

**UNIVERSIDAD DE GRANADA**

**DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA**



# **HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN DE LOS ALUMNOS CON TALENTO MATEMÁTICO**

**Tesis doctoral**

**Rafael Ramírez Uclés**

**Granada, 2012**

Editor: Editorial de la Universidad de Granada  
Autor: Rafael Ramírez Uclés  
D.L.: GR 359-2013  
ISBN: 978-84-9028-340-0



**UNIVERSIDAD DE GRANADA**

**DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA**

**HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN  
DE LOS ALUMNOS CON TALENTO  
MATEMÁTICO**

Tesis Doctoral presentada por:

Rafael Ramírez Uclés

Dirigida por:

Dr. Pablo Flores Martínez

Dr. Enrique Castro Martínez

GRANADA, 2012



Este trabajo ha sido realizado en el Grupo de Investigación “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” de la Universidad de Granada del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía (FQM0193). La investigación se ha desarrollado en el marco del proyecto del Plan Nacional de I+D+I con número EDU2009-11337 titulado “Modelización y representaciones en educación matemática”, financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología y cofinanciado con fondos FEDER.



## Agradecimientos

A Pablo Flores, por su cercanía, sus consejos y su plena disponibilidad para compartir sus conocimientos e ilusión por este proyecto. Porque además de enseñarme todo lo que sé sobre investigación en Didáctica de la Matemática, sus ideas me han descubierto lo que espero ser como profesor de matemáticas.

A Enrique Castro, por sus sugerencias, su apoyo y sus valiosas aportaciones para la realización de este estudio. Porque sus investigaciones sobre talento matemático han sido un referente para este trabajo y sus orientaciones han mejorado la culminación de esta memoria.

A Miguel Sánchez, por iniciarme en la investigación matemática en el Departamento de Geometría y Topología, ayudarme a conseguir la suficiencia investigadora y el Diploma de Estudios Avanzados e intentar hacer de mí un buen matemático.

A Isabel Ramírez, por su ayuda en el diseño de la investigación, la supervisión de los elementos psicométricos utilizados y el análisis de los datos. Por animarme a dar el primer paso para estudiar matemáticas, para ser profesor y para realizar esta tesis. Y hacerme creer que podría conseguirlo.

También me gustaría agradecer a otras personas o instituciones que de un modo u otro, me han ayudado en este proyecto.

A Rosa Caraballo, Nielka Rojas y Margherita Gonzato por su colaboración como profesoras observadoras en las sesiones del proceso de enseñanza.

A Marta Molina por sus consejos sobre la metodología de investigación y su orientación en el diseño del experimento de enseñanza.

A Víctor Albendín, por el diseño y mantenimiento de la versión informática del juego *Constelaciones* que hemos utilizado en nuestras clases.

A Javi y Ali, a los que su interés por echar una mano en lo que sea, les supuso múltiples revisiones y trabajos de corrección.

Al proyecto ESTALMAT por facilitarnos los medios necesarios para impartir las clases a alumnos con talento matemático y el apoyo para difundir las actividades de enriquecimiento. Especialmente a los veinticinco alumnos de la promoción 2008-2010, por su disposición a colaborar y hacernos disfrutar enseñándoles matemáticas. *En parte no he cumplido mi palabra de citaros en los agradecimientos, pero he tenido que refugiaros en iniciales ficticias (ya os lo explicaré).*

Al colegio El Carmelo, porque además del grupo control, me ha regalado la oportunidad de dedicarme a la enseñanza, me ha hecho parte de su familia y me ha apoyado en todos mis proyectos.

De un modo muy especial quiero agradecer y dedicar este trabajo a Isabel, quien ha estado a mi lado animándome en todo momento y transmitiéndome la energía que necesitaba. Por revisar, corregir, maquetar ... y mucho más que compartir mi amor por las matemáticas.

Ante todo y por todo,

*a mis padres.*

Se le atribuye a Jacinto Benavente la siguiente reflexión:

*“Muchos creen que tener talento es una suerte; nadie que la suerte pueda ser cuestión de tener talento”*

Y ésta a Albert Einstein:

*“La imaginación es la visión anticipada de lo que atraerás a tu vida”.*

Recogiendo estas dos ideas y sirviendo de presentación a un trabajo que relaciona matemáticas y visualización, me hubiera gustado encontrar una frase que recogiese la forma especial de ver las matemáticas que poseen los alumnos con talento y poder ilustrar si la imaginación atrae al talento o el talento a la imaginación. Como una imagen vale más que mil palabras...



Historieta de Bill Amend en la serie FoxTrot.



## ÍNDICE

<b>Introducción</b>	1
<b>Capítulo 1 Planteamiento del problema</b>	5
1.1 Introducción	5
1.2 Talento matemático	8
1.3 Visualización	9
1.4 Talento matemático y visualización	11
1.5 Objetivos de investigación	13
<b>Capítulo 2 Fundamentación</b>	17
2.1 Talento	17
2.1.1 Definición	21
2.1.2 Identificación y evaluación	26
2.1.3 Tratamiento	30
2.2 Visualización	34
2.2.1 Visualización y geometría	41
2.2.2 Definiciones: Marco teórico	49
2.2.3 El papel de la enseñanza en el desarrollo de las habilidades	69
<b>Capítulo 3 Talento y visualización</b>	75
3.1 Revisión bibliográfica	75
3.2 Talento y visualización: otros aspectos	93
3.2.1 Errores y dificultades	104
3.3 Valoración de la revisión bibliográfica	112
<b>Capítulo 4 Metodología de investigación</b>	115
4.1 Preguntas, problema y objetivos de investigación	115
4.2 Diseño de investigación	119
4.2.1 Descripción de la capacidad visualizadora	120
4.2.1.1 Selección de los test de visualización	120
4.2.1.2 Descripción de los test utilizados	125
4.2.2 Experimento de enseñanza	129
4.3 Sujetos	134
4.4 Variables	138
4.5 Instrumentos de investigación de habilidades, errores y dificultades de visualización	139
4.5.1 Diseño y papel de las entrevistas	150
4.6 Codificación de información	153
4.6.1 Puntuación obtenida en la prueba de selección	153
4.6.2 Puntuación obtenida en los test administrados	156
4.6.3 Rendimiento en las actividades escritas en cada sesión	156
4.6.4 Habilidades de visualización manifestadas en las intervenciones	157
4.6.4.1 Indicadores de visualización individuales	158
4.6.4.2 Indicadores de visualización del total de los alumnos	161
4.6.5 Errores cometidos en las intervenciones	163
4.6.5.1 Indicadores de errores individuales	163
4.6.5.2 Indicadores de errores del total de los alumnos	165
4.6.6 Dificultades en la comunicación de las argumentaciones visuales detectadas en la sesión 3 y en las entrevistas personales	166
<b>Capítulo 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza</b>	169

## Índice

5.1	Preparación del experimento	171
	5.1.1 Prueba de selección	171
	5.1.2 Identificación de la metodología de enseñanza	172
	5.1.2.1 Estudio piloto	179
	5.1.2.2 Diseño de las intervenciones en el aula y temporalización	183
5.2	Experimentación	186
	5.2.1 Sesión 1	187
	5.2.1.1 Planificación de la sesión 1	187
	5.2.1.2 Implementación de la sesión 1	195
	5.2.1.3 Análisis y revisión de la sesión 1	201
	5.2.2 Sesión 2	205
	5.2.2.1 Planificación de la sesión 2	205
	5.2.2.2 Implementación de la sesión 2	212
	5.2.2.3 Análisis y revisión de la sesión 2	219
	5.2.3 Sesión 3	221
	5.2.3.1 Planificación de la sesión 3	222
	5.2.3.2 Implementación de la sesión 3	228
	5.2.3.3 Análisis y revisión de la sesión 3	233
<b>Capítulo 6 Resultados: Capacidad visual</b>		237
6.1	Análisis de las capacidades visuales de los alumnos en los test	237
6.2	Evolución de la investigación. Análisis retrospectivo	242
	6.2.1 Análisis descriptivo de la manifestación de las habilidades de visualización	243
	6.2.2 Análisis descriptivo de los errores cometidos	249
	6.2.3 Análisis descriptivo de las dificultades de la sesión 3	251
	6.2.4 Análisis estadístico de las variables e indicadores	259
	6.2.4.1 Estudio de las diferencias y de las relaciones	260
	6.2.5 Caracterización de los sujetos según su visualización	275
	6.2.5.1 Caracterización de los sujetos según su puntuación en los test visuales	275
	6.2.5.2 Caracterización de los sujetos según la manifestación de las habilidades	276
6.3	Entrevistas	278
	6.3.1 Entrevista a S1	281
	6.3.2 Entrevista a S2	289
	6.3.3 Entrevista a S3	299
	6.3.4 Entrevista a S4	307
	6.3.5 Entrevista a S5	316
	6.3.6 Valoración de las entrevistas	325
<b>Capítulo 7 Conclusiones</b>		329
7.1	Respuesta a las preguntas y objetivos e investigación	331
	7.1.1 Capacidad de visualización de los estudiantes	332
	7.1.2 Evolución de la visualización durante el proceso de enseñanza	336
	7.1.3 Estado de la conjetura de investigación	357
7.2	Aportaciones del estudio y relación con otras investigaciones	360
7.3	Limitaciones	365
7.4	Perspectivas	366

<b>Referencias</b>	369
Anexo 5.1 Hoja de actividades de la sesión 1	411
Anexo 5.2 Tabla de habilidades previstas en la sesión 1	421
Anexo 5.3 Hoja de actividades de la sesión 2	423
Anexo 5.4 Tabla de habilidades previstas en la sesión 2	428
Anexo 5.5 Tabla de especificación de selección de problemas	431
Anexo 5.6 Hoja de actividades de la sesión 3	433
Anexo 5.7 Tabla de habilidades previstas en la sesión 3	441
Anexo 6.1 Tablas de las diferencias y relaciones	443
Anexo 6.2 Tablas de correlación	447
Anexo 6.3 Tablas de los indicadores por cuartiles	452
Anexo 6.4 Actividades de las entrevistas	454
Anexo A Transcripción sesión 1	460
Anexo B Transcripción sesión 2	490
Anexo C Transcripción sesión 3	562
Anexo D Transcripción entrevista a S1	694
Anexo E Transcripción entrevista a S2	700
Anexo F Transcripción entrevista a S3	710
Anexo G Transcripción entrevista a S4	717
Anexo H Transcripción entrevista a S5	726

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1: Relación entre las características del talento matemático expuestas por Greenes (1981), Miller (1990) y Freiman (2006)	24
Tabla 2.2: Caracterización del tipo de talento según la puntuación en test (Carreras, Arroyo, y Valera (2006)	27
Tabla 2.3: Relación entre Sentido espacial y competencias PISA	47
Tabla 2.4: Habilidades de visualización (Del Grande 1990) y actividades para mostrarlas	62
Tabla 2.5: Ejemplos de actividades para estudiar habilidades de visualización (Gutiérrez, 1992)	63
Tabla 3.1: Esquema de las componentes del talento matemático (Krutestkii, 1976)	78
Tabla 3.2: Recopilación de estudios sobre Imaginería Visual-Rendimiento Matemático y sobre Habilidad Espacial-Rendimiento Matemático (Lean y Clements, 1981)	79
Tabla 3.3: Síntesis de investigaciones que relacionan aspectos relativos al talento matemático y la visualización	92
Tabla 4.1: Acciones a realizar en cada una de las fases de un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011)	131
Tabla 4.2: Distribución de alumnos de la prueba piloto según el sexo y la edad	134
Tabla 4.3: Distribución de los alumnos del grupo control según el sexo y la edad	135
Tabla 4.4: Distribución de los sujetos del grupo talento según el sexo y el curso	135
Tabla 4.5: Distribución de los sujetos del grupo talento según el sexo y la edad	135
Tabla 4.6: Decisiones de corrección para el rendimiento de la sesión 1	142
Tabla 4.7: Ejemplo de categorías a priori que detectan la manifestación de la habilidad Percepción de la Figura-Contexto en la actividad 1 de la primera sesión	143
Tabla 4.8: Definición a posteriori de las categorías correspondientes a la habilidad Percepción Figura-Contexto en las tres sesiones	144

## Índice

Tabla 4.9: Categorías correspondientes a las habilidades	145
Tabla 4.10: Criterios de corrección para la categoría FC1	146
Tabla 4.11: Fragmento de ficha del alumno para la recogida de información en una actividad	147
Tabla 4.12: Manifestaciones del error E2 en las tres sesiones	149
Tabla 4.13: Dificultades relativas al desconocimiento de la terminología	150
Tabla 4.14: Categorías de las puntuaciones en PMA y DAT según los percentiles obtenidos	152
Tabla 4.15: Número de alumnos en cada una de las categorías del vector (puntuación PMA, puntuación DAT)	152
Tabla 4.16: Ejemplo de cálculo de indicadores de porcentajes para FC1 y FC2 para un alumno	158
Tabla 4.17: Ejemplo de cálculo del indicador FCI y FCC para un alumno	159
Tabla 4.18: Ejemplo de cálculo de V1 y V2 para un alumno	160
Tabla 4.19: Ejemplo de cálculo de los indicadores para FC1 y FC2 de todos los alumnos	162
Tabla 4.20: Ejemplo de cálculo de los indicadores globales para FC (porcentaje de alumnos FC Incompleto, FC Correcto)	162
Tabla 4.21: Ejemplo de recuento individual de errores	164
Tabla 4.22: Ejemplo de cálculo de porcentajes de manifestaciones de errores	164
Tabla 4.23: Ejemplo de cálculo del Indicador de error en un alumno	164
Tabla 4.24: Cálculo del porcentajes de alumnos que cometen cada error y las veces se que se comete	165
Tabla 4.25: Porcentajes de errores: alumnos que lo comenten y veces que se comenten	165
Tabla 4.26: Ejemplo de recuento de dificultades para un alumno	166
Tabla 4.27: Ejemplo de cálculo de porcentajes para las dificultades de un alumno	166
Tabla 4.28: Recuento de alumnos que manifiestan cada dificultad y la frecuencia absoluta con la que se manifiesta	167
Tabla 4.29: Porcentaje de alumnos que manifiestan las dificultades y el porcentaje de veces que las manifiestan	167
Tabla 5.1: Medias obtenidas por los alumnos del grupo talento en cada problema de la prueba de selección	172
Tabla 5.2: Contenidos y elementos de razonamiento de las tres sesiones	173
Tabla 5.3: Temporalización de las sesiones	185
Tabla 5.4: Categorías de la manifestación de las habilidades en la sesión 1	194
Tabla 5.5: Grupos de alumnos de la sesión 1	195
Tabla 5.6: Intervención para definir estructuras iguales	197
Tabla 5.7: Intervención en la que se demanda más tiempo	200
Tabla 5.8: Intervención para precisar la terminología	200
Tabla 5.9: Intervención para reconocer la estructura de grupo	201
Tabla 5.10: Categorías para las habilidades en la sesión 2	211
Tabla 5.11: Grupos de alumnos de la sesión 2	212
Tabla 5.12: Intervención sobre el relleno del espacio por tetraedros	213
Tabla 5.13: Intervención para utilizar materiales concretos	214
Tabla 5.14: Intervención para introducir el material manipulativo	215
Tabla 5.15: Intervención sobre las propiedades de los hexágonos y pentágonos regulares	216
Tabla 5.16: Intervención para describir las figuras obtenidas	217
Tabla 5.17: Intervención para entregar los tetraedros	218
Tabla 5.18: Categorías para las habilidades de la sesión 3	227
Tabla 5.19: Grupos de alumnos de la sesión 3	228
Tabla 5.20: Intervención en la actividad sobre rectas paralelas	230

Tabla 5.21: Intervención para argumentar la sección de un polígono de más de seis lados	231
Tabla 5.22: Intervención sobre la dificultad en la terminología	232
Tabla 5.23: Intervención sobre la necesidad de utilizar movimientos de su propio cuerpo	232
Tabla 5.24: Intervención sobre la dificultad para verbalizar los procesos	232
Tabla 5.25: Intervención sobre la dificultad para describir las representaciones	233
Tabla 6.1: Medias y Desviaciones típicas de las puntuaciones obtenidas en los test	239
Tabla 6.2: Resultados pruebas T para muestras independientes considerando la variable Talento como variable independiente	239
Tabla 6.3: Medias y desviaciones típicas de las puntuaciones Z obtenidas los test	240
Tabla 6.4: Resultados ANOVAs intrasujeto en alumnos con talento y controles para observar las diferencias entre las puntuaciones obtenidas en los test	240
Tabla 6.5: Resultados de las pruebas Tukey	241
Tabla 6.6: Correlaciones entre las puntuaciones obtenidas en los test	242
Tabla 6.7: Porcentaje de alumnos y total de manifestaciones correctas e incompletas de cada habilidad en las tres sesiones	243
Tabla 6.8: Manifestaciones de cada habilidad (porcentaje de alumnos y porcentaje de manifestaciones incompletas y correctas) en las tres sesiones	244
Tabla 6.9: Manifestaciones de las categorías FC1 y FC2 de manera incompleta y correcta en las tres sesiones	245
Tabla 6.10: Manifestaciones de las categorías CP1 y CP2 de manera incompleta y correcta en las tres sesiones	245
Tabla 6.11: Manifestaciones de las categorías PE1 y PE2 de manera incompleta y correcta en las tres sesiones	246
Tabla 6.12: Manifestaciones de las categorías RE1 y RE2 de manera incompleta y correcta en las tres sesiones	247
Tabla 6.13: Manifestaciones de las categorías RE1 y RE2 de manera incompleta y correcta en las tres sesiones	247
Tabla 6.14: Sesión en la cada habilidad se manifiesta con mayor porcentaje	249
Tabla 6.15: Porcentaje de alumnos y total de manifestaciones de cada error en las tres sesiones	249
Tabla 6.16: Manifestaciones de cada error (porcentaje de alumnos y porcentaje de manifestaciones de cada uno de ellos) en las tres sesiones	249
Tabla 6.17: Porcentaje de alumnos y total de manifestaciones de cada dificultad en la sesión 3	251
Tabla 6.18: Manifestaciones de cada dificultad (porcentaje de alumnos y porcentaje de manifestaciones de cada uno de ellas) en la sesión 3	251
Tabla 6.19: Tipos de intervenciones en cada sesión	252
Tabla 6.20: Total de manifestaciones incompletas y correctas en cada sesión	253
Tabla 6.21: Porcentaje de manifestaciones incompletas y correctas respecto al número de intervenciones de cada sesión	253
Tabla 6.22: Total de manifestaciones incompletas y correctas en las intervenciones distintas a pruebas escritas	254
Tabla 6.23: Porcentaje de manifestaciones incompletas y correctas respecto al número de intervenciones de cada sesión en las intervenciones distintas a pruebas escritas	254
Tabla 6.24: Total de manifestaciones incompletas y correctas en las pruebas escritas	255
Tabla 6.25: Porcentaje de manifestaciones incompletas y correctas respecto al número de intervenciones de cada sesión en las pruebas escritas	255
Tabla 6.26: Manifestaciones de cada habilidad (porcentaje de alumnos y porcentaje de manifestaciones incompletas y correctas) recogidas en las pruebas escritas	256
Tabla 6.27: Manifestaciones de cada error (porcentaje de alumnos y porcentaje de manifestaciones de cada uno de ellos) recogidas en las pruebas escritas	256
Tabla 6.28: Porcentaje respecto al total de puntuación de las pruebas escritas individuales	257

## Índice

según el tipo de actividad	
Tabla 6.29: Porcentaje respecto al total de puntuación de las pruebas escritas grupales según el tipo de actividad	257
Tabla 6.30: Total de manifestaciones de errores agrupados en dos tipos	259
Tabla 6.31: Porcentaje de manifestaciones de errores respecto al número de intervenciones de cada sesión en las pruebas escritas	259
Tablas de diferencias y relaciones desde 6.32 a 6.63 en ANEXO 6.1	443
Tabla 6.64: Correlación y evolución entre las variables a lo largo de las sesiones	267
Tabla 6.65: Medias de las habilidades (correctas e incompletas) y resultados de las pruebas T para muestras relacionadas	270
Tabla 6.66: Relación entre las puntuaciones de los test y las variables e indicadores	271
Tabla 6.67: Correlaciones del Rendimiento con los demás indicadores	271
Tabla 6.68: Correlaciones entre las puntuaciones obtenidas en los test y los problemas que constituyen la prueba de selección en los alumnos con talento	273
Tabla 6.69: Correlaciones entre los errores y el resto de variables e indicadores	273
Tabla 6.70: Clasificación de los sujetos del grupo talento según su puntuación en los percentiles de los factores espaciales de los test PMA y DAT	275
Tabla 6.71: Clasificación de los sujetos del grupo talento según su puntuación en los indicadores V y CV	276
Tabla 6.72: Clasificación de los alumnos según la puntuación en el test PMA y el indicador V	277
Tabla 6.73: Clasificación de los sujetos seleccionados para las entrevistas según su puntuación en el factor espacial de PMA y la variable bidimensional (V, CV)	278
Tabla 6.74: Valoración de las argumentaciones de la actividad E_1_2	279
Tabla 6.75: Datos relativos a habilidades de S1 obtenidos en el análisis retrospectivo	282
Tabla 6.76: Datos relativos a errores de S1 en el análisis retrospectivo	282
Tabla 6.77: Indicadores de S1 en las tres sesiones	282
Tabla 6.78: Indicadores globales de S1	282
Tabla 6.79: Registros de S1 en las actividades de las entrevistas, durante las sesiones	283
Tabla 6.80: Respuestas de S1 a los ítems seleccionados en la entrevista	284
Tabla 6.81: Datos relativos a habilidades de S2 obtenidos en el análisis retrospectivo	290
Tabla 6.82: Datos relativos a errores de S2 en el análisis retrospectivo	290
Tabla 6.83: Indicadores de S2 en las tres sesiones	290
Tabla 6.84: Indicadores globales de S2	290
Tabla 6.85: Registros de S2 en las actividades de las entrevistas, durante las sesiones	291
Tabla 6.86: Respuestas de S2 a los ítems seleccionados en la entrevista	292
Tabla 6.87: Datos relativos a habilidades de S3 obtenidos en el análisis retrospectivo	299
Tabla 6.88: Datos relativos a errores de S3 en el análisis retrospectivo	300
Tabla 6.89: Indicadores de S3 en las tres sesiones	300
Tabla 6.90: Indicadores globales de S3	300
Tabla 6.91: Registros de S3 en las actividades de las entrevistas, durante las sesiones	301
Tabla 6.92: Respuestas de S3 a los ítems seleccionados en la entrevista	301
Tabla 6.93: Datos relativos a habilidades de S4 obtenidos en el análisis retrospectivo	308
Tabla 6.94: Datos relativos a errores de S4 en el análisis retrospectivo	308
Tabla 6.95: Indicadores de S4 en las tres sesiones	308
Tabla 6.96: Indicadores globales de S4	308
Tabla 6.97: Registros de S4 en las actividades de la entrevista, durante las sesiones	309
Tabla 6.98: Respuestas de S4 a los ítems seleccionados en la entrevista	310
Tabla 6.99: Datos relativos a habilidades de S5 obtenidos en el análisis retrospectivo	317
Tabla 6.100: Datos relativos a errores de S5 en el análisis retrospectivo	317

Tabla 6.101: Indicadores de S5 en las tres sesiones	317
Tabla 6.102: Indicadores globales de S5	317
Tabla 6.103: Registros de S5 en las actividades de las entrevistas, durante las sesiones	318
Tabla 6.104: Respuestas de S5 a los ítems seleccionados de la entrevista	319
Tabla 6.105: Orden de preferencia en las argumentaciones de la actividad E_4_2	325
Tabla 6.106: Comparativa del comportamiento entre las sesiones y las entrevistas	327

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1: Actividad sobre secciones de un cubo por un plano	5
Figura 1.2: Planteamiento de la pregunta inicial	7
Figura 1.3: Proceso para el planteamiento de los objetivos de investigación	15
Figura 2.1: Actividades que sustentan la matematización horizontal y vertical (INECSE, 2005)	38
Figura 2.2: Número de artículos publicados por año acerca de visualización (Phillips, Norris y Macnab, 2010)	40
Figura 2.3: Esquema del Sentido espacial	45
Figura 2.4: Definición de visualización de Gutiérrez (1996)	52
Figura 2.5: Esquema de las distintas imágenes	55
Figura 2.6: La visualización en el desarrollo del sentido espacial	65
Figura 2.7: Esquema que expresa de manera gráfica el modelo visualización puesto en juego en la resolución de una tarea matemática (Gutiérrez, 1996)	68
Figura 4.1: Ejemplo de ítem para el factor espacial de PMA	126
Figura 4.2: Ejemplo de ítem para el factor espacial DAT	127
Figura 4.3: Ejemplo de ítem del test de Raven	128
Figura 4.4: Estructura general de una investigación de diseño (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011)	130
Figura 4.5: Esquema del Experimento de enseñanza	133
Figura 5.1: Esquema general de diseño de las sesiones	184
Figura 5.2: Esquema de la sesión 1	187
Figura 5.3: Esquema de la sesión 2	206
Figura 5.4: Esquema de la sesión 3	223
Figura 6.1 Porcentaje de manifestación incompletas de cada habilidad en las tres sesiones	268
Figura 6.2: Porcentaje de manifestaciones correctas de cada habilidad en las tres sesiones	268
Figura 6.3: Porcentaje de manifestaciones de cada error en las tres sesiones	269
Figura 6.4: Esquema de la entrevista, incluyendo los aspectos a indagar	281
Figura 7.1: Esquema del proceso seguido en este capítulo de conclusiones	330

## Índice

# Introducción

El trabajo de investigación que se describe en este informe viene motivado por la necesidad de diseñar buenas prácticas docentes para atender a los alumnos con talento matemático\*. Esta necesidad no solamente viene demandada por las distintas líneas de investigación, sino que es reflejo del interés que el propio sistema educativo manifiesta por dotar al profesorado de técnicas de intervención para la atención del alumnado con talento matemático.

Superadas las ideas de que estos alumnos no requerían ningún tipo de atención individualizada, en la actualidad su consideración como alumnos de necesidades educativas especiales lleva a diseñar metodología y recursos particulares que den respuesta educativa a sus características propias. Es importante resaltar que una falta de atención puede generar desinterés por el estudio de las matemáticas, dificultades de aprendizaje e incluso alteraciones en su personalidad y comportamiento.

La caracterización del talento matemático como caso particular de talento, establece unas posibles actuaciones para estimularlo y desarrollarlo. El talento necesita emerger y crecer evolutivamente ya que puede que no llegue a manifestarse sin una adecuada estimulación. Descubrir el potencial que encierra cada alumno y desarrollar sus capacidades con la mejor atención educativa colaborará, no sólo mejorar su rendimiento escolar, sino también a su desarrollo como persona.

De modo general, las investigaciones sobre alumnos con talento se han centrado en tres aspectos: clarificar el concepto de talento, identificar a los sujetos con talento y diseñar formas de intervención para estos alumnos. En este trabajo nos centramos en este último punto. Como el resto de los niños y niñas, los alumnos con talento son un grupo heterogéneo y por lo tanto sus necesidades educativas son distintas, tanto por su edad como por el contexto educativo. Sin embargo, podemos reconocer unas características comunes que nos permitan diseñar unas prácticas docentes que los atiendan. El talento

---

\* En este informe vamos a utilizar el término alumnos para de un modo genérico referirnos a los alumnos y alumnas y facilitar así la fluidez de lectura. En las entrevistas personales también hemos utilizado el masculino para mantener el anonimato de las personas entrevistadas.

## Introducción

matemático supone un desarrollo óptimo de estas características que les hacen afrontar con éxito la resolución de tareas matemáticas. El proceso de enseñanza debe ir dirigido a que el alumno desarrolle al máximo su potencialidad y viene determinado por las habilidades específicas que se desean mejorar.

Para la investigación de estas habilidades, centramos nuestra atención en la visualización. La Educación Matemática ha manifestado su interés por los aspectos visualizadores, otorgándole un papel importante en determinados procesos de matematización. Es una componente fundamental para el razonamiento, especialmente para el geométrico. Las investigaciones apoyan que es necesario diseñar acciones docentes que la estimulen, puesto que la visualización se puede ejercitar, por ir más allá de las capacidades innatas que podamos dejar que se desarrollen de manera espontánea. Pese a ello, la presencia de la visualización en las clases es muy deficiente.

El enfoque educativo para el enriquecimiento de la visualización viene favorecido por la intención educativa de la enseñanza de la geometría que tiende a desarrollar el sentido espacial, entendido como elemento de competencia matemática. Además del conocimiento de conceptos geométricos, el sentido espacial implica una *habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas*. Para describir esta habilidad, es necesario delimitar los diferentes elementos que entran en juego en la visualización. De éstos, resaltamos el papel que desempeñan las habilidades de visualización para resolver tareas matemáticas. Por lo tanto, un mayor desarrollo de estas habilidades enriquecerá los recursos de los que dispone el alumno para afrontar con mayor éxito las actividades matemáticas.

No obstante, no queda suficientemente consensuada en las investigaciones la relación que existe entre rendimiento en tareas matemáticas y visualización, observando que no hay una postura unificada sobre el papel que desempeña la visualización en el tratamiento del talento matemático. Es necesario precisar en qué elementos se estudian del talento matemático y de la visualización, ya que la utilización de diferentes definiciones de talento (habilidad matemática, rendimiento, etc.), de visualización (habilidad espacial, imaginería visual, etc.) y de instrumentos de medida que se emplea sobre estos constructos, puede conducir a resultados aparentemente contradictorios. En este sentido, en el ámbito del talento matemático se demandan investigaciones sobre el

papel de la enseñanza en el desarrollo de las habilidades de visualización. Consideramos que un enriquecimiento curricular que motive un uso adecuado de la visualización puede favorecer que los alumnos con talento matemático pongan en juego sus habilidades de visualización.

Con estas premisas, hemos puesto en marcha un experimento de enseñanza, realizado durante tres sesiones de enriquecimiento curricular, que han abarcado cuatro meses. Con objeto de examinar lo ocurrido en dicho experimento hemos establecido diferentes indicadores para evaluar el proceso visualizador a lo largo de las sesiones que han constituido nuestra intervención, tratando con ello de comprobar si el diseño de la intervención ha permitido que se manifiesten las habilidades de visualización, los errores y las dificultades de su uso.

El informe de la investigación se divide en siete capítulos.

En el capítulo 1 se plantea el problema de investigación, justificando su importancia y pertinencia. Se describen las motivaciones que originan el estudio, se enuncian las preguntas que lo motivan y los objetivos que se pretenden abordar.

El capítulo 2 completa el marco teórico en el que fundamentamos la investigación. Se realiza una revisión del término talento y de las características del talento matemático y se justifica el enriquecimiento curricular como la forma de intervención adecuada para la atención a la diversidad del grupo de alumnos de nuestra investigación. Con respecto a la visualización, se resalta su importancia en la labor matemática, especialmente en el desarrollo del sentido espacial en el ámbito geométrico. Se selecciona el modelo teórico que organiza los conceptos visualizadores utilizados y se contextualiza la investigación en el estudio de las habilidades de visualización.

En el capítulo 3 se realiza una revisión de las investigaciones sobre talento matemático y visualización. Se enfatiza la falta de consenso entre el papel que desempeña la visualización en el proceso de resolución de determinadas tareas matemáticas y por lo tanto en el talento matemático. Se justifica la necesidad de investigar las habilidades visualizadoras de los alumnos distinguiendo entre las capacidades que poseen y las manifestaciones que ponen en juego en un proceso de enseñanza.

## Introducción

En el capítulo 4 se describe la metodología utilizada, explicitando los diferentes elementos del experimento de enseñanza como diseño de investigación. Se describen los sujetos, los instrumentos utilizados para la recogida de datos, las variables que intervienen en el estudio y el diseño y papel que las entrevistas individuales ocupan en la investigación. Se seleccionan los test utilizados para caracterizar las capacidades visuales de los alumnos previamente al estudio de las habilidades puestas en juego en el experimento de enseñanza.

El capítulo 5 presenta la evolución del experimento de enseñanza, mostrando las distintas fases de preparación y experimentación que se han llevado a cabo para las tres sesiones de enriquecimiento, a partir de la prueba piloto. Se describen la planificación, el desarrollo y las decisiones tomadas en cada una de las intervenciones.

El capítulo 6 muestra los resultados relativos a las capacidades de los alumnos y el análisis retrospectivo para estudiar la evolución de la visualización a lo largo de las tres sesiones. Se analizan los resultados relativos a la manifestación de las habilidades de visualización, el rendimiento, los errores y las dificultades y se describen las entrevistas personales realizadas.

Finalmente en el capítulo 7 se muestran las conclusiones obtenidas que responden a las preguntas y objetivos de investigación, las aportaciones del estudio y sus limitaciones y se plantean cuestiones abiertas o perspectivas de investigación que pueden derivarse.

# 1 Planteamiento del problema

## 1.1 Introducción

De manera independiente, el talento matemático y la visualización son dos campos que han despertado el interés en la investigación y la educación matemática como queda reflejado en las abundantes publicaciones y reuniones científicas dedicadas a estos tópicos. Como comprobaremos en la revisión de las investigaciones, desde distintos ámbitos se demanda clarificar la interrelación que existe entre ambos conceptos. En este capítulo justificaremos la importancia y pertinencia de nuestro estudio y expondremos las motivaciones que nos han dirigido hacia las preguntas y objetivos de investigación.

Para ilustrar el papel que desempeña la visualización en la resolución de tareas matemáticas, supongamos la siguiente actividad: ¿qué polígonos regulares pueden obtenerse al seccionar un cubo mediante un plano? (Figura 1.1).

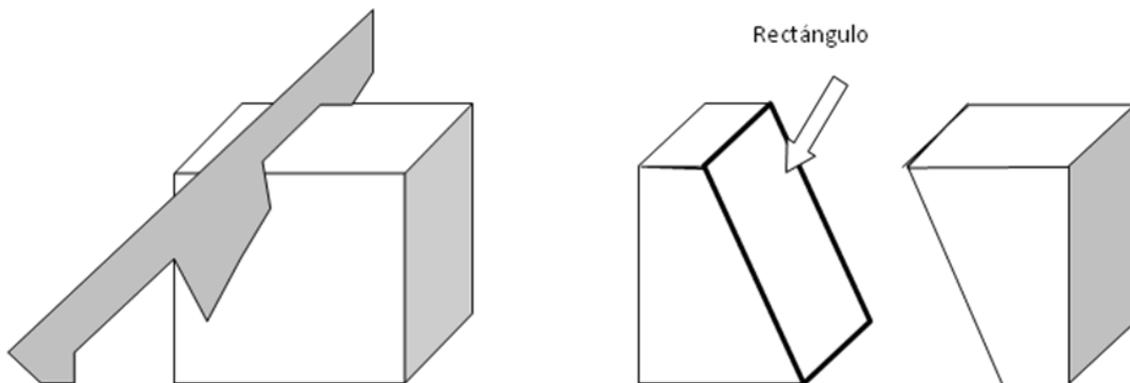


Figura 1.1: Actividad sobre secciones de un cubo por un plano.

Independientemente de las estrategias analíticas que puedan llevarse a cabo, creemos que un buen uso de la visualización puede favorecer la realización de actividades como la anterior. Los alumnos con talento matemático afrontan con mayor éxito la realización de tareas matemáticas y es razonable cuestionarse sobre la importancia que la visualización adquiere cuando resuelven actividades como la que hemos presentado. Son muchas las variables que pueden influir en el modo de abordar el problema: conceptos matemáticos implicados, técnicas de argumentación, estrategias de

## 1 Planteamiento del problema

resolución, capacidad visual, tipo de instrucción recibida, etc., por lo que es necesario delimitar previamente algunos aspectos que dirijan la investigación. Inicialmente, y de manera muy esquemática, recogemos cinco ideas de la revisión bibliográfica que muestran la pertinencia de estudiar la relación entre talento matemático y visualización:

1) En su obra “The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren”, Krutetskii (1976) trata de determinar cuáles son las componentes del pensamiento matemático de los niños con talento matemático, realizando un exhaustivo estudio de la literatura de la época. Una de las conclusiones de este estudio es que la habilidad para visualizar relaciones matemáticas abstractas y conceptos espaciales geométricos no es necesariamente una componente en la estructura de las habilidades matemáticas.

2) Posteriormente, Presmeg (1986a) utiliza el perfil general de la estructura de la habilidad matemática de los individuos en edad escolar presentado por Krutetskii para señalar la preferencia de los alumnos con talento por los métodos no visuales. Incluso empleando un método de enseñanza visual no siempre consiguieron que los alumnos visualizadores superasen sus dificultades e hicieran un uso óptimo de la fuerza de su procesamiento visual.

Si bien los dos puntos anteriores reflejan lo que podría ser un distanciamiento entre el talento matemático y la visualización, los siguientes aspectos los acercan:

3) Numerosos autores han destacado la importancia de la visualización, además de como habilidad natural, como componente necesaria en las tareas de matematización (Arcavi, 2003; Clements y Battista, 1992; Guillén, 2010; entre otros).

4) Importantes matemáticos han manifestado el papel fundamental que ocupa la visualización en su pensamiento. Sirva de ejemplo este fragmento de la Carta de Einstein a Hadamard en “Psicología de la Invención en el campo matemático” (Hadamard, 1947):

*Las palabras o el lenguaje, escrito o hablado, no creo que desempeñen ningún papel en el mecanismo de mi pensamiento. Los entes físicos que parecen servir de elementos al pensamiento son ciertos signos y ciertas imágenes más o menos claras que pueden ser “voluntariamente” reproducidas y combinadas (p. 233).*

5) Situándonos en la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner (1995, 2001), la visualización es una cualidad que puede desarrollarse. No debemos considerarla simplemente como una capacidad innata que debemos dejar que se desarrolle de manera espontánea, sino que es posible y necesario modelarla. Incorporar actividades de visualización en la educación matemática, aumenta la intuición y proporciona al sujeto una mayor capacidad de entendimiento (Cunningham, 1991).

Estas consideraciones nos conducen a una situación aparentemente contradictoria: aunque está reconocida la importancia de la visualización en las tareas de matematización y ha desempeñado un papel fundamental en el pensamiento de grandes matemáticos, la visualización no parece ocupar un lugar destacado como componente del talento matemático (Figura 1.2).

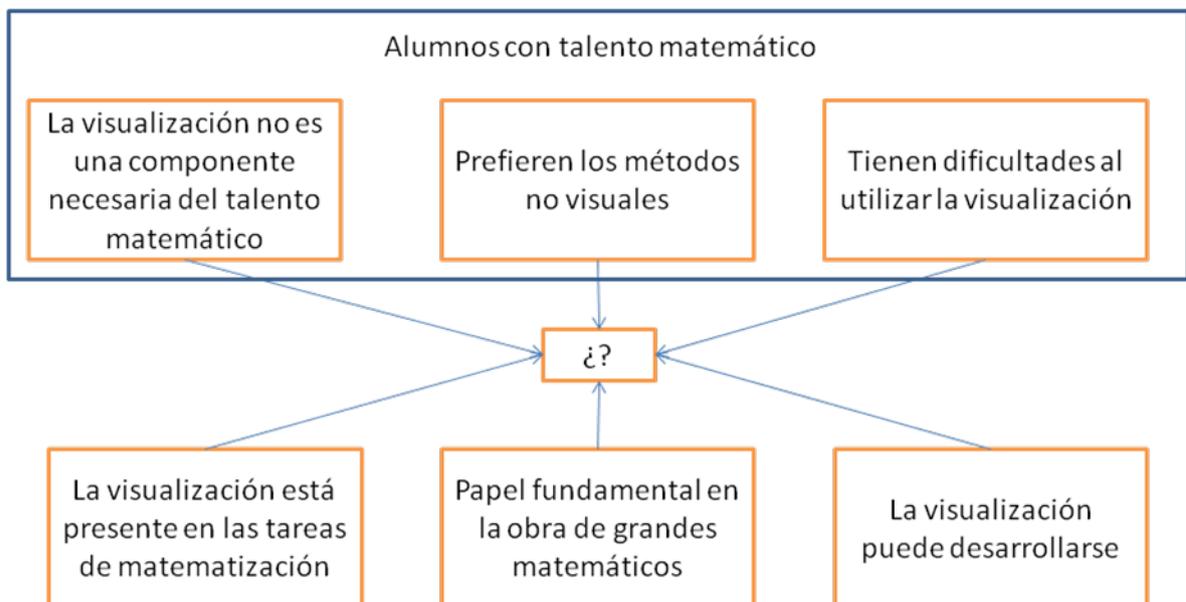


Figura 1.2: Planteamiento de la pregunta inicial.

El uso de la visualización y la preferencia por métodos visuales puede estar condicionado por dificultades culturales, cognitivas y sociológicas (Arcavi, 2003; Eisenberg y Dreyfus, 1991). Puesto que la visualización es importante en las tareas matemáticas y no parece ser necesariamente una componente del talento matemático, una mejora del uso de sus cualidades visuales podría enriquecer dicho talento y superar errores y posibles dificultades.

## **1 Planteamiento del problema**

A partir de estas premisas, consideramos pertinente el plantearnos una pregunta inicial: *¿Cómo diseñar buenas prácticas docentes para mejorar la visualización de los alumnos con talento matemático?*

Para abordar la respuesta a esta pregunta es necesario puntualizar aspectos importantes relativos al talento matemático y la visualización. El diseño de buenas prácticas docentes requiere un conocimiento previo relativo a la caracterización, identificación e intervención de alumnos con talento matemático. Plantearse la mejora de la visualización implica conocer las cualidades visuales de estos alumnos y determinar los elementos de visualización que son necesarios y factibles de mejorar. Además es imprescindible revisar las investigaciones que relacionan el talento matemático y la visualización.

### **1.2 Talento matemático**

En los sistemas educativos actuales el objetivo de atender a la diversidad presenta a los docentes el reto de enseñar a cada individuo según sus necesidades específicas evitando la exclusión respecto a sus compañeros (Delors, 1996). En este contexto, desde diferentes organizaciones implicadas en la educación se ha reclamado la importancia de atender a los niños con talento (Ministerio de Educación y Cultura, 2000; National Mathematics Advisory Panel, 2008). La OCDE y UNESCO inciden en la necesidad de atender a la diversidad y la National Council of Teachers of Mathematics en los Estándares (NCTM, 2000) considera a los alumnos con talento dentro de las necesidades educativas especiales.

En estos y otros documentos se manifiesta la diversidad existente en terminología y teorías que caracterizan a estos alumnos por lo que en el análisis del término talento y su relación con otros términos afines (superdotados, altas capacidades, alto rendimiento, etc.) es necesario distinguir si las definiciones están orientadas a lo innato o genético, al logro o rendimiento, a la interacción entre lo innato y el medio ambiente, a modelos cognitivos y modelos sistémicos (Benavides, 2008). Desde la perspectiva de que un proceso de enseñanza adecuado es un factor importante para acercar las capacidades

potenciales hacia capacidades realizadas y con la intención de analizar habilidades matemáticas concretas, hemos elegido el término talento matemático en el sentido que define Passow (1993). Los alumnos con talento poseen unas habilidades sobresalientes, en virtud de las cuales son capaces de un alto rendimiento. En el ámbito específico del talento matemático, a pesar de la variedad de términos encontrada, los autores señalan diferentes aspectos que están relacionados y no difieren esencialmente, recogiendo listados de características idóneas para afrontar tareas matemáticas.

Un posible enfoque para la atención de estos alumnos es determinar aquellas características factibles de mejorar y relevantes en su desarrollo matemático y diseñar estrategias educativas que las potencien. Una actuación que persigue esta intencionalidad es el enriquecimiento curricular, que consiste en enseñar nuevos contenidos que no estén cubiertos en el currículo oficial o trabajarlos en un nivel de mayor profundidad, tratando los temas con un nivel mayor de abstracción y complejidad (Blanco, Ríos y Benavides, 2004). Esta forma de intervención permite trabajar tanto individualmente como en diversas situaciones de agrupamientos y se adapta adecuadamente al grupo de alumnos en el que centraremos nuestra investigación, que forman parte del proyecto ESTALMAT (programa de Estímulo del Talento Matemático) en Andalucía Oriental.

### 1.3 Visualización

En el apartado anterior hemos delimitado el contexto de nuestra pregunta inicial relativo al diseño de las buenas prácticas docentes. Para enfocar ahora la parte correspondiente a la mejora de la visualización, debemos concretar la terminología y modelos a utilizar, conocer las cualidades visuales de los alumnos con talento y determinar los elementos de la visualización sobre los que focalizar el enriquecimiento.

Como en el caso del talento, una dificultad añadida al estudio de la visualización es la riqueza de terminología utilizada por los autores en los diferentes campos de investigación en los que aparece (razonamiento visual, imaginación, pensamiento espacial, imagería, imágenes mentales, imágenes visuales, imágenes espaciales, etc.).

## 1 Planteamiento del problema

Desde una perspectiva matemática, la visualización supone la habilidad para interpretar y comprender la información proveniente de figuras que se usan en el trabajo geométrico y la habilidad para contextualizar y trasladar las relaciones abstractas y la información no figural en términos visuales (Ben-Chaim y Lappan, 1989).

La geometría puede ser considerada como el origen de la visualización en matemáticas (Gutiérrez, 1996, 1998a) y puede ser un ámbito idóneo para el pretendido enriquecimiento de contenidos y habilidades. En el contexto geométrico, la relación entre conceptos y habilidades está presente en la intencionalidad de desarrollo del sentido espacial (New Jersey Mathematics Coalition, 1996) que entendemos como un elemento de la competencia matemática.

Centramos nuestra investigación en analizar la visualización espacial en un entorno geométrico, por lo que utilizamos el modelo presentado por Gutiérrez (1996) en el que unifica muchos de los desarrollos teóricos elaborados hasta el momento y consigue establecer un marco integrador. Gutiérrez (2006) entiende la visualización como *el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos*.

De los elementos que componen la visualización, resaltamos el papel que desempeñan las habilidades visualizadoras al resolver una tarea matemática, interviniendo tanto en los procesos de creación y transformación de imágenes mentales como relacionando éstas con las representaciones externas. La importancia de las habilidades ha sido reconocida en la educación matemática por numerosos autores (Bishop 1983; Gutiérrez, 1996; McGee, 1979, entre otros). Del Grande (1987, 1990) realiza una recopilación de las habilidades psicológicas necesarias para los procesos de visualización, en la que cita distintas habilidades de la percepción espacial según varios autores y selecciona siete por su relevancia en el estudio de las matemáticas y la geometría en particular: 1) coordinación ojo-motor, 2) percepción figura-contexto, 3) conservación de la percepción, 4) percepción de la posición en el espacio, 5) percepción de las relaciones espaciales, 6) discriminación visual y 7) memoria visual.

Colaborar al desarrollo de estas habilidades puede ser un objeto de enriquecimiento, partiendo de que el diseño de unas buenas prácticas docentes puede favorecer el desarrollo de las capacidades visuales según las ideas de la teoría de las inteligencias múltiples (Gardner, 1995, 2001). Pensamos que un buen uso de estas habilidades de visualización puede servir para que los alumnos realcen su talento matemático. En este sentido, debemos revisar la relación que entre talento matemático y visualización se ha reflejado en las investigaciones.

### 1.4 Talento matemático y visualización

Estudios como los citados anteriormente de Krutetskii (1976) y Presmeg (1986a, 1986b), pueden entenderse como descorazonadores, al indicar que hay un alejamiento entre la visualización y el talento matemático. Sin embargo, no parece haber una postura unificada en este distanciamiento. Lean y Clements (1981) recogen la disparidad de resultados obtenidos sobre la relación entre Imaginería Visual y Rendimiento Matemático en diferentes estudios y Bishop (1980, 1983) también destaca la diferencia de posturas sobre la relación entre visualización y habilidad matemática.

Si como hemos señalado la visualización es importante para la labor matemática, parece oportuno pensar que esta controversia pueda ser debida a otros factores como la utilización de diferentes definiciones e instrumentos de medida. Si bien el talento matemático está, de manera generalizada, caracterizado por el rendimiento en tareas de resolución de problemas y por la puntuación en determinados test, la medición de la visualización se ha realizado por diferentes instrumentos y constructos: puntuaciones en test visuales, tipos de imágenes utilizadas, estrategias de resolución visuales utilizadas, habilidades de visualización manifestadas, etc. Consideramos necesario diferenciar la capacidad visual, evaluada mediante herramientas psicométricas externas, del uso que los alumnos con talento matemático manifiestan de las habilidades de visualización, que puede verse influenciado por el tipo de tareas propuestas y el conocimiento de técnicas visuales propias del tipo de enseñanza recibida.

## 1 Planteamiento del problema

En una completa revisión de los trabajos presentados en los PME relativos a visualización, Presmeg (2006) afirma que quizás el asunto más apremiante de investigación en este periodo es encontrar una enseñanza eficaz para aumentar el uso y poder de la visualización en la educación matemática.

Para el diseño de actividades que favorezcan el uso de la visualización y evaluar la eficacia del propio proceso de enriquecimiento es necesaria una metodología de investigación que relacione estrechamente los objetivos formativos (enriquecimiento curricular en aspectos visualizadores) con los investigadores (analizar las habilidades de visualización puestas en juego y su evolución) que se persiguen. Por ello hemos elegido la metodología propia de un experimento de enseñanza como un tipo de investigación de diseño (Confrey y Lachance, 2000; Molina 2006) que nos permite poner en práctica de manera sistemática un proceso de enriquecimiento curricular, y examinar cómo los estudiantes ponen en juego sus cualidades visualizadoras. Para ello deberemos determinar indicadores y variables que analicen el uso de las habilidades de visualización puestas en juego en las distintas intervenciones (prueba piloto, tres sesiones de enriquecimiento y entrevistas personales).

Este análisis de las habilidades y la detección de errores y dificultades pueden aportar información sobre la relación que existe entre talento matemático y visualización. En este sentido, sintetizamos tres ideas recogidas a partir de las investigaciones: 1) no hay una postura unificada sobre la relación que existe entre talento matemático y visualización, 2) se considera necesario diferenciar entre la capacidad visual y el uso que se manifiesta de la visualización y 3) se demanda determinar el papel que tanto la selección de actividades como la forma de enseñarlas desempeñan en el uso de la visualización.

Estas ideas, además de justificar la actualidad, importancia y pertinencia de este tipo de estudios, reconducen nuestra investigación para que aporte información a cada uno de los puntos anteriores. Con esta finalidad, planteamos las preguntas y objetivos que operativizan nuestra investigación.

### 1.5 Objetivos de investigación

Recogemos todo lo expuesto anteriormente para formular la finalidad de nuestra investigación: *Diseñar buenas prácticas docentes para desarrollar la visualización de los alumnos con talento matemático.*

Abordar este diseño requiere responder a las siguientes preguntas:

1.- Capacidad visual de los alumnos con talento matemático: ¿Cuál es la capacidad visual de alumnos con talento que asisten a los cursos del programa ESTALMAT? ¿Existe relación entre la capacidad visual que poseen y el uso que hacen de ella?

2.- Diseño de la intervención: ¿Es necesaria la visualización para realizar determinadas tareas matemáticas? ¿Cuáles son las tareas que favorecen el uso de la visualización? ¿Cómo diseñar las sesiones de enriquecimiento para motivar el uso de las habilidades? ¿Qué contenidos y elementos de razonamiento visual son necesarios enriquecer? ¿Cómo coordinar los objetivos docentes e investigadores en la intervención?

3.- Uso de la visualización: ¿Cómo registrar el uso de la visualización que hace un alumno? ¿Es posible detectar las habilidades, errores y dificultades que se ponen de manifiesto? ¿Cómo registrar el papel que ha ocupado la visualización en el rendimiento al realizar las tareas? ¿Cómo caracterizar a los alumnos según el uso que hagan de la visualización?

4.- Evolución de la investigación: ¿Cómo evaluar el proceso de instrucción? ¿Podemos comparar la visualización manifestada en las diferentes sesiones? ¿Es posible registrar la mejora en el uso de la visualización? ¿Qué papel ha tenido la instrucción en la utilización de las habilidades de visualización y la superación de errores y dificultades? ¿Qué aspectos de la visualización son factibles de mejorar?

Sintetizamos lo recogido en las preguntas anteriores en el enunciado del objetivo general que persigue nuestra investigación:

Objetivo general: *Analizar las habilidades de visualización puestas en juego por los alumnos con talento matemático durante tres sesiones de enriquecimiento curricular.*

## 1 Planteamiento del problema

Este objetivo general se particulariza en los siguientes objetivos específicos que obedecen a dos líneas complementarias:

- a) describir las capacidades visualizadoras de los estudiantes
- b) analizar su evolución durante el proceso de enseñanza.

Describir capacidades de visualización de los estudiantes:

O1) Caracterizar las capacidades visuales de un grupo de alumnos con talento matemático mediante herramientas psicométricas externas.

O1.1. Analizar las capacidades visuales de un grupo de alumnos con talento matemático a partir de los resultados obtenidos en el test de inteligencia general RAVEN y las escalas espaciales del test PMA (E) y DAT-5 (SR).

O1.2. Contrastar los resultados anteriores con los obtenidos por un grupo control.

O1.3. Observar las diferencias existentes entre la capacidad visual evaluada mediante los test y el uso de estas habilidades al resolver tareas matemáticas en las sesiones.

Analizar la evolución durante el proceso de enseñanza

O2) Diseñar una intervención que favorezca la manifestación y ejercitación de las habilidades de visualización.

O2.1. Proponer un enriquecimiento curricular dentro del paradigma de investigación de un experimento de enseñanza transformativo y dirigido por una conjetura llevado a cabo en tres sesiones precedidas de una prueba piloto.

O3) Analizar la evolución de los alumnos a lo largo de las sesiones en cuanto a la manifestación de las habilidades visualizadoras, tanto de manera individual como del grupo de alumnos con talento matemático.

O3.1. Analizar la manifestación de las habilidades de visualización.

O3.2. Analizar los errores cometidos en el uso de la visualización.

O3.3. Analizar las dificultades del uso de la visualización.

En el esquema general de una investigación de diseño se determinan los problemas y objetivos de investigación y enuncian las hipótesis o conjeturas de investigación. A partir de los distintos ciclos iterativos y de los datos obtenidos, se puede reformular esta conjetura (Figura 1.3).

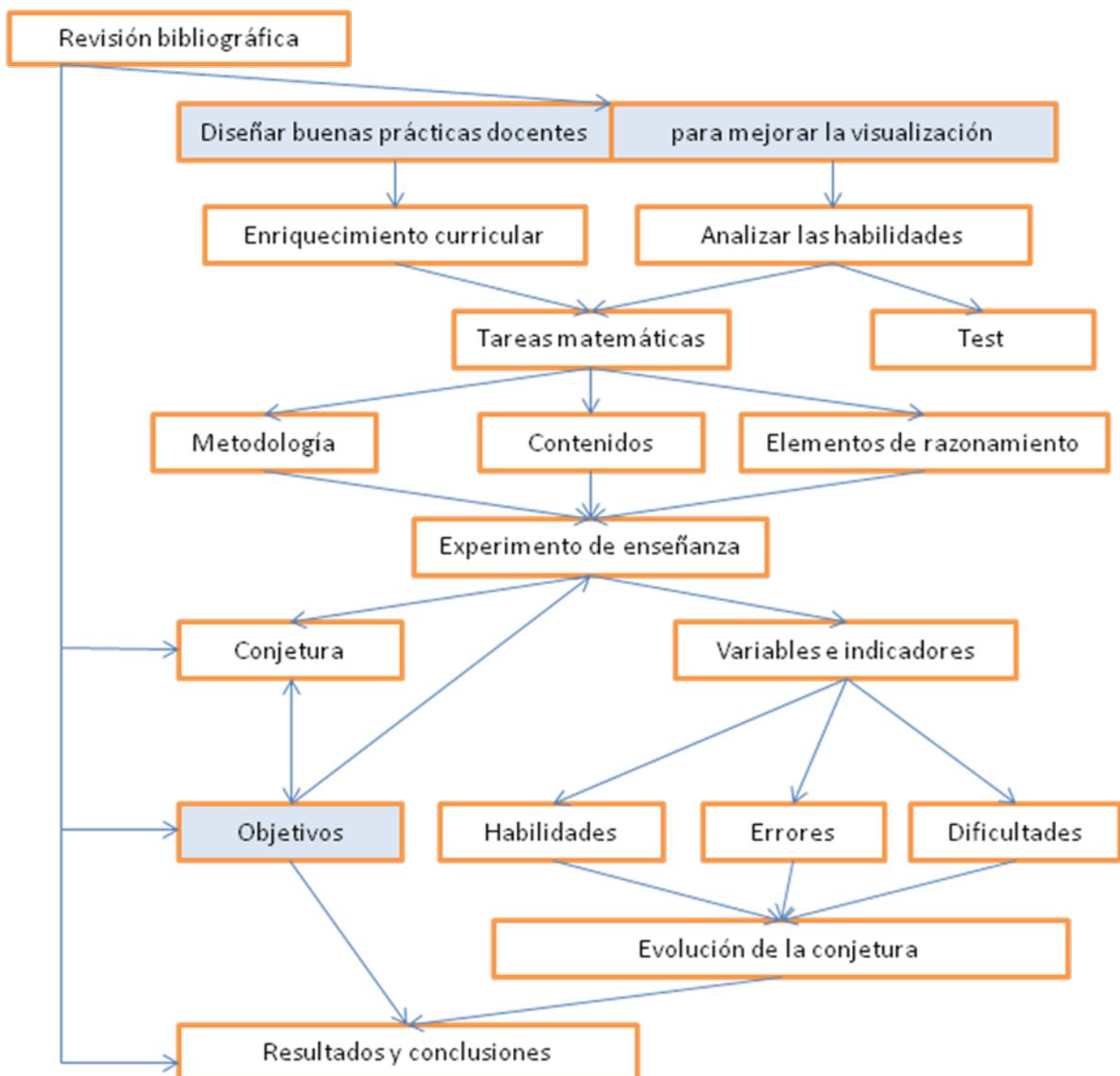


Figura 1.3: Proceso para el planteamiento de los objetivos de investigación.

## 1 Planteamiento del problema

Inicialmente, nuestra conjetura tiene la siguiente formulación:

*El enriquecimiento curricular centrado tanto en contenidos como en elementos de razonamiento visual favorece la utilización y el desarrollo de las habilidades de visualización en los alumnos con talento matemático.*

Esta conjetura se desglosa en tres apartados:

- 1. Conjeturamos que los alumnos con talento matemático no presentan deficiencias respecto a las capacidades visuales.*
- 2. Los alumnos con talento matemático manifiestan y desarrollan habilidades de visualización al enfrentarse a tareas que las requieran para resolver situaciones significativas, aunque cometan algunos errores en su utilización.*
- 3. El enriquecimiento curricular centrado tanto en contenidos como en elementos de razonamiento visual favorecerá la mejor utilización y el desarrollo de sus habilidades de visualización.*

El primero va asociado al objetivo específico *O1* y sus subobjetivos señalados, mientras que el segundo y tercero se relacionan ambos tanto con el diseño de la intervención (*O2*), como con el estudio de la evolución (*O3*).

## 2 Fundamentación

En este capítulo analizamos los conceptos relativos a talento matemático y visualización. En el primer punto relativo al talento, justificaremos la necesidad de atender a los alumnos con talento como alumnos de necesidades educativas especiales, para lo que examinaremos las características que determinan el talento y presentaremos diferentes formas de identificación, evaluación y tratamiento. En el segundo punto mostraremos la importancia de la visualización en matemáticas, especialmente en el área de geometría y estableceremos el marco teórico en el que se contextualizará nuestro estudio, que se focalizará en el estudio de las habilidades de visualización.

### 2.1 Talento

En los sistemas educativos actuales el objetivo de atender a la diversidad presenta a los docentes el reto de enseñar a cada individuo según sus necesidades específicas evitando la exclusión respecto a sus compañeros. Así, en el apartado de la educación y la lucha contra las exclusiones del informe “La educación encierra un tesoro” podemos leer:

*La educación puede ser un factor de cohesión si procura tener en cuenta la diversidad de los individuos y de los grupos humanos y evita ser a su vez un factor de exclusión social. El respeto de la diversidad y de la especificidad de los individuos constituye, en efecto, un principio fundamental, que debe llevar a proscribir toda forma de enseñanza normalizada. A menudo se acusa con razón a los sistemas educativos formales de limitar el pleno desarrollo personal al imponer a todos los niños el mismo molde cultural e intelectual, sin tener suficientemente en cuenta la diversidad de los talentos individuales. (Delors et al., 1996, p.59).*

Este distanciamiento de la enseñanza normalizada junto con la heterogeneidad de las clases que ha originado la enseñanza obligatoria, obliga a los sistemas educativos a dotar de estrategias al profesorado para atender esta diversidad y evitar la exclusión:

*“La educación tiene la misión de permitir a todos sin excepción hacer fructificar todos sus talentos y todas sus capacidades de creación, lo que implica que cada uno pueda responsabilizarse de sí mismo y realizar su proyecto personal”... “De esta forma, saldríamos del terrible dilema que se plantea entre seleccionar, y con ello multiplicar el fracaso escolar y los riesgos de exclusión, o igualar, pero en detrimento de la promoción de personas con talento” (Delors et al., 1996, p. 18).*

La importancia de atender a los alumnos con talento ha sido reclamada por distintas organizaciones implicadas en la educación (Ministerio de Educación y Cultura, 2000; National Council of Teachers of Mathematics, 2000; National Mathematics Advisory Panel, 2008). La OCDE y UNESCO inciden en la necesidad de atender a la diversidad y el NCTM en los Estándares considera a los alumnos con talento dentro de las necesidades educativas especiales. Así, el principio de igualdad (NCTM, 2000) defiende que el talento de los estudiantes se debe alimentar y apoyar para que tengan la oportunidad y la guía necesarias para sobresalir. Perfilando la relación de éste con otros Principios (evaluación, enseñanza, curriculum, aprendizaje y tecnología) se puede atender a la diferenciación de estos alumnos en cuanto a su grado de adquisición, desarrollo no sincronizado y la intensa focalización y complejidad de pensamiento de estos estudiantes (Deal y Wismer, 2010).

Otros informes educativos, como el informe Warnock, han considerado a los alumnos con talento como alumnos de necesidades educativas especiales (Gutiérrez y Maz, 2004). En cuanto a la normativa legal en España, Jiménez (2002) sitúa en el Libro Blanco para la Reforma del Sistema Educativo de 1989, la introducción del término necesidades educativas especiales para referirse a los alumnos superdotados:

*“Otra manifestación de las necesidades educativas especiales es la de los alumnos llamados superdotados... Deben proponerse tanto las medidas técnicas de enriquecimiento del currículo como las administrativas para que el sistema educativo responda eficazmente a las necesidades de los alumnos superdotados...” (MEC, 1989, p. 169).*

Las distintas perspectivas de atención a los alumnos con talento que ha adaptado el sistema educativo español y los matices de la terminología utilizada reflejan la variedad

de interpretaciones. Segovia y Castro (2004) ubican la primera referencia legal hacia las necesidades educativas especiales para alumnos superdotados intelectualmente en la Ley General de Educación y Financiamiento de la reforma Educativa de 1970 (LGE): *“Se prestará una atención especial a los escolares superdotados para el debido desarrollo de sus aptitudes en beneficio de la sociedad y de sí mismos (Art. 49.2)”*. Se añaden las siguientes orientaciones metodológicas:

*“La educación de los alumnos superdotados se desarrollará en los centros docentes de régimen ordinario, pero se procurará que su programa de trabajo, utilizando métodos de enseñanza individualizada, les facilite, una vez alcanzados los niveles comunes, obtener el provecho que les permitan sus mayores posibilidades intelectuales” (Art. 53).*

La Ley Orgánica de la Calidad de la Enseñanza (BOE 24 de diciembre de 2002) inicia una nueva andadura para el marco legal relativo a los niños con sobredotación intelectual (Segovia y Castro, 2004). El Capítulo VII dedicado a la atención de los alumnos con necesidades educativas especiales, hace referencia a los alumnos superdotados intelectualmente:

*“Los alumnos superdotados intelectualmente serán objeto de una atención específica por parte de las Administraciones educativas. (...) Con el fin de dar una respuesta educativa más adecuada a estos alumnos, las Administraciones educativas adoptarán las medidas necesarias para identificar y evaluar de forma temprana sus necesidades (...) Corresponde a las Administraciones educativas promover la realización de cursos de formación específica relacionados con el tratamiento de estos alumnos para el profesorado que los atiende. Igualmente adoptarán las medidas oportunas para que los padres de estos alumnos reciban el adecuado asesoramiento individualizado, así como la información necesaria que les ayude en la educación de sus hijos” (Art. 43).*

Más recientemente, la *Ley Orgánica 2/2006 de Educación (LOE)* abandona el modelo de integración escolar a favor de un modelo de inclusión, en el que ya no se trata de que el alumno se ajuste al sistema educativo en el que se le pretende integrar, sino de ajustar el propio sistema educativo a la diversidad de su alumnado (Osorio, 2009). Esta ley

## 2 Fundamentación

describe a los *alumnos con necesidades específicas de apoyo educativo* como "*necesidades educativas especiales, con dificultades específicas de aprendizaje, por sus altas capacidades intelectuales, por haberse incorporado tarde al sistema educativo, o por condiciones personales o de historia escolar...*" (Artículo 71.2)

En esta norma, los casos de *Altas Capacidades Intelectuales* también se consideran como *personas con necesidades específicas de apoyo educativo*. Caracterización que también se constata en el Título III relativo a la equidad en la educación en Andalucía en la Ley 17/2007, de 10 de diciembre: *Asimismo, se considera alumnado con necesidad específica de apoyo educativo al que presenta altas capacidades intelectuales, de acuerdo con lo establecido en el artículo 71.2 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo.* (Artículo 113, 3).

El marco anterior conduce a la diversificación curricular, de manera que los elementos de enseñanza se adapten a las necesidades de cada individuo. Como uno de los elementos de diversificación es el talento, es necesario diseñar prácticas docentes que lo atiendan ya que estos estudiantes demandan actividades y métodos de enseñanza diferentes a los que requieren los alumnos con dificultades de aprendizaje y otros tipos de alumnos. Al Mufti (1996) reconoce este tratamiento diversificado para conseguir la excelencia en materia de educación:

*“Esta búsqueda de la excelencia supone que se intente elaborar un programa de enseñanza más rico, en función de las distintas dotes y necesidades de todos los alumnos. Hay que permitir además que cada alumno se realice plenamente y cultive y mantenga las dotes excepcionales que posea. No menos importante es velar por que los docentes estén mejor formados en materia de pedagogía de los programas de alto nivel. De no ser así, lo que parecería estar pidiendo la sociedad a los alumnos es que intenten, no ya alcanzar la excelencia en sus estudios, sino adaptarse a una norma”.* (Al Mufti, 1996, p.230)

El interés en educación sobre la atención a los alumnos con talento queda reflejado en las numerosas publicaciones, congresos y revistas dedicadas a este tópico, así como importantes recopilaciones de estudios, como por ejemplo: *Handbook of Gifted Education* (Colangelo y Davis, 1997), *International handbook of research and*

development of giftedness and talent (Heller, Mönks y Passow, 1993), International handbook of giftedness and talent (Heller, Mönks, Sternberg y Subotnik, 2000), Handbook of intelligence (Sternberg, 2000) y The Elements of Creativity and Giftedness in Mathematics (Sriraman y Lee, 2011).

A pesar de este interés, el análisis de la literatura de investigación realizado en un foro específico del PME 2009 en el campo de la educación del talento matemático, concluye que los temas de investigación del talento y la educación del talento han sido descuidados durante las últimas tres décadas de investigación en educación matemática (Leikin, 2009b). Entre los objetivos de discusión del foro se debate sobre los tipos de contratos pedagógicos y temas del currículum matemático que pueden ser adecuados para los alumnos talentosos. Se discute el conocimiento de matemáticas abordable en la educación del talento y la forma en que el conocimiento del profesor, sus creencias y habilidades pueden ser desarrolladas para prepararlos para la enseñanza de estos alumnos (Karp y Leikin, 2009). Se destaca la importancia de que los sistemas de enseñanza se preocupen de atender al talento, mostrando la conexión entre los sistemas educativos generales y los específicos de los niños con talento que se ve influenciada por el momento histórico y político de cada país (Karp, 2009).

### **2.1.1 Definición**

Entre los investigadores de este campo existe una gran diversidad de términos para referirse a estos alumnos: superdotados, de altas capacidades, talentosos, etc., encontrándose múltiples definiciones de superdotación y sus sinónimos. Esta variedad entre los términos cercanos a la superdotación y el talento para denominar la excelencia intelectual ha atribuido significado idéntico a estados intelectuales distintos por lo que se considera necesario esclarecer el significado de términos como genialidad, precocidad, excepcional, brillante, creativo, prodigio y bien dotado (Domenech, 2006). En una revisión de diferentes estudios, Eysenck y Barrett (1993) llegan a la conclusión de que el término “gifted” (superdotado) se usa con tres significados distintos: para referirse al elevado cociente intelectual, como equivalente a alta creatividad y como sinónimo de talento específico.

## 2 Fundamentación

El concepto de superdotación está, generalmente, más asociado al carácter innato y estable en el tiempo, pero hay autores que señalan la generalidad y la diferenciación cualitativa como elementos principales para diferenciarlo del talento (Castelló, 1997). El superdotado tiene éxito en cualquier tarea mientras que la especificidad es propia del talento. En relación a las diferencias respecto a la población normal, el superdotado, al caracterizarse por un nivel elevado de varias aptitudes, puede combinarlas de un modo adecuado para obtener un resultado que va más allá de la simple suma de las habilidades, distinguiéndose no sólo cuantitativamente sino cualitativamente por la calidad de sus productos.

Las definiciones de talento se diferencian según se orienten a lo innato o genético, a modelos cognitivos, al logro, a la interacción entre lo innato y el medio ambiente y a modelos sistémicos (Villarraga, Martínez, Benavides, 2004). En las definiciones orientadas a lo innato, la inteligencia es una habilidad unitaria heredada y la alta inteligencia no tiene porqué ir acompañada de un alto rendimiento, distinguiendo entre capacidades potenciales y capacidades realizadas. En cambio en el modelo orientado al logro, los autores proponen la existencia de un determinado nivel de capacidad o talento como condición para el alto rendimiento, considerando éste como resultado observable y medible de su talento. Los modelos cognitivos hacen referencia a los procesos de pensamiento, memoria y otras habilidades como la intuición. En las definiciones orientadas a la interacción entre lo innato y el medio ambiente se añaden factores ambientales como la familia, escuela y amigos o personas. Los modelos sistémicos consideran distintos sistemas que pueden influir en el talento: la familia, el colegio, la situación económica, la orientación política, los valores y creencias dominantes culturalmente, los agencias sociales y los factores relacionados.

Nos situamos en la perspectiva de considerar que una buena práctica docente es un factor importante para que se relacionen la capacidad innata con el logro o rendimiento. Con la intención de acercar las capacidades potenciales hacia capacidades realizadas e interesados en analizar habilidades matemáticas concretas, hemos elegido el término talento matemático en el sentido que define Passow, para referirnos a los alumnos que han demostrado unas aptitudes específicas en el área de matemáticas. Referenciando el informe Marland de 1972, Passow (1993) reconoce que los niños dotados y talentosos son aquellos que:

(..) *en virtud de sus habilidades sobresalientes, son capaces de un alto rendimiento. Incluyen aquellos que han demostrado sus logros y/o habilidades potenciales en cualquiera de las siguientes áreas, sea aisladamente o combinadas: 1) habilidad intelectual general, 2) **aptitudes académicas específicas**, 3) pensamiento creativo o productivo, 4) habilidad de liderazgo, 5) artes visuales e interpretativas, 6) habilidades psicomotoras* (Passow, 1993, p. 30).

Este autor señala las matemáticas como uno de esos campos académicos. También existen diferencias en los autores sobre las características que componen la aptitud matemática. Aludiendo al informe Marland, Greenes (1981) recoge siete características:

- Formulación espontánea de problemas.
- Flexibilidad en la manipulación de datos.
- Habilidad para la organización de datos.
- Agilidad mental para el flujo de ideas (pensamiento divergente).
- Originalidad de interpretación.
- Habilidad para transferir ideas.
- Habilidad para generalizar.

En las características propuestas por Miller (1990) a tener en cuenta en la búsqueda del talento matemático, resalta la habilidad inusual para entender las ideas matemáticas y razonar matemáticamente entre otras cualidades:

- Entusiasmo inusual y una gran curiosidad sobre la información numérica.
- Rapidez para aprender, entender y aplicar las ideas matemáticas.
- Habilidad especial para trabajar de forma abstracta y ver relaciones entre objetos matemáticos.
- Gran capacidad para pensar y trabajar con problemas matemáticos de una forma flexible y creativa.
- Especial destreza para transferir los conocimientos adquiridos a nuevas situaciones matemáticas.

Los listados anteriores no difieren esencialmente de las características expuestas por Freiman (2006), según el cual, el alumno con talento matemático es aquel que pregunta

## 2 Fundamentación

espontáneamente cuestiones que van más allá de las tareas matemáticas que se le plantean, busca patrones y relaciones, construye nexos, lazos y estructuras matemáticas, localiza la clave de los problemas, produce ideas originales, valiosas y extensas, mantiene bajo control los problemas y su resolución, presta atención a los detalles, desarrolla estrategias eficientes, cambia fácilmente de una estrategia a otra, de una estructura a otra, piensa de modo crítico y persiste en la consecución de los objetivos que se propone. En la tabla 2.1, relacionamos una posible interrelación entre las características de la aptitud matemática que proponen los autores citados.

Características del talento matemático		
Greenes (1981)	Miller (1990)	Freiman (2006)
Formulación espontánea de problemas		Pregunta espontáneamente cuestiones que van más allá de las tareas matemáticas que se le plantean
Flexibilidad en la manipulación de datos	Gran capacidad para pensar y trabajar con problemas matemáticos de una forma flexible y creativa	Cambia fácilmente de una estrategia a otra, de una estructura a otra
Habilidad para la organización de datos	Rapidez para aprender, entender y aplicar las ideas matemáticas	Localiza la clave de los problemas  Busca patrones y relaciones, construye nexos, lazos y estructuras matemáticas  Mantiene bajo control los problemas y su resolución  Presta atención a los detalles
Agilidad mental para el flujo de ideas (pensamiento divergente)		Produce ideas originales, valiosas y extensas.  Desarrolla estrategias eficientes.
Originalidad de interpretación		Piensa de modo crítico
Habilidad para transferir ideas	Especial destreza para transferir los conocimientos adquiridos a nuevas situaciones matemáticas	
Habilidad para generalizar	Habilidad especial para trabajar de forma abstracta y ver relaciones entre objetos matemáticos	
	Entusiasmo inusual y una gran curiosidad sobre la información numérica	Persiste en la consecución de los objetivos que se propone

Tabla 2.1: Relación entre las características del talento matemático expuestas por Greenes (1981), Miller (1990) y Freiman (2006).

De las características anteriores se deduce que el constructo del talento matemático ha sido definido en términos de superioridad en procesos matemáticos. En una síntesis de la literatura sobre talento y pensamiento matemático, Sriraman (2005) reconoce en esta superioridad determinados procesos como la abstracción, generalización y discernimiento de estructuras matemáticas; el descubrimiento de manera independiente de principios matemáticos; el control de los datos; el pensamiento analógico y heurístico (en la toma de decisiones en situaciones de resolución de problemas); el invertir operaciones matemáticas; la visualización de los problemas o relaciones; el distinguir entre principios teóricos y empíricos y el aprecio de las pruebas matemáticas. Se buscan alumnos con talento matemático entre los estudiantes que tienen excelentes resultados académicos, entre los que destacan en las competiciones científicas regionales y entre los que sus profesores avalan alguna de las habilidades descritas anteriormente (Hernández, 2009).

Los listados de características anteriores nos permiten perfilar desde un punto de vista matemático la definición de talento de Passow, al concretar los logros y las habilidades potenciales en el área matemática. La relación entre logro y habilidad puede derivarse de la actuación del alumno al enfrentarse a una actividad matemática. La posesión de unas adecuadas actitudes cognitivas (flexibilidad en la organización de los datos, agilidad mental, habilidad para generalizar...) puede verse manifestada en la consecución de unos procesos idóneos para la realización exitosa de algunas actividades (localizar la clave de los problemas, desarrollar estrategias eficientes, buscar patrones, construir nexos, lazos y estructuras matemáticas...).

Entendemos el alumno con talento matemático como aquel que en virtud de estas habilidades sobresalientes, es capaz de un alto rendimiento en el ámbito matemático. Unas prácticas docentes adecuadas para este alumno deben ir dirigidas a que desarrolle al máximo su potencialidad y haga de ella un uso óptimo en sus actuaciones matemáticas. La elección de esta definición de talento matemático va condicionada por la intencionalidad de determinar habilidades específicas que determinan el potencial y el tipo de enseñanza que favorece la manifestación de estas habilidades.

El talento matemático se entiende como un desarrollo en mayor grado de estas características que resultan idóneas para afrontar con éxito la resolución de tareas

matemáticas. Por lo tanto, los métodos de identificación y tratamiento de los alumnos con talento deben ir encaminados a reconocer y desarrollar al máximo estas cualidades.

### **2.1.2 Identificación y evaluación**

Aunque nuestra investigación se centra en la intervención, señalamos algunos aspectos relativos a la identificación y evaluación que pueden condicionarla, ya que, como señala Rodríguez (2004), los modelos de identificación no deben perseguir únicamente la categorización de un sujeto como talento, sino saber en qué forma y en qué grado lo es, a fin de establecer medidas de actuación que permitan su desarrollo.

Los instrumentos utilizados para la evaluación e identificación se basan tanto en pruebas subjetivas como objetivas. De modo subjetivo, se utilizan informes realizados por personas del entorno del alumno: (profesores, padres, nominaciones de los compañeros, autoinformes, etc.), aunque en estas estimaciones de la inteligencia general y de las inteligencias múltiples existen diferencias culturales claras y consistentes (Neto, Furnham, Conceição, 2009). En cuanto a las pruebas objetivas hay multiplicidad de test: de inteligencia general (Stanford-Binet, Wechsler, Raven), de aptitudes específicas (BADyG), pruebas de rendimiento basadas en el currículum, de creatividad (Torrance), de personalidad (EPQ-J), etc. La utilización de test es un elemento común en los diferentes modelos teóricos de identificación del talento: en el de Renzulli (1986) se tienen en cuenta los resultados de test de CI, en el de las inteligencias múltiples de Gardner se utilizan test con actividades diarias de clase, en el modelo triárquico de Sternberg (1986) se evalúan tres subcategorías cognitivas (componencial, experiencial y contextual) y en el SMPY de Stanley de la Universidad John Hopkins se utiliza la puntuación en un test estandarizado.

Utilizar puntuaciones en los diferentes test permite establecer clasificaciones muy concretas e incluso delimitar los tipos de talento. Aunque los autores recomiendan además tener en cuenta la información de las pruebas subjetivas, Carreras, Arroyo y Valera (2006) sugieren, para la evaluación del talento en secundaria, utilizar test de inteligencia (Escala de inteligencia de Wechsler para niños “Wisc-IV”, Bateria de

Aptitudes diferenciales y generales “BADYG-M”, Aptitudes Mentales Primarias “PMA”, Factor “G”, Test de Cattell, Test de Aptitudes Diferenciales “DAT”, EFAI), de creatividad (Inteligencia creativa “CREA”, Test de pensamiento creativo de Torrance) y de personalidad (Cuestionario factorial de personalidad para adolescentes, Test proyectivos) para caracterizar los tipos de talento. En la Tabla 2.2 aparecen los test recomendados y las puntuaciones mínimas para ser considerado talento.

Precocidad intelectual	CI TOTAL > 130 Aptitudes intelectuales PC > 75 Elevada capacidad creativa PC >75
Superdotación	CI TOTAL > 130 ó PC > 75 Aptitudes intelectuales PC >75 Aptitud Creativa PC >75
Talento académico	Razonamiento lógico PC > 85 Aptitud verbal PC > 85 Memoria PC >85
Talento verbal	Aptitud verbal PC > 95
Talento matemático	Aptitud numérica PC > 95
Talento lógico	Razonamiento lógico PC > 95
Talento creativo	Aptitud creativa PC > 95
Talento artístico	Aptitud espacial PC > 85 Aptitud creativa PC > 85

Tabla 2.2: Caracterización del tipo de talento según la puntuación en test (Carreras, Arroyo, y Valera (2006).

La clasificación anterior distingue entre talentos simples y talentos complejos. Los niños que poseen talentos simples son aquellos que tienen capacidad para destacar en una única área o aptitud, como podría ser el talento matemático, el verbal, el lógico, etc., mientras que poseerá un talento complejo quien esté dotado de talento académico o de talento artístico.

Sin embargo, la utilización de un test de ámbito general corre el peligro de rechazar a alumnos que deberían ser identificados como talentos matemáticos. En el contexto matemático, la falta de mecanismos suficientes, objetivos y estandarizados, ha incitado a una proliferación de técnicas de identificación subjetivas con un marcado peso conductual por parte de los investigadores (Castro, Maz, Benavides y Segovia, 2006).

Esta diversidad se ve reflejada en diferentes proyectos para elaborar test matemáticos que capturen suficientemente el talento de una manera coherente y comprensiva.

Bicknell (2008) considera que las tareas de este test deberían medir aspectos como el pensamiento lógico; las relaciones cualitativas y espaciales; la habilidad para percibir y generalizar; la habilidad para razonar analítica, deductiva e inductivamente; la habilidad para encontrar soluciones racionales y económicas; la flexibilidad y reversibilidad de los procesos mentales; la habilidad para recordar símbolos matemáticos, relaciones y métodos de solución; la percepción matemática del mundo y la creatividad matemática. En el modelo de identificación SCAT (School and College Ability Test) que adapta el modelo CTY (Center for Talented Youth) a la realidad educativa española, se propone medir las habilidades verbales y cuantitativas básicas de los estudiantes desde los grados 3 a 12. Los ítems de la parte matemática requieren que el alumno compare la magnitud de dos cantidades matemáticas y decida, a partir de dicha comparación, si alguna es mayor que la otra, si son iguales o si no hay información suficiente para poder responder (Tourón, 2005; Tourón y Tourón, 2006).

Además de los test de inteligencia, Horowitz y O'Brien (1986) aluden a otras consideraciones entre las que se encuentran las estrategias utilizadas en la resolución de problemas. En esta línea, hay autores que señalan la resolución de problemas como la forma más útil y precisa para identificar el talento matemático (Castro, Benavides y Segovia, 2006; Niederer, Irwin, Irwin y Reilly, 2003). Los estudios de Domenech (2006) confieren a la inteligencia un papel relevante en la resolución de problemas y de ellos se deduce el importante papel de la metacognición en este asunto. Sin embargo, Koichu (2009) encuentra diferentes amenazas en la investigación del talento mediante la resolución de problemas, como que se sobreestime la creatividad de los alumnos y se interprete mal el papel de un proceso cognitivo particular. La investigación de un atributo particular de la resolución de problemas requiere observaciones sistemáticas del rendimiento de los estudiantes en situaciones que puedan ser resueltas por la efectividad del uso del atributo elegido, y no por todos los atributos. Tales situaciones son especialmente difíciles de encontrar para estudiantes excepcionalmente dotados.

En un estudio realizado con 332 alumnos de segundo curso de educación secundaria de A Coruña para analizar las características del talento matemático de una muestra representativa de alumnos, se compararon los resultados obtenidos en inteligencia general y en aptitudes específicas medidos a través de test psicométricos (BADYG) con los resultados obtenidos en la resolución de problemas propuestos en el proyecto

ESTALMAT (Estímulo del Talento Matemático) (Pasarín, Feijoo, Díaz y Rodríguez, 2004). El análisis de los problemas muestra que se manifiestan determinadas características del talento (habilidad de los sujetos para la formulación espontánea de problemas, flexibilidad en el manejo de datos, habilidad para organizarlos, capacidad de generalización, fluidez y habilidad para la transferencia de ideas y originalidad de interpretación). El estudio llega a la conclusión de que existe baja relación entre los test utilizados para evaluar la aptitud matemática y las características fundamentales del talento matemático. Este divorcio señala la necesidad de incluir problemas específicos para la evaluación más correcta de aptitud matemática (Pasarín, Feijoo, Díaz y Rodríguez, 2004).

Por lo recogido anteriormente, el problema de la identificación del talento matemático se considera aún sin resolver. Pitta-Pantazi y Christou (2009a) justifican que esto es debido principalmente a tres causas: la ausencia de una clara definición de talento matemático, la carencia de instrumentos matemáticamente apropiados para la identificación y la naturaleza heterogénea de los estudiantes con talento matemático. Consideran que es importante diferenciar entre el carácter no entrenable de la superdotación y el desarrollo del talento que emerge de sus habilidades naturales y es consecuencia de la experiencia de aprendizaje del alumno. Estos autores señalan, en cuanto a la identificación del talento matemático, que se debería medir qué fortalezas tiene la alta capacidad matemática, así como las habilidades cognitivas y los patrones de comportamiento de los alumnos con talento matemático. Tras analizar pruebas como TOMAGS Primary and Intermediate tests, SATS, TIMSS y PISA sugieren utilizar instrumentos que midan habilidades creativas y naturales tales como inteligencia general, habilidades cognitivas, visualización, razonamiento verbal y no verbal, atención, memoria y respuestas a tareas de resolución de problemas generales. En cuanto a las características de las tareas específicas de matemáticas, consideran necesaria la valoración del pensamiento lógico, las relaciones cualitativas y espaciales, la flexibilidad y reversibilidad de los procesos mentales, la percepción matemática del mundo, la creatividad matemática, las habilidades de percepción y generalización y el razonamiento analítico, deductivo e inductivo, que usa para encontrar soluciones racionales y económicas y para recordar símbolos matemáticos, relaciones y métodos de solución.

## 2 Fundamentación

En este sentido proponen cinco pasos para la identificación de alumnos con talento: recogida de información en la escuela (test de habilidades, resultados en test matemáticos, observaciones de los estudiantes y profesores, entrevistas), colaboración con padres y compañeros (entrevistas), análisis de los resultados anteriores, análisis de los resultados tras cursos de enriquecimiento matemático (mediante test matemáticos) y elaboración de informes.

Destacamos que en este modo de identificación se incluye un proceso de intervención mediante un curso de enriquecimiento matemático, por lo que no se limita a diagnosticar una serie de características evaluadas mediante test para habilidades naturales o test matemáticos específicos. Consideramos que este momento de intervención puede ser adecuado para reconocer y desarrollar al máximo estas cualidades, convirtiéndose el tratamiento en un paso estrechamente relacionado con la identificación.

### **2.1.3 Tratamiento**

Salvo que nos ubiquemos en teorías meramente innatistas, consideramos que el diseño de unas buenas prácticas docentes puede favorecer el desarrollo de las capacidades de los alumnos con talento matemático. La teoría de las inteligencias múltiples de Gardner (1995, 2001) afirma que la competencia cognitiva del hombre queda descrita de manera más completa en términos de un conjunto de habilidades, talentos o capacidades mentales, que denomina inteligencias, y que nombra como musical, cinético-corporal, lógico-matemática, lingüística, espacial, interpersonal e intrapersonal. Más adelante, Gardner (2001) se cuestiona añadir alguna inteligencia más a las siete anteriores, la moral y espiritual. Puesto que las inteligencias se manifiestan de distinta forma en los diferentes niveles evolutivos, tanto el estímulo como la evaluación deben tener lugar de manera oportuna y adecuada, aunque no existe una receta para la educación de las inteligencias múltiples.

Desde esta perspectiva, la posibilidad de evaluar y desarrollar las capacidades de los alumnos con talento, exige diseñar propuestas educativas adecuadas. Para ello es

necesario relacionarlas con los instrumentos de detección y con la valoración de las necesidades de los alumnos con altas capacidades. En un amplio estudio realizado por Arocas, Martínez y Martínez (2006), los autores detectan cuatro subgrupos de alumnos claramente diferenciados: a) los que tienen elevado rendimiento en formas de razonamiento de tipo convergente y divergente, b) los de elevado rendimiento en formas de razonamiento de tipo convergente, c) aquellos con elevado rendimiento en formas de razonamiento de tipo divergente y d) los que tienen elevado rendimiento en otro tipo de aptitudes específicas, como la verbal, matemática, artística, musical, etc.. De este último grupo afirman que las necesidades más frecuentes se han centrado en la ampliación de contenidos (en muchos casos ya se dominaban los contenidos de niveles superiores), el aumento del nivel de complejidad de las actividades que se les proponen, la introducción de actividades diferentes a las que trabaja el grupo, la utilización de recursos didácticos específicos, especialmente materiales de ampliación y programas informáticos y, en algunos casos, actividades extraescolares que sirvan para potenciar sus aptitudes concretas.

En situaciones particulares de niños que han demostrado talento en matemáticas se han señalado diferencias entre talento convergente y divergente (Giménez, 2008). Se entiende por talento matemático de pensamiento convergente al que poseen las personas que tienen un dominio del hemisferio izquierdo del cerebro, se centran más en procesos lógicos, en análisis y en detalles y cuya comunicación es verbal o escrita. En el pensamiento divergente predomina la intuición, el pensamiento visual, y parece no seguir una estructura lógica ni convencional, siendo única la forma de trabajo.

El tratamiento que los alumnos con talento matemático reciben en sus clases ordinarias no suele responder a sus necesidades, pese a que el papel del sistema educativo es suministrar apropiadas oportunidades de aprendizaje y los profesores son los agentes para conseguir este objetivo (Leikin, 2009a). Barger (2009) considera que la focalización de los profesores en la mejora de la baja competencia produce un impacto negativo para los alumnos que ya son competentes matemáticamente. Estos alumnos con frecuencia emplean su tiempo en clase en tutorizar a otros compañeros. A veces, el currículum no les supone retos ni intriga. Dejan las actividades que no despiertan su interés al sentirse forzados a estar sentados y escuchar la instrucción repetitiva o al trabajar siempre con el mismo tipo de problemas.

## 2 Fundamentación

La diversidad apuntada en los niños con talento matemático en cuanto a las necesidades tanto de modo particular como en grupo, se refleja en los diferentes tipos de intervención. Horowitz y O'Brien (1986) presentan los programas de aceleración, originados en la Universidad Johns Hopkins por Stanley y colaboradores, y los programas de enriquecimiento desarrollados por Renzulli y sus colaboradores, que se basan en tres características: la alta habilidad, el potencial creativo y el compromiso con la tarea. Blanco, Ríos y Benavides (2004) señalan además el agrupamiento, que junto con la aceleración y el enriquecimiento curricular suponen las estrategias educativas más interesantes para dar respuesta a los alumnos superdotados y con talento.

El enriquecimiento curricular consiste en añadir nuevos contenidos que no estén cubiertos en el currículo oficial o trabajar en un nivel mayor de profundidad determinados contenidos. No consiste en avanzar sobre contenidos de cursos posteriores, sino de ampliar la estructura de los temas y abordarlos con un nivel mayor de abstracción y de complejidad (promover el uso de la investigación o del pensamiento creativo y de explorar la lógica interna de éste y sus relaciones con otras áreas de conocimiento). Los alumnos más susceptibles de ser atendidos a través del enriquecimiento curricular son los que estén cursando enseñanza secundaria (Blanco, Ríos y Benavides, 2004).

Otras propuestas combinan las estrategias anteriores. Stanley, Lupkowski y Assouline (1990) basándose en la experiencia de la Universidad Johns Hopkins consideran que el enriquecimiento y la aceleración se complementan. Si bien las actividades de enriquecimiento pueden calmar el aburrimiento, el enriquecimiento solo no aporta la sustantiva, continua y jerárquica estimulación necesaria para los estudiantes que son extremadamente talentosos en matemáticas. Para estos estudiantes sugieren además una aceleración sistemática del curriculum, equilibrada con actividades apropiadas de enriquecimiento.

En el ámbito matemático, encontramos una amplia variedad de medidas adoptadas para el tratamiento de los alumnos con talento: el planteamiento de problemas no rutinarios on line (Freiman y Applebaum, 2009), grupos formados por un profesor y dos alumnos en el que el profesor es co-aprendiz y un mentor del grupo (Shy, Tsai y Chiou, 2009), autoformación y mentores (Rotigel y Bosse, 2007), elaboración de proyectos

individuales y actividades de grupo relacionadas con escenarios del mundo real (Rotigel y Fello, 2004) y programas en los que un equipo de expertos nacionales en el campo de las matemáticas, la educación matemática y la educación del talento han creado unidades para el currículum (Gavin, Casa y Adelson, 2006). Incluidos en un ámbito más general, también se desarrollan diversidad de prácticas, programas y medidas para el tratamiento de los alumnos con altas capacidades (Megía, 1999; Mudrak y Portesova, 2008; Prieto, 2010).

En relación a los ajustes metodológicos que resultan beneficiosos para la atención de los alumnos con talento, existe un amplio listado según los diferentes autores. A modo de ejemplo exponemos los expuestos por Arocas, Martínez y Martínez (2006), basados en utilizar estrategias instructivas que requieran interacción entre alumnos, como el aprendizaje cooperativo o la enseñanza tutelada, alternar la metodología expositiva con actividades de aprendizaje por descubrimiento, flexibilizar la distribución de tareas y la utilización de espacios y de materiales en la clase, entre otros.

Los ajustes anteriores se pueden ampliar con sugerencias adicionales para atender a los alumnos con talento matemático. Johnson (2000) recomienda usar gran variedad de textos y extender el enriquecimiento más allá del currículum. Sugieren usar puzzles, tareas de matemáticas recreativas, juegos de estrategia y de lógica, problemas abiertos con múltiples soluciones, problemas para justificar y discutir, o acciones como estimular la participación en competiciones matemáticas, promover grupos de contacto entre ellos y realizar actividades que les resulten útiles (no sólo abstractas), empleando material manipulativo.

Además de los aspectos curriculares, para el tratamiento de estos alumnos hay que tener en cuenta sus habilidades individuales, sus características afectivas y su personalidad, ya que la forma en que el estudiante realiza las tareas depende de que las oportunidades de aprendizaje sean las adecuadas para su desarrollo (Ferrándiz *et al.*, 2010). Para el tratamiento curricular es necesario tener en cuenta tanto las habilidades matemáticas como la actitud hacia las matemática (Gavin y Sheffield, 2010).

Sintetizando las ideas anteriores, consideramos el enriquecimiento curricular como el marco de intervención adecuado para nuestra intención de reconocer y favorecer el

desarrollo de las habilidades que poseen los alumnos con talento matemático. Como describiremos más adelante, nuestro estudio se ha centrado en el enriquecimiento realizado en sesiones del proyecto ESTALMAT Andalucía, donde los alumnos son seleccionados mediante pruebas de rendimiento matemático y entrevistas con los padres y alumnos. La elección de este grupo de alumnos que ya han superado una prueba específica de rendimiento matemático, viene justificada por la propia finalidad del proyecto para estimular el talento matemático y porque es posible llevar a cabo una metodología de enriquecimiento en grupo.

Como resaltamos en la definición de talento, unas prácticas docentes adecuadas deben ir dirigidas a que el alumno desarrolle al máximo su potencialidad y haga un uso óptimo en sus actuaciones matemáticas. El tratamiento curricular y el enfoque metodológico vienen determinados por las habilidades específicas que se desean investigar. En nuestro caso, focalizaremos este enriquecimiento en las habilidades de visualización.

### **2.2 Visualización**

El término visualización admite una riqueza de matices dependiendo del ámbito concreto en el que se usa. Para concretar la definición que utilizaremos en el marco específico de nuestro trabajo y aclarar la relación entre términos afines (visión espacial, capacidad visual, sentido espacial, etc.) justificamos previamente la intencionalidad y el contexto en el que nos ubicamos. Previamente a esta concreción, podemos utilizar una idea intuitiva de visualizar relacionada con algunas de las acepciones de la Real Academia Española (RAE, 2001):

*Representar mediante imágenes ópticas fenómenos de otro carácter.*

*Formar en la mente una imagen visual de un concepto abstracto.*

*Imaginar con rasgos visibles algo que no se tiene a la vista.*

Son muchos los autores que han destacado la importancia del uso de la visualización en las tareas matemáticas, aunque no está consensuado claramente el papel que desempeña

como instrumento de razonamiento matemático y elemento de enseñanza. De un modo general, se reconoce la dificultad que conlleva la enseñanza y aprendizaje de técnicas visualizadoras y su utilización minoritaria respecto a otras técnicas más habituales en las clases de matemáticas. La expresión “yo no tengo visión espacial” reconoce, sin ningún pudor, una carencia que creemos se mantendrá constante a lo largo de nuestra vida y que, aunque reconocemos que nos limitará para algunas situaciones cotidianas, no consideramos imprescindible desarrollar porque puede ser cubierta por otras habilidades. Aceptar que la visualización desempeña un papel importante en la labor matemática, y que se pueden diseñar prácticas docentes que ayuden a desarrollarla, justificaría su inclusión en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En la educación matemática se ha subrayado la necesidad de incrementar el uso de elementos visuales como parte de la enseñanza (Gutiérrez, 1996). Arcavi (2003) señala el valor que tienen los diagramas y otros instrumentos visuales para la enseñanza de las matemáticas y como heurísticos para los descubrimientos matemáticos, y destaca la importancia de la visualización en el aprendizaje y hacer matemático, ya que la visualización está siendo reconocida como una componente llave del razonamiento, la resolución de problemas y las demostraciones. A pesar de la obvia importancia de las imágenes visuales en las actividades cognitivas humanas, Arcavi (2003) reconoce el papel secundario que la representación visual parece desempeñar en la teoría y práctica de los matemáticos. Para explicar estas aparentes contradicciones sobre la importancia y el escaso uso que se hace de la visualización en la enseñanza, recuerda las dificultades del uso de la visualización en las tareas matemáticas señaladas por Eisenberg y Dreyfus (1991), que él clasifica en culturales, cognitivas y sociológicas.

Las dificultades culturales están relacionadas con lo que la comunidad matemática considera legítimo y aceptable como demostración matemática entre lo que no se incluye el uso de la visualización. Esta devaluación de la visualización deja poco espacio en las clases para incorporar y valorar la visualización (Presmeg, 1986a). De Guzmán (1996) coincide en este obstáculo de la visualización ya que no está totalmente reconocido el papel que desempeña en las demostraciones (“*Queremos que nos presente una demostración matemática*”). Al profundizar en ello se distinguen tres formas distintas de introducir la visualización en las demostraciones: incorporar representaciones visuales como complementos de la prueba, introducirlas como partes

esenciales de la prueba y finalmente, hacer demostraciones visuales en sí mismas. Hay autores, como Vinner (1989), que matizan la creencia de que las pruebas visuales son ilegales (“*ver no es considerado como probar*”), afirmando que aunque no se consideren pruebas matemáticas, los razonamientos visuales son siempre iluminadores y resultan indispensables en un curso de cálculo y álgebra, donde las interpretaciones gráficas tienen una importancia crucial para comprender los contenidos. Aunque está universalmente aceptado su papel como ayuda importante para el aprendizaje matemático, no hay consenso sobre el papel potencial de la visualización en las matemáticas y en la educación matemática y, en particular, sobre su papel en las demostraciones (Hanna y Sidoli, 2007).

Las dificultades cognitivas se deben a que la demanda cognitiva en la visualización es alta (Arcavi, 2003). Razonar con conceptos en escenarios visuales puede implicar que no siempre haya rutinas seguras en las que confiar (como ocurre en el caso de las aproximaciones formales simbólicas). Consciente o inconscientemente, estas situaciones pueden ser rechazadas por los alumnos. Pero una dificultad cognitiva importante para la comprensión matemática es buscar y usar traslaciones flexibles y apropiadas para relacionar las representaciones analíticas y visuales de la misma situación. Sin embargo, las formas y las representaciones visuales mejoran la comprensión de conceptos, procedimientos y fenómenos en las diferentes áreas de las matemáticas y las ciencias y son ingredientes fundamentales para construir una teoría (Hershkowitz, Parzysz, y Van Dormolen, 1996).

En cuanto a las dificultades sociológicas, Arcavi (2003) señala que los profesores enseñan lo aprendido, por lo que muchos profesores pueden sentir que las representaciones analíticas serán pedagógicamente más apropiadas y eficientes. Esta reticencia a usar la visualización puede venir de la forma en la que las matemáticas son presentadas y comunicadas por la mayoría de los profesores y en las investigaciones matemáticas. Eisenber y Dreyfus (1989), aludiendo al estudio de Clements sobre Terence Tao en el que mostró que un alumno con talento no tenía tendencia a entender los conceptos de forma visual, se preguntan si los conceptos podrían ser introducidos primero de una manera visual y para qué tipo de estudiantes podría hacerse. Vinner (1989) expone dos razones para explicar el sesgo de los estudiantes hacia el álgebra o que eviten técnicas visuales:

- La creencia de que la prueba algebraica es más matemática y más general que la prueba visual y por lo tanto en un examen final es preferible estar en el lado seguro, pues permite mayor claridad, simplicidad e inmediatez.
- La preparación para el examen es con frecuencia por aprendizaje de rutinas. Se renuncia al aprendizaje por comprensión y se prefiere memorizar fórmulas y técnicas algebraicas para obtener éxito en los test.

Las dificultades anteriores parecen justificar la poca presencia de la visualización en las clases de matemáticas. Para contrarrestar este déficit, es necesario subrayar el papel que desempeña la visualización en la labor matemática para motivar un mayor grado de utilización por parte de los profesores y alumnos. De Guzmán (1996) señala que al ser nuestra percepción prioritariamente visual no es de extrañar que el apoyo en lo visual esté presente en las tareas de matematización. La visualización aparece de modo natural tanto en el pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos. Para describir el papel fundamental de la visualización en el proceso de matematización de la realidad, distingue diferentes formas de visualización según la relación que se establezca entre el objeto que trabajamos y las representaciones que se utilizan: isomórfica, homeomórfica, analógica y diagramática. En este proceso, los objetos mentales y sus relaciones, en los aspectos que nos interesan, son meramente simbolizados de manera que los diagramas así obtenidos ayudan en los procesos de pensamiento alrededor de ellos. También Presmeg (1992) defiende como componente central de un modelo de razonamiento matemático la imaginería de patrones y otro tipo de imágenes (prototípicas, metáforas y metonimias).

El interés de la visualización en matemáticas puede localizarse en varios de los procesos de matematización. El establecimiento de relaciones entre diversas formas de representar la situación matemática (algebraica y gráfica o pictórica) favorece la matematización al traducir los problemas desde el mundo real al matemático, proceso que se entiende por matematización horizontal (Guillen 2010; Treffers, 1987). Una vez traducido el problema a una expresión matemática, se puede continuar procesando dentro del sistema matemático, proceso que se entiende como matematización vertical y en el que la visualización puede proporcionar diferentes representaciones. Así pues, la matematización horizontal es la fase en la que interviene la aproximación empírica, la observación, la experimentación, el razonamiento inductivo y que se concreta en el

momento en que se ataca un problema. La vertical, agrupa las actividades que llevan a la solución del problema e incluye la resolución, generalización y formalización o revisión (figura 2.1).

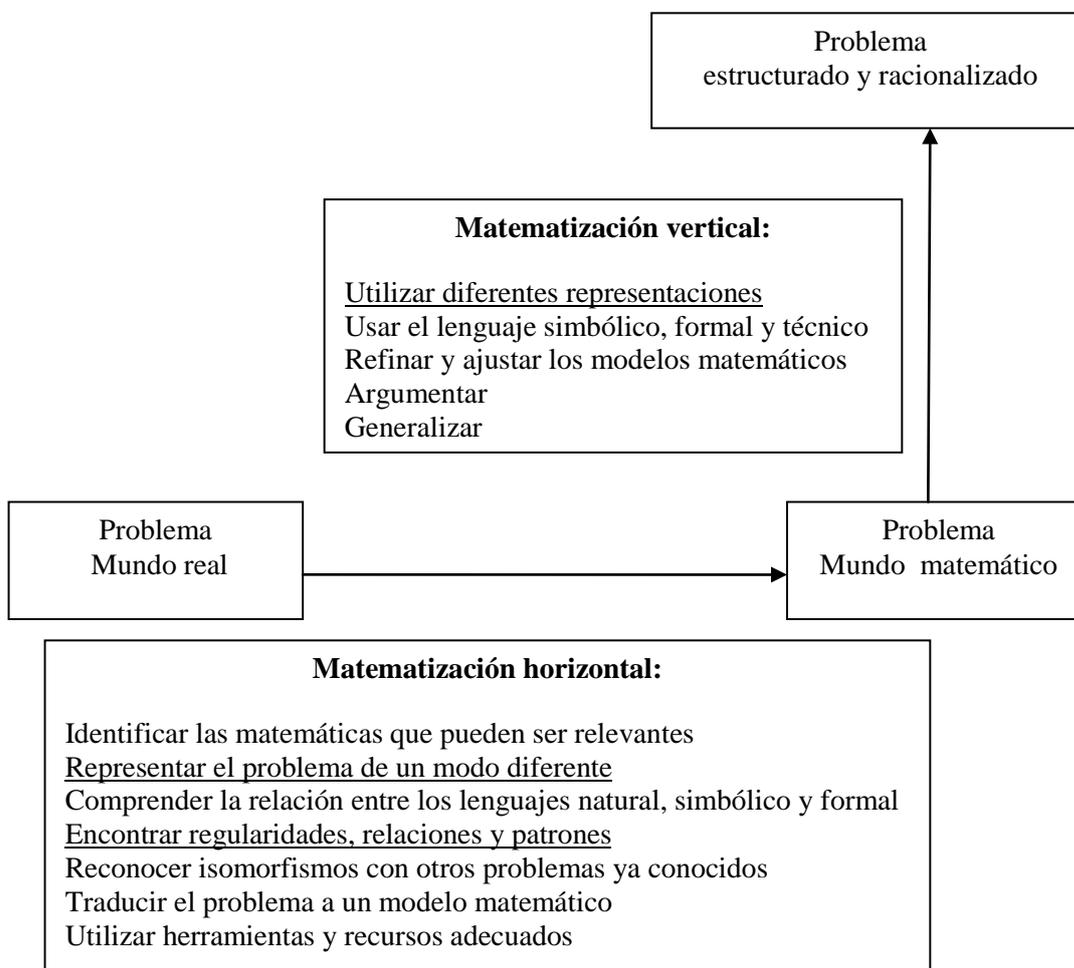


Figura 2.1: Actividades que sustentan la matemización horizontal y vertical (INECSE, 2005)

Paralelamente a la importancia de la visualización en las matemáticas, se habla de su importancia en la resolución de tareas matemáticas en la escuela. Wheatley (1998) aporta estudios que relacionan el uso que los estudiantes hacen de las imágenes con el éxito en la resolución de ciertas tareas matemáticas. Este autor afirma que trabajar con imágenes facilita de manera esencial el razonamiento numérico y geométrico, es una actividad mental que va más allá de obtener buenos resultados en la puntuación en un test y supone realizar tres procesos, la construcción, la representación y la transformación de la imagen, cuya naturaleza depende de la intención y la situación bajo

la que se construye. Los roles identificados revelan que la visualización fomenta el pensamiento crítico, lo que lleva a una mejor comprensión de los datos manejados (Makina, 2010).

A pesar de los estudios de Dreyfus y Eisenberg (1986) que afirmaban que la habilidad para visualizar podría no ser crucial como requisito para el éxito en matemáticas superiores, y de los estudios de Lean y Clement (1981) que establecían una tendencia de los estudiantes a procesar la información matemática mediante formas de razonamiento lógico-verbales, Vinner (1989) justifica que no hay investigaciones que evidencien que el pensamiento visual no es necesario para el éxito en matemáticas superiores. Que el modo algebraico sea más común entre aquellos que tienen éxito en matemáticas, cuando resuelven problemas rutinarios (o casi rutinarios), puede ser consecuencia de que el éxito es medido por problemas habituales rutinarios que no requieren visualización. Esta explicación es consecuente con los trabajos de Dreyfus y Eisenberg, ya que parten de que es mínima la demanda para que los alumnos apliquen activamente sus habilidades espaciales. También lo es con las observaciones de Lean y Clements relativas a la tendencia hacia el rendimiento superior en test matemáticos de los alumnos que prefieren modos lógico-verbales. Esta tendencia de procesar la información por métodos algebraicos podría deberse a una habilidad desarrollada para abstraerse y, por lo tanto, no requerir la información a través de imágenes visuales. En relación con el estudio de matemáticas de nivel superior, Clements y Battista (1992) consideran esenciales los aspectos relacionados con la visualización para crear matemáticas de alto nivel, aludiendo a Hadamard y Einstein, y consideran que la visualización se puede mejorar por entrenamiento. Si el pensamiento visual es una parte importante en el pensamiento matemático superior, se debería enseñar y medir (Vinner, 1989).

El interés que ha despertado la visualización en la educación matemática se ve reflejado en las abundantes publicaciones y reuniones científicas dedicadas a este tópico. Sirvan de ejemplo las diferentes secciones (*Imagery and Visualization*) y grupos de trabajo dedicados a los visualización en los PME (Working Group on Representations and Mathematical Visualization, Visualization in problem solving, Visualization Discussion Group, Geometrical and Spatial Thinking, etc.) y algunas importantes revisiones de investigaciones sobre visualización: *Spatial Abilities and Mathematics Education: A*

*Review* (Bishop, 1980), *Review of Research on visualization in mathematics education* (Bishop, 1989), *Visualization in teaching and learning mathematics* (Zimmermann y Cunningham, 1991), *Research on visualization in learning and teaching mathematics* (Presmeg, 2006), *Geometry and spatial reasoning* (Clements y Battista, 1992), *Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework* (Gutiérrez, 1996) y *The development of geometric and spatial thinking* (Battista, 2007), *Toward a Visually-Oriented School Mathematics Curriculum* (Rivera, 2011) entre otras.

El aumento del interés por los estudios de visualización ha sido recogido por Phillips, Norris y Macnab (2010). En una revisión de 250 artículos, libros y capítulos, encuentran 28 definiciones explícitas de visualización. Destacamos que sólo localizaron seis estudios que examinaron el uso que hacen los profesores en sus clases de la visualización (Figura 2.2).

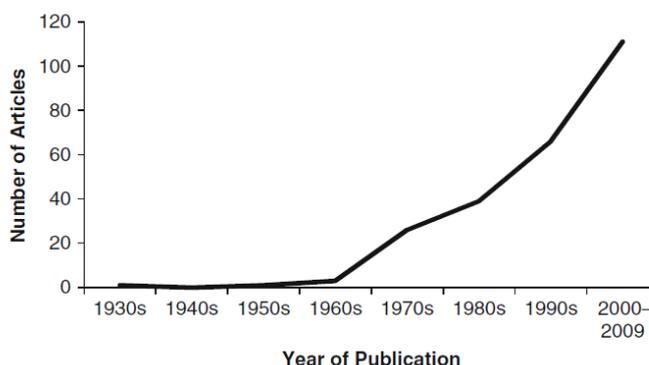


Figura 2.2: Número de artículos publicados por año acerca de visualización (Phillips, Norris y Macnab, 2010).

Según lo descrito, podemos encontrar una situación algo contradictoria en la relación entre visualización y enseñanza. Por un lado, se aprecia el interés que la Educación Matemática ha mostrado por los aspectos visualizadores, asignándole un papel importante en determinados procesos de matematización. Pero por otro lado, se reconocen las dificultades que existen para que la visualización esté más presente en los procesos de enseñanza y aprendizaje. El uso de la visualización por parte de los estudiantes puede estar condicionado por el tipo de enseñanza que están recibiendo. Si bien la visualización es importante en los dos procesos de matematización en cualquier campo, se hace más evidente en la geometría. Para contextualizar los aspectos

anteriores, nos ubicaremos en el ámbito geométrico, reconociéndolo como un entorno adecuado para observar la importancia y el papel de la enseñanza en el uso de la visualización de los estudiantes.

### 2.2.1 Visualización y geometría

La geometría puede ser considerada como el contenido matemático en el que tiene más razón de ser la visualización en matemáticas (Gutiérrez, 1996, 1998a). En este sentido, son muchos los autores que señalan el entorno geométrico como el más adecuado para poner de manifiesto la relación entre el desarrollo de aspectos visualizadores y el aprendizaje de contenidos matemáticos. En una recopilación de las investigaciones en el campo geométrico, Battista (2007) las diferencia entre fenomenológicas (estudian cómo los alumnos construyen significados de conceptos geométricos) y cognitivas (analizan qué procesos cognitivos son necesarios para la construcción del significado geométrico). Esta clasificación está relacionada con la de Bishop (1983), que en una revisión de investigaciones sobre espacio y geometría, las distingue según estudien conceptos y significados o habilidades y procedimientos.

En el contexto geométrico, la relación introducida por Bishop (1983) entre conceptos y habilidades está presente en la intencionalidad de desarrollar el sentido espacial que recoge el Estándar número 7, Geometría y sentido espacial:

*“Todos los estudiantes desarrollarán el sentido espacial y una habilidad para usar las propiedades geométricas y las relaciones para resolver problemas en matemáticas y en la vida diaria (...). El sentido espacial es un sentido intuitivo para la forma y el espacio. Implica los conceptos de geometría tradicional, incluyendo una habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas. También supone otras formas, menos formales, de mirar el espacio de dos o tres dimensiones, tales como el doblado de papel, transformaciones, teselaciones y proyecciones(...). La geometría está presente en el mundo que nos rodea: arte, naturaleza y las cosas que hacemos (...). Los estudiantes de geometría pueden aplicar su sentido espacial y conocimiento de*

*las propiedades de las formas y del espacio en el mundo real*” (New Jersey Mathematics Coalition, 1996, p. 209).

Aunque hay variedad de terminología y poco consenso en la definición del concepto sentido espacial (Bennie y Smit, 1999), Smit lo considera como el tipo de interacción requerida para interactuar con el espacio y Human (1998) identifica las siguientes formas de interacción: observar objetos espaciales y sus propiedades (cambios de posición, forma, tamaño, relación entre objetos), generar información que no puede ser directamente observada (determinar distancias, elevaciones, áreas y volúmenes), representar objetos espaciales en dos dimensiones, interpretar representaciones bidimensionales de objetos espaciales. Sin esta habilidad espacial sería difícil existir en el mundo porque no se podría comunicar acerca de la posición y relación entre los objetos, dar y recibir direcciones e imaginar cambios que toman lugar en la posición o el tipo de formas. Estos autores señalan que el sentido espacial no puede ser enseñado, pero debe ser desarrollado a lo largo de un periodo de tiempo. Por tanto, desarrollar el sentido espacial es un objetivo básico de la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Dos han sido los modos clásicos para abordar el aprendizaje y enseñanza de la geometría: ver la geometría como la ciencia del espacio y verla como una estructura lógica, donde la geometría es el ambiente en el que el aprendiz puede conseguir un soporte para la estructura matemática (Hershkowitz, 1990). En la primera dimensión, su intención es desarrollar un cuerpo de conocimientos sobre los elementos que ayuden a situarse en el espacio (figuras y formas, sus relaciones, etc.). La segunda pone el énfasis en que estos elementos son completamente abstractos (aunque tengan unos referentes concretos en que los sugieren), por lo que el razonamiento con ellos se puede hacer de manera formal, atendiendo a leyes de la lógica tal como hizo Euclides en sus Elementos, y cuyo modelo se ha empleado ampliamente en la enseñanza. La geometría ha sido considerada durante mucho tiempo como el lugar del currículo escolar donde los estudiantes aprenden a razonar y a ver la estructura axiomática de las matemáticas.

Este doble enfoque relaciona estrechamente la enseñanza de la geometría con el desarrollo del sentido espacial. El Estándar anterior recoge la limitación de focalizar la instrucción geométrica en la categorización de formas y sugiere desarrollar el sentido espacial exponiendo a los estudiantes a un amplio rango de actividades geométricas para

gradualmente desarrollar la habilidad para hacer inferencias y deducciones lógicas basadas en las relaciones geométricas y el uso de la intuición espacial para desarrollar más habilidades genéricas para resolver problemas. Del Grande (1990) subraya la estrecha relación entre sentido espacial y geometría y recomienda usar materiales geométricos para mejorarlo.

Para reconocer el papel que ocupa la visualización en el desarrollo del sentido espacial, matizamos las dos componentes de la enseñanza de la geometría:

- *Transmitir conceptos y procedimientos geométricos culturalmente aceptados en la comunidad matemática:* enseñar conceptos y procedimientos de la geometría tradicional.
- *Desarrollar destrezas que faciliten al sujeto ubicarse en su medio físico:* desarrollar la habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas con una intención funcional.

Esta separación nos permite hacer una primera clarificación de la terminología empleada. Términos como *razonamiento espacial* o *pensamiento espacial* podrán considerarse matizaciones del sentido espacial, y otros términos como *habilidad espacial*, *capacidad espacial*, *visualización*, *visión espacial*, *percepción espacial* y *orientación* entran a formar parte de la descripción de la habilidad a la que hace referencia la segunda componente. Aunque la visualización está especialmente presente en la segunda, podemos considerarla necesaria en ambas componentes.

Podemos ilustrar la relación entre visualización y los conceptos de geometría tradicional con las investigaciones de Fischben (1993) sobre los conceptos figurales. Una figura geométrica puede ser descrita como poseedora de propiedades intrínsecamente conceptuales, pero no es un mero concepto. Es una imagen, una imagen visual. Posee una propiedad que los conceptos usuales no poseen porque incluye la representación mental de propiedad espacial. Los objetos de investigación y manipulación en el razonamiento geométrico son entidades mentales, llamados conceptos figurales, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición y tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales como idealidad, abstracción, generalización y perfección. Fischben (1993) considera tres categorías de entidades mentales cuando se refiere a

figuras geométricas: la definición, la imagen (basada en la experiencia perceptiva-sensorial, como la imagen de un dibujo) y el concepto figural.

El concepto figural es una realidad mental, es el constructo manejado por el razonamiento matemático en el dominio de la geometría. Está desprovisto de cualquier propiedad concreta-sensorial (como color, peso, densidad, etc.) pero exhibe propiedades figurales. Este constructo figural es controlado y manipulado por reglas y procedimientos lógicos en el dominio de un cierto sistema axiomático. La dificultad para aceptar la existencia de este tercer tipo de entidades mentales está determinada por el hecho de que estamos directamente informados sólo de la representación mental (incluyendo varias propiedades sensoriales como color) y el concepto correspondiente. Necesitamos un esfuerzo intelectual a fin de entender que las operaciones lógico matemáticas manipulan sólo una versión purificada de la imagen, el contenido espacial-figural de la imagen. El significado genuino de la palabra círculo en geometría, tal como es manipulado por nuestro proceso de razonamiento, no es reducible a una definición puramente formal. Es una imagen enteramente controlada por una definición. Sin este tipo de imágenes espaciales, la geometría no existiría como una rama de las matemáticas. Hershkowitz (1989) también señala la estrecha relación entre visualización y aprendizaje geométrico enfatizando el papel de la visualización para delimitar la imagen de un concepto.

Además de los conceptos, la geometría tradicional va relacionada con la estructura axiomática y el razonamiento formal. Los estudiantes continúan teniendo dificultades en las pruebas formales, siendo deficiente su habilidad para establecer verdades matemáticas (Battista, 2007). Una vez que los objetos han sido abstraídos, se convierten en objetos mentales que pueden ser operados mentalmente (comparados, descompuestos, conectados). Para realizar esta abstracción Battista (2007) señala tres tipos de estructuración: la espacial, la geométrica y la lógica (correspondientes, respectivamente, a los niveles de Van Hiele 1, 2 y 3). También Yerushalmy (1993) distingue tres procesos principales en la generalización geométrica: la formación de muestras de ejemplo para servir como base para conjeturas, la manipulación de las muestras y el análisis de ideas para formar ideas más generales. En estos procesos el papel de la visualización es crucial. La disposición humana incluye propensión

neurológica a percibir las formas espaciales y por lo tanto la percepción visual es potencialmente un camino para comprender los teoremas geométricos (Rodd, 2010).

No obstante, donde la visualización juega un papel principal en el desarrollo del sentido espacial es *en la habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas*. Como detallaremos en el apartado siguiente hay autores que más que considerar la visualización como una componente de esta habilidad, consideran esta habilidad como un sinónimo, con matices, de la visualización.

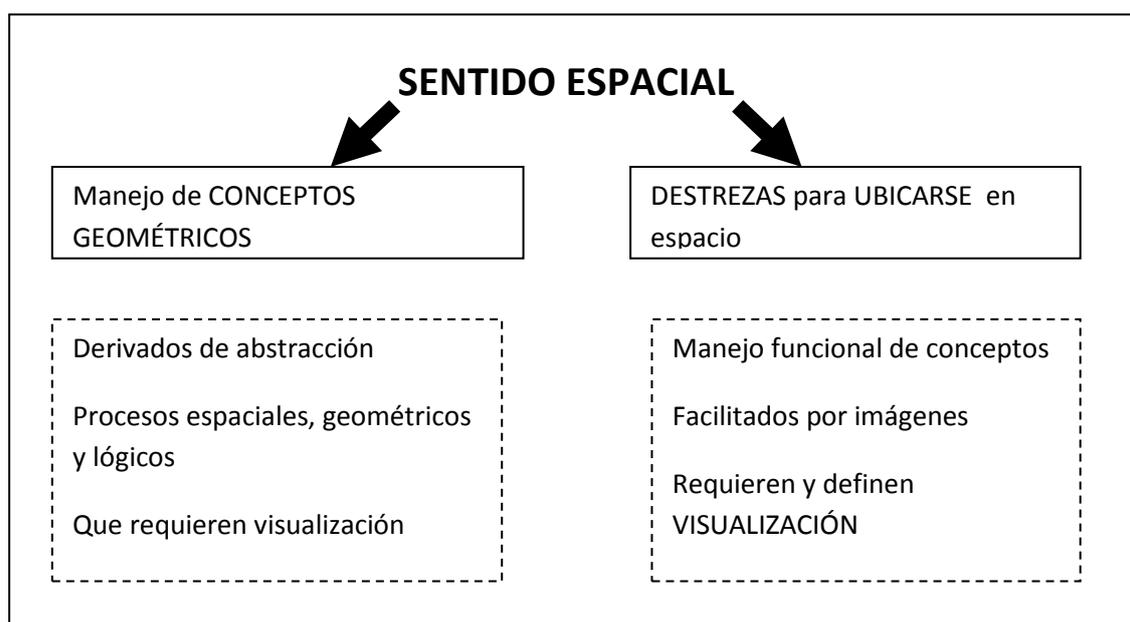


Figura 2.3: Esquema del Sentido espacial.

En relación con la labor docente, la interacción entre geometría y visualización viene reflejada en los documentos que regulan el currículum y encontramos referencias explícitas a elementos visuales en el estándar de Geometría (NCTM, 2000):

*“los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:*

- *Analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas.*
- *Localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.*

## 2 Fundamentación

- *Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas.*
- *Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas” (NCTM, 2000, p. 43).*

La primera y tercera capacidades (analizar figuras y formas geométricas; aplicar transformaciones) podemos considerarlas relacionadas con la creación de conceptos de geometría, mientras que las dos restantes (ubicar y orientar; visualizar) están encaminadas a destrezas para relacionarse con el medio. Se persigue una intencionalidad funcional que concuerda con la tendencia actual de considerar que la enseñanza debe ir encaminada a que el alumno adquiera competencias (saber, saber hacer y aplicar a situaciones de la vida cotidiana) para desenvolverse con mayor soltura en el medio. El interés de este aporte es que sintetiza las ideas expuestas anteriormente sobre la enseñanza de la geometría, y que nos lleva a caracterizar el constructo sentido espacial.

Además de consideraciones históricas sobre el papel educativo de la geometría, el sentido espacial (entendido como la intención educativa de la geometría, y por tanto como la competencia geométrica), tiene diversos aspectos según la componente de la competencia matemática con la que se relacione. Al tomar en consideración las competencias matemáticas PISA 2003 (INECSE, 2005), podemos ver que su relación es evidente, como se muestra en la tabla 2.3.

Competencia (PISA, 2003)	Sentido espacial
1) Pensar y razonar	Identificar figuras por sus características, por su definición, definir, etc.
2) Argumentar y justificar	Razonamiento geométrico, empleo de la geometría por su estructura lógica
3) Comunicar	Definir, convertir elementos geométricos en frases, identificar definiciones
4) Modelizar	Caracterizar los elementos geométricos como abstracciones, como modelos ideales de la realidad, crear modelos nuevos a partir de los conocidos
5) Plantear y resolver problemas	
6) Representar	Conocer representaciones, relacionarlas entre sí, producir nuevas representaciones
7) Utilizar lenguaje simbólico	Identificación de los objetos por sus nombres, empleo del lenguaje geométrico
8) Emplear herramientas tecnológicas	Manejar programas dinámicos, dibujar figuras

Tabla 2.3: Relación entre Sentido espacial y competencias PISA.

En el contexto del sistema educativo español, encontramos alusiones a la relación entre elementos relativos a la visualización y geometría, tanto en la normativa legal de Primaria:

*“El aprendizaje de la geometría requiere pensar y hacer, y debe ofrecer continuas oportunidades para clasificar de acuerdo a criterios libremente elegidos, construir, dibujar, modelizar, medir, desarrollando la capacidad para visualizar relaciones geométricas “ (BOE, 2006).*

Como de secundaria:

*“...Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación”.* (BOE, 2007).

Más concretamente, en la normativa educativa en Andalucía, se dedica uno de sus núcleos temáticos al estudio de las formas y figuras y sus propiedades y se cita explícitamente la relación entre la geometría y la visión espacial:

*“La geometría se centra sobre todo en la clasificación, descripción y análisis de relaciones y propiedades de las figuras en el plano y en el espacio. El aprendizaje de la geometría debe ofrecer continuas oportunidades para conecta al alumnado con su entorno y para construir, dibujar, hacer modelos, medir o clasificar de acuerdo con criterios previamente elegidos.*

*El estudio de la geometría permitirá mejorar la visión espacial del alumnado y desarrollar capacidades que faciliten una actitud positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas”* (BOJA, 2007).

Numerosos autores han destacado la visualización como el núcleo de gran parte de la dificultad de aprendizaje de la geometría y se considera un tema que ha despertado gran interés en los investigadores en Educación Matemática desde hace más de 100 años, no sólo desde la perspectiva de la enseñanza de la geometría, sino también desde la perspectiva de la enseñanza de las matemáticas y del aprendizaje en general (Guillén, 2010). Investigaciones desarrolladas en las décadas de los 70 a los 90 (p.e. Hoffer, 1977; McGee, 1979 y Del Grande, 1990) siguen siendo referentes importantes en los estudios realizados en el siglo XXI, que han centrado la atención en la visualización y/o representación en el contexto de la geometría.

Sin embargo la relación entre geometría y visualización no está suficientemente reflejada en determinados foros. En la revisión que realiza Fernández (2008) de los trabajos presentados en el ICME 11 que, en su totalidad o en una parte de los mismos, abordan cuestiones relacionadas con la Geometría, sólo encontramos el artículo de Xiaomei (2008) que tenga relación con el desarrollo de la habilidad espacial, mientras que otros trabajos abordan temas relativos a imaginaria, inscripciones y signos (Presmeg, 2008b), representaciones (Agathangelou, Papakosta y Gagatsis 2008; Hitt, González-Marín y Morasse, 2008) y prototipos (Acuña y Larios, 2008).

Según lo descrito, desarrollar la visualización del alumno es un objetivo de la enseñanza, por lo que se entiende como una habilidad que se puede desarrollar (Del Grande, 1990; Gardner, 2001; Gutiérrez, 2006). No podemos considerarla simplemente como una capacidad innata que esperamos que se desarrolle de manera espontánea, sino que es necesario modelarla estimulando que los alumnos generen representaciones

visuales, las manipulen y las transformen para poder razonar y argumentar sobre ellas. Tal como muestran los autores (Clements y Battista, 1992; Guillén, 2010; Gutiérrez, 1996; Presmeg, 1992; Treffers, 1987; Wheatley, 1998; entre otros), la visualización es una componente fundamental para el razonamiento, especialmente para el geométrico, y percibimos en los investigadores que es necesario diseñar acciones docentes que la desarrollen.

Entendemos que la intención educativa de la enseñanza de la geometría es desarrollar el sentido espacial del alumno, entendido este como elemento de competencia matemática. Pero, además del conocimiento de conceptos geométricos, el sentido espacial implica una *habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas*. Conocimiento y habilidades que no son independientes, pues hay interrelación entre el aprendizaje de contenidos y elementos de razonamiento geométrico y el uso de las habilidades de visualización necesarias en las tareas de resolución de problemas geométricos. Aparece una doble implicación que podemos leer en los dos sentidos. Por un lado, la utilización de destrezas visuales puede favorecer el aprendizaje de conceptos y elementos geométricos. En sentido contrario, es esperable que una adecuada selección de actividades geométricas y prácticas docentes favorezca el uso de las habilidades de visualización.

Parece justificada la necesidad de diseñar prácticas docentes, en particular en el área de la geometría, para facilitar que los estudiantes desarrollen sus habilidades visuales. Con esta finalidad es necesario clarificar toda la terminología relativa a la investigación que pretendemos diseñar y determinar el marco teórico que la contextualiza.

### **2.2.2 Definiciones: Marco teórico**

Una dificultad añadida al estudio de la visualización es la riqueza de terminología utilizada por los autores en los diferentes campos de investigación en los que aparece. Fuera del ámbito matemático encontramos diferentes marcos teóricos sobre visualización y aunque tienen puntos en común, no forman parte de un solo cuerpo. Gutiérrez (1996) establece un marco teórico en el que se integran estas piezas,

## 2 Fundamentación

señalando la riqueza de terminología relacionada con la visualización: razonamiento visual, imaginación, pensamiento espacial, imaginiería<sup>1</sup>, imágenes mentales, imágenes visuales, imágenes espaciales, etc., señalando que un mismo término tiene diferentes significados dependiendo de los autores. Esto es un reflejo de la diversidad de áreas en las que la visualización es considerada relevante. En psicología, hace tiempo que se considera importante la visualización y se han desarrollado marcos teóricos para su trabajo y test individuales para analizarla. La visualización es importante en muchísimas otras actividades, aunque cada especialidad está interesada en ciertas habilidades específicas y ambientes, lo que ha generado que se hayan desarrollado diferentes significados para las mismas palabras.

Desde el punto de vista psicológico, la visualización envuelve pensamiento figurativo (patrones estáticos y figuras) y operacional (patrones en movimiento de objetos y manipulación de objetos visuales). Desde el punto de vista matemático, la visualización supone la habilidad para interpretar y comprender la información proveniente de figuras usadas en el trabajo geométrico y la habilidad para contextualizar y trasladar las relaciones abstractas y la información no figural en términos visuales (Ben-Chaim y Lappan, 1989).

Los significados de visualización dados por los autores de otros ámbitos, especialmente el psicológico, no son compartidos por los matemáticos, profesores o educadores matemáticos que buscan un significado más simple y general (Gutiérrez, 1996). El interés en matemáticas viene motivado porque el uso de diagramas, dibujos, figuras, etc., es parte de la actividad diaria en las clases y la educación matemática considera que las imágenes mentales y las representaciones externas tienden a interactuar para conseguir una mejor comprensión y resolver problemas. No siempre las imágenes en

---

<sup>1</sup> Julio Sancho en la traducción que hace de la conferencia leída por Norma Presmeg en Tarragona el 29 de Enero de 1998 (Presmeg, 1999) con motivo del proyecto TIEM98, define en castellano la palabra imaginiería, traducción literal de la palabra inglesa imagery, que tiene una acepción distinta al término utilizado en el texto. Aquí usamos el término imaginiería para designar “al conjunto de imágenes mentales, no sólo de varias modalidades como visuales, auditivas táctiles y cinestésicas, sino también de varios tipos dentro de cada modalidad”

matemáticas tienen una base pictórica, ya que pueden estar basadas en diagramas, otras formas de representación visual de los conceptos, información simbólica, etc.

En este contexto tan amplio, los investigadores tienen dificultades para ponerse de acuerdo en los conceptos básicos: capacidad espacial, visualización, orientación espacial, relaciones espaciales, pensamiento espacial, etc. (Lohman, Pellegrino, Alderton y Regian, 1987). Para ilustrar esta diversidad de criterios, observemos las diferencias entre visualización y orientación (Torres y Climent, 2010). En Carroll (1993) se analizan factores relacionados con la capacidad espacial sin que en los correspondientes a la percepción visual figure la orientación espacial. Además se señala que las pruebas o test no lo distinguen de la visualización o de las relaciones espaciales. Sin embargo otros estudios (Guay y Mc Daniel, 1977; Tartre, 1990) diferencian teóricamente los dos factores. En el marco teórico elegido, los aspectos relativos a orientación irán ubicados entre las diferentes habilidades de visualización.

El marco teórico presentado por Gutiérrez en la conferencia plenaria del PME 19 (Gutiérrez, 1996) unifica muchos de los desarrollos teóricos elaborados hasta el momento, como los realizados por Bishop, Kosslyn, Krutestkii, Presmeg y otros. Presmeg (2006), en una completa revisión de las investigaciones en los PME sobre visualización y aprendizaje matemático, resalta la importancia del marco teórico establecido por Gutiérrez y encuentra únicamente un marco teórico posterior (Owens, 1999) que es específico sobre el uso de las imágenes.

El modelo presentado por Gutiérrez (1996) unifica muchos de los desarrollos teóricos elaborados hasta el momento y consigue establecer un marco teórico integrador idóneo para definir la visualización espacial en un entorno geométrico. Utilizando la aproximación que hace Gutiérrez (2006), entendemos la visualización como *el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes de geometría puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos* (Figura 2.4).

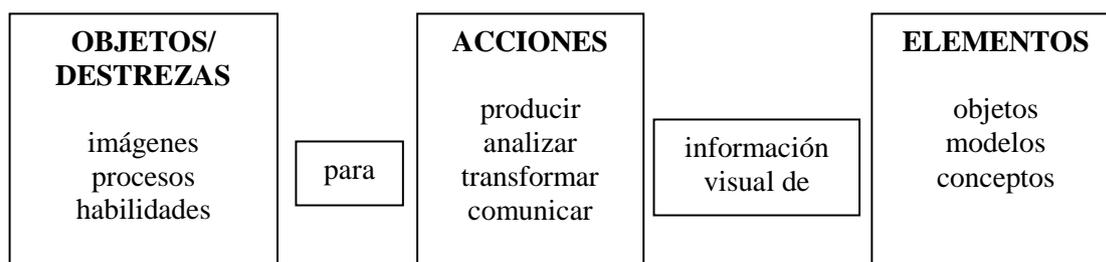


Figura 2.4: Definición de visualización de Gutiérrez (1996).

La distinción entre procesos, imágenes y habilidades también aparece en la definición utilizada por Arcavi (2003) parafraseando las definiciones de Zimmermann y Cunningham (1991) y Hershkowitz *et al.* (1989): la visualización es la habilidad, el proceso y el producto de la creación, la interpretación, el uso y reflexión acerca de dibujos, imágenes, diagramas en nuestra mente, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de describir y comunicar información, pensando y desarrollando previamente ideas desconocidas y avanzando entendimiento.

Por tanto, consideramos la visualización integrada por cuatro elementos principales (Gutiérrez, 1996):

- Imagen mental: tipo de representación cognitiva de un concepto o propiedad matemática por medio de elementos visuales o espaciales.
- Representación externa: cualquier tipo de representación gráfica o verbal de conceptos o propiedades que incluye dibujos, esbozos, diagramas, etc., que ayudan a crear o transformar imágenes mentales y hacer razonamiento visual.
- Procesos de visualización: acciones mentales o físicas en que están involucradas las imágenes.
- Habilidades de visualización para realizar los procesos necesarios con imágenes mentales específicas para un problema dado. Dependen del problema matemático a resolver y de las imágenes creadas.

Para explicar con más detalle estos elementos y su interacción, analizaremos por separado los aspectos relativos a imágenes y representaciones y unificaremos los relativos a procesos y habilidades, completando con algunas referencias el marco teórico establecido por Gutiérrez.

## Imágenes

En el contexto anterior, entendemos por imagen mental un tipo de representación cognitiva de un concepto o propiedad matemática por medio de elementos visuales o espaciales (Gutiérrez, 1996). Consideramos necesario precisar ciertos aspectos que matizan esta definición: imagen, imagen mental, imagen espacial, imagen visual, figura, etc.

Lean y Clements (1981) siguen la teoría dominante en psicología y definen imaginiería mental como la actividad mental que sucede cuando se percibe un objeto, pero cuando el objeto no es presentado al órgano sensorial; la imaginiería visual es pues la imaginiería mental que ocurre como un dibujo en el ojo de la mente.

Gutiérrez (1996) llama la atención sobre tres posturas en psicología sobre el empleo de las imágenes mentales en las investigaciones psicológicas. Los más favorables identifican la imagen mental como un casi-dibujo creado en la mente desde la memoria, sin un soporte físico. Un ejemplo de esta utilización es el que hace Kosslyn (1980), quien explica con detalle su teoría sobre imágenes mentales con dos componentes principales, una representación superficial, el casi-dibujo y una representación profunda, la información almacenada en la memoria a largo plazo. Otros autores rechazan el empleo investigador del concepto de imagen mental por las muchas deficiencias que ven en la metáfora del dibujo en la mente (vaga definición). Una tercera posición está formada por los autores que argumentan que las representaciones se usan en todos los tipos de procesos cognitivos, y no hay nada especial en las imágenes mentales que requiera desarrollar una teoría particular.

Dreyfus (1995) define imaginiería visual como el uso de imágenes mentales con un fuerte componente visual. Presmeg (1994) define imagen visual como la escena mental que representa información visual o espacial, con o sin la presencia de una representación externa y las clasifica en pictóricas concretas, patrones, imágenes de fórmulas, cinestésicas y dinámicas.

Cuando la imagen visual se refiere a figuras tridimensionales, se llaman imágenes espaciales. Para Yakimanskaya (1991) una imagen espacial es creada desde la cognición sensorial de las relaciones espaciales y puede ser expresada por diversas formas

verbales y gráficas incluyendo diagramas, dibujos, pictogramas, esbozos, etc., por lo que resalta la interacción entre imagen espacial y representación externa. Por lo tanto, dado que los elementos espaciales adoptan distintas orientaciones en relación al observador, las imágenes espaciales deben ser dinámicas, flexibles y operativas para poder adaptarse a las diferencias de percepción que se tengan de las representaciones externas. Llama pensamiento espacial a una forma de actividad mental que hace posible crear imágenes espaciales y manipularlas en el proceso de resolución de problemas prácticos y teóricos incluyendo operaciones verbales y conceptuales y varias acciones perceptivas necesarias para formar estas imágenes mentales. Yakimanskaya considera que las imágenes son la unidad básica operativa del pensamiento espacial y los objetos geométricos son el material básico usado para crear y manipular las imágenes espaciales.

Las características de las figuras espaciales en el razonamiento geométrico llevan a Fischbein (1993) a darnos una idea más completa de imágenes espaciales, mediante la idea de concepto figural. Fischbein (1993) además de considerar las imágenes y los conceptos como distintas categorías de entidades mentales, añade un tercer tipo de objetos mentales, el concepto figural, que posee simultáneamente propiedades tanto conceptuales como figurales. Las imágenes están basadas en la experiencia perceptiva-sensorial, como la imagen de un dibujo. En geometría son especialmente importantes las relativas a figuras, término ambiguo que puede denotar una gran variedad de significados (Fischbein, 1993). Nos centraremos en el que se refiere a ellas como imágenes espaciales. Una figura posee una cierta estructura, una forma o Gestalt. Las figuras geométricas corresponden a esta descripción, pero tienen que ser añadidas algunas especificaciones: a) una figura geométrica es una imagen mental, las propiedades de ella son controladas completamente por una definición: b) un dibujo no es la figura geométrica en sí, sino una personificación material gráfica o concreta de él: c) la imagen mental de una figura geométrica es, usualmente, la representación materializada de su modelo. La figura geométrica en sí es sólo la idea correspondiente, que es la entidad figural abstracta, idealizada y purificada, estrictamente determinada por su definición. Esta idea de concepto figural de Fischbein (1993), nos ayuda a presentar la complejidad del sentido espacial, que requiere tanto de la creación de imágenes espaciales (visualización) de un hexágono, por ejemplo, como la

interiorización de sus propiedades geométricas (polígono regular de seis lados, ángulos de  $120^\circ$ , etc.).

Podemos ilustrar esta variedad de términos con el siguiente ejemplo. Al contemplar un panel de abejas percibimos la *imagen* de un hexágono (*imagen visual*). Pero también esta imagen de un hexágono se puede generar cuando escuchamos una descripción de sus propiedades espaciales, creándonos una *imagen espacial*. La *imagen mental* del hexágono es la que se crea en nuestra mente como resultado de la sensación visual junto con las otras imágenes espaciales referidas al mismo concepto, que ya se han creado, por lo que la imagen mental es la representación de la idea correspondiente al concepto figural determinado por su definición junto con la imagen visual percibida (Figura 2.5).

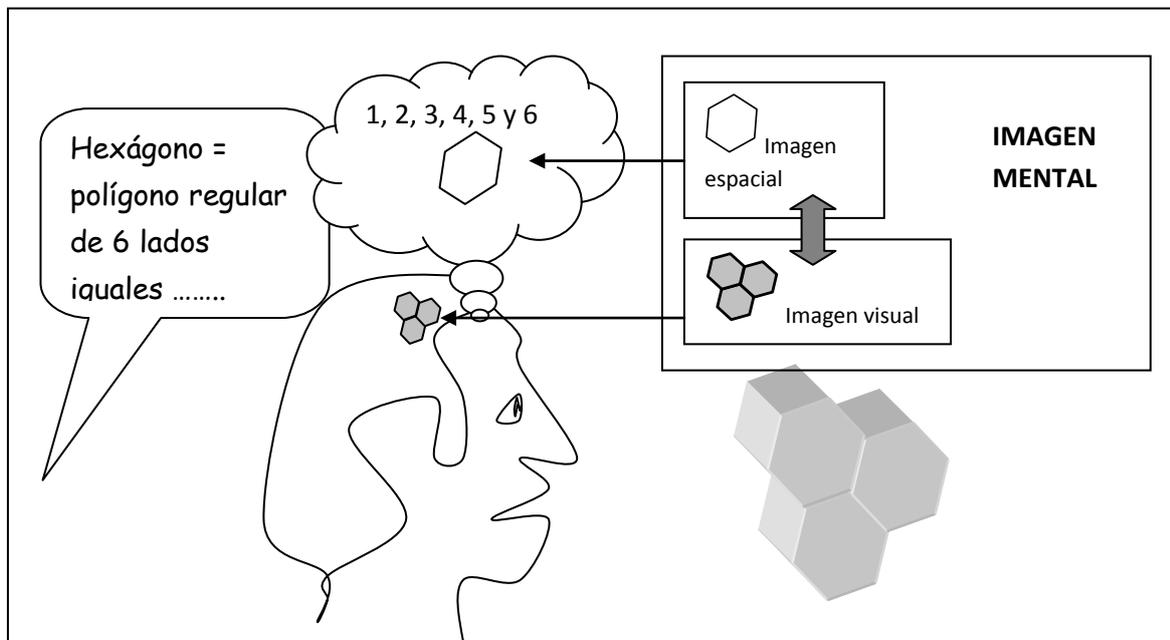


Figura 2.5: Esquema de las distintas imágenes: La sensación (vista) genera la imagen visual. La definición crea la imagen espacial. La imagen mental se crea a partir de la sensación junto con las construcciones mentales anteriores.

La investigación sobre las imágenes ha dado lugar a una amplia diversidad de temáticas, como la búsqueda de técnicas de memorización para generar imaginación en los alumnos superdotados (Carrier, Karbo, Kindem, Legisa y Newstorm, 1983), estudios de la inconsistencia entre el conocimiento formal y las imágenes mentales (Cohen, 2008), investigaciones sobre la preferencia por figuras prototípicas de formas geométricas

(Kalogirou, Sophocleous y Gagatsis, 2009) y sobre el uso de metáforas (Presmeg, 2004; Soto-Andrade, 2008).

### **Representaciones externas**

De un modo general, entendemos por representación externa a cualquier tipo de representación gráfica o verbal de un concepto o sus propiedades que incluye dibujos, esbozos, diagramas, etc., que ayudan a crear o transformar imágenes mentales y hacer razonamiento visual. Por tanto responde a una iniciativa personal para materializar las imágenes mentales. Es cuestionable si estas representaciones tienen un carácter absoluto o individual y si la propiedad de ser visual pertenece a una representación externa o a la forma en la que la persona usa la representación (Gutiérrez, 1996). Éstas y otras dualidades aplicables a los objetos matemáticos se utilizan en el marco del enfoque ontosemiótico (Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato, 2012), para diferenciar las representaciones externas, distinguiendo si son personales o colectivas, ostensivas o no ostensivas, unitarias o sistémicas, extensivas o intensivas y si se refieren a la expresión o al contenido.

El uso de representaciones externas va asociado al procesamiento de la información visual. Bryant (1997) revisa las evidencias psicológicas de las representaciones espaciales generadas a través de la percepción y del lenguaje. Este autor supone que la información espacial es procesada por un especializado Sistema de Representación Espacial (SRS) que crea representaciones geométricas del espacio. El SRS recibe las entradas desde la percepción y el lenguaje y usa estas entradas básicas para construir modelos mentales espaciales de lo que observa. El objetivo del SRS no es representar estrictamente lo percibido, sino modelar un entorno que es inherente a la estructura espacial tridimensional.

La relación entre representaciones externas y las imágenes correspondientes es utilizada por Clements (1983) para definir la habilidad espacial como la medida de la calidad de las representaciones espaciales. Identifica tres tipos de representaciones espaciales:

- Productos espaciales: productos externos que representan de alguna forma el espacio (representaciones externas).

- Pensamiento espacial: pensamiento que de alguna forma concierne o hace uso del espacio. Es el conocimiento que los sujetos tienen, sobre el que pueden reflexionar o que pueden manipular, cuando resuelven un problema espacial o empleando imaginación visual. El pensamiento espacial es claramente necesario para resolver los problemas que aparecen en los test estándares de habilidad espacial.
- Almacenamiento espacial: información acerca del espacio de la que dispone el individuo pero no es consciente de ella. Una vez que el individuo es consciente o reflexiona sobre ella, pasa al pensamiento espacial.

### **Procesos y Habilidades**

Los procesos de visualización son las acciones mentales o físicas en que están involucradas las imágenes, y las habilidades de visualización son las necesarias para realizar estos procesos con imágenes mentales específicas para un problema dado. Dependen del problema matemático a resolver y de las imágenes creadas (Gutiérrez, 1996). El estudio de las habilidades necesarias en los procesos de visualización tiene tradición en educación matemática. Bishop (1983) en una revisión de investigaciones sobre aprendizajes geométricos, distingue dos tipos de habilidades o procedimientos:

- IFI (Ability for Interpreting Figural Information): Esta habilidad supone la comprensión de representaciones visuales y vocabulario espacial usado en trabajos geométricos, grafos, cartas y diagramas de todo tipo. En matemáticas abundan estas formas e IFI concierne a la lectura, comprensión, interpretación de tal información. Es una habilidad de contenido y de contexto y se relaciona particularmente a la forma del estímulo material.
- VP (Ability for Visual Processing): Esta habilidad supone visualización y el traslado de relaciones abstractas e información no figurada en términos visuales. También incluye la manipulación y transformación de las representaciones visuales y las imágenes visuales. Es una habilidad del proceso y no está relacionada con la forma en la que el estímulo está presentado.

## 2 Fundamentación

Bishop distingue entre interpretación y creación de información visual. Yakimanskaya (1991) identifica dos niveles de actividad de pensamiento espacial, que se relacionan con los anteriores, la creación de imágenes mentales y su manipulación o uso. También Kosslyn (1980) identifica cuatro procesos que se pueden realizar con la visualización y las imágenes mentales:

- Generar una imagen mental a partir de una información dada.
- Inspeccionar una imagen mental para observar su posición o la presencia de partes o elementos.
- Transformar la imagen mental mediante rotaciones, traslaciones, escalas o descomposiciones.
- Usar la imagen mental para responder una cuestión.

Gutiérrez (1996) señala que los autores anteriores (Bishop, Yakimanskaya y Kosslyn) se refieren básicamente a los mismos procesos de visualización y los unifica en dos procesos: “Interpretación visual de la información” (correspondiente a VP) para crear imágenes mentales y “Interpretación de las imágenes mentales” (correspondiente a IFI y subdividido en los subprocesos señalados por Kosslyn: observación y análisis de las imágenes mentales, transformación de unas imágenes mentales en otras y transformación de las imágenes mentales en otros tipos de información).

Bishop (1983) manifiesta la dificultad de definir habilidad espacial y alude a la descripción de dos tipos de habilidades espaciales para diferenciar visualización espacial y orientación espacial, basándose en los trabajos de McGee (1979). La visualización espacial es la habilidad para manipular, rotar, girar o invertir mentalmente un estímulo presentado mediante un dibujo. La orientación espacial es la comprensión de la disposición de elementos sin un patrón o estímulo visual y la aptitud para recordarlos sin confusión por cambios de orientación en los que la configuración puede ser presentada.

McGee (1979) recoge las diferencias entre la terminología utilizada por los autores entre visualización y orientación y describe diez habilidades de visualización distribuidas en las dos clases enunciadas, visualización y orientación. Son habilidades de visualización espacial imaginar la rotación de un objeto representado, el plegado de un sólido y los

cambios relativos de posición de un objeto en el espacio; visualizar una configuración en la que hay un movimiento entre sus partes; comprender movimientos imaginarios en tres dimensiones y manipular los objetos en la imaginación; manipular o transformar la imagen de un patrón visual en otra disposición. Las habilidades de orientación espacial consisten en determinar relaciones entre diferentes objetos espaciales; reconocer la identidad de un objeto cuando se ve desde diferentes ángulos o se mueve; considerar las relaciones espaciales donde la orientación del cuerpo del observador es esencial; percibir patrones espaciales y compararlos unos con otros; identificar un cuerpo presentado desde diversas orientaciones; percibir patrones espaciales o mantener la orientación en relación a otros objetos en el espacio.

La distinción de habilidades específicas ha sido frecuente en la investigación psicológica, basada en estudios factoriales. La habilidad espacial ha sido identificada como una habilidad individual, parcialmente independiente de la inteligencia general. Sin embargo, hay numerosas definiciones de habilidad espacial o de habilidades visuales en general, así como un número variable de sub-factores (Höffler, 2010).

A partir de estudios factoriales, Lohman (1979) sugiere la existencia de tres factores espaciales: relaciones espaciales, orientación espacial y visualización.

- Relaciones espaciales: rendimiento en tareas que requieren rotar figuras u objetos mentalmente .
- Orientación espacial: habilidad para imaginar como un estímulo podría aparecer desde diferentes perspectivas.
- Visualización: definido por una variedad de test, incluyendo test de figuras ocultas y de desarrollo de superficies.

Carroll (1993) en un amplio estudio factorial identificó cinco factores del dominio de la habilidad espacial: visualización espacial, relaciones espaciales, velocidad de clausura, flexibilidad de clausura y velocidad perceptiva.

De estos factores, la visualización espacial es el que más frecuentemente se ha medido en los estudios de visualización y supone los procesos de aprehender, codificar y

## 2 Fundamentación

transformar mentalmente las formas espaciales independientemente de la velocidad a la que se llegue a la solución. La principal diferencia con las relaciones espaciales, que también requieren transformaciones mentales, usualmente realizar rotaciones en objetos en 2D en un periodo corto de tiempo, es que la visualización espacial está definida por tareas espaciales difíciles que requieren varias transformaciones. Los otros tres factores se han estudiado poco. Tanto la velocidad como la flexibilidad de clausura, afectan a la velocidad de aprehender e identificar un patrón visual. La velocidad perceptual mide la rapidez al identificar objetos percibidos. Los estudios de Carroll relacionaban la orientación espacial con el factor visualización espacial. En una revisión de diferentes experimentos relativos a los efectos en el aprendizaje relacionados con la alta o baja habilidad espacial cuando se trabaja con diferentes tipos de visualización, concluye que la habilidad espacial juega un papel importante en el aprendizaje que requiere visualización (Höffler, 2010).

Tanto en el análisis de los factores, como en las investigaciones del proceso cognitivo y en la psicología del desarrollo, no hay acuerdo en qué constituye la habilidad espacial. Al no haber una definición universalmente aceptada de espacio, nos enfrentamos al problema de dar significado a términos relacionados y usados comúnmente, como comportamiento espacial, representación espacial y habilidad espacial (Clements, 1983). Existen investigaciones que relacionan tanto las habilidades como los factores expuestos. Arrieta (2003,2006) utiliza el modelo de Carroll para caracterizar la capacidad espacial a partir de los cinco factores específicos, lo que puede permitir saber si una propuesta didáctica de geometría mejora la capacidad espacial de los alumnos a los que va dirigida. En un estudio posterior se relacionaron los factores con las habilidades espaciales, concluyendo que la percepción imagen-fondo y la constancia perceptual son equivalentes a la velocidad de clausura del modelo de Carroll, mientras que la percepción de la posición en el espacio es equivalente a la velocidad perceptiva (Arrieta, 2011).

Hoffer (1977) identifica varias habilidades físico-psicológicas relevantes para el aprendizaje en matemáticas, relacionadas con la visualización en general, que son la coordinación ojo-motor, la percepción figura-contexto, la conservación de la percepción, la percepción de la posición en el espacio, la percepción de las relaciones espaciales, la discriminación visual y la memoria visual.

De los estudios sobre visualización citados por Gutiérrez (1996, 2006), destacamos la recopilación de habilidades psicológicas realizada por Del Grande (1990), en la que cita distintas habilidades de la percepción espacial según varios autores y selecciona las destacadas por Hoffer por su relevancia en el estudio de las matemáticas y la geometría en particular, añadiendo tareas para experimentar con los alumnos. Del Grande (1987) define la percepción espacial como la habilidad para reconocer y discriminar estímulos en y desde el espacio e interpretar estos estímulos asociándolos con experiencias previas. Realiza un recorrido histórico por varios autores para llegar al listado de habilidades y describe con detalle las siete habilidades que considera básicas, enumerando actividades para desarrollarlas.

Consideramos que más que perseguir una intención investigadora, la intención de Del Grande es innovadora al aportar actividades específicas que describen las habilidades. Así, aunque el listado de habilidades se debe a Hoffer (1977), describimos en la tabla 2.4, las que llamaremos habilidades según la descripción de Del Grande (1987,1990), ya que permiten asociar cada habilidad con sus correspondientes actividades.

## 2 Fundamentación

Habilidad	Actividades
1.- <u>Coordinación ojo-motor (OM)</u> : coordinar la visión con el movimiento del cuerpo	<i>Seguir caminos con un lápiz, construir bloques según un dibujo, unir puntos en un geoplano, colorear regiones, etc.</i>
2.- <u>Percepción figura-contexto (FC)</u> : reconocer una figura asíndola de su contexto, en el que aparece camuflada o distorsionada por la superposición de otros elementos gráficos	<i>Identificar intersecciones de líneas e intersecciones de figuras, localizar figuras escondidas o figuras solapadas, completar figuras, formar figuras ensambladas (tangram), observar similitudes y diferencias, invertir una figura respecto al contexto, etc.</i>
3.- <u>Conservación de la percepción (CP)</u> : reconocer que un objeto mantiene determinadas propiedades (forma, tamaño, textura...) aunque cambie de posición y deje de verse por completo	<i>Percibir la constancia de forma, constancia de tamaño, constancia de forma con percepción de figura y espacio, tamaño aparente comparado con tamaño real. comparar el tamaño de tres o más figuras, reconocer el mismo objeto desde distintos puntos de vista, etc.</i>
4.- <u>Percepción de la posición en el espacio (PE)</u> : relacionar un objeto en el espacio y respecto a uno mismo; identificar figuras congruentes bajo traslaciones, giros y volteos	<i>Realizar inversiones y rotaciones de figuras enteras, cambiar de posición, representar modelos de espejos, etc.</i>
5.- <u>Percepción de las relaciones espaciales (RE)</u> : identificar correctamente las relaciones entre varios objetos situados simultáneamente en el espacio (equidistancia, simetría, perpendicularidad, posición relativa, etc)	<i>Relacionar la posición de dos o más objetos, identificar las diferencias y similitudes, encontrar el camino más corto a un objetivo, completar una figura, conectar puntos, completar una secuencia, ensamblar partes, construir una figura con cubos, continuar patrones, etc.</i>
6.- <u>Discriminación visual (DV)</u> : identificar las semejanzas y diferencias entre varios objetos independientemente de su posición	<i>Identificar dos objetos que son el mismo, identificar dos objetos que son diferentes, un objeto que es diferente de otros, varios objetos que son los mismos pero diferentes de otros, etc.</i>
7.- <u>Memoria visual (MV)</u> : recordar con exactitud objetos o propiedades y relacionarlos con otros. Memoria fotográfica	<i>Recordar el lugar en el que estaban los objetos, copiar una figura en un geoplano en el que faltan puntos, etc.</i>

Tabla 2.4: Habilidades de visualización (Del Grande 1990) y actividades para mostrarlas.

Un aspecto importante a resaltar es la complejidad de la tarea que se asocia a cada habilidad, siendo diferente la propuesta para un alumno de infantil que para un estudiante universitario, ya que se deben adaptar al nivel esperado de desarrollo de la habilidad. Las actividades propuestas por Del Grande (1987, 1990) están diseñadas para alumnos de los primeros cursos, pero tienen algunos puntos en común con las de más complejidad utilizadas por Bishop (1983) en su investigación sobre los procesos IFI y VP en alumnos de Primero de la Universidad de Tecnología. Destacan como tareas asociadas al proceso VP las relativas a dibujar mapas, copiar dibujos, imaginar

situaciones, marcar rutas en laberintos, recordar objetos colocados en un determinado orden y localizar puntos en las esquinas de un caja de cerillas colocadas en distintas posiciones (memoria visual). Relativas al proceso IFI utiliza tareas como construir modelos a partir de dibujos, localizar el punto desde el que se toma una fotografía e identificar figuras dentro de estructuras más complejas.

Contextualizadas para alumnos de 6° de Primaria, Gutiérrez (1992) utiliza actividades específicas en las que estudia la manifestación de las habilidades. En la tabla 2.5 mostramos las correspondientes a las cuatro de las habilidades que consideramos en nuestro estudio.

Habilidad	Actividades
Percepción figura-contexto	<i>Colocar cubos con figuras en las caras en un posición determinada, completar la figura de alguna cara del cubo, etc.</i>
Percepción de la posición en el espacio	<i>Dada una figura, colocar el propio cuerpo para verla en la misma posición, comparar dos representaciones de sólidos para ver si son congruentes o si están en la misma posición</i>
Reconocimiento de las relaciones espaciales	<i>Dibujar representaciones planas de módulos contruidos con cubos o construir módulos a partir de sus representaciones planas</i>
Discriminación visual	<i>Dado un cuerpo y varias representaciones planas suyas y otras parecidas, reconocer cuáles pertenecen al cuerpo dado</i>

Tabla 2.5: Ejemplos de actividades para estudiar habilidades de visualización (Gutiérrez, 1992).

Para alumnos de un rango de edad parecido al anterior (de 11 a 13 años) y en un programa de atención al talento matemático, Ryu, Chong y Song, (2007) utilizaron tareas de comparación de longitudes de segmentos y ángulos a partir de las representaciones planas de un icosaedro. Aunque utilizan la terminología para las habilidades utilizada por McGee (1979), hacen referencia explícitamente a la habilidad Percepción Figura-Contexto para descubrir una configuración parcial en dibujos complejos que tienen solapados líneas y puntos.

En algunas de las habilidades precedentes predomina la componente psico-fisiológica (coordinación ojo-motor, conservación de la percepción y memoria visual) y en otras predomina la componente intelectual (identificación visual, percepción de la posición y de relaciones en el espacio y discriminación visual). Este listado de habilidades es

utilizado a veces con otra terminología como por ejemplo a la habilidad Percepción Figura-Contexto se la denomina *Identificación visual* (Gutiérrez, 1992). Se pueden encontrar en la literatura otras habilidades interesantes, pero se trata de combinaciones de las habilidades indicadas antes. Por ejemplo, la habilidad de “conservación de las relaciones espaciales”, que nos permite reconocer que no varían las posiciones relativas de varios objetos cuando se les somete al mismo movimiento (giro o traslación), sería una combinación de las habilidades de reconocimiento de las posiciones espaciales y de conservación de la percepción.

Según lo descrito anteriormente, nos posicionamos en abordar el aprendizaje y enseñanza de la geometría viéndola como ciencia del espacio, uno de los modos clásicos señalados por Hershkowitz (1990). En este contexto, la intención educativa de la geometría es desarrollar el sentido espacial, entendido como elemento de competencia matemática (Figura 2.3). Para reconocer el papel de las habilidades de visualización en el desarrollo del sentido espacial, distinguimos dos posturas entre los autores al relacionar visualización y habilidad espacial: los que consideran la visualización como una componente de la habilidad espacial (Carroll, 1993; Lohman, 1979; McGee, 1979, entre otros) y los que consideran esta habilidad como sinónimo, con matices, de visualización (Ben-Chaim y Lappan, 1989; Hershkowitz *et al.*, 1989; Zimmermann y Cunningham, 1991, entre otros).

El sentido espacial implica una *habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas* (New Jersey Mathematics Coalition, 1996). Esta habilidad comprende términos como habilidad espacial, visión espacial, percepción espacial o capacidad espacial. Términos como razonamiento espacial o pensamiento espacial podrían ser considerados como partes del sentido espacial cuando se focaliza en argumentaciones (Esquema en figura 2.6).

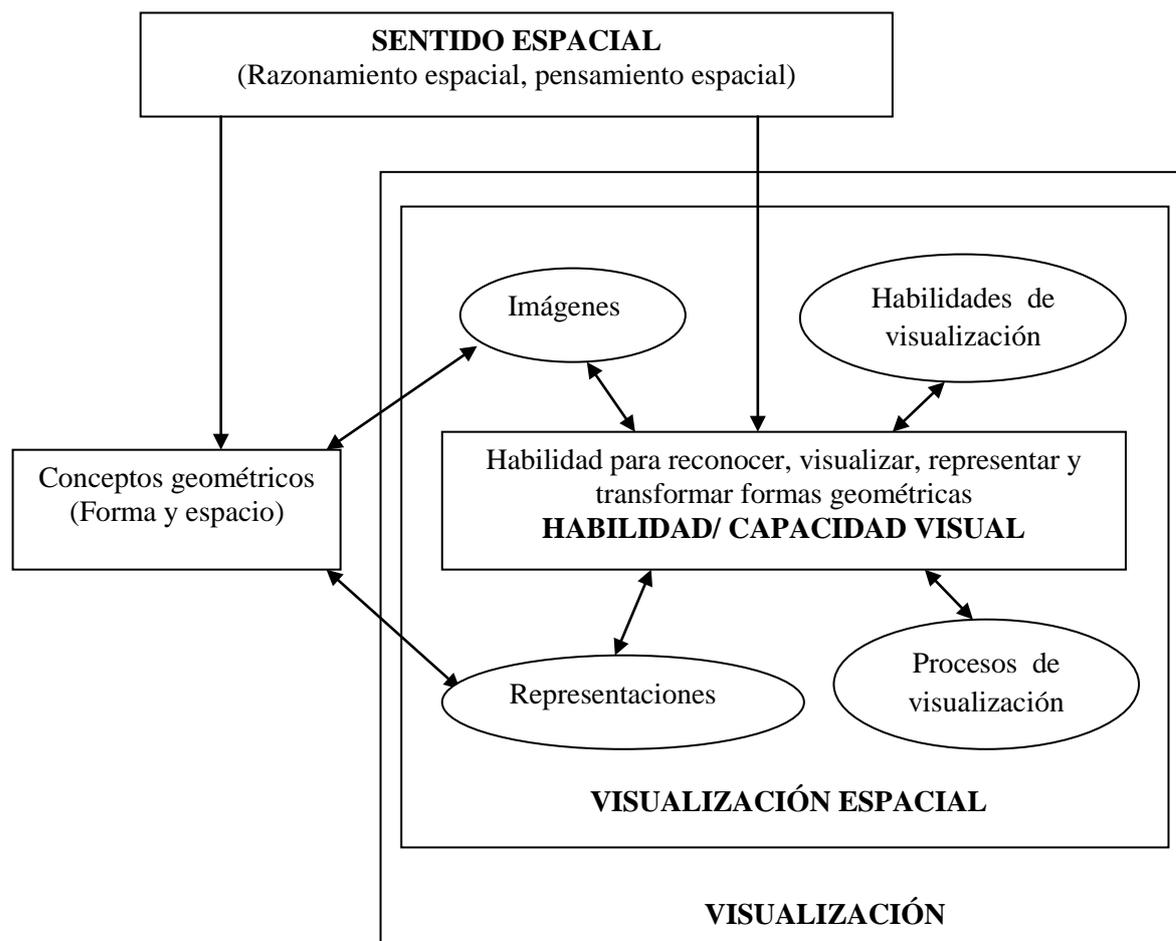


Figura 2.6: La visualización en el desarrollo del sentido espacial.

Una vez articulados las finalidades de la enseñanza de la geometría (sentido espacial), con la visualización seleccionamos el modelo expuesto por Gutiérrez (1996, 2006) para caracterizar la visualización, considerándola como un conjunto de imágenes, representaciones, procesos y habilidades. En este modelo la habilidad espacial se explica a partir de los procesos y habilidades de visualización (sin separar explícitamente la orientación de la visualización), pero además se complementan con elementos que aparecen en las definiciones de otros autores tales como las imágenes y las representaciones que interactúan con los conceptos geométricos. La visualización o visión espacial es un subconjunto de un concepto más general de visualización que no es específico del área espacial. Numerosos autores consideran la visualización importante en otros campos distintos del ámbito geométrico (Bishop, 1980; Presmeg, 2006; entre otros).

## 2 Fundamentación

Para caracterizar las habilidades de visualización seleccionamos el listado de habilidades descritas por Del Grande (1990). Diferenciamos el concepto de habilidad del de destreza, pues, aunque son independientes, están interrelacionados. Por habilidad entendemos los rasgos psicológicos individuales de una persona, que favorecen la rapidez y demuestran dominio en una actividad concreta, mientras que por destreza se consideran las acciones específicas en un campo concreto. Para analizar tanto habilidades como hábitos, o destrezas, hay que estudiar la forma en que se realiza una actividad, pues se juzgan ambos constructos usando los hechos y la forma en que las personas ejecutan la actividad. Al analizar la actividad desde el punto de vista de los rasgos psicológicos que son favorables a este dominio se realiza un análisis de la habilidad (Castro, 1995).

El estudio de las habilidades va estrechamente relacionado con las tareas en las que pueden manifestarse. Para ello es necesario desarrollar actividades que sean claramente tareas espaciales y que las estrategias usadas por los individuos para resolverlas sean fácilmente identificables (Clements, 1983). Una forma de apreciar estas habilidades es considerar el nivel de rendimiento en actividades dadas que tienen unas características específicas (Gorgorió, 1998). En la resolución de las actividades, la manifestación de las habilidades puede verse condicionada por factores relativos al conocimiento, estando relacionada la habilidad cognitiva con el conocimiento explícito (Hoffmann, 2007). Cuando se analiza una habilidad cognitiva individual al resolver una actividad, se hace referencia a su relación con el conocimiento explícito relevante. El conocimiento implícito está localizado en la mente, mientras que la habilidad cognitiva o la actividad cognitiva está situada en un sistema cognitivo que tiene la naturaleza de ser dinámico y distribuido (Rivera, 2011).

Para el análisis de las habilidades, consideramos necesario profundizar en el papel que desempeñan en la resolución de una tarea. Para ello, y situándonos en el contexto geométrico elegido, debemos comprender la interacción con otros elementos que intervienen.

### **El papel de las imágenes, las representaciones y los procesos y habilidades en la resolución de una tarea**

La integración entre los cuatro elementos (imágenes, representaciones, procesos y habilidades) que componen la definición de visualización de Gutiérrez (1996), permite explicar los pasos a seguir cuando se usa la visualización en la resolución de una tarea: la primera imagen inicia un proceso de razonamiento visual en el que, dependiendo de la tarea y de las habilidades del estudiante, le obliga a usar algunas de sus habilidades visuales para realizar diferentes procesos, pero además puede generar otras imágenes mentales y/o representaciones externas antes de llegar a la respuesta. Inicialmente, la presentación de una tarea es interpretada por el estudiante como una representación externa que le genera una imagen mental. En este proceso intervienen sus habilidades y el proceso de interpretación visual de la información. Esta imagen mental puede transformarse en otra imagen mental gracias a sus habilidades y su capacidad de interpretación de las imágenes mentales, para dar lugar a la respuesta o a una nueva representación externa. En este camino de vuelta entre las imágenes mentales generadas y las nuevas representaciones externas vuelven a intervenir las habilidades y los dos procesos de interpretación. Se obtiene la respuesta, bien a partir de la nueva representación o a partir de la nueva imagen mental, utilizando las habilidades y la interpretación de las imágenes. Este proceso se esquematiza en la figura 2.7.

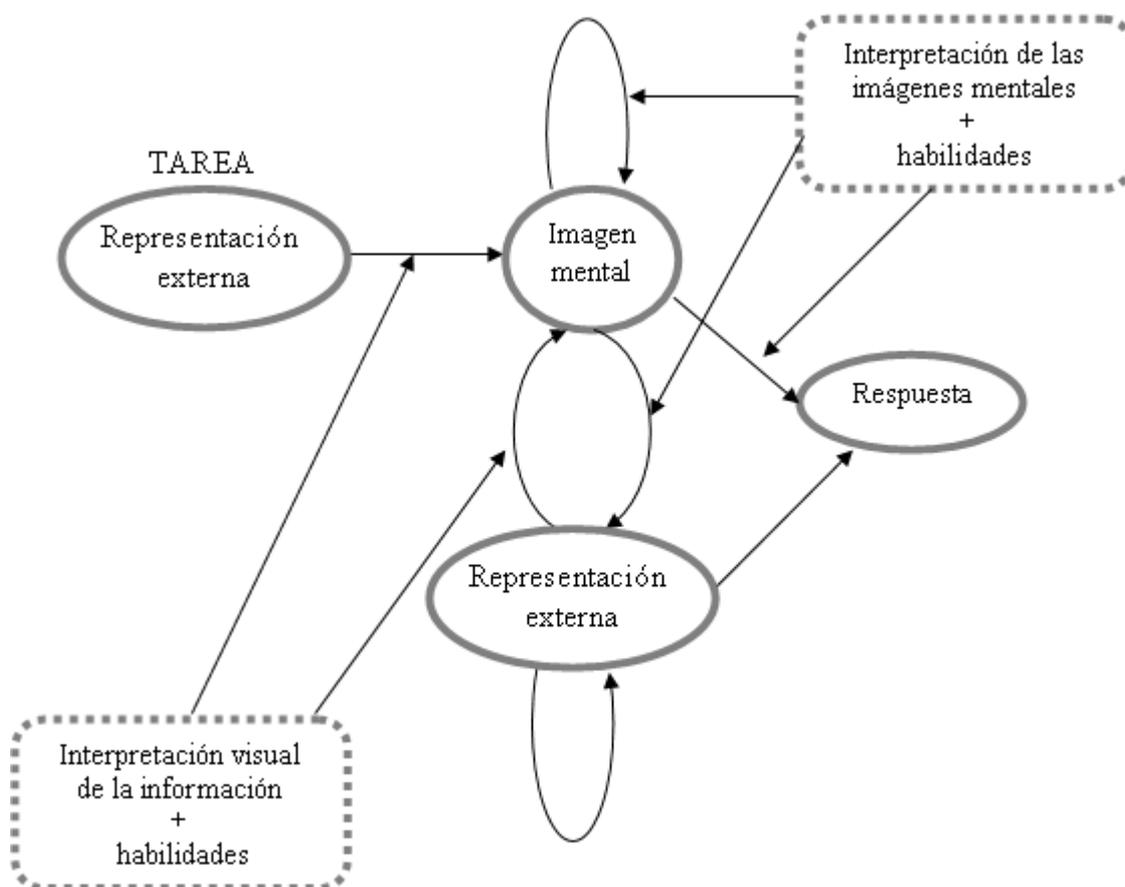


Figura 2.7: Esquema que expresa de manera gráfica el modelo visualización puesto en juego en la resolución de una tarea matemática (Gutiérrez, 1996).

En el esquema anterior se muestra la importancia del papel que las habilidades desempeñan en el uso de la visualización al resolver una tarea matemática, interviniendo tanto en los procesos de creación y transformación de imágenes mentales como para relacionar éstas con las representaciones externas. En este sentido, es coherente pensar que un mayor desarrollo de estas habilidades facilitará las conexiones entre las imágenes mentales y las representaciones externas, enriqueciendo los recursos de los que dispone el alumno para responder a la tarea propuesta: mayor desarrollo de las habilidades implicará un mayor grado de visualización.

Como el proceso de resolución parte de la presentación de la tarea, el contenido de las actividades y el contexto en el que se presentan pueden estimular el uso de habilidades de visualización por parte de los estudiantes. El análisis de las respuestas a estas tareas puede poner de manifiesto qué habilidades han puesto en juego, descubriendo los errores o dificultades que encuentran en el proceso.

Si bien hay importantes estudios que analizan el papel que la instrucción recibida desempeña en la utilización de imágenes (Presmeg 1991) y la importancia de las representaciones (Arcavi, 2003; Duval, 1999), se siguen demandando investigaciones que diseñen prácticas docentes para analizar la visualización puesta en juego (Presmeg, 2006). Con esta intención, hay que profundizar sobre cómo la enseñanza se relaciona con el desarrollo de las habilidades de visualización.

#### **2.2.4 El papel de la enseñanza en el desarrollo de las habilidades**

El estudio de las habilidades de visualización tiene una estrecha relación con el aprendizaje de la geometría, especialmente con la espacial. En concreto, son importantes las imágenes pictóricas, cinéticas y dinámicas, los procesos VP e IFI (cuando intervienen en la obtención o análisis de los tres tipos anteriores de imágenes) y las habilidades de identificación visual, de reconocimiento de posiciones o de relaciones en el espacio y de discriminación visual (también cuando se usan con los tres tipos de imágenes mencionados). Los estudiantes utilizan la visualización directamente al realizar actividades o resolver problemas en los que intervienen objetos geométricos espaciales. Pero al mismo tiempo, la capacidad de los estudiantes para usar la visualización es objeto de instrucción específica centrada en la resolución de actividades geométricas (Gutiérrez, 2011).

Diversos estudios indican que los alumnos que terminan los grados de primaria tienen pobremente desarrollados los conceptos espaciales. Yakimanskaya (1971), en una amplia revisión de trabajos en el campo, muestra formas concretas para que los profesores de primaria organicen su trabajo. Pretende desarrollar los conceptos espaciales relativos a la formación de imágenes espaciales en el proceso de asimilación de información de geometría elemental y el desarrollo de los conceptos espaciales en los procesos de resolución de problemas.

Si tal como hemos observado, la visualización se puede desarrollar (Del Grande, 1990; Gardner, 1995, 2001; Gutiérrez, 2006), la enseñanza debería ir encaminada a conseguir un desarrollo máximo de sus cualidades. Este grado de consecución podría derivarse de

las características que poseen los alumnos con alta capacidad espacial que destacan por su habilidad para entender y recordar las relaciones espaciales entre objetos; facilidad para manipular imágenes en el espacio; capacidad para visualizar cómo separar y relacionar partes de un complejo sistema físico en el espacio; gran capacidad para percibir, modificar y transformar imágenes; grandes capacidades espaciales combinadas con una excelente visualización para aprender (Ferrándiz *et al.*, 2010).

Bishop (1980) recuerda la idea de Thurstone en relación a las Habilidades Mentales Primarias: si hay unas combinaciones apropiadas de habilidades primarias que constituyen la habilidad matemática, la habilidad matemática se podría desarrollar, no sólo enseñando matemáticas, sino también promoviendo el desarrollo de aquellas habilidades primarias. Esta idea apoya nuestra intención de focalizar el enriquecimiento en las habilidades visualizadoras más que en los contenidos particulares del curriculum.

Con esta idea, recogemos dos de las cuestiones señaladas por Hershkowitz (1990), relativas a las investigaciones en el aprendizaje geométrico: (1) ¿Pueden las habilidades de visualización ser adquiridas o mejoradas por un entrenamiento explícito? Si es así, (2) ¿cómo podría ser incluido y cómo podría ser enseñado?

Hershkowitz (1990) clasifica la cuestión (1) de importante pero no simple. Bishop (1980) dice que las habilidades de visualización (incluidas en IFI) son entrenables mediante experiencias apropiadas. En los trabajos de Osta (1987) sobre ejemplos de experiencias de aprendizaje, los alumnos mejoraron su habilidad para transformar objetos de dos y tres dimensiones. Pero hay evidencias que muestran que el efecto de intervención instruccional es limitado. Por ejemplo Ben-Chaim, Lappan y Houang (1988, 1989) investigaron el efecto del entrenamiento directo. La unidad instruccional ofrecía experiencias concretas con construcciones de cubos y sus representaciones bidimensionales. Antes de la instrucción, había diferencias significativas en la visualización espacial tanto por el grado (incrementado por la edad), por el sexo (favoreciendo a los chicos) y por el nivel socioeconómico. Después de la instrucción, los alumnos de quinto a octavo grado mejoraron considerablemente y la ganancia fue similar para niños y niñas a pesar de las diferencias iniciales.

La experiencia en Holanda llevada a cabo por Goddijn y Kindt (1985) para mejorar los dibujos estereotipos con otros tipos de técnicas y el Proyecto Agam (programa de educación visual desde los 3 a los 7 años) acerca del cual un estudio muestra una mejora significativa en habilidades visuales y conocimiento geométrico (Razel y Eylon, 1986), aluden a la pregunta (2) planteada.

La mejora en el uso de las habilidades visualizadoras también ha sido registrada en otros estudios. Tzekaki y Ikonou (2009) investigan si hay relación entre el grado de desarrollo y las características matemáticas o geométricas de las tareas espaciales utilizadas, tratando de mostrar diferencias en habilidades y rendimiento. Afirman que las habilidades espaciales se siguen desarrollando con la edad y de este modo la mayoría de los alumnos mayores (6 años) mejoraron su rendimiento en situaciones espaciales más complicadas. Kliapis y Tzekaki (2011) concluyen que una intervención que favorezca las actividades espaciales ayuda a los niños (de cinco y seis años) con estrategias poco avanzadas a mejorar su modo de abordar las tareas de perspectivas y de rotación, mientras que los alumnos con estrategias empíricas avanzadas continúan principalmente con las estrategias que tienen. El desarrollo de estrategias está relacionado con las tareas, la experiencia previa y la amplitud del repertorio de estrategias que se utilicen en la instrucción.

En la búsqueda de estrategias de enseñanza que sean efectivas para los estudiantes que poseen una buena capacidad visual, Mann (2006) hace recomendaciones específicas: que los estudiantes puedan elegir la forma de acceder a la información y los métodos para comunicar sus resultados; explorar el interés de los estudiantes y enfatizar en la enseñanza la comprensión de conceptos mediante una aproximación del todo a las partes (es decir, enfatizando la instrucción que proviene del dibujo completo para luego fijarse en los detalles). Generalmente, las técnicas de enseñanza tradicionales son diseñadas para el aprendizaje auditivo-secuencial y aportan desventajas respecto al aprendizaje visual-espacial. Esto puede provocar que alumnos con un pensamiento visual muy avanzado corran el peligro de fracasar en el sistema escolar (por falta de motivación, distracción, debilidad en los cálculos básicos y desorganización) porque su estilo de aprendizaje no está reconocido (Sword, 2000).

## 2 Fundamentación

En una extensa revisión sobre el currículum y los materiales que se emplean para atender a los alumnos con talento, Assouline y Lupkowski-Shoplik (2003) concluyen que la visualización espacial es importante para hacer matemática, ciencia e ingeniería. Para ayudarles a pensar visualmente sugieren la manipulación de objetos reales que les hagan comprender las relaciones espaciales, juegos comerciales para ayudarlos a manipular mentalmente los objetos y utilizar modelos tridimensionales usando tangrams, teselaciones y gráficos. En programas universitarios para desarrollar el talento matemático, han detectado que algunos estudiantes que sobresalen en sentido numérico, cálculo y resolución de problemas, tienen dificultades con las actividades de visualización espacial, produciéndose mejoras al practicar estas actividades.

El interés por el diseño de estrategias para el desarrollo de la visualización se refleja en numerosos estudios sobre instrucción visual relativos a diferentes ámbitos, como el conocimiento de formas geométricas y de medidas de cuadrados y cubos (Tishin, 1975), la comparación de las estrategias utilizadas en la orientación espacial en dos y tres dimensiones por alumnos pequeños (Cheng, Chen, Chen y Leu, 2011), las técnicas que favorezcan la creatividad y un programa de entrenamiento con el propósito de guiar el proceso de selección de alumnos con talento (Cho, Song y Lee, 2011). También en un estudio que examinaba si la enseñanza y los libros de texto pueden mejorarse para desarrollar las habilidades y el sentido espacial (Xiaomei, 2008) y otro que examinaba dificultades de aprendizaje en visualización desde el punto de vista sociológico y cognitivo (Souto y Gómez-Chacón, 2009).

Sintetizamos las ideas principales que hemos destacado en este capítulo sobre el talento matemático y la visualización.

Para la atención de los alumnos con talento matemático, consideramos el enriquecimiento curricular como un marco de intervención adecuado para reconocer y favorecer el desarrollo de las habilidades que poseen (Blanco, Ríos y Benavides, 2004; Pitta-Pantazi y Christou 2009a). Estas prácticas docentes deben ir dirigidas a que los alumnos desarrollen al máximo su potencialidad y hagan de ella un uso óptimo en sus actuaciones matemáticas. Entre las habilidades a enriquecer, hemos seleccionado la visualización porque se reconoce su papel importante en las tareas de matematización (Arcavi, 2003; Clements y Battista, 1992; Guillén, 2010; Presmeg, 2006; Wheatley,

1998) y puede desarrollarse mediante un proceso de enseñanza apropiado (Del Grande, 1990; Gardner, 1995, 2001; Gutiérrez, 2006). La intención educativa de la geometría de desarrollar el sentido espacial (New Jersey Mathematics Coalition, 1996), entendido como elemento de competencia matemática, demanda relacionar el aprendizaje de contenidos y elementos de razonamiento geométrico con el uso de habilidades de visualización, especialmente en tareas de resolución de problemas geométricos.

Por tanto, vamos a diseñar prácticas docentes en el área de la geometría, para facilitar que los alumnos con talento desarrollen sus habilidades visuales. Previamente a este diseño es necesario revisar las investigaciones que relacionan talento matemático y visualización, enfatizando las que específicamente estudian las habilidades de visualización que hemos seleccionado (Del Grande, 1990).



## **3 Talento y visualización**

Una vez delimitada el área problemática en que se ubica nuestro problema de investigación, en este capítulo realizamos una revisión de las investigaciones que relacionan talento matemático y visualización, mostrando la diversidad de aspectos en los que las investigaciones se han basado, para poder describir con precisión el problema de investigación y sus objetivos. Describiremos los errores y dificultades en el uso de la visualización que han recogido las investigaciones y haremos una valoración final para delimitar los antecedentes de nuestra investigación.

El capítulo se compone de dos partes, en la primera identificamos las investigaciones más sobresalientes sobre visualización y talento. Posteriormente atendemos a las investigaciones sobre otros aspectos relacionados con ambos constructos, que aportan datos interesantes para nuestra investigación. Finalmente hacemos una síntesis del estado del arte, para poder definir la investigación con precisión.

### **3.1 Revisión bibliográfica**

En los apartados anteriores se ha manifestado la importancia de diseñar unas prácticas docentes adecuadas para atender a los alumnos con talento atendiendo a sus necesidades especiales. El enriquecimiento curricular, además de trabajar en mayor profundidad determinados conceptos, debería desarrollar las habilidades específicas que caracterizan a los alumnos con talento y así afrontar con mayor éxito las tareas matemáticas. Las habilidades de visualización ocupan un lugar importante en el proceso de resolución de determinadas tareas matemáticas, especialmente en el campo de la geometría, por lo que su estudio nos lleva a conocer mejor el papel que estas habilidades desempeñan en el talento matemático.

Para comprender la relación entre talento matemático y habilidades de visualización, haremos una revisión general, destacando estudios de la literatura de investigación. Debido a la riqueza y variedad de terminología en estos dos campos, es necesario

### 3 Talento y visualización

especificar qué elementos del talento matemático y de la visualización son los que se han estudiado.

En este primer apartado atendemos a investigaciones sobre visualización y talento matemático. Comenzamos presentando investigaciones y revisiones que se destacan en todos los trabajos sobre esta problemática: los trabajos de Krutetskii, las revisiones de Lean y Clements, de Bishop y de Presmeg. Posteriormente describimos la revisión bibliográfica sistemática llevada a cabo en bases de datos, revistas de investigación y actas del PME.

#### **Estudios clásicos sobre talento y visualización: Kruteskii, Leans y Clements, Bishop y Presmeg**

Podemos situar las primeras investigaciones destacadas sobre talento y visualización en los estudios de Krutetskii (1976). Krutetskii parte de estudios previos que señalaban que eran relativamente independientes las puntuaciones en test de álgebra y geometría, pero cada una estaba influenciada por lo que podríamos llamar una habilidad matemática general, posición que no era unánime entre los psicólogos. Mientras algunos psicólogos consideraban la habilidad espacial como una habilidad matemática, otros relacionaban la habilidad matemática con la inteligencia general, otros habían encontrado conexión entre test visuales y test geométricos, y otros, por último, establecían que la actividad en geometría está conectada con el factor espacial y la actividad aritmética con el factor numérico.

Para su investigación, Krutetskii recopila las componentes de las habilidades matemáticas que caracterizan el pensamiento matemático a través de varias fuentes. Realiza una revisión bibliográfica, pasa cuestionarios a profesores y estudia biografías de matemáticos. Inicialmente conjetura nueve componentes de la habilidad matemática:

- Habilidad para formalizar, abstraer a partir de las relaciones numéricas abstractas y formas espaciales y operar con estructuras formales.
- Habilidad para generalizar, detectar qué es lo esencial, abstraerse de lo irrelevante y ver qué es común y qué es externamente diferente.
- Habilidad para operar con números y otros símbolos.

- Habilidad para razonar de manera lógica, lo que está relacionado con la necesidad de demostrar, probar y deducir.
- Habilidad para simplificar los procesos de razonamiento.
- Habilidad para convertir procesos mentales directos en inversos
- Flexibilidad de pensamiento.
- Memoria matemática (para generalizaciones, estructuras formales y esquemas lógicos).
- Habilidad para los conceptos espaciales, especialmente relacionada con la geometría del espacio.

Elabora 79 test (22 aritméticos, 17 algebraicos, 25 geométricos y 15 de otro tipo) de problemas matemáticos clasificados en 26 series que recogen una interesante selección de los problemas experimentales. Destacamos las series relacionadas con los conceptos espaciales y visuales que se usaron para determinar la tipología de los estudiantes: la serie XXIII está compuesta por problemas con grados variables de visualización en sus soluciones, la XXIV incluye problemas con formulaciones verbales y visuales y la XXV los problemas relacionados con conceptos espaciales.

Tras pasar los test a los sujetos seleccionados, clasifica a los alumnos en aritméticos, geométricos o armónicos, según el procedimiento utilizado en la resolución de las tareas. Estas tres categorías son las mismas que habían señalado otros autores como Hadamard, Menchinskaya, Poincaré, Richardson y Walter (Lean y Clements, 1981). De 34 alumnos con talento estudiados, seis son del tipo analítico, cinco geométricos y veintitrés armónicos.

Tras el estudio, elabora un esquema de las habilidades matemáticas de los niños con talento (tabla 3.1), señalando componentes de las inicialmente conjeturadas que no forman parte obligatoriamente de la estructura del talento matemático.

### 3 Talento y visualización

Componentes del talento matemático (Krutestkii, 1976)
<ul style="list-style-type: none"><li>- Habilidad para percibir la estructura formal de un problema.</li><li>- Habilidad para utilizar en el pensamiento lógico las relaciones cuantitativas y espaciales, números y símbolos.</li><li>- Habilidad para pensar en símbolos matemáticos.</li><li>- Habilidad para generalizar rápida y ampliamente los objetos matemáticos, sus relaciones y sus operaciones.</li><li>- Habilidad para abreviar los procesos de razonamiento matemático y el sistema de las operaciones correspondientes.</li><li>- Flexibilidad de los procesos mentales que usan en la actividad matemática.</li><li>- Interés por clarificar, simplificar, economizar y racionalizar las soluciones.</li><li>- Reversibilidad de los procesos mentales de razonamiento.</li><li>- Memoria matemática (para retener las relaciones matemáticas, las características, las estrategias de los argumentos y las demostraciones, los métodos de resolución de problemas y los principios de planteamientos).</li><li>- Mentalidad matemática.</li></ul>
Componentes <b>no obligatorias</b> en la estructura del talento matemático
<ul style="list-style-type: none"><li>- Rapidez de los procesos mentales.</li><li>- Habilidad computacional (habilidad para cálculos rápidos y precisos).</li><li>- Memoria para símbolos, números y fórmulas.</li><li>- Habilidad para los conceptos espaciales.</li><li>- Habilidad para visualizar relaciones matemáticas abstractas.</li></ul>

Tabla 3.1: Esquema de las componentes del talento matemático (Krutestkii, 1976).

De sus estudios destacamos dos consideraciones importantes. Por un lado la alta correlación obtenida entre la habilidad para visualizar relaciones matemáticas abstractas y la habilidad para conceptos espaciales geométricos. Por otro lado, que no considera estas dos habilidades componentes necesarias de la estructura de las habilidades matemáticas de las personas con talento. Su presencia o ausencia (más precisamente su fuerza o debilidad) no expresan la extensión de lo que el autor considera talento matemático y por lo tanto son componentes no obligatorias en la estructura del talento matemático.

Lean y Clements (1981) presentan un amplio resumen de las investigaciones clásicas sobre visualización, antes de presentar su investigación particular sobre esta temática. Su revisión bibliográfica sobre las relaciones entre Imaginería Visual-Rendimiento

Matemático y sobre Habilidad Espacial-Rendimiento Matemático (Tabla 3.2), les lleva a afirmar que aunque ha habido muchas investigaciones sobre la relación entre habilidad espacial, el uso de imaginación visual y el rendimiento matemático, muy pocas investigaciones dan resultados definitivos.

<b>Autor</b>	<b>Medición de la Visualización</b>	<b>Sujetos</b>	<b>Resultados</b>
Carey, 1915	Test espaciales sobre imaginación visual	Niños de 7 a 14 años	La imaginación visual no influye en el rendimiento en los test espaciales
Barratt, 1953	12 test espaciales (PMA y Raven entre otros)	Universitarios	Los que usan imaginación realizan mejor los test con carga visual
Haber y Haber, 1964	Tareas específicas	Jóvenes	Usar imaginación no implica mayor inteligencia ni mejor rendimiento en test espaciales
Moses, 1977	5 Test espaciales. Problemas no rutinarios	Alumnos de Primaria (5º grado – 10 años)	La habilidad espacial predice bien el rendimiento en la resolución de problemas y, aunque los individuos con alta habilidad espacial resuelven problemas de lápiz y papel, no podemos garantizar que siempre utilicen procesos visuales en su resolución
Sherman, 1979	Tareas específicas	Jóvenes	El factor de habilidad espacial es uno de los que afecta más significativamente al rendimiento matemático
Webb, 1979	Tareas específicas	Alumnos de secundaria	Los alumnos que usan dibujos tienden a obtener mejores resultados
Moses, 1980	Cuatro test espaciales, test de razonamiento y problemas no rutinarios	Alumnos de 5º grado, de 9º grado y universitarios	Enseñar a manejar el pensamiento visual afecta a la habilidad espacial y a la habilidad de razonamiento pero no al rendimiento para resolver problemas ni influye sobre el grado de visualización
Lean y Clements, 1981	5 Test espaciales (Raven entre otros)	Universitarios (Ingeniería)	La habilidad espacial y los conocimientos de las convenciones espaciales no tienen gran influencia sobre el rendimiento matemático

Tabla 3.2: Recopilación de estudios sobre Imaginación Visual-Rendimiento Matemático y sobre Habilidad Espacial-Rendimiento Matemático (Lean y Clements, 1981).

### 3 Talento y visualización

Para explicar los diferentes resultados anteriores, Lean y Clements (1981) señalan que los autores infieren que existe relación entre habilidad espacial y rendimiento matemático a través de la correlación, lo que hace que sus estudios dependan de los patrones de coeficientes de correlación que emplean, por lo que sugieren realizar investigaciones clínicas que se concentren en determinar las habilidades espaciales que usan los sujetos para resolver diferentes tipos de problemas. En este sentido consideran muy interesante la investigación realizada por Krutetskii (1976) para detectar las habilidades que caracterizan el talento matemático.

En la revisión de Lean y Clements (1981) respecto a los que consideran estudios pioneros de Moses (1977, 1980), sugieren utilizar no sólo pruebas escritas, evitando las cuestiones que tengan en el enunciado diagramas o indiquen algo para dibujarlo y puntuar también los intentos incorrectos de resolución de los problemas. En los estudios previos a su investigación encuentran resultados diferentes según sea significativa la relación entre habilidad espacial y rendimiento. Vamos a describir los aportes en cada tipo de estudios.

Entre las referencias de estudios antiguos que no encontraban relación entre visualización y rendimiento, están los trabajos de Carey (1915) que al estudiar la correlación entre la imaginación visual y la resolución de problemas concluye que no influía la habilidad espacial en el rendimiento. Barrat (1953) señala que ninguno de los estudios que interpretaban el grupo de factores espaciales en términos de manipular imágenes mentales había contrastado sus hipótesis mediante experimentos que las confirmaran. Pasa 12 test visuales y examina qué sujetos habían usado imaginación visual al resolver las cuestiones, cómo habían sido las imágenes y si habían tenido dificultades para manipularlas. Encuentra que los alumnos que habían usado mayoritariamente imaginación visual puntuaban mejor en los test que encerraban componentes de manipulación espacial, pero no tenían mejor rendimiento en los test que tenían alto factor de razonamiento no espacial. Smith (1972) matiza las investigaciones que utilizaban los trabajos de Haber y Haber (1964), en las que se observaba que los sujetos que hacían una buena utilización de imaginación visual tenían ventajas en los test espaciales, para afirmar que una alta visualización no indica mayor inteligencia.

Entre los que encontraban relación entre habilidad espacial y rendimiento, Webb (1979) señala que las variables que más influyen en el rendimiento son las que denomina logro matemático, razonamiento verbal y representación pictórica, ya que encuentra que los alumnos que usaban diagramas o dibujos obtenían mejor resultado en los cuestionarios de problemas. Smith (1964) concluye que la habilidad espacial está ampliamente relacionada con la conceptualización matemática de alto nivel, pero tiene poca relación con la adquisición de conceptos y tareas de baja dificultad. Guay y McDaniel (1977) sugieren una relación positiva entre pensamiento espacial y pensamiento matemático en escolares tanto de bajo como de alto nivel (los de bajo nivel no pueden transformar mentalmente las configuraciones de dos dimensiones, mientras que los de alto nivel visualizan estructuras tridimensionales y pueden manipular estas imágenes). Sherman (1979) en un estudio longitudinal para examinar el efecto de la habilidad espacial sobre el rendimiento académico (entre otras variables cognitivas y afectivas) concluyó que el factor habilidad espacial era uno de los que afectaban más significativamente el rendimiento matemático.

Como se ha señalado, Lean y Clements (1981) cuestionan que un índice de correlación explique que una habilidad asociada con cualquiera de las variables tenga prioridad sobre otras en el proceso de aprendizaje, así como que se establezca de esta forma una relación causal. Se decantan por investigaciones clínicas que estudien por qué se utiliza la habilidad espacial al resolver determinados tipos de problemas. Realizan un estudio basado en test matemáticos y espaciales en el que emplean el constructo “modo preferente de procesar la información matemática”, utilizando un instrumento desarrollado por Suwarsono. Su estudio de análisis de regresión múltiple con 116 estudiantes de ingeniería revela las siguientes conclusiones: La habilidad espacial y el conocimiento de convenciones espaciales no tienen gran influencia en el rendimiento matemático y los alumnos que prefieren métodos de procesamiento lógicos-verbales superan a los estudiantes más visuales en los test matemáticos y espaciales.

Los propios autores señalan que los resultados de este estudio entran en conflicto con otros estudios que sugieren que es deseable utilizar procesos visuales cuando se resuelven problemas. Este conflicto aparente, podría deberse a que se emplean tareas de rutina de los test puros y aplicados que son diferentes a las tareas no rutinarias utilizadas en otros estudios. Aunque no relacionado con el talento y desde un enfoque más

### 3 Talento y visualización

psicológico, McGee (1979) concluye que la visualización y las habilidades de orientación correlacionan más con el éxito en ciertos dominios, como ocupaciones técnicas, que con la habilidad verbal, por lo que proponen convertirlas en variables importantes en la psicología aplicada.

Alan Bishop, profesor emérito de educación en la Facultad de Educación de la Universidad de Monash, ha estudiado desde 1980 la visualización, resumiendo sus aportes en 2008 (Bishop, 2008). Desde sus primeros trabajos (Bishop, 1980), hace una exhaustiva revisión sobre las habilidades espaciales desde una perspectiva más psicológica. Vamos a desarrollar sus aportes organizándolos en tres partes. En primer lugar presentamos su visión del trabajo de Krutetskii. Posteriormente describimos sus ideas sobre la relación entre visualización e inteligencia y finalmente recogemos la dificultad que expone sobre los instrumentos de medición empleados.

Bishop (1980) considera importante la contribución de Krutetskii por tres motivos: por desarrollar un conjunto de tareas que incluían un alto grado de pensamiento espacial, estableciendo conexiones entre las habilidades espaciales y las matemáticas; por documentar varios casos de alumnos, con buen rendimiento en matemáticas, que usaron predominantemente las ideas espaciales en la resolución de problemas y por mostrar un método de investigación y un estilo muy diferente de los métodos psicométricos tradicionales. Esta revisión de Bishop sobre habilidades espaciales y visualización en educación matemática es considerada después de tres décadas como uno de los cimientos para la investigación en el campo (Presmeg, 2008a).

Bishop (1980) diferencia la postura de Spearman (1927) de la Thurstone (1938). El primero afirmaba que para resolver tareas se requería un factor de inteligencia general y un factor específico. Por lo tanto, la habilidad matemática era concebida como la combinación de una inteligencia general aplicada a un contexto matemático. Sin embargo Thurstone proponía un conjunto de Habilidades Mentales Primarias que requerían ciertas combinaciones para áreas específicas, sin aludir al factor general. Bishop (1980) recoge otras diferencias encontradas en estudios sobre habilidad espacial y matemática: mientras McFarlane (1964) argumentaba que la habilidad espacial es la habilidad clave para la matemática, sin embargo, en los trabajos de Werdelin (1958) no había una carga significativa del factor espacial en los test matemáticos. McGee (1979)

señala que es peligroso considerar la visualización como fundamental para un buen rendimiento en varias de las funciones mentales, entre ellas, la habilidad matemática y cita los estudios de Hills (1957) en el que dos test espaciales correlacionaron más con el éxito académico que otros test verbales y de razonamiento.

Todo lo expuesto anteriormente muestra la controversia existente en los ochenta sobre la relación entre visualización y rendimiento matemático. Para comprender esta relación es necesario especificar qué elementos del talento matemático y de la visualización son los que se estudian, ya que si bien el talento matemático está, de manera generalizada, caracterizado por el rendimiento en tareas de resolución de problemas, la medición de la visualización se obtiene a partir de diferentes instrumentos y registros: puntuaciones en test visuales, tipos de imágenes utilizadas, estrategias de resolución visuales utilizadas, habilidades de visualización manifestadas, etc. Por esto, la utilización de diferentes definiciones de talento (habilidad matemática, rendimiento, etc.) y visualización (habilidad espacial, imaginación visual, etc.) y de instrumentos de medida puede conducir a resultados aparentemente contradictorios.

La creación de un instrumento de medición de la visualización refleja uno de los principales problemas en estas investigaciones: la dificultad de registrar la actividad visual. Bishop (1989, 1992) en varias revisiones de investigaciones, señala la dificultad para investigar la forma en la que los alumnos procesan las ideas. Destaca el estudio de Presmeg (1986b) y a modo de ejemplo, resalta las diferentes formas de medir la visualización en los estudios de Presmeg, Moses, Kruteskii y Suwarsono. En relación con las habilidades, Bishop (1983) realiza un estudio significativo de los procesos IFI y VP que había definido en artículos anteriores y señala que los alumnos de primero de Universidad de Tecnología presentaban más dificultades en las tareas IFI que en las VP, propone estudios para caracterizar mejor estas habilidades, realzando la importancia de caracterizarlas mejor y de diseñar entrenamientos óptimos para desarrollarlas. Concluye que, en este momento, somos relativamente ignorantes acerca del aprendizaje de ideas espaciales y geométricas.

Norma Presmeg, profesora emérita en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Estatal de Illinois ha destacado en su investigación sobre la visualización en diversos campos de las matemáticas, desde su tesis doctoral de 1985 (Presmeg,

### 3 Talento y visualización

1985). Las síntesis que realiza Presmeg nos llevan a presentar las investigaciones que abordan tres aspectos, los métodos visuales, el papel de las imágenes y el interés de la formación para el desarrollo de habilidades de visualización.

Para Presmeg (1986a) un *método visual* de resolución es el que involucra como parte esencial imágenes visuales, con o sin diagramas, aunque también involucre razonamiento o métodos algebraicos. Moses, define un grado de visualización basado en la cantidad de procesos visuales de solución (cuadros, gráficos, listas, tablas) presentes en las soluciones escritas. Cuando Krutetskii define el sujeto de tipo geométrico como el que necesita interpretar visualmente una expresión de alguna relación abstracta. Suwarsono asignaba una visualización alta a los sujetos que obtenían respuestas correctas mediante razonamientos basados en diagramas o en imágenes visuales icónicas construidas por él.

Para confirmar algunas de las observaciones hechas en estudios anteriores, Presmeg (1986a) señala que los estudios muestran que son minoritarios los alumnos “visualizadores” (prefieren el uso de métodos visuales para resolver problemas que pueden ser resueltos tanto por métodos visuales como por otros métodos) entre los de un nivel matemático destacado y en su investigación discute el efecto que producían sobre alumnos visualizadores los modos cognitivos, actitudes y acciones de sus profesores de matemáticas. De los siete alumnos considerados excelentes por sus profesores (de 277 alumnos) casi ninguno era visualizador. Con un criterio menos restrictivo, no llegaba a un quinto la proporción de alumnos de alto rendimiento que eran visualizadores (de 27 alumnos considerados muy buenos, sólo 5 lo eran). Está en consonancia con los estudios de Krutetskii (1976), que muestran que casi todos los alumnos considerados más brillantes no son visualizadores.

Presmeg (1986a) explica la reticencia a usar la visualización por parte de los alumnos con talento según factores internos y externos como los siguientes:

- Tiempo y economía de tiempo en la escuela.
- Preferencias por una forma particular de pensamiento reforzada en el currículo, en la actuación de sus profesores y en los exámenes.

- Las matemáticas, por su naturaleza, favorecen el método no visual (lo que acompaña de un interesante estudio en el que clasifica a grandes matemáticos en algebraicos o geométricos).
- La enseñanza enfatiza el método no visual (comunicación de ideas). Al clasificar los profesores en visuales, medios y no visuales observa que los alumnos visualizadores del estudio obtuvieron mejores resultados con los profesores considerados medios.

El estudio de los distintos *tipos de imágenes* que los estudiantes utilizan en la resolución de tareas (Presemg, 1992), sugiere que la imaginería de patrones y otro tipo de imágenes forma una componente central en el modelo de razonamiento matemático y puede utilizarse para la abstraer y generalizar. Considera que los estudios de Krutetskii son extensibles a todos los niveles de habilidad matemática, no sólo para el talento. En la línea de investigación propuesta por Presmeg sobre el tipo de imágenes que utilizan los estudiantes, se realizan una serie de investigaciones para relacionar las distintas tipologías con el rendimiento en la resolución de problemas. Hegarty y Kozhevnikov (1999) descubrieron que el uso de imágenes esquemáticas correlacionaba positivamente con el éxito en la resolución de problemas, mientras que el uso de imágenes pictóricas correlacionaba negativamente con el éxito en la resolución de problemas. Kozhevnikov, Hegarty y Mayer (2002) en sus estudios con 60 estudiantes, identificaron dos tipos de visualizadores, según tuvieran alta o baja habilidad espacial. Los visualizadores con alta habilidad espacial (tipo espacial) utilizaban sistemas de imaginería espacial esquemáticos para resolver problemas, mientras que los visualizadores con baja habilidad espacial (tipo icónico) utilizaban sistemas de imaginería pictóricos. Del grupo de trabajo Representations and mathematics visualization (Hitt, 2002), destacamos un estudio relacionado con rendimiento matemático en el que Stylianou y Pitta-Pantazi (2002) afirman que los alumnos de bajo rendimiento parecen utilizar imágenes descriptivas de objetos reales y acciones y tienen dificultad para verlas como objetos matemáticos con las que ellos puedan operar. Sin embargo, los estudiantes de alto rendimiento se esfuerzan en encontrar conexiones entre las imágenes visuales y los símbolos que usan en su experimentación.

Van Garderen y Montague (2003a) investigan el uso de la imaginería visual cuando los estudiantes resuelven problemas matemáticos. En el estudio participaron alumnos de

### 3 Talento y visualización

sexto grado con dificultades de aprendizaje, alumnos de rendimiento medio y alumnos con talento. Las representaciones visuales se estudian identificando las representaciones esquemáticas primarias que reflejan las relaciones espaciales descritas en los problemas o las representaciones pictóricas primarias que representan personas, lugares o cosas. Los resultados indican que los alumnos con talento usan significativamente más representaciones visuales esquemáticas (el tipo más sofisticado de imaginación, para representar las relaciones espaciales entre las partes del problema, incluyendo transformaciones espaciales) que el resto de los grupos y que los estudiantes con dificultades de aprendizaje usan más representaciones pictóricas. El éxito en la resolución de problemas correlaciona positivamente con el uso de representaciones esquemáticas y negativamente con el uso de representaciones pictóricas.

También para encontrar diferencias entre el papel que desempeña la visualización en los alumnos con dificultades y los talentosos, Van Garderen (2006) enfoca su estudio en el uso que hacen de la imaginación visual y cómo se relacionan con la habilidad de visualización espacial de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos enunciados con palabras. Midió el rendimiento en resolución de problemas, las representaciones con imaginación visual y la habilidad espacial recogida en los test, concluyendo que los alumnos con talento puntuaban mejor que los alumnos medios y los alumnos con dificultades de aprendizaje, en las dos medidas espaciales de visualización. El uso de imágenes visuales correlacionaba positivamente con el éxito en la resolución de problemas. Además, el uso de imágenes esquemáticas correlacionaba significativamente y positivamente con el alto rendimiento en cada medida de visualización espacial, mientras que correlacionaba negativamente con el uso de imágenes pictóricas. Van Garderen presenta como limitación de su investigación la dificultad de medición de la visualización, ya que los alumnos podrían haber utilizado estrategias visualizadoras sin advertirlo y dada la dificultad de enseñar estrategias visuales sugiere que se realicen estudios en los que se analice la intervención.

En una completa revisión de los trabajos presentados en los PME relativos a visualización, Presmeg (2006) afirma que quizás el asunto más apremiante de investigación en este periodo es estudiar una *enseñanza eficaz para* aumentar el uso y poder de *la visualización* en la educación matemática. Señala que muy pocos estudios han abordado este tópico desde los aportados por Presmeg (1991) en su estudio de los

aspectos de la enseñanza que facilitan la visualización. La autora subraya la escasez de estudios sobre enseñanza de la visualización, apunta que los estudiantes apenas usan el razonamiento visual y que se trabaja poco en clase, a pesar de su gran poder para argumentar. Comenta las dificultades que tienen los alumnos para utilizar las imágenes en su razonamiento analítico, encontrando pocos artículos que hayan mostrado evidencias empíricas para sugerir qué aspectos de la instrucción pueden ayudar a los profesores a usar la visualización y qué aspectos podrían ayudar a superar las dificultades y hacer un uso óptimo de la potencia del proceso visual. De las trece grandes cuestiones que plantea para futuras investigaciones sobre visualización destacamos:

- 1.- ¿Qué aspectos pedagógicos son significativos para promover la potencia de la visualización y cuáles evidencian las dificultades de su uso en el aprendizaje de las matemáticas?
- 2.- ¿Qué aspectos culturales de la enseñanza promueven que los alumnos usen pensamiento visual eficaz en matemáticas?
- 3.- ¿Qué aspectos del uso de diferentes tipos de imaginación y de visualización son eficaces en la resolución de problemas de varios niveles?
- 10.- ¿Cuánta visualización debe ser puesta en juego para promover la abstracción y generalización matemática?
- 13.- ¿Cuál es la estructura y cuáles son las componentes de una teoría global de la visualización en educación matemática?

La necesidad de estudios que analicen la instrucción, ya en el contexto geométrico y desde una perspectiva sociocultural, también es recogida por Battista (2007) quien concluye que los estudiantes continúan teniendo dificultades para el aprendizaje de la geometría.

Para buscar investigaciones más recientes sobre la visualización y talento matemático procedimos a realizar una búsqueda sistemática por bases de datos, revistas especializadas, tesis doctorales y actas de congresos de educación matemática.

### 3 Talento y visualización

Consideramos los estudios desde el año 2006 y centramos las búsquedas relativas a talento matemático, visualización y términos afines relacionándolas con otros campos específicos como educación matemática, geometría, test espaciales, entre otros.

Las principales bases de datos consultadas fueron ERIC, UMI, ZDM, TESEO y Dialnet. En cuanto a las revistas analizadas, destacamos las búsquedas realizadas en *Educational Studies in Mathematics*, *Journal for Research in Mathematics Education*, *Enseñanza de las Ciencias*, *Recherches en didactique des mathematiques*, *Educación Matemática*, *Journal of Mathematical Behavior*, *Journal of Mathematics Teacher Education*, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, *Mathematics in School*, y *Journal of the Association for Institutional Research*. Además, consultamos revistas especializadas en el talento y términos relacionados como *Gifted child today*, *Gifted and talented international*, *Journal of the education of the gifted*, *Gifted child quarterly*, entre otras. De los congresos y reuniones científicas, resaltamos la revisión realizada en las actas de PME, ICME y SEIEM.

De esta revisión, destacamos dos líneas en las investigaciones que relacionan talento matemático y visualización. En la primera situamos los estudios que analizan el uso de la visualización en la realización de determinadas tareas y las dificultades que manifiestan los alumnos con talento al resolverlas. La segunda la determinan los estudios que relacionan diferentes aspectos de la visualización con el rendimiento o habilidad matemática que poseen los alumnos con talento.

De la primera línea (uso de la visualización por alumnos con talento), resaltamos la investigación de Ryu, Chong y Song (2007) relativa a la manifestación de habilidades de visualización y las dificultades en los procesos de visualización. Su estudio le lleva a concluir que todos los estudiantes con talento matemático investigados mostraron habilidad para visualizar la configuración parcial en figuras simples. Sin embargo, sólo un estudiante (de los siete investigados) lo hizo con figuras más complejas en las que se solapaban las líneas y puntos, correspondiente a la habilidad de Percepción de la figura-contexto. Al compararlos con alumnos ordinarios, detectaron que alumnos que mostraban unas excelentes resultados en álgebra o en otros campos de la geometría, tenían dificultades en los procesos de visualización espacial, como los ligados a confundir los lados de un objeto espacial a partir de una representación o reconocer

planos en tres dimensiones a partir de sus representación en dos dimensiones. Concretamente manifestaban dependencia del hecho visual (no veían la perspectiva y la juzgaban a partir de la longitud en la representación plana), se mostraban confusos al distinguir los lados (si eran lados de triángulos o diagonales...) y tuvieron dificultad para imaginar la sección plana de una figura sólida. Las tareas seleccionadas eran relativas a representaciones planas de poliedros en las que los alumnos debían manipular mentalmente sólidos representados en el plano y distinguir sus elementos más relevantes (en distintas perspectivas de un icosaedro se marcaban todos los lados sin señalar las caras ocultas y se les pedía a los alumnos que comparasen longitudes de lados y ángulos). Dos de los siete alumnos mostraron habilidades de visualización y los otros cinco mostraron dificultades en la manipulación mental del objeto representado en el plano.

Las dificultades manifestadas por los alumnos con talento al resolver tareas que implican visualización han sido reconocidas en actividades relativas a generalizar y definir. Lee, Ko y Song (2007) afirman que podrían usarse para detectar el talento actividades que demanden definir conceptos, ya que reconocer las relaciones entre los componentes del concepto y captar sus características fundamentales se utiliza para resolver problemas, generalizar y justificar. En una tarea de trabajo en grupo para construir y definir poliedros regulares, confirmaron que incluso los alumnos talentosos presentaban dificultades cuando tenían que definir un concepto matemático a partir de un único ejemplo.

Con respecto a los estudios que relacionan visualización y habilidad matemática, Rivera (2011) considera que hay evidencias sólidas empíricas que muestran que hay relación significativa entre la habilidad de percepción visual y la habilidad matemática, entre la percepción visual y el rendimiento matemático y entre usar representaciones visuales (dibujos o diagramas) y el éxito en la resolución de problemas matemáticos. Ilustra esta afirmación con los estudios de Kulp *et al.* (2004) que muestran lo significativo de la habilidad visual en el aprendizaje matemático, es decir, una pobre habilidad visual se relaciona con bajo rendimiento en matemáticas. Por lo tanto, la habilidad perceptiva visual, y particularmente la memoria visual, debería ser considerada entre las habilidades que están significativamente relacionadas con el rendimiento matemático.

### 3 Talento y visualización

En esta línea, Gruessing (2011) examinando las relaciones entre rendimiento matemático y habilidades espaciales en alumnos de cuarto grado, encuentra que los alumnos con alta habilidad espacial tienen mayores habilidades matemáticas. Según los resultados, parece que la instrucción en enseñanza matemática tiene un impacto significativamente especial en el desarrollo de las habilidades y concluyen que existe una relación positiva entre habilidades espaciales y habilidades matemáticas. Estos resultados se relacionan con el estudio de Brown y Wheatley (1989) que examinaron las diferencias de conocimiento matemático de alumnos de quinto grado con baja o alta habilidad espacial. Estos autores asociaban un conocimiento más instrumental a las alumnas estudiadas con baja habilidad espacial mientras que las alumnas con alta capacidad espacial poseían un conocimiento más relacional.

En un estudio en estudiantes de 13 a 16 años que participaban en un proyecto de atención al talento matemático en la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, se establecieron relaciones entre las características asociadas al talento matemático y las habilidades y procesos de visualización cuando los alumnos resolvían problemas en contextos algebraicos. Los autores concluyen que la generalización está relacionada con la Discriminación Visual, la organización de la Información con el Procesamiento Visual y la flexibilidad con la Identificación Visual (Jiménez, Rojas y Mora, 2011).

En relación al papel de la imaginación en el razonamiento matemático, Lee, Kim, Na, Han y Song (2007) consideran insuficientes los estudios realizados sobre las tareas y métodos de enseñanza que pueden estimular el razonamiento (inducción, analogía e imaginación) en los niños con talento matemático. En su investigación entrevistan a los alumnos y estudian si utilizan en cada tarea analogías, inducción o imaginación. Las conclusiones basadas en los resultados concretos de los niños (sólo dos dieron las respuestas esperadas) son que no hay una relación clara entre analogía e inducción y que la imaginación da a los alumnos una buena base para desarrollar analogías estructurales para resolver problemas en geometría.

Finalmente recogemos el papel que ocupa la visualización en las investigaciones sobre el talento matemático a partir de una revisión general de 1234 estudios empíricos sobre la superdotación realizada por Dai, Swanson y Cheng (2011). Consideran el desarrollo del talento como uno de los cuatro principales tópicos estudiados (los otros tres son la

creatividad, el rendimiento y la identificación). Ubican 71 investigaciones en el campo de las Matemáticas y 12 en el campo visoespacial. Respecto a los estudios empíricos de desarrollo del talento (107 estudios) hay 16 en el dominio específico de las matemáticas. Concluyen que se necesita más investigación sobre la naturaleza y desarrollo de la superdotación, desarrollando teorías innovadoras para la enseñanza, a través de programas de investigación que estudien la intervención realizada en entornos prácticos.

Hemos resumido en este apartado las investigaciones que tratan la visualización y el talento matemático, bien de una manera relacionada, bien de manera independiente, pero aludiendo a ambos. Del recorrido por las investigaciones anteriores, resaltamos los diferentes criterios utilizados para la medición del talento matemático (rendimiento, habilidad matemática, etc.) y de la visualización (imágenes, resultados en test, habilidades espaciales, etc.). Ilustramos esta variedad con la tabla 3.3 en la que se recogen los estudios en los que se relacionan aspectos relativos al talento matemático y la visualización.

La diversidad de criterios de medición del talento matemático y de la visualización puede ser uno de los factores que explican la diferencia de los resultados obtenidos por las investigaciones. Así puede comprenderse que haya estudios que no detectan conexión entre talento y visualización junto con otros que si la establecen. Entre los primeros, Lean y Clements (1981) señalan que la capacidad visual no influye especialmente en el rendimiento matemático, Krutetskii (1976) concluye que la visualización no constituye una componente necesaria de las habilidades matemáticas y Presmeg (1986a) que los alumnos con talento prefieren métodos no visuales en la resolución de problemas. Los segundos relacionan positivamente la visualización y el mayor rendimiento, como Gruessing (2011), Rivera (2011), Van Garderen (2006), Van Garderen y Montague (2003a).

De esta observación extraemos la importancia de clarificar cuidadosamente qué aspecto se va a medir en la investigación, para situarla en relación a las ya realizadas.

### 3 Talento y visualización

Autor	Medición del talento	Medición de la visualización	Sujetos	Resultados
Krutetskii, 1976	34 alumnos talentosos (éxito en tareas matemáticas)	Utilización de imágenes visuales. Visualización de relaciones matemáticas. Interpretación visual. Ver mentalmente (visualizar la posición de un sólido en el espacio la relación entre sus partes). Imaginación geométrica (interrelación de sólidos, figuras, planos y líneas)	192 sujetos de 6 a 16 años	La habilidad para visualizar relaciones matemáticas abstractas y conceptos espaciales geométricos no es necesariamente una componente en la estructura de las habilidades matemáticas
Presmeg, 1986a	Nominaciones de los profesores (7 talentosos, 27 muy buenos)	Puntuación en un instrumento propio y entrevistas	277 estudiantes de 16 y 17 años	Los alumnos considerados como más brillantes eran casi siempre no visualizadores
Van Garderen y Montague, 2003a)	Test WISC-R (22 alumnos talentosos)	Número de representaciones pictóricas o esquemáticas utilizadas.	66 alumnos de sexto grado	Los alumnos con talento usaban significativamente más representaciones visuales esquemáticas, el tipo más sofisticado. El éxito en la resolución de problemas correlaciona positivamente con el uso de este tipo de imágenes
Van Garderen, 2006	Test WISC-R (22 alumnos talentosos)	Número de representaciones pictóricas o esquemáticas. Número de representaciones visuales utilizadas. Test de habilidad espacial	66 alumnos de sexto grado	Los alumnos con talento puntúan mejor que los demás en las dos medidas espaciales de visualización. El uso de imágenes esquemáticas correlaciona significativamente y positivamente con el alto rendimiento en cada medida de visualización espacial
Lee, Kim, Na, Han y Song, 2007	Alumnos de un programa de talento	Entrevistas y observaciones mientras realizaban las tareas	3 alumnos de 12 años y 3 alumnos de 14 años	La imaginación da a los alumnos una buena base para desarrollar analogías estructurales para resolver problemas en geometría
Ryu, Chong y Song, 2007	Alumnos de un programa de talento	Habilidades de visualización (entrevistas)	7 alumnos con talento (13 y 14 años)	Dos de los siete mostraron características de las habilidades de visualización y los otros cinco mostraron dificultades en la manipulación mental del objeto representado en el plano.

Tabla 3.3: Síntesis de investigaciones que relacionan aspectos relativos al talento matemático y la visualización.

En cuanto a los componentes de la visualización analizados, son más numerosos los estudios relacionados con la imaginaria (Presmeg, 1986a, Lee, Kim, Na, Han, Song, 2007; Van Garderen y Montague, 2003a, Van Garderen, 2006). Si bien encontramos estudios sobre habilidades de visualización no contextualizados en el ámbito del talento matemático (Bishop, 1983; Gutiérrez, 1996) y sobre las habilidades y dificultades manifestadas por los alumnos con talento matemático ante ciertas tareas geométricas (Ryu, Chong y Song, 2007), consideramos necesario investigar sobre el papel de la enseñanza en el desarrollo de las habilidades de visualización (Hershkowitz, 1990; Presmeg, 2006) contextualizándolo en alumnos con talento matemático.

## 3.2 Talento y visualización: Otros aspectos

Hasta ahora hemos realizado el recorrido histórico de las investigaciones que contextualizan la investigación sobre talento matemático y visualización, llegando a la conclusión del interés puesto de manifiesto por los investigadores en diseñar prácticas docentes que promuevan el uso de las habilidades de visualización y faciliten su desarrollo. Esta revisión bibliográfica sobre la relación talento matemático y visualización ha abordado estos dos aspectos de un modo más amplio incluyendo como variables: el éxito en la resolución de tareas, el empleo de imágenes, la utilización de diagramas, la puesta en juego de habilidades, etc. Vamos a continuación a resaltar algunos estudios que aunque de manera directa no han tratado conjuntamente talento y visualización, han tratado sobre alguno de los temas afines a nuestra investigación e ilustran la diversidad de intereses que el talento y la visualización han generado en distintos campos.

### **Talento y visualización: intervención**

Podemos encontrar una amplia variedad de aspectos en los que se han centrado diferentes estudios sobre la atención educativa de alumnos con talento. Señalamos entre otras: elaboración de un cuestionario sobre el rendimiento y las dificultades de alumnos de un proyecto de enriquecimiento (Lambert, 2006), creación de un grupo de discusión

### 3 Talento y visualización

sobre sus expectativas a los retos que le plantea la educación secundaria (Hong, 2007), técnicas para estimular la creatividad (Montgomery, Overton, Bull, Kimball y Griffin, 1999), estudio sobre expectativas, intenciones, estrategias y acciones para afrontar los retos matemáticas encontrados en clase (Tey, 2007), estudio sobre alfabetización visual con temas de visualización guiada o instrucción directa en conceptos de arte (Casey y Wolf, 1989) y una investigación para comparar el éxito matemático, la habilidad de estimación, el uso de estrategias de estimación y la auto-percepción académica entre alumnos con talento y alumnos con dificultades de aprendizaje (Van Garderen, Montague, 2003b). Muchas investigaciones han explorado el papel de distintas técnicas informáticas para mejorar la habilidad espacial en estudiantes en general (Raquel, 2001) y en alumnos con talento (Mack, 1992, 1995; Wheatley, 1983).

La demanda de diseños adecuados para el enriquecimiento curricular de los alumnos con talento es un problema ya sugerido en décadas pasadas (Horowitz y O'Brien, 1986). De las estrategias para la enseñanza que se han señalado como efectivas en alumnos con fuerte capacidad visual (Silverman, 1995) destacamos las siguientes: utilizar recursos visuales y material manipulativo; hacerles descubrir sus propios métodos de resolución de problemas; evitar las rutinas de memorización y los ejercicios de repetición; darles material avanzado, complejo y abstracto en etapas, trabajar en grupos y permitirles que construyan sus representaciones visuales.

Dentro de estos estudios hemos encontrado numerosas actividades para trabajar las habilidades espaciales en las intervenciones. Estas referencias nos ayudan para diseñar el proceso formativo. Entre las actividades destacamos las siguientes:

- Construir formas empleando los Tangrams y estudiar sus propiedades (Dunkels, 1990).
- Resolver puzzles con cubos de madera (Izard, 1990).
- Definir y realizar desarrollos planos y montarlos posteriormente para formar cajas con inscripciones (Lehrer, Jacobson, Kemeny y Strom, 1999).
- Identificar y dibujar sólidos desde diferentes perspectivas (Moses, 1990).
- Realizar construcciones de figuras empleando palitos o cerillas (Noss, Healy y Hoyles, 1997).
- Actividades geométricas de doblado de papel (Bishop, 1983).

- Seccionar y caracterizar figuras tridimensionales (Lawrie, Pegg y Gutierrez, 2002; Gutiérrez, Pegg y Lawrie, 2004).
- Identificar desarrollos imposibles de cubos y reconocer figuras geométricas en dibujos solapados (Stanic, 1990).
- Otras experiencias basadas en apreciar y emplear relaciones geométricas, como la dirección, la orientación y la perspectiva para representar objetos en el espacio (Yackel y Wheatley, 1990), cubos rotados (McKim, 1980), tareas de rotación espacial (Gorgorió, 1998), reconocimiento de figuras en poliedros (Lee, 2005), tareas de localización (Acuña, 2008), tipos de imágenes que se utilizan (Rey, 2006), modelos de triángulos y dibujos a escala (Elgersma, 1990), direcciones más reconocidas en tres dimensiones (Cohen, 2003), clasificaciones para interpretar distintas perspectivas desde las que se dibujan objetos tridimensionales (Gonzato, Fernández y Godino, 2011), etc.

Otro aspecto referido a la intervención es el que compete al empleo de técnicas informáticas, en forma de programas de geometría dinámica y de applets interactivos. A este respecto hay diversidad de investigaciones. En ellas se concluye que mejorar el razonamiento visual y simbólico en matemáticas a través del uso de ordenadores requiere una conexión fuerte y precisa entre el razonamiento y las tareas en el ordenador (Healy y Hoyles, 1999). La diversidad de recursos informáticos y de tareas asociadas genera distintos resultados que no son fáciles de generalizar. Sin embargo, son múltiples los estudios que apoyan el uso de la tecnología para promover y desarrollar el poder visual de los estudiantes (Baccaglini-Frank, Mariotti y Antonini, 2009; Elliott y Hudson, 2000; Guven y Kosa, 2008; Rodríguez, Montiel y Cantoral, 2008; Moustaki y Kynigos, 2010; Mudalay, 2008; Yang y Chen, 2010). Otros estudios han encontrado inconvenientes en la presentación mediante una versión dinámica de un problema geométrico, al apreciar que el modo dinámico visual del problema distraía la atención de los estudiantes y no facilitaba el proceso de resolución del problema (Lavy, 2006). Se ha discutido el uso de los ordenadores en la organización de las clases de los programas de talento matemático (Hersberger y Wheatley, 1980). El ámbito es tan general, que hay que precisar los programas y actividades utilizadas. Con soportes muy específicos, se han desarrollado diferentes investigaciones que apoyan los recursos informáticos estudiados, tanto para favorecer el conocimiento colectivo y la creatividad

### 3 Talento y visualización

en alumnos superdotados (Lin, Chia, Hung y Hsiao, 2009), como para que los alumnos con talento demuestren su originalidad y mayor fluidez y flexibilidad (Hung, Chen, Lin y Tseng, 2007; Hung, Chen y Tseng, 2008).

#### **Talento y visualización: preferencia de método visual**

También son numerosos los estudios sobre qué método (visual o algebraico) prefieren los profesores y los alumnos (Pitta-Pantazi, 2009b; Pitta-Pantazi y Christou, 2010; Presmeg, 2006; Siew, 2007; Zodik y Zaslavsky, 2007). Presmeg (2006) estudia la relación entre los resultados de los alumnos y el tipo visual del profesor y establece muy poca relación entre la visualización matemática de los profesores y su utilización en clase. Presmeg (1986a) afirma que los estudios demuestran que lo más efectivo es el pensamiento ambidiestro (métodos visuales y no visuales). Esta afirmación coincide con los estudios posteriores de Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996) en los que proponen un método alternativo de enseñanza, que combina el método visual con las estrategias analíticas. Otros autores enfatizan la importancia de verbalizar los procedimientos visuales utilizados (Richardson y Stein, 2008; Sgroi, 1990).

El hecho de que los alumnos manifiesten poca disposición a emplear métodos visuales no debe influirnos para juzgar la importancia del papel que juegan las estrategias visuales en la realización de actividades específicas. Si bien, ante la presentación de demostraciones de teoremas visuales y algebraicos, los estudiantes preferían la prueba algebraica (Vinner, 1989), de un estudio que usa problemas de razonamiento analítico de completar datos, se concluye que la mayoría de los alumnos con talento usaban predominantemente el razonamiento verbal, aunque aquellos que usaban el razonamiento gráfico fueron más exitosos en la resolución de problemas (Neria y Amit, 2010).

#### **Talento y visualización: resolución de problemas**

La relación entre talento y resolución de problemas ha sido tratada por muchos autores, abordándola desde diferentes perspectivas, como por ejemplo mediante la invención de problemas (Ellerton, 1986), estudiando las estrategias utilizadas (Benavides, 2008; Benito, 1996; Heinze, 2005), analizando cómo se procesa la información (Span y Overtoom-Corsmit, 1986), utilizando la resolución de problemas para identificar a alumnos con talento matemático (Neider e Irwin, 2001) y estudiando la relación entre resolución de problemas y creatividad de los alumnos (Yuan y Sriraman, 2011).

También existe gran diversidad de estudios relacionados con la resolución de problemas que incluyen de algún modo la visualización. Gorgorió (1998) estudia las estrategias de resolución utilizadas; Plasencia (2000) analiza el uso que hacen los alumnos de las imágenes mentales; Hershkowitz (1989) examina los ejemplos prototípicos; Presmeg estudia la relación entre el pensamiento visual y el uso metafórico de las imágenes, (Presmeg y Balderas-Cañas, 2001) y el condicionamiento del entorno cultural (Presmeg, 1989); Kopelman (1994) investiga la influencia de la forma de presentar los ejercicios de geometría espacial y la visualización sobre los métodos de trabajo y el rendimiento de los sujetos; Orton (1997) estudia el reconocimiento de figuras planas mediante la manipulación mental y Lee y Pang (2007) analizan el uso de la visualización para comprender contenidos geométricos.

La importancia concedida a la resolución de problemas nos lleva a considerar que en nuestra intervención educativa debemos utilizar tareas que incluyan la resolución de problemas para promover la visualización en alumnos con talento matemático.

#### **Talento y visualización: estudios cerebrales**

En el ámbito psicológico, algunos estudios persiguen localizar los aspectos relativos a talento matemático y visualización en los correspondientes hemisferios cerebrales (Alonso y Fuentes, 2001; Dehaene, 1997; Hubbard, Piazza, Pine y Dehaene, 2005; McGee, 1979; Silverman, 1995; Tall, 1991). Investigaciones recientes han analizado el funcionamiento cerebral de los alumnos con talento al realizar tareas del test de Raven.

### 3 Talento y visualización

En estudios realizados en el departamento de bioingeniería de la Universidad Carlos III de Madrid, se aprecia que las diferencias entre el grupo de alumnos con talento y el grupo de control sólo aparecía en la realización de tareas con dificultad y la extensión en el área fronto-parietal era mayor en los alumnos con talento, especialmente en el hemisferio derecho (Desco *et al.*, 2009 y Desco *et al.*, 2011). Comparados con los alumnos promedio, los adolescentes con talento mostraban un mayor incremento en las activaciones asociadas a las tareas que implicaban razonamiento fluido, imaginación mental y memoria de trabajo. La especialización funcional del talento matemático ha sido descrita como una combinación de un mayor activación del hemisferio derecho y más bilateralización en los estudios en el departamento de desarrollo humano y estudios de la familia, de la Universidad de Texas (O'Boyle *et al.*, 2005, Prescott, Gavrilescu, Cunnington, O'Boyle y Egan, 2010). En relación al aprendizaje, Freed, Kloth y Billett (2006) detectaron en sus estudios que un elevado porcentaje de alumnos superdotados son aprendices visuales espaciales. Otros estudios han analizado la relación entre el uso de la percepción visual de los alumnos y las teorías de Piaget sobre el pensamiento lógico formal (Olson, 1978) y estados del cerebro que correlacionan con diferentes aspectos de la percepción basada en imágenes y el razonamiento geométrico (Campbell *et al.*, 2009).

#### **Visualización y talento: dificultad de medición**

Queremos ilustrar la dificultad que se presenta para medir las habilidades de visualización y su relación con el talento matemático con algunas investigaciones. Wheatley (1998) para contrastar la afirmación de Friedman (1995) de que es débil la relación entre habilidad espacial y el éxito matemático, utiliza el Wheatley Spatial Ability Test (test de rotaciones mentales) y un test matemático para encontrar una alta relación entre el uso de imágenes y la resolución de problemas. En relación a la utilización de test visuales para la identificación del talento matemático, Díaz, Sánchez, Pomar y Fernández (2008), del departamento de Psicología clínica y Psicobiología, de la Universidad de Santiago de Compostela, parten de los alumnos presentados al proyecto ESTALMAT en Galicia, llegando a la conclusión de que es significativa y bastante elevada la correlación entre los factores espacial y de razonamiento del PMA y

la eficiencia en la resolución de los problemas. Stumpf (1998) y Stumpf y Eliot (1995), de la Universidad Johns Hopkins de Baltimore, Maryland, señalan diferencias relacionadas con el género en las puntuaciones de los test de habilidad espacial para la población de alumnos académicamente talentosos.

A veces los elementos de medición que explican el comportamiento de los estudiantes aportan información poco específica para caracterizar a los alumnos con talento. En relación a los patrones de pensamiento de lo superdotados, Mason (1989) afirma que la teoría de los niveles de van Hiele no parece describirlos bien. En una investigación en geometría con 43 estudiantes de sexto a octavo grado diagnosticados superdotados, empleando la teoría de los niveles de Van Hiele, obtiene que la mayoría de los sujetos permanecen en el nivel 0. Sólo el 7% estaban en el nivel 2 y el 23% de los sujetos exhibieron patrones de pensamiento propios de un nivel más alto sin tener conseguido al menos uno de los niveles previos.

Independientemente de los instrumentos utilizados, resaltamos el papel que puede tener la visualización para la identificación del talento. De los aspectos señalados en el departamento de educación matemática de la Universidad de Chipre (Pitta-Pantazi y Christou, 2009a), la visualización es una componente importante como habilidad natural y como característica específica de las tareas matemáticas.

#### **Visualización y talento: finalidad**

En cuanto a la finalidad de los estudios sobre visualización encontramos aportaciones diversas. Algunos autores sugieren medir y desarrollar la visualización por las implicaciones educativas y vocacionales que pueden tener en los estudiantes de secundaria y los jóvenes adultos, ya que las diferencias individuales en estos atributos son importantes para identificar, educar y orientar. Shea, Lubinski y Benbow (2001), en un estudio a lo largo de 20 años, afirman que los jóvenes talentosos con una fuerte habilidad espacial respecto a la habilidad verbal estaban más interesados en el campo de las ciencias matemáticas, ingeniería y computación. En un estudio de características similares, Webb, Lubinski y Persson (2007) concluyeron que existe correlación entre habilidad espacial alta y los logros en el estudio de estas carreras.

### 3 Talento y visualización

En los 60 y 70, se llevaron a cabo múltiples investigaciones sobre pensamiento espacial en geometría, geografía, arte y otras áreas con alto componente geométrico (Gutiérrez, 1996). Actualmente se investiga el papel de la visualización en otros campos, como por ejemplo el dominio de conceptos geométricos y habilidades espaciales en la utilización de modelos tridimensionales, simetrías y rotaciones en mineralogía (Ozdemir, 2010). La visualización está presente en numerosos estudios sobre aprendizaje en matemáticas como: la interpretación geométrica de las fracciones (Clements y Del Campo, 1989), las operaciones multiplicativas (Kaput, 1989), la interpretación de representaciones gráficas (Clement, 1989), la transición de representaciones al trabajar con integrales (Sevimil y Delice, 2010), el concepto de función (Lowenthal y Vandeputte, 1989), la función inversa (Alson, 1989), la composición (Konvisser, 1989) e incluso para la comprensión del álgebra abstracta (Ioannou y Nardi, 2009).

#### **Talento y visualización: razonamiento matemático, definición, argumentación, y resolución.**

La importancia de la instrucción en aspectos relativos al razonamiento no sólo se ha resaltado en la atención de los alumnos con talento (NCTM, 2000). Se demanda que los programas de enseñanza de todas las etapas capaciten a todos los estudiantes para: reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas; formular e investigar conjeturas matemáticas; desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones; y elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración. Específicamente en el ámbito geométrico, se proponen experiencias que vayan más allá de la geometría estándar, como formular definiciones, hacer conjeturas y argumentos, resolver problemas y revisar pruebas originales (Battista, 2007). Diversos estudios han abordado la forma en que los alumnos con talento afrontan tareas que implican razonamiento matemático explícito. En este apartado vamos a examinar las investigaciones que afrontan tres tipos de razonamiento, que interesa poner en juego en los procesos formativos con alumnos con talento, la definición, la argumentación y la resolución.

**DEFINICIÓN:** Estudios en alumnos con talento han subrayado la importancia de que los alumnos comprendan la necesidad de utilizar definiciones precisas, desarrollando programas para que en los alumnos creciera la necesidad de definir términos, decidir sobre los términos definidos e identificar factores para determinar una conclusión (Yim, Chong, Kwon y Song, 2007; Yim, Chong, Song y Kwon, 2008). Otras investigaciones han detectado conflictos entre la definición formal y los ejemplos típicos para el concepto (Vinner, 1991).

**ARGUMENTACIÓN:** Gutiérrez (2006) considera tres facetas al organizar las clases para hacer progresar la habilidad de los alumnos para hacer demostraciones: distinguir las funciones de las demostraciones (explicación, descubrimiento, convicción o verificación, reto intelectual, sistematización, comunicación), examinar las concepciones usuales de los estudiantes (qué piensan los estudiantes sobre la necesidad de una demostración) y los tipos de demostraciones (empíricas y deductivas). Diferentes estudios han indagado en el uso de diferentes elementos de argumentación por parte de los alumnos con talento. Seo (2007) estudia el conocimiento intuitivo de los contraejemplos. Yim, Song y Kim (2008) las estrategias utilizadas para resolver los conflictos presentados entre el teorema y los contraejemplos. Kim, Lee, Ko, Park y Park (2009) examinan las tendencias al generalizar los objetos en forma de diagrama, y en (Park, Koo, Lee y Lee, 2011), la interpretación de diagramas y relaciones con las suposiciones injustificadas. Wen y Leu (2009) investigan sobre la utilización de analogías y diferencian la validez de las explicaciones de alumnos con talento respecto a otros alumnos. Es importante reflexionar sobre la validez de una demostración y motivar las conjeturas y generalizaciones (Davis y Hersch, 1989) y esta reflexión puede ser utilizada para desarrollar las situaciones problemáticas (Safuanov, 2007): el profesor construye la situación problemática, pero los alumnos independientemente deben formular hipótesis, encontrar soluciones y comprobarlas.

En los estudiantes con talento se han detectado que ponen en marcha justificaciones, generalizaciones y formalizaciones matemáticas de cierto nivel (Sriraman, 2004). En el proceso de formalización, se ha encontrado diferencias entre la justificación empírica y formal basadas en la diferencia de tipo de razonamiento, ya que la formal va más lejos que la experiencia actual y considera métodos más generales y formales (Lee, Choi, Ko, Kim y Song, 2007). A pesar de que los alumnos con talento del estudio de Kwon y

### 3 Talento y visualización

Song, (2007), tenían confianza en sus habilidades para resolver pruebas matemáticas y una idea relativamente equilibrada acerca del papel de las demostraciones, fallaron claramente al distinguir entre evidencia empírica y prueba matemática. Thornton (2001) plantea sugerencias para ayudar a los estudiantes a ser pensadores visuales más efectivos, recomendando distinguir entre un caso especial, un caso general y un contraejemplo al explicar las demostraciones geométricas. Posteriormente les pide que razonen sobre la validez del caso especial, si se mantiene en el caso general y por qué falla en un contraejemplo. Lee (2005) señala que para desarrollar el razonamiento geométrico, se necesita una amplia experiencia en conjeturar, comprobar y entonces verificar de forma matemática. En un estudio con estudiantes de bachillerato se apreció que sólo el 13% usaba una prueba visual mejor que una algebraica para probar un hecho en clase o en un examen (Harel y Dreyfus, 2009). En los estudios de Kageyama (2009), se apreció que la visualización es una de las formas de justificación pragmática, ya que los estudiantes que pueden “ver” y verificar el resultado del pensamiento, tienden a considerar válido su razonamiento.

**RESOLUCIÓN:** En cuanto a la resolución de tareas, consideramos importante la selección de actividades que faciliten el uso de la visualización. Ho (2008b) partió de problemas que requieren para resolverlos alto nivel de visualización, llegando a distinguir distintos roles que desempeña en ellos la visualización. La más elemental es la necesaria para comprender el problema, le sigue la que se requiere para tener oportunidades para trabajar en una versión más simple del problema, y la precisa el ver las conexiones con otros problemas relacionados. La visualización también puede ser una herramienta para comprobar la solución, o para dirigir a los resolutores a estilos de aprendizaje individual; la visualización puede ser un sustituto para el cálculo, o permitir transformar situaciones en formas matemáticas. En otra investigación, consistente en un estudio del caso de una alumna con talento que durante varios cursos resolvía los mismos problemas que exigían un alto grado de visualización, se detectó que aumentó su preferencia por los métodos no visuales: el primer año resolvió los seis problemas usando un método visual mientras que en el último año sólo lo hizo en uno de ellos (Ho, 2008a).

#### **Talento y visualización: papel en los informes educativos**

El estándar de geometría del NCTM señala que los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes a utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas.

De una manera muy general podemos examinar los resultados referentes a visualización y rendimiento obtenidos en algunos informes educativos (OCDE, 2004; 2005). En el informe Pisa 2003 la visualización no se analizaba individualmente. De manera convencional, la visualización está estrechamente relacionada con el bloque temático de geometría. Es llamativo el bajo porcentaje de alumnos que alcanza el máximo nivel en la escala Espacio y Forma. En España el porcentaje de alumnos de alto nivel es muy pequeño (el análisis de los porcentajes puede justificar la necesidad de trabajar con estos alumnos).

Sólo dos de los problemas liberados referentes al contenido Espacio y forma hacen alusión a la visualización y se limitan a desarrollos planos de cubos e identificación de las caras correspondientes (INECSE, 2005). Solamente el 5% de los alumnos pueden realizar tareas del nivel 6 (máximo) en la escala espacio y forma. En España el porcentaje de alumnos nivel 5 y 6 en espacio y forma es muy pequeño. Una cuarta parte o más no llega al nivel 2. Sólo el 1.6% alcanzan nivel 6 y el 6% el nivel 5. Si comparamos con los resultados obtenidos en las otras dimensiones del estudio, solamente son alcanzados en menor proporción los niveles máximos en la escala de incertidumbre: cambio y relaciones (2% en nivel 6 y 7.7% en nivel 5), cantidad (2.6 % en nivel 6 y 8.8 en nivel 5) e incertidumbre (1.5 % en nivel 6 y 5.9 en nivel 5).

En relación al informe Pisa 2009, Rico y Blanco (2011) exponen que los resultados de los niños españoles son comparables con los de una mayoría de países de la UE, cuyos promedios se encuentran en el nivel 3 de rendimiento, pero también ponen de manifiesto una menor atención por los alumnos con talento. Bolívar (2010), respecto a los resultados obtenidas en Pisa 2009 en relación al porcentaje de alumnos en los niveles superiores, subraya que sólo un 3% de los estudiantes españoles se situó en los dos niveles superiores (el porcentaje en el de mayor excelencia fue del 0%). Este autor considera que la máxima equidad no está reñida con la excelencia. Una política de

### 3 Talento y visualización

calidad en educación debe vigilar, paralelamente, ambos extremos: atender a estudiantes cada vez más diversos para que consigan el nivel establecido de éxito para todos, y promover decididamente el máximo desarrollo de los estudiantes.

#### 3.2.1 Errores y dificultades

Consideramos los errores y dificultades registradas como una herramienta que ayuda en el diseño, organización y gestión de unidades didácticas en el área de matemáticas (Rico *et al.*, 1997). Para el enriquecimiento curricular en el contexto geométrico, revisamos algunas de las dificultades y errores encontrados para la resolución de distintas cuestiones relacionadas con las transformaciones geométricas (Dickson, Brown y Gibson, 1991), los análisis de errores en demostraciones geométricas (Dubnov, 1994), los estudios sobre los errores y estrategias de los alumnos (Jaime y Gutiérrez, 1996) y las dificultades relacionadas con la exteriorización de imágenes mentales (Clements, 1981, 1982). En un primer análisis general, encontramos diferentes causas que originan las dificultades de comunicación de los argumentos visuales en el espacio, como la poca familiaridad de los alumnos de educación obligatoria con los conceptos y la terminología utilizada en los conceptos espaciales, la dificultad intrínseca que comportan los razonamientos geométricos, que lleva a estos alumnos a incorporar movimientos de su propio cuerpo o a hacer referencia a objetos del entorno, con la consiguiente pérdida de generalidad necesaria en el razonamiento, junto con la ausencia de términos y hábitos para expresar verbalmente los procesos mentales que utilizan en sus razonamientos y para describir las representaciones visuales utilizadas (Ramírez y Flores, 2011).

Para delimitar los errores y dificultades a considerar en el diseño de intervención y en la actuación de los estudiantes, contrastamos los detectados en la prueba piloto (Ramírez, Flores, Castro; 2010a) con los referenciados en la revisión bibliográfica. El estudio de los errores y las dificultades puede favorecer una mejor comprensión del uso que los estudiantes hacen de la visualización (Battista y Clements, 1996), pero además la identificación de los errores de aprendizaje proporciona al profesor una base cognitiva para tomar decisiones e intervenir en el aula (Rico, 1993).

#### **Error al relacionar plano y espacio: Falsa analogía plano-espacio**

Al realizar la prueba piloto del presente estudio (Ramírez, Flores y Castro; 2010a) detectamos intervenciones puntuales en las que los alumnos confundían propiedades en el plano con las correspondientes en el espacio. Como en el experimento de enseñanza se emplearán sesiones dedicadas a geometría plano y del espacio, cabe esperar que los alumnos manifiesten este error al establecer falsas analogías. En investigaciones realizadas en universidades coreanas, en las que se estudiaron alumnos de un programa de atención al talento matemático, se detectaron errores al establecer analogías entre las propiedades del plano y del espacio, basándose en tareas de generalización, como la de aplicar a un tetraedro propiedades similares a la suma de los ángulos de un triángulo (Lee, Kim, Na, Han y Song, 2007).

#### **Error al generalizar: No discutir todos los casos posibles y Razonar limitándose a ejemplos concretos**

El uso de imágenes concretas, aunque puede aportar ventajas al alumno, puede hacerle perder las propiedades del caso general (Presmeg, 1994). La imaginación supone tres procesos: construir una imagen, representar la imagen y transformar la imagen. La naturaleza de la imagen depende de la intención y de la situación bajo la que se construye por lo que el individuo puede formar una imagen mental rígida que puede limitar su razonamiento (Wheatley, 1998).

Los peligros asociados a la generalización de una imagen concreta han sido señalados por varios autores y sintetizadas por Bishop (1989) y Presmeg (1999) en las siguientes apreciaciones:

- 1.- Lo concreto de una única imagen puede asociarse a detalles que son irrelevantes o que pueden introducir detalles falsos.
- 2.- Una imagen estándar de una figura puede generar un pensamiento poco flexible que impida reconocer un concepto en otra representación no estándar.

### 3 Talento y visualización

3.- Una imagen puede ser persistente y puede impedir la apertura de nuevas representaciones más provechosas.

4.- Se aprecia repetidamente que la imaginación, que no está asociada a un proceso de pensamiento analítico riguroso puede ser de poca ayuda, especialmente cuando no está bien estructurada.

Son numerosas las investigaciones relativas al error que consiste en razonar sobre un caso limitado. Zodik y Zaslavsky (2007) observan que la utilización de una determinada imagen prototípica puede llevar a una resolución incorrecta. Hershkowitz (1989) indica que los elementos visuales podrían limitar la imagen del concepto. Sheffet y Bassan-Cincinatus (2009) concluyen que el estudio de un caso particular puede originar intuiciones falsas. Biza, Nardo y Zachariades (2008; 2009), destacan que el alto poder persuasivo de la imagen, aunque sea incorrecto, puede dar lugar a que se desestime la necesidad de verificación.

En estudios sobre cómo influye el tipo de instrucción sobre el aprendizaje de conceptos geométricos que dependen del dibujo, se detectaron que los alumnos tenían dificultades para aprender a abstraer formas y relaciones de objetos concretos y a usar las propiedades esenciales, eliminando las no esenciales de los dibujos (Zykova, 1969). En estudios de alumnos con talento matemático relativos a tareas para definir el concepto de poliedro regular se detectan errores ligados a que los alumnos se centran en ejemplos concretos (Lee, Ko y Song, 2007). Los alumnos más visualizadores pueden no ser conscientes de las dificultades potenciales relacionadas con la visualización y la generalización (Presmeg, 2006). Muchos aspectos pueden ser tratados para detectar los errores en el proceso de generalización, como la forma de expresar la generalización, la identificación de patrones, la relación entre los casos particulares y la organización de los mismos (Stacey, 1989).

En nuestro estudio previo (Ramírez, Flores y Castro; 2010a), observamos que los alumnos del programa ESTALMAT razonaron visualmente apoyándose en ejemplos concretos limitados. Estos ejemplos pueden provenir tanto de imágenes como de objetos particulares. Aunque podríamos englobar ambos errores en la falta de generalidad, consideramos necesario diferenciar el error que se manifiesta al no discutir todos los

casos posibles, que identificamos con falta de exhaustividad en la argumentación visual. Este error se manifiesta cuando el alumno no ha distinguido todos los resultados posibles necesarios para razonar sobre “casos generales”.

#### **Errores en los contenidos de enriquecimiento: Confundir los elementos matemáticos de razonamiento y Confundir los elementos de contenido matemático**

En un curso que pretende el enriquecimiento curricular, tanto en contenidos como en elementos de razonamiento matemático, es esperable que en determinadas actividades los alumnos cometan algún error relativo a ellos, bien por desconocimiento o por un uso incorrecto.

Los alumnos de enseñanza obligatoria pueden no estar habituados a emplear (y a identificar cuando lo hacen) contraejemplos, conjeturas, relaciones de dependencia específica (como las condiciones necesarias y suficientes, entre otras). El razonamiento a partir de conjeturas basadas en aspectos visuales puede llevar a los alumnos a afirmaciones que no son ciertas en todos los casos (Meavilla, 2005). Conjeturar sin demostrar puede ser debido a una incompleta coordinación entre la aprehensión discursiva y la aprehensión operativa en la resolución de problemas. El trabajo de Torregrosa, Quesada y Penalva (2010) concluye que el razonamiento configural permite al estudiante dar una respuesta al problema aceptando las conjeturas mediante percepción simple y expresando la solución mediante el lenguaje natural, sin validar las relaciones ni las afirmaciones que se emplean.

Diferentes estudios han detectado errores en relación a las propiedades espaciales de los elementos matemáticos que van a ser tratados en las sesiones. Se han puesto de manifiesto que los estudiantes prefieren determinadas direcciones de las rectas en el espacio (horizontal-vertical, perpendicular-paralela), lo que se convierte en dificultad para buscar otras posibles direcciones más idóneas para resolver los problemas (Cohen, 2003). También se ha detectado una comprensión pobre de los giros y de la simetría especular y dificultades en la descripción de las transformaciones aplicadas a figuras congruentes (Lee y Pang, 2007).

### 3 Talento y visualización

En estudios con alumnos con talento realizados en Corea, se apreció que los alumnos tenían dificultades en los procesos de visualización espacial, en concreto confundían la posición de los lados del sólido a partir de su dibujo y no siempre reconocían la posición de los planos en la representación plana del icosaedro al señalarlos en el dibujo. Los autores interpretan que los alumnos manifestaban dependencia del hecho visual (no ven la perspectiva y lo juzgan por la longitud en la representación plana), se mostraban confusos al distinguir los lados (si eran lados de triángulos o diagonales...) y tuvieron dificultades para imaginar la sección de la figura sólida (Ryu, Chong y Song (2007). También en el ámbito de la resolución de problemas, los alumnos con talento cometen distintos tipos de errores como: conmutar los datos, cambiar de estructura, invertir la operación, omitir una operación, cambiar el significado de una relación y emplear incorrectamente una estimación (Benavides, 2008).

#### **Dificultades para la comunicación de las argumentaciones visuales.**

Además de las dificultades propias de los contenidos geométricos, Battista (2007) señala algunas complicaciones para comprender el razonamiento espacial, como las basadas en la influencia de la percepción, la captación de diferencias entre los diagramas y los objetos que representan (generalización) y dificultades con la utilización de diagramas y dibujos.

En determinados contextos, el análisis de las dificultades se ha hecho desde la perspectiva de la percepción visual y se ha focalizado en tres fases sucesivas: organización, reconocimiento y representación (Kaput, 1989). Es en la fase de organización en la que las habilidades visuales indicadas por Hoffer y Del Grande se utilizan para que las formas y los objetos sean extraídos desde la escena visual, mientras que el proceso IFI de Bishop podría ser relacionado con las fases de organización y reconocimiento. Ejemplos de dificultades encontradas en algunos estudios son las ligadas a la descomposición de un figura para inferir propiedades matemáticas en la geometría axiomática, la complejidad para distinguir en una configuración las características visuales que son relevantes y la falta de habilidad para ir más allá de la

percepción visual de una figura geométrica que genera una primera impresión (Gal y Linchevski, 2010).

A estas dificultades relativas a la percepción visual, se le añade una dificultad relativa a la comunicación de las argumentaciones visuales. Uno de los factores señalados por Presmeg (1986) para explicar la reticencia de los sujetos en el uso de la visualización es que la enseñanza enfatiza el método no visual para la comunicación de ideas. En los profesores es común la creencia de que se requiere más tiempo para hacer argumentaciones visuales y que se pueden encontrar limitaciones en el uso de la visualización al utilizar determinadas imágenes. En concreto el uso de imágenes estándares puede conducir a errores, mientras que emplear imágenes concretas puede hacer perder detalles generales del problema (Orton y Orton, 1994; Presmeg, 1992). Estas creencias, que están extendidas entre los profesores, contrastan con la variedad del razonamiento visual utilizado por ellos, por lo que afrontar la visualización en cursos de formación de profesores podría permitirles ser más exitosos si se les hace conscientes de las dificultades de visualizar (Saglam y Bulbul, 2011).

Para analizar dificultades relativas a la comunicación, hemos planteado sesiones de enriquecimiento que comportan argumentaciones visuales, en las que esperamos afrontar y observar dificultades relacionadas con la utilización de una terminología adecuada, la necesidad de recurrir a apoyos gestuales o a utilizar objetos del entorno, y la forma de verbalizar los procesos mentales utilizados en los razonamientos y de describir las representaciones visuales que utilizan los alumnos.

#### **Dificultad en la terminología**

En investigaciones relacionadas con objetos tridimensionales y sus representaciones bidimensionales se ha detectado la dificultad para comunicar con éxito la información visual (Hershkowitz, 1990). El desconocimiento de la terminología adecuada y el uso del lenguaje no-convencional puede tener implicaciones en la forma en que se interpretan las figuras por lo que los alumnos debería practicar usando frecuentemente representaciones verbales para desarrollar fluidez conversacional. El rendimiento de los estudiantes en ítems que usan términos verbales de visualización (por ejemplo, arriba,

### 3 Talento y visualización

cara, vistas anteriores, etc.) pueda ser comprometido por el uso de un lenguaje no convencional más que por falta de cognición visual (Sack y Vazquez, 2008). En algunos estudios se han detectado errores de comunicación relacionados con el uso de códigos verbales y gráficos, como los errores relacionados con el uso de códigos verbales que llevaban a nombrar las partes de los objetos usando palabras de la vida diaria, o correspondiente a la geometría 2D (por ejemplo lado en vez de cara, cuadrado en vez de cubo), y usar expresiones ambiguas o expresiones incorrectas referidas a la posición o el movimiento del objeto (Gorgorió, 1998).

#### **Dificultad en la necesidad de utilizar movimientos o elementos del entorno**

Presmeg (1985) llamó “imágenes cinestésicas” a aquellas que involucran alguna actividad muscular (Blanco, 2010). Si bien tanto el uso de modelos concretos y el uso de un componente móvil (como usar el brazo, el dedo o el cuerpo en movimiento) han sido aspectos señalados para facilitar el pensamiento visual (Presmeg, 1999), pueden convertirse en una dificultad si suponen una restricción en la comunicación de ideas visuales cuando los sujetos no puedan apreciar los gestos del emisor. Pero también es origen de dificultad cuando crean una dependencia de la utilización de movimientos de su propio cuerpo o al tener que hacer alusiones a objetos concretos del entorno. Utilizar objetos concretos y emplear el cuerpo pueden ser elementos complementarios para razonar sobre tareas espaciales, pero el hecho de poder prescindir de ellos puede implicar un mayor dominio de la argumentación visual.

En un estudio en el instituto Max Planck de Psicolingüística, sobre los movimientos de las manos producidos en situaciones de resolución de problemas en tareas de visualización espacial tales como la rotación y las tareas de doblado de papel, encontraron que los participantes gesticulaban con más frecuencia cuando tenían dificultades al resolver problemas. Los resultados indican que cuando las personas tienen dificultades en resolver problemas de visualización espacial, espontáneamente producen gestos para ayudarse, gestos que pueden mejorar el rendimiento. Cuando resuelven más problemas, los aprendizajes espaciales proporcionados por los gestos empiezan a interiorizarse y la frecuencia de gesticulación disminuye (Chu y Kita, 2011).

La influencia de una ayuda visual en el proceso de resolución de problemas espaciales está relacionada con la naturaleza de las operaciones mentales. Si bien el disponer de un objeto concreto puede facilitar la argumentación, cuando el sujeto es incapaz de construir conscientemente un camino para la solución, la percepción del objeto no le permite descubrir las relaciones espaciales para resolver el problema (Gurova, 1970).

#### **Dificultad para verbalizar los procesos mentales**

Una dificultad añadida en el estudio de los procesos con imágenes mentales, es expresarlos verbalmente. Los alumnos deben verbalizar cuando visualizan y visualizar cuando verbalizan (Sgroi, 1990). En actividades de comunicación verbal de elementos visuales entre compañeros, Gutiérrez (1998b) detectó la aparición de ambigüedades en las descripciones y que los participantes cometían errores derivados con la falta de conciencia de sus operaciones mentales. En su estudio, Diezman y Lowrie (2009) apreciaron dificultades debidas al lenguaje utilizado para explicar sus razonamientos.

#### **Dificultad para describir las representaciones visuales**

En cuanto a las representaciones gráficas utilizadas, Gutiérrez (1998b) señala algunas dificultades en el uso de representaciones. Por ejemplo, en las tareas de copiar un dibujo en perspectiva se demuestra que la principal dificultad no es sólo de tipo perceptivo, sino también cognitiva, pues muestran carencias de habilidades de reconocimiento de posiciones en el espacio y de relaciones espaciales. Los sujetos mostraron dificultades al usar figuras imaginarias y en las operaciones que requerían realizar una asociación mental entre un resultado y una configuración geométrica no indicada en las condiciones del problema. En un estudio realizado en la Universidad de Chipre con alumnos de primaria, se observó que no comprendían la naturaleza tridimensional de los objetos a partir de sus dibujos bidimensionales y no podían conceptualizar los convenios necesarios para dibujar e interpretar representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales (Pittalis, Mousoulides y Christou, 2009; Pittalis y Christou, 2011).

## 3.3 Valoración de la revisión bibliográfica

La primera apreciación de la revisión bibliográfica es que no hay estudios de amplio espectro que relacionen talento matemático y visualización. Hay numerosos estudios que aluden, entre otras, a estas dimensiones de estudio. El estudio de Krutestkii (1976) se centra en alumnos que no están diagnosticados como con altas capacidades, generando unas conclusiones inquietantes sobre un pobre papel de la visualización en los alumnos con talento matemático.

Consideramos, por tanto, que no está consensuado en las investigaciones el papel que desempeña la visualización en el proceso de resolución de determinadas tareas matemáticas y por lo tanto en el talento matemático. La principal dificultad se centra en la variedad de dimensiones estudiadas, desde la caracterización de los niños con talento, a las dimensiones de la visualización. Por lo expuesto anteriormente, consideramos necesario investigar las habilidades visualizadoras de los alumnos distinguiendo entre las capacidades que poseen y las manifestaciones que ponen en juego en un proceso de enseñanza. Las dificultades de medición de la visualización se presentan en dos sentidos: por un lado la correcta selección de test e instrumentos que midan las habilidades requeridas y por otro la concreción de los elementos de investigación necesarios para recoger las manifestaciones de la visualización en tareas específicas, especialmente el rendimiento ante tareas de resolución de problemas, aspecto ampliamente trabajado en la bibliografía consultada.

Independientemente de la relación encontrada entre rendimiento matemático y visualización, muchos autores recogen la necesidad de investigar el papel que juega la instrucción visual en el posterior uso de la visualización de los alumnos al enfrentarse a determinadas tareas, ya que está totalmente justificado el papel que ocupa la visualización en las tareas de matematización, y por lo tanto, debe formar parte de la atención de alumnos con talento matemático.

En cuanto al enriquecimiento curricular, está justificada su contextualización en entornos geométricos para favorecer el uso de la visualización, siendo la geometría el

campo en el que la visualización adquiere un papel más relevante. Guillén (2010) considera interesante investigar para contestar a estas preguntas: ¿Cómo se relaciona el nivel de la habilidad espacial de los estudiantes con el rendimiento en tareas geométricas? ¿Qué subcomponentes de las habilidades espaciales predicen con mayor probabilidad el rendimiento de los estudiantes en tareas que implican figuras geométricas?

Concretamente, en la literatura de investigación se detecta la necesidad de emprender el diseño de prácticas docentes que favorezcan el aprendizaje de contenidos geométricos y el desarrollo de las habilidades de visualización. La selección del estudio de las habilidades en lugar de otros elementos que componen visualización viene determinado por la intención de desarrollar el sentido espacial, entendido como elemento de competencia matemática. Las habilidades de visualización desempeñan un papel principal en la componente del sentido espacial relativa a la *habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas*. Un interés particular de esta investigación que justifica el estudio de las habilidades de visualización viene dado por su conexión con el talento. Si los alumnos con talento matemático son aquellos que poseen unas características especiales que les permiten un mayor éxito en la realización de tareas matemáticas y, como hemos señalado, las habilidades de visualización forman parte importante en este proceso de resolución, es interesante analizar su comportamiento al enfrentarse a situaciones de enseñanza que impliquen un alto componente visual.

Hemos apreciado una amplia bibliografía en relación a las dificultades y errores de los estudiantes al afrontar las tareas de visualización. Examinar qué errores cometen y cuáles dificultades se presentan en los cursos de formación, puede darnos una idea más precisa de las habilidades de visualización, además de servirnos para caracterizar las tareas de enseñanza puestas en juego. Por tanto las dificultades y errores de visualización se constituyen en herramientas para el diseño de la intervención y el estudio del desarrollo de visualización.

En conclusión, en la investigación sobre las cualidades visualizadoras de los alumnos con talento matemático, hemos de tomar en cuenta sus capacidades y cómo las ponen en juego. Para estudiar cómo utilizan las habilidades visualizadoras hemos diseñado un

### **3 Talento y visualización**

proceso formativo tomando como variables el rendimiento en la realización de tareas geométricas y las habilidades de visualización, y se estudia sistemáticamente la manifestación de estas habilidades, los errores y dificultades encontradas a lo largo del proceso formativo en el contexto de un programa de enriquecimiento curricular.

## **4 Metodología de investigación**

En este capítulo se comienza por definir el problema de investigación y los objetivos. Posteriormente se describe la metodología de investigación utilizada para dar respuesta a las preguntas y objetivos. En el diseño de esta investigación distinguimos dos apartados principales: por un lado, el procedimiento y los elementos utilizados para evaluar la capacidad visual de los sujetos mediante herramientas psicométricas y por el otro la elección del experimento de enseñanza como un paradigma de investigación adecuado a nuestros propósitos. Describimos los sujetos que han participado en nuestro estudio, los instrumentos y las variables de investigación, mostrando el papel que las entrevistas personales han ocupado en la toma de datos.

### **4.1 Preguntas, problema y objetivos de la investigación**

Tal como hemos apreciado en el marco teórico y la revisión de la literatura de investigación, los alumnos con talento matemático emplean escasamente sus habilidades visualizadoras (Kruteskii, 1976; Presmeg, 1986a, entre otros). Pero estas cualidades son interesantes para el desempeño matemático, por lo que su puesta en marcha favorecería el trabajo matemático de estos alumnos. Según lo estudiado, los alumnos con talento tienen capacidad visualizadora, que además puede desarrollarse (Gardner, 2001; Gutiérrez, 2006; entre otros). Por tanto surge el problema de cómo favorecer el desarrollo de la visualización de los niños con talento matemático.

En el marco teórico hemos puesto el acento en el modelo de visualización de Gutiérrez (1996), en el que se describe como un aspecto importante de la visualización las habilidades visualizadoras (Gutiérrez, 1996, Del Grande, 1987, 1990), que se encargan de relacionar los otros elementos del modelo, las representaciones externas y las imágenes (Gutiérrez, 1996). Esto nos lleva a formular el problema de investigación.

## 4 Metodología de investigación

### **Problema de investigación:**

*¿Cómo diseñar buenas prácticas docentes para desarrollar la visualización de los alumnos con talento matemático? ¿Cuáles son las habilidades visualizadoras de alumnos con talento matemático? ¿Cómo colaborar a desarrollar estas habilidades por medio de procesos de tratamiento adecuados a estos sujetos? ¿Qué progreso se aprecia en las habilidades visualizadoras durante su participación en estos procesos de tratamiento?*

En la revisión bibliográfica realizada hemos obtenido apreciaciones como las siguientes:

- Es necesario clarificar las variables que se estudian, distinguiéndose en los estudios según atiendan a la capacidad de los estudiantes, o a las habilidades que ponen en juego al realizar tareas matemáticas.
- Mejorará el rendimiento matemático de los alumnos cuando exploten sus cualidades, concretamente las visualizadoras (Guillén, 2010; Wheatley, 1998; entre otros).
- Una modalidad interesante de tratamiento de los niños con talento matemático es el llamado enriquecimiento curricular, que consiste en cursos externos al currículo escolar, que afrontan contenidos extracurriculares, tanto en profundidad como en amplitud de los temas matemáticos tratados.
- Una línea de investigación importante y actual se dirige a desarrollar estrategias de formación que favorezcan el ejercicio y desarrollo de las habilidades de visualización (Pitta-Pantazi y Christou, 2009; Presmeg, 2006; entre otros).

A partir de estas apreciaciones, nuestra investigación tiene por fin elaborar buenas prácticas para desarrollar la visualización de los estudiantes y estudiar cómo se manifiestan las habilidades de visualización de los alumnos. Es por ello que hemos procedido a diseñar un proceso formativo, dentro del enriquecimiento curricular, que hemos puesto en práctica en tres sesiones de formación del programa ESTALMAT, destinado a desarrollar las habilidades de visualización de niños con talento matemático, y queremos estudiar cómo se manifiestan y evolucionan estas habilidades a lo largo del periodo formativo.

Por tanto, para resolver el problema tenemos que responder a las siguientes preguntas:

**Pregunta 1:** Capacidad visual de los alumnos con talento matemático: ¿Cuál es la capacidad visual de los alumnos con talento que asisten a los cursos del programa ESTALMAT? ¿Existe relación entre la capacidad visual que poseen y el uso que hacen de ella?

**Pregunta 2:** Diseño de la intervención: ¿Es necesaria la visualización para realizar determinadas tareas matemáticas? ¿Qué características tienen las tareas que favorecen el uso de la visualización? ¿Cómo diseñar las sesiones de enriquecimiento para motivar que los estudiantes usen las habilidades? ¿Qué contenidos y elementos de razonamiento visual son necesarios enriquecer? ¿Cómo coordinar los objetivos docentes e investigadores en la intervención?

**Pregunta 3:** Uso de la visualización: ¿Cómo registrar el uso de la visualización que hace un alumno? ¿Es posible detectar las habilidades, errores y dificultades que se ponen de manifiesto? ¿Cómo registrar el papel que ha ocupado la visualización en el rendimiento al realizar las tareas? ¿Cómo caracterizar a los alumnos según el uso que hagan de la visualización?

**Pregunta 4:** Evolución de la investigación: ¿Cómo evaluar el proceso de instrucción? ¿Podemos comparar la visualización manifestada en las diferentes sesiones? ¿Es posible registrar la mejora en el uso de la visualización? ¿Qué papel ha tenido la instrucción en la utilización de las habilidades de visualización y la superación de errores y dificultades? ¿Qué aspectos de la visualización son factibles de mejorar?

Sintetizamos lo recogido en las preguntas anteriores en el enunciado del objetivo general que persigue nuestra investigación:

**Objetivo general:** *Analizar las habilidades de visualización que ponen en juego los alumnos con talento matemático durante sesiones de enriquecimiento curricular.*

Para lograrlo tenemos que diferenciar la disposición de estos alumnos para emplear visualización, que detectamos a partir de sus capacidades, de las habilidades que disponen y se desarrollan a partir de estas capacidades. Por tanto el objetivo general se

#### 4 Metodología de investigación

particulariza en los siguientes objetivos específicos que concretan los aspectos que queremos estudiar, planteados en dos líneas complementarias:

- a) describir las capacidades visualizadoras de los estudiantes
- b) analizar la evolución de las habilidades de visualización durante el proceso de enseñanza.

El primer aspecto da lugar al primer objetivo específico.

**Objetivo específico 1:** *Caracterizar las capacidades visuales de un grupo de alumnos con talento matemático.*

Siguiendo las investigaciones revisadas, para esta caracterización de los sujetos hemos pasado test que miden capacidades, tras establecer unos criterios de selección que respondan a las necesidades de nuestra investigación y realizar una descripción detallada de sus objetivos, fiabilidad y validez.

El segundo ámbito se refiere al estudio de la evolución de las habilidades puestas en juego en la resolución de actividades matemáticas propuestas durante un proceso formativo. Para ello abordamos un experimento de enseñanza, que consiste en un caso particular de investigación de diseño, y que nos lleva al estudio sistemático del proceso formativo. Siguiendo las directrices del experimento de enseñanza, nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

**Objetivo específico 2:** *Diseñar una intervención que favorezca la manifestación y ejercitación de las habilidades de visualización.*

**Objetivo específico 3:** *Analizar la evolución de los alumnos a lo largo de las sesiones en cuanto a cómo se manifiestan las habilidades visualizadoras, tanto de manera individual como del grupo de alumnos con talento matemático, qué errores y dificultades tienen los alumnos al resolver las tareas formativas.*

### 4.2 Diseño de la investigación

La selección o desarrollo de un diseño de investigación se justifica por el propósito de responder a las preguntas de investigación planteadas o cumplir con los objetivos de estudio (Hernández, Fernández y Baptista, 2007). En cuanto a la primera parte, la correspondiente a la descripción de las capacidades visualizadoras de los estudiantes, consiste en un diseño cuasiexperimental transversal que pretende establecer cuantitativamente las diferencias en las puntuaciones obtenidas en capacidad visual (en el plano y en el espacio) e inteligencia general, entre el grupo de alumnos con talento y el grupo control, estudiando si son significativas y estableciendo correlaciones.

No es fácil categorizar la segunda parte de nuestra investigación, la relativa al análisis de la evolución durante el proceso de enseñanza, en cuanto a la terminología clásica (exploratoria, descriptiva, correlacional o explicativa), ya que recorrería distintos tipos de investigación que los autores señalan en un continuo. Según la terminología al uso, nuestra investigación sería no experimental (pretendemos observar fenómenos tal y como se dan en su contexto natural, para después analizarlos) y longitudinal (recolectamos datos a través del tiempo en puntos o periodos, para hacer inferencias respecto al cambio, sus determinantes y consecuencias). Para enriquecer la clasificación anterior, señalamos que el planteamiento de la observación denominaría nuestro trabajo como experimento de campo ya que la observación se produce en el contexto natural con alto nivel de estructuración (León y Montero, 1998). Para ubicar con más precisión nuestra investigación, recurrimos al enfoque didáctico de la investigación de diseño, concretamente el experimento de enseñanza, que nos ofrece un marco teórico ajustado a nuestros objetivos de investigación.

Desglosaremos la descripción de la investigación en varios capítulos. En este capítulo mostramos algunos de los elementos del diseño relativos a ambas partes. Por un lado, se describen los test utilizados para analizar las capacidades visuales y se justifica la selección de los test y del experimento de enseñanza como metodología de investigación, describiendo las fases que conforman su diseño. Por otro lado, haremos la descripción de los sujetos, las variables e instrumentos de investigación y el procedimiento utilizado para la codificación de la información relativa a rendimiento, habilidades, errores y dificultades de visualización. Posteriormente, en el capítulo 5, se

## **4 Metodología de investigación**

describen las fases de planificación, implementación y reflexión del experimento de enseñanza. En el capítulo 6 se recogen los resultados relativos a las dos partes de la investigación, tanto los obtenidos a partir del análisis de la capacidad visual manifestada en los test, como los correspondientes al análisis de la evolución de las habilidades de visualización a lo largo del experimento de enseñanza.

### **4.2.1 Descripción de la capacidad visualizadora**

Hemos visto que las definiciones de talento distinguen lo innato o genético de lo adquirido, aunque se reconoce la importancia de la interacción entre ambos factores, lo que nos lleva a diferenciar capacidades potenciales y capacidades realizadas (Villarraga, Martínez y Benavides, 2004). Las capacidades potenciales arrancan de la carga genética, pero tienen en cuenta los procesos de maduración que ha vivido el sujeto hasta el presente, dándonos una idea de su potencialidad de aprendizaje y desarrollo. Es importante detectar estas capacidades para comprender mejor el proceso de enriquecimiento.

Para medir las capacidades potenciales vamos a emplear métodos psicométricos, eligiendo los que nos aporten una lectura más objetiva según los sujetos a los que investigamos. Se ha utilizado un diseño cuasiexperimental unifactorial entregrupos considerando como variable independiente el Talento de los alumnos (Talento vs. Controles) y como variables dependientes las respectivas puntuaciones obtenidas por los alumnos en los diferentes test.

En este apartado describimos el proceso llevado a cabo para seleccionar los test que miden la capacidad visual, y posteriormente describimos los test elegidos, con objeto de mostrar su pertinencia en nuestro estudio.

#### **4.2.1.1 Selección de los test de visualización**

Uno de los ámbitos en los que clasificábamos nuestras preguntas previas a la investigación es la caracterización de la capacidad visual de los alumnos con talento

matemático: *¿Cuál es esta capacidad visual? ¿Existe relación entre la capacidad visual que poseen y el uso que hacen de ella?*

El planteamiento de estas preguntas viene motivado por los estudios que afirman que los alumnos con talento matemático tienen una mayor predisposición a resolver los problemas mediante técnicas analíticas y que son minoritarios los que prefieren el uso de métodos visuales para resolver problemas que pueden ser resueltos por métodos visuales y no visuales (Presmeg, 1986a). Krutetskii (1976) concluyó que la habilidad de visualizar relaciones matemáticas abstractas no siempre aparecía entre las habilidades matemáticas de niños con talento.

Previamente a analizar posibles causas que pueden explicar esta falta de disposición a utilizar estrategias visualizadoras (dificultades propias del razonamiento visual, la escasa utilización en el entorno escolar, el desconocimiento de estrategias visualizadoras, etc.) nos planteamos estudiar si los alumnos con talento matemático tienen un déficit en sus capacidades visuales.

En la literatura de investigación hemos observado que a pesar de la amplia gama de test existentes, algunos autores han utilizado sus propios test de visualización. Para ilustrar esta variedad, Denis (1989) y Clements (1981) presentan una descripción de los principales test usados en psicología (Gutiérrez, 1996). Para una mayor generalización y evitar discrepancias derivadas de los diferentes instrumentos utilizados, decidimos utilizar test baremados de manera estándar para alumnos españoles de la edad de los sujetos de la investigación. Para el contraste de la visualización relativo a herramientas psicométricas, decidimos pasar varios test que analizan capacidades visuales que se relacionan con la inteligencia general. Los hemos pasado durante las sesiones de enriquecimiento adaptándose a la secuenciación de contenidos: en la sesión 1 se pasa un test sobre visualización en el plano, en la sesión 2, un test sobre visualización en el espacio y finalmente, en la sesión 3, un test sobre inteligencia general. Además se selecciona un grupo control, para contrastar los resultados obtenidos por el grupo formado por los alumnos con talento, al que se les pasa los test en el mismo orden.

La utilización de test de inteligencia general viene sugerida por investigaciones que utilizan su medición para caracterizar a los alumnos con talento y posteriormente se

#### 4 Metodología de investigación

complementa esta información con pruebas específicas de contenidos matemáticos para particularizar el talento matemático. Aunque no es intención de nuestro estudio relacionar la inteligencia general con el talento matemático, consideramos interesante caracterizar a los alumnos de la muestra lo más completamente posible, lo que nos permite estudiar si hay relación entre el rendimiento en el test de inteligencia general y las pruebas de aptitud visuales.

Para justificar nuestra selección de test, a continuación se analizan dos test utilizados en estudios afines a nuestra investigación para registrar la capacidad visualizadora, evaluándose sus características según los criterios anteriores: los test empleados por Presmeg y los test de Wheatley.

En sus estudios de clasificación de los alumnos con talento Presmeg (1986a), diseña su propio test para identificar los alumnos visualizadores, que son aquellos que prefieren el uso de métodos visuales para resolver problemas que pueden ser resueltos por métodos visuales y no visuales. La traducción de este test (Plasencia, 2000), se ha utilizado para analizar el papel que desempeñan las imágenes en la actividad matemática.

El test de Presmeg mide si los alumnos escogen soluciones visuales a los problemas propuestos, pero estos problemas son más bien algebraicos y no geométricos, por lo que, además de no estar baremados con alumnos españoles, no satisfacían los criterios de visualización relacionados con nuestra intervención.

El Wheatley Spatial Ability Test (Wheatley, 1996) está formado por ítems que demandan reconocer figuras planas que aparecen giradas. En investigaciones relativas a la visualización utilizando el test de Wheatley se ha encontrado un alta relación entre el uso de imágenes y la resolución de problemas (Wheatley 1998). El test guarda relación con la intervención prevista, pero no está baremado en alumnos españoles.

El listado de test utilizados para describir alguna característica visual en los diferentes estudios recogidos en la revisión bibliográfica es muy amplio : Space test, Flags, Spatial Equations, Cube Surfaces, Raven's Progressive Matrices, Minnesota Paper Form Board (Barrat, 1953); Punched Holes, Card Rotations, Form Board, Figure Rotations, Cube Comparisons (Moses 1977; 1980); PMA Spatial Test EG, Spatial Test II, Gestalt Completion Test, Estándar Progressive Matrices, Set D, de Raven, Three Dimensional

Drawing Test (Lean y Clements, 1981); Purdue Spatial Visualization Test (Battista, Wheatley, Talsma, 1982); Subtest del STB informatizado: Surface Development, Block Rotation, Visual Memory y Perspectives (Stumpf, 1998; Stumpf y Eliot, 1995); Woodcock-Johnson Psycho-Educational Battery, Tests of Achievement—III edition (WJ-III ACH, Woodcock); The Block Design subtest del *Wechsler Intelligence Scale for Children* (WISC-III), *Middle Grades Mathematics Project Spatial Visualization Test* (MGMP-SVT), prueba del uso de la representación visoespacial (Hearty y Kozhevnikov's, 1999, Van Garderen, 2006; Van Garderen y Montague, 2003b), The Mental Rotation Test (Webb, Lubinski y Persson, 2007). Además podríamos ampliarlo con investigaciones sobre los efectos del tiempo utilizado en la realización en test visuales (Gallagher y Johnson, 1992) o diseños específicos para determinadas características del talento como el Three-Mathematical Minds (M3) (Sak, 2009) o Impossible Figures Task (Chan, 2010).

De estos test analizamos los utilizados para medir aspectos visualizadores en alumnos con talento. Finalmente los adecuados a nuestra investigación los elegimos atendiendo a que cumplieran los siguientes criterios:

- Miden habilidades espaciales, tanto en el plano como en el espacio, relacionadas con una intervención didáctica prevista.
- Disponemos de baremos estandarizados para alumnos españoles del rango de edad seleccionado.
- Es factible su realización en el desarrollo de la intervención, es decir, que se pueden pasar en grupo y se ajustan a un tiempo determinado.

La selección definitiva de los test utilizados es contrastada con psicólogas expertas que recomiendan emplear estos test en un grupo control, formado por alumnos de un curso escolar y de edad similar a los del grupo de alumnos con talento, pero no forman parte del proyecto ESTALMAT. Para aproximarlos a los temas contemplados en las sesiones, nos decidimos finalmente por los test en los que aparecen movimientos en el plano y el espacio, y que requieran habilidades de visualización tanto en el plano como en el espacio. Satisfaciendo estos criterios, se proponen los tres test siguientes, que fueron los que se emplearon:

#### 4 Metodología de investigación

- *Test PMA (Aptitudes mentales primarias)*, que en su prueba de Concepción Espacial mide la “visualización estática”, definida como la “aptitud para interpretar y reconocer objetos que cambian de posición en el espacio, manteniendo su estructura interna”.
- *Test DAT-5 (Test de Aptitudes Diferenciales, versión 5, nivel 1)*, que en su prueba de Relaciones Espaciales mide la habilidad para visualizar un objeto en tres dimensiones a partir de un modelo bidimensional e imaginar cómo aparecería este objeto si sufriera una rotación espacial.
- *Test de matrices progresivas de Raven sobre Inteligencia General*.

Tras esta elección, se vuelve a revistar la literatura para estudiar el uso que se ha hecho de estos test en alumnos con talento, los test relacionados y los resultados obtenidos a partir de ellos.

En relación al PMA, destacamos un estudio realizado en una muestra de alumnos preseleccionada para participar en el Proyecto Estalmat-Galicia (Díaz, Sánchez, Pomar y Fernández, 2008), en el que indican la correlación que es significativa y bastante elevada entre los factores espacial y de razonamiento del PMA y la eficiencia en la resolución de los problemas; sin embargo, con respecto al factor de cálculo numérico, aunque la correlación es significativa, el índice de correlación es excesivamente bajo. Por tanto los factores del PMA que más se relacionan con la eficiencia en la resolución de los problemas matemáticos son el espacial y el de razonamiento; y de entre estos dos el que mejor correlaciona es el espacial. Se ha utilizado el factor espacial del test DAT, en una investigación a lo largo de 20 años para comprobar que la medida de la visualización es interesante para predecir logros posteriores en las carreras a las que se dedican los alumnos con talento (Shea, Lubinski y Benbow, 2001).

Respecto al test de Raven y su relación con la capacidad espacial, Silverman (1995) señala que el test de Matrices Progresivas de Raven y el Stanford-Binet Fourth Edition son elementos de evaluación de habilidades espaciales y que el Test de Rotaciones mentales se ha usado en varios estudios para detectar alumnos con alto componente visoespacial y talento matemático. Benavides (2008), compara el rendimiento obtenido por niños con talento en el test de Raven y el rendimiento en resolución de problemas de estructura multiplicativa, con la intención de identificar características de niños con

talento de los últimos cursos de educación básica (entre 11 y 13 años) cuando resuelven problemas matemáticos de estructura multiplicativa.

McGee (1979) en su revisión sobre los estudios en los que se relaciona la visualización espacial y la orientación espacial, analiza los tres test seleccionados. Considera el DAT dentro de la categoría de visualización espacial y el PMA en la de orientación Espacial. El test de Raven lo engloba en una categoría de test espacial misceláneo.

Por lo tanto, estos tres test, además de satisfacer los requisitos exigidos por la investigación, han sido utilizados para evaluar la capacidad visual de los alumnos con talento en diferentes estudios. Describimos a continuación con más detalle las características de estos test y aspectos relativos a su validez y fiabilidad.

### **4.2.1.2 Descripción de los test utilizados**

#### **TEST 1: FACTOR ESPACIAL E DEL TEST DE APTITUDES PRIMARIAS (PMA)**

La batería global PMA (Thurstone y Thurstone, 1976) permite la evaluación de los factores básicos de la inteligencia: Espacial (E), Razonamiento (R), Numérico (N) y Fluidez Verbal (F). El total ponderado de estos factores permite una estimación de la inteligencia general. La versión original pertenece a Thurstone y Thurstone (1941) y la adaptación española es llevada a cabo por la Sección de Estudio de Test de TEA Ediciones en 1987. Para el trabajo que presentamos, se seleccionó la prueba correspondiente al Factor E de concepción espacial definido como la “aptitud para interpretar y reconocer objetos que cambian de posición en el espacio, manteniendo su estructura interna”.

La escala está constituida por un total de 20 items y el tiempo máximo para su ejecución es de 5 minutos, a los que hay que añadir el tiempo de presentación de la prueba. Cada item presenta un modelo geométrico plano y seis figuras similares presentadas en distintas posiciones. El sujeto debe determinar cuáles de estas figuras, coinciden con el

#### 4 Metodología de investigación

modelo habiendo sufrido algún movimiento sobre el mismo plano (ejemplo de ítem en figura 4.1).



Figura 4.1: Ejemplo de ítem para el factor espacial de PMA.

Los estudios e investigaciones sobre el factor espacial en la estructura de la inteligencia técnica muestran diversos factores espaciales de distinta complejidad. El coeficiente de fiabilidad obtenido mediante la prueba de las dos mitades para el factor E calculado por el procedimiento test-retest fue de 0.73. Por otro lado, en el estudio de Secadas (1961) se obtiene un índice de fiabilidad de 0.93 para la concepción espacial del test PMA. En relación con la validez, el autor de la batería, Thurstone (1941), obtuvo una correlación múltiple de 0.71 entre el PMA y el OTIS.

#### **TEST 2: FACTOR RELACIONES ESPACIALES (SR) DE LA BATERÍA DE APTITUDES DIFERENCIALES (DAT-5)**

La quinta (5ª) versión del DAT (Bennett, Seashore y Wesman, 2000) incluye test que evalúan ocho aptitudes: razonamiento verbal, razonamiento numérico, razonamiento abstracto, rapidez y exactitud perceptiva, razonamiento mecánico, relaciones espaciales, ortografía y uso del lenguaje. La adaptación española de la versión original se lleva a cabo por el Departamento I+D de TEA en el año 2000. En nuestro estudio se seleccionó el Nivel 1 de la escala de Aptitud espacial (SR) que mide la habilidad para visualizar un objeto en tres dimensiones a partir de un modelo bidimensional e imaginar cómo aparecería este objeto si sufriera una rotación espacial.

Cada problema presenta una figura modelo, que es el desarrollo plano de un cuerpo geométrico, seguida de cuatro representaciones en perspectiva de dicho cuerpo. El sujeto debe elegir la única figura que podría construirse a partir del modelo. Requiere imaginar cómo resultará un objeto hecho a partir de un determinado modelo (ver ejemplo de ítem en figura 4.2). La escala está constituida por un total de 40 ítems y el

tiempo total para su ejecución es de 25 minutos, 20 para la realización de la prueba y aproximadamente 5 minutos para la distribución del material e instrucciones.

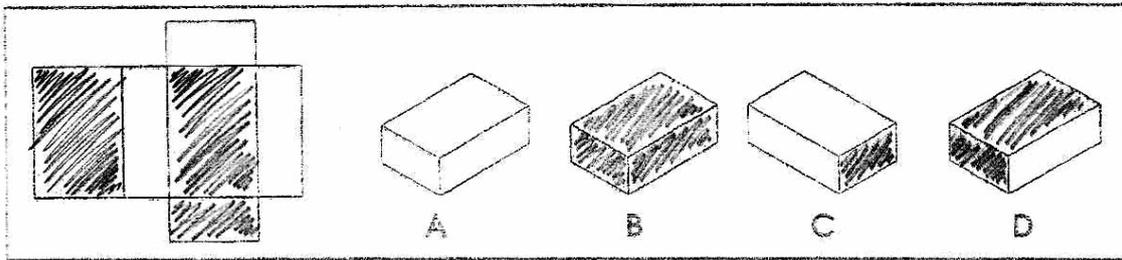


Figura 4.2: Ejemplo de ítem para el factor espacial DAT.

Los índices de fiabilidad para los diferentes grupos que incluye el Nivel 1 en la escala SR oscilan entre 0.86 y 0.93. En relación a la validez en poblaciones americanas se han obtenido correlaciones elevadas entre el DAT-5 y otras medidas aptitudinales (*American College Testing, Armed service Vocational Battery Forma 14, Otis-Lennon School Ability Test Forma 1, Preliminary Scholastic Aptitude Test*) y también son satisfactorias las correlaciones de las puntuaciones del test con el rendimiento real de los alumnos en pruebas normalizadas de rendimiento escolar. En nuestro país no existen por el momento pruebas de rendimiento convenientemente tipificadas pero en muestras americanas el manual original ofrece un gran número de correlaciones obtenidas con pruebas de reconocido prestigio.

### TEST 3: MATRICES PROGRESIVAS DE RAVEN

Este test (Raven, Court y Raven, 1993) proporciona una medida de la capacidad de deducción de relaciones, uno de los componentes principales de la inteligencia general y del factor “g”. Según el autor estos test no constituyen una medida directa del factor “g” ni tampoco de la inteligencia general, pero suministran una de las mejores estimaciones de ellos porque la capacidad deductiva está en la base de estos constructos. La inteligencia general exige además de la capacidad deductiva otros componentes aptitudinales. En el estudio se ha utilizado la versión adaptada por TEA en el año 2003. Existen tres versiones diferentes de la prueba: SPM (Standard Progressive Matrices) o Escala General, CPM (Coloured Progressive Matrices) o Escala de Color y APM

#### 4 Metodología de investigación

(Advanced Progressive Matrices) o Escala Superior. Considerando las características de la muestra del estudio se les administró la escala avanzada (APM). Consiste en 60 problemas repartidos en cinco series (A, B, C, D y E) de doce elementos cada una. En la escala superior utilizada, los ítems de la prueba consisten en completar un dibujo al que le falta un trozo con una de las ocho piezas que aparecen como alternativas. Todas tienen la misma forma pero sólo una es la correcta (en figura 4.3 se muestra un ejemplo de ítem).

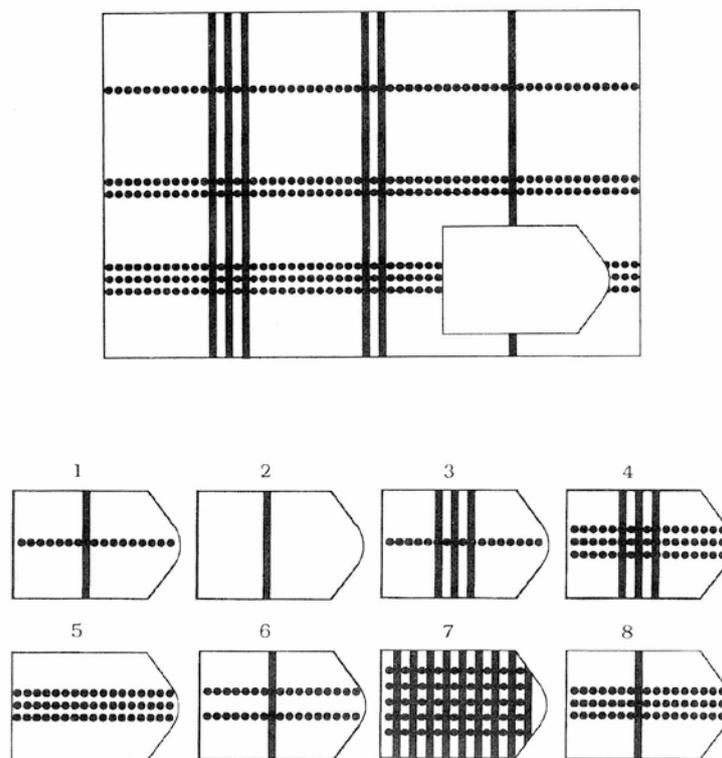


Figura 4.3: Ejemplo de ítem del test de Raven.

La Escala Superior ofrece índices test-retest de fiabilidad de distinta magnitud, que alcanzan el valor de 0.91, y de consistencia interna “dos mitades”, con valores entre 0.83 y 0.87. Se han llevado a cabo múltiples estudios de fiabilidad y validez del test con muestras españolas. En relación a la validez concurrente se han encontrado correlaciones entre CMP y el Terman-Merrill de 0.96 en niños normales y 0.59 entre los niños con problemas, los índices con el Goodenough fueron de 0.76 y 0.66 respectivamente. En cuanto a la validez predictiva, se obtiene un índice de 0.35 con la calificación global escolar.

### 4.2.2 Experimento de enseñanza como diseño de investigación sobre enseñanza

Teniendo que diseñar un proceso de intervención y estudiar el desarrollo de habilidades de visualización durante este proceso, afrontamos la necesidad de llevar a cabo un proceso formativo que permita su revisión en el curso del trabajo, realizado de manera sistemática. Molina (2006) realiza una exhaustiva descripción de la investigación de diseño y experimentos de enseñanza y describe este paradigma metodológico detallando su origen y evolución, sus principales características, puntos fuertes y limitaciones y algunos de los criterios que permiten evaluar su calidad.

Por *investigación de diseño* o *investigación basada en diseño* se designa a un paradigma de investigación, de naturaleza principalmente cualitativa, que ha sido desarrollado dentro de las “*Ciencias del aprendizaje*” y se nutre de un amplio campo multidisciplinar que incluye la antropología, la psicología educativa, la sociología, la neurociencia, así como las didácticas específicas, entre otros (Confrey, 2006; Sawyer, 2006). Su objetivo es analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación. Todo ello la convierte en un paradigma metodológico potente en la investigación del aprendizaje y la enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Este paradigma metodológico está siendo aplicado y desarrollado activamente en la investigación matemática, (Molina, 2006) celebrándose foros y seminarios en torno a este tema (The Design Based Research Collective) e importantes publicaciones que describen diseños de investigación enmarcados dentro de esta metodología, como el Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education (Kelly y Lesh, 2000), y las revistas Educational Researcher, vol 32 (1) de 2003, y Journal of the Learning Sciences, vol 13 (1) de 2004, entre otras.

Entre las características de los estudios de diseño (Molina, 2006), aparece que las clases o ambientes de enseñanza son considerados complejos y condicionales, que involucran muchas variables, ocurren en contextos de la vida real donde habitualmente se produce algún tipo de aprendizaje, involucran diferentes tipos de participantes en el diseño, las teorías que se desarrollan durante el proceso del experimento son humildes, se

## 4 Metodología de investigación

caracterizan por un refinamiento progresivo y el análisis y los resultados de los estudios comportan el análisis de múltiples aspectos del diseño.

El esquema general de una investigación de diseño se inicia con una situación de enseñanza/aprendizaje y unos principios teóricos obtenidos de la búsqueda bibliográfica y las experiencias previas del equipo investigador (figura 4.4). Seguidamente se determinan los problemas y objetivos de investigación, las variables en estudio y del entorno y los participantes y se realiza el diseño instruccional, marcando una trayectoria hipotética de aprendizaje, enunciando las hipótesis o conjeturas de investigación y diseñando la recogida de datos. En la puesta en práctica se realizan varios ciclos iterativos en los que, si los datos lo requieren, se reformula la hipótesis, el diseño instruccional y la recogida de datos. Finalmente el análisis retrospectivo de los datos debe aportar información tanto sobre el modelo teórico sobre el fenómeno de aprendizaje como sobre los resultados teóricos sobre el diseño instruccional (Figura 4.4).

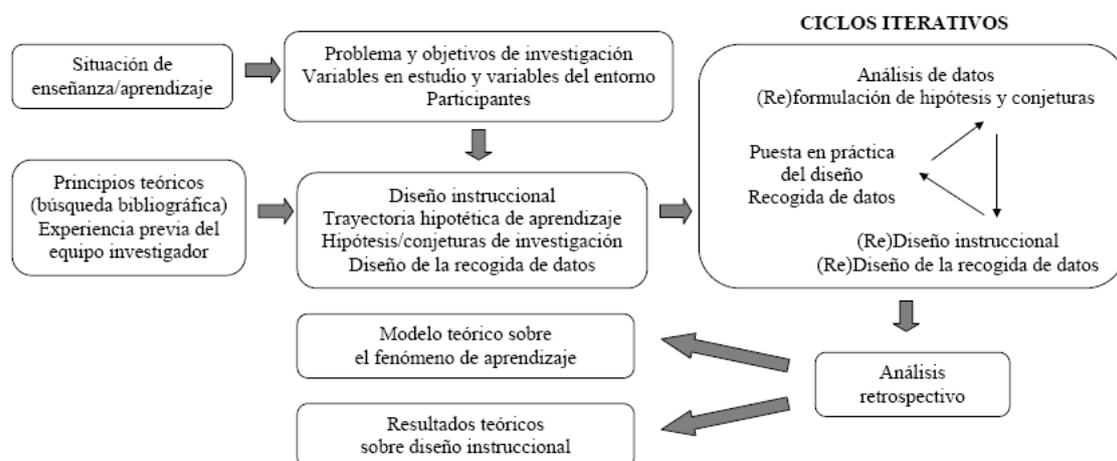


Figura 4.4: Estructura general de una investigación de diseño (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

Los experimentos de enseñanza se enmarcan dentro del paradigma de la investigación de diseño, siendo el tipo de estudios de diseño más frecuentes (Cobb y Gravemeijer, 2008). De forma general, un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son, normalmente, un investigador docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000). Describimos las distintas fases del experimento de enseñanza y las

acciones a realizar en cada una de las fases de un experimento de enseñanza en la Tabla 4.1.

Fases	Acciones
<b>Preparación del experimento</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Definir el problema y los objetivos de investigación.</li> <li>• Identificar los objetivos instruccionales.</li> <li>• Evaluar el conocimiento inicial de los alumnos.</li> <li>• Identificar las metodologías de enseñanza adecuadas para los contenidos elegidos, en función de los objetivos planteados y de los conocimientos previos de los alumnos.</li> <li>• Diseñar de forma justificada la secuencia de intervenciones en el aula y su temporalización.</li> <li>• Diseñar la recogida de datos.</li> <li>• Delinear una trayectoria hipotética de aprendizaje que describa el resultado esperado del proceso de aprendizaje y el modo en que se va a promover y alcanzar dicho aprendizaje.</li> <li>• Ubicar el experimento dentro de un contexto teórico más amplio en el que se enmarque el modelo teórico emergente.</li> </ul>
<b>Experimentación</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ <b>Antes de cada intervención:</b></li> <li>• Obtener información sobre el trabajo previo realizado en el aula, para tenerlo en cuenta en el diseño de la intervención y en la posterior interpretación de los datos.</li> <li>• Identificar los objetivos instruccionales de la intervención.</li> <li>• Ultimar el diseño de la intervención, de forma justificada, a partir de la información empírica y teórica disponible.</li> <li>• Elaborar hipótesis/conjeturas sobre los resultados que se esperan alcanzar en la intervención.</li> <li>• Ultimar la selección de los métodos de recogida de datos.</li> <li>• Registrar las decisiones tomadas en el proceso de ejecución de las acciones descritas en los cinco apartados anteriores y su justificación.</li> <li>➤ <b>En cada intervención:</b></li> <li>• Si es necesario, modificar sobre la marcha, de manera justificada, el diseño de la intervención de acuerdo con los objetivos de la intervención.</li> <li>• Recoger datos de todo lo que ocurre en el aula, incluyendo las decisiones tomadas durante la intervención.</li> <li>➤ <b>Después de cada intervención:</b></li> <li>• Analizar los datos recogidos en la intervención.</li> <li>• Revisar, y en su caso reformular, las hipótesis/conjeturas de investigación.</li> </ul>

## 4 Metodología de investigación

<b>Análisis retrospectivo de los datos</b>	Recopilar y organizar toda la información recogida. Analizar el conjunto de los datos, lo que implica: <b>a)</b> Distanciarse de los resultados del análisis preliminar, de las conjeturas iniciales y de la justificación del diseño de cada intervención, para profundizar en la comprensión de la situación de enseñanza y aprendizaje en su globalidad. <b>b)</b> Identificar la ruta conceptual seguida por el grupo y por cada alumno, por medio de los cambios que pueden ser apreciados, atendiendo a las acciones específicas del investigador-docente que contribuyeron a dichos cambios.
--	--

Tabla 4.1: Acciones a realizar en cada una de las fases de un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

Utilizando la terminología de Confrey y Lachance (2000) nuestro trabajo de investigación es un experimento de enseñanza transformativo y dirigido por una conjetura. No existen hipótesis a ser probadas sino que la conjetura es la guía de la investigación, existiendo, además, objetivos y preguntas de investigación a las que se pretende dar respuesta (Molina, 2006). Esta conjetura evoluciona conforme la investigación progresa. En ella se distinguen dos dimensiones: una de contenido matemático (qué debe enseñarse) y otra pedagógica (cómo debe enseñarse). Para la evolución de la conjetura, en la intervención en el aula ocupan un papel importante cuatro elementos del diseño de enseñanza: el currículo, la interacción en el aula, el papel del docente y la evaluación.

Utilizando el contexto anterior de experimento de enseñanza, nuestra investigación se ha desarrollado en tres fases, cumpliendo en cada una de ellas los requisitos necesarios para un experimento de enseñanza (figura 4.5):

- 1.- Inicialmente, impartimos varias sesiones de enriquecimiento en cursos anteriores de las que seleccionamos actividades y realizamos el *estudio piloto* que determinó la conjetura y objetivos de la investigación (Ramírez, Flores y Castro, 2010a)
- 2.- Realizamos el experimento de enseñanza que consistió en *tres sesiones* de enriquecimiento curricular de tres horas de duración cada una. Esta fase incluye a su vez seis etapas: 1) Planificación sesión 1, 2) Implementación, 3) Reflexión sobre sesión 1 y planificación de sesión 2, 4) Implementación sesión 2, 5) Reflexión sobre sesión 2 y planificación de sesión 3, 6) Implementación sesión 3.

3.- Finalmente, realizamos entrevistas personales con alumnos seleccionados para afianzar los resultados obtenidos tras el análisis retrospectivo de los datos.

En las sesiones participan dos investigadores principales que adoptan en diferentes momentos los papeles de investigador-docente e investigador-observador, además de dos investigadores-observadores en cada sesión que colaboran en la recogida de información. En el capítulo 5 describiremos la preparación y experimentación del proceso formativo de enriquecimiento curricular que ha conformado nuestro experimento de enseñanza. En el capítulo 6 presentaremos los resultados relativos al desarrollo del aprendizaje individual y grupal en el análisis retrospectivo.

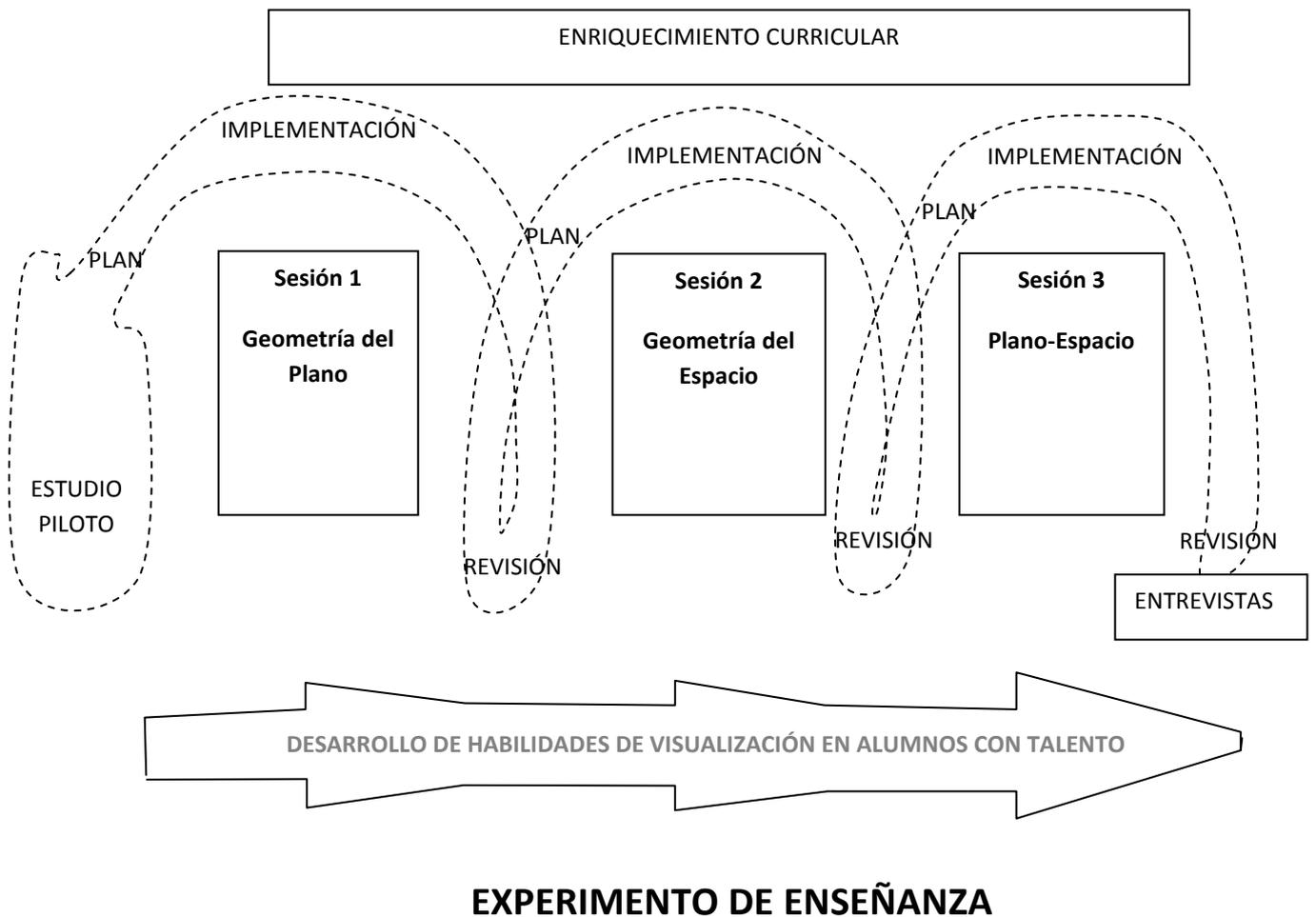


Figura 4.5: Esquema del Experimento de enseñanza.

### 4.3 Sujetos

Los sujetos principales de nuestra investigación son los veinticinco alumnos del programa ESTALMAT de Andalucía Oriental, que realizan el segundo año el curso 2009-2010, participando en las tres intervenciones de enriquecimiento del experimento de enseñanza.

En la investigación intervienen además dos grupos de alumnos: un grupo de alumnos con talento que constituyeron los sujetos en la prueba piloto y un grupo de alumnos control que se utiliza para contrastar los resultados de los test de visualización e inteligencia.

#### **Alumnos con talento participantes en la prueba piloto**

El estudio piloto se desarrolló en el curso 2008-2009, con 21 alumnos del segundo curso del proyecto ESTALMAT (uno de 13 años, cinco de 14 años y quince de 15 años) de los que 2 eran niñas y 19 niños. Cursaban en ese momento 2º, 3º y 4º de ESO (Ramírez, Flores, Castro, 2010a) (Tabla 4.2)

<b>Sexo\ Curso</b>	<b>13 años</b>	<b>14 años</b>	<b>15 años</b>	<b>Total</b>
<b>Hombre</b>	1	5	13	19
<b>Mujer</b>	0	0	2	2

Tabla 4.2: Distribución de alumnos de la prueba piloto según el sexo y la edad.

#### **Alumnos del grupo control**

Para contrastar los resultados de los test de visualización y de inteligencia, se decide seleccionar una muestra de alumnos de una clase estándar de Secundaria en la que el rango de edad fuese similar al del grupo de alumnos con talento que participaba en el enriquecimiento curricular. Los sujetos que conformaban este grupo control eran 33 alumnos de 4º de ESO de un colegio concertado de Granada, distribuidos en la siguiente tabla según sexo y edad (Tabla 4.3):

<b>Sexo\ Edad</b>	<b>15 años</b>	<b>16 años</b>	<b>17 años</b>	<b>Total</b>
<b>Hombre</b>	7	6	0	13
<b>Mujer</b>	7	12	1	20

Tabla 4.3: Distribución de los alumnos del grupo control según el sexo y la edad.

### **Alumnos sujetos de investigación (participantes en las sesiones de enriquecimiento)**

Los alumnos de la investigación forman parte del proyecto ESTALMAT en Andalucía Oriental, donde se atienden a 25 alumnos durante dos años, por lo que cada año coinciden dos grupos (de primer y segundo año). Los alumnos son seleccionados mediante una prueba de contenidos matemáticos y unas entrevistas realizadas por los profesores del proyecto. Se aborda en el proyecto un enriquecimiento curricular, en clases impartidas los sábados por la mañana.

Las sesiones correspondientes al experimento de enseñanza se impartieron en el curso 2009-2010, con 25 alumnos del segundo curso del proyecto (dos de 13 años, nueve de 14 años, trece de 15 años y uno de 16 años) de los que 5 eran niñas y 20 niños. Cursaban en ese momento 2º, 3º, 4º de ESO y 1º de Bachillerato. La distribución de los alumnos del grupo talento según el sexo, la edad y el curso queda reflejada en las siguientes tablas (Tablas 4.4 y 4.5) :

<b>Sexo\ Curso</b>	<b>2º ESO</b>	<b>3º ESO</b>	<b>4º ESO</b>	<b>1º Bach.</b>	<b>Total</b>
<b>Hombre</b>	1	8	11	0	20
<b>Mujer</b>	0	1	3	1	5

Tabla 4.4: Distribución de los sujetos del grupo talento según el sexo y el curso.

<b>Sexo\ Edad</b>	<b>13 años</b>	<b>14 años</b>	<b>15 años</b>	<b>16 años</b>	<b>Total</b>
<b>Hombre</b>	2	8	10	0	20
<b>Mujer</b>	0	1	3	1	5

Tabla 4.5: Distribución de los sujetos del grupo talento según el sexo y la edad.

#### 4 Metodología de investigación

Identificamos estos sujetos como alumnos con talento matemático por su pertenencia al proyecto ESTALMAT que describimos a continuación y, por lo tanto fueron seleccionados según su rendimiento en una prueba de selección. Refuerza la idea de que son alumnos con talento sus resultados en los test. En la prueba de inteligencia general, el Test de Raven en su versión avanzada, que es un instrumento que se ha utilizado en otros estudios para seleccionar a los alumnos con talento (Benavides, 2008), de los 23 alumnos que se presentaron, trece superaron el centil 95, seis el 75 y cuatro el 58. Por tanto, diecinueve están más allá del tercer cuartil. Si ordenamos los alumnos según la puntuación obtenida en la prueba de selección (ocupando el lugar 1 el de mayor puntuación), los cuatro alumnos del centil 58 en el Test de Raven, ocupan los lugares 9, 15, 19 y 20 en el orden de la prueba.

#### **Contexto: El proyecto ESTALMAT. Prueba de selección**

Las líneas fundamentales del proyecto ESTALMAT para el estimulación del talento matemático, iniciado en España por Miguel de Guzmán (De Guzmán, 2002) con el auspicio de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, están inspiradas en los que se vienen llevando a cabo con éxito en diversas comunidades, principalmente en el de la Universidad Johns Hopkins de Baltimore, promovido por el profesor Julian Stanley, que funciona desde 1971 y el de la Universidad de Hamburgo, iniciado en 1982 por los profesores Harald Wagner y Bernd Zimmermann, e inspirado en el anterior. Las revistas *Educational Studies in Mathematics* (Volumen 17, no 3; 1986) y *Mathematics Teacher* (Volumen 76, no 4; 1983), dedicaron números monográficos a este tema (Callejón, 2002).

El objetivo del proyecto es estimular el talento matemático mediante sesiones de enriquecimiento curricular en grupo, que son impartidas durante dos años fuera del horario escolar, generalmente los sábados por la mañana. Presenta rasgos comunes con programas implementados en otros países (Benavides, Maz, Castro y Blanco, 2004). Los alumnos que forman parte del proyecto han sido seleccionados por su rendimiento en una prueba específica de matemáticas basada en la resolución de problemas.

Se inscribieron 950 alumnos (387 niñas y 563 niños) para la prueba de selección en la fase andaluza en 2008<sup>2</sup>, de los que se presentaron 839. De los 341 (158 niñas y 183 niños) inscritos en la provincias de Granada, Málaga, Jaén y Almería, se seleccionaron 25 alumnos.

La prueba consiste en cinco problemas de matemáticas planteados y seleccionados por los profesores de toda España que imparten las clases en el programa. Se ha realizado un estudio en el que se analizan aspectos relativos al contenido y a las puntuaciones obtenidas en la prueba realizada en 2008 (Zuñiga, 2009), en el que aunque se señalan dos debilidades relativas a la elevada dificultad de algunos de los problemas y al rango de edades utilizado, se concluye reconociendo que los problemas planteados son exitosos para formar parte de la prueba de selección, tanto por la forma como por el orden y como instrumento. El rango de puntuación de los alumnos seleccionados abarca desde 25.5 hasta 40 (de un total de 50 puntos posibles), con una media de 31.09, correspondiendo a las 25 mejores notas globales de todos los alumnos presentados.

Los problemas de la prueba son no rutinarios. El problema 1 consiste en completar algunos elementos de un circuito de operaciones con números naturales; en el Problema 2 se pide razonar sobre la posibilidad de marcar distintos caminos en una estructura rectangular a partir de unas condiciones y calcular áreas de las figuras delimitadas; en el Problema 3 hay que construir cuadrados mágicos a partir de diferentes restricciones; el Problema 4 exige deducir la cantidad de dinero que contienen tres sobres a partir de diferentes informaciones; en el Problema 5 hay que averiguar cuántas lámparas y de qué forma se pueden colocar en las paredes de una habitación, siguiendo unas instrucciones (ver la prueba en <http://thales.cica.es/estalmat/?q=node/26>).

Los profesores del proyecto llevan a cabo una evaluación de la prueba, en la que hacen una valoración de las estrategias que se ponen en juego en cada apartado según su dificultad. Se pudo apreciar que la prueba prima la aptitud y actitud y no tanto los conocimientos matemáticos de los alumnos, propone problemas originales y variados (pensamiento visual, pensamiento lógico, intuición, creatividad, abstracción,

---

<sup>2</sup> Los sujetos de la investigación se seleccionaron en junio de 2008, cursaron primero el curso 2008-2009 y segundo en 2009-2010, que fue cuando se realizó el estudio de campo.

## 4 Metodología de investigación

manipulación matemática, capacidad de ordenación del pensamiento, etc.) y presenta apartados de nivel creciente de dificultad (Hernández, 2009). En el proceso de resolución de estos problemas no rutinarios se espera que los alumnos manifiesten algunas de las características del talento matemático señaladas en el proyecto (localizar la clave de los problemas, buscar patrones y relaciones, construir nexos, lazos y estructuras matemáticas, mantener bajo control los problemas y su resolución, prestar atención a los detalles, producir ideas originales, valiosas y extensas, desarrollar estrategias eficientes y persistir en la consecución de los objetivos que se propone).

En definitiva, los sujetos de la investigación son veinticinco chicos de 13 a 16 años que obtuvieron las mejores puntuaciones en la prueba de selección y que, posteriormente, los test aplicados muestran que al menos diecinueve de ellos destacan en inteligencia (test de Raven).

### 4.4 Variables

Para afrontar el problema de investigación, responder a las preguntas planteadas y alcanzar los objetivos previstos, se van a analizar los siguientes aspectos:

- a) Capacidad de visualización, medida a partir de la puntuación obtenida en los test administrados.
- b) Evolución de las habilidades de visualización, medida a partir de:
  - Rendimiento en las actividades escritas de cada sesión.
  - Habilidades de la visualización manifestadas en las intervenciones.
  - Errores cometidos en las intervenciones y dificultades de comunicación de las argumentaciones visuales.

Por tanto, las variables se diferencian en torno a las dos partes de la investigación, la primera se centra en las *capacidades de visualización*. La segunda se centra en cuatro variables, el *rendimiento en las tareas de enseñanza* planteadas, las *habilidades de visualización* definidas por Del Grande (1987, 1990), a partir de las de Hoffer (1977), de las que seleccionamos 5 (Percepción figura-contexto, Conservación de la percepción,

Percepción de la posición en el espacio, Percepción de las relaciones espaciales y Discriminación visual), los *errores* y las *dificultades de visualización* manifestados por los estudiantes, de entre los destacados en el capítulo 3.

Las categorías de estas variables aparecen en el siguiente apartado, asociados a los instrumentos de investigación.

### **4.5 Instrumentos de investigación de habilidades, errores y dificultades de visualización**

Para estudiar las capacidades de visualización, empleamos los test presentados anteriormente en el apartado 4.2. En esta sección se describen los instrumentos utilizados en la investigación para la recogida y análisis de los datos, centrándonos en la segunda parte, el estudio de las habilidades de visualización, errores y dificultades.

Para estudiar el rendimiento, las habilidades de visualización y los errores y dificultades de visualización, seleccionamos como instrumentos los registros de información empleados en el curso de la enseñanza, así como una entrevista final, realizada a algunos de los estudiantes. Estos registros nos suministran los datos, al recoger las intervenciones de los estudiantes, generalmente en forma de texto, en unos casos de forma directa escrita, y en otros, tras su transcripción. La elección de cada uno de ellos viene justificada por el papel que desempeña en el estudio de la conjetura de investigación.

Para la recogida de datos, disponemos de los siguientes registros:

- Prueba de selección realizada por los alumnos para acceder al proyecto ESTALMAT.
- Test de capacidades visuales (Factor E del PMA y Factor SR del DAT5) y de inteligencia general (Raven).
- Respuestas entregadas en las actividades escritas de las sesiones de enriquecimiento.
- Grabaciones de audio de cada sesión y sus transcripciones.

#### 4 Metodología de investigación

- Grabaciones de audio y vídeo de las entrevistas y sus transcripciones.
- Observaciones de los profesores investigadores.

En el análisis de las respuestas escritas de la prueba piloto, se ha realizado una primera operativización de las habilidades de visualización puestas en juego al afrontar tareas de resolución, definición y argumentación (Ramírez, Flores y Castro, 2010a), lo que permitió registrar el uso de las habilidades; pero a la luz de los resultados consideramos necesario mejorar el procedimiento para estudiar con mayor profundidad a lo largo de un periodo más amplio de tiempo y que cumpliera las expectativas más exigentes del experimento de enseñanza, es decir: a) registrar las habilidades puestas en juego por los alumnos en sus participaciones orales, debates en grupo, entrevistas personales y las recogidas en las observaciones realizadas por los profesores investigadores, b) distinguir la manifestación de la habilidad de forma correcta de la que se emplea de manera incompleta, c) determinar el rendimiento de los alumnos en tareas de visualización, d) registrar los errores y dificultades en el uso de la visualización y e) comparar la evolución de estas observaciones entre las diferentes sesiones.

Al disponer de datos escritos que suministran información sobre elementos no apreciables directamente, debemos utilizar procedimientos metodológicos que nos permitan obtener la información deseada. Los datos obtenidos son cualitativos, cuyo análisis requiere una descripción interpretativa detallada, para lo que se utiliza el análisis de contenido, que es un proceso que involucra un esfuerzo de observación y reflexión sobre nuestro fenómeno de estudio (Fox, 1981).

El análisis de contenido comienza por determinar unidades de análisis en el texto a analizar (Krippendorf, 1990). Como unidad de análisis de la recogida de información, se seleccionan fragmentos de los textos escritos, que correspondan a intervenciones de los alumnos para responder a cada tarea (tanto en respuestas escritas como en transcripciones y observaciones).

Como ejemplo, presentamos la fragmentación del texto de las intervenciones de un alumno correspondientes a una respuesta escrita (E\_2\_4\_f), a una transcripción (TP\_4\_4\_2) y a una observación respectivamente (O\_4\_3\_2). Aparecen subrayadas los

fragmentos seleccionados como unidad de análisis (dos en la respuesta escrita, dos en la transcripción y una en la observación).

E\_2\_4\_f: *Esto es tanto como decir que la figura de la base se puede dividir en los mismos polígonos (Unidad de análisis). Simplemente si variamos las medidas se pueden conseguir polígonos menores que rellenen su base (Unidad de análisis).*

TP\_4\_4\_2: *Sí, el problema de este cubo es que como si fuera,.. Una vez nos enseñaron el efecto óptico de la mitad del cubo,.. Estos que se juntan... Lo que pasa es que están juntos por ahí. (Unidad de análisis). El único problema es ése. El problema más complicado es juntar la cara F con la cara A porque lo demás más o menos. Y ahora no sé por dónde tirar por aquí (Unidad de análisis). *Porque... claro.. yo diría... vamos a ver. Si ésta es la cara A... que haría una cosa...**

O\_4\_3\_2: *Intenta formar el tetraedro formando la base y probando con las piezas para que encajen en la parte superior (unidad de análisis). *No tiene paciencia y desiste pronto.**

El segundo paso consiste en establecer categorías de análisis (Krippendorff, *op. cit.*) que permitan la codificación e interpretación de las unidades establecidas. Como las respuestas de los alumnos corresponden a las tareas planteadas, procedimos a estudiar estas tareas, en relación a las variables presentadas: rendimiento, habilidades de visualización y errores y dificultades de visualización. Para estudiar la forma en que las tareas se relacionan con estas variables, se aplicaron distintos niveles de análisis de una tarea geométrica, partiendo de la solución experta (epistémica o institucional de referencia) como de las soluciones personales de los estudiantes (Fernández, Cajaraville y Godino, 2007). El estudio previo de las habilidades necesarias para resolver cada una de las actividades y la constatación posterior de las estrategias utilizadas por los alumnos es una metodología que se ha utilizado en investigaciones sobre las habilidades (Acevedo, 2009; Gutiérrez, 1992).

Por tanto, para establecer las categorías de análisis hemos procedido mediante un proceso mixto, que arranca de la determinación a priori de categorías teóricas, para luego contrastarlas con las respuestas de los alumnos, hasta llegar a una formulación final que se ha aceptado por saturación, es decir, estableciéndose cuando el criterio era

#### 4 Metodología de investigación

suficiente para codificar todos los datos recogidos. Se muestra este proceso se una manera más clara a continuación.

Para el rendimiento, en cada actividad se contrasta la respuesta escrita entregada por el alumno con la solución experta o, en otro caso, con el cumplimiento de los requisitos exigidos en la actividad. Las actividades propuestas se clasifican según sean de argumentación (A), resolución (R) o definición (D) y se valoran las respuestas con 0, 1 y 2 dependiendo del grado de consecución de lo propuesto en la actividad. A modo de ejemplo, mostramos la decisiones de corrección referentes al rendimiento para las actividades de la sesión 1 (Tabla 4.6).

<b>Sesión 1</b> (sobre 20 puntos)	
(A)E_1_1	1: Dar una solución de 24 pivotes sin una justificación completa
(A)E_1_2	1: Dar una solución de 9 pivotes sin una justificación completa
(A)E_1_3	1: Dibujar sólo un caso
(R)E_1_4	2: Dibujar la solución
(R)E_1_5	1: Dibujar un caso, 2: Dibujar dos casos distintos
(R)E_1_6	2: Dibujar las cuatro clases 1: Le falta alguna clase
(D)E_1_12 (y 13 en grupo)	2: Incluye en la definición giros, simetrías y traslaciones 1: Le falta algún movimiento
(R)E_1_7 (y 9)	2: Dibujar las 16 clases en 7 (5 en 9), 1: Le falta alguna clase o sobra alguna

Tabla 4.6: Decisiones de corrección para el rendimiento de la sesión 1.

El procedimiento para establecer las categorías de las habilidades, errores y dificultades ha resultado más complejo. Describiremos inicialmente el proceso relativo a las habilidades y posteriormente señalaremos los matices del procedimiento similar que hemos considerado para los errores y dificultades.

El proceso para las habilidades ha abarcado las siguientes etapas:

- 1) Prueba piloto, apreciación de respuestas y primera formulación de categorías para las habilidades y errores y dificultades.
- 2) Identificación y formulación a priori de actuaciones relacionadas con las habilidades requeridas para resolver cada actividad de las sesiones de enseñanza (*categorías a priori por actividad*).

- 3) Análisis de las respuestas individuales a las tareas planteadas, en relación a las categorías establecidas.
- 4) Revisión de las actuaciones relacionadas con las habilidades formuladas a priori y reformulación a posteriori (*categorías a posteriori para cada habilidad por sesiones*).
- 5) Elaboración de una formulación general de las actuaciones para todas las habilidades en las tres sesiones (*categorías para cada habilidad*).
- 6) Obtención de unos criterios de corrección para cada categoría en cada sesión.

Describimos estos pasos a continuación. Inicialmente, para cada una de las habilidades se realiza un estudio de las actividades que favorecen su manifestación. Por ejemplo, la habilidad Percepción figura-contexto (*reconocer una figura asilándola de su contexto, en el que aparece camuflada o distorsionada por la superposición de otros elementos gráficos*) se favorece a través de las actividades que comprendan: intersecar líneas o figuras, encontrar figuras escondidas o figuras solapadas, completar figuras, montar figuras ensambladas (tangram), identificar similitudes y diferencias e invertir figuras y contexto (Del Grande, 1987).

Hemos realizado un estudio previo para determinar qué respuestas muestran que se disponen y ejecutan habilidades de visualización en cada una de las actividades de nuestro experimento de enseñanza. Consideramos que no se exige la puesta en juego de las habilidades coordinación ojo-motor y memoria visual, que al ir asociadas a técnicas de dibujo y de recuerdo que no aportan información a nuestro experimento de enseñanza, por lo que se decide registrar cinco de las siete habilidades señaladas por Del Grande (1990). Así, se establecen a priori las posibles manifestaciones de las habilidades para cada actividad, dando lugar a un listado de conductas que permite la determinación inicial de categorías que vienen determinadas por destrezas concretas, de lo que vemos un ejemplo en la Tabla 4.7.

Actividades	Percepción Figura-Contexto
Actividad 1.- Encontrar la mínima estructura con 18 piezas	Comentar el proceso de formación a partir de una estructura menor

Tabla 4.7: Ejemplo de categorías a priori que detectan la manifestación de la habilidad Percepción de la Figura-Contexto en la actividad 1 de la primera sesión.

#### 4 Metodología de investigación

A continuación se ha comprobado si las manifestaciones concretas observadas en las respuestas de los alumnos se corresponden con las establecidas a priori y, cuando es necesario, se completan las categorías con otras inferidas de las respuestas. A modo de ejemplo, véase como el alumno MC muestra en su respuesta la categoría planteada a priori, en la que busca una estructura formada por piezas, justificando cómo se obtiene a partir de la obtenida por menos piezas:

*MC: Suponemos que la de seis [piezas] es el cuadrado tres por tres, que era la más pequeña. Al colocar la de siete se puede solapar sólo un círculo y sobran dos. Si intentamos modificarla, se podría mover una de las fichas, sacaríamos un punto fuera de la estructura.*

En su argumentación el alumno comenta el proceso de formación a partir de una estructura menor que era la manifestación esperada, pero también identifica otros elementos (en este caso los círculos) dentro de la propia estructura, por lo que se añade una nueva categoría: “*Identificación de elementos (círculos) dentro de una estructura mayor*”. Tras el análisis de las tres sesiones con el procedimiento anterior, se determinan las manifestaciones correspondientes para cada habilidad, lo que nos da un sistema de *categorías a posteriori*, como se muestra en la tabla 4.8.

FC	Percepción figura-contexto
Sesión 1	Comentar el proceso de formación de una estructura a partir de una estructura menor Identificar elementos (círculos, segmentos) dentro de una estructura mayor
Sesión 2	Identificar elementos dentro de una estructura mayor Identificar lados, vértices y caras de una figura
Sesión 3	Identificar elementos dentro de una estructura mayor Identificar lados, vértices y caras de una figura Identificar tipos de caras (cantidad, distribución...)

Tabla 4.8: Definición a posteriori de las categorías correspondientes a la habilidad Percepción Figura-Contexto en las tres sesiones.

Toda la información anterior se sintetiza en una tabla final de categorías (tabla 4.9) correspondientes a cada una de las habilidades y generalizables a las tres sesiones.

Habilidad	Categorías
Percepción figura-contexto	FC1: Utilización del proceso de formación de una estructura a partir de una menor FC2: Identificación de elementos (círculos, segmentos, vértices, lados, caras, ángulos) dentro de una estructura mayor
Conservación de la percepción	CP1: Utilización de criterios de igualdad: haciendo referencia a la forma o al tamaño, a los movimientos (giros, traslaciones, volteos) o a las distintas perspectivas CP2: Identificación de elementos ocultos (círculos superpuestos, segmentos solapados, caras, vértices y lados que no se ven...)
Percepción de la posición en el espacio	PE1: Utilización de elementos de posición respecto al objeto o a uno mismo (sistema de referencia, coordenadas, atrás, adelante, arriba, cerca...) PE2: Identificación de movimientos (traslaciones, giros, volteos) entre dos figuras
Percepción de las relaciones espaciales	RE1: Utilización de elementos de posición relativa entre dos objetos (dirección, orientación, paralelismo, secantes, coincidentes, perpendiculares, simétricos) RE2: Identificación de elementos entre el desarrollo plano y el poliedro
Discriminación visual	DV1: Utilización de criterios de clasificación mediante semejanzas o diferencias DV2: Identificación de semejanzas o diferencias entre figuras

Tabla 4.9: Categorías correspondientes a las habilidades.

La tabla 4.9 permite establecer una correspondencia entre las respuestas del alumno y la habilidad de visualización correspondiente. Esta relación nos determina un procedimiento para codificar las habilidades puestas en juego. Gracias a ello podemos expresar si se aprecia su empleo para obtener una solución correcta de la actividad, lo que codificamos indicando (0) ausencia, (1) uso incompleto y (2) uso correcto. En el uso incompleto de la codificación anterior también se considera el uso de la habilidad de visualización de una manera incorrecta. Para cada actividad se establecen los criterios de corrección en cada una de las categorías. Somos conscientes de que un alumno en una misma actividad ha podido poner en juego múltiples estrategias y procesos visuales, pero únicamente contabilizamos los que ha manifestado expresamente en sus respuestas. En la tabla 4.10, a modo de ejemplo, presentamos los criterios de corrección para la categoría FC1 en las tres sesiones. Estos criterios hacen referencia a actividades concretas de las sesiones.

#### 4 Metodología de investigación

<b>FC1</b>	<b>Criterios de corrección</b>
Sesión 1	1: Proceso a partir de la estructura de seis fichas incompleto 1: Distinguir cuadrados más pequeños dentro de cuadrados mayores (incompleto) 2: Proceso de construcción a partir de una ficha 2: Proceso de construcción a partir de dos fichas (1 si incompleto)
Sesión 2	2: Afirmar que el cuadrado rellena el plano 2: Ocho cubos forman otro cubo 2: Unir esas partes lo rellenaría (1 si incompleto) 2: Lo mismo que en el plano añadiéndole altura (volumen) 2: Un poliedro de base un triángulo 2: Proceso de construcción (1 si es imprecisa la descripción) 2: Combinaciones correctas de piezas para dar otras 2: Construir correctamente las figuras requeridas
Sesión 3	2: Sucesión de planos con polígonos que teselan 2: Rellena un cubo y el cubo rellena el espacio 2: Las partes rellenarían 2: Formar un hexágono a partir de un cuadrado

Tabla 4.10: Criterios de corrección para la categoría FC1.

Como la información obtenida de una misma intervención de un alumno podía estar recogida en varios de los elementos anteriores, se establece un orden en el procedimiento de análisis de la información para que ésta no aparezca duplicada. Inicialmente se recogía la información de las respuestas escritas, ya que a partir de estas respuestas se establece el rendimiento de la sesión y este elemento de recogida es totalmente homogéneo respecto al número de registros entregados, pues todos los alumnos debían realizar las mismas actividades.

A continuación, se analizan los datos obtenidos en las transcripciones que no estuviesen registrados en las preguntas escritas (intervenciones orales, en sus comentarios con compañeros o en la puesta en común) y, finalmente, se añaden los aspectos señalados en las observaciones de los profesores investigadores y de los demás observadores, que no se habían recogido anteriormente. En el caso de las entrevistas, los pasos anteriores se completan con la información recogida en el visionado de la grabación. Esta compilación final presenta una mayor riqueza de información, pero admite mayor heterogeneidad ya que es variable tanto el número de intervenciones como el de observaciones para cada alumno. Para la triangulación de datos se comparan los resultados obtenidos por cada una de las formas de registrar, aparecidos en cada fase.

Utilizamos la siguiente notación para distinguir los elementos de obtención de información:

- E\_nºsesión\_nºactividad: Respuestas entregadas en las actividades escritas correspondientes.
- TP\_nºsesión\_nºactividad: Participación del alumno en la dinámica de clase recogida en la transcripción.
- TD\_nºsesión\_nºactividad: Participación del alumno en el debate de grupo recogida en la transcripción.
- O\_nºsesión\_nºactividad: Observación realizada por los profesores durante la sesión.
- TV\_nºsesión\_nºactividad: Observación realizada por los profesores en la entrevista durante el visionado de la grabación.

Utilizando los criterios anteriores, se completa una ficha individual en la que cada intervención del alumno se identifica con la categoría correspondiente, se codifica con 0, 1 ó 2. En la ficha individual se registra toda la información ordenada cronológicamente, es decir, incluyendo las aportaciones de las transcripciones y observaciones en el momento concreto de la actividad desarrollada en cada sesión. Para las actividades escritas en la que debían entregar una única respuesta de grupo, registramos para todos los componentes la misma información obtenida de la respuesta global.

	FC1	FC2	CP1	CP2	PE1	PE2	RE1	RE2	DV1	DV2
TP_3_1_1		2					2			
E_3_1_d	1									

Tabla 4.11: Fragmento de ficha del alumno para la recogida de información en una actividad.

El alumno reflejado en la tabla 4.11, ha resuelto correctamente (codificado por 2) empleando las categorías FC2 y RE1 en una intervención en clase relativa a la actividad 1 de la sesión 3 (TP\_3\_1\_1) y ha empleado de manera incompleta o incorrecta, la categoría FC1 en su respuesta escrita a la actividad 1d de la tercera sesión.

#### 4 Metodología de investigación

Al final de cada sesión, se realiza el recuento de unos y doses que el alumno ha obtenido en cada categoría, registrando el número y tipo de intervenciones. A partir de esta información se determinan indicadores individuales y del grupo para analizar el uso que se ha manifestado de cada habilidad, tanto de manera incompleta como correcta.

Las categorías a priori para los errores están formadas por los cinco errores recogidos en la prueba piloto y que se han reforzado en la revisión bibliográfica:

*E1: Establecer una falsa analogía entre el plano y el espacio:*

Se ha observado que los alumnos confunden propiedades de las figuras en el plano con las correspondientes en el espacio o viceversa. Un ejemplo de manifestación de este error es “*si los triángulos rellenan el plano, los tetraedros rellenan el espacio*”.

*E2: No discutir todos los casos posibles:*

Se manifiesta cuando el alumno no ha distinguido todos los resultados posibles necesarios para razonar sobre un caso general. Ejemplos de este error son los debidos a la falta de exhaustividad en la argumentación.

*E3: Razonar limitándose a ejemplos concretos:*

Diremos que se ha manifestado este error cuando los alumnos razonan apoyándose en ejemplos concretos limitados. Ejemplos de este tipo de error son las argumentaciones que el alumno realiza basándose en las características de la solución particular que el alumno ha obtenido en la actividad y que no es representativo del caso general.

*E4: Confundir los elementos matemáticos de razonamiento (contraejemplos, condiciones necesarias y suficientes):*

Los alumnos no están habituados a los conceptos de contraejemplo, conjetura, condición necesaria y suficiente, etc., por lo que tienen dificultades para identificarlos y emplearlos correctamente en sus razonamientos. Ejemplos de este error aparecen cuando en una implicación confunden la condición necesaria con la suficiente.

*E5: Confundir los elementos de contenidos matemático (propiedades, definiciones...):*

Es esperable que los alumnos cometan algún error relativo a los contenidos o a las propiedades matemáticas que están utilizando. Por ejemplo, emplear o no identificar la terminología adecuada, utilizar un lenguaje impreciso, describir una figura, cometer errores de cálculo, etc.

Tras el análisis de las intervenciones de los alumnos, y comprobar que los errores cometidos se pueden clasificar en alguno de los casos anteriores, se establecen las mismas categorías a posteriori, no habiendo sido necesaria una nueva formulación. En la tabla 4.12, a modo de ejemplo, mostramos las manifestaciones particulares que en cada una de las sesiones conforman el error E2 y que se localizan en actividades concretas.

<b>E2</b>		
<b>Sesión 1</b>	<b>Sesión 2</b>	<b>Sesión 3</b>
No discutir todos los casos posibles Dibuja una sola estructura Falta alguna estructura Falta algún movimiento No diferencia entre dos	Si el mismo poliedro rellena el espacio de dos formas distintas debe haber un giro entre ellas Faltan varias transformaciones	No distingue todas las posibilidades Afirmaciones generales sin considerar todos los casos

Tabla 4.12: Manifestaciones del error E2 en las tres sesiones.

Como consecuencia de la evolución del experimento de enseñanza, tras ser detectadas en las sesiones anteriores y la revisión bibliográfica, se considera interesante cuantificar las dificultades de comunicación que los alumnos manifiestan en sus argumentaciones visuales en la sesión 3 (aparecen actividades tanto del plano como en el espacio) y en las entrevistas personales. Se establecen cuatro categorías a priori:

*DT (Dificultad en la Terminología):* El desconocimiento de la terminología utilizada en los conceptos espaciales. Por ejemplo, confunden rectas paralelas y secantes en el espacio.

*DE (Dificultad en el Entorno):* La necesidad de utilizar movimientos de su propio cuerpo o hacer referencia a objetos del entorno. Por ejemplo no poder describir las propiedades de una figura sin tener que recurrir a un objeto concreto.

## 4 Metodología de investigación

*DC (Dificultad de Comunicar verbalmente):* La dificultad para verbalizar los procesos mentales que utilizan en sus razonamientos. Por ejemplo no encontrar la forma de expresar con palabras lo que esta pensando.

*DR (Dificultad de Representación):* La dificultad para describir las representaciones visuales utilizadas. Por ejemplo no disponer de términos, relaciones, referentes, etc., para describir con claridad la imagen mental que está utilizando.

En el análisis de las intervenciones de los alumnos se comprueba que las dificultades se corresponden a alguno de estos casos, por lo que se establecen las mismas categorías a posteriori. A modo de ejemplo, recogemos en la tabla 4.13 las dificultades concretas que en la sesión 3 se detectan como relativas a la dificultad en el desconocimiento de la terminología:

<b>DT</b>
<ul style="list-style-type: none"><li>• Desconocimiento en la terminología utilizada (diagonales distintas de un hexágono, altura de un polígono, distancia de vértice a vértice)</li><li>• Terminología imprecisa (llamar lados a las caras, planos que se cruzan, puntos perpendiculares, cara con la misma orientación en un contexto incorrecto, rectas paralelas nunca se cruzan, misma dimensión en un contexto incorrecto).</li></ul>

Tabla 4.13: Dificultades relativas al desconocimiento de la terminología.

Con las categorías anteriores relativas a errores y dificultades se completa la ficha individual del alumno, codificando con 0 la ausencia y 1 la presencia en cada una de las categorías. Al igual que en las habilidades, para cada sesión, se realiza el recuento de unos que el alumno ha obtenido en cada categoría.

### 4.5.1 Diseño y papel de las entrevistas

A partir de las entrevistas personales pretendemos confirmar lo observado mediante el análisis retrospectivo y profundizar en diferentes aspectos visuales que no se hayan podido registrar suficientemente en el proceso general. Tanto en la forma de responder a los test como en las tareas de clase puede que no hayamos apreciado cómo piensan, qué habilidades han puesto en juego y no han manifestado o por qué presentan errores y dificultades. Con las entrevistas se pretende completar esta información y contrastar con

lo observado relativo a la capacidad visual y la manifestación de habilidades, errores y dificultades.

Las entrevistas personales las realizan los dos profesores investigadores, se graban en audio y en vídeo, con una duración prevista de media hora. Se determina que haya dos tipos de actividades. Una actividad inicial para indagar sobre el comportamiento de los alumnos al realizar los test y un grupo de actividades relativas al contenido de las sesiones.

Respecto a la capacidad visual de los alumnos, en la entrevista pretendemos indagar en la entrevista sobre la dificultad que los alumnos han percibido a la hora de realizar dichos test, las habilidades puestas en juego y las estrategias utilizadas para responderlos. En este sentido, realizamos un estudio de los ítems fallados tanto por los alumnos del grupo talento como los alumnos del grupo control para seleccionar la muestra de ítems que serán pasados en la entrevista.

De cada una de las sesiones se selecciona una actividad que haya sido destacada en el experimento de enseñanza, bien por su representatividad en la sesión o por las intervenciones que motivó (manifestaciones de las habilidades de visualización, errores cometidos, uso del material manipulativo, debates entre los alumnos y/o dificultades al resolverla). Detectando las habilidades de visualización que pone en juego al resolverlas y los errores que comete se pretende contrastar el diagnóstico que se ha obtenido del alumno a partir del estudio de su capacidad visual y el uso que hizo de ella en el experimento de enseñanza. Las actividades irán dirigidas a que argumenten sus respuestas por lo que se espera profundizar en las dificultades que presenten al comunicar sus argumentaciones visuales, que puede que no hayan sido suficientemente recogidas en el análisis anterior. Se elabora un guión en el que se explica al alumno el objetivo de la entrevista y se le indican las instrucciones. Todos los alumnos entrevistados completan las mismas actividades.

Determinamos que el criterio para seleccionar a los alumnos sea su puntuación en los dos test visuales (factores espaciales del PMA y DAT) ya que es el elemento más objetivo del que disponemos para discriminar su comportamiento visual previamente a la realización del análisis retrospectivo.

#### 4 Metodología de investigación

Inicialmente, se decide agrupar a los alumnos según la variable bidimensional (puntuación PMA, puntuación DAT) estableciendo tres categorías para cada una de las componentes: Alto-Medio-Bajo. Sin embargo, dado la elevada puntuación en los dos test, especialmente en el DAT, renombramos las categorías según el rango de puntuación obtenida expresado en percentiles (Tabla 4.14).

TEST 1 PMA	Muy altos 94-96 (A)	Altos 73-87 (B)	Medios 45-70 (C)	Bajos 8-40 (D)
TEST 2 DAT	Muy altos 99 (A)	Altos 95-98 (B)	Medios 75-90 (C)	

Tabla 4.14: Categorías de las puntuaciones en PMA y DAT según los percentiles obtenidos.

Esta clasificación distribuye a los alumnos en once grupos tal como muestra la Tabla 4.15.

Test 1 \ Test 2	Muy altos (A)	Altos (B)	Medios (C)	No realizado
Muy altos (A)	<b>4</b>			1
Altos (B)	1	3	<b>1</b>	
Medios (C)	5	3	1	
Bajos (D)	<b>3</b>	1	<b>1</b>	
No realizado		1		

Tabla 4.15: Número de alumnos en cada una de las categorías del vector (puntuación PMA, puntuación DAT).

A partir de la tabla anterior se decide hacer un estudio detallado de los alumnos situados en los extremos, entrevistando a cinco alumnos, dos alumnos del grupo (A,A) y un alumno de cada grupo (B,C), (D,A) y (D,C).

Como en el grupo (A, A) y (D, A) hay que realizar una nueva selección, se determinan tres nuevos criterios para enriquecer la diversidad de la muestra escogida: puntuación extrema en alguno de los test, sexo y curso. Así se seleccionan dos chicas y tres chicos entre los que se encuentran los alumnos pertenecientes a los cursos inferiores y superiores dentro del grupo talento y los alumnos que han obtenido las puntuaciones extremas en los test. Siguiendo los mismos criterios se establece un grupo de alumnos suplentes para las entrevistas por si fuera necesario.

Para preparar las entrevistas se realiza un estudio preliminar del comportamiento de los cinco alumnos seleccionados en las tres sesiones del experimento de enseñanza, analizándose los ítems fallados en los test por cada uno de ellos, las respuestas escritas en las tres sesiones y las observaciones realizadas por los profesores, señalando los errores cometidos y los elementos más destacables de sus intervenciones.

### 4.6 Codificación de la información

En este apartado describimos el proceso que llevamos a cabo para apreciar los resultados correspondientes a las seis variables del estudio. A continuación describimos cada uno de ellas.

#### a) Capacidad de visualización:

Mediremos la capacidad de visualización mediante pruebas externas a nuestra intervención. Es decir, estudiaremos las estrategias visualizadoras puestas en juego en la prueba de selección y las puntuaciones obtenidas en los test administrados.

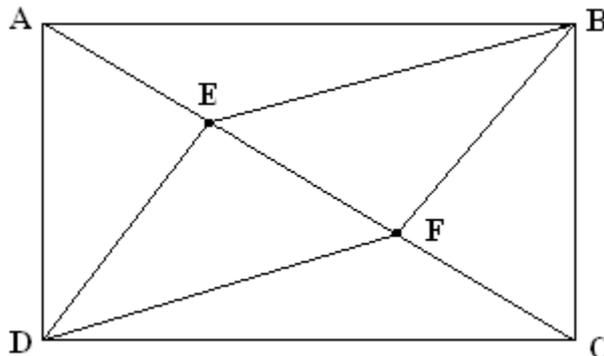
##### 4.6.1 Puntuación obtenida en la prueba de selección

Para el rendimiento de la prueba de selección se determina la suma de puntuaciones obtenidas en los cinco problemas (P1, P2, P3, P4 y P5) dividida entre el máximo de puntuación posible (50 puntos) y se multiplica por 100. Esto da lugar al variable *Rend (prueba)* que toma valores entre 0 y 100.

Para un estudio detallado del uso de la visualización en la prueba de selección, se realiza un análisis previo de las estrategias posibles para resolver cada problema y se analizan los elementos visuales señalados por Gutiérrez (1996) en la resolución de una tarea matemática. En el problema 2, referido a contenidos geométricos, es en el que se prevé que utilicen más estrategias visualizadoras para describir los caminos o calcular el área.

## 4 Metodología de investigación

**Problema 2 de la prueba de selección:** Sea el rectángulo  $ABCD$  de la figura. Dividimos la diagonal  $AC$  en tres segmentos iguales mediante los puntos  $E$  y  $F$ . Unimos los puntos  $E$  y  $F$  con  $B$  y con  $D$ .



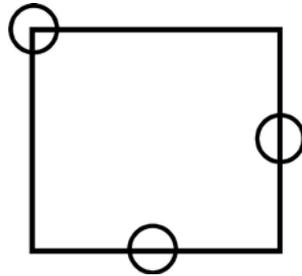
- 1) Si haces el recorrido  $ABCFEDABCFEDA\dots$  desplazándote por los segmentos trazados ¿en qué punto acabarás tras pasar por 2008 letras?
- 2) ¿Puedes hacer un recorrido que, empezando desde  $A$ , pase por todos los segmentos de esa figura una sola vez? ¿Hay otros puntos desde los cuales se puede hacer un recorrido que pase también por todos los segmentos una sola vez?
- 3) ¿Por qué no se puede hacer un recorrido como los anteriores empezando desde  $B$ ?
- 4) Si la base del rectángulo mide 12 m y la altura 9 m. ¿cuál es el área del triángulo  $BEF$ ?

En el problema 4, aunque se podrían utilizar estrategias visuales, es previsible que los alumnos generalicen utilizando argumentos algebraicos. En el resto de los problemas, las estrategias que se prevén son mayoritariamente algebraicas o analíticas.

**Problema 4 de la prueba de selección:** Estás en una habitación cuadrada en la que se pueden poner lámparas de pie como en el dibujo, y te dicen que las coloques junto a la pared, con la condición de que haya el mismo número de lámparas en cada una de las cuatro paredes de la habitación.

Para ello te permiten poner, como máximo, una lámpara en cada uno de los cuatro rincones de la habitación, y, en ese caso, la lámpara se cuenta como perteneciente a las

dos paredes que forman ese rincón (no siempre es necesario poner lámparas en un rincón). Por ejemplo, ésta es una forma correcta de colocar 3 lámparas (en cada pared hay una lámpara)



- a) Tienes 12 lámparas. ¿Cómo puedes colocarlas? Haz un dibujo que nos diga, de un vistazo, la solución.
- b) Ahora tienes 10 lámparas. ¿Cómo puedes colocarlas? Haz un dibujo que nos diga, de un vistazo, la solución.
- c) Resuelve el mismo problema para 11 y para 13 lámparas.
- d) Para un número cualquiera de lámparas, ¿podrías hacer unos dibujos que representen las diferentes soluciones del problema según el número de lámparas? ¿Cómo puedes hacerlo? ¿Cuántas habrá en cada pared?

La puntuación en cada pregunta viene determinada por la corrección de los profesores del proyecto ESTALMAT. Para nuestra investigación, analizamos todas las respuestas de los alumnos seleccionados y detectamos las estrategias visuales utilizadas. Únicamente se detectan en el problema 2 y las vamos a nombrar como utilizar simetrías, usar cuadrículas para calcular áreas, hacer referencia a elementos de posición y emplear criterios de igualdad para el cálculo de áreas. Se elabora una ficha correspondiente a cada alumno con la puntuación de cada problema y, en su caso, la estrategia visual utilizada. A modo de ejemplo de esta clasificación, presentamos la respuesta de un alumno a uno de los apartados del problema 2 que se consideró en la categoría de utilización de criterios de igualdad para el cálculo de áreas:

DG: *Al tener la misma base y llegar al mismo punto, los triángulos tienen igual área.*

## 4 Metodología de investigación

### 4.6.2 Puntuación obtenida en los test administrados

Como se ha descrito en apartados anteriores, fueron pasados tres test:

T1: Puntuación obtenida en el factor espacial del test PMA

T2: Puntuación obtenida en las relaciones espaciales del test DAT

T3: Puntuación obtenida en el test de Raven

Para cada alumno se obtiene su puntuación y se normaliza para poder establecer las comparativas oportunas.

### **b) Desarrollo de las habilidades de visualización: Experimento de enseñanza**

Como hemos comentado, para estudiar la evolución de las habilidades de visualización de niños con talento, durante un proceso de enseñanza, hemos realizado un experimento de enseñanza. Su estudio abarca dos partes: 1) explicar el proceso llevado a cabo en el experimento de enseñanza (las fases, las decisiones adoptadas, la conjetura, etc., que describiremos en el capítulo cinco) y 2) estudiar qué habilidades visualizadoras ponen en juego y cómo evolucionan a lo largo del experimento de enseñanza, para lo que se utilizan las variables que vienen a continuación.

### 4.6.3 Rendimiento en las actividades escritas en cada sesión

Con el término rendimiento queremos medir la eficacia que demuestra el alumno en la realización de las pruebas escritas. Para las tres sesiones, en la medición del rendimiento en cada actividad escrita establecemos la siguiente escala:

0: Respuesta incorrecta

1: Respuesta parcialmente correcta.

2: Respuesta correcta

Para el rendimiento de cada sesión, se suma la puntuación obtenida en todas las actividades escritas, se divide entre el máximo de puntuación posible en la sesión y se multiplica por 100. Esto da lugar a tres variables  $Rend(S1)$ ,  $Rend(S2)$  y  $Rend(S3)$  con valores comprendidos entre 0 y 100.

### 4.6.4 Habilidades de la visualización manifestadas en las intervenciones

Como hemos comentado, hemos utilizado el análisis de contenido como metodología de interpretación de los datos. Este análisis nos ha permitido codificar la información y poder cuantificarla.

Cada una de las habilidades viene descrita por dos categorías (ver tabla 4.9. de Categorías correspondientes a las habilidades). En cada una de las actividades, se evalúan dichas categorías con 0 (ausencia), 1 (uso incompleto) y 2 (uso correcto).

Utilizando los criterios anteriores, se completa una ficha individual en la que se puntúan las categorías con 0, 1 o 2 para cada una de las intervenciones del alumno. Se incluye una nueva variable NV (tarea No Visual) en la que se indica si el alumno ha resuelto una tarea mediante un procedimiento que no implica visualización. Además, en algunos casos, se señalan hechos puntuales que complementen la información recogida numéricamente (no realiza la actividad, no justifica, razonamiento interesante...).

Al final de cada sesión, se realiza el recuento del número de respuestas incompletas (unos) y completas y correctas (doses) que el alumno ha obtenido en cada categoría, registrando el número y tipo de intervenciones (el recuento de ceros no es necesario por aportar la información complementaria). Como además del estudio individual del comportamiento visual de cada alumno, se pretende analizar el del grupo total, distinguimos en el proceso la obtención de los indicadores de visualización según sean individuales o de grupo. La descripción del comportamiento mediante indicadores puede facilitar el tratamiento de una gran cantidad de datos. En estudios que han analizado los procesos y habilidades de visualización en tres alumnos particulares, se

## 4 Metodología de investigación

señala que el tiempo dedicado al análisis de los estudios de caso requiere de bastante tiempo, lo que sugiere una reflexión sobre la complejidad de los análisis cualitativos en estos casos (Acevedo y Camargo, 2011).

### 4.5.4.1 Indicadores de visualización individuales

Como el número total de unos y doses de cada alumno es diferente según el número de intervenciones que realiza, hemos construido un indicador que permite comparar entre alumnos y entre sesiones. Con este fin, para cada sesión, se divide el número de unos y de doses conseguidos entre el total de intervenciones que se han registrado del alumno (tanto en E: actividades escritas, como en TP: transcripción de la participación en clase, TD: transcripción del debate en grupo y O: observaciones de los investigadores). El resultado se multiplica por 100 para utilizar el valor en tanto por ciento del número de registros que tenemos del alumno, redondeando el resultado con un decimal. A modo de ejemplo, mostramos el cálculo para los porcentajes de las categorías FC1 y FC2 (Tabla 4.16).

Alumno	Intervenciones				Porcentaje unos y doses			
	E	TP	TD	O	FC1		FC2	
Sesión 1	10	0	0	1	27.3	9.1	0	63.7
Sesión 2	16	0	3	1	10	15	0	25
Sesión 3	17	0	4	0	0	0	4.8	23.8

Tabla 4.16: Ejemplo de cálculo de indicadores de porcentajes para FC1 y FC2 para un alumno.

Los porcentajes relativos a FC1 aportan información sobre el comportamiento del alumno respecto a esta categoría y toman valores entre 0 y 100: un valor de 0 indica que no ha manifestado esta categoría de la habilidad y un valor de 100 significa que lo ha hecho en todas sus intervenciones, ya que en una misma actividad no podía obtener simultáneamente uno y dos en la misma categoría. En el ejemplo, en la sesión 1, el alumno ha manifestado de manera incompleta la categoría FC1 en el 27.3 por ciento de las intervenciones que ha realizado. En cambio, en esta misma sesión, ha manifestado FC1 de manera correcta en el 9.1 por ciento de sus intervenciones.

Como FC1 y FC2 son categorías relativas a la misma habilidad FC, se define el indicador *FCI* (FC Incompleto) como la media aritmética de los porcentajes relativos a las manifestaciones incompletas de FC1 y FC2 obtenidos anteriormente. De manera análoga se define *FCC* (FC Correcto) como la media aritmética de los indicadores relativos a las manifestaciones correctas de FC1 y FC2 (tabla 4.17).

Alumno	FCI	FCC
Sesión 1	13.6	36.4
Sesión 2	5	20
Sesión 3	2,4	11.9

Tabla 4.17: Ejemplo de cálculo del indicador FCI y FCC para un alumno.

Los indicadores FCI y FCC nos aportan información sobre el comportamiento del alumno respecto a la habilidad Figura Contexto, cuantificando tanto el uso que hace de ella como la corrección con la que la utiliza. Además, nos permite hacer comparaciones entre alumnos y entre sesiones. En el ejemplo, en la sesión 1, el alumno ha manifestado de manera incompleta la habilidad FC en el 13.6 por ciento de las intervenciones que ha realizado, mientras que lo ha hecho de manera correcta en el 36.4 por ciento de las intervenciones registradas. Análogamente se procede para los indicadores relativos a las otras habilidades. De esta forma tenemos un registro cuantificado de las habilidades visualizadoras que se han observado en cada alumno.

Para realizar apreciaciones globales de las habilidades de visualización de cada alumno del grupo, tanto de manera incompleta como correcta, se definen dos indicadores que las agrupan:

**Indicador de Visualización Incompleta (V1):** Se define como la media aritmética de los indicadores relativos a las manifestaciones incompletas de las habilidades (FCI, CPI, PEI, REI y DVI).

**Indicador de Visualización Correcta (V2):** Se define como la media aritmética de los indicadores relativos a las manifestaciones correctas de las habilidades (FCC, CPC, PEC, REC y DVC). En la tabla 4.18 aparece un ejemplo del V1 y V2 de un alumno.

#### 4 Metodología de investigación

Alumno	V1	V2	FCI	FCC	CPI	CPC	PEI	PEC	REI	REC	DVI	DVC
Sesión 1	3.6	12.7	13.6	36.4	4.6	18.2	0	9.1	0	0	0	0
Sesión 2	2.5	11.5	5	20	2.5	7.5	2.5	2.5	0	12.5	2.5	15
Sesión 3	1.9	12.4	2.38	11.9	0	4.8	2.4	19	2.4	23.9	2.4	2.4

Tabla 4.18: Ejemplo de cálculo de V1 y V2 para un alumno.

V1 toma valores entre 0 y 100: correspondiendo el 100 al alumno que ha manifestado de manera incompleta todas las habilidades de visualización en todas sus intervenciones y el 0 a un alumno que no ha manifestado de manera incompleta ninguna habilidad de visualización en todas sus intervenciones (por haberla expresado de manera correcta o por no haberse manifestado). De manera análoga, un valor de 100 en V2 representa a un alumno que ha manifestado correctamente todas las habilidades de visualización en todas sus intervenciones, mientras que un valor 0 en V2 identifica a un alumno que nunca ha manifestado correctamente alguna habilidad de visualización en todas las sesiones. En el ejemplo descrito en la tabla 4.18, el alumno ha manifestado en la sesión 1, en promedio, las habilidades de visualización de manera incompleta en un 3.6 por ciento de las intervenciones registradas. Podemos comparar este resultado con la manifestación de las habilidades de un modo correcto en la misma sesión (12.7 por ciento) y su uso incompleto en las otras dos sesiones (2.5 y 1.9 por ciento respectivamente).

V1 y V2 aportan información sobre el uso de las habilidades de visualización que han manifestado los alumnos, tanto de manera incompleta como correcta, permitiendo comparar tanto el comportamiento individual en las diferentes sesiones como el uso manifestado por los diferentes alumnos.

Para clasificar los alumnos por su visualización y proceder a estudios confirmatorios individuales, definimos dos nuevos indicadores que nos den información del uso que han manifestado de la visualización y la corrección con que lo han hecho:

**Indicador de Visualización (V):** Se define como la suma de V1 y V2 y representa la media de los porcentajes en los que el alumno ha manifestado cada habilidad (independientemente de si lo ha hecho de manera correcta o incompleta).

$$V = V1 + V2 = \frac{FC1 + \dots + DV1}{5} + \frac{FCC + \dots + DVC}{5} = \frac{(FC1 + FCC) + \dots + (DV1 + DVC)}{5}$$

Toma valores entre 0 y 100 y es un indicador de la frecuencia con la que el alumno utiliza la visualización, permitiéndonos establecer criterios de comparación entre los sujetos según manifiesten en mayor o menor medida las habilidades de visualización.

**Coefficiente de Visualización Correcta (CV):** Se define como  $\frac{V2}{V1 + V2}$  e indica el peso

que tiene el Indicador de Visualización Correcta respecto al Indicador de Visualización, medido en porcentaje. Es un indicador de la corrección con que el alumno utiliza la visualización respecto al uso que hace de ella.

Podemos interpretar que un alumno con un valor elevado del indicador V es un alumno que ha manifestado un uso mayor de las habilidades de visualización (alumno visualizador). El valor del indicador V se complementa con CV para determinar nivel de corrección con el que dicho alumno ha manifestado estas habilidades. Los dos indicadores permiten comparar el comportamiento de un alumno respecto a sesiones diferentes y en relación a otros alumnos.

#### 4.6.4.2 Indicadores de visualización del total de los alumnos

Para valorar el comportamiento visual del grupo total de alumnos respecto a cada una de las habilidades se elabora una tabla de recuento en la que aparecen todos los alumnos con sus correspondientes asignaciones de unos y doses para cada categoría. Sumando las aportaciones individuales, se obtiene información sobre el total de intervenciones y el número de unos y doses que se han registrado. Esto nos permite elaborar una tabla en la que se indica el porcentaje de alumnos (respecto a los asistentes a la sesión) que ha manifestado cada categoría y el porcentaje (respecto al total de intervenciones de cada sesión) de ocasiones en que se ha manifestado tanto de manera incompleta como correcta. La tabla 4.19 muestra la visualización respecto a la habilidad FC (Figura contexto) del grupo.

#### 4 Metodología de investigación

	FC1			FC2		
	%	FC1I	FC1C	%	FC2I	FC2C
Sesión 1	100	19.1	4.4	100	2.2	64.7
Sesión 2	100	4,9	15	100	4.7	22.7
Sesión 3	87.5	1.4	5.4	100	3.5	9.5

Tabla 4.19: Ejemplo de cálculo de los indicadores para FC1 y FC2 de todos los alumnos.

Para cada categoría en cada sesión se indica el porcentaje de alumnos que la han manifestado y el porcentaje de manifestaciones incompletas y correctas que se ha registrado respecto al total de intervenciones de la sesión. Por ejemplo, en la sesión 3, el 87.5 por ciento de los alumnos manifiesta la habilidad Figura Contexto expresada en la categoría FC1, además los alumnos la manifiestan el 1.4 por ciento de las ocasiones de manera incompleta, frente al 5.4 por ciento de las veces que lo hacen de manera correcta.

Con los datos anteriores, se agrupan los indicadores relativos a FC1 y FC2 para obtener la información relativa a la habilidad FC. Para ello se contabilizan los alumnos que han manifestado al menos alguna de las categorías FC1 y FC2. Respecto al indicador de manifestaciones incompletas para FC (FCI), se calcula la media aritmética de los correspondientes indicadores para FC1I y FC2I. Análogamente se procede con el indicador de manifestaciones correctas, obteniéndose la tabla 4.20 para FC.

	FC		
	%	FCI	FCC
Sesión 1	100	10.7	34.6
Sesión 2	100	4.7	18.9
Sesión 3	100	2.5	7.4

Tabla 4.20: Ejemplo de cálculo de los indicadores globales para FC (porcentaje de alumnos FC Incompleto, FC Correcto).

En cada fila de la tabla 4.20 se indica primero el porcentaje de alumnos que han manifestado la habilidad FC. Luego se señala el porcentaje de manifestaciones incompletas que se ha registrado de esta habilidad respecto al total de intervenciones de la sesión. Finalmente se indica el porcentaje de manifestaciones correctas respecto a todas las intervenciones. Por ejemplo en la sesión 1, el 100 por cien de los alumnos

manifiestan la habilidad FC, haciéndolo en el 10.7 por ciento de las intervenciones de manera incompleta y en el 34.6 por ciento correctamente.

Igual que para FC, se calculan estos indicadores para el resto de habilidades, obteniéndose la información relativa al grupo respecto al porcentaje de alumnos que la manifiestan y el porcentaje de manifestaciones incompletas y correctas respecto al total de intervenciones. Esto nos permite establecer comparaciones entre el comportamiento del grupo respecto a las habilidades o la evolución a lo largo de las diferentes sesiones.

### **4.6.5 Errores cometidos en las intervenciones**

La cuantificación nos permite estudiar el comportamiento individual de los alumnos respecto a los errores en cada actividad. En este sentido se asigna la siguiente asignación para cada error:

0: Ausencia del error.

1: Presencia del error.

Utilizando las decisiones anteriores, se completa una ficha individual en la que se puntúan las tareas operativas con ceros y unos para los errores en cada una de las intervenciones del alumno.

Al final de cada sesión, se contabiliza el número de veces que aparece cada error. Al igual que en las habilidades, se distinguen indicadores para los individuos y el grupo total de alumnos.

#### **4.5.5.1 Indicadores de errores individuales**

Para cada alumno se elabora una tabla en la que se contabiliza el número de veces que ha cometido cada error en cada sesión (ejemplo en Tabla 4.21).

#### 4 Metodología de investigación

	Intervenciones				Errores				
	E	TP	TD	O	E1	E2	E3	E4	E5
Sesión 1	10	0	0	1	0	0	2	1	1
Sesión 2	16	0	3	1	0	1	1	0	5
Sesión 3	17	0	4	0	0	0	0	3	4

Tabla 4.21: Ejemplo de recuento individual de errores.

Para poder establecer comparaciones entre alumnos y sesiones diferentes y teniendo en cuenta la variabilidad del número de intervenciones, decidimos, al igual que con las habilidades, calcular el porcentaje del número de veces que aparece un error relativo al número de intervenciones de cada alumno (ejemplo en Tabla 4.22).

	Intervenciones				Porcentaje de Errores				
	E	TP	TD	O	E1	E2	E3	E4	E5
Sesión 1	10	0	0	1	0	0	18.2	9.1	9.1
Sesión 2	16	0	3	1	0	5	5	0	25
Sesión 3	17	0	4	0	0	0	0	14.3	19.1

Tabla 4.22: Ejemplo de cálculo de porcentajes de manifestaciones de errores.

Por ejemplo, el alumno ha cometido el E3 en el 18.2 por ciento de las intervenciones que ha realizado en la sesión 1.

Finalmente, se define el indicador de errores (E) como la media aritmética de los porcentajes de los errores E1, E2, E3, E4 y E5. Este valor nos indica, en promedio, el porcentaje de veces que un alumno manifiesta algún error en sus intervenciones (Tabla 4.23).

	E
Sesión 1	7.3
Sesión 2	7
Sesión 3	6.7

Tabla 4.23: Ejemplo de cálculo del Indicador de error en un alumno.

#### 4.5.5.2 Indicadores de errores del total de los alumnos

A partir del cómputo de errores para cada alumno, se completa una tabla en la que se suman todas las manifestaciones de errores cometidos por todos los alumnos. Para cada error se señala primero el porcentaje de alumnos que lo han cometido y a continuación se indica el número de veces que ha sido cometido, obteniéndose la tabla 4.24.

	<b>E1</b>		<b>E2</b>		<b>E3</b>		<b>E4</b>		<b>E5</b>	
Sesión 1	0	0	96	65	96	46	83	22	54	19
Sesión 2	48	12	86	26	67	16	14	5	100	109
Sesión 3	42	11	29	8	33	8	100	57	100	114

Tabla 4.24: Cálculo del porcentajes de alumnos que cometen cada error y las veces se que se comete.

Como en el caso individual, nos interesan los porcentajes de veces que se comete cada error para evitar la influencia de la variabilidad del número de intervenciones registradas en las diferentes sesiones. En este sentido, se divide el indicador anterior de conteo de errores entre el número total de intervenciones de cada sesión (multiplicando por 100 para utilizar porcentajes), obteniéndose la tabla final 4.25.

	<b>E1</b>		<b>E2</b>		<b>E3</b>		<b>E4</b>		<b>E5</b>	
Sesión 1	0	0	96	23.9	96	16.9	83	8.1	54	7
Sesión 2	48	2.8	86	6	67	3.7	14	1.2	100	25.2
Sesión 3	42	1.6	29	1.1	33	1.1	100	8	100	16.1

Tabla 4.25: Porcentajes de errores: alumnos que lo comenten y veces que se comenten.

Por ejemplo en la sesión 1, el 96 por ciento de los alumnos cometen E2 y además lo hacen en el 23.9 por ciento de las intervenciones registradas. Estos indicadores permiten establecer comparaciones entre errores y sesiones, lo que facilita la comprensión de la evolución de los errores a lo largo del experimento de enseñanza aprendizaje.

### 4.6.6 Dificultades en la comunicación de argumentaciones visuales detectadas en la sesión 3 y en las entrevistas personales

Como en los errores, la cuantificación queda condicionada por la ausencia o presencia de la dificultad que el alumno manifiesta, asignándose dos únicos valores:

0: Ausencia de dificultad.

1: Presencia de dificultad.

Al igual que para las habilidades y los errores, para la detección de las dificultades se realiza un proceso inductivo a partir de las intervenciones de los alumnos y se registran todas los criterios adoptados para señalar las dificultades presentadas. Utilizando los criterios anteriores, se completa la ficha individual del alumno únicamente en la sesión 3, contabilizándose el número de ocasiones en las que manifiesta la dificultad (ejemplo en Tabla 4.26).

Dificultades			
DT	DE	DC	DR
3	1	1	1

Tabla 4.26: Ejemplo de recuento de dificultades para un alumno.

Para poder establecer comparaciones entre alumnos se divide el número de veces que ha manifestado la dificultad entre el total de intervenciones del alumno, obteniéndose el porcentaje de ocasiones en las que el alumno manifiesta cada dificultad respecto al total de sus intervenciones (Tabla 4.27).

	Intervenciones				Dificultades			
	E	TP	TD	O	DT	DE	DC	DR
Sesión 3	17	0	4	0	14.3	4.8	4.8	4.8

Tabla 4.27: Ejemplo de cálculo de porcentajes para las dificultades de un alumno.

El alumno del ejemplo ha manifestado la dificultad DT en el 14,3 por ciento de las veces en las que ha intervenido. Análogamente se interpretan los indicadores DE, DC y DR.

Para el caso del total de alumnos se actúa de forma similar a los errores y dificultades, contabilizándose el número de alumnos que manifiestan cada dificultad y el número de veces que se manifiesta (Tabla 4.28).

<b>DIFICULTADES (sesión 3)</b>		
	<b>Número de alumnos</b>	<b>Frecuencia absoluta</b>
DT	24	79
DE	18	63
DC	13	25
DR	17	32

Tabla 4.28: Recuento de alumnos que manifiestan cada dificultad y la frecuencia absoluta con la que se manifiesta.

Para poder establecer comparaciones con los otros indicadores, se calcula el porcentaje de alumnos que manifiestan cada dificultad y el porcentaje de ocasiones en las que la manifiestan respecto al total de intervenciones de la sesión 3, obteniéndose la siguiente tabla final de indicadores de las dificultades (Tabla 4.29).

<b>Dificultades</b>		
	<b>Porcentaje de alumnos</b>	<b>Porcentaje de manifestaciones</b>
DT	100	11.2
DE	75	9
DC	54.1	3.5
DR	70.8	4.5

Tabla 4.29: Porcentaje de alumnos que manifiestan las dificultades y el porcentaje de veces que las manifiestan.

Por ejemplo, en la sesión 3, el 75 por ciento de los alumnos manifiestan la DE y además lo hacen en el 9 por ciento de las intervenciones que se realizaron.

Hemos definido el problema, los objetivos y la metodología de investigación que hemos utilizado. A partir de los instrumentos descritos, disponemos de variables e indicadores para abordar las dos partes principales de nuestra investigación relativas a evaluar la capacidad visual de los sujetos mediante herramientas psicométricas y la evolución del experimento de enseñanza.

#### **4 Metodología de investigación**

El proceso de operativización para la determinación de las categorías de las variables nos ha aportado una sustancial cantidad de datos que es necesario organizar para extraer los resultados relativos a la evolución del experimento de enseñanza. Pero antes de este análisis retrospectivo, es necesario describir el propio experimento de enseñanza, por lo que en el capítulo 5 describiremos las fases correspondientes a la planificación, implementación y reflexión del proceso de enseñanza llevado a cabo. Será en el capítulo 6 en el que presentaremos el análisis de los resultados relativos tanto a la capacidad visual registrada en los test como a la evolución del experimento de enseñanza. Posteriormente se complementarán estos resultados con los obtenidos a partir de las entrevistas personales.

## **5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza**

En este capítulo vamos a describir las acciones correspondientes a las fases de Preparación y Experimentación de nuestro experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011), que se va a basar un el estudio de una conjetura de investigación, a lo largo de las tres sesiones de intervención. Presentamos los procedimientos utilizados para la preparación del experimento: evaluación del conocimiento inicial de los alumnos, identificación de la metodología de enseñanza, diseño de las intervenciones en el aula y temporalización y diseño de la recogida de datos. Respecto a la experimentación, se muestran los elementos (actividades, actuaciones previstas, habilidades de visualización esperadas, estado de la conjetura, descripción de las intervenciones e incidencias y observaciones) que han determinado la planificación, el desarrollo y el análisis de cada una de las sesiones.

Nuestra investigación pretende estudiar la evolución de las habilidades de visualización de niños con talento, durante un proceso de enseñanza. A tal fin hemos abordado el curso en forma de experimento de enseñanza, cubriendo los requerimientos de tal metodología de investigación. En este apartado se describe el experimento de enseñanza, respondiendo al siguiente objetivo específico:

*Objetivo 2: Diseñar una intervención que favorezca la manifestación de las habilidades de visualización*

Que se concreta en proponer un proceso de enriquecimiento curricular dentro del paradigma de investigación de un experimento de enseñanza transformativo y dirigido por una conjetura llevado a cabo en tres fases: estudio piloto, tres sesiones de enriquecimiento y entrevistas personales.

La elección del tipo de experimento basado en una conjetura viene justificada por la intencionalidad de investigar nuevas estrategias de enseñanza y analizar diferentes enfoques para el contenido y la enseñanza de los contenidos matemáticos que queremos enriquecer. En los experimentos de enseñanza transformativos y dirigidos por una conjetura no existen hipótesis sino que la conjetura es la guía de la investigación. La

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

conjetura guía el proceso de investigación y da pautas al investigador sobre cómo organizar la enseñanza y qué tipo de actividades, herramientas y recursos son necesarios para trabajar el contenido en cuestión (Molina, 2006). La conjetura se utiliza para elaborar los elementos de la intervención ya que ayuda a organizar la forma de abordar los contenidos matemáticos incluyendo, entre otros aspectos, precisiones sobre cómo las matemáticas deben ser organizadas, conceptualizadas o enseñadas para un propósito educativo concreto. Para redactar y estudiar la evolución de la conjetura, debemos situarla en relación al marco teórico, a los contenidos matemáticos y al proceso de enseñanza previsto para el enriquecimiento curricular durante el experimento de enseñanza. Las ideas sobre visualización y sentido espacial nos han llevado a estructurar las actividades, plantear la metodología del experimento y conectar la dimensión didáctica y de contenido matemático de la conjetura. Eso hace que formulemos la conjetura del experimento de enseñanza en los siguientes términos:

*El enriquecimiento curricular centrado tanto en contenidos como en elementos de razonamiento visual favorece la utilización y el desarrollo de las habilidades de visualización en los alumnos con talento matemático.*

Con esta formulación realizamos tres conjeturas parciales:

- 1. Los alumnos con talento matemático no presentan deficiencias respecto a las capacidades visuales.*
- 2.- Los alumnos con talento matemático manifiestan y desarrollan habilidades de visualización al enfrentarse a tareas que las requieran para resolver situaciones significativas, aunque cometan algunos errores en su utilización.*
- 3.- El enriquecimiento curricular centrado tanto en contenidos como en elementos de razonamiento visual favorecerá la mejor utilización y el desarrollo de sus habilidades de visualización.*

Estudiar la primera nos ha llevado a analizar la capacidad visual de los alumnos, manifestada en los test. Para responder a los apartados 2 y 3 es necesario llevar a cabo el enriquecimiento curricular que forma parte del experimento de enseñanza propuesto que vamos a describir en sus fases de preparación y experimentación.

### 5.1 Preparación del experimento

Se han descrito y justificado en el capítulo anterior las acciones para la definición del problema y los objetivos de investigación, la identificación de los objetivos instruccionales, el trazado de una trayectoria hipotética de aprendizaje y la ubicación del experimento en un contexto teórico más amplio. En este punto describiremos las acciones correspondientes a la evaluación del conocimiento inicial de los alumnos, la identificación de las metodologías de enseñanza, el diseño de las intervenciones en el aula y la recogida de datos.

Para el experimento de enseñanza realizado el curso 2009-2010, con los 25 alumnos del proyecto ESTALMAT de Andalucía oriental, planteamos tres sesiones de enriquecimiento curricular. En las tres sesiones realizadas el número de asistentes es variable entre 24 y 21 (a la primera sesión acuden 24, a la segunda 21, a la tercera 24).

Anteriormente al experimento de enseñanza, se utiliza como toma de contacto con este grupo de alumnos que los profesores investigadores habían participado en varias sesiones en el primer curso de la promoción (Juegos matemáticos, Puzles planos, Juego de probabilidad) y en segundo (Puzles topológicos: Modelización con códigos numéricos, Geometría para entender el universo). De las demás sesiones, se estudian en cuáles se hizo alusión a los contenidos en los que se iba a contextualizar el enriquecimiento curricular.

#### 5.1.1 Prueba de selección

Como se ha dicho en el capítulo anterior, además de disponer de las puntuaciones de los alumnos seleccionados en cada uno de los problemas, se realiza un estudio de las estrategias visuales que manifiestan al resolverlos. En este análisis consideramos que han empleado una estrategia visual cuando en sus respuestas escritas aparece alguno de los elementos visuales señalados en el modelo de visualización empleado (Gutiérrez, 1996) para la resolución de una tarea matemática (imágenes, representaciones, procesos y habilidades de visualización).

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

Es en el segundo problema donde diez alumnos manifiestan alguna estrategia visual que analizamos asignándole a cada respuesta las correspondientes categorías relativas a las habilidades de visualización puestas en juego. Cuatro de ellos utilizan simetrías (Percepción de las relaciones espaciales, Percepción de la posición en el espacio), dos cuadrículan la figura para calcular áreas (Percepción figura-contexto), dos aluden a elementos de posición (Percepción de la posición en el espacio) y dos utilizan criterios de igualdad para el cálculo de áreas (Percepción de las relaciones espaciales, Discriminación Visual).

Por ejemplo, un alumno para calcular el área de los triángulos, respondió *que tienen la misma base y llegan al mismo punto, por lo tanto, tienen la misma área*. En el dibujo queda de manifiesto que las bases están colocadas en la misma recta y por lo tanto el alumno ha utilizado el criterio de clasificación de los triángulos por la propiedad de tener la misma altura, manifestando Percepción de las relaciones espaciales y Discriminación Visual.

Los alumnos seleccionados se corresponden a las mejores notas globales en la prueba. En la tabla 5.1 se muestran las medias obtenidas en cada problema de los alumnos del grupo talento y de la totalidad de alumnos presentados (Zuñiga, 2009). En cada problema se podía obtener una puntuación máxima de 10 puntos.

Medias	P1	P2	P3	P4	P5
Grupo talento	7.49	6.26	7.4	3.24	6.7
Total de presentados	2.982	2.503	1.834	0.950	4.33

Tabla 5.1: Medias obtenidas por los alumnos del grupo talento en cada problema de la prueba de selección.

### 5.1.2 Identificación de la metodología de enseñanza

Las sesiones previstas tienen una duración de tres horas con un descanso intermedio de media hora y son impartidas por los dos profesores investigadores. Asisten otros dos profesores con el rol de observadores, que registran distintos aspectos de las intervenciones y participan en el diseño y análisis de las sesiones. Cada sesión se dedica al enriquecimiento curricular de un contenido matemático y de diferentes conceptos

propios del lenguaje y razonamiento matemático. El esquema de los contenidos y elementos de razonamiento matemático de las tres sesiones se refleja en la tabla 5.2.

	<b>Contenido matemático</b>	<b>Elementos de razonamiento matemático</b>
Sesión 1	Movimientos en el plano	Definición Deducción / Inducción Contraejemplos
Sesión 2	Relleno del espacio	Propiedades Condiciones necesarias y suficientes
Sesión 3	Curvatura constante Concepto de dimensión: del plano al espacio	Definición Argumentación Resolución

Tabla 5.2: Contenidos y elementos de razonamiento de las tres sesiones.

Los objetivos de enseñanza son que los alumnos manifiesten y desarrollen sus cualidades visualizadoras, profundizando sobre elementos geométricos del plano y el espacio y se familiaricen con elementos del razonamiento matemático que se emplea al definir, argumentar y resolver, en un contexto de resolución de problemas. En la primera sesión el contenido matemático son los movimientos en el plano, que deben surgir como herramientas para resolver problemas. La segunda sesión se centra en problemas de relleno del espacio, para lo que tienen que reconocer las propiedades de los poliedros. Finalmente, en la tercera, se estudian analogías y diferencias entre distintas tareas que relacionan el plano y el espacio.

### **Elementos de razonamiento matemático**

Más allá de la lógica formal, siguiendo los estudios presentados en el capítulo 3, pretendemos contextualizar el razonamiento lógico en procesos matemáticos, como son analizar, clasificar, definir, probar, demostrar, conjeturar, particularizar, generalizar, etc. (Fielker, 1979; Guillén, 2010). De esta forma estaremos colaborando a que el enriquecimiento curricular vaya más allá de ampliar los contenidos matemáticos, introduciéndolos en usos y prácticas que realizan los matemáticos en su labor (Ramírez y Flores, 2010 y 2011). Los elementos de razonamiento matemático elegidos han sido seleccionados con la intención de presentar actividades de tres tipos: definición, argumentación y resolución.

### Selección de contenidos

El diseño de las sesiones no sólo tiene un mero carácter investigador de recogida de datos, sino que debe mantener también el carácter docente de enriquecimiento curricular que marca el proyecto ESTALMAT. En este sentido, decidimos que las actividades planteadas estén secuenciadas con el objetivo final de que los alumnos resuelvan problemas novedosos. En el camino hacia ello, los alumnos tienen que definir los conceptos matemáticos tratados en la sesión argumentando con ellos. La secuenciación de actividades les motiva a razonar utilizando la visualización, ya que no disponen de las posibles herramientas algebraicas o analíticas para resolverlas.

Por tanto, las actividades presentan diversas cualidades:

- a) Aparecen de manera funcional los conceptos matemáticos y la visualización.
- b) Abordan contenidos que los alumnos no han tratado en el currículo.
- c) Promueven al máximo la puesta en juego y el desarrollo de destrezas visualizadoras.

Como hemos justificado, el contexto geométrico es adecuado para la planificación de actividades que favorezcan el uso de la visualización. Por lo tanto, previo al diseño de la estudio piloto se realiza una revisión de los contenidos relativos a geometría que aparecen en los documentos curriculares de Primaria, ESO y Bachillerato. Tras esa revisión seleccionamos como contenido matemático los movimientos en el plano para diseñar actividades que se adapten al rango de edad de los alumnos de segundo curso del proyecto ESTALMAT a los que se les iba a impartir la sesión piloto (2º, 3º y 4º ESO). Este contenido aparece como componente importante en muchos de los test habituales para medir diferentes aspectos de la visualización y ha sido utilizado en diferentes investigaciones.

En el grupo de investigación FQM-193, del Paidi, se parte de los trabajos de Luis Rico (1997 a y b) para realizar análisis didáctico con vistas a diseñar sesiones de clase de matemáticas. El análisis didáctico (Rico, Lupiáñez, Marín y Gómez, 2007) comprende dos fases (Rojas, Flores y Ramos, en prensa). La primera se realiza antes de impartir la enseñanza y comprende el análisis del contenido, el cognitivo y el de instrucción (Rico,

Lupiáñez, Marín y Gómez, 2007). La segunda comprende la fase de intervención, y se compone de análisis de actuación y de intervención. Hemos realizado un análisis de contenido sobre los movimientos en el plano, en el que analizamos las referencias a este tema contenidas en los diferentes niveles educativos y destacamos las conexiones con otros temas y núcleos temáticos del currículum. Además, revisamos los contenidos relativos a movimientos que aparecían en las sesiones que reciben los alumnos en los dos años del proyecto ESTALMAT. Para el enriquecimiento curricular, matemáticamente enfatizamos la geometría dinámica para que se reconozcan los movimientos como transformaciones que dejan invariantes determinados elementos en el plano y en el espacio, siguiendo indicaciones basadas en el “programa Erlanger” expuesto por Klein, que afirmaba que una geometría es un espacio subyacente sobre el que actúa un grupo de transformaciones (Ruiz, 2006a, 2006b).

En la revisión de libros y lecturas especializadas, hemos encontrado numerosas actividades para trabajar las habilidades espaciales y que hemos reflejado en el capítulo 3. A partir de ellas y del análisis didáctico realizado, hemos seleccionado las actividades que corresponden a los temas de las sesiones (movimientos en el plano, relleno del espacio y conceptos de dimensión y curvatura constante), siempre con intención de que los contenidos sean medios para resolver problemas, tengan una intención funcional. Describimos a continuación el tipo de actividades de cada contenido.

**MOVIMIENTOS EN EL PLANO:** Existe una amplia gama de actividades en las que los movimientos aparecen de un modo funcional, bien para la resolución de problemas (García, Romero y Flores, 1999; Alsina, Fortuna y Pérez, 1997), la construcción de frisos o mosaicos (Abas y Macley, 1991; Bergasa y Sada, 2006) y la aplicación a otras ciencias naturales y experimentales y las bellas artes (Alsina, Pérez y Ruiz, 1989). Como se describe en el estudio piloto (Ramírez, Flores y Castro, 2010a, 2010b y 2012) las actividades se contextualizan en el juego “Constelaciones el juego de los tres colores” en su versión informática (Ramírez y Albendín, 2007a).

**RELLENO DEL ESPACIO:** Ghyka (1983) caracteriza el cubo como el único poliedro regular por medio del cual se puede llenar el espacio sin dejar intersticios. Von Fedorow observó que, además del cubo y del poliedro arquimediano de Kelvin, el prisma regular hexagonal, y por consiguiente su submúltiplo, el prisma triangular, permiten igualmente la equipartición del espacio. Guillén (1991, 1997) muestra una demostración de que el

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

tetraedro no rellena el espacio utilizando la tabla de ángulos diedros de los sólidos de los poliedros regulares para ver que no son divisores de 360 grados. En el estudio de Kyung-Hwa y Lee (2009), una de las tareas al trabajar las analogías con alumnos con talento consistía en hacer conjeturas sobre el tetraedro basada en el conocimiento de un triángulo. Presentaron dificultades sobre el concepto de ángulo en el espacio y gastaron una considerable cantidad de tiempo en buscar la correspondiente propiedad de “La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180 grados”. A partir de estas consideraciones, decidimos partir de una cuestión general, que provoca reacciones antiintuitivas, sobre si el tetraedro rellena el espacio, siguiendo el guión de Flores (2006), en el que se hace un estudio detallado de las posibilidades didácticas de un puzle de pirámides, que consta de varias piezas formadas por pirámides cuadradas y tetraedros.

**CURVATURA CONSTANTE Y CONCEPTO DE DIMENSIÓN:** Una dificultad relacionada con la visualización estriba en utilizar los razonamientos en el plano para inferir propiedades del espacio, o de resolver problemas en el espacio a partir de los conocimientos sobre la geometría plana. Los problemas de relleno del espacio se pueden abordar a partir del relleno del plano, aunque no llegan a resolverlos completamente. Para llevar a los alumnos a detectar la limitación de las intuiciones se propusieron actividades en las que se relacionan propiedades de los polígonos en el plano con los movimientos que hay que hacer en el espacio para intentar introducirlos en su interior, contextualizando la propiedad de anchura constante en las tapas de las alcantarillas.

### **Recomendaciones metodológicas**

En cuanto a la metodología, la secuenciación de las actividades debía dirigir a los alumnos a resolver problemas novedosos, que plantearan retos, que les obligaran a definir los conceptos matemáticos que se emplean en la sesión, como medio para resolver dichos problemas, promoviendo con ello que se formularan argumentos para convencer a los demás del valor de sus aportes. Esta secuenciación les motiva a razonar utilizando la visualización, ya que no disponen de las posibles herramientas algebraicas o analíticas para resolverlas (Ramírez, Flores y Castro, 2010a , 2012). Como resultado del estudio piloto percibimos la necesidad de ajustar la dificultad de las tareas, ya que es necesario establecer el nivel adecuado para que se ajusten a las posibilidades de los

alumnos del curso y mantengan su motivación. Si bien un nivel muy bajo puede “aburrirlos”, un nivel demasiado elevado puede generarles frustración, como ilustra Skemp (1980) citando la regla de Yerkes-Dodson: “*El grado de motivación para una tarea dada decrece con la complejidad de ésta*”. Consideramos como elementos motivadores la utilización de juegos, contextualizar las actividades en situaciones reales, favorecer el trabajo en grupo y utilizar recursos informáticos. Pasamos a hacer algunas consideraciones al respecto, que influyeron en la selección de las tareas para la instrucción.

**UTILIZACIÓN DE JUEGOS:** En la primera y segunda sesión, el planteamiento de las actividades se presenta en el contexto de resolver un reto en un juego. La utilización de los juegos en la lista de actividades matemáticas está justificada por autores como Bishop (1999), ya que el juego facilita la construcción de conocimiento matemático cuando se plantea en un entorno de interacción entre todos los participantes (Edo y Deulofeu, 2005; Acevedo, 2009), por lo que puede convertirse en una herramienta metodológica para el desarrollo de habilidades de resolución de problemas (Edo, Baeza, Deulofeu y Badillo, 2008). Hay amplia bibliografía que muestra que los juegos se han utilizado en investigaciones relacionadas con las estrategias utilizadas en la resolución de problemas (Corbalán, 1997). El análisis de las posibilidades didácticas de un material (Ruiz, 2000) muestra que el análisis de los juegos genera un estudio teórico de su contenido matemático. Es por ello que hemos procedido a estudiar el juego Constelaciones (Ramírez y Albendín, 2007a y 2007b), apreciando que plantea un reto aún sin resolver por la comunidad matemática (Ramírez y Albendín, 2007b) lo que motiva que el alumno interprete el papel de investigador, favoreciendo las tareas de aprendizaje por descubrimiento, uno de los procesos mentales implicados en la enseñanza de las matemáticas (Resnick y Ford, 1990). En el planteamiento de problemas que supongan un reto, los estudiantes se ven motivados a mostrar su trabajo para presentar y justificar la validez de sus respuestas, por lo que comprenderán el valor de expresar su razonamiento, sin que ello suponga responder a los requerimientos externos, sino porque es necesario y útil (Willis, 2010). Las situaciones que plantean un desafío ayudan a descubrir e incentivar el talento matemático incrementando su interés hacia un currículum matemático más avanzado (Freiman, 2006). La selección de tareas no convencionales puede convertirse en una herramienta para examinar la creatividad matemática en los alumnos, y esto es especialmente válido en alumnos con talento, los

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

que, según Leikin y Lev (2007) difieren de otros alumnos cuando resuelven tareas no convencionales, aunque obtengan resultados similares cuando desarrollan tareas convencionales.

**SITUACIONES REALES:** La utilización de los problemas matemáticos de la vida cotidiana puede suponer un primer encuentro con la obra matemática (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Numerosos ejemplos muestran el interés de plantear problemas en situaciones próximas a la realidad del alumno, como por ejemplo la utilización de mosaicos para ilustrar la teselación del plano (Pérez, 1995). Resolver problemas “de la vida real” demanda que los estudiantes utilicen su experiencia física o diaria y sus representaciones mentales y puede ayudarles a comprender los conceptos matemáticos (Duval, 2006; Safuanov, 2007). Aunque enmarcados en el ámbito de la probabilidad, en un estudio de alumnos con talento en el que se clasificaron las aproximaciones a la resolución de problemas, se confirmó que su aproximación dependía del contexto incluido en el problema (Na, Han, Lee y Song, 2007). Es por ello que consideramos importante plantear las actividades del proceso de enseñanza en situaciones reales.

**TRABAJO EN GRUPO:** La gestión de clase es un elemento básico en el diseño de la enseñanza. El trabajo en grupo promueve que los alumnos compartan sus razonamientos. En un estudio sobre el razonamiento pragmático y semántico, Lee (2005) llega a la conclusión de que los estudiantes que habían razonado pragmáticamente aprendieron de las discusiones con otros compañeros y, consecuentemente, cambiaron su forma de razonamiento, permitiendo la evolución de la organización de sus pruebas informales a las formales. La interacción en pequeños grupos es crucial para que los estudiantes reflejen y simplifiquen sus ideas mientras se las explican a iguales. En un estudio relacionado, se consiguió un mayor desarrollo en las tareas de definición tras el trabajo en grupo (Lee, Ko y Song, 2007)

**SOPORTE INFORMÁTICO:** En la sesión 1 se presenta un material en soporte informático. En relación con los estudios sobre enseñanza y aprendizaje de la geométrica se han comentado ventajas del uso de estos soportes. Los soportes informáticos resultan interesantes para los alumnos, especialmente cuando permiten a los alumnos investigar y explorar ideas (Batista, 2007). Gutiérrez (1996) señala que el hecho de trabajar las perspectivas y los movimientos en programas de ordenador permite manipular un mayor número de representaciones. Hemos tomado en

consideración estas apreciaciones, junto con la necesidad de ajustar los recursos a las finalidades, tal como se deduce de la revisión bibliográfica destacada en el apartado “*talento matemático y visualización: la intervención*”, del capítulo 3.

### 5.1.2.1 Estudio piloto

Los profesores investigadores habían impartido sesiones relacionadas con los movimientos en el plano, visualización y relleno del espacio a alumnos de promociones anteriores. Durante el curso 2007/2008 se impartió una sesión a los alumnos de segundo año de la promoción 2006/2008 tras la que se realizó una selección de actividades y un primer análisis de las respuestas de los alumnos. Se determina la metodología y recursos a utilizar en la estudio piloto que se desarrolló durante el curso 2008/2009. Se impartió una sesión a alumnos del segundo curso de la promoción 2007/2009. Se recogieron las respuestas de los alumnos a las tareas planteadas, se analizaron las habilidades de la visualización puestas en juego por los alumnos, tanto de manera individual como en grupos reducidos y se obtienen unas primeras conclusiones que se exponen en distintos foros (Ramírez, Flores, 2010; Ramírez, Flores y Castro, 2010 y 2012). Participaron 21 alumnos del segundo curso del proyecto (uno de 13 años, cinco de 14 años y quince de 15 años) de los que 2 eran niñas y 19 niños. Cursaban en ese momento 2º, 3º y 4º de ESO (Ramírez, Flores y Castro, 2010).

En el estudio piloto, para trabajar los movimientos tanto en el plano como en el espacio, nos servimos de tres recursos, dos de ellos informáticos: Constelaciones, El Juego de los Tres Colores<sup>3</sup> (Ramírez y Albendín, 2007a), una aplicación informática en la que hay que obtener una estructura mínima, y Cubetest (Van den Oever, 2005), aplicación que representa en la pantalla piezas cúbicas, mediante su representación en perspectiva, y de la que hay que identificar una nueva representación plana, para lo que se pueden mover

---

<sup>3</sup> El juego Constelaciones consta de unas piezas formadas por tres círculos coloreados unidos por dos segmentos, que se pueden fijar sobre una plantilla, ocupando cada círculo un punto de la plantilla. Se pueden colocar las fichas de manera que coincidan los círculos del mismo color, pero no pueden tocarse los segmentos. La finalidad del juego es obtener la estructura mínima que se puede obtener colocando todas las piezas distintas posibles.

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

la imagen realizando giros en el espacio. El tercer recurso, Bloques, consiste en una pieza tridimensional, formada por cubos de 5cm. de lado, unidos formando una estructura dada, y se le pide a los alumnos que la dibujen tal como la ve un monigote que colocamos en diferentes posiciones en relación a la estructura. Cada alumno disponía de un ordenador con los recursos. Detallamos a continuación las actividades planteadas en cada caso.

CONSTELACIONES: a) Buscar la mínima estructura formada por diversas piezas; b) Justificar que es la mínima, y c) Definir estructuras iguales.

CUBETEST: a) Identificar cubos dada una representación plana, pero dinámica, y b) Definir cubos iguales.

BLOQUES: a) Dibujar una representación plana de una figura compuesta de bloques cúbicos, adoptando el punto de vista de un muñeco que situamos frente a la pieza, b) Justificar respuesta.

Las actividades de Constelaciones iban encaminadas al reconocimiento y definición de los movimientos en el plano (Ramírez y Flores, 2010). Cubetest es un programa informático que simula los movimientos en el espacio y las diferentes perspectivas de un cubo. Gutiérrez (1998b) señala que el aprendizaje y la enseñanza resultan más fáciles y profundos cuando evitan la abstracción innecesaria y se apoyan en representaciones o modelizaciones que los estudiantes puedan observar, construir, manipular, transformar, etc. Se ha observado que la enseñanza específica aumenta la capacidad de los estudiantes para manejar las relaciones entre los cuerpos espaciales y sus representaciones planas, obteniéndose mejores resultados cuando la enseñanza se basa en el uso de materiales manipulativos (Bishop, 1980; Clements y Battista, 1992).

Las actividades relativas a Bloques y Cubetest, resaltaban la importancia de utilizar representaciones planas de cuerpos geométricos espaciales e iban dirigidas a que los alumnos reconociesen los movimientos en el espacio y encontrasen semejanzas y diferencias al trabajar en el plano o en el espacio. Gutiérrez (1998b) observa dificultades en los estudiantes cuando dibujan o interpretan representaciones planas de sólidos y señala complicaciones en el proceso de comprensión del concepto subyacente a una representación plana, como la ligada a interpretar la figura plana para convertirla en un

objeto tridimensional e interpretar este objeto (que en muchos casos solo existe en la mente de los estudiantes) hasta convertirlo en el concepto geométrico que se está estudiando. En las tareas de copiar un dibujo en perspectiva, las investigaciones han mostrado que la principal dificultad no es sólo de tipo perceptivo, sino también psicológica, relacionada con la carencia de las habilidades de reconocimiento de posiciones en el espacio y de relaciones espaciales. En este sentido Gutiérrez (1998b) señala como conveniente que los alumnos no tengan que basarse en sus propios dibujos, buscando procedimientos alternativos como modelos físicos, ordenadores, etc.

Los instrumentos de toma de datos fueron hojas de respuestas para algunas de las actividades propuestas, tanto de manera individual como en grupo. Para estudiar el comportamiento de los alumnos, pedimos que sintetizaran por escrito sus apreciaciones, fundamentalmente respecto a la estructura mínima (cuál es y por qué), la definición de estructuras iguales (o equivalentes) y de cubos iguales, así como el dibujo de la pieza expuesta. La definición de estructuras equivalentes y de cubos iguales dio lugar a un debate entre los integrantes de cada grupo, que concluyó poniendo en común su definición, que también se entregó por escrito. Para poder interpretar estas respuestas, comenzamos por analizar qué habilidades de la visualización se ponen en juego en cada actividad, dando lugar a una lista de tareas operativas (Ramírez, Flores y Castro, 2010 y capítulo 4).

A partir de estas tareas operativas y de las respuestas escritas por los alumnos, elaboramos un registro en la que para cada alumno se señalaba las tareas que había manifestado, destacando aquellas que aparecen de manera espontánea, es decir, sin que se les haya pedido explícitamente en el enunciado. De los resultados analizados en la estudio piloto obtuvimos los siguientes resultados y conclusiones:

- Los alumnos llegan a manifestar todas las habilidades en alguna de las actividades. Concretamente las habilidades Conservación de la percepción, Percepción de la posición en el espacio y Discriminación visual aparecen en las respuestas de todos los alumnos tanto individualmente como en grupos. Respecto a las otras dos habilidades analizadas, Percepción figura-contexto aparece en todos salvo en dos alumnos y Percepción de las relaciones espaciales, aparece en todos individualmente, por lo que también se manifiestan en algunas de sus respuestas. En todos los alumnos se aprecian de manera espontánea las habilidades Conservación de la percepción y Percepción de la

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

posición en el espacio, en sus respuestas individuales, y las habilidades Conservación de la percepción, Percepción de la posición en el espacio y Percepción de las relaciones espaciales, en las de grupo (la habilidad Discriminación visual estaba exigida explícitamente en las actividades). Generalmente, las definiciones de grupo enriquecen las aportadas individualmente.

De manera natural, al presentarles actividades que exigen procesos de visualización, los alumnos con talento matemático estudiados, han utilizado estrategias visualizadoras.

Aunque todos resuelven la actividad de encontrar la estructura mínima con seis fichas, que encierra un reto matemático, ninguno expone un argumento que lo justifique completamente, muchos esbozan algunos pasos de la posible demostración. Sin embargo, sus argumentaciones utilizando estrategias visuales son incompletas e intuitivas.

Observamos que estos alumnos razonan visualmente apoyándose en ejemplos concretos limitados. Se hace necesario enseñarles a razonar sobre “casos generales”, distinguiendo todos los posibles. Para este fin, sería importante trabajar técnicas de argumentación visual (contraejemplos, definiciones, caracterización de las propiedades, inducción, analogía, generalización, amplia gama de ejemplos, etc.) para que puedan aplicarlas en la resolución de problemas.

Las diferencias entre las respuestas individuales y las de grupo nos llevan a concluir que aunque algún alumno no hubiese puesto en juego de manera individual alguna dimensión, la reconocía y aceptaba cuando aparecía en las reflexiones del grupo. En otro sentido, hay un grupo en el que prevalece la definición de uno de sus miembros (a causa de la inseguridad o efectos de liderazgo), pese a que los demás habían dado una más precisa.

Además del análisis de los resultados del estudio piloto relativos a contenidos y metodología, extrajimos otras consideraciones a tener en cuenta para el experimento de enseñanza. En relación a la toma de datos, las fuentes fueron limitadas, pues para el estudio piloto sólo se obtienen a partir de las respuestas entregadas por los alumnos. Al considerar necesario disponer de registros sobre la actuación de los alumnos que no se refleja en los escritos, decidimos realizar grabaciones de las sesiones para enriquecer la

toma de datos. En las tareas referentes a argumentación, señalamos que nuestro objetivo se limita a registrar y valorar respecto a la corrección, las manifestaciones de las tareas operativas relativas a las habilidades de visualización, sin analizar la relación entre sus respuestas y la interacción ocurrida entre los sujetos y los profesores. Este enfoque es diferente al planteado por otros autores que analizan la interacción con el profesor en el aprendizaje de las demostraciones (Camargo y Gutiérrez, 2010) o los momentos clave en el aprendizaje de las isometrías (Morena y Fortuny, 2010). Por tanto las sesiones del experimento deberían contemplar una clase más dinámica, en las que el profesor interviniera para animar en el desempeño y manifestación de las cualidades que se están desarrollando y apreciando, tanto la visualización, como la definición, argumentación y resolución.

### **5.1.2.2 Diseño de las intervenciones en el aula y temporalización**

El diseño de la primera sesión está delimitado por los resultados del estudio piloto, pero la metodología de investigación utilizada obliga a considerar en el diseño de las sesiones siguientes los resultados obtenidos en las anteriores. Se establece un proceso secuencial en el que existen importantes momentos de reflexión que afectan al diseño de las siguientes intervenciones. En este sentido, se elabora un esquema general común a todas las intervenciones que se completa antes de cada sesión con el análisis de los resultados anteriores (Figura 5.1).

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

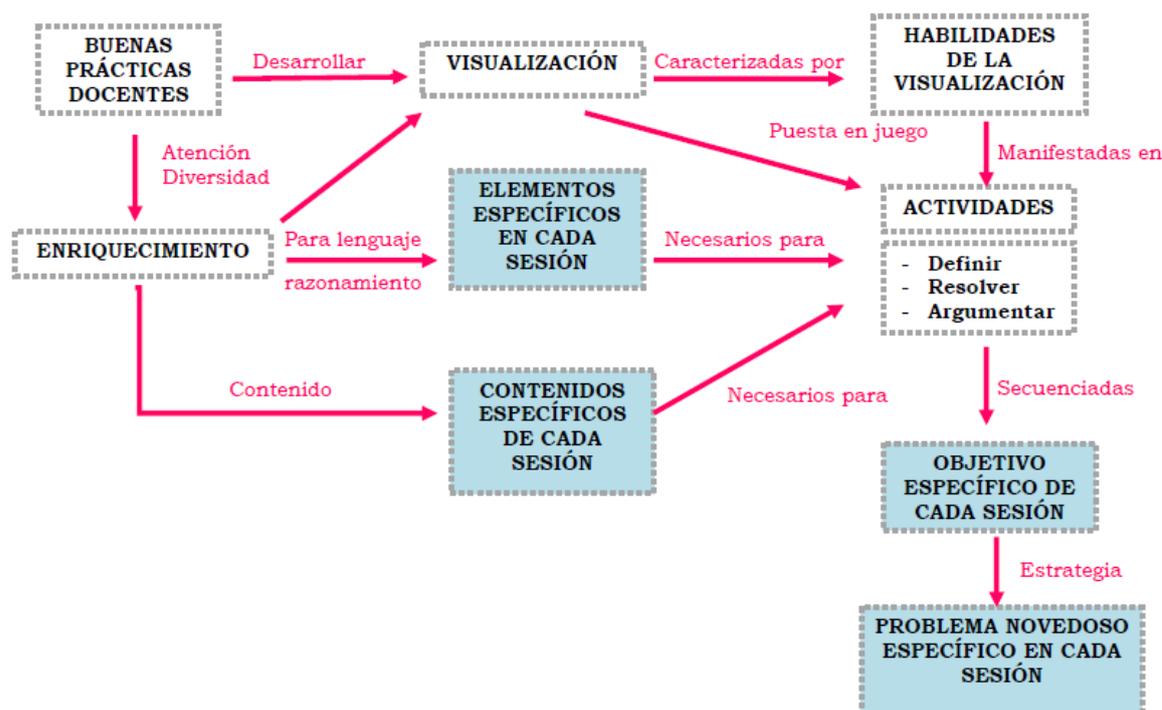


Figura 5.1: Esquema general de diseño de las sesiones.

Las reflexiones del proceso afectan a los recursos utilizados, las actividades seleccionadas y otros aspectos metodológicos que concretan la planificación inicial, como los siguientes:

- En cuanto a la selección de recursos, siguiendo el resultado del estudio piloto, en la primera sesión se utilizan recursos interactivos en soporte informático para trabajar los conceptos geométricos de una manera dinámica e intuitiva y resolver tareas sobre movimientos en el plano. En la segunda sesión se propone utilizar puzzles empleados en cursos anteriores, para favorecer la manipulación, mientras que en la tercera se proponen inicialmente actividades que utilicen diferentes representaciones y desarrollos planos de figuras tridimensionales.
- En cuanto al trabajo en clase, el estudio piloto nos ha mostrado el interés del trabajo en grupo, por lo que decidimos intercalar actividades individuales con la puesta en común en pequeños grupos, antes de la puesta en común general. Dado que para la primera sesión no disponemos de información previa relevante, se determinan los grupos de la sesión inicial atendiendo a la forma en que se han distribuido los alumnos en los ordenadores del aula. Las

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

agrupaciones en las siguientes sesiones se determinan antes de cada sesión, atendiendo a las puntuaciones obtenidas por los alumnos en los test, junto con algunas observaciones registradas por los profesores. Es importante la puesta en común de los argumentos utilizados por los alumnos favoreciendo su participación y condicionando el desarrollo de la misma según los guiones previstos.

Para la programación de cada sesión se realizan reuniones en las que se elaboraron los siguientes documentos de intervención y registro: 1) esquema y guión de la sesión, 2) actividades para los alumnos, 3) formulación de los argumentos matemáticos específicos, 4) relación de las habilidades esperadas de visualización y 5) fichas de recogida de datos (para los profesores investigadores, así como para los observadores).

Tras cada sesión se han recogido las observaciones de los profesores investigadores y observadores y los registros de grabación, se han corregido los test y analizado los ítems fallados, se ha elaborado el informe de la sesión para el Proyecto ESTALMAT y se ha hecho una primera revisión de las respuestas a las actividades propuestas. Se analizan los cambios hechos respecto al guión original y se toman decisiones respecto a la siguiente sesión siguiendo el método de investigación de diseño, por lo que para cada sesión se elabora un documento en el que se recoge de manera esquemática cómo se han cumplido los pasos del método de investigación.

Se establece la temporalización condicionada por la planificación de las sesiones del proyecto y cuya secuenciación atiende a trabajar inicialmente actividades relacionadas con diferentes aspectos de la visualización en el plano, posteriormente en el espacio y finalmente la relación entre ambas dimensiones. En la última fase se entrevistan a los alumnos seleccionados sobre los aspectos más relevantes de las anteriores. En la tabla 5.3 se resumen las sesiones y los contenidos previstos.

16/01/2010: Sesión 1. Visualización: movimientos en el plano. Igualdad de figuras, unicidad.
13/02/2010: Sesión 2. Visualización: Poliedros que rellenan el espacio.
24/04/2010: Sesión 3. Un viaje de ida y vuelta del plano al espacio.
08/05/2010: Sesión 4. Entrevistas personales

Tabla 5.3: Temporalización de las sesiones.

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

Para la recogida de datos, se determinan los siguientes registros para su análisis posterior:

- Hoja de respuestas individuales y en grupo.
- Respuestas a los tres test (del grupo talento y grupo control).
- Observaciones de los profesores investigadores y observadores.
- Grabación en audio de las tres primeras sesiones.
- Grabación en audio y vídeo de las entrevistas.

Para el primer análisis de los datos obtenidos en cada sesión, cada profesor elabora un informe de las observaciones recogidas y el profesor investigador sintetiza las respuestas individuales y en grupo de los alumnos entregadas en el registro correspondiente. Se han pasado los test en las correspondientes sesiones o en otras ajenas a la investigación según la duración de las mismas. Los resultados de los dos primeros test determina la composición de los grupos de trabajo en las siguientes sesiones y la caracterización de los sujetos según los aspectos medidos. En la primera sesión, la grabación de audio se hace de manera general, sin embargo, en la segunda y tercera se lleva a cabo una grabación de cada uno de los grupos establecidos. Las entrevistas individuales se realizan fuera de clase, en el despacho del profesor investigador, mientras que el resto de alumnos reciben una nueva sesión ajena a la investigación. La transcripción de todo el material audiovisual y el análisis exhaustivo de las respuestas de los alumnos se realiza al final de la fase de experimentación.

### 5.2 Experimentación

Se han seguido las acciones requeridas correspondientes a la fase de Experimentación (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011) divididas en tres momentos, antes, durante y después de la intervención, que hemos recogido en tres puntos para cada una de las sesiones: planificación, desarrollo y análisis. Este último se corresponde especialmente al análisis inicial de las sesiones anteriores para la reformulación de conjetura y la toma de decisiones respecto a la planificación de la siguiente sesión.

### 5.2.1 Sesión 1: Visualización: movimientos en el plano. Igualdad de figuras, unicidad. 16-01-2010

Para cada sesión vamos a distinguir los tres pasos que componen el estudio de diseño: Planificación, Implementación y Revisión.

#### 5.2.1.1 Planificación de la sesión 1

A partir del esquema general, se precisan los elementos específicos que justifican su diseño (figura 5.2).

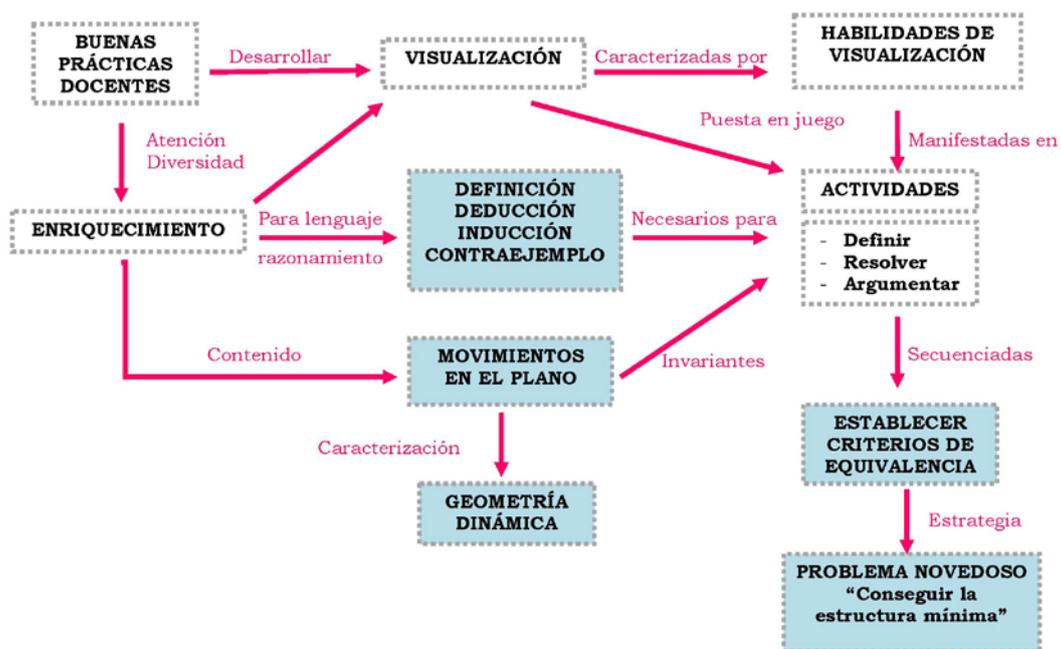


Figura 5.2: Esquema de la sesión 1.

Respecto al **contenido**, en esta sesión se pretende un enriquecimiento curricular que se concreta en:

- Contenido curricular: movimientos en el plano, desde la perspectiva de la geometría dinámica, con la intención de que los alumnos definan e

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

identifiquen los movimientos como las transformaciones que mantienen invariantes determinadas propiedades.

- Elementos para el razonamiento matemático: importancia de la precisión y unicidad en las definiciones matemáticas, diferencia entre la argumentación deductiva e inductiva, búsqueda de todos los casos posibles para razonar sobre modelos generales y utilización de contraejemplos.

Se elabora un guión detallado de la sesión en el que se señalan las actividades imprescindibles, es decir, aquellas que se consideran necesarias para la consecución de los objetivos didácticos e investigadores. Para el resto, se añaden posibles condicionamientos de tiempo y del propio transcurso de la sesión según las respuestas de los alumnos que aludan a los contenidos matemáticos tratados.

Se establece una **línea de actuación** para el proceso de enseñanza:

- 1) Se presenta el problema general a resolver y se comparten las justificaciones encontradas por los alumnos mediante puestas en común.
- 2) Se promueve como heurístico para afrontar el problema planteado la simplificación del problema atendiendo a casos más simples, siempre apoyado en poner en común las justificaciones encontradas.
- 3) Sugerir que se lleve a cabo la definición más precisa de estructuras equivalentes cuando surja su necesidad, en el proceso de resolución del problema planteado.
- 4) Finalmente, se sistematizarán los elementos del contenido matemático de la sesión y se les deja un problema abierto para resolver.

Tras varias revisiones, se diseña la hoja de **actividades** (en ANEXO 5.1 HOJA ACTIVIDADES SESION 1) clasificadas para resolver, definir y argumentar, secuenciadas según los objetivos de la sesión y el material didáctico necesario para los alumnos, profesores investigadores y observadores.

Para la secuenciación de las actividades se determinan cuatro bloques: I) Introducción al problema: buscar la estructura mínima; II) Formalización y demostración; III) Generalización y IV) Estructuras equivalentes. Pasamos a describir las actividades

planteadas y las actuaciones previstas según las respuestas de los alumnos que marcan el guión de la sesión:

**INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA:** En la actividad 1, se presenta el juego y la aplicación Constelaciones, se indica el fin de la misma y se reta a los alumnos a encontrar la estructura mínima con 18 fichas, simplificándolo al caso de utilizar fichas de un solo color y en el tablero cuadrado. Se compartirán en la pizarra algunas de las soluciones aportadas por los alumnos y se analizarán algunos de los argumentos que justifican que es la mínima sin profundizar en ellos. Se mantiene la expectativa de que sean los alumnos los que establezcan criterios de igualdad entre las estructuras y de unicidad de la solución.

Ante la limitación de sus justificaciones, se les sugiere en la actividad 2 que afronten el problema con un menor número de fichas, concretamente con seis. En este caso, la solución es bastante intuitiva pero la argumentación es más compleja, tanto para justificar que es la mínima, como para justificar que es única. Se comentará que para resolver problemas se utilizan diversas estrategias que se llaman heurísticos. Uno de ellos, que han debido trabajar en el curso anterior en las sesiones dedicadas a resolución de problemas, consiste en simplificar el problema. Es decir, cuando un problema es complejo, se puede intentar resolver para un menor número de elementos. Para ello, se pasa a un caso más sencillo, con menos piezas. Se recogerán los distintos argumentos que presenten y se señalarán las diferencias entre conjeturar y demostrar. Como la unicidad de la solución es intuitiva, se espera que encuentren la solución con nueve puntos, por lo que se resalta la validez de sus argumentos para el caso general. Se contrastarán las respuestas con las distintas argumentaciones esperadas, que se clasifican según su componente visual y se planifica su actuación en cada una de ellas:

**VIS:** Un razonamiento visual consiste en ir formando la figura a partir de todas las combinaciones posibles (considerando sólo estructuras no equivalentes salvo movimientos).

**ALG:** Un razonamiento más algebraico (aunque también tiene aspectos visuales) se basa en utilizar la fórmula de la característica de Euler para probar que no puede darse una estructura con ocho círculos ( $\text{Caras} - \text{lados} + \text{vértices} = 2$ ) al llegar a contradicción en una estructura con cinco caras acotadas.

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

**RVA:** En un razonamiento algebraico y visual se demuestra que en cada pivote se solapan dos círculos (seis fichas son 18 círculos, si se solapan dos a dos dan 9 círculos). Se demuestra que no es posible conseguir esta estructura mínima al solapar en un pivote más de dos círculos.

Si se inicia **ALG**, mostraremos que habría que demostrar que el número óptimo de solapamientos entre círculos de las piezas es 2. En el caso **VIS**, se analizará la exhaustividad del análisis de todos los casos. Si se manifiesta el **RVA**, lo aprovecharemos para pasar a la actividad 3. Será importante resaltar que en el caso de 6 piezas, la solución mínima es única.

La actividad 3 demanda a los alumnos que busquen la estructura mínima con siete fichas. Se espera que los alumnos analicen la validez del proceso inductivo y la unicidad de solución. Se presentará otro heurístico para resolver problemas que consiste en razonar progresivamente desde un problema más sencillo. En este caso, se plantea si es válida la conjetura que intuye que la mínima estructura para siete fichas se obtiene a partir de la mínima para seis. Se les presentará el concepto de contraejemplo para rechazar una conjetura general como ocurre en este caso, y se insistirá en la necesidad de utilizar demostraciones para validar una conjetura. Además de las técnicas deductivas, se les presentará la inducción matemática para el paso de aceptar válida una propiedad en  $n$  y estudiar su validez en  $n+1$  fichas, concretándolo en su posible aplicación en esta actividad. Se establecen las líneas de actuación según los tipos de argumentos que utilicen los alumnos y se propondrá mostrar que su solución no es única.

Para finalizar este bloque, las actividades 4 y 5 plantean el problema para seis y siete fichas en el tablero hexagonal, resaltando las diferencias entre los casos particulares, el caso general y la utilización de contraejemplos. En la actividad 4 se espera que se produzca una ruptura respecto a la intuición surgida a partir del tablero cuadrado. En este caso la solución tiene ocho círculos visibles y también es única. Algunos de los argumentos utilizados para el caso cuadrado no se van a cumplir en el tablero hexagonal y no son válidos para el caso general. Por lo tanto, si se limitan a trasladar sus soluciones derivadas del tablero cuadrado se están limitando a razonar sobre situaciones concretas.

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

En la actividad 5 se mostrarán las distintas soluciones encontradas, haciendo que distingan las que provienen de la mínima estructura de seis. Esta situación puede mostrarles contraejemplos para la conjetura anterior, que les obligarán a reformularla. Se estima que tras la realización de esta actividad se produzca el descanso de la sesión.

**FORMALIZACIÓN Y DEMOSTRACIÓN:** Las actividades 6 y 7, basadas en el estudio del problema general desde casos particulares, proponen encontrar en el tablero cuadrado todas las estructuras con dos y tres fichas, respectivamente. Estas actividades motivan la necesidad de distinguir entre estructuras iguales o equivalentes, para establecer cuándo se consideran todos los casos posibles. En la actividad 6 se mostrará el heurístico de resolución basado en distinguir todos los casos posibles. Se motiva la necesidad de considerar el número más pequeño de fichas posible, para analizar sus cualidades, pero llevando a cabo un procedimiento exhaustivo. Esta distinción, puede favorecer que hablen de estructuras iguales o equivalentes, motivando las actividades de definición. En la actividad 7 se relacionarán las estructuras obtenidas al aumentar una ficha. El aumento de las posibilidades exige un procedimiento más sistemático y la descripción de las estructuras conseguidas exige establecer criterios discriminatorios.

En la actividad 8 deben reconocer las estructuras formadas por dos fichas en las estructuras de tres fichas, para reflexionar sobre el proceso de construcción de una estructura a partir de estructuras menores. Con la intención de obtener de manera exhaustiva todas las piezas posibles, se planteará la construcción e identificación de estas estructuras a partir de todos los casos de dos fichas, dejando de lado las que sean equivalentes. La aplicación progresiva de este procedimiento llevaría a la obtención de todas las estructuras.

**GENERALIZACIÓN:** Las actividades 9, 10 y 11 plantean las mismas cuestiones que el bloque anterior pero en el tablero hexagonal, lo que introduce diferencias interesantes tanto en la unicidad de la estructura mínima como en el análisis de todos los casos posibles. Se comprobarán las diferencias en la resolución en el caso hexagonal, al aportar mayor riqueza de situaciones, lo que muestra que el análisis del caso general no puede realizarse utilizando solamente los ejemplos concretos obtenidos en el caso cuadrado.

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

**ESTRUCTURAS EQUIVALENTES:** En las actividades 12 y 13 se propone, primero de manera individual y luego en grupo, que definan equivalencia entre estructuras. Esta actividad requiere que identifiquen los movimientos en el plano, como transformaciones que no afectan a cambiar la figura, pero introducen variabilidad en la forma de presentarse, lo que no afecta al juego planteado. Tienen que comunicar sus definiciones de una manera rigurosa y exhaustiva. Para el trabajo en grupo se utilizará la propia distribución en el aula de informática. Se insistirá en que sean lo más precisos posibles y se incidirá en la importancia de estudiar en matemáticas la existencia y la unicidad de los elementos definidos, utilizando ejemplos familiares a los alumnos, como las fracciones para mostrar la diferencia entre iguales y equivalentes. En el trabajo en grupo deberán consensuar la definición que van a considerar válida, teniéndola que copiar y contrastar con su propuesta individual. En la posterior puesta en común, se insistirá en que la validez de las definiciones puede ponerse en cuestión si se encuentran contraejemplos, es decir, dos estructuras que no son equivalentes pero que satisfacen la definición propuesta. Se espera que en sus definiciones los alumnos identifiquen y aludan a los movimientos en el plano como procesos que transforman una estructura en otra equivalente, esperando que reconozcan los elementos que caracterizan a los movimientos. Se mostrarán otras situaciones reales en las que aparecen de manera funcional estas transformaciones y se precisará tanto la terminología utilizada (isometría, giro, traslación, simetría, composición de movimientos) como la caracterización de sus elementos e invariantes.

Como cierre de la sesión, se les recuerda el problema general del juego Constelaciones, consistente en encontrar la estructura mínima en el caso general, con fichas de colores y en cada tablero (cuadrado o hexagonal). Se justificará que considerar las estructuras equivalentes bajo movimientos simplifica la cantidad de casos sobre los que razonar en el problema general. Se analizarán las ventajas de simplificar los casos para luego afrontar el problema general con 18 fichas, en el tablero hexagonal y sin restricciones de color. Se les plantea como un reto del que no se conoce aún la solución y se les motivará a seguir un método de investigación: la solución no tiene por qué presentarse en los primeros intentos, hay que demostrar la validez de las conjeturas y hay que evitar razonar sobre ejemplos concretos. Se les sugiere que busquen ejemplos en los que los movimientos puedan ayudarles en la resolución de problemas.

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

Respecto a la temporalización, se determinan los principales momentos de intervención y se marcan como actividades prioritarias, primero pasar el test, y para el experimento de enseñanza en esta sesión, las actividades 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12 y 13. Se prevé como actuación prioritaria determinar el momento exacto en el que realizar las actividades de definición de estructuras equivalentes y se determina como criterio para presentarla que algún alumno plantee la necesidad de distinguir entre estructuras que se obtienen a partir de movimientos. En ese momento, los investigadores plantearán las actividades 12 y 13 y luego retomarán la sesión en la actividad que corresponda.

Utilizando los resultados del estudio piloto, se realiza un estudio de las categorías en las que se podrán manifestar las **habilidades de visualización**, elaborando una tabla en la que, para cada actividad se recogen las manifestaciones previstas de las habilidades (ANEXO 5.2 TABLA DE HABILIDADES PREVISTAS EN LA SESIÓN 1). Clasificamos estas categorías según se utilicen para definir, resolver o argumentar (Tabla 5.4):

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

Habilidades	DEFINIR	ARGUMENTAR	RESOLVER
<i>Coordinación ojo-motor</i>			Dibujar la estructura mínima en la pantalla
<i>Percepción figura-contexto</i>		Comentar el proceso de ir formando la estructura a partir de una menor (paso de formación)	
<i>Conservación de la percepción</i>	Dar criterios de igualdad de estructuras por movimientos	Hablar de círculos superpuestos en un pivote o de solapar los segmentos  Comentar que al girar, trasladar, voltear... coincide la misma forma o la construcción o los puntos y segmentos	
<i>Percepción de la posición en el espacio</i>	Hablar de giros, traslaciones o volteos		
<i>Percepción de las relaciones espaciales</i>	Hablar de la dirección de las piezas o describir cómo se enganchan dos fichas  Hablar de simetrías	Hablar de la dirección de las piezas o describir cómo se enganchan dos fichas  Hablar de simetrías	
<i>Discriminación visual</i>	Dar criterios de igualdad		
<i>Memoria visual</i>	Dibujar la estructura mínima en el folio o dibujar ejemplos		Dibujar la estructura mínima en el folio o dibujar ejemplos

Tabla 5.4: Categorías de la manifestación de las habilidades en la sesión 1.

En relación al estudio de la **evolución de la conjetura**, se determina analizar:

- El rendimiento de los alumnos en el factor espacial del test PMA.
- Las habilidades de visualización que los alumnos han manifestado tanto en las pruebas escritas, las transcripciones de la sesión y las observaciones de los profesores.
- El rendimiento de los alumnos en las tareas relativas a movimientos en el plano.
- Los errores cometidos en los procesos de argumentación.

### 5.2.1.2. Implementación de la sesión 1

Asisten 24 alumnos (falta AP) y se completan las actividades previstas con ligeras modificaciones. En el trabajo en grupo, la distribución de los alumnos queda registrada en el siguiente cuadro (tabla 5.5):

Grupo A	PC, AC, JC, LC, VC
Grupo B	CL, JM, JF,
Grupo C	FG, AJ, MG, AG,
Grupo D	CM, DG, JA,
Grupo E	AL, GM, RR, CO, NM
Grupo F	JL, CS, MC, MR

Tabla 5.5: Grupos de alumnos de la sesión 1.

En relación con la planificación de las actividades, el orden que se llevó a cabo fue:

- Actividades 1, 2, 3.
- Actividades 4 y 5 (sin justificación escrita).
- Actividad 6.
- Actividades 12 y 13.
- Actividad 7.
- Actividad 9 (sin justificación).
- Actividad 14.
- No se realizan las Actividades 8, 10 y 11 (sólo se comentan).

Como incidencia, además de la falta justificada de un alumno, se registra la ocurrida a una alumna se le estropea el ordenador mientras está haciendo la actividad de buscar la mejor estructura con siete fichas (lo hace en la hoja de respuestas directamente).

En relación a las actuaciones previstas, se muestra a continuación un resumen de lo ocurrido en la sesión, añadiendo la transcripción de los momentos puntuales en los que se tomó una decisión que afectaba al diseño original.

En las actividades del bloque de PRESENTACION DEL PROBLEMA, se detecta que los alumnos encuentran rápidamente las soluciones a las actividades, pero no las argumentan de un modo completo y tienen poca predisposición a escribir sus argumentaciones visuales. De un modo general, no son conscientes de la limitación de

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

sus demostraciones y deben ser los profesores los que les hagan ver que son incompletas. Es al finalizar este bloque cuando manifiestan la necesidad de establecer criterios de igualdad entre las estructuras y de unicidad de la solución.

Al recoger en la pizarra algunas de las soluciones encontradas, se debate con los alumnos las cualidades de cada una de ellas. En la actividad 1 conjeturan que 24 es el menor número de círculos visibles posible, pero nadie parece tener un argumento para justificarlo. Varios alumnos, de manera espontánea, buscan la mejor solución de 18 fichas a partir de las de seis.

En la actividad 2 aparecen argumentaciones visuales incompletas del tipo VIS y RVA que van desde el número de ramificaciones que salen de cada círculo, las propiedades del cuadrado como el mínimo polígono regular que se puede formar en la cuadrícula y el número de conexiones para que cada dos círculos estén unidos. Los argumentos son incompletos por varias razones: no consideran todos los casos, no justifican los pasos intermedios que han utilizado en sus argumentaciones o se limitan a describir propiedades que cumple la estructura que han conseguido, sin aludir a las condiciones generales. En la actividad 4 se produce la ruptura de intuición esperada, ya que aunque algunos alumnos empiezan a dar soluciones con nueve círculos, varios de ellos encuentran soluciones con ocho.

Motivados por los profesores, varios alumnos debaten sobre el procedimiento de obtener la mejor estructura de siete fichas a partir de la mejor de seis fichas. Son los profesores los que muestran con un contraejemplo que la conjetura no era cierta para el caso general.

Tras el descanso de la sesión, se resumen las conclusiones más importantes extraídas de la primera parte para encontrar la estructura mínima o para justificar que lo es (basarse en soluciones obtenidas con un número menor de fichas, examinar la unicidad de la solución, estudiar los pasos de  $n$  fichas a  $n+1$  y diferenciar lo que ocurre en el tablero cuadrado de lo del hexagonal). Ello lleva a justificar que el razonamiento debería partir de usar dos fichas para aumentar progresivamente, en construcción y argumentación de manera exhaustiva, tras recordarle alguno de los argumentos incompletos que han utilizado para el caso de seis fichas. Los alumnos trabajan individualmente. Cuando un alumno pregunta si son iguales dos estructuras que están giradas, se plantea si es el

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

momento de definir estructuras iguales, aunque se decide seguir con la actividad para dos y tres fichas. Cuando los alumnos intentan clasificar las soluciones encontradas surge la necesidad de definir estructuras iguales y su aplicación al problema (Tabla 5.6).

Sujeto	Intervención
I1	<i>Encontrad estructuras que se puedan formar con dos piezas y las vais dibujando en la actividad 6. ¿Vale? Dibujáis en la siguiente página.</i>
CL	<i>Hay cuatro. Ya lo he hecho.</i>
AL	<i>Una cosa. ¿Las que se giran se suponen que son iguales? Se supone que sólo hay que ponerlas una vez. Las que si se giran son iguales...</i>
I2	<i>¿Qué os parece?</i>
AL	<i>Yo creo que son la misma.</i>
CL	<i>Sí, sí, son iguales.</i>
JA	<i>Porque si no, salen un montón.</i>
I2	<i>Ese tema lo dejamos pendiente, ¿vale?. ¿Qué entendemos por figuras iguales? En matemáticas también es muy importante decir cuándo dos figuras son iguales o no. ¿De acuerdo? Si presenta problemas, nos dedicamos ahora a eso. Si no, seguimos adelante. ¿Qué os parece?</i>
Varios	<i>Sí</i>
I2	<i>¿Nos detenemos a definir figuras iguales y figuras distintas?</i>
	<i>(...)</i>
I1	<i>Estamos hablando de equivalentes. ¿Ésas las consideramos equivalentes?</i>
Varios	<i>Sí, no...</i>
I1	<i>Los que no, ¿por qué? Los que sí, ¿por qué?</i>
I2	<i>Un momento, pensad que estamos trabajando con vistas a un problema. ¿Cuál es el problema que estamos trabajando? Buscar la mínima estructura que se puede construir con dieciocho fichas. Eso nos podía ayudar a responder.</i>
MR	<i>Entonces sí. Porque da igual que esté al revés o al derecho.</i>
I2	<i>Con respecto al problema, ¿nos da igual que esté al derecho o al revés? ¿Entonces qué hacemos con la simetría?</i>
Varios	<i>La incluimos.</i>
I2	<i>La incluimos entonces.</i>
AL	<i>¿Las simetrías?</i>
I1	<i>Para el problema nuestro de ir encontrando estructuras mínimas.</i>
JA	<i>Para el problema sí se incluye. Da igual izquierda o derecha... Mismos puntos.</i>
I2	<i>¿Nos daría igual que la solución para las 18 piezas fuera especularmente igual?</i>
Varios	<i>Sí.</i>

Tabla 5.6: Intervención para definir estructuras iguales.

Según las actuaciones previstas, se reconduce la sesión para realizar las actividades 12 y 13 del bloque ESTRUCTURAS EQUIVALENTES para las que previamente se ilustra el concepto de igualdad y equivalencia en matemáticas utilizando fracciones y la importancia de la unicidad definiendo rectas paralelas. Algunos alumnos preguntan si las definiciones relativas a estructuras se refieren a un número de fichas concreto y se les guía a hacerlo de la manera más general posible.

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

En el trabajo en grupo se detectan distintas formas de organización: algunos son sistemáticos y tras leer todas las aportaciones intentan un consenso final, mientras que en otros grupos se van retocando las afirmaciones individuales conforme se van leyendo. En uno de los grupos hablan de considerar las homotecias (“figuras más grandes con la misma forma”) en la definición de estructuras equivalentes. En otro grupo hubo que aclarar que todas las fichas deben estar unidas para formar las estructuras. Algunos movimientos aparecen de modo impreciso: volteos como giros o simetrías, alusiones incompletas respecto a los centros de giro, al número de ángulos y a los ejes de simetría.

Tras el trabajo en grupo, se les sugiere que cada grupo lea su definición y los demás comparen con lo que han puesto y busquen un contraejemplo para ver si es correcta. Cuando los grupos comparten sus definiciones, aparecen varios elementos de debate entre los propios alumnos:

- Precisar los términos utilizados de posición y situación.
- Utilizar correctamente las conjunciones y/o.
- Considerar la traslación y la simetría en la definición.
- Obtener unos movimientos a partir de otros.

Se inicia un debate interesante, motivado por los propios alumnos, al considerar innecesarios algunos movimientos porque se pueden obtener como composición. Los alumnos argumentan sobre los movimientos que generan los demás, aludiendo a ejemplos como las letras (p y q) que no pueden obtenerse mediante un giro en el plano, pero sí en el espacio. Tras el debate para incluir o no la simetría en la definición de estructura equivalente, se clarifica que la clasificación están condicionada por el contexto en el que queremos utilizarla, se utiliza como criterio la funcionalidad de buscar la solución óptima del juego y se decide incluir la simetría.

Para las actividades del bloque FORMALIZACIÓN Y DEMOSTRACIÓN vuelven a trabajar individualmente. Los alumnos no presentan dificultad en encontrar las estructuras de dos fichas, pero hay diferencias entre el número total de estructuras utilizando tres fichas. Un alumno expone el método esperado para obtener todas las estructuras de tres fichas, partiendo de las de dos piezas y añadiendo una, eliminando las equivalentes. Otro compañero manifiesta otro método consistente en colocar dos fichas

horizontalmente e ir añadiendo otra. Aprovechando que resultan números diferentes, el propio investigador sugiere que él se ha equivocado y les invita a descubrir el error cometido al no distinguir dos estructuras equivalentes. Mientras un alumno copia sus estructuras en la pizarra, los demás muestran gran interés en ir reconociendo las suyas y las que podrían ser equivalentes. Los profesores insisten en la validez de la demostración que afirmaría tanto la existencia y la unicidad de la solución en el caso de dos y tres fichas porque se han considerado todos los casos posibles salvo equivalencias y permite enunciar los resultados como un teorema.

En las actividades del bloque de GENERALIZACIÓN, se les insiste en las diferencias del caso hexagonal que aparecen respecto al cuadrado, como por ejemplo que hay estructuras con tres fichas con número distinto de círculos. Al revisar que todas las estructuras con dos fichas se pueden conseguir una a partir de la otra mediante rotaciones, por lo que la simetría puede no aparecer, se les sugiere volver a definir estructura equivalente, expresándolo de la manera más elegante posible (sin reiteraciones y con la mejor expresión) y a que busquen contraejemplos para valorarla. En una de las definiciones, los alumnos no consideran las traslaciones. Los profesores dibujan dos estructuras trasladadas para que analicen si las consideran equivalentes e incluyan las traslaciones. En vez de incluirlas, varios alumnos se cuestionan obtenerlas a partir de giros y simetrías. A través de varios ejemplos, los alumnos llegan a la conclusión de que con dos simetrías, determinando los ejes, pueden obtener rotaciones. En este momento es preciso comentar la estructura de grupo de los movimientos en el plano, se aclara la terminología utilizada, los elementos que caracterizan los movimientos y algunas situaciones en las que aparecen de manera funcional.

Para finalizar se les informa de que el juego se complica al utilizar el color, se comenta la estrategia de eliminar estructuras equivalentes en el proceso de encontrar la solución óptima y se les recomienda que trabajen las unidades didácticas de la página web del juego relativas a investigación y movimientos en el plano.

En cuanto a la eliminación de partes o actividades completas por cuestiones de temporalización, se registran los momentos puntuales que las ocasionan:

- Se dedica más tiempo del previsto a la clasificación de todas las estructuras de tres piezas por haber diversidad de opiniones (Tabla 5.7).

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

Sujeto	Intervención
I2	<i>¿Quién considera que ha terminado? ¿Cuántas?</i>
AL	<i>I2</i>
JA	<i>16</i>
Otros	<i>17...</i>
AL	<i>¿Las simetrías las habéis añadido?</i>
II	<i>Hemos considerado que las simétricas eran equivalentes</i>
I2	<i>¿Habéis conseguido que la simetrías son equivalentes?</i>
CL	<i>18</i>
I2 (a JA)	<i>¿17?, quitando las simétricas.</i>
	<i>(comparan entre ellos si tienen algunas distintas de los compañeros)</i>
II	<i>Un momento. Escribid el procedimiento. Lo he hecho pensando esto... Nos interesa bastante. Cómo habéis dado el procedimiento.</i>
	<i>(I2 y II hablan sobre el desarrollo de la sesión)</i>
II	<i>Escribid el procedimiento y no lo cambiéis a pesar de lo que hagamos después.</i>
AL	<i>Un poco más de tiempo.</i>
II	<i>Vale, un poco más de tiempo.</i>

Tabla 5.7: Intervención en la que se demanda más tiempo.

- Se corrigen expresiones utilizadas por los alumnos en las definiciones por no ser precisas (de igual forma, que ocupan la misma posición...) y se dirige el debate surgido entre los compañeros en este sentido (tabla 5.8).

Sujeto	Intervención
I2	<i>El tema de la situación. ¿Entendemos por situación el lugar que ocupa dentro de la trama? Porque creo que vosotros habéis interpretado situación como la disposición de la estructura. ¿Cómo entendemos el concepto de situación? ¿Lo entendemos como el lugar que ocupa dentro de la trama? ¿Los puntos que están ocupados por la trama?</i>
JA	<i>No. Sería el sentido que tiene una estructura, si está girada, si está a la izquierda...</i>
I2	<i>Luego hemos utilizado un término que no es preciso. Lo que tenemos es un problema. El término situación da lugar a interpretaciones ambiguas. Hay que evitar términos que den lugar a interpretaciones distintas. ¿Se puede cambiar por otro?</i>
Desconocidos	<i>Orientación, disposición.</i>
I2	<i>¿Valdría orientación? Tenemos dos y el problema es (escribiendo) orientación o disposición de los puntos. Bueno ahí se ha quedado. No decimos si está bien o está mal. Tenéis una ventaja. No han conseguido los demás buscar dos estructuras que consideren equivalentes que no la satisfagan. Se han puesto en tela de juicio dos términos: traslación y situación. Luego por ahora eso es lo que tenemos. ¿Examinamos otra definición? ¿A ver si nos convence porque sea más precisa? Porque aquí han surgido problemas de interpretación. Venga otra definición. Grupo B.</i>

Tabla 5.8: Intervención para precisar la terminología.

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

- Hay una necesidad final de reconocer la estructura de grupo de los movimientos (los alumnos identificaron la traslación como una composición de simetrías) (tabla 5.9).

Sujeto	Intervención
AL	<i>Entonces la traslación no es necesaria</i>
I2	<i>¿Habría alguna figura que no me permitiría hacerlo, que con la simetría no bastaría? En este caso he encontrado una simetría que me ha convertido una en la otra.</i>
	<i>¿Esa? (con una ele, cambiando de lugar la trasladada). ¿Ya la simetría no me vale? Si hago la simétrica respecto a este eje, no la transformo en aquella.</i>
Varios	<i>Puedes hacer otra simetría.</i>
I2	<i>¿Hago dos simetrías? ¿Cuáles? Me saldría esta otra y la vuelvo a hacer, respecto a ...</i>
AL	<i>Su mismo centro</i>
I2	<i>Las simetrías las hago respecto a un eje.</i>
Varios	<i>Respecto al eje de ahí.</i>
I2	<i>Luego me bastaría con hacer dos simetrías. (Dirigiéndose a AL) ¿necesito entonces la traslación? ¿Por?</i>
AL	<i>La puedo conseguir con simetrías.</i>
I2	<i>¿Vale esa definición? ¿Hemos encontrado dos figuras equivalentes y que no verifiquen la definición? De momento no, luego aceptamos la definición.</i>
I1	<i>Ya es muy curioso lo que estamos intentando (dos trasladadas) ¿Éstas dos de aquí se podrían obtener mediante rotaciones y simetrías?</i>
JA	<i>Sí, con una simetría nada más.</i>
I1	<i>Una de dos. O añadimos a la definición traslación y no nos complicamos. Ponemos, se puede mediante simetrías, rotación, traslación y/o varios de ellas (composición que se llama en matemáticas) una a partir de la otra. Ésa es la completa.</i>
	<i>O una más elegante. Pero me puedo ahorrar una de ellas. Porque las traslaciones las puedo obtener a partir de las dos. Pues me tendría que plantear ahora de esos tres movimientos, qué dos dan el otro también. A lo mejor podría quitar las rotaciones y conseguirlos con las otras dos. Eso es un grupo. Los movimientos en el plano son un grupo. Y unos de ellos se pueden obtener a partir de los otros. ¿Entendéis? Si no quiero tener ese problema, lo añadido, traslación, giro, simetría y ya está. Fijaos que hemos descubierto los movimientos en el plano.</i>

Tabla 5.9: Intervención para reconocer la estructura de grupo.

### 5.2.1.3 Análisis y revisión de la sesión 1

Este primer análisis de los datos observados es necesario para la reformulación de la conjetura y la toma de decisiones respecto a la planificación de la siguiente sesión. Es menos exhaustivo que el análisis retrospectivo de los datos, que se realizará tras finalizar las tres sesiones.

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

Inicialmente, se realiza un estudio exploratorio de las respuestas entregadas por los alumnos, realizándose una primera clasificación de los argumentos utilizados en cada una de las respuestas. Los informes del profesorado se contrastan usando los registros de grabación pero se decide realizar la transcripción al final de toda la investigación tras redefinir los aspectos a analizar.

En relación a la conjetura de investigación, se realiza una primera revisión general de las actividades y observaciones, obteniéndose las siguientes apreciaciones:

Respecto al contenido, se han cubierto las expectativas de enriquecimiento curricular que se pretendían. Los alumnos han reconocido los movimientos en el plano para definir estructuras equivalentes y se han abordado desde una perspectiva funcional para resolver las actividades propuestas. Aunque presentan dificultades en la terminología, los alumnos reconocen las propiedades de los movimientos en el plano y los utilizan en sus argumentaciones. Por ello consideramos que se ha conseguido el objetivo de que los alumnos definan e identifiquen los movimientos como las transformaciones que mantienen invariantes determinadas propiedades. Como elemento de valoración de este grado de consecución, destacamos que, además de lo previsto, se ha motivado el estudio de las propiedades de la estructura algebraica de grupo al plantear los propios alumnos cuestiones relacionadas con la composición de movimientos.

En relación a los elementos de razonamiento matemático, en cada momento de los previstos en la sesión se han puesto de manifiesto la importancia de la precisión y unicidad en las definiciones matemáticas y la diferencia entre la argumentación deductiva e inductiva. Motivados por las argumentaciones incompletas de los alumnos se ha insistido especialmente en la búsqueda de todos los casos posibles para razonar sobre modelos generales y la utilización de contraejemplos.

Respecto a la línea de actuación, la secuenciación de actividades ha aportado a los alumnos heurísticos necesarios para afrontar progresivamente el problema que contextualizaba la sesión. Si bien el planteamiento de un reto es un elemento motivador, los alumnos parecen no disponer de elementos de argumentación necesarios para afrontarlo, lo que genera desánimo en la búsqueda de soluciones. Más que presentarles la solución, resulta enriquecedor guiarles suministrándole heurísticos para reconducir sus ideas, como simplificar el problema partiendo de condiciones más simples y

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

recorrer todos los casos posibles. En este sentido, el planteamiento utilizado le ha facilitado técnicas de razonamiento que permiten alcanzar resultados de una complejidad considerable.

El proceso de enseñanza se ha ajustado al diseño y, pese a los cambios realizados por necesidades de temporalización, no ha habido alteraciones sustanciales respecto al guión original y se han localizado los momentos puntuales en los que reconducir la sesión, lo que nos lleva a valorar positivamente la conexión entre la planificación y la implementación de la sesión.

El trabajo en grupo, especialmente el relativo a contrastar ideas propias con las de los compañeros, ha servido para cuestionar la validez de las apreciaciones. Los alumnos confían en sus argumentaciones aunque al exponerlas aprecian diferencias entre lo que quieren decir y lo que realmente dicen, especialmente cuando perciben las reacciones de sus compañeros ante sus expresiones. Es en la puesta en común donde salen a la luz estas limitaciones y llegan a comprobar que sus argumentaciones son incompletas. Las distintas estrategias que han manifestado espontáneamente para consensuar las definiciones en grupo ponen de manifiesto que el trabajo en pequeños grupos es un elemento que les sirve para que ellos mismos organicen y den validez a sus ideas.

De manera general, los alumnos responden a las expectativas de rendimiento en las tareas relativas a movimientos en el plano, resuelven con éxito las actividades pero no argumentan de un modo completo. Mayoritariamente, cometen los errores previstos al utilizar la argumentación visual: razonar sobre los casos concretos que tienen delante, no llegan a plantearse el caso general ni a cubrir todos los casos posibles.

Aunque el estudio de la manifestación de las habilidades se realizará en el análisis retrospectivo, de un modo general, se aprecia que los alumnos han utilizado su razonamiento visual, han manifestado diferentes habilidades de la visualización, pero se siguen detectando dificultades en cómo las usan y en la poca disposición a detallar sus argumentaciones, especialmente al tener que escribirlas.

Respecto a las decisiones tomadas para el diseño de la siguiente sesión en relación a la conjetura, se decide contextualizarla en problemas referentes al espacio para contrastar

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

los resultados obtenidos en la primera sesión dedicada al plano. Se adoptan las siguientes decisiones:

- En cuanto a la utilización de la visualización, se decide planificar actividades que les motiven a utilizarla, ya que, en otro caso, buscan fórmulas algebraicas o secuencias de números con bastante frecuencia, siendo necesario mostrarles otras técnicas de argumentación.
- Para cubrir el objetivo de enriquecimiento curricular, se seleccionan nuevos contenidos matemáticos y de razonamiento y se analiza nuevamente el rendimiento en las actividades, haciendo especial énfasis en analizar si siguen cometiendo los mismos errores. Para corregir los referentes a la generalización del caso particular y la exhaustividad en la distinción de posibilidades, se decide usar ejemplos concretos con material manipulable (para validar ejemplos o contraejemplos) suponiendo que les motiva a dar mayor rigor y exactitud en sus definiciones.

Aunque no obedece al experimento de enseñanza, pero sí a una de las fases de la conjetura, se obtienen los resultados obtenidos en el test pasado a los alumnos, prestando especial atención a los ítems en los que se cometen más errores. En el test PMA, los alumnos con talento obtienen una puntuación significativamente superior al grupo control.

Para el análisis retrospectivo, se plantea estudiar:

- Si hay relación entre el rendimiento de los alumnos en las actividades de la sesión y las habilidades de visualización manifestadas, tanto en el test como en las actividades propuestas.
- El grado en que las habilidades de visualización en tareas referentes al plano es diferente a las que se refieren al espacio.
- Si persisten los errores apreciados.

Para la diseño de la siguiente sesión se tienen en cuenta las sugerencias registradas por los profesores y observadores, con lo que se decide reducir el número de actividades para que los alumnos dispongan de más tiempo para realizarlas, dedicar más tiempo a las argumentaciones y discusiones en grupo y no anticipar las respuestas, dejando que

sean los propios alumnos los que las descubran. Se decide también rediseñar la hoja de registro de las observaciones para hacerla más operativa.

### **5.2.2 Sesión 2: Visualización: poliedros que rellenan el espacio. 13-02-2010**

A partir del análisis de lo observado en la primera sesión, se inician las fases de planificación, implementación y revisión de la segunda.

#### **5.2.2.1 Planificación de la sesión 2**

Para la planificación se realizan varias entrevistas entre los profesores investigadores y observadores. Se celebra una reunión con Ángel Gutiérrez, investigador experto en visualización, para mostrarle nuestro trabajo y recibir todas sus aportaciones a nuestra investigación. La temática para esta segunda sesión será el espacio y de manera análoga a la primera, se busca un problema abierto general, del que no conozcan a priori elementos algebraicos para resolverlo, y se van desarrollando actividades en las que la visualización ayude a resolverlo. Para este diseño, se completan los elementos específicos de la sesión en el esquema general (figura 5.3).

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

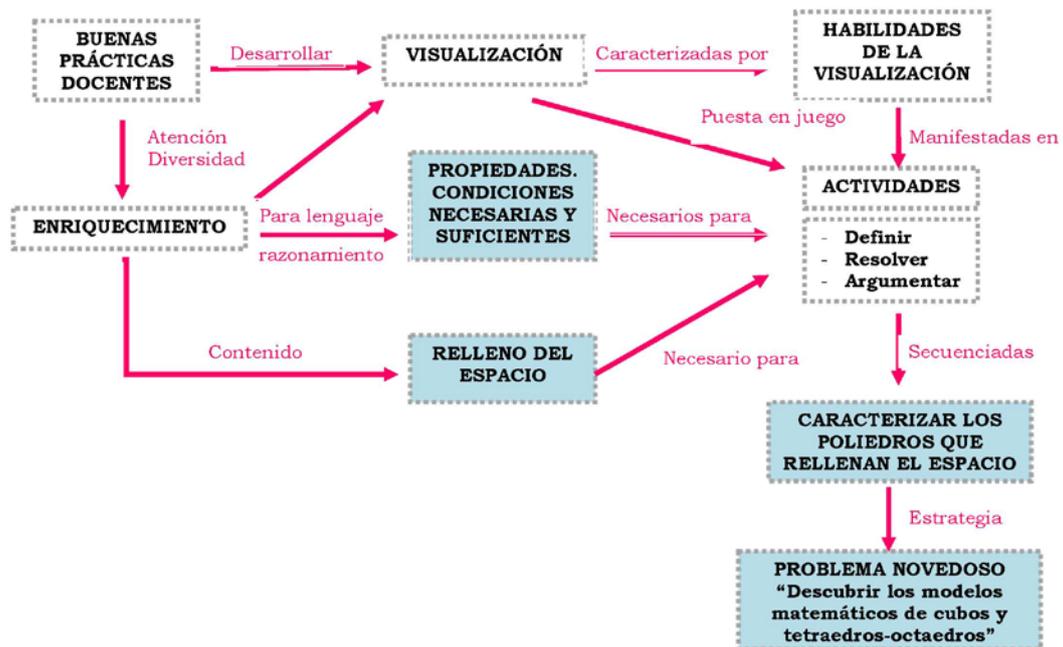


Figura 5.3: Esquema de la sesión 2.

Respecto al **contenido**, el enriquecimiento se centra en:

- Contenido curricular: relleno del espacio, pretendiendo que sean los propios alumnos los que definan los conceptos tratados y descubran las propiedades que caracterizan a los poliedros que rellenan el espacio. Para continuar el trabajo realizado en la primera sesión relativa a los movimientos en el plano y la definición de estructura equivalente a partir de ellos, se pretende que reconozcan los movimientos en el espacio como una de las transformaciones que mantienen la propiedad del relleno del espacio y que los utilicen para establecer criterios de equivalencia entre figuras. Con un fin más manipulativo, se proponen materiales que les permitan contrastar el modelo de relleno más intuitivo mediante cubos con otros más complejos de tetraedros y octaedros.
- Elementos de razonamiento matemático: además de utilizar los trabajados en la primera sesión (contraejemplos, definiciones y diferencias entre caso particular y general) se hace hincapié en las implicaciones y condiciones necesarias y suficientes, para caracterizar las propiedades.

En el guión de la sesión se refleja la necesidad de que razonen correctamente a partir del caso general, siendo necesario distinguir todos los casos posibles, ya que fue una de las razones de que sus argumentaciones fueran incompletas en la sesión anterior. Se espera que el uso de ejemplos concretos con material manipulable les sirva para validar ejemplos o encontrar contraejemplos y les aporte mayor rigor y exactitud. Para la previsión de actuaciones y selección de actividades imprescindibles, se parte de la experiencia anterior de los profesores investigadores en sesiones impartidas en el proyecto ESTALMAT sobre relleno del espacio y se realiza una revisión bibliográfica, utilizando especialmente los estudios relacionados con el puzle de la pirámide (Flores, 2006).

Se marca la **línea de actuación**:

- 1) Se presenta el problema general de definir relleno del espacio y descubrir poliedros que lo rellenen y se comparten las aportaciones individuales.
- 2) Se dirige la sesión a buscar propiedades concretas de los poliedros que rellenan el espacio.
- 3) Se plantea el problema del relleno del espacio por tetraedros con la intención de mostrar posibles modelos distintos a los provenientes del cubo.
- 4) Se dirigen las actividades con las piezas de la pirámide para descubrir los modelos obtenidos mediante tetraedros-pirámides cuadradas y tetraedros-octaedros.

Se completa la hoja de actividades (ANEXO 5.3 HOJA DE ACTIVIDADES SESION 2) y de la presentación de diapositivas para ilustrar la sesión. En cuanto al material manipulativo, a cada uno de los grupos se le suministran varios puzles de pirámides (Flores, 2006)<sup>4</sup>.

La secuenciación de las actividades se determina en cuatro bloques: I) Introducción al problema: definición de relleno del espacio; II) Propiedades de los poliedros que rellenan el espacio; III) Trabajo manipulativo: puzle de pirámides y IV) Generalización: modelos matemáticos de relleno del espacio. Describimos a continuación las actividades planteadas y las actuaciones previstas.

---

<sup>4</sup> Se trata de un puzle en el que una pirámide se descompone en 15 piezas: tres pirámides cuadradas, cuatro picos (tetraedro + pirámide + tetraedro), cuatro tejados (pirámide + tetraedro + pirámide) y cuatro zuecos (pirámide + tetraedro).

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

**INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA:** En las actividad 1 se pide que de una manera intuitiva identifiquen los cuerpos que rellenen el espacio. Se introducirá el problema de relleno del espacio en relación con problemas reales de diseño, almacenaje y transporte, analizando el nombre de tetrabrick. Se compartirá una lluvia de ideas sobre el concepto de relleno del espacio, guiándoles a que valoren la exactitud y generalidad de sus aportaciones.

En la actividad 2 se les motiva a que justifiquen que el cubo rellena el espacio y se prevé que el razonamiento sobre un caso concreto les ayude a extraer propiedades generales para definir el concepto de relleno que se abordará en la actividad 3, en la que, tanto de manera individual como en grupo, tendrán que definir “rellenar el espacio” y se les exigirán ejemplos de poliedros que lo hagan. La comunicación con los compañeros puede ayudarles a clarificar los términos utilizados y, tras la puesta en común y la búsqueda de poliedros que rellenen el espacio, se espera que detecten características de los cuerpos que rellenan el espacio.

**PROPIEDADES DE LOS POLIEDROS QUE RELLENAN EL ESPACIO:** En la actividad 4 se les sugiere estudiar estas propiedades señalando si las afirmaciones propuestas son verdaderas o falsas. Estas actividades motivan el uso de contraejemplos y la diferenciación entre “entonces” y “si y sólo si”. Se les presentarán varios ejemplos que ilustren la diferencia entre relacionar dos afirmaciones con una simple o doble implicación. En relación con la sesión anterior para el uso correcto de la argumentación visual, el uso de contraejemplos concretos puede demostrar que la implicación no es cierta en uno de los sentidos, mientras que demostrar que una implicación es cierta requiere una justificación razonada de modo general.

En la actividad 5, tanto individualmente como en grupo, deben explicar qué transformaciones se pueden hacer en un cuerpo que rellena el espacio para que el objeto resultante también lo rellene. A diferencia de la sesión anterior, en los que los movimientos caracterizaban la definición de estructura equivalente, existen otras transformaciones que producen, a partir de una figura que rellena el espacio, otra que también lo hace. Se pretende que reconozcan los movimientos en el espacio como unas de las transformaciones que mantienen la propiedad de relleno. En la búsqueda de distintos cuerpos para rellenan el espacio, se motivará la necesidad de relacionar las figuras que se obtienen a partir de transformaciones de otras. Nuevamente, el trabajo en

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

grupo obligará a verbalizar las situaciones visuales y les exigirá mayor precisión en el lenguaje.

En la actividad 6 se les pide estudiar si los tetraedros rellenan el espacio. El relleno del espacio por tetraedros podría aparecer intuitivamente al establecer una analogía incorrecta con la teselación del plano por triángulos equiláteros. Si algún alumno manifestara la necesidad de conocer el ángulo diedro del tetraedro para razonar sobre él, se proyectará una diapositiva en la que aparece esta información junto con las de otros poliedros regulares. Es destacable que ninguna de las piezas del puzle es un tetraedro, pero sí puede obtenerse a partir de combinaciones de ellas.

**TRABAJO MANIPULATIVO:** Se pretende que se familiaricen con las piezas del puzle de la pirámide y sus propiedades. En la actividad 7 se les reta a construir la pirámide cuadrada que da nombre al puzle. En estos alumnos, el planteamiento de retos es un hecho motivador pero también puede resultarles frustrante el hecho de no conseguirlo en el tiempo estimado, por lo que se les insistirá en que no es fundamental que consigan construir el puzle para el transcurso de la sesión.

En los distintos apartados de la actividad 8 se les pide que identifiquen los elementos de cada pieza (polígonos que componen sus caras y longitudes de sus aristas), las reconozcan en distintas perspectivas y las identifiquen con sus proyecciones (planta, alzado y perfil). Es importante que los alumnos identifiquen el nombre y las propiedades de cada pieza, asignándole nombres según su forma (zueco, tejado, pico). Para clarificar las diferentes representaciones planas de los objetos tridimensionales, se les presentarán distintas perspectivas y se les informará sobre las proyecciones para identificar una pieza y la terminología utilizada: planta, alzado y perfil.

Este estudio de las piezas favorece la comprensión de las distintas combinaciones ente ellas. En las actividades 9 y 10 deben construir poliedros regulares, pirámides y tetraedros y se les pide que encuentren los poliedros regulares que se pueden construir con las piezas del puzle. La justificación de que el cubo no puede obtenerse a partir de ellas, además de la riqueza de argumentos visuales, puede motivar la distinción entre el modelo de relleno del espacio mediante cubos y el modelo que queremos obtener mediante tetraedros y pirámides. Las piezas pueden combinarse para obtener pirámides cuadradas y tetraedros de diferentes tamaños, estableciéndose relaciones entre los

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

elementos que las componen. Además del planteamiento del reto manipulativo, se pide que descompongan las figuras obtenidas mediante combinaciones de las piezas del puzle.

GENERALIZACIÓN: Finalmente en la actividad 11 se les conduce a que encuentren los poliedros en los que pueden descomponerse todas las piezas del puzle, pretendiendo que identifiquen las pirámides cuadradas y los tetraedros como las figuras que al combinarse permiten formar todas las piezas. En la actividad 12 se les reta a que descubran, entre las piezas del puzle, la que tiene la propiedad de rellenar el espacio. Se espera que los alumnos descubran que el zueco, como prisma oblicuo triangular, es la única pieza que rellena el espacio. Como se puede descomponer en una pirámide cuadrada y un tetraedro, la combinación de estos dos poliedros genera un modelo de relleno del espacio. Para mostrar que varios poliedros regulares pueden generar este mismo modelo, se muestra el relleno por tetraedros y octaedros (obtenidos por la unión de dos pirámides cuadradas).

La última actividad 13 les invita a reflexionar, tras el trabajo manipulativo, sobre las propiedades de relleno del espacio expuestas en la actividad 4. En caso de no poder realizarse esta actividad por cuestiones de tiempo, se incluiría en la siguiente sesión. Finalmente, para ilustrar que poliedros aparentemente muy distintos pueden generar el mismo modelo de relleno del espacio se presenta el sólido de Kelvin que puede obtenerse como una transformación del modelo de relleno del cubo.

Respecto a la temporalización, se determinan como prioritarias las actividades 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 12 y 13 y la pasación del test. En el guión de la sesión se establecen los principales momentos de intervención y su temporalización, considerando prioritario el momento en el que algún alumno planteara relleno del espacio con pirámides y tetraedros para comenzar las actividades de manipulación. En ese caso, a continuación se retomarían las actividades en el orden previsto.

Tomando como referencia las aparecidas en el estudio piloto y en la sesión 1, se realiza un estudio de las posibles respuestas de los alumnos y se establece una correspondencia entre cada una de las actividades y las categorías en las que podrían manifestar las habilidades de visualización (ANEXO 5.4 HABILIDADES ESPERADAS EN LA

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

SESION 2), clasificándolas según se utilicen para definir, resolver o argumentar (Tabla 5.10).

Habilidades	DEFINIR	ARGUMENTAR	RESOLVER
<i>Coordinación ojo-motor</i>			Dibujar las piezas. Manipular las piezas
<i>Percepción figura-contexto</i>		Identificar elementos dentro de una estructura mayor Identificar lados, vértices y caras en una figura	
<i>Conservación de la percepción</i>	Dar criterios de igualdad	Identificar figuras que tienen la misma forma Ver los elementos ocultos (caras, lados, vértices...)	Utilizar distintas perspectivas
<i>Percepción de la posición en el espacio</i>		Utilizar movimientos en el plano o el espacio (conservan las propiedades) Reconocer referencias (atrás, adelante, izquierda...)	
<i>Percepción de las relaciones espaciales</i>		Identificar tipos de caras (cantidad, distribución..). Utilizar relaciones de paralelismo, perpendicularidad, intersecciones....de sus lados o caras (posiciones relativas) Relacionar los elementos que componen una figura. Distinguir simetrías	
<i>Discriminación visual</i>		Reconocer cuando dos figuras son iguales Señalar semejanzas o diferencias entre objetos	Clasificar formas geométricas
<i>Memoria visual</i>		Recordar elementos visuales en el proceso de razonamiento	Ver la figura y dibujarla Añadir o quitar elementos a una figura recordándola

Tabla 5.10: Categorías para las habilidades en la sesión 2.

En relación al estudio de la **evolución de nuestra conjetura**, se determinará analizar:

- El rendimiento de los alumnos en el test DAT y si existe relación con el obtenido en el test PMA.

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

- Las categorías de las habilidades de visualización que los alumnos han manifestado tanto en las pruebas escritas, las transcripciones de la sesión y las observaciones de los profesores.
- El rendimiento de los alumnos en las tareas relativas a la sesión.
- Los errores cometidos en los procesos de argumentación.

### 5.2.2.2 Implementación de la sesión 2

Asisten 21 alumnos (faltan AJ, MG, CL y CM por las condiciones climatológicas que impiden su desplazamiento) y se completan las actividades previstas salvo la Actividad 13, que se pospone para la siguiente sesión. Para el trabajo en grupo se utiliza la puntuación en el test PMA como criterio para agruparlos y se decide incluir al alumno que faltó en la primera sesión en uno de puntuación media (Tabla 5.11).

Grupo 1	JM, JF, GM, AP
Grupo 2	MC, AL, AC, RR
Grupo 3	JA, LC, DG, NM, JC
Grupo 4	CO, MR, FG, JL
Grupo 5	VC, PC, CS, AG

Tabla 5.11: Grupos de alumnos de la sesión 2.

Las actividades se realizan en el orden previsto y por adaptarnos a la estructura de la sesión antes del descanso previsto, no se hace la puesta en común de la actividad 5, aunque la realizan tanto de forma individual como en grupo.

A continuación señalamos un resumen de lo ocurrido en la sesión en relación a las actuaciones previstas y añadimos la transcripción de los momentos puntuales en los que se toma una decisión que afecta al diseño original.

En las actividades del bloque INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA los alumnos hacen un uso bastante intuitivo de la terminología usada y, en los ejemplos que utilizan, aluden principalmente a cubos y prismas rectos de base cuadrada, rectangular o hexagonal. Manifiestan desconocimiento sobre los nombres y propiedades de las figuras que utilizan para razonar, llegando incluso algunos alumnos a utilizar un azucarillo piramidal para razonar sobre el tetraedro. Inicialmente, los profesores no hacen ninguna

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

observación y se limitan a recoger sus ideas. Los razonamientos expuestos vuelven a ser incompletos y se les comenta la necesidad de utilizar términos precisos, ya que utilizan con ambigüedad los conceptos (cuadrado-cubo, lado-arista) y establecen analogías entre el plano y el espacio sin comprobarlas previamente.

En el trabajo en grupo hay dos formas de funcionamiento. En tres de los grupos, los componentes van aportando ideas y discuten sobre ellas mientras que los dos grupos restantes cada uno lee su respuesta individual y después llegan a un acuerdo que las aglutina. Se realiza una puesta en común y se toma nota en la pizarra de las aportaciones respecto a la definición de relleno del espacio:

- Se puede extender indefinidamente.
- Ningún punto quede fuera.
- Que no queden huecos.
- Aprovechar el espacio de la “manera más eficiente”.

En el debate posterior, los profesores preguntan si es posible eliminar alguna y los alumnos proponen eliminar lo de hacerlo de la manera más eficiente y subrayan como más importantes las propiedades de que “se pueda extender indefinidamente” y “que no dejen huecos”, relacionándolo con la teselación del plano y los mosaicos. Los alumnos aluden tanto a la potencialidad de una figura de rellenar el espacio como a la posición en la que hay que colocarla para que lo haga. Un alumno manifiesta sus dudas sobre *si los tetraedros rellenan el espacio o no*, generándose un debate sobre la definición de tetraedro y su diferencia con la pirámide triangular. Se decide no responder a la cuestión para tratarla en la Actividad 6 (Tabla 5.12).

Sujeto	Intervención
PC	<i>Por ejemplo un tetraedro. El tetraedro puede colocarse de la manera más eficiente y sin embargo, dejar huecos.</i>
I2	<i>Eso es un tema que tenemos que discutir. Si los tetraedros rellenan el espacio o se pueden rellenan completamente.</i>
	(...)
JA	<i>Tetraedro</i>
I2	<i>¿Tetraedro?, ¿rellena el espacio? ¿Lo apoyamos todos?</i>
AP	<i>Dependiendo de cómo sea la base</i>
I2	<i>¿Dependiendo de cómo sea la base?</i>
JM	<i>Es que la base es triangular.</i>
AP	<i>Si, pero digo la medida de las aristas.</i>
I2	<i>¿El tipo de triángulo de la base? ¿Hay algún tipo de triángulo de la base que en un tetraedro rellena el espacio y en otros no? Eso ya no lo tenemos tan claro. Ese es un</i>

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

	<i>tema de debate y es un tema que vamos a trabajar hoy con más profundidad. Si el tetraedro y las pirámides rellenan el espacio. Bien, pues pasamos a estudiar condiciones para que un cuerpo rellene el espacio. Para poder hablar de condiciones, vamos a trabajar con lo que llamamos condiciones necesarias y suficientes.</i>
--	---

Tabla 5.12: Intervención sobre el relleno del espacio por tetraedros.

En cuanto a los poliedros que rellenan el espacio, hablan sobre el prisma triangular y distinguen casos según el tipo de triángulo de la base. Aparecen el cubo, el paralelepípedo y el prisma recto hexagonal como poliedros que rellenan el espacio y utilizan las esferas como ejemplo de figura que no lo hace.

Los profesores introducen las actividades del bloque PROPIEDADES DE LOS POLIEDROS QUE RELLENAN EL ESPACIO utilizando el teorema de Pitágoras para clarificar el uso de la doble implicación y se reflexiona sobre el sentido único de la implicación en la relación entre cuadrado y lados iguales (el hecho de tener los cuatro lados iguales no es condición suficiente para que la figura sea un cuadrado). Aunque el trabajo es individual, comparten sus reflexiones en grupo y se decide no realizar la puesta en común, ya que se espera hacer la revisión en la Actividad 13 para contrastar si el uso de material manipulativo le genera nuevas reflexiones. Son los propios alumnos los que manifiestan a los profesores la necesidad de trabajar con materiales concretos (Tabla 5.13).

sujeto	Intervención
I2	<i>Esto no lo vamos a poner en común, porque creemos que es muy difícil razonar esto. Lo que estáis diciendo me parece legítimo. Creo que sería mejor si tuviésemos objetos con los cuales razonar. Hasta ahora, lo que tú comentabas, el modelo único que tenéis más fácil era el cubo. Y el cubo no ofrece suficiente generalidad para poder hacer afirmaciones rotundas para todo, sino que lo hacemos para un caso particular. Entonces sería bueno trabajar con otra figura. Lo que sí nos interesa es la última parte. Veamos.</i>

Tabla 5.13: Intervención para utilizar materiales concretos.

En estas actividades consultan frecuentemente con los profesores las dudas surgidas sobre la terminología y las propiedades. Vuelven a surgir dudas en algunos de los grupos sobre el relleno del espacio por tetraedros y es necesario clarificar la definición de prisma oblicuo, ya que se considera como una transformación de un prisma recto que mantiene la propiedad requerida en la actividad.

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

Los alumnos son creativos para imaginar transformaciones y discuten sobre la manera de expresarlas utilizando frecuentemente las manos y ejemplos concretos. Reconocen los movimientos en el espacio como transformaciones que mantienen la propiedad de relleno del espacio, hablando con naturalidad de simetrías, giros y traslaciones en el espacio. Añaden transformaciones como cambiar de tamaño sólo una parte, curvar las caras, pegado de caras con aristas, desplazar caras paralelas a la base, convertirlo en gaseoso, entre otras. La descripción de estas propiedades les lleva a debates internos en los grupos para clarificar las ideas que exponen: el concepto de cara opuesta, obtención de simetrías a partir de giros, desplazamiento en el espacio, etc.

A partir del debate anterior sobre la definición de tetraedro y su relación con las pirámides, se plantea la cuestión del relleno del espacio con tetraedros y pirámides. Los alumnos manifiestan su dificultad para razonar sobre estos poliedros y esbozan razonamientos incompletos en los que hacen referencia a la dificultad de encajarlos, la obtención de tetraedros a partir de un cubo y el relleno del plano mediante desarrollos planos de tetraedros, entre otros. Los profesores no resuelven la cuestión ya que ninguno alude a la medida de los ángulos diedros y la trasladan a las actividades posteriores al trabajo manipulativo (Tabla 5.14).

Sujeto	Intervención
I2	<i>En fin, son conjeturas de momento. Si luego somos capaces de concretarlo mejor, sería una de las finalidades. Vamos a hacer una cosa. Para no trabajar en vacío, vamos a trabajar con un puzle que tiene formas piramidales. Vais a jugar con él y hacer las actividades que se os proponen</i>

Tabla 5.14: Intervención para introducir el material manipulativo.

Las actividades de TRABAJO MANIPULATIVO las afrontan como un reto, teniendo que insistir que lo abandonasen para continuar con las siguientes actividades. Hay alumnos que trabajan muy coordinados en equipo y consiguen la construcción de todos los objetos de una manera sistemática y rápida. En algunos grupos se plantean retos ajenos a la actividad concreta, como por ejemplo conseguir una pirámide de base pentagonal.

En los trabajos de construcción, en algunos grupos clasifican las piezas y estudian el encaje de varias de ellas, utilizando la estrategia de encontrar las esquinas para construir la pirámide. En uno de los grupos clasifican las piezas distinguiendo las que permiten

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

montar inicialmente la base cuadrada y en otro tienen dificultades al completar una tentativa inicial sin utilizar todas las piezas. Cuando los alumnos se familiarizan con las piezas, se aclaran los conceptos de tetraedro y pirámide.

Trabajando en grupo, tras exponerles diapositivas para ilustrar los conceptos de planta, alzado y perfil realizan todos los apartados de esta actividad sin aparente dificultad. En la actividad 9 es necesario clarificar la definición de poliedro regular y se les pide que además de construirlos, describan las piezas utilizadas. Relacionan el octaedro con la pirámide cuadrada y vuelven a cuestionarse el hecho de que los tetraedros rellenen el espacio. Se establecen conjeturas sobre la obtención de cuadrados, pentágonos y hexágonos con las caras de las piezas. Respecto a los polígonos que forman los poliedros regulares, se decide clarificar el concepto de ángulo diedro y argumentar por qué los hexágonos no pueden ser caras de un poliedro regular y por qué los pentágonos no pueden construirse a partir de las piezas del puzle (Tabla 5.15).

Sujeto	Intervención
I2	<i>¿Hexágonos podríamos formar con las caras de estas figuras? ¿Y me sirven para algo?</i>
JA	<i>No</i>
I2	<i>¿Y por qué no me sirven los hexágonos? ¿Y por qué no se puede construir un poliedro regular con hexágonos?</i>
AL	<i>Con ninguna de esas caras se puede..</i>
MC	<i>¿Tiene que ser con esas piezas o se pueden construir cuatro triángulos? ¿Cuatro pirámides de base cuadrada?</i>
I2	<i>Estamos jugando con estas piezas. Una pregunta os he dejado en el aire ¿por qué no puedo formar poliedros regulares con hexágonos?</i>
MR	<i>Al juntar hexágonos se forma un plano. No se puede... ¿Cuánto es el ángulo interior de un hexágono?</i>
I2	<i>¿Cuánto es el ángulo interior de un hexágono? ¿Alguien lo puede buscar por el ángulo interior de un hexágono?</i>
PC	<i>60. Ah, de los lados.</i>
LC y MR	<i>120</i>
I2	<i>¿Por qué 120? ¿Te lo sabes de memoria?</i>
MR	<i>Lo divido en triángulos y cada uno tiene 60.</i>
I2	<i>¿Cuántos triángulos salen? Salen seis triángulos equiláteros, cada uno tiene 60, 120. Vale. Tiene 120 grados.</i>
MR	<i>Como necesitas al menos tres para formar un espacio</i>
I2	<i>Un vértice.</i>
MR	<i>En el mismo vértice va a haber 120, 120 y 120 que va a ser 360 que son los ángulos de un plano.</i>
I2	<i>Vale junto tres en un vértice y me dan 360 grados que son los ángulos de un plano. Luego no puede rellenar el espacio. ¿Tú tenías otro argumento? ¿Era eso? Luego no hay poliedros con caras son hexágonos. Lo máximo que se puede hacer es con pentágonos. ¿Tenemos alguna conclusión respecto a que sólo se puedan hacer estos? ¿O hasta ahora no podemos decir no me han salido nada más que éstos?</i>
JA	<i>Con pentágonos no se puede</i>

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

I2	<i>A ver, razones por las que con pentágonos no se puede.</i>
JA	<i>Si divides un pentágono en triángulos, te salen tres.</i>
I2	<i>¿Cómo lo estás pensando? ¿Estás pensando en cuáles? ¿Éste, éste y el del centro?</i>
JA	<i>Como cada triángulo suma 180 grados, lo multiplicas por tres que es 540 y luego lo divides entre 5 y te da que cada ángulo de un pentágono regular tiene 108 grados. Y sin 108 grados no se puede formar con...</i>
I2	<i>108 grados. Lo primero es calcular el ángulo interior del pentágono. Es 108. La suma de los ángulos interiores de un pentágono es 3 por 180, 540, dividido entre 5, 108. ¿Puedo formar un ángulo de 108 grados con ángulos de los polígonos que tenéis?</i>
JA	<i>No.</i>

Tabla 5.15: Intervención sobre las propiedades de los hexágonos y pentágonos regulares.

La actividad 10 la consideran como un reto y en distintos grupos se consiguen pirámides y tetraedros de diferentes tamaños. Para compartir las soluciones obtenidas con otros grupos, se les sugiere que las describan sin utilizar las manos y se resalta la importancia de la exactitud en los procesos de comunicación (Tabla 5.16).

Sujeto	Intervención
I2	<i>¿Alguien es capaz de decir cómo se forma un tetraedro de lado 2 sin manos, sin enseñarlo... sólo de palabra?</i>
JA	<i>Coges dos picos y los unes por el lado que es un cuadrado.</i>
I2	<i>Sin enseñar.</i>
AL	<i>Unes los cuadrados. Pero ¿y si los unes así?</i>
I2	<i>A ver si te sirve, coges dos picos y unes los cuadrados. ¿No sale? Luego no vale con esas palabras sólo. ¿No te sale? Tenéis que dar más información. De palabra.</i>
PC	<i>A ver si me he equivocado de pieza.</i>
II	<i>Son ésas. Tienes las dos en la mano. Es por teléfono. Como si estuvieses hablando con él por teléfono.</i>
JM	<i>Si no te sale, rota uno, no los dos.</i>
AL	<i>Si no te sale, lo rotas.</i>

Tabla 5.16: Intervención para describir las figuras obtenidas.

En el bloque de GENERALIZACIÓN, inicialmente se toma nota en la pizarra de las combinaciones de piezas obtenidas y se les sugiere que descompongan cada pieza utilizando varios poliedros. Se llega a la conclusión de que con tetraedros y pirámides se consiguen todas las demás y en ese momento se les reparten piezas con forma de tetraedro para facilitar las descomposiciones.

Varios alumnos identifican el zueco con el prisma triangular oblicuo y se concluye que es la única pieza del puzzle que rellena el espacio. Para comprobar cómo este prisma rellena el espacio, la primera disposición es unir varios prismas por una de sus aristas, percibiendo que pueden reunir cinco. Tras algunos intentos los alumnos descartan

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

formar prismas pentagonales y forman prismas triangulares más largos, que encajan uniendo caras para formar prismas de base rómbica, trapecio isósceles, etc. Como el zueco se descompone en un tetraedro y una pirámide, un alumno llega a la concluir que el espacio se rellena utilizando combinaciones de estas dos figuras, identificando un modelo de relleno del espacio diferente al basado en los cubos y sus derivados. Se vuelve a plantear la pregunta de si los tetraedros y las pirámides, de forma separada, rellenan el espacio y los alumnos vuelven a tener dificultades para responderla y justificarla. En ese momento, se proyecta una tabla con los ángulos diedros de los poliedros regulares para razonar sobre ellos, se presentan los dos modelos de relleno trabajados en la sesión (relleno con cubos y relleno con tetraedros combinados con pirámides cuadradas) y se ilustran situaciones reales en los que aparecen. Se muestra un ejemplo, a partir del sólido de Kelvin, para que identifiquen el mismo modelo de relleno del cubo a partir de otros poliedros. Por cuestiones de tiempo, se aplaza la actividad 13 a la siguiente sesión, ya que estaba previsto hacer una revisión de las propiedades encontradas en la Actividad 4 tras el trabajo manipulativo.

Salvo esta actividad, se cumple con lo previsto en la secuenciación de las actividades, sin tener que modificar sustancialmente las actuaciones diseñadas. El mayor tiempo dedicado a la manipulación, los debates en grupo y la clarificación de los conceptos matemáticos es la causa de que no pudiera realizarse la actividad 13 que era de revisión.

En cuanto a los momentos de intervención que estaban condicionados por el transcurso de la sesión, se decide repartir las piezas en forma de tetraedro en la actividad 11, para facilitar la descomposición de las otras piezas y revisar el estudio de si los tetraedros rellenan el espacio, completando las apreciaciones que habían realizado sin el apoyo del objeto concreto (Tabla 5.17).

Sujeto	Intervención
I2	<i>Nos queda el tejado. ¿Puedo sacar el tejado con las piezas que hemos dicho hasta ahora? ¿Qué serían?</i>
I1	<i>Hay que sacar un tejado con las piezas.</i>
NM	<i>Dos pirámides y un tetraedro.</i>
I2	<i>Entonces, ¿qué estamos utilizando como elementos de partida para sacar todas las piezas?</i>
AL	<i>Pirámides y tetraedros.</i>
	<i>[I2 entrega tetraedros]</i>
I2	<i>Comprobadlo. Jugar con ellos.</i>

Tabla 5.17: Intervención para entregar los tetraedros.

### 5.2.2.3 Análisis y revisión de la sesión 2

Previamente al análisis retrospectivo de los datos, se realiza un estudio exploratorio de las respuestas entregadas, advirtiéndose los argumentos visuales utilizados y contrastándose los informes de los profesores y observadores. Tras esta revisión general y en relación con la conjetura de investigación se hacen las siguientes observaciones:

Respecto al contenido, se ha satisfecho la expectativa de que los alumnos definan los conceptos tratados y descubran propiedades de los poliedros que rellenan el espacio. Han reconocido los movimientos como transformaciones que conservan la propiedad de rellenar el espacio que poseen determinadas figuras, y pese a que presentan dificultades en la terminología (especialmente de los conceptos nuevos de esta sesión), hablan con naturalidad de simetrías, giros y traslaciones en el espacio. Junto a los movimientos, los alumnos han puesto en juego su creatividad para imaginar otras transformaciones que mantienen la propiedad de rellenar el espacio. Sin embargo, si bien el modelo de relleno por cubos lo manejan con soltura, consideramos que les ha resultado complejo el modelo presentado de tetraedros y pirámides. Las dudas planteadas a lo largo de la sesión relativas a si los tetraedros rellenan el espacio, nos hacen pensar que no se ha conseguido la comprensión pretendida sobre la caracterización de los poliedros que rellenan el espacio aludiendo a los ángulos diedros.

En relación a los elementos de razonamiento, los alumnos han utilizado frecuentemente contraejemplos para responder a las argumentaciones presentadas por los compañeros. Algunas de las actividades les han permitido debatir sobre la diferencia entre razonar sobre un caso particular y el general. Consideramos un elemento de enriquecimiento importante, por la novedad que ha supuesto para muchos de los alumnos, el trabajo sobre las implicaciones y las condiciones necesarias y suficientes que se han utilizado para caracterizar las propiedades. En determinados momentos, la utilización de material manipulativo ha servido para clarificar conceptos abstractos y aportar mayor riqueza en la utilización de ejemplos visuales para sus razonamientos. Los alumnos han participado activamente en la manipulación del puzle de la pirámide y han considerado un reto las actividades de construcción. La dificultad para representar en un dibujo plano los objetos tridimensionales les supone a algunos alumnos un problema añadido para expresar sus razonamientos. En algunos casos, el hecho de utilizar dicha representación les obliga a razonar sobre el dibujo concreto que han realizado.

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

Respecto a la línea de actuación, al igual que en la sesión anterior, consideramos que la secuenciación de actividades les ha permitido afrontar un problema complejo mediante una serie de problemas más asequibles en los que ellos mismos van descubriendo los elementos de razonamiento. Los únicos cambios del guión original que se han llevado a cabo estaban previstos, por lo que valoramos positivamente la relación entre la planificación y la implementación. El hecho de que algunas actividades propuestas como individuales hayan sido resueltas en grupo por propia iniciativa de los alumnos, ha favorecido la manifestación de sus argumentaciones visuales.

Especialmente a través de este trabajo en grupo se han detectado dificultades relativas a la comunicación de sus argumentaciones sobre objetos espaciales, tanto de manera oral como escrita. En algunas de sus intervenciones, se detecta que los alumnos no están familiarizados con los términos utilizados, hacen referencia a objetos concretos y no al concepto abstracto, necesitan utilizar movimientos de sus manos y manifiestan dificultad para representar los elementos utilizados en sus argumentos. Además de los errores considerados en la sesión anterior, se detecta un error añadido consistente en utilizar incorrectamente analogías entre plano y espacio.

El rendimiento ha sido diferente según el tipo de tarea. Si bien las expectativas en las tareas de definición y resolución se ha cubierto, especialmente en las manipulativas, consideramos que algunas de las relativas a argumentación les han resultado demasiado complicadas, como la cuestión relativa a si el tetraedro rellena el espacio, a la que no han sabido responder de un modo satisfactorio. Consideramos que el hecho de no presentar desde el principio tetraedros en el material manipulativo les ha dificultado el razonamiento acerca de ellos, pues han manifestado dificultades incluso en las propiedades que los definen.

Aunque el estudio de las habilidades se hará en el análisis retrospectivo, volvemos a apreciar que los alumnos han utilizado sus habilidades visualizadoras, que siguen incurriendo en errores al usarlas y que ponen de manifiesto algunas dificultades al comunicar sus argumentaciones visuales.

Respecto a la planificación de la siguiente sesión y el estudio de la evolución de la conjetura se toman las decisiones siguientes:

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

- Revisar si aparecen elementos relacionados con el material manipulativo en las propiedades analizadas en la actividad 13 y compararlas con las expuestas en la actividad 4 en las que, por ejemplo, no han expuesto claramente ningún argumento para ver si los tetraedros rellenan o no el espacio.
- Plantear actividades que motiven los razonamientos visuales tanto en el plano como en el espacio, apreciando las diferencias y similitudes que aparezcan en ambas dimensiones (complejidad, analogías, tipos de representaciones, etc.).
- Enriquecer la terminología referente a conceptos espaciales y utilizar diferentes representaciones planas de objetos tridimensionales para poder argumentar sobre ellos y favorecer la comunicación de sus razonamientos.

Aunque no forma parte del experimento de enseñanza, se toman en consideración, por formar parte de la conjetura, los resultados de los alumnos en el test DAT pasado en esta sesión, en el que se aprecia que obtienen una puntuación significativamente superior al grupo de control.

Para el análisis retrospectivo de los datos, se plantea estudiar:

- Si hay relación entre los resultados de los dos test y cómo se diferencian ambos de los resultados del grupo de control.
- Si hay relación entre el rendimiento de los alumnos en la sesión y la visualización manifestada, tanto en el test como en las actividades propuestas.
- Si hay relación entre el rendimiento, la visualización manifestada y los errores cometidos en las dos sesiones.
- Si persisten en esta segunda sesión los errores detectados en la primera.

### **5.2.3 Sesión 3: Un viaje de ida y vuelta al espacio. 24-04-2010**

Como en sesiones anteriores, describimos los pasos relativos a la planificación, implementación y revisión de la última sesión del experimento de enseñanza.

### 5.2.3.1 Planificación de la sesión 3

Esta sesión se dedica a estudiar las diferencias y similitudes de trabajar en el plano y en el espacio. Para la selección de las actividades, se amplía la búsqueda bibliográfica a problemas utilizados en investigaciones con alumnos con talento y se establecen los criterios para seleccionar los problemas:

- *Funcionalidad*: la visualización tenga una intención funcional.
- *Razonamiento geométrico*: favorezca el razonamiento geométrico.
- *Visualización*: requieran representación visual y, preferentemente, que no dispongan de herramientas algebraicas.
- *Novedoso*: estén secuenciados para resolver un problema desconocido.
- *Sesiones*: aparezcan los contenidos de enriquecimiento de las sesiones anteriores.
- *Generalización*: los problemas admitan distintos grados de profundización.
- *Invenición*: los alumnos puedan “inventar” su propio problema relacionado.
- *Grupo*: se puedan trabajar o discutir en grupo su solución.
- *Habilidades*: se puedan establecer categorías para medir las habilidades de visualización.

Se elabora una tabla de especificación con el banco de problemas seleccionado y a partir de ella se seleccionan los más adecuados a los criterios propuestos (ANEXO 5.5 TABLA DE ESPECIFICACIÓN DE SELECCIÓN DE PROBLEMAS). Con estas aportaciones, se completa el esquema de la sesión 3 con sus elementos específicos (Figura 5.4).

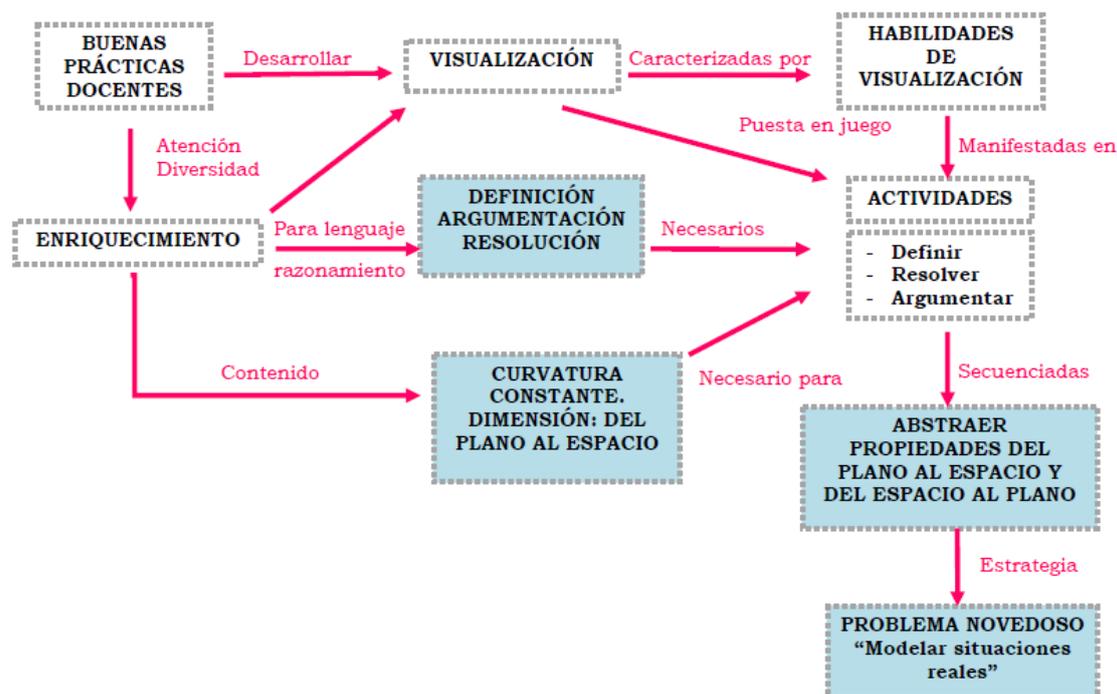


Figura 5.4: Esquema de la sesión 3.

El enriquecimiento curricular de **contenidos** se centra en los conceptos de curvatura constante y de dimensión. El hilo conductor de la primera parte de la sesión es descubrir las propiedades de los polígonos que “no pueden introducirse en su interior”, contextualizando la propiedad de anchura constante en las tapas de las alcantarillas. Se pretende que relacionen propiedades de los polígonos en el plano con los movimientos que habría que realizar en el espacio para introducirlos en su interior, dando lugar a actividades para definir, resolver y argumentar en el plano y en el espacio. En la segunda parte de la sesión se secuencian los problemas seleccionados para relacionar distintas representaciones que permiten el paso del plano al espacio y viceversa para afrontar problemas en dos y tres dimensiones.

Respecto a los elementos de razonamiento matemático para definir, argumentar y resolver, además de utilizar los trabajados en las sesiones anteriores (contraejemplos, definiciones, diferencias entre caso particular y general, implicaciones y condiciones necesarias y suficientes) se presentan diferentes situaciones de abstracción, idealización, y modelización para relacionar propiedades del plano en el espacio y viceversa.

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

En el guión de la sesión se indican las actividades imprescindibles y se marcan posibles condicionamientos de tiempo y de actuación según las respuestas de los alumnos.

Se establece la **línea de actuación** para el proceso de enseñanza:

- 1) Se retoma el problema propuesto en la sesión anterior de caracterizar los poliedros que rellenan el espacio, relacionándolo con el problema análogo de la teselación del plano.
- 2) Se presenta el problema general de descubrir la propiedad de tener anchura constante a partir de la situación de que un “polígono no se cuele en su interior” y motivando la utilización de movimientos en el plano y el espacio.
- 3) Se realiza una puesta en común para comunicar las estrategias utilizadas en la resolución de problemas que utilizan diferentes representaciones planas y espaciales.

Las actividades de la sesión se clasifican en los siguientes bloques (ANEXO 5.6 HOJA DE ACTIVIDADES SESION 3): I) Introducción: diferencias y similitudes plano-espacio; II) Abstracción-modelización; III) Ver el plano en el espacio y IV) Construir el espacio desde el plano.

**INTRODUCCIÓN. DIFERENCIAS Y SIMILITUDES PLANO-ESPACIO:** Se retoma la actividad planteada en la sesión anterior, consistente en buscar propiedades de los poliedros que rellenan el espacio, modificando la presentación para relacionarlo con la teselación del plano y facilitando que perciban la condición de que los ángulos que coincidan en un punto deben dividir a  $360^\circ$ . Para ello se proponen grupos de dos afirmaciones que deben conectar por medio de implicaciones o condiciones (necesaria, suficiente, necesaria y suficiente). Se plantea resolver el apartado a) en el que deben relacionar *Polígono que tesela el plano - Medida del ángulo es divisor de  $360^\circ$* , para relacionar la propiedad de relleno del espacio con la teselación del plano y para recordar diferentes aspectos de la sesión anterior. Se prevé realizar una puesta en común tras el trabajo individual.

**ABSTRACCIÓN-MODELIZACIÓN:** En la actividad 2 se pide que den razones que justifiquen por qué son redondas las tapas de las alcantarillas. En los distintos apartados se les motiva a que argumenten sobre la propiedad de que un polígono regular “se cuele

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

en su interior” haciéndolo previamente con triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos. Se les pide que expresen matemáticamente esta propiedad, la contrasten con el caso circular y busquen otras figuras que no la cumplan. Para hablar de modelización y relacionar el caso abstracto con la situación real, se abre la posibilidad de estudiar cómo influye el grosor de la tapa (los modelos matemáticos idealizan situaciones reales en los que se toman en consideración únicamente las propiedades a estudiar).

Se recogerá la lluvia de ideas propuesta en el apartado 2.1 dirigiendo sus respuestas hacia el objetivo de descubrir que es la propiedad de tener de curvatura constante la que impide que la circunferencia se cuele en el interior. Se les repartirá en ese momento la hoja 2 de actividades para que respondan individualmente a los apartados 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6. y se reunirán en grupo para contrastar sus respuestas a la pregunta 2.6 y hacer una puesta en común. Las respuestas al apartado 2.7 se ilustrarán con un vídeo de figuras de anchura constante y fotografías de tapas de alcantarillas con forma de triángulo de Reuleaux. Al responder al apartado 2.8 se explicará el proceso de abstracción de la propiedad de curvatura constante para buscar un modelo matemático que explique la situación real presentada.

En la actividad 3, para resaltar la relación entre el plano y el espacio, se les pregunta por los movimientos que se realizan en la tapa para que comprobar que se cuele en su interior. Se utilizará para reflexionar si el problema de la tapa de alcantarilla es un problema plano o espacial, sugiriéndoles que identifiquen los movimientos que utilizan para introducir la tapa. Esta reflexión sirve para introducir los problemas que se propondrán a continuación que estarán contextualizados tanto en dos como en tres dimensiones.

**VER EL PLANO EN EL ESPACIO:** En la actividad 4 del bloque se les pide dibujar rectas paralelas y secantes a una dada en diferentes caras del cubo y del tetraedro y justificar su respuesta. La contestarán individualmente en las plantillas y se les insistirá en la importancia de la justificación de la respuesta y la comunicación de las estrategias utilizadas.

En la actividad 5 se les pide identificar los polígonos regulares que pueden obtenerse como secciones planas de un cubo. En este bloque se pretende que reconozcan que a partir del trabajo en el plano se pueden resolver problemas tridimensionales. La

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

resolverán en grupo y se hará una puesta en común. En esta actividad son interesantes los razonamientos visuales para obtener la sección en forma de hexágono regular y para justificar la imposibilidad de conseguir una sección en forma de pentágono regular o cualquier polígono de más de seis lados, por lo que se analizarán los argumentos utilizados en estos apartados.

**CONSTRUIR EL ESPACIO DESDE EL PLANO:** En los distintos apartados de la actividad 6 de este bloque se pretende que reconozcan que el trabajo en el espacio les puede ayudar a resolver problemas en el plano. En los dos primeros apartados, referentes al cubo y al tetraedro respectivamente, se les pide que localicen los desarrollos planos que dan lugar a estas figuras y que identifiquen en ellos algunos de sus vértices. En el tercer apartado se les propone marcar en dos desarrollos planos no habituales, el camino señalado en una representación tridimensional del cubo. Finalmente, se plantea un problema contextualizado para que completen el texto de las diferentes caras en dos desarrollos planos de un cubo. Los resolverán individualmente y se realizará una puesta en común en la que deben compartir las estrategias utilizadas.

Respecto a la temporalización, se determinan como prioritarias las actividades 1, 2, 4, 5 y 6. Si faltase tiempo, la actividad 2.8 se puede tratar de una manera más expositiva por parte de los profesores al hablar de la diferencia entre la situación real y el modelo matemático que se utiliza y la actividad 3 se puede responder de una manera más intuitiva.

Como en sesiones anteriores, se realiza un estudio de las posibles respuestas de los alumnos para prever las categorías en las que podrían manifestar las habilidades de visualización (ANEXO 5.7 HABILIDADES ESPERADAS EN LA SESION 3), clasificándolas según se utilicen para definir, resolver o argumentar (Tabla 5.18):

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

Habilidades	DEFINIR	ARGUMENTAR	RESOLVER
<i>Coordinación ojo-motor</i>			Dibujar las figuras.
<i>Percepción figura-contexto</i>		Identificar elementos dentro de una estructura mayor Identificar lados, vértices y caras en una figura Identificar tipos de caras (cantidad, distribución..)	
<i>Conservación de la percepción</i>	Dar criterios de igualdad	Identificar figuras que tienen la misma forma Ver los elementos ocultos (caras, lados, vértices...)	Utilizar distintas perspectivas
<i>Percepción de la posición en el espacio</i>		Utilizar movimientos en el plano o el espacio (conservan las propiedades) Reconocer referencias (atrás, adelante, izquierda...)	
<i>Percepción de las relaciones espaciales</i>		Utilizar relaciones de paralelismo, perpendicularidad, intersecciones...de sus lados o caras (posiciones relativas) Relacionar los elementos que componen una figura Distinguir simetrías Orientación de los distintos elementos de una figura Comparar distintas medias y ángulos entre las figuras	Construir el poliedro a partir de su desarrollo
<i>Discriminación visual</i>		Reconocer cuando dos figuras son iguales Señalar semejanzas o diferencias entre objetos	Clasificar formas geométricas
<i>Memoria visual</i>		Recordar elementos visuales en el proceso de razonamiento	Ver la figura y dibujarla Añadir o quitar elementos a una figura recordándola

Tabla 5.18: Categorías para las habilidades de la sesión 3.

En relación al estudio de la **evolución de nuestra conjetura**, se determina analizar:

- El rendimiento de los alumnos en el test de las matrices progresivas de Raven y si existe relación con el PMA y el DAT.

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

- Las habilidades de visualización que han manifestado los alumnos tanto en las pruebas escritas, como en las transcripciones de la sesión y las observaciones de los profesores y observadores.
- El rendimiento de los alumnos en las tareas de la sesión.
- Los errores cometidos en los procesos de argumentación.
- Las dificultades de comunicación de los argumentos visuales. Se espera que aparezcan las observadas en sesiones anteriores relativas a la terminología, la utilización de movimientos de su propio cuerpo o hacer referencia a objetos del entorno por no poder razonar en casos generales, así como las ligadas a la expresión verbal de los procesos mentales y a la descripción de las representaciones visuales utilizadas.

### 5.2.3.2 Implementación de la sesión 3

Asisten 24 alumnos (falta PC) y MR se marcha justificadamente en el descanso. Se completan las actividades previstas sin ninguna variación sustancial. En el trabajo en grupo se mantiene la clasificación atendiendo a las puntuaciones del primer test por ser más significativas que las del segundo, quedando los alumnos distribuidos como se refleja en la siguiente tabla (Tabla 5.19).

Grupo 1	JM, JF, GM, CL, AJ
Grupo 2	MC, AL, AC, RR, MG
Grupo 3	JA, LC, DG, NM, JC
Grupo 4	CO, MR, FG, JL, CM
Grupo 5	VC, CS, AG, AP

Tabla 5.19: Grupos de alumnos de la sesión 3.

Se realizaron las actividades en el orden y temporalización prevista. Se muestra a continuación un resumen de lo ocurrido en la sesión con los momentos puntuales en los que se adoptó una decisión que afectaba al diseño original.

En el bloque de INTRODUCCIÓN: DIFERENCIAS Y SIMILITUDES PLANO-ESPACIO, en la explicación del apartado a) se hace necesario utilizar la fórmula para el cálculo del ángulo interior de un polígono regular y se argumenta sobre el número de lados que pueden concurrir en un vértice para teselar el plano. Los alumnos trabajan

individualmente pero comparten sus ideas con los compañeros de grupo. En varios grupos vuelven a surgir dudas sobre si el tetraedro rellena el espacio y, aunque se les sugiere que razonen utilizando tetraedros, prefieren buscar otros ejemplos. En la puesta en común se detecta el error de no distinguir todos los casos posibles, por lo que se debate sobre la diferencia de razonar sobre unos cuantos casos. La actividad favorece la comunicación de los razonamientos visuales y los alumnos utilizan los elementos de razonamiento matemático de las sesiones anteriores: definición, demostración, conjetura, contraejemplo, analogías, condiciones necesarias y suficientes, técnicas de resolución de problemas.

En las actividades de ABSTRACCIÓN-MODELIZACIÓN, los alumnos encuentran que la principal razón de que las tapaderas de las alcantarillas sean redondas es que de esta forma no se cuelan en su interior, votando mayoritariamente esta explicación en la puesta en común. Tras el trabajo en grupo, se discute si el triángulo se cuelan o no en su interior y un alumno, con la ayuda de sus compañeros, lo justifica en la pizarra. La propiedad de tener anchura constante para no colarse en su interior la definen de manera intuitiva, teniendo que guiarles los profesores para que vayan refinando las propuestas. En cuatro de los grupos, para responder al caso general, llegan a diferenciar entre el caso de polígonos con número par e impar de lados. Los alumnos no encuentran otra figura distinta a la circunferencia que tenga anchura constante y se sorprenden de las figuras que se muestran en el vídeo y las diapositivas.

En uno de los grupos razonan sobre la influencia del grosor de la tapa, hecho que se utiliza para conectar con la siguiente actividad y comentar la idealización de los modelos matemáticos. Al hacer referencia a los movimientos para introducir la tapa, los profesores exponen algunas de las diferencias de trabajar en el plano o en el espacio, como por ejemplo considerar la simetría en el plano como un giro en el espacio.

En el bloque VER EL PLANO EN EL ESPACIO, surge la necesidad de definir rectas paralelas y diferenciarlas de las rectas que se cruzan. En el cubo tienen dificultades para descubrir y justificar si hay rectas paralelas en las caras laterales a rectas de la cara superior (Tabla 5.20):

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

Sujeto	Intervención
II	<i>No hay paralelas. ¿Por qué?</i>
AL	<i>Porque son perpendiculares.</i>
JA	<i>Porque están en planos perpendiculares.</i>
VC	<i>Porque en planos secantes no puede haber rectas paralelas.</i>
AP	<i>No pueden tener la misma dirección.</i>
II	<i>Esperaros un momentito. Dime.</i>
CL	<i>Para que dos líneas en el espacio sean paralelas, tienen que estar en planos paralelos.</i>
II	<i>(Repitiendo) Tienen que estar en planos paralelos.</i>
CL	<i>Y esos planos son perpendiculares.</i>
II	<i>(Repitiendo) Esos planos son perpendiculares.</i>
I2	<i>Un momento. Alguien ha puesto alguna paralela. Tú habías puesto una paralela. ¿Quién ha puesto rectas paralelas?</i>

Tabla 5.20: Intervención en la actividad sobre rectas paralelas.

En la actividad 5 se observa una gran riqueza de argumentaciones visuales al generar debates entre los alumnos tanto por las secciones encontradas como por los procesos utilizados. En varios grupos clasifican los triángulos obtenidos y tienen dudas en la obtención de pentágonos tanto regulares como irregulares como sección plana de un cubo. En uno de los grupos un alumno consigue obtener un hexágono e intenta justificarle a los compañeros que es regular. En otro grupo comienzan por obtener polígonos irregulares y tratan de variarlos para hacerlos regulares. Otro grupo debate sobre la imposibilidad de encontrar polígonos de siete u ocho lados.

Como se esperaba, hay que reconducir sus argumentaciones para los casos del pentágono y hexágono regular. Para justificar la sección en forma de hexágono regular, se cuestiona el hecho de que los seis vértices están en un mismo plano. Esbozan argumentos sobre las diagonales y se logran respuestas con ayuda de los profesores, poniendo de manifiesto los errores de razonamiento que están cometiendo, para posteriormente demostrarlo en la pizarra. En cuanto a la sección pentagonal, los alumnos descubren y justifican que no puede ser regular: primero un alumno afirma que el pentágono regular no tiene lados paralelos y otros alumnos completan la demostración afirmando que al cortar planos paralelos por otro plano, las intersecciones salen paralelas y por lo tanto dos de los lados del pentágono han de ser paralelos. El procedimiento de ir contando los posibles cortes con las caras se utiliza para demostrar que no hay secciones con más de seis lados (Tabla 5.21).

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

Sujeto	Intervención
<i>II</i>	<i>Fijaos lo que os decía de pensar en grupo. El primero ha dicho una observación. Ha dicho si fuera un pentágono regular no puede tener dos lados paralelos. Y ella ha dicho si estamos trabajando en un cubo tiene que haber en un corte dos lados paralelos. Lo reunimos todo y sacamos una demostración. No puede haber un pentágono regular. ¿Entendéis? ¿Está claro? Unido con los dibujos que él ha hecho en los que sí parecía. Un paso más. ¿Se puede conseguir al cortar un cubo con un plano, un heptágono, siete lados? AJ, ¿Se puede conseguir un polígono de siete lados?</i>
<i>AJ</i>	<i>No</i>
<i>II</i>	<i>No, ¿por qué?</i>
<i>DG</i>	<i>Porque es impar</i>
<i>AJ</i>	<i>Porque para cada lado del polígono necesitamos que el plano que corte, corte a un lado del cubo. Y como el cubo sólo tiene seis lados...</i>
<i>I2</i>	<i>Una cara.</i>
<i>AJ</i>	<i>Una cara..</i>
<i>II</i>	<i>Fijaos, si corta, cortara a cada cara en un lado. Un plano cortará a cada cara en un lado. Y tenemos nada más que seis caras. Luego tendría que tener como mucho seis lados. Le he dicho argumenta bien eso. ¿Por qué un plano sólo puede cortar en un lado a una cara? ¿Qué me has contestado?</i>
<i>AJ</i>	<i>Porque si no, estarían en el mismo plano las figuras.</i>
<i>II</i>	<i>Fijaos. Si un plano corta a una cara en dos lados, corta en más de tres puntos. Luego sería el mismo. Estarías cortándolo por el plano de arriba. ¿Entendéis?</i>

Tabla 5.21: Intervención para argumentar la sección de un polígono de más de seis lados.

En las actividades del bloque CONSTRUIR EL ESPACIO DESDE EL PLANO se detectan diferentes niveles de dificultad. El apartado que le resulta más difícil es el 6.3 y resuelven sin aparente dificultad los relativos a buscar desarrollos del tetraedro y el problema final de obtención del paquete de leche a partir de su desarrollo. Aunque trabajan individualmente, comparten con los compañeros algunas ideas. Finalmente se ponen en común las distintas estrategias utilizadas y se describen algunas, como la que desecha los desarrollos que no cumplen determinadas propiedades (en un vértice confluyen más aristas de las posibles), la consistente en imaginar los desarrollos ya montados en el espacio, en nombrar las caras utilizando letras orientadas, etc.

Esta sesión ha destacado especialmente por el papel que ha desempeñado el trabajo en grupo, favoreciendo que compartan sus razonamientos. Como se esperaba, se registran dificultades para comunicar sus argumentaciones visuales, detectándose las siguientes causas:

- El desconocimiento de la terminología utilizada en los conceptos espaciales. Por ejemplo, confunden rectas paralelas y secantes en el espacio (Tabla 5.22).

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

Sujeto	Intervención
II	<i>Yo creo que puede habernos llevado a confusión a que, cuando estamos en el colegio, como siempre trabajamos en el plano, decimos dos rectas son paralelas, decimos muchas veces, si por mucho que se prolonguen nunca llegan a cortarse.</i>
CL	<i>Si</i>
II	<i>Claro, entonces cuando nos encontramos con estas dos rectas así, lo que hemos estado hablando, estas dos rectas no se llaman en matemáticas paralelas, se llama que se cruzan. Pero no las hemos visto todavía. Estas dos rectas no tienen la misma dirección. El hecho de ser paralelo es que tienen la misma dirección.</i>
AL	<i>Son vectores.</i>
II	<i>Según lo que hemos comentado, son rectas que se cruzan, no paralelas. Fijaos éstas están en dos planos paralelos.</i>
I2	<i>Y aquí habría puntos que a lo mejor están a la misma distancia entre sí. Pero si yo me voy a un punto muy lejano por aquí, cualquier punto que elija de la otra, la distancia ha cambiado notablemente.</i>
II	<i>Dime, CL.</i>
CL	<i>Es que cambia la definición del plano al espacio. Porque en el plano la definición que te dan al principio sí es correcta. Cuando nunca se cruzan. Porque ya das porque sí, que la distancia en el plano es la misma. En el espacio cambia.</i>
II	<i>En el plano es que no hay rectas que se cruzan. Por eso te vale esa definición, pero en el espacio, ya tienes rectas que se cruzan, que por mucho que se prolonguen no llegan a cortarse y no son paralelas. Muy bien. ¿En la cara posterior, se pueden encontrar secantes y paralelas?</i>

Tabla 5.22: Intervención sobre la dificultad en la terminología.

- La necesidad de utilizar movimientos de su propio cuerpo o hacer referencia a objetos del entorno (Tabla 5.23).

Sujeto	Intervención
DG	<i>Así que no sé.</i>
JA	<i>¿Vamos a dibujar?</i>
DG	<i>Si pones... Estos son tres tetraedros, imagináoslo así. Por detrás no estarían pegados, pero si luego hacemos así y los juntamos, se queda como un pico así, y no se puede.</i>
I2	<i>Juntamos tetraedros solos y salen un tetraedro más grande... ¿Nos acordamos del puzle de la pirámide?</i>

Tabla 5.23: Intervención sobre la necesidad de utilizar movimientos de su propio cuerpo.

- La dificultad para verbalizar los procesos mentales que utilizan en sus razonamientos (Tabla 5.24)

Sujeto	Intervención
II	<i>Vamos a hacer una puesta en común. No de lo que habéis hecho sino de cómo lo habéis hecho. De qué estrategias habéis utilizado. Por ejemplo, ¿alguien nos puede decir una estrategia que haya usado para hacer el 6.1?</i>
I2	<i>Cualquiera. Da igual</i>
JA	<i>Intentar montar el cubo.</i>
II	<i>¿Alguien ha utilizado una estrategia para hacerlo que no le haya facilitado mucho trabajo?</i>

AP	<i>Imaginártelo.</i>
I2	<i>Uno imaginártelo, que es un poco duro.</i>
CL	<i>Sí esto (refiriéndose al cubo fabricado)</i>

Tabla 5.24: Intervención sobre la dificultad para verbalizar los procesos.

- La dificultad para describir las representaciones visuales (Tabla 5.25).

Sujeto	Intervención
MR	<i>Yo creo que si es un prisma recto de base un polígono que rellena el plano, entonces va a ser un poliedro que rellene el espacio. Pero por otro lado puede haber poliedros que rellenen el espacio sin ser prismas rectos de base...</i>
I2	<i>Por ejemplo... No se te ha ocurrido ninguno.</i>
MR	<i>Aquí tengo uno dibujado, pero no sé cómo se llama.</i>
I2	<i>Dime cómo son las caras y cómo se forman. ¿Cuáles son las caras y cuántas tiene?</i>
MR	<i>Tengo cuatro pentágonos...</i>
I2	<i>¿Regulares?</i>
MR	<i>No son cuatro pentágonos.... Ocho triángulos y cuatro rectángulos.</i>
I2	<i>(va a ver el dibujo) Ah, que tiene... Vale muy bonito. Imaginaos el prisma de base cuadrada. Al prisma de base cuadrada le colocamos encima una pirámide de base cuadrada y ésa se la quitamos de abajo. Sale una figura muy interesante. No es una figura conocida. Es un poliedro me parece de doce caras. Cuatro, cuatro, cuatro. ¿Rellena ése el espacio? Sí porque encajan unos en otros y forman... Ése no es un prisma de base un polígono que rellene el plano. ¿Hay algún otro más que hayáis pensado?</i>

Tabla 5.25: Intervención sobre la dificultad para describir las representaciones.

### 5.2.3.3 Revisión y análisis de la sesión 3

Como es la última sesión, solamente se realiza una revisión general de las actividades y observaciones relacionadas con la conjetura de investigación y se proponen los elementos de estudio en el análisis retrospectivo.

En relación al estudio de la evolución de nuestra conjetura se hacen las siguientes observaciones, respecto a los elementos implicados:

Respecto al contenido, en la actividad de recuerdo de la sesión anterior, los alumnos han identificado propiedades de los poliedros que rellenan el espacio, si bien no se detecta que utilicen los argumentos relacionados con el modelo compuesto por tetraedros y pirámides. Los alumnos por sí mismos no han llegado a una definición rigurosa del concepto de curvatura constante, pero se han aproximado a ella de una manera intuitiva.

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

A lo largo de la sesión se han ido esbozando algunas de las ventajas de abstraer las propiedades esenciales en el modelo utilizado para comprender una situación real, como es el caso de no considerar el grosor de la tapa de la alcantarilla para abordar la propiedad de anchura constante. La presentación de figuras de curvatura constante les ha resultado novedosa.

En actividades concretas se han puesto de manifiesto la diferencia entre trabajar en una o dos dimensiones, aunque los alumnos han abstraído propiedades del plano al espacio y del espacio al plano. Pese a ello, hemos detectado que ha sido dispar el nivel de complejidad de las actividades espaciales. Por ejemplo, los alumnos han realizado con éxito actividades de desarrollos planos más familiares, mientras que han manifestado una dificultad mayor en los menos comunes.

En cuanto a los razonamientos matemáticos, se ha detectado que los alumnos han enriquecido el uso de ejemplos y contraejemplos con elementos de las sesiones anteriores. Algunos alumnos han manifestado de manera espontánea la necesidad de razonar sobre casos generales en vez de particulares y de ser exhaustivos en la distinción de todos los casos posibles, corrigiendo errores que han venido apareciendo a lo largo de todo el proceso. Pese a ello se siguen observando errores en las argumentaciones debidas a los contenidos matemáticos y a los elementos de razonamiento. Al tener mayor papel en esta sesión el trabajo en grupo y las actividades de argumentación hemos detectado las dificultades de comunicación de las argumentaciones visuales que se habían observado a lo largo del experimento de enseñanza y que en las tareas espaciales se han manifestado especialmente. En actividades puntuales, los alumnos recurren a la construcción de objetos que le permitan razonar: recortan polígonos para ver si se cuelan en su interior, montan desarrollos planos para identificar los puntos, seccionan la goma de borrar, etc.

Respecto a la metodología, como en las sesiones anteriores, la secuenciación de actividades ha permitido que sean los propios alumnos los que descubran los contenidos matemáticos, si bien la segunda parte de la sesión se ha focalizado en la resolución de tareas concretas. El proceso de enseñanza se ha ajustado al diseño y no ha habido cambios sustanciales respecto a lo previsto. Pese a que algunas actividades estaban diseñadas para la resolución individual, hemos considerado enriquecedor para la investigación que las resuelvan en grupo para favorecer la argumentación. El hecho de

que los grupos hayan sido los mismos que en la sesión anterior ha podido favorecer un trato más cercano entre ellos y, por lo tanto, una mayor disposición a trabajar juntos.

Aunque el análisis de las categorías para las habilidades de visualización se hará en el análisis retrospectivo, observamos de un modo global que los alumnos han utilizado el razonamiento visual y han manifestado habilidades de visualización a través de las tareas previstas.

Para el análisis retrospectivo de los datos, se plantea analizar:

- Si existe relación entre los resultados de los tres test y cómo se diferencian con el grupo de control.
- Si hay relación entre el rendimiento en la sesiones y las habilidades de visualización manifestada, tanto en los test como en las actividades propuestas.
- Si hay relación entre la visualización manifestada y los errores cometidos en las tres sesiones.
- Si persiste y evoluciona la actitud de los alumnos hacia los errores.
- Qué dificultades de comunicación de las argumentaciones visuales aparecen.

Aún sin contar con los datos aportados por el análisis retrospectivo, valoramos positivamente las distintas fases de planificación, implementación y revisión del experimento de enseñanza. En cada sesión se han cubierto los objetivos específicos relativos a contenidos, línea de actuación y estudio de la evolución de la conjetura. A pesar de las múltiples situaciones que hubieran podido surgir, consideramos que el desarrollo del experimento se ha ajustado a lo planificado y, salvo modificaciones no sustanciales que cabían dentro de lo previsto, se han cumplido las condiciones para contextualizar nuestra intervención como un experimento de enseñanza.

Este análisis del desempeño del experimento de enseñanza se verá enriquecido a través del análisis retrospectivo, que presentamos en el capítulo siguiente, en el que podremos valorar de un modo más específico la evolución del experimento, habiendo planteado en cada sesión el estudio de unos elementos concretos. Además, como complemento al análisis retrospectivo, contrastaremos los resultados con las entrevistas personales que también se describen en el capítulo 6.

## 5 Resultados: Descripción del experimento de enseñanza

## 6 Resultados: Capacidad visual

En este capítulo exponemos los resultados relativos al análisis de las capacidades de los alumnos registradas en los test y realizamos el análisis retrospectivo para estudiar la evolución de las habilidades de visualización, el rendimiento, los errores y las dificultades a lo largo del experimento de enseñanza. Se completa la información sobre las variables de investigación mediante la descripción de las entrevistas personales realizadas.

### 6.1 Análisis de las capacidades visuales de los alumnos

Al tratar de estudiar la evolución de las habilidades visualizadoras de los sujetos de la investigación tenemos que comenzar por apreciar qué capacidades visualizadoras tienen que les permitan afrontar los problemas planteados. Para ello hemos empleado test estandarizados.

En este apartado se pretende responder al primer objetivo específico (O1) *Caracterizar las capacidades visuales*. Para ello hemos realizado las siguientes acciones:

- Analizar las capacidades visuales del grupo de sujetos investigados a partir de los resultados obtenidos en el test de inteligencia general RAVEN y las escalas espaciales del test PMA (E) y DAT-5 (SR).
- Contrastar los resultados con los obtenidos por un grupo control.
- Observar las diferencias entre la capacidad visual evaluada mediante los test y el uso manifestado de estas habilidades en las sesiones al resolver tareas matemáticas.

La batería de instrumentos de evaluación para medir la capacidad está compuesta por la prueba de selección y tres test. La baremación de los test nos permite comparar la puntuación obtenida por un sujeto en relación a su grupo de referencia (curso, género). Para establecer a un nivel general las posibles diferencias en habilidades e inteligencia entre niños con talento y niños pertenecientes a la población normal, decidimos comparar las puntuaciones obtenidas por los niños que constituyen el grupo talento con

## 6 Resultados: Capacidad Visual

las obtenidas por los de un grupo de control. Posteriormente (§6.2) se estudian las habilidades de visualización manifestadas, para poder compararlas con sus capacidades.

Se ha utilizado un diseño cuasi-experimental unifactorial entre grupos considerando como variable independiente el Talento de los alumnos (Talento vs. Controles) y como variables dependientes las puntuaciones obtenidas por los alumnos en los diferentes test: Escala espacial (E) del Test PMA, Escala de relaciones espaciales (SR) del Test DAT-5 y test de Raven (Anguera *et al.*, 1995; Coolican, 2005; Pardo y Ruiz, 2002; Ramos, Catena y Trujillo, 2004).

Para el análisis de los datos, se utiliza la prueba T para muestras independientes en caso de comparación de las puntuaciones obtenidas en las test: PMA(E), DAT-5(SR) y RAVEN, entre los alumnos con talento y los alumnos controles. Se ha tenido en cuenta el cumplimiento del supuesto de homogeneidad de las varianzas mediante la prueba de Levene y se han aplicado las correcciones apropiadas en caso de incumplimiento del mismo. Para llevar a cabo las comparaciones entre las puntuaciones obtenidas en los test en ambos grupos de sujetos se procede a realizar ANOVAS intrasujeto. Dado que los niveles de medida de las puntuaciones originales de los cuestionarios son diferentes, para llevar a cabo la comparativa las puntuaciones directas son transformadas a puntuaciones Z considerando los valores de media y desviación típica incluidos en los correspondientes baremos de los distintos cuestionarios. En este caso, la posible violación del supuesto de homogeneidad de varianzas error se puso a prueba mediante el test W de Mauchly y, en caso de violación de dicho supuesto, se aplican las correcciones oportunas mediante la corrección en los grados de libertad de Greenhouse-Geisser. Las comparaciones *a posteriori* se han realizado mediante el test de Tukey. Se ha incluido también el índice eta cuadrado parcial ( $\mu_p^2$ ), que permite calcular el tamaño de los efectos o valorar la magnitud de las diferencias halladas. Siguiendo a Cohen (1988) su interpretación es: tamaño pequeño/bajo (0.01), tamaño mediano (0.06) y tamaño grande/alto (0.14). Finalmente, para efectuar las correlaciones entre las puntuaciones obtenidas en los diferentes cuestionarios en los dos grupos de alumnos y las correlaciones entre las puntuaciones en los cuestionarios y los problemas que constituyen la prueba de selección, en el caso de los alumnos con talento, se utiliza el coeficiente de correlación de Pearson. Todos los análisis se realizaron mediante el paquete estadístico SPSS 17.0.

Para determinar las posibles diferencias en las puntuaciones obtenidas en las diferentes escalas: PMA(E), DAT-5(SR) y RAVEN, entre los alumnos con talento y los alumnos del grupo de control se procede a realizar tres análisis de pruebas T para muestras independientes, considerando en cada caso como variable independiente el Talento de los alumnos (Talento vs. Controles) y como variables dependientes las puntuaciones obtenidas en los diferentes cuestionarios. La Tabla 6.1 muestra las medias y las desviaciones típicas en las diferentes variables.

	Talento		Controles	
	Media	DT	Media	DT
<b>PMA(E)</b>	32.51	9.11	23.25	12.67
<b>DAT-5(SR)</b>	47.54	3.08	33.52	10.71
<b>RAVEN</b>	30.39	3.09	20.24	6.32

Tabla 6.1: Medias y Desviaciones típicas de las puntuaciones obtenidas en los test.

Los resultados ponen de manifiesto que existen diferencias significativas en función del Talento de los alumnos en las puntuaciones obtenidas en los tres test evaluados: a) Escala espacial (E) del PMA ( $T(56)=3.094$ ;  $p=0.003$ ;  $\eta_p^2=0.146$ ), mostrando los alumnos con talento mayores puntuaciones que los alumnos controles; b) Escala de relaciones espaciales (SR) del test DAT-5 ( $T(38,762)=7.143$ ;  $p=0.000$ ;  $\eta_p^2=0.418$ ), resultando las puntuaciones obtenidas por los alumnos con talento superiores a las obtenidas por los alumnos controles y, c) Test RAVEN ( $T(48,915)=8.044$ ;  $p=0.000$ ;  $\eta_p^2=0.439$ ), resultando, al igual que en los casos anteriores, las puntuaciones de los alumnos con talento superiores a las de los alumnos controles (ver Tabla 6.2). *Luego, los resultados nos permiten afirmar que, en todos los casos, las puntuaciones obtenidas por los alumnos con talento tanto en los test de visualización como en el test de inteligencia general son significativamente superiores a las obtenidas por los alumnos controles.*

	T	Dif. Medias	p	$\eta_p^2$
<b>PMA(E)</b>	$T(56)=3.094$	9.256	$p=.003^*$	.146
<b>DAT-5(SR)</b>	$T(38.762)= 7.143$	14.025	$p=.000^*$	.418
<b>RAVEN</b>	$T(48.915)= 8.044$	10.149	$p=.000^*$	.493

Tabla 6.2: Resultados pruebas T para muestras independientes considerando la variable Talento como variable independiente.

## 6 Resultados: Capacidad Visual

En un segundo análisis procedemos a comparar las puntuaciones obtenidas en los diferentes test en los dos grupos, alumnos con talento y control, de manera independiente. Para ello realizamos dos ANOVAS de medidas repetidas constituyendo los niveles de la variable independiente las puntuaciones obtenidas en los diferentes cuestionarios. La Tabla 6.3 muestra las medias y las desviaciones típicas de las puntuaciones obtenidas en los dos grupos.

	Talento		Controles	
	Media	DT	Media	DT
PMA(E)_Z	.455	.780	-.202	1.135
DAT-5(SR)_Z	2.038	.339	.531	1.150
RAVEN_Z	1.415	.629	-.651	1.286

Tabla 6.3: Medias y desviaciones típicas de las puntuaciones Z obtenidas los test.

Los resultados ponen de manifiesto que existen diferencias significativas en las puntuaciones obtenidas en los diferentes test tanto en el grupo de alumnos con talento ( $F(1.395;33.490)$ ;  $p=0.000$ ;  $\eta^2_p=0.664$ ) como en el caso de los alumnos controles ( $F(1.604;51.342)$ ;  $p=0.000$ ;  $\eta^2_p=0.362$ ) (Tabla 6.4).

	F	MC <sub>error</sub>	Corrección $\epsilon$	p	$\eta^2_p$
Talento	F(1.395,33.490)	.480	.698	$p=.000^*$	.664
Controles	F(1.604,51.342)	.802	.802	$p=.000^*$	.362

Tabla 6.4: Resultados ANOVAs intrasujeto en alumnos con talento y controles para observar las diferencias entre las puntuaciones obtenidas en los test.

Considerando la significatividad de los ANOVAS globales en ambos grupos se han procedido a realizar comparaciones “*a posteriori*” de Tukey para determinar entre qué medias concretas se encuentran las diferencias. La Tabla 6.5 muestra la significatividad de las diferencias entre las medias obtenidas mediante la prueba *a posteriori* de Tukey para los dos grupos de participantes. En el caso de alumnos con talento la prueba Tukey pone de manifiesto que existen diferencias entre las puntuaciones z obtenidas en el test PMA(E) y el test DAT-5(SR) ( $p=0.000$ ), resultando las puntuaciones obtenidas en el DAT-5(E) superiores a obtenidas en el test PMA(SR); entre las puntuaciones z obtenidas entre el test PMA(E) y el test RAVEN ( $p=0.000$ ), siendo las puntuaciones obtenidas en el test RAVEN superiores a las obtenidas en el test PMA(E) y finalmente, entre las puntuaciones z obtenidas en el test DAT-5(SR) y el test RAVEN ( $p=0.001$ ), resultando las puntuaciones z obtenidas en el test DAT-5(SR) superiores a obtenidas en

test RAVEN. Luego, *los alumnos con talento obtienen sus puntuaciones más altas en la escala SR del test DAT-5, seguidas de las obtenidas en el test RAVEN y las más bajas en la escala E del test PMA.*

En el caso de los alumnos del grupo de control, los resultados de la prueba de Tukey indican que existen diferencias significativas entre las puntuaciones z obtenidas en el test PMA(E) y el test DAT-5(SR) ( $p=0.001$ ), siendo las puntuaciones z obtenidas en el test DAT-5(SR) superiores a obtenidas en el test RAVEN y entre las puntuaciones z obtenidas en el test DAT-5(SR) y en el test RAVEN, resultando las puntuaciones z obtenidas en el DAT-5(SR) superiores a las obtenidas en el test RAVEN ( $p=0.000$ ), finalmente la comparación entre las puntuaciones z obtenidas en el test PMA(E) y en el test RAVEN no ha resultado significativa ( $p=0.068$ ). Luego a diferencia de los alumnos con talento, *los alumnos controles obtienen sus puntuaciones más altas en la escala SR del test DAT-5, seguidas de las obtenidas en la escala E del test PMA y el test de RAVEN, entre las que no existen diferencias.*

<b>Alumnos con talento</b>			
	<b>PMA(E)-Z</b>	<b>DAT-5(SR)_Z</b>	<b>RAVEN_Z</b>
<b>PMA(E)_Z</b>		.000*	.000*
<b>DAT-5(SR)_Z</b>			.001*

Tabla 6.5: Resultados de las pruebas Tukey.

Considerando las diferencias encontradas en las puntuaciones obtenidas en los test en los dos grupos de alumnos, se realizan análisis de correlaciones de Pearson de forma independiente para el grupo de alumnos con talento y para el grupo de control. *En el caso de los alumnos con talento, los resultados indican que existen una correlación positiva significativa entre las puntuaciones obtenidas en el test PMA(E) y las obtenidas en el test de RAVEN ( $r=0.051$ ;  $p=0.009$ ), no existen correlaciones significativas para el resto de cuestionarios. En el grupo de control los resultados indican que existen correlaciones positivas significativas entre las puntuaciones obtenidas en todos los cuestionarios: entre las puntuaciones obtenidas en el test PMA(E) y el test DAT-5(SR) ( $r=0.616$ ;  $p=0.000$ ), entre las puntuaciones obtenidas en el test PMA(E) y el test RAVEN ( $r=0.403$ ;  $p=0.020$ ) y entre las puntuaciones obtenidas en el test DAT-5(SR) y el test RAVEN ( $r=0.703$ ;  $p=0.000$ ). Los resultados se muestran en la Tabla 6.6.*

## 6 Resultados: Capacidad Visual

<b>Alumnos con talento</b>		
	<b>DAT-5(SR)</b>	<b>RAVEN</b>
<b>PMA(E)</b>	.094	.045
<b>DAT-5(SR)</b>		.510**
<b>Alumnos del grupo de control</b>		
	<b>DAT-5(SR)</b>	<b>RAVEN</b>
<b>PMA(E)</b>	.616**	.403*
<b>DAT-5(SR)</b>		.703**

\*La correlación es significativa al 0.05 (bilateral)  
\*La correlación es significativa al 0.01 (bilateral)

Tabla 6.6: Correlaciones entre las puntuaciones obtenidas en los test.

### 6.2 Evolución de la investigación. Análisis retrospectivo

En este apartado vamos a completar el estudio del experimento de enseñanza comenzado en el capítulo anterior, analizando los datos recogidos durante su desarrollo. Se pretende analizar el logro del objetivo específico 3:

*O3: Analizar la evolución de los alumnos a lo largo de las sesiones en cuanto a cómo se manifiestan las habilidades visualizadoras, tanto de manera individual como del grupo de alumnos con talento matemático.*

El análisis retrospectivo debe aportar información del modelo teórico sobre el fenómeno de aprendizaje y resultados teóricos sobre el diseño instruccional (Molina, Castro, Molina, Castro, 2011). En este caso el fenómeno de aprendizaje es la visualización manifestada a través de las habilidades que los alumnos han puesto en juego.

En el capítulo 4 describimos las fuentes e instrumentos de investigación, la forma en que aplicamos el análisis de contenido para convertir cada informe en datos y la posterior codificación de los mismos. Este procedimiento nos permite disponer de registros individuales y del grupo para observar la evolución de las habilidades, los errores y las dificultades que han aparecido al expresar las argumentaciones visuales a lo largo de las tres sesiones.

El estudio retrospectivo comienza mostrando el comportamiento general del grupo mediante un análisis descriptivo de las habilidades de visualización, los errores cometidos y las dificultades manifestadas en la tercera sesión. En segundo lugar, utilizando herramientas estadísticas, analizamos diferentes relaciones entre las variables relativas a la manifestación de las habilidades, los errores y dificultades, la capacidad visual evaluada mediante los test y el rendimiento. Finalmente caracterizamos a los sujetos según el uso que han manifestado de la visualización, tanto en los test como en el desarrollo de las sesiones.

### 6.2.1 Análisis descriptivo de la manifestación de las habilidades de visualización

Para el análisis del comportamiento del grupo, se recogen el total de manifestaciones incompletas y correctas que se registraron en las diferentes sesiones, además del porcentaje de alumnos que manifestaron cada habilidad (Tabla 6.7).

	FC			CP			PE			RE			DV		
	%	FCI	FCC	%	CPI	CPC	%	PEI	PEC	%	REI	REC	%	DVI	DVC
Se. 1	100	58	188	100	14	88	100	4	64	63	13	14	79	10	29
Se. 2	100	41	163	100	19	67	100	15	55	100	7	126	95	23	63
Se. 3	100	35	105	62.5	2	25	100	24	160	100	58	246	91.6	21	56
<b>total</b>		<b>134</b>	<b>456</b>		<b>35</b>	<b>180</b>		<b>43</b>	<b>279</b>		<b>78</b>	<b>386</b>		<b>54</b>	<b>148</b>
		<b>590</b>			<b>215</b>			<b>322</b>			<b>464</b>			<b>202</b>	

Tabla 6.7: Porcentaje de alumnos y total de manifestaciones correctas e incompletas de cada habilidad en las tres sesiones.

A partir de los datos globales correspondientes a la suma de las manifestaciones de las tres sesiones, se observa que las habilidades Percepción de la Figura-Contexto y Percepción de las Relaciones Espaciales (en este orden) han sido las que más se han manifestado tanto de manera incompleta como correcta. Las habilidades que en menos ocasiones se ha manifestado han sido Discriminación Visual y Conservación de la Percepción, la primera también es la que menos usos correctos tiene, mientras que la segunda es la que menos usos incompletos.

## 6 Resultados: Capacidad Visual

Como se ha descrito en el capítulo 4, para poder establecer comparaciones entre la forma en que cada alumno (y el grupo general) han actuado durante las sesiones se ha buscado una expresión en porcentaje que neutralice la cantidad de intervenciones que cada cual ha tenido en ellas. Por tanto se ha obtenido el porcentaje de ocasiones en el que se ha manifestado cada habilidad respecto al número de intervenciones que se han registrado. A partir de estos resultados, se obtiene la tabla 6.8 en la que aparece el porcentaje de alumnos y el porcentaje de manifestaciones incompletas y correctas de cada habilidad.

	FC			CP			PE			RE			DV		
	%	FCI	FCC	%	CPI	CPC	%	PEI	PEC	%	REI	REC	%	DVI	DVC
Se. 1	100	10.7	34.6	100	2.6	16.2	100	0.7	11.8	63	2.4	2.6	79	1.8	5.3
Se. 2	100	4.7	18.9	100	2.2	7.8	100	1.7	6.4	100	0.8	14.6	95	2.7	7.3
Se. 3	100	2.5	7.4	62.5	0.1	1.8	100	1.7	11.3	100	4.1	17.4	91.6	1.5	4

Tabla 6.8: Manifestaciones de cada habilidad (porcentaje de alumnos y porcentaje de manifestaciones incompletas y correctas) en las tres sesiones.

Vamos a examinar esta tabla estudiando cada una de las habilidades.

### Habilidad de la Percepción figura-contexto (FC)

*La manifiestan todos los alumnos en todas las sesiones, siendo el porcentaje de manifestaciones correctas superiores a las incompletas siempre y disminuyendo el porcentaje de ambas a lo largo del experimento de enseñanza, por lo que la sesión 1 es la que más ha favorecido esta habilidad.*

Para analizar las manifestaciones de cada habilidad hemos examinado cómo se han manifestado sus categorías correspondientes, estudiándolo en cada sesión (Tabla 6.9 para la habilidad FC, que se manifiesta por FC1 y FC2, ver Tabla 4.9: Categorías correspondientes a las habilidades). Podemos observar que las manifestaciones incompletas en la primera sesión se corresponden mayoritariamente a FC1 porque los alumnos argumentan sobre procesos de construcción a partir de estructuras menores. En la segunda sesión se corresponden tanto a FC1 como a FC2, y en la última sesión se deben a FC2 cuando distinguen elementos dentro de una estructura mayor. En cuanto a las correctas, en las tres sesiones son mayores las manifestaciones de FC2.

	FC1		FC2	
	FC1I	FC1C	FC2I	FC2C
Se. 1	52	12	6	176
Se. 2	21	65	20	98
Se. 3	10	38	25	67
<b>Total</b>	<b>83</b>	<b>115</b>	<b>51</b>	<b>341</b>

Tabla 6.9: Manifestaciones de las categorías FC1 y FC2 de manera incompleta y correcta en las tres sesiones.

### Habilidad de Conservación de la Percepción (CP)

*Todos los estudiantes ponen en juego la habilidad de conservar la percepción (CP) en las sesiones 1 y 2 (en la sesión 3 lo hace el 62,5%). Las manifestaciones correctas son superiores a las incompletas en todas las sesiones y el porcentaje de ambas va disminuyendo a lo largo del experimento de enseñanza por lo que la sesión 1 es la que más ha favorecido la manifestación de esta habilidad, tanto incorrecta como correctamente.*

En el análisis de las categorías (Tabla 6.10), se observa que mayoritariamente las manifestaciones incompletas y correctas se deben a la categoría CP1 en la que los alumnos utilizan criterios de igualdad haciendo referencia a forma, tamaño, movimientos o perspectivas. La categoría CP2 asociada a identificar elementos ocultos aparece en pocas intervenciones.

	CP1		CP2	
	CP1I	CP1C	CP2I	CP2C
Se. 1	9	81	5	7
Se. 2	18	66	1	1
Se. 3	2	25	0	0
<b>Total</b>	<b>29</b>	<b>172</b>	<b>6</b>	<b>8</b>

Tabla 6.10: Manifestaciones de las categorías CP1 y CP2 de manera incompleta y correcta en las tres sesiones.

### Habilidad de Percepción de la posición en el espacio (PE)

*Todos los sujetos en todas las sesiones manifiestan habilidad para percibir la posición en el espacio (PE). Las respuestas correctas son siempre superiores a las incompletas. En la sesión 2 es donde se detectan el mayor número de manifestaciones incompletas y en la sesión 1 el mayor de manifestaciones correctas.*

Al analizar las categorías correspondientes a esta habilidad, se observa que las manifestaciones incompletas van asociadas a PE1 cuando se refieren a elementos de posición respecto a los objetos o a ellos mismos (Tabla 6.11). Sin embargo, en la primera sesión, las manifestaciones correctas se corresponden mayoritariamente con la categoría PE2 al identificar movimientos entre dos figuras, aunque también en las dos últimas sesiones vuelve a manifestarse mayoritariamente PE1.

	PE1		PE2	
	PE1I	PE1C	PE2I	PE2C
Se. 1	3	1	1	63
Se. 2	13	41	2	14
Se. 3	15	118	9	42
<b>Total</b>	31	160	12	119

Tabla 6.11: Manifestaciones de las categorías PE1 y PE2 de manera incompleta y correcta en las tres sesiones.

### Habilidad de la Percepción de las Relaciones espaciales (RE)

*En la sesiones 2 y 3 todos los alumnos perciben las relaciones espaciales (RE), mientras que en la sesión 1 lo hace el 63%. Las manifestaciones correctas son superiores a las incompletas en todas las sesiones. La sesión 3 es la que más ha favorecido la manifestación de esta habilidad, tanto para las incompletas como correctas.*

En las dos primeras sesiones, tanto las manifestaciones incompletas como las correctas se deben casi exclusivamente a la categoría RE1 porque los alumnos utilizan elementos de posición relativa entre objetos (dirección, paralelismo, perpendicularidad, etc.) (Tabla 6.12). Aunque en la sesión 3 aparece un mayor número de manifestaciones incompletas debidas a RE2 cuando identifican elementos en los desarrollos planos, siguen siendo mayoritaria las manifestaciones completas asociadas a RE1.

	RE1		RE2	
	RE1I	RE1C	RE2I	RE2C
Se. 1	13	14	0	0
Se. 2	7	124	0	2
Se. 3	25	184	33	62
<b>Total</b>	45	322	33	64

Tabla 6.12: Manifestaciones de las categorías RE1 y RE2 de manera incompleta y correcta en las tres sesiones.

### Habilidad de Discriminación Visual (DV)

*El porcentaje mayor de alumnos que manifiestan discriminación visual (DV) es el 95% en la sesión 2 (en la sesión 1 lo hace el 79% y en la sesión 3 el 91.6%). Las respuestas correctas son superiores a las incompletas en todas las sesiones. La sesión 2 es la que más ha favorecido la manifestación de esta habilidad, tanto incorrecta como correctamente.*

Las manifestaciones incompletas de las tres sesiones se corresponden mayoritariamente a la categoría DV2 que se ponía en juego al identificar semejanzas o diferencias entre las figuras (Tabla 6.13). También las manifestaciones completas de las dos últimas sesiones se deben principalmente a esta categoría y únicamente en la primera sesión provienen de la categoría DV1 al utilizar criterios de clasificación mediante semejanzas.

	DV1		DV2	
	DV1I	DV1C	DV2I	DV2C
Se. 1	0	22	10	7
Se. 2	8	17	15	46
Se. 3	5	24	16	32
<b>Total</b>	13	63	41	85

Tabla 6.13: Manifestaciones de las categorías RE1 y RE2 de manera incompleta y correcta en las tres sesiones.

Organizado por sesiones apreciamos que:

La sesión 1 ha sido la que más ha favorecido la manifestación de las habilidades Percepción de la Figura Contexto y Conservación de la Percepción tanto de manera correcta como incompleta y de la Percepción de la Posición en el Espacio de manera

## 6 Resultados: Capacidad Visual

correcta. El orden respecto al porcentaje de manifestaciones correctas en la sesión 1 es: FC > CP > PE > DV > RE.

La sesión 2 ha favorecido la habilidad Discriminación Visual, tanto de manera correcta como incompleta, y la Percepción de la posición en el Espacio de manera incompleta. El orden respecto al porcentaje de manifestaciones correctas en la sesión 2 es: FC > RE > CP > DV > PE.

La sesión 3 ha favorecido la habilidad Percepción de las Relaciones Espaciales, tanto de manera correcta como incompleta. El orden respecto al porcentaje de manifestaciones correctas en la sesión 3 es: RE > PE > FC > DV > CP.

En cada indicador un valor de 100 representaría que se han manifestado en todas las intervenciones las dos categorías que estaban asignadas por habilidad. Por ejemplo, un valor 100 en FCI es lo que habría obtenido el grupo de alumnos si en todas sus intervenciones hubiese manifestado de manera incompleta las dos categorías FC1 y FC2. Esta posibilidad es muy remota, pues supone que en todas las intervenciones de los alumnos hubieran puesto de manifiesto la habilidad Figura Contexto (en sus dos formas, FC1 y FC2), independientemente de la actividad a la que estén respondiendo. Sin embargo, destacamos que *los alumnos han manifestado en un porcentaje elevado las habilidades de visualización y las manifestaciones correctas han sido superiores a las incompletas en todas las sesiones.*

En las dos primeras sesiones la habilidad que se ha manifestado con mayor frecuencia de manera correcta ha sido la Percepción del Figura-Contexto (FC), mientras que en la tercera sesión ha sido la Percepción de las Relaciones Espaciales (RE). El orden respecto a la manifestación de las habilidades en cada sesión ha sido distinto. La Percepción Figura-Contexto y Conservación de la percepción han registrado sus porcentajes mayores, tanto de manera incompleta como correcta en la sesión 1; la Discriminación Visual en la sesión 2 y la Percepción de las relaciones espaciales en la 3. La habilidad de la Percepción de la posición en el espacio es la única de la que se ha registrado el mayor porcentaje y manifestaciones incompletas y correctas en sesiones diferentes (sesiones 2 y 1 respectivamente) (Tabla 6.14).

	Incompleta	Correcta
Percepción Figura-Contexto	Sesión 1	Sesión 1
Conservación de la percepción	Sesión 1	Sesión 1
Percepción de la posición en el espacio	Sesión 2	Sesión 1
Percepción de las relaciones espaciales	Sesión 3	Sesión 3
Discriminación Visual	Sesión 2	Sesión 2

Tabla 6.14: Sesión en la cada habilidad se manifiesta con mayor porcentaje.

Cabe pensar que a estos resultados hayan colaborado el tipo de actividades que se han planteado en cada sesión, por lo que más adelante estudiaremos los resultados en relación con las actividades propuestas.

### 6.2.2 Análisis descriptivo de la manifestación de los errores cometidos

En la tabla 6.15 aparece el porcentaje de alumnos que cometen cada error y el número de manifestaciones totales de dicho error que se contabilizan en cada sesión.

	E1		E2		E3		E4		E5	
	%	E1	%	E2	%	E3	%	E4	%	E5
Sesión 1	0	0	96	65	96	46	83	22	54	19
Sesión 2	48	12	86	26	67	16	14	5	100	109
Sesión 3	42	11	29	8	33	8	100	57	100	114

Tabla 6.15: Porcentaje de alumnos y total de manifestaciones de cada error en las tres sesiones.

Se procede del mismo modo que con los indicadores relativos a las habilidades para relacionar la cantidad de errores cometidos con el número de intervenciones que se han contabilizado en cada sesión, obteniéndose la siguiente tabla en la que aparece el porcentaje de alumnos y el porcentaje de manifestaciones de cada error en relación a la cantidad de intervenciones (Tabla 6.16).

	E1		E2		E3		E4		E5	
	%	E1	%	E2	%	E3	%	E4	%	E5
Sesión 1	0	0	96	23.9	96	16.9	83	8.1	54	7
Sesión 2	48	2,8	86	6	67	3.7	14	1.2	100	25.2
Sesión 3	42	1.6	29	1.1	33	1.1	100	8	100	16.1

Tabla 6.16: Manifestaciones de cada error (porcentaje de alumnos y porcentaje de manifestaciones de cada uno de ellos) en las tres sesiones.

## 6 Resultados: Capacidad Visual

**E1 (Establecer analogía falsa plano-espacio):** *En la sesión 1 no aparece, al trabajar exclusivamente en el plano. Disminuye de la sesión 2 a la 3 tanto en número de alumnos que lo cometen como en la frecuencia con la que se comete.*

**E2 (No discutir todos los casos posibles):** *Disminuye progresivamente a lo largo de las tres sesiones tanto en el número de alumnos como en la frecuencia con la que se comete.*

**E3 (Razonar limitándose a ejemplos concretos):** *Disminuye progresivamente a lo largo de las tres sesiones tanto en el número de alumnos como en la frecuencia con la que se comete.*

**E4 (Confundir los elementos matemáticos de razonamiento):** *Disminuye de la sesión 1 a la sesión 2 y aumenta de la sesión 2 a la 3, tanto en el número de alumnos como en la frecuencia con la que se comete.*

**E5 (Confundir los elementos de contenidos matemático):** *Aumenta de la sesión 1 a la sesión 2 tanto en el número de alumnos como en la frecuencia con la que se comete. De la sesión 2 a la 3 se mantiene el porcentaje de alumnos que lo cometen (todos) y disminuye la frecuencia con la que se comete.*

Si analizamos por sesiones, observamos que en la sesión 1 ha habido la mayor manifestación de los errores E2, E3 y E4. El orden respecto al porcentaje de manifestaciones de errores en la sesión 1 es:  $E2 > E3 > E4 > E5 > E1$ .

En la sesión 2 se han presentado mayoritariamente los errores E1 y E5. El orden respecto al porcentaje de manifestaciones de errores en la sesión 2 es:  $E5 > E2 > E3 > E1 > E4$ .

El orden respecto al porcentaje de manifestaciones correctas en la sesión 3 es:  $E5 > E4 > E1 > E2 = E3$ . En esta sesión no destaca ninguno de los errores.

Un valor 100 para uno de los errores significa que los alumnos cometen ese error en todas sus intervenciones. Destacamos, por ser los valores más altos, que el 23.9 % de los alumnos cometen E2 en la sesión 1 y que el 25.2 % cometen E5 en la sesión 3. Además todos los alumnos cometen E4 en la sesión 3 y E5 en las sesiones 2 y 3.

### 6.2.3 Análisis descriptivo de las dificultades de la sesión 3

El registro de las dificultades se realiza únicamente en la sesión 3, obteniéndose la siguiente tabla en la que aparece el porcentaje de alumnos que las manifiestan y la frecuencia absoluta con la que lo hacen (Tabla 6.17).

<b>DIFICULTADES (sesión 3)</b>		
	<b>%</b>	<b>Manifestaciones</b>
DT	100	79
DE	75	63
DC	54.1	25
DR	70.8	32

Tabla 6.17: Porcentaje de alumnos y total de manifestaciones de cada dificultad en la sesión 3.

Teniendo en cuenta las intervenciones contabilizadas en esta sesión, se obtiene la Tabla 6.18, en la que aparece el porcentaje de alumnos y el porcentaje de manifestaciones de cada dificultad:

<b>DIFICULTADES (sesión 3)</b>		
	<b>%</b>	<b>Manifestaciones (%)</b>
DT	100	11.2
DE	75	9
DC	54.1	3.5
DR	70.8	4.5

Tabla 6.18: Manifestaciones de cada dificultad (porcentaje de alumnos y porcentaje de manifestaciones de cada uno de ellas) en la sesión 3.

Todos los alumnos encuentran dificultad terminológica (DT). En orden, tanto respecto al porcentaje de alumnos como a la frecuencia, le sigue la dificultad del entorno (DE), luego la de representación (DR) y la que menos la de comunicación (DC) (DT > DE > DR > DC).

#### Valoración del análisis descriptivo

El análisis descriptivo que se ha realizado de las habilidades, errores y dificultades se ha extraído a partir de las tablas finales del comportamiento del grupo. Para interpretar

## 6 Resultados: Capacidad Visual

estos resultados es conveniente tener en cuenta algunos factores, especialmente el número de intervenciones registradas en cada sesión, el tipo de actividades propuestas, que condicionan las respuestas de los alumnos, con el consiguiente peso del trabajo en grupo y su relación con las actividades que requieren argumentar. Por último, valoraremos el análisis descriptivo a partir de las apreciaciones sobre los errores. Vamos a examinar estos factores independientemente. Sus conclusiones parciales nos llevarán a proponer un análisis estadístico más fino que nos permita hacer apreciaciones más precisas (§6.2.4).

El **número de intervenciones registradas** ha sido diferente a lo largo del experimento de enseñanza (Tabla 6.19), por lo que, como los datos obtenidos (Tablas 6.7 y 6.8) se relacionaban con la cantidad de intervenciones, las manifestación de las habilidades resultan difíciles de comparar, tanto en cantidad absoluta, como en relación al número de intervenciones de los alumnos.

	Respuestas escritas	Participación en clase	Debate en Grupo	Observaciones profesores	<b>Total</b>
Sesión 1	240	25	0	7	<b>272</b>
Sesión 2	336	29	50	17	<b>432</b>
Sesión 3	402	64	224	17	<b>707</b>

Tabla 6.19: Tipos de intervenciones en cada sesión.

Podríamos pensar en considerar las oportunidades de aparición de cada habilidad de visualización en cada sesión y actividad, con lo que tendríamos una referencia para poder comparar las manifestaciones de las habilidades entre sesiones. Para ello contamos con el análisis a priori de las manifestaciones de las habilidades, que se realizó a partir de lo esperado en las pruebas escritas. Pero en el análisis de contenido hubo que registrar nuevas manifestaciones de las distintas habilidades de visualización, que no estaban previstas a priori. Además, se han registrado todas las manifestaciones realizadas por los alumnos a partir de todas sus intervenciones. La única incidencia que se presentó al respecto es que un alumno (MR), asistió únicamente a la primera parte de la tercera sesión por lo que se decide considerarlo ausente para el estudio del rendimiento en dicha sesión, pero se contabilizan todas sus intervenciones en el cómputo global.

Podemos apreciar que a lo largo del experimento de enseñanza ha ido aumentando notablemente el número intervenciones y ha sido mayor la diferencia entre lo registrado únicamente en las pruebas escritas y en el número total de intervenciones. Dado que las unidades de análisis empleadas para estudiar las respuestas por escrito a una actividad se contabilizaban en un única intervención, se han obtenido en su categorización, unidades que muestran la ejecución de más de una habilidad de visualización. En cambio, al analizar las intervenciones de los alumnos en un debate con sus compañeros, o mediante una apreciación en clase, la frase suele ser más corta, y generalmente engloba menos contenido que las unidades empleadas en el escrito. Así hemos observado que en la mayoría de los registros obtenidos mediante la participación en clase, el debate en grupo y las observaciones se detectaban categorías específicas, por lo que, pese a que se originaba un aumento en el cómputo de esa habilidad concreta, suponía en descenso en el porcentaje de manifestación de las restantes (por la forma en la que hemos definido los indicadores que depende del total de intervenciones). En la Tabla 6.20 se observa cómo ha ido aumentando el número de manifestaciones de las habilidades.

	Manifestaciones Incompletas	Manifestaciones Correctas	<b>Total</b>
Sesión 1	99	383	<b>482</b>
Sesión 2	105	474	<b>579</b>
Sesión 3	140	592	<b>732</b>

Tabla 6.20: Total de manifestaciones incompletas y correctas en cada sesión.

Esto ha dado lugar a que vaya disminuyendo el porcentaje de manifestaciones respecto al total de intervenciones (Tabla 6.21).

	% Manifestaciones Incompletas	% Manifestaciones Correctas	<b>Total</b>
Sesión 1 (272 intervenciones)	0.36	1.41	<b>1.77</b>
Sesión 2 (432 intervenciones)	0.24	1.09	<b>1.34</b>
Sesión 3 (707 intervenciones)	0.20	0.83	<b>1.03</b>

Tabla 6.21: Porcentaje de manifestaciones incompletas y correctas respecto al número de intervenciones de cada sesión.

Como han aumentado las intervenciones de los alumnos en clase y en debates en grupos a lo largo del experimento de enseñanza, el promedio de categorías manifestadas en

## 6 Resultados: Capacidad Visual

cada una de las intervenciones ha ido disminuyendo. En la primera sesión se registraba un promedio de 1.77 categorías de las habilidades por intervención, mientras que en la sesión 3 disminuyó a 1.03.

Si analizamos únicamente las manifestaciones relativas a intervenciones distintas a las registradas mediante las pruebas escritas, observamos que en valores absolutos han ido aumentando tanto de manera incompleta como correcta (Tabla 6.22)

	Manifestaciones Incompletas	Manifestaciones Correctas	<b>Total</b>
Sesión 1	5	23	<b>28</b>
Sesión 2	13	149	<b>162</b>
Sesión 3	52	197	<b>249</b>

Tabla 6.22: Total de manifestaciones incompletas y correctas en las intervenciones distintas a pruebas escritas.

Sin embargo el porcentaje de manifestación por intervención en este tipo de intervenciones se mantiene con valores similares en las incompletas, pero, para las correctas aumenta considerablemente en la sesión 2 y luego desciende hasta su valor menor en la tercera sesión (Tabla 6.23).

	% Manifestaciones Incompletas	% Manifestaciones Correctas	<b>Total</b>
Sesión 1 (32 intervenciones)	0.15	0.71	<b>0.87</b>
Sesión 2 (96 intervenciones)	0.13	1.5	<b>1.68</b>
Sesión 3 (316 intervenciones)	0.16	0.62	<b>0.78</b>

Tabla 6.23: Porcentaje de manifestaciones incompletas y correctas respecto al número de intervenciones de cada sesión en las intervenciones distintas a pruebas escritas.

En decir, salvo en las manifestaciones correctas de la segunda sesión, y en consecuencia también en el total de manifestaciones totales de esta sesión, el porcentaje de manifestación de las habilidades en las intervenciones distintas a las pruebas escritas es menor que el correspondiente al cómputo global de intervenciones.

Pasamos pues a realizar este mismo análisis limitándonos a lo observado en las pruebas escritas, observando que las manifestaciones incompletas disminuyen tanto en cantidad absoluta como en porcentaje de manifestaciones por intervención. Sin embargo, las manifestaciones correctas disminuyen de la sesión 1 a la 2 y aumentan de la 2 a la 3,

superando los valores de la sesión 1 en los valores absolutos pero no en los porcentajes (Tablas 6.24 y 6.25).

	Manifestaciones Incompletas	Manifestaciones Correctas	Total
Sesión 1	94	360	<b>454</b>
Sesión 2	92	325	<b>457</b>
Sesión 3	88	395	<b>483</b>

Tabla 6.24: Total de manifestaciones incompletas y correctas en las pruebas escritas.

	% Manifestaciones Incompletas	% Manifestaciones Correctas	Total
Sesión 1 (240 intervenciones)	0.39	1.5	<b>1.89</b>
Sesión 2 (336 intervenciones)	0.27	0.96	<b>1.36</b>
Sesión 3 (391 intervenciones)	0.22	1.01	<b>1.23</b>

Tabla 6.25: Porcentaje de manifestaciones incompletas y correctas respecto al número de intervenciones de cada sesión en las pruebas escritas.

Observamos que salvo en las manifestaciones correctas y totales de la segunda sesión, los porcentajes de manifestación de las habilidades en cada intervención registrada en las pruebas escritas son superiores a las correspondientes a las no escritas. Destacamos que a lo largo del experimento de enseñanza han sido las pruebas escritas las que han favorecido una mayor manifestación de habilidades por intervención, excepto en la sesión 2 en la que fueron en las intervenciones no escritas donde se alcanza el mayor porcentaje de manifestaciones correctas y totales.

Estas tablas nos llevan a pensar que la cantidad de intervenciones no incide directamente sobre las manifestaciones de las habilidades. Si extraemos los resultados mostrados en el análisis descriptivo de habilidades únicamente a partir los registros obtenidos de las pruebas escritas, aunque los porcentajes son diferentes, observamos que son muy similares a las conclusiones que hemos mostrado a partir del cómputo global. La principal diferencia es que el porcentaje mayor para las manifestaciones correctas e incompletas de la habilidad *Percepción de la posición* en el espacio es ahora en la sesión 3 (Tabla 6.26).

## 6 Resultados: Capacidad Visual

	FC			CP			PE			RE			DV		
	%	FCI	FCC	%	CPI	CPC	%	PEI	PEC	%	REI	REC	%	DVI	DVC
Se. 1	100	11,7	38,8	100	2,9	17,2	100	0,4	12	58	2,5	2,1	75	2,1	4,8
Se. 2	100	5,6	14,4	100	2,4	9,7	100	1,6	5,8	100	0,7	12,7	96	3,4	5,8
Se. 3	100	2,6	7,9	40	0	1,5	100	1,7	13,7	100	5,8	23,4	83	1,2	4

Tabla 6.26: Manifestaciones de cada habilidad (porcentaje de alumnos y porcentaje de manifestaciones incompletas y correctas) recogidas en las pruebas escritas.

Tampoco hay grandes diferencias en los errores, apreciándose que también se alcanza el mayor porcentaje para E4, aunque aparecen ordenados de distinta forma los errores E1, E2 y E3 (Tabla 6.27).

	E1		E2		E3		E4		E5	
	%	E1	%	E2	%	E3	%	E4	%	E5
Sesión 1	0	0	96	25,4	96	19,17	83	8,3	50	7,5
Sesión 2	48	3,6	86	7,7	62	4,1	14	1,5	100	31,3
Sesión 3	4,3	0,3	8,6	0,5	4,3	0,3	100	13,6	100	21,4

Tabla 6.27: Manifestaciones de cada error (porcentaje de alumnos y porcentaje de manifestaciones de cada uno de ellos) recogidas en las pruebas escritas.

**El tipo de actividad** ha influido en el recuento de las manifestaciones de las habilidades, especialmente por dos razones, por estar más implicada una determinada habilidad en la respuesta a la actividad y por presentar actividades similares, lo que daba lugar a que se contabilizaran más veces las manifestaciones de la habilidad correspondiente.

- Hay actividades que han favorecido que los alumnos manifiesten una determinada categoría en repetidas ocasiones porque se les pedía explícitamente. Por ejemplo, en la sesión 1, en varias de las actividades se pedía a los alumnos que dibujasen las estructuras conseguidas, por lo que se favorecía que manifestasen la categoría FC2 al *dibujar correctamente los elementos (círculos, segmentos) de la estructura utilizada*. En la sesión 2 se pedía explícitamente que identificasen perspectivas y medidas de piezas (CP1 y RE1) y la sesión 3 varias actividades exigían que identificaran elementos en el desarrollo (RE2).
- Las actividades que tenían varios apartados relativos a una misma categoría en las habilidades, han llevado a que una misma habilidad sea contabilizada en

varias ocasiones. Por ejemplo en la sesión 3, las actividades 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 y 2.6 favorecían que manifestasen la categoría RE1 en todas ellas al *comparar medidas de los objetos*.

- Las respuestas en grupo a las actividades escritas aparecen en la ficha de todos los alumnos que lo forman, contabilizándose las categorías correspondientes multiplicadas por el número de alumnos del grupo. En este sentido sólo se registra una incidencia en la sesión 3, ya que en las pruebas escritas el grupo 5 modificó su respuesta a la actividad 3\_2\_2 tras la puesta en común, por lo que se consideró la respuesta anterior que manifestaron en la transcripción.

**El trabajo en grupo y las actividades de argumentación** han ido adquiriendo a lo largo del experimento de enseñanza un papel más relevante y han sido dos factores que han originado un mayor número de intervenciones y por lo tanto de manifestaciones de habilidades, errores y dificultades. En las Tablas 6.28 y 6.29 aparecen los puntajes posibles y su porcentaje respecto al máximo de puntuación que podía obtenerse en las pruebas escritas en cada sesión, para la actuación individual (Tabla 6.28) y en grupo (Tabla 6.29).

	Sesión 1 (sobre 20 puntos)	Sesión 2 (sobre 32 puntos)	Sesión 3 (sobre 34 puntos)
Argumentación (A)	<b>6 (30 %)</b>	<b>18 (56.25 %)</b>	<b>28 (82.3 %)</b>
Definición (D)	4 (20 %)	4 (12,5 %)	2 (5,9 %)
Resolución (R)	10 (50 %)	10 (31.25 %)	4 (11.7 %)

Tabla 6.28: Porcentaje respecto al total de puntuación de las pruebas escritas individuales según el tipo de actividad.

	Sesión 1 (sobre 20 puntos)	Sesión 2 (sobre 32 puntos)	Sesión 3 (sobre 34 puntos)
Argumentación (A)	-	-	10 (29.4 %)
Definición (D)	2 (10 %)	2 (6.25 %)	2 (5.9 %)
Resolución (R)	-	2 (6.25 %)	-
<b>TOTAL</b>	<b>2 (10 %)</b>	<b>4 (12.5 %)</b>	<b>12 (35.3 %)</b>

Tabla 6.29: Porcentaje respecto al total de puntuación de las pruebas escritas grupales según el tipo de actividad.

El aumento de las actividades de argumentación (que evolucionan desde un 30% a más de un 80%), ha debido influir en el tipo de habilidades que se ponen en juego, dificultándonos establecer comparaciones entre las manifestaciones de la visualización

## 6 Resultados: Capacidad Visual

entre las tres sesiones. Destacamos que en la sesión 3 el número de manifestaciones debidas al debate en grupo es considerablemente superior al de la segunda sesión (ha aumentado de 50 a 224) en la que también se grabó el trabajo en grupo. En la tercera sesión aparecen por primera vez actividades de argumentación en grupo y adquieren un peso importante en el desarrollo de la sesión (29,4 % de la puntuación total). El que en la tercera sesión se mantuvieran los mismos grupos que en la segunda, pudo favorecer que tuvieran más predisposición por compartir sus argumentos al estar más familiarizados con los compañeros y con la dinámica del propio grupo. Estas observaciones nos llevan a concluir que el trabajo en grupo y la propuesta de actividades de argumentación han favorecido que los alumnos manifiesten las habilidades de visualización.

Para valorar la **evolución de los errores**, consideramos necesario diferenciar entre dos tipos. E2 (*No discutir todos los casos posibles*) y E3 (*Razonar limitándose a ejemplos concretos*) son errores generalizables a las tres sesiones y pueden presentarse en todas las tareas visuales. En cambio los errores E4 (*Confundir los elementos matemáticos de razonamiento*) y E5 (*Confundir los elementos de contenidos matemático*) pueden ir asociados a actividades que implican argumentación, así como depender de los contenidos matemáticos tratados y de la complejidad de la argumentación demandada en ciertas actividades. Podemos apreciar que a lo largo del experimento de enseñanza se van cometiendo menos errores E1 (*Establecer analogías falsas plano-espacio*), E2 y E3, pero no es el caso de los E4 y E5, lo que puede estar condicionado por el aumento de número y complejidad de las tareas de argumentación propuestas y su repercusión en el trabajo de grupo.

Si diferenciamos entre estos dos grupos de errores, se observa que pese a que el número de intervenciones va aumentando a lo largo de las sesiones, las manifestaciones de E1 (que no aparece en la primera sesión), E2 y E3 van disminuyendo a lo largo del experimento de enseñanza, mientras que las manifestaciones de E4 y E5 aumentan, pese a que E4 disminuyó de la primera a la segunda sesión en la que toma su valor menor (Tabla 6.30).

	Manifestaciones de E1, E2 y E3	Manifestaciones de E4 y E5	<b>Total de errores</b>
Sesión 1	111	41	<b>152</b>
Sesión 2	54	114	<b>168</b>
Sesión 3	27	171	<b>198</b>

Tabla 6.30: Total de manifestaciones de errores agrupados en dos tipos.

Si tenemos en cuenta el número de intervenciones de cada una de las sesiones y calculamos los porcentajes de manifestación de errores por intervención, se observa que el porcentaje relativo a E1, E2 y E3 disminuye notablemente a lo largo de las sesiones y también lo hace porcentaje del total de errores. En cambio para los errores E4 y E5 aumenta de la sesión 1 a la 2 y disminuye de la sesión 2 a la 3, por lo que en la sesión 2 es donde se da el mayor porcentaje de manifestaciones de los errores E4 y E5 por intervención (debido principalmente a los errores E5) y ese porcentaje disminuye en la tercera sesión, a pesar de que tanto las actividades de grupo y argumentación aumentan (Tabla 6.31).

	% Manifestaciones de E1, E2 y E3	% Manifestaciones de E4 y E5	<b>Total</b>
Sesión 1 (272 intervenciones)	0.41	0.15	<b>0.56</b>
Sesión 2 (432 intervenciones)	0.13	0.26	<b>0.39</b>
Sesión 3 (707 intervenciones)	0.03	0.24	<b>0.28</b>

Tabla 6.31: Porcentaje de manifestaciones de errores respecto al número de intervenciones de cada sesión en las pruebas escritas.

El análisis descriptivo se ha realizado a partir del comportamiento del grupo respecto a los porcentajes de manifestaciones de habilidades, errores y dificultades. Para complementar esta información y con el objetivo de establecer conclusiones generales a partir de los comportamientos individuales se ha llevado a cabo un análisis estadístico de las relaciones y diferencias de las variables e indicadores.

#### 6.2.4 Análisis estadístico de las variables e indicadores

La cuantificación de los datos mediante indicadores numéricos que toman valores entre 0 y 100 facilita la interpretación y el tratamiento estadístico para la obtención de resultados. Esta codificación ha generado vectores individuales para cada alumno del

## 6 Resultados: Capacidad Visual

grupo, en el que cada dimensión es una de las variables estudiadas (sujeto, habilidades - 5 valores-, errores -5 valores-, dificultades -4 valores-, puntuación en los test -3 valores-, resultados de prueba de selección). A partir de las variables e indicadores definidos anteriormente y con vistas a complementar lo observado en el análisis descriptivo relativo a la evolución de la conjetura, vamos a estudiar la posible relación y diferencias entre algunas de estas variables, siempre contabilizando los resultados referentes a cada participante.

### 6.2.4.1 Estudio de las diferencias y de las relaciones.

Para establecer la significatividad de las diferencias en las habilidades, errores y otros indicadores como el rendimiento a lo largo de las diferentes sesiones, se han aplicado ANOVAS intrasujeto independientes para cada una de las variables. La posible violación del supuesto de homogeneidad de varianzas error se ha puesto a prueba mediante el test W de Mauchly y, en caso de violación de dicho supuesto, se han aplicado las correcciones oportunas mediante la corrección en los grados de libertad de Greenhouse-Geisser. En caso de resultar significativo el ANOVA global, las comparaciones *a posteriori* se han realizado mediante el test de Tukey. De igual manera, para determinar las correlaciones existentes entre las habilidades, errores y dificultades entre las diferentes sesiones se utilizó el coeficiente de correlación de Pearson. Tanto en el caso de las diferencias como en el caso de las correlaciones, se ha considerado un resultado significativo si  $p \leq 0.05$  (Anguera, Arnau, Ato, Martínez, Pascual y Vallejo, 1995; Coolican, 2005; Pardo y Ruiz, 2002; Ramos, Catena y Trujillo, 2004).

Los resultados obtenidos a través de los análisis estadísticos quedan resumidos a través de tablas diferenciadas para cada una de las variables que aparecen en el ANEXO 6.1

TABLAS DE LAS DIFERENCIAS Y RELACIONES

## A) Habilidades

### **FCI (Percepción figura-contexto manifestada de manera completa)**

Los resultados relativos a FCI se muestran en las Tablas 6.32 y 6.33

- El ANOVA global indica que *existen diferencias significativas en las puntuaciones obtenidas en FCI* en las tres sesiones.
- Según los análisis *a posteriori* podemos concluir que  $FCI1 > FCI2$ ,  $FCI1 > FCI3$ ,  $FCI2 > FCI3$ , luego *FCI disminuye a través de las sesiones*.
- *No existe ninguna correlación significativa en FCI* a través las tres sesiones.

### **FCC (Percepción figura-contexto manifestada de manera completa)**

Los resultados relativos a FCC se muestran en las Tabla 6.34 y 6.35.

- Los datos del ANOVA global indican que *existen diferencias significativas en las puntuaciones obtenidas en FCC* en las tres sesiones.
- Según los análisis *a posteriori*:  $FCC1 > FCC2$ ,  $FCC1 > FCC3$ ,  $FCC2 > FCC3$ , luego *FCC disminuye a través de las sesiones*.
- *No existe ninguna correlación significativa entre las puntuaciones obtenidas en FCC* a través de las tres sesiones.

### **CPI (Conservación de la percepción manifestada de manera incompleta)**

Los resultados relativos a CPI se muestran en las tablas 6.36 y 6.37.

- El ANOVA global indica que *existen diferencias significativas en las puntuaciones obtenidas en CPI* en las tres sesiones.
- Según los análisis *a posteriori*:  $CPI1 = CPI2$ ,  $CPI1 > CPI3$ ,  $CPI2 > CPI3$ .

## **6 Resultados: Capacidad Visual**

- *Existe una corrección positiva significativa entre las puntuaciones obtenidas en CPI en la S2 y la S3.*

### **CPC (Conservación de la percepción manifestada de manera completa)**

Los resultados relativos a CPC se muestran en las tablas 6.38 y 6.39.

- El ANOVA global indica que *existen diferencias significativas en las puntuaciones obtenidas en CPC* en las tres sesiones.

- Según los análisis *a posteriori*:  $CPC1 > CPC2$ ,  $CPC1 > CPC3$ ,  $CPC2 > CPC3$ , luego *CPC disminuye a través de las sesiones.*

- *No existen ninguna correlación significativa entre las puntuaciones obtenidas en CPC a través de las tres sesiones.*

### **PEI (Percepción de la posición en el espacio manifestada de manera incompleta)**

Los resultados relativos a PEI se muestran en las tablas 6.40 y 6.41.

- El ANOVA global indica que *no existen diferencias significativas en las puntuaciones obtenidas en PEI* en las tres sesiones.

- *Existe una correlación positiva significativa entre las puntuaciones obtenidas en PEI en la S2 y S3.*

### **PEC (Percepción de la posición en el espacio manifestada de manera completa)**

Los resultados relativos a PEC se muestran en las tablas 6.42 y 6.43.

- El ANOVA global indica que *existen diferencias significativas en las puntuaciones obtenidas en PEC* en las tres sesiones.

- Según los análisis *a posteriori*:  $PEC1 > PEC2$ ,  $PEC1 = PEC3$ ,  $PEC2 < PEC3$ .
- *No existe ninguna correlación significativa entre las puntuaciones obtenidas en PEC a través de las tres sesiones.*

### **REI (Percepción de las relaciones espaciales manifestada de manera incompleta)**

Los resultados relativos a REI se muestran en las tablas 6.44 y 6.45.

- El ANOVA global indica que *existen diferencias significativas en las puntuaciones obtenidas en REI en las tres sesiones.*
- Según los análisis *a posteriori*:  $REI1 > REI2$ ,  $REI1 < REI3$ ,  $REI2 < REI3$ .
- *Existe una correlación positiva significativa entre las puntuaciones en REI en la S1 y S3.*

### **REC (Percepción de las relaciones espaciales manifestada de manera completa)**

Los resultados relativos a REC se muestran en las tablas 6.46 y 6.47.

- El ANOVA global indica que *existen diferencias significativas en las puntuaciones obtenidas en REC en las tres sesiones.*
- Según los análisis *a posteriori*:  $REC1 < REC2$ ,  $REC1 < REC3$ ,  $REC2 < REC$ , luego *REC incrementa a través de las sesiones.*
- *No existe ninguna correlación significativa entre las puntuaciones obtenidas en REC a través de las tres sesiones.*

### **DVI (Discriminación visual manifestada de manera incompleta)**

Los resultados relativos a DVI se muestran en las tablas 6.48 y 6.49.

## **6 Resultados: Capacidad Visual**

- El ANOVA global indica que *no existen diferencias significativas en las puntuaciones obtenidas en DVI* en las tres sesiones.

- *No existe ninguna correlación significativa entre las puntuaciones obtenidas en DVI a través de las tres sesiones.*

### **DVC (Discriminación visual manifestada de manera completa)**

Los resultados relativos a DVC se muestran en las tablas 6.50 y 6.51.

- El ANOVA global indica que *existen diferencias significativas en las puntuaciones obtenidas en DVC* en las tres sesiones.

- Según los resultados *a posteriori*:  $DVC1=DVC2$ ,  $DVC1=DVC3$ ,  $DVC2>DVC3$ .

- *No existe ninguna correlación significativa entre las puntuaciones obtenidas en DVC en las tres sesiones.*

## **B) Indicadores**

### **V1 (Visualización Incompleta)**

Los resultados relativos a V1 se muestran en las tablas 6.52 y 6.53.

- El ANOVA global indica que *existen diferencias significativas en el V1* obtenido a través de las tres sesiones.

- Según los resultados *a posteriori*:  $V11>V12$ ,  $V11>V13$ ,  $V12=V13$ .

- *No existe ninguna correlación significativa en V1 a través de las diferentes sesiones.*

### **V2 (Visualización correcta)**

Los resultados relativos a V2 se muestran en las tablas 6.54 y 6.55.

- El ANOVA global indica que *existen diferencias significativas en el V2* obtenido a través de las tres sesiones.
- Según los análisis *a posteriori*:  $V21 > V22$ ,  $V21 > V23$ ,  $V22 > V23$ , luego *V2 disminuye de forma significativa a través de las sesiones.*
- *No existe ninguna correlación significativa en V2* a través de las diferentes sesiones.

### **V (Indicador de visualización)**

Los resultados relativos a V se muestran en las tablas 6.56 y 6.57.

- El ANOVA global indica que *existen diferencias significativas en el V* obtenido a través de las tres sesiones.
- Según los análisis *a posteriori*:  $V1 > V2$ ,  $V1 > V3$ ,  $V2 > V3$ , luego *V disminuye de forma significativa a lo largo de las tres sesiones.*
- *No existe ninguna correlación significativa en V* a través de las diferentes sesiones.

### **CV (Coeficiente de Visualización correcta)**

Los resultados relativos a CV se muestran en las tablas 6.58 y 6.59.

- El ANOVA global indica que *no existen diferencias significativas en el CV* obtenido a través de las tres sesiones.
- *No existe ninguna correlación significativa entre el CV* obtenido en las diferentes sesiones.

## 6 Resultados: Capacidad Visual

### C) Errores (E)

Se ha definido la variable Errores (E) como la media de los cinco tipos de errores que se han descrito previamente. Los resultados relativos a los Errores se muestran en las tablas 6.60 y 6.61.

- El ANOVA global indica que existen *diferencias significativas en el número de errores* obtenido a través de las sesiones.
- Según los resultados “a posteriori”,  $E1 > E2$ ,  $E1 > E3$ ,  $E2 > E3$ , luego *el número de errores disminuye de forma significativa a través de las sesiones*.
- *No existe ninguna correlación significativa* entre los errores obtenidos en las diferentes sesiones.

### D) Rendimiento (R)

Los resultados relativos al rendimiento se muestran en las tablas 6.62 y 6.63.

- El ANOVA global indica que *existen diferencias significativas en el Rendimiento* obtenido en las tres sesiones.
- Según los resultados *a posteriori*,  $R1 > R2$ ,  $R1 > R3$ ,  $R2 = R3$ .
- *Existe correlación significativa en el R* obtenido en S2 y S3.

Recogemos los datos anteriores en la tabla 6.64 resumen.

Variable	Correlación entre sesiones	Evolución (Diferencias significativas entre sesiones)
FCI	No	Se1 > Se2 > Se3
FCC	No	Se1 > Se2 > Se3
CPI	Se2 y Se3	Se1 = Se2 > Se3
CPC	No	Se1 > Se2 > Se3
PEI	Se2 y Se3	No
PEC	No	Se1 > Se2 < Se3 (Se1 = Se3)
REI	Se1 y Se3	Se1 > Se2 < Se3 (Se1 < Se3)
REC	No	Se1 < Se2 < Se3
DVI	No	No
DVC	No	Se1 = Se2 > Se3 (Se1 = Se3)
V1	No	Se1 > Se2 = Se3
V2	No	Se1 > Se2 > Se3
V	No	Se1 > Se2 > Se3
CV	No	No
Errores	No	Se1 > Se2 > Se3
Rend.	No	Se1 > Se2 = Se3

Tabla 6.64: Correlación y evolución entre las variables a lo largo de las sesiones.

Mayoritariamente las variables han sido independientes a lo largo de las sesiones. Entre la sesión 1 (plano) y 3 (plano-espacio) sólo se encuentra correlación entre las manifestaciones incompletas de la Percepción de las relaciones espaciales. Entre las sesiones 2 (espacio) y 3 (plano-espacio) correlacionan las manifestaciones incompletas de las habilidades Conservación de la Percepción y Percepción de la posición en el espacio.

Comparando la evolución entre la sesión 1 y 3 de las manifestaciones correctas, ha aumentado la habilidad Percepción de las Relaciones Espaciales, ha disminuido para Percepción de la Figura-Contexto y la Conservación de la Percepción y se ha mantenido para la Percepción de la Posición en el Espacio y la Discriminación Visual. En la comparación de la evolución entre la sesión 1 y 3 de las manifestaciones incompletas, han disminuido para la Percepción de la Figura-Contexto y la Conservación de la Percepción, ha aumentado para la habilidad Percepción de las Relaciones Espaciales y no se han encontrado diferencias significativas para Percepción de la Posición en el Espacio y Discriminación Visual (Figuras 6.1 y 6.2).

Destacamos que los indicadores V2 y V han disminuido progresivamente a lo largo de las sesiones. El indicador V1 ha disminuido en las dos primeras sesiones aunque entre

## 6 Resultados: Capacidad Visual

los resultados de las dos últimas sesiones no hay diferencias significativas. Podemos concluir que a lo largo del experimento de enseñanza, de manera global, los alumnos han ido manifestando las habilidades de visualización en menor porcentaje respecto a sus intervenciones.

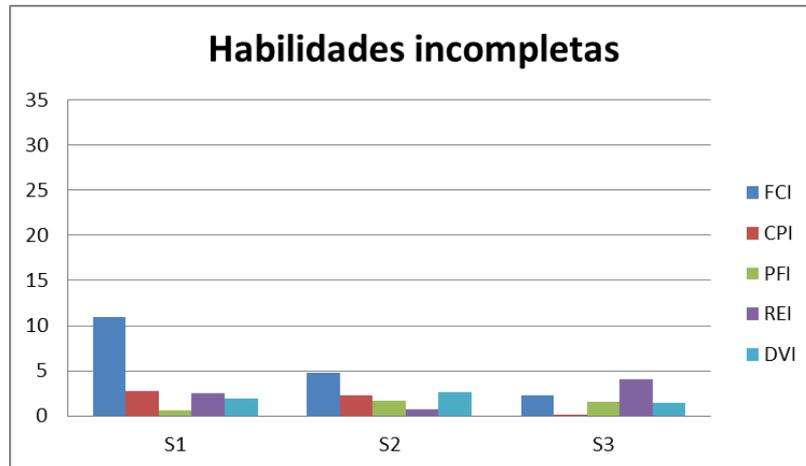


Figura 6.1 Porcentaje de manifestación incompletas de cada habilidad en las tres sesiones.

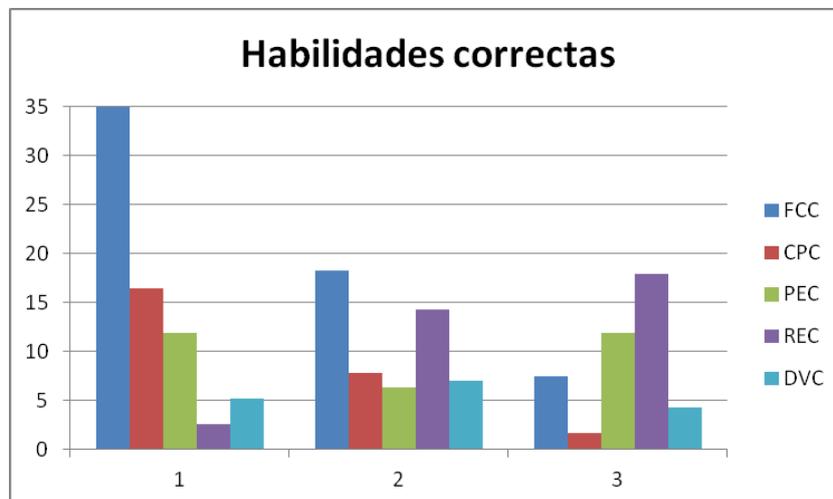


Figura 6.2: Porcentaje de manifestaciones correctas de cada habilidad en las tres sesiones.

El rendimiento disminuye de la sesión 1 a la 2 y permanece igual de la 2 a la 3. Esto puede interpretarse como que la dificultad de las sesiones ha sido mayor para los alumnos. Pese a ello, los errores cometidos han disminuido a lo largo de las sesiones (Figura 6.3).

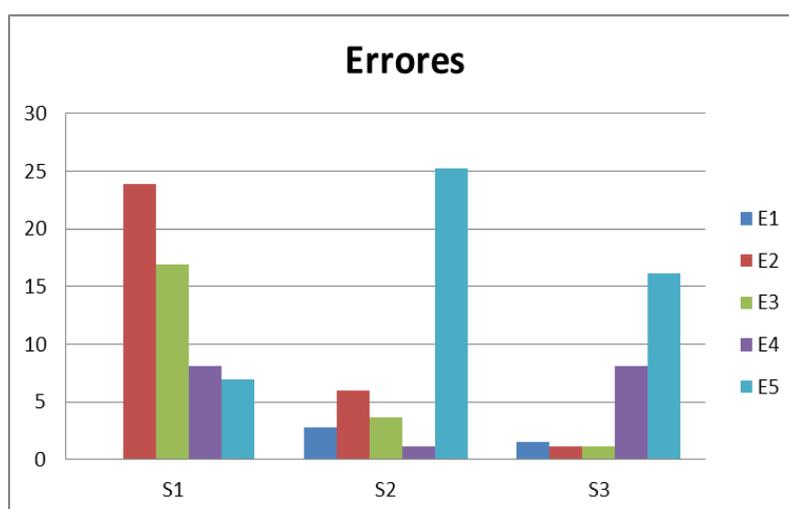


Figura 6.3: Porcentaje de manifestaciones de cada error en las tres sesiones.

Para contrastar lo observado en el análisis descriptivo, hemos efectuado la comparación entre manifestaciones correctas e incompletas de las diferentes habilidades en las tres sesiones. Para ello se han llevado a cabo pruebas T para muestras relacionadas para cada uno de los pares de comparaciones. Los análisis estadísticos ponen de manifiesto que, en la Sesión 1 las manifestaciones correctas de cada habilidad son significativamente superiores a las incompletas, excepto en la habilidad RE, que en ambos casos se manifiestan igualmente. En las Sesiones 2 y 3 las manifestaciones correctas de cada habilidad son significativamente superiores a las incompletas en todos los casos. La Tabla 6.65 muestra los resultados estadísticos obtenidos.

## 6 Resultados: Capacidad Visual

<b>Sesión 1</b>		
<b>Habilidades</b>	<b>Media</b>	<b>Prueba T</b>
FCI FCC	10.98 34.99	T (24)= -18.863; $p= 0.000^*$
CPI CPC	2.75 16.41	T (24)= -15.851; $p= 0.000^*$
PEI PEC	0.65 11.85	T (24)= -10.602; $p= 0.000^*$
REI REC	2.47 2.50	T (24)= -0.032; $p= 0.974$ (n.s.)
DVI DVC	1.95 5.17	T (24)= -3.056; $p= 0.005^*$
<b>Sesión 2</b>		
<b>Habilidades</b>	<b>Media</b>	<b>Prueba T</b>
FCI FCC	4.79 18.24	T (24)= -8.628; $p= 0.000^*$
CPI CPC	2.24 7.80	T (24)= -7.635; $p= 0.000^*$
PEI PEC	1.72 6.30	T (24)= -5.254; $p= 0.000^*$
REI REC	0.78 14.32	T (24)= -18.571; $p= 0.000^*$
DVI DVC	2.63 7.04	T (24)= -4.893; $p= 0.000^*$
<b>Sesión 3</b>		
<b>Habilidades</b>	<b>Media</b>	<b>Prueba T</b>
FCI FCC	2.25 7.53	T (24)= -7.325; $p= 0.000^*$
CPI CPC	0.15 1.62	T (24)= -4.103; $p= 0.000^*$
PEI PEC	1.57 11.92	T (24)= -11.776; $p= 0.000^*$
REI REC	4.10 17.91	T (24)= -11.925; $p= 0.000^*$
DVI DVC	1.41 4.33	T (24)= -3.924; $p= 0.001^*$

Tabla 6.65: Medias de las habilidades (correctas e incompletas) y resultados de las pruebas T para muestras relacionadas.

Para establecer las posibles relaciones entre las diferentes variables del estudio se han llevado a cabo análisis de correlaciones. Para ello se han efectuado múltiples análisis de Correlación de Pearson entre las habilidades (correctas e incompletas), los indicadores (V1, V2, V y CV), los errores (E), el Rendimiento obtenido en la prueba de selección y las puntuaciones obtenidas en los test (PMA, DAT-5 y RAVEN) de forma diferenciada

en cada una de las Sesiones. Los resultados completos se muestran en el ANEXO 6.2  
TABLAS DE CORRELACIÓN.

De esta tabla en relación con las correlaciones entre las puntuaciones de los test y las demás variables e indicadores, se obtiene la Tabla 6.66.

	PMA	DAT	Raven
Se. 1	Rend. (r=0.558; p=0.04) V2 (r=-0.47; p=0,18) V1 (r=-0.564; p=0.03)		
Se. 2	REI (r=0.518; p=0,08) DVI (r=0.573; p=0.03)	FCC (r=0.471; p=0.17) FCI (r=-0.628; p=0.01) PEC (r=-0.459; p=0.21)	CV (r=0.435; p=0.3) V1 (r=-0.443; p=0.27) FCI (r=-0.462; p=0.2)
Se. 3	V2 (r=-0.465; p=0.19) V (r=-0.427; p=0.33) PEC (r=-0.411; p=0.41)		DVI (r=0.411; p=0.41) PEI (r=-0.502; p=0.10)

Tabla 6.66: Relación entre las puntuaciones de los test y las variables e indicadores.

Destacamos que ninguno de los test correlaciona con un mismo indicador a lo largo de las tres sesiones y que en la primera sesión se establece una correlación positiva entre la puntuación en el test PMA y el Rendimiento (r=0.558; p=0.04). Con respecto al Rendimiento, también se establecen correlaciones con las siguientes variables e indicadores (Tabla 6.67).

	Correlaciones con el Rendimiento
Se. 1	CPI (r=-0.593; p=0.02) PMA (r=0.558; p=0.04)
Se. 2	V1 (r=-0.45; p=0,024) <b>V2 (r=0.664; p=0.000)</b> V (r=0.491; p=0.013) CV (r=0.577; p=0.03) E (r=-0.603; p=0.001) FCC (r=0.59; p=0.002) CPI (r=-0.421; p=0.036) <b>DVC (r=0.781; p=0.000)</b> PSC (r=0.462; p=0.020)
Se. 3	<b>V2 (r=0.807; p=0.000)</b> V (r=0.695; p=0.000) CV (r=0.626; p=0.001) FCI (r=-0.496; p=0.012) PEC (r=0.593; p=0.002) REC (r=0.421; p=0.036) <b>DVC (r=0.701; p=0.000)</b> PSC (r=0.429; p=0.032)

Tabla 6.67: Correlaciones del Rendimiento con los demás indicadores.

## 6 Resultados: Capacidad Visual

En la tabla anterior apreciamos que el rendimiento no ha correlacionado con un mismo indicador en las tres sesiones. Sin embargo destacamos que en las dos últimas sesiones el coeficiente de correlación toma sus valores mayores para el indicador de visualización correcta V2 y el correspondiente a la habilidad Discriminación Visual. El hecho de que también exista correlación positiva con CV en estas dos sesiones, puede llevarnos a concluir que *el rendimiento en las dos últimas sesiones ha estado relacionado con el uso correcto de la visualización y, particularmente, con las manifestaciones correctas de la habilidad de Discriminación Visual. Por otro lado, se establece correlación entre el rendimiento de la primera sesión con la puntuación en el test PMA.*

En la tabla 6.67 también se reflejan las correlaciones entre el rendimiento de las sesiones y la prueba de Selección. Como esta prueba se realizó antes del experimento de enseñanza, decidimos llevar a cabo un análisis de correlaciones de Pearson, para determinar la posible relación entre las puntuaciones obtenidas en los test: PMA(E), DAT-5(SR) y RAVEN y los resultados obtenidos por los alumnos en los diferentes problemas que constituyen la pruebas de selección: Prueba de selección completa (PS), P1, P2, P3, P4 y P5. *Los resultados ponen de manifiesto que únicamente existe una correlación positiva significativa entre las puntuaciones obtenidas en la escala SR del test DAT-5 y el P3 ( $r=0,402$ ;  $p=0,046$ ). Esta relación no aporta ninguna información sustancial ya que en este problema los alumnos no habían manifestado ninguna estrategia visual para resolverlo. Asimismo, se obtienen correlaciones positivas significativas entre la PSC y el P4 ( $r=0,430$ ;  $p=0,032$ ) y la PSC y el P5 ( $r= 0,542$ ;  $p=0,005$ ). El resto de correlaciones no resultaron significativas. Los resultados se muestran en la Tabla 6.68.*

	PSC	P1	P2	P3	P4	P5
<b>PMA(E)</b>	0.283	0.063	0.278	-0.198	0.102	0.193
<b>DAT-5(SR)</b>	0.206	0.028	-0.026	0.402*	-0.223	0.302
<b>RAVEN</b>	0.242	0.090	-0.131	0.016	0.074	0.313
<b>PSC</b>		0.384	0.387	0.072	0.430*	0.542**
<b>P1</b>			-0.054	-0.020	0.136	-0.147
<b>P2</b>				-0.052	-0.167	0.103
<b>P3</b>					-0.221	-0.141
<b>P4</b>						-0.126

\*La correlación es significativa al 0.05 (bilateral).

\*\*La correlación es significativa al 0.01 (bilateral).

Tabla 6.68: Correlaciones entre las puntuaciones obtenidas en los test y los problemas que constituyen la prueba de selección en los alumnos con talento.

Con respecto a las correlaciones entre los errores, destacamos que en la primera sesión no existen correlaciones significativas con ninguna de las variables e indicadores. En la sesión 2 la mayor correlación se establece de manera negativa con CV ( $r=-0.714$ ;  $p=0.000$ ) y en la sesión 3 con V1 de manera positiva V1 ( $r=-0.873$ ;  $p=0.000$ ) (Tabla 6.69):

	Correlaciones con los Errores
Se. 1	No significativas
Se. 2	Rend. ( $r=-0.603$ ; $p=0,001$ ) V1 ( $r=0.632$ ; $p=0.001$ ) V2 ( $r=-0.583$ ; $p=0.002$ ) <b>CV (<math>r=-0.714</math>; <math>p=0.000</math>)</b> FCI ( $r=0.582$ ; $p=0.002$ ) FCC ( $r=-0.509$ ; $p=0.009$ ) CPI ( $r=-0.685$ ; $p=0.000$ ) CPC ( $r=-0.439$ ; $p=0.028$ ) PEI ( $r=0.510$ ; $p=0.009$ ) DVC ( $r=-0.627$ ; $p=0.001$ )
Se. 3	<b>V1 (<math>r=-0.873</math>; <math>p=0.000</math>)</b> CV ( $r=-0.461$ ; $p=0.020$ ) REI ( $r=0.530$ ; $p=0.006$ )

Tabla 6.69: Correlaciones entre los errores y el resto de variables e indicadores.

Finalmente, de las correlaciones entre los indicadores relativos a la misma sesión destacamos que aunque ha habido parejas de indicadores que han correlacionado en una o varias sesiones (en las sesiones 1 y 3 lo han hecho positivamente V2 y PEC, V1 y DVI, FCI y DVI, PEI y REI, PEC y DVC; y negativamente DVC y CPC, DVI y REI) ninguna habilidad, tanto en sus manifestaciones incompletas o correctas ha correlacionado con otra habilidad en las tres sesiones. Si han existido correlaciones en

## 6 Resultados: Capacidad Visual

las tres sesiones para el indicador V1 con las manifestaciones incompletas de la habilidad Percepción Figura-Contexto ( $r=0.664$ ,  $p=0.000$ ;  $r=0.707$ ,  $p=0.000$ ;  $r=0.746$ ,  $p=0.000$  respectivamente) y para V2 con las manifestaciones correctas de las habilidades Percepción de la Figura-Contexto ( $r=0.769$ ,  $p=0.000$ ;  $r=0.879$ ,  $p=0.000$ ;  $r=0.522$ ,  $p=0.000$  respectivamente), Percepción de las relaciones espaciales ( $r=0.476$ ,  $p=0.016$ ;  $r=0.609$ ,  $p=0.001$ ;  $r=0.732$ ,  $p=0.000$  respectivamente) y Discriminación Visual ( $r=0.576$ ,  $p=0.003$ ;  $r=0.727$ ,  $p=0.000$ ;  $r=0.556$ ,  $p=0.004$  respectivamente).

Los análisis estadísticos complementan y matizan las observaciones realizadas a partir del análisis descriptivo. El estudio de las relaciones y diferencias a lo largo de las sesiones ha completado lo observado en el análisis descriptivo y ha confirmado que las manifestaciones correctas de cada habilidad son significativamente superiores a las incompletas, excepto en la habilidad de la Percepción de las Relaciones Espaciales que en la sesión 1 se manifiestan igualmente. Además los análisis estadísticos han confirmado que los Errores han disminuido significativamente a lo largo del experimento de enseñanza.

Es en las manifestaciones de la visualización donde la descripción estadística y descriptiva admiten una mayor matización. A partir de datos absolutos, observamos que tanto las manifestaciones completas e incompletas van aumentando a lo largo del experimento de enseñanza. Pero al utilizar indicadores que tienen en cuenta el número de intervenciones, se observa que los indicadores globales del uso de visualización (V, V1 y V2) disminuyen a lo largo del experimento de enseñanza. Es decir, aunque las manifestaciones del uso de la visualización han aumentado, ha ido disminuyendo el porcentaje que representan respecto a sus intervenciones. Como se ha apuntado en el análisis descriptivo, ha habido diferentes factores que han podido motivar esta situación: mayor número de intervenciones, diferencias entre pruebas escritas y el total de intervenciones, protagonismo en la sesión del trabajo en grupo y de las actividades de argumentación, entre otras.

### 6.2.5 Caracterización de los sujetos según su visualización

En este apartado mostramos la clasificación de los sujetos del grupo talento según dos criterios diferentes: su puntuación en los factores espaciales de los test y su puntuación según los indicadores de visualización del experimento de enseñanza.

#### 6.2.5.1 Caracterización de los sujetos según su puntuación en los test visuales

Como se comentó en el apartado correspondiente al diseño y preparación de la entrevista, las baremaciones correspondientes de los factores espaciales de los test PMA y DAT asignó a los alumnos del grupo talento una puntuación en percentiles. De acuerdo a dichos percentiles, establecimos distintas categorías para clasificarlos, en Muy Altos, Altos, Medios y Bajos (Tabla 6.70).

Test 1 \ Test 2	Muy altos (A) 99	Altos (B) [95,98]	Medios (C) [75,90]	No realizado
Muy altos (A) [94,96]	S6, <b>S2</b> , S8, <b>S4</b>			S9
Altos (B) [73,87]	S23	S7, S20, S10	<b>S5</b>	
Medios (C) [45,70]	S11, S12, S13, S14, S15	S16, S17, S18	S25	
Bajos (D) [8,40]	S19, <b>S3</b> , S21	S22	<b>S1</b>	
No realizado		S24		

Tabla 6.70: Clasificación de los sujetos del grupo talento según su puntuación en los percentiles de los factores espaciales de los test PMA y DAT.

Empleando esta clasificación y las puntuaciones extremas en los test, el sexo y el curso (como se indicó en el capítulo 3) se seleccionaron cinco alumnos para las entrevistas personales S1, S2, S3, S4 y S5 que están marcados en negrita en la tabla anterior.

En la prueba de selección S2, S4 y S5 (con puntuación en el Test 1 Alta o Muy Alta) manifestaron alguna estrategia visual al resolver P2 mientras que S1 y S3 (puntuación Baja en el Test 1) no manifestaron ninguna estrategia visual en sus respuestas.

6.2.5.2 Caracterización de los sujetos según la manifestación de las habilidades

En la tabla 6.70 han quedado clasificados los alumnos según su capacidad visual, es decir, mediante un estudio transversal. La codificación de las respuestas de cada estudiante nos hace disponer de una información adicional sobre el uso que los alumnos del grupo talento han manifestado de la visualización a lo largo del experimento de enseñanza, con la que podemos establecer nuevas clasificaciones de alumnos, mediante comparaciones de sus resultados.

Para establecer comparativas entre los alumnos establecemos tres categorías para los indicadores de Rendimiento, las dificultades (DT, DE, DC y DR), los errores (E) y los relativos a visualización (V, V1, V2, CV): Alto (25 % de los alumnos que han obtenido la puntuación más alta), Medio (50% central de los alumnos respecto a la puntuación obtenida) y Bajo (25 % de los alumnos que han obtenido la puntuación más baja). Para una mejor comprensión de los datos, se marcan (*subrayados y en cursiva*) los correspondientes al cuartil más favorable respecto al uso de la visualización (cuartil superior para Rendimiento, V2, V y CV; y cuartil inferior para E, V1 y las dificultades). Se marcan (**negrita**) los resultados menos favorables (cuartil inferior para Rendimiento, V2, V y CV; y cuartil superior para E, V1 y las dificultades). Esta clasificación es intrínseca al grupo, es decir, la categoría asignada es dependiente del comportamiento respecto a los demás compañeros (ANEXO 6.3 TABLA DE LOS INDICADORES POR CUARTILES).

Hemos considerado para clasificar a los alumnos dos indicadores que informan sobre este uso global de la visualización: el Indicador de Visualización (V) y el Coeficiente de Visualización Correcta (CV). La distribución de alumnos según estas categorías quedaría como aparece en la tabla 6.71.

CV \ V	ALTO	MEDIO	BAJO
ALTO	S19, <b>S4</b> , S22	S11, <b>S5</b>	S7, <b>S1</b>
MEDIO	S16, S8, S21	S23, S12, S13, S14, S20, <b>S3</b>	S25, S10
BAJO	----	S9, S17, <b>S2</b> , S18	S6, S24, S15

Tabla 6.71: Clasificación de los sujetos del grupo talento según su puntuación en los indicadores V y CV.

La clasificación anterior nos permite establecer diferentes tipologías de los alumnos según el uso que han hecho de la visualización y su grado de corrección respecto a los compañeros. Las categorías de V permiten establecer la asociación de Alto para los más visualizadores y Bajo para los menos visualizadores. Las categorías de V determinan tres grados en el porcentaje de corrección en el uso de la visualización: Alto, Medio y Bajo.

Podemos ahora comparar la capacidad visualizadora de los estudiantes, medida por los test (tabla 6.70), con el uso que han hecho de la visualización (tabla 6.71).

Si tenemos en cuenta que las puntuaciones obtenidas en el factor espacial del DAT son superiores en todos los casos al percentil 75, consideramos que las puntuaciones obtenidas en el factor espacial PMA son las que han discriminado mejor la capacidad visual manifestada en los test. Por ello, vamos a considerar la tipología determinada por la puntuación en el test PMA como caracterización de la capacidad visual manifestada en los test. Para el grado de visualización manifestado en las actividades, utilizaremos el indicador V. Obtenemos así la tabla comparativa 6.72.

V \ Test 1	ALTO > C75	MEDIO [C25, C75]	BAJO < C25
Muy altos (A) [94,96]	<b>S4</b>	S8	S6, <b>S2</b> , S9
Altos (B) [73,87]	S7, <b>S5</b>	S23, S20, S10	
Medios (C) [45,70]	S11	S12, S13, S14, S16, S25	S15, S17, S18
Bajos (D) [8,40]	S19, S22, <b>S1</b>	<b>S3</b> , S21	
No realizado			S24

Tabla 6.72. Clasificación de los alumnos según la puntuación en el test PMA y el indicador V.

La tabla 6.72 nos hace ver que hay ciertas diferencias entre el uso de la visualización que los alumnos manifiestan en las tareas propuestas y la capacidad visual registrada en los test. Destacamos las siguientes situaciones.

- No hay ningún alumno que haya mostrado un nivel bajo de visualización en los dos aspectos.

## 6 Resultados: Capacidad Visual

- Aunque **S4** es el único alumno que posee un elevado grado de visualización en los dos aspectos, hay otros cinco alumnos que tienen alta capacidad visualizadora y uso alto o medio (en relación a sus compañeros).
- **S6, S2 y S9** muestran una capacidad visual muy alta en los test, pero en cambio destacan por ser los que han manifestado las habilidades en menor grado.
- **S19, S22 y S1** pese a puntuar bajo en el test visual, muestran un alto grado de manifestación de la visualización.

Con esta nueva caracterización debida a la manifestación de las habilidades de visualización (V, CV), los alumnos seleccionados para las entrevistas personales pertenecen a cinco tipos distintos (Tabla 6.73).

Sujetos	PMA	Clasificación según la manifestación visual
S4	Muy alto	(alto-alto): Visualizador/Porcentaje de corrección alto
S5	Alto	(alto-medio): Visualizador/Porcentaje de corrección medio
S1	Bajo	(alto-bajo): Visualizador/Porcentaje de corrección bajo
S3	Bajo	(medio-medio): Medio/Porcentaje de corrección medio
S2	Muy alto	(bajo-medio): Poco visualizador/Porcentaje de corrección medio

Tabla 6.73. Clasificación de los sujetos seleccionados para las entrevistas según su puntuación en el factor espacial de PMA y la variable bidimensional (V, CV).

### 6.3 Entrevistas

Con objeto de comprender mejor las cualidades visualizadoras y cómo las emplean, realizamos entrevistas personales realizadas a cinco alumnos seleccionados atendiendo a la categorización obtenida a partir de sus capacidades. Al estudiar las entrevistas indagamos en los resultados obtenidos por cada uno de los alumnos relativos a su capacidad visual, la manifestación de las habilidades de visualización, los errores y dificultades. Para analizar las entrevistas se recoge inicialmente la información extraída de las transcripciones, luego se añaden las observaciones que hicieron los profesores durante las entrevistas, y por último se añaden algunas observaciones a partir de un nuevo visionado de la grabación.

La estructura de la entrevista queda determinada por cuatro actividades (ANEXO 6.4 ACTIVIDADES DE LAS ENTREVISTAS):

E\_4\_1: Completar una selección de ítems del factor espacial del test PMA (el que mejor ha discriminado la capacidad visual). Se pretende indagar sobre las estrategias utilizadas para responder a los ítems y las dificultades que hubieran encontrado al resolverlo. Se trata de responder a las cuestiones: *¿Qué estrategia ha utilizado? ¿Qué habilidad manifiesta? ¿Le resulta difícil?*

E\_4\_2: Basada en una actividad de la sesión 1, tienen que justificar (argumentación) si la estructura encontrada con seis fichas es la mínima (E\_1\_2). Al alumno se le presentan cinco argumentaciones hechas por sus compañeros (las que entregaron los cinco alumnos seleccionados) y se le pide que haga una valoración de cada una de ellas estableciendo un orden de prioridad sobre la que consideran más correcta. Queremos analizar la preferencia sobre los métodos de argumentación utilizados, respondiendo a las cuestiones: *¿Qué argumentación le resulta más convincente? ¿Encuentra similitudes entre ellas? ¿Prefiere las más visuales?*

Para preparar esta cuestión, se habían clasificado los argumentos, atendiendo al según el procedimiento de obtención de la estructura que indican los alumnos, cómo describen la estructura, qué errores cometen y qué habilidades manifiestan (Tabla 6.74).

	Argumentos empleados				
	A	B	C	D	E
Procedimiento de obtención de la estructura	X	X			X
Descripción de la estructura conseguida			X	X	
Errores	E3	E3	E3	E2	E2
Habilidades	FC1 (1) FC2 (2)	FC1 (1) FC2 (2)	FC2 (2)  RE1 (1)	FC2 (2) CP2 (2) RE1 (1) DV2 (2)	FC1 (1) FC2 (2)  DV2 (1)

FC1 (1): Proceso de construcción incompleto.

FC2 (2): Dibujar correctamente los elementos (círculos, segmentos) de la estructura utilizada.

CP2 (2): Distinguir que en todos los pivotes coinciden dos círculos.

RE1 (1): Comentar las direcciones, conexiones, etc. sin precisión.

DV2 (1 ó 2): Establecer comparativas entre dos casos (dependiendo de analizar todas las posibilidades).

E2: Razonar genéricamente sin discutir todos los casos posibles.

E3: Razonar limitándose al caso concreto que ha dibujado.

Tabla 6.74: Valoración de las argumentaciones de la actividad E\_1\_2.

## 6 Resultados: Capacidad Visual

E\_4\_3: Pregunta sobre el relleno del espacio por tetraedros. Es una pregunta que quedó abierta al finalizar la sesión 2 (E\_2\_6). El alumno debe justificar si cree que los tetraedros rellenan el espacio. Inicialmente argumentará únicamente usando lápiz y papel y posteriormente, dispondrá del material manipulativo utilizado en la sesión 2. Queremos estudiar si utiliza los elementos de argumentación expuestos en la sesión y si le ha servido el material manipulativo, respondiendo a las cuestiones:

*¿Utiliza las explicaciones expuestas en la sesión? ¿Facilita el material manipulativo su argumentación?*

E\_4\_4: Es una de las actividades de la sesión 3 en la que los alumnos manifestaron mayor dificultad. En una representación tridimensional del cubo está señalado un camino que los alumnos deben marcarlo en su desarrollo plano (E\_3\_6\_3). Se pretende que los alumnos describan sus estrategias y expongan las dificultades encontradas, respondiendo a las cuestiones: *¿Qué estrategia utiliza? ¿Por qué le resulta difícil? ¿Qué dificultades de comunicación presenta?*

El esquema de la entrevista se recoge en la figura 6.4.

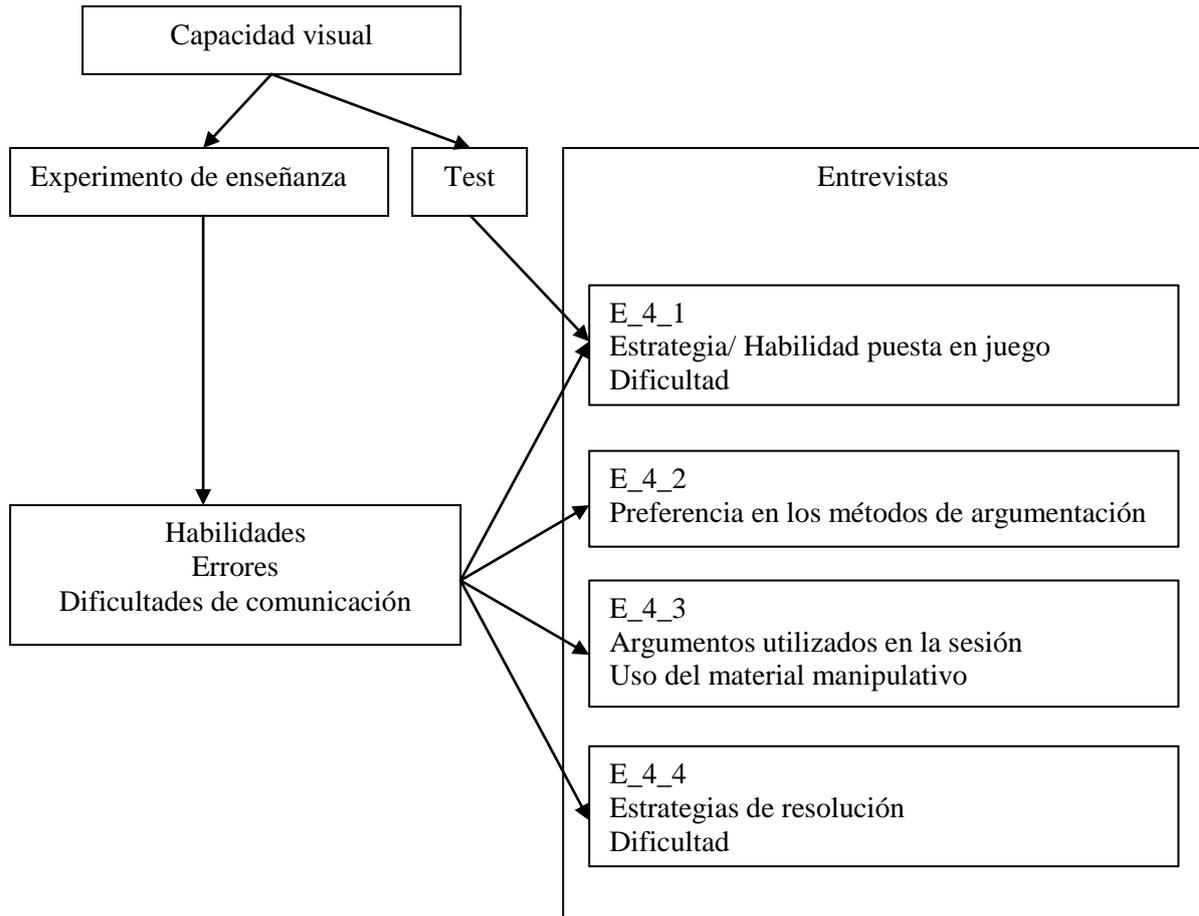


Figura 6.4: Esquema de la entrevista, incluyendo los aspectos a indagar.

### 6.3.1 Entrevista S1

#### Caracterización visual

S1 ha sido seleccionado por presentar una puntuación baja en el factor espacial del test PMA (centil 40) y media en el del DAT (centil 90). Su puntuación en el test de Raven lo sitúa en el centil 96. Según la clasificación debida a los indicadores V y CV es Visualizador/Porcentaje de corrección bajo. Es decir, ha demostrado una capacidad visual baja en los test, ha utilizado la visualización en un porcentaje alto de las ocasiones pero con un grado de corrección bajo. En la prueba de selección fue seleccionado en el lugar vigésimo tercero (por orden de puntuación) y no manifestó ninguna estrategia visual en sus respuestas.

## 6 Resultados: Capacidad Visual

Faltó a la sesión 2 y manifestó en las otras dos sesiones las habilidades, errores y dificultades expresados en las tablas 6.75 y 6.76.

	Indicadores por habilidades Incompletas y Correctas									
	FCI	FCC	CPI	CPC	PEI	PEC	REI	REC	DVI	DVC
Sesión 1	13.6	36.4	0	18.2	9.1	9.1	9.1	0	0	9.1
Sesión 2										
Sesión 3	1.6	9.1	0	1.6	3	13.7	9.1	15.2	0	6.1

Tabla 6.75: Datos relativos a habilidades de S1 obtenidos en el análisis retrospectivo.

	Porcentaje de Errores				
	E1	E2	E3	E4	E5
Sesión 1	0	18.2	9.1	9.1	9.1
Sesión 2					
Sesión 3	3	3	0	6.1	21.2

Tabla 6.76: Datos relativos a errores de S1 en el análisis retrospectivo.

La tabla 6.77 muestra los indicadores relativos a las comparativas entre las sesiones, resumidos en la tabla 6.78.

Sesión 1				Sesión 2				Sesión 3				Dificultades sesión 3			
Rend	V1	V2	E	Rend	V1	V2	E	Rend	V1	V2	E	DT	DE	DC	DR
65	<b>6.4</b>	14.5	<u>9.1</u>	aus				<u>64.7</u>	<b>2.7</b>	9.1	6.7	<b>15.2</b>	9.1	3	<b>6.1</b>

Tabla 6.77: Indicadores de S1 en las tres sesiones.

V1	V2	V	CV
<b>4.5</b>	11.8	<u>16.4</u>	<b>0.7</b>

Tabla 6.78: Indicadores globales de S1.

De estos datos obtenidos en el análisis retrospectivo destacamos:

- De manera global, S1 es un alumno visualizador con un grado de corrección bajo debido a que utiliza la visualización de manera incompleta en un número elevado de ocasiones.
- En la Sesión 1 el porcentaje de manifestaciones correctas fue superior a las incompletas en todas las habilidades excepto en RE.
- En la Sesión 1 cometió un porcentaje bajo de errores, siendo E2 el error que cometió con mayor frecuencia.

- El porcentaje de errores cometido en la sesión 1 disminuye respecto a la sesión 3 para los errores E2, E3 y E4, pero aumenta en E1 y E5.
- En la Sesión 3 obtuvo un buen rendimiento, pese a manifestar la visualización de manera incompleta en un número alto de ocasiones. El porcentaje de manifestaciones correctas fue superior a las incompletas en todas las habilidades
- En la Sesión 3 manifestó en un porcentaje alto las dificultades relativas a la terminología y para describir las representaciones visuales utilizadas. El error que más manifestó en esta sesión fue E5.
- En la Sesión 1 participó en el grupo D y en la Sesión 3 en el grupo 4 que era el de los alumnos con puntuación baja en el test PMA.

Los datos recogidos en su ficha respecto a las actividades de la entrevista, aparecen en la tabla 6.79.

	Ren.	FC2	CP2	PE1	RE1	RE2	DV2	E2	E5
E_1_2	1	2	2		1		2	1	
E_2_6									
E_3_6_3	0			2		1			1

Tabla 6.79. Registros de S1 en las actividades de las entrevistas, durante las sesiones.

Previamente a la entrevista, estudiamos todas sus intervenciones y destacamos algunos hechos puntuales de su comportamiento en las sesiones respecto a las actividades no consideradas en la entrevista. Es el único alumno que cursa 1º Bachillerato, por lo que está en el curso más elevado. Presenta la segunda puntuación más baja en el Test DAT (centil 90) en el que falla en los ítems 1, 17, 33, 44, 48, 49 y no contesta al ítem 50.

En su argumentación para las estructuras mínimas de la sesión 1 intenta buscar generalizaciones mediante cuadrados perfectos de lado impar haciendo referencia al número de círculos que aparecen en los lados (3x3, 5x5, etc.). En la sesión 3 utiliza dibujos frecuentemente y recurre a la construcción de los objetos geométricos implicados en las actividades, para la alcantarilla de tapa triangular recortó un triángulo de papel y para la sección del cubo por un plano simuló cortar la goma de borrar.

## 6 Resultados: Capacidad Visual

### Actividad E-4-1

Puntuación Test PMA bajo, por errores en ítems 3, 7 y 11 y no contestar desde el 12 al 20.

Previamente a la entrevista el alumno afirma que tiene muy mala visión espacial y que le gusta el álgebra. Entiende rápidamente las instrucciones del test.

Su comportamiento en los ítems seleccionados es el que aparece en la tabla 6.80.

S1	Ítem 3	Ítem 7	Ítem 9	Ítem 11	Ítem 15
Correctas	A,D	A,C,E	A,B,E	A,B,C	A,B,E
TEST	A,D, <u>E</u>	A, <u>B</u> , <u>D</u> ,E	A,B,E	A	No contesta
Entrevista	A,D	A,C,E	A,B,E	A,B	A,B,E

Tabla 6.80: Respuestas de S1 a los ítems seleccionados en la entrevista.

Acierta todas las respuestas, salvo en la 11 que no señala una de las correctas. Dice que el ítem más difícil es el 11. La estrategia que utiliza es mover las figuras que aparecen en las respuestas para hacerlas coincidir con la figura requerida, manifestando la destreza CP1.

Sujeto	Respuesta
S1	<i>Intento ponerlas todas en la misma posición que esto. (señala con el dedo sobre el test)</i>
I2	<i>Mueves las respuestas.</i>
SI	<i>Sí.</i>

El alumno ha manifestado la habilidad Conservación de la Percepción de manera incompleta, ya que no reconoce una de las figuras equivalentes. Esto podría asociarse a una falta de exhaustividad para distinguir todos los casos posibles (E2) que es el error que este alumno ha cometido con más frecuencia a lo largo de las sesiones.

### Actividad E-4-2

En la sesión 1, el alumno había expuesto la argumentación D que describía la estructura ya conseguida y en la que razonaba sin discutir todos los casos posibles (E2). Manifestó

en su argumentación las habilidades FC, CP y DV de manera correcta y la habilidad RE de manera incompleta. Al leer los argumentos mostrados en la entrevista, afirma no entender bien A y E. Considera que el argumento B se refiere a la estructura conseguida y que es más difícil de generalizar.

Sujeto	Respuesta
SI	<i>Sí, pero creo que explica éste. No se puede generalizar.</i>
II	<i>Explícame eso un poco mejor. El B</i>
SI	<i>Éste sirve para esta estructura perfectamente. Pero creo que es más difícil de generalizar.</i>

Reconoce su propia argumentación y afirma que está mal redactada. En varias ocasiones muestra la dificultad de verbalizar los procesos mentales que está utilizando (DC).

Sujeto	Respuesta
SI	<i>Éste sí me parece que está bien, porque es más fácil de generalizar. Y el D creo que es el que puse yo.</i>
II	<i>¿Y qué te dices tú a ti misma si eso fuese así?</i>
SI	<i>Que está muy mal redactado.</i>

Prefiere la argumentación C porque es más fácil de generalizar. Encuentra similitudes entre D y B (también difíciles de generalizar). Su orden de preferencia es C>B>D>A=E. En las explicaciones de la actividad manifiesta la destreza CP2 al explicar la superposición de los círculos. Detectamos que para argumentar necesita utilizar movimientos de las manos (DE).

Sujeto	Respuesta
SI	<i>Sí, que es que viene a decir que no hay ningún círculo que se quede solo. Siempre están superpuestos. Y aquí que los puntos coincidan en los círculos siempre. O sea que...</i>

El alumno utiliza como criterio de preferencia de las argumentaciones el hecho de que se pueda generalizar, es decir, que no se limite al caso particular tratado. Aunque detecta E3, elige como mejor argumentación la de un compañero que ha cometido ese error al limitarse a describir una propiedad de la estructura conseguida. Al igual que en la sesión, manifiesta la habilidad de Conservación de la Percepción de manera completa. En la entrevista se detectan dificultades de comunicación tanto relativas a la verbalización (DC) como a la necesidad de utilizar movimientos de su propio cuerpo (DE).

## 6 Resultados: Capacidad Visual

### Actividad E-4-3

Como se ha dicho, este alumno no se presentó a la sesión 2, por lo que la actividad es nueva para él. Manifiesta FC2 de manera correcta tanto en la utilización de dibujos (dibuja un hexágono regular e identifica los ángulos de  $60^\circ$  en los triángulos equiláteros interiores) como en sus intervenciones:

Sujeto	Respuesta
<i>S1</i>	<i>El tetraedro es el que tiene las cuatro caras triangulares.</i>

Relaciona el relleno del espacio por tetraedros con el relleno del plano con triángulos, pero no comete el error de establecer una falsa analogía. Manifiesta la dificultad para describir las representaciones visuales que está utilizando (DR):

Sujeto	Respuesta
<i>S1</i>	<i>Es que estoy intentando hacer construcciones en mi cabeza, pero...</i>
<i>I2</i>	<i>¿De qué?</i>
<i>S1</i>	<i>De los tetraedros, qué figuras forman.</i>
<i>II</i>	<i>¿Qué es lo que te estás imaginando?</i>
<i>S1</i>	<i>Es que estoy intentado dividir el espacio en dos secciones. Un plano relleno, que sí se rellena con estos triángulos... y luego aquí si esto podría...Es que ahora mismo no lo veo.</i>

Intuye razonamientos con ángulos pero expresa su dificultad de combinar ángulos en tres dimensiones. Dibuja en perspectiva dos tetraedros unidos por una cara y señala el ángulo formado por tres caras unidas por un vértice. Desconoce el concepto de ángulo diedro, por lo que presenta la dificultad en la terminología (DT):

Sujeto	Respuesta
<i>S1</i>	<i>Es que estoy intentando los ángulos. Hacer una especie de...</i>
<i>II</i>	<i>¿Qué ángulos son los que estás intentando medir o...?</i>
<i>S1</i>	<i>Éste de aquí, el que se combinaría con éste. Pero es que no sé cómo hacer para combinar ángulos en tres dimensiones.</i>

Respecto al material manipulativo, afirma que el material le ayudaría a razonar. Cuando lo utiliza descubre figuras que no había imaginado. Se había dibujado un hexágono con triángulos que rellenaban el plano y al colocar las figuras ve que sólo puede colocar cinco tetraedros unidos por una arista, y que quedan en otra disposición:

Sujeto	Respuesta
<i>S1</i>	<i>Salen una figura que no me he imaginado yo.</i>

I2	<i>¿La estás colocando igual que como la habías colocado en el dibujo?</i>
SI	<i>Sí, pero no sale lo que yo me había imaginado.</i>

Aunque el alumno no asistió a la sesión, intuye el razonamiento a partir de los ángulos diedros. Manifiesta la habilidad Percepción Figura-Contexto (FC) de manera correcta y se detectan dificultades de comunicación relativas tanto al desconocimiento de la terminología (DT) como a describir de manera imprecisa las representaciones visuales que utiliza (DR). El uso de material manipulativo le descubre figuras que no había imaginado y le sirve para comprobar que no eran correctos algunos de sus razonamientos con dibujos.

#### Actividad E-4-4

En la sesión utiliza la estrategia de nombrar las caras (izquierda, atrás, arriba...) y escribir el nombre en el desarrollo plano, manteniendo la orientación respecto al cubo original.

En esta actividad, manifiesta correctamente la categoría PE1 (orientación correcta de las caras) y de manera incompleta RE2 (identifica parcialmente el camino). El error que comete es E5 al confundir lados o caras del camino.

En la entrevista, orienta las caras y las va identificando en el desarrollo plano, dibujándolas con la misma orientación, manifestando las categorías PE1 y RE2. Además identifica la intersección de las caras para ir encontrando el camino (RE1).

Sujeto	Respuesta
SI	<i>La estrategia que seguí el otro día fue... escribir aquí la posición de la cara e ir trasladándolo aquí. Entonces éste tiene que ser arriba. Por lo tanto, si esto lo colocamos así, aquí tiene que ir otra línea que es la que... con la derecha. Y aquí iría....</i>
(..) I2	<i>¿Por qué escribes así?</i>
SI	<i>Porque lo visualizo mejor. Porque como esta cara está así y ésta está así... yo vería la B por aquí.</i>
I2	<i>¿Ahora qué vas a pasar a hacer?</i>
SI	<i>Ahora estoy mirando, las líneas están en el límite entre dos caras. Voy a ponerlas según el límite que tengo.</i>

## 6 Resultados: Capacidad Visual

Recuerda la estrategia utilizada en la sesión y vuelve a cometer el mismo error al señalar un fragmento del camino que en el desarrollo plano no se encuentra en la intersección de las dos caras correspondientes.

Sujeto	Respuesta
<i>I1</i>	<i>¿Cómo has marcado estas tres?</i>
<i>S1</i>	<i>Porque la que... el límite entre delante e izquierda hay una. Entre delante y arriba.</i>
<i>I1</i>	<i>¿Y ésta?</i>
<i>S1</i>	<i>Ésta es la del límite de aquí. Sería esta línea.</i>

Para algunas de sus explicaciones, utiliza las manos para describir la intersección de dos caras del cubo (DE).

Aunque maneja con soltura la estrategia utilizada, confiesa que le cuestan este tipo de problemas.

Sujeto	Respuesta
<i>I2</i>	<i>¿Por qué dices que se te da mal la visualización? ¿La visión espacial?</i>
<i>S1</i>	<i>Porque me cuesta más que lo otro.</i>
<i>I2</i>	<i>Estás empleando una técnica, ¿no?</i>
<i>S1</i>	<i>Sí.</i>
<i>I2</i>	<i>¿Te ha venido hoy aquí o la manejas habitualmente?</i>
<i>S1</i>	<i>Bueno, es que esto lo hice el otro día. Pero normalmente, si tengo que hacer algo de visión espacial pues intento hacerlo en mi cabeza si no.</i>

El alumno recuerda la estrategia utilizada en la sesión y su comportamiento en la entrevista confirma lo observado en el análisis retrospectivo. Manifiesta de manera correcta la Percepción de la Posición en el Espacio (PE) y de manera incompleta la Percepción de las Relaciones Espaciales (RE) al cometer el error de confundir propiedades caras contiguas en el desarrollo plano (E5). Necesita de los movimientos de sus manos para explicar sus argumentos (DE). A pesar de que utiliza con soltura una estrategia adecuada, considera que este ejercicio es difícil ya que le cuestan los problemas relacionados con la visión espacial.

### Conclusión de la entrevista a S1

Respecto al comportamiento de los compañeros, S1 obtiene una puntuación baja en el factor espacial del test PMA, media en el DAT y es un alumno visualizador con un

grado de corrección bajo debido a que utiliza la visualización de manera incompleta en un número elevado de ocasiones.

Consideramos que la entrevista confirma los datos observados a partir de los test y los indicadores. En la entrevista el alumno manifiesta correctamente las habilidades de Percepción Figura-Contexto y Percepción de la Posición en el Espacio. Manifiesta de manera incompleta la Conservación de la Percepción y Percepción de las Relaciones Espaciales. Aunque él se define como con poca visión espacial y que le cuesta realizar ejercicios que la demandan, utiliza estrategias y representaciones visuales en su resolución, confirmando que hace uso de ella (visualizador). El grado de corrección bajo puede derivarse de los errores cometidos que originan las manifestaciones incompletas de las habilidades. En la entrevista se localizan errores relativos a la falta de exhaustividad para distinguir todos los casos y a confundir propiedades matemáticas. Sus dificultades para comunicar las argumentaciones visuales se ponen de manifiesto al aparecer todas las dificultades analizadas: desconocimiento de la terminología, necesidad de movimientos del cuerpo, y realizar deficientemente la verbalización de los procesos mentales y la descripción de las representaciones visuales.

### 6.3.2 Entrevista S2

#### Caracterización visual

Es un alumno seleccionado por presentar una puntuación muy alta en los factores espaciales de los test PMA (centil 94) y DAT (centil 99). Su puntuación en el test de Raven lo sitúa en el centil 96. Según la clasificación debida a los indicadores V y CV es Poco visualizador/Porcentaje de corrección medio. Es decir, ha demostrado una capacidad visual muy alta en los test, pero ha utilizado la visualización en un porcentaje bajo de las ocasiones con un grado de corrección medio. En la prueba de selección fue seleccionado en el séptimo lugar (por orden de puntuación) y utilizó una estrategia visual para resolver P2 aludiendo a que los triángulos tienen la misma base y llegan al mismo punto para decir que tienen igual área.

## 6 Resultados: Capacidad Visual

Los resultados del análisis retrospectivo de las tres sesiones se reflejan en las tablas 6.81, 6.82, 6.83 y 6.84:

	Indicadores por habilidades Incompletas y Correctas									
	FCI	FCC	CPI	CPC	PEI	PEC	REI	REC	DVI	DVC
Sesión 1	12.5	33.3	0	8.3	0	20.9	0	0	4.2	8.3
Sesión 2	2.8	13.9	0	5.6	2.8	2.8	2.8	8.3	5.6	8.3
Sesión 3	1.4	8.1	0	2.7	1.4	8.1	1.4	14.9	5.4	1.4

Tabla 6.81: Datos relativos a habilidades de S2 obtenidos en el análisis retrospectivo.

	Porcentaje de Errores				
	E1	E2	E3	E4	E5
Sesión 1	0	16.7	16.7	8.3	0
Sesión 2	0	0	0	0	27.8
Sesión 3	0	0	2.7	8.1	18.9

Tabla 6.82: Datos relativos a errores de S2 en el análisis retrospectivo.

Sesión 1				Sesión 2				Sesión 3				Dificultades sesión 3			
Rend	V1	V2	E	Rend	V1	V2	E	Rend	V1	V2	E	DT	DE	DC	DR
65	3.3	14.2	<u>8.3</u>	53.1	2.8	<b>7.8</b>	<u>5.6</u>	55.9	1.9	<b>7</b>	5.6	<b>16.2</b>	2.7	<b>13.5</b>	<b>8.1</b>

Tabla 6.83: Indicadores de S2 en las tres sesiones.

V1	V2	V	CV
2.7	<b>9.7</b>	<b>12.3</b>	0.8

Tabla 6.84: Indicadores globales de S2.

De análisis retrospectivo sacamos las siguientes apreciaciones:

- Globalmente, es un alumno que ha utilizado poco la visualización ya que respecto a sus compañeros, la ha manifestado en un número bajo de ocasiones tanto en la cantidad total como en las correctas.
- En todas las sesiones, el porcentaje de manifestaciones correctas ha sido superior al de las incompletas (en la sesión 2 coinciden en la habilidad Percepción de la posición en el espacio).
- En las sesiones 1 y 2 cometió un porcentaje de errores bajo, siendo E5 el error que manifestó en mayor porcentaje en la sesión 3. Salvo para este error, los

porcentajes de errores en la sesión 3 son todos inferiores a los cometidos en la sesión 1.

- En las sesiones 2 y 3 manifestó la visualización de manera correcta en un porcentaje bajo de ocasiones.
- En la sesión 3 manifiesta un porcentaje elevado en las dificultades de comunicación relativas a la terminología, verbalizar los procesos mentales y describir las representaciones.
- En la Sesión 1 participa en el Grupo D y en las sesiones 2 y 3 lo hace en el grupo 3 que lo formaban los alumnos con puntuación muy alta en el test PMA.

Los datos recogidos relativos a las actividades de la sesión son (Tabla 6.85):

	Ren.	FC1	FC2	PE1	RE1	RE2	E3	E5		DC
E_1_2	1	1	2				1			
E_2_6	0								NJ	
TD_2_6				1	1			1		
E_3_6_3	1					2			1C	
TD_3_6_1						2				1

Tabla 6.85: Registros de S2 en las actividades de las entrevistas, durante las sesiones. (NJ= No justifica, 1C= Un camino correcto).

Es el único alumno que pertenece a 2º ESO, por lo que todos los demás alumnos están en cursos superiores. De su comportamiento en las sesiones, destacamos que deja algunas actividades en blanco o no justifica sus afirmaciones, teniendo que insistir para que escriba sus razonamientos y no se distraiga con los compañeros. Dibuja mucho, resuelve las actividades muy rápido y razona bien, pero le cuesta convencerse de las argumentaciones de los compañeros.

#### Actividad E-4-1

Fallos en los ítems 1, 3, 9, 13 del test PMA y no contestó al 20. Previamente a la entrevista afirma que le gustan las actividades relacionadas con las sesiones, sobre todo le gusta hacer puzzles. Su comportamiento en los ítems seleccionados para la entrevista aparece en la tabla 6.86:

## 6 Resultados: Capacidad Visual

S2	Ítem 3	Ítem 7	Ítem 9	Ítem 11	Ítem 15
Correctas	A,D	A,C,E	A,B,E	A,B,C	A,B,E
TEST	C,F	A,C,E	A,E	A,B,C	A,B,E
Entrevista	A,D	A,C,E	A,B,E	A,B,C	A,B,E

Tabla 6.86: Respuestas de S2 a los ítems seleccionados en la entrevista.

Acierta todas las respuestas y afirma que el ítem más difícil es el 11 aludiendo a la complejidad de las piezas. La estrategia inicial que utiliza es girar las respuestas, manifestando la destreza CP1:

Sujeto	Respuesta
S2	<i>Yo lo que siempre hacía era girarlo con la mente, entonces no sé.</i>
II	<i>Tú tranquilo que no es ningún examen. ¿Lo que estás haciendo es girar la primera pieza? ¿Te la imaginas girada?</i>
S2	<i>No. Giro ésas.</i>
II	<i>Giro ésas e intentas ver si es como ésta. Vale.</i>

Al avanzar en las respuestas, utiliza estrategias diferentes, en algunos ítems identifica elementos en las figuras (FC2) y utiliza la posición entre dos objetos (destreza RE1):

Sujeto	Respuesta
S2	<i>Sí. Pero no sé si están atrás, si las tengo que girar y todo eso. Por ejemplo, ésta, yo veo que el palo ese está a la izquierda, y el palo ese está en la derecha y el palo está a la izquierda y veo que no directamente.</i>

En la explicación del procedimiento utilizado, recurre a la clasificación de las figuras según sean simétricas o no a una pieza concreta, manifestando las destrezas DV1 y RE1:

Sujeto	Respuesta
S2	<i>Ah, vale. Y por ejemplo, ésta he visto que no es y como todas las que no son, son simétricas a la vez que sí son. Ésta, yo creo que es justamente lo contrario de ésta. No, porque están casi en el mismo eje de simetría. Entonces sí veo que es, sin tener que girar mentalmente.</i>

Al identificar explícitamente los movimientos, manifiesta la destreza PE2 y le es indiferente comparar una respuesta con la muestra o con otra respuesta que es correcta, girando las respuestas, salvo las que ve simétricas por lo que manifiesta la destreza DV2:

Sujeto	Respuesta
S2	<i>Ah, sí. Si por ejemplo, estas dos. Yo veo que si ésta la giras así, te va a dar ésta. Y si ésta sé que era, me es más fácil utilizar ésta que ésa, pues lo hago.</i>

El alumno ha utilizado una riqueza de estrategias visuales al resolver esta tarea que ha aplicado con éxito, manifestando todas las habilidades de visualización analizadas.

#### Actividad E-4-2

El alumno había expuesto la argumentación B, en la que hacía referencia al procedimiento de obtención de la estructura limitándose a argumentar sobre el ejemplo concreto utilizado (E3). Manifestó correctamente la destreza FC2 al dibujar correctamente todos los elementos de la estructura utilizada y de manera incompleta FC1 al describir el proceso de formación.

Considera más fáciles de entender los argumentos que describen el procedimiento para obtener la estructura y afirma que el dibujo de la explicación le ayuda a comprenderla mejor. Reconoce en su propia argumentación que no explica el por qué. Va razonando sobre cada una de las argumentaciones y, aunque afirma que no entiende la A, es muy rápido para razonar específicamente y presenta una buena disposición a justificar todo lo que hace. En ocasiones manifiesta la dificultad para describir las representaciones que utiliza (DR).

Sujeto	Respuesta
S2	<i>Es que en éste te dice que.. directamente ésta es la más pequeña... con la primera ficha ocupas tres como mínimo, eso sí es claro, pero no te explica el por qué y ya cuando llevas nueve o si llevas ya muchas si te lo dice, te tendrá que poner el por qué. Pero....</i>

Al razonar sobre los argumentos presentados en la entrevista, es crítico con la falta de exhaustividad al ir distinguiendo los casos posibles en el procedimiento de construcción y limitarse a razonar sobre el caso concreto obtenido, por lo que es consciente de los errores E2 y E3. Esto completaría la parte inicial del argumento que él había presentado y en el que había manifestado FC1 de manera incompleta, manifestando correctamente FC2 y CP2.

## 6 Resultados: Capacidad Visual

Sujeto	Respuesta
S2	<i>Si tú ponías esto así para que ocupasen cuatro fichas, cuatro fichas un mismo punto, que ya se te hacía demasiado grande, entonces ésta ya no puedes poner. Entonces tenías que ir mirando la forma para que, si no se podían en cuatro, mirabas en tres y si ése se te hacía muy grande en dos. Que creo que es lo que ha intentado el del A, hasta que ha llegado a eso. Pero, ha sido más por probar... antes que... por tener una estrategia.</i>

Para ordenar sus preferencias mezcla las de descripción y las de procedimiento (su orden es D>C>B>E>A), pero es capaz de reconocer similitudes en las argumentaciones y establecer partes de unas que complementan a las otras. Considera que la D completa la B e identifica similitudes entre A y C, pero sigue echando en falta una justificación. Considera que aunque la E es más clara por los dibujos, hay que mejorar la argumentación.

Sujeto	Respuesta
I2	<i>Es interesante lo que has dicho del B. Echas en falta parte de la argumentación. No tiene que ver con su expresión. Lo que pretendemos es una argumentación que quede completa. ¿Te parece que las demás son más completas?</i>
S2	<i>Si, porque la D sí te lo explica. Lo que le falta a la B sí te lo explica en la D. Y en el A y en el C, que dicen más o menos lo mismo, bueno, en parte, también te explican que dos fichas pasan por el mismo y aquí solamente te dicen cuál es la mínima y no te explican el por qué. Yo creo que si al B le hubiesen puesto parte del A y del C, hubiese quedado más completo (...)</i>
S2	<i>Hombre, por los dibujos si te guías mejor. Aquí lo que veo es que te explica cómo se hace, pero no te explica por qué lo ha hecho así.</i>

El alumno utiliza como una característica que le permite ordenar sus preferencias, que las respuestas describan claramente el procedimiento y lo justifiquen. Manifiesta correctamente las habilidades Percepción de la figura-contexto y Conservación de la Percepción y es consciente del error que cometió en su argumentación (E3), indicando pautas que lo subsanan. Razona rápidamente sobre los argumentos presentados, establece conexiones entre ellos, tiene buena disposición a explicar sus decisiones y muestra dificultades de comunicación relativas a describir las representaciones que utiliza.

**Actividad E-4-3**

El alumno no justifica esta actividad en sus respuestas escritas por lo que se registran las habilidades y los errores a partir de la transcripción del debate en grupo, manifestando de manera incompleta las destrezas RE1 (encajar las caras sin dejar huecos) y PE1 (situar la pieza en perspectiva). El error cometido se debió a confundir propiedades del tetraedro (E5).

En la entrevista, además de estas destrezas (RE1 y PE1), utiliza dibujos en diferentes perspectivas para representar los tetraedros, lo que implica la destreza CP1. Se observan dificultades para comunicar sus argumentos tanto para verbalizar los procesos mentales como para describir las representaciones utilizadas (DC y DR):

Sujeto	Respuesta
S2	<i>Yo lo que pensé en un principio fue que no, porque al tener... al ser un triángulo así... bueno que la única manera es que también pudiese.. porque en paralelo también puedes poner los triángulos así. Pero si luego lo echas... los ponías en tres dimensiones así, no había manera de que encajasen unos con otros y como esta era la única manera de que los triángulos encajen entre sí, pues yo pensé que no. Pero, luego me equivoqué. Pero voy a comentar lo que hice. Que pensé en hacer... es que... ¿cómo lo dibujo?</i>

Dibuja un octógono con un triángulo en cada lado y dice que se imagina la unión de los vértices en un único punto. Manifiesta la destreza FC2 al identificar correctamente los elementos y relaciona el problema del espacio con el plano, pero no establece una falsa analogía.

Sujeto	Respuesta
II	<i>Lo que estás diciendo ¿es que no o que sí?</i>
S2	<i>Que no.</i>
II	<i>¿Y el argumento ha sido...? No, porque...</i>
S2	<i>Yo creo que por esto, porque los triángulos, si los reducimos a dos dimensiones, los triángulos solamente pueden ocupar el espacio de esta manera que es así, el otro así... y de esta manera cuando lo pasaba a tres dimensiones, los tetraedros no lo consiguen. Rellenar el espacio.</i>

Aunque no alude a los argumentos de ángulos expuestos en la sesión, recuerda elementos relativos a la descomposición de las piezas del puzle, utilizando el material para comprobar las ideas que imagina. Manifiesta la necesidad de utilizar las manos para sus argumentaciones (DE) y la de verbalizar los procesos (DC).

## 6 Resultados: Capacidad Visual

Sujeto	Respuesta
S2	<p><i>Bueno, tiene tetraedros también y ése sí rellenaba el espacio... yo qué sé. Me da igual.</i></p> <p><i>Lo que yo pensé al principio, eso que he dicho antes, era ponerlos, a ver. Así, pero luego me di cuenta que en los espacios estos de aquí se quedaban espacios, entonces, que al ponerlo así, yo intentaba colocar otros encima y no se podía. Eso fue lo que ya me quitó la idea. ¿Así sí se podía, no?(...)</i></p> <p><i>Ya, es que no me cabía el sexto. Cuando lo pensé, pensaba que esto iba a quedar así plano. Pero luego, cuando lo hice con las figuras, ya me di cuenta que no.</i></p>

No recuerda exactamente las piezas del puzle que rellenaban el espacio, pero dibuja en perspectiva una especie de zueco y lo identifica como la pieza que en la sesión se encontró que rellenaba el espacio.

Sujeto	Respuesta
S2	<i>Ah, claro, por ejemplo si... tú conseguías hacer ésta. No la conseguimos hacer o ¿no era ésta? Era ésta. Entonces si ésta la partiésemos así, por la mitad... Era... Es lo que acabo de pintar...</i>

En sus argumentaciones manifiesta las destrezas FC1, FC2 y DV2 de manera correcta, aunque presenta todas las dificultades de comunicación analizadas para los argumentos visuales (DT, DE, DC y DR):

Sujeto	Respuesta
S2	<i>Sí. Con ésta.. No, con ésta, no. Pero lo mismo si cortas ésta, si puedes crear... quedan dos triángulos rectángulos y si los juntas te saldría un cuadrado al que le faltan los lados. En parte, podrías porque... no. Bueno. Lo que estaba pensando es que si cortas esto por aquí, y por aquí y luego los juntas, te queda como un cuadrado... No, es que te quedaría esto, como si lo juntásemos así. No podrías hacer nada... Y si esto no lo rellena...</i>
I2	<i>Ésa no lo rellena.</i>
S2	<i>Ah, pero entonces, si con esa volvemos a hacer éstas, entonces, si partimos ésta en dos partes y luego nos queda ésta, con esta misma podríamos volver a hacer ésta.</i>
I1	<i>Pero ¿ésta lo rellena?</i>
S2	<i>Ah, que ésta no es ésta.</i>
I1	<i>¿Ésa lo rellena?</i>
S2	<i>No, creo. No. ¿Hay otra de éstas?</i>
I1	<i>Una pirámide...</i>
S2	<i>Es lo mismo que aquella, en parte.</i>

El alumno no alude a medidas de ángulos y razona dibujando distintas representaciones de tetraedros y formando distintas combinaciones con las piezas del puzle. Al igual que

en la sesión, manifiesta de manera incompleta las habilidad de Percepción de las relaciones espaciales al hacer apreciaciones incompletas sobre la forma de combinar las piezas que es lo que le lleva a confundir las propiedades (E5). El resto de las habilidades las manifiesta correctamente: Percepción de la figura-contexto, Conservación de la percepción, Percepción de la posición en el espacio y Discriminación visual. Utiliza dibujos para establecer conjeturas y el uso del material manipulativo le sirve para contrastarlas. Más que razonar sobre un caso general, es rápido en sus razonamientos y prueba con múltiples combinaciones para probar sus ideas. Al exponerlas, presenta todas las dificultades de comunicación (DT, DE, DC y DR).

#### Actividad E-4-4

En la sesión completó correctamente un camino, pero no justificó sus argumentaciones, siendo en el trabajo en grupo donde manifestó correctamente RE2 y la dificultad DC para verbalizar los procesos. La estrategia que recuerda haber empleado en la sesión es que montarlo en su mente, lo giraba y en la imagen trazaba el camino. Luego volvía a desmontarlo para recuperar el camino, pero afirma que se le perdía en la imagen. Vuelve a manifestar RE2 y DC:

Sujeto	Respuesta
S2	<i>Aquí lo que me pasaba es que... yo por ejemplo... esto es un cubo, lo levantas y entonces estas dos piezas están juntas, entonces el camino por aquí también tiene que venir. Si no es por ahí, va por ahí. Entonces yo, me imaginaba el cubo, lo iba girando en mi mente, y veía que a lo mejor empezaba por aquí. Bueno, yo sabía en mi cabeza por donde empezaba y luego lo volvía a desmontar y se me perdía qué parte de éstas era por la que pasaba cuando lo tenía...</i>

El alumno manifiesta las destrezas PE1 y RE2 (al utilizar elementos de posición respecto a él mismo y relativa entre dos objetos) y RE1 (al identificar elementos en el desarrollo plano) y presenta dificultad para describir las representaciones visuales que utiliza (DR) y la necesidad de mover las manos (DE). Utiliza la imagen mental del cubo ya montado para razonar y maneja varias relaciones alternativamente (posición del cubo, aristas que se juntan en el desarrollo), por lo que presenta dificultades en recordar demasiados procesos en su mente.

## 6 Resultados: Capacidad Visual

Sujeto	Respuesta
S2	<i>Yo cojo esta cara y la pongo como si fuera la de arriba y luego veo que esto viene para acá. Entonces viene por aquí. Entonces éste se supone que es éste. Luego viene por aquí, entonces es ésta. Ésta no tiene que ser en otra cara porque está al lado, pero ésta... tengo que montar el cubo otra vez en mi cabeza para ver ésta con cuál coincide. Pero eso es otra cosa que me pasaba, que ahora yo sé que es ésta, y no sé en cuál de los dos es.</i>

El alumno afirma que le gustan este tipo de actividades y le atribuye la dificultad a que tiene que recordar demasiados elementos en su imaginación, utilizando la representación del cubo, el desarrollo plano y la imagen del cubo montado que manipula en su mente para ir descubriendo el camino a partir de las caras que lo forman. Al igual que en la sesión, manifiesta correctamente la habilidad Percepción de las relaciones espaciales y añade la de Percepción de la posición en el espacio. Presenta dificultades de comunicación de sus argumentaciones relativas a verbalizar los procesos mentales (DC), describir las representaciones utilizadas (DR) y necesidad de utilizar movimientos de sus manos (DE). Estas dificultades, junto a la manipulación de representaciones en su mente, puede explicar la escasa predisposición que tiene este alumno para responder a las justificaciones que se le pedía por escrito en la sesión.

### Conclusión entrevista S2

Respecto al comportamiento de sus compañeros, S2 ha demostrado una capacidad visual muy alta en los test, pero ha utilizado la visualización en un porcentaje bajo de las ocasiones, con un grado de corrección medio.

Su comportamiento en la entrevista confirma su alta capacidad visual y no apoya su bajo uso de la visualización ya que ha utilizado una gran variedad de estrategias visuales y ha manifestado todas las habilidades de visualización analizadas. El alumno afirma que le gusta resolver actividades relacionadas con la visualización, razona rápidamente y tiene buena disposición a explicar sus razonamientos aunque al exponerlos, se detectan todas las dificultades de comunicación analizadas (DT, DE, DC y DR). En el desarrollo de la entrevista aporta elementos que subsanan algunos de sus errores cometidos relativos tanto a la falta de generalidad por razonar sobre elementos concretos (E3) como a la confusión de propiedades matemáticas (E5). Razona rápidamente y utiliza dibujos y representaciones para probar sus ideas, pero la

dependencia de los elementos que imagina le genera a veces dificultades al tener que recordar demasiados elementos en su imaginación.

Como posible explicación a esta diferencia del uso de la visualización en las sesiones señalamos que S1 es el único alumno de un curso inferior y hemos detectado en varios momentos una tendencia a distraerse con los compañeros y reflejar comportamientos más infantiles. En varias actividades dejaba en blanco la respuesta o se negaba a plasmar sus razonamientos por escrito cuando se le pedía. Esta situación junto con las dificultades encontradas para comunicar sus argumentaciones visuales puede explicar el bajo porcentaje de uso de la visualización que el alumno ha manifestado en las sesiones.

### 6.3.3 Entrevista S3

#### Caracterización visual

Este alumno es seleccionado por presentar una puntuación baja en el factor espacial del PMA (centil 8) y muy alta en las relaciones espaciales DAT (centil 99). En su puntuación en el test de Raven se posiciona en el centil 96. Según los indicadores V y CV es Medio/Porcentaje de corrección medio. Por lo tanto, su comportamiento en los test ha sido desigual, y en las sesiones ha manifestado la visualización en un término medio con un porcentaje de corrección también medio. En la prueba de selección fue seleccionado en el décimo lugar (orden de puntuación) y no manifestó ninguna estrategia visual en sus respuestas.

Sus manifestaciones de habilidades, errores y dificultades en el experimento de enseñanza han sido las recogidas en las siguientes tablas (6.87, 6.88, 6.89 y 6.90) :

	Indicadores por habilidades Incompletas y Correctas									
	FCI	FCC	CPI	CPC	PEI	PEC	REI	REC	DVI	DVC
Sesión 1	9.1	31.8	0	13.6	0	13.6	4.5	9.1	0	4.5
Sesión 2	5.6	16.7	2.8	8.3	2.8	2.8	0	11.1	0	0
Sesión 3	2.2	13	0	2.2	2.2	17.4	6.5	17.4	2.2	4.3

Tabla 6.87: Datos relativos a habilidades de S3 obtenidos en el análisis retrospectivo.

## 6 Resultados: Capacidad Visual

	Porcentaje de Errores				
	E1	E2	E3	E4	E5
Sesión 1	0	18.2	18.2	9.1	0
Sesión 2	0	5.6	5.6	11.1	22.2
Sesión 3	0	8.7	0	13	21.7

Tabla 6.88: Datos relativos a errores de S3 en el análisis retrospectivo.

Sesión 1				Sesión 2				Sesión 3				Dificultades sesión 3			
Rend	V1	V2	E	Rend	V1	V2	E	Rend	V1	V2	E	DT	DE	DC	DR
<b>55</b>	<u>2.7</u>	14.5	<u>9.1</u>	50	2.2	<b>7.8</b>	8.9	58.8	<b>2.6</b>	<u>10.9</u>	<b>8.7</b>	13	<u>0</u>	4.3	4.3

Tabla 6.89: Indicadores de S3 en las tres sesiones.

V1	V2	V	CV
2.5	11	13.6	0.8

Tabla 6.90: Indicadores globales de S3.

De estos datos, destacamos:

- De manera global, el comportamiento de S3 respecto a los indicadores V1, V2, V y CV lo sitúa entre el primer y tercer cuartil, por lo que lo clasificamos como medio para cada uno de ellos.
- En todas las sesiones el porcentaje de manifestaciones correctas de las habilidades ha sido mayor o igual que el de las incompletas.
- El error que cometió con más frecuencia es E5 en la sesiones 2 y 3 y E1 no lo cometió. Los porcentajes de errores en la sesión 3 son inferiores a los de la sesión 1 para E2 y E3 y superiores para E4 y E5.
- En la sesión 1 obtuvo un rendimiento bajo, pese a manifestar un bajo porcentaje de errores y de manifestaciones incompletas de la visualización.
- En la sesión 2 obtuvo un porcentaje bajo de manifestaciones correctas de la visualización.
- En la sesión 3, pese a obtener un porcentaje alto de manifestaciones correctas, también comete errores y manifestaciones incompletas en un alto porcentaje.
- En la sesión 3 el alumno no presenta ninguna dificultad debida a la necesidad de utilizar movimientos de su propio cuerpo o hacer referencia a objetos del entorno.

- En la sesión 1 forma parte del grupo E y en las sesiones 2 y 3 es el grupo 4 (alumnos con baja puntuación en el test PMA).

Los datos recogidos en las actividades relacionadas:

	Rend.	FC2	PE1	RE1	RE2	E3	E5	
E_1_2	1	2		1		1		
E_2_6	0							NC
E_3_6_3	0		2		1		1	

Tabla 6.91: Registros de S3 en las actividades de las entrevistas, durante las sesiones.

Previamente a la entrevista destacamos que este alumno ha obtenido la puntuación más baja en el test PMA (centil 8) y presenta la mayor diferencia de puntuación entre los dos test (centil 8 y centil 99 respectivamente). En el test DAT sólo falla un ítem.

En la sesión 1 consiguió las estructuras mínimas requeridas para seis y siete fichas en los tableros cuadrado y hexagonal. Destaca su aportación para el problema de la alcantarilla de la sesión 3 en el que razona con los compañeros el caso triangular y distingue entre los polígonos con un número par e impar de lados para estudiar el concepto de anchura.

#### Actividad E-4-1

En el test PMA falló los ítems 2, 3, 7 y 9 y no contestó el 8 y desde el 10 hasta el 20. Previamente a la entrevista el alumno afirma no saber por qué lo hemos elegido pues reconoce que se le da fatal la visualización y que no le gustan la geometría ni los prismas.

Su comportamiento respecto a los ítems seleccionados aparece en la tabla 6.92:

S3	Ítem 3	Ítem 7	Ítem 9	Ítem 11	Ítem 15
Correctas	A,D	A,C,E	A,B,E	A,B,C	A,B,E
TEST	<u>C</u>	C, <u>F</u>	A,B	No contesta	No contesta
Entrevista	A,D	A,E	A,B, <u>D</u> , <u>F</u>	A,C	B,E, <u>F</u>

Tabla 6.92: Respuestas de S3 a los ítems seleccionados en la entrevista.

## 6 Resultados: Capacidad Visual

Acierta 10 de las 14 respuestas válidas, comete tres errores y no identifica una que era correcta. Es muy lento al contestar y afirma que le cuesta resolver algunos ítems. Llega a girar el formulario del test, manifestando la dificultad de hacer referencia a objetos del entorno (DE).

La estrategia que verbaliza es la de ir girando la muestra y luego girar la respuesta que le ha salido verdadera. Manifiesta las destrezas CP1 y DV1 y la dificultad para verbalizar los procesos mentales que está utilizando (DC):

Sujeto	Respuesta
S3	<i>Dándole vueltas. Éste sería. (...)</i>
I2	<i>¿A quién le das vueltas?</i>
S3	<i>A ésta.</i>
I2	<i>A ésa.</i>
S3	<i>Bueno, después a ésta y ya después a ésta.</i>
I2	<i>Conforme vas encontrando una respuesta...</i>
S3	<i>Sí, lo voy encontrando y lo voy siguiendo dándole vueltas.</i>

El alumno ha manifestado las habilidades Conservación de la percepción y Discriminación Visual, pero comete errores al reconocer como figuras iguales las que no son y no encontrar todas las iguales a la muestra. Se puede explicar su baja puntuación en la pasación por la lentitud con la que afronta esta tarea, ya que la estrategia utilizada no le resulta muy operativa. Además presenta dificultades para verbalizar los procesos que utiliza y la necesidad de utilizar movimientos de los objetos del entorno.

### Actividad E-4-2

Este alumno presentó en la sesión la argumentación C que describía una propiedad concreta de la estructura conseguida y se limitaba al razonamiento sobre el caso concreto (E3). Manifestó correctamente la habilidad FC al dibujar correctamente los elementos (círculos, segmentos) de la estructura utilizada y de manera incompleta la habilidad RE al argumentar sobre las conexiones sin la precisión requerida.

En la entrevista lee detenidamente en voz alta los argumentos presentados y se toma mucho tiempo para reflexionar. Considera como mejor la argumentación C, la que él

había presentado, porque dice que valdría para un mayor número de fichas. Vuelve a deducir propiedades generales a partir de situaciones concretas, ya que esta argumentación no valdría para el caso general (E3).

Sujeto	Respuesta
S3	<i>Porque lo generaliza para cualquier problema. No sólo para este número de fichas, seis fichas, sino para otros. Para siete, ocho, nueve fichas...</i>

El alumno considera que la argumentación B (relativa la procedimiento) está incluida en la argumentación C (descripción de la propiedad) y relaciona las argumentaciones B y E. Su orden de preferencia es  $C > B = E > D$  y no entiende la A. En sus explicaciones, manifiesta correctamente FC:

Sujeto	Respuesta
S3	<i>Éste no lo entiendo muy bien (A). Sin que ocupen ningún círculo... Algún círculo tienen que ocupar las tres fichas. ¿A qué se refiere con ningún círculo?</i>
I1	<i>Eso es lo que justamente estamos viendo. Si lo justifica, si no entiendes lo que justifica.</i>
S3	<i>Es que (leyendo) es la única figura en la que puedes poner la mitad de las fichas sin ocupar ningún círculo. No sé a qué se refiere.</i>

El alumno prefiere su propia argumentación utilizando como criterio que se puede generalizar, por lo que se vuelve a detectar el E3. Manifiesta la habilidad Figura Contexto y, más que dificultades propias de comunicación de los argumentos visuales, se detecta que el alumno no es muy comunicativo y necesita analizar detenidamente los argumentos presentados.

### Actividad E-4-3

El alumno no contestó a esta actividad en las respuestas escritas entregadas de la segunda sesión y en la entrevista inicialmente afirma que los tetraedros rellenan el espacio, pero presenta dificultades para describir las representaciones visuales utilizadas (DR) y la necesidad de utilizar las manos (DE). Manifiesta la categoría PE1 al utilizar elementos de posición y utilizar dibujos de un paralelepípedo para indicar con flechas que continúa hasta el infinito.

## 6 Resultados: Capacidad Visual

Sujeto	Respuesta
<i>I1</i>	<i>¿Podrías explicarnos o contestar a la pregunta de si rellenan los tetraedros el espacio?</i>
<i>S3</i>	<i>Yo creo que sí. Porque si tú los prolongas... coges un tetraedro y vas haciendo prolongaciones del tetraedro, se puede continuar hasta el infinito...</i>
<i>I1</i>	<i>¿Cómo sería eso de prolongarlo?</i>
<i>S3</i>	<i>Tú esto lo puedes continuar por aquí, si pones otro aquí encima, lo puedes continuar por aquí en todas las direcciones...</i>

El alumno presenta dificultades relativas a la terminología (DT) al confundir tetraedro con pirámide rectangular. Dibuja un tetraedro y coloca otro sobre una de sus caras, pero cuando intenta dibujar más tetraedros, confunde algunas de sus propiedades (E5):

Sujeto	Respuesta
<i>I1</i>	<i>¿Y esto es el tetraedro?</i>
<i>S3</i>	<i>¿No es ése?</i>
<i>I1</i>	<i>¿Cuál sería el tetraedro?</i>
<i>I2</i>	<i>No te acuerdas del tetraedro. Es la pirámide triangular.</i>

Relaciona el relleno del espacio unívocamente con el relleno a partir del cubo, lo que interpretamos como E4 al confundir elementos de razonamiento matemático (considerar una implicación como una doble implicación). Manifiesta la categoría RE1 al utilizar elementos de posición relativa entre caras coincidentes, pero presenta dificultades tanto para verbalizar los procesos mentales (DC) como para describir las representaciones visuales que utiliza (DR) y necesita mover las manos para completar sus argumentos (DE):

Sujeto	Respuesta
<i>I1</i>	<i>El tetraedro. Ése de ahí. ¿Tú crees que ése rellenaría?</i>
<i>S3</i>	<i>Yo creo que no.</i>
<i>I2</i>	<i>¿Por qué?</i>
<i>S3</i>	<i>Porque no se pueden formar cubos a partir de éstos. O... Si tú coges uno y en la base pones uno encima, tú lo alinearías, un conjunto... uno encima del otro. Los prolongas y arriba puedes poner otro. Pero no tesela el espacio.</i>

El alumno responde afirmativamente al hecho de que el material manipulativo le ayuda a razonar y busca combinaciones de piezas para rellenar huecos con tetraedros. Las construcciones que consigue le hacen dudar sobre las conjeturas que había pensado previamente. Aunque hace referencia al argumento expuesto en la sesión sobre la condición de divisibilidad de los ángulos, no precisa el ángulo diedro que utiliza en su

razonamiento, manifestando dificultades con la terminología (DT) y no completa su razonamiento.

Sujeto	Respuesta
I2	<i>Ahora te hace dudar más.</i>
S3	<i>Sí (...)</i>
I2	<i>¿Puedes concretar la intuición ésa del creó? ¿Por alguna razón?</i>
S3	<i>Por lo de los grados. Lo de 360 grados.</i>
I1	<i>¿Qué estas buscando con los grados?</i>
S3	<i>Debe ser algo de eso.</i>
I1	<i>Que puedas unirlos...</i>
S3	<i>Algo de eso. Que sea divisor de 360..</i>

En la entrevista manifiesta correctamente las habilidades Percepción de la posición en el espacio y Percepción de las relaciones espaciales, comete errores relativos a la confusión tanto de elementos matemáticos de razonamiento (E4) como de contenido matemático (E5) y se detectan todas las dificultades de comunicación de las argumentaciones visuales (DT, DE, DC, DR). El material manipulativo le sirve para contrastar conjeturas y, aunque alude a argumentos expuestos en la sesión sobre las propiedades de divisibilidad de los ángulos diedros, no consigue completar su argumentación.

#### **Actividad E-4-4**

En esta actividad el alumno había manifestado de manera correcta la categoría PE1 (utilizando números para localizar las caras) y de manera incompleta la RE2 (al identificar correctamente sólo algunas partes del camino) lo que detectó E5 al confundir caras o lados.

En la entrevista, intenta identificar las caras nombrándolas en el desarrollo pero manifiesta claramente dificultades para hacerlo, necesitando una goma de borrar para razonar (DE). Escribe los nombres de las caras en la goma y la va rodando por el dibujo, pero sigue resultándole complicado. Manifiesta las categorías RE1 y RE2 al identificar las caras en el desarrollo y utilizar elementos de posición relativa entre objetos.

## 6 Resultados: Capacidad Visual

Sujeto	Respuesta
S3	<i>(la goma) ¿La puedo coger?</i>
I1	<i>Sí puedes.</i>
S3	<i>Así es más fácil... Ésta va aquí. Es que lo he puesto mal. Esto es B.</i>
I2	<i>¿Qué te ha indicado que estaba mal?</i>
S3	<i>Porque he puesto el C en otro lado. El punto C va aquí, entonces éste tiene que ser B, porque la línea tiene que pasar por aquí.</i>

Identifica las líneas como intersección de dos caras (RE1) y considera la dirección de las líneas, manifestando correctamente la categoría PE1, pero el hecho de depender de la goma en sus razonamientos le hace que no pueda relacionar directamente el cubo mostrado con el desarrollo, pues necesita el paso intermedio de buscar el camino en la goma. Más que ayudarlo, en este caso le dificulta la tarea pues no relaciona bien el cubo con la goma utilizada.

Sujeto	Respuesta
I2	<i>¿Qué has tomado?, ¿La orientación de la línea?</i>
S3	<i>Claro, el punto. El punto C éste.</i>
I2	<i>Le has dado un sentido a la línea.</i>
S3	<i>Sí.</i>
I1	<i>Como nos interesa la estrategia, una vez que tengas las caras puestas, ¿qué es lo que ibas a buscar antes? Una vez que tienes las caras localizadas...</i>
S3	<i>Pues... hay una línea que pasa de A a B. Pero es que hay que conectar esto con esto. Porque si no estaría señalada esa línea. Los nombres de las caras están mal ahora mismo.</i>
I1	<i>Más que que lo hagas, nos interesa la estrategia que has pensado. Y una vez que tuvieras las caras localizadas, ¿qué ibas a hacer?</i>
S3	<i>Seguir las líneas por aquí.</i>
I2	<i>Utilizando...</i>
S3	<i>Viendo cuál es la que está entre A y B, por ejemplo y la señalo aquí.</i>
I1	<i>Una vez que tengas dos caras, las identificas.</i>
S3	<i>Por ejemplo, aquí A y B, buscaría cuál está entre A y B. Lo busco aquí y si me es muy difícil lo sigo por detrás con la goma.</i>

En la sesión 3 el alumno destacó por no manifestar en ninguna ocasión la necesidad de utilizar elementos del entorno (DE), pero en esta actividad el uso de la goma de borrar como elemento para apoyar sus argumentaciones ha supuesto un impedimento para valorar la visualización que utiliza. Como en la sesión, el alumno manifiesta correctamente la habilidad Percepción de la posición en el espacio y de manera incompleta la Percepción de las relaciones espaciales al confundir elementos tanto en el desarrollo como en el objeto utilizado (E5).

### **Conclusión de la entrevista a S3**

S3 obtuvo la peor puntuación en el test PMA y una muy alta en el DAT. En relación a sus compañeros, su uso de la visualización y su porcentaje de corrección es medio. La entrevista detecta que la causa de la baja puntuación en el test PMA es debido a la lentitud con la que resuelve la tarea y los errores cometidos al no manifestar de manera correcta la habilidad de Discriminación Visual.

El alumno ha manifestado todas las dificultades de comunicación de las argumentaciones visuales. En la entrevista se observa que el carácter introvertido del alumno le dificulta su comunicación. Resaltamos que pese a destacar en la sesión 3 por no presentar la dificultad de necesitar utilizar a elementos del entorno, ésta adquiere un protagonismo especial en la entrevista. Necesita girar el test presentado y utilizar una goma de borrar para realizar la actividad del camino por lo que podemos deducir que en las sesiones ha podido utilizarla pero no ha sido registrada.

En la entrevista se confirma las habilidades de visualización manifestadas en las actividades. Si bien manifiesta todas las habilidades, el porcentaje de corrección medio obtenido en las sesiones puede verse reflejado en sus manifestaciones tanto correctas (Conservación de la percepción, Figura Contexto Percepción de la posición en el espacio) como incompletas (Percepción de las relaciones espaciales, Discriminación Visual). Se vuelve a detectar el error de confundir elementos de contenido matemático (E5) que es el que más cometió en las sesiones 2 y 3.

### **6.3.4 Entrevista S4**

#### **Caracterización visual**

Este alumno presentó una puntuación muy alta en los dos test (centil 96 en el PMA y 99 en DAT) y su puntuación en el test de Raven lo sitúa en el centil 90. Según la clasificación debida a los indicadores V y CV es un alumno visualizador con un porcentaje de corrección alto, es decir, ha utilizado la visualización en un porcentaje alto de ocasiones con un grado de corrección alto respecto a sus compañeros. En la

## 6 Resultados: Capacidad Visual

prueba de selección obtuvo la nota más baja y en P2 manifestó una estrategia visual al cuadricular el rectángulo para calcular las distintas áreas.

Sus datos relativos a habilidades, errores y dificultades en el análisis retrospectivo aparecen en las tablas 6.93, 6.94, 6.95 y 6.96:

	Indicadores por habilidades Incompletas y Correctas									
	FCI	FCC	CPI	CPC	PEI	PEC	REI	REC	DVI	DVC
Sesión 1	15	40	0	15	0	15	0	0	5	15
Sesión 2	4	30	0	10	0	10	0	20	4	8
Sesión 3	4.4	4.4	0	4.4	2.9	7.4	4.4	17.7	1.5	1.5

Tabla 6.93: Datos relativos a habilidades de S4 obtenidos en el análisis retrospectivo.

	Porcentaje de Errores				
	E1	E2	E3	E4	E5
Sesión 1	0	10	20	10	10
Sesión 2	4	8	4	0	24
Sesión 3	2.9	0	0	8.8	17.7

Tabla 6.94: Datos relativos a errores de S4 en el análisis retrospectivo.

Sesión 1				Sesión 2				Sesión 3				Dificultades sesión 3			
Rend	V1	V2	E	Rend	V1	V2	E	Rend	V1	V2	E	DT	DE	DC	DR
<u>80</u>	4	<u>17</u>	10	56.3	1.6	<u>16</u>	8	<b>41.2</b>	<b>2.7</b>	<b>7</b>	5.9	11.8	5.9	<b>5.9</b>	5.9

Tabla 6.95: Indicadores de S4 en las tres sesiones.

V1	V2	V	CV
2.7	<u>13.2</u>	<u>16</u>	<u>0.8</u>

Tabla 6.96: Indicadores globales de S4.

De estos datos destacamos:

- De manera global, S4 es un alumno que destaca por el uso correcto de la visualización (un porcentaje algo de visualización correcta y bajo de visualización incompleta). Además su grado de corrección al utilizar la visualización es alto.
- En todas las sesiones el porcentaje de manifestaciones correctas de todas las habilidades fue igual o superior al de las incompletas.

- El porcentaje de errores en la sesión 3 fue inferior al de la sesión 1 para los E2, E3 y E4 y aumentó para E1 y E5. El error que cometió con un porcentaje más alto fue E5 en la sesión 3.
- En la sesión 1 destaca por su alto rendimiento y por el uso correcto de la visualización.
- En la sesión 2 también presenta un alto porcentaje de manifestaciones correctas de la visualización.
- En la sesión 3 obtiene un bajo rendimiento y presenta un porcentaje alto de manifestaciones incompletas de visualización y bajo de manifestaciones correctas. En esta sesión reflejó un alto porcentaje de dificultades de comunicación de las argumentaciones visuales al verbalizar los procesos mentales que utiliza en sus razonamientos.
- En la sesión 1 participó en el grupo E y en las sesiones 2 y 3 en el grupo 3, que era el de los alumnos con puntuación muy alta en el test PMA.

Los datos recogidos en el experimento de enseñanza relativos a las actividades de la entrevista se presentan en la tabla 6.97:

	Rend.	FC1	FC2	CP1	PE1	RE2	E1	E3	E5		DC
E_1_2	1	1	2					1			
E_2_6	0		1				1			NJ	
E_3_6_3	0				2	1			1	DP	
TP_3_6				2							1

Tabla 6.97: Registros de S4 en las actividades de la entrevista, durante las sesiones (*NJ= No justifica, DP=Dibujo en perspectiva*).

Previamente a la entrevista, destacamos que presenta la puntuación más alta en los dos test, no fallando ningún ítem en el test DAT. En la sesión 2 trabajó muy bien en grupo, especialmente con otro compañero, utilizó dibujos y es el primer alumno en construir el puzle de la pirámide y los tetraedros de lados 2 y 3. En varias de sus respuestas dice que los tetraedros rellenan el espacio.

## 6 Resultados: Capacidad Visual

### Actividad E-4-1

Falló en los ítems 9 y 15 del test PMA y no contesta desde el 16 al 20. Recuerda rápidamente las instrucciones del test y al finalizar la entrevista afirma que ha disfrutado completando los test y que la dificultad que encuentra es por el tiempo de realización. Su comportamiento en los ítems seleccionados es el que se muestra a continuación (Tabla 6.98):

S4	Ítem 3	Ítem 7	Ítem 9	Ítem 11	Ítem 15
Correctas	A,D	A,C,E	A,B,E	A,B,C	A,B,E
TEST	A,D	A,C,E	A,C,E	A,B,C	A,B
Entrevista	A,D	A,C,E	A,B,E	A,B,C	A,B,E

Tabla 6.98: Respuestas de S4 a los ítems seleccionados en la entrevista.

Acierta todas las respuestas, es eficaz y se muestra poco expresivo, afirmando que el ítem que le resulta más difícil es el 11 por las propiedades de la figura. La estrategia que utiliza es girar la muestra para obtener las demás, manifestando correctamente las destrezas CP1 (criterios de igualdad por giros) y RE1 (elementos de posición relativa entre objetos), pero tiene dificultad para verbalizar los procesos mentales que está utilizando (DC):

Sujeto	Respuesta
S4	<i>Pues girarlo.</i>
I1	<i>Girarlo</i>
S4	<i>Haciendo así.</i>
I2	<i>¿Cuál giras, la muestra o las respuestas?</i>
S4	<i>La muestra.</i>
I2	<i>¿Ya? ¿Cuál te ha resultado más sencilla, la más difícil?</i>
S4	<i>Pues, la más difícil el 11.</i>
I2	<i>¿Por?</i>
S4	<i>No sé, como está cruzada la línea así... El más fácil el 9.</i>

Su comportamiento en la entrevista confirma su alto rendimiento en esta tarea, manifestando correctamente las habilidades de Conservación de la Percepción y Percepción de las relaciones espaciales y no cometiendo ningún error en la realización de los ítems. Presenta dificultades para verbalizar los procesos mentales que utiliza.

**Actividad E-4-2**

En la sesión 1, el alumno había presentado la argumentación A en la que hace referencia al procedimiento de obtención de la estructura, pero se limita a razonar sobre la estructura concreta que ha conseguido (E3). Manifiesta correctamente la destreza FC2 al dibujar correctamente todos los elementos de la estructura utilizada y de manera incompleta FC1 al no utilizar el proceso de formación de manera completa.

No recuerda el argumento que expuso en la sesión y entiende rápidamente las argumentaciones, pero le cuesta verbalizar los procesos mentales que utiliza (DC) y cambia en varias ocasiones el orden de preferencia de las argumentaciones.

Sujeto	Respuesta
S4	<i>Primero la E, después la A, después la D, la C y la B (...)</i>
I1	<i>(repetiendo S4) La E, A, D, C y B. ¿Por qué?</i>
S4	<i>Pues no sé. La E, aleatoriamente, así por suerte, me gusta más hacerlo que tener que buscar algo así</i>
I1	<i>¿Consideras por ejemplo que la E es completa, bien hecha?</i>
S4	<i>No, pero...</i>

Su orden de preferencia es E>A>D>C>B y encuentra similitudes entre las estrategias B y E que son relativas al procedimiento de obtención de la estructura. No identifica ningún error en ellas y no hace referencia al error cometido en E al no discutir todos los casos posibles (E2), pero reconoce la importancia de utilizar un procedimiento general que sirva para todos los casos, haciendo referencia al E3 que presentaba la argumentación B. Manifiesta la categoría FC2 y presenta dificultades para comunicar sus razonamientos (DC):

Sujeto	Respuesta
I1	<i>¿Por qué consideras mejor la E que la B, por ejemplo?</i>
S4	<i>Pues... en la E no pone directamente los círculos, tienen que coincidir a la fuerza los círculos. Que pone en la siguiente colocación, y la siguiente... que es aleatoriamente, que no es el primero ocupa tal, el segundo ocupa tal.</i>
I1	<i>¿Y que sea aleatorio lo consideras tú mejor?</i>
S4	<i>Sí</i>
I1	<i>¿Cómo que vale más para un caso general o por qué?</i>
S4	<i>No sé, lo veo mejor.</i>
I2	<i>¿Qué has interpretado de aleatoriamente?</i>
S4	<i>Que la primera no la pones... que no la pones de una forma fija directamente como... sino que la vas poniendo como crees que es.</i>
I2	<i>Como crees que es...</i>

## 6 Resultados: Capacidad Visual

S4	<i>O sea...</i>
I1	<i>¿Quieres dibujar o algo?</i>
S4	<i>No. Que no piensas primero lo voy a hacer así. Sino que empiezas haciéndolo y después te va saliendo.</i>

Al igual que en la sesión, el alumno manifiesta correctamente la habilidad Figura Contexto, se detecta la dificultad de verbalizar los procesos mentales que utiliza (DC) y es necesario insistirle para que exprese sus razonamientos. Utiliza como criterio de preferencia en las argumentaciones que el procedimiento constructivo sea lo más general posible y hace alusión al error de limitarse a razonar sobre casos concretos, que fue el que cometió en la sesión.

### Actividad E-4-3

Aunque en la sesión no contestó a esta pregunta, en otras actividades afirmó que los tetraedros rellenaban el espacio haciendo alusión a que las caras teselan el plano. En la entrevista confía mucho en sus imágenes mentales y afirma que no necesita dibujar, manifestando RE1. No tiene clara la respuesta y tiene dificultad en describir las representaciones que utiliza (DR) y, aunque en ocasiones utiliza las manos para acompañar sus razonamientos, no describe ninguna figura con ellas.

Sujeto	Respuesta
S4	<i>Pues coges la figura, las vas poniendo una al lado de la otra y si no se quedan huecos, rellena el espacio.</i>
I1	<i>¿Y lo hace el tetraedro?</i>
S4	<i>Sí. ¿No?. Sí.</i>
I1	<i>¿Te los imaginas colocados y te caben todos bien?</i>
S4	<i>Sí.</i>
I1	<i>¿Sí?</i>
I2	<i>¿No te hace falta ni dibujar?</i>
S4	<i>No.</i>
I2	<i>¿Sabes cómo los colocas?</i>
S4	<i>Uno al lado del otro, procurando que no queden huecos.</i>
I2	<i>¿Qué imagen te sale cuando rellenas? ¿Cuántos has puesto juntos?</i>
S4	<i>Pues tres o cuatro.</i>
I2	<i>¿Qué figura sale?</i>
S4	<i>Como si los pusieses así juntos.</i>

Comete E5 al confundir las definiciones de tetraedro y pirámide cuadrangular y se detectan dificultades en la terminología (DT), para describir las representaciones

visuales utilizadas (DR) y en la necesidad de utilizar referencias a objetos del entorno (DE).

Sujeto	Respuesta
S4	<i>Los tetraedros, a ver si estoy pensando en los que no son, ¿los tetraedros cuáles son?</i>
I1	<i>Dibújate un tetraedro, a ver lo que estás pensando que es un tetraedro.</i>
S4	<i>Aquél del azucarillo que pusimos así.</i>
I1	<i>Ése.</i>
S4	<i>Pero ese no era un ejemplo... ése era de tetrabrick, cuando estuvimos hablando... (Dibuja un tetraedro). ¿Es ése?</i>
I2	<i>Sí</i>
I1	<i>Dibújalo a ver.</i>
S4	<i>A ver. Como así, es que no.. como una cosa así.</i>

Al identificar el tetraedro en el material manipulativo dice que no rellena el espacio y, pese a tener un tetraedro en la mano, cuando se pone a pensar mira al frente sin hacer alusión a él. Manifiesta la categoría RE1 al utilizar elementos de posición relativa entre objetos, pero sigue sin poder justificar sus argumentos pues duda si se completan los huecos. Razona sobre lo obtenido con el material manipulativo (E3) y no intenta hacer ningún razonamiento abstracto sin basarse en las piezas, manifestando la dificultad de verbalizar los procesos mentales que utiliza (DC):

Sujeto	Respuesta
S4	<i>Pues porque si pones dos juntos, no cabe otra así. No puedes rellenar el espacio que queda entre los dos.</i>
I2	<i>¿Cómo estás pensando ponerlos juntos?</i>
S4	<i>Uno aquí, otro aquí y el que entra así...</i>
I2	<i>Estás pensando que apoyen los dos en el plano.</i>
S4	<i>Es que si lo pones así... pues uno aquí y otro aquí... tampoco.</i>
I2	<i>¿Por?</i>
S4	<i>Porque es como si... es lo mismo... pones uno aquí y otro aquí y se sigue quedando un hueco.</i>
S4	<i>(se le entrega otro tetraedro). Pues eso, este hueco no lo rellenas. Si lo pones así, cuando pones otro, se va a quedar otro hueco aquí. Tampoco lo va a rellenar. Yo que sé. (...) Poniendo otro aquí encima. Se quedaría entre éste y éste. Que se cae.</i>
I1	<i>Se cae. Te va a dar I2 más.</i>
S4	<i>Pues éste. Se queda eso. Vale. Pues entonces, sí. ¿No se queda algo?</i>

El alumno diferencia entre el relleno del espacio usando el modelo del cubo y el relleno del espacio mediante zuecos unidos por sus caras triangulares, manifestando FC1, FC2, PE1 y DV1 pero tiene dificultad para describir las representaciones que utiliza (DR). Se

## 6 Resultados: Capacidad Visual

siente bloqueado, pero a la vez que razona es capaz de resolver el puzle de la pirámide, manifestando correctamente RE1 al analizar los encajes de las piezas.

Sujeto	Respuesta
S4	<i>Pues... en el azucarillo ése que lo ibas poniendo uno debajo del otro... pero tampoco rellena porque se quedaría hueco. Es que lo rellena si coges como una caja, pues no lo rellena porque se queda hueco, pero si lo vas poniendo así en tiras, pues sí.</i>
I2	<i>¿Estos también?</i>
S4	<i>Esos, si lo vas poniendo así... porque arriba no puedes poner ninguno. Pero si después los vas haciendo... así, puede que sí.</i>
I2	<i>Lo que a mí me hace dudar es en qué se diferencian y parecen el azucarillo y éste.</i>
S4	<i>Pues... Las caras son triángulos. Pero éste tiene una cara abajo... No sé, es lo mismo. No sé, en nada.</i>

El alumno no hace alusión a los argumentos de medidas de ángulos expuestos en la sesión, pero es eficaz en la construcción del puzle y recuerda las piezas que rellenaban el espacio. Basa sus argumentaciones en sus imágenes mentales y en lo obtenido a partir del material manipulativo, manifestando E3 al limitarse a los casos concretos obtenidos y E5 al confundir las definiciones de los objetos matemáticos. Manifiesta las habilidades Percepción figura-contexto, Percepción de la posición en el espacio, Percepción de las relaciones espaciales y Discriminación visual y presenta todas las dificultades de comunicación de las argumentaciones visuales analizadas (DT, DE, DC y DR).

### Actividad E-4-4

En la sesión dibuja en una de las caras del desarrollo una perspectiva tridimensional del cubo para identificar las caras, que borra en su hoja de respuestas. Manifiesta correctamente las destrezas PE1 (orientación de las caras) y CP1 (criterios de igualdad haciendo referencia a las perspectivas) y de manera incompleta la destreza RE2 (identificar los elementos en el desarrollo) al cometer E5, confundiendo lados del camino.

En la entrevista utiliza una estrategia interesante ya que la presentación visual que utiliza le permite compartir la cara de arriba en el desarrollo y en el cubo, lo que le

facilita el reconocimiento de las caras, manifestando correctamente RE2. Utiliza otra representación de un cubo girado respecto al anterior que es el que utiliza para relacionarlo con el desarrollo. Manifiesta correctamente las destrezas FC2, RE2 y CP1, pero tiene dificultades para verbalizar los procesos mentales que utiliza (DC) y utiliza las manos para acompañar sus explicaciones del giro del cubo (DE).

Sujeto	Respuesta
S4	<i>Como si fuese una... algo que lo cubre. Lo vas poniendo y lo vas siguiendo.</i>
I2	<i>¿Qué relación tiene ése cubo con éste?</i>
S4	<i>El mismo, pero visto más de cara. Ésta es la cara de arriba, es como si lo hubieses cogido y lo hubieses hecho así.</i>
I2	<i>Ajá. Has dibujado un cubo y luego lo intentas relacionar con éste</i>

Coloca letras en las caras del desarrollo e identifica el lado que comparten, y coloca las letras ya orientadas en las caras del cubo auxiliar girado que utiliza, manifestando PE1 y RE1.

Sujeto	Respuesta
S4	<i>Pues si dibujas las letras en éste que está aquí hecho y después las dibujas en el mismo cubo, pero cómo se quedarían. O sea, si está así, la B se quedaría mirando para abajo, entonces, para donde está mirando la letra. Sería la línea en la que se quedaría marcada. Entonces, por ejemplo, la B si está mirando para acá, al lado que está pintado, pues el lado que está pintado sería ése.</i>
II	<i>Aquí te has imaginado este cubo, pero lo estás viendo desde esta perspectiva. Y ésta es la línea ésta de aquí y ésta es la línea de aquí. ¿Entonces, estás cómo esto montándolo aquí?</i>
S4	<i>Sí, montado.</i>
II	<i>¿Esto lo montas, aquí?</i>
S4	<i>Sí. Claro. Y si es paralelo, también es más fácil. Por ejemplo la C. Este lado de aquí está con éste. Este lado sería éste.</i>

El alumno genera imágenes mentales al imaginar que el desarrollo “cubre” el cubo que ha dibujado sobre una de las caras y manifiesta correctamente las habilidades detectadas en la sesión (Conservación de la percepción, Posición en el espacio y relaciones espaciales) además de la Percepción de la figura-contexto. En la entrevista no comete el error de la sesión de confundir lados del camino, pero presenta dificultades relativas a la necesidad de acompañar sus explicaciones con movimientos (DE) y a la descripción de las representaciones visuales utilizadas (DC).

### Conclusión de la entrevista a S4

S4 es un alumno que presenta unas puntuaciones muy altas en ambos test y la entrevista confirma el alto rendimiento al resolver las tareas relacionadas con los mismos. Además, respecto a sus compañeros, tras el análisis retrospectivo se observa que es un alumno que obtuvo un porcentaje alto tanto en el uso de la visualización como en el grado de corrección. Afirma que le gustan los test y el trabajo manipulativo y es rápido y eficaz al resolver las tareas propuestas en los test y en los puzles.

Su uso correcto de la visualización en las dos primeras sesiones y su alto rendimiento en la primera, contrasta con el bajo rendimiento y un uso incompleto de la visualización en la sesión 3, en la que se detectan dificultades de comunicación de sus argumentaciones visuales.

El alumno manifiesta en la entrevista un uso correcto de todas las habilidades de visualización mostrando riqueza de estrategias visuales. Se observa que confía en las imágenes mentales que genera y en los resultados que obtiene a partir de los materiales manipulativos y se detecta que es consciente del error que comete al limitarse a razonar sobre casos concretos (E3). También comete errores por confundir definiciones y propiedades de objetos matemáticos (E5) y se detectan dificultades para comunicar sus argumentaciones, manifestando todas las dificultades de comunicación analizadas.

### 6.3.5 Entrevista S5

#### Caracterización visual

Es un alumno seleccionado por presentar una puntuación alta en el factor espacial del PMA (centil 73) y media en el DAT (centil 75). Su puntuación en el test Raven lo sitúa en el centil 58. Según los indicadores V y CV se clasifica como un alumno visualizador con un porcentaje de corrección medio. Obtuvo la novena mejor nota en la prueba de selección y manifestó en P2 una estrategia visual al utilizar simetrías en su razonamiento para el cálculo de áreas.

Respecto al análisis retrospectivo, recogemos la siguiente información presentada en las tablas 6.99, 6.100, 6.101 y 6.102:

	Indicadores por habilidades Incompletas y Correctas									
	FCI	FCC	CPI	CPC	PEI	PEC	REI	REC	DVI	DVC
Sesión 1	20	45	0	15	0	20	0	10	10	10
Sesión 2	11.8	8.8	2.9	8.8	0	14.7	0	11.8	0	5.9
Sesión 3	2.1	4.3	0	0	2.1	19.6	2.2	17.4	0	4.3

Tabla 6.99: Datos relativos a habilidades de S5 obtenidos en el análisis retrospectivo.

	Porcentaje de Errores				
	E1	E2	E3	E4	E5
Sesión 1	0	40	10	10	0
Sesión 2	0	5.9	5.9	0	35.3
Sesión 3	4.3	0	4.3	13	13

Tabla 6.100: Datos relativos a errores de S5 en el análisis retrospectivo.

Sesión 1				Sesión 2				Sesión 3				Dificultades sesión 3			
Rend	V1	V2	E	Rend	V1	V2	E	Rend	V1	V2	E	DT	DE	DC	DR
70	<b>6</b>	<u>20</u>	<b>12</b>	65.6	2.9	10	9.4	50	1.3	9.1	<b>6.9</b>	<b>17.4</b>	8.7	<u>0</u>	<u>0</u>

Tabla 6.101: Indicadores de S5 en las tres sesiones.

V1	V2	V	CV
<b>3.4</b>	<u>13</u>	<u>16.4</u>	0.8

Tabla 6.102: Indicadores globales de S5.

De estos datos destacamos:

- De manera global, S5 ha destacado por un porcentaje bajo en el uso incompleto de la visualización y alto en el uso correcto. Además ha usado la visualización en un porcentaje elevado de ocasiones.
- Ha manifestado todas las habilidades de visualización de manera correcta en un porcentaje mayor o igual que las incompletas, salvo en la Percepción de la Figura-Contexto en la primera sesión.
- En los errores E2 y E3 obtiene un porcentaje más elevado en la primera sesión respecto a la tercera. En cambio, aumentan sus errores E1, E4 y E5 y el error que cometió en un porcentaje más alto es E2 en la sesión 1.

## 6 Resultados: Capacidad Visual

- En la sesión 1 destacó por un porcentaje bajo de la visualización incompleta y alto en la correcta, pese a que cometió muchos errores, y en la sesión 3 vuelve a destacar por los errores cometidos. Respecto a las dificultades de comunicación analizadas en la tercera sesión, manifiesta en un alto porcentaje la relativa a la terminología (DT) pero no manifiesta ninguna dificultad en verbalizar los procesos mentales (DC) y en describir las representaciones visuales utilizadas (DR).
- En la Sesión 1 forma parte del grupo E y en las sesiones 2 y 3 es el grupo 2 (puntuación alta en PMA).

Los datos de su ficha relativos a las actividades de la entrevista aparecen en la tabla 6.103:

	Rend.	FC1	FC2	PE1	RE2	DV2	E2	E5	
E_1_2	1	1	2			1	1		
E_2_6	0								NC
E_3_6_3	0			2	1			1	

Tabla 6.103: Registros de S5 en las actividades de las entrevistas, durante las sesiones.

Previamente a la entrevista destacamos que S5 es uno de los cuatro alumnos que obtuvo una puntuación en el test de Raven inferior al centil 75. Además obtuvo la puntuación más baja en el test DAT fallando en los ítems 35 y 38 y no contestando desde 39 hasta 40, lo que hace pensar que realiza la tarea con lentitud. En las sesiones destaca en sus respuestas por la riqueza de vocabulario y una expresión escrita muy cuidada, siendo incluso crítico con sus propias argumentaciones (“*Está fatalmente explicado al margen. No hay garantía de que no me haya equivocado*”). Es exigente en las definiciones y en los elementos de razonamiento.

### Actividad E-4-1

En el test PMA falló en los ítems 1, 2, 6, 7, 10 y 15 y no contestó desde el 16 al 20. En la entrevista afirma que este test le resultó pesado y no le gustó mucho, en cambio dice que le gustaron el de Raven y el DAT. Al recordarle en qué consistía éste último

recuerda que encontró tarde la estrategia de mover las piezas, refiriéndose a la destreza CP1. Además acompaña sus explicaciones con los movimientos de las manos.

Su comportamiento en los ítems seleccionados aparece en la tabla 6.104:

S5	Ítem 3	Ítem 7	Ítem 9	Ítem 11	Ítem 15
Correctas	A,D	A,C,E	A,B,E	A,B,C	A,B,E
TEST	A,D	A,C	A,B,E	A,B,C	A
Entrevista	A	A,C,E	A,B,E	A,B	A,B,E

Tabla 6.104: Respuestas de S5 a los ítems seleccionados de la entrevista.

Los dos errores que comete se deben a no señalar una de las respuestas correctas. La estrategia que utiliza es girar las piezas, manifestando las destrezas CP1 y PE2 y también utiliza elementos de posición relativa entre los objetos (RE1), manifestando DV2 al identificar semejanzas o diferencias entre las figuras.

Sujeto	Respuesta
S5	<i>Pues el razonamiento es... nada más que darle la vuelta a las figuras. Sería la A, tampoco la H. La siete... Éste es más fácil. Porque es como una erre. Es decir...</i>
II	<i>¿Podrías decir, más o menos, cómo lo has ido resolviendo? ¿Qué es lo que utilizas?</i>
S5	<i>Simplemente le das la vuelta a la figura de manera que lo vas viendo... y no sé. Luego es fácil ver los que están invertidos porque es como si fuese un espejo, entonces se nota ya de primeras. Eso te ayuda a eliminar más. Algunos te paras un poquito más y ya está.</i>

El alumno ha manifestado las habilidades Conservación de la Percepción, Percepción de la posición en el espacio, Percepción de las relaciones espaciales y Discriminación Visual y el error que ha cometido al no reconocer dos de las figuras equivalentes podría asociarse a una falta de exhaustividad para distinguir todos los casos posibles (E2) que es el error que cometió con más frecuencia en las sesiones.

#### Actividad E-4-2

El alumno presentó en la sesión la argumentación E en la que muestra los pasos para la obtención de la estructura requerida, manifestando correctamente la destreza FC2 al identificar los elementos de la estructura (incluso de una manera esquemática), y de

## 6 Resultados: Capacidad Visual

manera incompleta las destrezas FC1 (al mostrar un proceso de construcción incompleto) y DV2 (al establecer semejanzas entre dos casos de manera no exhaustiva) cometiendo el error relativo a no distinguir todos los casos posibles (E2).

En la entrevista lee los argumentos en voz alta y dice no entender bien A, recuerda su argumentación y reconoce que el argumento B es parecido pero más incompleto porque le falta explicar el procedimiento para justificar que al minimizar cada paso, se minimiza el proceso final. Hace alusión a no tener que ir calculando todas las posibilidades, pero lo hace de una manera imprecisa y, aunque se expresa de manera bastante correcta, manifiesta la dificultad de verbalizar los procesos mentales que utiliza (DC):

Sujeto	Respuesta
S5	<i>Ahora mismo no lo acabo de ver... (leyendo el B). El argumento parece más fácil, pero... Tal como lo estoy viendo, me parece un poco como el que usé yo, el de las fichas. Era que si ibas poniendo las fichas, la primera había que ponerla donde sea, porque sí. Entonces vas buscando la mínima posibilidad y... tampoco, aquí no lo explica, pero también había que decir que, aunque la vayas poniendo así al mínimo, después realmente no tiene que haber una combinación que sea más pequeña porque, es decir, que.. aunque tú no vayas calculando todas las posibilidades... pero conforme vayas haciendo la mínima, al final eso.. no habría otra manera de hacerla más pequeña porque se pueden superponer las fichas. Entonces, éste sí me gusta más, aunque le faltaría... no lo sé.</i>

En la discusión de las otras argumentaciones manifiesta correctamente RE1 y prefiere la E por aplicarse a casos más amplios y tener mayor poder de generalización, aunque reconoce que se está utilizando en un ejemplo sencillo y que habría que pensar si vale para estructuras más grandes. Afirma que habría que demostrar formalmente que el procedimiento de optimizar en cada paso lleva al final a la mínima estructura, siendo consciente de los elementos de razonamiento que está utilizando, pero no hace alusión al E2 cometido de no distinguir todas las posibilidades.

Sujeto	Respuesta
S5	<i>Yo me quedo con la E porque es la sencilla de ver y de entender. Porque se ve muy claramente.</i>
II	<i>¿Crees que está completa?</i>
S5	<i>Es que hay... Porque claro este ejemplo es muy sencillo, pero si lo ampliamos a éstas más grandes habría que pensar... que cada vez, demostrar formalmente que si va quitando el máximo.. quitando.. que si vas superponiendo el máximo... al final eso te va a dar la estructura mínima.</i>

	<i>Habría que demostrarlo. Así de primeras parece que sí.</i>
--	---

El alumno se toma tiempo para reflexionar y la ordenación que presenta es  $E > B > C > A > D$  utilizando como criterio de preferencia los argumentos relativos al proceso de construcción. Al comparar los argumentos B y E, no los diferencia por su validez matemática, sino porque el E usa representaciones gráficas.

Sujeto	Respuesta
I2	<i>Has comentado antes de B que no estaba completa, que faltaría algo. ¿Crees que la E completa lo que le falta a la B?</i>
S5	<i>Tendría que... (leyendo). Bueno, esto ya no es tanto matemáticamente como para entenderlo. Le completa que lo ves más gráficamente. Pero de alguna manera, no sabría decir bien si... Yo me quedo con la E, pero de todas maneras el argumento B no está tampoco demasiado mal. Quiero decir que sería válido, pero me gusta más el E.</i>

El alumno prefiere su propia argumentación y no reconoce en ella el error cometido de no distinguir todos los casos posibles (E2), prefiere los métodos constructivos y utiliza como elemento de claridad la utilización de representaciones gráficas. El alumno es consciente de utilizar correctamente distintos pasos de la argumentación (optimizar cada paso y considerar estructuras equivalentes), pero los expone de manera imprecisa, manifestando correctamente la habilidad de Percepción de las relaciones espaciales y detectándose la dificultad para verbalizar los procesos mentales que utiliza.

### Actividad E-4-3

El alumno no contestó a esta actividad en la sesión 2 y en la entrevista, de manera intuitiva, afirma que los tetraedros no rellenan el espacio. A continuación dibuja varios tetraedros en perspectiva unidos por las caras y se separa para observarlo, pero al presentarle el material manipulativo, dice que le sería útil si las piezas fuesen tetraedros. No tiene disposición a construir el tetraedro, intentando formar la base y probando con las piezas para que encajen en la parte superior, pero no tiene paciencia, desiste pronto, deja las piezas y prefiere imaginarlo. Cuando los profesores se lo forman, dice que intuitivamente sigue pensando que no rellena. Manifiesta RE1 al construir rápidamente otros y los coloca unidos por una cara para razonar sobre el conjunto y al entregarle

## 6 Resultados: Capacidad Visual

tetraedros combina cinco y ve que no encajan, haciendo alusión a los argumentos de ángulos tratados en la sesión.

Sujeto	Respuesta
S5	<i>¿Me da uno más? Hombre, se podría hacer... pero tampoco. Ahora tiene pinta de que sí... pero esto no encaja exactamente así. Yo sigo diciendo que no y... porque vamos a ver.... Hicimos estas figuras y vimos que no encajaban, entonces... el ángulo es 60, y el ángulo interior es 360. ¿Me equivoco o no?</i>

Para hacer referencia al ángulo diedro hace movimientos circulares con los dedos y señala en la figura, manifestando la dificultad DE. Al estudiar los posibles encajes de las piezas e identificar los ángulos, manifiesta RE1 y FC2 y se detectan las dificultades de comunicación relativas a la terminología (DT), a la verbalización de los procesos mentales (DC) y para describir las representaciones visuales utilizadas (DR). Intenta razonar viendo que los ángulos son divisores de 360 y no le basta comprobarlo con el material manipulativo.

Sujeto	Respuesta
S5	<i>Éste es 60 y la circunferencia es 360 y ¿divide a 360, 60? Sí. Pero... Me estoy volviendo griego, preguntándome sobre la naturaleza...</i>
I2	<i>Exprésalo en voz alta. ¿Qué pregunta te estás haciendo?</i>
S5	<i>Pues...No sé. Que sería que el pico éste, el ángulo que tiene, se supone.. es decir, está muy bien que tenga 60 por un lado, pero esto tiene que ir así. Entonces de alguna manera es como si fuera un ángulo tridimensional. Qué tontería... Y... Hombre... No, no se puede. Porque de alguna manera el ángulo éste de aquí, este ángulo que se va formando, se refleja en estos... se refleja en los lados de alguna manera. Entonces si... los lados estos, como hemos visto, no se puede formar una circunferencia del todo. La circunferencia... la figura ésta...del todo ni siguiera... Entonces no, yo creo que no.</i>

El alumno alude a los argumentos expuestos en la sesión relativos a los ángulos diedros y no tiene buena disposición a utilizar el material manipulativo, manifestando correctamente las habilidades Percepción de la Figura Contexto y Percepción de las Relaciones Espaciales y detectándose todas las dificultades de comunicación de las argumentaciones visuales analizadas.

**Actividad E-4-4**

En la sesión, numera las caras y las identifica pero parte del camino lo resuelve incorrectamente, manifestando correctamente la destreza PE1 y de manera incompleta RE2 al confundir lados del camino (E5).

En la entrevista acompaña con las manos la explicación de abrir el cubo para obtener su desarrollo (RE2) y reconoce que hay que relacionar el plano con el espacio y al ser complicado necesita trabajar sólo en el plano. Manifiesta las destrezas FC2 y PE1 al separar el cubo en dos trozos y nombra a las caras según su posición, detectándose la dificultad para verbalizar el proceso (DC):

Sujeto	Respuesta
S5	<i>Porque con éste lo hice un poco a mala leche, vamos a desplegarlo, vamos a abrirlo y... El tema sería, que además me salía el punto cada vez en un lado distinto. Vamos a ver... Claro, porque ya cuando me di cuenta, dije se puede venir por aquí y va acabar en este. Y con estos tenemos que formar el cubo completo entonces de alguna manera, cuando lo tengamos completo, ahí es cuando podemos ir viendo, hay que hacer una mezcla entre el plano y esto, y eso es más complicado. Entonces... sería... se forman como dos partes del cubo con éste, éste y éste y con éste, éste y éste... es complicado y se... Vamos a ver, vamos a dibujarlo. Algo así, entonces... le voy a poner nombre a las caras, mejor. Entonces, este sería A, B y C. Y el D se supone que está por aquí. Y entonces el E está en esta cara de aquí y el F tendría que estar abajo...</i>

Para localizar las caras, vuelve a dibujar el cubo con el camino con una perspectiva distinta que resulta de girar la cara superior para convertirla en la cara lateral izquierda, manifestando las destrezas RE1 y CP1. Para identificar las tres caras que no ve, dibuja otra perspectiva (CP2), lo que le permite identificar cada cara en el desarrollo plano (RE2), pero al no orientar las caras tiene dificultad para localizar los tramos del camino como intersección de dos caras y tarda tiempo en identificar las caras contiguas (RE1). Presenta la dificultad de verbalizar el proceso (DC) y acompaña con dibujos las representaciones que está utilizando.

Sujeto	Respuesta
S5	<i>Sí, el problema de este cubo es que como si fuera, una vez nos enseñaron el efecto óptico de la mitad del cubo, estos que se juntan... lo que pasa es que están juntos por ahí. El único problema es ése. El problema más complicado es juntar la cara F con la cara A porque lo demás más o menos. Y ahora no sé por dónde tirar por aquí. Porque... claro.. yo diría... vamos a ver. Si ésta</i>

## 6 Resultados: Capacidad Visual

	<i>es la cara A... que haría una cosa...</i>
<i>II</i>	<i>Te vas imaginando dónde se van cortando las caras con otras y ya está.</i>
<i>S5</i>	<i>Claro.</i>

Al igual que en la sesión, manifiesta de manera incompleta la habilidad de Percepción de las relaciones espaciales, volviendo a cometer E5 al confundir lados del camino por no orientar correctamente las caras. Utiliza varias perspectivas del cubo y lo divide en dos partes de tres caras para distinguir entre caras visibles y no visibles, manifestando correctamente las habilidades Percepción de la Figura-Contexto, Conservación de la Percepción y Percepción de la posición en el espacio. Es lento en la resolución y presenta la dificultad de verbalizar los procesos mentales que utiliza en sus razonamientos.

### Conclusión de la entrevista a S5

S5 obtiene una puntuación alta en el PMA, media en DAT y se clasifica como un alumno visualizador con un porcentaje de corrección medio. Su puntuación inferior al centil 75 en el test de Raven (factor utilizado en algunos estudios para detectar el talento) no le ha llevado a destacar por su bajo rendimiento en ninguna de las sesiones y en las actividades de la entrevista. Es lento en la resolución de las tareas y confiesa que tardó en encontrar la estrategia para resolver el test DAT.

En la entrevista el alumno manifiesta correctamente las habilidades Percepción de la Figura Contexto, Conservación de la Percepción y Percepción de la posición en el espacio y de manera incompleta la Percepción de las Relaciones espaciales y la Discriminación Visual. No tiene buena disposición a utilizar el material manipulativo y prefiere argumentar sobre casos generales, aunque lo hace de manera imprecisa. Se confirman los errores cometidos relativos a no distinguir todos los casos (E2) y confundir propiedades matemáticas (E5), pero pese a destacar por su alto porcentaje en la tercera sesión, se observa que el alumno es consciente de los errores cometidos al utilizar incorrectamente los elementos de razonamiento matemático (E4).

En las sesiones, el alumno destacó por la dificultad relativa a la terminología y por no manifestar las correspondientes a verbalizar los procesos mentales y a describir las representaciones. En cambio en la entrevista se detectan todas las dificultades de

comunicación de las argumentaciones visuales, pese a que el alumno es comunicativo, tiene riqueza de vocabulario y buena disposición a explicar sus razonamientos.

### 6.3.6 Valoración de las entrevistas

A partir de las entrevistas podemos obtener algunas apreciaciones generales sobre la visualización de los alumnos del experimento.

Apreciamos que los alumnos imaginan los giros de la muestra o de las figuras para escoger la respuesta de los ítems del test PMA, aunque también utilizan estrategias como eliminar directamente las discrepantes por tener simetrías, o comparar mediante movimientos con las figuras ya seleccionadas. Los errores cometidos se deben principalmente a no reconocer todas las figuras que son equivalentes. Mayoritariamente consideran más difícil el ítem 11, aludiendo a la complejidad de la figura. Un elemento que les facilita la resolución es identificar en las figuras elementos que les sean familiares, como letras. Esta estrategia específica se ha detectado en estudios sobre tareas en ámbitos similares (Strasser, Koller, Strauß, Csisinko, Kaufmann y Glück (2010).

Sólo dos alumnos prefieren su propia argumentación cuando se les pide que se posicionen al respecto. Los criterios para clasificarlas han sido la generalidad y la claridad de las argumentaciones, pero no aparece una preferencia mayoritaria por ninguna de ellas (Tabla 6.105). Las argumentaciones C y E son las mejor valoradas, pese a que en la C se limita a razonar sobre el caso concreto. La argumentación E describe el proceso de construcción de la estructura, pero no discute todos los casos posibles.

	A (de S4)	B (de S2)	C (de S3)	D (de S1)	E (de S5)
S4	2	5	4	3	1
S2	5	3	2	1	4
S3	5	2-3	1	4	2-3
S1	4-5	2	1	3	4-5
S5	4	2	3	5	1
<b>Total</b>	<b>20.5</b>	<b>14.5</b>	<b>11</b>	<b>16</b>	<b>13</b>

Tabla 6.105: Orden de preferencia en las argumentaciones de la actividad E\_4\_2.

## 6 Resultados: Capacidad Visual

Diferenciar entre argumentar y valorar una argumentación ha sido considerada en diferentes estudios. Battista (2007) concluye que los alumnos eran mejores reconociendo un argumento válido en matemáticas que al construirlo ellos mismos. Los criterios de preferencia aludiendo a la generalidad destacan las argumentaciones menos visuales o la distinción exhaustiva de todos los casos. Alumnos de ciencias que habían obtenido alto rendimiento en secundaria, al mostrarle demostraciones visuales y algebraicas de teoremas, prefirieron la prueba algebraica más dura (Vinner, 1989). La claridad se asocia al uso de diagramas explicativos y a la sencillez de las expresiones utilizadas, tanto por la terminología utilizada como por la síntesis de ideas. En estudios sobre la forma en que los alumnos superdotados conciben la elegancia y efectividad en la resolución de problemas geométricos, se detecta que consideran el principal criterio de elegancia el no usar más herramientas matemáticas que las mínimamente necesarias (Koichu y Berman, 2005).

En la actividad sobre el relleno del espacio, el material manipulativo les facilita contrastar hipótesis, pero para algunos alumnos se convierte en un obstáculo para buscar argumentaciones más generales. Ningún alumno responde de manera completa a si el tetraedro rellena el espacio ni reconoce el modelo de tetraedros y octaedros presentado en la sesión. Varios alumnos aluden al argumento expuesto en la sesión sobre que la medida de los ángulos diedros del tetraedro no es divisor de  $360^\circ$ , o reconocen la pieza del puzle que rellenaba el espacio.

Aparecen diversas estrategias utilizadas para identificar un camino en el desarrollo del cubo, a partir del trazado en un dibujo en perspectiva, como utilizar distintas perspectivas, manipular las imágenes mentales, fragmentar el cubo y nombrar las caras. En esta actividad los errores que mayoritariamente se comenten son los originados por una orientación incorrecta de las caras que determinan el camino, incluso en el caso de un alumno que necesita apoyarse en un objeto concreto.

De manera general, las entrevistas han confirmado la mayoría de los aspectos visualizadores observados en el análisis retrospectivo (Tabla 6.106).

	Análisis retrospectivo	Entrevista	Comparación
S1	Bajo en PMA, Medio DAT Visualizador Porcentaje de corrección bajo	Utiliza estrategias y representaciones visuales Correctas: FC, PE Incompletas: CP y RE Errores: E2 y E5 Todas las dificultades de comunicación	Confirmación
S2	Puntuación muy alta en los test Poco visualizador Porcentaje de corrección medio	Variedad de estrategias y representaciones visuales Correctas: FC, CP, PE, DV. Incompletas: RE Errores: E5 Todas las dificultades de comunicación	Diferencia: Distracción en las sesiones. Poca disposición a escribir sus razonamientos visuales
S3	Peor puntuación en test PMA. Muy alta en DAT. Visualización media Porcentaje de corrección medio.	Lento y necesidad de utilizar objetos. Correctas: FC y PE Incompletas: CP, DV y RE Errores: E3, E4 y E5 Todas las dificultades de comunicación	Confirmación
S4	Puntuación muy alta en los test. Visualizador Porcentaje de corrección alto.	Rápido, eficaz, uso de imágenes mentales y estrategias visuales. Correctas: CP, RE, FC, DV y PE Errores: E3 y E5 Todas las dificultades de comunicación	Confirmación
S5	Alta en PMA, media en DAT. Visualizador Porcentaje de corrección medio.	Lento y buena disposición a explicar sus argumentaciones. Correctas: FC, CP y PE Incompletas: RE y DV Errores: E2 y E5 Todas las dificultades de comunicación	Confirmación

Tabla 6.106: Comparativa del comportamiento entre las sesiones y las entrevistas.

Los alumnos que habían obtenido peor puntuación en el test, cometen errores al resolver en la entrevista la actividad seleccionada del test, son lentos en la tarea y presentan dificultades para hacerla. Los alumnos con puntuación más alta, presentan una gran riqueza de estrategias y son eficaces en la resolución de la tarea.

Los alumnos visualizadores muestran sus habilidades de visualización a lo largo de la entrevista. El alumno con porcentaje de corrección bajo, utiliza estrategias y representaciones visuales y manifiesta dos habilidades de manera correcta y otras dos de manera incompleta. El de corrección media, razona detenidamente y tiene buena disposición a explicar sus argumentaciones, manifestando de manera correcta tres habilidades y de manera incompleta dos. El alumno con un porcentaje alto de corrección

## 6 Resultados: Capacidad Visual

es rápido, eficaz, usa imágenes mentales y estrategias visuales y manifiesta todas las habilidades de manera correcta. Todos cometen dos de los errores estudiados.

El alumno clasificado como visualizador medio y con grado de corrección medio, es lento y presenta en varias ocasiones la necesidad de recurrir a objetos en sus razonamientos. Manifiesta de manera correcta dos de las habilidades y de manera incompleta tres de ellas y presenta tres de los errores estudiados.

Es en el alumno S2 donde los resultados de la entrevista difieren de lo observado en el análisis retrospectivo. En su caracterización visual contrastaba por un lado su alta puntuación en los test con su comportamiento en las sesiones donde había presentado un bajo uso de la visualización, con un porcentaje medio de corrección. En la entrevista se confirma su alta capacidad visual, ya que muestra una variedad de estrategias y representaciones visuales. Manifiesta correctamente cuatro de las habilidades y solo una de manera incompleta, cometiendo únicamente un tipo de error. Algunas circunstancias que pueden ayudar a explicar esta diferencia entre las sesiones y la entrevista son el que es el único alumno de un curso inferior y en las transcripciones se observa que a veces manifestó un comportamiento más infantil en las sesiones, distrayéndose con los compañeros, presentando poca disposición a presentar sus razonamientos y dejando sin contestar varias de las preguntas. En cambio en la entrevista, se esforzó por comunicar sus argumentos y mantuvo una actitud muy positiva para la realización de las tareas.

Independientemente de su capacidad y comportamiento visual en las sesiones, todos los alumnos entrevistados pusieron de manifiesto todas las dificultades de comunicación en sus argumentaciones visuales: desconocimiento de la terminología adecuada, necesidad de utilizar movimientos de su propio cuerpo o hacer referencia a objetos, dificultad para verbalizar los procesos mentales y para describir las representaciones visuales utilizadas. Esto induce a pensar que, aunque las dificultades sólo fueron registradas en la sesión 3, se habían manifestado al resolver las actividades de las otras sesiones.

En resumen, las entrevistas han confirmado en gran parte lo apreciado en el experimento de enseñanza, o nos han ayudado a percibir otras componentes (como las referidas a S2), que no habíamos tenido en cuenta en el estudio.

## 7 Conclusiones

Nuestra investigación ha pretendido profundizar en la relación existente entre talento matemático y visualización desde el diseño de unas prácticas docentes adecuadas para la atención a la diversidad de estos alumnos. El proceso de enseñanza iba enfocado a que desarrollaran su potencialidad específicamente en el ámbito de las habilidades de visualización, y se ha llevado a cabo mediante un enriquecimiento curricular que perseguía desarrollar el sentido espacial, entendido como elemento de competencia matemática.

El estudio de las habilidades puestas en juego por estos alumnos ha requerido indagar en los elementos que relacionan talento matemático y visualización, ya que la utilización de diferentes definiciones e instrumentos de medida induce a resultados aparentemente contradictorios entre los investigadores, que no mantienen una postura unificada sobre el papel que desempeña la visualización en el tratamiento del talento matemático. Hemos diferenciado entre la capacidad visual y el uso que hacen de la visualización para obtener información sobre el progreso de las habilidades de visualización a lo largo del proceso formativo, estudiando el papel que desempeñan tanto la enseñanza como la selección de actividades.

La evaluación de la visualización de estudiantes se ha abordado desde dos perspectivas. Una de ellas, muy extendida, considera la visualización como un constructo único y emplea test estandarizados para su medición. Otra perspectiva teórica considera la visualización como un conjunto de habilidades que pueden ser manifestadas por los estudiantes cuando se enfrentan a tareas que deben realizar en un contexto determinado. Desde el punto de vista de la educación matemática nos parece más apropiada esta segunda perspectiva para producir y predecir cambios en los estudiantes; pero esta afirmación necesita ser estudiada mediante la práctica. Esto es lo que hemos hecho empleando estudiantes con talento matemático y tareas de contenido geométrico. Para nuestro estudio hemos adoptado el enfoque metodológico de los estudios de diseño que se ha desarrollado en varias fases que tuvieron como inicio un estudio piloto, seguido de intervenciones de enriquecimiento curricular. En estas sesiones hemos ampliado el rango de observaciones que hicimos en la prueba piloto, registrando las habilidades puestas en juego en las participaciones orales, debates en grupo, entrevistas personales y

## 7 Conclusiones

observaciones realizadas por los investigadores, señalando las manifestaciones de las habilidades, distinguiendo las que son correctas de las que se realiza de manera incompleta. Para ello hemos determinando el rendimiento de los alumnos en las tareas y hemos registrado los errores y dificultades que se han apreciado cuando usan la visualización, lo que nos ha permitido comparar la evolución entre las diferentes sesiones.

El análisis retrospectivo ha aportado información del modelo teórico sobre el fenómeno de aprendizaje y resultados teóricos sobre el diseño instruccional (Molina, Castro, Molina, Castro, 2011). En nuestro caso el fenómeno de aprendizaje es la visualización manifestada a través del análisis de la evolución del uso de las habilidades a lo largo del experimento de enseñanza. Para el diseño instruccional hemos valorado el proceso de enseñanza llevado a cabo: enriquecimiento de contenidos y elementos de razonamiento matemático, actividades, trabajo en grupo, etc.

A partir de los resultados del análisis retrospectivo, extraeremos las conclusiones principales respondiendo a cada una de las preguntas que motivaron los objetivos de investigación. Estas conclusiones determinarán el estado de la conjetura que guió nuestro experimento de enseñanza para finalmente relacionar lo obtenido con otros estudios y determinar las aportaciones de nuestra investigación (Figura 7.1).

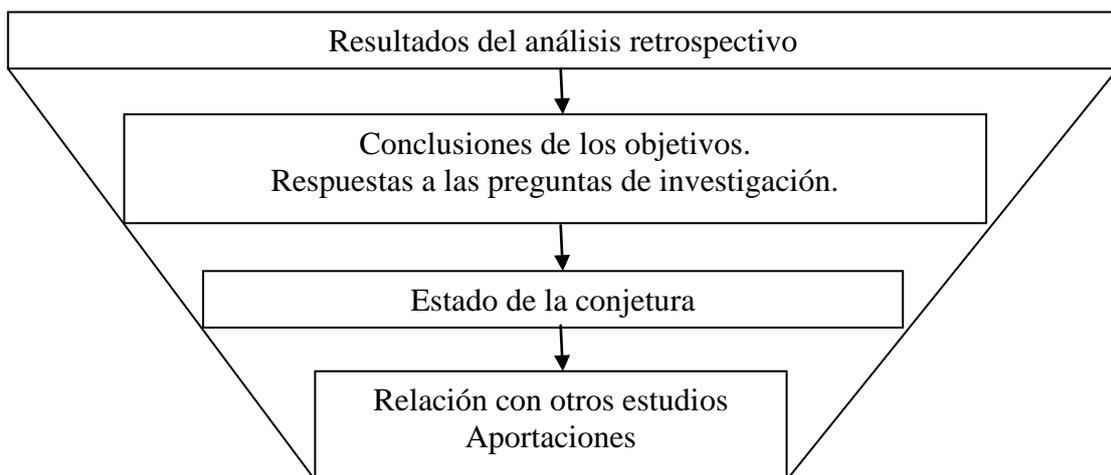


Figura 7.1: Esquema del proceso seguido en este capítulo de conclusiones.

En este capítulo se examinan las respuestas a las preguntas y objetivos planteados, se relacionan las aportaciones del estudio con los expuestos en las principales

investigaciones y se señalan las limitaciones de este trabajo y algunas de las cuestiones abiertas o perspectivas de investigación que pueden derivarse.

### **7.1 Respuesta a las preguntas y objetivos de investigación**

En los capítulos anteriores hemos presentado los resultados obtenidos en los distintos momentos de la investigación. Inicialmente analizamos el comportamiento de los alumnos con talento matemático en la prueba de selección, señalando su rendimiento y las estrategias visuales manifestadas en la resolución de las actividades propuestas. A través de la pasación de los test, obtuvimos la información relativa a su capacidad visual e inteligencia general, contrastando los resultados con un grupo control.

Consideramos relevante la información obtenida a partir de los resultados observados a lo largo del experimento de enseñanza. Partimos de las conclusiones de la prueba piloto relativas a las habilidades de visualización manifestadas y los errores cometidos. Siguiendo los pasos señalados en la metodología de investigación de diseño, dispusimos de los elementos necesarios para valorar el proceso de instrucción, tanto en el diseño de las sesiones como en el análisis de las mismas. Operativizamos el análisis de los datos para obtener indicadores para la manifestación y evolución de las habilidades de visualización, los errores cometidos y las dificultades de comunicación de las argumentaciones visuales. Finalmente, contrastamos los resultados obtenidos en el análisis retrospectivo con las entrevistas personales de cinco alumnos seleccionados según sus capacidades visuales.

A partir de estos resultados, pretendemos abordar los objetivos de investigación planteados y dar respuesta a las preguntas que los motivaron. Con la valoración de los objetivos, analizaremos la conjetura que ha guiado nuestro experimento de enseñanza y el grado de consecución de la finalidad de nuestra investigación de *diseñar buenas prácticas docentes para desarrollar la visualización de los alumnos con talento matemático*.

## 7 Conclusiones

Recogemos nuevamente aquí tanto el objetivo general como los objetivos específicos que nos planteamos para analizar, de modo separado, el grado en que han sido alcanzados:

**Objetivo general:** *Analizar las habilidades de visualización que ponen en juego los alumnos con talento matemático durante sesiones de enriquecimiento curricular.*

Este objetivo general se concreta en tres objetivos específicos:

**Objetivo específico 1:** *Caracterizar las capacidades visuales de un grupo de alumnos con talento matemático.*

**Objetivo específico 2:** *Diseñar una intervención que favorezca la manifestación y ejercitación de las habilidades de visualización.*

**Objetivo específico 3:** *Analizar la evolución de los alumnos a lo largo de las sesiones en cuanto a cómo se manifiestan las habilidades visualizadoras, tanto de manera individual como del grupo de alumnos con talento matemático, qué errores y dificultades tienen los alumnos al resolver las tareas formativas.*

Detallamos a continuación el grado y el modo en el que se han satisfecho los objetivos anteriores distinguiendo los relativos a la descripción de la capacidad y a su evolución a lo largo del proceso de enseñanza.

### 7.1.1 Capacidad de visualización de los estudiantes

El planteamiento del objetivo relativo al análisis de la capacidad visual de los alumnos con talento matemático viene motivado por dos preguntas (Preguntas a y b): *¿Cuál es la capacidad visual de alumnos con talento que asisten a los cursos del programa ESTALMAT? ¿Existe relación entre la capacidad visual que poseen y el uso que hacen de ella?*

Contestamos a estas preguntas a través de la valoración del objetivo *OI* anteriormente citado. El análisis de los test demuestra que los alumnos con talento matemático no poseen un déficit en sus capacidades visuales. Destacamos que los alumnos con talento

han tenido una puntuación significativamente superior respecto al grupo control tanto en el test de inteligencia general como en los factores espaciales de los test PMA (E) y DAT-5 (SR).

Para los alumnos con talento matemático, la escala espacial (E) del test PMA resulta un instrumento más discriminatorio del grado de visualización que la escala de relaciones espaciales (SR) del test DAT-5. Los alumnos con talento obtienen sus puntuaciones más altas en la escala SR del test DAT-5, seguidas de las obtenidas en el test RAVEN y las más bajas en la escala E del test PMA.

En las entrevistas personales se indaga en el comportamiento de los alumnos respecto a la tarea propuesta en el test PMA. La estrategia más utilizada es realizar mentalmente los giros de la muestra o de las figuras respuesta, y los errores más frecuentes son por no reconocer todas las figuras que son equivalentes, más que por reconocer alguna inadecuada. Los alumnos que habían obtenido peor puntuación en el test, cometen errores al resolverlo, son lentos en la tarea y presentan dificultades para hacerla. Los alumnos con puntuación más alta, muestran disponer de diversas estrategias y ser eficaces en la tarea.

En cuanto a la selección de los test para evaluar capacidades visuales, es reseñable que para los alumnos con talento, el orden de puntuación obtenido en los tres test es diferente que el de los alumnos del grupo control, si bien es en la escala SR del test DAT-5 en el que ambos grupos han manifestado menos dificultad. El grupo de control presenta menor puntuación en el test de Raven, aunque sin diferencias significativas con la escala E del test PMA. En cambio, el grupo con talento obtiene su menor puntuación en la escala espacial (E) del test PMA. De este resultado puede concluirse que al igual que el test de Raven es un buen indicador de la inteligencia general, la escala espacial (E) del test PMA resulta ser un instrumento que discrimina mejor que la escala de relaciones espaciales (SR) del test DAT-5 el grado de visualización de los alumnos con talento. Esta idea puede venir apoyada por la correlación encontrada en el grupo talento únicamente entre el test Raven y el test PMA en su factor espacial mientras que en el grupo control correlacionaban los tres test. Se refuerza la idea de que el grupo de talento es más homogéneo en inteligencia, existiendo diferencias entre algunas cualidades relacionadas con la visualización. La relación entre el test de Raven y la capacidad espacial (McGee, 1979; Silverman, 1995) apoya los resultados de los estudios

## 7 Conclusiones

cerebrales que detectaron una mayor activación asociada a las tareas que implican imaginación mental cuando los alumnos con talento matemático realizan el test de Raven (Desco *et al.*, 2009 y Desco *et al.*, 2011).

Respecto a la prueba de selección que determinó el grupo de alumnos con talento matemático, tanto la puntuación obtenida en el problema 2 (el único en el que los alumnos han manifestado estrategias visuales) como en la prueba completa no correlacionan con ninguno de los test utilizados. La única correlación existente entre la prueba de selección y los test visuales no aporta ninguna información sustancial, puesto que se da entre la escala SR del test DAT-5, que mide visualización en el espacio, y el problema 3, que se trataba de un problema esencialmente algebraico en el que no han manifestado visualización. Por esto y en base al análisis de las estrategias utilizadas por los alumnos en la resolución de los problemas de la prueba, consideramos que la capacidad de visualización no ha tenido gran influencia en el rendimiento de la prueba de selección y que los alumnos con talento han manifestado una mayor preferencia por los métodos no visuales. Esta reticencia al uso de la visualización ha sido señalada en diversos estudios (Harel y Dreyfus, 2009; Ho, 2008a; Presmeg, 1986a; Vinner, 1989; entre otros).

En el test de Raven, 19 de los 23 alumnos presentados de los alumnos del grupo talento obtuvieron una puntuación superior a 75, que es un indicador que se ha utilizado en otros estudios para seleccionar a los alumnos con talento. Los cuatro alumnos restantes se sitúan en el centil 58 y ocupan posiciones desiguales (9,15,19 y 20) en la prueba de selección. En nuestro estudio podemos utilizar conjuntamente la puntuación en el test de Raven y en la prueba de selección como indicadores del talento matemático, al medir, respectivamente, inteligencia general y características específicas de las tareas matemáticas. Si bien la relación entre la inteligencia general y la capacidad visualizadora puede deducirse de la correlación existente entre el test Raven y la escala especial (E) del test PMA, tanto en el grupo control como en el talento, el rendimiento de la prueba no correlaciona con ninguna de las escalas de visualización utilizadas en los alumnos con talento matemático.

Podemos concluir que la capacidad de visualización de estos alumnos, que está relacionada con su inteligencia general, no ha sido un factor que haya influido para ser seleccionados como alumnos con talento matemático. Esta baja relación entre la

aptitudes recogidas en test psicométricos y las características del talento matemático obtenidas a partir de la resolución de problemas propuestos en el proyecto ESTALMAT ha sido recogida en las investigaciones de Pasarín, Feijoo, Díaz y Rodríguez, (2004). Sin embargo contrasta con la elevada correlación entre los factores espaciales del PMA y la eficiencia en la resolución de los problemas encontrada por Díaz, Sánchez, Pomar y Fernández (2008) también a partir de los alumnos presentados al proyecto. Consideramos que una posible explicación de estos resultados es la influencia del tipo de problemas que afrontan los alumnos, ya que en la prueba de selección analizada las actividades no han demandado que los alumnos utilicen su capacidad visual.

La puntuación de los test visuales manifiesta un comportamiento desigual respecto a las manifestaciones de las habilidades y los indicadores globales de visualización. Existen correlaciones positivas y negativas de los tres test tanto con indicadores de visualización correcta e incompleta y no se muestra un comportamiento continuado respecto a cada habilidad a lo largo de las sesiones. *Parece que existe poca relación entre la capacidad visual manifestada en los test con las habilidades de visualización puestas en juego a lo largo de las sesiones.*

Esta observación puede confirmarse si tenemos en cuenta la clasificación de los sujetos según su puntuación en el test PMA, que ha resultado más discriminatorio respecto a la capacidad visual manifestada en los test, y el indicador global V como indicador del uso de la visualización a lo largo de las tres sesiones. Destacamos que, de manera general, el uso de la visualización que los alumnos manifiestan en las tareas propuestas no se corresponde con la capacidad visual registrada en los test. En este sentido resaltamos que sólo un alumno ha manifestado un elevado grado de visualización en los dos aspectos y que ninguno ha mostrado un nivel bajo en los dos. Además hay tres alumnos que muestran una capacidad visual muy alta en los test, pero en cambio pertenecen al grupo que ha manifestado las habilidades en menor grado. Otros tres, pese a puntuar bajo en el test visual, muestran un alto grado de manifestación de la visualización.

Podemos interpretar que la realización de las actividades de un test implican una habilidad específica o una determinada combinación de habilidades espaciales, mientras que las tareas matemáticas propuestas han sido más heterogéneas y han demandado más variedad en la puesta en juego de las habilidades. Se observa la mayor complejidad que

## 7 Conclusiones

implica registrar la visualización en los procesos de enseñanza (Bishop, 1983; Presmeg, 2006).

Por lo tanto, valoramos positivamente la consecución del objetivo O1 y sintetizamos lo obtenido a partir de ellos con dos conclusiones principales que responden a las preguntas (a y b) que lo motivaron:

- a) Los alumnos con talento matemático han mostrado una inteligencia y capacidad visual en los test significativamente superior a los alumnos del grupo control
- b) No ha existido una relación entre la capacidad visual detectada en los test y el uso que han manifestado de la visualización tanto en la prueba de selección como a lo largo de las tres sesiones de enriquecimiento.

### 7.1.2 Evolución de la visualización durante el proceso de enseñanza

El planteamiento de los tres objetivos relativos a la evolución viene motivado por las preguntas de investigación que clasificamos en tres bloques:

Diseño de la intervención: (Preguntas c, d, e, f y g) *¿Es necesaria la visualización para realizar determinadas tareas matemáticas? ¿Cuáles son las tareas que favorecen el uso de la visualización? ¿Cómo diseñar las sesiones de enriquecimiento para motivar el uso de las habilidades? ¿Qué contenidos y elementos de razonamiento visual son necesarios enriquecer? ¿Cómo coordinar los objetivos docentes e investigadores en la intervención?*

Registro del uso de la visualización: (Preguntas h, i, j y k) *¿Cómo registrar el uso de la visualización que hace un alumno? ¿Es posible detectar las habilidades, errores y dificultades que se ponen de manifiesto? ¿Cómo registrar el papel que ha ocupado la visualización en el rendimiento al realizar las tareas? ¿Cómo caracterizar a los alumnos según el uso que hagan de la visualización?*

Evolución de la investigación: (Preguntas l, m, n, p) *¿Cómo evaluar el proceso de instrucción? ¿Podemos comparar la visualización manifestada en las diferentes sesiones? ¿Es posible registrar la mejora en el uso de la visualización? ¿Qué papel ha*

*tenido la instrucción en la utilización de las habilidades de visualización y la superación de errores y dificultades? ¿Qué aspectos de la visualización son factibles de mejorar?*

Contestamos a estas preguntas a través de la valoración de los correspondientes objetivos:

*O2) Diseñar una intervención que favorezca la manifestación y ejercitación de las habilidades de visualización.*

Para el diseño de las sesiones, además del carácter investigador de recogida de datos, hemos mantenido el carácter docente. Las actividades planteadas se secuencian con el objetivo final de que los alumnos resuelvan un problema novedoso para lo que tienen que recurrir y definir conceptos matemáticos, empleándolos para argumentar. La secuenciación de actividades en el contexto geométrico les motiva a razonar utilizando la visualización, ya que no disponen de las posibles herramientas algebraicas o analíticas para resolverlas. En las actividades presentadas los conceptos matemáticos tratados y la visualización aparecen de manera funcional, se abordan contenidos que los alumnos no han tratado en el currículo y promueven al máximo la puesta en juego y el desarrollo de destrezas visualizadoras. Hemos ubicado nuestra investigación utilizando el enfoque didáctico de la investigación de diseño, concretamente el experimento de enseñanza, que nos ha ofrecido un marco teórico ajustado a nuestros objetivos.

Para llevar a cabo el experimento de enseñanza se han seguido las acciones requeridas correspondientes a la fase de preparación del experimento y experimentación, éstas últimas divididas en tres momentos: antes, durante y después de la intervención, que hemos descrito en los correspondientes momentos de planificación, desarrollo y análisis (capítulo 5). Cada sesión se ha dedicado al enriquecimiento curricular de un contenido matemático y de diferentes conceptos propios del lenguaje y razonamiento matemático. La metodología de investigación utilizada nos ha obligado a considerar en el diseño de las sesiones siguientes los resultados obtenidos en las anteriores, estableciéndose un proceso secuencial en el que existen importantes momentos de reflexión que afectan al diseño de las siguientes intervenciones. Nuestra investigación se ha desarrollado en tres fases, cumpliendo en cada una de ellas los requisitos necesarios para un experimento de enseñanza:

## 7 Conclusiones

1.- Arrancamos de un experimento piloto que consistió en impartir varias sesiones de enriquecimiento en cursos anteriores, en las que seleccionamos las actividades y analizamos sus resultados que nos llevaron a determinar la conjetura con la que se inicia el experimento de enseñanza.

2.- Realizamos el experimento de enseñanza que consistió en tres sesiones de enriquecimiento curricular de tres horas de duración cada una. Esta fase incluye a su vez seis etapas: 1) Planificación de la sesión 1, 2) implementación, 3) reflexión sobre la sesión 1 e implementación de la sesión 2, 4) implementación de la sesión 2, 5) reflexión sobre la sesión 2 e implementación de la sesión 3, 6) implementación de la sesión 3.

3.- Finalmente, realizamos entrevistas personales con alumnos seleccionados para contrastar los resultados obtenidos tras el análisis retrospectivo de los datos.

Para los resultados relativos al diseño instruccional, recogemos las conclusiones correspondientes al proceso de enseñanza llevado a cabo en las fases anteriores:

En la prueba piloto las actividades seleccionadas favorecieron que los alumnos manifestasen las habilidades de visualización y se considera enriquecedor el trabajo en grupo. Al presentarles actividades que exigen procesos de visualización, los alumnos con talento matemático estudiados, utilizaron estrategias visualizadoras. Aunque utilizan para argumentar estrategias visuales, lo hacen de manera incompleta e intuitiva, ya que razonan visualmente apoyándose en ejemplos concretos limitados. Se detecta la necesidad de trabajar técnicas de argumentación visual (contraejemplos, definiciones, caracterización de las propiedades, inducción, analogía, generalización, amplia gama de ejemplos...) para que puedan aplicarlas en la resolución de problemas.

En la primera sesión los alumnos utilizan su razonamiento visual, manifestando diferentes habilidades de la visualización, aunque se siguen detectando errores en su uso. De manera general, los alumnos responden a las expectativas de rendimiento en las tareas relativas a movimientos en el plano, lo que nos hace valorar positivamente el proceso de enseñanza diseñado, al cubrirse los objetivos específicos de la sesión. En las entrevistas personales apreciamos que sólo dos alumnos se reafirman al elegir como más apropiada la argumentación que emplearon, cuando se les plantea la actividad relativa a esta sesión, confirmándose que tienen dificultad para reconocer errores en

argumentaciones y para seleccionar de manera precisa entre las argumentaciones presentadas.

Para la sesión 2, se agruparon a los alumnos en grupos empleando la puntuación en el test PMA. A través de las tareas previstas se aprecia que utilizan razonamiento visual, manifestando habilidades de visualización. Además de los errores aparecidos en la sesión anterior, varios estudiantes utilizan incorrectamente analogías entre plano y espacio. Algunos tienen dificultades para comunicar sus argumentaciones relativas a objetos espaciales, tanto de manera oral como escrita. El rendimiento de los alumnos en las tareas relativas a la sesión responde a lo esperado, lo que lleva a valorar positivamente el diseño de la intervención, por considerar que se satisfacen los objetivos previstos para esta sesión. La utilización de material manipulativo sirve para clarificar conceptos abstractos y aportar mayor riqueza en la utilización de ejemplos visuales, cuando razonan sobre las propiedades de las formas que rellenan el espacio. En las entrevistas personales se comprueba que el material manipulativo ayuda a los alumnos para contrastar hipótesis y conjeturas lanzadas en la resolución de las actividades, aunque para algunos se convierte en un obstáculo, al razonar sobre elementos concretos en lugar de buscar argumentaciones más generales. Los alumnos no llegan a convencerse de manera bien fundamentada de que el tetraedro no rellena el espacio, aunque varios estudiantes aluden a que la medida de sus ángulos diedros les hace dudar de ello, y otros se conforman con reconocer una pieza del puzle como una forma que lo rellena, sin que ello muestre que han alcanzado a coordinar tetraedros y pirámides (u octaedros) como figuras complementarias para teselar.

En la sesión 3 se mantiene la organización de los grupos atendiendo a las puntuaciones del test PMA y se continúa con la dinámica de trabajo en grupo establecida en la sesión anterior. Los alumnos utilizan el razonamiento visual, manifestando habilidades de visualización cuando resuelven las tareas previstas. Además de los errores considerados en las sesiones anteriores, se aprecian dificultades para comunicar los argumentos visuales. De manera general, el rendimiento de los alumnos en las tareas relativas a la sesión responde a lo esperado y se valora positivamente la secuencia de actividades, al satisfacerse los objetivos específicos de esta sesión, que relaciona el trabajo en el plano y en el espacio. En las entrevistas personales se detecta posteriormente que han utilizado gran riqueza de estrategias, como la utilización de distintas perspectivas, la

## 7 Conclusiones

manipulación de imágenes mentales, fragmentar el cubo y nombrar las caras. Se detectan los errores más frecuentes.

Las actividades propuestas en las entrevistas personales y la selección de los alumnos entrevistados han permitido confirmar la mayoría de las apreciaciones sobre las habilidades visualizadoras y los errores observados en el análisis retrospectivo.

Consideramos que el procedimiento llevado a cabo para el diseño y desarrollo del experimento de enseñanza ha cubierto las exigencias que requiere esta metodología. Al alcanzarse los objetivos específicos abordados en cada sesión llegamos a la conclusión de que el enriquecimiento curricular de contenidos matemáticos y de otros conceptos ligados al lenguaje y razonamiento matemático ha satisfecho lo pretendido en el objetivo O2. Repasamos con más detalle las conclusiones respondiendo a las preguntas c, d, e, f y g:

- c) Los alumnos con talento matemático han empleado la visualización para resolver las tareas propuestas. La secuenciación de actividades en el contexto geométrico les lleva a razonar utilizando la visualización, ya que no disponen de herramientas algebraicas o analíticas para resolverlas.
- d) Los criterios utilizados para seleccionar las actividades han sido adecuados, ya que las actividades han promovido el uso de la visualización. Los conceptos matemáticos tratados aparecen de manera funcional, se abordan contenidos que los alumnos no han tratado en el currículo y promueven al máximo la puesta en juego y el desarrollo de destrezas visualizadoras.
- e) El seguimiento de un proceso secuencial con importantes momentos de reflexión y un cumplimiento detallado de las exigencias que la metodología de investigación exige para el experimento de enseñanza se han manifestado como criterios adecuados para diseñar sesiones de enriquecimiento que motivan la manifestación de las habilidades de visualización.
- f) Tanto los contenidos como los elementos de razonamiento visual que hemos seleccionado en las sesiones son adecuados para el enriquecimiento curricular, puesto que no aparecen en el currículo oficial, o aparecen en un nivel de menor profundidad. No hemos enseñado contenidos de cursos posteriores, sino que se han abordado los temas con un mayor nivel de abstracción y de complejidad y se ha favorecido el uso del pensamiento creativo.

- g) Los objetivos investigadores se han abordado de una manera coordinada con los objetivos docentes. En el diseño de las sesiones se ha mantenido la estructura de enriquecimiento de las sesiones del proyecto ESTALMAT y se han planteado las actividades secuenciadas para que los alumnos resuelvan un problema novedoso, siguiendo un esquema general para las tres sesiones en las que se planteaban actividades de definición, resolución y argumentación.

Consideramos que el proceso de enseñanza y las actividades propuestas han sido adecuadas para que los alumnos ejerciten la visualización (Hershkowitz, 1990), apoyando la idea de que determinadas estrategias de enseñanza favorecen la puesta en juego de habilidades visualizadoras (Kliapis y Tzekaki, 2011; Osta, 1987; Razel y Eylon, 1986; Tzekaki y Ikonou, 2009; entre otros).

El enriquecimiento curricular ha resultado una estrategia educativa beneficiosa para la atención de los alumnos con talento matemático estudiados ya que nos ha permitido abordar contenidos y elementos de razonamiento que van más allá del currículum (Blanco, Ríos y Benavides, 2004) y realizar ajustes metodológicos que en la revisión de la literatura se han considerado adecuados como plantearles retos (Barger, 2009; Freiman, 2006), interactuar entre ellos (Arocas, Martínez y Martínez, 2006) y utilizar juegos (Bishop, 1999) y problemas para justificar y discutir (Johnson, 2000), etc.

El entorno geométrico elegido ha puesto de manifiesto la relación entre los aspectos visualizadores y el aprendizaje de contenidos geométricos (Battista, 2007; Guillén, 2010; Gutiérrez, 1996) y se ha detectado que la visualización es una componente importante para el razonamiento geométrico de los alumnos (Clements y Battista, 1992; Presmeg, 1992; Wheatley, 1998). Consideramos que se favorece el uso de la visualización en el razonamiento geométrico cuando los contenidos tratados (movimientos en el plano, relleno del espacio, curvatura constante y dimensión) se presentan como medios para resolver problemas.

*O3) Analizar la evolución de los alumnos a lo largo de las sesiones en cuanto a cómo se manifiestan las habilidades visualizadoras, tanto de manera individual como del grupo de alumnos con talento matemático, qué errores y dificultades tienen los alumnos al resolver las tareas formativas.*

## 7 Conclusiones

Para examinar el logro de este objetivo atendemos a sus dos partes, detección de las habilidades de visualización de los sujetos, tanto de manera individual como en grupo, y estudio de su evolución a lo largo del experimento de enseñanza.

Los datos de nuestra investigación son las respuestas de los alumnos a las tareas planteadas durante las sesiones. Estos datos provenían de cuatro instrumentos: respuestas entregadas en las actividades escritas, grabaciones de audio de cada sesión y sus transcripciones, grabaciones de audio y vídeo de las entrevistas y sus transcripciones y observaciones de los profesores investigadores. Para poder analizar el proceso de visualización que experimentan los sujetos hemos operativizado el proceso y lo hemos hecho asequible al análisis. Esta forma de proceder nos ha permitido determinar variables e indicadores para determinar qué tipo de actividades motivan la manifestación de las habilidades, la persistencia de los errores y dificultades en tareas concretas, y establecer un diagnóstico para diseñar y evaluar el enriquecimiento curricular. Además nos ha permitido clasificar a los sujetos según el uso de la visualización, estableciendo tipologías que han sido analizadas en las entrevistas personales. Como conclusiones al procedimiento llevado a cabo para el registro del uso de la visualización, respondemos a las preguntas correspondientes h, i, j y k:

- h)** El uso de la visualización de los alumnos se ha registrado mediante el establecimiento de una correspondencia entre las respuestas y las habilidades de visualización. Esta relación se ha establecido a través de un sistemático procedimiento de operativización para establecer las unidades y categorías de análisis que se ha sintetizado en una tabla final de categorías correspondientes a cada una de las habilidades y generalizables a las tres sesiones.
- i)** El análisis de contenido ha permitido detectar las manifestaciones de las habilidades de visualización, los errores y las dificultades de comunicación de las argumentaciones visuales que se han puesto de manifiesto durante la intervención.
- j)** En la realización de tareas es factible analizar las estrategias visuales utilizadas, pudiéndose analizar el papel que ocupa la visualización en el rendimiento al realizar la tarea. La determinación de indicadores y variables tanto para el rendimiento como para el uso de la visualización nos ha permitido además establecer relaciones cuantitativas entre ambos.

- k) Las variables e indicadores que hemos definido determinan diagnósticos del uso de la visualización a nivel individual facilitando la comparación entre sujetos. Ha sido posible determinar clasificaciones de los sujetos según el uso de la visualización, estableciendo tipologías relativas al uso de la visualización, tanto de manera correcta como incompleta y al grado de corrección con el que la han manifestado.

A partir de estos registros hemos realizado un procedimiento para el análisis de los datos que hemos abordado en tres fases. Inicialmente hemos realizado un análisis descriptivo de los resultados globales obtenido por el grupo de alumnos a partir de las manifestaciones incompletas y correctas de cada habilidad y sus correspondientes categorías, los errores cometidos y las dificultades de argumentación detectadas. A continuación y para complementar lo anterior, hemos realizado un análisis estadístico para estudiar las diferencias y relaciones entre las variables en el que se ha tenido en cuenta el comportamiento individual de los sujetos respecto a cada uno de los indicadores. Finalmente se han realizado cinco entrevistas personales para confirmar y completar lo observado en las dos fases anteriores.

Del análisis destacamos que *los alumnos han manifestado en un porcentaje elevado las habilidades de visualización y las manifestaciones correctas han sido superiores a las incompletas en todas las sesiones*. La evolución de cada una de las habilidades ha sido diferente a lo largo del experimento de enseñanza:

**PERCEPCIÓN FIGURA-CONTEXTO (FC):** La han manifestado todos los alumnos en todas las sesiones, siendo las manifestaciones correctas superiores a las incompletas en todas las sesiones y el porcentaje de ambas va disminuyendo a lo largo del experimento de enseñanza. A partir de los datos globales extraídos de la suma de las tres sesiones, se observa que es la habilidad que más se ha manifestado tanto de manera incompleta como correcta. De un modo general, podemos decir que las manifestaciones incompletas se han debido principalmente a la categoría FC1 al argumentar sobre procesos de construcción a partir de estructuras menores y las correctas han sido mayoritariamente debidas al distinguir elementos dentro de una estructura mayor. No han existido correlaciones significativas entre las puntuaciones obtenidas en las tres sesiones en las manifestaciones correctas ni en las incompletas.

## 7 Conclusiones

**CONSERVACIÓN DE LA PERCEPCIÓN (CP):** La manifiestan todos los alumnos en las sesiones 1 y 2 (en la sesión 3 lo hace el 62,5%). Las manifestaciones correctas son superiores a las incompletas en todas las sesiones y el porcentaje de ambas va disminuyendo a lo largo del experimento de enseñanza (si bien no existen diferencias significativas para las incompletas entre las dos primeras sesiones). Es la habilidad de la que, de un modo global, menos manifestaciones incompletas se han registrado y es una habilidad que mayoritariamente se ha manifestado a partir de la categoría CP1 cuando los alumnos utilizan criterios de igualdad haciendo referencia a forma, tamaño, movimientos o perspectivas. Para esta habilidad sólo existe correlación positiva significativa entre las dos últimas sesiones para las manifestaciones incompletas.

**PERCEPCIÓN DE LA POSICIÓN EN EL ESPACIO (PE):** La manifiestan todos los alumnos en todas las sesiones y las manifestaciones correctas son superiores a las incompletas en todas las sesiones. No existen diferencias significativas en las puntuaciones obtenidas para las manifestaciones incompletas a lo largo de las tres sesiones, pero sí existen en las puntuaciones en las manifestaciones completas, siendo la sesión 2 en la que se obtiene la puntuación menor respecto a las otras dos sesiones que obtienen puntuaciones iguales. Salvo en la primera sesión en la que las manifestaciones correctas se corresponden mayoritariamente con la categoría PE2 al identificar movimientos entre figuras, el resto de manifestaciones van principalmente asociadas a PE1 cuando se refieren a elementos de posición respecto a los objetos o a ellos mismos. Para esta habilidad sólo existe correlación positiva significativa entre las dos últimas sesiones para las manifestaciones incompletas.

**PERCEPCIÓN DE LAS RELACIONES ESPACIALES (RE):** La manifiestan todos los alumnos en las sesiones 2 y 3 (en la sesión 1 lo hace el 63%). Las manifestaciones correctas son superiores a las incompletas en todas las sesiones (salvo en la sesión 1 que son significativamente iguales). Es la segunda habilidad de la que más manifestaciones se han registrado de un modo global y mayoritariamente se han debido a la categoría RE1 porque los alumnos utilizan elementos de posición relativa entre objetos (dirección, paralelismo, perpendicularidad, etc.). Existen diferencias significativas en las puntuaciones tanto para las manifestaciones correctas e incompletas, las completas van aumentando a lo largo de las sesiones, mientras que las incompletas disminuyeron en las dos primeras sesiones pero aumentaron en la tercera en la que obtuvieron su

máximo valor. Para esta habilidad sólo existe correlación positiva significativa entre la primera y tercera sesión para las manifestaciones incompletas.

**DISCRIMINACIÓN VISUAL (DV):** El porcentaje mayor de alumnos que la manifiestan es en la sesión 2 con un 95% (en la sesión 1 lo hace el 79% y en la sesión 3 el 91,6%). Las manifestaciones correctas son superiores a las incompletas en todas las sesiones y es la habilidad de la que, de un modo global, menos manifestaciones correctas se han registrado. Sólo existen diferencias significativas en las manifestaciones correctas siendo iguales en las dos primeras sesiones y disminuyendo en la tercera, pese a volver a ser significativamente igual a la primera. Salvo en la primera sesión en la que las manifestaciones correctas provienen principalmente de la categoría DV1 al utilizar criterios de clasificación mediante semejanzas, las manifestaciones de esta habilidad se deben mayoritariamente a la categoría DV2 que se ponía en juego al identificar semejanzas o diferencias entre las figuras. No existen correlaciones significativas entre las puntuaciones obtenidas en las tres sesiones en las manifestaciones correctas ni en las incompletas.

*Destacamos que cada habilidad ha sido manifestada por todos los alumnos o por un porcentaje muy elevado de ellos.* Respecto a los indicadores de visualización que agrupan a las habilidades (V1, V2 y V), para ninguno de ellos existe correlación significativa a través de las diferentes sesiones, alcanzando el mayor valor en la primera sesión y disminuyendo a lo largo de las tres sesiones (para V1 las dos últimas sesiones son significativamente iguales). En cambio para el indicador CV (grado de corrección) no existen correlaciones ni diferencias significativas a lo largo de las tres sesiones.

En el análisis de la evolución del uso de la visualización destacamos que la diversidad de actividades propuestas a lo largo de las tres sesiones se refleja en que mayoritariamente las variables han sido independientes a lo largo de las sesiones, encontrándose únicamente correlación en las manifestaciones incompletas de la habilidad Percepción de las Relaciones Espaciales en las sesiones 1 y 3 y de las habilidades Conservación de la Percepción y Percepción de la posición en el espacio entre las dos últimas sesiones. En las dos primeras sesiones la habilidad que se ha manifestado con mayor frecuencia de manera correcta ha sido la Percepción del Figura-Contexto, mientras que en la tercera sesión ha sido la Percepción de las Relaciones Espaciales.

## 7 Conclusiones

Comparando la evolución de las manifestaciones correctas entre la sesión 1 y 3, observamos que ha aumentado la habilidad Percepción de las Relaciones Espaciales, ha disminuido para Percepción de la Figura-Contexto y la Conservación de la Percepción y se ha mantenido para la Percepción de la posición en el espacio y la Discriminación Visual. Destacamos que los indicadores V2 y V han disminuido progresivamente a lo largo de las sesiones (también lo ha hecho V1 aunque entre los resultados de las dos últimas sesiones no hay diferencias significativas). Podemos interpretarlo como que a lo largo del experimento de enseñanza, de manera global y tanto incompleta como correctamente, los alumnos han ido manifestando la visualización en menor porcentaje al tener en cuenta el número de intervenciones.

Esta disminución del porcentaje puede explicarse por el proceso de recogida de datos llevado a cabo, ya que a lo largo del experimento de enseñanza ha ido aumentando notablemente el número de intervenciones y ha sido mayor la diferencia entre lo registrado únicamente en las pruebas escritas y en el número total, ya que han aumentado las intervenciones en clase y en debates en grupos. Esto ha originado que el promedio de categorías manifestadas en cada una de las intervenciones ha ido disminuyendo ya que a lo largo del experimento de enseñanza han sido las pruebas escritas las que han favorecido una mayor manifestación de habilidades por intervención (excepto en la sesión 2 para el porcentaje de manifestaciones correctas y totales).

Como se ha descrito en el capítulo anterior, ha habido otros factores que han influido en el recuento de las manifestaciones de las habilidades. El tipo de actividad ha originado que haya habido actividades que han favorecido una determinada categoría en repetidas ocasiones porque se le pedía explícitamente o porque se contabilizaban multiplicadas las repuestas escritas del trabajo en grupo. Además, el trabajo en grupo y las actividades de argumentación han ido adquiriendo a lo largo del experimento de enseñanza un papel más relevante y han sido dos factores que han originado un mayor número de intervenciones y han favorecido que los alumnos manifiesten las habilidades de visualización.

Estos condicionantes enriquecen la información obtenida a partir de datos absolutos en los que observamos que tanto *las manifestaciones correctas e incompletas van aumentando a lo largo del experimento de enseñanza*. Es decir, aunque ha ido

disminuyendo el porcentaje que representan respecto a sus intervenciones, *el proceso de enseñanza ha favorecido que las manifestaciones del uso de la visualización hayan aumentado a lo largo del experimento.*

En lo que respecta a los errores, hemos conseguido indicadores para localizar los errores cometidos individualmente y estudiar su evolución (E1, E2, E3, E4 y E5). Respecto al grupo, disponemos de los indicadores anteriores junto con el porcentaje de alumnos que los manifiestan.

**E1 (*establecer una falsa analogía entre el plano y el espacio*):** En la sesión 1, centrada en situaciones en el plano, no aparece). Disminuye de la sesión 2 a la 3 tanto en número de alumnos que lo cometen como en la frecuencia con la que se comete.

**E2 (*no discutir todos los casos posibles*) y E3 (*razonar limitándose a ejemplos concretos*):** Disminuyen progresivamente a lo largo de las tres sesiones tanto en el número de alumnos como en la frecuencia con la que se comete.

**E4 (*Confundir los elementos matemáticos de razonamiento*):** Disminuye de la sesión 1 a la sesión 2 y aumenta de la sesión 2 a la 3, tanto en el número de alumnos como en la frecuencia con la que se comete.

**E5 (*Confundir los elementos de contenidos matemático*):** Aumenta de la sesión 1 a la sesión 2 tanto en el número de alumnos como en la frecuencia con la que se comete. De la sesión 2 a la 3 se mantiene el porcentaje de alumnos que lo cometen (todos) y disminuye la frecuencia con la que se comete.

Para la evolución de los errores, diferenciamos dos tipos. Se aprecia que a lo largo del experimento de enseñanza, pese a que el número de intervenciones va aumentando a lo largo de las sesiones, las manifestaciones de E1 (que no aparece en la primera sesión), E2 y E3 van disminuyendo a lo largo del experimento de enseñanza. Estos errores son generalizables a las tres sesiones y aparecen en las tareas visuales de definición, resolución y argumentación. Sin embargo, los errores E4 y E5, que van asociados más explícitamente a actividades de argumentación y a los contenidos matemáticos tratados, aumentan, pese a que E4 disminuyó de la primera a la segunda sesión en la que toma su valor menor. El aumento para estos dos errores pudo verse afectado por el aumento de

## 7 Conclusiones

número y complejidad de las tareas de argumentación propuestas y su repercusión en el trabajo de grupo.

Al tener en cuenta los porcentajes de manifestación de errores por intervención, se obtiene que este porcentaje disminuye notablemente para los errores E1, E2 y E3. Para E4 y E5 aumenta de la sesión 1 a la 2 y disminuye de la sesión 2 a la 3, por lo que en la sesión 2 es donde se da el mayor porcentaje de manifestaciones de los errores E4 y E5 por intervención (debido principalmente a los errores E5) y ese porcentaje disminuye en la tercera sesión, a pesar de que tanto las actividades de grupo y argumentación aumentan.

Los datos anteriores avalan el procedimiento seguido en el experimento de enseñanza para que los alumnos cometan menos errores en el uso de la visualización, al tener en cuenta los errores cometidos en una sesión para diseñar actividades que los corrijan en las siguientes sesiones. Esta evolución queda reflejada en el indicador global **E (media de los errores anteriores)** que disminuye de forma significativa a través de las sesiones. La aparición de los errores no ha ido asociada a una habilidad concreta y no ha existido correlación significativa entre los errores obtenidos en las diferentes sesiones. E correlaciona tanto positiva como negativamente con distintas habilidades en la sesión 2, pero no correlaciona con ninguna misma habilidad en todas las sesiones.

Respecto a las dificultades de comunicación de las argumentaciones visuales, destacamos que todos los alumnos manifiestan la dificultad relativa a la terminología (DT), además de hacerlo con mayor frecuencia que el resto por cada intervención. A continuación, tanto en el porcentaje de alumnos que manifiestan la dificultad como en la frecuencia con la que lo hacen se aprecia la necesidad de utilizar movimientos de su propio cuerpo o hacer referencia a objetos del entorno (DE). Le sigue la dificultad para describir las representaciones visuales (DR) y finalmente la dificultad para verbalizar los procesos mentales (DC) es la que presenta menor porcentaje tanto en el número de alumnos que la manifiestan como en la frecuencia con la que lo hacen.

Al haber estudiado las dificultades únicamente en la tercera sesión, no podemos analizar su evolución en el experimento de enseñanza. Independientemente de su capacidad y del comportamiento visual en las sesiones, todos los alumnos entrevistados manifestaron todas las dificultades de comunicación en sus argumentaciones visuales, lo

que nos induce a pensar que, aunque sólo fueron registradas en la sesión 3, aparecieron en las actividades de las otras sesiones como se observó en la evolución del experimento de enseñanza y en la literatura, donde se expusieron las dificultades cognitivas que iban asociadas al uso de la visualización (Arcavi, 2003, Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996).

En relación al rendimiento, destacamos que ha disminuido de la sesión 1 a la 2 y no ha habido diferencias significativas en las dos últimas sesiones entre las que además ha existido correlación significativa. Aunque el rendimiento no ha correlacionado con un mismo indicador en las tres sesiones, los valores mayores del coeficiente de correlación se han alcanzado en las dos últimas sesiones para V2 ( $r=0.664$ ;  $p=0.000$  y  $r=0.807$ ;  $p=0.000$ ) y DVC ( $r=0.781$ ;  $p=0.000$  y  $r=0.701$ ;  $p=0.000$ ). Podemos suponer que el *rendimiento en las dos últimas sesiones ha estado relacionado con el uso correcto de la visualización y, particularmente, con las manifestaciones correctas de la habilidad de Discriminación Visual*, es decir, la eficiencia de los alumnos en las tareas de estas sesiones ha podido deberse a la correcta utilización de criterios de clasificación e identificación de semejanzas o diferencias entre las figuras. En cambio, en la primera sesión, *se establece correlación entre el rendimiento con la puntuación en el test PMA* ( $r=0.558$ ;  $p=0.04$ ), es decir, han sido más eficaces los alumnos que mejor identifican objetos que cambian de posición, lo que puede ser una ayuda para obtener estructuras equivalentes en el juego Constelaciones.

Respecto a la relación entre las variables dentro de una misma sesión, destacamos que si bien ha habido habilidades que han correlacionado en una o dos sesiones (en las sesiones 1 y 3 lo han hecho positivamente V2 y PEC, V1 y DVI, FCI y DVI, PEI y REI, PEC y DVC; y negativamente DVC y CPC, DVI y REI), ninguna habilidad, tanto incompleta como correctamente ha correlacionado con otra habilidad en las tres sesiones. Ha habido parejas de indicadores que han correlacionado en una o varias sesiones, pero únicamente en dos de los indicadores globales se ha encontrado correlaciones con la misma habilidad en las tres sesiones. Han existido correlaciones en las tres sesiones para el indicador V1 con las manifestaciones incompletas de la habilidad Percepción Figura-Contexto y para V2 con las manifestaciones correctas de las habilidades Percepción de la Figura-Contexto, Percepción de las relaciones espaciales y Discriminación Visual.

## 7 Conclusiones

A partir de los resultados anteriores podemos concluir que mayoritariamente las *variables del uso de la visualización han sido independientes tanto en su relación con las demás dentro de una misma sesión como en su propia evolución a lo largo de las sesiones*. Que haya existido relación entre las habilidades dentro de una misma sesión puede interpretarse como que la manifestación (correcta o incompleta) de una determinada habilidad iba asociada a otra (por ejemplo DVI a FCI). Pero el hecho de no manifestarse esta relación en todas las sesiones y de no hacerlo entre las respectivas manifestaciones completas (por ejemplo entre DVC y FCC), nos sugiere que las categorías que se han asignado a cada habilidad para las tres sesiones han sido independientes. Este resultado nos puede llevar a concluir que las habilidades estudiadas son componentes independientes y que por lo tanto los alumnos las han manifestado cada una en mayor o menor grado. Aunque a partir de estudios factoriales se habían encontrado equivalencias entre algunas de ellas y los correspondientes factores que componen la habilidad espacial (Arrieta, 2011; Carroll, 1993), en los alumnos con talento matemático estudiados no se ha observado esa relación, por lo que consideramos necesario proponer actividades que demanden la puesta en juego de todas las habilidades aislada o conjuntamente (Gutiérrez, 1992). En este sentido consideramos que nuestro proceso de enseñanza ha favorecido que los alumnos las hayan manifestado mayoritariamente.

Sólo las manifestaciones incompletas de las habilidades Conservación de la Percepción, Percepción de la Posición en el Espacio y Percepción de las Relaciones Espaciales han correlacionado en dos de las sesiones. Como no lo han hecho en las tres sesiones y tampoco en sus manifestaciones correctas, también podemos deducir el comportamiento de los alumnos, en cuanto a la manifestación de una misma habilidad, ha sido independiente a lo largo del experimento de enseñanza. Esto puede deberse a que la variedad de actividades propuestas puede haber facilitado que en una sesión se ponga en juego en mayor medida una determinada categoría y en otra sesión lo haga minoritariamente.

Tampoco los errores han correlacionado a lo largo de las tres sesiones con ninguna habilidad, lo que puede interpretarse como que los alumnos cometen errores independientemente de la habilidad de visualización puesta en juego. No obstante, de manera global, el uso incompleto de la visualización (V1) ha estado relacionado en las

tres sesiones con las manifestaciones incompletas de la habilidad Percepción Figura-Contexto que se debían principalmente al argumentar de manera incompleta sobre procesos de construcción a partir de estructuras menores y distinguir elementos dentro de una estructura mayor. En la primera sesión los argumentos incompletos se deben a la falta de exhaustividad al no considerar todas las situaciones posibles en el proceso de construcción de las estructuras a razonar sobre las situaciones particulares que van encontrando. En las dos últimas sesiones, especialmente al razonar sobre objetos espaciales, los alumnos presentan mayor dificultad para distinguir correctamente los elementos al cometer errores relacionados con los contenidos matemáticos tratados (sólidos que rellenan del espacio, propiedad de curvatura constante, concepto de dimensión).

En cambio, de manera global el uso correcto de la visualización ha estado relacionado con las manifestaciones correctas de la habilidad Percepción de la Figura-Contexto asociadas a distinguir elementos dentro de una estructura mayor, de la habilidad Percepción de las Relaciones Espaciales porque los alumnos utilizan elementos de posición relativa entre objetos (dirección, paralelismo, perpendicularidad, etc.) y de la habilidad Discriminación Visual al utilizar criterios de clasificación mediante semejanzas e identificar semejanzas o diferencias entre las figuras. En estudios que relacionaban las características del talento matemático con habilidades y procesos de visualización, se relacionaba la habilidad Discriminación Visual con la capacidad para generalizar al resolver problemas y la habilidad Figura-Contexto (Identificación Visual) con la flexibilidad para manipular datos (Jiménez, Rojas y Mora, 2011).

De manera general, los estudios en profundidad, que concluyen con las entrevistas, han confirmado los aspectos visualizadores observados en el análisis retrospectivo. Sólo en el caso de un alumno de los cinco entrevistados los resultados de la entrevista difieren de lo observado en el análisis retrospectivo, justificándose esta situación particular por el comportamiento desigual del alumno en la entrevista y en las sesiones. En este caso, el rendimiento visual del alumno en las sesiones fue menor que el mostrado en las entrevistas. Al igual que en una situación escolar ordinaria, incluso dentro de un grupo más homogéneo formado por alumnos con talento matemático, es necesario gestionar la clase para atender a la diversidad de las características específicas de cada individuo, ya que en puede haber momentos en los que se distraiga o no tenga disposición a escribir

## 7 Conclusiones

sus razonamientos. No obstante, más que una tratamiento individual y aislado con una supervisión constante del profesor para evitar estas distracciones puntuales, consideramos que la interacción en pequeños grupos es crucial para que los alumnos con talento matemático compartan sus ideas mientras las explican a iguales (Lee, 2005; Lee, Ko y Song, 2007).

Las entrevistas personales aportan información respecto a las diferentes clasificaciones de los alumnos según los test visuales o el diagnóstico dado por los indicadores. Los dos alumnos que presentaban puntuaciones altas en los dos test, diagnosticados como visualizador y poco visualizador respectivamente, manifiestan mayoritariamente un uso correcto de la visualización mostrando variedad de estrategias y representaciones visuales. Muestran por lo tanto un alto grado de desarrollo de la visualización. El resto de alumnos, que presentaron puntuaciones medias o bajas en algunos de los test y fueron diagnosticados dos como visualizadores y uno como visualizador medio, presentan un comportamiento diferente entre ellos, pero manifiestan habilidades tanto de manera correcta como incompleta, aparentando un grado de visualización no desarrollado plenamente. Un aspecto significativo es que independientemente de su capacidad y comportamiento visual en las sesiones, todos los alumnos manifestaron todas las dificultades de comunicación en sus argumentaciones visuales.

La determinación de indicadores y variables ha permitido el análisis de la evolución de los alumnos a lo largo del experimento de enseñanza respecto a la manifestación de las habilidades de visualización, los errores y las dificultades. Esta evolución se ha podido analizar tanto de manera individual como del grupo de alumnos con talento, por lo que consideramos satisfactoria la consecución del objetivo O3. Presentamos las conclusiones relativas a la evolución de la investigación (preguntas l, m, n, p):

- D) Además del cumplimiento de los pasos exigidos en la metodología de investigación, la determinación de indicadores y variables nos ha permitido evaluar el proceso de instrucción. Pese a la diversidad de actividades y participación de los alumnos en el proceso de enseñanza, la cuantificación utilizada nos ha permitido estudiar el comportamiento individual y del grupo de alumnos en cada sesión y estudiar su evolución a lo largo del experimento de enseñanza.

- m)** Disponemos de indicadores para apreciar el uso global de la visualización, tanto de manera correcta como incompleta, además de indicadores para las manifestaciones de cada habilidad. Podemos establecer comparaciones entre las diferentes sesiones tanto de manera individual como del grupo de alumnos.
- n)** La distinción entre indicadores de visualización incompleta y correcta, así como la detección de errores y dificultades nos ha permitido apreciar que predominantemente se usa la visualización correctamente, hemos podido estudiar su evolución y analizar los indicadores que registran una mejora en el uso de la visualización.
- o)** La instrucción ha seguido un proceso secuencial para el diseño de las sesiones en el que se han ido teniendo en cuenta las habilidades manifestadas y los errores cometidos en la sesión anterior para determinar los contenidos y elementos de razonamiento visual a enriquecer en la siguiente. El planteamiento de actividades que motiven el uso de las habilidades y la superación de errores y dificultades han marcado el proceso de enseñanza.
- p)** Los aspectos relacionados con el uso incompleto de las habilidades se pueden mejorar al corregir y prevenir los errores que han cometido. Las actividades que motiven el uso correcto de la visualización y las estrategias para salvar las dificultades para comunicar las argumentaciones visuales pueden facilitar que los alumnos con talento mejoren su uso de la visualización.

La evaluación del proceso de enseñanza va estrechamente relacionada con la finalidad de diseñar buenas prácticas docentes para desarrollar el sentido espacial entendido como elemento de competencia matemática. En el estudio de las habilidades, los errores y las dificultades de visualización se ha puesto de manifiesto la interrelación que existe entre las dos componentes señaladas en el sentido espacial: manejo de conceptos geométricos y destrezas para ubicarse en el espacio.

En relación a los conceptos geométricos, hemos detectado que los alumnos cometen errores relativos tanto a los contenidos matemáticos (E5) como a los elementos de razonamiento (E4) y además, presentan dificultades de comunicación de sus argumentaciones visuales por el desconocimiento de la terminología (DT) más que por falta de cognición visual (Sack y Vazquez, 2008). A lo largo del experimento de enseñanza se ha detectado un incremento en la complejidad de los contenidos

## 7 Conclusiones

matemáticos y se ha detectado un déficit en el uso de los elementos geométricos, especialmente en las actividades de definición y argumentación (Ryu, Chong y Song, 2007; Yim, Chong, Kwon y Song, 2007; Yim, Chong, Song y Kwon, 2008). Pese a las ideas intuitivas que mostraron en la primera sesión, se ha constatado un dominio adecuado de los contenidos relativos a movimientos en el plano, pero se ha observado que los alumnos cometen errores en la terminología y las propiedades de los objetos en el espacio, especialmente cuando se les presentan en contextos nuevos para ellos. Más que presentarles una determinada definición o propiedad, consideramos enriquecedor que la reconozcan en varias situaciones para consolidar el concepto figural (Fischbein, 1993). En este sentido los movimientos han aparecido como medios para distinguir estructuras equivalentes, transformar sólidos que rellenan el espacio, introducir polígonos en su interior o montar desarrollos planos. Por ejemplo, los alumnos han tenido que reflexionar sobre las propiedades de los polígonos regulares cuando han aparecido en contextos novedosos como las caras de los poliedros que rellenan el espacio, en la forma de la tapa de una alcantarilla o en las secciones planas de un cubo. Por lo tanto, consideramos que a lo largo del experimento de enseñanza se ha enriquecido la componente del sentido espacial relativa a conceptos al abordar de esta manera los contenidos matemáticos tratados (NCTM, 2000).

El razonamiento matemático también está relacionado con la componente del sentido espacial correspondiente a la destreza de ubicarse en el espacio, ya que los alumnos con talento matemático han puesto en juego las habilidades de visualización en las actividades de resolución y argumentación. Destacamos especialmente que en el experimento de enseñanza han disminuido los errores E1, E2 y E3, pese a que aumentaban las actividades de grupo y argumentación, que los motivaban, ya que estos errores se han asociado con este tipo de tareas (Lee, Ko y Song, 2007; Lee, Kim, Na, Hang y Song, 2007; Zodik y Zalavsky, 2007). Como se ha recogido en la literatura de investigación, determinadas intervenciones mejoran el razonamiento visual de los alumnos (Lee, 2005; Thornton, 2001, entre otros). Los elementos de razonamiento matemático que se han enriquecido (búsqueda de todos los casos posibles, diferenciación entre un caso particular y general, distinción de implicaciones y condiciones necesarias y suficientes, etc.) han favorecido este mejor uso de la visualización, y por tanto, del desarrollo del sentido espacial. La planificación de las sesiones y la secuenciación de actividades ha conseguido que los alumnos cometan

menos errores al establecer analogías entre plano y espacio, discutir los casos posibles y razonar sobre ejemplos concretos. No obstante, los alumnos presentan dificultades en sus argumentaciones visuales al necesitar movimientos de su propio cuerpo u objetos del entorno (DE) y para verbalizar los procesos mentales (DC) y describir las representaciones visuales utilizadas (DR). Aunque las dificultades únicamente fueron registradas en la última sesión, se habían observado en la revisión de la literatura (Chu y Kita, 2011; Gutiérrez, 1998b; Diezman y Lowrie, 2009; Pittalis, Mousoulides y Christou, 2009; Pittalis y Christou, 2011) y en las sesiones anteriores, por lo que puntualmente se adoptaron posibles medidas para corregirlas: explicar los razonamientos a los compañeros sin utilizar las manos, argumentar como si estuvieran hablando por teléfono, evitar que recortasen los desarrollos planos, etc.

Es en relación a la componente relativa a las habilidades para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas donde consideramos que nuestro experimento más ha favorecido el desarrollo del sentido espacial. El proceso de enseñanza ha favorecido que los alumnos pongan en juego las habilidades de visualización, aumentando estas manifestaciones a lo largo de las sesiones y haciéndolo mayoritariamente de un modo correcto. Estas habilidades permiten que el alumno maneje de un modo funcional los conceptos, representaciones externas e imágenes mentales mientras resuelve una tarea matemática (Gutiérrez, 1996). Sin embargo, el hecho de asociar las habilidades con las tareas concretas (Del Grande, 1990; Gutiérrez, 1992) no nos hubiera facilitado valorar su evolución a lo largo del experimento ya que se hubiera producido una dependencia de las actividades en las que podían influir factores diversos como la dificultad, las representaciones utilizadas, el contexto en el que se propone, etc. En cambio, el proceso seguido para el diseño de las sesiones y el método utilizado para registrarlos nos han permitido establecer una correspondencia entre las habilidades y sus correspondientes categorías, aportando destrezas específicas (Castro, 1995) que han podido aplicarse para analizar actividades en situaciones muy diferentes.

Al comparar la evolución entre las sesiones de las variables correspondientes a las manifestaciones correctas, vemos que han ido aumentando para la habilidad Percepción de las Relaciones Espaciales. Al analizar sus categorías correspondientes, podemos concluir que a lo largo del experimento, especialmente al pasar de elementos planos a

## 7 Conclusiones

sólidos y a representaciones espaciales, los alumnos han aumentado la utilización correcta de elementos de posición relativa entre dos objetos (dirección, orientación, paralelismo, etc.)

En cambio se observa que a lo largo de las sesiones han disminuido las manifestaciones correctas para las habilidades Percepción de la Figura-Contexto y Conservación de la Percepción, ya que a lo largo del experimento los alumnos han ido teniendo más dificultad para identificar correctamente los elementos dentro de una estructura mayor y utilizar criterios de igualdad haciendo referencia a la forma o al tamaño, a los movimientos o a las distintas perspectivas. Interpretamos que estas destrezas las utilizan frecuentemente en las actividades presentadas en el plano, pero disminuyen al trabajar sobre objetos espaciales, como las piezas del puzle, y es menor aún cuando utilizan representaciones espaciales como los desarrollos y las secciones propuestas.

Para las habilidades Percepción de la Posición en el Espacio y Discriminación Visual no hay diferencias significativas entre las variables de la primera y tercera sesión. El comportamiento respecto a la habilidad Percepción de la posición en el espacio es diferente para cada una de sus categorías. Si bien a lo largo del experimento los alumnos aumentan considerablemente la utilización correcta de los elementos de posición respecto al objeto o a uno mismo, desciende considerablemente de la primera a la segunda sesión la correcta identificación de movimientos entre dos figuras, pese a que vuelve a aumentar de la segunda a la tercera sesión. Es decir, ha sido en las actividades de la segunda sesión, relativas al relleno del espacio y al trabajar con material manipulativo, donde ha habido menos manifestaciones correctas de esta habilidad.

Para la habilidad Discriminación Visual tampoco hay diferencias significativas entre la primera y la tercera sesión, lo que podemos interpretar como que los alumnos han utilizado correctamente sus categorías correspondientes de forma similar en las tres sesiones (si bien en el cómputo total de manifestaciones es en la sesión 2 donde se contabilizan más debido principalmente a DV2). Es decir, los alumnos han utilizado correctamente criterios de clasificación mediante semejanzas o diferencias y han identificado semejanzas o diferencias entre indistintamente en figuras planas, sólidos y representaciones espaciales.

En resumen, aunque la evolución ha sido diferente para cada una de las habilidades de visualización, de un modo global, a lo largo del experimento de enseñanza han aumentado las manifestaciones de las habilidades. Los conceptos geométricos, los elementos de razonamiento y las habilidades se han abordado conjuntamente enfocando su utilización desde una perspectiva funcional al usar las propiedades geométricas y las relaciones para resolver problemas en matemáticas y en la vida diaria (New Jersey Mathematics Coalition, 1996). El proceso de enseñanza propuesto ha contribuido a que los alumnos aborden con mayor profundidad conceptos de geometría tradicional y desarrollen destrezas para ubicarse en su mundo físico al reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas con una intención funcional. Consideramos por tanto que las prácticas docentes que hemos llevado a cabo han podido colaborar al desarrollo del sentido espacial de los alumnos con talento matemático estudiados (Gardner, 1995; 2001).

### 7.1.3 Estado de la conjetura de investigación

A partir de las conclusiones relativas a los objetivos y preguntas de investigación expuestas anteriormente, abordamos el estado de la conjetura que marcó nuestro experimento de enseñanza y que formulábamos con la siguiente intencionalidad:

*El enriquecimiento curricular centrado tanto en contenidos como en elementos de razonamiento visual favorece la utilización y el desarrollo de las habilidades de visualización en los alumnos con talento matemático.*

Esta conjetura se desglosa en tres apartados que trataremos por separado y valoraremos con lo observado en el experimento de enseñanza:

1. *Conjeturamos que los alumnos con talento matemático no presentan deficiencias respecto a las capacidades visuales.*

Los alumnos con talento matemático han mostrado una capacidad visual en los test significativamente superior a los alumnos del grupo control.

## 7 Conclusiones

*2.- Los alumnos con talento matemático manifiestan y desarrollan habilidades de visualización al enfrentarse a tareas que las requieran para resolver situaciones significativas, aunque cometan algunos errores en su utilización.*

En los alumnos con talento matemático estudiados, se ha apreciado que todos ponen de manifiesto prácticamente todas las habilidades de visualización. La falta de relación entre la capacidad visual detectada por los test y el uso que han manifestado tanto en la prueba de selección como a lo largo de las tres sesiones de enriquecimiento, nos permite deducir que la manifestación de las habilidades puede verse condicionada por el tipo de actividad propuesta.

Los criterios que hemos seguido para la selección de actividades han podido favorecer el uso de la visualización ya que los alumnos con talento matemático han puesto de manifiesto habilidades de visualización para resolver las tareas.

Si atendemos al desarrollo de las habilidades con vistas a logros más eficientes, las variables e indicadores nos han aportado diagnósticos del uso, corrección, rendimiento y evolución de la visualización tanto a nivel individual como en grupo. Actividades como las relativas a la argumentación y el trabajo en grupo han favorecido la manifestación de las habilidades y el proceso de enseñanza llevado a cabo ha ayudado a que algunos de los errores presentados en sesiones anteriores se comentan en menor cantidad.

*3.- El enriquecimiento curricular centrado tanto en contenidos como en elementos de razonamiento visual favorecerá la mejor utilización y el desarrollo de sus habilidades de visualización.*

Los alumnos con talento matemático poseen unas características especiales que les permiten tener un mayor éxito en la realización de tareas matemáticas y, como hemos señalado, las habilidades de visualización forman parte importante en este proceso de resolución y desempeñan un papel principal en la componente del sentido espacial relativa a la habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas. El enriquecimiento curricular tanto de contenidos como de elementos de razonamiento matemático contextualizados en el ámbito geométrico favorece el uso correcto de la visualización y por lo tanto desarrolla su sentido espacial.

Tanto los contenidos como los elementos de razonamiento visual que hemos seleccionado en las sesiones parecen adecuados para este enriquecimiento puesto que no están cubiertos en el currículo oficial o se han trabajado en el curso con un nivel de mayor profundidad. Se ha seguido un proceso secuencial con importantes momentos de reflexión para el diseño de las sesiones en el que se han ido teniendo en cuenta las habilidades manifestadas y los errores cometidos en la sesión anterior para determinar los elementos visuales a enriquecer. El planteamiento de actividades que motiven el uso de las habilidades y la superación de errores han marcado el proceso de enseñanza.

La distinción entre indicadores de visualización incompleta y correcta, así como la detección de errores y dificultades nos ha permitido valorar la corrección en el uso de la visualización, estudiar su evolución y analizar los indicadores que registraban una mejora en el uso de la visualización. Para valorar si el experimento de enseñanza ha favorecido la mejor utilización de la visualización y el desarrollo de las habilidades de visualización debemos tener en cuenta varios factores:

1.- El carácter docente de la investigación ha supuesto una diversidad en cuanto a la temática, actividades propuestas y participación de los alumnos en las tres sesiones y por lo tanto no es esperable que podamos contrastar el desarrollo (mejor utilización) de las habilidades simplemente a partir de la evolución de los valores de los correspondientes indicadores. Tendríamos que tener en cuenta que factores como el peso que ha tenido el trabajo en grupo, las actividades de argumentación y el aumento de la dificultad en las sesiones, inducido a partir de la disminución del rendimiento, pueden influir en los indicadores correspondientes.

2.-Consideramos un elemento importante para evaluar el desarrollo de la visualización, entendido como utilización más eficiente, que en todas las sesiones (salvo en una habilidad y en una sesión en la que han sido iguales), las manifestaciones correctas han sido superiores a las incompletas. Destacamos que cada habilidad ha sido manifestada por todos los alumnos o por un porcentaje muy elevado de ellos.

3.- En las entrevistas personales se han confirmado la mayoría de los aspectos visualizadores observados en el análisis retrospectivo. No obstante, las entrevistas se realizan en un solo momento, por lo que no podemos emplearlas para medir la mejora

## 7 Conclusiones

de la visualización, ya que la actitud en la entrevista puede ser diferente a la manifestada en las sesiones, como se ha comprobado en uno de los alumnos.

### 7.2 Aportaciones del estudio y relación con otras investigaciones

El fenómeno de aprendizaje que hemos estudiado es la visualización de un grupo de alumnos con talento matemático manifestada a partir de las habilidades de visualización y el diseño instruccional ha consistido en un experimento de enseñanza contextualizado en el enriquecimiento de aspectos visualizadores en un entorno geométrico. Destacamos las principales aportaciones del estudio en los ámbitos relativos al modelo teórico sobre el fenómeno de visualización y los resultados teóricos sobre el diseño instruccional para relacionarlos con lo recogido en otras investigaciones:

#### **Fenómeno de aprendizaje: Visualización y talento matemático**

Tras el análisis de los resultados consideramos necesario diferenciar dos aspectos en la relación entre talento matemático y visualización. Por un lado la capacidad visual que poseen estos alumnos y que medimos mediante test estandarizados y por otro lado el uso de la visualización que los alumnos con talento manifiestan en la realización de actividades matemáticas específicas. Esta diferenciación puede explicar los resultados aparentemente contradictorios en la relación talento matemático y visualización que son señalados en las revisiones de varios autores (Bishop, 1980; Lean y Clements, 1981).

Consideramos que nuestro estudio aporta información sobre la relación entre talento matemático y visualización. Por un lado, hemos observado que los alumnos con talento matemático estudiados disponen de capacidad visual (Gruessing, 2011; Kulp *et al.*, 2004; Rivera, 2011, Van Garderen, 2006). Por otro lado hemos detectado la falta de relación entre la capacidad visual que detectan los test y el uso que han manifestado en las tareas propuestas (Lean y Clements, 1981; Pasarín, Feijoo, Díaz y Rodríguez, 2004).

En la aparente disyuntiva que se presenta por tener una mayor capacidad visual y sin embargo preferir usar métodos no visuales, pueden entrar en juego múltiples variables. Pero si bien la medición de la capacidad mediante test estandarizados admite un alto grado de fiabilidad y validez, registrar el uso de la visualización puesto en juego puede verse condicionado por los instrumentos y las tareas utilizadas por el investigador.

El uso de la visualización y la preferencia por métodos visuales también está condicionado por dificultades culturales, cognitivas y sociológicas (Arcavi, 2003; Eisenberg y Dreyfus, 1991; Presmeg, 1986a). En nuestro estudio hemos comprobado que cognitivamente, la demanda en la visualización es alta, no sólo por la ausencia de rutinas seguras (como las que encuentran en las resoluciones formales simbólicas) sino por la dificultad tanto del proceso de razonamiento al usar las habilidades (Ryu, Chong y Song, 2007), como en la comunicación de las ideas. Argumentar visualmente ha llevado a los alumnos a manifestar de manera incompleta las habilidades por cometer errores y a presentar dificultades de comunicación de las argumentaciones visuales. Los alumnos han cometido errores al establecer una falsa analogía entre el plano y el espacio, al conformarse con apreciaciones particulares, sin discutir todos los casos posibles y razonando a partir de ejemplos concretos, al confundir elementos matemáticos de razonamiento y otros elementos de los contenidos matemático. Se han detectado dificultades de comunicación de las argumentaciones visuales, especialmente por desconocimiento de la terminología adecuada, o las limitaciones de sus imágenes, que les llevan a utilizar movimientos de su propio cuerpo o hacer referencia a objetos, para expresar y describir a otros los procesos mentales o para describir las representaciones visuales utilizadas.

La relación de nuestros resultados con los estudios anteriores adquiere diferentes matices. Si aludimos a resultados extraídos del análisis correlacional, la capacidad visual manifestada en los test influyó en el rendimiento de la sesión 1, pero no lo hizo en las otras dos ni en la prueba de selección. Sin embargo, en las entrevistas personales se detecta que los alumnos con una alta capacidad visual demuestran una riqueza de estrategias y uso de imágenes mentales y representaciones que le llevan a realizar con éxito las tareas propuestas. Estos resultados contrastan con otro estudio en el contexto del proyecto ESTALMAT que indicaron que la correlación entre los factores espacial (E) y de razonamiento (R) del PMA y la eficiencia en la resolución de otros problemas

## 7 Conclusiones

es significativa y bastante elevada. Los sujetos seleccionados como talentos matemáticos se apoyaron en las capacidades mostradas en el factor espacial (E) de la batería PMA para resolver los problemas matemáticos planteados (Díaz, Sánchez, Pomar y Fernández, 2008).

En la prueba de selección de nuestra investigación se detecta la preferencia por los métodos no visuales, utilizando en escasa medida estrategias visuales (Harel y Dreyfus, 2009; Presmeg, 1986a; Vinner, 1989). En cambio, a lo largo del experimento de enseñanza, y al no disponer de herramientas algebraicas para resolverlas, los alumnos han utilizado estrategias visualizadoras. En las entrevistas personales, no detectamos una inclinación clara mayoritariamente por ninguna de ellas al examinar cuáles argumentaciones de las presentadas con distintos niveles de visualización prefieren (Kwon y Song, 2007). Consideramos que la influencia de la visualización en el rendimiento de tareas matemáticas puede verse condicionada por las características de las propias tareas, ya que la propuesta de determinadas tareas y la enseñanza de estrategias visuales puede favorecer que los alumnos con talento manifiesten sus habilidades de visualización (Ramírez, Flores y Castro, 2010a).

Consideramos que un aporte importante de esta investigación es el procedimiento que hemos utilizado para registrar el uso de la visualización, ya que nos ha permitido observar el comportamiento individual y de un grupo de alumnos con talento respecto a las manifestaciones de las habilidades de la visualización y detectar errores y dificultades. Estas observaciones se han hecho en un contexto similar a un proceso de enseñanza ordinario, lo que ha permitido conjugar las intenciones docentes con las investigadoras. La asignación de categorías mediante un procedimiento que conjuga actuaciones a priori y posteriori, ha facilitado el poder estudiar la evolución de la investigación y organizar una gran cantidad de datos en indicadores que son factibles de interpretación tanto cualitativa como cuantitativa. Este procedimiento de observación de las habilidades permite relacionar los resultados con otros estudios de habilidades relativos a estudios de casos particulares (Gutiérrez, 1992; Ryu, Chong y Song, 2007), relación entre habilidades y tareas (Del Grande, 1990) o incluso estudios factoriales (Arrieta, 2011; Carroll, 1993).

Aunque no era un objetivo específico, consideramos que esta investigación podría aportar información interesante en el debate abierto para clarificar el papel que

desempeña la visualización en la caracterización del talento matemático (Pitta-Pantazi y Christou, 2009a), ya que establece indicadores para relacionar aspectos relativos al talento matemático y la visualización, como son la diferencia entre capacidad y uso de la visualización, la relación entre talento matemático y rendimiento en tareas específicas y la clasificación de los sujetos según su grado de visualización (Krutetskii, 1976; Presmeg, 1986a).

### **Diseño instruccional: Experimento de enseñanza**

En cuanto a la diferenciación entre la capacidad visual manifestada en los test y el uso que hacen de ella al resolver tareas matemáticas, consideramos que este trabajo ha establecido un procedimiento de codificación mediante una operativización de los datos a través de la determinación de indicadores del uso de la visualización, que nos ha permitido compararlos con la medida de la capacidad visual y otros relacionados con la identificación del talento matemático, como test de inteligencia general y pruebas de rendimiento de resolución de problemas matemáticos.

La complejidad del análisis retrospectivo se debe principalmente a la gran cantidad de datos y el análisis diferente que requiere cada sesión, pese a que los objetivos y elementos de análisis son los mismos (Molina, 2006). El carácter docente de nuestro experimento de enseñanza ha originado una diversidad de contenidos e intervenciones de los alumnos similares como corresponde a su comportamiento en una situación escolar habitual. Pese a ello, el procedimiento de obtención de los indicadores permite establecer comparativas entre las sesiones y el estudio de la evolución del uso de la visualización.

Además de la intención investigadora, el procedimiento que hemos utilizado para planificar, implementar y analizar las sesiones de enriquecimiento ha constituido una metodología que podemos considerar adecuada para la atención educativa de los alumnos con talento. Además, el esquema general utilizado para el diseño es factible de trasladar a otros contenidos de enriquecimiento.

Nuestro estudio perseguía determinar elementos para la atención educativa de los alumnos con talento matemático con la finalidad de diseñar buenas prácticas docentes.

## 7 Conclusiones

Se ha apreciado que las habilidades de visualización caben en la formación de alumnos con talento matemático, permitiéndoles afrontar con mayor éxito determinadas tareas matemáticas, con lo que colabora al desarrollo de su sentido espacial. Hemos examinado qué aspectos de las actividades y de los procesos de enseñanza favorecen la manifestación de sus habilidades de visualización y hemos localizado los errores y dificultades que presentan al usarlas. Podemos entender un mejor uso de las habilidades, solventando estos errores y dificultades, como un elemento del desarrollo del talento matemático que poseen, justificando las actuaciones educativas para favorecer sus habilidades de visualización que demandan los investigadores (Hershkowitz, 1990; Gardner, 1995, 2001; Presmeg, 2006, entre otros).

Como se ha observado a partir de los errores y dificultades correspondientes, los alumnos no están familiarizados ni con la terminología ni con los elementos de razonamiento matemático estudiados: condiciones necesarias y suficientes, discusión de todos los casos posibles, contraejemplos, etc. (Kim, Lee, Ko, Park y Park, 2009; Seo, 2007; Yim, Song y Kim, 2008). Además hemos detectado que tienen dificultades al aplicarlos a tareas más complejas, por lo que consideramos que el enriquecimiento de elementos de razonamiento debe ir acompañado de contenidos matemáticos que motiven su utilización. Este tipo de intervenciones pueden hacer progresar la formación matemática de estos alumnos (Battista, 2007; Gutiérrez, 2006; Sriraman, 2004) y por tanto contribuir al desarrollo de su talento matemático (NCTM, 2000).

En nuestro estudio se ha observado que el trabajo en pequeños grupos ha favorecido que los alumnos compartan sus razonamientos mientras se los explican a iguales. Las discusiones entre ellos les han hecho reflexionar sobre sus propias ideas, le han servido para dar sentido a las definiciones que proponían y han podido comparar las estrategias de resolución que utilizaban, contrastando sus resultados (Lee, 2005; Lee, Ko y Song, 2007; Wen y Leu, 2009). Este trabajo en grupo, además de favorecer la manifestación de las habilidades de visualización, ha servido para detectar las dificultades que presentan al comunicar sus argumentaciones visuales y, por lo tanto, puede ser una forma de intervención adecuada para ejercitar su sentido espacial.

### 7.3 Limitaciones

La principal limitación es que los resultados expuestos se refieren al grupo concreto de alumnos con los se trabajó en el experimento de enseñanza. Los sujetos fueron elegidos por su pertenencia al proyecto ESTALMAT, y por lo tanto, fueron seleccionados según su rendimiento en una prueba matemática no estándar. Ha sido a posteriori, a través de la puntuación en el test de Raven y detectando características concretas de los alumnos, cuando se ha podido confirmar que el grupo lo formaban mayoritariamente alumnos con talento matemático. Además, aunque principalmente el análisis ha sido cualitativo, consideramos una limitación para los resultados aportados mediante análisis estadísticos el número de sujetos de la muestra utilizada.

Otra limitación es debida al procedimiento para detectar la visualización utilizada a lo largo de las sesiones. Aunque se han triangulado los datos entre dos investigadores y se ha actuado por saturación en algunos casos, las decisiones para considerar si en una intervención se manifestaba una determinada habilidad pueden tener una interpretación subjetiva. Además un alumno ha podido utilizar distintas habilidades pero no manifestarlas en sus respuestas.

Los resultados obtenidos a partir del experimento de enseñanza están condicionados por el tipo de actividades propuestas y el diseño de las sesiones. Por lo tanto, son relativos a los contenidos y elementos de razonamiento concretos que se han trabajado en las sesiones.

Además de las muchas variables que afectan al experimento de enseñanza y que se han intentado controlar mediante la metodología utilizada, somos conscientes de que el experimento puede haberse visto condicionado por otras variables ajenas al mismo. Es el caso de los contenidos tratados en sus clases ordinarias entre las tres sesiones, las actitudes de alumnos con poca predisposición a manifestar sus argumentaciones o el efecto de estar condicionados por el hecho de ser investigados, así como la influencia de los investigadores en las producciones de los alumnos, etc.

### 7.4 Perspectivas

Finalmente, señalamos algunas cuestiones de interés para el campo de investigación de la Didáctica de la Matemática que pueden derivarse de este trabajo.

En nuestro estudio hemos investigado a unos sujetos, un proceso de enseñanza y el análisis de las manifestaciones de las habilidades. Variar algunos de estos elementos sugiere unas preguntas:

En relación a la atención de alumnos con talento matemático:

- ¿Cómo manifestarán las habilidades de visualización, errores y dificultades al enfrentarse a unos contenidos de enriquecimiento diferentes?
- ¿Qué papel desempeñan los demás elementos que componen la visualización (imágenes, procesos y representaciones externas) en la manifestación de estas habilidades?
- ¿Qué otras habilidades, distintas a la de la visualización, han manifestado en el proceso de enseñanza y son factibles de desarrollar?
- ¿Para qué otros ámbitos es adecuado este proceso de enseñanza para enriquecer elementos de otros campos de las matemáticas?
- ¿Cómo trasladar el diseño de esta intervención al tratamiento de la diversidad en una situación escolar ordinaria en la que el grupo de alumnos con talento matemático es reducido?
- ¿Cuál es el comportamiento de otros sujetos con talento matemático ante este mismo proceso?
- ¿Cómo influye en el proceso de enseñanza la utilización de diferentes materiales y metodologías de enseñanza?
- ¿Qué actividades específicas favorecen más el desarrollo de la visualización a lo largo del proceso de enseñanza?
- ¿Qué papel ocupa en la caracterización del talento matemático la capacidad visual que manifiestan en los test? ¿Y la que manifiestan en las tareas matemáticas específicas?
- ¿Qué formación del profesorado es la más adecuada para diseñar buenas prácticas docentes para estos alumnos?

En relación al desarrollo de las habilidades de visualización:

- ¿Es válido el proceso de enseñanza cuando se aplica a otro tipo de estudiantes?
- ¿Favorecerá el desarrollo de la visualización al aplicar el proceso de enseñanza en un contexto de no enriquecimiento?
- ¿Qué otros elementos de la visualización son factibles de mejorar a lo largo del proceso de enseñanza?
- ¿Qué metodologías específicas favorecen la superación de los errores y las dificultades de comunicación encontradas?
- ¿Qué elementos visuales son los más apropiados en el enriquecimiento según la edad o teniendo en cuenta su conexión con el curriculum?
- ¿Es posible diseñar y validar un instrumento para detectar las habilidades de visualización al resolver tareas matemáticas?

El método de investigación que hemos diseñado nos ha aportado una gran cantidad de información sobre el comportamiento visual de estos alumnos. Aunque en este estudio hemos cubierto unas determinadas expectativas, consideramos que pueden ser objeto de estudios posteriores profundizar en la comprensión de algunas de las actividades planteadas y abordar con mayor detalle el comportamiento de los alumnos con talento matemático al afrontar tareas de relleno del espacio, curvatura constante, concepto de dimensión, argumentación en geometría (concretamente en el juego Constelaciones), estudio de las secciones de cubo, etc.

A partir de la profundización en las tareas anteriores o similares, consideramos que se puede obtener información del desarrollo del sentido espacial que tienen los alumnos con talento ubicándolos en los correspondientes niveles de Van Hiele.

Creemos que los resultados obtenidos pueden ubicar este experimento dentro de un contexto teórico más amplio que aporte información tanto para el diseño de procesos de intervención para alumnos con talento matemático en un modelo de enriquecimiento como para procesos de intervención para desarrollar la visualización.

## 7 Conclusiones

## Referencias

- Abas, J. y McLeay, H. (1991). Algorithms for the seven distinct frieze types. *Mathematics in School*, 2, 2-6.
- Acevedo, J. (2009). *Visualización en geometría: la rotación y la traslación en el videojuego, como práctica socialmente compartida*. Conferencia presentada en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Pasto, Colombia.
- Acevedo, J. y Camargo, L. (2011). El Tetris como mediador visual para el reconocimiento de movimientos rígidos en el plano (rotación y traslación). En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 333-344). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Acuña, C. (2008). A study about the spatial orientation in the plane, the localization of points as opposed to the arithmetic and geometric description of their position. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX, 1* (pp. 235). México: Cinvestav-UMSNH.
- Acuña, C. y Larios, V. (2008, julio). *Prototypes and learning of geometry. A reflection on its pertinence and its causes*. Comunicación presentada en 11<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education (ICME), México.
- Agathangelou, S., Papakosta, V. y Gagatsis, A. (2008, julio). *The impact of iconic representations in solving mathematical one-step problems of the additive structure by primary second grade pupils*. Comunicación presentada en 11<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education (ICME), México.
- Al Mufti, I. (1996). La excelencia en la educación: invertir en el talento. En J. Delors (Ed.), *La educación encierra un tesoro*. Madrid: Santillana.
- Alonso, D. y Fuentes, L. J. (2001). Mecanismos cerebrales del pensamiento matemático. *Revista de Neurología*, 33 (6), 568-576.
- Alsina, C., Pérez, R. y Ruiz, C. (1989). *Simetría dinámica*. Madrid: Síntesis.

## Referencias

- Alsina, C., Fortuna, J. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid: Síntesis.
- Alson, P. (1989). Path and Graphs of Functions. *Focus on Learning Problem in Mathematics*, 11 (2), 99-106.
- Anguera, M.T., Arnau, J., Ato, M., Martínez, R., Pascual, J. y Vallejo, G. (1995). *Métodos de investigación en Psicología*. Madrid: Síntesis Psicología.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52 (3), 215–241.
- Arocas, E., Martínez, P. y Martínez, M. (2006). ¿Qué necesidades educativas tienen los alumnos más capaces? *Quaderns digitals: Revista de Nuevas Tecnologías y Sociedad*, 42.
- Arrieta, I. (2011, junio). *Un estudio de la capacidad espacial desde la educación infantil hasta la universidad*. Trabajo presentado en el II Encuentro AprenGeom. CIEM. Castro Urdiales, Santander, España.
- Arrieta, M. (2003). Capacidad visual y educación matemática: tres problemas para el futuro de la investigación. *Educación Matemática*, 15 (3), 57-76.
- Arrieta, M. (2006). La capacidad espacial en la educación matemática: estructura y medida. *Educación Matemática*, 18 (1), 99-132.
- Assouline, S. G. y Lupkowski-Shoplik, A. E. (2003). *Developing mathematical talent: A guide for challenging and educating gifted students*. Waco, TX: Prufrock Press.
- Baccaglioni-Frank, A., Mariotti, M. A. y Antonini, S. (2009). Different perceptions of invariants and generality of proof in dynamic geometry. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2 (pp. 89-96). Thessaloniki, Greece: PME.
- Barger, R. H. (2009). Gifted, Talented, and High Achieving. *Teaching Children Mathematics*, 16 (3), 154-161.

- Barrat, P. E. (1953). Imagery and thinking. *Australian Journal of Psychology*, 5, 154-164.
- Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 2 (pp. 843-908). Charlotte, NC: NCTM/Information Age Publishing.
- Battista, M. T. y Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (3), 258-292.
- Battista, M. T., Wheatley, G. H., y Talsma, G. (1982). The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, 332-340.
- Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa*. Tesis doctoral sin publicar. Universidad de Granada, España.
- Benavides, M., Maz, A., Castro, E. y Blanco R. (Eds.) (2004). *La Educación de niños con talento en Iberoamérica*. Santiago (Chile): OREALC-Unesco.
- Ben-Chaim, D., Lappan, G. (1989). The Role of Visualization in the middle school mathematics curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1), 49-60.
- Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R.T. (1988). The effect of instruction on spatial visualization skills of middle school boys and girls. *American Educational Research Journal*, 25, 51-71.
- Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R. T. (1989). Adolescents' ability to communicate spatial information: Analyzing and affecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 121-146.
- Benito, Y. (1996). Capacidad metacognitiva y estrategias cognitivas de resolución de problemas matemáticos y de transformación y de inducción de estructuras en superdotados. *Ideación*, 7, 25-33.

## Referencias

- Bennett, G. K., Seashore, H. G. y Wesman, A. G. (2000). *Test de Aptitudes Diferenciales (DAT-5). Manual*. Madrid: TEA Ediciones.
- Bennie, K. y Smit, S. (1999, July). "Spatial sense": Translating curriculum innovation into classroom practice. Paper presented at the 5th Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA), Port Elizabeth.
- Bergasa, J. y Sada, M. (2006). Movimientos en el plano: un tema a desarrollar en el aula de ordenadores. *Sigma*, 29, 85-92.
- Bicknell, B. (2008). Gifted students and the role of mathematics competitions. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 13 (4), 16-20.
- Bishop, A.J. (1980). Spatial Abilities and Mathematics Education: A Review. *Educational Studies in Mathematics*, 11 (3), 257-269.
- Bishop, A.J. (1983). Space and geometry. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 175-203). New York: Academic Press.
- Bishop, A.J. (1989). Review of Research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1), 7-16.
- Bishop, A.J. (1992). Implicaciones didácticas de la investigación sobre la visualización. En R. C. Núñez, E. A. Sánchez, y G. Z. Badillo (Eds.), *Antología en educación matemática*. México: CINVESTAV-IPN.
- Bishop, A.J. (1999). Enculturación matemática. *La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.
- Bishop, A. J. (2008). Visualising and mathematics in a pre-technological culture. En P. Clarkson y N. Presmeg, (Eds.), *Critical Issues in Mathematics Education*. Springer, USA (pp. 109-119).
- Biza, I., Nardi, E. y Zachariades, T. (2008). Persistent images and teacher beliefs about visualisation: the tangent at an inflection point. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX. 2* (pp. 177-184). México: Cinvestav-UMSNH.

- Biza, I., Nardi, E. y Zachariades, T. (2009). Do images disprove but do not prove? Teachers' beliefs about visualization. En F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education, 1* (pp. 59-64). Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Blanco, H. (2010). Análisis del papel de las imágenes en actividades matemáticas. *Premisa (SOAREM)*, 12 (46), 39-47.
- Blanco, R., Ríos, C. y Benavides, M. (2004). Respuesta educativa para los niños con talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.), *La Educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 49-60). Santiago (Chile): OREALC-Unesco.
- Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (2007). *Orden de 10 de agosto, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía* (BOJA nº 171, pp. 23-65). Sevilla: Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.
- Boletín Oficial del Estado (2006). *Real Decreto 1631/2006, Enseñanzas mínimas* (BOE, 293, pp. 43053-43102). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Boletín Oficial del Estado (2007). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria* (BOE nº 5, pp. 677-773). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Bolívar, A. (2010). *Mediocres en excelencia, sobresalientes en equidad*. Recuperado el día 11 de diciembre de 2010, desde [http://www.elpais.com/articulo/sociedad/Mediocres/excelencia/sobresalientes/equidad/elpepusoc/20101211elpepusoc\\_6/Tes](http://www.elpais.com/articulo/sociedad/Mediocres/excelencia/sobresalientes/equidad/elpepusoc/20101211elpepusoc_6/Tes)
- Brown, D. L y Wheatley, G (1989). Relationship between spatial ability and mathematics knowledge. En C. A. Maher, G. A. Goldin y R. B. Davis (Eds.), *Proceedings of the 11th annual meeting international group for Psychology of Mathematics Education, 2* (pp. 143-148). New Brunswick, NJ.

## Referencias

- Bryant, D. J. (1997). Representing space in Language and Perception. *Mind & Language*, 12 (3/4), 239-264.
- Callejón, M. L. (2002). Para saber más: referencias sobre el talento matemático. *La Gaceta de la RSME*, 5 (1), 145-146.
- Camargo, L., Gutiérrez, A. (2010). El aprendizaje de la demostración visto desde la teoría de la práctica social. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 245-258). Lleida: SEIEM.
- Campbell, S. R., Handscomb, K., Zaparyniuk, N. E., Sha, L., Cimen, O. A., y Shipulina, O. V. (2009, abril). *Investigating image-based perception and reasoning in geometry*. Paper presented to the American Educational Research Association: Brain, Neuroscience and Education SIG, San Diego, CA, U.S.A.
- Carey, N. (1915). Factors in the mental processes of school children: I. Visual and auditory imagery. *British journal of Psychology*, 7, 453-490.
- Carreras, L., Arroyo, S. y Valera, M. (2006). *Protocolo de identificación de niños/as con altas capacidades intelectuales e intervención en estos casos*. En Primeras jornadas nacionales sobre escuela y superdotación. Intercambio de experiencias (pp. 65-99). Colegio Oficial de Psicólogos de Catalunya. Colegio de Pedagogos de Cataluña. Barcelona. Recuperado el 6 de mayo de 2012, desde <http://www.mentor.cat/articles.htm>.
- Carrier, C., Karbo, K., Kindem, H., Legisa, G., y Newstorm, L. (1983). Use of Self-Generated and Supplied Visuals as Mnemonics in Gifted Children's Learning. *Perceptual and Motor Skills*, 57 (1), 235-240.
- Carrol, J. B. (1993). *Human cognitive abilities: A survey of factor analytic studies*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Casey, H. V. E. y Wolf, J. S. (1989). "Developing Visual Literacy Among Academically Able Fifth-Grade Students", *Roeper Review*, 12 (2), 86-91.
- Castelló, A. (1997). Problemática escolar de las personas superdotadas y talentosas. En C. Martín (coord.), *Superdotados. Problemática e Intervención* (pp. 75-102). Valladolid: Servicio de apoyo a la enseñanza, Universidad de Valladolid.

- Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada: Editorial Comares.
- Castro, E., Benavides, M. y Segovia, I. (2008). Diagnóstico de errores en niños con talento. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática (UNION)*, 16, 123-140.
- Castro, E., Maz, A., Benavides, M. y Segovia, I. (2006). Talento matemático: Diagnóstico e intervención. En M. D. Valadez, J. Betancourt y M. A. Zavala (Eds.), *Alumnos superdotados y talentosos. Identificación, evaluación e intervención. Una perspectiva para docentes* (pp. 453-473). México: El Manual Moderno.
- Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in Cartesian Graphing. *Focus on Learning Problem in Mathematics. Spring Edition 1989*, 11 (2), 77-87.
- Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York: MacMillan.
- Clements, K. (1981). Visual imagery and school mathematics (1). *For the Learning of Mathematics*, 2 (2), 2-9.
- Clements, K. (1982). Visual imagery and school mathematics (2). *For the Learning of Mathematics*, 2 (3), 33-38.
- Clements, M. (1983). The question of how spatial ability is defined, and its relevance to mathematics education. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, 1 (1), 8-20.
- Clements, M., Del Campo, G. (1989). Linking Verbal Knowledge, Visual Images, and Episodes for Mathematical Learning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1), 25-33.
- Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A.E. Kelly, R.A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics. Learning and Teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

## Referencias

- Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2nd Ed.). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cohen, N. (2003). Preference of directions in 3-D space. *European Research on Mathematical Education (CERME) III, Thematic Working Group 7*. Jerusalem. Recuperado el 14 de mayo de 2012, desde [http://ermeweb.free.fr/CERME3/Groups/TG7/TG7\\_Cohen\\_cerme3.pdf](http://ermeweb.free.fr/CERME3/Groups/TG7/TG7_Cohen_cerme3.pdf)
- Cohen, N. (2008). How do a plane and a straight line look like? Inconsistencies between knowledge and mental images. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*, 2 (pp. 345-352). México: Cinvestav-UMSNH.
- Colangelo, N., Davis, G. (Eds.) (1997). *Handbook of Gifted Education* (Segunda Edición). Boston: Allyn and Bacon.
- Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 135-152). New York: Cambridge University Press.
- Confrey, J. y Lachance, A., (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-265). New Jersey: Lawrence Erlbaum associates.
- Coolican, H. (2005). *Métodos de investigación y estadística en psicología*. México: Manual Moderno
- Corbalán, F. (1997). *Juegos de estrategia y resolución de problemas: análisis de estrategias y tipología de jugadores en el alumnado de secundaria*. Tesis doctoral. Bellaterra: Universidad Autónoma de Barcelona.
- Cunningham, S. (1991). The visualization environment for mathematics Education. En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 67-76). Washington, DC: Mathematical Association of America.

- Chan, D. W. (2010). Developing the Impossible Figures Task to Assess Visual-Spatial Talents among Chinese Students: A Rasch Measurement Model Analysis. *Gifted Child Quarterly*, 54 (1), 59-71.
- Cheng, C., Chen, P., Chen, K. y Leu, Y. (2011). A study on three dimensional views of spatial orientation for primary schools teachers. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1 (p. 442). Ankara, Turkey: PME.
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: Editorial Horsori e I.C.E. Universitat de Barcelona.
- Chu, M. y Kita, S. (2011). The Nature of Gestures' Beneficial Role in Spatial Problem Solving. *Journal of Experimental Psychology: General*, 140 (1), 102–116.
- Cho, H. H., Song, M. H. y Lee, J. Y. (2011). Semiotic Micro-world for Mathematical Visualization. En B. Sriraman y K. H. Lee (eds). *The elements of Creativity and Giftedness in Mathematics* (pp. 145-159). Rotterdam/Boston/Taipei: Sense Publishers.
- Dai, D. Y., Swanson, J. A. y Cheng, H. (2011). State of Research on Giftedness and Gifted Education: A Survey of Empirical Studies Published During 1998–2010 (April). *Gifted Child Quarterly*, 55 (2), 126–138.
- Davis, P. y Hersch, R. (1989). *Experiencia matemática*. Barcelona: Centro de Publicaciones del MEC y Editorial Labor.
- De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra*. Madrid: Pirámide.
- De Guzmán, M. (2002). Un programa para detectar y estimular el talento matemático precoz en la Comunidad de Madrid. *La Gaceta de la RSME*, 5 (1), 131–144.
- Deal, L. J. Y Wismer, M. G. (2010). NCTM Principles and Standards for Mathematically Talented Students. *Gifted Child Today*, 33 (3), 55-65.
- Dehaene S. (1997). *The number sense: how the mind creates mathematics*. New York: Oxford University Press.

## Referencias

- Del Grande, J. J. (1987). Spatial Perception and Primary Geometry. En M. M. Lindquist (Ed.), *Learning and Teaching Geometry, K-12* (pp. 127-135). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Del Grande, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic teacher*, 37 (6), 14-20.
- Delors, J. (coord.) (1996). *La educación encierra un tesoro. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la educación para el siglo XXI*. Madrid: Santillana. Ediciones UNESCO.
- Denis, M. (1989). *Image et cognition*. París, France: Presses Universitaires de France.
- Desco, M., Navas-Sánchez, F. J., Sánchez-González, J., Reig, S., Robles, O., Franco, C., Guzmán de Villoria, J. A., García-Barreno, P. y Arango, C. (2011). Mathematically gifted adolescents use more extensive and more bilateral areas of the fronto-parietal network than controls during executive functioning and fluidreasoning tasks. *NeuroImage*, 57, 281-292.
- Desco, M., Sanchez-González, J., Robles, O., Navas, J., Reig, S., Franco, C., Guzmán de Villoria, J., García-Barreno, P. y Arango, C. (2009, junio). FMRI study of math-gifted adolescents and controls while performing the Raven`s Progressive Matrices task. *Neuroimage*, 47 (1), S111.
- Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C. y Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: análisis de una muestra. *FAISCA, Revista de Altas Capacidades*, 13 (15), 30-39.
- Dickson, L., Brown, M. Y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Editorial Labor, S.A. Centro de Publicaciones del MEC.
- Diezmann, C. y Lowrie, T. (2009). Primary student´s spatial visualization and spatial orientation: an evidence base for instruction. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2 (pp. 417-424). Thessaloniki, Greece: PME.

- Domenech, M. (2006). *El papel de la inteligencia y de la metacognición en la resolución de problemas*. Tesis doctoral. Universitat Rovira e Virgili (España).
- Dreyfus, T. (1995). Imagery for diagrams. En R. Sutherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education, NATO ASI Series F, Computer and System Sciences, 138* (pp. 3-19). Berlin: Springer Verlag.
- Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1986). On visual versus analytical thinking in mathematics. En C. Hoyles, R. Noss y R. Sutherland (Eds.), *Proceedings on the Tenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 153-158). London, U. K.: Institute of Education.
- Dubnov, Y. S. (1994). *Errores en las demostraciones geométricas*. Madrid: Rubiños-1860, S.A.
- Dunkels, A. (1990). Making and exploring Tangrams. *Arithmetic teacher*, 37 (6), 38-42.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basis issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference, 1* (pp. 3-26).
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, 9 (1), 143–168.
- Edo, M. y Deulofeu, J. (2005). Juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos: investigación sobre una práctica educativa. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 187-196). Córdoba: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Edo, M., Baeza, M., Deulofeu, J. y Badillo, E. (2008). Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución de un problema. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática (UNIÓN)*, 14, 61 – 75.
- Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25-38). Washington, DC: Mathematical Association of America.

## Referencias

- Elgersma, T. (1990). Discovery Ideas for the Gifted. *Gifted Child today*, 13 (2), 35-37.
- Ellerton, N. (1986). Children's made-up mathematics problems – A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 17 (3), 261-271.
- Elliott, S. y Hudson, B. (2000). Visualisation and the influence of technology in 'A' level mathematics: A classroom investigation. En T. Rowland y C. Morgan (Eds.), *Research in Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 151-168). London: BSRLM.
- Eysenck, H. J. y Barrett, P. T. (1993). Brain research related to giftedness. En K. A. Heller, F. J. Mönks y A. H. Passow (Eds.), *International handbook of research and development of giftedness and talent* (pp. 115-131). Oxford: Pergamon Press.
- Fernández, T. (2008). *Revisión de la investigación en didáctica de la geometría en el ICME 2008*. Ponencia presentada en la reunión del Grupo durante el 12º Simposio de la SEIEM. Monterrey, México.
- Fernández, T., Cajaraville, J. A. y Godino, J. D. (2007). Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacial. En Bolea, P., Camacho, M. y Flores, P. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. XI Simposio de la SEIEM* (pp. 189-197). Tenerife: Universidad de La Laguna.
- Ferrándiz, C., Prieto, M., Fernández, M., Soto, G., Ferrando, M. y Badía, M. (2010). Modelo de identificación de alumnos con altas habilidades de Educación Secundaria. *REIFOP*, 13 (1), 63-74.
- Fielker, D. S. (1979). Strategies for Teaching Geometry to Younger Children. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 85-133.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (2), 139-162.
- Flores, P. (2006). Pirámides rellenas de... pirámides. Puzzles espaciales que favorecen la visualización. En P. Flores, F. Ruiz, F. y M. De la Fuente (coords.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 221-247). Federación Española de Profesores de Matemáticas y SAEM THALES.
- Fox, D. (1981). *El proceso de investigación en educación*. Pamplona: Eunsa.

- Freed, J., Kloth, A., y Billett, J. (2006). Teaching the gifted visual spatial learner. *Understanding Our Gifted*, 18 (4), 3-6.
- Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A Challenging Situations Approach. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 3 (1), 51-75. Canada: The Montana Council of Teachers of Mathematics.
- Freiman, V. y Applebaum, M. (2009). Involving students in extra-curricular school mathematical activity: virtual mathematical marathon case study. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, (pp. 203-206). Thessaloniki, Greece: PME.
- Friedman, L. (1995). The spatial factor in mathematics: Gender differences. *Review of Educational Research*, 65 (1), 22-50.
- Gal, H. y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: Analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74 (2), 163-183.
- Gallagher, S. A., y Johnson, E. S. (1992). The effect of time limits on performance of mental rotations by gifted adolescents. *Gifted Child Quarterly*, 36, 19-22.
- García, E., Romero, O. y Flores, P. (1999). La simetría, algo más que un movimiento. En I. Berenguer, J. M. Cardeñoso y M. Toquero (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas: Matemáticas en la sociedad* (pp. 131-136). Granada: SAEM THALES y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Gardner, H. (1995). *Inteligencias múltiples. La teoría en la práctica*. Barcelona, Paidós.
- Gardner, H. (2001). *La inteligencia reformulada*. Barcelona: Paidós.
- Gavin, M. K., Casa, T. M. y Adelson, J. L. (2006). Mentoring Mathematical Minds: An Innovative Program to Develop Math Talent. *Understanding Our Gifted*, 19 (1), 3-6.
- Gavin, M. y Sheffield, L. (2010). Using Curriculum to Develop Mathematical Promise in the Middle Grades. En M. Saul, S. Aussoline y L. Sheffield, (coords.), *The Peak*

## Referencias

- in the Middle: Developing Mathematically Gifted Students in the Middle Grades* (pp. 51-76). Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ghyka, M. (1983). *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Barcelona: Poseidón.
- Giménez, A. (2008). *Talento matemático*. Matematicalia. Revista digital de divulgación matemática, 4 (3). Recuperado el 9 de Mayo de 2012, desde [http://www.matematicalia.net/index.php?option=com\\_wrapper&Itemid=413](http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_wrapper&Itemid=413)
- Goddijn, A. y Kindt, M. (1985). Space geometry doesn't fit in the book. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1*, (pp. 171-182). Utrech, The Netherlands: State University of Utrech, Subfaculty of Mathematics, OW & OC.
- Godino, J., Cajaraville, J., Fernández, T. y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*. Pendiente de publicación.
- Gonzato, M., Fernández, T. y Godino, J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números*, 77, 99-117.
- Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 207-231.
- Greenes, C. (1981). Identifying the Gifted Student in Mathematics. *Arithmetic Teacher*, 28 (8), 14-17.
- Gruessing, M. (2011). Spatial abilities and mathematics achievement among elementary school children. En B. Ubuz (Ed.). *Proceedings of the 35<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1*, (p. 306). Ankara, Turkey: PME.
- Guay, R. B. y McDaniel, E. D. (1977). The Relationship between Mathematics Achievement and Spatial Abilities Among Elementary School Children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8, 211-215.
- Guillén, G. (1991). *Poliedros*. Madrid, España: Editorial síntesis.

- Guillen G. (1997). El mundo de los poliedros. Madrid, España: Editorial síntesis.
- Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). Lleida: SEIEM.
- Gurova, L. L. (1970). The influence of a visual aid on the process of solving spatial problems. En J. Kilpatrick y I. Wirzup (Eds.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*, 4, (pp.137-147). University of Chicago Press.
- Gutiérrez, A. (1992). Procesos y habilidades en visualización espacial. En A. Gutiérrez (ed). *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Geometría* (pp. 44-59). México: CINVESTAV-PNFAPM.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th P.M.E. Conference*, 1 (pp. 3-19). Valencia, España: Universidad de Valencia.
- Gutiérrez, A. (1998a). *Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización*. Texto de la ponencia invitada en el Encuentro de Investigación en Educación Matemática, TIEM98. Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona, España. Recuperado el 2 de abril de 2007, desde <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut98b.pdf>.
- Gutiérrez, A. (1998b). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista EMA*, 3, 193-220.
- Gutiérrez, A. (2011). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en los niveles de primaria y secundaria. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 3-14). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En Flores, P., Ruíz, F. y De la Fuente, M. (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp.13-58). Badajoz: Federación Española de Profesores de Matemáticas y SAEM THALES.

## Referencias

- Gutiérrez, A., Pegg, J., y Lawrie, C. (2004). *Characterization of students' reasoning and proof abilities in 3-dimensional geometry*. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, (pp. 511–518). Bergen, Norway.
- Gutiérrez, M. P. y Maz, A. (2004). Educación y diversidad. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.), *La Educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 15-24). Santiago (Chile): OREALC-Unesco.
- Guven, B., y Kosa, T. (2008). The effect of dynamic geometry software on student mathematics teachers' spatial visualization skills. *Turkish Online Journal of Educational Technology*, 7 (4), 100–107.
- Haber, R. N. y Haber, R. B. (1964). Eidetic Imagery. *Perceptual and motor skills*, 19, 131-138.
- Hadamard, J. (1947). *Psicología de la invención en el campo matemático*. Buenos Aires: Espasa-Calpe Argentina, S.A.
- Hanna, G. y Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: a brief survey of philosophical Perspectives. *ZDM Mathematics Education*, 39, 73–78.
- Harel, R. y Dreyfus, T. (2009). Visual proofs: high school student's point of view. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, (p. 386). Thessaloniki, Greece. PME.
- Healy, L. y Hoyles, C. (1999). Visual and Symbolic Reasoning in Mathematics: Making connections with computers? *Mathematical Thinking and Learning*, 1, (1), 59-84.
- Hegarty, M., y Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91, 684–689.
- Heinze, A. (2005). Differences in problem solving strategies of mathematically gifted and non-gifted elementary students. *International Education Journal*, 6 (2), 175-183.

- Heller, K., Mönks, F. J., Sternberg, R. J., y Subotnik, R. F. (Eds.) (2000). *International handbook of giftedness and talent (2nd ed.)*. Oxford, England: Elsevier Science.
- Heller, K. A., Mönks, F. J., y Passow, A. H. (Eds.) (1993). *International handbook of research and development of giftedness and talent*. Oxford, England: Pergamon Press.
- Hernández, E. (2009). Talento precoz en matemáticas: Modelos de detección y programas de estímulo. En A. Pérez y M. Sánchez (coords.), *Matemáticas para estimular el talento* (pp. 9-17). Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2007). *Fundamentos de metodología de la investigación*. Madrid: Mc Graw Hill.
- Hersberger, J. y Wheatley, G. (1980). A Proposed Model for a Gifted Elementary School Mathematics Program. *Gifted Child Quarterly*, 24 (1), 37-40.
- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in Geometry – Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1), 61-76.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 70-95). Cambridge, G. B.: Cambridge U. P.
- Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles, C., Lappan, G., Mitchelmore, M. y Vinner, S. (1989). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 70–95). Cambridge: University Press.
- Hershkowitz, R., Parzysz, B. y Van Dormolen, J. (1996). Space and Shape. En A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education*, vol. 4, pp. 161-204. Dordrecht, Netherlands: Klumer Academia Publishers.
- Hills, J. R. (1957). Factor analyzed abilities and success in college mathematics. *Educational Psychological Measurement*, 17, 615-622.

## Referencias

- Hitt, F. (Ed.) (2002). *Representations and Mathematics Visualization*. North American Chapter of IGPME, Cinvestav-IPN, Mexico.
- Hitt, F., González-Marín, A. y Morasse, C. (2008). Visualization and students' functional representations in the construction of mathematical concepts. An example: the concept of co-variation as a prelude to the concept of function. En 11<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education (ICME), México.
- Ho, S.Y. (2007). Visualization in mathematical problem solving: performance of students in a national examination-type word problem. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1*, (p. 312). Seoul: PME.
- Ho, S. Y. (2008a). Visualization in mathematical problem solving: a case study with Allison. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX, 1* (pp. 271). México: Cinvestav-UMSNH.
- Ho, S. (2008b). Roles of visualization in mathematical problema solving. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX, 1* (pp. 347). México: Cinvestav-UMSNH.
- Hoffer, A. R. (1977). *Mathematics Resource Project: Geometry and Visualization*. Palo Alto, Calif.: Creative Publications.
- Höffler, T. N. (2010). Spatial ability: Its influence on learning with visualizations—a meta-analytic review. *Educational Psychological Review*, 22, 245-269.
- Hoffmann, M. (2007). Learning from people, things, and signs. *Studies in Philosophy Education*, 26, 185–204.
- Hong, J. (2007). Mathematical challenges encountered in classrooms: how mathematically gifted and talented secondary students deal with these challenges. En J. H. Woo, H. C. Lew, K.S. Park, K. S. y Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1*, p. 290. Seoul: PME.

- Horowitz, F. y O'Brien, M. (1986). Gifted and talented children: State of knowledge and directions for research. *American Psychologist*, 41 (10), 1147-1152.
- Hubbard, E., Piazza, M., Pinel, P. y Dehaene, S. (2005). Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Reviews. Neuroscience*, 6, 435-448.
- Human, P. G. (1998). Draft discussion document for Malati Geometry Working Group. Cape Town, South África.
- Hung, P., Chen, Y., Lin S. y Tseng, C. (2007). The elementary school gifted students with GSP: Creative geometry problem solving and knowledge transferring process. En J. H. Woo, H.C. Lew, K.S. Park y D.Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1 (p.227). Seoul: PME.
- Hung, P., Chen, Y. y Tseng, K. (2008). The effects of a spatial reasoning scaffold system for the elementary school students. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX. 1* (pp. 273). México: Cinvestav-UMSNH.
- INECSE (2005). *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de solución de problemas*. Madrid: INECSE, MEC
- Ioannou, M. y Nardi, E. (2009). Visualisation as a meaning-bestowing process in the learning and teaching of abstract algebra. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1 (p. 397). Thessaloniki, Greece: PME.
- Izard, J. (1990). Developing spatial skills with three-dimensional puzzles. *Arithmetic teacher*, 37 (6), 44-47.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Síntesis.
- Jiménez, C. (2002). La atención a la diversidad a examen: La educación de los más capaces en el sistema escolar. *Bordón*, 54 (2 y 3), 219-240.
- Jiménez, W., Rojas, S. y Mora, L. (2011, junio). *Características del talento matemático asociadas a la visualización*. Comunicación presentada en XIII CIAEM-IACME,

## Referencias

- Recife, Brasil. Recuperado el 10 de Junio de 2012, desde [http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii\\_ciaem/xiii\\_ciaem/paper/view/1175/234](http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1175/234)
- Johnson, D. T. (2000). *Teaching mathematics to gifted students in a mixed-ability classroom*. Reston, VA: Council for Exceptional Children.
- Kageyama, K. (2009). Justification identified in mathematics classroom. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1* (p. 401.9). Greece: PME.
- Kalogirou, P., Sophocleous, P. y Gagatsis, A. (2009). Mental images, prototypical figures and flexibility. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1* (p. 402). Thessaloniki, Greece: PME.
- Kaput, J. (1989). Supporting Concrete Visual Thinking in multiplicative reasoning: difficulties and opportunities. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11* (1), 35-47.
- Karp, A. (2009). Historial perspective: several topics that merit study. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis, H. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1* (pp. 187-190). Thessaloniki, Greece: PME.
- Karp, A. y Leikin, R. (2009). Mathematical gift and promise: exploring and developing. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis, H. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1* (pp. 185-214). Thessaloniki, Greece: PME.
- Kelly, A. E. y Lesh, R. A. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kim, J., Lee, K., Ko, E., Park, M., y Park, M. (2009). Are gifted students aware of unjustified assumptions in geometric constructions? En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International*

- Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (pp. 337-344). Thessaloniki, Greece: PME.
- Kliapis, P. y Tzekaki, M. (2011). Strategies in early spatial reasoning. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1 (p. 408). Ankara, Turkey: PME.
- Koichu, B. (2009). What is so special about problema solving by mathematically gifted students?. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1 (pp. 195-198). Thessaloniki, Greece: PME.
- Koichu, B. y Berman, A. (2005). When do gifted high school students use geometry to solve geometry problems? *The Journal of Secondary Gifted Education*, 16 (4), 168-179.
- Konvisser, M. (1989). Graphical Composition of Functions. *Focus on Learning Problem in Mathematics*, 11 (2), 107-116.
- Kopelman, E. (1994). Visualization and reasoning about lines in space: school and beyond. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th P.M.E. Conference*, 3 (pp. 97-103). Lisboa, Portugal.
- Kosslyn, S. M. (1980). *Image and mind*. London, G B: Harvard U. P.
- Kozhevnikov, M., Hegarty, M. y Mayer, R. E. (2002). Revising the visualizer-verbalizer dimension: Evidence for two types of visualizers. *Cognition and Instruction*, 20, 47-77.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica*. Paidós Comunicación.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.
- Kulp, M., Earley, M., Mitchell, G., Timmerman, L., Frasco, C. y Geiger, M. (2004). Are visual perceptual skills related to mathematics ability in second through sixth grade children? *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 26 (4), 44-51.

## Referencias

- Kwon, S., Song, S. (2007). Views on mathematical proof of able students in the 3rd to 7th grades. En J. H. Woo, H.C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1* (p. 249). Seoul: PME.
- Kyung-Hwa, Lee, K. (2009). Analogical reasoning by the gifted. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3* (pp. 505-512). Thessaloniki, Greece: PME.
- Lambert, M. (2006, September). *Devil in the detail: using a pupil questionnaire survey to evaluate out-of school classes for gifted and talented children*. Paper presented at the British Educational Research Association Annual Conference, University of Warwick: United Kingdom.
- Lavy, I. (2006). Dynamic visualization and the case of “stars in cages”. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4* (pp. 25-32). Prague: PME.
- Lawrie, C., Pegg, J. y Gutierrez, A. (2002). Unpacking students meaning of cross-sections: A frame for curriculum development. *Proceedings of the 26th PME Conference, 3*, 289-296.
- Lean, G. y Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics, 12* (3), 267-299.
- Lee K., Kim M., Na, G., Han, D. y Song, S. (2007). Induction, analogy, an imagery in geometric reasoning. En J. H. Wo., H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3* (pp. 145-152). Seoul: PME.
- Lee K., Ko, E. y Song, S. (2007). The analysis of activity that gifted students construct definition of regular polyhedra. En J. H. Wo., H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3* (pp. 153-160). Seoul: PME.

- Lee, K. H. (2005). Mathematically gifted student's geometrical reasoning and informal proof. En Chick, H. L. y Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (pp. 241-248). Melbourne: PME.
- Lee, K., Choi, N., Ko, E., Kim, M. y Song, S. (2007). Patterns of justification in the process of solving special geometry problems. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1 (p. 2549). Seoul: PME.
- Lee, S. y Pang, J. (2007). A survey on the understanding of spatial sense of elementary school students. En J. H. Wo., H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1 (pp. 255). Seoul: PME.
- Lehrer, R., Jacobson, G., Kemeny, V. y Strom, D. (1999). Building on Children's intuitions to develop mathematical understanding of space. En E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 63-87). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Leikin, R. (2009a). Teaching the mathematically promising: focusing on one teacher. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1 (pp. 206-210). Thessaloniki, Greece: PME.
- Leikin, R. (2009b). Bridging research and theory in mathematics education with research and theory in creativity and giftedness. En R. Leikin, A. Berman y B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 385-411). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publisher.
- Leikin, R. y Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. En J. H. Wo., H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1 (pp. 161-168). Seoul: PME.
- León, O. y Montero, I. (1998). *Diseño de investigaciones*. Madrid: Mc Graw Hill.

## Referencias

- Lin, I., Chia, Hung, P. y Hsiao, C. (2009). The formative assessment design on mathematics project-based collaborative learning for the 5<sup>th</sup> graders. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1* (p. 421). Thessaloniki, Greece: PME.
- Lohman, D. F. (1979). *Spatial ability: A review and re-analysis of the correlational literature*. Technical Report, n° 8. Stanford: Stanford University Aptitude Research Project (School of Education).
- Lohman, D. F., Pellegrino, J. W., Alderton, D. L. y Regian, J. W. (1987). Dimensions and components of individual differences in spatial abilities. En S. H. Irvine y S. N. Newstead (Eds.), *Intelligence and cognition: Contemporary frames of reference* (pp. 253-312). Dordrecht, The Netherlands: Martinus Nijhoff.
- Lowenthal, F. y Vandeputte, C. (1989). Manipulations of Cartesian graphs: A first introduction to analysis. *Focus on Learning Problem in Mathematics, 11* (2), 89-97.
- MacFarlane Smith, I. (1964). *Spatial ability: its educational and social significance*. London: University of London Press.
- Mack, W. (1992). The effect of Training in Computer-Aided Design on the Spatial Visualization Ability in Selected Gifted Adolescents. *Dissertation Abstracts International, 53* (03A). (UMI No. AAG9500831).
- Mack, W. (1995). Computer-Aided Design Training and Spatial Visualization Ability in Gifted Adolescents. *Journal of Technology Studies, 21* (2), 57-63.
- Makina, A. (2010). The Role of Visualisation in Developing Critical Thinking in Mathematics. *Perspectives in Education, 28* (1), 24-33.
- Mann, R. (2006). Effective Teaching Strategies for Gifted/Learning Disabled Students With Spatial Strengths. *The Journal of Secondary Gifted Education, 17* (2), 112–121.
- Marland, S. P. (1972). *Education of the gifted talented. Vol. 1. Report to the Congress of the United States by the U.S. Commissioner of education*. Washington, DC: United States Government Printing Office.

- Mason, M. (1989). The Van Hiele model of geometric understanding and geometric misconceptions in gifted sixth through eighth graders. En C. A. Maher, G. A. Goldin y R. B. Davis (Eds.), *Proceedings of the 11th annual meeting international group for Psychology of Mathematics Education*, 2 (pp. 165-171). New Brunswick, NJ.
- McGee, M. (1979). Human Spatial Abilities: Psychometric Studies and Environmental, Genetic, Hormonal, and Neurological Influences. *Psychological Bulletin*, 86 (5), 889-918.
- McKim, R. (1980). *Thinking Visually*. Palo Alto: Dale Seymour Publications.
- Meavilla, V. (2005). Razonamiento visual y matemáticas, *Sigma*, 27, 109-116.
- Megía, M. (coord.) (1999). *Proyecto de inteligencia Harvard*. Madrid: CEPE.
- Miller, R. C. (1990). *Discovering Mathematical Talent*. ERIC Digest E482. Washington, D.C.: Office of Educational Research and Improvement.
- Ministerio de Educación y Cultura (1989). *Libro Blanco para la Reforma del Sistema Educativo*. Madrid: MEC.
- Ministerio de Educación y Cultura (2000). *Alumnos precoces, superdotados y de altas capacidades*. Madrid: Secretaría General Técnica del Ministerio de Educación y Cultura.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/544/>
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 29 (1), 75-88.
- Montgomery, D., Overton, R., Bull, K., Kimball, S. Y Griffin, J. (1999). Developing a multigenerational creativity website for gifted and talented learners. *Rural special education for the new millennium. Conference proceedings of the American council on Rural Special Education*. Albuquerque, New Mexico.

## Referencias

- Morera, L. y Fortuny, J. M. (2010). Momentos clave en el aprendizaje de isometrías. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 435-450). Lleida: SEIEM.
- Moses, B. (1990). Developing spatial thinking in the middle grades: designing a space station. *Arithmetic teacher*, 37 (6), 59-63.
- Moses, B. E. (1977). *The nature of spatial ability and its relationship to mathematical problem solving*. Tesis doctoral, Universidad de Indiana, EEUU.
- Moses, B. E. (1980, Abril). *The relationship between visual thinking tasks and problem-solving performance*. Comunicación presentada en Annual Meeting of the American Education of Research Association, Boston, EEUU.
- Moustaki, F. y Kynigos, C. (2010). Developing spatial and visualization abilities using a specially designed computational medium. En M. M. Pinto, F. Pinto y T. F. Kawasaki. *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4 (p. 366). Belo Horizonte, Brazil: PME.
- Mudaly, V. (2008, julio). *Visual Literacy and visualization in mathematics education*. Comunicación presentada en 11<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education (ICME), México.
- Mudrak, J. y Portesova, S. (2008). Stable and changeable factors of giftedness: Overview of some determinants of abilities, high achievement development. *Ceskoslovenska Psychologie*, 52 (1), 32-45.
- Na, G., Han, D., Lee, K. y Song, S. (2007). Mathematically gifted students' problem solving approaches on conditional probability. En Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. y Seo, D. Y. (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4 (pp. 1-8). Seoul: PME.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Cádiz: SAEM THALES.
- National Mathematics Advisory Panel (2008). *Foundations for Success. The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington, D.C.: U.S. Department of Education.

- Neider, K. e Irwin, K. (2001). Using problems solving to identify mathematically gifted students. En M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.), *Proceeding of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (pp.431-438). Utrech, The Netherlands.
- Neria, D. y Amit, M. (2010). Talented middle school students' strategies and reasoning in solving analytic reasoning problems. En M. M. Pinto, F. Pinto y T. F. Kawasaki. *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (pp. 321-328). Belo Horizonte, Brazil: PME.
- Neto, F., Furnham, A., Conceição, M. (2009). Estimating One's Own and One's Relatives' Multiple Intelligence: A Cross-Cultural Study from East Timor and Portugal. *The Spanish Journal of Psychology*, 12 (2), 518-527.
- New Jersey Mathematics Coalition (1996). Geometry and spatial sense, Standard 7. En *New Jersey Mathematics Curriculum Framework* (pp. 209-249).
- Niederer, K., Irwin, R. C., Irwin, K. C. y Reilly, I. L. (2003). Identification of mathematically gifted children in New Zealand. *High Ability Studies*, 14 (1), 71-84.
- Noss, R., Healy, L. y Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 203-233.
- O'Boyle, M. W., Cunnington, R., Silk, T. J., Vaughan, D., Jackson, G., Syngeniotis, A. et al (2005). Mathematically gifted male adolescents activate a unique brain network during mental rotation. *Cognitive Brain Research*, 25, 583-587.
- OCDE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas*. OCDE e Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo.
- OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana*. Madrid: Santillana.
- Olson, M. B. (1978). Visual field usage as an indicator of right or left hemispheric information processing of gifted students. *Gifted Child Quarterly*, 22 (2), 243-247.

## Referencias

- Orton, J. (1997). Pupil's perception of pattern in relation to shape. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th P.M.E. Conference*, 3 (pp.304-311). Lahti: Finlandia.
- Orton, J. y Orton, A. (1994). Students' perception and use of pattern and generalization. En J. P. da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18<sup>th</sup> International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 407-414). Lisboa: Universidad de Lisboa.
- Osorio, E. (2009). *La matemática recreativa con niños de altas capacidades intelectuales*. Trabajo Fin de Máster. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Osta, I. (1987). L'outil informatique et l'enseignement de la géométrie de l'espace. En J. C. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 2 (pp. 31-38). Montreal, Canada: Universidad de Montreal.
- Owens, K. (1999). The role of visualization in young students' learning. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23<sup>rd</sup> PME International Conference*, 1, 220-234.
- Ozdemir, G. (2010). Exploring Visuospatial Thinking in Learning about Mineralogy: Spatial Orientation Ability and Spatial Visualization Ability. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8 (4), 737-759.
- Pardo, A. y Ruiz, M.A. (2002). *SPSS 11. Guía para el análisis de datos*. Madrid: McGraw-Hill.
- Park, M., Ko, E., Lee, D. y Lee, K. (2011). Mathematical gifted students' analogy in statistics. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (pp. 345-352). Ankara, Turkey: PME.
- Pasarín, M. J., Feijoo, M., Díaz, O. y Rodríguez, L. (2004). Evaluación del talento matemático en educación secundaria. *FAISCA, Revista de Altas Capacidades*, 11, 83-102.

- Passow, A. (1993). National/State policies regarding education of the gifted. En K. Séller, F. Mönks y A. Passow (Eds.), *Internacional Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent* (pp. 29-46). Oxford: Pergamon Press.
- Pérez, R. (1995). *La Alhambra*. Granada: SAEM THALES.
- Phillips, L. M., Norris, S. P. y Macnab, J. S. (2010). An Introduction to Visualization. En *Visualization in Mathematics, Reading and Science Education. Models and Modeling in Science Education, Vol. 5*. Springer Science+Business Media B.V.
- Pittalis, M. y Christou, C. (2011). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, 75 (2), 191-212.
- Pittalis, M., Mousoulides, N. y Christou, C. (2009). Levels of sophistication in representing 3D shapes. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4 (pp. 385-392). Thessaloniki, Greece: PME.
- Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2009a). Psychological aspect: identification of giftedness in earlier ages. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1 (pp. 191-194). Thessaloniki, Greece: PME.
- Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2009b). Mathematical creativity and cognitive styles. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4 (pp. 377-384). Thessaloniki, Greece: PME.
- Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2010). Spatial versus Object Visualisation: The Case of Mathematical Understanding in Three-Dimensional Arrays of Cubes and Nets. *International Journal of Educational Research*, 49 (2-3), 102-114.
- Plasencia, I. (2000). *Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos*. Tesis doctoral. Universidad de La Laguna.
- Prescott, J., Gavrilescu, M., Cunnington, R., O'Boyle, M. W. y Egan, G. F. (2010). Enhanced brain connectivity in math-gifted adolescents: an fMRI study using mental rotation. *Cognitive Neuroscience*, 1, 277-288.

## Referencias

- Presmeg, N. C. (1985). *Visually mediated processes in high school mathematics: A classroom investigation*. Unpublished Ph.D. dissertation, University of Cambridge.
- Presmeg, N. (1986a). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17 (3), 297-311.
- Presmeg, N. (1986b). Visualization in High School Mathematics. *For Learning of Mathematics* 6 (3), 42-46. Montreal, Quebec, Canada: FLM Publishing Association.
- Presmeg, N. (1989). Visualization in Multicultural Mathematics Classrooms. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1), 17-24.
- Presmeg, N. (1991). Classroom aspects with influence use of visual imagery in high school mathematics. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference*, 3, 191-198.
- Presmeg, N. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 23 (6), 595-610. Kluwer Academic Publishers.
- Presmeg, N. (1994). The role of visually mediated processes in classroom mathematics. *Zentralblatt für Didactic der Mathematick*, 26 (4), 114-117.
- Presmeg, N. (1999). Las posibilidades y peligros del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas matemáticos. *SUMA*, 32, 17-22.
- Presmeg, N. (2004, julio). *Use of personal metaphors in the learning of mathematics*. Comunicación presentada en 10th International Congress on Mathematical Education (ICME), Topic Study Group 25, Copenhagen, Denmark. Recuperado el 14 de Mayo de 2012, desde <http://www.docstoc.com.lax.llnw-trials.com/docs/110732887/Introduction---icme-organisersdk>.
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 205–235). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.
- Presmeg, N. (2008a). Spatial abilities research as a foundation for visualization in teaching and learning mathematics. En N. C. Presmeg y P. C. Clarkson

- (Eds.), *Critical issues in mathematics education: Major contributions of Alan Bishop* (pp. 83-95). New York: Springer.
- Presmeg, N. (2008b, julio). *An overarching theory for research in visualization in mathematics education*. Comunicación presentada en 11<sup>th</sup> International Congress of Mathematical Education (ICME), Topic Study Group 20, Monterrey, México.
- Presmeg, N. y Balderas-Cañas, P. (2001). Visualization and affect in Nonroutine Problem Solving. *Mathematical thinking and learning*, 3 (4), 289-313.
- Prieto, M. D. (2010). Alta habilidad: superdotación y talento. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 13 (1), 15-20.
- Ramírez, R y Albendín, V. (2007a). *Constelaciones. El Juego de los tres colores*. Actas del XIII Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
- Ramírez, R., y Albendín, V. (2007b). Constelaciones: el juego de los tres colores: buscando la solución. *Matematicalia. Revista digital de la Real Sociedad Matemática Española*, 3 (1).
- Ramírez, R. y Flores, P. (2010, marzo). *Visualización en Estalmat: una experiencia docente e investigadora*. Comunicación presentada en III Seminario sobre actividades para estimular el talento precoz en Matemáticas, Valencia.
- Ramírez, R., Flores, P. y Castro, E. (2010a). Visualización y talento matemático: una experiencia docente. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 499-510). Lleida: SEIEM.
- Ramírez, R., Flores, P. y Castro, E. (2010b). Actividades para estimular la visualización en alumnos con talento matemático. En J. Berral, M. De la Fuente y F. España (Eds.), *XIII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 369-377). Córdoba: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.
- Ramírez, R. y Flores, P. (2011). Actividades que favorecen el uso de la visualización. En A. Pérez y M. Sánchez (coords.), *Matemáticas para estimular el talento* (pp. 241-256). Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.

## Referencias

- Ramírez, R., Ramírez, I., Flores, P. y Castro, E. (2012). *Análisis de las capacidades visuales e intelectuales en los alumnos con talento matemático*. Manuscrito enviado para su publicación.
- Ramos, M.M., Catena, A. y Trujillo, H.M. (2004). *Manual de métodos y técnicas de investigación en ciencias del comportamiento*. Madrid: Biblioteca Nueva.
- Raquel, A. (2001). *Thinking in three dimensions: Exploring students' geometric thinking and spatial ability with the Geometer's Sketchpad*. Tesis doctoral sin publicar. Universidad Internacional de Florida, Miami, EEUU.
- Raven, J. C., Court, J. H. y Raven, J. (1993). *Test de Matrices Progresivas. Escalas Coloreadas, General y Avanzadas*. Buenos Aires: Paidós.
- Razel, M. y Eylon, B. S. (1986). Developing visual language skills: The Agam program. *Journal of Visual Verbal Languaging*, 6 (1), 49-54.
- Real Academia Española (2001). *Diccionario de la Real Academia Española, vigésimo-segunda edición*. Madrid: Espasa Calpe.
- Renzulli, J. (1986). The three-ring conception of giftedness: a development model for creative productivity. En R. J. Stenberg y J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (pp. 417-435). New York: Cambridge University Press.
- Resnick, L. B. y Ford, W. W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Paidós.
- Rey, J. L. (2006). Algunas consideraciones sobre la formación de imágenes mentales. *Revista Premisa* 30, 3-12. Buenos Aires: SOAREM.
- Rico, L. (1993). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico. (Eds.), *Educación Matemática* (pp. 60-108). México: Grupo Editorial Iberoamericano.
- Rico, L. (1997a). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.

- Rico, L. (1997b). *Educación Matemática en educación secundaria*. Barcelona: ICE-Horsori.
- Rico, L. y Blanco, L. (2011). ¿Qué hacer con los datos de Pisa? Recuperado el día 8 de enero de 2011, desde [http://www.elpais.com/articulo/sociedad/hacer/datos/PISA/elpepusoc/20110108elpepusoc\\_9/Tes](http://www.elpais.com/articulo/sociedad/hacer/datos/PISA/elpepusoc/20110108elpepusoc_9/Tes)
- Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L. *et al* (1997). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Editorial Horsori e I.C.E. Universitat Barcelona.
- Rico, L., Lupiáñez, J. L., Marín, A. y Gómez, P. (2007, Marzo). *Matemáticas escolares y análisis de contenido con profesores de secundaria en formación*. Comunicación presentada en VIII Seminario de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA) de la SEIEM (2007), Aravaca.
- Richardson, K. y Stein, C. (2008). Developing Spatial Sense and Communication Skills. Mathematics teaching in the middle school. *Focus and Learning*, 14 (2), 101-107.
- Rivera, F. D. (2011). *Towards a Visually-Oriented School Mathematics Curriculum*. Mathematics Education Library 49, Springer Science+Business Media B.V.
- Rodd, M. (2010). Geometrical Visualisation--Epistemic and Emotional. *For the Learning of Mathematics*, 30 (3), 29-35.
- Rojas, N., Flores, P. y Ramos, E. (en prensa). *El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza en la práctica*. Granada: Departamento de Didáctica de la matemática.
- Rodríguez, F., Montiel, G. y Cantoral, R. (2008, julio). *Visualization in iterative processes*. Comunicación presentada en 11<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education (ICME), Monterrey, México.
- Rodríguez, L. (2004). Identificación y evaluación de niños con talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.), *La Educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 37-47). Santiago (Chile): OREALC-Unesco.

## Referencias

- Rotigel, J. V y Bosse, M. J. (2007). Mathematically Talented Children: How Can Parents Help? *Gifted Child Today*, 30 (1), 17-23.
- Rotigel, J. V. y Fello, S. (2004). Mathematically Gifted Students: How Can We Meet Their Needs? *Gifted Child Today*, 27 (4), 46-65.
- Ruiz, C. (2006a). Geometría dinámica. Geometría por las transformaciones. En E. Thibaut (coord), *Del punto a las espacios multidimensionales* (pp. 9-25). España: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Ruiz, C. (2006b). Geometría estática vs. Geometría dinámica. De la Geometría de los objetos a la geometría por las transformaciones. En J. L. Lupiañez, J. M. Cardeñoso y M. García (Eds.) *Investigación en el Aula de Matemáticas: La Geometría*. Granada: SAEM THALES y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Ruiz, F. (2000). *La Tabla-100; representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de Primaria en formación*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Ryu, H. Chong, Y. y Song, S. (2007). Mathematically gifted students' spatial visualization ability of solid figures. En J. H. Wo., H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4 (pp. 137-144). Seoul: PME.
- Sack, J. y Vazquez, I. (2008). Three-dimensional visualization: children's non-conventional verbal representations. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*, 5 (pp. 217-224). México: Cinvestav-UMSNH.
- Safuanov, I. (2007). Genetic approach to teaching geometry. En J. H. Wo., H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31<sup>st</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4 (pp. 145-152). Seoul: PME.

- Saglam, Y. y Bulbul, A. (2011). A teaching experiment to orient visual reasoning. En B. Ubuz (Ed.). *Proceedings of the 35<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1* (p. 381). Ankara, Turkey: PME.
- Sak, U. (2009). Test of the Three-Mathematical Minds (M3) for the Identification of Mathematically Gifted Students. *Roeper Review, 31* (1), 53-67.
- Sawyer, R. K. (2006). The New Science of Learning. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 1-18). New York, NY: Cambridge University Press.
- Secadas, F. (1961). *El test AMPE. Test de inteligencia. Manual del examinador*. Madrid: CSIC, Instituto San José de Calasanz.
- Segovia, I. y Castro, E. (2004). La educación de niños con talento en España. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.). *La Educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 37-47). Santiago (Chile): OREALC-Unesco.
- Seo, D. (2007). Generalization by comprehension and by apprehension of the Koreana 5<sup>th</sup> grade gifted students. En J. H. Wo., H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1* (p. 280). Seoul: PME.
- Sevimil, E. y Delice, Al. (2010). Spatial visualization ability and representations in problem solving process: definitive integral case. En M. M Pinto, F. Pinto y T. F. Kawasaki. *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2* (p. 103). Belo Horizonte, Brazil: PME.
- Sgroi, R. (1990). Communicating about spatial relationships. *Arithmetic teacher, 37* (6), 21-23.
- Shea, D., Lubinski, D. y Benbow C. (2001). Importance of Assessing Spatial Ability in Intellectually Talented Young Adolescents: A 20-Year Longitudinal Study. *Journal of Educational Psychology, 93* (3), 604-614.
- Sheffet, M. y Bassan-Cincinatus, R. (2009). Hiding shapes. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the*

## Referencias

- International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1* (p. 465). Thessaloniki, Greece: PME.
- Sherman, J. (1979). *Women and mathematics: Summary of Research from 1977-1979. NIE grant, final report*. University of Wisconsin at Madison.
- Shy, H., Tsai, P. y Chiou, P. (2009). Nurturing teachers for gifted nurturing. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 5* (pp. 97-104). Thessaloniki, Greece: PME.
- Siew, H. (2007). Visualization in mathematical problem solving: performance of students in a national examination-type word problem. En J. H. Wo., H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1* (pp. 312). Seoul: PME.
- Silverman, L. (1995). *Effective techniques for teaching highly gifted visual-spatial learners*. Recuperado el 14 de Mayo de 2012, desde <http://www.rollingsmiddle.com/VisualSpatialSilverman.pdf>.
- Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Ediciones Morata, S.A.
- Smith, I. M. (1964). *Spatial ability*. London: University of London Press.
- Smith, I. M. (1972). Spatial ability and mental imagery. *The psychology of mathematics education*. London: Chelsea College (University of London).
- Soto-Andrade, J. (2008, julio). *Mathematics as the art of seeing the invisible*. Comunicación presentada en 11<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education (ICME), Monterrey, México.
- Souto, B. y Gómez-Chacón, I. (2009). How to prepare students for a successful first year at university: an experience in visualization. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 5* (p. 495). Thessaloniki, Greece: PME.

- Span, P. y Overtoom-Corsmit, R. (1986). Information processing by intellectually gifted pupils solving mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 273-295.
- Spearman, C. (1927). *The abilities of man: Their nature and measurement*. London: Macmillan.
- Sriraman, B. (2004). Gifted ninth graders' notions of proof: Investigating parallels in approaches of mathematically gifted students and professional mathematicians. *Journal for the Education of the Gifted*, 27 (4), 267-292.
- Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *Journal of Secondary Gifted Education*, 27 (1), 20-36.
- Sriraman, B. y Lee, K. H. (Eds.) (2011). *The Elements of Creativity and Giftedness in Mathematics*. Rotterdam/Boston/Taipei: Sense Publishers.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20 (2), 147-164.
- Stanic, G. (1990). Spatial abilities. *Arithmetic teacher*, 37 (6), 48-51.
- Stanley, J., Lupkowski, A. E. y Assouline, S. G. (1990). Eight considerations for mathematically talented youth. *Gifted Child Today*, 13 (2), 2-4.
- Steffe, L. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: LAE.
- Sternberg, R. (Ed.) (1986). *Las capacidades humanas*. Barcelona: Labor.
- Sternberg, R. J. (Ed.) (2000). *Handbook of intelligence*. New York: Cambridge University Press.
- Strasser, I., Koller, I., Strauß, S., Csisinko, M., Kaufmann, H. y Glück, J. (2010). Use of Strategy in a 3 Dimensional Spatial Ability Test. *Journal of Individual Differences*, 31 (2), 74-77.

## Referencias

- Stumpf, H. (1998). Gender-Related Differences in Academically Talented Students' Scores and Use of Time on Tests of Spatial Ability. *Gifted Child Quarterly*, 42 (3).
- Stumpf, H. y Eliot, J. (1995). Gender-related differences in spatial ability and the k factor of general spatial ability in a population of academically talented students. *Personality and Individual Differences*, 19, 33-45.
- Stylianou, D. y Pitta-Pantazi, D. (2002). Visualization and high achievement in mathematics: A critical look at successful visualization strategies. En F. Hitt (Ed.), *Representations and mathematics visualization* (pp. 31-46). Mexico: Cinvestav-IPN.
- Sword, L. (2000). I Think in Pictures, You Teach in Words: The Gifted Visual Spatial Learner. *Gifted*, 114, 1 and 27-30.
- Tall, D. (1991). Intuition and Rigour: The Role of Visualisation in the Calculus. En W. Zimmerman y S. Cunningham (Eds.), *Visualisation in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 105-126). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Tartre, L. A. (1990). Spatial Orientation Skills and Mathematical Problem Solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21 (3), 216-229.
- Tey, J. (2007). Mathematical challenges encountered in classrooms: how mathematically gifted and talented secondary students deal with these challenges. En J. H Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31<sup>st</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1 (pp. 290). Seoul: PME.
- Thornton, S. (2001). A Picture is Worth a Thousand Words. Recuperado el 14 de Mayo de 2012, desde <http://math.unipa.it/~grim/AThornton251.PDF>.
- Thurstone, L. (1938). Primary mental abilities. *Psychometric monographs*, 1, 1-121. Chicago: University of Chicago Press.
- Thurstone, L. L. y Thurstone, T. G. (1941). *Factorial studies of intelligence*. Chicago: University of Chicago Press.

- Thurstone, L. L. y Thurstone, T. G. (1976). P.M.A.: *Aptitudes Mentales Primarias*. Madrid: TEA.
- Tishin, P. G. (1975). Instructing auxiliary school pupils in visual geometry. En J. Kilpatrick, I. Wirzup, E. G. Begle y J. W. Wilson (Eds.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*, 10, 1-124. University of Chicago Press.
- Torregrosa, G., Quesada, H. y Penalva, M. C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, 28 (3), 327-340.
- Torres, J. M. y Climent, N. (2010). Conocimiento sobre orientación espacial en estudiantes de E.S.O. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 435-450). Lleida: SEIEM.
- Tourón, J. (2005). "What has been done, what has yet to be done". *High Ability Studies*, 16 (1), 155-158.
- Tourón, J. y Tourón, M. (2006). "La identificación del talento verbal y matemático de los jóvenes más capaces: el modelo de CTY España". *I Simposio Internacional sobre Altas capacidades*. Consejería de Educación. Las Palmas de Gran Canaria.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction - the Wiskobas Project*. Dordrecht: D. Reidel.
- Tzekaki, M. y Ikononou, A. (2009). Investigating spatial representations in early childhood. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 5, (pp. 241-248). Thessaloniki, Greece: PME.
- Van den Oever, J. (2005). *CUBETEST*. Recuperado el 30 de Mayo de 2011, desde [www.vandenoever.info/software/cubetest](http://www.vandenoever.info/software/cubetest).
- Van Garderen, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of Learning Disabilities*, 39 (6), 496-506.

## Referencias

- Van Garderen, D. y Montague, M. (2003a). Visual-Spatial Representation, Mathematical Problem Solving, and Students of Varying Abilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 18 (4), 246–254.
- Van Garderen, D. y Montague, M. (2003b). A Cross-Sectional Study of Mathematics Achievement, Estimation Skills, and Academic Self-Perception in Students of Varying Ability. *Journal of learning disabilities*, 36 (5), 437–448.
- Villaraga, M., Martínez, P. y Benavides, M. (2004). Hacia la definición del término talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.). *La Educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 25-35). Santiago (Chile): OREALC-Unesco.
- Vinner, S. (1989). The Avoidance of visual considerations in calculus students. *Focus on Learning Problem in Mathematics*, 11 (2), 149-156.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–81). Kluwer, Dordrecht.
- Webb, N. L. (1979). Processes, conceptual knowledge and mathematical problem-solving ability. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10, 83-93.
- Webb, R., Lubinski, D. y Persson, C. (2007). Spatial ability: a neglected dimension in talent searches for intellectually precocious youth. *Journal of Educational Psychology*, 99 (2), 397–420.
- Wen, S. y Leu, Y. (2009). The sociomathematical norms in the elementary gifted mathematics classroom. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 5 (pp. 329-336). Thessaloniki, Greece: PME.
- Werdelin, I. (1958). *The Mathematical Ability: Experimental and Factorial Studies*. Gleerups, Lund.
- Wheatley, G. H. (1983). A mathematics curriculum for the gifted and talented. *Gifted Child Quarterly*, 27 (2), 77-80.
- Wheatley, G. H. (1996). Wheatley Spatial Ability Test (WSAT). Tallahassee, FL: Mathematics Learning.

- Wheatley, G. H. (1998). Imagery and Mathematics learning. *Focus on Learning problems in Mathematics*, 20 (2 y 3), 65-77.
- Willis, J. (2010). *Learning to love math: teaching strategies that change student attitudes and get results*. ASCD. Alexandria: USA.
- Xiamoei, L. (2008, julio). *Study on the characteristics of development rules of pupil's spatial abilities*. Comunicación presentada en 11<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education (ICME), Monterrey, México.
- Yackel, E. y Wheatley, G. H. (1990). Promoting visual imagery in young pupils. *Arithmetic teacher*, 37 (6), 52-58.
- Yakimanskaya, I. S. (1971). Development of Spatial Concepts and Their Role in the Mastery of Elementary Geometric Knowledge. En J. Kilpatrick y I. Wirzup (Eds.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*, 5 (pp. 145-168). Chicago. University of Chicago Press.
- Yakimanskaya, I. S. (1991). The development of spatial thinking in schoolchildren. En P. S. Wilson y E. J. Davis (Eds.), *Soviet Studies in Mathematics Education*, vol. 3. Reston, USA: NCTM.
- Yang, J. y Chen, S. (2010). Effects of gender differences and spatial abilities within a digital pentominoes game. *Computers & Education*, 55, 1220-1233.
- Yerushalmy, M. (1993). Generalization in geometry. En J. L. Schwartz, M. Yerushalmy y B. Wilson (Eds.), *The Geometry Supposer: What is it a case of?* (pp. 25-56). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Yim, J., Chong, Y., Kwon, S. y Song, S. (2007). The likelihood of applying local organization program for promising students. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, (p. 296). Seoul: PME.
- Yim, J., Chong, Y. O., Song, S. H. y Kwon, S. (2008). A Case Study on the Local Organization of Two Mathematically Gifted Seventh-Grade Students. *Journal for the Education of the Gifted*, 32 (2), 211-229.

## Referencias

- Yim, J., Song, S. y Kim, J. (2008). The mathematically gifted elementary students' revisiting of Euler's polyhedron theorem. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 5 (1), 125-142 .
- Yuan, X. y Sriraman, B. (2011). An exploratory study of relationships between students' creativity and mathematical problem-posing abilities. En B. Sriraman y K. H. Lee (Eds.), *The elements of Creativity and Giftedness in Mathematics* (pp. 5-28). Rotterdam/Boston/Taipei: Sense Publishers.
- Zazkis, R., Dubinsky, E. y Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: a study of students' understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (4), 435-457.
- Zimmermann, W. Y Cunningham, S. (1991). "Editor's introduction: What is mathematical visualization". En W. Zimmermann y Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-8). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Zodik, I. y Zaslavsky, O. (2007). Is a visual example in geometry always helpful? En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4 (pp. 265-272). Seoul: PME.
- Zuñiga, L. (2009). *Análisis de un proceso de selección de niños con talento matemático*. Trabajo no publicado. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Zykova, V. I. (1969). The psychology of Sixth-Grade pupils' mastery of geometric concepts. En J. Kilpatrick y I. Wirzup (Eds.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*, 1, (pp. 149-188). University of Chicago Press.