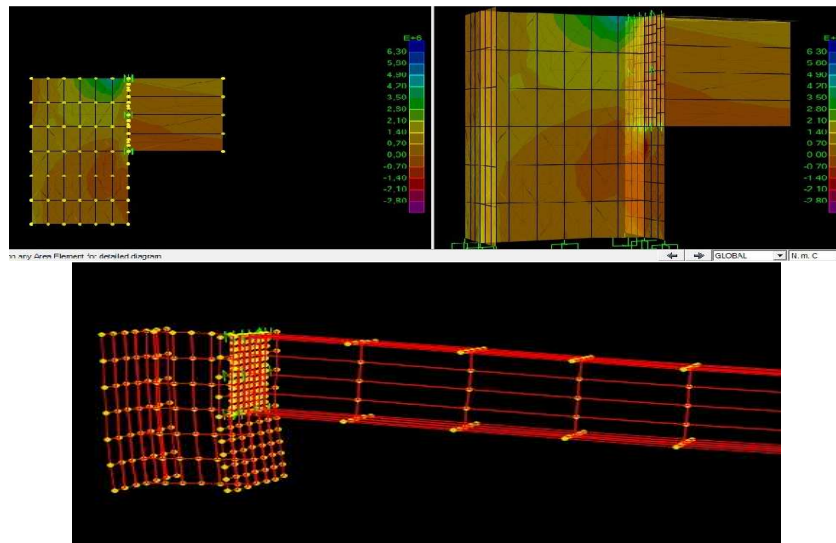

TRABAJO FIN DE MÁSTER

CARACTERIZACIÓN DE UNIONES METÁLICAS SEMIRRÍGIDAS MEDIANTE ANÁLISIS MODAL



PROYECTO FIN DE MASTER 2011-2012

TUTOR: Rafael Gallego Sevilla
ALUMNO: **Francisco José Botella Juan**

FECHA: 18 Diciembre 2011



AGRADECIMIENTOS:

Quiero expresar mi agradecimiento a todos los que me han apoyado para llevar a buen fin el trabajo que se recoge en esta memoria.

A mi director del presente trabajo, el Prof. Dr. D. Rafael Gallego Sevilla catedrático del departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica de la Escuela Técnica Superior de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad de Granada. También a D. Germán Gutiérrez Salido, profesor asociado de dicho departamento.

A los miembros del grupo Mecánica de sólidos y estructuras (TEP167) de la UGR, por su asesoramiento y la disponibilidad de medios y materiales para el desarrollo del trabajo.

A mi familia, por su apoyo incondicional y permanente ánimo en todo momento.

INDICE GENERAL:

| | |
|---|-----------|
| INDICE I: Listado General de Tablas e Ilustraciones | 4 |
| INDICE II: Listado General de Ecuaciones | 9 |
| | |
| (I) Objetivos y Metodología del Trabajo Fin de Máster: | 11 |
| (II) Metodología: Capítulos I-V | 12 |
| | |
| CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN TEÓRICA AL ANÁLISIS MODAL APLICADO A LA CARACTERIZACIÓN DE UNIONES METÁLICAS SEMIRRÍGIDAS. | 13 |
| 1.1. Explicación del OMA y su justificación frente al análisis experimental para la caracterización de uniones metálicas | 13 |
| 1.2. Técnicas de excitación | 17 |
| 1.2.1. Impacto | 18 |
| 1.2.2. Excitación Estática..... | 19 |
| 1.3. Análisis modal operacional y su comparativa con el análisis modal experimental | 22 |
| 1.3.1. Peak Picking | 22 |
| 1.3.2. Descomposición en el Dominio de la Frecuencia..... | 24 |
| | |
| CAPÍTULO II: SIMULACIÓN DE ENSAYOS REALIZADOS EN LA ESTRUCTURA | 28 |
| 2.1 Problema de contacto en los respectivos apoyos de la estructura dad, considerando inversión de la reacción en función del tiempo | 28 |
| | |
| CAPÍTULO III: CARACTERIZACIÓN DE LA UNIÓN METÁLICA | 37 |
| 3.1 Análisis de uniones Metálicas | 37 |
| 3.2 Caracterización del Comportamiento de Uniones | 38 |
| 3.3 Clasificación general de Uniones | 39 |
| 3.4 Diferencia entre Unión y Conexión..... | 41 |
| 3.5 Tipos de Uniones Viga-Columna | 42 |

| | | |
|-------|--|----|
| 3.5.1 | Descripción de Uniones Semirrígidas Viga-Columna..... | 43 |
| 3.5.2 | Clasificación de Uniones Semirrígidas Viga-Columna | 44 |
| 3.5.3 | Tipos de Uniones más utilizadas | 49 |

CAPÍTULO IV: CÁLCULOS ANALÍTICOS Y COMPUTACIONES EN LOS RESPECTIVOS MODOS 51

| | | |
|--------|--|----|
| 4.1. | Dimensionamiento de la unión atornillada | 51 |
| 4.1.1. | Dimensionamiento de los tornillos. | 51 |
| 4.1.2. | Cálculo de la unión | 53 |
| 4.1.3. | Cálculo de la rigidez | 57 |
| 4.1.4. | Cálculo de unión con suposición de fallo | 64 |
| 4.1.5. | Cálculo de rigidez con suposición de fallo | 64 |
| 4.2. | Cálculo de la unión soldada..... | 66 |
| 4.3. | Cálculos comparativos entre los valores en el supermodelo de la figura mostrada y comparados con la curva momento rotación | 71 |
| 4.4. | Valores modales de vigas IPN 80 a HEB 80 con las uniones dadas en las respectivas condiciones anteriores..... | 71 |
| 4.4.1. | Cálculo analítico | 71 |
| 4.4.2. | Cálculo mediante del software SAP 2000 | 79 |

CAPÍTULO V: CÁLCULOS ANÁLISIS DEL MODELO DE ECUACIONES DEL ESPACIO ESTADO 84

| | | |
|--------|---|----|
| 5.1. | Descripción | 84 |
| 5.2. | Expresión del Modelo en Espacio Estado..... | 84 |
| 5.2.1 | Definiciones útiles | 84 |
| 5.2.2. | Definición en Modelo de Espacio Estado..... | 85 |

CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES GENERALES..... 88

CAPÍTULO VII: LINEAS FUTURAS 90

APÉNDICES (CÓDIGOS DE SIMULACIÓN ADJUNTOS) 91

BIBLIOGRAFÍA USDA EN ESTE TRABAJO 99

ÍNDICE 1.

LISTA DE TABLAS E ILUSTRACIONES

Capítulo 1

| | |
|--|-------|
| Figura 1.1. Descomposición en el dominio de la frecuencia de una señal compleja..... | 13 |
| Figura 1.2. Descomposición de la viga IPE 100 en sus modos de vibración..... | 14 |
| Figura 1.3. Modelo de un grado de libertad..... | 15 |
| Figura 1.4. Modelo físico y matriz diagonal del sistema..... | 16 |
| Figura 1.5. Excitador electromecánico. | 20 |
| Figura 1.6.Excitador electromagnético..... | 21 |
| Figura 1.7.Excitador electrohidráulico | 21 |
| Figura 1.8. Representación de los picos de la densidad espectral (Peak Picking)..... | 26 |
| Figura 1.9. Valores residuales de la matriz de densidad espectral | 27 |
| Figura 1.10. Ventana empleada para realizar la anti-transformada de Fourier | |

Capítulo 2

| | |
|--|----|
| Figura 2.1. Esquema de impacto..... | 28 |
| Figura 2.2. Respuesta de la estructura al entrar en carga..... | 30 |
| Figura 2.3. Excitación de una viga bajo carga impulsiva en el centro del vano..... | 31 |
| Figura 2.4. Ruidos utilizados para la excitación de la estructura en los respectivos nodos | 32 |
| Figura 2.5. Respuestas de los respectivos nodos de la estructura..... | 33 |
| Figura 2.6. Respuestas de los apoyos de la estructura (I)..... | 34 |
| Figura 2.7. Respuestas de los apoyos de la estructura (II)..... | 35 |
| Figura 2.8. Respuestas de los apoyos de la estructura (III)..... | 36 |

Capítulo 3

| | |
|--|----|
| Figura 3.1. Modelo por el método de elementos finitos. | 37 |
| Figura 3.2. Comportamiento real de una unión viga-columna..... | 38 |
| Tabla 3.1. Modelos de unión y métodos de análisis a utilizar | 40 |
| Tabla 3.2. Clasificación de unio | 40 |

| | |
|---|----|
| Figura 3.3 Tipologías de uniones en una estructura | 41 |
| Figura 3.4 Diferencia entre unión y conexión | 42 |
| Figura 3.5. Flexibilidad de la unión metálica, y su relación al diagrama momento-rotación | 43 |
| Figura 3.6. Clasificación de uniones de acuerdo con su rigidez | 45 |
| Figura 3.7. Límites s/EC3 para la clasificación de una unión en función de la rigidez | 46 |
| Figura 3.8. Límites para la clasificación de una unión según la Resistencia | 47 |
| Figura 3.9 Clasificación de las uniones | 48 |
| Figura 3.10 Curva momento-rotación de uniones viga-columna | 49 |
| Figura 3.11 Modelo 3D de la unión a dimensionar | 50 |

Capítulo 4

| | |
|--|----|
| Figura 4.1. Esquema de las dimensiones de los perfiles de la unión..... | 51 |
| Figura 4.2. Dimensiones, tolerancias a los respectivos bordes frontales y bordes laterales | 52 |
| Tabla 4.1. Respetivos anchos eficaces en función del modo de rotura .. | 53 |
| Tabla 4.2. Fórmulas de los respectivos anchos eficaces | 53 |
| Tabla 4.3. Fórmula de los respectivos anchos eficaces | 54 |
| Tabla 4.4. Fórmula de los respectivos anchos eficaces | 55 |
| Figura 4.3. Curva del momento de rotación hallada en el desarrollo del EC-3 | 63 |
| Figura 4.4. Curva del momento de rotación hallada en el desarrollo del EC-3 | 66 |
| Figura 4.5. Curva del momento de rotación para el supermodelo 3D..... | 71 |
| Figura 4.6. Cálculo de la estructura mediante un modelo de muelles..... | 74 |
| Figura 4.7. Modelo de elementos finitos en el que se muestra la deformada | 74 |
| Figura 4.8. Modelo de elementos finitos en el que se muestran las distintas tensiones..... | 75 |

| | |
|---|----|
| Figura 4.9. Modelo de elementos finitos en el que se muestran las tensiones máximas..... | 76 |
| Tabla 4.1. Formulas for natural frequency and mode shape | 78 |
| Tabla 4.2. Valores Modales estimados para viga en UNIÓN SOLDADA a HEB 80 ... | 79 |
| Tabla 4.3. Valores Modales estimados para viga en UNIÓN ATORNILLADA | 79 |
| Tabla 4.4. Valores Modales estimados para viga en UNIÓN FALLO..... | 80 |
| Tabla 4.5. Casuística de los distintos valores del Momento de Rotación | 81 |
| Tabla 4.6. Tabulación de los valores modales de las respectivas uniones.. | 82 |
| Tabla 4.7. Casos para realizar el respectivo estudio del análisis modal experimental..... | 83 |

Capítulo 5

No hay tablas ni figuras

Capítulo 6

Figura 6.1. Contraste entre los distintos modelos estudiados

88

Capítulo 7

No hay tablas ni figuras

Capítulo 8. Apéndice

No hay tablas ni figuras

ÍNDICE 2.

LISTADO DE ECUACIONES

Capítulo 1

| | |
|--|----|
| Ecuación 1.1. Descomposición en el dominio de la frecuencia..... | 24 |
| Ecuación 1.2. Bendat y Piersol | 24 |
| Ecuación 1.3. Descomposición modal de la matriz de densidades espectrales | 25 |
| Ecuación 1.4. Descomposición en Valores Singulares | 25 |

Capítulo 2

| | |
|---|----|
| Ecuación 2.1. Deformación del valor de la carga estática | 28 |
| Ecuación 2.2. Potencial interno de la viga..... | 28 |
| Ecuación 2.3. Potencial interno de la viga..... | 29 |

Capítulo 3

| | |
|---|-------|
| Ecuaciones para clasificación de una unión en función de la resistencia..... | 47-49 |
|---|-------|

Capítulo 4

| | |
|---|-------|
| Ecuaciones de Dimensionamiento de la unión atornillada | 52-66 |
| Ecuaciones de Dimensionamiento de la unión soldada | 66-70 |
| Ecuaciones relativas a los Cálculos comparativos entre los valores en el supermodelo de la figura mostrada y comparados con la curva momento rotación | 71-78 |
| Ecuaciones de los Valores modales de vigas IPN 80 a HEB 80 con las uniones dadas en las respectivas condiciones anteriores | 79-83 |

Capítulo 5

| | |
|---|----|
| Ecuacion 5.1. Ecuación diferencial para calcular el equilibrio del sistema.. | 84 |
| Ecuacion 5.2. Definiciones para una manipulación matemática alternativa | 85 |

| | |
|--|----|
| Ecuacion 5.3. Ecuación de Estado | 86 |
| Ecuacion 5.4. Ecuación de observación..... | 86 |
| Ecuacion 5.5. Ecuación de observación | 86 |
| Ecuacion 5.6. Ecuación de observación | 86 |
| Ecuacion 5.7. Ecuación de relación entre fuerzas y aceleraciones | 86 |
| Ecuacion 5.8 Par de ecuaciones | 87 |
| Ecuacion 5.9. Matrices con vectores propios | 87 |
| Ecuacion 5.10. Ecuación de desarrollo | 87 |
| Ecuacion 5.11. Componentes observables modales | 87 |

OBJETIVOS Y METODOLOGÍA DEL T.F.M :

A continuación se enumeran los objetivos del presente Trabajo Fin de Máster :

1. Se aborda en este trabajo fin de máster, la caracterización de las uniones semirrígidas mediante la aplicación del Análisis Modal Operacional (OMA). Una vez validadas las uniones semirrígidas, se extenderá su aplicación a las uniones en estructuras reales para identificar su comportamiento efectivo frente al numérico (teórico), obtenido en su fase de cálculo y comprobación.

Para ello se hace uso de la siguiente **metodología** en la cual se aplica el estudio a una viga elemental con uniones semirrígidas:

- 1.1 Introducción al análisis modal operacional, justificando su uso, y contraste de valores teórico experimental.
- 1.2 Información del comportamiento teórico ideal de las uniones semirrígidas.
2. Ensayo de las estructuras para la detección y predicción de defectos tales como la pérdida de rigidez en unos de los medios de unión.
3. Estudio del despegue en los apoyos de la estructura cuando está sometida a un historial de carga aleatoria, ruido blanco y a una carga impulsiva.
4. Modelado mediante un programa de elementos finitos (SAP 2000) una unión semirrígida, teniendo en cuenta las no linealidades mecánica y geométrica, con objeto de obtener una curva momento rotación.
5. Realización de un estudio de los parámetros modales mediante los respectivos métodos de Análisis Modal, tales como *Peak Picking*, Descomposición en el dominio de la frecuencia (FDD), e identificación de espacios estocásticos (SSI, COV, *Covariance-Driven* SSI) y SSI-DATA.

A continuación se exponen los capítulos que incluyen la metodología del presente TFM (CAP. I-CAP. V).

Posteriormente se incluyen los capítulos CAP VI (Conclusiones), Cap VII (Líneas Futuras) y apéndices de simulaciones.

1

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS MODAL EXPERIMENTAL Y EL ANÁLISIS MODAL OPERACIONAL. APLICACIÓN A LA CARACTERIZACIÓN DE UNIONES METÁLICAS SEMIRRÍGIDAS:

1.1 INTRODUCCIÓN TEÓRICA: CONCEPTO

El análisis modal es un proceso mediante el cual se describe una estructura en términos de **sus propiedades dinámicas o parámetros modales**, que son: la **frecuencia, el amortiguamiento y los modos de vibración** para todos los modos en el rango de frecuencias de interés. Todas las estructuras poseen frecuencias naturales y modos de vibración, que dependen básicamente de la masa y de la rigidez de la estructura. En el proceso de diseño, es necesario identificar estas frecuencias y conocer cómo afecta a la respuesta de la estructura cuando una fuerza actúa sobre la misma. El análisis modal, por ende, es una herramienta eficiente para describir, comprender y modelar el comportamiento de las estructuras.

Se puede dar una definición simplificada del análisis modal comparándolo con el análisis en frecuencia. En el análisis en frecuencia, una señal compleja se descompone en una serie de ondas sinusoidales simples con parámetros de amplitud y frecuencia individuales. En el análisis modal, una deformación compleja de una estructura se descompone en una serie de **modos simples de deformación**, con parámetros de frecuencia y amortiguamiento individuales. El fin último del análisis modal, es la construcción de un Modelo Modal del comportamiento de la estructura.

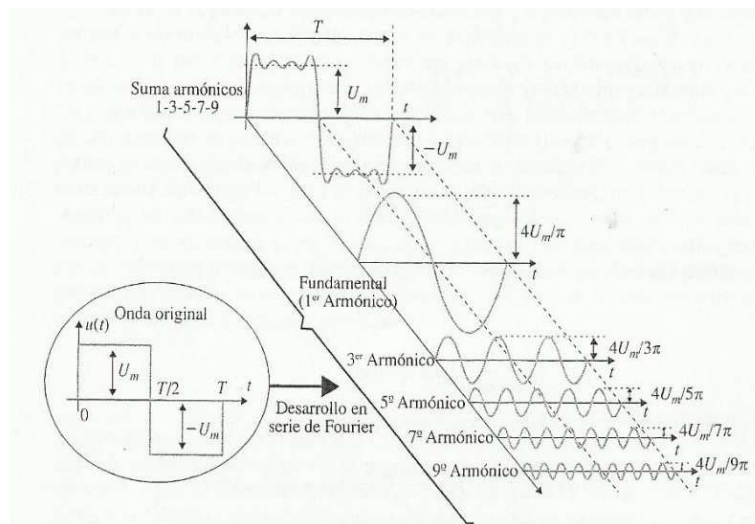


Fig. 1.1

(Descomposición en el dominio de la frecuencia de una señal compleja.)

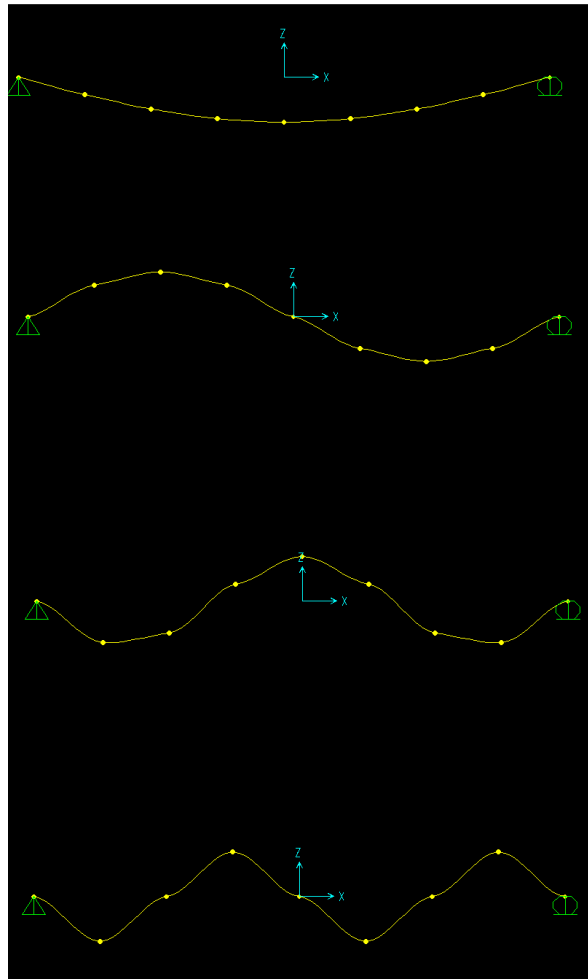


Fig. 1.2

(Descomposición de la viga IPE 100 en sus respectivos cuatro modos de vibración.)

El análisis modal experimental, estudia la estructura cuando se encuentra sometida a una excitación conocida, **cuando no lo está, el análisis es operacional.**

Se toma como objetivo, el caracterizar la rigidez de las uniones metálicas del pórtico compuesto por un IPE 100 de 1,5 m unido a un HEB 100 de 0,4 m, con la intención de estudiar el comportamiento semirrígido de la unión. Como resultado, se obtiene las gráficas Momento Rotación de la estructura. El procedimiento consiste primeramente en la adquisición de datos, después de un análisis y finalmente determinar todos los parámetros modales. Los parámetros modales son importantes porque describen las propiedades dinámicas **inherentes** a una estructura.

Por otra parte, el conocimiento del amortiguamiento modal es muy útil para predecir la fatiga de vida y reducir las respuestas en resonancia.

En un ensayo dinámico, se aplica una carga dinámica a la estructura, dicha carga tiene componentes en un cierto rango de frecuencias y la estructura responde a todas las frecuencias; pero entrará en resonancia cuando las componentes coincidan con las frecuencias naturales de la estructura. La

respuesta de la estructura será una superposición lineal de todos los modos de vibración excitados. Una propiedad importante de los modos, es que cualquier respuesta de la estructura puede ser expresada como una combinación en serie de ellos.

Cada pico de respuesta de una estructura puede ser representado por un modelo físico de un grado de libertad. Dicho modelo consistirá en una masa puntual, sostenida por un muelle sin masa y conectada con un amortiguador viscoso. Adicionalmente, dicha masa tiene restringido todos sus movimientos excepto uno, el que comprime el muelle y el amortiguador. Es plausible también, construir un modelo físico que describa en el dominio del tiempo el comportamiento de este sistema de un grado de libertad, mediante la aplicación de la segunda ley de Newton.

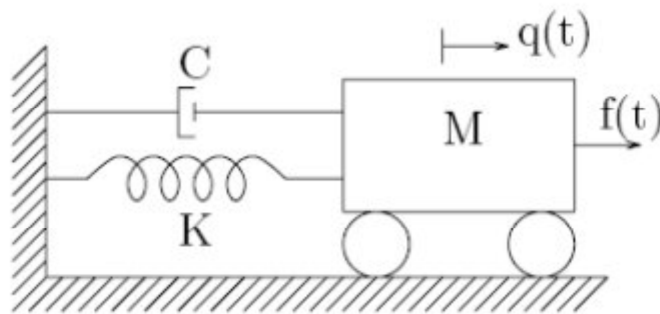


Fig. 1.3
(Modelo de un grado de libertad.)

El espectro de la respuesta de un sistema mecánico presenta tantos picos como grados de libertad posea el sistema. Las frecuencias modales se determinan observando los picos de la FRF mientras que los amortiguamientos modales no son tan fáciles de determinar, siendo a menudo parámetros medidos con un cierto grado de incertidumbre.

La matriz de la función de respuesta en frecuencia es simétrica, debido a esta propiedad, sólo es necesario calcular una fila o una columna de dicha matriz para poder obtener los modos.

Para efectuar este cálculo, simplemente hay que ir desplazando el punto en el que se aplica la fuerza externa al sistema a través de los diferentes puntos de medida.

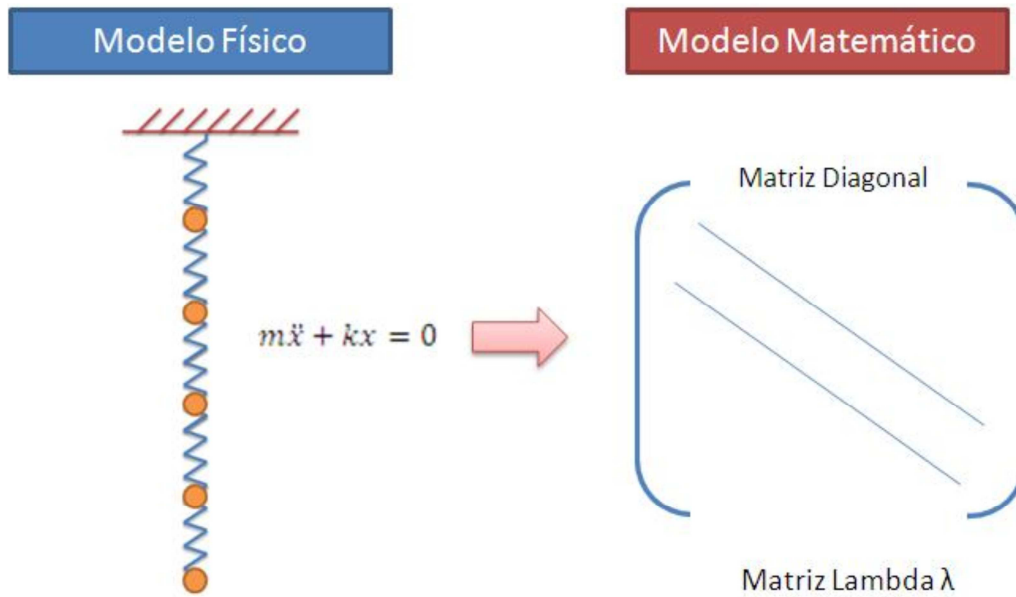


Fig. 1.4
(Modelo físico y matriz diagonal del sistema.)

Los modos se pueden obtener observando la parte imaginaria de los espectros de frecuencia para la fila o columna medida, tal como se describe en **Avitabile (2001)**. En dichas representaciones, aparecen unos picos a ciertas frecuencias que coinciden con las frecuencias naturales del sistema. Dichos picos, contienen la información de la amplitud de cada uno de los modos de vibración.

Uniando las amplitudes de los picos que aparecen en una determinada frecuencia (que se obtienen para la misma fila o columna medida), el resultado es la representación del modo de vibración asociado a dicha frecuencia natural.

Es fundamental para el cálculo de los modos de vibración de una estructura que no se coloque el punto de medida sobre un nodo del modo que se desea medir. Esto se debe a que **la parte imaginaria de la FRF no proporcionará ningún pico** para la frecuencia asociada a ese modo.

El análisis modal tiene muchas utilidades. Las más importantes se muestran a continuación:

- Comprender como se comportan las estructuras bajo la acción de fuerzas dinámicas.
- Medir las propiedades de la estructura cuando se somete a una vibración para refinar y validar modelos analíticos. Cada vez se usan más los ensayos dinámicos combinados con los análisis de elementos finitos para mejorar los modelos analíticos a partir de los cuales se pueden identificar los parámetros de las secciones, módulo de Young, apoyos, etc.

- Modelar y simular, ya que proporciona una descripción definitiva del comportamiento de una estructura que puede ser evaluada para ciertas especificaciones del diseño. Ayudar en el diseño de todo tipo de estructuras (aviones, naves espaciales, coches, raquetas de tenis...) y hacer simulaciones en el desarrollo de prototipos.
- Controlar la integridad de las estructuras y su comportamiento, con el fin de detectar problemas y evitarlos. Comprobar el estado de las estructuras después de sufrir daños como por ejemplo los debidos a un terremoto.
- Predecir o simular la respuesta a excitaciones externas o cómo se comportará la estructura bajo otras condiciones de operación diferentes. Simular cambios en las características dinámicas, debido a modificaciones físicas, bien sea añadiendo una carga mayor o una rigidez para obtener una propiedad dinámica deseada.
- Estimar las fuerzas que actúan sobre la estructura.
- Hacer un análisis del ensamblaje de estructuras.

1.2 TÉCNICAS DE EXCITACIÓN

Las técnicas de excitación se pueden dividir en dos tipos: Las que permanecen en contacto con la estructura durante el ensayo y las que no.

- Las primeras pueden proporcionar una excitación continua (sinusoidal, aleatoria, etc.) o transitoria (pulso), y para ello se emplean los excitadores electromecánicos, electromagnéticos y electrohidráulicos.
- Las otras están sólo en contacto durante un período de tiempo corto, mientras se aplica la excitación, como son el impacto y la excitación estática. Las fuerzas externas que se aplican determinan el contenido en frecuencia de la respuesta.

Mediante el ensayo de impacto, generalmente se puede obtener una de las filas de la matriz de FRF, mientras que con el excitador se mide una de las columnas de dicha matriz.

Desde el **punto de vista teórico no hay diferencias entre usar un método u otro para excitar la estructura**, pero en la práctica aparecen ciertos factores importantes a tener en cuenta.

Lo primero es que, cuanto más ligera sea la estructura, mayor influencia tendrá en los resultados cualquier adición de masa, como por ejemplo la debida a los acelerómetros.

Adicionalmente, hay que tener en cuenta que los modos de la estructura se verán afectados por la rigidez y la masa del sistema de fijación del excitador.

Hay ciertos parámetros a considerar antes de elegir una forma de excitación:

- Forma y lugar de aplicación.
- Control del espectro de frecuencia excitado: es la capacidad de limitar la excitación al rango de frecuencias que interesa estudiar.
- Velocidad del ensayo.
- Equipos disponibles.
- Comportamiento lineal/no lineal de la estructura.

1.2.1 IMPACTO

La técnica de excitación para el análisis modal más conocida es el impacto, mediante un excitador tipo martillo. La duración del impacto es normalmente muy corta en comparación con el tiempo que hay que medir la respuesta. Lo realmente importante es la medida de la señal de fuerza durante el impacto, la señal que permanece posteriormente sólo es ruido, que puede ser debido a ruido eléctrico o a la propia vibración del martillo después del impacto. Este método permite excitar frecuencias hasta 5 - 10 kHz, dependiendo del tamaño del martillo.

Hay dos factores fundamentales a la hora de realizar un ensayo de impacto mediante un martillo:

El primero es la elección de la punta del martillo, que puede tener un importante efecto en los datos medidos. El rango de frecuencias excitado por esta entrada se controla principalmente mediante la dureza de la punta elegida. La punta hay que elegirla de manera que se exciten todos los modos de vibración que se quieren medir. Si es muy blanda, todos los modos no se excitarán de manera adecuada para obtener una buena medida. Además de no obtener una buena función de coherencia. Por todo esto, es un factor determinante y que hay que estudiar muy bien antes de realizar el ensayo.

El segundo es la elección de una ventana apropiada para el posterior análisis de las medidas realizadas.

Generalmente, para estructuras débilmente amortiguadas, la respuesta de la estructura debida a una excitación como un impacto no llegará a cero al final del intervalo de muestreo. En este estado, al transformar los datos para obtener la señal digital se obtienen errores que pueden llegar a ser significativos y que se deben al fenómeno conocido como *leakage*. Para minimizar estos errores, se emplea una ventana para obligar que los datos cumplan mejor los requisitos de periodicidad para la Transformada de Fourier, el uso de ventanas tiene como contrapartida una distorsión de los datos que debe ser evitada en la medida de lo posible. Para ensayos de impacto, se debe tomar el ancho de banda lo más estrecho posible para las medidas tomadas e incrementar la resolución del espectro.

Con este tipo de excitación se consigue excitar un gran número de modos de vibración -tanto de flexión como de torsión-, y ha demostrado ser una forma sencilla y efectiva de excitar grandes estructuras.

Se usa a menudo para realizar el análisis modal de sistemas estructurales lineales ya que la fuente de excitación es fácil de mover de un punto a otro, sin embargo los acelerómetros permanecen en posiciones fijas.

Como ventajas se pueden enumerar:

- no es muy caro.

- no hay que cargar más la estructura, no hay que añadirle masa. Esto es importante

También presenta este método algunos inconvenientes:

- se puede provocar que la estructura entre en su zona de comportamiento no lineal, no siendo esta de interés.
- para excitar a una estructura grande, hay que aplicar grandes picos de fuerza, lo cual puede producir daños locales en la estructura.
- debido a que la señal de excitación es conocida, la función de coherencia no puede mostrar si hay *leakage* o comportamiento no lineal de la estructura.
- el espectro sólo se puede controlar por su límite superior de frecuencia, por lo que esta técnica no se puede emplear para hacer un zoom en el análisis.

1.2.2 EXCITACIÓN ESTÁTICA

Un método de excitación muy empleado consiste en aplicar una carga estática a una estructura y retirarla repentinamente. En este caso el excitador puede ser cualquier masa. La carga se puede aplicar lentamente desde el instante inicial hasta el tiempo de medida (T_0), permitiendo que todas las vibraciones residuales desaparezcan durante el tiempo de aplicación de la carga.

Cuando se retira la carga, sólo se excitan aquellos modos que contribuyen a la deflexión estática producida por la carga aplicada. Por tanto, **aquellos modos que presenten un nodo en el punto de aplicación de la carga no serán excitados.**

Este método de excitación se emplea mucho para ensayar grandes estructuras como las de la industria aeroespacial, plataformas petrolíferas o ejes de grandes turbinas.

- **Excitadores adheridos**

Hay muchos factores a considerar a la hora de realizar el ensayo mediante un excitador, pero los más importantes se centran en torno a los efectos de las señales de excitación que minimizan la necesidad de ventanas o incluso la eliminan.

Una de las técnicas de excitación más comunes es la excitación aleatoria debido a su fácil implementación. Sin embargo, debido a la naturaleza de esta señal, el *leakage* es crítico y el uso de la ventana *Hamming* es común. El efecto del *leakage* es serio y provoca la distorsión de la FRF medida incluso cuando se emplean ventanas.

Dos señales de excitación ampliamente usadas son la onda *sinusoidal* y la explosión aleatoria. Ambas presentan la característica de no necesitar ventanas, ya que estas señales están libres de *leakage* en la mayoría de las situaciones de ensayo.

Estas señales son relativamente sencillas de emplear y se encuentran de forma habitual en los analizadores de ondas.

- Excitador electromecánico:

Este tipo de excitadores, son capaces de generar una fuerza de frecuencia variable aunque tiene una relativa baja flexibilidad o control en su uso. La magnitud de la fuerza está restringida por las características físicas del excitador, es decir, de la masa en movimiento. Además, se conoce tanto la magnitud como la fuerza aplicada.

Es poco efectivo para excitar bajas frecuencias, aunque la amplitud de la vibración producida llega a ser relativamente alta en comparación con la amplitud del movimiento de la masa del excitador.

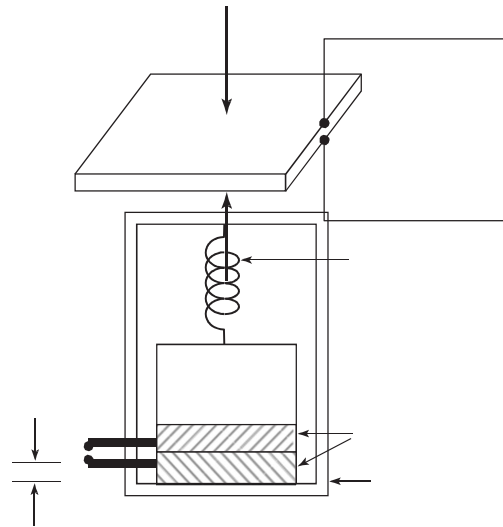


Fig. 1.5
(Excitador electromecánico.)

- Excitador electromagnético:

La frecuencia y la amplitud se controlan de manera separada, dando así mayor flexibilidad de excitación. Pueden excitar frecuencias hasta 30 - 50 kHz.

Hay una pequeña diferencia entre la magnitud de la fuerza que ejerce el excitador, que es la que se puede medir, y la que se aplica sobre la estructura. Debido a esto **es deseable que el excitador se encuentre lo más próximo posible a la estructura** para minimizar esta diferencia.

Se muestra en la figura siguiente un ejemplo de este tipo de excitador.

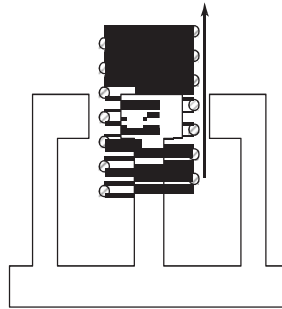


Fig. 1.6
(Excitador electromagnético.)

- Excitador electrohidráulico :

Pueden aplicar simultáneamente tanto una carga estática como una carga dinámica. Esto **puede ser muy útil para ensayos de estructuras o de materiales cuyas cargas normales de vibración se combinan con una carga estática mayor** que puede cambiar sus propiedades dinámicas o incluso su geometría.

Pueden producir golpes relativamente fuertes, que permiten la excitación de las estructuras con grandes amplitudes. Operan en un rango de frecuencias relativamente estrecho, ya que sólo llegan a excitar frecuencias de hasta 1 kHz.

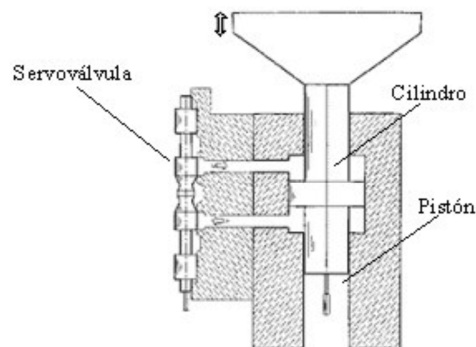


Fig. 1.7
(Excitador electrohidráulico.)

1.3 ANÁLISIS MODAL OPERACIONAL Y SU COMPARATIVA CON EL ANÁLISIS MODAL EXPERIMENTAL:

En el análisis modal tradicional, los parámetros modales se obtienen de las funciones de respuesta en frecuencia (FRFs), que relacionan la salida (respuesta) con la entrada (excitación). Para este tipo de análisis es necesario conocer la entrada y la salida del sistema.

El análisis modal operacional se basa, sin embargo, en la medida de la respuesta de la estructura usando sólo el ambiente y las fuerzas de servicio que actúan sobre la misma. Esto se usa para obtener una descripción modal de la estructura bajo sus condiciones de operación. Así, en vez de cargar la estructura artificialmente y tratar la excitación ambiental como una fuente de ruido no deseado, se usa como fuente la excitación natural.

Como estas fuerzas de entrada al sistema no se miden, no se tendrá una medida de las FRFs. La ventaja de emplear una excitación artificial, es que hay muchos más procedimientos para identificar los parámetros y características de los sistemas, con mayor precisión en la identificación de ciertos parámetros como los coeficientes de amortiguamiento.

Este sistema sólo mide la respuesta de la estructura debida a las excitaciones ambientales, que luego se analizan para obtener casi la misma información que se puede obtener con el análisis modal tradicional, ya que las masas modales no se pueden obtener sin el conocimiento de las fuerzas de entrada.

Existen muchos métodos para realizar el análisis modal operacional. En este trabajo fin de Máster se van a describir algunos de ellos: *Peak Picking* (PP), Descomposición en el Dominio de la Frecuencia (FDD), NExT/ERA e Identificación de Subespacios Estocásticos (SSI).

1.3.1 PEAK PICKING (PP)

Es el método más simple conocido para identificar los parámetros modales de estructuras de ingeniería civil sujetas a cargas ambientales. Se basa en que la función de respuesta en frecuencia alcanza valores extremos en torno a las frecuencias naturales. Dichas frecuencias se obtienen simplemente observando la gráfica de la función de densidad espectral promediada y normalizada, como se describe en **Ren y Zong (2004)**. Es una técnica que se desarrolla en el dominio de la frecuencia, donde los algoritmos son más usados debido a su simplicidad y su velocidad de realización.

A pesar de que las fuerzas de entrada no se miden, esto se resuelve adoptando una técnica de identificación de parámetros modales derivada de la tradicional, en la que las funciones de respuesta en frecuencia y la función de coherencia se calculan para cada punto de medida con respecto a la medida de referencia. Por tanto, la señal del sensor de

referencia se usa como entrada.

Nótese que en el contexto de análisis modal operacional la función de transferencia no significa la relación entre la respuesta y la fuerza aplicada, sino que representa la relación entre la respuesta medida por un sensor cualquiera y el de referencia. Por lo que todas las funciones de transferencia están relacionadas en este tipo de análisis con la respuesta medida por el sensor de referencia, lo que ayuda en la identificación de las resonancias.

La función de coherencia para dos registros simultáneos de señales de respuesta tiene valores próximos a uno en las frecuencias de resonancia, debido a la alta relación señal-ruido. Consecuentemente, la inspección de la función de coherencia puede ayudar a la elección de dichas frecuencias.

Las frecuencias naturales se determinan como los picos de la función densidad espectral promediada y normalizada. Esta función se obtiene básicamente convirtiendo las medidas de aceleraciones al dominio de la frecuencia mediante la transformada de Fourier discreta (DFT).

La función de coherencia obtenida para dos registros simultáneos de las señales de salida tiene valores próximos a la unidad para las frecuencias naturales de la estructura, como se puede ver en **Peeters et al (1998)**. Este hecho ayuda a decidir qué frecuencias se consideran como naturales. En la Figura 1.8 se muestra la gráfica de la que este método obtiene las frecuencias naturales, que son los picos de dicha curva.

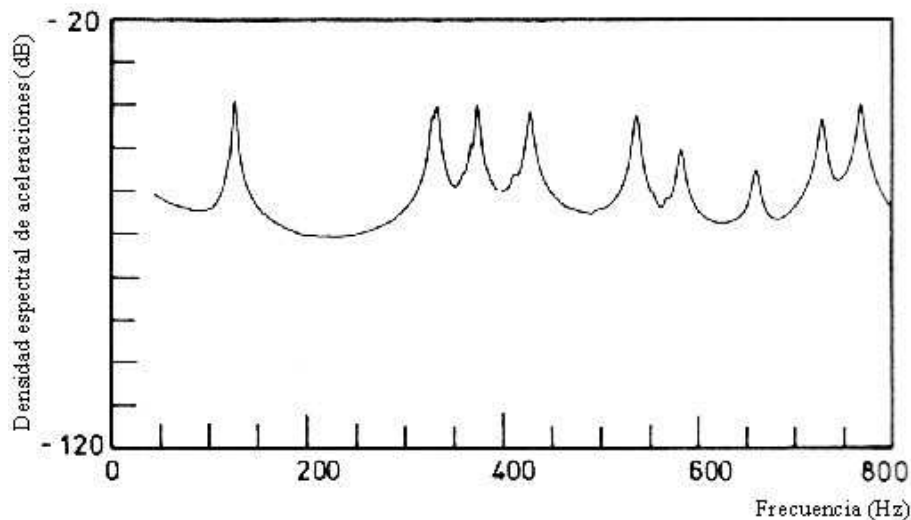


Fig. 1.8

(Representación de los picos de la densidad espectral que indican las frecuencias naturales para el método Peak Picking).

Se hace la suposición de que la respuesta dinámica en los picos de resonancia viene determinada sólo por un modo. La validez de esta afirmación aumenta cuanto más separados están los modos y menor es el amortiguamiento de la estructura.

Los modos que proporciona este método se obtienen empleando la

expresión mostrada en la página siguiente, que se describe en **Brownjohn (2003)**. Se varía el subíndice “p” mientras se mantiene la referencia “q” constante, al mismo tiempo que se van leyendo uno a uno los valores de la columna de la matriz de densidades espectrales cruzadas para cada frecuencia natural identificada en el pico del espectro.

Estos valores contienen información de fase y de amplitud, y se normalizan a un valor unidad con un ángulo cero dividiendo entre la densidad espectral de la señal elegida como referencia. Por tanto, se evalúa la relación de la densidad espectral cruzada entre las posiciones “p” y “q” y la densidad autoespectral en la posición “q” (referencia):

A pesar de los inconvenientes, es un método muy fácil de implementar y los errores son relativamente pequeños para estructuras débilmente amortiguadas y con las frecuencias naturales bien separadas. Se recomienda hacer un análisis *Peak Picking* en el mismo sitio que se realizan las medidas para hacer un control de calidad de los datos que se han tomado y para juzgar de forma general las características dinámicas de la estructura.

Posteriormente en la oficina, se recomienda aplicar otro método más avanzado como el SSI o la Descomposición en el Dominio de la Frecuencia, para obtener los resultados con mayor detalle y corroborar los obtenidos con el método *Peak Picking*.

$$\frac{S_{qp}(w_{ro})}{S_{qq}(w_{ro})} \approx \frac{r^0 \phi p}{r^0 \phi p}$$

(Ecuación 1.1)

1.3.2 DESCOMPOSICIÓN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Es un procedimiento muy simple que representa una mejora significativa del método anterior. Primero se van a introducir las bases teóricas de este método, como se describe en **Brincker (2001)**.

La relación entre las entradas desconocidas $x(t)$ y las respuestas medidas $y(t)$ se puede expresar de la siguiente manera, como se puede ver en Bendat y Piersol (1986):

$$G_{yy}(j\omega) = \bar{H}(j\omega)G_{xx}(j\omega)H(j\omega)^T$$

(Ecuación 1.2)

Donde:

$G_{xx}(j\omega)$: es la matriz (de orden $r \times r$) de densidad espectral de la entrada.

r : es el número de entradas.

$G_{yy}(j\omega)$: es la matriz (de orden $m \times m$) de densidades espectrales de las salidas. **m** : es el número de salidas.

$H(j\omega)$: es la matriz (de orden $m \times r$) conocida como función de respuesta en frecuencia, y el superíndice indican matriz compleja conjugada y matriz sólo transpuesta respectivamente. Es conveniente recordar que las densidades espectrales representan como se distribuye la energía para todas las frecuencias.

En el caso de una estructura ligeramente amortiguada, la matriz de densidad espectral se puede ser aproximada por la siguiente expresión, que constituye una descomposición modal de la matriz de densidades espectrales:

$$G_{yy}(j\omega) \approx \sum \frac{d_k \cdot \Phi_k \cdot \Phi_k^T}{j\omega - \lambda_k} + \overline{\frac{d_k \cdot \Phi_k \cdot \Phi_k}{j\omega - \lambda_k}}$$

$$d_k = \gamma_k^T \cdot c \cdot \gamma_k$$

(Ecuación 1.3)

Una vez se han descrito los fundamentos teóricos, se describe el algoritmo de identificación. El primer paso es estimar la **matriz de densidades espectrales**. Una vez que se tienen los valores de $G_{yy}(j\omega)$ para frecuencias discretas $\omega = \omega_i$, se descompone por medio de la Descomposición en Valores Singulares (SVD):

$$G_{yy}(j\omega_i) = U_i \cdot S_i \cdot U_i^T$$

(Ecuación 1.4)

Donde: la matriz $U_i = [u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{im}]$ contiene los vectores singulares y S_i es una matriz diagonal que contiene los valores singulares.

Los valores singulares se interpretan como una combinación lineal de densidades autoespectrales de un conjunto de sistemas de un grado de libertad, como se puede ver en Reynolds *et al.* Cerca del pico "k", el modo k será el que predomine en la respuesta, obteniendo los modos de vibración a partir de los picos en la representación de los valores singulares. El mayor valor singular representa la fuerza del modo de vibración dominante para cada frecuencia i , como se describe en **Brownjohn (2003)**. Los otros valores singulares contienen ruido u otros modos escondidos detrás del dominante.

Cerca del pico k sólo existirá un modo en el conjunto $Sub(\omega)$, el primer vector singular u_{i1} será una estimación del modo de vibración $\hat{\phi} = i1$. El correspondiente valor singular será la función de densidad espectral del sistema representado en la expresión. Los vectores singulares contienen las distintas maneras de las que se deforma la estructura.

Una ventaja de este modo es que se pueden identificar fácilmente modos de

vibración muy próximos, examinando no sólo el mayor valor singular, sino también los siguientes. Una vez que se ha identificado el modo de vibración se ajusta la curva alrededor del pico seleccionado para obtener la frecuencia natural. En la Figura siguiente se muestra un ejemplo de la representación de valores singulares.

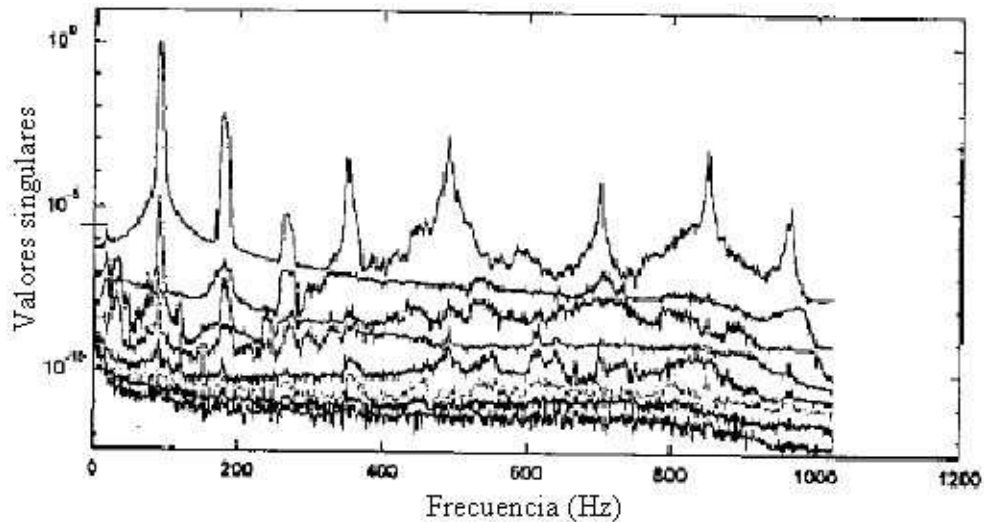


Figura 1.9
(Ejemplo de representación de valores singulares de la matriz de densidad espectral).

Si se transforma la función de densidad espectral al dominio del tiempo por medio de la Transformada de Fourier, se obtiene la respuesta del sistema de un grado de libertad amortiguado.

Se indica en las referencias bibliográficas dadas por **Brincker**.

Lo que se hace es calcular el modo de vibración para el pico de la curva que proporciona la frecuencia k , y se van calculando los modos para frecuencias ligeramente superiores e inferiores, hasta que la correlación (MAC) entre ambos modos alcanza cierto valor límite.

Dicho valor se suele elegir como $MAC = 0.8$.

Una vez que se tienen las dos frecuencias que proporcionan estos modos, se toma una ventana con ese ancho y se realiza la anti-transformada de Fourier. Con la figura siguiente se muestra este concepto.

Tomando la señal tratada en el dominio temporal, se pueden calcular los parámetros que la caracterizan, que son el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural. En el siguiente capítulo de esta memoria se abordarán las expresiones para ello.

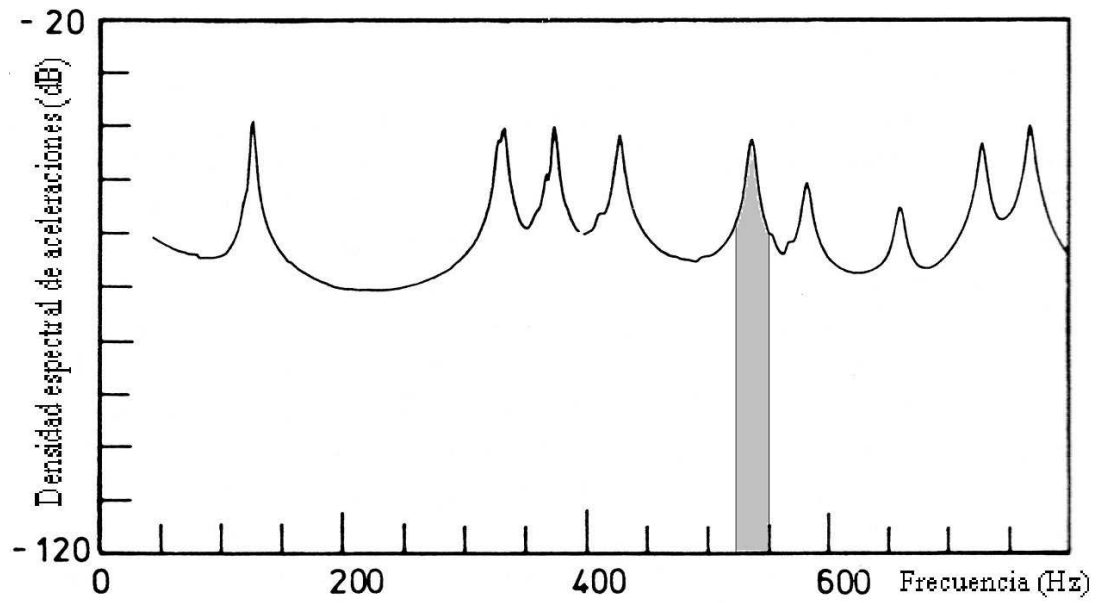


Fig. 1.10

(Ventana empleada para realizar la anti-transformada de Fourier, con objeto de obtener los modos k).

2

ENSAYOS REALIZADOS EN LA ESTRUCTURA:

2.1 PROBLEMA DE CONTACTO EN LOS RESPECTIVOS APOYOS DE LA ESTRUCTURA DADA, CONSIDERANDO INVERSIÓN DE LA REACCIÓN EN FUNCIÓN DEL TIEMPO:

Considerando el caso de una carga producida por impacto en el esquema de la estructura indicada en el dibujo, se obtendría un valor de la fecha máxima como:

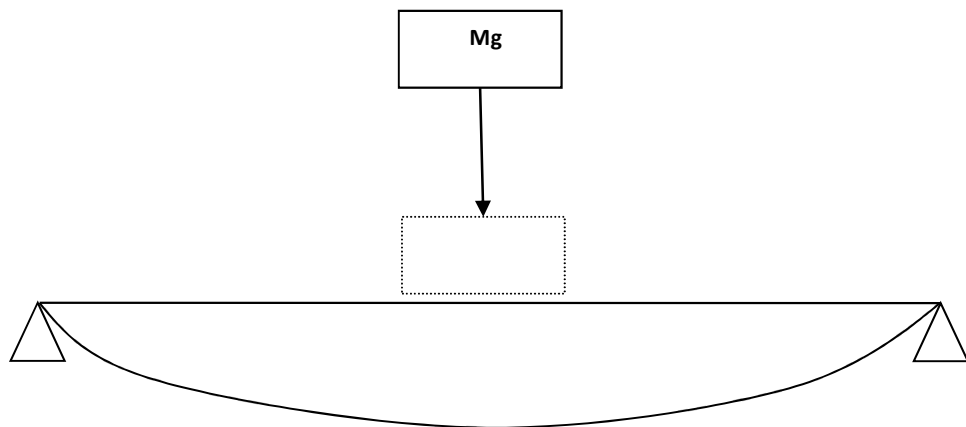


Fig. 2.1
(Esquema de impacto.)

El valor de la carga estática nos da una deformación:

$$\delta = \frac{p \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I_z} \Rightarrow P = \frac{48 \cdot E \cdot I_z}{l^3}$$

(Ecuación 2.1)

Por tanto si calculamos el potencial interno de la viga se tiene que:

$$\phi_{\text{interno}} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \delta = \frac{24 \cdot E \cdot I_z \cdot \delta^2}{l^3} = M \cdot g \cdot (h + \delta)$$

(Ecuación 2.2)

$$\delta^* = \frac{M^* g^* l^3}{48^* E^* I_z} + \sqrt{\left(\frac{M^* g^* l^3}{48^* E^* I_z}\right)^2 + 2^* h^* \frac{M^* g^* l^3}{48^* E^* I_z}}$$

(Ecuación 2.3)

Para un historial de carga completa, estudiamos si hay despegue o no en los apoyos dependiendo de los valores de las respectivas reacciones en cada uno de los apoyos dados, según vemos en las ilustraciones de las páginas siguientes.

Cuando se produce el impacto, se comunica energía en forma de un pulso de fuerza que, generalmente, tiene la forma mostrada en la figura dada en el siguiente ejemplo: Un pulso como el mostrado anteriormente tiene un contenido en frecuencia como el de la figura. Tal es el caso experimentado en un perfil IPE 100 bajo carga aleatoria en el centro del vano.

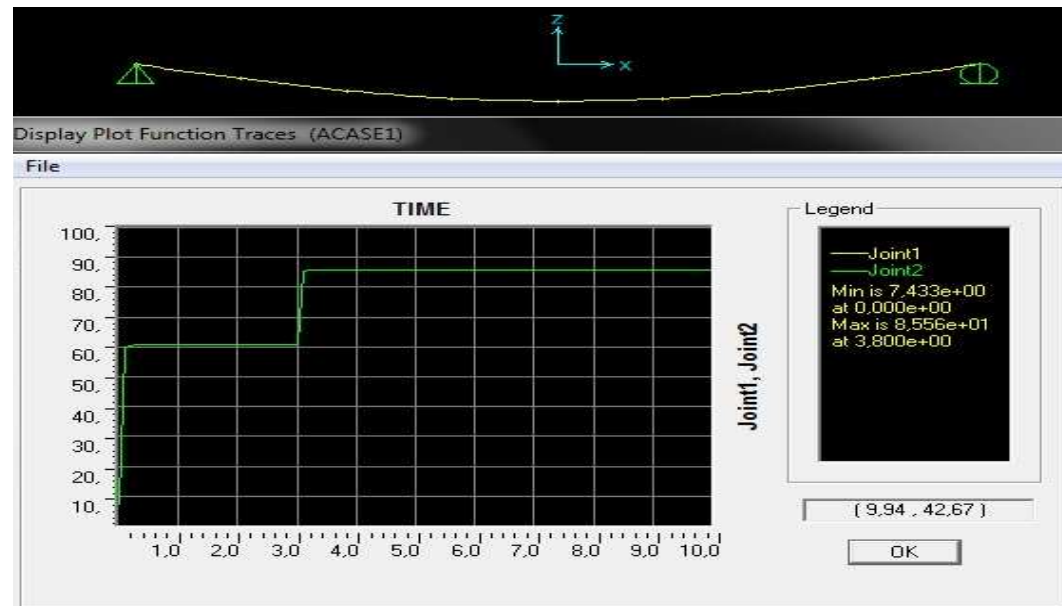


Fig. 2.2

(Respuesta escalón en la que entra en carga la estructura debida a su peso propio y el valor de la reacción en el apoyo.)

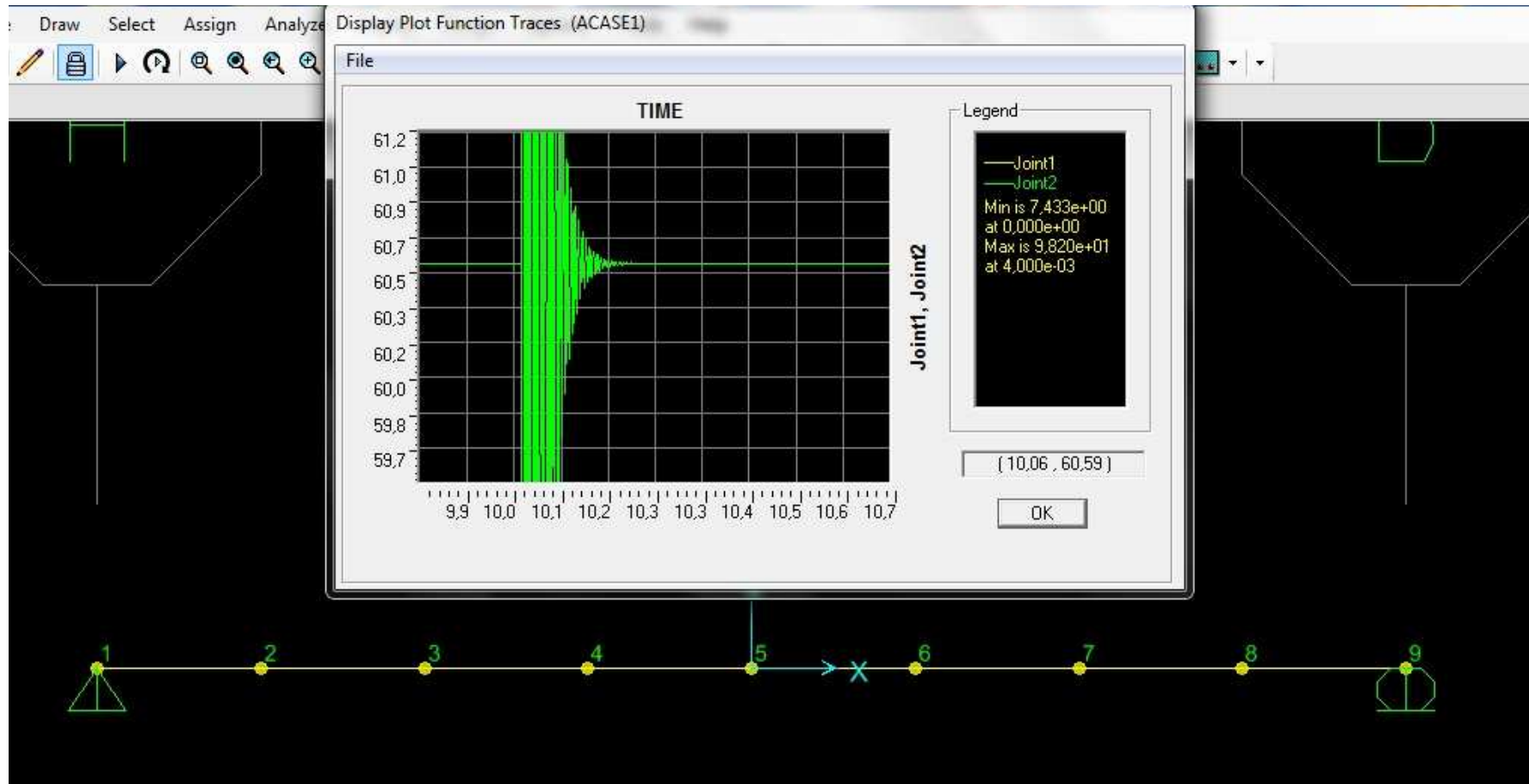


Fig 2.3
(Excitación de una viga bajo carga impulsiva en el centro del vano.)

En esta página se muestran la respuesta para las distintas vibraciones introducidas en los respectivos nodos de la estructura y su correspondiente FFT (abajo) módulo. En el caso de excitar la estructura con un ruido blanco, con distintos valores de media para distintos nodos el resultado sería dado en la gráfica:

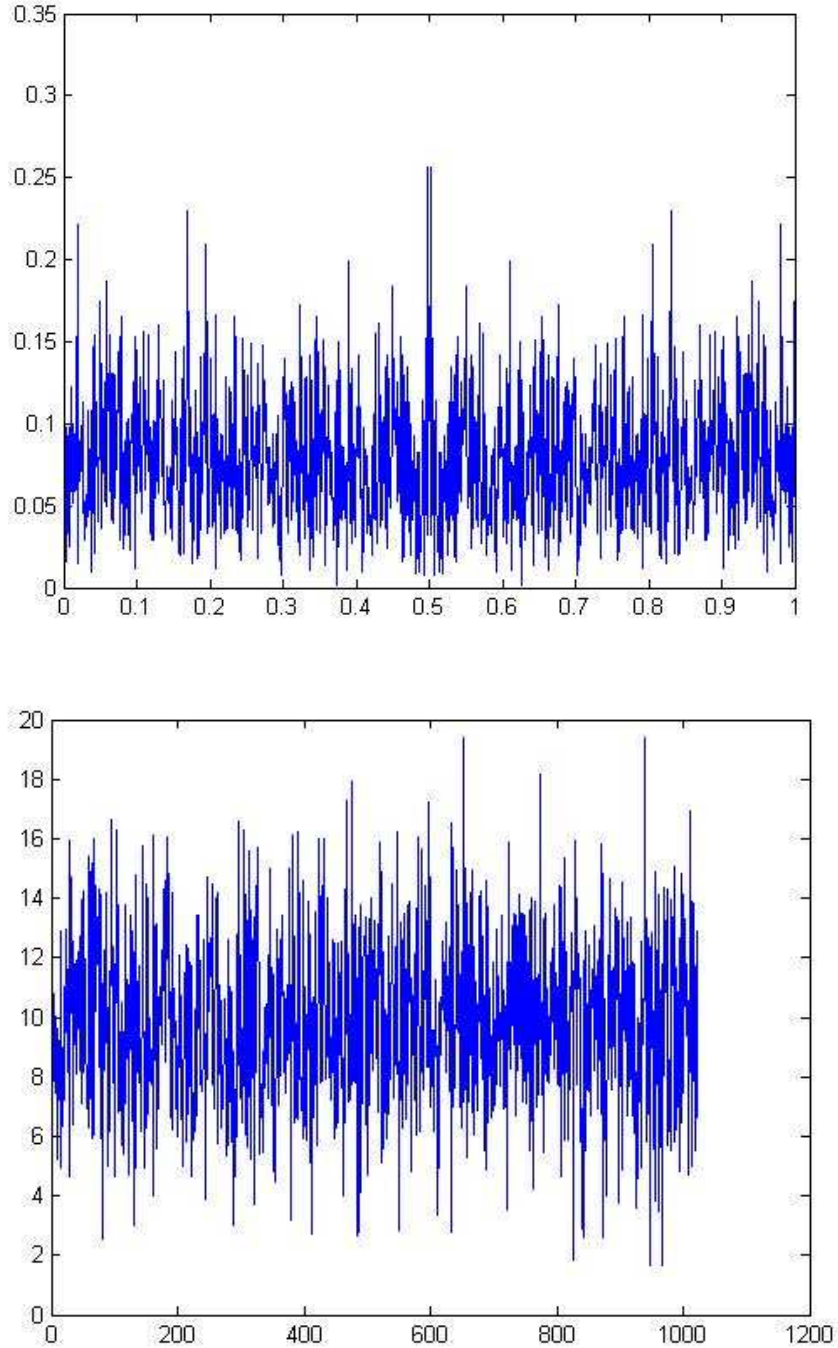


Fig 2.4

(Ruidos utilizados para la excitación de la estructura en los respectivos nodos)

Respuestas en los respectivos nodos en términos de fuerzas para cada uno de los ruidos actuando simultáneamente comportándose como un filtro:

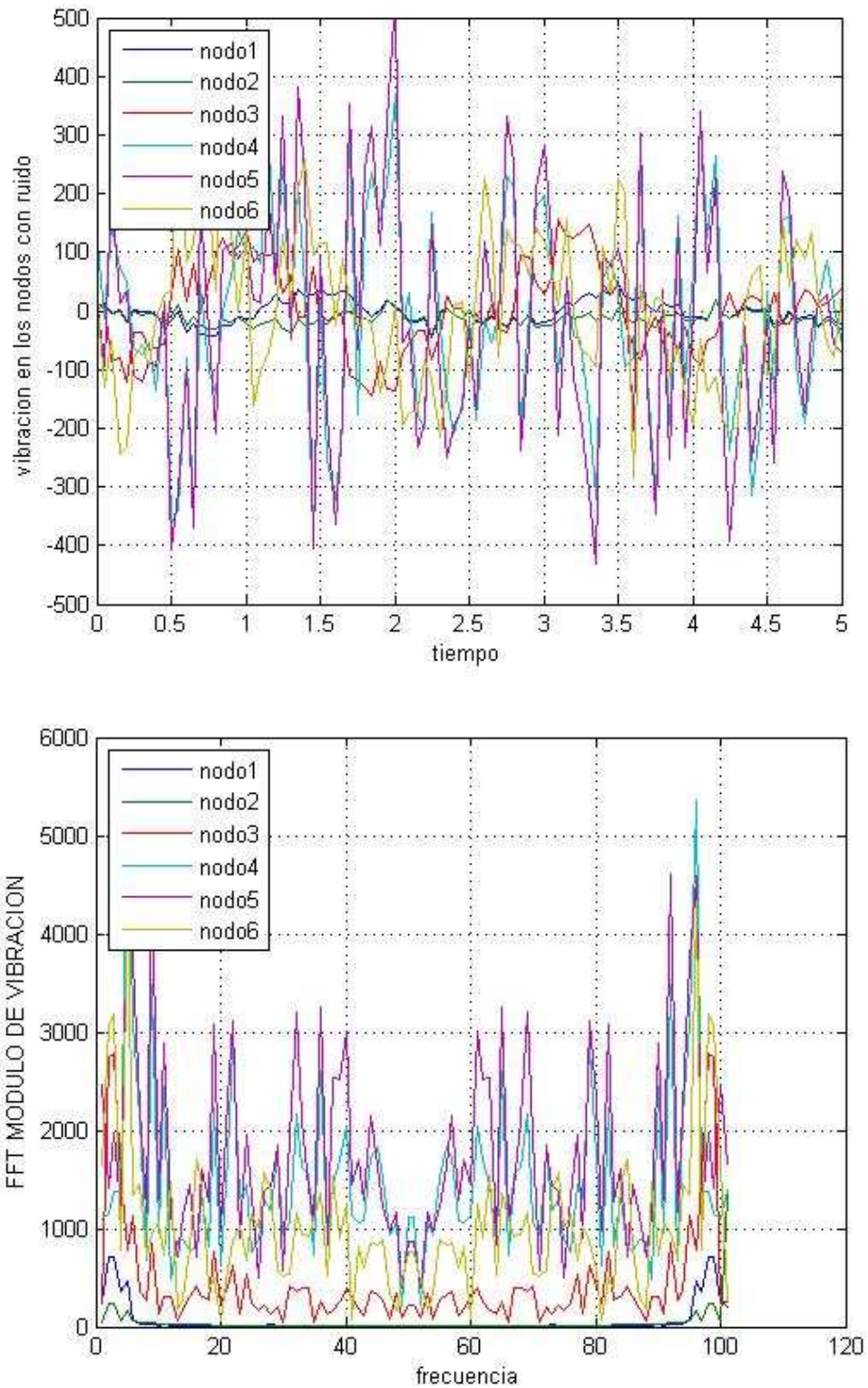


Fig 2.5
(Respuestas de los respectivos nodos)

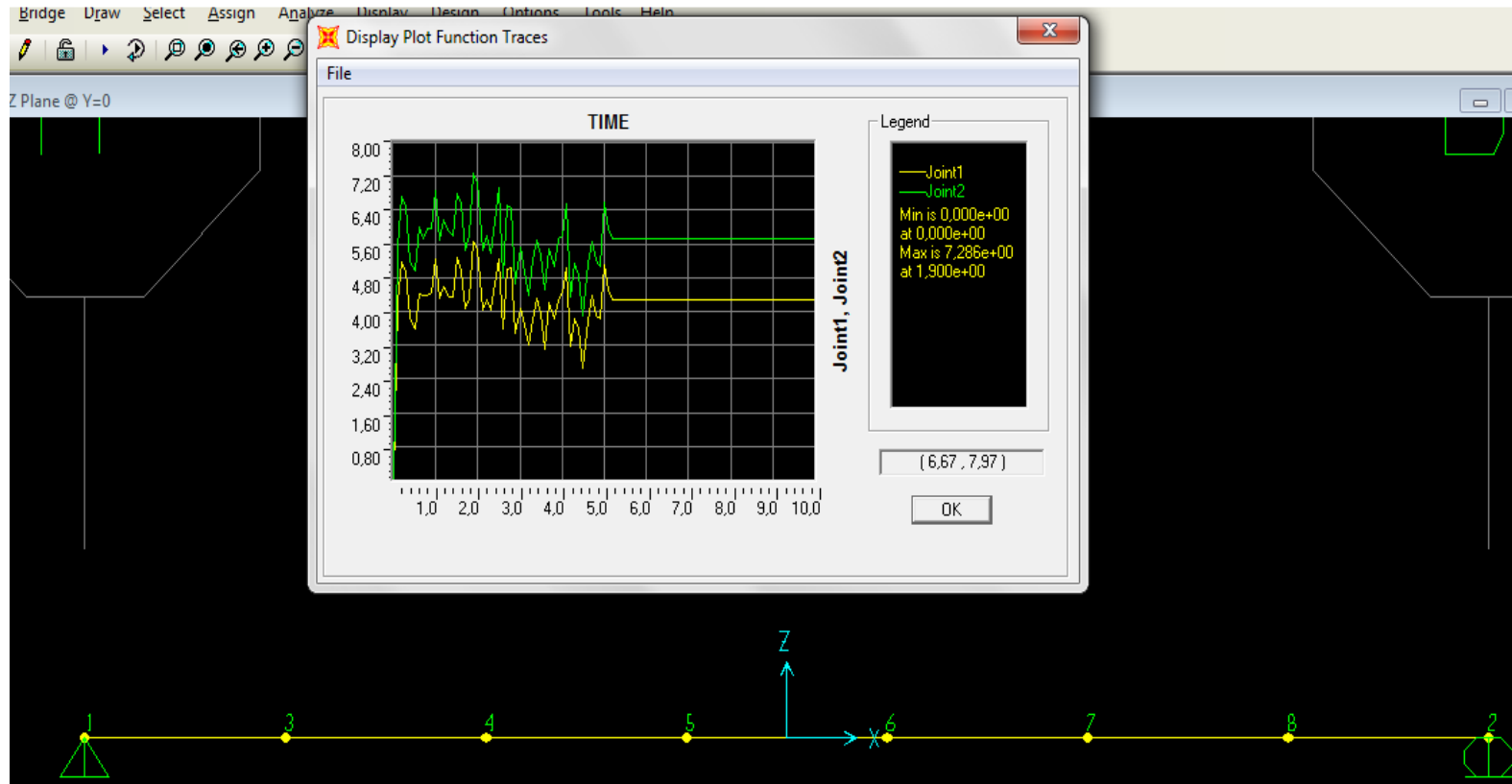


Fig 2.6

(Respuesta de los apoyos de la estructura cuando está sometida a carga aleatoria en el nodo cinco (5). En ella se obtienen los distintos valores den función del tiempo, para los cuales un valor superior al de la reacción bajo carga de su peso propio provocaría efecto físico del despegue en el apoyo.)

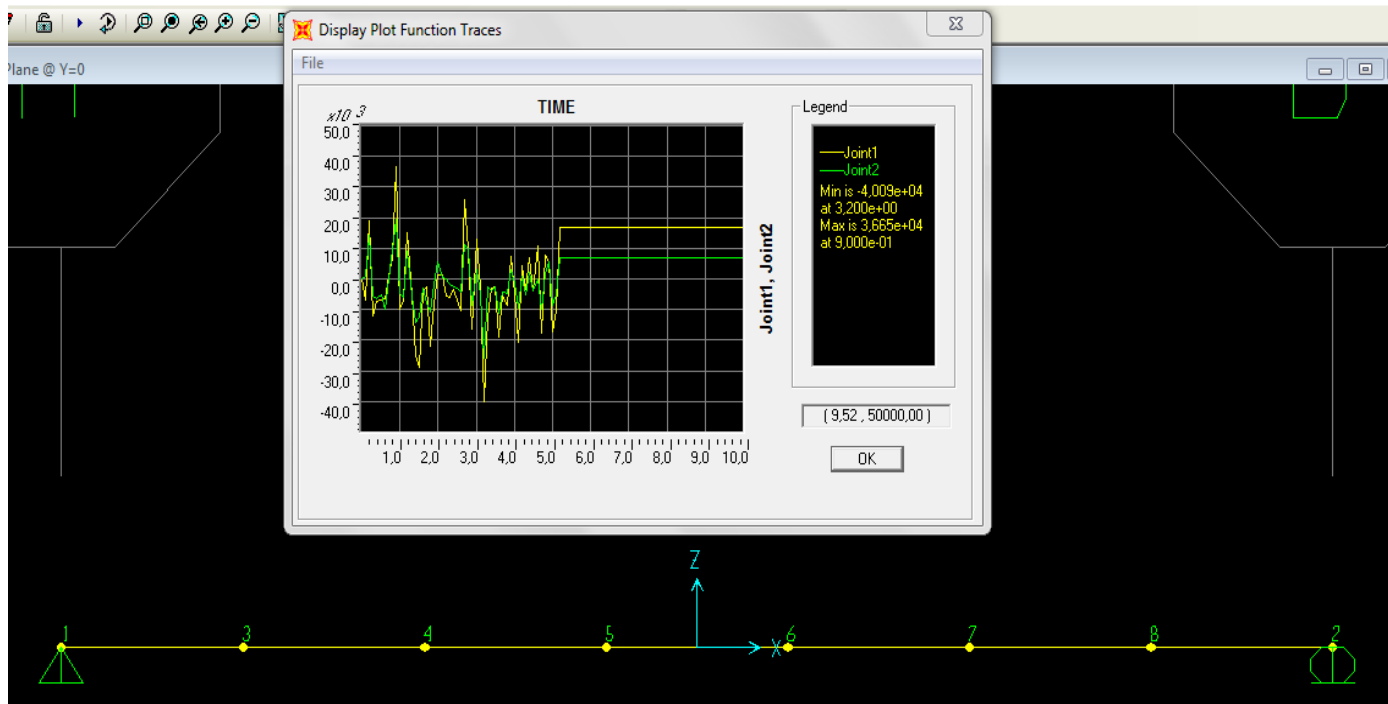


Fig 2.7

(Respuesta de los apoyos de la estructura cuando está sometida a carga aleatoria en el nodo cinco (3). En ella se obtienen los distintos valores den función del tiempo, al igual que en el caso anterior, con objeto de contrastarla cuando actúan simultáneamente.)

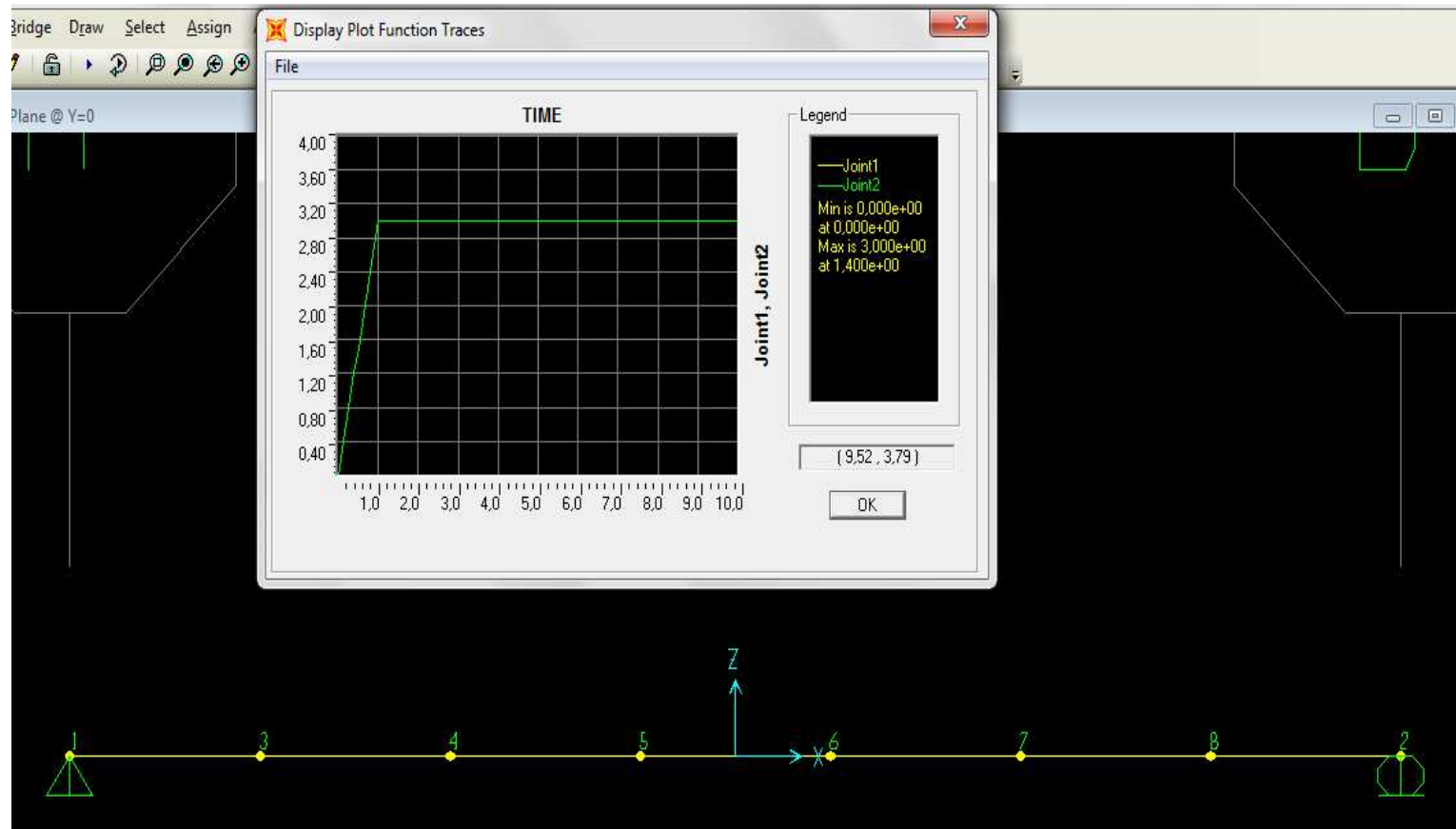


Fig 2.8

(Respuesta de los apoyos de la estructura cuando está sometida a carga aleatoria en todos los nodos, simultáneamente)

3

CARACTERIZACIÓN DE LA UNIÓN METÁLICA

RIGIDECES DE LA ESTRUCTURA FORMADA POR VIGA IPN 80 UNIDA A HEB-80, BAJO LAS SIGUIENTES CONDICIONES:

Se ha procedido pues, a realizar el ensayo modal de la siguiente estructura, con el objetivo de caracterizar la unión metálica como un modelo de unión semirrígida. Como puede observarse en las respectivas figuras se realizó el cálculo de la siguiente unión, en un modelo de elementos finitos:

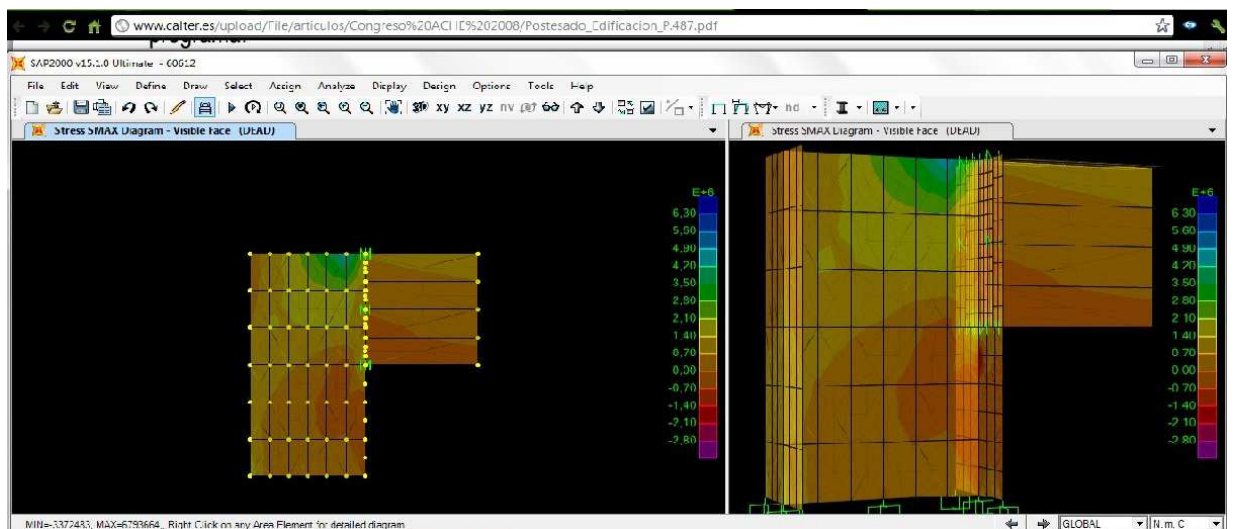


Fig. 3.1

(Modelo por el método de elementos finitos realizado con chapas tipo Shell y tornillos pretensados con un link de 1000 Kn)

3.1 ANÁLISIS DE UNIONES METÁLICAS

En general, cualquier diseño estructural requiere de un cierto grado de simplificación. Los nudos de estructuras de barras de acero, frecuentemente, se modelan como articulados o completamente rígidos. En el primer caso, se admite que el giro entre las barras que concurren al nudo es libre y entre ellas solo se transmiten fuerzas; en el segundo caso, se supone que el giro experimentado por los extremos de todas las barras es el mismo y, por tanto, entre las barras que concurren al nudo se transmiten fuerzas y momentos.

Las uniones semirrígidas representan un término medio, ya que su organización constructiva permite que las barras unidas puedan girar relativamente entre ellas. Por lo que, estas uniones, parcialmente deformables, son capaces de transmitir tanto fuerzas como un cierto momento (el correspondiente a la restricción que impone la unión al giro libre de los extremos de las barras).

3.2 CARACTERIZACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE UNIONES SEMIRRÍGIDAS

Para poder resistir las acciones exteriores, una estructura debe desarrollar unos esfuerzos internos que hagan posible el equilibrio con las fuerzas exteriores (acciones aplicadas y reacciones). Para que se desarrollen estos esfuerzos internos se han de producir unas deformaciones que, evidentemente, alterarán la geometría inicial de la estructura.

Puesto que una estructura se diseña para satisfacer una serie de requisitos funcionales, se puede afirmar que una estructura es adecuada para resistir unas fuerzas exteriores si lo hace de manera que las modificaciones de sus propiedades y/o geometría inicial no son excesivas, o lo que es lo mismo, que su **resistencia y rigidez** son las adecuadas para la función que ha de cumplir.

En los tiempos en que la resistencia de los materiales era baja, su comprobación era fundamental y, en la mayoría de los casos, ésta garantizaba que la rigidez era suficiente. En los últimos años, el desarrollo y el empleo de materiales con una resistencia cada vez mayor permiten el uso de elementos de menor tamaño, y por tanto menos rígidos. Debido a esto, la respuesta correcta de una estructura viene condicionada, cada vez más, por su rigidez. Una unión viga-columna puede ser representada mediante un muelle rotacional (ver figura) el cual une las líneas correspondientes al eje de la columna con el eje de la viga, tal y como se muestra en la figura, de forma que en función del momento (M_j) que transmita la viga a la columna se produce un giro relativo (ϕ) entre los ejes. En la parte (d) de la figura se representa la curva momento-rotación real de una unión viga-columna en función del momento aplicado y el giro producido. Esta curva se representa mediante una ley no lineal.

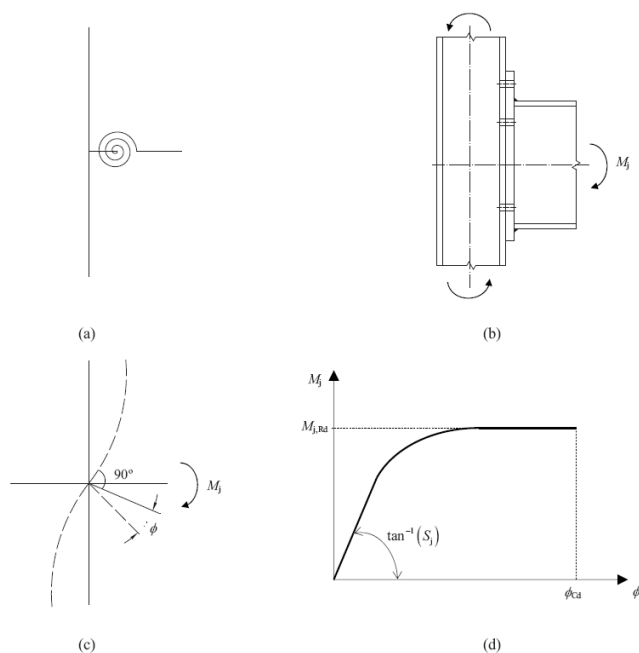


Fig 3.2

Comportamiento real de una unión viga-columna: (a) modelo ideal; (b) nudo real; (c) giro relativo viga-columna, (d) curva momento-rotación

Para conocer el comportamiento de una unión o la respuesta rotacional, es necesario determinar sus propiedades mecánicas en términos de rigidez, resistencia, y ductilidad o capacidad de deformación:

- Rigidez rotacional (**Sj**): relación entre el momento transmitido y el giro relativo, entendido como la diferencia entre los giros absolutos de los elementos conectados.
- Momento resistente de cálculo (**Mj,Rd**): valor máximo del momento, entendido como el momento resistente plástico que soporta la unión.
- Capacidad rotacional de cálculo (**Cd**): giro máximo producido por el momento resistente de cálculo de la unión.

3.3. CLASIFICACIÓN GENERAL DE UNIONES

Las uniones se pueden clasificar en función de:

- Rigidez rotacional: nominalmente articulada, rígida y semirrígida.
- Resistencia: nominalmente articulada, resistencia completa y resistencia parcial.
- Capacidad de rotación: ductilidad completa y parcial.

Las uniones con ductilidad completa disponen de una capacidad rotacional mayor o igual a la del miembro que conectan. Las uniones que no cumplen este requisito son clasificadas como uniones de ductilidad parcial. Aunque este criterio no se ha incorporado todavía en los códigos modernos, únicamente presentan una serie de recomendaciones sobre la capacidad rotacional de la unión.

Si se combinan los criterios de clasificación relativos a la resistencia y a la rigidez rotacional, resulta cinco tipos de uniones:

- Rígidas de resistencia completa
- Rígidas de resistencia parcial
- Semirrígidas de resistencia completa
- Semirrígidas de resistencia parcial
- Articuladas

Para conocer si los efectos derivados del comportamiento deben considerarse en el análisis de la estructura, el Eurocódigo clasifica las uniones según tres modelos:

- Unión continua: garantiza la compatibilidad del giro entre todos los componentes que une. Por tanto, su comportamiento no influye en el análisis global de la estructura.
- Unión simple: impide la compatibilidad de los giros entre las barras conectadas, no se transmiten momentos, y se corresponden con las

uniones denominadas articuladas.

- Unión semi-continua: presenta una compatibilidad parcial del giro entre los elementos conectados por la unión, y es preciso tener en cuenta su comportamiento en el análisis global de la estructura.

Por tanto, el modelo de unión más apropiado debería determinarse en función de la clasificación de la unión y del método de análisis elegido (ver tabla).

| Método de análisis global | Clasificación de la unión | | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------------|--|
| | Articulada | Rígidas | Semirrígidas |
| Elástico | Articuladas | Resistencia completa | Resistencia parcial |
| Rígido-plástico | Articuladas | Rígidas de resistencia completa | Semirrígidas de resistencia completa |
| Elastoplástico | Articuladas | Rígidas de resistencia completa | Semirrígidas de resistencia parcial |
| Modelo de unión | Simple | Continua | Rígidas de resistencia parcial Semicontinua |

Tabla 3.1
(Modelos de unión y métodos de análisis a utilizar)

Atendiendo a los criterios de resistencia y rigidez la tabla anterior puede reescribirse según se muestra a continuación.

| Rigidez | Resistencia | | |
|--------------|----------------------|---------------------|-------------|
| | Resistencia completa | Resistencia parcial | Articuladas |
| Rígidas | Continua | Semicontinua | — |
| Semirrígidas | Semicontinua | Semicontinua | — |
| Articulada | — | — | Simple |

Nota: “—” no tiene sentido

Tabla 3.2
(Clasificación de uniones)
3.4 DIFERENCIA ENTRE UNIÓN Y CONEXIÓN

Habitualmente podemos encontrar que las estructuras de acero están formadas por vigas y columnas, obtenidas a partir de perfiles en forma de I o en H y enlazados entre sí mediante conexiones. Estas conexiones pueden ser: entre una viga y una columna, entre dos vigas, entre dos columnas, o entre una columna y su base. Dependiendo de los elementos conectados y de su localización en la estructura, en la figura siguiente se pueden diferenciar:

- Unión viga-columna de un solo lado con la columna continua. (Unión 1.1).
- Unión viga-columna a dos caras (doble) con la columna continua. (Unión 2.1).
- Unión viga-columna a un solo lado con la columna no continua. (Unión 1.2).
- Unión viga-columna a dos caras (doble) con la columna no continua. (Unión 2.2).
- Empalme de vigas. (Unión 3).
- Empalme de columnas. (Unión 4).
- Base de columnas. (Unión 5).

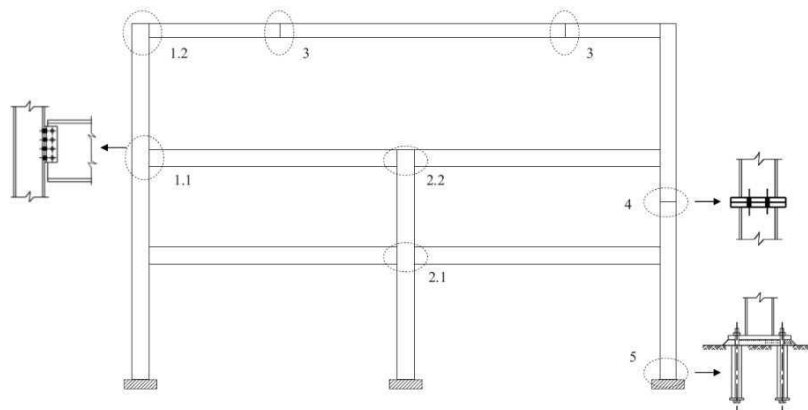


Fig. 3.3
(Tipologías de uniones en una estructura)

Aunque, en ocasiones, los términos conexión y unión se emplean como sinónimos, introducen conceptos diferentes tal y como se muestra en la figura siguiente:

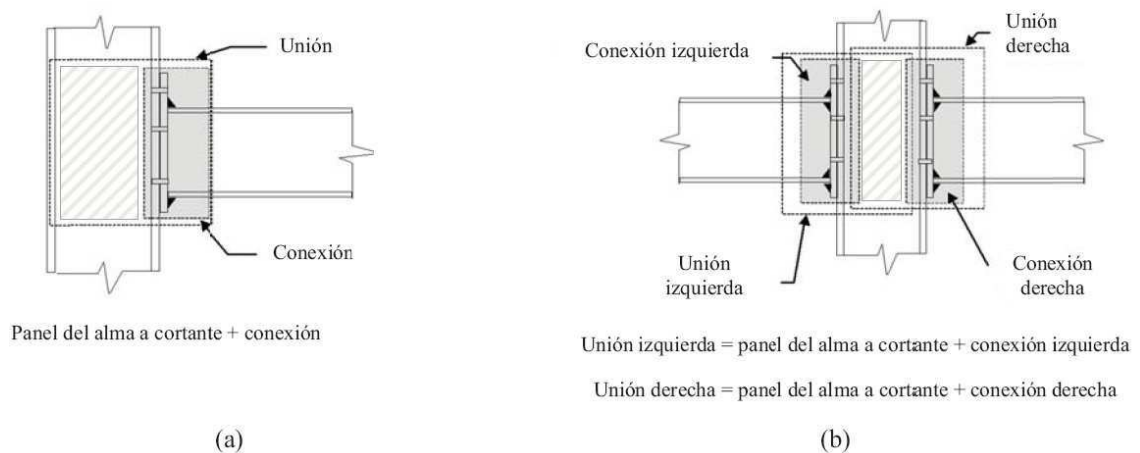


Fig. 3.4
(Diferencia entre unión y conexión: (a) unión simple; (b) unión doble)

Se define conexión como el conjunto de elementos físicos que sujetan mecánicamente los elementos enlazados y se sitúa en la zona donde se produce el enlace.

Por otro lado, cuando se tiene en cuenta tanto la conexión como las correspondientes zonas de interacción entre los elementos enlazados (p.e.: alma del perfil), se debería utilizar el término unión.

Dependiendo del número de elementos conectados entre sí, se pueden distinguir dos tipos de uniones: simples o desde un solo lado, o dobles o desde ambos lados. Se señala que las uniones de doble lados se deben considerar como dos uniones (izquierda y derecha).

3.5. TIPOS DE UNIONES VIGA-COLUMNA

El comportamiento de una unión viga-columna depende en gran medida del modo en el cual se materializa en la práctica. Mediante la modificación de algunos detalles constructivos, se pueden obtener comportamientos que varían desde una unión casi perfectamente rígida, como las uniones totalmente soldadas, hasta prácticamente una articulación, como corresponde a las realizadas mediante angulares de alma.

Las uniones viga-columna se pueden clasificar según el momento de rotación, en:

- Rígidas: Aquellas que pueden transmitir cualquier tipo de esfuerzo y no influyen en las distribuciones de los esfuerzos de la estructura. Por ejemplo: uniones con angulares de ala y alma atornillados y soldados, angulares de ala y alma atornillados, uniones soldadas con rigidizadores, uniones con chapa de testa atornillada con la columna rigidizada.
- Articuladas: se definen como uniones que no pueden transmitir momentos, aunque si son capaces de transmitir esfuerzos cortantes y normales a la columna (esfuerzos axiales en la viga). Por ejemplo: uniones con angulares al alma atornillados o soldados, angulares de alas atornilladas, chapa de testa parcial atornillada.
- Semirrígidas: comportamiento intermedio entre las uniones rígidas y las articuladas. Es decir, pueden transmitir todo tipo de esfuerzos, pero los incrementos en los giros y en los desplazamientos no pueden ser despreciados. Por ejemplo: uniones con chapa de testa extendida atornillada, viga soldada al ala de la columna, etc.

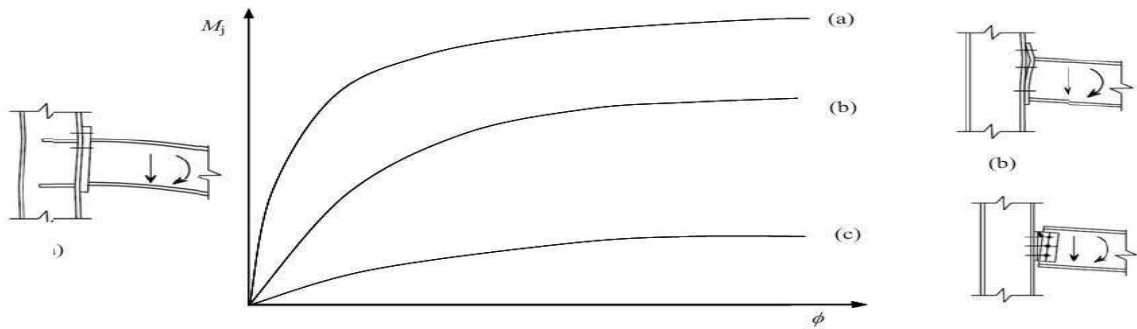


Fig. 3.5
(Flexibilidad de la unión metálica, y su relación al diagrama momento rotación.)

3.5.1 DESCRIPCIÓN GENERAL UNIONES SEMIRRÍGIDAS VIGA-COLUMNA

Prácticamente, cualquier unión fabricada en acero se puede clasificar como semirrígida. Es decir, cualquier unión presenta una rigidez finita. Las estructuras de acero, frecuentemente, son diseñadas suponiendo que las uniones son articuladas o rígidas. Esto simplifica el análisis y el diseño estructural, pero se obvia el comportamiento real de las uniones. Las normas actuales, como el Eurocódigo 3 (EC3-1-8:2005), además de las uniones rígida y articulada, contemplan un nuevo tipo de unión, la semirrígida.

Muchos proyectistas de estructuras no están de acuerdo con la división planteada por el Eurocódigo 3, debido en parte, al trabajo adicional que supone la incorporación de uniones semirrígidas en el cálculo de los esfuerzos. Una forma, aunque no muy correcta, de evitar esta nueva tarea es seguir introduciendo uniones articuladas o rígidas. Sin embargo, el EC3-1-8:2005 requiere analizar la influencia del comportamiento real de las uniones sobre la respuesta global de la estructura, es decir, sobre el grado de precisión con el que se han obtenido los esfuerzos y los desplazamientos. Esto puede resultar laborioso cuando el diseño de las uniones se realiza en una fase posterior al cálculo de esfuerzos, lo que puede llegar a exigir algunas iteraciones entre el análisis global de la estructura y las comprobaciones del diseño detallado.

Por el contrario, si el proyectista considera, en las fases preliminares del cálculo, no solo las propiedades de las barras, sino también las características de las uniones (rigidez y resistencia), el análisis es más laborioso debido a que el proceso de resolución es iterativo, ya que el valor de los esfuerzos influye en las características de la unión y viceversa.

Sin embargo, al considerar el comportamiento semirrígido se tiene en cuenta el comportamiento real de la unión, lo que permite obtener un ahorro significativo en el coste total de la estructura. Por ejemplo, en estructuras arriostradas, el empleo de las uniones semirrígidas, posiblemente más

costosas que las uniones articuladas, permite reducir la sección de las vigas. En cambio, en estructuras no arriostradas, el empleo de uniones semirrígidas, menos costosas que las rígidas, exige aumentar la sección de las vigas y, posiblemente de las columnas cuando la deformación es un factor muy restrictivo en el diseño, pero si por el contrario la resistencia es nuestro factor a dimensionar, la sección del perfil se puede disminuir ya que está sometida a esfuerzos menores.

3.5.2 CLASIFICACIÓN GENERAL DE UNIONES SEMIRRÍGIDAS VIGA-COLUMNA

Para el análisis global de las estructuras es necesaria su clasificación en: estructuras con nudos articulados (simples), estructuras con nudos semirrígidos (semicontinuas), y estructuras con nudos rígidos (continuas).

El AISC (*American Institute of Steel Construction*) distingue en la norma ASD (*Allowable Stress Design*) tres tipos de sistemas estructurales:

- Tipo 1 (estructuras de nudos rígidos): los elementos que concurren en un punto forman un nudo rígido, por lo que las tangentes a las directrices de ambos elementos mantienen ángulos invariables después de la deformación.
- Tipo 2 (estructuras de nudos articulados): las uniones pueden transmitir el esfuerzo cortante, siendo despreciable el momento flector inducido en la viga, lo que permite el giro.
- Tipo 3 (estructuras de nudos semirrígidos): las uniones pueden transmitir el esfuerzo cortante y parte del momento flector.

Por otro lado, el AISC distingue en la norma LRFD (*Load and Resistance Factor Design*) dos tipos de sistemas estructurales:

- Tipo FR (*Fully Restrained*): se corresponde con el tipo I de la norma ASD.
- Tipo PR (*Partially Restrained*): incluye los tipos 2 y 3 de la norma ASD. Si se elige el tipo de construcción PR, deben de tenerse en cuenta la deformabilidad de la unión para el diseño y análisis de la estructura.

A continuación, se describen las diferentes clasificaciones establecidas en la actual norma europea EC3-1-8:2005 en términos de rigidez, resistencia, y capacidad de rotación.

3.5.2.1 Según su rigidez:

A partir de la rigidez rotacional, las uniones se pueden clasificar como nominalmente articulada, rígidas y semirrígida. Sus principales características son:

- Nominalmente articulada (rigidez nula o relativamente muy

pequeña): debe ser capaz de transmitir las fuerzas internas sin desarrollar momentos significativos que puedan afectar adversamente a sus elementos o a la estructura completa.

- Rígida (rigidez infinita o relativamente muy grande): su deformación no tiene una influencia apreciable sobre la distribución de las fuerzas y momentos internos en la estructura, ni en la deformación total. Debe ser capaz de transmitir las fuerzas y momentos determinados en el cálculo. No se producen rotaciones relativas entre los extremos de las barras, por lo que el nudo experimenta un único giro como si se tratara de un sólido rígido.
- Semirrígida: no cumple ninguno de los criterios anteriores. Queda definida por su diagrama momento-rotación ($M_j-\phi$). Debe ser capaz de transmitir las fuerzas y los momentos determinados en el cálculo. Debido al momento se produce un giro relativo entre las barras conectadas.

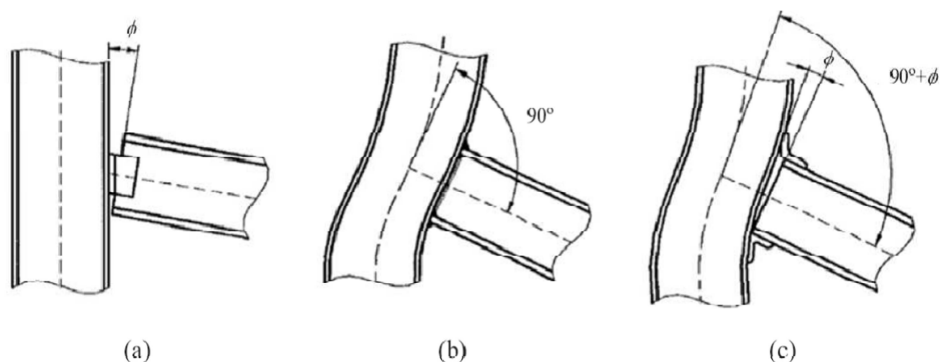


Fig. 3.6

(Clasificación de uniones de acuerdo con su rigidez:
(a) articulada; (b) rígida; (c) semirrígida)

Una vez se ha determinado la rigidez de la unión, ésta se compara con la rigidez de la viga.

Si la rigidez de la unión es lo suficientemente grande con respecto a la rigidez de la viga, ésta se clasifica como rígida, si la rigidez es menor o igual que la mitad de la rigidez de la viga, la unión es clasificada como articulada.

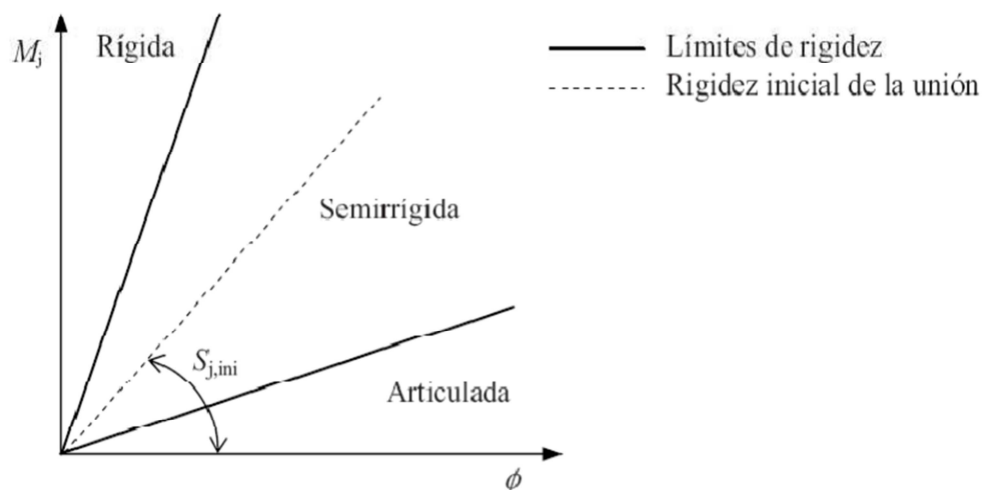


Fig. 3.7

Límites s/EC3 para la clasificación de una unión en función de la rigidez, que representa los límites establecidos en el EC3-1-8:2005, para las uniones son:

| | |
|-------------|---|
| $S_{j,ini}$ | Rigidez inicial de la unión |
| $kb = 8$ | Estructuras arriostradas: aquellas cuyo sistema de arriostramiento reduce al menos un 80% los desplazamientos horizontales. |

3.5.2.2 Según su resistencia:

Si se comparan la resistencia de cálculo de la unión y la resistencia de los elementos a unir (viga y columna) las uniones pueden ser clasificadas como nominalmente articulada, resistencia completa y resistencia parcial. Sus principales características son:

- Nominalmente articulada: debe ser capaz de transmitir las fuerzas internas sin desarrollar momentos significativos que puedan afectar adversamente a sus elementos o a la estructura completa. Así como, aceptar los giros que se producen debido a las cargas de diseño.
- Resistencia completa: la resistencia de diseño de la unión es mayor o igual a la resistencia de los elementos unidos.
- Resistencia parcial: no cumple ninguno de los criterios anteriores.

Límites para la clasificación según EC3-1-8:2005

La clasificación de una unión en función de su resistencia resulta de comparar el momento resistente de cálculo de la unión M_j , R_d con

los límites de resistencia completa y nominalmente articulada. Estos límites son establecidos en el EC3-1-8:2005.

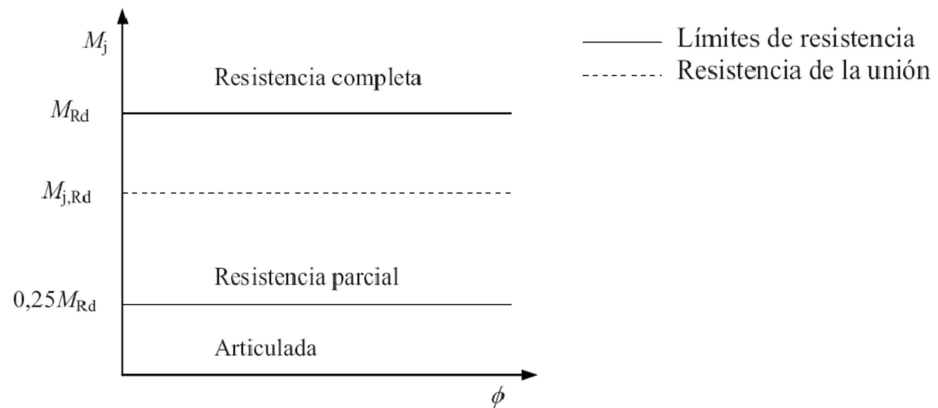


Fig. 3.8
(Límites para la clasificación de una unión en función de la Resistencia)

$$M_{j,Rd} \geq M_{Rd}$$

Donde M_{Rd} es el mayor valor de

$$M_{Rd} \geq \min(M_{pl,bR,d}, M_{pl,cR,d})$$

Si la columna no es continua

$$M_{Rd} \geq \min(M_{pl,bR,d}, 2.M_{pl,cR,d})$$

Siendo,

$M_{pl,bR,d}$ Momento plástico resistente de la viga.

$M_{pl,cR,d}$ Momento plástico resistente de la columna.

Resistencia parcial:

$$0,25.M_{Rd} \leq M_{j,Rd} \leq M_{Rd}$$

Normalmente articulada:

$$M_{j,Rd} \leq 0.25M_{Rd}$$

3.5.2.3 Según su capacidad de rotación:

Esta clasificación no está presente todavía en los códigos modernos (EC3-1-8:2005, CTE), en el que aún no se recogen criterios cuantitativos. El EC3-1-8:2005 únicamente presenta una serie de recomendaciones relativas a la capacidad rotacional de la unión, en el que se establece que toda unión perteneciente a una estructura en la que se realice un análisis rígido-plástico global, debe contar con la suficiente capacidad de rotación.

Si el momento resistente $M_{j,Rd}$ es al menos 1.2 veces la resistencia plástica de cálculo de los elementos conectados, no es necesario comprobar la capacidad de rotación de la unión.

Es necesario adicionalmente añadir, que la curva real momento-rotación de una unión no está siempre contenida en una única región. Es muy frecuente que la parte inicial esté en la región de uniones semirrígidas y el tramo final en la región de uniones rígidas.

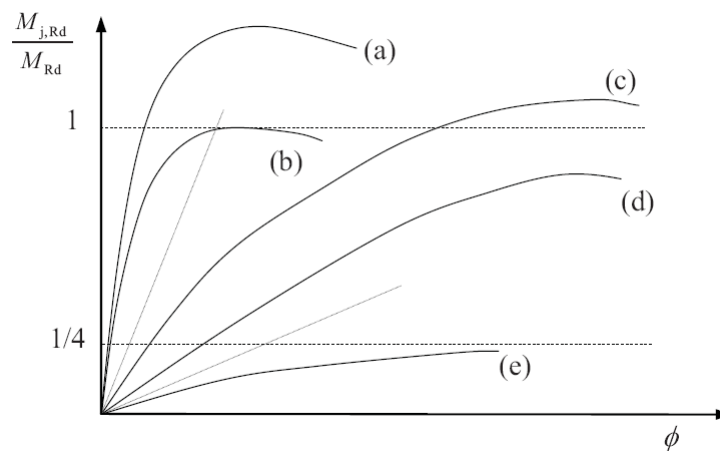


Fig. 3.9

(Clasificación de las uniones: (a) rígida de resistencia total; (b) rígida de resistencia parcial; (c) semirrígida de resistencia total; (d) semirrígida de resistencia parcial; (e) articulada)

3.5.3 UNIONES MÁS UTILIZADAS

A continuación, se realiza una breve descripción sobre los tipos de uniones viga-columna más utilizados en las estructuras de acero. En el trabajo de **Chen (2000)** se pueden encontrar las curvas momento-rotación para algunos de estos tipos de uniones.

Este tipo de gráfico puede ser utilizado para una clasificación inicial de las uniones, práctica común entre muchos proyectistas de estructuras. Advertir, que esta clasificación es orientativa. Por ejemplo, si se observa la pendiente de la curva de la unión con chapa de testa parcial en la figura siguiente, podría ser clasificada como una unión semirrígida. Sin embargo, en la mayoría de los casos, si se utiliza el Eurocódigo 3 para su clasificación debería considerarse articulada.

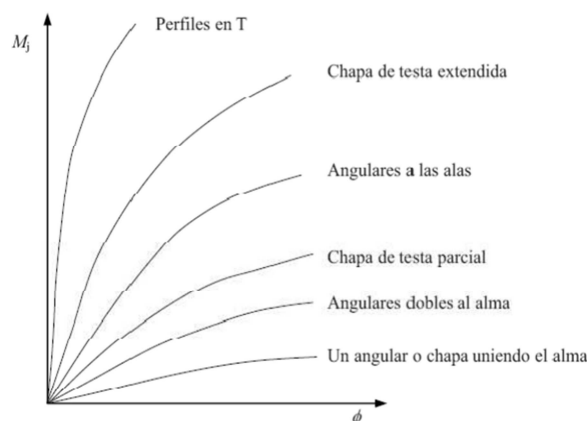


Fig. 3.10

(Curva momento-rotación de uniones viga-columna (Chen, 2000))

3.5.3.1 Unión con un angular o chapa simple al alma de la viga.

Esta unión está formada por un perfil angular atornillado, o soldado, al ala de la columna y al alma de la viga. La unión con chapa simple es similar, pero en lugar de emplear un angular se utiliza una chapa soldada o atornillada. Estas uniones presentan un comportamiento similar, ofrecen muy poca rigidez, y tradicionalmente se han considerado como articuladas.

Los resultados obtenidos por **Kishi y et al. (1997)** demuestran que un número apreciable de las curvas para este tipo de uniones (Figura 5.2) se encuentran inicialmente dentro de la zona semirrígida, pero al aumentar el valor del giro ϕ entran en la zona articulada.

Por tanto, estas uniones, inicialmente, podrían considerarse como semirrígidas, pero si se aumenta el valor de la carga se deberían considerar articuladas. Su máxima capacidad resistente.

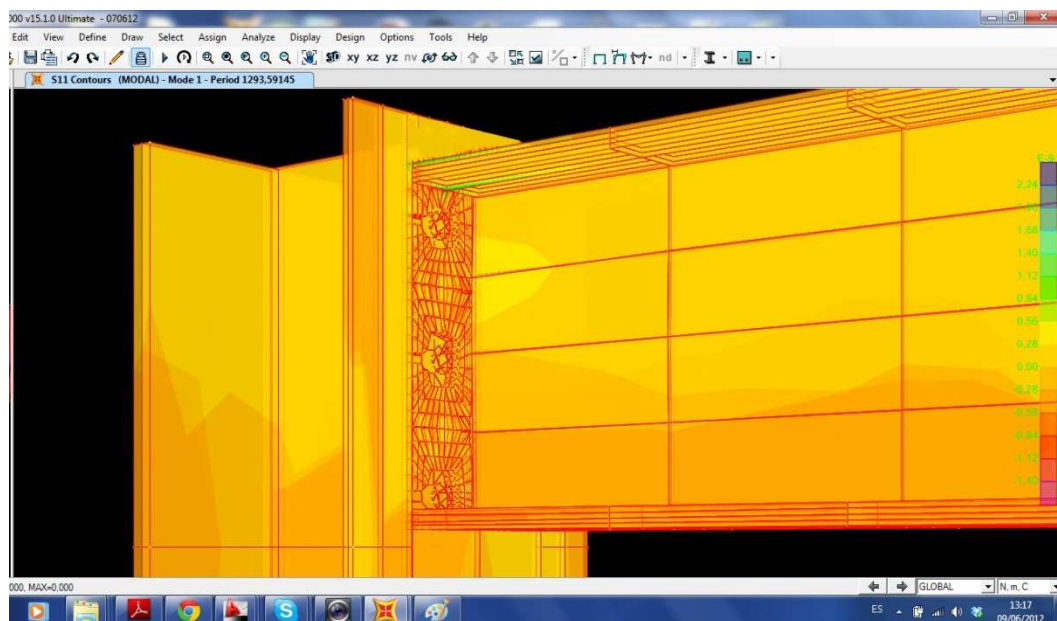


Fig 3.11
(Modelo 3D de la unión a dimensionar.)

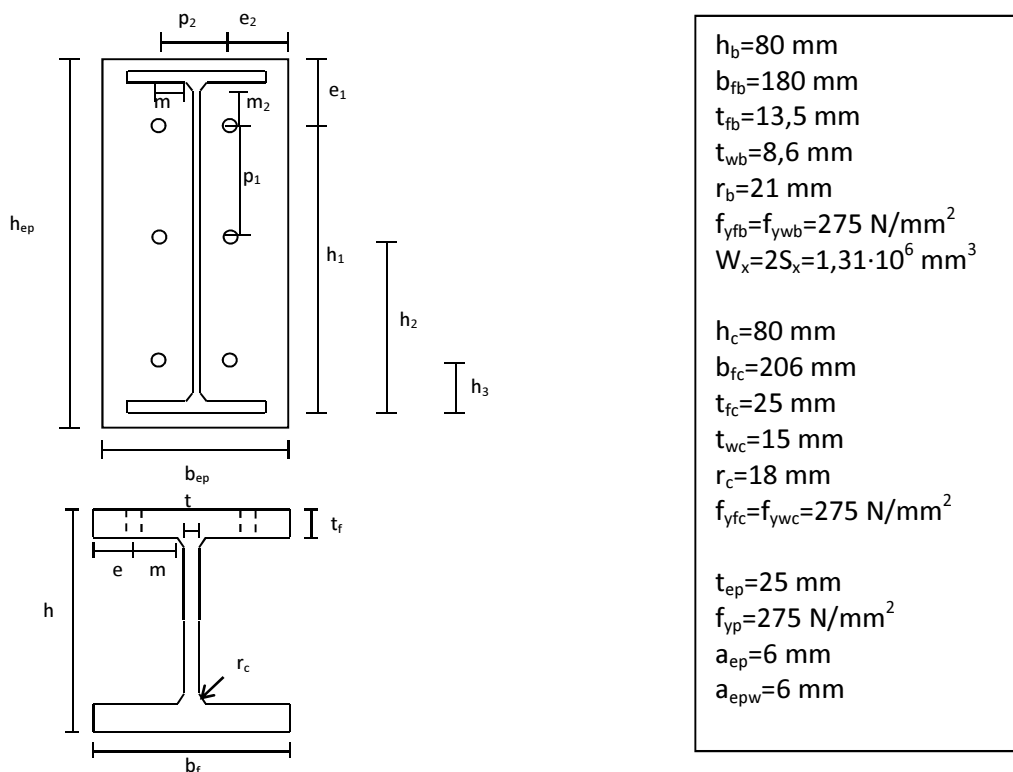
4

CÁLCULOS ANALÍTICOS Y COMPUTACIONALES EN LOS RESPECTIVOS MODOS

(VALORES MODALES DE ESTRUCTURA FORMADA POR VIGA IPN 80 UNIDA A HEB-80, BAJO LAS SIGUIENTES CONDICIONES)

4.1 DIMENSIONAMIENTO DE LA UNIÓN ATORNILLADA**4.1.1 DIMENSIONAMIENTO DE LOS TORNILLOS**

En primer lugar, después de elegir el tipo de viga y columna que usaremos, por tanto debemos dimensionar los tornillos. La unión consistirá en una viga de perfil IPE-100 unida a una columna HEB-100 por 6 tornillos M20 y una chapa de espesor igual al ancho del ala de columna.

**Fig 4.1**

(Esquema de las dimensiones de los perfiles de la unión, con las respectivas dimensiones para un IPE 100 de 1,5 m y un HEB 80 de 0,4 m.)

Si tomamos como espesor de la chapa 25 mm (el espesor del ala de la columna), dimensionaremos la unión usando 6 tornillos M20, con resistencias de tornillo 8.8. De este modo, teniendo en cuenta que la holgura nominal es de 2 mm, tendremos un $do = 22$ mm, y un $t = 25$ mm.

Pasamos a calcular las distancias entre tornillos y la distancia con los bordes de la chapa, usando la tabla 3.3 del EC-3.

Distancia al borde frontal (superior – inferior)

$$1,2 \cdot d_o = 26,4 \text{ mm} \leq e_1 \leq \begin{cases} 40 + 4t = 140 \text{ mm} \\ 8t = 200 \text{ mm} \\ 125 \text{ mm} \end{cases}$$

Tomamos por ejemplo $e_1 = 70 \text{ mm}$.

Distancia al borde lateral

$$1,2 \cdot d_o = 26,4 \text{ mm} \leq e_1 \leq \begin{cases} 40 + 4t = 140 \text{ mm} \\ 8t = 200 \text{ mm} \\ 125 \text{ mm} \end{cases}$$

Tomamos por ejemplo $e_2 = 45 \text{ mm}$.

Distancia entre ejes de tornillos (dirección paralela al esfuerzo)

$$2,2 \cdot d_o = 48,4 \text{ mm} \leq p_1 \leq \begin{cases} 14t = 350 \text{ mm} \\ 200 \text{ mm} \end{cases}$$

Tomamos entonces $p_1 = 130 \text{ mm}$.

Distancia entre ejes de tornillos (dirección perpendicular al esfuerzo)

$$2,4 \cdot d_o = 52,8 \text{ mm} \leq p_2 \leq \begin{cases} 14t = 350 \text{ mm} \\ 200 \text{ mm} \end{cases}$$

En este caso tomamos $p_2 = 110 \text{ mm}$.

De modo que la disposición de los tornillos queda como sigue:

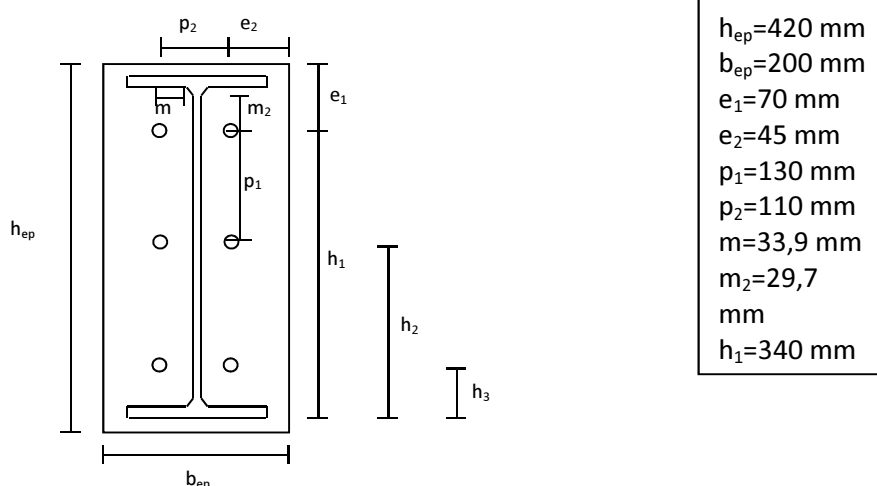


Fig 4.2

(Dimensiones, tolerancias y distancias a los respectivos bordes frontales y bordes laterales.)

4.1.2 Cálculos

Tras dimensionar chapa y tornillos, pasamos a realizar los cálculos de la unión.

Cálculo de anchos eficaces T equivalentes.

En primer lugar debemos calcular **los anchos eficaces** para cada fila de tornillos, usando las *tablas 5.5, 6.2* del EC-3. Teniendo en cuenta que las tres filas son interiores:

Figure 6.8: Definitions of e , e_{\min} , r_c and m

Table 6.4: Effective lengths for an unstiffened column flange

| Bolt-row Location | Bolt-row considered individually | | Bolt-row considered as part of a group of bolt-rows | |
|-------------------|--|--|--|---|
| | Circular patterns $\ell_{\text{eff,ep}}$ | Non-circular patterns $\ell_{\text{eff,nc}}$ | Circular patterns $\ell_{\text{eff,ep}}$ | Non-circular patterns $\ell_{\text{eff,nc}}$ |
| Inner bolt-row | $2\pi m$ | $4m + 1,25e$ | $2p$ | p |
| End bolt-row | The smaller of: $2\pi m$ $\pi m + 2e_1$ | The smaller of: $4m + 1,25e$ $2m + 0,625e + e_1$ | The smaller of: $\pi m + p$ $2e_1 + p$ | The smaller of: $2m + 0,625e + 0,5p$ $e_1 + 0,5p$ |
| Mode 1 | $\ell_{\text{eff},1} = \ell_{\text{eff,nc}}$ but $\ell_{\text{eff},1} \leq \ell_{\text{eff,ep}}$ | | $\sum \ell_{\text{eff},1} = \sum \ell_{\text{eff,nc}}$ but $\sum \ell_{\text{eff},1} \leq \sum \ell_{\text{eff,ep}}$ | |
| Mode 2 | $\ell_{\text{eff},2} = \ell_{\text{eff,nc}}$ | | $\sum \ell_{\text{eff},2} = \sum \ell_{\text{eff,nc}}$ | |

Tabla 4.1

(Respetivos anchos eficaces en función del modo de rotura.)

Figure 6.10: Modelling an extended end-plate as separate T-stubs

Table 6.6: Effective lengths for an end-plate

| Bolt-row location | Bolt-row considered individually | | Bolt-row considered as part of a group of bolt-rows | |
|---|--|---|--|--|
| | Circular patterns $\ell_{\text{eff,ep}}$ | Non-circular patterns $\ell_{\text{eff,nc}}$ | Circular patterns $\ell_{\text{eff,ep}}$ | Non-circular patterns $\ell_{\text{eff,nc}}$ |
| Bolt-row outside tension flange of beam | Smallest of: $2\pi m_x$ $\pi m_x + w$ $\pi m_x + 2e$ | Smallest of: $4m_x + 1,25e_x$ $e + 2m_x + 0,625e_x$ $0,5b_p$ $0,5w + 2m_x + 0,625e_x$ | — | — |
| First bolt-row below tension flange of beam | $2\pi m$ | αm | $\pi m + p$ | $0,5p + \alpha m - (2m + 0,625e)$ |
| Other inner bolt-row | $2\pi m$ | $4m + 1,25e$ | $2p$ | p |
| Other end bolt-row | $2\pi m$ | $4m + 1,25e$ | $\pi m + p$ | $2m + 0,625e + 0,5p$ |
| Mode 1: | $\ell_{\text{eff},1} = \ell_{\text{eff,nc}}$ but $\ell_{\text{eff},1} \leq \ell_{\text{eff,ep}}$ | | $\sum \ell_{\text{eff},1} = \sum \ell_{\text{eff,nc}}$ but $\sum \ell_{\text{eff},1} \leq \sum \ell_{\text{eff,ep}}$ | |
| Mode 2: | $\ell_{\text{eff},2} = \ell_{\text{eff,nc}}$ | | $\sum \ell_{\text{eff},2} = \sum \ell_{\text{eff,nc}}$ | |

α should be obtained from Figure 6.11.

Tabla 4.2

(Fórmulas de los respectivos anchos eficaces en función de la fila de tornillos individuales ó como grupo)

where:

ω is a reduction factor to allow for the possible effects of interaction with shear in the column web panel according to Table 6.3;

$b_{\text{eff,c,wc}}$ is the effective width of column web in compression

- for a welded connection:

$$b_{\text{eff,c,wc}} = t_{fb} + 2\sqrt{2} a_b + 5(t_{fc} + s) \quad \dots (6.10)$$

a_c , r_c and a_b are as indicated in Figure 6.6.

- for bolted end-plate connection:

$$b_{\text{eff,c,wc}} = t_{fb} + 2\sqrt{2} a_p + 5(t_{fc} + s) + s_p \quad \dots (6.11)$$

s_p is the length obtained by dispersion at 45° through the end-plate (at least t_p and, provided that the length of end-plate below the flange is sufficient, up to $2t_p$).

- for bolted connection with angle flange cleats:

$$b_{\text{eff,c,wc}} = 2t_a + 0,6r_a + 5(t_{fc} + s) \quad \dots (6.12)$$

- for a rolled I or H section column: $s = r_c$

- for a welded I or H section column: $s = \sqrt{2}a_c$

ρ is the reduction factor for plate buckling:

- if $\bar{\lambda}_p \leq 0,72$: $\rho = 1,0$... (6.13a)

- if $\bar{\lambda}_p > 0,72$: $\rho = (\bar{\lambda}_p - 0,2) / \bar{\lambda}_p^2$... (6.13b)

$\bar{\lambda}_p$ is the plate slenderness:

$$\bar{\lambda}_p = 0,932 \sqrt{\frac{b_{\text{eff,c,wc}} d_{\text{wc}} f_{y,\text{wc}}}{Et_{\text{wc}}^2}} \quad \dots (6.13c)$$

- for a rolled I or H section column: $d_{\text{wc}} = h_c - 2(t_{fc} + r_c)$

- for a welded I or H section column: $d_{\text{wc}} = h_c - 2(t_{fc} + \sqrt{2}a)$

k_{wc} is a reduction factor and is given in 6.2.6.2(2).

Tabla 4.3

(Fórmulas de los respectivos anchos eficaces en función de la fila de tornillos individuales o como grupo y la fórmula 6.11 (de la ilustración) utilizada en la memoria para los respectivos anchos eficaces de cada grupo de tornillos)

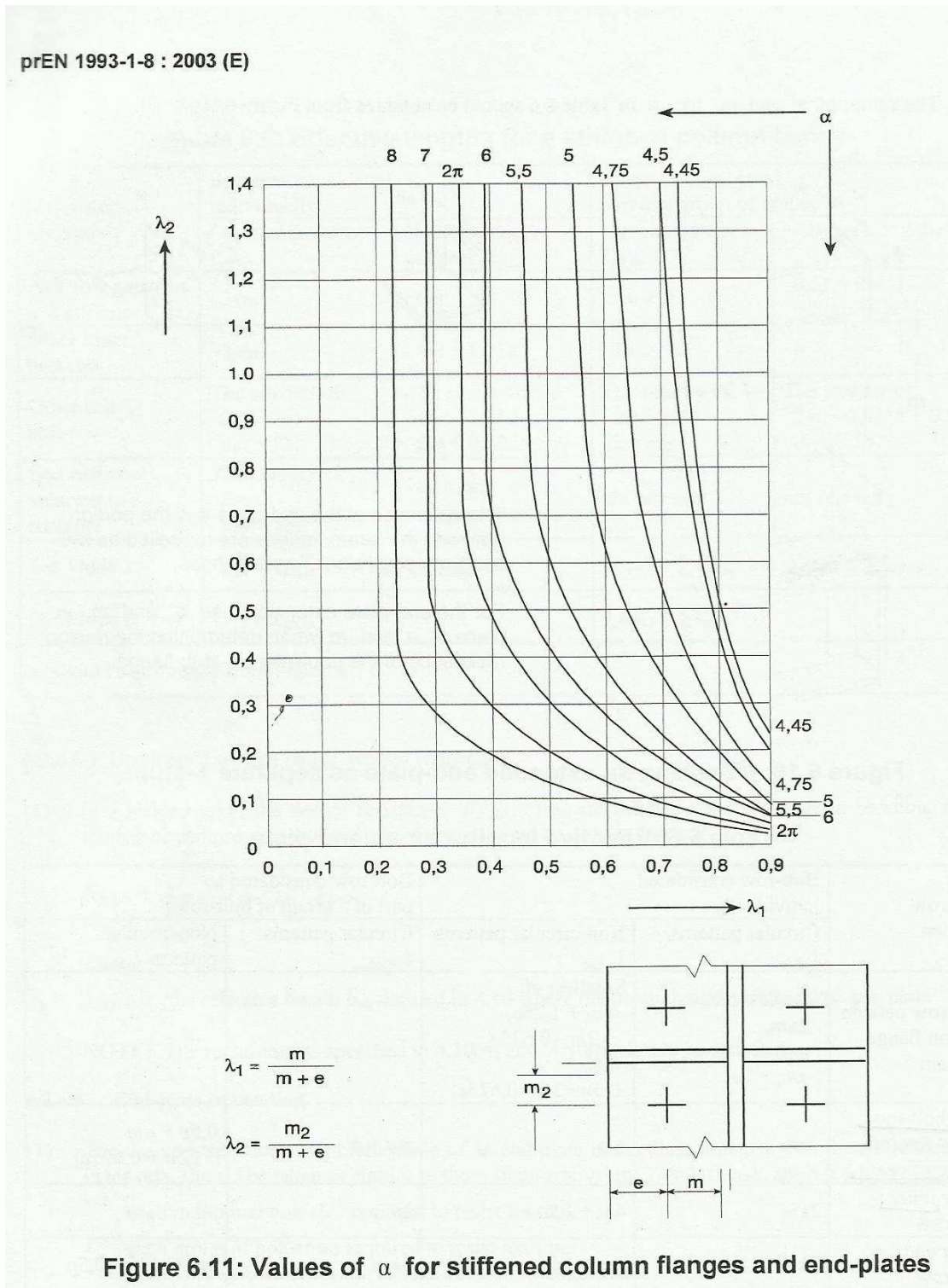


Figure 6.11: Values of α for stiffened column flanges and end-plates

Tabla 4.4

(Fórmulas de los respectivos anchos eficaces en función de la fila de tornillos individuales ó como grupo)

Primera fila (primera fila bajo ala de la viga):

$$\text{Ala Columna a Flexión} \begin{cases} 2 \cdot \pi \cdot m = 213 \text{ mm} \\ 4 \cdot m + 1,25 \cdot e = 191,85 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\text{Chapa frontal} \begin{cases} 2 \cdot \pi \cdot m = 213 \text{ mm} \\ \alpha \cdot m = 213 \text{ mm} \end{cases}$$

Para el cálculo de α , necesitamos tanto $m = 33,9 \text{ mm}$, como $m_2 = 29,7 \text{ mm}$, para poder calcular λ_1 y λ_2 . Tras eso, usando la figura 5.8 podemos hallar α .

$$\lambda_1 = \frac{m}{m + e} = \frac{33,9}{33,9 + 45} = 0,43$$

$$\lambda_2 = \frac{m_2}{m + e} = \frac{29,7}{33,9 + 45} = 0,38$$

Con estos valores, $\alpha = 2\pi$.

Segunda fila:

$$\text{Ala Columna a Flexión (individual)} \begin{cases} 2 \cdot \pi \cdot m = 213 \text{ mm} \\ 4 \cdot m + 1,25 \cdot e = 191,85 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\text{Ala Columna a Flexión (grupo)} \begin{cases} p = 100 \text{ mm} \\ 2 \cdot p = 200 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\text{Chapa frontal (individual)} \begin{cases} 2 \cdot \pi \cdot m = 213 \text{ mm} \\ 4 \cdot m + 1,25 \cdot e = 191,85 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\text{Chapa frontal (grupo)} \begin{cases} p = 100 \text{ mm} \\ 2 \cdot p = 200 \text{ mm} \end{cases}$$

Tercera fila (última fila):

$$\text{Ala Columna a Flexión} \begin{cases} 2 \cdot \pi \cdot m = 213 \text{ mm} \\ 4 \cdot m + 1,25 \cdot e = 191,85 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\text{Chapa frontal} \begin{cases} 2 \cdot \pi \cdot m = 213 \text{ mm} \\ 4 \cdot m + 1,25 \cdot e = 191,85 \text{ mm} \end{cases}$$

4.1.3 CALCULO DE LA RIGIDEZ

Ahora pasamos a calcular la rigidez de la unión. Para ello analizaremos la rigidez producida por varios elementos:

Ala Columna a Flexión (1ª fila):

Sabiendo que $m = 33,9$ mm y tomando $L_{ef} = 191,85$ mm, calculamos la rigidez:

$$K = \frac{0,9 \cdot L_{ef} \cdot t_{fc}^3}{m^3} = 69,25 \text{ mm}$$

Alma Columna a Tracción (1ª fila):

Sabiendo que $d_c = 141,2$ mm y $L_{ef} = 191,85$ mm, la rigidez es:

$$K = \frac{0,7 \cdot L_{ef} \cdot t_{wc}}{d_c} = 14,27 \text{ mm}$$

Chapa Frontal en Flexión (1ª fila):

Gracias a los cálculos anteriores, sabemos que $L_{ef} = 213$ mm, con lo que:

$$K = \frac{0,9 \cdot L_{ef} \cdot t_p^3}{m^3} = 76,89 \text{ mm}$$

Tornillos (1ª fila):

$$K = \frac{1,6 \cdot A_s}{L_b} = 21,69 \text{ mm}$$

Hallamos ahora la rigidez equivalente de esta primera fila

$$K_{eq1} = \frac{1}{\frac{1}{69,25} + \frac{1}{14,27} + \frac{1}{76,89} + \frac{1}{21,69}} = 6,9618 \text{ mm}$$

Ala Columna a Flexión (2ª fila):

Sabiendo que $m = 33,9$ mm y tomando $L_{ef} = 191,85$ mm, calculamos la rigidez:

$$K = \frac{0,9 \cdot L_{ef} \cdot t_{fc}^3}{m^3} = 69,25 \text{ mm}$$

Alma Columna a Tracción (2ª fila):

Sabiendo que $d_c = 141,2$ mm y $L_{ef} = 191,85$ mm, la rigidez es:

$$K = \frac{0,7 \cdot L_{ef} \cdot t_{wc}}{d_c} = 14,27 \text{ mm}$$

Chapa Frontal en Flexión (2ª fila):

Gracias a los cálculos anteriores, sabemos que $L_{ef} = 191,85$ mm, con lo que:

$$K = \frac{0,9 \cdot L_{ef} \cdot t_p^3}{m^3} = 69,25 \text{ mm}$$

Tornillos (2ª fila):

$$K = \frac{1,6 \cdot A_s}{L_b} = 21,69 \text{ mm}$$

Hallamos ahora la rigidez equivalente de esta primera fila

$$K_{eq2} = \frac{1}{\frac{1}{69,25} + \frac{1}{14,27} + \frac{1}{69,25} + \frac{1}{21,69}} = 6,893 \text{ mm}$$

Ala Columna a Flexión (3ª fila)

Sabiendo que $m = 33,9$ mm y tomando $L_{ef} = 191,85$ mm, calculamos la rigidez:

$$K = \frac{0,9 \cdot L_{ef} \cdot t_{fc}^3}{m^3} = 69,25 \text{ mm}$$

Alma Columna a Tracción (3ª fila)

Sabiendo que $d_c = 141,2$ mm y $L_{ef} = 191,85$ mm, la rigidez es:

$$K = \frac{0,7 \cdot L_{ef} \cdot t_{wc}}{d_c} = 14,27 \text{ mm}$$

Chapa Frontal en Flexión (3ª fila)

Gracias a los cálculos anteriores, sabemos que $L_{ef} = 191,85$ mm, con lo que:

$$K = \frac{0,9 \cdot L_{ef} \cdot t_p^3}{m^3} = 69,25 \text{ mm}$$

Tornillos (3ª fila):

$$K = \frac{1,6 \cdot A_s}{L_b} = 21,69 \text{ mm}$$

Hallamos ahora la rigidez equivalente de esta primera fila

$$K_{eq3} = \frac{1}{\frac{1}{69,25} + \frac{1}{14,27} + \frac{1}{69,25} + \frac{1}{21,69}} = 6,893 \text{ mm}$$

Con esto podemos calcular entonces la rigidez equivalente total, y teniendo en cuenta que hay dos componentes adicionales no relacionadas con los tornillos, conseguimos hallar la rigidez inicial de la unión S_j .

Conocidos los valores de h_1 , h_2 y h_3 :

$$Z_{eq} = \frac{\sum(K_{eq,r} \cdot h_r^2)}{\sum(K_{eq,r} \cdot h_r)} = 264,06 \text{ mm}$$

$$K_{eqtot} = \frac{\sum(K_{eq,r} \cdot h_r)}{Z_{eq}} = 16,53 \text{ mm}$$

Área Cortadura de Columna

Sabiendo que $A_{vc} = 2118 \text{ mm}^2$ y $\beta = 1$, calculamos:

$$K = \frac{0,38 \cdot A_{vc}}{\beta \cdot Z_{eq}} = 3,048 \text{ mm}$$

Alma Columna a Compresión

Debemos usar la ecuación 6.1.1 dada en la tabla 5.5 del presente trabajo, página para hallar el ancho equivalente y con él sacar la rigidez:

$$b_{ef} = t_{fb} + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot a_p + 5 \cdot (t_{fc} + r_c) + s_p = 280,47 \text{ mm}$$

$$K = \frac{0,7 \cdot b_{ef} \cdot t_{wc}}{d_c} = 20,8565 \text{ mm}$$

Así, la rigidez de la unión será:

$$S_j = \frac{E \cdot Z_{eq}^2}{\mu \cdot \sum\left(\frac{1}{K_i}\right)} = \frac{210000 \cdot (264,06)^2}{\frac{1}{16,53} + \frac{1}{3,048} + \frac{1}{20,8565}} \rightarrow S_j = 33545 \text{ KN} \cdot \text{m}/\text{rad}$$

Cálculo de la resistencia

Aquí de nuevo debemos analizar la resistencia de varios elementos:

Alma Columna a Cortante

Según la ecuación 6.7:

$$V_{wp,Rd} = \frac{0,9 \cdot f_{ywc} \cdot A_{vc}}{\gamma_{M0} \cdot \sqrt{3}} = 302,65 \text{ KN}$$

Alma Columna a Compresión - Tracción

Si obtenemos que, según la ecuación 6.13 en la fig 5.4 del presente trabajo pagina , $\lambda_p < 0,72$, sabremos que el valor para la compresión y la tracción del alma de la columna son el mismo.

$$\lambda_p = 0,932 \cdot \sqrt{\frac{b_{ef} \cdot d_{wc} \cdot f_{ywc}}{E \cdot t_{wc}^2}} = 0,4455 \leq 0,72$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + 1,3 \cdot \left(\frac{b_{ef} \cdot t_{wc}}{A_{vc}}\right)^2}} = 0,4039$$

$$F_{Rd,comp} = \frac{\omega_1 \cdot b_{ef} \cdot t_{wc} \cdot f_{ywc}}{\gamma_{M0}} = 467,32 \text{ KN}$$

Zona Viga a Compresión

Usando la ecuación 6.21:

$$F_{c,fb,Rd} = \frac{M_{pl}}{h_b - t_{fb}} = \frac{W_{pl} \cdot f_y}{h_b - t_{fb}} = 932,08 \text{ KN}$$

Tornillos:

Usando las *Tablas 6.2 y 3.4, del EC-3 hallamos el momento M_{pl} y la tensión F_t que usamos para calcular la tensión máxima soportada por los tornillos según los distintos modos de rotura (mecanismo flexible, semiflexible o rígido).*

El momento plástico para los modos 1 y 2 y la tensión en los tornillos para los modos 2 y 3 se calculan como sigue:

Introducir tablas escaneadas del Eurocódigo 3

$$M_{pl,1,Rd} = \frac{0,25 \cdot \sum l_{eff,1} \cdot t_f^2 \cdot f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$M_{pl,2,Rd} = \frac{0,25 \cdot \sum l_{eff,2} \cdot t_f^2 \cdot f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$F_{t,Rd} = \frac{0,9 \cdot f_{ub} \cdot A_s}{\gamma_{M2}}$$

Y la tensión máxima soportada en modo flexible, semiflexible y rígido se calcula así, respectivamente:

$$F_{T,1,Rd} = \frac{4 \cdot M_{pl,1,Rd}}{m}$$

$$F_{T,2,Rd} = \frac{2 \cdot M_{pl,2,Rd} + n \cdot \sum F_{t,Rd}}{m + n}$$

$$F_{T,3,Rd} = \sum F_{t,Rd}$$

Para la primera fila:

A la Columna a Flexión (Lef = 191,85 mm)

$$\begin{matrix} M_{pl} = 8,24 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm} \\ F_t = 4,06 \cdot 10^5 \text{ N} \end{matrix} \begin{cases} F_{T,1,Rd} = 9,72 \cdot 10^5 \text{ N} \\ F_{T,2,Rd} = 6,72 \cdot 10^5 \text{ N} \\ F_{T,3,Rd} = 8,12 \cdot 10^5 \text{ N} \end{cases}$$

Alma Columna a Tracción (Lef = 191,85 mm)

$$F_{t,Rd} = \frac{\omega \cdot b_{ef} \cdot t_{wc} \cdot f_{ywc}}{\gamma_{M0}} = 429,2 \text{ KN}$$

Chapa frontal en Flexión (Lef = 213 mm)

$$\begin{matrix} M_{pl} = 9,15 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm} \\ F_t = 4,06 \cdot 10^5 \text{ N} \end{matrix} \begin{cases} F_{T,1,Rd} = 10,8 \cdot 10^5 \text{ N} \\ F_{T,2,Rd} = 6,95 \cdot 10^5 \text{ N} \\ F_{T,3,Rd} = 8,12 \cdot 10^5 \text{ N} \end{cases}$$

De este modo, la resistencia propia de la primera fila es la menor, en este caso, FT1=429,2 KN.

Para la segunda fila vemos la actuación individual y en grupo de los tornillos:

A la Columna a Flexión (Lef ind.=191,85 mm; Lef gr.=191,85 + 100 = 291,85 mm)

$$M_{pl,ind} = 8,24 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm} \quad \begin{cases} F_{T,1,Rd} = 9,72 \cdot 10^5 \text{ N} \\ F_t = 4,06 \cdot 10^5 \text{ N} \\ F_{T,2,Rd} = 6,72 \cdot 10^5 \text{ N} \\ F_{T,3,Rd} = 8,12 \cdot 10^5 \text{ N} \end{cases}$$

$$M_{pl,gr} = 12,54 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm} \quad \begin{cases} F_{T,1,Rd} = 14,8 \cdot 10^5 \text{ N} \\ F_{T,2,Rd} = 7,81 \cdot 10^5 - 6,72 \cdot 10^5 = 1,09 \cdot 10^5 \text{ N} \\ F_t = 4,06 \cdot 10^5 \text{ N} \\ F_{T,3,Rd} = 8,12 \cdot 10^5 \text{ N} \end{cases}$$

Alma Columna a Tracción (Lef ind.=191,85 mm; Lef gr.=291,85 mm)

$$\omega_{ind} = 0,542 \rightarrow F_{t,Rd} = \frac{\omega_{ind} \cdot b_{ef} \cdot t_{wc} \cdot f_{ywc}}{\gamma_{M0}} = 429,2 \text{ KN}$$

$$\omega_{gr} = 0,392 \rightarrow F_{t,Rd} = \frac{\omega_{gr} \cdot b_{ef} \cdot t_{wc} \cdot f_{ywc}}{\gamma_{M0}} = 470,26 - 429,2 = 41,06 \text{ KN}$$

Chapa Frontal en Flexión (Lef ind.=191,85 mm; No tengo en cuenta el grupo)

$$M_{pl} = 8,24 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm} \quad \begin{cases} F_{T,1,Rd} = 9,72 \cdot 10^5 \text{ N} \\ F_t = 4,06 \cdot 10^5 \text{ N} \\ F_{T,2,Rd} = 6,72 \cdot 10^5 \text{ N} \\ F_{T,3,Rd} = 8,12 \cdot 10^5 \text{ N} \end{cases}$$

Alma Viga a Tracción (Lef=191,85 mm)

$$F_{t,Rd} = b_{ef} \cdot t_{wb} \cdot f_{ywb} = 453,73 \text{ KN}$$

De entre todas estas tensiones elegimos la menor, teniendo en cuenta que a las tensiones de grupo del Ala y Alma de la columna debo restarle la tensión que aguanta la primera fila de tornillos.
De este modo, la tensión límite de la segunda fila de tornillos será FT2=41,06 KN

Cálculo del Momento resistente:

Finalmente, el último paso es calcular el Momento resistente de la unión basándonos en las resistencias calculadas anteriormente:

$$M_{j,Rd} = \sum F_{Ti} \cdot h_i = 429,2 \text{ KN} \cdot 340 \text{ mm} + 41,06 \text{ KN} \cdot 210 \text{ mm} \rightarrow$$

$$M_{j,Rd} = 154,55 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

De modo que la gráfica de la unión sería la siguiente:

Para el cálculo de carga modal realizado y de carga por impacto se ha tomado la siguiente curva Momento-Rotación obtenida por el método de los componentes, en Unión-Metálica atornillada:

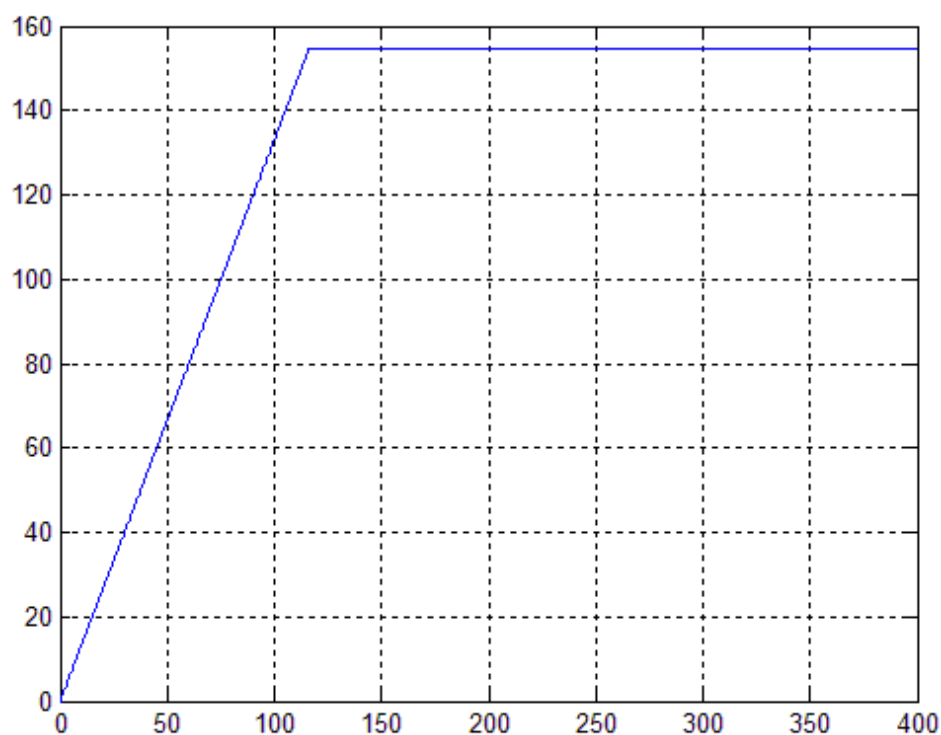


Fig 4.3

(Curva del momento de rotación hallada en el desarrollo del EC-3, con las fórmulas experimentales obtenidas. En ella se aprecia el valor de 154,55 Kn.m, a partir del cual el comportamiento deja de ser lineal para entrar en el estado de plastificación de la unión. Se caracteriza así el comportamiento semirrígido de la unión.)

4.1.4 CALCULO DE LA UNIÓN CON LA SUPOSICIÓN DE FALLO EN EL FUNCIONAMIENTO DE UNO DE LOS TORNILLOS:

Tras dimensionar chapa y tornillos, pasamos a realizar los cálculos de la unión.

Cálculo de anchos eficaces T equivalentes.

En primer lugar debemos calcular **los anchos eficaces** para cada fila de tornillos, usando las tablas 6.4 y 6.6 del EC-3. Teniendo en cuenta que las tres filas son interiores:

Primera fila (primera fila bajo ala de la viga):

$$\text{Ala Columna a Flexión} \begin{cases} 2 \cdot \pi \cdot m = 213 \text{ mm} \\ 4 \cdot m + 1,25 \cdot e = 191,85 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\text{Chapa frontal} \begin{cases} 2 \cdot \pi \cdot m = 213 \text{ mm} \\ \alpha \cdot m = 213 \text{ mm} \end{cases}$$

Para el cálculo de α , necesitamos tanto $m = 33,9$ mm, como $m_2 = 29,7$ mm, para poder calcular λ_1 y λ_2 . Tras eso, usando la figura 6.11 en la página 41 del presente trabajo, figura 5.4., podemos hallar α .

$$\lambda_1 = \frac{m}{m + e} = \frac{33,9}{33,9 + 45} = 0,43$$

$$\lambda_2 = \frac{m_2}{m + e} = \frac{29,7}{33,9 + 45} = 0,38$$

Con estos valores, $\alpha = 2\pi$.

4.1.5 CALCULO DE LA RIGIDEZ CON LA SUPOSICIÓN DE FALLO EN EL FUNCIONAMIENTO DE UNO DE LOS TORNILLOS:

Ahora pasamos a calcular la rigidez de la unión. Para ello analizaremos la rigidez producida por varios elementos:

Ala Columna a Flexión (1ª fila):

Sabiendo que $m = 33,9$ mm y tomando $L_{ef} = 191,85$ mm, calculamos la rigidez:

$$K = \frac{0,9 \cdot L_{ef} \cdot t_{fc}^2}{m^3} = 69,25 \text{ mm}$$

Alma Columna a Tracción (1ª fila):

Sabiendo que $d_c = 141,2$ mm y $L_{ef} = 191,85$ mm, la rigidez es:

$$K = \frac{0,7 \cdot L_{ef} \cdot t_{wc}}{d_c} = 14,27 \text{ mm}$$

Chapa Frontal en Flexión (1ª fila):

Gracias a los cálculos anteriores, sabemos que $L_{ef} = 213$ mm, con lo que:

$$K = \frac{0,9 \cdot L_{ef} \cdot t_p^3}{m^3} = 76,89 \text{ mm}$$

Con esto podemos calcular entonces la rigidez equivalente total, y teniendo en cuenta que hay dos componentes adicionales no relacionadas con los tornillos, conseguimos hallar la rigidez inicial de la unión S_j .

Conocidos los valores de h_1 , h_2 y h_3 :

$$Z_{eq} = \frac{\sum(K_{eq,r} \cdot h_r^2)}{\sum(K_{eq,r} \cdot h_r)} = 264,06 \text{ mm}$$

$$K_{eqtot} = \frac{\sum(K_{eq,r} \cdot h_r)}{Z_{eq}} = 16,53 \text{ mm}$$

Área Cortadura de Columna

Sabiendo que $A_{vc} = 2118$ mm² y $\beta = 1$, calculamos:

$$K = \frac{0,38 \cdot A_{vc}}{\beta \cdot Z_{eq}} = 3,048 \text{ mm}$$

Alma Columna a Compresión

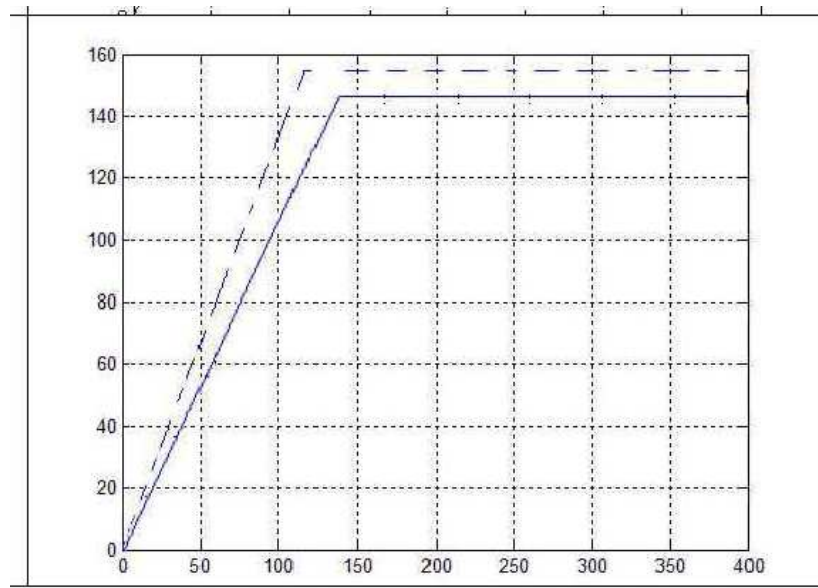
Debemos usar la (ecuación 6.11) para hallar el ancho equivalente y con él sacar la rigidez:

$$b_{ef} = t_{fb} + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot a_p + 5 \cdot (t_{fc} + r_c) + s_p = 280,47 \text{ mm}$$

$$K = \frac{0,7 \cdot b_{ef} \cdot t_{wc}}{d_c} = 20,8565 \text{ mm}$$

Así, la rigidez de la unión será:

$$S_j = \frac{E \cdot Z_{eq}^2}{\mu \cdot \sum\left(\frac{1}{K_i}\right)} = \frac{210000 \cdot (264,06)^2}{\frac{1}{16,53} + \frac{1}{3,048} + \frac{1}{20,8565}} \rightarrow S_j = 33545 \text{ KN} \cdot \text{m}/\text{rad}$$

**Fig 4.4**

(Curva del momento de rotación hallada en el desarrollo del EC-3, con las fórmulas experimentales obtenidas. Se aprecia la variación de rigidez del diagrama bilineal, debido a la pérdida de la rigidez en uno de los tornillos que constituyen la unión).

4.2 CÁLCULO DE LA UNIÓN SOLDADA

Se desarrolla la predicción de la resistencia a flexión y de la rigidez a la rotación de la unión esquematizada en el siguiente croquis. Se muestran las siguientes propiedades mecánicas y geométricas. Se supone un valor de coeficiente de seguridad de $\gamma_{MO} = 1$.

Resistencia a flexión:

Área eficaz de cortante:

$$A_{vc} = A_c - 2b_c t_{fc} + (t_{wc} + 2r_c) t_{fc} =$$

$$A_{vc} = 10113 - 2 \times 240 \times 16.1 + (9.7 + 2 \times 21.0) \times 16.1 = 3217.59 \text{ mm}^2$$

La resistencia a cortante toma como valor:

$$V_{cw,Rd} = \frac{f_{y,cw} A_{vc}}{\sqrt{3} \gamma_{MO}} = \frac{310 \times 3217.59}{\sqrt{3} \times 1} = 575879 \text{ N} = 575.9 \text{ KN} \text{ Coeficiente } \beta$$

$$\beta = 1 - \frac{h_t}{h} = 1 - \frac{436.9}{1391.0} = 0.6859.$$

Da como resultado una resistencia a cortante incluyendo la influencia de las distribuciones internas:

$$F_{cw,Rd} = \frac{V_{cw,Rd}}{\beta} = \frac{575879}{0.6859} = 83959N = 839.6KN$$

El **alma de la columna a compresión** da como consecuencia una resistencia al aplastamiento cuyo ancho efectivo es:

$$b_{eff,cwc} = t_{fb} + 2\sqrt{2}a_b + 5(t_{fb} + r_c) =$$

$$14.1 + 2x\sqrt{2}x1.01 + 5x(16.1 + 21.0) = 228.17mm .$$

Con t_{fb} ancho del ala de la columna, a_b el ancho de garganta de soldadura.

$$\rho = \frac{1}{\left[1 + 3 \cdot \beta^2 \cdot \xi^2 \left(\frac{b_{eff,cwc}}{A_{vc}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\rho = \frac{1}{\left[1 + 3 \cdot 0.6859^2 \cdot 0.8^2 \left(\frac{228.17x9.7}{3217.59}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = 0.8370$$

Por lo que la resistencia a cortante tomará el valor de:

$$F_{cw,Rd} = \frac{b_{eff,cwc} \cdot t_{fb} \cdot f_{y,cw} \cdot \rho \cdot k_{cwc}}{\gamma_{M0}} = \frac{228.17x9.7x310x0.8370x1}{1} = 57421N = 574.3KN$$

Alma de la columna en compresión: (resistencia al pandeo).

El ancho efectivo:

$$b^*_{eff,cwc} = t_{fb} + 2\sqrt{2}a_b + 2 \left[\Psi \left(\frac{d_{wc} b_{fc}}{3t_{wc} t_{fc}} \right)^{\frac{1}{4}} \right] k =$$

$$b^*_{eff,cwc} = 14.1 + 2\sqrt{2}x10.1 + 2 \left[0.75x \left(\frac{164.8x240.0}{3x16.1x9.7} \right)^{\frac{1}{4}} \right] (16.1 + 21.0) = 211.39mm$$

La carga elástica crítica y la esbeltez no lineal nos dan como resultado:

$$F_{CR} = \frac{\pi \times 210000 \times 9.7^3}{3(1 - 0.3)^2 \times 164.8} = 1338334 N = 1338 KN$$

Tomamos el valor de la esbeltez reducida como:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{b_{eff,cwc} \cdot t_{wc} \cdot f_{y,wc} / \gamma_{M0}}{F_{CR}} \right)} = \sqrt{\left(\frac{228.17 \times 9.7 \times 310 / 1}{1338334} \right)} = 0.716$$

Considerando que $\lambda \geq 0.67$ la resistencia a pandeo del alma de la columna en compresión es:

$$F'_{cwc,Rd} = \frac{b'_{eff,cwc} \cdot t_{wc} \cdot f_{y,wc} \cdot \rho \cdot k_{cwc} \cdot 1}{\gamma_{M0} \cdot \bar{\lambda} \left(1 - \frac{0.22}{\bar{\lambda}} \right)} = \frac{211.39 \times 9.7 \times 310 \times 0.8370 / 1}{1} \cdot \frac{1}{0.716} \left(1 - \frac{0.22}{0.716} \right)$$

$$= 514752 N = 514.75 K$$

Alma del columna (HEB-100 en tracción):

El ancho eficaz será:

$$b_{eff,cwt} = b_{eff,cwc} = 228.17 mm$$

y la resistencia tomará el valor:

$$F_{eff,cwc} = \frac{b'_{eff,cwc} \cdot t_{wc} \cdot f_{y,wc} \cdot \rho}{\gamma_{M0}}$$

$$\frac{228.17 \times 9.7 \times 310 \times 0.8370 \times 1}{1} = 574271 N = 574.3 KN$$

Ala de la columna en flexión, en primer lugar se calcula el coeficiente k:

$$k = \frac{f_{y,wc} \cdot t_{wc}}{f_{y,wc} \cdot t_{wc}} = \frac{269 \times 16.1}{284 \times 14.1} = 1.08$$

El ancho eficaz toma por tanto el valor:

$$b_{eff,cb} = t_{wc} + 2s + 7kt_{fc} = 9.7 + 2 \times 21.0 + 7 \times 1.08 \times 16.1 = 173.4 mm$$

El valor de la resistencia es de:

$$F_{eff,cwc} = \frac{1}{\gamma_{M0}} \left[b'_{eff,ctb} \cdot t_{fb} \cdot f_{y,bf} + \frac{t_{wb} d_{wb}^2}{4(d_b - t_{fb})} f_{y,bw} \right] =$$

$$\frac{1}{10} \left[173.4 \times 14.1 \times 284 + \frac{9.5 \times 380.8^2}{4(451.0 - 14.1)} \cdot 338 \right] = 960798 N = 960.8 KN$$

Ala de la viga y alma en compresión:

$$M_{b,Rd} = Z \cdot f_{ybf} = 1702000 \times 284 = 483368000 \text{ Nmm} = 483368 \text{ KNmm}$$

Por lo que la resistencia del ala y alma de la viga en compresión es:

$$F_{cfb,Rd} = \frac{M_{b,Rd}}{h_b - t_{fb}} = \frac{483368000}{451.0 - 14.1} = 1106358 N = 1106.4 KN$$

La resistencia de la unión componente más débil sería:

$$F_{.Rd \min} = \min \{ F_{cws .Rd}, F_{cwc .Rd}, F_{cwt .Rd}, F_{cfb .Rd}, F_{bjc .Rd} \} =$$

El mínimo valor de entre las distintas resistencias a

$$F_{.Rd \min} = \min \{ 839.6, 514.75, 574.3, 960.8, 1106.4 \} = 514.75 KN$$

Por lo tanto, la resistencia a flexión de la unión es de

$$M_{b,Rd} = F_{.Rd \min} \cdot h_l = 514.75 \times 436.9 = 224894 \text{ KNmm} = 224.9 \text{ KNm} =$$

En una comparativa con valores experimentales obtenemos que el valor de la unión a flexión, evaluada toma un valor de:

$$M_{p,exp} = 255.66 \text{ KNm}$$

El ratio entre el valor de la unión a flexión y la resistencia experimental es:

$$\frac{M_{j,Rd}}{M_{p,exp}} = 0.88$$

La rigidez al giro evaluada y comparada con resultados experimentales es:

Alma de la columna en cortante:

$$k_{cws} = 0.38 \frac{EA_{vc}}{\beta h_t} = 0.38 \frac{210000 \times 3217.59}{0.6859 \times 436.9} = 856822 \text{ N/mm}$$

Alma de la columna en compresión:

El ancho eficaz será:

$$b'_{eff,cfb} = t_{fb} + 2\sqrt{2}a_b + 2(t_{fc} + s) = 14.1 + 2\sqrt{2}210.1 + 2 \times (16.1 + 21.0) = 116.87 \text{ mm}$$

Con lo cual la rigidez axial será:

$$k_{cwc} = E \frac{b'_{eff,cfb} t_{wc}}{d_{wc}} = 210000 \frac{116.87 \times 9.7}{164.8} = 1444564 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

El alma de la columna en tracción valdrá por tanto:

$$k_{cwt} = K_{cwc} = 1444564 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

La rigidez a la rotación se define como:

$$k_{\varphi} = \frac{h_t^2}{\frac{1}{K_{cws}} + \frac{1}{K_{cwc}} + \frac{1}{K_{cwt}}} = \frac{436.9^2}{\frac{1}{856822} + \frac{1}{1444564} + \frac{1}{1444564}} = 74808 \text{ kNm/rad}$$

Valores experimentales toman un valor de:

$$k_{\varphi,exp} = 73919 \frac{\text{Knm}}{\text{rad}}$$

El ratio entre el valor de la unión a flexión y experimental es de:

$$\frac{k_{\varphi}}{k_{\varphi,exp}} = 1.01$$

4.3 CÁLCULOS COMPARATIVOS ENTRE LOS VALORES EN EL SUPERMODELO DE LA FIGURA MOSTRADA EN Y COMPARADOS CON LA CURVA MOMENTO ROTACIÓN:

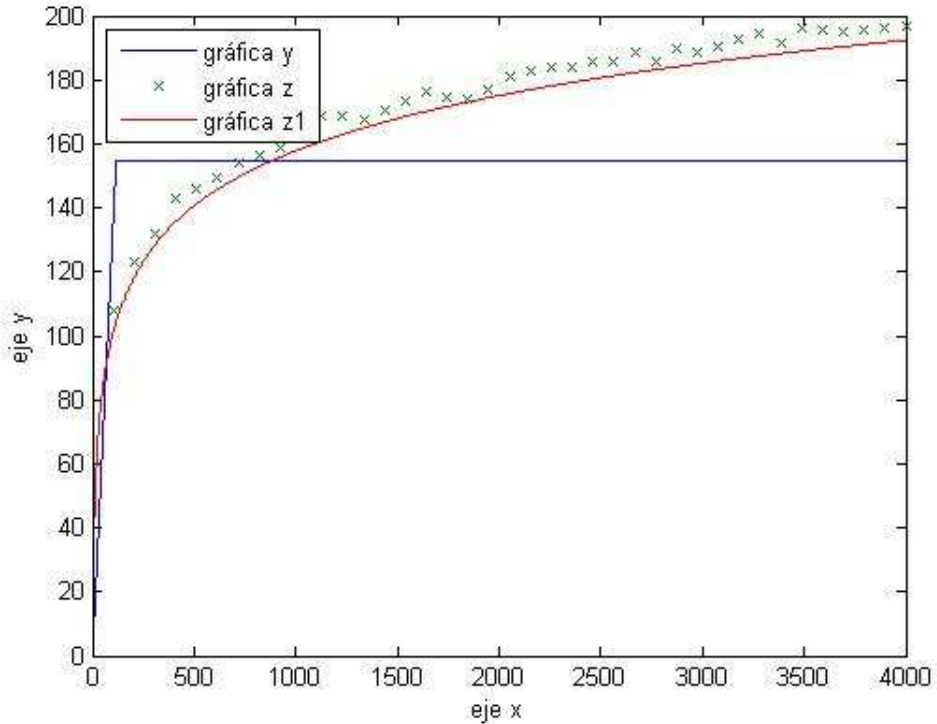


Fig 4.5

(Curva momento rotación en relación a los valores hallados para el supermodelo 3D, tomando valores de deformaciones para los respectivos valores dados)

4.4 VALORES MODALES DE VIGAS IPN 80 A HEB-80 CON LA UNIONES DADAS EN LAS RESPECTIVAS CONDICIONES ANTERIORES:

4.4.1 CÁLCULO ANALÍTICO:

(Según las tablas tomadas de bibliografía en las siguientes condiciones)

$$f_i = \frac{\lambda_i}{2 \cdot \pi \cdot L^2} \cdot \left(\frac{E \cdot I}{m} \right)^{1/2}$$

- Modelo de viga: Descripción teórica.

El modelo de la viga se establece para simular el comportamiento de un puente al de una viga cuyas condiciones de contorno sean iguales así como las propiedades mecánicas.

De este modo partimos de la ecuación del movimiento:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x)$$

Añadimos las condiciones de contorno propias de una viga biapoyada (momento igual a cero en los extremos para cualquier valor de t y desplazamientos y velocidad conocidos en t=0 en toda la viga):

$$\begin{aligned} y(0, t) = 0 &\rightarrow EI \frac{\partial^2(0, t)}{\partial x^2} = 0 = M(0, t) \\ y(L, t) = 0 &\rightarrow EI \frac{\partial^2(L, t)}{\partial x^2} = 0 = M(L, t) \\ y(x, 0) &= y_0(x) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) &= \dot{y}_0(x) \end{aligned}$$

Se pretende a continuación resolver la ecuación del movimiento con sus condiciones de contorno por el método de separación de variables:

$$y(x, t) = f(x) \cdot g(t)$$

f(x): las magnitudes asociadas a esta función son:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(x) &= \frac{\partial f}{\partial x} \\ \bar{M}(x) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} EI \\ \bar{V}(x) &= -\frac{\partial \bar{M}(x)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

g(x): debe cumplir ser una función de tipo armónica:

$$g(x) = A \cos(wt) + B \sin(wt)$$

Sustituyendo la ecuación escogida y(x,t) en la ecuación del movimiento inicial. Imponiendo p(x)=0 para estudiar las vibraciones libres. Separando a ambos lados de la igualdad, de modo que en a la izquierda tengamos los términos en función de x y a la derecha de la igualdad en función de t, podemos separar el problema en los dos siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} + w^2 g(t) &= 0 \rightarrow \ddot{g} + w^2 \cdot g = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right) - w^2 m(x) f(x) &= 0 \end{aligned}$$

Centrándonos en la segunda ecuación, e imponiendo:

$$EI = \text{cte}$$
$$m(x) = \text{cte}$$

La ecuación se reduce a:

—

Definiendo:

—

Obtenemos finalmente:



Si se resuelve el polinomio característico, obtenemos las raíces: $\{\beta, -\beta, i\beta, -i\beta\}$, con lo que $f(x)$ se puede expresar como:

Los valores de C_i se obtienen imponiendo las condiciones de contorno mencionadas en la descripción del problema, de donde se desprende que $C_1 = C_3 = C_4 = 0$. Para evitar que $C_2 = 0$, se procede obligando a que $\sin(\beta x) = 0$, obtenemos así la ecuación de las frecuencias:

—
—

(siendo "n" el modo en estudio)

Por lo que la ecuación de las frecuencias en radianes nos queda:

— —

La frecuencia en hercios se obtiene dividiendo la expresión anterior entre $2 \cdot \pi$, quedando:

—
— — —

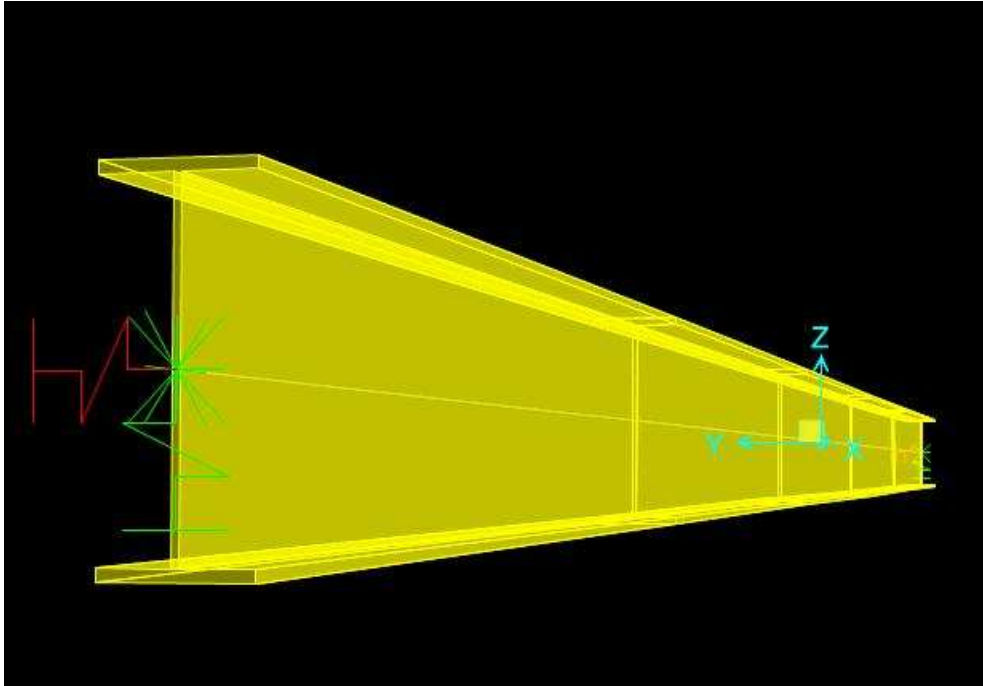


Fig 4.6

(Cálculo de la estructura mediante un modelo de muelles, que simulan la rigidez correspondiente al modo de vibración hallado).

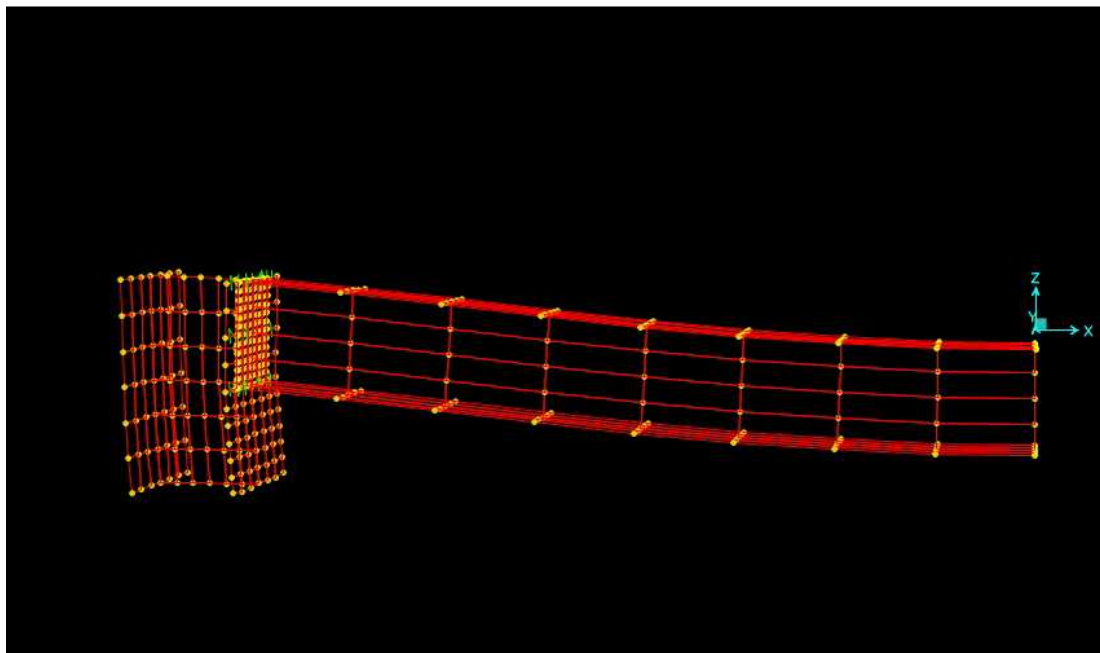


Fig 4.7

(Modelo de elementos finitos en el que se muestra la deformada producida como consecuencia de la deflexión en el centro del vano).

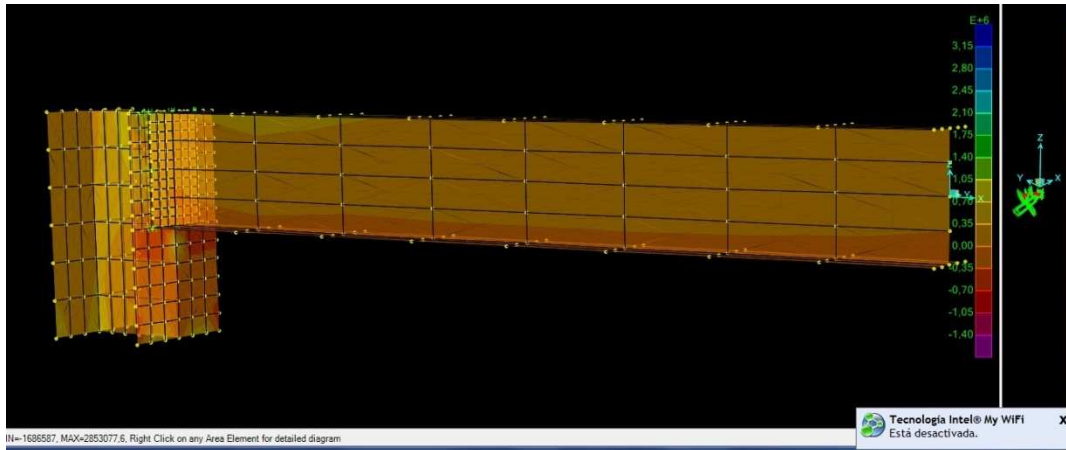


Fig 4.8
(Modelo de elementos finitos en el que se muestran las distintas tensiones que se producen en el supermodelo).

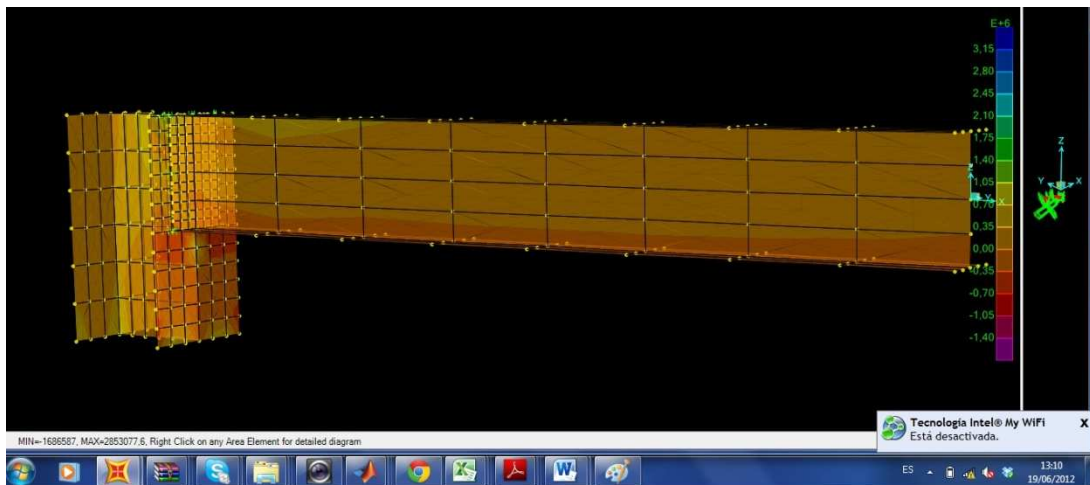


Fig 4.9
(Modelo de elementos finitos en el que se muestran las tensiones máximas como consecuencia de la aplicación de la carga en el centro del vano).

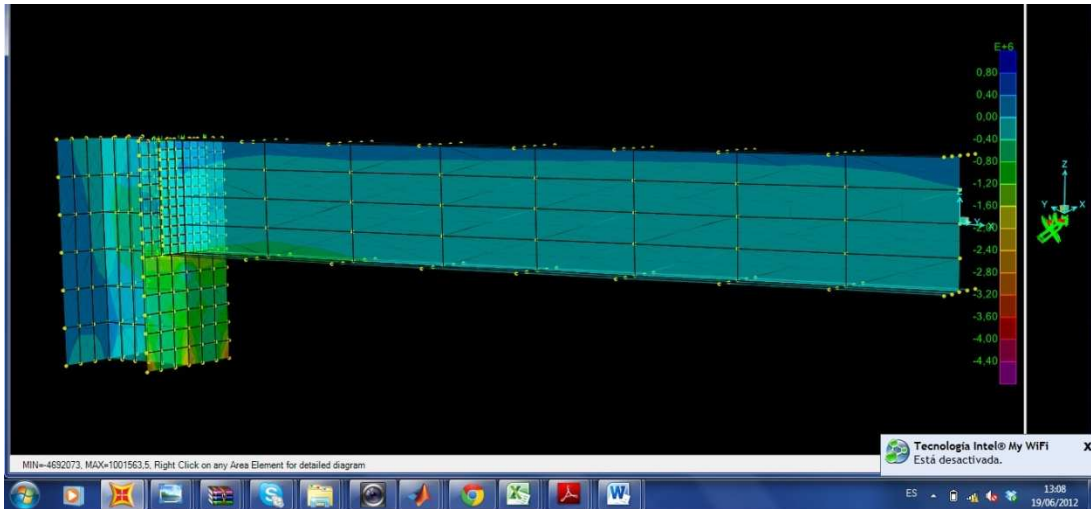


Fig 4.10

(Modelo de elementos finitos en el que se muestran las tensiones mínimas como consecuencia de la aplicación de la carga en el centro del vano).

Las frecuencias naturales de vibración de una viga esbelta uniforme, con varias combinaciones de rotación y translación de los muelles, se dan en las tablas, donde:

E: Módulo de elasticidad en N/m^2

I: Área/ Momento de inercia de la viga respecto de la sección transversal a lo largo del eje neutro en m^2/m^4

L: Vano de la viga en (m)

m: Masa puntual en (Kg).

fi: Frecuencia natural en el modo i en Hz.

k: Constante de translación del muelle (Kn/m)..

k: Constante torsional del muelle (Kn/m).

M: Masa por unidad de longitud de la viga, en (Kg/m).

Las frecuencias naturales de una viga de esbeltez uniforme con condiciones de contorno de muelles en ambos extremos y torsión para restringir la rotación del final de la viga se dan en la *tabla 8-9* obtenida de la bibliografía, **“Formulas for natural frequency and mode shape.”**

Los muelles al final de cada viga mostrados en la respectiva tabla incluyen unas condiciones de momento al final de la viga. El momento aplicado al final, proporciona la rotación local de la viga dada por:

$$M_1 = k_1 \frac{\partial Y(0, t)}{\partial X},$$

$$M_2 = k_2 \frac{\partial Y(L, t)}{\partial X}$$

Donde:

k_1, k_2 : Constantes de los respectivos muelles.

$Y(x,t)$: Desplazamiento de la viga.

X : sentido del vano midiendo las coordenadas a lo largo del vano de la viga desde izquierda a derecha.

K_1 Y k_2 tienen unidades de fuerza en la longitud x . Las condiciones de contorno de la viga dadas por la tabla 8.9 explican que:

$$Y(0,t) = Y(L,t) = 0,$$

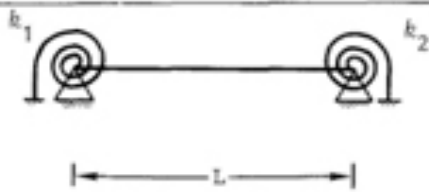
$$EI \frac{\partial^2 Y(L,t)}{\partial x^2} = K_1 \frac{\partial Y(L,t)}{\partial x}$$

Nótese que $k_1=k_2$ y $k_1=k_2=\infty$ conforme a la clásica articulado-articulado, empotrado-empotrado como condiciones de contorno.

Las frecuencias naturales de una viga esbelta uniforme, con un extremo libre y el otro restringido en el sentido de la rotación, por un muelle de torsión dado por la tabla mencionada son:

$$Y(0,t) = 0$$
$$EI \frac{\partial^2 Y(0,t)}{\partial x^2} = k \frac{\partial Y(0,t)}{\partial x}$$

Donde $x=0$ es el empotramiento al final de la viga y el modo de vibración de la viga se da, de nuevo, en la tabla 2.0:

Table 8-9. Natural Frequencies of a Pinned-Pinned Beam with Unequal Torsion Springs at the Pinned Joints. ^(a)


Natural Frequency (hertz),

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \left(\frac{EI}{m} \right)^{1/2}$$

$$\lambda_i = \lambda_i \left(\frac{k_1 L}{EI}, \frac{k_2 L}{EI} \right)$$

| $\frac{k_1 L}{EI}$ | $\frac{k_2 L}{EI}$ | $i = 1$ | $i = 2$ | $i = 3$ | $i = 4$ | $i = 5$ |
|--------------------|--------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.0 | 0 | 3.142 | 6.283 | 9.425 | 12.566 | 15.708 |
| 0.01 | 0 | 3.143 | 6.284 | 9.425 | 12.566 | 15.708 |
| 0.01 | 0.01 | 3.144 | 6.284 | 9.425 | 12.567 | 15.708 |
| 0.01 | 0.1 | 3.158 | 6.291 | 9.430 | 12.570 | 15.711 |
| 0.01 | 1.0 | 3.274 | 6.356 | 9.475 | 12.604 | 15.739 |
| 0.01 | 10 | 3.666 | 6.688 | 9.752 | 12.840 | 15.942 |
| 0.01 | 100 | 3.890 | 7.003 | 10.119 | 13.235 | 16.354 |
| 0.01 | ∞ | 3.927 | 7.069 | 10.210 | 13.352 | 16.493 |
| 0.1 | 0 | 3.157 | 6.291 | 9.430 | 12.570 | 15.711 |
| 0.1 | 0.01 | 3.158 | 6.291 | 9.430 | 12.570 | 15.711 |
| 0.1 | 0.1 | 3.172 | 6.298 | 9.435 | 12.574 | 15.714 |
| 0.1 | 1.0 | 3.285 | 6.363 | 9.480 | 12.608 | 15.741 |
| 0.1 | 10 | 3.678 | 6.694 | 9.756 | 12.843 | 15.945 |
| 0.1 | 100 | 3.902 | 7.010 | 10.123 | 13.239 | 16.356 |
| 0.1 | ∞ | 3.939 | 7.675 | 10.215 | 13.355 | 16.496 |
| 1.0 | 0 | 3.273 | 6.356 | 9.474 | 12.604 | 15.738 |
| 1.0 | 0.01 | 3.274 | 6.356 | 9.475 | 12.604 | 15.739 |
| 1.0 | 0.1 | 3.288 | 6.363 | 9.480 | 12.608 | 15.741 |
| 1.0 | 1.0 | 3.398 | 6.427 | 9.524 | 12.642 | 15.769 |
| 1.0 | 10 | 3.780 | 6.754 | 9.799 | 12.876 | 15.972 |
| 1.0 | 100 | 4.004 | 7.068 | 10.165 | 13.271 | 16.383 |
| 1.0 | ∞ | 4.041 | 7.133 | 10.256 | 13.387 | 16.522 |
| 10 | 0 | 3.664 | 6.687 | 9.751 | 12.839 | 15.942 |
| 10 | 0.01 | 3.666 | 6.688 | 9.752 | 12.840 | 15.942 |
| 10 | 0.1 | 3.678 | 6.694 | 9.756 | 12.843 | 15.945 |
| 10 | 1.0 | 3.780 | 6.754 | 9.799 | 12.876 | 15.972 |
| 10 | 10 | 4.155 | 7.068 | 10.065 | 13.105 | 16.171 |
| 10 | 100 | 4.390 | 7.383 | 10.429 | 13.497 | 16.579 |
| 10 | ∞ | 4.430 | 7.449 | 10.521 | 13.614 | 16.719 |
| 100 | 0 | 3.889 | 7.003 | 10.116 | 13.235 | 16.353 |
| 100 | 0.01 | 3.890 | 7.003 | 10.119 | 13.235 | 16.354 |
| 100 | 0.1 | 3.902 | 7.010 | 10.123 | 13.239 | 16.356 |
| 100 | 1.0 | 4.004 | 7.068 | 10.165 | 13.271 | 16.383 |
| 100 | 10 | 4.390 | 7.383 | 10.429 | 13.497 | 16.579 |
| 100 | 100 | 4.641 | 7.710 | 10.801 | 13.894 | 16.990 |
| 100 | ∞ | 4.685 | 7.781 | 10.897 | 14.014 | 17.133 |
| ∞ | ∞ | 4.712 | 7.854 | 10.995 | 14.137 | 17.278 |

Tabla 4.1
 (Formulas for natural frequency and mode shape)

4.4.2 CÁLCULO DE LOS RESPECTIVOS VALORES MODALES, PARA CADA UNA DE LAS RESPECTIVAS UNIONES, REALIZADOS CON SAP-2000.

Valores Modales estimados para el caso de la viga en UNIÓN SOLDADA a HEB 80:

| TABLE: Modal Periods And Frequencies | | | | | | |
|--------------------------------------|----------|----------|----------|-----------|----------|------------|
| OutputCase | StepType | StepNum | Period | Frequency | CircFreq | Eigenvalue |
| Text | Text | Unitless | Sec | Cyc/sec | rad/sec | rad2/sec2 |
| MODAL | Mode | 1 | 0.005242 | 190.75 | 1198.5 | 1436500 |
| MODAL | Mode | 2 | 0.001424 | 702.4 | 4413.3 | 19477000 |
| MODAL | Mode | 3 | 0.000795 | 1257.3 | 7900.1 | 62412000 |
| MODAL | Mode | 4 | 0.000527 | 1898.7 | 11930 | 142320000 |
| MODAL | Mode | 5 | 0.000492 | 2033.2 | 12775 | 163190000 |
| MODAL | Mode | 6 | 0.000265 | 3777.1 | 23732 | 563210000 |
| MODAL | Mode | 7 | 0.000205 | 4872.4 | 30614 | 937220000 |
| MODAL | Mode | 8 | 0.000203 | 4916.1 | 30889 | 954100000 |
| MODAL | Mode | 9 | 0.000147 | 6797 | 42707 | 1823900000 |
| MODAL | Mode | 10 | 0.000128 | 7783.8 | 48907 | 2391900000 |
| MODAL | Mode | 11 | 0.000099 | 10131 | 63655 | 4052000000 |
| MODAL | Mode | 12 | 0.000081 | 12358 | 77646 | 6028900000 |

Tabla 4.2

Valores Modales estimados para el caso de la viga en UNIÓN ATORNILLADA para rigidez según la tabla Momento Rotación dada:

| TABLE: Modal Periods And Frequencies | | | | | | |
|--------------------------------------|----------|----------|----------|-----------|----------|------------|
| OutputCase | StepType | StepNum | Period | Frequency | CircFreq | Eigenvalue |
| Text | Text | Unitless | Sec | Cyc/sec | rad/sec | rad2/sec2 |
| MODAL | Mode | 1 | 0.00438 | 228.31 | 1434.5 | 2057800 |
| MODAL | Mode | 2 | 0.001363 | 733.88 | 4611.1 | 21262000 |
| MODAL | Mode | 3 | 0.000785 | 1273.3 | 8000.1 | 64002000 |
| MODAL | Mode | 4 | 0.000527 | 1898.7 | 11930 | 142320000 |
| MODAL | Mode | 5 | 0.000491 | 2035.9 | 12792 | 163630000 |
| MODAL | Mode | 6 | 0.000265 | 3777.1 | 23732 | 563210000 |
| MODAL | Mode | 7 | 0.000205 | 4872.4 | 30614 | 937230000 |
| MODAL | Mode | 8 | 0.000203 | 4916.1 | 30889 | 954100000 |
| MODAL | Mode | 9 | 0.000147 | 6797 | 42707 | 1823900000 |
| MODAL | Mode | 10 | 0.000128 | 7783.8 | 48907 | 2391900000 |
| MODAL | Mode | 11 | 0.000099 | 10131 | 63655 | 4052000000 |
| MODAL | Mode | 12 | 0.000081 | 12358 | 77646 | 6028900000 |

Tabla 4.3

Valores Modales estimados para el caso de la viga en UNIÓN FALLO de uno de los componentes HEB 80:

| TABLE: Modal Periods And Frequencies | | | | | | |
|--------------------------------------|----------|----------|----------|-----------|----------|------------|
| OutputCase | StepType | StepNum | Period | Frequency | CircFreq | Eigenvalue |
| Text | Text | Unitless | Sec | Cyc/sec | rad/sec | rad2/sec2 |
| MODAL | Mode | 1 | 0.004919 | 203.3 | 1277.4 | 1631700 |
| MODAL | Mode | 2 | 0.001404 | 712.29 | 4475.4 | 20029000 |
| MODAL | Mode | 3 | 0.000792 | 1262.2 | 7930.9 | 62899000 |
| MODAL | Mode | 4 | 0.000527 | 1898.7 | 11930 | 142320000 |
| MODAL | Mode | 5 | 0.000492 | 2034 | 12780 | 163330000 |
| MODAL | Mode | 6 | 0.000265 | 3777.1 | 23732 | 563210000 |
| MODAL | Mode | 7 | 0.000205 | 4872.4 | 30614 | 937220000 |
| MODAL | Mode | 8 | 0.000203 | 4916.1 | 30889 | 954100000 |
| MODAL | Mode | 9 | 0.000147 | 6797 | 42707 | 1823900000 |
| MODAL | Mode | 10 | 0.000128 | 7783.8 | 48907 | 2391900000 |
| MODAL | Mode | 11 | 0.000099 | 10131 | 63655 | 4052000000 |

Tabla 4.4

Según los distintos valores de λ_i , para los respectivos modos obtendremos los siguientes resultados analíticos a comparar con los resultados computacionales:

| CASUISTICA DE LOS DISTINTOS VALORES DEL MOMENTO DE ROTACIÓN. | k_1, k_2 | | VALORES MODALES DE LAS RESPECTIVAS VIGAS CONDICIONADAS POR LA UNIONES DADAS SEGÚN SU MOMENTO ROTACIÓN: | | | | | |
|--|--|---|--|------------|------------|------------|------------|------------|
| | <i>Valores tomados de las respectivas uniones:</i> | | | <i>i=1</i> | <i>i=2</i> | <i>i=3</i> | <i>i=4</i> | <i>i=5</i> |
| CASO IDEAL: Perfectamente empotrado: 12EI/L3=356 KNm/rad | | | | | | | | |
| CASO SOLDADA: Unión Semirrígida con Momento de Rotación: 150 KN/rad | k_1 | $\frac{150 * 1.3}{2.1 * 10^7 * 77.8 * 10^{-4}} =$ | $\frac{k_1 * l}{E * I} \quad \frac{k_2 * l}{E * I}$ | 3.142 | 6.283 | 9.425 | 12.566 | 15.708 |
| CASO ATORNILLADA: Unión Semirrígida con Momento de Rotación: 350 Kn/rad | k_1 | $\frac{350 * 1.3}{2.1 * 10^7 * 77.8 * 10^{-4}} =$ | $\frac{k_1 * l}{E * I} \quad \frac{k_2 * l}{E * I}$ | 3.172 | 6.298 | 9.435 | 12.574 | 15.714 |
| CASO ATORNILLADA: Unión Semirrígida con Fallo de Tornillo 6 Momento Rotación: 258 Kn/rad | k_1 | $\frac{258 * 1.3}{2.1 * 10^7 * 77.8 * 10^{-4}} =$ | $\frac{k_1 * l}{E * I} \quad \frac{k_2 * l}{E * I}$ | 3.398 | 6.427 | 9.524 | 12.642 | 15.769 |

Tabla 4.5

TABULACIÓN DE LOS VALORES MODALES DE LAS RESPECTIVAS UNIONES, **CÁLCULO ANALÍTICO:**

| TIPO DE UNIÓN | MODO 1: | MODO 2: | MODO 3: | MODO 4: | MODO 5: |
|---|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| CASO UNIÓN SOLDADA: | 190 Hz | 702.4 Hz | 1257.3 Hz | 1898.7 Hz | 2033.2 Hz |
| CASO UNIÓN ATORNILLADA CON FALLO EN UNO DE LOS TORNILLOS, CORRESPONDIENTE A LA 2ª FILA: | 203 Hz | 712 Hz | 1262.2 Hz | 1898.7 Hz | 2034 HZ |
| CASO UNIÓN ATORNILLADA: | 228 Hz | 733.88 Hz | 1273.3 Hz | 1898.7 Hz | 2035.9 HZ |

Tabla 4.6

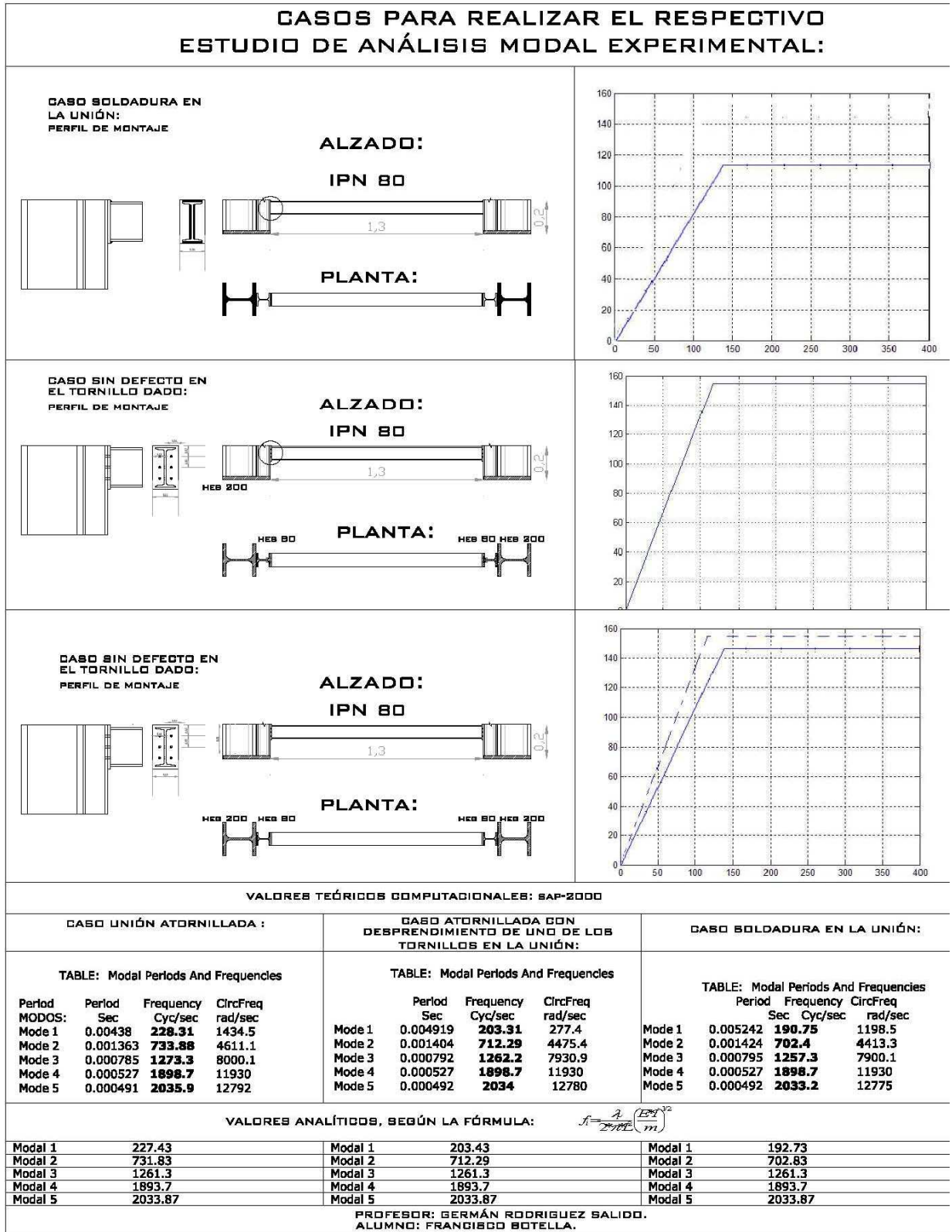


Tabla 4.7

(Casos para realizar el respectivo estudio del análisis modal experimental)

5

RESPUESTA DEL SISTEMA UTILIZANDO LAS ECUACIONES EN FORMA DEL ESPACIO ESTADO:

5.1 DESCRIPCIÓN

El análisis de un sistema complejo dinámico implica la previa discretización a través de la construcción de un modelo de elementos finitos con un número finito de grados de libertad. Después de este paso, el equilibrio de este sistema se expresa por la siguiente ecuación diferencial expresada en forma matricial:

$$M \cdot \ddot{q}(t) + C_1 \cdot \dot{q}(t) + k \cdot q(t) = p(t) = B_2 \cdot u(t)$$

(Ecuación 5.1)

Donde: M, C₁, K e R son la matriz de masas, el amortiguamiento y la matriz de rigidez; $\ddot{q}(t)$, $\dot{q}(t)$ $q(t)$ son funciones organizadas en vectores columna que caracterizan la evolución de la aceleración, la velocidad y el desplazamiento de cada grado de libertad (cada punto sobre el tiempo denota una derivada con respecto al tiempo) y p(t) es un vector columna con las fuerzas aplicadas en el sistema.

Normalmente no se excitan todos los grados de libertad, el vector con “n₂” líneas puede ser sustituido por uno de menor dimensión “n₁<n₂” conteniendo el tiempo de evolución de las “n₁” entradas. Este vector, designado por u(t), es multiplicado por una matriz que traza las “n₁” entradas con los “n₂” dof del sistema: B₂, a “n₂” compuesta por unos y ceros.

5.2 EXPRESIÓN EN MODELO DE ESPACIO - ESTADO

En esencia, esta es la filosofía del espacio de estados: La cantidad de números que se toman como condiciones iniciales, representan el estado del sistema, que al evolucionar la dinámica del proceso cambia con el tiempo algunas variables, denominadas “variables de estado”. El conjunto mínimo que define la evolución del sistema se puede representar por un vector, denominado a su vez “vector de estado”.

5.2.1 ALGUNAS DEFINICIONES ÚTILES:

Estado: El estado de un sistema es un vector formado por una serie de variables (denominadas variables de estado) x₁(t), X₂(t),...X_n(t), de tal modo que el conocimiento de los valores iniciales de estas: x(t₀),x₂(t₀),.....x_n(t₀) y de las entradas u₁(t) a lo largo del tiempo, son suficientes para describir de un modo único la respuesta del sistema para un

tiempo $t > 0$. Las variables de estado se agrupan en un vector columna de dimensión "n" que tiene por componentes:

$$X(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t) \ x_5(t)]^T$$

Donde el símbolo T se emplea para señalar el vector transpuesto y se convierte en un vector columna.

Existen un número mínimo de variables de estado necesarias para representar de un modo preciso el sistema. Estas variables no son únicas y en general, existen varias, pero todas deben cumplir una serie de propiedades:

- Las variables de estado deben de ser linealmente independientes. No pueden ser múltiplos de algunas variables o una suma ponderada de varias, deben ser suficientes como para describir completamente el comportamiento dinámico del circuito.
- No pueden ser entradas al sistema o combinación lineal de estas, ya que las entradas son elementos externos al circuito y no pueden ser estados del mismo.

Espacio de estados: Es un espacio de dimensión n en el que las componentes del vector de estado representan sus ejes coordenados.

Trayectoria de Estado: Es la trayectoria producida en el espacio de estado, debido a la variación del vector $x(t)$ con respecto al tiempo. Si el sistema tiene únicamente dos variables de estado, el espacio de estado es un plano y se denomina Plano de Fase.

5.2.2 DEFINICIÓN EN MODELO DEL ESPACIO ESTADO

Cuando se estudia la dinámica de un sistema físico, este se representa mediante un juego de ecuaciones diferenciales en el que las condiciones iniciales impuestas por el proceso, junto con el conocimiento de las funciones de excitación que se aplican en un momento determinado, son suficientes para conocer la respuesta presente y futura del sistema.

En la ecuación diferencial previa de segundo orden, se puede dar una transformación de la misma a una ecuación diferencial, usando una manipulación matemática alternativa. Una posibilidad se basa en el uso de las siguientes definiciones:

$$x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix}$$
$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}.K & -M^{-1}.C_1 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}B_2 \end{bmatrix}$$

(Ecuación 5.2)

Donde 0 representa una matriz llena de ceros e I es una matriz diagonal 2x2 con 1 en la diagonal principal.

El equilibrio de la ecuación diferencial general dada en la *ecuación 7.1* se transforma por tanto en la llamada Ecuación de Estado:

$$\dot{x} = A_C \cdot X(t) + B_C \cdot U(t)$$

(Ecuación 5.3)

Un modelo en espacio estado, se obtiene observando el estado de la ecuación. Estas ecuaciones, denominadas de observación, establecen la relación entre un conjunto de medidas organizadas en un vector $y(t)$ y su desplazamiento, con su velocidad y aceleración asociados con un dof:

$$y(t) = C_a \ddot{q}(t) + C_v \dot{q}(t) + C_d \cdot q(t)$$

(Ecuación 5.4)

Donde C_a , C_v , C_d son n_0 por n_1 matrices que seleccionan la discretización de elementos finitos medidas por los adoptados traductores: acelerómetros, velocidad y desplazamiento de los sensores.

Es más, estas matrices se pueden usar para combinar pares de desplazamientos, con la finalidad de obtener tensiones, las cuales se pueden medir en un prototipo de indicadores.

Resolviendo la ecuación (5.1) para $\ddot{q}(t)$ y sustituyendo en la ecuación (5.5) y usando las definiciones,

$$C_c = [C_d - C_a \cdot M^{-1} \cdot k \quad C_v - C_a \cdot M^{-1} \cdot C_1]$$

(Ecuación 5.5)

$$D_c = [C_a \cdot M^{-1} \cdot B_2]$$

(Ecuación 5.6)

En forma compacta la relación entre las entradas y las salidas $y(t)$ con el vector de estado $x(t)$ y las entradas $u(t)$ se pueden obtener con

$$y(t) = C_c \cdot x(t) + D_c \cdot u(t)$$

(Ecuación 5.7)

C_c es la matriz de salida y D_c se designa como la matriz de transmisión directa, cuando directamente se relaciona las fuerzas aplicadas con las

medidas de las aceleraciones. Si sólo se miden las velocidades y los desplazamientos, C_a es igual a cero, y como consecuencia, no hay transmisión directa.

Finalmente, un modelo de espacio estado continuo de orden n resulta de la forma de colocar las ecuaciones juntas:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c \cdot x(t) + B_c \cdot u(t) \\ y(t) &= C_c \cdot x(t) + D_c \cdot u(t) \end{aligned}$$

(Par de Ecuaciones 5.8)

Una vez que se ha construido la matriz, los parámetros modales del sistema dinámico se pueden extraer de la matriz de estado A_c . Se demuestra que las matrices con los vectores propios tienen la siguiente estructura:

$$A_c = \psi \cdot \Lambda_c \cdot \psi^{-1}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix}, \quad \psi = \begin{bmatrix} \Theta & \Theta \\ \Theta \cdot \Lambda & \Theta^* \cdot \Lambda^* \end{bmatrix},$$

(Par de Ecuaciones 5.9)

En los cuales \bullet^* designa el conjugado complejo. λ_k están relacionadas con las frecuencias de la estructura (ω_k) en rad/s y los ratios de amortiguamiento se expresan como: ξ_k

Por la expresión: $\lambda_k = -\xi_k \cdot \omega_k + i\sqrt{1-\xi_k^2} \cdot \omega_k$, con $i = \sqrt{-1}$

(Ecuación 5.10)

Las formas modales se representa en la ecuación por Φ_k . De cualquier forma, como sólo se puede medir un conjunto de dof los componentes observables modales se dan por:

$$\Phi = C_c \cdot \psi$$

(Ecuación 5.11)

Como se podía esperar el número de modos es igual a la dimensión del modelo de elementos finitos desde el cual el modelo de espacios estados se deriva y se iguala a la mitad de la dimensión del modelo de espacio estado:

$$n_m = n / 2$$

Hasta este punto es importante clarificar que la relación entre las entradas y las salidas del sistema dinámico caracterizadas en la ecuación 6.2 no es única. Existe un infinito número de representaciones de modelo en espacio que producen la misma descripción entrada salida.

6

CONCLUSIONES GENERALES:

6.1 CONCLUSIONES GENERALES:

Al resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x)$$

Se obtiene la frecuencia en función de las características geométricas de la unión,

$$f_n = \frac{\pi}{2} \left(\frac{n}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Obteniéndose en la figura mostrada a continuación los valores para los cuales se limita el comportamiento semirrígido de la unión:

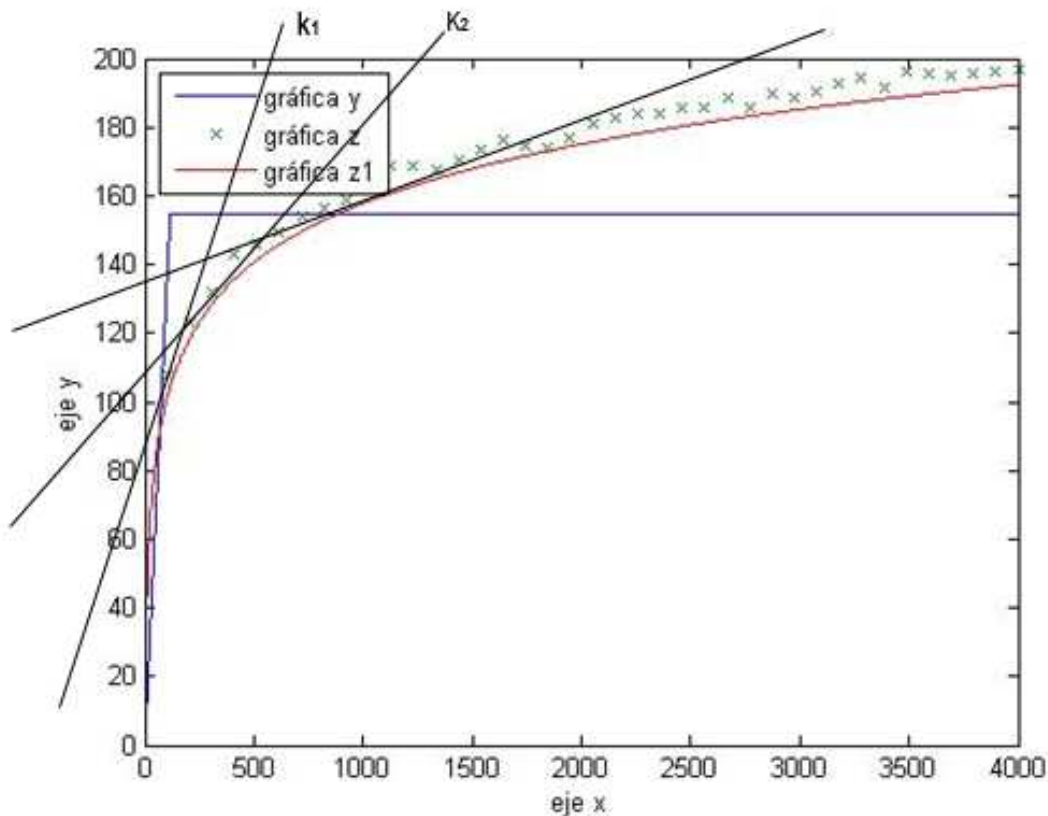


Fig 6.1

En ella se observa el contraste entre los distintos modelos estudiados:
 Modelo de caracterización de la unión por el método de los componentes,
 Modelo obtenido por resultados experimentales
 Y valores secantes de la unión como conclusión numérica de los mismos.

6.1 Por observación de la gráfica se llega a la conclusión de que cuanto mayor sea la excitación, se obtendrán menores valores de frecuencia, y por ende tanto el valor de k disminuirá, o en caso contrario (disminución del valor medio de la señal), aumentarían los respectivos valores de la frecuencia y por tanto de la rigidez en el apoyo.

Como se puede observar en la gráfica, los resultados de la rigidez k obtenidos en cada simulación serán la secante de la curva original entre los valores del giro solicitado (M, α).

6.2 Se verifican los valores modales, ya que una variación en la rigidez del apoyo como consecuencia de la pérdida del pretensado del tornillo, modifica los respectivos valores modales, tal y como se puede ver en la figura con las respectivas gráficas comparativas.

6.3 Se realiza la respuesta escalón para una carga impulsiva en el centro del vano. El valor de las reacciones en los apoyos supera al valor de la carga estática. Como consecuencia se produce el efecto del despegue físico del apoyo.

6.4 Se han obtenido los valores del supermodelo por medio de una interpolación polinómica con objeto de ser utilizada para hallar los valores modales de la estructura.

6.5 Se realiza la técnica de análisis modal FDD con el software específico ARTEMIS.

7

LÍNEAS FUTURAS:

7.1 Se propone el estudio de uniones metálicas con técnicas de excitación modal identificadas en el espacio estado, estudiando el valor energético global de la deformación plástica de la unión.

7.2 Uso de técnicas de identificación modal tales como la identificación de espacios estocásticos (SSI, COV, *Covariance-Driven* SSI) y SSI-DATA.

7.3 El contraste de experimentación con el análisis modal experimental utilizando modelos a escala, y haciendo uso de los distintos valores de escalado.

8

APÉNDICES

8.1. ÍNDICE DE CÓDIGOS MATLAB UTILIZADOS EN EL TRABAJO:

01 Código Matlab para la señal con forma de ruido:

```
clear all;
close all;
fclose all;

%fich_in='nodos1.txt';
fich_in='Salidauno.txt';
fid=fopen(fich_in,'rt');
filas=inf; %cualquier número de filas
columnas=3; % % numero de columnas
aux_pl =fscanf(fid,'%g %g %g',[columnas, filas]); % leemos en
formato floating point
Pl=aux_pl'; %transponemos la matriz

%% añadimos RUIDO
%tx=801;%1024; %puntos en tiempo

% FFT
```

02 Matlab fichero por la lectura de las respectivas aceleraciones en los nudos como consecuencia de una excitación por ruido ambiental en la estructura:

```
clear all;
close all;
fclose all;

%fich_in='nodos1.txt';
fich_in='aceleraciones.txt';
fid=fopen(fich_in,'rt');
filas=inf; %cualquier número de filas
columnas=7; % % numero de columnas
aux_pl =fscanf(fid,'%g %g %g %g %g %g %g',[columnas, filas]); %
leemos en formato floating point
Pl=aux_pl'; %transponemos la matriz

%% añadimos RUIDO
tx=101;%1024; %puntos en tiempo

%% TIPO DE SEÑAL I --> Señal ambiental aleatoria en 2D

m=0; %% media
v=500; %% varianza
```

```
yrand=sqrt(v)*randn(tx)+m;  
yrand=yrand';  
y=yrand(50,:);  
y=y';
```

```
% FFT
```

```
% SEÑAL EN EL DOMINIO DEL TIEMPO
```

```
f2=P1(:,2);  
f3=P1(:,3);  
f4=P1(:,4);  
f5=P1(:,5);  
f6=P1(:,6);  
f7=P1(:,7);
```

```
nf2=P1(:,2)+y;  
nf3=P1(:,3)+y;  
nf4=P1(:,4)+y;  
nf5=P1(:,5)+y;  
nf6=P1(:,6)+y;  
nf7=P1(:,7)+y;
```

```
%FFT sin ruido
```

```
f2_m=abs(fft(P1(:,2)));  
f2_f=angle(fft(P1(:,2)));
```

```
f3_m=abs(fft(P1(:,3)));  
f3_f=angle(fft(P1(:,3)));
```

```
f4_m=abs(fft(P1(:,4)));  
f4_f=angle(fft(P1(:,4)));
```

```
f5_m=abs(fft(P1(:,5)));  
f5_f=angle(fft(P1(:,5)));
```

```
f6_m=abs(fft(P1(:,6)));  
f6_f=angle(fft(P1(:,6)));
```

```
f7_m=abs(fft(P1(:,7)));  
f7_f=angle(fft(P1(:,7)));
```

```
%FFT con ruido
```

```
nf2_m=abs(fft(nf2));  
nf2_f=angle(fft(nf2));
```

```
nf3_m=abs(fft(nf3));  
nf3_f=angle(fft(nf3));
```

```
nf4_m=abs(fft(nf4));  
nf4_f=angle(fft(nf4));
```

```
nf5_m=abs(fft(nf5));
```

```
nf5_f=angle(fft(nf5));

nf6_m=abs(fft(nf6));
nf6_f=angle(fft(nf6));

nf7_m=abs(fft(nf7));
nf7_f=angle(fft(nf7));

%REPRESENTAMOS sin ruido
% figuras
t=P1(:,1);
t2=1./t;
t2=(101:-1:1);
figure(1);

plot(t,f2,t,f3,t,f4,t,f5,t,f6,t,f7);grid on;
xlabel('{tiempo}');
ylabel('{vibracion en los nodos}');
h = legend('nodo1','nodo2','nodo3','nodo4','nodo5','nodo6',2);

figure(2);
plot(t2,f2_m,t2,f3_m,t2,f4_m,t2,f5_m,t2,f6_m,t2,f7_m);grid on;
xlabel('{frecuencia}');
ylabel('{FFT MODULO DE VIBRACION}');
h = legend('nodo1','nodo2','nodo3','nodo4','nodo5','nodo6',2);

figure(3);
plot(t2,f2_f,t2,f3_f,t2,f4_f,t2,f5_f,t2,f6_f,t2,f7_f);grid on;
xlabel('{frecuencia}');
ylabel('{FFT FASE DE VIBRACION}');
h = legend('nodo1','nodo2','nodo3','nodo4','nodo5','nodo6',2);

%REPRESENTAMOS con ruido
% figuras
t=P1(:,1);
t2=1./t;
t2=(101:-1:1);
figure(4);

plot(t,nf2,t,nf3,t,nf4,t,nf5,t,nf6,t,nf7);grid on;
xlabel('{tiempo}');
ylabel('{vibracion en los nodos con ruido }');
h = legend('nodo1','nodo2','nodo3','nodo4','nodo5','nodo6',2);

figure(5);
plot(t2,nf2_m,t2,nf3_m,t2,nf4_m,t2,nf5_m,t2,nf6_m,t2,nf7_m);grid on;
xlabel('{frecuencia}');
ylabel('{FFT MODULO DE VIBRACION CON RUIDO}');
h = legend('nodo1','nodo2','nodo3','nodo4','nodo5','nodo6',2);

figure(6);
plot(t2,nf2_f,t2,nf3_f,t2,nf4_f,t2,nf5_f,t2,nf6_f,t2,nf7_f);grid on;
xlabel('{frecuencia}');
ylabel('{FFT FASE DE VIBRACION CON RUIDO}');
h = legend('nodo1','nodo2','nodo3','nodo4','nodo5','nodo6',2);

%REPRESENTAMOS y calculamos diferencias
```

```
df2=abs(f2-nf2);
df3=abs(f3-nf3);
df4=abs(f4-nf4);
df5=abs(f5-nf5);
df6=abs(f6-nf6);
df7=abs(f7-nf7);

df2_m=abs(f2_m-nf2_m);
df2_f=abs(f2_f-nf2_f);
df3_m=abs(f3_m-nf3_m);
df3_f=abs(f3_f-nf3_f);
df4_m=abs(f4_m-nf4_m);
df4_f=abs(f4_f-nf4_f);
df5_m=abs(f5_m-nf5_m);
df5_f=abs(f5_f-nf5_f);
df6_m=abs(f6_m-nf6_m);
df6_f=abs(f6_f-nf6_f);
df7_m=abs(f7_m-nf7_m);
df7_f=abs(f7_f-nf7_f);

% figuras
t=P1(:,1);
t2=1./t;
t2=(101:-1:1);
figure(7);

plot(t,df2,t,df3,t,df4,t,df5,t,df6,t,df7);grid on;
xlabel('{tiempo}');
ylabel('{diferencia de vibracion en los nodos CON y SIN ruido}');
h = legend('nodo1','nodo2','nodo3','nodo4','nodo5','nodo6',2);

figure(8);
plot(t2,df2_m,t2,df3_m,t2,df4_m,t2,df5_m,t2,df6_m,t2,df7_m);grid on;
xlabel('{frecuencia}');
ylabel('{FFT DIFERENCIA DE MODULO DE VIBRACION CON Y SIN RUIDO}');
h = legend('nodo1','nodo2','nodo3','nodo4','nodo5','nodo6',2);

figure(9);
plot(t2,df2_f,t2,df3_f,t2,df4_f,t2,df5_f,t2,df6_f,t2,df7_f);grid on;
xlabel('{frecuencia}');
ylabel('{FFT DIFERENCIA DE FASE DE VIBRACION CON Y SIN RUIDO}');
h = legend('nodo1','nodo2','nodo3','nodo4','nodo5','nodo6',2);

fclose (fid); %%cerramos fichero
```

03 Matlab fichero del cálculo y dimensionamiento de la estructura a analizar:

```
%Características iniciales de geometría (viga IPE 100)
```

```
%hb=Alto; bfb=ancho ala; twb=espesor alma; tfb= espesor ala;
rb=radio
%unión; aep=ancho soldadura ala; aepw=ancho soldadura alma
hb=100;
bfb=55;
twb=4.1;
tfb=5.7;
rb=7;
db=hb-2*(tfb+rb);%db=74.6
aep=6;
aepw=6;
%Características iniciales de geometría (columna HEB100)
%hc=Alto; bfc=ancho ala; twc=espesor alma; tfc=espesor ala; rc=radio
unión;
%ec=distancia tornillo borde ala; dc=altura alma sin uniones
hc=100;
bfc=100;
twc=6;
tfc=10;
rc=12;
ec=25;
m=33.9;
dwc=hc-2*(tfc+rc);%dwc=56
dc=141.2;
Avc=dc*twc
%Características iniciales de chapa frontal
w=110;
tep=25;
bp=420;
el=45;
p1=70;
p2=130;
pm=(p1+p2)/2;
alp=2*pi;
tp=25;
%Características iniciales de resistencia
%fyf=chapa frontal; fyfb=viga; fyfc=columna; fyb=tornillo (min);
%fub=tornillo (max); Sx=momento estático de media sección
fyf=275;
fyfb=275;
fyfc=275;
fyb=640;
fub=800;
As=705;
Lb=52;
E=210000;
Wpl=13.1*10^5;
Mcrd=Wpl*fyfc
%ANCHOS T EQUIVALENTES
%%Primera fila
if 2*pi*m<4*m+1.25*ec
    Lla=2*pi*m
else
    Lla=4*m+1.25*ec
end
if 2*pi*m<alp*m
    Llc=2*pi*m
else
    Llc=alp*m
end
%%Segunda fila
```

```
if 2*pi*m<4*m+1.25*ec
    L2ia=2*pi*m
else
    L2ia=4*m+1.25*ec
end
L2ga=pm
if 2*pi*m<4*m+1.25*ec
    L2ic=2*pi*m
else
    L2ic=4*m+1.25*ec
end
L2gc=pm
%%Tercera fila
if 2*pi*m<4*m+1.25*ec
    L3a=2*pi*m
else
    L3a=4*m+1.25*ec
end
if 2*pi*m<4*m+1.25*ec
    L3c=2*pi*m
else
    L3c=4*m+1.25*ec
end
h1=340
h2=210
h3=80
%%RIGIDEZ A ROTACIÓN
%%Fila 1 de tornillos
Kf1=0.9*L1a*tfc^3/m^3
Kt1=0.7*L1a*twc/dc
Kc1=0.9*L1c*tp^3/m^3
Kb1=1.6*As/Lb
Keq1=1/(1/Kf1+1/Kt1+1/Kc1+1/Kb1)
%%Fila 2 de tornillos
Kf2=0.9*L2ia*tfc^3/m^3
Kt2=0.7*L2ia*twc/dc
Kc2=0.9*L2ic*tp^3/m^3
Kb2=1.6*As/Lb
Keq2=1/(1/Kf2+1/Kt2+1/Kc2+1/Kb2)
%%Fila 3 de tornillos
Kf3=0.9*L3a*tfc^3/m^3
Kt3=0.7*L3a*twc/dc
Kc3=0.9*L3c*tp^3/m^3
Kb3=1.6*As/Lb
Keq3=1/(1/Kf3+1/Kt3+1/Kc3+1/Kb3)
%%RIGIDEZ EQUIVALENTE
Zeq=(Keq1*h1^2+Keq2*h2^2+Keq3*h3^2)/(Keq1*h1+Keq2*h2+Keq3*h3)
Keqt=(Keq1*h1+Keq2*h2+Keq3*h3)/Zeq
%%COMPONENTES ADICIONALES RIGIDEZ
%%Área Cortadura columna
Kcc=0.38*Avc/Zeq
%%Alma columna a compresión
bef=tfb+2*sqrt(2)*aep+5*(tfc+rc)+2*tp
Kac=0.7*bef*twc/dc
%%RIGIDEZ INICIAL (en KN·m/rad)
Sj=[E*Zeq^2/(1/Keqt+1/Kcc+1/Kac)]/10^6
%%RESISTENCIA DE LA UNIÓN
%%Alma columna a cortante
Vwprd=0.9*fyfc*Avc/(sqrt(3)*1)
%%Alma columna a compresión
lanp=0.932*sqrt((bef*dw*fyfc)/(E*twc^2))
```



```
if lanp<0.72
    Ro=1
else
    Ro=(lanp-0.2)/lanp^2
end
w1=1/sqrt(1+1.3*(bef*twc/Avc)^2)
Frdco=w1*bef*twc*fyfc/1.00
%%Zona viga compresión
Ffbrd=Mcrd/(hb-tfb)
%%Tornillos
Mpla=0.25*L1a*tfc^2*fyfc
Mplc=0.25*L1c*tp^2*fyfc
Ft=0.9*fub*As/1.25
Mp2ia=0.25*L2ia*tfc^2*fyfc
Mp2ga=0.25*(L1a+L2ga)*tfc^2*fyfc
Mp2c=0.25*L2ic*tp^2*fyfc
%%Fila 1
Fal1=4*Mpla/m
Fal2=(2*Mpla+ec*2*Ft)/(m+ec)
Fal3=2*Ft
wt1=1/sqrt(1+1.3*(L1a*twc/Avc)^2)
Ft1=wt1*L1a*twc*fyfc/1.00
Fc11=4*Mplc/m
Fc12=(2*Mplc+ec*2*Ft)/(m+ec)
Fc13=2*Ft
%%Fila 2
Fia21=4*Mp2ia/m
Fia22=(2*Mp2ia+ec*2*Ft)/(m+ec)
Fia23=2*Ft
Fga21=4*Mp2ga/m
Fga22=(2*Mp2ga+ec*2*Ft)/(m+ec)
Fga23=2*Ft
wit2=1/sqrt(1+1.3*(L2ia*twc/Avc)^2)
Fit2=wit2*L2ia*twc*fyfc/1.00
wgt2=1/sqrt(1+1.3*((L1a+L2ga)*twc/Avc)^2)
Fgt2=wgt2*(L1a+L2ga)*twc*fyfc/1.00
Fc21=4*Mp2c/m
Fc22=(2*Mp2c+ec*2*Ft)/(m+ec)
Fc23=2*Ft
%%Alma viga Tracción
Fvt=L2ic*twb*fyfb
```

04 Matlab Lectura del fichero tomado del supermodelo de elementos finitos para el cálculo y dimensionamiento de la estructura a analizar:

```
close all;
clear all;

m=abs(tan(33545));
x=linspace(0,4000,40000);
%x2=linspace(0,4000,16);
y=(m*x).*((0<=x)&(x<=116.1))+154.55.*((116.1<x));
x1=[0,5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60,65,70,75,80,85,90,95,100,105,110,115,120,125,130,135,140,200,400,600,800,1000];
z1nn=[ 35,
35.5,37.24,39.5,49.9,55.9,61.6,67,72.3,77.3,82.1,86.7,91.1,95.3,99.3
```

```
,103.1,106.8,110.3,113.6,116.8,119.8,122.7,125.4,128.1,130.5,132.9,135,137,143,160,150,155,158,157];  
%s=x2;  
%yy=-2.3e-30*s.^10+4.9e-26*s.^9-4.5e-22*s.^8+2.3e-18*s.^7-7.4e-15*s.^6+1.5e-11*s.^5-2e-8*s.^4+1.6e-5*s.^3-0.0075*s.^2+1.8*s+2.6;  
  
for x2=1:4000  
yy1(x2)=-2.3e-30*(x2^10)+4.9e-26*(x2^9)-4.5e-22*(x2^8)+2.3e-18*(x2^7)-7.4e-15*(x2^6)+1.5e-11*(x2^5)-2e-8*(x2^4)+1.6e-5*(x2^3)-0.0075*(x2^2)+1.8*x2+2.6;  
end;  
plot(x,y,x1,zlhn,'x',x2,yy1);  
  
axis([0 1400 0 200]);  
xlabel('{eje x}');  
ylabel('{eje y}');  
h = legend('gráfica y','modelo exp.','polinomio',2);
```

10

BIBLIOGRAFÍA

Avitabile (2001).

Experimental Modal Analysis - A Simple Non-Mathematical Presentation , P. Avitabile, Sound & Vibration, February 2001

Ren y Zong (2004).

Structural Engineering and Mechanics, Vol. 17, No. 3-4 (2004) 000-000
1.Output-only modal parameter identification of civil engineering structures.Wei-Xin Ren† and Zhou-Hong Zong.

Peeters et al (1998),

B. Peeters, LMS International, Leuven, Belgium, G. Sforza, L. Sbaraglia. Essebi, Roma, Italy F. Germano. LMS Italiana, Novara, Italy.

Brownjohn (2003).

Brownjohn, J. M. W., Moyo, P., Omenzetter, P. and Lu, Y. (2003) Assessment of highway bridge upgrading by dynamic testing and finite element model updating. ASCE Journal of Bridge Engineering, Vol. 8, No. 3, pp. 162-172.

Brincker.

Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition. Rune Brincker, Lingmi Zhang and Palle Andersen. Modal Material and Structures.

Chen (2000)

Wang, B.-T., and Chen, R.-L., 2000, The Use of Piezoceramic Transducers for Smart Structural Testing, Journal of Smart Material Systems and Structures, Vol. 11, September, pp. 1-12.

Kishi y et al. (1997)

Asanuma H., Ichikawa K., Kishi T., "Health Monitoring of a Continuous Fiber Reinforced Aluminum Composite with Embedded Optical Fiber", Journal of Intelligent Material System and Structures, Vol. 7, pp. 301-311, 1996.

"Formulas for natural frequency and mode shape."

Robert D.Blevins PHd. KRIEGER PUBLISHING COMPANY. Formulas for natural frequency and mode shape.

Eurocodigo

<http://www.eurocodigo3.es/>

