

# **IDEAS DEL ALUMNADO DE PRIMARIA Y SECUNDARIA SOBRE ALEATORIEDAD**

*Juan Jesús Ortiz de Haro*

*Luis Serrano Romero*

*Carmen Batanero Bernabeu*

*M<sup>a</sup>. Jesús Cañizares Castellanos*

Departamento de Didáctica de la Matemática

Universidad de Granada

## *RESUMEN*

En este trabajo comparamos las características de las secuencias de resultados aleatorios y distribuciones aleatorias de puntos generadas por tres grupos de alumnos de Educación Primaria y Secundaria con las propiedades matemáticas de las mismas. La finalidad es describir el significado personal que dichos estudiantes asignan a la aleatoriedad.

## *SUMMARY*

In this paper we compare the features in random sequences and random distribution of points produced by three groups of students in Primary and Secondary Education with the mathematical properties of the same. The aim is to describe the meaning of randomness for these students.

## **INTRODUCCIÓN**

La probabilidad es, en la actualidad, uno de los campos más fecundos de las Matemáticas. No sólo está adquiriendo una gran importancia por su aplicabilidad en otras disciplinas, sino también por la relevancia que se pretende tenga en la educación matemática de nuestros alumnos, según se recoge en los diseños curriculares de Educación Primaria y Secundaria vigentes desde la publicación de la LOGSE (1990). Aunque la enseñanza de la probabilidad ha estado presente en los currículos escolares en los últimos 20 años, encontramos una tendencia reciente a renovar su enseñanza, haciéndola más experimental, de forma que se pueda proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica desde su infancia (N.C.T.M. 2000).

El supuesto en los anteriores currículos era que para asimilar el concepto de probabilidad era necesario adquirir la noción de proporcionalidad y poseer razona-

miento combinatorio, lo que no se conseguía hasta el período de las operaciones formales (Piaget e Inhelder, 1951). Los nuevos cambios, donde han influido diversos autores, entre ellos Fischbein (1975), Godino, Batanero y Cañizares (1987), Shaughnessy (1992) y Gal (en prensa), sostienen que la enseñanza de la probabilidad se puede iniciar en edades mucho más tempranas, mediante una aproximación más intuitiva, basada en el enfoque frecuencial.

En el presente trabajo analizamos las propiedades de las secuencias de resultados aleatorios y de las distribuciones aleatorias de puntos en el plano producidas por alumnos, que constituyen parte del significado personal asignado por ellos a dichas secuencias o distribuciones. Para ello, estudiamos las respuestas a dos ítems que les proponemos, para comprobar si las características de las secuencias de resultados aleatorios generadas por ellos coinciden con las propiedades matemáticas. Finalmente, estudiamos la variabilidad de esas características en los tres grupos de alumnos considerados, uno de 6º Curso de Educación Primaria y dos de Educación Secundaria (2º y 4º de ESO). Consideramos de interés para la didáctica de la matemática este tipo de estudios ya que como indican Harten y Steimbring (1983), la evaluación de los juicios subjetivos de aleatoriedad es un problema importante dentro de la investigación didáctica y psicológica.

## 1. FUNDAMENTOS

Durante los últimos años ha experimentado un auge la enseñanza de la probabilidad basada en el enfoque frecuencial (Henry, 1997; Batanero, Henry y Parzysz, en prensa). Esto se puede observar analizando los libros de texto (Ortiz, 2001), que proponen actividades para iniciar a los alumnos más jóvenes en la experimentación con fenómenos aleatorios sencillos, como por ejemplo, juegos con monedas, dados o ruletas. La recogida de datos sobre los resultados de estos experimentos y el análisis de los resultados podrían ayudar al alumno a construir algunas intuiciones correctas sobre los modelos estocásticos, que pudieran servir de base para una futura enseñanza del tema. Dentro de este enfoque, uno de los puntos principales son las propiedades que los alumnos asignan a las secuencias aleatorias.

### Investigaciones previas

La percepción de la aleatoriedad por parte de niños y adolescentes ha sido estudiada por diversos autores, tanto en distribuciones aleatorias lineales como planas.

Piaget e Inhelder (1951) proponen a los niños un juego consistente en lanzar una moneda y comparan sus reacciones respecto a dos tipos de resultados (monedas correctas y otras con las dos caras idénticas). En un primer estadio, los niños no ven imposible obtener sólo cruces (o sólo caras); en un segundo estadio, están convencidos de que no pueden obtenerse todos los resultados idénticos, pero la probabilidad para ellos no es función del número de ensayos; en el tercer estadio, son conscientes

de la disminución progresiva de esta probabilidad que tendería hacia la imposibilidad. Green (1991) realiza un estudio longitudinal con escolares de 7 a 11 años y les propone la tarea del ítem 1 que utilizaremos en nuestro estudio. Identifica tres aspectos básicos en las sucesiones generadas por los niños: la frecuencia relativa de cada uno de los sucesos, la independencia de los elementos de la secuencia y la consistencia entre las dos mitades de la secuencia generada. Sobre la frecuencia relativa, probó que los alumnos son muy exactos al reflejar la equiprobabilidad produciendo el mismo número de caras que de cruces. También producen sucesiones cuya primera y última mitad son altamente consistentes. Para estudiar la independencia, aquellos alumnos de la muestra cuyas secuencias eran anormales fueron clasificados en dos tipos: alternantes y replicantes. Si la racha de mayor longitud es 1, el alumno es clasificado como alternante y si la longitud de la racha más larga es 25 o más signos iguales consecutivos, tenemos un replicante. Green observó que la longitud media de la racha más larga en su muestra era inferior al valor teórico, en niños de todas las edades y de todas las capacidades. No encontró mejora durante los cuatro años de seguimiento longitudinal. También comparó el número de rachas de las distribuciones teóricas y de las generadas por los alumnos, encontrando que, en general, los alumnos producen demasiadas rachas de longitud corta.

Respecto a la generación de procesos aleatorios en el plano. Piaget e Inhelder (1951) investigaron la comprensión de los niños sobre lo que ellos llamaron «distribuciones uniformes», simulando gotas de lluvia sobre un embaldosado. En el estadio 1 (6 a 9 años), el deseo de regularidad dominó las predicciones de los niños. En el estadio 2 (9 a 12 años), se aceptaba la irregularidad de la distribución aunque el cuadrado «seco» se veía todavía como el más probable para recibir la siguiente gota. Por último, en el estadio 3 (12 años o más) aparece el razonamiento proporcional y Piaget e Inhelder creen que los niños comprenden la ley de los grandes números, que establece que, con un número creciente de gotas, la regularidad se incrementa en términos proporcionales. Green (1989) realizó una investigación sobre este tipo de tarea, clasificando las distribuciones obtenidas en los siguientes tipos: a) Una gota en cada cuadrado de la retícula b) Distribuyendo las gotas por los bordes de la retícula, dejando vacío el interior c) Distribución aleatoria. Utilizó este tipo de respuestas como opciones en una pregunta similar con formato de opciones múltiples, con 320 niños de 11 a 16 años. Quedó sorprendido al ver un mejor comportamiento en los más jóvenes, de los que casi la mitad seleccionó el patrón aleatorio. En general, encontró que los niños más inteligentes seleccionaban con mayor frecuencia que sus compañeros el patrón regular. Estos dos hechos le plantearon serias dudas sobre la relevancia de los estadios de desarrollo cognitivo sugeridos por Piaget.

Estas investigaciones fueron continuadas por Serrano (1996), Batanero y Serrano (1999) y El Bouhtoury (2003) con alumnos españoles de secundaria de 14 y 17 años obteniendo resultados similares a los anteriores. La finalidad de nuestro trabajo es continuar el estudio con alumnos de un mayor rango de edades, para ver si se mantienen las conclusiones de los autores citados.

En el modelo teórico que nos sirve como base (Godino y Batanero, 1997; Godino, 2002) se parte de la noción de *situación-problema* y se concibe el significado de un objeto matemático en términos pragmáticos como el sistema de prácticas que se pone en juego en la resolución de cierto campo o tipo de problemas matemáticos. Diferenciamos entre *significado institucional o personal* del objeto dado, según las prácticas sean compartidas dentro de una cierta institución (por ejemplos, sean fijadas en un centro de enseñanza) o sean particulares para un sujeto de dicha institución (en el ejemplo, un alumno).

Partiremos de algunas situaciones-problema características del objeto «aleatoriedad» y analizaremos las prácticas realizadas por los alumnos para resolverlas. Más específicamente analizaremos las propiedades de las secuencias y distribuciones de puntos generadas por los alumnos y la variabilidad de esas características en los tres grupos de alumnos considerados. Todo ello con la finalidad de inferir la similitud o diferencia del significado personal que los alumnos tienen de la aleatoriedad, que puede deducirse de estas características, con el significado institucional matemático del concepto.

## **2. METODOLOGÍA**

### **2.1. La muestra**

Participaron un total de 130 alumnos de centros educativos públicos de Melilla, distribuidos de la siguiente forma: 50 alumnos de 6º Curso de Educación Primaria con edades comprendidas entre doce y trece años; 50 alumnos de 2º curso de Educación Secundaria Obligatoria de 14 y 15 años de edad y 30 alumnos de 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria de 16 y 17 años. Hemos escogido los cursos donde los alumnos finalizan los ciclos educativos establecidos por la LOGSE (1990).

Los alumnos de 6º curso de Educación Primaria solo han dado un tema de iniciación a la probabilidad. Los alumnos del 2º curso de Educación Secundaria han recibido instrucción de un solo tema de probabilidad, continuación y ampliación de lo estudiado en Primaria. Los alumnos de 4º de Educación Secundaria han estudiado varios temas de probabilidad tratando los diversos enfoques del concepto.

### **2.2. Cuestionario**

La aleatoriedad, como señalan Bar-Hillel y Wagenaar (1993), no es una propiedad observable del dispositivo que la genera y no hay prueba lógica o física, sino solo de tipo estadístico. Por ello, nuestro interés sobre el ítem es analizar las prácticas que realizan los alumnos cuando escriben una secuencia de resultados similar a la que esperaría obtener mediante un procedimiento aleatorio. La tarea propuesta a los alumnos consta de dos ítems, que forman parte de un cuestionario más amplio «Random One», que ha sido utilizado en otras investigaciones por Green (1989, 1991) y Serrano (1996). Este cuestionario lo pasó el investigador a los alumnos en



- 1) Imagínate que estás jugando a este juego y sacas treinta veces una ficha como arriba se dice. Pon 30 cruces en los lugares que creas según las fichas que saques.


- 2) Enséñanos ahora cómo quedarían las siguientes casillas si juegas este juego 16 veces. Pon 16 cruces.


En el ítem 2, la tarea consiste en proponer a los alumnos la distribución aleatoria de  $n$  puntos en una cuadrícula bidimensional formada por  $k \times k$  celdas. Siempre que la probabilidad de situar uno de los puntos sea menor que 0.1 (por ejemplo una cuadrícula de  $4 \times 4$  celdas) podemos considerar que estamos ante un proceso estocástico de Poisson en el plano de parámetro  $\lambda = np$ , siendo  $p = 1/(k \times k)$ . En este tipo de proceso estocástico, el interés se centra no en el orden en que se van colocando los puntos en las diferentes celdas sino en el número de puntos en cada una de las celdas. Las variables analizadas sobre las distribuciones producidas por los alumnos han sido: el número de celdas con 0, 1, 2 y 3 o más puntos, así como el número máximo de cuadros vacíos adyacentes. Estos resultados se compararán con los obtenidos en la distribución teórica que se muestran en la tabla 1.

<b>PUNTOS POR CUADRO</b>	$\lambda = 1.875$		$\lambda = 1$	
	p	N. esperado	p	N. esperado
0	0.1535	2.5	0.3679	6.5
1	0.2875	4.5	0.3679	6.5
2	0.2694	4.3	0.1839	3
3	0.1684	2.7	0.0613	1
4	0.0789	1.3		
5	0.0296	0.5		

Tabla 1. Distribución teórica del número de puntos por cuadro en los dos apartados del ítem 2.

### 3. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

#### 3.1. Generación de secuencias de resultados aleatorios

En este apartado hemos analizado las propiedades de las sucesiones generadas por los alumnos de esta muestra, en respuesta a la tarea propuesta en el ítem 1. Si una de estas propiedades aparece en las sucesiones generadas por los alumnos, pensamos que dicha propiedad ha sido identificada por el alumno a lo largo de su experiencia con los juegos de azar y la observación de secuencias de resultados aleatorios. La reproducción consciente de dichas propiedades son, desde nuestro punto de vista, prácticas significativas para el alumno, en la resolución del problema consistente en la generación de una sucesión aleatoria.

En la Figura 1, estudiamos el número de caras producidas y observamos que, en general, los alumnos han reflejado la frecuencia relativa teórica de caras y cruces. El valor medio del número de caras en las secuencias producidas por los alumnos (25-26) se aproxima bastante al valor esperado (25), sobre todo en el grupo de alumnos de 16 años. Sin embargo, los alumnos no reflejan suficientemente la variabilidad aleatoria (varianza teórica 12,5) en la distribución binomial  $B(50, 0.5)$ , ya que la dispersión de la distribución de las secuencias producidas (varianza mínima 11.539 en el grupo de 16 años) por los alumnos es menor que la teórica.

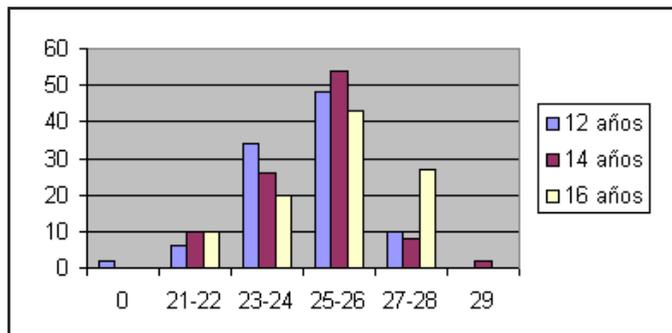


Figura 1. Porcentaje de alumnos en cada grupo según número de caras producidas.

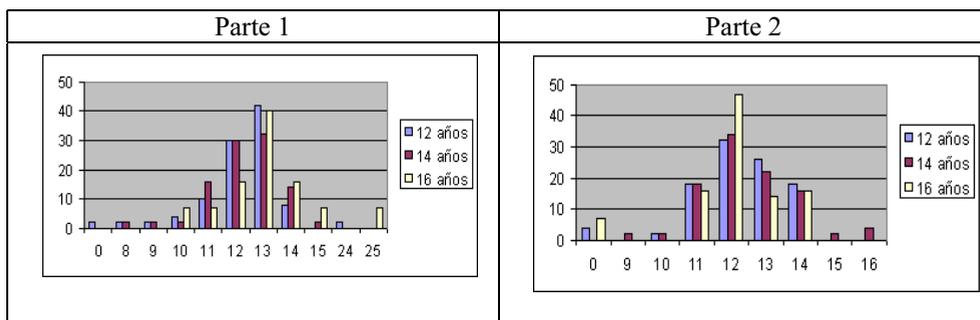


Figura 2. Porcentaje de alumnos en cada grupo según número de caras producidas en cada parte de la secuencia

El segundo aspecto tratado es la consistencia entre las dos mitades de las secuencias producidas por los alumnos. Al analizar la distribución del número de caras en cada una de las mitades de las secuencias (Figura 2), observamos que estas distribuciones son en apariencia altamente consistentes ya que los valores medios y desviaciones típicas son muy similares en las dos partes de la secuencia producida en los grupos de 14 y 16 años y algo menos en el grupo de 12 años que tiene una media de caras más alta en la primera parte de la secuencia.

Otra característica de las secuencias es la longitud de la racha más larga. Como vemos en la Figura 3, los alumnos producen rachas cortas. Aunque la mayoría de los alumnos producen rachas de 4 o 5 elementos, un porcentaje importante de alumnos no pasa de rachas de 2-3 sucesos, mientras que en la distribución teórica, la longitud de la racha más larga es de 5 o 6 elementos. Aparecen también los tipos que Green denomina alternantes (9 casos) que alternan entre cara y cruz en toda la secuencia, tres alumnos de 12 años, cinco de 14 años y uno de 16 años. Así mismo, encontramos los replicantes que producen una sola racha de 50 resultados seguidos iguales

o una racha muy larga de 25. Todo esto parece apuntar a dificultades en la percepción de la independencia de los experimentos repetidos.

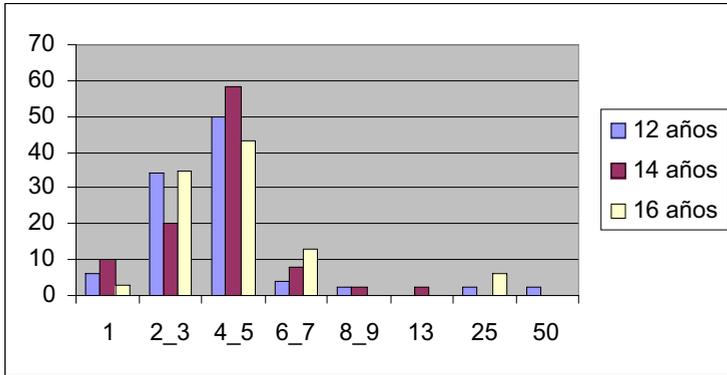


Figura 3. Porcentaje de alumnos en cada grupo según longitud de la racha más larga

Como puede observarse en la figura 4 el número de rachas producidas en las secuencias de los alumnos, en general es alto, ya que el valor esperado teórico es 25.5 y su desviación típica es 3.4, mientras que en las secuencias producidas por los alumnos es algo superior a 30 en los grupos de 12 y 14 años y de 27.70 en el grupo de 16 años. El valor medio de los tres grupos de edades indica también que incluso aunque los alumnos hayan incluido alguna racha larga, la mayoría de las rachas son de 1 a 3 elementos. Incluso se da el caso de los alumnos que hemos llamado alternantes que producen 50 rachas. En el caso contrario aparecen dos alumnos de 16 años que producen dos rachas, que al igual que en la investigación de Green han sido muy escasos.

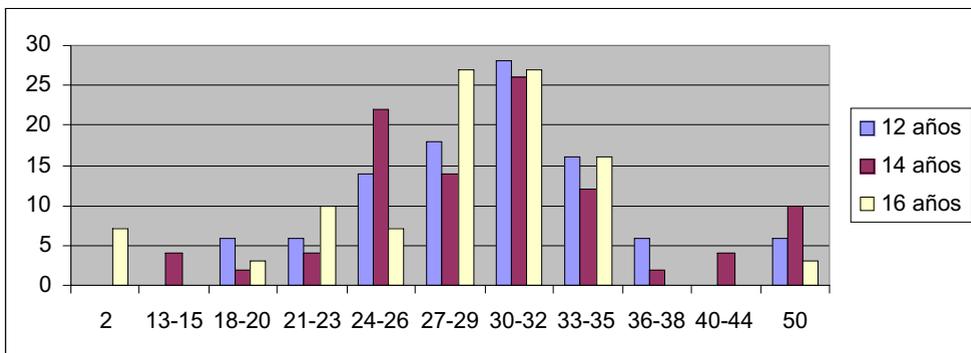


Figura 4. Frecuencias (y porcentajes) del número de rachas en las secuencias de los alumnos.

## 4.2. Generación de distribuciones aleatorias de puntos en el plano

En este apartado nos hemos centrado en las propiedades que los alumnos atribuyen a las distribuciones aleatorias de puntos en el plano, generadas por los alumnos de esta muestra, en respuesta a la tarea propuesta en el ítem 2, así como su variabilidad en los tres grupos de alumnos. Las variables analizadas sobre las distribuciones producidas por los alumnos han sido: el número de celdas con 0, 1, 2 y 3 o más puntos, así como el número máximo de cuadros vacíos adyacentes.

Aunque el número esperado de cuadros vacíos en el primer apartado del ítem es 2 o 3, los alumnos tienden a no dejar cuadros vacíos, o dejar muy pocos, como se observa en la Figura 5. Más del 50% de los alumnos de 14 y 16 años y del 40 % de los de 12 años no ha dejado ningún cuadro vacío. Hay algunos casos en que se dejan hasta 12 o 15 cuadros vacíos lo que se aleja también del valor teórico. Los valores medios en el primer apartado son próximos a los teóricos en los grupos de alumnos de 12 a 14 años y se apartan bastante en el caso de los alumnos de 16 años.

En el segundo apartado del ítem, donde los valores esperados son 6 o 7, sigue siendo alto el número de alumnos que no dejan cuadros vacíos, sobre todo los grupos de 12 y 14 años. También son minoría los alumnos que se acercan al número esperado de cuadros vacíos, especialmente los alumnos de 16 años. Todo ello parece confirmar la teoría de Piaget en cuanto al deseo de regularidad que los alumnos buscan en la aleatoriedad.

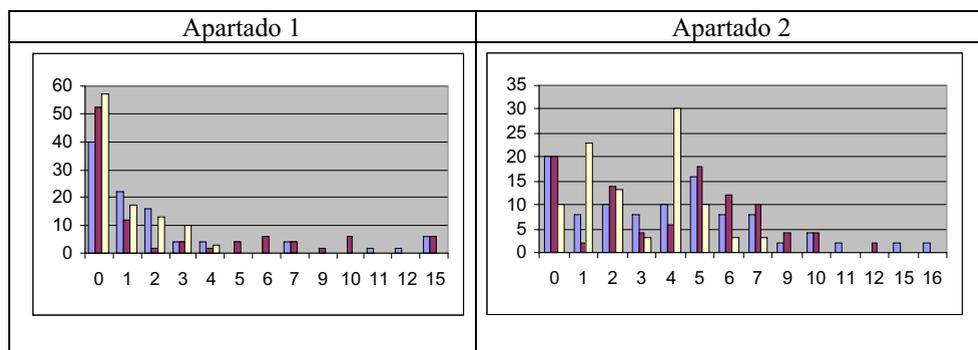


Figura 5. Porcentaje de alumnos en cada grupo según número de cuadros vacíos en cada apartado

En la Figura 6 presentamos la distribución del número de celdas con un punto en las respuestas de los alumnos. En el apartado 1, observamos que los valores medios obtenidos por los alumnos son algo más próximos a los esperados (4 o 5), sobre todo en el grupo de 16 años. En el segundo apartado hay una sobreestimación de los valores esperados (6 o 7), sobre todo en el grupo de 12 años. Se muestra una gran variabilidad de alumnos, que en algunos casos no presentan ninguna celda con un solo punto o todas las celdas tienen un punto.

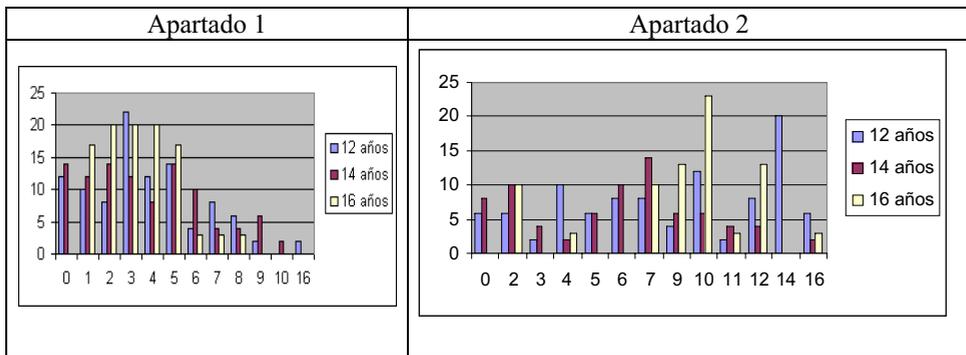


Figura 6. Porcentaje de alumnos en cada grupo según número de cuadros con un punto en cada apartado

La distribución del número de celdas con dos puntos en las respuestas de los alumnos aparece en la figura 7. En el primer apartado, observamos que los valores medios obtenidos por los alumnos están algo más alejados de los esperados (4 o 5). Tan solo el 14% de los alumnos de 12 y 16 años y el 6% de los alumnos de 14 años están dentro de los valores esperados. En el grupo de 16 años hay un 27% que rellena 10 cuadros con dos puntos. En el segundo apartado, donde el valor medio esperado es de 3, hay un porcentaje alto de alumnos de 12 y 14 años que no rellena ningún cuadro con dos puntos, aunque los valores medios son algo más próximos a los esperados. Se muestra una gran variabilidad de alumnos, que en algunos casos no presentan ninguna celda con dos puntos o un alto número de celdas tienen dos puntos.

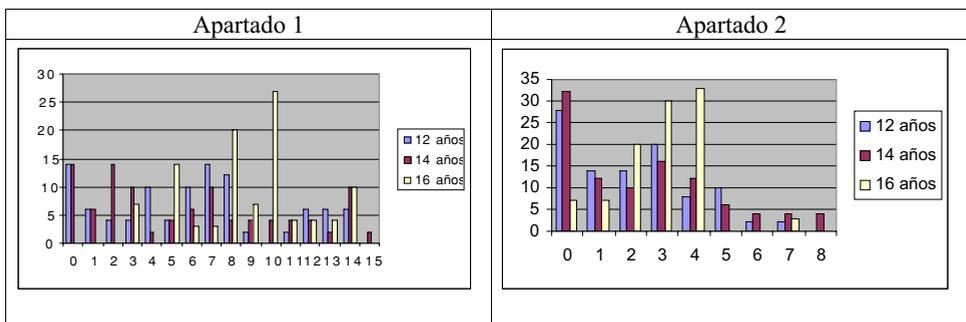


Figura 7. Porcentaje de alumnos en cada grupo según número de cuadros con dos puntos en cada apartado

En la figura 8 presentamos la distribución del número de celdas con tres o más puntos en las respuestas de los alumnos. En el apartado 1, donde los valores medios esperados son 2 o 3, los alumnos han sido algo más exactos al reflejar el número de

celdas con tres o más puntos, ya que hay un alto porcentaje que se aproxima a los valores medios, sobre todo en el grupo de 16 años. En el segundo apartado, donde el número esperado es 1, los resultados obtenidos por los alumnos están algo más alejados. Hay un alto número de alumnos en los tres grupos que no tienen ninguna celda con tres o más puntos, destacando el 80% de los alumnos de 16 años. Como en los casos anteriores se muestra una gran variabilidad de alumnos en los dos apartados, sobre todo en los grupos de alumnos de 12 y 14 años.

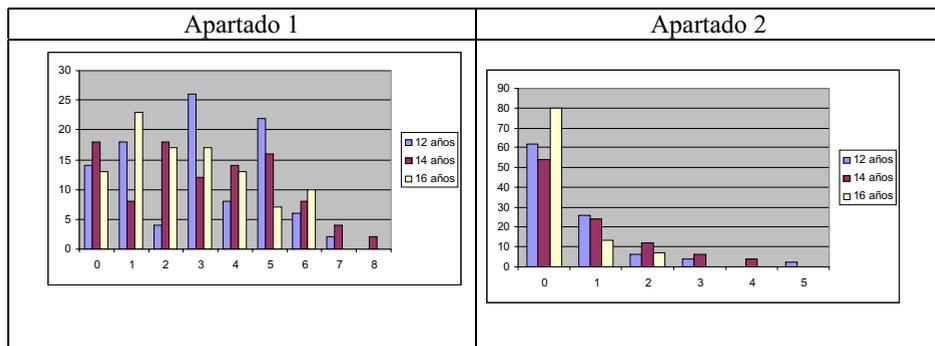


Figura 8. Porcentaje de alumnos en cada grupo según número de cuadros con tres o más puntos en cada apartado

Por último, en la figura 9 reflejamos el número máximo de cuadros vacíos adyacentes. Algunos alumnos no tienen en cuenta la distribución espacial de los cuadros vacíos que colocan consecutivamente, mientras que en el modelo aleatorio estos cuadros vacíos deberían distribuirse algo menos uniformemente, y algunos de ellos se encontrarían adyacentes. También hemos encontrado casos de alumnos que han dejado vacía hasta la mitad de la cuadrícula. Todo ello nos indica que los alumnos se han concentrado más en las frecuencias de las celdas individuales que en la distribución global de los puntos.

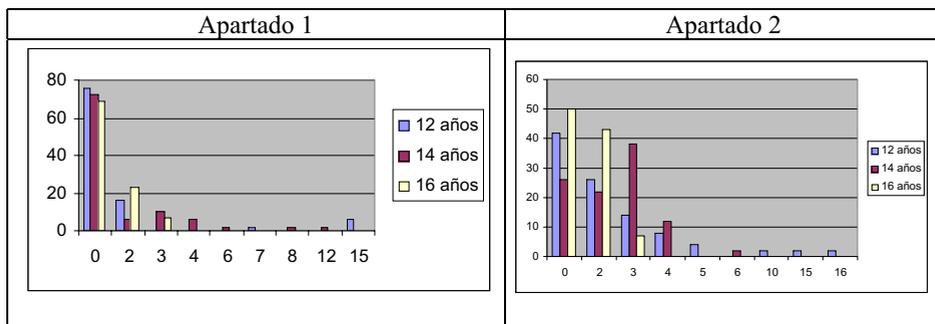


Figura 9. Porcentaje de alumnos en cada grupo según número máximo de cuadros vacíos adyacentes en cada apartado

#### 4. CONCLUSIONES

Del estudio realizado sobre el primer ítem, donde se les pide a los alumnos generar una secuencia de resultados aleatorios similar a la que se obtendría con una moneda no sesgada, concluimos que los alumnos han reproducido aproximadamente la frecuencia relativa de caras y cruces en las sucesiones generadas, siendo algo más próximos en el grupo de 16 años, aunque subestiman la variabilidad de la secuencia. Existe en apariencia una alta consistencia entre las dos mitades de las secuencias producidas por los alumnos, siendo mayor en los grupos de alumnos de 14 y 16 años y algo menor en el grupo de 12 años, que tiene una media de caras más alta en la primera parte de la secuencia. El número de rachas producidas es excesivo en los tres grupos de alumnos y la longitud de la racha más larga suele ser pequeña, aunque los valores obtenidos por el grupo de alumnos de 16 años se acercan algo más a los esperados. En consecuencia, del primer ítem deducimos una correcta apreciación de los alumnos sobre la convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad teórica y una insuficiente percepción de la variabilidad de esa frecuencia relativa, así como de la independencia de los ensayos. Green (1991) atribuye este comportamiento a la visión del mundo, por parte de los alumnos, sujeto a leyes. En su intento de acomodar los fenómenos aleatorios en este marco, esencialmente determinista, la incertidumbre reflejada en la variabilidad es atenuada y poco enfatizada.

Sobre la tarea propuesta en el segundo ítem, las distribuciones de puntos producidas por los alumnos estiman a la baja el número de celdas vacías, que son sustituidas por celdas con dos puntos en el apartado 1 y por celdas con un punto en el apartado 2. Puesto que 2 y 1 son los valores enteros más próximos al parámetro de la distribución de Poisson en los apartados 1 y 2 respectivamente, consideramos que los alumnos han intentado reproducir este número medio de puntos en la mayor parte de los cuadros, aunque admitiendo ligeras fluctuaciones. Sin embargo, estas fluctuaciones no llegan a reflejar toda la variabilidad de la distribución aleatoria de Poisson en el plano. En el apartado 1 suelen obtener mejores resultados los alumnos de 16 años. En el apartado dos, cuando se trata del número de cuadros vacíos o cuadros de un punto obtienen mejores resultados el grupo de alumnos de 14 años y en los otros dos casos los mejores resultados son para el grupo de alumnos de 16 años. Por tanto, podemos concluir que con la edad se mejora la comprensión de algunos aspectos relacionados con la aleatoriedad, pero persisten algunas dificultades como ha quedado comprobado en los alumnos de esta muestra.

Todos estos resultados nos indican que debemos seguir investigando para conocer mejor los significados personales de nuestros alumnos no sólo respecto a la aleatoriedad, sino también respecto a otros conceptos probabilísticos. Sería también necesario encontrar, diseñar y experimentar propuestas de enseñanza encaminadas a resolver las dificultades descritas.

**Agradecimiento.** Este trabajo es parte de los proyectos SEJ2004-00789, Madrid, MCYT y FQM-126, Junta de Andalucía.

## REFERENCIAS

- Bar-Hillel, M. y Wagenaar, W. A. (1993). The perceptions of randomness. E. G. Karen y C. Lewis (Eds.): *A Handbook for data análisis i the behavioral sciences: methodological issues* (pp. 331-339). Lawrence Erlbaum.
- Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (En prensa). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*. Dordrecht: Kluwer.
- Batanero, C. y Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 558-567.
- El Bouhtoury, M. (2003). *Un estudio comparado de heurísticas y sesgos probabilísticos en alumnos marroquíes y españoles*. Trabajo de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probability thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Gal, I. (En prensa). Towards «probability literacy» for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*. Dordrecht: Kluwer.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22, 2-3.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1997) Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpiska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.
- Godino, J., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis.
- Green, D. R. (1989). School pupils' understanding of randomness. En R. Morris (Ed.), *Studies in Mathematics Education*, v. 7, (pp. 27-39). París: Unesco.
- Green, D. R. (1991). A longitudinal study of children's probability concepts. En D. Vere Jones (Eds.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 320-328). International Statistical Institute.
- Harten, G. y Steinbring, H. (1983). Randomness and stochastic independence. On the relationship between intuitive and mathematical definition. En R. W. Scholz (Ed), *Decision making under uncertainty* (pp. 363-373). Amsterdam: Reidel.
- Henry, M. (1997). L'enseignement des statistiques et des probabilités. En P. Legrand (Coord.), *Profession enseignant: Les maths en collège et en lycée* (pp. 254-273). Paris: Hachette-Éducation.
- Ministerio de Educación y Ciencia (1990). Ley Orgánica 1/1990 de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. *Boletín Oficial del Estado* (4-10-1990). Madrid: B.O.E.
- N.C.T.M. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA; N.C.T.M. On line: <http://standards.nctm.org>.
- Ortiz, J. J. (2001). *La probabilidad en los libros de texto*. Grupo de Educación Estadística. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

- Piaget, J. e Inhelder, B.(1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial a la enseñanza de la probabilidad*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 465-494). New York: Mac Millan.

