# Semigrupos afines

TESIS DOCTORAL

Pedro A. García Sánchez

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA
UNIVERSIDAD DE GRANADA
GRANADA (ESPAÑA)

Mayo 1996

# Semigrupos afines

por

Pedro A. García Sánchez

Memoria realizada en el Departamento de Álgebra de la Universidad de Granada, bajo la dirección del Profesor Dr. José Carlos Rosales González, profesor titular de dicho departamento, para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada.

V.B. Director

Aspirante

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento al Director de esta Memoria, José Carlos Rosales, por su inestimable ayuda y enseñanzas recibidas a lo largo de estos últimos años.

Igualmente desearía expresar mi agradecimiento a mis padres que han hecho posible que no tenga que preocuparme de problemas mundanos a la hora de realizar esta memoria.

Agradezco, además, a Mercedes García Gamero su insistencia para que realizase esta Memoria, así como su apoyo moral a lo largo de estos últimos años, que sin duda alguna ha hecho más agradable mi trabajo.

# Índice general

# Introducción

Un semigrupo afín es un subsemigrupo finitamente generado de $\mathbb{N}^k$ para algún $k$. El estudio de semigrupos afines surge de forma natural cuando se estudian las soluciones positivas de un sistema de ecuaciones con coeficientes enteros. Los semigrupos afines han tenido, a partir de los años 60, un resurgimiento debido en parte a la Geometría Algebraica. Esto es debido a que dado un semigrupo afín contenido en $\mathbb{N}^k$, se puede considerar el subanillo de $K[t_1,\ldots,t_k]$ generado por los elementos de la forma $t^s = t_1^{s_1}\cdots t_k^{s_k}$. Este anillo es isomorfo al anillo de semigrupo $K[S]$. De esta forma, salvo isomorfismos, existe una correspondencia biyectiva entre semigrupos afines y variedades afines que vienen parametrizadas por conjuntos finitos de monomios. Uno de los primeros en tratar esta equivalencia fue Herzog en [19], que demostró la equivalencia entre dar la presentación de un semigrupo y un sistema de generadores del ideal asociado a la variedad antes mencionada (dichos ideales son ideales binomiales; un estudio bastante amplio de estos ideales se puede encontrar en [40]). Más tarde Kunz, en 1970, demostró que si el semigrupo de valores de un anillo local noetheriano con $\mathrm{Spec}(A) = \{0, m\}$ es simétrico, entonces el anillo es Gorenstein. Decir además que el primer ejemplo de anillo que no es Cohen-Macaulay, dado por el propio Macaulay a principios de siglo, fue $K[t_1^4, t_1^3t_2, t_1t_2^3, t_2^4]$ ([24]) y que, analizando este ejemplo, Gröbner ([18]) propuso el problema de clasificación de los anillos generados por monomios del mismo grado respecto de su "Cohen-Macaulayneidad" (aparte de este problema, Gröbner propuso otros problemas, uno de los cuales fue a su alumno Buchberger, y que dio lugar a las bases de Gröbner).

Empezó así una línea de investigación que trataba de caracterizar la propiedad del anillo de semigrupo de ser Cohen-Macaulay en términos del propio semigrupo. El primer paso dado en esta línea se debe a Hochster, que estudió este problema para semigrupos normales (su anillo de semigrupo es íntegramente cerrado). Su estudio fue aprovechado más adelante por Goto, Suzuki y Watanabe para estudiar el problema sin poner la restricción de ser normal, llegando a dar una caracterización primero para semigrupos afines simpliciales ([15]) y luego para semigrupos afines en general ([16]). La caracterización dada por Goto y Watanabe en [16], se basa en dar una extensión $S'$ del semigrupo $S$ de forma que $S' = S$ equivale a que el anillo de semigrupo $K[S]$ sea Cohen-Macaulay. Más adelante, Trung y Hoa ([41]), demostraron que esa condición no era suficiente, y que por tanto el trabajo de Goto y Watanabe era incorrecto. Ellos demostraron que tal condición era necesaria, pero no suficiente, hacía falta imponer una segunda condición topológica a un complejo simplicial asociado al semigrupo para tener la equivalencia. Dicha condición es trivial en el caso de semigrupos afines simpliciales, por lo que la caracterización dada por Goto, Suzuki y Watanabe es correcta para el caso simplicial. Por esta misma línea continuó el trabajo de Schäfer y Schenzel ([35]). Este trabajo y otros como el de Stanley ([36], [37]) versan sobre el estudio de la homología del complejo asociado al cono generado por el semigrupo.

Nuestro principal objetivo a la hora de realizar la presente memoria fue el de proporcionar herramientas efectivas que permitan determinar propiedades del anillo de semigrupo en función del semigrupo. El problema de la caracterización dada por Goto, Suzuki, Watanabe, Trung, Hoa, etc. es que no es algorítmicamente comprobable. Desde el punto de vista teórico es importante saber qué propiedades del anillo de semigrupo se pueden estudiar a partir de propiedades del semigrupo en sí. Nuestra preocupación se centró en el hecho de que dado un ejemplo de anillo de semigrupo afín, cómo se puede determinar realmente si dicho anillo es Cohen-Macaulay, Gorenstein o intersección completa. Más aún, cómo podemos encontrar un sistema de generadores minimal para el ideal asociado a la variedad (problema equivalente a encontrar una presentación del semigrupo). Es más, hasta ahora no había forma de determinar si dada una variedad de este tipo en función de su ideal asociado, ésta era o no una variedad afín parametrizada por monomios. Ese fue otro de los problemas a resolver, el cual se traduce en determinar si un semigrupo dado por una presentación es o no afín.

Los contenidos de esta memoria se organizan de la siguiente forma:

En el capítulo cero, damos los conceptos necesarios para comprender el resto de la memoria.

En el primer capítulo, resolvemos el problema de encontrar una presentación minimal para un semigrupo afín dado. Como antes dijimos, esto se traduce en encontrar un sistema de generadores minimal para el ideal asociado a la variedad. Hasta la fecha, este problema se podía "resolver" usando el algoritmo de implicitación (véase por ejemplo [9] y [11]). El problema que entraña usar ese algoritmo es que hace uso de bases de Gröbner, y por tanto su complejidad es doblemente exponencial. Un segundo problema relacionado con el algoritmo de implicitación radica en que tal algoritmo devuelve una base de Gröbner, y no un sistema minimal de generadores del ideal. Esto impide saber directamente el número de generadores de un sistema minimal de generadores del ideal, y por tanto saber si el semigrupo es intersección completa. El algoritmo que exponemos en el primer capítulo es una generalización del algoritmo dado por Rosales en [28] y en su tesis para semigrupos numéricos, y se basa en asociar a cada elemento del semigrupo un grafo, de forma que los grafos no conexos proporcionan generadores del ideal (o visto desde el punto de vista semigrupista, relatores del semigrupo). La ventaja de nuestro algoritmo, es que proporciona un sistema minimal de generadores, y no sólo eso, estudiando los grafos, obtenemos todos los posibles sistemas minimales de generadores del ideal. Además, la complejidad de este algoritmo es simplemente exponencial, lo que supone una mejora sobre el uso de bases de Gröbner. Otro de los puntos tratados, en el primer capítulo, es el de proporcionar una cota para el mínimo número de relatores para un semigrupo afín. Bresinski, en [4], demuestra que dicha cota no puede depender exclusivamente del número de generadores del semigrupo. La cota que obtenemos depende de los generadores del semigrupo, así como de la diferencia entre el número de generadores y la dimensión del semigrupo.

En el segundo capítulo, nos preocupamos de resolver el problema inverso. Dada una presentación del semigrupo, cómo podemos saber si el semigrupo es un semigrupo afín, y en caso afirmativo, cómo podemos calcular un semigrupo isomorfo a él que esté contenido en $\mathbb{N}^k$ para algún $k$. Desde el punto de vista de la Geometría Algebraica, este problema viene a traducirse en, dado un ideal generado por binomios (y que es radical), cómo se puede saber si la variedad asociada al ideal viene parametrizada por monomios con coeficientes en $\mathbb{N}^k$. Esto implica, entre otras cosas, que el anillo de la variedad sea un dominio de integridad (teorema 8.1 de [14]). Este problema lo resolvemos usando que un semigrupo es afín si y sólo si es cancelativo, libre de unidades y sin torsión. Estudiamos primero cuando un semigrupo es libre de unidades, cosa que podemos estudiar mirando una base de Gröbner del ideal. Luego estudiamos cuando, siendo libre de unidades, es cancelativo y libre de torsión. Por último, obtenemos un semigrupo de $\mathbb{N}^k$ para cierto $k$ que es isomorfo al semigrupo de partida (en el caso en que sea afín).

En el tercer capítulo, resolvemos el problema de determinar cuándo un semigrupo afín y simplicial es Cohen-Macaulay. Un semigrupo es simplicial si su cono asociado está generado por tantos rayos extremales como dimensión tiene el semigrupo. Damos un método algorítmico para determinar si un semigrupo afín simplicial dado es o no Cohen-Macaulay. El método se basa en ver si los elementos de la intersección de los conjuntos de Apéry asociados a los rayos extremales del semigrupo verifican que sus diferencias no se encuentran en el grupo generado por dichos rayos extremales. La intersección de dichos conjuntos es calculable, y la condición de que un elemento esté o no en un grupo también lo es. Esto hace que el método se pueda usar en la práctica. Este método surgió, por raro que parezca, debido a la gran similitud entre los semigrupos numéricos y los semigrupos Cohen-Macaulay simpliciales. Observamos que todo elemento se podía expresar de forma única como una combinación de los rayos extremales del semigrupo sumado con un elemento de la intersección de los conjuntos de Apéry de los rayos extremales. Lo mismo ocurre en semigrupos numéricos: todo elemento se puede poner como combinación de un rayo extremal (cualquier generador) más un elemento del conjunto de Apéry de dicho generador. De hecho, pudimos demostrar que esta unicidad, en la escritura de los elementos del semigrupo, es condición necesaria y suficiente para que el semigrupo sea Cohen-Macaulay. Para los semigrupos afines simpliciales que son Cohen-Macaulay, demostramos que la cota dada para el mínimo número de relatores del semigrupo es menor que la cota que obtuvimos en el primer capítulo para semigrupos afines en general. Finalizamos este tercer capítulo haciendo un estudio de los semigrupos Cohen-Macaulay de máxima codimensión generalizando así los MED-semigrupos estudiados por Rosales en [29]. Este tipo de semigrupos alcanzan la cota antes mencionada.

En el cuarto capítulo, se resuelve el problema de determinar si un semigrupo afín, simplicial y Cohen-Macaulay es Gorenstein. Al igual que antes, pensábamos que tenía que existir una fuerte relación entre semigrupos numéricos simétricos y semigrupos afines simpliciales Gorenstein. La caracterización para semigrupos numéricos es la siguiente: el semigrupo es simétrico si y sólo si el conjunto de Apéry de un elemento del semigrupo tiene máximo respecto del orden inducido por la suma en el semigrupo. Por tanto, intentamos ver si la intersección de los conjuntos de Apéry de los rayos extremales del semigrupo tenía o no máximo. La respuesta fue afirmativa, y este hecho caracteriza a los semigrupos afines simpliciales y Gorenstein. Determinar si un conjunto conocido tiene o no un único elemento maximal es siempre posible, por lo que tenemos una forma efectiva de calcular si un semigrupo dado es Cohen-Macaulay y si además es Gorenstein. Al igual que en el caso Cohen-Macaulay, demostramos que, para el caso Gorenstein, la cota para el mínimo número de relatores del semigrupo es mejorable sobre el caso general e incluso sobre el caso Cohen-Macaulay. Hacemos además un estudio de los semigrupos afines simpliciales y Gorenstein de máxima codimensión, generalizando el estudio hecho por Rosales sobre los MEDSY-semigrupos en [30].

En el quinto capítulo, introducimos el concepto de pegada de semigrupos afines. Un semigrupo afín es pegada de dos subsemigrupos suyos si el sistema minimal de generadores del semigrupo se puede dividir en dos conjuntos, de forma que cada uno genera a los dos subsemigrupos y verificando que el conjunto de relatores del semigrupo se divide en tres clases: la primera relaciona sólo elementos del primer conjunto, la segunda del segundo conjunto, y la tercera, compuesta por un único relator que relaciona elementos del primer conjunto con los del segundo. Damos además un método algorítmico de comprobar si un semigrupo es o no pegada de dos subsemigrupos suyos. El concepto de pegada de semigrupos afines es crucial para el desarrollo de los capítulos sexto y séptimo.

En el sexto capítulo, estudiamos los semigrupos afines que son intersección completa. Generalizamos el resultado dado por Delorme en [10] para semigrupos numéricos. Con los resultados expuestos en ese capítulo, llegamos a la conclusión de que un semigrupo afín es intersección completa si y sólo si es pegada de dos subsemigrupos suyos que son intersección completa. Los casos estudiados son el simplicial y los semigrupos de dimensión menor o igual que tres. Demostramos además que en $\mathbb{N}^3$ un semigrupo cuyo cono asociado tenga más de cuatro caras no puede ser intersección completa.

En el capitulo siete, se introduce el concepto de matriz mezclada dominante y su relación con los semigrupos afines intersección completa. Los resultados expuestos en dicho capítulo se deben a Fischer, Morris y Shapiro, ([12],[13]) y fueron demostrados paralelamente por nosotros con la ayuda de J. García Miranda. El trabajo realizado se llevó a cabo gracias a un intercambio de información promovido por Sturmfels entre nosotros y los profesores Fischer y Shapiro. Se consiguió demostrar el caso general no demostrado en el capítulo anterior (que demostraba el caso simplicial y los casos de dimensión menor o igual que tres). Se llegaba así a la conclusión de que un semigrupo afín es intersección completa si y sólo si es pegada de dos subsemigrupos suyos que son intersección completa. Esto fue posible gracias a la idea de Shapiro y Fischer de asociar a cada semigrupo una matriz (la matriz de relaciones) y observar que cuando el semigrupo es intersección completa entonces dicha matriz es mezclada y dominante. El resultado se concluyó cuando se dio un teorema de descomposición de dichas matrices, que coincidía con la idea de pegada expuesta en el capítulo quinto. En este capítulo se muestra además un resultado que afirma que un semigrupo afín con más de $2d-2$ rayos extremales no puede ser intersección completa, donde $d$ es la dimensión del semigrupo.

En el capítulo número ocho, centramos nuestra atención en un tipo de semigrupos intersección completa: los semigrupos libres. Estos semigrupos son una generalización de los semigrupos (numéricos) libres estudiados por Bertin y Carbonne ([2]), Watanabe ([42]) y Rosales ([27]). Desde el punto de vista de anillos de semgrupo, estos semigrupos verifican que su anillo de semigrupo se construye haciendo extensiones radicales (de monomios) sucesivas de un anillo de polinomios. Relacionados con estos semigrupos, aparecen los semigrupos cuyos restos primarios (elementos pertenecientes a la intersección de los conjuntos de Apéry de los rayos extremales del semigrupo) tienen escritura única. Una clase particular de este tipo de semigrupos son los semigrupos simples. Vemos que estos semigrupos contienen, entre otras clases destacadas, a los semigrupos afines, simpliciales y Cohen-Macaulay de máxima y mínima codimensión.

En el último capítulo, estudiamos las soluciones de los sistemas de ecuaciones con coeficientes enteros. Dichas soluciones conforman un semigrupo afín. Damos un método para encontrar un sistema minimal de generadores para ese tipo de semigrupos y demostramos que todo semigrupo con teoría de divisores es isomorfo a un semigrupo de ese tipo. Proporcionamos además un método para saber si un semigrupo afín tiene teoría de divisores, basándonos en la caracterización de Lettl ([23]). Los semigrupos con teoría de divisores fueron introducidos por Clifford en 1938 ([6],[7]). El problema de semigrupos con teoría de divisores está fuertemente relacionado con Teoría de Números tal y como puede verse en los trabajos de Clifford y Lettl.

# Capítulo 0

# Preliminares

## 0.1. Conceptos básicos

Un semigrupo es un par $(S,+)$ verificando que $S$ es un conjunto, $+$ una operación binaria en $S$ que cumple la propiedad asociativa y tiene elemento neutro. (Normalmente en la literatura, a este tipo de estructuras se les conoce con el nombre de monoide. Tal distinción no es trascendente, ya que a cualquier conjunto con una operación binaria asociativa le podemos añadir un elemento neutro.) El semigrupo es abeliano o conmutativo si $+$ verifica la propiedad conmutativa. Si $T$ es un subconjunto de $S$, decimos que es un subsemigrupo de $S$ si la operación $+$ es una operación interna en $T$ y con esa operación $(T,+)$ es un semigrupo. Normalmente denotaremos por 0 al elemento neutro de $S$.

Un semigrupo es cancelativo si verifica la propiedad cancelativa, esto es, si $a+c = b+c$, con $a,b,c \in S$ entonces $a=b$. Claramente, todo grupo conmutativo es un semigrupo cancelativo

Un semigrupo es libre de torsión si verifica que simpre que $ka = kb$, con $0 \neq k \in \mathbb{N}$ y $a,b \in S$, entonces $a=b$.

Dados dos semigrupos conmutativos $(S,+)$ y $(T,+)$, un morfismo de semigrupos es una aplicación que preserva las operaciones de los semigrupos y el elemento neutro, esto es, que la imagen de la suma de dos elementos de $S$ es la suma, en $T$, de las imágenes de dichos elementos y la imagen del cero es el cero.

$$\begin{gathered} f:(S,+) \to (T,+) \\ f(a+b) = f(a)+f(b) \\ f(0) = 0 \end{gathered}$$

El concepto de monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo se definen de la forma usual.

Un elemento $a$ de un monoide conmutativo $(S,+)$ es una unidad si existe $b \in S$ tal que $a+b=0$. Los isomorfismos conservan unidades y la propiedad cancelativa.

Una relación de equivalencia, $\sim$, sobre un semigrupo $(S,+)$ es una congruencia si verifica que dicha relación es compatible con la operación $+$, esto es que si $a \sim b$ entonces para todo $c \in S$, se tiene que $(a+c) \sim (b+c)$. Dada una congruencia $\sim$ sobre un semigrupo $(S,+)$ podemos construir el conjunto cociente $S/\sim$ y dotarle de una operación binaria interna definida por $[a]+[b]=[a+b]$. Del hecho de que $\sim$ sea compatible con la operación $+$, se deduce que $(S/\sim,+)$ es un semigrupo. A dicho semigrupo lo vamos a llamar semigrupo cociente de $S$ por la congruencia $\sim$ .

Al igual que en grupos, espacios vectoriales, etc. tenemos que en semigrupos conmutativos se verifica el primer teorema de isomorfía:

**Teorema 0.1.1** *Sea $f:(S,+)\to(T,+)$ un morfismo de semigrupos conmutativos, entonces se verifica:*

1. *La imagen de $f$, $\mathrm{Im}(f)$, es un subsemigrupo de $(T,+)$.*

2. *La relación binaria definida sobre S por: $a \sim_f b$ si y sólo si $f(a)=f(b)$, es una congruencia.*

3. *Los semigrupos $(\mathrm{Im}(f),+)$ y $(S/\sim_f,+)$ son isomorfos.*

Dado un semigrupo conmutativo $(S,+)$, y $A$ un subconjunto de $S$, se define el semigrupo generado por $A$ como el conjunto

$$\langle A\rangle = \{\sum_{i=1}^{k} b_i a_i : b_i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, a_i \in A\}.$$

Un semigrupo $(S,+)$ es finitamente generado si existe $A \subseteq S$ finito tal que $S=\langle A\rangle$.

Dado un semigrupo finitamente generado $S=\langle s_1,\ldots,s_k\rangle$, definimos el siguiente morfismo de semigrupos

$$\begin{gathered}\varphi:\mathbb{N}^k \to S\\ \varphi(a_1,\ldots,a_k)=\textstyle\sum_{i=1}^{k} a_i s_i\end{gathered}$$

Si denotamos por $\sigma$ a la congruencia núcleo de este morfismo ($(a,b)\in\sigma$ si y sólo si $\varphi(a)=\varphi(b)$), tenemos que, usando el primer teorema de isomorfía, $\mathbb{N}^k/\sigma$ es un semigrupo isomorfo a $S$. En lo que sigue, nos referiremos a $\sigma$ como la congruencia asociada al semigrupo $S$. De esta forma, tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 0.1.2** *Todo semigrupo finitamente generado es isomorfo a un cociente de $\mathbb{N}^k$ para algún entero positivo $k$.*

## 0.2. La congruencia asociada a un subgrupo de $\mathbb{Z}^n$

Sea $\sigma$ una congruencia sobre $\mathbb{N}^n$, definimos el grupo asociado a $\sigma$ y lo denotamos por $M_\sigma$, al conjunto

$$M_\sigma = \{a - b : a\sigma b\}.$$

Por otro lado, si $M$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}^n$, definimos la congruencia asociada a $M$ y la denotamos por $\sim_M$ a la congruencia

$$a \sim_M b \text{ si y sólo si } a - b \in M.$$

Si consideramos el semigrupo cociente $(\mathbb{N}^n/\sim_M, +)$ y tenemos que $[a]+[c] = [b]+[c]$, entonces $[a+c] = [b+c]$ y por tanto $(a+c)-(b+c) = a-b \in M$, lo que implica que $[a] = [b]$. Esto demuestra el siguiente resultado.

**Lema 0.2.1** *Si $M$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}^n$, entonces el semigrupo cociente $(\mathbb{N}^n/\sim_M, +)$ es un semigrupo cancelativo.*

La pregunta natural que surge ahora es si $\sigma = \sim_{M_\sigma}$. La respuesta es negativa en general. Una inclusión es siempre cierta, a saber, $\sigma \subseteq \sim_{M_\sigma}$. Esto se debe a que si $(a,b) \in \sigma$, entonces $a - b \in M_\sigma$, lo que lleva a que $(a,b) \in \sim_{M_\sigma}$. La otra inclusión sólo se da si $(\mathbb{N}^n/\sigma, +)$ es un semigrupo cancelativo. De hecho se tiene el siguiente teorema, que no es difícil de probar:

**Teorema 0.2.2** *El semigrupo $(\mathbb{N}^n/\sigma, +)$ es cancelativo si y sólo si $\sigma = \sim_{M_\sigma}$.*

Un elemento de $\mathbb{Q}^n$ es fuertemente positivo si todas sus coordenadas son estrictamente positivas. De igual forma, un elemento de $\mathbb{Q}^n$ es positivo si todas sus coordenadas son positivas. Destacamos estos elementos por el siguiente resultado:

**Teorema 0.2.3** *Si $M$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}^n$, entonces $\mathbb{N}^n/\sim_M$ es un grupo si y sólo si $M$ contiene un elemento fuertemente positivo.*

## 0.3. Grupos conmutativos finitamente generados

En esta sección, vamos a fijar la notación referente a $\mathbb{Z}$-módulos que usaremos posteriormente. Los resultados expuestos en esta sección pueden encontrarse en cualquier libro de Álgebra que explique la teoría de grupos abelianos.

Sea $M$ un subgrupo de $\mathbb{Z}^n$. Un subconjunto $\{m_1, \ldots, m_r\}$ de $M$ es una base de $M$ si verifica:

1. Para cada $m \in M$ existen $z_1,...,z_r \in \mathbb{Z}$ tales que $m = z_1m_1 + ... + z_rm_r$.

2. Si $z_1m_1 + .... + z_rm_r = 0$, entonces $z_i = 0$ para todo $i = 1,...,r$.

Es bien conocido que todo subgrupo de $\mathbb{Z}^n$ posee una base con a lo sumo $n$ elementos.

Dos bases de un mismo subgrupo de $\mathbb{Z}^n$ tienen igual número de elementos. A dicho número lo llamaremos el rango del subgrupo.

También es sabido que todo subgrupo de $\mathbb{Z}^n$ de rango $k$ es isomorfo a $\mathbb{Z}^k$.

Sean $A$ y $B$ dos matrices sobre $\mathbb{Z}$ del mismo tamaño. La matriz $B$ es equivalente a $A$ si existen $E_1,...,E_k$ matrices elementales por filas y $G_1,...,G_t$ matrices elementales por columnas tales que $B = E_1...E_kAG_1...G_t$. Se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 0.3.1** *Toda matriz $A$ de orden $s \times t$ con coeficientes en $\mathbb{Z}$ es equivalente a una matriz diagonal de la forma:*

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_r & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

*donde $r = min\{s,t\}$, $d_i \in \mathbb{N}$ y $d_{i+1}$ es un múltiplo de $d_i$ para $i = 1,...,r-1$.*

A los $d_i$ se les conoce con el nombre de factores invariantes de la matriz.

**Teorema 0.3.2** *Dos matrices del mismo tamaño son equivalentes si y sólo si tienen los mismos factores invariantes.*

**Teorema 0.3.3** *Si $M$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}^n$ de rango $r$, entonces existe una base $\{f_1,...,f_r,f_{r+1},...,f_n\}$ de $\mathbb{Z}^n$ y existen $d_1,d_2,...,d_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tales que $d_{i+1}$ es un múltiplo de $d_i$ para $i = 1,...,r-1$, verificando que $\{d_1f_1,...,d_rf_r\}$ es una base de $M$.*

Los $d_i$ son conocidos con el nombre de factores invariantes de $M$.

**Teorema 0.3.4 (Teorema de estructura de los grupos conmutativos finitamente generados)** *Todo grupo conmutativo finitamente generado es isomorfo a uno de la forma $\mathbb{Z}_{d_1} \times ...\mathbb{Z}_{d_r} \times \mathbb{Z}^k$ donde además $d_{i+1}$ es un múltiplo de $d_i$ para todo $i = 1,...,r-1$.*

## 0.4. Finita presentación de los semigrupos conmutativos finitamente generados

Dado un semigrupo $(S,+)$, y $\rho$ un subconjunto de $S\times S$, la congruencia generada por $\rho$, que vamos a denotar por $\langle\rho\rangle$, es la menor congruencia sobre $(S,+)$ que contiene a $\rho$.

**Proposición 0.4.1** *La congruencia $\langle\rho\rangle$ se puede construir en los siguientes pasos:*

- $(1\rho)=\rho\cup\rho^{-1}\cup\delta$, *donde* $\rho^{-1}=\{(a,b):(b,a)\in\rho\}$ *y* $\delta$ *es la diagonal, es decir el conjunto de elementos de la forma* $(a,a)$.
- $(2\rho)=\{(a+c,b+c):(a,b)\in(1\rho),c\in S\}$
- *Un par $(a,b)$ está en $\langle\rho\rangle$ si y sólo si existe una secuencia $c_0,\ldots,c_t$ tales que $c_0=a,\ c_t=b$ y $(c_i,c_{i+1})\in(2\rho)$ para todo $i\in\{0,\ldots,t-1\}$.*

Si $\sigma$ es una congruencia sobre $(S,+)$ y $\rho$ es un subconjunto de $\sigma$ tal que $\sigma=\langle\rho\rangle$, entonces decimos que $\sigma$ está generada por $\rho$ o bien que $\rho$ es un sistema de generadores de la congruencia $\sigma$. Si $\rho$ es finito, entonces diremos que $S$ es finitamente presentado. El siguiente resultado es un resultado clásico de la teoría de semigrupos:

**Teorema 0.4.2** *Todo semigrupo finitamente generado es finitamente presentado.*

Este resultado es equivalente a asegurar (por ser todo semigrupo finitamente generado isomorfo a un cociente de $\mathbb{N}^n$ para algún entero positivo $n$) que toda congruencia sobre $\mathbb{N}^n$ tiene un sistema de generadores finito.

Decimos que $\rho$ es un sistema minimal de generadores de $\sigma$ si $\rho$ genera a $\sigma$ y si además su cardinal es minimal entre los conjuntos que generan a $\sigma$.

## 0.5. Semigrupos afines

Un semigrupo es un semigrupo afín si es isomorfo a un subsemigrupo de $(\mathbb{N}^r,+)$ finitamente generado (para algún $r$ entero positivo). No todo subsemigrupo de $(\mathbb{N}^r,+)$ es finitamente generado, tómese por ejemplo el conjunto

$$\{(a,b)\in\mathbb{N}^2 : a\geq 2,\ b\geq 2\},$$

que es cerrado para la suma (y por tanto un subsemigrupo de $\mathbb{N}^2$) y sin embargo no es finitamente generado, ya que un sistema de generadores de ese semigrupo debería contener a los conjuntos $\{(2,a):a\in\mathbb{N}\},\{(a,2):a\in\mathbb{N}\}$.

En lo que sigue, vamos a usar por defecto la operación definida en $S$ como la operación denotada por $+$, y escribiremos $S$ en vez de $(S,+)$. La operación $+$ será, a partir de ahora, para subsemigrupos de $\mathbb{N}^r$ la operación de adición usual, a saber, la suma coordenada a coordenada.

Dado un semigrupo afín, $S = \langle s_1, \ldots, s_k \rangle \subseteq \mathbb{N}^r$, definimos la dimensión de $S$ como el rango del grupo abeliano generado por $\{s_1, \ldots, s_k\}$ (a este grupo lo vamos a denotar por $\mathsf{G}(\{s_1, \ldots, s_k\})$).

Herzog demuestra en [19] que una cota inferior para el número de elementos de un sistema de generadores de la congruencia asociada a $S$ es el número de elementos de un sistema minimal de generadores de $S$ menos la dimensión de $S$.

Dado un semigrupo afín $S \subseteq \mathbb{N}^r$ con $\dim(S) = n$, siempre es posible encontrar un semigrupo afín isomorfo a $S$ de forma que esté contenido en $\mathbb{N}^n$. Si $S = \langle s_1, \ldots, s_k \rangle \subseteq \mathbb{N}^r$, sea $\sigma = \mathrm{Ker}\varphi$, donde $\varphi$ es la aplicación

$$\begin{gathered} \varphi : \mathbb{N}^k \to S \subseteq \mathbb{N}^r \\ \varphi(a_1, \ldots, a_k) = \textstyle\sum_{i=1}^k a_i s_i \end{gathered}$$

Sea $M = M_\sigma = \{z \in \mathbb{Z}^k : z = a - b,\text{ con } (a,b) \in \sigma\}$. Se tiene que $z = (z_1, \ldots, z_k) \in M$ si y sólo si verifica las ecuaciones

$$\left. \begin{array}{r} s_1^1 z_1 + \cdots + s_k^1 z_k = 0 \\ \vdots \\ s_1^r z_1 + \cdots + s_k^r z_k = 0 \end{array} \right\}$$

con $s_i = (s_i^1, \ldots, s_i^r)$.

Por ser $\mathbb{N}^k/\sigma$ cancelativo, tenemos que $\sigma = \sim_M$ .

Además, al ser $\dim(S) = n$, existen $n$ filas del sistema anterior que son linealmente independientes, de forma que las las ecuaciones de $M$ son

$$\left. \begin{array}{r} s_1^{i_1} z_1 + \cdots + s_k^{i_1} z_k = 0 \\ \vdots \\ s_1^{i_n} z_1 + \cdots + s_k^{i_n} z_k = 0 \end{array} \right\}$$

Esto lleva a que

$$S \simeq \mathbb{N}^k / \sim_M \simeq \langle (s_1^{i_1}, \ldots, s_1^{i_n}), \ldots, (s_k^{i_1}, \ldots, s_k^{i_n}) \rangle \subseteq \mathbb{N}^n.$$

Gracias a esta observación, a partir de ahora vamos a considerar sólo semigrupos afines de máxima dimensión, esto es, si tomamos $S \subseteq \mathbb{N}^r$, entonces $r = \dim(S)$.

## 0.6. Semigrupos y anillos de semigrupo. El ideal asociado a un semigrupo

Dado un semigrupo, $S$, podemos definir el anillo $K[S] = \bigoplus_{s\in S} Ky_s$, cuya suma se define coordenada a coordenada y cuyo producto queda determinado por la regla $y_s y_{s'} = y_{s+s'}$.

Sea $S = \langle s_1, \ldots, s_k\rangle \subseteq \mathbb{N}^r$. El morfismo de semigrupos

$$\begin{gathered}\varphi : \mathbb{N}^k \to S \subseteq \mathbb{N}^r \\ \varphi(a_1, \ldots, a_k) = \textstyle\sum_{i=1}^k a_i s_i\end{gathered}$$

induce el morfismo de anillos

$$\overline{\varphi} : K[x_1, \ldots, x_k] \to K[T^{s_1}, \ldots, T^{s_k}]$$

inducido por

$$\overline{\varphi}(x_i) = T^{s_i},$$

donde $T^{s_i} = t_1^{s_i^1} \cdots t_r^{s_i^r}$, si $s_i = (s_i^1, \ldots, s_i^r)$.

Dado un elemento $(a,b)$ de $\sigma$, definimos $f_{(a,b)} = X^a - X^b$, donde como antes $X^a = x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k}$. Herzog prueba en [19] lo siguiente.

**Proposición 0.6.1** *El ideal $I_S = \mathrm{Ker}\overline{\varphi}$ está generado por los elementos de la forma $f_{(a,b)}$ con $(a,b) \in \sigma$. Es más, $\rho = \{(a_1,b_1), \ldots, (a_m,b_m)\}$ genera $\sigma$, si y sólo si $I_S$ está generado por $\{f_{(a_1,b_1)}, \ldots, f_{(a_m,b_m)}\}$.*

De esta forma se tiene una clara conexión entre los ideales binomiales y las presentaciones de semigrupos.

Conocido un sistema de generadores para $I_S$, podemos calcular una base de Gröbner de dicho ideal. El cálculo de s-polinomios con binomios da como resultado binomios, por lo que una base de Gröbner para $I_S$ sigue estando formada por elementos de la forma $f_{(a,b)}$. Supongamos que $\{f_{(a_1,b_1)}, \ldots, f_{(a_t,b_t)}\}$ es una base de Gröbner normalizada de $I_S$. Entonces el conjunto $\{(a_1,b_1), \ldots, (a_t,b_t)\}$ es un sistema de generadores de $\sigma$, al que llamamos sistema canónico de generadores de $\sigma$ (Rosales en [32] lo denomina buen sistema de generadores de $\sigma$). Al igual que una base de Gröbner resuelve, mediante sucesivas reducciones, el problema de si un elemento está o no en un ideal (calculando su forma normal respecto de esa base), si $\rho$ es un sistema canónico de generadores de $\langle\rho\rangle$, podemos determinar si un elemento $(a,b)$ pertenece a $\langle\rho\rangle$. Este problema es conocido como el problema de palabras asociado a $\rho$, y por lo que acabamos de ver es resoluble.

El cálculo de un sistema canónico de una congruencia, conocido un sistema de generadores de ésta y prefijado un orden, se hace mediante la completación de pares críticos de Knuth-Bendix, véase [32] para más detalles. El sistema canónico de generadores es único para un orden fijo.

# Capítulo 1

# Cálculo de una relación minimal para un semigrupo afín

## Introducción

Cuando nos dan un subsemigrupo finitamente generado de $\mathbb{N}^r$, éste puede venir dado de dos formas distintas: como el semigrupo generado por un subconjunto (finito) de $\mathbb{N}^r$ o bien por una presentación de dicho semigrupo, a saber, un conjunto de generadores y relatores. Si el subsemigrupo viene dado como el semigrupo generado por un conjunto de elementos de $\mathbb{N}^r$, es posible calcular una presentación de dicho semigrupo haciendo uso de algunos resultados conocidos en teoría de la eliminación. La idea es la siguiente. Dar un semigrupo $S$ por medio de un conjunto de generadores $n_1,\ldots,n_{r+m} \in \mathbb{N}^r$ nos permite considerar el anillo $K[X^{n_1},\ldots,X^{n_{r+m}}]$ y el morfismo de anillos definido de la siguiente forma

$$\psi : K[x_1,\ldots,x_{r+m}] \to K[X^{n_1},\ldots,X^{n_{r+m}}]$$
$$\psi(x_i) = X^{n_i}.$$

Como ya vimos en el capítulo anterior, dar un sistema minimal de generadores para $I_S = \mathrm{Ker}\psi$, equivale a dar un sistema minimal de generadores para la congruencia asociada a $S$, y por tanto, una presentación para el semigrupo $S$. La pregunta ahora es, ¿cómo calcular un sistema de generadores para $I_S$? Una posible respuesta es el algoritmo de implicitación dado por Cox, Little y O'Shea en su libro [9]. Este algoritmo hace uso del cálculo de una base de Gröbner para un determinado ideal, y por tanto es de complejidad doblemente exponencial.

En este capítulo nos proponemos dar un algoritmo para calcular una presentación del semigrupo $S$ (una relación mínima para la congruencia asociada a $S$), que sea puramente semigrupista, esto es, que no haga uso de la equivelencia probada por Herzog antes mencionada. El algoritmo expuesto en este capítulo es una generalización del algoritmo dado por Rosales en [28] y que vamos a describir en la primera sección de este capítulo. El problema con el que nos encontramos en su día para generalizar dicho algoritmo era encontrar una cota para los elementos del semigrupo tales que su grafo asociado no era conexo. Esta cota fue posible encontrarla gracias al uso de resultados dados por Sturmfels en [38, 39].

## 1.1. Cálculo de un sistema de generadores minimal para la congruencia asociada a un semigrupo numérico

Un semigrupo numérico es un subsemigrupo de $\mathbb{N}$ que genera como grupo a $\mathbb{Z}$. Se demuestra que todo semigrupo numérico es finitamente generado y tiene un único sistema minimal de generadores. El que el semigrupo genere a $\mathbb{Z}$ como grupo se traduce en que el máximo común divisor de sus generadores sea uno.

A continuación damos un método para calcular un sistema de generadores minimal para la congruencia asociada a un semigrupo numérico. Este método se debe a Rosales y aparece publicado en el primer capítulo de su tesis y en [28].

Dado $m \in \mathbb{N}$, un conjunto de números naturales forma un sistema de números incongruentes módulo $m$, cuando sus restos respecto de este módulo son todos distintos. Un sistema de $m$ números incongruentes módulo $m$ se llama un sistema completo módulo $m$.

Sea $S$ un semigrupo numérico y $m \in S \setminus \{0\}$. Definimos el conjunto de los restos primarios de $m$ en $S$ como un sistema completo de elementos de $S$ módulo $m$,

$$\mathrm{S}(m) = \{w(0), w(1), ..., w(m-1)\}$$

verificando que para cualquier $n \in S$, si $w(i) \equiv n (mod\ m)$ entonces $w(i) \leq n$.

El conjunto de restos primarios es conocido también con el nombre de conjuntos de Apéry.

**Proposición 1.1.1** *Sea $S$ un subsemigrupo de $\mathbb{N}$. Entonces son equivalentes:*

1. *$S$ es un semigrupo numérico.*
2. *Existe $C = max\{x \in \mathbb{N} \ / \ x \notin S\}$.*

*A $C$ lo llamaremos el conductor del semigrupo numérico $S$.*

Sea $S$ un semigrupo numérico con sistema minimal de generadores

$$\{n_0, n_1, ..., n_p\}.$$

Sabemos que $S$ es isomorfo a $\mathbb{N}^{p+1}/\sigma$ donde $\sigma$ es la congruencia núcleo asociada al homomorfismo de semigrupos

$$\varphi : \mathbb{N}^{p+1} \to S$$

definido por $\varphi(a_0, ..., a_p) = a_0 n_0 + ... + a_p n_p$.

Sea $X$ un conjunto, $\mathcal{P} = \{X_i\}_{i\in I}$ una partición de $X$ y $\gamma \subseteq X \times X$ una relación binaria sobre $X$. El grafo $G_{(\gamma,\mathcal{P})}$ asociado a $\gamma$ y a la partición $\mathcal{P}$, tiene los conjuntos $X_i$ como vértices y existe un lado $\overline{X_i X_j}$ entre los vérices $X_i$ y $X_j$ en $G_{(\gamma,\mathcal{P})}$ si existen $x \in X_i$ e $y \in X_j$ tales que $(x,y) \in \gamma$ o $(y,x) \in \gamma$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos $[n] = \varphi^{-1}(n)$.

Definimos la siguiente relación de equivalencia $\varpi$ sobre $\mathbb{N}^{p+1}$: $a$ está $\varpi$-relacionado con $b$ si y sólo si $a = b = 0$ o existe $n \in \mathbb{N}$ y elementos $k_0, k_1, \ldots, k_t \in [n]$ tales que $a = k_0$, $b = k_t$ y el producto escalar $(k_i | k_{i+1}) \neq 0$, para todo $0 \leq i < t$.

Dado $n \in \mathbb{N}$ denotamos $n_\varpi$ al número de $\varpi$-clases contenidas en $[n]$.

Para una relación binaria $\gamma$ en $[n]$ denotamos $G_\gamma$ al grafo asociado a $\gamma$ y a la partición de $[n]$ formada por las $\varpi$-clases.

Si $\gamma \subseteq \sigma$ es una relación binaria sobre $\mathbb{N}^{p+1}$ denotamos $\gamma_n = \gamma \bigcap ([n] \times [n])$.

**Teorema 1.1.2** *Una relación binaria $\gamma \subseteq \sigma$ genera a $\sigma$ si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$ el grafo $G_{\gamma_n}$ es conexo.*

Dado $n \in S$ definimos el grafo $\mathsf{G}_n$ de la siguiente forma: los vértices de $\mathsf{G}_n$ son los $n_i$ del sistema minimal de generadores de $S$ tales que $n - n_i \in S$ y existe un lado entre dos vértices $n_i$ y $n_j$ ( $i \neq j$ ) si $n - (n_i + n_j) \in S$. Denotamos por $\Pi_0(\mathsf{G}_n)$ el conjunto de las componente conexas de $\mathsf{G}_n$.

**Proposición 1.1.3** *Para todo $n \in S \setminus \{0\}$ existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto $\Pi_0(\mathsf{G}_n)$ y el conjunto $[n]/\varpi$ de $\varpi$-clases en $[n]$.*

**Proposición 1.1.4** *Si $n_\varpi \geq 2$, entonces existe $w \in \mathrm{S}(n_0) \setminus \{0\}$ y $1 \leq j \leq p$ tal que $n = w + n_j$.*

**Proposición 1.1.5** *Para todo $n \in S$ existe un único elemento*

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_p) \in [n],$$

*tal que*

$$a_{i+1}n_{i+1} + a_{i+2}n_{i+2} + \ldots + a_p n_p \in \bigcap_{j=0}^{i} \mathrm{S}(n_j),$$

*para todo* $0 \leq i \leq p-1$.

Dicha expresión la llamaremos la forma canónica de $n$.

ALGORITMO PARA CALCULAR UN SISTEMA MINIMAL DE GENERADORES PARA LA CONGRUENCIA $\sigma$

*Input:* $\{n_0 < n_1 < \ldots < n_p\}$ sistema minimal de generadores del semigrupo numérico $S$.

*Output:* Un sistema minimal de generadores de $\sigma$.

1. Calculamos el conductor $C(S)$ y el subconjuto $W \subseteq S$ cuyos elementos son los elementos de $S$ menores o iguales que $C(S) + n_0 + n_p$.

2. Calculamos el conjunto $\mathrm{S}(n_i)$ para todo $0 \leq i \leq p$.

3. Calculamos el conjunto $K = \{s + n_j : \; s \in \mathrm{S}(n_0) \setminus \{0\} \text{ y } 1 \leq j \leq p\}$.

4. Para cada $n \in K$ calculamos $\mathsf{G}_n$ y formamos el conjunto $F \subseteq K$ con elementos aquellos $n \in K$ para los cuales $\mathsf{G}_n$ es no conexo.

5. Para cada $n \in F$ elegimos un vértice en cada componente conexa de $\mathsf{G}_n$ y formamos el conjunto $H_n = \{n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots, n_{i_{n_\varpi}}\}$ con elementos los vértices que hemos elegido.

6. Para cada $n \in F$ y cada vértice $n_{i_j} \in H_n$, calculamos el único elemento $s_j \in \mathrm{S}(n_{i_j})$ tal que $n \equiv s_j \; (mod \; n_{i_j})$ y el único natural $b_j$ tal que $n = b_j n_{i_j} + s_j$. Formamos los conjuntos, $M_n = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n_\varpi}\}$

7. Para cada $n \in F$ y cada $s_j \in M_n$, calculamos la expresión canónica de $s_j$, $a_j = (a_{j0}, a_{j1}, \ldots, a_{jp}) \in [s_j]$. Formamos el conjunto $R_n = \{d_1, d_2, \ldots, d_{n_\varpi}\} \subseteq [n]$, con

$$d_j = a_j + (0, \overset{i_j - 1}{\ldots}, 0, b_j, 0, \ldots, 0) = (a_{j0}, \ldots, a_{ji_j - 1}, a_{ji_j} + b_j, a_{ji_j + 1}, \ldots, a_{jp}).$$

8. Para cada $n \in F$ tomamos

$$\rho_n = \{(d_1, d_2), (d_1, d_3), \ldots, (d_1, d_{n_\varpi})\}$$

9. Entonces $\rho = \bigcup_{n \in F} \rho_n$ es un sistema minimal de generadores de $\sigma$.

**Teorema 1.1.6** *El cardinal de una relación mínima para* $\sigma$ *es menor o igual que*

$$\frac{(2n_0 - p)(p-1)}{2} + 1.$$

## 1.2. Una cota para los elementos de un semigrupo afín cuyo grafo asociado es no conexo

En lo que sigue, sea $S = \langle n_1, \dots, n_{r+m} \rangle \subseteq \mathbb{N}^r$ y sea $\sigma$ la congruencia asociada a $S$, a saber, la congruencia núcleo del morfismo de semigrupos

$$\varphi : \mathbb{N}^{r+m} \to \mathbb{N}^r$$
$$\varphi(e_i) = n_i.$$

Supondremos que $\dim S = r$ y que $\det(n_1, \dots, n_r) = \max\{\det(n_{i_1}, \dots, n_{i_r}) : \{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, r+m\}\}$.

Si se observan las demostraciones de los resultados obtenidos en la sección anterior, se puede ver que el teorema 1.1.2 es generalizable a semigrupos afines, y que se verifica que $\rho = \bigcup_{n \in S} \rho_n$ es un sistema minimal de generadores para $\sigma$ (nótese que si $\mathsf{G}_n$ es conexo, entonces $\rho_n = \emptyset$). El único problema es que en semigrupos afines no tenemos conductor y por tanto no podemos usar la cota $C + n_0 + n_p$, que nos asegura que todo elemento mayor que ese tiene grafo asociado conexo. En esta sección, vamos a ver cómo se soluciona este problema. Para ello, usaremos varios resultados de Sturmfels que aparecen en sus notas [38], por lo que necesitamos introducir algunos conceptos previos.

Para cada elemento $(a,b) \in \sigma$, tenemos que $a - b \in \mathbb{Z}^{r+m}$. Dado un elemento $u = (u_1, \dots, u_{r+m}) \in \mathbb{Z}^{r+m}$, definimos su conjunto soporte como

$$\operatorname{supp}(u) = \{i \in \{1, \dots, r+m\} : u_i \neq 0\}.$$

El elemento $u$ puede ser escrito de forma única como $u = u^+ - u^-$, con $u^+, u^- \in \mathbb{N}^{r+m}$. Decimos que $u$ es un circuito si $(u^+, u^-) \in \sigma$, $\operatorname{supp}(u)$ es minimal con respecto a la inclusión y las coordenadas de $u$ son primos relativos entre sí. Vamos a ver que todo elemento $v$, tal que $(v^+, v^-) \in \sigma$, puede ser escrito como una combinación lineal de circuitos con una propiedad adicional, lo que pone de manifiesto la importancia del concepto de circuito.

Dados $u, v \in \mathbb{Z}^{r+m}$, decimos que $u$ es *conformal* para $v$ si se verifica que $\operatorname{supp}(u^+) \subseteq \operatorname{supp}(v^+)$ y que $\operatorname{supp}(u^-) \subseteq \operatorname{supp}(v^-)$.

**Lema 1.2.1** *Si $(a,b) \in \sigma$, entonces $a - b$ puede ser escrito como una combinación lineal de $m$ circuitos con coeficientes racionales no negativos, verificando que cada uno de dichos circuitos es conformal para $a - b$.*

La demostración de este lema se puede encontrar en [38].

El siguiente resultado da una cota para las coordenadas de un circuito, así como para el cardinal de su soporte.

**Lema 1.2.2** *Si $u = (u_1, \ldots, u_{r+m})$ es un circuito, entonces:*

- $\#\mathrm{supp}(u) \leq r+1$.
- $|u_i| \leq \det(n_1, \ldots, n_r)$.

**Definición 1.2.3** ([38]) *El elemento $X^{m^+} - X^{m^-} \in I_S$ se dice que es primitivo si no existe ningún elemento $X^{l^+} - X^{l^-} \in I_S$ tal que $X^{l^+}$ divide a $X^{m^+}$ y $X^{l-}$ divide a $X^{m-}$. Traducido en términos de $\sigma$, el elemento $(a,b)$ es primitivo si no existen dos elementos de $\sigma$, $(a_1,b_1)$ y $(a_2,b_2)$ tales que $(a,b) = (a_1,b_1) + (a_2,b_2)$.*

El siguiente lema nos asegura que todo elemento de un sistema minimal de generadores, $\rho$, es primitivo.

**Lema 1.2.4** *Sea $\gamma$ un sistema de generadores de $\sigma$ y sea $(a,b) \in \gamma$. Si existen $(a_1,b_1)$ y $(a_2,b_2)$ en $\sigma$ tales que $(a,b) = (a_1,b_1) + (a_2,b_2)$, entonces $\gamma$ no es un sistema minimal de generadores de $\sigma$.*

*Demostración*:
Probemos que $\{(a_1,b_1),(a_2,b_2)\} \subseteq \langle \gamma \setminus \{(a,b)\}$, y en consecuencia tendremos que $\langle \gamma \rangle = \langle \gamma \setminus \{(a,b)\}\rangle$, con lo que $\gamma$ no sería un sistema minimal de generadores de $\sigma$.

Supongamos que $(a_1,b_1) \notin \langle \gamma \setminus \{(a,b)\}\rangle$. Como $(a_1,b_1) \in \langle \gamma \rangle$, tenemos que deben existir $v_0, \ldots, v_t \in S$, tales que $v_0 = a_1,\ v_t = b_1$ y $(v_i, v_{i+1}) \in (2\gamma)$. Al no estar $(a_1,b_1)$ en $\langle \gamma \setminus \{(a,b)\}\rangle$, tiene que darse que algún $(v_i, v_{i+1})$ sea $(a+c, b+c)$ ó $(b+c, a+c)$, con $c \in S$. Nótese que $\varphi(a_1) = \varphi(v_0) = \cdots = \varphi(v_t) = \varphi(b_1)$. Por tanto, $\varphi(a_1) = \varphi(a) + \varphi(c) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2) + \varphi(c)$, lo que es una contradicción.

Por un razonamiento análogo, podemos probar que $(a_2,b_2) \in \langle \gamma \setminus \{(a,b)\}\rangle$.

■

**Teorema 1.2.5** *Sea $\rho$ un sistema minimal de generadores de $\sigma$. Para todo $(a,b) \in \rho$ se tiene que*

$$\|a\|_1, \|b\|_1 \leq (r+1)m\det(n_1, \ldots, n_r),$$

*donde $\|(u_1, \ldots, u_{r+m})\|_1 = \sum_{i=1}^{r+m} u_i$.*

*Demostración*: Este resultado es una reformulación del teorema 4.7 de [38], teniendo en cuenta que todo elemento de $\rho$ es primitivo (por lo visto en el lema anterior) en el sentido de Sturmfels. ■

Este teorema da una cota para los elementos que aparecen en un sistema minimal de generadores de $\sigma$. Si queremos calcular un sistema de generadores minimal de $\sigma$, necesitamos saber para que $n \in S$ se verifica que el grafo $\mathsf{G}_n$ no es conexo. Este problema se resuelve en el siguiente teorema.

**Teorema 1.2.6** *Sea $n \in S$. Si $\mathsf{G}_n$ no es conexo entonces*

$$n \leq m\det(n_1, \ldots, n_r)(n_1 + \cdots + n_{r+m}).$$

*Demostración*: Si $\mathsf{G}_n$ no es conexo, entonces $\rho_n$ no es vacía y por tanto existe $(a,b) \in \rho_n \subseteq \rho$. Está claro entonces que $\varphi(a) = \varphi(b) = n$. Por tanto, sabemos que existen $c_1, \ldots, c_m$ circuitos que son conformales para $a-b$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{Q}^+$ tales que

$$a - b = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c_i,$$

lo que implica que

$$(a,b) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (c_i^+, c_i^-)$$

(esto es debido a que $(a-b)^+ = a$ por estar $(a,b)$ en $\rho$, que es un sistema minimal de generadores para $\sigma$, y al hecho de que los $c_i$ son conformales para $a-b$). Por tanto, $a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c_i^+$ y $n = \varphi(a) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi(c_i^+)$. Es más, como $(a,b)$ no puede ser puesto como suma de dos elementos de $\sigma$ (por el lema anterior), los $\lambda_i$ tienen que ser menores que uno y en consecuencia $n \leq \sum_{i=1}^{m} \varphi(c_i^+)$. Por otro lado, las coordenadas de los circuitos son menores que $\det(n_1, \ldots, n_r)$ lo que implica que $\varphi(c_i^+) \leq \det(n_1, \ldots, n_r)(n_1 + \cdots + n_{r+m})$. Con todo esto, se tiene lo que queríamos demostrar. ■

De esta forma podemos "barrer" la caja formada por los elementos menores que $m\det(n_1, \ldots, n_r)(n_1 + \cdots + n_{r+m})$ y determinar cuales de ellos tienen grafo asociado no conexo.

## 1.3. Un algoritmo para calcular un sistema minimal de generadores de la congruencia asociada a un semigrupo afín

Antes de describir el algoritmo, vamos a hacer un serie de observaciones que nos llevarán a ver de forma clara cómo funciona el algoritmo. Sea

$$(B_1, \ldots, B_r) = m\det(n_1, \ldots, n_r)(n_1 + \cdots + n_{r+m}).$$

1. Todos los elementos $n \in S$ que verifican que $\mathsf{G}_n$ es no conexo están en la caja
$$\Gamma = ([0,B_1] \times \cdots \times [0,B_r]) \cap \mathbb{N}^r.$$

2. Usando el orden lexicográfico, todos los elementos de esa caja están ordenados y podemos recorrerlos todos del más pequeño al más grande.

3. Dado $n \in \Gamma$, si tenemos resuelto el problema de si los elementos que le preceden (respecto del orden lexicográfico) están o no en $S$, podemos ver si $n$ está en $S$ usando el siguiente método: si $n$ está en $S$, entonces existe $i \in \{1,\ldots,r+m\}$ tal que $n-n_i \in S$, y como $n-n_i$ es menor que $n$, entonces debe ser alguno de los que hemos ya estudiado.

4. Al mismo tiempo que vamos viendo si un determinado elemento está o no en $S$ (nótese que se empieza por el cero y luego se continúa en orden ascendente), podemos encontrar los elementos de $\mathrm{V}(\mathsf{G}_n)$, ya que podemos ver si $n-n_i \in S$, con $i \in \{1,\ldots,r+m\}$.

5. Una vez que tenemos los vértices de los grafos asociados a los elementos de $S$ que son menores que $n$, podemos calcular las componentes conexas de $\mathsf{G}_n$ teniendo en cuenta las siguiente observaciones:

   *a*) Si $n-n_i \in S$, entonces $\mathrm{V}(\mathsf{G}_{n-n_i}) \subseteq \mathrm{V}(\mathsf{G}_n)$. Es más, $\mathrm{V}(\mathsf{G}_{n-n_i})$ está contenido en la componente conexa de $\mathsf{G}_n$ que contiene a $n_i$.

   *b*) $\mathrm{V}(\mathsf{G}_n) = \bigcup_{n-n_i \in S}(\mathrm{V}(\mathsf{G}_{n-n_i}) \cup \{n_i\})$.

   *c*) Si $\mathrm{V}(\mathsf{G}_{n-n_i}) \cap \mathrm{V}(\mathsf{G}_{n-n_j}) \neq \emptyset$, entonces es que ambos conjuntos están en la misma componente conexa de $\mathrm{V}(\mathsf{G}_n)$.

   *d*) Si tenemos que $\mathrm{V}(\mathsf{G}_n) = \{n_{i_1},\ldots,n_{i_k}\}$, definimos $B_j^0 = \mathrm{V}(\mathsf{G}_{n-n_{i_j}}) \cup \{n_{i_j}\}$ y $P_n^0 = \{B_1^0,\ldots,B_k^0\}$. Construimos $P_n^l$ de la siguiente forma: si $P_n^{l-1}$ tiene dos elementos no disjuntos $B_i^{l-1}, B_j^{l-1}$, tomamos $P_n^l = \{B_h^{l-1} : h \neq i,j\} \cup \{B_i^{l-1} \cup B_j^{l-1}\}$. Es fácil ver que este proceso para cuando $P_n^l$ es el conjunto de los vértices de las distintas componentes conexas de $\mathsf{G}_n$.

6. Una vez que conocemos las componentes conexas de $\mathsf{G}_n$, tenemos que construir $\rho_n$. Para ello, tenemos que encontrar los $\alpha_n^i$ que aparecen en la definición de $\rho_n$. Supongamos que $\mathsf{G}_n^1,\ldots,\mathsf{G}_n^{t_n}$ son las componentes conexas de $\mathsf{G}_n$. Tomemos $n_{i_1} \in \mathrm{V}(\mathsf{G}_n^i)$. Por definición, $n-n_{i_1} \in S$. Si $n-n_{i_1}=0$ entonces tomamos $\alpha_n^i = e_{i_1}$. En caso contrario, debe existir $n_{i_2} \in \mathrm{V}(\mathsf{G}_n^i)$ tal que $n-(n_{i_1}+n_{i_2}) \in S$. Este proceso debe acabar, obteniendo $n-\sum_{j=1}^k n_{i_j} = 0$, y por tanto debemos tomar $\alpha_n^i = \sum_{j=1}^k e_{i_j}$.

DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO

Siguiendo los pasos antes indicados, es posible construir $\rho$. Lo único que tenemos que hacer es definir las funciones apropiadas para presentar el algoritmo en pseudocódigo. Necesitamos calcular $S_\Gamma = S \cap \Gamma$, $T = \{n : n \in S_\Gamma \text{ y } \mathsf{G}_n \text{ no conexo}\}$ y $P = \{P_n : n \in T\}$, donde $P_n$ es la partición en componentes conexas de $\mathsf{G}_n$. Para ello vamos a usar las siguientes funciones:

1. `succ`: dado un elemento $n \in \Gamma$. calcula $l = \text{mín}_\prec\{k \in \Gamma : n \prec k\}$ y si ese mínimo no existe, entonces devuelve cero. ($\prec$ es el orden lexicográfico.)
2. `vertices`: calcula el conjunto $\mathrm{V}(\mathsf{G}_n)$ para un $n \in \Gamma$ dado. Devuelve $\emptyset$ si $n \notin S$.
3. `partición`: devuelve una partición del conjunto de vértices de $\mathsf{G}_n$ para un $n \in S_\Gamma$ dado, de forma que los elementos de esa partición son los vértices de las distintas componentes conexas de $\mathsf{G}_n$.

**function** `succ`

*Input*: $n = (k_1, \ldots, k_r) \in \Gamma$

*Output*: 0, si $n = (B_1, \ldots, B_r)$; $min_\prec\{k \in \Gamma : n \prec k\}$, en caso contrario

$i = 0$;
**while** $k_{r-i} = B_{r-i}$ **do**
  $i = i + 1$;
**if** $i = r$ **then**
  **return** $(0, \ldots, 0)$;
**else**
  **return** $(k_1, \ldots, k_{r-i} + 1, 0, \ldots, 0)$;

**function** `vertices`

*Input*: $n \in \Gamma$, el conujunto $S_\Gamma^n = \{k \in S \cap \Gamma : k \prec n\}$

*Output*: $\emptyset$, si $n \notin S$; $\mathrm{V}(\Delta_n)$, en caso contrario

$V = \emptyset$;
**for** $i = 1$ **to** $r + m$ **do**
  **if** $n - n_i \in S_\Gamma^n$ **then**
    $V = V \cup \{n_i\}$;
**return** $V$;

**function** `particion`

*Input*: $n \in \Gamma$, el conjunto $\mathrm{V}(\Delta_n)$

*Output*: una partición cuyos elementos son el conjunto de vértices de las componentes conexas de $\Delta_n$.

$P = \emptyset$;
**for** $n_i \in \mathrm{V}(\Delta_n)$ **do**
  $P = P \cup \{\mathtt{vertices}(n - n_i) \cup \{n_i\}\}$;
$part = falso$;
**while** $part = falso$ **do**
    **if** existen $A, B \in P$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$ **then**
      $P = (P \setminus \{A, B\}) \cup \{A \cup B\}$;
    **else**
        $part = verdadero$;
**return** $P$;

Nos encontramos en condiciones de describir la función `calcula` $\rho$

**function** `calcula` $\rho$
  *Input*: $A$, el conjunto de generadores minimal de $S$
  *Output*: $\rho$

$S_\Gamma = 0; \rho = \emptyset$;
$T = \{0\}; P = \emptyset$;
$n = \mathtt{succ}(0)$;
**while** $n \neq 0$ **do**
    $V = \mathtt{vertices}(n, S_\Gamma)$;
    **if** $V \neq \emptyset$ **then**
      $P_n = \mathtt{particion}(n, V)$;
      $S_\Gamma = S_\Gamma \cup \{n\}$;
      **if** $\#P_n > 1$ **then**
        $P = P \cup \{P_n\}$;
        $T = T \cup \{n\}$;
    $n = \mathtt{succ}(n)$;
**for** $n \in T$ **do**
  **for** $i = 1$ **to** $\#P_n$ **do**
    $\alpha_n^i = 0$;
    **while** $n \neq \varphi(\alpha_n^i)$ **do**
        **for** $n_j$ en el $i^{\underline{o}}$ elemento de $P_n$ **do**
          **if** $n - \varphi(\alpha_n^i) - n_j \in S_\Gamma$ **then**
            $\alpha_n^i = \alpha_n^i + e_j$;
$\rho = \emptyset$;
**for** $n \in T$ **do**
  **for** $i = 2$ **to** $\#P_n$ **do**
    $\rho = \rho \cup \{(\alpha_n^i, \alpha_n^1)\}$;

**return** $\rho$;

**Ejemplo 1.3.1** *Sea* $S = \langle (2,0),(0,1),(1,2),(3,1)\rangle \subset \mathbb{N}^2$. *Tenemos que el máximo determinante de dos generadores de* $S$ *es* $\det((3,1),(1,2)) = 5$. *Por tanto, los* $n \in S$ *para los que* $\mathsf{G}_n$ *puede ser no conexo son los que están por debajo de* $2\cdot 5\cdot((2,0)+(0,1)+(1,2)+(3,1)) = (60,40)$. *Por tanto,* $\Gamma = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 : n \leq 60, m \leq 40\}$. *Si barremos esa caja en busca de elementos de* $S$ *tenemos que* $S\cap\Gamma = S_\Gamma = \Gamma\setminus(\{(2n+1,0) : 0 \leq n \leq 29\}\cup\{(1,1)\})$. *Los grafos no conexos son*

| *Grafo* | *Componentes conexas* | *Relatores* |
|---|---|---|
| $\mathsf{G}_{(3,2)}$ | $\{(2,0),(1,2)\},\{(0,1),(3,1)\}$ | $e_1+e_3 = e_2+e_4$ |
| $\mathsf{G}_{(6,2)}$ | $\{(2,0),(0,1)\},\{(3,1)\}$ | $3e_1+2e_2 = 2e_4$ |
| $\mathsf{G}_{(4,3)}$ | $\{(2,0),(0,1)\},\{(1,2),(3,1)\}$ | $2e_1+3e_2 = e_3+e_4$ |
| $\mathsf{G}_{(2,4)}$ | $\{(2,0),(0,1)\},\{(1,2)\}$ | $e_1+4e_2 = 2e_3$ |

*De lo que se deduce que*

$$\begin{array}{rl}\rho = & \{((1,0,1,0),(0,1,0,1)),((3,2,0,0),(0,0,0,2)),\\ & ((2,3,0,0),(0,0,1,1)),((1,4,0,0),(0,0,2,0))\}.\end{array}$$

**Ejemplo 1.3.2** *Sea* $S = \langle 5,7,9,11\rangle$. *En este caso* $\dim(S) = 1$ *y su codimensión es* $m = 3$. *Tenemos por tanto, que si* $n \in S$ *tiene grafo asociado no conexo, entonces* $n \leq 3\cdot 11\cdot 32 = 1056$. *Nótese que esta cantidad es desorbitante. Si quisiésemos hacer a mano los cálculos nos llevaria un buen rato. Calcular* $1056$ *grafos puede resultar un poco tedioso. Para ahorrarnos trabajo, vamos a usar lo que conocemos para semigrupos numéricos. Es fácil observar que* $\mathbb{N}\setminus S = \{1,2,3,4,6,8,13\}$. *Luego todo* $n > 13$ *está en* $S$. *Esa es una propiedad que no hay que desaprovechar en los semigrupos numéricos. Si* $n \geq 14+16$, *entonces*

$$\begin{gathered}14 \leq n-(5+7) \in S\\ 14 \leq n-(5+9) \in S\\ 14 \leq n-(5+11) \in S\end{gathered}$$

*lo que implica que* $\mathsf{G}_n$ *es conexo. Si además usamos la proposición 1.1.4, tenemos que si* $\mathsf{G}_n$ *es no conexo entonces* $n \in \{w+n_i : w \in \{0,7,9,11,16\}, n_i \in \{7,9,11\}\}$. *Si hacemos las cuentas (sólo tenemos que calcular hasta* $n = 29$*), llegamos a que los únicos grafos no conexos son*

| *Grafo* | *Componentes conexas* | *Relatores* |
|---|---|---|
| $\mathsf{G}_{14}$ | *2* | $\{((1,0,1,0),(0,2,0,0))\}$ |
| $\mathsf{G}_{16}$ | *2* | $\{((1,0,0,1),(0,1,1,0))\}$ |
| $\mathsf{G}_{18}$ | *2* | $\{((0,0,2,0),(0,1,0,1))\}$ |
| $\mathsf{G}_{20}$ | *2* | $\{((4,0,0,0),(0,0,1,1))\}$ |
| $\mathsf{G}_{22}$ | *2* | $\{((0,0,0,2),(3,1,0,0))\}$ |

*Tenemos así que un sistema minimal de generadores de* $\sigma$ *es*

$$\{((1,0,1,0),(0,2,0,0)),((1,0,0,1),(0,1,1,0)),((0,0,2,0),(0,1,0,1)),$$
$$((4,0,0,0),(0,0,1,1))\}$$

Veremos más adelante que si el semigrupo afín es simplicial y Cohen-Macaulay, entonces podemos usar métodos parecidos a los usados en semigrupos numéricos, tal y como se ha ilustrado en el ejemplo anterior, en el que se usaba la proposición 1.1.4.

# Capítulo 2

# Cómo determinar si un semigrupo finitamente presentado es un semigrupo afín

## Introducción

En el capítulo anterior, resolvimos el problema de encontrar una presentación para un semigrupo afín dado mediante un conjunto finito de generadores. Ahora bien, si nos dan un semigrupo mediante una presentación (finita) suya, ¿cómo podemos determinar si dicho semigrupo es un semigrupo afín? La respuesta a este problema la vamos a dar en este capítulo. De hecho, vamos a presentar un método para construir un semigrupo isomorfo al dado de forma que éste venga descrito mediante un sistema finito de generadores. Visto de esta forma, el problema que nos proponemos resolver en este capítulo es el inverso del problema planteado en el capítulo anterior.

El método que vamos a emplear se basa fundamentalmente en el siguiente resultado: un semigrupo $S$ es isomorfo a un subsemigrupo de $\mathbb{N}^r$ para algún entero positivo $r$ si y sólo si $S$ es cancelativo, libre de torsión y no tiene unidades. Este resultado fue demostrado por Rosales en [33].

Lo primero que vamos a hacer es mostrar cómo determinar si un semigrupo dado por una presentación finita no tiene unidades. A continuación, una vez que sepamos que el semigrupo es libre de unidades, determinaremos si el semigrupo es libre de torsión y cancelativo.

En lo que sigue, supongamos que el semigrupo dado es $S = \mathbb{N}^k/\sigma$ con $\sigma$ una congruencia con sistema canónico de generadores $\rho$. (Recuérdese que estamos asumiendo que $\rho$ es finito.) Por otro lado, si $\sigma$ no viniese dado por un sistema canónico reducido de generadores, siempre podemos calcular uno, bien sea usando el algoritmo de Rosales (véase [32]) o calculando una base de Gröbner del ideal asociado al semigrupo.

## 2.1. Cómo decidir si un semigrupo finitamente presentado no tiene unidades

Antes de empezar a describir cómo saber si el semigrupo $S$ no tiene unidades, tenemos que eliminar de $\rho$ algunos elementos que pueden molestarnos más adelante. Nótese que si $(e_i,0) \in \sigma$, entonces $(e_i,0)$ debe de estar en $\rho$. Esto se debe a que $\rho$ es un sistema canónico de generadores. Como además $\rho$ es un sistema reducido, para cualquier $(a,b) \in \rho \setminus \{(e_i,0)\}$, tiene que verificarse que la coordenada $i$-ésima de $a$ y $b$ son cero. Podemos definir a partir de $\rho$ el conjunto $\rho' \subset \mathbb{N}^{k-1} \times \mathbb{N}^{k-1}$, quitando el elemento $(e_i,0)$ de $\rho$ y eliminando la $i$-ésima coordenada de cada uno de los pares de $\rho$. Si definimos $\sigma'$ como

$$\begin{aligned}\sigma' = \ & \{((x_1,\ldots,x_{k-1}),(y_1,\ldots,y_{k-1})) \in \mathbb{N}^{k-1} \times \mathbb{N}^{k-1} : \\ & ((x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ldots,x_{k-1}),(y_1,\ldots,y_{i-1},0,y_i,\ldots,y_{k-1})) \in \sigma\},\end{aligned}$$

no es difícil probar el siguiente resultado:

**Proposición 2.1.1** *El conjunto $\rho'$ es un sistema canónico reducido de generadores de la congruencia $\sigma'$ y $\mathbb{N}^k/\sigma$ es isomorfo a $\mathbb{N}^{k-1}/\sigma'$.*

De esta forma, podemos eliminar todos los elementos de la forma $(e_i,0)$ de $\rho$. A partir de ahora, supondremos que nuestro conjunto de relatores no contiene elementos de esa forma. El motivo de esta maniobra se verá a continuación. De cualquier manera, parece natural que si tenemos un relator del estilo $(e_i,0)$, entonces debamos eliminar ese relator y al generador $e_i$ de nuestra presentación.

**Proposición 2.1.2** *Si $\rho$ no contiene elementos de la forma $(e_i,0)$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- $\mathbb{N}^k/\sigma$ *no tiene unidades.*
- *Para cualquier $x \in \mathbb{N}^k$ tal que $(x,0) \in \sigma$, se verifica forzosamente que $x = 0$.*

*Demostración*: Supongamos que $\mathbb{N}^k/\sigma$ no tiene unidades y que $(x,0) \in \sigma$, con $x \neq 0$. Como $\sigma$ no contiene elementos de la forma $(e_i,0)$, tenemos que $x \neq e_i$ para todo $i$, por lo que debe existir un $j$ tal que $x - e_j \in \mathbb{N}^k$. Ahora bien $[e_j] + [(x-e_j)] = [x] = [0]$, por lo que $\mathbb{N}^k/\sigma$ tiene unidades, lo cual es imposible por hipótesis.

Supongamos ahora que $\sigma$ no contiene elementos de la forma $(x,0)$ con $x \neq 0$. Si $\mathbb{N}^k/\sigma$ tuviese unidades, entonces tendríamos que existirían $a, b \in \mathbb{N}^k$ de forma que $[a]+[b] = [0]$, con $[a] \neq 0 \neq [b]$, lo que implicaría que $a \neq 0 \neq b$. Tendríamos así que el par $(a+b,0)$ estaría en $\sigma$, lo cual no es posible. ■

Apoyándonos en este resultado es fácil probar el siguiente teorema:

**Teorema 2.1.3** *Si* $\rho$ *no contiene elementos de la forma* $(e_i,0)$ *y* $\rho = \{(a_1,b_1),\ldots,(a_s,b_s)\}$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- $\mathbb{N}^k/\sigma$ *no tiene unidades.*
- *Para todo* $i \in \{1,\ldots,m\}$, *se tiene que* $b_i \neq 0$.

*Demostración*: Si $\sigma$ contuviese elementos de la forma $(x,0)$ con $x \neq 0$, entonces sería posible, mediante reducciones sucesivas por elementos de $\rho$ llegar de $x$ a $0$. Y para ello alguno de los $b_i$ tendría que ser nulo. Así, si suponemos que todos los $b_i$ son no nulos, usando el lema anterior, tenemos que $\mathbb{N}^k/\sigma$ no tiene unidades.

Por otro lado, si $\rho$ tuviese un elemento de la forma $(a_i,0)$ tendríamos que $\sigma$ tiene un elemento de la forma $(x,0)$, a saber el elemento $(a_i,0)$, por lo que $\mathbb{N}^k/\sigma$ tendría unidades. ■

Por tanto, si tenemos el conjunto $\rho$, podemos decidir de una forma muy sencilla si $S$ tiene o no unidades. Nótese que $\rho$ tiene elementos de la forma $(a,0)$ si y sólo si cualquier sistema de generadores de $\sigma$ tiene un elemento de dicha forma, ya que por completación de pares críticos no podemos obtener elementos de la forma $(a,0)$ si no partimos de elementos de esa forma. Parece por tanto absurdo imponer que $\rho$ sea un sistema canónico de generadores, pero no es así. El que sea un sistema canónico nos sirve para determinar si hay elementos de la forma $(e_i,0)$, ya que podríamos tener en el sistema de generadores dos elementos como éstos: $(2e_i,0)$ y $(2e_i,e_i)$. Si no calculamos un sistema canónico de generadores, no obtenemos $(e_i,0)$, el cual al pasar a $\sigma'$ eliminaría el elemento $(2e_i,0)$. Veremos más adelante que ésta no es la única razón para tomar $\rho$ como sistema canónico de generadores de $\sigma$.

## 2.2. Cómo decidir si un semigrupo finitamente presentado libre de unidades es cancelativo y libre de torsión

Nuestro objetivo es ver si $S$ es o no isomorfo a un semigrupo afín. Por tanto, $S$ debe ser cancelativo, libre de torsión y sin unidades. En la sección anterior hemos mostrado cómo saber si $S$ es libre de unidades. Si el semigrupo de partida tuviese unidades, entonces nuestra comprobación ya ha acabado. Una vez que sabemos que $S$ no tiene unidades, nos interesa saber si $S$ es libre de torsión y cancelativo. Las respuestas a estos dos puntos vienen dadas por los siguientes resultados que pueden verse, por ejemplo, en [26] y [33] respectivamente.

**Lema 2.2.1** *El semigrupo $S$ es cancelativo si y sólo si $\sigma = \sim_{M_\sigma}$ .*

**Lema 2.2.2** *Sea $M$ un subgrupo de $\mathbb{Z}^k$. Entonces el grupo abeliano $\mathbb{Z}^k/M$ es libre de torsión si y sólo si el monoide cociente $\mathbb{N}^k/\sim_M$ es libre de torsión.*

Usando el primero de los resultados, tenemos que si $S$ es cancelativo, entonces $S$ tiene que ser isomorfo a $\mathbb{N}^k/\sim_{M_\sigma}$ . Por tanto, si queremos que $S$ sea libre de torsión, entonces $\mathbb{N}^k/\sim_{M_\sigma}$ tiene que ser libre de torsión. Esto último podemos comprobarlo calculando los factores invariantes de $M_\sigma$. Si $\mathbb{N}^k/\sim_{M_\sigma}$ no es libre de torsión entonces hemos acabado: $S$ no es un semigrupo afín. Si $\mathbb{N}^k/\sim_{M_\sigma}$ es libre de torsión, entonces nos queda comprobar si $\sigma$ es igual que $\sim_{M_\sigma}$ . Como $\sigma \subseteq \sim_{M_\sigma}$, lo único que tenemos que hacer es calcular un sistema de generadores de $\sim_{M_\sigma}$ y comprobar si está incluido en $\sigma$. Para ello vamos a usar los resultados expuestos en el capítulo anterior.

Si partimos de que $\rho = \{(a_1,b_1),\ldots,(a_s,b_s)\}$, es fácil comprobar que $M_\sigma$ está generado como $\mathbb{Z}$-módulo por $\{a_1-b_1,\ldots,a_s-b_s\}$. Podemos así calcular las ecuaciones de $M_\sigma$. Supongamos que las ecuaciones de $M_\sigma$ son las siguientes:

$$M_\sigma = \left\{ (x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{Z}^k : \begin{array}{c} a_{11}x_1+\cdots+a_{1k}x_k = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nk}x_k = 0 \end{array} \right\}$$

(Nótese que al ser $\mathbb{Z}^k/M_\sigma$ libre de torsión, las ecuaciones de $M_\sigma$ son homogéneas.)

Sea $S'$ el subsemigrupo de $\mathbb{Z}^n$ generado por $\{m_i = (a_{i1},\ldots,a_{in}) : i \in \{1,\ldots,k\}\}$. Existe un isomorfismo entre $\mathbb{N}^k/\sim_{M_\sigma}$ y $S'$, a saber:

$$\begin{array}{c} \psi : \mathbb{N}^k/\sim_{M_\sigma} \to S' \\ \psi([(c_1,\ldots,c_k)]) = \sum_{i=1}^k c_i m_i. \end{array}$$

Nótese que $\sim_{M_\sigma}$ es la congruencia núcleo del morfismo

$$\varphi : \mathbb{N}^k \to S'$$
$$\varphi(a_1, \ldots, a_k) = \sum_{i=1}^k a_i m_i.$$

En principio, $S'$ es un subsemigrupo de $\mathbb{Z}^n$, y por tanto no podemos utilizar el algoritmo expuesto en el capítulo anterior, ya que dicho algoritmo se aplica a subsemigrupos de $\mathbb{N}^n$. El problema se arreglaría si consiguiesemos que las ecuaciones de $M_\sigma$ tuviesen coeficientes naturales. Veamos que esto es posible siempre que $S$ sea un semigrupo afín. Hemos supuesto que el semigrupo de partida no tiene unidades, por lo que $\mathbb{N}^k / \sim_{M_\sigma}$ no puede tener unidades. Si las tuviese, $S$ y $\mathbb{N}^k / \sim_{M_\sigma}$ no serían isomorfos. Podemos usar el siguiente resultado que nos asegura que $\mathbb{N}^k \cap M_\sigma = \{0\}$.

**Lema 2.2.3** *(*lema 1.2 de [33]*) Sea $M$ un submódulo de $\mathbb{Z}^k$ verificando que $e_i \notin M$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- $\mathbb{N}^k / \sim_M$ *no tiene unidades.*
- *El único elemento en $M$ que tiene todas sus coordenadas mayores o iguales que cero es $0 \in M$.*

Obsérvese que si $e_i \in M_\sigma$, entonces $(e_i, 0) \in \sim_{M_\sigma}$, y por tanto, $\sim_{M_\sigma} \neq \sigma$, ya que hemos eliminado esos elementos de la congruencia $\sigma$. Con el resultado que acabamos de exponer, podemos usar el siguiente lema, que nos dice que los elementos de $M_\sigma$ verifican una ecuación cuyos coeficientes son todos números enteros estrictamente positivos. Multiplicando esta ecuación por valores suficientemente grandes y sumándole el resultado a las ecuaciones que ya conocemos de $M_\sigma$, podemos conseguir que todos los coeficientes de las ecuaciones sean positivos.

**Lema 2.2.4** *(*lema 1.5 de [33]*)*

*Sea $M$ un subgrupo de $\mathbb{Z}^k$ tal que $M \cap \mathbb{N}^k = \{0\}$. Entonces, existe un elemento fuertemente positivo $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$ tal que todo elemento $x = (x_1, \ldots, x_k) \in M$ verifica la ecuación*

$$a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k = 0.$$

El problema de decidir ahora si $\mathbb{N}^k / \sim_{M_\sigma}$ es libre de unidades, se ha trasladado a determinar si un determinado módulo (en este caso $M_\sigma$) tiene o no elementos con todas sus coordenadas mayores o iguales que cero y que no sea el elemento cero. En el artículo [33], Rosales da un algoritmo para determinar un elemento con el máximo número de coordenadas mayores o iguales que cero. Si el resultado de aplicar este algoritmo (cuyo nombre es MCP) a $M_\sigma$ es el elemento cero, entonces es que no hay elementos del tipo que andamos buscando. Tenemos así una forma algorítmica de determinar si $N^k/\sim_{M_\sigma}$ tiene o no unidades. Si aplicamos el citado algoritmo a $M_\sigma^\perp$, obtendremos un elemento $a$, cumpliendo las condiciones del lema anterior. En realidad podemos ahorrarnos la primera aplicación del algoritmo MCP, ya que si al aplicar MCP a $M_\sigma^\perp$ (cuyos generadores son los vectores formados por los coeficientes de las filas de las ecuaciones de $M_\sigma$) el resultado es que no hay elementos fuertemente positivos, entonces es que $M_\sigma$ tiene un elemento positivo, por lo que $\mathbb{N}^k/\sim_{M_\sigma}$ tendría unidades y por tanto $\sigma \neq \sim_{M_\sigma}$, lo que llevaría a que $S$ no sea un semigrupo afín.

Una vez que sabemos que $S'$ está contenido en $\mathbb{N}^k$, podemos aplicar el algoritmo del capítulo anterior para calcular un sistema minimal de generadores para $\sim_{M_\sigma}$, con el que podemos comprobar si $\sigma = \sim_{M_\sigma}$ . Para ello utilizamos el hecho de que $\rho$ es un sistema canónico.

Resumamos el proceso de determinar si $S$ es un semigrupo afín:

PASOS A SEGUIR PARA DETERMINAR SI $S$ ES UN SEMIGRUPO AFÍN

1. Determinar si $S$ tiene o no unidades. Esto se puede hacer usando lo expuesto en la sección anterior. Si $S$ tiene unidades, entonces hemos acabado: $S$ no es un semigrupo afín.

2. Calcular $M_\sigma$ y sus factores invariantes. Esto se puede hacer usando Álgebra elemental. Si $\mathbb{Z}^k/M_\sigma$ no es libre de torsión, entonces $S$ no es un semigrupo afín.

3. Calcular las ecuaciones de $M_\sigma$ y determinar si se pueden poner de forma que sus coeficientes sean todos números naturales. Esto se puede hacer usando los resultados expuestos en esta sección y los algoritmos dados en [33] (secciones primera y segunda). Si no podemos poner las ecuaciones con coeficientes naturales, entonces $S$ no es un semigrupo afín.

4. Calcular un sistema minimal de generadores de $\sim_{M_\sigma}$, haciendo uso del algoritmo expuesto en el capítulo anterior. Si dicho sistema de generadores no está incluido en $\sigma$, entonces hemos acabado: $S$ no es un semigrupo afín. En caso contrario, $S$ sí es un semigrupo afín.

**Ejemplo 2.2.5** *Veamos si el semigrupo*

$$S = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 | \begin{array}{c} e_1 + e_3 = e_2 + e_4, 3e_1 + 2e_2 = 2e_4, \\ 2e_1 + 3e_2 = e_3 + e_4, e_1 + 4e_2 = 2e_3 \end{array} \rangle$$

*es o no afín (obsérvese que debe serlo, ya que sus relatores son los relatores del semigrupo que pusimos de ejemplo al final del capítulo anterior).*

*Lo primero que tenemos que comprobar es si S tiene unidades. Para ello tenemos que calcular un sistema canónico de generadores para la congruencia. Dicho sistema es* $\{e_1+e_3=e_2+e_4, 3e_1+2e_2=2e_4, 2e_1+3e_2=e_3+e_4, e_1+4e_2=2e_3, 5e_2+e_4=3e_3\}$, *de lo que se sigue que S no tiene unidades.*

*Pasemos ahora a ver que pasa con* $\mathbb{N}^4/\sim_{M_\sigma}$. *Primero tenemos que calcular* $M_\sigma$. *Por ser* $\{e_1+e_3=e_2+e_4, 3e_1+2e_2=2e_4, 2e_1+3e_2=e_3+e_4, e_1+4e_2=2e_3\}$ *un sistema de generadores para* $\sigma$, *se tiene que* $M_\sigma$ *está generado como* $\mathbb{Z}$*-módulo por* $\{(1,-1,1,-1),(3,2,0,-2),(2,3,-1,-1),(1,4,-2,0)\}$. *Si tomamos la matriz formada por esos vectores, vemos que es equivalente a la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*y por tanto* $\mathbb{Z}/M_\sigma$ *es libre de torsión. Por otro lado, es fácil calcular las ecuaciones de* $M_\sigma$ *que son las siguientes:*

$$M_\sigma \equiv \begin{cases} 2x_1+x_3+3x_4=0 \\ x_2+2x_3+x_4=0 \end{cases}$$

*Con lo que* $S'=\langle(2,0),(0,1),(1,2),(3,1)\rangle$. *De esta forma, tenemos que* $S'$ *es precisamente el semigrupo que aparece en el ejemplo al final del capítulo anterior. Si calculásemos un sistema de generadores para* $\sim_\sigma$ *obtendríamos* $\{e_1+e_3=e_2+e_4, 3e_1+2e_2=2e_4, 2e_1+3e_2=e_3+e_4, e_1+4e_2=2e_3\}$. *Esto concluye la comprobación: S es un semigrupo afín isomorfo a* $S'$.

**Ejemplo 2.2.6** *Sea*

$$S=\langle e_1,e_2,e_3 | 2e_1=e_2+e_3, e_1+e_2=3e_3, 2e_2+e_3=e_1\rangle.$$

*Un buen sistema de generadores para* $\sigma$ *es*

$$\{2e_1=e_2+e_3, e_1+e_2=3e_3, 2e_1+e_3=e_1, e_1+3e_2=e_1+2e_3\}.$$

*El módulo* $M_\sigma$ *está generado por* $\{(2,-1,-1),(1,1,-3),(1,-2,-1)\}$. *La matriz asociada a* $M_\sigma$ *es equivalente a*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

*Las ecuaciones de $M_\sigma$ son*

$$x-y+3z \equiv 0 (mod\ 9)$$

*Por lo que S no es afín, ya que $\mathbb{N}^3/\sim_{M_\sigma}$ no es libre de torsión.*

**Ejemplo 2.2.7** *Sea*

$$S = \langle e_1, e_2, e_3 | 2e_1 + e_3 = 3e_2, e_2 = e_1 + 4e_3 \rangle.$$

*Un sistema canónico de generadores de $\sigma$ es*

$$\{2e_1 + e_3 = 3e_2, e_2 = e_1 + 4e_3\}$$

*El módulo $M_\sigma$ está generado por $\{(2,-3,1),(-1,1,-4)\}$. La matriz formada por estos dos vectores es equivalente a*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*La ecuación de $M_\sigma$ es*

$$11x + 7y - z = 0.$$

*El ortogonal de $M_\sigma$ está generado por $(11,7,-1)$, por lo que es imposible que haya un elemento fuertemente positivo en $M_\sigma^\perp$. Esto lleva a que S no es afín.*

Todos los sistemas canónicos que aparecen en estos ejemplos han sido calculados haciendo uso de la función `gbasis` del paquete `grobner` que viene con el software MAPLE. El orden usado es el `tdeg` de dicho programa, que se corresponde con el orden de grado total lexicográfico inverso. El paquete antes mencionado calcula bases de Gröbner de un ideal, dados sus generadores, por lo que hemos tenido que hacer uso de la correspondencia que dimos en los preliminares entre generadores de $\sigma$ y del ideal $I_S$.

# Capítulo 3

# Semigrupos afines simpliciales que son Cohen-Macaulay

## Introducción

Dado un semigrupo $S$, podemos construir el anillo de semigrupo $K[S] = \bigoplus_{s \in S} K y_s$. En este anillo de semigrupo la suma se hace coordenada a coordenada y el producto atendiendo a la regla $y_s y_{s'} = y_{s+s'}$, junto con la propiedad distributiva. Algunas propiedades del anillo $K[S]$ se pueden caracterizar en términos del semigrupo $S$. La que nos ocupa en este capítulo es la de ser Cohen-Macaulay. Si $S$ es un semigrupo afín, se conocen las propiedades que debe verificar dicho semigrupo para que $K[S]$ sea Cohen-Macaulay, véanse por ejemplo los trabajos [20],[15],[41] y [21]. En [41] se da una caracterización del hecho de que $K[S]$ sea Cohen-Macaulay en términos de una propiedad que debe verificar el semigrupo y una propiedad de la cohomología extendida de un complejo simplicial asociado al semigrupo $S$. Dicha propiedad no es directamente comprobable en la práctica para un semigrupo afín arbitrario. Si el semigrupo de partida es simplicial, a saber, el cono generado por el semigrupo es el cono generado por exactamente $\dim(S)$ generadores suyos, la condición homológica siempre se verifica. Nuestro objetivo en este capítulo es dar una condición alternativa a la dada por Trung, Hoa, Goto, Suzuki y Watanabe que sea algorítmicamente comprobable y que determine si $K[S]$ es Cohen-Macaulay en el caso de que $S$ sea un semigrupo afín y simplicial.

La idea que nos llevó a la realización de este capítulo fue la gran similitud existente entre los semigrupos numéricos ampliamente estudiados por Rosales y los semigrupos afines simpliciales. Para cada elemento de un semigrupo numérico, existe un conjunto finito llamado el conjunto de Apéry. Dicho conjunto verifica que cualquier otro elemento del semigrupo numérico puede ser expresado como suma de un elemento de dicho conjunto y un múltiplo del elemento dado, siendo esta expresión única. Para semigrupos afines simpliciales también podemos definir el conjunto de Apéry asociado a un elemento. El problema aparece cuando observamos que dichos conjuntos son infinitos. Ahora bien, si tomamos la intersección de los conjuntos de Apéry de los rayos extremales del semigrupo (los rayos extremales son los generadores que generan el cono asociado al semigrupo), observamos que todo elemento del semigrupo se puede poner como combinación lineal (con coeficientes naturales) de los rayos extremales y un elemento de dicha intersección. Es más, el que dicha expresión sea única es equivalente a que $K[S]$ sea Cohen-Macaulay. Esta idea nos llevó automáticamente a una caracterización algorítmica del hecho de que $K[S]$ sea Cohen-Macaulay.

Por último, en este capítulo refinamos el algoritmo dado en el primer capítulo para el caso de semigrupos afines simpliciales verificando que $K[S]$ es Cohen-Macaulay. Para este tipo de semigrupos damos cotas para el número de elementos de un sistema minimal de generadores asociado a la congruencia del semigrupo. Estas cotas nos sirven para caracterizar los semigrupos afines simpliciales con $K[S]$ Cohen-Macaulay y que además alcanzan las cotas: los semigrupos afines simpliciales y Cohen-Macaulay de máxima codimensión.

En lo que sigue diremos que un semigrupo es Cohen-Macaulay si su anillo de semigrupo asociado es Cohen-Macaulay (en el caso de que $S$ sea simplicial, el que $K[S]$ sea Cohen-Macaulay no depende de $K$). El semigrupo que vamos a considerar es de la forma

$$S = \langle n_1, \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m} \rangle \subseteq \mathbb{N}^r,$$

con $A = \{n_1, , \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m}\}$ un sistema minimal de generadores de $S$ y $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S) = \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(\{n_1, \ldots, n_r\})$ (donde por $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ entendemos el conjunto de todas las combinaciones lineales con coeficientes racionales positivos de elementos de $S$). El entero $r$ es la dimensión del semigrupo y $m$ la codimensión. Como siempre $\sigma$ va a ser la congruencia asociada a $S$, que no es otra que la congruencia núcleo del morfismo:

$$\begin{gathered} \varphi : \mathbb{N}^{r+m} \to S \\ \varphi(a_1, \ldots, a_{r+m}) = \textstyle\sum_{i=1}^{r+m} a_i n_i. \end{gathered}$$

## 3.1. Cómo determinar si un semigrupo afín simplicial es Cohen-Macaulay

Empezamos esta sección introduciendo la notación de Trung y Hoa, así como los resultados obtenidos por éstos para el caso simplicial.

Definimos la $i$-ésima cara de $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ como $F_i = \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(\{n_1,\ldots,n_r\}\setminus\{n_i\})$. Definimos el conjunto $S_i = S-(S\cap F_i)$, esto es, el conjunto de elementos de $\mathsf{G}(S)$ que son diferencia de un elemento de $S$ y otro de la $i$-ésima cara del cono generado por $S$ que también está en $S$.

**Teorema 3.1.1** *En las condiciones anteriores, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $K[S]$ *es Cohen-Macaulay.*
2. *Para cualesquiera* $\alpha,\beta\in S$, *tales que* $\alpha+n_i=\beta+n_j$ $(1\le i\ne j\le r)$, *se tiene que* $\alpha-n_j=\beta-n_i\in S$.
3. *Para todo* $\alpha\in\mathbb{N}^k$, *si* $\alpha-n_i\in S$ *y* $\alpha-n_j\in S$ *entonces* $\alpha-(n_i+n_j)\in S$ $(1\le i\ne j\le r)$.
4. $S=\bigcap_{i=1}^r S_i$.

*Demostración*: La equivalencia entre 1, 2 y 4 viene dada en [41]. La equivalencia entre 2 y 3 es trivial. ■

Recordemos la definición de conjunto de Apéry (véase [1]).

**Definición 3.1.2** *Dado* $n\in S-\{0\}$, *el conjunto de Apéry asociado a n es*

$$\mathrm{S}(n)=\{s\in S : s-n\notin S\}.$$

Estos conjuntos van a jugar un papel importantísimo en este capítulo y en el siguiente.

Veamos que el conjunto $\bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$ es finito. Como veremos más adelante, esto nos servirá para dar una cota para el número de elementos de un sistema de generadores minimal de la congruencia asociada a $S$.

**Lema 3.1.3** *Sea* $S=\langle n_1,\ldots,n_r,n_{r+1},\ldots,n_{r+m}\rangle$ *un semigrupo afín simplicial con* $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)=\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(\{n_1,\ldots,n_r\})$. *Entonces* $\bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$ *es finito.*

*Demostración*: Por ser $S$ simplicial, tenemos que para cada $i\in\{1,\ldots,m\}$ existe un número natural $c_{r+i}$ definido como sigue

$$c_{r+i}=\min\{k\in\mathbb{N}-\{0\} : kn_{r+i}\in\langle n_1,n_2,\ldots,n_r\rangle\}.$$

Nótese además que estos números se pueden calcular de la siguiente manera: podemos considerar $n_i$ como un vector de $\mathbb{Q}^r$. Por ser $\{n_1,\ldots,n_r\}$ una base de $\mathbb{Q}^r$ (recuérdese que estamos suponiendo que $\dim(S) = r$), para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ existen $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_r}$ tales que

$$n_{r+i} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_{i_j} n_j,$$

donde los $\lambda_{i_j}$ se pueden calcular de la siguente forma:

$$\lambda_{i_j} = \frac{\det(n_1, \ldots, n_{j-1}, n_{r+i}, n_{j+1}, \ldots, n_r)}{\det(n_1, \ldots, n_r)}.$$

Es fácil comprobar que

$$c_{r+i} = \frac{\det(n_1, \ldots, n_r)}{\mathrm{mcd}\{\det(n_1, \ldots, n_{j-1}, n_{r+i}, n_{j+1}, \ldots, n_r) : j \in \{1, \ldots, r\}\}},$$

donde mcd es el máximo común divisor.

Definimos

$$\Gamma = \{\sum_{i=1}^{m} \gamma_{r+i} n_{r+i} : \gamma_{r+i} < c_{r+i} \; for \; all \; i \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

Si $n \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ entonces trivialmente $n \in \Gamma$, y por tanto $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ es finito. ■

Veamos que en un semigrupo afín simplicial todo elemento se puede expresar como una combinación de los rayos extremales y un elemento de la intersección de los conjuntos de Apéry de los rayos extremales.

**Lema 3.1.4** *Sea $S = \langle n_1, \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m} \rangle \subset \mathbb{N}^r$ un semigrupo afín simplicial con $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(\{n_1, \ldots, n_r\}) = \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$. Entonces todo elemento $s \in S$ se puede escribir como*

$$s = \sum_{i=1}^{r} a_i n_i + x,$$

*donde $x \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ y $a_i \in \mathbb{N}$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$.*

*Demostración*: Sea $s \in S$. Si $s \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ entonces ya hemos acabado. En caso contrario debe existir un $i$ tal que $s \notin \mathrm{S}(n_i)$, lo que implica que $s_1 = s - n_i \in S$. Si $s_1 \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, tenemos que $s = n_i + s_1$ y ya está. Si no es así, es porque existe $j$ tal que $s_1 \notin \mathrm{S}(n_j)$, por lo que $s_2 = s_1 - n_j = s - n_i - n_j \in S$. Una vez que tenemos $s_k$ nos hacemos la misma pregunta y en caso negativo podemos definir $s_{k+1}$. Está claro que $s_{k+1} < s_k$ con el orden (parcial) usual de $\mathbb{N}^r$, por lo que la sucesión $\{s_k\}$ no puede ser infinita. Esto implica que en algún momento $s_k \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, con lo que, pasando todos los $n_i$ a un lado tenemos lo que buscábamos. ■

Lo sorprendente es que en el caso en que $S$ sea Cohen-Macaulay, la escritura que aparece en el lema anterior es única. Es más, ese hecho caracteriza que $S$ sea Cohen-Macaulay.

**Teorema 3.1.5** *Bajo las anteriores hipótesis, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$K[S]$ es Cohen-Macaulay.*
2. *Para cada $s \in S$ tal que*

$$s = \sum_{i=1}^{r} a_i n_i + x = \sum_{i=1}^{r} b_i n_i + y$$

*con $x, y \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, y $a_i, b_i \in \mathbb{N}$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, se tiene que $a_i = b_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$ y $x = y$.*

*Demostración*: Supongamos que $K[S]$ es Cohen-Macaulay y que no se verifica la segunda condición. Sea $\alpha$ el menor elemento de $S$ (respecto de algún orden total fijo en $\mathbb{N}^r$ compatible con la suma) verificando que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} a_i n_i + x = \sum_{i=1}^{r} b_i n_i + y$$

con $a_i \neq b_i$ para algún $i$ o que $x \neq y$. Nótese que no todos los coeficientes $a_i, b_i$ pueden ser cero, ya que en ese caso se tendría que $x = y$ y que los $a_i$ son los $b_i$ (que serían ambos nulos). Obsérvese además que no todos los $a_i$ pueden ser cero, ya que de ser así, al no ser todos los $b_i$ cero tendríamos que $x$ no estaría en $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$. Lo mismo ocurre con los $a_i$. Por tanto, deben existir $i, j$ tales que $a_i \neq 0 \neq b_j$. (Esto lleva, por la minimalidad de $\alpha$ a que $a_j = b_i = 0$.) Del hecho de que $a_i \neq 0$ y de que $b_j \neq 0$ se deduce que $\alpha - n_i, \alpha - n_j \in S$, y por tanto, usando 3.1.1, obtenemos que $\alpha - (n_i + n_j) \in S$. Como $\alpha - (n_i + n_j) \in S$, el lema anterior nos dice que deben existir $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{N}$ y $z \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, tales que $\alpha - (n_i + n_j) = \sum_{i=1}^{r} c_i n_i + z$. En consecuencia, tenemos la siguiente igualdad:

$$\alpha' = \alpha - n_i = a_1 n_1 + \cdots + (a_i - 1) n_i + \cdots + a_r n_r + x = c_1 n_1 + \cdots + (c_j + 1) n_j + \cdots + c_r n_r + z,$$

con $a_j = 0 \neq (c_j + 1)$, lo que es una contradicción con el hecho de que $\alpha$ era el menor elemento de $S$ verificando que la escritura no era única.

Supongamos ahora que la escritura es única. Probemos que $K[S]$ es Cohen-Macaulay. Para ello vamos a usar la caracterización dada en 3.1.1. Sea $\alpha \in S$ tal que $\alpha - n_i \in S$ y

$\alpha - n_j \in S$. Tenemos que probar que $\alpha - (n_i + n_j) \in S$. Usando el lema anterior, tenemos que existen $a_k, b_k, x, y$ tales que

$$\begin{array}{c} \alpha - n_i = \sum_{k=1}^{r} a_k n_k + x \\ \alpha - n_j = \sum_{k=1}^{r} b_k n_k + y \end{array}$$

y por tanto,

$$a_1 n_1 + \cdots + (a_i + 1) n_i + \cdots + a_r n_r + x = b_1 n_1 + \cdots + (b_j + 1) n_j + \cdots + b_r n_r + y.$$

Usando la hipótesis, obtenemos que $a_i + 1 = b_i$, lo que lleva a que $b_i \neq 0$, y en consecuencia

$$\alpha - (n_j + n_i) = b_1 n_1 + \cdots + (b_i - 1) n_i + \cdots + b_r n_r + y \in S.$$

■

Como consecuencia inmediata de este teorema, tenemos el siguiente resultado, que nos lleva a una forma algorítmica de determinar si un semigrupo afín simplicial es Cohen-Macaulay.

**Corolario 3.1.6** *Bajo las hipótesis anteriores, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$K[S]$ es Cohen-Macaulay.*
2. *Para cada $x, y \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathsf{S}(n_i)$, si $x \neq y$, entonces $x - y \notin \mathsf{G}(\{n_1, \ldots, n_r\})$.*

Como podemos calcular las ecuaciones de $\mathsf{G}(\{n_1, \ldots, n_r\})$ y el conjunto $\bigcap_{i=1}^{r} \mathsf{S}(n_i)$ (al estar contenido en $\Gamma$), podemos verificar de forma directa si un semigrupo cumple la segunda condición del corolario anterior, y por tanto si un semigrupo afín simplicial es Cohen-Macaulay.

**Ejemplo 3.1.7** *Sea*

$$S = \langle (2,0), (0,1), (1,2), (3,1) \rangle.$$

*Calculemos $c_3$ y $c_4$. Tenemos que*

$$\begin{array}{c} 2(1,2) = (2,0) + 4(0,1) \\ 2(3,1) = 3(2,0) + 2(0,1) \end{array}$$

*por lo que $c_3 = c_4 = 2$. Esto hace que*

$$\Gamma = \{(0,0), (1,2), (3,1), (4,3)\},$$

*y por tanto,*

$$\mathrm{S}(n_1) \cap \mathrm{S}(n_2) = \{(0,0),(1,2),(3,1)\}.$$

*Por otro lado,* $G = \mathsf{G}(\{(2,0),(0,1)\})$, *cuya ecuación es*

$$x_1 \equiv 0(mod2).$$

*Para comprobar si* $S$ *es Cohen-Macaulay, tenemos que ver si* $x - y \in G$ *para* $x, y \in \mathrm{S}(n_1) \cap \mathrm{S}(n_2)$.

$$\begin{array}{c}(0,0)-(1,2) \notin G \\ (0,0)-(3,1) \notin G \\ (1,2)-(3,1) \in G,\end{array}$$

*por lo que* $S$ *no es Cohen-Macaulay.*

**Ejemplo 3.1.8** *Sea*

$$S = \langle (2,0),(0,2),(3,0),(2,1),(3,1) \rangle.$$

*Calculamos* $c_3, c_4$ *y* $c_5$ *y obtenemos que* $c_3 = c_4 = c_5 = 2$. *Los elementos de* $\Gamma$ *son*

$$\Gamma = \{(0,0),(3,0),(2,1),(3,1),(5,3),(6,1),(5,1),(8,2)\}$$

*y los de* $\mathrm{S}(n_1) \cap \mathrm{S}(n_2)$ *son*

$$\mathrm{S}(n_1) \cap \mathrm{S}(n_2) = \{(0,0),(3,0),(2,1),(3,1)\}.$$

*Veamos si* $S$ *verifica la condición del corolario anterior.*

$$\begin{array}{c}(0,0)-(3,0) \notin \mathsf{G}(\{(2,0),(0,2)\}) \\ (0,0)-(2,1) \notin \mathsf{G}(\{(2,0),(0,2)\}) \\ (0,0)-(3,1) \notin \mathsf{G}(\{(2,0),(0,2)\}) \\ (3,0)-(2,1) \notin \mathsf{G}(\{(2,0),(0,2)\}) \\ (3,0)-(3,1) \notin \mathsf{G}(\{(2,0),(0,2)\}) \\ (2,1)-(3,1) \notin \mathsf{G}(\{(2,0),(0,2)\})\end{array}$$

*Por lo que* $S$ *es Cohen-Macaulay.*

Por último, antes de finalizar esta sección damos un resultado que nos habla de los elementos del grupo generado por $S$ cuando $S$ es afín, simplicial y Cohen-Macaulay.

**Corolario 3.1.9** *Si* $S = \langle n_1, \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m} \rangle$ *es un semigrupo afín, simplicial y Cohen-Macaulay, entonces:*

1. $\mathsf{G}(S) = \{\sum_{i=1}^{r} z_i n_i + x | z_i \in \mathbb{Z}, x \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)\}$.

2. *Todo elemento de* $\mathsf{G}(S)$ *es igual a una única expresión de la forma* $z_1 n_1 + \cdots + z_r n_r + x$ *con* $z_i \in \mathbb{Z}$ *y* $x \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$.

3. *El elemento* $z_1 n_1 + \cdots + z_r n_r + x$ *con* $z_i \in \mathbb{Z}$ *y* $x \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ *está en* $S$ *si y sólo si* $z_i \geq 0$ *para todo* $i$.

*Demostración*: Para probar el primero de los apartados del corolario, basta con verificar que la diferencia de dos elementos $x, x'$ de $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ se puede escribir como una combinación con coeficientes enteros de los rayos extremales más otro elemento de $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$. Por estar $x - x' \in \mathsf{G}(S)$, deben existir $z_1, \ldots, z_{r+m} \in \mathbb{Z}$ tales que $x - x' = z_1 n_1 + \cdots + z_r n_r + z_{r+1} n_{r+1} + \cdots + z_{r+m} n_{r+m}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, tómense $q_i \in \mathbb{Z}$ y $b_i \in \mathbb{N}$ tales que $z_{r+i} = q_i c_{r+i} + b_i$ (recuérdese que $c_{r+i}$ era el menor entero positivo que hacía que $c_{r+i} n_{r+i}$ fuese una combinación con coeficientes naturales de los rayos extremales). Tenemos por tanto que $x - x' = z'_1 n_1 + \cdots + z'_r n_r + b_1 n_{r+1} + \cdots + b_m n_{r+m}$, para algunos $z'_i \in \mathbb{Z}$. Por otro lado, $b_1 n_{r+1} + \cdots + b_m n_{r+m} \in S$, por lo que existen $d_1, \ldots, d_r \in \mathbb{N}$ e $y \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, tales que $b_1 n_{r+1} + \cdots + b_m n_{r+m} = d_1 n_1 + \cdots + d_r n_r + y$.

La segunda y tercera parte son consecuencias inmediatas de la unicidad de la escritura en los semigrupos Cohen-Macaulay. ■

## 3.2. Presentaciones de los semigrupos afines, simpliciales y Cohen-Macaulay

En esta sección, damos una cota para el cardinal de un sistema de generadores minimal de la congruencia asociada a un semigrupo afín simplicial que es Cohen-Macaulay. En el primer capítulo presentamos un método para construir una relación mínima para semigrupos afines. El método se basaba en determinar los $n \in S$ tales que su grafo asociado $\mathsf{G}_n$ no fuese conexo. El número de relatores que surge de cada $\mathsf{G}_n$ no conexo es el número de componentes conexas de dicho grafo menos uno. La idea que vamos a utilizar para encontrar una cota para el número de elementos de un sistema minimal de generadores de la congruencia, $\sigma$, asociada a $S$. es ver que dichos elementos se pueden escribir de una forma especial. Recúerdese que en el caso de semigrupos numéricos, los elementos que verificaban que su grafo asociado no era conexo se podían escribir como suma de un elemento de $\mathrm{S}(n_0)$ y de un generador distinto de $n_0$. En el caso que ahora nos preocupa, el papel de $\mathrm{S}(n_0)$ lo juega $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, tal y como vamos a ver a continuación.

**Lema 3.2.1** *Si* $S$ *es un semigrupo afín, simplicial y Cohen-Macaulay, entonces los elementos del conjunto* $\{n_1, \ldots, n_r\} \cap \mathrm{V}(\mathsf{G}_n)$ *están todos en la misma componente conexa.*

*Demostración*: Este resultado es una consecuencia directa de 3.1.1. ■

**Lema 3.2.2** *Bajo las mismas hipótesis del lema anterior, si $\mathsf{G}_n$ no es conexo, entonces existen $j \in \{1,\ldots,m\}$ y $s \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ tales que*

$$n = s + n_{r+j}.$$

*Demostración*: Supongamos que el enunciado es falso, a saber, que para todo elemento $n_{r+k} \in \mathrm{V}(\mathsf{G}_n)$ existe un $i \in \{1,\ldots,r\}$ tal que $n - n_{r+k} \notin \mathrm{S}(n_i)$. Esto implicaría que $n - (n_{r+k} + n_i) \in S$ y por tanto $n_{r+k}$ estaría en la misma componente de $\mathsf{G}_n$ que contiene a los elementos de $\{n_1,\ldots,n_r\} \cap \mathrm{V}(\mathsf{G}_n)$, y en consecuencia $\mathsf{G}_n$ sería conexo (ya que eso ocurriría con todos los $n_{r+k},\ k \in \{1,\ldots,m\}$). ■

**Ejemplo 3.2.3** *Calculemos un sistema minimal de generadores de la congruencia asociada al semigrupo*

$$S = \langle (2,0),(0,2),(3,0),(2,1),(3,1)\rangle.$$

*Sabemos que*

$$\mathrm{S}(n_1) \cap \mathrm{S}(n_2) = \{(0,0),(3,0),(2,1),(3,1)\}$$

*y que $S$ es Cohen-Macaulay (véase el ejemplo 3.1.8).*

*Si intentásemos aplicar la cota vista en el primer capítulo tendríamos que* $m = 3,\ \text{máx}(|\det(n_{i_1},n_{i_2})|) = 6$, *por lo que si $n$ es tal que $\mathsf{G}_n$ es no conexo, entonces*

$$n \leq 3\cdot 6\cdot(2+3+2+3,2+1+1) = (180,72).$$

*Luego tendríamos que buscar entre los elementos que están en $S$, cuya primera coordenada es menor que 180 y cuya segunda coordenada es menor que 72. Veamos que usando el lema anterior, nos ahorramos una cantidad enorme de trabajo.*

*Por lo visto en el lema anterior, si $n$ es tal que $\mathsf{G}_n$ es no conexo, entonces*

$$n = s + n_{2+j},$$

*con $s \in \mathrm{S}(n_1) \cap \mathrm{S}(n_2)$, y $1 \leq j \leq 3$. Por lo que*

$$n \in \{(6,0),(5,1),(6,1),(4,2),(5,2),(6,2)\}.$$

*Hemos reducido así el número de grafos a estudiar a seis, lo que es una reducción considerable.*

| *Grafo* | *Componentes conexas* | *Relatores* |
|---|---|---|
| $\mathsf{G}_{(6,0)}$ | $\{(2,0)\},\{(3,0)\}$ | $3e_1 = 2e_3$ |
| $\mathsf{G}_{(5,1)}$ | $\{(2,0),(3,1)\},\{(3,0),(2,1)\}$ | $e_1+e_5 = e_3+e_4$ |
| $\mathsf{G}_{(6,1)}$ | $\{(2,0),(2,1)\},\{(3,0),(3,1)\}$ | $2e_1+e_4 = e_3+e_5$ |
| $\mathsf{G}_{(4,2)}$ | $\{(2,0),(0,2)\},\{(2,1)\}$ | $2e_1+e_2 = 2e_4$ |
| $\mathsf{G}_{(5,2)}$ | $\{(2,0),(0,2),(3,0)\},\{(2,1),(3,1)\}$ | $e_1+e_2+e_3 = e_4+e_5$ |
| $\mathsf{G}_{(6,2)}$ | $\{(2,0),(0,2),(2,1),(3,0)\},\{(3,1)\}$ | $3e_1+e_2 = 2e_5$ |

*Por lo que* $\rho$ *tiene seis elementos.*

Como sabemos que $\bigcap_{i=1}^{r}\mathrm{S}(n_i) \subseteq \Gamma$ y $\#\Gamma \leq \prod_{i=1}^{m} c_{r+i}$, tenemos que puede haber como mucho $m\prod_{i=1}^{m} c_{r+i}$ elementos en $S$ tales que su grafo asociado no es conexo. Como cada grafo puede tener como mucho $m+1$ componentes conexas (todos los elementos de $\{n_1,\ldots,n_r\}\cap \mathrm{V}(\mathsf{G}_n)$ están en la misma componente conexa), tenemos que el número máximo de elementos de un sistema minimal de generadores de $\sigma$ es $m^2\prod_{i=1}^{m} c_{r+i}$.

La cota que acabamos de dar se puede mejorar considerablemente, pero para ello tenemos que dar un par de resultados previos. La idea de esta mejora se debe a la gran similitud que existe entre los semigrupos numéricos y los semigrupos afines que son simpliciales y Cohen-Macaulay. Dicha similitud nos llevó a intentar comprobar si las cotas encontradas por Rosales para el caso de semigrupos numéricos servirían para semigrupos afines, simpliciales y Cohen-Macaulay, siendo el resultado bastante positivo (compárense las cotas que aparecen en esta sección y las del trabajo [28]).

**Lema 3.2.4** *Bajo las condiciones anteriores, si* $\mathsf{G}_n$ *no es conexo, entonces existen* $k > r$ *y un elemento* $s \in \bigcap_{j=1}^{k-1}\mathrm{S}(n_j)$ *tales que*

1. $n = n_k + s$,
2. $n \notin \bigcap_{j=1}^{k-1}\mathrm{S}(n_j)$,
3. *Para todo* $s' \in S$, *tal que* $s' \neq s$ *y* $s \notin \mathrm{S}(s')$, *se tiene que* $s'+n_k \in \bigcap_{j=1}^{k-1}\mathrm{S}(n_j)$.

*Demostración*: Sean $i = \text{mín}\{j : n_j \in \mathrm{V}(G_n)\}$, y $C_i$ la componente conexa que contiene a $n_i$. Tómese $k = \text{mín}\{j : n_j \in \mathrm{V}(G_n)\setminus C_i\}$ (tiene sentido la definición de $k$, por ser $\mathsf{G}_n$ no conexo). Veamos que $k$ es mayor que $r$. Si $\{n_1,\ldots,n_r\}\cap\mathrm{V}(G_n)\neq\emptyset$, entonces claramente $i\leq r$ y por tanto $k>r$, puesto que $n_k$ no está en la componente conexa que contiene a $\{n_1,\ldots,n_r\}\cap\mathrm{V}(G_n)$. Si, en caso contrario, $\{n_1,\ldots,n_r\}\cap\mathrm{V}(G_n)=\emptyset$, entonces $i>r$ y como $i<k$, tenemos que $k>r$. Tenemos así probado que, en cualquier caso, $k>r$.

Ahora bien, como $n_k \in \mathrm{V}(\mathsf{G}_n)$, entonces $n-n_k \in S$. Sea $s = n-n_k$. Por la definición de $k$, para cualquier $j<k$, no puede existir un lado que una $n_j$ con $n_k$, por lo que $s-$

$n_j = n-(n_k+n_j) \notin S$. De este hecho se deduce que $s \in \bigcap_{j=1}^{k-1} \mathrm{S}(n_j)$, con lo que tenemos probados los dos primeros apartados del enunciado.

Sea ahora $s' \in S$ tal que $s \neq s'$ y $s \notin \mathrm{S}(s')$. Se tiene entonces que $0 \neq s-s' \in S$ y por tanto debe haber un generador $n_t$ tal que $s-s'-n_t \in S$. Por ser $n-n_t = (s-s'-n_t)+s'+n_k \in S$, tenemos que $n_t$ es un vértice de $\mathsf{G}_n$. Es más, se tiene además que $n-(n_t+n_k) \in S$, por lo que $n_t$ y $n_k$ están en la misma componente conexa de $\mathsf{G}_n$. Veamos que $s'+n_k \in \bigcap_{j=1}^{k-1} \mathrm{S}(n_j)$. Si existiese un $j \leq k-1$ tal que $s'+n_k-n_j \in S$, tendríamos que $n-n_j = (s-s'-n_t)+n_t+(s'+n_k-n_j) \in S$, y por tanto $n_j$ sería un vértice de $\mathsf{G}_n$, que claramente estaría en la misma componente conexa que $n_t$, que a su vez está en la misma componete conexa que $n_k$. Pero una cosa es clara: $n_k$ es tal que $k$ es el menor índice de los vértices que están en su componente conexa, y por otro lado $j<k$, lo que es una contradicción. ■

El primer apartado de este último resultado describe aún mejor la forma de los $n$ con $\mathsf{G}_n$ no conexo.

**Lema 3.2.5** *Para todo k tal que $r+1 \leq k \leq r+m$, sea el conjunto*

$$D_k = \{s \in \bigcap_{j=1}^{k-1} \mathrm{S}(n_j) : s+n_k \notin \bigcap_{j=1}^{k-1} \mathrm{S}(n_j) \text{ y para todo } s' \in S, \text{ con } s' \neq s$$

$$\text{y } s \notin \mathrm{S}(s'), s'+n_k \in \bigcap_{j=1}^{k-1} \mathrm{S}(n_j)\}$$

*y sea $\dot{\bigcup}_{k=r+1}^{r+m} D_k$ la unión disjunta de los conjuntos $D_k$. Sea $\rho$ un sistema minimal de generadores de $\sigma$. Entonces existe una aplicación inyectiva $i : \rho \to \dot{\bigcup}_{k=r+1}^{r+m} D_k$.*

*Demostración*: Para todo $n \in S$, sean $\mathsf{G}_n^1, \ldots, \mathsf{G}_n^{t_n}$ las componentes conexas de $\mathsf{G}_n$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathsf{G}_n^1$ contiene al vértice de $\mathsf{G}_n$ con menor índice. Recuérdese que $\rho_n$ es de la forma

$$\rho_n = \{(\alpha_n^2, \alpha_n^1), \ldots, (\alpha_n^{t_n}, \alpha_n^1)\},$$

donde cada $\alpha_n^i$ está asociado a $\mathsf{G}_n^i$. Para cada $n$ y cada $(\alpha_n^i, \alpha_n^1)$, sea $i(\alpha_n^i, \alpha_n^1) = n-n_k$, donde $k = \text{mín}\{q : n_q \in \mathrm{V}(G_n^i)\}$. Usando un razonamiento similar al empleado en el tercer apartado del lema anterior, se puede probar que $i(\alpha_n^i, \alpha_n^1) = n-n_k \in D_k$.

Supongamos que $i(a,b) = i(a',b')$. Debe existir $k$ tal que $i(a,b) = i(a',b') \in D_k$, y por tanto $\varphi(a)-n_k = i(a,b) = i(a',b') = \varphi(a')-n_k$. Esto implica que $\varphi(a) = \varphi(a')$, por lo que $b = b'$ (esto es por la forma que tiene $\rho_{\varphi(a)}$). Si se tuviese que $a \neq a'$, entonces los dos corresponderían a componentes conexas distintas, por lo que, por la definición de $k$, se tendría que $i(a,b)$ e $i(a',b')$ estarían en distintos $D_k$, lo que es una contradicción. ■

Juntando los resultados anteriores, obtenemos el siguiente teorema:

**Teorema 3.2.6** *El cardinal de un sistema minimal de generadores de* $\sigma$ *es menor o igual que*

$$\frac{(2d-m)(m-1)}{2}+1,$$

*donde* $d = \#\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$.

*Demostración*: Lo único que tenemos que hacer es estimar el número de elementos de todos y cada uno de los $D_k$.

Sea $c$ el menor entero positivo verificando que $cn_{r+m} \in \langle n_1, \ldots, n_{r+m-1}\rangle$. Nótese que por ser $\{n_1, \ldots, n_{r+m}\}$ un sistema minimal de generadores de $S$, tenemos que $c > 1$. Por otro lado, $c \leq c_{r+m}$. Se observa fácilmente que

$$\bigcap_{i=1}^{r+m-1} \mathrm{S}(n_i) = \{0, n_{r+m}, \ldots, (c-1)n_{r+m}\}.$$

Por otro lado, el único elemento de $D_{r+m}$ es $(c-1)n_{r+m}$. (Tenemos que $(c-1)n_{r+m} \in \bigcap_{i=1}^{r+m-1} \mathrm{S}(n_i)$ y $(c-1)n_{r+m} + n_{r+m} \notin \bigcap_{i=1}^{r+m-1} \mathrm{S}(n_i)$. Además si $s - s' \in S$, con $s' \neq s$, es fácil comprobar que $s' \in \bigcap_{i=1}^{r+m-1} \mathrm{S}(n_i)$ y por ser $s' \neq s$, tenemos que $s' + s \in \bigcap_{i=1}^{r+m-1} \mathrm{S}(n_i)$.)

Para $r+1 \leq k \leq r+m-1$, tenemos que

$$D_k \subseteq \bigcap_{i=1}^{k-1} \mathrm{S}(n_i) \setminus \{0\} \subseteq \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) \setminus \{0, n_{r+1}, \ldots, n_{k-1}\}.$$

Por tanto, $\#D_{r+i} \leq d - i$ para todo $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, y en consecuencia, usando 3.2.5, tenemos que

$$\#\rho \leq 1 + \sum_{i=1}^{m-1} (d-i) = \frac{(2d-m)(m-1)}{2} + 1.$$

■

**Ejemplo 3.2.7** *En el ejemplo 3.2.3, tenemos que* $d = 4,\ m = 3$ *y* $\#\rho = 6$.

$$\frac{(2d-m)(m-1)}{2} + 1 = 6.$$

*Por lo que ese semigrupo alcanza la cota.*

Si $m=1$, tenemos que $\#\rho \leq 1$. Por otro lado, la cota inferior para el cardinal de $\rho$ dada por Herzog en [19], hace que $\#\rho \geq r+m-r=m=1$. Por tanto, $\#\rho=1$, y la cota se alcanza. Como veremos en la siguiente sección, éstos no son los únicos semigrupos para los que la cota se alcanza.

En principio, $d$ puede ser difícil de calcular, ya que uno tiene que calcular todos los elementos de $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$. Ahora bien, en la cota que antes hemos presentado, $d$ puede ser substituido por $\det(n_1,\ldots,n_r)$, tal y como mostramos a continuación. Sea el grupo cociente $\mathbb{Z}^r/\mathsf{G}(\{n_1,\ldots,n_r\})$. Todas las clases de equivalencia de ese grupo cociente tienen un representante en la caja cuyos vértices son los elementos de la forma $\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i n_i$, con $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ para todo $i$. Nótese además, que como $S$ es Cohen-Macaulay, para cualesquiera $x,y \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, se tiene que $x-y \notin \mathsf{G}(\{n_1,\ldots,n_r\})$, por lo que los representantes de las clases de $x$ e $y$ en la caja son distintos. Esto implica que $\#\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) \leq \det(n_1,\ldots,n_r)$, ya que el número de elementos que hay en la mencionada caja es $\det(n_1,\ldots,n_r)$. Por tanto, una segunda cota (menos refinada que la dada en el teorema anterior) sería:

$$\frac{(2\det(n_1,\ldots,n_r)-m)(m-1)}{2}+1.$$

Podría parecer que la acotación $\#\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) \leq \det(n_1,\ldots,n_r)$, es demasiado grosera, pero hay casos para los que la desigualdad se convierte en igualdad, como el siguiente ejemplo muestra.

**Ejemplo 3.2.8** *Sea $r=m=2$ y $S=\langle (2,0),(0,4),(1,2),(1,1)\rangle$. Usando los resultados dados en esta sección, no es difícil probar que*

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)=\{(0,0),(1,2),(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,4),(4,5)\},$$

*y en consecuencia, $\#\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)=\det((2,0),(0,4))$.*

## 3.3. Semigrupos afines, simpliciales y Cohen-Macaulay con máxima codimensión

Sea $S=\langle n_1,\ldots,n_r,n_{r+1},\ldots,n_{r+m}\rangle \subset \mathbb{N}^r$ un semigrupo simplicial tal que $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)=\{0,x_1,\ldots,x_{d-1}\}$. Está claro que $m$ tiene que ser menor que $d$, por ser $\{n_1,\ldots,n_{r+m}\}$ un sistema minimal de generadores de $S$. Parece natural decir que $S$ es de máxima codimensión cuando $m=d-1$. Para este tipo de semigrupos, es más fácil calcular $\rho$ que para el resto de semigrupos afines. Este hecho se pone de manifiesto en la demostración del siguiente teorema:

**Teorema 3.3.1** *Sea S un semigrupo afín, simplicial y Cohen-Macaulay con máxima codimensión. Entonces* $\#\rho = d(d-1)/2$.

*Demostración*: Por ser $m = d-1$, tenemos por 3.2.6 que $\#\rho \leq d(d-1)/2$. Por otro lado, recuérdese que $\rho_n$ tiene tantos elementos como componentes conexas tiene $\mathsf{G}_n$ menos uno. Lo que tenemos que hacer es contar las componentes conexas de todos los $\mathsf{G}_n$ no conexos. Para ello, obsérvese que:

1. Por ser $m = d-1$ y por verificarse siempre que $\{n_{r+1},\ldots,n_{r+m}\} \subseteq \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, tenemos que
$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) = \{0, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m}\}.$$

2. Si $\mathsf{G}_n$ no es conexo, entonces por 3.2.2, existe $s \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ y $j \in \{1,\ldots,m\}$ tal que $n = s + n_{r+j}$ (esto a su vez implica que $s \neq 0$). Por tanto, $n = n_{r+i} + n_{r+j}$ para algún $i$. Hemos probado por tanto que si $\mathsf{G}_n$ no es conexo, entonces $n$ es de la forma $n_{r+i} + n_{r+j}$. El recíproco también es cierto, tal y como se demuestra en los siguientes dos puntos.

3. Si $n = n_{r+i} + n_{r+j}$, entonces $n \notin \{0, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m}\} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$. Esto lleva a que existe un $k \in \{1,\ldots,r\}$ tal que $n \notin \mathrm{S}(n_k)$, lo cual implica que $\{n_1,\ldots,n_r\} \cap \mathrm{V}(\mathsf{G}_n) \neq \emptyset$.

4. Si $n = n_{r+i} + n_{r+j}$, entonces

   *a*) Si $i \neq j$, entonces $\{n_{r+i}, n_{r+j}\}$ es una componente conexa de $\mathsf{G}_n$. Esto se debe a que $n_{r+i}, n_{r+j} \in \mathrm{V}(\mathsf{G}_n)$, y a que si $n - (n_{r+i} + n_k) \in S$, con $k \neq r+j$, se tendría que $n_{r+j} - n_k \in S$, lo cual no es posible.

   *b*) Si $i = j$, razonando de forma análoga, obtenemos que $\{n_{r+i}\}$ es una componente conexa de $\mathsf{G}_n$.

Tenemos así que $\rho_n$ tiene tantos elementos como posibles expresiones de la forma $n = n_{r+i} + n_{r+j},\ 1 \leq i, j \leq m$, ya que tiene $\mathsf{G}_n$ la componente conexa cuyos vértices están en $\{n_1,\ldots,n_r\}$ y las componentes $\{n_{r+i}, n_{r+j}\}$. Tenemos por tanto que $\#\rho$ es el número de posibles sumas de la forma $n_{r+i} + n_{r+j}$ y por tanto tiene $d(d-1)/2$ elementos. ■

El recíproco del resultado anterior también es cierto.

**Teorema 3.3.2** *Sea* $\rho$ *un sistema minimal de generadores de* $\sigma$. *Si* $\#\rho = d(d-1)/2$, *entonces S tiene máxima codimensión.*

*Demostración*: Por 3.2.6, $\#\rho \leq (2d-m)(m-1)/2+1$. Por consiguiente, $d(d-1)/2 \leq (2d-m)(m-1)/2+1$. Pasando todo a un miembro y agrupando términos obtenemos que $m^2-(2d+1)m+d^2+d-2 \leq 0$, inecuación que nos lleva a que $m \in [d-1, d+2]$, y como $m < d$, tenemos que $m = d-1$. ■

A continuación damos un método para construir semigrupos simpliciales, afines y Cohen-Macaulay de máxima codimensión a partir de semigrupos afines, simpliciales y Cohen-Macaulay. La idea está en cambiar el conjunto de generadores del semigrupo, haciendo intervenir los elementos de la intersección de los conjuntos de Apéry de los rayos extremales.

**Teorema 3.3.3** *Sea S un semigrupo afín, simplicial y sea* $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) = \{0, x_1, \ldots, x_{d-1}\}$*. Sea* $\overline{\mathrm{S}} = \langle n_1, \ldots, n_r, n_1+x_1, \ldots, n_1+x_{d-1}\rangle$*. Si S es Cohen-Macaulay, entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. *El conjunto* $\{n_1, \ldots, n_r, n_1+x_1, \ldots, n_1+x_{d-1}\}$ *es un sistema minimal de generadores de* $\overline{\mathrm{S}}$*.*

2. *El semigrupo* $\overline{\mathrm{S}}$ *es simplicial.*

3. *El semigrupo* $\overline{\mathrm{S}}$ *verifica*

$$\bigcap_{i=1}^{r} \overline{\mathrm{S}}(n_i) = \{0, n_1+x_1, \ldots, n_1+x_{d-1}\}.$$

4. *El semigrupo* $\overline{\mathrm{S}}$ *es Cohen-Macaulay de máxima codimensión.*

*Demostración*:

1. Supongamos que

$$n_1+x_{d-1} = a_1n_1+\cdots+a_rn_r+b_1(n_1+x_1)+\cdots+b_{d-1}(n_1+x_{d-1}),$$

entonces

$$n_1+x_{d-1} = (a_1+b_1+\cdots+b_{d-1})n_1+a_2n_2+\cdots+a_rn_r+b_1x_1+\cdots+b_{d-1}x_{d-1}.$$

Pueden pasar dos cosas:

*a*) Si $a_1 + b_1 + \cdots + b_{d-1} = 0$, entonces $n_1 + x_{d-1} = a_2 n_2 + \cdots + a_r n_r$. Como $n_1 + x_{d-1} \neq 0$, debe existir un $i$ tal que $a_i \neq 0$. Esto significa que $(n_1 + x_{d-1}) - n_1 \in S$ y $(n_1 + x_{d-1}) - n_i \in S$, lo que, por 3.1.1, implica que $(n_1 + x_{d-1}) - (n_1 + n_i) = x_{d-1} - n_i \in S$, lo que es imposible por estar $x_{d-1}$ en $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$.

*b*) Si $a_1 + b_1 + \cdots + b_{d-1} \neq 0$, entonces, como $x_{d-1} \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, se tiene que verificar que $a_1 + b_1 + \cdots + b_{d-1} = 1$ y $a_2 = \cdots = a_r = 0$. Aparecen dos subcasos:

1) Si $a_1 = 1$ y $b_i = 0$ para todo $i$, entonces $n_1 + x_{d-1} = n_1$, lo cual es imposible.

2) Si $a_1 = 0$ y $b_i = 1$ para algún $i$ (y por tanto $b_j = 0$ para todo $j \neq i$), tenemos que $n_1 + x_{d-1} = n_1 + x_i$, lo que lleva de nuevo a una contradicción.

Tenemos por tanto que $n_1 + x_{d-1}$ no se puede escribir como combinación lineal con coeficientes naturales del resto de los generadores de $\overline{S}$. Para el resto de generadores de la forma $n_1 + x_i$, la demostración es análoga (y está claro que los generadores de la forma $n_i$ no se pueden escribir como combinación del resto, ya que ellos forman base de $\mathbb{Q}^r$).

2. Trivial, por ser $S$ simplicial.

3. Como $\{n_1, \ldots, n_r, n_1 + x_1, \ldots, n_1 + x_{d-1}\}$ es un sistema minimal de generadores de $\overline{S}$, tenemos que $\{0, n_1 + x_1, \ldots, n_1 + x_{d-1}\} \subseteq \bigcap_{i=1}^{r} \overline{\mathrm{S}}(n_i)$. Para ver la otra inclusión, probemos que todo elemento $s \in \overline{S} \setminus \langle n_1, \ldots, n_r \rangle$ se puede escribir de la forma

$$s = a_1 n_1 + \cdots + a_r n_r + (n_1 + x_i),$$

para algún $i$. Como $s \in \overline{S} \setminus \langle n_1, \ldots, n_r \rangle$, tenemos que

$$s = b_1 n_1 + \cdots + b_r n_r + c_1(n_1 + x_1) + \cdots + c_{d-1}(n_1 + x_{d-1})$$

con $c_k \neq 0$ para algún $k$. Por estar $c_1 x_1 + \cdots + c_{d-1} x_{d-1} \in S$, entonces existen $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{N}$ y $j$ tales que $c_1 x_1 + \cdots + c_{d-1} x_{d-1} = f_1 n_1 + \cdots + f_r n_r + x_j$. Por tanto,

$$s = (b_1 + c_1 + \cdots + c_k - 1 + \cdots + c_{d-1} + f_1) n_1 + (b_2 + f_2) n_2 + \cdots + (b_r + f_r) n_r + (x_j + n_1).$$

4. Es trivial usando 3.1.6, que $S$ es Cohen-Macaulay y que $\bigcap_{i=1}^{r} \overline{\mathrm{S}}(n_i) = \{0, n_1 + x_1, \ldots, n_1 + x_{d-1}\}$. $\square$

■

Este proceso lo podemos repetir sucesivas veces para otros rayos extremales que no sean $n_1$, e incluso para combinaciones de los rayos extremales, tal y como se muestra en el siguiente resultado:

**Corolario 3.3.4** *Bajo las mismas hipótesis del teorema anterior, sea $b \in \langle n_1, \ldots, n_r \rangle$, $b \neq 0$ y $\tilde{S} = \langle n_1, \ldots, n_r, b + x_1, \ldots, b + x_{d-1} \rangle$. Si S is Cohen-Macaulay, entonces $\tilde{S}$ es simplicial y Cohen-Macaulay con máxima codimensión.*

**Ejemplo 3.3.5** *Sea*

$$S = \langle (2,0), (0,2), (3,0), (2,1), (3,1) \rangle.$$

*Ya hemos visto que S es Cohen-Macaulay y que*

$$\mathrm{S}(n_1) \cap \mathrm{S}(n_2) = \langle (0,0), (3,0), (2,1), (3,1) \rangle.$$

*Tomemos $b = (4,8)$, tenemos que*

$$\tilde{S} = \langle (2,0), (0,2), (7,8), (6,9), (7,9) \rangle$$

*es Cohen-Macaulay de máxima codimensión.*

## 3.3.1. Algunos semigrupos afines, simpliciales y Cohen-Macaulay con máxima codimensión

En esta sección, mostramos otra forma de construir semigrupos afines, simpliciales y Cohen-Macaulay de máxima codimensión.

Sea $n_i = k_i e_i$, con $k_i \in \mathbb{N}$. Sea $\prec$ un orden de grado total compatible con la adición en $\mathbb{N}^r$. Sea $\rho = \{(n_i, 0) : i \in \{1, \ldots, r\}\}$ y sea $\sigma = \langle \rho \rangle$ la congruencia generada por $\rho$. Podemos definir la aplicación:

$$\mu : \mathbb{N}^r / \sigma \to \mathbb{N}^r$$
$$\mu([n]) = min_{<}[n]$$

Es fácil probar el siguiente lema (véase [32]).

**Lema 3.3.6**

1. *El conjunto $\rho$ es un sistema canónico de generadores de $\sigma$.*
2. *Para cada $n \in N^r$ existen $a_1, \ldots, a_r \in N$ tales que $n = \mu([n]) + \sum_{i=1}^{r} a_i n_i$.*

3. $\mathrm{Im}(\mu)$ *es el conjunto de elementos incluidos en la caja cuyos vértices son los puntos* $\sum_{i=1}^r \varepsilon_i n_i$ *con* $\varepsilon_i \in \{0,1\}$*, sin contar las caras que no contienen al cero.*

4. *El elemento* $(x,y) \in \sigma$ *si y sólo si* $x-y \in \mathsf{G}(\{n_1,\ldots,n_r\})$.

Antes de continuar, necesitamos dar la definición de sistema completo módulo un subgrupo de $\mathbb{Z}^r$.

**Definición 3.3.7** *Sea* $H$ *un subgrupo de* $\mathbb{Z}^r$ *y sea* $\{x_1,\ldots,x_p\} \subset \mathbb{Z}^r$. *El conjunto* $\{x_1,\ldots,x_p\}$ *es un sistema completo módulo* $H$ *si y sólo si las siguientes condiciones se verifican:*

1. *Para todo* $i,j \in \{1,\ldots,p\}$, *si* $x_i - x_j \in H$ *entonces* $i=j$.

2. *Para todo* $i,j \in \{1,\ldots,p\}$ *existe* $k \in \{1,\ldots,p\}$ *tal que* $x_i + x_j - x_k \in H$.

El siguiente lema relaciona el concepto de sistema completo y el de conjunto de Apéry.

**Lema 3.3.8** *Sea* $\{n_1,\ldots,n_r\} \subset \mathbb{N}^r$, $H = \mathsf{G}(\{n_1,\ldots,n_r\})$, *y sea* $\{0 = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}\}$ *un sistema completo módulo* $H$. *Sea* $S = \langle n_1,\ldots,n_r,x_1,\ldots,x_{d-1}\rangle \subseteq \mathbb{N}^r$ *un semigrupo afín simplicial como de costumbre. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i) = \{0 = x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}\}$.

2. *Para todo* $i,j \in \{1,\ldots,d-1\}$ *existen* $k \in \{0,1,\ldots,d-1\}$ *y* $(a_1,\ldots,a_r) \in \mathbb{N}^r$ *tales que* $x_i + x_j = \sum_{i=1}^r a_i n_i + x_k$.

*Demostración*: Supongamos que $\bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i) = \{0 = x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}\}$. Como $x_i + x_j \in S$, tenemos entonces que, por 3.1.4, existe $(a_1,\ldots,a_r) \in \mathbb{N}^r$ tal que $x_i + x_j = \sum_{i=1}^r a_i n_i + x_k$, lo que implica el segundo apartado.

Supongamos ahora que el segundo apartado es cierto. Demostremos que

$$\{0 = x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}\} \subseteq \bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i).$$

De no ocurrir esto, existirían $i,j$ tales que $x_i - n_j \in S$. Por tanto, $x_i - n_j = \sum_{i=1}^r a_i n_i + \sum_{i=1}^{d-1} b_i x_i$. Usando varias veces la hipótesis, obtenemos que $\sum_{i=1}^{d-1} b_i x_i = \sum_{i=1}^r c_i n_i + x_k$, y en consecuencia $x_i - n_j = \sum_{i=1}^r (a_i + c_i) n_i + x_k$ lo que conduce a $x_i - x_k \in H$. Por hipótesis esto implica que $x_i = x_k$. Pero esto es una contradicción ya que $-n_j$ no puede ser igual que $\sum_{i=1}^r (a_i + c_i) n_i$.

Tómese ahora $s \in \bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$. Tenemos entonces que $s = \sum_{i=1}^{d-1} b_i x_i$. Como antes, podemos aplicar varias veces el segundo apartado obteniendo $s = \sum_{i=1}^r c_i n_i + x_k$ para algún $(c_1,\ldots,c_r) \in \mathbb{N}^r$ y algún $k \in \{0,1,\ldots,d-1\}$. Al estar $s$ en $\bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$, tenemos que $c_i = 0$ para todo $i$, y por tanto $s = x_k$. Esto concluye la demostración. ∎

Volvemos a tomar ahora $n_i = k_i e_i$. Tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 3.3.9** *Sea* $\{0 = x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}\} \subseteq \mathrm{Im}(\mu)$ *un sistema completo módulo* $\mathsf{G}(\{n_1,\ldots,n_r\})$. *Entonces* $S = \langle n_1,\ldots,n_r, n_1+x_1,\ldots,n_1+x_{p-1}\rangle$ *es un semigrupo afín, simplicial y Cohen-Macaulay de máxima codimensión.*

*Demostración*: Es suficiente probar que $\bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i) = \{0, n_1+x_1,\ldots,n_1+x_{p-1}\}$ y que $\{n_1,\ldots,n_r,n_1+x_1,\ldots,n_1+x_{p-1}\}$ es un sistema minimal de generadores de $S$.

Para probar el primer punto, vamos a usar 3.3.8. Nótese que, por ser $\{0,x_1,\ldots,x_{p-1}\}$ un sistema completo, tenemos que para todo $i,j$ existe un $k$ tal que $x_i + x_j - x_k \in \mathsf{G}(\{n_1,\ldots,n_r\})$. Obsérvese también que $x_i + x_j - \mu([x_i+x_j]) \in \mathsf{G}(\{n_1,\ldots,n_r\})$, y que $x_k \in \mathrm{Im}(\mu)$, lo que implica que $x_k = \mu([x_i+x_j])$. Usando el lema 3.3.6, tenemos que existen $a_1,\ldots,a_r \in \mathbb{N}$ tales que $x_i + x_j = x_k + \sum_{i=1}^r a_i n_i$. Por tanto, $(n_1+x_i)+(n_1+x_j) = 2n_1 + \sum_{i=1}^r a_i n_i + x_k = (n_1+x_k) + (a_1+1)n_1 + \sum_{i=2}^r a_i n_i$.

Probemos ahora que $\{n_1,\ldots,n_r,n_1+x_1,\ldots,n_1+x_{p-1}\}$ es un sistema minimal de generadores de $S$. Es suficiente probar que $n_1+x_i$ no puede escribirse como $n_1+x_i = \sum_{j=1,j\neq i}^{p-1} b_j(n_1+x_j)$. Si existiese una expresión como esa, entonces $\sum b_j$ tiene que ser mayor que uno, ya que $\{0,x_1,\ldots,x_{p-1}\}$ es un sistema completo módulo $\mathsf{G}(\{n_1,\ldots,n_r\})$. Aplicando varias veces la misma idea de antes, tenemos que deben existir $c_1,\ldots,c_r$ tales que $\sum b_j x_j = x_k + \sum c_i n_i$, para algún $k \in \{0,\ldots,p-1\}$. Por tanto, $x_i = x_k + y$, con $y \in \mathsf{G}(\{n_1,\ldots,n_r\})$, y como $\{0,x_1,\ldots,x_{p-1}\}$ es un sistema completo módulo $\mathsf{G}(\{n_1,\ldots,n_r\})$, tenemos que $i$ tiene que ser igual a $k$ y en consecuencia $y=0$, lo que conduce a que $c_i = 0$ para todo $i$ y $\sum b_j = 1$, lo que es una contradicción.

Finalmente, comprobar que $S$ es Cohen-Macaulay es fácil usando la definición de sistema completo módulo un grupo y 3.1.6. ∎

Al igual que hicimos en 3.3.4, podemos obtener:

**Corolario 3.3.10** *Si* $\{0,x_1,\ldots,x_{p-1}\} \subseteq \mathrm{Im}(\mu)$ *es un sistema completo módulo* $\mathsf{G}(\{n_1,\ldots,n_r\})$, *entonces* $S = \langle n_1,\ldots,n_r, b+x_1,\ldots,b+x_{d-1}\rangle$ *es un semigrupo afín, simplicial y Cohen-Macaulay de máxima codimensión para todo* $b \in S\setminus\{0\}$.

Nótese que, en particular, $\mathrm{Im}(\mu)$ es un sistema completo módulo $\mathsf{G}(\{n_1,\ldots,n_r\})$.

**Ejemplo 3.3.11** *Sean* $n_1 = (2,0)$ *y* $n_2 = (0,3)$. *Tenemos que*

$$\mathrm{Im}(\mu) = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2)\}.$$

*Por lo visto en esta sección,*

$$S = \langle (2,0),(0,3),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2)\rangle$$

*es Cohen-Macaulay de máxima codimensión.*

# Capítulo 4

# Semigrupos afines simpliciales que son Gorenstein

## Introducción

Vimos en el capítulo anterior que el hecho de que $K[S]$ fuese Cohen-Macaulay podía ser caracterizado en términos de propiedades del semigrupo. En el caso de semigrupos afines y simpliciales dimos una caracterización que era efectivamente comprobable. En este capítulo nos centramos en una subclase de los anillos de semigrupo Cohen-Macaulay: los anillos de semigrupo Gorenstein. Una vez más hemos usado nuestros conocimientos en el campo de semigrupos numéricos para transformar la caracterización dada por Trung y Hoa, véase [41], en una caracterización que sea algorítmicamente comprobable. Es conocido que un semigrupo numérico es simétrico si el conjunto de Apéry de un elemento del semigrupo tiene máximo (con respecto del orden $s \leq s'$ si y sólo si $s' - s \in S$). En la primera sección probamos que lo mismo ocurre con los semigrupos afines simpliciales Cohen-Macaulay, cambiando el término simétrico por Gorenstein, y el conjunto de Apéry de un elemento del semigrupo por la intersección de los conjuntos de Apéry de los rayos extremales del semigrupo dado. Esta caracterización nos permite comprobar de forma relativamente fácil, si un semigrupo afín simplicial dado es Gorenstein o no, ya que podemos calcular la intersección de los conjuntos de Apéry y luego comprobar si tienen o no máximo.

En este capítulo, se estudian además las presentaciones de los semigrupos simpliciales, afines y Gorenstein, al igual que se hizo en el capítulo anterior para los semigrupos Cohen-Macaulay. Damos una cota para el número de elementos de un sistema de generadores minimal para la congruencia asociada al semigrupo, y vemos que esta cota refina la conseguida en su momento para semigrupos Cohen-Macaulay.

Por último, exponemos cómo se pueden construir semigrupos Gorenstein de máxima codimensión a partir de semigrupos afines, simpliciales y Gorenstein. La construcción difiere levemente de la hecha en el capítulo anterior para el caso Cohen-Macaulay. Esto se debe a la existencia de un máximo en la intersección de los conjuntos de Apéry de los rayos extremales.

Al igual que en el capítulo anterior, el semigrupo que vamos a considerar es de la forma

$$S = \langle n_1, \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m} \rangle \subseteq \mathbb{N}^r,$$

con $A = \{n_1, , \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m}\}$ un sistema minimal de generadores de $S$ y $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S) = \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(\{n_1, \ldots, n_r\})$. Como siempre, vamos a denotar por $\sigma$ a la congruencia asociada a $S$, que no es otra que la congruencia núcleo del morfismo:

$$\varphi : \mathbb{N}^{r+m} \to S$$
$$\varphi(a_1, \ldots, a_{r+m}) = \sum_{i=1}^{r+m} a_i n_i.$$

## 4.1. Cómo determinar si un semigrupo afín simplicial es Gorenstein

Antes de dar el resultado que caracteriza los semigrupos afines simpliciales Gorenstein, necesitamos recordar algunas definiciones que dimos en el capítulo anterior. El conjunto $F_i$ es la cara $i$-ésima de $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ y $S_i = S - (S \cap F_i)$. Definimos el conjunto $\mathsf{G}_{[1,r]} = \mathsf{G}(S) \setminus \bigcup_{i=1}^{r} S_i$.

La versión de 3.1.1 para el caso Gorenstein dado por Trung y Hoa es el siguiente:

**Teorema 4.1.1** *Sea $S$ un semigrupo afín, simplicial y Cohen-Macaulay. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$K[S]$ es Gorenstein.*

2. *Existe $g \in \mathsf{G}(S)$ tal que $g - S = G_{[1,r]}$.*

Este resultado traslada una propiedad del anillo de semigrupo al semigrupo. Nuestro objetivo en esta sección es transformar la condición dada sobre el semigrupo por otra que sea equivalente y que sea algorítmicamente comprobable. Vamos a demostrar que $K[S]$ es Gorenstein si y sólo si $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ tiene máximo respecto del orden $s \leq s'$ si y sólo si existe

$s'' \in S$ tal que $s' = s + s''$. Esta condición se puede comprobar algorítmicamente ya que sabemos calcular $\bigcap_{i=1}^{r} \mathsf{S}(n_i)$, y si $s' = s + s''$ con $s$ y $s'$ en $\bigcap_{i=1}^{r} \mathsf{S}(n_i)$, entonces $s''$ tiene que estar a la fuerza en $\bigcap_{i=1}^{r} \mathsf{S}(n_i)$.

Los siguientes lemas estudian paso a paso qué debe ocurrir para que exista $g \in \mathsf{G}(S)$, tal que $g - S = \mathsf{G}_{[1,r]}$.

**Lema 4.1.2** *El conjunto $S \cap F_i$ está formado por los elementos de $S$ cuya coordenada $i$-ésima respecto de la base $\{n_1, \ldots, n_r\}$ es nula.*

*Demostración*: Trivial, teniendo en cuenta que $F_i$ es la cara $i$-ésima del cono $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$. ■

**Lema 4.1.3** *Sea $g \in \mathsf{G}(S)$ tal que $g - S = \mathsf{G}_{[1,r]}$. Dado $s \in S$, $g + s \in S$ si y sólo si $s \notin \bigcup_{i=1}^{r}(S \cap F_i)$.*

*Demostración*: Supongamos que $g + s \in S$. Entonces $-s = g - (g + s) \in G_{[1,r]}$, lo que significa que $-s \notin \bigcup_{i=1}^{r} S_i$, y esto implica que $s \notin \bigcup_{i=1}^{r}(S \cap F_i)$.

Demostramos ahora la otra implicación. Supongamos ahora que $s \notin \bigcup_{i=1}^{r}(S \cap F_i)$. Si $-s \in \bigcup_{i=1}^{r} S_i$, entonces $-s = s' - s_i$ para algún $s' \in S$, algún $s_i \in S \cap F_i$ y algún $i \in \{1, \ldots, r\}$. Por tanto, $s_i = s + s'$ y en consecuencia, la coordenada $i$-ésima de $s$ con respecto a la base $\{n_1, \ldots, n_r\}$ es nula. El lema anterior nos dice que $s \in S \cap F_i$, lo que es una contradicción. Esto demuestra que $-s \notin \bigcup_{i=1}^{r} S_i$, y por tanto $-s \in G_{[1,r]} = g - S$. De esta forma, $-s = g - s'$ para algún $s' \in S$, lo que lleva a que $g + s = s' \in S$.

■

**Lema 4.1.4** *Sea $g \in \mathsf{G}(S)$ tal que $g - S = G_{[1,r]}$. Entonces, $g - x \in S$ para todo $x \in G_{[1,r]}$.*

*Demostración*: Sea $x \in G_{[1,r]} = g - S$. Entonces, existe $s \in S$, tal que $x = g - s$ y por tanto, $g - x = s \in S$. ■

**Lema 4.1.5** *Sea $g \in \mathsf{G}(S)$ tal que $g - S = G_{[1,r]}$. Entonces, $g + (n_1 + \cdots + n_r)$ es un elemento maximal de $\bigcap_{i=1}^{r} \mathsf{S}(n_i)$.*

*Demostración*: Nótese que $-(n_1 + \cdots + n_r) \in G_{[1,r]}$, ya que de no ser así, existirían $s \in S$ y $s_i \in S \cap F_i$ tales que $-(n_1 + \cdots + n_r) = s - s_i$ y por tanto, $s_i = n_1 + \cdots + n_r + s$. Esto implica que $s_i$ tiene todas sus coordenadas mayores que cero, y eso contradice el hecho de que $s_i \in S \cap F_i$. Como por hipótesis $G_{[1,r]} = g - S$, entonces $-(n_1 + \cdots + n_r) \in g - S$, lo que lleva a que $g + (n_1 + \cdots + n_r) \in S$.

Obsérvese también que, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $(n_1 + \cdots + n_r) - n_i \in S \cap F_i$ y en consecuencia $n_i - (n_1 + \cdots + n_r) \in S_i$. Esto implica que $n_i - (n_1 + \cdots + n_r) \notin G_{[1,r]}$ para todo $i \in \{1,\ldots,r\}$. Por tanto, $g-(n_i-(n_1+\cdots+n_r)) = (g+(n_1+\cdots+n_r))-n_i \notin S$, lo que conduce a que $g+(n_1+\cdots+n_r) \in \bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$.

Probemos que $g+(n_1+\cdots+n_r)$ es un elemento maximal de $\bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$. Para ello, demostremos que $g+(n_1+\cdots+n_r)+s$, no pertenece a $\bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$, para todo $s \in S\setminus\{0\}$. Sean $(x_1,\ldots,x_r)$ las coordenadas de $(n_1+\cdots+n_r)+s$ respecto de la base $\{n_1,\ldots,n_r\}$. Está claro que $x_i \geq 1$ para todo $i$, y como $s \neq 0$, entonces tiene que haber un $j \in \{1,\ldots,r\}$ tal que $x_j > 1$, lo cual implica que $(n_1+\ldots,n_r)+s-n_j$ tiene todas sus coordenadas mayores que cero, y en consecuencia no puede estar en $S\cap F_i$ para ningún $i$. Por 4.1.3 tenemos que $g+(n_1+\cdots+n_r)+s-n_j \in S$. Por tanto, $g+(n_1+\cdots+n_r)+s \notin S(n_j)$. ■

**Lema 4.1.6** *Sea $g = x-(n_1+\cdots+n_r)$, con $x \in \bigcap_{i=1}^r S(n_i)$. Entonces $g \in G_{[1,r]}$.*

*Demostración*: Supongamos que $g \notin G_{[1,r]}$. Esto significa que $g \in S_i$ para algún $i$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $g \in S_1$. Entonces, $g = s-s_1$ con $s \in S$, $s_1 \in S\cap F_1$. Por tanto, $g+s_1 \in S$, lo que implica que $g+s_1+s' \in S$ para todo $s' \in S$. Como $s_1 \in F_1$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $ks_1 \in \langle n_2,\ldots,n_r\rangle$. En consecuencia, $g+s_1+(k-1)s_1 = g+(a_2n_2+\cdots+a_rn_r) \in S$ con $a_i \in \mathbb{N}$. Por 3.1.4 tenemos que $g+(a_2n_2+\cdots+a_rn_r) = b_1n_1+\cdots+b_rn_r+y$ con $b_i \in \mathbb{N}$ para todo $i$ e $y \in \bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$. Al ser $g = x-(n_1+\cdots+n_r)$, tenemos que $a_2n_2+\cdots+a_rn_r+x = (b_1+1)n_1+(b_2+1)n_2+\cdots+(b_r+1)n_r+y$ y por 3.1.5 obtenemos que $x = y$ y $b_1+1 = 0$ lo que es una contradicción.

■

Estamos ya en condiciones de demostrar una de las implicaciones del resultado principal: si $S$ es Gorenstein, entonces $\bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$ tiene un único elemento maximal.

**Teorema 4.1.7** *Si $S$ es Gorenstein, entonces $\bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$ tiene máximo.*

*Demostración*: Al ser $S$ Gorenstein, $g-S = G_{[1,r]}$ para algún $g \in \mathsf{G}(S)$. Por 4.1.5, sabemos que $g+(n_1+\cdots+n_r) = x$ es un elemento maximal de $\bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$. Tómese otro elemento, $y$, maximal de $\bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$. Por el lema anterior, tenemos que $y-(n_1+\cdots+n_r) \in G_{[1,r]}$, y por tanto $y-(n_1+\cdots+n_r) \in g-S$. Esto implica que $y+s = x$, para algún $s \in S$. Como $y$ es maximal, $s$ tiene que ser cero y $x = y$.

■

Antes de demostrar el recíproco, tenemos que probar un lema previo.

**Lema 4.1.8** *Si $S$ es Cohen-Macaulay, entonces*

$$G_{[1,r]} \subseteq \{z_1n_1+\cdots+z_rn_r+z | z_i < 0, z \in \bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)\}.$$

*Demostración*: Por 3.1.9, sabemos que

$$G_{[1,r]} \subseteq \mathsf{G}(S) = \{z_1 n_1 + \cdots + z_r n_r + x | z_i \in \mathbb{Z}, x \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)\}.$$

Tómense $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{Z}$, $x \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, tales que $z_1 n_1 + \cdots + z_r n_r + x \in G_{[1,r]}$. Si $z_i \geq 0$ para algún $i$, entonces $\sum_{z_j \geq 0} z_j n_j + x - (\sum_{z_j<0} -z_j n_j) \in S - (S \cap F_i) = S_i$, lo cual es imposible. ■

**Teorema 4.1.9** *Si $S$ es Cohen-Macaulay y $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ tiene máximo, entonces $S$ es Gorenstein.*

*Demostración*: Sea $x$ el máximo de $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$. Definamos $g = x - (n_1 + \cdots + n_r)$ y probemos que $g - S = G_{[1,r]}$.

Tómese un elemento $h \in G_{[1,r]}$. Por el lema anterior, $h$ se puede expresar como $h = z_1 n_1 + \cdots + z_r n_r + z$, con $z_i \in \mathbb{Z}$, $z_i < 0$, $z \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$. Al ser $x$ el máximo de $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, debe existir $s \in S$ tal que $z + s = x$. Por tanto,

$$\begin{aligned} h &= x - (n_1 + \cdots + n_r) - s + ((z_1 + 1)n_1 + \cdots + (z_r + 1)n_r) = \\ &= x - (n_1 + \cdots + n_r) - (s + (-(z_1 + 1)n_1 - \cdots - (z_r + 1)n_r), \end{aligned}$$

y como $z_i < 0$, tenemos que $-(z_i + 1) \geq 0$, lo que implica que $h \in g - S$.

Tomemos ahora $g - s \in g - S$. Si $g - s \notin G_{[1,r]}$, entonces $g - s \in S_i$ para algún $i$. Por tanto, existen $s' \in S, s_i \in S \cap F_i$ tales que $g - s = s' - s_i$, y por tanto $g = (s' + s) - s_i \in S_i$, lo que es una contradicción con 4.1.6. ■

**Ejemplo 4.1.10** *Sea*

$$S = \langle (3,0), (0,2), (4,0), (3,1) \rangle.$$

*Calculamos $c_3$ y $c_4$ y obtenemos que $c_3 = 3$ y $c_4 = 2$, por lo que*

$$\Gamma = \{(0,0), (4,0), (8,0), (3,1), (7,1), (11,1)\}.$$

*A partir de $\Gamma$ calculamos*

$$\mathrm{S}(n_1) \cap \mathrm{S}(n_2) = \{(0,0), (4,0), (8,0), (3,1), (7,1), (11,1)\}.$$

*Veamos si $S$ es Cohen-Macaulay. Sea*

$$G = \mathsf{G}(\{(3,0), (0,2)\}) \equiv -2x + 3y \equiv 0 (mod 6).$$

$$\begin{array}{ll}
(0,0)-(4,0)\notin G & (4,0)-(11,1)\notin G\\
(0,0)-(8,0)\notin G & (8,0)-(3,1)\notin G\\
(0,0)-(3,1)\notin G & (8,0)-(7,1)\notin G\\
(0,0)-(7,1)\notin G & (8,0)-(11,1)\notin G\\
(0,0)-(11,1)\notin G & (3,1)-(7,1)\notin G\\
(4,0)-(8,0)\notin G & (3,1)-(11,1)\notin G\\
(4,0)-(3,1)\notin G & (7,1)-(11,1)\notin G\\
(4,0)-(7,1)\notin G &
\end{array}$$

*Por lo que $S$ es Cohen-Macaulay. Tenemos además que*

$$\begin{array}{l}
(11,1)-(4,0)=(7,1)\in S\\
(11,1)-(8,0)=(3,1)\in S\\
(11,1)-(3,1)=(8,0)\in S\\
(11,1)-(7,1)=(4,0)\in S
\end{array}$$

*por lo que* $\mathrm{S}(n_1)\cap\mathrm{S}(n_2)$ *tiene máximo y por tanto $S$ es Gorenstein.*

**Ejemplo 4.1.11** *Sea*

$$S=\langle(2,0),(0,2),(3,0),(2,1),(3,1)\rangle.$$

*Vimos en el capítulo anterior que $S$ es Cohen-Macaulay y que*

$$\mathrm{S}(n_1)\cap\mathrm{S}(n_2)=\{(0,0),(3,0),(2,1),(3,1)\}.$$

*Ahora bien, este conjunto no tiene máximo con el orden de $S$ ($(3,1)-(2,1)\notin S$) y por tanto $S$ no es Gorenstein.*

## 4.2. Presentaciones de los semigrupos afines, simpliciales y Gorenstein

En el capítulo anterior, vimos que para los semigrupos afines, simpliciales y Cohen-Macaulay, la cota para el cardinal de un sistema minimal de generadores de la congruencia asociada al semigrupo es menor que para los semigrupos afines en general. En esta sección, probamos que esa cota se puede refinar aún más para los semigrupos Gorenstein.

A lo largo de esta sección, $S$ es un semigrupo afín, simplicial y Cohen-Macaulay con sistema minimal de generadores $\{n_1,\ldots,n_r,n_{r+1},\ldots,n_{r+m}\}$, con $m>1$. No consideramos el caso $m = 1$, porque en ese caso el semigrupo $S$ es intersección completa, y por tanto el número de elementos de un sistema minimal de generadores para $\sigma$ es $m = 1$ (véase el próximo capítulo dedicado a semigrupos intersección completa).

Al igual que hicimos en su momento para el caso Cohen-Macaulay, vamos a estudiar los $n \in S$ tales que $\mathsf{G}_n$ es conexo.

**Lema 4.2.1** *Si $S$ es Gorenstein y $x = \max \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, entonces $\mathsf{G}_{x+n_{r+i}}$ es un grafo conexo.*

*Demostración*: Obsérvese que:

1. Si $n_j \in \mathrm{V}(\mathsf{G}_{x+n_{r+i}}),\ j \in \{1,\ldots,r\}$, entonces para cada $k \in \{1,\ldots,r\},\ k \neq j$ tal que $n_k \in \mathrm{V}(\mathsf{G}_{x+n_{r+i}})$ tenemos que $[n_j,n_k] \in \mathrm{E}(\mathsf{G}_{x+n_{r+i}})$ (esto se debe a que $S$ es Cohen-Macaulay).

2. Claramente $n_{r+i} \in \mathrm{V}(\mathsf{G}_{x+n_{r+i}})$.

3. Como $n_{r+j} \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ y $x = \max \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ tenemos que $x - n_{r+j} \in S$, y por tanto $(x+n_{r+i}) - n_{r+j} \in S$. Se tiene así que, $n_{r+j} \in \mathrm{V}(\mathsf{G}_{x+n_{r+i}})$.

4. Para cada $j \in \{1,\ldots,m\},\ j \neq i$, se tiene que $(x+n_{r+i}) - n_{r+j} - n_{r+i} = x - n_{r+j} \in S$.

En consecuencia, todos los elementos de $\{n_1,\ldots,n_r\} \cap \mathrm{V}(\mathsf{G}_{x+n_{r+i}})$ están conectados (tal y como ocurría en el caso Cohen-Macaulay). Lo mismo ocurre con el conjunto $\mathrm{V}(\mathsf{G}_{x+n_{r+i}}) \cap \{n_{r+1},\ldots,n_{r+m}\}$. Esto implica que el número de componentes conexas de $\mathsf{G}_{x+n_{r+i}}$ es menor o igual que dos.

Veamos que $\mathsf{G}_{x+n_{r+i}}$ tiene exactamente una componente conexa. Supongamos que no es así. Tómese $y \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) \setminus \{x\}$. Como $x$ es mayor que $y$, existe $s \in S$ tal que $y+s = x$. El elemento $s$ tiene que estar en $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, y en consecuencia, deben existir $d_{r+j} \in \mathbb{N},\ j \in \{1,\ldots,m\}$ tales que $s = d_{r+1}n_{r+1} + \cdots + d_{r+m}n_{r+m}$. Si $y + n_{r+i} \notin \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, entonces existen $c_k \in \mathbb{N},\ k \in \{1,\ldots,r+m\}$ tales que

$$y + n_{r+i} = c_1n_1 + \cdots + c_rn_r + c_{r+1}n_{r+1} + \cdots + c_{r+m}n_{r+m},$$

con $c_1 + \cdots + c_r > 0$ (ya que $y + n_{r+i} \notin \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$). Esto implica que,

$$x + n_{r+i} = y + s + n_{r+i} = c_1n_1 + \cdots + c_rn_r + (c_{r+1} + d_{r+1})n_{r+1} + \cdots + (c_{r+m} + d_{r+m})n_{r+m}.$$

Como hemos supuesto que el número de componentes conexas es dos, $c_{r+1} + d_{r+1} = \cdots = c_{r+m} + d_{r+m} = 0$. Esto lleva a que $s = 0$ y en consecuencia $x = y$, lo cual es imposible.

Por tanto, $y+n_{r+i} \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ para todo $y \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) \setminus \{x\}$. De este hecho se deduce que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) = \{0, n_{r+i}, \ldots, kn_{r+i} = x\}.$$

Pero $n_{r+j} \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ para $j > 0$ y esto conduciría a que $n_{r+j} = tn_{r+i}$, para un cierto $t \in \mathbb{N}$, lo que es una contradicción con el hecho de que $\{n_1, \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m}\}$ es un sistema minimal de generadores para $S$. Con esto tenemos que el número de componentes conexas es uno. ■

Con este resultado estamos en condiciones de dar la cota antes mencionada

**Teorema 4.2.2** *Si $S$ es Gorenstein y $\rho$ es un sistema minimal de generadores para la congruencia asociada a $S$, entonces*

$$\#\rho \leq \frac{(2d-m)(m-1)}{2} + 2 - m,$$

*con* $d = \#\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$.

*Demostración*: Recordemos que en su momento dimos la cota para el caso Cohen-Macaulay acotando el número de elementos que hay en ciertos conjuntos que denotabamos por $D_k$ (véase 3.2.5 en el capítulo anterior). La idea que vamos a seguir para demostrar el presente resultado es ver que, en el caso Gorenstein, dichos subconjuntos tienen un elemento menos que en el caso Cohen-Macaulay general. Dicho elemento es $x = \max \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$. Para ello, como $D_k \subseteq \bigcap_{i=1}^{k-1} \mathrm{S}(n_i)$, basta probar que $x \notin \bigcap_{i=1}^{k-1} \mathrm{S}(n_i)$ ($r+1 \leq k < r+m$). Como $x = \max \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, $x - n_{r+j} \in S$, para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$. Esto implica que $x \notin \mathrm{S}(n_{r+j})$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$. Por otro lado, $x \notin \{n_{r+1}, \ldots, n_{r+m}\}$ (en otro caso $\{n_1, \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m}\}$ no sería un sistema minimal de generadores de $S$, por ser $x = \max \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$).

Por tanto, tal y como se demostró en 3.2.6, $D_k \subseteq \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) \setminus \{0, n_{r+1}, \ldots, n_{k-1}, x\}$ y en consecuencia

$$\#\rho \leq 1 + \sum_{i=1}^{m-1} (d - i - 1) = \frac{(2d-m)(m-1)}{2} + 2 - m.$$

■

## 4.3. Semigrupos afines, simpliciales y Gorenstein de máxima codimensión

Sea $S = \langle n_1, \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m}\rangle \subset \mathbb{N}^r$ un semigrupo simplicial tal que $\bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i) = \{0, x_1, \ldots, x_{d-1}\}$. Recordemos que por ser $\{n_1, \ldots, n_{r+m}\}$ un sistema minimal de generadores, $m$ tiene que ser menor o igual que $d-1$. Veamos que si el semigrupo $S$ es Gorenstein, entonces $m$ tiene que ser estrictamente menor que $d-1$.

**Lema 4.3.1** *Si $S$ es Gorenstein, entonces $m < d-1$, con $d = \#\bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$. (Nótese que estamos considerando $m > 1$.)*

*Demostración*:
Sabemos que $m \leq d-1$. Supongamos que $m = d-1$. Entonces $\bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i) = \{0, n_{r+1}, \ldots, n_{r+d-1}\}$. Como $S$ es Gorenstein, debe existir $i \in \{1, \ldots, d-1\}$, tal que $n_{r+i} = \max \bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$. Esto significa, que para cada $j \in \{1, \ldots, d-1\}$, $j \neq i$, existe $s_j \in S$ tal que $n_{r+j} + s_j = n_{r+i}$. Obsérvese que $s_j$ tiene que estar en $\bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$. Por tanto, debe existir un $k$ tal que $s_j = n_{r+k}$, y esto es una contradicción con el hecho de que $\{n_1, \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m}\}$ es un sistema minimal de generadores de $S$.

■

Del resultado anterior se deduce que, si queremos considerar semigrupos Gorenstein de máxima codimensión, tenemos que considerar semigrupos Gorenstein con $m = d-2$.

El siguiente teorema nos dice el número de elementos de un sistema minimal de generadores para la congruencia asociada a $S$, si éste es Gorenstein de máxima codimensión. La cota alcanzada es aún más fina que la conseguida en el capítulo anterior para semigrupos Cohen-Macaulay.

**Teorema 4.3.2** *Sea $S$ un semigrupo afín, simplicial y Gorenstein de máxima codimensión ($m = d-2$). Entonces,* $\#\rho = (d-1)(d-2)/2 - 1$.

*Demostración*: Sea $S = \langle n_1, \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m}\rangle$. Como $S$ es Gorenstein de máxima codimensión, $\bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i) = \{0, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m}, x\}$, con $x = \max \bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$. Para calcular $\#\rho$, tenemos que ver para qué $n \in S$, $G_n$ no es conexo. Si $G_n$ no es conexo, entonces, por 3.2.2, $n = y + n_{r+j}$ con $y \in \bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$. Nótese además que, por 4.2.1, $y \neq x$. Por tanto, si $G_n$ no es conexo, entonces $n = n_{r+i} + n_{r+j}$, para algunos $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Probemos que el recíproco también es cierto. Tómese $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, probemos que $G_{n_{r+i}+n_{r+j}}$ no es conexo. Hay que tener en cuenta dos posibles casos:

1. Si $n_{r+i}+n_{r+j} \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, entonces, al ser $\{n_1,\ldots,n_r,n_{r+1},\ldots,n_{r+m}\}$ un sistema minimal de generadores para $S$ y $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) = \{0,n_{r+1},\ldots,n_{r+m},x\}$, tenemos que $n_{r+i}+n_{r+j} = x$. Por estar $x$ en $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, tenemos que $\{n_1,\ldots,n_r\} \cap \mathrm{V}(\mathsf{G}_x) = \emptyset$. Nótese que, como $x = \text{máx} \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, entonces para cada $l \in \{1,\ldots,m\}$, existe un $k \in \{1,\ldots,m\}$ tal que $n_{r+l}+n_{r+k} = x$. Esto implica que $\mathrm{V}(\mathsf{G}_x) = \{n_{r+1},\ldots,n_{r+m}\}$ y que $\mathrm{E}(\mathsf{G}_x) = \{\overline{n_{r+l}n_{r+k}} : n_{r+l}+n_{r+k} = x\}$.

2. Si $n_{r+i}+n_{r+j} \notin \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, procedemos como en 3.3.1 y obtenemos que $G_{n_{r+i}+n_{r+j}}$ no es conexo con una componente conexa cuyos vértices están en $\{n_1,\ldots,n_r\}$.

Por tanto, para cada $n = n_{r+i}+n_{r+j}$, $\#\rho_n$ es igual al número de expresiones de la forma $n = n_{r+l}+n_{r+k},\ l,k \in \{1,\ldots,m\}$, si $n \neq x$, y es igual al número de expresiones de ese tipo menos uno, si $n = x$ (esto se debe al hecho de que si $n \neq x$, hay una componente extra cuyos vértices están contenidos en $\{n_1,\ldots,n_r\}$). Por tanto, debemos contar las expresiones de la forma $n_{r+i}+n_{r+j},\ 1 \leq i,j \leq m$ y quitar una, obteniendo $(d-1)(d-2)/2-1$. ■

Al igual que vimos en el capítulo anterior, si se alcanza la cota, entonces el semigrupo es de máxima codimensión.

**Teorema 4.3.3** *Si $S$ es Gorenstein y $\#\rho = (d-1)(d-2)/2-1$, entonces $S$ es de máxima codimensión ($m = d-2$).*

*Demostración*: Por 4.2.2, sabemos que $\#\rho \leq (2d-m)(m-1)/2-2-m$, lo que conduce a que

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} - 1 \leq \frac{(2d-m)(m-1)}{2} + 2 - m.$$

Haciendo algunos cálculos elementales obtenemos que

$$m^2 + m(1-2d) + d^2 - d - 4 \leq 0,$$

lo que implica (tras resolver la inecuación) que $m \in [d-2, d+1]$, y como, por 4.3.1, $m < d-1$ tenemos que $m = d-2$. ■

En el capítulo anterior mostramos cómo contruir semigrupos afines, simpliciales y Cohen-Macaulay de máxima codimensión a partir de un semigrupo que no es de máxima codimensión. La idea era considerar el semigrupo generado por los rayos extremales y los elementos de la intersección de los conjuntos de Apéry de los rayos extremales, sumados a un rayo extremal arbitrario pero fijo. En el caso de semigrupos Gorenstein, no podemos añadir todos los elementos de $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ sumado un rayo extremal. Esto se debe a que, si bien el resultado sería Cohen-Macaualay, no podría ser Gorenstein, ya que la intersección de los conjuntos de Apéry de los rayos extremales del semigrupo resultante no tendría un elemento maximal. Lo que se hace en el caso Gorenstein, siempre que queramos obtener un semigrupo Gorenstein de máxima codimensión, es no tomar la suma de un generador con el máximo de $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$. Concretemos más esta idea. Sea $S = \langle n_1, \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m} \rangle \subset \mathbb{N}^r$ un semigrupo simplicial Gorenstein tal que $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) = \{0, x_1, \ldots, x_{d-1}\}$ y sea $x_{d-1} = \max \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$. Definimos $\overline{S} = \langle n_1, \ldots, n_r, n_1 + x_1, \ldots, n_1 + x_{d-2} \rangle$. Es fácil de probar, tal y como hicimos en 3.3.3 que

1. El conjunto $\{n_1, \ldots, n_r, n_1 + x_1, \ldots, n_1 + x_{d-2}\}$ es un sistema minimal de generadores de $\overline{S}$.

2. El semigrupo $\overline{S}$ es simplicial.

**Teorema 4.3.4** *Bajo las hipótesis anteriores se tiene que,*

$$\bigcap_{i=1}^{r} \overline{\mathrm{S}}(n_i) = \{0, n_1 + x_1, \ldots, n_1 + x_{d-2}, 2n_1 + x_{d-1}\}.$$

*Demostración*: La demostración es directa usando que $\{0, n_1 + x_1, \ldots, n_1 + x_{d-2}, 2n_1 + x_{d-1}\}$ es un sistema completo módulo $\mathsf{G}(S)$ y el resultado 3.3.8. ■

**Corolario 4.3.5** *Bajo las hipótesis anteriores, $\overline{S}$ es Gorenstein.*

*Demostración*: Usando 3.1.6, es fácil probar que $\overline{S}$ es Cohen-Macaulay. También está claro que $2n_1 + x_{d-1} = \max_{\overline{S}} \bigcap_{i=1}^{r} \overline{\mathrm{S}}(n_i)$, porque $x_{d-1} = \max_S \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$. ■

Por último, podemos construir algunos ejemplos de semigrupos afines, simpliciales y Gorenstein de máxima codimensión tomando subconjuntos de $\mathrm{Im}(\mu)$ (véase la sección 3.3.1) que son sistemas completos módulo $\mathsf{G}(\{n_1, \ldots, n_r\})$, pero con un elemento maximal.

**Ejemplo 4.3.6** *Sean $n_1 = (2,0)$ y $n_2 = (0,3)$. Tenemos que*

$$\mathrm{Im}(\mu) = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}.$$

*Sea*

$$S = \langle (2,0), (0,3), (3,0), (3,1), (2,1), (2,2) \rangle$$

*(nótese que no hemos tomado como generador a $(3,2) = (2,0) + (1,2)$). Veamos que es Gorenstein. Lo primero que vamos a ver es que*

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) = \{(0,0),(3,0),(3,1),(2,1),(2,2),(5,2)\},$$

*y para ello vamos a usar 3.3.8. Al ser*

$$\begin{array}{c}
(3,0)+(3,1)-(2,1) \in \langle n_1,n_2\rangle \\
(3,0)+(2,1)-(3,1) \in \langle n_1,n_2\rangle \\
(3,0)+(2,2)-(5,2) \in \langle n_1,n_2\rangle \\
(3,0)+(5,2)-(2,2) \in \langle n_1,n_2\rangle \\
(3,1)+(2,1)-(5,2) \in \langle n_1,n_2\rangle \\
(3,1)+(2,2)-(3,0) \in \langle n_1,n_2\rangle \\
(3,1)+(5,2)-(2,1) \in \langle n_1,n_2\rangle \\
(2,1)+(2,2)-(0,0) \in \langle n_1,n_2\rangle \\
(2,1)+(5,2)-(3,0) \in \langle n_1,n_2\rangle \\
(2,2)+(5,2)-(3,1) \in \langle n_1,n_2\rangle \\
(3,0)+(3,0)-(0,0) \in \langle n_1,n_2\rangle \\
(3,1)+(3,1)-(2,2) \in \langle n_1,n_2\rangle \\
(2,1)+(2,1)-(2,2) \in \langle n_1,n_2\rangle \\
(2,2)+(2,2)-(2,1) \in \langle n_1,n_2\rangle \\
(5,2)+(5,2)-(2,1) \in \langle n_1,n_2\rangle
\end{array}$$

*tenemos que se verifica el segundo apartado de 3.3.8, y por tanto el segundo apartado de la definición de sistema completo (el primer apartado de la definición de sistema completo también se verifica). Tenemos así que*

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) = \{(0,0),(3,0),(3,1),(2,1),(2,2),(5,2)\},$$

*y por tanto $S$ es Cohen-Macaulay (por ser $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ un sistema completo módulo $\mathsf{G}(\{n_1,n_2\})$). Además, está claro que*

$$\begin{array}{c}
(5,2)-(0,0) \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) \\
(5,2)-(3,0) \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) \\
(5,2)-(3,1) \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) \\
(5,2)-(2,1) \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) \\
(5,2)-(2,2) \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)
\end{array}$$

*con lo que $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ tiene máximo y por tanto $S$ es Gorenstein.*

*Calculemos ahora un sistema minimal de generadores para $\sigma$. Vamos a usar para ello el algoritmo del primer capítulo junto con las ideas vistas en este capítulo, que hacen que* *busquemos $n \in S$ cuyo grafo es no conexo sólo en el conjunto de elementos de la forma $s + n_{r+j}$ con $s \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i),\ s \neq x = (5,2)$ y $1 \leq j \leq 4$. Dicho conjunto es*

$$\{(6,0),(6,1),(5,1),(5,2),(6,2),(5,3),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$

*Calculamos los grafos asociados a dichos elementos, y tenemos:*

| *Grafo* | *Componentes conexas* | *Relatores* |
|---|---|---|
| $\mathsf{G}_{(6,0)}$ | $\{(2,0)\},\{(3,0)\}$ | $3e_1 = 2e_3$ |
| $\mathsf{G}_{(6,1)}$ | $\{(2,0),(2,1)\},\{(3,0),(3,1)\}$ | $2e_1+e_5 = e_3+e_4$ |
| $\mathsf{G}_{(5,1)}$ | $\{(2,0),(3,1)\},\{(3,0),(2,1)\}$ | $e_1+e_4 = e_3+e_5$ |
| $\mathsf{G}_{(5,2)}$ | $\{(3,1),(2,1)\},\{(3,0),(2,2)\}$ | $e_4+e_5 = e_3+e_6$ |
| $\mathsf{G}_{(6,2)}$ | $\{(2,0),(2,2),(2,1)\},\{(3,1)\}$ | $2e_1+e_6 = 2e_4$ |
| $\mathsf{G}_{(5,3)}$ | $\{(2,0),(0,3),(3,0)\},\{(3,1),(2,2)\}$ | $e_1+e_2+e_3 = e_4+e_6$ |
| $\mathsf{G}_{(4,2)}$ | $\{(2,0),(2,2)\},\{(2,1)\}$ | $e_1+e_6 = 2e_5$ |
| $\mathsf{G}_{(4,3)}$ | $\{(2,0),(0,3)\},\{(2,1),(2,2)\}$ | $2e_1+e_2 = e_5+e_6$ |
| $\mathsf{G}_{(4,4)}$ | $\{(2,0),(2,1),(0,3)\},\{(2,2)\}$ | $e_1+e_2+e_5 = 2e_6$ |

*De esta forma $\#\rho = 9 = (d-1)(d-2)/2-1$. Obsérvese que en el caso Gorenstein $(d-1)(d-2)/2 \neq (2d-m)(m-1)/2+2-m$.*

# Capítulo 5

# Pegada de semigrupos afines

## Introducción

En este capítulo, vamos a definir el concepto de pegada de semigrupos afines. Los resultados aquí expuestos serán imprescindibles para el desarrollo del siguiente capítulo.

El concepto de pegada de semigrupos radica en la siguiente idea. Un semigrupo es pegada de dos subsemigrupos suyos cuando podemos obtener un sistema de generadores para la congruencia asociada al semigrupo y dos subconjuntos del sistema de generadores del semigrupo, de forma que los relatores del semigrupo se dividen en tres conjuntos: unos que relacionan generadores del primer subconjunto, otros que relacionan elementos del segundo subconjunto y por último uno que relaciona elementos del primer subconjunto con el segundo.

A lo largo de este capítulo vamos a suponer que el semigrupo $S \subset \mathbb{N}^r$ está generado (minimalmente) por $A = \{n_1, \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m}\}$. Como es costumbre definimos el morfismo

$$\varphi : \mathbb{N}^{r+m} \to S$$
$$\varphi(a_1, \ldots, a_{r+m}) = \sum_{i=1}^{r+m} a_i n_i.$$

y denotamos por $\sigma$ la congruencia núcleo de $\varphi$. Suponemos, además, que $\rho$ es un sistema de generadores de $\sigma$.

## 5.1. Pegada de semigrupos afines

Antes de dar la definición concreta de pegada de semigrupos afines, necesitamos introducir alguna notación, que vamos a seguir usando en el siguiente capítulo.

Dado un subconjunto $B \subsetneq A$, $B = \{n_{i_1}, \ldots, n_{i_l}\}$, denotamos por $\sigma_B$ al subconjunto de $\sigma$ formado por los elementos $((a_1, \ldots, a_{r+m}), (b_1, \ldots, b_{r+m}))$ de $\sigma$ tales que $a_j = b_j = 0$ para todo $j \notin \{i_1, \ldots, i_l\}$. Dado un elemento $n \in S$, definimos $\mathrm{E}_A(n) = \varphi^{-1}(n)$ y $\mathrm{E}_B(n) = \varphi^{-1}(n) \cap \langle e_{i_1}, \ldots, e_{i_l} \rangle$. Por último, denotamos por $\mathrm{F}_B$ al subsemigrupo de $\mathbb{N}^{r+m}$ generado por $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_l}\}$.

**Definición 5.1.1** *Sea $S = \langle A \rangle$ y $\{A_1, A_2\}$ una partición de $A$. El semigrupo $S$ es pegada de $\langle A_1 \rangle$ y $\langle A_2 \rangle$ si existe un sistema de generadores $\rho$ de $\sigma$ tal que $\rho = \rho_1 \cup \rho_2 \cup \{(a,b)\}$, con $\rho_1$ y $\rho_2$ sistemas de generadores para $\sigma_{A_1}$ y $\sigma_{A_2}$ respectivamente y $(0,0) \neq (a,b) \in \sigma$ verifica que $a \in \mathrm{F}_{A_1}$ y $b \in \mathrm{F}_{A_2}$.*

El siguiente resultado es parte de un resultado más amplio de Rosales que aparece en [31]:

**Teorema 5.1.2** *Si $\{A_1, A_2\}$ es una partición de $A$, son equivalentes:*

1. *El semigrupo $S$ es pegada de $\langle A_1 \rangle$ y $\langle A_2 \rangle$.*

2. *Existe un sistema de generadores de $\sigma$ de la forma $\rho = \rho_1 \cup \rho_2 \cup \{(a,b)\}$, con $\rho_1 \subseteq \sigma_{A_1}$, $\rho_2 \subseteq \sigma_{A_2}$, $(a,b) \in \sigma_A$, $(a,b) \neq (0,0)$, $a \in \mathrm{F}_{A_1}$ y $b \in \mathrm{F}_{A_2}$.*

3. *Existe un $\alpha \in \langle A_1 \rangle \cap \langle A_2 \rangle$ tal que $\alpha \neq 0$ y $\mathsf{G}(\{\alpha\}) = \mathsf{G}(A_1) \cap \mathsf{G}(A_2)$.*

4. *Existe un $(a,b) \in \sigma_A$, $(a,b) \neq (0,0)$, $a \in \mathrm{F}_{A_1}$, $b \in \mathrm{F}_{A_2}$, tal que $\rho = \rho_1 \cup \rho_2 \cup \{(a,b)\}$ es un sistema de generadores de $\sigma_A$ para cualesquiera $\rho_1$ y $\rho_2$ sistemas de generadores de $\sigma_{A_1}$ y $\sigma_{A_2}$ respectivamente.*

## 5.2. Un algoritmo para determinar si un semigrupo es pegada de dos de sus subsemigrupos

Sea $A = \{n_1, ..., n_p\}$ un subconjunto de $\mathbb{N}^r \setminus \{0\}$, $A_1 = \{n_1, ..., n_k\}$ y $A_2 = \{n_{k+1}, ..., n_p\}$. Para determinar si $\langle A \rangle$ es pegada de $\langle A_1 \rangle$ y $\langle A_2 \rangle$ realizaremos los siguientes pasos:

1. Calculamos las ecuaciones de $\mathsf{G}(A_1)$:
$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r & \equiv & 0\ (mod\ d_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r & \equiv & 0\ (mod\ d_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nr}x_r & \equiv & 0\ (mod\ d_n) \\ a_{n+11}x_1 + a_{n+12}x_2 + \ldots + a_{n+1n}x_r & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \ldots + a_{tr}x_r & = & 0 \end{array}$$

2. Calculamos las ecuaciones de $\mathsf{G}(A_2)$:
$$\begin{array}{lcl} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1r}x_r & \equiv & 0\ (mod\ c_1) \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2r}x_r & \equiv & 0\ (mod\ c_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ b_{s1}x_1 + b_{s2}x_2 + \ldots + b_{sr}x_r & \equiv & 0\ (mod\ c_s) \\ b_{s+11}x_1 + b_{s+12}x_2 + \ldots + b_{s+1r}x_r & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ b_{l1}x_1 + b_{l2}x_2 + \ldots + b_{lr}x_r & = & 0 \end{array}$$

3. Calculamos la dimensión del subespacio vectorial $V$ de $\mathbb{Q}^r$ generado por
$$\{(a_{n+11},...,a_{n+1r}),...,(a_{t1},...,a_{tr}),(b_{s+11},...,b_{s+1r}),...,(b_{l1},...,b_{lr})\}$$

4. Si $dim(V) \neq r-1$, entonces $\langle A\rangle$ no es pegada de $\langle A_1\rangle$ y $\langle A_2\rangle$. En caso contrario, calculamos $(z_1,...,z_r) \in V^{\perp}$ tal que
$(z_1,...,z_r) \in \mathbb{Z}^r$, $(z_1,...,z_r) \neq (0,...,0)$ y $mcd\{z_1,...,z_r\} = 1$.

5. Si existen $i, j \in \{1,...,r\}$ tales que $z_i z_j < 0$, entonces $\langle A\rangle$ no es pegada de $\langle A_1\rangle$ y $\langle A_2\rangle$. En caso contrario, calculamos la menor solución positiva $b$ del sistema de congruencias
$$\begin{array}{lcl} x(a_{11}\mid z_1\mid + a_{12}\mid z_2\mid + \ldots + a_{1r}\mid z_r\mid) & \equiv & 0\ (mod\ d_1) \\ x(a_{21}\mid z_1\mid + a_{22}\mid z_2\mid + \ldots + a_{2r}\mid z_r\mid) & \equiv & 0\ (mod\ d_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ x(a_{n1}\mid z_1\mid + a_{n2}\mid z_2\mid + \ldots + a_{nr}\mid z_r\mid) & \equiv & 0\ (mod\ d_n) \\ x(b_{11}\mid z_1\mid + b_{12}\mid z_2\mid + \ldots + b_{1r}\mid z_r\mid) & \equiv & 0\ (mod\ c_1) \\ x(b_{21}\mid z_1\mid + b_{22}\mid z_2\mid + \ldots + b_{2r}\mid z_r\mid) & \equiv & 0\ (mod\ c_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ x(b_{s1}\mid z_1\mid + b_{s2}\mid z_2\mid + \ldots + b_{sr}\mid z_r\mid) & \equiv & 0\ (mod\ c_s) \end{array}$$
donde $\mid z\mid$ es el valor absoluto de $z$.

6. Si $(b \mid z_1 \mid, ..., b \mid z_r \mid) \in \langle A_1 \rangle \bigcap \langle A_2 \rangle$, entonces $\langle A \rangle$ es pegada de $\langle A_1 \rangle$ y $\langle A_2 \rangle$. En caso contrario, $\langle A \rangle$ no es pegada de $\langle A_1 \rangle$ y $\langle A_2 \rangle$.

Antes de justificar el buen funcionamiento del algoritmo que acabamos de exponer, necesitamos dar un lema previo.

**Lema 5.2.1** *Sea $M$ un subgrupo de $\mathbb{Z}^r$ cuyas ecuaciones son*

$$\begin{array}{lcl} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1r}x_r & \equiv & 0 \ (mod\ d_1) \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2r}x_r & \equiv & 0 \ (mod\ d_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ b_{t1}x_1 + b_{t2}x_2 + \ldots + b_{tr}x_r & \equiv & 0 \ (mod\ d_t) \\ c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1r}x_r & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ c_{s1}x_1 + c_{s2}x_2 + \ldots + c_{sr}x_r & = & 0 \end{array}$$

*Entonces, existe un elemento $\alpha \in \mathbb{Z}^r$ tal que $\alpha \neq 0$ y $M = \mathsf{G}(\{\alpha\})$ si y sólo si el subespacio vectorial $V$ de $\mathbb{Q}^r$ generado por*

$$\{(c_{11}, \ldots, c_{1r}), \ldots, (c_{s1}, \ldots, c_{sr}))\}$$

*tiene dimensión $r-1$.*

*Demostración*: Sea $V^{\perp}$ el espacio ortogonal a $V$ en $\mathbb{Q}^r$. Probar que $\dim(V) = r-1$ equivale a probar que $\dim(V^{\perp}) = 1$. Probemos que el $\alpha$ que buscamos es precisamente una base de $V^{\perp}$.

Supongamos que $\alpha$ es tal que $\mathsf{G}(\alpha) = M$. Sea $(q_1, \ldots, q_r) \in V^{\perp}$. Por estar $q_i \in \mathbb{Q}$, existen números enteros $h_i, k_i$ tales que $q_i = h_i/k_i$. Claramente $d_1 \cdots d_t k_1 \cdots k_r (q_1, \ldots, q_r) \in M$, por lo que existe un $z \in \mathbb{Z}$ tal que $d_1 \cdots d_t k_1 \cdots k_r (q_1, \ldots, q_r) = z\alpha$, por lo que $\alpha$ es un sistema de generadores de $V^{\perp}$. De este hecho se sigue que $\dim(V^{\perp}) = 1$ y que $\dim(V) = r-1$.

Supongamos ahora que $\dim(V^{\perp}) = 1$. Podemos tomar $(z_1, \ldots, z_r) \in V^{\perp} \cap \mathbb{Z}^r$ tal que $\mathrm{mcd}(\{z_1, \ldots, z_r\}) = 1$ y que $V^{\perp}$ esté generado por $(z_1, \ldots, z_r)$. Sea $H$ el conjunto de soluciones enteras de

$$\begin{array}{lcl} x(b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \ldots + b_{1r}z_r) & \equiv & 0 \ (mod\ d_1) \\ x(b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \ldots + b_{2r}z_r) & \equiv & 0 \ (mod\ d_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ x(b_{t1}z_1 + b_{t2}z_2 + \ldots + b_{tr}z_r) & \equiv & 0 \ (mod\ d_t). \end{array}$$

El conjunto $H$ es un subgrupo (no trivial) de $\mathbb{Z}$, por lo que existe un $b \in H$ tal que $H$ está generado por $b$ como grupo. Sea $\alpha = (bz_1, \ldots, bz_r)$. Demostremos que $M = \mathsf{G}(\alpha)$.

Sea $(a_1,\ldots,a_r) \in M$, entonces $(a_1,\ldots,a_r) \in V^{\perp}$, por lo que existe un $q \in \mathbb{Q}$ tal que $(a_1,\ldots,a_r) = q(z_1,\ldots,z_r)$. Esto a su vez implica, por la definición de $H$, que $q \in H$, por lo que existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $q = cb$. Tenemos así que $(a_1,\ldots,a_r) \in \mathsf{G}(\alpha)$. Por estar $\alpha \in M$, tenemos que $M = \mathsf{G}(\alpha)$. ■

Estamos ya en condiciones de comprobar que el algoritmo que hemos presentado determina si $\langle A\rangle$ es o no pegada de $\langle A_1\rangle$ y de $\langle A_2\rangle$.

El lema anterior nos asegura que el cuarto paso es correcto, esto es, que si $\dim(V) \neq r-1$, entonces se tiene que $\langle A\rangle$ no es pegada de $\langle A_1\rangle$ y de $\langle A_2\rangle$.

Por otro lado, si existiesen $i, j$ tales que $z_i z_j < 0$ entonces $\mathsf{G}(A_1)\cap\mathsf{G}(A_2)\cap\mathbb{N}^r = \{0\}$, por lo que no verificaría las condiciones de 5.1.2. Si se tuviese que para cualesquiera $i, j$, $z_i z_j \geq 0$, y $\dim(V^{\perp}) = 1$, entonces tendríamos, por lo visto dentro de la demostración del lema anterior, que $\mathsf{G}(A_1)\cap\mathsf{G}(A_2) = \mathsf{G}(\{(b|z_1|,\ldots,b|z_r|)\})$ y por tanto $\langle A\rangle$ sería pegada de $\langle A_1\rangle$ y de $\langle A_2\rangle$ si y sólo si $(b|z_1|,\ldots,b|z_r|) \in \langle A_1\rangle\cap\langle A_2\rangle$.

**Ejemplo 5.2.2** *Sea* $A = \{(8,0),(0,8),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ *con* $A_1 = \{(8,0),(0,8)\}$ *y* $A_2 = \{(4,4),(5,5),(6,6)\}$.

*Las ecuaciones de* $\mathsf{G}(A_1)$ *son*

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv 0 (mod 8) \\ x_2 &\equiv 0 (mod 8) \end{aligned}$$

*y la de* $\mathsf{G}(A_2)$ *es*

$$x_1 - x_2 = 0$$

*El espacio vectorial* $V$ *es el espacio generado por* $\{(1,-1)\}$, *y por tanto* $\{(1,1)\}$ *es un sistema de generadores para* $V^{\perp}$. *La solución positiva más pequeña para el sistema de congruencias*

$$\begin{aligned} x &\equiv 0 (mod 8) \\ x &\equiv 0 (mod 8) \end{aligned}$$

*es* $b = 8$. *Como* $(8,8) \in \langle A_1\rangle\cap\langle A_2\rangle$, *tenemos que* $\langle A\rangle$ *es pegada de* $\langle A_1\rangle$ *y* $\langle A_2\rangle$.

# Capítulo 6

# Semigrupos afines intersección completa

## Introducción

En este capítulo, estudiamos los semigrupos afines que son intersección completa, esto es, semigrupos que alcanzan la cota mínima para el número de elementos en un sistema minimal de generadores para la congruencia asociada al semigrupo. Si $S$ es intersección completa, entonces el anillo de semigrupo $K[S]$ es el anillo de coordenadas de una variedad $V$ que viene parametrizada por monomios y cuyo ideal asociado tiene un sistema minimal de generadores con el mínimo número de generadores posible. El mínimo número de generadores al que nos referimos es precisamente el número de elementos de un sistema minimal de generadores de $S$ menos la dimensión de $S$.

Nuestro objetivo al iniciar el trabajo realizado en este capítulo era el de generalizar los resultados obtenidos por Delorme sobre semigrupos numéricos que son intersección completa. Delorme demuestra en [10] que un semigrupo numérico es intersección completa si el conjunto de generadores del semigrupo se puede dividir en dos subconjuntos de forma que los relatores del semigrupo se dividan en relatores que relacionan elementos del primer grupo de elementos, relatores del segundo grupo y un relator que relaciona los del primer grupo con los del segundo, y verificando que los subsemigrupos generados por los dos subconjuntos son a su vez intersección completa. Tras conseguir generalizar los resultados de Delorme para los subsemigrupos de $\mathbb{N}^2$, resolvimos el caso $\mathbb{N}^3$ y el caso de semigrupos simpliciales en general (nótese que todo semigrupo de dimensión dos es simplicial). El caso general fue resuelto más adelante haciendo uso de matrices mezcladas dominantes, hecho que vamos a exponer en el próximo capítulo.

# Notación y preliminares

A lo largo de este capítulo vamos a suponer que el semigrupo $S \subset \mathbb{N}^r$ está generado (minimalmente) por $A = \{n_1, \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m}\}$. Como es costumbre definimos el morfismo

$$\varphi : \mathbb{N}^{r+m} \to S$$
$$\varphi(a_1, \ldots, a_{r+m}) = \sum_{i=1}^{r+m} a_i n_i.$$

y denotamos por $\sigma$ la congruencia núcleo de $\varphi$. Suponemos, además, que $\rho$ es un sistema de generadores de $\sigma$.

Los resultados y conceptos expuestos en el capítulo anterior son imprescindibles para el desarrollo del presente capítulo, por lo que vamos a recordar la notación que allí adoptamos. Dado un subconjunto $B \subsetneq A$, $B = \{n_{i_1}, \ldots, n_{i_l}\}$, denotamos por $\sigma_B$ al subconjunto de $\sigma$ formado por los elementos $((a_1, \ldots, a_{r+m}), (b_1, \ldots, b_{r+m}))$ de $\sigma$ tales que $a_j = b_j = 0$ para todo $j \notin \{i_1, \ldots, i_l\}$. Dado un elemento $n \in S$, definimos $\mathrm{E}_A(n) = \varphi^{-1}(n)$ y $\mathrm{E}_B(n) = \varphi^{-1}(n) \cap \langle e_{i_1}, \ldots, e_{i_l} \rangle$. Por último definimos

$$\mathfrak{A}(B) = \{n \in \langle B \rangle : n - a \in S, \text{ para algún } a \in A \setminus B\},$$

y denotamos por $\mathfrak{M}(B)$ al conjunto de elementos minimales de $\mathfrak{A}(B)$ respecto del orden parcial usual de $\mathbb{N}^r$.

El siguiente lema es fundamental para el desarrollo de los resultados obtenidos en este capítulo. Su importancia se verá más adelante. Como veremos, este lema se utiliza para demostrar que hay determinados relatores en $\rho$.

**Lema 6.0.3** *Si $\mathfrak{A}(B) \neq \emptyset$, entonces para todo $n \in \mathfrak{M}(B)$, existen $n_B \in \mathrm{E}_B(n)$ y $n_A \in \mathrm{E}_A(n) \setminus \mathrm{E}_B(n)$ tal que $(n_B, n_A) \in \rho \cup \rho^{-1}$.*

*Demostración*:

Supongamos, sin pérdida de generalidad que $B = \{n_1, \ldots, n_k\}$ y que por tanto $A \setminus B = \{n_{k+1}, \ldots, n_{r+m}\}$. Sea $n \in \mathfrak{M}(B)$, entonces $n \in \langle B \rangle$, y por tanto existen $h_1, \ldots, h_k \in \mathbb{N}$, tales que $n = h_1 n_1 + \cdots + h_k n_k$. Más aún, existe $n_i \in A \setminus B$ tal que $n - n_i \in S$, y por tanto existen $h'_1, \ldots, h'_{r+m} \in \mathbb{N}$ tales que $n = h'_1 n_1 + \cdots + h'_{r+m} n_{r+m}$, con $h'_i \neq 0$. Tenemos, en consecuencia, que $((h_1, \ldots, h_k, 0, \ldots, 0), (h'_1, \ldots, h'_{r+m})) \in \sigma$. Por estar generado $\sigma$ por $\rho$, tenemos que deben existir $v_0, \ldots, v_l \in \mathbb{N}^{r+m}$ tales que

$$(h_1, \ldots, h_k, 0, \ldots, 0) = v_0,$$
$$(h'_1, \ldots, h'_{r+m}) = v_l \text{ y}$$
$$(v_e, v_{e+1}) \in (2\rho) \textit{ para todo } 0 \leq e \leq l - 1.$$

Supongamos que $v_e = (v_{e_1}, \dots, v_{e_{r+m}})$. Como $v_l = (h'_1, \dots, h'_{r+m})$ y $h'_i \neq 0$, con $i \in \{k+1, \dots, r+m\}$, tenemos que existe

$$t = \text{mín}\{e \in \{0, \dots, l\} : v_{e_q} \neq 0 \text{ para algún } q \in \{k+1, \dots, r+m\}\}.$$

Claramente, $v_{t-1} \in \mathrm{E}_B(n)$ y $v_t \in \mathrm{E}_A(n) \setminus \mathrm{E}_B(n)$. Veamos que $(v_{t-1}, v_t) \in \rho \cup \rho^{-1}$. Como $(v_{t-1}, v_t) \in (2\rho)$, entonces existe $(u,v) \in \rho \cup \rho^{-1} \cup \delta$ y $w \in \mathbb{N}^{r+m}$ tal que $(v_{t-1}, v_t) = (u+w, v+w)$. Obsérvese que:

1. $(u,v) \notin \delta$, ya que $v_{t-1} \neq v_t$.

2. Si $w = (w_1, \dots, w_{r+m})$, entonces $w_{k+1} = \cdots = w_{r+m} = 0$, por ser $u + w = v_{t-1} \in \mathrm{E}_B(n)$.

3. $w_1 = \cdots = w_k = 0$, ya que de no ser así, existiría $s \in \{1, \dots, k\}$ tal que $w_s \neq 0$, lo que implicaría que $v_{t-1_s} \neq 0 \neq v_{t_s}$. Esto lleva a que $n - n_s \in \langle B \rangle$. Por otro lado, como $v_{t_q} \neq 0$, para algún $q \in \{k+1, \dots, r+m\}$, tenemos que $n - n_s - n_q \in S$, lo que lleva a que $n - n_s \in \mathfrak{A}(B)$, que es una contradicción con el hecho de que $n \in \mathfrak{M}(B)$.

Podemos concluir, por lo visto, que $w = 0$, y en consecuencia, $(v_{t-1}, v_t) = (u,v) \in \rho \cup \rho^{-1}$. ■

**Ejemplo 6.0.4** *Sea* $S = \langle (2,0), (0,3), (1,2), (2,1) \rangle$. *El elemento* $3(2,1) = 3(2,0) + 1(0,3)$ *está en* $\mathfrak{M}(\{(2,1)\})$ *por lo que, usando lo expuesto en la demostración de 6.0.3, tenemos que* $((3,1,0,0),(0,0,0,3)) \in \rho \cup \rho^{-1}$.

## 6.1. Semigrupos afines simpliciales que son intersección completa

En esta sección, vamos a considerar semigrupos $S$ tales que $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(\{n_1, \dots, n_r\}) = \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$, a saber, semigrupos afines simpliciales. Vamos a suponer también que $m > 0$, ya que si $m = 0$, entonces trivialmente $S$ es intersección completa. Nótese que, bajo estas hipótesis, si $S$ es intersección completa, entonces podemos tomar $\rho$ tal que $\#\rho = r + m - r = m$.

Lo primero que vamos a hacer es buscar elementos en $\rho$, y para ello vamos a usar 6.0.3. Por tanto, tenemos que encontrar subconjuntos $B$ de $A$, tales $\mathfrak{A}(B)$ no sea vacío.

**Lema 6.1.1** *Sea* $B \subsetneq A$. *Si* $B \cap \{n_1, \dots, n_r\} = \emptyset$ *ó* $\{n_1, \dots, n_r\} \subseteq B$, *entonces* $\mathfrak{A}(B) \neq \emptyset$.

*Demostración*:

1. $B \cap \{n_1,\dots,n_r\} = \emptyset$. Tómese $n_i \in B$. Como $n_i \in S \subset \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(\{n_1,\dots,n_r\})$, tenemos que $n_i$ se puede poner como combinación lineal con coeficientes racionales positivos de $n_1,\dots,n_r$. Eliminando los denominadores de dicha combinación lineal, obtenemos $bn_i = \sum_{j=1}^r a_j n_j$, con $a_j \in \mathbb{N}$ y $0 \neq b \in \mathbb{N}$. Como $b \neq 0$, entonces existe un $j$ tal que $a_j \neq 0$, lo que implica que $bn_i - n_j \in S$, y por tanto $bn_i \in \mathfrak{A}(B)$ (porque $n_j \in A \setminus B$).

2. Si $\{n_1,\dots,n_r\} \subseteq B$, entonces $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(B) = \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(A) = \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$. Tómese $n_i \in A \setminus B$. Por ser $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(A) = \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(B)$, tenemos que, al igual que antes, $n_i$ se puede poner como combinación lineal con coeficientes racionales positivos de $\{n_1,\dots,n_r\}$. Eliminando denominadores, tenemos $bn_i = \sum_{j=1}^r a_j n_j$, con $a_j \in \mathbb{N}$ y $0 \neq b \in \mathbb{N}$. Tenemos así que $bn_i - n_i \in S$, pero $bn_i - n_i = \sum_{j=1}^r a_j n_j - n_i$, y por estar $\sum_{j=1}^r a_j n_j \in \langle B \rangle$ y $n_i \in A \setminus B$, tenemos que $\mathfrak{A}(B) \neq \emptyset$.

■

Tenemos por tanto, que para los conjuntos $B$

$$\{n_1 \dots, n_r\}, \{n_{r+1}\}, \dots, \{n_{r+m}\}$$

el conjunto $\mathfrak{A}(B)$ es no vacío y por tanto, usando 6.0.3, tenemos que cada uno da un elemento de $\rho$ (en principio no todos los elementos deben ser distintos). Esta idea se plasma en la siguiente definición.

**Definición 6.1.2** *Definimos recurrentemente el par $(P_k, \gamma_k)$, para cualquier entero natural $k \geq 1$, donde $P_k$ es una partición de $A$ y $\gamma_k$ es un subconjunto de $\rho$, de la siguiente forma:*

$$P_1 = \{\{n_1,\dots,n_r\}, \{n_{r+1}\}, \dots, \{n_{r+m}\}\} \text{ y } \gamma_1 = \emptyset.$$

*Una vez definido $P_k = \{B_1,\dots,B_t\}$ y $\gamma_k$, definimos el par $(P_{k+1}, \gamma_{k+1})$ de la siguiente forma:*

1. *Si existe $(n_{B_i}, n_{B_j}) \in \rho$ con $n \in \mathbb{N}^{r+m}$, $i,j \in \{1,\dots,t\}$, $i \neq j$, $n_{B_i} \in \mathrm{E}_{B_i}(n)$ y $n_{B_j} \in \mathrm{E}_{B_j}(n)$. Entonces, definimos*

$$P_{k+1} = \{B_1,\dots,B_{i-1}, B_i \cup B_j, B_{i+1},\dots,B_{j-1},B_{j+1},\dots,B_t\} \text{ y}$$

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k \cup \{(n_{B_i}, n_{B_j})\}.$$

2. *En otro caso, definimos* $P_{k+1} = P_k$ *y* $\gamma_{k+1} = \gamma_k$.

**Ejemplo 6.1.3** *En el primer capítulo demostramos que un sistema minimal de generadores para la congruencia asociada a*

$$S = \langle (2,0),(0,1),(1,2),(3,1)\rangle$$

*es*

$$\rho = \left\{ \begin{array}{c} ((1,0,1,0),(0,1,0,1)),((3,2,0,0),(0,0,0,2)), \\ ((2,3,0,0),(0,0,1,1)),((1,4,0,0),(0,0,2,0)) \end{array} \right\}.$$

*Tenemos por tanto que*

$$P_1 = \{\{(2,0),(0,1)\},\{(1,2)\},\{(3,1)\}\},\ \gamma_1 = \emptyset.$$

*El elemento* $((3,2,0,0),(0,0,0,2)) \in \rho$ *verifica que* $(3,2,0,0) \in \mathrm{E}(B_1)$ *y que* $(0,0,0,2) \in \mathrm{E}(B_3)$, *por lo que podemos tomar*

$$P_2 = \{\{(2,0),(0,1),(3,1)\},\{(1,2)\}\},$$

$$\gamma_2 = \{((3,2,0,0),(0,0,0,2))\}.$$

*Tomamos ahora el elemento* $((1,4,0,0),(0,0,2,0))$ *y hacemos*

$$P_3 = \{\{(2,0),(0,1),(3,1),(1,2)\}\},$$

*y*

$$\gamma_3 = \{((3,2,0,0),(0,0,0,2)),((1,4,0,0),(0,0,2,0))\}.$$

*Obsérvese que* $\rho \neq \gamma_3$.

La idea que venimos persiguiendo al dar la definición anterior, es la de ir pegando subconjuntos de la partición de forma que vayan dando elementos de $\rho$. El siguiente lema nos asegura, entre otras cosas, que en el caso en que el semigrupo de partida sea intersección completa, $\gamma_k$ coincide con $\rho$, para algún $k$.

**Lema 6.1.4**

1. $\#\gamma_k = (m+1) - \#P_k$.

2. *Si* $P_k = \{B_1,\ldots,B_t\}$, *entonces* $\gamma_k \subseteq \sigma_{B_1} \cup \ldots \cup \sigma_{B_t}$.

3. *Si* $(0,0) \notin \rho$, $P_k = \{B_1,\ldots,B_t\}$ *y* $\{n_1,\ldots,n_r\} \subseteq B_1$, *entonces* $\dim(\langle B_h\rangle) = 1$ *para todo* $2 \leq h \leq t$.

4. *Si* $\#\rho = m$, *entonces existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\rho = \gamma_k, \#P_k = 1$ *y* $\#P_{k-1} = 2$.

*Demostración*: Los dos primeros apartados son consecuencia inmediata de la definición de $(P_k, \gamma_k)$.

Para probar el tercer apartado, vamos a hacer inducción sobre $k$. El caso $k = 1$ es trivial. Si tenemos demostrado el enunciado para $k$ y queremos probarlo para $k+1$, el único caso interesante a tener en cuenta es cuando

$$P_{k+1} = \{B_1, \ldots, B_{i-1}, B_i \cup B_j, B_{i+1}, \ldots, B_{j-1}, B_{j+1}, \ldots, B_t\}$$

con $i, j \in \{2, \ldots, t\}$ e $i \neq j$, ya que el resto de los casos son de inmediata demostración. En este caso, existe $(n_{B_i}, n_{B_j}) \in \rho$ con $0 \neq n \in \langle B_i \rangle \cap \langle B_j \rangle$, $n_{B_i} \in \mathrm{E}_{B_i}(n)$ y $n_{B_j} \in \mathrm{E}_{B_j}(n)$. Por ser $\dim(\langle B_i \rangle) = \dim(\langle B_j \rangle) = 1$, tenemos que existen $z_i, z_j \in \mathbb{Z}$ tales que $\mathsf{G}(B_i) = \mathsf{G}(\{z_i\})$ y $\mathsf{G}(B_j) = \mathsf{G}(\{z_j\})$. Como $n \in \mathsf{G}(B_i) \cap \mathsf{G}(B_j)$, deben existir $x_i, x_j \in \mathbb{Z}$ tales que $n = x_i z_i = x_j z_j$. Por tanto, $\mathrm{rank}(\mathsf{G}(B_i \cup B_j)) = \mathrm{rank}(\mathsf{G}(\{z_i, z_j\})) = 1$, de lo que se sigue que $\dim(\langle B_i \cup B_j \rangle) = 1$.

Para demostrar el último apartado, demostremos que el hecho $\#P_k \geq 2$ implica forzosamente que $\#P_{k+1} < \#P_k$. Sea $P_k = \{B_1, \ldots, B_t\}$, el lema 6.0.3 nos asegura que existen

$$(n^1_{B_1}, n^1_A), \ldots, (n^t_{B_t}, n^t_A) \in \rho \cup \rho^{-1}$$

con $n^i \in \mathfrak{M}(B_i)$, $n^i_{B_i} \in \mathrm{E}_{B_i}(n^i)$ y $n^i_A \in \mathrm{E}_A(n^i) \setminus \mathrm{E}_{B_i}(n^i)$ para todo $1 \leq i \leq t$. Sea $\zeta = \{(n^1_{B_1}, n^1_A), \ldots, (n^t_{B_t}, n^t_A)\}$ y sea $\beta$ el conjunto que se obtiene de $\zeta$ reemplazando $(a,b)$ por $(b,a)$ si $(a,b) \notin \rho$. Entonces, $\gamma_k \cup \beta \subseteq \rho$, y como $\gamma_k \subseteq \sigma_{B_1} \cup \ldots \cup \sigma_{B_t}$ y $\beta \cap (\sigma_{B_1} \cup \ldots \cup \sigma_{B_t}) = \emptyset$, tenemos que $\#\gamma_k + \#\beta \leq \#\rho$. Por tanto, $m + 1 - t + \#\beta \leq m$, lo que implica que $\#\beta \leq t - 1$ y en consecuencia, existen $i, j \in \{1, \ldots .t\}$, $i \neq j$ tales que $(n^i_{B_i}, n^j_{B_j}) \in \beta$. Concluimos por tanto que $\#P_{k+1} < \#P_k$. Claramente, se tiene entonces que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\#P_k = 1$ y $\#P_{k-1} = 2$. Finalmente, para ese $k$, se tiene que $\#\gamma_k = m + 1 - 1 = m$, y como $\gamma_k \subseteq \rho$ y $\#\rho = m$, tenemos que $\rho = \gamma_k$.

■

Obsérvese que $S$ es intersección completa si y sólo si un sistema minimal de generadores para $\sigma$ es $\gamma_{m+1}$. Este hecho proporciona una forma de verificar si un semigrupo afín y simplicial, $S$, es o no intersección completa. Si $S$ es intersección completa, entonces $P_m = \{B_1, B_2\}$ y por tanto $S$ es pegada de los semigrupos $\langle B_1 \rangle$ y $\langle B_2 \rangle$, ya que $\gamma_{m+1} = \rho$ verifica la definición de pegada. Tenemos así el siguiente resultado.

**Teorema 6.1.5** *Si S es un subsemigrupo simplicial finitamente generado de* $\mathbb{N}^r$, *entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$S$ es un semigrupo intersección completa.*

2. *Existen $S_1$ y $S_2$ subsemigrupos intersección completa de $S$ tales que* $\dim(S_1) = r$*,* $\dim(S_2) = 1$ *y $S$ es pegada de $S_1$ y $S_2$.*

Este teorema engloba el resultado obtenido por Delorme para semigrupos numéricos así como para subsemigrupos de $\mathbb{N}^2$ (todo subsemigrupo de $\mathbb{N}^2$ es simplicial).

**Corolario 6.1.6** *Un semigrupo numérico es intersección completa si y sólo si es pegada de dos subsemigrupos suyos que son intersección completa.*

**Corolario 6.1.7** *Si $S$ es un subsemigrupo de $\mathbb{N}^2$ y* $\dim(S) = 2$*, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$S$ es un semigrupo intersección completa.*

2. *Existen $S_1$ y $S_2$ subsemigrupos intersección completa de $\mathbb{N}^2$ tales que* $\dim(S_1) = 2$*,* $\dim(S_2) = 1$ *y $S$ es pegada de $S_1$ y $S_2$.*

**Ejemplo 6.1.8** *Sea*

$$S = \langle (2,0),(0,3),(1,2),(2,1)\rangle.$$

*Tenemos que*

$$P_1 = \{\{(2,0),(0,3)\},\{(1,2)\},\{(2,1)\}\},$$

$$\gamma_1 = \emptyset.$$

*El elemento* $3(2,1) = 3(2,0)+1(0,3)$ *está en* $\mathfrak{M}(\{(2,1)\})$ *por lo que, usando lo expuesto en la demostración de 6.0.3, tenemos que* $((3,1,0,0),(0,0,0,3)) \in \rho \cup \rho^{-1}$*. Tomamos así*

$$P_2 = \{\{(2,0),(0,3),(2,1)\},\{(1,2)\}\},$$

$$\gamma_2 = \{((3,1,0,0),(0,0,0,3))\}.$$

*Seguimos buscando y vemos que el elemento* $2(1,2) \in \mathfrak{M}(\{(1,2)\})$*, y una vez más usando la demostración de 6.0.3, tenemos que* $(((0,1,0,1),(0,0,2,0)) \in \rho \cup \rho^{-1}$.

*De esta forma*

$$P_3 = \{\{(2,0),(0,3),(2,1),(1,2)\}\}$$

*y*

$$\gamma_3 = \{((3,1,0,0),(0,0,0,3)),((0,1,0,1),(0,0,2,0))\}.$$

*Veamos si $S$ es intersección completa. Para ello comprobemos que $S$ es pegada de $\langle A_1\rangle$ y $\langle A_2\rangle$, con $A_1 = \{(2,0),(0,3),(2,1)\}$ y $A_2 = \{(1,2)\}$, y luego que tanto $\langle A_1\rangle$ como*

$\langle A_2\rangle$ *son intersección completa. Para ver si $S$ es pegada de $\langle A_1\rangle$ y $\langle A_2\rangle$, vamos a usar el algoritmo expuesto para tal fin en el capítulo anterior.*

*Si calculamos las ecuaciones de $\mathsf{G}(A_1)$ y de $\mathsf{G}(A_2)$, obtenemos*

$$\mathsf{G}(A_1) \equiv \{x_1 - 2x_2 \equiv 0(mod2)$$

$$\mathsf{G}(A_2) \equiv \{-2x_1 + x_2 = 0$$

*El espacio vectorial $V$ está generado por $(-2,1)$ por lo que $\dim(V) = 1 = r-1$. Tomamos $(z_1,z_2) = (1,2) = V^{\perp}$. Tenemos que calcular la menor solución positiva, $b$, del sistema de congruencias:*

$$x(1\cdot 1 - 2\cdot 2) \equiv 0(mod\ 2)$$

*Tenemos así que $b = 2$, y como $2\cdot(1,2) \in \langle A_1\rangle \cap \langle A_2\rangle$, $S$ es pegada de $\langle A_1\rangle$ y $\langle A_2\rangle$. Veamos ahora si $\langle A_1\rangle$ y $\langle A_2\rangle$ son intersección completa. Claramente $\langle A_2\rangle$ es intersección completa. Para ver si $\langle A_1\rangle$ es intersección completa, comprobemos si $\langle A_1\rangle$ es pegada de $\langle B_1\rangle$ y $\langle B_2\rangle$, con $B_1 = \{(2,0),(0,3)\}$ y $B_2 = \{(2,1)\}$, y que tanto $\langle B_1\rangle$ como $\langle B_2\rangle$ son intersección completa.*

*Las ecuaciones de $\mathsf{G}(B_1)$ son*

$$\mathsf{G}(B_1) \equiv \{3x_1 - 2x_2 \equiv 0(mod\ 6)$$

*y las de $\mathsf{G}(B_2)$ son*

$$\mathsf{G}(B_2) \equiv \{x_1 - 2x_2 = 0$$

*El espacio vectorial $V$ está generado por $\{(1,-2)\}$, por lo que podemos tomar $(z_1,z_2) = (2,1) \in V^{\perp}$. La menor solución para la congruencia*

$$x(3\cdot 2 - 2\cdot 1) \equiv 0(mod\ 6)$$

*es $b = 3$, y como tenemos que $3(2,1) \in \langle B_1\rangle \cap \langle B_2\rangle$, entonces $\langle A_1\rangle$ es pegada de $\langle B_1\rangle$ y $\langle B_2\rangle$. Como tanto $\langle B_1\rangle$ como $\langle B_2\rangle$ son intersección completa, $\langle A_1\rangle$ es intersección completa. Con esto concluimos que $S$ es intersección completa.*

**Ejemplo 6.1.9** *Consideremos ahora el semigrupo*

$$S = \langle (2,0),(0,2),(3,0),(2,1),(3,1)\rangle.$$

*Veamos si es intersección completa.*

$$P_1 = \{\{(2,0),(0,2)\},\{(3,0)\},\{(2,1)\},\{(3,1)\}\},\ \gamma_1 = \emptyset.$$

*El elemento* $(6,0)$ *está en* $\mathfrak{M}(\{(3,0)\})$. *Siguiendo la demostración de 6.0.3, obtenemos que* $((3,0,0,0,0),(0,0,2,0,0)) \in \rho \cup \rho^{-1}$. *Tenemos así,*

$$P_2 = \{\{(2,0),(0,2),(3,0)\},\{(2,1)\},\{(3,1)\}\},$$

$$\gamma_2 = \{((3,0,0,0,0),(0,0,2,0,0))\}.$$

*Buscamos un elemento de* $\mathfrak{M}(\{(2,1)\})$ *y obtenemos el* $(4,2)$, *lo que nos lleva a que* $((2,1,0,0,0),(0,0,0,2,0)) \in \rho \cup \rho^{-1}$. *En consecuencia,*

$$P_3 = \{\{(2,0),(0,2),(3,0),(2,1)\},\{(3,1)\}\},$$

$$\gamma_3 = \{((3,0,0,0,0),(0,0,2,0,0)),((2,1,0,0,0),(0,0,0,2,0))\}.$$

*Por último, tenemos que* $(6,2) \in \mathfrak{M}(\{(3,1)\}$, *que nos da un nuevo relator:* $((0,1,2,0,0),(0,0,0,0,2)) \in \rho \cup \rho^{-1}$. *Llegamos a*

$$P_4 = \{\{(2,0),(0,2),(3,0),(2,1),(3,1)\}\},$$

$$\gamma_4 = \left\{ \begin{array}{c} ((3,0,0,0,0),(0,0,2,0,0)),((2,1,0,0,0),(0,0,0,2,0)), \\ ((0,1,2,0,0),(0,0,0,0,2)) \end{array} \right\}.$$

*Si S fuese intersección completa, entonces* $\gamma_4$ *sería un sistema minimal de generadores de* $\sigma$. *De ser así, S sería pegada de* $\langle(2,0),(0,2),(3,0),(2,1)\rangle$ *y de* $\langle(3,1)\rangle$. *Y dichos semigrupos tendrían que ser intersección completa. Veamos si es así.*

*Sea* $A_1 = \{(2,0),(0,2),(3,0),(2,1)\}$ *y* $A_2 = \{(3,1)\}$. *Como* $\mathsf{G}(A_1) = \mathbb{Z}^2$, $\mathsf{G}(A_1)$ *no tiene ecuaciones. Las ecuaciones de* $\mathsf{G}(A_2)$ *son*

$$\mathsf{G}(A_2) \equiv \{x - 3y = 0$$

*El espacio vectorial V está generado por* $\{(1,-3)\}$ *y su ortogonal por* $(3,1)$. *Como no hay congruencias, el elemento menor entero positivo que es solución de las congruencias es* $b = 1$. *Como* $1(3,1) \notin \langle A_1\rangle \cap \langle A_2\rangle$, *tenemos que S no es pegada de* $\langle A_1\rangle$ *y de* $\langle A_2\rangle$, *por lo que S no es intersección completa.*

## 6.2. Subsemigrupos de $\mathbb{N}^3$ que son intersección completa

En esta sección, estudiamos los subsemigrupos de $\mathbb{N}^3$ que son intersección completa, dando un método para reconocer si un subsemigrupo de $\mathbb{N}^3$ es o no intersección completa, tal y como se hizo en la sección anterior para semigrupos simpliciales. Demostraremos además que los subsemigrupos de $\mathbb{N}^3$ con más de cuatro rayos extremales no pueden ser intersección completa.

Si el semigrupo a considerar tuviese dimensión uno o dos, entonces sería isomorfo a un semigrupo numérico o a un subsemigrupo de $\mathbb{N}^2$, y por tanto podríamos aplicar los resultados vistos en la sección anterior. Por tanto, nos vamos a centrar en el caso $\dim(S) = 3$.

Sea $\pi$ el plano afín de $\mathbb{Q}^3$ definido por la ecuación $\pi \equiv x+y+z = 1$. Para cada $n_i \in A$, $\pi \cap \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(\{n_i\})$ es un punto, que vamos a denotar por $p_i$. Claramente, $P = \pi \cap \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ es la clausura convexa en el plano $\pi$ de los puntos $p_i$. Es más, $P$ es un polígono. Sea $B \subseteq A$ tal que tenga mínima cardinalidad entre los subconjuntos $C$ de $A$ tales que $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(C) = \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$. El conjunto de los $p_i$ asociados a los elementos de $B$ es por tanto el conjunto de vértices de $P$, y el número de lados de $P$ es igual al cardinal de $B$, que es a su vez el número de rayos extremales de $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$. Decimos por tanto que $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ tiene $\#B$ caras y que $n_i$ y $n_j$ están en la misma cara de $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$, si $p_i$ y $p_j$ forman un lado de $P$.

**Lema 6.2.1** *Si $n_i, n_j \in A$ no están en la misma cara de $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(A)$ entonces*

$$\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(\{n_i, n_j\}) \cap \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(A \setminus \{n_i, n_j\}) \neq \{0\}.$$

*Demostración*:

Si se diese que $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(\{n_i, n_j\}) \cap \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(A \setminus \{n_i, n_j\}) = \{0\}$, entonces el segmento $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(\{n_i, n_j\}) \cap \pi = \overline{p_i p_j}$ y el polígono (o segmento) $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(A \setminus \{n_i, n_j\}) \cap \pi$ son disjuntos en $\pi$. Esto implica que $\overline{p_i p_j}$ es una lado de $P$. ■

(Obsérvese que puede darse que $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(\{n_i, n_j\}) \cap \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(A \setminus \{n_i, n_j\}) \neq \{0\}$ y que $n_i, n_j$ estén en la misma cara.)

Vamos a dividir el estudio de los subsemigrupos de $\mathbb{N}^3$ tridimensionales en los siguientes casos:

1. El cono $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ tiene tres caras.

2. El cono $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ tiene cuatro caras.

3. El cono $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ tiene más de cuatro caras.

El primer caso es un caso particular del problema estudiado en la sección anterior, ya que en este caso el semigrupo es simplicial. Por otro lado, estos tres casos cubren todas las posibilidades para semigrupos de $\mathbb{N}^3$ con dimensión tres.

### 6.2.1. Conos con cuatro caras

En esta sección, estudiamos los subsemigrupos de $\mathbb{N}^3$ tales que su cono asociado tiene cuatro caras. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S) = \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(\{n_1,n_2,n_3,n_4\})$, y que $n_{i+1},n_{i+2}$ (tomando los índices módulo cuatro) están en la misma cara de $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$. Tal y como hicimos en la sección anterior, vamos a introducir una partición $P_1$ de $A$ para poder determinar cuándo un semigrupo, con las mismas características antes señaladas, es intersección completa. Para crear una partición que cumpla las funciones de la presentada para semigrupos simpliciales, tenemos que asegurar que los elementos de dicha partición (y de la secuencia de particiones) verifican que $\mathfrak{A}(B) \neq \emptyset$.

Tal y como ocurre con el caso en que el semigrupo tenga sólo tres generadores, en el caso en que sólo tenga cuatro generadores y éstos sean rayos extremales, el semigrupo en cuestión es intersección completa.

**Lema 6.2.2** *Si $S = \langle n_1,n_2,n_3,n_4\rangle$ y $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ tiene cuatro caras, entonces $S$ es intersección completa.*

*Demostración*:

Como $n_1,n_2,n_3,n_4$ son linealmente dependientes en $\mathbb{Q}^3$, debe existir una combinación lineal con coeficientes racionales $q_1n_1 + q_2n_2 + q_3n_3 + q_4n_4 = 0$. Es más, $q_1q_2q_3q_4 \neq 0$, por tener $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ cuatro caras y ser por tanto los generadores tres a tres linealmente independientes. Eliminando denominadores, obtenemos

$$z_1n_1 + z_2n_2 + z_3n_3 + z_4n_4 = 0, z_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{6.1}$$

Esta expresión es única salvo producto por escalares, ya que las coordenadas de $n_1$ son únicas respecto de la base $\{n_2,n_3,n_4\}$. Sea $J = \{i \in \{1,2,3,4\} : z_i > 0\}$. Como no todos los $z_i$ pueden ser negativos, ya que en ese caso (6.1) sería negativa, se tiene que $J \neq \emptyset$. Nótese también que $\#J = 2$, ya que en caso contrario uno de los generadores se podría poner como combinación positiva del resto, lo que es una contradicción con el hecho de que $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ tenga cuatro caras. Tómese $C = \{n_j : j \in J\}$, tenemos entonces que $\sum_{j\in J} z_jn_j \in \langle C\rangle \cap \langle A \setminus C\rangle$. Por otro lado, se tiene claramente que $\mathrm{rank}(\mathsf{G}(C) \cap \mathsf{G}(A \setminus C)) = 1$, y por tanto existe $z \in \mathbb{Z}^3$ tal que $\mathsf{G}(C) \cap \mathsf{G}(A \setminus C) = \mathsf{G}(\{z\})$. En consecuencia, $z = \sum_{j\in J} x_jn_j = \sum_{i\notin J} x_in_i$, con $x_i \in \mathbb{Z}$. Esto lleva a que $\sum_{j\in J} x_jn_j + \sum_{i\notin J}(-x_i)n_i = 0$. Como (6.1) es única salvo multiplicación por escalares, tiene que existir un elemento $q \in \mathbb{Q}$, tal que $x_j = qz_j$ para todo $j \in J$ y $-x_i = qz_i$, para todo $i \notin J$. Esto implica que podemos tomar $z \in \mathbb{N}^3$ (podemos elegir entre $z$ y $-z$) y $z \in \langle C\rangle \cap \langle A \setminus C\rangle$. Por 5.1.2, tenemos que $S$ es pegada de $\langle C\rangle$ y $\langle A \setminus C\rangle$, y como $\langle C\rangle$ y $\langle A \setminus C\rangle$ son intersección completa (son isomorfos a $\mathbb{N}^2$), tenemos que $S$ es intersección completa. ■

**Ejemplo 6.2.3** *Sea*

$$S = \langle (1,0,0),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\rangle.$$

*Se observa fácilmente que* $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ *tiene cuatro caras. Sea* $A_1 = \{(1,0,0),(0,1,1)\}$ *y* $A_2 = \{(0,1,0),(1,0,1)\}$. *Veamos que* $S$ *es pegada de* $A_1$ *y de* $A_2$. *De hecho, la pegada es la que da precisamente el único relator que genera a la congruencia asociada a* $S$.

*Las ecuaciones de* $\mathsf{G}(A_1)$ *y* $\mathsf{G}(A_2)$ *son las siguientes:*

$$\mathsf{G}(A_1) \equiv \{-x_2 + x_3 = 0$$

$$\mathsf{G}(A_2) \equiv \{-x_1 + x_3 = 0$$

*El espacio vectorial* $V$ *está generado por* $\{(0,-1,1),(-1,0,1)\}$. *Por tanto,* $V^{\perp}$ *está generado por* $\{(1,1,1)\}$. *Como no hay congruencias, la menor solución positiva posible a un sistema con cero congruencias es* $b = 1$. *Como* $1(1,1,1) \in \langle A_1\rangle \cap \langle A_2\rangle$, *tenemos que* $S$ *es pegada de* $\langle A_1\rangle$ *y de* $\langle A_2\rangle$. *Como además* $\langle A_1\rangle$ *y* $\langle A_2\rangle$ *son intersección completa,* $S$ *es intersección completa. (El que* $\langle A_1\rangle$ *sea intersección completa, se debe a que* $(1,0,0)$ *y* $(0,1,1)$ *son linealmente independientes, por lo que no puede haber ningún relator relacionándolos, con lo que el número de relatores es* $0 = \dim(\langle A_1\rangle) - 2$. *Lo mismo ocurre con* $\langle A_2\rangle$.*)*

*Nótese además que la elección de* $A_1$ *y de* $A_2$ *no es fortuita, ya que el que* $(1,0,0)$ *y* $(0,1,1)$ *no estén en la misma cara de* $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ *hace que exista realmente una pegada. Si hubiesemos tomado* $A_1 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ *y* $A_2 = \{(0,1,1),(1,0,1)\}$, *las cosas no hubiesen funcionado.*

El siguiente lema da lugar a la partición a la que nos referíamos al principio de esta sección. Como ya hemos estudiado el caso de cuatro generadores, a partir de ahora consideraremos semigrupos con más de cuatro generadores.

**Lema 6.2.4** *Sea* $B \subsetneq A$ *verificando alguna de las condiciones siguientes:*

1. $\{n_1,n_2,n_3,n_4\} \cap B = \emptyset$.
2. $\{n_1,n_2,n_3,n_4\} \subseteq B$.
3. $\{n_1,n_3\} \subseteq B$ *y* $\{n_2,n_4\} \cap B = \emptyset$.
4. $\{n_2,n_4\} \subseteq B$ *y* $\{n_1,n_3\} \cap B = \emptyset$.

*Entonces* $\mathfrak{A}(B) \neq \emptyset$.

*Demostración*: Para los casos del primer y segundo apartados, la demostración es análoga a la realizada en 6.1.1. Los dos últimos apartados son una consecuencia inmediata del lema 6.2.1.

■

Estamos ya en condiciones de definir la secuencia de particiones y conjuntos de relatores.

**Definición 6.2.5** *Definimos recurrentemente el par $(P_k, \gamma_k)$, para todo $k \geq 1$, donde $P_k$ es una partición de $A$ y $\gamma_k$ es un subconjunto de $\rho$:*

$$P_1 = \{\{n_1, n_3\}, \{n_2, n_4\}, \{n_5\}, \ldots, \{n_{3+m}\}\} \text{ and } \gamma_1 = \emptyset.$$

*Una vez definido $P_k = \{B_1, \ldots, B_t\}$ y $\gamma_k$, definimos $(P_{k+1}, \gamma_{k+1})$ de la siguiente forma:*

1. *Si existe $(n_{B_i}, n_{B_j}) \in \rho$ con $n \in \mathbb{N}^3$, $i, j \in \{1, \ldots, t\}$, $i \neq j$, $n_{B_i} \in \mathrm{E}_{B_i}(n)$ y $n_{B_j} \in \mathrm{E}_{B_j}(n)$, definimos*

$$P_{k+1} = \{B_1, \ldots, B_{i-1}, B_i \cup B_j, B_{i+1}, \ldots, B_{j-1}, B_{j+1}, \ldots, B_t\} \text{ y}$$

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k \cup \{(n_{B_i}, n_{B_j})\}.$$

2. *En caso contrario, definimos $P_{k+1} = P_k$ y $\gamma_{k+1} = \gamma_k$.*

**Ejemplo 6.2.6** *Sea*

$$S = \langle (1,1,0), (0,1,1), (0,0,2), (1,0,1), (1,1,1) \rangle.$$

*Un sistema de generadores para la congruencia asociada a $S$ es*

$$\rho = \left\{ \begin{array}{c} ((1,1,0,1,0), (0,0,0,0,2)), \\ ((1,0,1,0,0), (0,1,0,1,0)) \end{array} \right\}.$$

*Tenemos que*

$$P_1 = \{\{(1,1,0), (0,0,2)\}, \{(0,1,1), (1,0,1)\}, \{(1,1,1)\}\}, \ \gamma_1 = \emptyset.$$

*El elemento $((1,0,1,0,0), (0,1,0,1,0))$ está en $\rho$, por lo que*

$$P_2 = \{\{(1,1,0), (0,0,2), (0,1,1), (1,0,1)\}, \{(1,1,1)\}\},$$

*y*

$$\gamma_2 = \{((1,0,1,0,0), (0,1,0,1,0))\}.$$

*Consideramos ahora el elemento* $((1,1,0,1,0),(0,0,0,0,2)) \in \rho$, *por lo que tenemos*

$$P_3 = \{\{(1,1,0),(0,0,2),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,1)\}\},$$

*y*

$$\gamma_3 = \rho.$$

El siguiente resultado juega el papel que jugó en su momento el lema 6.1.4.

**Lema 6.2.7**

1. $\#\gamma_k = (m+1) - \#P_k$ *(recuérdese que* $S$ *está generado por* $3+m$ *elementos).*

2. *Si* $P_k = \{B_1,\ldots,B_t\}$, *entonces* $\gamma_k \subseteq \sigma_{B_1} \cup \ldots \cup \sigma_{B_t}$.

3. *Si* $(0,0) \notin \rho$, $P_k = \{B_1,\ldots,B_t\}$ *y* $\{n_1,n_2,n_3,n_4\} \subseteq B_1$, *entonces* $\dim(\langle B_h\rangle) = 1$ *para todo* $2 \leq h \leq t$.

4. *Si* $(0,0) \notin \rho, P_k = \{B_1,B_2,\ldots,B_t\}, \{n_1,n_3\} \subseteq B_1$ *y* $\{n_2,n_4\} \subseteq B_2$ *entonces* $\dim(\langle B_1\rangle) = \dim(\langle B_2\rangle) = 2$, *y* $\dim(\langle B_h\rangle) = 1$ *para todo* $3 \leq h \leq t$.

5. *Si* $\#\rho = m$, *entonces existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\rho = \gamma_k, \#P_k = 1$ *y* $\#P_{k-1} = 2$.

*Demostración*:

Los dos primeros apartados son consecuencia directa de la propia definición de $(P_k,\gamma_k)$.

El apartado tercero y cuarto son disjuntos. Usemos inducción en $k$ para probarlos. Para $k=1$, el cuarto apartado es el que se verifica. Si para $k$ se verifica el tercer apartado, entonces siguiendo los mismos pasos que en 6.1.4, tenemos que para $k+1$ sigue dándose el tercer apartado. Si el apartado que se da para $k$ es el cuarto, entonces, dependiendo de los valores que tomen $i,j$ en la definición de $P_{k+1}$, tenemos que considerar los siguientes casos:

- Si $\{1,2\} = \{i,j\}$, entonces trivialmente el tercer apartado es el que se da para $k+1$.

- Si $\{1,2\} \cap \{i,j\} = \emptyset$, razonando como en 6.1.4, tenemos que el cuarto apartado se da para $k+1$.

- Si $\#(\{1,2\} \cap \{i,j\}) = 1$, entonces vamos a ver que para $k+1$ se da el cuarto apartado. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $i=1$ y que $j>2$. En este caso existe $(n_{B_1},n_{B_j}) \in \rho$ con $0 \neq n \in \langle B_1\rangle \cap \langle B_j\rangle$. Tómense $n',n'',n^j$ tal que $\mathsf{G}(B_1) = \mathsf{G}(\{n',n''\})$ y $\mathsf{G}(B_j) = \mathsf{G}(\{n^j\})$. Como $n \in \mathsf{G}(B_1) \cap \mathsf{G}(B_j)$, existen

$a', a'', a^j \in Z$ tal que $n = a'n' + a''n'' = a^j n^j$ lo que implica que rango$(\mathsf{G}(B_1 \cup B_j))$ = rango$(\{n', n'', n^j\}) = 2$, y por definición, esto es lo mismo que decir que $\dim(B_1 \cup B_j) = 2$, lo que hace que sea cierto el cuarto apartado.

Por último, el quinto apartado se puede probar como en 6.1.4.

■

Si el semigrupo $S$ es intersección completa, usando el último apartado del resultado anterior, $\gamma_{m+1}$ es un sistema minimal de generadores de $\sigma$. Al igual que en el caso de tres caras, $P_m$ tiene dos elementos y tenemos que $S$ es pegada de dos subsemigrupos suyos que son intersección completa.

**Teorema 6.2.8** *Si $S$ es un subsemigrupo de $\mathbb{N}^3$ con cuatro rayos extremales, entonces $S$ es intersección completa si y sólo si existen $S_1$ y $S_2$ subsemigrupos intersección completa de $S$ con* $\dim(S_1) = \dim(S_2) = 2$ *o* $\dim(S_1) = 3$ *y* $\dim(S_2) = 1$, *tales que $S$ es pegada de $S_1$ y $S_2$.*

**Ejemplo 6.2.9** *Sea*

$$S = \langle (3,0,0), (0,4,0), (0,1,1), (1,0,1), (2,1,1), (1,2,1) \rangle.$$

*Tenemos que*

$$P_1 = \{\{(3,0,0), (0,1,1)\}, \{(0,4,0), (1,0,1)\}, \{(2,1,1)\}, \{(1,2,1)\}\}$$

$$\gamma_1 = \emptyset$$

*El elemento* $3(2,1,1)$ *está en* $\mathfrak{M}(\{(2,1,1)\})$. *Usando la demostración de 6.0.3, tenemos que* $((2,0,3,0,0,0), (0,0,0,0,3,0)) \in \rho \cup \rho^{-1}$. *De esta forma,*

$$P_2 = \{\{(3,0,0), (0,1,1), (2,1,1)\}, \{(0,4,0), (1,0,1)\}, \{(1,2,1)\}\}$$

*y*

$$\gamma_2 = \{((2,0,3,0,0,0), (0,0,0,0,3,0))\}.$$

*Tomamos ahora* $(2,4,2) \in \mathfrak{M}(\{(1,2,1)\})$, *por lo que* $((0,1,0,2,0,0), (0,0,0,0,0,2)) \in \rho \cup \rho^{-1}$. *Así,*

$$P_3 = \{\{(3,0,0), (0,1,1), (2,1,1)\}, \{(0,4,0), (1,0,1), (1,2,1)\}\}$$

*y*

$$\gamma_3 = \{((2,0,3,0,0,0), (0,0,0,0,3,0)), ((0,1,0,2,0,0), (0,0,0,0,0,2))\}.$$

*Buscando una vez más, obtenemos que* $(2,2,2) \in \mathfrak{M}(\{(3,0,0),(0,1,1),(2,1,1)\})$, *y en consecuencia* $((0,0,1,0,1,0),(0,0,0,1,0,1)) \in \rho \cup \rho^{-1}$. *Llegamos así a que*

$$P_4 = \{\{(3,0,0),(0,1,1),(2,1,1),(0,4,0),(1,0,1),(1,2,1)\}\}$$

*y*

$$\gamma_4 = \left\{ \begin{array}{c} ((2,0,3,0,0,0),(0,0,0,0,3,0)), \\ ((0,1,0,2,0,0),(0,0,0,0,0,2)), \\ ((0,0,1,0,1,0),(0,0,0,1,0,1)) \end{array} \right\}.$$

*Intentemos aplicar el teorema que acabamos de enunciar. Sea* $A_1 = \{(3,0,0),(0,1,1),(2,1,1)\}$ *y* $A_2 = \{(0,4,0),(1,0,1),(1,2,1)\}$. *Veamos si* $S$ *es pegada de* $\langle A_1 \rangle$ *y de* $\langle A_2 \rangle$, *y en caso afirmativo, si* $\langle A_1 \rangle$ *y* $\langle A_2 \rangle$ *son intersección completa.*

*Las ecuaciones de* $A_1$ *y de* $A_2$ *son*

$$\mathsf{G}(A_1) \equiv \{-y+z=0$$

$$\mathsf{G}(A_2) \equiv \left\{ \begin{array}{l} y \equiv 0 (mod\ 2) \\ -x+z=0 \end{array} \right.$$

*Por tanto, el espacio vectorial* $V$ *está generado por* $\{(0,-1,1),(-1,0,1)\}$. *Podemos tomar* $(z_1,z_2,z_3) = (1,1,1) \in V^{\perp}$. *La menor solución positiva para la congruencia*

$$x \equiv 0 (mod\ 2)$$

*es* $b=2$. *Por estar* $2(1,1,1) \in \langle A_1 \rangle \cap \langle A_2 \rangle$, *tenemos que* $S$ *es pegada de* $\langle A_1 \rangle$ *y* $\langle A_2 \rangle$.

*Veamos ahora si* $\langle (3,0,0),(0,1,1),(2,1,1) \rangle$ *es pegada de* $\langle (3,0,0),(0,1,1) \rangle$ *y de* $\langle (2,1,1) \rangle$. *Las ecuaciones de* $\mathsf{G}(\{(3,0,0),(0,1,1)\})$ *y de* $\mathsf{G}(\{(2,1,1)\})$ *son*

$$\mathsf{G}(\{(3,0,0),(0,1,1)\}) \equiv \left\{ \begin{array}{l} x \equiv 0 (mod\ 3) \\ -y+z=0 \end{array} \right.$$

$$\mathsf{G}(\{(2,1,1)\}) \equiv \left\{ \begin{array}{l} x-2y=0 \\ -y+z=0 \end{array} \right.$$

*Por lo que* $V$ *en este caso está generado por* $\{(0,-1,1),(1,-2,0)\}$ *y* $V^{\perp}$ *por* $\{(2,1,1)\}$. *La menor solución de la congruencia*

$$x \cdot 2 \equiv 0 (mod\ 3)$$

*es* $b=3$, *y por estar* $3(2,1,1) \in \langle (3,0,0),(0,1,1) \rangle \cap \langle (2,1,1) \rangle$, $\langle (3,0,0),(0,1,1),(2,1,1) \rangle$ *es pegada de* $\langle (3,0,0),(0,1,1) \rangle$ *y de* $\langle (2,1,1) \rangle$. *De aquí también se deduce que*

$$\langle (3,0,0),(0,1,1),(2,1,1) \rangle$$

*es intersección completa.*

*Veamos por último si* $\langle (0,4,0),(1,0,1),(1,2,1)\rangle$ *es pegada de* $\langle (0,4,0),(1,0,1)\rangle$ *y de* $\langle (1,2,1)\rangle$. *Las ecuaciones de* $\mathsf{G}(\{(0,4,0),(1,0,1)\})$ *y de* $\mathsf{G}(\{(1,2,1)\})$ *son*

$$\mathsf{G}(\{(0,4,0),(1,0,1)\}) \equiv \left\{ \begin{array}{l} y \equiv 0(mod\ 4) \\ -x+z=0 \end{array} \right.$$

$$\mathsf{G}(\{(1,2,1)\}) \equiv \left\{ \begin{array}{l} -2x+y=0 \\ -x+z=0 \end{array} \right.$$

*Por lo que* $V$ *está generado por* $\{(-1,0,1),(-2,1,0)\}$ *y* $V^{\perp}$ *por* $\{(1,2,1)\}$. *La menor solución de la congruencia*

$$x\cdot 2 \equiv 0(mod\ 4)$$

*es* $b=2$, *y por estar* $2(1,2,1)\in \langle (0,4,0),(1,0,1)\rangle \cap \langle (1,2,1)\rangle$, $\langle (0,4,0),(1,0,1),(1,2,1)\rangle$ *es pegada de* $\langle (0,4,0),(1,0,1)\rangle$ *y de* $\langle (1,2,1)\rangle$. *De aquí también se deduce que*

$$\langle (0,4,0),(1,0,1),(1,2,1)\rangle$$

*es intersección completa.*

*Tenemos así que S es pegada de dos intersecciones completas, por lo que S es intersección completa.*

### 6.2.2. Conos con más de cuatro caras

Vamos a empezar estudiando el caso en el que $S$ tiene exactamente $3+m\geq 5$ caras. Veremos que en este caso $S$ no es intersección completa. Más adelante, usaremos este caso para ver que si el cono asociado a $S$ tiene más de cuatro caras, entonces $S$ no es intersección completa. La idea va a ser buscar elementos en $\rho$ y comprobar que en $\rho$ hay más de $m$ elementos, con lo que $S$ no podrá ser intersección completa. Para buscar elementos de $\rho$ nos vamos a apoyar en el lema 6.0.3 una vez más. Para ello, necesitaremos subconjuntos $B$ de $A$ verificando que $\mathfrak{A}(B)$ no sea vacío.

**Lema 6.2.10** *Si* $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ *tiene* $3+m\geq 5$ *caras, entonces* $\mathfrak{A}(\{n_i,n_j\})\neq\emptyset$ *para cualesquiera* $n_i,n_j$ *que no estén en la misma cara de* $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$.

*Demostración*: Este resultado es una consecuencia directa de 6.2.1. ■

Tomando $B = \{n_i, n_j\}$ con $n_i, n_j$ verificando que no están en la misma cara de $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$, tenemos que, para todo $n \in \mathfrak{M}(B)$, existe un elemento $(n_B, n_A) \in \rho \cup \rho^{-1}$. Sea $\varsigma_{ij} = (n_B, n_A) \in \rho \cup \rho^{-1}$ y $\varsigma_{ij}^{-1} = (n_A, n_B) \in \rho \cup \rho^{-1}$. A partir de ahora, cada vez que escribamos $\varsigma_{ij}$ estaremos suponiendo que $n_i$ y $n_j$ no están en la misma cara de $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$. Obsérvese que:

1. El elemento $\varsigma_{ij} = (a_i e_i + a_j e_j, \sum a'_k e_k)$ y $a_i, a_j$ no son nulos (en otro caso $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ tendría una cara menos), y por minimalidad de los elementos que se tomaron para definir $\varsigma_{ij}$, se tiene que $a'_i = a'_j = 0$.

2. $\varsigma_{ij} \neq \varsigma_{kl}$ si $\{k,l\} \neq \{i,j\}$.

3. Si $\varsigma_{ij} = \varsigma_{kl}^{-1}$, entonces $\{n_i, n_j\} \subseteq A \backslash \{n_k, n_l\}$ y esto implica que $\{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset$. Por tanto, si $\{i,j\} \cap \{k,l\} \neq \emptyset$ entonces $\varsigma_{ij} \neq \varsigma_{kl}^{-1}$.

4. Si $\varsigma_{ij} = \varsigma_{kl}^{-1}$ entonces, no existe ningún conjunto $\{m,n\}$ con $\{i,j\} \neq \{m,n\} \neq \{k,l\}$, tal que $\varsigma_{ij} = \varsigma_{mn}^{-1}$.

Con esta información, es fácil probar el siguiente teorema, que asegura que si $S$ tiene tantos generadores como caras tiene $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ y éstos son más de cuatro, entonces $S$ no es intersección completa.

**Teorema 6.2.11** *Si $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ tiene $3+m$ caras y $3+m \geq 5$, entonces $S$ no es intersección completa (en este caso, todos los generadores son rayos extremales).*

*Demostración*: Por conveniencia de notación, supongamos que las aristas $n_i, n_{i+1}$ son consecutivas (esto es, $n_{i-1}$ y $n_i$ están en la misma cara, así como $n_i, n_{i+1}$). Bajo esta hipótesis, tenemos que $\varsigma_{13}, \varsigma_{14}, \ldots, \varsigma_{1(m+2)}$ son todos distintos y también $\varsigma_{1i} \neq \varsigma_{1j}^{-1}$ para cualesquiera $i \neq j \in \{3, \ldots, m+2\}$. Si $\rho$ es un sistema minimal de generadores de $\sigma_A$, entonces esos elementos tienen que estar en $\rho \cup \rho^{-1}$. Si $\#\rho = m$, entonces cada elemento de $\rho$ se corresponde con $\varsigma_{1i}$ o $\varsigma_{1i}^{-1}$, para algún $i \in \{3, \ldots, m+2\}$. Por otro lado, tenemos que lo mismo ocurre con $\varsigma_{24}, \varsigma_{25}, \ldots, \varsigma_{2(m+3)}$. Estos elementos son distintos y $\varsigma_{2i} \neq \varsigma_{2j}^{-1}$ para cualesquiera $i \neq j$. Por tanto, para todo $i$ tiene que existir un $i_1$ tal que $\varsigma_{2i} = \varsigma_{1i_1}^{-1}$, ya que todos ellos entán en $\rho \cup \rho^{-1}$. Nótese además que $i_1$ es único para todo $i \in \{4, \ldots, m+3\}$, y que no puede existir ningún conjunto $\{m,n\}$, con $\{1,i\} \neq \{m,n\} \neq \{2,j\}$, tal que $\varsigma_{mn} = \varsigma_{1i}^{-1}$. Ahora bien, como $3+m \geq 5$, tenemos además los elementos $\varsigma_{35}, \ldots, \varsigma_{3(m+3)}$ que están también en $\rho \cup \rho^{-1}$, lo que es una contradicción. Esto significa que $\#\rho$ es mayor que $m$, por lo que $S$ no puede ser intersección completa.

■

**Ejemplo 6.2.12** *Sea*

$$S = \langle (2,1,0),(1,2,0),(0,1,1),(0,0,1),(1,0,1)\rangle.$$

*Tomamos* $(2,2,1) \in \mathfrak{M}(\{(2,1,0),(0,1,1)\})$*, por lo que* $\varsigma_{13} = ((1,0,1,0,0),(0,1,0,0,1))$*. Hacemos lo mismo con el resto de las posibles combinaciones obteniendo:*

$$(2,1,3) \in \mathfrak{M}(\{(2,1,0),(0,0,1)\}), \varsigma_{14} = ((1,0,0,3,0),(0,0,1,0,2)),$$

$$(1,2,3) \in \mathfrak{M}(\{(1,2,0),(0,0,1)\}), \varsigma_{24} = ((0,1,0,3,0),(0,0,2,0,1)),$$

$$(2,2,1) \in \mathfrak{M}(\{(1,2,0),(1,0,1)\}), \varsigma_{25} = ((0,1,0,0,1),(1,0,1,0,0)),$$

$$(1,2,3) \in \mathfrak{M}(\{(0,1,1),(1,0,1)\}), \varsigma_{35} = ((0,0,2,0,1),(0,1,0,3,0)),$$

*Como* $\{\varsigma_{13},\varsigma_{14},\varsigma_{24},\varsigma_{25},\varsigma_{35}\} \subseteq \rho \cup \rho^{-1}$*, tenemos que* $\#\rho \geq 3$*, por lo que S no es intersección completa.*

Antes de probar que en el caso general, si $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ tiene más de cuatro caras entonces no es intersección completa, necesitamos una secuencia de "particiones" que nos vayan generando elementos de $\rho$ tal y como hicimos para el caso simplicial y el de cuatro lados. Mostraremos con ello que $\rho$ tiene más elementos de los deseados.

A partir de ahora vamos a suponer que $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ tiene exactamente $s$ caras, con $s > 4$ y $s < m+3$ (ya que el caso $s = m+3$ ya lo hemos tratado). Reordenando los elementos de $A$, podemos suponer que los $s$ primeros elementos $\{n_1,\ldots,n_s\}$ son las aristas del cono $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$, y que además están ordenados de forma que $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(\{n_i\}) \cap \pi$ estén ordenados en sentido de las agujas del reloj. Sea:

$$A_i = \{n \in A : n \in \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(\{n_i\})\}, \text{ para cada } i \in \{1,\ldots,s\}.$$

Podemos suponer, reordenando una vez más si es necesario, que

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_s \cup \{n_k,\ldots,n_{3+m}\}.$$

**Definición 6.2.13** *Definimos recurrentemente el par* $(P_l,\gamma_l)$*, para cualquier número natural* $l \geq 1$*, donde* $P_l$ *es un subconjunto de* $\mathcal{P}(A)$ *y* $\gamma_l$ *es un subconjunto de* $\rho$*:*

$$P_1 = \{A_1 \cup A_3,\ldots,A_1 \cup A_{s-1},A_2 \cup A_s,\{n_k\},\ldots,\{n_{3+m}\}\} \text{ y } \gamma_1 = \emptyset.$$

*Una vez que tenemos definido* $P_l = \{B_1,\ldots,B_t\}$ *y* $\gamma_l$*, definimos* $(P_{l+1},\gamma_{l+1})$ *como:*

1. *Si existe* $(n_{B_i}, n_{B_j}) \in \rho$ *con* $n \in \mathbb{N}^3$, $i, j \in \{1, \ldots, t\}$, $i \neq j$, $n_{B_i} \in \mathrm{E}_{B_i}(n)$, $n_{B_j} \in \mathrm{E}_{B_j}(n)$, $n_{B_i} \notin \mathrm{E}_{B_j}(n)$ *y* $n_{B_j} \notin \mathrm{E}_{B_i}(n)$. *Entonces definimos*

$$P_{l+1} = \{B_1, \ldots, B_{i-1}, B_i \cup B_j, B_{i+1}, \ldots, B_{j-1}, B_{j+1}, \ldots, B_t\} \text{ y}$$

$$\gamma_{l+1} = \gamma_l \cup \{(n_{B_i}, n_{B_j})\}.$$

2. *En caso contrario, definimos* $P_{l+1} = P_l$ *y* $\gamma_{l+1} = \gamma_l$.

Obsérvese que en este caso $P_1$ no es una partición de $A$, por lo que la definición se complica un poco.

**Ejemplo 6.2.14** *Sea*

$$S = \langle (4,2,0), (2,4,0), (0,2,2), (0,0,3), (2,0,2), (2,2,2), (3,3,3) \rangle.$$

*Los conjuntos* $A_i$ *son*

$$A_1 = \{(4,2,0)\},\ A_2 = \{(2,4,0)\},\ A_3 = \{(0,2,2)\},\ A_4 = \{(0,0,3)\},\ A_5 = \{(2,0,2)\}.$$

*Los* $P_i$ *y los* $\gamma_i$ *son:*

$$P_1 = \{\{(4,2,0),(0,2,2)\},\{(4,2,0),(0,0,3)\},\{(2,4,0),(2,0,2)\},\{(2,2,2)\},\{(3,3,3)\}\},$$

$$\gamma_1 = \emptyset,$$

$$P_2 = \{\{(4,2,0),(0,2,2)\},\{(4,2,0),(0,0,3)\},\{(2,4,0),(2,0,2)\},\{(2,2,2),(3,3,3)\}\},$$

$$\gamma_2 = \{((0,0,0,0,0,0,2),(0,0,0,0,0,3,0))\},$$

$$P_3 = \{\{(4,2,0),(0,2,2),(2,4,0),(2,0,2)\},\{(4,2,0),(0,0,3)\},\{(2,2,2),(3,3,3)\}\},$$

$$\gamma_3 = \{((0,0,0,0,0,0,2),(0,0,0,0,0,3,0)),((1,0,1,0,0,0,0),(0,1,0,0,1,0,0))\},$$

$$P_4 = \{\{(4,2,0),(0,2,2),(2,4,0),(2,0,2),(2,2,2),(3,3,3)\},\{(4,2,0),(0,0,3)\}\},$$

$$\gamma_4 = \left\{ \begin{array}{c} ((0,0,0,0,0,0,2),(0,0,0,0,0,3,0)), \\ ((1,0,1,0,0,0,0),(0,1,0,0,1,0,0)), \\ ((0,1,1,0,2,0,0),(0,0,0,0,0,0,2)) \end{array} \right\},$$

$$P_5 = \{\{(4,2,0),(0,2,2),(2,4,0),(2,0,2),(2,2,2),(3,3,3),(4,2,0),(0,0,3)\}\},$$

$$\gamma_5 = \left\{ \begin{array}{c} ((0,0,0,0,0,0,2),(0,0,0,0,0,3,0)), \\ ((1,0,1,0,0,0,0),(0,1,0,0,1,0,0)), \\ ((0,1,1,0,2,0,0),(0,0,0,0,0,0,2)), \\ ((0,0,1,0,2,0,0),(1,0,0,2,0,0,0)) \end{array} \right\}.$$

Los dos siguientes resultados se prueban directamente a partir de la definición.

**Lema 6.2.15** *Si* $i \neq j$, *entonces* $B_i \cap B_j \subseteq A_1$.

**Lema 6.2.16** $\gamma_l \subseteq \sigma_{B_1} \cup \sigma_{B_2} \cup \ldots \cup \sigma_{B_t}$.

Necesitamos ahora saber el número de elementos de $\gamma_l$. Veremos que con esos no es suficiente, por lo que necesitaremos encontrar elementos adicionales en cada $\sigma_{A_i}$, así como otros elementos que veremos más adelante.

**Lema 6.2.17** *Para todo* $l \geq 1, \#\gamma_l = (m+3) - (\sum_{i=1}^{s} \#A_i) + (s-2) - \#P_l$.

*Demostración*: Hagamos inducción sobre $l$.

Para $l = 1$ el resultado es cierto, basta con contar.

Supuesto que el resultado es cierto para $l$, probémoslo para $l+1$. Tenemos dos posibles casos:

1. Si $P_{l+1} = P_l$, entonces no hay nada que probar.

2. Si
$$P_{l+1} = \{B_1, \ldots, B_{i-1}, B_i \cup B_j, B_{i+1}, \ldots, B_{j-1}, B_{j+1}, \ldots, B_t\},$$
entonces $\gamma_{l+1} = \gamma_l \cup \{(n_{B_i}, n_{B_j})\}$, para algún $n$ verificando las condiciones de la definición. Por tanto, es suficiente con probar que $(n_{B_i}, n_{B_j}) \notin \gamma_m$. Si no fuese así, existiría $p \in \{1, \ldots, t\}$, tal que $(n_{B_i}, n_{B_j}) \in \sigma_{B_p}$. Podemos asegurar que $B_i \neq B_p$ y $B_j \neq B_p$, ya que de no ser así $n_{B_j} \in \mathrm{E}_{B_i}(n)$ ó $n_{B_i} \in \mathrm{E}_{B_j}(n)$ lo cual no es posible por la definición de $\gamma_{l+1}$. Por otro lado, $(n_{B_i}, n_{B_j}) \in \sigma_{B_i \cup B_j} \cap \sigma_{B_p}$ y por tanto $(n_{B_i}, n_{B_j}) \in \sigma_{A_1}$. Pero esto fuerza a que $n_{B_i} \in \mathrm{E}_{B_j}(n)$, ya que $A_1$ debe estar contenido en $B_j$, y esto es una contradicción con la definición de $\gamma_{l+1}$.

■

El siguiente resultado nos sirve para encontrar más elementos de $\rho$, correspondientes a cada $A_i$.

**Lema 6.2.18** *Para todo* $i \in \{1, \ldots, s\}$, *existe un conjunto,* $\tau_i$, *de generadores para la relación* $\sigma_{A_i}$ *contenido en* $\rho$.

*Demostración*: Nótese que si

$$\sum_{n_j \in A_i} a_j n_j = \sum_{n_k \in A} b_k n_k,$$

con $a_j, b_k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{n_j \in A_i} (a_j - b_j) n_j = \sum_{n_k \in A \setminus A_i} b_k n_k,$$

y por tanto, como $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}}(A_i)$=$\mathrm{L}_{\mathbb{Q}}(\{n_i\})$, entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q n_i = \sum_{n_k \in A \setminus A_i} b_k n_k$. En consecuencia, $q n_i \in \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(A \setminus A_i)$ lo que implica que $q = 0$, ya que $n_i \notin \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(A \setminus A_i)$ y en caso contrario, $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ tendría menos de $s$ caras. Como consecuencia de este hecho, $b_k = 0$ para todo $n_k \in A \setminus A_i$. Como $\sigma_{A_i} \subseteq \langle \rho \rangle$, no es difícil probar, teniendo en cuenta lo que acabamos de demostrar, y usando la definición de $\langle \rho \rangle$, que $\rho \cap \sigma_{A_i}$ genera a $\sigma_{A_i}$.

■

Obsérvese que, al ser $\dim(\langle A_i \rangle) = 1$, se tiene que $\#\tau_i \geq \#A_i - 1$. Veamos que $\tau_i$ y $\gamma_l$ no tienen elementos en común.

**Lema 6.2.19** *Para todo $i \in \{1 \ldots, s\}$ y $l \geq 1, \tau_i \cap \gamma_l = \emptyset$.*

*Demostración*: Hagamos inducción sobre $l$.

Para $l = 1$ el resultado es trivial, ya que $\gamma_1 = \emptyset$. Supuesto cierto para $l$, probemos este resultado para $l + 1$. Si $P_{l+1} = P_l$, entonces no hay nada que probar. En caso contrario, tenemos que $\gamma_{l+1} = \gamma_l \cup \{(n_{B_i}, n_{B_j})\}$ para algún $n$ verificando las condiciones de la definición. Como por hipótesis de inducción tenemos que $\tau_i \cap \gamma_l = \emptyset$, entonces si $\tau_i \cap \gamma_{m+1} \neq \emptyset$ el único elemento que puede estar en la intersección es $(n_{B_i}, n_{B_j})$. Tenemos dos posibles casos:

1. $i = 1$. Como $(n_{B_i}, n_{B_j}) \in \tau_1 \subseteq \sigma_{A_1}$, entonces tenemos que $B_i \cap A_1$ y $B_j \cap A_1$ son no vacíos. Esto lleva a que $A_1 \subseteq B_i$ y $A_1 \subseteq B_j$. Por tanto, $n_{B_i} \in \mathrm{E}_{B_j}(n)$, lo que es una contradicción.

2. $i \neq 1$. Como $(n_{B_i}, n_{B_j}) \in \tau_i \subseteq \sigma_{A_i}$, entonces $B_i \cap A_i$ y $B_j \cap A_i$ son no vacíos. Esto conduce a que $B_i = B_j$, lo que es, de nuevo, una contradicción.

■

Con estos últimos resultados tenemos bastantes elementos de $\rho$, pero no son suficientes.

**Lema 6.2.20** *Si* $P_l = \{B_1, B_2, \ldots, B_t\}$ *y* $t \geq 2$*, entonces* $\mathfrak{A}(B_i) \neq \emptyset$*, para todo* $i \in \{1, \ldots, t\}$.

*Demostración*: Esta demostración es análoga a la demostración del lema 6.2.4. ∎

Usando este último lema y el lema 6.0.3, tenemos que para todo $B_i \in P_l$ tenemos por lo menos un $n^i \in \mathfrak{M}(B_i)$ tal que $(n^i_{B_i}, n^i_A) \in \rho \cup \rho^{-1}$, con $n^i_{B_i} \in \mathrm{E}_{B_i}(n^i)$ y $n^i_A \in \mathrm{E}_A(n^i) \setminus \mathrm{E}_{B_i}(n^i)$. Sea $\varsigma_i = (n^i_{B_i}, n^i_A)$, si $(n^i_{B_i}, n^i_A) \in \rho$ o $\varsigma_i = (n^i_A, n^i_{B_i})$ si $(n^i_A, n^i_{B_i}) \in \rho$. Con estos elementos de $\rho$ tenemos el siguiente resultado.

**Lema 6.2.21** *Si*

$$P_l = \{B_1, B_2, \ldots, B_t\}$$

*y* $P_l = P_{l+1}$*, con* $\#P_l = t \geq 2$*, entonces el conjunto*

$$\lambda = \{\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_t\} \subseteq \rho$$

*verifica las siguientes condiciones:*

*1.* $\#\lambda = t$.

*2.* $\lambda \cap \gamma_l = \emptyset$.

*3.* $\lambda \cap \tau_i = \emptyset$*, para todo* $i \in \{1, \ldots, s\}$.

*Demostración*:

1. Es suficiente probar que $(n^i_{B_i}, n^i_A) \neq (n^j_{B_j}, n^j_A)$, y que $(n^i_{B_i}, n^i_A) \neq (n^j_A, n^j_{B_j})$, para todo $i \neq j$.

   *a*) Si $(n^i_{B_i}, n^i_A) = (n^j_{B_j}, n^j_A)$, entonces $n^i = n^j$ y $n^i_{B_i} = n^j_{B_j} \in \mathrm{E}_{B_i}(n^i) \cap \mathrm{E}_{B_j}(n^j)$. Por tanto, $n^i_{B_i} \in \mathrm{E}_{A_1}(n^i)$, lo que implica que $n^i_A \in \mathrm{E}_{A_1}(n^i) \subseteq \mathrm{E}_{B_i}(n^i)$, lo que es una contradicción con el hecho de que $n^i_A \in \mathrm{E}_A(n^i) \setminus \mathrm{E}_{B_i}(n^i)$.

   *b*) Si $(n^i_{B_i}, n^i_A) = (n^j_A, n^j_{B_j})$, entonces $(n^i_{B_i}, n^i_A) = (n^i_{B_i}, n^j_{B_j})$, y $n^i = n^j$. En consecuencia, $(n^i_{B_i}, n^i_{B_j}) \in \rho$, y por tenerse que $n^i_{B_i} = n^j_A$, se tiene que $n^i_{B_i} \notin \mathrm{E}_{B_j}(n^i)$, y lo mismo ocurre con $n^j_{B_j}$, con lo que $P_l \neq P_{l+1}$, lo que es de nuevo una contradicción.

2. Si $(n^i_{B_i}, n^i_A) \in \gamma_l$, entonces existe $p \in \{1, 2, \ldots, t\}$ tal que $(n^i_{B_i}, n^i_A) \in \sigma_{B_p}$. Tenemos que $B_p \neq B_i$, ya que si no $n^i_A \in \mathrm{E}_{B_i}(n^i)$. Por tanto, $(n^i_{B_i}, n^i_A) \in \sigma_{B_p} \cap \sigma_{B_i} \subseteq \sigma_{A_1}$, lo que lleva a que $n^i_A \in \mathrm{E}_{B_i}(n^i)$, lo cual es imposible.

3. Si $(n^i_{B_i}, n^i_A) \in \tau_j$, para algún $j$, entonces $(n^i_{B_i}, n^i_A) \in \sigma_{A_j}$. Esto es una contradicción, ya que lleva una vez más a que $n_A(n^i) \in \mathrm{E}_{B_i}(n^i)$.

■

Podemos usar esta información para demostrar el siguiente lema, que resuelve nuestro problema parcialmente.

**Lema 6.2.22** *Si $P_l = P_{l+1}$, $\#P_l \geq 2$ y $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ tiene más de cuatro caras, entonces $S$ no es intersección completa.*

*Demostración*: Demostremos que $\#\rho \geq m+1$. Obsérvese que

$$\#(\gamma_l \cup \bigcup_{i=1}^{s} \tau_i) \geq m+3-(\sum_{i=1}^{s} \#A_i)+(s-2)-\#P_l+\sum_{i=1}^{s}(\#A_i-1) = m+1-\#P_l.$$

Obsérvese además que

$$\gamma_l \cup \lambda \cup \bigcup_{i=1}^{s} \tau_i \subseteq \rho.$$

Por tanto, $\#\rho \geq m+1-\#P_l+\#P_l = m+1$, y en consecuencia $S$ no es intersección completa. ■

Estudiemos ahora el caso en el que $P_l = P_{l+1}$ y $\#P_l = 1$.

**Lema 6.2.23** *Si $P_l = P_{l+1}$, $\#P_l = 1$, y $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ tiene más de cuatro caras, entonces $S$ no es intersección completa.*

*Demostración*: Como $\#P_1 > 1$, entonces $P_{l-1} = \{B_1, B_2\}$ con $B_1, B_2 \subseteq A$.

Pueden pasar dos cosas:

1. $\underline{B_1 \cap B_2 = A_1}$. Si esto ocurre, entonces existen $i, j \in \{3, \ldots, s-1\}$, $i \neq j$, tales que $A_1 \cup A_i \subseteq B_1$, y $A_1 \cup A_j \subseteq B_2$. Por otro lado, $A_s \subset A = B_1 \cup B_2$, por lo que $A_s \subset B_1$ ó $A_s \subset B_2$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $A_s \subset B_1$. Tenemos por tanto que

$$\gamma_l \cup \bigcup_{i=1}^{s} \tau_i \subseteq \rho,$$

y en consecuencia

$$\#\rho \geq (m+3)-\sum_{i=1}^{s} \#A_i+(s-2)-1+\sum_{i=1}^{s}(\#A_i-1) = m.$$

Si queremos probar que $S$ no es intersección completa, necesitamos un elemento que esté en $\rho$, y que no esté ni en $\gamma_l$ ni en $\tau_i$. Nótese que $A_s \subset B_1, A_s \not\subset B_2$, y $A_j \not\subset B_1, A_j \subset B_2$. Si $j$ fuese igual a $s-1$, en lo que sigue en vez de $A_s$ consideramos $A_2$, que por construcción también está incluido en $B_1$. Esto lo hacemos para que $j$ y $s$ no sean consecutivos. Dicho esto, está claro que $\mathfrak{A}(A_j \cup A_s)$ es no vacío y, por 6.0.3, esto implica que debe existir un elemento $(n_{A_j \cup A_s}, n_A) \in \rho \cup \rho^{-1}$ para algún $\alpha$, verificando las condiciones impuestas en 6.0.3. Sea $\varsigma_{js} = (n_{A_j \cup A_s}, n_A)$ si $(n_{A_j \cup A_s}, n_A) \in \rho$, ó $\varsigma_{js} = (n_A, n_{A_j \cup A_s})$ si $(n_A, e_{A_j \cup A_s}) \in \rho$. Si demostramos que $\varsigma_{js} \notin \gamma_l$ y que $\varsigma_{js} \notin \tau_k$ para todo $k$, entonces habremos acabado.

- Si $\varsigma_{js} \in \tau_k$ entonces $\varsigma_{js} \in \sigma_{A_k}$. Sin embargo, esto lleva consigo que $j = k$ o que $s = k$ y por tanto $n_A \in \mathrm{E}_{A_j \cup A_s}(n)$, lo cual es imposible.
- Demostremos que $\varsigma_{js} \notin \gamma_l$. Para ello basta probar, por la definición de $\gamma_l$, que $\varsigma_{js} \notin \sigma_{B_1}, \varsigma_{js} \notin \sigma_{B_2}$, que $\varsigma_{js} \neq (n'_{B_1}, n'_{B_2})$ y que $\varsigma_{js} \neq (n'_{B_2}, n'_{B_1})$ para todo $n'$. Si $\varsigma_{js} \in \sigma_{B_1}$ entonces $n_{A_j \cup A_s} \in \mathrm{E}_{A_s}(n)$, ya que $A_j \not\subset B_1$. Usando un razonamiento similar al usado en 6.2.18, llegaríamos a que $n_A \in \mathrm{E}_{A_s}(n)$ lo que es una contradicción. Por una razonamiento análogo, se descartan el resto de las posibilidades.

2. $\underline{B_1 \cap B_2 = \emptyset}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $A_1 \subset B_1$. Por definición de $P_l$, $\bigcup_{i=3}^{s-1} A_i \subset B_1$. Una vez más, tenemos dos casos:

   - Si $A_2 \cup A_s \subset B_2$, entonces, es fácil ver que $\dim(B_1) = 3$, y que $\dim(B_2) = 2$. Si $S$ es intersección completa, entonces $\#\rho = m$ y por tanto, $\gamma_l \cup \bigcup_{i=1}^{s} \tau_i = \rho$. Como $\gamma_{l-1} \subset \sigma_{B_1} \cup \sigma_{B_2}$, podemos tomar

     $$\rho_1 = (\gamma_{l-1} \cap \sigma_{B_1}) \cup \tau_1 \cup \textstyle\bigcup_{i=3}^{s-1} \tau_i,$$
     $$\rho_2 = (\gamma_{l-1} \cap \sigma_{B_2}) \cup \tau_2 \cup \tau_s.$$

     Claramente, $\rho = \rho_1 \cup \rho_2 \cup \{(a,b)\}$, donde $(a,b)$ es tal que $\gamma_l = \gamma_{l-1} \cup \{(a,b)\}$. Por el teorema 5.1.2, $S$ es pegada de $\langle B_1 \rangle$ y de $\langle B_2 \rangle$. Sin embargo, esto es imposible, ya que $\mathrm{rank}(\mathsf{G}(B_1) \cap \mathsf{G}(B_2)) = 2$ y por tanto el propio teorema 5.1.2 asegura que $S$ no es pegada de $\langle B_1 \rangle$ y de $\langle B_2 \rangle$, una contradicción.
   - Si $A_2 \cup A_s \subset B_1$, entonces, en este caso $S$ es también pegada de $\langle B_1 \rangle$ y de $\langle B_2 \rangle$. Tomando

     $$\rho_1 = (\gamma_{l-1} \cap \sigma_{B_1}) \cup \textstyle\bigcup_{i=1}^{s} \tau_i,$$
     $$\rho_2 = \gamma_{l-1} \cap \sigma_{B_2}.$$

No es difícil probar que $\dim(B_1) = 3$ y que $\dim(B_2) = 1$ y que si $S$ es intersección completa, entonces también lo es $\langle B_1 \rangle$. Usando inducción sobre $m+3$, y tomando como caso base 6.2.11, podemos probar que esto es imposible. (En este caso, al eliminar $B_2$, se eliminan generadores del interior del cono, quedando los mismos rayos extremales que antes.)

■

Juntando los dos últimos resultamos obtenemos el siguiente teorema.

**Teorema 6.2.24** *Sea S un subsemigrupo de* $\mathbb{N}^3$. *Si* $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ *tiene más de cuatro caras, entonces S no es intersección completa.*

Todos los resultados obtenidos para subsemigrupos de $\mathbb{N}^3$ en este capítulo se pueden resumir en el siguiente resultado:

**Teorema 6.2.25** *Sea S un subsemigrupo de* $\mathbb{N}^3$. *Sea S es intersección completa, entonces* $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ *tiene menos de cinco caras. Es más,*

- *Si* $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ *tiene cuatro caras, entonces S es intersección completa si y sólo si S es pegada de dos subsemigrupos suyos que son intersección completa de forma que, o bien los dos son dos dimensionales, o bien uno es de dimensión uno y el otro de dimensión tres.*

- *Si* $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ *tiene tres caras, entonces S es intersección completa si y sólo si S es pegada de dos subsemigrupos suyos que son intersección completa, uno de dimensión tres y el otro de dimensión uno.*

# Capítulo 7

# Matrices mezcladas dominantes

## Introducción

En este capítulo, exponemos el concepto de matriz mezclada dominante y su conexión con los semigrupos intersección completa. Los resultados expuestos en este capítulo se deben a Fischer y Shapiro. Nuestro propósito inicial, al empezar la investigación que nos llevó a los resultados expuestos en el capítulo anterior, fue demostrar que un semigrupo afín es intersección completa si y sólo si es pegada de dos subsemigrupos suyos que son intersección completa. Una de las implicaciones es consecuencia directa del concepto de pegada. Si $S = \langle A \rangle$ es pegada de $S_1 = \langle A_1 \rangle$ y $S_2 = \langle A_2 \rangle$, con $A = A_1 \cup A_2$, y si $\sigma$ es la congruencia asociada a $S$, entonces tenemos que un sistema minimal de generadores de $\sigma$ es $\rho = \rho_1 \cup \rho_2 \cup \{(a,b)\}$, donde $\rho_i$ es un sistema de generadores de $\sigma_{A_i}$ y el par $(a,b)$ es tal que $a \in \mathrm{F}_{A_1}$ y $b \in \mathrm{F}_{A_2}$. Si además $S_1$ y $S_2$ son intersección completa, entonces $\#\rho_i = \#A_i - \dim(S_i)$. Por lo visto en 5.1.2, $\dim(S) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - 1$, por lo que

$$\#\rho = \#\rho_1 + \#\rho_2 + 1 = \#A_1 - \dim(S_1) + \#A_2 - \dim(S_2) + 1 = \#A - \dim(S).$$

En consecuencia $S$ es intersección completa.

Para demostrar la otra implicación intentamos, infructuosamente, utilizar las mismas herramientas usadas en las secciones del capítulo anterior referentes a semigrupos simpliciales y subsemigrupos de $\mathbb{N}^3$, pero nos encontramos con grandes dificultades a partir de subsemigrupos de $\mathbb{N}^4$. El problema principal es que no pudimos demostrar un resultado análogo a 6.2.1, y la dificultad estriba en que al cortar $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$ con el plano $x_1 + \cdots + x_n = 1$, lo que queda no es un polígono, y el concepto de vértices contiguos se pierde. Gracias a Sturmfels, tuvimos conocimiento de un trabajo de Fischer y Shapiro

([12]), en el que se llegaba al resultado de Delorme sobre semigrupos numéricos haciendo uso de manipulaciones con un tipo especial de matrices. Nos pusimos en contacto con ellos, les enviamos nuestro trabajo [34] y les propusimos generalizar su trabajo para semigrupos afines en general. Con la ayuda de Jesús García Miranda, conseguimos generalizar nuestros resultados, haciendo uso de grafos de colores. Al mismo tiempo, Fischer, Shapiro y Morris nos enviaron su trabajo ([13]) en el que conseguían los mismos resultados, haciendo uso de un teorema de descomposición de grafos de colores demostrado por Graham y Pollak que aparece en [17].

Los resultados de Fischer y Shapiro se basan en asignar a cada semigrupo una matriz, la matriz de relatores, y ver que un semigrupo afín intersección completa tiene una forma especial de matriz. El resultado que buscamos se traduce en ver que dicha matriz se puede descomponer en cajas, cada una de ellas con la forma apropiada para corresponder a un semigrupo intersección completa y dar lugar a la pegada.

## 7.1. Matrices mezcladas dominantes

Sea $S = \langle n_1, \ldots, n_{r+m} \rangle$ un subsemigrupo de $\mathbb{N}^r$. Recordemos que asociado a $S$ hay un morfismo $\varphi$ definido de la siguiente forma:

$$\varphi : \mathbb{N}^{r+m} \to S$$
$$\varphi(a_1, \ldots, a_{r+m}) = \textstyle\sum_{i=1}^{r+m} a_i n_i.$$

Como de costumbre, vamos a denotar por $\sigma$ a la congruencia núcleo de $\varphi$. Sea

$$\rho = \{(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k)\}$$

un sistema minimal de generadores de $\sigma$. Podemos considerar la matriz, $B_S$, con coeficientes en $\mathbb{Z}$ cuyas filas son los vectores $a_i - b_i$. A esta matriz la vamos a denotar por matriz de relatores de $S$. Nótese que como $S$ no tiene unidades, no puede haber ningún $a_i - b_i$ que tenga todas las coordenadas del mismo signo (véase el segundo capítulo). Por tanto, todas las filas de la matriz $B_S$, contienen entradas positivas y negativas.

**Definición 7.1.1** *Una matriz $M$ es una matriz mezclada si todas sus filas contienen coeficientes positivos y negativos.*

Así pues, si $S$ es un subsemigrupo de $\mathbb{N}^r$, su matriz de relatores es mezclada.

Si además $S$ es un semigrupo intersección completa, su matriz es aún más especial.

**Definición 7.1.2** *Una matriz $M$ es dominante si no contiene submatrices cuadradas mezcladas.*

**Ejemplo 7.1.3** *La matriz*
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
*es mezclada pero no es dominante. Lo contrario ocurre con la matriz*
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
*que es dominante pero no mezclada. La matriz*
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
*es mezclada y dominante.*

Del trabajo de Fischer y Shapiro ([12]) se deduce el siguiente resultado (véase el corolario 2.10 de dicho trabajo):

**Teorema 7.1.4** *Si $S$ es intersección completa, entonces su matriz de relatores es mezclada dominante.*

**Ejemplo 7.1.5** *Sea*
$$S = \langle (2,0),(0,3),(1,2),(2,1)\rangle.$$
*Vimos en el capítulo anterior que $S$ es intersección completa y que*
$$\rho = \{((3,1,0,0),(0,0,0,3)),((0,1,0,1),(0,0,2,0))\}$$
*es un sistema minimal de generadores de $\sigma$.*

*Su matriz de relatores es*
$$B_S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
*que es mezclada y dominante.*

El siguiente resultado nos da la descomposición que buscamos para matrices mezcladas y dominantes. Descomposición que corresponde exactamente con el concepto de pegada, tal y como vamos a ver a continuación.

**Teorema 7.1.6** (Teorema 2.2 de [13])

*Sea $M$ una $m \times (r+m)$ matriz mezclada y dominante con $m > 0$. Entonces existe una reordenación de las filas y las columnas de $M$ de forma que el resultado tiene la forma*

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \\ \hline a & b \end{array}\right)$$

*donde $A$ y $B$ son matrices mezcladas dominantes de tamaños $t \times (t+d_1)$ y $s \times (s+d_2)$ respectivamente, con $t \geq 0,\ s \geq 0,\ s+t+1 = m$ y $d_1 + d_2 - 1 = r$. Es más, $a$ y $b$ son matrices no mezcladas y no nulas de tamaño $1 \times (t+d_1)$ y $1 \times (s+d_2)$ respectivamente, y de signo contrario.*

Si $S$ es un semigrupo intersección completa, entonces su matriz de relatores es mezclada y dominante. Reordenar filas es cambiar el orden de los elementos de $\rho$, lo que no altera para nada la estructura de $S$. Por otro lado, reordenar columnas es cambiar el orden de los generadores de $S$, por lo que $S$ queda inalterado. Tras la transformación descrita en el resultado anterior, la matriz de relatores de $S$ quedaría de la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \\ \hline a & b \end{array}\right)$$

por lo que $S$ sería pegada de los subsemigrupos $S_1$ y $S_2$, donde $S_1$ es el subsemigrupo de $S$ generado por los generadores de $S$ correspondientes a las $d_1$ primeras columnas de la matriz anterior, y $S_2$ es el subsemigrupo de $S$ generado por los generadores de $S$ correspondientes a las $d_2$ siguientes columnas. Así, $S_1$ tiene por relatores los relatores correspondientes a las primeras $t$ filas y $S_2$ los correspondientes las siguientes $s$ filas. La última fila es precisamente el relator de la pegada. De esta forma queda demostrado el siguiente resultado.

**Corolario 7.1.7** *Sea $S$ un subsemigrupo de $\mathbb{N}^r$. Si $S$ es intersección completa, entonces $S$ es pegada de dos subsemigrupos suyos que son intersección completa.*

**Ejemplo 7.1.8** *En el ejemplo anterior, la matriz podría quedar reordenada como*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

*Por lo que $S$ sería pegada de $S_1 = \langle(2,0),(3,0),(2,1)\rangle$ y $S_2 = \langle(1,2)\rangle$. En este caso $t = 1,\ d_1 = 2,\ s = 0,\ d_2 = 1,\ a = (011)$ y $b = (-2)$. La matriz $A$ es $(31-3)$. La matriz $B$ es vacía.*

**Ejemplo 7.1.9** *Sea*

$$S = \langle (3,0,0),(0,4,0),(0,1,1),(1,0,1),(2,1,1),(1,2,1)\rangle.$$

*Este semigrupo ya fue estudiado en el capítulo anterior. Sabemos que*

$$\rho = \left\{ \begin{array}{c} ((2,0,3,0,0,0),(0,0,0,0,3,0)), \\ ((0,1,0,2,0,0),(0,0,0,0,0,2)), \\ ((0,0,1,0,1,0),(0,0,0,1,0,1)) \end{array} \right\}$$

*es un sistema minimal de generadores de* $\sigma$. *Por tanto, la matriz de relatores de* $S$ *es*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

*(se puede observar que es mezclada y dominante) que se puede reordenar de la forma:*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

*Por lo que en este caso* $S$ *es pegada de* $S_1 = \langle (3,0,0),(0,1,1),(2,1,1)\rangle$ *y* $S_2 = \langle (0,4,0),(1,0,1),(1,2,1)\rangle$.

En el capítulo anterior vimos que si $S$ es un semigrupo de $\mathbb{N}^3$ con más de cuatro caras no podía ser intersección completa. Este resultado se puede extender a dimensión arbitraria usando la idea de que un semigrupo intersección completa es pegada de dos intersecciones completas.

**Corolario 7.1.10** (Corolario 3.4 de [13])

*Sea* $S$ *un semigrupo afín* $n$ *dimensional con* $n \geq 2$. *Si* $S$ *es intersección completa, entonces el número de rayos extremales de* $S$ *es menor o igual que* $2n-2$.

# Capítulo 8

# Semigrupos libres y semigrupos simples

## Introducción

En este capítulo, presentamos un tipo especial de semigrupos afines, simpliciales y Cohen-Macaulay: los semigrupos libres. Para el caso numérico, estos semigrupos han sido estudiados por Bertin y Carbonne, en [2], por Watanabe, en [42], y por Rosales en su tesis [27]. Lo que hacemos en este capítulo es generalizar el concepto introducido por Bertin y Carbonne a semigrupos afines, simpliciales y Cohen-Macaulay, junto con los resultados obtenidos por los autores antes mencionados para el caso numérico.

Los semigrupos libres resultan ser, a posteriori, semigrupos Gorenstein e intersección completa, cuyos relatores tienen una forma muy especial. Podría decirse que el anillo de semigrupo asociado al semigrupo se construye a partir de un anillo de polinomios, tras sucesivas extensiones radicales de monomios. Demostramos, además, que un semigrupo afín, simplicial y Gorenstein, cuyo máximo de la intersección de los conjuntos de Apéry asociados a los rayos extremales admite escritura única es libre. Esta idea de escritura única nos lleva a otro tipo de semigrupos: los semigrupos simples, introducidos por Rosales en su tesis [27]. La intersección entre la clase de semigrupos simples y la clase de semigrupos Gorenstein es la clase de los semigrupos cuya codimensión es uno (y por tanto son libres).

Vemos además, que los semigrupos simples contienen a los semigrupos afines, simpliciales y Cohen-Macaulay de máxima y mínima codimensión.

En lo que sigue

$$S = \langle n_1, \dots, n_r, n_{r+1}, \dots, n_{r+m} \rangle \subset \mathbb{N}^r$$

es un semigrupo simplicial afín con $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S) = \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(\{n_1, \dots, n_r\})$ y $\dim(S) = r$. Como viene siendo usual, denotaremos por $\sigma$ a la congruencia asociada a $S$.

## 8.1. Semigrupos libres

Una de las caracterizaciones que vamos a dar de semigrupos libres se basa en la igualdad de una serie de cotas asociadas al semigrupo. Antes de dar la definición y caracterización de semigrupo libre, vamos a ver que estas cotas proporcionan algunos resultados interesantes asociados al semigrupo en sí.

**Definición 8.1.1** *Dado un semigrupo simplicial afín $S$, definimos para cada $i \in \{1,\dots,m\}$*

1. $\bar{\mathrm{c}}_{r+i} = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : kn_{r+i} \in \mathsf{G}(\{n_1,\dots,n_{r+i-1}\})\}$.
2. $\mathrm{c}^*_{r+i} = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : kn_{r+i} \in \langle n_1,\dots,n_{r+i-1}\rangle\}$.
3. $c_{r+i} = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : kn_{r+i} \in \langle \{n_1,\dots,n_{r+m}\} \setminus \{n_{r+i}\}\rangle$.

La existencia de estas cantidades viene asegurada por el hecho de que $\{n_1,\dots,n_r\}$ es base de $\mathbb{Q}^r$.

**Nota 8.1.2** *Para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, se tiene que*

1. $\bar{\mathrm{c}}_{r+i} \leq \mathrm{c}^*_{r+i}$.
2. $c_{r+i} \leq \mathrm{c}^*_{r+i}$.

**Lema 8.1.3** *Sea $S$ un semigrupo afín simplicial. Todo elemento $x \in \mathsf{G}(S)$ se puede expresar de forma única como*

$$x = \lambda_1 n_1 + \cdots + \lambda_r n_r + \lambda_{r+1} n_{r+1} + \cdots + \lambda_{r+m} n_{r+m},$$

*con $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in \mathbb{Z}$ y $\lambda_{r+i} \in \{0,\dots,\bar{\mathrm{c}}_{r+i}-1\}$, para todo $i \in \{1,\dots,m\}$.*

*Demostración*: Como $x \in \mathsf{G}(S)$, existen $\mu_1,\dots,\mu_{r+m} \in \mathbb{Z}$ tales que $x = \mu_1 n_1 + \cdots + \mu_{r+m} n_{r+m}$. Podemos calcular $q_{r+m}$ tal que $\mu_{r+m} = q_{r+m}\bar{\mathrm{c}}_{r+m} + \lambda_{r+m}$, con $\lambda_{r+m} \in \{0,\dots,\bar{\mathrm{c}}_{r+m}-1\}$ y $q_{r+m} \in \mathbb{Z}$. Al estar $\bar{\mathrm{c}}_{r+m} n_{r+m}$ en $\mathsf{G}(\{n_1,\dots,n_{r+m-1}\})$, tenemos que

$$x = \gamma_1 n_1 + \cdots + \gamma_r n_r + \gamma_{r+1} n_{r+1} + \cdots + \gamma_{r+m-1} n_{r+m-1} + \lambda_{r+m} n_{r+m},$$

con $\gamma_i \in \mathbb{Z}$ y $\lambda_{r+m} \in \{0,\dots,\bar{\mathrm{c}}_{r+m}-1\}$. Repitiendo el proceso con $r+m-1$ hasta $r+1$, obtenemos la expresión deseada.

Veamos ahora que dicha expresión es única. Supongamos que

$$x = \lambda_1 n_1 + \cdots + \lambda_{r+m} n_{r+m} = \beta_1 n_1 + \cdots + \beta_{r+m} n_{r+m},$$

con $\lambda_i$ y $\beta_i$ verificando las condiciones antes indicadas. Si ocurriese que $\lambda_{r+m} \neq \beta_{r+m}$, entonces tendríamos que $0 < |\lambda_{r+m} - \beta_{r+m}| n_{r+m} \in \mathsf{G}(\{n_1, \ldots, n_{r+m-1}\})$, y $|\lambda_{r+m} - \beta_{r+m}| < \overline{\mathrm{c}}_{r+m}$, lo que es una contradicción con la minimalidad de $\overline{\mathrm{c}}_{r+m}$. Tenemos así que $\lambda_{r+m} = \beta_{r+m}$. Repetimos el proceso hasta $r+1$, y obtenemos que $\lambda_{r+i} = \beta_{r+i}$ y, por tanto, que

$$\lambda_1 n_1 + \cdots + \lambda_r n_r = \beta_1 n_1 + \cdots + \beta_r n_r.$$

Ahora bien, sabemos que $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S) = \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(\{n_1, \ldots, n_r\})$ y que $\dim(S) = r$, por lo que $\{n_1, \ldots, n_r\}$ es una base de $\mathbb{Q}^r$, lo que lleva a que $\lambda_1 = \beta_1, \ldots, \lambda_r = \beta_r$. ■

**Lema 8.1.4** *Sea S un semigrupo afín simplicial. Entonces*

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) \subseteq \{\lambda_{r+1} n_{r+1} + \cdots + \lambda_{r+m} n_{r+m} : \lambda_{r+i} \in \{0, \ldots, \mathrm{c}^*_{r+i} - 1\}, i \in \{1, \ldots, m\}\},$$

*y, por tanto,*

$$\# \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) \leq \mathrm{c}^*_{r+1} \cdots \mathrm{c}^*_{r+m}.$$

*Demostración*: Sea $x \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$. Tenemos, en consecuencia, que $x = \mu_{r+1} n_{r+1} + \cdots + \mu_{r+m} n_{r+m}$, con $\mu_{r+i} \in \mathbb{N}$. Tomamos $q_{r+m} \in \mathbb{N}$ y $\lambda_{r+m} \in \{0, \ldots, \mathrm{c}^*_{r+m} - 1\}$ tales que $\mu_{r+m} = q_{r+m} \mathrm{c}^*_{r+m} + \lambda_{r+m}$. Como $q_{r+m} \mathrm{c}^*_{r+m} n_{r+m} \in \langle n_1, \ldots, n_{r+m-1} \rangle$ y $x \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, tenemos que $q_{r+m} \mathrm{c}^*_{r+m} n_{r+m} \in \langle n_{r+1}, \ldots, n_{r+m-1} \rangle$. Esto nos lleva a que $x$ admite una expresión en la que la componente $n_{r+m}$ verifica que es menor que $\mathrm{c}^*_{r+m}$. Repitiendo el proceso conseguimos el resultado deseado.

■

**Lema 8.1.5** *Si S es Cohen-Macaulay, entonces*

$$\# \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) = \overline{\mathrm{c}}_{r+1} \cdots \overline{\mathrm{c}}_{r+m}.$$

*Demostración*: Definamos

$$\eta : \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) \to T = \{\lambda_{r+1} n_{r+1} + \cdots + \lambda_{r+m} n_{r+m} : \lambda_{r+i} \in \{0, \ldots, \overline{\mathrm{c}}_{r+i} - 1\}, i \in \{1, \ldots, m\}\},$$

de forma que sea biyectiva. Dado $x \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, por 8.1.3, podemos escribir $x$ de la forma

$$x = \lambda_1 n_1 + \cdots + \lambda_r n_r + \lambda_{r+1} n_{r+1} + \cdots + \lambda_{r+m} n_{r+m},$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{Z}$ y $\lambda_{r+i} \in \{0, \ldots, \bar{\mathrm{c}}_{r+i} - 1\}$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Además esta escritura es única, lo que hace que si definimos

$$\eta(x) = \lambda_{r+1} n_{r+1} + \cdots + \lambda_{r+m} n_{r+m},$$

la aplicación esté bien definida. Veamos ahora que $\eta$ es inyectiva y sobreyectiva. Supongamos que $\eta(x) = \eta(y)$. Esto implica que $x - y \in \mathsf{G}(\{n_1, \ldots, n_r\})$, pero como $S$ es Cohen-Macaulay, tenemos que, por 3.1.6, $x$ debe ser igual que $y$.

Para ver la sobreyectividad, tomemos $y = \lambda_{r+1} n_{r+1} + \cdots + \lambda_{r+m} n_{r+m} \in T$. Si $y \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, entonces claramente $\eta(y) = y$, y hemos acabado. En caso contrario, deben existir $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{N}$ tal que $y - a_1 n_1 - \cdots - a_r n_r \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, por lo que $\eta(-a_1 n_1 - \cdots - a_r n_r + y) = y$.

■

El siguiente teorema es el que nos va a proporcionar la definición de semigrupo libre y, a su vez, nos proporciona la primera de las caracterizaciones de semigrupo libre.

**Teorema 8.1.6** *Sea S un semigrupo afín, simplicial y Cohen-Macaulay. Son equivalentes:*

1. $\# \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) = \mathrm{c}^*_{r+1} \cdots \mathrm{c}^*_{r+m}$.
2. $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) = \{\lambda_{r+1} n_{r+1} + \cdots + \lambda_{r+m} n_{r+m} : \lambda_{r+i} \in \{0, \ldots, \mathrm{c}^*_{r+i} - 1\}, i \in \{1, \ldots, m\}\}$.
3. *Para todo* $i \in \{1, \ldots, m\}$, *se tiene que* $\bar{\mathrm{c}}_{r+i} = \mathrm{c}^*_{r+i}$.

*Demostración*: Demostramos en 8.1.4, que

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) \subseteq \{\lambda_{r+1} n_{r+1} + \cdots + \lambda_{r+m} n_{r+m} : \lambda_{r+i} \in \{0, \ldots, \mathrm{c}^*_{r+i} - 1\}, i \in \{1, \ldots, m\}\},$$

luego si $\# \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) = \mathrm{c}^*_{r+1} \cdots \mathrm{c}^*_{r+m}$, entonces se tiene la igualdad de ambos conjuntos.

Supongamos ahora que se da

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) = \{\lambda_{r+1} n_{r+1} + \cdots + \lambda_{r+m} n_{r+m} : \lambda_{r+i} \in \{0, \ldots, \mathrm{c}^*_{r+i} - 1\}, i \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

Sabemos que $\overline{\mathrm{c}}_{r+i} \leq \mathrm{c}^*_{r+i}$ para cualquier $i \in \{1,\ldots,m\}$. Supongamos que existe un $i$ tal que $\overline{\mathrm{c}}_{r+i} < \mathrm{c}^*_{r+i}$. Entonces, por hipótesis, $\overline{\mathrm{c}}_{r+i}n_{r+i} \in \bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$. Por otro lado, en virtud de la definición de $\overline{\mathrm{c}}_{r+i}$, tenemos que

$$\overline{\mathrm{c}}_{r+i}n_{r+i} = z_1n_1 + \cdots + z_{r+i-1}n_{r+i-1}.$$

Tal y como hemos hecho en otras ocasiones, podemos dividir los coeficientes que acompañan a $n_{r+1},\ldots,n_{r+i-1}$ por $\overline{\mathrm{c}}_{r+1},\ldots,\overline{\mathrm{c}}_{r+i-1}$ respectivamente y obtener que

$$\overline{\mathrm{c}}_{r+i}n_{r+i} = \lambda_1n_1 + \cdots + \lambda_rn_r + a_{r+1}n_{r+1} + \cdots + a_{r+i-1}n_{r+i-1},$$

con $a_{r+k} < \overline{\mathrm{c}}_{r+k}$ y $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Como siempre se da que $\overline{\mathrm{c}}_{r+k} \leq \mathrm{c}^*_{r+k}$, tenemos que $a_{r+1}n_{r+1} + \cdots + a_{r+i-1}n_{r+i-1} \in \bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$, llegamos así a que

$$\overline{\mathrm{c}}_{r+i}n_{r+i} = \lambda_1n_1 + \cdots + \lambda_rn_r + x,$$

con $x \in \bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$. Ahora bien, $\overline{\mathrm{c}}_{r+i}n_{r+i} \in \bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$, y por ser $S$ Cohen-Macaulay tenemos que la escritura en $\mathsf{G}(S)$ es única (como suma de combinación de rayos extremales más elemento de $\bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$, véase 3.1.9), por lo que $\lambda_i = 0$, lo que lleva a que

$$\overline{\mathrm{c}}_{r+i}n_{r+i} = a_{r+1}n_{r+1} + \cdots + a_{r+i-1}n_{r+i-1},$$

y por definición de $\mathrm{c}^*_{r+i}$, $\overline{\mathrm{c}}_{r+i} \geq \mathrm{c}^*_{r+i}$, lo cual es una contradicción con nuestra suposición inicial.

Por último supongamos que $\overline{\mathrm{c}}_{r+i} = \mathrm{c}^*_{r+i}$ para todo $i$. Como $S$ es Cohen-Macaulay, sabemos que $\#\bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i) = \overline{\mathrm{c}}_{r+1}\cdots\overline{\mathrm{c}}_{r+m} = \mathrm{c}^*_{r+1}\cdots\mathrm{c}^*_{r+m}$. ■

Obsérvese que, por estar

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) \subseteq \{\lambda_{r+1}n_{r+1} + \cdots + \lambda_{r+m}n_{r+m} : \lambda_{r+i} \in \{0,\ldots,\mathrm{c}^*_{r+i}-1\}, i \in \{1,\ldots,m\}\},$$

la segunda condición del teorema anterior es equivalente a

*4.* $\max \bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i) = (\mathrm{c}^*_{r+1}-1)n_{r+1} + \cdots + (\mathrm{c}^*_{r+m}-1)n_{r+m}$.

Nótese que, por la misma razón, para todo semigrupo Gorenstein $\max \bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i) \leq (\mathrm{c}^*_{r+1}-1)n_{r+1} + \cdots + (\mathrm{c}^*_{r+m}-1)n_{r+m}$ (con el orden inducido por $S$).

**Definición 8.1.7** *Sea $S = \langle n_1,\ldots,n_r,n_{r+1},\ldots,n_{r+m}\rangle$ un semigrupo afín, simplicial y Cohen-Macaulay. El semigrupo $S$ es libre (para esa ordenación de los generadores) si y sólo si verifica alguna de las condiciones del teorema anterior.*

Para saber si un semigrupo es libre, por lo visto en el teorema anterior, tendríamos que calcular $\mathrm{c}^*_{r+i}$ para todo $i$ y, o bien $\bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$, o bien $\overline{\mathrm{c}}_{r+i}$ para todo $i$. A continuación damos una caracterización más asequible, que nos permite usar los conocimientos que ya tenemos de pegada y la caracterización de semigrupos afines y simpliciales que son intersección completa.

**Teorema 8.1.8** *Sea $S = \langle n_1, \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m}\rangle$ un semigrupo afín, simplicial y Cohen-Macaulay. Son equivalentes:*

1. *$S$ es libre para esa ordenación de los generadores.*

2. *$S$ es pegada de $\langle n_1, \ldots, n_{r+m-1}\rangle$ y $\langle n_{r+m}\rangle$, y $\langle n_1, \ldots, n_{r+m-1}\rangle$ es un semigrupo libre (para esa ordenación de los generadores).*

*Demostración*: Supongamos que $S$ es libre. Veamos que $S$ es pegada de $\langle n_1, \ldots, n_{r+m-1}\rangle$ y de $\langle n_{r+m}\rangle$. Para ello busquemos $\alpha \in \langle n_1, \ldots, n_{r+m-1}\rangle \cap \langle n_{r+m}\rangle$ tal que $\mathsf{G}(\{\alpha\}) = \mathsf{G}(\{n_1, \ldots, n_{r+m-1}\}) \cap \mathsf{G}(\{n_{r+m}\})$. Si tomamos $\alpha = \overline{\mathrm{c}}_{r+m} n_{r+m}$, por la propia definición de $\overline{\mathrm{c}}_{r+m}$ se tiene lo deseado. Veamos ahora que $S' = \langle n_{r+1}, \ldots, n_{r+m-1}\rangle$ es libre. Definimos

$$\overline{\mathrm{c}}'_{r+i} = \mathrm{mín}\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : k n_{r+i} \in \mathsf{G}(\{n_1, \ldots, n_{r+i-1}\})\}$$

$$\mathrm{c^*}'_{r+i} = \mathrm{mín}\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : k n_{r+i} \in \langle n_1, \ldots, n_{r+i-1}\rangle\},$$

para $i < m$. Está claro que $\overline{\mathrm{c}}_{r+i} = \overline{\mathrm{c}}'_{r+i}$ y que $\mathrm{c}^*_{r+i} = \mathrm{c^*}'_{r+i}$ y por ser $S$ libre se tiene que $\overline{\mathrm{c}}_{r+i} = \mathrm{c}^*_{r+i}$, por lo que $\overline{\mathrm{c}}'_{r+i} = \mathrm{c^*}'_{r+i}$, y por tanto $S'$ es libre.

Supongamos ahora que se da el segundo apartado del enunciado del teorema. Al igual que antes, está claro que $\overline{\mathrm{c}}_{r+i} = \mathrm{c}^*_{r+i}$ para $i < m$, por lo que nos queda probar que $\overline{\mathrm{c}}_{r+m} = \mathrm{c}^*_{r+m}$. Como $S$ es pegada de $\langle n_1, \ldots, n_{r+m-1}\rangle$ y $\langle n_{r+m}\rangle$, existe un $\alpha \in \langle n_1, \ldots, n_{r+m-1}\rangle \cap \langle n_{r+m}\rangle$ tal que $\mathsf{G}(\alpha) = \mathsf{G}(\{n_1, \ldots, n_{r+m-1}\}) \cap \mathsf{G}(\{n_{r+m}\})$. De esta forma, $\alpha$ tiene que ser igual a $k n_{r+m}$, con $k > 0$. Por ser $\mathsf{G}(\alpha) = \mathsf{G}(\{n_1, \ldots, n_{r+m-1}\}) \cap \mathsf{G}(\{n_{r+m}\})$, se tiene que $k = \overline{\mathrm{c}}_{r+m}$. Ahora bien, $k n_{r+m} \in \langle n_1, \ldots, n_{r+m-1}\rangle$, por lo que $\overline{\mathrm{c}}_{r+m} = k \geq \mathrm{c}^*_{r+m}$. La otra desigualdad siempre se da, por lo que se tiene la igualdad. ∎

Nótese que al ser $\langle n_1, \ldots, n_{r+m-1}\rangle$ libre, éste es pegada de $\langle n_1, \ldots, n_{r+m-2}\rangle$ y de $\langle n_{r+m-1}\rangle$. El proceso se repite hasta llegar a $\langle n_1, \ldots, n_r\rangle$, que es libre trivialmente.

Obsérvese que este resultado no sólo caracteriza de forma algorítmica a los semigrupos libres, sino que además proporciona un método para construir semigrupos libres (que como veremos más adelante son semigrupos Gorenstein).

**Ejemplo 8.1.9** *Vimos en 6.1.8, que*

$$S = \langle (2,0),(0,3),(1,2),(2,1)\rangle$$

*es pegada de* $\langle (2,0),(0,3),(2,1)\rangle$ *y de* $\langle (1,2)\rangle$*, y que a su vez,* $\langle (2,0),(0,3),(2,1)\rangle$ *es pegada de* $\langle (2,0),(0,3)\rangle$ *y de* $\langle (2,1)\rangle$*, por lo que* $S$ *es un semigrupo libre.*

**Corolario 8.1.10** *Sea* $S = \langle n_1,\ldots,n_r,n_{r+1},\ldots,n_{r+m}\rangle$ *un semigrupo libre. Entonces*

1. $S$ *es intersección completa.*

2. *El conjunto*
$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{c}^*_{r+1}e_{r+1} = \sum_{i=1}^r a_{1i}e_i \\ \mathrm{c}^*_{r+2}e_{r+2} = \sum_{i=1}^r a_{2i}e_i + a_{2r+1}e_{r+1} \\ \cdots \\ \mathrm{c}^*_{r+m}e_{r+m} = \sum_{i=1}^r a_{mi}e_i + \sum_{i=1}^{m-1} a_{mr+i}e_{r+i} \end{array}\right\}$$
*es un sistema minimal de generadores para* $\sigma$.

*Demostración*: Sabemos que $S$ es intersección completa si y sólo si es pegada de dos subsemigrupos suyos que son intersección completa. Hagamos inducción sobre $m$. Para $m=0$ el resultado se tiene trivialmente, ya que $\langle n_1,\ldots,n_r\rangle$ es intersección completa y no tiene relatores. Supongamos que el resultado es cierto para $m=k$, y probémoslo para $m=k+1$. El semigrupo $\langle n_1,\ldots,n_{r+k+1}\rangle$ es pegada de $\langle n_1,\ldots,n_{r+k}\rangle$ y de $\langle n_{r+m}\rangle$, y ambos son intersección completa (el primero por hipótesis de inducción y el segundo lo es trivialmente), por lo que el total es intersección completa.

El segundo apartado es una consecuencia directa del lema 6.1.4($\rho=\gamma_k$). ■

Nótese que si $K[S]$ es el anillo de semigrupo asociado a $S$, entonces $K[S]$ es isomorfo al anillo
$$\frac{K[x_1,\ldots,x_r,x_{r+1},\ldots,x_{r+m}]}{\langle x_{r+1}^{\mathrm{c}^*_{r+1}} - \prod_{i=1}^r x_i^{a_{1i}},\ldots,x_{r+m}^{\mathrm{c}^*_{r+m}} - \prod_{i=1}^{r+m-1} x_i^{a_{mi}}\rangle}$$
que a su vez es isomorfo a

$$K[x_1,\ldots,x_r][(\prod_{i=1}^r x_i^{a_{1i}})^{1/\mathrm{c}^*_{r+1}}]\cdots[(\prod_{i=1}^{r+m-1} x_i^{a_{mi}})^{1/\mathrm{c}^*_{r+m}}].$$

**Corolario 8.1.11** *Todo semigrupo libre es Gorenstein.*

*Demostración*: Como $S$ es Cohen-Macaulay y existe $\text{máx}\bigcap_{i=1}^r \mathrm{S}(n_i)$, el semigrupo $S$ es Gorenstein (véase 4.1.9). ■

**Corolario 8.1.12** *Sea $S = \langle n_1, \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m}\rangle$ un semigrupo afín, simplicial y Cohen-Macaulay. Son equivalentes:*

1. *$S$ es libre.*
2. *Existe un sistema minimal de generadores para $\sigma$ de la forma:*

$$\left\{\begin{array}{l} k_{r+1}e_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} a_{1i}e_i \\ k_{r+2}e_{r+2} = \sum_{i=1}^{r} a_{2i}e_i + a_{2r+1}e_{r+1} \\ \cdots \\ k_{r+m}e_{r+m} = \sum_{i=1}^{r} a_{mi}e_i + \sum_{i=1}^{m-1} a_{mr+i}e_{r+i} \end{array}\right\},$$

*con $k_{r+i} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

*Demostración*: Si $S$ es un semigrupo libre, por el teorema anterior, podemos tomar $c_{r+i} = c^*_{r+i}$.

Por otro lado, si el conjunto

$$\left\{\begin{array}{l} k_{r+1}e_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} a_{1i}e_i \\ k_{r+2}e_{r+2} = \sum_{i=1}^{r} a_{2i}e_i + a_{2r+1}e_{r+1} \\ \cdots \\ k_{r+m}e_{r+m} = \sum_{i=1}^{r} a_{mi}e_i + \sum_{i=1}^{m-1} a_{mr+i}e_{r+i} \end{array}\right\}$$

es un sistema minimal de generadores para $\sigma$, entonces se tiene claramente que $S$ es pegada de $\langle n_1, \ldots, n_{r+m-1}\rangle$ y de $\langle n_{r+m}\rangle$. La demostración de que $S$ es libre se reduce a aplicar una simple inducción. ■

## 8.2. Semigrupos cuyos restos primarios tienen expresión única

En esta sección, estudiamos los semigrupos afines, simpliciales y Cohen Macaulay verificando que los elementos de la intersección de los conjuntos de Apéry de sus rayos extremales (estos elementos son denominados por Rosales, en [27], restos primarios), admiten una expresión única. Veremos que los semigrupos Gorenstein verificando esta condición son semigrupos libres, y presentaremos otro tipo de semigrupos, los semigrupos simples, que verifican la propiedad de unicidad de escritura de sus restos primarios.

**Definición 8.2.1** *Sea $S = \langle n_1, \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m}\rangle$ un semigrupo afín y simplicial, y sea $s \in S$. Decimos que $s$ tiene expresión única siempre que*

$$s = \sum_{i=1}^{r+m} a_i n_i = \sum_{i=1}^{r+m} b_i n_i$$

*implique que $a_i = b_i$ para todo $i \in \{1,\dots,r+m\}$.*

**Lema 8.2.2** *Sea S un semigrupo afín, simplicial y Gorenstein. Entonces* $\max \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ *tiene escritura única si y sólo si todo elemento de* $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ *tiene escritura única.*

*Demostración*: Claramente, si todo elemento de $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ tiene escritura única, entonces lo mismo ocurre con su máximo. Veamos el recíproco. Supongamos que $x = \max \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ tiene escritura única y que no ocurre lo mismo con $y \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$. Por ser $y < x$, existe un $z \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ tal que $y + z = x$, lo que proporciona dos escrituras distintas de $x$, lo cual es una contradicción. ■

**Teorema 8.2.3** *Sea* $S = \langle n_1,\dots,n_r,n_{r+1},\dots,n_{r+m}\rangle$ *un semigrupo afín, simplicial y Gorenstein. Sea* $x = \max \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$*, y supongamos que x tiene expresión única. Entonces S es libre (para alguna ordenación de sus generadores).*

*Demostración*:

Por definición de $c_{r+i}$,

$$c_{r+i}n_{r+i} = \sum_{j=1}^{r+m} a_{i_j} n_j,$$

con $a_{i_j} \in \mathbb{N}$ y $a_{i_{r+i}} = 0$. Por tener $x$ expresión única, todo elemento de $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ tiene expresión única, lo que hace que $c_{r+i}n_{r+i}$ no esté en $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, ya que al menos admite dos expresiones distintas al ser $a_{i_{r+i}} = 0$. De esta forma, $c_{r+i}n_{r+i}$ debe admitir una expresión como la de antes de forma que $\sum_{i=1}^{r} a_{i_j} \neq 0$.

Veamos ahora que $(c_{r+i}-1)n_{r+i}$ sí está en $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ para todo $i \in \{1,\dots,m\}$. Supongamos que existiese un $i$ tal que eso no fuese así. El elemento $(c_{r+i}-1)n_{r+i}$ debería admitir una expresión de la forma

$$(c_{r+i}-1)n_{r+i} = \sum_{j=1}^{r+m} b_j n_j,$$

con $b_j \in \mathbb{N}$ y $\sum_{j=1}^{r} b_j \neq 0$. Si $b_{r+i} \geq c_{r+i} - 1$, entonces tendríamos que

$$0 = \sum_{j=1}^{r+i-1} b_i n_i + (b_{r+i} - (c_{r+i}-1))n_{r+i} + \sum_{j=r+i+1}^{r+m} b_i n_i,$$

por lo que $\sum_{j=1}^{r} b_j = 0$, contradicción. Si por el contrario $b_{r+i} < c_{r+i} - 1$, tendríamos que

$$(c_{r+i} - 1 - b_{r+i})n_{r+i} = \sum_{j=1}^{r+i-1} b_i n_i + \sum_{j=r+i+1}^{r+m} b_i n_i,$$

lo que entra en contradicción con la minimalidad de $c_{r+i}$. En cualquier caso llegamos a una contradicción, por lo que $(c_{r+i}-1)n_{r+i}$ está en $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$. Por ser $x = \max \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, tenemos que para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, debe existir $x_i \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$ tal que $(c_{r+i}-1)n_{r+i}+x_i = x$. Llegamos, de esta forma, a que

$$x = (c_{r+1}-1)n_{r+1}+x_1 = \cdots = (c_{r+m}-1)n_{r+m}+x_m.$$

Por ser la expresión de $x$ única, y por no ser $c_{r+i}n_{r+i}$ un resto primario, y en consecuencia no tener $x_i$ componente $n_{r+i}$, obtenemos que

$$x = (c_{r+1}-1)n_{r+1}+\cdots+(c_{r+m}-1)n_{r+m}.$$

(Esto lleva a que si $\lambda_i \leq c_{r+i}-1$, entonces $\lambda_1 n_{r+1}+\cdots+\lambda_m n_{r+m} \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$.)

Sabemos que $c_{r+i} \leq \mathrm{c}^*_{r+i}$. Veamos que $\mathrm{c}^*_{r+i} = c_{r+i}$, con lo que tendremos que $x = (\mathrm{c}^*_{r+1}-1)n_{r+1}+\cdots+(\mathrm{c}^*_{r+m}-1)n_{r+m}$, lo que llevará a que $S$ es libre.

Veamos que existe un $j \in \{r+1,\ldots,r+m\}$ tal que $a_{i_j} = 0$ para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$. De no ser así, para cada $j \in \{r+1,\ldots,r+m\}$, existiría un $i \in \{1,\ldots,m\}$ tal que $a_{i_j} \neq 0$, por lo que

$$(c_{r+1}-1)n_{r+1}+\cdots+(c_{r+m}-1)n_{r+m} =$$
$$(a_{1_1}+\cdots+a_{m_1})n_1+\cdots+(a_{1_r}+\cdots+a_{m_r})n_r+$$
$$+(a_{1_{r+1}}+\cdots+a_{m_{r+1}}-1)n_{r+1}+\cdots+(a_{1_{r+m}}+\cdots+a_{m_{r+m}}-1)n_{r+m} \in S$$

y $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r} a_{i_j} \neq 0$, por lo que $x \notin \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, lo cual es absurdo.

Tenemos así que existe un $j \in \{r+1,\ldots,r+m\}$ tal que $a_{i_j} = 0$ para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$. Cambiamos el generador $n_{r+m}$ por el generador $n_{r+j}$, y obtenemos así que $n_{r+m}$ no aparece en las expresiones de $c_{r+i}n_{r+i}$ para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$.

Repetimos ahora el proceso con

$$(c_{r+1}-1)n_{r+1}+\cdots+(c_{r+m-1}-1)n_{r+m-1},$$

que también está en $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$.

Obtenemos así que

$$\begin{array}{l}
c_{r+1}n_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} a_{1i}n_i \\
c_{r+2}n_{r+2} = \sum_{i=1}^{r} a_{2i}n_i + a_{2r+1}n_{r+1} \\
\cdots \\
c_{r+m}n_{r+m} = \sum_{i=1}^{r} a_{mi}n_i + \sum_{i=1}^{m-1} a_{mr+i}n_{r+i}
\end{array}$$

y por la minimalidad de $\mathrm{c}^*_{r+i}$, obtenemos que $\mathrm{c}^*_{r+i} \leq c_{r+i}$, lo que lleva a que $\mathrm{c}^*_{r+i} = c_{r+i}$ para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, lo que concluye la demostración. ■

**Definición 8.2.4** *Sea $S = \langle n_1, \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m} \rangle$ un semigrupo afín, simplicial y Cohen-Macaulay. El semigrupo $S$ es simple (para esa ordenación de los generadores) si y sólo si*

$$d - 1 = (c_{r+1} - 1) + \cdots + (c_{r+m} - 1),$$

*con $d = \# \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$.*

Para un semigrupo afín, simplicial y Cohen-Macaulay, sabemos que $(c_{r+i} - 1)n_{r+i}$ son todos restos primarios, por lo que los elementos de la forma $\lambda_i n_{r+i}$, con $\lambda_i \leq c_{r+i} - 1$ también lo son. Obsérvese que $\lambda_i n_{r+i} \neq \lambda_j n_{r+j}$, ya que lo contrario entraría en contradicción con la minimalidad de $c_{r+i}$ y de $c_{r+j}$. Esto hace que $d - 1 \geq \sum_{i=1}^{m} (c_{r+i} - 1)$. Por otro lado, si $S$ es simple, entonces

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) = \{0, n_{r+1}, \ldots, (c_{r+1} - 1)n_{r+1}, \ldots, n_{r+m}, \ldots, (c_{r+m} - 1)n_{r+m}\},$$

y por tanto los restos primarios tienen expresión única.

Nótese además, que si $S$ es Cohen-Macaulay de máxima codimensión, entonces $m = d - 1$, y $c_{r+i} = 2$, por lo que $d - 1 = m = \sum_{i=1}^{m} (c_{r+i} - 1)$, lo que hace que $S$ sea simple.

También los semigrupos afines y simpliciales de codimensión uno son simples, ya que para este tipo de semigrupos

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) = \{0, n_{r+1}, \ldots, (c_{r+1} - 1)n_{r+1}\},$$

y por tanto, $d - 1 = c_{r+1} - 1$.

De esta forma, los semigrupos simples son un tipo especial de semigrupos afines, simpliciales y Cohen-Macaulay que contiene a los semigrupos afines, simpliciales y Cohen-Macaulay de máxima y mínima codimensión.

**Ejemplo 8.2.5** *Sea $S$ el semigrupo numérico*

$$S = \langle 4, 5, 7 \rangle.$$

*Es fácil ver que $\mathrm{S}(4) = \{0, 5, 7, 10\}$, $c_2 = 3$ y $c_3 = 2$. Por lo que $d - 1 = (c_2 - 1) + (c_3 - 1)$. De esta forma $S$ es simple, pero no es ni de máxima ni de mínima codimensión.*

Para los semigrupos simples, el algoritmo para calcular una presentación minimal suya se puede mejorar con respecto al caso Cohen-Macaulay y Gorenstein, tal y como muestra el siguiente resultado. La mejora se produce gracias a que los $n \in S$ tales que $\mathsf{G}_n$ no es conexo son menos que en el caso general y, además, tienen una forma bastante simple.

**Proposición 8.2.6** *Sea $S = \langle n_1, \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m} \rangle$ un semigrupo simple, y $n \in S$. Entonces $\mathsf{G}_n$ es conexo si y sólo si $n = n_{r+i} + n_{r+j}$ ó $n = c_{r+i} n_{r+i}$, con $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ e $i \neq j$.*

*Demostración*: Veamos primero que $\mathsf{G}_{n_{r+i}+n_{r+j}}$ y $\mathsf{G}_{c_{r+i}n_{r+i}}$ no son conexos. Por ser

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) = \{0, n_{r+1}, \ldots, (c_{r+1}-1)n_{r+1}, \ldots, n_{r+m}, \ldots, (c_{r+m}-1)n_{r+m}\},$$

tanto $n_{r+i} + n_{r+j}$ como $c_{r+i}n_{r+i}$ no están en $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, por lo que $\mathrm{V}(\mathsf{G}_{n_{r+i}+n_{r+j}}) \cap \{n_1, \ldots, n_r\} \neq \emptyset$, y $\mathrm{V}(\mathsf{G}_{c_{r+i}n_{r+i}}) \cap \{n_1, \ldots, n_r\} \neq \emptyset$. Por ser $S$ Cohen-Macaulay, todos los elementos de $\mathrm{V}(\mathsf{G}_{n_{r+i}+n_{r+j}}) \cap \{n_1, \ldots, n_r\}$ están en la misma componente conexa de $\mathsf{G}_{n_{r+i}+n_{r+j}}$ y lo mismo ocurre con los de $\mathrm{V}(\mathsf{G}_{c_{r+i}n_{r+i}}) \cap \{n_1, \ldots, n_r\}$. Otra componente conexa de $\mathsf{G}_{n_{r+i}+n_{r+j}}$ tiene por vértices a $\{n_{r+i}, n_{r+j}\}$. Otra componente conexa de $\mathsf{G}_{c_{r+i}n_{r+i}}$ tiene por vértice a $n_{r+i}$.

Veamos ahora el recíproco. Si $\mathsf{G}_n$ es no conexo, entonces $n$ admite más de una expresión, por lo que $n \notin \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$. Esto viene a decir que $\mathrm{V}(\mathsf{G}_n) \cap \{n_1, \ldots, n_r\} \neq \emptyset$. Por ser $S$ Cohen-Macaulay, los vértices correspondientes a $\mathrm{V}(\mathsf{G}_n) \cap \{n_1, \ldots, n_r\}$, están todos en la misma componente conexa. Por ser $\mathsf{G}_n$ no conexo, existe un $n_{r+i}$ tal que $n_{r+i}$ no está en la componente conexa que $\mathrm{V}(\mathsf{G}_n) \cap \{n_1, \ldots, n_r\}$. De esta forma $n = n_{r+i} + s$ con $s \in S$. Si $s \notin \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, entonces $n_{r+i}$ estaría en la misma componente conexa que $\mathrm{V}(\mathsf{G}_n) \cap \{n_1, \ldots, n_r\}$, lo cual sería una contradricción. Por tanto, $s \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, por lo que $n = n_{r+i} + k n_{r+j}$, con $0 \neq k \leq c_{r+j} - 1$; ó $n = k n_{r+i}$, con $0 \neq k \leq c_{r+i}$.

1. Si $n = n_{r+i} + k n_{r+j}$ y $k > 1$, entonces $n = n_{r+i} + n_{r+j} + (k-1) n_{r+j}$ (y $k - 1 \neq 0$). Por darse que $n_{r+i} + n_{r+j} \notin \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i)$, entonces existe $n_l$, con $l \in \{1, \ldots, r\}$, tal que $n_{r+i} + n_{r+j} - n_l \in S$. Por tanto, $n - (n_l + n_{r+j}) \in S$, por lo que $n_{r+i}$ estaría en la componente conexa de $\mathrm{V}(\mathsf{G}_n) \cap \{n_1, \ldots, n_r\}$, lo que es una contradicción.

2. Si $n = k n_{r+i}$ y $k < c_{r+i}$, entonces $\mathsf{G}_{k n_{r+i}}$, por la minimalidad de $c_{r+i}$, tiene como único vértice a $n_{r+i}$, por lo que $\mathsf{G}_n$ sería conexo, lo que es de nuevo una contradicción.

Por tanto, los únicos posibles casos son $n_{r+i} + n_{r+j}$ y $c_{r+i} n_{r+i}$.

■

Por último, cabría preguntarse qué pasa si un semigrupo es simple y Gorenstein a la vez. La respuesta a esta pregunta viene dada en el siguiente resultado.

**Proposición 8.2.7** *Sea* $S = \langle n_1, \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+m} \rangle$ *un semigrupo simple. Si* $S$ *es Gorenstein, entonces* $m = 1$.

*Demostración*: Sabemos que

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) = \{0, n_{r+1}, \ldots, (c_{r+1}-1)n_{r+1}, \ldots, n_{r+m}, \ldots, (c_{r+m}-1)n_{r+m}\},$$

por lo que máx $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{S}(n_i) = (c_{r+j}-1)n_{r+j}$ para algún $j$. Es fácil comprobar que para que $(c_{r+j}-1)n_{r+j} - n_{r+i} \in S$, a la fuerza tiene que darse que $m = 1$, ya que si no se atentaría contra la minimalidad de $c_{r+j}$.

■

# Capítulo 9

# Semigrupos afines con teoría de divisores

## Introducción

En este capítulo, damos un método para calcular las soluciones enteras positivas de un sistema de ecuaciones homogéneo con coeficientes enteros. El conjunto de tales soluciones forman un semigrupo afín. La importancia de este tipo de semigrupos es que todos ellos tienen teoría de divisores. Es más, todo semigrupo afín con teoría de divisores es isomorfo a un semigrupo de soluciones positivas de un sistema homogéneo con coeficientes enteros.

Una teoría de divisores para un semigrupo afín $S$, es un morfismo $\partial : S \to \mathbb{N}^l$, con $l$ un entero positivo, verificando las siguientes condiciones:

(D1) Para cualesquiera $a, b \in S$, se tiene que $a \leq_S b$ si y sólo si $\partial(a) \leq \partial(b)$.

(D2) Para todo $n \in \mathbb{N}^l$, existen $a_1, \ldots, a_m \in S$ tales que $n = \operatorname{ínf}(\{\partial(a_1), \ldots, \partial(a_m)\})$.

Donde $a \leq_S b$ si y sólo si existe $c \in S$ tal que $b = a + c$, y el ínfimo de dos elementos $\operatorname{ínf}((a_1, \ldots, a_l), (b_1, \ldots, b_l)) = (\operatorname{mín}(a_1, b_1), \ldots, \operatorname{mín}(a_l, b_l))$.

Normalmente el concepto de teoría de divisores se usa con notación multiplicativa, lo que hace que $\leq_S$ sea la relación de divisibilidad en $S$ y el ínfimo el máximo común divisor. Lettl, en [23] demuestra que $S$ tiene una teoría de divisores si y sólo si $S = \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S) \cap \mathsf{G}(S)$. Una de las inclusiones es siempre cierta. Para comprobar la otra inclusión damos un método para calcular un sistema minimal de generadores de $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S) \cap \mathsf{G}(S)$.

## 9.1. Cálculo de las soluciones enteras positivas de un sistema homogéneo con coeficientes enteros

En esta sección, vamos a estudiar semigrupos de la forma $S = M \cap \mathbb{N}^k$ con $M$ un subgrupo de $\mathbb{Z}^k$ definido mediante ecuaciones homogéneas, esto es, un semigrupo con ecuaciones de la forma

$$(c_1 \dots c_k) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = 0$$

con $c_i \in \mathbb{Z}^n$ para algún entero positivo $n$. Por tanto, $S$ es el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones cuyas coordenadas son todas números naturales.

Aparte de la importancia geométrica o computacional que este tipo de semigrupos tenga, para nosotros, una de las principales características de este tipo de semigrupos es que cualquier semigrupo afín con una teoría de divisores es isomorfo a un semigrupo de este tipo.

Para calcular un sistema minimal de generadores de $S$, tenemos que dar un resultado previo, que nos dice que estos semigrupos están generados por sus elementos minimales respecto del orden usual (obsérvese que el conjunto de elementos minimales de $S$ es finito, por el lema de Dickson). Usando esta idea y algunos resultados dados por Sturmfels en [39] y [38] vamos a ser capaces de dar un método para calcular un sistema minimal de generadores de $S$.

**Lema 9.1.1** *Sea $\{s_1, \dots, s_t\}$ el conjunto de elementos minimales de $S \setminus \{0\}$ respecto del orden usual, entonces*

$$S = \langle s_1, \dots, s_t \rangle.$$

*Demostración*: Sea $s \in S$. Si $s \neq 0$ entonces existe un $i \in \{1, \dots, t\}$ tal que $s_i \leq s$. Por tanto, $s - s_i \in \mathbb{N}^k$ y en consecuencia $s - s_i \in S$, ya que $s - s_i$ está en $M$. Ahora bien, si $s - s_i \neq 0$ podemos repetir la misma idea. Este proceso tiene que acabar, ya que si no encontraríamos una cadena infinita descendente respecto del orden parcial $\leq$, lo cual no es posible. Cuando este proceso acaba, es porque el elemento resultante es el cero, obteniendo una expresión de la forma $s - \sum a_i s_i = 0$, con $a_i \in \mathbb{N}$, que nos lleva a que $s \in \langle s_1, \dots, s_t \rangle$. ■

Obsérvese que este lema no es cierto para semigrupos afínes en general, ya que $s - s_i$ no tiene porqué estar en el semigrupo.

Sabemos que el morfismo

$$\varphi : \mathbb{N}^k/\sim_M \to S' = \langle c_1, \ldots, c_k \rangle \subseteq \mathbb{Z}^n$$
$$\varphi([(a_1, \ldots, a_k)]) = \sum a_i c_i$$

induce el morfismo de $K$-álgebras:

$$\overline{\varphi} : K[x_1, \ldots, x_k] \to K[S']$$
$$\overline{\varphi}(X^a) = y_{\varphi(a)}$$

cuyo núcleo es

$$I_{S'} = \langle X^a - X^b : (a,b) \in \sim_M \rangle.$$

Obsérvese que $S = [0]$, donde $[0]$ es la clase del cero en $\mathbb{N}^k/\sim_M$, esto es, si tomamos un elemento $s \in S$, entonces $(s,0) \in \sim_M$ y, si tomamos un elemento $(s,0) \in \sim_M$ entonces $s$ tiene que estar en $S$.

Dado un elemento $m \in M$, éste se puede escribir como $m = m^+ - m^-$, con $m^+, m^- \in \mathbb{N}^k$. Por tanto, para cada $m \in M$, tenemos que $X^{m^+} - X^{m^-} \in I_{S'}$. Por otro lado, si $X^a - X^b \in I_{S'}$, entonces $a - b \in M$.

**Definición 9.1.2** ([38]) *El elemento $X^{m^+} - X^{m^-} \in I_{S'}$ se dice que es primitivo si no existe ningún elemento $X^{l^+} - X^{l^-} \in I_{S'}$ tal que $X^{l^+}$ divide a $X^{m^+}$ y $X^{l-}$ divide a $X^{m-}$.*

Nótese que si $s$ es un elemento minimal de $S$ entonces $X^s - 1 \in I_{S'}$ es un elemento primitivo. Este hecho es el que nos va a permitir encontrar los elementos minimales de $S$, y por tanto un sistema minimal de generadores de $S$.

**Teorema 9.1.3** (Teorema 4.7 de [38]) *Sea $n = \dim(S')$ y $D(S') = \max\{|\det(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})| : 1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq k\}$. El grado total de cualquier binomio primitivo de $I_{S'}$ es menor que $(n+1)(k-n)D(S')$.*

El teorema anterior se puede traducir de la siguiente forma: si $s = (a_1, \ldots, a_k) \in S$ es un elemento minimal de $S$, entonces $\sum_{i=1}^k a_i \leq C = (n+1)(k-n)D(S')$. Tanto $n$ como $D(S')$ son fáciles de calcular, esto nos permite calcular los elementos minimales de $S$, ya que nos basta con barrer la región determinada por los elementos que tienen grado total menor que $C$, y esa región es finita.

**Ejemplo 9.1.4** *Sea $M$ el grupo abeliano cuyas ecuaciones son:*

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z-t=0 \\ 2x-5z=0 \end{array}\right\}$$

*El semigrupo $S'$ es el semigrupo generado por $\{(1,2),(1,0),(-1,-5),(-1,0)\}$. El máximo valor absoluto de un determinante de orden dos es $D(S') = 5$, por lo que*

$C = 3\times 2\times 5 = 30$. *Así pues, la región a barrer es* $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{N}^4 : x+y+z+t\leq 30\}$, *que es igual a*

$$\{(0,0,0,0),(0,1,0,1),(0,2,0,2),(0,3,0,3),(0,4,0,4),(0,5,0,5),\\ (0,6,0,6),(0,7,0,7),(0,8,0,8),(0,9,0,9),(0,10,0,10),(0,11,0,11),\\ (0,12,0,12),(0,13,0,13),(0,14,0,14),(0,15,0,15),(5,0,2,3),\\ (5,1,2,4),(5,2,2,5),(5,3,2,6),(5,4,2,7),(5,5,2,8),(5,6,2,9),\\ (5,7,2,10),(5,8,2,11),(5,9,2,12),(5,10,2,13),(10,0,4,6),(10,1,4,7),\\ (10,2,4,8),(10,3,4,9),(10,4,4,10),(10,5,4,11),(15,0,6,9)\}.$$

*Los minimales de dicho conjunto (quitando el cero) son* $\{(0,1,0,1),(5,0,2,3)\}$. *Por lo que* $S = \langle(0,1,0,1),(5,0,2,3)\rangle$.

La siguiente proposición demuestra que los semigrupos afines con teoría de divisores son isomorfos a uno de la forma $S = M\cap\mathbb{N}^k$.

**Proposición 9.1.5** *Sea* $S\subseteq\mathbb{N}^k$ *un semigrupo y sea* $\partial : S\to\mathbb{N}^l$ *una teoría de divisores en* $S$. *Entonces* $\mathsf{G}(\partial(S))\cap\mathbb{N}^l = \partial(S)$.

*Demostración*: Sea $\partial(s_1)-\partial(s_2)\in\mathbb{N}^l$. Entonces, $\partial(s_2)\leq\partial(s_1)$ y como $\partial$ es una teoría de divisores, tenemos que $s_2\leq_S s_1$. Por tanto, existe un $t\in S$ tal que $s_2+t = s_1$ y en consecuencia $\partial(s_2)+\partial(t) = \partial(s_1)$. De esto se sigue que, $\partial(s_1)-\partial(s_2) = \partial(t)\in\partial(S)$. ■

Como $\partial(S)$ es isomorfo a $S$ (esto se debe a que $\partial$ es inyectiva cuando $S$ no tiene unidades) y como $\partial(S)$ verifica que $\mathsf{G}(\partial(S))\cap\mathbb{N}^l = \partial(S)$, basta tomar $M = \mathsf{G}(\partial(S))$.

Por otro lado, si $S = M\cap\mathbb{N}^k$, entonces $\mathsf{G}(S)\cap\mathbb{N}^k = M\cap\mathbb{N}^k$. Además, se tiene claramente que $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)\cap\mathsf{G}(S)\subseteq\mathsf{G}(S)\cap\mathbb{N}^k$, por lo que $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)\cap\mathsf{G}(S)\subseteq S$ y la otra inclusión es trivial, de lo que se sigue que $S$ tiene una teoría de divisores. Es más todo semigrupo isomorfo a $S$ tiene una teoría de divisores, ya que las teorías de divisores se mantienen por isomorfismos.

Tenemos probado el siguiente teorema:

**Teorema 9.1.6** *Sea $S$ un semigrupo afín. Entonces, $S$ tiene una teoría de divisores si y sólo si $S$ es isomorfo a un semigrupo de la forma* $M\cap\mathbb{N}^k$ *con $M$ un subgrupo de* $\mathbb{Z}^k$ *cuyas ecuaciones son homogéneas.*

## 9.2. Cálculo de un sistema de generadores para la intersección del cono y del grupo asociado a un semigrupo afín

Recordemos que un semigrupo afín, $S$, tiene una teoría de divisores si y sólo si verifica que $S = \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S) \cap \mathsf{G}(S)$. Una de las inclusiones siempre se da, a saber, $S \subseteq \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S) \cap \mathsf{G}(S)$. Para ver si se da la otra inclusión, lo que vamos a hacer es calcular un sistema de generadores de $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S) \cap \mathsf{G}(S)$ y ver si está contenido en $S$. La idea que usamos para calcular dicho sistema de generadores se basa en que todo elemento de un sistema minimal de generadores de $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S) \cap \mathsf{G}(S)$ tiene que ser primitivo (esto es, no puede ponerse como suma de otros dos elementos de $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S) \cap \mathsf{G}(S)$). Encontramos una cota para los elementos que son primitivos, y al igual que hicimos en la sección anterior, basta con barrer la región determinada por dicha cota.

**Proposición 9.2.1** *Sea $S \subseteq \mathbb{N}^k$ un semigrupo generado por $\{s_1, \ldots, s_t\}$. Si $x$ es un generador minimal de $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S) \cap \mathsf{G}(S)$, entonces $x = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i s_i$, con $\lambda_i \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$.*

*Demostración*: Claramente $\lambda_i \geq 0$ por estar $x \in \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$. Supongamos que $\lambda_i > 1$, entonces $x = s_i + y$, donde $y = (\lambda_i - 1)s_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{t} \lambda_j s_j$. Por tanto, $x$ no es primitivo ya que $s_i \in \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S) \cap \mathsf{G}(S)$ e $y \in \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S) \cap \mathsf{G}(S)$, por lo que no puede ser un generador minimal. ■

Este resultado nos proporciona la mencionada cota:

**Corolario 9.2.2** *Bajo las hipótesis anteriores, si $x$ es primitivo, entonces $x \leq \sum_{i=1}^{t} s_i$.*

Ahora bien, un sistema minimal de generadores de $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S) \cap \mathsf{G}(S)$ tiene que estar contenido en el conjunto de elementos primitivos de $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S) \cap \mathsf{G}(S)$, y éste a su vez está contenido en la caja $B = \{x \in \mathbb{N}^k : x \leq \sum_{i=1}^{t} s_i\}$. Podemos calcular las ecuaciones de $\mathsf{G}(S)$, y en consecuencia podemos siempre decidir si un elemento pertenece o no a $\mathsf{G}(S)$. Para decidir si un elemento está en $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S)$, podemos usar los resultados obtenidos en la sección anterior, de la siguiente manera: si queremos saber si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{Q}$ tales que

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i = c_{r+1}$$

con $c_i \in \mathbb{N}^k$, eliminando denominadores, es equivalente a encontrar una solución positiva con $x_{r+1} \neq 0$ del sistema:

$$(c_1 \dots c_r - c_{r+1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \end{pmatrix} = 0$$

Y este sistema tiene solución si y sólo si existe un generador minimal del semigrupo de soluciones positivas del sistema cuya última coordenada sea no nula. Esto lo podemos hacer usando la sección anterior.

Con todo esto, tenemos una forma concreta de comprobar si $S$ tiene o no una teoría de divisores.

**Ejemplo 9.2.3** *Sea*

$$S = \langle (2,0,0),(0,3,0),(0,0,5),(1,1,1),(0,2,3) \rangle.$$

*Tenemos que* $\mathsf{G}(S) = \mathbb{Z}^3$*, y como es simplicial,* $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S) \cap \mathsf{G}(S) = \mathbb{N}^3 \cap \mathbb{Z}^3 = \mathbb{N}^3 \neq S$*, por lo que* $S$ *no tiene teoría de divisores.*

**Ejemplo 9.2.4** *Sea*

$$S = \langle (2,0,0),(0,2,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1) \rangle.$$

*En este caso,* $\mathsf{G}(S) = \mathbb{Z}^3$*. Para ver si* $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S) \cap \mathsf{G}(S) = S$*, tenemos que ver que todos los elementos menores que* $(2+1+1, 2+1+1, 1+1+1) = (4,4,3)$ *que estén en* $\mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S) \cap \mathsf{G}(S)$ *están en* $S$*. Pero* $(1,0,0) = 1/2(2,0,0) \in \mathrm{L}_{\mathbb{Q}^+}(S) \cap \mathsf{G}(S) \setminus S$*, por lo que son distintos y* $S$ *no tiene teoría de divisores.*

**Ejemplo 9.2.5** *Un ejemplo de semigrupo con teoría de divisores podría ser*

$$S = \langle (0,1,0,1),(5,0,2,3) \rangle,$$

*ya que* $S$ *es el semigrupo de soluciones positivas del sistema de ecuaciones*

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z-t=0 \\ 2x-5z=0 \end{array}\right\}$$

# Bibliografía


[1] R. Apéry. *Sur les branches superlinéaires des courbes algébriques.* C. R. Acad. Sci. Paris, 222, 1946.

[2] J. Bertin, P. Carbonne. *Semi-Groupes d'entiers et application aux branches.* Journal of Algebra **49**, 81-95 (1977).

[3] E. Briales, A. Campillo, C. Marijuán, P. Pisón. *Minimal systems of generators for ideals of semigroups.* Preprint, 1995.

[4] H. Bresinski. *On prime ideals with generic zero* $x_i = t^{n_i}$. Proc. Amer. Math. Soc. **47** #2 (1975) 329-332.

[5] B. Buchberger. *Gröbner bases: an Algorithm Method in Polynomial Ideal Theory.* In: Bose N.K. ed.,Recent Trends in Multidimensional System Theory, Reidel, 1985.

[6] A. H. Clifford. *Arithmetic and ideal theory of commutative semigroups.* Ann. Math. **39** (1938), 594-610.

[7] A. H. Clifford. *Partially ordered abelian groups.* Ann. Math. **41** (1949), 465-473.

[8] A. H. Clifford and G. B. Preston. *The Algebraic Theory of Semigroups.* American Mathematical Society, Mathematical surveys, number 7, 1961.

[9] D. Cox, J. Little, D. O'Shea. *Ideals, Varieties and Algorithms.* Springer-Verlag, New York 1992.

[10] C. Delorme. *Sous-monoïdes d'intersection complète de* $\mathbb{N}$. Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4éme. série, t.9, 1976, 145-154.

[11] F. Di Biase, R. Urbanke. *An algorithm to calculate the kernel of certain polynomial ring homomorphisms.* Experimental Mathematics, **4**(3) (1995), 227-234.

[12] K.G. Fischer, J. Shapiro. *Mixed matrices and binomial ideals.* Preprint, 1995.

[13] K.G. Fischer, W. Morris, J, Shapiro. *Affine semigroup rings that are complete intersections.* Preprint, 1996.

[14] R. Gilmer *Commutative semigroup rings.* Chicago Lectures in Mathematics, 1984.

[15] S. Goto, N. Suzuki, K. Watanabe. *On affine semigroups.* Japan J. Math. **2** (1976), 1-12.

[16] S. Goto, K. Watanabe. *On graded rings II: $\mathbb{Z}^n$-graded rings.* Tokyo J. Math. **1** (1978), 1-12.

[17] R.L. Graham, H.O. Pollak. *On addressing problems for loop switching.* Bell System Tech. J. **50** (1971), 175-193.

[18] W. Gröbner. *Über Veronesesche Varietäten und deren Projektionen.* Arch. Math. **16** (1965), 257-264.

[19] J. Herzog. *Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings.* Manuscripta Math., **3** (1970), 175-193.

[20] M. Hochster. *Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes.* Ann. of Math. **96** (1972), 318-337.

[21] Y. Kamoi. *Defining ideals of Cohen-Macaulay semigroup rings.* Communications in Algebra, **20**(11), 3163-3189 (1992).

[22] E. Kunz. *The value-semigroup of a one-dimensional Gorenstein ring.* Proc. Amer. Math. Soc. **25** (1973), 748-751.

[23] G. Lettl. *Subsemigroups of finitely generated groups with divisor-theory.* Mh. Math. **106** (1988), 205-210.

[24] F.S. Macaulay *Algebraic theory of modular systems.* Cambridge Tracts in Math. vol. 19, 1916.

[25] P. Narendran, C. Ó'Dúnlaing. *Cancellativity in finitely presented semigroups.* J. Symbolic Computation **7** (1989), 457-472.

[26] L. Rédei. *The theory of finitely generated commutative semigroups.* Pergamon, 1965.

[27] J.C. Rosales. *Semigrupos numéricos.* Tesis Doctoral Universidad de Granada, 1991.

[28] J.C. Rosales. *An algorithmic method to compute a minimal relation for any numerical semigroup.* Por aparecer en Inter. J. Algebra and Computation.

[29] J.C. Rosales. *On numerical semigroups.* Semigroup Forum **52** (1996) 307-318.

[30] J.C. Rosales. *On symmetric numerical semigroups.* Por aparecer en J. Algebra.

[31] J.C. Rosales. *On presentations of subsemigroups of* $\mathbb{N}^n$. Por aparecer en Semigroup Forum.

[32] J.C. Rosales. *Function minimum associated to a congruence on integral n-tuple space.* Semigroup Forum **51** (1995), 87-95.

[33] J.C. Rosales. *On finitely generated submonoids of* $\mathbb{N}^k$. *Semigroup Forum*, **50** (1995) 251-262.

[34] J.C. Rosales, Pedro A. García-Sánchez. *On complete intersecction affine semigroups.* Communications in Algebra, **23**(14) (1995), 5395-5412.

[35] U. Schäfer, P. Schenzel. *Dualizing complexes and affine semigroup rings.* Trans. Amer. Math. Soc. **322** (1990), 561-582.

[36] R. Stanley. *Combinatorics and commutative algebra.* Progress in Mathematics, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1983.

[37] R. Stanley. *Hilbert functions on graded algebras.* Adv. in Math. **29** (1978), 57-73.

[38] B. Sturmfels. *Gröbner bases and convex polytopes.* Expanded lecture notes from the Holiday Symposium at New Mexico State University, Las Cruces, December 27-31, 1994.

[39] B. Sturmfels. *Gröbner bases of toric varieties.* Tôhoku Math. J. **43** (1991), 249-261.

[40] D. Eisenbud, B. Sturmfels. *Binomial Ideals.* Preprint, 1995.

[41] N. V. Trung, L.T. Hoa. *Affine semigroups and Cohen-Macaulay rings generated by monomials.* Trans. Amer. Math. Soc. **298** (1986), 145-167.

[42] K. Watanabe *Some examples of one dimensional Gorenstein domains.* Nagoya Math. J. **49** (1973), 101-109.