$ e $Y$ dos espacios normados y sean $M$ y $N$ subespacios cerrados de $X$ e $Y$ respectivamente. Sea $\gamma \in [0,1]$ y consideremos*

*en* $X \times Y$ *la norma dada por*

$$\|(x,y)\| = \text{Máx}\{\|x+M\|+\|y+N\|,\ \|x\|+\gamma\|y+N\|,\ \|y\|+\gamma\|x+M\|\}$$

*Pues bien,* $M \times N$ *es un semi-*$|\cdot|_\gamma$*-sumando de* $X \times Y$ *si y sólo si* $M$ *y* $N$ *son semi-*$|\cdot|_\gamma$*-sumandos de* $X$ *e* $Y$ *respectivamente. Además, si* $\pi_M$ *y* $\pi_N$ *son semi-*$|\cdot|_\gamma$*-proyecciones con* $\pi_M(X) = M$ *y* $\pi_N(X) = N$*, la semi-*$|\cdot|_\gamma$*-proyección en* $X \times Y$ *con imagen* $M \times N$ *es :*

$$\pi(x,y) = (\pi_M(x), \pi_N(y)) \quad ((x,y) \in X \times Y).$$

DEMOSTRACION: Sean $M$ y $N$ semi-$|\cdot|_\gamma$-sumandos de $X$ e $Y$ respectivamente. Definimos $\pi$ de $X \times Y$ en $X \times Y$ mediante

$$\pi(x,y) = (\pi_M(x), \pi_N(y)) \quad ((x,y) \in X \times Y).$$

Evidentemente, $\pi$ es una semiproyección en $X \times Y$ con imagen $M \times N$. Veamos que $\pi$ es semi-$|\cdot|_\gamma$-proyección. Sean $m \in M$, $n \in N$, $u \in Ker(\pi_M)$, $v \in Ker(\pi_N)$. Teniendo en cuenta la definición de la norma en $X \times Y$ y el teorema I.20, se obtiene

$$\|(m,n)\| = \text{Máx}\{\|m\|, \|n\|\}$$

$$\|(u,v)\| = \|u\| + \|v\|$$

$$\|(m+u, n+v)\| = \text{Máx}\{\|u\|+\|v\|,\ \|u+m\| + \gamma\|v\|,\ \|v+n\| + \gamma\|u\|\}$$

Por otro lado

$$|(\|(m,n)\|, \|(u,v)\|)|_\gamma = \text{Máx}\{\|u\|+\|v\|, \text{Máx}\{\|m\|, \|n\|\}+\gamma\|u\|+\gamma\|v\|\}$$

Por ser $\pi_M$ y $\pi_N$ semi-$|\cdot|_\gamma$-proyecciones se tiene

$$\|u+m\| = \text{Máx}\{\|u\|, \|m\| + \gamma\|u\|\}$$

$$\|v+n\| = \text{Máx}\{\|v\|, \|n\| + \gamma\|v\|\}$$

Luego

$$\| (u+m, v+n) \| =$$

$$= Máx\{\|u\|+\|v\|, Máx\{\|u\|, \|m\|+\gamma\|u\|\}+\gamma\|v\|, Máx\{\|v\|, \|n\|+\gamma\|v\|\}+\gamma\|u\|\} =$$

$$= Máx\{\|u\|+\|v\|, \|m\|+\gamma\|u\|+\gamma\|v\|, \|n\|+\gamma\|u\|+\gamma\|v\|\} =$$

$$= |(\| (m,n) \|, \| (u,v) \|)|_\gamma$$

y la demostración queda concluida.

Sea ahora $M \times N$ semi-$|\cdot|_\gamma$-sumando de $X \times Y$ y $\pi$ la semiproyección absoluta en $X \times Y$ con imagen $M \times N$. Para $x$ en $X$ sea $\pi(x,0) = (m_0, n_0) \in M \times N$, si demostramos que $n_0 = 0$, entonces, ya que la norma definida en $X \times Y$ restringida a $X$ da la norma de $X$, se tiene que $\pi$ restringida a $X$ es una semi-$|\cdot|_\gamma$-proyección en $X$ con imagen $M$. Análogo razonamiento con $Y$ y $N$ acabaría la demostración.

Es de comprobación inmediata que $\| (x,0) + M \times N \| = \| x + M \|$ con lo cual

$$P_{M \times N}((x,0)) = \{(m,n) \in M \times N : \| (x-m, -n) \| = \| x+M \|\} =$$

$$= \{(m,n) \in M \times N : Máx\{\| x+M \|, \| x-m \|, \|n\|+\gamma\| x+M \|\} = \| x+M \|\} =$$

$$= \{(m,n) \in M \times N : \| x-m \| = \| x+M \|, \|n\| \leqq (1-\gamma)\| x+M \|\} =$$

$$= P_M(x) \times B_N(0, (1-\gamma)\| x+M \|).$$

Por otra parte el teorema I.20 nos dice que

$$P_{M \times N}((x,0)) = B_{M \times N}((m_0, n_0), (1-\gamma)\| x+M \|) =$$

$$= B_M(m_0, (1-\gamma)\| x+M \|) \times B_N(n_0, (1-\gamma)\| x+M \|).$$

Donde en la última igualdad se ha usado que la norma de $X \times Y$ restringida a $M \times N$ es la norma del máximo. Comparando esta igualdad con la anterior se obtiene $n_0 = 0$.

12 TEOREMA: *Sean $X$ e $Y$ espacios normados, $\gamma$ un número real con $0 \leq \gamma \leq 1$ . Sean $M$ y $N$ semi-$|\cdot|_\gamma$-idealoides de $X$ e $Y$ respectivamente. Definiendo en $X \times Y$ la norma*

$$\|(x,y)\| = \text{Máx}\{\|x+M\| + \|y+N\|, \|x\| + \gamma\|y+N\|, \|y\| + \gamma\|x+M\|\}$$

*se obtiene que $M \times N$ es un semi-$|\cdot|_\gamma$-idealoide de $X \times Y$. Además, $M \times N$ es semisumando (resp. ideal) de $X \times Y$ si y sólo si $M$ y $N$ son semisumandos (resp. ideales) de $X$ e $Y$, respectivamente.*

DEMOSTRACION: Usando y abusando de la proposición II.2, se obtiene que, para $(x'',y'') \in X'' \times Y''$, es

$$\|(x'',y'')\| = \text{Máx}\{\|x''+M^{oo}\| + \|y''+N^{oo}\|, \|x''\|+\gamma\|y''+N^{oo}\|, \|y''\|+\gamma\|x''+M^{oo}\|\}$$

con lo que, por el teorema anterior, $M^{oo} \times N^{oo}$ es semi-$|\cdot|_\gamma$-sumando y $M \times N$ es semi-$|\cdot|_\gamma$-idealoide de $X \times Y$.

Aplicando el teorema anterior obtenemos que $M \times N$ es semi-$|\cdot|_\gamma$-sumando de $X \times Y$ si y sólo si $M$ y $N$ son semi-$|\cdot|_\gamma$-sumandos de $X$ e $Y$ respectivamente.

Supongamos ahora que $M$ y $N$ son ideales y denotemos por $\pi_{M^o}$ la proyección absoluta en $X'$ con imagen $M^o$ y por $\pi_{N^o}$ la proyección absoluta en $Y'$ con imagen $N^o$. Por ([29], Proposición 8.2) $I - \pi^t_{M^o}$ es la proyección absoluta en $X''$ con imagen $M^{oo}$ y

$I - \pi^t_N o$ es la proyección absoluta en $Y''$ con imagen $N^{oo}$. Por el teorema anterior, si $P$ es la proyección absoluta de $X'' \times Y''$ sobre $M^{oo} \times N^{oo}$, se tiene

$$P(x'',y'') = (x'' - \pi^t_M o(x''), y'' - \pi^t_N o(y'')) \quad ((x'',y'') \in X'' \times Y'')$$

con lo que $P$ es débil * continua y, otra vez por ([29], Proposición 8.2), $M^o \times N^o$ es sumando de $X' \times Y'$ y, así, $M \times N$ es ideal de $X \times Y$.

Si $M \times N$ es ideal de $X \times Y$ y $\pi$ es la proyección absoluta de $X' \times Y'$ sobre $M^o \times N^o$, por ([29], Proposición 8.2) $I - \pi^t$ es la proyección absoluta de $X'' \times Y''$ sobre $M^{oo} \times N^{oo}$ con lo que, por la proposición anterior, es

$$(I - \pi^t)(x'',y'') = (\pi_M oo(x''), \pi_N oo(y'')) \quad ((x'',y'') \in X'' \times Y'')$$

Así $\pi_M oo$ y $\pi_N oo$ son débil * continuas y, por ([29], Proposición 8.2), $M^o$ y $N^o$ son sumandos por lo que $M$ y $N$ son ideales.

13 COROLARIO: *Para cada* $\gamma$ *con* $0 < \gamma < 1$ *existe un espacio de Banach,* $X$*, y un subespacio suyo,* $M$*, que es semi-*$|\cdot|_\gamma$*-idealoide de* $X$ *y no es ni semisumando ni semiideal de* $X$*.*

DEMOSTRACION: Como para $\gamma$ con $0 < \gamma < 1$, $|\cdot|_\gamma$ es de tipo $1$ y cotipo $\infty$, por el teorema I.23 existe un espacio de Banach $X_1$ con un semi-$|\cdot|_\gamma$-sumando, $M_1$, que no es $|\cdot|_\gamma$-sumando, con lo que no puede ser ideal por el teorema 5. Por el corolario II.5 existe un espacio de Banach $Y_1$ con un $|.|_\gamma$-ideal , $N_1$ , que no es $|.|_\gamma$-sumando con lo que no puede ser semisumando por el teorema 5 . Definiendo en $X_1 \times Y_1$ la norma del teorema anterior se obtiene que $M_1 \times N_1$ es un semi - $|.|_\gamma$-idealoide de $X_1 \times Y_1$ que no es semisumando ni semiideal de $X_1 \times Y_1$.

Podemos ahora justificar la necesidad de la hipótesis de complitud en la primera parte del corolario 10 :

Existe un espacio normado $X$ y un semi - $L$ - idealoide ( no completo ) $M$ de $X$ que no es semi - $L$ - sumando ni $L$ -ideal. En efecto :

Sea $X_1$ un espacio normado y $M_1$ un $L$ - ideal de $X_1$ que no sea $L$-sumando (véase el comentario que sigue al teorema II.3 ) y sea $Y_1$ un espacio normado con un semi - $L$ - sumando $N_1$ que no sea $L$ - sumando . Basta , entonces , aplicar el teorema 12 con $\gamma = 1$ y tomar

$$X = X_1 \times Y_1 \quad \text{y} \quad M = M_1 \times N_1 \ .$$

Vamos ahora en busca del proceso de renormación que nos permita establecer la tesis del corolario anterior para cualquier norma absoluta de tipo $1$ y cotipo $\infty$ . Precisamos para ello el siguiente teorema , de interés en sí mismo .

Conviene concretar la siguiente notación:

Como quiera que un mismo subespacio $M$ de $X$ podrá ser considerado como subespacio de otros espacios normados , escribiremos , cuando sea preciso , $\rho_{(X,M)}$ en lugar de $\rho_M$ para indicar el superespacio $X$ al que nos referimos.

Sea $(X,u)$ un espacio de rango numérico, $Y$ , $M$ subespacios de $X$ con $u \in M \subset Y$ . Se tiene evidentemente

$$V(Y,y) = V(X,y), \quad \forall y \in Y$$

de donde pasando a radios numéricos y tomando supremos con $u$ moviéndose en $S(M)$ obtenemos:

$$\rho_{(Y,M)}(y) = \rho_{(X,M)}(y), \quad \forall y \in Y \ .$$

14 TEOREMA: *Sea $M$ un semi- $|.|$ -idealoide completo de $X$. Se verifica que:*

$$i) \ \rho_M(x) = \rho_{M^{oo}}(J_X(x)) \qquad (x \in X) \ .$$

*ii)* $\|x\| = |(\rho_M(x), \|x+M\|)|^+ \quad (x \in X).$

*iii)* $\rho_M(x) - n(|\cdot|)\|x+M\| \geq 0.$

DEMOSTRACION: *i)* Sean $m \in S(M)$ y $x \in X$ arbitrarios. Se tiene evidentemente $v(m,x) = v(J_X(m), J_X(x))$.

Notando $\pi$ a la semi-$|\cdot|$-proyección de $X''$ sobre $M^{oo}$ tenemos, en virtud de ([29], Corolario 10.2) que:

$$v(J_X(m), J_X(x)) = v(J_X(m), \pi J_X(x)) + n(|\cdot|)\| J_X(x) + M^{oo}\|$$

Cuando $m$ recorre $S(M)$, $J_X(m)$ recorre $S(J_X(M))$ con lo que tomando supremos obtenemos:

$$\rho_M(x) = \rho_{(X'', J_X(M))}(J_X(x)) = \rho_{(X'', J_X(M))}(\pi J_X(X)) + n(|\cdot|)\| J_X(x) + M^{oo}\|$$

o lo que es lo mismo

$$\rho_M(x) = \rho_{(M^{oo}, J_X(M))}(\pi J_X(x)) + n(|\cdot|)\| J_X(x) + M^{oo}\|$$

Ahora bien, aplicando el teorema I.30 al espacio de Banach $M$ y teniendo en cuenta la identificación natural de $M^{oo}$ con $M''$ tenemos:

$$\rho_{(M^{oo}, J_X(M))}(\pi J_X(x)) = \| \pi J_X(x)\|$$

con lo que, finalmente:

$$\rho_M(x) = \| \pi J_X(x)\| + n(|\cdot|)\| J_X(x) + M^{oo}\| = \rho_{M^{oo}}(J_X(x))$$

donde, en la última igualdad se ha aplicado el teorema I.25.

*ii)* y *iii)* Aplicando el corolario I.28, tenemos:

$$\| x''\| = |(\rho_{M^{oo}}(x''), \| x'' + M^{oo}\|)|^+ \text{ y } \rho_{M^{oo}}(x'') \geq n(|\cdot|)\| x'' + M^{oo}\|$$

con lo que basta tomar $x'' = J_X(x)$ con $x \in X$ y tener en cuenta *i)* y que $\| J_X(x) + M^{oo} \| = \| x + M \|$ .

15 LEMA: *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta de tipo 1 y M un semi-*$|\cdot|$*-idealoide completo de X. Entonces* $\rho_M$ *es una norma equivalente en X y notando* $\rho''_M$ *a su norma bidual se tiene:*

*i)* $\rho_{M^{oo}}(x'') \leq \rho''_M(x'') \quad (x'' \in X'')$

*ii) Si* $x'' \in X''$ *y* $\rho_{M^{oo}}(x'') < \rho''_M(x'')$, *entonces*

$\rho''_M(x'') \leq (n(|\cdot|) + n(|\cdot|^*)) \| x'' + M^{oo} \|$ .

DEMOSTRACION: Dado que $M^{oo}$ es un semi-$|\cdot|$-sumando de $X''$ y $|\cdot|$ tiene tipo *1*, el corolario I.32 nos dice que $\rho_{M^{oo}}$ es una norma equivalente en $X''$. Ello, junto con la primera parte del teorema anterior, implica que $\rho_M$ es una norma equivalente en $X$.

*i)* Podemos suponer que $\rho''_M(x'') = 1$. La bola unidad cerrada de $(X, \rho_M)$ (tratada por $J_X$) es débil * densa en la bola unidad cerrada de $(X'', \rho''_M)$, por tanto existe una red $\{x_\alpha\}$ en $X$ tal que $\rho_M(x_\alpha) \leq 1$ para todo $\alpha$ y $\{J_X(x_\alpha)\}$ converge a $x''$ en la topología débil * de $X''$. Aplicando la primera parte del teorema anterior tenemos $\rho_{M^{oo}}(J_X(x_\alpha)) \leq 1$ para todo $\alpha$. Finalmente $\rho_{M^{oo}}$ es una norma dual en $X''$ (teorema II.8) luego su bola unidad es débil * cerrada y concluimos que $\rho_{M^{oo}}(x'') \leq 1 = \rho''_M(x'')$.

*ii)* Por la segunda parte del teorema anterior, tenemos:

$$\|x\| = |(\rho_M(x), \| x + M \| )|^+ \quad (x \in X)$$

Aplicando el lema 3:

$$\| x''\| = |(\rho''_M(x''), \| x''+M^{oo}\| )|^{+} \quad (x''\in X'').$$

Por otra parte, por ser $M^{oo}$ semi-$|\cdot|$-sumando de $X''$ el corolario I.28 nos da

$$\| x''\| = |(\rho_{M^{oo}}(x''), \| x''+M^{oo}\| )|^{+} \quad (x''\in X'')$$

Así pues:

$$|(\rho''_M(x''), \| x''+M^{oo}\| )|^{+} = |(\rho_{M^{oo}}(x''), \| x''+M^{oo}\| )|^{+}$$

Supongamos entonces que $\rho_{M^{oo}}(x'') < \rho''_M(x'')$ con lo que deberá ser $\| x''+M^{oo}\| > 0$. Notando

$$r = \frac{\rho''_M(x'')}{\| x''+M^{oo}\|} \quad \text{y} \quad s = \frac{\rho_{M^{oo}}(x'')}{\| x''+M^{oo}\|} \quad \text{tenemos:}$$

$0 \leqq s < r$ y $|(s,1)|^{+} = |(r,1)|^{+}$. Entonces de

$$|(s,1)|^{+} = |\tfrac{s}{r}(r,1) + (1-\tfrac{s}{r})(0,1)|^{+} \leqq$$

$$\leqq \tfrac{s}{r}|(r,1)|^{+} + (1-\tfrac{s}{r})|(0,1)|^{+} \leqq$$

$$\leqq \tfrac{s}{r}|(s,1)|^{+} + (1-\tfrac{s}{r})|(s,1)|^{+} = |(s,1)|^{+}$$

deducimos $|(s,1)|^{+} = 1$ luego $|(r,1)|^{+} = 1$. El lema I.19 nos da: $r \leqq n(|\cdot|^{+*})$ esto es $\rho''_M(x'') \leqq n(|\cdot|^{+*})\| x''+M^{oo}\|$ y basta aplicar el lema II.18.

16 TEOREMA: *Sean* $|\cdot|_i$ *y* $|\cdot|$ *normas absolutas de tipo 1,* $n_i = n(|\cdot|_i)$ $n_i^* = n(|\cdot|_i^*)$, $n = n(|\cdot|)$ *y* $n^* = n(|\cdot|^*)$. *Supongamos que*

$$\frac{n_i^*}{n_i} \leq \frac{n^*}{n}$$

*Sea* $M$ *un semi-*$|\cdot|_i$*-idealoide completo de* $X$ *y definamos*

$$|||x||| = |(\rho_M(x), \frac{n_i}{n}\|x+M\|)|^+ \quad (x \in X).$$

*Entonces* $|||\cdot|||$ *es una norma equivalente en* $X$ *y* $M$ *es un semi-*$|\cdot|$*-idealoide de* $(X, |||\cdot|||)$. *Además, si* $M$ *es semi-*$|\cdot|_i$*-sumando (resp.* $|\cdot|_i$*-ideal) de* $(X, \|\cdot\|)$ *entonces* $M$ *es un semi-*$|\cdot|$*-sumando (resp.* $|\cdot|$*-ideal) de* $(X, |||\cdot|||)$.

DEMOSTRACION: Por el lema anterior $\rho_M$ es una norma equivalente en $X$ de donde, fácilmente, también lo es $|||\cdot|||$.

Puesto que $M^{oo}$ es un semi-$|\cdot|_i$-sumando de $X''$, definiendo

$$q(x'') = |(\rho_{M^{oo}}(x''), \frac{n_i}{n}\|x''+M^{oo}\|)|^+ \quad (x'' \in X'')$$

se obtiene una norma equivalente en $X''$ tal que $M^{oo}$ es un semi-$|\cdot|$-sumando de $(X'', q)$ (teorema I.30). Vamos a probar que $q$ es la norma bidual de $|||\cdot|||$. Dicha norma bidual, en virtud del lema 3 viene dada por:

$$|||x''||| = |(\rho_M''(x''), \frac{n_i}{n}\|x''+M^{oo}\|)|^+ \quad (x'' \in X'').$$

El lema anterior nos da $\rho_{M^{oo}}(x'') \leq \rho_M''(x'')$ $(x'' \in X'')$, luego

$$q(x'') \leq |||x''||| \quad (x'' \in X'').$$

Además, es claro que si $\rho_{M^{oo}}(x'') = \rho''_M(x'')$ la anterior desigualdad es una igualdad. Si, por el contrario, es $\rho_{M^{oo}}(x'') < \rho''_M(x'')$ el lema anterior nos dice que: $\rho''_M(x'') \leqq (n_i + n_i^*) \| x'' + M^{oo} \|$ y usando la hipótesis sobre los índices de $|\cdot|_i$ y $|\cdot|$ tenemos

$$n_i + n_i^* = n_i(1 + \frac{n_i^*}{n_i}) \leqq n_i(1 + \frac{n^*}{n}) = \frac{n_i}{n}(n + n^*)$$

con lo que

$$\rho''_M(x'') \leqq \frac{n_i}{n}(n + n^*) \| x'' + M^{oo} \|$$

y llegamos finalmente a:

$$\begin{aligned} |||x''||| &\leqq |(\frac{n_i}{n}(n + n^*) \| x'' + M^{oo} \| , \frac{n_i}{n} \| x'' + M^{oo} \| )|^+ = \\ &= \frac{n_i}{n} \| x'' + M^{oo} \| \, |(n + n^*, 1)|^+ = \frac{n_i}{n} \| x'' + M^{oo} \| \leqq q(x''). \end{aligned}$$

Así pues, en cualquier caso, $|||x''||| = q(x'')$ y $q$ es la norma bidual de $|||\cdot|||$. Puesto que $M^{oo}$ es semi-$|\cdot|$-sumando de $(X'',q) \equiv (X'', |||\cdot|||)$ hemos probado que $M$ es semi-$|\cdot|$-idealoide de $(X, |||\cdot|||)$.

Si $M$ era de hecho semi-$|\cdot|_i$-sumando de $(X, \|\cdot\|)$ el teorema I.30 nos da directamente que $M$ es semi-$|\cdot|$-sumando de $(X, |||\cdot|||)$.

Finalmente, supongamos que $M$ es $|\cdot|_i$-ideal de $(X, \|\cdot\|)$. Entonces $M^o$ es $|\cdot|_i^*$-sumando de $X'$ y $M^{oo}$ es $|\cdot|_i$-sumando de $X''$ con $|\cdot|_i$-proyección $\pi$ débil $*$ continua. Otra vez el teorema I.30 y la igualdad $|||x''||| = q(x'')$ $(x'' \in X'')$ nos dice que $\pi$ es $|\cdot|$-proyección en $(X'', |||\cdot|||)$ con $\pi(X'') = M^{oo}$. La débil $*$ continuidad de $\pi$ nos asegura que $M^o$ es $|\cdot|^*$-sumando de $(X', |||\cdot|||)$ esto es que $M$ es $|\cdot|$-ideal de $(X, |||\cdot|||)$.

17 NOTA: Supongamos que en el teorema anterior se tiene de hecho $\frac{n_i^*}{n_i} = \frac{n^*}{n}$. Entonces el mismo teorema puede aplicarse a $(X, |||\cdot|||)$ intercambiando $|\cdot|_i$ con $|\cdot|$. La nueva norma que se obtiene en $X$ no es otra que la inicial $\|\cdot\|$. Para convencerse de ello basta tener en cuenta la expresión de la norma bidual de $|||\cdot|||$ y aplicar la nota I.34 a $X''$.

18 COROLARIO: *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta de tipo 1 y cotipo* $\infty$. *Existe un espacio de Banach* $X$ *y un semi-*$|\cdot|$*-idealoide* $M$ *de* $X$ *que no es semisumando ni semiideal de* $X$.

DEMOSTRACION: Pongamos $n = n(|\cdot|)$, $n^* = n(|\cdot|^*)$ y sea $\gamma = \frac{n}{n+n^*}$; nótese que $0 < \gamma < 1$. Por el corolario 13 existe un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y un semi-$|\cdot|_\gamma$-idealoide $M$ de $X$ que no es semisumando ni semiideal de $X$. Aplicando el teorema anterior con $|\cdot|_i = |\cdot|_\gamma$ convertimos $M$ en un semi-$|\cdot|$-idealoide del espacio de Banach $(X, |||\cdot|||)$. Notemos que en este caso $\frac{n_i^*}{n_i} = \frac{1-\gamma}{\gamma} = \frac{n^*}{n}$ con lo que la nota anterior es aplicable. Si $M$ fuese semisumando de $(X, |||\cdot|||)$ sería semi-$|\cdot|$-sumando y el teorema 16 aplicado a $(X, |||\cdot|||)$ intercambiando $|\cdot|_i$ con $|\cdot|$ nos daría que $M$ es semi-$|\cdot|_\gamma$-sumando de $(X, \|\cdot\|)$ (nota 17) contra lo supuesto. Si $M$ fuese semiideal de

$(X, |||\cdot|||)$ sería ideal (corolario 6), luego $|\cdot|$-ideal y el mismo razonamiento anterior nos daría que $M$ es $|\cdot|_\gamma$-ideal de $(X, \|\cdot\|)$, una contradicción.

El teorema anterior nos ha permitido obtener semi-$|\cdot|$-idealoides propios para cada norma absoluta, $|\cdot|$, de tipo $1$ y cotipo $\infty$ renormando un espacio de Banach con un semiidealoide propio para una norma hexagonal. Si aplicamos la renormación en el otro sentido obtenemos una codificación de los semiidealoides.

19 COROLARIO: *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta de tipo 1 y sean* $n = n(|\cdot|)$, $n^* = n(|\cdot|^*)$ *y* $\gamma = \frac{n}{n + n^*}$. *Si* $M$ *es semi-*$|\cdot|$*-idealoide completo de* $X$ *y definimos*

$$|||x||| = Máx\{\rho_M(x), (n + n^*)\| x + M\|\} \quad (x \in X).$$

*Entonces,* $|||\cdot|||$ *es una norma equivalente en* $X$ *y* $M$ *es un semi-*$|\cdot|_\gamma$*-idealoide de* $(X, |||\cdot|||)$. *Además,* $M$ *es semisumando de* $(X, |||\cdot|||)$ *si y sólo si* $M$ *es semisumando de* $(X, \|\cdot\|)$ *y* $M$ *es ideal de* $(X, |||\cdot|||)$ *si y sólo si* $M$ *es ideal de* $(X, \|\cdot\|)$.

DEMOSTRACION: Para la primera parte basta tener en cuenta el teorema 16 con $|\cdot|_i = |\cdot|$, $|\cdot|_\gamma = |\cdot|$ y que, por el lema II.18 es $|\cdot|_\gamma^+ = M$. La segunda parte se concluye, teniendo en cuenta la nota 17, razonando como en el corolario anterior.

Una vez demostrada la existencia de semi-$|\cdot|$-idealoides propios para cada norma absoluta, $|\cdot|$, de tipo *1* y de cotipo $\infty$ y codificados éstos tomando como prototipo los semiidealoides para normas hexagonales, volvemos a la fórmula establecida en el teorema 1.4, *ii)*, común a las tres "generaciones" y de la que, al igual que en el caso de semiideales, se obtiene

20 COROLARIO: *Si $M$ es un semi-$|\cdot|$-idealoide completo de $X$, se verifica que* $n(|\cdot|) \leq n(X,M) \leq n(|\cdot|) + n(|\cdot|^*)$. *En particular, si $X$ es un espacio de Banach tal que $J_X(X)$ es semi-$|\cdot|$-idealoide de $X''$ se tiene que $|\cdot|$ es una norma hexagonal.*

Se conocen espacios de Banach $X$ tales que $J_X(X)$ es $L$-sumando de $X''$ (basta considerar $X = l^1$) así como espacios de Banach $X$ tales que $J_X(X)$ es un $M$-ideal de $X''$ ([23], Teorema 3). De hecho se sabe que si $J_X(X)$ es semi-$M$-ideal de $X''$, entonces es $M$-ideal ([24], Proposición 1.5). A la vista de los ejemplos anteriores, de la segunda parte del corolario 20, del corolario II.20 y del teorema I.30 sería interesante resolver la siguiente cuestión abierta:

21 PROBLEMAS:

*i) ¿Existe un espacio de Banach $X$ tal que $J_X(X)$ es un semi-$L$-sumando pero no un $L$-sumando de $X''$?*

*ii) ¿Existe un espacio de Banach $X$ tal que $J_X(X)$ es un semi-$|\cdot|_\gamma$-ideal de $X''$ con $0<\gamma<1$ ?*

*iii) ¿Existe un espacio de Banach $X$ tal que $J_X(X)$ es un semi-$|\cdot|_\gamma$-idealoide propio de $X''$, con $0<\gamma<1$ ?*

Terminamos este capítulo discutiendo las propiedades de aproximación de los semiidealoides. Ello se conseguirá por un procedimiento de localización que reduce el problema a los ideales para los que ya se resolvió en el capítulo II.

22 LEMA: *Sea $M$ un semi-$|\cdot|$-idealoide de codimensión uno en $X$, entonces $M$ es un $|\cdot|$-ideal de $X$.*

DEMOSTRACION: $M^{oo}$ es semi-$|\cdot|$-sumando de codimensión uno en $X''$ con lo que $M^{oo}$ es $|\cdot|$-sumando de $X''$ y $M^{ooo}$ es $|\cdot|^*$-sumando de $X'''$. Ahora bien, si $M$ es de codimensión uno en $X$, $M^o$ es de dimensión uno por lo que se tiene

$$M^{ooo}=\overline{J_{X'}(M^{oo})}^{w^*}=J_{X'}(M^o)\subset J_{X'}(X')$$

Así pues, $M^o$ es un $|\cdot|^*$-sumando de $X'$ y $M$ un $|\cdot|$-ideal de $X$.

23 TEOREMA: *Si $M$ es un semi-$|\cdot|$-idealoide completo de $X$, $M$ es un subespacio proximinal de $X$ y, para $x$ en $X$, se verifica*

$$B_M^{int}(0,2n(|\cdot|^*)\|x+M\|)\subset P_M(x)-P_M(x)\subset B_M(0,2n(|\cdot|^*)\|x+M\|)$$

DEMOSTRACION: Sea $x \notin M$ y sea $Y = \mathbb{K}x + M$, entonces $M^{oo} \subset Y^{oo}$ y la semi-$|\cdot|$-proyección de $X''$ sobre $M^{oo}$ restringida a $Y^{oo}$ es una semi-$|\cdot|$-proyección en $Y^{oo}$ con imagen $M^{oo}$. Teniendo en cuenta que $Y^{oo}$ es isométrico a $Y''$, resulta que $M$ es un semi-$|\cdot|$-idealoide de $Y$; por el lema anterior se tiene que $M$ es un $|\cdot|$-ideal de $Y$ con lo que, por el teorema II.12, $M$ es un subespacio proximinal de $Y$ por lo que $P_M(x)$ es no vacío y, además, se verifica

$$B_M^{int}(0,2n(|\cdot|^*)\|x+M\|) \subset P_M(x) - P_M(x) \subset B_M(0,2n(|\cdot|^*)\|x+M\|).$$

# CAPITULO IV

# EL TEOREMA FINAL

En los capítulos anteriores, a partir de los semisumandos (primera generación) y en dos predualizaciones consecutivas se obtuvieron los conceptos de semiideal (segunda generación) y de semiidealoide (tercera generación). Aparentemente el proceso iniciado podría continuarse indefinidamente. Es un hecho sorprendente (y creemos que será gratificante para el lector) que dicho proceso acaba con los semiidealoides. Sugestivamente, vamos a probar a continuación que la cuarta generación coincide con la segunda.

1 TEOREMA: *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta. $M$ es un semi-$|\cdot|$-ideal de $X$ si y sólo si $M^o$ es un semi-$|.|^*$-idealoide de $X'$.*

DEMOSTRACION: Si $M$ es un semi-$|\cdot|$-ideal de $X$, entonces, por definición, $M^o$ es un semi-$|\cdot|^*$-sumando de $X'$ y por el teorema III.4 $M^o$ es un semi-$|\cdot|^*$-idealoide de $X'$.

Recíprocamente, supongamos que $M^o$ es un semi-$|\cdot|^*$-idealoide de $X'$, esto es que $M^{oo}$ es un semi-$|\cdot|$-ideal de $X''$. Si el cotipo de $|\cdot|$ no es $\infty$, aplicando el teorema II.3 tenemos que $M^{oo}$ es un $|\cdot|$-sumando de $X''$. Si $M$ es completo podemos aplicar el teorema 8.7 de [29] y obtener que $M$ es $|\cdot|$-sumando de $X$ luego semi-$|\cdot|$-ideal de $X$. Si $M$ no es completo obtenemos por el mismo teorema que $\overline{M}$ (cierre de $M$ en la completación $\hat{X}$ de $X$) es un $|\cdot|$-sumando de $\hat{X}$, luego $M^o$ $(=\overline{M}^o)$ es un $|\cdot|^*$-sumando de $X'$ $(=\hat{X}')$ y $M$ es un $|\cdot|$-ideal (luego semi-$|\cdot|$-ideal) de $X$.

Supongamos por tanto que el cotipo de $|\cdot|$ no es $\infty$.

Por el teorema II.8 existe una norma, $|||\cdot|||$, equivalente en $X''$ tal que $M^{oo}$ es semi-$M$-ideal de $(X'', |||\cdot|||)$ y además

$$(1) \quad \| x''\| = |(n(|\cdot|^*)|||x''|||, \| x'' + M^{oo}\| )| \quad (x'' \in X'').$$

Definamos $q(x) = |||J_X(x)|||$ $(x \in X)$ con lo que $q$ es una norma equivalente en $X$, verificando

$$(2) \quad \|x\| = |(n(|\cdot|^*)q(x), \| x + M\| )| \quad (x \in X).$$

Por tanto la aplicación $x \to (n(|\cdot|^*)x, x + M)$ es una isometría lineal de $(X, \|\cdot\|)$ en $X \times X/M$ con la norma

$$\| (x, y + M)\| = |(q(x), \| y + M\| )| \quad (x, y \in X).$$

Por el lema III.3, se tiene

$$(3) \quad \| x''\| = |(n(|\cdot|^*)q(x''), \| x'' + M^{oo}\| )| \quad (x'' \in X'').$$

De (1) y el lema I.19 se tiene $\| x''\| \leq |||x''|||$ con lo que $\|x\| \leq q(x)$ $(x \in X)$ y, por tanto, $\| x''\| \leq q(x'')$ $(x'' \in X'')$. Veamos que $|||x''||| = q(x'')$. De (1) y (3) se obtiene

$$|(n(|\cdot|^*)|||x''|||, \| x'' + M^{oo}\| )| = |(n(|\cdot|^*)q(x''), \| x'' + M^{oo}\| )|$$

Si $x'' \in M^{oo}$ se obtiene $|||x''||| = q(x'')$ de la anterior expresión. Sea pues $\| x'' + M^{oo}\| > 0$ y notemos

$r = \dfrac{n(|\cdot|^*)|||x''|||}{\| x'' + M^{oo}\|}$ y $s = \dfrac{n(|\cdot|^*)q(x'')}{\| x'' + M^{oo}\|}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $r \leq s$, entonces se tiene $|(r, 1)| = |(s, 1)|$

de donde se deduce

$$\left|(r,1)\right| = \left|\frac{r}{s}(s,1)+(1-\frac{r}{s})(0,1)\right| \leq$$
$$\leq \frac{r}{s}\left|(s,1)\right| + (1-\frac{r}{s})\left|(0,1)\right| \leq$$
$$\leq \frac{r}{s}\left|(r,1)\right| + (1-\frac{r}{s})\left|(r,1)\right| = \left|(r,1)\right|$$

luego $\left|(s,1)\right| = 1$ con lo que el lema I.19 nos da $|||x''||| \leq \| x''+M^{oo}\|$ y $q(x'') \leq \| x''+M^{oo}\|$ luego $|||x''||| \leq \| x''\|$ y $q(x'') \leq \| x''\|$ que junto con lo anteriormente demostrado nos da $\| x''\| = q(x'') = |||x''|||$. Luego $q(x'') = |||x''|||$ $(x'' \in X'')$ y, por tanto, $M^{oo}$ es semi-$M$-ideal de $(X'',q)$. Aplicando la parte *i)* del corolario III.10 a $M^{o}$ obtenemos que $M^{o}$ es semi-$L$-sumando de $(X',q)$, luego $M$ es semi-$M$-ideal de $(X,q)$.

De (2) se deduce

$$\| x+M\| = \left|(n(|\cdot|^{*})q(x+M), \| x+M\| )\right|$$

Y, por el lema I.19, se tiene $q(x+M) \leq \| x+M\|$ y, por ser $\|x\| \leq q(x)$, es $q(x+M) = \| x+M\|$. Luego, otra vez de (2), se tiene

$$\|x\| = \left|(n(|\cdot|^{*})q(x), q(x+M))\right| \quad (x \in X)$$

Por el teorema II.4, $M$ es semi-$|\cdot|$-ideal de $(X,\|\cdot\|)$.

2 COROLARIO: *$M$ es un $|\cdot|$-ideal de $X$ si y sólo si $M^{o}$ es un $|\cdot|^{*}$-ideal de $X'$.*

DEMOSTRACION: Si $M$ es $|\cdot|$-ideal de $X$ entonces $M^{o}$ es $|\cdot|^{*}$-sumando, y por tanto $|\cdot|^*$-ideal de $X'$.

Recíprocamente, si $M^o$ es $|\cdot|^*$-ideal de $X'$ entonces $M^o$ es semi-$|\cdot|^*$-idealoide de $X'$ y por el teorema anterior $M$ es semi-$|\cdot|$-ideal de $X$. Pero entonces, $M^o$ es a la vez $|\cdot|^*$-ideal y semi-$|\cdot|^*$-sumando de $X'$; por el teorema III.5 $M^o$ es $|\cdot|^*$-sumando de $X'$ y $M$ es $|\cdot|$-ideal de $X$.

Alfsen y Effros ([2], Section 7. Problem 2) preguntaban si todo $M$-ideal débil * cerrado de un espacio de Banach dual es un $M$-sumando. Este problema fue resuelto afirmativamente por Evans ([17], Corollary) y Lima ([22], Theorem 6.16) dio una nueva demostración. En [29] R. Payá demuestra que todo $|\cdot|$-ideal débil * cerrado es $|\cdot|$-sumando en el caso de que $|\cdot|$ tenga tipo distinto de $1$ o cotipo distinto de $\infty$, dejando planteado el problema general ([29], Problema 9.3). El corolario 2 puede enunciarse equivalentemente afirmando que todo ideal débil * cerrado de un espacio dual es un sumando, resolviendo el problema a plena generalidad e incluso en ausencia de hipótesis de complitud. El teorema 1 debe entenderse como la versión no lineal de este resultado, pues puede enunciarse equivalentemente diciendo que todo semiidealoide débil * cerrado de un espacio dual es un semisumando. Obsérvese también que el hecho de que un ideal débil * cerrado en un dual sea automáticamente un sumando hace que el concepto de "idealoide" no tenga contenido, de ahí que no se introdujera en el capítulo III, los idealoides no son otra cosa que ideales.

# B I B L I O G R A F I A


(1) E.M. ALFSEN and E.G. EFFROS: *Structure in real Banach spaces I.* Ann. Math. 96 (1972), 98-128.

(2) E.M. ALFSEN and E.G. EFFROS: *Structure in real Banach spaces II.* Ann. Math. 96 (1972), 129-173.

(3) E. BEHRENDS: *$L^p$-Struktur in Banachräumen.* Studia Math. LV (1976), 71-85.

(4) E. BEHRENDS: *$L^p$-Struktur in Banachräumen II.* Studia Math. LXII (1978), 47-63.

(5) E. BEHRENDS: *M-Structure and the Banach-Stone theorem.* Lecture Notes in Mathematics, 736. Springer-Verlag (1979).

(6) E. BEHRENDS et al.: *$L^p$-Structure in real Banach spaces.* Lecture Notes in Mathematics, 613. Springer-Verlag (1977).

(7) R.P. BOAS: *Entire functions.* Academic Press (1954).

(8) H.F. BOHNENBLUST and S. KARLIN: *Geometrical properties of the unit sphere of Banach algebras.* Ann. Math. 62 (1955), 217-229.

(9) F.F. BONSALL: *Jordan algebras spanned by hermitian elements of a Banach algebra.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 81 (1977), 3-13.

(10) F.F. BONSALL and J. DUNCAN: *Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras.* London Mathematical Society. Lecture Note Series, 2 (1971).

(11) F.F. BONSALL and J. DUNCAN: *Numerical ranges II.* London Mathematical Society. Lecture Note Series, 10 (1973).

(12) C.K. CHUI, P.W. SMITH, R.R. SMITH and J.D. WARD: *L-ideals and numerical range preservation*. Illinois J. Math. 21 (1977), 365-373.

(13) F. CUNNINGHAM Jr.: *L-Structure in L-spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 274-299.

(14) F. CUNNINGHAM Jr.: *M-Structure in Banach spaces*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 63 (1967), 613-629.

(15) F. CUNNINGHAM Jr., E.G. EFFROS and N.M. ROY: *M-Structure in dual Banach spaces*. Israel J. Math. 14 (1973), 304-308.

(16) R. EVANS: *Projektionen mit normbedingungen in reellen Banachräumen*. Dissertation, Freie Universität Berlin (1974).

(17) R. EVANS: *A characterization of M-summands*. Proc. Camb. Phil. Soc. 76 (1974), 157-159.

(18) H. FAKHOURY: *Existence d'une projection continue de meilleure approximation dans certains espaces de Banach*. J. Math. Pures et Appl. 53 (1974), 1-16.

(19) J.R. GILES: *Convex analysis with applications in differentiation of convex functions*. Research Notes in Mathematics, 58. Pitman (1982).

(20) G. GODEFROY: *Symétries isométriques applications à la dualité des espaces reticulés*. Israel J. Math. 44 (1983), 61-74.

(21) B. HIRSBERG: *M-ideals in complex function spaces and algebras*. Israel J. Math. 12 (1972), 133-146.

(22) A. LIMA: *Intersection properties of balls and subspaces of Banach spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 227 (1977), 1-62.

(23) A. LIMA: *M-ideals of compact operators in classical Banach spaces*. Math. Scand. 44 (1979), 207-217.

(24) A. LIMA: *On M-ideals and best approximation*. Indiana Univ. Math. J. 31 (1982), 27-36.

(25) G. LUMER and R.S. PHILLIPS: *Dissipative operators in a Banach space*. Pac. J. Math. 11 (1961), 679-698.

(26) J. MARTINEZ MORENO: *JV-algebras*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 87 (1980), 47-50.

(27) J. MARTINEZ MORENO, A. MOJTAR KAIDI and A. RODRIGUEZ PALACIOS: *On a nonassociative Vidav-Palmer theorem*. Quart. J. Math. Oxford (2), 32 (1981), 435-442.

(28) J. MARTINEZ MORENO, J.F. MENA JURADO, R. PAYA ALBERT and A. RODRIGUEZ PALACIOS: *An approach to numerical ranges without Banach algebra theory*. Aparecerá en Illinois J. Math.

(29) R. PAYA ALBERT: *Técnicas de rango numérico y estructura en espacios normados*. Tesis doctorales de la Universidad de Granada nº 319 (1980).

(30) R. PAYA ALBERT: *Numerical range of operators and structure in Banach spaces*. Quart. J. Math. Oxford (2), 33 (1982), 357-364.

(31) F. PERDRIZET: *Espaces de Banach ordonnés et ideaux*. J. Math. Pures et Appl. 49 (1970), 61-98.

(32) A. RODRIGUEZ PALACIOS: *A Vidav-Palmer Theorem for Jordan C*-algebras and related topics*. J. London Math. Soc. (2), 22 (1980), 318-332.

(33) A. RODRIGUEZ PALACIOS: *Non-associative normed algebras spanned by hermitian elements*. Proc. London Math. Soc. (3), 47 (1983), 258-274.

(34) R.R. SMITH and J.D. WARD: *M-ideal structure in Banach algebras*. J. Func. Anal. 27 (1978), 337-349.

(35) P. VOLKMANN: *Über die Möglichkeit, die Norm eines normierten Raumes aus der Zerlegung in zwei Unterräume mit Hilfe einer Norm des* $\mathbb{R}^2$ *zu gewinnen*. Arch. Math. 40 (1983), 377-384.

(36) D. YOST: *Best approximation and intersection of balls in Banach spaces*. Bull. Austral. Math. Soc. 20 (1979), 285-300.

(37) D. YOST: *The n-ball properties in real and complex Banach spaces*. Math. Scand. 50 (1982), 100-110.

(38) D. YOST: *Semi-M-ideals in complex Banach spaces*. Aparecerá en Rev. Roumaine Math. Pures Appl.

(39) M.A. YOUNGSON: *A Vidav-Palmer theorem for Banach Jordan algebras*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 84 (1978), 263-272.