

Universidad de Granada

Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica

ETS Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

**Generación y propagación
de ondas internas
en el Estrecho de Gibraltar:
Efectos 3D y de rotación**

Tesis doctoral

José Carlos Sánchez Garrido

Granada 2009

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: José Carlos Sánchez Garrido
D.L.: GR. 3508-2009
ISBN: 978-84-692-6394-5

Universidad de Granada

Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica

ETS Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

**Generación y propagación
de ondas internas
en el Estrecho de Gibraltar:
Efectos 3D y de rotación**

Memoria presentada por José Carlos Sánchez Garrido para optar al
grado de doctor por la Universidad de Granada.

Fdo. D. José Carlos Sánchez Garrido

Los directores:

Fdo. Dr. Jesús García Lafuente
Catedrático de Universidad
Universidad de Málaga

Fdo. Dra. Asunción Baquerizo Azofra
Profesora titular de Universidad
Universidad de Granada

D. JESÚS GARCÍA LAFUENTE, Catedrático de la Universidad de Málaga, y D^a ASUNCIÓN BAQUERIZO AZOFRA, profesora titular de la Universidad de Granada,

HACEN CONSTAR:

Que el trabajo recogido en la presente memoria, titulada “Generación y propagación de ondas internas en el Estrecho de Gibraltar: efectos 3D y de rotación”, presentada por D. José Carlos Sánchez Garrido, ha sido realizada bajo nuestra dirección y tiene, a nuestro juicio, contenido científico suficiente, de lo que informamos favorablemente en orden a su presentación y defensa para optar a grado de Doctor por la Universidad de Granada.

Para que así conste a los efectos oportunos firmamos la presente en Granada, a 4 de Marzo de 2009.

Fdo. Dr. D. Jesús García Lafuente

Fdo. Dra. D^a. Asunción Baquerizo Azofra

La presente Tesis Doctoral ha sido realizada gracias a la concesión de una Beca de Formación del Personal Investigador de la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía en el marco del Proyecto RNM 968 “Modelado de los Procesos y Evolución del Litoral de Andalucía. (Estudio de los flujos hidrodinámicos y biogeoquímicos en los mares de Andalucía)”. El trabajo se ha desarrollado en el Departamento de Física Aplicada II de la Universidad de Málaga y parcialmente, gracias a las ayudas para la realización de estancias breves concedidas por la mencionada Consejería, en el departamento School of Earth, Ocean and Environmental Sciences, de la Universidad de Plymouth (Reino Unido) y en el departamento de Climate modelling del Ente per la Nuove Tecnologie, l’Energia e l’Ambiente (ENEA), centro de investigación en Roma (Italia).

Agradecimientos

Quisiera agradecer a la Consejería de Innovación Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía la concesión de una beca FPI en la marco del proyecto de investigación de excelencia RNM-968, sin la cual hubiera sido imposible este trabajo. Igualmente agradezco a esta Consejería la concesión de ayudas para realizar estancias breves en la Universidad de Plymouth (Reino Unido), y el centro de investigación Ente per la Nuove Tecnologie, l'Energia e l'Ambiente (ENEA, Roma). Centros en los cuales se ha llevado a cabo buena parte de la investigación.

Agradezco a mi director Jesús García Lafuente su completa disponibilidad, gran dedicación, e interés prestado para la realización del trabajo. Estoy en deuda además con Jesús por la oportunidad ofrecida para trabajar dentro del grupo de Oceanografía Física de la Universidad de Málaga, del cual es responsable.

Agradezco a mi codirectora Asunción Baquerizo su labor de revisión y facilidades ofrecidas para el buen desarrollo del trabajo. En este último aspecto también estoy en deuda con Miguel Ángel Losada, responsable del proyecto.

Mi gratitud también para todos mis compañeros del Grupo de Oceanografía Física de la Universidad de Málaga, dentro del cual he disfrutado de un fenomenal ambiente. Dentro y fuera del ámbito laboral. Igualmente quiero agradecer a mis compañeros de laboratorio Michel y Pedro su ayuda para resolver algunos de mis abundantes problemas informáticos.

I am really thankful to Dr. Vasily Vlasenko and Dr. Nataliya Stashuck for their kindness and great interest on my progress during my four-month stay at the University of Plymouth. I make extensive my gratitude to the fantastic people I met in the SEOES department and surroundings, who made of my stay a fantastic experience.

I am also very in debt with Dr. Gianmaria Sannino and all the group of Climat modelling of ENEA, supervised by Dr. Vincenzo Artale. Of course I can not forget Giampaolo and associated, including Dr. Hermann. You made work much easy. Thank's a lot as well for your great dedication to our task, and nice time I had during my three months in Rome.

Finalmente, también quiero agradecer su compañerismo a mis colegas M^a Carmen García y Patricio Bohórquez.

A Verena y a mis padres.

Abstract

Three-dimensional and Earth's rotation effects on the generation and propagation of internal solitary waves in the Strait of Gibraltar are studied. These tidally generated waves, with horizontal scale of several hundred meters and even one hundred meters amplitude (maximum vertical isopycnal displacement), are the most spectacular phenomenon occurring in the Strait.

The analysis of high temporal resolution observations collected during May 2003 at two different locations of the Strait of Gibraltar is the starting point of the thesis. Data set reveals that during neap tides solitary waves are normally generated during alternative tidal cycles due to the influence of the diurnal tide, which induces a remarkable diurnal inequality. It is shown that diurnal tidal currents in fact considerably modulate the propagation velocity of internal waves.

About half the detected solitary wave packets present an anomalous structure: in contrast with classical theory predictions, waves are not rank-ordered within the packet, that is, they do not show decreasing amplitude from the front to the tail, due to the nonlinear dispersion. This fact is investigated within the framework of a three-dimensional, fully nonlinear, non-hydrostatic numerical model. It is shown that this unexpected behaviour is the result of the interaction of internal waves with the irregular bottom topography and lateral boundaries of the Strait, that favour the leakage of energy from the leading wave to the waves behind.

The effect of rotation on the dynamics of internal solitary waves in a rectangular channel is also numerically investigated. As it happens in the open ocean, rotation plays a fundamental role in the long-term. When a two-dimensional internal solitary wave enters a rotating channel it evolves into a Kelvin solitary wave that losses energy due to the continuous radiation of Poincaré waves. Eventually secondary Kelvin waves may arise at the tail as a result of reflections from the lateral boundaries, and finally reach the leading wave to produce a quasi-stable wave packet.

Finally the numerical model has been used to investigate the generation process of internal waves at Camarinal sill, in the Strait of Gibraltar. Several scenarios of wave generation, which depends on the barotropic tidal forcing, are identified. Rotation and 3D effects related to local variations of the bottom topography are also evaluated.

Índice general

Abstract	XIII
1 Introducción	1
1.1 Importancia de las ondas internas en el océano	3
1.2 Oceanografía general del Estrecho de Gibraltar	5
1.2.1 Marco Geográfico.	5
1.2.2 El intercambio medio	6
1.2.3 Flujos subinerciales	9
1.2.4 Marea superficial	9
2 Breve revisión de teoría de ondas internas con aplicación a fenómenos ocurrentes en el Estrecho de Gibraltar	13
2.1 Introducción	15
2.2 Teoría lineal	15
2.2.1 Ecuaciones de gobierno	15
2.2.2 Modos baroclinos	19
2.2.3 Marea baroclina generada por un umbral submarino	21
2.3 Teoría no lineal	25
2.3.1 Generación de ondas internas no lineales	25
2.3.2 La ecuación Korteweg de Vries.	27
2.3.3 Ondas solitarias	30
2.4 Últimas notas	34
3 Time-Spatial Variability Observed in Velocity of Propagation of the Internal Bore in the Strait of Gibraltar	35
3.1 Introduction	38

3.2	Data set	39
3.3	Identification of SIWs	40
3.4	Influence of the diurnal inequality	41
3.5	Local maximum speed in site T	43
3.6	Propagation speed from analytical models	44
3.7	Summary and conclusions	47
4	Algunos aspectos sobre ondas solitarias y su modelización numérica	49
4.1	Introducción	51
4.2	Modelo de circulación general MITgcm	52
4.2.1	Ecuaciones y estrategia de resolución	52
4.2.2	Aspectos numéricos	54
4.3	Aplicación a la simulación de ondas solitarias.	55
5	Three-Dimensional Evolution of Large-Amplitude Internal Waves in the Strait of Gibraltar	61
5.1	Introduction	64
5.2	Model description and initialization	67
5.3	Model results	70
5.3.1	One-wave experiments	70
5.3.2	Influence of rotation	77
5.3.3	Evolution of wave trains: Two-wave experiment	82
5.3.4	Evolution of wave trains: Three-wave experiment	84
5.4	Summary and Conclusions	89
6	Long-Term Evolution of Strongly Nonlinear Internal Solitary Waves in a Rotating Channel	93
6.1	Introduction	96
6.2	Outline of the weakly nonlinear theory	98
6.3	Model description and initialization	101
6.4	Reference Experiment	103
6.5	Sensitivity to the initial wave-amplitude	113
6.6	Sensitivity to rotation and width of the channel	116
6.7	Summary and conclusions	122

7	Escenarios de generación de ondas internas en el Estrecho de Gibraltar	123
7.1	Introducción	125
7.2	Modelo para el estudio de la generación	126
7.2.1	Dominio y cierre turbulento	126
7.2.2	Establecimiento del intercambio medio	127
7.2.3	Forzamiento astronómico	128
7.3	Escenarios de generación de ondas internas	134
7.3.1	Escenario 1: Marea interna	135
7.3.2	Escenario 2: Ondas solitarias como resultado de la evolución de la marea interna	139
7.3.3	Escenario 3: Ondas solitarias como resultado de la evolución de un doble bore interno atrapado en Camarinal	143
7.3.4	Escenario 4: Ondas solitarias como resultado de la evolución de un bore interno atrapado a sotavento de Camarinal	148
7.4	Variaciones transversales inducidas por la rotación y la topografía	154
7.5	Resumen de aspectos relevantes	162
8	Conclusions	165
	Apéndice A: Ecuación de Taylor-Goldstein y su resolución numérica	171
	Apéndice B: Validez de la aproximación hidrostática	175
	Appendix C: Calculation of Wave Energy	177
	References	179

Capítulo 1

Introducción

1.1 Importancia de las ondas internas en el océano

Las ondas de superficie como las inducidas por el viento o la marea barotrópica son un fenómeno bien conocido y estudiado en el océano, en parte por su cotidiana y directa observación. Sin embargo, existe otro tipo de ondas de gravedad de igual o mayor relevancia, ondas internas o baroclinas, observadas por primera vez hace apenas un siglo (Petterson, 1908). Las ondas internas son generadas fundamentalmente a partir de la interacción de la marea barotrópica con accidentes batimétricos como montañas submarinas y plataformas continentales, y deben su existencia a la fuerza de flotabilidad en flujos estratificados, que actúa como fuerza restauradora. Por la relativa debilidad de ésta frente a la fuerza de la gravedad, ondas internas pueden alcanzar amplitudes mucho mayores que las superficiales, superando en ocasiones los 100 metros de amplitud.

Recientemente las ondas internas han sido foco de atención debido al papel que juega en procesos de mezcla vertical y consecuente implicación en fenómenos de escala global (Munk y Wunsch 1998, Garret 2003). En una visión general de la circulación meridional del océano (en literatura anglosajona, “Meridional Overturning Circulation”, MOC), masas de agua cálidas procedentes de zonas ecuatoriales fluyen en superficie hacia altas latitudes donde se enfrían y se hunden hacia profundidades abisales (ver parte derecha de la Figura 1.1). Estas frías aguas retornan hacia el ecuador y el hemisferio Sur describiendo un recorrido de miles de kilómetros (Conveyor belt), aflorando posteriormente en zonas tropicales donde ganan calor y cierran un ciclo de cientos de años que se repite. De la proposición de Sandström¹ (1908) aplicado a un océano que es calentado y enfriado en superficie, se sigue que sin mezcla éste sería un fluido sin movimientos convectivos verticales con una estratificación tipo bicapa: una capa profunda de aguas frías y salinas, y una superficial cálida y de baja salinidad, lo que supondría un desastroso escenario para la vida. Afortunadamente existen fenómenos con energía disponible para procesos de mezcla vertical en el océano: mareas y vientos.

A partir de medidas “in situ” de temperatura Munk y Wunsch (1998) dieron una estimación de la energía necesaria para establecer los perfiles verticales de temperatura actuales (suaves, lejos de ser una configuración bicapa) frente a la producción de aproxi-

¹“Una circulación estacionaria en el océano sólo es posible si las fuentes de calor se sitúan a mayor profundidad que las fuentes de enfriamiento”.

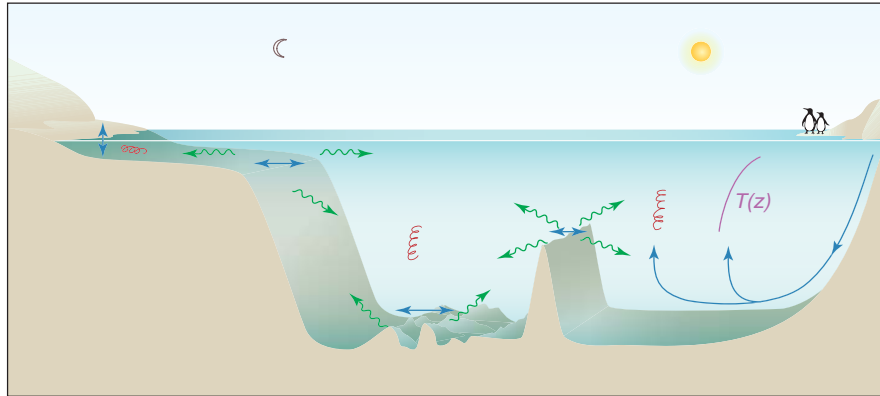


Figura 1.1: Izquierda: Las corrientes de marea interactúan con elementos notables del relieve submarino, generando ondas internas que dan lugar a mezcla y turbulencia. Derecha: esta mezcla hace que el perfil de temperatura $T(z)$ mantenga una variación gradual con la profundidad, evitando una estratificación tipo bicapa, formada por cálidas aguas superficiales, y frías aguas profundas formadas en los polos (de Garret 2003).

madamente 30 Sverdrups (30 Sv, $1 \text{ Sv} = 10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$) de aguas profundas. La potencia destinada a mezcla se estima en 2 teravatios (2 TW, $1 \text{ TW} = 10^{12} \text{ W}$). La tarea a partir de ese momento ha sido cuantificar cual es la contribución de la marea y el viento en los 2 TW necesarios para mantener la circulación meridional, así como identificar los procesos de mezcla. Observar que el asunto es de gran relevancia, pues sin esta potencia relativamente pequeña (2 TW), los 2000 TW de flujo de calor hacia los polos asociados con la circulación meridional se interrumpirían, con consecuencias climáticas desastrosas.

En la actualidad se cree que la marea es el máximo responsable de los fenómenos de mezcla: la marea barotrópica interactúa con el relieve submarino, genera ondas internas, y finalmente parte de su energía es transformada en mezcla turbulenta (ver parte izquierda de la Figura 1.1). Egbert y Ray (2001) concluyen a partir de datos de altimetría que la marea es disipada en el océano abierto al menos a razón de 1 TW. Esta energía es casi exclusivamente transferida a la generación de ondas internas, pues la pérdida de energía debida a fricción con el fondo en zonas de mar abierto es despreciable. No es así en mares poco profundos, donde la marea pierde la mayor parte de su energía debido a rozamiento, a un ritmo estimado de 2.6 TW. En cuanto al viento, Alford (2003) estima su flujo de energía al océano en 0.47 TW, que junto al teravatio

aportado por la marea no sería suficiente para mantener el MOC, especialmente pensando en que no toda la energía es empleada en mezcla pues parte es disipada. Tal panorama hace pensar que existen zonas muy concretas en el océano, aun desconocidas, donde se producen procesos de mezcla extraordinariamente efectivos. Esta idea parece corroborarse según un estudio de Niwa e Hibiya (2001), que sostiene que hasta el 84% de la energía baroclina en el Océano Pacífico es generada en unos pocos accidentes del relieve submarino. Numerosas observaciones en los últimos años también revelan la existencia de cuantiosos puntos del planeta donde se generan vigorosas ondas internas (Jackson y Apel 2004).

Mucha incertidumbre rodea aún el asunto sobre dónde se disipa la marea, y cuánta de su energía es invertida en la formación de ondas internas. La investigación de este importante asunto viene acompañada en los últimos años de avances en el conocimiento de la dinámica de ondas internas (Apel 2003, Vlasenko 2005), cómo se generan y cómo es su posterior evolución. La presente tesis pretende ahondar en el conocimiento de la generación y propagación de ondas internas en el Estrecho de Gibraltar, uno de los lugares conocidos en el mundo donde existen ondas de extraordinaria amplitud. Antes de proseguir con capítulos posteriores, conviene tener una visión general sobre la compleja oceanografía del Estrecho. La siguiente sección está dedicada a ello.

1.2 Oceanografía general del Estrecho de Gibraltar

1.2.1 Marco Geográfico.

La mitología cuenta que Hércules creó el Estrecho de Gibraltar, dando lugar a la formación del Mediterráneo. Algo en común tiene con la realidad, y es que el Mediterráneo estuvo casi seco hace unos 6 millones de años, fruto de la colisión de Africa con Eurasia (Hsu, 1983). La formación del Estrecho con posterioridad debió producir un espectacular caudal de agua atlántica que llenaría la cuenca Mediterránea en cientos de años.

El Estrecho de Gibraltar es la única conexión relevante entre el Mar Mediterráneo y el resto de los océanos. Su longitud es de 60 kilómetros aproximadamente, y su anchura mínima de 14 kilómetros en torno a la posición de Punta Cires (Ver Figura 1.2). La

profundidad máxima es de unos 900 metros, típica del Mar de Alborán, y se da en la parte oriental cerca de la sección de mínima anchura. El relieve entre Gibraltar y Tarifa es por tanto un profundo cañón que termina en el umbral de Camarinal, el lugar más somero del eje central de Estrecho con 290 metros. Siguiendo hacia el Oeste se encuentra la cuenca de Tánger u hoyas de poniente, un reservorio de 20 kilómetros de longitud y 630 metros de profundidad máxima, limitado por otro umbral menos escarpado, el umbral de Espartel (360 metros). Inmediatamente más hacia el Oeste existen una serie de umbrales secundarios de menor entidad, y a partir de ahí la profundidad decrece hacia varios miles de metros, valores del Golfo de Cádiz.

1.2.2 El intercambio medio

La circulación media² en el Estrecho de Gibraltar es explicada mediante una estructura bicapa: una corriente superficial de agua Atlántica relativamente cálida y poca salina entrando al Mediterráneo, y otra saliente en profundidad de agua Mediterránea más fría y bastante más salina (Lacombe y Richez, 1982; Bryden y Kinder, 1991). El origen de esta circulación antiestuarina (Figura 1.3) es el exceso de evaporación sobre la cuenca Mediterránea, que da lugar a una pérdida de flotabilidad y a la formación de aguas profundas. De la diferencia de densidades se deriva un gradiente de presión que fuerza el intercambio.

Desde la verificación de este intercambio baroclino debida a Carpenter y Jeffreys³ (1870), se han intentado estimar los flujos y su variabilidad. Las primeras estimaciones se deben a Knudsen (1899), basándose en la conservación de masa y sal en el Mediterráneo se llega trivialmente a las relaciones que llevan su nombre:

²Como normalmente en la literatura la circulación media es entendida aquí como circulación termohalina, aunque estrictamente éstas no tienen porqué ser iguales debido a la posible existencia de interacciones no lineales con flujos de otro origen, como los flujos de marea.

³La existencia de una corriente saliente del Mediterráneo en profundidad a través del Estrecho se conoce desde los experimentos de Carpenter y Jeffreys (1870) durante la expedición científica “Challenger” (1872-1876), consistentes en sumergir un cabo sujetando un objeto a modo de cometa. La sospecha de esta corriente profunda se remontaba a Marsigli’s (1681), que había observado algo similar en el Bósforo.

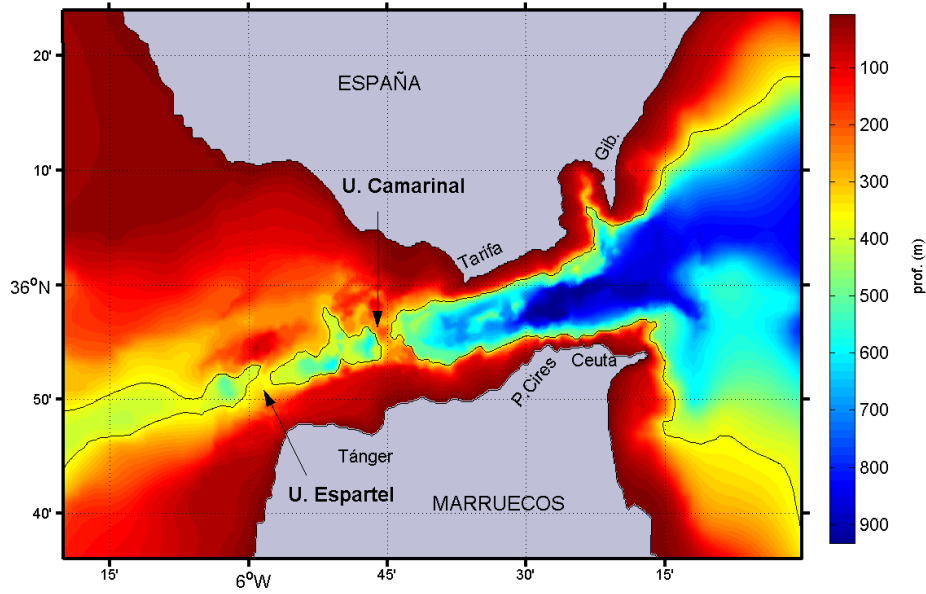


Figura 1.2: Mapa batimétrico del Estrecho de Gibraltar. La isóbata de 370 metros ha sido dibujada para la mejor visualización de los dos umbrales principales, el umbral de Camarinal (290 m), y el umbral de Espartel (360 m).

$$\left. \begin{aligned} Q_M &= \frac{S_A}{S_M - S_A} (P + R - E) \\ Q_A &= \frac{-S_M}{S_M - S_A} (P + R - E) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

donde Q_M , Q_A , son los flujos, y S_M , S_A las salinidades Mediterráneas y Atlánticas respectivamente. El término $(P + R - E)$ es el flujo de agua dulce debido a precipitaciones, descarga de agua provenientes de ríos, y evaporación. Una estimación relativamente moderna de los flujos a partir de las expresiones anteriores fue dada por Lacombe y Richez (1982). Para una evaporación neta de $0.55 \cdot 10^5 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ (80 cm/año), y salinidades $S_A = 36.15$, $S_M = 37.9$, obtuvieron $Q_M = -1.14 \text{ Sv}$, $Q_M = 1.19 \text{ Sv}$.

La limitación de esta estimación concierne sobretudo al cálculo del término (E-P-R). Por otro lado, no se tiene en cuenta que el Estrecho de Gibraltar es un cuello de botella para el flujo entrante/saliente, la geometría limita la cantidad de agua que se puede intercambiar para una distribución dada de densidades. La consideración adicional de la ecuación de Bernoulli permite establecer esta cota para los flujos intercambiados

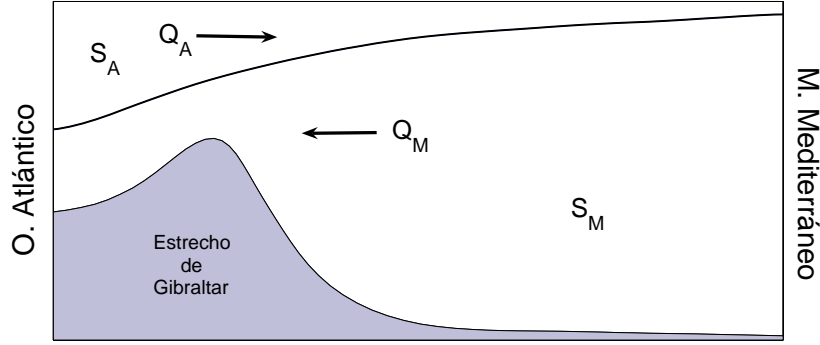


Figura 1.3: Esquema del intercambio medio en el Estrecho de Gibraltar.

(Armi y Farmer 1986-1987). El intercambio máximo se establece cuando existe un doble control hidráulico en las secciones de mínima profundidad (umbral de Camarinal, Figura 1.2) y de mínima anchura (estrechamiento de Tarifa, Figura 1.2), siendo el flujo entre ambas secciones subcrítico. En este contexto, un flujo se dice controlado si el número de Froude es igual a la unidad, y supercrítico (subcrítico) si es mayor (menor) que uno. Para un flujo bicapa el número de Froude G viene dado por:

$$G^2 = F_1^2 + F_2^2 = \frac{u_1^2}{g'h_1} + \frac{u_2^2}{g'h_2}, \quad (1.2)$$

donde u_i , ρ_i , h_i ($i = 1, 2$); son la velocidad, densidad y profundidad de la capa superior ($i = 1$), e inferior ($i = 2$). Por su parte, $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ es la gravedad reducida. Bryden y Kinder (1996) llegan a la siguiente expresión para los flujos máximos en función de la geometría y suponiendo que el flujo neto es pequeño en comparación con los flujos absolutos:

$$Q_A \cong -Q_M = P \cdot (g'b_c) \frac{W_c b_c}{2}, \quad (1.3)$$

siendo b_c y W_c la profundidad y la anchura del Estrecho en superficie en la posición del umbral de Camarinal, y P un número adimensional dependiendo de la fricción con el fondo y la geometría del canal. Para un canal triangular y parámetros basados en observaciones obtuvieron un transporte de $Q_A = -Q_M = 1.06$ Sv, lo que a raíz de estimaciones previas sugiere un intercambio al menos, cercano al máximo posible.

Uno puede pensar con buen criterio que estos valores para el transporte son poco

fiables debido a diversas simplificaciones, la más sería probablemente es la consideración de una geometría tan poco realista, así como el simplificado sistema bicapa. No obstante tanto medidas “in situ” como los modernos modelos numéricos tridimensionales proporcionan flujos realmente cercanos (Sannino et al. 2002, Sánchez Román et al. 2009).

Por último es importante comentar el motivo de tantos esfuerzos en el cálculo de flujos y su variabilidad (García Lafuente 2007, Tsimplis y Bryden 2000). Se espera que un incremento de CO₂ en la atmósfera aumente la evaporación en las zonas subtropicales, incluyendo el Mediterráneo. Esto debe traducirse en la formación de mayor cantidad agua profunda, y consecuentemente en un aumento del intercambio en el Estrecho (ver ecuación 1.3). La monitorización de los flujos es clave para diagnosticar qué ocurre en la cuenca Mediterránea.

1.2.3 Flujos subinerciales

Los flujos subinerciales tienen períodos que van desde varios días a pocos meses, y fundamentalmente están asociados a fenómenos meteorológicos. La mayor variabilidad en esta banda de frecuencia está asociada a cambios de presión uniforme en el Mediterráneo (Crepon 1965, Garret 1983), que inducen un flujo prácticamente barotrópico a través del Estrecho. Candela (1989) estima mediante un modelo analítico un flujo de unos 0.08 Sv/mb para la banda de frecuencia 0.08-0.3 cpd, de acuerdo con observaciones previas. Otro fenómeno meteorológico a considerar son los fuertes vientos que suelen darse en la zona (García Lafuente et al. 2002a). La influencia del viento se deja notar sólo en las primeras decenas de metros, y junto con la influencia de una alta presión en la cuenca Mediterránea pueden suprimir el flujo de entrada de forma eventual (García Lafuente et al. 2002b).

1.2.4 Marea superficial

Los flujos de marea en el Estrecho son tremendamente intensos, llegando a alcanzar hasta 5 Sv en mareas vivas (Bryden et al. 1994, García Lafuente et al. 2000). Ésto provoca que asiduamente se invierta el flujo en alguna de las dos capas, Mediterránea o Atlántica, en determinadas partes del Estrecho o incluso en ambas en la parte central

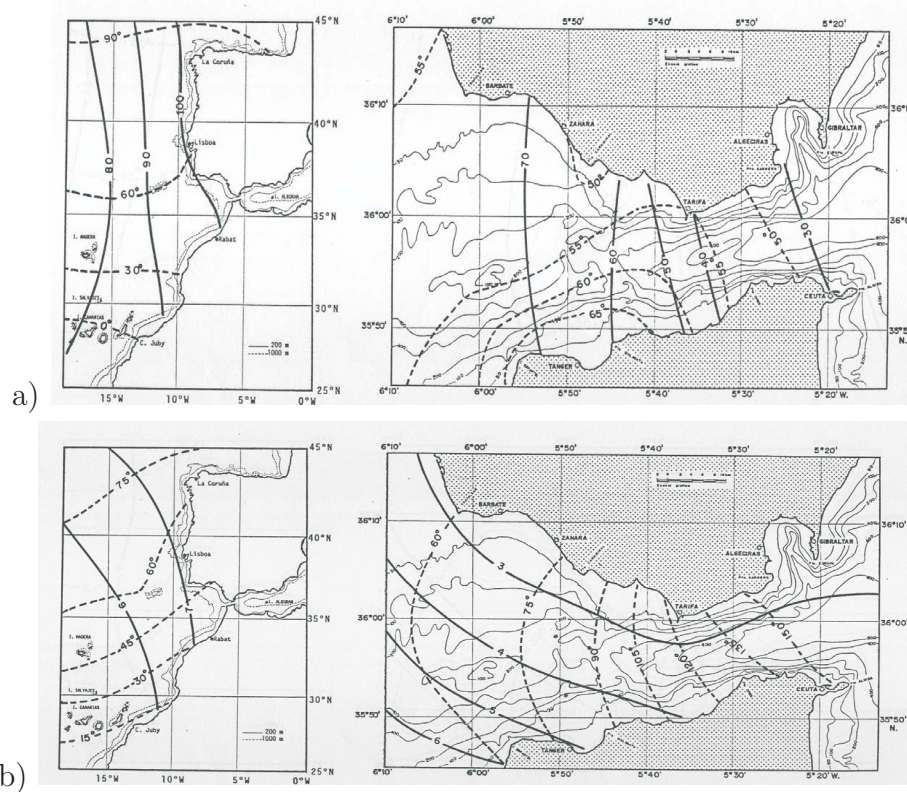


Figura 1.4: Cartas de marea del Estrecho de Gibraltar (columna derecha) y su contorno occidental (columna izquierda) para las constituyentes de marea a) M_2 y b) K_1 (de García Lafuente 1986).

del mismo (cercañas del umbral de Camarinal).

La estructura de la marea es muy compleja, como cabe esperar en una zona que conecta dos cuencas con mareas tan diferentes. Debido a las dimensiones del Atlántico, cuya escala espacial es mayor que el radio externo de deformación de Rossby, se desarrolla un sistema anfidrómico (ver panel izquierdo de la Figura 1.4a-b). La marea consiste en una onda Kelvin que se propaga en sentido antihorario a una velocidad de unos 750 km/h. El Mediterráneo sin embargo es pequeño para que se desarrolle un sistema anfidrómico, y la marea tiene características de una onda estacionaria de pequeña amplitud. La banda de marea más energética en el Estrecho es con diferencia la semidiurna, con un 90% de la energía según García Lafuente (1986), y predominando con mucho la constituyente M_2 , seguida de la S_2 . A grandes rasgos el Estrecho se encuentra, para las constituyentes de esta especie entre el nodo y el antinodo (más próximo a éste) de la onda de marea estacionaria que se forma en el Mediterráneo.

La amplitud aumenta de Este a Oeste (Figura 1.4a), por lo que la línea antinodal se situaría estrictamente a algunas decenas de kilómetros al Oeste del Estrecho. Las fases aumentan ligeramente hacia el Sur, pero en cualquier caso las diferencias no son importantes, y localmente esta especie puede considerarse en efecto una onda estacionaria. Esta característica hace que las oscilaciones de la superficie libre y las corrientes de marea estén desfasadas unos 90° .

La siguiente especie en importancia es la diurna, y las constituyentes más relevantes por orden son K_1 y O_1 , aunque la energía asociada a ambas es bastante similar. Esta especie presenta una estructura bien distinta a la semidiruna, con líneas de cofase variando notablemente a lo largo del Estrecho, lo que indica el comportamiento de una onda progresiva (Figura 1.4b) que, realmente, sería consecuencia de la degeneración que impone la rotación a una línea nodal. En otras palabras, para la especie diurna el Estrecho tiende a comportarse como nodo. La consecuencia inmediata es que para las corrientes, la marea diurna tiene cierta importancia y da lugar a una desigualdad diurna considerable, especialmente importante cuando coinciden mareas muertas semidiurnas con mareas vivas diurnas. La desigualdad es mucho menos notable en la oscilación del nivel del mar ya que la amplitud de la oscilación diurna es muy pequeña como debe ser en las inmediaciones de un nodo. Debido a la rotación terrestre, la amplitud es mayor en la parte Sur del Estrecho (ver Figura 1.4b), y la desigualdad es más acusada allí.

Capítulo 2

Breve revisión de teoría de ondas
internas con aplicación a fenómenos
ocurrentes en el Estrecho de
Gibraltar

2.1 Introducción

El primer estudio acerca de los mecanismos de generación de ondas internas en un fluido estratificado se remonta a principios del siglo XX, llevado a cabo por Zeilon (1912). Tras esta primera experiencia se sucedieron multitud de estudios experimentales (Beardsley 1970, Baines 1983) y teóricos (Cox y Sandström 1962, Baines 1973, Baines 1983) persiguiendo conocer en profundidad el proceso mediante el cual parte de la energía de una onda barotrópica (como la marea superficial) es transferida a energía baroclina (ondas internas) debido a su interacción con accidentes del relieve subacuático.

La literatura acerca de la dinámica de ondas internas es extensa, de tal forma que libros clásicos de mecánica de fluidos geofísicos (Le Blond and Mysak 1978, Lighthill 1978, Gill 1982) suelen dedicar una amplia sección a su estudio. Mención especial merece la reciente publicación de Vlasenko et al. (2005), dedicando exclusivamente un libro a la generación de la marea baroclina en el océano abordando el problema analítica y numéricamente, así como la extensa revisión llevada a cabo por Garrett y Kunze (2007). Obviamente repetir una revisión tan profunda no es objetivo aquí, pero sí lo es exponer de forma muy breve algunos aspectos teóricos sobre ondas internas con objeto de introducir ideas y conceptos previos útiles para abordar capítulos posteriores, al mismo tiempo que comentar algunas características relacionadas con ondas internas en el Estrecho de Gibraltar.

2.2 Teoría lineal

2.2.1 Ecuaciones de gobierno

Es conveniente partir de las ecuaciones que rigen el movimiento, las ecuaciones de Reynolds bajo la aproximación de Boussinesq¹ para un fluido en rotación en coordenadas cartesianas:

Momento

¹La aproximación de Boussinesq es normalmente aceptable en el océano. Siguiendo la notación del texto, se basa en que $(\tilde{\rho}/\rho_0) \ll 1$, y consiste en mantener la densidad sólo como función de z , $\rho = \rho_0(z)$ (o constante) en todos los términos excepto en el de flotabilidad.

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} - 2\Omega \sin\theta \cdot v + 2\Omega \cos\theta \cdot w &= -\frac{\tilde{p}_x}{\rho_0} + \nu_h(u_{xx} + u_{yy}) + (\nu_v u_z)_z \\ \frac{dv}{dt} + 2\Omega \sin\theta \cdot u &= -\frac{\tilde{p}_y}{\rho_0} + \nu_h(v_{xx} + v_{yy}) + (\nu_v v_z)_z \\ \frac{dw}{dt} - 2\Omega \cos\theta \cdot u &= -\frac{\tilde{p}_z}{\rho_0} - g\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} + \nu_h(w_{xx} + w_{yy}) + (\nu_v w_z)_z \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Continuidad

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot u = 0 \quad (2.2)$$

Balance de energía térmica y de sal

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \kappa_h(T_{xx} + T_{yy}) + (\kappa_v T_z)_z \\ \frac{dS}{dt} &= \kappa_h(S_{xx} + S_{yy}) + (\kappa_v S_z)_z \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

A estas ecuaciones hay que añadir la ecuación de estado $\rho = \rho(S, T, P)$. Las variables con tilde denotan variaciones respecto al estado de no movimiento, de tal forma que la densidad se escribe $\rho = \rho_0(z) + \tilde{\rho}$, y \tilde{p} es la diferencia entre la presión total del fluido y la hidrostática. Es bastante común despreciar el término que involucra a $\cos\theta$ en las ecuaciones (2.1), no obstante es mostrado aquí pues con posterioridad se prestará atención a ellos. Respecto a la notación en las anteriores ecuaciones, $d/dt = (\partial/\partial t + \nabla)$ es la derivada total o material, Ω la frecuencia angular de rotación terrestre, g la aceleración de la gravedad, θ denota la latitud, y ν , κ los coeficientes de viscosidad y difusión turbulentos respectivamente, verticales y horizontales según subíndices.

Consideremos un océano ilimitado en las coordenadas espaciales (x, y) y estratificado con perfil de densidad dinámicamente estable $\rho_0(z)$ (ρ_0 creciente con la profundidad). Consideremos también una onda interna infinitesimal en él. La velocidad de fase una onda infinitesimal es mucho mayor que la velocidad del fluido, y por tanto introduciendo escalas típicas se comprueba sin dificultad que los términos no lineales en las ecuaciones del movimiento pueden ser despreciados frente a las derivadas locales. Así pues se asume la aproximación lineal. Es razonable suponer que los efectos relacionados con la mezcla turbulenta deben ser mínimos para pequeñas perturbaciones,

con lo que los términos de viscosidad y difusión son también eliminados. En el caso de una onda bidimensional, que no sufre variación a lo largo de la coordenada espacial y ($\partial/\partial y = 0$), las ecuaciones anteriores se reducen a

$$\left. \begin{aligned} u_t - fv &= -\tilde{p}_x/\rho_0 \\ v_t + fu &= 0 \\ w_t &= -\tilde{p}_z/\rho_0 - g\tilde{\rho}/\rho_0 \\ \tilde{\rho}_t + w\rho_{0z} &= 0 \\ u_x + w_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

donde $f = 2\Omega \sin(\theta)$ es el parámetro de Coriolis. Introduciendo una función de corriente $\psi(x, z, t)$ tal que $u = \psi_z$, $w = -\psi_x$, y buscando soluciones periódicas en tiempo de (2.4) de la forma:

$$\{u, v, w, \psi, \tilde{p}, \tilde{\rho}\}(x, z, t) = \{u^*, v^*, w^*, \psi^*, \tilde{p}^*, \tilde{\rho}^*\}(x, z)e^{i\sigma t}, \quad (2.5)$$

tras algunas manipulaciones se obtiene la siguiente ecuación para ψ :

$$\psi_{zz}^* - \frac{N^2(z) - \sigma^2}{\sigma^2 - f^2} \psi_{xx}^* + \frac{N^2(z)}{g} \psi_z^* = 0. \quad (2.6)$$

Aquí $N(z) = -(g\rho_z/\rho_0)^{1/2}$ es la frecuencia natural de oscilación o de Brunt-Väisälä, la frecuencia angular con la que una partícula fluida oscila verticalmente en torno a su posición de equilibrio frente a un desplazamiento inicial infinitesimal. Es importante observar que la frecuencia de Brunt-Väisälä proporciona una medida de la estratificación de un fluido, valores mayores de N indican estratificación más intensa. En el océano la situación más común es que, al menos durante la estación estival, los máximos valores de N se localicen en la termoclina, unas decenas de metros bajo la superficie. Obviamente también la salinidad puede jugar un papel fundamental en la estratificación, como ocurre en el Estrecho de Gibraltar. En el Estrecho existe una piconclina permanente debido a la constante presencia del agua mediterránea en profundidad, cuya posición varía en función de la zona. La Figura 2.1ab muestra un perfil medio de densidad y de Brunt-Väisälä asociado obtenido en Abril en las cercanías de la Cuenca

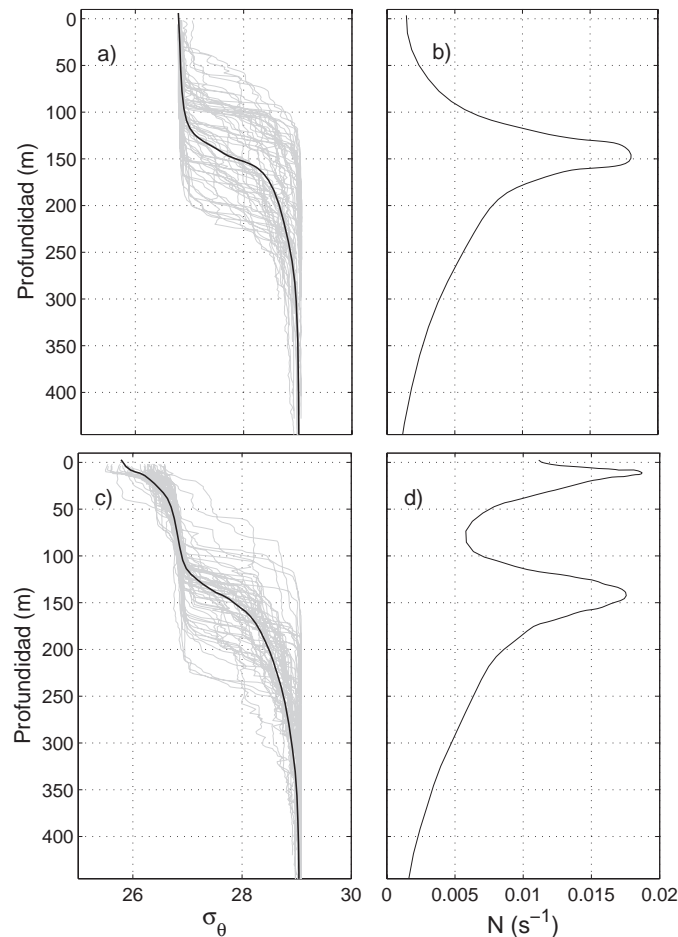


Figura 2.1: a) Perfiles de densidad en la zona de la cuenca de Tánger obtenidos en Septiembre. En línea gris se dibujan perfiles instantáneos, y en línea negra el promedio. b) Perfil de Brunt-Väisälä asociado al promedio de densidad obtenido en a). c)-d) Igual que a)-b) para Abril.

de Tánger (ver Figura 1.3). La piconclina se sitúa a unos 150 metros de profundidad. En Septiembre aparece además otra piconclina asociada al calentamiento estival a unos 20 metros de la superficie (Figura 2.1c-d). En cualquier caso los valores máximos de N no suelen superar en el océano $5 \cdot 10^{-2} \text{s}^{-1}$, y en virtud de ello el tercer término de la parte izquierda de la igualdad en la ecuación (2.6) suele despreciarse frente al resto.

La resolución de (2.6) requiere condiciones de contorno para los límites verticales del dominio, es decir, la superficie y el fondo del océano. Para una onda interna los desplazamientos verticales de las isopicnas en el interior del océano son mucho mayores que los inducidos en la superficie con lo que podemos asumir que $w|_{z=0}$. Ésto se

denomina condición de contorno rígido, y es conveniente insistir en que no es asumida en base a que fluctuaciones de la superficie libre asociadas a ondas internas son despreciables frente a las inducidas por la marea barotrópica. En la superficie suponemos que existe continuidad entre la fricción inducida por el viento, y la existente en el propio fluido $\tau_w = (\rho_0 \nu_v u_z)|_{z=0}$. Con la ausencia de viento esta condición exige que $u_z|_{z=0} = v_z|_{z=0} = 0$. Respecto al fondo, imponemos la condición obvia de flujo nulo a través de él, $\vec{u}_n = 0$, donde \vec{u}_n es la componente normal a la superficie del fondo del vector velocidad. De todas estas consideraciones se deduce que la función de corriente en los contornos debe depender sólo del tiempo:

$$\psi|_{z=0} = C_1(t), \quad \psi|_{z=-H} = C_2(t), \quad (2.7)$$

donde $H = H(x)$ es la profundidad del océano.

El significado físico de estas las condiciones de contorno se hace aparente calculando el transporte en una sección vertical:

$$\int_{-H}^0 u dz = \int_{-H}^0 \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = \psi|_{z=0} - \psi|_{z=-H} = C_1(t) - C_2(t). \quad (2.8)$$

Las condiciones de contorno determinan la dependencia temporal del flujo neto. Fijemos $\psi|_{z=0} = 0$. Las ondas lineales baroclinas no inducen transporte neto alguno, y por tanto los movimientos puramente baroclinos deben satisfacer:

$$\psi|_{z=0} = \psi|_{z=-H} = 0. \quad (2.9)$$

Por otro lado, la presencia de una onda de marea barotrópica con máximo transporte asociado Ψ_0 y frecuencia σ debe satisfacer:

$$\psi|_{z=0} = 0, \quad \psi|_{z=-H} = -z(\Psi_0/H)e^{i\sigma t}. \quad (2.10)$$

2.2.2 Modos baroclinos

Antes de proseguir conviene familiarizarse con las soluciones de (2.6) para el caso más simplificado posible. Consideremos un océano estratificado de profundidad constante

en el que queremos investigar la estructura de las ondas baroclinas que pueden existir. Buscando soluciones periódicas de la forma $\psi^*(x, z) = q(z)e^{ikx}$, (2.6)-(2.9) se reduce a:

$$\left. \begin{aligned} q_{zz} + k^2 \alpha^2(z)q &= 0 \\ q(-H) = q(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

donde

$$\alpha^2(z) = \frac{N^2(z) - \sigma^2}{\sigma^2 - f^2}, \quad (2.12)$$

y el tercer término de la ecuación (2.6) ha sido eliminado. Partimos de un océano de estratificación estable, $N^2(z) > 0$, y también asumimos que $\alpha^2(z) > 0$. Observemos que para $\alpha^2(z) \leq 0$ la ecuación (2.6) deja de ser hiperbólica, y consecuentemente no es una ecuación de ondas. Bajo estas hipótesis el problema anterior constituye un problema de autovalores de tipo Sturm-Liouville, cuya solución es una familia de autovalores y autovectores ortogonales² $\{k_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $k_i < k_j$ para $i < j$. El problema (2.11) parece simple, pero sólo se encuentran soluciones analíticas para determinados perfiles de $N(z)$ tales como $N(z) = N_0$ constante: $k_n = \sqrt{\alpha} n \pi / H$, $q_n = \sin(n \pi z / H)$. En general, el problema debe resolverse de forma numérica.

Independientemente de la estratificación se verifica siempre que el autovalor o modo vertical n posee $(n - 1)$ ceros, como se observa en la Figura 2.2a, que muestra los tres primeros modos verticales para el caso $N(z) = N_0$. Como consecuencia sólo el primer modo posee velocidades verticales de igual signo, y las isopicnas oscilan en fase. Para los modos con $n > 1$ siempre hay zonas en la columna de agua donde las isopicnas oscilan en oposición de fase. Por otra parte las velocidades horizontales siempre han de contener regiones en fase y en oposición de fase para poder cumplir la condición de flujo neto nulo (ver paneles b, c y d en la Figura 2.2). Apuntar por último que para una estratificación más realista el máximo del primer modo se localiza a escasos metros por debajo del máximo de N , cerca de la zona más estratificada.

²Ortogonales para el producto escalar $\langle f(z), g(z) \rangle = \int_{-H}^0 f(z)g(z)\alpha^2(z)dz$

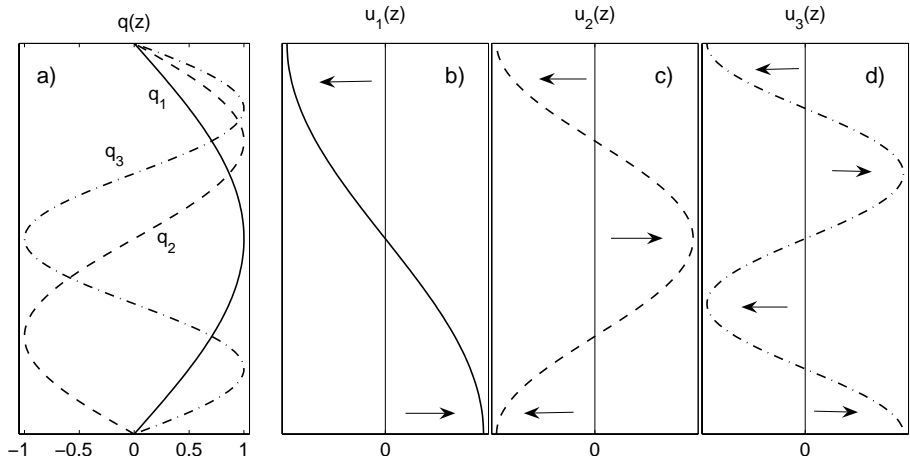


Figura 2.2: (a) Primeros tres modos baroclinos obtenidos para una estratificación con $N(z) = N_0$ constante. (b),(c),(d) Velocidad asociada al primer, segundo y tercer modo baroclinos respectivamente.

2.2.3 Marea baroclina generada por un umbral submarino

Anteriormente vimos la estructura de las soluciones puramente baroclinas en un océano de fondo plano. En esta sección vemos de que forma son excitadas debido a la interacción de la marea barotrópica con un umbral submarino. Se sigue trabajando bajo la hipótesis de ondas de pequeña amplitud, de modo que los términos advectivos son despreciados y las ecuaciones (2.4) son aplicables. Partimos nuevamente de un océano estratificado con un obstáculo bidimensional de longitud $2L$ como aparece en el esquema de la Figura (2.3). Impongamos un flujo barotrópico periódico sobre él, y veamos cual es la respuesta baroclina del sistema resolviendo (2.6)-(2.10). En general el problema sólo puede ser abordado mediante técnicas numéricas, sin embargo se pueden encontrar soluciones analíticas aproximadas bajo ciertas condiciones para la forma del obstáculo y para la dependencia de la frecuencia de Brunt-Väisälä con z . Un interesante ejemplo de tales soluciones, tomado de Vlasenko et al. (2005) se comenta a continuación.

Asumimos un obstáculo representado por el perfil analítico (ver Figura 2.13)

$$H(x) = H_{max} \left[\frac{1 + \cos(\pi x/L)}{2} \right], \tag{2.13}$$

y perfiles de frecuencia de Brunt-Väisälä de la forma

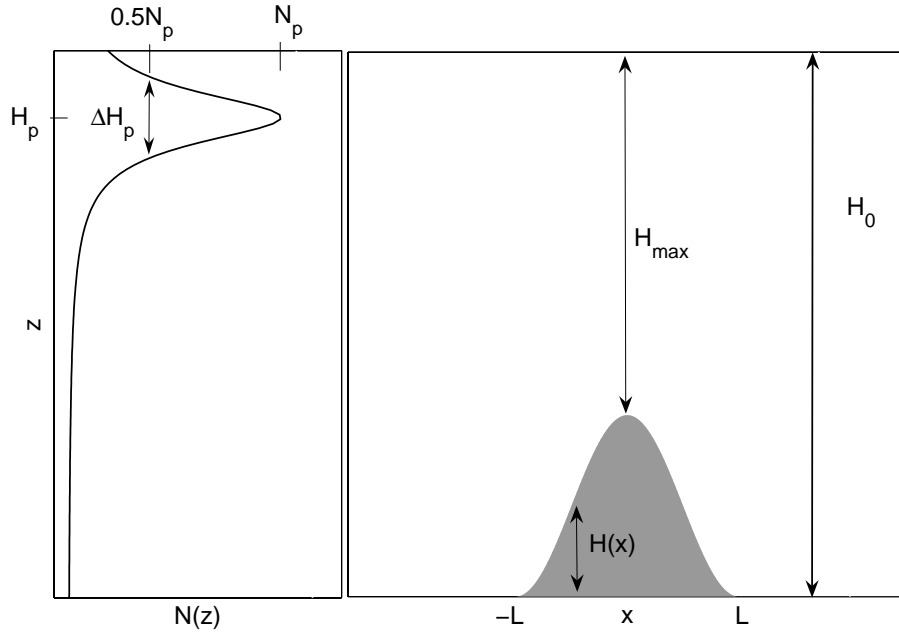


Figura 2.3: Esquema representando la situación para el problema de la generación de ondas internas (ver texto). El perfil de la izquierda representa la frecuencia de Brunt-Väisälä. A la derecha una montaña submarina con perfil de ecuación (2.13).

$$N^2(z) = \sigma^2 + (\sigma^2 - f^2) [c_1(z + c_2)^2 + c_3]^{-2}, \quad (2.14)$$

que simulan perfiles bastante realistas (Figura 2.3). Los parámetros c_1, c_2, c_3 vienen dados por

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= 4(\sigma^2 - f^2)^{1/2} \Delta H_p^{-2} [(N_p^2/4 - \sigma^2)^{-1/2} - (N_p^2 - \sigma^2)^{-1/2}] \\ c_2 &= H_p \\ c_3 &= \alpha^{-1/2}(H_p) \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

siendo $N(H_p) = N_p$ el máximo de N , y ΔH_p una medida de la anchura de la picnoclina, como se representa en el esquema de la Figura (2.3). Bajo estas condiciones es relativamente fácil encontrar soluciones de primer orden para el desarrollo asintótico

$$\psi^*(x, z) = \psi_0^*(x, z) + \epsilon \cdot \psi_1^*(x, z) + \epsilon^2 \cdot \psi_2^*(x, z) + \dots \quad (2.16)$$

donde

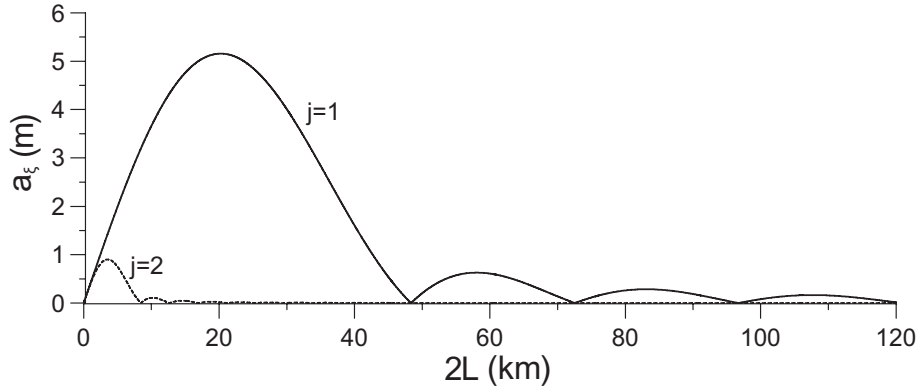


Figura 2.4: Amplitud de las oscilaciones de las isopícnas ($a_\xi^{(j)} = a_j \cdot k_j / \sigma$) asociada a los dos primeros modos baroclinos en función de la longitud de obstáculo (de Vlasenko et al. 2005).

$$\epsilon = \frac{\int_{H_{max}}^{H_0} N(z) dz}{\int_0^{H_0} N(z) dz}. \quad (2.17)$$

Como se comentó anteriormente y queda ilustrado en la Figura (2.3) normalmente en el océano la estratificación es intensa sólo en capas superficiales por lo que $\epsilon \ll 1$ y la aproximación de primer orden es satisfactoria. Bajo estas consideraciones la solución es:

$$\begin{aligned} \psi^*(x, z) = & (\Psi_0 z / H_0) \\ & + \epsilon \sum_{j=1}^{\infty} q_j(z) \times \begin{cases} b_j \cdot \exp(i[k_j x + \pi(j + 1/2)]), & x < -L \\ (b_j + a_j) \cos(k_j x) \cdot \exp(i\pi[(j + 1/2)]), & |x| \leq L \\ a_j \cdot \exp(i[-k_j x + \pi(j + 1/2)]), & x > L \end{cases} \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde

$$a_j = -b_j = \frac{\Psi_0 (c_1 \cdot c_3)^{1/2} \int_0^{H_0} N(z) dz}{\alpha^{1/2}(0) \sin[(c_1 c_3)^{1/2} \int_0^{H_0} N(z) dz]} \cdot \frac{\sin(k_j L)}{(k_j L)^2 - \pi^2} \cdot \pi^3 k_j^{-2}. \quad (2.19)$$

El primer término es la solución de orden cero y es el flujo barotrópico impuesto sobre el umbral; el segundo es la solución para los términos de orden uno, y para $|x| > L$ representa la suma de los modos baroclinos con diferentes amplitudes. Observar que la

respuesta baroclina a ambos lados del umbral es idéntica, consecuencia de la simetría del obstáculo, y que la amplitud para todos los modos es directamente proporcional a ϵ y Ψ_0 , el máximo valor del flujo barotrópico.

Más interesante es la dependencia respecto a la anchura del obstáculo. Como es de esperar los modos baroclinos tienden a desaparecer cuando la pendiente del umbral se hace pequeña, $a_j \rightarrow 0$ para $L \rightarrow \infty$. No obstante a_j no es estrictamente decreciente, posee ceros para $L = n\pi k_j^{-1}$, $n = 2, 3, \dots$ y máximos locales para $L = (n+1/2)\pi k_j^{-1}$, $n \in \{1/2 \cup N\}$ (Figura 2.19), lo que indica cierta resonancia con la topografía. En lo anterior k_j denota el número de onda del modo j -ésimo, que para el perfil de $N(z)$ en (2.14) viene dado por:

$$k_j = \left[\left(\frac{j\pi}{H_0} \right)^2 - c_1 c_2 \right]^2. \quad (2.20)$$

Por otra parte para una anchura del obstáculo fija $2L$, de (2.19)-(2.20) se deduce que $a_j \propto j^{-4}$, lo que indica que los modos de orden inferior son los predominantes. Ésto se ilustra también en la Figura (2.4), que muestra la amplitud de las oscilaciones de las isopícnas asociada a los dos primeros modos baroclinos para un caso concreto. Es interesante ver en la gráfica que el segundo modo es igual de importante que el primero sólo para obstáculos de pequeña longitud o de fondo inclinado. La presencia de modos de alto orden es la característica más notable de la marea interna generada en obstáculos con gran pendiente, abruptas montañas submarinas o plataformas continentales. La pendiente a partir de la cual se produce una gran transferencia de energía a modos superiores es α (ecuación 2.12), denominada pendiente crítica. La superposición de multitud de modos produce lo que se denomina en la literatura anglosajona un sistema de “wave beams” (Figura 2.5), a través de los cuales gran parte de la energía es reflejada en ciertos puntos de los contornos rígidos (la superficie libre y en el obstáculo) siguiendo las líneas características.

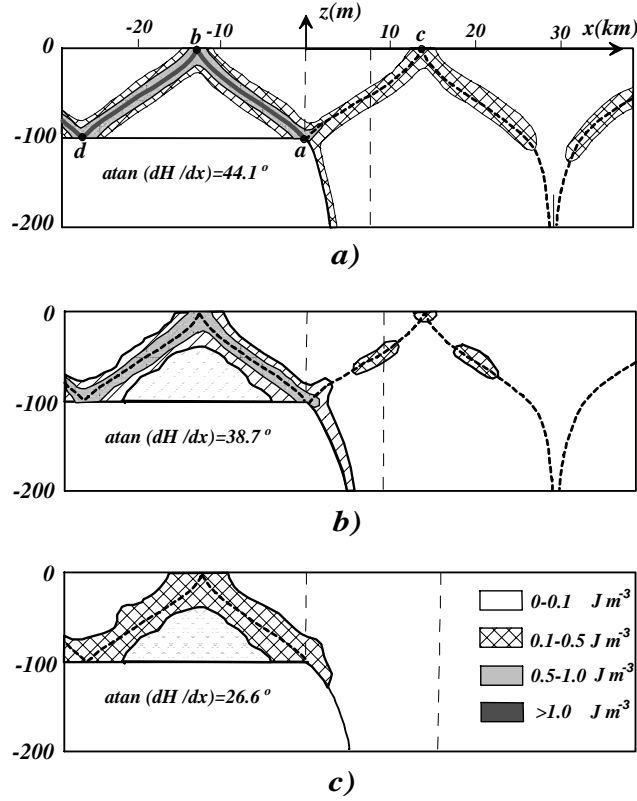


Figura 2.5: Mapas de densidad de energía baroclina para la marea interna generada en una plataforma continental con diferentes pendiente, creciente de (a) hasta (c). La línea discontinua representa líneas características, $\chi = x \pm \alpha^{-1}(z)$ (de Vlasenko et al. 2005).

2.3 Teoría no lineal

2.3.1 Generación de ondas internas no lineales

En muchos lugares del océano el proceso de generación de ondas internas se produce bajo condiciones del flujo tales que los términos no lineales de las ecuaciones (2.1)-(2.2) no pueden ser ignorados, y lo expuesto en la sección anterior deja de ser formalmente válido.

Para ilustrar el papel que juegan los efectos no lineales en el proceso de generación consideremos un flujo barotrópico $U = (\Psi_0/H) \cos(\omega t)$. La ecuación que gobierna perturbaciones baroclinas respecto a este flujo viene dado por (Baines 1995):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \nabla^2 \psi + N^2 \psi_{xx} = 0, \quad (2.21)$$

con condiciones de contorno homogéneas (perturbaciones baroclinas). En lo anterior, se ha despreciado los efectos de la rotación, y no se han linealizado las ecuaciones respecto al flujo medio.

Si el término convectivo ($U\partial/\partial x$) es despreciado a la derivada local ($\partial/\partial t$), la búsqueda de soluciones periódicas da lugar a la ecuación (2.6) excepto por lo que concierne a la rotación y al término que involucra a la gravedad, que como se puntualizó es normalmente despreciado. Por tanto la solución es la que conocemos bajo la aproximación lineal: superposición lineal del modo barotrópico y modos baroclinos. Por otro lado, si el término convectivo es dominante, la solución consiste en la superposición de la onda barotrópica con ondas de Lee (ondas de corta escala espacial formadas a sotavento) quasi-estacionarias (Bell 1975, Nakamura et al. 2000). En el caso de que ambos términos sean del mismo orden ambos mecanismos de generación coexisten.

Es importante notar que la importancia relativa de la derivada local frente al término convectivo viene dada en términos del número de Froude interno, $Fr = U/c$, donde c es la velocidad de fase la oscilación interna. Vlasenko et al. (2005) discute extensamente los mecanismos de generación en función del número de Froude, la inclinación del relieve, y la rotación.

Para $Fr \ll 1$ la aproximación lineal es válida y los resultados anteriores aplicables: solución como suma de modos baroclinos, predominancia del primer modo excepto para relieves de gran pendiente, y supresión de la marea interna para latitudes tales que $f > \sigma$ (para estos valores $\alpha < 0$ en 2.11).

Para un número de Froude en torno a la unidad, además de la onda interna de frecuencia de marea (marea interna), parte de energía es transferida a escalas cortas debido a efectos no lineales que tienden a peraltar las isopicnas generando un bore³ interno. En su propagación el bore se desintegra en un paquete de ondas solitarias o solitones⁴, ondas no lineales del orden de un kilómetro de longitud de onda que deben su existencia al equilibrio establecido entre los efectos no lineales y dispersivos (Whitham

³Un “tidal bore” o simplemente “bore” es una perturbación de corta escala que se propaga en el frente de una onda de marea. El fenómeno es bien observado en algunos estuarios del mundo.

⁴Estrictamente hablando el término soliton se emplea para ondas solitarias solución de ecuaciones integrables, pero es bastante común en la literatura no hacer distinción entre ambos términos.

1974). La aparición de ondas solitarias también pueden ser fruto de la evolución de ondas cortas formadas en el umbral (ondas de tipo Lee). Al igual que en el caso lineal, el primer modo predomina también para las ondas solitarias en fondos de pendiente subcrítica ($\partial H/\partial x < \alpha$), y la rotación puede llegar a suprimir la generación de ondas solitarias internas, pues éstas pueden deberse exclusivamente a la evolución no lineal de la marea interna.

Para $Fr > 1$ la transferencia de energía barotrópica a ondas cortas es más efectiva. A sotavento del obstáculo se forma un salto hidráulico interno o bore interno cuasi-estacionario acompañado de intensa mezcla turbulenta. Al ser el flujo supercrítico ($Fr > 1$) el bore no puede propagarse aguas arriba y queda atrapado por la corriente extrayendo energía del flujo de marea barotrópico hasta que finalmente se pierde el control hidráulico ($Fr < 1$). En ese momento se libera desistegrándose en un paquete de ondas solitarias a medida que se propaga. Debido a que la escala espacial del salto hidráulico es del mismo orden que la de la topografía (normalmente pocos kilómetros), misma característica que las ondas de Lee, la rotación no juega un papel determinante y es incapaz de inhibir la formación de ondas internas es este caso.

Obviamente todo lo anterior son aspectos generales sobre el proceso de generación de ondas internas, no exentos de error o inexactitud en lugares particulares como el Estrecho de Gibraltar, con una hidrodinámica muy compleja, en el que junto a intensos flujos de marea existe un intercambio baroclinico subyacente no despreciable, que además induce gradientes horizontales relativamente intensos en la estratificación. Cualquiera que sea el mecanismo exacto de generación, la existencia tanto de marea interna y ondas solitarias en el Estrecho es un hecho observado (Morozov 2002, García Lafuente 2000). La Figura 2.6 muestra la oscilación de una isoterma en un punto situado a la entrada del Mar de Alborán a partir de datos experimentales que se describirán con posterioridad, e ilustra muy claramente los dos tipos de oscilaciones, una de periodicidad semidiurna, la marea interna, y ondas cortas no lineales que consisten en paquetes de unos 5-6 solitones.

2.3.2 La ecuación Korteweg de Vries.

El estudio de ondas solitarias se remonta a los experimentos de John Scott Russell en 1844, motivado por las primeras observaciones de la evolución de una onda superficial

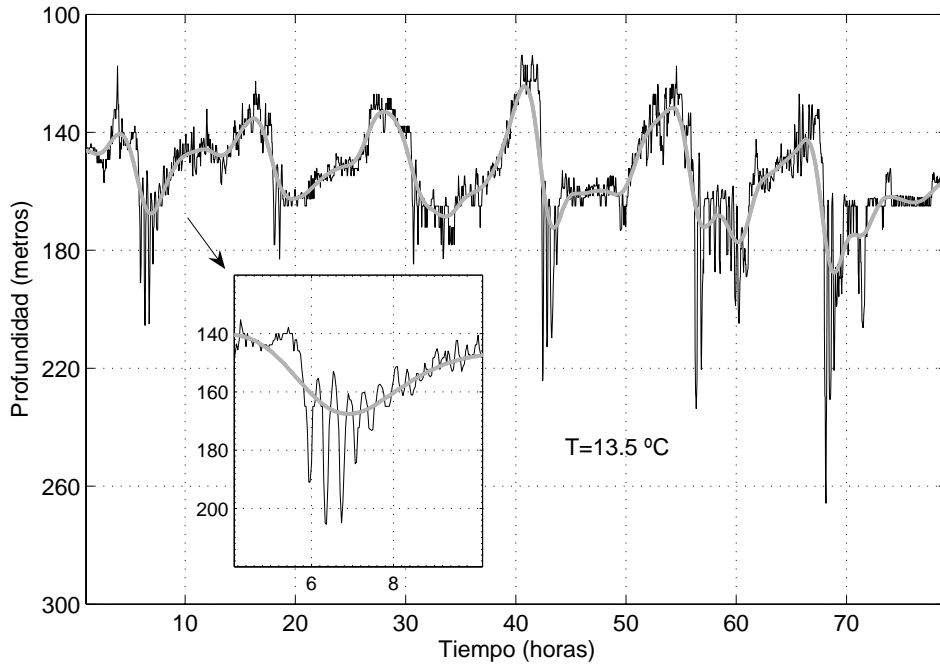


Figura 2.6: Evolución temporal de la isoterma $T = 13.5^\circ\text{C}$ a la entrada del Mar de Alborán. Dos tipos de oscilaciones son distinguibles, una de frecuencia semidiurna (marea interna, línea gris), y otra de alta frecuencia, ondas solitarias.

sin pérdida aparente de energía a lo largo de un canal (Russell 1844). A raíz de estas observaciones se sucedieron los primeros avances en la teoría de solitones y sistemas integrables (Boussinesq 1871, Rayleigh 1876, Korteweg y de Vries 1895), que son desarrollados profundamente a lo largo del siglo XX en el ámbito de la física matemática.

La ecuación Korteweg de Vries (KdV) y sus generalizaciones son modelos analíticos que describen la evolución de ondas largas débilmente no lineales en un fluido (Benney 1966, Lamb y Yan 1996). Para ondas internas se puede deducir por medio del método de las perturbaciones a partir de las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{\tilde{p}_x}{\rho_0} \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{\tilde{p}_z}{\rho_0} - g\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \\ \frac{d\rho}{dt} &= 0 \\ u_x + w_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

con condiciones de contorno $w|_{z=0} = w|_{z=-H} = 0$.

Las ecuaciones (2.22) difieren de las (2.1)-(2.2) en que las primeras no incluye los efectos de la rotación ni la viscosidad, son bidimensionales, y en la ecuación de continuidad la derivada material de la densidad ha sido despreciada frente a la divergencia de la velocidad. Uno puede comprobar que para las escalas de movimiento que consideramos esta última aproximación (fluido incompresible) es válida.

En virtud de que el campo de velocidades es solenoidal (de divergencia nula), se puede introducir nuevamente una función de corriente $\psi(x, y, z, t)$ y expresar (2.22) en función de ésta. De las ecuaciones de momento se puede eliminar la presión derivando respecto de z la primera, respecto de x la segunda y restando. Se obtiene

$$(\psi_{xx} + \psi_{zz})_t + J(\psi_{xx} + \psi_{zz}, \psi) - b_x = 0, \quad (2.23)$$

donde $J(A, B) = A_x B_z - A_z B_x$ es el operador Jacobiano, y $b = g\tilde{\rho}/\rho_0$ el llamado término de flotabilidad. Igualmente, haciendo transformaciones básicas la tercera ecuación de (2.22) se expresa como

$$b_t + J(b, \psi) + N^2(z)\psi_x = 0. \quad (2.24)$$

Lamb y Yan (1996) adimensionaliza las ecuaciones anteriores y llega al siguiente problema para las variables adimensionales,

$$\left. \begin{aligned} (\psi_{zz} + \mu\psi_{xx})_t + \epsilon J(\psi_{zz} + \mu\psi_{xx}, \psi) &= b_x, \\ b_t + \epsilon J(b, \psi) + N(z)^2\psi_x &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

donde $\epsilon = (a/H)$, $\mu = (H/\lambda)^2$, con a la amplitud y λ la longitud de onda. Los parámetros ϵ y μ proporcionan una medida de los efectos no lineales y dispersivos respectivamente. Para una onda larga y de pequeña amplitud ($\mu \ll 1$, $\epsilon \ll 1$) se puede buscar una solución de la forma:

$$\psi(x, z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^i \mu^j \psi_{i,j}(x, z, t), \quad (2.26)$$

$$b(x, z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^i \mu^j b_{i,j}(x, z, t). \quad (2.27)$$

La ecuación KdV resulta de despreciar los términos de orden dos y asumir que existe un equilibrio entre los efectos no lineales y dispersivos, $\epsilon = \mu^2$. Recuperando variables físicas se escribe:

$$A_t + cA_x + \alpha_1 AA_x + \beta A_{xxx} = 0. \quad (2.28)$$

Los parámetros α y β dependen de la solución del problema de Sturm-Liouville

$$\left. \begin{aligned} \phi_{zz} + \frac{N^2(z)}{c^2} \phi &= 0 \\ \phi(-H) = \phi(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

de la siguiente manera

$$\alpha_1 = \frac{3c \int_{-H}^0 (\phi_z)^3 dz}{2 \int_{-H}^0 (\phi_z)^2 dz}, \quad \beta = \frac{c \int_{-H}^0 \phi^2 dz}{2 \int_{-H}^0 (\phi_z)^2 dz}. \quad (2.30)$$

En lo anterior $A(x, t)$ y $\phi(z)$ determinan la función de corriente:

$$\psi(x, z, t) = cA(x, t)\phi(z), \quad (2.31)$$

y por tanto también el desplazamiento de las isopícnas respecto a su posición de equilibrio, $\xi(x, z, t) = \psi(x, z, t)/c = A(x, t)\phi(z)$. Observar que existen ondas de infinitos modos, de tal forma que si ϕ es el modo n -ésimo, se habla de solución de modo n .

2.3.3 Ondas solitarias

La ecuación KdV posee varias soluciones analíticas de las cuales sólo una de ellas es no periódica, la onda solitaria. Desde un punto de vista práctico su importancia respecto a las demás soluciones (solución cnoidal, dnoidal) radica en que una condición inicial arbitraria para la ecuación KdV evoluciona a la solución “N-solitones” (Whitham, 1974), es decir a la formación de cierto número de solitones que depende de la condición inicial. Por tanto suele ser la solución física. La solución onda solitaria de (2.28) es la siguiente:

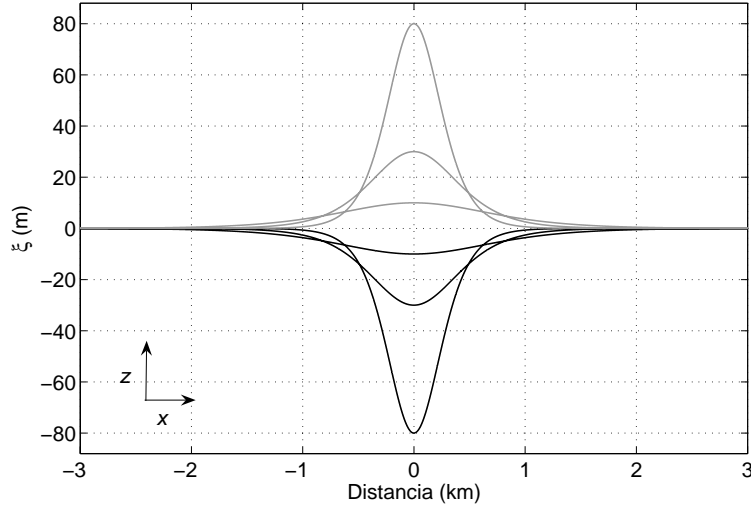


Figura 2.7: Ondas solitarias soluciones de la ecuación KdV de parámetros $\beta = 8.3 \cdot 10^3 \text{m}^3 \text{s}^{-1}$, $\alpha_1 = -1.2 \cdot 10^{-2} \text{s}^{-1}$ (perfiles en línea negra), $\alpha_1 = 1.2 \cdot 10^{-2} \text{s}^{-1}$ (perfiles en línea gris).

$$A(x, t) = a \cdot \cosh^{-2} \left(\frac{x - c_{NL}t}{\lambda} \right), \quad (2.32)$$

donde λ y c_{NL} son la longitud de onda o escala espacial del solitón y su velocidad de fase respectivamente, dependientes de la amplitud a , y los parámetros definidos en (2.30) como sigue:

$$\lambda = \left(\frac{12\beta}{\alpha_1 a} \right)^{1/2}, \quad c_{NL} = c + \frac{a\alpha_1}{3}. \quad (2.33)$$

Varias características de la solución son rápidamente identificadas, como por ejemplo que solitones de mayor amplitud poseen longitud de onda más corta (Figura 2.7). Esta característica es coherente con el hecho de que los efectos dispersivos deben incrementarse (reduciendo la onda su escala espacial) para compensar los no lineales. Observar también que el parámetro β es siempre positivo con lo que existe solución siempre y cuando la amplitud a y el parámetro α_1 posean el mismo signo. En virtud de esta correspondencia de signos la velocidad de fase no lineal c_{NL} excede siempre la velocidad lineal c , y provoca que α_1 determine la polaridad del solitón de modo 1 (Figura 2.7), ésto es, si es de elevación (α_1 positivo, cresta del solitón hacia arriba), o de depresión (α_1 negativo, cresta del solitón hacia abajo). Lo común en el océano es encontrar ondas

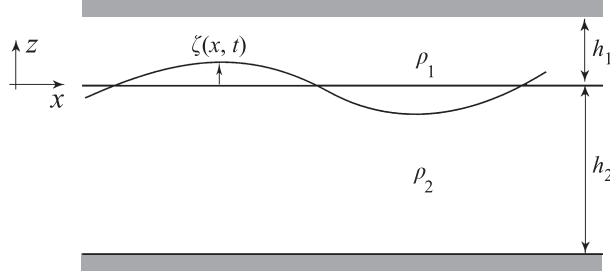


Figura 2.8: Esquema de un fluido bicapa.

solitarias de depresión. Imaginemos un fluido estratificado de la forma más simple, un fluido bicapa como el representado en la Figura 2.8, con capa superficial de espesor y densidad h_1, ρ_1 respectivamente y h_2, ρ_2 para la capa profunda. En esta situación α_1 y β se escriben de la siguiente forma (Choi y Camassa 1999):

$$\alpha_1 = -\frac{3c}{2} \frac{\rho_1 h_2^2 - \rho_2 h_1^2}{\rho_1 h_1 h_2^2 + \rho_2 h_1^2 h_2} \quad \beta = \frac{c}{6} \frac{\rho_1 h_1^2 h_2 + \rho_2 h_1 h_2^2}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1} \quad (2.34)$$

Un solitón será de depresión ($\alpha_1 < 0$) si

$$(\rho_1/\rho_2)^{1/2} > h_1/h_2. \quad (2.35)$$

En una situación normal la diferencia de densidades es muy pequeña, por lo que $(\rho_1/\rho_2) \approx 1$. Por otro lado como se comentó anteriormente la picnoclina se localiza a varias decenas de metros de la superficie en la inmensa mayoría de los casos, de tal modo que en la mayor parte de las situaciones $h_1/h_2 < 1$ y la relación (2.35) se verifica.

Uno puede observar también en (2.33) que la solución no está definida para $\alpha_1 = 0$, cuando

$$(\rho_1/\rho_2)^{1/2} = h_1/h_2. \quad (2.36)$$

En tal caso el término no lineal en la ecuación KdV (2.28) se anula, y debe incluirse el término de orden $O(\epsilon^2)$ en la expansión (2.26)-(2.27) para tener en cuenta los efectos no lineales. Este nuevo término da lugar a una extensión de la ecuación KdV (eKdV) a veces llamada ecuación de Gardner:

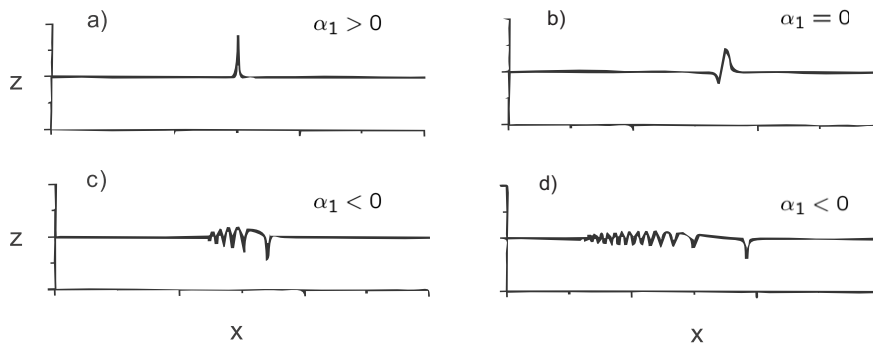


Figura 2.9: Evolución de una onda solitaria a través de un turning point (modificado de Grimshaw et al. 1999).

$$A_t + cA_x + \alpha_1 AA_x + \alpha_2 A^2 A_x + \beta A_{xxx} = 0, \quad (2.37)$$

donde también $\alpha_2 = f(\phi)$.

En un medio en el que la estratificación cambia de forma paulatina, de forma que la escala espacial de la variación del medio es menor que la longitud de onda de la onda solitaria (del orden de un kilómetro usualmente en el océano, Figura 2.7), los coeficientes de la ecuación KdV, o su versión extendida, pueden incluir una dependencia espacial. Así de forma numérica se puede investigar cómo es la transición de una onda solitaria a través de un punto en el que $\alpha_1 = 0$, denominado “turning point”. La Figura (2.9) muestra como se produce este cambio, un soliton de elevación o de polaridad positiva (panel 2.9a) evoluciona por el medio cambiante hasta transformarse en una onda de depresión (panel 2.9b). El cambio no se produce de forma adiabática ya que la onda pierde energía en el “turning point”, que es irradiada en forma de ondas secundarias (paneles 2.9c y d).

Respecto a lo ocuriente en el Estrecho de Gibraltar, en la parte oriental las ondas son de depresión (Figura 2.6), lo que tiene sentido pues la picnoclina allí está a menos 100 metros de profundidad, con un fondo superior a los 600 metros. Al Oeste de Camarinal la situación no está tan clara, la picnoclina está más profunda y la zona es más somera. En el perfil mostrado en la Figura 2.1b, perteneciente a la cuenca de Tánger, la picnoclina está cerca de la profundidad intermedia, lo que determina un valor de α_1 cercano a cero. Desafortunadamente no existen medidas “in situ” adecuadas que

cofirmen si las ondas solitarias en esta zona del Estrecho, si existen, son de depresión o elevación.

2.4 Últimas notas

En estas secciones se ha intentado hacer un breve repaso de teoría de ondas internas lineales y débilmente no lineales. En gran cantidad de situaciones la dinámica es muy no lineal y los efectos tridimensionales importantes, por lo que aplicabilidad de estos resultados es muy limitada. El Estrecho de Gibraltar es ejemplo de ello. Para tratar el problema de generación y propagación de ondas internas se requiere en la práctica modelos numéricos, como se verá en capítulos posteriores. No obstante, siempre resultados teóricos son la base para la interpretación de resultados.

Capítulo 3

Time-Spatial Variability Observed in Velocity of Propagation of the Internal Bore in the Strait of Gibraltar

Time-spatial variability observed in velocity of propagation of the internal bore in the Strait of Gibraltar¹

Abstract

Some aspects of the time-spatial variability of the phase speed of the internal bore generated in Camarinal Sill, Strait of Gibraltar, almost every tidal cycle are revised using a set of high resolution experimental data collected in two different positions of the Strait during May 2003. This variability is mainly driven by the intense tidal currents, comparable with the intrinsic propagation velocity of the first mode baroclinic bore. It is shown that the importance of the diurnal tide in the Strait of Gibraltar induces a considerable diurnal inequality on the bore velocity, with an observed maximum difference of 0.7 ms^{-1} between the speed of two consecutive bores propagating along the eastern part of the Strait. A regularly spatial pattern has been also found: the internal bore reaches its maximum velocity in Tarifa Narrows. A theoretical estimation predicts an extreme phase speed of 2.6 ms^{-1} during our period of study.

¹Sánchez Garrido, J. C., J. García Lafuente, F. Criado Aldeanueva, A. Baquerizo, and G. Sannino (2008), Time-spatial variability observed in velocity of propagation of the internal bore in the Strait of Gibraltar, *J. Geophys. Res.*, 113, C07034, doi:10.1029/2007JC004624.

3.1 Introduction

The Strait of Gibraltar, the only connection between the Atlantic Ocean and the Mediterranean Sea, is a well known scenario of inverse estuarine circulation, with an undercurrent of colder and saltier Mediterranean water (MW) flowing at depth towards the Atlantic and a surface current of warmer and fresher Atlantic water (AW) moving opposite exceeding slightly the deep flow to compensate the net evaporative loses in the Mediterranean reservoir (Lacombe and Richez, 1982; Bryden and Kinder, 1991; García-Lafuente et al., 2002). Although the main focus of study has been the long-term exchange due to the role the MW could play in the global circulation and to follow the climate variability in the Mediterranean Sea area (Candela 2001; García-Lafuente et al., 2007), the internal tide and associated mixing in the Strait has also been a widely revised topic (Ziegenbein, 1969, 1970; La Violette and Arnone, 1988; Farmer and Armi, 1988; Richez, 1994; Bruno et al., 2002; Morozov et al., 2002; Vázquez et al., 2006). The stratification originated by the salinity contrast between AW and MW, the intense tidal currents and the abrupt topography of the Strait of Gibraltar (see Figure 3.1) convert this place in a very favourable environment for the generation of large amplitude internal tides and tidally-related internal perturbations, among which the internal hydraulic jump formed at the lee side of Camarinal sill (Figure 3.1) during the flood tide (tidal currents towards the Atlantic) is the most outstanding one (Farmer and Armi, 1988). The jump remains trapped by the flow, extracting energy from the background current, until the tidal current weakens and the flow becomes subcritical over the sill, which happens shortly before high water (HW). In addition to tidal forcing, the time of the bore release is also influenced by other factors, mainly the subinertial meteorological forcing, as showed by Pistek and La Violette (1999). After its release, the internal jump propagates as an internal bore towards the Mediterranean Sea and starts disintegrating into a packet of solitary internal waves (SIWs).

During its progression towards the Mediterranean Sea, the packet of SIWs undergoes different conditions of stratification, variable tidal currents and mean flow that determine the time-space variability of the internal bore velocity. Tidal influence on the variability was found by Watson and Robinson (1990), who observed a remarkable diurnal inequality in the time arrival of internal waves to Gibraltar due to the relative intense diurnal tidal currents (García-Lafuente et al., 2000). Recent numerical studies

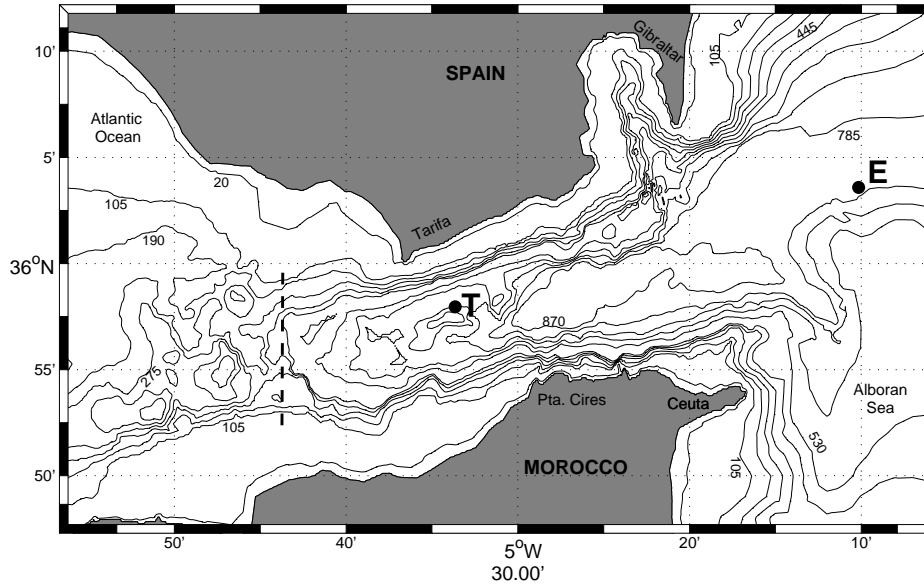


Figure 3.1: Bottom topography of the Strait of Gibraltar. Location of stations are indicated with letters T and E. Dotted line indicates the section of Camarinal Sill.

have also shown the existence of a location between Tarifa and Punta Cires (Figure 1) where the propagation speed of the bore reaches a maximum (Brandt et al., 1996, Izquierdo et al., 2001; Sannino et al., 2004). The analysis of the time-space variability of the internal bore velocity using observations of temperature and flow velocity in two locations of the Strait of Gibraltar is the scope of this paper.

3.2 Data set

During May 2003, two mooring lines were deployed in two strategic positions of the Strait of Gibraltar, one in Tarifa narrows, the section of minimum width of the Strait, at $35^{\circ}57.58' \text{ N}$, $5^{\circ}32.99' \text{ W}$ (T in Figure 1) and the other in the entrance of the Alboran Sea at $36^{\circ}3.35' \text{ N}$, $5^{\circ}10.09' \text{ W}$ (E in Figure 1). The mooring array consisted of several currentmeters at different depths that measured velocity and temperature every 2 or 5 minutes (see Table 3.2 for details). For unknown reasons, the mooring line in point T broke beneath the second uppermost instrument 22 days after deployment and the remaining instruments of the line fell down to the sea floor doing senseless observations. The two shallowest currentmeters were lost. Conductivity-Temperature-Depth profiles in the Strait were retrieved from MEDATLAS database (MEDAR Group (2002)) for

Station T (29/04/2003 - 22/05/2003; 35° 57.58'N, 5° 32.99'W)		
Currentmeter	Depth (m)	Sampling interval (min)
T1	156	2
T2	204	2
T3	250	5
T4	341	5
Station E (01/05/2003 - 03/06/2003; 36° 3.35'N, 5° 10.09'W)		
E1	52	2
E2	85	2
E3	116	2
E4	166	2
E5	231	5
E6	348	5

Table 3.1: Arrangement of the mooring lines used in the study.

May months in order to obtain a monthly climatology of the area. The numerical model described by Sannino et al. (2004) was run using improved bathymetry and different initial and tidal forcing. The main diurnal (O_1 , K_1) and semidiurnal (M_2 , S_2) tidal constituents have been computed via OTIS package [Egbert and Erofeeva (2002)] while initial conditions, in terms of salinity and temperature, have been also taken from MEDATLAS database. The model provided continuous vertical profiles of the background flow at specific places that have been used subsequently to analyse the observations.

3.3 Identification of SIWs

Internal waves at station E are clearly depicted by the temperature series collected by RCM E2 at 85 m depth (Figure 3.2a). Throughout the time-series, peaks with semidiurnal periodicity are observed except around days 130 and 145 that correspond to neap tides. The zoom of the series showed in Figure 3.2b reveals the short period oscillations associated with SIW packets. Internal waves are less sharply detected in the temperature series at site T. The reason is that the recovered instruments were well below the thermocline (located at 80 m depth according to CTD data) in depths

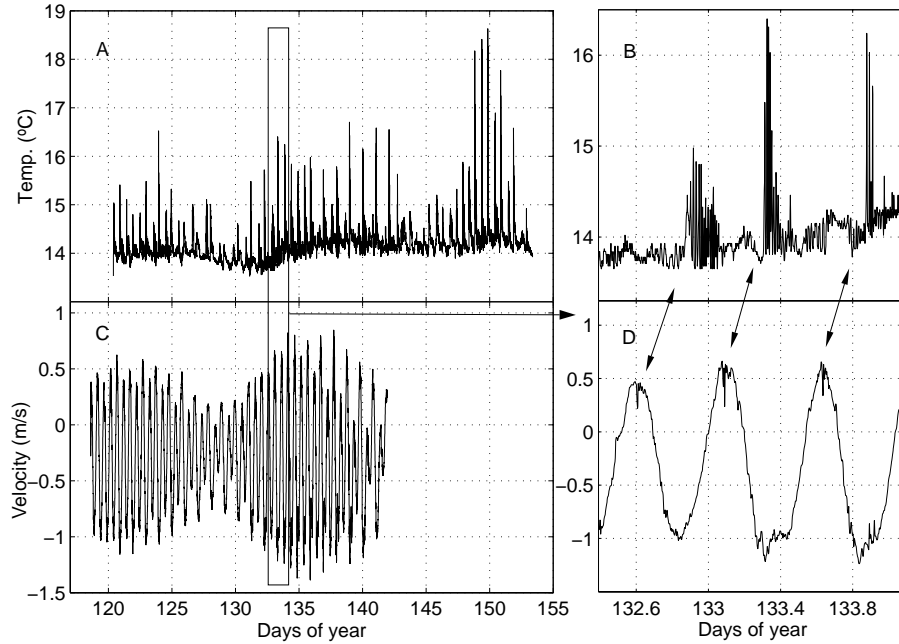


Figure 3.2: a) Temperature recorded at 85 m depth in site E (RCM E2). b) Enlargement of the section selected in A. c) Along-strait component of the velocity recorded at 341 m depth in site T (RCM T4). Panel d: Enlargement of the section selected in c). Double arrows in panels b-d point at the signatures left by the same internal wave packets in both stations.

where the vertical gradient of temperature is small. The equation of conservation of thermal energy, neglecting thermal diffusion and horizontal gradients of temperature,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -w \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.1)$$

indicates that temporal variations of temperature are imperceptible in homogeneous regions. However, high frequency motions are recognisable in velocity time-series at T. Figure 3.2c shows the horizontal velocity collected at T4, which follows the ebb and flood cycles quite regularly. The enlargement showed in Figure 3.2d reveals disturbances linked to the internal bore and SIWs packets about 6 hours before they pass through position E.

3.4 Influence of the diurnal inequality

Watson and Robinson (1990) monitored the arrival of SIW to Gibraltar by means of shore based marine radar during three months. They noted a remarkable difference

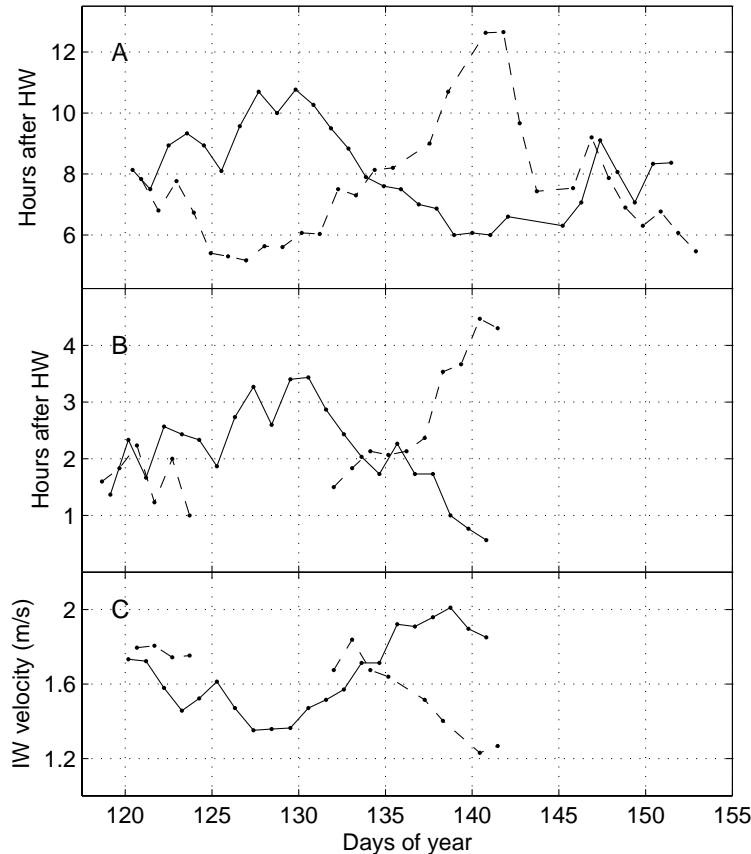


Figure 3.3: Arrival of the internal bore, referred to the previous high water, at station E (panel a) and T (panel b). Panel c: mean propagation speed of the internal bore between stations T and E. Events corresponding to even and odd semidiurnal cycles have been joined together using dotted and solid lines respectively to highlight the evolution of the diurnal inequality (see text for details).

between the arrival time of two consecutive SIWs packets after high water. The difference was maximum (about 8 hours) during periods of diurnal spring tides, and null during periods of diurnal neap tides. It was then suggested that the horizontal advection by diurnal tidal currents exerts an important influence on the propagation velocity of the internal bore. In the Strait of Gibraltar, the main diurnal tidal constituents K_1 and O_1 account for an important part of the total barotropic tidal energy (García-Lafuente et al., 2000; Sánchez Román et al., in press). This result is strongly supported by our observations. Figures 3.3a and 3.3b show the time arrival of SIWs, measured from the immediately previous HW (Ceuta is the reference harbour for HW throughout this paper), to stations E and T respectively. They arrive to position E

between 5-12 hours after HW, whereas they get position T 0.5-4.5 hours after HW. Events of SIWs corresponding to odd and even semidiurnal cycles have been joined together with different line style to highlight the diurnal inequality. The diurnal age, the lag between the extreme moon declination and its maximum effect on the tidal range, is determined by the phase difference of K_1 and O_1 constituents. In the eastern half of the Strait the difference is around 50° (García-Lafuente et al., 1990) and the diurnal age is around two days. The diurnal inequality reaches its maximum two days after the extreme values of the declination of the moon, which happened in May 6 (maximum declination) and May 19 (minimum), or Julian days 127 and 140 respectively. Minimum delay after HW is then expected to occur in one of the two semidiurnal cycles (and maximum delay in the other one) near Julian days 129 and 142 and, in fact, Figure 3a shows this minimum (maximum) in odd (even) cycles around day 128 and in even (odd) cycles near day 141 (notice that diurnal inequality changes from odd to even cycles when the moon passes over the Equator, which happens around day 134). Figure 3.3b does not illustrate this behaviour as nicely as Figure 3a since velocity is less sharp indicator of SIWs pass. The mean propagation speed of the internal bore between T and E (separated 36 km) has also been straightforward calculated in those tidal cycles when internal waves were tracked in both stations. Speed ranges from 1.2 to 2 ms^{-1} mainly due to the diurnal inequality (Figure 3.3c).

3.5 Local maximum speed in site T

The result produced by numerical experiments that the internal bore propagates faster in the surrounding of station T due to the influence of tidal currents (Brandt et al., 1996; Izquierdo et al., 2001; Sannino et al., 2004) is investigated next from our dataset. One commonly used statistical procedure to extract the barotropic contribution from time-series of velocity is the Empirical Orthogonal Functions (EOF) analysis, which decomposes the signals into empirical orthogonal modes. The analysis has been carried out to the along-strait component of the velocity in both stations after removing noise and high frequencies oscillations not directly linked with tides (by means of a butterworth filter with cut off period 3 hours). At T, the first empirical mode does not reveal any remarkable spatial structure, that is, it is nearly z-independent with no zero-crossing, which can therefore be identified with the barotropic mode. It explains

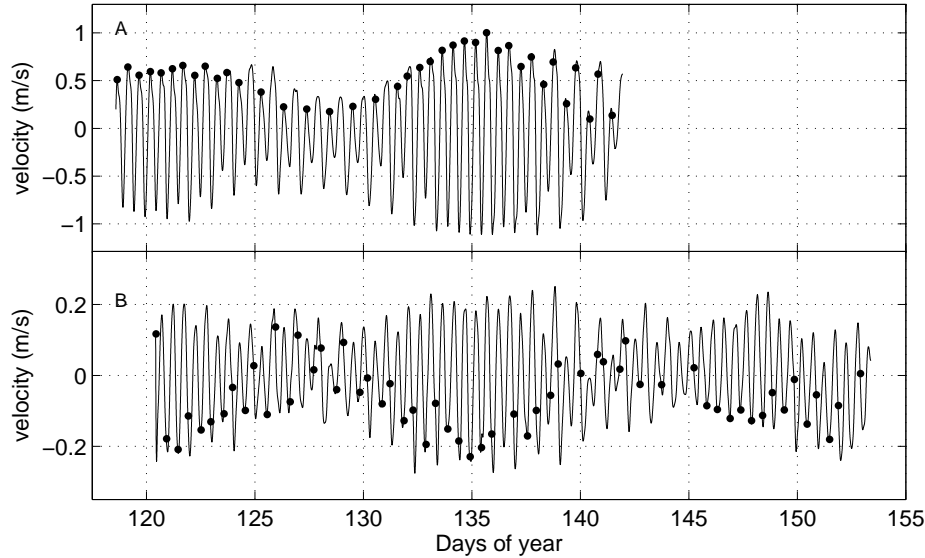


Figure 3.4: Barotropic contribution of the along-strait component of the tidal currents at stations T (panel a) and E (panel b) deduced from EOF analysis. Dots indicate the time when SIWs are identified in either station. In station T, SIWs find the most favourable current conditions with regularity.

85% of the variance, and its temporal coefficients are plotted in Figure 3.4a. As far as the spatial coefficients have been normalized, the physical units are included in the time coefficients of Figure 3.4a, which therefore represents the amplitudes of the barotropic mode. It can reach values as high as 1ms^{-1} . Dots in the Figure indicate the arrival of wave packets at station T and confirms that, indeed, the SIWs meet the most favourable tidal conditions (0.14 ± 0.84 hours before the maximum inflow) to progress faster towards the Mediterranean in this site, in agreement with the aforementioned numerical references. Figure 3.4b shows the barotropic mode in station E and the arrival of SIWs at this site. The maximum tidal amplitude is less than 0.25ms^{-1} and the location of the dots throughout the curve indicates that on average SIWs face unfavourable tidal currents to progress eastward, which diminishes its propagation speed.

3.6 Propagation speed from analytical models

Due to the relatively intense currents associated with the mean exchange in the Strait of Gibraltar a first estimate of the speed of the internal bore could be computed from the

Taylor-Goldstein equation, which provides the modal structure of a linear perturbation in a stable shear flow. Under the Boussinesq approximation, it reads:

$$\frac{d}{dz}[(U - c)^2 \frac{d\xi}{dz}] + [N^2 - k^2(U - c)^2] \cdot \xi = 0, \quad (3.2)$$

where $N(z)$ is the buoyancy frequency, $U(z)$ the long-term mean of the along-strait velocity profile, $\xi(z)$ the the amplitude of vertical velocity, k the wave number, and c the linear phase speed. Figures 3.5a-b show averaged N profiles for stations T and E obtained from MEDATLAS database. The long-term $U(z)$ velocity in equation (3.2) could be somewhat approximated from the time averaged values of the registered data by interpolation/extrapolation (see Figure 3.5). On the other hand, the vertical profile of horizontal velocity achieved by averaging the model output during one month, matches closely the observations at the different depths (see solid line in Figure 5). For this reason, the $U(z)$ averaged profile of the model, which has much better spatial resolution, has been used instead.

The equation has been solved for long-wave approximation ($k = 0$) imposing rigid lid boundary conditions [$\xi(-H) = \xi(0) = 0$; H being the water depth] since we are only interested in baroclinic modes. The propagation speed of the first mode (the one with the highest eingevalue c) in stations T and E are 1.62 and 1.23 ms^{-1} respectively. Since stratification is similar in both locations, the difference must be ascribed to the higher upper layer velocity at station T (about 0.8 ms^{-1} , Figure 3.5a). If the influence of the barotropic tidal current derived in Section 5 is taken into account and added to the previous calculations, the propagation speeds would range between 1.72 - 2.62 ms^{-1} at T and 1.0 - 1.37 ms^{-1} at E. These values agree with the experimental observations (Figure 3.3c).

The internal tide in the Strait of Gibraltar cannot be satisfactorily described by linear theory. In fact, the disintegration of the internal bore into SIWs packets is an unequivocal signature of non-linear effects. A theoretical approximation often used to describe non-linear internal waves is the weakly nonlinear dispersive Korteweg-de Vries (K-dV) theory. It holds provided that the so-called nonlinear, $\epsilon = a/H$, and dispersive, $\mu = (H/\lambda)^2$, parameters (a the wave amplitude, λ the wavelength) are much less than one.

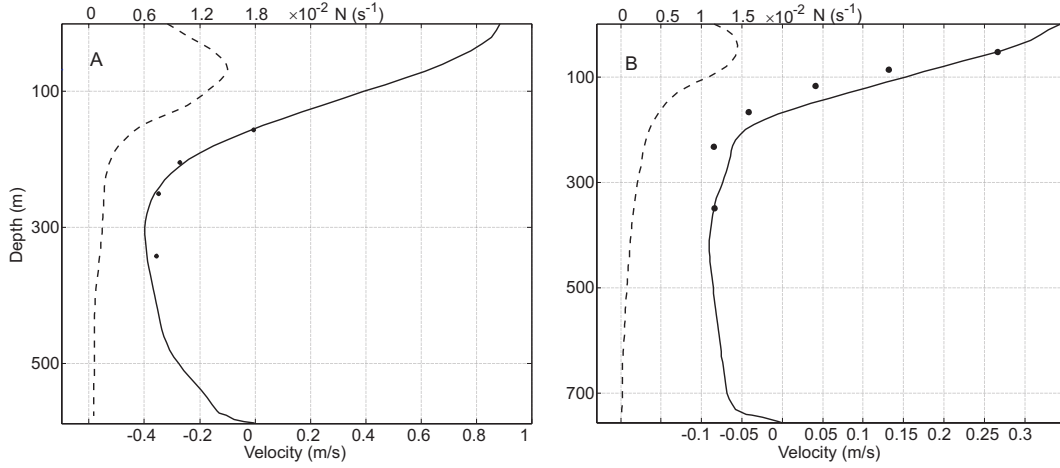


Figure 3.5: a) Buoyancy frequency from MEDATLAS database (dashed line, top scale) and vertical profile of the long-term along-strait velocity from the numerical model (solid line, bottom scale) in station T. Dots indicate the mean velocity recorded by the instruments. b) Same as A for station E.

The large amplitude internal waves reported in the Strait of Gibraltar (Ziegenbein 1969, 1970; Vazquez et al., 2006) fulfil only partially the conditions for the validity of this theory. However, Vlasenko et al. (2000) found that K-dV theory provides a satisfactory approximation to nonlinear speed of solitons whenever the vertical density gradient is relatively weak. The stratification showed in Figure 3.5a varies slowly within the first 200 m, with a maximum $N_{max} = 1.5 \cdot 10^{-2} \text{s}^{-1}$, which is similar to the stratification used in Vlasenko et al. (2000). Within the first order K-dV theory, the nonlinear phase velocity of a solitary wave c_{NL} is

$$c_{NL} = c + \frac{\alpha_1 \cdot a}{3}, \quad (3.3)$$

where α_1 is the coefficient of nonlinearity in the K-dV equation defined as

$$\alpha_1 = \frac{3 \int_{-H}^0 (U - c)^2 \left(\frac{d\xi}{dz}\right)^3 dz}{2 \int_{-H}^0 (U - c) \left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2 dz} \quad (3.4)$$

under the Boussinesq approximation (Grimshaw et al. 2002).

For stations T and E, $\alpha_1^T = 3.20 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ and $\alpha_1^E = 1.02 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, respectively. For extreme large solitary waves of 100 m amplitude, K-dV equation only predicts an increment of 7% of the linear phase velocity at station T and a higher increase of 27% at station E. In this last station, however, the wave radiation caused by the widening of the topography reduces the amplitude of the wave, thus balancing the increase introduced by parameter. Therefore, in both cases nonlinear effects are not expected to substantially increase the linear phase speed.

3.7 Summary and conclusions

A high resolution experimental data of current velocity and temperature collected in the Strait of Gibraltar have been analysed in order to study the time-space variability of the propagation speed of the tidally-generated internal bore. Diurnal species induce an important diurnal inequality on the internal bore velocity associated with the declination of the moon, a result already mentioned by other authors (Watson and Robinson, 1990; Richez, 1994). During our experiment, phase speed of SIWs packets propagating along the eastern half of the Strait linked to two consecutive semidiurnal cycles can differ more than 0.7 ms^{-1} . It has been also shown that SIWs regularly reach maximum speed nearby Tarifa narrows because the wave packets are progressing through this area when the tidal current peaks towards the Mediterranean Sea. A theoretical approximation derived from linear theory along with tidal advection deduced from the analysis indicate that phase speed can exceed 2.6 ms^{-1} in this area during the period of study. Nonlinear theory has also been considered to compute the propagation speed more accurately but its contribution does not turn out to be very different from the prediction of linear theory.

Acknowledgments. JCSG acknowledges a post-graduate fellowship from Consejería de Innovacion Ciencia y Empresa, Junta de Andalucía, Spain. We acknowledge the project RNM 968 funded by this Consejería, and the projects REN03-01608/MAR, REN2001-2733-C02-01, funded by the Spanish Ministerio de Educación y Ciencia.

Capítulo 4

Algunos aspectos sobre ondas
solitarias y su modelización
numérica

4.1 Introducción

Como se comentó en el Capítulo 2 en la práctica un estudio de la dinámica de ondas solitarias debe hacerse de forma numérica. Para la existencia de ondas solitarias se requiere un modelo además de no lineal, no hidrostático, de forma que se considere los efectos dispersivos. Por ello se ha considerado el modelo de circulación general del “Massachusetts Institute of Technology”, MITgcm. Información extensa y detallada del modelo se encuentra en Marshall et al. (1997a-b) y referencias incluidas, al igual que en el sitio web <http://mitgcm.org/>, provisto del código fuente.

La posibilidad de considerar una formulación no hidrostática permite abordar además otros fenómenos de corta escala en el océano. Marshall et al. (1997a) delimitan los márgenes de aplicabilidad de la hipótesis hidrostática en un fluido estratificado. Se deduce que un fenómeno de escala horizontal L , con velocidad típica U puede considerarse hidrostático si (ver apéndice B)

$$\left(\frac{U}{L}\right)^2 \ll N^2.$$

Fenómenos de escala espacial $L < 5-10$ km como movimientos convectivos en capas de mezcla inducidos por el viento o por pérdida de flotabilidad son ejemplos de fenómenos no hidrostáticos en el océano. Los últimos son bien observados en el Golfo de León en el Mediterráneo Occidental (Stommel 1972), donde a finales del invierno se forman aguas profundas que se hunden a través de sumideros de pocos kilómetros de diámetro, llamados chimeneas. En lo que atañe a las ondas internas, no sólo las ondas solitarias en sí son un fenómeno no hidrostático, también lo son movimientos derivados como los resultantes de su interacción con la topografía.

En las siguientes secciones se comentan algunas notas generales del MITgcm, y se demuestra su capacidad para simular con éxito ondas solitarias de gran amplitud. La documentación del modelo es muy extensa; para una detallada y completa información se debe recurrir a las referencias y dirección web anteriormente citadas.

4.2 Modelo de circulación general MITgcm

4.2.1 Ecuaciones y estrategia de resolución

Las ecuaciones que se consideran son las de Reynolds para un fluido incompresible bajo la aproximación de Boussinesq. Por tanto las mismas que el conjunto (2.1)-(2.3) excepto la ecuación de continuidad, que es reducida a divergencia de la velocidad cero. MITgcm considera tres algoritmos diferentes según regímenes: hidrostático, quasi-hidrostático y no hidrostático. Para aclarar en qué consisten es conveniente reescribir la ecuación de conservación de momento lineal (ecuación 2.1):

$$\left. \begin{aligned}
 u_t &= -\frac{\tilde{p}_x}{\rho_0} \overbrace{-\mathbf{u} \cdot \nabla u + 2\Omega \sin\theta \cdot v - \underline{2\Omega \cos\theta \cdot w} + \underline{F_u}}^{G_u} \\
 v_t &= -\frac{\tilde{p}_y}{\rho_0} + \overbrace{-\mathbf{u} \cdot \nabla v - 2\Omega \sin\theta \cdot u + F_v}^{G_v} \\
 \underline{\underline{w_t}} &= -\frac{\tilde{p}_z}{\rho_0} - g \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} - \underline{\underline{\mathbf{u} \cdot \nabla w}} - \underline{2\Omega \cos\theta \cdot u} + \underline{\underline{F_w}}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Aquí $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_h, w) = (u, v, w)$ es el vector velocidad y $\mathbf{F} = (F_u, F_v, F_w)$ son los términos viscosos y de forzamiento, que se incluyen en los términos $\mathbf{G}_u = (G_u, G_v, G_w)$ junto con los no lineales y los que atañen a la rotación. El esquema hidrostático no considera los términos subrayados ni doblemente subrayados, y el quasi-hidrostático hace lo propio sólo con los doblemente subrayados. El no hidrostático considera todos los términos.

La presión se obtiene a partir de la ecuación de Poisson que resulta al tomar la divergencia en las ecuaciones (4.1), y teniendo en cuenta que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (ecuación de continuidad):

$$\nabla^2 p = \nabla \cdot \mathbf{G}_u. \quad (4.2)$$

En virtud de la condición de flujo nulo a través de los contornos rígidos, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, donde \mathbf{n} es un vector unitario normal a la superficie que constituye la frontera, y las ecuaciones de momento se obtiene la condición de contorno para (4.2):

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p = \mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_u. \quad (4.3)$$

Para separar los diferentes esquemas el campo de presión se descompone de la siguiente forma:

$$p(x, y, z) = p_s(x, y) + p_{HY}(x, y, z) + p_{NH}(x, y, z), \quad (4.4)$$

donde p_s es un término independiente de la profundidad, p_{NH} es una contribución no hidrostática, y p_{HY} es una extensión de la presión hidrostática, definida como:

$$p_{HY} = \int_0^z - \left[g \frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{2\Omega u \cdot \cos\phi}{\rho_0} \right] dz. \quad (4.5)$$

La forma de proceder consiste en primer lugar en calcular p_s a raíz de la ecuación para la presión independiente de z . A ésta se llega mediante el mismo procedimiento que da lugar a la ecuación (4.2), pero considerando previamente las variables promediadas en la columna de agua. Recordar que para una variable cualquiera χ , este promedio se define como:

$$\bar{\chi}(x, y) = \frac{1}{H} \int_{-H}^0 \chi(x, y, z) dz. \quad (4.6)$$

La ecuación para p_s resulta:

$$\nabla_h \cdot (H \nabla_h p_s) = \wp, \quad (4.7)$$

donde $\wp(x, y)$ depende de H , la componente horizontal de \mathbf{G}_u , y la presión hidrostática:

$$\wp(x, y) = \nabla_h \cdot (H \bar{\mathbf{G}}_{uh}) - \nabla_h^2 (H \bar{p}_{HY}) + \nabla_h \cdot [p_{HY}(H) \nabla_h H]. \quad (4.8)$$

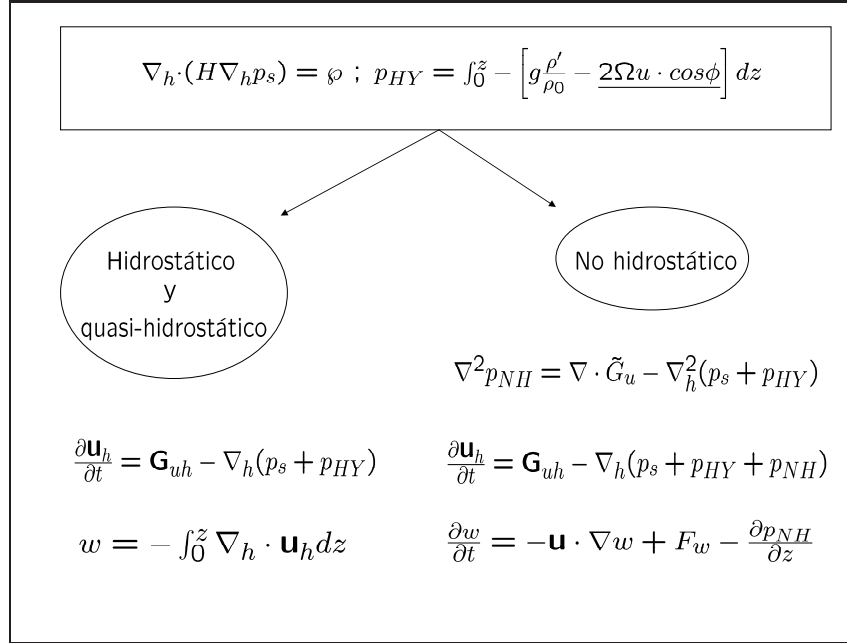


Figure 4.1: Algoritmos para la resolución del modelo hidroestático, quasi-hidroestático y no hidroestático (modificado de Marshall et al. 1997a).

El cálculo de la presión no hidroestática, si procede, exige la resolución de una ecuación elíptica extra y tridimensional, lo cual conlleva un mayor esfuerzo computacional. Esta ecuación se obtiene a partir de (4.2) y p_s , anteriormente calculada:

$$\nabla^2 p_{NH} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{G}}_u - \nabla_h^2(p_s + p_{HY}), \quad (4.9)$$

donde $\tilde{\mathbf{G}}_u = (\mathbf{G}_{uh}, -\mathbf{u} \cdot \nabla w + F_w)$. Observar que la tercera componente de $\tilde{\mathbf{G}}_u$ es igual a G_w menos el término de flotabilidad y el que involucra a la rotación, que ya determinaron la presión hidroestática (4.5). A partir de los campos de presiones, se obtiene las distintas componentes de velocidad según el esquema mostrado en la Figura 4.1, que resume el algoritmo. Temperatura y salinidad son calculadas tras obtener el campo de velocidades.

4.2.2 Aspectos numéricos

Para la integración de las ecuaciones respecto a la variable espacial se sigue el método de Volúmenes Finitos (Versteeg y Malalasekera 1995), basado en la aplicación del teorema

de la divergencia a las ecuaciones de conservación en pequeños volúmenes o celdas de control. La topografía está representada en este caso mediante secciones de celdas (“partial-cells”). Por su parte, la discretización temporal se realiza de la forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t} &= \mathbf{G}_{uh}^{n+1/2} - \nabla_h (p_s + p_{HY} + qp_{NH})^{n+1/2} \\ \frac{\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n}{\Delta t} &= \tilde{G}_w^{n+1/2} - \frac{\partial p_{NH}^{n+1/2}}{\partial z} \\ \frac{\partial w^{n+1}}{\partial z} + \nabla_h \cdot \mathbf{u}_h^{n+1} &= 0 \\ \frac{S^{n+1} - S^n}{\Delta t} = G_S^{n+1/2} \quad \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} &= G_T^{n+1/2} \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

donde q toma el valor uno si el régimen es no hidrostático y cero en otro caso; y G_S , G_T contienen los términos de advección y difusión de las ecuaciones de temperatura y salinidad (2.3). Los términos $G^{n+1/2}$ son evaluados siguiendo una variación del método de Adams-Bashforth de segundo orden:

$$\mathbf{G}^{n+1/2} = (3/2 + \gamma)\mathbf{G}^n - (1/2 + \gamma)\mathbf{G}^{n-1}. \quad (4.11)$$

Aquí γ es un parámetro libre normalmente cercano a cero ($\gamma = 0$ determina el esquema de Adams-Bashforth de segundo orden). Para los trazadores, temperatura y sal, se consideran en MITgcm diversos esquemas alternativos. Éstos junto con el tratamiento de las ecuaciones elípticas que determinan los campos de presión (ecuaciones 4.7-4.9) se describen en detalle en Marshall et al. (1997b) y en la dirección web anteriormente indicada.

4.3 Aplicación a la simulación de ondas solitarias.

En esta sección verificamos la capacidad del modelo MITgcm para simular ondas solitarias de gran amplitud. Una forma de proceder para obtener solitones internos en un fluido estratificado podría consistir en dejar evolucionar una perturbación inicial arbitraria de amplitud considerable. No obstante, conocemos la estructura de un solitón

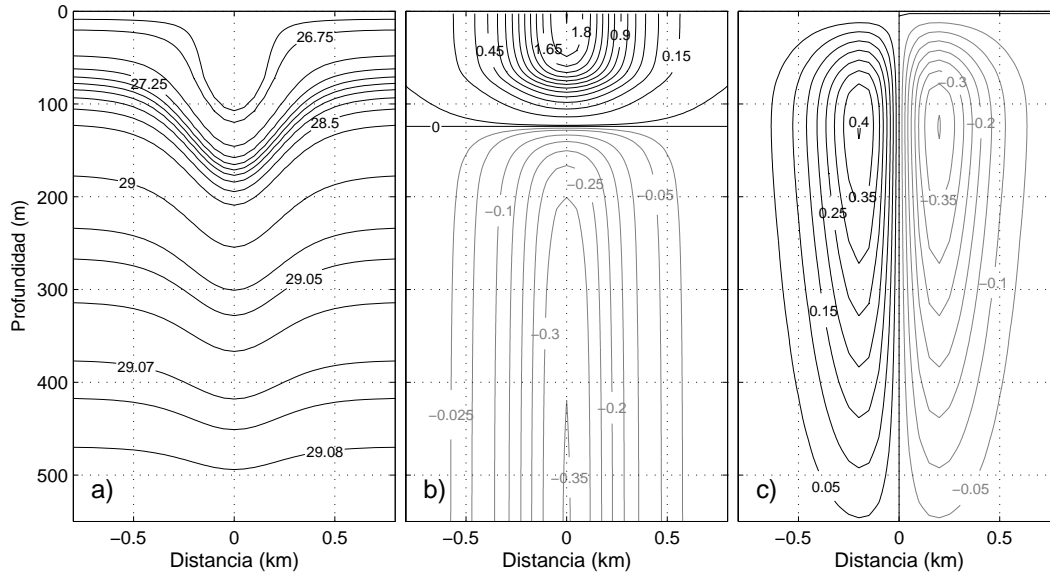


Figure 4.2: a) Posición de las isopícnas asociadas a una onda solitaria de 100 m de amplitud solución de la ecuación KdV. b) Velocidad horizontal (ms^{-1}) asociada a la onda solitaria presentada en a). c) Velocidad vertical (ms^{-1}) asociada a la onda solitaria presentada en a).

débilmente no lineal proporcionado por la ecuación KdV, que no debe diferir demasiado de uno de gran amplitud, y por tanto su evolución a una onda solitaria real debe ser más rápida si aquel es tomado como condición inicial.

Consideremos una canal bidimensional $\{(x, z); x \in [0, L_0], z \in [-H, 0]\}$ de profundidad constante $H = 600$ m y longitud $L_0 = 100$ km, conteniendo un fluido estratificado de temperatura $T_b(z)$ y salinidad $S_b(z)$. Para tomar un ejemplo concreto, consideremos perfiles de temperatura y salinidad típicos de la zona del Estrecho de Gibraltar que producen un perfil de frecuencia de Brunt-Väisälä como el mostrado en la Figura 3.5a. Para este perfil se obtiene el solitón solución de la ecuación KdV de 100 m de amplitud (ver sección 2.3.2), cuyos campos de densidad y velocidad asociados se muestran en la Figura 4.2. Esta onda, fuera del rango de aplicabilidad de la teoría débilmente no lineal, es situada en el canal en la posición $x_0 = 10$ km (Figura 4.3a), y se deja evolucionar según el modelo numérico.

El dominio es discretizado mediante una malla cartesiana de resolución horizontal $\Delta x = 50$ m, y vertical $\Delta z = 7.5$ m. Se eligen los siguientes valores para los coeficientes de viscosidad (ν) y difusión (κ) turbulentos: $\nu_h = 1 \cdot 10^{-2} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$, $\kappa_h = 1 \cdot 10^{-2} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$

para los coeficientes horizontal; y $\nu_v = 1 \cdot 10^{-3} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$, $\kappa_v = 1 \cdot 10^{-5} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$, para los verticales. Las condiciones de contorno para el problema son

$$\left. \begin{aligned} u = w = 0, T_z = S_z = 0; & \quad z = H \\ w = u_z = 0, T_z = S_z = 0; & \quad z = 0 \\ u = w = 0, T = T_b, S = S_b; & \quad x = 0, L_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Respecto a la velocidad la primera condición impone la condición de no deslizamiento y flujo nulo a través del fondo, la segunda asume la aproximación de contorno rígido en superficie (apropiada para el estudio de ondas internas) y cizalla inducida por el viento cero. También se asume que a través estos dos contornos (fondo y superficie) no existe flujo de calor ni de sal. La tercera condición se aplica en los contornos laterales, donde se asume que el estado inicial de equilibrio se mantiene con el tiempo. Ésto puede dar lugar a la reflexión de energía procedente del dominio, y por tanto a la introducción de una señal no física. Sin embargo, este hecho no es un problema cuando la zona de interés está “suficientemente lejos” de los contornos, como ocurre en este caso.

El modelo es estable (proporciona soluciones acotadas) para un paso de tiempo $\Delta t = 5$ s, y se desprende de experimentos preliminares que las soluciones son independientes de la malla, con lo que el modelo proporciona soluciones físicas. Analicemos a continuación el experimento. La falta de validez de la teoría débilmente no lineal se manifiesta apenas iniciado el experimento, transcurrida media hora el campo de densidades muestra una adaptación del solitón inicial a las nuevas condiciones (Figura 4.3b). Como resultado de este proceso de adaptación la perturbación inicial pierde parte de energía en forma de ondas secundarias que con el tiempo quedan atrás debido a la dispersión no lineal (Figura 4.3c-d). Por esta razón, la primera onda aparece totalmente aislada del resto tras 9 horas de evolución (Figura 4.3e), que efectivamente consiste en una onda solitaria de gran amplitud. La estructura de la onda final (Figura 4.3f) se presenta en detalle en la Figura 4.4. En una primera observación llama la atención la similitud de los campos de densidad y velocidades con los predichos por la ecuación KdV (4.2), exceptuando los efectos de la viscosidad en la capa límite de fondo, que produce campos de velocidades ruidosos. No obstante la similitud, existen diferencias importantes entre ambas soluciones. Por ejemplo, la profundidad donde se alcanza la máxima amplitud o, equivalentemente, donde la velocidad horizontal es cero,

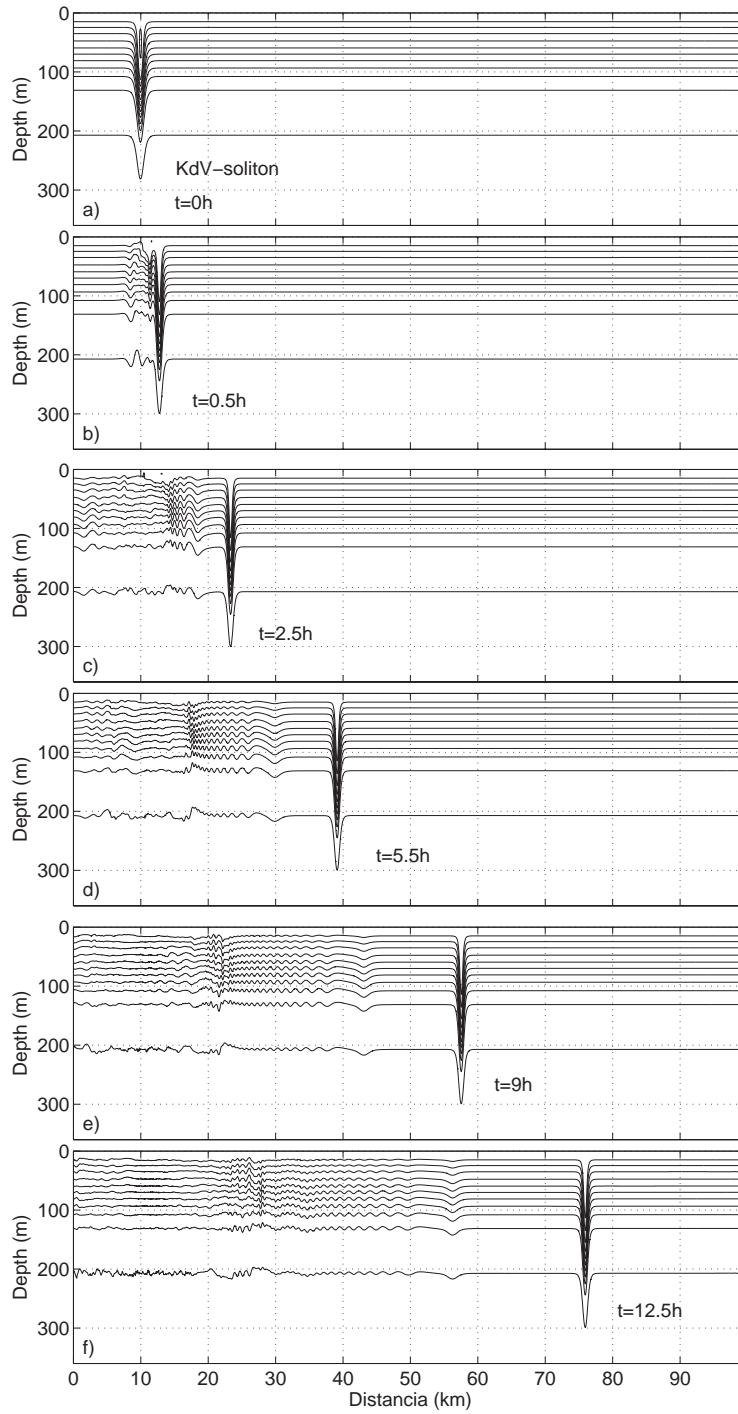


Figure 4.3: Experimento numérico mostrando la evolución de un solitón KdV inicial de 100 m de amplitud a lo largo de un canal de $H = 600$ m de profundidad y $L_0 = 100$ km de longitud. Se considera una malla cartesiana para la discretización espacial de resolución $\Delta x = 50$ m, y $\Delta z = 7.5$ m. El solitón inicial se sitúa en la posición $x_0 = 10$ km.

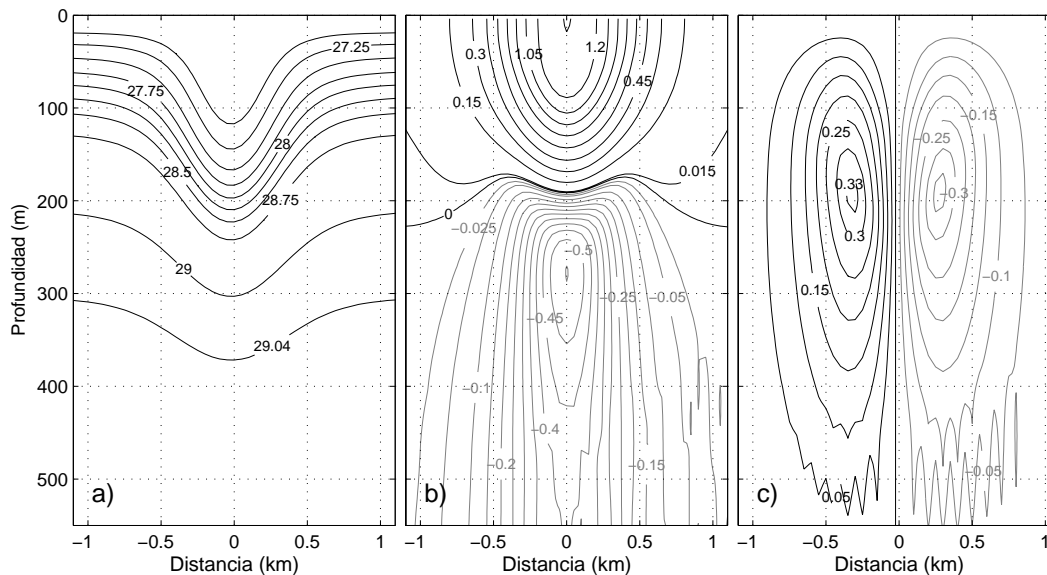


Figure 4.4: a) Onda solitaria de la Figura 4.3f mostrada en detalle. b) Velocidad horizontal (ms^{-1}) asociada a la onda solitaria presentada en a). c) Velocidad vertical (ms^{-1}) asociada a la onda solitaria presentada en a). Notar que se presenta los primeros 550 m de la columna de agua, en los 50 m restantes hasta el fondo los campos asociados a la onda son muy ruidosos debido a los efectos viscosos.

es considerablemente mayor en el solitón numérico: aproximadamente 200 m frente a 100 m en el solitón KdV (comparar Figura 4.4b-4.2b). Otra diferencia importante está en la escala espacial de ambas ondas, la solución KdV predice un solitón de longitud de onda menor que el completamente no lineal (Figura 4.2a-4.4a). Un análisis detallado de la estructura y propiedades de ondas solitarias de gran amplitud se puede consultar en el trabajo de Vlasenko et al. (2000).

Este experimento demuestra la potencialidad del modelo MITgcm para estudiar la dinámica de ondas internas no lineales. En este caso se ha considerado un sencillo dominio bidimensional, pero se puede extender a geometrías 3D irregulares para afrontar problemas más complejos, como la rotura de las ondas internas con accidentes de la topografía, o problemas de difracción. Este estudio se lleva a cabo en el siguiente capítulo para la geometría del Estrecho de Gibraltar, donde se utiliza una estrategia como la desarrollada aquí para generar ondas internas solitarias de gran amplitud para inyectarla en el dominio tridimensional que supone la topografía del Estrecho.

Capítulo 5

Three-Dimensional Evolution of Large-Amplitude Internal Waves in the Strait of Gibraltar

Three-Dimensional Evolution of Large-Amplitude Internal Waves in the Strait of Gibraltar¹

Abstract

The modeling of large amplitude internal waves (LAIW) propagating in the Strait of Gibraltar is carried out using a fully-nonlinear nonhydrostatic numerical model. The focus of the modeling efforts was on three-dimensional peculiarities of LAIW evolution, viz. cross-strait variability, interaction with lateral boundaries (including wave breaking and water mixing), radiation of secondary waves from orographic features and interaction of secondary scattered internal waves.

The along-channel propagation of packets of LAIW reveals remarkable three-dimensional behaviour. Due to the Coriolis force and multiple reflections from the lateral boundaries, the largest leading LAIW loses its energy much faster than that in the packet tail, which captures the scattered energy from the leading wave as it propagates and grows in amplitude. As a result of the energy transfer, the initially rank-ordered wave packet loses its regular structure to evolve into a non-rank-ordered wave structure. In-situ data collected in the eastern part of the Strait of Gibraltar confirm the idea that the non-rank-ordered structure is a common feature of internal wave packets emerging from the strait into the Alboran Sea.

¹V. Vlasenko, J.C. Sánchez Garrido, N. Stashchuk, J. García Lafuente and M. Losada (2009), Three Dimensional Evolution of Large-Amplitude internal waves in the Strait of Gibraltar. *Journal of Physical Oceanography*, in press.

5.1 Introduction

Large amplitude internal waves (LAIW) are one of the most striking phenomena observed in the Strait of Gibraltar. These waves appear as packets propagating along the strait to evolve into groups of well-separated solitary waves entering the Alboran Sea. The mechanism of their generation is described in many papers (for instance, Armi y Farmer 1988; Brandt et al. 1996; Izquierdo et al. 1996; Bruno et al. 2002; Vázquez et al. 2005). According to these investigations, LAIW observed in the strait are the result of the nonlinear evolution of a baroclinic bore generated by a barotropic tidal flow over Camarinal Sill (CS, see Figure 5.1). The waves have several hundred meters of wavelength and vertical displacements of one hundred meters and even more (Wesson and Gregg 1988). Nonlinear wave theory suggests that a propagating baroclinic bore normally disintegrates into a packet of well rank-ordered solitary internal waves (Whitham 1974; Apel 2003). However, not all observational data support this theoretical result. In many cases measurements reveal a chaotic rather than a well-ordered structure of packets. In particular, this statement concerns the data collected in the Strait of Gibraltar at positions TN and AS (see Figure 5.1).

Figure 5.2a shows a five-day temperature series at AS. Packets of LAIW are clearly identified by the fast temperature oscillations recorded every tidal period (a detailed analysis of these data is presented in Sánchez-Garrido et al. 2008). Figures 5.2b, 5.2c and 5.2d show that the expected rank-ordered structure is not a necessary attribute of the wave packets observed in the strait. statistical analysis of all recorded wave trains (46 well defined packets) reveals that only 46.5% of them can be identified as well rank-ordered wave trains like that presented in Figure 5.2b. The rest, i.e. 53.5% of packets, was either partly rank-ordered (23.3% as presented in Figure 5.2c) or chaotic rather than organized (30.2% as in 5.2d). A similar conclusion was formulated earlier by La Violette et al. (1986). This empirical fact of a clear tendency to disorder in wave packets was a starting point of the present study.

There are several possible reasons for the discrepancy between theoretical predictions and real observations. One of these is the wave refraction over the complex bottom topography which in some cases can be studied using the linear geometrical optics. More sophisticated methods are required for the investigation of the refrac-

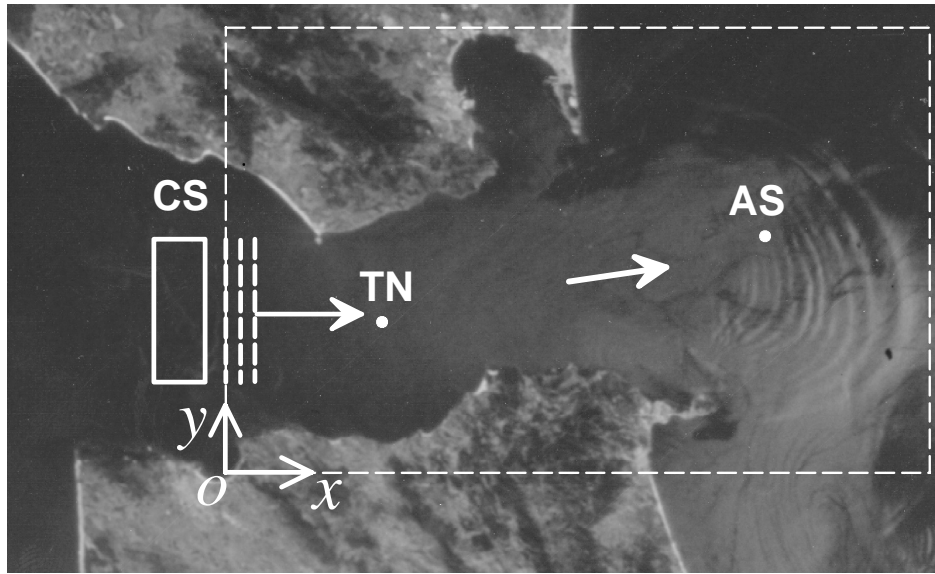


Figure 5.1: Sea-surface manifestation of a group of LAIWs propagating from the strait toward the Alboran Sea (Courtesy of ESA). CS is Camarinal Sill; Symbols TN and AS denote the location of the moorings deployed at Tarifa Narrow and in the Alboran Sea.

tion of strongly nonlinear internal waves when wave breaking, water mixing, generation of higher baroclinic modes, nonlinear wave dispersion, wave-wave interaction and some other nonlinear effects can develop. Amongst them, we could mention the use of the higher-order weakly nonlinear equations like the extended Korteweg-de Vries (KdV) equation Grimshaw et al. (2002), Grimshaw et al. (2004), the rotation-modified Kadomtsev-Petviashvili equation Grimshaw and Melville (1989), Grimshaw and Tang (1990), Grimshaw et al. (1998), or even fully-nonlinear three-dimensional (3D) nonhydrostatic numerical models Vlasenko and Stashchuk (2007).

We hypothesize here that the irregular structure of the wave packets observed in the Strait of Gibraltar is the manifestation of a sophisticated 3D mechanism of interaction of LAIWs with the lateral boundaries of the rotating strait where wave refraction and reflection, extensive wave breaking and water mixing take place. Being repeated many times in every wave packet, these processes produce a complex spatial structure in

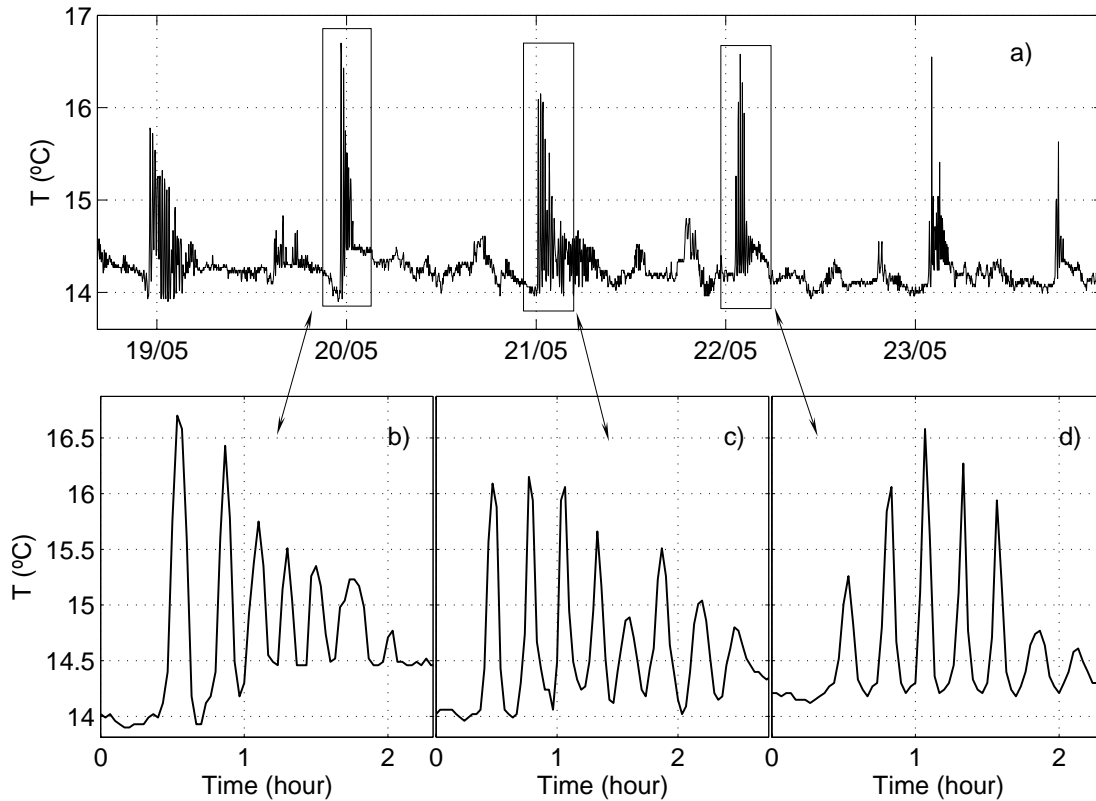


Figure 5.2: (a) Fragment of the temperature time series recorded by the AS-mooring at 85 m depth (see Figure 5.1). Panels (b), (c) and (d) are zoom of three particular fragments representing a well organized (b), partly rank-ordered (c) and non-rank ordered (d) packets of LAIWs.

which wave energy is transferred from wave to wave or converted into turbulence. The goal of this paper is to study the 3D evolution of LAIWs in the strait and to describe the pathway of the energy in order to explain the irregular structure of the observed wave packets. The paper is organized as follows: the model and its initialization are described in section 5.2; section 5.3 presents the basic set of numerical experiments, whereas discussion, comparison with observational data and conclusions are included in section 5.4.

5.2 Model description and initialization

The model domain presented by the dashed rectangle in Figure 5.1, includes a 61×42 km² sector of irregular bottom topography and shoreline. Consider the Cartesian system of coordinates $Oxyz$, with Oxy within the undisturbed free surface and the Oz -axis directed vertically upward, while the Ox -axis eastward and the Oy -axis to the north. It is assumed that LAIWs observed in the strait are the result of disintegration of a baroclinic bore generated by the barotropic tide interacting with Camarinal Sill (solid rectangle in Figure 5.1). The baroclinic bore propagates eastward along the strait and disintegrates into a packet of solitary waves, which further enter the Alboran Sea, as presented on the Synthetic Aperture Radar image in Figure 5.1. The details of the bore generation and disintegration are not addressed in this paper which focuses only on the evolutionary stage of the tidally generated LAIWs. The task is split into two subtasks: (i) the first step is the model initialization, i.e. the preparation of the initial field of solitary LAIWs; (ii) the second objective is to study the wave evolution itself when the LAIWs propagate along the strait and interact with the 3D bottom topography and shoreline.

The Massachusetts Institute of Technology general circulation model (MITgcm) was used for both problems (Marshall et al. 1997). The MITgcm solves the non-hydrostatic, non-linear equations and has a free surface formulation allowing to trace the position of the solitary waves in (x, y) -space. Earth rotation is also taken into account. The model resolution, Δx and Δy was equal to 50 m and 200 m, respectively, which gave more than 40 grid points across the wave. The vertical step Δz was equal to 7.5 m in the upper 300 m layer and 50 m below it, which allowed a fairly good resolution of the pycnocline. The mean buoyancy frequency profile (Figure 5.3) was obtained from MEDATLAS data base collected near TN point. According to these historical data the pycnocline was located at 75-meter depth. The bottom topography was extracted from the fine-resolution bottom chart of Sanz et al. (1991) and the shoreline was settled at 20m depth contour. No-slip conditions at the bottom and lateral boundaries were used in the model. Assuming strong wave breaking near the lateral boundaries, the Richardson number-dependent parameterizations (Pacanowski and Philander 1981) of

turbulent closure for vertical viscosity ν and diffusivity κ was chosen:

$$\nu = \frac{\nu_0}{(1 + \alpha \text{Ri})^n} + \nu_b, \quad \kappa = \frac{\nu}{(1 + \alpha \text{Ri})} + \kappa_b,$$

Here Ri is the Richardson number, $\text{Ri} = N^2(z)/(u_z^2 + v_z^2)$, $\nu_b=10^{-3} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ and $\kappa_b=10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ are the background parameters, $\nu_0=1.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $\alpha=5$ and $n=1$ are the adjustable parameters. Such a parameterization increases ν and κ in areas where the Richardson number is small. Horizontal diffusivity and viscosity were $10^{-2} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. As showed by Vlasenko et al. (2005), with this parameterization the numerical model gives quite robust results even in the case of wave breaking. We set zero value for all wave disturbances at the eastern boundary until the wave reaches the boundary; at this moment the calculations are terminated. At the western boundary the Orlandi-type conditions were used.

An initial plane LAIW of depression (or packet of waves) is set at $t=0$. According to previous investigations (Vlasenko et al. 2005), Sánchez-Garrido et al. 2008) the LAIWs generated over Camarinal Sill are trapped there up to 4 hours and then they are released and propagate along the channel. They can be identified as solitary waves 4 km to the east of Camarinal Sill. The initial wave or wave packet in the model was taken parallel to y -axis, propagating eastward (see Figure 5.1). Such a choice of initial fields is justified by the specific model geometry which is generally two-dimensional in the area of Camarinal Sill and oriented in north-south direction so that oscillating east-west barotropic tidal flow produces roughly two-dimensional internal waves propagating eastward, as schematically presented in Figure 5.1 by dashed lines.

The procedure of preparation of the initial fields for the incident LAIWs (subtask 1) is described in Vlasenko et al. (2005) in detail. At a first stage the model is initialized by the first-mode solitary wave of depression obtained from the KdV equation. The KdV solitary waves do not satisfy the fully nonlinear, non-hydrostatic equations if their amplitudes are large. Thus, taking the amplitude of the initial KdV LAIW from the range typically observed in the strait (more than 60 m, Wesson and Gregg 1988, which is far beyond the applicability of any weakly nonlinear model), we expect a substantial discrepancy with the hydrodynamic equations. Once inserted into the numerical scheme, the strong non-linear LAIW will evolve propagating in a basin of constant depth. During this evolution the initial large amplitude KdV solitary wave is

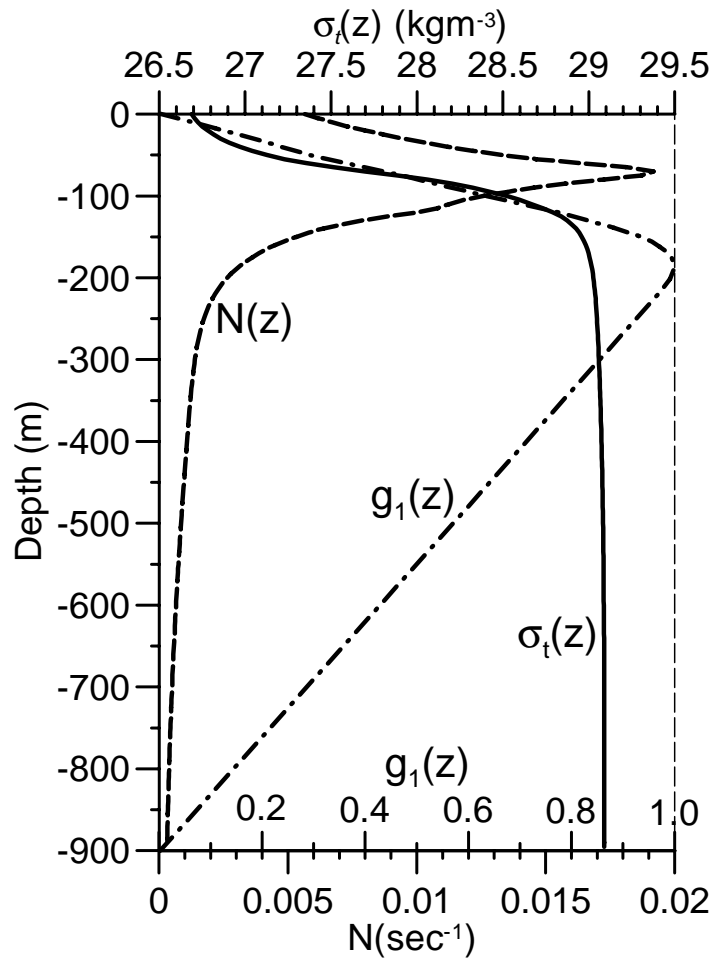


Figure 5.3: Typical density (solid line), buoyancy frequency (dashed line) and vertical wave displacement (dashed-point line) profiles at TN point.

modified, and a new stationary solitary wave is formed at the front of the wave field. The leading wave has the largest amplitude and, as a result, the largest phase speed. This is the reason why this wave detaches from the wave tail and propagates further as an independent internal solitary wave. The model is run until the leading wave separates from the wave tail. The fragment containing the wave is cut from the wave field and used as an initial condition for subtask 2, i.e. for the study of its evolution in the strait.

5.3 Model results

5.3.1 One-wave experiments

We start our analysis with the “one-wave experiment”, the propagation of one internal solitary wave. This experiment allows one to study an effect of a single wave so that the response of the strait to a wave packet can be treated in terms of a nonlinear superposition of several individual signals. In the first numerical experiment the amplitude of incident LAIW was 83 m. The wave evolution is presented in Figure 5.4, where the free surface elevation produced by the internal wave of depression (a few centimeters, in fact) is shown in dark. Note, that an internal wave of elevation produces a similar small-scale depression at the free surface (shown in Figure 5.4 by light color). Free surface disturbances are used hereafter as a tracer for the analysis of spatial structure of the wave fields.

At the initial stage of evolution the incident LAIW retains the characteristics of a plane wave in the domain except for two small regions at the lateral boundaries where the “edge” effects of wave-bottom interaction (refraction and breaking) are evident (Figure 5.4b). The wave-bottom interaction is getting stronger over time, and in addition to the refraction and wave breaking, another important process, - viz. energy reflection from lateral boundaries, starts to develop in shallow water. As a result of back scattering and dissipation, the propagating LAIW loses energy (the quantitative analysis of wave attenuation is discussed below). This energy leakage, in turn, leads to the formation of secondary internal waves attached to the initial wave (Figures 5.4c and 5.4d). The intensity of wave-topography interaction is stronger at the south, near the African coast, than at the northern part of the strait, near the Spanish coast. The reason is the Coriolis force that transfers energy from the central and the northern parts of the wave to the right side (South) boundary of the strait. This behaviour has been reported in a number of papers on the structure and evolution of the weakly-nonlinear internal solitary waves in idealized channels (see the review by Helfrich and Melville 2006 and references herein). Figure 5.4 demonstrates another evidence of this effect but for strongly nonlinear waves, which appears to be more complicated due to the reflection and breaking caused by the irregular bottom topography and coastline. This energy transfer along the wave front does not occur if the rotation of the Earth is not included

in the model (the influence of Earth rotation is discussed in the next subsection). At the final stage of evolution the internal waves (both initial, and secondary) leave the strait and enter into the Alboran Sea (Figure 5.4e), showing an spatial pattern that recalls the pattern often displayed in satellite images (Figure 5.1).

Let us analyze the spatial structure of scattered internal waves. Figure 5.4 suggests that these waves are basically formed after the passage of the incident wave through the narrowest part of the strait, i.e. Tarifa Narrows. Eastwards of this site the incoming LAIW starts to lose its energy, mostly near the lateral boundaries, due to interaction with the shallow coastal areas. Scrutiny of the 3D wave evolution shows that wave breaking near the strait boundaries is accompanied by wave reflection, which in turn, leads to the formation of secondary scattered waves. The initial stage of this process is shown in Figure 5.4c, where the system of two quasi-plane waves reflected from the northern and southern borders of the strait is clearly seen. The superposition of these waves leads to the formation of the “X”-type spatial structure of the wave fronts which is typical for the interaction of two obliquely propagating solitary internal waves. Note, however, that this “X”-type structure is unstable in space and time. After 5.7 hours of evolution it has become a fairly stable quasi-plane solitary wave of depression located just behind the leading wave (Figure 5.4e). The “one-wave” experiment initiated by a single incoming LAIW illustrates that the formation of secondary solitary wave can be explained only in the terms of scattering of the initial wave.

An important characteristic of the wave evolution is its dissipation rate. The white numbers on the wave fronts in Figure 5.4 are the local amplitude of internal waves (wave amplitude is assumed to be a vertical excursion of isopycnals at the depth of maximum displacement, see dot-dashed line in Figure 5.3). Comparison of the wave amplitude in different times indicate the attenuation of the internal wave propagating along the strait: the amplitude in the wave center decreased from 83 m (Figure 5.4a) to 18 m after ten-hour evolution (Figure 5.4e). The wave damping is more efficient at the wave periphery. For instance, at the end of the simulation the wave amplitude at the southern edge of the wave is less than 10 m.

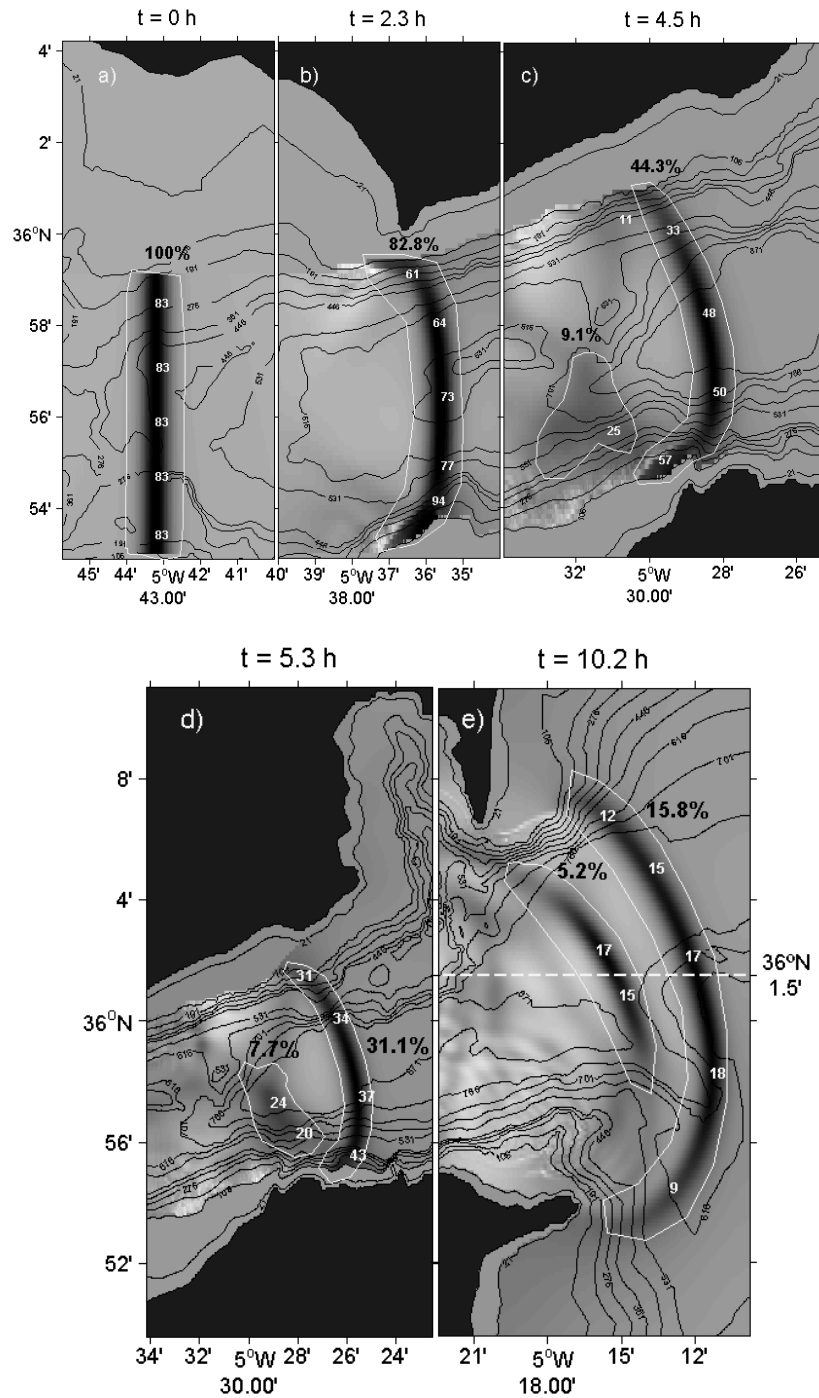


Figure 5.4: Sea surface topography produced by a LAIW of depression at different stages of evolution. Initial amplitudes of propagating wave was 83 m. Surface elevations and depressions are shown by black and white colors, respectively. Bottom topography is shown by solid lines. The light numbers on the wave fronts represent the wave amplitude at this particular point (in metres). The black numbers nearby show the percentage of the initial energy inside the area limited by the white contours.

Thus, another conclusion from this experiment is that the wave attenuation depends on the position along the wave front. The wave loses its initial spatial homogeneity and evolves into a wave with higher energy concentration in the central part of the strait.

In terms of energy the wave attenuation looks even more dramatic (the procedure of energy calculation is described in Appendix A). Taking the total energy (kinetic and available potential) of the initial LAIW as 100%, we found that after 2.3 hours of propagation (Figure 5.4b) LAIW contains only 82.8% of its initial value (the area for energy calculation is shown in Figure 5.4b by a white contour). The rest of energy, i.e. 17.2%, is either dissipated due to lateral effects (wave breaking, mixing, viscosity), or transformed into secondary scattered short-scale internal waves located beyond the contour. At the times of snapshots in Figures 5.4c, 5.4d and 5.4e, the energy of the leading wave is 44.3, 31.1 and 15.8%, respectively, which illustrates a fast dissipation of LAIW in the strait: the propagating wave could deliver to the Alboran Sea only about 16% of its initial energy.

Figure 5.5 shows the evolution of the total energy of the leading and the secondary solitary waves. The solid line reveals a very fast energy lost by the leading wave during the first six hours of evolution. Interestingly, the new-born attached secondary wave does not demonstrate similar decay. On the contrary: its energy is basically conserved in the course of the propagation. It looks like the dissipation and reflection from the bottom topography occurring in the leading wave do not apply to the second wave or these processes proceed differently. One possible explanation of its stability could be that the energy dissipated by the second wave is balanced by the gain of energy that has been radiated by the leading LAIW, which brings the energy of both waves to similar values. For instance, as seen in Figure 5.4e (see also Figure 5.5), the second internal solitary wave accumulates about 5% of the total initial wave energy, a figure comparable with the energy of the leading wave at its final stage, and this value hardly changes during five hours of evolution. In terms of wave amplitude the two waves reveal more similar characteristics: at the final stage, their amplitudes are 17.5 m and 16 m, respectively (see Figure 5.6). So, this result illustrates the importance of the described mechanism of energy accumulation by the scattered waves.

The energy accumulation by secondary internal waves takes place in a wide range of initial wave amplitudes. As an example, Figure 5.7 shows the resulting surface

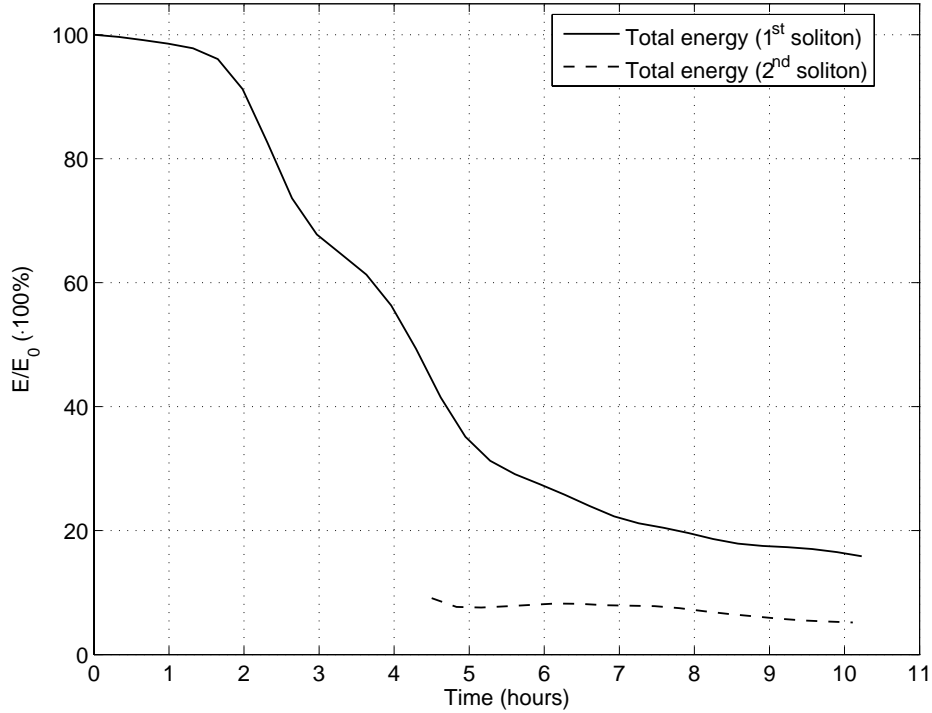


Figure 5.5: Time evolution of the total energy of the leading LAIW (solid line) and generated secondary internal solitary wave (dashed line) normalized by the energy of the initial LAIW. The procedure of energy calculation is explained in Figure 5.4 and in the Appendix A. The energy of secondary wave was calculated for $t > 4.5$ hours when its shape was clearly identified as a quasi-2D propagating wave.

elevation produced by the internal solitary wave with initial amplitude of 33 m. This wave reveals a very similar behavior during its propagation as the three times larger LAIW discussed above. The second new-generated solitary internal wave has amplitude comparable with that of the leading LAIW although it contains four times less energy due to a more compact spatial structure.

The last remark about the one-wave experiment concerns the generation of a system of relatively large internal waves that propagate across the strait. The energy flux in the incident wave directed initially from west to east (Figure 5.4e) is however scattered by the strait in all other directions producing cross-strait propagating internal waves. This system of randomly arranged waves is clearly seen in the far field of the wave pattern presented in Figure 5.4e. They can also be identified in Figures 5.6 and 5.7. The observational evidence of waves propagating northward was reported by Watson and Robinson 1991a. The authors put forward that are generated due to the reflection

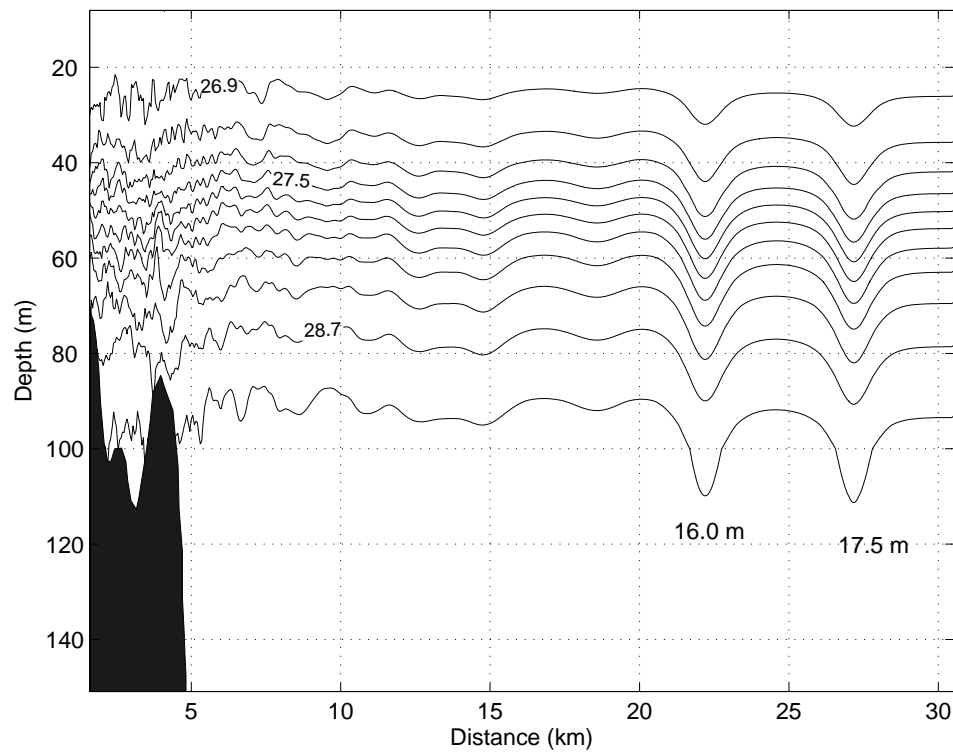


Figure 5.6: Zonal cross-section of density along $36^{\circ}1.5'N$ (solid line in Figure 5.4e) showing the vertical structure of LAIWs entering the Alboran Sea. The time corresponds to that in Figure 5.4e.

of the along-strait propagated LAIWs from the strait boundaries. The generation of cross-strait propagating waves is much stronger in the case of wave trains and is discussed in subsections 5.3.3 and 5.3.4 in greater detail.

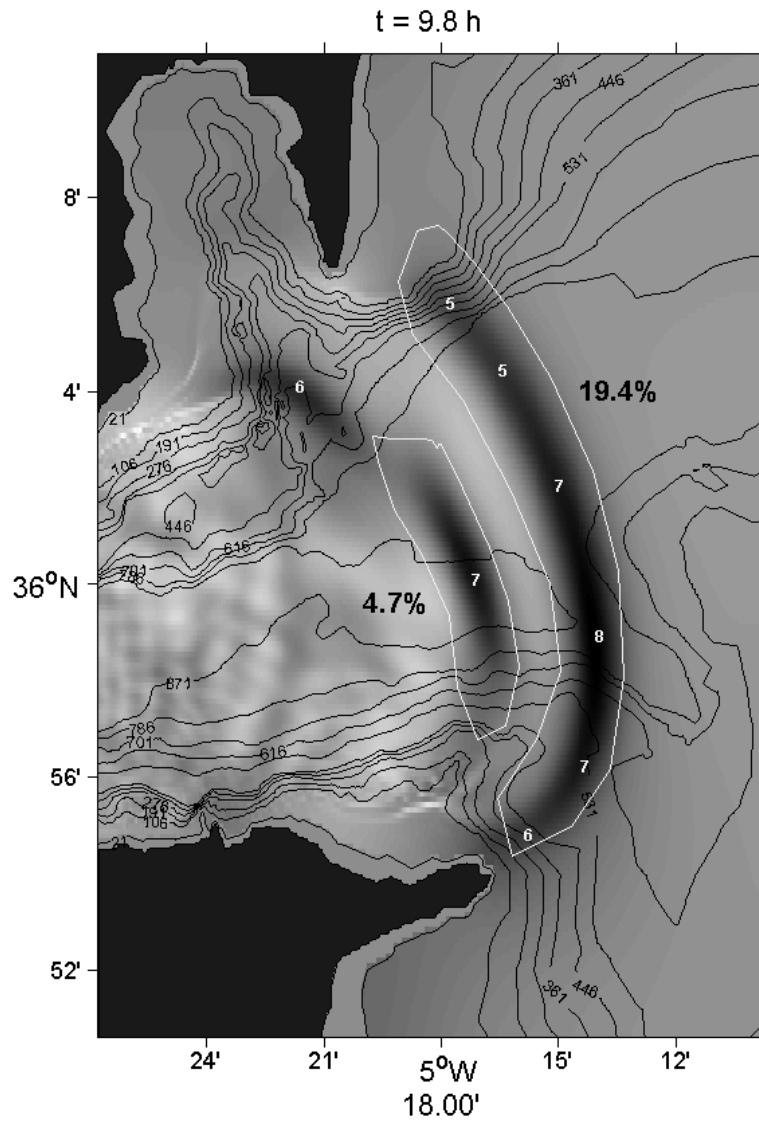


Figure 5.7: Same as in Figure 5.4 but for 33 meter-amplitude initial solitary wave.

5.3.2 Influence of rotation

The internal Rossby radius of deformation in the Strait of Gibraltar is about 13.4 km, a value that is comparable with its width. Therefore the contribution of the Coriolis force to the wave dynamics can be notable.

An asymptotic analysis of the Ostrovsky equation (Ostrovsky 1978) which incorporates weak nonlinearity and rotational dispersion, shows that internal waves of permanent form can not exist in rotating media (Leonov 1981). Being inserted into the model with rotation as an initial condition, a KdV solitary wave starts to radiate secondary waves (Gilman et al. 1996) and ultimately decays completely due to the permanent energy leakage (Grimshaw et al. 1998). There is however a strongly-nonlinear limit of this theory which has been found recently by Helfrich (2007) and Grimshaw and Helfrich (2008). The fully nonlinear weakly nonhydrostatic equations by Choi and Camassa (1999) were generalized here to include weak rotation. It was found that in the case of strong waves not all energy of LAIW is scattered to the infinity due to the rotation dispersion. Part of it (up to 50%) can be accumulated in a secondary wave generated from the evolution of the initial quasi-stationary LAIW. This process of generation of a compact packet of solitary-like waves from a single wave occurs as follows. At the first stage of evolution the LAIW (which is the exact solution of the non-rotating Choi-Camassa equations) starts to decay radiating inertia-gravity waves. These waves eventually transform into a packet of amplitude modulated solitary waves that propagate through a long wave envelope. The group velocity of the envelope is less than the phase speed of every individual solitary wave. As a result, solitary waves emerge in the tail, propagate forward through the envelope growing in amplitude until the middle of the packet, to finally attenuate and decay at the leading edge. The instantaneous cross-section of such a packet is a non-rank ordered but it has maximum amplitude in the middle of the packet. It can be seen as modulated periodic waves (Helfrich 2007, Grimshaw and Helfrich 2008), or in the light of the present results, as a non-rank ordered packet of solitary internal waves similar to that shown in Figure 5.2d.

Another important factor in the evolution of LAIW in the Strait of Gibraltar is the influence of lateral boundaries. Maxworthy (1983) first observed in the laboratory the transformation of an internal solitary wave due to the rotation. Similar experiments

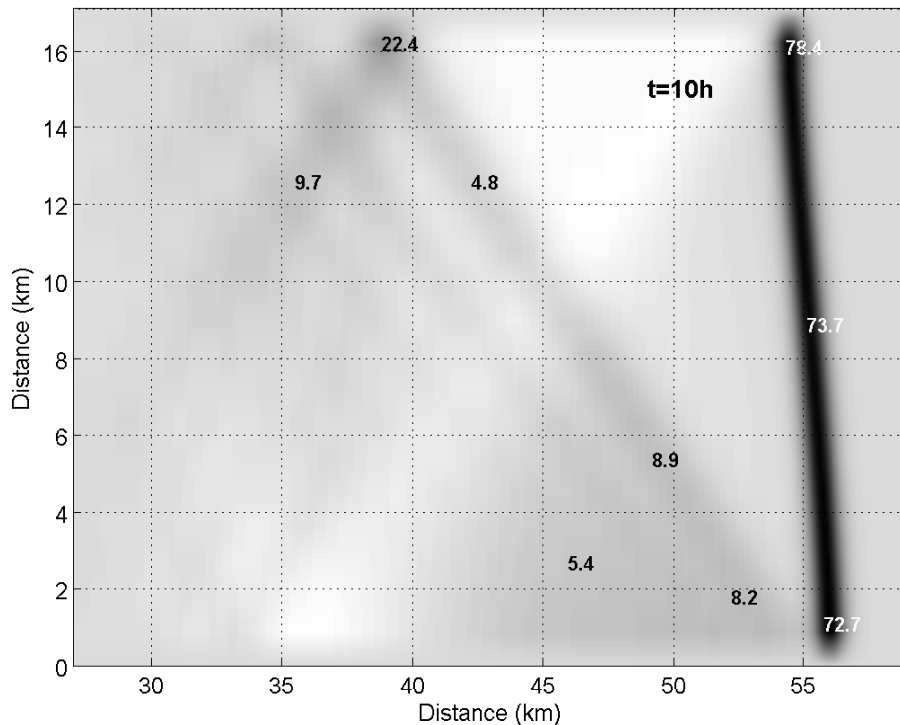


Figure 5.8: Plan view of the wave field after 10 hours of evolution of initial 83 m amplitude LAIW of depression in a rotating channel (36°N) of constant width (17 km) and depth (600 m). Small numbers indicate waves amplitude (in meters).

were performed by Renouard et al. (1987) who reported the formation of a secondary wave train trailing the main wave. As a result of the energy transfer to the radiated waves, the internal solitary wave attenuates in the course of its propagation along the channel. A first theoretical explanation of this effect was given by Grimshaw (1985) who derived the rotation-modified Kadomtsev-Petviashvili equation assuming that the rotation effect is of the same order as nonlinearity and nonhydrostatic dispersion. Further theoretical and numerical analysis of this problem performed by Grimshaw and Tang (1990), and by Katsis and Akylas (1987) has shown that Coriolis force gives rise to wave-front curvature and permanent radiation of secondary waves which leads to the decay of initial wave due to radiation damping.

In the context of the present paper the important outcome from all reported studies is that every internal solitary wave (propagating either along a channel or in the open sea) generates secondary waves due to rotation. In the case of several incoming waves

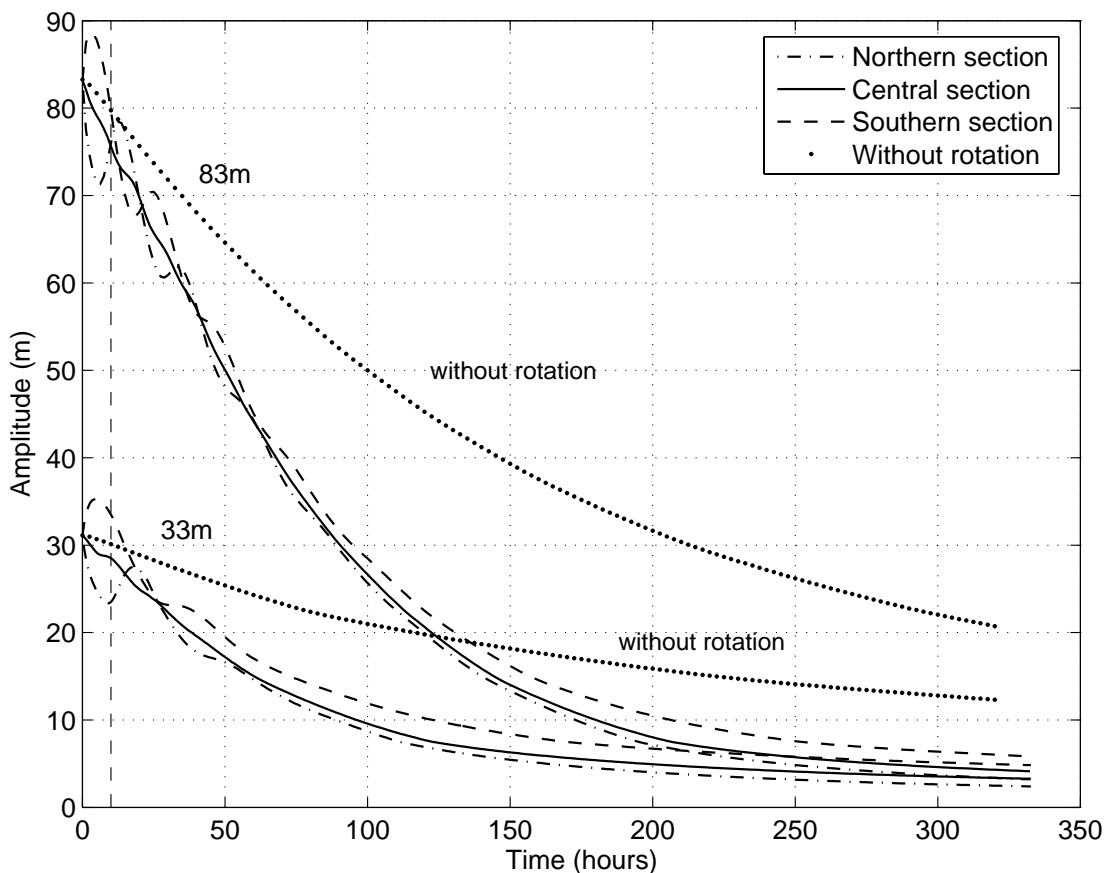


Figure 5.9: Time evolution of the amplitude of the leading solitary wave calculated for two numerical runs (initial 83 and 33 m LAIWs of depression) in different zonal sections. Northern and southern periphery of the wave are presented by the dashed-dotted and dashed lines, respectively. The central section is shown by solid lines. The dotted lines corresponds to the no-rotation experiment.

the superposition of the many secondary wave systems can produce an irregular pattern with chaotic distribution of wave amplitudes. Thus, the non-rank ordered structure of the wave packets in the Strait of Gibraltar can be presumably explained (at least partly) by the action of the Coriolis force on a system of initially rank-ordered packet of LAIWs. The examination of this problem is the topic of the present section.

We start our analysis considering an idealized situation of a long straight channel of constant depth to exclude any influence of variable bottom topography. The input parameters for the MITgcm were close to the averaged values occurred the Strait of Gibraltar: the depth was equal to 600 m, the width - 17 km, and the latitude - 36°. The

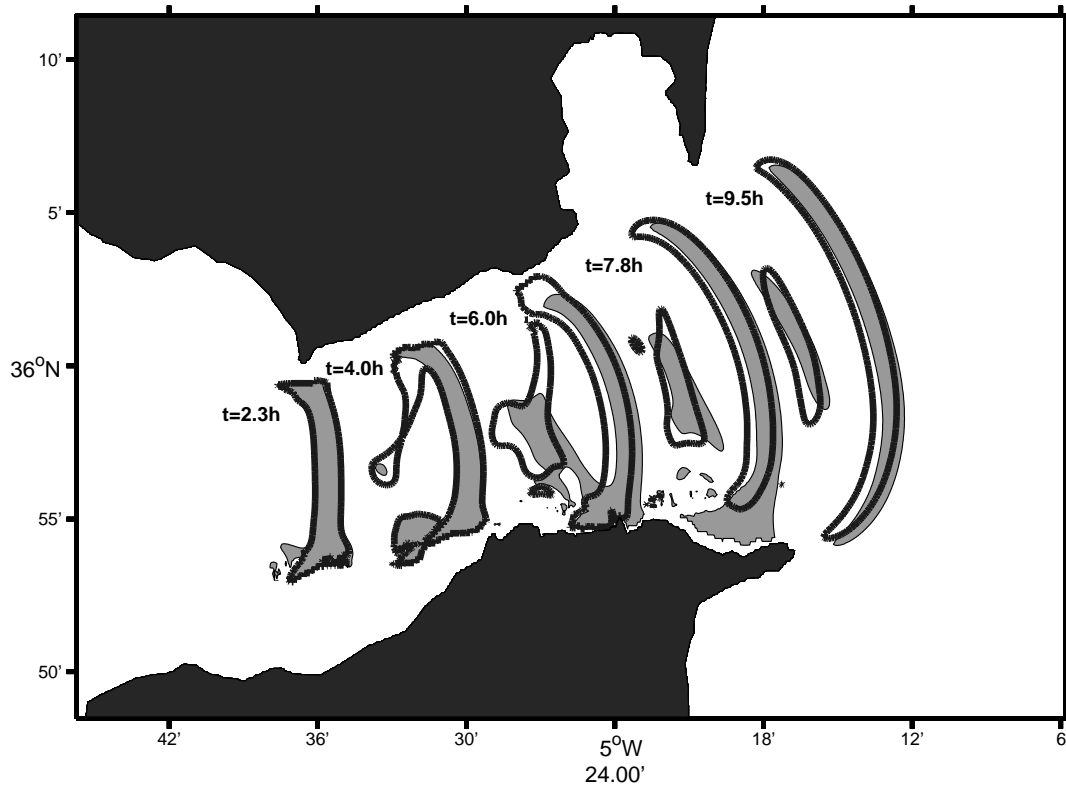


Figure 5.10: Sea surface topography produced by a 83-metre amplitude LAIW of depression at different stages of evolution with and without rotation (shaded areas and thick contours respectively). The contour line of 1.3 cm free-surface elevation was taken for both cases.

vertical fluid stratification and the initial amplitude of the LAIW were the same as in the one-wave experiment in section 5.3.1. Figure 5.8 represents the spatial distribution of amplitudes of propagating LAIW and generated secondary wave tail after 10 hours of the wave evolution (typical time of wave propagation in the Strait of Gibraltar).

The most obvious effects of rotation (Figure 5.8) are the tilting of the wave front and the radiation of secondary waves, as it was predicted theoretically (Grimshaw 1985, Grimshaw and Tang 1990, Katsis and Akylas 1987). The effect is relatively weak and accounts only 10% of wave amplitude: after 10-hour evolution the leading wave still predominates; its amplitude decreased by 6-8 m (from 83 to 77-75m), and the amplitude of the radiated waves has this same order. The only area where secondary waves have noticeable amplitude (22.4 m) is located near the northern boundary due to wave reflection, but this local maximum does not characterize the whole picture.

Another evidence of weak response to the Coriolis force in 5.8 is the relatively slow

decrease of the wave amplitude across the channel. The weakly-nonlinear theory predicts an exponential decay of wave amplitude along its front (Grimshaw and Tang 1990, Katsis and Akylas 1987), which does occur for the considered set of input parameters. This decay is correctly simulated by the model as can be seen from Figure 5.9 that shows the evolution of the wave amplitude of the leading wave in three positions across the channel. Wave amplitude decreases relatively fast during first 100-150 hours after which the leading LAIW tends to some kind of quasi-stationary state with the theoretically predicted exponential decay of amplitude across the channel (see Figure 5.9 for $t > 100$ hours). To make sure that the wave attenuation is not the consequence of viscous dissipation, the results of numerical experiment without rotation are also presented in Figure 5.9. The difference between rotation and no-rotation experiments (dotted and solid lines in Figure 5.9) is a clear evidence of the radiation damping of the leading wave induced by the rotation.

The described scenario of wave evolution is valid in a wide range of amplitudes of incoming LAIWs (only two extreme runs for 83 and 33 m amplitude of the initial LAIWs are presented in Figure 5.9). For the objectives of the present study an important result of these experiments is that the wave field does not change much during the first 10 hours of LAIW evolution. Within 10-15% accuracy, we can conclude that the wave amplitude in the domain remains basically the same (see the portion of the plot to the left of the vertical dashed line in Figure 5.9), and the radiated waves are substantially weaker than the leading LAIW (Figure 5.8). The change of the wave field under the action of the Coriolis force is fairly weak because the time span of wave propagation (10 hours) is not long enough for the development of substantial rotational effect in the relatively narrow strait (its width, 17 km, is comparable with the internal Rossby radius of deformation, 13.4 km). In summary, one should not expect dramatical changes in the wave structure caused by the rotation alone during the propagation of LAIWs along the Strait of Gibraltar. Figure 5.9 shows that we can expect some oscillations of amplitude across the channel in the range of about 10-15% and predict the generation of weak wave tail. Hence, any substantial modification of the wave form should be attributed to the influence of the variation of the bottom topography. To verify this hypothesis one extra numerical experiment without rotation has been performed for a LAIW with initial amplitude of 83m with all other input parameters similar to that

described in the “one-wave” experiment. The spatial structure of the leading LAIW and scattered secondary wave in selected moments for both runs, with and without rotation, are presented in Figure 5.10. It shows different spatial structures such as the evident shift of the maximum amplitude area to the southern border at intermediate stages of evolution ($6 < t < 8$ hours), which tends to fade out as time goes on (see $t = 9.5$ hours). In any case, differences in the two wave patterns are not dramatic, suggesting that the formation of scattered secondary wave tail in the Strait of Gibraltar is due to topographic effect, rather than to rotation.

5.3.3 Evolution of wave trains: Two-wave experiment

The results of the “one-wave” experiment give hints about the behavior of wave packets: the propagating LAIW radiates energy in the course of its evolution, and this process eventually leads to the formation of a second solitary wave with comparable amplitude. In the case of an initial wave train, the question then arises as whether the secondary waves radiated from the leading wave will propagate further independently as solitary waves (scenario 1), or they will be absorbed by the subsequent incoming LAIW (scenario 2). The answer can be found in Figure 5.11 where three stages of evolution of two initially isolated LAIW are presented. The methodology of this experiment is the same as described in section 5.3.1. The only distinction is that the initial field in this experiment contains two LAIW with amplitudes of 83 m and 73 m for the leading and second waves, respectively, instead of a single wave.

The initial LAIW were separated a distance of 3 km in order to be independent. Taking into account that the first, larger wave has the greater phase speed due to the nonlinear dispersion, there is no chance for their interaction in the course of propagation. However, the secondary waves produced by the first LAIW during the interaction with lateral boundaries can interfere with the second incoming wave. The implications of this interaction is the focus of the present section.

Wave patterns presented in Figure 5.11 suggests that it is scenario 2 of the wave evolution that is realized. In other words, the waves radiated by the first LAIW near the strait boundaries are absorbed by the second LAIW.

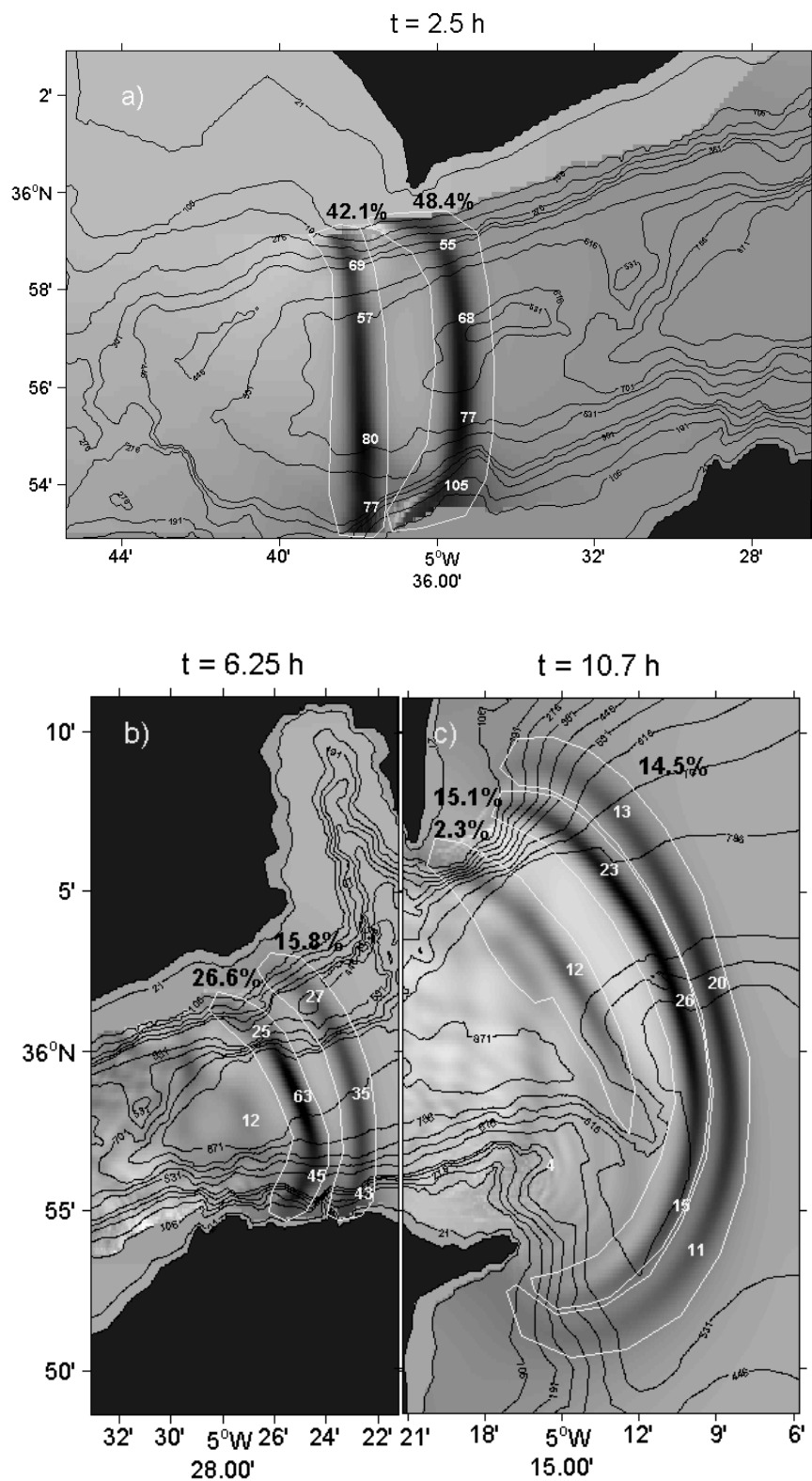


Figure 5.11: Same as in Figure 5.4 for two propagating LAIWs with initial amplitudes of 83 and 73 m for the first and second waves, respectively.

The energy absorption is so efficient that the second wave gets even larger than the first one, as shown in Figure 5.11b and 5.11c. It is also shown in Figure 5.12, where the evolution of the total energy of the two waves is presented. Of particular interest is the time span $t=6-7$ hours when the second wave contains two times more energy than the leading LAIW.

Notice that a third internal wave which was expected to be generated in the course of superposition of secondary scattered waves, is not visible during most part of the packet evolution. It is formed behind the first two waves only in the very end of the experiment when the packet leaves the strait (Figure 5.11c). The energy of this third wave is remarkably smaller than the energy of the two leading waves and amounts only 2.3 % of the total initial energy. Obviously the second LAIW also radiates part of its energy during its propagation, but the energy supply from the first wave compensates for this loss. This energy balance is suggested in Figure 5.12 by the slower attenuation of the second wave in the interval 3-6 hours.

Another effect of wave-wave interaction develops at the final stage of the packet evolution. The nonlinear collision of two internal solitary wave is possible when the leading wave is not the largest. In this case, the rear wave with larger phase speed starts to overtake the leading one. This overtaking eventually leads to the collision of the two internal solitary waves during which the rear wave transfers part of its energy to the leading wave. Figure 5.12 illustrates this process: after 8 hours of evolution, the gradual attenuation of the leading LAIW is followed by a slow increase of its energy. This process has been illustrated recently by Vlasenko and Stashchuk (2006) (see Figure 5.10 in their paper).

5.3.4 Evolution of wave trains: Three-wave experiment

A new experiment with three initially rank-ordered LAIWs of amplitudes of 83, 73 and 63 m has been carried out. The experiment simulates the situation when initially rank-ordered wave packet generated over CS contains three or more waves (Sánchez-Garrido et al. 2008). This run was organized in the same way as the “two-wave” experiment when LAIWs in the packet were well separated (3 km between the wave centers) which excludes wave interaction at the initial stage.

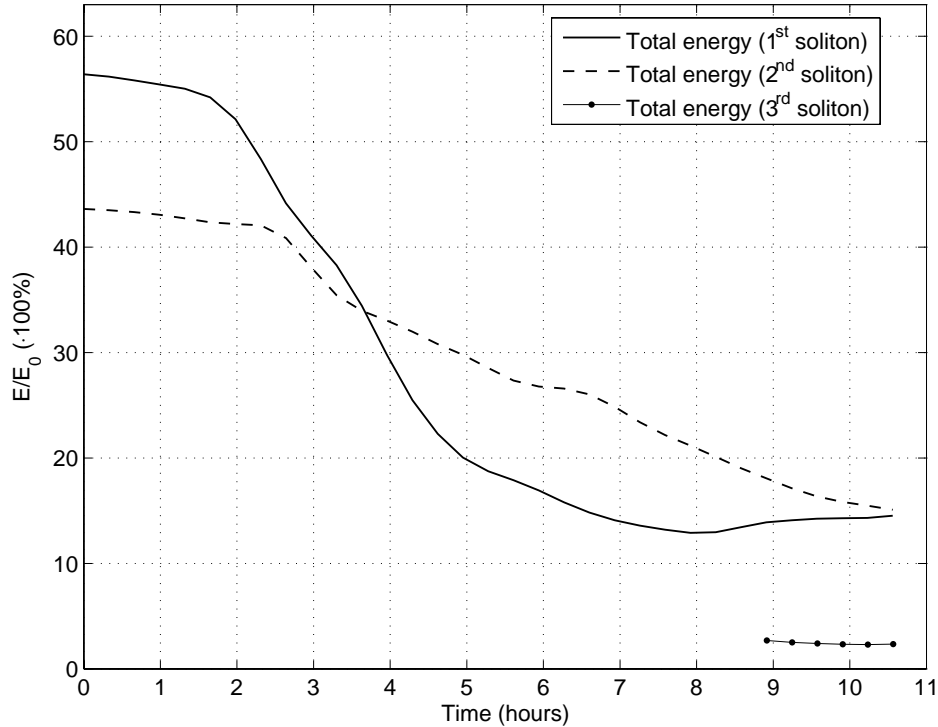


Figure 5.12: Time evolution of the total energy of the leading and second LAIWs (solid and dashed lines, respectively) as well as the generated secondary internal solitary wave (dotted line) normalized by the energy of the two initial LAIWs.

Figures 5.13a and 5.13b show two intermediate stages of the packet evolution. Scrutiny of these two patterns as well as their comparison with Figures 5.4 and 5.11 allows one to conclude that the mechanism of energy transfer from the leading wave to the wave behind in the “three-wave” experiment works even more efficiently than that in the case of two waves. For instance, the value of total energy located in the first, second and third waves, i.e. 42.6, 32.8, 24.6%, respectively, corresponding to the initial rank-ordered distribution of waves at $t=0$, changes dramatically. At $t=7.7$ h (Figure 5.13b) the energy remaining in the first, second and third waves is 10.1, 17.0 and 13.9% respectively. This fact clearly illustrates the inhomogeneity of energy dissipation along the train, from the leading LAIW to the wave tail. The second wave is the most energetic at $t=7.7$ h whereas the first one has lost most of its energy. At $t=11.4$ h the second wave is no longer the strongest one. It contains 11.1 % of initial energy whereas the first and third contain 11.1 and 6.7 %, respectively.

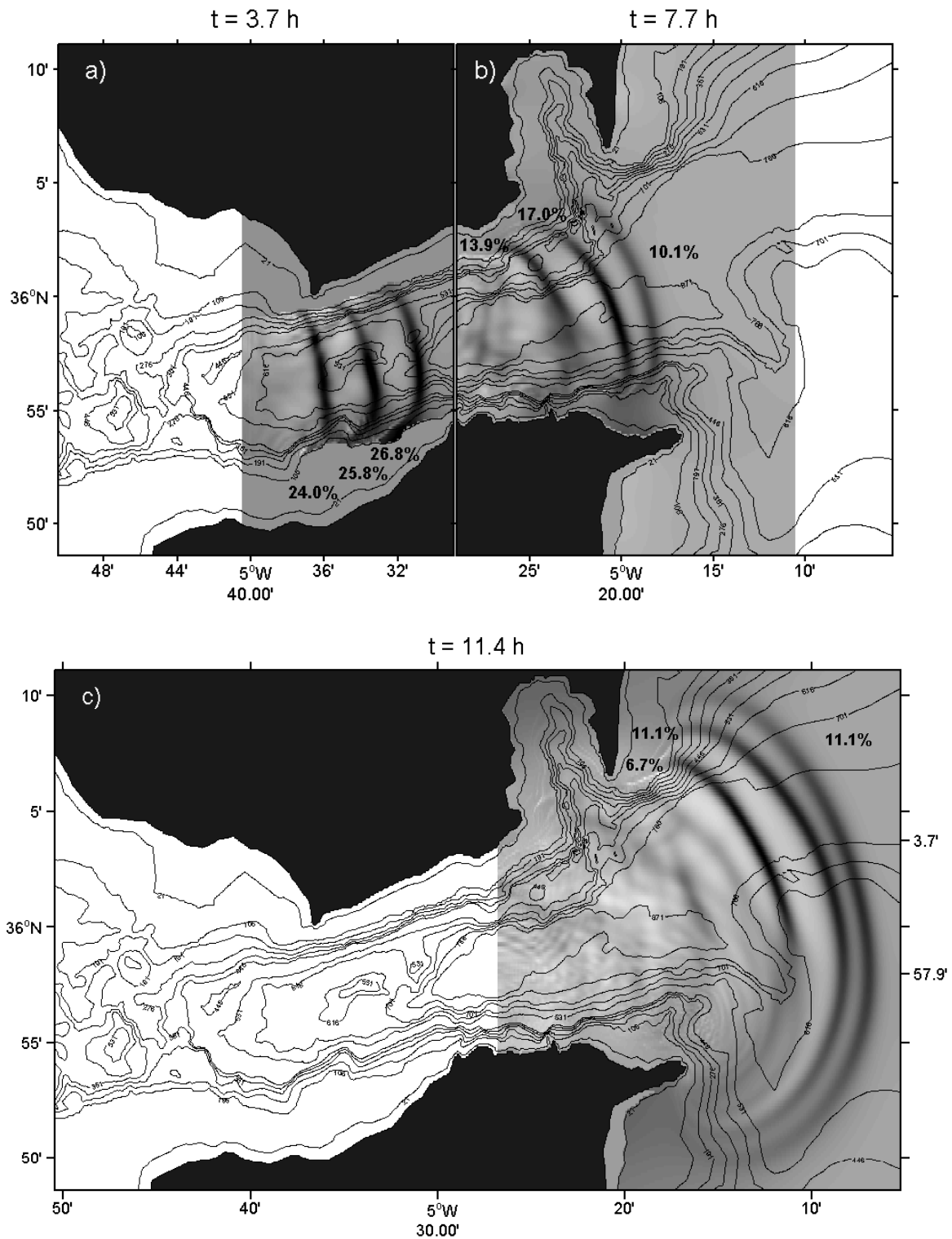


Figure 5.13: Sea surface topography produced by a rank-ordered system of LAIWIs of depression. Initial amplitudes of propagating waves were 83, 73 and 63 m (from the right to the left), respectively. Percentage of energy are indicated.

The first wave is now more energetic than 3.7 hours before, a controversial result whose explanation has been mentioned above: the second LAIW has been accumulating most of the energy radiated by the leading one and started to overtake it. Under such conditions the collision of two LAIWs becomes inevitable (this is especially clear in Figures 5.13c and 5.14a), and, as a consequence of the wave-wave interaction, the second LAIW returns part of its energy back to the first one. The growth of the energy of the leading LAIW in Figure 5.15 suggests that the collision of the two LAIWs starts about 8 hours after the beginning of the experiment, and that at $t=11.4$ h presented in Figure 5.13c the process is still in progress.

An interesting conclusion can be drawn from the analysis of the three-wave experiment: the third wave being less energetic in the global sense, is however more compact in space and reveals the greatest local energy concentration. This fact is seen from the comparison of the gray contrasts in Figure 5.13c, as well as from Figure 5.14a where the zonal cross-section of density along the latitude $36^{\circ}3.7'$ is presented. The in-situ measurements along this line would record a clear non-rank ordered system of eastward propagating progressive solitary waves in which the amplitude of the first wave is equal to 20 m, the second wave has 24 m amplitude, and the largest wave is the third one with amplitude of about 30 m. This fact is in a good agreement with the observations of large internal waves registered at the AS mooring (see Figure 5.2 and the appropriate discussion in the introduction).

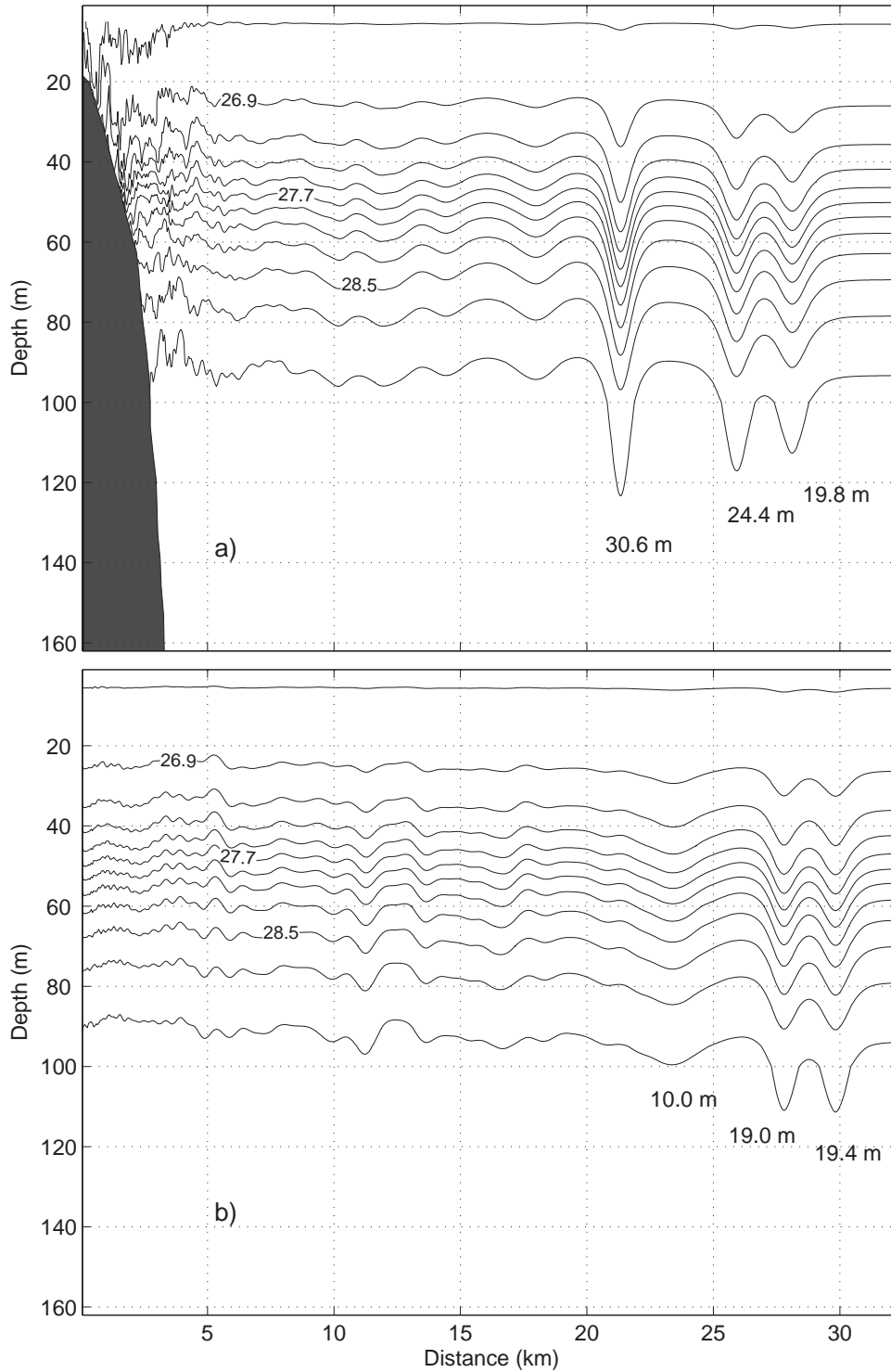


Figure 5.14: a) Zonal cross-section of density along $36^{\circ}3.7'N$ (see Figure 5.13c) showing a non-rank-ordered system of LAIW waves propagating eastward to the Alboran Sea. b) similar cross-section along $35^{\circ}57.9'N$ showing a well-rank-ordered system of LAIW waves.

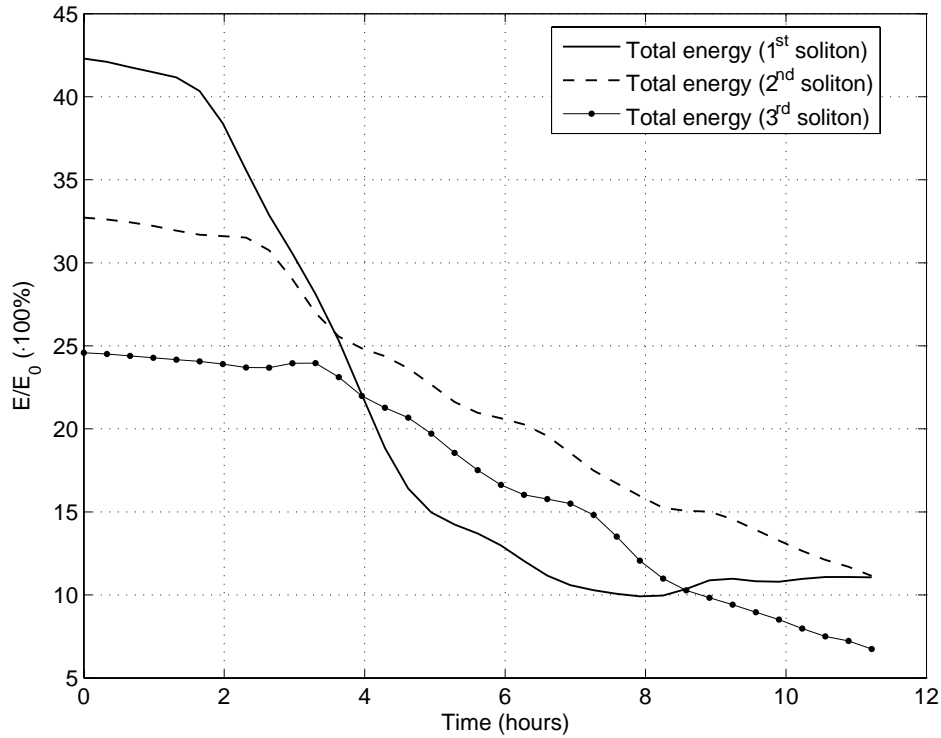


Figure 5.15: Time evolution of the total wave energy of the three initial LAIWs.

5.4 Summary and Conclusions

The results of the numerical simulations presented here illustrate a number of important aspects on the dynamics of the tidally generated internal waves in the Strait of Gibraltar. In particular, it was found that initially plane LAIWs propagating along the strait reveal remarkable three-dimensional behavior. This effect is a direct consequence of many factors one of which is the Coriolis force that initiates currents along wave fronts. In the conditions of the constrained geometry these currents increase the wave amplitudes near the Moroccan coast, as seen in Figures 5.4a-d and 5.11a,b. It is also confirmed by a comparison of the results obtained with and without rotation for the idealized rectangular channel presented in Figure 5.9. The latter, in particular, illustrates that the initial tilting of the free surface produced by the Coriolis force across the channel is not stationary, but has an oscillatory character. The period of these cross-channel oscillations (as it follows from Figure 5.9) is about 22 hours and attenuate quickly (within 2-3 periods) being replaced by a stationary cross-channel sea surface tilting (Figure 5.9 for $t > 50$ h). A similar effect of free surface tilting was

obtained analytically for the same idealized rectangle channel in the framework of a weakly-nonlinear theory (Grimshaw 1985; Katsis and Akylas 1987; see also the review by Helfrich and Melville 2006 and references herein). Our results expand this conclusion to the case of strongly-nonlinear waves.

Another result found in the present study concerns the wave-wave energy transfer in internal wave packets propagating along the strait. Multiple reflections from lateral boundaries along with friction and wave breaking near the shoreline lead to attenuation of the propagating waves. However, the leading LAIW loses its energy much faster than those in the wave tail (Figure 5.15), as the latter absorbs part of the energy scattered by the leading wave in the course of its evolution. As a result, the initially rank-ordered wave packet (the usual assumption for the generation mechanism) loses its regular structure and transforms into a non-rank ordered wave packet (Figures 5.13 and 5.14a). This result is one of the major findings of the present study and deserves to be commented in greater details.

The energy decay presented in Figure 5.15 illustrates that at the first stage of evolution ($t < 3.5$ hours) the wave packet maintains its initial rank-ordered structure even though the leading wave is losing its energy at a very high rate. From 4 to 8.5 hours the leading LAIW contains the minimum energy in comparison with the two others, but after 8.5 hours of evolution it starts to recover energy from the second wave. This is due to the energy transfer from the larger second wave which overtakes the first one, interacts with it and transforms part of energy in the course of soliton-soliton interaction; a detailed description of this process for LAIWs can be seen in Vlasenko and Stashchuk(2006). At the end of the evolution when the wave packet leaves the strait entering into the Alboran Sea, its initial rank-ordered structure can be partly recovered due to wave-wave interaction but at a much lower energy level. Probably this is the reason why almost a half of all wave packets measured at AS mooring (see Figure 5.2) were well rank-ordered or partly rank-ordered. Generally speaking, the well rank-ordered packets are expected to be the ultimate structure of all packets when they have been propagating long enough along a basin of constant depth.

It should be noted that the rank-ordered structure of wave packets arranged by the energy does not necessarily mean a similar rank order in terms of wave amplitude. This effect takes place because of substantial three-dimensionality of the problem. In

fact, the total energy accumulated by the leading LAIW in the whole domain does not guarantee that this wave has the local energy maximum. In some cross-sections the amplitude of successive waves can be larger so that the greatest amplitudes can be recorded in the less energetic (in global sense) wave.

Such an example is illustrated by Figure 5.14 where two cross-sections of the same wave packet are presented: the cross-section in Figure 5.14a is for $t=11.4$ h (see Figure 5.13c) along the latitude $36^{\circ}3.7'$, whereas Figure 5.14b is latitude $35^{\circ}57.9'$. The third wave in Figure 5.14a has the maximum amplitude despite the fact that it is the least energetic wave in the packet (Figure 5.13c and Figure 5.15). This contradictory result can be explained in terms of the cross-strait variability of the wave (see Figure 5.11b), which is the consequence of the Coriolis force and three-dimensional effects. These results can be a matter of further scrutiny which is necessary for the correct interpretation of in-situ observations when the data collected at different sites of the packet can lead to the opposite conclusions. It is also interesting to mention the sharp decrease of the wave amplitude at the southern periphery of the waves as they radiate out from the strait. This fact is obviously related to the sudden change of the shoreline orientation near $5^{\circ}16'W$.

The structure of wave packets in the strait is substantially dependent on the position of the observer. At two different fixed points the same wave train can reveal either well-rank ordered or rather chaotic structures. The local organization of amplitude-ranking cannot be inferred directly from the energy content, as a more global variable. From the point of view of observations, this randomness would explain the similar proportion of rank and non-rank ordered LAIW's packets found in the temperature records at the mooring AS (Figures 5.1 and 5.2). It is expected that these results, obtained for the Strait of Gibraltar, will also be valid for some others straits of the World Ocean.

Acknowledgments This work was supported by the UK Natural Environmental Research Council Grant NE/F010214/1 “Nontraditional baroclinic wave effects in the Strait of Gibraltar”. JCSG acknowledges a post-graduate fellowship from Consejería de Innovacion Ciencia y Empresa, Junta de Andalucía, Spain (project RNM 968). Partial support from the Spanish National Project CTM2006-02326/MAR is also acknowledged. We are thankful to Dr. Javier Delgado for providing the bathymetry map. We thank Professor Efim Pelinovsky for great interest to the paper and valuable recommendations. The authors are also grateful to Dr. Ken Kingston for useful comments and suggestions.

Capítulo 6

Long-Term Evolution of Strongly Nonlinear Internal Solitary Waves in a Rotating Channel

Long-Term Evolution of Strongly Nonlinear Internal Solitary Waves in a Rotating Channel¹

Abstract

The evolution of strongly nonlinear solitary waves in a rotating channel is numerically investigated with a fully-nonlinear, nonhydrostatic, three-dimensional numerical model. The aim of the study is the investigation of strong nonlinear effects out of the scope of the well developed weakly nonlinear theory, which however does not formally hold for large-amplitude solitary waves observed in many places of the World Ocean.

In agreement with the weakly nonlinear theory, it was found that an initial straight soliton immediately evolves into a wave of curved wave-front due to the nonlinear coupling of a Kelvin wave mode and emerging Poincaré modes which are radiated backward due to its lower phase speed. Nevertheless, during the course of its propagation a Mach stem system eventually is formed at the tail of the leading Kelvin mode as a result of multiple reflections with the lateral boundaries. At the final stage of the evolution the Mach stem transforms into a soliton-like wave more energetic than the leading wave, and finish by interacting with it. This process eventually leads to the formation of a quasi-stationary wave packet of little energy (in comparison to the initial energy), and enhances as either the amplitude of the initial soliton, the effect rotation, or the channel width increases.

¹J.C. Sánchez Garrido and V. Vlasenko (2009). Long-Term Evolution of Strongly Nonlinear Internal Solitary Waves in a Rotating Channel. Draft, to be submitted to *Nonlinear Processes in Geophysics*.

6.1 Introduction

It is well known from numerous observations that internal waves are an extensive phenomenon in the World Ocean (Jackson 2004, Helfrich and Melville 2006, Vlasenko et al. 2005). They have in the vast majority of occasions tidal origin, generated by the interaction of the incident barotropic tide over prominent bathymetric features, as continental shelves, seamounts and submarine canyons. The energy transfer from the long barotropic tidal wave to internal or baroclinic modes is of major relevance in the Ocean, since baroclinic energy is available for diapycnal mixing, crucial in the development of marine ecosystems and with implications for the global ocean circulation and associated heat transport (Munk and Wunsch 1998). In some specific areas internal waves are particularly large, with amplitude surpassing 100 m. Large amplitude internal waves of short scale, described successfully by the Internal Solitary Wave (ISW hereafter) solution of the KdV equation (Benney 1978, Lee and Beardsley 1974, Vlasenko 2005), are able to propagate throughout hundreds of kilometres until breaking in shallow regions where its energy is finally dissipated through water mixing and turbulence. Due to the important impact of ISWs on the regional and global environment the deep study of their dynamics is of great interest.

There are many parameters that control their generation, subsequent evolution and ultimate dissipation, such as tidal excursion, bottom topography, background stratification and mixing and some others. The rotation of the Earth plays a fundamental role in the dynamics of baroclinic tidal waves (Vlasenko et al., 2005), not only in their generation but also in their disintegration into packets of ISWs. Gerkema and Zimmerman (1995) and Gerkema (1996) were probably the first who found that, in weakly nonlinear nonhydrostatic media, sufficiently strong rotation suppresses the disintegration of progressive baroclinic tidal wave into packets of short ISWs. This theory was revised recently by Helfrich and Grimshaw (2008) who considered how the balance between hydrostatic and nonhydrostatic parts of the long-wave solution influences its disintegration into a packet of ISWs.

In addition to the generation process of these short-scale ISWs, rotation also plays a significant role on their dynamics. In a very general theoretical context the influence of rotation on ISWs was considered in a number of papers using the Ostrovsky equation

(Ostrovsky, 1978)

$$(A_t + cA_x + \alpha_1 AA_x + \beta A_{xxx})_x = Af^2/2c, \quad (6.1)$$

where $A(x, t)$ is the interfacial displacement, α_1 , β , c (phase speed) parameters depending on the stratification, and f the Coriolis parameter. The equation incorporates weak nonlinearity and rotational dispersion and is usually subjected to an asymptotic analysis. One of the conclusions was that internal waves of permanent form can not exist in rotating systems (Leonov, 1981). Under small rotation, when a KdV solitary wave is used as the initial condition of the Ostrovsky equation, it will slowly decay due to radiation of inertial gravity waves (Grimshaw et al. 1998). Details of the dynamics were described by Gilman et al. (1996): radiated long inertial waves eventually steepens to produce a new solitary wave, which in turn, fades out repeating the process of wave-radiation and further formation of a new solitary wave. The long-term behaviour of this recurrent mechanism was studied in detail by Helfrich (2007) by means of an inviscid, two-layer, fully nonlinear, weakly nonhydrostatic model. It was found that the recurrent process of decay and rebirth of solitary waves eventually leads to the formation of a wave packet modulated by a long wave envelope. This packet can account for as much as one half of the initial energy in a mature state. The wave packet undergoes very weak energy leakage, and consequently it has very long decay timescale.

In a channel, the effect of rotation on solitary waves dynamics is somehow different that within an open domain. The influence of lateral boundaries leads to the formation of Poincaré and trapped Kelvin waves. For the first time this effect was observed in a laboratory tank by Maxworthy (1983) and Renouard et al. (1987), who conducted experiments with stratified fluids. Observations revealed that an initial soliton evolves into a leading Kelvin wave with curved wave-front, accompanied by a train of small amplitude waves on the weak of the main disturbance.

Essential theoretical advances of the problem were carried out by Grimshaw (1985), Katsis and Akylas (1987), and Grimshaw and Tang (1990). Using perturbation theory Grimshaw (1985) deduced a set of equations for long weakly nonlinear waves in a rotating channel. In case of weak rotation, when the Rossby radius is much greater than the wavelength, and provided that rotational effects are equal to nonlinear and

dispersive effects, the evolution equation is the so-called Rotation-Modified Kadomtsev-Petviashvili (RMKP) equation. Further studies of this equation (Katsis and Akylas 1987; Grimshaw and Tang 1990; Akylas 1991), demonstrated that an initial straight soliton curves due to nonlinear resonances between Kelvin and Poincaré modes. In fact, the continuous generation of Poincaré modes, radiated backward of the leading Kelvin mode, is the reason of the terminal damping of the initial wave.

Therefore, although the mechanism is different, the weakly nonlinear theory predicts the same ending for an initial solitary wave propagating within a channel and in an open domain under rotation: its total disappearance by energy radiation. However as commented before, Helfrich (2007) found that for fully nonlinear waves in an open ocean an interesting process of recurrence occurs in the long term evolution, leading to the formation of waves packets with very weak energy leakage, and consequently, very long-living. Motivated by this result obtained by Helfrich (2008), our aim here is to investigate the long-term evolution of strongly nonlinear internal solitary waves in a rotating rectangular channel, a topic still unexplored.

This paper investigates numerically the propagation of internal waves in a rotating rectangular channel focusing on long-term effects of rotation on their structure and evolution. It is organized as follows: section 6.2 outlines the weakly nonlinear theory based on the RMKP equation, section 6.3 describes the numerical model and its initialization. In section 6.4 the reference numerical experiment is discussed. Sensitivity of the model to the wave amplitude and rotation effect is examined in sections 6.5 and 6.6. Finally section 6.7 contains discussions and conclusions.

6.2 Outline of the weakly nonlinear theory

The detailed analysis of the evolution process of ISWs in a rotating channel was performed in a number of theoretical works (Grimshaw, 1985; Katsis and Akylas, 1987; Grimshaw and Melville, 1988; Melville et al., 1989; Grimshaw and Tang, 1990; Akylas, 1991; Grimshaw et al., 1998). The analysis is normally based on the RMKP equation for wave amplitude $A(x, y, t)$, where x , y and t are along-channel, across-channel coordinate and time, respectively. With the appropriate boundary conditions at the lateral boundaries $y = 0, l$ the problem on evolution of weakly nonlinear internal waves in a

rotating channel reads:

$$(A_t + \nu AA_x + \lambda A_{xxx})_x + \frac{1}{2}c_0(A_{yy} - \gamma^2 A) = 0, \quad (6.2)$$

$$A_y + \gamma A = 0, \quad y = 0, l. \quad (6.3)$$

Here c_0 is the linear phase speed and $\gamma = R_0^{-1}$ is the inverse internal Rossby radius which provides a measure of rotation. The parameters ν and λ are coefficients of nonlinearity and dispersion, respectively, both dependent on the associated vertical mode g_0 calculated from the eigenvalue problem:

$$\frac{d^2 g_j}{dz^2} + \frac{N^2}{c_j^2} g_j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (6.4)$$

$$g_j(-H) = g_j(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots \quad (6.5)$$

Here $N(z)$ is the buoyancy frequency and H is the water depth.

For the first time problem (6.2)-(6.3) was formulated by Grimshaw (1985). It was used for study of propagation of weakly nonlinear internal waves in a continuously stratified rotating shallow-water channel in a case when the rotation as well as nonlinearity, three-dimensional effects and dispersion are weak and of the same order. It was found that conditions (6.3) at lateral boundaries of the channel constrain the choice of initial solitary form satisfying equation (6.2) by waves in which the mass of the wave in planes parallel to channel walls varies exponentially across the channel. An attempt to find a solitary-wave solution of the RMKP equation in the form suggested by Maxworthy (1983) (with strait or curved wave front) was not successful because of boundary conditions (6.3). In other words, any stationary ISW inserted into (6.2)-(6.3) as an initial condition will evolve in a system of nonstationary secondary waves. This problem was studied numerically for two-layer fluid in the paper by Katsis and Akylas (1987). It was found that the initially straight-crested solitary internal waves transforms into slowly decaying three-dimension system of internal Poincaré waves as it propagates along the channel. Similar result was obtained by Grimshaw and Tang (1990) for continuously stratified fluid. The leading quasi-steady solitary wave gradually transforms into a Kelvin wave whose cross-channel structure is characterized by an exponential decrease of the wave amplitude with wave crests curved backward.

The system of waves satisfying both the RMKP equation (1) and boundary condition (2) was suggested by Grimshaw and Tang (1990) in the form:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x, t) \phi_n(y), \quad (6.6)$$

where $\phi_0 = e^{-\gamma y}$; $\phi_n = \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) - \frac{\gamma l}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right)$; $n = 1, 2, \dots$, are the complete set of orthogonal functions in which $n = 0$ represents the Kelvin mode, and $n \geq 1$ the radiated Poincaré modes. The following equations for the wave amplitude of each mode was found:

$$A_{0t} + \lambda A_{0xxx} + \frac{1}{2} \nu \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} C_{0pq} (A_p A_q)_x \right\} = 0, \quad (6.7)$$

$$(A_{nt} + \lambda A_{nxxx})_x + b_n^2 A_n - \frac{1}{2} \nu \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} C_{npq} (A_p A_q)_{xx} \right\} = 0. \quad (6.8)$$

Where

$$C_{npq} = \frac{\int_l^0 \phi_n \phi_p \phi_q dy}{\int_l^0 \phi_n^2 dy}, \quad b_n^2 = \frac{1}{2} c_0 \left(\gamma^2 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right). \quad (6.9)$$

Note that equations (6.7), (6.8) are coupled in the nonlinear terms, and as pointed out by Grimshaw and Tang (1990), this is the ultimate cause that inhibits the existence of a stationary solution. To illustrate the mechanism, let us suppose the inexistence of Poincaré modes at $t = 0$ ($A_i = 0, i = 1, \dots, n$, for $t = 0$). In this case (6.7) admits the solitary wave solution, which together with the transversal Kelvin mode ϕ_0 form a Kelvin solitary wave, taken as initial condition. Following equation (6.8), the Kelvin mode itself will excite the Poincaré modes, subtracting energy from the initial wave, and radiated backward due to their slower phase speed.

If one take a straight-crest wave across the channel for the initial wave as Renuard et al. (1987) did, this wave starts to evolve as discuss above transforming into exponentially decreased across the channel wave with curved backward fronts. Even though the wave profile consistent with the boundary condition (6.3) is taken as the initial wave, it also start to evolve on similar scenario as shown in Katsis and Akylas (1987) and

Grimshaw and Tang (1990), so that their conclusion was that the exponential decrease of the wave amplitude is not a crucial condition for the wave evolution.

So, we used this result as a justification of our approach to take straight-crest LAIW as an initial condition for the investigation of its long-term evolution. The new element introduced by this study is that we did not assume a weak nonlinearity of the propagated waves. Similar to Herfrich and Grimshaw (2008) (but for continuously stratified fluid) we do not restrict our analysis considering only weakly-nonlinear waves. The initial amplitude can be as large as 100 m or more for oceanic-scale waves (as observed in many places) which demands application of fully-nonlinear approach.

6.3 Model description and initialization

Some results on modelling of ISWs propagating in the Strait of Gibraltar have been recently reported by Vlasenko et al. (2009, See Chapter 4). One of the conclusions of that paper was that this strait is too short for weak rotational dispersion to introduce any substantial corrections into the wave field. The rotational effects in the Strait of Gibraltar typically account for only about 10% of wave amplitudes. The purpose of this paper is to study the situations of long-term evolution in order to investigate the ultimate stage of propagation of strongly nonlinear ISW under the action of rotation. In doing so we simplify the bottom topography considering only rectangular straight channels. This circumstance excludes any effect related to scattering of internal wave over variable bottom topography. Hence, all changes in wave structure can be attributed to the influence of rotation. The channel depth is taken 600 m, and vertical fluid stratification (see Figure 6.1) were typical to the observed in the Strait of Gibraltar.

The Massachusetts Institute of Technology general circulation model (MITgcm) which is a fully non-linear, non-hydrostatic hydrodynamic model, was used in our study. A detailed description of the model can be found in the paper by Marshall et al. (1997). At the first stage the model was used for the preparation of the initial fields. It was initialized by the first-mode solitary wave of depression obtained from the Korteweg-de Vries (KdV) equation. Such a wave represents a stationary weakly nonlinear solution of the KdV equation. It does not however satisfy the fully nonlinear

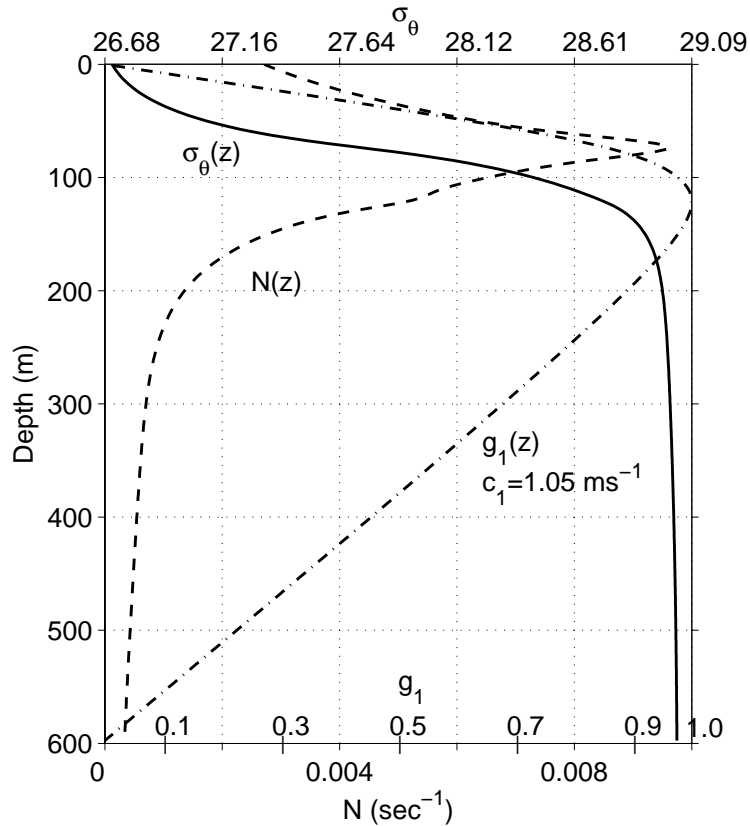


Figure 6.1: Solid line: density profile used in the numerical experiments. Dashed line: associated buoyancy frequency. Dashed-point line: Normalized vertical wave displacement of the first baroclinic mode.

non-hydrostatic equations in the case of large amplitude waves considered here. So, being inserted into the numerical model the wave start to evolve (even without the rotation) and transforms into a new steady-state wave in which strong nonlinearity is in a balance with all other effects. It takes about 20-30 wavelengths for the leading wave to evolves into a isolated stable ISW well separated from the secondary wave tail. This leading ISW is taken hereafter as initial field for our numerical experiments.

The computational domain is a rectangular grid with resolution $\Delta x = 50$ m, $\Delta y = 900$ m, along and cross-channel, respectively, and vertical step $\Delta z = 7.5$ m in upper 300 m layer and 50 m below it. This configuration was found quite realistic to capture all the details of the three-dimensional evolution of ISWs. All other model parameters were as follows: vertical turbulent viscosity and diffusivity coefficients were $\nu_V = 10^{-3}$ m^2s^{-1} and $\kappa_V = 10^{-5}$ m^2s^{-1} , whereas horizontal coefficients were both $\nu_H = \kappa_H = 10^{-2}$

m^2s^{-1} .

At the eastern boundary of the domain we set zero value for all wave disturbances provided that the wave did not reach this boundary yet. At the western boundary the radiating type Orlanski open boundary conditions were used. Moreover this western boundary is taken far enough to prevent any reflected unphysical signal. At the solid boundaries, the non-slip condition is imposed.

6.4 Reference Experiment

In this section we analyze the reference experiment (RE) in which the transformation of 83m-amplitude ISW in a rectangular channel of $l = 17$ km width situated at 60° latitude is investigated ($f = 1.263 \cdot 10^{-4} \text{s}^{-1}$). Figure 6.2 shows a plan a view of the wave field at several stages of wave evolution. The free surface perturbations produced by the internal waves are used as a tracer of wave fronts. This method of visualization is possible because internal waves of depression produce small-scale elevations at the free surface (a few centimetres, in fact), while internal waves of elevation produce similar small-scale depressions (elevation and depression are depicted in dark and light colour, respectively). The black solid numbers in Figure 6.2 represent the wave amplitude at the position where they are located. For instance, panel 2a shows the initial plane ISW of depression with 83 m amplitude. The vertical wave excursion at different depths can be estimated from Figure 6.1 where the dashed-dotted line represents the first eigenfunction of the boundary value problem (6.4)-(6.5).

Figure 6.2 reveals that the above discussed effects related to the influence of the rotation on the propagation of a weakly nonlinear ISW, i.e. formation of a leading Kelvin wave with its ultimate attenuation due to the radiation of secondary Poincaré waves, take place in a strongly-nonlinear case as well. It is clear from Figure 6.2b that after 14.4 hours of evolution the initially plane ISW loses its original two-dimensional structure and starts to radiates secondary Poincaré waves, as predicted by the weakly nonlinear theory. Due to this energy leakage its amplitude decreases from 83 m to about 60-68 m during the first 15 hours of evolution. In addition to that the leading wave gradually transforms into a Kelvin wave with its front curved backward and exponentially decreasing amplitude across the channel, as it was discussed in the afore-

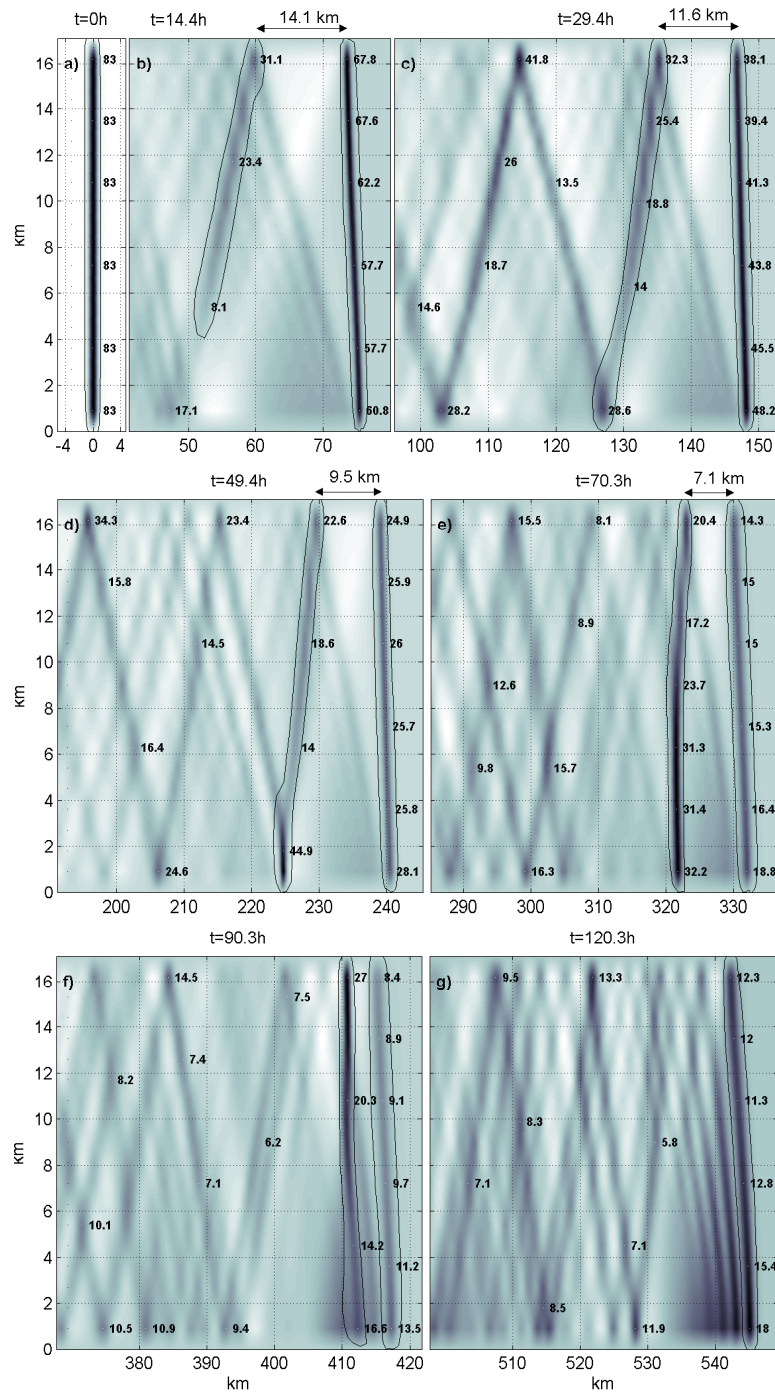


Figure 6.2: Surface topography produced by a ISW of depression at different stages of evolution. Initial amplitudes of propagating wave was 83 m. Surface elevations and depressions are shown by black and white colors, respectively. The black numbers on the wave fronts represent the wave amplitude (in metres) at its particular position. The contours, containing the leading and secondary waves, indicate the volume where total energy is calculated.

mentioned papers on the dynamics of weakly nonlinear waves.

This similarity between the evolution of weak and strong waves does not hold however for a long period of time. At the latest stages of evolution the weakly nonlinear and strongly nonlinear waves behave differently; the former slowly attenuate and gradually vanish transferring their energy to the radiated Poincaré waves, while the large-amplitude ISWs produce also fairly pronounced wave packet of secondary Kelvin waves attached to the leading ISW (see Figure 6.2g). This is a new result which has not been reported yet.

The formation of a packet of secondary Kelvin waves is possible because of the large quantity of energy accumulated in the initial ISW. As a result, not all the energy of the initial wave is radiated in form of Poincaré waves, but part of it remains allocated in the leading wave packet. Similar result on the formation of a localized secondary wave packet from the initial large ISW propagating in infinite rotating basin has been reported recently by Grimshaw and Helfrich (2008). The process of self-organization of secondary Poincaré waves into a packet of Kelvin waves is shown in Figures 6.2b-g. At the first stage the radiated waves are relatively weak with their crests tilted backward. The strongest waves experience multiple reflections from the channel boundaries. It is interesting that the wave amplitude at the point of reflection is much larger than in the middle of the channel. This is a manifestation of the well-known nonlinear effect when the obliquely propagating ISWs, incident and reflected from the wall, generate the Mach stem in the place of interaction, i.e. near the wall in the present case. Several such fragments are seen in panels b, c and d (compare wave amplitudes in the place of reflection with the central part of the channel).

With the course of time the Mach stem gradually transform into a system of secondary Kelvin waves. Analysis of their position with respect to the leading wave gives an amazing result that Mach-stem fragments overcome the leading wave even though they are weaker (the distance between the leading and second wave decreases from 14.1 km at $t=14.4$ h to 9.5 km at $t=49.4$ h and 7.1 km at $t=70.3$ h). This effect can not be explained in terms of traditional nonlinear dispersion because even when the wave amplitude of secondary wave is substantially smaller until $t=40$ h, the distance between the leading ISW and secondary waves decreases over time. As it does so, the second wave is getting even more energetic than the leading one absorbing the energy from

the latter and gradually approaching to it (compare panels d, e and f). Similar effect of secondary Kelvin waves formation occurs in the wave tail as well. Finally, after 120 hours of evolution the initial large-amplitude ISW transforms into a well rank-ordered packet of internal Kelvin waves with their fronts curved backward and amplitudes decreasing exponentially across the channel. This structure is followed by a quite chaotic wave tail (see Figure 6.2d).

An explanation of this transformation (fast wave tail propagation, in particular) can be found in terms of permanent energy radiation. In fact, the system of secondary waves propagating behind the leading ISW is not a quasi-stationary structure, but a system where new born waves are permanently generated. In the course of evolution the leading ISW loses its energy continuously decreasing in amplitude and decelerating due to the nonlinear dispersion. As a result of this wave weakening, the new-born radiated wave is generated closer and closer to it. The situation has analogy with the structure of a shock wave produced by a supersonic object when its speed decreases and, consequently, the associated Mach cone gets wider.

To check the hypothesis that the structure of the attached wave tail remains quasi-stable only due to the permanent transference of the energy from the leading wave to the tail, an additional numerical experiment has been conducted. The initial condition for this experiment was the wave field taken from the RE at $t=10$ hours when both the leading Kelvin ISW, and the attached radiated Poincaré waves are well developed (see Figure 6.3a1). To exclude the energy transfer from the leading wave to the wave tail from the analysis, this wave field was “truncated” by removing the leading ISW. The resulting field is presented in Figure 6.3a2. The evolution of the truncated wave system is shown in Figures 6.3b2-6.3c2 while the evolution of the whole (“non truncated”) wave field is shown in panels 6.3b1 and 6.3c1.

Comparison analysis of the RE with the “truncated” experiment clearly shows that the “far field” of the radiated secondary Poincaré waves (to the left of $x=120$ km in panels c1 and c2) coincides in both cases almost perfectly. Apparently the “far field” does not feel the truncation of the leading wave during the first 20 hours of evolution at all (probably because of the large distance from it). At the same time the “near-field” (between $x=135$ and 150 km in the same panels) in both experiments are completely different.

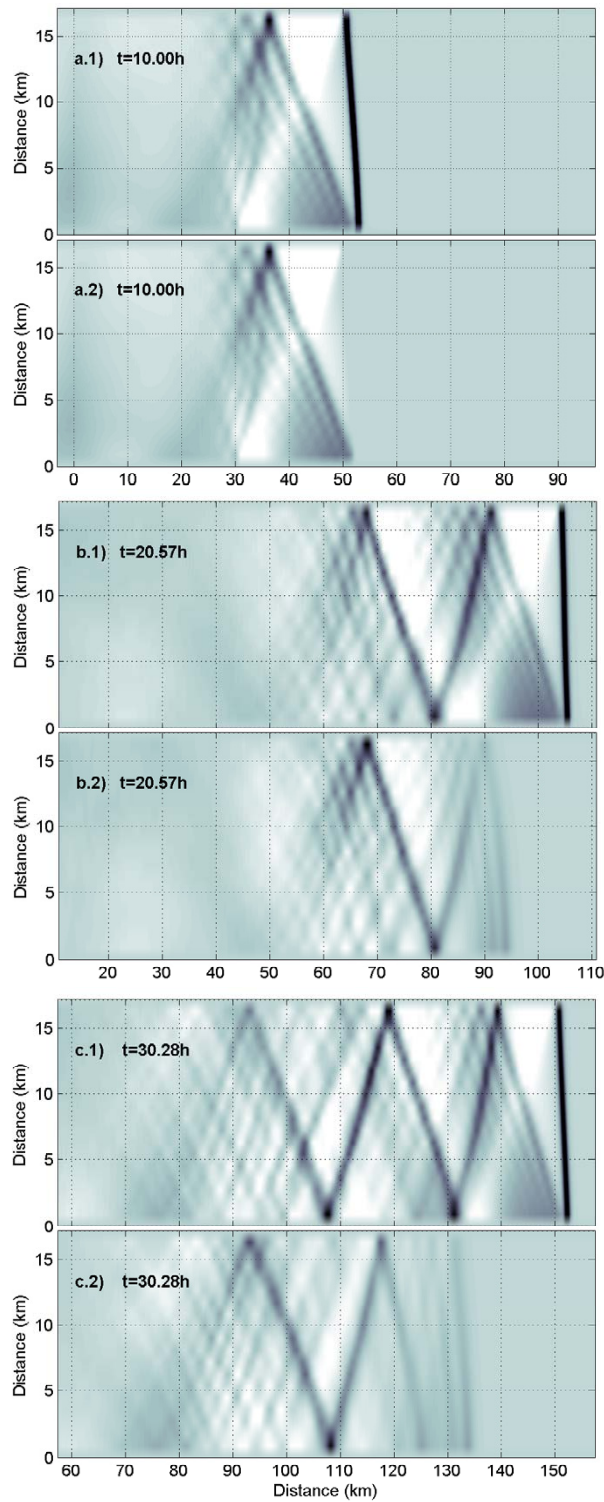


Figure 6.3: a/b/c(1): Plan view of the surface topography during different moments of the RE. a/b/c(2): Evolution of the wave field after removing the initial soliton at the moment presented in panel a.1.

It is empty in the “truncation experiment” (no internal wave signal is observed in this zone) which allows to conclude that the “near-field” is really generated exclusively by the leading ISW, and not by a superposition of overcoming old radiated waves and new-born Poincaré waves.

Thus, the basic outcome from this analysis is that the reconstruction and discussed “compression” of the leading wave field at the early stage of the evolution can be attributed to the high rate of energy loss of the leading ISW. On the other hand, at the latest stages (when $t > 50$ hours) the wave amplitude of secondary waves is getting even larger than that in the leading ISW (see Figures 6.2e-f). This is the reason why the nonlinear effects due to the amplitude dispersion make possible an additional compression of the packet. In addition, the nonlinear collision of several incidentally propagating waves and energy transfer from overcoming stronger rear waves to weaker leading waves (Figure 6.2f) leads to the formation of a well rank-ordered packet of Kelvin waves (see Figure 6.2g).

Let’s consider some more spatial characteristics of the “far-field” of the radiated waves. Figure 6.4 shows the wave field at $t = 120$ hours, the same as in Figure 6.1g, over a larger portion of the domain of computation. Panel 6.4a represents the plan-view of the wave field (surface elevation, as in Figures 6.2 and 6.3) which can be characterized as a superposition of several mostly regular systems of obliquely propagating internal waves generated by multiple reflections from the boundaries. This superposition leads to a less regular spatial distributions of wave amplitude along the channel, as it is seen in Figures 6.4b-d where the profile of isopycnal $\sigma_\theta = 28.5$ along the northern, central and southern sections of the channel is presented. It is clear that only the leading wave packet of Kelvin waves is well rank-ordered whereas the amplitude of the radiated wave tail is nearly randomly distributed (locally they are even bigger than the leading waves).

In order to evaluate the intensity of the energy leakage due to the radiation of the Poincaré waves and to compare this loss with the effect of viscosity on the propagating ISW, another numerical experiment was conducted. All conditions in this experiment were kept the same as in RE except for the rotation, which was removed. As long as the nonlinearity and dispersion in the initial ISW are in a balance (see section 6.2), all changes in its energy (amplitude) can be attributed only to the viscosity. Figure 6.5a

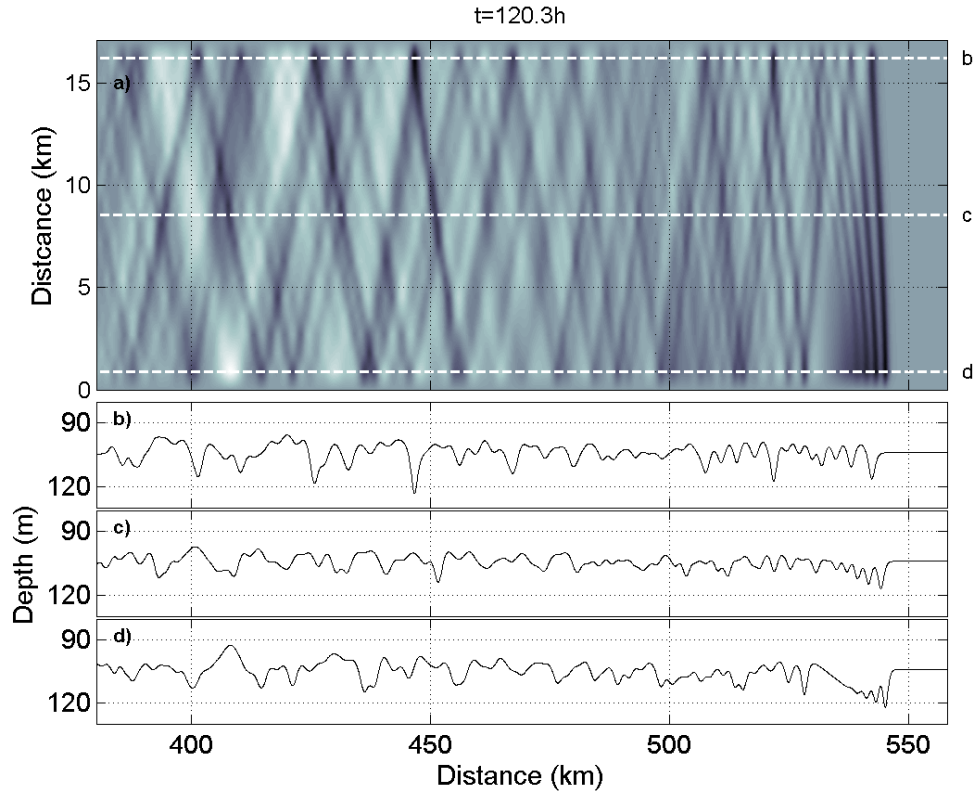


Figure 6.4: (a) Same as Figure 6.2g but covering a larger area. (b), (c), (d) show the isopycnal $\sigma_\theta = 28.5$ along the cross sections indicated with white dashed line in panel a).

shows the rate of change of the total energy (kinetic and available potential) for both cases, with and without rotation (the total energy is calculated within the contours depicted in Figure 6.2).

The basic conclusion which can be drawn from the analysis of Figure 6.5 is that the influence of the viscosity on the wave damping is substantially weaker than that of the rotation. At all stages of evolution the total energy of the leading ISW is several times larger in the case without rotation. This is the result of the wave radiation: during the first 20 hours the total energy decreases several times faster due to this effect than due to the viscous damping, which is seen from the Figure 6.5b where the rate of change of total energy is presented.

It is interesting that the energy of the secondary wave formed within the first 20 hours (dashed lines in Figure 6.5) is practically conserved after that over the whole period of evolution. One can infer from this fact that this energy conservation is

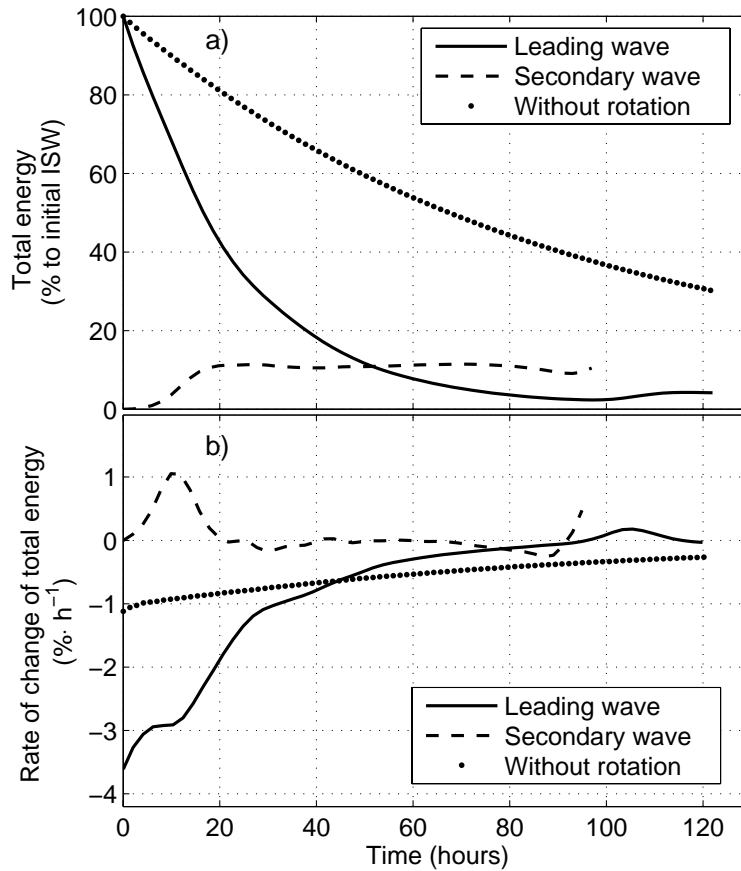


Figure 6.5: a) The total wave energy (kinetic and available potential) of the leading ISW normalized by its initial energy (solid line) and the energy of the secondary wave (dashed line) generated in RE (see Figure 6.2). Dotted line represents the evolution of total energy of the same initial wave (Figure 6.3a) propagating in a nonrotating channel. (b) Rate of change of the total energy $\partial E/\partial t$ over time.

established because of the equilibrium between the energy losses (viscosity, radiation) and energy supply from the leading wave. Another important outcome from this analysis is that the leading ISW not only loses the energy but can also gain some part of energy from the wave tail after $t=120\text{h}$ (see Figure 6.5) due to the effect of the nonlinear wave-wave collision, as discussed above (see Figure 6.2f).

Let's discuss now the cross-channel structure of the leading wave which we treated as a Kelvin wave. This classification is only correct after passing a transition time which is necessary to radiate the Poincaré waves. Evidence of Poincaré waves is seen in Figure 6.6 where the cross-channel distribution of the amplitude of the leading wave

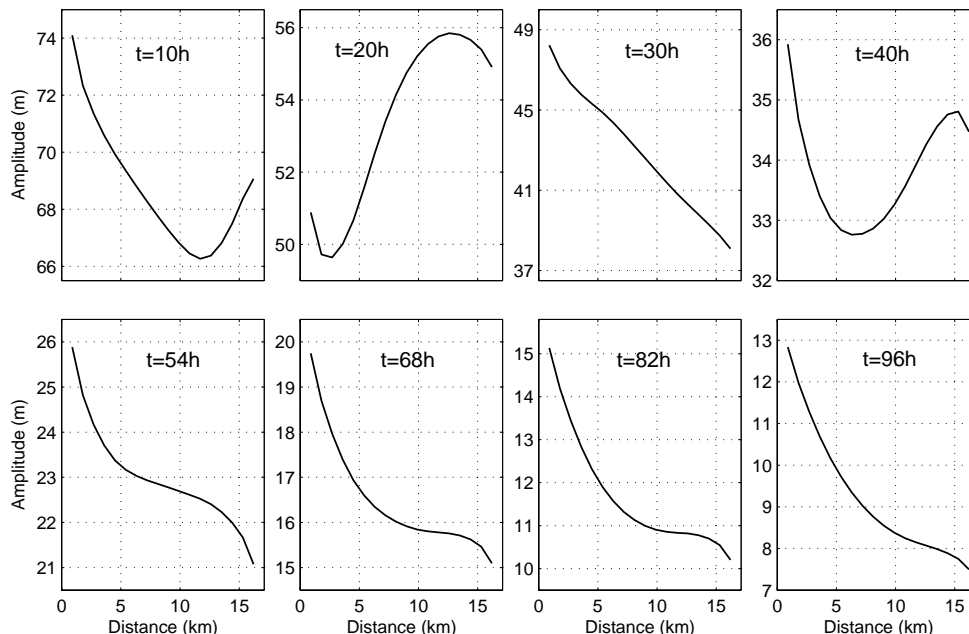


Figure 6.6: Across channel variations of amplitude of the leading wave at different stages of its evolution.

is shown at different times. High order modes influence over the first 40 hours of the experiment is clear from the transverse wave amplitude oscillations. However, as time goes by and these waves are radiated away, a well developed exponential decrease of the wave amplitude peculiar to the Kelvin mode is established across the channel. Note that despite the shape of this curve is fairly stable and close to the exponential one, the amplitude of the leading wave gradually decreases due to a permanent radiation damping.

Another evidence of wave attenuation and higher mode existence is shown in Figure 6.7 which depicts the temporal variations of the wave amplitude at the northern, central and southern section of the channel (see Figure 6.4a). The wave amplitude of the non-rotation experiment is included for comparison. Unsteady transverse oscillations of amplitudes last for about 40 hours after which the regular radiation damping applies. The temporal growth of amplitude after $t=100$ hours is just a manifestation of the nonlinear collision of two waves discussed above (see also Figure 6.2 f and g).

Once examined the evolution of the wave field and the interesting mechanism of the formation of a wave front formed by several Kelvin solitary waves (Figure 6.2g),

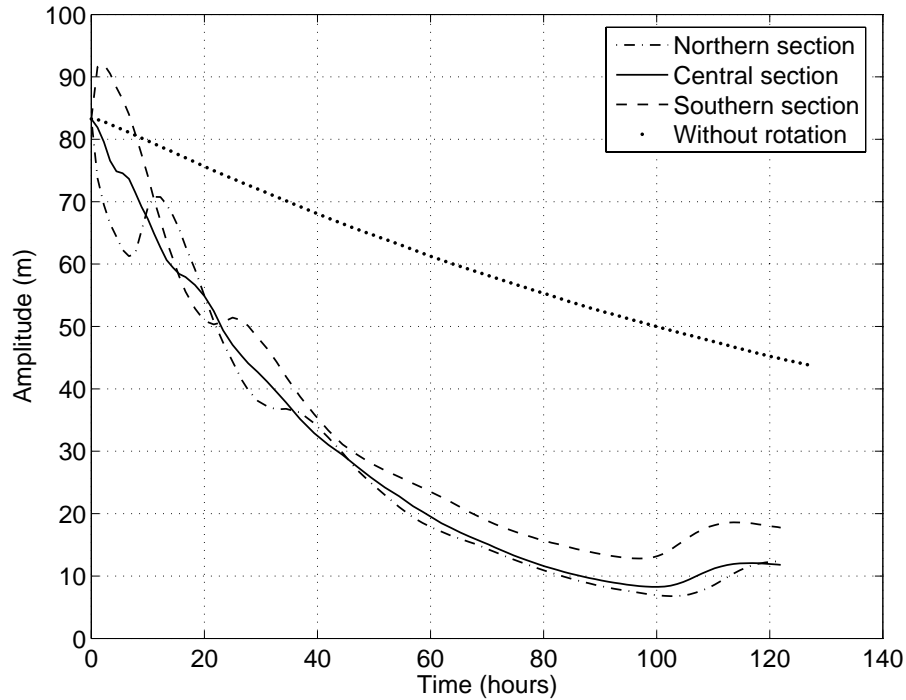


Figure 6.7: The temporal dependence of amplitude along the northern (dashed-dotted line), central (solid line) and southern (dashed line) sections of the channel (figure 4a). The variations of amplitude for the non-rotation experiment is depicted in dotted line.

we follow the further evolution of the wave packet in order to verify if this structure is or not quasi-stable, i.e, if the process of wave-radiation is still remarkable, or, on the contrary, such structure is preserved, at least partially. Figure 6.8 shows the extension of the RE up to 518 hours. Panels 6.8a-6.8b reveals that is the first scenario that take places, since a secondary disturbance is formed at the rear of the packet, and once again interact with the wave front (Figure 6.8c) by the process described above. As a result of the wave packet adopts a new structure containing three internal waves. However this structure conserves a very similar shape and very weak energy loss during the last stage of the numerical experiment (Figure 6.8c-6.8e) suggesting that is the second scenario that dominates in the last stages of evolution. Note that during the last 238 hours the amplitudes of the leading wave is reduced in no more than 40%. Taking into account that the amplitude of the initial solitary wave is reduced in about the same proportion during the first 130 hours due to viscosity (Figure 6.7), one can conclude that the mean reason of the energy damping for the wave packet is the viscosity, rather than the radiation of secondary waves.

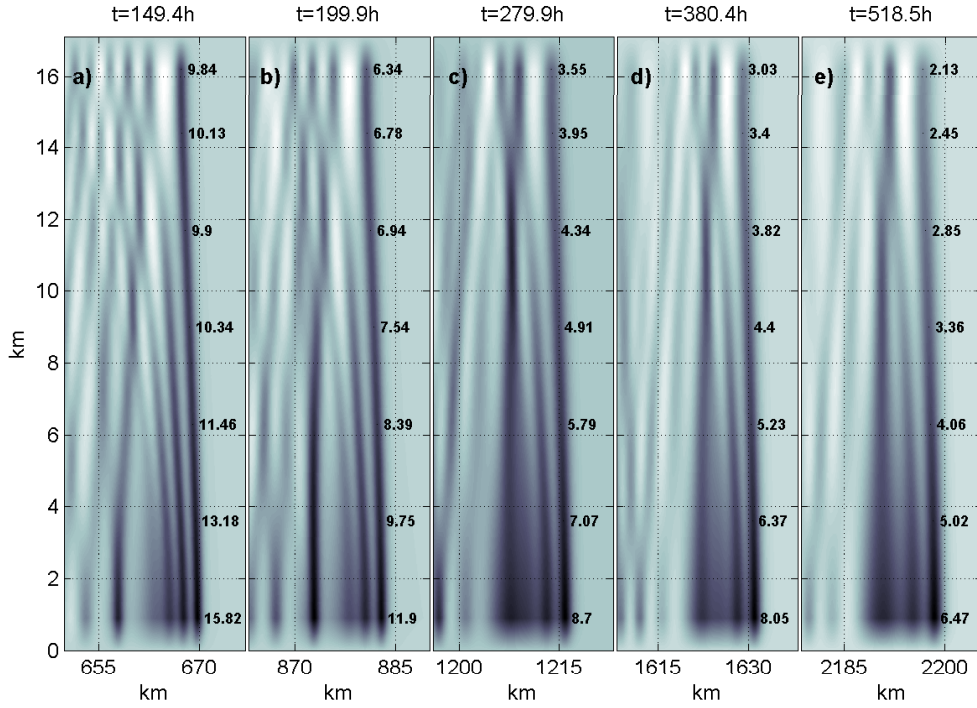


Figure 6.8: Extension of the wave field presented in Figure 6.2.

6.5 Sensitivity to the initial wave-amplitude

The sensitivity of the experiment to the amplitude of the initial solitary wave is analysed next. We start considering an initial soliton of 31 meters amplitude, smaller than in the reference experiment. Its evolution is presented in the Figure 6.9. The situation is rather similar to the RE, namely, fast attenuation of the leading wave-amplitude, generation of radiating Poincaré waves, generation of a Mach stem near the wall (6.9b), and its subsequent evolution to a secondary Kelvin wave that eventually overtakes the leading perturbation (6.9c-e).

Some details certainly present some differences during this first stage of the evolution. The secondary Kelvin wave is developed earlier in the RE (compare Figure 6.2e-Figure 6.9c), and there is not any event of formation of a third Kelvin wave, as occurred in the RE (Figure 6.8a). After the interaction with the secondary wave (Figure 6.9e) the wave packet is restructured, conserving a quite stationary form with weak energy leakage. Interestingly, despite the initial soliton was remarkably smaller than in the RE and its evolution somehow different, the final wave front looks really similar

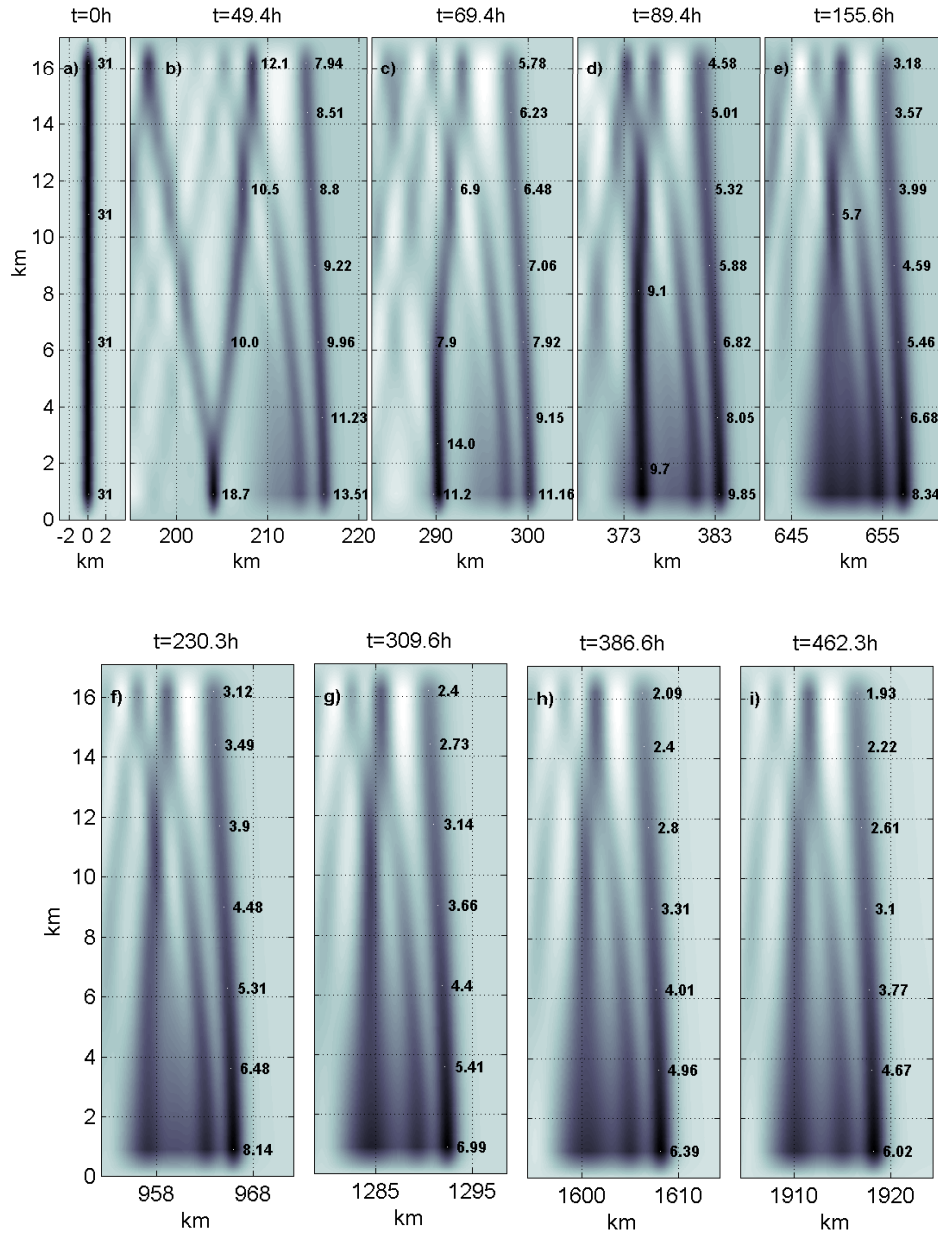


Figure 6.9: As Figure 6.2 with incoming solitary wave of 31 m amplitude.

to the one obtained in the RE (compare Figure 6.8c-e with Figure 6.9f-i).

In a second sensitivity experiment to the initial wave amplitude, we have considered an initial solitary wave of 10 m amplitude. In this case the Mach stem is also formed (6.10b), however it does not reach the wave front during this first stage. In fact, it seems that it will never occur. Panel 6.10e shows the wave field after 500 hours of

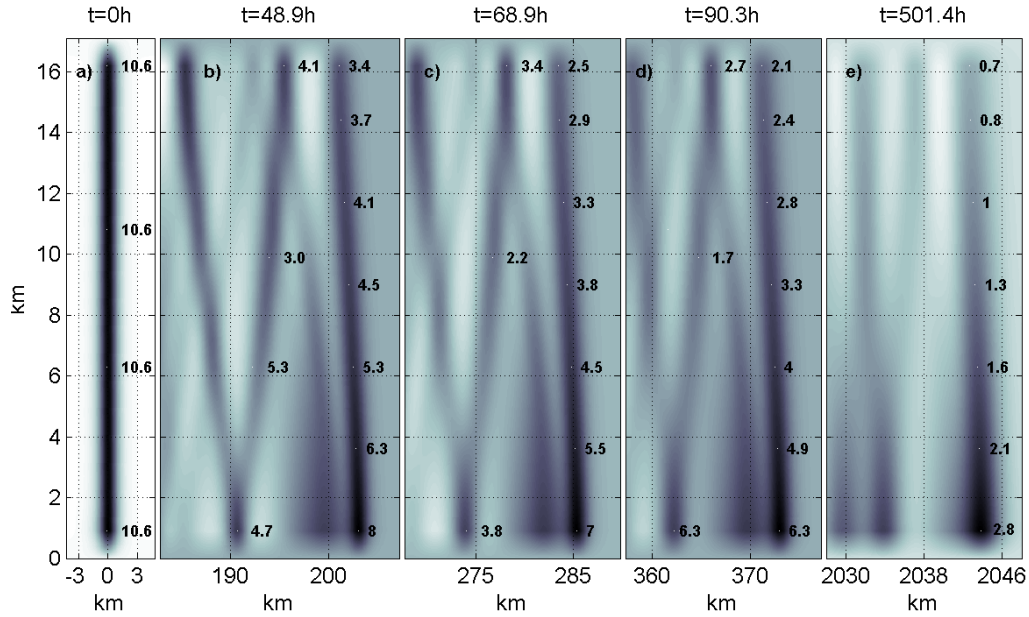


Figure 6.10: As Figure 6.2 with incoming solitary wave of 10 m amplitude.

propagation. Here, the second perturbation still remains far from the leading wave. The latter is quite weak, with maximum amplitude of 2.8 m. The second process favouring the “compression” of the wave front, whose origin is the intense energy radiation from the leading wave, cannot take place due to the limited available energy.

Therefore the conclusion one may draw from this analysis is that there exists a threshold of initial amplitude or energy, for the “compression” process of the wave front described above to take place. It is worth mentioning here that the smaller solitons, with less energy and therefore less available energy to be radiated, losses its energy slower. This fact can be observed in the Figure 6.11, where the temporal evolution of the normalized energy is presented for initial solitons of 83, 31 and 10 metres amplitude. It should be noted that based on the RMKP equation, Akylas (1991), demonstrated that under the assumption of weak rotation effects ($R \gg l$), the radiation damping of the solitary wave due to non-linear resonances with Poincaré modes indeed reduces as the initial amplitude decreases. In order to check that this is the reason of the fast energy damping of higher solitons for strongly nonlinear waves, we have investigated the evolution of the cross-channel structure of the wave amplitude for the three solitary waves mentioned above (Figure 6.12). The Figure indeed shows that the smallest

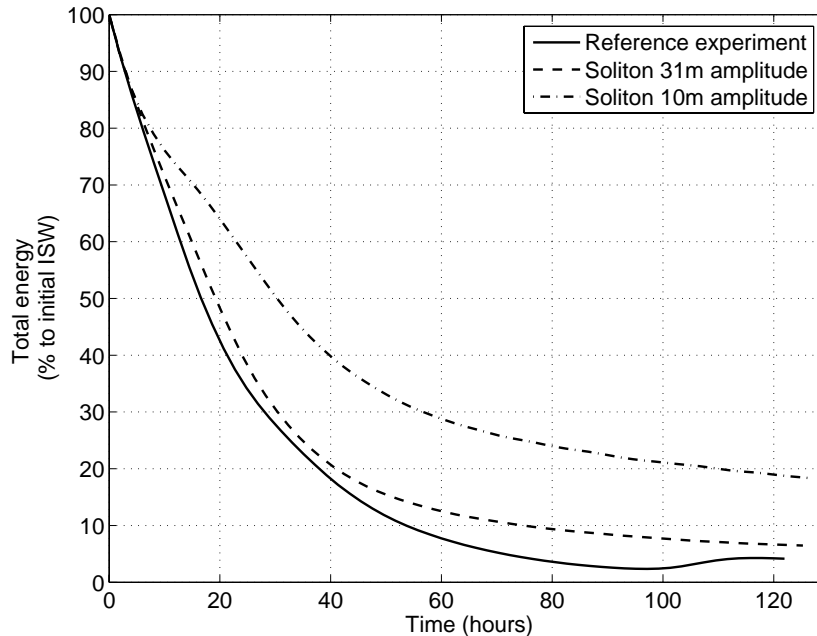


Figure 6.11: The total wave energy (kinetic and available potential) of the leading ISW normalized by its initial energy. Solid line: reference experiment; dashed line: Incoming wave of 31 m amplitude; dotted-dashed line: Incoming wave of 10 m amplitude.

soliton immediately transform in a well developed Kelvin wave, higher Poincaré modes are weak, and consequently, its energy damping is weak as well. On the other hand, larger incoming solitons exhibit cross channel spatial oscillations of amplitude that reveal the presence of Poincaré modes. The higher the soliton, the more energetic are the Poincaré modes, and hence the higher is the energy lost by radiation.

6.6 Sensitivity to rotation and width of the channel

In the last section we have observed that the “compression” process depends on the rate of energy damping of the leading wave. Since this damping by radiation exclusively depends on rotation, it is intuitive that the process will enhance when the effect of rotation increases. This effect can be achieved either by increasing f for a fixed channel width, or increasing the width for f constant.

We have performed two new experiments to analyze the sensitivity to the effect of rotation. In the first one the channel keeps the dimension of the RE and the rotation is

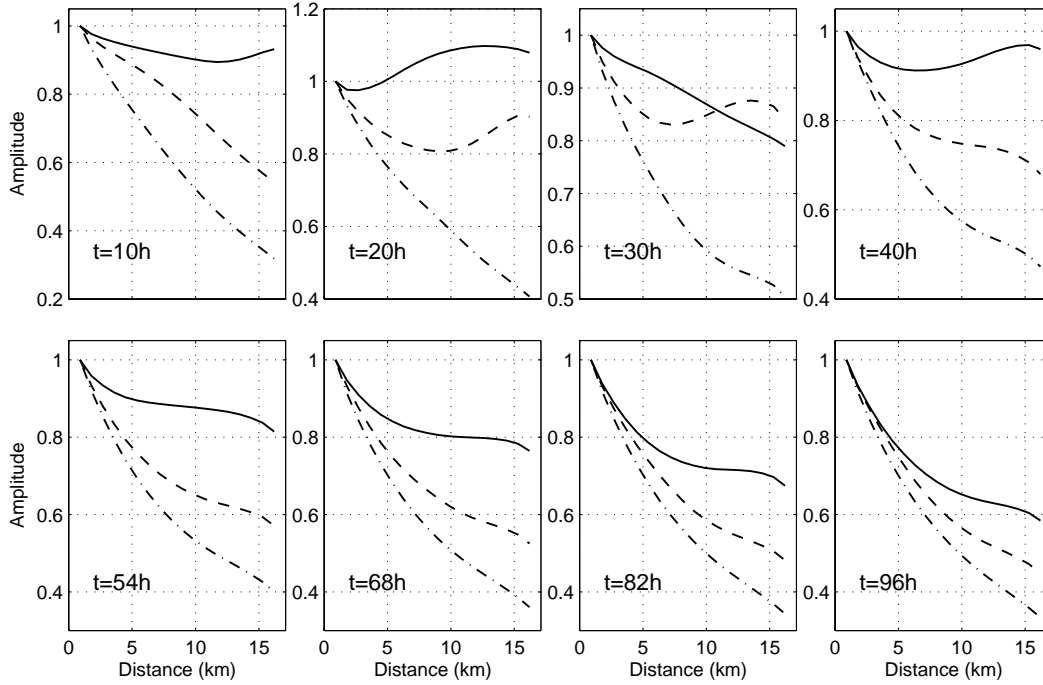


Figure 6.12: Across channel variations of amplitude of the leading wave at different stages of its evolution. Solid line: reference experiment; dashed line: Incoming wave of 31 m amplitude; dotted-dashed line: Incoming wave of 10 m amplitude.

decreased down to $f = 0.857 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ (latitude 36°), whereas in the second experiment the width of the channel is increased to 36 km, and f remains the same as in the RE. Figure 6.13 shows the evolution of the normalized energy for the two experiments. The curve corresponding to the RE is also depicted for comparison.

The energy loss is higher when rotation increases. After 40 hours of evolution, the incoming soliton in case of smaller f loss half of the energy (normalized) of that in the RE. As a result, the secondary Kelvin wave is formed much latter (220 hours, Figure 6.14d) than in the RE (70 hours, Figure 6.2e). As in the RE, after the nonlinear collision a wave packet is formed, keeping a quasi-stationary form with very weak energy loss (panels 6.14f-6.14i).

On the other hand, the energy damping in the wider channel looks quite similar to the observed in the RE. This fact is at first unexpected, at least under the linear perspective, since the effect of rotation should become more important when the ratio l/R increases. However we are dealing with strongly nonlinear waves. The intermediate

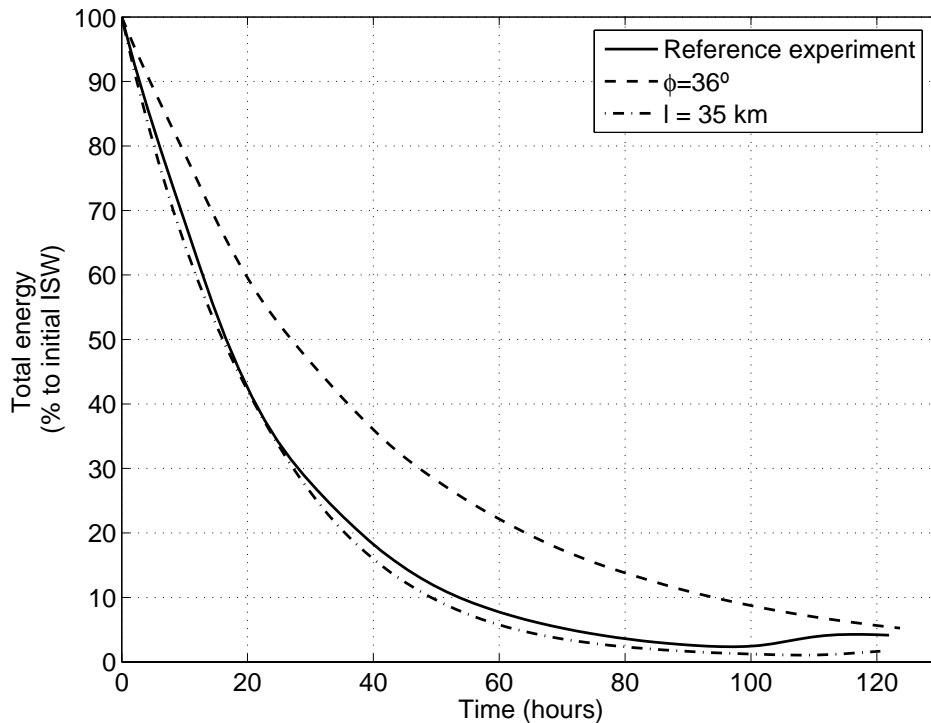


Figure 6.13: The total wave energy (kinetic and available potential) of the leading ISW normalized by its initial energy. Solid line: reference experiment; dashed line: latitude $\phi = 36^\circ$; dotted-dashed line: channel width $l = 35$ km.

stage is the weakly nonlinear regime, that we can explore to find an explanation of this result. Under the weakly nonlinear theory (section 6.2) the intensity of nonlinear coupling between the Kelvin and Poincaré modes, and therefore of the energy damping of the first, depends on the value of $|C_{0pq}|$ (equation 6.7) which are not in general monotonically increasing with l . Figure 6.15 shows the coefficients $|C_{001}|$ ($= |C_{010}| = |C_{100}|$) as a function of the channel width for the parameters of the present study. Note that this term is expected to be the mean responsible of the resonance, since $C_{001}A_0^2A_1$ should be the most important part in the third term of the equation 6.7. It follows from the fact that the first modes dominate, as normally happens in physical systems and can be observed in Figures 6.6-6.12. As it can be observed it increases monotonically just from about 23 km, well beyond the internal Rossby radius, of about 10 km. Another important conclusion from Figure 6.15 is that, for a channel narrower than, say, 60 km width, it is not true that in the wider channel nonlinear resonances becomes more important, as it is observed in our case. In turn, for the two channels

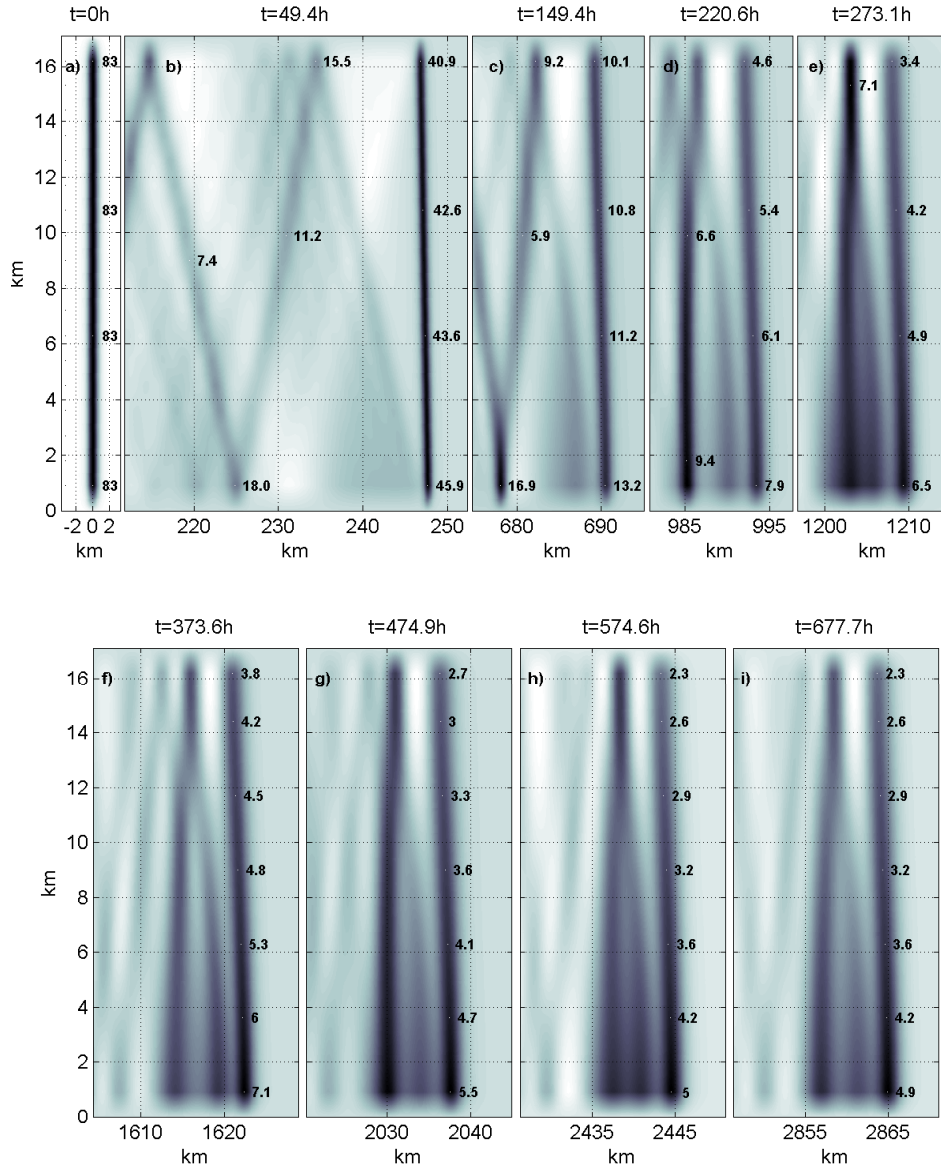


Figure 6.14: As Figure 6.2 at 36° latitude.

considered here, of 17 and 35 km width, the weakly nonlinear theory predict almost the same value for $|C_{001}|$. This is in agreement with the fact that the energy loss is similar in the two cases.

Provided that the energy loss of the leading wave is similar in the RE and in the wider channel, we can study the sensitivity of the wave field evolution exclusively to the width of the channel. In this case, the mechanism of reflection, formation of a Mach stem system near the wall and subsequent evolution to a secondary wave

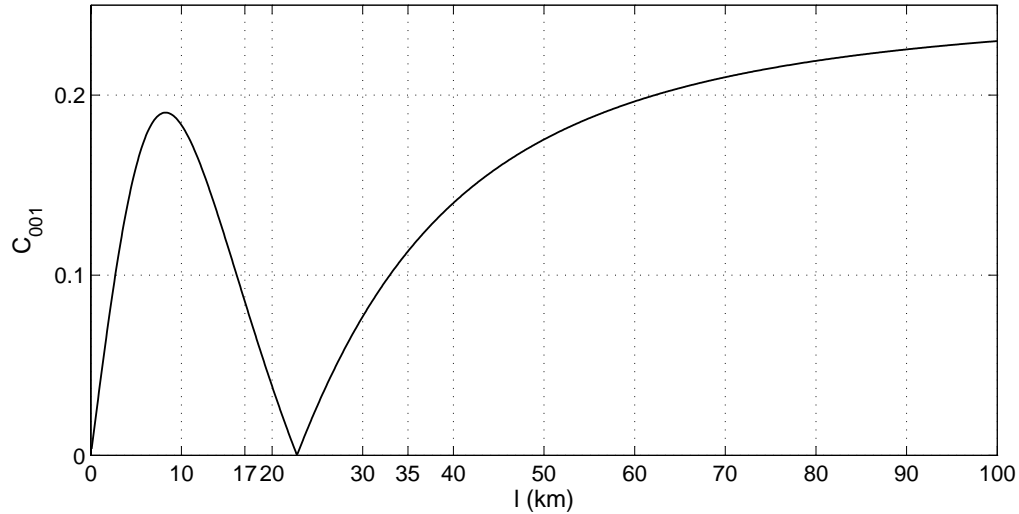


Figure 6.15: Dependence of the coefficients $|C_{001}|$ with the width of the channel. For the computation the mean propagation velocity of the soliton during the first 100 hours of evolution has been taken ($c = 1.30 \text{ ms}^{-1}$).

described above looks more effective (Figure 6.16b-e). Note that the second event of secondary wave formation takes place after 118 hours (Figure 6.16f), whereas in the RE it happened after 200 hours (Figure 6.8b). Moreover additional collisions events (not shown) occur further on.

Another interesting difference is that as a result of the higher width of the channel, the Mach stem is formed farther behind the leading wave (see Figures 6.2c and 6.16b), but despite of it, the final collision takes place about the same time, after 90 hours of propagation (Figures 6.2f and 6.16e). At the final stage of the evolution a quasi-stationary wave packet is formed as in the former cases (6.16g-i). Note however that it presents a different structure of the final packets observed in the narrower channel.

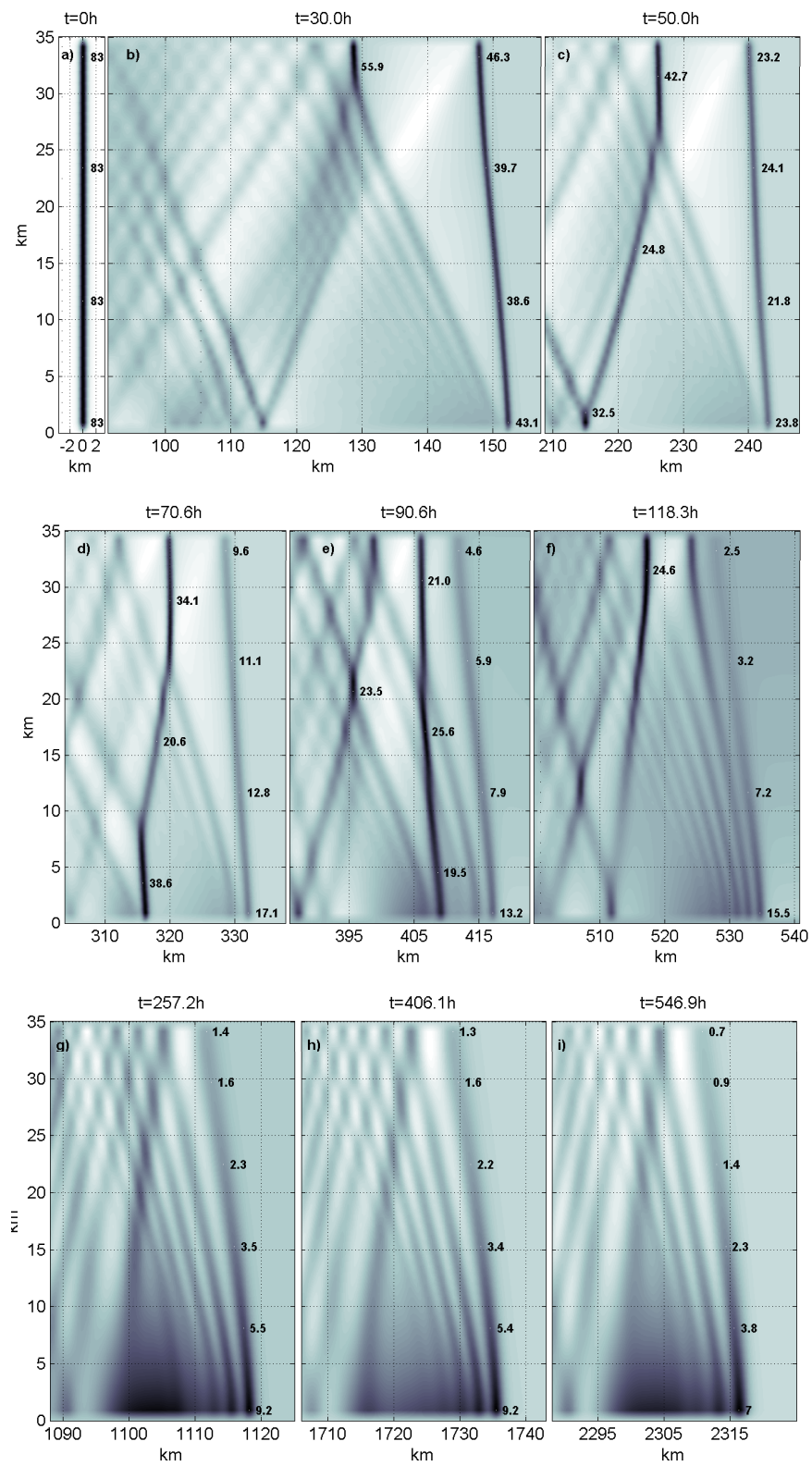


Figure 6.16: As Figure 6.2 in a channel of 35 km width.

6.7 Summary and conclusions

In this work we have numerically investigated long term processes on the evolution of strongly nonlinear solitary waves in a rotating channel. It was found that as a result of multiple reflections at the wall a Mach stem system is formed at the tail of the leading wave, which gradually approaches the latter due to its deceleration induced by its energy loss (nonlinear dispersion). Eventually this Mach stem, as a result of energy absorption from the leading wave transforms into a secondary Kelvin wave more energetic than the leading one, and finish by overtaking it. This process enhances as either the amplitude of the initial soliton, the effect rotation, or the channel width increases, and finally leads to the formation of a quasi-stationary wave packet of little energy.

The results obtained here have a similarity of the findings of Helfrich (2007) for the propagation of solitary waves through an open ocean. In such open domain, solitary waves, able to propagate during several hundred kilometres without losing remarkable amount of energy attributed to viscosity, are likely to undergo long-term processes due to rotation.

On the other hand natural channels of length such as long-term processes described here may take place (several hundred kilometres) do not exist in the ocean. Nevertheless the academic issue investigated here implies a new evidence that, in the long-term, rotation effects play a crucial role on solitary waves dynamics.

Capítulo 7

Escenarios de generación de ondas internas en el Estrecho de Gibraltar

7.1 Introducción

Hasta el momento se ha abordado exclusivamente problemas asociados con la propagación de ondas internas, sin investigar con detalle las causas de su generación. En el capítulo 2 se explicó con brevedad los mecanismos generales de generación de ondas como fruto de la interacción de un flujo barotrópico con un umbral; no obstante un análisis detallado del fenómeno en el Estrecho está aún pendiente. A Brandt et al. (1996) se debe el primer experimento numérico capaz de reproducir el proceso de generación de ondas internas en Gibraltar de forma satisfactoria. Su modelo, contiene muchas e importantes simplificaciones; es bicapa, unidireccional, débilmente no hidrostático y sin considerar la rotación. Aún así es capaz de reproducir la generación de un bore interno en Camarinal y su posterior desintegración en ondas solitarias. A pesar del relativo éxito para explicar ese complejo e interesante fenómeno, las conclusiones aportadas por estos autores se limitan esencialmente a aspectos cinemáticos de las ondas como la dependencia espacial de la velocidad y los efectos dispersivos. Más tarde a partir de datos experimentales y un modelo más complejo Vázquez et al. (2006) sugieren la existencia de un segundo modo baroclino generado en Camarinal, que se añade al primer modo más conocido y estudiado, segundo modo cuya presencia ya había sido observada y analizada por Armi y Farmer (1988) con menos detalle. En el presente capítulo se pretende avanzar en el conocimiento del fenómeno mediante un modelo más realista que incluya la práctica totalidad de aspectos ignorados. En especial, la naturaleza totalmente 3D del modelo lo hace particularmente novedoso y proporciona multitud de detalles sobre la generación y propagación del bore interno que escapan a formulaciones más sencillas.

Los datos obtenidos en un dominio 3D de alta resolución son potencialmente una fuente de extensa e interesante información acerca del fenómeno de generación de ondas internas de corta escala y procesos derivados. Dejando aparte detalles minuciosos, este capítulo aborda dos de los aspectos más importantes (sino los dos más fundamentales): el análisis de escenarios de generación en función de la intensidad de flujo barotrópico de marea que incide sobre el Umbral de Camarinal, y algunos efectos transversales inducidos por la rotación.

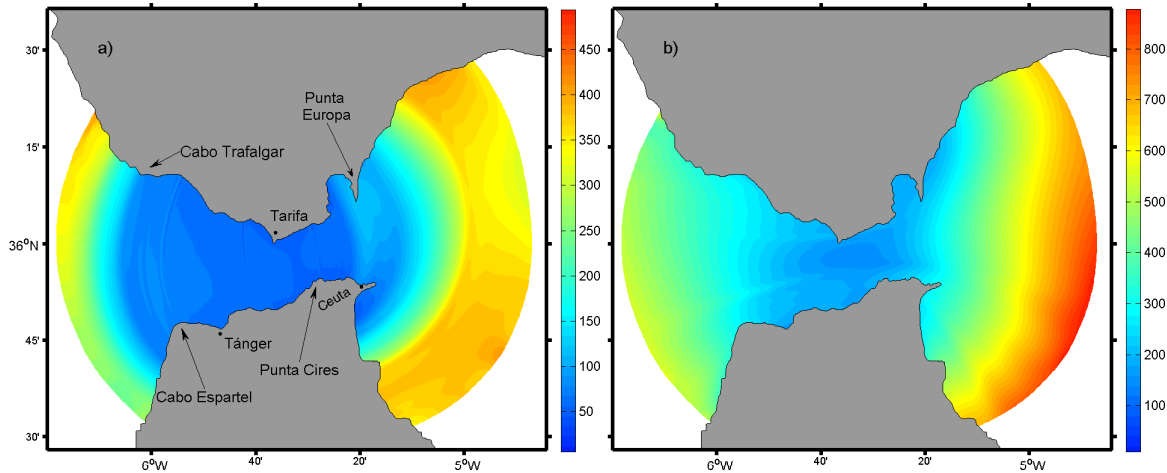


Figure 7.1: a) Resolución espacial del modelo en la dirección a lo largo del Estrecho (en metros). Resolución espacial del modelo en la dirección transversal al Estrecho (en metros).

7.2 Modelo para el estudio de la generación

7.2.1 Dominio y cierre turbulento

Nuevamente el esquema no hidrostático del MITgcm es la base del modelo. El dominio consiste en una región de unos $120 \times 100 \text{ km}^2$ centrada en el Estrecho, discretizado mediante una malla curvilínea ortogonal cuya resolución se muestra en la Figura 7.1. La mínima resolución en la dirección longitudinal del Estrecho es de 50 m, mantenida prácticamente desde Cabo Espartel a Punta Europa. La resolución en dirección transversal es 200 m en esta sección, disminuyendo paulatinamente hacia los contornos abiertos. La componente vertical es discretizada mediante 53 z -niveles. En los primeros 300 m de la columna de agua la resolución es de 7.5 m, disminuyendo gradualmente hasta los 100 m. Al igual que en el capítulo 5 se sigue la parametrización de Pacanowski y Philander (1981) para los coeficientes de viscosidad y difusión turbulentos verticales, dependiente del número de Richardson. Los coeficientes de viscosidad turbulentos horizontales son parametrizados según Leith (1968, 1996), proporcionales al producto del gradiente horizontal de vorticidad por el cubo de la escala espacial de la malla. Esta constante de proporcionalidad K , los parámetros libres del esquema de Pacanowski y Philander (1981, ver capítulo 5), y el coeficiente de fricción con el fondo C_d son seleccionados de tal forma que:

- Estén dentro del rango de lo razonablemente asumible.
- La intensidad de mezcla sea similar a la observada en el Estrecho. Una medida de ella la han proporcionado series temporales sinópticas de salinidad obtenidas en el fondo de los Umbrales de Camarinal y Espartel. Cerca del fondo, el agua Mediterránea saliente por el umbral de Camarinal posee una salinidad de prácticamente 38.5 (Bryden et al. 1994; Tsimplis y Bryden 2000; Millot 2006) en tanto que por el umbral de Espartel, cerca del fondo también, la salinidad se ha reducido a 38.4 o valores ligeramente inferiores. La razón de esta disminución hay que buscarla en la intensa mezcla con Agua Atlántica que ocurre en la Cuenca de Tánger, entre ambos umbrales, forzada por el salto hidráulico interno. De hecho, García-Lafuente et al. (2007) indican que la proporción de Agua Atlántica en las inmediaciones del fondo en Camarinal es inferior al 2% en tanto que en Espartel pasa a ser del 5% aproximadamente. Estos hechos se han tenido en cuenta a la hora de asignar valores numéricos a los coeficientes de difusión turbulentos.
- Los perfiles medios de velocidad que proporcionan el modelo en distintas secciones (Camarinal, Espartel) se ajusten a los medidos experimentalmente.
- El modelo sea numéricamente estable.

Los valores numéricos $K=2$, $\nu_b=1.5\cdot 10^{-4}$ m²s⁻¹, $\kappa_b=10^{-5}$ m²s⁻¹, $\nu_0=1.5\cdot 10^{-2}$ m²s⁻¹, $\alpha=5$, $n=1$ y $C_d=2\cdot 10^{-2}$, cumplen satisfactoriamente los anteriores requisitos.

7.2.2 Establecimiento del intercambio medio

Para obtener el intercambio medio en el Estrecho, el modelo parte de condiciones iniciales que determinan una situación de lock-exchange. Ésto es, el Estrecho es separado por una barrera imaginaria situada en el Umbral de Camarinal en dos cuencas de diferentes perfiles de salinidad y temperatura, característicos de la entrada del Mar de Alborán al Este y de la Cuenca de Tánger al Oeste. En las fronteras abiertas se prescribe salinidad, temperatura y velocidad fijas, obtenidas de las salidas del modelo sin forzamiento de marea descrito en Sannino et al. (2004). También, se establece una capa adyacente a los contornos (“sponge layer”) dentro de la cual los campos antes mencionados son relajados hacia los valores prescritos siguiendo a Glenn et al. (2007).

Tras abrir la barrera imaginaria que separan los dos tipos de aguas se produce un brusco intercambio debido a los intensos gradientes de densidad, que se ajusta paulatinamente según la imposición de las condiciones de contorno. Tras 12 días de evolución la energía cinética del sistema se estabiliza, dando lugar a un estado de intercambio quasi-estacionario. La Figura 7.2a muestra la velocidad en superficie de este estado estacionario, donde se aprecia el chorro de agua Atlántica adentrándose en el Mar de Alborán, tomando dirección Noroeste debido a la presencia del giro anticiclónico de Alborán. El transporte en la sección de Espartel asociado a este estado es de aproximadamente 1 SV para el flujo entrante y saliente, tal como se estima en el Estrecho (Sánchez-Román et al. 2008). Por tanto las condiciones de contorno efectivamente parecen determinar un intercambio razonable.

Es interesante observar la estructura transversal del flujo. El panel 7.2b muestra la sección de Camarinal, donde se registran velocidades de hasta -1.5 ms^{-1} . Tal como predice el balance geostrófico, la isolínea de velocidad cero está inclinada, estando más profunda hacia el Sur. De hecho esa inclinación predicha por el modelo reproduce correctamente la estimada a partir de una aproximación de flujo bicapa. Es fácil comprobar que bajo un balance geostrófico la pendiente de la interfaz, coincidente con la isolínea de velocidad nula en un modelo bicapa, viene dada por:

$$\tan\gamma = \frac{f \rho_M u_M - \rho_A u_A}{g \rho_M - \rho_A}, \quad (7.1)$$

donde ρ_A , u_A son la densidad y velocidad de la capa Atlántica, y ρ_M , u_M lo propio para la Mediterránea. Promediando en las regiones separadas por la isolínea de velocidad cero, se obtiene $\rho_M=1029.0 \text{ Kg}\cdot\text{m}^3$, $\rho_A=1027.2 \text{ Kg}\cdot\text{m}^3$, $u_A= 0.32 \text{ ms}^{-1}$, $u_M= -0.72 \text{ ms}^{-1}$. Estos valores determinan una pendiente de un 0.5%, acorde a la inclinación observada en la Figura 7.2b (ver línea discontinua).

7.2.3 Forzamiento astronómico

Una vez resuelto el problema de lock-exchange y alcanzar el estado de equilibrio correspondiente al “intercambio medio”, se incluye el forzamiento astronómico. La manera de hacerlo es imponer un flujo barotrópico de periodicidad mareal en los contornos abiertos. Las constituyentes de marea consideradas son las dos más importantes de

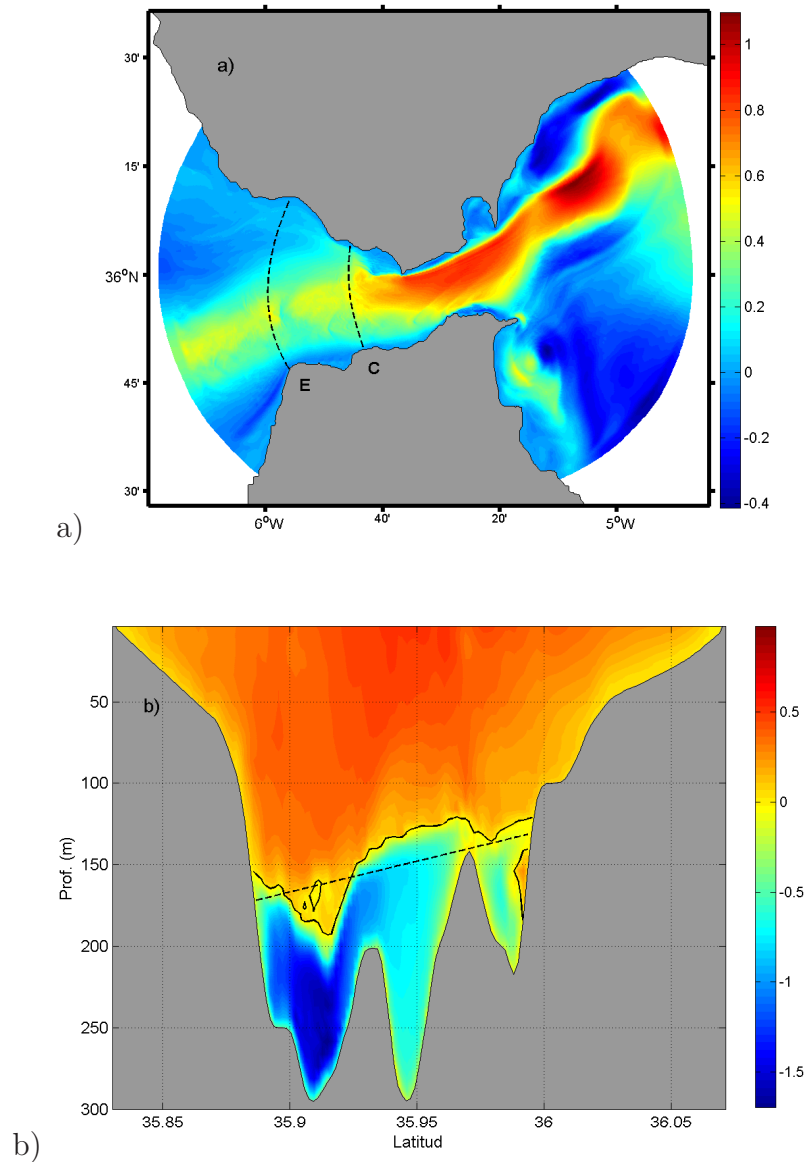


Figure 7.2: a) Velocidad en superficie asociada al intercambio medio (componente zonal de la malla, en ms^{-1}). Con líneas discontinúas se marcan la sección de Camarinal (C), y la de Espartel (E). b) Velocidad en la sección de Camarinal (en ms^{-1}). La línea continua es la isolínea de velocidad cero, y la discontinua indica la inclinación ésta según un balance geostrófico (ver texto).

las especies diurna y semidiurna en el Estrecho (García-Lafuente et al. 2000), K_1 , O_1 , M_2 , S_2 . Nuevamente las salidas del modelo presentado por Sannino et al. (2004) son tomadas para extraer los armónicos correspondientes.

Amplitud Observaciones					
Const. \ Posic.	Espartel	Camarinal	Tarifa	Algeciras	Alborán
M ₂	46.09±1.60	109.08±2.10	60.64 ± 10.76	34.25 ± 0.65	13.38 ± 1.15
S ₂	15.61±5.12	36.31±2.09	18.08 ± 10.14	11.16 ± 0.77	4.33 ± 1.05
O ₁	15.55±0.71	27.15±1.03	11.27 ± 4.23	6.82 ± 0.81	2.40 ± 0.35
K ₁	15.78±0.77	24.66±1.02	13.69 ± 4.19	7.82 ± 0.69	2.16 ± 0.35
Fase Observaciones					
M ₂	151.3±1.9	139.6±1.0	131.6 ± 10.5	155.9 ± 1.3	138.4 ± 4.8
S ₂	166.3±5.1	166.1±3.0	151.4 ± 32.2	159.6 ± 3.5	131.2 ± 15.9
O ₁	30.7±2.3	8.9±2.4	349.6 ± 19.9	0.6 ± 6.2	11.6 ± 7.7
K ₁	92.7±3.1	86.2±2.2	52.9 ± 17.7	53.1 ± 5.6	80.6 ± 9.2
Amplitud Modelo					
M ₂	60.07 ± 0.23	119.22 ± 0.46	58.14 ± 1.09	43.86 ± 0.62	14.97 ± 0.29
S ₂	20.7 ± 0.23	42.11 ± 0.43	19.14 ± 0.99	14.68 ± 0.57	5.33 ± 0.254
O ₁	8.42 ± 0.11	18.01 ± 0.26	8.36 ± 0.28	4.69 ± 0.21	2.31 ± 0.21
K ₁	7.98 ± 0.13	18.59 ± 0.25	8.86 ± 0.31	5.12 ± 0.28	2.20 ± 0.24
Fase Modelo					
M ₂	166.8 ± 0.2	167.2 ± 0.2	164.7 ± 1.1	160.1 ± 0.7	164.9 ± 1.1
S ₂	198.3 ± 0.6	198.7 ± 0.5	197.1 ± 2.9	193.1 ± 2.4	193.3 ± 3.0
O ₁	2.4 ± 0.8	353.2 ± 0.7	351.1 ± 1.8	337.1 ± 2.9	340.1 ± 5.7
K ₁	260.1 ± 0.9	256.7 ± 0.7	252.4 ± 1.7	240.5 ± 2.9	238.1 ± 5.9

Table 7.1: Resultado del análisis armónico realizado a las velocidades barotrópicas (promedio vertical) en diferentes puntos del Estrecho de Gibraltar: el umbral de Espartel, el umbral de Camarinal, el Estrechamiento de Tarifa, frente a la bahía de Algeciras, y en la entrada del Mar de Alborán (ver nota en pie de página). Se muestra una comparativa de las series pertenecientes a datos experimentales, y a las salidas del modelo. El análisis armónico es escalar, realizado a las series de velocidad en su componente a lo largo del Estrecho.

Tras un mes de simulación, se han comparado los valores numéricos con observaciones procedentes de datos históricos de velocidades de corrientes en el Estrecho, con objeto de comprobar la fiabilidad de los resultados producidos por el forzamiento de marea. La Tabla 7.1 muestra una comparativa de los resultados del análisis armónico realizado a las series de velocidad, numéricas y experimentales¹, en cinco puntos situados

¹Series de tiempo obtenidos en los umbrales de Espartel y Camarinal en el marco de los proyecto

a lo largo del eje central del Estrecho. Para simplificar la comparativa se ha considerado las series promediadas verticalmente, que en el caso de los datos numéricos debe ser una buena estimación de la velocidad asociada a la onda de marea barotrópica, pues las series abarcan toda la columna de agua. No lo es tanto para las observaciones dado que su cobertura espacial en la columna de agua no es completa.

Globalmente, existe una buena correspondencia entre las amplitudes de las constituyentes armónicas predichas por el modelo y las calculadas de forma experimental. Para las constituyentes semidiurnas, que comprenden la mayor parte de la energía, el error es en todos los casos inferior al 25%, con excelentes predicciones en casos particulares como por ejemplo la M_2 en Camarinal, Tarifa y Alborán (errores del 9.2 %, 4.1 % y 8.7 % respectivamente). La comparación de las constituyentes diurnas es algo menos benigna. Bastante satisfactoria desde Camarinal hacia la posición de Alborán, con errores inferiores al 33%, pero subestimando la amplitud en Espartel en torno al 50%. Respecto a las fases, éstas difieren a las observadas en $26.5^\circ \pm 15.0^\circ$ para las constituyentes M_2 , S_2 y O_1 . A diferencia del resto, la correspondencia de fases para la constituyente K_1 no es buena.

En lo anterior hemos considerado fujos de marea barotrópicos (promedios verticales). Para comprobar además que la marea baroclina también es reproducida de forma adecuada se puede comparar la estructura vertical de las constituyentes de marea. Según lo visto en el capítulo 2, la velocidad de la corriente para una constituyente de marea en una sección vertical puede expresarse según:

$$U(z, t) = U_B \cdot \cos(\omega t - \phi_B) + \sum_{j=1}^{\infty} U_j(z) \cdot \cos(\omega t - \phi_j), \quad (7.2)$$

donde U_B , ϕ_B son la amplitud y fase asociadas al modo barotrópico; U_j , ϕ_j al modo baroclino j -ésimo, y ω la frecuencia angular de la onda. Si sólo existiese el modo barotrópico, un análisis armónico realizado a las series obtenidas en toda la columna de agua proporcionaría una estructura vertical de amplitudes y fase casi homogéneas

INGRES (Intercambios en el Estrecho de Gibraltar y su respuesta al forzamiento meteorológico y climático, REN03-01608/MAR), en las cercanías de la Bahía de Algeciras ($5^\circ 22.67'W, 36^\circ 59.80'N$, proyecto CANIGO, Canary Islands Azores Gibraltar Observations, MAS3-CT96-0060), y en el estrechamiento de Tarifa y la entrada del Mar de Alborán (posiciones T y E respectivamente, capítulo 3)

(excepto en una región cercana al fondo debido a fricción), iguales a U_B y ϕ_B respectivamente. Por el contrario, la presencia de modos baroclinos da lugar al acoplamiento entre éstos y el barotrópico, resultando perfiles de amplitud y fase variables con la profundidad. Por ejemplo, la superposición del modo barotrópico con el modo baroclino j_0 da lugar a la serie temporal:

$$U(z, t) = U_s(z) \cdot \cos(\omega t - \phi_s), \quad (7.3)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} U_s(z) &= [U_B^2 + U_{j_0}^2(z) + 2U_B U_{j_0}(z) \cdot \cos(\phi_B - \phi_{j_0})]^{1/2} \\ \phi_s &= \arctan \left(\frac{U_B \cdot \sin \phi_B + U_{j_0}(z) \cdot \sin \phi_{j_0}}{U_B \cdot \cos \phi_B + U_{j_0}(z) \cdot \cos \phi_{j_0}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Debido a la presencia de marea interna en el Estrecho de Gibraltar este acoplamiento de modos efectivamente existe, y los perfiles verticales de amplitud y fase para las diferentes constituyentes armónicas poseen una estructura compleja (Tsimplis 2000, Sánchez Román et al. 2007). Ésto puede observarse en la Figura 7.3, que muestra dicha estructura para M_2 y S_2 en Camarinal, obtenida a partir de los datos experimentales y numéricos. Tsimplis (2000) y Sánchez Román et al. (2007) describen con detalle la estructura baroclina de la marea en Camarinal y Espartel respectivamente mediante una descomposición de la señal en modos dinámicos. Tal análisis no será realizado aquí por su extensión, sin embargo sí es preciso observar que la estructura vertical de amplitudes y fases, numéricas y experimentales, presentan una gran similitud en todos los casos, y en virtud de ello podemos afirmar que el modelo reproduce bien la señal baroclina en el Estrecho.

Resumiendo, teniendo en cuenta la compleja estructura de la marea en el Estrecho, podemos concluir de esta sección que el modelo reproduce satisfactoriamente la señal de marea, externa e interna. Particularmente el acuerdo es bueno en lo referente a las amplitudes. Las fases muestran un comportamiento algo menos satisfactorio. El desfase entre M_2 y S_2 , reales y numéricas, es cercano excepto en la parte oriental (Ver

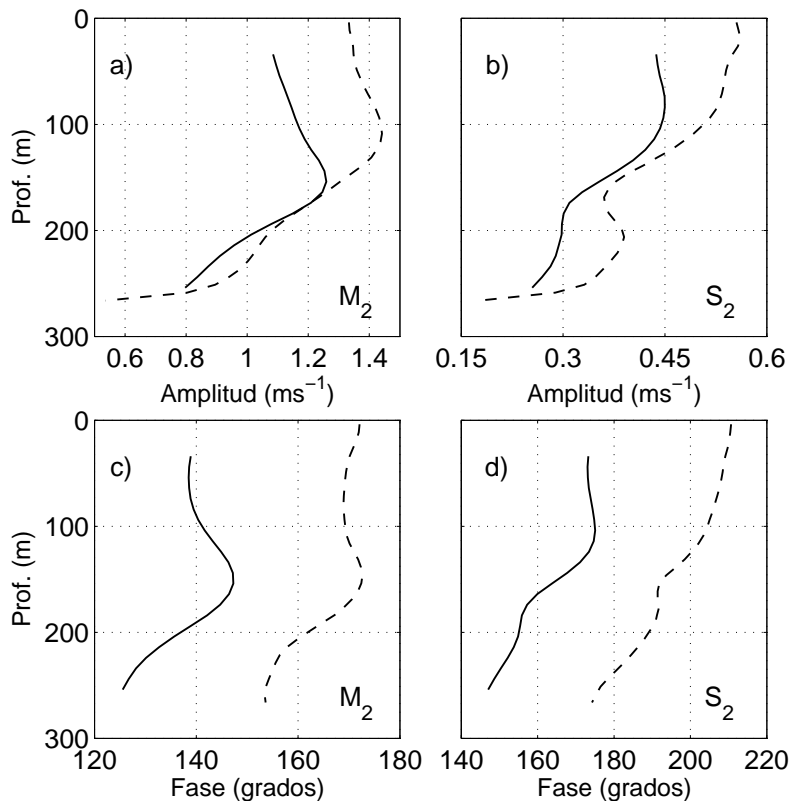


Figure 7.3: a) Estructura vertical de la amplitud de la constituyente de marea M_2 . La línea continua muestra la estructura calculada a partir de la observaciones, y la discontinua a partir de los datos numéricos. b) Igual que a) para la constituyente de marea S_2 . c) Igual que a) para las fases. d) Igual que b) para las fases.

Tabla 7.1 y Figura 7.3), con lo podríamos decir que para las constituyentes semidiurnas, que contienen la mayor parte de la energía, efectivamente el modelo reproduce bastante bien la señal. Menos bueno es el desfase entre M_2/S_2 y O_1 , y nada satisfactorio lo que involucra a las fases de K_1 . Respecto al problema de generación de ondas internas de corta escala, el desacuerdo existentes en las fases no constituye un problema para la simulación adecuada del proceso de generación. En lo que atañe a la marea, éste depende fundamentalmente de la energía del flujo que incide sobre Camarinal, ciertamente bien predicho por el modelo (amplitudes de velocidad de corriente bien reproducidas). El desacuerdo de fases, sólo determinaría el tiempo relativo en el que se suceden los eventos asociados al proceso de generación, como por ejemplo el tiempo de liberación del bore respecto a la pleamar en un punto determinado. Por ello, la falta de un mejor acuerdo entre fases observadas y modeladas no afecta para nada procesos

de generación deducidos del modelo numérico, los cuales se describen a continuación.

7.3 Escenarios de generación de ondas internas

Un estudio exhaustivo de la ingente cantidad de información proporcionado por el modelo ha permitido discernir cuatro escenarios en los que el proceso de generación de ondas internas es sensiblemente diferente. Estos escenarios vienen determinados por la intensidad del flujo barotrópico que incide sobre el umbral de Camarinal, y por tanto también en función del número de Froude máximo durante el ciclo de marea, Fr_{max} , definido como

$$Fr_{max} = \frac{U_{max}}{c}, \quad (7.5)$$

donde U_{max} es el máximo valor de la velocidad del flujo barotrópico durante el ciclo de marea y c la velocidad del primer modo baroclino. Esta velocidad se obtiene al resolver el problema de autovalores 3.2 (Apéndice A), que necesita información sobre los perfiles de densidad y de velocidad media asociados al intercambio baroclino subyacente. Para valores representativos de estos campos de densidad y velocidad media la ecuación 3.2 da un valor $c \approx 0.85 \text{ ms}^{-1}$. Tomando este valor como referencia, los distintos escenarios de generación de ondas internas tienen lugar en los siguientes rangos de Fr_{max} :

- Escenario 1: $Fr_{max} < 1.0$
- Escenario 2: $Fr_{max} \approx 1.0$
- Escenario 3: $1.0 < Fr_{max} < 1.6$
- Escenario 4: $Fr_{max} > 1.6$

Ejemplos de los cuatro escenarios identificados ocurren en los ciclos de marea indicados en la Figura 7.4, que muestra la velocidad del flujo de marea barotrópica sobre el umbral de Camarinal. Los cuatro eventos ocurrientes en los ciclos marcados, representativos de aquellos escenarios, se analizan a continuación.

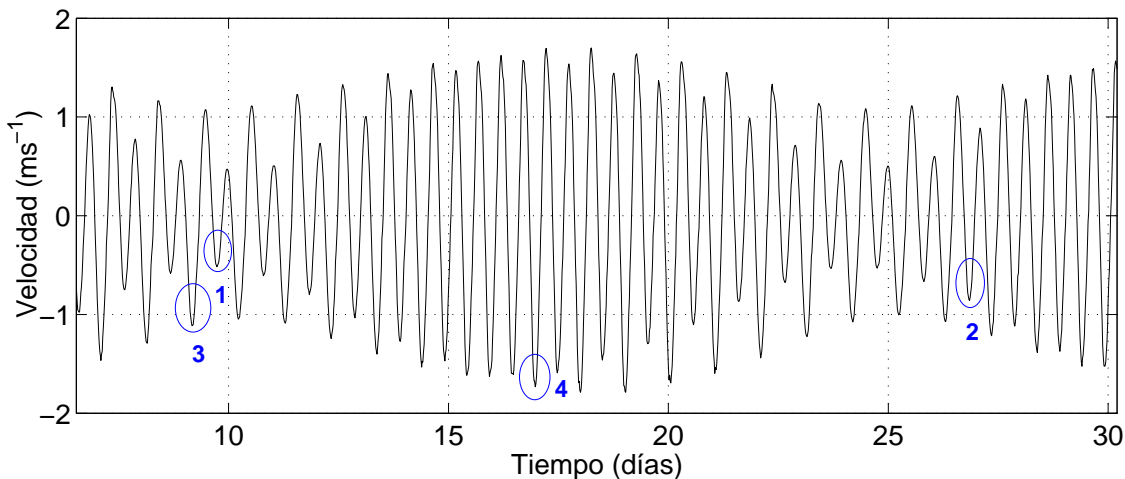


Figure 7.4: Velocidad del Flujo barotrópico sobre Camarinal durante parte del experimento numérico. Se indica en la Figura los ciclos de marea seleccionados para describir los diferentes escenarios de generación.

7.3.1 Escenario 1: Marea interna

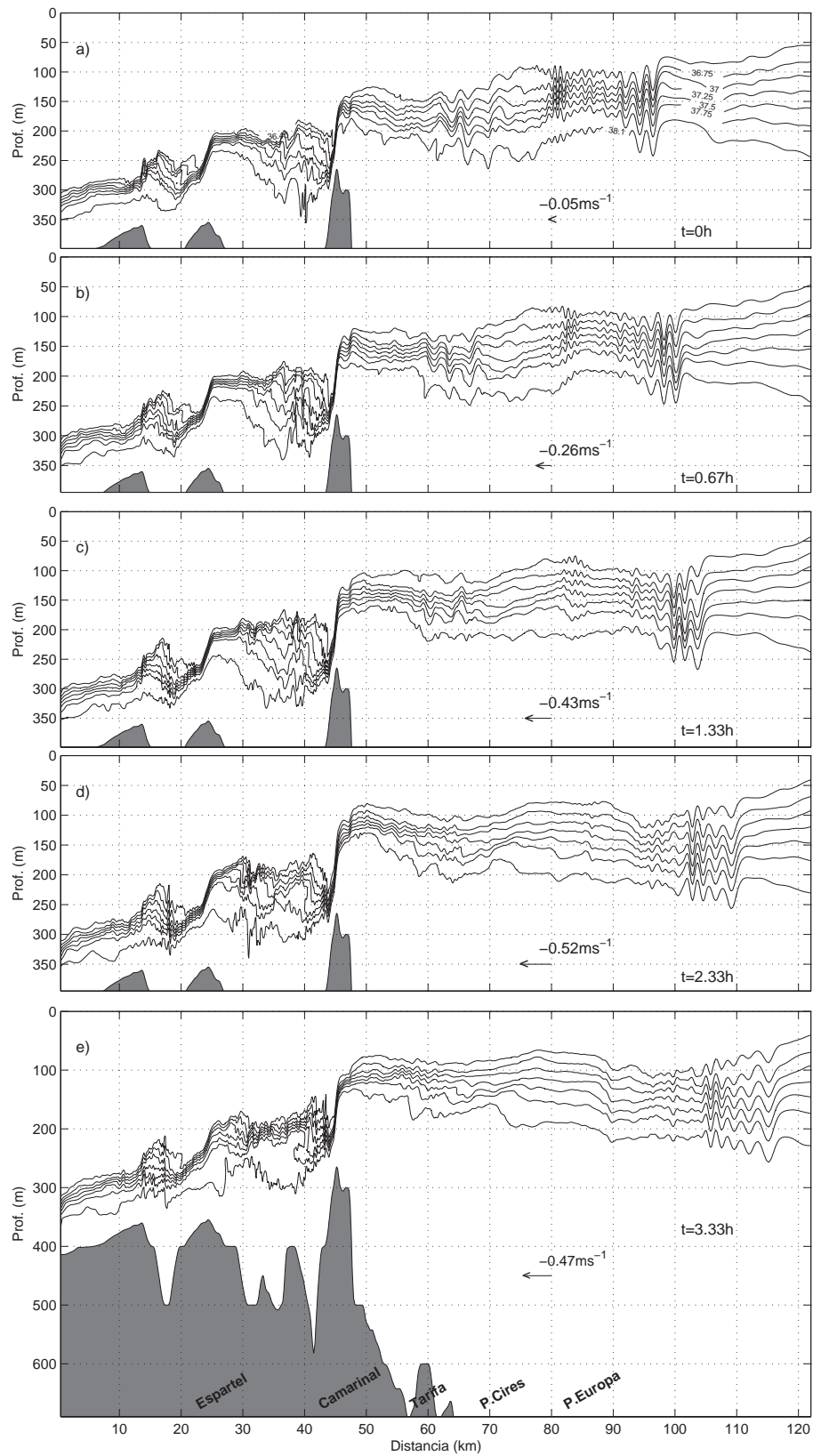
El primer evento a discutir transcurre durante mareas muertas (Figura 7.4). El máximo valor del número de Froude durante el ciclo de marea es de $Fr_{max} = (U_{max}/c) = 0.62$, con lo que el flujo es subcrítico ($Fr < 1$) para el primer modo durante todo el ciclo de marea.

La Figura 7.5 muestra la evolución de diferentes isohalinas durante el ciclo de marea. En el instante inicial (Figura 7.5a) se observa un paquete de ondas internas progresando hacia el Mar de Alborán, generado durante el ciclo de marea anterior. Los detalles de la generación de este tren de ondas solitarias es descrito posteriormente en el escenario 3. Durante las primeras 2.3 horas la velocidad del flujo de marea saliente se incrementa hasta su valor máximo (Figura 7.5d), y fruto de ello se produce un mayor flujo de agua Mediterránea saliente, elevándose de este modo las isohalinas (consecuentemente también las isopicnas) sobre Camarinal. La isohalina de 37.5, clásicamente separando el agua Mediterránea y Atlántica (Bryden et al. 1994, Vargas et al. 2006) sube hasta una profundidad de unos 125 m. En las siguientes tres horas el flujo saliente se debilita hasta finalmente invertir sin la presencia de ondas solitarias: el débil forzamiento de marea no es capaz de generarlas. Lo interesante en este escenario es la presencia de

una onda de larga escala: la marea interna que se aprecia claramente en los paneles 7.5f-7.5j. La velocidad de fase de esta onda puede ser estimada siguiendo la evolución del máximo de las isopicnas (posición marcada en línea discontinua). La onda progresa unos 25 km en 4 horas, lo que supone una velocidad de 1.74 ms^{-1} , valor razonable para la velocidad de un modo interno teniendo en cuenta que la onda progresa en este periodo a favor del flujo. Es interesante observar que las isohalinas oscilan en fase a medida que son alcanzadas por la perturbación; se trata pues de una oscilación interna de modo 1 que domina totalmente la estructura interna. Es igualmente interesante notar que esta propagación es solamente ostensible durante medio ciclo de marea aproximadamente.

No sólo la Figura 7.5 sino la que le siguen muestran que la zona más complicada dinámica y energéticamente es la cuenca de Tánger, entre los umbrales de Espartel y Camarinal. Aunque el objetivo principal de este capítulo concierne a la generación y evolución de ondas internas que ocurre en la parte oriental (Mediterránea) del Estrecho, i.e, al Este de Camarinal, merece la pena dedicar un breve comentario de carácter general a los fenómenos de dicha cuenca. La evolución temporal de las isopicnas indican la generación de un modo interno de orden 2 (segundo modo baroclinico, isopicnas en oposición de fase) que es claramente notorio en las Figuras 7.5d-f y también en otros paneles de los siguientes escenarios.

Un segundo punto a destacar es el papel que desempeña el umbral de Espartel. Realmente, la mayor parte de los fenómenos que ocurren en la cuenca de Tánger es consecuencia de la presencia de este umbral que impone un nuevo y más permanente control hidráulico al flujo Mediterráneo (Sánchez-Román et al. 2009, Sannino et al. 2009). Las Figuras 7.5 a 7.8 muestran que ocurre en este umbral es una réplica en menor escala de lo que sucede en Camarinal con la diferencia que, salvo en instantes extremos (como la que corresponde al escenario 4), allí el control no llega a perderse con la inversión del flujo barotrópico. El análisis de este interesante comportamiento dinámico excede los objetivos de este trabajo y forma parte de planes futuros de investigación.



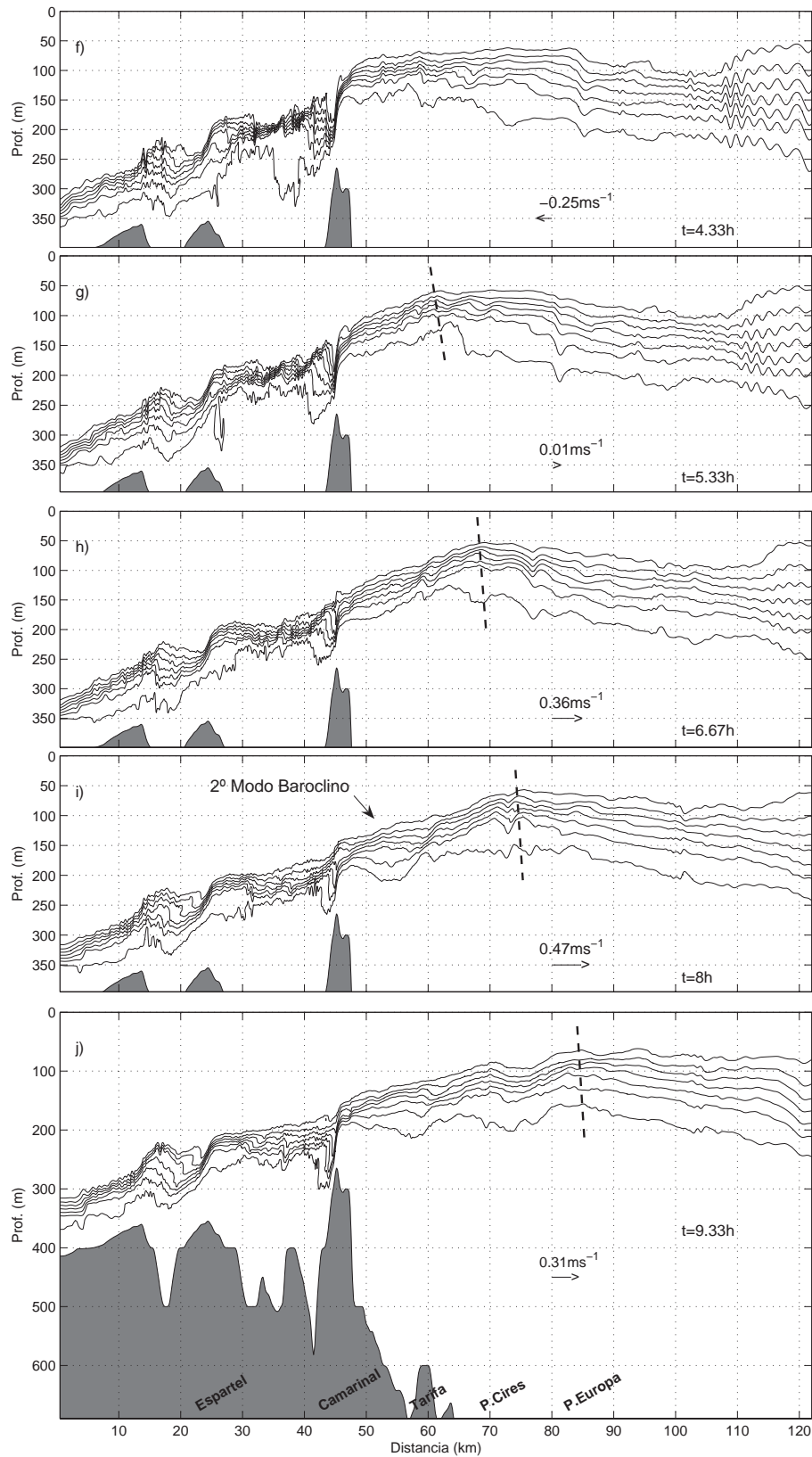
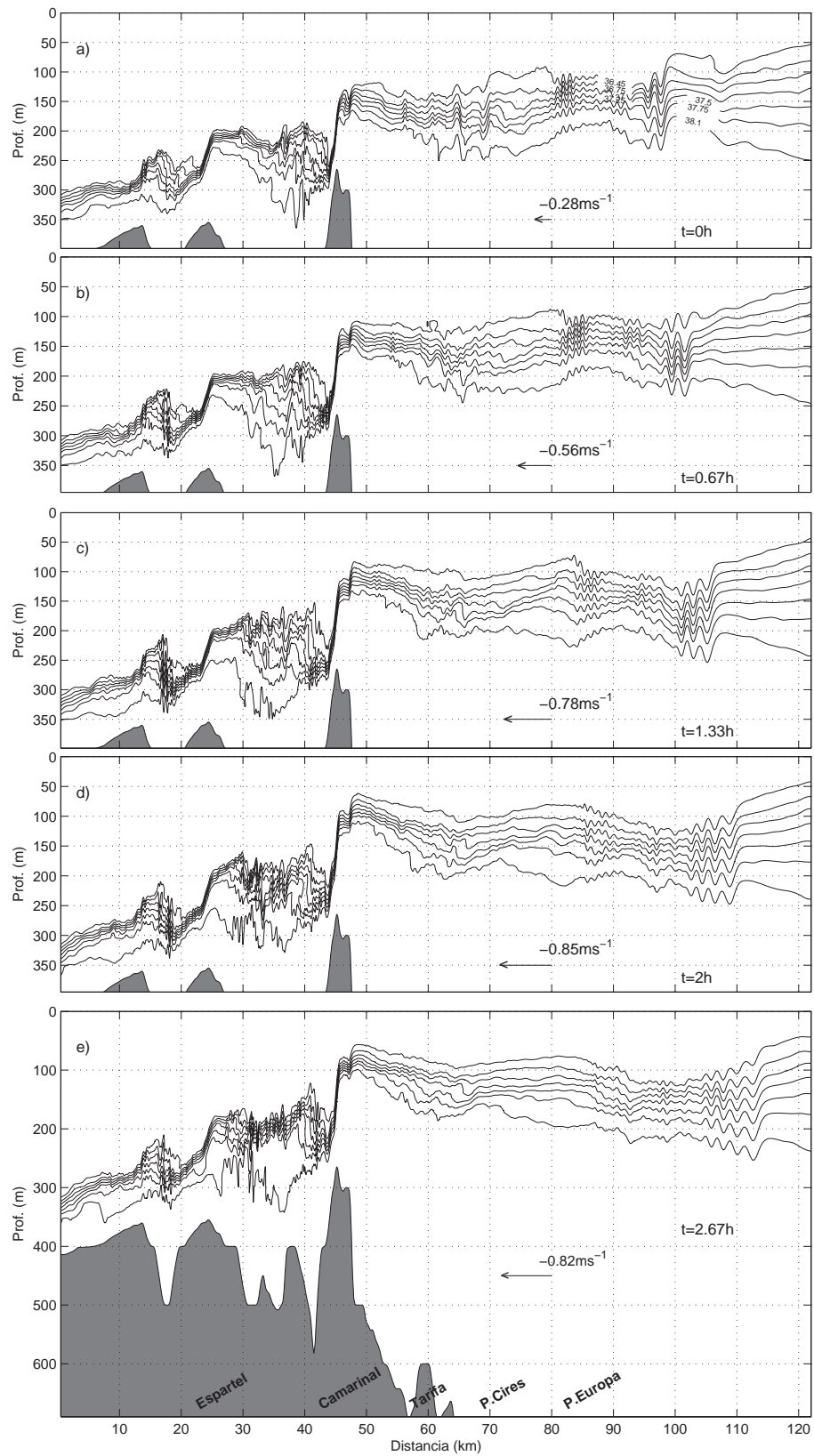


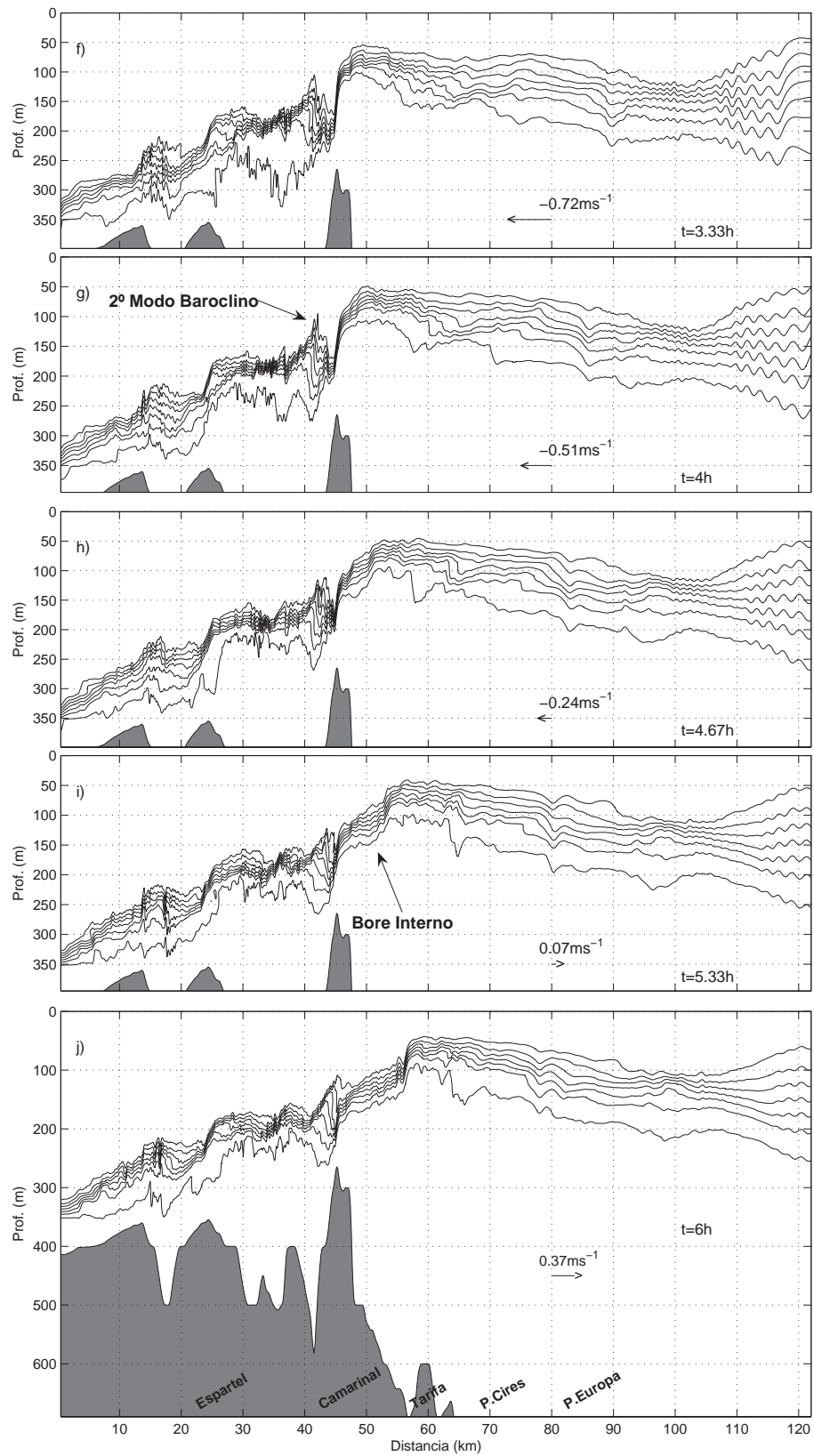
Figure 7.5: Evolución de distintas isohalinas a lo largo de una sección vertical a lo largo del eje central de Estrecho durante el escenario 1 (ver Figura 7.4). Las velocidades indicadas se refieren a la velocidad barotrópica en el Umbral de Camarinal.

7.3.2 Escenario 2: Ondas solitarias como resultado de la evolución de la marea interna

En esta ocasión la velocidad máxima del flujo saliente es de $U_{max} = 0.85\text{ms}^{-1}$, lo que determina un número de Froude máximo prácticamente igual a la unidad. Durante las primeras horas de este ciclo de marea la evolución del campo de salinidad es bastante similar a lo presentado en el escenario anterior, se produce una elevación de las isohalinas debido a la intensificación del flujo Mediterráneo sobre Camarinal, llegando la isohalina de 37.5 hasta los 100 m de profundidad (Figura 7.6d). A medida que el flujo se debilita, se comienza a ver nuevamente la progresión de la onda de marea interna progresando hacia el Este (Figuras 7.6g-h-i).

A diferencia del caso anterior sin embargo, y fruto de la gran inclinación de las isopícnas, junto a la larga onda interna de marea se forma un bore interno, el cual empieza a desintegrarse en ondas solitarias llegando a la posición de Tarifa (Figura 7.6j). En Punta Cires, apenas 10 km más hacia el Este se distingue ya un tren de 4 ondas solitarias de unos 25 metros de amplitud (Figura 7.6m), estructura que no llega a desarrollarse en el escenario 1. Sin embargo sí vuelve a observarse una estructura baroclina de segundo modo (isopícnas en oposición de fase) al Oeste de Camarinal, en la cuenca de Tánger. Ésta se empieza a distinguir en la Figura 7.6d, alcanzando su máxima expresión en el panel 7.6g. La naturaleza de este bore baroclino de segundo modo es diferente a la del modo 1; no es consecuencia de la evolución de la marea interna, sino que posee características de una onda de Lee. Su velocidad de fase intrínseca es de 0.54ms^{-1} , menor que la velocidad del flujo durante parte importante del ciclo de marea (Figuras 7.6b-f). Por tanto esta perturbación queda bloqueada por el flujo en el umbral, más débil que el necesario para bloquear el modo 1, constituyendo una estructura quasi-estacionaria. El carácter estacionario se refiere sobretodo a su posición, pues su energía aumenta en detrimento de la del flujo medio hasta que la corriente de fondo se debilita y se pierde el control para este modo. Ésto ocurre en nuestro caso en la situación representada en la Figura 7.6h, donde el segundo modo empieza a progresar lentamente aguas arriba.





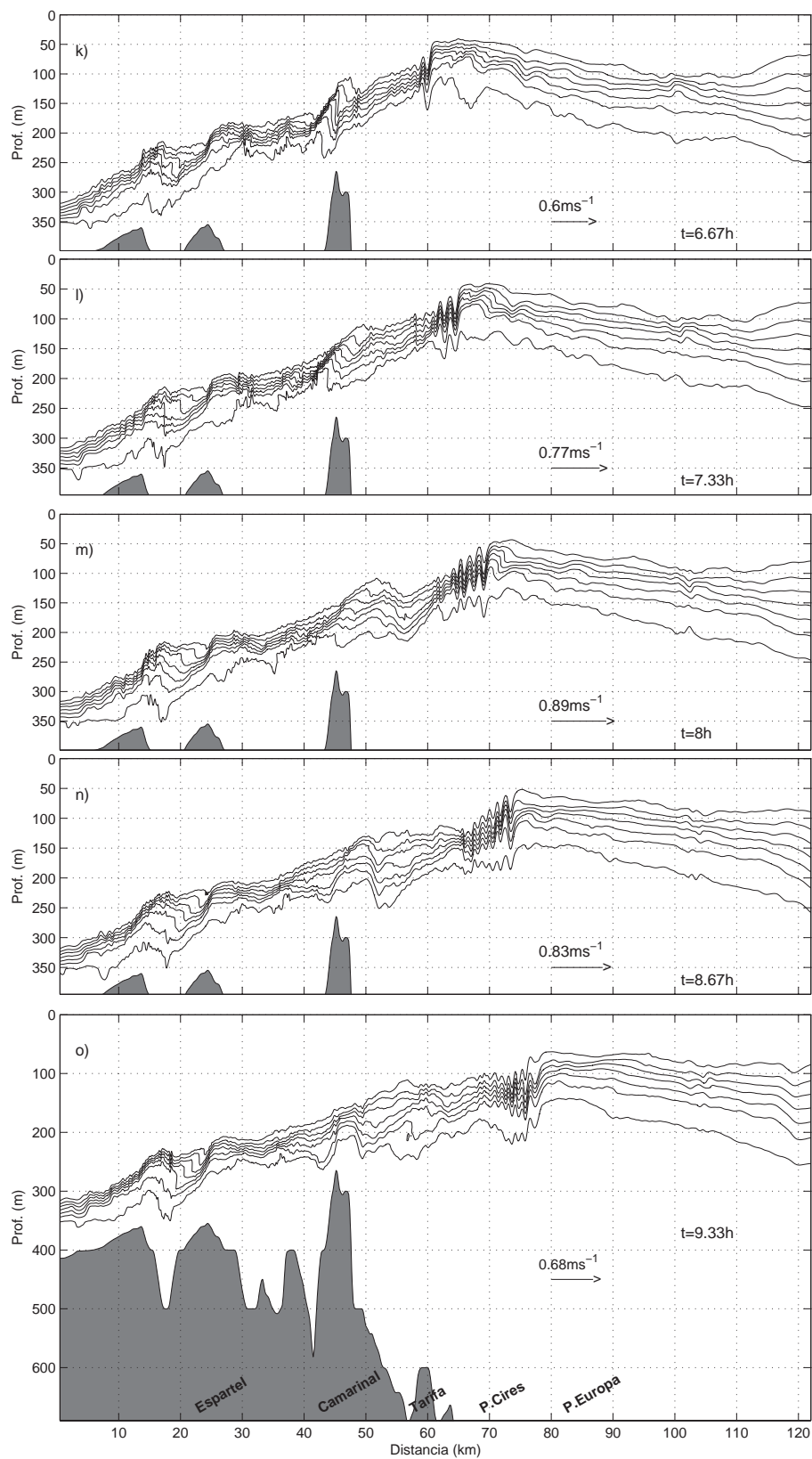


Figure 7.6: Evolución de distintas isohalinas a lo largo de una sección vertical a lo largo del eje central de Estrecho durante el escenario 2 (ver Figura 7.4). Las velocidades indicadas se refieren a la velocidad barotrópica en el Umbral de Camarinal.

7.3.3 Escenario 3: Ondas solitarias como resultado de la evolución de un doble bore interno atrapado en Camarinal

En este escenario, a diferencia de los anteriores, el flujo se hace supercrítico (para el primer modo baroclino) durante parte del ciclo de marea. La máxima velocidad del flujo saliente es de 1.26 ms^{-1} , que determina un número de Froude de $Fr_{max}=1.5$. Como cabe esperar, al aumentar el forzamiento respecto al episodio anteriormente descrito, podemos adelantar que se formarán ondas solitarias en este ciclo.

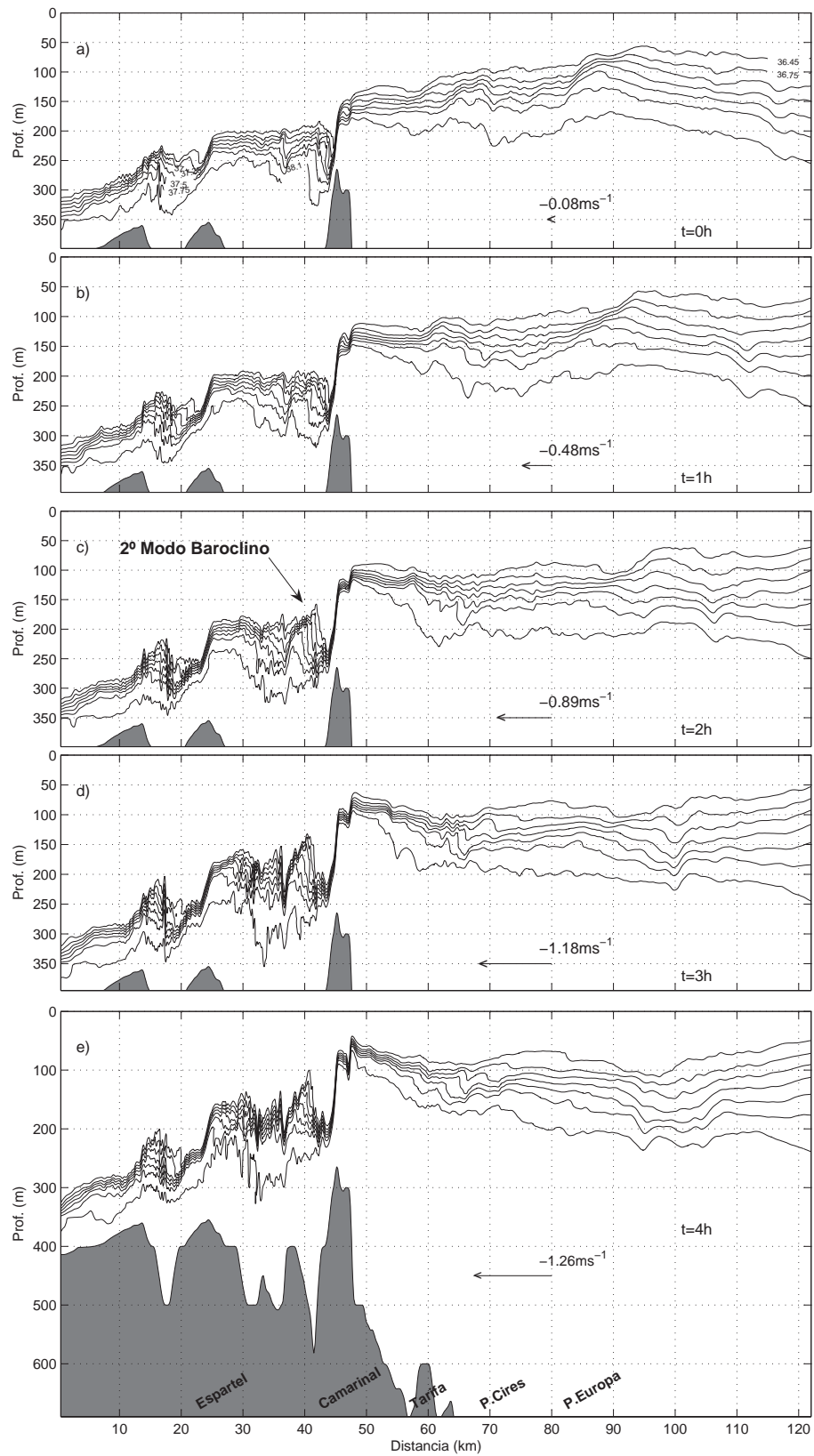
En el instante inicial (Figura 7.7a) no se observa tren de ondas solitarias alguno generado en el ciclo de marea anterior, al igual que en el posterior (escenario 1), hecho que está de acuerdo con lo que revelan los datos experimentales: normalmente durante períodos de mareas muertas, los trenes de ondas solitarias son generados en ciclos de marea alternativos debido a la desigualdad diurna (capítulo 3 de esta memoria).

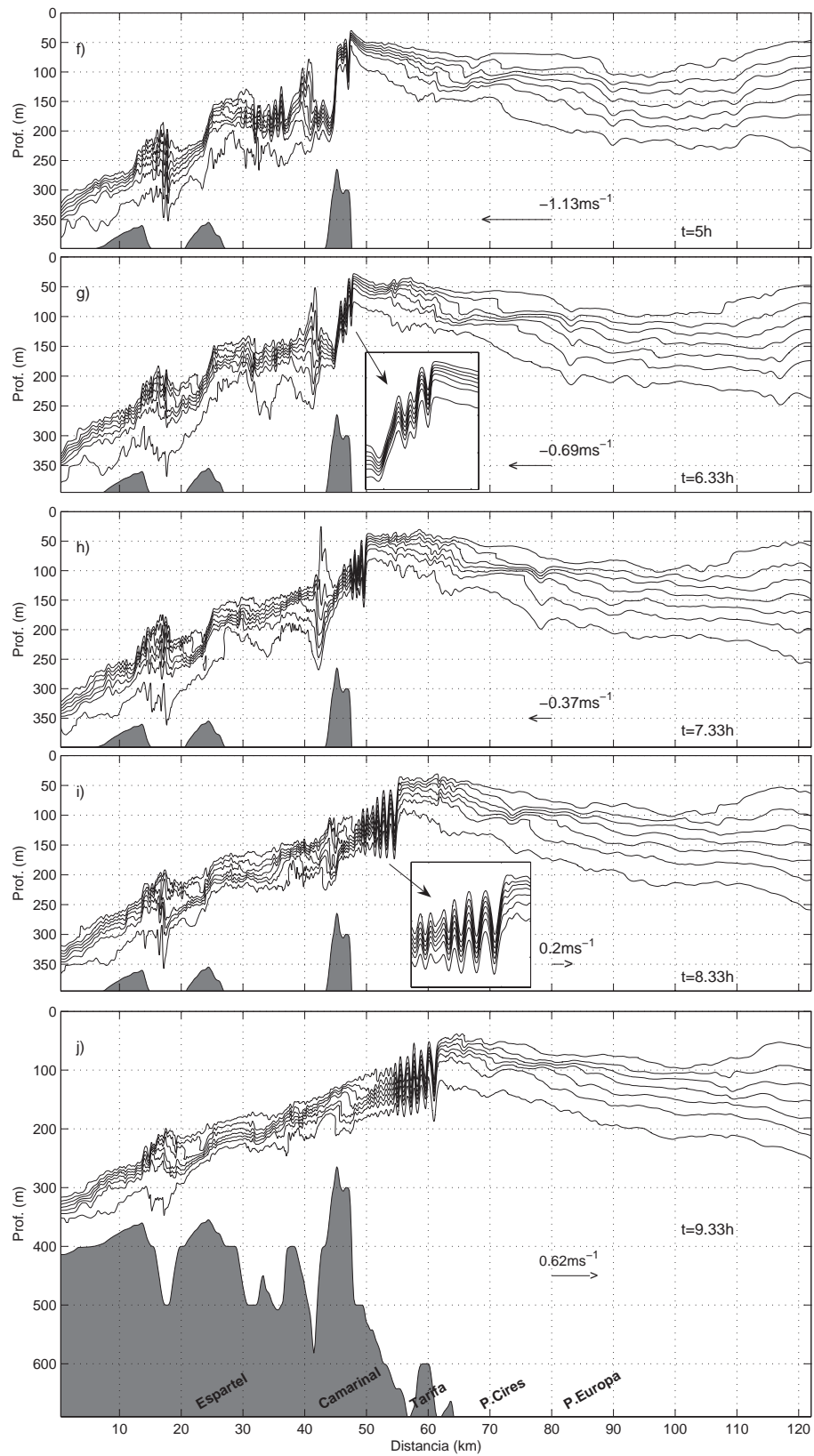
Al final de la fase de flujo saliente (Figuras 7.7b-e), las isohalinas se elevan sobre Camarinal llegando la de 37.5 hasta los 50 m de profundidad. Casi toda la columna de agua sobre Camarinal está ocupada por tanto por agua Mediterránea. En el umbral se forma un doble bore interno, uno de menor amplitud justo sobre él, y otro mayor a sotavento de más de 100 m de amplitud. El origen de este doble bore o salto hidráulico interno puede estar vinculado a la topografía del fondo que presenta cierta peridiocidad espacial, insinuada en la Figura. Tal posibilidad ha sido sugerida por Bruno et al. (2002). Ninguno de ellos puede progresar debido a la condición de flujo supercrítico en el umbral, quedando atrapados por el intenso flujo (Figura 7.7e). Se empieza a distinguir además una estructura de segundo modo más a sotavento, que debido a su menor velocidad de propagación queda atrapada aguas más abajo. Observar que estas estructuras aumentan considerablemente de amplitud durante las siguientes tres horas (Figuras 7.7d-f), extrayendo energía del flujo barotrópico.

Entre las 5 y 6.3 horas (paneles 7.7f-g) la velocidad del flujo barotrópico varía de -1.13 ms^{-1} a -0.69 ms^{-1} , pasando de supercrítico a subcrítico para el primer modo. En consecuencia las perturbaciones de primer modo empiezan a progresar hacia el Este en esta fase del ciclo, iniciándose además el proceso de desintegración en ondas solitarias (Figura 7.7g). Para el segundo modo sin embargo las condiciones son aún supercríticas, y sigue atrapado aguas abajo de Camarinal. Debe esperarse un tiempo aún (1.5 horas

aproximadamente) para encontrar condiciones subcríticas (en algún momento entre las 7.3 y 8.3 horas, paneles 7.7h-i).

Aunque el campo de salinidad asociado a las ondas solitarias está algo distorsionado debido a su superposición con la onda larga de marea interna, parece claro que antes de llegar a Tarifa, los dos bores baroclinos de primer modo evolucionan a un tren de ondas solitarias ordenados en amplitud (la mayor al frente) debido a la dispersión no lineal (Figura 7.7i). No obstante, a medida que progresa hacia el Este el tren de ondas pierde su estructura ordenada (Figura 7.7k-l) debido al intercambio dinámico de energía entre los solitones que forman el tren de ondas, tal y como se explicó en el capítulo 4.





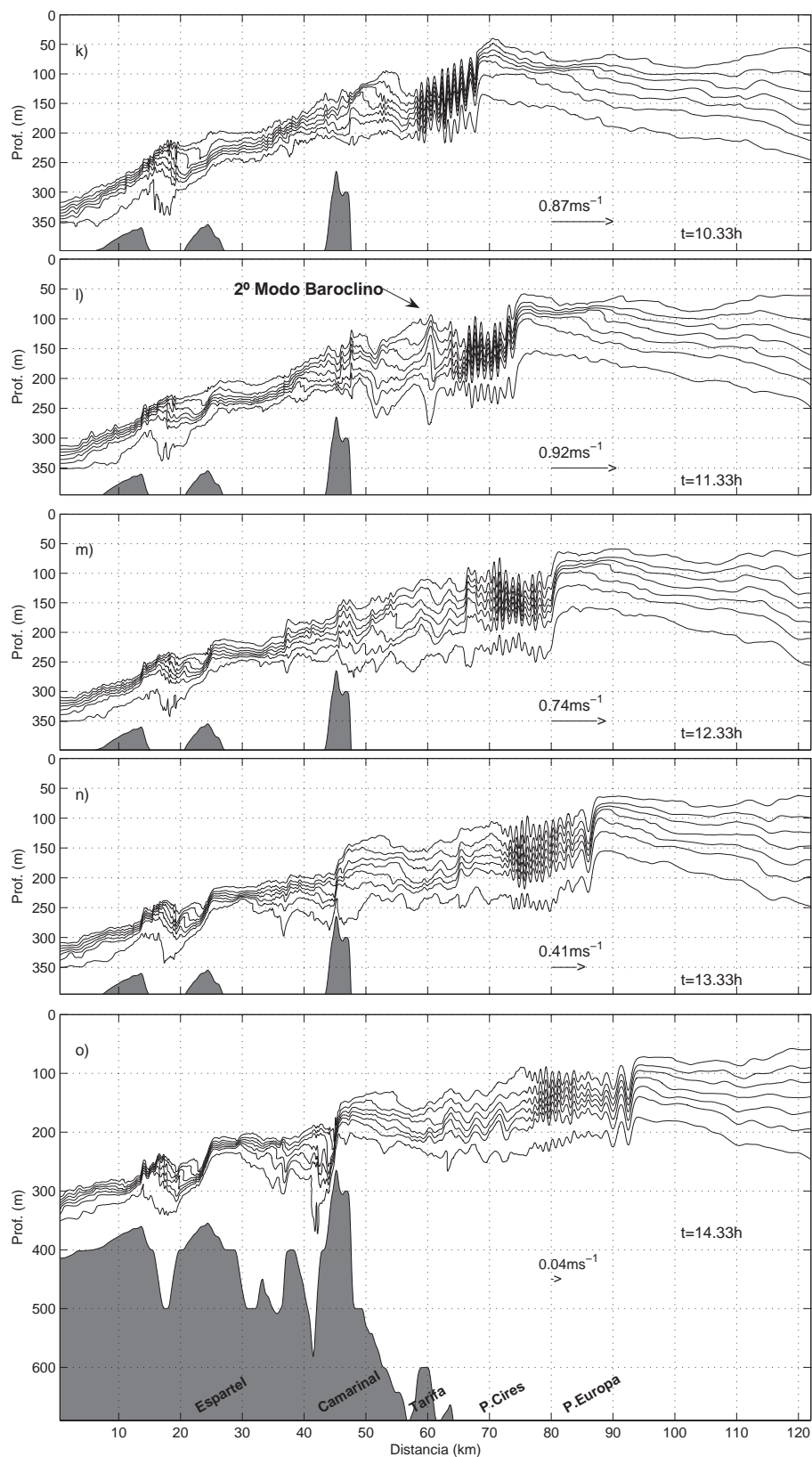


Figure 7.7: Evolución de distintas isohalinas a lo largo de una sección vertical a lo largo del eje central de Estrecho durante el escenario 3 (ver Figura 7.4). Las velocidades indicadas se refieren a la velocidad barotrópica en el Umbral de Camarinal.

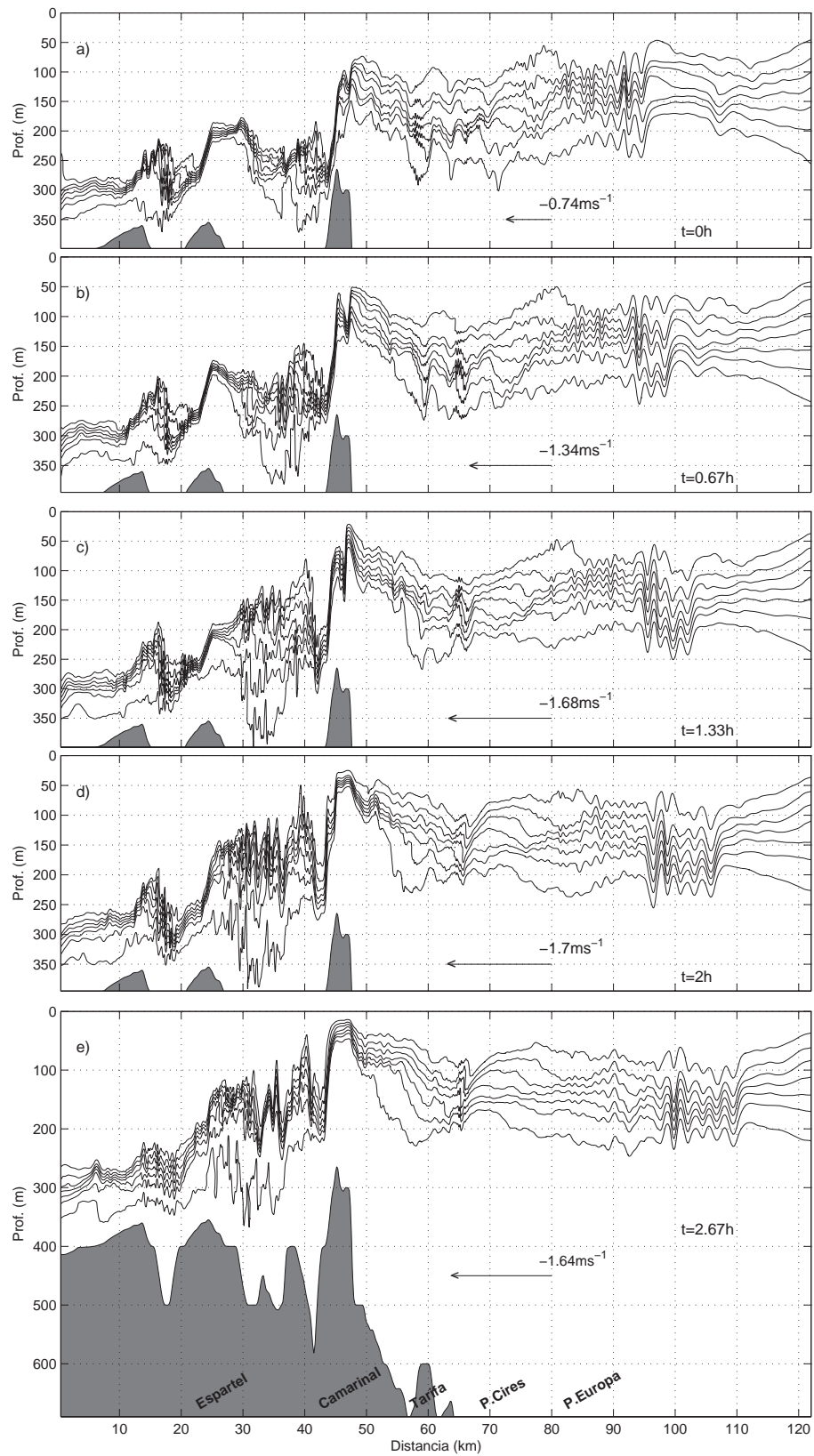
7.3.4 Escenario 4: Ondas solitarias como resultado de la evolución de un bore interno atrapado a sotavento de Camarinal

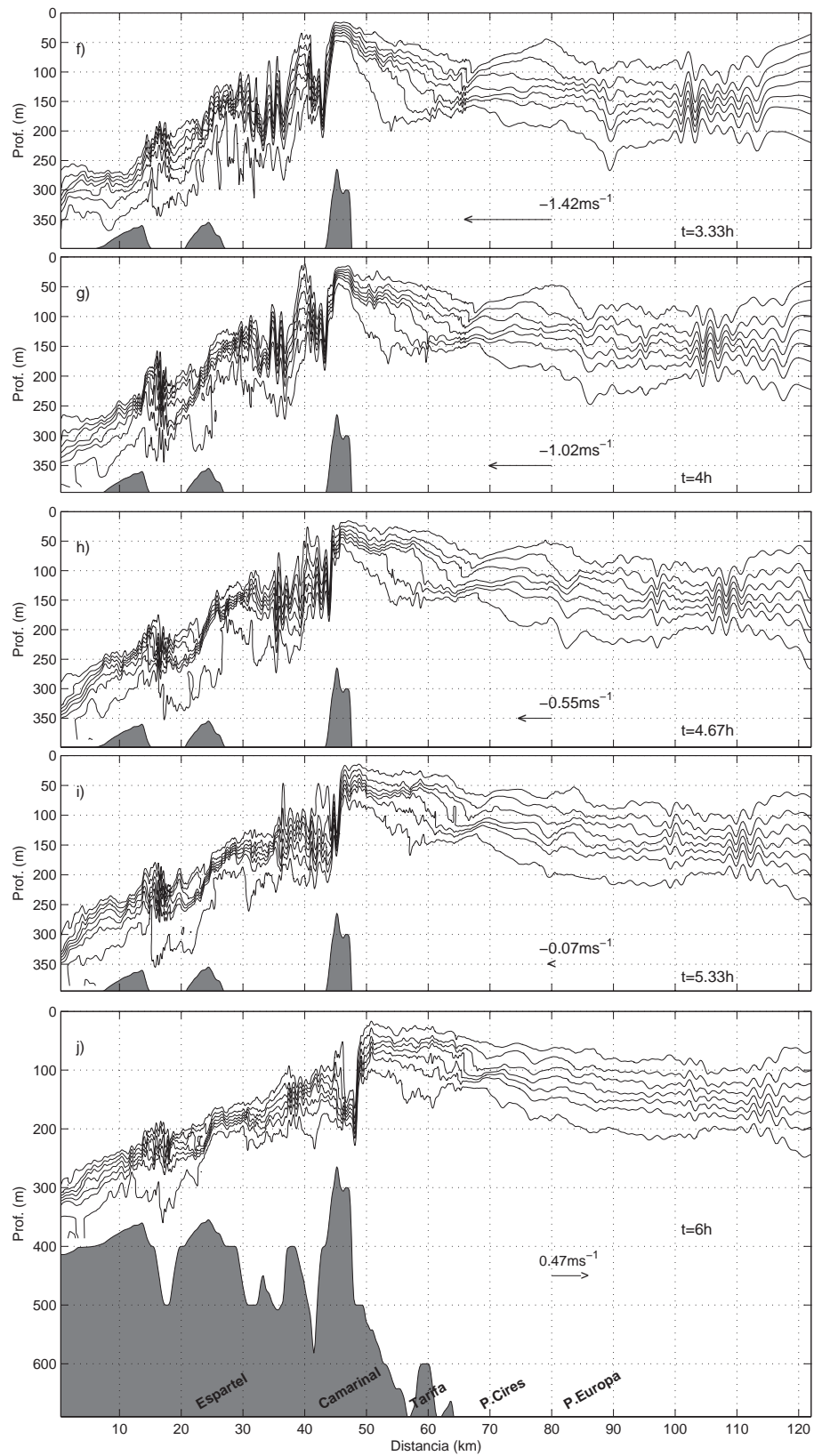
El último escenario ocurre durante marea vivas, con máximo flujo saliente de $U_{max} = 1.72 \text{ ms}^{-1}$, un número de Froude interno de $Fr_{max}=2.0$. Ésta es una situación extrema en el Estrecho de Gibraltar. Los tres primeros paneles de la Figura 7.8 recuerdan la situación del escenario anterior, con la formación de un doble bore interno de primer modo sobre Camarinal, el mayor a sotavento y el otro algo aguas arriba sobre la primera cresta del umbral. En la Figura 7.8c éstos ya alcanzan una gran amplitud, de 250 m y 125 m respectivamente y aún la velocidad del flujo sigue aumentando. La diferencia cualitativa con el caso anterior es que el intenso flujo hace retroceder el bore más pequeño, que queda fusionado con el que se sitúa a sotavento (Figura 7.8d), sugiriendo que este escenario es un estado evolutivo más avanzado del anterior debido obviamente a una mayor disponibilidad de energía barotrópica para ser transferida a estructuras baroclinas. El intenso flujo también provoca que la isohalina de 37.5 se sitúe a escasos metros de la superficie y, ahora sí, la práctica totalidad de la columna de agua en Camarinal está ocupada por agua Mediterránea.

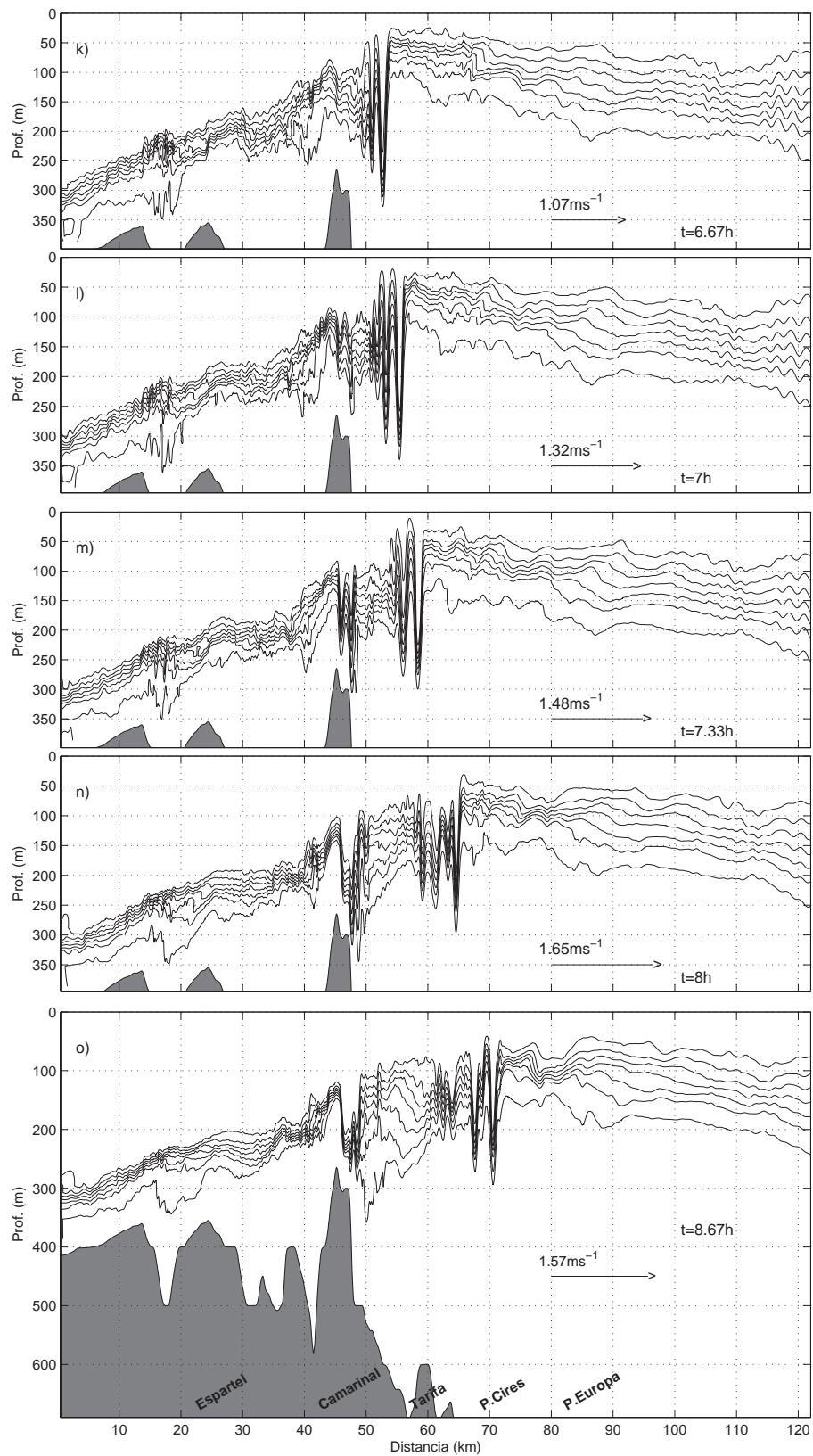
Como se comentó anteriormente para el segundo modo baroclino, las características del bore interno son en cierto modo las de una onda de Lee no estacionaria, ésto es, una onda a sotavento del umbral de su misma escala espacial que ve aumentada su energía debido a la interacción con el flujo medio. Gran parte de la energía del flujo barotrópico es empleada también en mezcla en este régimen. El estado caótico del campo de salinidad en la cuenca de Tánger indica que es un lugar de intensa mezcla turbulenta, como se deriva del brusco descenso de salinidad, de más de 0.1, que experimentan las aguas Mediterráneas entre los umbrales de Camarinal y Espartel, apenas separados 20 km (García Lafuente 2007). El flujo deja de ejercer control sobre el primer modo cuando su velocidad baja de los 0.84 ms^{-1} , que es la velocidad de fase lineal de este primer modo, y eso parecen reflejar las Figuras 7.8g-h. El bore interno empieza a propagarse lentamente aguas arriba. Superado el umbral, inicia su proceso de desintegración en ondas solitarias, de amplitudes en torno a los 200 m entre Camarinal y Punta Cires, que figuran entre las mayores observadas en el Océano (Figuras 7.8k-o).

Para forzamientos mareales de esta intensidad ocurre que, en la fase de flujo entrante, también se forma un bore interno o tren de ondas atrapadas al Este del umbral de Camarinal (Figura 7.8o-q) de amplitud bastante inferior. Según Hibiya (1990) esta asimetría en tamaño se debe a la presencia del flujo medio. Este bore “oriental” además, no evoluciona de forma clara en un tren de ondas solitarias hacia el Oeste, contrariamente a lo que hace su contrapartida occidental, formado en la fase entrante, en su propagación hacia el Este. Existe una posible explicación para ello: en la fase de flujo saliente la marea barotrópica y el flujo “medio” asociado a la capa profunda llevan la misma dirección, formando un bore de gran amplitud al Oeste de Camarinal. En la fase de flujo entrante ocurre lo opuesto, el flujo mareal y el asociado al flujo medio poseen direcciones contrarias, formando un bore más pequeño al Este, y eso es justo lo que indica la Figura 7.8. Morozov et al. (2002) mantienen esta idea para argumentar que el bore formado al Este, efectivamente más pequeño, inmediatamente encuentra una corriente a favor relativamente intensa (la asociada al flujo medio de agua Mediterránea saliente) que hace disminuir la inclinación de las isopicnas. Consecuentemente los efectos no lineales no se hacen lo suficientemente importantes para la formación de ondas solitarias de considerable amplitud.

En cualquier caso un estudio acerca de la posible generación y propagación de ondas solitarias hacia el Oeste está aun pendiente. No se tienen referencias de observaciones regulares de trenes de ondas solitaria en la parte occidental de Estrecho, un hecho que coincide con las predicciones del modelo aquí estudiado. No obstante, imágenes SAR ponen de manifiesto su existencia en la época estival (Jackson y Apel 2004), donde la estratificación cambia sensiblemente (Figura 2.1) debido a la formación de una segunda picnoclina estacional, más somera, de naturaleza térmica (Figura 2.1).







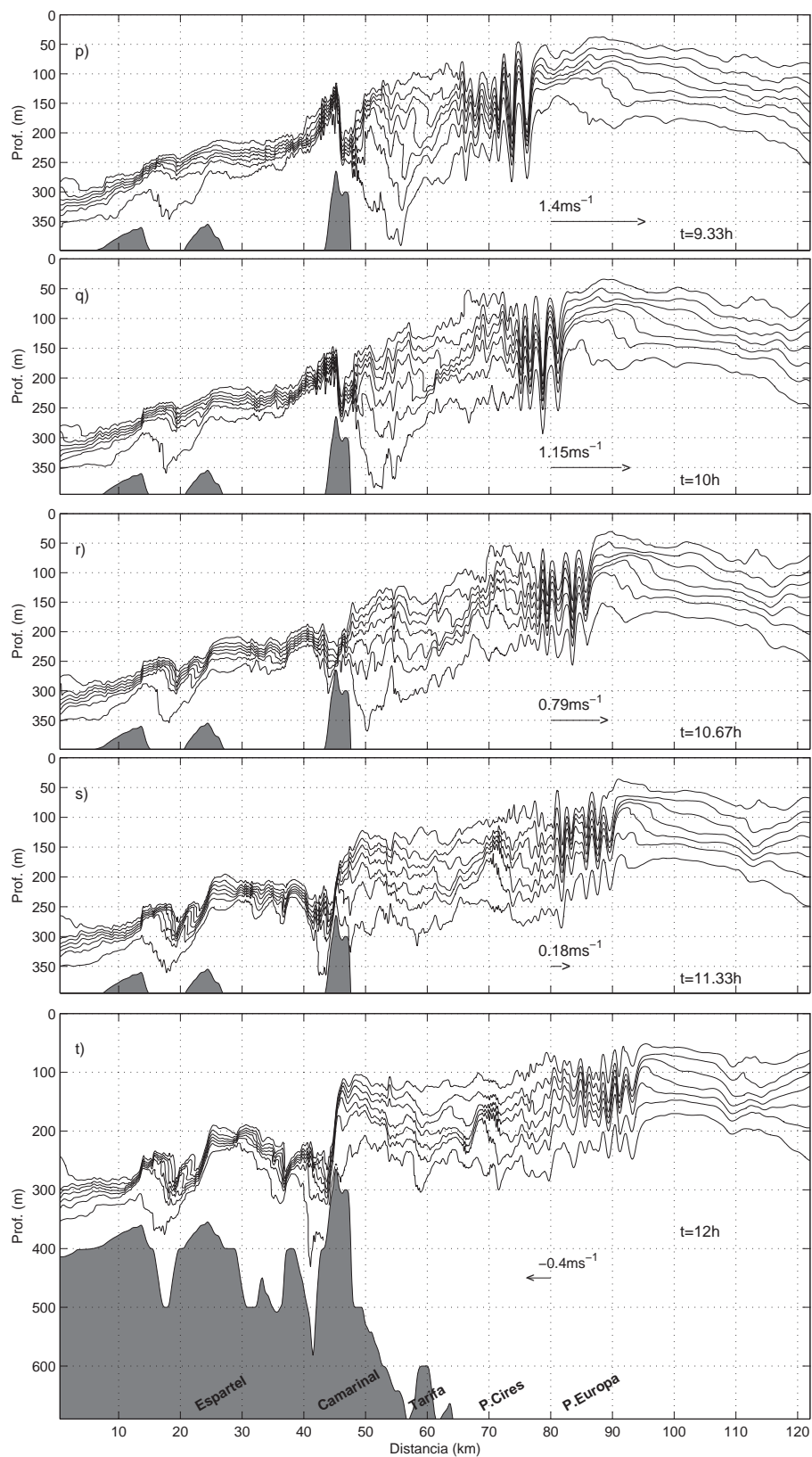


Figure 7.8: Evolución de distintas isohalinas a lo largo de una sección vertical a lo largo del eje central de Estrecho durante el escenario 4 (ver Figura 7.4). Las velocidades indicadas se refieren a la velocidad barotrópica en el Umbral de Camarinal.

7.4 Variaciones transversales inducidas por la rotación y la topografía

En la Sección anterior se ha realizado un análisis del proceso de generación de ondas internas a lo largo de una sección longitudinal que es evidentemente la dirección de máximo interés por ser la de propagación. Sin embargo también existen importantes variaciones transversales. Estas variaciones se deben básicamente a la irregular topografía del umbral, que presenta variaciones transversales considerables y a la rotación terrestre. Sobre estos aspectos se incide en esta sección.

Como se vió en los capítulos 5 y 6, la rotación terrestre tiene una considerable importancia en la dinámica interna. Las oscilaciones lineales internas en un canal tienden a encontrar un balance geostrófico y, por tanto, a comportarse como una onda Kelvin, cuya amplitud decrece hacia la izquierda respecto a su dirección de propagación (hemisferio norte). Esta asimetría a través del canal es tanto más importante cuanto mayor sea el tamaño del radio interno de Rossby respecto a la anchura del canal. En el Estrecho ambos son aproximadamente iguales, y por tanto la rotación en su dinámica interna juega un papel relevante. Lo dicho aquí también concierne a las ondas solitarias, ondas no lineales, que como es lógico comparten bastantes características con las lineales.

Aparte de la importancia que la rotación ejerza directamente sobre la dinámica de las ondas internas, hemos de recordar que éstas deben su existencia a la onda de marea superficial (barotrópica) que, aunque no está afectada tan fuertemente por la rotación (radio de Rossby externo bastante mayor que la anchura del Estrecho), sí está modificada en cierta medida (García-Lafuente 1986). De hecho, García Lafuente et al. (2000) muestran como el balance geostrófico se mantiene transversalmente en las escalas temporales de la marea, determinando la estructura espacial de los mapas de marea. Por tanto los efectos de la rotación en el proceso de generación de ondas internas pueden proceder directamente de la influencia que ejerce la rotación terrestre sobre la marea barotrópica.

Debido al balance geostrófico, la fase y amplitud de la velocidad de marea barotrópica semidiurna (dominante en el Estrecho) sobre la sección de Camarinal crecen hacia el

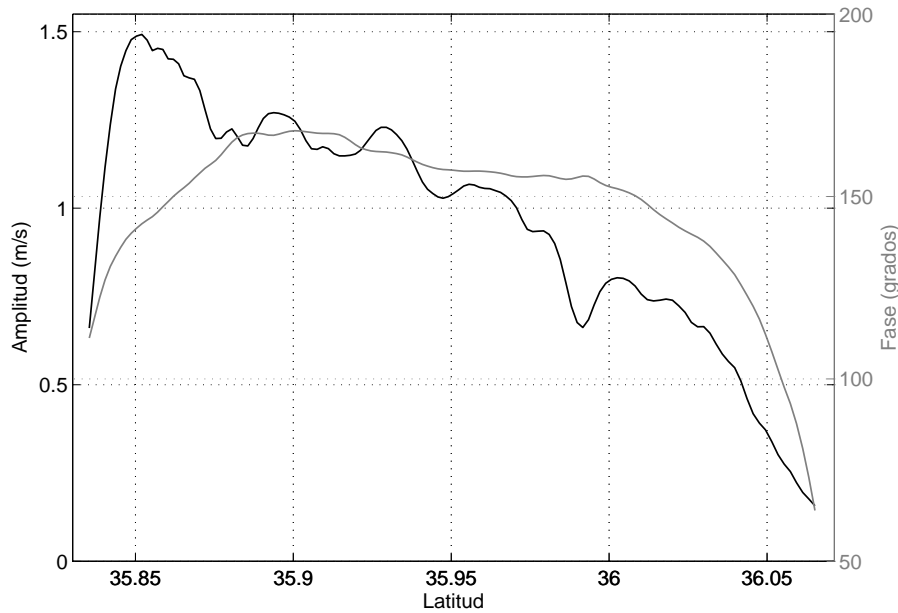


Figure 7.9: Estructura transversal de amplitud y fase de la constituyente M_2 de la velocidad de marea barotrópica sobre el umbral de Camarinal (sección mostrada en la Figura 7.10a). Amplitud y fase son crecientes hacia el Sur debido a la influencia de la rotación. Obviamente la rotación es responsable fundamentalmente de lo ocurrido en la parte central del canal (entre los 35.85° y 36.0°N). En los márgenes los bruscos cambios se deben a otros efectos como la fricción o no la no linealidad del flujo.

Sur, como se representa en la Figura 7.9. Este comportamiento tiene un efecto evidente sobre el bore interno atrapado por la corriente en los escenarios 3 y 4 descritos: Debido a que la corriente empieza a debilitarse antes en el Norte del Canal (fase menor, Figura 7.9) y es además más débil allí, el salto hidráulico o bore interno inicia su liberación y propagación por esta parte del Canal.

Este hecho se observa claramente en la Figura 7.10, que muestra la velocidad en superficie en ciertos momentos del escenario 3. La velocidad es un buen trazador de las ondas solitarias, con valores sobrepasando incluso los 2 ms^{-1} . La subsiguiente evolución del tren de ondas internas, que ya empieza a distinguirse en la Figura 7.10c, se presenta en los paneles 7.11. A la altura de Tarifa, el frente de ondas está claramente inclinado estando adelantado en la parte Norte del Estrecho debido a que allí se perdió antes el control hidráulico. Sin embargo, esta asimetría tiende a compensarse debido a la influencia de la rotación sobre la propia dinámica interna. Las ondas solitarias empiezan

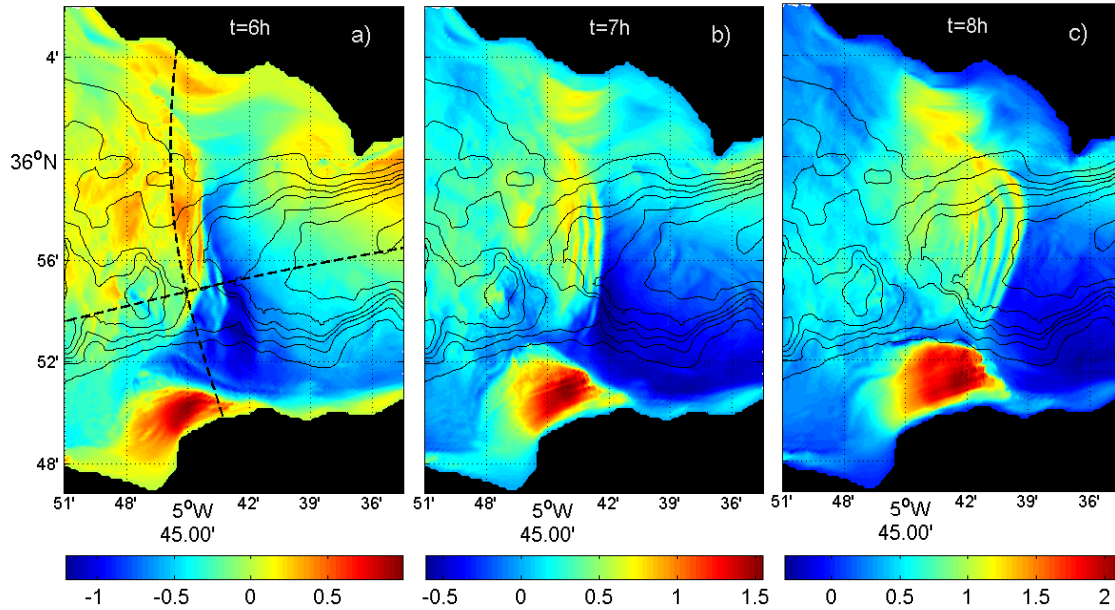


Figure 7.10: Velocidad en superficie (ms^{-1} , componente a lo largo de la malla curvilínea) en diferentes instantes del escenario 3 (Ver Figura 7.7). La línea discontinua transversal al Estrecho señala la sección del umbral de Camarinal, y la longitudinal la sección utilizada en la Sección 7.3 para describir los distintos escenarios.

a ganar localmente energía hacia el Sur (ver análisis en el capítulo 6), aumentando allí la amplitud (local) e incrementando su velocidad de propagación. Tres horas después de su paso por Tarifa, a la entrada de la bahía de Algeciras los frentes de ondas poseen una estructura transversal perpendicular al Estrecho, incluso un poco adelantados hacia el Sur. Curiosamente, los efectos de la rotación actúan en sentidos opuestos en la generación (se libera antes el bore en el Norte) y en la propagación (avanza más rápido en el Sur), tendiendo a cancelarse a medida que el tren de ondas progresa hacia el Mediterráneo.

Un segundo efecto de la rotación es la asimetría de amplitudes que las ondas internas tienen en dirección Norte-Sur. Esta asimetría se aprecia en la Figura 7.12, que muestra la estructura vertical de salinidad a lo largo de dos secciones longitudinales al Sur y al Norte del canal (ver secciones en el panel 7.11b) cuya profundidad es muy similar, de modo que la cantidad de energía baroclina puede compararse en términos de la amplitud. Al Sur, las ondas internas alcanzan una amplitud de unos 50 m, mientras que en el Norte sólo la primera onda, la mayor del tren, alcanza los 20 m. Cabe

recordar que consideramos un ejemplo donde el forzamiento de marea responsable de la generación del tren de ondas es de intensidad media (ver Figura 7.4). En mareas vivas la asimetría Norte-Sur de energía baroclina se mantiene, y aún así al Norte se registran ondas solitarias de hasta 100 m de amplitud a la altura de la bahía de Algeciras. Sobrepasando el Estrecho (Figura 7.11c) las ondas solitarias empiezan su progresión hacia el Mar de Alborán, una mar abierto donde los efectos de la rotación difieren de los inducidos en un canal (Helfrich 2007).

Adicionalmente a la rotación, las variaciones transversales de la topografía local inducen también variaciones en las ondas que hacen algo diferente la respuesta baroclina. Analicemos brevemente el escenario 3 como ejemplo de de ello.

La Figura 7.13 muestra la evolución de la isohalina de 37.5 durante la etapa de generación del bore interno en las secciones Norte y Sur comentadas. En la Figuras 7.13a-d y en la sección Sur se distingue la formación del doble bore interno existente en este escenario. En la sección Sur se distingue claramente un abrupto repunte de unos 50 m en el relieve, que claramente favorece la formación de esta discontinuidad sobre el umbral. Debido a las diferencias en la intensidad del flujo y, sobre todo, a diferencias topográficas, el bore formado sobre el umbral es bastante más intenso en el Sur. El panel 7.13e ilustra bien como se produce la pérdida de control hidráulico antes en la sección Norte, iniciando localmente el bore interno su evolución hacia el Este. En el Sur esto se produce aproximadamente una hora más tarde (7.13f). Durante la evolución, como señalamos anteriormente, el bore baroclino se desintegra en ondas solitarias, que tienen a acumular su energía en el Sur. Esta acumulación es ya más un efecto de la rotación que de la topografía ya que, al Este del umbral, ambas secciones presentan similares características del fondo marino.

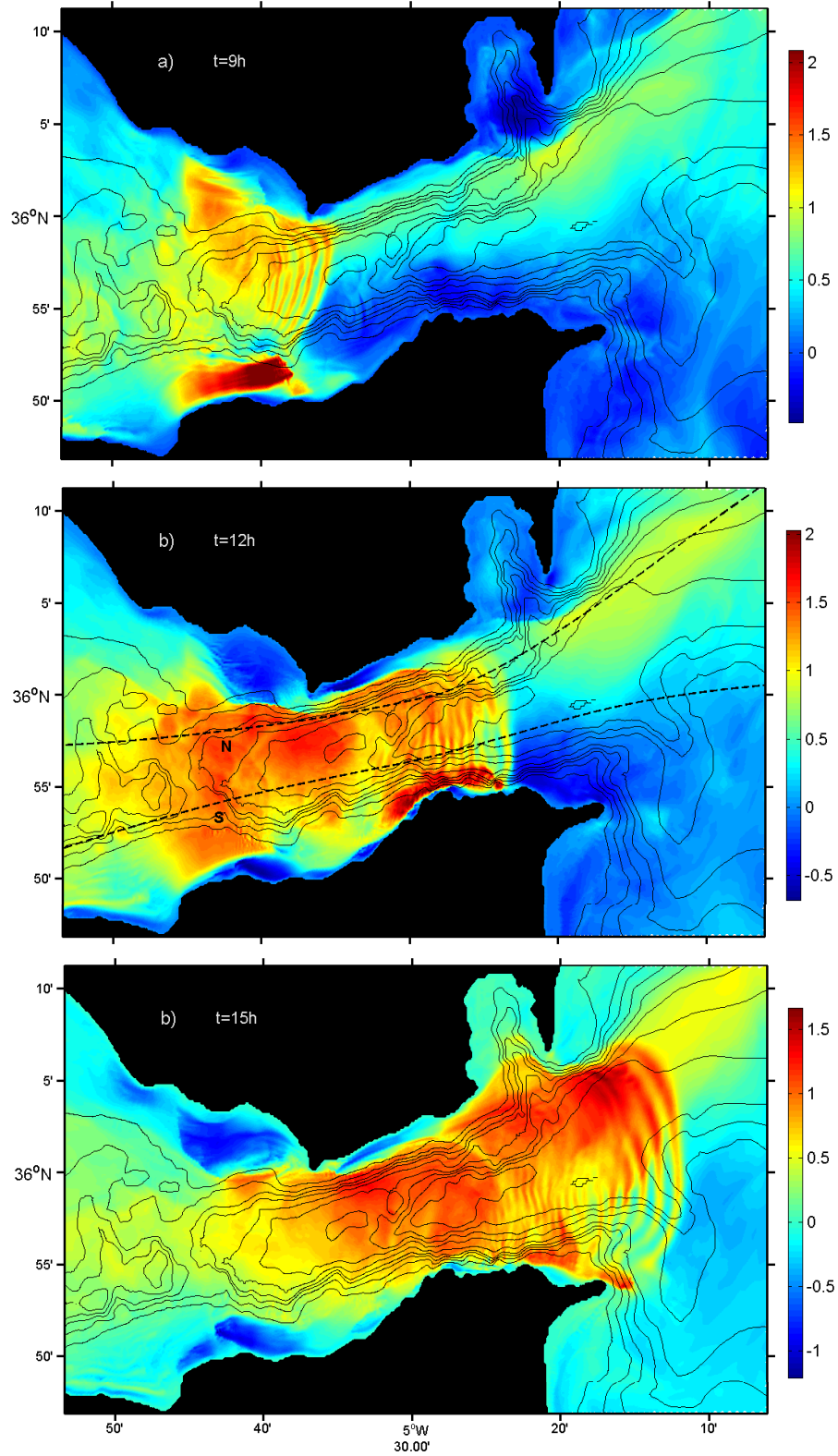


Figure 7.11: Velocidad en superficie (ms^{-1} , componente a lo largo de la malla curvilínea) en diferentes instantes del escenario 3 (continuación de la Figura 7.10).

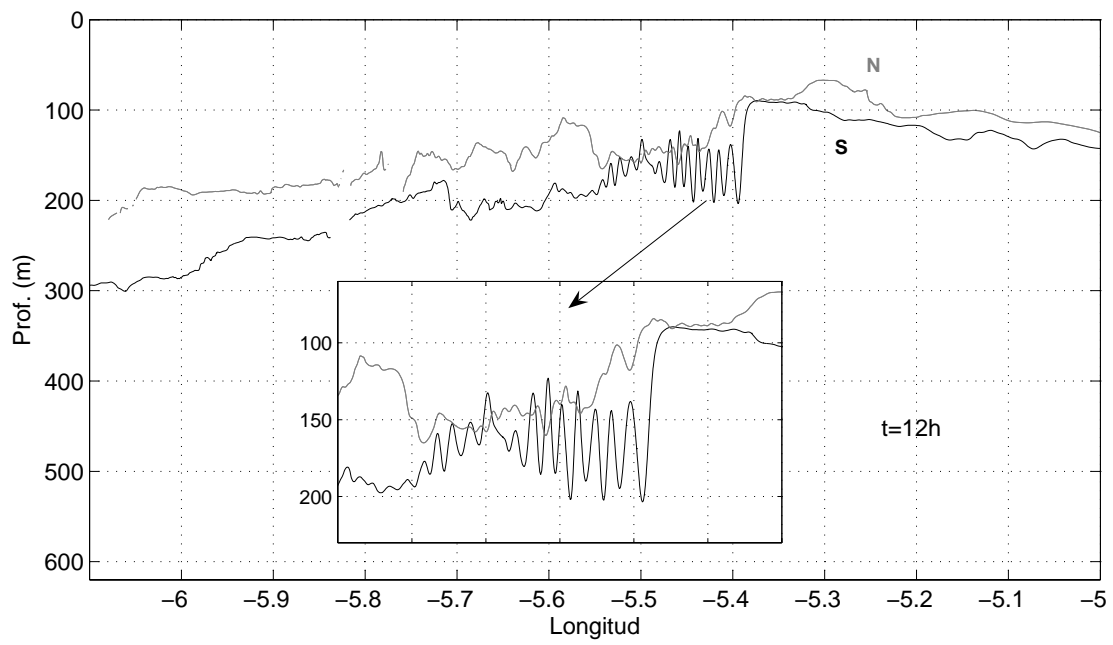
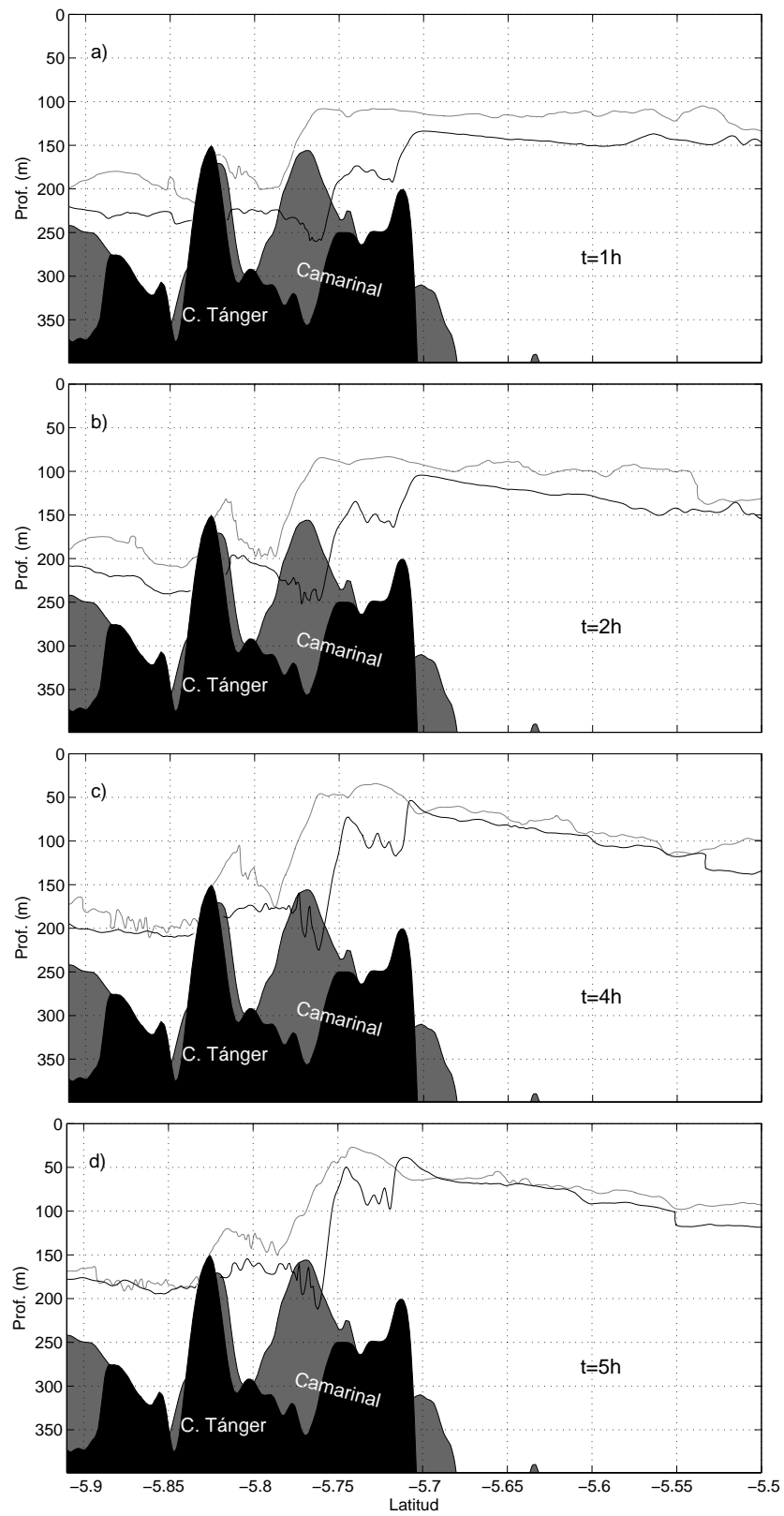


Figure 7.12: Posición de la isohalina de 37.5 a lo largo de las secciones indicadas en la Figura 7.11. En línea gris se representa la sección Norte, y en negro la Sur.



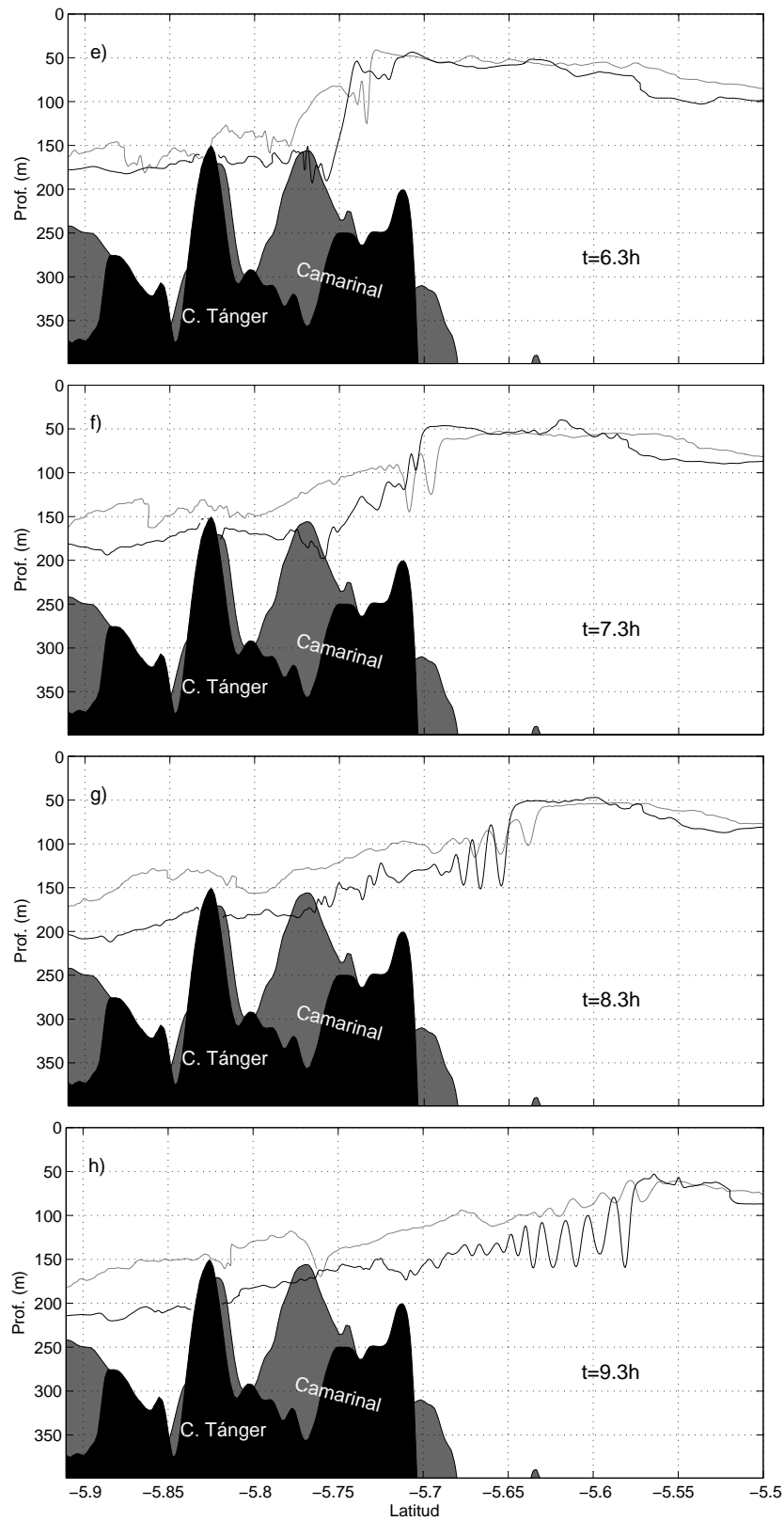


Figure 7.13: Evolución de la isohalina de 37.5 en diferentes instantes del escenario 3 en las secciones Norte y Sur de Camarinal indicadas en la Figura 7.11b. Elementos en negro, isolínea y topografía se refieren a la parte Sur, y la gris al Norte.

7.5 Resumen de aspectos relevantes

El mecanismo de generación de ondas internas en Gibraltar es bien conocido desde hace tiempo: es el resultado de la interacción topográfica del intenso flujo barotrópico con el acusado umbral de Camarinal (Ziegenbein, 1969, 1970; La Violette and Arnone, 1988; Richez, 1994). La presencia del umbral de Espartel es crítica para permitir la acumulación de agua en la cuenca de Tánger durante la fase de generación del bore interno (Armi y Farmer 1988, ver también Figuras 7.7e-7.13e).

Los resultado numéricos mostrados gráficamente en este capítulo confirman el mecanismo de generación. La gran resolución espacio-temporal del modelo permite discernir e identificar distintos escenarios de forzamiento que producen a su vez distintas respuestas. En término de la intensidad del forzamiento se han analizado cuatro escenarios representativos que se corresponden con flujo mareal máximo subcrítico ($Fr_{max} < 1$, escenario 1), marginalmente crítico ($Fr_{max} \approx 1$, escenario 2), crítico ($Fr_{max} \approx 1.5$, escenario 3), y claramente supercrítico ($Fr_{max} \approx 2$, escenario 4) cuyas respuestas pueden resumirse como: no generación de ondas internas de corta escala (ondas solitarias), sólo marea interna (escenario 1); generación de un tren de ondas solitarias como fruto de la desintegración de un bore interno a medida que progresa hacia el Este (escenario 2); generación de un doble bore interno (consecuencia probable de una pseudo-periodicidad en la topografía del fondo) bloqueados por el flujo barotrópico durante parte del ciclo de marea, los cuales inician el proceso de desintegración en ondas cortas prácticamente sobre el umbral (escenario 3); y generación de un único y gigantesco bore a sotavento del umbral resultado de la fusión de los anteriores que da lugar a la formación de energéticas ondas de Lee no estacionarias, y a ondas solitarias de más de 150 metros en su posterior evolución (escenario 4).

Las perturbaciones internas mencionadas son todas de modo 1, aunque también se distingue la generación de ondas de modo 2 en la cuenca de Tánger que permanecen mucho más tiempo bloqueadas debido a su menor velocidad de propagación intrínseca. Eventualmente y cuando el flujo barotrópico se reduce lo suficiente, remontan el umbral progresando hacia el Mediterráneo a menor velocidad, quedándose rezagado más y más respecto a las de modo 1.

Se han estudiado los efectos de la rotación y topografía en la dirección Norte-Sur en las ondas internas (efectos 3D). El ajuste geostrófico de las corrientes mareales y la oscilación del nivel del mar obliga a que las primeras sean más débiles e inviertan antes en el Norte, originando una liberación anticipada del bore interno allí. El patrón inicial de propagación es pues un frente inclinado hacia el Norte (Figura 7.11a). Sin embargo la rotación fuerza una mayor amplitud de las ondas en el Sur que, a su vez, aumenta la velocidad de propagación localmente y cancela la inclinación transversal original. Otra consecuencia inmediata de esta acumulación de energía baroclina en el Sur es la intensificación de procesos de mezcla, asociados a la interacción onda-topografía, en la costa Africana del Estrecho (Figura 7.11b).

La topografía es también responsable de variaciones de la estructura del bore interno formado en Camarinal. Prueba de ello es la acentuación del doble salto hidráulico como respuesta a la topografía periódica, más acentuada en el Sur.

El estudio realizado en este capítulo ha ilustrado muchos detalles recogidos en las observaciones de ondas internas en Gibraltar. Lejos de ser exhaustivo, puede considerarse una primera aproximación al estudio de este interesante e importante fenómeno, que deja las puertas abiertas a futuras investigaciones.

Capítulo 8

Conclusions

1.- Some aspects of internal solitary waves (ISWs) cinematics have been derived from the analysis of high time-resolution observations in the Strait of Gibraltar. Although tides are mainly semidiurnal in the Strait, diurnal tidal currents play a significant role in the generation and subsequent propagation of ISWs. It has been observed that normally during neap tides ISWs are generated during alternative tidal cycles due to the diurnal inequality. Moreover, due to the importance of tidal advection on the propagation velocity of ISWs, there exists a remarkable diurnal inequality on it. The phase speed of two consecutive wave packets of ISWs can differ as much as 0.4 ms^{-1} between the western section of Tarifa Narrows and the entrance of the Alboran Sea. The diurnal inequality is even more noticeable when observing the arrival time (relative to high water) of ISWs to the latter location: consecutive wave packets can arrive with a maximum time difference as high as 6 hours at this point with respect to the high water time at Ceuta.

2.- Observation of temperature records reveals that ISWs packets quite often present an irregular structure. Statistical analysis of all recorded wave trains (46 well defined packets) reveals that only 46.5% of them can be identified as well rank-ordered wave trains (decreasing wave amplitude from the front to the tail). The rest, i.e. 53.5% of packets, was either partly rank-ordered (23.3%) or chaotic rather than organized (30.2%). This abnormal fact was investigated within the framework of a high resolution, fully nonlinear, non-hydrostatic numerical model. It was found that the interaction of the ISWs with the complex bottom topography and lateral boundaries of the Strait leads to wave reflections and formation of secondary waves which in turn produces such irregular ISWs packets structure. The energy reflected back from the boundaries is partially absorbed by the smaller ISWs propagating at the rear of the packet, this making these smaller waves increase their amplitude. This mechanism is responsible for the formation of non rank-ordered wave packets.

3.- Coriolis force plays a significant role on the ISWs dynamics in the Strait of Gibraltar, a result that is not unexpected since the first internal Rossby radius is about the Strait width. Because of rotation ISWs tend to accumulate energy at the Southern coast of the Strait (to the right of the direction of the wave propagation in the northern

hemisphere), a fact that enhances wave-topography interactions on this shore, such as wave reflection, wave breaking, and derived mixing processes.

4.- Motivated by recent interesting results concerning long-term processes induced by rotation on ISWs dynamics in an open ocean (Helfrich 2007), an analogous study has been carried out for a rectangular channel of constant depth. It was found that an initial straight soliton evolves rapidly into a Kelvin wave-like soliton, with exponential cross-channel distribution of amplitude. This evolution, which agrees with the weakly nonlinear theory predictions, takes place through the continuous radiation of Poincaré modes, responsible of the fast energy damping of the leading Kelvin mode. As a result of multiple reflections with the lateral boundaries, a Mach stem system is formed behind the leading soliton, which eventually transform into a secondary Kelvin wave that collides with the leading perturbation. At the end, a quasi-steady wave packet of Kelvin waves is formed with few energy damping by radiation.

This mechanism of secondary wave formation and final collision with the leading perturbation is enhanced, as either the amplitude of the initial soliton, or the effect rotation, or the channel width increase.

5.- A tidally forced model has been run in order to investigate 3D characteristics of the generation mechanism of ISWs over Camarinal Sill. The model is 3D, high resolution ($\Delta x \approx 50$ m, $\Delta y \approx 200$ m), fully nonlinear, and fully non-hydrostatic. A first scrutiny of the vast information it provides has allowed us to distinguish four different scenarios of internal waves generation, which depend on the intensity of the tidal forcing. In terms of the maximum value of the internal Froude number during the tidal cycle, they are the following:

- $Fr_{max} < 1.0$: Generation of internal tides (long wavelength tidal wave).
- $Fr_{max} \approx 1.0$: Generation of ISWs as a result of the nonlinear evolution of the long wavelength internal tide.
- $1.0 < Fr_{max} < 1.6$: Generation of ISWs as a result of the evolution of a double internal bore generated in Camarinal Sill. One leewards, the other just over

Camarinal crest. It is argued that local undulatory variations of the bottom topography at Camarinal Sill favour such structure.

- $Fr_{max} > 1.6$: Generation of a huge internal bore trapped at the lee side of Camarinal Sill, which evolves into a series of energetic unsteady Lee waves. The further evolution of this baroclinic structure leads to the formation of ISWs of more than 150 meters nearby Tarifa Narrows.

6.- Transversal (across channel) variations of the baroclinic response at Camarinal Sill are mainly driven by rotation effects and local variations of the bottom topography. Due to the influence of rotation on the barotropic (external) tides, amplitude of semidiurnal tidal currents (dominant in the Strait) are smaller at the northern section of the channel, and phases are delayed. Because of it, the baroclinic bore trapped by tidal currents at Camarinal is locally released before at the northern section, which induces a regular pattern on the shape of the generated ISWs wave front: at the beginning of its evolution it goes ahead in the north of the Strait. Eventually this asymmetry tends to fade out as the influence of rotation starts exerting influence directly on the internal dynamics. Solitary waves accumulate energy at the southern section and the wave front tilts anticlockwise, compensating the initial inclination.

7.- The numerical experiments do not predict the generation of ISWs propagating westward of the Strait. This is in agreement with observations, and the idea that this “western” bore, must be linked to a shallower second pycnocline formed during the summer season.

Apéndice A: Ecuación de Taylor-Goldstein y su resolución numérica

La ecuación de autovalores que gobierna la estructura de los modos verticales de una perturbación infinitesimal en un fluido estratificado bajo la influencia de un flujo paralelo es la ecuación de Taylor-Goldstein (Baines 1995):

$$\psi_{zz}^* + \left\{ \frac{N^2}{(U-c)^2} - \frac{U_{zz}}{(U-c)} - k^2 \right\} \psi^* = 0. \quad (\text{A.1})$$

Donde ψ^* es la estructura vertical de la función de corriente $\psi(x, z) = \psi^*(z)e^{ik(x-ct)}$, $U(z)$ el perfil de velocidad del flujo, $N(z)$ la frecuencia de Brunt-Väisälä, c la velocidad de fase, y k el número de onda. Esta ecuación también suele expresarse en términos de la elevación vertical de las isopícnas $\xi = \psi/(U-c)$, dando lugar a la ecuación (3.2). Para obtener los modos internos se puede asumir la condición de superficie rígida ($w|_{z=0} = 0$), con lo que las condiciones de contorno para (A.1) resultan ser homogéneas:

$$\psi^*(0) = \psi^*(-H) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Fijado el número de onda k , el problema (A.1)-(A.2) debe ser resuelto de forma numérica para perfiles arbitrarios de $U(z)$ y $N(z)$ dados. Observar que la ecuación no está definida en la profundidad z_0 tal que $U(z_0) = c$, llamada capa crítica. En esta región de la columna de agua, si existe, los efectos de la viscosidad y difusión, ignorados por la ecuación de Taylor-Goldstein, juegan un papel importante (Drazin y Reid 1981). Una condición suficiente para la ausencia de capas críticas y estabilidad del flujo es que $\text{Imag}(c) \leq 0$, que puede ser dada en términos del número de Richardson (Miles 1961): $\text{Ri} > 1/4$ en todo el fluido, donde:

$$\text{Ri}(z) = \frac{N^2}{U_z^2} \quad (\text{A.3})$$

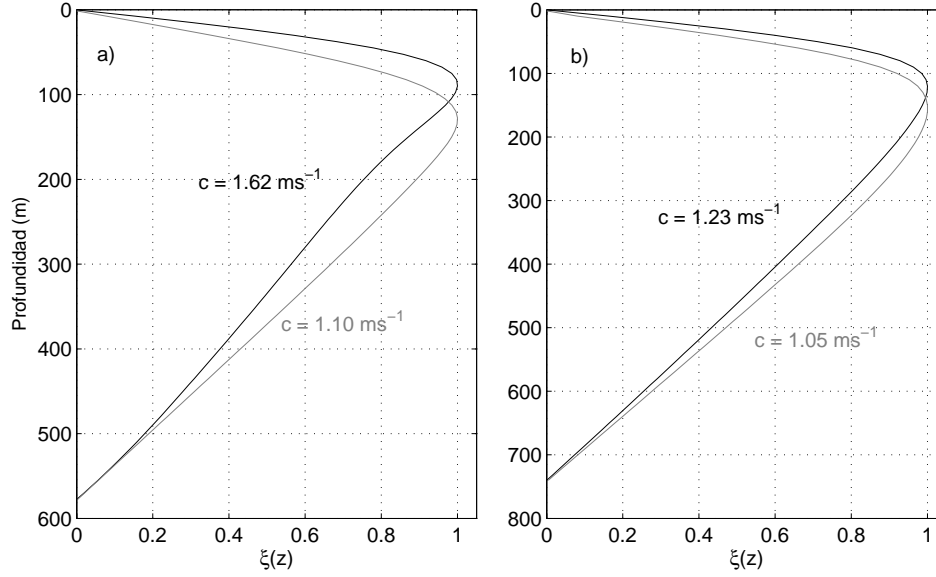


Figura A.1: a) Línea negra: Amplitud normalizada de las oscilaciones verticales de las isopicnas del primer modo baroclino para los perfiles de velocidad y de Brunt-Väisälä mostrados en la Figura 3.5a. Línea gris: lo mismo que lo anterior pero considerando un perfil de velocidad nulo. b) Lo mismo que a) para los perfiles de la Figura 3.5b.

Si asumimos que $U \neq c$ en toda la columna de agua, la ecuación (A.1) es equivalente a:

$$(U - c)^2 D\psi^* - U_{zz}(U - c)\psi^* + N^2\psi^* = 0, \quad (\text{A.4})$$

donde $D \equiv (d^2/dz^2 - k^2)$.

Desarrollando (A.4) y agrupando términos en potencias de c se llega a la siguiente expresión para ψ^* :

$$c^2 D\psi^* + c(U_{zz}\psi^* - 2UD\psi^*) + (U^2 D - U_{zz}U + N^2)\psi^* = 0, \quad (\text{A.5})$$

que puede ser expresado en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^* \\ c\psi^* \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & D \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^* \\ c\psi^* \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

donde $A = (-U^2D + U_{zz}U - N^2)$, $B = (2UD - U_{zz})$, $C = 1$.

Para discretizar la ecuación consideremos la partición de $[-H, 0]$: $-H = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{n-1} = 0$, con $z_j - z_{j-1} = \Delta z$, $j = 1, 2, \dots, n-1$, y aproximamos la segunda derivada de ψ^* mediante diferencias finitas centradas de segundo orden:

$$\psi_j^{*''} = \frac{\psi_{j+1}^* - 2\psi_j^* + \psi_{j-1}^*}{\Delta z^2} + O(\Delta z^2) \quad (\text{A.7})$$

donde $\psi_j^* \equiv \psi^*(z_j)$. El operador A , B y C se escriben entonces en forma discreta de la siguiente manera:

$$A = -\frac{1}{\Delta z^2} \begin{pmatrix} (\Delta z^2 - k^2)U_0^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ U_1^2 & -(2+k^2)U_1^2 & U_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U_2^2 & -(2+k^2)U_2^2 & U_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & U_{n-2}^2 & -(2+k^2)U_{n-2}^2 & U_{n-2}^2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (\Delta z^2 - k^2)U_{n-1}^2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} U_0U_0'' & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U_1U_1'' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & U_0U_2'' & \vdots & \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_{n-1}U_{n-1}'' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N_0^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N_2^2 & \vdots & \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{n-1}^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

$$B = \frac{2}{\Delta z^2} \begin{pmatrix} (\Delta z^2 - k^2)U_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ U_1 & -(2+k^2)U_1 & U_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U_2 & -(2+k^2)U_2 & U_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & U_{n-2} & -(2+k^2)U_{n-2} & U_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (\Delta z^2 - k^2)U_{n-1} \end{pmatrix} +$$

$$- \begin{pmatrix} U_0'' & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U_1'' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & U_2'' & & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_{n-1}'' \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

$$C = I_n. \quad (\text{A.10})$$

Donde I_n es la matriz identidad de orden n . La ecuación de autovalores (A.6) se resuelve mediante el algoritmo QZ (Moller y Stewart 1973).

En el Estrecho de Gibraltar el flujo medio es suficientemente intenso para modificar sensiblemente la estructura y velocidad de fase de los modos baroclinos. La Figura A.1 muestra el primer modo, dinámicamente estable en ambos casos, para los perfiles de $N(z)$ obtenidos en el estrechamiento de Tarifa y la entrada del Mar de Alboran (ver Capítulo 3, Figura 3.5) con flujo medio y sin él. Para las dos posiciones el flujo medio provoca que la máxima amplitud se alcance a menor profundidad y que las velocidades de fase aumenten considerablemente. La diferencia es más acusada en la posición de Tarifa al ser el flujo más intenso allí, con un incremento de velocidad del primer modo de 0.52 ms^{-1} , y de posición de máxima amplitud de unos 75 m.

Apéndice B: Validez de la aproximación hidrostática

Consideremos la ecuación vertical de momento despreciando los términos viscosos y bajo la aproximación de Boussinesq:

$$\frac{Dw}{Dt} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} - b = 0 \quad (\text{B.1})$$

donde \tilde{p} es la desviación de presión respecto a la hidrostática, ρ_0 una densidad de referencia, $b = -g(\tilde{\rho}/\rho_0)$ el término de flotabilidad, y D/Dt la derivada total o material. La aproximación hidrostática será válida si

$$\frac{Dw}{Dt} \ll b, \quad (\text{B.2})$$

Consideremos un fenómeno de escala horizontal característica L , escala vertical H , y con velocidades típicas horizontal y vertical U , W respectivamente. Supongamos por simplicidad que la derivada temporal es del mismo orden, o de orden inferior, que los términos advectivos. En ausencia de difusión, la densidad de una partícula fluida es constante, es decir que $D\rho/Dt = 0$, o equivalentemente,

$$\frac{Db}{Dt_h} + N^2 w = 0. \quad (\text{B.3})$$

Aquí $N^2 = -(g/\rho_0)(\partial\rho/\partial z)$ es la frecuencia de Brunt-Väisälä, y D/Dt_h la componente horizontal de la derivada total, que quedaría escalada por U/L . De la ecuación (B.3) se deduce que w estaría escala entonces por bU/LN^2 , y por tanto $Dw/Dt \ll b$ si

$$\frac{U^2}{L^2 N^2} \ll 1. \quad (\text{B.4})$$

La aproximación hidrostática es pues válida cuando la escala temporal del movimiento (U/L) es mucho menor que N^{-1} . Para ondas lineales, la conclusión es equivalente a la dada por Gill (1992), $\omega \ll N$, donde $\omega \cong (U/L)$ es la frecuencia angular de la onda.

Appendix C: Calculation of Wave Energy

Let's define $\rho_B(z)$ as the background unperturbed density profile (see Figure 5.3). The three dimensional fields of density and velocity associated with the internal wave perturbations are defined as ρ and $\vec{u} \equiv (u, v, w)$, respectively. Defining $\xi(x_0, y_0, z_0)$ as the vertical excursion of the fluid particle from the equilibrium position (x_0, y_0, z_0) , the work per unit volume W_p required to displace the particle from z_0 to $z_0 + \xi_0$ reads:

$$W_p = -g \int_{z_0}^{z_0 + \xi_0} (\rho_B(z_0) - \rho_B(z)) dz, \quad (\text{C.1})$$

where g is the acceleration due to gravity. For infinitesimal waves, the above expression can be computed by taking the Taylor expansion of $\rho_B(z)$ centered at $z = z_0$. With first order accuracy it can be found that

$$W_p = \rho_B(z_0) \frac{N^2(z_0)}{2} \xi_0^2.$$

However, for the large-amplitude internal waves analyzed here, this approximation is not valid, and (C.1) has been computed using the standard trapezoidal integration technique.

The total energy E_T of the internal wave is obtained by integrating the energy within the fluid volume V which includes the wave. Thus the total energy is $E_T = E_{AP} + E_K$, where E_{AP} and E_K are the available potential and kinetic energy respectively Vlasenko and Stashchuk (2007). They are calculated separately according to the formulas

$$E_{AP} = \int_V W_p dV, \quad E_K = \frac{1}{2} \int_V \rho (u^2 + v^2 + w^2) dV.$$

References

- Akylas T.R. (1991). On the radiation damping of a solitary wave in a rotating channel. In *Mathematical Approaches in Hydrodynamics*, ed. TMiloh, 175–181.
- Alford, M. H. (2003). Improved global maps and 54-year history of wind-work on ocean inertial motions, *J. Geophys. Res. Lett.*, 30(8), 1424.
- Apel, J. (2003). A new analytical model for internal solitons in the ocean, *J. Phys. Oceanogr.*, 33, 2247–2269.
- Armi, L., and D. Farmer (1987). A Generalization of the Concept of Maximal Exchange in a Strait, *J. Geophys. Res.*, 92 (C13), 14679–14680.
- Armi, L., and D. Farmer (1988). The flow of the Mediterranean water through the Strait of Gibraltar, *Prog. Oceanogr.*, 21, 1–105.
- Baines, P. G. (1973). The generation of internal tides by flat-bump topography, *Deep-Sea Research*, 20 (2), 179–206.
- Baines, P. G. (1982). On internal tide generation models, *Deep-Sea Res.*, 29, 307–338.
- Baines, P. G. (1983). Tidal motion in submarine canyon: a laboratory experiment, *J. Phys. Oceanogr.*, 13 (2), 310–328.
- Baines, P.G. (1995). Topographic Effects in Stratified Flows. *Cambridge University Press*.
- Beardsley, R.C. (1970). An experimental study of inertial waves in a closed cone, *Stud. Appl. Math.*, 49, 187–196.
- Bell, T. H. (1975). Lee waves in stratified flows with simple harmonic time dependence, *J. of Fluid Mech.*, 67(4), 705–722.
- Benny, D. J. (1966). Long nonlinear waves in fluid flows, *J. Math. Phys.*, 45, 52–63.

- Boussinesq, M.J. (1871). Théorie de l'intumescence liquid appelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire. *Comptes Rendus Acad. Sci.*, Paris, 72, pp. 755–759.
- Brandt, P., W. Alpers, and J. O. Backhaus (1996). Study of the generation and propagation of internal waves in the Strait of Gibraltar using a numerical model and synthetic aperture radar images of the European ERS 1 satellite, *J. Geophys. Res.*, 101, 14237–14252.
- Briscoe, M. (1984). Tides, solitons and nutrients. *Nature*, 312, 1–5.
- Bruno, M., J.J. Alonso, A. Cózar, J. Vidal, A. Ruiz-Cañavate, F. Echevarría, and J. Ruiz (2002). The boiling-water phenomena at Camarinal sill, the Strait of Gibraltar, *Deep-Sea Res. II*, 49, 4097–4113.
- Bryden, H.L., and T.H. Kinder (1991). Steady two-layer exchange through the Strait of Gibraltar. *Deep-Sea Res I*, 38, S1, S445–S463.
- Bryden, H. L., J. Candela, and T. H. Kinder (1994). Exchange through the Strait of Gibraltar. *Prog. Oceanogr.*, 33, 201–248.
- Candela, J. (2001). Mediterranean water and global circulation, in *Ocean Circulation and Climate*, edited by G. Siedler, J. Church and J. Gould, pp. 419–429, Academic Press, San Diego, Ca.
- Candela, J., C. D. Winant, and H. L. Bryden (1989). Meteorologically Forced Subinertial Flows Through the Strait of Gibraltar, *J. Geophys. Res.*, 94(C9), 12667–12679.
- Candela, J., C. Winant, and A. Ruiz (1990). Tides in the Strait of Gibraltar. *J. Geophys. Res.*, 95, 7313–7335.
- Carpenter, W. B. and J. G. Jeffreys (1870) Report on deep-sea researches carried on during the months of July, August, and September, 1870 in H. M. surveying-ship 'Porcupine', *Proceedings of the Royal Society, London*, 19, 146–221.

- Choi, W., and R. Camassa (1999). Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system, *J. of Fluid Mech.*, 396, 1–36.
- Cox, C. and H. Sandström (1962). Coupling of internal and surface waves in water of variable depth. *J. Oceanogr. Soc. Japan*, 20th Anniv. Vol, 499–513.
- Crepon, M. (1965). Influence de la pression atmosphérique sur le niveau moyen de la Méditerranée Occidentale et sur le flux à travers le détroit de Gibraltar, *Cah. Oceanogr.*, 1, 15-32.
- Drazin, P.G. and Reid, W.H. (1981). Hydrodynamic Stability. *Cambridge University Press*.
- Egbert, G. D. and R. D. Ray (2001). Estimates of M2 tidal energy dissipation from Topex/Poseidon altimeter data, *Journal of Geophysical Research*, 106, 22475–22502.
- Egbert G. D. and L. Erofeeva (2002). Otis-osu tidal inversion software, www.coas.oregonstate.edu/research/po/research/tide/otis.html.
- Farmer, D., and L. Armi (1988). The flow of Mediterranean water through the Strait of Gibraltar; the flow of Atlantic water through the Strait of Gibraltar., *Prog. Oceanogr.*, 21, 1–106.
- Farmer D., and L. Armi (1986). Maximal two-layer exchange over a sill and through the combination of a sill and contraction with barotropic flow. *J. Fluid Mech*, 164, 53-76.
- García Lafuente, J. (1986). Variabilidad del Nivel del Mar en el Estrecho de Gibraltar: Mareas y Oscilaciones Residuales. *Tesis Doctoral*, Universidad de Málaga.
- García Lafuente, J., J.L. Almazán, F. Castillejo, A. Khribeche and A. Hakimi (1990). Sea level in the Strait of Gibraltar: Tides. *Int. Hydrogr. Rev.*, 47, 111–130.
- García Lafuente, J., J.M. Vargas, F. Plaza, T. Sarhan, J. Candela and B. Baschek (2000). Tides at the eastern section of the Strait of Gibraltar. *J. Geophys. Res.*, 105, 14,197–14,213.

- García Lafuente, J., E. Álvarez Fanjul, J.M. Vargas, A.W. Ratsimandresy (2002). Subinertial variability in the flow through the Strait of Gibraltar. *J. Geophys. Res.*, 107(C10), 3168.
- García Lafuente J., A. Sánchez Román, G. Díaz del Río, G. Sannino, and J.C. Sánchez Garrido (2007). Recent observations of seasonal variability of the Mediterranean outflow in the Strait of Gibraltar, *J. Geophys. Res.*, 112, C10005.
- Garrett, C. (1983). Variable sea level and strait flows in the Mediterranean: A theoretical study to the response of the response to meteorological forcing, *Oceanol. Acta*, 6, 79–87.
- Garrett C. (2003). Internal tides and ocean mixing. *Science*, 301, 1858–1859.
- Garrett C. and E. Kunze (2007). Internal Tide Generation in the Deep Ocean, *Annual Rev. Fluid Mech.*, vol. 39, Issue 1, pp.57–87.
- Gerkema T. and J.T.F. Zimmerman (1995): Generation of nonlinear internal tides and solitary waves. *J. Phys. Oceanogr.*, 25 (6), 1081–1094.
- Gerkema, T. (1996) A unified model for the generation and fission of internal tides in a rotating ocean. *J. Marine Res.*, 54, 421–450
- Gill, A. (1982). *Atmosphere-Ocean Dynamics*, Academic, San Diego, Calif.
- Gilman, O.A., R. Grimshaw, and Yu.A. Stepanyants (1996). Dynamics of internal solitary waves in a rotating fluid. *Dyn. Atmos. and Oceans*, 23, 403–411.
- Glenn S. Carter and Mark A. Merrifield (2007). Open boundary conditions for regional tidal simulations, *Ocean Modelling*, 18, 194–209.
- Grimshaw, R. (1985). Evolution equation for weakly nonlinear, long internal waves in a rotating fluid *Stud. Appl. Math.*, 73, 1–33.
- Grimshaw, R., and W. Melville (1989). On the derivation of the rotation-modified Kadomtsev-Petviashvili equation *Stud. Appl. Math.*, 80, 183–202.

- Grimshaw, R., and S. Tang (1990). The rotation-modified Kadomtsev-Petviashvili equation: an analytical and numerical study. *Stud. Appl. Math.*, 83, 223–248.
- Grimshaw, R., E. Pelinovsky and T. Talipova (1999). Solitary wave transformation in a medium with sign-variable quadratic nonlinearity and cubic nonlinearity. *Physica D*, 132, 40–62.
- Grimshaw, R., E. Pelinovsky, and A. Polouckina (2002). Higher-order Korteweg-de Vries models for internal solitary waves in stratified shear flow with a free surface. *Nonlin. Processes in Geophys.*, 9, 221–235.
- Grimshaw, R., E. Pelinovsky, T. Talipova, and A. Kurkin (2004). Simulation of the transformation of internal solitary waves due on oceanic shelves, *J. Phys. Oceanogr.*, 34, 2774–2791.
- Helfrich, K.R., and W.K. Melville (2006). Long nonlinear internal waves, *Annual Rev. Fluid Mech.*, 38, 395–425.
- Helfrich, K.R. (2007). Decay and return of internal solitary waves with rotation, *Phys. of Fluids*, 19, 026601.
- Helfrich, K. R. and R. H. J. Grimshaw (2008). Nonlinear disintegration of the internal tide. *J. Phys. Oceanogr.*, 38, 686–701.
- Hsu, K.J. (1983). *The Mediterranean Was a Desert*, Princeton University Press.
- Izquierdo, A., L. Tejedor, D. Sein, J. Backhaus, P. Brandt, A. Rubino, and B. Kagan (2001). Control variability and internal bore evolution in the Strait of Gibraltar: a 2-D two-layer model study. *Estuarine Coastal Shelf Sci.*, 53, 637–651.
- Jackson C.R, and J. Apel (2004). An atlas of internal solitary-like waves and their properties, Second edition. <http://www.internalwaveatlas.com/Atlas>.
- Karpman, V.I (1975). *Nonlinear Waves in Dispersive Media*. Pergamon: Oxford.
- Katsis, C., and T.R. Akylas (1897). Solitary internal waves in a rotating channel: A numerical study. *Phys. of Fluids*, 30, 297–301.

- Knudsen M. (1899). De hydrografiske forhold i de danske farvande indenfor Skagen i 1894-98. *Komm For Vidensk Unders I de danske farvande* 2(2):19-79.
- Korteweg, D.J, and H. de Vries (1985). On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philosophical Magazine*, 39, 422-443.
- La Violette, P., T. Kinder, and D. Green III (1986). Measurement of internal waves in the Strait of Gibraltar using a shore-based radar. *NORDA Rep.*, 118, 3193-3206.
- La Violette, P.E., and R. A. Arnone (1988). A tide-generated internal waveform in the western approaches to the Strait of Gibraltar. *J. Geophys. Res.*, 93C, 15653-15667.
- Lacombe, H., and C. Richez (1982). The regime of the Strait of Gibraltar, in *Hydrodynamics of Semi-enclosed Seas*, edited by J.C.J. Nihoul, pp. 13-74, Elsevier, Amsterdam.
- Lamb, K. G., and L. Yan (1996). The evolution of internal wave undular bores: comparisons of a fully nonlinear numerical model with weakly-nonlinear theory, *J. Phys. Oceanogr.*, 26, 2712-2734.
- Le Blond, P.H. and L.A. Mysak (1978). *Waves in the Ocean*. Amsterdam: Scientific Publishing Company.
- Lee, C-Y. and Beardsley, R. C. (1974). The generation of long nonlinear internal waves in a weakly stratified shear flow, *J. Geophys. Res.*, 79, 453-462.
- Leith, C. E. (1968). Diffusion approximation for two-dimensional turbulence, *Phys. Fluids*, 10, 1409-1416.
- Leith, C. E. (1996). Large eddy simulation of complex engineering and geophysical flows, *Physica D.*, 98, 481-491.
- Leonov, A.I (1981). The effect of the earth's rotation on the propagation of weakly-nonlinear surface and internal long waves. *Annals NY Acad. Sci.*, 373, 150-159.
- LeVeque, Randall (2002). *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press.

- Lighthill, J. (1978). *Waves in Fluids*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Marshall, J., C. Hill, L. Perelman, and A. Adcroft (1997a). Hydrostatic, quasi-hydrostatic, and nonhydrostatic ocean modeling. *J. Geophysical Res.*, 102(C3), 5733–5752.
- Marshall, J., A. Adcroft, C., Hill, L. Perelman, and C. Heisey (1997b). A finite-volume, incompressible Navier-Stokes model for studies of the ocean on parallel computers. *J. Geophys. Res.*, 102 (C3), 5753–5766.
- Marsigli, L. F. (1681). Internal observations on the Thracian Bosphorus, or true channel of Constantinople, represented in letters to her majesty, Queen Christina of Sweden. Translated by E. Hudson, in *Oceanography: Concepts and History*, edited by M. B. Deacon, 33-44, Dowden, Hutchinson and Ross, Stroudsburg, Pennsylvania.
- Maxworthy, T. (1983). Experiments on solitary internal Kelvin waves. *J. of Fluid Mech.*, 129, 365–383.
- MEDAR Group, MEDATLAS/2002 database (2002). Mediterranean and black sea database of temperature salinity and bio-chemical parameters. Climatological atlas., IFREMER Edition.
- Melville, W. K., G. G. Tomasson, and D. P. Renouard (1989). On the stability of Kelvin waves. *J. Fluid Mech.*, 206, 1–23.
- Miles, J.W. (1961). On the stability of heterogeneous shear flows. *J. Fluid Mech.*, 10, 496–508.
- Morozov, E., K. Trulsen, M. Velarde, and V. Vlasenko (2002). Internal tides in the Strait of Gibraltar, *J. Phys. Oceanogr.*, 32, 3193–3206.
- Moler, C. B., and G. W. Stewart (1973). An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 10, 241–256.
- Munk, W., “Once again: once again—tidal friction” (1997). *Prog. Oceanogr.*, 40, 7–35.
- Munk, W. and C. Wunsch (1998). “Abyssal recipes II: energetics of tidal and wind mixing”, *Deep-Sea Res. I: Oceanographic Research Papers*, 45, 1977–2010.

- Nakamura T., T. Awaji, T. Hatayama, K. Akitomo et al (2000). The Generation of Large-Amplitude Unsteady Lee Waves by Subinertial K_1 Tidal Flow: A Possible Vertical Mixing Mechanism in the Kuril Straits. *J. Phys. Oceanogr.*, 30, 1601–1621.
- Niwa, Y., and T. Hibiya (2001). Numerical study of the spatial distribution of the M2 internal tide in the Pacific Ocean, *J. Geophys. Res.*, 106(C10), 22, 441–22, 449.
- Ostrovsky, L.A (1978). Nonlinear internal waves in a radiating ocean. *Oceanology*, 18, 119–125.
- Pacanowski, R. C., and S.G.H. Philander (1981). Parameterisation of vertical mixing in numerical models of Tropical Oceans, *J. Phys. Oceanogr.*, 11, 1443–1451.
- Pettersson O. (1908). Strömstudier vid Östersjönsportar. Sven. Hydrogr. Biol. Komm. Skr. 3, 13–Ü37.
- Pistek, P., and P. La Viollete (1999). Observations of the suppression of tide-generated nonlinear internal wave packets in the Strait of Gibraltar, *J. Marine. Syst.*, 20, 113–128.
- Rayleigh, Lord (1879). On waves. *Phil. Mag.*, 1, 257–279.
- Renouard, D.P., G. Chabert d’Hieres, and X. Zhang (1987). An experimental study of strongly nonlinear waves in a rotating system, *J. of Fluid Mech.*, 177, 381–394.
- Richez, C. (1994). Airbone synthetic aperture radar tracking of internal waves in the Strait of Gibraltar, *Prog. Oceanogr.*, 33, 93–159.
- Russell, J.S (1844). Report on waves. *Proceedings of the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science*, John Murray: London, pp. 311–390.
- Sánchez Garrido, J.C., J. García Lafuente, F. Criado Aldeanueva, A. Baquerizo, and G. Sannino (2008). Time-spatial variability observed in velocity of propagation of the internal bore in the Strait of Gibraltar, *J. Geophys. Res.*, 113, C07034.

- Sánchez Román, A., F. Criado Aldeanueva, J. García Lafuente, and J.C. Sánchez (2008). Vertical structure of tidal currents over Spartel and Camarinal Sills, Strait of Gibraltar. *J. Marine. Syst.*, in press.
- Sandström J. W. (1908). Dynamicsche Versuche mit Meerwasser. *Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie*, 36, 6–23.
- Sannino, G., A. Bargagli, and V. Artale (2002). Numerical modeling of the mean exchange through the Strait of Gibraltar, *J. Geophys. Res.*, 107(C8), 3094.
- Sannino, G., A. Bargagli, and V. Artale (2004). Numerical modelling of the semidiurnal tidal exchange through the Strait of Gibraltar, *J. Geophys. Res.*, 109, C05011.
- Sannino, G., L. Pratt, and A. Carillo (2009). Hydraulic criticality of the exchange flow through the Strait of Gibraltar. Submitted to *J. Phys. Ocean.*.
- Sáenz, J.L., J. Acosta, M. Esteras, P. Herranz, C. Palomo and N. Sandoval (1991). Prospección geofísica del Estrecho de Gibraltar (Resultados del programa Hércules 1980–1983) *Publicaciones especiales del Instituto Español de Oceanografía*, 7.
- Stommel, H. (1972). Deep winter-time convection in the western Mediterranean Sea. In *Studies in Physical Oceanography, A Tribute to Georg Wüst on His 80th Birthday*, ed. A. L. Gordon, pp. 207–18. New York: Gordon and Breach.
- Tsimplis M.N, and H. L. Bryden (2000). Estimation of the transports through the Strait of Gibraltar. *Deep Sea Res. I*, 47:2219–2242.
- Tsimplis, M.N. (2000). Vertical structure of the tidal currents over the Camarinal Sill at the Strait of Gibraltar, *J. Geophys. Res.*, 104, 13541–13557.
- Vargas, J. M, J. García Lafuente, J. Candela, and A.J. Sánchez (2006). Fortnightly and monthly variability of the exchange through the Strait of Gibraltar, *Prog. Oceanogr.*, 70 (2-4), 466–485.
- Vázquez, A., N. Stashchuk, V. Vlasenko, M. Bruno, A. Izquierdo, and P.C. Gallacher (2006). Evidence of multimodal structure of the baroclinic tide in the Strait of Gibraltar, *Geophys. Res. Lett.*, 33, L17605.

- Versteeg H.K, and W. Malalasekera (1995). An Introduction to Computational Fluid Dynamics, Longman.
- Vlasenko, V.I., P. Brandt, and A. Rubino (2000). On the structure of large-amplitude internal solitary waves, *J. Phys. Oceanogr.*, 30, 2172–2185.
- Vlasenko, V., N. Stashchuk, and K. Hutter (2005). Baroclinic tides: theoretical modeling and observational evidence, *Cambridge University Press*.
- Watson, G., and I.S. Robinson (1990). A study of internal waves propagation in the Strait of Gibraltar using shore-based radar images, *J. Phys. Oceanogr.*, 20, 374–395.
- Wesson, J., and M. Gregg (1988). Turbulent dissipation in the Strait of Gibraltar and associated mixing. In: “*Small-Scale Turbulence and Mixing in the Ocean*”. Ed. J. Nihoul and B. Jamart, Elsevier Sci., New-York, 201–212.
- Whitham, G. (1974). Linear and nonlinear waves, New-York: J. Wiley and Sons.
- Yang Y.J., T.Y. Tang, M.H. Chang, A.K. Liu, M.K. Hsu and S.R. Ramp (2004). Solitons northeast of Tung-Sha Island during the ASIAEX pilot studies. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 29, 1182–1199.
- Zeilon, N. (1912). On tidal boundary waves and related hydorphysical problems. *Kungl. Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar*, 4 (47), 17–39.
- Ziegenbein, J. (1969). Short internal waves in the Strait of Gibraltar. *Deep-Sea Res.*, 16, 479–487.
- Ziegenbein, J. (1970). Spatial observations of short internal waves in the Strait of Gibraltar. *Deep-Sea Res.* 17, 867–875.