

**ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LOS
ELEMENTOS FINITOS DE PROBLEMAS
DE FRACTURA EN FGM**

Emilio Martínez Pañeda

Trabajo Final de Máster presentado en el
Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica
en cumplimiento parcial de los requisitos del

MASTER OFICIAL DE ESTRUCTURAS

Tutor: Rafael Gallego Sevilla
Dpto. de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica
Edificio Politécnico, Universidad de Granada
18071, Granada

Septiembre 2012

Resumen

Los Materiales Funcionalmente Graduados (FGM – Functionally Graded Materials) son aquellos cuya composición, y por ende sus propiedades, varían gradualmente en función de la posición. La necesidad de entender, cuantificar y mejorar la tenacidad de los FGMs ha traído consigo un especial interés en establecer una metodología para la mecánica de la fractura en esos materiales. Debido al alto coste y las rebuscadas instalaciones necesarias para procesar experimentalmente los FGMs, la simulación numérica del comportamiento a fractura ha adquirido especial relevancia.

El objetivo de este estudio es el de desarrollar una completa metodología para la simulación numérica de procesos de fractura cuasi-estáticos en FGMs bidimensionales bajo el modo mixto de carga. Este es el modo de fractura inherente a los FGMs y es inducido en este trabajo inclinando la grieta, o con respecto a la dirección de carga aplicada, como en el caso de un material homogéneo, o con respecto a la dirección del gradiente del material, o mediante una combinación de ambos; las tres configuraciones características del modo mixto de fractura en FGMs.

A partir del método de los elementos finitos se calculan los FITs y el término no singular del T -stress en el preciso instante de inicio de propagación de la entalla y, con el objetivo de validar el modelo numérico, los resultados obtenidos se comparan con los registrados en ensayos experimentales disponibles en la literatura. Se aprecia un grado de similitud más que suficiente y las diferencias existentes son discutidas y justificadas.

Una vez validado, el modelo numérico se desarrolla para dar respuesta a problemas no resueltos de la fractura en modo mixto en FGMs. Así, se estudia la sensibilidad de los parámetros de fractura ante ligeras variaciones en la función numérica que ajusta los datos experimentales. Estos demuestran ser

muy sensibles, no sólo ante los cambios en los valores locales de las propiedades elásticas en la punta de la grieta, sino ante reducidas disimilitudes entre las pendientes de las funciones de aproximación en el entorno de la fisura. Ratificando la influencia que por sí misma tiene el gradiente de propiedades elásticas del material sobre los FITs y el T -stress en FGMs.

Así mismo, se evalúa el efecto de la variación del coeficiente de Poisson sobre los parámetros de fractura. Los resultados muestran que esta tiene una influencia significativa sobre los FITs y especialmente el T -stress. Este estudio advierte de las imprecisiones derivadas de despreciar la influencia de la variación del coeficiente de Poisson sobre los resultados en trabajos de fractura en modo mixto en FGMs, especialmente cuando la carga está aplicada en una dirección paralela al gradiente de propiedades del material.

Se analiza a continuación la trayectoria descrita por la grieta durante su propagación mediante el X-FEM, de acuerdo con el criterio de la máxima tensión principal y asumiendo homogeneización local en el extremo de la fisura. Los resultados obtenidos vuelven a compararse con los registrados en ensayos experimentales bajo las mismas condiciones. Se observa una precisión razonable y una fuerte dependencia de la configuración evaluada. Las disimilitudes son discutidas en profundidad y se propone un criterio de fractura que tenga en consideración la variación en el espacio de la resistencia a fractura para determinadas geometrías y condiciones.

La elección de un ensayo experimental para validar el modelo numérico es especialmente apropiada para reproducir en el mismo condiciones propias de casos reales y poder establecer una metodología al respecto de la simulación numérica de los mismos.

Abstract

Functionally Graded Materials (FGMs) are those whose composition and hence the properties vary gradually as a function of position. The need to understand, quantify and improve the toughness of FGMs has brought interest in a fracture mechanics methodology for such materials. Due to the high cost and elaborate facilities required for experimental processing of FGMs, the numerical simulation of fracture behaviour of cracked FGMs has acquired special relevance.

In this work, a complete scheme for numerical simulation of quasi-static mixed mode fracture in planar FGMs is developed. Near tip mode mixity was introduced either by inclining the crack to the remote loading direction, as in the case of homogeneous materials, or to the direction of material gradient, or both.

Finite element simulations were conducted in order to calculate the SIFs and the non singular T -stress at the precise instant of crack initiation. Computational results of fracture parameters and crack initiation angles are compared to available experimental results and good agreement is obtained. Once validated, the numerical model is developed in order to study unsolved problems of mixed-mode fracture in FGMs.

A sensitivity analysis of fracture parameters under small variations in the numerical fit of the experimental data is performed. Both the SIFs and the T -stress show a high sensitivity, not only to small changes in local elastic properties at the crack tip, but also to little differences in the slopes of the numerical curve fit in the vicinity of the crack.

Also, Poisson's ratio effect on fracture parameters for a crack in FGMs under mixed-mode loading conditions is evaluated. The numerical results

show that Poisson's ratio has a significant influence on both SIFs and T -stress for FGMs. This work emphasizes that more attention needs to be paid to Poisson's ratio effect, specially when load direction becomes parallel to the direction of material gradation.

Crack propagation path is then analyzed by means of the X-FEM, setting the maximum principal stress as the crack initiation criterion, based on the assumption that the graded material is locally homogeneous near the crack tip. Crack trajectories obtained by the present numerical simulation are compared with available experimental results and seem to agree reasonably well. Existing differences are discussed and, for some specific cases, a criterion that compares the stress field surrounding the crack to local failure properties is proposed.

The goal of this work is to directly compare experiments and simulations so as to evaluate the applicability of the numerical scheme proposed in real cases, establishing a methodology for numerical simulation of fracture processes in FGMs under mixed-mode loading.

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría agradecer la labor de mi supervisor, Rafael Gallego Sevilla del Departamento Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica de la Universidad de Granada, por su inigualable dirección, su paciencia y sus consejos. Ha jugado un papel fundamental en el éxito de este trabajo.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Objetivos	5
1.3. Contenido de la memoria	6
2. Revisión Bibliográfica	11
2.1. Campo de tensiones y deformaciones en el extremo de la fisura	11
2.2. Fractura en modo mixto	17
2.3. El Método de los Elementos Finitos en FGMs	21
3. Metodología: modelo numérico	25
3.1. Características de la simulación	25
3.2. Resultados	33
3.2.1. Modelo homogéneo	33
3.2.2. Especímenes FGMs	35
4. Análisis de sensibilidad de los parámetros de fractura ante los cambios en la función de ajuste	41
4.1. Introducción	41
4.2. Motivación: ajuste lineal	43
4.3. Estudio de sensibilidad para ligeras variaciones de las propiedades elásticas en el entorno de la grieta	50
4.3.1. Caso I - FGM1	51
4.3.2. Caso II - FGM2	56

4.3.3. Caso III - FGM3	60
4.4. Estudio de sensibilidad para cambios en la pendiente de la función del ajuste	66
4.4.1. Caso I - FGM1	69
4.4.2. Caso II - FGM2	72
4.4.3. Caso III - FGM3	75
4.5. Discusión y conclusiones	78
5. Influencia del coeficiente de Poisson	83
5.1. Introducción	83
5.2. Metodología: modelo numérico	88
5.3. Resultados	91
5.3.1. Caso Homogéneo	91
5.3.2. Caso I - FGM1	91
5.3.3. Caso II - FGM2	93
5.3.4. Caso III - FGM3	94
5.4. Discusión y conclusiones	96
6. Estudio de la trayectoria del crecimiento de grieta mediante X-FEM	103
6.1. Introducción	103
6.2. Metodología: modelo numérico	106
6.3. Resultados	112
6.3.1. Caso I - FGM1	112
6.3.2. Caso II - FGM2	118
6.3.3. Caso III - FGM3	122
6.4. Conclusiones	126
7. Conclusiones y desarrollos futuros	129
7.1. Conclusiones	129
7.2. Desarrollos futuros	132

Índice de figuras

2.1. Eje de coordenadas en el frente de la grieta	12
2.2. Elemento finito homogéneo frente a elemento finito gradual . .	23
3.1. Geometría, carga y variación del módulo elástico: FGM1 . . .	27
3.2. Geometría, carga y variación del módulo elástico: FGM2 . . .	28
3.3. Geometría, carga y variación del módulo elástico: FGM3 . . .	29
3.4. Mallado en el extremo de la grieta	30
3.5. Mallado empleado para el modelo completo	31
3.6. Geometría del espécimen homogéneo	33
4.1. Homogeneización local de la grieta en un FGM	43
4.2. Comparativa de aproximaciones para el ajuste de la variación de propiedades en el Caso 1 - FGM	45
4.3. Comparativa de aproximaciones para el ajuste de la variación de propiedades en el Caso 2 - FGM	46
4.4. Comparativa de aproximaciones para el ajuste de la variación de propiedades en el Caso 3 - FGM	47
4.5. Ajuste lineal para los puntos de ensayo considerados en el análisis de sensibilidad - FGM1	52
4.6. Ajuste polinomial para los puntos de ensayo considerados en el análisis de sensibilidad - FGM1	54
4.7. Ajuste lineal para los puntos de ensayo considerados en el análisis de sensibilidad - FGM2	57

4.8. Ajuste polinomial para los puntos de ensayo considerados en el análisis de sensibilidad - FGM2	59
4.9. Ajuste lineal para los puntos de ensayo considerados en el análisis de sensibilidad - FGM3	62
4.10. Ajuste polinomial para los puntos de ensayo considerados en el análisis de sensibilidad - FGM3	64
4.11. Diferencias entre las inclinaciones de las pendientes de los ajustes considerados en el análisis de sensibilidad - FGM1	70
4.12. Detalle de las diferencias entre los ajustes en el entorno del extremo de la grieta - FGM1	71
4.13. Diferencias entre las inclinaciones de las pendientes de los ajustes considerados en el análisis de sensibilidad - FGM2	73
4.14. Detalle de las diferencias entre los ajustes en el entorno del extremo de la grieta - FGM2	74
4.15. Diferencias entre las inclinaciones de las pendientes de los ajustes considerados en el análisis de sensibilidad - FGM3	76
4.16. Detalle de las diferencias entre los ajustes en el entorno del extremo de la grieta - FGM3	77
5.1. Propiedades elásticas del acero y distintas cerámicas	90
6.1. Enriquecimiento de los nodos. X-FEM	108
6.2. El principio del método de los nodos fantasma	109
6.3. Mallado empleado en el cálculo por X-FEM	112
6.4. Comparativa de la trayectoria de la grieta: FGM1	113
6.5. Puntos de cálculo de los FITs - FGM1	114
6.6. Valores experimentales registrados del módulo elástico y las propiedades de fallo - FGM1	117
6.7. Comparativa de la trayectoria de la grieta: FGM2	118
6.8. Valores experimentales registrados del módulo elástico y las propiedades de fallo - FGM2	120
6.9. Puntos de cálculo de los FITs - FGM2	121

6.10. Comparativa de la trayectoria de la grieta: FGM3	122
6.11. Puntos de cálculo de los FITs - FGM3	124
6.12. Valores experimentales registrados del módulo elástico y las propiedades de fallo - FGM3	126

Índice de cuadros

3.1. Desplazamientos registrados en el inicio de la grieta	32
3.2. Resultados numéricos y experimentales para los parámetros de fractura del modelo homogéneo	34
3.3. Resultados numéricos y experimentales para el ángulo de inicio de la grieta del modelo homogéneo	34
3.4. Resultados numéricos y experimentales para los parámetros de fractura de los especímenes agrietados FGM	37
3.5. Resultados numéricos y experimentales para el ángulo de inicio de la grieta de los especímenes agrietados FGM	39
4.1. Resultados numéricos y experimentales de los parámetros de fractura para distintas aproximaciones. FGM	48
4.2. Resultados numéricos (MTS) y experimentales de los parámetros de fractura para distintas aproximaciones. FGM	49
4.3. Puntos de ensayo del análisis de sensibilidad - FGM1	51
4.4. Resultados numéricos de los parámetros de fractura para los puntos de ensayo considerados. Ajuste lineal - FGM1	53
4.5. Resultados numéricos de los parámetros de fractura para los distintos puntos de ensayo. Ajuste polinomial - FGM1	55
4.6. Puntos de ensayo del análisis de sensibilidad - FGM2	56
4.7. Resultados numéricos de los parámetros de fractura para los puntos de ensayo considerados. Ajuste lineal - FGM2	58
4.8. Resultados numéricos de los parámetros de fractura para los distintos puntos de ensayo. Ajuste polinomial - FGM2	60

4.9. Puntos de ensayo del análisis de sensibilidad - FGM3	61
4.10. Resultados numéricos de los parámetros de fractura para los puntos de ensayo considerados. Ajuste lineal - FGM3	63
4.11. Resultados numéricos de los parámetros de fractura para los distintos puntos de ensayo. Ajuste polinomial - FGM3	65
4.12. Resultados numéricos de los parámetros de fractura para los distintos ajustes considerados - FGM1	72
4.13. Resultados numéricos de los parámetros de fractura para los distintos ajustes considerados - FGM2	75
4.14. Resultados numéricos de los parámetros de fractura para los distintos ajustes considerados - FGM3	78
5.1. Resultados numéricos de los parámetros de fractura según los valores del coef. de Poisson considerados - FGM1	92
5.2. Resultados numéricos de los parámetros de fractura para la variación lineal del coef. de Poisson considerada. FGM1	92
5.3. Resultados numéricos de los parámetros de fractura según los valores del coef. de Poisson considerados - FGM2	94
5.4. Resultados numéricos de los parámetros de fractura para la variación lineal del coef. de Poisson considerada. FGM2	94
5.5. Resultados numéricos de los parámetros de fractura según los valores del coef. de Poisson considerados - FGM3	95
5.6. Resultados numéricos de los parámetros de fractura para la variación lineal del coef. de Poisson considerada. FGM3	96
6.1. Resultados numéricos para el parámetro ψ en los puntos de cálculo considerados - FGM1	115
6.2. Resultados numéricos para el parámetro ψ en los puntos de cálculo considerados - FGM2	121
6.3. Resultados numéricos para el parámetro ψ en los puntos de cálculo considerados - FGM3	124

Abreviaturas

FGM	Material Funcionalmente Graduados (Functionally Graded Material)
MEF	Método de los Elementos Finitos
MTS	Máxima tensión circunferencial (Maximum Hoop Stress)
FIT	Factor de Intensidad de Tensiones
EDI	Integral de dominio equivalente (Equivalent Domain Integral)
EFG	Método de Galerkin sin elementos (element-free Galerkin)
II	Integral de interacción (Interaction Integral)
X-FEM	Método de los Elementos Finitos extendidos (Extended Finite Element Method)
MCC	Técnica modificada del cierre de la grieta (Modified Crack Closure)
DCT	Técnica de correlación de desplazamientos (Displacement Correlation Technique)
ECO	Polietileno monóxido de carbono (Ethylene Carbon monoxide)

- DIC** Técnica de correlación de imágenes digitales (Digital Image Correlation)
- DI** Integral de dominio (Domain Integral)
- LDPE** Polietileno de baja densidad (Low Density Polyethylene)
- MZC** Modelo de Zona Cohesiva
- MPS** Máxima tensión principal (Maximum Principal Stress)

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

Los Materiales Funcionalmente Graduados (FGM – Functionally Graded Materials) son aquellos cuya composición varía gradualmente en función de la posición. El concepto de FGMs fue propuesto por primera vez en 1984 por científicos de materiales de Japón con el fin de mejorar las prestaciones de los materiales que se empleaban para crear barreras térmicas [1]. Viene de la necesidad de dar respuesta a situaciones comunes en la industria nuclear o automovilística, en las que ciertos componentes son sometidos a diferentes gradientes de temperatura y fuertes exigencias mecánicas. La aparición de los FGMs es, en definitiva, el resultado de la necesidad de acomodar la exposición del material a unos requisitos de servicio no uniformes.

La mayoría de los FGMs combinan materiales cerámicos con materiales metálicos. Los primeros aportan resistencia térmica y corrosiva al componente mientras que los metales proporcionan la resistencia mecánica y la conductividad térmica necesarias. Las fracciones de volumen de los constituyentes de un FGM varían de forma continua desde el 100% de cerámica y el 0% de metal en un extremo hasta el 0% de cerámica y el 100% de metal en el otro. Esta gradación trae como resultado una variación continuada de las propiedades del material, como el coeficiente de expansión térmica

y el módulo elástico, suponiendo ello una notable mejoría del material en la resistencia al choque térmico y su tenacidad. Además, ayudan a reducir notablemente las tensiones en la interfaz de dos materiales. Estos atributos sugieren una prometedora y progresiva implantación de los FGMs en aplicaciones modernas de estructuras que están sometidas a altas temperaturas [2].

Los FGMs pueden ser modificados a medida durante el diseño de sus constituyentes para cumplir las rigurosas prestaciones requeridas en la práctica, y por ello tienen un gran potencial en el campo de los componentes críticos para la seguridad de las estructuras, como los reactores de fusión nucleares, los fuselajes de los aviones, dispositivos microelectrónicos o biomateriales [3, 4]. Otra aplicación reseñable de los FGMs se encuentra en el área de materiales compuestos (composites) donde pueden actuar como transición entre dos diferentes capas adheridas entre sí. Esto se consigue situando una zona de transición entre las capas, de manera que las propiedades del material varían para emparejarse con las de los compuestos de los extremos. Al reducir al mínimo los desajustes de propiedades en las líneas de unión, permite reducir las tensiones residuales y la delaminación entre capas [5].

Sin embargo, el área de mayor importancia para los FGMs se corresponde con la necesidad que provocó su hallazgo: mejorar las prestaciones de las barreras térmicas. Por ejemplo, el uso de revestimientos de FGM de barrera térmica en las turbinas de gas ofrece una reducción en el consumo de combustible al necesitar mucho menos flujo de refrigerante o permitir una mayor temperatura a la entrada de la turbina, mientras que mejora la durabilidad al disminuir la temperatura del metal [6]. Los materiales empleados en estas aplicaciones desempeñan su labor bajo grandes gradientes térmicos y en ambientes oxidantes, donde calentamientos rápidos suceden en un extremo del componente mientras que el otro flanco se encuentra a una temperatura inferior en varios cientos de grados.

La necesidad de conseguir procesos de combustión más eficientes en muchas aplicaciones aeroespaciales como turbinas, compresores y cámaras de combustión ha traído consigo durante las dos últimas décadas un esfuerzo activo y generalizado en el desarrollo y el análisis de los FGMs en la comunidad investigadora de la ingeniería civil, mecánica y aeronáutica [7]. La funcionalidad gradual abre una nueva vía para la optimización de componentes estructurales con el fin de alcanzar altas prestaciones y mejorar la eficiencia de los materiales. Al mismo tiempo, plantea multitud de nuevos y desafiantes problemas mecánicos, incluyendo la predicción y medida de las propiedades efectivas, las distribuciones de las tensiones térmicas y la fractura de los FGMs [8].

Un aspecto muy importante en el diseño de componentes estructurales con FGMs es el fallo mecánico, especialmente el fallo por fractura. A pesar de que la ausencia de discontinuidades en los FGMs reduce en gran medida el efecto de desajuste de las diferentes propiedades del material, las grietas pueden producirse igualmente cuando los componentes están sometidos a cargas externas [9, 10].

Una aplicación exitosa de estos materiales requiere la determinación de sus propiedades de fractura y fallo. En la actualidad se está dedicando un gran esfuerzo investigador a esta labor. Y es que la necesidad de entender, cuantificar y mejorar la tenacidad de los FGMs ha traído consigo un creciente interés en establecer una metodología de la mecánica de la fractura para estos materiales.

Para emplear este tipo de materiales en estructuras de ingeniería, debe clarificarse su comportamiento a fractura y su resistencia ante cargas térmicas y mecánicas. Así mismo, debe ser establecido un método para evaluar esta resistencia.

Describir el comportamiento a fractura de los FGMs es muy complicado puesto que las propiedades mecánicas que describen la deformación (modulo

de Young, coeficiente de Poisson, el límite de fluencia, etc.) y la resistencia (tensión de rotura, ductilidad, tenacidad a fractura, etc.) varían con la gradación de la composición del material. Con el fin de esclarecer el proceso de fractura y evaluar la resistencia de los FGMs deben ser considerados tres aspectos:

El primero de ellos es la descripción de las propiedades de deformación que varían con la composición del material. Puesto que los FGMs, atendiendo a su microestructura, son considerados como un tipo de materiales compuestos, los modelos y ecuaciones propuestos para los composites pueden aplicarse para predecir las propiedades de deformación para FGMs cambiando la composición del material [11, 12, 13, 14].

El segundo aspecto a considerar es el de la aplicabilidad de los conceptos de la mecánica de la fractura para FGMs. Esto es, determinar si los criterios desarrollados para la fractura de materiales homogéneos son también válidos para los FGMs.

Y el tercer aspecto a sopesar consiste en la evaluación de las propiedades de resistencia que varían con la composición del material. Esta es una cuestión relevante para elucidar el proceso de fractura y la resistencia de los FGMs.

Es conveniente señalar que en este trabajo se ha hecho especial énfasis en la segunda cuestión, analizando la problemática existente en la mecánica de la fractura para FGMs desde un punto de vista macroscópico y de acuerdo con la teoría de la mecánica de los medios continuos. En concordancia con ella, los FGMs son considerados sólidos no-homogéneos isotrópicos, pues la variación de las propiedades del material se limita a una sola dirección.

Numerosos estudios (teóricos, experimentales y numéricos) han abordado en los últimos años la problemática de la mecánica de la fractura en FGMs con el objetivo de investigar el comportamiento de la grieta y ayudar en el desarrollo y diseño de sistemas de ingeniería compuestos por FGMs.

Debido al alto coste y las rebuscadas instalaciones necesarias para procesar experimentalmente los FGMs, la simulación numérica del comportamiento a fractura de los FGMs agrietados ha adquirido especial relevancia.

El método de los Elementos Finitos (MEF) ha sido mayoritariamente empleado en el análisis de fractura en FGMs [15, 16, 17, 18, 19, 20], aunque también han sido utilizados otros métodos numéricos empleados comúnmente para evaluar la mecánica de la fractura en materiales homogéneos [21, 22]. Debido a su valor general, el MEF es el método elegido para este trabajo.

Debido a la simplicidad y las limitaciones de las soluciones analíticas o semi-analíticas para los problemas de fractura de un material no homogéneo, los métodos numéricos suponen una poderosa herramienta para expandir el campo del conocimiento de la fractura en FGMs.

1.2. Objetivos

Este estudio se ha planteado desde sus inicios como un trabajo investigador, con el claro objetivo de aportar un grano de arena más en la inmensa montaña que constituye la labor de la comunidad investigadora en los últimos años en el afán de establecer una metodología para la mecánica de la fractura de los FGMs.

A pesar del notable esfuerzo investigador desarrollado en este campo en las dos últimas décadas, se puede afirmar con rotundidad que la fractura de los FGMs continúa planteando multitud de incógnitas a la sociedad científica. La posibilidad de poder contribuir a aumentar en algún grado el campo del conocimiento en esta área constituye la motivación principal de este trabajo.

Para ello se crea un modelo numérico a raíz de un ensayo experimental que, una vez validado, se desarrolla con el objetivo de dar respuesta a cuestiones relevantes en el estudio de la fractura en FGMs que aun no han sido clarificadas.

La importancia de esclarecer estos aspectos es fundamental para evaluar la integridad estructural de los FGMs y se corresponden con factores claves para una correcta aplicación de estos materiales en los componentes estructurales modernos.

Una correcta comprensión de las características propias de la fractura en FGMs ayudará a reducir considerablemente los fallos catastróficos en estas estructuras.

1.3. Contenido de la memoria

Capítulo 1. Introducción

En este primer capítulo se pretende familiarizar al lector con el concepto de los FGMs, sus aplicaciones en la industria, la problemática de establecer una metodología para la mecánica de la fractura para estos materiales y la conveniencia de emplear un método numérico, y más específicamente el MEF, para abordar la misma.

Así mismo, da a conocer la motivación que existe detrás del estudio y las metas que se pretenden alcanzar con el mismo. Finaliza con una breve descripción esquemática del contenido de la memoria.

Capítulo 2. Revisión bibliográfica

En primer lugar se llevó a cabo una revisión bibliográfica exhaustiva de la mecánica de la fractura en el campo de los FGMs, haciendo especial hincapié en los estudios analíticos desarrollados hasta la fecha y focalizando en el modo mixto de deformación de grieta por ser el inherente a los FGMs y el modo de fractura estudiado en este trabajo. Después de este estudio detallado se procede a desglosar la numerosa literatura referente al método de los elementos finitos y la fractura en FGMs. Se presta especial atención al

cálculo de los factores de intensidad de tensiones y el término no singular T -stress así como a los aspectos más relevantes de la mecánica computacional de estos materiales.

Capítulo 3. Metodología: modelo numérico

En este capítulo se desglosan las características del modelo numérico desarrollado. Con el objetivo de validar el mismo se toma como referencia el trabajo experimental considerado más apropiado y que reúne las condiciones necesarias para plantear y resolver el mayor número de incógnitas posibles en el campo de la fractura en los FGMs. Con el fin de reproducir las condiciones del ensayo experimental se describen las particularidades de los cuatro modelos creados: el ejemplar homogéneo y tres especímenes de FGMs. Entre ellas destaca la discretización en la punta de la grieta para registrar la singularidad de tensiones y deformaciones del tipo $1/\sqrt{r}$ y el método elegido para asignar la variación de las propiedades del material.

A continuación se comparan los resultados obtenidos mediante el cálculo numérico con los extraídos del ensayo experimental existente. Las diferencias más significativas son sometidas a discusión con el fin de razonar las mismas y validar el modelo numérico.

Capítulo 4. Análisis de sensibilidad de los parámetros de fractura ante los cambios en la función de ajuste

En el cuarto capítulo de la memoria se analiza la sensibilidad de los parámetros de fractura ante pequeñas diferencias en el ajuste de la variación de las propiedades mecánicas locales en el entorno de la grieta. Consta de una primera sección, donde se introduce la problemática existente y se expone la motivación que hay tras el estudio. Posteriormente, en la segunda parte del capítulo, se establece una comparativa entre la aproximación polinomial elegida hasta el momento y un ajuste que define exactamente los puntos experimentales y los aúna mediante funciones lineales. El balance de los re-

sultados incentiva a un estudio detallado de la sensibilidad de los parámetros de fractura ante los cambios en el ajuste de la variación de las propiedades del material en la vecindad del extremo de la fisura.

Esta labor se desempeña en las secciones tercera y cuarta del capítulo, donde se plantea el mismo a partir de ligeras variaciones del dato experimental que caracteriza las propiedades elásticas locales en la punta de la grieta y de reducidas modificaciones en la pendiente de los ajustes en las proximidades de la fisura, respectivamente.

La última parte del capítulo recoge la discusión de los resultados y las conclusiones extraídas a partir de los mismos.

Capítulo 5. Influencia del coeficiente de Poisson

En esta parte se realiza un completo estudio de la influencia del coeficiente de Poisson sobre los parámetros de fractura en FGMs. En primer lugar, se introduce la problemática existente, los estudios realizados al respecto y las particularidades del proceder científico mayoritario en la materia.

A continuación se plantea el modelo numérico desarrollado para el estudio, se discute la idoneidad del mismo y se exponen las distintas variaciones del coeficiente de Poisson consideradas. En la siguiente sección se evalúan los resultados, tanto para el modelo homogéneo como para los tres especímenes de FGM.

Se discuten los resultados obtenidos y a partir de los mismos se elaboran conclusiones para cada ejemplar, que a posteriori son evaluadas en conjunto, estableciéndose a partir de las mismas una metodología que permita estipular la importancia de considerar o despreciar el efecto que la variación del coeficiente de Poisson tiene sobre los resultados en las simulaciones numéricas de problemas de fractura en componentes estructurales de FGMs.

Capítulo 6. Estudio de la trayectoria del crecimiento de grieta mediante X-FEM

Se realiza un análisis detallado del avance de la grieta en las tres configuraciones del estudio. En primer lugar, se citan brevemente los estudios más relevantes en la materia para plantear a continuación la controversia existente al respecto del modelo de homogeneización local, que permite aplicar criterios de fractura propios de materiales homogéneos.

A continuación, se expone la idoneidad del ensayo experimental elegido para la simulación y se describen las principales características del método de los elementos finitos extendidos (X-FEM), la herramienta numérica seleccionada para acometer los cálculos.

En base al proceder mencionado, se calcula la trayectoria de la grieta en las tres geometrías características del modo mixto de fractura en FGMs y se establece una comparativa con los resultados registrados en el ensayo experimental tomado como referencia en este trabajo. Las disimilitudes son sometidas a discusión y a partir de la misma se extraen las conclusiones finales de esta parte del estudio.

Capítulo 7. Conclusiones y desarrollos futuros

En este último capítulo se exponen las conclusiones más importantes que se han extraído a lo largo del estudio, mencionando a continuación diversas sugerencias para el trabajo futuro.

Capítulo 2

Revisión Bibliográfica

2.1. Campo de tensiones y deformaciones en el extremo de la fisura

Los avances en el desarrollo y la manufactura de los FGMs requieren el respaldo de una sólida y extensa base investigadora. A este respecto y dada la especial relevancia de la integridad estructural, ha visto la luz en los últimos años una gran cantidad de literatura científica destinada a predecir la respuesta de los componentes estructurales de FGMs con grietas en su interior.

Gran parte de los trabajos experimentales y las simulaciones numéricas desarrolladas hasta la fecha han surgido de la necesidad de verificar las formulaciones teóricas que guían el campo de la mecánica de la fractura en los FGMs. Los primeros estudios analíticos de componentes agrietados de FGMs fueron destinados a calcular los campos de tensiones y deformaciones en el extremo de la grieta. Un aspecto común de este precursor impulso teórico, que data de los años 70, es el empleo de una variación exponencial de las propiedades elásticas. Esto es, el módulo de elasticidad transversal o módulo de cizalladura se expresa habitualmente como:

$$\mu(x, y) = \mu_0 e^{(\beta x + \gamma y)}, \quad (2.1)$$

Donde β y γ definen la variación del material en el espacio a lo largo de las direcciones x e y , respectivamente. Esta formulación específica, con una gradación exponencial, es de lejos la más común, debido a la relativa facilidad de manipulación de la ecuación de compatibilidad. Otras situaciones incluyendo, por ejemplo, variaciones lineales suponen una tarea mucho más complicada. Las coordenadas x e y son universalmente descritas como alineadas en las direcciones paralela y normal al frente de la grieta, respectivamente, siendo el origen el extremo de la grieta (ver Fig. 2.1). En situaciones donde la inercia del material es importante, como en los casos de crecimiento de grieta bajo cargas dinámicas, al parámetro de la densidad se le asigna una variación idéntica.

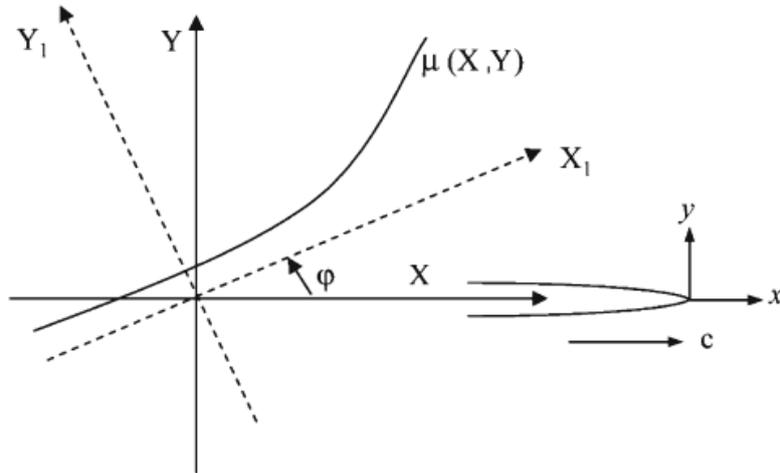


Figura 2.1: Eje de coordenadas en el frente de la grieta

Delale y Erdogan [23], empleando el método de ecuaciones integrales, ofrecieron una de las primeras soluciones para una grieta incrustada en un sólido plano no homogéneo sometida a una carga arbitraria y cuasi-estática. El estudio reveló que el criterio de la singularidad de la raíz cuadrada de la

tensión y la deformación en la punta de la fisura aceptado en el caso de los materiales homogéneos se aplica también en FGMs.

Utilizando la técnica de expansión de la función propia de Williams [24], Eischen [15] resolvió los campos de tensiones cuasi-estáticos y los campos de desplazamientos en el plano (u_x, u_y) para el caso de un material no homogéneo cuyas propiedades elásticas venían descritas por la serie de expansión de Maclaurin. Los primeros términos de las expresiones del desplazamiento son los siguientes:

$$u_x = \frac{K_I}{\mu_0} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_x^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\mu_0} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_x^{II}(\theta) + u_{x0} - \omega_0 r \sin(\theta) + \frac{r}{2\mu_0} \{C_2(\kappa + 1) \cos(\theta) + D_2(\kappa + 1) \sin(\theta)\} + O(r^{3/2}) + \dots, \quad (2.2)$$

$$u_y = \frac{K_I}{\mu_0} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_y^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\mu_0} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_y^{II}(\theta) + u_{y0} + \omega_0 r \cos(\theta) + \frac{r}{2\mu_0} \{C_2(\kappa - 3) \sin(\theta) - D_2(\kappa + 1) \cos(\theta)\} + O(r^{3/2}) + \dots, \quad (2.3)$$

Donde μ_0 es el módulo de elasticidad transversal en la punta de la grieta. Para el estado de tensión plana generalizada, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$. Las funciones que dependen de θ son iguales a aquellas que describen el comportamiento de los materiales homogéneos [25]. En las ecuaciones anteriores se vislumbra fácilmente asociada a las dos primeras potencias de r la expresión característica de una grieta en un sólido homogéneo, vislumbrándose la influencia, únicamente, de las propiedades locales del material en el extremo de la grieta. El efecto de la no homogeneidad aparece por tanto en los siguientes términos. Las ecuaciones 2.4-2.6 muestran los campos de tensiones en el extremo de la fisura obtenidos por Eischen [15] para materiales no homogéneos, consecuentemente, se aprecia como la influencia de la no homogeneidad tampoco afecta a los dos primeros términos de las mismas.

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} f_{xx}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} f_{xx}^{II}(\theta) + \sigma_{x0} + O(r^{1/2}) + \dots, \quad (2.4)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} f_{yy}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} f_{yy}^{II}(\theta) + O(r^{1/2}) + \dots, \quad (2.5)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} f_{xy}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} f_{xy}^{II}(\theta) + O(r^{1/2}) + \dots, \quad (2.6)$$

Considerando una variación exponencial del módulo de Young, Parameswaran y Shukla [26] desarrollaron la expresión asintótica de los campos de tensiones cuasi-estáticos en el extremo de la grieta para una fisura alineada con la dirección de variación de propiedades del material. En la misma línea, Chalivendra y otros [27] obtuvieron los campos de tensiones en el extremo de la grieta considerando fractura en modo mixto y la fisura inclinada con respecto a la variación exponencial de la gradación elástica. Jain y otros [28] continuaron los estudios analíticos en el campo de la fractura en los FGMs desarrollando las ecuaciones del campo asintótico en el extremo de la grieta bajo la consideración de una variación lineal de las propiedades tanto para el primer modo de fractura como para el modo mixto. Recientemente, Chalivendra [29, 30] desarrolló los campos asintóticos para una grieta en condiciones cuasi-estáticas en un sólido no homogéneo y ortotrópico utilizando el enfoque de las coordenadas a escala propuesto por Krenk [31]. Concluyeron que los términos destacados que involucran la singularidad están libres de la influencia de la no homogeneidad. El término influyente sobre el T -stress tampoco sufre alteración. Únicamente aquellos términos más allá del término potencial $r^{1/2}$ se ven afectados por la no homogeneidad del material.

En lo que a la dinámica de la fractura se refiere, empleando el análisis asintótico, las expresiones teóricas para los campos en el extremo de la grieta fueron obtenidas por primera vez por Parameswaran y Shukla [32] considerando tanto la variación lineal de las propiedades mecánicas como la exponencial y los tres modos de fractura dinámica en materiales graduales. Chalivendra y otros [33] desarrollaron las ecuaciones de orden superior del

campo tensional de una grieta en modo mixto de fractura propagándose en un ángulo con respecto a la dirección de gradación de las propiedades del material. Posteriormente, Shukla y Jain [34] y Lee [35] obtuvieron las ecuaciones de los campos de tensiones empleando los potenciales del desplazamiento para la propagación de grieta en FGMs.

Para el caso considerado por Parameswaran y Shukla [26], donde el módulo de elasticidad transversal, los parámetros de Lamé y la densidad varían exponencialmente, las ecuaciones de movimiento toman la forma:

$$\begin{aligned}\nabla^2\Delta + \beta\frac{\partial\Delta}{\partial X} - \beta\left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)\frac{\partial\omega}{\partial Y} &= \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)\frac{\rho_0}{\mu_0}\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2} \\ \nabla^2\omega + \beta\frac{\partial\omega}{\partial X} - \beta\left(\frac{3-\kappa}{\kappa-1}\right)\frac{\partial\Delta}{\partial Y} &= \frac{\rho_0}{\mu_0}\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (2.7)$$

Donde $\kappa = (3-4\nu)$ para el estado de deformación plana y $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ para el caso de tensión plana, donde ν es el coeficiente de Poisson, $\Delta = (\partial u/\partial X) + (\partial v/\partial Y)$ es la dilatación y $\omega = (\partial v/\partial X) - (\partial u/\partial Y)$ la rotación. μ_0 y ρ_0 son el módulo de elasticidad transversal y la densidad en el origen y β es el factor de no homogeneidad. Las ecuaciones anteriores se reducirían a las clásicas ecuaciones de onda bidimensionales de dilatación y rotación asignando a beta un valor de cero. Debido a la no homogeneidad, estas ecuaciones pierden su forma clásica y permanecen agrupadas en dos campos Δ y ω , a través del parámetro no homogéneo β . De nuevo, empleando un enfoque asintótico, proporcionan una expresión directa para la primera tensión invariante, donde se aprecia que el exponente que caracteriza la variación del material aparece fuera de la expansión, como un factor externo. La expansión asintótica sigue, por tanto, el modelo homogéneo.

Reconociendo que las grietas podrían experimentar condiciones muy transitorias durante el crecimiento, Jain y Shukla [36] y Chalivendra y Shukla [37] obtuvieron la tensión transitoria y los campos de desplazamiento fuera del plano, respectivamente, para la propagación de grietas en FGMs.

Recientemente, Chalivendra [38] también ha estudiado las ecuaciones del campo de desplazamientos considerando los efectos transitorios fuera del plano para la propagación de grietas a lo largo de una trayectoria curvada gradualmente en FGMs y Lee y otros [39] han desarrollado campos termomecánicos de tensión para la propagación de grietas en materiales graduados.

Los estudios relacionados con el tercer modo de fractura en FGMs también han sido numerosos [40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47] y han demostrado ser muy útiles para comprender la estructura de los campos de tensión y deformación en el extremo de la grieta en los FGMs. El esfuerzo más reciente en el campo se atribuye a Kubair y otros [48], que han proporcionado una solución asintótica para el problema de un FGM inelástico cuya variación de las propiedades se puede describir mediante una ley de potencia.

Así como sucede en el caso de los otros dos modos de fractura, la variación tensional muestra de nuevo la validez del criterio de la singularidad de la raíz cuadrada de la tensión y la deformación en la punta de la fisura que se aplica en los materiales homogéneos, siendo el segundo término en la expansión el que refleja el cambio en las propiedades del material.

La importancia de las conclusiones alcanzadas en los estudios mencionados radica en que las ecuaciones que describen los campos de tensiones y deformaciones para FGMs fisurados son de la misma naturaleza que las de los sólidos homogéneos, con la única diferencia de que, puesto que en los materiales no homogéneos el módulo de elasticidad varía con la posición, debe ser considerado su valor en el extremo de la grieta. Físicamente, esto implica que localmente el material puede ser efectivamente considerado como homogéneo.

Se deduce entonces de los resultados de los trabajos citados que, como en el caso de los materiales homogéneos, en FGMs también existe una región alrededor de la grieta donde el comportamiento a fractura puede ser descrito por un solo parámetro: el factor de intensidad de tensiones (FIT).

2.2. Fractura en modo mixto

Puesto que la carga aplicada es rara vez controlada en la práctica, que se desarrolle en las proximidades de una grieta el campo de tensiones correspondiente al modo mixto de fractura es un caso bastante común. Para el caso de los FGMs, la situación se ve aún más afectada por el hecho de que el modo mixto de fractura puede deberse a la variación de propiedades del material incluso cuando el campo lejano de carga es simétrico.

En el caso de los materiales homogéneos hay tres criterios que suelen ser empleados para predecir la propagación de la grieta para una situación de fractura en el plano en modo mixto:

Máxima Tensión Circunferencial - MTS $(\sigma_{\theta\theta})_{max}$ [49]

El criterio MTS (en inglés “maximum hoop stress”) está basado en las tensiones locales y afirma que, ante una situación de carga general, la grieta se propagará perpendicular a la dirección en la que la tensión circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ (denominada en inglés “tangential stress” o “hoop stress”) sea máxima.

Máxima tasa de liberación de energía de deformación G_{max} [50]

La máxima tasa de liberación de energía (en inglés “maximum strain energy release rate”) es un enfoque global que se basa en el concepto de la energía potencial total del sistema. Este criterio afirma que una grieta se propagará en la dirección que maximice la liberación de energía. En materiales homogéneos coincide con la dirección de propagación para la cual el factor de intensidad de tensiones del segundo modo de fractura adopta valores muy cercanos a 0 [51].

Variación de la densidad de la energía almacenada por deformación S_{min} [52]

El criterio basado en la densidad de energía (denominado en inglés como “minimum strain energy density factor criterion”) propone que la dirección de propagación de la fisura sea caracterizada por el valor del factor densidad

de energía de deformación S después de alcanzar un valor crítico S_{cr} que es característico de cada material.

Se han publicado diversos estudios destinados a entender el modo mixto de deformación de grieta en los materiales no homogéneos y determinar si los criterios de fractura mencionados anteriormente para el caso de los materiales homogéneos son también válidos para los FGMs. El modo mixto de fractura es un proceso más complejo en los FGMs que en los materiales homogéneos, pues no solo está influenciado por la orientación de la carga aplicada con respecto al plano de la grieta, sino también por la orientación del gradiente de propiedades de material con respecto a la dirección del plano de la grieta. Konda y Erdogan [53] calcularon los FITs en un cuerpo infinito no homogéneo con una grieta finita. El modo mixto de fractura fue introducido situando el plano de la grieta en un ángulo con respecto a la dirección del gradiente del material. Partieron de la suposición de que la rigidez del sólido infinito FGM poseía variación exponencial.

Gu y Asaro [54] estudiaron la desviación de la grieta en FGMs cuando el plano de la grieta es perpendicular a la variación de propiedades del material, considerando que estas varían de forma exponencial. Asumieron homogeneidad local y la máxima tasa de liberación de energía de deformación como criterio de propagación de la grieta. Bajo las mismas suposiciones, en un segundo trabajo, Gu y Asaro [55] sugirieron que la grieta se propagaría cuando la tasa de liberación de energía G alcanzase un valor crítico G^r , la tenacidad del FGM. Por un lado, este valor crítico G^r dependería del gradiente de propiedades del material y por tanto la posición de la punta de la grieta, del índice del modo mixto de fractura $\psi = \tan^{-1}(K_{II}/K_I)$ y de la dirección de propagación de la grieta, α , con respecto al plano de fisura inicial.

Por otro lado, la tasa de liberación de energía G será función de la carga externa y las constantes elásticas del material α y ψ . Matemáticamente sugirieron el siguiente criterio de fractura:

$$G = G^R \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \alpha}(G - G^R) = 0, \quad (2.8)$$

De manera que tiene en consideración la variación con la posición del valor crítico de la tasa de liberación de energía del FGM, G^r , así como su efecto sobre la propagación de la grieta. En cualquier caso, admitieron la necesidad imperativa de experimentar para entender plenamente el comportamiento de los FGMs y racionalizar su caracterización.

Es preciso mencionar que la fractura en modo mixto de los FGMs ha sido investigada mayoritariamente por medio de los FITs de una grieta estacionaria. Eischen [15] evaluó los FITs del modo mixto de fractura en FGMs empleando la integral de contorno arbitrario J_k^* . Mediante el uso de la integral de dominio equivalente (EDI), Kim y Paulino [20] también evaluaron los FITs del modo mixto de fractura en FGMs por medio de la integral de contorno arbitrario J_k^* . Marur y Tippur [18] investigaron el caso de la grieta perpendicular a la gradación del material de forma numérica y experimental. Yau [56] propuso el método de la integral de interacción (II) para evaluar los FITs en sólidos homogéneos isotrópicos. Este método está basado en las leyes de conservación de la elasticidad y los conceptos de la mecánica de la fractura y su uso se expandió de manera progresiva al cálculo de los FITs para FGMs. Wang y otros [57] extendieron el método para sólidos homogéneos ortotrópicos. Así mismo, Yau [58] también utilizó el mismo método para el problema de la interfaz entre dos materiales. Dolbow y Gosz [21] consideraron el problema plano de una grieta arbitrariamente orientada y lo resolvieron por el método de los elementos finitos extendidos (X-FEM) mientras que Rao y Rahman [22] emplearon el método sin malla de Galerkin sin elementos (EFG).

En cualquier caso, al respecto de las investigaciones computacionales del comportamiento a fractura de los FGMs en modo mixto, dos trabajos destacan por encima del resto: Becker y otros [59] y Kim y Paulino [60]. En

ambos casos, el efecto del T -stress fue considerado en sus modelos de elementos finitos. El T -stress es un término no singular de tensiones que actúa solo en la dirección paralela al plano de la grieta e independiente de los FITs. Matemáticamente, se corresponde con el término σ_{x0} en la ecuación 2.4.

El T -stress juega un papel fundamental en la fractura de los materiales homogéneos cuando el tamaño de la zona plástica es relativamente pequeño. Ha quedado demostrada su influencia en el crecimiento de grieta en el modo mixto de fractura [61, 62] así como índice de la estabilidad de la trayectoria en el primer modo de carga [63]. También ha revelado una influencia significativa en la tenacidad y la constricción de la punta de la grieta. Por ejemplo, Smith y otros [64] concluyeron que un valor positivo del T -stress reduce la presunta tenacidad a fractura en carga de modo mixto y un valor negativo del T -stress la incrementa. Larsson y Carlsson [65] investigaron la influencia del T -stress en modo I de carga y descubrieron que afecta al tamaño y la forma de la zona plástica. Cardew y otros [66] y Kfoury [67] utilizaron la integral de contorno arbitrario J en conjunto con la II para calcular el término no singular del T -stress en problemas del primer modo de fractura. Sladek y otros [68] emplearon otro tipo de integral de contorno arbitrario, basado en el teorema de Betti-Rayleigh, para evaluar el T -stress en condiciones de fractura en modo mixto. Posteriormente, Chen y otros [69] investigaron la influencia del T -stress bajo el primer modo de fractura empleando el MEF y abordaron el campo de la exactitud de los cálculos computacionales. El papel del T -stress en la fractura de FGMs está menos claro.

Para FGMs frágiles se considera que el T -stress tiene una influencia significativa en el ángulo de inicio de la grieta y la estabilidad de la misma [70, 71]. Becker y otros [59], empleando el criterio de la máxima tasa de liberación de energía, descubrieron que para el caso de los FGMs la magnitud del T -stress es, en promedio, mayor que la que se correspondería con un material homogéneo de la misma geometría. También descubrieron que, en contraste con lo que sucede con los materiales homogéneos, para los ángulos de inicio de

la grieta que hacen máxima la tasa de liberación de energía el valor del FIT del segundo modo de fractura es distinto de cero. Por otro lado, Kim y Paulino [60] afirman haber obtenido resultados más exactos utilizando un criterio generalizado de la máxima tensión circunferencial que incluye el término no singular del T -stress. Observaron que valores positivos del T -stress aumentan el ángulo de inicio de la grieta y viceversa cuando se compara con el caso homogéneo. También se observó una influencia significativa del grado de no-homogeneidad β en la magnitud y el signo del T -stress. En cualquier caso, la influencia del término no singular T -stress en FGMs plantea aún muchas incógnitas y el modo mixto de fractura no solo es el más común en los FGMs, sino el que plantea mayores desafíos investigadores.

2.3. El Método de los Elementos Finitos en FGMs

En lo que respecta a la mecánica computacional de la mecánica de la fractura de los FGMs, la popularidad del método de los elementos finitos (MEF) es incuestionable. Como se ha mencionado anteriormente, el primer estudio fue el de Eischen [15], quien evaluó los FITs por medio de la integral de contorno arbitrario J_k^* . Gu y otros [16] computaron los FITs utilizando la integral J estándar. Anlas y otros [17] calcularon los FITs por medio de la integral de contorno arbitrario J_k^* . Marur and Tippur [18] investigaron el comportamiento de una grieta perpendicular al gradiente del material compaginando el MEF y el trabajo experimental. Bao y Cai [19] estudiaron el agrietamiento por delaminación en FGMs que combinan materiales cerámicos con metales bajo cargas térmicas y mecánicas. Bao y Wang [8] investigaron agrietamientos periódicos en capas de FGMs bajo cargas térmicas y mecánicas. Kim y Paulino [20] evaluaron los FITs en el modo mixto de fractura por medio de la integral de contorno arbitrario J_k^* , la técnica modificada del cierre de la grieta (MCC, del inglés “modified crack closure”) y la técnica de

correlación de desplazamientos (DCT, del inglés “displacement correlation technique”). Kosker y otros [72] estudiaron el comportamiento de un sólido tridimensional FGM agrietado sometido a esfuerzos térmicos. Torshizian y otros [73] investigaron el tercer modo de fractura en un sólido agrietado FGM bidimensional. E Inan y otros [74] calcularon los parámetros de fractura de una capa tridimensional de un FGM, simulando una situación real. Podrían citarse también otros muchos estudios de menor consideración.

Uno de los mayores atractivos desde el punto de vista computacional consiste en el criterio elegido para asignar la variación de las propiedades del material. Rousseau y Tippur [75] propusieron por primera vez el llamado enfoque del elemento finito homogéneo (denominado en inglés “homogeneous finite element approach”) que por su versatilidad ha sido desde entonces el más empleado. El método consiste esencialmente en un proceso de dos pasos. En primer lugar se impone una distribución de la temperatura que se corresponde con la variación del gradiente del módulo de Young deseada y en un segundo paso el módulo de Young es descrito como una función del gradiente de la temperatura.

Santare y Lambros [76] desarrollaron un elemento finito que contenía en sí mismo una variación gradual de las propiedades del material. Consideraron que las propiedades del material variaban de forma exponencial dentro del propio elemento. A posteriori, Kim y Paulino [77] formularon un elemento finito isoparamétrico que incluía igualmente en si mismo la variación de las propiedades (ver Fig. 2.2). Su trabajo se diferencia del de Santare y Lambros [76] en que estos asignaban las propiedades directamente en los puntos de integración de Gauss del elemento, mientras que Kim y Paulino [77] desarrollaron una formulación generalizada isoparamétrica e investigaron tanto la variación exponencial como la variación lineal de las propiedades del material en el propio elemento.

La posibilidad de incluir la gradación al nivel del elemento finito permite

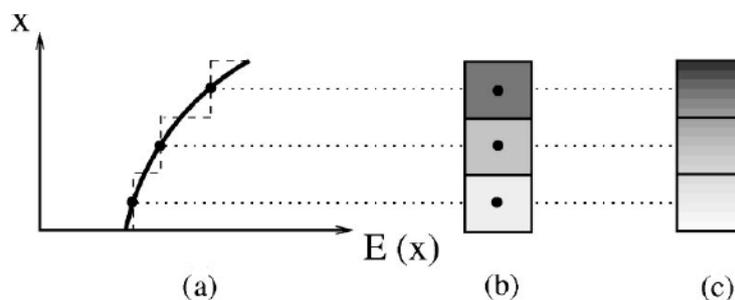


Figura 2.2: Elemento finito homogéneo frente a elemento finito gradual. (a) Variación de las propiedades a lo largo de un eje de coordenadas; (b) Elemento homogéneo estándar; (c) Elemento gradual

conseguir resultados más exactos. Sin embargo, Anlas y otros [17] investigaron la convergencia del elemento finito estándar para evaluar los FITs en FGMs y concluyeron que, empleando un mallado suficientemente denso, el elemento finito convencional permite obtener resultados muy precisos.

La variación gradual de las propiedades al nivel del elemento ha sido implementada en dos programas de elementos finitos con características especiales para FGMs: WARP3D [78] y FGM-FRANC2D [79]. El primero de ellos es un software de elementos finitos especialmente diseñado por el grupo de investigación del profesor Paulino en la Universidad de Illinois para el análisis de procesos de fractura no lineales en tres dimensiones. En el mismo, además del elemento finito gradual, está implementado el término no homogéneo de la integral J que permite mantener su independencia del dominio sin necesidad de recurrir a mallados muy finos en el entorno de la punta de la grieta. Por su parte, el código FGM-FRANC2D está basado en FRANC2D [80], un software de elementos finitos para el análisis de fractura bidimensional desarrollado en la Universidad de Cornell por Wawrzynek y sus colaboradores, e incluye, además de la graduación al nivel del elemento, un algoritmo de propagación de grieta en FGMs. Aunque este último no está aún disponible al público, ambos son programas de distribución gratuita

y código abierto, lo que los hace especialmente apropiados para investigar e implementar nuevos desarrollos.

Capítulo 3

Metodología: modelo numérico

3.1. Características de la simulación

Este estudio pretende combinar el trabajo experimental existente con simulaciones numéricas que permitan resolver problemas de fractura asociados a los FGMs. Los resultados experimentales empleados para validar el modelo numérico se toman de los obtenidos por Abanto-Bueno y Lambros [81].

Por sus características, el trabajo de Abanto-Bueno y Lambros [81] ha sido considerado el más completo y apropiado para validar un modelo numérico que permita plantear y resolver la mayor cantidad de incógnitas posibles presentes en el campo de la fractura en los FGMs. Una descripción detallada de la metodología experimental empleada por Abanto-Bueno y Lambros puede encontrarse en su propio trabajo [81] y en otros relacionados [82, 83, 84, 85], por lo que se mencionan aquí únicamente los detalles de interés para este estudio.

El material empleado en su investigación es un copolímero de polietileno monóxido de carbono, más conocido como ECO (del inglés “ethylene carbon monoxide”). El ECO es un copolímero dúctil que sufre una acelerada degradación mecánica cuando está sometido a rayos ultravioletas, lo que le hace muy útil para generar materiales frágiles y heterogéneos. Una fina lámina

(con un grosor de 0.406 mm .) con unas dimensiones en el plano de $300 \times 150 \text{ mm}^2$ se somete a radiación de manera gradual durante un tiempo que varía de 50 a 300 horas. Posteriormente la lámina se corta a la mitad, paralelamente a la dirección de radiación y se obtienen por tanto dos ejemplares de $150 \times 150 \text{ mm}^2$. Una de esas dos muestras se corta perpendicularmente a la dirección de radiación en 15 franjas de 10 mm . de ancho, que son sometidas a ensayos de tracción uniaxiales con el fin de obtener sus propiedades elásticas y de fallo en función de la posición en la muestra. El restante ejemplar de $150 \times 150 \text{ mm}^2$ se utiliza para realizar el ensayo de fractura normalizado a un espécimen previamente agrietado (SENT). Con lo cual la variación de las propiedades del material como el módulo elástico, la tensión de fallo y la deformación de fallo es registrada independientemente de los experimentos de fractura, pero originados exactamente del mismo proceso de fabricación.

Los ensayos de fractura se llevaron a cabo en el material homogéneo base y en tres diferentes especímenes de FGMs, realizando un único ensayo por ejemplar. En todos ellos se obtuvieron los campos de desplazamiento en las proximidades de la punta de la grieta por medio de la técnica de correlación de imágenes digitales (DIC, del inglés “digital image correlation”), lo que les permitió, a raíz de los mismos y mediante un ajuste por mínimos cuadrados de la expresión asintótica de los desplazamientos, obtener los valores de los parámetros de fractura.

Como se ha mencionado anteriormente, el modo mixto de fractura es el más común y el que tiene un mayor atractivo investigador en los FGMs, pues puede ser inducido mediante una carga asimétrica (como en el caso de un material homogéneo), o situando la grieta en un ángulo con respecto a la dirección de la variación de las propiedades mecánicas o por medio de una combinación de ambos casos. El trabajo experimental de Abanto-Bueno y Lambros incluye las tres posibilidades (ver Figs. 3.1-3.3), así, el primer espécimen de FGM posee carga simétrica y un gradiente de propiedades del material asimétrico, el segundo espécimen posee carga y gradiente de propie-

dades del material asimétricos y en el tercer espécimen se dispone de carga asimétrica y gradiente de propiedades del material simétrico. La variación de propiedades elásticas del material determinado se indica superpuesta con cada espécimen de FGM en las Figs. 3.1-3.3. Los datos registrados en las mediciones fueron facilitados amablemente por los autores, lo que contribuye a evitar las inexactitudes derivadas de la digitalización de las gráficas.

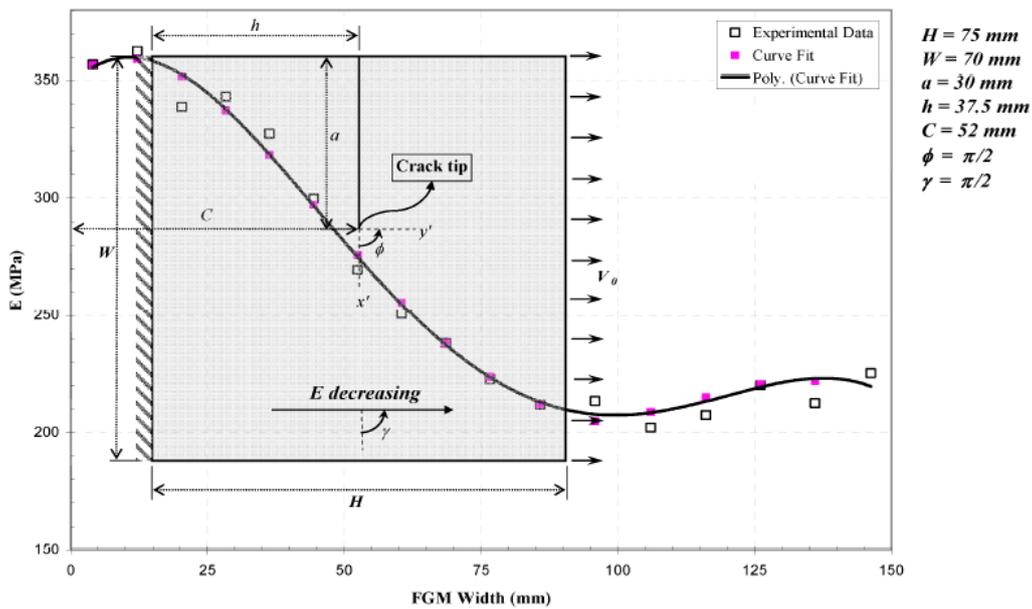


Figura 3.1: Geometría, carga y variación del módulo elástico. Caso 1 - FGM. Carga simétrica y gradiente de propiedades asimétrico

El primer paso de este trabajo consiste pues en simular numéricamente, empleando las mismas geometrías y bajo las mismas condiciones de carga, el estudio experimental de Abanto-Bueno y Lambros [81]. Para ello se realizó un modelo de elementos finitos mediante el programa comercial ABAQUS 6.11 [86]. Puesto que las dimensiones y la geometría son diferentes tanto para el caso homogéneo como para cada uno de los especímenes de FGMs, es necesario realizar cuatro modelos diferentes, aunque, con el objetivo de comparar todos los casos entre sí, la discretización en el entorno de la punta de la grieta

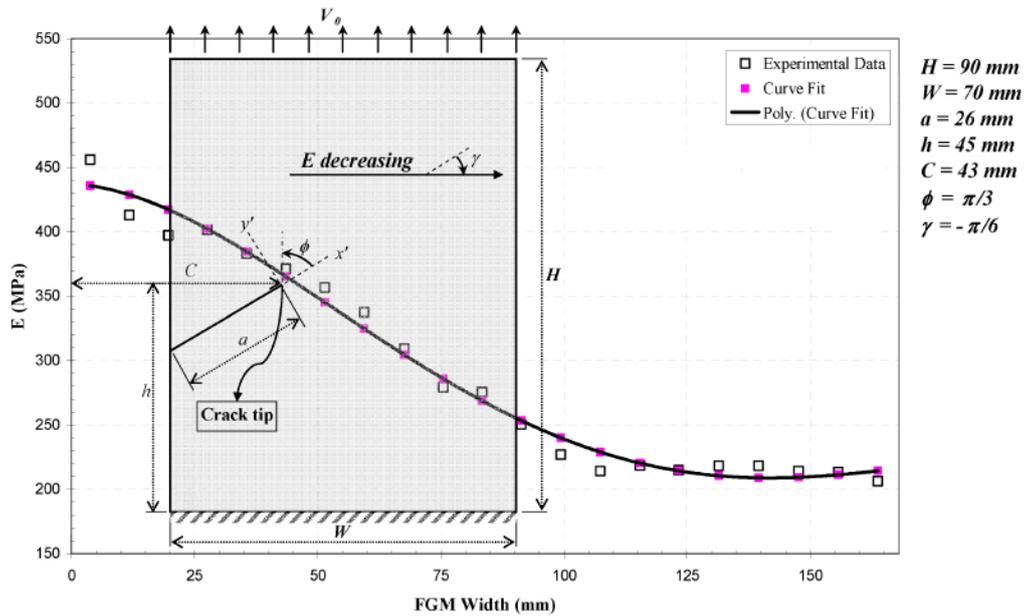


Figura 3.2: Geometría, carga y variación del módulo elástico. Caso 2 - FGM. Carga y gradiente de propiedades asimétricos

es la misma para todos los ejemplares. Esta consiste en un mallado focalizado centrado en el extremo de la grieta y con un radio de $r = 0,2 \cdot a$, siendo a la dimensión de la grieta según cada espécimen (ver Fig.3.4). Barsoum [87] y Hensell y Shaw [88] descubrieron independientemente que desplazando los nodos situados en la mitad de los lados adyacentes a la punta de la fisura hasta una distancia de un cuarto de la misma se puede reproducir la singularidad de tensiones que aparece en el frente de la fisura. Este tipo de elemento, con el nodo intermedio situado a un cuarto de la punta de la fisura, se denomina elemento a un cuarto y ha sido empleado en este estudio por ser el más apropiado para obtener los parámetros de fractura. De esta manera, los elementos cuadriláteros situados en la punta de la grieta colapsan en elementos triangulares, y así es posible registrar la singularidad de tensiones y deformaciones en la punta de la grieta del tipo $1/\sqrt{r}$ característica de la mecánica de la fractura elástica lineal. Es preciso mencionar que, tanto para el modelo homogéneo como para los FGMs, se asume un comportamiento elástico y lineal.

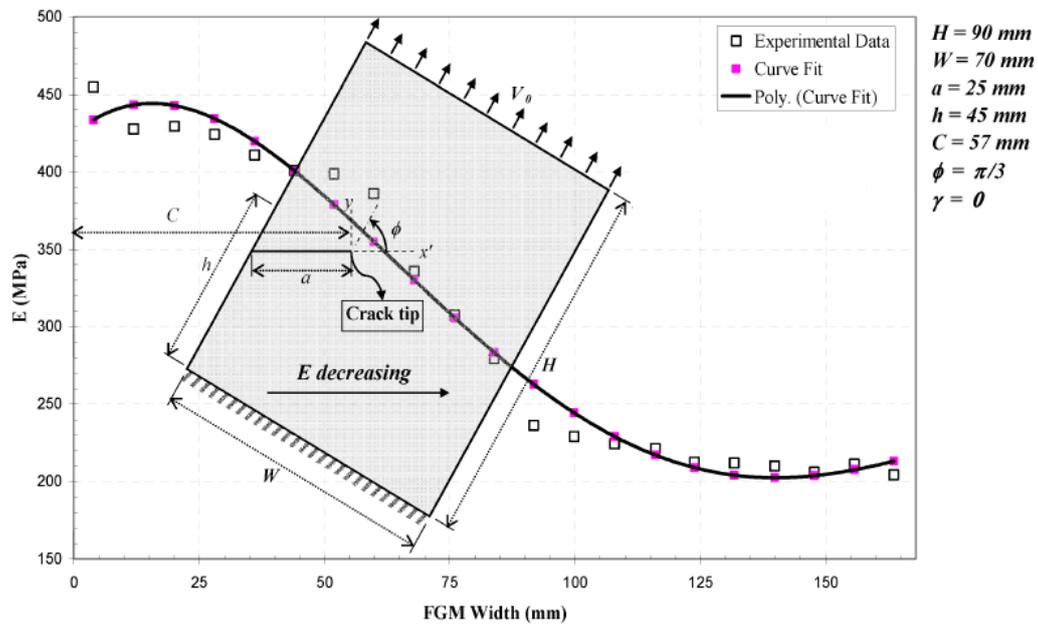


Figura 3.3: Geometría, carga y variación del módulo elástico. Caso 3 - FGM. Carga asimétrica y gradiente de propiedades simétrico

Esta asunción es razonable con la naturaleza del material una vez radiado y de hecho es realizada también por los autores del estudio experimental [81]. El mallado del resto del modelo se realiza de forma automática en base a las herramientas que el programa empleado dispone para ello. Se utilizan un total de entre 6255 y 7503 elementos del tipo CPS8R (elementos cuadriláteros bi-cuadráticos de tensión plana de 8 nodos con integración reducida).

Una muestra del mallado se puede observar en la Fig. 3.5. Como se percibe en la misma, el mallado empleado es bastante fino. Este es un requisito imprescindible para poder calcular los parámetros de fractura en FGMs a partir del software de elementos finitos empleado. Y es que ABAQUS [86] extrae los FITs y el T -stress a partir de la integral J (o la II en el caso del modo mixto de fractura) empleando el método de la integral del dominio (DI, del inglés "Domain Integral"). Sin embargo, cuando existe una variación en las propiedades del material, la integral J requiere de un término adicional

para mantener su independencia del dominio [89]. Gu y otros [16] estudiaron la vigencia de la integral J y el método de la integral del dominio en FGMs y concluyeron que el término no homogéneo de la DI es suficientemente pequeño comparado con el primer término, correspondiente a la DI estándar, y que por tanto se puede despreciar siempre y cuando los elementos en el entorno de la grieta sean notoriamente pequeños comparados con el tamaño de la misma. Con lo cual es preciso un mallado extremadamente fino en el entorno de la grieta para poder aplicar de manera precisa el método de la integral del dominio en FGMs.

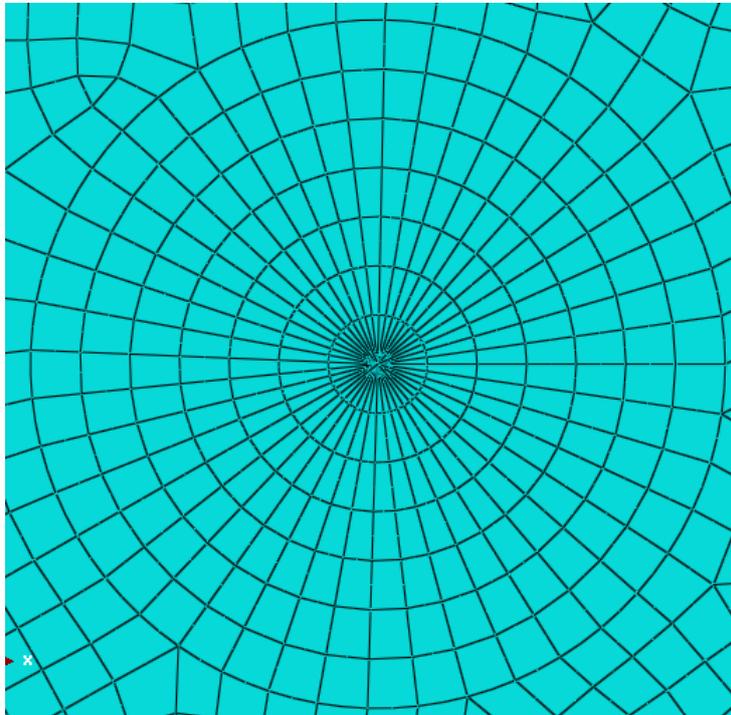


Figura 3.4: Detalle del mallado empleado en el entorno del extremo de la fisura

Las dimensiones de los modelos coinciden exactamente con las de los ejemplares utilizados en el experimento. El grosor de todos los especímenes, tanto el homogéneo como los FGMs es de 0.406 mm . Se asume entonces una situación de tensión plana, tal y como se ha considerado en los estudios

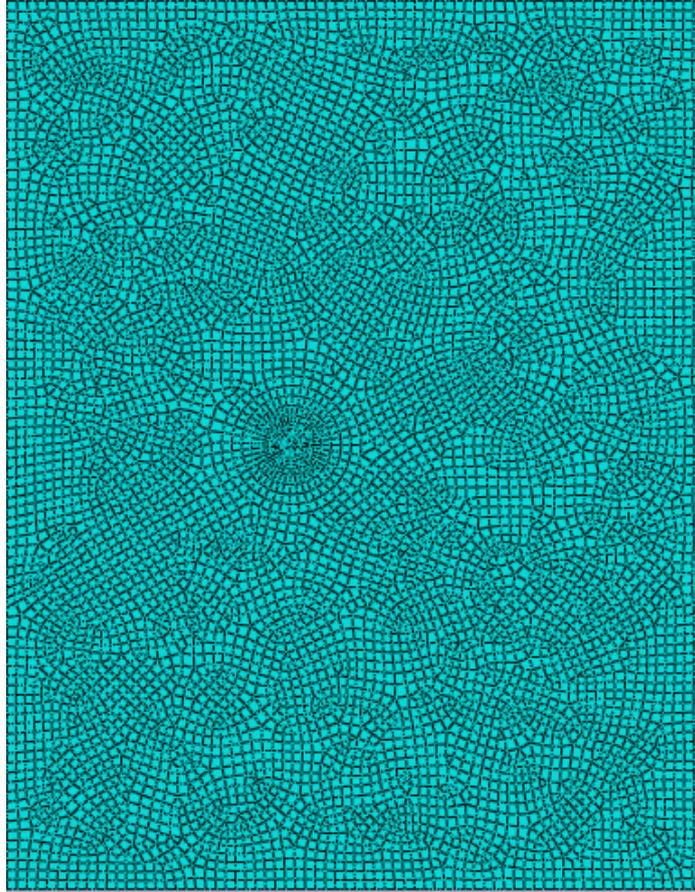


Figura 3.5: Mallado empleado para el modelo completo

de Abanto-Bueno y Lambros [81, 90]. La carga se aplica como un desplazamiento vertical impuesto sobre el eje superior de la figura, puesto que los experimentos de Abanto-Bueno y Lambros [81] se realizaron en condiciones de control de desplazamientos.

Teniendo en cuenta que Abanto-Bueno y Lambros [81] obtienen los parámetros de fractura para el inicio de la grieta, esto es, el momento exacto en el que la fisura empieza a crecer, y considerando la necesidad de validar el modelo numérico en base a parámetros conocidos, el valor del desplazamiento aplicado en la simulación es exactamente el registrado en los experimentos durante el preciso instante de propagación de la muesca y cuyos valores fue-

ron amablemente cedidos por los autores. Estos valores vienen desglosados en el Cuadro 3.1. Se considera un desplazamiento vertical nulo en el eje inferior de la pieza, tal y como se procede en los ensayos experimentales. Y se anula también el desplazamiento horizontal en la esquina inferior derecha del espécimen para eliminar el movimiento del cuerpo rígido.

	HOM	FGM1	FGM2	FGM3
V_0 (mm)	1.4	0.84	0.95	1.16

Cuadro 3.1: Desplazamientos registrados experimentalmente para el preciso instante de inicio de la propagación de la fisura

Es importante reseñar que los parámetros de fractura del modelo numérico fueron obtenidos directamente de los cálculos implementados en el programa de elementos finitos. ABAQUS [86] emplea el método de la II para obtener los FITs [91] y el término no singular del T -stress [92] en condiciones de fractura en modo mixto. Sin embargo, Abanto-Bueno y Lambros [81] calcularon los parámetros de fractura a partir de encajar mediante un ajuste por mínimos cuadrados el campo de desplazamientos obtenido por medio de la técnica DIC en la expresión asintótica teórica de los desplazamientos. Este proceder se mantiene en aquellos trabajos numéricos directamente relacionados con el ensayo experimental y que han sido desarrollados por los mismos autores en colaboración con otros investigadores [93, 94]. Obteniendo así los parámetros de fractura a partir de ajustar por mínimos cuadrados en las ecuaciones teóricas el campo de desplazamientos calculado en base al MEF.

3.2. Resultados

3.2.1. Modelo homogéneo

El material homogéneo base considerado es un ejemplar de ECO sometido durante 50 horas a radiación ultravioleta. Sus propiedades elásticas fueron procesadas por Abanto-Bueno y Lambros [81] obteniendo un valor para el módulo de Young de $E = 280$ MPa y para el coeficiente de Poisson de $\nu = 0,45$. La fractura en modo mixto fue inducida inclinando la grieta con respecto a la carga (ver Fig. 3.6).

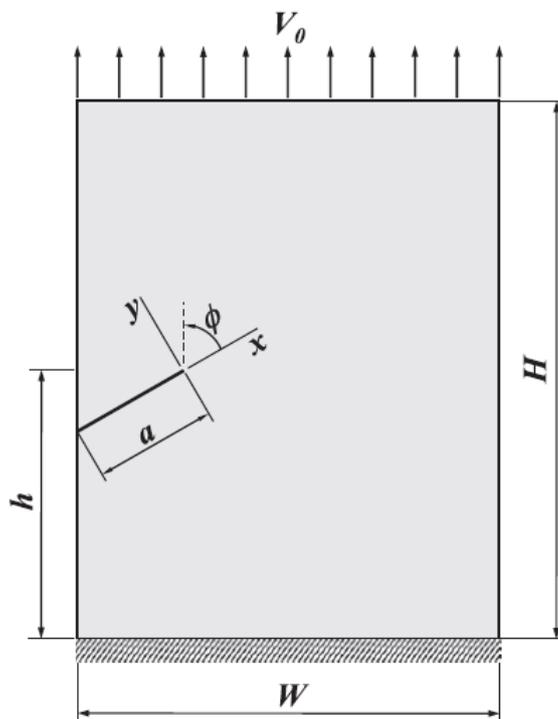


Figura 3.6: Geometría del espécimen homogéneo, $H = 90mm$, $W = 70mm$, $h = 45mm$, $a = 33mm$ y $\phi = \pi/3$

Mediante el proceder mencionado en la sección anterior se calculan los valores de los FITs y del término no singular T -stress para el preciso instante de inicio de propagación de la fisura. En el Cuadro 3.2 se comparan los

resultados obtenidos con los calculados por Abanto-Bueno y Lambros [81] a partir de su ensayo experimental. Se observa que estos coinciden razonablemente bien, mejorando la aproximación de otras simulaciones numéricas realizadas hasta la fecha [93]. Destacar especialmente los buenos resultados obtenidos para los términos de K_{II} y el T -stress por ser tradicionalmente muy complicados de aproximar.

Resultados	$K_I(MPa m^{0,5})$	$K_{II}(MPa m^{0,5})$	$T(MPa)$
Experimentales	0.903	0.245	-0.784
Numéricos			
Oral et al. [93]	0.793	0.212	-0.992
Presente	0.812	0.291	-0.651

Cuadro 3.2: Resultados numéricos y experimentales para los parámetros de fractura del modelo homogéneo

Se calcula también el ángulo de inicio de la grieta de acuerdo con el criterio de propagación de la máxima tensión circunferencial (MTS), cuya base teórica ha sido desglosada ya en el segundo apartado del capítulo de la revisión bibliográfica. Se comparan los resultados obtenidos mediante el cálculo por elementos finitos con el ángulo inicial de grieta medido experimentalmente por Abanto-Bueno y Lambros [81] (ver Cuadro 3.3).

	Exp.	Num. (MTS)
α ($^{\circ}$)	$-28 \pm 1,5$	-32.95

Cuadro 3.3: Resultados numéricos y experimentales para el ángulo de inicio de la grieta del modelo homogéneo

Los buenos resultados alcanzados para el ángulo de inicio de la grieta complementan los ya mostrados con respecto a los parámetros de fractura y validan así el modelo numérico para el caso de un material homogéneo.

3.2.2. Especímenes FGMs

La geometría y la variación gradual de las propiedades elásticas del material para cada uno de los tres especímenes de FGMs se pueden visualizar en las Figs. 3.1-3.3. En todos los casos se considera que el coeficiente de Poisson toma un valor de $\nu = 0,45$ siendo este constante en toda su extensión. Es preciso mencionar que este valor es el considerado en la literatura [95] para el polietileno de baja intensidad, también conocido como LDPE (de sus siglas en inglés, “Low Density Polyethylene”) y que se desconoce el efecto de la radiación sobre el coeficiente de Poisson. Sin embargo, despreciar la variación del coeficiente de Poisson es un procedimiento común en el estudio de los FGMs [23] y, con el fin de seguir las mismas consideraciones de Abanto-Bueno y Lambros [81, 83], se comparte en esta fase del trabajo la misma premisa.

Los tres especímenes han sido diseñados de tal manera que el efecto local del modo mixto de fractura se genere de las tres diversas formas posibles en los FGMs. Así, en el primer caso (FGM1), el modo mixto de fractura se ocasiona únicamente debido al efecto de la gradación de propiedades del material. En el segundo caso (FGM2), es el resultado de la combinación de la asimetría presente en la carga y en la variación gradual de propiedades del material. Y en el último caso (FGM3), la grieta es paralela al cambio de propiedades del material por lo que el efecto del modo mixto de fractura se debe únicamente a la asimetría en la carga.

La metodología del cálculo por elementos finitos es similar a la realizada para el caso homogéneo. La carga aplicada en las simulaciones es una vez más el desplazamiento registrado en el preciso instante de inicio de propagación de la entalla. La diferencia fundamental radica en la distribución de la variación de las propiedades elásticas en la discretización del espécimen. Ya se han mencionado y comentado en la tercera parte del capítulo correspondiente a la revisión bibliográfica las diferentes opciones existentes para definir

la variación gradual de las propiedades en los modelos computacionales. El proceso elegido para este estudio es el llamado enfoque del elemento finito homogéneo (del inglés “homogeneous finite element approach”) [75], pues es el más apropiado para el software de elementos finitos empleado y ha demostrado ser capaz de obtener resultados precisos para un mallado suficientemente denso [17]. Se hace entonces depender al módulo de Young de la temperatura y se asigna a posteriori al modelo una distribución de temperatura inicial que coincida con la variación del módulo elástico deseada. De acuerdo con el criterio de los autores del ensayo experimental [94] se ajustan los valores experimentales registrados del módulo elástico mediante un ajuste por mínimos cuadrados a partir de un polinomio de cuarto grado (ver Figs. 3.1-3.3). En el próximo capítulo se discutirá la idoneidad de este ajuste. Es preciso señalar que en [94] existen varios errores en las expresiones de los polinomios de ajuste por lo que fue necesario realizar de nuevo el ajuste por mínimos cuadrados a partir de los valores facilitados por los autores (quienes, en una comunicación particular, vincularon los errores existentes con problemas de espacio en la ponencia).

Los resultados obtenidos para los parámetros de fractura (FITs y T -stress) de los tres casos considerados se comparan en el Cuadro 3.4 con los obtenidos por Abanto-Bueno y Lambros [81] a partir de los experimentos.

Se puede observar que, como sucede para el modelo homogéneo, los parámetros de fractura calculados numéricamente aproximan bastante bien los obtenidos a partir de los ensayos experimentales por Abanto-Bueno y Lambros [81], en la línea de otros análisis numéricos previos [93]. Sin embargo, existen algunas desviaciones que deben ser discutidas.

Como se ha mencionado anteriormente, siendo un término de orden superior, el T -stress es muy difícil de extraer, numérica y experimentalmente. Por tanto, las mayores discrepancias aparecen aquí. Las configuraciones empleadas en el estudio experimental provocan grandes variaciones del T -stress, que también se ve afectado por la dirección de variación del gradiente de

Resultados	Caso	$K_I(MPa m^{0,5})$	$K_{II}(MPa m^{0,5})$	$T(MPa)$
Experimentales	I	0.554	0.039	-4.272
Numéricos				
Oral et al. [93]		0.551	-0.022	-2.149
Presente		0.603	-0.017	-1.539
Experimentales	II	0.755	0.179	-0.069
Numéricos				
Oral et al. [93]		0.722	0.204	-0.673
Presente		0.739	0.249	-0.473
Experimentales	III	0.969	0.224	-0.930
Numéricos				
Oral et al. [93]		0.878	0.230	-0.870
Presente		0.908	0.291	-0.768

Cuadro 3.4: Resultados numéricos y experimentales para los parámetros de fractura de los especímenes agrietados FGM

propiedades. Los valores experimentales del T -stress para el preciso instante del inicio de crecimiento de la grieta varían desde -4.272 MPa a -0.069 MPa dependiendo de la geometría y el gradiente, pero son siempre negativos.

Todos los resultados, pero especialmente el T -stress, se ven afectados por los diferentes procedimientos empleados para su cálculo. Además de las diferencias metodológicas existentes para extraer los parámetros de fractura que ya han sido comentadas con anterioridad, los desplazamientos registrados experimentalmente se ajustan a la expresión asintótica del campo de desplazamientos excluyendo una región rectangular en las proximidades de la punta de la grieta donde la técnica DIC no puede ser aplicada. Sin embargo, en la simulación numérica realizada esta limitación no existe. Puesto que la homogeneización local de propiedades en el extremo de la fisura garantiza

que los criterios de fractura para materiales homogéneos se puedan aplicar al cálculo de FGMs y con el objetivo de registrar la singularidad en la entalla, la discretización empleada calcula resultados para la punta de la grieta y los contornos de integración adyacentes (ver Fig. 3.4).

También es preciso mencionar que en el primer espécimen de FGM los cálculos numéricos arrojan un valor negativo de K_{II} , en contraste con el valor positivo obtenido por Abanto-Bueno y Lambros experimentalmente [81]. Aunque el valor de K_{II} para el primer caso es relativamente pequeño y los valores se aproximan bastante bien pese a la diferencia de signos, no se puede pasar por alto esta apreciación. Y es que el signo de K_{II} afecta a la dirección de propagación de la grieta. Aunque durante el ensayo experimental da la impresión en los primeros instantes de que la grieta se propaga según el primer modo de fractura, tras 2 mm. de crecimiento la trayectoria de la fisura adopta una dirección positiva de $7 \pm 1,5$ grados [81]. El valor positivo de K_{II} calculado a raíz de los experimentos por Abanto-Bueno y Lambros [81] incorrectamente predice un pequeño pero negativo ángulo de propagación de grieta. Sin embargo, la simulación numérica, que arroja un valor de K_{II} negativo, predice correctamente el signo positivo del ángulo de propagación que sigue la fisura en el ensayo experimental [81]. Es por tanto necesario tener especial precaución cuando se extraen parámetros de fractura únicamente de los experimentos, especialmente si nos referimos al signo de K_{II} cuando este toma valores relativamente próximos a cero.

Al igual que se procedió con el modelo homogéneo, se calculan también los ángulos de inicio de propagación de la grieta para cada uno de los especímenes de FGMs. El criterio elegido para la propagación de la fisura es de nuevo el MTS y los resultados obtenidos se comparan en el Cuadro 3.5 con los registrados por Abanto-Bueno y Lambros en su proceder experimental [81].

De nuevo se observa una similitud aceptable entre los resultados numéricos y los experimentales, siendo conveniente realizar varias apreciaciones. En el tercer espécimen, un valor de $-19 \pm 1,5^\circ$ para el ángulo de inicio de

Ángulo de inicio de la grieta α ($^{\circ}$)		
	Exp.	Num. (MTS)
Caso I	$0 \pm 1,5$	3.35
Caso II	$-28 \pm 1,5$	-31.95
Caso III	$-26 \pm 1,5$	-30.85

Cuadro 3.5: Resultados numéricos y experimentales para el ángulo de inicio de la grieta de los especímenes agrietados FGM

propagación de la grieta es registrado por Abanto-Bueno y Lambros en sus experimentos [81], sin embargo, este valor ha sido obtenido inmediatamente después del inicio del avance de la fisura, para una distancia de propagación de la misma extremadamente pequeña. Aunque estrictamente hablando esta es la escala apropiada para determinar el ángulo de inicio de la propagación, la extensión registrada es extremadamente minúscula en comparación con la extensión de la entalla inicial y por tanto no se puede hablar de un proceso comprendido en la mecánica de la fractura elástica y lineal. Por ende, no es razonable comparar ese valor con el obtenido a raíz de una simulación puramente elástica. Teniendo en cuenta que Abanto-Bueno y Lambros [81] estudiaron tanto la situación inicial de propagación de la grieta como su crecimiento, es posible registrar el ángulo de inicio de propagación de la grieta una vez que la misma ha adquirido un tamaño más grande. En ese caso, el valor se correspondería con $-26 \pm 1,5^{\circ}$, una cifra que se correspondería con un proceso elástico y que, por tanto, se aproxima mucho más al resultado obtenido numéricamente. Esta discrepancia no prevalece en los otros dos casos, puesto que en el primero los ángulos son pequeños y en el segundo tras un corto inicio de propagación de la grieta, debido a la geometría y el gradiente del material, la trayectoria de la misma tiende a seguir la correspondiente a una situación gobernada por el primer modo de fractura. A diferencia del tercer caso evaluado, donde el modo mixto de fractura sigue haciendo efecto en el extremo de la grieta a medida que esta crece.

Se puede concluir entonces que para los ángulos de inicio de propagación de la grieta y para los parámetros de fractura, tanto para el caso homogéneo como para los especímenes de FGMs, los resultados calculados mediante el método numérico de los elementos finitos se aproximan razonablemente bien a los obtenidos a raíz del ensayo experimental por Abanto-Bueno y Lambros [81]. Considerando las notables diferencias en la metodología empleada, teniendo en cuenta el inevitable error experimental y habiendo argumentado y razonado las diferencias más significativas, se puede afirmar que la similitud entre los valores calculados numérica y experimentalmente es más que suficiente para validar el modelo computacional desarrollado.

Capítulo 4

Análisis de sensibilidad de los parámetros de fractura ante los cambios en la función de ajuste

4.1. Introducción

La inmensa mayoría de los estudios numéricos realizados hasta el momento en el campo de la mecánica de la fractura de los FGMs han sido desarrollados con el objetivo de resolver alguna de las numerosas incógnitas que plantean los fundamentos de la fractura de materiales no homogéneos.

Sin embargo, la relativamente reciente expansión de la implantación de los FGMs en una gran variedad de campos de la industria, así como el incremento de sus aplicaciones comerciales [1], ha provocado un aumento progresivo de la relevancia de los cálculos numéricos destinados a reproducir ensayos experimentales de aplicaciones prácticas.

Como es obvio, existe una relación directa entre los avances de la comunidad investigadora en la base teórica de la mecánica de la fractura de los materiales no homogéneos y su aplicabilidad a casos reales y, por consiguiente,

con las simulaciones numéricas de estos procesos. Sin embargo, la mecánica computacional de los FGMs es un campo que plantea diversas incógnitas por sí mismo. Una de ellas es la manera de implementar en el modelo numérico la variación gradual de las propiedades del material. Esta problemática ha atraído un considerable esfuerzo investigador [17, 75, 76, 77] que ya ha sido comentado con detalle en la tercera parte del capítulo correspondiente a la revisión bibliográfica de este documento. En cualquier caso, no es la única cuestión de la mecánica computacional de los FGMs que debe ser estudiada. Cuidar minuciosamente todos los aspectos concernientes al modelo numérico es fundamental para poder simular con precisión situaciones reales.

En lo concerniente a la mecánica de la fractura de los FGMs, es de vital trascendencia reproducir de la forma más precisa posible la variación de las propiedades del material en las proximidades de la grieta. Es habitual durante la simulación numérica de una aplicación real en la industria o de un estudio experimental que la variación gradual de las propiedades del FGM esté caracterizada por las propiedades elásticas de una serie de puntos a lo largo de la dirección de variación del gradiente de propiedades. Las propiedades mecánicas de estos puntos han podido obtenerse durante el proceso de manufactura del FGM por medio de los ensayos normalizados habituales.

La homogeneización local en la punta de la grieta (ver Fig. 4.1) es la que permite el uso de los criterios de fractura empleados para los materiales homogéneos [96]. Los valores de las propiedades mecánicas en la punta de la grieta caracterizan entonces principalmente los valores de los parámetros que describen el comportamiento a fractura en un FGM. En base a ello, un correcto ajuste de las propiedades locales en el extremo de la fisura se presupone fundamental para conseguir una simulación numérica apropiada.

El objetivo de esta parte del trabajo consiste en evaluar, mediante un completo estudio de sensibilidad para diferentes configuraciones, la relevancia de un ajuste preciso de las propiedades mecánicas en el entorno de la punta

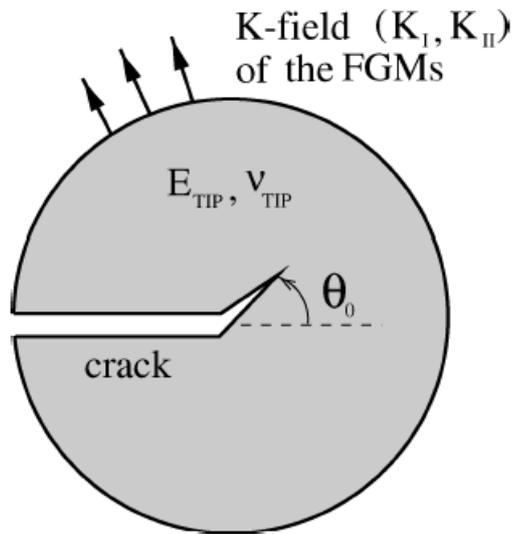


Figura 4.1: Homogeneización local de la grieta en un FGM [96]

de la grieta.

4.2. Motivación: ajuste lineal

La motivación de este estudio de sensibilidad surge a raíz del ajuste en el modelo numérico descrito en el capítulo anterior de las propiedades de los especímenes registradas experimentalmente por Abanto-Bueno y Lambros [81].

Como ya se ha mencionado, el trabajo experimental de Abanto-Bueno y Lambros [81] ha servido de modelo para estudios numéricos de los mismos autores en colaboración con otros investigadores [93, 94]. En estos se aproxima la variación gradual de propiedades del material mediante un ajuste por mínimos cuadrados de un polinomio de cuarto orden. Como ya se ha mencionado en el capítulo anterior, en [94] las expresiones de los polinomios no coinciden con la curva descrita por las funciones de aproximación, por lo que es necesario realizar de nuevo el ajuste a partir de los valores de las

propiedades elásticas registradas experimentalmente [81], datos que fueron amablemente cedidos por los autores. Además del ajuste por mínimos cuadrados mediante una función de cuarto grado, se realizan ajustes empleando polinomios de órdenes superiores e inferiores sin llegar a alcanzar nunca un ajuste general tan riguroso. Como se puede observar en las Figs. 3.1 - 3.3, el polinomio de cuarto orden describe con bastante precisión la variación de propiedades mecánicas a lo largo de los tres especímenes FGM. En cualquier caso, es imposible eliminar completamente mediante un ajuste polinomial la diferencia existente entre los datos correspondientes a la aproximación y los datos experimentales registrados por Abanto-Bueno y Lambros [81]. Esta disimilitud entre las cifras es relativamente pequeña en algunos puntos de la gráfica mientras que para otros adopta disconformidades significativas (ver Figs. 3.1-3.3).

Se plantea entonces la posibilidad de realizar el ajuste directamente sobre los datos experimentales. Esto es, definir en el modelo de elementos finitos varios puntos cuyas propiedades elásticas se corresponderían con los valores registrados experimentalmente y hacer depender estas, en función de su posición en el espacio, de un valor creciente de la temperatura. Así, el valor más bajo y el más alto de la temperatura se corresponderían con los valores del módulo de Young registrados experimentalmente en los extremos del espécimen. A continuación se establece una distribución lineal de la temperatura que distribuya los puntos en función de su posición en el espacio. Esta función de ajuste se denomina, en este trabajo, aproximación lineal.

El software de elementos finitos empleado en la modelización numérica, ABAQUS [86], asigna por defecto las propiedades en aquellos lugares que no están definidas considerando una variación lineal entre los puntos registrados. Esto se traduce en cambio lineal entre los datos cuya aproximación general para cada espécimen se puede observar en las Figs. 4.2-4.4. A efectos de comparación se superpone con la aproximación polinomial de cuarto orden a partir del ajuste por mínimos cuadrados. Hay que mencionar que, para la

aproximación lineal (línea roja), solo es necesario ajustar la variación de las propiedades mecánicas para aquellos puntos que caracterizan la graduación del espécimen, careciendo los restantes de interés.

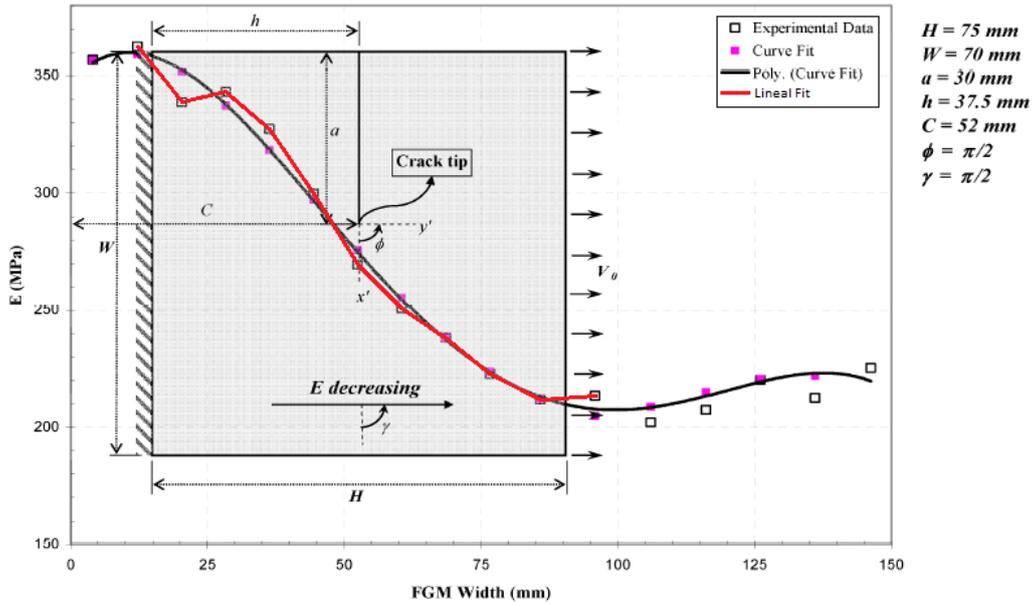


Figura 4.2: Comparativa de aproximaciones para el ajuste de la variación de propiedades en el Caso 1 - FGM

Antes de comparar aproximaciones es necesario mencionar la limitación existente en el ajuste lineal entre puntos considerado. Y es que, para que sea preciso, los datos experimentales tienen que estar separados en el espacio por una distancia lo más similar posible. Este hecho no suele suponer un obstáculo, pues una toma de medidas que quiera registrar correctamente la variación gradual de las propiedades evalúa las mismas en puntos del material que contienen una separación constante entre sí.

A la hora de evaluar las diferencias entre las aproximaciones hay que volver a resaltar la importancia de una correcta aproximación de los valores locales en la punta de la grieta, tal y como se señala en la primera parte de este

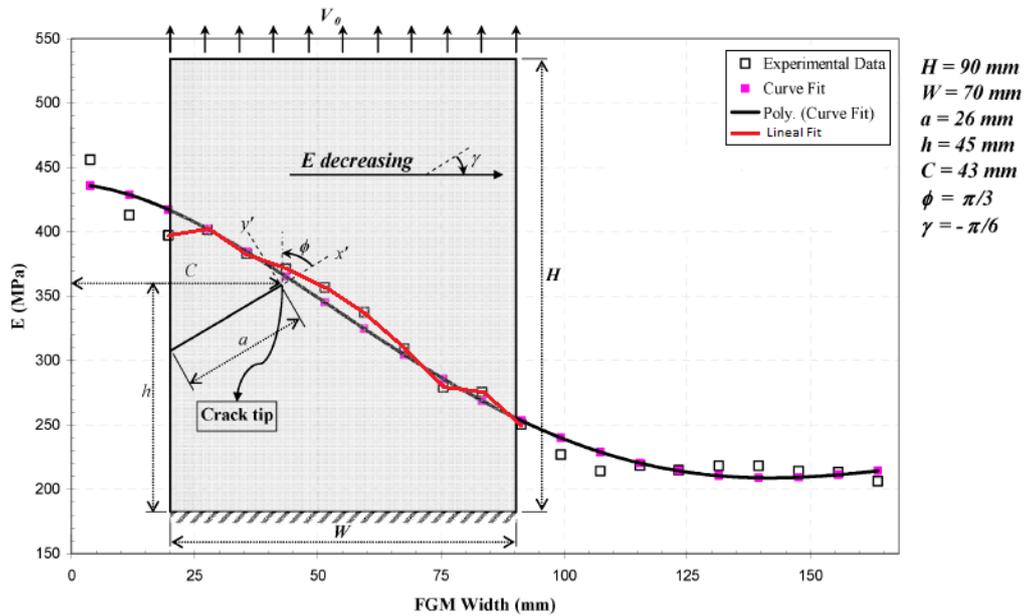


Figura 4.3: Comparativa de aproximaciones para el ajuste de la variación de propiedades en el Caso 2 - FGM

capítulo. Un primer vistazo a las Figs. 4.2 – 4.4 muestra diferencias entre las aproximaciones para los datos más próximos al extremo de la fisura en todos los casos, siendo estas especialmente significativas en el tercer espécimen.

Se procede entonces al cálculo de los parámetros de fractura con el objetivo de extraer conclusiones a partir de los mismos. Los valores de los FITs y el T -stress considerando una aproximación lineal de la variación de las propiedades del material se muestran en el Cuadro 4.1. Con la finalidad de comparar resultados la tabla incluye también las cifras calculadas empleando la aproximación polinomial de cuarto orden y las obtenidas a raíz de los experimentos por Abanto-Bueno y Lambros [81].

Un análisis a primera vista del Cuadro 4.1 muestra una fuerte sensibilidad de los parámetros de fractura al cambio de aproximación. Y es que tanto para los FITs como para el T -stress, los valores se modifican significativamente en cualquiera de los tres especímenes de FGM considerado. Examinando los

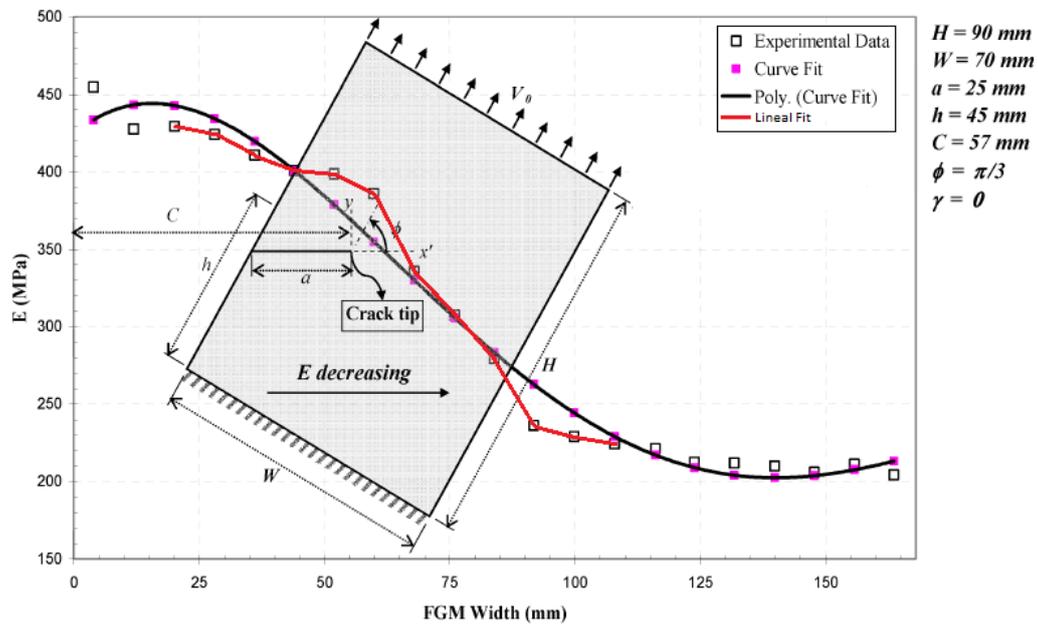


Figura 4.4: Comparativa de aproximaciones para el ajuste de la variación de propiedades en el Caso 3 - FGM

resultados con más detalle se observa que esta diferencia es aún más significativa en el tercer espécimen, donde el ajuste polinomial pierde precisión en la aproximación de los valores experimentales en el entorno de la punta de la grieta. Sin embargo, estas diferencias no son tan relevantes en el primer y segundo espécimen, donde el ajuste polinomial no es tan riguroso para los primeros datos experimentales pero aproxima de forma relativamente precisa los valores en la proximidad del extremo de la fisura. Este hecho pone de relieve la importancia de un ajuste preciso de las propiedades mecánicas en el entorno de la grieta, tal y como se preveía al principio de este capítulo. A pesar de que se desconoce el error experimental, la comparativa con los valores de los parámetros de fractura extraídos por Abanto-Bueno y Lambros a partir de los experimentos [81] inclina a concluir que existe una mejoría en la aproximación del ajuste lineal frente al polinomial, siendo este incremento de la precisión especialmente significativo en el tercer espécimen.

Procedimiento	Caso	$K_I(MPa m^{0,5})$	$K_{II}(MPa m^{0,5})$	$T(MPa)$
Experimental	I	0.554	0.039	-4.272
Num. (ajuste polinomial)		0.603	-0.017	-1.539
Num. (ajuste lineal)		0.602	-0.018	-1.533
Experimental	II	0.755	0.179	-0.069
Num. (ajuste polinomial)		0.739	0.249	-0.473
Num. (ajuste lineal)		0.718	0.243	-0.460
Experimental	III	0.969	0.224	-0.930
Num. (ajuste polinomial)		0.908	0.291	-0.768
Num. (ajuste lineal)		0.934	0.281	-0.950

Cuadro 4.1: Resultados numéricos y experimentales de los parámetros de fractura de los especímenes agrietados FGM para distintas aproximaciones

En el capítulo anterior se calcularon los ángulos de inicio de propagación de la grieta de acuerdo al criterio del MTS con el objetivo de establecer una comparativa con los resultados experimentales para validar el modelo numérico. Teniendo en cuenta que el criterio designado en el software de elementos finitos calcula el ángulo de inicio de la grieta a partir de los FITs [97], carece de sentido establecer un estudio de sensibilidad independiente para el mismo. Sin embargo, el cálculo de los ángulos de inicio del crecimiento de la fisura para diferentes aproximaciones sí ofrece interés desde la posibilidad de establecer una comparativa con el resultado experimental, ya que Abanto-Bueno y Lambros [81], a diferencia de los FITs y el T -stress, registraron el ángulo de inicio de propagación de la grieta directamente de los propios especímenes, sin necesidad de realizar cálculos de post-proceso que pudieran ampliar el error experimental ya existente. Este hecho permite reducir la diferencia inevitable entre los resultados experimentales y la realidad, permitiendo así una evaluación más rigurosa de la precisión de las distintas aproximaciones. Se establece, por tanto, en el Cuadro 4.2 una

comparativa para los ángulos de inicio de propagación de la fisura entre los resultados experimentales y los cálculos numéricos obtenidos mediante las dos aproximaciones evaluadas (lineal y polinomial).

Ángulo de inicio de la grieta α ($^{\circ}$)			
	Exp.	Num. (ajuste polinomial)	Num. (ajuste lineal)
Caso I	$0 \pm 1,5$	3.35	3.46
Caso II	$-28 \pm 1,5$	-31.95	-31.99
Caso III	$-26 \pm 1,5$	-30.85	-29.65

Cuadro 4.2: Resultados numéricos (criterio del MTS) y experimentales para el ángulo de inicio de la grieta de los especímenes agrietados FGM para distintas aproximaciones

Como se puede observar, en concordancia con las conclusiones extraídas a partir de la comparativa de los valores de los FITs y el T -stress, para los dos primeros especímenes, donde el ajuste polinomial aproxima de forma relativamente precisa los datos experimentales en las proximidades de la punta de la grieta, no existe apenas diferencia entre las cifras calculadas a partir de las dos aproximaciones numéricas. Sin embargo, en el tercer caso, donde la aproximación polinomial pierde precisión en el ajuste de los valores experimentales próximos al extremo de la fisura, la diferencia es significativa, y la aproximación lineal ofrece un resultado mucho más próximo al registrado por Abanto-Bueno y Lambros directamente del espécimen tras el ensayo experimental.

Se puede extraer entonces a partir de esta comparativa una conclusión clara. Y es que, a la hora de elegir la aproximación numérica más apropiada de los datos experimentales en un estudio de fractura, es fundamental ajustar de la manera más precisa posible la variación de las propiedades locales en la proximidad de la punta de la grieta, siendo de menor relevancia la rigurosidad en la aproximación del resto de propiedades del material. Esto es, debe primar

un ajuste que aproxime de manera concisa el cambio gradual de propiedades elásticas en el entorno de la punta de la grieta frente a una aproximación que sea más rigurosa en general pero aproxime con menos exactitud los valores en el extremo de la fisura. Los resultados obtenidos a lo largo del estudio nos inclinan a concluir también que los parámetros de fractura son relativamente muy sensibles a ligeras modificaciones de los valores locales de las propiedades en las proximidades del extremo de la fisura. Esta conclusión otorgaría aún más importancia a la primera y por ende su magnitud debe de ser estudiada en profundidad.

4.3. Estudio de sensibilidad para ligeras variaciones de las propiedades elásticas en el entorno de la grieta

Los resultados de la sección anterior inclinan a afirmar que la sensibilidad de los parámetros de fractura es relativamente grande ante las modificaciones de los valores de las propiedades del material fruto de las diferentes aproximaciones consideradas para reproducir en el modelo numérico los datos experimentales. Y por ende, aumenta la trascendencia de elegir un ajuste que caracterice de forma precisa la variación de propiedades mecánicas en el entorno de la grieta.

Con el objetivo de confirmar estas afirmaciones, así como de evaluar la magnitud de esta sensibilidad, se modifican los valores extraídos experimentalmente [81] de las propiedades elásticas del punto más cercano al extremo de la fisura, propiedades que, en base a la homogeneización local de la punta de la grieta, son las que van a influir sobre el comportamiento a fractura del espécimen. Esta perturbación de los datos experimentales recogidos se realiza en las dos aproximaciones consideradas hasta ahora mediante una alteración reducida de su valor (del 2% y del 5%, en ambos sentidos) con el fin de

valorar la sensibilidad de los parámetros de fractura ante variaciones ligeras, propias de la elección de diferentes polinomios de ajuste.

4.3.1. Caso I - FGM1

Así, para el primer espécimen, en la Fig. 3.1 se puede observar que el dato experimental que está más próximo al extremo de la fisura es sin lugar a dudas el que está situado en séptima posición a lo largo del eje de las abscisas, con un valor en el mismo de 52.43 mm. y con un modulo de Young de 269.6984 MPa. Se modifica por tanto el módulo de Young en las condiciones mencionadas en el párrafo anterior obteniendo así cuatro nuevos puntos de ensayo (ver Cuadro 4.3).

Caso 1 - FGM1	
-5 %	256.21348 MPa
-2 %	264.304432 MPa
Dato exp.	269.6984 MPa
+2 %	275.092368 MPa
+5 %	283.18332 MPa

Cuadro 4.3: Puntos de ensayo del análisis de sensibilidad para ligeras variaciones de las propiedades mecánicas locales en la punta de la grieta - FGM1

Considerando en primer lugar la aproximación lineal, se procede a representar gráficamente la diferencia entre los ajustes causada por las modificaciones citadas y a posteriori se realizan los cálculos numéricos de los parámetros de fractura para cada uno de los valores considerados. La diferencia de los ajustes en el punto que caracteriza las propiedades mecánicas locales del material en la punta de la grieta se puede observar en la Fig. 4.5. Esta gráfica y las siguientes han sido desarrolladas en el programa de software matemático MATLAB [98].

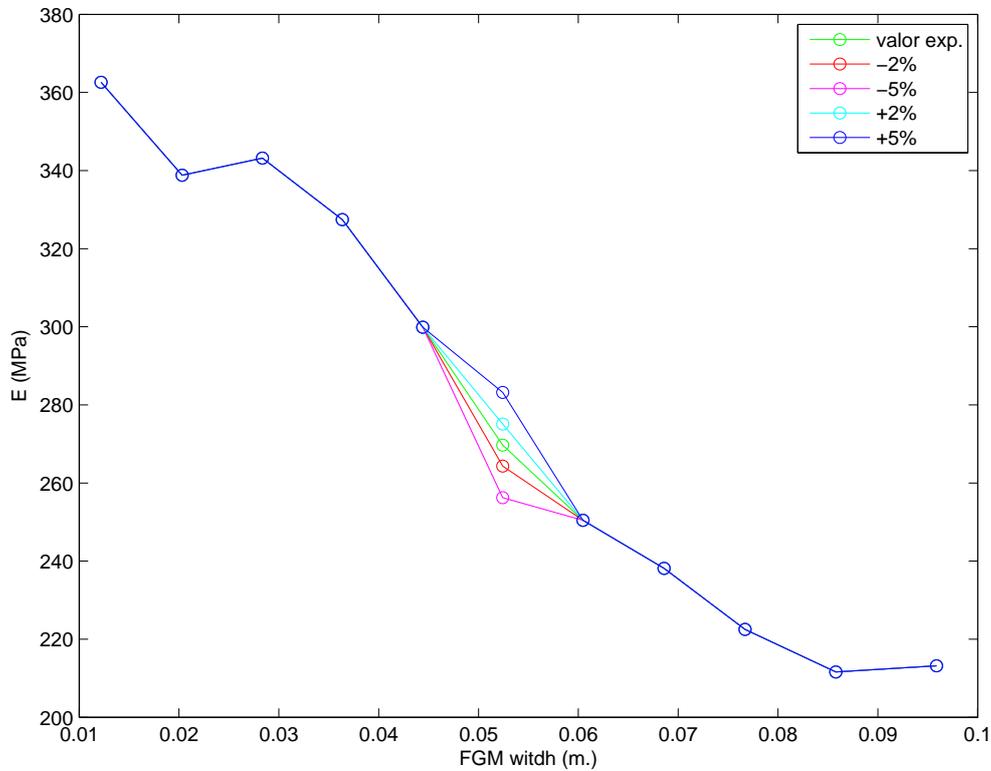


Figura 4.5: Ajuste lineal para los puntos de ensayo considerados en el análisis de sensibilidad - FGM1

Se puede observar en la Fig. 4.5 que la única zona de interés se corresponde con el entorno de la punta de la grieta. Y es que, puesto que se trata de un ajuste lineal, la variación del dato experimental que se ha llevado a cabo solo afecta al propio punto modificado y a los dos adyacentes. En el Cuadro 4.4 se muestran los resultados de los parámetros de fractura correspondientes a los ajustes lineales para cada punto de ensayo considerado.

Punto de ensayo	K_I (%)	K_{II} (%)	T (%)
-5 %	0.595 (1.16 %)	-0.019 (5.56 %)	-1.530 (0.20 %)
-2 %	0.599 (0.50 %)	-0.018 (0 %)	-1.532 (0.07 %)
Dato exp.	0.602	-0.018	-1.533
+2 %	0.605 (0.50 %)	-0.018 (0 %)	-1.534 (0.07 %)
+5 %	0.609 (1.16 %)	-0.018 (0 %)	-1.536 (0.20 %)
Result. Exp.	0.554	0.039	-4.272

Cuadro 4.4: Resultados numéricos de los parámetros de fractura para los distintos puntos de ensayo considerados. Valores de los FITs en $MPa m^{0,5}$ y del T -stress en MPa . Ajuste lineal - FGM1

El análisis de los resultados a raíz de un ajuste lineal para cada punto de ensayo considerado (ver Cuadro 4.4) refleja que los parámetros de fractura son sensibles ante los cambios realizados. Para la geometría del primer espécimen FGM esta sensibilidad es especialmente significativa en los valores de K_I y el T -stress. Siendo menos relevante para el segundo FIT, aunque llegue a adoptar valores significativos en las cifras porcentuales por la reducida magnitud del mismo.

De igual manera a como se procede en el análisis del ajuste lineal se estudia el caso de la aproximación polinomial. Así, en primer lugar se representa gráficamente la diferencia entre las aproximaciones surgidas a raíz de las variaciones consideradas y, a continuación se calculan mediante el software de elementos finitos los valores que adoptan los parámetros de fractura para los diferentes ajustes considerados. Es preciso mencionar que cuando se hace mención al ajuste polinomial se hace siempre referencia, salvo que se indique lo contrario, a la aproximación por medio de un polinomio de cuarto orden a partir de un ajuste por mínimos cuadrados, pues es el criterio elegido por los autores del ensayo experimental [94] y, como se ha señalado en la sección anterior, es el que mejor ajusta de manera general la variación de propiedades del material. La diferencia de los ajustes a raíz de los cambios

de valor del punto que caracteriza las propiedades mecánicas locales del material en el extremo de la fisura se puede observar en la Fig. 4.6. En la misma se representan los puntos experimentales, incluyendo las modificaciones del dato que caracteriza las propiedades mecánicas en las proximidades de la punta de la grieta, y las distintas aproximaciones que surgen a raíz de esas modificaciones.

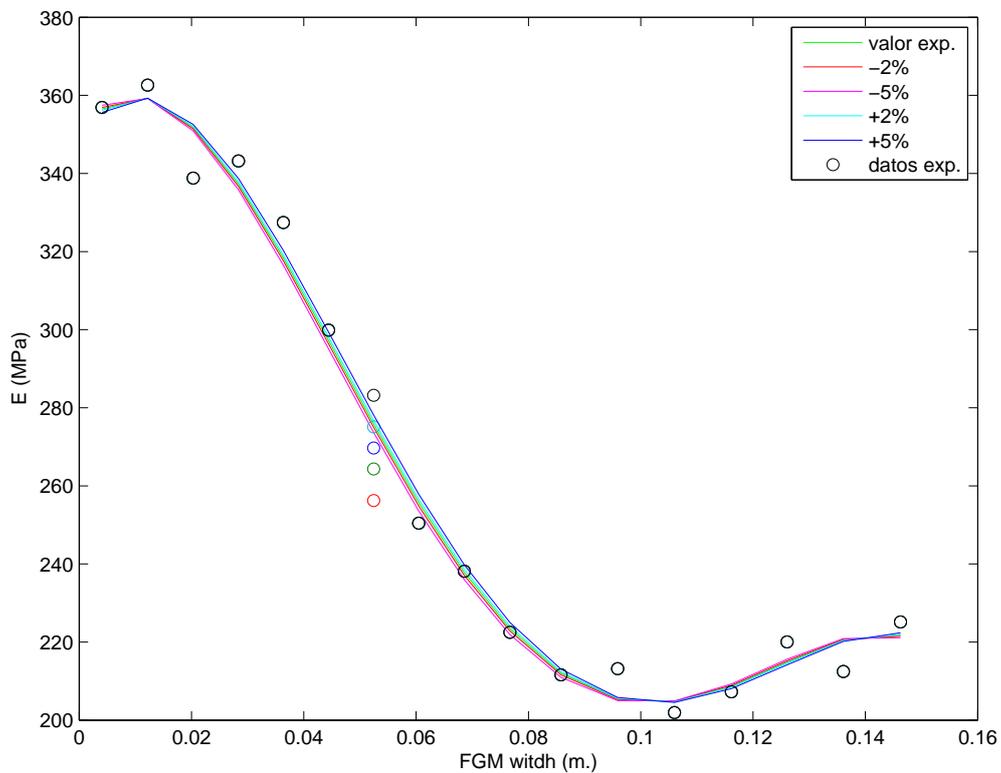


Figura 4.6: Ajuste polinomial para los puntos de ensayo considerados en el análisis de sensibilidad - FGM1

Como era de esperar y se puede observar gráficamente en la Fig. 4.6, una variación reducida de uno de los 17 valores que se ajustan mediante un polinomio de cuarto orden no trae consigo grandes diferencias entre las aproximaciones. En cualquier caso, sí se aprecian ciertas disimilitudes cuyo efecto sobre los parámetros de fractura debe ser estudiado. Se realizan por tanto los cálculos numéricos para las diferentes aproximaciones con el objetivo

de estudiar la sensibilidad de los parámetros de fractura ante los cambios realizados en las mismas. Los resultados se muestran en el Cuadro 4.5.

Punto de ensayo	K_I (%)	K_{II} (%)	T (%)
-5 %	0.600 (0.50 %)	-0.017 (0 %)	-1.530(0.58 %)
-2 %	0.602 (0.17 %)	-0.017 (0 %)	-1.535(0.26 %)
Dato exp.	0.603	-0.017 (0 %)	-1.539(%)
+2 %	0.606 (0.50 %)	-0.017 (0 %)	-1.542(0.19 %)
+5 %	0.608 (0.83 %)	-0.017 (0 %)	-1.547(0.52 %)
Result. Exp.	0.554	0.039	-4.272

Cuadro 4.5: Resultados numéricos de los parámetros de fractura para los distintos puntos de ensayo considerados. Valores de los FITs en $MPa m^{0.5}$ y del T -stress en MPa . Ajuste polinomial - FGM1

Pese a la impresión extraída a partir de la representación gráfica de que entre las aproximaciones no existen muchas disimilitudes, un vistazo rápido al Cuadro 4.5 refleja la existencia de sensibilidad en los parámetros de fractura para cada ajuste. En concordancia con el ajuste lineal, no se aprecia sensibilidad en K_{II} para esta geometría pero la variación es significativa en los valores de K_I y en el término del T -stress.

Se puede concluir entonces que, para la geometría considerada en el primer espécimen de FGM, donde la carga es simétrica y el gradiente de propiedades asimétrico, existe una sensibilidad notoria entre los parámetros de fractura para ligeras variaciones en el valor del dato que caracteriza las propiedades mecánicas locales en el extremo de la fisura, siendo esta sensibilidad especialmente significativa en el primer FIT y en el término no singular del T -stress.

4.3.2. Caso II - FGM2

En el segundo espécimen de FGM el punto experimental que caracteriza las propiedades mecánicas en la punta de la grieta se corresponde con un valor de 43.58 mm., lo que concuerda con la sexta posición en el eje de las x y un valor para el módulo elástico de 371.3171 MPa (ver Fig. 3.2). Se modifica el valor del módulo elástico de acuerdo con el criterio establecido para el estudio de sensibilidad y, al igual que para el primer espécimen, se obtienen cuatro nuevos puntos de ensayo (ver Cuadro 4.6).

Caso 2 - FGM2	
-5 %	352.751245 MPa
-2 %	363.890758 MPa
Dato exp.	371.3171 MPa
+2 %	378.743442 MPa
+5 %	389.882955 MPa

Cuadro 4.6: Puntos de ensayo del análisis de sensibilidad para ligeras variaciones de las propiedades mecánicas locales en la punta de la grieta - FGM2

Procediendo igual que el primer caso, se considera en primer lugar la aproximación lineal y se representa gráficamente la diferencia entre las aproximaciones causada a raíz de los puntos de ensayo considerados. A continuación, se realizan los cálculos numéricos de los parámetros de fractura para cada uno de los casos sopesados. La diferencia entre los ajustes en el punto que caracteriza las propiedades mecánicas locales del material en la punta de la grieta se puede observar en la Fig. 4.7.

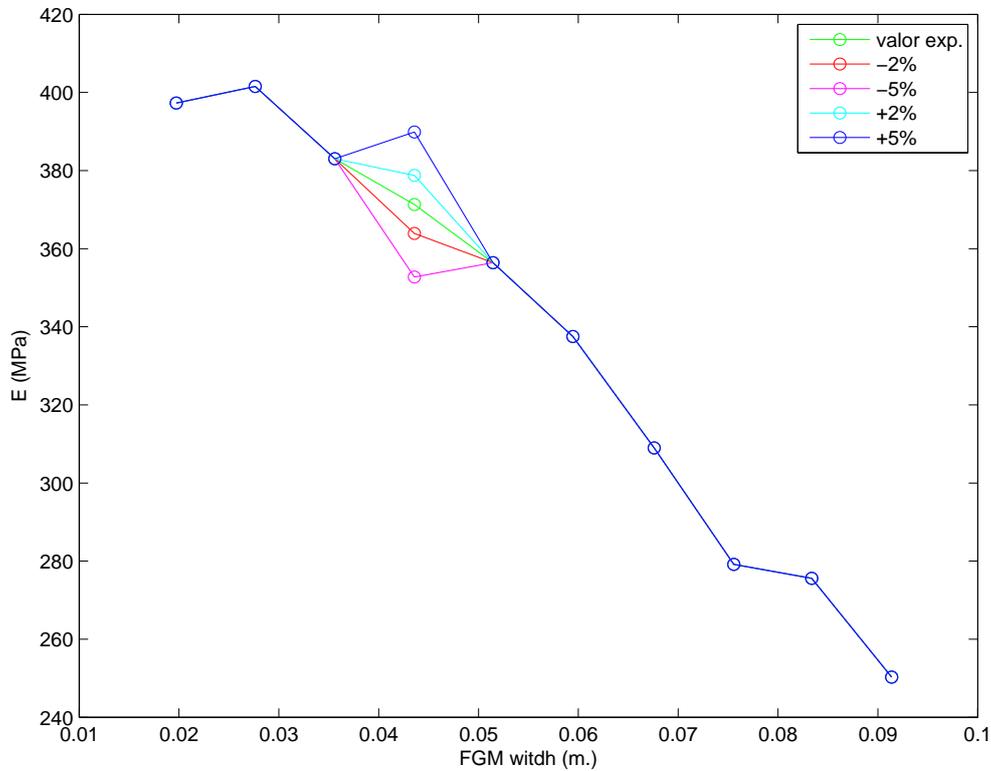


Figura 4.7: Ajuste lineal para los puntos de ensayo considerados en el análisis de sensibilidad - FGM2

De nuevo es patente en la Fig. 4.7 que para el ajuste lineal solo se han considerado los datos experimentales que se corresponden con la superficie del espécimen, por carecer de interés los restantes. Así mismo, la única zona relevante se corresponde con las inmediaciones del extremo de la fisura, puesto que, al tratarse de una aproximación lineal, la variación del dato experimental que se ha llevado a cabo solo afecta al propio punto modificado y a los dos adyacentes. Los resultados de los cálculos numéricos por el MEF para los parámetros de fractura en función de los diferentes ajustes se muestran en el Cuadro 4.7.

Punto de ensayo	K_I (%)	K_{II} (%)	T (%)
-5 %	0.707 (1.53 %)	0.242 (0.41 %)	-0.441(4.13 %)
-2 %	0.714 (0.56 %)	0.243 (0 %)	-0.452(1.74 %)
Dato exp.	0.718	0.243	-0.460
+2 %	0.723 (0.70 %)	0.244 (0.41 %)	-0.468(1.74 %)
+5 %	0.729 (1.53 %)	0.245 (0.82 %)	-0.479(4.13 %)
Result. Exp.	0.755	0.179	-0.069

Cuadro 4.7: Resultados numéricos de los parámetros de fractura para los distintos puntos de ensayo considerados. Valores de los FITs en $MPa m^{0.5}$ y del T -stress en MPa . Ajuste lineal - FGM2

Un primer vistazo al Cuadro 4.7 refleja la existencia de una sensibilidad significativa de los parámetros de fractura ante los cambios realizados. Para este segundo caso, a raíz de un ajuste lineal para cada punto de ensayo considerado, esta sensibilidad es especialmente relevante en los términos de K_I y el T -stress.

De igual manera a como se procede en el primer espécimen, tras el análisis del ajuste lineal se estudia la cuestión de la aproximación polinomial a partir de un polinomio de cuarto grado y un ajuste por mínimos cuadrados. Así, el primer paso consiste en representar gráficamente la diferencia existente entre los ajustes surgidos a raíz de las modificaciones mencionadas para calcular numéricamente a continuación los valores que adoptan los parámetros de fractura para cada una de las aproximaciones consideradas. Se representan en la Fig. 4.8 los diferentes ajustes para cada una de las modificaciones que sufre el valor del dato experimental que caracteriza las propiedades mecánicas locales del material en el extremo de la fisura. En la Fig. 4.8 se incluyen también los puntos experimentales, incluyendo las modificaciones del dato que caracteriza las propiedades mecánicas en las proximidades de la punta de la grieta.

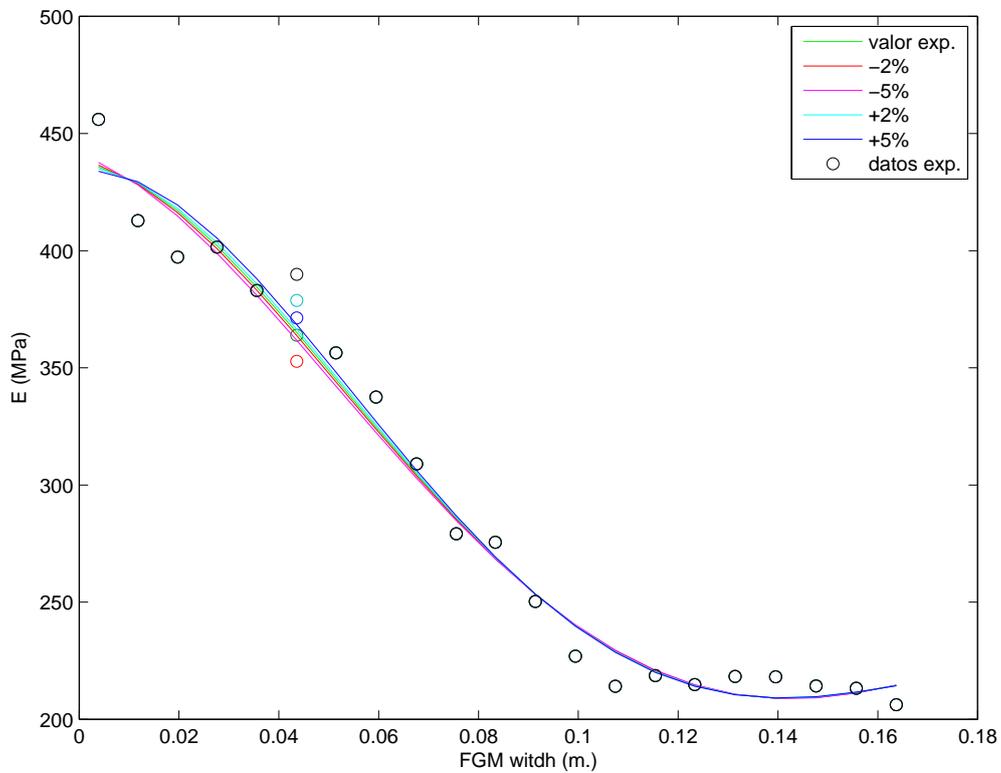


Figura 4.8: Ajuste polinomial para los puntos de ensayo considerados en el análisis de sensibilidad - FGM2

De nuevo es de esperar que una pequeña variación en uno de los 21 datos que se ajustan mediante el polinomio de cuarto orden no lleve consigo grandes diferencias entre las aproximaciones. En la Fig. 4.8 se observa que estas disimilitudes entre las aproximaciones son, efectivamente, reducidas. Aunque comparando la Fig. 4.8 con la Fig. 4.6 se aprecia que las diferencias existentes son ligeramente superiores en este segundo caso. Se realiza el cálculo numérico por el MEF de los parámetros de fractura para las diferentes aproximaciones y se muestran los resultados en el Cuadro 4.8 con el objetivo de estudiar la sensibilidad ante esas disimilitudes en los ajustes.

Punto de ensayo	K_I (%)	K_{II} (%)	T (%)
-5 %	0.732 (0.95 %)	0.248 (0.40 %)	-0.469 (0.85 %)
-2 %	0.736 (0.41 %)	0.249 (0 %)	-0.472 (0.21 %)
Dato exp.	0.739	0.249	-0.473
+2 %	0.742 (0.41 %)	0.251 (0.80 %)	-0.475 (0.42 %)
+5 %	0.746 (0.95 %)	0.252 (1.20 %)	-0.478 (1.06 %)
Result. Exp.	0.755	0.179	-0.069

Cuadro 4.8: Resultados numéricos de los parámetros de fractura para los distintos puntos de ensayo considerados. Valores de los FITs en $MPa m^{0.5}$ y del T -stress en MPa . Ajuste polinomial - FGM2

Al igual que sucedía con el primer espécimen, aunque la Fig. 4.8 no muestra grandes disimilitudes entre las diferentes aproximaciones, los resultados obtenidos (ver Cuadro 4.8) muestran que los parámetros de fractura son sensibles a las modificaciones. En este caso la sensibilidad es significativa para todos los parámetros, incluido el segundo FIT.

Considerando también los resultados extraídos a partir de las aproximaciones lineales, se puede concluir que para la geometría evaluada en el segundo espécimen de FGM, donde tanto la carga como la variación del gradiente de propiedades son asimétricas, existe una sensibilidad significativa de los parámetros de fractura, y esta es manifiesta en todos ellos.

4.3.3. Caso III - FGM3

En el tercer y último espécimen de FGM evaluado, el dato experimental que caracteriza las propiedades mecánicas en la punta de la grieta se corresponde con el octavo punto en el eje de las abscisas (43.58 mm.) y un valor para el módulo de Young de 385.7154 MPa (ver Fig. 3.3). Éste se modifica de acuerdo al criterio establecido para el estudio de la sensibilidad, dando

lugar a cuatro nuevos puntos de ensayo (ver Cuadro 4.9).

Caso 3 - FGM3	
-5 %	366.42963 MPa
-2 %	378.001092 MPa
Dato exp.	385.7154 MPa
+2 %	393.429708 MPa
+5 %	405.00117 MPa

Cuadro 4.9: Puntos de ensayo del análisis de sensibilidad para ligeras variaciones de las propiedades mecánicas locales en la punta de la grieta - FGM3

El procedimiento es el mismo para el tercer caso que para los otros dos: primero se estudia la diferencia entre las aproximaciones lineales a raíz de la modificación impuesta en el dato que caracteriza las propiedades mecánicas locales en la punta de la grieta y, a continuación, se calcula numéricamente mediante el software de elementos finitos los valores de los parámetros de fractura para cada uno de los puntos de ensayo considerados. La Fig. 4.9 contiene la representación gráfica de los distintos ajustes a raíz de los cambios mencionados.

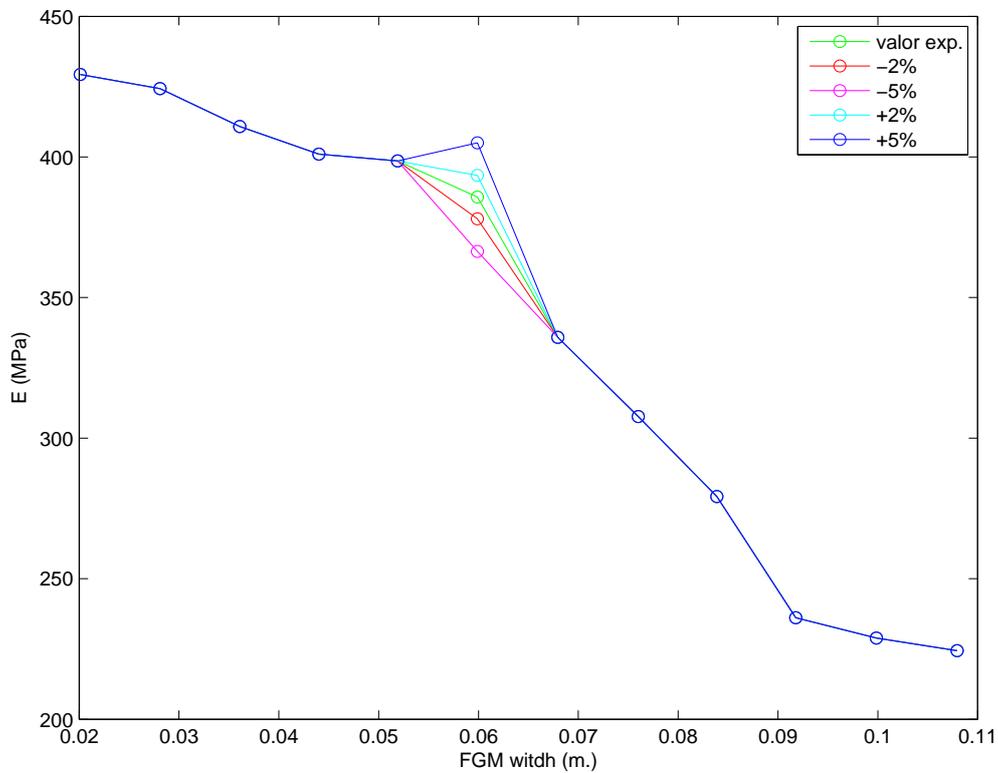


Figura 4.9: Ajuste lineal para los puntos de ensayo considerados en el análisis de sensibilidad - FGM3

Como se puede observar en la Fig. 4.9 y se razonó en la sección anterior, para la aproximación lineal solo es necesario ajustar la variación de las propiedades mecánicas para aquellos puntos que caracterizan la graduación del espécimen, careciendo los restantes de interés. Así mismo, el único área de interés en la Fig. 4.9 se corresponde con las inmediaciones del extremo de la fisura puesto que, al tratarse de un ajuste lineal, la modificación del valor del dato experimental que se ha llevado a cabo solo afecta al propio punto y a los dos adyacentes. Los resultados numéricos derivados del cálculo computacional de los parámetros de fractura en función de las diferentes aproximaciones se muestran en el Cuadro 4.10.

Punto de ensayo	K_I (%)	K_{II} (%)	T (%)
-5 %	0.900 (3.64 %)	0.276 (1.78 %)	-0.870 (8.42 %)
-2 %	0.921 (1.39 %)	0.279 (0.71 %)	-0.918 (3.37 %)
Dato exp.	0.934	0.281	-0.950
+2 %	0.948 (1.50 %)	0.283 (0.71 %)	-0.982 (3.37 %)
+5 %	0.968 (3.64 %)	0.286 (1.78 %)	-1.030 (8.42 %)
Result. Exp.	0.969	0.224	-0.930

Cuadro 4.10: Resultados numéricos de los parámetros de fractura para los distintos puntos de ensayo considerados. Valores de los FITs en $MPa m^{0.5}$ y del T -stress en MPa . Ajuste lineal - FGM3

Como se puede observar en el Cuadro 4.10, la sensibilidad general de los parámetros de fractura ante las modificaciones propuestas es notoria. Esta, considerando el ajuste lineal para cada punto de ensayo considerado, es significativa en todos los parámetros de fractura.

De nuevo se procede a estudiar la sensibilidad de los parámetros de fractura ante un ajuste polinomial. En primer lugar, se representa gráficamente la diferencia existente entre las aproximaciones a raíz de los ligeros cambios introducidos en el valor del punto más próximo al extremo de la fisura y a posteriori se realizan los cálculos por el MEF de los parámetros de fractura para cada uno de los ajustes considerados. Todas las aproximaciones mencionadas se han realizado para cada punto de ensayo mediante un ajuste por mínimos cuadrados y un polinomio de cuarto grado. Los datos experimentales aproximados y las disimilitudes entre los ajustes se pueden apreciar en la Fig. 4.10.

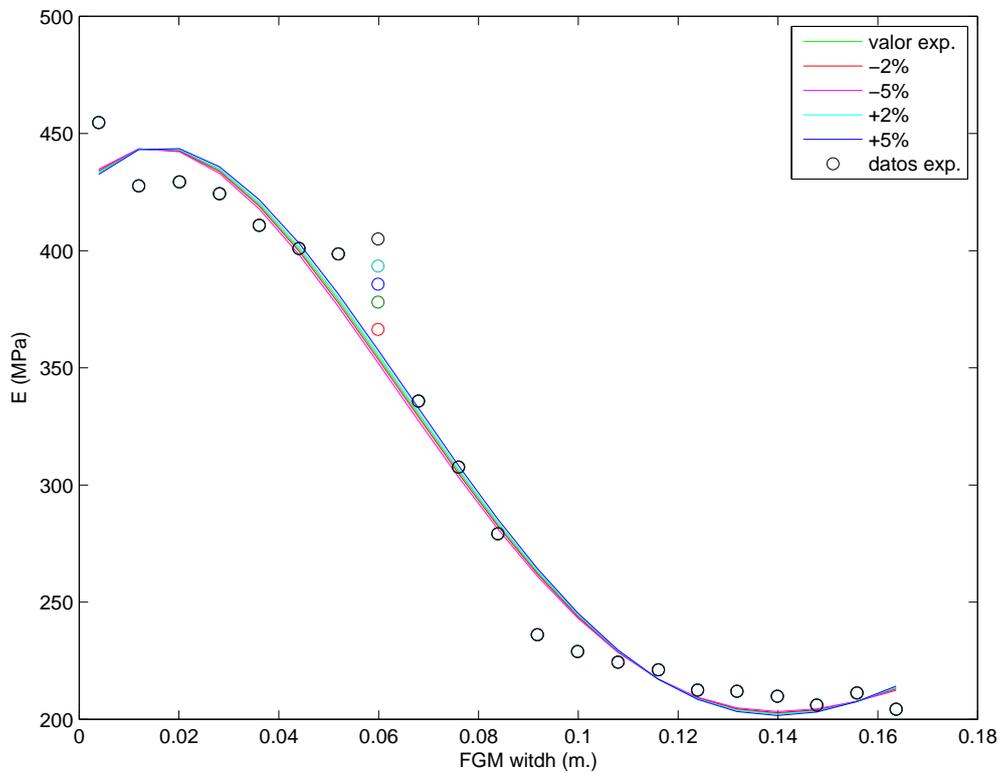


Figura 4.10: Ajuste polinomial para los puntos de ensayo considerados en el análisis de sensibilidad - FGM3

Al igual que sucede en los casos anteriores, la Fig. 4.10 no muestra grandes diferencias entre las aproximaciones consideradas. Se estudia entonces la sensibilidad de los parámetros de fractura para cada una de ellas a partir del MEF. Los resultados se muestran en el Cuadro 4.11.

Punto de ensayo	K_I (%)	K_{II} (%)	T (%)
-5 %	0.902 (0.66 %)	0.289 (0.69 %)	-0.766 (0.26 %)
-2 %	0.906 (0.22 %)	0.290 (0.34 %)	-0.767 (0.13 %)
Dato exp.	0.908	0.291	-0.768
+2 %	0.911 (0.33 %)	0.292 (0.34 %)	-0.768 (0 %)
+5 %	0.914 (0.66 %)	0.294 (1.03 %)	-0.769 (0.13 %)
Result. Exp.	0.969	0.224	-0.930

Cuadro 4.11: Resultados numéricos de los parámetros de fractura para los distintos puntos de ensayo considerados. Valores de los FITs en $MPa m^{0,5}$ y del T -stress en MPa . Ajuste polinomial - FGM3

De nuevo, aunque no se aprecian grandes disimilitudes entre las aproximaciones (ver Fig. 4.10), el Cuadro 4.11 muestra sensibilidad de los parámetros de fractura ante los diferentes ajustes. La misma es relativamente menos relevante para el término no singular del T -stress, siendo ya considerable en los dos FITs.

Teniendo en consideración los resultados extraídos, tanto a partir de la comparativa de los ajustes lineales como de los ajustes polinomiales, se puede concluir que, para la configuración del tercer espécimen de FGM, existe una sensibilidad manifiesta en todos los parámetros de fractura ante las ligeras variaciones del valor del dato experimental más próximo a la grieta.

Habiendo, pues, estudiado la sensibilidad de los parámetros de fractura ante pequeñas modificaciones del valor del dato experimental que caracteriza las propiedades mecánicas locales en el entorno de la punta de la grieta para las geometrías características del modo mixto de fractura en FGMs, se extraen dos claras conclusiones. La primera es que existe una sensibilidad significativa ante variaciones reducidas del valor de ese dato particular, es decir, que el valor que adopta en la aproximación el punto que está más próximo a la punta de la grieta juega un papel fundamental en la simulación

del comportamiento a fractura de un FGM. Y la segunda conclusión, que tiene una estrecha relación con la primera, es la trascendental relevancia de elegir un ajuste que aproxime de la manera más precisa posible el dato experimental que caracteriza las propiedades elásticas en el entorno de la fisura. Este criterio debe primar sobre los demás a la hora de realizar un ajuste numérico de una toma de datos experimental. La influencia de pequeñas variaciones en la aproximación de la variación gradual de las propiedades que se pueden dar en el entorno de la fisura en base a los diferentes ajustes considerados se analiza en el siguiente paso del estudio de sensibilidad.

4.4. Estudio de sensibilidad para cambios en la pendiente de la función del ajuste

En el primer paso del estudio de sensibilidad, que sirvió de motivación para el mismo, se podía observar cómo los parámetros de fractura modificaban notoriamente sus valores al establecer la comparativa entre un ajuste mediante un polinomio de cuarto orden y un ajuste lineal que representa exactamente los valores de los datos experimentales recogidos. La segunda parte del estudio aseveró la relevancia sobre la caracterización numérica del comportamiento a fractura en un FGM de aproximar correctamente las propiedades elásticas en el entorno de la grieta. Esta segunda parte certificaba la importancia de elegir un ajuste numérico de los datos experimentales en función de su precisión en la aproximación del punto que está más próximo al extremo de la fisura.

Sin embargo, es necesario evaluar si para simular con exactitud el proceso de fractura de un espécimen FGM es suficiente con ajustar con precisión el dato que caracteriza las propiedades mecánicas locales en la punta de la grieta o si también es preciso estimar y reproducir de manera rigurosa la curva que describe la variación gradual de las propiedades en la zona dominada por K .

Con este objetivo se plantea la tercera y última parte del estudio, donde la sensibilidad de los parámetros de fractura es evaluada ante ligeras variaciones de la inclinación de la pendiente de los ajustes considerados en el entorno de la grieta.

Para un material homogéneo e isótropo, el factor de intensidad de tensiones K está relacionado con la grieta a partir de la siguiente expresión [99]:

$$K_{(I,II,III)} = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (4.1)$$

Donde σ es la tensión característica, a es la dimensión característica de la grieta e Y es una constante adimensional que depende de la geometría y del modo de carga. Numerosos estudios han sido destinados a obtener las soluciones analíticas de los FITs para una gran variedad de configuraciones y varios manuales han sido publicados exclusivamente para agrupar las mismas [100, 101].

Aunque se han obtenido algunas expresiones analíticas de los FITs en FGMs, estas se han limitado a dominios infinitos o semi-infinitos y casos simples de carga [53, 55]. Eischen [15] demostró que, en los FGMs, los FITs no solo dependen de la geometría del espécimen y la carga a la que está sometido, sino también de la variación de propiedades del material. Así mismo, Paulino y Kim [102] evaluaron la influencia de la variación de propiedades del material sobre el término no singular del T -stress. Todos ellos coinciden en la existencia de un parámetro adimensional que caracteriza la no homogeneidad del material y que está directamente relacionado con el cálculo de los FITs y el T -stress, cuyos valores generalmente se incrementan a la par que la magnitud del mismo. Esta dependencia de la variación de las propiedades elásticas del material por parte de los parámetros de fractura junto con la ausencia de soluciones analíticas para las geometrías consideradas impide

realizar una comparación directa de la sensibilidad de los cálculos obtenidos en función de la configuración analizada.

Además, el hecho de que los parámetros de fractura en FGMs se vean significativamente afectados por el coeficiente de no homogeneidad mencionado parece traer consigo implicaciones importantes en el ajuste numérico de la variación de las propiedades mecánicas del material. Y es que todo indica que la función del ajuste no sólo debe aproximar con la mayor precisión posible el dato experimental que caracteriza el valor de las propiedades mecánicas en la punta de la grieta, tal y como se ha visto en las secciones anteriores, sino que también debe intentar reproducir de la forma más exacta la variación gradual de las mismas. Esto significa que, sin perjuicio del resto de consideraciones expuestas en este capítulo, el ajuste numérico más apropiado para aproximar la variación gradual de las propiedades mecánicas en un proceso de fractura en FGMs será aquel cuya inclinación de la pendiente de la función de aproximación en la vecindad de la fisura sea lo más similar posible a la descrita por el gradiente del material.

Para evaluar la relevancia de la inclinación de la pendiente de la función del ajuste de los datos experimentales más próximos a la grieta sobre los resultados obtenidos en un estudio de fractura en FGMs, es necesario realizar un estudio de sensibilidad de los parámetros de fractura ante diversos ajustes, diferentes entre sí, pero que aproximen con exactitud el dato experimental que caracteriza las propiedades mecánicas en la punta de la fisura. De manera que sus diferentes funciones polinomiales contienen el dato experimental mencionado y, así, las propiedades locales en la punta de la grieta son las mismas para todos los ajustes. Y serán las diferencias de orden entre los ajustes seleccionados las que provocarán disimilitudes en la inclinación de la pendiente de la aproximación en las proximidades de dicho punto característico.

De nuevo, el modelo numérico desarrollado a partir del ensayo experimental de Abanto-Bueno y Lambros [81] es especialmente apropiado para

analizar la sensibilidad de los parámetros de fractura ante las disimilitudes en las pendientes de los ajustes. Y es que, aunque la variación gradual de las propiedades ha demostrado por sí misma tener un efecto notable sobre los FITs y el T -stress en los trabajos analíticos realizados [15, 53, 55, 102], todos ellos han considerado una variación exponencial de las propiedades elásticas del material, y por tanto es preciso examinar su influencia en una situación real, donde la variación de las propiedades se produzca de forma más suave. Se realiza por tanto el análisis de sensibilidad para las tres configuraciones de FGMs consideradas hasta el momento.

4.4.1. Caso I - FGM1

En el primer espécimen de FGM considerado se observa que el dato experimental que está situado en la séptima posición del eje de abscisas (ver Fig. 3.1) caracteriza las propiedades mecánicas locales en la punta de la grieta. Y, por tanto, las funciones de las aproximaciones polinomiales consideradas deben de contener a dicho punto para que el valor del módulo de Young en el extremo de la fisura sea el mismo para todos los ajustes.

Como se menciona en el segundo apartado de este capítulo, tanto para el primer espécimen de FGM considerado como para el resto, se evaluaron numerosas aproximaciones numéricas de los datos experimentales mediante el ajuste por mínimos cuadrados para polinomios de distintos órdenes, hasta concluir que el polinomio de cuarto grado era el que mejor aproximaba de forma general la variación de propiedades del material. Se extrae entonces de dicho análisis el orden de los polinomios que mejor puedan satisfacer la consideración sopesada en esta parte del estudio de sensibilidad: la existencia de disimilitudes entre las pendientes de las funciones de aproximación en la vecindad de la fisura. Para este primer caso los polinomios más representativos son de 3er, 4º y 9º grado.

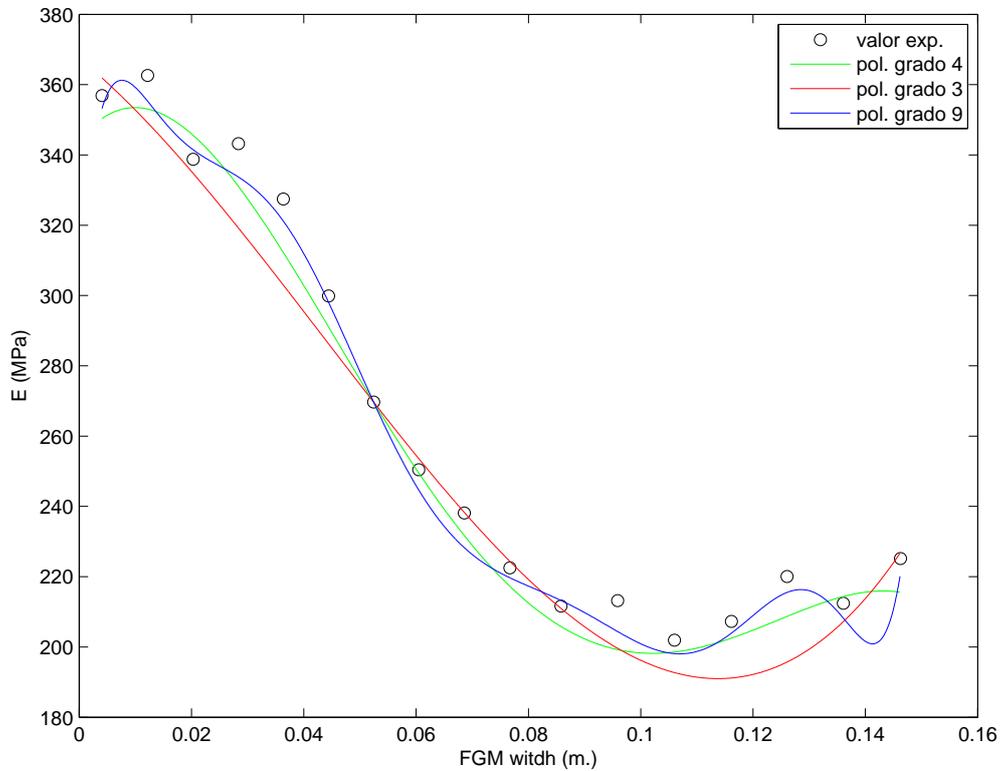


Figura 4.11: Ajustes polinomiales considerados por las diferencias existentes entre las inclinaciones de las pendientes de sus funciones en la proximidad de la grieta - FGM1

Se representan gráficamente en la Fig. 4.11 los ajustes polinomiales considerados y en la Fig. 4.12 se muestra el detalle de los ajustes en el entorno del dato característico. En ambas se aprecia como todas las funciones de ajuste contienen el dato experimental que caracteriza las propiedades mecánicas locales en la punta de la grieta y de igual manera se observan las diferencias entre la inclinación de las pendientes de las funciones de aproximación en la vecindad de la misma.

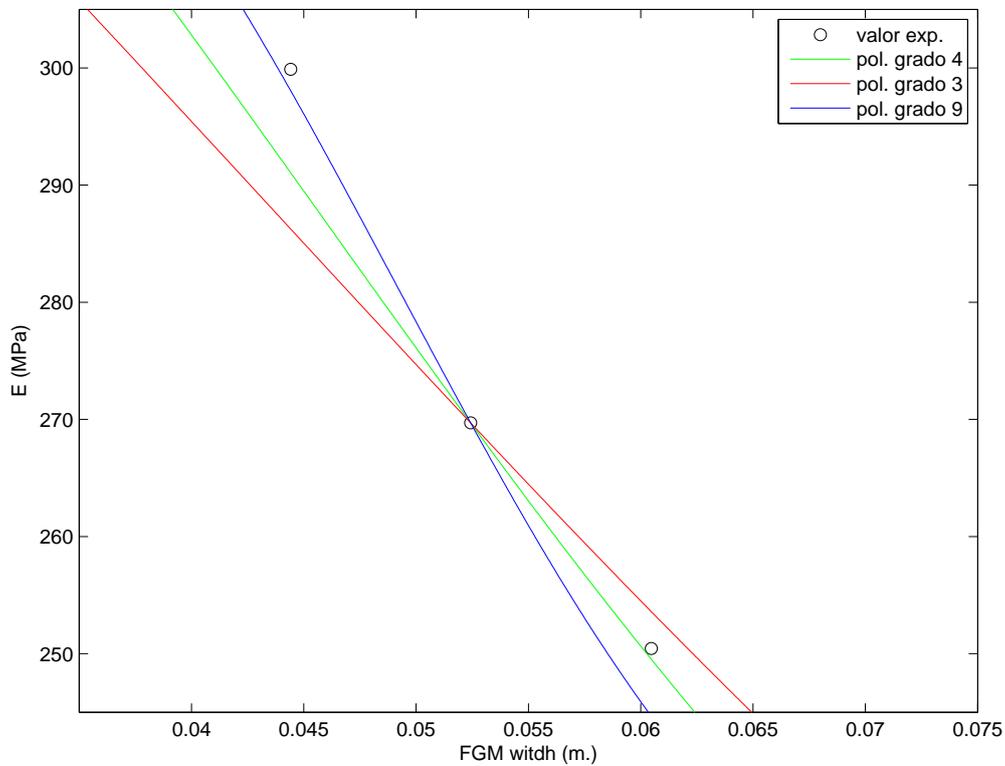


Figura 4.12: Detalle de las diferencias entre las inclinaciones de las pendientes de los ajustes considerados - FGM1

Se realiza el cálculo de los parámetros de fractura por medio del MEF para cada una de las aproximaciones consideradas. Los resultados se muestran en el Cuadro 4.12. En él se observa que existe una sensibilidad notoria de todos los parámetros de fractura ante las disimilitudes en la inclinación de la pendiente de las aproximaciones, pese a que todas ellas reproducen las mismas propiedades mecánicas locales en el extremo de la fisura. En este primer espécimen, esta sensibilidad debida únicamente al gradiente de las propiedades es especialmente significativa para los términos de K_I y el T -stress y tiene un efecto menor sobre el segundo FIT.

Ajuste considerado	$K_I(MPa m^{0,5})$	$K_{II}(MPa m^{0,5})$	$T(MPa)$
Pol. grado 3	0.588	-0.016	-1.511
Pol. grado 4	0.590	-0.018	-1.501
Pol. grado 9	0.597	-0.018	-1.509
Result. Exp.	0.554	0.039	-4.272

Cuadro 4.12: Resultados numéricos de los parámetros de fractura para los distintos ajustes considerados - FGM1

4.4.2. Caso II - FGM2

Como se puede apreciar en la Fig. 3.2, el dato experimental que caracteriza las propiedades elásticas locales en el extremo de la fisura para este segundo espécimen de FGM se corresponde con un valor en el eje de abscisas de 43.58 mm. y un módulo de Young de 371.3171 MPa.

Del estudio de los diferentes ajustes se desprende que los más propicios para el estudio considerado se corresponden con las funciones polinomiales de 3er, 5º y 9º grado. En la Fig. 4.13 se muestran los datos experimentales a aproximar y los tres ajustes considerados.

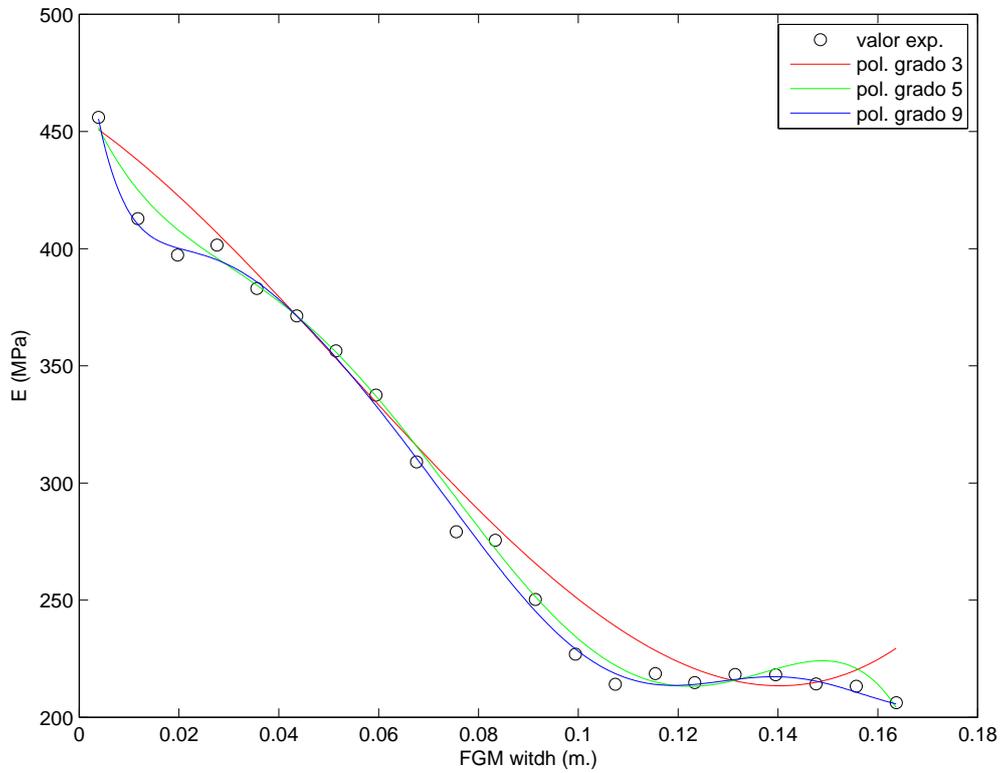


Figura 4.13: Ajustes polinomiales considerados por las diferencias existentes entre las inclinaciones de las pendientes de sus funciones en la proximidad de la grieta - FGM2

El detalle de las inmediaciones del dato que caracteriza las propiedades mecánicas locales en la punta de la grieta se observa en la Fig. 4.14. De nuevo se aprecia la diferencia existente entre las inclinaciones de las pendientes de las funciones de aproximación y cómo todas ellas contienen al punto característico.

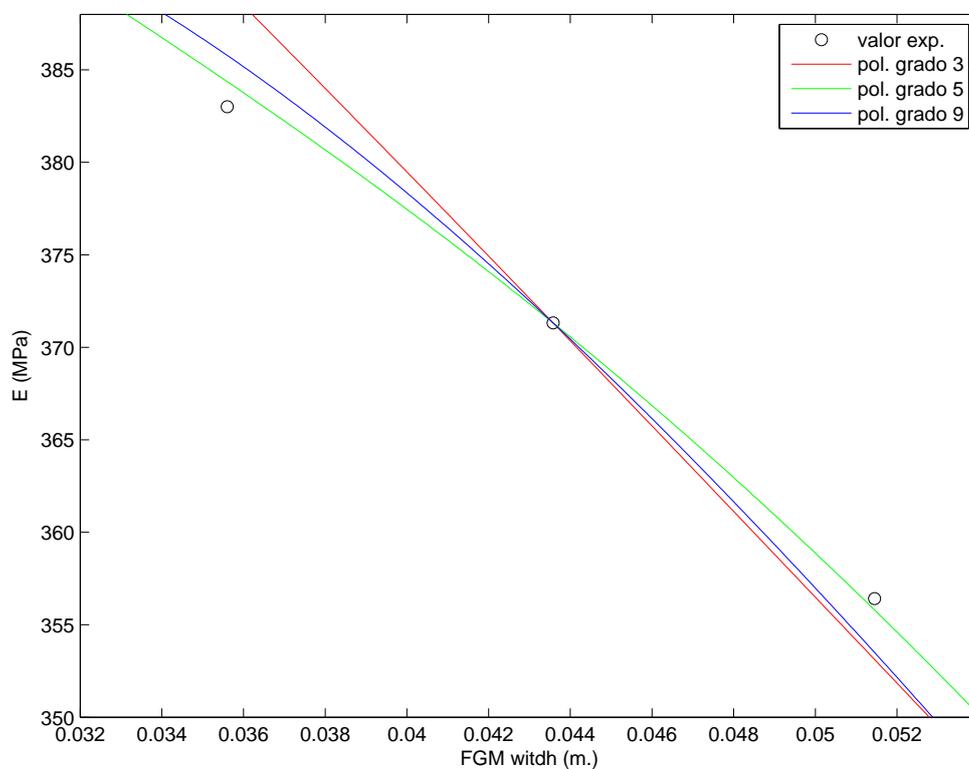


Figura 4.14: Detalle de las diferencias entre las inclinaciones de las pendientes de los ajustes considerados - FGM2

Se calculan numéricamente los valores de los parámetros de fractura en función del ajuste considerado, mostrándose los resultados obtenidos en el Cuadro 4.13. Se aprecia en el mismo que los parámetros de fractura son sensibles ante las diferencias existentes entre las inclinaciones de las pendientes del ajuste. A pesar de que las funciones de aproximación reproducen las mismas propiedades locales en el extremo de la fisura, el gradiente del material produce una sensibilidad por si mismo, para la configuración analizada en este segundo espécimen, relevante en el primer FIT y en el término no singular del T -stress, siendo esta despreciable en el segundo FIT.

Ajuste considerado	$K_I(MPa m^{0,5})$	$K_{II}(MPa m^{0,5})$	$T(MPa)$
Pol. grado 3	0.750	0.254	-0.480
Pol. grado 5	0.746	0.254	-0.477
Pol. grado 9	0.747	0.254	-0.477
Result. Exp.	0.755	0.179	-0.069

Cuadro 4.13: Resultados numéricos de los parámetros de fractura para los distintos ajustes considerados - FGM2

Como se puede apreciar, la sensibilidad de los parámetros de fractura es inferior a la registrada en el primer espécimen de FGM evaluado (ver Cuadro 4.12). Este hecho está relacionado con las diferencias existentes entre las configuraciones examinadas, pero es obvio que también influye la magnitud de las disimilitudes entre las inclinaciones de las pendientes de las funciones polinómicas de los ajustes considerados. Así, en el primer espécimen (ver Fig. 4.12) estas son mayores que en esta segunda configuración estudiada. Hay que tener en cuenta que se aproximan la totalidad de los datos experimentales registrados y por tanto, grandes diferencias en el orden de los polinomios de los ajustes no siempre traen consigo grandes disimilitudes en las inclinaciones de las pendientes de los mismos en el entorno de un dato característico.

4.4.3. Caso III - FGM3

Si se examina con detalle el tercer y último espécimen de FGM evaluado (ver Fig. 3.3), se aprecia que, a diferencia de los otros dos, ninguno de los datos experimentales registrados caracteriza con precisión las propiedades mecánicas locales en la punta de la grieta. Así, la misma se encuentra situada exactamente a medio camino entre los puntos 7° y el 8° según el eje de abscisas. Hay que tener en cuenta que, aunque se desconoce la curva que describe la variación entre los dos puntos mencionados, en distancias tan pequeñas la asunción de una variación lineal entre los mismos no provoca pérdidas de

precisión. En base a ella, se considera entonces un punto intermedio entre los mismos, este sí caracterizaría las propiedades elásticas locales en el extremo de la fisura y se corresponde con un valor del módulo de Young de 392.1568 MPa.

Los ajustes elegidos para aproximar los datos experimentales, incluyendo el nuevo punto añadido, se corresponden con funciones polinomiales de 3°, 5° y 9° grado respectivamente. Las aproximaciones consideradas y los datos experimentales a ajustar se pueden observar en la Fig. 4.15, mientras que el detalle del entorno de la fisura se muestra en la Fig. 4.16.

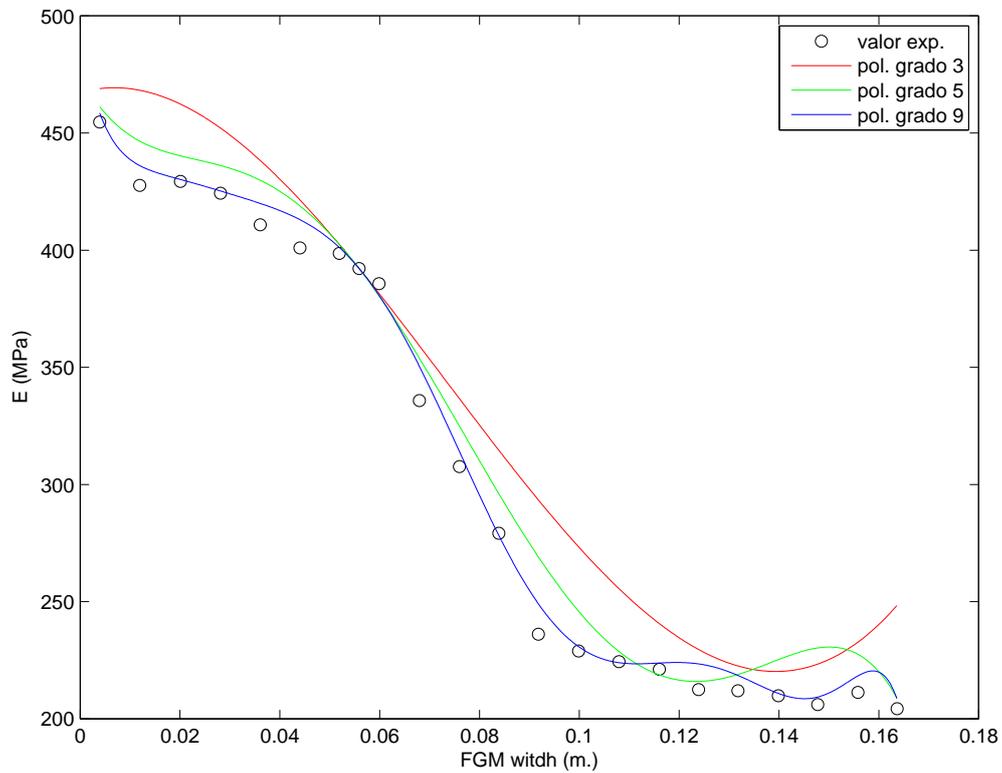


Figura 4.15: Ajustes polinomiales considerados por las diferencias existentes entre las inclinaciones de las pendientes de sus funciones en la proximidad de la grieta - FGM3

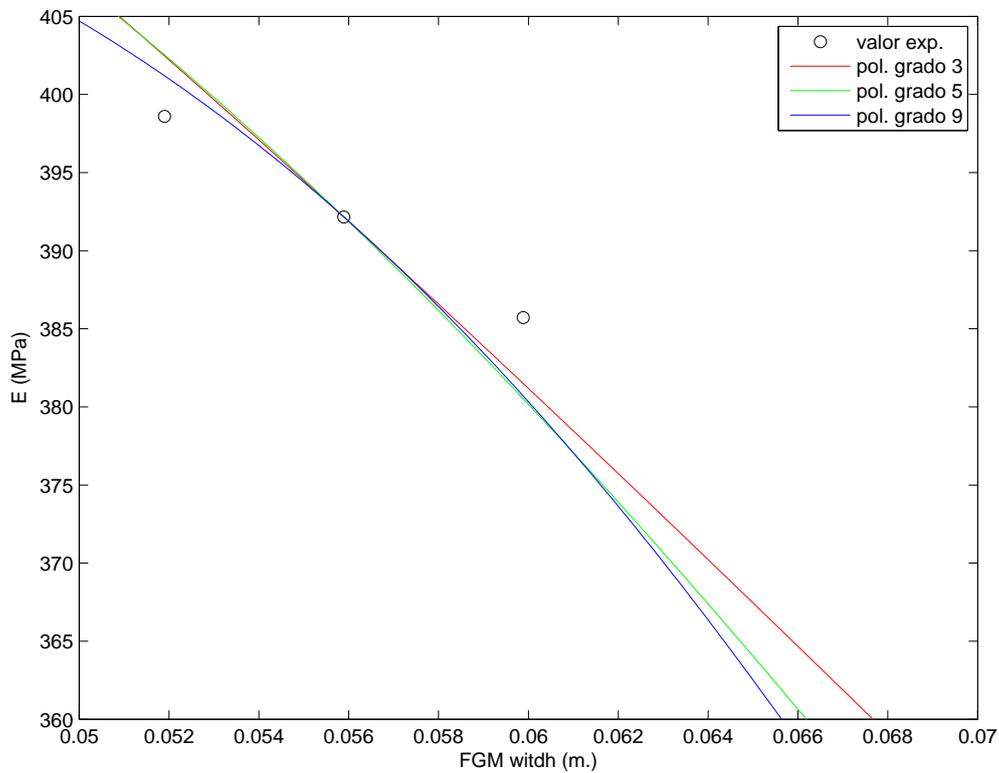


Figura 4.16: Detalle de las diferencias entre las inclinaciones de las pendientes de los ajustes considerados - FGM3

De nuevo se realiza el cálculo numérico por el MEF y los valores obtenidos para los parámetros de fractura en función del ajuste considerado se muestran en el Cuadro 4.14. En él se aprecia una sensibilidad notoria en todos los términos calculados. A pesar de que las diferencias entre las pendientes de las funciones de los ajustes no son especialmente significativas (ver Fig. 4.16) y de que el valor local del módulo de Young en el extremo de la fisura es el mismo para todas ellas, los cambios en los valores de los parámetros de fractura son relevantes en todos los términos.

Ajuste considerado	$K_I(MPa m^{0,5})$	$K_{II}(MPa m^{0,5})$	$T(MPa)$
Pol. grado 3	0.965	0.315	-0.766
Pol. grado 5	0.959	0.312	-0.770
Pol. grado 9	0.954	0.308	-0.768
Result. Exp.	0.969	0.224	-0.930

Cuadro 4.14: Resultados numéricos de los parámetros de fractura para los distintos ajustes considerados - FGM3

El análisis de sensibilidad de los parámetros de fractura ante las diferencias en la pendiente de las funciones de aproximación para las tres configuraciones examinadas confirma que, en FGMs, los FITs y el T -stress no sólo dependen de la geometría del espécimen, la carga a la que está sometido y los valores locales de las propiedades elásticas en la punta de la grieta, sino también de la variación de propiedades del material. Y la influencia de ésta es significativa, incluso en un caso real, donde la variación de las propiedades elásticas del material se produce de forma más gradual que en los estudios teóricos realizados. Este hecho confiere especial relevancia a la inclinación de la pendiente de la función ajuste, que debe reproducir de la manera más precisa posible la descrita por el gradiente del material. Como se ha podido comprobar, ligeros cambios en la misma traen consigo diferencias significativas en los valores de los parámetros de fractura.

4.5. Discusión y conclusiones

El uso cada vez más extendido de los FGMs en la industria ha traído consigo la necesidad de realizar simulaciones numéricas de ensayos experimentales o situaciones reales de servicio. Con el objetivo de aumentar la precisión de estas simulaciones numéricas es ineludible abordar los aspectos problemáticos que plantean por sí mismos los ensayos computacionales en el

campo de la mecánica de la fractura en los FGMs.

Uno de estos aspectos, que no ha recibido a día de hoy la atención de la comunidad investigadora, es la relevancia de escoger un ajuste numérico apropiado para la variación de las propiedades del material, caracterizada por los datos recogidos experimentalmente. Hasta la fecha, las funciones polinomiales elegidas para ajustar la variación de las propiedades del material no han tenido en cuenta el ajuste en el entorno de la punta de la grieta, buscando una aproximación rigurosa más general.

Sin embargo, dado el hecho de que las propiedades mecánicas en el entorno de la grieta son las que caracterizan los valores de los parámetros que describen el comportamiento a fractura en los FGMs, todo apunta a la necesidad de conceder una mayor relevancia a la precisión del ajuste en esa área. Mediante un estudio de sensibilidad se ha procedido a evaluar en qué medida se ven afectados los parámetros de fractura en un FGM al modificar ligeramente la aproximación realizada en el entorno de la fisura.

En una primera parte se procedió a establecer una comparativa entre la aproximación polinomial considerada hasta el momento y un ajuste que define exactamente los puntos experimentales y los aúna mediante funciones lineales. Los resultados obtenidos a partir de esta última aproximación ponen de relieve la importancia de aproximar de la forma más rigurosa posible el dato experimental recogido más próximo a la fisura. Además, invitan a concluir que los parámetros de fractura son muy sensibles ante ligeras modificaciones de los valores locales de las propiedades en la punta de la grieta. Esta segunda conclusión, que otorga aún más relieve a la primera, es analizada en la segunda parte del estudio.

Así, en la segunda parte de este capítulo se analiza la sensibilidad de los parámetros de fractura para ligeras variaciones de las propiedades elásticas en la punta de la grieta. Estas variaciones se introducen modificando reducidamente (2-5 %) el valor del dato experimental más próximo al extremo de la

fisura. Los resultados obtenidos permiten afirmar que existe una sensibilidad significativa de todos los parámetros de fractura ante los pequeños cambios introducidos.

Sin embargo, la correcta aproximación del dato que caracteriza las propiedades mecánicas locales en la punta de la grieta no es el único criterio que debe ser considerado si se quiere realizar un ajuste preciso. Y es que en FGMs, a diferencia de lo que sucede en materiales homogéneos, los FITs y el T -stress dependen no sólo de la geometría del espécimen y la carga a la que está sometido, sino también de la variación de las propiedades del material. En consecuencia, la función del ajuste no sólo debe aproximar con la mayor precisión posible el dato experimental que caracteriza el valor de las propiedades mecánicas en el extremo de la fisura, sino que también debe intentar reproducir con exactitud la variación gradual de las mismas. Evaluar la sensibilidad de los parámetros de fractura ante distintas funciones de ajuste, que se diferencian únicamente entre sí en la aproximación de la variación de las propiedades en el entorno de la grieta, es el objetivo de la tercera y última parte del estudio de sensibilidad.

Así, los ajustes considerados en la última parte del estudio de sensibilidad son funciones polinomiales de distinto orden que contienen al dato experimental que caracteriza las propiedades mecánicas locales en la punta de la grieta y que se diferencian entre sí en la inclinación de la pendiente en el entorno de la fisura. A pesar de las ligeras disimilitudes existentes entre las inclinaciones de las pendientes de las funciones de los ajustes considerados, los resultados revelan una notable sensibilidad de los FITs y el término no singular del T -stress en todas las geometrías evaluadas. Estas diferencias en los resultados ratifican la influencia de la variación de las propiedades por sí misma en los parámetros de fractura, incluso cuando esta no es tan pronunciada como en los estudios analíticos realizados.

Todos los estudios mencionados se han llevado a cabo para las tres geometrías características de la fractura en modo mixto de FGMs. Así pues,

considerando el dominio de trabajo señalado, se alcanzan las siguientes conclusiones:

- Los parámetros que caracterizan el proceso de fractura en un FGM son muy sensibles a pequeñas variaciones en la aproximación de los valores de las propiedades mecánicas locales en la punta de la grieta. Modificaciones reducidas del dato experimental que caracteriza el entorno de la grieta han demostrado tener un efecto notable sobre los mismos.
- La variación gradual de las propiedades del material tiene influencia por sí misma en los valores de los parámetros de fractura calculados. Se aprecia una notable sensibilidad en los FITs y el término no singular del T -stress ante ligeras disimilitudes entre las inclinaciones de las pendientes de diferentes funciones de ajuste, conteniendo todas ellas el dato experimental que caracteriza las propiedades mecánicas locales en la punta de la grieta.
- El criterio comúnmente empleado consistente en aproximar mediante una función polinomial la variación de propiedades del material de manera general no es apropiado para un problema de fractura en FGMs. En el ajuste de la variación de las propiedades elásticas del material deben primar una correcta aproximación del dato experimental que caracteriza las propiedades mecánicas locales en la punta de la grieta y una reproducción lo más precisa posible de la variación gradual de las propiedades en el entorno de la misma.

La consideración de estas conclusiones durante el proceso numérico de simulación de un ensayo experimental o una situación de servicio permitirá reproducir las condiciones reales de manera rigurosa y calcular resultados precisos que ayuden a comprender el problema de fractura analizado.

Capítulo 5

Influencia del coeficiente de Poisson

5.1. Introducción

En materiales homogéneos, el coeficiente de Poisson (ν) es una constante elástica del material que proporciona una medida del estrechamiento de sección de un prisma de material elástico, lineal e isótropo cuando se estira longitudinalmente y se adelgaza en las direcciones perpendiculares a la de estiramiento [103]. En los FGMs, la variación gradual de su composición trae consigo una variación continuada del coeficiente de Poisson, al igual que sucede con el resto de propiedades del material. Sin embargo, a diferencia de lo que sucede con el módulo de Young, el efecto de la variación del coeficiente de Poisson en los problemas de fractura en FGMs ha recibido escasa atención por parte de la comunidad investigadora.

Los distintos trabajos científicos realizados en los años 70 con el objetivo de estudiar el campo asintótico de la grieta en materiales no homogéneos, que ya han sido desglosados en el capítulo correspondiente a la revisión bibliográfica, concluyeron que el criterio de la singularidad de la raíz cuadrada de la tensión y la deformación en la punta de la grieta empleado en materiales

homogéneos es también válido para el caso de los FGMs y que los primeros términos del campos de tensiones y desplazamientos no se ven afectados por la no homogeneidad del material.

El más completo y destacado de estos estudios es sin duda el realizado por Eischen [15]. En él, con el objetivo de reducir la carga algebraica del mismo, se asume que el coeficiente de Poisson es constante y se caracteriza la variación de propiedades del material mediante una variación exponencial del módulo de Young. Sin embargo, Eischen [15] afirma que esta simplificación no afecta en absoluto a las conclusiones finales de su trabajo, y que, si en el mismo se hubiera considerado la variación del coeficiente de Poisson, el resultado alcanzado sería el mismo, con la salvedad de la inclusión de las siguientes sustituciones en las ecuaciones (2.2) y (2.3): $\mu_0 = E_0/2(1 + \nu_0)$ y $\kappa = \kappa_0$. Los primeros términos de las expresiones que definen el campo de desplazamientos en el plano de un material no homogéneo considerando la variación del coeficiente de Poisson serían por tanto:

$$u_x = \frac{K_I}{\frac{E_0}{2(1+\nu_0)}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_x^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\frac{E_0}{2(1+\nu_0)}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_x^{II}(\theta) + u_{x0} - \omega_0 r \sin(\theta) \\ + \frac{r}{\frac{E_0}{2(1+\nu_0)}} \{C_2(\kappa_0 + 1) \cos(\theta) + D_2(\kappa_0 + 1) \sin(\theta)\} + O(r^{3/2}) + \dots, \quad (5.1)$$

$$u_y = \frac{K_I}{\frac{E_0}{2(1+\nu_0)}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_y^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\frac{E_0}{2(1+\nu_0)}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_y^{II}(\theta) + u_{y0} + \omega_0 r \cos(\theta) \\ + \frac{r}{\frac{E_0}{2(1+\nu_0)}} \{C_2(\kappa_0 - 3) \sin(\theta) - D_2(\kappa_0 + 1) \cos(\theta)\} + O(r^{3/2}) + \dots, \quad (5.2)$$

Se observa de nuevo, asociada a las dos primeras potencias de r , la expresión característica para un sólido homogéneo. De manera que la variación del coeficiente de Poisson, al igual que sucedía con la variación del módulo elástico, no afecta a los dos primeros términos de los campos de tensiones y desplazamientos. Adicionalmente, Eischen [15] concluye que, para materiales

FGM, los parámetros de fractura K_I y K_{II} no sólo dependerán de la geometría del espécimen agrietado y la carga a la que está sometido el mismo, sino también de la variación de las propiedades del material.

Se puede afirmar entonces que el orden de la singularidad no se ve afectado por el gradiente del material, pero este sí afecta a los valores de los FITs. Con lo cual, el efecto de la variación de las propiedades del material se manifiesta en los FITs en el extremo de la grieta y en los términos de órdenes superiores de la expresión asintótica. Una buena reseña de los trabajos relacionados ha sido escrita por Erdogan [104]. Aunque se han obtenido algunas expresiones analíticas de los FITs en FGMs, estos se han limitado a dominios infinitos o semi-infinitos y casos simples de carga. Gu y Asaro [55] obtuvieron las expresiones analíticas para los FITs bajo modo mixto de carga suponiendo que la fisura está orientada perpendicularmente a la dirección del gradiente del material. El caso general de dirección del gradiente con respecto a la orientación de la grieta fue resuelto por Konda y Erdogan [53], aunque bajo la consideración de dominios infinitos. De manera que, el uso de métodos numéricos para el cálculo de los FITs en el modo mixto de fractura en FGMs es el proceder común más apropiado.

La metodología habitual en la inmensa mayoría de los artículos científicos publicados en el campo de la fractura en los FGMs consiste en despreciar el efecto de la variación del coeficiente de Poisson sobre los resultados, asumiendo por tanto un valor constante para el mismo en todo el espécimen analizado. Se justifica habitualmente esta simplificación citando el estudio que Delale y Erdogan [23] realizaron al respecto de la influencia de la variación del coeficiente de Poisson sobre los parámetros de fractura.

Sin embargo, las particularidades del trabajo de Delale y Erdogan [23] suponen una limitación fundamental que impide establecer conclusiones generales. En primer lugar, todo hace pensar que el efecto de la variación del coeficiente de Poisson sobre los parámetros de fractura depende en gran medida de la geometría considerada. Así, cuando la carga tensional esté aplicada

paralelamente a la dirección del gradiente del material, la parte más flexible del sólido sufrirá una contracción mayor que la parte más rígida. Este comportamiento afectaría a los campos de desplazamientos y tensiones de la grieta, caracterizados por los parámetros de fractura. Sin embargo, esta conducta no se producirá cuando la carga tensional esté aplicada en la dirección perpendicular al gradiente del material. Éste último caso se corresponde con el evaluado por Delale y Erdogan [23] y, por tanto, es la geometría menos sensible al cambio gradual del coeficiente de Poisson. Además, se aprecia sensibilidad en los valores de los FITs obtenidos por Delale y Erdogan [23] en todos los casos evaluados ante el cambio de valor del coeficiente de Poisson y, por consiguiente, considerar esta sensibilidad como poco significativa y despreciable se corresponde con un punto de vista muy subjetivo. En cualquier caso, las conclusiones subjetivas al respecto de la influencia de la variación del coeficiente de Poisson establecidas en el trabajo de Delale y Erdogan [23] están limitadas a la geometría examinada en el mismo.

De igual manera que existen muy pocos trabajos científicos en el campo de la fractura de los FGM que hayan considerado la variación del coeficiente de Poisson, escasean también los estudios dedicados a evaluar la influencia que esta variación tiene sobre los resultados numéricos obtenidos. Gu y Asaro [55] sí consideraron el cambio gradual del coeficiente de Poisson en su estudio, concluyendo que el orden de singularidad no se ve afectado por el gradiente del material, pero que este sí afecta a los FITs. Parameswaran y Shukla [105] registraron experimentalmente el valor del coeficiente de Poisson en los extremos de la lámina examinada, apreciando la variación del mismo. Jin y Noda [106] volvieron a demostrar que el criterio de la singularidad de la raíz cuadrada se mantiene en FGMs para una variación continua del módulo elástico y el coeficiente de Poisson. Chi y Chung [107] investigaron el comportamiento de placas FGM ante una carga transversal. En su trabajo, asumieron un coeficiente de Poisson constante con el objetivo de simplificar su desarrollo analítico y a posteriori evaluaron el efecto de la variación del coeficiente de Poisson para justificarlo. La variación se correspondía con una

función sigmoide, y mediante un cálculo de elementos finitos estudiaron su influencia sobre los desplazamientos, las tensiones y las deformaciones. De nuevo se aprecian diferencias destacadas entre los resultados, aunque los autores afirman subjetivamente que estas pueden ser despreciables. También Konda y Erdogan [53] evaluaron numéricamente la influencia de la variación del coeficiente de Poisson sobre los valores de los FITs. De nuevo analizan la geometría más desfavorable de cara a la influencia de la gradación del coeficiente de Poisson y una vez más se observan diferencias entre los resultados obtenidos para cada uno de los valores del coeficiente de Poisson considerados. Sin embargo, de manera subjetiva, los autores concluyen que la asunción de un coeficiente de Poisson constante no es una asunción excesivamente restrictiva.

El estudio más completo realizado hasta la fecha es obra de Paulino y Kim [102]. Analizaron el modo mixto de fractura de un FGM para la situación en la que la carga tensional es aplicada en la dirección paralela al gradiente del material y por medio de la II calcularon los FITs y el T-stress para dos geometrías distintas, considerando tanto diferentes valores del coeficiente de Poisson como una variación lineal de los valores del mismo. Concluyeron que el coeficiente de Poisson tiene una influencia significativa en los parámetros de fractura, que esta influencia es aun más significativa cuanto mayor es la no-homogeneidad del material y que, para la geometría en la que la carga está aplicada paralela a la dirección de variación de propiedades del material, no puede ser despreciado el efecto del coeficiente de Poisson.

Los resultados obtenidos por Paulino y Kim [102] no dejan lugar a dudas y la única objeción a su estudio es que éste analiza condiciones que difícilmente pueden darse en situaciones reales, puesto que Paulino y Kim [102] simulan numéricamente en su trabajo el caso de una grieta en un dominio semi-infinito. Así mismo, caracterizan la variación del módulo elástico mediante una función exponencial y una función tangente hiperbólica, que no suelen determinar la variación gradual de propiedades en los FGMs, espe-

cialmente la segunda de ellas, más propia de la interfaz entre dos materiales. Es entonces preciso comprobar si las conclusiones extraídas a partir de su trabajo se mantienen en situaciones reales de servicio o experimentales, donde la variación de las propiedades del material no sea tan pronunciada y los especímenes evaluados tengan dimensiones comunes.

5.2. Metodología: modelo numérico

El modelo numérico desarrollado en este trabajo, y que ha sido desglosado en el tercer capítulo de esta memoria, es muy apropiado para evaluar el efecto de la variación del coeficiente de Poisson sobre un caso real bajo el modo mixto de fractura. En primer lugar, porque las tres geometrías evaluadas, que son características del modo mixto de fractura en FGMs, se corresponden con las geometrías de interés desde el punto de vista del estudio del efecto de la gradación del coeficiente de Poisson. Así, el primer espécimen (FGM1) tiene la carga aplicada en la dirección de variación de propiedades del material y, con lo cual, es la geometría más sensible al cambio de valores del coeficiente de Poisson. En el segundo espécimen (FGM2) la carga tensional aplicada es perpendicular a la dirección de variación de propiedades del material y, por tanto, se trata del caso menos sensible a la gradación del coeficiente de Poisson. El tercer y último espécimen (FGM3) se corresponde con una situación intermedia, ya que la carga aplicada y la dirección de la variación de las propiedades forman un ángulo de 60 grados.

En segundo lugar, el modelo numérico es idóneo para valorar la influencia de la variación del coeficiente de Poisson en un caso real porque reproduce el ensayo experimental de Abanto-Bueno y Lambros [81]. Los autores del trabajo experimental, de acuerdo con el proceder común en la materia, asumieron que el coeficiente de Poisson es constante a lo largo de todo el espécimen y que este toma un valor de $\nu=0.45$. Sin embargo, en estudios relacionados [83] reconocen que no fueron capaces de extraer el valor del coeficiente de Poisson

del espécimen. Afirman que intentaron medir el coeficiente de Poisson de los distintos ejemplares por medio de bandas extensiométricas y un transformador diferencial de variable lineal durante los ensayos de tracción uniaxiales pero que, debido a la naturaleza de los especímenes de ECO, ambos métodos fueron infructuosos. Por ello [83] adoptan el valor del coeficiente de Poisson considerado en la literatura para un polietileno de baja intensidad (LDPE) [95]. Así mismo, reconocen que la radiación ultravioleta, a la que se ha sometido a los especímenes de ECO para degradar sus propiedades mecánicas, tiene un efecto desconocido sobre el coeficiente de Poisson [83].

En vista del desconocimiento existente al respecto del efecto que tiene la radiación UV sobre el coeficiente de Poisson, se adoptan, para el estudio de la influencia de su variación sobre los parámetros de fractura, valores que van desde 0.1 al 0.45 asumido por los autores del ensayo experimental [81]. Hay que tener en cuenta que la inmensa mayoría de los materiales que se pueden encontrar en la naturaleza se encuentran en un rango de valores del coeficiente de Poisson que va desde -1 a 0.5. Así mismo, teniendo en consideración que, mayoritariamente, los FGMs están compuestos de acero y un material cerámico, y de acuerdo a los valores que caracterizan sus propiedades elásticas (ver Fig. 5.1), estas se implementan en el modelo de forma que incremento gradual del módulo de Young trae consigo una caída progresiva del valor del coeficiente de Poisson.

Con el objetivo de evaluar el efecto que la variación del coeficiente de Poisson tiene sobre los cálculos numéricos de los parámetros de fractura, tanto en cada uno de los tres especímenes de FGMs como en el caso homogéneo, se establecen dos comparativas. De un lado, se comparan los resultados obtenidos para valores constantes del coeficiente de Poisson separados equitativamente entre sí dentro del abanico de valores considerado (0.1, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.45). Y por otro lado, se comparan los resultados obtenidos mediante la asunción de los autores del ensayo experimental ($\nu=0.45$) con una variación lineal del coeficiente de Poisson a lo largo del espécimen entre los valores extremos

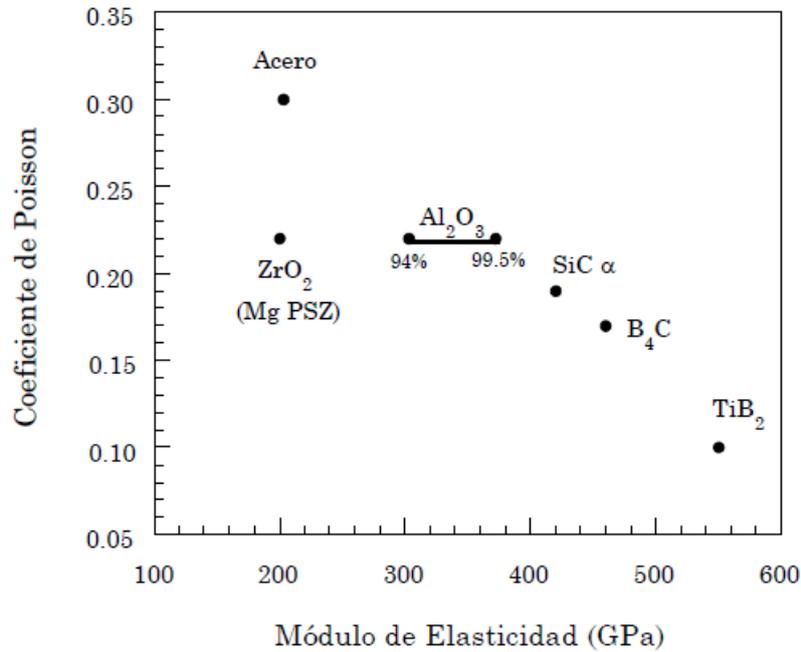


Figura 5.1: Comparativa de los valores del módulo elástico y del coeficiente de Poisson para materiales cerámicos y acero [108]

considerados (0.1 → 0.45).

El efecto de la variación del coeficiente de Poisson se estudia para los FITs y el término no singular del T -stress. Los parámetros de fractura se calculan mediante el software de elementos finitos ABAQUS [86]. Este, en condiciones de fractura en modo mixto, emplea el método de la II para calcular los términos de K_I , K_{II} [91] y el T -stress [92].

Es preciso mencionar que el ajuste polinomial mediante un polinomio de cuarto orden es el elegido para aproximar los datos experimentales en todos los cálculos del estudio correspondiente a este capítulo. El resto de particularidades computacionales de la simulación numérica se pueden encontrar en el tercer capítulo de esta memoria, el correspondiente a la metodología empleada.

5.3. Resultados

5.3.1. Caso Homogéneo

Como es sabido, en el caso de un espécimen homogéneo y para la geometría considerada en este trabajo, las constantes elásticas del material no influyen en los FITs ni en el término no singular del T -stress. De manera que, ante cualquier modificación del valor del coeficiente de Poisson, los resultados serán los mismos que los que ya se han obtenido en el capítulo correspondiente al desarrollo del modelo numérico (ver Cuadro 3.2). Este hecho es ratificado numéricamente.

5.3.2. Caso I - FGM1

Una vez comprobado que la variación del coeficiente de Poisson no tiene ningún efecto sobre los parámetros de fractura en un material homogéneo, llega el turno de evaluar el comportamiento de los especímenes de FGMs. En el primero de ellos (FGM1) la carga tensional está aplicada paralelamente a la dirección de variación del material (ver Fig. 3.1) y, por tanto, en base a lo razonado anteriormente, se corresponde con la geometría más sensible a los cambios en el coeficiente de Poisson.

En primer lugar, se evalúa la influencia sobre los parámetros de fractura de diferentes valores del coeficiente de Poisson, manteniendo este constante en todo el espécimen, de acuerdo a lo especificado en la segunda parte de este capítulo. Los resultados obtenidos numéricamente para los FITs y el T -stress se muestran en el Cuadro 5.1.

Un vistazo rápido al Cuadro 5.1 refleja una evidente sensibilidad de todos los parámetros de fractura ante los cambios de valor del coeficiente de Poisson. Estos son significativos para todos los términos, y las diferencias son

Coef. de Poisson	$K_I(MPa m^{0.5})$	$K_{II}(MPa m^{0.5})$	$T(MPa)$
$\nu=0.1$	0.605	-0.023	-1.551
$\nu=0.2$	0.605	-0.021	-1.548
$\nu=0.3$	0.604	-0.020	-1.544
$\nu=0.4$	0.604	-0.018	-1.540
$\nu=0.45$	0.603	-0.017	-1.539

Cuadro 5.1: Resultados numéricos de los parámetros de fractura para los distintos valores del coeficiente de Poisson considerados. FGM1

especialmente notables en el caso del T -stress.

Los parámetros de fractura han demostrado ser tangiblemente sensibles a los cambios de valor del coeficiente de Poisson. El siguiente paso se corresponde entonces con la evaluación del comportamiento de los FITs y el T -stress ante una variación lineal del coeficiente de Poisson con el objetivo establecer a continuación una comparativa con los cálculos obtenidos a raíz de la consideración de un coeficiente de Poisson constante de valor $\nu=0.45$, de acuerdo al proceder mayoritario en los trabajos de fractura en FGMs, que coincide con el criterio empleado por los autores del ensayo experimental [81]. Estos cálculos y su correspondiente comparación se pueden observar en el Cuadro 5.2.

Coef. de Poisson	$K_I(MPa m^{0.5})$	$K_{II}(MPa m^{0.5})$	$T(MPa)$
$\nu=0.1 \rightarrow 0.45$	0.602	-0.011	-1.525
$\nu=0.45$	0.603	-0.017	-1.539

Cuadro 5.2: Resultados numéricos de los parámetros de fractura para la variación lineal del coef. de Poisson considerada. FGM1

Un primer vistazo al Cuadro 5.2 ratifica las conclusiones extraídas. Y es que la variación lineal del coeficiente de Poisson trae consigo cambios

significativos en los valores de los parámetros de fractura evaluados. Estos cambios son especialmente significativos para el segundo FIT y el término no singular del T -stress.

Si se comparan los resultados obtenidos para diferentes valores constantes del coeficiente de Poisson (Cuadro 5.1) y los calculados considerando una variación lineal del mismo (Cuadro 5.2), se aprecia que para la variación lineal del coeficiente de Poisson los parámetros de fractura adoptan cifras que no se encuentran en el rango de valores del primer caso. Este hecho depende de la geometría examinada y es consecuencia del efecto que la variación del coeficiente de Poisson tiene sobre los FITs y el T -stress, más allá de los cambios en los valores de las propiedades elásticas locales en la punta de la grieta. Se puede apreciar también en los resultados de Paulino y Kim [102] y en el resto de configuraciones evaluadas en este estudio.

5.3.3. Caso II - FGM2

El segundo espécimen de FGM examinado se corresponde con la geometría donde menor debería de ser el efecto de la variación del coeficiente de Poisson, pues la dirección de la carga aplicada es perpendicular al gradiente del material (ver Fig. 3.2).

De nuevo se estudia la influencia en los parámetros de fractura de los diferentes valores adoptados por el coeficiente de Poisson, manteniendo este constante en todo el espécimen. Los cálculos obtenidos se muestran en el Cuadro 5.3.

Como era de esperar y se puede observar en el Cuadro 5.3, los FITs no son sensibles a los cambios de valor del coeficiente de Poisson. Sin embargo, sí se aprecia de forma notable el efecto de la variación del mismo en el término no singular del T -stress. Se evalúa entonces la influencia de una variación lineal del coeficiente de Poisson sobre los parámetros de fractura, con especial

Coef. de Poisson	$K_I(MPa m^{0,5})$	$K_{II}(MPa m^{0,5})$	$T(MPa)$
$\nu=0.1$	0.739	0.249	-0.444
$\nu=0.2$	0.739	0.249	-0.452
$\nu=0.3$	0.739	0.249	-0.461
$\nu=0.4$	0.739	0.249	-0.469
$\nu=0.45$	0.739	0.249	-0.473

Cuadro 5.3: Resultados numéricos de los parámetros de fractura para los distintos valores del coeficiente de Poisson considerados. FGM2

atención a la sensibilidad del término del T -stress. Los resultados se muestran en el Cuadro 5.4.

Coef. de Poisson	$K_I(MPa m^{0,5})$	$K_{II}(MPa m^{0,5})$	$T(MPa)$
$\nu=0.1 \rightarrow 0.45$	0.739	0.249	-0.492
$\nu=0.45$	0.739	0.249	-0.473

Cuadro 5.4: Resultados numéricos de los parámetros de fractura para la variación lineal del coef. de Poisson considerada. FGM2

Los resultados del Cuadro 5.4 secundan las conclusiones extraídas a partir del estudio de sensibilidad de los parámetros de fractura ante distintos valores constantes del coeficiente de Poisson. Así, para la geometría evaluada en este segundo caso se puede afirmar que los cambios en el coeficiente de Poisson tienen un efecto despreciable en los FITs pero, en cambio, sí se aprecia una influencia significativa sobre el término del T -stress.

5.3.4. Caso III - FGM3

Una vez que se han obtenido resultados para las dos geometrías extremas en cuanto a la sensibilidad con respecto a los cambios en el coeficiente de

Poisson se refiere, es el momento de evaluar un caso intermedio que permita estudiar el efecto de la variación del coeficiente de Poisson cuando la carga aplicada forma un ángulo con respecto a la dirección de variación de propiedades del material. El análisis de esta geometría es fundamental para poder extraer conclusiones y establecer una metodología que ayude a tomar una decisión a la hora de considerar los cambios que se producen en los parámetros de fractura a partir de la variación del coeficiente de Poisson. En el tercer y último espécimen FGM, el gradiente y la carga forman entre sí un ángulo de 60° (ver Fig. 3.3). Los cálculos numéricos obtenidos para los FITs y el T -stress según los diferentes valores constantes del coeficiente de Poisson se muestran en el Cuadro 5.5.

Coef. de Poisson	$K_I(MPa m^{0,5})$	$K_{II}(MPa m^{0,5})$	$T(MPa)$
$\nu=0.1$	0.911	0.290	-0.776
$\nu=0.2$	0.910	0.291	-0.774
$\nu=0.3$	0.909	0.291	-0.771
$\nu=0.4$	0.909	0.291	-0.769
$\nu=0.45$	0.908	0.291	-0.768

Cuadro 5.5: Resultados numéricos de los parámetros de fractura para los distintos valores del coeficiente de Poisson considerados. FGM3

Una ojeada al Cuadro 5.5 evidencia que existe sensibilidad de todos los parámetros de fractura ante los cambios de valor del coeficiente de Poisson. Un examen más minucioso del mismo revela que el efecto de los distintos valores del coeficiente de Poisson sobre el término del K_{II} es relativamente bajo, siendo ya relevante para el término K_I y especialmente notable para el término no singular del T -stress.

De nuevo, es necesario evaluar la respuesta de los parámetros de fractura ante la variación lineal del coeficiente de Poisson estipulada para examinar si se mantienen los cambios registrados en el estudio de sensibilidad de los

parámetros de fractura ante diferentes valores del coeficiente de Poisson. Los cálculos numéricos obtenidos se representan en el Cuadro 5.6.

Coef. de Poisson	$K_I(MPa m^{0,5})$	$K_{II}(MPa m^{0,5})$	$T(MPa)$
$\nu=0.1 \rightarrow 0.45$	0.906	0.292	-0.761
$\nu=0.45$	0.908	0.291	-0.768

Cuadro 5.6: Resultados numéricos de los parámetros de fractura para la variación lineal del coef. de Poisson considerada. FGM3

Una vez más, los parámetros de fractura muestran sensibilidad ante los cambios en el coeficiente de Poisson. En esta ocasión, donde el coeficiente de Poisson varía de forma lineal entre 0.1 y 0.45, la sensibilidad de los FITs es relativamente baja, siendo relevante únicamente en el término no singular del T -stress.

5.4. Discusión y conclusiones

El asumir como despreciable el efecto de la variación que el coeficiente de Poisson tiene sobre los resultados es el proceder mayoritario en los estudios de fractura en FGMs. Esta asunción ha traído consigo, en numerosos estudios analíticos, simplificaciones importantes. Sin embargo, no tiene tras de sí ningún desarrollo teórico que lo justifique y por tanto, se corresponde con un punto de vista subjetivo, basado en la interpretación de las diferencias existentes entre los resultados calculados numéricamente para diferentes valores del coeficiente de Poisson. En muchos trabajos, debido a las importantes simplificaciones que trae consigo, existe de antemano un fuerte interés por concluir que el efecto de Poisson es despreciable sobre los resultados, aunque se aprecien diferencias de hasta el 16 % en algunos valores [53].

En cambio, el trabajo de Paulino y Kim [102] evidencia que la influencia

del coeficiente de Poisson en los parámetros de fractura depende de la geometría y que existen configuraciones para las que despreciar el efecto que la variación del coeficiente de Poisson tiene sobre los términos de los FITs y el T -stress supone una asunción demasiado imprecisa. Sin embargo, Kim y Paulino [102] limitan su estudio al caso de la geometría más favorable en lo que al estudio de sensibilidad de los parámetros de fractura con respecto al cambio en el coeficiente de Poisson se refiere y, como ya se ha mencionado, establecen unas consideraciones en su estudio que lo alejan de las situaciones reales que se pueden dar en los componentes estructurales de FGMs. Por ello, es preciso simular un proceso real y la totalidad de las configuraciones de interés para poder establecer una metodología al respecto.

El ensayo experimental realizado por Abanto-Bueno y Lambros [81] es muy adecuado para desarrollar un análisis de estas características. En primer lugar, porque contiene una suave variación de las propiedades elásticas del material, propia de los especímenes reales de FGMs. En segundo lugar, porque las dimensiones de estos se ajustan a parámetros reales, alejadas de las simulaciones de sólidos infinitos o semi-infinitos propios de los estudios analíticos. Es preciso mencionar que la relación entre el tamaño de la grieta y el ancho del espécimen es hasta cinco veces superior a la establecida por Paulino y Kim [102] en su estudio. Así mismo, se desconocen tanto el valor del coeficiente de Poisson de los ejemplares empleados en el trabajo experimental como el efecto que la radiación a la que sometieron a los diferentes especímenes Abanto-Bueno y Lambros [81] tiene sobre el coeficiente de Poisson. Por tanto, se asume un rango de valores del coeficiente de Poisson que se encuentra generosamente dentro del espectro de cifras existentes en la naturaleza. Además, en el mismo se contemplan las tres geometrías características del modo mixto de fractura en FGMs, que son a su vez, las tres configuraciones representativas de un completo estudio de sensibilidad de los parámetros de fractura ante la variación en el coeficiente de Poisson.

El hecho de que la parte más flexible del sólido pueda sufrir una contrac-

ción mayor que la parte más rígida cuando la carga tensional esté aplicada paralelamente a la dirección del gradiente del material, confiere una enorme importancia a las geometrías estudiadas. Por ello, deben analizarse de forma independiente y establecerse conclusiones independientes para cada una de ellas.

El estudio del ejemplar homogéneo ratifica las conclusiones establecidas por Paulino y Kim [102] en su trabajo. La variación del valor del coeficiente de Poisson no afecta a ninguno de los parámetros de fractura si el módulo de Young se mantiene constante. Por tanto, la influencia de la variación del coeficiente de Poisson sobre los resultados es una característica propia de los FGMs.

En el primer espécimen de FGM examinado (FGM1), la carga aplicada es paralela a la dirección de variación de las propiedades del material y por tanto se corresponde con la configuración más proclive a mostrar sensibilidad de los parámetros de fractura ante las modificaciones del valor del coeficiente de Poisson. Como se puede observar en el Cuadro 5.1, para diferentes valores del coeficiente de Poisson, que se mantienen constantes a lo largo de todo el espécimen, existe una diferencia notoria entre los resultados obtenidos para todos los parámetros de fractura. Esta disimilitud es especialmente significativa en el caso del término singular del T -stress.

El análisis de sensibilidad para una variación lineal del coeficiente de Poisson confirma las conclusiones extraídas. Y es que esta trae consigo cambios en todos los parámetros de fractura evaluados, siendo estos especialmente significativos para el segundo FIT y el T -stress.

El segundo espécimen evaluado (FGM2) se corresponde con la configuración menos propensa a mostrar diferencias entre los valores de los parámetros de fractura ante modificaciones en el coeficiente de Poisson. Y es que la carga tensional está aplicada perpendicularmente a la dirección del gradiente del material. Un vistazo a los resultados (Cuadro 5.3) confirma las previsiones

establecidas para los términos de K_I y K_{II} . Sin embargo, en el término no singular del T -stress se aprecian diferencias significativas para cada valor del coeficiente de Poisson evaluado.

Los resultados del análisis de sensibilidad para una variación lineal del coeficiente de Poisson ratifican las conclusiones del párrafo anterior. Y es que su efecto sobre los FITs es inapreciable, pero sí se observa una influencia relevante sobre el término no singular del T -stress. Con lo cual, siempre que se proceda a calcular dicho término será preciso tener en consideración la variación gradual del coeficiente de Poisson, incluso en la geometría menos sensible a los cambios en el mismo.

El tercer y último ejemplar examinado (FGM3) se corresponde con una configuración que se encuentra, en lo que respecta a la sensibilidad de los parámetros de fractura ante la variación del coeficiente de Poisson, en un término medio entre las dos geometrías evaluadas con anterioridad. Es preciso mencionar que la influencia que tienen los distintos valores sobre los parámetros de fractura en esta configuración no ha sido estudiada hasta el momento. En ella, la carga aplicada forma un ángulo con la dirección de variación de propiedades del material. Es de suponer que, a medida que ese ángulo se aproxime a los valores extremos (0 y 90 grados) su comportamiento también se ajustará al que hemos visto en el primer y segundo espécimen respectivamente. El ángulo que forman la carga y el gradiente del material en este último espécimen en el ensayo experimental [81] es de 60 grados. Este valor es muy apropiado ya que es más próximo a la configuración donde la sensibilidad de los parámetros de fractura a los cambios en el coeficiente de Poisson es menor y, por tanto, si los resultados obtenidos indican que menospreciar la variación del coeficiente de Poisson es una asunción muy imprecisa, esta conclusión se extiende con mayor motivo para las configuraciones con ángulos de menor valor.

Un análisis de los resultados obtenidos para esta geometría considerando distintos valores del coeficiente de Poisson que se mantienen constantes a lo

largo de todo el espécimen (ver Cuadro 5.5) muestra la existencia de sensibilidad de todos los parámetros de fractura ante los cambios en el coeficiente de Poisson mencionados. Un examen más minucioso revela que el efecto de los distintos valores del coeficiente de Poisson sobre el segundo FIT es relativamente bajo, siendo ya relevante para el primer FIT y especialmente notable para el término no singular del T -stress.

Una vez más, el estudio de sensibilidad para una variación lineal del coeficiente de Poisson ratifica las conclusiones extraídas a partir de la consideración de valores constantes y diferentes para dicho coeficiente. Así, se aprecia sensibilidad de todos los parámetros de fractura ante las modificaciones propuestas, siendo esta especialmente significativa para el término no singular del T -stress.

El examen de los resultados del conjunto de las tres configuraciones analizadas en este estudio nos permite extraer conclusiones generales que sirven para establecer una metodología que permita estipular la importancia de considerar o despreciar el efecto que la variación del coeficiente de Poisson tiene sobre los resultados en las simulaciones numéricas de problemas de fractura en componentes estructurales de FGMs.

Es importante tener en cuenta que el grado de relevancia asignado a la sensibilidad de los parámetros de fractura ante la variación del coeficiente de Poisson se corresponde con una interpretación subjetiva, que estará muy vinculada al grado de exactitud que requiera la simulación numérica correspondiente. En cualquier caso, los cambios en los FITs para los distintos valores del coeficiente de Poisson son más que evidentes en la primera y última configuración evaluadas en este estudio y, por tanto, si se pretende realizar una simulación numérica rigurosa, solo se puede despreciar la influencia de la variación del coeficiente de Poisson sobre los FITs en la segunda configuración evaluada, donde la carga aplicada es perpendicular al gradiente del material. Esto contradice el proceder mayoritario en el campo de la fractura en FGMs, donde el coeficiente de Poisson es considerado constante independientemente

de la geometría estudiada.

Los cálculos de este estudio revelan una sensibilidad notoria del término no singular del T -stress en todas las configuraciones evaluadas. Esta es significativa incluso para la segunda configuración, la menos propensa a mostrar diferencias entre los valores de los parámetros de fractura ante modificaciones en el coeficiente de Poisson. Se concluye entonces que, para cualquier simulación numérica que calcule un término de orden superior como es el T -stress, es imprescindible considerar la variación del coeficiente de Poisson si se quieren evitar imprecisiones numéricas importantes, independientemente de la geometría considerada.

Este trabajo aporta información de utilidad al respecto de la influencia del coeficiente de Poisson en los parámetros de fractura en FGMs. Las conclusiones extraídas de este estudio contradicen el proceder mayoritario en el campo de la fractura en FGMs, donde el coeficiente de Poisson es considerado constante independientemente de la geometría estudiada. Es por tanto necesario, como ya advirtieron Paulino y Kim en su trabajo [102], prestar más atención al efecto de la variación del coeficiente de Poisson, especialmente cuando la carga está aplicada en una dirección paralela al cambio gradual de propiedades del material.

Capítulo 6

Estudio de la trayectoria del crecimiento de grieta mediante X-FEM

6.1. Introducción

Desde su introducción en componentes aeroespaciales de metal-cerámica sometidos a altas temperaturas [109], los FGMs han encontrado una gran variedad de aplicaciones comerciales [1]. En la mayoría de ellas, los FGMs proporcionan un recurso muy atractivo desde el punto de vista del diseño de componentes estructurales, pues permiten adaptar la microestructura a condiciones de servicio específicas a la par que minimizan los problemas asociados a la interfaz de materiales. La importancia de la resistencia a fractura en el diseño estructural ha dado lugar al desarrollo de una rama especial de la mecánica de la fractura destinada a esta clase de materiales. En este contexto, la propagación de la grieta en especímenes de FGMs ha sido objeto de un importante esfuerzo investigador. Se citan a continuación los trabajos más destacados en la materia.

Lin y otros [110] analizaron el comportamiento del FGM de aleación de

aluminio 2124/SiC para el primer modo de fractura. Carpenter y otros [111] estudiaron experimentalmente mediante el ensayo de flexión en tres puntos un FGM compuesto de Ti/TiB en capas. Rousseau y Tippur [75] investigaron, experimental y numéricamente, el crecimiento de la grieta en una viga FGM de epoxy y cristal sometida a flexión en cuatro puntos. Lambros y otros [112] y Abanto-Bueno y Lambros [90] analizaron el crecimiento de la grieta en FGMs mediante un sistema de agarre fijo y el primer modo de fractura. Jin y otros [113] investigaron el crecimiento de grieta en modo I de carga y condiciones elasto-plásticas para un FGM de TiB/Ti empleando elementos tri-dimensionales cohesivos. Kim y Paulino [114], en uno de los mejores trabajos realizados hasta la fecha, analizaron el modo mixto de propagación de la grieta en FGMs bajo cargas mecánicas y por medio del MEF y la II. Wang y Nakamura [115] estudiaron la propagación de la grieta en FGMs en condiciones elasto-plásticas. Tilbrook y otros [116, 117] estudiaron experimental y analíticamente el proceso de fractura y fatiga en FGMs, haciendo hincapié en el efecto de la graduación del material sobre los FITs y la dirección de propagación de la grieta. Zhang y Paulino [118] emplearon modelos de zona cohesiva (MZC) para simular la propagación de la grieta en FGMs bidimensionales, bajo el modo mixto de fractura y cargas dinámicas y Comi y Mariani [119] simularon por medio del X-FEM el proceso de fractura de FGMs cuasi-frágiles.

A pesar de que no abundan en la literatura los ensayos experimentales que analicen el crecimiento de la grieta y registren la dirección de propagación de la misma, es un hecho significativo el que la totalidad de las simulaciones numéricas existentes utilicen el trabajo de Rousseau y Tippur [75] para validar su modelo. Y es que, a pesar de que los desarrollos computacionales de los últimos años han allanado el camino, reproducir de forma precisa la trayectoria de propagación de la grieta es una tarea peliaguda. Este hecho se agrava en el caso de los FGMs, ya que la variación en el espacio de las propiedades de la resistencia a la fractura hace que el crecimiento de la grieta en los mismos sea un fenómeno inherentemente complejo. La necesidad de incluir

en el modelo numérico la variación en el espacio de la resistencia a fractura, en el contexto de un análisis elástico y lineal, es motivo de controversia.

La mayoría de los trabajos numéricos que examinan el crecimiento de la grieta en un FGM en condiciones elástico-lineales no tienen en cuenta la variación en el espacio de la resistencia a fractura del material. El más riguroso de estos estudios es el desarrollado por Kim y Paulino [114] y, al igual que el resto, alude a la homogeneización local existente en la punta de la grieta (que ya ha sido referida en la primera parte del capítulo anterior) y a las conclusiones extraídas por Gu y Asaro [54] para considerar despreciable el efecto de la variación de la resistencia a fractura. Esta asunción permite expandir a FGMs criterios de fractura propios de materiales homogéneos, como el MTS o la máxima tasa de liberación de energía de deformación, que posibilitan el cálculo de la trayectoria de la grieta. Es preciso mencionar que Gu y Asaro [54] se limitan a afirmar que el modelo de homogeneización local debería de funcionar correctamente en FGMs idealmente frágiles y reconocen que es necesario un trabajo investigador adicional para determinar el efecto que pudiera tener esta asunción en aquellos casos donde la zona plástica ocupe una región suficientemente grande en las proximidades del extremo de la fisura o existan gradientes microestructurales en esa misma zona.

En base al criterio de homogeneización local y a pesar de las limitaciones mencionadas, diversos investigadores [114, 120, 121] han sido capaces de simular, con una precisión razonable, la trayectoria de la grieta obtenida experimentalmente por Rousseau y Tippur [75]. Es necesario, de cualquier forma, realizar una serie de apreciaciones al respecto del trabajo de Rousseau y Tippur [75]. En primer lugar, estos evalúan una geometría muy particular, donde la grieta es perpendicular al gradiente elástico del material y la viga de FGM es sometida al ensayo de flexión en cuatro puntos. Y más relevante aún, Rousseau y Tippur [75] no han cuantificado en sus ensayos experimentales ningún parámetro que pueda dar una idea de la variación de la resistencia a fractura del material, asumiendo entonces un comportamiento idealmente

frágil para el mismo. De manera que los estudios [119] que han intentado simular numéricamente el proceso de propagación de la grieta que tiene lugar en su trabajo experimental han tenido que recurrir a sus propios ensayos y suposiciones para poder considerar e implementar en su modelo la variación en el espacio de la resistencia a fractura de la viga FGM ensayada por Rousseau y Tippur [75].

Por ello, todo indica la necesidad imperiosa de realizar estudios adicionales. Es fundamental simular numéricamente un ensayo en el que la variación de la resistencia a fractura en función de la posición sea un parámetro conocido y donde se pueda evaluar la trayectoria de la grieta en función de la geometría, con el objetivo de establecer una metodología al respecto.

De nuevo, el estudio experimental de Abanto-Bueno y Lambros [81] presenta un marco de trabajo apropiado. En primer lugar, porque, como ya se ha mencionado, analiza las tres geometrías características del modo de fractura inherente a los FGMs, el modo mixto. Y en segundo lugar, porque Abanto-Bueno y Lambros [81] registran la variación en el espacio de la resistencia a fractura, mediante los parámetros de tensión de fallo y deformación de fallo, al mismo tiempo que la variación del módulo elástico del material. A sabiendas de las características del ensayo y en base al modelo numérico desarrollado, que ya ha sido descrito con detalle en el tercer capítulo de este trabajo, se procede a simular y analizar numéricamente el crecimiento de la grieta.

6.2. Metodología: modelo numérico

A diferencia del resto del trabajo, el método numérico empleado en esta parte del estudio es el de los elementos finitos extendidos (X-FEM). Este método permite registrar la trayectoria de la grieta con menor dependencia del mallado de elementos finitos, siendo esta característica especialmente re-

levante en FGMs, ya que el cambio gradual de las propiedades del material puede dar lugar a trayectorias complejas de propagación, incluso en simples ensayos simétricos [75].

Desde su desarrollo en 1999 por Belytschko y sus colaboradores [122], el X-FEM ha sido objeto de numerosos estudios. La descripción más completa del mismo se puede encontrar en el libro escrito al respecto por el profesor de la Universidad de Cardiff, Stephane Bordas, cuya publicación está prevista para otoño de este mismo año [123]. El método se basa principalmente en la simulación de discontinuidades a través de un enriquecimiento de los elementos finitos convencionales. Basado en el concepto de la partición de la unidad [124], el procedimiento consiste en añadir ciertos grados de libertad en un conjunto de nodos pre-seleccionados en la malla de elementos finitos para modelar de forma precisa la discontinuidad introducida en el medio por la presencia de la grieta.

El método de los X-FEM está implementado en el software de elementos finitos empleado en este trabajo [125]. En base al mismo, ABAQUS modela las discontinuidades existentes, como las grietas, introduciendo funciones de enriquecimiento en los nodos. Con el propósito de analizar la fractura del material, la función de enriquecimiento está compuesta de las funciones asintóticas en la punta de la grieta y una función discontinua que representa el salto del desplazamiento al otro lado de la superficie de la grieta. La aproximación de una función vectorial de desplazamiento u en base al concepto de la partición de la unidad es entonces:

$$u = \sum_{I=1}^N N_I(x)[u_I + H(x)a_I + \sum_{\alpha=1}^4 F_{\alpha}(x)b_I^{\alpha}] \quad (6.1)$$

Donde $N_I(x)$ es la función de forma de los elementos finitos, asociada al nodo I . El primer término del lado derecho de la ecuación 6.1, u_I , es el vector de los grados de libertad nodales en los elementos finitos clásicos, el segundo

término se corresponde con el producto del vector de los grados de libertad enriquecidos, a_I , y la función que simula la discontinuidad en el campo de desplazamientos en ambas superficies de la grieta, $H(x)$; y el tercer y último término es el producto del vector de los grado de libertad enriquecidos, b_I^α , y las funciones elásticas en el vértice de la grieta, $F_\alpha(x)$. Siendo estas, para un material isotrópico y elástico y de acuerdo al sistema de coordenadas polares, las siguientes:

$$F_\alpha(x) = [\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}] \quad (6.2)$$

La Fig. 6.1 ilustra los elementos enriquecidos en el entorno de la discontinuidad. Los nodos marcados con un círculo están enriquecidos en base a la función $H(x)$ mientras que los nodos señalados con un cuadrado presentan funciones de enriquecimiento de vértice de grieta, $F_\alpha(x)$, con el fin de modelar el comportamiento asintótico en el extremo de la fisura.

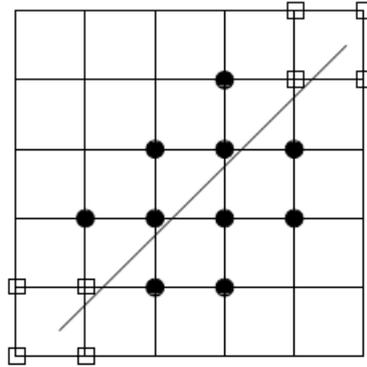


Figura 6.1: Enriquecimiento de los nodos. X-FEM

El movimiento de la grieta es modelizado mediante el método de los segmentos cohesivos y el enfoque de los nodos fantasma [125]. Los nodos fantasma, que están superpuestos a los nodos originales, se introducen pa-

ra representar la discontinuidad de los elementos agrietados, tal y como se muestra en la Fig. 6.2. Cuando el elemento está intacto, todos los nodos fantasma están ligados a su correspondiente nodo real. Pero cuando el elemento es atravesado por la grieta, este se divide en dos partes, de manera que cada una de ellas está formada por una combinación de nodos reales y nodos fantasma en función de la orientación de la fisura. En ese momento los nodos fantasma rompen su vínculo con sus correspondientes nodos reales y ambos pueden separarse.

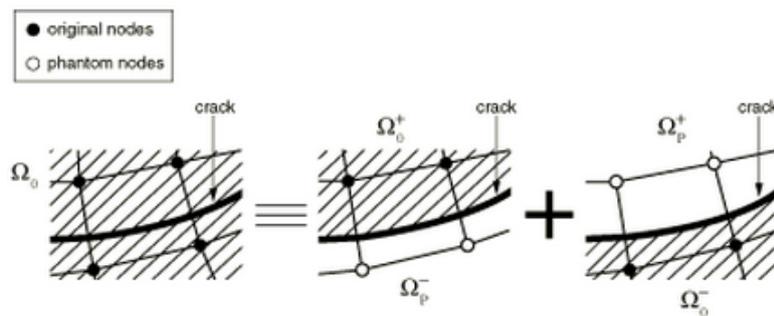


Figura 6.2: El principio del método de los nodos fantasma

Este planteamiento está basado en un comportamiento cohesivo de acuerdo a una ley de tracción-separación. Este método proporciona una eficiente y atractiva herramienta ingenieril y ha sido utilizado para simular el inicio y la propagación de grietas en múltiples casos por Song [126] y Remmers [127], demostrando no tener apenas dependencia del mallado, siempre que este sea suficientemente refinado.

Se procede entonces a simular el crecimiento de la grieta para los tres especímenes ensayados por Abanto-Bueno y Lambros [81]. El criterio de la máxima tensión principal (MPS, del inglés “Maximum Principal Stress Criterion”) es el elegido para definir el comienzo del daño y la dirección de propagación de la grieta, el fallo se iniciará entonces cuando la tensión principal máxima alcance un valor designado y la grieta se propagará en una

dirección perpendicular a dicha tensión principal. El criterio establecido para definir la evolución del daño es la energía de fractura, G_c , o lo que es lo mismo, la tasa crítica de liberación de energía de deformación. Hay que tener en cuenta que, tanto la tensión de fallo en el preciso instante de propagación de la grieta, como la energía de fractura a medida que avanza la misma, son valores desconocidos que Abanto-Bueno y Lambros no han registrado en su ensayo experimental [81]. Pero la realidad es que estos parámetros sólo influyen en la magnitud de la carga que debe ser aplicada para que se cumplan los criterios de inicio y posterior propagación del daño y, en el marco de la fractura elástica y lineal, la magnitud de la carga no influye en la trayectoria de la grieta.

En cualquier caso, con el objetivo de realizar una simulación lo más rigurosa posible, se asignan valores en base a las propiedades de fallo que, como se ha mencionado anteriormente, si fueron registradas por Abanto-Bueno y Lambros [81]. Así, la magnitud de la tensión principal que establece el comienzo del daño se corresponde en cada ejemplar con el valor alcanzado por la tensión de fallo en las proximidades de la entalla inicial (ver Figs. 6.6, 6.8 y 6.12). En lo que respecta a la energía de fractura, esta es constante para un FGM idealmente frágil [128]. Sin embargo, esta asunción para el copolímero ECO irradiado en el ensayo experimental podría ser demasiado restrictiva, y es que, aunque es un hecho probado que el mismo se fragiliza con la radiación UV [83], en base a la aplicación progresiva de la misma, es de esperar que el material siga mostrando una ligera transición de dúctil a frágil a lo largo del espécimen. Y por consiguiente, la tenacidad a fractura no será constante en la totalidad del material ensayado. Esta ligera variación de las propiedades de fractura se registra en el modelo numérico mediante la asignación de una energía de fractura que varía con la posición. Para ello, se hace depender al valor de G_c de la temperatura, adecuando el cambio gradual de la energía de fractura que se pretende implementar con la distribución inicial de la temperatura asignada para registrar la variación de las propiedades elásticas del material. Teniendo en consideración que el material ha sido irradiado en toda

su extensión durante un tiempo de al menos 50 horas, se asume una variación muy reducida de la energía de fractura, que se hace disminuir en la dirección de radiación, y el valor que se toma como referencia para la zona menos frágil del espécimen, $G_c = 6(KJ/m^2)$, se extrae de un trabajo de los mismos autores [83] donde se cuantifica la energía de fractura para un polímero ECO irradiado uniformemente durante 50 horas.

En base al criterio de propagación local considerado, la trayectoria de crecimiento de la fisura no se ve afectada por los cambios en el espacio de la tasa crítica de la energía de deformación. Y obviamente, debido a las asunciones que se han tenido que realizar, no se pueden extraer afirmaciones concluyentes de los valores que fueron asignados a la carga aplicada para que la grieta pudiera propagarse a lo largo del material. Sin embargo si se aprecia, especialmente en el segundo caso, que cuando la grieta se propaga desde la parte más frágil del espécimen hacia la parte más dúctil, el material exhibe una creciente resistencia a la propagación a medida que la fisura avanza. Este comportamiento es común en los FGMs de metal-cerámica, cuando la grieta se propaga desde la parte más rica en cerámica hacia la zona donde el porcentaje de metal es mayor [18, 129, 130].

Se emplea un mallado de la misma densidad en las tres configuraciones analizadas, utilizándose un total de entre 1656 y 1688 elementos del tipo CPS4R (elementos cuadriláteros bilineales de tensión plana de 4 nodos con integración reducida). Una muestra del mallado se puede apreciar en la Fig. 6.3.

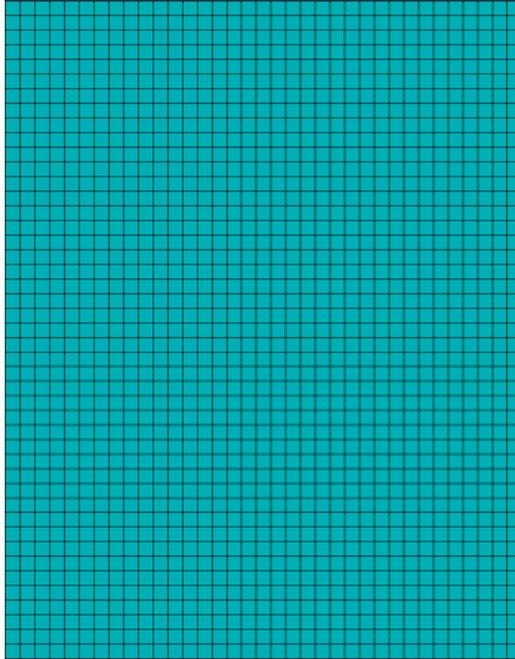


Figura 6.3: Mallado empleado en el cálculo por X-FEM

6.3. Resultados

6.3.1. Caso I - FGM1

Se calcula entonces, una vez configurado el criterio de daño mencionado y por medio del método de los segmentos cohesivos y el X-FEM, la propagación de la grieta para el primer espécimen de FGM evaluado. El mismo, como se ha mencionado previamente, está sometido a una carga simétrica perpendicular a la grieta y, por tanto, el modo mixto de fractura está inducido únicamente por la variación de las propiedades elásticas del material en una dirección normal a la fisura. En la Fig. 6.4 se comparan los resultados obtenidos con los registrados por Abanto-Bueno y Lambros [81]. Con el objetivo de posibilitar una comparación óptica de los mismos, la trayectoria calculada por medio del X-FEM se representa en la misma escala que la empleada por Abanto-Bueno

y Lambros [81].

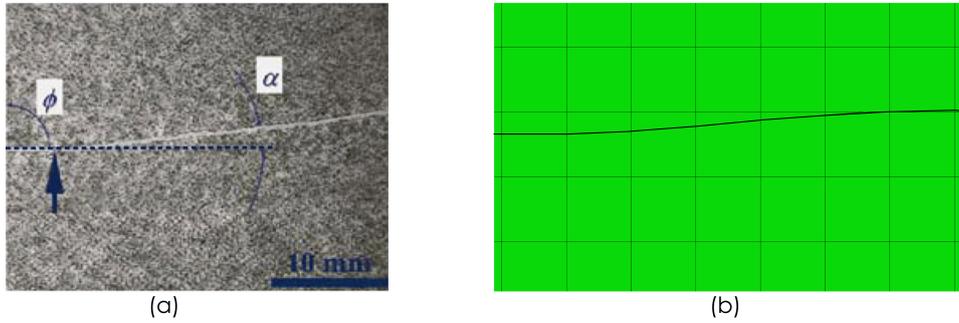


Figura 6.4: Comparativa de la trayectoria de la grieta: Caso 1 - FGM1. (a) Resultados experimentales obtenidos por Abanto-Bueno y Lambros [78] y (b) resultados numéricos obtenidos mediante el presente calculo por X-FEM

La primera impresión evidente que se extrae de la Fig. 6.4 es que la trayectoria que sigue la grieta al propagarse es, tanto en el ensayo experimental de Abanto-Bueno y Lambros [81] como en el resultado obtenido a partir del X-FEM, sensiblemente diferente a la que podría esperarse en un material homogéneo. Si este fuera el caso, teniendo en cuenta que la fisura está posicionada en una dirección perpendicular a la carga y que esta es simétrica, la trayectoria de propagación de la grieta se correspondería con una línea recta, propia del primer modo de fractura. Sin embargo, el modo mixto de fractura que está inducido por el gradiente del material, y que se ha cuantificado en el tercer capítulo en base al segundo FIT en el inicio de la grieta, perdura a medida que esta avanza. De manera que la variación gradual de las propiedades elásticas del material crea un campo tensional que provoca que, a diferencia de lo que sucede en materiales homogéneos, la trayectoria de la grieta siga una dirección donde el término de K_{II} es distinto de cero. Como se puede observar, el modo mixto inducido por la variación de propiedades elásticas del material desvía la trayectoria de la grieta hacia la región donde el módulo de Young es menor. Este comportamiento se aprecia también en el trabajo de Rousseau y Tippur [75].

Teniendo en cuenta que los FITs caracterizan el campo tensional en el entorno de la fisura y, con el objetivo de justificar la afirmación anterior, se procede a calcular el valor de los FITs en distintos puntos de la trayectoria de propagación de la grieta. El software de elementos finitos empleado, ABAQUS [86], no tiene aún implementada la integral de contorno en elementos bidimensionales en el análisis por X-FEM [131], por lo que es necesario calcular los parámetros de fractura en una grieta estacionaria mediante los elementos finitos convencionales. Se evalúan dos puntos característicos a lo largo de la extensión de la grieta una vez propagada (ver Fig. 6.5).

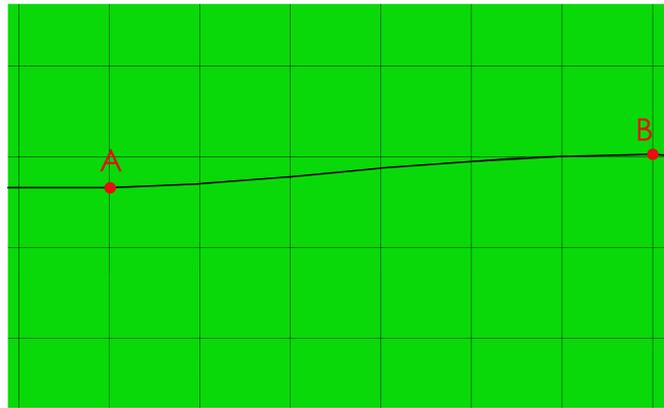


Figura 6.5: Puntos de cálculo de los FITs a lo largo de la trayectoria de la fisura - FGM1

El primer punto (A) se corresponderá con el momento justo de inicio de propagación de la entalla que se ha realizado en el espécimen. Los parámetros de fractura para este punto inicial ya han sido calculados y analizados en el tercer capítulo de este trabajo, para validar el modelo numérico. El segundo punto considerado (B) se encuentra en una posición avanzada de la grieta, una vez que esta ha comenzado a propagarse, en la proximidad del final del registro experimental de la misma.

A efectos de comparación, se calcula para ambos puntos la magnitud del modo mixto de fractura en base al parámetro ψ . Este parámetro adimen-

sional es muy apropiado, pues permite cuantificar la relación entre los dos FITs independientemente de la magnitud de la carga a la que está sometido el espécimen. Y es que se desconoce el valor de la carga aplicada mas allá del preciso instante de propagación de la entalla inicial y, como ya se ha mencionado, la magnitud de esta no influye en la trayectoria de propagación de la grieta en el contexto de la fractura elástica lineal. La dimensión del modo mixto de fractura se cuantifica entonces en base a la expresión siguiente:

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{K_{II}}{K_I} \right)$$

Los resultados numéricos obtenidos para los puntos (A) y (B) mencionados se muestran en el Cuadro 6.1. En el mismo se aprecia como el efecto del gradiente del material continúa vigente y en consecuencia, la magnitud del modo mixto de fractura no decrece a medida que la grieta avanza. Este hecho muestra la existencia de un campo tensional en los FGMs que, a diferencia de los materiales homogéneos, provoca que la tensión máxima principal sea perpendicular a una dirección para la que el término K_{II} no es necesariamente cero.

	Punto A	Punto B
ψ	1.615	2.074

Cuadro 6.1: Resultados numéricos para el parámetro ψ en los puntos de cálculo considerados - FGM1

En cuanto a la precisión en la simulación de la trayectoria de la grieta se refiere, en la Fig. 6.4 se observa que el resultado numérico aproxima razonablemente bien la propagación de la grieta que ha tenido lugar en el ensayo experimental de Abanto-Bueno y Lambros [81]. Sin embargo, si se observa con detalle la trayectoria descrita por la grieta en el trabajo experimental, se aprecia que esta no forma un mismo ángulo durante su recorrido con res-

pecto a la línea horizontal que representa la entalla inicial, sino que amplía la magnitud de dicho ángulo a medida que crece, desviándose aún más de la dirección de propagación característica del primer modo de fractura.

Este incremento gradual de la desviación de la grieta con respecto al eje de abscisas no se aprecia en la simulación numérica de la propagación de la fisura y, por tanto, parece que pueda ser consecuencia de la variación en el espacio de la resistencia a fractura. Son varios los factores que apuntan en esta dirección. En primer lugar, porque la grieta gira hacia el área donde las propiedades de fallo son menores. Y es que, como se ha mencionado, Abanto-Bueno y Lambros [81] registraron la variación en el espacio de la resistencia a fractura mediante los parámetros de tensión de fallo y deformación de fallo. Como se puede apreciar en la Fig. 6.6, los parámetros de fallo disminuyen gradualmente en el primer espécimen en la misma dirección que el módulo de Young, de manera que a medida que se asciende en el eje de ordenadas la resistencia a fractura del material es menor. Es preciso tener en cuenta que, en este primer caso, el espécimen estaría encajado en la Fig. 6.6 de forma que la altura del mismo estaría comprendida entre los 15 y los 90 mm., tal y como se muestra en la Fig. 3.1

Y también porque, de acuerdo a las conclusiones extraídas por Gu y Asaro [54], para que se pudiera aplicar el modelo de homogenización local y, por consiguiente, para que la trayectoria de la grieta pueda ser descrita en base a los criterios de fractura locales propios de sólidos homogéneos, el material debía de ser idealmente frágil y el tamaño de la zona plástica reducido. Aunque los autores del ensayo experimental asumen un comportamiento elástico y lineal, es preciso realizar varios comentarios al respecto. En primer lugar, un vistazo a los valores de la deformación de fallo registrados por Abanto-Bueno y Lambros [81] revelan que el material no es idealmente frágil. En segundo lugar, como se ha podido ver en estudios relacionados de los mismos autores [85, 90], el copolímero ECO empleado en los ensayos exhibe una clara no-linealidad a altos niveles de tensión. El grado de no linealidad es exami-

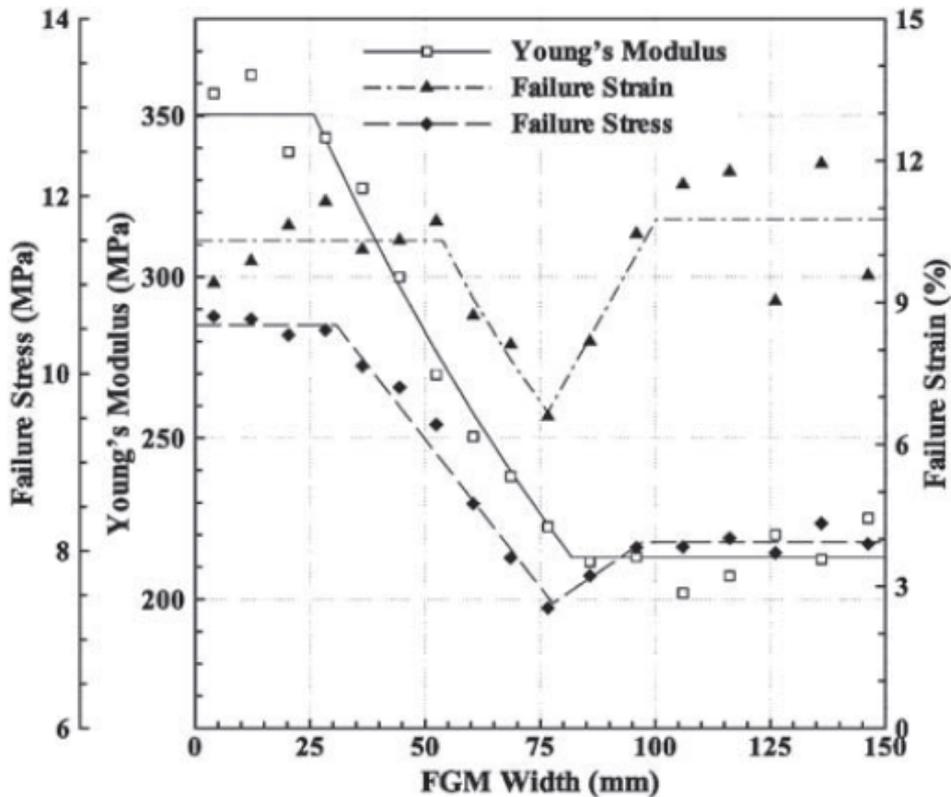


Figura 6.6: Valores experimentales registrados del módulo elástico, la tensión de fallo y la deformación de fallo - FGM1

nado en [85] y los autores alcanzan a concluir que en un espécimen de ECO irradiado homogéneamente durante 60 horas, los efectos no-lineales estarán confinados a una región de 4 mm. alrededor del extremo de la fisura. Con el aumento de la radiación esta área disminuiría y teniendo en cuenta que en el ensayo experimental considerado en este trabajo los tiempos de mínimos de radiación están establecidos en 50 horas [81], es factible que la fractura del espécimen se desarrolle en zonas donde el mismo haya sido irradiado por un tiempo comprendido entre 70 y 120 horas. De manera que se puede deducir que asumir un comportamiento frágil y elástico-lineal por parte de los especímenes evaluados no es una asunción muy restrictiva, si bien tampoco refleja con exactitud la realidad. Y por consiguiente, si se quiere reproducir

de forma precisa la trayectoria de la grieta, los criterios locales de fractura, aceptados en base al modelo de homogeneización local de la punta de la grieta, pueden tener necesidad de ser complementados por criterios que tengan en consideración la variación de la resistencia a fractura en el espacio. Al menos, para la configuración y las condiciones evaluadas en este primer espécimen.

6.3.2. Caso II - FGM2

De igual forma a como se procedió en el primer caso, se simula mediante X-FEM la trayectoria de la segunda geometría evaluada. En este caso, tanto la carga como el gradiente de propiedades del material son asimétricos y el modo mixto de fractura viene inducido por la posición de la grieta con respecto a la carga aplicada y a la variación de propiedades elásticas (ver Fig. 3.2). Los resultados obtenidos para la trayectoria de la grieta mediante el método de los segmentos cohesivos basado en el X-FEM y los registrados por Abanto-Bueno y Lambros [81] se comparan en la Fig. 6.7. De nuevo, ambas imágenes se presentan en la misma escala a efectos de comparación.

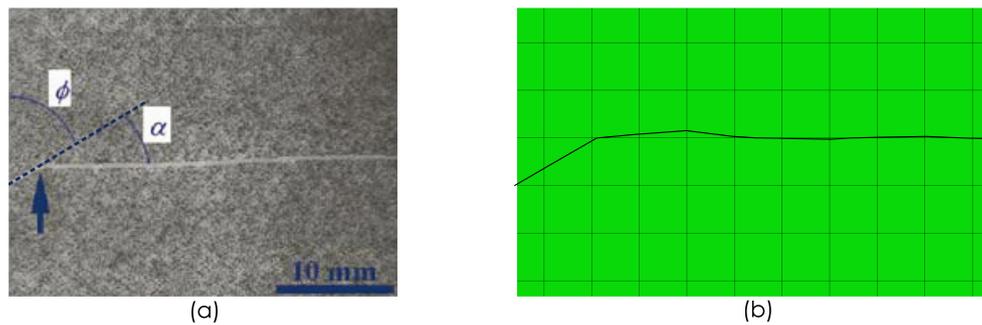


Figura 6.7: Comparativa de la trayectoria de la grieta: Caso 2 - FGM2. (a) Resultados experimentales obtenidos por Abanto-Bueno y Lambros [78] y (b) resultados numéricos obtenidos mediante el presente calculo por X-FEM

Al igual que sucede en el primer caso, la simulación numérica aproxima

razonablemente bien la trayectoria real de la grieta. Para un material homogéneo en las mismas condiciones de carga, la trayectoria de propagación de la grieta registraría una pequeña desviación inicial, fruto del modo mixto de fractura inducido por la asimetría de la carga con respecto a la fisura para, una vez remitido el efecto, proceder a propagarse de acuerdo con el primer modo de fractura [51]. Teniendo en cuenta que la variación de las propiedades elásticas se produce en la dirección de propagación intrínseca al primer modo de fractura, el efecto del modo mixto inducido por la posición del gradiente de propiedades con respecto a la dirección de la grieta remitirá su influencia únicamente a los primeros instantes. De manera que la asimetría existente en el preciso instante de propagación de la grieta entre la posición de la grieta y la dirección de la carga y del gradiente de propiedades se traduce sobre la trayectoria de la fisura exclusivamente en una pequeña desviación inicial, de acuerdo con el modo mixto inducido. Esta ligera torcedura se aprecia muy bien en el modelo numérico (ver Fig. 6.7 (b)), es también referida por Abanto-Bueno y Lambros en su trabajo experimental [81] y viene caracterizada por los FITs en el preciso instante de inicio de crecimiento de la entalla. En este caso, tal y como se aprecia en la Fig. 6.8, la grieta inicial está posicionada en una región donde la deformación de fallo adopta valores constantes y la tensión de fallo varía en la misma dirección que el módulo elástico, acorde con la trayectoria de la grieta en función de la carga aplicada. Con lo cual, la variación de la resistencia a fractura en el espacio no tiene efecto alguno sobre la trayectoria de la grieta mas allá del preciso instante de inicio de propagación de la misma y por consiguiente, la dirección de propagación se corresponde con la dirección para la cual el segundo FIT tiende a cero, tal y como sucedería en un material homogéneo. En este caso, el ancho del espécimen estaría situado en la Fig. 6.8 entre los datos de 20 y 90 mm. en el eje de abscisas (ver Fig. 3.2).

Con el objetivo de justificar numéricamente las afirmaciones anteriores se evalúa la magnitud del modo mixto de fractura en dos puntos característicos de la trayectoria de la grieta, tal y como se procedió en el primer caso. En

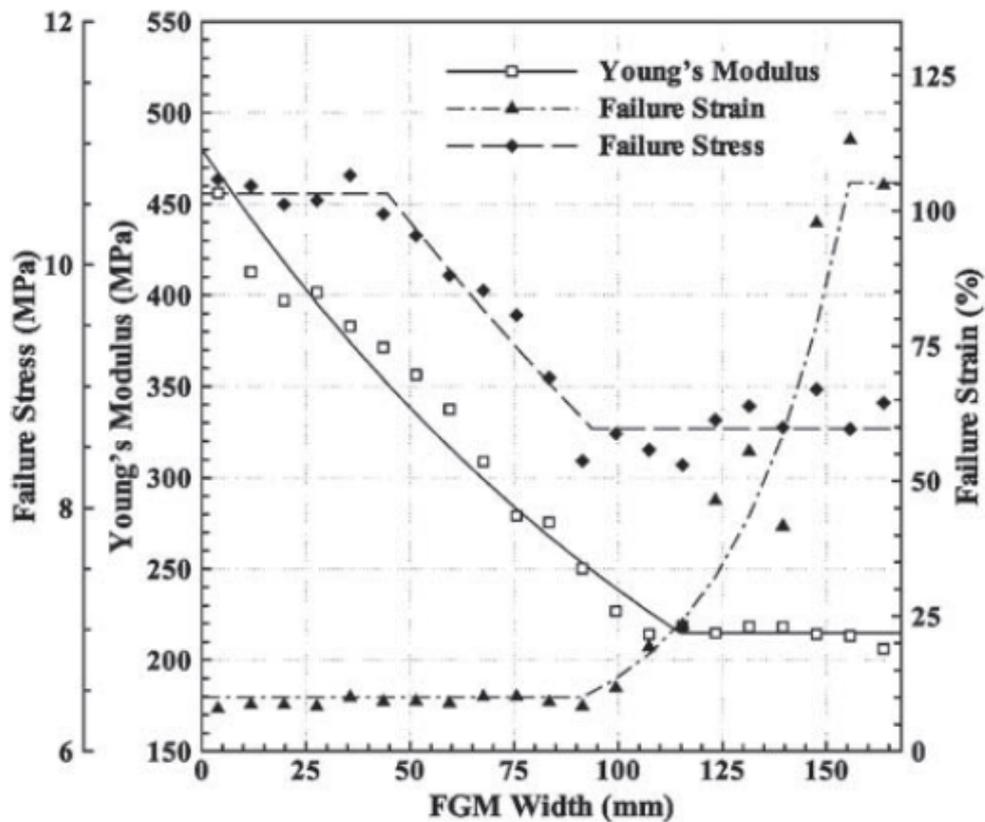


Figura 6.8: Valores experimentales registrados del módulo elástico, la tensión de fallo y la deformación de fallo - FGM2

la Fig. 6.9 se muestran los dos puntos considerados, el primero de ellos (A) se corresponde con el preciso instante de inicio de propagación de la fisura y por tanto, los valores de los parámetros de fractura correspondientes ya han sido calculados en el tercer capítulo de este trabajo. Y el segundo punto (B), se encuentra en una posición avanzada de la trayectoria de la grieta, cuando esta se propaga en la dirección característica del primer modo de fractura.

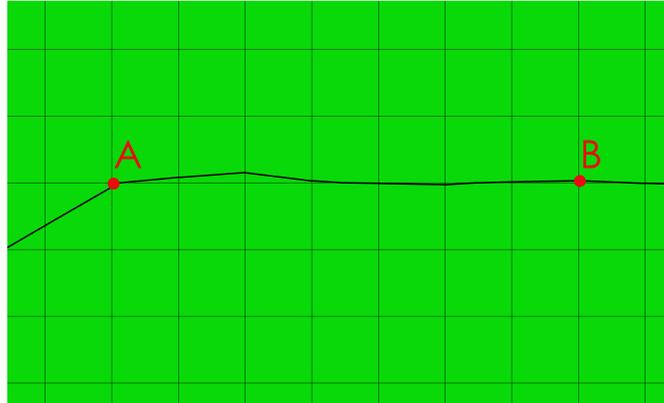


Figura 6.9: Puntos de cálculo de los FITs a lo largo de la trayectoria de la fisura - FGM2

De acuerdo al mismo proceder empleado en el primer espécimen, se calculan los FITs de los puntos considerados mediante la integral de contorno y los elementos finitos convencionales. Los resultados obtenidos se relacionan mediante el parámetro adimensional ψ , que caracteriza la magnitud de la influencia del modo mixto de fractura. Los valores calculados para cada punto se muestran en el Cuadro 6.2.

	Punto A	Punto B
ψ	18.621	1.443

Cuadro 6.2: Resultados numéricos para el parámetro ψ en los puntos de cálculo considerados - FGM2

Como era de esperar, existe una gran diferencia entre la magnitud del modo mixto inducido en el primer punto (A) y el registrado en el segundo (B). Ratificando que la circunstancia que induce el modo mixto en el preciso instante de inicio de propagación de la grieta, la posición de la fisura con respecto a la dirección gradiente de propiedades del material y a la carga aplicada, va perdiendo influencia a medida que esta se propaga. Pues lo hace en la dirección propia del primer modo de fractura y por consiguiente, en el

sentido en el que varían las propiedades elásticas del material y perpendicular a la dirección de la carga.

6.3.3. Caso III - FGM3

En el tercer y último espécimen se emplea el mismo proceder utilizado en los dos casos anteriores. En esta geometría, el modo mixto de fractura está inducido únicamente, en el instante inicial, por la dirección de carga con respecto a la posición de la fisura (ver Fig. 3.3). De nuevo, se emplea el X-FEM para calcular la trayectoria de la grieta y el resultado obtenido se muestra en la Fig. 6.10. En la misma también se refleja la trayectoria registrada por la fisura en los ensayos experimentales de Abanto-Bueno y Lambros [81], representándose ambas imágenes en escalas similares, con el objetivo de establecer una comparativa entre las mismas.

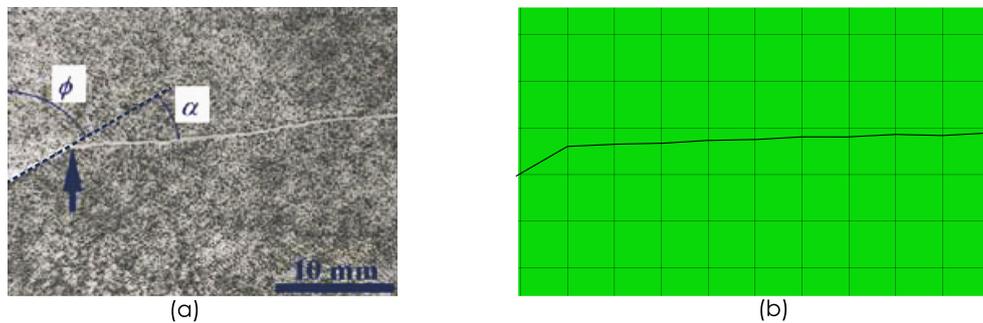


Figura 6.10: Comparativa de la trayectoria de la grieta: Caso 3 - FGM3. (a) Resultados experimentales obtenidos por Abanto-Bueno y Lambros [78] y (b) resultados numéricos obtenidos mediante el presente calculo por X-FEM

Como se puede observar en la Fig. 6.10, la simulación numérica aproxima una vez más de forma bastante rigurosa el proceso real. Se puede apreciar que el efecto de la variación de las propiedades elásticas del material es patente a medida que la grieta avanza y este hecho provoca una desviación de la trayectoria de la misma con respecto a la propagación característica del modo

I de fractura, propia de un material homogéneo bajo las mismas condiciones, una vez que se ha superado el efecto inicial de la asimetría de la carga con respecto a la fisura [51].

Sin embargo, la diferencia entre la trayectoria de la grieta reflejada en la Fig. 6.10, tanto la registrada experimentalmente como la calculada numéricamente, con respecto a la dirección de propagación propia de un material homogéneo en la configuración evaluada no es tan acusada como en el primer caso evaluado en este estudio. Y es que, en este tercer espécimen, la variación del gradiente del material no es perpendicular al eje horizontal y, por tanto, tiene un efecto más reducido sobre la magnitud del modo mixto de fractura inducido por la variación de las propiedades del material, caracterizado por el valor del segundo FIT a lo largo del avance de la fisura.

Una vez mas, se ratifican numéricamente las conclusiones extraídas. Para ello, se calculan, mediante la integral de contorno y el MEF, los FITs en dos puntos característicos en la trayectoria de propagación de la grieta (ver Fig. 6.11). El primero de ellos (A), se corresponde con el preciso instante de propagación de la entalla inicial y por consiguiente, los valores de los parámetros de fractura correspondientes ya han sido calculados. Mientras que el segundo de ellos (B), se sitúa en un lugar avanzado de la trayectoria de la propagación de la grieta. Los resultados calculados se comparan en el Cuadro 6.3 por medio de parámetro ψ , indicador de la magnitud del modo mixto inducido.

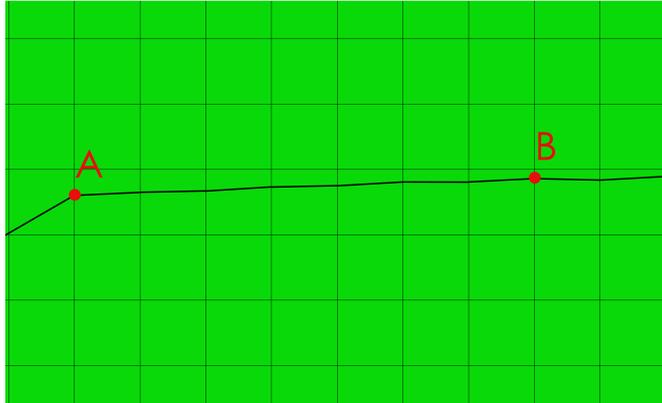


Figura 6.11: Puntos de cálculo de los FITs a lo largo de la trayectoria de la fisura - FGM3

	Punto A	Punto B
ψ	17.770	3.731

Cuadro 6.3: Resultados numéricos para el parámetro ψ en los puntos de cálculo considerados - FGM3

En el Cuadro 6.3 se observa una gran diferencia entre la magnitud del modo mixto de fractura del primer punto considerado (A) y el segundo (B). Esta es debida a la desaparición del efecto de la asimetría de la carga con respecto a la posición de la grieta, y es que a medida que esta se propaga lo hace siguiendo una trayectoria donde el ángulo que forma con la dirección de la aplicación de la carga se aproxima a 90° . Sin embargo, esta diferencia entre valores no es tan acusada como en el segundo espécimen, ya que el gradiente de propiedades elásticas del material está inclinado con respecto a la dirección de propagación de la grieta y por consiguiente, induce por sí mismo el modo mixto de deformación a medida que esta avanza, tal y como se aprecia en la trayectoria de la misma.

Así mismo, una observación minuciosa de la Fig. 6.10 revela ligeras discrepancias entre la desviación de la trayectoria de la grieta obtenida numéri-

camente y la registrada por Abanto-Bueno y Lambros en sus ensayos experimentales [81], especialmente a medida que avanza la misma. Aunque estas disimilitudes se producen en un grado mucho menor al apreciado en el primer espécimen evaluado, se deben una vez más a la no consideración de la variación de la resistencia a fractura en el espacio. Como se puede observar en la Fig. 6.12, la grieta se propaga en una región donde la deformación de fallo es constante y la tensión de fallo varía de forma significativa en la misma dirección que el módulo de Young del material. Este hecho, habida cuenta de que el material no es idealmente frágil, provoca que la grieta tienda a propagarse hacia la región donde la resistencia a fractura del material es menor, aumentando la desviación de la trayectoria con respecto a la descrita en el segundo espécimen más allá de lo provocado por el efecto del modo mixto inducido por la variación de propiedades del material. En cualquier caso es preciso advertir que, para la configuración y las condiciones evaluadas en este último caso, estas diferencias son muy reducidas.

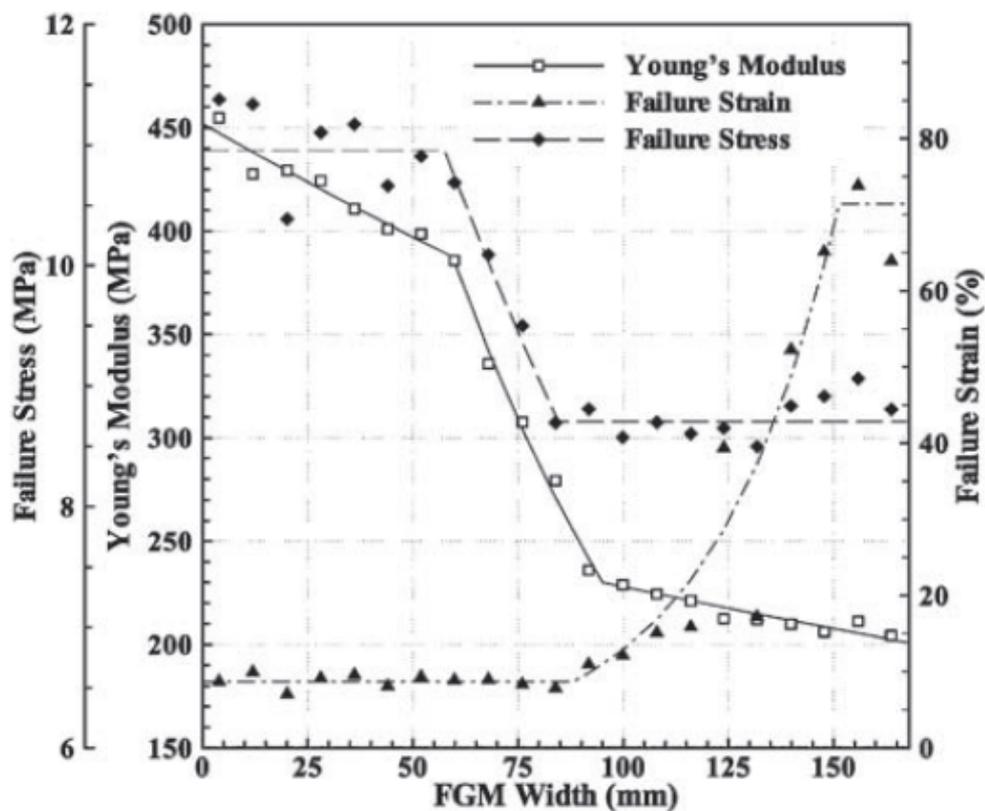


Figura 6.12: Valores experimentales registrados del módulo elástico, la tensión de fallo y la deformación de fallo - FGM3

6.4. Conclusiones

Conocer el comportamiento de las grietas en sólidos y estructuras es importante para evaluar y mejorar la integridad estructural. En este capítulo se investiga la trayectoria de propagación de la grieta en modo mixto de fractura en FGMs.

Con este objetivo se desarrolla un modelo numérico mediante el X-FEM para reproducir la trayectoria de la grieta simulando las condiciones del ensayo experimental de Abanto-Bueno y Lambros [81]. Este trabajo es muy

apropiado para investigar la trayectoria de propagación de la fisura porque analiza las tres configuraciones características del modo mixto de carga en FGMs y registra la variación en el espacio de la resistencia a fractura. Esta última particularidad permite evaluar, por primera vez, la trascendencia de su consideración en el modelo numérico y las limitaciones existentes en la asunción de los criterios locales de fractura propios de materiales homogéneos en base a la homogeneización local en la punta de la grieta.

Los criterios de fractura característicos de los materiales homogéneos se pueden extender al estudio de FGMs siempre y cuando estos tengan un comportamiento idealmente frágil y elástico-lineal. Teniendo en cuenta la variación de la composición en el espacio intrínseca a la naturaleza de los FGMs, es improbable que sea posible diseñar un componente de FGMs que sea idealmente frágil en toda su extensión. Por consiguiente, la idoneidad de la asunción del modelo de homogeneización local en la punta de la grieta y su efecto sobre la trayectoria de la misma en una simulación numérica dependerá de numerosos factores, por lo que debe de ser objeto de un minucioso estudio.

El análisis de los resultados obtenidos numéricamente y su comparativa con los registrados por Abanto-Bueno y Lambros en su ensayo experimental [81] ofrece las siguientes conclusiones:

- El efecto del modo mixto de carga inducido por el gradiente de la variación de propiedades del material se mantiene a medida que la grieta avanza. Si las propiedades elásticas del material no varían en una dirección paralela a la propia de la propagación de la grieta en modo I de fractura, dicha variación influirá sobre el campo tensional en el extremo de la fisura y por consiguiente, afectará a la trayectoria de la misma. Como es obvio, este efecto será mayor cuanto más brusca sea la variación de las propiedades del material.
- La influencia de la variación en el espacio de la resistencia a fractura y de las propiedades elásticas es fuertemente dependiente de la con-

figuración analizada. El gradiente de la variación de las propiedades elásticas y de fallo del material tiene un efecto mayor sobre la trayectoria de la grieta cuando está posicionado perpendicular a la dirección de propagación característica en un material homogéneo. Esta influencia disminuye a medida que lo hace el valor del ángulo entre la dirección del gradiente y la dirección de propagación propia del primer modo de fractura, hasta el punto de ser inexistente cuando estas son paralelas.

- Cuando la inclinación del gradiente de variación de la resistencia a fractura y de las propiedades elásticas del material no es muy pronunciada, la simulación numérica de la trayectoria de la grieta en un FGM cuasi-frágil en base a criterios locales de fractura permite alcanzar un grado de exactitud razonable, evitando así el esfuerzo programador adicional que conllevaría implementar en el software de elementos finitos un criterio que tuviera en consideración la variación de la resistencia a fractura. Sin embargo, si se requiere una alta precisión en los cálculos o si la variación de la resistencia a fractura o las propiedades elásticas del material se produce de forma brusca, es necesario implementar un criterio de fractura que compare el campo tensional que rodea al extremo de la fisura con la variación local de las propiedades de fallo.

La adopción de estas consideraciones durante la simulación numérica de la propagación de la grieta en un FGM bajo el modo mixto de carga permitirá establecer una metodología que posibilite el cálculo con precisión de la trayectoria de la fisura.

Capítulo 7

Conclusiones y desarrollos futuros

7.1. Conclusiones

El objetivo de este trabajo investigador ha sido el de analizar y esclarecer problemas aún no resueltos de la mecánica de la fractura en FGMs. Para alcanzar esta meta se ha simulado numéricamente, mediante el método de los elementos finitos, el ensayo experimental de Abanto-Bueno y Lambros [81]. Éste es especialmente apropiado porque registra experimentalmente el proceso de fractura de las tres configuraciones características del modo mixto de fractura en FGMs.

El modelo numérico, una vez validado, se ha desarrollado con el objetivo de resolver diversas incógnitas del proceso de fractura de un material cuyas propiedades mecánicas varían de forma gradual. Los diferentes estudios realizados permiten extraer las siguientes conclusiones principales:

- Los parámetros que caracterizan el proceso de fractura en un FGM son muy sensibles a pequeñas variaciones en la aproximación numérica de los valores de las propiedades mecánicas locales en la punta de la grieta.

Pequeñas modificaciones del valor del dato experimental que caracteriza el entorno de la grieta han demostrado tener un efecto notable sobre los valores de los FITs y el término no singular del T -stress.

- La variación gradual de las propiedades del material tiene influencia por sí misma en los valores de los parámetros de fractura calculados. Se aprecia una notable sensibilidad en los FITs y el término no singular del T -stress ante ligeras disimilitudes entre las inclinaciones de las pendientes de diferentes funciones de ajuste, conteniendo todas ellas el dato experimental que caracteriza las propiedades mecánicas locales en la punta de la grieta.
- El criterio comúnmente empleado consistente en aproximar mediante una función polinomial la variación de propiedades del material de manera general no es apropiado para un problema de fractura en FGMs. En el ajuste de la variación de las propiedades elásticas del material deben primar una correcta aproximación del dato experimental que caracteriza las propiedades mecánicas locales en la punta de la grieta y una reproducción lo más precisa posible de la variación gradual de las propiedades en el entorno de la misma.
- Despreciar el efecto que la variación del coeficiente de Poisson tiene sobre los resultados, considerando un valor constante del mismo a lo largo de todo el espécimen, puede dar lugar a importantes imprecisiones en los cálculos. Este es el proceder mayoritario en problemas de fractura en FGMs independientemente de la configuración evaluada. Sin embargo, el hecho de que la parte más flexible del sólido pueda sufrir una contracción mayor que la parte más rígida cuando la carga tensional está aplicada paralelamente a la dirección del gradiente del material confiere una enorme importancia a la geometría estudiada.
- Independientemente de que el grado de relevancia asignado a la sensibilidad de los parámetros de fractura ante la variación del coeficiente

de Poisson obedezca a una interpretación subjetiva y al grado de precisión que requiera la simulación numérica correspondiente, los resultados obtenidos en este estudio permiten afirmar que, para el cálculo de los FITs con un nivel de exactitud razonable, la variación del coeficiente de Poisson debería de considerarse en todos los casos, salvo cuando la carga es perpendicular a la variación del material. Si el estudio realizado incluye el cálculo del término no singular del T -stress, la variación del coeficiente de Poisson debe considerarse independientemente de la geometría estudiada.

- El efecto del modo mixto de carga inducido por el gradiente de la variación de propiedades del material se mantiene a medida que la grieta avanza. Si las propiedades elásticas del material no varían en una dirección paralela a la propia de la propagación de la grieta en modo I de fractura, dicha variación influirá sobre el campo tensional en el extremo de la fisura y por consiguiente, afectará a la trayectoria de la misma. Como es obvio, este efecto será mayor cuanto más brusca sea la variación de las propiedades del material.
- La influencia de la variación en el espacio de la resistencia a fractura y de las propiedades elásticas es fuertemente dependiente de la configuración analizada. El gradiente de la variación de las propiedades elásticas y de fallo del material tiene un efecto mayor sobre la trayectoria de la grieta cuando está posicionado perpendicular a la dirección de propagación característica en un material homogéneo. Esta influencia disminuye a medida que lo hace el valor del ángulo entre la dirección del gradiente y la dirección de propagación propia del primer modo de fractura, hasta el punto de ser inexistente cuando estas son paralelas.
- Cuando la inclinación del gradiente de variación de la resistencia a fractura y de las propiedades elásticas del material no es muy pronunciada, la simulación numérica de la trayectoria de la grieta en un FGM cuasi-frágil en base a criterios locales de fractura permite alcanzar un

grado de exactitud razonable, evitando así el esfuerzo programador adicional que conllevaría implementar en el software de elementos finitos un criterio que tuviera en consideración la variación de la resistencia a fractura. Sin embargo, si se requiere una alta precisión en los cálculos o si la variación de la resistencia a fractura o las propiedades elásticas del material se produce de forma brusca, es necesario implementar un criterio de fractura que compare el campo tensional que rodea al extremo de la fisura con la variación local de las propiedades de fallo.

Las conclusiones extraídas de este trabajo ayudan notoriamente a establecer una metodología para la simulación numérica de procesos reales de fractura en FGMs. Así mismo, advierten de la incuestionable influencia de la variación del coeficiente de Poisson sobre los parámetros de fractura y la importancia de la configuración evaluada a tal efecto. Todo ello tiene una relación directa con la creciente implantación en la industria de los FGMs y la necesidad de caracterizar su integridad estructural.

7.2. Desarrollos futuros

Con la excepción del análisis de la propagación de la grieta, los estudios realizados en este trabajo son bastante concluyentes y no existe una extensión natural e inmediata de los mismos. En cambio, en el estudio de la trayectoria de la fisura sí se advierte una posible prolongación del mismo, y es que este tiene un obvio campo de mejora. Sin embargo, este desarrollo no es tan inmediato y lleva asociado una fuerte carga de programación. El objetivo sería, sin lugar a dudas, poder simular numéricamente el cambio de la resistencia a fractura con la posición.

Para alcanzar este fin habría que, en primer lugar, recurrir al uso de los elementos finitos graduales. Pues, a pesar de que los elementos finitos convencionales han demostrado ser útiles en el estudio de la fractura en los

FGMs [17], tienen sus limitaciones cuando se quiere reproducir de forma precisa la trayectoria a seguir por la grieta [76]. Para ello habría que programar una subrutina que permita reproducir la variación gradual de las propiedades del material dentro del propio elemento. En ABAQUS [86], el software empleado para el cálculo del MEF en este trabajo, se podría realizar a partir de una subrutina de usuario del tipo UMAT, programando mediante el lenguaje Fortran. Mientras que el segundo paso consistiría en implementar computacionalmente el cambio de las propiedades del daño del material en función de la posición. Esta segunda etapa podría realizarse sin necesidad de abandonar el marco de los X-FEM, el entorno más apropiado para simular numéricamente la propagación de la grieta. De esta manera se podría registrar la variación en el espacio de la resistencia a fractura del material y, por tanto, aumentaría la precisión del estudio de trayectoria de la fisura. Esto permitiría establecer una comparativa con los resultados obtenidos a partir de criterios locales de fractura, con el objetivo de ratificar las conclusiones extraídas en este estudio.

A pesar de que no parecen existir más prolongaciones del trabajo que estén estrechamente vinculadas con los estudios realizados, a medida que se han desarrollado los mismos se han vislumbrado diversos aspectos de interés en la mecánica de la fractura en FGMs que la comunidad investigadora aún no ha podido cubrir. Entre otras cosas, el cálculo del término no singular del T -stress en sólidos tri-dimensionales de FGMs es aún un problema sin solución. Y se podría afirmar que, en términos generales, el análisis del proceso de fractura en FGMs más allá del modelo plano y el comportamiento elástico lineal sigue presentando numerosas incógnitas pese al esfuerzo investigador desarrollado en los últimos años al respecto.

Además, durante el trabajo se planteó la posibilidad de utilizar un software de elementos finitos no comercial, de código abierto y con características especiales para FGMs, como el WARP3D [78]. Sin embargo, la imposibilidad de reproducir en dicho programa las condiciones de tensión plana des-

cartó automáticamente el uso del mismo. Pero el código es muy interesante en sí mismo, pues no solo incluye la variación gradual de las propiedades a nivel del elemento mediante la implementación de un elemento finito isoparamétrico sino que también incorpora el término no homogéneo de la integral J que permite mantener su independencia del dominio. Se sugiere entonces como muy interesante una comparativa con un software comercial de elementos finitos, como ABAQUS [86]. Pues, aunque las prestaciones de los elementos finitos graduales ya han sido confrontadas con las de los elementos finitos convencionales [77] y contrastes similares se han llevado a cabo entre la integral J estándar y la integral J^* de un material no homogéneo [16], la mejoría que conlleva la implementación conjunta de estas prestaciones nunca ha sido examinada.

En cualquier caso, el proceso de fractura en FGMs dista mucho de ser un campo de investigación desarrollado en su integridad y por consiguiente, existen muchas líneas de investigación abiertas que gozan de especial interés.

Bibliografía

- [1] S. Uemura. The activities of FGM on New Application. *Materials Science Forum*, 423-425:1–10, 2003.
- [2] X. Long and F. Delale. The mixed mode crack problem in an FGM layer bonded to a homogeneous half-plane. *International Journal of Solids and Structures*, 42:3897–3917, 2005.
- [3] F. Watari, A. Yokoyama, F. Saso, M. Uo, S. Ohkawa, and T. Kawasaki. EPMA elemental mapping of functionally graded dental implant in biocompatibility test. In *Proceedings of the Fourth International Symposium on Functionally Graded Materials*, 1996.
- [4] H. Oonishi, T. Noda, S. Ito, A. Kohda, H. Yamamoto, and E. Tsuji. Effect of hydroxyapatitecoating on bonegrowth into porous Titanium alloy implants under loaded conditions. *Journal of Applied Biomaterials*, 5(1):23–27, 1994.
- [5] Y.-D. Lee and F. Erdogan. Residual/thermal stresses in FGM and laminated thermal barrier coatings. *International Journal of Fracture*, 69:145–165, 1995.
- [6] A. Kawasaki and R. Watanabe. Thermal fracture behavior of metal/ceramic functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:1713–1728, 2002.

- [7] Ali O. Ayhan. Stress intensity factors for three-dimensional cracks in functionally graded materials using enriched finite elements. *International Journal of Solids and Structures*, 44:8579–8599, 2007.
- [8] G. Bao and L. Wang. Multiple Cracking in Functionally Graded Ceramic/Metal Coatings. *International Journal of Solids and Structures*, 32(19):2853–2871, 1995.
- [9] M. Yamanouchi, M. Koizumi, T. Hirai, and Shiota. Proceeding of the first International Symposium on Functionally Gradient Materials. In *Sendai, Japan*, 1990.
- [10] J.B. Holt, M. Koizumi, T. Hirai, and Munir. Ceramic Transactions: Functionally Gradient Materials. *Journal of the American Ceramic Society*, 34, 1993.
- [11] K. Wakashima and H. Tsukamoto. Mean Field Micromechanics Model and Its Application to the Analysis of Thermomechanical Behaviour of Composite Materials. *Materials Science Engineering A*, 146:291–316, 1991.
- [12] T. Mura. Micromechanics of Defects in Solids. *Martinus Nijhoff Publishers*, 1982.
- [13] K. Tohgo and T. W. Chou. Incremental Theory of Particulate-Reinforced Composites Including Debonding Damage. *JSME International Journal Series A: Solids Mechanics and Material Engineering*, 39(3):389–397, 1996.
- [14] K. Tohgo and G. J. Weng. A Progressive Damage Mechanics in Particle-Reinforced Metal-Matrix Composites under High Triaxial Tension. *Journal Engineering Materials and Technology*, 116:414–420, 1994.
- [15] J. W. Eischen. Fracture of Non-Homogeneous Materials. *International Journal of Fracture*, 34(1):3–22, 1987.

- [16] P. Gu, M. Dao, and R. J. Asaro. A Simplified Method for Calculating the Crack-Tip Field of Functionally Graded Materials Using the Domain Integral. *Journal of Applied Mechanics*, 34(1):1–17, 1997.
- [17] G. Anlas, M. H. Santare, and J. Lambros. Numerical Calculation of Stress Intensity Factors in Functionally Graded Materials. *International Journal of Fracture*, 104(2):131–143, 2000.
- [18] P. R. Marur and H. V. Tippur. Numerical Analysis of Crack-Tip Fields in Functionally Graded Materials With a Crack Normal to the Elastic Gradient. *International Journal of Solids and Structures*, 37(38):5353–5370, 2000.
- [19] G. Bao and H. Cai. Delamination Cracking in Functionally Graded Coating/Metal Substrate Systems. *Acta Mechanica*, 45(3):1055–1066, 1997.
- [20] J.-H. Kim and G. H. Paulino. Finite Element Evaluation of Mixed-Mode Stress Intensity Factors in Functionally Graded Materials. *International Journal of Numerical Methods for Engineering*, 53(8):1903–1935, 2002.
- [21] J. Dolbow and M. Gosz. On the computation of mixed-mode stress intensity factors in functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 39(9):2557–2574, 2002.
- [22] B. N. Rao and S. Rahman. Mesh-free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(1):1–27, 2003.
- [23] F. Delale and F. Erdogan. The crack problem for a nonhomogeneous plane. *Journal of Applied Mechanics*, 50(3):609–614, 1983.
- [24] ML Williams. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, 24:109–114, 1957.

- [25] J. Eftis, N. Subramonian, and H. Liebowitz. Crack border stress and displacement equations revisited. *Engineering Fracture Mechanics*, 9(1):189–210, 1977.
- [26] V. Parameswaran and A. Shukla. Asymptotic stress fields for stationary cracks along the gradient in functionally graded materials. *Journal of Applied Mechanics*, 69(3):240–243, 2002.
- [27] VB Chalivendra, A. Shukla, and V. Parameswaran. Quasi-static stress fields for a crack inclined to the property gradation in functionally graded materials. *Acta Mechanica*, 162(1-4):167–184, 2003.
- [28] N. Jain, CE Rousseau, and A. Shukla. Crack-tip stress fields in functionally graded materials with linearly varying properties. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 42(2):155–170, 2004.
- [29] VB Chalivendra. Mode-I crack-tip stress fields for inhomogeneous orthotropic medium. *Mechanics of Materials*, 40(4-5):293–301, 2008.
- [30] VB Chalivendra. Mixed-mode crack-tip stress fields for orthotropic functionally graded materials. *Acta Mechanica*, 204(1-2):51–60, 2009.
- [31] S. Krenk. Elastic-constants of plane orthotropic elasticity. *Journal of Composite Materials*, 13:108–116, 1979.
- [32] V. Parameswaran and A. Shukla. Crack-tip stress fields for dynamic fracture in functionally gradient materials. *Mechanics of Materials*, 31(9):579–596, 1999.
- [33] VB Chalivendra, A. Shukla, and V. Parameswaran. Dynamic out of plane displacement fields for an inclined crack in graded materials. *Journal of Elasticity*, 69(1-3):99–119, 2002.
- [34] A. Shukla and N. Jain. Dynamic damage growth in particle reinforced graded materials. *International Journal of Impact Engineering*, 30(7):777–803, 2004.

- [35] KH Lee. Characteristics of a crack propagating along the gradient in functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 41(11-12):2879–2898, 2004.
- [36] N. Jain and A. Shukla. Displacements, strains and stresses associated with propagating cracks in materials with continuously varying properties. *Acta Mechanica*, 171(1-2):75–103, 2004.
- [37] VB Chalivendra and A. Shukla. Transient elastodynamic crack growth in functionally graded materials. *Journal of Applied Mechanics*, 72(2):237–248, 2005.
- [38] VB Chalivendra. Asymptotic analysis of transient curved crack in functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 44(2):465–479, 2007.
- [39] KH Lee, VB Chalivendra, and A. Shukla. Dynamic crack-tip stress and displacement fields under thermomechanical loading in functionally graded materials. *Journal of Applied Mechanics*, 75(5):1–7, 2008.
- [40] F. Erdogan and BH Wu. The surface crack problem for a plate with functionally graded properties. *Journal of Applied Mechanics*, 64(5):49–53, 1997.
- [41] F. Erdogan. The crack problem for bonded nonhomogeneous materials under antiplane shear loading. *Journal of Applied Mechanics*, 52(4):823–828, 1985.
- [42] F. Erdogan, AC Kaya, and PF Joseph. The mode-III crack problem in bonded materials with a nonhomogeneous interfacial zone. *Journal of Applied Mechanics*, 58(2):419–427, 1991.
- [43] M. Ozturk and F. Erdogan. An axisymmetrical crack in bonded materials with a nonhomogeneous interfacial zone under torsion. *Journal of Applied Mechanics*, 62(1):116–125, 1995.

- [44] YS Chan, GH Paulino, and AC Fannjiang. The crack problem for a nonhomogeneous materials under antiplane shear loading - a displacement based formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 38(17):2989–3005, 2001.
- [45] BL Wang, YW Mai, and N. Noda. Fracture mechanics analysis models for functionally graded materials with arbitrarily distributed properties (modes II and III problems). *International Journal of Fracture*, 126(4):307–320, 2004.
- [46] GH Paulino, AC Fannjiang, and YS Chan. Gradient elasticity theory for mode III fracture in functionally graded materials-part I: crack perpendicular to the material gradation. *Journal of Applied Mechanics*, 70(4):531–542, 2003.
- [47] YS Chan, GH Paulino, and AC Fannjiang. Gradient elasticity theory for mode III fracture in functionally graded materials-part II: crack parallel to the material gradation. *Journal of Applied Mechanics*, 70(4):531–542, 2003.
- [48] DV Kubair, PH Geubelle, and J Lambros. Asymptotic analysis of a mode III stationary crack in a ductile functionally graded material. *Journal of Applied Mechanics*, 72(4):461–467, 2005.
- [49] F. Erdogan and G.C. Sih. On the Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear. *Journal of Basic Engineering*, 85(4):519–525, 1963.
- [50] B. Cotterell. On the Brittle Fracture Paths. *International Journal of Fracture Mechanics*, 1(2):96–103, 1965.
- [51] M.-Y. He and J.W. Hutchinson. Kinking of a Crack out of an Interface. *Journal of Applied Mechanics*, 56(2):270–278, 1989.
- [52] G.C. Sih. Strain-Energy-Density Factor applied to Mixed Mode Crack Problems. *International Journal of Fracture*, 10(3):305–321, 1974.

- [53] N. Konda and F. Erdogan. The Mixed Mode Crack Problem in a Nonhomogeneous Elastic Medium. *Engineering Fracture Mechanics*, 47(4):533–545, 1994.
- [54] P. Gu and R.J. Asaro. Crack Deflection in functionally Graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 34(24):3085–3098, 1997.
- [55] P. Gu and R.J. Asaro. Cracks in Functionally Graded Materials. *International Journal of Solids and Structures*, 34(1):1–17, 1997.
- [56] J.F. Yau, S.S. Wang, and H.T. Corten. A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 47(2):335–341, 1980.
- [57] S.S. Wang, H.T. Corten, and J.F. Yau. Mixed-mode crack analysis of rectilinear anisotropic solids using conservation laws of elasticity. *International Journal of Fracture*, 16(3):247–259, 1980.
- [58] J.F. Yau. *Mixed-mode fracture analysis using a conservation integral*. PhD thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1979.
- [59] T. L. Becker Jr., Cannon R.M., and R.O. Ritchie. Finite Crack Kinking and T-Stresses in Functionally Graded Materials. *International Journal of Solids and Structures*, 38(32-33):5545–5563, 2001.
- [60] J.-H. Kim and G.H. Paulino. T-Stress, Mixed-Mode Stress Intensity Factors, and Crack Initiation Angles in Functionally Graded Materials: A Unified Approach using the Interaction Integral Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(11-12):1463–1494, 2003.
- [61] J.G. Williams and P.D. Edwing. Fracture under complex stress - the angled crack problem. *International Journal of Fracture*, 8(4):416–441, 1972.

- [62] Y. Ueda, K. Ikeda, T. Yao, and M. Aoki. Characteristics of brittle failure under general combined modes including those under bi-axial tensile loads. *Engineering Fracture Mechanics*, 18(6):1131–1158, 1983.
- [63] B. Cotterell and J. R. Rice. Slightly curved or kinked cracks. *International Journal of Fracture*, 16(2):155–169, 1980.
- [64] D.J. Smith, M.R. Ayatollahi, and M.J. Pavier. The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading. *Fatigue and Fracture Engineering Materials and Structures*, 24(2):137–150, 2001.
- [65] S.G. Larsson and A. J. Carlson. Influence of non-singular stress terms and specime geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 21(4):263–277, 1973.
- [66] G.E. Cardew, M.R. Goldthorpe, I.C. Howard, and A.P. Kfourri. On the elastic T-term. In *Fundamentals of Deformation and Fracture: Eshelby Memorial Symposium*, 1985.
- [67] A.P. Kfourri. Some evaluations of the elastic T-term using Eshelby’s method. *International Journal of Fracture*, 30(4):301–315, 1986.
- [68] J. Sladek, V. Sladek, and P. Fedelinski. Contour integrals for mixed-mode crack analysis: effect of nonsingular terms. *Theoretical Applied Fracture Mechanics*, 27(2):115–127, 1997.
- [69] C.S. Chen, R. Krause, R.G. Pettit, L. Bank-Sills, and A.R. Ingraffea. Numerical assessment of T-stress computation using a p-version finite element method. *International Journal of Fracture*, 107(2):177–199, 2001.
- [70] E.M. Carrillo-Heian, R.D. Carpenter, G.H. Paulino, J.C. Gibeling, and Z.A. Munir. Dense layered molybdenum disilicide-silicon carbide fun-

- tionally graded composites formed by field-activated synthesis. *Journal of the American Ceramic Society*, 84(5):962–968, 2001.
- [71] Z.-H. Jin and G.H. Paulino. Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally graded material. *Internatioanl Journal of Fracture*, 107(1):73–98, 2001.
- [72] S. Kosker, S. Dag, and B. Yildirim. Three Dimensional Modeling of Inclined Surface Cracks in FGM Coatings. *Materials Science Forum*, 631-632:109–114, 2010.
- [73] Mohammad R. Torshizian, Mohammad H. Kargarnovin, and Cyrus Nasirai. Mode III fracture of an arbitrary oriented crack in two dimensional functionally graded material. *Mechanics Research Communications*, 38:164–169, 2011.
- [74] Ozgur Inan, Serkan Dag, and Fazil Erdogan. Three Dimensional Fracture Analysis of FGM Coatings. *Materials Science Forum*, 492-493:373–378, 2005.
- [75] C.-E. Rousseau and H.V. Tippur. Compositionally graded materials with cracks normal to the elastic gradient. *Acta Materialia*, 48:4021–4033, 2000.
- [76] M.H. Santare and J. Lambros. Use of Graded Finite Elements to Model the Behavior of Nonhomogeneous Materials. *Journal of Applied Mechanics*, 67:819–822, 2000.
- [77] J.-H. Kim and G. H. Paulino. Isoparametric Graded Finite Elements for Nonhomogeneous Isotropic and Orthotropic Materials. *Journal of Applied Mechanics*, 69:502–514, 2002.
- [78] WARP3D-Release 17.2. *Civil Engineering, Univ. of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Ill.*, 2012.

- [79] FGM-FRANC2D 2010, J.H. Kim. *Civil and Environmental Engineering, University of Connecticut*, 2010.
- [80] FRacture ANalysis Code 2D. *PA Wawryznek, Cornell University*, 1987.
- [81] J. Abanto-Bueno and J. Lambros. An Experimental Study of Mixed Mode Crack Initiation and Growth in Functionally Graded Materials. *Experimental Mechanics*, 46:179–196, 2006.
- [82] AL Andrady. Weathering of polyethylene (LPDE) and enhanced photo-degradable polyethylene in the marine environment. *Journal of Applied Polymer Science*, 39(2):363–370, 1990.
- [83] J. Lambros, MH Santare, H Li, and GH Sapna. A novel technique for the fabrication of laboratory scale model functionally graded materials. *Experimental Mechanics*, 39(3):184–190, 1999.
- [84] E. Ivanova, A. Chudnovsky, S. Wu, K. Sehanobish, and CP Bosnyak. A new experimental technique for modeling of a micro-heterogeneous media. *Experimental Techniques*, 20(6):11–13, 1996.
- [85] H. Li, J. Lambros, BA Cheeseman, and MH Santare. Experimental investigation of the quasi-static fracture of functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 37(27):3715–3732, 2000.
- [86] ABAQUS 6.11. *Hibbit and Karlsson and Sorensen Inc. Pawtucket*, 2011.
- [87] RS Barsoum. Application of Quadratic Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics. *International Journal of Fracture*, 10:603–605, 1974.
- [88] RD Hensell and KG Shaw. Crack tip finite elements are unnecessary. *International Journal of Fracture*, 9:495–507, 1975.

- [89] M.C. Walters, GH Paulino, and R.H. Dodds Jr. Stress Intensity Factors for Surface Cracks in Functionally Graded Materials Under Mode-I Thermomechanical Loading. *International Journal of Solids and Structures*, 41:1081–1118, 2004.
- [90] J. Abanto-Bueno and J. Lambros. Investigation of crack growth in functionally graded materials using digital image correlation. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:1695–1711, 2002.
- [91] ABAQUS 6.11 Theory Manual. *2.16.2 Stress intensity factor extraction*. Hibbit, Karlsson and Sorensen Inc. Pawtucket, 2011.
- [92] ABAQUS 6.11 Theory Manual. *2.16.3 T-stress extraction*. Hibbit, Karlsson and Sorensen Inc. Pawtucket, 2011.
- [93] A. Oral, J. Lambros, and G. Anlas. Crack Initiation in Functionally Graded Materials Under Mixed Mode Loading: Experiments and Simulations. *Journal of Applied Mechanics*, 75, 2008.
- [94] A. Oral, J. L. Abanto-Bueno, J. Lambros, and G. Anlas. Crack Initiation Angles in Functionally Graded Materials under Mixed Mode Loading. In *AIP Conference Proceedings*, volume 973, 2008.
- [95] H. Domininghaus. *Plastics for Engineers: Materials, Properties and Applications*. Hanser, Munich, 1993.
- [96] J.-H. Kim. *Mixed-mode crack propagation in functionally graded materials*. PhD thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2003.
- [97] ABAQUS 6.11 Analysis User’s Manual. *11.4.2 Contour integral evaluation - The crack propagation direction*. Hibbit, Karlsson and Sorensen Inc. Pawtucket, 2011.
- [98] MATLAB 7.10 (R2010a). *Mathworks*, 2010.
- [99] T. L. Anderson. *Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications*. 3rd Ed., Taylor and Francis CRC Press, 2005.

- [100] H. Tada, P.C. Paris, and G.R. Irwin. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. 2nd Ed., Paris Productions, St. Louis, 1985.
- [101] Y. Murakami. *Stress Intensity Factors Handbook*. Pergamon Press, New York, 1987.
- [102] GH Paulino and J.H. Kim. On the Poisson's ratio effect on mixed-mode stress intensity factors and T-stress in functionally graded materials. *International Journal of Computational Engineering Science*, 5(4):833–861, 2004.
- [103] L. Ortiz Berrocal. *Elasticidad*. McGraw-Hill, 1998.
- [104] F. Erdogan. Fracture mechanics of functionally graded materials. *Composites Engineering*, 5(7):753–770, 1995.
- [105] V. Parameswaran and A. Shukla. Processing and characterization of a model functionally gradient material. *Journal of Materials Science*, 35:21–29, 2000.
- [106] ZH Jin and N. Noda. Crack-tip singular fields in nonhomogeneous materials. *Journal of Applied Mechanics*, 61:738–740, 1994.
- [107] S.-H. Chi and Y.-L. Chung. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load — Part II: Numerical results. *International Journal of Solids and Structures*, 43:3675–3691, 2006.
- [108] F. Galvez Díaz-Rubio. *Caracterización mecánica de materiales cerámicos avanzados a altas velocidades de deformación*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Madrid, 1999.
- [109] A. Kawasaki and R. Watanabe. Finite element analysis of thermal stress of the metal/ceramic multi-layer composites with compositional gradients. *Journal of Japan Institute of Metals*, 51:525–529, 1987.

- [110] CY Lin, HB McShane, and RD Rawlings. Structure and properties of functionally gradient aluminium alloy 2124/SiC composites. *Journal of Materials Science and Technology*, 10(7):659–664, 1994.
- [111] RD Carpenter, WW Liang, GH Paulino, JC Gibeling, and ZA Munir. Fracture testing and analysis of a layered functionally graded Ti/TiB beam in 3-point bending. *Materials Science Forum*, 308-311:837–842, 1999.
- [112] J. Lambros, BA Cheeseman, and MH Santare. Experimental investigation of the quasi-static fracture of functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 37(27):3715–3732, 2000.
- [113] Z-H. Jin, GH Paulino, and RH Dodds Jr. Finite element investigation of quasi-static crack growth in functionally graded materials using a novel cohesive zone fracture model. *Journal of Applied Mechanics*, 69(3):370–379, 2002.
- [114] Z-H. Jin, GH Paulino, and RH Dodds Jr. Simulation of crack propagation in functionally graded materials under mixed-mode and non-proportional loading. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 1:63–94, 2004.
- [115] Z. Wang and T. Nakamura. Simulations of crack propagation in elastic-plastic graded materials. *Mechanics of Materials*, 36:601–622, 2004.
- [116] MT Tilbrook, RJ Moon, and M Hoffman. Crack propagation in graded composites. *Composites Science and Technology*, 65:201–220, 2005.
- [117] MT Tilbrook, RJ Moon, and M Hoffman. Finite element simulations of crack propagation in functionally graded materials under flexural loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 18(6):1131–1158, 2005.
- [118] Z. Zhang and GH Paulino. Cohesive zone modeling of dynamic failure in homogeneous and functionally graded materials. *International Journal of Plasticity*, 21:1154–1195, 2005.

- [119] C. Comi and S. Mariani. Extended finite element simulation of quasi-brittle fracture in functionally graded materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(41-44):4013–4026, 2007.
- [120] L. Ma, Z-Y. Wang, and L-Z. Wu. Numerical Simulation of Mixed-mode Crack Propagation in Functionally Graded Materials. *Materials Science Forum*, 631-632:121–126, 2010.
- [121] G. Anandakumar and J-H. Kim. A thermomechanical fracture modeling and simulation for functionally graded solids using a residual-strain formulation. *International Journal of Fracture*, 164:31–55, 2010.
- [122] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1):133–150, 1999.
- [123] S. Bordas. *XFEM - The Extended Finite Element Method*. John Wiley and Sons (October 2012), 2012.
- [124] I. Babuska and J. Melenk. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 4:607–632, 1997.
- [125] ABAQUS 6.11 Analysis User’s Manual. *10.7.1 Modeling discontinuities as an enriched feature using the extended finite element method*. Hibbit, Karlsson and Sorensen Inc. Pawtucket, 2011.
- [126] J.H. Song, P.M.A. Areias, and T.Belytschko. A Method for Dynamic Crack and Shear Band Propagation with Phantom Nodes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67:868–893, 2006.
- [127] J.J.C. Remmers, R. de Borst, and A. Needleman. The simulation of Dynamic Crack Propagation using the Cohesive Segments Method. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56:70–92, 2008.
- [128] David. Y. Gao and Ray W. Ogden. *Advances in Mechanics and Mathematics. Volume II*. Kluwer Academic Publishers, 2003.

- [129] Z.H. Jin and R.C. Batra. Some basic fracture mechanics concepts in functionally graded materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44:1221–35, 1996.
- [130] G. Anlas, J. Lambros, and MH Santare. Dominance of asymptotic crack tip fields in elastic functionally graded materials. *International Journal of Fracture*, 115:193–204, 2002.
- [131] ABAQUS 6.11 Analysis User’s Manual. *11.4.2 Contour integral evaluation*. Hibbit, Karlsson and Sorensen Inc. Pawtucket, 2011.