

Universidad de Granada

Departamento de Estadística e Investigación Operativa



**Modelos de choque y desgaste:
Aproximación analítico-matricial**

Shocks and wear models:
A matrix-analytic approach

*Tesis presentada para el grado de Doctor con
mención europea por la Universidad de Granada*

María del Carmen Segovia García

Granada 2009

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: María del Carmen Segovia García
D.L.: GR. 3145-2009
ISBN: 978-84-692-5183-6

Esta memoria ha sido realizada por D^a. María del Carmen Segovia García bajo la dirección del Dr. D. Rafael Pérez Ocón y la Dra. D^a. Delia Montoro Cazorla, y presentada en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Granada, para optar al grado de Doctor con mención europea por la Universidad de Granada.

D^a. María del Carmen Segovia García

V^o.B^o. de los directores de la memoria

Dr. Rafael Pérez Ocón

Dra. Delia Montoro Cazorla

Granada 2009

Agradecimientos

En primer lugar, quisiera agradecer a mis directores de tesis Rafael Pérez Ocón y Delia Montoro Cazorla la confianza que han depositado en mí, el apoyo y el ánimo que me han dado durante estos años.

Muchas gracias al profesor Carlos Guedes Soares y a mis compañeros del Centro de Tecnología e Ingeniería de la Marina del “Instituto Superior Técnico de Lisboa” por acogerme en Lisboa, por hacerme sentir bienvenida y por la ayuda que me han prestado durante mi estancia allí.

Quisiera agradecer también al departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Granada por haberme proporcionado la posibilidad de desarrollar allí mi trabajo en el mejor ambiente posible, y a mis compañeros del departamento, especialmente a mis amigos Ana Esther, Esquivel, Ismael, Jose Manuel y Silvia, sin vosotros el camino recorrido hasta este momento habría sido mucho más duro .

Mi más sincero agradecimiento a la Universidad de Granada por proporcionarme la posibilidad de llevar a cabo este trabajo, a la Junta de Andalucía y al Ministerio de Educación y Ciencia. Sin su ayuda esta investigación no habría sido posible.

No quisiera olvidarme de los evaluadores de esta Memoria, el profesor Enrico Zio y la profesora Sophie Mercier, gracias por el esfuerzo realizado para revisar esta Memoria en tan corto espacio de tiempo y por las sugerencias

realizadas para mejorar la calidad de la misma.

A mis amigos Fernando y Zeinab, muchas gracias por escucharme y ayudarme siempre que lo he necesitado.

Finalmente, pero no por ello menos importante, gracias a mi familia, especialmente a mis padres y a mi hermano que me han apoyado y escuchado en todo momento. A mis abuelos.

Índice general

1. Introducción	15
1.1. Introducción (versión en español)	15
1.1.1. Justificación	15
1.1.2. Métodos analítico-matriciales	18
1.1.3. Distribuciones tipo-fase	19
1.1.4. Procesos de llegadas Markovianos	20
1.1.5. Antecedentes	21
1.1.6. Contribuciones	22
1.1.7. Organización	24
1.2. Introduction (English version)	26
1.2.1. Justification	26
1.2.2. Matrix-analytic methods	29
1.2.3. Phase-type distributions	29
1.2.4. Markovian arrival processes	30
1.2.5. Background	31
1.2.6. Contributions	32
1.2.7. Organization	34
2. Definiciones	35
2.1. Modelos de choque y desgaste	35
2.2. Distribuciones tipo-fase	36
2.2.1. Propiedades de clausura	38
2.2.2. El proceso de renovación tipo-fase	39
2.2.3. Propiedades de caracterización	41

2.2.4.	Propiedades de aproximación	41
2.3.	Procesos de llegadas Markovianos	45
2.3.1.	Versión estacionaria	46
2.3.2.	Ejemplos y propiedades	47
2.4.	Elementos analíticos y probabilísticos	47
2.4.1.	Operaciones de Kronecker	47
2.4.2.	Transformada de Laplace	48
2.4.3.	Procesos de renovación	48
2.4.4.	Ecuaciones diferenciales adelantadas de Kolmogorov	48
3.	Sistemas de choque y desgaste usando distribuciones PH	51
3.1.	Introducción	52
3.2.	Modelo de choque	53
3.2.1.	Tiempo de vida del sistema	54
3.2.2.	Proceso de recuento	57
3.3.	Modelo de choque y desgaste	61
3.3.1.	Proceso de recuento	64
3.4.	Casos particulares	65
3.4.1.	Proceso de renovación tipo-fase de choque	66
3.4.2.	Modelo de daño extremo	67
3.4.3.	Modelo de choques acumulados	68
3.4.4.	Modelo de rachas de choques	69
3.5.	Aplicación numérica	71
4.	Sistemas de choque y desgaste usando MAP	79
4.1.	Introducción	79
4.2.	El modelo	80
4.3.	Reemplazamientos	83
4.3.1.	Tiempos entre llegadas	84
4.3.2.	Número de reemplazamientos	86
4.4.	Modelo con un número limitado de choques	88
4.4.1.	Generador	88
4.4.2.	Reemplazamientos	90

4.4.3. Vector de probabilidades estacionarias	91
4.4.4. Choques siguiendo una proceso de renovación tipo-fase	91
4.4.5. Número de choques entre reemplazamientos	92
4.5. Aplicación numérica	94
5. Sistemas de choque usando un MAP con reemplazamiento	99
5.1. Introducción	99
5.2. Modelo de choque	100
5.2.1. Generador	101
5.2.2. Vector de probabilidades estacionarias	103
5.3. El proceso de recuento	103
5.3.1. Tiempo de vida entre reemplazamientos	106
5.4. Modelo con un número limitado de choques	108
5.5. Modelo de daño acumulado	114
6. Conclusiones y futuras investigaciones	121
6.1. Conclusiones y futuras investigaciones (versión en español) . .	121
6.2. Conclusions and future research (English version)	125

Índice de figuras

2.1. Densidades de la distribuciones PH y Weibull	43
2.2. Distribuciones empírica y PH	45
3.1. Diagrama de tiempos de vida entre choques	55
3.2. Diagrama de choques	56
3.3. Diagrama de choques y desgaste	62
3.4. Probabilidades de ocurrencia de choques	74
3.5. Funciones de supervivencia siguiendo dos procedimientos . . .	74
3.6. Función de supervivencia del sistema	76
3.7. Razón de fallo entre choques y para el sistema	78
4.1. Diagrama del sistema	82
4.2. Funciones del supervivencia del sistema entre reemplazamien- tos para $K = 1, 2, 4, 8$	98
5.1. Probabilidad de n choques en t	120
5.2. Función de supervivencia del sistema	120

Índice de tablas

2.1. Número de ciclos hasta el fallo en un test de vida de 60 aparatos	44
3.1. Probabilidades de supervivencia	78
4.1. Vectores de probabilidades estacionarias	97
4.2. Probabilidades de K choques en $t=1000$	98
5.1. Probabilidades de n renovaciones en el instante $t = 15$	113
5.2. Vector de probabilidades estacionarias	114
5.3. Probabilidades de supervivencia	117
5.4. Probabilidades de fallo	118

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción (versión en español)

1.1.1. Justificación

En el estudio de la fiabilidad de sistemas, los fallos pueden deberse a causas internas, como el material de que están hechas las componentes, la estructura de dichas componentes en el sistema, y, en general, el deterioro debido al uso. Asimismo, el sistema puede sufrir fallos debido a causas externas, que dependen del entorno en que dicho sistema opera. Para conseguir que el sistema esté operativo el mayor tiempo posible se pueden aplicar distintas políticas de mantenimiento, una de estas políticas es la reparación. Pero, los sistemas se deterioran con el tiempo y, después de un determinado número de reparaciones, ya no están en las condiciones adecuadas para continuar operando, es en este momento cuando la política de reemplazamiento nos permite reiniciar el sistema como si fuese nuevo, alargando el tiempo de servicio del mismo. Cuando un sistema funciona normalmente, todos estos elementos y operaciones (deterioro, fallos internos y externos, reparaciones y reemplazamientos), ocurren sucesivamente, y afectan al tiempo total que este sistema estará operativo.

Entendemos por choque un suceso puntual debido a una fuente externa al sistema que afecta al tiempo de vida del mismo. Los sistemas, ya sean

mecánicos o electrónicos, están sometidos a choques o fallos externos. Es bien conocido que un número excesivo de fallos causa defectos de funcionamiento o incluso el fallo del propio sistema, por lo que se hace necesario limitar este número de fallos. Por ejemplo, los fallos en cascada, ocurren en el caso de grandes cortes eléctricos; estos apagones se deben a fallos que llegan al sistema de forma aleatoria (choques), y que provocan daños en el sistema de transmisión, cuyo número de choques está limitado. Para que el sistema de transmisión proporcione un servicio aceptable, el número de fallos que puede soportar, antes de que se produzca un fallo que provoque otros fallos, se debe limitar, determinando este límite mediante experiencias previas. Asimismo, los dispositivos electrónicos, coches, computadores, etc..., sufren una gran cantidad de fallos a lo largo de su vida que normalmente son reparados; pero, dependiendo del tiempo de vida residual estimado o de los costes de las distintas reparaciones, después de un cierto número de fallos, son reemplazados. Esta política de mantenimiento se puede aplicar cuando consideramos sistemas de seguridad. En este caso, para prevenir un fallo fatal es mejor programar los reemplazamientos. En general, los reemplazamientos se llevan a cabo cuando el sistema ya no funciona adecuadamente o cuando los costos de las sucesivas reparaciones son excesivos.

Los estudios previos en teoría de la fiabilidad tratan la reparación y el reemplazamiento de forma extensa. Existen varias políticas de reemplazamiento que se aplican frecuentemente: reemplazamiento por edad y reemplazamiento por bloques. En el caso del reemplazamiento por edad, el sistema se reemplaza en el momento en que se produce un determinado fallo o cuando se alcanza una edad prefijada. En el caso del reemplazamiento por bloque, el sistema se reemplaza cuando ocurre un determinado fallo o en intervalos de tiempo idénticos. En Barlow [10] se estudian interesantes resultados relacionados con estas políticas de mantenimiento. Existen diversas políticas de mantenimiento en la literatura que se pueden aplicar para garantizar la supervivencia del sistema. En la presente Memoria consideramos aquellas que limitan el número de fallos. Con esta política el sistema se reemplaza cuando falla o cuando ha soportado un número prefijado de choques, este proced-

imiento permite eludir daños peligrosos en el sistema. En Neuts et al. [57] se estudia un sistema usando esta política de mantenimiento.

Es frecuente que los tiempos de operatividad y reparación sigan distribuciones frecuentes en fiabilidad: exponencial o Erlang (ver Yeh [83]), Weibull, y modelos basados en la Weibull (ver Ling y Pan [37], Jiang y Murthy [27, 28, 29], Jiang et al. [30], Xie y Lai [81] y Xie et al. [82]).

En los últimos años, las distribuciones tipo-fase, han sido introducidas en el estudio de la fiabilidad de sistemas, extendiendo las distribuciones Erlangianas, y demostrando que los métodos analítico-matriciales son apropiados para estudiar sistemas complejos (ver Montoro-Cazorla y Pérez-Ocón [44, 64, 65], Chakravarty [13] y Neuts y Meier [56], entre otros).

Cuando los sistemas están sometidos a fallos externos (choques), es usual considerar que dichos choques llegan de forma independiente. En general, los procesos que más se usan son el de Poisson, el de renovación, o el proceso de renovación tipo-fase (ver Montoro-Cazorla et al. [46], Neuts y Bhattacharjee [54], Neuts et al. [57]). En esta Memoria se consideran aquellos sistemas sometidos a choques cuyas llegadas no son independientes. Este tipo de sistemas no ha sido tratado de forma extensa en artículos previos, y, en ellos, la llegada de un choque afecta al sistema de tal manera que el siguiente choque que llegue está condicionado por los choques anteriores. Esto permite un modelo para introducir el concepto de desgaste. Una estructura adecuada que considera esta propiedad fue introducida por Neuts [50], es el denominado proceso de llegadas Markoviano. Algunos ejemplos prácticos de ese proceso se pueden ver en [52, 53]. Un modelo que considera un proceso de llegadas Markoviano para representar la llegada de fallos, donde los tiempos de vida siguen distribuciones tipo-fase, se estudia en Montoro-Cazorla and Pérez-Ocón [45]. En este modelo se consideran dos tipos de fallos y se calcula el tiempo de vida del sistema, extendiendo resultados previos obtenidos por Biswas y Sarkar en [12].

El propósito central de esta Memoria es el estudio de modelos de choque y desgaste mediante el uso de métodos analítico-matriciales. Los modelos de choque y desgaste son clásicos en teoría de fiabilidad. Los sistemas es-

tán sometidos a condiciones medioambientales que ocasionan daños externos que modifican su operatividad. Todas estas causas se consideran choques. Algunos de estos choques pueden ser fatales. El primer modelo de esta clase fue estudiado en Esary et al. [15], y se presenta en el Capítulo 3. Este modelo ha sido extendido en la literatura considerando que los choques llegan siguiendo un proceso de renovación, un proceso no-homogéneo de nacimiento puro, y otros procesos. En los años setenta del siglo pasado dicho modelo fue estudiado usando metodología no-paramétrica. En Neuts y Bhattacharjee [54] se obtuvo, por primera vez, una expresión explícita de la función de supervivencia del modelo clásico de Esary et al. utilizando distribuciones tipo-fase.

Estas distribuciones y los procesos de llegadas Markovianos constituyen la llave de los métodos analítico-matriciales. En el presente estudio se consideran los modelos de choque y desgaste considerando estas nuevas hipótesis. Las distribuciones tipo-fase se introducen para representar tiempos de vida y los procesos de llegadas Markovianos se utilizan para representar llegadas de choques. Supuestas estas condiciones el proceso que gobierna el sistema es un proceso de Markov con espacio de estados vectorial. Se consideran los distintos modelos en régimen transitorio y estacionario: el modelo general, modelos que soportan un número de choques limitado, modelos de reemplazamiento, y algunos más relacionados con aplicaciones prácticas. El cálculo de la función de supervivencia y otras medidas de fiabilidad se lleva a cabo siguiendo procedimientos analíticos y otros puramente Markovianos. Las expresiones se presentan de forma algorítmica con el objetivo de que puedan ser utilizadas. Pensando en la aplicabilidad de estos modelos, se han utilizado programas que permiten el ajuste de distribuciones tipo-fase a cualquier conjunto de datos o distribución paramétrica; estos ajustes se han utilizado en las aplicaciones numéricas presentadas en esta Memoria.

1.1.2. Métodos analítico-matriciales

Los métodos analítico-matriciales (Matrix-analytic methods, cuyo acrónimo en inglés es MAM) juegan un importante papel en la modelización de

sistemas. Éstos han sido aplicados en teoría de colas y en fiabilidad. Los elementos básicos de los MAM son las distribuciones tipo-fase y los procesos de llegadas Markovianos, estas estructuras se definen a partir de los procesos de Markov. Cuando los elementos que acabamos de mencionar se utilizan para representar el funcionamiento de un sistema, el proceso que gobierna el sistema es un proceso de Markov complejo cuyo espacio de estados está formado por vectores. Para estos procesos, los MAM constituyen la herramienta adecuada.

Los MAM fueron introducidos por Marcel Neuts [51]. Desde entonces, se han desarrollado nuevos procedimientos y algoritmos para resolver los problemas analíticos que aparecen cuando se introducen las distribuciones tipo-fase y los procesos de llegadas Markovianos. El cálculo matricial es fundamental en estos métodos, ya que el proceso de Markov generalizado que gobierna el sistema se identifica por un generador infinitesimal que viene expresado por bloques. La búsqueda de procedimientos y técnicas para resolver los problemas que se presenta en el estudio de sistemas estocásticos usando esta metodología es un tópico de investigación en el momento presente.

1.1.3. Distribuciones tipo-fase

Una distribución tipo-fase (Phase-type cuyo acrónimo en inglés es PH) se define como la distribución del tiempo hasta la absorción en un proceso de Markov finito con un único estado absorbente. Estas distribuciones son versátiles y aptas para la algoritmización y computación, por lo tanto constituyen una herramienta útil en la construcción de modelos estocásticos para el estudio de la fiabilidad de sistemas.

La transformada de Laplace-Stieltjes de estas distribuciones es racional (ver O’Cinneide [58]), permitiendo, de esta manera, la inclusión de dicha transformada en los cálculos de sistemas complejos.

Las fases de estas distribuciones se pueden interpretar en fiabilidad como estados intermedios de degradación cuando el tiempo de vida de las componentes de un sistema sigue distribuciones tipo-fase, o bien, se pueden utilizar para designar las etapas de reparación y control cuando los tiempos de

reparación siguen distribuciones tipo-fase. La interpretación de las fases no suele tener significado cuando las distribuciones tipo-fase se consideran en otros dominios.

Las distribuciones tipo-fase son densas en el sentido de las distribuciones en la familia de distribuciones continuas definidas sobre la recta real positiva. Esta propiedad teórica es de especial interés en la aplicación y se le ha prestado atención en los últimos años. Desde el punto de vista de la aplicación práctica de estas distribuciones, en Asmussen et al. [7] y en Thümmler et al. [78], se considera el algoritmo EM para el ajuste de distribuciones tipo-fase a un conjunto de datos o a otras distribuciones paramétricas definidas en la recta real positiva. Algunas de las referencias de estos artículos se refieren a procedimientos algorítmicos y computacionales. En Asmussen [6] se prueba la densidad de una mezcla finita de distribuciones Erlang en la familia de distribuciones continuas definidas sobre el eje real positivo.

Los autores han obtenido propiedades de interés en fiabilidad para distribuciones tipo-fase que pertenecen a esta familia en particular en Segovia [70].

1.1.4. Procesos de llegadas Markovianos

Los procesos de llegadas Markovianos (Markovian arrival processes, cuyo acrónimo en inglés es MAP) se han utilizado para los modelos de sistemas demostrando su utilidad. Son una extensión del proceso de Poisson. La definición de este tipo de procesos se basa en la construcción de un proceso de Markov con un generador que puede ser descompuesto en sumandos, de tal manera que cada sumando representa la ocurrencia de eventos puntuales que son condicionalmente dependientes, ver Neuts [50, 52]. Esta relación de dependencia es una propiedad esencial. Los procesos de llegadas conocidos: Poisson, proceso de renovación tipo-fase, procesos de Markov modulados por un proceso de Poisson, son casos particulares de los MAP. La utilidad de este tipo de procesos es clara cuando llegan diferentes tipos de fallos externos al sistema, ya que éstos se pueden integrar en la estructura de un MAP que gobierna las llegadas de los fallos externos. Ajustar un MAP a un proce-

so puntual es un tópico de investigación en la actualidad. Sin embargo, la simulación de un MAP parece ser un problema más asequible.

1.1.5. Antecedentes

Artículos previos relacionados con los tópicos que se estudian en esta Memoria son aquellos que estudian los modelos de choque y desgaste aplicando MAM. Los MAM han sido ampliamente utilizados en teoría de colas, y no demasiado en fiabilidad, aunque su uso está siendo cada vez más frecuente. En primer lugar, se presentan una serie de trabajos que han aplicado estos métodos en fiabilidad. Como se mencionó anteriormente, el primer trabajo sobre modelos de choques y desgaste es el de Esary et al. [15], pero el primero en el que se aplicaron los MAM a estos modelos es el de Neuts y Bhattacharjee [54]. En este artículo se estudia un problema de clausura paramétrico, mostrando que si la sucesión \bar{P}_k de probabilidades de supervivencia sigue una distribución tipo-fase discreta y los choques llegan siguiendo un proceso de renovación tipo-fase, entonces el tiempo de vida del sistema sigue una distribución tipo-fase continua calculándose su representación. En Manoharan et al. [41] se considera un modelo de choques cuyo proceso de llegadas es una mezcla finita de procesos de Poisson no-homogéneos, mostrándose la propiedad de clausura para este caso. En estos dos artículos los fallos del sistema se deben únicamente a los choques. Un sistema más complejo se estudia en Neuts et al. [57]. En este artículo se presenta un sistema sometido a fallos internos y externos (choques), hay reparación no tan buena como nueva, todos los tiempos involucrados en este sistema siguen distribuciones tipo-fase. Bajo estas suposiciones, se construye el proceso de Markov que gobierna el sistema, y se obtienen la disponibilidad y la razón de ocurrencia de fallo en régimen estacionario. En Frostig y Kenzin [20] se estudian dos modelos de choque, uno considerando un proceso de llegadas de Poisson, y otro considerando un proceso de salto de Markov que representa las condiciones ambientales. Los fallos se deben sólo a los choques, el número de choques no es limitado y las reparaciones son instantáneas. Todos estos artículos aplican MAM.

Otros muchos artículos relacionados con el modelo clásico de Esary et al. [15] y sus variantes, como el modelo de daño extremo y el modelo de daño acumulado, han sido publicados sin usar MAM. Aquí citamos los más frecuentes. Un modelo de choques utilizando un proceso de renovación de Markov se estudia en Igaki et al. [26]. Gut y Hüsler [23] estudian un modelo de choques de daño acumulado, modificando el umbral de fallo. Una mezcla de diferentes modelos de choques es estudiada en Gut [22]. Un artículo interesante es el de Mallor y Omey [39] en el cual se consideran rachas de k choques críticos. Otro modelo de choques con tiempos entre llegadas siguiendo distribuciones Weibull o Gamma, deterioro, y política de reemplazamiento N (el reemplazamiento se lleva a cabo cuando el número de choques sobre el sistema es N) puede verse en Tang y Lam [76], donde se estudia los costes en régimen estacionario y una política de reemplazamiento óptima para minimizar estos costes. En el artículo de Mallor y Santos [40], se calcula la fiabilidad de un modelo de choques general que extiende el clásico permitiendo que exista correlación entre las variables que forman parte del sistema. En Frostig y Kenzin [19] se obtiene la disponibilidad en régimen estacionario de un sistema sometido a choques que siguen un proceso de Poisson, con umbral de fallo, cuyo mantenimiento se realiza mediante inspecciones y reparaciones preventivas/correctivas considerando distribuciones subexponenciales para la magnitud de los choques. La función de supervivencia de un sistema sometido a choques que llegan siguiendo un proceso de Poisson no-homogéneo a poblaciones heterogéneas puede verse en Finkelstein [18]. En Korzack y Levitin [32] se presenta un algoritmo para evaluar la supervivencia de sistemas en serie-paralelo que soportan fallos internos y externos destructivos (choques).

1.1.6. Contribuciones

La principal contribución de esta Memoria es la aplicación de los MAM al estudio de modelos de choque y desgaste. Las contribuciones se refieren al uso de distribuciones tipo-fase y MAP en el estudio de la fiabilidad de sistemas, y se llevan a cabo de diferentes maneras. Los modelos previos se extienden a modelos más generales considerando los MAM. La inclusión de

las distribuciones tipo-fase como tiempos de vida y de los MAP como llegadas de choques permite usar nuevos procedimientos para calcular los tiempos de supervivencia y medidas de funcionamiento. Algunos algoritmos y programas se han construido para facilitar los cálculos. Los sistemas han sido estudiados en régimen transitorio y estacionario.

Las únicas distribuciones que se utilizan son las distribuciones tipo-fase, discretas o continuas, dependiendo de la magnitud que se considere. Utilizando estos métodos se estudian diferentes modelos y se calculan sus medidas de funcionamiento bajo condiciones generales. Dado que las distribuciones tipo-fase son densas en la familia de distribuciones definidas en la recta real positiva, los resultados pueden considerarse de aplicación general, ya que estas distribuciones pueden aproximar sistemas gobernados por tiempos de vida generales. Por otro lado, es posible ajustar una distribución tipo-fase a cualquier conjunto de datos, por tanto, los métodos propuestos pueden aplicarse cuando disponemos únicamente de información empírica de los tiempos de vida de los sistemas. Los modelos que se estudian extienden modelos de artículos publicados con anterioridad.

Los modelos de choque y desgaste que se tratan en esta Memoria continúan el trabajo de Neuts y Bhattacharjee [54], considerando variantes de este modelo y obteniendo nuevos resultados. Se introduce la política N, teniendo en cuenta un caso de particular importancia: cuando el sistema puede soportar únicamente un número finito de choques. El proceso de renovación que gobierna los tiempos entre choques, asimismo, se generaliza, asumiendo que dichos tiempos entre llegadas dependen del número de choques, lo cual es de interés en la práctica e introduce cierto grado de dependencia entre los tiempos entre llegadas. El tiempo de vida del sistema después de cada choque se modifica utilizando un proceso geométrico. En el Capítulo 3 pueden verse los principales resultados sobre estos sistemas.

En esta Memoria se estudian también los sistemas sometidos a choques que llegan siguiendo un MAP. No hay muchos trabajos en fiabilidad que incluyan estos procesos como procesos de llegadas. Esta estructura implica que los tiempos entre llegadas de choques no son independientes. Dada la gener-

alidad de los MAP y de las distribuciones tipo-fase, los modelos propuestos son lo más generales posibles usando metodología Markoviana. Se considera la política N , y el caso en el que el número de choques antes del reemplazamiento es aleatorio. Además, se estudia el proceso de renovación que surge cuando se produce el reemplazamiento del sistema debido a un choque fatal. Estos modelos son estudiados en régimen transitorio y estacionario. Los principales resultados sobre este tipo de sistemas pueden verse en el Capítulo 4.

El modelo de Esary et al. [15] se estudia suponiendo un MAP como proceso de llegadas de choques y con un número de choques ilimitado. El proceso de Markov que gobierna este sistema envuelve matrices de orden infinito. Esto constituye una extensión del modelo clásico usando MAM. Se aplican políticas de reemplazamiento cuando un fallo fatal ocurre y se estudia el proceso de renovación asociado al sistema. Se presenta también el modelo de daño acumulativo. Los principales resultados de estos sistemas están en el Capítulo 5.

A través del estudio de los sistemas, los resultados que se obtienen se presentan en forma algorítmica para que puedan ser implementados computacionalmente y, de esta manera, ser aplicados por probabilistas y profesionales, de esta manera podrán ser considerados en el estudio de casos prácticos.

Los principales resultados de esta Memoria están en Montoro-Cazorla et al. [46, 47, 48, 49] y en Pérez-Ocón y Segovia [66, 67].

1.1.7. Organización

Esta Memoria está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se presentan los elementos básicos que se utilizan a lo largo de la misma: los modelos de choque y desgaste, las distribuciones tipo-fase, los MAP, las operaciones de Kronecker, y elementos probabilísticos y analíticos. En el Capítulo 3 se estudian los modelos de choque y desgaste mediante distribuciones tipo-fase. En el Capítulo 4 se tratan los modelos de choque y desgaste mediante MAP y con un número limitado de choques. En el Capítulo 5 se presentan el modelo de Esary et al. [15] usando MAP con renovaciones cuan-

do ocurre un choque fatal y otros sistemas derivados de éste. Finalmente se incluye un Capítulo de conclusiones.

1.2. Introduction (English version)

1.2.1. Justification

In the study of reliability systems, the failures can be due to internal causes, such as the materials of the components, the structure of the components in the system, and, in general, the deterioration due to use. Also, the system can undergo failures due to external causes, depending on the environment in which the system operates. In order to enlarge the time that the system will be operational, different maintenance policies can be applied. The repair is an operation usually included in the maintenance of systems. But the systems deteriorate with time, and after a certain number of repairs, the system is not in good conditions for working; then, the replacement policy allows to reinitiate the system as new, enlarging the service time of the system. When the system operate normally, all these elements and operations: deterioration, failures due to internal and external failures, repairs, and replacements occur simultaneously and affect the total time that the system will be operational.

In practical situations, the systems, mechanical or electronic, suffer shocks, strength, voltage, or, in general, external failures, and it is acceptable that an excessive number of these failures causes a defective functioning or even the failure of the system, so it is necessary to limit this number. For example, cascading failures occur for large blackouts of electric power transmission systems. Blackouts are produced by failures arriving randomly (shocks), and they cause damages in the transmission system, that has limits on its shocks. In order to maintain an acceptable service, the number of failures that the transmission system can support for eluding a failure provoking failures is limited, and determined by experience. Also, appliance electronics, cars, computers, undergo many failures during their operational time, and usually they are repaired. But depending on the estimated residual life or on the costs of the repairs, they are replaced after a certain number of failures. This maintenance policy can be applied when security systems are considered; then, to prevent a fatal failure it is better to program the replacements. In general, the replacement takes place when the system does not operate

properly, or the successive repairs are expensive.

The literature in reliability theory dealing with repair and replacement is extensive. There are several replacement policies, and there are two that has been applied broadly: age and block replacement. Under age replacement a system is replaced upon failure or at a prefixed age. Under block replacement a system is replaced upon failure and at identical interval times. Concerning these policies can be seen in Barlow [10]. Another replacement policy can be applied in order to guarantee the survival of the system, limiting the number of failures. In it, the system is replaced if it has failed or when it has undergone a prefixed number of failures. This policy has been applied in Neuts et al. [57]. This procedure is a warranty for eluding dangerous damage.

It is frequent that the operational and repair times follow usual distributions in reliability, such as exponential or Erlang (see Yeh [83]), Weibull, and models based on it (see Ling and Pan [37], Jiang and Murthy [27, 28, 29], Jiang et al. [30], Xie and Lai [81] and Xie et al. [82]).

In the last years, phase-type distributions have been introduced in the study of reliability systems, extending the Erlangian distributions, and showing that the matrix-analytic methods are appropriate for studying complex systems (see Montoro-Cazorla and Pérez-Ocón [44, 64, 65], Chakravarty [13] and, Neuts and Meier [56]).

When the system is subject to external failures (shocks), it is usual to consider that they arrive independently. In general, the most used arrival processes are Poisson, renewal, or PH-renewal (see Montoro-Cazorla et al. [46], Neuts and Bhattacharjee [54], Neuts et al. [57]). We consider systems under shocks whose interarrival times are not independent. This type of systems have not an extensive treatment in previous papers, it occurs when the shocks affect the system in such a way that the next shock is conditioned by the previous ones. This has a physical meaning, appealing to the wear undergone by the system. An appropriate structure considering this property has been introduced by Neuts [50], it is the Markovian arrival process (MAP). Some practical examples of this process can be seen in Neuts [52, 53]. A model considering an MAP for modeling failures, with lifetimes following

phase-type distributions, is studied in Montoro-Cazorla and Pérez-Ocón [45]. In this model, two types of failures are considered, and the lifetime of the system is calculated, extending the results given in Biswas and Sarkar [12].

The study of shocks and wear models following matrix-analytic methods is the central purpose of this Memory. The shocks and wear models are classic ones in reliability. The systems are subject to environmental conditions and to external failures causing damages and modifying the operativity of the systems. All these causes are considered shocks. Some of these can be fatal. The first model of this class is the one of Esary et al. [15], that is presented in Chapter 3. This model has being extended considering that the shocks arrive following a renewal process, nonhomogeneous pure birth process, and others. In the seventies of the last century, this model was studied under non-parametric methodology.

An explicit expression for the survival function of the classical model of Esary et al. was calculated for the first time by Neuts and Bhattacharjee [54], using phase-type distributions. These distributions and the Markovian arrival processes are the keys of the matrix-analytic methods. In the present study the shock and wear models under these new assumptions are considered. Phase-type distributions are introduced as lifetime models and the Markovian arrival processes are used for modeling the arrival of shocks. Under these conditions, the process governing the system is a Markov process with vector state space. Different models in transient and stationary regime are considered: the general model, models standing a limited number of shocks, replacement models, and some others related to practical applications. The calculation of the survival functions and other reliability measures are performed following analytic procedures and others typically Markovian. The expressions are presented in an algorithmic form to be applied for the practitioners. Thinking of the applicability, computational programs have been applied for fitting phase-type distributions to any dataset or parametric distribution; they have been used in the study of numerical applications.

1.2.2. Matrix-analytic methods

Matrix-analytic methods (MAM) play an important role in modeling systems. They have been applied in queueing theory and reliability. The basic elements of these methods are the phase-type distributions and the Markovian arrival processes. These structures are defined from the Markov processes. When these elements are involved for modeling systems, the process governing the systems is a complex Markov process, whose state space is formed by vectors. For these processes, the MAM are the appropriate tool.

The MAM were introduced by Marcel Neuts [51]. From then, new procedures and algorithms have been developed for solving the analytic problems that appear when phase-type distributions and Markovian arrival processes are introduced. The matrix calculus is fundamental in these methods, since the generalized Markov process governing the systems is identified by the infinitesimal generator, that is expressed by blocks. The search of procedures and techniques for solving the problems presented in the study of different stochastic systems under this methodology is a research topic at the present moment.

1.2.3. Phase-type distributions

A phase-type distribution (PH-distribution) is defined as the distribution of the time until absorption in a continuous time finite Markov process with only one absorbent state. These are versatile distributions and they are suitable for algorithmization and computation, so they are an useful tool in the construction of stochastic models for studying reliability systems.

The Laplace-Stieltjes transform of the phase-type distributions is rational (see O’Cinneide [58]), allowing the inclusion of this transform in the calculations of complex systems.

The phases of these distributions can be interpreted in reliability as intermediate states of degradation when the lifetime of the components of a system follows phase-type distributions, or can be used for designing the repair in stages of repair and control when the repair times follow phase-type

distributions. This interpretation of the phases does not occur when phase-type distributions are considered in other domains.

The phase-type distributions are dense in the sense of distribution functions in the family of continuous distribution functions defined on the positive real half-line.

This theoretical property is of special interest in the applications, and it has received attention in the last years. From the point of view of practical application of these distributions, in Asmussen et al. [7] and in Thümmler et al. [78], the EM algorithm is considered for fitting phase-type distributions to a dataset or to other parametric distributions defined on the positive real line. Some references in this paper are related to algorithmical and computational procedures. In Asmussen [6] is proved the density of finite mixture of Erlang distributions in the family of continuous distribution functions defined on the positive real half-line.

The author has obtained properties of interest in reliability for phase-type distributions belonging to this particular family in Segovia [70].

1.2.4. Markovian arrival processes

Markovian arrival processes (MAP) have been introduced in modeling systems and they have shown their utility as extension of the Poisson process. The definition of these processes is based in a Markov process with a generator that can be decomposed in summands in such a way that each summand represents the occurrence of point events that are conditionally dependent, see Neuts [50, 52]. This dependence relation is an essential property. The usual arrival processes: Poisson, PH-renewal, Markov process modulated by a Poisson process, are particular cases of MAP. The utility of the MAP is clear when different external failures arrive to a system, they all can be integrated in the structure of a MAP governing the arrival of all external failures. In a different way to the phase-type distributions, to fit an MAP to a point process is an actual research topic. However, the simulation of an MAP seems to be a more feasible problem.

1.2.5. Background

Previous papers related with the topics that are studied in the present Memory are the ones studying shocks and wear models under MAM. The MAM have been broadly applied in queueing theory, and not so much in reliability, though its utilization is being more frequent. First, we list previous works that have applied these methods in reliability. As we have said above, the first work on shocks and wear models is Esary et al. [15], but the first one in which MAM are applied to these models is in Neuts and Bhattacharjee [54]. A certain parametric closure problem is presented in this paper, showing that if the sequence \bar{P}_k follows a discrete phase-type distribution and the shocks arrive following a PH-renewal process, then the lifetime of the system follows a continuous phase-type distribution, calculating the representation of it. In Manoharan et al. [41] the same model is considered but the arrival process is a finite mixture of homogeneous Poisson processes, showing the closure property for this case. In these two papers, the failures of the system were due only to shocks. A more complex system is studied in Neuts et al. [57]. In it, a system subject to external (shocks) and internal failures is presented; there is a repair facility, and the repair is not so good as new, and all the involved times follow phase-type distributions. Under these assumptions, the Markov process governing the system is constructed, and the availability and the rate of occurrence of failures in stationary regime are calculated. In Frostig and Kenzin [20] two shock models are considered, one under a Poisson process arrival and other with a jump Markov process modeling the environment. The failure is only due to shocks, the number of shocks is not limited, and the repairs are instantaneous. In all these papers the MAM are applied.

Many other papers related with the classic model of Esary et al. [15] and other variants included in it, such as the extreme model and the cumulated model have been published. In all these papers the lifetime of the system is calculated using procedures different from the MAM. Shock models under a Markov renewal process is studied in Igaki et al. [26]. In Gut and Hüsler [23] the authors studied a shock model with cumulated damage modifying

the threshold of failure. A mixture of different shock models is studied in Gut [22]. An interesting paper considering run of k critical shocks is studied in Mallor and Omey [39]. A shock model with interarrival times following Weibull or Gamma distributions, deterioration, and replacement policy N is studied in Tang and Lam [76], calculating the stationary costs and an optimal policy for minimizing these costs. In Mallor and Santos [40] the reliability of a general shock model extending the classical one allowing a correlation for the variables involved in the system is calculated. In Frostig and Kenzin [19], the stationary availability of a system under shocks following a Poisson process, under a threshold of failure, and maintained by inspections and preventive/corrective repairs is calculated considering subexponential distributions for the magnitudes of the shocks. The survival function of a system subject to shocks arriving following a non-homogeneous Poisson process to heterogeneous populations is studied in Finkelstein [18]. In Korczak and Levitin [32] an algorithm for evaluating the survivability of series-parallel systems subject to internal and destructive external failures (shocks) is presented.

1.2.6. Contributions

The main contribution of this Memory is the application of the MAM in the study of shock and wear models. The contributions are related to the use of the phase-type distributions and the MAP in the study of reliability systems. They are performed following different ways. Previous models are extended to more general ones under the MAM. The inclusion of phase-type distributions as lifetimes and MAP as arrival of shocks implies to use new procedures to calculate the survival times and performance measures. Algorithms and computational programs have been constructed for facilitating the calculations. The systems are studied under stationary and transient regime.

The only distributions used are phase-distributions, discrete or continuous, depending on the quantity to be considered. Using these methods, different models are studied and calculated their performance measures under general conditions. Given that the phase-type distributions are dense in

the family of distribution functions defined on the positive real half-line, the results can be considered of general application, since they can approach systems governed by general lifetimes. On the other hand, it is possible to fit a phase-type distribution to any dataset. So, the proposed methods can be applied when we have only empirical information of the lifetimes involved in the systems, and the models we study extend previous papers published.

Shock and wear models under phase-type distributions are studied, continuing the work of Neuts and Bhattacharjee [54]. In the Memory, some variants of this model are considered, obtaining new results. So, the policy N is introduced, having into account a case of practical importance: when the system can stand only a finite number of shocks. Also, the renewal process governing the interarrival times is generalized, assuming that these interarrival times depend on the number of shocks, which is of practical interest also and introduces a certain dependence in these interarrival times of shocks. The lifetime of the systems after shocks are modified using geometric processes. The main results about these systems are in Chapter 3.

Shocks and wear models subject to shocks arriving following an MAP are studied. There are not many works in reliability including these processes as arrival ones. This structure implies that the interarrival times between shocks are not independent. Given the generality of the MAP and the phase-type distributions, the models we propose are the more general possible under Markovian methodology. Policy N is considered, and the case of a random number of shocks before the replacement. Moreover, the renewal process arising from the replacement of the system when shocks are fatal, is studied. These models are studied in transient and stationary regime. The main results about these systems are in Chapter 4.

The model of Esary et al. [15] under MAP as shock arrivals, without limitation of the number of shocks is studied. The Markov process governing the system involves matrices of infinite order. This is the extension of the classical one under MAM. A replacement policy is applied to this system when a fatal failure occurs. The renewal process associated to the system is studied. The cumulative damage model is presented. The main results about

these systems are in Chapter 5.

Throughout the study of the systems, the obtained results are presented in an algorithmic form to be computationally implemented in order to be applied for the practitioners and applied probabilistician, and so they can be considered in studies of practical cases.

The main results are in Montoro-Cazorla et al. [46, 47, 48, 49]. and in Pérez-Ocón and Segovia [66, 67].

1.2.7. Organization

This Memory is organized as follows. In Chapter 2 are presented the basic elements used in the Memory: shock and wear models, phase-type distributions, MAP, Kronecker operations, and probabilistic and analytic elements that are used throughout the Memory. In Chapter 3 shock and wear models involving PH-distributions are studied. In Chapter 4 shock and wear models under MAP and with a limited number of shocks is studied. In Chapter 5 the model of Esary et al. [15] under MAP with renewal when a fatal shock occurs, and other derived systems, is presented. A Chapter of Conclusions is included.

Capítulo 2

Definiciones

A continuación se introducen los elementos probabilísticos y algorítmicos utilizados a lo largo de esta Memoria. Se presentan el modelo de Esary et al. [15], la notación, los estudios iniciales de estos modelos y algunas extensiones. La Sección 2 está dedicada a las distribuciones PH y sus propiedades. Se estudian dos ejemplos de ajuste de estas distribuciones a una distribución Weibull y a un conjunto de datos. En la Sección 3 se incluyen las definiciones y las propiedades de los MAP. Y, finalmente, en la Sección 4 se incluyen los elementos probabilísticos y analíticos necesarios para el estudio de estos modelos.

2.1. Modelos de choque y desgaste

La supervivencia de un sistema sometido a choques aleatorios ha sido estudiada desde el modelo clásico de Esary et al. [15], este modelo considera el tiempo de vida de un sistema sometido a choques que llegan siguiendo un proceso de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$. Este sistema tiene una probabilidad de supervivencia \bar{P}_k al choque k . Entonces, la función de supervivencia del modelo $\bar{H}(t)$ viene dada por,

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(t) = k\} \bar{P}_k \quad (2.1)$$

De manera explícita, el interés se centró en la conservación de las clases de fiabilidad: si la sucesión \bar{P}_k pertenecía a una determinada clase de fiabilidad discreta, se estudiaban las condiciones para que el proceso que gobierna las llegadas de choques satisficiera que la función de supervivencia $\bar{H}(t)$ perteneciese a la misma clase de fiabilidad continua que la sucesión \bar{P}_k . El cálculo explícito de esta función no era el objetivo de estos estudios, y dicho cálculo no fue realizado hasta que se introdujo la metodología paramétrica. En años posteriores muchos autores extendieron este modelo, principalmente de dos formas: considerando un proceso de llegadas de choques más general o tomando nuevas clases de supervivencia; en el primer caso se encontraron condiciones adecuadas para preservar las clases de fiabilidad.

Neuts et al. [54], que establecieron un teorema de clausura, introdujeron una metodología diferente, demostrando que si la sucesión \bar{P}_k seguía una distribución PH discreta, y el proceso de llegadas de choques era un proceso de renovación PH, entonces el tiempo de vida del sistema seguía una distribución PH continua. Este es el primer artículo que incluyó las distribuciones PH en el estudio de este modelo, y en el que la distribución del tiempo de vida del sistema fue calculada de forma explícita. Manoharan et al. [41] modificaron este artículo considerando una mezcla finita del proceso de Poisson no-homogéneo como proceso de llegadas, y demostrando la propiedad de clausura en este caso. En estos artículos el fallo del sistema era debido únicamente a los choques. Un sistema que soporta varios tipos de fallo, involucrando distribuciones PH y gobernado por un proceso de Markov fue estudiado en Neuts et al. [57]. En la introducción se han comentado otros artículos relacionados con estos sistemas.

2.2. Distribuciones tipo-fase

Las distribuciones tipo-fase juegan un papel fundamental a lo largo de esta Memoria, las definimos en los casos discreto y continuo. En Neuts et al. [51] se puede ver un estudio más detallado sobre este tipo de distribuciones. Asimismo se definen también las operaciones usuales de suma y producto de

Kronecker. Todo lo referente a estas operaciones y sus propiedades se puede consultar en Bellman [11].

Definición 1. La distribución $H(\cdot)$ definida en $[0, \infty[$ es una distribución tipo-fase (PH) con representación (α, T) , si es la distribución del tiempo hasta la absorción en un proceso de Markov sobre los estados $\{1, \dots, m, m+1\}$, donde los estados $\{1, \dots, m\}$ son todos transitorios y que el estado $m+1$ es absorbente, con generador

$$\begin{pmatrix} T & T^0 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$$

y un vector fila de probabilidades iniciales α de orden m . A lo largo de esta Memoria e denotará un vector columna de unos de dimensión adecuada. La matriz T es de orden m , no-singular, con elementos negativos en la diagonal y no-negativos fuera de la diagonal, además satisface la condición $-Te = T^0 \geq 0$. La distribución $H(\cdot)$ vienen dada por

$$H(x) = 1 - \alpha \exp(Tx)e, x \geq 0$$

Se dice que $H(\cdot)$ sigue una distribución $PH(\alpha, T)$.

Definición 2. Una densidad $\{p_k\}$ sobre el conjunto de los enteros no-negativos es una tipo-fase discreta (PH_d) si y sólo si existe una cadena de Markov finita con $n+1$ estados cuya matriz de probabilidades de transición P es de la forma

$$\begin{pmatrix} S & S^0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

y vector de probabilidades iniciales (β, β_{n+1}) , donde β es un vector fila. En este caso S es una matriz subestocástica tal que $Se + S^0 = e$, $e(I - S)$ es no-singular. La densidad del tiempo hasta la absorción viene dada por

$$\begin{aligned} p_0 &= \beta_{n+1}, \\ p_k &= \beta S^{k-1} S^0, k \geq 1. \end{aligned}$$

Se dice que p_k sigue una $PH_d(\beta, S)$.

2.2.1. Propiedades de clausura

Las primeras cuatro propiedades que aparecen a continuación se pueden ver en Neuts [51]. La última propiedad aparece en Assaf y Levikson [8].

Convolución La convolución finita de distribuciones PH es PH.

Teorema 1. Si $F(\cdot)$ y $G(\cdot)$ son distribuciones PH, ambas continuas, con representación (α, T) y (β, S) de órdenes m y n respectivamente, entonces su convolución $F * G(\cdot)$ es una distribución PH continua con representación (γ, L) dada por:

$$\begin{aligned}\gamma &= \left(\alpha, \alpha_{m+1}\beta \right) \\ L &= \begin{pmatrix} T & T^0\beta \\ 0 & S \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Mezcla finita Una mezcla finita convexa de distribuciones PH es PH.

Teorema 2. Una mezcla finita de distribuciones PH es PH.

Si (p_1, p_2, \dots, p_k) es una densidad mixta y $F_j(\cdot)$ tiene representación $(\alpha(j), T(j))$ con $1 \leq j \leq k$, entonces la densidad mixta tiene representación:

$$\begin{aligned}\alpha &= \left(p_1\alpha(1), p_2\alpha(2), \dots, p_k\alpha(k) \right) \\ T &= \begin{pmatrix} T(1) & & & \\ & T(2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & T(k) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Mezcla infinita La mezcla infinita de distribuciones PH en general no es PH, pero hay un caso particular en el que esta propiedad es cierta: cuando la densidad discreta mixta es PH_d .

Teorema 3. Sea $\{s_\nu\}$ una PH_d con representación (β, S) de orden n y $F(\cdot)$ una distribución PH continua con representación (α, T) de orden

m, entonces la mezcla $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_{\nu} F^{(\nu)}(\cdot)$, de las sucesivas convoluciones de $F(\cdot)$, es PH con representación (γ, L) de orden mn, dada por:

$$\begin{aligned}\gamma &= \alpha \otimes \beta (I - \alpha_{m+1} S)^{-1} \\ L &= T \otimes I + (1 - \alpha_{m+1}) T^0 \alpha \otimes (I - \alpha_{m+1} S)^{-1} S\end{aligned}$$

Máximo y mínimo El máximo y el mínimo de una distribución PH es PH.

Teorema 4. Sea $F(\cdot)$ y $G(\cdot)$ distribuciones PH con representaciones (α, T) y (β, S) de órdenes m y n respectivamente, entonces la distribución del máximo tiene representación (γ, L) de orden $mn + m + n$, dada por:

$$\begin{aligned}\gamma &= \left(\alpha \otimes \beta, \beta_{n+1} \alpha, \alpha_{n+1} \beta \right) \\ L &= \begin{pmatrix} T \oplus I & I \otimes S^0 & T^0 \otimes I \\ & T & \\ & & S \end{pmatrix}\end{aligned}$$

y la distribución del mínimo tiene representación $\gamma = \alpha \otimes \beta, L = T \oplus S$.

Sistemas coherentes El tiempo de vida de un sistema coherente con unidades finitas independientes que siguen distribuciones PH, sigue una distribución PH.

Teorema 5. La clase de las PH es cerrada para la formación de sistemas coherentes

2.2.2. El proceso de renovación tipo-fase

Proceso de renovación tipo-fase: Dada la representación tipo-fase (α, T) de una distribución PH, a la cadena de Markov irreducible con generador $Q^* = T + T^0 \alpha$ es posible añadirle un estado instantáneo $m + 1$, tal que la probabilidad elemental de que se produzca al menos una visita a ese estado en el intervalo $(t, t + dt)$, suponiendo que la cadena está en el estado i en el instante t , es $T_i^0 dt$. Elijiendo como estado de retorno uno de los estados

del conjunto $\{1, 2, \dots, m\}$ de acuerdo con el vector α , puede verse que las sucesivas visitas al estado instantáneo forma un proceso de renovación con distribución subyacente $F(\cdot) = PH(\alpha, T)$.

Definición 3. Decimos que la representación (α, T) es irreducible si y sólo si la matriz Q^* es irreducible.

Lema 1. Cada componente de $\nu(t) = \alpha \exp(Tt), t \geq 0$, es o bien estrictamente positiva para todo $t > 0$ o igual a 0 para $t \geq 0$. En este último caso, la matriz Q^* es reducible

Teorema 6. Si la matriz Q^* es reducible, se pueden borrar filas y columnas de la misma correspondientes al subconjunto de índices $\{1, \dots, m\}$ para obtener una representación irreducible (α_1, T_1) de $F(\cdot)$

Proceso de recuento: Sea $N(t)$ el número de renovaciones en el intervalo $(0, t]$, entonces $\{N(t), t \geq 0\}$ es el proceso de recuento del proceso de renovación tipo-fase. Denotando el proceso de Markov con generador Q^* por $\{J(t), t \geq 0\}$, se introducen las matrices $P(n, t) = \{P_{ij}(n, t)\}$ para $n \geq 0$, dadas por,

$$P_{ij}(n, t) = P\{N(t) = n, J(t) = j \mid N(0) = 0, J(0) = i\},$$

para $t \geq 0, n \geq 0, 1 \geq i \geq m, 1 \geq j \geq m$.

Aplicando las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov se demuestra que las matrices $P(n, t), t \geq 0, n \geq 0$ satisfacen las ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned} P'(0, t) &= TP(0, t) = P(0, t)T \\ P'(n, t) &= TP(n, t) + (1 - \alpha_{m+1}) \sum_{\nu=1}^n \alpha_{m+1}^{\nu-1} T^0 \alpha P(n - \nu, t) \\ &= P(n, t)T + (1 - \alpha_{m+1}) \sum_{\nu=1}^n \alpha_{m+1}^{\nu-1} P(n - \nu, t) T^0 \alpha \end{aligned}$$

con la condición inicial $P(n, 0) = \delta_{0n}I$, para $n \geq 0$.

Ver Neuts [51].

2.2.3. Propiedades de caracterización

La primera caracterización puede verse en [58], y la segunda en [38].

- Una distribución PH es PH si y sólo si:
 1. tiene una función densidad de probabilidad continua en la recta real positiva, con una posible masa en cero,
 2. su transformada de Laplace-Stieltjes es racional,
 3. su transformada de Laplace-Stieltjes tiene un polo único de parte real maximal.
- Las funciones de distribución PH constituyen la clase de distribuciones más pequeña definida en los reales positivos que
 1. contiene el punto masa en cero y todas las distribuciones exponenciales,
 2. es cerrada para la mezcla finita y la convolución,
 3. es cerrada para la mezcla infinita

$$G(\cdot) = \sum_{n>0} (1-p)p^n F^{*n}(\cdot), 0 \leq p \leq 1$$

2.2.4. Propiedades de aproximación

Las siguientes propiedades han sido probadas en Asmussen [6],

- La familia de distribuciones PH es débilmente densa, en el sentido de las distribuciones, en la familia de distribuciones de la recta real positiva. Existen varias familias que juegan un papel importante en la aproximación a distribuciones generales:
 1. La mezcla finita de Erlang con el mismo parámetro de intensidad.
 2. Las distribuciones Serie-paralelo (distribuciones exponenciales en serie y/o paralelo).
 3. Las distribuciones Matriz-exponenciales.

Ejemplos de aplicación

Mediante dos ejemplos se detalla cómo llevar a cabo el ajuste de una distribución PH a cualquier distribución o conjunto de datos.

1. Se realiza el ajuste de una distribución PH a una distribución Weibull. Dicha aproximación se ha llevado a cabo con el programa EMpht, que utiliza un método iterativo para obtener la estimación máximo-verosímil. Este método fue estudiado en Asmussen et al. [7], y en Thümmler et al. [78].

La distribución Weibull tiene función de distribución,

$$F(x) = 1 - \exp(-x/\lambda)^\beta$$

Ajustamos una distribución PH a una densidad Weibull cuyo parámetro de forma es $\beta = 2$ y con parámetro de escala $\lambda = 50$.

Para determinar el número de fases de la distribución PH que se va a ajustar, se tiene en cuenta la propiedad dada en Aldous y Shepp [2], donde se establece que el orden de una distribución PH es al menos el inverso del coeficiente de variación menos 1. En este caso el coeficiente de variación es 2.2361.

Una vez se determina el número mínimo de fases, el procedimiento es el siguiente:

- Seleccionar *Density* en el programa EMpht, dado que se va a realizar la aproximación de una distribución continua mediante una PH.
- Seleccionar el tipo de densidad, *Weibull*
- Seleccionar el orden de la distribución PH
- Seleccionar el tipo de distribución PH que se quiere ajustar, *General phase - type*
- Seleccionar un valor aleatorio para que comiencen las iteraciones

- Seleccionar el número de iteraciones

Finalmente se han tomado 3 fases para la distribución PH. La representación obtenida es

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0,007709 & 0,992291 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} -0,067255 & 0 & 0 \\ 0 & -0,067186 & 0,066893 \\ 0,067099 & 0 & 0,067099 \end{pmatrix}$$

En la Figura 2.1 se representan las densidades de la distribución Weibull y de la distribución PH con objeto de comprobar si el ajuste obtenido es adecuado. A primera vista puede observarse que la forma de ambas densidades es bastante similar.

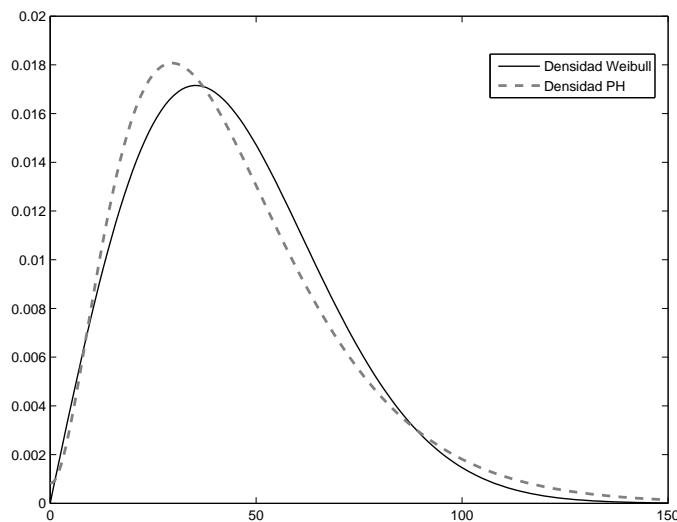


Figura 2.1: Densidades de la distribuciones PH y Weibull

2. A continuación se lleva a cabo el ajuste a un conjunto de datos.

El conjunto de datos que se ha considerado es el tiempo hasta que se produce el fallo de cada uno de los 60 aparatos eléctricos en un test de tiempos de vida ([36], p. 256). Los datos se presentan en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1: Número de ciclos hasta el fallo en un test de vida de 60 aparatos

14	34	59	61	69	80	123	142	165	210
381	464	479	556	574	839	917	969	991	1064
1088	1091	1174	1270	1275	1355	1397	1477	1578	1649
1702	1893	1932	2001	2161	2292	2326	2337	2628	2785
2811	2886	2993	3122	3248	3715	3790	3857	3912	4100
4106	4116	4315	4510	4584	5267	5299	5583	6065	9701

Una vez hemos calculado el coeficiente de variación de estos datos, que en este caso es 0.8755, el procedimiento a seguir es el siguiente

- Seleccionar *Sample* en el programa EMpht, dado que vamos a realizar el ajuste de una distribución PH a unos datos.
- Elegir entre observaciones no censuradas (*no censored*) o censuradas (*censored*)
- Introducir las observaciones desde el teclado o desde un archivo
- Seleccionar el tipo de distribución PH que se va a ajustar, *General phase – type*
- Seleccionar un valor aleatorio para iniciar las iteraciones
- Seleccionar el número de iteraciones

Para este conjunto de datos el número de fases que tomamos para la distribución PH a ajustar es dos. La representación de la distribución PH es

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0,472699 & 0,527301 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} -0,000625 & 0,000490 \\ 0 & -0,000625 \end{pmatrix}$$

En la Figura 2.2 se muestra el gráfico de la distribución $PH(\alpha, T)$ y de la función de distribución empírica de los datos.

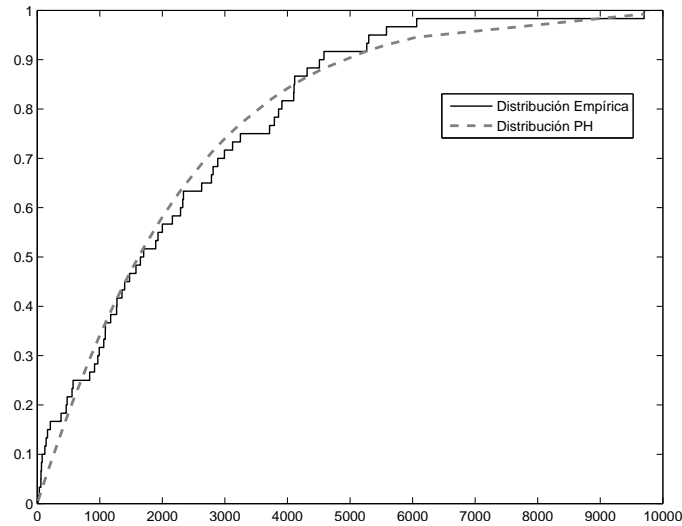


Figura 2.2: Distribuciones empírica y PH

A la vista del gráfico parece que el ajuste obtenido es bueno, se ha comprobado mediante el test de Kolmogorov-Smirnov de bondad de ajuste.

Algunos ejemplos más sobre el ajuste de distribuciones PH a datos se pueden encontrar en Segovia y Guedes [71].

2.3. Procesos de llegadas Markovianos

Los MAP son casos particulares de los procesos puntuales marcados, y están definidos por el par $\{(J_n, X_n)\}$, donde $\{J_n\}$ es una sucesión de variables aleatorias (instantes de ocurrencia de ciertos eventos), y X_n son las marcas, que contienen información sobre los eventos. Por ejemplo, J_n : instantes de llegada; X_n : tiempos de servicio; o J_n : instantes de llegadas de choques; X_n : daño causado en el sistema.

Sea D un generador infinitesimal irreducible de dimensión m . Sea una sucesión de matrices $D_k, k = 1$, de dimensión m no-negativas y sea la matriz

D_0 con elementos no-negativos fuera de la diagonal y donde su diagonal es estrictamente negativa. D_0 es no-singular. La suma de las matrices $D_k, k \geq 0$, es la matriz D . Se considera un proceso de renovación de Markov con m estados, $\{(J_n, X_n), n \geq 0\}$, en el que cada época de transición tiene asociado un número positivo que indica el tipo de llegadas L_n . Las variables aleatorias J_n, X_n son los estados y los instantes de visita en cada estado, respectivamente. La matriz de probabilidades de transición con entradas (j, j') , $P\{J_n = j', L_n = k, X_n \leq x | J_{n-1} = j\}$, viene dada por,

$$\int_0^x \exp(D_0 u) du D_k, k \geq 1, x \geq 0.$$

Por tanto, el MAP se define como el proceso de renovación de Markov con matriz de probabilidades de transición de la forma dada.

2.3.1. Versión estacionaria

Existe la posibilidad de estudiar un MAP en régimen estacionario (ver Neuts [52]).

Asociado a un MAP existe un vector, π^* , de probabilidades estacionarias y una razón de llegadas en régimen estacionario, λ^* .

Vector de probabilidades estacionarias π^* es solución única de las ecuaciones,

$$\begin{aligned} \pi^* D &= 0, \\ \pi^* e &= 1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Razón estacionaria Para el MAP donde las llegadas se producen de forma individual, como ocurre en el caso de los fallos, λ^* es,

$$\lambda^* = -\pi^* D_0 e$$

lo que constituye la razón de llegadas del MAP en régimen estacionario.

2.3.2. Ejemplos y propiedades

1. El proceso de renovación tipo-fase es un MAP donde $D_0 = T, D_1 = T^0\alpha$, siendo (α, T) la representación de la distribución PH que gobierna el proceso de renovación PH.
2. El proceso de Poisson Markov-modulado es un MAP donde $D_0 = D - \Lambda, D_1 = \Lambda$, siendo Λ una matriz diagonal.
3. La superposición de dos o más MAP independientes es un MAP. Si las matrices de dos MAP son $\{D_k(i)\}$ para $i = 1, 2$, los parámetros de su superposición vienen dados por $D_k = D_k(1) \otimes I + I \otimes D_k(2) = D_k(1) \oplus D_k(2)$.

Los MAP se han estado usando en teoría de colas para representar las llegadas en grupos. En este caso la variable aleatoria L_n denota el número de llegadas en la n -ésima transición. Este tipo de procesos es conocido como BMAP.

El análisis de los BMAP fue llevado a cabo por Alfa en [3]. En Neuts [52] se pueden ver más detalles sobre los MAP y algunas aplicaciones.

2.4. Elementos analíticos y probabilísticos

2.4.1. Operaciones de Kronecker

Definición 4. Si A y B son matrices rectangulares de dimensiones $m_1 \times m_2$ y $n_1 \times n_2$ respectivamente, su producto de Kronecker $A \otimes B$ es la matriz de dimensiones $m_1 n_1 \times m_2 n_2$, que escrita en forma compacta viene dada por $(a_{ij}B)$.

La suma de Kronecker de las matrices cuadradas C y D de órdenes p y q , respectivamente, se define como $C \oplus D = C \otimes I_q + I_p \otimes D$, donde I_k denota la matriz identidad de orden k .

Estas operaciones se utilizan frecuentemente a lo largo de esta Memoria. Para más detalles sobre las mismas consultar Bellman [11].

2.4.2. Transformada de Laplace

Definición 5 (Transformada de Laplace). Sea $F(t)$ una función de t definida en $[0, \infty)$. La transformada de Laplace de $F(t)$, que se denota por $\mathfrak{L}\{F(t)\}$, es una nueva función que se define como sigue

$$\mathfrak{L}\{F(t)\} = f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (2.3)$$

donde $s \in \mathbb{R}$, tal que la integral converge.

Definición 6 (Transformada inversa de Laplace). Si $f(s)$ es la transformada de Laplace $F(t)$, $\mathfrak{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces $F(t)$ es la inversa de la transformada de Laplace de $f(s)$, $F(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{f(s)\}$.

Teorema 7 (Transformada de Laplace de derivadas). Si $\mathfrak{L}\{F(t)\} = f(s) \Rightarrow \mathfrak{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$

Para más detalles sobre las transformadas de Laplace ver Spiegel [74].

2.4.3. Procesos de renovación

Sean Y_i , $i = 1, \dots, n$ variables estocásticas positivas independientes e idénticamente distribuidas. Sea $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Entonces el proceso $X(t)$, $t \geq 0$ donde

$$X(t) = \max\{n; T_n \leq t\}$$

se denomina proceso de renovación.

2.4.4. Ecuaciones diferenciales adelantadas de Kolmogorov

Teorema 8 (Ecuaciones adelantadas de Kolmogorov). Bajo las condiciones adecuadas de regularidad

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - \nu P_{ij}(t)$$

Si $q_{ii} = -\nu_i$ las ecuaciones adelantadas pueden escribirse como

$$P'_{ij}(t) = \sum_k q_{kj} P_{ik}(t)$$

Estas ecuaciones tienen una notación particular. Si $P(t)$, Q y $P'(t)$ son matrices cuyos elementos en la posición i, j son respectivamente $P_{i,j}(t)$, $q_{i,j}$ y $P'_{i,j}(t)$, entonces las ecuaciones adelantadas se pueden escribir en forma matricial como

$$P'(t) = P(t)Q$$

Si $P(t)$ es una función de t y Q es constante, entonces la solución de la ecuación anterior sería,

$$P'(t) = e^{Qt} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(Qt)^i}{i!}$$

Ver Ross [69].

Capítulo 3

Sistemas de choque y desgaste usando distribuciones PH

Se considera un sistema sometido a choques y desgaste usando distribuciones PH. En la Sección 2 se calcula la función de supervivencia para el modelo de choque considerando que no se produce desgaste. Los choques que llegan al sistema pueden ser fatales o no. La probabilidad de que se produzca el fallo debido a los choques sigue una distribución PH discreta. El sistema falla cuando el número de choques no-fatales acumulados alcanza un valor prefijado $N + 1$. Se estudia el proceso de renovación asociado a los sucesivos reemplazamientos del sistema cuando se produce un choque fatal, y la función de supervivencia se obtiene en términos de las probabilidades del número de choques que llegan al sistema. En la Sección 3 se introduce el desgaste en el modelo y se obtiene de nuevo la función de supervivencia. En la Sección 4 se consideran algunos sistemas particulares deducidos a partir del modelos general: el modelo de daño extremo, el modelo de daño acumulativo y el modelo de rachas de choques. Una aplicación numérica se lleva a cabo en la Sección 5.

3.1. Introducción

Se estudian los modelos de choque y desgaste, en el que todas las variables implicadas siguen distribuciones PH, paso a paso. Los tiempos entre llegadas de choques siguen distribuciones PH, y que dichos choques pueden producir el fallo del sistema. El sistema puede fallar también por causa del desgaste, y su tiempo de vida sigue una distribución PH. Los tiempos entre llegadas de choques y el tiempo de vida del sistema depende del número de choques acumulados. El número de choques que el sistema puede soportar es limitado.

Se considera que los tiempos entre llegadas de choques decrecen con el tiempo, dicho supuesto se introduce en el modelo mediante un proceso geométrico. El proceso geométrico ha demostrado su utilidad en el desgaste de sistemas donde las reparaciones que se realizan son imperfectas (ver Neuts et al. [57], Pérez-Ocón y Montoro-Cazorla [63], Yeh [83]). El tiempo que el sistema sobrevive sigue una distribución PH cuya representación es calculada. Algunos modelos particulares de choque, frecuentes en la literatura, son: el modelo de daño extremo, el modelos de choque acumulado (see Esary [15]), y el modelo de rachas de choques (ver Mallor y Santos [39]). En esta Memoria se estudia usando la metodología MAM. También se estudian el modelo propuesto por Gut [22], donde se presenta una mezcla de diferentes modelos de choque, y el propuesto por Igaki et al. [26], donde se presenta un modelo de choque bajo un proceso de renovación de Markov. Para todos estos modelos se calculan los tiempos de supervivencia.

Este capítulo contiene algunos aspectos que no han sido considerados en artículos previos. El número de choques que el sistema pueda soportar es limitado; los tiempos entre llegadas de choques no son iguales, y dependen del número de choques que el sistema ha soportado; y las distribuciones de todas las variables aleatorias que intervienen en el modelo son PH. La metodología que se utiliza nos permite incorporar el desgaste y obtener una expresión bien definida del tiempo de vida del sistema. Algunas de las distribuciones PH que aparecen en la aplicación numérica tienen propiedades de interés en fiabilidad, tales como la razón de fallo creciente y razón de fallo en curva de

bañera. Si se considera un modelo de choque general, en el sentido de que las variables aleatorias siguen distribuciones generales, las distribuciones que se estudian en este Capítulo, en las Secciones 2 y 3, pueden interpretarse como aproximaciones de dichos modelos generales, por las propiedades de aproximación de las distribuciones PH.

3.2. Modelo de choque

En esta Sección se presenta un modelo sometido a choques donde el fallo ocurre con cierta probabilidad. No hay desgaste.

Las siguientes hipótesis son básicas a lo largo de este Capítulo,

1. Se denota por $X^{(0)}$ el tiempo hasta se produce la llegada del primer choque, y por $X^{(k)}$ el tiempo entre las llegadas de los choques k y $(k + 1)$, donde $k = 0, 1, \dots$. Dichos tiempos entre llegadas siguen distribuciones PH con representación $PH(\beta^{(k)}, S^{(k)})$, $k \geq 0$ de orden n_k .
2. El sistema puede soportar como máximo N choques acumulados, de tal manera que la ocurrencia del choque $(N + 1)$ causa su reemplazamiento.
3. Un choque puede causar el fallo del sistema. Sea p_k la probabilidad de que el sistema falle a la llegada del k -ésimo choque acumulado, $k \geq 0$. Se asume que $\{p_k\}$ sigue una distribución PH_d con representación (γ, L) , de orden $N + 1$ siendo $\gamma = (1, 0, \dots, 0)$ y,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & l_1 & & & \\ & 0 & l_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & l_N \\ & & & & 0 \end{pmatrix}; L^0 = \begin{pmatrix} 1 - l_1 \\ 1 - l_2 \\ \vdots \\ 1 - l_N \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Las entradas l_k , $k = 1, \dots, N$, denotan la probabilidad condicional de que el sistema sobreviva al k -ésimo choque, dado que ha sobrevivido al choque $(k - 1)$. Dichas entradas l_k son útiles para encontrar la representación de la distribución $\{p_k\}$. Es claro que $l_{N+1} = 0$ y,

$$p_k = \gamma L^{k-1} L^0, k \geq 1. \quad (3.2)$$

Desarrollando la expresión previa se tiene,

$$\begin{aligned} p_k &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} l_i \right) (1 - l_k), k = 1, \dots, N; \\ p_{N+1} &= \left(\prod_{i=1}^N l_i \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

y

$$\sum_{k=1}^{N+1} p_k = 1.$$

En la expresión que define las p_k por convenio, $\prod_{i=1}^0 l_i = 1$.

Nuestro interés se centra en la supervivencia del sistema, por esta razón se determinan la probabilidad de que el sistema sobreviva a los k primeros choques acumulados, dicha probabilidad es,

$$\bar{P}_k = \sum_{\nu=k+1}^N p_\nu = \gamma(L^k - L^N)e \quad (3.4)$$

3.2.1. Tiempo de vida del sistema

Bajo estas hipótesis, el modelo probabilístico que gobierna la evolución del sistema es un proceso de Markov. Los estados exponenciales que ocupa el sistema vienen dados por (k, i) , donde k es el número de choques acumulados e i es la fase que ocupa la variable aleatoria $X^{(k)}$.

El funcionamiento del sistema entre los choques k y $k + 1$ se puede ver en el siguiente diagrama,

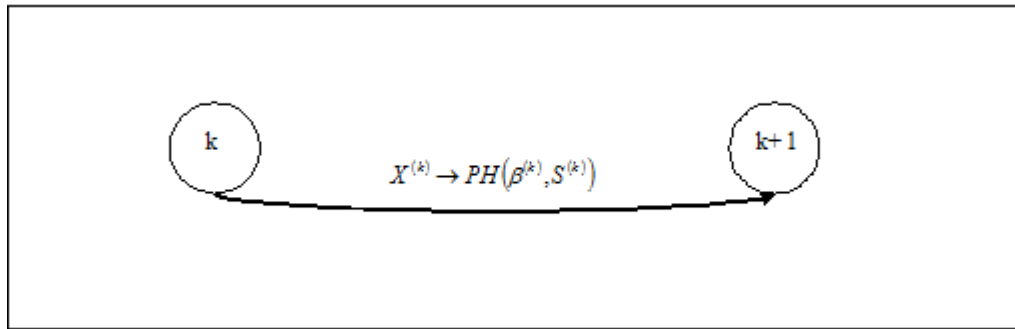


Figura 3.1: Diagrama de tiempos de vida entre choques

Estos estados se agrupan en conjuntos, denominados macroestados, que se denotarán por k , $k = 0, 1, \dots, N$. El número de estados exponenciales del macroestado k es n_k . El generador infinitesimal del proceso de Markov que gobierna el sistema se construye en términos de las transiciones entre estos macroestados y, en consecuencia, será un generador formado por bloques. El tiempo de vida del sistema cuando ocurre el fallo en la llegada del choque $(k + 1)$ se denota por T_k . Por tanto, es claro que,

$$T_k = \sum_{i=0}^k X^{(i)}, 0 \leq k \leq N. \quad (3.5)$$

Esta variable aleatoria sigue una distribución PH ya que es la suma de variables aleatorias independientes PH-distribuidas. La función de distribución es la convolución de las correspondientes distribuciones de los sumandos, y tiene representación $(g^{(k)}, G^{(k)})$ (ver Propiedades de clausura, Teorema 1 de la Sección 2.2.1).

Para este caso particular se construye la expresión explícita de esta matriz de la siguiente manera, si el sistema falla en el choque $(k + 1)$, es porque ha sobrevivido a los k primeros choques. Así, las transiciones entre los macroestados hasta que se produce el fallo vienen dadas por $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow k$. En el siguiente diagrama se puede ver de forma más clara como se producen esas transiciones hasta que ocurre el reemplazamiento del sistema,

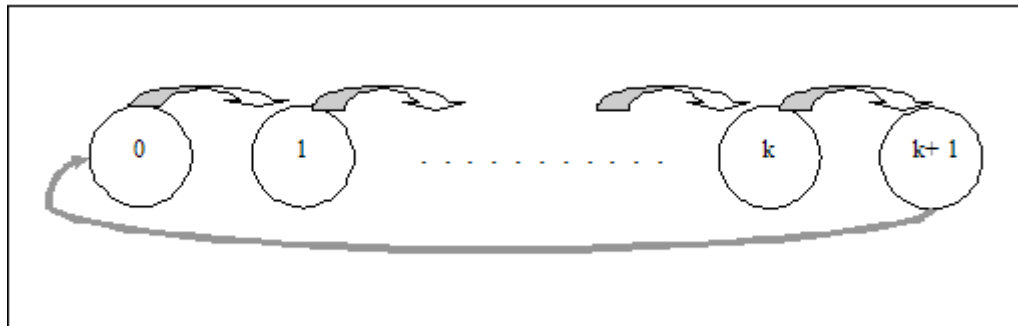


Figura 3.2: Diagrama de choques

Cuando un choque no fatal llega al sistema, estando dicho sistema en el macroestado j , se produce una transición entre los macroestados j y $j + 1$, $j \rightarrow j + 1$ donde $j = 0, 1, \dots, k$, esta transición viene gobernada por el vector de absorción $S^{0(j)}$. En este momento, comienza un nuevo periodo entre llegadas donde el vector de probabilidades iniciales es $\beta^{(j)}$. Por tanto, la matriz $G^{(k)}$ es

$$G^{(k)} = \begin{pmatrix} S^{(0)} & S^{0(0)}\beta^{(1)} & & & \\ & S^{(1)} & S^{0(1)}\beta^{(2)} & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & S^{(k)} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

El orden de esta matriz es $\sum_{i=0}^k n_i$.

Suponiendo que al principio el sistema no ha recibido choques, el vector inicial $g^{(k)}$, viene dado por $(\beta^{(0)}, 0, \dots, 0)$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Si denotamos por T_s el tiempo de vida del sistema, tenemos

$$\bar{H}(t) = P(T_s > t) = \sum_{k=0}^N p_{k+1} P(T_k > t), t \geq 0. \quad (3.7)$$

La distribución de la variable aleatoria T_s se determina como sigue. Esta distribución es la distribución de una mezcla finita de distribuciones PH, por

tanto es una distribución PH cuya representación es conocida y viene dada por (v_s, V_s) , (ver Propiedades de clausura, Sección 2.2.1, Teorema 2), donde,

$$\begin{aligned} v_s &= (p_1g^{(0)}, p_2g^{(1)}, \dots, p_{N+1}g^{(N)}) \\ V_s &= \begin{pmatrix} G^{(0)} & & & \\ & G^{(1)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & G^{(N)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

El orden de la matriz V_s es $\sum_{i=0}^N (N - i + 1)n_i$.

La expresión analítica de la función de supervivencia de T_s es

$$P(T_s > t) = v_s \exp(V_s t) e = \sum_{k=0}^N p_{k+1} g^{(k)} \exp(G^{(k)} t) e, t \geq 0. \quad (3.9)$$

Algoritmo

A continuación se muestran los pasos para obtener la función de supervivencia dada en (3.9), suponiendo que las funciones de distribución de los tiempos entre llegadas y el valor N son conocidos.

Paso 1 Calcular las probabilidades p_{k+1} , $k = 0, \dots, N$, usando (3.2).

Paso 2 Calcular la representación PH de T_k para $k = 0, 1, \dots, N$, es decir, calcular $g^{(k)}$ y $G^{(k)}$.

Paso 3 Finalmente, determinar la función de supervivencia dada en (3.9).

3.2.2. Proceso de recuento

Asociado a este modelo, se introduce el proceso de recuento del número de choques en el instante t . Se considera que el sistema se reemplaza después del choque $(N + 1)$. Recordemos que el macroestado k del proceso de Markov toma valores $k = 0, 1, \dots, N$. EL generador infinitesimal de este proceso de Markov es

$$Q = G^{(N)} = \begin{pmatrix} S^{(0)} & S^{(0)}\beta^{(1)} & & \\ & S^{(1)} & S^{(0(1)}\beta^{(2)} & \\ & & \ddots & \\ & & & S^{(N)} \end{pmatrix}$$

Sea $N(t)$ el número de choques en el intervalo $(0, t]$, entonces $\{N(t), t \geq 0\}$ es el proceso de recuento del proceso de renovación tipo-fase generalizado. The proceso de Markov que gobierna los tiempos entre llegadas se denota por $\{J(t), t \geq 0\}$. Este proceso tiene como generador Q^* obtenido a partir de Q como sigue:

$$Q^* = \begin{pmatrix} S^{(0)} & S^{(0)}\beta^{(1)} & & \\ & S^{(1)} & S^{(0(1)}\beta^{(2)} & \\ & & \ddots & \\ & & & S^{(N)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ S^{(0(N)} & & & \end{pmatrix} \beta^{(N)}.$$

Esto es,

$$Q^* = Q + Q^{(0)}\beta^{(N)}.$$

donde Q representa el tiempo de vida del sistema entre renovaciones y $Q^{(0)}$ representa el hecho de que ocurra la renovación. El sistema se reinicia con vector inicial $\beta^{(N)}$.

A continuación se definen las probabilidades de transición entre las fases del proceso:

$$P_{ij}(n, t) = P[N(t) = n, J(t) = j | N(0) = 0, J(0) = i],$$

La matriz correspondiente se denota por $P(k, t) = (P_{ij}(k, t))$. Como condición inicial se establece que $P(k, 0) = \delta_{0k}I$, $k \geq 0$, δ siendo δ la delta de Kronecker, es decir, $\delta_{0k} = 1$ si $k = 0$ y $\delta_{0k} = 0$ en otros casos.

(Ver Proceso de recuento en la Sección 2.2.2 del Capítulo 2)

Las siguientes expresiones establecen una propiedad de recurrencia entre estas matrices para los diferentes valores de k . Son las ecuaciones integrales de Kolmogorov.

Para $k = 0, 1, \dots, N$,

$$P(k, t) = \int_0^t P(k-1, u) S^{0(k-1)} \beta^{(k)} \exp(S^{(k)}(t-u)) du. \quad (3.10)$$

y

$$P(N+1, t) = \int_0^t P(N, u) S^{0(N)} du.$$

Estas ecuaciones matriciales se puede resolver para los distintos valores de k de forma recursiva, y utilizando las ecuaciones diferenciales de Kolmogorov. Derivando se obtienen las ecuaciones diferenciales de Kolmogorov:

$$\begin{aligned} P'(0, t) &= P(0, t) S^{(0)} \\ P'(1, t) &= P(0, t) S^{0(0)} \beta^{(1)} + P(1, t) S^{(1)} \\ &\vdots \\ P'(n, t) &= P(n-1, t) S^{0(n-1)} \beta^{(n)} + P(n, t) S^{(n)}, n = 1, \dots, N. \\ &\vdots \\ P'(N+1, t) &= P(N, t) S^{0(N)}. \end{aligned}$$

Ilustramos la equivalencia entre ambos sistemas en el caso matricial,

1. Para $n = 0$, es inmediato que, $P(0, t) = \exp(S^{(0)}t)$.

2. Para $n = 1$, la ecuación lineal $P'(1, t) = P(0, t) S^{0(0)} \beta^{(1)} + P(1, t) S^{(1)}$ se resuelve utilizando el resultado previo y el factor de integración $\exp[-S^{(1)}t]$.

Entonces

$$\begin{aligned} [P'(1, t) - P(1, t) S^{(1)}] \exp[-S^{(1)}t] &= P(0, t) S^{0(0)} \beta^{(1)} \exp[-S^{(1)}t] \text{ y} \\ [P(1, t) \exp[-S^{(1)}t]]' &= P(0, t) S^{0(0)} \beta^{(1)} \exp[-S^{(1)}t] \Rightarrow P(1, t) \exp[-S^{(1)}t] = \\ &= \int_0^t P(0, u) S^{0(0)} \beta^{(1)} \exp[-S^{(1)}u] du \end{aligned}$$

Por tanto,

$$P(1, t) = \int_0^t P(0, u) S^{0(0)} \beta^{(1)} \exp[S^{(1)}(t - u)] du$$

3. En general, para n , $P'(n, t) = P(n - 1, t) S^0(n - 1) \beta^{(n)} + P(n, t) S^{(n)}$, entonces

$$\begin{aligned} [P'(n, t) - P(n, t) S^{(n)}] \exp[-S^{(n)}t] &= P(n - 1, t) S^{0(n-1)} \beta^{(n)} \exp[-S^{(n)}t] \Rightarrow \\ [P(n, t) \exp[-S^{(n)}t]]' &= P(n - 1, t) S^{0(n-1)} \beta^{(n)} \exp[-S^{(n)}t] \end{aligned}$$

En este caso,

$$P(n, t) = \int_0^t P(n - 1, u) S^{0(n-1)} \beta^{(n)} \exp[S^{(n)}(t - u)] du$$

4. Finalmente, para $N + 1$,

$$P(N + 1, t) = \int_0^t P(N, u) S^{0(N)} du$$

La expresión final de $\bar{H}(t)$ en términos de estas matrices viene dada por

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{N+1} \beta^{(0)} P(k, t) e \bar{P}_k = \sum_{k=0}^{N+1} \beta^{(0)} P(k, t) e \gamma (L^k - L^{N+1}) e.$$

Reorganizando los términos en la expresión previa, se obtiene para el tiempo de vida del sistema, la siguiente expresión en términos del proceso de recuento que gobierna los choques en el sistema:

$$\bar{H}(t) = (\beta^{(0)} \otimes \gamma) \left(\sum_{k=0}^{N+1} P(k, t) (L^k - L^{N+1}) \right) (e \otimes e). \quad (3.11)$$

El cálculo explícito de $\bar{H}(t)$ se debe obtener a partir de operaciones computacionales.

Algoritmo

Los pasos para construir esta función de supervivencia en el modelo de choque son los que se dan a continuación. Suponemos conocidos el valor N y las funciones de distribución de los tiempos entre llegadas.

Paso 1 Calcular las probabilidades p_k , $k = 0, \dots, N + 1$, usando (3.2).

Paso 2 Calcular las probabilidades de supervivencia al k -ésimo choque acumulado \bar{P}_k usando (3.4).

Paso 3 Determinar la matriz $P(0, t) = \exp(S^{(0)}t)$.

Paso 4 Mediante iteraciones, calcular las matrices $P(n, t)$ para $1 \leq n \leq N$, usando (3.10).

Paso 5 Una vez que se han obtenido todas estas cantidades, la función de supervivencia en (3.11) puede determinarse.

3.3. Modelo de choque y desgaste

En esta Sección se supone que el sistema está sometido también a desgaste, y puede fallar debido a este desgaste. Para representar esta situación, añadimos nuevas hipótesis a las que se habían establecido en la Sección anterior. El desgaste se incorpora al sistema considerando que los sucesivos tiempos entre llegadas de choques consecutivos están afectados por un factor de degradación, de tal manera que el mecanismo de desgaste sigue un proceso geométrico. Este concepto ya ha sido estudiado por Lam [34] y usado en Pérez-Ocón y Montoro-Cazorla [62].

A las hipótesis establecidas en la Sección anterior 1-3, se añaden nuevas hipótesis relativas al desgaste:

4. El tiempo de vida del sistema, cuando no se ha producido ningún choque, se denota por $Y^{(0)}$ y sigue una distribución $PH(\alpha, T)$ de orden m .

5. El tiempo de vida del sistema cuando ha soportado k choques se denota por $Y^{(k)}$, y sigue una distribución $PH(\alpha^{(k)}, c^k T)$, $k, c \geq 1$ con m fases, siendo $\alpha^{(0)} = \alpha$ y $\alpha^{(k)} = (\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \dots, \alpha_m^{(k)})$ donde $\alpha_j^{(k)}$ es la probabilidad de que se produzca el k -ésimo choque cuando el sistema está operativo en la fase j , $j = 1, \dots, m$.

Esta última hipótesis indica que, después de que ocurra un choque que produce un fallo, la siguiente etapa se reinicia en la misma fase transitoria en la que se produjo el choque. Esto establece una cierta dependencia entre los sucesivos tiempos de vida. Puede elegirse otro vector de probabilidades iniciales dependiendo del modelo que se desee estudiar.

En el siguiente diagrama se representan las variables aleatorias que hemos definido anteriormente,

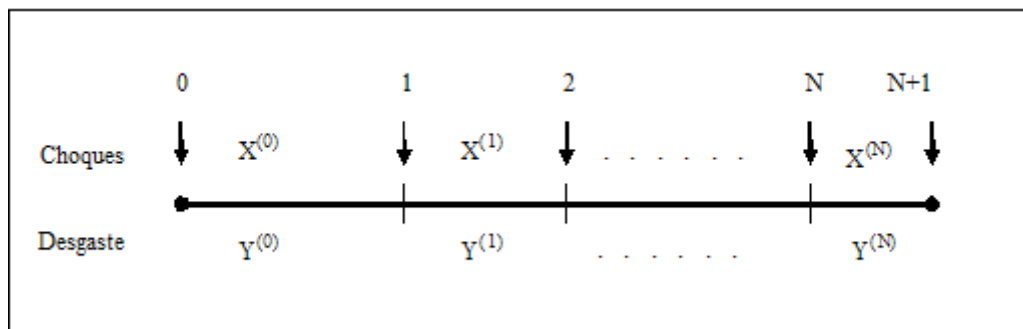


Figura 3.3: Diagrama de choques y desgaste

Si el fallo del sistema se produce debido al desgaste entre los choques k y $(k + 1)$, el tiempo de vida del sistema después de k -ésimo choque viene dado

$$W_k = \sum_{i=0}^k Y^{(i)}, k = 0, 1, \dots, N.$$

Dadas las propiedades de clausura de las distribuciones PH (ver Sección 2.2.1, Teorema 1), la variable aleatoria W_k sigue una distribución PH, de orden mk , con representación:

$$w^{(k)} = (\alpha, 0, \dots, 0)_{1 \times mk},$$

$$W^{(k)} = \begin{pmatrix} T & T^0 \alpha^{(1)} & & & & \\ & cT & cT^0 \alpha^{(2)} & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & c^{k-1} T^0 \alpha^{(k)} & \\ & & & & & c^k T \end{pmatrix}$$

Como el fallo del sistema puede producirse tanto a los choques como al desgaste, estamos ante un caso de riesgo competitivo. El tiempo de vida del sistema depende del $Min\{T_k, W_k\}$. La distribución de esta variable es bien conocida (ver Propiedades de clausura, Sección 2.2.1 Teorema 4), y es una distribución PH con representación, de orden $mk \sum_{i=0}^k n_i$, $(h^{(k)}, H^{(k)})$, siendo

$$h^{(k)} = (g^{(k)} \otimes w^{(k)}) = ((\beta^{(0)}, 0, \dots, 0) \otimes (\alpha, 0, \dots, 0))$$

$$H^{(k)} = (G^{(k)} \oplus W^{(k)}).$$

Entonces, la distribución del tiempo de vida del sistema, que se denota por T_w , es:

$$\bar{H}(t) = P(T_w > t) = \sum_{k=0}^N p_{k+1} P(Min(T_k, W_k) > t).$$

El tiempo de vida del sistema T_w sigue, asimismo, una distribución PH con representación (v_w, V_w) , siendo, (ver Teorema 2 en Propiedades de clausura)

$$v_w = (p_1 h^{(0)}, p_2 h^{(1)}, \dots, p_{N+1} h^{(N)})_{1 \times mk \sum_{i=0}^N (N-i+1)n_i},$$

$$V_w = \begin{pmatrix} H^{(0)} & & & & \\ & H^{(1)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & H^{(N)} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

where V_w is of order $mk \sum_{i=0}^N (N - i + 1)n_i$.

La expresión analítica de la función de supervivencia de T_w es

$$P(T_w > t) = v_w \exp(V_w t) e = \sum_{k=0}^N p_{k+1} h^{(k)} \exp(H^{(k)} t) e, t \geq 0. \quad (3.13)$$

Algoritmo

A continuación se presentan los pasos para la construcción de la función de supervivencia en el modelos de choque y desgaste, suponiendo que conocemos las distribuciones de los tiempos entre llegadas y del tiempo de vida del sistema entre choques consecutivos, además del valor de N .

Paso 1 Calcular las probabilidades p_{k+1} , $k = 0, \dots, N$, usando (3.2).

Paso 2 Determinar $g^{(k)}$ y $G^{(k)}$ la representación PH de T_k para $k = 0, 1, \dots, N$.

Paso 3 Determinar $w^{(k)}$ y $W^{(k)}$ la representación PH de W_k para $k = 0, 1, \dots, N$.

Paso 4 Determinar la representación PH del Mínimo entre T_k y W_k , esto es, $h^{(k)}$ y $H^{(k)}$ para $k = 0, 1, \dots, N$.

Paso 5 Determinar la función de supervivencia (3.13).

3.3.1. Proceso de recuento

Como en la Sección 2, podemos dar la expresión de $\bar{H}(t)$ en función del proceso de recuento del número de choques que llegan al sistema en un intervalo de tiempo. En este caso,

$$\begin{aligned} \bar{H}(t) &= \sum_{k=0}^{N+1} \beta^{(0)} P(k, t) e \bar{P}_k P\{W_k \geq t\} \\ &= \sum_{k=0}^{N+1} \beta^{(0)} P(k, t) e \gamma (L^k - L^{N+1}) e (w^{(k)} \exp\{W^{(k)} t\} e). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Reorganizando los términos de la expresión anterior

$$\bar{H}(t) = (\beta^{(0)} \otimes \gamma) \left(\sum_{k=0}^{N+1} P(k, t)(L^k - L^{N+1}) \exp\{w^{(k)} W^{(k)} t\} e \right) (e \otimes e).$$

Las matrices de probabilidadess $P(k, t)$ son la que aparecen en (3.10).

Algoritmo

De nuevo, realizamos una descripción de los pasos a seguir para construir la función de supervivencia en el modelo de choque y desgaste, dado que conocemos las funciones de distribución de los tiempos entre llegadas, los tiempos de vida entre choques consecutivos, y el valor N .

Paso 1 Calcular las probabilides p_k , $k = 0, \dots, N + 1$, usando (3.2).

Paso 2 Calcular las probabilidades de supervivencia al k -ésimo choque acumulado \bar{P}_k usando (3.4).

Paso 3 Determinar la matriz $P(0, t) = \exp(S^{(0)}t)$.

Paso 4 Mediante iteraciones, calcular las matrices $P(n, t)$ para $1 \leq n \leq N$, usando (3.10).

Paso 5 Calcular las matrices $W^{(k)}$ para $k = 0, \dots, N + 1$.

Paso 6 Calcular la función de supervivencia (3.14).

3.4. Casos particulares

En la literatura que trata sistemas sometidos a choques, algunos modelos se han utilizado frecuentemente, ver Barlow y Proschan [10]. Dichos modelos son: el modelo de daño máximo, el modelo de daño acumulado, ambos clásicos, y el que fue introducido en Mallor y Santos [39], el modelo de rachas de choque. Para estos ejemplos, se obtienen las probabilidades l_i , $i = 1, \dots, N$, y a partir de ellas, se determina de forma directa la función de supervivencia. Además, se calculan las expresiones de las probabilidades

$p_k, k = 1, \dots, N, N + 1$, que son cantidades de utilidad en estos modelos. La función de supervivencia de cada uno de los modelos se obtiene de manera directa a partir del modelo general de choque y desgaste definido en la Sección 3.

3.4.1. Proceso de renovación tipo-fase de choque

En este ejemplo se obtiene el modelo estudiado por Manoharan et al. [41].

Los choques llegan al sistema siguiendo un proceso de renovación tipo-fase $PH(\beta, S)$. Este es un caso particular del caso general con $(\beta^{(i)}, S^{(i)}) = (\beta, S)$, donde $1 \leq i \leq N$. De esta manera para $1 \leq k \leq N + 1$,

(a) Si $\beta = 1, S = -\lambda$ los choques llegan siguiendo un proceso de Poisson con razón λ .

(b) Si $\beta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ y

$$S = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & & & \\ & -\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\lambda_n \end{pmatrix},$$

Los choques llegan siguiendo una mezcla finita del proceso de Poisson (Manoharan et al. [41]). Esto equivale a asegurar que los choques llegan siguiendo un proceso de Poisson con razón λ , siendo λ una variable aleatoria discreta que toma valores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ con probabilidades $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Si X representa los tiempos entre llegadas, tenemos,

$$P\{X > x\} = \sum_{j=1}^n e^{-\lambda_j x} \xi_j, x \geq 0.$$

Esta expresión corresponde a la función de supervivencia de una distribución $PH(\beta, S)$, con β y S de la forma dada.

3.4.2. Modelo de daño extremo

En este caso, el fallo ocurre si se produce un choque cuya magnitud excede un umbral crítico z que se ha fijado con anterioridad. Se consideraran dos casos, cuando el umbral crítico z es constante y cuando es aleatorio, en este caso sigue una distribución exponencial de razón λ_z .

- (a) Sea z constante. Se supone que cada choque causa un daño aleatorio, y que Y_k denota el daño que causa el choque k . Esta variable aleatoria sigue una distribución exponencial de parámetro λ_k . Entonces, la probabilidad de que el mecanismo no falle a la llegada del i -ésimo choque, dado que ha sobrevivido a los $(i - 1)$ choques anteriores, es

$$l_i = P\{Y_i < z\} = 1 - \exp\{-\lambda_i z\}, i = 1, \dots, N.$$

Por tanto, la probabilidad p_k de que el mecanismo falle a la llegada del choque k , se obtiene a partir de (3.3) como,

$$p_k = \left(\prod_{i=1}^{k-1} (1 - \exp\{-\lambda_i z\}) \right) (\exp\{-\lambda_k z\}), 1 \leq k \leq N,$$

$$p_{N+1} = \left(\prod_{i=1}^N (1 - \exp\{-\lambda_i z\}) \right).$$

- (b) Sea z exponencialmente distribuida con razón λ_z . Se supone de nuevo que cada choque causa un daño aleatorio e Y_k denota el daño producido por el choque k th. Esta variable aleatoria sigue una distribución exponencial con parámetro λ_k .

W_z es la variable aleatoria que representa el tiempo de vida del mecanismo. Entonces, la probabilidad de que el mecanismo no falle a la llegada del i -ésimo choque, dado que ha sobrevivido a los $(i - 1)$ choques anteriores, $l_i = P(Y_i < W_z)$, viene dada por

$$l_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \lambda_z}, i = 1, \dots, N.$$

En este caso, la probabilidad p_k es,

$$p_k = \prod_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \lambda_z} \right) \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_z}, 1 \leq k \leq N$$

$$p_{N+1} = \prod_{i=1}^N \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \lambda_z} \right)$$

En estos dos casos, el tiempo de vida sigue un distribución PH (v_w, V_w) . La función de supervivencia se determina de forma directa a partir de aquí.

3.4.3. Modelo de choques acumulados

En este modelo las variables aleatorias son aditivas, y el fallo se produce cuando la acumulación del daño, producido por los choques que han llegado al sistema, excede un umbral crítico z . Se supone que cada choque causa un daño aleatorio sobre el sistema. Sea Y_k la variable aleatoria que representa el daño que causado por el choque k , $k = 1, \dots, N$, suponemos que sigue una $exp(\lambda_k)$.

Sea Z_k el daño acumulado cuando se produce la llegada del choque k ,

$$Z_k = \sum_{i=1}^k Y_i$$

por tanto, Z_k sigue una distribución Erlang generalizada y, en consecuencia, una distribución PH (d_k, D_k) , de orden k , siendo

$$d_k = (1, 0, \dots, 0)_{1 \times k},$$

$$D_k = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & & & \\ & -\lambda_2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -\lambda_k \end{pmatrix}_{k \times k}$$

La probabilidad de que el mecanismo no falle a la llegada del i -ésimo choque, dado que ha sobrevivido a los $(i - 1)$ choques anteriores, viene dada

por

$$l_i = P(Z_i < z) = 1 - d_i \exp\{D_i z\} e, i = 1, \dots, N,$$

Como puede verse, las probabilidades l_i , tienen distribución PH.

Y las probabilidades $\{p_k\}$ son

$$p_k = \left(\prod_{i=1}^{k-1} (1 - d_i \exp\{D_i z\} e) \right) d_k \exp\{D_k z\} e, k = 1, 2, \dots, N$$

$$p_{N+1} = \left(\prod_{i=1}^N (1 - d_i \exp\{D_i z\} e) \right)$$

Como en el anterior modelo, el tiempo de vida del mecanismo sigue una distribución PH con representación (v_w, V_w) .

3.4.4. Modelo de rachas de choques

Para este modelo, se suponen dos clases de choques: críticos, aquellos que causan un daño al sistema que provocará el fallo, y no-críticos. Sea p la probabilidad de que se produzca un choque crítico, y por tanto, $q = 1 - p$ es la probabilidad de que se produzca un choque no-crítico. Se define una racha completa de longitud n como una secuencia de choques críticos sucesivos, precedidos y seguidos de choques no-críticos, excepto al inicio. En Mallor y Omei [39] se estudian los modelos de choque bajo una racha crítica completa, el sistema falla cuando se produce una racha completa de longitud n , $n \geq 1$.

Por otro lado, sea $p_k^{(n)}$ la probabilidad de que el sistema falle cuando se produce el k -ésimo choque, teniendo en cuenta que el fallo se produce después de una racha completa de choques de longitud n . Se supone que $\{f_k^{(n)}\}$ sigue una distribución PH_d con representación (θ_n, Λ_n) de orden n . Las fases $0, 1, \dots, n-1$ de esta distribución denotan el número de choques críticos acumulados, y n la fase de absorción. Con esta interpretación, claramente,

$$\theta_n = (1, 0, \dots, 0),$$

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} q & p & & & \\ q & & p & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ q & & & & p \\ q & & & & 0 \end{pmatrix}, \Lambda_n^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$$

En consecuencia,

$$p_k^{(n)} = \theta_n \Lambda_n^{k-1} \Lambda_n^{(0)}, k \geq 1$$

Ahora $\bar{p}_k^{(n)}$ representa la probabilidad de supervivencia al k -ésimo. Puede comprobarse que

$$\bar{p}_k^{(n)} = \theta_n \Lambda_n^k e, k \geq 1$$

Se tiene que $p_k^{(n)} = \bar{p}_{k-1}^{(n)} - \bar{p}_k^{(n)}$, lo que significa que el sistema sobrevive al choque $(k-1)$ th y no al choque k , dado que para sobrevivir al k -ésimo choque es necesario que sobreviva a los $(k-1)$ anteriores.

Entonces

$$\bar{p}_{k-1}^{(n)} = \bar{p}_k^{(n)} + p_k^{(n)}.$$

Por tanto, las entradas de la matriz (3.1) en el presente modelo están dadas por

$$l_k = \frac{\bar{p}_k^{(n)}}{\bar{p}_{k-1}^{(n)}}, 1 \leq k \leq N$$

esto quiere decir que la probabilidad condicional de que el sistema no falle a la llegada del k -ésimo choque dado que ha sobrevivido a los $(k-1)$ choques anteriores, puede escribirse como acabamos de ver.

En consecuencia,

$$p_k = p_k^{(n)}, 1 \leq k \leq N$$

$$p_{N+1} = \bar{p}_N^{(n)}$$

El tiempo de vida del sistema sigue una distribución PH_d con representación (v_w, V_w) . La función de supervivencia se determina directamente a partir de aquí.

3.5. Aplicación numérica

Para ilustrar los cálculos de este capítulo se presenta un ejemplo numérico. Se supone que los choques llegan siguiendo distribuciones Weibull, como distribuciones del tiempo entre llegadas. Para el desgaste se considera una mezcla de tres distribuciones Erlang, que no se modifica con los sucesivos choques. El motivo por el que se utiliza esta distribución para representar el tiempo de vida del sistema es que la mezcla finita de distribuciones Erlang es densa en el conjunto de las distribuciones continuas definidas en la recta real positiva. Se realizarán aproximaciones de distribuciones PH a las distribuciones Weibull, como se hizo en el Capítulo 2. La mezcla de distribuciones Erlang considerada tiene razón de fallo en forma de curva de bañera (BFR), dicha distribución ha sido obtenida por la autora en un trabajo previo, ver Segovia [70].

Se supone que el sistema puede soportar un máximo de dos choques, siendo reemplazado a la llegada del tercer choque. Las probabilidades de fallo con cada choque son, por hipótesis, $p_0 = 0, p_1 = 0,2, p_2 = 0,4, p_3 = 0,4$. Se supone que los tiempos entre llegadas de choques siguen distribuciones Weibull.

La función de densidad de una Weibull de parámetros β (forma) y λ (escala) viene dada por,

$$f(x) = \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\beta\right\}$$

- Sea $X^{(0)} \rightsquigarrow W(0,5, 100)$, la aproximación PH tiene la siguiente representación

$$\begin{aligned} \beta^{(0)} &= (0,482195, 0,517805), \\ S^{(0)} &= \begin{pmatrix} -0,027097 & 0,016843 \\ 0,263964 & -0,476616 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Sea $X^{(1)} \rightsquigarrow W(0,8, 10)$, en este caso la distribución PH que hemos

ajustado tiene representación

$$\begin{aligned}\beta^{(1)} &= (0,510507, 0,489493), \\ S^{(1)} &= \begin{pmatrix} -0,089839 & 0,03974 \\ 0,166766 & -0,447977 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- Sea $X^{(2)} \rightsquigarrow W(2, 50)$, la distribución PH que mejor se ajusta a esta Weibull viene dada por

$$\begin{aligned}\beta^{(2)} &= (0,007709, 0,992291, 0), \\ S^{(2)} &= \begin{pmatrix} -0,067255 & 0 & 0 \\ 0 & -0,067186 & 0,066893 \\ 0,067099 & 0 & -0,067099 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

A partir de aquí podemos calcular la distribución del tiempo de vida del sistema para el modelo de choque, T_k :

- $T_0 = X^{(0)} \rightsquigarrow PH(\beta^{(0)}, S^{(0)})$,
- $T_1 = X^{(0)} + X^{(1)} \rightsquigarrow PH(g^{(1)}, G^{(1)})$ con

$$\begin{aligned}g^{(1)} &= (\beta^{(0)}, 0, 0) = (0,482195, 0,517805, 0, 0) \\ G^{(1)} &= \begin{pmatrix} -0,02710 & 0,01684 & 0,00523 & 0,00502 \\ 0,263964 & -0,47662 & 0,10856 & 0,10409 \\ 0 & 0 & -0,08984 & 0,03974 \\ 0 & 0 & 0,16677 & -0,44798 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- $T_2 = X^{(0)} + X^{(1)} + X^{(2)} \rightsquigarrow PH(g^{(2)}, G^{(2)})$ con

$$g^{(2)} = (\beta^{(0)}, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$G^{(2)} = \begin{pmatrix} -0,0271 & 0,0168 & 0,0052 & 0,0050 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2640 & -0,4766 & 0,1086 & 0,1041 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0899 & 0,0397 & 0,0004 & 0,0497 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1668 & -0,4480 & 0,0022 & 0,2791 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0673 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0672 & 0,0669 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0671 & 0 & -0,0671 \end{pmatrix}$$

Los valores de esta matriz son aproximados dada la dimensión de la matriz

Ahora podemos se calculan las matrices $P(n,t)$, $n = 0,1,2$, para el proceso de recuento. Estas matrices son:

$$\begin{aligned} P(0,t) &= \exp(S^{(0)}t), \\ P(1,t) &= \int_0^t P(0,u)S^{(0)}\beta^{(1)} \exp(S^{(1)}(t-u))du, \\ P(2,t) &= \int_0^t P(1,u)S^{(1)}\beta^{(2)} \exp(S^{(2)}(t-u))du, \end{aligned}$$

La función de supervivencia del sistema, utilizando la metodología del proceso de recuento del número de choques, es

$$\bar{H}(t) = \beta^{(0)}\{P(0,t)e + P(1,t)e \cdot 0,8 + P(2,t)e \cdot 0,4\}$$

En términos de las variables T_k , la función de supervivencia del sistema puede obtenerse como,

$$\begin{aligned} \bar{H}(t) &= \sum_{k=0}^2 (p_{k+1}P(T_k > t)) = 0,2 \cdot g^{(0)} \exp(G^{(0)}t) e + 0,4 \cdot g^{(1)} \exp(G^{(1)}t) e \\ &+ 0,4 \cdot g^{(2)} \exp(G^{(2)}t) e \end{aligned}$$

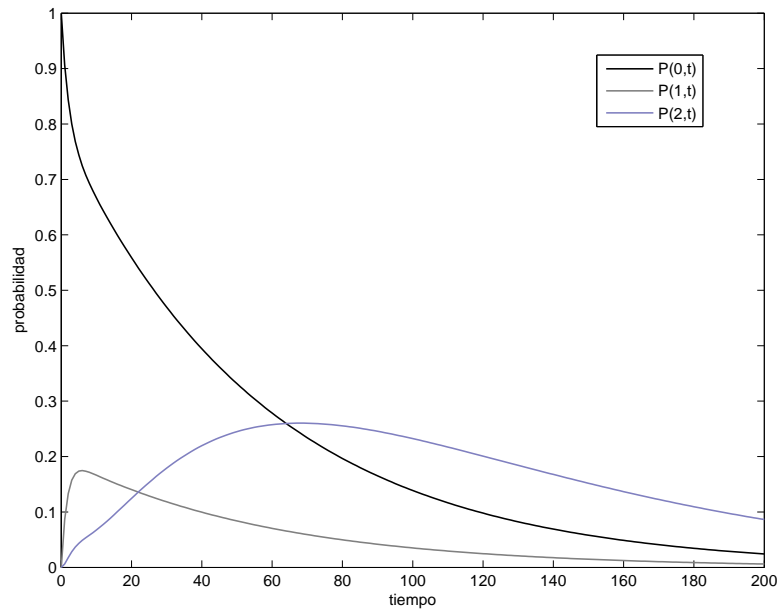


Figura 3.4: Probabilidades de ocurrencia de choques

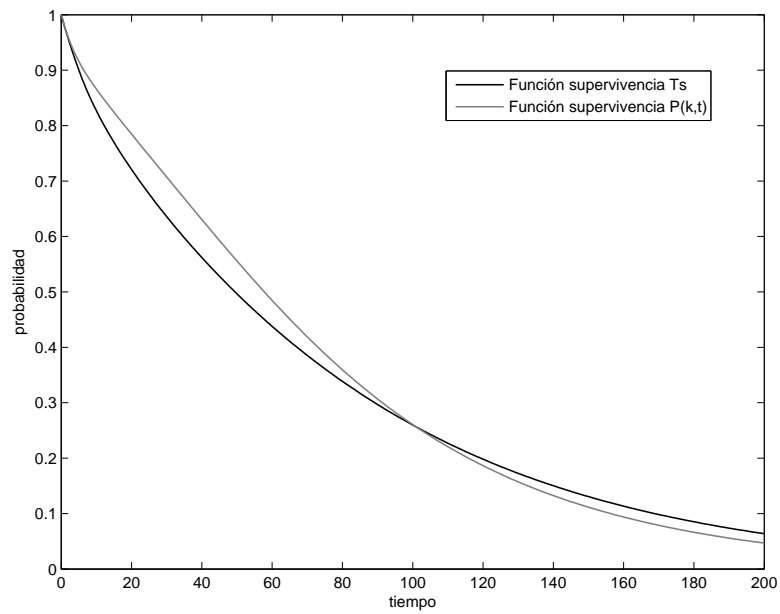


Figura 3.5: Funciones de supervivencia siguiendo dos procedimientos

En la Figura 3.4 se puede observar las probabilidades de que se produzcan 0, 1 y 2 choques a lo largo del tiempo.

En la Figura 3.5 se representa la función de supervivencia del sistema obtenida mediante los dos métodos presentados en este Capítulo. Como puede observarse, dichos métodos proporcionan funciones de supervivencia muy similares.

Por otro lado, tomando $c = 1$, tenemos que las variables aleatorias $Y^{(k)}$, $k = 0, 1, 2$, que representan los tiempos de vida del sistema entre choques consecutivos, son idénticas. Esto quiere decir que no hay desgaste debido a los choques dado que no hay degradación después de un choque. Estas variables siguen distribuciones PH que son mezclas de distribuciones Erlang. Su representación viene dada por:

- $Y^{(0)} \rightsquigarrow PH(\alpha^{(0)}, T)$ con

$$\alpha^{(0)} = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0)$$

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- $Y^{(1)} \rightsquigarrow PH(\alpha^{(1)}, cT)$ with $c = 1$, $\alpha^{(1)} = \alpha^{(0)}$, and $cT = T$,
- $Y^{(2)} \rightsquigarrow PH(\alpha^{(2)}, c^2T)$ with $\alpha^{(2)} = \alpha^{(0)}$, and $c^2T = T$.

La variable aleatoria que representa el tiempo de vida entre los choques k y $(k+1)$ había sido denotada por W_k , y recordemos que tiene distribución PH.

A partir de las distribuciones anteriores se puede obtener su representación. Para los distintos valores de k dicha representación es:

- $W_0 = Y^{(0)} \rightsquigarrow PH(\alpha^{(0)}, T)$
- $W_1 = Y^{(0)} + Y^{(1)} \rightsquigarrow PH(w^{(1)}, W^{(1)})$ con

$$w^{(1)} = (\alpha^{(0)}, \underbrace{0, \dots, 0}_{1 \times 18}); W^{(1)} = \begin{pmatrix} T & T^0 \alpha^{(0)} \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

- $W_2 = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} \rightsquigarrow PH(w^{(2)}, W^{(2)})$ con

$$w^{(2)} = (\alpha^{(0)}, \underbrace{0, \dots, 0}_{1 \times 27}); W^{(2)} = \begin{pmatrix} T & T^0 \alpha^{(0)} & 0 \\ 0 & T & T^0 \alpha^{(0)} \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix}$$

En la siguiente gráfica se representa la función de supervivencia de este sistema sometido a choques y a desgaste.

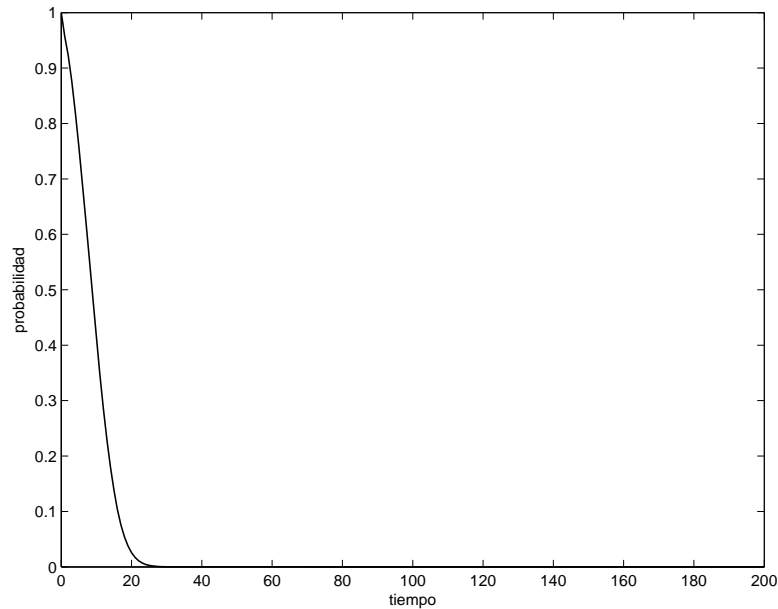


Figura 3.6: Función de supervivencia del sistema

La expresión de la función de supervivencia en términos del proceso de recuento es la siguiente,

$$\begin{aligned} \bar{H}(t) = & \beta^{(0)} \{P(0, t)e (w^{(0)} \exp\{W^{(0)}t\}e) + P(1, t)e \cdot 0,8 \cdot (w^{(1)} \exp\{W^{(1)}t\}e) \\ & + P(2, t)e \cdot 0,4 \cdot (w^{(2)} \exp\{W^{(2)}t\}e)\} \end{aligned}$$

Y en términos de las variables aleatorias $\text{Min}(T_k, D_k)$, dicha función de supervivencia es

$$\bar{H}(t) = 0,2 \cdot g^{(0)} \exp(G^{(0)}t) e + 0,4 \cdot g^{(1)} \exp(G^{(1)}t) e + 0,4 \cdot g^{(2)} \exp(G^{(2)}t) e$$

Observando la Figura 3.4, puede verse que, al principio del tiempo de observación, la probabilidad de que no haya llegado ningún choque al sistema es bastante alta, por tanto, el tiempo de vida del sistema está fundamentalmente gobernado por W_0 . Recordemos que la variable aleatoria W_0 se había seleccionado de tal manera que tuviera razón de fallo en forma de curva de bañera en cierto intervalo de tiempo, esta distribución corresponde a la distribución del tiempo de vida entre choques, ya que como se ha especificado antes, no hay degradación del sistema debida a los choques.

Cuando hay llegadas de choques al sistema, la función razón de fallo del modelo de choque y desgaste, al principio del periodo de observación, es casi idéntica a la razón de fallo del sistema entre choques, lo cual parece lógico por los motivos expuestos anteriormente. Dichas razones de fallos aparecen representadas en la Figura 3.7.

Finalmente, en la tabla 3.1 se dan las probabilidades de supervivencia para el modelo de choque y para el modelo de choque y desgaste, con objeto de compararlos. Como era de esperar, la probabilidad de supervivencia en el modelo de choque y desgaste decrece mucho más rápidamente que en el modelo de choque. El desgaste tiene una gran influencia sobre el tiempo de supervivencia del sistema.

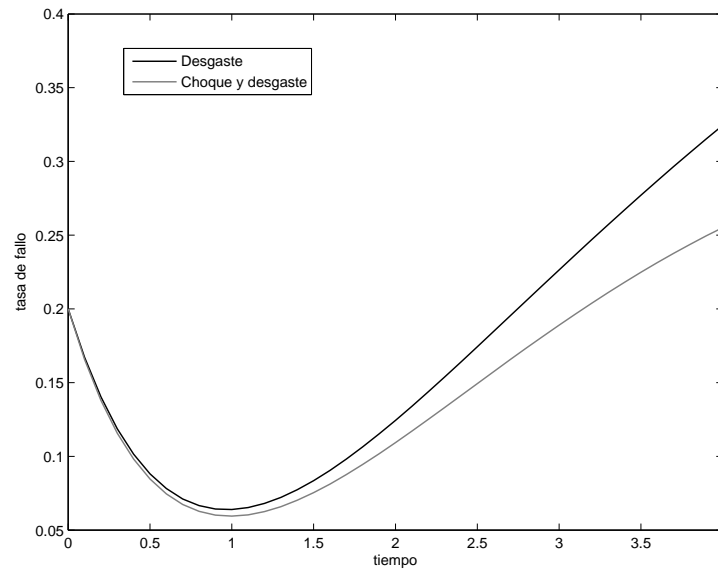


Figura 3.7: Razón de fallo entre choques y para el sistema

Tabla 3.1: Probabilidades de supervivencia

t	Choque	Choque y desgaste
0	1	1
1	0.97829	0.95781
2	0.9593	0.92268
3	0.94284	0.8765
4	0.92849	0.82027
5	0.9158	0.75858
10	0.86592	0.41481
20	0.78485	0.025652
30	0.70732	0.0001926
40	0.63061	< 0,0001
50	0.55577	< 0,0001
70	0.41888	< 0,0001
90	0.30669	< 0,0001
100	0.26057	< 0,0001

Capítulo 4

Sistemas de choque y desgaste usando MAP

Se considera un sistema sometido a choques que llegan siguiendo un MAP. En la Sección 2 se construye el modelo. En la sección 3 se estudia el proceso de recuento asociado al número de choques desde la perspectiva del MAP. En la sección 4, se estudia el modelo que soporta un número limitado de choques, que ya se había estudiado en el Capítulo 3 para distribuciones PH. En la Sección 5 se lleva a cabo una aplicación numérica para ilustrar los cálculos.

4.1. Introducción

En este Capítulo se estudia un sistema sometido a choques que llegan siguiendo un MAP. Cuando un determinado número de choques ha llegado al sistema éste es reemplazado. Se estudia también un modelo general donde los reemplazamientos vienen gobernados por una distribución PH_d . Un caso especial de este modelo es aquel donde el sistema puede soportar un número prefijado de choques. El sistema se considera en régimen transitorio y estacionario. En la evolución de este sistema se incluye la reparación minimal, asumiendo que los tiempos de reparación son insignificantes comparados con el tiempo de vida del sistema. Los choques sucesivos no son independientes,

dado que la llegada de los mismos sigue un MAP.

Este Capítulo contribuye al estudio del mantenimiento de sistemas aportando una nueva perspectiva. El MAP se introduce como modelo de llegadas de choques, de manera que hay dependencia entre los tiempos entre llegadas; el número de choques es limitado y aleatorio; se estudia un caso particular donde el número de choques es fijo; se construye el proceso de renovación asociado al número de reemplazamientos; y se calcula la distribución del número de choques entre reemplazamientos.

No hay demasiados artículos en lo que los MAP se utilizan como procesos de llegadas, uno de ellos es [45] de Montoro-Cazorla y Pérez-Ocón, donde se estudia un sistema sometido a fallos internos y externos, en este artículo el tiempo que el sistema está operativo sigue una distribución PH y los fallos externos llegan siguiendo un MAP.

4.2. El modelo

Sea un sistema sometido a choques. Después de cada choque el sistema es reparado de forma minimal, y el tiempo de reparación es insignificante. Después de una serie de choques aleatorios, el sistema es reemplazado por uno nuevo e idéntico. Las siguientes hipótesis establecen como operan los choques.

1. Los choques llegan siguiendo un $MAP(D_0, D_1)$ de orden m . El vector inicial se denota por d .
2. El número de reparaciones minimales antes de que se produzca el reemplazamiento del sistema sigue una distribución $PH_d(\gamma; L)$, donde L es de orden n . Denotamos por γ_0 la probabilidad de que el sistema sea reemplazado a la llegada del primer choque.

Bajo estas hipótesis, se construye la estructura analítica de las llegadas, en otras palabras, se construyen las matrices paramétricas del MAP. Esta construcción se lleva a cabo considerando las condiciones físicas de la llegada de choques. El número de reparaciones minimales actúa como un contador.

El sistema se puede encontrar en dos situaciones en función de los choques: *a)* el sistema no ha sido reparado (no han llegado choques al sistema), esta situación estará representada por el estado 0; o *b)* el sistema ha sufrido alguna reparación minimal (al menos un choque ha llegado al sistema), esta situación estará representada por el estado 1. En la construcción del generador se establece el siguiente orden entre los componentes exponenciales básicos: primero, el contador de reparaciones minimales; y después, la ocurrencia o no de choques. El MAP desarrolla los cambios entre las fases exponenciales. Estas fases no tiene significado desde el punto de vista práctico, pero nos permiten introducir la estructura Markoviana en el modelo. Si no llega ningún choque, se producen una transición entre las fases del MAP, cuyas razones de cambio vienen dadas por D_0 .

Bajo las consideraciones anteriores, se construye el generador Q del proceso que gobierna la evolución del sistema, de orden $m(n+1)$,

$$Q = \begin{pmatrix} D_0 + \gamma_0 D_1 & \gamma \otimes D_1 \\ L^0 \otimes D_1 & I \otimes D_0 + L \otimes D_1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Los bloques de esta matriz representan las siguientes razones de transición:

Bloque (0,0): las razones de transición cuando el sistema está operativo sin haber sido reparado. Esto viene gobernado por D_0 (no se ha producido ningún choque), o por $\gamma_0 D_1$, si el primer choque que llega al sistema, gobernado por D_1 , implica un reemplazamiento, con probabilidad γ_0 .

Bloque (0,1): las razones de transición cuando el sistema ha sufrido un choque. En este caso se inicia el contador γ y ocurre el primer choque gobernado por D_1

Bloque (1,0): las razones de transición cuando el sistema se reinicia, un choque llega, gobernado por D_1 , y el contador termina siguiendo L^0

Bloque (1,1): las razones de transición cuando el sistema está operativo y ha sufrido al menos un choque con anterioridad. Entonces, pueden

producirse uno de los siguientes hechos: (1) el contador no cambia, esto viene gobernado por la matriz identidad, y no llegan choques, esto viene gobernado por D_0 ó (2) un choque llega, gobernado por D_1 , y el contador cambia de fase, esto viene gobernado por L .

El funcionamiento del sistema viene representado en el siguiente diagrama,

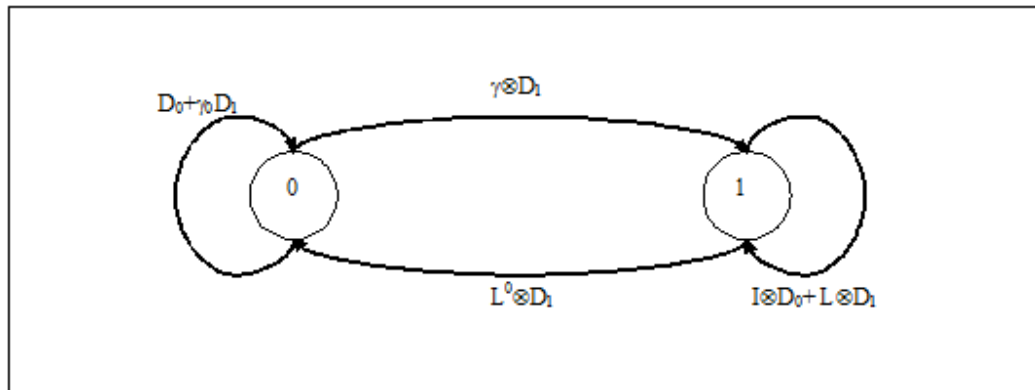


Figura 4.1: Diagrama del sistema

La matriz de probabilidades de transición se calcula a partir de las ecuaciones de Kolmogorov, y es,

$$P(t) = \exp(Qt).$$

Esta matriz se puede expresar por bloques, $P(t) = (P_{ij}(t))$, que corresponden a las funciones de probabilidad de transición entre los estados 0 (nuevo) y 1 (no nuevo) en el instante t :

$$P(t) = \begin{pmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

La razón de ocurrencia de choques en el instante t , que se denota por $\nu(t)$, es el número medio de choques por unidad de tiempo en el instante t . Los choques en el instante t llegan cuando el sistema está en el estado 0 ó en el estado 1. Tanto en el estado 0 como en el 1, un choque llega con razón

dada por D_1 , pero en el estado 1 el choque llega mientras el contador ocupa cualquiera de las fases operativas.

Suponiendo que el estado inicial es 0, el vector de probabilidades iniciales es $(d, 0)$, por tanto, la razón de ocurrencia de choques en el instante t viene dada por

$$\nu(t) = (d, 0)P(t) \begin{pmatrix} D_1 e \\ e \otimes D_1 e \end{pmatrix} = dP_{00}(t)D_1 e + dP_{01}(t)(e \otimes D_1 e). \quad (4.3)$$

Esta expresión es la probabilidad de que el sistema esté en el estado 0 en el instante t multiplicada por la razón de ocurrencia de un choque, más la probabilidad de que el sistema esté en el estado 1 en el instante t (al menos un choque ha llegado al sistema, por lo que el contador está en cualquiera de las fases operativas) multiplicado por la razón de ocurrencia de un choque, dado que el sistema se inicia en el estado 0.

El vector de probabilidades estacionarias π correspondiente a la matriz $P(t)$, está compuesto por dos subvectores, $\pi = (\pi_0, \pi_1)$, correspondientes a los estado 0 y 1. Este vector satisface la ecuación $\pi Q = 0$, sujeta a la condición de normalización $\pi e = 1$. La cantidad $\pi_0 e$ representa la proporción de tiempo que el sistema es nuevo, y $\pi_1 e$ es la proporción de tiempo que el sistema no es nuevo. El sistema resultante es,

$$\begin{aligned} \pi_0(D_0 + \gamma_0 D_1) + \pi_1(L^0 \otimes D_1) &= 0, \\ \pi_0(\gamma \otimes D_1) + \pi_1(I \otimes D_0 + L \otimes D_1) &= 0, \\ \pi_0 e + \pi_1 e &= 1. \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.3. Reemplazamientos

En esta Sección se muestra que los reemplazamientos llegan siguiendo un proceso de renovación tipo-fase y se calcula el número de reemplazamientos en cualquier instante de tiempo.

4.3.1. Tiempos entre llegadas

A partir de (4.1), la matriz Q puede escribirse como $Q = Q(1) + Q(2)$, siendo

$$\begin{aligned} Q(1) &= \begin{pmatrix} D_0 & \gamma \otimes D_1 \\ 0 & I \otimes D_0 + L \otimes D_1 \end{pmatrix} \\ Q(2) &= \begin{pmatrix} \gamma_0 D_1 & 0 \\ L^0 \otimes D_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nótese que $Q(1)$ representa la evolución del sistema antes de que se produzca un reemplazamiento, y $Q(2)$ representa el comportamiento del sistema cuando se produce un reemplazamiento. En este último caso, el sistema se reinicia desde el estado 1, entonces, se puede interpretar como un proceso de llegadas que sigue un $MAP(Q(1), Q(2))$, con matriz de probabilidades de transición

$$G(x) = \int_0^x \exp(Q(1)u) du Q(2)$$

Esta expresión se obtiene de forma directa de Neuts [52] (ver Sección 2.3 en el Capítulo 2).

Dada la estructura del modelo, el tiempo entre dos reemplazamientos consecutivos sigue una distribución PH (v, V) , donde $v = (d, 0)$, y $V = Q(1)$. En otras palabras, los reemplazamientos siguen un proceso de renovación tipo-fase con distribución subyacente $PH(v, V)$.

El vector de absorción correspondiente V^0 es

$$V^0 = Q(2)e = \begin{pmatrix} \gamma_0 D_1 e \\ (L^0 \otimes D_1) e \end{pmatrix}$$

El tiempo medio entre reemplazamientos viene dado por

$$\mu = -vV^{-1}e$$

La evolución del sistema entre dos reemplazamientos consecutivos viene dada por la matriz de probabilidades de transición $R(t)$, que puede obtenerse

a partir de la matriz $V = Q(1)$. La forma de la matriz $Q(1)$ permite obtener una expresión explícita para la matriz $R(t)$.

A partir de los resultados obtenidos en Pérez-Ocón y Montoro-Cazorla [63], si la matriz D puede expresarse de la siguiente manera,

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

y teniendo en cuenta que,

$$\exp(D) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!}$$

se puede comprobar que,

$$D^n = \left(\begin{array}{c|c} A^n & \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} \times B \times C^k \\ \hline 0 & C^n \end{array} \right)$$

y, por tanto,

$$\exp(D) = \left(\begin{array}{c|c} \exp(A) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} \times B \times C^k \\ \hline 0 & \exp(C) \end{array} \right)$$

Utilizando los resultados que anteriores, se tiene que,

$$V^n = \left(\begin{array}{c|c} D_0^n & \sum_{k=0}^{n-1} D_0^{n-1-k} \times (\gamma \otimes D_1) \times (I \otimes D_0 + L \otimes D_1)^k \\ \hline 0 & (I \otimes D_0 + L \otimes D_1)^n \end{array} \right)$$

$\exp(V) =$

$$\left(\begin{array}{c|c} \exp(D_0) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} D_0^{n-1-k} \times (\gamma \otimes D_1) \times (I \otimes D_0 + L \otimes D_1)^k \\ \hline 0 & \exp(I \otimes D_0 + L \otimes D_1) \end{array} \right)$$

La expresión matemática de la función matricial de probabilidades de transición $R(t)$ es

$$R(t) = \exp(Vt) \tag{4.6}$$

Nótese que $R(t)$ es una matriz de (2×2) -bloques, siendo,

Bloque (0,0): las probabilidades de transición en el instante t cuando el sistema es nuevo, es decir, no ha sido reparado todavía en t .

Bloque (0,1): las probabilidades de transición en el instante t cuando el sistema es nuevo y, al menos, se ha producido una reparación, pero no se ha producido el reemplazamiento de dicho sistema en t .

Bloque (1,1): las probabilidades de transición en el instante t cuando el sistema no es nuevo.

En otras palabras, las entradas de $R(t)$ son las funciones de probabilidades de transición restringidas a la evolución del sistema entre reemplazamientos.

4.3.2. Número de reemplazamientos

Los reemplazamientos en este modelo siguen un proceso de renovación tipo-fase con distribución $PH(v, V)$, dada en la Sección anterior. El número de reemplazamientos en el instante t viene dada por las funciones matriciales de probabilidad $P(n, t) = P_{ij}(n, t)$, donde

$$P_{ij}(n, t) = P\{N(t) = n, J(t) = j | N(0) = 0, J(0) = i\},$$

y $N(t)$ el número de reemplazamientos en el intervalo $(0, t]$. $\{N(t), t \geq 0\}$ es el proceso de recuento del proceso de renovación tipo-fase que describe los reemplazamientos. Los elementos i, j denotan los estados 0, 1 definidos anteriormente.

Suponiendo que el sistema se inicia en el estado 0, y aplicando las ecuaciones de Kolmogorov, tenemos,

$$\begin{aligned} P'(0, t) &= P(0, t)Q(1) \\ P'(n, t) &= P(n-1, t)Q(2)ev + P(n, t)Q(1), n \geq 1 \end{aligned}$$

Las ecuaciones diferenciales para obtener las matrices $P(n, t)$ se resuelven como sigue. La forma de obtener estas matrices es bastante similar a la que se utilizó en el Capítulo 3.

1. Si $P'(0, t) = P(0, t)Q(1)$ then $P(0, t) = \exp(Q(1)t)$

2. Para $n \geq 1$,

$$P'(n, t) = P(n-1, t)Q(2)ev + P(n, t)Q(1) \Rightarrow P'(n, t) - P(n, t)Q(1) = P(n-1, t)(Q(2)ev)$$

Entonces, utilizando el factor de integración $\exp[-Q(1)t]$ se tiene,

$$P(n, t) = \left(\int_0^t P(n-1, u)(Q(2)ev)\exp[Q(1)(t-u)]du \right)$$

Las matrices $P(n, t)$ vienen dadas por,

$$\begin{aligned} P(0, t) &= \exp(Q(1)t) \\ P(n, t) &= \int_0^t P(n-1, u)(Q(2)ev)\exp(Q(1)(t-u))du, n \geq 1 \end{aligned}$$

Estas matrices de probabilidad puede escribirse de la siguiente manera,

$$P(n, t) = \begin{pmatrix} P_{00}(n, t) & P_{01}(n, t) \\ P_{10}(n, t) & P_{11}(n, t) \end{pmatrix}$$

Si se supone que el sistema se inicia en el estado 0, la expresiones analíticas para $P_{00}(n, t)$ y $P_{01}(n, t)$, en términos de las matrices paramétricas en el sistema, son de la siguiente forma,

For $n = 0$,

$$\begin{aligned} P_{00}(0, t) &= \exp(D_0 t) \\ P_{01}(0, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} D_0^{n-1-k} \times (\gamma \otimes D_1) \times (I \otimes D_0 + L \otimes D_1)^k \end{aligned}$$

Este resultado es consecuencia directa del cálculo que hemos realizado anteriormente de la matriz $\exp(V)$.

A partir de aquí se obtienen la expresiones explícitas para $P_{00}(n, t)$ y $P_{01}(n, t)$

$$P_{00}(n, t) = \int_0^t P_{01}(n-1, t-u)(L^0 \otimes D_1)(e \cdot d) \exp(D_0 u) du$$

$$P_{01}(n, t) = \int_0^t P_{01}(n-1, t-u)(L^0 \otimes D_1)(e \cdot d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} D_0^{n-1-k} \times (\gamma \otimes D_1) \times (I \otimes D_0 + L \otimes D_1)^k du.$$

4.4. Modelo con un número limitado de choques

En esta Sección se considera el modelo estudiado en la Sección 2, pero reemplazando la segunda hipótesis por una nueva que limita el número de choques.

2bis. El sistema puede soportar K choques antes de que se produzca su reemplazamiento.

4.4.1. Generador

Este modelo es un caso especial del anterior, pero el estudio de este modelo no se deduce de forma directa a partir del anterior. Ahora, el sistema puede soportar como máximo K choques, de tal manera que en el siguiente choque, el choque $(K + 1)$, el sistema se reemplaza por uno nuevo e idéntico. Si el reemplazamiento se produce a la llegada del primer choque, entonces $K = 0$ y el generador sería $D = D_0 + D_1$. El contador está gobernado por una distribución $PH(\gamma, L)$ de orden K , donde

$$\gamma_0 = 0, \gamma = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{K \times K} \quad L^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{K \times 1}$$

El generador dado en (4.1) en este caso tiene la siguiente forma

$$Q = \begin{pmatrix} D_0 & \bar{D}_{01} \\ \bar{D}_{10} & \bar{D}_{11} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

donde, en este caso particular, el orden de Q es $m(K + 1)$ y los bloques representan,

Bloque (0,0): las razones de transición cuando no ha habido llegadas de choques al sistema. Estas razones de transición vienen dada por D_0 .

Bloque (0,1): las razones de transición cuando el sistema ha sufrido un choque, éstas vienen dadas por,

$$\bar{D}_{01} = \left(D_1, 0, 0, \dots, 0 \right)_{m \times K},$$

Bloque (1,0): las razones de transición cuando se produce el choque $K + 1$, en este caso el sistema falla y siguiendo D_1 . En este caso las razones de transición vienen dadas por,

$$\bar{D}_{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ D_1 \end{pmatrix}_{K \times m}$$

Bloque (1,1): las razones de transición cuando el sistema está operativo y ha sufrido al menos un choques. Entonces existe dos posibilidades: (1) no se producen llegadas de choques, lo cual viene gobernado por D_0 o (2) el k -ésimo choque llega al sistema ($k = 2, \dots, K$), gobernado por D_1 . Así pues, este bloque viene dado por,

$$\bar{D}_{11} = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & & & & \\ & D_0 & D_1 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & D_0 & D_1 & \\ & & & & D_0 \end{pmatrix}_{mK \times mK}.$$

4.4.2. Reemplazamientos

Las probabilidades de transición se calculan a partir de las ecuaciones diferenciales de Kolmogorov, esto es $P(t) = \exp(Qt)$.

Esta matriz se puede expresar por bloques como $P(t) = (P_{ij}(t))$, correspondientes a las funciones de probabilidades de transición entre los estados $i, j = 0, 1, \dots, K$, en el instante t .

La razón de ocurrencia de choques en el instante t se denota por $\nu(t)$. Un choque en el instante t se produce cuando el sistema ocupa el estado k , $0 \leq k \leq K$, este choque llega con razón dada por D_1 . Pero en el estado k el choque llega mientras el contador se encuentra en cualquiera de sus fases operativas. Por tanto, $\nu(t)$ viene dada por,

$$\nu(t) = dP_{00}(t)D_1e + d \sum_{j=1}^K P_{0j}(t)D_1e, t \geq 0 \quad (4.8)$$

donde d es el vector inicial de probabilidades.

Como en el sistema que hemos estudiado anteriormente, el generador se puede descomponer en $Q = Q(1) + Q(2)$, donde en este caso las matrices son

$$Q(1) = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & & & \\ & D_0 & D_1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & D_0 & D_1 \\ & & & & D_0 \end{pmatrix},$$

$$Q(2) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 & & 0 \end{pmatrix},$$

las mismas que se habían obtenido en (4.5), pero con $\gamma_0 = 0$, ya que el sistema no se reemplaza hasta la llegada del choque ($K+1$). Las expresiones para las probabilidades $P(n, t)$ son las mismas que las obtenidas en (4.7), pero con la matriz L y los vectores L^0, γ dados en esta Sección.

Se verifica lo mismo para el tiempo medio entre reemplazamientos, donde $V = Q(1)$ y $V^0 = Q(2)e$.

4.4.3. Vector de probabilidades estacionarias

El vector de probabilidades estacionarias se puede expresar de la siguiente forma $\pi = (\pi_0, \pi_1)$, donde $\pi_1 = (\pi_{11}, \pi_{12}, \dots, \pi_{1K})$, siendo $\pi_0 e$ la probabilidad de que el sistema no haya sufrido ningún choque y $\pi_{1j} e$ la probabilidad de que el sistema haya sido reparado de forma minimal j veces $j = 1, \dots, K$.

El vector π satisface la ecuación $\pi Q = 0$, sujeta a la condición de normalización $\pi e = 1$. El sistema resultante es

$$\begin{aligned} \pi e &= 1 \\ \pi_0 D_0 + \pi_{1K} D_1 &= 0 \\ \pi_{1j-1} D_1 + \pi_{1j} D_0 &= 0, j = 1, \dots, K-1. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Resolviendo este sistema por recurrencia, la expresión final del vector de probabilidades estacionarias es

$$\pi_{1j} = (-1)^j \pi_0 R^j, j = 1, \dots, K, \quad (4.10)$$

donde $R = D_1 D_0^{-1}$, suponiendo que D_0^{-1} existe. Por la condición de normalización, π_0 es solución del sistema:

$$\begin{aligned} \pi_0 (I + (-1)^K R^{K+1}) &= 0, \\ \pi_0 \left(\sum_{j=0}^K (-1)^j R^j e \right) &= 1. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Nótese que π_0 es un autovector de la matriz R^{K+1} con autovalor asociado $(-1)^{K+1}$.

4.4.4. Choques siguiendo una proceso de renovación tipo-fase

El proceso proceso de renovación tipo-fase es un caso particular del MAP que se esta considerando para modelizar las llegadas de choques. Como puede

verse, en este caso, las expresiones son mucho más simples que en el caso general.

Tomando $D_1 = -D_0ed$, el MAP actúa como un proceso de renovación tipo-fase. En este caso, $R = D_1D_0^{-1} = -D_0edD_0^{-1}$, y $R^j = (-1)^{j+1}R$. Reemplazando esta matriz en (4.11), se obtiene la siguiente expresión

$$\pi_{1j} = (-1)^j \pi_0 R^j = -\pi_0 R, j = 1, \dots, K,$$

que puede ser escrita en forma compacta como

$$\pi_1 = -\pi_0(e'_K \otimes R),$$

e'_K es un vector fila de 1s de orden K . El subvector π_0 es solución del sistema

$$\begin{aligned} \pi_0(D_0 + RD_1) &= 0, \\ \pi_0(I - KRe) &= 1. \end{aligned}$$

4.4.5. Número de choques entre reemplazamientos

Se denota por $F(n, t)$ la probabilidad de que se hayan producido n choques en el instante t entre reemplazamientos. El reemplazamiento ocurre a la llegada del $(K+1)$ -ésimo choque. Estas probabilidades satisfacen las ecuaciones diferenciales matriciales adelantadas de Kolmogorov, por tanto:

$$\begin{aligned} F'(0, t) &= F(0, t)D_0, \\ F'(1, t) &= F(1, t)D_0 + F(0, t)D_1, \\ F'(2, t) &= F(2, t)D_0 + F(2, t)D_1, \\ &\vdots \\ F'(n, t) &= F(n, t)D_0 + F(n-1, t)D_1, \end{aligned}$$

Para resolver este sistema se utiliza la transformada de Laplace, \mathfrak{L} , bajo las condiciones iniciales $F(0, 0) = I, F(n, 0) = 0, n = 1, 2, \dots$,

$$1. \mathfrak{L}F'(0, t) = sF(0, s) - F(0, 0) = F(0, s)D_0 \Rightarrow sF(0, s) - I = F(0, s)D_0$$

Entonces,

$$F(0, s) = [sI - D_0]^{-1}$$

$$2. \mathfrak{L}F'(1, t) = sF(1, s) - F(1, 0) = F(0, s)D_1 + F(1, s)D_0 \Rightarrow sF(1, s) - F(1, s)D_0 = F(0, s)D_1$$

Por tanto,

$$F(1, s) = F(0, s)D_1[sI - D_0]^{-1}$$

$$3. \mathfrak{L}F'(2, t) = sF(2, s) - F(2, 0) = F(1, s)D_1 + F(2, s)D_0 \Rightarrow F(2, s)[sI - D_0] = F(1, s)D_1 \Rightarrow F(2, s) = F(1, s)D_1[sI - D_0]^{-1}$$

En este caso,

$$F(2, s) = F(0, s) [D_1[sI - D_0]^{-1}]^2$$

Por inducción, si se verifica para $n - 1$ que

$$F(n - 1, s) = F(0, s) [D_1[sI - D_0]^{-1}]^{n-1}$$

Entonces, para n

$$4. \mathfrak{L}F'(n, t) = sF(n, s) - F(n, 0) = F(n - 1, s)D_1 + F(n, s)D_0 \Rightarrow F(n, s)[sI - D_0] = F(n - 1, s)D_1 \Rightarrow$$

$$F(n, s) = F(0, s) [D_1[sI - D_0]^{-1}]^n$$

En resumen,

$$\begin{aligned} F(0, s) &= [sI - D_0]^{-1} \\ F(n, s) &= F(0, s) [D_1[sI - D_0]^{-1}]^n \end{aligned} \tag{4.12}$$

Las funciones $F(n, t)$ pueden obtenerse utilizando la inversa de la transformada de Laplace. De esta manera se puede calcular la función de supervivencia del sistema entre reemplazamientos como,

$$\bar{H}(t) = d \sum_{n=0}^K F(n, t) e \quad (4.13)$$

Ya que en este caso $\bar{P}_n = 1$, para $n = 0, \dots, K$ y $\bar{P}_{K+1} = 0$.

Algoritmo

A continuación se presentan los pasos para construir la función de supervivencia para este caso particular, suponiendo que d , D_0 y D_1 son conocidos.

Paso 1 Calcular la matriz $F(0, s) = [sI - D_0]^{-1}$.

Paso 2 Calcular las matrices $F(n, s)$ para $1 \leq n \leq K$, usando (4.12).

Paso 3 Utilizar la inversa de la transformada de Laplace para calcular las matrices $F(n, t)$.

Paso 4 Una vez se se han obtenido estas matrices, se puede determinar la función de supervivencia (4.13).

4.5. Aplicación numérica

Se ilustran los cálculos anteriores por medio de un ejemplo el modelo con un número fijo de choques antes de que se produzca el reemplazamiento del sistema. En este caso el sistema será reemplazado cuando haya sufrido 4 reparaciones minimales ($K = 4$).

Como se mencionó anteriormente, el proceso de renovación tipo-fase es un caso particular del MAP. Si (α, T) es la representación de una distribución PH, entonces el proceso de renovación asociado a un MAP se obtiene tomando $D_0 = T$ y $D_1 = T^0\alpha$. Para este ejemplo se ha considerado la distribución PH que mejor se ajusta a los tiempos de fallo de un grupo de 60 aparatos

eléctricos en un test de vida (Figura 2.2). La representación PH dada en la Introducción es,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0,472699 & 0,527301 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} -0,000625 & 0,000490 \\ 0 & -0,000625 \end{pmatrix}.$$

Los valores del MAP son los siguientes:

$$d = \begin{pmatrix} 0,472699 & 0,527301 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} -0,000625 & 0,000490 \\ 0 & -0,000625 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 6,3814e - 005 & 7,1186e - 005 \\ 0,00029544 & 0,00032956 \end{pmatrix}.$$

En primer lugar se calculan π^* , el vector de probabilidades estacionarias del MAP, y λ^* la razón de llegadas estacionaria, ver Sección 2.3.1 en el Capítulo 2.

El generador D viene dado por,

$$D = \begin{pmatrix} -0,00056119 & 0,00056119 \\ 0,00029544 & -0,00029544 \end{pmatrix}$$

Resolviendo las ecuaciones (2.2) en la Sección 2.3.1, se obtiene el vector π^* ,

$$\pi_0^* = 0,344886$$

$$\pi_1^* = 0,655114$$

Ahora se obtiene el valor de λ^* ,

$$\lambda^* = -\pi^* D_0 e = 0,000456006$$

En este caso, λ^* representa la razón estacionaria de llegadas de choques al sistema, como podemos observar dicha razón es muy baja.

Aplicando los cálculos de la Sección 4.4 se obtiene el vector de probabilidades estacionarias para el sistema que se está estudiando:

$$\pi_0 = (0,06880, 0,1311);$$

and $(\pi_{11}, \pi_{12}, \pi_{13}, \pi_{14})$ is

$$(0,0690, 0,1311; 0,0690, 0,1311; 0,0689, 0,1310; 0,0689, 0,1311).$$

Resulta que los vectores π_i son casi idénticos. La cantidad $\pi_0 e$ es aproximadamente 0.2 y representa la probabilidad de que el sistema sea nuevo en régimen estacionario. Las cantidades $\pi_j e$ representan la probabilidad de que el sistema haya sido reparado de forma minimal en $j = 1, 2, 3, 4$ ocasiones. Estas probabilidades son casi idénticas: $\pi_0 e \cong \pi_j e \cong 0,2$.

Para calcular el tiempo medio entre reemplazamientos, ν , hay que obtener la representación PH del proceso proceso de renovación tipo-fase, es decir, (v, V)

$$v = \left(\alpha = d, \quad 0 \right)_{1 \times 10},$$

$$V = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & & & & & & & & \\ & D_0 & D_1 & & & & & & & \\ & & D_0 & D_1 & & & & & & \\ & & & D_0 & D_1 & & & & & \\ & & & & D_0 & D_1 & & & & \\ & & & & & D_0 & D_1 & & & \\ & & & & & & D_0 & & & \\ & & & & & & & D_0 & & \\ & & & & & & & & D_0 & \\ & & & & & & & & & D_0 \end{pmatrix}_{10 \times 10}$$

A partir de aquí se tiene que $\nu = 10965$ unidades de tiempo.

En la siguiente tabla se presentan los vectores de probabilidades estacionarias para los casos en que $K = 1, 2$ y 8. Se puede observar que los diferentes subvectores son casi idénticos para cada uno de los casos, como ocurría en el caso en que $K = 4$.

Tabla 4.1: Vectores de probabilidades estacionarias

K=1	$\pi_0 = (0,1719, 0,3280)$
	$\pi_{11} = (0,1724, 0,3277)$
K=2	$\pi_0 = (0,1146, 0,2187)$
	$\pi_{11} = (0,1150, 0,2185)$
	$\pi_{12} = (0,1149, 0,2183)$
K=8	$\pi_0 = (0,0383, 0,0730)$
	$\pi_{11} = (0,0384, 0,0729)$
	$\pi_{12} = (0,0384, 0,0729)$
	$\pi_{13} = (0,0383, 0,0729)$
	$\pi_{14} = (0,0383, 0,0728)$
	$\pi_{15} = (0,0383, 0,0728)$
	$\pi_{16} = (0,0383, 0,0727)$
	$\pi_{17} = (0,0382, 0,0727)$
	$\pi_{18} = (0,0382, 0,0726)$

Las funciones matriciales de probabilidad $F(n, t)$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$, en el instante $t = 1000$, son

$$\begin{aligned}
 F(0, 0) &= I, \\
 F(n, 0) &= 0, n = 1, 2, 3, \dots \\
 F(0, 1000) &= \begin{pmatrix} 0,53526 & 0,26228 \\ 0 & 0,53526 \end{pmatrix} \\
 F(1, 1000) &= \begin{pmatrix} 0,07290 & 0,09602 \\ 0,15814 & 0,21515 \end{pmatrix} \\
 F(2, 1000) &= \begin{pmatrix} 0,01309 & 0,01647 \\ 0,03492 & 0,04450 \end{pmatrix} \\
 F(3, 1000) &= \begin{pmatrix} 0,00162 & 0,00199 \\ 0,00486 & 0,00599 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$F(4, 1000) = \begin{pmatrix} 0,00015 & 0,00019 \\ 0,00050 & 0,00060 \end{pmatrix}$$

A partir de aquí se obtienen las probabilidades de 0, 1, 2, 3, 4 choques en el instante $t = 1000$, suponiendo que el vector de probabilidades iniciales es $(0,472699, 0,527301)$. Estas probabilidades pueden verse a continuación,

Tabla 4.2: Probabilidades de K choques en $t=1000$

$K = 0$	$K = 1$	$K = 2$	$K = 3$	$K = 4$
0,6592	0,2767	0,0559	0,0074	0,00073757

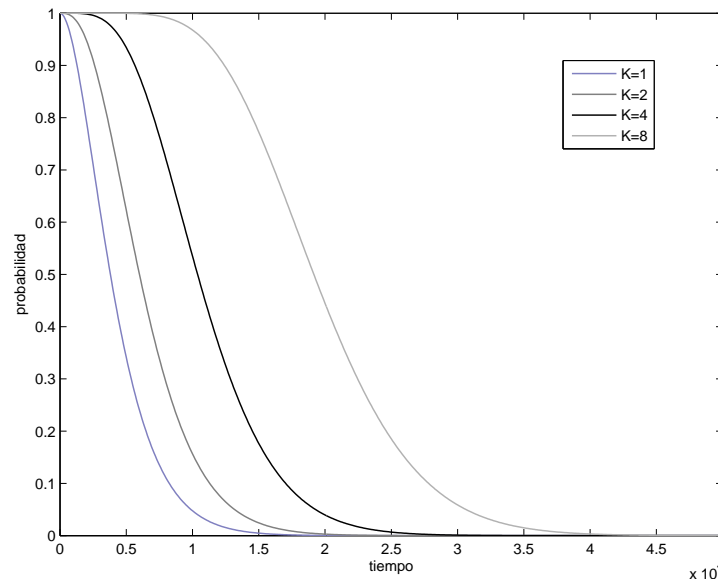


Figura 4.2: Funciones del supervivencia del sistema entre reemplazamientos para $K = 1, 2, 4, 8$

En la Figura 2.4 se han representado las funciones de supervivencia del sistema cuando dicho sistema soporta un máximo de $K = 1, 2, 4, 8$. Como era de esperar, la supervivencia del sistema aumenta cuando el número de choques que el sistema puede soportar aumenta.

Capítulo 5

Sistemas de choque usando un MAP con reemplazamiento

Se considera un modelo de choque como el clásico de Esary et al. [15]. En este Capítulo se aplican los MAM de forma directa, y se generaliza el modelo clásico. En la Sección 2 se establecen las hipótesis del modelo y se calcula el vector de probabilidades estacionarias. En la Sección 3 se introduce el proceso de recuento del número de choques y se calculan las probabilidades del número de choques. Algunos casos particulares interesantes se estudian en las Secciones 4 y 5, con sus correspondientes aplicaciones numéricas.

5.1. Introducción

Se estudia el modelo clásico de Esary et al. [15], cuando los choques llegan siguiendo un MAP y el sistema es reemplazado tras un choque fatal. En este caso, los tiempos entre llegadas de choques consecutivos no son independientes. El estudio se centre en el proceso de renovación cuando se produce el reemplazamiento del sistema después de un fallo fatal. Este modelo es más general que otros modelos que se han considerado con anterioridad, dada la generalidad de los MAP. Algunos de los casos particulares de este sistema que más frecuentemente se han estudiado son aquellos donde el proceso de llegadas es: el proceso de Poisson, el proceso de renovación tipo-fase y el pro-

ceso de Markov modulado. El número de choques no es limitado, por lo que las matrices involucradas en este modelo son infinitas. El proceso de Markov que gobierna las llegadas de choques se construye, y además, se calcula la distribución estacionaria. Se determina el proceso de recuento que gobierna los reemplazamientos. En las expresiones obtenidas aparece sumas infinitas de matrices de orden infinito, esto es muy difícil de aplicar. Cuando el número de choques hasta que se produce el fallo fatal es fijo, se construye el sistema resultante que está gobernado por un proceso de Markov finito.

5.2. Modelo de choque

Se considera un sistema sometido a choques que llegan de forma aleatoria siguiendo un MAP. Los choques pueden ser fatales o no. Cuando un choque fatal llega al sistema, éste es reemplazado por uno nuevo e idéntico. Para este modelo se proporciona una aproximación al número de reemplazamientos en el instante t , y se construye un programa para calcular el número de reemplazamientos en diferentes instantes de tiempo. Las hipótesis de este modelo son las siguientes:

1. Las llegadas de choques vienen gobernadas por un $MAP(D_0, D_1)$ con vector de probabilidades iniciales d y orden m , donde D_0 gobierna el sistema cuando no hay llegada de choques y D_1 gobierna los cambios que se producen en el sistema cuando se produce la llegada del algún choque. El generador del proceso de Markov que gobierna las llegadas es $D = D_0 + D_1$.
2. Sea p_k la probabilidad de que el sistema falle a la llegada del k -ésimo choque, por tanto, la probabilidad de supervivencia al k -ésimo choque es \bar{p}_k . La probabilidad de que el sistema sobreviva a los primeros k choques es \bar{P}_k .

5.2.1. Generador

Para administrar los cambios que se producen en el modelo, se consideran dos estados: el estado 0, el sistema es nuevo (no ha recibido ningún choque), y el estado 1, el sistema ha recibido choques. En el estado 1 se considera el número de choques que el sistema ha soportado, por tanto este estado está formado por $(1, 1), (1, 2), \dots$ donde la segunda componente indica el número de choques no-fatales que el sistema ha sido capaz de soportar. Los estados están formados por fases virtuales exponenciales que explican el comportamiento del MAP.

El modelo que gobierna el sistema bajo las hipótesis establecidas es un proceso de Markov, cuyo generador es construido. Los estados anteriores juegan un papel importante en la construcción de dicho generador.

Una vez analizadas las transiciones entre los estados dados anteriormente, se construyen las matrices cuyas entradas corresponden a las razones de transición entre estos estados. Los bloques de este generador representan:

Bloque (0,0): las razones de transición cuando ningún choque ha llegado al sistema. Esto viene representado por D_0 , no ha habido llegadas de choques al sistema, o por $p_1 D_1$, si ha llegado un choque fatal al sistema y por lo tanto se produce el reemplazamiento. Entonces este bloque viene dado por,

$$D_0 + p_1 D_1$$

Bloque (0,1): las razones de transición cuando el sistema ha soportado un primer choque que no es fatal. Esto viene gobernado por

$$\left(\bar{p}_1 D_1, 0, 0, \dots \right)$$

Bloque (1,0): las razones de transición cuando el sistema ha soportado al menos un choque y llega un nuevo choque fatal. Esto viene gobernado

por la matriz

$$\begin{pmatrix} p_2 D_1 \\ p_3 D_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Bloque (1,1): las razones de transición cuando el sistema ha soportado al menos un choques y, o bien llega otro choque no fatal o bien no se producen llegadas de choques al sistema. Esto viene gobernado por la matriz

$$\begin{pmatrix} D_0 & \bar{p}_2 D_1 & \cdots & \cdots \\ & D_0 & \bar{p}_3 D_1 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, el generador toma la siguiente forma:

$$Q = \left(\begin{array}{c|cccc} D_0 + p_1 D_1 & \bar{p}_1 D_1 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline p_2 D_1 & D_0 & \bar{p}_2 D_1 & 0 & \cdots \\ p_3 D_1 & 0 & D_0 & \bar{p}_3 D_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{array} \right)$$

Este generador se puede escribir de forma compacta como se puede ver a continuación,

$$Q = I \otimes D_0 + P \otimes D_1,$$

siendo P la matriz estocástica que representa las probabilidades de fallo o no después de cada choque:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & \bar{p}_1 & & & \\ p_2 & & \bar{p}_2 & & \\ p_3 & & & \bar{p}_3 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

5.2.2. Vector de probabilidades estacionarias

Sea $\pi = [\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n, \dots]$ el vector de probabilidades estacionarias, donde π_0 es la probabilidad de que el sistema no haya sufrido ningún choque, y π_n la probabilidad de que el sistema haya soportado n choques no fatales cuando el sistema está en régimen estacionario. Este vector satisface la ecuación matricial: $\pi Q = 0, \pi e = 1$.

Desarrollando esta expresión, se establece el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} \pi_0 D_0 + \pi_0 \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i p_{i+1} D_1 \right\} &= 0 \\ \pi_0 \bar{p}_1 D_1 + \pi_1 D_0 &= 0 \\ &\vdots \\ \pi_{n-1} \bar{p}_n D_1 + \pi_n D_0 &= 0 \end{aligned}$$

Por recurrencia se obtiene que

$$\pi_n = (-1)^n \pi_0 (D_1 D_0^{-1})^n \prod_{j=0}^n \bar{p}_j, \quad (5.1)$$

$$\pi_0 \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (D_1 D_0^{-1})^i \prod_{j=0}^i \bar{p}_j \right) e = 1.$$

ya que $\bar{p}_0 = 1$.

5.3. El proceso de recuento

En esta Sección, la probabilidad de que se produzca un determinado número de choques en cualquier instante es calculada. $P(n, t)$ denota la probabilidad de n choques en el instante t . Esta es una matriz cuya entrada (i, j) representa la probabilidad de que se hayan producido n choques en el instante t mientras el proceso de Markov que gobierna las llegadas cambia entre las

fases virtuales i, j . Esta matriz satisface las ecuaciones de Kolmogorov en forma matricial (ver Sección 2.4.4 en Capítulo 2):

$$\begin{aligned} P'(0, t) &= P(0, t) + \sum_{i=0}^{\infty} P(i, t) p_{i+1} D_1 \\ P'(1, t) &= P(0, t) \bar{p}_1 D_1 + P(1, t) D_0, \\ P'(2, t) &= P(1, t) \bar{p}_2 D_1 + P(1, t) D_0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

en general,

$$P'(n, t) = P(n-1, t) \bar{p}_n D_1 + P(n, t) D_0, n = 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

Para resolver este sistema se recomienda utilizar la transformada de Laplace \mathcal{L} .

Aplicando las propiedades de la transformada de Laplace, bajo las condiciones iniciales, $P(0, 0) = I, P(n, 0) = 0, n = 1, 2, \dots$, se obtiene que,

$$1. \quad \mathcal{L}P'(0, t) = sP(0, s) - P(0, 0) = P(0, s)D_0 + \sum_{i=0}^{\infty} P(i, s)p_{i+1}D_1 \Rightarrow sP(0, s) - I = P(0, s)D_0 + \sum_{i=0}^{\infty} P(i, s)p_{i+1}D_1$$

Entonces

$$sP(0, s) - P(0, s)D_0 - \sum_{i=0}^{\infty} P(i, s)p_{i+1}D_1 = I$$

$$2. \quad \mathcal{L}P'(1, t) = sP(1, s) - P(1, 0) = P(0, s)\bar{p}_1 D_1 + P(1, s)D_0 \Rightarrow sP(1, s) - P(1, s)D_0 = P(0, s)\bar{p}_1 D_1$$

Por tanto,

$$P(1, s) = P(0, s)\bar{p}_1 D_1 [sI - D_0]^{-1}$$

$$3. \mathcal{L}P'(2, t) = sP(2, s) - P(2, 0) = P(1, s)\bar{p}_2 D_1 + P(2, s)D_0 \Rightarrow P(2, s)[sI - D_0] = P(1, s)\bar{p}_2 D_1 \Rightarrow P(2, s) = P(0, s)\bar{p}_1 D_1 [sI - D_0]^{-1} \bar{p}_2 D_1 [sI - D_0]^{-1}$$

En este caso,

$$P(2, s) = P(0, s) \left(\prod_{j=1}^2 \bar{p}_j D_1 [sI - D_0]^{-1} \right)$$

Por recurrencia, si se cumple que para $n - 1$ es cierto que

$$P(n - 1, s) = P(0, s) \left(\prod_{j=1}^{n-1} \bar{p}_j D_1 [sI - D_0]^{-1} \right)$$

$$4. \mathcal{L}P'(n, t) = sP(n, s) - P(n, 0) = P(n - 1, s)\bar{p}_n D_1 + P(n, s)D_0 \Rightarrow P(n, s)[sI - D_0] = P(n - 1, s)\bar{p}_n D_1 \Rightarrow$$

$$P(n, s) = P(0, s) \left(\prod_{j=1}^{n-1} \bar{p}_j D_1 [sI - D_0]^{-1} \right) \bar{p}_n D_1 [sI - D_0]^{-1}$$

Finalmente,

$$P(n, s) = P(0, s) [D_1 (sI - D_0)^{-1}]^n \prod_{j=0}^n \bar{p}_j, \quad (5.3)$$

$$P(0, s) = \left[sI - D_0 - \sum_{i=0}^{\infty} (D_1 (sI - D_0)^{-1})^i D_1 (1 - \bar{p}_{i+1}) \prod_{j=0}^i \bar{p}_j \right]^{-1}$$

dado que $\bar{p}_0 = 1$ y $p_{i+1} = 1 - \bar{p}_{i+1}$.

Como puede verse, las expresiones (5.1) y (5.3) tienen forma algorítmica. El problema de calcular estas cantidades es que involucran matrices infinitas, series e inversas de matrices, por lo que se deben introducir hipótesis relativas a la convergencia y existencia de estas matrices. De cualquier forma no existe un método sistemático para calcular estas expresiones.

$$1. \mathcal{L}F'(0, t) = sF(0, s) - F(0, 0) = F(0, s)D_0 \Rightarrow sF(0, s) - I = F(0, s)D_0$$

Entonces,

$$F(0, s) = [sI - D_0]^{-1}$$

$$2. \mathcal{L}F'(1, t) = sF(1, s) - F(1, 0) = F(0, s)\bar{p}_1D_1 + F(1, s)D_0 \Rightarrow sF(1, s) - F(1, s)D_0 = F(0, s)\bar{p}_1D_1$$

De esta manera,

$$F(1, s) = F(0, s)\bar{p}_1D_1[sI - D_0]^{-1}$$

$$3. \mathcal{L}F'(2, t) = sF(2, s) - F(2, 0) = F(1, s)\bar{p}_2D_1 + F(2, s)D_0 \Rightarrow F(2, s)[sI - D_0] = F(1, s)\bar{p}_2D_1 \Rightarrow F(2, s) = F(0, s)\bar{p}_1D_1[sI - D_0]^{-1}\bar{p}_2D_1$$

De igual forma,

$$F(2, s) = F(0, s) \left(\prod_{j=1}^2 \bar{p}_j D_1 [sI - D_0]^{-1} \right)$$

De nuevo, por recurrencia, suponiendo que para $n - 1$ es cierto que,

$$F(n - 1, s) = F(0, s) \left(\prod_{j=1}^{n-1} \bar{p}_j D_1 [sI - D_0]^{-1} \right)$$

$$4. \mathcal{L}F'(n, t) = sF(n, s) - F(n, 0) = F(n - 1, s)\bar{p}_nD_1 + F(n, s)D_0 \Rightarrow F(n, s)[sI - D_0] = F(n - 1, s)\bar{p}_nD_1 \Rightarrow$$

Por tanto,

$$F(n, s) = F(0, s) \left(\prod_{j=1}^{n-1} \bar{p}_j D_1 [sI - D_0]^{-1} \right) \bar{p}_n D_1 [sI - D_0]^{-1}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} F(0, s) &= [sI - D_0]^{-1} \\ F(n, s) &= F(0, s) \left(\prod_{j=1}^n \bar{p}_j D_1 [sI - D_0]^{-1} \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Una vez se han calculado estas probabilidades, se aplica la inversa de la transformada de Laplace para obtener las $F(n, t)$. Finalmente se obtiene la expresión analítica de la función de supervivencia del sistema entre reemplazamientos, que viene dada por,

$$\bar{H}(t) = d \sum_{n=0}^{\infty} F(n, t) e \quad (5.6)$$

No es necesario incluir las probabilidades \bar{P}_k como en el modelo clásico de Esary et al. [15], ya que la probabilidad de que el sistema sobreviva a la llegada de un choque está incluida en el generador, y no se puede producir una transición entre los estados del generador si el choque que llega al sistema es fatal. En otras palabras, cuando el choque que llega al sistema es fatal entra en funcionamiento la matriz de razones de absorción y la única transición posible es al estado de fallo del sistema.

5.4. Modelo con un número limitado de choques

Este sistema ha sido estudiado por Montoro Cazorla et al. en [47] y en [46] suponiendo que los tiempos entre llegadas de choques siguen distribuciones PH y que estos tiempos entre llegadas son independientes. En [48] se estudia un caso parecido, los choques llegan siguiendo un MAP y se obtiene la función de supervivencia. Sin embargo, este caso particular previo se obtiene de manera distinta al actual y, además, se va a construir un generador distinto con el objetivo de obtener el número de renovaciones en el instante t .

Se supone que el sistema puede soportar un número fijo K de choques consecutivos, y que dicho sistema falla a la llegada del siguiente choque. Entonces, se reemplaza por nuevo nuevo e idéntico. Si el número de choques

es K , esto se puede interpretar asignando los siguientes valores $\bar{P}_k = 1$, para $k = 0, 1, \dots, K$, y $\bar{P}_k = 0$ para $K+1, K+2, \dots$. Entonces, $p_{K+1} = 1$, y $p_j = 0$ para $j = 1, \dots, K$.

En este modelo, los estados son $0, 1, \dots, K$, cada uno de ellos indica el número de choques no fatales que el sistema ha soportado antes de que se produzca el fallo fatal. Las transiciones entre estados consecutivos vienen gobernadas por D_1 . Una vez se alcanza el estado K , el siguiente choque que llega al sistema es fatal. Cada renovación viene representada por la matriz,

$$Q_K = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & & & \\ & D_0 & D_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & D_0 & D_1 \\ D_1 e d & & & & D_0 \end{pmatrix}_{Km \times Km} \quad (5.7)$$

Para obtener el vector de probabilidades estacionarias en este caso, teniendo en cuenta la forma de este generador y el hecho de que $\pi Q_K = 0$ y $\pi e = 1$, hay que resolver el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \pi_0 D_0 + \pi_K D_1 e d &= 0 \\ \pi_0 D_1 + \pi_1 D_0 &= 0 \\ &\vdots \\ \pi_{K-1} D_1 + \pi_K D_0 &= 0 \end{aligned}$$

Por recurrencia se obtiene,

$$\pi_n = (-1)^n \pi_0 (D_1 D_0^{-1})^n, n = 0, 1, \dots, K \quad (5.8)$$

El vector π_0 es solución del sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \pi_0 D_0 + (-1)^K \pi_0 (D_1 D_0^{-1})^K D_1 e d &= 0, \\ \pi_0 \sum_{j=0}^K (-1)^j (D_1 D_0^{-1})^j e &= 1 \end{aligned}$$

La matriz Q_K se puede descomponer en dos sumandos: uno relativo a la evolución del sistema entre reemplazamientos, y otro relativo a los cambios que se producen cuando ocurre el reemplazamiento $Q_K = Q'_K + Q'^0_K$.

Estas nuevas matrices son,

$$Q'_K = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & & & \\ & D_0 & D_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & D_0 & D_1 \\ & & & & D_0 \end{pmatrix}, Q'^0_K = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ D_1 e d & & & & \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

El generador del proceso que gobierna los reemplazamientos es,

$$Q_r = \begin{pmatrix} Q'_K & Q'^0_K & & & \\ & Q'_K & Q'^0_K & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

El número de renovaciones, n , en el instante t se denotar por $J(n, t)$. Esta matriz satisface las ecuaciones de Kolmogorov. Como en los casos anteriores se tiene que:

$$\begin{aligned} J'(0, t) &= J(0, t)Q'_K, \\ J'(1, t) &= J(0, t)Q'^0_K + J(1, t)Q'_K, \\ J'(2, t) &= J(1, t)Q'^0_K + J(2, t)Q'_K, \\ &\vdots \end{aligned}$$

y, para cualquier n ,

$$J'(n, t) = J(n-1, t)Q'^0_K + J(n, t)Q'_K, n = 1, 2, \dots$$

El proceso para obtener la expresión final de estas matrices es bastante similar a los dados anteriormente. Se toma la transformada de Laplace, teniendo en cuenta las condiciones iniciales ya mencionadas, y finalmente,

$$\begin{aligned} J(n, s) &= J(0, s) \left[Q'^0_K (sI - Q'_K)^{-1} \right]^n, n = 1, 2, \dots \\ J(0, s) &= [sI - Q'_K]^{-1} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Algoritmo

Los pasos para la obtención del número de renovaciones en diferentes instantes de tiempo, dado que se conocen d , D_0 y D_1 , son,

Paso 1 Construir las matrices Q'_K y Q_K^0 .

Paso 2 Calcular las matrices $J(0, s) = [sI - Q'_K]^{-1}$.

Paso 3 Calcular las matrices $J(n, s)$ para $n = 1 \dots$, usando (5.11).

Paso 4 Aplicar la inversa de la transformada de Laplace para obtener las matrices $J(n, t)$, con $n = 0, 1, \dots$

Step 5 Una vez se han obtenido estas matrices, el número de renovaciones n en el instante t viene dado por $dJ(n, t)e$, siendo e un vector columna de unos de dimensión apropiada.

Aplicación numérica

Se presenta un modelo que soporta un número máximo de $K = 2$ choques, por lo tanto, el sistema será reemplazado a la llegada del tercer choque. Las matrices del MAP vienen dadas por

$$D_0 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 1,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

y, $d = (1, 0)$.

Como en el Capítulo anterior, se obtienen el vector de probabilidades estacionarias para el MAP, π^* , y la razón de llegadas estacionaria, λ^* . Para obtener estas cantidades en primer lugar se proporciona el generador D ,

$$D = D_0 + D_1 = \begin{pmatrix} -1,5 & 1,5 \\ 2,5 & -2,5 \end{pmatrix}$$

Resolviendo las ecuaciones correspondientes, se calcula el vector de probabilidades estacionarias para el MAP,

$$\pi_0^* = 0,5$$

$$\pi_1^* = 0,5$$

En régimen estacionario, la probabilidad de que el sistema este en cualquiera de las fases virtuales del MAP es la misma.

Finalmente se obtiene el valor de λ^* , recordemos que este valor representa la razón de llegada de choques al sistema en régimen estacionario

$$\lambda^* = -\pi^* D_0 e = 1,5$$

A continuación se construye el generador Q_2 , que representa la evolución del sistema entre reemplazamientos,

$$Q_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1,5 & 0,5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

Este generador se puede descomponer en:

$$Q'_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

y

$$Q_2^{\prime 0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde Q_2^{\prime} representa la evolución del sistema entre reemplazamientos y Q_2^0 representa la matriz de razones de absorción, es decir, cuando se produce el fallo del sistema y su consecuente reemplazamiento.

A partir de aquí se pueden calcular las matrices $J(n, t)$. Para el caso particular en el que el número de renovaciones es 10, $n = 10$, se obtiene esta matriz en el instante $t = 20$,

$$J(10, 20) = \begin{pmatrix} 0,0065 & 0,0017 & 0,0028 & 0,0018 & 0,0018 & 0,0011 \\ 0,0072 & 0,0019 & 0,0031 & 0,0020 & 0,0021 & 0,0012 \\ 0,0097 & 0,0027 & 0,0043 & 0,0028 & 0,0030 & 0,0017 \\ 0,0107 & 0,0029 & 0,0048 & 0,0032 & 0,0033 & 0,0019 \\ 0,0141 & 0,0039 & 0,0065 & 0,0043 & 0,0046 & 0,0027 \\ 0,0155 & 0,0043 & 0,0073 & 0,0048 & 0,0052 & 0,0030 \end{pmatrix}$$

Los valores de la matriz son aproximados, dada la dimensión de la misma

En la siguiente tabla se presentan las probabilidades de $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ renovaciones del sistema en el instante $t = 15$, suponiendo que el vector de probabilidades iniciales es $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$. Por tanto estas probabilidades se obtiene a partir de la primera fila de las matrices $J(n, t)$.

Tabla 5.1: Probabilidades de n renovaciones en el instante $t = 15$

$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
< 0,0001	< 0,0001	0.0017	0.0175	0.0807	0.1929
$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$	
0,2672	0.2320	0.1341	0.0540	0.0157	

Finalmente se obtiene el vector de probabilidades estacionarias para $K = 2$,

Tabla 5.2: Vector de probabilidades estacionarias

π_0	(0.38298,0)
π_1	(0.25532,0.06383)
π_2	(0.21277,0.08511)

5.5. Modelo de daño acumulado

En este modelo cada choque que llega al sistema causa un daño aleatorio, y el daño que causa dicho choque se acumula al daño producido por los anteriores. El fallo del sistema se produce cuando el daño acumulado excede un umbral crítico z .

- Sea Y_k el daño producido por el k -ésimo choque, que suponemos sigue una distribución $PH(\alpha_k, T_k)$.
- Sea Z_k el daño acumulado cuando el k -ésimo choque llega al sistema, entonces

$$Z_k = \sum_{i=1}^k Y_i$$

Z_k sigue una distribución PH , dado que es la convolución de distribuciones PH (ver Propiedades de clausura, Teorema 1 de la Sección 2.2.1), con representación

$$\beta_k = \left(\alpha_1, 0, \dots, 0 \right), S_k = \begin{pmatrix} T_1 & T_1^0 \alpha_2 & & \\ & T_2 & T_2^0 \alpha_3 & \\ & & \ddots & \\ & & & T_k \end{pmatrix}$$

Por otro lado,

- Sea l_k la probabilidad de que el sistema sobreviva a la llegada del k -ésimo choque acumulado,

$$l_k = P\{Z_k < z\}$$

- Sea p_k la probabilidad de que el fallo del sistema se produzca a la llegada del choque k . Esta es la probabilidad de que el daño acumulado exceda por primera vez el umbral z . Entonces, como en el Capítulo 3, se tiene que,

$$p_k = \left(\prod_{i=1}^{k-1} (1 - \beta_i \text{ex}\{S_i z\} e) \right) \beta_k \text{ex}\{S_k z\} e, k = 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

Utilizando las matrices dadas en (5.5), se obtiene el tiempo de vida entre reemplazamientos de este sistema, $\bar{H}(t)$ dada en (5.6).

Algoritmo

A continuación se presentan los pasos para construir la función de supervivencia en este modelo particular, suponiendo conocidos el umbral z , la distribución PH del daño producido por cada uno de los choques y las matrices D_0 y D_1 .

Paso 1 Calcular la representación PH de Z_k , es decir, (β_k, S_k) . Al mismo tiempo, obtener las probabilidades de supervivencia l_k . El proceso termina cuando l_k es suficientemente pequeña.

Paso 2 Suponiendo que a partir de l_K las probabilidades de supervivencia son insignificantes, incluyendo l_K , calcular las probabilidades p_k , $k = 1, \dots, K$ usando (5.12).

Paso 3 Calcular la matriz $F(0, s) = [sI - D_0]$.

Paso 4 Calcular las matrices $F(n, s)$, $k = 1, \dots, K$, usando (5.5).

Paso 5 Aplicando la inversa de la transformada de Laplace, obtener las matrices $F(n, t)$ $k = 0, \dots, K$.

Paso 6 Calcular la función de supervivencia dada en (5.6).

Aplicación numérica

Se presenta un ejemplo numérico para ilustrar el caso anterior. En este ejemplo se supone que el umbral es constante, $z = 40$, y se asume que el daño producido por el k -ésimo choque sigue una distribución Erlang, que a su vez es una distribución PH, modificada por un factor de dependencia:

$Y_k \rightsquigarrow PH(\alpha, c^{k-1}T)$, $k = 1, 2, \dots$ donde $c = 0,3$, de tal manera que cada choque causa una pérdida de resistencia en el sistema, debilita el sistema. Además,

$$\alpha = (1, 0), T = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,6 \\ 0 & -0,6 \end{pmatrix}, T^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

A partir de aquí se puede obtener la representación PH del daño acumulado a la llegada del choque k , es decir, la representación PH de Z_k .

La representación PH de Z_k con $k = 1, 2, 3, 4, 5$, viene dada por,

• $Z_1 \rightsquigarrow PH(\beta_1, S_1)$, donde

$$\beta_1 = \alpha = (1, 0), S_1 = T = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,6 \\ 0 & -0,6 \end{pmatrix}$$

• $Z_2 \rightsquigarrow PH(\beta_2, S_2)$, donde

$$\beta_2 = (\alpha, 0, 0), S_2 = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,6 & & & \\ & -0,6 & 0,6 & & \\ & & -0,18 & 0,18 & \\ & & & -0,18 & \\ & & & & -0,18 \end{pmatrix}$$

• $Z_3 \rightsquigarrow PH(\beta_3, S_3)$, donde

$$\beta_3 = (\alpha, 0, 0, 0, 0), S_3 = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,6 & & & & \\ & -0,6 & 0,6 & & & \\ & & -0,18 & 0,18 & & \\ & & & -0,18 & 0,18 & \\ & & & & -0,054 & 0,054 \\ & & & & & -0,054 \end{pmatrix}$$

con $l_k \cong 0, k > 5$. Entonces, las probabilidades de fallo, a la llegada del choque k son

Tabla 5.4: Probabilidades de fallo

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
0.0000	0.0112	0.5944	0.3909	0,0035

y, puede comprobarse que, $\sum_{k=1}^5 p_k \cong 1$.

A continuación se proporcionan las matrices del MAP,

$$D_0 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1,5 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

y $d = (1, 0, 0)$.

De nuevo se obtienen π^* , el vector de probabilidades estacionarias del MAP, y λ^* , la razón de llegadas de choques. El generador D viene dado por,

$$D = D_0 + D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,5 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}$$

En este caso particular, π^* es,

$$\begin{aligned} \pi_0^* &= 0,2 \\ \pi_1^* &= 0,4 \\ \pi_2^* &= 0,4 \end{aligned}$$

y λ^* ,

$$\lambda^* = -\pi^* D_0 e = 1,4$$

A partir de (5.5) y de las probabilidades obtenidas, se pueden calcular las matrices $F(n, s)$. Aplicando la inversa de la transformada de Laplace, se tienen las matrices $F(n, t)$, que nos proporcionan las probabilidades de que se produzcan n choques en el instante t .

Estas matrices, $F(n, t)$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ en el instante $t = 8$ son las siguientes,

$$\begin{aligned}
 F(0, 8) &= \begin{pmatrix} 0,0000001 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00033546 & 0 \\ 0 & 0 & 0,00000061 \end{pmatrix} \\
 F(1, 8) &= \begin{pmatrix} 0,0000009 & 0 & 0,0000121 \\ 0,0001678 & 0,0013419 & 0 \\ 0 & 0,0003293 & 0,0000491 \end{pmatrix} \\
 F(2, 8) &= \begin{pmatrix} 0,0000004 & 0,0003197 & 0,0000954 \\ 0,0007459 & 0,0026536 & 0,0003197 \\ 0,0001598 & 0,0016038 & 0,0001944 \end{pmatrix} \\
 F(3, 8) &= \begin{pmatrix} 0,0000664 & 0,0006961 & 0,0001548 \\ 0,00068877 & 0,0017765 & 0,0006961 \\ 0,0003480 & 0,0016482 & 0,0003251 \end{pmatrix} \\
 F(4, 8) &= \begin{pmatrix} 0,0002248 & 0,0011687 & 0,0003151 \\ 0,0007305 & 0,0019285 & 0,0011687 \\ 0,0005843 & 0,0018879 & 0,0006776 \end{pmatrix} \\
 F(5, 8) &= \begin{pmatrix} 0,0006559 & 0,0023062 & 0,0009021 \\ 0,0012126 & 0,0034106 & 0,0023062 \\ 0,0011531 & 0,0031273 & 0,0017037 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

En la Figura 5.1 se representan las probabilidades de ocurrencia de 0, 1, 2, 3, 4 y 5 choques a lo largo del tiempo considerando que el vector de probabilidades iniciales es $(1,0,0)$. Como podemos observar la probabilidad de que no llegue ningún choque al sistema decrece rápidamente, y las probabilidades de que ocurran 1 ó 2 choques son altas al inicio del periodo de observación.

En la Figura 5.2 se representa la supervivencia del sistema, recordemos que en este caso cualquier de los choques puede causar el reemplazamiento del sistema. La probabilidad de sobrevivir a cada uno de los choques es muy pequeña a partir del tercer choque, como puede verse en la Tabla 5.1.

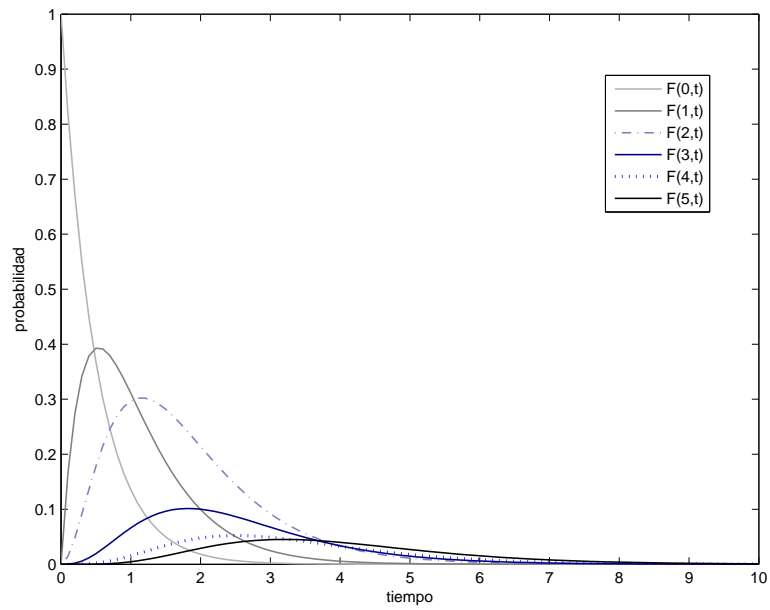
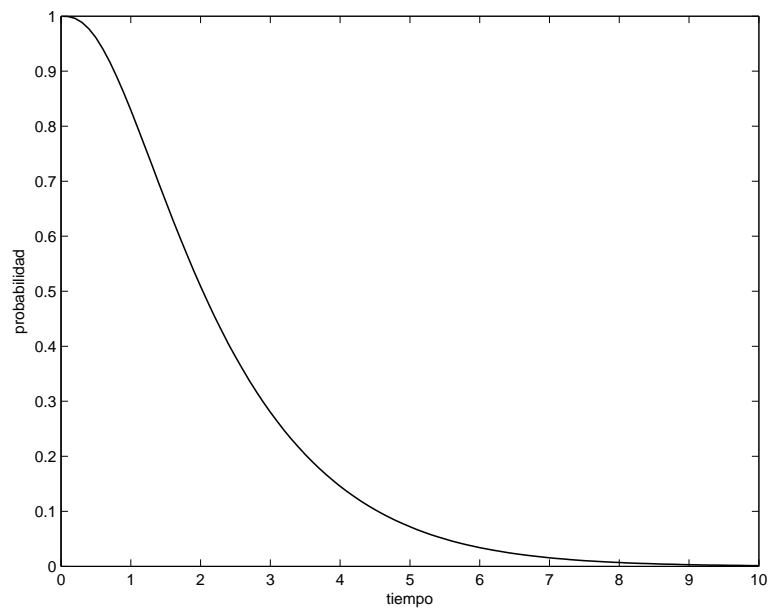
Figura 5.1: Probabilidad de n choques en t 

Figura 5.2: Función de supervivencia del sistema

Capítulo 6

Conclusiones y futuras investigaciones

6.1. Conclusiones y futuras investigaciones (versión en español)

En esta Memoria se ha puesto de manifiesto que tanto las distribuciones PH como los MAP constituyen una herramienta adecuada para el estudio de modelos de choque y desgaste. Las distribuciones PH han sido ampliamente aplicadas en los últimos años para estudiar modelos de colas y, en el momento actual, se están utilizando para el estudio de la fiabilidad de sistemas. Puesto que no existen muchos modelos que permitan describir la llegada de choques a un sistema, las distribuciones PH se han introducido en el estudio de sistemas de choque y desgaste, dado que estas distribuciones han demostrado su utilidad en el estudio de la fiabilidad de sistemas, aunque la literatura publicada en este aspecto no es muy extensa. Antes de la introducción de los MAP como procesos de llegadas, se consideran los procesos de renovación tipo-fase generalizados, como paso intermedio entre los procesos de Poisson y los MAP.

El estudio se centra en sistemas de choque y desgaste, que aún siendo particulares en el área de la fiabilidad, representan una clase importante, puesto

que los choques se pueden interpretar como la influencia del entorno sobre dichos sistemas (choques, voltage, fuerza, carga, etc...). En esta Memoria los choques se consideran, en un sentido amplio, como un hecho instantáneo, un acontecimiento potencialmente dañino. La estructura interna de los sistemas se puede representar mediante distribuciones PH. Por tanto, estas las dos estructuras básicas consideradas en el estudio juegan su papel en estos modelos.

Los modelos descritos son generales, en el sentido de que las distribuciones PH pueden aproximar cualquier distribución definida en la recta real positiva, y de que los MAP son modelos de llegadas generales que consideran la existencia de dependencia. Dada la particular estructura de los MAP, se puede llevar a cabo, de manera natural, el estudio de sistemas sometidos a distintos tipos de choques.

Bajo estos supuestos, se han considerado diferentes sistemas a estudio. En todos ellos se ha calculado su tiempo de vida, y se han ilustrado los cálculos con ejemplos numéricos. Además, se ha llevado a cabo un tratamiento algorítmico para cada uno de los modelos. A lo largo de la Memoria se han ido detallando las contribuciones específicas de cada modelo al estudio de sistemas de choque y desgaste.

El primer modelo, en el Capítulo 3, involucra distribuciones PH donde existe dependencia entre los tiempos entre llegadas, además el número de choques es limitado. Este trabajo continúa el estudio de Neuts y Bhattacharjee [54] bajo la política N, y se presentan algunos casos particulares como el modelo de daño extremo, el modelo de daño acumulativo, y el modelo de rachas de choques.

En el Capítulo 4, se estudian dos modelos de choque: en el primero, el sistema puede soportar un número aleatorio de choques antes de que se produzca el reemplazamiento; y en el segundo, el número de choques antes del reemplazamiento es fijo. En ambos casos el proceso de llegadas es un MAP. Se calcula el número de choques mientras el sistema está operativo y se estudia el proceso de renovación que generan los reemplazamientos.

En el Capítulo 5, el modelo que se estudia no tiene límite en el número de

choques que puede soportar, como ocurría en los casos anteriores. Este modelo puede considerarse como una extensión del modelo clásico de Esary et al. [15] usando MAM en el sentido más general, además se incluye el reemplazamiento del sistema cuando llega un choque fatal. Este modelo es diferente en el sentido de que el número de estados es ilimitado, la matriz que gobierna el sistema es infinita. Se establecen las condiciones de convergencia sobre el sistema para que exista la distribución estacionaria, y se construye el proceso de renovación asociado a los reemplazamientos. Para ilustrar los cálculos, se introducen el modelo que soporta un número limitado de choques, considerado en capítulos anteriores, y el modelo de daño acumulado, considerado en Esary et al. [15].

Como puede deducirse, muchos otros modelos y sistemas de fiabilidad con múltiples unidades sometidos a choques pueden estudiarse usando métodos analítico-matriciales. En el momento actual, se están desarrollando varios modelos.

El modelo de rachas de choques, presente en esta Memoria como un caso particular, está siendo estudiado de manera general.

En todos los modelos presentados, los choques llegan de manera aleatoria. Una manera de prevenir el fallo del sistema es introducir inspecciones que indican el estado de deterioro de dicho sistema. Esto puede ser completado considerando reparación preventiva/correctiva en función del nivel de degradación encontrado durante la inspección.

Como se ha mencionado, los MAP nos permiten considerar diferentes tipos de choques. Por tanto, un modelo a considerar es aquel en el que cada choque es clasificado en función del daño que produce: bajo nivel, nivel intermedio (pueden causar el fallo del sistema con una probabilidad), o alto nivel (causan el fallo del sistema). En un sistema como este, los choques clasificados como de bajo nivel pueden ser inofensivos para el sistema, pero cuando llegan en un periodo de tiempo corto pueden causar el fallo de dicho sistema. En este caso, el modelo de rachas de choques podría resultar apropiado.

La aplicación de los modelos propuestos a lo largo de la Memoria a datos reales se está llevando a cabo en este momento, en concreto se están tratando

datos de supervivencia a una determinada enfermedad y datos de tiempos de fallo de ciertos sistemas. La comparación de estos modelos con modelos propuestos anteriormente es otro objetivo a considerar.

6.2. Conclusions and future research (English version)

In this Memory it is shown that the PH-distributions and the MAP are appropriate structures in the study of shocks and wear models. The PH-distributions have been applied broadly in the last years in queueing models, and at the present moment they are being applied in the study of reliability systems, as it can be seen in the References. However, the MAP have not been so broadly applied in reliability. They are introduced in the shocks and wear systems, since there are not many models for the arrivals of shocks and they have shown to be useful in the study of reliability systems, though the literature is not extensive. Previously to the introduction of the MAP as arrival processes, the generalized PH-renewal processes are considered in the study of models as an intermediate step between the Poisson processes and the MAP.

The study is centered in the shocks and wear systems. These are particular systems in the domain of reliability, but they represent an important class since the shocks can be interpreted as the influence of the environment in the systems (shocks, voltage, strength, load, and so on). Here they are considered in a broad sense as some instantaneous, potentially harmful event. The internal structure of the system can be represented by the PH-distributions. So, the two basic structures play their role in the models.

The studied models are general in the sense that the PH-distributions can approach any distribution function on the positive real line, and the MAP are general arrival models including dependence. The study of models under different types of shocks can be done using MAP in a natural way, given its particular structure.

Under these conditions about the arrival and wear models, several systems are considered under study. In all of them, the lifetime of the systems are calculated and numerical examples illustrate the calculations. The algorithmic treatment of the expressions are performed in all the models. The specific contributions of each model to the study of shock and wear systems

are detailed throughout the Memory.

The first model, in Chapter 3, involves PH-distributions with dependence between the interarrival times, and the number of shocks is limited. This work continues the study of [54] under policy N, and particular cases such as the extreme model, the cumulative model, and the run shock model are presented under the MAM.

In Chapter 4, two shock models are studied: in the first one, the system can stand a random number of shocks before replacement; and in the second one, the number of shocks before a replacement is fixed. In both cases the arrival process is an MAP. The number of shocks while the system is operational and the renewal process generated for the replacements are calculated.

In Chapter 5, the shock and wear model has not a limited number of shocks, as in the precedent cases. This can be considered an extension of the model in [15] under MAM in the most general sense, and including the replacement of the system when a fatal failure arrives. This model is different in the sense that the number of states is unlimited, and the matrix governing the system is infinite. Convergence conditions on the system for the existence of stationary distribution are established, and the renewal process associated to the replacements is constructed. Also, the extreme and the cumulated models, already considered in [15] are studied under MAM. For illustrating the calculations, the model under a limited number of shocks is introduced.

As it can be deduced, many other shock models and reliability systems with multiple units subject to shocks can be studied under the matrix-analytic methods. At the present moment, several models are in progress.

The run shocks model, that have been introduced in this Memory in a particular case, is being studied, and it is possible to do an extended study of it.

In all the presented models, the failures occur randomly. A way for preventing the failure of the system is to introduce inspections indicating the state of system deterioration. This can be completed considering preventive or corrective repair in terms of the degradation level found during the inspection.

As it has been said, the MAP allows to consider different types of shocks. Then, a model to be considered is the one in which a shock is classified in terms of the damage produced: low level, intermediate level (they can cause the failure of the system with a probability), or high level that causes the failure. In a system as this, the shocks with a short level of damage can be harmless to a system. But when they arrive in a short time it can cause the failure of the system. In this case, the run shocks model would be appropriate.

At the present moment we are trying to apply the models presented in this memory to real data, in particular, survival data to a disease and failure time data of systems. A comparison between these models and previous models presented in the literature is another pending purpose.

Bibliografía

- [1] Aalen, O. O. Phase type distributions in survival analysis. *Scandinavian Journal of Statistics*, **22**, 447-463, 1995.
- [2] Aldous, D. and Shepp, L. The least variable phase-type distribution is Erlang. *Stochastic Models*, **3**, 467-473, 1987.
- [3] Alfa, A. S. A discrete MAP/PH/1 queue with vacations and exhaustive time limited service. *Operations Research Letters*, **18**, 31-40, 1995.
- [4] Asmussen, S. Phase-type distributions and related point processes: Fitting and recent advances. In: *Matrix-analytic methods in stochastic models*. Chakravorthy, S.R. and Alfa, A.S. Marcel Dekker, New York, 137-149, 1997.
- [5] Asmussen, S. and Olsson, M. Phase-type distributions (update). *Encyclopedia of Statistical Science*. Kotz, S., Read, C.B. and Banks, D.L. John Wiley and Sons, New York, 525-530, 1998.
- [6] Asmussen, S. *Applied Probability and Queues*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [7] Asmussen, S., Nerman, O., Olsson, M. Fitting phase-type distribution via the EM algorithm. *Scandinavian Journal of Statistics*, **23**, 419-441, 1996.
- [8] Assaf, D, Levikson, B. Closure of phase-type distributions under operation arising in reliability theory. *Annals of Probability*, **10**, 265-269, 1982.

-
- [9] Avel, T. and Jensen, U. *Stochastic models of reliability*. Springer, Berlin, 1999.
- [10] Barlow, R.E. and Proschan, F. *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Reinehart and Winston, New York, 1975.
- [11] Bellman, R. *Introduction to matrix analysis*. Mac-Graw Hill, New York, 1970.
- [12] Biswas A, Sarkar J. Availability of a system maintained thorough several imperfect repairs before a replacement or a perfect repair. *Statistics & Probability Letters*, **50**, 105-114, 2000.
- [13] Chakravarty, S. Reliability analysis of a parallel system with exponential life times and phase type repairs. *OR Spektrum*, **5**, 25-32, 1983.
- [14] Chakravathy, S. R. and Alfa, A. S., editors. *Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models*. Volume 183 of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, New York, 1997.
- [15] Esary, J.D., Marshall, A.W., and Proschan, F. (1973). Shock Models and Wear Processes. *Annals of Probability*, **1**, 627-649, 1973.
- [16] Faddy, M.J. Examples of fitting structured phase-type distributions. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, **10**, 247-255, 1994.
- [17] Faddy, M.J. Phase-type distributions for failure times. *Mathematical and Computer Modelling*, **22**, 63-70, 1995.
- [18] Finkelstein, M. Shocks in homogeneous and heterogeneous populations. *Reliability Engineering and System Safety*, **92**, 569-574, 2007.
- [19] Frostig, E. and Kenzin, M. Preventive maintenance for inspected systems with additive subexponential shock magnitudes. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **23**, 359-371, 2007.

-
- [20] Frostig, E. and Kenzin, M. Availability of inspected systems subject to shocks - A matrix algorithmic approach. *European Journal of Operational Research*, **193**, 168-183, 2009.
- [21] Golub, G. H. and Van Loan, C. F. *Matrix Computations*. Jhon Hopkins University Press, Batimore, 1989.
- [22] Gut, A. Mixed shock models. *Bernoulli*, **7**, 541-555, 2001.
- [23] Gut, A. and Hüsler, J. Realistic variation of shock models. *Statistics and Probability Letters*, **74**, 187-204, 2005.
- [24] Balakrishnan, N. & Rao, C.R., editors. *Handbook of Statistics 20. Advances in Reliability*. Amsterdam, 2001.
- [25] Høyland, A. and Rausand, H. *System Reliability Theory. Models and Statistical Methods*. Jhon Wiley and Sons, New york,.
- [26] Igaki, N., Sumita, U. and Kowada, M. Analysis of Markov renewal shock models. *Journal of Applied Probability*, **32**, 821-831, 1995.
- [27] Jiang, R. and Murthy, D. N. P. Parametric study of multiplicative model involving two Weibull distributions. *Reliability Engineering and System Safety*, **55**, 217-226, 1997.
- [28] Jiang, R. and Murthy, D. N. P. Parametric study of sectional models involving two Weibull distributions. *Reliability Engineering and System Safety*, **56**, 151-159, 1997.
- [29] Jiang, R. and Murthy, D. N. P. Mixture of Weibull distributions- Parametric charaterization of failure rate function. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, **14**, 47-65, 1998.
- [30] Jiang, R., Murthy, D. N. P and Ji, P. Models involving two inverse Weibull distributions. *Reliability Engineering and System Safety*, **73**, 73-81, 2001.

-
- [31] Kijima, M. *Markov Processes for Stochastic Modeling*. Chapman & Hall, London, 1997.
- [32] Korczak, E. and Levitin, G. Survivability of systems under multiple factor impact. *Reliability Engineering and System Safety*, **92**, 260-274, 2007.
- [33] Kulkarni, V.G. *Modeling and Analysis of Stochastic Systems*. Chapman & Hall, London, 1995.
- [34] Lam, Y. The rate of occurrence of failures. *Journal of Applied Probability*, **34**, 234-247, 1997.
- [35] Latouche, G. and Ramaswami, V. *Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling*. SIAM & ASA, 1999.
- [36] Lawless, J.F. *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. John Wiley & Sons, New York, 1982.
- [37] Ling, J. and Pan, J. A new method for selection of population distribution and parameter estimation. *Reliability Engineering and System Safety*, **60**, 247-255, 1998.
- [38] Maier, R. S, O’Cinneide, C. A. A closure characterization of phase-type distributions. *Journal of Applied Probability*, 92-103, 1992.
- [39] Mallor, F. and Omey, E. Shocks, runs and random sums. *Journal of Applied Probability*, **38**, 438-448, 2000.
- [40] Mallor, F. and Santos, J. Reliability of systems subject to shocks with a stochastic dependence for the damages. *Test*, **11**(1), 427-444, 2002.
- [41] Manoharan, M., Singh, H., and Misra, N. Preservation of phase-type distributions under Poisson shock models. *Advances in Applied Probability*, **24**, 223-225, 1992.
- [42] Math Works. *MATLAB reference guide*. Math Works, Natick, MA, 1992.

-
- [43] Math Works. *MATLAB user's guide*. Math Works, Natick, MA, 1992.
- [44] Montoro-Cazorla, D., and Perez-Ocon, R. A deteriorating system with two repair modes and sojourn times phase-type distributed. *Reliability Engineering and System Safety* **91**, 1-9, 2006.
- [45] Montoro-Cazorla, D. and Perez-Ocon, R. Reliability of a system under two types of failures using a Markovian arrival process. *Operations Research Letters*, **34**, 525-30, 2006.
- [46] Montoro-Cazorla, D. Perez-Ocon, R. and Segovia, M. C. Survival probabilities for shock and wear models governed by phase-type distributions. *Quality Technology & Quatitative Management*, **4(1)**, 85-94, 2007.
- [47] Montoro-Cazorla, D., Perez-Ocon, R. and Segovia, M. C. Shock and wear models under policy N using phase-type distributions. *Applied Mathematical Modelling*, **33(1)**, 543-554, 2009.
- [48] Montoro-Cazorla, D., Perez-Ocon, R., and Segovia, M. C. Replacement policy in a system under shocks following a Markovian arrival process. *Reliability Engineering and System Safety*, **94(2)**, 497-502, 2009.
- [49] Montoro-Cazorla, D. Pérez-Ocón, R. and Segovia M.C. Shock models under policy N. In: *Summer Safety & Reliability Seminars*. K. Kolowrocki, J. Soszynska and E. Zio. Gdasnsk, Sopot, **2**: 295-298, 2008.
- [50] Neuts, M.F. A versatile Markovian point process. *Journal of Applied Probability*, **16**, 764-79, 1979.
- [51] Neuts, M.F. *Matrix Geometric Solutions in Stochastic Models. An Algorithmic Approach*. John Hopkins, Univ. Press, 1981.
- [52] Neuts, M.F. Models based on the Markovian Arrival Process. *IEICE Transactions in Communications*. Vol E75-B, 1255-1265, 1992.
- [53] Neuts, M.F. *Algorithmic probability: a collection of problems*. Chapman & Hall, London, 1995.

-
- [54] Neuts, M.F. and Bhattacharjee, M.C. Shock models with phase type survival and shock resistance. *Naval Research Logistic*, **28**, 213-219, 1981.
- [55] Neuts, M.F. and Li, J.M. An algorithm for the $P(n,t)$ matrices of a continuous BMAP. In: *Matrix-analytic methods in stochastic models*. S.R. Chakravorthy, A.S. Alfa, M. Dekker, New York, 7-19, 1997.
- [56] Neuts, M.F. and Meier, K.S. On the use of phase type distributions in reliability modelling of systems with two components. *OR Spektrum*, **2**, 227-234, 1981.
- [57] Neuts, M.F., Pérez-Ocón, R. and Torres-Castro, I. Repairable models with operating and repair times governed by phase type distributions- *Advances in Applied Probability*, **32**, 468-479, 2000.
- [58] O’Cinneide, C.A. Characterization of phase-type distributions. *Communications in Statistics-Stochastic Models*, **6**(1), 1-57, 1990.
- [59] O’Cinneide, C.A. Phase-type distributions: Open problems and a few properties, *Communications in Statistics-Stochastic Models*, **15**, 731-757, 1999.
- [60] Olsson, M. Estimation of phase-type distributions from censored data. *Scandinavian Journal of Statistics*, **23**, 443-460, 1996.
- [61] Pamme, H. and Kunitz, H. Detection and modelling of aging properties in lifetime data. *Advances in Reliability*, Basu, A.P., 291-302, 1993.
- [62] Pérez-Ocón, R. and Torres-Castro, I. A reliability semi-Markov model involving geometric processes. *Applied Stochastic Models in business and Industry*, **18**, 157-170, 2002.
- [63] Pérez-Ocón R. and Montoro-Cazorla, D. Transient analysis of a repairable system, using phase-type distributions and geometric processes, *IEEE Transactions in Reliability*, **53**(2), 185-192, 2004.

- [64] Pérez-Ocón R. and Montoro-Cazorla, D. A multiple system governed by a quasibirth-and-death process. *Reliability Engineering and System Safety*, **84**, 187-96, 2004.
- [65] Pérez-Ocón R. and Montoro-Cazorla, D. A multiple warm standby system with operational and repair times following phase-type distributions. *European Journal of Operational Research*, **169**,178-88, 2006.
- [66] Pérez-Ocón R and Segovia, M.C. Shock an wear models under matrix-analytic methods. In: *Applied Stochastic Models and Data Analysis*. L. Sakalauskas, C. Skiadas and E. K. Zavadskas. Vilnius, Lithuania, **1**: 391-395, 2009.
- [67] Pérez-Ocón R and Segovia, M.C. Shock Models under Markovian Arrival Process. *Mathematical and Computer Modelling*, in press.
- [68] Ravichandran, N. Stochastic methods in reliability theory. Wiley, New Delhi, 1990.
- [69] Ross, S.M. *Stochastic processes*. John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [70] Segovia, M. C. Detección de curvas de bañera en subclases de distribuciones tipo-fase. Memoria de investigación de Tercer Ciclo (MBA), 2005 (in Spanish).
- [71] Segovia, M. C. and Guedes Soares, C. Comparison of phase-type distributions with mixed and additive Weibull models. In: *Safety, Reliability and Risk Analysis: Theory, Methods and Applications*. S. Martorell, C. Guedes Soares and J. Barnett , Taylor and Francis. Valencia, Spain **2**, 881-889, 2009.
- [72] Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. Phase-type distributions. *Encyclopedia of Statistical Science*, Kotz, S., Johnson, N. L. and Read, C. B. John Wiley and Sons, New York, 709-715, 1985.
- [73] Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. Stochastic orders and their applications. Academic Press, San Diego, 1994.

-
- [74] Spiegel, M.R. *Laplace Transforms*. Mc Graw-Hill, New York, 1965.
- [75] Syski, R. *Passage Times for Markov Chains*. IOS Press, Amsterdam, 1992.
- [76] Tang, Y. and Lam, Y. A d-shock maintenance model for a deteriorating system. *European Journal of Operational Research*, **168**, 541-556, 2006.
- [77] Tejero-Cantero, A. and Ruiz-Múzquiz, P. *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Ruiz-Múzquiz, P., 2003.
- [78] Thümmel, A., Buchholz, P. and Telek, M.. A novel approach for fitting probability distributions to trace data with the EM algorithm, in Int. Conf. on Dependable Systems and Networks (DSN), (Yokohama, Japan), pp. 712-721, June 2005.
- [79] Ushakov, I.A. *Handbook of reliability engineering*. Wiley, New York, 1994.
- [80] Ushakov, I.A. Reliability: past, present and future. In *Recent advances in reliability theory*, Stat. Ind. Technol., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 3-21, 2000.
- [81] Xie, M. and Lai, C.D. Reliability analysis using an additive Weibull model with bathtub-shaped failure rate function. *Reliability Engineering and System Safety*, **52**, 87-93, 1995.
- [82] Xie, M., Tang, Y. and Goh, T.N. A modified Weibull extension with bathtub-shaped failure rate function. *Reliability Engineering and System Safety*, **76**, 279-285, 2002.
- [83] Yeh, R.H. State-age-dependent maintenance policies for deteriorating systems with Erlang sojourn time distributions. *Reliability Engineering and System Safety* **58**, 55-60, 1997.