



UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE
ESTRUCTURAS E INGENIERÍA HIDRÁULICA

**PROPUESTA DE UN MÉTODO MATRICIAL
BAJO RESTICCIONES CINEMÁTICAS**

Tesis Doctoral
Felipe Martín Chica
Granada, Abril 2009

Director:
Amadeo Benavent Climent

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Felipe Martín Chica
D.L.: GR. 2616-2009
ISBN: 978-84-692-3864-6

D. Amadeo Benavent Climent, Doctor en Ingeniería por la Universidad de Tokio y Profesor Titular de Universidad del Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica de la Universidad de Granada,

MANIFIESTO:

Que la presente Tesis titulada PROPUESTA DE UN MÉTODO MATRICIAL BAJO RESTRICCIONES CINEMÁTICAS, presentada por Felipe Martín Chica para optar al grado de Doctor por la Universidad de Granada, ha sido realizada bajo mi dirección, y con esta fecha autorizo la presentación de la misma.

Granada, 14 de abril de 2009

Fdo. Amadeo Benavent Climent

MEMORIA presentada por Felipe Martín Chica para optar al Grado de Doctor por la Universidad de Granada.

Granada, 14 de abril de 2009

Fdo. Felipe Martín Chica

Esta Tesis se ha financiada a través del Proyecto del Plan Nacional de I+D+I del Ministerio de Educación y Ciencia de España, de referencia BIA2005-00591, llevado a cabo en el periodo 2006/2008 y titulado "*Propuesta de un Método Matricial bajo restricciones cinemáticas*". A través de este Proyecto se han recibido fondos de la Unión europea (FEDER).

Agradecimientos

Es de justicia agradecer la inestimable ayuda prestada durante la redacción de esta investigación a:

- Amadeo Benavent Climent, Doctor en Ingeniería en la Universidad de Tokio y Profesor Titular de Universidad del Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica de la Universidad de Granada, Director de esta Tesis que, continua e incansablemente, ha exigido total rigurosidad en cada una de la líneas de este trabajo y se ha exigido a sí mismo idéntico rigor en la revisión de las mismas.
- Rafael Gallego Sevilla, Catedrático de Universidad, Tutor de la Investigación Tutelada correspondiente a esta Tesis que, con una seguridad fulminantemente brillante, sacó en su momento a este Doctorando de un error trascendental*.
- Rafael Urquiza, profesor de Otorrinolaringología, por los magistrales y sabios consejos que sólo un generoso y experimentado veterano de la Docencia puede aportar.
- José Antonio López Muñoz, mi delineante, por su imprescindible ayuda en las cuestiones informáticas.
- Francisco del Árbol, profesor de Instituto, por haberse encargado amablemente de la revisión gramatical de los textos.
- Francisco Calderón, Santiago Amador, M^a José, Pilar y Concha, por el estímulo que su permanente y sincero interés ha provocado a lo largo de la redacción de este trabajo.
- Por último, y no por ello el menos valioso, al profesor Manuel Vázquez, que con el ejemplo 2.9 de la referencia (25) despertó el interés por la consecución de la Matriz de Rigidez de una estructura considerando inelongables las barras que la conforman y que dio origen, por ello, a esta investigación.

* Debido a la omisión del término independiente en una de las ecuaciones del sistema lineal de un ejemplo reiteradamente revisado, este Doctorando estaba convencido durante la redacción de la Investigación Tutelada que el método propuesto no era válido para aquellas estructuras que contuviesen barras inclinadas.



Grabado de Alberto Dürero titulado *Melancolía*. En él aparece por primera vez un cuadro mágico, en realidad una matriz de números de cuarto orden, dispuestos de tal modo que la suma de los elementos de cada fila, columna o una de las diagonales es constante.

Un poco de historia

Aunque el cálculo con matrices tiene sus orígenes en las matemáticas chinas de hace más de un milenio, en Occidente el primer matemático que estudió las operaciones con matrices, a mediados del siglo XIX, fue el británico James Joseph Silvestre, quien creó la teoría de los invariantes algebraicos y de las matrices.

(Extraído de la GRAN ENCICLOPEDIA UNIVERSAL, Ediciones ESPASA, S.A.)

Tanta es la ventaja de un lenguaje bien construido que su notación simplificada a menudo se convierte en fuente de teorías profundas.

P.S. LAPALCE

RESUMEN

La hipótesis de inelongabilidad de las barras que conforman a las estructuras de nudos rígidos, así como cualquier otro tipo de restricción a considerar para una mejor modelización, como pudiera ser la hipótesis de diafragma rígido, tradicionalmente han sido tratadas a nivel de estructura, esto es, dichas hipótesis se han introducido en el sistema lineal resultante del pertinente ensamblaje de las matrices de los elementos. En esta Tesis Doctoral, por el contrario, estas restricciones se introducen, primeramente, en las matrices tradicionales de rigidez del elemento -y esta es la idea fundamental que sustenta al método-, con lo que éstas sufren unas determinadas transformaciones que dan lugar a una nueva matriz de rigidez de barra más difusa y más simple que las originales y, posteriormente, estas mismas condiciones vuelven a añadirse al sistema lineal de ecuaciones que se obtiene por ensamblaje de las matrices del elemento antes deducidas. Como consecuencia de esto se obtiene un grupo de ecuaciones de equilibrio más otro grupo de ecuaciones de restricción, ambos en las incógnitas de corrimiento, con lo que el sistema resultante es rectangular. Debido a esto es necesario emplear las técnicas existentes para la resolución de dichos tipos de sistemas bajo restricciones -Método de las Transformaciones, Método de la Penalización o Método de los Multiplicadores de Lagrange- obteniéndose unas matrices de coeficientes que no solamente son, consecuentemente, más difusas, sino, sobretodo, que vienen notablemente mejor condicionadas que las que se obtienen a partir de las matrices de barra tradicionales.

Coherentemente, se incluyen también las pertinentes Matrices de Conversión bajo las hipótesis antes mencionadas, las cuales se han obtenido asimismo por introducción de las restricciones en las Matrices de Conversión tradicionales

Por último, para una optimización del condicionamiento de los sistemas, se han creado también unas Matrices de Transformación cuya consecución se logra por ensamblaje directo de los coeficientes de las ecuaciones de restricción, matrices que sirven de herramientas para la manipulación matricial del Método de las Transformaciones y del Método de los Multiplicadores de Lagrange, aplicables tanto al método propuesto como al Método Tradicional Directo de la Rigidez.

INDICE

CAPÍTULO 1.-

ANTECEDENTES

- 1.1.- Métodos de cálculo para estructuras reticulares.-..... 1-1
- 1.2.- El Método Matricial bajo condición de inelongabilidad.- 1-3
- 1.3.- El Método Matricial bajo condición de diafragma rígido.- 1-8
- 1.4.- El Método Matricial bajo condiciones generales de restricción.- 1-9

CAPÍTULO 2.-

CONDICIONAMIENTO MATRICIAL

- 2.1.- “Exactitud” en la matemática aplicada.-..... 2-1
- 2.2.- Errores debido al redondeo.- 2-3
- 2.3.- Errores debidos al condicionamiento.- 2-7
- 2.4.- Número de condición.- 2-10
- 2.5.- Pórtico plano de nudos rígidos.-..... 2-14
 - 2.5.1.- Influencia de las unidades en el condicionamiento de la matriz del sistema.- 2-14
 - 2.5.2.- Influencia del orden de operaciones en los errores de la solución.- 2-16
 - 2.5.3.- Influencia de las ecuaciones de restricción cinemática en el condicionamiento.- 2-21

CAPÍTULO 3.-

MATRICES DE RIGIDEZ Y DE CONVERSION EN EL MÉTODO MATRICIAL

CLASICO

- 3.1.- Matriz de Rigidez en coordenadas globales de una barra espacial con dirección arbitraria de sus ejes locales.- 3-2
 - 3.1.1.- Matriz de Rigidez para barra con un eje principal de inercia horizontal.- 3-7
 - 3.1.2.- Matriz de Rigidez para barra con un eje principal de inercia y directriz horizontales.- 3-9

3.1.3.-	Matriz de Rigidez para barra vertical.-.....	3-10
3.1.4.-	Matriz de Rigidez para barra perteneciente a un emparrillado.-.....	3-11
3.1.5.-	Matriz de Rigidez para barra de estructuras coplanarias.-	3-11
3.1.6.-	Matriz de Rigidez para barra de entramados planos.-	3-12
3.2.-	Matriz de conversión para barra espacial genérica.-.....	3-13
3.2.1.-	Matriz de Conversión de una barra espacial y dirección arbitraria de sus ejes locales.-.....	3-15
3.2.2.-	Matriz de Conversión de una barra espacial con un eje principal de inercia horizontal.-	3-16
3.2.3.-	Matriz de Conversión de una barra espacial con un eje principal de inercia y directriz horizontales.-	3-17
3.2.4.-	Matriz de Conversión de una barra espacial vertical.-	3-18
3.2.5.-	Matriz de Conversión para una barra perteneciente a un emparrillado.-	3-19
3.2.6.-	Matriz de Conversión para barra de estructuras coplanarias.- .	3-19
3.2.7.-	Matriz de Conversión para barra de entramados planos.-	3-19

CAPÍTULO 4.-

HERRAMIENTAS DEL MÉTODO (I): BARRA BAJO CONDICIONES DE INELONGABILIDAD

4.1.-	Ecuación de inelongabilidad.-	4-2
4.2.-	Matriz de Rigidez de la barra inelongable.-	4-4
4.2.1.-	Matriz de Rigidez a la Flexotorsión de una barra con el eje principal de inercia OY´ horizontal.-	4-12
4.2.2.-	Matriz de Rigidez a la Flexotorsión para barra con un eje principal de inercia y directriz horizontales.-.....	4-13
4.2.3.-	Matriz de Rigidez a la Flexotorsión para barra vertical.-.....	4-21
4.2.4.-	Matriz de Rigidez a la Flexotorsión para barra vertical de sección cuadrada.-	4-22
4.2.5.-	Matriz de Rigidez para barra perteneciente a un emparrillado.-.....	4-23

4.2.6.-	Matriz de Rigidez de la barra inelongable para estructuras de barras coplanarias.-	4-24
4.2.7.-	Matriz de Rigidez de la barra inelongable para entramados planos.-	4-26
4.3.-	Matriz de conversión de la barra inelongable espacial.-.....	4-26
4.3.1.-	Matriz de Conversión para una barra con un eje principal de inercia horizontal.-.....	4-30
4.3.2.-	Matriz de Conversión para barra con eje principal de inercia y directriz horizontales.-	4-31
4.3.3.-	Matriz de Conversión para barra vertical.-.....	4-31
4.3.4.-	Matriz de Conversión para estructuras de barras coplanarias.-	4-32
4.3.5.-	Matriz de Conversión para entramados planos.-	4-32

CAPÍTULO 5.-

HERRAMIENTAS DEL MÉTODO (II): BARRA BAJO CONDICIONES DE DIAFRAGMA RÍGIDO

5.1.-	Ecuaciones de restricción de una barra embebida en un Diafragma Rígido.-	5-2
5.1.1.-	Ecuación matricial de Diafragma Rígido en coordenadas locales.-.....	5-3
5.1.2.-	Ecuación matricial de Diafragma Rígido en coordenadas globales.-	5-4
5.1.3.-	Ecuaciones de Diafragma Rígido horizontal.-.....	5-6
5.2.-	Matriz de Rigidez de una barra embebida en un Diafragma Rígido de orientación arbitraria.-	5-10
5.2.1.-	Matriz de Rigidez de una barra embebida en un Diafragma Rígido horizontal.-.....	5-20
5.2.2.-	Matriz de Rigidez de una barra perteneciente a un emparillado.-.....	5-21
5.3.-	Matriz de Conversión de una barra genérica embebida en un Diafragma Rígido.-	5-22
5.3.1.-	Matriz de Conversión de una barra embebida en un Diafragma Rígido horizontal.-.....	5-24

5.3.2.- Matriz de Conversión de una barra perteneciente a un empa- rillado.-	5-25
---	------

CAPÍTULO 6.-

DESARROLLO DEL MÉTODO

6.1.- Matriz de Restricciones.-	6-1
6.1.1.- Ensamblaje directo de la Matriz de Inelongabilidad.-.....	6-3
6.1.2.- Ensamblaje directo de la Matriz de Diafragma Rígido.-.....	6-4
6.2.- Resolución del sistema rectangular.-	6-5
6.2.1.- Método de las Transformaciones.-	6-6
6.2.2.- Significado de los Multiplicadores de Lagrange.-	6-11
6.3.- Procedimientos de resolución del Sistema de Lagrange. Resolución directa.-.....	6-14
6.3.1.- Resolución por transformación de columnas.-.....	6-15
6.3.2.- Resolución por transformación de filas.-	6-16
6.3.3.- Resolución por transformación de columnas y filas.-	6-16
6.4.- Tratamiento de las condiciones de contorno.-	6-17

CAPÍTULO 7.-

VALIDACIÓN NUMÉRICA (I)

7.1.- Introducción.-	7-1
7.2.- Estructura plana: Modelo 1.-	7-2
7.2.1.- Condicionamiento del sistema por el Método Clásico sin res- tricciones.-	7-2
7.2.2.- Condicionamiento del sistema por el Método Clásico con restricciones de inelongabilidad.-.....	7-2
7.2.3.- Condicionamiento del sistema por el método propuesto.-	7-3
7.3.- Estructura plana: Modelo 2.-	7-5
7.4.- Estructura plana: Modelo 3.-	7-5
7.5.- Estructura espacial de pequeña o mediana altura: Modelo 4.-.....	7-6
7.6.- Estructura espacial de pequeña o mediana altura: Modelo 5.-.....	7-8
7.7.- Estructura espacial de pequeña o mediana altura: Modelo 6.-.....	7-8

7.8.- Estructura espacial de pequeña o mediana altura: Modelo 7.-	7-9
7.9.- Estructura espacial de mediana altura: Modelo 8.-	7-10
7.10.- Tratamiento de las condiciones cinemáticas de contorno.-	7-11
7.11.- Estructuras de gran altura.-	7-15

CAPÍTULO 8.-

MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN

8.1.- Introducción.-	8-1
8.2.- Elección de las incógnitas esclavas en forma sucesiva.-	8-2
8.2.1.- Ensamblaje de las sucesivas matrices de transformación.-	8-5
8.3.- Elección simultánea de las incógnitas esclavas.-	8-7
8.3.1.- Ensamblaje directo de la Matriz de Transformación.-	8-8
8.4.- Aplicación de la Matriz de Transformación al Método de las Transformaciones.-	8-11
8.5.- Aplicación de la Matriz de Transformación al Método de los Multiplicadores de Lagrange.-	8-14
8.5.1.- Resolución del Sistema de Lagrange por transformación de columnas: eliminación de incógnitas de corrimiento.-	8-15
8.5.2.- Resolución del Sistema de Lagrange por transformación de filas: eliminación de Multiplicadores de Lagrange.-	8-16
8.5.3.- Resolución del Sistema de Lagrange por transformación de filas y columnas.-	8-16

CAPÍTULO 9.-

MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN PARA ENTRAMADOS PLANOS

9.1.- Introducción.-	9-1
9.2.- Deducción de la Matriz de Transformación.-	9-2
9.3.- Matriz de Transformación por ensamblaje directo.-	9-7
9.4.- Eliminación parcial de los Multiplicadores de Lagrange.-	9-12

CAPÍTULO 10.-**MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN PARA ENTRAMADOS ESPACIALES**

10.1.- Matriz de Transformación del elemento para estructuras con diafragmas rígidos.-	10-1
10.1.1.- Matriz de transformación para diafragma rígido horizontal.-	10-6
10.2.- Matriz de Transformación de la estructura por ensamblaje directo.-	10-7
10.3.- Simplificaciones del Sistema de Lagrange.-	10-11
10.3.1.- Eliminación de incógnitas de corrimiento esclavas.-	10-11
10.3.2.- Eliminación de incógnitas esclavas y de Multiplicadores de Lagrange.-	10-12

CAPÍTULO 11.-**VALIDACIÓN NUMÉRICA (II)**

11.1.- Influencia de las unidades en el condicionamiento.-	11-1
11.2.- Influencia de los redondeos en la solución del sistema.-	11-4
11.3.- Mejora del condicionamiento en los sistemas sometidos a condiciones cinemáticas de contorno.-	11-4
11.4.- Mejora del condicionamiento de un sistema bajo condiciones de restricción cinemática a partir de la Matriz de Transformación.-	11-7
11.5.- Modelo 1: Sistema de Lagrange.-	11-7
11.5.1.- Curvas de condicionamiento en función de las inercias relativas de las barras.-	11-9
11.5.2.- Esquema gráfico de la distribución de los elementos no nulos.-	11-10
11.5.3.- Esquema gráfico de los elementos dominantes.-	11-11
11.5.4.- Eliminación del subsistema de inelongabilidad debido a las vigas.-	11-11
11.5.4.1.- Curvas de condicionamiento en función de las inercias relativas de las barras.-	11-12
11.5.4.2.- Esquema gráfico de la distribución de los elementos no nulos.-	11-13
11.5.4.3.- Esquema gráfico de los elementos dominantes.-	11-13

11.5.5.- Eliminación de los dos subsistemas de inelongabilidad.-	11-13
11.5.5.1.- Curvas de condicionamiento en función de las inercias relativas de las barras.-	11-14
11.5.5.2.- Esquema gráfico de la distribución de los elementos no nulos.-	11-15
11.5.5.3.- Esquema gráfico de los elementos dominantes.-	11-15
11.5.6.- Eliminación de las incógnitas de axiles de jácenas.-	11-16
11.5.6.1.- Curvas de condicionamiento en función de las inercias relativas de las barras.-	11-18
11.5.6.2.- Esquema gráfico de la distribución de los elementos no nulos.-	11-18
11.5.6.3.- Esquema gráfico de los elementos dominantes.-	11-19
11.5.7.- Eliminación de todas las incógnitas de axiles: Método de las Transformaciones.-	11-19
11.5.7.1.- Curvas de condicionamiento en función de las inercias relativas de las barras.-	11-20
11.5.7.2.- Esquema gráfico de la distribución de los elementos no nulos.-	11-21
11.5.7.3.- Esquema gráfico de los elementos dominantes.-	11-22
11.5.8.- Cuadro resumen de las características de las matrices de coeficientes del Modelo 1.-	11-23
11.6.- Cuadro resumen de las características de las matrices de coeficientes del Modelo 2.-	11-24
11.7.- Cuadro resumen de las características de las matrices de coeficientes del Modelo 3.-	11-25
11.8.- Cuadro resumen de las características de las matrices de coeficientes del Modelo 4.-	11-26
11.9.- Cuadro resumen de las características de las matrices de coeficientes del Modelo 5.-	11-27
11.10.- Cuadro resumen de las características de las matrices de coeficientes del Modelo 6.-	11-28

11.11.- Cuadro resumen de las características de las matrices de coeficientes del Modelo 7.-.....	11-29
11.12.- Cuadro resumen de las características de las matrices de coeficientes del Modelo 8.-.....	11-30
11.13.- Cuadro resumen de las características de las matrices de coeficientes del Modelo 8 considerado como edificio de gran altura.-.....	11-31

CAPÍTULO 12.-

CONCLUSIONES

12.1.- Modelización e hipótesis en el análisis y cálculo de estructuras.-	12-1
12.2.- El cálculo matricial bajo condiciones de inelongabilidad.-.....	12-2
12.3.- El cálculo matricial bajo condiciones de diafragma rígido.-.....	12-4
12.4.- Procedimientos de resolución de sistemas lineales bajo restricciones.-	12-4
12.5.- Problemas numéricos en el Método Matricial Directo de la Rigidez.-	12-6
12.6.- El problema de la Rigidez Axial (EA).-	12-6
12.7.- Condición cinemática de inelongabilidad: eliminación de la Rigidez Axial.-	12-8
12.8.- Condición cinemática de diafragma rígido.-.....	12-8
12.9.- Sistema lineal de ecuaciones bajo condiciones homogéneas de restricción cinemática.-	12-9
12.10.- Condiciones cinemáticas de contorno.-	12-16
12.11.- Estructuras de gran altura.-	12-16
12.12.- Transformaciones en los Sistemas de Lagrange.-	12-17
12.13.- Conclusión.-	12-20
12.14.- Líneas de investigación.-	12-20

ANEXO A: Modelo 1

<i>A.1.-Nomenclatura y simbología.-.....</i>	<i>A-1</i>
<i>A.2.-Submatrices de rigidez de pilares correspondientes al Método Matricial Clásico.-</i>	<i>A-1</i>

A.3.-Submatrices de rigidez de vigas correspondientes al Método Matricial Clásico.-	A-1
A.4.-Submatrices de rigidez de pilares correspondientes al método propuesto.-	A-2
A.5.-Submatrices de rigidez de vigas correspondientes al método propuesto.-	A-3
A.6.-Matrices de rigidez de la estructura.-	A-3
A.7.-Matriz de inelongabilidad debido a los pilares.-	A-8
A.8.-Matriz de inelongabilidad debido a las vigas.-	A-9
A.9.-Sistemas de Lagrange.-	A-9
A.9.1.- Sistema de Lagrange con inelongabilidad de vigas en el Método Clásico.-	A-14
A.10.-Resolución del sistema de Lagrange por transformación de columnas.-	A-17
A.10.1.- Matriz de Transformación debido a las restricciones de vigas (Tv).-	A-17
A.10.2.- Matriz de Transformación debido a las restricciones de pilares y vigas (Tpv).-	A-23
A.10.3.- Eliminación de las incógnitas correspondientes a axiles de vigas.-	A-29
A.10.4.- Eliminación de todas las incógnitas correspondientes a los Multiplicadores de Lagrange.-	A-34

ANEXO B: Modelo 8 Mixto

B.1.-Nomenclatura y simbología.-	B-1
B.2.-Submatrices de rigidez de pilares correspondientes al Método Matricial Clásico.-	B-1
B.3.-Submatrices de rigidez de vigas en la dirección X correspondientes al Método Matricial Clásico.-	B-2
B.4.-Submatrices de rigidez de vigas en la dirección Y correspondientes al Método Matricial Clásico.-	B-2
B.5.-Submatrices de rigidez de vigas en dirección X correspondientes al método propuesto.-	B-3
B.6.-Submatrices de rigidez de vigas en la dirección Y correspondientes al método propuesto.-	B-4
B.7.-Método Matricial Clásico.-	B-4

<i>B.8.-Método Míxto.-.-</i>	<i>B-7</i>
<i>B.9.-Elementos de las matrices.-.-</i>	<i>B-9</i>
<i>B.10.-Curva de condicionamiento.-.-</i>	<i>B-9</i>
<i>B.11.- Resolución del sistema correspondiente al Método Matricial Clásico.-...</i>	<i>B-11</i>
<i>B.12.- Matriz de Diafragma Rígido para la planta tipo D_{TIPO}.-.-</i>	<i>B-12</i>
<i>B.12.1.- Matriz de Diafragma de los elementos.-</i>	<i>B-12</i>
<i>B.13.- Matriz de Diafragma Rígido de la estructura.-.-</i>	<i>B-13</i>
<i>B.14.- Sistemas de Lagrange.-.-</i>	<i>B-13</i>
<i>B.15.-Resolución de los Sistemas de Lagrange por transformación de colum- nas.-.-</i>	<i>B-18</i>
<i>B.16.-Eliminación de las incógnitas correspondientes a los Multiplicadores de Lagrange.-.-</i>	<i>B-24</i>

BIBLIOGRAFÍA

BASES DE CÁLCULO, NOMENCLATURA Y SIMBOLOGÍA

Hipótesis de cálculo:

- 1) El material es perfectamente elástico, homogéneo e isótropo.
- 2) Se cumple el principio de los pequeños movimientos.
- 3) Existe linealidad estática, es decir, las ecuaciones de equilibrio se plantean en la configuración inicial del elemento, o equivalentemente, en el elemento sin deformar.
- 4) Existe linealidad cinemática, es decir, las deformaciones son funciones lineales de los corrimientos.
- 5) Se desprecian las tensiones normales a la directriz del elemento (se supone nulo el coeficiente de Poisson).
- 6) Se desprecia la deformación por cortante.

Nomenclatura y simbología:

- Las matrices vendrán representadas por letras Mayúsculas en **Negrita**.
- Los vectores vendrán representados por letras minúsculas en **negrita**, excepto el vector de inelongabilidad **I**, que vendrá en mayúscula y **Negrita**.
- Las componentes de corrimiento vendrán representados por letras minúsculas y *cursiva*.
- Señalaremos con las letras *i* y *j* los extremos inicial y final, respectivamente, del elemento barra.
- Llamaremos **componentes de desplazamiento** a los movimientos de un punto en la dirección de los ejes coordenados.
- Llamaremos **corrimientos** al conjunto de componentes de movimientos de un punto (desplazamientos y giros).
- Se considera positivo el sentido **levógiro** para los momentos y giros.
- Las componentes del conjunto de vectores asociados a los extremos *i* y *j* de una barra, referidas a un sistema de coordenadas generales XY, serán:
- Componentes de **solicitaciones**:

<u>Extremo i.-</u>	X_i :	componente de fuerza en el eje OX.
	Y_i :	“ “ “ OY.
	Z_i :	“ “ “ OZ.

M_{xi} : Momento respecto al eje OX.

M_{yi} : “ “ “ OY.

M_{zi} : “ “ “ OZ.

Extremo j.- X_j : componente de fuerza en el eje OX.

Y_j : “ “ “ OY.

Z_j : “ “ “ OZ.

M_{xj} : Momento respecto al eje OX.

M_{yj} : “ “ “ OY.

M_{zj} : “ “ “ OZ.

- Componentes de **corrimientos**:

Extremo i.- u_i : componente de desplazamiento en la dirección OX.

v_i : “ “ “ OY.

w_i : “ “ “ OZ.

α_i : “ giro respecto al eje OX.

β_i : “ “ “ “ OY.

γ_i : “ “ “ “ OZ.

Extremo j.- u_j : componente de desplazamiento en la dirección OX.

v_j : “ “ “ OY.

w_j : “ “ “ OZ.

α_j : “ giro respecto al eje OX.

β_j : “ “ “ “ OY.

γ_j : “ “ “ “ OZ.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES

OBJETIVO:

Puesto que el trabajo que aquí se presenta es un procedimiento matricial para el cálculo de estructuras de barras de nudos rígidos bajo las hipótesis de inelongabilidad de las barras y las de diafragma rígido, el objetivo de este primer capítulo es la exposición detallada de los diferentes autores que han estudiado en mayor o menor medida dicho método matricial bajo las hipótesis antedichas.

CONTENIDO:

Siguiendo el orden establecido en la bibliografía que figura al final de esa obra, se expone un análisis cronológico de todos los aspectos relacionados con esta investigación, comenzando con una exposición sobre los métodos generales empleados en el análisis y cálculo de barras prismáticas unidas rígidamente, los específicos métodos matriciales y, dentro de éstos, aquellos que han adoptado la hipótesis de inelongabilidad de las barras o la hipótesis de diafragma rígido, procediéndose a un detallado escrutinio con referencias suficientes para facilitar una posible consulta de los temas aquí relacionados cuyos autores los han estudiado con anterioridad.

1.1.- Métodos de cálculo para estructuras reticulares.- “Las dos directrices principales en la evolución de los métodos de cálculo propio de estructuras reticulares continuas las fijaron Otto Mohr y W. Ritter” [F. Casado (9), Cap. V], aunque treinta años atrás “Clapeyron (1857) fue el primero en escribir ecuaciones elementales de *pendiente-flecha*” [Heyman (35), capítulo 6]. En 1892 Otto Mohr, preocupado por el problema de la aparición de flexiones secundarias en las jácenas metálicas trianguladas -flexiones que son consecuencia del inevitable pequeño empotramiento que aparece en los nudos por falta de una articulación total- utilizó estas ecuaciones dando lugar al método que se dio en llamar “*de las deformaciones angulares*”, luego utilizadas por Maney en 1915 [Fernández Casado (9), Cap. V], que relacionan las solicitaciones de flexión –momentos flectores- de los extremos de las barras

de las barras con los giros de dichos extremos y el desplazamiento transversal relativo entre ellos como consecuencia de la excitación introducida en la estructura. En este mismo año J. M. Zafra, traduciendo los estudios de Ritter (1900), introduce el concepto fundamental de *masa elástica*, que tenía las limitaciones de resolver sólo las estructuras intranslacionales, método que sería invalidado al sistematizarse por Suter y Strassner bajo el nombre de *método de los puntos fijos*, que da lugar a un sistema de ecuaciones determinado, pero que presentaba el inconveniente de la gran complejidad de resolución debido al elevado número de ecuaciones que conlleva, aún en estructuras muy sencillas. Con objeto de paliar este inconveniente, Takabeya propone reducir el sistema eliminando las ecuaciones de nudo y, entonces, si no hay deformaciones transversales, se tendrá un solo tipo de ecuaciones que se ordenan en un cuadro- falsilla, mediante el cual se facilita su resolución, aunque la sistematización primera fue de Bendiczen en 1919 y la más completa la de Guldán, el cual, en estructuras con desplazamientos, establece una ecuación más general [F. Casado (8), Cap. V]. Aunque, estrictamente, no se trata de un método matricial, el cuadro-falsilla mencionado es quizá el antecedente más próximo a los métodos matriciales modernos basados en las anteriormente referidas ecuaciones de la *pendiente-flecha*, las cuales, junto con la ley de Hooke*, que relaciona las elongaciones de una barra con su axil, constituyen la base del cálculo matricial de estructuras actualmente utilizado, pues este último método parte de aquéllas formulaciones constitutivas, sólo que expresadas en forma matricial y cuyas variables vienen enunciadas por componentes referidas a un determinado sistema de coordenadas, dando lugar al conocido Método de la Rigidez que, como consecuencia del elevado número de incógnitas a que da lugar su aplicación para cualquier tipo de estructura, incluso la más elemental, no pudo ponerse en práctica hasta la aparición de los ordenadores. Estas ecuaciones constitutivas relacionan de forma directa las solicitaciones de extremo -axiles, cortantes y momentos- con los corrimientos de dichos puntos, por lo que aquéllas vienen dadas en función directa de éstos y, por tanto, no puede prescindirse de ninguno de ellos para que el método sea de aplicación. De ahí que, contrariamente a todos los métodos habitualmente utilizados para el cálculo de estructuras de barras, el método matricial no adopte la hipótesis simplificativa de inelongabilidad y es esclavo, pues, de la premisa tiránicamente imprescindible de deformación axial, causa principal de los problemas numéricos que ello conlleva, como se detallará en el siguiente capítulo y a lo largo de esta investigación.

* Es, justamente, esta ecuación la que permitió una generalización total para el cálculo matricial de estructuras.

1.2.- El Método Matricial bajo condición de inelongabilidad.- No obstante lo afirmado en el anterior epígrafe, existe amplia bibliografía en la que se adopta la hipótesis de inelongabilidad dentro del método matricial. Así, en 1945, Timoshenko y Young (1), en el epígrafe 10.6, dedicado al análisis matricial de pórticos continuos, expresan que “*para simplificar (...) como es práctica general, se desprecian también las deformaciones originadas en las barras por esfuerzos axiales y cortantes y sólo se tiene en cuenta la deformación por flexión*”; no obstante, la obtención de la matriz de rigidez de la estructura no se consigue por ensamblaje directo de la matriz de rigidez del elemento, sino por superposición de estados paramétricos en cada uno de los cuales se permite un solo corrimiento unitario. En 1960, Argyris y Kelsey (2, Pág. 2), utilizan la siguiente matriz de elemento de dimensiones 4×4:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 12 \frac{EI}{L^3} & -12 \frac{EI}{L^3} & 6 \frac{EI}{L^2} & 6 \frac{EI}{L^2} \\ -12 \frac{EI}{L^3} & 12 \frac{EI}{L^3} & -6 \frac{EI}{L^2} & -6 \frac{EI}{L^2} \\ \hline 6 \frac{EI}{L^2} & -6 \frac{EI}{L^2} & 4 \frac{EI}{L} & 2 \frac{EI}{L} \\ 6 \frac{EI}{L^2} & -6 \frac{EI}{L^2} & 2 \frac{EI}{L} & 4 \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \quad [1.1]$$

y, por tanto, con dos grados de libertad por nudo, aplicable exclusivamente a vigas continuas y entramados* planos. La misma matriz (con otra reordenación) es utilizada en 1962 por L. Rogers y M. Lander (3, epígrafe 8.4) y por Gallager (4, Pág. 40) en 1964. En aquélla se procede al cálculo de una viga continua -sistema intranslacional- y de un entramado plano de un vano y una planta. No obstante, el procedimiento no es exactamente el método directo de la rigidez, pues a éste se llega a partir de la matriz α que relaciona todas las componentes de corrimiento con las incógnitas elegidas por inspección como incógnitas maestras, con lo que, a partir de dicha matriz se llega, por una parte, al método directo y, por otra, a la eliminación de las incógnitas esclavas de forma que si \mathbf{K} es la matriz de rigidez obtenida por ensamblaje, \mathbf{c} el vector de corrimientos y \mathbf{p} el vector de acciones, se tendrá, por una parte, que

$$\mathbf{K} \mathbf{c} = \mathbf{p} \quad [1.2]$$

y, por otra

$$\mathbf{c} = \alpha \mathbf{c}_m \quad [1.3]$$

* Entendemos por entramado aquél sistema estructural formado por barras conectadas ortogonalmente.

donde \mathbf{c}_m es el vector que describe a las componentes de incógnitas maestras, por lo que, al sustituir ésta en la anterior, quedará

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{c}_m = \mathbf{p} \quad [1.4]$$

y premultiplicando m.a.m. por $\boldsymbol{\alpha}^T$, transpuesta de $\boldsymbol{\alpha}$, se tendrá

$$\overline{\mathbf{K}} \mathbf{c}_m = \overline{\mathbf{p}} \quad [1.5]$$

donde

$$\overline{\mathbf{K}} = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} \quad \text{y} \quad \overline{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{p}$$

obteniéndose un sistema de las mismas dimensiones que el vector de incógnitas maestras. Como puede observarse, se llega al mismo sistema que con el Método de las Transformaciones, aunque el procedimiento no es exactamente el mismo pues en este último la matriz $\boldsymbol{\alpha}$ relaciona sólo las componentes dependientes con las independientes.

Nuevamente, en 1965 Gere y Weaver (5, epígrafe 4.3), vuelven a utilizar la misma matriz [1.1] antes referida de la que se extrae otra de dimensiones 2×2

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4 \frac{EI}{L} & 2 \frac{EI}{L} \\ 2 \frac{EI}{L} & 4 \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \quad [1.6]$$

esto es, dos grados de libertad por elemento, que corresponden exclusivamente a los giros de sus extremos y aplicable, pues, sólo a estructuras intranslacionales. En 1966, C. Matin (6, Pág. 208), hace el cálculo de un sencillo entramado de un vano y una planta bajo condiciones de simetría y antimetría en cuya matriz de rigidez se introducen las condiciones de inlongabilidad, simetría y antimetría, quedando reducido el sistema a una sola ecuación y una sola incógnita para el primero y dos ecuaciones con dos incógnitas para el segundo. Seguidamente se hace el cálculo para otro entramado de un vano y dos plantas bajo condiciones de antimetría, que no añade generalidad alguna al procedimiento, proponiendo, finalmente, ejercicios de elementales estructuras planas intranslacionales. En el mismo año, Rubinstein (8, epígrafes 7.5 y siguientes), utilizan la matriz [1.1] de rigidez del elemento ya conocida, junto con la creación de una matriz de compatibilidad $\boldsymbol{\beta}$ que tiene el mismo significado que la anteriormente mencionada $\boldsymbol{\alpha}$ utilizada en la referencia (3) y que no es más, como se dijo, que la matriz que relaciona todas las incógnitas del sistema estructural con las incógnitas maestras, lo que permite resolver el sistema lineal por el Método de las Transformaciones. En el epígrafe 9.2 de esta misma referencia se estudia un entramado intranslacional, mien-

tras que en el siguiente se procede al cálculo de un entramado translacional de un vano y dos plantas, cuya matriz de rigidez se obtiene mediante movimientos unitarios de la estructura (estados paramétricos) en sus grados de libertad, -procedimiento que repite en 1971 Meek (10, ejemplos 6.2 y 6.4)- que carece de interés alguno desde el punto de vista de su aplicación práctica. Posteriormente, y de forma idéntica, en 1974 Majid (11, epígrafe 4.5) procede al estudio de un pórtico plano con barras inclinadas, pero con la particularidad de ser simétrico, lo que le resta generalidad al procedimiento. Después, M. Bray (15, Pág. 94), en 1979 advierte del inconveniente que supone la adopción de la hipótesis de inelongsibilidad para la determinación de los axiles de las barras, pues: “...*las fuerzas axiales se tienen que deducir del producto de infinito por cero, que es indeterminado. Si se atribuye al miembro un valor finito cualquiera de rigidez axial, como por ejemplo en el cálculo automático, entonces la fuerza axial en el miembro, tendría el valor incorrecto cero.*”

En 1983 Ghali y Neville (19, epígrafe 4-4) muestran nuevamente la ya conocida matriz de rigidez dada en [1.1] con cuatro grados de libertad por barra y la correspondiente a dos grados de libertad [1.6], aplicable a estructuras de barras coplanarias intranslacionales; sin embargo, las matrices de rigidez de los ejemplos 3.2 y 3.3 -este último reproducido más recientemente (1992) por M. Vázquez (25, ejemplo 2.9)- que corresponden a sencillas estructuras de barras coplanarias, se obtienen mediante movimientos unitarios de los grados de libertad que se liberan en cada estado paramétrico, en la misma forma empleada en las anteriores referencias ya comentadas.

De forma similar a lo ya descrito reiteradamente, en 1998 Laursen (22, apartado 14-2), propone la obtención de los elementos de la matriz de rigidez de una estructura bajo condiciones de inelongsibilidad a partir de una serie de deformadas paramétricas, relacionando las componentes de corrimiento con las incógnitas maestras a través de la matriz **A**, matriz de Transformación que corresponde con las ya comentadas α y β . En el ejemplo 14-2 de esta referencia, correspondiente a un entramado translacional de un vano y dos plantas, utiliza la conocida matriz de barra de dimensiones 2×2 para el ensamblaje de la matriz de rigidez del estado intranslacional y utiliza una serie de estados paramétricos para la obtención de los elementos de la matriz debida a los desplazamientos, de la misma forma en que se procedió en las referencias (2) y (8), solucionando el sistema valiéndose de dicha matriz **A** y su transpuesta. En el apartado 14-6, dedicado a la generalización de la transformación de desplazamientos, deduce la ecuación existente en coordenadas globales entre las componentes de desplazamiento de los extremos del elemento como consecuencia de la hipótesis de inelongsibilidad en el espacio 2D, la cual es una de las ecuaciones básicas que sirven de

fundamento al procedimiento que en esta Tesis Doctoral se propone* (véase ecuación [4.12] de este trabajo). Nuevamente propone la configuración expresada en [1.1] para la matriz de rigidez de la barra inelongable.

En 1993, Corchero (27, cuarta parte, problema nº 13) resuelve el caso particular de un pórtico simétrico aplicando el teorema de Andréé y obteniendo la matriz de rigidez de la estructura por ensamblaje de las matrices tradicionales de barra, esto es, considerando elongabilidad en ellas y, posteriormente, introduciendo las condiciones de inelongabilidad en el sistema lineal que se obtiene con la matriz reducida de la estructura, quedando eliminadas las rigideces correspondientes a las elongaciones debido, precisamente, a las propiedades particulares de simetría y antimetría.

En 1996, McCormac y Elling (31, epígrafe 17.4) vuelven a deducir la matriz de rigidez para elementos sometidos exclusivamente a flexión, obteniendo la reiteradamente referida matriz [1.1] de dimensiones 4×4 con la que se procede al cálculo de una viga continua y de una estructura formada por barras horizontales de inercias distintas, proponiendo, finalmente, algunos ejercicios de estas mismas características particulares; pero más adelante, en el capítulo 18, dedicado a las matrices de rigidez para elementos inclinados, deduce la matriz de rigidez pero, ahora, bajo la hipótesis de elongabilidad, obteniendo las tradicionales matrices correspondientes al elemento universalmente conocidas en coordenadas globales. Sin embargo, siempre que las características particulares de los ejemplos expuestos lo permiten -vigas continuas o pórticos con barras inclinadas, pero intranslacionales- no utiliza para su análisis las matrices tradicionales, sino las correspondientes a la barra inelongable de cuatro grados de libertad.

En 1998, E. Abdilla (39, epígrafe 4.2), en un pormenorizado análisis del elemento barra bajo “...modo rígido de axil...” describe la relación en coordenadas globales existente entre las componentes de desplazamiento de los extremos del elemento como consecuencia de la hipótesis de inelongabilidad (fórmula [4.2.9]) y bajo “...modo rígido de flexor/cortante...” deduce, de igual forma, las ecuaciones que describen la condición de inflexibilidad de los extremos de una barra (fórmulas [4.2.33 y 4.2.34]) aplicables a diafragmas rígidos ya comentadas en la referencia (22).

Posteriormente, en 1999 Argüelles (41) utiliza nuevamente la matriz de rigidez de la barra inelongable [1.1] para el cálculo plástico, aunque restringe su utilización a un entramado elemental de un vano y una planta (epígrafe XVI.G.4.2 de la referencia). De la misma

* Las otras ecuaciones son las que describen las condiciones de Diafragma Rígido, también descritas por el mismo autor en el mismo apartado y a las que más adelante se hará referencia.

forma utiliza dicha matriz de rigidez para el estudio del pandeo y estabilidad, pero dicha matriz, al venir referida a sus ejes locales, sólo es válida para la barra paralela al eje global OX; de ahí que se utilice esta matriz para el ejemplo de una viga horizontal (epígrafe XIX.D.5.2) mientras que para el ejemplo de un entramado plano translacional (epígrafe XIX.D.5.3) se utiliza la matriz de rigidez de barra tradicional -y por tanto elongable- para el ensamblaje de la matriz de la estructura. En el capítulo de esta referencia, dedicado al cálculo dinámico, se vuelve a adoptar la hipótesis de inelongabilidad para todas las barras, ya sean vigas o pilares, con el objetivo de reducir el número de incógnitas, consiguiendo los coeficientes de influencia de la matriz de rigidez de la estructura mediante desplazamientos unitarios en sus grados de libertad, por lo que dicha matriz de la estructura no se obtiene por ensamblaje directo de las matrices de los elementos (epígrafe XXI.C.2.1 y siguientes). Por último, para el cálculo dinámico de una barra horizontal vuelve a utilizar la matriz de rigidez de la barra inelongable (epígrafe XXI.C.4.2) mientras que, como ocurre en otras referencias, para el de un pórtico a dos aguas se utiliza la matriz de barra tradicional.

González de Cangas y Samartín (46), en fecha más reciente -reimpresión en noviembre de 2001 de la primera edición de octubre de 1999 y en la que dedican mayor espacio al estudio de estructuras de barras de nudos rígidos bajo condiciones de restricción y, concretamente, de inelongabilidad- justifican en el apartado 7.3.2 las ventajas que supone la consideración de inextensibilidad de la barra argumentando que *“es evidente, por tanto, que la hipótesis de elongabilidad nula de las barras, al suponer una restricción de los movimientos de la estructura, constituye una simplificación importante en el cálculo, puesto que reduce el número de incógnitas del sistema”*, añadiendo a continuación que *“en los capítulos que siguen se adopta, para el cálculo de los entramados intranslacionales, un procedimiento matricial en rigidez, correspondiente al caso particular en que $L/E\Omega = 0^*$ en todas las barras, y en el que, por consiguiente, las únicas incógnitas son los giros de los nudos. En cuanto a las estructuras reticuladas translacionales, no se sigue, sin embargo, un planteamiento global que proporcione al mismo tiempo tanto los giros como los desplazamientos de los nudos, sino que, de un modo similar a la técnica seguida en el método de Cross, los desplazamientos se obtienen a través de estados paramétricos que se superponen a las cargas que soporta el entramado, de forma que en cada uno de los estados de cálculo éste se lleva a efecto en una estructura intranslacional.”* En el epígrafe 8.3 de esta referencia, dedicado a la obtención de los esfuerzos cortantes y axiles de estructuras intranslacionales, se

* Para los autores, L = longitud de la barra, E = Módulo de Young y Ω = área de la sección.

advierte que “*en resumen, si la estructura, considerada como articulada, resulta hiperestática, no es posible calcular los esfuerzos axiales, conclusión, por otra parte, evidente, ya que en ese caso sería necesario recurrir a las ecuaciones de compatibilidad para su resolución, lo cual no es factible habida cuenta de la hipótesis de elongabilidad nula de las barras ($L/E\Omega = 0$)*”, extremo éste que, como anteriormente se puso de manifiesto, ya había sido advertido en la referencia (15). Siguiendo con el escrutinio de la referencia 46, para el análisis de las estructuras translacionales, el autor advierte que no se sigue la misma técnica que para las intranslacionales, “... *sino que se elige un procedimiento indirecto...*” (epígrafe 9.1) que, como ya advirtió, consiste en determinar los coeficientes de la matriz de rigidez de la estructura mediante desplazamientos unitarios para cada estado paramétrico.

La referencia (47), de la misma fecha y autores que la anterior y dedicada exclusiva, extensa y detalladamente al cálculo matricial, incide nuevamente en la obtención de la reiteradamente reseñada matriz de barra inelongable de cuatro grados de libertad*, pero -como se ha visto a largo de todo este escrutinio- referida exclusivamente, asimismo, a los ejes locales y, por tanto, no aplicable para el ensamblaje directo, por lo que la determinación de la matriz de rigidez de una estructura ha de efectuarse de forma indirecta (ejemplo 7.4 de esta última referencia).

En 2001, M. Vázquez (50, epígrafes 4.4 y siguientes) retoma la matriz de la barra inelongable [1.1] para el análisis de estructuras de barras coplanarias formadas exclusivamente por elementos horizontales, aunque para la generalización del método no utiliza dicha matriz, sino la tradicional matriz del rigidez del elemento axialmente deformable (epígrafe 4.8).

Por último, en el 2004, Felippa (54, apartado 12.6) introduce la misma matriz [1.1], con otra reordenación, para la ecuación de elementos finitos referidos a la barra prismática.

1.3.- El Método Matricial bajo condición de diafragma rígido.- Mientras que la condición de inelongabilidad ha sido tratada por numerosos autores, como se ha visto en el epígrafe anterior, la condición de diafragma rígido ha tenido un menor desarrollo en la bibliografía existente, no obstante ser una condición con más razón de ser que aquella, sobre todo en las estructuras de edificación, pues todos los forjados que las conforman gozan de la premisa universalmente aceptada de indeformabilidad en su plano.

* “*En esta selección de gdl, que implica la no consideración de deformación por axil de dinteles y soportes, aparte de reducir la dimensión del sistema de ecuaciones a resolver, evita la aparición en éste de problemas de mal condicionamiento, al no existir términos de rigideces muy distintos en los coeficientes del sistema.*” (47, ejemplo 7.4).

Como ya se expresó anteriormente, Laursen (22) y Abdilla (39) deducen las ecuaciones que describen las condiciones de diafragma rígido para el caso particular de horizontalidad de dicho plano. Dichas ecuaciones expresan, por una parte, la inelongabilidad de la línea que une dos puntos cualesquiera del plano, por lo que su ecuación es la ya mencionada ecuación de inelongabilidad, por otra, la inflexibilidad de uno de los extremos de dicha línea dentro del plano (ecuación [5.2] de este estudio) y, por otra, la inflexibilidad del otro extremo (ecuación [5.3]).

También Samartín y G. de Cangas (47), en el apartado 7.3.1 refieren que “...*un caso típico de uso de restricciones multipunto se encuentra en el programa ETABS desarrollado por E.L.Wilson de la Universidad de California, Berkeley, para el cálculo tridimensional de estructuras de edificación. En él se supone que el forjado de cada planta es rígido en su plano, por lo que con tres gdl maestros (dos desplazamientos según dos direcciones horizontales y un giro alrededor de un eje normal al forjado) se describen los desplazamientos de todos los nudos de la planta.*”

Finalmente estas mismas ecuaciones figuran en el Manual del Programa Sap2000, Capítulo IV, donde se incide en que “*El uso del Constreñimiento de Diafragma para estructuras de edificación elimina los problemas de exactitud numérica creados cuando la gran rigidez en el plano de un diafragma de piso se modela con elementos de membrana*”, esto es, la adopción de esta hipótesis no solamente supone una modelización más acertada y reduce el número de grados de libertad, sino que conlleva una ventaja adicional en la manipulación numérica.

1.4.- El Método Matricial bajo condiciones generales de restricción .- Como se desprende de todo lo anterior, la introducción de la condición de inelongabilidad en la matriz del elemento daba lugar a un matriz de rigidez de cuatro grados de libertad por barra, esto es, dos grados por nudo y, puesto que los grados de libertad de un punto en el plano son tres, no puede conseguirse con ella la matriz de rigidez de cualquier estructura mediante ensamblaje directo de estas matrices. La alternativa para el análisis de estructuras bajo la hipótesis de inelongabilidad o, en general, de cualquier otro tipo, incluidas las condiciones de contorno o de diafragma rígido, es obtener la matriz de rigidez del sistema a partir del ensamblaje de las matrices de barra tradicionales, es decir, las correspondientes a la barra axialmente deformable y, posteriormente, añadir a dicho sistema las ecuaciones necesarias que describan dichas condiciones cinemáticas de restricción, procedimiento universalmente conocido y utilizado por multitud de autores de los que cabe destacar los cuatro siguientes:

1) En 1982, Norris et al (16, apartado 12.4.2) estudia la introducción de las condiciones de contorno a partir de la creación de la matriz \mathbf{H} que relaciona todas las incógnitas con las incógnitas independientes, es decir, utilizando las ya conocidas matrices de transformación α , β y \mathbf{A} referidas anteriormente y en las cuales las incógnitas dependientes se han de elegir por simple inspección (op. cit., apartado 15.2.2). Para la resolución del sistema rectangular que se obtiene debido a las condiciones de restricción impuesta, los autores de esta referencia proponen tres procedimientos: los dos primeros (*Método que utiliza el principio de la energía potencial total fija (con sustitución)* y el *Método que utiliza el teorema de las deformaciones virtuales*, epígrafes 15.3.1 y 15.3.2 de dicha referencia, respectivamente) dan lugar a un mismo sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas independientes, como los mismos autores señalan, y no son más que el procedimiento conocido en la actualidad como el Método de las Transformaciones, mientras que el tercero, expuesto en el epígrafe 15.3.3, es el *Método que utiliza el principio de la energía potencial total fija (con Multiplicadores de Lagrange)*, esto es, el conocido Método de los Multiplicadores de Lagrange*, cuyo desarrollo pormenorizado se describe en el Epígrafe 6.2.1 de esta Tesis Doctoral. Dichos autores, observando el inconveniente que supone en este tercer método el aumento de las dimensiones del sistema, expresan que “...*siempre que sea posible se evita utilizar el Método de los Multiplicadores de Lagrange, especialmente cuando \mathbf{b}^{**} es grande. Obsérvese que no es posible eliminar λ de la ecuación (Sistema de Lagrange) debido a la submatriz diagonal cero^{***}.*” (apartado 15.3.3).

2) En 1995, Oñate (30, epígrafe 15.4) propone tres tipos de procedimientos para la resolución del sistema rectangular. El primero es el ya mencionado Método de las Transformaciones, en el que se advierte que la elección de las incógnitas dependientes no es única, aconsejándose escoger las e primeras columnas de la matriz de restricciones linealmente independientes, siendo e el número de ecuaciones de restricción. El segundo es el ya referido Método de los Multiplicadores de Lagrange, mientras que el tercero es el Método de la Penalización que, en esencia, consiste en elegir una matriz diagonal de penalización formada por elementos “*suficientemente grandes*”, dando lugar a un procedimiento que, “...*pese*

* De forma inexplicable, al referirse a los valores de los Multiplicadores de Lagrange, los autores aseveran reiteradamente que “...*desafortunadamente estas cantidades no tienen ningún significado físico que sea de utilidad para el ingeniero de estructuras*” (final de epígrafes 15.3.3 y 16.4.3), siendo así que dichos valores no son más que las fuerzas que hay que introducir en la estructura para que se cumplan las restricciones impuestas, como detalladamente se demuestra en el epígrafe 6.2.2 de esta Tesis.

** En esta referencia \mathbf{b} es el número de ecuaciones de restricción impuestas y λ es el vector cuyas componentes son los valores de los Multiplicadores de Lagrange.

*** Esto es una imprecisión, como se demostrará en el Capítulo 8, epígrafe 8.5.2.

a su simplicidad puede introducir problemas numéricos” (apartado 15.4.2 de dicha referencia).

-El Método de los Multiplicadores de Lagrange se basa en que la solución de un problema estructural se puede plantear como un mínimo de la energía potencial total de la estructura, es decir, un mínimo de la expresión

$$V(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{K} \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \mathbf{p} \quad [1.7]$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez de la estructura, \mathbf{p} el vector de acciones que la excita y \mathbf{c} el vector de corrimientos de los nudos, el cual ha de satisfacer el conjunto de ecuaciones de restricción

$$\mathbf{R} \mathbf{c} = \mathbf{q} \quad [1.8]$$

siendo \mathbf{R} la matriz de coeficientes del sistema de restricciones y \mathbf{q} el vector de términos independientes de dicho sistema. El elegante procedimiento de Lagrange (1736-1813) consiste en sumar a la función que hay que maximizar o minimizar [1.7] tantos términos como ecuaciones adicionales se han introducido, ecuaciones de restricción; cada término se forma tomando la ecuación correspondiente y multiplicándola por un valor, en principio indefinido, - el Multiplicador de Lagrange-. Llamando, pues, λ al vector que describe a dichos valores, se tendrá

$$L = L(\mathbf{c}, \lambda) = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{K} \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \mathbf{p} + \lambda^T (\mathbf{R} \mathbf{c} - \mathbf{q}) \quad [1.9]$$

Pero los valores de \mathbf{c} y λ han de ser tales que, para cada uno de ellos, se satisfaga la condición de estacionaridad, esto es, se han de cumplir simultáneamente las dos condiciones

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{c}} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbf{0} \quad [1.10]$$

con lo que, derivando en [1.9], en formato matricial, quedan como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad [1.11]$$

al que llamaremos en adelante Sistema de Lagrange

- El Método de las Funciones de Penalización consiste en el siguiente procedimiento: primero se introduce un vector error $\boldsymbol{\varepsilon}$ en las condiciones de restricción [1.8] de tal forma que éstas han de cumplir la ecuación

$$\mathbf{R}\mathbf{c} - \mathbf{q} = \boldsymbol{\varepsilon} \quad [1.12]$$

Si el vector error es nulo es evidente que las condiciones de restricción se satisfarán de forma exacta y si ello es así, se puede aumentar la energía potencial total $V(\mathbf{c})$ que habría de minimizarse añadiendo una función de penalización del tipo

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\varepsilon} \quad [1.13]$$

donde $\boldsymbol{\alpha}$ es una matriz diagonal cuyos elementos son escalares de valor muy elevado. La nueva expresión de la energía potencial con este valor añadido será, pues,

$$L = L(\mathbf{c}) = \frac{1}{2}\mathbf{c}^T\mathbf{K}\mathbf{c} - \mathbf{c}^T\mathbf{p} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\varepsilon} \quad [1.14]$$

que muestra que, si existen errores en la satisfacción de las condiciones de restricción, éstos se magnificarán al venir multiplicados por los grandes valores de la matriz $\boldsymbol{\alpha}$. El vector de corrimientos que hacen mínima la expresión [1.14] ha de ser aquél que cumpla la ecuación

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{c}} = \mathbf{0} \quad [1.15]$$

es decir

$$[\mathbf{K} + \mathbf{R}^T\boldsymbol{\alpha}\mathbf{R}]\mathbf{c} = \mathbf{p} + \mathbf{R}^T\boldsymbol{\alpha}\mathbf{q} \quad [1.16]$$

donde el producto matricial $\mathbf{R}^T\boldsymbol{\alpha}\mathbf{R}$ no es más que la Matriz de Penalización, y a medida que se incrementan los valores de $\boldsymbol{\alpha}$, las restricciones [1.8] se satisfacen con menor error.

3) En 2001, Samartín y González de Cangas (47, epígrafe 7.3) proponen los mismos procedimientos que los expuestos en la referencia anterior. Respecto al Método de las Transformaciones (apartado 7.3.1) hace hincapié en el inconveniente que éste presenta debido a la necesidad de “...reordenación, partición y multiplicación de las matrices, lo que produce un ancho de banda de la matriz resultante, manteniéndose asimismo la pérdida del carácter de positiva definida.” En referencia al Método de los Multiplicadores de Lagrange (apartado 7.3.2) indica su simplicidad a la hora de implementarlo en un programa general de cálculo matricial, pero con el inconveniente del aumento de las dimensiones del sistema que

se obtiene por este procedimiento. Por otra parte, “*en la resolución de este sistema, cuya matriz es semidefinida positiva si \mathbf{K} es positiva definida (es decir con las coacciones precisas que garanticen la estabilidad de la estructura), se pueden utilizar métodos estándar, como el de Gauss, siempre que se considere la posibilidad de aparición de pivotes nulos.*” Contrariamente a lo expuesto en la referencia (16) respecto al significado de los valores de los Multiplicadores de Lagrange, los autores de la referencia que nos ocupa ponen de manifiesto que el vector que engloba dichos valores “*puede interpretarse como las fuerzas precisas para imponer las restricciones en la estructura.* Por último, respecto al Método de la Funciones de Penalización (apartado 7.3.3), los autores precisan que “*...si se consideran números muy grandes para los términos de α , pueden producirse problemas de enmascaramiento y, por tanto, de mal condicionamiento del sistema lineal de ecuaciones.*” Entre otras desventajas, los autores advierten que el método “*...presenta el inconveniente de la elección del rango adecuado de los números de penalización, que debe ser lo suficientemente elevado para satisfacer las condiciones de restricción y no demasiado grande para evitar dificultades de condicionamiento numérico.*” (apartado 7.3.3).

4) Finalmente, Felippa (54) es el autor que ofrece un estudio más pormenorizado y extenso para la resolución de sistemas bajo condiciones de restricción en sus capítulos 8 y 9, dedicados al estudio de restricciones cinemáticas puntuales y multipunto, tanto homogéneas como no homogéneas. El autor contempla cuatro procedimientos para la resolución de sistemas bajo restricciones, siendo los tres primeros los ya referidos anteriormente, esto es, el Método de las Transformaciones, el Método de la Penalización y el Método de los Multiplicadores de Lagrange, mientras que el cuarto es una simbiosis de los dos últimos.

En la valoración que hace en el apartado 8.3.7 de esta referencia respecto al primero de los métodos reseñados (Método de las Transformaciones) considera como ventajas:

- El de ser un método exacto (sin tener en cuenta la inexactitud que puede acarrear el operar con precisión no infinita).
- El de presentar un menor número de incógnitas.
- El de ser fácilmente entendible.

Los inconvenientes que considera son:

- La inevitable reordenación debido a la necesidad de eliminación de las incógnitas esclavas (dependientes).
- La incertidumbre para la elección adecuada de éstas, equivalente a la complejidad en la elección de las redundantes en el Método de las Fuerzas.

- La necesidad de resolver un sistema auxiliar de ecuaciones con objeto de despejar las incógnitas esclavas en función de las maestras (independientes).
- La posibilidad de crear problemas de estabilidad numérica.
- La complejidad para una técnica generalizada en el análisis de elementos finitos.

En el apartado 9.1.6, dedicado a los comentarios respecto al Método de las Funciones de Penalización, el autor enumera las siguientes ventajas:

- Fácilmente implementable en un programa de ordenador.
- No necesita reordenación.
- No necesita distinguir las ecuaciones de restricción de las demás ecuaciones.
- Poca sensibilidad respecto a la independencia o no de las ecuaciones de restricción.
- La matriz no pierde el carácter de definida positiva.

Mientras que, como desventajas, indica las siguientes:

- La dificultad primordial en la adecuada elección de los valores de la matriz de penalización.
- El deterioro del condicionamiento, que puede tener efectos secundarios graves a la hora de la resolución del sistema.
- La circunstancia de que, incluso si los valores de la matriz α fueren óptimos, el error siempre existirá por encima de un determinado valor.
- Por último que, desde el punto de vista de su aplicación generalizada, el método no es ninguna panacea.

Este autor, en el apartado 9.2.4, referente al Método de los Multiplicadores de Lagrange, señala como desventaja la de presentar mayor número de incógnitas que en los procedimientos anteriores y la pérdida del carácter de definida positiva de la matriz del sistema^{*}, siendo las ventajas las siguientes:

- Aparte de los errores computacionales debido a la aritmética de precisión finita, el método es exacto.
- La resolución del sistema devolverá de forma directa los valores de los Multiplicadores de Lagrange, esto es, las fuerzas de restricción, de interés en muchas aplicaciones y de los que indica, de la misma forma que la referencia (47), que

^{*} Como ya se puso de manifiesto, de acuerdo con lo indicado en la referencia 47, la Matriz de Lagrange es semidefinida positiva, lo que permitirá utilizar método estándar para la resolución del sistema pertinente.

“Físicamente estos valores desconocidos representan las fuerzas de restricción necesarias para que se cumplan exactamente las restricciones impuestas.”

- No necesita conjetura alguna respecto de la elección de incógnitas esclavas ni respecto a la elección un tanto arbitraria de los valores de penalización.
- *“En general este método parece ser el más elegante para un programa de elementos finitos, minimizando conjeturas y elecciones para el usuario.”*

Por último, este autor propone un cuarto procedimiento, al que denomina Método de Lagrange Aumentado, en el que funde en una misma formulación los Multiplicadores de Lagrange y la matriz de penalización, sustituyendo la submatriz nula de la diagonal principal que aparece en aquél por otra matriz cuyos elementos son, en principio desconocidos, obteniendo el sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{R} & \varepsilon \mathbf{S}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \varepsilon \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\lambda}^r \end{bmatrix} \quad [1.17]$$

donde \mathbf{S} es una matriz diagonal de restricción de orden apropiado y ε es un número muy pequeño. Su recíproco será, pues, un número muy alto. Para mantener la exactitud de la segunda ecuación se añade al segundo miembro el valor $\varepsilon \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\lambda}^r$.

Como puede observarse, en este procedimiento la matriz \mathbf{S} hace las veces de la matriz $\boldsymbol{\alpha}$ del procedimiento de la penalización, por lo que las ventajas e inconvenientes que puede presentar frente a los demás serán similares a los correspondientes a ambos métodos, aunque el autor no entra en tales valoraciones.

CAPÍTULO 2

CONDICIONAMIENTO MATRICIAL

OBJETIVO:

Es objeto de este capítulo el estudio de los errores que pueden presentarse en todo proceso de matemática aplicada, cual es el caso que nos ocupa de análisis y cálculo de estructuras, así como las consecuencias que ello puede acarrear en los resultados obtenidos en dichos procesos, con enfoque especial al cálculo de estructuras de barras por el método matricial directo de la rigidez.

CONTENIDO:

En este capítulo se hace un análisis de los diferentes errores que conlleva cualquier cálculo con ordenador debido, por una parte, a las simplificaciones que se introducen por la modelización adoptada, por otra, por los redondeos introducidos por el calculista y, por otra, a los redondeos que, necesariamente, el ordenador debe de introducir durante el procesamiento del cálculo, toda vez que las cantidades con las que debe de operar han de ser números máquina. Después de un estudio de tipo generalizado de las consecuencias que pueden acarrear dichos redondeos introducidos por el calculista, redondeos perfectamente justificados dadas las características un tanto estimativas de la mayor parte de los datos de entrada, se estudian asimismo los errores debidos al mal condicionamiento de los sistemas de ecuaciones lineales, que son los algoritmos utilizados para el análisis y cálculo de las estructuras de nudos rígidos por el método anteriormente dicho. Por último se procede al cálculo de un sencillo pórtico plano que subraya de forma concreta todas las consideraciones anteriormente expuestas.

2.1.- “Exactitud” en la matemática aplicada.- Todo fenómeno físico que sea susceptible de análisis mediante un proceso matemático, cuyo diagrama puede resumirse en

DATOS ⇒ ALGORITMO ⇒ RESULTADOS

requiere de una serie de hipótesis simplificadoras, sin las cuales sería inabordable dicho análisis, de ahí que sea quimérico hablar de solución exacta o errónea en el cálculo de estructuras, pues no existe el patrón con el que compararla para calificarla de uno u otro modo, por lo tanto solamente podrá considerarse que dicha solución será aceptable o no de acuerdo con unos baremos preestablecidos y sancionados por la experiencia. Dichas hipótesis permiten convertir el hecho físico en un problema matemático, por lo que a partir de ese momento el tratamiento podría considerarse como un proceso de matemática pura y, por tanto, sin posibilidad de errores si se dispone de la herramienta adecuada para los cálculos numéricos que requiera dicho análisis. Pero, independientemente de que, por una parte, en contadas ocasiones la información de entrada que se suministra es exacta ya que, en general, esta información se obtiene mediante instrumentos de medida “físicos” y no “matemáticos” y, por otra, muchos de los datos de entrada son meramente estimativos –piénsese, p.e. en la estimación de sobrecargas de uso, viento, nieve, tensiones admisibles del terreno, etc.- una vez introducidos estos datos en el ordenador ocurre que, tanto su almacenamiento como el propio algoritmo de análisis introducen también errores en la salida de resultados, por lo que éstos provendrán, pues, de las tres fuentes, es decir, en forma esquemática:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Errores} \\ \text{de entrada} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{c} \text{Errores} \\ \text{de almacenamiento} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{c} \text{Errores} \\ \text{algorítmicos} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} \text{Errores} \\ \text{de salida} \end{array}}$$

Es por todo ello que las hipótesis a adoptar no tienen por qué ser necesariamente aquellas que más fielmente describan el modelo real, si ello supone una complejidad en los cálculos*, sino aquellas que, dentro de unos límites sancionados por la experiencia, permita obtener unos resultados aceptables de la forma más simple posible.** Por ejemplo, la hipótesis de inelongabilidad de las barras, no es, estrictamente, la que mejor describe el comportamiento del material, pero su adopción permite tales simplificaciones que es universalmente utilizada por el calculista en la mayoría de las estructuras. Por el contrario, la hipótesis de diafragma rígido no solamente permite una mayor simplificación del algoritmo de cálculo,

* “En estos tiempos en que sofisticadas herramientas de análisis permiten determinar con asombrosa exactitud el comportamiento estructural de cualquier modelo teórico, por complejo que sea, es más que nunca necesario recordar los límites que impone el ajuste del modelo a la realidad, dada la imposibilidad de parametrizar ésta más allá de un cierto límite, lo que hace que la pretendida exactitud sea ilusoria e, incluso, peligrosa”. Ricardo Aroca en el prólogo de la referencia (35).

** Recuérdense, p.e. la hipótesis de material perfectamente elástico, la de Bernoulli, etc. que, aún no describiendo la forma más cercana al comportamiento real, se suelen adoptar por la simplicidad con la que, de esta forma, pueden analizarse sin menoscabo de la validez en los resultados.

sino que, además, describe más acertadamente el comportamiento de dichos diafragmas en la mayoría de las estructuras. Si esta hipótesis de diafragma rígido no describiese el modelo real de forma tan cercana como pudiera describirlo la hipótesis contraria, habría que evaluar la conveniencia o no de su adopción en función de la simplicidad que podría significar, así como de la validez o no de los resultados obtenidos. Es decir, puede ser aconsejable la adopción de una determinada hipótesis en aras de minimizar el proceso de cálculo, siempre que, como se ha dicho anteriormente, los resultados estén dentro de unos valores aceptables sancionados por la práctica.

En los cálculos con ordenador, ya en los propios datos de entrada se producen errores de redondeo al tener que convertirlos del sistema decimal al sistema binario*, redondeo que dependerá de la precisión con que opere el dispositivo de cálculo. Pero de todos los errores que pueden acumularse en el proceso (desbordamiento, redondeo, cancelación, condicionamiento y estabilidad) prestaremos atención especial a los debidos al propio redondeo que el calculista utilice a la hora de introducir los datos y al condicionamiento, los cuales pueden ocasionar importantes errores en el cálculo matricial de estructuras. Por último es de advertir que incluso el sistema de unidades con el que se opere, así como el orden en las operaciones matemáticas a realizar durante el proceso de cálculo, puede influir de forma decisiva en los resultados a obtener, como podrá observarse en el ejemplo que al final de este capítulo se incluye, inconveniente este último de difícil solución, pues no está claro en cada caso particular ni cuál es este orden óptimo ni el criterio para su elección**.

2.2.- Errores debidos al redondeo.- En el Método Directo de la Rigidez se obtiene la matriz de rigidez de la estructura en estudio a partir del ensamblaje de las submatrices de las barras que la conforman. Los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante están formados por las sumas de las submatrices de las barras confluyentes en un mismo nudo, y los elementos a sumar pueden tener valores muy dispares dependiendo de las características mecánicas y geométricas de las barras, e incluso de las unidades utilizadas. Con relativa frecuencia ocurre que los elementos de dichas submatrices tienen órdenes de magnitud tan dispares que, de no utilizarse un mínimo número de cifras significativas, desaparece la cantidad menor (lo que también puede ocurrir si se suman dos cantidades muy próximas

* Una regla generalizada es la de suponer que los errores de redondeo son de importancia cuando se trata de sistemas de 100 o más ecuaciones” (Internet: 148.206.80.5/profesores/pas/métodos numéricos Notas/) En el espacio 3D esto ocurrirá hasta en pequeñas estructuras: n° de nudos = $100/6 = 17$.

** “A veces hay que prever estos problemas y cambiar el orden de las operaciones con vistas a obtener representaciones matemáticas equivalentes que eviten las cancelaciones” (51, apartado 1.4).

pero de signo contrario, produciéndose la cancelación). Veamos las consecuencias que pueden acarrear estas circunstancias.

Puesto que las submatrices a sumar serán siempre las correspondientes a las de la diagonal principal de las matrices de barra, esto es, las \mathbf{K}_{ii} y las \mathbf{K}_{jj} , y en ellas son idénticos los elementos de la diagonal principal, estudiemos los valores que pueden darse en dichos elementos suponiendo, por simplicidad, que nos encontramos en el espacio 2D.

Para una barra genérica cuyo eje forma un ángulo α con el eje global OX, los elementos de la diagonal principal de las submatrices del Método Tradicional de la Rigidez antes aludidas son

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{L^3} \sin^2 \alpha & * & * \\ * & \frac{EA}{L} \sin^2 \alpha + \frac{12EI}{L^3} \cos^2 \alpha & * \\ * & * & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad [2.1]$$

siendo E el Módulo de Young, A el área de la sección recta e I el momento de inercia respecto al eje normal al plano de la estructura, y en donde se han sustituido por sendos asteriscos los elementos de la submatriz que no intervendrán en la discusión que nos ocupa.

Considérese, pues, un nudo de una estructura en el espacio 2D en donde concurre un pilar, de longitud L_p y Área A_p , y una viga de longitud L_v y Área A_v , ambas del mismo material. Una vez efectuado el ensamblaje de la matriz de rigidez de dicha estructura, el primer y segundo elemento de la diagonal principal correspondiente a este nudo vendrán dados por el primer y segundo elemento de la submatriz resultante de la suma de [2.1] aplicada a cada una de las barras. Es decir, llamando E_{11} al primero y E_{22} al segundo, se tendrá

$$E_{11} = \frac{EA_v}{L_v} \cos^2 \alpha_v + \frac{12EI_v}{L_v^3} \sin^2 \alpha_v + \frac{EA_p}{L_p} \cos^2 \alpha_p + \frac{12EI_p}{L_p^3} \sin^2 \alpha_p \quad [2.2]$$

$$E_{22} = \frac{EA_v}{L_v} \sin^2 \alpha_v + \frac{12EI_v}{L_v^3} \cos^2 \alpha_v + \frac{EA_p}{L_p} \sin^2 \alpha_p + \frac{12EI_p}{L_p^3} \cos^2 \alpha_p \quad [2.3]$$

donde α_v y α_p son los ángulos que, respectivamente, forman la viga y el pilar con el eje horizontal de coordenadas globales. Debido a los particulares valores de estos ángulos, las anteriores quedarán reducidas a

$$E_{11} = E \left[\frac{A_v}{L_v} + \frac{12I_p}{L_p^3} \right] \quad [2.4]$$

$$E_{22} = E \left[\frac{12I_v}{L_v^3} + \frac{A_p}{L_p} \right] \quad [2.5]$$

Estudiemos los valores que pueden tener cada una de las expresiones anteriores en función de las características geométricas de las barras:

1°.- Barras de igual sección y longitud.- Suponiendo, por simplicidad de exposición, que ambas barras son iguales y teniendo en cuenta que el radio de inercia vale:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad [2.6]$$

despejando I

$$I = A i^2 \quad [2.7]$$

y sustituyendo en [2.4] y [2.5], se tendrá

$$E_{11} = E \left[\frac{A}{L} + \frac{12I}{L^3} \right] = E \left[\frac{A}{L} + \frac{12A i^2}{L^3} \right] = \frac{EA}{L} \left[1 + \frac{12i^2}{L^2} \right] \quad [2.8]$$

$$E_{22} = E \left[\frac{12I}{L^3} + \frac{A}{L} \right] = E \left[\frac{12A i^2}{L^3} + \frac{A}{L} \right] = \frac{EA}{L} \left[\frac{12i^2}{L^2} + 1 \right] \quad [2.9]$$

Los valores de i y L fácilmente pueden ser tales que, utilizando las unidades del Sistema Internacional (longitudes en metros) y la notación decimal en coma flotante normalizada, la expresión anterior pueda escribirse en la forma siguiente:

$$E_{11} = \frac{EA}{L} \left[1 + \frac{1.2 \times 10^{-1} (k_i \times 10^{-2})^2}{k_L \times 10^1} \right] = \frac{EA}{L} \left[1 + \frac{1.2 \times 10^{-1} k_i^2 \times 10^{-4}}{k_L \times 10^1} \right] \quad [2.10]$$

donde las mantisas o significandos k son números comprendidos entre 1 y 9, ambos inclusive. Si k_i es mayor que $\sqrt{10}$, lo que se cumple habitualmente, podrá escribirse

$$E_{11} = \frac{EA}{L} \left[1 + \frac{1.2k'_i \times 10^1 \times 10^{-4}}{k_L \times 10^1} \right] = \frac{EA}{L} \left[1 + \frac{1.2k'_i}{k_L} 10^{-4} \right] \quad [2.11]$$

y, puesto que el denominador k_L puede ser mayor que el numerador, quedará

$$E_{11} = \frac{EA}{L} [1 + k \times 10^{-1} \times 10^{-4}] = \frac{EA}{L} [1 + k \times 10^{-5}] \quad [2.12]$$

donde se ha hecho

$$\frac{1.2k'_i}{k_L} = k \times 10^{-1} \quad [2.13]$$

Teniendo en cuenta que el segundo sumando del corchete de [2.12] corresponde a la contribución que el pilar aporta al equilibrio del nudo, se infiere que, de no operar con un mínimo de 5 decimales, puede perderse dicha contribución y producirse, pues, un error en la solución del sistema de ecuaciones debido a dicha cancelación por redondeo.

Operando de idéntica forma para el elemento E_{22} , se obtendrá el mismo valor [2.12]:

$$E_{22} = \frac{EA}{L} [k \times 10^{-5} + 1] \quad [2.14]$$

y, entonces, se perdería la contribución de la viga en el equilibrio del nudo.

2°.- Barras de diferente longitud.- Si, como suele ser habitual en edificación, las vigas son de mayor longitud que los pilares, desarrollando [2.5] se tendrá

$$E_{22} = E \left[\frac{12I_v}{L_v^3} + \frac{A_p}{L_p} \right] = E \left[\frac{12Ai^2}{L_v^3} + \frac{A}{L_p} \right] = EA \left[\frac{12i^2}{L_v^3} + \frac{1}{L_p} \right] \quad [2.15]$$

y a partir del valor $L_v^3 > 100$, esto es, a partir de $L_v > 4.65$ m, lo que es bastante frecuente, se deberá escribir

$$E_{22} = EA \left[\frac{1.2 \times 10^{-1} (k_i \times 10^{-2})^2}{k_v \times 10^2} + \frac{1}{k_p} \right] = \left[\frac{1.2 (k'_i \times 10^1) \times 10^{-5}}{k_v \times 10^2} + \frac{1}{k_p} \right] \quad [2.16]$$

operando

$$E_{22} = \left[\frac{1.2 k'_i}{k_v} 10^{-6} + \frac{1}{k_p} \right] \quad [2.17]$$

lo que muestra que puede producirse un error por cancelación si no se opera con un mínimo de seis cifras decimales.

2.3.- Errores debidos al condicionamiento.- Dado un sistema de ecuaciones compatible y determinado cualquiera, parecería lógico presumir que una pequeña alteración introducida en los elementos de la matriz de coeficientes o en el vector de términos independientes, producirá una pequeña variación en los resultados, esto es, que la perturbación introducida y la alteración de los resultados sean del mismo orden de magnitud, suponiendo que se dispone de una herramienta de cálculo suficientemente precisa. Pero, en mayor o menor grado, no suele suceder así; por ello surge en el cálculo numérico el concepto de condicionamiento y, así, se entenderá que un sistema está mal condicionado o tiene un mal condicionamiento, si una pequeña variación en los datos devuelve una solución muy diferente respecto a la solución del sistema original no perturbado. Sin ánimo de exhaustividad, daremos a continuación una visión geométrica de este fenómeno ciñéndonos, por simplicidad de exposición, al espacio de dos dimensiones, pudiendo establecer un paralelismo con el espacio de n dimensiones en donde cada una de las ecuaciones del sistema representará el correspondiente hiperplano.

Sea un sistema de dos ecuaciones linealmente independientes en el espacio bidimensional, representativas de sendas rectas en las variables x e y , en el que se dan simultáneamente valores muy dispares en los coeficientes de las incógnitas y supongamos que su expresión es de la forma

$$\left. \begin{array}{l} \text{Recta R} \rightarrow Ax + ay = c \\ \text{Recta S} \rightarrow Bx + by = d \end{array} \right\} \quad [2.18]$$

en donde se han signados con mayúscula los coeficientes cuyo orden de magnitud se suponen muy superiores a los demás, como es frecuente que ocurra con los coeficientes de los sistemas de ecuaciones lineales correspondientes al método directo de la rigidez para el cál-

culo de estructuras de barras. Para representar cada una de dichas rectas en un sistema cartesiano de ejes XY, calculemos sus coordenadas en el origen :

- para la recta R:

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow y = \frac{c}{a} \\ y = 0 \rightarrow x = \frac{c}{A} \end{cases} \quad [2.19]$$

- para la recta S:

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow y = \frac{d}{b} \\ y = 0 \rightarrow x = \frac{d}{B} \end{cases} \quad [2.20]$$

por lo que ambas rectas cortarán al eje de abscisas en sendos puntos muy cercanos al origen, dado el orden de magnitud de los denominadores A y B respecto al de los numeradores; y, por los mismos motivos, tendrán una gran pendiente, ya que las derivadas de y respecto a x en ambas ecuaciones son de un orden muy superior, tal y como puede observarse en la figura 1.

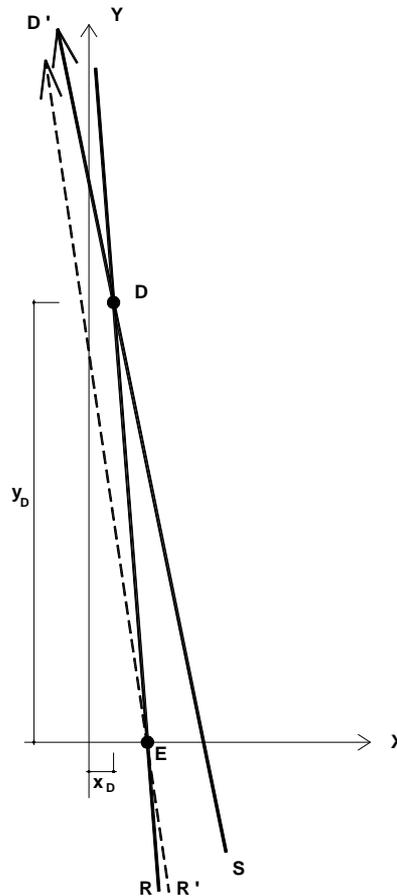


Figura 1

Es decir, los valores de las incógnitas en la dirección del eje X (x_D) estarán muy cerca del origen, mientras que los correspondientes a la Y (y_D) estarán muy lejanos debido, como se ha dicho, a la gran pendiente de estas rectas.*

Sea D el punto de intersección de las rectas, solución del sistema. Si se introduce una pequeña perturbación ε en el segundo coeficiente de la ecuación correspondiente a la recta R, ésta sufre un pequeño giro, adoptando la configuración R'. Como consecuencia de este giro la solución cambiará en mayor o menor grado dependiendo del punto respecto al cual gira dicha recta. Pero dicho giro se habrá de producir respecto al punto de intersección de las rectas R y R', esto es, en el punto solución del sistema formado por las ecuaciones de dichas rectas:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Recta R} \rightarrow Ax + ay = c \\ \text{Recta R}' \rightarrow Ax + (a + \varepsilon)y = c \end{array} \right\} \quad [2.21]$$

por lo que, aplicando la regla de Cramer, las coordenadas del punto de giro serán

$$x_E = \frac{\begin{vmatrix} c & a \\ c & a + \varepsilon \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & a \\ A & a + \varepsilon \end{vmatrix}} = \frac{c\varepsilon}{A\varepsilon} = \frac{c}{A} \quad [2.22]$$

$$y_E = \frac{\begin{vmatrix} A & c \\ A & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & a \\ A & a + \varepsilon \end{vmatrix}} = \frac{0}{A\varepsilon} = 0 \quad [2.23]$$

que es el mismo punto E de intersección de R con el eje OX, de acuerdo con [2.19]. La recta R sufre, pues, un pequeño giro con centro en la abscisa en el origen como consecuencia de la perturbación introducida, es decir, cerca de las soluciones de las incógnitas x, pero muy alejado de las soluciones de las incógnitas y. Como puede observarse en la figura referenciada, si el signo de ε es tal que el giro que se produce es dextrógiro, el punto D sufrirá un desplazamiento descendente a lo largo de la recta S y la solución del nuevo sistema podrá

* Esta circunstancia se da habitualmente en los sistemas correspondientes al cálculo de estructuras por el método matricial directo de la rigidez; por ejemplo, compárese el valor del desplazamiento horizontal u del nudo de un pórtico con continuidad de los pilares hasta cimentación con su desplazamiento vertical v , teniendo en cuenta que el pilar se supone axialmente deformable.

sufrir pequeñas variaciones en cada una de las incógnitas; pero, si por el contrario dicho giro es levógiro, el punto de intersección D' de R' con S , es decir, la solución del sistema perturbado, puede ser tal que, mientras que la abscisa puede cambiar incluso de signo, la ordenada sufre un aumento tan espectacular que puede acercarse al infinito según sean los valores de A y B respecto a los demás coeficientes y el valor de la perturbación introducida. Esto demuestra que, aunque el sistema sea mal condicionado e independientemente del grado de precisión con el que se efectúen los cálculos, no siempre se producirán grandes variaciones al perturbarlo aleatoriamente*, por lo que, en general, no será posible detectar un mal condicionamiento a partir de una serie de perturbaciones elegidas al azar**, por lo que se hace imprescindible fijar una metodología que muestre esta circunstancia de forma inequívoca, lo que se estudiará en el próximo epígrafe.

Como se hacía notar más arriba, todas las consideraciones anteriores referidas al espacio de dos dimensiones pueden extrapolarse para espacios n -dimensionales. Por ejemplo, para el espacio tridimensional, pueden existir sendos planos que contengan, respectivamente, a las rectas R y S , con lo que las perturbaciones que pueda sufrir el sistema afectarán a las soluciones de las incógnitas x e y de la forma anteriormente expuesta, aunque dichas perturbaciones podrán afectar o no a la tercera incógnita, dependiendo de la orientación del plano correspondiente a la tercera dimensión del sistema.

2.4.- Número de condición.- Mientras que no existe una forma sistemática para detectar un mal condicionamiento en un sistema de ecuaciones de tipo genérico, para los sistemas lineales, que son los que nos ocupan, existe, sin embargo, una forma concreta basada en las normas matriciales, que permite mostrar de manera precisa el grado de fiabilidad que puede ofrecer la solución de tales sistemas.

De forma análoga a la norma vectorial (piénsese, p.e, en el módulo de un vector) se define la norma matricial de una matriz \mathbf{M} , y se simboliza por $\|\mathbf{M}\|$, como una aplicación tal que a cada matriz le hace corresponder un número real positivo*** que cumple las siguientes propiedades:

* "...por consiguiente, el mal condicionamiento no implica necesariamente un error en la solución" (30, apartado 3.12.4).

** Según algunos autores, es la forma de descubrir un mal condicionamiento en un sistema de ecuaciones.

*** Por ejemplo, una norma de una matriz puede ser el mayor valor que se obtiene al sumar los valores absolutos de los elementos de cada una de sus filas. Esta es la norma 1, que se simboliza por $\|\bullet\|_1$. Si esta operación se hace para las columnas se obtiene otra norma, norma ∞ , con símbolo $\|\bullet\|_\infty$, donde el punto indica la designación de la matriz.

- a) $\|\mathbf{M}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{M} = \mathbf{0}$, es decir, si la norma de una matriz es cero, necesariamente dicha matriz es una matriz nula y viceversa: la norma de una matriz nula vale cero.
- b) $\|\lambda \mathbf{M}\| = |\lambda| \|\mathbf{M}\|$, es decir, la norma del producto de un escalar por una matriz es igual al producto del módulo del escalar por la norma de la matriz.
- c) $\|\mathbf{M} + \mathbf{N}\| \leq \|\mathbf{M}\| + \|\mathbf{N}\|$, esto es, la norma de una suma de matrices será siempre menor que la suma de las normas de cada una de ellas.
- d) $\|\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}\| \leq \|\mathbf{M}\| \cdot \|\mathbf{N}\|$, de forma análoga, la norma de un producto es menor que el producto de las normas de cada uno de los factores.

Veamos cómo, a partir de estas propiedades, puede obtenerse de forma inequívoca una expresión de las variaciones que sufre la solución de un sistema lineal en función de la perturbación que se introduzca en dicho sistema. Sea, pues, el sistema lineal

$$\mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad [2.24]$$

donde \mathbf{M} es una matriz cuadrada y no singular. Si se introduce una pequeña perturbación $\Delta \mathbf{b}$ en el vector de términos independientes, el vector incógnita \mathbf{x} habrá sufrido, asimismo, otra perturbación $\Delta \mathbf{x}$ por lo que se deberá escribir que

$$\mathbf{M}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b} \quad [2.25]$$

y operando

$$\mathbf{M} \mathbf{x} + \mathbf{M} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b} \quad [2.26]$$

pero, al tener en cuenta [2.24], quedará

$$\mathbf{M} \Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{b} \quad [2.27]$$

Por ser \mathbf{M} invertible, la solución del sistema anterior será

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1} \Delta \mathbf{b} \quad [2.28]$$

que representa la variación de la solución -respecto a la solución primitiva \mathbf{x} - en función de la variación introducida en \mathbf{b} . Teniendo en cuenta la propiedad d) de las normas matriciales anteriormente definidas, de la anterior puede escribirse, normalizando

$$\|\Delta \mathbf{x}\| = \|\mathbf{M}^{-1} \Delta \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{M}^{-1}\| \cdot \|\Delta \mathbf{b}\| \quad [2.29]$$

esto es

$$\|\Delta \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{M}^{-1}\| \cdot \|\Delta \mathbf{b}\| \quad [2.30]$$

y de [2.24]

$$\|\mathbf{M} \mathbf{x}\| = \|\mathbf{b}\| \quad [2.31]$$

pero, nuevamente, de la propiedad d)

$$\|\mathbf{M} \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{M}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \quad [2.32]$$

por lo tanto

$$\|\mathbf{M}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{b}\| \quad [2.33]$$

e invirtiendo ambos miembros

$$\frac{1}{\|\mathbf{M}\| \cdot \|\mathbf{x}\|} \leq \frac{1}{\|\mathbf{b}\|} \quad [2.34]$$

Finalmente, multiplicando m.a.m. [2.30] y [2.34]

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{M}\| \cdot \|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|\mathbf{M}^{-1}\| \cdot \|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \quad [2.35]$$

operando se obtiene

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{M}\| \cdot \|\mathbf{M}^{-1}\| \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \quad [2.36]$$

y llamando

$$\varepsilon_x = \frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \quad \text{Cond}(\mathbf{M}) = \|\mathbf{M}\| \cdot \|\mathbf{M}^{-1}\| \quad \varepsilon_b = \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \quad [2.37]$$

puede escribirse, definitivamente

$$\varepsilon_x \leq \text{Cond}(\mathbf{M}) \varepsilon_b \quad [2.38]$$

expresión que describe la variación relativa que sufre la solución perturbada en función de la perturbación relativa introducida en el vector \mathbf{b} , es decir: la alteración relativa ε_x que sufre la solución se mayor a la perturbación relativa ε_b mediante el factor $\text{Cond}(\mathbf{M})$, al cual se le llama Número de Condición de la matriz \mathbf{M} . Es claro, entonces, que la alteración que pueden sufrir las soluciones de un sistema de ecuaciones ante una pequeña

variación de los términos independientes será mayor cuanto mayor sea el número de condición asociado a la matriz de coeficientes.

De forma análoga, supongamos ahora que la perturbación se introduce en la matriz de coeficientes \mathbf{M} . Se habrá de escribir, entonces

$$(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} \quad [2.39]$$

operando

$$\mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{M}\Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{M}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} \quad [2.40]$$

pero teniendo en cuenta nuevamente [2.24], quedará

$$\mathbf{M}\Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{M}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad [2.41]$$

de donde

$$\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{M}^{-1} \Delta\mathbf{M}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \quad [2.42]$$

Normalizando ambos miembros

$$\|\Delta\mathbf{x}\| = \|\mathbf{M}^{-1} \Delta\mathbf{M}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{M}^{-1}\| \cdot \|\Delta\mathbf{M}\| \cdot \|\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\| \quad [2.43]$$

de donde

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{M}^{-1}\| \cdot \|\Delta\mathbf{M}\| \quad [2.44]$$

y multiplicando y dividiendo el segundo miembro por $\|\mathbf{M}\|$ se tendrá, finalmente

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{M}\| \|\mathbf{M}^{-1}\| \frac{\|\Delta\mathbf{M}\|}{\|\mathbf{M}\|} \quad [2.45]$$

expresión similar a la [2.36] que no es más que otra medida de la perturbación que sufre la solución del sistema, asimismo como una mayoración de la perturbación que sufren los elementos de la matriz de coeficientes, mayoración que efectúa el mismo número de condición $\text{Cond}(\mathbf{M})$, antes referido y expresado en [2.37].

Con objeto de concretar numéricamente las consideraciones expuestas en los apartados anteriores, procederemos a continuación al cálculo de un pequeño pórtico plano de nudos rígidos.

2.5.- Pórtico plano de nudos rígidos.* Sea el pórtico de la figura 1, cuyos datos:

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Barra a: Área} = 150 \text{ cm}^2, \text{ Inercia} = 1 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$$

$$\text{Barra b: Área} = 200 \text{ cm}^2, \text{ Inercia} = 1 \cdot 2 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$$

$$\text{Barra c: Área} = 300 \text{ cm}^2, \text{ Inercia} = 1 \cdot 5 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$$

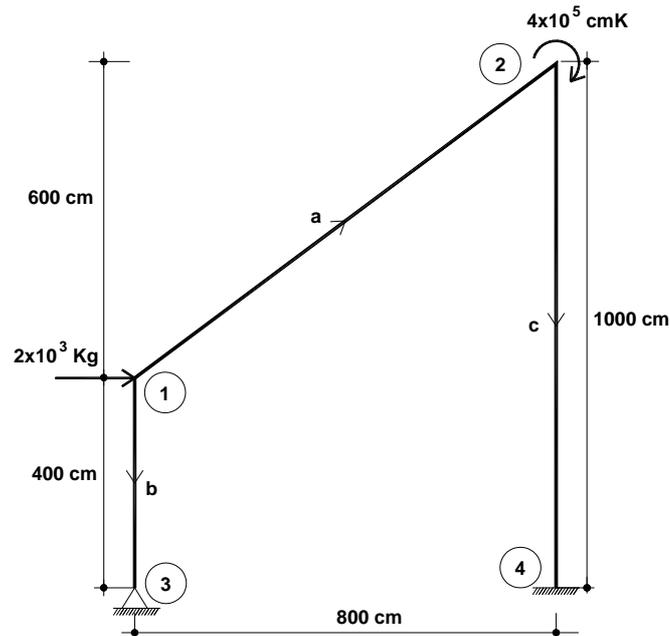


Figura 2

2.5.1.- Influencia de las unidades en el condicionamiento de la matriz del sistema. Calculemos la matriz de coeficientes utilizando las unidades indicadas en los datos:

-Matrices de rigidez de las barras en coordenadas globales.- Introduciendo los valores de los datos en las unidades especificadas anteriormente, se tendrá para cada barra de la estructura:

* Tomado de la referencia nº 25 de la Bibliografía: **Manuel Vázquez:** Cálculo Matricial de Estructuras, C.O.I.T. de O. P.-Madrid, 1992.

Barra a:

$$\mathbf{K}^a = 2'1 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 0.00225 & 0 & 0.450 & -0.00225 & 0 & 0.450 \\ 0 & 0.500 & 0 & 0 & -0.500 & 0 \\ 0.450 & 0 & 120 & -0.450 & 0 & 60 \\ -0.00225 & 0 & -0.450 & 0.00225 & 0 & -0.450 \\ 0 & -0.500 & 0 & 0 & 0.500 & 0 \\ 0.450 & 0 & 60 & -0.450 & 0 & 120 \end{bmatrix} \quad [2.46]$$

Barra b:

$$\mathbf{K}^b = 2'1 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 0.09604 & 0.07194 & -0.036 & -0.09604 & -0.07194 & -0.036 \\ 0.07194 & 0.05407 & 0.048 & -0.07194 & -0.05407 & 0.048 \\ -0.036 & 0.048 & 40 & 0.036 & -0.0480 & 20 \\ -0.09604 & -0.07194 & 0.036 & 0.09604 & 0.07194 & 0.036 \\ -0.07194 & -0.05407 & -0.048 & 0.07194 & 0.05407 & -0.048 \\ -0.036 & 0.048 & 20 & 0.036 & -0.048 & 40 \end{bmatrix} \quad [2.47]$$

Barra c:

$$\mathbf{K}^c = 2'1 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 0.00018 & 0 & 0.090 & -0.00018 & 0 & 0.090 \\ 0 & 0.300 & 0 & 0 & -0.300 & 0 \\ 0.090 & 0 & 60 & -0.090 & 0 & 30 \\ -0.00018 & 0 & -0.090 & 0.00018 & 0 & -0.090 \\ 0 & -0.300 & 0 & 0 & 0.300 & 0 \\ 0.090 & 0 & 30 & -0.090 & 0 & 60 \end{bmatrix} \quad [2.48]$$

-Matriz de Rigidez Reducida de la estructura en Kilogramos y centímetros.- Una vez efectuado el ensamblaje y eliminadas las filas/columnas correspondientes a los corrimientos coaccionados, el sistema de ecuaciones correspondientes con las unidades en kilogramos y centímetros, queda en la forma

$$21 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 0.09829 & 0.07194 & 0.414 & -0.09604 & -0.07194 & -0.036 & 0.450 \\ 0.07194 & 0.55407 & 0.048 & -0.07194 & -0.05407 & 0.048 & 0 \\ 0.414 & 0.048 & 160 & 0.036 & -0.048 & 20 & 60 \\ \hline -0.09604 & -0.07194 & 0.036 & 0.09622 & 0.07194 & 0.126 & 0 \\ -0.07194 & -0.05407 & -0.048 & 0.07194 & 0.35407 & -0.048 & 0 \\ -0.036 & 0.048 & 20 & 0.126 & -0.048 & 100 & 0 \\ \hline 0.450 & 0 & 60 & 0 & 0 & 0 & 120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ v_B \\ \gamma_B \\ \hline u_C \\ v_C \\ \gamma_C \\ \hline \gamma_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^3 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ -4 \cdot 10^5 \\ \hline 0 \end{bmatrix} \quad [2.49]$$

donde u , v y γ son las componentes de corrimiento respecto a los ejes OX, OY y OZ, respectivamente y cuyo número de condición basado en la Norma ^{*} 2, es de 1.28×10^6 .

-Matriz de Rigidez Reducida de la estructura en Kilonewton y metros.- Si se repiten los cálculos anteriores utilizando las unidades del Sistema Internacional, se obtiene la matriz

$$21 \cdot 10^8 \begin{bmatrix} 0.0009829 & 0.0007194 & 0.000414 & -0.0009604 & -0.0007194 & -0.000036 & 0.000450 \\ 0.0007194 & 0.0055407 & 0.000048 & -0.0007194 & -0.05407 & 0.000048 & 0 \\ 0.000414 & 0.000048 & 0.00016 & 0.000036 & -0.000048 & 0.00002 & 0.00006 \\ \hline -0.0009604 & -0.0007194 & 0.000036 & 0.0009622 & 0.0007194 & 0.000126 & 0 \\ -0.0007194 & -0.0005407 & -0.000048 & 0.0007194 & 0.0035407 & -0.000048 & 0 \\ -0.000036 & 0.000048 & 0.00002 & 0.000126 & -0.000048 & 0.0001 & 0 \\ \hline 0.000450 & 0 & 0.00006 & 0 & 0 & 0 & 0.00012 \end{bmatrix} \quad [2.50]$$

cuyo número de condición correspondiente a la misma Norma 2 vale 3999.46 que, como puede observarse, supone una importante mejora respecto al obtenido anteriormente.

2.5.2.- Influencia del orden de operaciones en los errores de la solución.- Tal y como se comentaba en el primer epígrafe de este capítulo, no sería impropio adoptar un pequeño número de cifras decimales significativas^{**}, dado que a los datos no se les exige en

^{*} El número de condición basado en la Norma 2 se obtiene dividiendo el mayor autovalor de la matriz por el menor, ambos en valores absolutos (51, apartado 3.2).

^{**} Este número de cifras debe ser como mínimo el necesario para que no se cancele ningún elemento de la matriz.

absoluto una elevada precisión^{*}; de ahí que sea coherente proceder a un determinado redondeo en los elementos de la matriz de coeficientes esperando que las desviaciones que puedan aparecer en los resultados como consecuencia de tales redondeos sean perfectamente asumibles. A la vista de las matrices dadas por [2.49] y [2.50] se puede observar que, si se procede a un determinado redondeo antes de efectuar los productos de los elementos de las matrices por el factor común (E)^{**}, en ésta última matriz será imprescindible operar con más cifras decimales que en la primera para evitar que se pierda la influencia de algunos elementos en la correspondiente ecuación de equilibrio. Concretamente, es necesario un mínimo de seis cifras decimales, mientras que en la primera bastaría con dos. Procedamos a resolver el sistema utilizando, pues, la primera de las matrices, menos restrictiva que la segunda desde el punto de vista de dicho redondeo.

-Resolución con doble precisión.- La resolución del sistema [2.49] utilizando doble precisión devuelve los siguientes resultados:

Nudo	u (cm)	v (cm)	γ (rad)
1	3.3020310532178065	0.00097424391653833	-0.005123448108904483
2	3.3047633887792327	-0.00162373986089737	-0.003856590005897600
3	-0.0098208923951145	-	-

Cuadro 2.1

-Resolución con cinco cifras decimales.- Si se redondea a 5 decimales, lo que no es más que introducir en la matriz de coeficientes una perturbación inferior a la cienmilésima, se obtiene:

Nudo	u (cm)	v (cm)	γ (rad)
1	3.30203	0.00100	-0.00512
2	3.30476	-0.00162	-0.00386
3	-0.00982	-	-

Cuadro 2.2

que, como puede observarse, son prácticamente los mismos valores anteriores.

^{*} “Es preciso señalar que la mayoría de los errores que aparecen en la ejecución de un programa se origina en la entrada de datos” (47, apartado 1.1).

^{**} Lo cual no tiene por qué considerarse matemáticamente improcedente.

-Resolución con cuatro cifras decimales.- Si se repiten los cálculos efectuando un redondeo al cuarto decimal dentro de la matriz, lo que supone introducir una perturbación inferior a la diezmilésima, se tendrá el sistema:

$$21 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 0.0983 & 0.07194 & 0.414 & -0.0960 & -0.0719 & -0.036 & 0.450 \\ 0.0719 & 0.5541 & 0.048 & -0.0719 & -0.0541 & 0.048 & 0 \\ 0.414 & 0.048 & 160 & 0.036 & -0.048 & 20 & 60 \\ \hline -0.0960 & -0.0719 & 0.036 & 0.0962 & 0.0719 & 0.126 & 0 \\ -0.0719 & -0.0541 & -0.048 & 0.0719 & 0.3541 & -0.048 & 0 \\ -0.036 & 0.048 & 20 & 0.126 & -0.048 & 100 & 0 \\ \hline 0.450 & 0 & 60 & 0 & 0 & 0 & 120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ v_B \\ \gamma_B \\ \hline u_C \\ v_C \\ \gamma_C \\ \hline \gamma_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^3 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ -4 \cdot 10^5 \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

[2.51]

que proporciona los siguientes resultados (se marcan con negrillas los valores más dispares respecto a la solución primera):

Nudo	<i>u</i> (cm)	<i>v</i> (cm)	<i>γ</i> (rad)
1	2.7114	0.0008	-0.0042
2	2.7135	-0.0014	-0.0035
3	-0.0081	-	-

Cuadro 2.3

en los que ya se observan apreciables diferencias respecto a los anteriores.

-Resolución con tres cifras decimales.- Si se repiten los cálculos con 3 decimales, esto es, con una perturbación inferior a la milésima, se tiene:

$$21 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 0.098 & 0.072 & 0.414 & -0.096 & -0.072 & -0.036 & 0.450 \\ 0.072 & 0.554 & 0.048 & -0.072 & -0.054 & 0.048 & 0 \\ 0.414 & 0.048 & 160 & 0.036 & -0.048 & 20 & 60 \\ \hline -0.096 & -0.072 & 0.036 & 0.096 & 0.072 & 0.126 & 0 \\ -0.072 & -0.054 & -0.048 & 0.072 & 0.354 & -0.048 & 0 \\ -0.036 & 0.048 & 20 & 0.126 & -0.048 & 100 & 0 \\ \hline 0.450 & 0 & 60 & 0 & 0 & 0 & 120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ v_B \\ \gamma_B \\ \hline u_C \\ v_C \\ \gamma_C \\ \hline \gamma_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^3 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ -4 \cdot 10^5 \\ \hline 0 \end{bmatrix} \quad [2.52]$$

y resolviendo el sistema se tienen los siguientes valores de los corrimientos:

Nudo	u (cm)	v (cm)	γ (rad)
1	-9.744	-0.003	0.016
2	-9.762	0.006	0.004
3	-0.0028	-	-

Cuadro 2.4

valores totalmente inaceptables (obsérvese el cambio de signo en todos los valores, excepto en el último).

-Resolución con dos cifras decimales.- Por último, si se introduce una perturbación por redondeo a dos cifras decimales, es decir, inferior a la centésima, el sistema queda con los valores

$$21 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 0.10 & 0.07 & 0.41 & -0.10 & -0.07 & -0.04 & 0.45 \\ 0.07 & 0.55 & 0.05 & -0.07 & -0.05 & 0.05 & 0 \\ 0.41 & 0.05 & 160 & 0.04 & -0.05 & 20 & 60 \\ \hline -0.10 & -0.07 & 0.04 & 0.10 & 0.07 & 0.13 & 0 \\ -0.07 & -0.05 & -0.05 & 0.07 & 0.35 & -0.05 & 0 \\ -0.04 & 0.05 & 20 & 0.13 & -0.05 & 100 & 0 \\ \hline 0.45 & 0 & 60 & 0 & 0 & 0 & 120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ v_B \\ \gamma_B \\ \hline u_C \\ v_C \\ \gamma_C \\ \hline \gamma_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^3 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ -4 \cdot 10^5 \\ \hline 0 \end{bmatrix} \quad [2.53]$$

sistema cuya solución es la siguiente:

Nudo	u (cm)	v (cm)	γ (rad)
1	-0.50	-0.00	0.00
2	-0.50	0.00	0.00
3	-0.00	-	-

Cuadro 2.5

que no requiere comentario alguno.

-Cálculo de las solicitaciones.- Veamos cómo influyen los resultados anteriores en los valores de las solicitaciones de extremo (se remarcan con negritas los valores con error mayor al 20% respecto a la solución dada por las primeras columnas)

- Barra 1-2:

Solicitaciones (T y Tm)	Doble precisión	5 decimales	4 decimales	3 decimales	2 decimales
Axil extremo i	- 0.19753	- 0.19278	- 0.1134	2.835	0.00
Cortante extremo i	- 1.13055	- 1.13054	- 0.9694	2.515	0.00
Momento extremo i	- 5.91878	- 5.91730	- 4.9942	15.097	0.00
Axil extremo j	0.19753	0.19278	0.1134	- 2.835	0.00
Cortante extremo j	1.13055	1.13054	0.9694	- 2.515	0.00
Momento extremo j	- 5.38670	- 5.38810	- 4.7002	10.06	0.00

Cuadro 2.6

- Barra 1-3:

Solicitaciones (T y Tm)	Doble precisión	5 decimales	4 decimales	3 decimales	2 decimales
Axil extremo i	- 1.02296	- 1.05000	- 0.8400	3.150	0.00
Cortante extremo i	1.47969	1.48379	1.1879	- 4.460	- 2.36
Momento extremo i	5.91878	5.92858	4.8327	- 16.481	- 4.73
Axil extremo j	1.02296	1.0500	- 0.8400	- 3.150	0.00
Cortante extremo j	- 1.47969	- 1.48379	1.1879	4.460	2.36
Momento extremo j	0.00	0.00658	- 0.08127	- 1.361	0.00

Cuadro 2.7

- Barra 2-4:

Solicitaciones (T y Tm)	Doble precisión	5 decimales	4 decimales	3 decimales	2 decimales
Axil extremo i	1.02296	1.02060	0.8820	- 3.780	0.00
Cortante extremo i	0.520305	0.51966	0.3642	- 2.934	- 0.19
Momento extremo i	1.38670	1.38240	0.7185	- 13.410	- 0.95
Axil extremo j	- 1.022960	- 1.02060	- 0.8820	3.780	0.00
Cortante extremo j	- 0.520305	- 0.51966	- 0.3642	2.934	0.19
Momento extremo j	3.81635	3.81420	2.9335	- 15.930	- 0.95

Cuadro 2.8

Obsérvese que, en todos los casos e independientemente de la precisión utilizada, persiste el equilibrio en la barra aislada, lo que podría dar lugar a extraer conclusiones erróneas.

Es de advertir, por último, que los errores debidos al redondeo son independientes de los debidos al mal condicionamiento, aunque se influyen mutuamente, pues un redondeo no

es más que una pequeña perturbación de los datos y el error que puede acarrear es función directa del número de condición, como se demostró en el epígrafe 2.4. Sin embargo, no porque la matriz esté mejor condicionada el error de redondeo será necesariamente menor, pues como se ve en este ejemplo, donde el número de condición de la matriz correspondiente a las unidades en centímetros es, como se dijo, de 1.28×10^6 y los errores importantes aparecen a partir del redondeo del cuarto decimal, en la matriz que se obtiene tomando unidades de metros dicho número de condición vale solamente 3999.46 y, como se ha comentado, el error por cancelación utilizando esta matriz puede producirse a partir del redondeo al quinto decimal.

2.5.3.- Influencia de las ecuaciones de restricción cinemática en el condicionamiento.- De lo expuesto en el capítulo anterior se ha de deducir que la herramienta más idónea, elegante y directa para resolver sistemas de ecuaciones sometidos a condiciones de restricción es el Método de los Multiplicadores de Lagrange. Valiéndonos de él se puede proceder al cálculo de la anterior estructura de forma tal que no sea necesaria la manipulación introducida en las filas/columnas correspondientes a los corrimientos impedidos por los aparatos de apoyo para obtener la matriz reducida dada por [2.49] o [2.50], de dimensiones 7×7 . Por simplicidad de exposición, ensemblemos la matriz de rigidez incluyendo exclusivamente los nudos 1, 2 y 3, puesto que el nudo número 4 tiene los tres corrimientos impedidos y, por tanto, se sabe que son nulos. Dicho ensamblaje nos determina una matriz cuadrada de dimensión 9, esto es, tres componentes de corrimiento por nudo. Para evitar, como decíamos, la manipulación que supone la eliminación de las filas/columnas asociadas al equilibrio y corrimientos en las direcciones horizontales y verticales del apoyo fijo del nudo 3, al sistema obtenido con dicho ensamblaje es necesario añadirle las ecuaciones correspondientes a las restricciones cinemáticas de desplazamiento que dicho apoyo introduce en la estructura. Dichas ecuaciones serán, pues las dos siguientes

$$\left. \begin{array}{l} u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{array} \right\} \quad [2.54]$$

donde u_3 y v_3 son, respectivamente, las componentes de desplazamiento horizontal y vertical del nudo 3. La matriz de coeficientes del Sistema de Lagrange correspondiente al ejemplo en estudio quedará, pues, para las unidades en Kilogramos y centímetros en la forma

$$\begin{pmatrix} 206416. & 151079. & 869400. & -201691. & -151079. & -75600. & -4725. & 0 & 945000. & 0 & 0 \\ 151079. & 1.16356 \times 10^6 & 100800. & -151079. & -113561. & 100800. & 0 & -1.05 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 869400. & 100800. & 3.36 \times 10^8 & 75600. & -100800. & 4.2 \times 10^7 & -945000. & 0 & 1.26 \times 10^8 & 0 & 0 \\ -201691. & -151079. & 75600. & 202069. & 151079. & 264600. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -151079. & -113561. & -100800. & 151079. & 743561. & -100800. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -75600. & 100800. & 4.2 \times 10^7 & 264600. & -100800. & 2.1 \times 10^8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4725. & 0 & -945000. & 0 & 0 & 0 & 4725. & 0 & -945000. & 1 & 0 \\ 0 & -1.05 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.05 \times 10^6 & 0 & 0 & 1 \\ 945000. & 0 & 1.26 \times 10^8 & 0 & 0 & 0 & -945000. & 0 & 2.52 \times 10^8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[2.55]

a la que le corresponde un número de condición de 8.22×10^{10} . Para las unidades del sistema internacional la matriz queda en la forma

$$\begin{pmatrix} 206416. & 151079. & 8694. & -201691. & -151079. & -756. & -4725. & 0 & 9450. & 0 & 0 \\ 151079. & 1.16356 \times 10^6 & 1008. & -151079. & -113561. & 1008. & 0 & -1.05 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 8694. & 1008. & 33600. & 756. & -1008. & 4200. & -9450. & 0 & 12600. & 0 & 0 \\ -201691. & -151079. & 756. & 202069. & 151079. & 2646. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -151079. & -113561. & -1008. & 151079. & 743561. & -1008. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -756. & 1008. & 4200. & 2646. & -1008. & 21000. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4725. & 0 & -9450. & 0 & 0 & 0 & 4725. & 0 & -9450. & 1 & 0 \\ 0 & -1.05 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.05 \times 10^6 & 0 & 0 & 1 \\ 9450. & 0 & 12600. & 0 & 0 & 0 & -9450. & 0 & 25200. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[2.56]

que tiene un número de condición de 4.15×10^8 . Obsérvese el espectacular aumento del número de condición en ambos casos respecto a los sistemas [2.49] y [2.50] como consecuencia de las ecuaciones de restricción añadidas al sistema original. De estos resultados se desprende que, cualesquiera que fueren las unidades utilizadas, el Método de los Multiplicadores de Lagrange introduce un deterioro tal en el condicionamiento del sistema resultante en el Método Tradicional que su utilización para el cálculo de esta estructura puede ser poco menos que prohibitiva.

CAPÍTULO 3

MATRICES DE RIGIDEZ Y DE CONVERSION EN EL METODO MATRICIAL CLASICO

OBJETIVO:

Para proceder al ensamblaje de las submatrices de barra con objeto de obtener la matriz del sistema de ecuaciones lineales cuya resolución nos devolverá las incógnitas de corrimiento de los nudos de la estructura en estudio, es necesario que tales submatrices vengan referidas al sistema global. Para ello pueden introducirse en la matriz de rigidez de cada elemento, referida a sus ejes locales, sus características geométrico-resistentes y después, mediante la pertinente matriz de rotación, determinar la correspondiente en ejes globales, proceso que ha de repetirse para cada una de las barras de la estructura.

Con objeto de evitar tan reiterativo proceso, en este Capítulo se pretende determinar la matriz de rigidez del elemento genérico referida a los ejes globales para introducir en ésta dichos valores mecánico-resistentes de cada una de las barras que conforman la estructura.

También se desarrolla una Matriz de Conversión que, postmultiplicada por el vector de corrimientos de una barra, nos proporciona en forma directa las solicitaciones en ejes locales.

CONTENIDO:

Partiendo de la Matriz de Rigidez en ejes locales para una barra de orientación genérica en el espacio de tres dimensiones y de la matriz de rotación se determina, mediante los pertinente productos matriciales, la correspondiente Matriz de Rigidez referida a los ejes globales de una barra genérica y, a partir de ésta, se establecen los casos particulares que suelen presentarse habitualmente en el cálculo de estructuras, cuales son barras horizontales y verticales.

De la misma forma se determina la Matriz de Rigidez genérica para barras pertenecientes a un emparrillado y para aquéllas que forman una estructura coplanaria, pues ambos no son más que casos particulares de la matriz genérica inicialmente determinada.

Así mismo, se repite el proceso para las correspondientes Matrices de Conversión particularizadas para los diferentes casos.

3.1 Matriz de Rigidez en coordenadas globales de una barra espacial con dirección arbitraria de sus ejes locales.

Para proceder al ensamblaje de la matriz de rigidez de una estructura de barras es necesario que, previamente, las matrices de rigidez de cada una de ellas estén referidas al sistema global, por lo que, si partimos de la matriz de barra en coordenadas locales, será necesario, luego de introducir los datos en esta matriz y en la de rotación de coordenadas, calcular la transpuesta de ésta y efectuar cuatro triples productos matriciales por cada una de las barras que conforman la estructura para que vengan referidas a dicho sistema general. Con objeto de evitar este reiterativo proceso, deduciremos la expresión de la Matriz de Rigidez de una barra genérica espacial referida al Sistema General de Coordenadas XYZ, la cual nos servirá para particularizar las matrices de cada barra en dicho sistema y proceder al correspondiente ensamblaje.

Sean \mathbf{s}'_i y \mathbf{s}'_j los vectores columna que describen las componentes de sollicitación en los extremos i y j, respectivamente, referidas a los ejes locales X'Y'Z' de coordenadas, y \mathbf{c}'_i y \mathbf{c}'_j los vectores que describen las componentes de los corrimientos homólogos, así mismos referidas al sistema local, de forma que

$$\mathbf{s}'_i = \begin{bmatrix} X'_i \\ Y'_i \\ Z'_i \\ \frac{M'_{xi}}{M'_z} \\ M'_{yi} \\ M'_{zi} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}'_j = \begin{bmatrix} X'_j \\ Y'_j \\ Z'_j \\ \frac{M'_{xj}}{M'_z} \\ M'_{yj} \\ M'_{zj} \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}'_i = \begin{bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ w'_i \\ \frac{\alpha'_i}{\alpha'_j} \\ \beta'_i \\ \gamma'_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}'_j = \begin{bmatrix} u'_j \\ v'_j \\ w'_j \\ \frac{w'_j}{\alpha'_j} \\ \beta'_j \\ \gamma'_j \end{bmatrix} \quad [3.1]$$

donde X', Y', Z' indican componentes de fuerza en los ejes respectivos, M'_x , M'_y , M'_z indican componentes de momentos respecto a dichos ejes, mientras que u' , v' , w' indican componentes de desplazamiento en las direcciones respectivas y α' , β' y γ' son las componentes de giro respecto a los ejes X', Y' y Z', respectivamente.

Entre estos vectores se cumple que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}'_i \\ \mathbf{s}'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{ii} & \mathbf{K}'_{ij} \\ \mathbf{K}'_{ji} & \mathbf{K}'_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}'_i \\ \mathbf{c}'_j \end{bmatrix} \quad [3.2]$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}'_{ii} &= \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{z'}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{z'}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_{y'}}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_{y'}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{x'}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_{y'}}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{y'}}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_{z'}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{z'}}{L} \end{bmatrix} & \mathbf{K}'_{ij} &= \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{z'}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{z'}}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_{y'}}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_{y'}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_{x'}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_{y'}}{L^2} & 0 & \frac{2EI_{y'}}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_{z'}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{z'}}{L} \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}'_{ji} &= \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{z'}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{z'}}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_{y'}}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{y'}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_{x'}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_{y'}}{L^2} & 0 & \frac{2EI_{y'}}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_{z'}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{z'}}{L} \end{bmatrix} & \mathbf{K}'_{jj} &= \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{z'}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{z'}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_{y'}}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{y'}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{x'}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_{y'}}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{y'}}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_{z'}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{z'}}{L} \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

son las cuatro submatrices que conforman la matriz de rigidez \mathbf{K}' de la barra en el sistema particular de coordenadas en las cuales quedan descritas sus propiedades resistentes (rigidez a la elongación EA , rigideces a la flexión $EI_{y'}$ y $EI_{z'}$, rigidez a la torsión $GI_{x'}$) y su longitud, siendo:

A el área de la sección recta de la barra.

L la longitud de la barra.

E el Módulo de elasticidad longitudinal.

G " " transversal.

$I_{x'}$ el momento polar de inercia de la sección recta.

$I_{y'}$ " de inercia de la sección recta respecto al eje local Y' , (principal de inercia).

$I_{z'}$ el momento de inercia de la sección recta respecto al eje local Z' , (principal de inercia).

Llamando XX' al ángulo que forman los ejes X y X' , XY' el que forman los ejes X e Y' etc., la matriz de rotación \mathbf{R} y su transpuesta \mathbf{R}^T vienen dadas por las expresiones

$$\mathbf{R} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{x}^T & \mathbf{y}^T & \mathbf{z}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{x}^T & \mathbf{y}^T & \mathbf{z}^T \end{array} \right] \quad \text{y} \quad \mathbf{R}^T = \left[\begin{array}{c|ccc} \mathbf{x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{z} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad [3.4]$$

donde \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} son los vectores fila que describen, respectivamente, las componentes de los cosenos directores de los tres ejes locales, es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [\cos XX' \quad \cos YX' \quad \cos ZX'] \\ \mathbf{y} &= [\cos XY' \quad \cos YY' \quad \cos ZY'] \\ \mathbf{z} &= [\cos XZ' \quad \cos YZ' \quad \cos ZZ'] \end{aligned} \quad [3.5]$$

mientras que los ceros indican matrices nulas de dimensiones conformables.

Las correspondientes submatrices \mathbf{K}_{ij} referidas al sistema general se obtienen mediante los triples productos matriciales siguientes

$$\mathbf{K}_{ii} = \mathbf{R}\mathbf{K}'_{ii}\mathbf{R}^T \quad \mathbf{K}_{ij} = \mathbf{R}\mathbf{K}'_{ij}\mathbf{R}^T \quad \mathbf{K}_{ji} = \mathbf{R}\mathbf{K}'_{ji}\mathbf{R}^T \quad \mathbf{K}_{jj} = \mathbf{R}\mathbf{K}'_{jj}\mathbf{R}^T \quad [3.6]$$

Operando en las anteriores, se tendrá:

$$\mathbf{K}_{ii} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L}\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \frac{12EI_{z'}}{L^3}\mathbf{y}^T\mathbf{y} + \frac{12EI_{y'}}{L^3}\mathbf{z}^T\mathbf{z} & & & \frac{6EI_{z'}}{L^2}\mathbf{y}^T\mathbf{z} - \frac{6EI_{y'}}{L^2}\mathbf{z}^T\mathbf{y} & & \\ & & & & & \\ & \frac{6EI_{z'}}{L^2}\mathbf{z}^T\mathbf{y} - \frac{6EI_{y'}}{L^2}\mathbf{y}^T\mathbf{z} & & \frac{GI_{x'}}{L}\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \frac{4EI_{z'}}{L}\mathbf{z}^T\mathbf{z} + \frac{4EI_{y'}}{L}\mathbf{y}^T\mathbf{y} & & \end{array} \right] \quad [3.7]$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{EA}{L}\mathbf{x}^T\mathbf{x} - \frac{12EI_{z'}}{L^3}\mathbf{y}^T\mathbf{y} - \frac{12EI_{y'}}{L^3}\mathbf{z}^T\mathbf{z} & & & \frac{6EI_{z'}}{L^2}\mathbf{y}^T\mathbf{z} - \frac{6EI_{y'}}{L^2}\mathbf{z}^T\mathbf{y} & & \\ & & & & & \\ & -\frac{6EI_{z'}}{L^2}\mathbf{z}^T\mathbf{y} + \frac{6EI_{y'}}{L^2}\mathbf{y}^T\mathbf{z} & & -\frac{GI_{x'}}{L}\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \frac{2EI_{z'}}{L}\mathbf{z}^T\mathbf{z} + \frac{2EI_{y'}}{L}\mathbf{y}^T\mathbf{y} & & \end{array} \right] \quad [3.8]$$

$$\mathbf{K}_{ji} = \mathbf{K}_{ij}^T \quad [3.9]$$

$$\mathbf{K}_{jj} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L}\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \frac{12EI_{z'}}{L^3}\mathbf{y}^T\mathbf{y} + \frac{12EI_{y'}}{L^3}\mathbf{z}^T\mathbf{z} & & & -\frac{6EI_{z'}}{L^2}\mathbf{y}^T\mathbf{z} + \frac{6EI_{y'}}{L^2}\mathbf{z}^T\mathbf{y} & & \\ & & & & & \\ & -\frac{6EI_{z'}}{L^2}\mathbf{z}^T\mathbf{y} + \frac{6EI_{y'}}{L^2}\mathbf{y}^T\mathbf{z} & & \frac{GI_{x'}}{L}\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \frac{4EI_{z'}}{L}\mathbf{z}^T\mathbf{z} + \frac{4EI_{y'}}{L}\mathbf{y}^T\mathbf{y} & & \end{array} \right] \quad [3.10]$$

con lo que la matriz de rigidez en coordenadas globales quedará

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} \quad [3.11]$$

Por último, efectuando todos los productos vectoriales que aparecen en las submatrices anteriores, de acuerdo con sus valores dados en [3.5], se tendrá

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos XX' \\ \cos YX' \\ \cos ZX' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos XX' & \cos YX' & \cos ZX' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos XX'^2 & \cos XX' \cos YX' & \cos XX' \cos ZX' \\ \cos YX' \cos XX' & \cos YX'^2 & \cos YX' \cos ZX' \\ \cos ZX' \cos XX' & \cos ZX' \cos YX' & \cos ZX'^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \cos XY' \\ \cos YY' \\ \cos ZY' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos XY' & \cos YY' & \cos ZY' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos XY'^2 & \cos XY' \cos YY' & \cos XY' \cos ZY' \\ \cos YY' \cos XY' & \cos YY'^2 & \cos YY' \cos ZY' \\ \cos ZY' \cos XY' & \cos ZY' \cos YY' & \cos ZY'^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}^T \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \cos XZ' \\ \cos YZ' \\ \cos ZZ' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos XZ' & \cos YZ' & \cos ZZ' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos XZ'^2 & \cos XZ' \cos YZ' & \cos XZ' \cos ZZ' \\ \cos YZ' \cos XZ' & \cos YZ'^2 & \cos YZ' \cos ZZ' \\ \cos ZZ' \cos XZ' & \cos ZZ' \cos YZ' & \cos ZZ'^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}^T \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \cos XY' \\ \cos YY' \\ \cos ZY' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos XZ' & \cos YZ' & \cos ZZ' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos XY' \cos XZ' & \cos XY' \cos YZ' & \cos XY' \cos ZZ' \\ \cos YY' \cos XZ' & \cos YY' \cos YZ' & \cos YY' \cos ZZ' \\ \cos ZY' \cos XZ' & \cos ZY' \cos YZ' & \cos ZY' \cos ZZ' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}^T \mathbf{y} = [\mathbf{y}^T \mathbf{z}]^T = \begin{bmatrix} \cos XZ' \cos XY' & \cos XZ' \cos YY' & \cos XZ' \cos ZY' \\ \cos YZ' \cos XY' & \cos YZ' \cos YY' & \cos YZ' \cos ZY' \\ \cos ZZ' \cos XY' & \cos ZZ' \cos YY' & \cos ZZ' \cos ZY' \end{bmatrix}$$

y al sustituir estos últimos en [3.7], [3.8], [3.9] y [3.10], se obtiene la expresión desarrollada de las cuatro submatrices de rigidez de una barra espacial en coordenadas globales y dirección arbitraria que se muestra a continuación.

que son las submatrices que conforman la Matriz de Rigidez de una barra con orientación cualquiera de sus ejes particulares y que evita los reiterativos productos matriciales que señalábamos anteriormente. Los datos de la barra se introducen, pues, directamente en estas submatrices para su pertinente ensamblaje.

Aunque estas submatrices pueden utilizarse para toda barra, puede ser conveniente la deducción de algunos casos particulares que suelen darse en la construcción desde el punto de vista de la orientación de los ejes particulares de las barras que conforman la estructura, con lo que se conseguirá algún ahorro en el proceso de cálculo. A continuación se describen algunos de los casos más habituales.

3.1.1.- Matriz de Rigidez para barra con un eje principal de inercia horizontal.-

Normalmente todas, o al menos la mayor parte de las barras pertenecientes a una misma estructura, suelen colocarse de tal forma que uno de los ejes principales de inercia de su sección transversal es horizontal, es decir paralelo al plano XY. Es por ello interesante deducir la Matriz de Rigidez bajo esta condición. Supondremos, pues, en lo que sigue, que el eje local Y' de la barra es horizontal, con lo que el ángulo que forma este eje con el eje global Z será un ángulo recto y, por tanto, se cumplirá que

$$\cos ZY' = 0 \quad [3.13]$$

Introduciendo en la anteriores submatrices este valor, se tendrá:

Dentro de esta orientación del eje local Y' existe toda una infinidad de direcciones del eje que contiene a la directriz de la barra, y de todas éstas existen dos (horizontal y vertical) que presentan tales valores de sus cosenos directores que introducen importantes simplificaciones en los elementos de la matriz. Esto, unido a la elevada frecuencia con que se suelen presentar en las estructuras (sobre todo de edificación: vigas y pilares), hace aconsejable determinar dichas matrices para estos casos particulares. Determinemos, pues, tales matrices.

3.1.2.- Matriz de Rigidez para barra con un eje principal de inercia y directriz horizontales.- Si, además del eje principal de inercia Y' es, asimismo, horizontal la directriz de la barra, el eje local Z' tendrá la misma dirección y sentido que el global Z y por tanto se cumplirán las siguientes condiciones:

- el eje local Z' es perpendicular a los ejes globales X e Y
- el eje global Z es perpendicular al eje local X'
- el eje global Z es paralelo al eje local Z'

por lo tanto se tendrá

$$\cos XZ' = \cos YZ' = \cos ZX' = 0 \quad \text{y} \quad \cos ZZ' = 1 \quad [3.15]$$

e introduciendo estos valores en las anteriores submatrices, queda:

$$K_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{EA \cos^2 XX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos^2 XY'}{L^3} & \frac{EA \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos XY' \cos YY'}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} \\ \frac{EA \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos XY' \cos YY'}{L^3} & \frac{EA \cos^2 YX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos^2 YY'}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_z'}{L^3} & -\frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} & -\frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} & \frac{GI_x' \cos^2 XX'}{L} + \frac{4EI_y' \cos^2 XY'}{L} & \frac{GI_x' \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{4EI_y' \cos XY' \cos YY'}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} & \frac{GI_x' \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{4EI_y' \cos XY' \cos YY'}{L} & \frac{GI_x' \cos^2 YX'}{L} + \frac{4EI_y' \cos^2 YY'}{L} & 0 \\ \frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z'}{L} \end{bmatrix}$$

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{EA \cos^2 XX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos^2 XY'}{L^3} & -\frac{EA \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos XY' \cos YY'}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} \\ -\frac{EA \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos XY' \cos YY'}{L^3} & -\frac{EA \cos^2 YX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos^2 YY'}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_z'}{L^3} & -\frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} & -\frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} & \frac{GI_x' \cos^2 XX'}{L} + \frac{2EI_y' \cos^2 XY'}{L} & \frac{GI_x' \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{2EI_y' \cos XY' \cos YY'}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} & \frac{GI_x' \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{2EI_y' \cos XY' \cos YY'}{L} & -\frac{GI_x' \cos^2 YX'}{L} + \frac{2EI_y' \cos^2 YY'}{L} & 0 \\ -\frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} & -\frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z'}{L} \end{bmatrix}$$

$$K_{ji} = \begin{bmatrix} \frac{EA \cos^2 XX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos^2 XY'}{L^3} & \frac{EA \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos XY' \cos YY'}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} \\ \frac{EA \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos XY' \cos YY'}{L^3} & \frac{EA \cos^2 YX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos^2 YY'}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_z'}{L^3} & \frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} & \frac{GI_x' \cos^2 XX'}{L} + \frac{2EI_y' \cos^2 XY'}{L} & \frac{GI_x' \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{2EI_y' \cos XY' \cos YY'}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} & \frac{GI_x' \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{2EI_y' \cos XY' \cos YY'}{L} & -\frac{GI_x' \cos^2 YX'}{L} + \frac{2EI_y' \cos^2 YY'}{L} & 0 \\ \frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z'}{L} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{jj} = \begin{bmatrix} \frac{EA \cos^2 XX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos^2 XY'}{L^3} & \frac{EA \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos XY' \cos YY'}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} \\ \frac{EA \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos XY' \cos YY'}{L^3} & \frac{EA \cos^2 YX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos^2 YY'}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y'}{L^3} & \frac{6EI_y' \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_y' \cos YY'}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y' \cos XY'}{L^2} & \frac{GI_x' \cos^2 XX'}{L} + \frac{4EI_y' \cos^2 XY'}{L} & \frac{GI_x' \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{4EI_y' \cos XY' \cos YY'}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y' \cos YY'}{L^2} & \frac{GI_x' \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{4EI_y' \cos XY' \cos YY'}{L} & \frac{GI_x' \cos^2 YX'}{L} + \frac{4EI_y' \cos^2 YY'}{L} & 0 \\ \frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z'}{L} \end{bmatrix} \quad [3.16]$$

3.1.3.- Matriz de Rigidez para barra vertical.- Se entiende por barra vertical aquella cuyo eje local X' es paralelo al global Z y, por tanto se cumple, cualquiera que fuere la orientación de sus ejes principales de inercia, que:

- el eje local X' es perpendicular a los ejes globales X e Y.
- el global Z es perpendicular al local Z'.

es decir

$$\cos XX' = \cos YX' = \cos ZZ' = 0 \quad \text{y} \quad \cos ZX' = 1 \quad [3.17]$$

por lo que, introduciendo estos valores en las submatrices [3.14], queda para una barra vertical

$$\mathbf{K}_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z' \cos^2 XY' + 12EI_y' \cos^2 XZ'}{L^3} & \frac{12EI_z' \cos XY' \cos YY' + 12EI_y' \cos XZ' \cos YZ'}{L^3} & 0 & \frac{6EI_z' \cos XY' \cos XZ' + 6EI_y' \cos XZ' \cos YZ'}{L^2} & 0 & \frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} \\ \frac{12EI_z' \cos XY' \cos YY' + 12EI_y' \cos XZ' \cos YZ'}{L^3} & \frac{12EI_z' \cos^2 YY' + 12EI_y' \cos^2 YZ'}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & \frac{6EI_y' \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_y' \cos YY'}{L^2} & 0 \\ \frac{12EI_z' \cos^2 XY' + 12EI_y' \cos^2 XZ'}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y' \cos XY'}{L^2} & \frac{GI_x' \cos^2 XX'}{L} + \frac{4EI_y' \cos^2 XY'}{L} & \frac{GI_x' \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{4EI_y' \cos XY' \cos YY'}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y' \cos YY'}{L^2} & \frac{GI_x' \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{4EI_y' \cos XY' \cos YY'}{L} & \frac{GI_x' \cos^2 YX'}{L} + \frac{4EI_y' \cos^2 YY'}{L} & 0 \\ \frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z'}{L} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{jj} = \begin{bmatrix} \frac{EA \cos^2 XX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos^2 XY'}{L^3} & \frac{EA \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos XY' \cos YY'}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} \\ \frac{EA \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos XY' \cos YY'}{L^3} & \frac{EA \cos^2 YX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos^2 YY'}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y'}{L^3} & \frac{6EI_y' \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_y' \cos YY'}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y' \cos XY'}{L^2} & \frac{GI_x' \cos^2 XX'}{L} + \frac{2EI_y' \cos^2 XY'}{L} & \frac{GI_x' \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{2EI_y' \cos XY' \cos YY'}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y' \cos YY'}{L^2} & \frac{GI_x' \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{2EI_y' \cos XY' \cos YY'}{L} & \frac{GI_x' \cos^2 YX'}{L} + \frac{2EI_y' \cos^2 YY'}{L} & 0 \\ \frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z'}{L} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{ji} = \begin{bmatrix} \frac{EA \cos^2 XX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos^2 XY'}{L^3} & \frac{EA \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos XY' \cos YY'}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} \\ \frac{EA \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos XY' \cos YY'}{L^3} & \frac{EA \cos^2 YX'}{L} + \frac{12EI_z' \cos^2 YY'}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y'}{L^3} & \frac{6EI_y' \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_y' \cos YY'}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y' \cos XY'}{L^2} & \frac{GI_x' \cos^2 XX'}{L} + \frac{2EI_y' \cos^2 XY'}{L} & \frac{GI_x' \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{2EI_y' \cos XY' \cos YY'}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y' \cos YY'}{L^2} & \frac{GI_x' \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{2EI_y' \cos XY' \cos YY'}{L} & \frac{GI_x' \cos^2 YX'}{L} + \frac{2EI_y' \cos^2 YY'}{L} & 0 \\ \frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z'}{L} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{jj} = \begin{bmatrix} \frac{EA \cos^2 XX'}{L} + \frac{12EI_y \cos^2 XY'}{L^3} & \frac{EA \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12EI_y \cos XY' \cos YY'}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y \cos XY'}{L^2} \\ \frac{EA \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12EI_y \cos XY' \cos YY'}{L^3} & \frac{EA \cos^2 YX'}{L} + \frac{12EI_y \cos^2 YY'}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y \cos YY'}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos YY'}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y \cos XY'}{L^2} & \frac{GI_x \cos^2 XX'}{L} + \frac{4EI_y \cos^2 XY'}{L} & \frac{GI_x \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{4EI_y \cos XY' \cos YY'}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y \cos YY'}{L^2} & \frac{GI_x \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{4EI_y \cos XY' \cos YY'}{L} & \frac{GI_x \cos^2 YX'}{L} + \frac{4EI_y \cos^2 YY'}{L} & 0 \\ \frac{6EI_y \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos YY'}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

que tiene la ventaja de presentar numeroso elementos nulos.

3.1.4.- Matriz de Rigidez para barra perteneciente a un emparrillado.- Suponiendo que el plano del emparrillado coincide con el plano que forman los ejes globales XY, la matriz correspondiente se deduce directamente de la matriz expresada en [3.16] sin más que eliminar en ella las filas/columnas asociadas los corrimientos nulos, que son los desplazamientos en las direcciones OX y OY (u_i, u_j, v_i, v_j) y los giros respecto al eje vertical OZ (γ_i, γ_j) esto es, las filas/columnas 1, 2, 6, 7, 8 y 12, por tanto se tendrán las siguientes submatrices en coordenada globales

$$\mathbf{K}_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos YY'}{L^2} \\ \frac{6EI_y \cos XY'}{L^2} & \frac{GI_x \cos^2 XX'}{L} + \frac{4EI_y \cos^2 XY'}{L} & \frac{GI_x \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{4EI_y \cos XY' \cos YY'}{L} \\ \frac{6EI_y \cos YY'}{L^2} & \frac{GI_x \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{4EI_y \cos XY' \cos YY'}{L} & \frac{GI_x \cos^2 YX'}{L} + \frac{4EI_y \cos^2 YY'}{L} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos YY'}{L^2} \\ \frac{6EI_y \cos XY'}{L^2} & \frac{GI_x \cos^2 XX'}{L} + \frac{2EI_y \cos^2 XY'}{L} & \frac{GI_x \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{2EI_y \cos XY' \cos YY'}{L} \\ \frac{6EI_y \cos YY'}{L^2} & \frac{GI_x \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{2EI_y \cos XY' \cos YY'}{L} & \frac{GI_x \cos^2 YX'}{L} + \frac{2EI_y \cos^2 YY'}{L} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{ji} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos YY'}{L^2} \\ \frac{6EI_y \cos XY'}{L^2} & \frac{GI_x \cos^2 XX'}{L} + \frac{2EI_y \cos^2 XY'}{L} & \frac{GI_x \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{2EI_y \cos XY' \cos YY'}{L} \\ \frac{6EI_y \cos YY'}{L^2} & \frac{GI_x \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{2EI_y \cos XY' \cos YY'}{L} & \frac{GI_x \cos^2 YX'}{L} + \frac{2EI_y \cos^2 YY'}{L} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{jj} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos YY'}{L^2} \\ \frac{6EI_y \cos XY'}{L^2} & \frac{GI_x \cos^2 XX'}{L} + \frac{4EI_y \cos^2 XY'}{L} & \frac{GI_x \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{4EI_y \cos XY' \cos YY'}{L} \\ \frac{6EI_y \cos YY'}{L^2} & \frac{GI_x \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{4EI_y \cos XY' \cos YY'}{L} & \frac{GI_x \cos^2 YX'}{L} + \frac{4EI_y \cos^2 YY'}{L} \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

3.1.5.- Matriz de Rigidez para barra de estructuras coplanarias.- Si, tanto las barras que conforman la estructura como las acciones que sobre ella operan, están contenidas

en un mismo plano, las solicitaciones de extremo se reducen a sendos axiles, sendos cortantes y sendos momentos flectores de ejes perpendiculares a dicho plano. Eligiendo para éste el formado por los ejes globales X-Y, las submatrices de [3.12] pierden sus filas/columnas 3, 4 y 5 y, además, se cumple que

$$\cos XZ' = \cos YZ' = \cos ZX' = \cos ZY' = 0 \quad \text{y} \quad \cos ZZ' = 1 \quad [3.20]$$

por lo que se tendrá

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ii} &= E \begin{bmatrix} \frac{A \cos^2 XX'}{L} + \frac{12I_z \cos^2 XY'}{L^3} & \frac{A \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12I_z \cos XY' \cos YY'}{L^3} & \frac{6I_z \cos XY'}{L^2} \\ \frac{A \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12I_z \cos XY' \cos YY'}{L^3} & \frac{A \cos^2 YX'}{L} + \frac{12I_z \cos^2 YY'}{L^3} & \frac{6I_z \cos YY'}{L^2} \\ \frac{6I_z \cos XY'}{L^2} & \frac{6I_z \cos YY'}{L^2} & \frac{4I_z}{L} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{ij} &= E \begin{bmatrix} -\frac{A \cos^2 XX'}{L} - \frac{12I_z \cos^2 XY'}{L^3} & -\frac{A \cos XX' \cos YX'}{L} - \frac{12I_z \cos XY' \cos YY'}{L^3} & \frac{6I_z \cos XY'}{L^2} \\ -\frac{A \cos XX' \cos YX'}{L} - \frac{12I_z \cos XY' \cos YY'}{L^3} & -\frac{A \cos^2 YX'}{L} - \frac{12I_z \cos^2 YY'}{L^3} & \frac{6I_z \cos YY'}{L^2} \\ -\frac{6I_z \cos XY'}{L^2} & \frac{6I_z \cos YY'}{L^2} & \frac{2I_z}{L} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{ji} &= E \begin{bmatrix} -\frac{A \cos^2 XX'}{L} - \frac{12I_z \cos^2 XY'}{L^3} & -\frac{A \cos XX' \cos YX'}{L} - \frac{12I_z \cos XY' \cos YY'}{L^3} & -\frac{6I_z \cos XY'}{L^2} \\ -\frac{A \cos XX' \cos YX'}{L} - \frac{12I_z \cos XY' \cos YY'}{L^3} & -\frac{A \cos^2 YX'}{L} - \frac{12I_z \cos^2 YY'}{L^3} & -\frac{6I_z \cos YY'}{L^2} \\ \frac{6I_z \cos XY'}{L^2} & \frac{6I_z \cos YY'}{L^2} & \frac{2I_z}{L} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{jj} &= E \begin{bmatrix} \frac{A \cos^2 XX'}{L} + \frac{12I_z \cos^2 XY'}{L^3} & \frac{A \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12I_z \cos XY' \cos YY'}{L^3} & -\frac{6I_z \cos XY'}{L^2} \\ \frac{A \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12I_z \cos XY' \cos YY'}{L^3} & \frac{A \cos^2 YX'}{L} + \frac{12I_z \cos^2 YY'}{L^3} & -\frac{6I_z \cos YY'}{L^2} \\ -\frac{6I_z \cos XY'}{L^2} & -\frac{6I_z \cos YY'}{L^2} & \frac{4I_z}{L} \end{bmatrix} \quad [3.21] \end{aligned}$$

3.1.6.- Matriz de Rigidez para barra de entramados planos.- Entendemos por entramado plano aquellas estructuras de barras contenidas en un mismo plano unidas rígidamente en sus extremos y en las cuales las direcciones de dichas barras son, exclusivamente, horizontales (vigas) o verticales (pilares), estos últimos con continuidad o sin ella hasta cimentación. Para las primeras es evidente que la matriz de rigidez no es más que la referida al sistema local, cuyas submatrices se expusieron en [3.3], eliminando en ellas las filas/columnas 3, 4 y 5, mientras que para los pilares se cumple, además, que

$$\cos XX' = \cos YY' = 0 \quad \text{y} \quad \cos YX' = -\cos XY' = 1 \quad [3.22]$$

por lo que quedará

$$\mathbf{K}_{\text{pilar}} = E \begin{bmatrix} \frac{12I_{z'}}{L^3} & 0 & -\frac{6I_{z'}}{L^2} & -\frac{12I_{z'}}{L^3} & 0 & -\frac{6I_{z'}}{L^2} \\ 0 & \frac{A}{L} & 0 & 0 & -\frac{A}{L} & 0 \\ -\frac{6I_{z'}}{L^2} & 0 & \frac{4I_{z'}}{L} & \frac{6I_{z'}}{L^2} & 0 & \frac{2I_{z'}}{L} \\ \hline -\frac{12I_{z'}}{L^3} & 0 & \frac{6I_{z'}}{L^2} & \frac{12I_{z'}}{L^3} & 0 & \frac{6I_{z'}}{L^2} \\ 0 & -\frac{A}{L} & 0 & 0 & \frac{A}{L} & 0 \\ -\frac{6I_{z'}}{L^2} & 0 & \frac{2I_{z'}}{L} & \frac{6I_{z'}}{L^2} & 0 & \frac{4I_{z'}}{L} \end{bmatrix} \quad [3.23]$$

3.2.- Matriz de conversión para barra espacial genérica.- Una vez que se ha procedido al ensamblaje de las submatrices de todas las barras que conforman la estructura utilizando cualquiera de las configuraciones anteriores, la resolución del sistema lineal de ecuaciones obtenido nos devuelve las componentes del vector \mathbf{c} de corrimientos de todos los nudos en coordenadas globales. Para dar por concluido el cálculo matricial solamente queda por determinar el valor de las sollicitaciones de extremo de cada una de las barras. A partir de las condiciones cinemáticas de continuidad entre extremos de barra y los nudos i y j a los que éstos acometen, se calculan las componentes del vector de corrimientos de extremo \mathbf{c}_b de cada barra b y, premultiplicando este último vector por la matriz de rigidez empleada, se calcularían las componentes del vector de sollicitaciones \mathbf{s}_b de la barra referidas al sistema general de coordenadas. Pero el último objetivo del cálculo es el valor \mathbf{s}'_b de estas componentes referidas al sistema local de cada barra (sollicitaciones), esto es, el valor de los axiles, cortantes en las direcciones de los ejes principales de inercia, momentos torsores y momentos flectores en las direcciones de estos últimos ejes, lo que obligaría a efectuar un cambio de coordenadas a partir de la matriz de rotación de cada una de las barras para que estas componentes vengan referidas a dicho sistema local. Para evitar estas operaciones debe utilizarse la Matriz de Conversión \mathbf{K}^{conv} , la cual, al postmultiplicarla por el vector de corrimientos \mathbf{c}_b de cada barra ($b = 1, 2, \dots, b_t$, siendo b_t el número de barras de la estructura), nos determinará las sollicitaciones buscadas, es decir

$$\mathbf{s}'_b = \mathbf{K}^{\text{conv}} \mathbf{c}_b \quad [3.24]$$

donde \mathbf{s}'_b es el vector columna que designa las componentes de sollicitación de extremo referidas al sistema local de la barra b .

Deduzcamos, pues, en los apartados siguientes los elementos de esta matriz de conversión la cual está formada por las cuatro submatrices

$$\mathbf{K}^{\text{conv}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^{\text{conv}} & \mathbf{K}_{ij}^{\text{conv}} \\ \mathbf{K}_{ji}^{\text{conv}} & \mathbf{K}_{jj}^{\text{conv}} \end{bmatrix} \quad [3.25]$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ii}^{\text{conv}} &= \mathbf{K}'_{ii} \mathbf{R}^T & \mathbf{K}_{ij}^{\text{conv}} &= \mathbf{K}'_{ij} \mathbf{R}^T \\ \mathbf{K}_{ji}^{\text{conv}} &= \mathbf{K}'_{ji} \mathbf{R}^T & \mathbf{K}_{jj}^{\text{conv}} &= \mathbf{K}'_{jj} \mathbf{R}^T \end{aligned} \quad [3.26]$$

Sustituyendo, pues, las submatrices dadas por [3.3] y la transpuesta de la matriz de rotación dada por [3.4] en las anteriores expresiones, la Matriz de Conversión [3.25], queda en la forma

$$\mathbf{K}^{\text{conv}} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} \mathbf{x} & \mathbf{0} & -\frac{EA}{L} \mathbf{x} & \mathbf{0} \\ \frac{12EI_z}{L^3} \mathbf{y} & \frac{6EI_z}{L^2} \mathbf{z} & -\frac{12EI_z}{L^3} \mathbf{y} & \frac{6EI_z}{L^2} \mathbf{z} \\ \frac{12EI_y}{L^3} \mathbf{z} & -\frac{6EI_y}{L^2} \mathbf{y} & -\frac{12EI_y}{L^3} \mathbf{z} & -\frac{6EI_y}{L^2} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} & \frac{GI_x}{L} \mathbf{x} & \mathbf{0} & -\frac{GI_x}{L} \mathbf{x} \\ -\frac{6EI_y}{L^2} \mathbf{z} & \frac{4EI_y}{L} \mathbf{y} & \frac{6EI_y}{L^2} \mathbf{z} & \frac{2EI_y}{L} \mathbf{y} \\ \frac{6EI_z}{L^2} \mathbf{y} & \frac{4EI_z}{L} \mathbf{z} & -\frac{6EI_z}{L^2} \mathbf{y} & \frac{2EI_z}{L} \mathbf{z} \\ \hline -\frac{EA}{L} \mathbf{x} & \mathbf{0} & \frac{EA}{L} \mathbf{x} & \mathbf{0} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} \mathbf{y} & -\frac{6EI_z}{L^2} \mathbf{z} & \frac{12EI_z}{L^3} \mathbf{y} & -\frac{6EI_z}{L^2} \mathbf{z} \\ -\frac{12EI_y}{L^3} \mathbf{z} & \frac{6EI_y}{L^2} \mathbf{y} & \frac{12EI_y}{L^3} \mathbf{z} & \frac{6EI_y}{L^2} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} & -\frac{GI_x}{L} \mathbf{x} & \mathbf{0} & \frac{GI_x}{L} \mathbf{x} \\ -\frac{6EI_y}{L^2} \mathbf{z} & \frac{2EI_y}{L} \mathbf{y} & \frac{6EI_y}{L^2} \mathbf{z} & \frac{4EI_y}{L} \mathbf{y} \\ \frac{6EI_z}{L^2} \mathbf{y} & \frac{2EI_z}{L} \mathbf{z} & -\frac{6EI_z}{L^2} \mathbf{y} & \frac{4EI_z}{L} \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad [3.27]$$

donde el cero es el vector fila de tres elementos. Sustituyendo en esta expresión los valores de los cosenos directores dados por [3.5], queda el desarrollo mostrado en el siguiente epígrafe, más los casos particulares según la orientación espacial de la barra.

3.2.1.- Matriz de Conversión de una barra espacial de dirección arbitraria de sus ejes locales.- Sustituyendo los vectores[3.5] en [3.27], se obtiene la siguiente Matriz de Conversión aplicable a cualquier barra espacial.

3-15

$$\mathbf{K}_{\text{conv}} = \begin{bmatrix}
 \frac{EA \cos XX'}{L} & \frac{EA \cos YX'}{L} & \frac{EA \cos ZX'}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{EA \cos XX'}{L} & \frac{EA \cos YX'}{L} & \frac{EA \cos ZX'}{L} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{12EI_z \cos XY'}{L^3} & \frac{12EI_z \cos YY'}{L^3} & \frac{12EI_z \cos ZY'}{L^3} & \frac{6EI_z \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_z \cos YZ'}{L^2} & \frac{6EI_z \cos ZZ'}{L^2} & \frac{12EI_z \cos XY'}{L^3} & \frac{12EI_z \cos YY'}{L^3} & \frac{12EI_z \cos ZY'}{L^3} & \frac{6EI_z \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_z \cos YZ'}{L^2} & \frac{6EI_z \cos ZZ'}{L^2} \\
 \frac{12EI_y \cos XZ'}{L^3} & \frac{12EI_y \cos YZ'}{L^3} & \frac{12EI_y \cos ZZ'}{L^3} & \frac{6EI_y \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos YZ'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos ZY'}{L^2} & \frac{12EI_y \cos XZ'}{L^3} & \frac{12EI_y \cos YZ'}{L^3} & \frac{12EI_y \cos ZZ'}{L^3} & \frac{6EI_y \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos YZ'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos ZY'}{L^2} \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x \cos XX'}{L} & \frac{GI_x \cos YX'}{L} & \frac{GI_x \cos ZX'}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x \cos XX'}{L} & \frac{GI_x \cos YX'}{L} & \frac{GI_x \cos ZX'}{L} \\
 \frac{6EI_y \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos YZ'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos ZZ'}{L^2} & \frac{4EI_y \cos XY'}{L} & \frac{4EI_y \cos YY'}{L} & \frac{4EI_y \cos ZY'}{L} & \frac{6EI_y \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos YZ'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos ZZ'}{L^2} & \frac{2EI_y \cos XY'}{L} & \frac{2EI_y \cos YY'}{L} & \frac{2EI_y \cos ZY'}{L} \\
 \frac{6EI_z \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_z \cos YY'}{L^2} & \frac{6EI_z \cos ZY'}{L^2} & \frac{4EI_z \cos XZ'}{L} & \frac{4EI_z \cos YZ'}{L} & \frac{4EI_z \cos ZZ'}{L} & \frac{6EI_z \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_z \cos YY'}{L^2} & \frac{6EI_z \cos ZY'}{L^2} & \frac{2EI_z \cos XZ'}{L} & \frac{2EI_z \cos YZ'}{L} & \frac{2EI_z \cos ZZ'}{L} \\
 \frac{EA \cos XX'}{L} & \frac{EA \cos YX'}{L} & \frac{EA \cos ZX'}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{EA \cos XX'}{L} & \frac{EA \cos YX'}{L} & \frac{EA \cos ZX'}{L} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{12EI_z \cos XY'}{L^3} & \frac{12EI_z \cos YY'}{L^3} & \frac{12EI_z \cos ZY'}{L^3} & \frac{6EI_z \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_z \cos YZ'}{L^2} & \frac{6EI_z \cos ZZ'}{L^2} & \frac{12EI_z \cos XY'}{L^3} & \frac{12EI_z \cos YY'}{L^3} & \frac{12EI_z \cos ZY'}{L^3} & \frac{6EI_z \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_z \cos YZ'}{L^2} & \frac{6EI_z \cos ZZ'}{L^2} \\
 \frac{12EI_y \cos XZ'}{L^3} & \frac{12EI_y \cos YZ'}{L^3} & \frac{12EI_y \cos ZZ'}{L^3} & \frac{6EI_y \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos YZ'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos ZY'}{L^2} & \frac{12EI_y \cos XZ'}{L^3} & \frac{12EI_y \cos YZ'}{L^3} & \frac{12EI_y \cos ZZ'}{L^3} & \frac{6EI_y \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos YZ'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos ZY'}{L^2} \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x \cos XX'}{L} & \frac{GI_x \cos YX'}{L} & \frac{GI_x \cos ZX'}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x \cos XX'}{L} & \frac{GI_x \cos YX'}{L} & \frac{GI_x \cos ZX'}{L} \\
 \frac{6EI_y \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos YZ'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos ZZ'}{L^2} & \frac{2EI_y \cos XY'}{L} & \frac{2EI_y \cos YY'}{L} & \frac{2EI_y \cos ZY'}{L} & \frac{6EI_y \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos YZ'}{L^2} & \frac{6EI_y \cos ZZ'}{L^2} & \frac{4EI_y \cos XY'}{L} & \frac{4EI_y \cos YY'}{L} & \frac{4EI_y \cos ZY'}{L} \\
 \frac{6EI_z \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_z \cos YY'}{L^2} & \frac{6EI_z \cos ZY'}{L^2} & \frac{2EI_z \cos XZ'}{L} & \frac{2EI_z \cos YZ'}{L} & \frac{2EI_z \cos ZZ'}{L} & \frac{6EI_z \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_z \cos YY'}{L^2} & \frac{6EI_z \cos ZY'}{L^2} & \frac{4EI_z \cos XZ'}{L} & \frac{4EI_z \cos YZ'}{L} & \frac{4EI_z \cos ZZ'}{L}
 \end{bmatrix}$$

[3.28]

3.2.2.- Matriz de Conversión de una barra espacial con un eje principal de inercia horizontal. Introduciendo en la matriz anterior [3.28] el valor dado por [3.13] se tendrá la Matriz de Conversión siguiente aplicable a toda barra cuyo eje principal de inercia Y' sea paralelo al plano coordenado XY .

$$\mathbf{K}^{\text{conv}} = \begin{bmatrix}
 \frac{EA \cos XX'}{L} & \frac{EA \cos YX'}{L} & \frac{EA \cos ZX'}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA \cos XX'}{L} & -\frac{EA \cos YX'}{L} & -\frac{EA \cos ZX'}{L} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{12EI_z' \cos XY'}{L^3} & \frac{12EI_z' \cos YY'}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z' \cos XZ'}{L^2} & -\frac{6EI_z' \cos YZ'}{L^2} & -\frac{6EI_z' \cos ZZ'}{L^2} & \frac{12EI_z' \cos XY'}{L^3} & \frac{12EI_z' \cos YY'}{L^3} & 0 & \frac{6EI_z' \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_z' \cos YZ'}{L^2} & \frac{6EI_z' \cos ZZ'}{L^2} \\
 \frac{12EI_{y'} \cos XZ'}{L^3} & \frac{12EI_{y'} \cos YZ'}{L^3} & \frac{12EI_{y'} \cos ZZ'}{L^3} & -\frac{6EI_{y'} \cos XZ'}{L^2} & -\frac{6EI_{y'} \cos YZ'}{L^2} & 0 & \frac{12EI_{y'} \cos XZ'}{L^3} & \frac{12EI_{y'} \cos YZ'}{L^3} & \frac{12EI_{y'} \cos ZZ'}{L^3} & -\frac{6EI_{y'} \cos XZ'}{L^2} & -\frac{6EI_{y'} \cos YZ'}{L^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{x'} \cos XX'}{L} & \frac{GI_{x'} \cos YX'}{L} & \frac{GI_{x'} \cos ZX'}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_{x'} \cos XX'}{L} & -\frac{GI_{x'} \cos YX'}{L} & -\frac{GI_{x'} \cos ZX'}{L} \\
 -\frac{6EI_{y'} \cos XZ'}{L^2} & -\frac{6EI_{y'} \cos YZ'}{L^2} & -\frac{6EI_{y'} \cos ZZ'}{L^2} & \frac{4EI_{y'} \cos XY'}{L} & \frac{4EI_{y'} \cos YY'}{L} & 0 & \frac{6EI_{y'} \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_{y'} \cos YZ'}{L^2} & \frac{6EI_{y'} \cos ZZ'}{L^2} & \frac{2EI_{y'} \cos XY'}{L} & \frac{2EI_{y'} \cos YY'}{L} & 0 \\
 \frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} & 0 & \frac{4EI_z' \cos XZ'}{L} & \frac{4EI_z' \cos YZ'}{L} & \frac{4EI_z' \cos ZZ'}{L} & -\frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} & -\frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} & 0 & \frac{2EI_z' \cos XZ'}{L} & \frac{2EI_z' \cos YZ'}{L} & \frac{2EI_z' \cos ZZ'}{L} \\
 \hline
 \frac{EA \cos XX'}{L} & \frac{EA \cos YX'}{L} & \frac{EA \cos ZX'}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{EA \cos XX'}{L} & \frac{EA \cos YX'}{L} & \frac{EA \cos ZX'}{L} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{12EI_z' \cos XY'}{L^3} & \frac{12EI_z' \cos YY'}{L^3} & 0 & \frac{6EI_z' \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_z' \cos YZ'}{L^2} & \frac{6EI_z' \cos ZZ'}{L^2} & \frac{12EI_z' \cos XY'}{L^3} & \frac{12EI_z' \cos YY'}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z' \cos XZ'}{L^2} & -\frac{6EI_z' \cos YZ'}{L^2} & -\frac{6EI_z' \cos ZZ'}{L^2} \\
 \frac{12EI_{y'} \cos XZ'}{L^3} & \frac{12EI_{y'} \cos YZ'}{L^3} & \frac{12EI_{y'} \cos ZZ'}{L^3} & -\frac{6EI_{y'} \cos XZ'}{L^2} & -\frac{6EI_{y'} \cos YZ'}{L^2} & 0 & \frac{12EI_{y'} \cos XZ'}{L^3} & \frac{12EI_{y'} \cos YZ'}{L^3} & \frac{12EI_{y'} \cos ZZ'}{L^3} & \frac{6EI_{y'} \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_{y'} \cos YZ'}{L^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_{x'} \cos XX'}{L} & -\frac{GI_{x'} \cos YX'}{L} & -\frac{GI_{x'} \cos ZX'}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{x'} \cos XX'}{L} & \frac{GI_{x'} \cos YX'}{L} & \frac{GI_{x'} \cos ZX'}{L} \\
 -\frac{6EI_{y'} \cos XZ'}{L^2} & -\frac{6EI_{y'} \cos YZ'}{L^2} & -\frac{6EI_{y'} \cos ZZ'}{L^2} & \frac{2EI_{y'} \cos XY'}{L} & \frac{2EI_{y'} \cos YY'}{L} & 0 & \frac{6EI_{y'} \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_{y'} \cos YZ'}{L^2} & \frac{6EI_{y'} \cos ZZ'}{L^2} & \frac{4EI_{y'} \cos XY'}{L} & \frac{4EI_{y'} \cos YY'}{L} & 0 \\
 \frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} & 0 & \frac{2EI_z' \cos XZ'}{L} & \frac{2EI_z' \cos YZ'}{L} & \frac{2EI_z' \cos ZZ'}{L} & -\frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} & -\frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} & 0 & \frac{4EI_z' \cos XZ'}{L} & \frac{4EI_z' \cos YZ'}{L} & \frac{4EI_z' \cos ZZ'}{L}
 \end{bmatrix}$$

[3.29]

Análogamente a lo expresado en el apartado A.1, deduciremos a continuación las matrices de conversión para los casos particulares de barras horizontales y verticales

3.2.3.- Matriz de Conversión de una barra espacial con un eje principal de inercia y directriz horizontales.- Introduciendo en la anterior las condiciones [3.15] tendremos:

$$\mathbf{K}_{\text{conv. horiz.}} = \begin{bmatrix}
 \frac{EA \cos XX'}{L} & \frac{EA \cos YX'}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA \cos XX'}{L} & -\frac{EA \cos YX'}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{12EI_z' \cos XY'}{L^3} & \frac{12EI_z' \cos YY'}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z'}{L^2} & \frac{12EI_z' \cos XY'}{L^3} & \frac{12EI_z' \cos YY'}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z'}{L^2} \\
 0 & 0 & \frac{12EI_{y'}}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_{y'} \cos YY'}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_{y'}}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_{y'} \cos YY'}{L^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{x'} \cos XX'}{L} & \frac{GI_{x'} \cos YX'}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{x'} \cos XX'}{L} & \frac{GI_{x'} \cos YX'}{L} & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{6EI_{y'}}{L^2} & \frac{4EI_{y'} \cos XY'}{L} & \frac{4EI_{y'} \cos YY'}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{y'}}{L^2} & \frac{2EI_{y'} \cos XY'}{L} & \frac{2EI_{y'} \cos YY'}{L} & 0 \\
 \frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z'}{L} & -\frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} & -\frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z'}{L} \\
 \hline
 \frac{EA \cos XX'}{L} & \frac{EA \cos YX'}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA \cos XX'}{L} & \frac{EA \cos YX'}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{12EI_z' \cos XY'}{L^3} & \frac{12EI_z' \cos YY'}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z'}{L^2} & \frac{12EI_z' \cos XY'}{L^3} & \frac{12EI_z' \cos YY'}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z'}{L^2} \\
 0 & 0 & \frac{12EI_{y'}}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{y'} \cos YY'}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_{y'}}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{y'} \cos YY'}{L^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{x'} \cos XX'}{L} & \frac{GI_{x'} \cos YX'}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{x'} \cos XX'}{L} & \frac{GI_{x'} \cos YX'}{L} & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{6EI_{y'}}{L^2} & \frac{2EI_{y'} \cos XY'}{L} & \frac{2EI_{y'} \cos YY'}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{y'}}{L^2} & \frac{4EI_{y'} \cos XY'}{L} & \frac{4EI_{y'} \cos YY'}{L} & 0 \\
 \frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z'}{L} & -\frac{6EI_z' \cos XY'}{L^2} & -\frac{6EI_z' \cos YY'}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z'}{L}
 \end{bmatrix}$$

[3.30]

aplicable a toda barra que, además del eje Y', es horizontal así mismo el X' (vigas).

3.2.4.- Matriz de Conversión de una barra espacial vertical. Por último, para las barras verticales se cumplen las condiciones [3.17] por lo que, introduciendo en [3.29] estos valores, se tiene

$$\mathbf{K}_{\text{conv. vert.}} = \begin{bmatrix}
 \begin{array}{ccc|ccc}
 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{12EI_{z'} \cos XY'}{L^3} & \frac{12EI_{z'} \cos YY'}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{z'} \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_{z'} \cos YZ'}{L^2} & \frac{6EI_{z'} \cos ZZ'}{L^2} \\
 \frac{12EI_{y'} \cos XZ'}{L^3} & \frac{12EI_{y'} \cos YZ'}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{y'} \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_{y'} \cos YY'}{L^2} & \frac{6EI_{y'} \cos ZY'}{L^2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{x'}}{L} \\
 \frac{6EI_{y'} \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_{y'} \cos YZ'}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{y'} \cos XY'}{L} & \frac{4EI_{y'} \cos YY'}{L} & 0 \\
 \frac{6EI_{z'} \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_{z'} \cos YY'}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{z'} \cos XZ'}{L} & \frac{4EI_{z'} \cos YZ'}{L} & 0
 \end{array} &
 \begin{array}{ccc|ccc}
 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{12EI_{z'} \cos XY'}{L^3} & \frac{12EI_{z'} \cos YY'}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{z'} \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_{z'} \cos YZ'}{L^2} & \frac{6EI_{z'} \cos ZZ'}{L^2} \\
 \frac{12EI_{y'} \cos XZ'}{L^3} & \frac{12EI_{y'} \cos YZ'}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{y'} \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_{y'} \cos YY'}{L^2} & \frac{6EI_{y'} \cos ZY'}{L^2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{x'}}{L} \\
 \frac{6EI_{y'} \cos XZ'}{L^2} & \frac{6EI_{y'} \cos YZ'}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{y'} \cos XY'}{L} & \frac{4EI_{y'} \cos YY'}{L} & 0 \\
 \frac{6EI_{z'} \cos XY'}{L^2} & \frac{6EI_{z'} \cos YY'}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{z'} \cos XZ'}{L} & \frac{4EI_{z'} \cos YZ'}{L} & 0
 \end{array}
 \end{bmatrix}$$

3-18

[3.31]

válida para toda barra vertical con dirección arbitraria de sus ejes principales de inercia (pilares).

3.2.5.- Matriz de Conversión para una barra perteneciente a un emparrillado.-

De forma idéntica a como se procedió en el epígrafe 3.1.4 para la deducción de la matriz de rigidez de la barra perteneciente a un emparrillado a partir de la correspondiente a la barra horizontal dada por [3.16], asimismo, partiendo de la matriz de conversión dada por [3.30], bastará con eliminar en ésta las filas/columnas 1, 2, 6, 7, 8, 12, con lo que se obtiene

$$\mathbf{K}_{\text{emp.}}^{\text{conv.}} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_y'}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y' \cos YY'}{L^2} & -\frac{12EI_y'}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y' \cos YY'}{L^2} \\ 0 & \frac{GI_x' \cos XX'}{L} & \frac{GI_x' \cos YX'}{L} & 0 & -\frac{GI_x' \cos XX'}{L} & -\frac{GI_x' \cos YX'}{L} \\ \frac{6EI_y'}{L^2} & \frac{4EI_y' \cos XY'}{L} & \frac{4EI_y' \cos YY'}{L} & \frac{6EI_y'}{L^2} & \frac{2EI_y' \cos XY'}{L} & \frac{2EI_y' \cos YY'}{L} \\ \frac{12EI_y'}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y' \cos YY'}{L^2} & -\frac{12EI_y'}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y' \cos YY'}{L^2} \\ 0 & -\frac{GI_x' \cos XX'}{L} & -\frac{GI_x' \cos YX'}{L} & 0 & \frac{GI_x' \cos XX'}{L} & \frac{GI_x' \cos YX'}{L} \\ -\frac{6EI_y'}{L^2} & \frac{2EI_y' \cos XY'}{L} & \frac{2EI_y' \cos YY'}{L} & \frac{6EI_y'}{L^2} & \frac{4EI_y' \cos XY'}{L} & \frac{4EI_y' \cos YY'}{L} \end{bmatrix} \quad [3.32]$$

aplicable a toda barra de emparrillado horizontal.

3.2.6.- Matriz de Conversión para barra de estructuras coplanarias.-

Eliminando en [3.30] las filas/columnas 3, 4, 5 y 9, 10, 11:

$$\mathbf{K}^{\text{conv}} = \mathbf{E} \begin{bmatrix} \frac{A \cos XX'}{L} & \frac{A \cos YX'}{L} & 0 & -\frac{A \cos XX'}{L} & -\frac{A \cos YX'}{L} & 0 \\ \frac{12I_z' \cos XY'}{L^3} & \frac{12I_z' \cos YY'}{L^3} & -\frac{6I_z'}{L^2} & -\frac{12I_z' \cos XY'}{L^3} & -\frac{12I_z' \cos YY'}{L^3} & \frac{6I_z'}{L^2} \\ \frac{6I_z' \cos XY'}{L^2} & \frac{6I_z' \cos YY'}{L^2} & \frac{4I_z'}{L} & -\frac{6I_z' \cos XY'}{L^2} & -\frac{6I_z' \cos YY'}{L^2} & \frac{2I_z'}{L} \\ -\frac{A \cos XX'}{L} & -\frac{A \cos YX'}{L} & 0 & \frac{A \cos XX'}{L} & \frac{A \cos YX'}{L} & 0 \\ -\frac{12I_z' \cos XY'}{L^3} & -\frac{12I_z' \cos YY'}{L^3} & \frac{6I_z'}{L^2} & \frac{12I_z' \cos XY'}{L^3} & \frac{12I_z' \cos YY'}{L^3} & -\frac{6I_z'}{L^2} \\ \frac{6I_z' \cos XY'}{L^2} & \frac{6I_z' \cos YY'}{L^2} & \frac{2I_z'}{L} & -\frac{6I_z' \cos XY'}{L^2} & -\frac{6I_z' \cos YY'}{L^2} & \frac{4I_z'}{L} \end{bmatrix} \quad [3.33]$$

se obtiene la matriz de conversión para estructuras de barras coplanarias con cualquier orientación de su directriz.

3.2.7.- Matriz de Conversión para barra de entramados planos.-

Se entiende por entramado plano aquella estructura de barras coplanarias conectadas perpendicularmente.

De la anterior pueden deducirse los casos particulares para entramados planos en los que se tendrá, para vigas, que

$$\cos XX' = \cos YY' = 1 \quad \text{y} \quad \cos YX' = -\cos XY' = 0 \quad [3.34]$$

mientras que para los pilares se cumple

$$\cos XX' = \cos YY' = 0 \quad \text{y} \quad \cos YX' = -\cos XY' = 1 \quad [3.35]$$

por lo que, de acuerdo con las anteriores relaciones, se tendrá

$$\mathbf{K}_{\text{viga}}^{\text{conv}} = E \begin{bmatrix} \frac{A}{L} & 0 & 0 & -\frac{A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I_{z'}}{L^3} & -\frac{6I_{z'}}{L^2} & 0 & -\frac{12I_{z'}}{L^3} & \frac{6I_{z'}}{L^2} \\ 0 & \frac{6I_{z'}}{L^2} & \frac{4I_{z'}}{L} & 0 & -\frac{6I_{z'}}{L^2} & \frac{2I_{z'}}{L} \\ \hline -\frac{A}{L} & 0 & 0 & \frac{A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I_{z'}}{L^3} & \frac{6I_{z'}}{L^2} & 0 & \frac{12I_{z'}}{L^3} & -\frac{6I_{z'}}{L^2} \\ 0 & \frac{6I_{z'}}{L^2} & \frac{2I_{z'}}{L} & 0 & -\frac{6I_{z'}}{L^2} & \frac{4I_{z'}}{L} \end{bmatrix} \quad [3.36]$$

$$\mathbf{K}_{\text{pilar}}^{\text{conv}} = E \begin{bmatrix} 0 & \frac{A}{L} & 0 & 0 & -\frac{A}{L} & 0 \\ -\frac{12I_{z'}}{L^3} & 0 & -\frac{6I_{z'}}{L^2} & \frac{12I_{z'}}{L^3} & 0 & \frac{6I_{z'}}{L^2} \\ -\frac{6I_{z'}}{L^2} & 0 & \frac{4I_{z'}}{L} & \frac{6I_{z'}}{L^2} & 0 & \frac{2I_{z'}}{L} \\ \hline 0 & -\frac{A}{L} & 0 & 0 & \frac{A}{L} & 0 \\ \frac{12I_{z'}}{L^3} & 0 & \frac{6I_{z'}}{L^2} & -\frac{12I_{z'}}{L^3} & 0 & -\frac{6I_{z'}}{L^2} \\ \frac{6I_{z'}}{L^2} & 0 & \frac{2I_{z'}}{L} & \frac{6I_{z'}}{L^2} & 0 & \frac{4I_{z'}}{L} \end{bmatrix} \quad [3.37]$$

CAPÍTULO 4

HERRAMIENTAS DEL MÉTODO (I): BARRA BAJO CONDICIONES DE INELONGABILIDAD

OBJETIVO:

Cualquier fenómeno físico que pretenda analizarse mediante un procedimiento matemático requiere de una serie de hipótesis sin las cuales sería prácticamente imposible dicho análisis, toda vez que suele ser tal la cantidad de variables que pueden influir en dicho fenómeno que no sería posible, en general, la evaluación de todas ellas. Pero estas hipótesis no pueden ser cualesquiera, sino que han de ser sólo aquéllas que, sancionadas por la experimentación, permitan considerar que dicha hipótesis se manifiesta suficientemente fiable y que los resultados están dentro de lo que se pueden considerar como razonablemente aceptables, pues sería ilusoria una pretendida “exactitud” en la matemática aplicada.

Una de las hipótesis más comúnmente aceptadas -y adoptadas- para el análisis de estructuras de barras es la suposición de inelongabilidad de éstas, pues ello contribuye a un análisis más simplificado sin menoscabo importante de la validez de los resultados, como demuestra la experiencia; pero el Método Matricial Tradicional no contempla esta suposición toda vez que una de sus ecuaciones constitutivas está basada, precisamente, en dicha deformación.

No obstante, este capítulo tiene como objetivo la determinación de la Matriz de Rigidez en coordenadas globales de una barra considerando a ésta axialmente indeformable.

CONTENIDO:

Puesto que la hipótesis de inelongabilidad es una condición holónoma, surge una nueva ecuación que relaciona las incógnitas de desplazamiento, por lo que éstas dejan de ser independientes. Al introducir estas relaciones en la Matriz de Rigidez del Método Matricial Clásico deducida en el capítulo anterior, desaparece el término EA correspondiente a la rigidez a la elongación, además de otras simplificaciones que la hipótesis adoptada permite, y todo ello va a dar lugar a importantes transformaciones, obteniéndose otra matriz de rigidez -que llamaremos en adelante Matriz de Rigidez a la Flexotorsión- más simple y difusa, cuyas ventajas se pondrán de manifiesto en capítulos posteriores.

De forma similar al capítulo anterior, se deducen las matrices de rigidez y de conversión correspondientes a los casos particulares: barra horizontal, vertical, emparrillados y estructuras de barras coplanarias

4.1.- Ecuación de Inelongabilidad.- Considérese una barra descargada de directriz recta e inercia constante en el espacio tridimensional, en la que se define una orientación i-j entre sus extremos y un sistema local de ejes coordenados X'Y'Z' de tal forma que el eje X' contenga al eje de la pieza y tenga el sentido i-j. Si esta barra forma parte de una estructura sometida a un sistema de acciones, sus extremos habrán sufrido sendos corrimientos como consecuencia del efecto de dichas acciones. Ahora bien, si se consideran despreciables las elongaciones debidas a los axiles, la componente u'_i de desplazamiento en la dirección del eje local X' del extremo i será igual que la del extremo j u'_j en esta misma dirección, esto es, debe cumplirse que

$$u'_i - u'_j = 0 \quad [4.1]$$

que es la ecuación que describe la condición de inelongabilidad de la barra en coordenadas locales.

Sea \mathbf{c}_i el vector columna que describe las componentes de corrimiento $(u_i, v_i, w_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ del extremo i referidas al sistema global y \mathbf{c}_j el correspondiente al extremo j $(u_j, v_j, w_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$. Entre estos vectores y los correspondientes al sistema local \mathbf{c}'_i y \mathbf{c}'_j se cumplen las siguientes relaciones matriciales a través de la matriz \mathbf{R}^T , transpuesta de la matriz de rotación \mathbf{R} , cuyos valores se expusieron en [3.4]:

$$\mathbf{c}'_i = \mathbf{R}^T \mathbf{c}_i \quad \text{y} \quad \mathbf{c}'_j = \mathbf{R}^T \mathbf{c}_j \quad [4.2]$$

Extrayendo de ésta exclusivamente la fila que relaciona las componente u'_i y u'_j - correspondientes a los desplazamiento de los extremos a lo largo del eje de la pieza en coordenadas locales- con los corrimientos en globales, fila primera de \mathbf{R}_T , se tendrá, particionando \mathbf{c}_i y \mathbf{c}_j

$$u'_i = [\mathbf{x} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad u'_j = [\mathbf{x} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad [4.3]$$

en donde δ_i y δ_j son los vectores columna que describen las componentes de desplazamiento en el sistema global de los extremos i y j, respectivamente, mientras que θ_i y θ_j son los vectores que describen las componentes de giro de dichos extremos respecto al sistema global, esto es

$$\mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_j = \begin{bmatrix} \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad \delta_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad \delta_j = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix} \quad \theta_i = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} \quad \theta_j = \begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{bmatrix} \quad [4.4]$$

Llamando

$$\mathbf{I}_i = [\mathbf{x} \quad \mathbf{0}] \quad [4.5]$$

las relaciones [4.3] se han de escribir en la forma

$$u'_i = \mathbf{I}_i \mathbf{c}_i \quad \text{y} \quad u'_j = \mathbf{I}_i \mathbf{c}_j \quad [4.6]$$

por lo que, sustituyendo estos valores en [4.1], se tendrá

$$\mathbf{I}_i \mathbf{c}_i - \mathbf{I}_i \mathbf{c}_j = \mathbf{0} \quad [4.7]$$

y llamando

$$\mathbf{I}_j = -\mathbf{I}_i \quad [4.8]$$

quedará, finalmente

$$\mathbf{I}_i \mathbf{c}_i + \mathbf{I}_j \mathbf{c}_j = \mathbf{0} \quad [4.9]$$

que no es más que la ecuación de inelongabilidad en coordenadas globales, cuyo desarrollo, como fácilmente puede comprobarse, tiene la forma

$$\cos XX'(u_i - u_j) + \cos YX'(v_i - v_j) + \cos ZX'(w_i - w_j) = 0 \quad [4.10]$$

La ecuación [4.9] de inelongabilidad de la barra espacial en el sistema global se puede reescribir así:

$$[\mathbf{I}_i \quad \mathbf{I}_j] \begin{bmatrix} \mathbf{c}_i \\ \mathbf{c}_j \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad [4.11]$$

Para el espacio 2D, suponiendo éste el que coincide con el plano OXY, se cumplirá que $\cos ZX' = 0$ y, por tanto en [4.5] el vector \mathbf{x} será un vector de sólo dos componentes, así como el vector nulo, por lo que [4.10] quedará como

$$\cos XX'(u_i - u_j) + \cos YX'(v_i - v_j) = 0 \quad [4.12]$$

Puesto que [4.11] describe la propiedad de inelongabilidad de la barra, en adelante le llamaremos Ecuación de Restricción de Inelongabilidad o, abreviadamente, Ecuación de Inelongabilidad.

4.2.-Matriz de Rigidez de la barra inelongable. La anterior relación [4.11] entre las incógnitas de desplazamiento de los extremos de barra se puede introducir en la matriz de rigidez de dicha barra, lo que traerá como consecuencia importantes simplificaciones para el proceso del cálculo. En efecto, teniendo en cuenta [3.11] se puede escribir que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_i \\ \mathbf{s}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_i \\ \mathbf{c}_j \end{bmatrix} \quad [4.13]$$

donde \mathbf{s}_i y \mathbf{s}_j son las designaciones de los vectores columna que describen las componentes de sollicitación en los extremos i y j , respectivamente, referidas al sistema global. Desarrollando el primer bloque de ecuaciones de la anterior expresión matricial se tendrá

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{K}_{ii} \mathbf{c}_i + \mathbf{K}_{ij} \mathbf{c}_j \quad [4.14]$$

Particionando los vectores de la anterior ecuación de acuerdo con [4.4] y sustituyendo el valor de las submatrices dados por [3.7] y [3.8] se tendrá

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{m}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \frac{12EI_z'}{L^3} \mathbf{y}^T \mathbf{y} + \frac{12EI_{y'}}{L^3} \mathbf{z}^T \mathbf{z} & \left| \begin{array}{c} \frac{6EI_z'}{L^2} \mathbf{y}^T \mathbf{z} - \frac{6EI_{y'}}{L^2} \mathbf{z}^T \mathbf{y} \\ \frac{GI_x'}{L} \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \frac{4EI_z'}{L} \mathbf{z}^T \mathbf{z} + \frac{4EI_{y'}}{L} \mathbf{y}^T \mathbf{y} \end{array} \right. \\ \frac{6EI_z'}{L^2} \mathbf{z}^T \mathbf{y} - \frac{6EI_{y'}}{L^2} \mathbf{y}^T \mathbf{z} & \left| \begin{array}{c} \frac{6EI_z'}{L^2} \mathbf{y}^T \mathbf{z} - \frac{6EI_{y'}}{L^2} \mathbf{z}^T \mathbf{y} \\ -\frac{GI_x'}{L} \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \frac{2EI_z'}{L} \mathbf{z}^T \mathbf{z} + \frac{2EI_{y'}}{L} \mathbf{y}^T \mathbf{y} \end{array} \right. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_i \\ \boldsymbol{\theta}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \frac{12EI_z'}{L^3} \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \frac{12EI_{y'}}{L^3} \mathbf{z}^T \mathbf{z} & \left| \begin{array}{c} \frac{6EI_z'}{L^2} \mathbf{y}^T \mathbf{z} - \frac{6EI_{y'}}{L^2} \mathbf{z}^T \mathbf{y} \\ -\frac{GI_x'}{L} \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \frac{2EI_z'}{L} \mathbf{z}^T \mathbf{z} + \frac{2EI_{y'}}{L} \mathbf{y}^T \mathbf{y} \end{array} \right. \\ -\frac{6EI_z'}{L^2} \mathbf{z}^T \mathbf{y} + \frac{6EI_{y'}}{L^2} \mathbf{y}^T \mathbf{z} & \left| \begin{array}{c} \frac{6EI_z'}{L^2} \mathbf{y}^T \mathbf{z} - \frac{6EI_{y'}}{L^2} \mathbf{z}^T \mathbf{y} \\ -\frac{GI_x'}{L} \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \frac{2EI_z'}{L} \mathbf{z}^T \mathbf{z} + \frac{2EI_{y'}}{L} \mathbf{y}^T \mathbf{y} \end{array} \right. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_j \\ \boldsymbol{\theta}_j \end{bmatrix} \quad [4.15]$$

donde \mathbf{f}_i y \mathbf{m}_i son las designaciones de los vectores columna que describen las componentes de fuerza y de momentos, respectivamente, del extremo i de la barra inelongable en coordenadas globales. Procedamos a desarrollar cada una de las dos ecuaciones matriciales incluidas en la anterior expresión.

1º.- Ecuaciones de fuerzas en el extremo i.- Desarrollando el primer bloque de [4.15]

se tiene

$$\mathbf{f}_i = \left(\frac{EA}{L} \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \frac{12EI_z'}{L^3} \mathbf{y}^T \mathbf{y} + \frac{12EI_{y'}}{L^3} \mathbf{z}^T \mathbf{z} \right) (\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j) + \left(\frac{6EI_z'}{L^2} \mathbf{y}^T \mathbf{z} - \frac{6EI_{y'}}{L^2} \mathbf{z}^T \mathbf{y} \right) (\boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta}_j) \quad [4.16]$$

y operando

$$\mathbf{f}_i = \frac{EA}{L} \mathbf{x}^T [\mathbf{x}(\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j)] + \left(\frac{12EI_z'}{L^3} \mathbf{y}^T \mathbf{y} + \frac{12EI_{y'}}{L^3} \mathbf{z}^T \mathbf{z} \right) (\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j) + \left(\frac{6EI_z'}{L^2} \mathbf{y}^T \mathbf{z} - \frac{6EI_{y'}}{L^2} \mathbf{z}^T \mathbf{y} \right) (\boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta}_j) \quad [4.17]$$

pero de [4.3] se cumple que

$$u'_i = \mathbf{x} \boldsymbol{\delta}_i \quad \text{y} \quad u'_j = \mathbf{x} \boldsymbol{\delta}_j \quad [4.18]$$

y de sustituir estos valores en [4.1] se desprende que

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j) = 0 \quad [4.19]$$

que no es más que la ecuación de inelongabilidad en coordenadas globales, por lo que el primer sumando de [4.17] es nulo. Obsérvese, entonces, cómo a consecuencia de la condición introducida, no solamente desaparece la rigidez a la deformación axial EA, sino que esto mismo permitirá la extracción de factores comunes, lo que redundará en una importante simplificación de los elementos de la matriz, como se verá a continuación. En efecto, para posibilitar dicha simplificación hagamos el siguiente cambio de variable: llamemos

$$i = \frac{I_z'}{I_{y'}} \quad [4.20]$$

de donde se tendrá que

$$I_{z'} = i I_{y'} \quad [4.21]$$

y sustituyamos este valor en la ecuación matricial [4.17]. Debe escribirse, entonces que

$$\mathbf{f}_i = \left(\frac{12EI_{y'}}{L^3} \mathbf{y}^T \mathbf{y} + \frac{12EI_{y'}}{L^3} \mathbf{z}^T \mathbf{z} \right) (\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j) + \left(\frac{6EI_{y'}}{L^2} \mathbf{y}^T \mathbf{z} - \frac{6EI_{y'}}{L^2} \mathbf{z}^T \mathbf{y} \right) (\boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta}_j) \quad [4.22]$$

y extrayendo factor común $\frac{2EI_{y'}}{L^3}$, queda

$$\mathbf{f}_i = \frac{2EI_{y'}}{L^3} [6(\mathbf{y}^T \mathbf{y} + \mathbf{z}^T \mathbf{z})(\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j) + 3L(\mathbf{y}^T \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{y})(\boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta}_j)] \quad [4.23]$$

ecuación matricial que representa a las tres ecuaciones algebraicas que relacionan las componentes de fuerza del extremo i en función de los corrimientos de los extremos, esto es, las ecuaciones constitutivas correspondientes a las fuerzas.

2°.- Ecuaciones de momentos en el extremo i.- Para la ecuación de momentos hagamos, además de los anteriores, los siguientes cambios:

$$s = \frac{I_{x'}}{I_{y'}} \quad [4.24]$$

con lo que

$$I_{x'} = s I_{y'} \quad [4.25]$$

y

$$t = \frac{G}{E} \quad [4.26]$$

por lo que, análogamente

$$G = t E \quad [4.27]$$

Sustituyendo [4.21], [4.25] y [4.27] en el segundo bloque de [4.15] y sacando factores comunes se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_i = & \left(\frac{6EI_{y'}}{L^2} \mathbf{z}^T \mathbf{y} - \frac{6EI_{y'}}{L^2} \mathbf{y}^T \mathbf{z} \right) (\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j) + \frac{stEI_{y'}}{L} \mathbf{x}^T \mathbf{x} (\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_j) + \\ & + \frac{2EI_{y'}}{L} \mathbf{z}^T \mathbf{z} (2\boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta}_j) + \frac{2EI_{y'}}{L} \mathbf{y}^T \mathbf{y} (2\boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta}_j) \end{aligned} \quad [4.28]$$

Extrayendo factor común $\frac{2EI_{y'}}{L^3}$ y agrupando términos queda, finalmente

$$\mathbf{m}_i = \frac{2EI_{y'}}{L^3} [3L(\mathbf{i}z^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{z})(\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j) + \frac{stL^2}{2} \mathbf{x}^T\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_j) + L^2(\mathbf{i}z^T\mathbf{z} + \mathbf{y}^T\mathbf{y})(2\boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta}_j)] \quad [4.29]$$

que es la ecuación matricial que representa a las tres ecuaciones algebraicas de los valores de los momentos del extremo i en función de los corrimientos de los extremos, esto es, las ecuaciones constitutivas de los momentos, todo ello en coordenadas globales.

Como se puede apreciar, las expresiones [4.23] y [4.29] son más simplificadas que las originales dadas en [4.15] y, además, como anteriormente se dijo, es el factor común el que va a permitir normalizarla, lo que va a traer como consecuencia un enorme mejoramiento del número de condición de la matriz del sistema de ecuaciones, como se mostrará en los Capítulos 7 y 11.

Para proceder a tal normalización elijamos una cualquiera de las barras que conforman la estructura como barra de referencia y llamemos $(EI_{y'})_0$ a la rigidez a la flexión respecto a su eje principal de inercia Y' . Podemos, entonces, crear un parámetro $(r)^*$ para cada barra de valor

$$r = \frac{EI_{y'}}{(EI_{y'})_0} \quad [4.30]$$

donde el numerador es la rigidez a la flexión respecto al eje principal de inercia Y' de cada una de las restantes barras. Teniendo en cuenta [4.23], [4.29] y [4.30] la ecuación matricial [4.15] se transforma en la siguiente

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{m}_i \end{bmatrix} = \frac{2r}{L^3} \left\{ \begin{array}{c|c} 6(\mathbf{i}\mathbf{y}^T\mathbf{y} + \mathbf{z}^T\mathbf{z}) & 3L(\mathbf{i}\mathbf{y}^T\mathbf{z} - \mathbf{z}^T\mathbf{y}) \\ \hline 3L(\mathbf{i}z^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{z}) & \frac{stL^2}{2} \mathbf{x}^T\mathbf{x} + 2L^2(\mathbf{i}z^T\mathbf{z} + \mathbf{y}^T\mathbf{y}) \end{array} \right\} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_i \\ \boldsymbol{\theta}_i \end{bmatrix} + \begin{array}{c|c} -6(\mathbf{i}\mathbf{y}^T\mathbf{y} + \mathbf{z}^T\mathbf{z}) & 3L(\mathbf{i}\mathbf{y}^T\mathbf{z} - \mathbf{z}^T\mathbf{y}) \\ \hline -3L(\mathbf{i}z^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{z}) & -\frac{stL^2}{2} \mathbf{x}^T\mathbf{x} + L^2(\mathbf{i}z^T\mathbf{z} + \mathbf{y}^T\mathbf{y}) \end{array} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_j \\ \boldsymbol{\theta}_j \end{bmatrix} \quad [4.31]$$

ecuación que nos proporciona los valores de las seis componentes de sollicitación \mathbf{s}_i correspondientes al extremo i de la barra en función de las componentes de corrimiento.

* Debido a esta parametrización el sistema de ecuaciones proveniente del ensamblaje de las matrices de barra nos devolverá el valor de las incógnitas multiplicadas por el producto $(EI_{y'})_0$, aunque, por comodidad, mantendremos la nomenclatura hasta ahora utilizada para dichas incógnitas, asumiendo que sus valores vendrán multiplicados por dicho producto.

Para las correspondientes al extremo j , desarrollando el segundo bloque del sistema [4.13] se tendrá, de forma análoga

$$\mathbf{s}_j = \mathbf{K}_{ji} \mathbf{c}_i + \mathbf{K}_{jj} \mathbf{c}_j \quad [4.32]$$

que, de acuerdo con los valores dados en [3.9] y [3.10] puede escribirse también como

$$\mathbf{s}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_j \\ \mathbf{m}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \frac{12EI_{z'}}{L^3} \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \frac{12EI_{y'}}{L^3} \mathbf{z}^T \mathbf{z} & -\frac{6EI_{z'}}{L^2} \mathbf{y}^T \mathbf{z} + \frac{6EI_{y'}}{L^2} \mathbf{z}^T \mathbf{y} \\ \frac{6EI_{z'}}{L^2} \mathbf{z}^T \mathbf{y} - \frac{6EI_{y'}}{L^2} \mathbf{y}^T \mathbf{z} & -\frac{GI_{x'}}{L} \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \frac{2EI_{z'}}{L} \mathbf{z}^T \mathbf{z} + \frac{2EI_{y'}}{L} \mathbf{y}^T \mathbf{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \frac{12EI_{z'}}{L^3} \mathbf{y}^T \mathbf{y} + \frac{12EI_{y'}}{L^3} \mathbf{z}^T \mathbf{z} & -\frac{6EI_{z'}}{L^2} \mathbf{y}^T \mathbf{z} + \frac{6EI_{y'}}{L^2} \mathbf{z}^T \mathbf{y} \\ -\frac{6EI_{z'}}{L^2} \mathbf{z}^T \mathbf{y} + \frac{6EI_{y'}}{L^2} \mathbf{y}^T \mathbf{z} & \frac{GI_{x'}}{L} \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \frac{4EI_{z'}}{L} \mathbf{z}^T \mathbf{z} + \frac{4EI_{y'}}{L} \mathbf{y}^T \mathbf{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad [4.33]$$

1°.- Ecuaciones de fuerzas en el extremo j .- Puesto que la barra se supone que no tiene acciones directamente aplicadas, para las componentes de fuerzas de extremo se ha de cumplir la siguiente ecuación de equilibrio

$$\mathbf{f}_j = -\mathbf{f}_i \quad [4.34]$$

por lo que, de [4.23] se tiene directamente

$$\mathbf{f}_j = \frac{2EI_{y'}}{L^3} [-6(i\mathbf{y}^T \mathbf{y} + \mathbf{z}^T \mathbf{z})(\delta_i - \delta_j) - 3L(i\mathbf{y}^T \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{y})(\theta_i + \theta_j)] \quad [4.35]$$

2°.- Ecuaciones de momentos en el extremo j .- Desarrollando la segunda ecuación de [4.33] correspondiente a las componentes de momentos \mathbf{m}_j teniendo en cuenta [4.21], [4.25] y [4.27] y sacando factores comunes se puede escribir que

$$\mathbf{m}_j = \left(\frac{6EI_{y'}}{L^2} \mathbf{z}^T \mathbf{y} - \frac{6EI_{z'}}{L^2} \mathbf{y}^T \mathbf{z} \right) (\delta_i - \delta_j) + \frac{stEI_{y'}}{L} \mathbf{x}^T \mathbf{x} (\theta_j - \theta_i) + \frac{2EI_{y'}}{L} \mathbf{z}^T \mathbf{z} (2\theta_j + \theta_i) + \frac{2EI_{z'}}{L} \mathbf{y}^T \mathbf{y} (2\theta_j + \theta_i) \quad [4.36]$$

expresión que podría haberse deducido directamente de la [4.28] sin más que intercambiar los vectores de giro θ_i y θ_j , por lo tanto, utilizando la ecuación [4.29] se tiene que

$$\mathbf{m}_j = \frac{2EI_y}{L^3} [3L(\mathbf{iz}^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{z})(\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j) + \frac{stL^2}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_i) + L^2(\mathbf{iz}^T\mathbf{z} + \mathbf{y}^T\mathbf{y})(2\boldsymbol{\theta}_j + \boldsymbol{\theta}_i)] \quad [4.37]$$

por lo que, teniendo en cuenta [4.35], [4.37] y [4.30] la ecuación matricial [4.33] se transforma en

$$\mathbf{s}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_j \\ \mathbf{m}_j \end{bmatrix} = \frac{2r}{L^3} \left\{ \begin{array}{c|c} -6(\mathbf{iy}^T\mathbf{y} + \mathbf{z}^T\mathbf{z}) & -3L(\mathbf{iy}^T\mathbf{z} - \mathbf{z}^T\mathbf{y}) \\ \hline 3L(\mathbf{iz}^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{z}) & -\frac{stL^2}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{x} + L^2(\mathbf{iz}^T\mathbf{z} + \mathbf{y}^T\mathbf{y}) \end{array} \right\} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_i \\ \boldsymbol{\theta}_i \end{bmatrix} + \begin{array}{c|c} 6(\mathbf{iy}^T\mathbf{y} + \mathbf{z}^T\mathbf{z}) & -3L(\mathbf{iy}^T\mathbf{z} - \mathbf{z}^T\mathbf{y}) \\ \hline -3L(\mathbf{iz}^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{z}) & \frac{stL^2}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{x} + 2L^2(\mathbf{iz}^T\mathbf{z} + \mathbf{y}^T\mathbf{y}) \end{array} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_j \\ \boldsymbol{\theta}_j \end{bmatrix} \quad [4.38]$$

Llamando

$$\mathbf{M}_{ii} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 6(\mathbf{iy}^T\mathbf{y} + \mathbf{z}^T\mathbf{z}) & 3L(\mathbf{iy}^T\mathbf{z} - \mathbf{z}^T\mathbf{y}) \\ 3L(\mathbf{iz}^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{z}) & \frac{stL^2}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{x} + 2L^2(\mathbf{iz}^T\mathbf{z} + \mathbf{y}^T\mathbf{y}) \end{bmatrix} \quad [4.39]$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} -6(\mathbf{iy}^T\mathbf{y} + \mathbf{z}^T\mathbf{z}) & 3L(\mathbf{iy}^T\mathbf{z} - \mathbf{z}^T\mathbf{y}) \\ -3L(\mathbf{iz}^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{z}) & -\frac{stL^2}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{x} + L^2(\mathbf{iz}^T\mathbf{z} + \mathbf{y}^T\mathbf{y}) \end{bmatrix} \quad [4.40]$$

$$\mathbf{M}_{ji} = \mathbf{M}_{ij}^T \quad [4.41]$$

$$\mathbf{M}_{jj} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 6(\mathbf{iy}^T\mathbf{y} + \mathbf{z}^T\mathbf{z}) & -3L(\mathbf{iy}^T\mathbf{z} - \mathbf{z}^T\mathbf{y}) \\ -3L(\mathbf{iz}^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{z}) & \frac{stL^2}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{x} + 2L^2(\mathbf{iz}^T\mathbf{z} + \mathbf{y}^T\mathbf{y}) \end{bmatrix} \quad [4.42]$$

las ecuaciones de equilibrio [4.31] y [4.38] pueden expresarse más compactamente en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_i \\ \mathbf{s}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ij} \\ \mathbf{M}_{ji} & \mathbf{M}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_i \\ \mathbf{c}_j \end{bmatrix} \quad [4.43]$$

y llamando

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ij} \\ \mathbf{M}_{ji} & \mathbf{M}_{jj} \end{bmatrix} \quad [4.44]$$

se tiene la Matriz de Rigidez de la barra inelongable espacial referida a los ejes globales y que se utilizará, pues, para particularizar los valores de las matrices de cada una de las barras de la estructura y proceder a su ensamblaje.

Es de observar que la matriz \mathbf{M} conserva las mismas propiedades que su homóloga \mathbf{K} del método tradicional dada en [3.11], es decir:

- es cuadrada y de orden 12
- es simétrica
- los elementos de la diagonal principal son todos positivos y no nulos

Puesto que, como puede observarse, los coeficientes de influencia han quedado reducidos, exclusivamente, a términos de flexión y torsión, llamaremos a esta Matriz de Rigidez a la Flexotorsión.

Por último, efectuados los productos vectoriales correspondientes y teniendo en cuenta que

$$\cos XX' = \frac{L_x}{L} \quad \cos YX' = \frac{L_y}{L} \quad \cos ZX' = \frac{L_z}{L} \quad [4.45]$$

siendo L_x , L_y y L_z las proyecciones de la barra sobre cada uno de los ejes X, Y y Z, respectivamente, la expresión desarrollada de las cuatro submatrices que constituyen la matriz \mathbf{M} quedan definitivamente en la forma

SUBMATRICES DE RIGIDEZ A FLEXOTORSIÓN DE UNA BARRA RECTA ESPACIAL EN COORDENADAS GLOBALES Y DIRECCIÓN ARBITRARIA

$$M_{ij} = \frac{2r}{L^3} \begin{pmatrix} 6(i\cos^2 XY' + \cos^2 XZ') & 6(i\cos XY' \cos YY' + \cos XZ' \cos YZ') & 6\cos XZ' \cos ZZ' & 3L(i\cos XY' \cos XZ' - \cos XY' \cos XZ') & 3L(i\cos XY' \cos YZ' - \cos XZ' \cos YY') & 3L\cos XY' \cos ZZ' \\ 6(i\cos XY' \cos YY' + \cos XZ' \cos YZ') & 6(i\cos^2 YY' + \cos^2 YZ') & 6\cos YZ' \cos ZZ' & 3L(i\cos XZ' \cos YY' - \cos XY' \cos YZ') & 3L(i\cos YY' \cos YZ' - \cos YY' \cos YZ') & 3L\cos YY' \cos ZZ' \\ 6\cos XZ' \cos ZZ' & 6\cos YZ' \cos ZZ' & 6\cos^2 ZZ' & -3L\cos XY' \cos ZZ' & -3L\cos YY' \cos ZZ' & 0 \\ 3L(i\cos XY' \cos XZ' - \cos XY' \cos XZ') & 3L(i\cos XZ' \cos YY' - \cos XY' \cos YZ') & -3L\cos XY' \cos ZZ' & \frac{s1}{2}Lx^2 + 2L^2(\cos^2 XY' + i\cos^2 XZ') & \frac{s1}{2}LxLy + 2L^2(\cos XY' \cos YY' + i\cos XZ' \cos YZ') & \frac{s1}{2}LxLz + 2L^2i\cos XZ' \cos ZZ' \\ 3L(i\cos XY' \cos YZ' - \cos XZ' \cos YY') & 3L(i\cos YY' \cos YZ' - \cos YY' \cos YZ') & -3L\cos YY' \cos ZZ' & \frac{s1}{2}LxLy + 2L^2(\cos XY' \cos YY' + i\cos XZ' \cos YZ') & \frac{s1}{2}Ly^2 + 2L^2(\cos^2 YY' + i\cos^2 YZ') & \frac{s1}{2}LyLz + 2L^2i\cos YZ' \cos ZZ' \\ 3L\cos XY' \cos ZZ' & 3L\cos YY' \cos ZZ' & 0 & \frac{s1}{2}LxLz + 2L^2i\cos XZ' \cos ZZ' & \frac{s1}{2}LyLz + 2L^2i\cos YZ' \cos ZZ' & \frac{s1}{2}Lz^2 + 2L^2i\cos^2 ZZ' \end{pmatrix}$$

$$M_{ij} = \frac{2r}{L^3} \begin{pmatrix} -6(i\cos^2 XY' + \cos^2 XZ') & -6(i\cos XY' \cos YY' + \cos XZ' \cos YZ') & -6\cos XZ' \cos ZZ' & 3L(i\cos XY' \cos XZ' - \cos XY' \cos XZ') & 3L(i\cos XY' \cos YZ' - \cos XZ' \cos YY') & 3L\cos XY' \cos ZZ' \\ -6(i\cos XY' \cos YY' + \cos XZ' \cos YZ') & -6(i\cos^2 YY' + \cos^2 YZ') & -6\cos YZ' \cos ZZ' & 3L(i\cos XZ' \cos YY' - \cos XY' \cos YZ') & 3L(i\cos YY' \cos YZ' - \cos YY' \cos YZ') & 3L\cos YY' \cos ZZ' \\ -6\cos XZ' \cos ZZ' & -6\cos YZ' \cos ZZ' & -6\cos^2 ZZ' & -3L\cos XY' \cos ZZ' & -3L\cos YY' \cos ZZ' & 0 \\ -3L(i\cos XY' \cos XZ' - \cos XY' \cos XZ') & -3L(i\cos XZ' \cos YY' - \cos XY' \cos YZ') & 3L\cos XY' \cos ZZ' & -\frac{s1}{2}Lx^2 + L^2(\cos^2 XY' + i\cos^2 XZ') & -\frac{s1}{2}LxLy + L^2(\cos XY' \cos YY' + i\cos XZ' \cos YZ') & -\frac{s1}{2}LxLz + L^2i\cos XZ' \cos ZZ' \\ -3L(i\cos XY' \cos YZ' - \cos XZ' \cos YY') & -3L(i\cos YY' \cos YZ' - \cos YY' \cos YZ') & 3L\cos YY' \cos ZZ' & -\frac{s1}{2}LxLy + L^2(\cos XY' \cos YY' + i\cos XZ' \cos YZ') & -\frac{s1}{2}Ly^2 + L^2(\cos^2 YY' + i\cos^2 YZ') & -\frac{s1}{2}LyLz + L^2i\cos YZ' \cos ZZ' \\ -3L\cos XY' \cos ZZ' & -3L\cos YY' \cos ZZ' & 0 & -\frac{s1}{2}LxLz + L^2i\cos XZ' \cos ZZ' & -\frac{s1}{2}LyLz + L^2i\cos YZ' \cos ZZ' & -\frac{s1}{2}Lz^2 + L^2i\cos^2 ZZ' \end{pmatrix}$$

$$M_{ij} = \frac{2r}{L^3} \begin{pmatrix} -6(i\cos^2 XY' + \cos^2 XZ') & -6(i\cos XY' \cos YY' + \cos XZ' \cos YZ') & -6\cos XZ' \cos ZZ' & -3L(i\cos XY' \cos XZ' - \cos XY' \cos XZ') & -3L(i\cos XY' \cos YZ' - \cos XZ' \cos YY') & -3L\cos XY' \cos ZZ' \\ -6(i\cos XY' \cos YY' + \cos XZ' \cos YZ') & -6(i\cos^2 YY' + \cos^2 YZ') & -6\cos YZ' \cos ZZ' & -3L(i\cos XZ' \cos YY' - \cos XY' \cos YZ') & -3L(i\cos YY' \cos YZ' - \cos YY' \cos YZ') & -3L\cos YY' \cos ZZ' \\ -6\cos XZ' \cos ZZ' & -6\cos YZ' \cos ZZ' & -6\cos^2 ZZ' & 3L\cos XY' \cos ZZ' & 3L\cos YY' \cos ZZ' & 0 \\ 3L(i\cos XY' \cos XZ' - \cos XY' \cos XZ') & 3L(i\cos XZ' \cos YY' - \cos XY' \cos YZ') & -3L\cos XY' \cos ZZ' & -\frac{s1}{2}Lx^2 + L^2(\cos^2 XY' + i\cos^2 XZ') & -\frac{s1}{2}LxLy + L^2(\cos XY' \cos YY' + i\cos XZ' \cos YZ') & -\frac{s1}{2}LxLz + L^2i\cos XZ' \cos ZZ' \\ 3L(i\cos XY' \cos YZ' - \cos XZ' \cos YY') & 3L(i\cos YY' \cos YZ' - \cos YY' \cos YZ') & -3L\cos YY' \cos ZZ' & -\frac{s1}{2}LxLy + L^2(\cos XY' \cos YY' + i\cos XZ' \cos YZ') & -\frac{s1}{2}Ly^2 + L^2(\cos^2 YY' + i\cos^2 YZ') & -\frac{s1}{2}LyLz + L^2i\cos YZ' \cos ZZ' \\ 3L\cos XY' \cos ZZ' & 3L\cos YY' \cos ZZ' & 0 & -\frac{s1}{2}LxLz + L^2i\cos XZ' \cos ZZ' & -\frac{s1}{2}LyLz + L^2i\cos YZ' \cos ZZ' & -\frac{s1}{2}Lz^2 + L^2i\cos^2 ZZ' \end{pmatrix}$$

$$M_{ij} = \frac{2r}{L^3} \begin{pmatrix} 6(i\cos^2 XY' + \cos^2 XZ') & 6(i\cos XY' \cos YY' + \cos XZ' \cos YZ') & 6\cos XZ' \cos ZZ' & -3L(i\cos XY' \cos XZ' - \cos XY' \cos XZ') & -3L(i\cos XY' \cos YZ' - \cos XZ' \cos YY') & -3L\cos XY' \cos ZZ' \\ 6(i\cos XY' \cos YY' + \cos XZ' \cos YZ') & 6(i\cos^2 YY' + \cos^2 YZ') & 6\cos YZ' \cos ZZ' & -3L(i\cos XZ' \cos YY' - \cos XY' \cos YZ') & -3L(i\cos YY' \cos YZ' - \cos YY' \cos YZ') & -3L\cos YY' \cos ZZ' \\ 6\cos XZ' \cos ZZ' & 6\cos YZ' \cos ZZ' & 6\cos^2 ZZ' & 3L\cos XY' \cos ZZ' & 3L\cos YY' \cos ZZ' & 0 \\ -3L(i\cos XY' \cos XZ' - \cos XY' \cos XZ') & -3L(i\cos XZ' \cos YY' - \cos XY' \cos YZ') & 3L\cos XY' \cos ZZ' & \frac{s1}{2}Lx^2 + 2L^2(\cos^2 XY' + i\cos^2 XZ') & \frac{s1}{2}LxLy + 2L^2(\cos XY' \cos YY' + i\cos XZ' \cos YZ') & \frac{s1}{2}LxLz + 2L^2i\cos XZ' \cos ZZ' \\ -3L(i\cos XY' \cos YZ' - \cos XZ' \cos YY') & -3L(i\cos YY' \cos YZ' - \cos YY' \cos YZ') & 3L\cos YY' \cos ZZ' & \frac{s1}{2}LxLy + 2L^2(\cos XY' \cos YY' + i\cos XZ' \cos YZ') & \frac{s1}{2}Ly^2 + 2L^2(\cos^2 YY' + i\cos^2 YZ') & \frac{s1}{2}LyLz + 2L^2i\cos YZ' \cos ZZ' \\ -3L\cos XY' \cos ZZ' & -3L\cos YY' \cos ZZ' & 0 & \frac{s1}{2}LxLz + 2L^2i\cos XZ' \cos ZZ' & \frac{s1}{2}LyLz + 2L^2i\cos YZ' \cos ZZ' & \frac{s1}{2}Lz^2 + 2L^2i\cos^2 ZZ' \end{pmatrix}$$

[4.46]

4.2.1.-Matriz de Rigidez a la Flexotorsión de una barra con el eje principal de inercia OY' horizontal.- Introduciendo en las submatrices anteriores la condición dada en [3.13] ($\cos ZY'=0$), de igual forma que se procedió en el apartado 3.1.1, se obtiene:

$$\mathbf{M}_{ji} = \frac{2r}{L^3} \begin{pmatrix} 6(i \cos^2 XY' + \cos^2 XZ') & 6(i \cos XY' \cos YY' + \cos XZ' \cos YZ') & 6 \cos XZ' \cos ZZ' & 3L(i \cos XY' \cos XZ' - \cos XY' \cos XZ') & 3L(i \cos XY' \cos YZ' - \cos XZ' \cos YY') & 3Li \cos XY' \cos ZZ' \\ 6(i \cos XY' \cos YY' + \cos XZ' \cos YZ') & 6(i \cos^2 YY' + \cos^2 YZ') & 6 \cos YZ' \cos ZZ' & 3L(i \cos XZ' \cos YY' - \cos XY' \cos YZ') & 3L(i \cos YY' \cos YZ' - \cos YY' \cos YZ') & 3Li \cos YY' \cos ZZ' \\ 6 \cos XZ' \cos ZZ' & 6 \cos YZ' \cos ZZ' & 6 \cos^2 ZZ' & -3L \cos XY' \cos ZZ' & -3L \cos YY' \cos ZZ' & 0 \\ 3L(i \cos XY' \cos XZ' - \cos XY' \cos XZ') & 3L(i \cos XZ' \cos YY' - \cos XY' \cos YZ') & -3L \cos XY' \cos ZZ' & \frac{st}{2} Lx^2 + 2L^2(\cos^2 XY' + i \cos^2 XZ') & \frac{st}{2} Lx Ly + 2L^2(\cos XY' \cos YY' + i \cos XZ' \cos YZ') & \frac{st}{2} Lx Lz + 2L^2 i \cos XZ' \cos ZZ' \\ 3L(i \cos XY' \cos YZ' - \cos XZ' \cos YY') & 3L(i \cos YY' \cos YZ' - \cos YY' \cos YZ') & -3L \cos YY' \cos ZZ' & \frac{st}{2} Lx Ly + 2L^2(\cos XY' \cos YY' + i \cos XZ' \cos YZ') & \frac{st}{2} Ly^2 + 2L^2(\cos^2 YY' + i \cos^2 YZ') & \frac{st}{2} Ly Lz + 2L^2 i \cos YZ' \cos ZZ' \\ 3Li \cos XY' \cos ZZ' & 3Li \cos YY' \cos ZZ' & 0 & \frac{st}{2} Lx Lz + 2L^2 i \cos XZ' \cos ZZ' & \frac{st}{2} Ly Lz + 2L^2 i \cos YZ' \cos ZZ' & \frac{st}{2} Lz^2 + 2L^2 i \cos^2 ZZ' \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{2r}{L^3} \begin{pmatrix} -6(i \cos^2 XY' + \cos^2 XZ') & -6(i \cos XY' \cos YY' + \cos XZ' \cos YZ') & -6 \cos XZ' \cos ZZ' & 3L(i \cos XY' \cos XZ' - \cos XY' \cos XZ') & 3L(i \cos XY' \cos YZ' - \cos XZ' \cos YY') & 3Li \cos XY' \cos ZZ' \\ -6(i \cos XY' \cos YY' + \cos XZ' \cos YZ') & -6(i \cos^2 YY' + \cos^2 YZ') & -6 \cos YZ' \cos ZZ' & 3L(i \cos XZ' \cos YY' - \cos XY' \cos YZ') & 3L(i \cos YY' \cos YZ' - \cos YY' \cos YZ') & 3Li \cos YY' \cos ZZ' \\ -6 \cos XZ' \cos ZZ' & -6 \cos YZ' \cos ZZ' & -6 \cos^2 ZZ' & -3L \cos XY' \cos ZZ' & -3L \cos YY' \cos ZZ' & 0 \\ -3L(i \cos XY' \cos XZ' - \cos XY' \cos XZ') & -3L(i \cos XZ' \cos YY' - \cos XY' \cos YZ') & 3L \cos XY' \cos ZZ' & -\frac{st}{2} Lx^2 + L^2(\cos^2 XY' + i \cos^2 XZ') & -\frac{st}{2} Lx Ly + L^2(\cos XY' \cos YY' + i \cos XZ' \cos YZ') & -\frac{st}{2} Lx Lz + L^2 i \cos XZ' \cos ZZ' \\ -3L(i \cos XY' \cos YZ' - \cos XZ' \cos YY') & -3L(i \cos YY' \cos YZ' - \cos YY' \cos YZ') & 3L \cos YY' \cos ZZ' & -\frac{st}{2} Lx Ly + L^2(\cos XY' \cos YY' + i \cos XZ' \cos YZ') & -\frac{st}{2} Ly^2 + L^2(\cos^2 YY' + i \cos^2 YZ') & -\frac{st}{2} Ly Lz + L^2 i \cos YZ' \cos ZZ' \\ -3Li \cos XY' \cos ZZ' & -3Li \cos YY' \cos ZZ' & 0 & -\frac{st}{2} Lx Lz + L^2 i \cos XZ' \cos ZZ' & -\frac{st}{2} Ly Lz + L^2 i \cos YZ' \cos ZZ' & -\frac{st}{2} Lz^2 + L^2 i \cos^2 ZZ' \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{ji} = \frac{2r}{L^3} \begin{pmatrix} -6(i \cos^2 XY' + \cos^2 XZ') & -6(i \cos XY' \cos YY' + \cos XZ' \cos YZ') & -6 \cos XZ' \cos ZZ' & -3L(i \cos XY' \cos XZ' - \cos XY' \cos XZ') & -3L(i \cos XY' \cos YZ' - \cos XZ' \cos YY') & -3Li \cos XY' \cos ZZ' \\ -6(i \cos XY' \cos YY' + \cos XZ' \cos YZ') & -6(i \cos^2 YY' + \cos^2 YZ') & -6 \cos YZ' \cos ZZ' & -3L(i \cos XZ' \cos YY' - \cos XY' \cos YZ') & -3L(i \cos YY' \cos YZ' - \cos YY' \cos YZ') & -3Li \cos YY' \cos ZZ' \\ -6 \cos XZ' \cos ZZ' & -6 \cos YZ' \cos ZZ' & -6 \cos^2 ZZ' & 3L \cos XY' \cos ZZ' & 3L \cos YY' \cos ZZ' & 0 \\ 3L(i \cos XY' \cos XZ' - \cos XY' \cos XZ') & 3L(i \cos XZ' \cos YY' - \cos XY' \cos YZ') & -3L \cos XY' \cos ZZ' & -\frac{st}{2} Lx^2 + L^2(\cos^2 XY' + i \cos^2 XZ') & -\frac{st}{2} Lx Ly + L^2(\cos XY' \cos YY' + i \cos XZ' \cos YZ') & -\frac{st}{2} Lx Lz + L^2 i \cos XZ' \cos ZZ' \\ 3L(i \cos XY' \cos YZ' - \cos XZ' \cos YY') & 3L(i \cos YY' \cos YZ' - \cos YY' \cos YZ') & -3L \cos YY' \cos ZZ' & -\frac{st}{2} Lx Ly + L^2(\cos XY' \cos YY' + i \cos XZ' \cos YZ') & -\frac{st}{2} Ly^2 + L^2(\cos^2 YY' + i \cos^2 YZ') & -\frac{st}{2} Ly Lz + L^2 i \cos YZ' \cos ZZ' \\ 3Li \cos XY' \cos ZZ' & 3Li \cos YY' \cos ZZ' & 0 & -\frac{st}{2} Lx Lz + L^2 i \cos XZ' \cos ZZ' & -\frac{st}{2} Ly Lz + L^2 i \cos YZ' \cos ZZ' & -\frac{st}{2} Lz^2 + L^2 i \cos^2 ZZ' \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{2r}{L^3} \begin{pmatrix} 6(i \cos^2 XY' + \cos^2 XZ') & 6(i \cos XY' \cos YY' + \cos XZ' \cos YZ') & 6 \cos XZ' \cos ZZ' & -3L(i \cos XY' \cos XZ' - \cos XY' \cos XZ') & -3L(i \cos XY' \cos YZ' - \cos XZ' \cos YY') & -3Li \cos XY' \cos ZZ' \\ 6(i \cos XY' \cos YY' + \cos XZ' \cos YZ') & 6(i \cos^2 YY' + \cos^2 YZ') & 6 \cos YZ' \cos ZZ' & -3L(i \cos XZ' \cos YY' - \cos XY' \cos YZ') & -3L(i \cos YY' \cos YZ' - \cos YY' \cos YZ') & -3Li \cos YY' \cos ZZ' \\ 6 \cos XZ' \cos ZZ' & 6 \cos YZ' \cos ZZ' & 6 \cos^2 ZZ' & 3L \cos XY' \cos ZZ' & 3L \cos YY' \cos ZZ' & 0 \\ -3L(i \cos XY' \cos XZ' - \cos XY' \cos XZ') & -3L(i \cos XZ' \cos YY' - \cos XY' \cos YZ') & 3L \cos XY' \cos ZZ' & \frac{st}{2} Lx^2 + 2L^2(\cos^2 XY' + i \cos^2 XZ') & \frac{st}{2} Lx Ly + 2L^2(\cos XY' \cos YY' + i \cos XZ' \cos YZ') & \frac{st}{2} Lx Lz + 2L^2 i \cos XZ' \cos ZZ' \\ -3L(i \cos XY' \cos YZ' - \cos XZ' \cos YY') & -3L(i \cos YY' \cos YZ' - \cos YY' \cos YZ') & 3L \cos YY' \cos ZZ' & \frac{st}{2} Lx Ly + 2L^2(\cos XY' \cos YY' + i \cos XZ' \cos YZ') & \frac{st}{2} Ly^2 + 2L^2(\cos^2 YY' + i \cos^2 YZ') & \frac{st}{2} Ly Lz + 2L^2 i \cos YZ' \cos ZZ' \\ -3Li \cos XY' \cos ZZ' & -3Li \cos YY' \cos ZZ' & 0 & \frac{st}{2} Lx Lz + 2L^2 i \cos XZ' \cos ZZ' & \frac{st}{2} Ly Lz + 2L^2 i \cos YZ' \cos ZZ' & \frac{st}{2} Lz^2 + 2L^2 i \cos^2 ZZ' \end{pmatrix}$$

[4.47]

4.2.2.-Matriz de Rigidez a la Flexotorsión para barra con un eje principal de inercia y directriz horizontales.- Introduciendo en las anteriores submatrices los valores ya conocidos dados en [3.15] para este tipo particular de barra:

$$\cos XZ' = \cos YZ' = \cos ZX' = \cos ZY' = L_z = 0$$

$$\cos ZZ' = 1$$

se obtiene

$$\mathbf{M}_{ii} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 6i \cos^2 XY' & 6i \cos XY' \cos YY' & 0 & 0 & 0 & 3iL \cos XY' \\ 6i \cos XY' \cos YY' & 6i \cos^2 YY' & 0 & 0 & 0 & 3iL \cos YY' \\ 0 & 0 & 6 & -3L \cos XY' & -3L \cos YY' & 0 \\ 0 & 0 & -3L \cos XY' & \frac{st}{2} L_x^2 + 2L^2 \cos^2 XY' & \frac{st}{2} L_x L_y + 2L^2 \cos XY' \cos YY' & 0 \\ 0 & 0 & -3L \cos YY' & \frac{st}{2} L_x L_y + 2L^2 \cos XY' \cos YY' & \frac{st}{2} L_y^2 + 2L^2 \cos^2 YY' & 0 \\ 3iL \cos XY' & 3iL \cos YY' & 0 & 0 & 0 & 2iL^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} -6i \cos^2 XY' & -6i \cos XY' \cos YY' & 0 & 0 & 0 & 3iL \cos XY' \\ -6i \cos XY' \cos YY' & -6i \cos^2 YY' & 0 & 0 & 0 & 3iL \cos YY' \\ 0 & 0 & -6 & -3L \cos XY' & -3L \cos YY' & 0 \\ 0 & 0 & 3L \cos XY' & -\frac{st}{2} L_x^2 + L^2 \cos^2 XY' & -\frac{st}{2} L_x L_y + L^2 \cos XY' \cos YY' & 0 \\ 0 & 0 & 3L \cos YY' & -\frac{st}{2} L_x L_y + L^2 \cos XY' \cos YY' & -\frac{st}{2} L_y^2 + L^2 \cos^2 YY' & 0 \\ -3iL \cos XY' & -3iL \cos YY' & 0 & 0 & 0 & iL^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{ji} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} -6i \cos^2 XY' & -6i \cos XY' \cos YY' & 0 & 0 & 0 & -3iL \cos XY' \\ -6i \cos XY' \cos YY' & -6i \cos^2 YY' & 0 & 0 & 0 & -3iL \cos YY' \\ 0 & 0 & -6 & 3L \cos XY' & 3L \cos YY' & 0 \\ 0 & 0 & -3L \cos XY' & -\frac{st}{2} L_x^2 + L^2 \cos^2 XY' & -\frac{st}{2} L_x L_y + L^2 \cos XY' \cos YY' & 0 \\ 0 & 0 & -3L \cos YY' & -\frac{st}{2} L_x L_y + L^2 \cos XY' \cos YY' & -\frac{st}{2} L_y^2 + L^2 \cos^2 YY' & 0 \\ 3iL \cos XY' & 3iL \cos YY' & 0 & 0 & 0 & iL^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{jj} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 6i \cos^2 XY' & 6i \cos XY' \cos YY' & 0 & 0 & 0 & -3iL \cos XY' \\ 6i \cos XY' \cos YY' & 6i \cos^2 YY' & 0 & 0 & 0 & -3iL \cos YY' \\ 0 & 0 & 6 & 3L \cos XY' & 3L \cos YY' & 0 \\ 0 & 0 & 3L \cos XY' & \frac{st}{2} L_x^2 + 2L^2 \cos^2 XY' & \frac{st}{2} L_x L_y + 2L^2 \cos XY' \cos YY' & 0 \\ 0 & 0 & 3L \cos YY' & \frac{st}{2} L_x L_y + 2L^2 \cos XY' \cos YY' & \frac{st}{2} L_y^2 + 2L^2 \cos^2 YY' & 0 \\ -3iL \cos XY' & -3iL \cos YY' & 0 & 0 & 0 & 2iL^2 \end{bmatrix}$$

[4.48]

Pero, por otra parte, entre los cosenos directores se dan las siguientes relaciones:

$$\cos^2 XX' + \cos^2 YX' = 1$$

$$\cos^2 XY' + \cos^2 YY' = 1$$

$$\cos XX' \cos XY' + \cos YX' \cos YY' = 0$$

[4.49]

de la última igualdad se tiene

$$\cos XX' \cos XY' = -\cos YX' \cos YY'$$

y elevando al cuadrado ambos miembros:

$$\cos^2 XX' \cos^2 XY' = \cos^2 YX' \cos^2 YY' \quad [4.50]$$

De las dos primeras ecuaciones de [4.49]:

$$\cos^2 YX' = 1 - \cos^2 XX'$$

$$\cos^2 XY' = 1 - \cos^2 YY'$$

y sustituyendo estos valores en [4.50] y operando:

$$\cos^2 XX' (1 - \cos^2 YY') = \cos^2 YY' (1 - \cos^2 XX')$$

$$\cos^2 XX' - \cos^2 XX' \cos^2 YY' = \cos^2 YY' - \cos^2 XX' \cos^2 YY'$$

$$\cos^2 XX' = \cos^2 YY'$$

es decir

$$\cos YY' = \cos XX' = \frac{L_x}{L} \quad [4.51]$$

Por último, sustituyendo [4.51] en la tercera de [4.49] se tiene que

$$\cos XX' \cos XY' + \cos YX' \cos XX' = 0$$

por lo que

$$\cos XY' + \cos YX' = 0$$

y, por lo tanto

$$\cos XY' = -\cos YX' = -\frac{L_y}{L} \quad [4.52]$$

Introduciendo en las ecuaciones de sollicitación dadas por las submatrices de [4.48] los valores dados por [4.51] y [4.52] y desarrollando una a una dichas ecuaciones se tendrá:

-componentes de fuerza en el extremo i:

• en el eje OX :

$$X_i = \frac{2r}{L^3} \left[6i \cos^2 XY'(u_i - u_j) + 6i \cos XY' \cos YY'(v_i - v_j) + 3iL \cos XY'(\gamma_i + \gamma_j) \right]$$

$$X_i = \frac{2r}{L^3} \left[6i \left(\frac{-L_y}{L} \right)^2 (u_i - u_j) - 6i \frac{L_y}{L} \frac{L_x}{L} (v_i - v_j) - 3iL \frac{L_y}{L} (\gamma_i + \gamma_j) \right] \quad [4.53]$$

Ahora bien, para una barra horizontal, la condición de inelongabilidad [4.10] queda reducida a la siguiente expresión (pues $\cos ZX'=0$):

$$\cos XX'(u_i - u_j) + \cos YX'(v_i - v_j) = 0$$

que, debido a [4.51] y [4.52] toma la forma

$$L_x(u_i - u_j) + L_y(v_i - v_j) = 0$$

y de aquí:

$$L_y(v_i - v_j) = -L_x(u_i - u_j) \quad [4.54]$$

Sustituyendo [4.54] en [4.53] y operando:

$$X_i = \frac{2r}{L^3} \left[6i \left(\frac{-L_y}{L} \right)^2 (u_i - u_j) + 6i \frac{L_x}{L^2} L_x(u_i - u_j) - 3iL \frac{L_y}{L} (\gamma_i + \gamma_j) \right]$$

$$X_i = \frac{2r}{L^3} \left[6i \frac{L_x^2 + L_y^2}{L^2} (u_i - u_j) - 3iL \frac{L_y}{L} (\gamma_i + \gamma_j) \right]$$

por lo que, finalmente:

$$X_i = \frac{2r}{L^3} \left[6i(u_i - u_j) - 3iL_y(\gamma_i + \gamma_j) \right] \quad [4.55]$$

• en el eje OY:

$$Y_i = \frac{2r}{L^3} \left[6i \cos XY' \cos YY'(u_i - u_j) + 6i \cos^2 YY'(v_i - v_j) + 3iL \cos YY'(\gamma_i + \gamma_j) \right]$$

$$Y_i = \frac{2r}{L^3} \left[6i \frac{-L_y}{L} \frac{L_x}{L} (u_i - u_j) + 6i \left(\frac{L_x}{L} \right)^2 (v_i - v_j) + 3iL \frac{L_x}{L} (\gamma_i + \gamma_j) \right]$$

y, de acuerdo con [4.54]:

$$Y_i = \frac{2r}{L^3} \left[6i \frac{L_y}{L} L_y (v_i - v_j) + 6i \left(\frac{L_x}{L} \right)^2 (v_i - v_j) + 3iL \frac{L_x}{L} (\gamma_i + \gamma_j) \right]$$

$$Y_i = \frac{2r}{L^3} \left[6i \frac{L_x^2 + L_y^2}{L^2} (v_i - v_j) + 3i L \frac{L_x}{L} (\gamma_i + \gamma_j) \right]$$

es decir:

$$Y_i = \frac{2r}{L^3} \left[6i (v_i - v_j) + 3i L_x (\gamma_i + \gamma_j) \right] \quad [4.56]$$

•en el eje OZ:

$$Z_i = \frac{2r}{L^3} \left[6(w_i - w_j) - 3L \cos XY' (\alpha_i + \alpha_j) - 3L \cos YY' (\beta_i + \beta_j) \right]$$

$$Z_i = \frac{2r}{L^3} \left[6(w_i - w_j) - 3L \frac{-L_y}{L} (\alpha_i + \alpha_j) - 3L \frac{L_x}{L} (\beta_i + \beta_j) \right]$$

y por lo tanto:

$$Z_i = \frac{2r}{L^3} \left[6(w_i - w_j) + 3L_y (\alpha_i + \alpha_j) - 3L_x (\beta_i + \beta_j) \right] \quad [4.57]$$

- Componentes de momentos en el extremo i:

•en el eje OX

$$\begin{aligned} M_{xi} = \frac{2r}{L^3} & \left[-3L \cos XY' (w_i - w_j) + \left(\frac{st}{2} L_x^2 + 2L^2 \cos^2 XY' \right) \alpha_i + \right. \\ & \left. + \left(\frac{st}{2} L_x L_y + 2L^2 (\cos XY' \cos YY') \right) \beta_i - \right. \\ & \left. - \left(\frac{st}{2} L_x^2 - L^2 \cos^2 XY' \right) \alpha_j - \right. \\ & \left. - \left(\frac{st}{2} L_x L_y - L^2 \cos XY' \cos YY' \right) \beta_j \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xi} = \frac{2r}{L^3} & \left[-3L \frac{-L_y}{L} (w_i - w_j) + \left(\frac{st}{2} L_x^2 + 2L^2 \frac{(-L_y)^2}{L^2} \right) \alpha_i + \right. \\ & \left. + \left(\frac{st}{2} L_x L_y + 2L^2 \frac{-L_y L_x}{L L} \right) \beta_i - \right. \\ & \left. - \left(\frac{st}{2} L_x^2 - L^2 \frac{(-L_y)^2}{L^2} \right) \alpha_j - \right. \\ & \left. - \left(\frac{st}{2} L_x L_y - L^2 \frac{-L_y L_x}{L L} \right) \beta_j \right] \end{aligned}$$

operando

$$M_{Xi} = \frac{2r}{L^3} \left[3L_y(w_i - w_j) + \left(\frac{st}{2} L_x^2 + 2L_y^2 \right) \alpha_i + \left(\frac{st}{2} L_x L_y - 2L_x L_y \right) \beta_i - \right. \\ \left. - \left(\frac{st}{2} L_x^2 - L_y^2 \right) \alpha_j - \left(\frac{st}{2} L_x L_y + L_x L_y \right) \beta_j \right]$$

y sacando factores comunes:

$$M_{Xi} = \frac{2r}{L^3} \left[3L_y(w_i - w_j) + \left(\frac{st}{2} L_x^2 + 2L_y^2 \right) \alpha_i + \frac{st-4}{2} L_x L_y \beta_i - \right. \\ \left. - \left(\frac{st}{2} L_x^2 - L_y^2 \right) \alpha_j - \frac{st+2}{2} L_x L_y \beta_j \right] \quad [4.58]$$

•en el eje OY:

$$M_{Yi} = \frac{2r}{L^3} \left[-3L \cos YY'(w_i - w_j) + \left(\frac{st}{2} L_x L_y + 2L^2 \cos XY' \cos YY' \right) \alpha_i + \right. \\ \left. + \left(\frac{st}{2} L_y^2 + 2L^2 \cos^2 YY' \right) \beta_i - \left(\frac{st}{2} L_x L_y - L^2 \cos XY' \cos YY' \right) \alpha_j - \right. \\ \left. - \left(\frac{st}{2} L_y^2 - L^2 \cos^2 YY' \right) \beta_j \right]$$

$$M_{Yi} = \frac{2r}{L^3} \left[-3L \frac{L_x}{L} (w_i - w_j) + \left(\frac{st}{2} L_x L_y + 2L^2 \frac{-L_y}{L} \frac{L_x}{L} \right) \alpha_i + \left(\frac{st}{2} L_y^2 + 2L^2 \frac{L_x^2}{L^2} \right) \beta_i - \right. \\ \left. - \left(\frac{st}{2} L_x L_y - L^2 \frac{-L_y}{L} \frac{L_x}{L} \right) \alpha_j - \left(\frac{st}{2} L_y^2 - L^2 \frac{L_x^2}{L^2} \right) \beta_j \right]$$

simplificando

$$M_{Yi} = \frac{2r}{L^3} \left[-3L_x (w_i - w_j) + \left(\frac{st}{2} L_x L_y - 2L_x L_y \right) \alpha_i + \left(\frac{st}{2} L_y^2 + 2L_x^2 \right) \beta_i - \right. \\ \left. - \left(\frac{st}{2} L_x L_y + L_x L_y \right) \alpha_j - \left(\frac{st}{2} L_y^2 - L_x^2 \right) \beta_j \right]$$

y extrayendo factores comunes

$$M_{Yi} = \frac{2r}{L^3} \left[-3L_x (w_i - w_j) + \frac{st-4}{2} L_x L_y \alpha_i + \left(\frac{st}{2} L_y^2 + 2L_x^2 \right) \beta_i - \right. \\ \left. - \frac{st+2}{2} L_x L_y \alpha_j - \left(\frac{st}{2} L_y^2 - L_x^2 \right) \beta_j \right] \quad [4.59]$$

•en el eje OZ:

$$M_{Zi} = \frac{2r}{L^3} \left[3iL \cos XY'(u_i - u_j) + 3iL \cos YY'(v_i - v_j) + iL^2(2\gamma_i + \gamma_j) \right]$$

$$M_{Zi} = \frac{2r}{L^3} \left[3iL \frac{-L_y}{L}(u_i - u_j) + 3iL \frac{L_x}{L}(v_i - v_j) + iL^2(2\gamma_i + \gamma_j) \right]$$

y simplificando

$$M_{Zi} = \frac{2r}{L^3} \left[-3iL_y(u_i - u_j) + 3iL_x(v_i - v_j) + iL^2(2\gamma_i + \gamma_j) \right] \quad [4.60]$$

- Componentes de fuerza en el extremo j:

Puesto que la barra no está cargada, por equilibrio de fuerzas en la dirección de cada eje coordenado, las componentes de fuerza en este extremo se calculan directamente en función de las correspondientes del extremo i ya deducidas, recordando que

$$X_j = -X_i \quad Y_j = -Y_i \quad Z_j = -Z_i$$

por tanto

$$X_j = \frac{2r}{L^3} \left[-6i(u_i - u_j) + 3iL_y(\gamma_i + \gamma_j) \right] \quad [4.61]$$

$$Y_j = \frac{2r}{L^3} \left[-6i(v_i - v_j) - 3iL_x(\gamma_i + \gamma_j) \right] \quad [4.62]$$

$$Z_j = \frac{2r}{L^3} \left[-6(w_i - w_j) - 3L_y(\alpha_i + \alpha_j) + 3L_x(\beta_i + \beta_j) \right] \quad [4.63]$$

- Componentes de momentos en el extremo j:

•en el eje OX :

$$\begin{aligned} M_{Xj} = & \frac{2r}{L^3} \left[-3L \cos XY'(w_i - w_j) - \left(\frac{st}{2} L_x^2 + L^2 \cos^2 XY' \right) \alpha_i - \right. \\ & - \left(\frac{st}{2} L_x L_y + L^2 (\cos XY' \cos YY') \right) \beta_i + \\ & + \left(\frac{st}{2} L_x^2 + 2L^2 \cos^2 XY' \right) \alpha_j + \\ & \left. + \left(\frac{st}{2} L_x L_y + 2L^2 \cos XY' \cos YY' \right) \beta_j \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{xj} = & \frac{2r}{L^3} \left[-3L \frac{-L_y}{L} (w_i - w_j) - \left(\frac{st}{2} L_x^2 - L^2 \frac{(-L_y)^2}{L^2} \right) \alpha_i + \right. \\
& + \left(\frac{st}{2} L_x L_y + L^2 \frac{-L_y L_x}{L L} \right) \beta_i + \\
& + \left(\frac{st}{2} L_x^2 + 2L^2 \frac{(-L_y)^2}{L^2} \right) \alpha_j + \\
& \left. + \left(\frac{st}{2} L_x L_y + 2L^2 \frac{-L_y L_x}{L L} \right) \beta_j \right]
\end{aligned}$$

operando

$$\begin{aligned}
M_{xj} = & \frac{2r}{L^3} \left[3L_y (w_i - w_j) - \left(\frac{st}{2} L_x^2 + L_y^2 \right) \alpha_i - \left(\frac{st}{2} L_x L_y + L_x L_y \right) \beta_i + \right. \\
& \left. + \left(\frac{st}{2} L_x^2 + 2L_y^2 \right) \alpha_j + \left(\frac{st}{2} L_x L_y - 2L_x L_y \right) \beta_j \right]
\end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned}
M_{xj} = & \frac{2r}{L^3} \left[3L_y (w_i - w_j) - \left(\frac{st}{2} L_x^2 - L_y^2 \right) \alpha_i - \frac{st+2}{2} L_x L_y \beta_i + \right. \\
& \left. + \left(\frac{st}{2} L_x^2 + 2L_y^2 \right) \alpha_j + \frac{st-4}{2} L_x L_y \beta_j \right]
\end{aligned} \tag{4.64}$$

•en el eje OY:

$$\begin{aligned}
M_{yj} = & \frac{2r}{L^3} \left[-3L \cos YY' (w_i - w_j) - \left(\frac{st}{2} L_x L_y - L^2 \cos XY' \cos YY' \right) \alpha_i - \right. \\
& - \left(\frac{st}{2} L_y^2 - L^2 \cos^2 YY' \right) \beta_i + \left(\frac{st}{2} L_x L_y + 2L^2 \cos XY' \cos YY' \right) \alpha_j + \\
& \left. + \left(\frac{st}{2} L_y^2 + 2L^2 \cos^2 YY' \right) \beta_j \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{yj} = & \frac{2r}{L^3} \left[-3L \frac{L_x}{L} (w_i - w_j) - \left(\frac{st}{2} L_x L_y - L^2 \frac{-L_y L_x}{L L} \right) \alpha_i - \left(\frac{st}{2} L_y^2 - L^2 \frac{L_x^2}{L^2} \right) \beta_i + \right. \\
& \left. + \left(\frac{st}{2} L_x L_y + 2L^2 \frac{-L_y L_x}{L L} \right) \alpha_j + \left(\frac{st}{2} L_y^2 + 2L^2 \frac{L_x^2}{L^2} \right) \beta_j \right]
\end{aligned}$$

simplificando

$$M_{Yj} = \frac{2r}{L^3} \left[-3L_x(w_i - w_j) - \left(\frac{st}{2}L_xL_y + 2L_xL_y \right) \alpha_i - \left(\frac{st}{2}L_y^2 - L_x^2 \right) \beta_i + \right. \\ \left. + \left(\frac{st}{2}L_xL_y - 2L_xL_y \right) \alpha_j + \left(\frac{st}{2}L_y^2 + 2L_x^2 \right) \beta_j \right]$$

es decir:

$$M_{Yj} = \frac{2r}{L^3} \left[-3L_x(w_i - w_j) - \frac{st+2}{2}L_xL_y \alpha_i - \left(\frac{st}{2}L_y^2 - L_x^2 \right) \beta_i + \right. \\ \left. + \frac{st-4}{2}L_xL_y \alpha_j + \left(\frac{st}{2}L_y^2 + 2L_x^2 \right) \beta_j \right] \quad [4.65]$$

• y, por último, en el eje OZ:

$$M_{Zj} = \frac{2r}{L^3} \left[3iL \cos XY'(u_i - u_j) + 3iL \cos YY'(v_i - v_j) + iL^2(\gamma_i + 2\gamma_j) \right]$$

$$M_{Zj} = \frac{2r}{L^3} \left[3iL \frac{-L_y}{L}(u_i - u_j) + 3iL \frac{L_x}{L}(v_i - v_j) + iL^2(\gamma_i + 2\gamma_j) \right]$$

y simplificando:

$$M_{Zj} = \frac{2r}{L^3} \left[-3iL_y(u_i - u_j) + 3iL_x(v_i - v_j) + iL^2(\gamma_i + 2\gamma_j) \right] \quad [4.66]$$

Ordenando en formato matricial las anteriores ecuaciones [4.61] a [4.66], para una barra con ejes X' e Y' horizontales, las submatrices de rigidez a la flexotorsión quedan reducidas a su mínima expresión en la forma:

$$M_{ii} = \frac{2r}{L^3} \left[\begin{array}{ccc|cc} 6i & 0 & 0 & 0 & 0 & -3iL_y \\ 0 & 6i & 0 & 0 & 0 & 3iL_x \\ 0 & 0 & 6 & 3L_y & -3L_x & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3L_y & \frac{st}{2}L_x^2 + 2L_y^2 & \frac{st-4}{2}L_xL_y & 0 \\ 0 & 0 & -3L_x & \frac{st-4}{2}L_xL_y & \frac{st}{2}L_y^2 + 2L_x^2 & 0 \\ -3iL_y & 3iL_x & 0 & 0 & 0 & 2iL^2 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{2r}{L^3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -6i & 0 & 0 & 0 & 0 & -3iL_y \\ 0 & -6i & 0 & 0 & 0 & 3iL_x \\ 0 & 0 & -6 & 3L_y & -3L_x & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3L_y & -\frac{st}{2}L_x^2 + L_y^2 & -\frac{st+2}{2}L_xL_y & 0 \\ 0 & 0 & -3L_x & -\frac{st+2}{2}L_xL_y & -\frac{st}{2}L_y^2 + L_x^2 & 0 \\ 3iL_y & -3iL_x & 0 & 0 & 0 & iL^2 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{M}_{ji} = \frac{2r}{L^3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -6i & 0 & 0 & 0 & 0 & 3iL_y \\ 0 & -6i & 0 & 0 & 0 & -3iL_x \\ 0 & 0 & -6 & -3L_y & 3L_x & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3L_y & -\frac{st}{2}L_x^2 + L_y^2 & -\frac{st+2}{2}L_xL_y & 0 \\ 0 & 0 & -3L_x & -\frac{st+2}{2}L_xL_y & -\frac{st}{2}L_y^2 + L_x^2 & 0 \\ -3iL_y & 3iL_x & 0 & 0 & 0 & iL^2 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{M}_{jj} = \frac{2r}{L^3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6i & 0 & 0 & 0 & 0 & 3iL_y \\ 0 & 6i & 0 & 0 & 0 & -3iL_x \\ 0 & 0 & 6 & -3L_y & 3L_x & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3L_y & \frac{st}{2}L_x^2 + 2L_y^2 & \frac{st-4}{2}L_xL_y & 0 \\ 0 & 0 & 3L_x & \frac{st-4}{2}L_xL_y & \frac{st}{2}L_y^2 + 2L_x^2 & 0 \\ 3iL_y & -3iL_x & 0 & 0 & 0 & 2iL^2 \end{array} \right]$$

[4.67]

Es de resaltar la importante diferencia que estas submatrices presentan frente a sus homólogas del Método Clásico expuestas en [3.16] desde el punto de vista del número de elementos no nulos que cada una de ellas contiene.

4.2.3.-Matriz de Rigidez a la Flexotorsión para barra vertical.- Introduciendo en [4.48] las condiciones expresadas en [3.17] se obtiene las siguientes submatrices correspondientes a una barra cuya directriz tiene la misma orientación y sentido que el eje global OZ y orientación arbitraria de sus ejes principales de inercia:

$$\mathbf{M}_{ii} = \frac{2r}{L^3} \begin{pmatrix} 6(i \cos^2 XY' + \cos^2 YY') & 6 \cos XY' \cos YY' (i-1) & 0 & -3L \cos XY' \cos YY' (i-1) & 3L(i \cos^2 XY' + \cos^2 YY') & 0 \\ 6 \cos XY' \cos YY' (i-1) & 6(i \cos^2 YY' + \cos^2 XY') & 0 & -3L(i \cos^2 YY' + \cos^2 XY') & 3L \cos XY' \cos YY' (i-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3L \cos XY' \cos YY' (i-1) & -3L(i \cos^2 YY' + \cos^2 XY') & 0 & 2L^2(i \cos^2 YY' + \cos^2 XY') & -2L^2 \cos XY' \cos YY' (i-1) & 0 \\ 3L(i \cos^2 XY' + \cos^2 YY') & 3L \cos XY' \cos YY' (i-1) & 0 & -2L^2 \cos XY' \cos YY' (i-1) & 2L^2(i \cos^2 XY' + \cos^2 YY') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{st}{2} L^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{2r}{L^3} \begin{pmatrix} -6(i \cos^2 XY' + \cos^2 YY') & -6 \cos XY' \cos YY' (i-1) & 0 & -3L \cos XY' \cos YY' (i-1) & 3L(i \cos^2 XY' + \cos^2 YY') & 0 \\ -6 \cos XY' \cos YY' (i-1) & -6(i \cos^2 YY' + \cos^2 XY') & 0 & -3L(i \cos^2 YY' + \cos^2 XY') & 3L \cos XY' \cos YY' (i-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3L \cos XY' \cos YY' (i-1) & 3L(i \cos^2 YY' + \cos^2 XY') & 0 & L^2(i \cos^2 YY' + \cos^2 XY') & -L^2 \cos XY' \cos YY' (i-1) & 0 \\ -3L(i \cos^2 XY' + \cos^2 YY') & -3L \cos XY' \cos YY' (i-1) & 0 & -L^2 \cos XY' \cos YY' (i-1) & L^2(i \cos^2 XY' + \cos^2 YY') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{st}{2} L^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{ji} = \frac{2r}{L^3} \begin{pmatrix} -6(i \cos^2 XY' + \cos^2 YY') & -6 \cos XY' \cos YY' (i-1) & 0 & 3L \cos XY' \cos YY' (i-1) & -3L(i \cos^2 XY' + \cos^2 YY') & 0 \\ -6 \cos XY' \cos YY' (i-1) & -6(i \cos^2 YY' + \cos^2 XY') & 0 & 3L(i \cos^2 YY' + \cos^2 XY') & -3L \cos XY' \cos YY' (i-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3L \cos XY' \cos YY' (i-1) & -3L(i \cos^2 YY' + \cos^2 XY') & 0 & L^2(i \cos^2 YY' + \cos^2 XY') & -L^2 \cos XY' \cos YY' (i-1) & 0 \\ 3L(i \cos^2 XY' + \cos^2 YY') & 3L \cos XY' \cos YY' (i-1) & 0 & -L^2 \cos XY' \cos YY' (i-1) & L^2(i \cos^2 XY' + \cos^2 YY') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{st}{2} L^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{jj} = \frac{2r}{L^3} \begin{pmatrix} 6(i \cos^2 XY' + \cos^2 YY') & 6 \cos XY' \cos YY' (i-1) & 0 & 3L \cos XY' \cos YY' (i-1) & -3L(i \cos^2 XY' + \cos^2 YY') & 0 \\ 6 \cos XY' \cos YY' (i-1) & 6(i \cos^2 YY' + \cos^2 XY') & 0 & 3L(i \cos^2 YY' + \cos^2 XY') & 3L \cos XY' \cos YY' (i-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3L \cos XY' \cos YY' (i-1) & 3L(i \cos^2 YY' + \cos^2 XY') & 0 & 2L^2(i \cos^2 YY' + \cos^2 XY') & -2L^2 \cos XY' \cos YY' (i-1) & 0 \\ -3L(i \cos^2 XY' + \cos^2 YY') & 3L \cos XY' \cos YY' (i-1) & 0 & -2L^2 \cos XY' \cos YY' (i-1) & 2L^2(i \cos^2 XY' + \cos^2 YY') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{st}{2} L^2 \end{pmatrix}$$

[4.68]

4.2.4.-Matriz de Rigidez a la Flexotorsión para barra vertical de sección cuadrada.- Es muy habitual que los pilares sean de sección cuadrada, por lo tanto, de [4.20] se tiene que $i=1$. Pero además se establece la relación

$$\cos^2 XY' + \cos^2 YY' = 1$$

por lo que, introduciendo estos valores en la anteriores submatrices se tendrá, para la barra vertical de sección cuadrada:

$$\mathbf{M} = \frac{2r}{L^3} \left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
 6 & 0 & 0 & 0 & 3L & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 3L & 0 \\
 0 & 6 & 0 & -3L & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & -3L & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -3L & 0 & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 3L & 0 & L^2 & 0 & 0 \\
 3L & 0 & 0 & 0 & 2L^2 & 0 & -3L & 0 & 0 & 0 & L^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{stL^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{stL^2}{2} \\
 \hline
 -6 & 0 & 0 & 0 & -3L & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -3L & 0 \\
 0 & -6 & 0 & 3L & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 3L & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -3L & 0 & L^2 & 0 & 0 & 0 & 3L & 0 & 2L^2 & 0 & 0 \\
 3L & 0 & 0 & 0 & L^2 & 0 & -3L & 0 & 0 & 0 & 2L^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{stL^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{stL^2}{2}
 \end{array} \right] \quad [4.69]$$

Por otra parte, si se toma el valor teórico

$$I_{x'} = I_{y'} + I_{z'} = 2I_{y'}$$

de [4.24] se desprende que

$$s = \frac{2I_{y'}}{I_{y'}} = 2 \quad [4.70]$$

y la matriz anterior quedará, definitivamente, en la forma

$$\mathbf{M} = \frac{2r}{L^3} \left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
 6 & 0 & 0 & 0 & 3L & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 3L & 0 \\
 0 & 6 & 0 & -3L & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & -3L & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -3L & 0 & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 3L & 0 & L^2 & 0 & 0 \\
 3L & 0 & 0 & 0 & 2L^2 & 0 & -3L & 0 & 0 & 0 & L^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & tL^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -tL^2 \\
 \hline
 -6 & 0 & 0 & 0 & -3L & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -3L & 0 \\
 0 & -6 & 0 & 3L & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 3L & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -3L & 0 & L^2 & 0 & 0 & 0 & 3L & 0 & 2L^2 & 0 & 0 \\
 3L & 0 & 0 & 0 & L^2 & 0 & -3L & 0 & 0 & 0 & 2L^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -tL^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & tL^2
 \end{array} \right] \quad [4.71]$$

4.2.5.- Matriz de Rigidez para barra perteneciente a un emparrillado.- Puesto

que en este tipo de estructuras no aparece el término EA, correspondiente a la rigidez axial

-como puede observarse en la matriz expresada en [3.19]- la matriz correspondiente al método que aquí se propone es la misma que la del Método Tradicional.

4.2.6 Matriz de Rigidez de la barra inelongable para estructuras de barras coplanarias.- De forma similar a como se procedió en el epígrafe 3.1.5, eliminando las filas/columnas 3, 4 y 5 de cada una de las submatrices indicadas en [4.67] se tiene

$$\mathbf{M}_{ii} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 6i & 0 & -3iL_y \\ 0 & 6i & 3iL_x \\ -3iL_y & 3iL_x & 2iL^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{ij} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} -6i & 0 & -3iL_y \\ 0 & -6i & 3iL_x \\ 3iL_y & -3iL_x & iL^2 \end{bmatrix} \quad [4.72]$$

$$\mathbf{M}_{ji} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} -6i & 0 & 3iL_y \\ 0 & -6i & -3iL_x \\ -3iL_y & 3iL_x & iL^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{jj} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 6i & 0 & 3iL_y \\ 0 & 6i & -3iL_x \\ 3iL_y & -3iL_x & 2iL^2 \end{bmatrix}$$

Pero recordando los valores de i y de r dados en [4.20] y [4.30], respectivamente, y extrayendo factores comunes, las submatrices anteriores que conforman la matriz de rigidez de la barra inelongable en el espacio de dos dimensiones será*

$$\mathbf{K} = \frac{6\bar{r}}{L^3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -L_y & -2 & 0 & -L_y \\ 0 & 2 & L_x & 0 & -2 & L_x \\ -L_y & L_x & \frac{2L^2}{3} & L_y & -L_x & \frac{L^2}{3} \\ \hline -2 & 0 & L_y & 2 & 0 & L_y \\ 0 & -2 & -L_x & 0 & 2 & -L_x \\ -L_y & L_x & \frac{L^2}{3} & L_y & -L_x & \frac{2L^2}{3} \end{bmatrix} \quad [4.73]$$

matriz que, por contar exclusivamente con términos de flexión, llamaremos en adelante Matriz de Rigidez a la Flexión en coordenadas globales, válida para cualquier dirección de la barra en el plano de la estructura y en donde, por ser paralelos los ejes Z y Z' , el parámetro \bar{r} vale

$$\bar{r} = \frac{EI_{z'}}{(EI_{z'})_0} = \frac{EI_z}{(EI_z)_0} \quad [4.74]$$

* Obsérvese la simplicidad de las submatrices frente a sus homólogas del Método Tradicional dadas en [3.21].

La expresión dada en [4.73] puede simplificarse aún más volviendo a introducir en ella la condición de inelongabilidad, que para el espacio bidimensional, como se sabe, se transforma en

$$(u_i - u_j) \cos XX' + (v_i - v_j) \cos YX' = 0$$

y eliminando $(u_i - u_j)$ en función de $(v_i - v_j)$ y viceversa, se obtienen, respectivamente, las expresiones siguientes

$$\mathbf{M} = \frac{6r}{L^3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\frac{L_y}{L_x} & -L_y & 0 & 2\frac{L_y}{L_x} & -L_y \\ 0 & 2 & L_x & 0 & -2 & L_x \\ 0 & \frac{L^2}{L_x} & \frac{2L^2}{3} & 0 & -\frac{L^2}{L_x} & \frac{L^2}{3} \\ \hline 0 & 2\frac{L_y}{L_x} & L_y & 0 & -2\frac{L_y}{L_x} & L_y \\ 0 & -2 & -L_x & 0 & 2 & -L_x \\ 0 & \frac{L^2}{L_x} & \frac{L^2}{3} & 0 & -\frac{L^2}{L_x} & \frac{2L^2}{3} \end{array} \right] \quad \mathbf{M} = \frac{6r}{L} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -L_y & -2 & 0 & -L_y \\ -2\frac{L_x}{L_y} & 0 & L_x & 2\frac{L_x}{L_y} & 0 & L_x \\ \frac{L^2}{L_y} & 0 & \frac{2L^2}{3} & \frac{L^2}{L_y} & 0 & \frac{L^2}{3} \\ \hline -2 & 0 & L_y & 2 & 0 & L_y \\ 2\frac{L_x}{L_y} & 0 & -L_x & -2\frac{L_x}{L_y} & 0 & -L_x \\ \frac{L^2}{L_y} & 0 & \frac{L^2}{3} & \frac{L^2}{L_y} & 0 & \frac{2L^2}{3} \end{array} \right]$$

Barra inclinada u horizontal Barra inclinada o vertical

[4.75]

la primera de ellas no válida para barras verticales pues, como se puede observar, existirían valores nulos en los denominadores, y la segunda no válida para barras horizontales por las mismas razones y que presentan la ventaja de presentar nulos 12 de sus 36 elementos, aunque pierden su simetría.

Además de esto, si ambos extremos de la barra inciden en nudos pertenecientes a extremos de soportes con continuidad hasta cimentación, lo que suele ocurrir en estructuras de edificación, los desplazamientos verticales de ambos extremos de barra serán nulos, por lo que [4.73] puede simplificarse para este tipo de barras haciendo nulas las columnas asociadas a este corrimiento, esto es la segunda y la quinta, por lo que, entonces quedará, en forma general:

$$\mathbf{K} = \frac{6r}{L^3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -L_y & -2 & 0 & -L_y \\ 0 & 0 & L_x & 0 & 0 & L_x \\ -L_y & 0 & \frac{2L^2}{3} & L_y & 0 & \frac{L^2}{3} \\ \hline -2 & 0 & L_y & 2 & 0 & L_y \\ 0 & 0 & -L_x & 0 & 0 & -L_x \\ -L_y & 0 & \frac{L^2}{3} & L_y & 0 & \frac{2L^2}{3} \end{array} \right] \quad [4.76]$$

válida para toda barra que cumpla dichas condiciones, independientemente de su orientación.

4.2.7.- Matriz de Rigidez de la barra inelongable para entramados planos.- Tal y como se expuso en el epígrafe 3.1.6, entendemos por entramado plano aquellas estructuras de barras contenidas en un mismo plano unidas rígidamente en sus extremos y en las cuales las direcciones de dichas barras son, exclusivamente, horizontales (vigas) o verticales (pilares), estos últimos con continuidad o sin ella hasta cimentación. De acuerdo con esto, para las vigas se cumplen que $L_y=0$ y $L_x=L$ y para los pilares $L_x=0$ y $L_y=L$, por lo que introduciendo estos valores en las ecuaciones [4.75] se tendrá

$$\mathbf{M}_{\text{viga}} = \frac{6r}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & L & 0 & -2 & L \\ 0 & L & \frac{2L^2}{3} & 0 & -L & \frac{L^2}{3} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -L & 0 & 2 & -L \\ 0 & L & \frac{L^2}{3} & 0 & -L & \frac{2L^2}{3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{\text{pilar}} = \frac{6r}{L^3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -L & -2 & 0 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -L & 0 & \frac{2L^2}{3} & L & 0 & \frac{L^2}{3} \\ -2 & 0 & L & 2 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L & 0 & \frac{L^2}{3} & L & 0 & \frac{2L^2}{3} \end{bmatrix} \quad [4.77]$$

Si, por último, los pilares tienen continuidad hasta cimentación, serán nulos los desplazamientos verticales de los nudos, por tanto pueden eliminarse las filas/columnas segunda y quinta asociadas a tales corrimientos, con lo que las anteriores quedarán en la forma

$$\mathbf{M}_{\text{viga}} = \frac{6r}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & \frac{2L^2}{3} & 0 & 0 & \frac{L^2}{3} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L & 0 & 0 & -L \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{3} & 0 & 0 & \frac{2L^2}{3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{\text{pilar}} = \frac{6r}{L^3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -L & -2 & 0 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -L & 0 & \frac{2L^2}{3} & L & 0 & \frac{L^2}{3} \\ -2 & 0 & L & 2 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L & 0 & \frac{L^2}{3} & L & 0 & \frac{2L^2}{3} \end{bmatrix} \quad [4.78]$$

más simples que sus homólogas del Método Clásico, pues en éste no pueden eliminarse los desplazamientos verticales debido a la elongabilidad de las barras.

4.3.- Matriz de conversión de la barra inelongable espacial. De acuerdo con lo expuesto en el epígrafe 3.2, para dar por concluido el cálculo de una estructura es preciso determinar las sollicitaciones de extremo de cada una de las barras que la conforman. Necesitamos, pues, las matrices de conversión que contemplen la hipótesis de inelongabilidad

que hemos adoptado. Para ello será suficiente introducir esta condición en la matriz de conversión ya determinada en dicho apartado para el método matricial tradicional. Desarrollando, pues, la primera ecuación de [3.24], tomando para \mathbf{K}^{conv} la matriz dada por [3.28], que corresponde al axil en el extremo i, se tendrá

$$X_i = \frac{EA}{L} [\cos XX'(u_i - u_j) + \cos YX'(v_i - v_j) + \cos ZX'(w_i - w_j)] \quad [4.79]$$

pero la expresión entre corchetes es nula, pues nuevamente no es más que la condición de inelongabilidad dada por [4.10], por lo que la componente en la dirección axial será nula cualesquiera que sean los valores de las componentes de corrimiento. Por la misma razón será también idénticamente nula la expresión del axil del extremo j de la barra genérica. La matriz de conversión para la barra inelongable tiene, pues, nulas la primera y séptima filas, lo que, de igual forma que en la matriz de rigidez, permite sacar factores comunes al haber desaparecido los términos en EA. Introduciendo, entonces, la normalización dada por [4.30] y los cambios de variable dados por [4.20], [4.24] y [4.26], la matriz de conversión para toda barra inelongable adquiere la forma

$$\mathbf{M}^{\text{conv}} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6i \cos XY' & 6i \cos YY' & 6i \cos ZY' & 3iL \cos XZ' & 3iL \cos YZ' & 3iL \cos ZZ' & -6i \cos XY' & -6i \cos YY' & -6i \cos ZY' & 3iL \cos XZ' & 3iL \cos YZ' & 3iL \cos ZZ' \\ 6i \cos XZ' & 6i \cos YZ' & 6i \cos ZZ' & -3L \cos XY' & -3L \cos YY' & -3L \cos ZY' & -6i \cos XZ' & -6i \cos YZ' & -6i \cos ZZ' & -3L \cos XZ' & -3L \cos YZ' & -3L \cos ZZ' \\ 0 & 0 & 0 & \frac{s_1^2}{2} L^2 \cos XX' & \frac{s_1^2}{2} L^2 \cos YX' & \frac{s_1^2}{2} L^2 \cos ZX' & 0 & 0 & 0 & -\frac{s_1^2}{2} L^2 \cos XX' & -\frac{s_1^2}{2} L^2 \cos YX' & -\frac{s_1^2}{2} L^2 \cos ZX' \\ -3L \cos XZ' & -3L \cos YZ' & -3L \cos ZZ' & 2L^2 \cos XY' & 2L^2 \cos YY' & 2L^2 \cos ZY' & 3L \cos XZ' & 3L \cos YZ' & 3L \cos ZZ' & L^2 \cos XY' & L^2 \cos YY' & L^2 \cos ZY' \\ 3iL \cos XY' & 3iL \cos YY' & 3iL \cos ZY' & 2iL^2 \cos XZ' & 2iL^2 \cos YZ' & 2iL^2 \cos ZZ' & -3iL \cos XY' & -3iL \cos YY' & -3iL \cos ZY' & iL^2 \cos XZ' & iL^2 \cos YZ' & iL^2 \cos ZZ' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6i \cos XY' & -6i \cos YY' & -6i \cos ZY' & -3iL \cos XZ' & -3iL \cos YZ' & -3iL \cos ZZ' & 6i \cos XY' & 6i \cos YY' & 6i \cos ZY' & -3iL \cos XZ' & -3iL \cos YZ' & -3iL \cos ZZ' \\ -6i \cos XZ' & -6i \cos YZ' & -6i \cos ZZ' & 3L \cos XY' & 3L \cos YY' & 3L \cos ZY' & 6i \cos XZ' & 6i \cos YZ' & 6i \cos ZZ' & 3L \cos XY' & 3L \cos YY' & 3L \cos ZY' \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{s_1^2}{2} L^2 \cos XX' & -\frac{s_1^2}{2} L^2 \cos YX' & -\frac{s_1^2}{2} L^2 \cos ZX' & 0 & 0 & 0 & \frac{s_1^2}{2} L^2 \cos XX' & \frac{s_1^2}{2} L^2 \cos YX' & \frac{s_1^2}{2} L^2 \cos ZX' \\ -3L \cos XZ' & -3L \cos YZ' & -3L \cos ZZ' & L^2 \cos XY' & L^2 \cos YY' & L^2 \cos ZY' & 3L \cos XZ' & 3L \cos YZ' & 3L \cos ZZ' & 2L^2 \cos XY' & 2L^2 \cos YY' & 2L^2 \cos ZY' \\ 3iL \cos XY' & 3iL \cos YY' & 3iL \cos ZY' & iL^2 \cos XZ' & iL^2 \cos YZ' & iL^2 \cos ZZ' & -3iL \cos XY' & -3iL \cos YY' & -3iL \cos ZY' & 2iL^2 \cos XZ' & 2iL^2 \cos YZ' & 2iL^2 \cos ZZ' \end{bmatrix} \quad [4.80]$$

Pero, de forma análoga a como se procedió para la determinación de las submatrices de rigidez, la expresión de la Matriz de Conversión [4.80] puede expresarse de forma más compacta valiéndonos de dichas submatrices, dadas en [4.39] y siguientes. En efecto, puesto que la Matriz de Conversión es aquella que permite obtener las componentes de fuerzas generalizadas de extremo referidas al sistema local -esto es, las solicitaciones- en función del vector de corrimientos de extremo referido a los ejes globales, puede escribirse, premultiplicando la ecuación [4.43] por \mathbf{R}^T , transpuesta de la matriz de rotación que

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^T \mathbf{s}_i &= \mathbf{s}'_i = \mathbf{R}^T \mathbf{M}_{ii} \mathbf{c}_i + \mathbf{R}^T \mathbf{M}_{ij} \mathbf{c}_j \\ \mathbf{R}^T \mathbf{s}_j &= \mathbf{s}'_j = \mathbf{R}^T \mathbf{M}_{ji} \mathbf{c}_i + \mathbf{R}^T \mathbf{M}_{jj} \mathbf{c}_j\end{aligned}\quad [4.81]$$

por lo que bastará con premultiplicar las submatrices de rigidez por dicha matriz \mathbf{R}^T para obtener las cuatro submatrices que conformarán la Matriz de Conversión buscada. Sustituyendo, pues, \mathbf{R}^T por su valor dado en [3.4] y las submatrices de Rigidez a la Flexotorsión dadas [4.39] y siguientes se tiene

$$\mathbf{M}_{ii}^{\text{conv}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{z} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z} \end{bmatrix} \frac{2r}{L^3} \left[\begin{array}{c|c} 6(\mathbf{i}\mathbf{y}^T\mathbf{y} + \mathbf{z}^T\mathbf{z}) & 3L(\mathbf{i}\mathbf{y}^T\mathbf{z} - \mathbf{z}^T\mathbf{y}) \\ \hline 3L(\mathbf{i}\mathbf{z}^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{z}) & \frac{stL^2}{2} \mathbf{x}^T\mathbf{x} + 2L^2(\mathbf{i}\mathbf{z}^T\mathbf{z} + \mathbf{y}^T\mathbf{y}) \end{array} \right] \quad [4.82]$$

producto matricial que queda reducido a la sencilla expresión

$$\mathbf{M}_{ii}^{\text{conv}} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 6\mathbf{i}\mathbf{y} & 3\mathbf{i}L\mathbf{z} \\ 6\mathbf{z} & -3L\mathbf{y} \\ \mathbf{0} & \frac{st}{2}L^2\mathbf{x} \\ -3L\mathbf{z} & 2L^2\mathbf{y} \\ 3\mathbf{i}L\mathbf{y} & 2\mathbf{i}L^2\mathbf{z} \end{bmatrix} \quad [4.83]$$

puesto que el producto de cualquier vector fila (\mathbf{x} , \mathbf{y} o \mathbf{z}) por el vector columna formado por el transpuesto de cada uno de los otros dos es nulo, mientras que el producto de cualquiera de ellos por el transpuesto de él mismo es la unidad.

Procediendo de la misma forma para los demás productos matriciales de [4.81]:

$$\mathbf{M}_{ij}^{\text{conv}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{z} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z} \end{bmatrix} \frac{2r}{L^3} \left[\begin{array}{c|c} -6(\mathbf{i}\mathbf{y}^T\mathbf{y} + \mathbf{z}^T\mathbf{z}) & 3L(\mathbf{i}\mathbf{y}^T\mathbf{z} - \mathbf{z}^T\mathbf{y}) \\ \hline -3L(\mathbf{i}\mathbf{z}^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{z}) & -\frac{stL^2}{2} \mathbf{x}^T\mathbf{x} + L^2(\mathbf{i}\mathbf{z}^T\mathbf{z} + \mathbf{y}^T\mathbf{y}) \end{array} \right] \quad [4.84]$$

$$\mathbf{M}_{ji}^{\text{conv}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{z} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z} \end{bmatrix} \frac{2r}{L^3} \left[\begin{array}{c|c} -6(i\mathbf{y}^T\mathbf{y} + \mathbf{z}^T\mathbf{z}) & -3L(i\mathbf{y}^T\mathbf{z} - \mathbf{z}^T\mathbf{y}) \\ \hline 3L(i\mathbf{z}^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{z}) & -\frac{stL^2}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{x} + L^2(i\mathbf{z}^T\mathbf{z} + \mathbf{y}^T\mathbf{y}) \end{array} \right] \quad [4.85]$$

$$\mathbf{M}_{ij}^{\text{conv}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{z} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z} \end{bmatrix} \frac{2r}{L^3} \left[\begin{array}{c|c} 6(i\mathbf{y}^T\mathbf{y} + \mathbf{z}^T\mathbf{z}) & -3L(i\mathbf{y}^T\mathbf{z} - \mathbf{z}^T\mathbf{y}) \\ \hline -3L(i\mathbf{z}^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{z}) & \frac{stL^2}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{x} + 2L^2(i\mathbf{z}^T\mathbf{z} + \mathbf{y}^T\mathbf{y}) \end{array} \right] \quad [4.86]$$

y operando, se tendrá para cada uno de ellos las submatrices correspondientes. Estas cuatro submatrices conforman la siguiente Matriz de Conversión

$$\mathbf{M}^{\text{conv}} = \frac{2r}{L^3} \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 6i\mathbf{y} & 3iL\mathbf{z} & -6i\mathbf{y} & 3iL\mathbf{z} \\ 6\mathbf{z} & -3L\mathbf{y} & -6\mathbf{z} & -3L\mathbf{y} \\ \mathbf{0} & \frac{st}{2}L^2\mathbf{x} & \mathbf{0} & -\frac{st}{2}L^2\mathbf{x} \\ -3L\mathbf{z} & 2L^2\mathbf{y} & 3L\mathbf{z} & L^2\mathbf{y} \\ 3iL\mathbf{y} & 2iL^2\mathbf{z} & -3iL\mathbf{y} & iL^2\mathbf{z} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -6i\mathbf{y} & -3iL\mathbf{z} & 6i\mathbf{y} & -3iL\mathbf{z} \\ -6\mathbf{z} & 3L\mathbf{y} & 6\mathbf{z} & 3L\mathbf{y} \\ \mathbf{0} & -\frac{st}{2}L^2\mathbf{x} & \mathbf{0} & \frac{st}{2}L^2\mathbf{x} \\ -3L\mathbf{z} & L^2\mathbf{y} & 3L\mathbf{z} & 2L^2\mathbf{y} \\ 3iL\mathbf{y} & iL^2\mathbf{z} & -3iL\mathbf{y} & 2iL^2\mathbf{z} \end{array} \right] \quad [4.87]$$

que es la homóloga a la [3.27] del Método Clásico. La sustitución en ésta de los cosenos directores nos dará, evidentemente, la expresión [4.80].

Como puede observarse, si se intenta obtener las sollicitaciones axiles de la barra postmultiplicando la matriz de conversión \mathbf{M}^{conv} por el vector de corrimientos, el valor de estos axiles siempre saldrá nulo debido a la propia condición de inelongabilidad. Como consecuencia de la introducción de dicha condición, el esfuerzo axil quedó eliminado, por lo que en el sistema local esta componente no existe, mientras que en el sistema global las componentes de fuerza corresponden exclusivamente a sollicitaciones de cortante.

Excepto para la determinación de los axiles, la matriz de conversión M^{conv} [4.87] es perfectamente válida para el cálculo del resto de sollicitaciones de extremo. Pero la determinación del valor de los axiles es imprescindible, por lo que habrá de efectuarse por otros procedimientos que más adelante se detallarán.

Por otra parte, por ser nulas las filas primera y séptima de la matriz de conversión deducida, pueden eliminarse estas filas, quedando [4.87] reducida a una matriz de 10×12 , que nos servirá para determinar los valores de las cuatro componentes de cortantes y las seis de momentos de los extremos en función de las componentes de corrimiento de dichos extremos de barra, con lo que se tendrá:

$$M^{conv} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 6iy & 3iLz & -6iy & 3iLz \\ 6z & -3Ly & -6z & -3Ly \\ \mathbf{0} & \frac{st}{2}L^2x & \mathbf{0} & -\frac{st}{2}L^2x \\ -3Lz & 2L^2y & 3Lz & L^2y \\ 3iLy & 2iL^2z & -3iLy & iL^2z \\ \hline -6iy & -3iLz & 6iy & -3iLz \\ -6z & 3Ly & 6z & 3Ly \\ \mathbf{0} & -\frac{st}{2}L^2x & \mathbf{0} & \frac{st}{2}L^2x \\ -3Lz & L^2y & 3Lz & 2L^2y \\ 3iLy & iL^2z & -3iLy & 2iL^2z \end{bmatrix} \quad [4.88]$$

cuyo desarrollo es

$$M^{conv} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 6i \cos XY' & 6i \cos YY' & 6i \cos ZY' & 3iL \cos XZ' & 3iL \cos YZ' & 3iL \cos ZZ' & -6i \cos XY' & -6i \cos YY' & -6i \cos ZY' & 3iL \cos XZ' & 3iL \cos YZ' & 3iL \cos ZZ' \\ 6 \cos XZ' & 6 \cos YZ' & 6 \cos ZZ' & -3L \cos XY' & -3L \cos YY' & -3L \cos ZY' & -6 \cos XZ' & -6 \cos YZ' & -6 \cos ZZ' & -3L \cos XY' & -3L \cos YY' & -3L \cos ZY' \\ 0 & 0 & 0 & \frac{st}{2}L^2 \cos XX' & \frac{st}{2}L^2 \cos YX' & \frac{st}{2}L^2 \cos ZX' & 0 & 0 & 0 & -\frac{st}{2}L^2 \cos XX' & -\frac{st}{2}L^2 \cos YX' & -\frac{st}{2}L^2 \cos ZX' \\ -3L \cos XZ' & -3L \cos YZ' & -3L \cos ZZ' & 2L^2 \cos XY' & 2L^2 \cos YY' & 2L^2 \cos ZY' & 3L \cos XZ' & 3L \cos YZ' & 3L \cos ZZ' & L^2 \cos XY' & L^2 \cos YY' & L^2 \cos ZY' \\ 3iL \cos XY' & 3iL \cos YY' & 3iL \cos ZY' & 2iL^2 \cos XZ' & 2iL^2 \cos YZ' & 2iL^2 \cos ZZ' & -3iL \cos XY' & -3iL \cos YY' & -3iL \cos ZY' & iL^2 \cos XZ' & iL^2 \cos YZ' & iL^2 \cos ZZ' \\ \hline -6i \cos XY' & -6i \cos YY' & -6i \cos ZY' & -3iL \cos XZ' & -3iL \cos YZ' & -3iL \cos ZZ' & 6i \cos XY' & 6i \cos YY' & 6i \cos ZY' & -3iL \cos XZ' & -3iL \cos YZ' & -3iL \cos ZZ' \\ -6 \cos XZ' & -6 \cos YZ' & -6 \cos ZZ' & 3L \cos XY' & 3L \cos YY' & 3L \cos ZY' & 6 \cos XZ' & 6 \cos YZ' & 6 \cos ZZ' & 3L \cos XY' & 3L \cos YY' & 3L \cos ZY' \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{st}{2}L^2 \cos XX' & -\frac{st}{2}L^2 \cos YX' & -\frac{st}{2}L^2 \cos ZX' & 0 & 0 & 0 & \frac{st}{2}L^2 \cos XX' & \frac{st}{2}L^2 \cos YX' & \frac{st}{2}L^2 \cos ZX' \\ -3L \cos XZ' & -3L \cos YZ' & -3L \cos ZZ' & L^2 \cos XY' & L^2 \cos YY' & L^2 \cos ZY' & 3L \cos XZ' & 3L \cos YZ' & 3L \cos ZZ' & 2L^2 \cos XY' & 2L^2 \cos YY' & 2L^2 \cos ZY' \\ 3iL \cos XY' & 3iL \cos YY' & 3iL \cos ZY' & iL^2 \cos XZ' & iL^2 \cos YZ' & iL^2 \cos ZZ' & -3iL \cos XY' & -3iL \cos YY' & -3iL \cos ZY' & 2iL^2 \cos XZ' & 2iL^2 \cos YZ' & 2iL^2 \cos ZZ' \end{bmatrix} \quad [4.89]$$

es decir, la misma [4.80] sin las filas nulas.

4.3.1.-.- Matriz de Conversión para una barra con un eje principal de inercia horizontal. Consideraremos que el eje principal de inercia horizontal es el Y' , es decir, el

paralelo al plano global XY. Para este caso, introduciendo en [4.89] la condición [3.13] de horizontalidad del eje local Y' (cosZY'=0) queda

$$M^{conv} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 6i \cos XY' & 6i \cos YY' & 0 & 3iL \cos XZ' & 3iL \cos YZ' & 3iL \cos ZZ' & -6i \cos XY' & -6i \cos YY' & 0 & 3iL \cos XZ' & 3iL \cos YZ' & 3iL \cos ZZ' \\ 6 \cos XZ' & 6 \cos YZ' & 6 \cos ZZ' & -3L \cos XY' & -3L \cos YY' & 0 & -6 \cos XZ' & -6 \cos YZ' & -6 \cos ZZ' & -3L \cos XY' & -3L \cos YY' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{s1}{2} L^2 \cos XX' & \frac{s1}{2} L^2 \cos YX' & \frac{s1}{2} L^2 \cos ZX' & 0 & 0 & 0 & -\frac{s1}{2} L^2 \cos XX' & -\frac{s1}{2} L^2 \cos YX' & -\frac{s1}{2} L^2 \cos ZX' \\ -3L \cos XZ' & -3L \cos YZ' & -3L \cos ZZ' & 2L^2 \cos XY' & 2L^2 \cos YY' & 0 & 3L \cos XZ' & 3L \cos YZ' & 3L \cos ZZ' & L^2 \cos XY' & L^2 \cos YY' & 0 \\ 3iL \cos XY' & 3iL \cos YY' & 0 & 2iL^2 \cos XZ' & 2iL^2 \cos YZ' & 2iL^2 \cos ZZ' & -3iL \cos XY' & -3iL \cos YY' & 0 & iL^2 \cos XZ' & iL^2 \cos YZ' & iL^2 \cos ZZ' \\ -6i \cos XY' & -6i \cos YY' & 0 & -3iL \cos XZ' & -3iL \cos YZ' & -3iL \cos ZZ' & 6i \cos XY' & 6i \cos YY' & 0 & -3iL \cos XZ' & -3iL \cos YZ' & -3iL \cos ZZ' \\ -6 \cos XZ' & -6 \cos YZ' & -6 \cos ZZ' & 3L \cos XY' & 3L \cos YY' & 0 & 6 \cos XZ' & 6 \cos YZ' & 6 \cos ZZ' & 3L \cos XY' & 3L \cos YY' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{s1}{2} L^2 \cos XX' & -\frac{s1}{2} L^2 \cos YX' & -\frac{s1}{2} L^2 \cos ZX' & 0 & 0 & 0 & \frac{s1}{2} L^2 \cos XX' & \frac{s1}{2} L^2 \cos YX' & \frac{s1}{2} L^2 \cos ZX' \\ -3L \cos XZ' & -3L \cos YZ' & -3L \cos ZZ' & L^2 \cos XY' & L^2 \cos YY' & 0 & 3L \cos XZ' & 3L \cos YZ' & 3L \cos ZZ' & 2L^2 \cos XY' & 2L^2 \cos YY' & 0 \\ 3iL \cos XY' & 3iL \cos YY' & 0 & iL^2 \cos XZ' & iL^2 \cos YZ' & iL^2 \cos ZZ' & -3iL \cos XY' & -3iL \cos YY' & 0 & 2iL^2 \cos XZ' & 2iL^2 \cos YZ' & 2iL^2 \cos ZZ' \end{bmatrix} \quad [4.90]$$

aplicable a toda barra cuyo eje principal de inercia Y' sea paralelo al plano coordenado global XY.

4.3.2.- Matriz de Conversión para barra con eje principal de inercia y directriz horizontales. Análogamente, introduciendo en [4.90] las condiciones [3.15] se tendrá

$$M^{conv} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 6i \cos XY' & 6i \cos YY' & 0 & 0 & 0 & 3iL & -6i \cos XY' & -6i \cos YY' & 0 & 0 & 0 & 3iL \\ 0 & 0 & 6 & -3L \cos XY' & -3L \cos YY' & 0 & 0 & 0 & -6 & -3L \cos XY' & -3L \cos YY' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{s1}{2} L^2 \cos XX' & \frac{s1}{2} L^2 \cos YX' & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{s1}{2} L^2 \cos XX' & -\frac{s1}{2} L^2 \cos YX' & 0 \\ 0 & 0 & -3L & 2L^2 \cos XY' & 2L^2 \cos YY' & 0 & 0 & 0 & 3L & L^2 \cos XY' & L^2 \cos YY' & 0 \\ 3iL \cos XY' & 3iL \cos YY' & 0 & 0 & 0 & 2iL^2 & -3iL \cos XY' & -3iL \cos YY' & 0 & 0 & 0 & iL^2 \\ -6i \cos XY' & -6i \cos YY' & 0 & 0 & 0 & -3iL & 6i \cos XY' & 6i \cos YY' & 0 & 0 & 0 & -3iL \\ 0 & 0 & -6 & 3L \cos XY' & 3L \cos YY' & 0 & 0 & 0 & 6 & 3L \cos XY' & 3L \cos YY' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{s1}{2} L^2 \cos XX' & -\frac{s1}{2} L^2 \cos YX' & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s1}{2} L^2 \cos XX' & \frac{s1}{2} L^2 \cos YX' & 0 \\ 0 & 0 & -3L & L^2 \cos XY' & L^2 \cos YY' & 0 & 0 & 0 & 3L & 2L^2 \cos XY' & 2L^2 \cos YY' & 0 \\ 3iL \cos XY' & 3iL \cos YY' & 0 & 0 & 0 & iL^2 & -3iL \cos XY' & -3iL \cos YY' & 0 & 0 & 0 & 2iL^2 \end{bmatrix} \quad [4.91]$$

4.3.3.- Matriz de Conversión para una barra vertical. Por último, a partir de la matriz [4.89] se puede deducir la matriz de conversión para una barra de directriz vertical y dirección arbitraria de los otros dos ejes locales sin más que introducir en ella las condiciones de verticalidad dadas por [3.17], con lo que se obtiene

$$M^{conv} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 6i \cos XY' & 6i \cos YY' & 0 & 3iL \cos XZ' & 3iL \cos YZ' & 0 & -6i \cos XY' & -6i \cos YY' & 0 & 3iL \cos XZ' & 3iL \cos YZ' & 0 \\ 6 \cos XZ' & 6 \cos YZ' & 0 & -3L \cos XY' & -3L \cos YY' & 0 & -6 \cos XZ' & -6 \cos YZ' & 0 & -3L \cos XY' & -3L \cos YY' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s1}{2} L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{s1}{2} L^2 \\ -3L \cos XZ' & -3L \cos YZ' & 0 & 2L^2 \cos XY' & 2L^2 \cos YY' & 0 & 3L \cos XZ' & 3L \cos YZ' & 0 & L^2 \cos XY' & L^2 \cos YY' & 0 \\ 3iL \cos XY' & 3iL \cos YY' & 0 & 2iL^2 \cos XZ' & 2iL^2 \cos YZ' & 0 & -3iL \cos XY' & -3iL \cos YY' & 0 & iL^2 \cos XZ' & iL^2 \cos YZ' & 0 \\ -6i \cos XY' & -6i \cos YY' & 0 & -3iL \cos XZ' & -3iL \cos YZ' & 0 & 6i \cos XY' & 6i \cos YY' & 0 & -3iL \cos XZ' & -3iL \cos YZ' & -3iL \cos ZZ' \\ -6 \cos XZ' & -6 \cos YZ' & 0 & 3L \cos XY' & 3L \cos YY' & 0 & 6 \cos XZ' & 6 \cos YZ' & 0 & 3L \cos XY' & 3L \cos YY' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{s1}{2} L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s1}{2} L^2 \\ -3L \cos XZ' & -3L \cos YZ' & 0 & L^2 \cos XY' & L^2 \cos YY' & 0 & 3L \cos XZ' & 3L \cos YZ' & 0 & 2L^2 \cos XY' & 2L^2 \cos YY' & 0 \\ 3iL \cos XY' & 3iL \cos YY' & 0 & iL^2 \cos XZ' & iL^2 \cos YZ' & 0 & -3iL \cos XY' & -3iL \cos YY' & 0 & 2iL^2 \cos XZ' & 2iL^2 \cos YZ' & 0 \end{bmatrix} \quad [4.92]$$

4.3.4.- Matriz de Conversión para estructuras de barras coplanarias.- A partir de la matriz dada por [4.91] se puede deducir la de una barra perteneciente a una estructura coplanaria sin más que eliminar de ella las filas correspondientes a los cortantes en el eje Z (filas 2 y 7) y a los momentos en X e Y (filas 3, 4, 8 y 9) y las columnas correspondientes a los corrimientos asociados (3, 4, 5, 9,10 y 11), quedando

$$\mathbf{M}^{\text{conv}} = \frac{6\bar{r}}{L^3} \begin{bmatrix} 6i \cos XY' & 6i \cos YY' & 3iL & -6i \cos XY' & -6i \cos YY' & 3iL \\ 3iL \cos XY' & 3iL \cos YY' & 2iL^2 & -3iL \cos XY' & -3iL \cos YY' & iL^2 \\ -6i \cos XY' & -6i \cos YY' & -3iL & 6i \cos XY' & 6i \cos YY' & -3iL \\ 3iL \cos XY' & 3iL \cos YY' & iL^2 & -3iL \cos XY' & -3iL \cos YY' & 2iL^2 \end{bmatrix}$$

y extrayendo factores comunes y teniendo en cuenta, además, [4.51], [4.52] y [4.74], se tendrá, finalmente

$$\mathbf{M}^{\text{conv}} = \frac{6\bar{r}}{L^3} \begin{bmatrix} -\frac{2L_y}{L} & \frac{2L_x}{L} & L & \frac{2L_y}{L} & -\frac{2L_x}{L} & L \\ -L_y & L_x & \frac{2L^2}{3} & L_y & -L_x & \frac{L^2}{3} \\ \frac{2L_y}{L} & -\frac{2L_x}{L} & -L & -\frac{2L_y}{L} & \frac{2L_x}{L} & -L \\ -L_y & L_x & \frac{L^2}{3} & L_y & -L_x & \frac{2L^2}{3} \end{bmatrix} \quad [4.93]$$

válida para toda barra perteneciente a una estructura de elementos coplanarios. Véanse las diferencias respecto a su homóloga [3.33] del Método Tradicional.

4.3.5.- Matriz de Conversión para entramados planos.- Es interesante, por su simplicidad, particularizar la anterior matriz para direcciones horizontales y verticales del eje de la viga, pues son las disposiciones habituales en las estructuras de edificación. Para las primeras es nulo el valor de L_y y, además, se cumple que $L_x=L$; para las segundas es nulo el de L_x y, recíprocamente, $L_y=L$, con lo que se obtienen las matrices de conversión siguientes

$$\mathbf{M}_{\text{viga}}^{\text{conv}} = \frac{6\bar{r}}{L^3} \begin{bmatrix} 2 & L & -2 & L \\ L & \frac{2L^2}{3} & -L & \frac{L^2}{3} \\ -2 & -L & 2 & -L \\ L & \frac{L^2}{3} & -L & \frac{2L^2}{3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{\text{pilar}}^{\text{conv}} = \frac{6\bar{r}}{L^3} \begin{bmatrix} -2 & L & 2 & L \\ -L & \frac{2L^2}{3} & L & \frac{L^2}{3} \\ 2 & -L & -2 & -L \\ -L & \frac{L^2}{3} & L & \frac{2L^2}{3} \end{bmatrix} \quad [4.94]$$

de forma que las solicitaciones vendrán expresadas en la forma

$$\begin{bmatrix} Q_i \\ M_i \\ Q_j \\ M_j \end{bmatrix}_{\text{viga}} = \frac{6r}{L^3} \begin{bmatrix} 2 & L & -2 & L \\ L & \frac{2L^2}{3} & -L & \frac{L^2}{3} \\ -2 & -L & 2 & -L \\ L & \frac{L^2}{3} & -L & \frac{2L^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \gamma_i \\ v_j \\ \gamma_j \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} Q_i \\ M_i \\ Q_j \\ M_j \end{bmatrix}_{\text{pilar}} = \frac{6r}{L^3} \begin{bmatrix} -2 & L & 2 & L \\ -L & \frac{2L^2}{3} & L & \frac{L^2}{3} \\ 2 & -L & -2 & -L \\ -L & \frac{L^2}{3} & L & \frac{2L^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ \gamma_i \\ u_j \\ \gamma_j \end{bmatrix} \quad [4.95]$$

donde Q y M son, respectivamente, los cortantes y momentos de extremo. En la anterior expresión puede observarse que las solicitaciones de las vigas no dependen de los desplazamientos horizontales de sus extremos y que, recíprocamente, las de los pilares no dependen de los desplazamientos verticales, consecuencia natural de la condición de inelongabilidad impuesta.

Por último, puesto que suele ser bastante habitual que los pilares en edificación tengan continuidad hasta cimentación, serían nulos los desplazamientos verticales y el cálculo de solicitaciones de las vigas sufre una nueva simplificación, quedando reducido, pues, a

$$\begin{bmatrix} Q_i \\ M_i \\ Q_j \\ M_j \end{bmatrix}_{\text{viga}} = \frac{6r}{L^3} \begin{bmatrix} L & L \\ \frac{2L^2}{3} & \frac{L^2}{3} \\ -L & -L \\ \frac{L^2}{3} & \frac{2L^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_i \\ \gamma_j \end{bmatrix} \quad [4.96]$$

solicitaciones que vienen dadas en función exclusiva de los giros de sus extremos. Las configuraciones anteriores de la Matriz de Conversión pueden compararse con sus homólogos del Método Clásico dadas en [3.36] y [3.37].

CAPÍTULO 5

HERRAMIENTAS DEL MÉTODO (II): **BARRA BAJO CONDICIONES DE DIAFRAGMA RÍGIDO**

OBJETIVO:

De forma análoga a todo lo expuesto en el capítulo anterior, en el que se contemplaba la hipótesis de inelongabilidad de los elementos que conforma una estructura, en este capítulo se pretende deducir la matriz de rigidez de una barra contenida en un plano cuyas características constructivas permiten suponerlo indeformable en sí mismo, esto es, la consideración de diafragma rígido, generalmente adoptada, pues si importantes ventajas presenta la consideración de inelongabilidad, como se comentó en dicho capítulo, es de esperar que la adopción de la hipótesis de diafragma rígido conlleve un mayor grado de simplicidad, toda vez que, mientras que allí se coartaba un solo grado de libertad, aquí se coartan tres. Ítem más: mientras que la hipótesis de inelongabilidad se adopta, no porque la modelización se considere más acertada, sino por las ventajas operativas que ello conlleva sin menoscabo de la validez de los resultados, la consideración de diafragma rígido se manifiesta, si no como imprescindible desde el punto de vista de la modelización, sí al menos como aconsejable, sobre todo en análisis y cálculo de las estructuras de edificación más habituales.

CONTENIDO:

Una vez deducidas las ecuaciones que describen las relaciones existentes entre las incógnitas de corrimiento como consecuencia de la hipótesis de diafragma rígido adoptada, se introducen estas relaciones en las matrices de rigidez del Método Clásico, del mismo modo que se procedió con la condición de inelongabilidad, obteniéndose de esta forma las correspondientes matrices de rigidez y de conversión en coordenadas globales de una barra genérica bajo dichas condiciones cinemáticas de diafragma rígido. A partir de éstas se deducen las matrices de rigidez y de conversión para los casos particulares más frecuentes.

5.1.- Ecuaciones de restricción de una barra embebida en un diafragma rígido.-

De forma similar a la condición de inelongabilidad adoptada para las barras pertenecientes a una estructura genérica, plana o espacial, en la práctica constructiva existen situaciones en las que puede considerarse que es nula, no solamente la deformación axial, sino, además, la deformación por flexión de ambos extremos en uno de los planos principales de su sección transversal. Esta situación se presenta principalmente en las barras embebidas en forjados de edificación que cumplen la hipótesis de diafragma rígido. Se considera que un plano satisface la hipótesis de diafragma rígido cuando se puede considerar indeformable en su mismo plano, pero deformable en una dirección perpendicular al mismo. Dada su elevada frecuencia, se considera muy conveniente la determinación de la matriz de una barra con estas especiales circunstancias.

Llamamos Ecuaciones de Restricción de una barra embebida en un diafragma rígido o, sencillamente, Ecuaciones de Diafragma Rígido a aquellas expresiones que describen algebraicamente la condición de inelongabilidad y las de inflexibilidad transversal en ambos extremos dentro del diafragma, esto es, aquellas que aseguran que la proyección de su deformada sobre dicho plano rígido será una línea recta y de la misma longitud que la barra tenía en su configuración inicial.

Sea, pues, un sistema estructural espacial formado por barras rígidamente unidas en sus extremos en el cual existen un subconjunto M de nudos contenidos en un plano rígido de orientación arbitraria en el espacio que satisface la condición de diafragma rígido, y sea \mathbf{K} la matriz de rigidez reducida del sistema estructural espacial obtenida por el Método Directo de la Rigidez utilizando la matriz de barra tradicional dada por [3.12]. Si esta estructura está sometida al vector de acciones \mathbf{p} , dichos nudos sufrirán unos corrimientos cuyas componentes están descritas por el vector \mathbf{c} , y el sistema

$$\mathbf{K} \mathbf{c} = \mathbf{p} \quad [5.1]$$

será compatible y determinado. La resolución de este sistema nos devolverá en general unos valores de corrimientos para los cuales no se satisfacen las condiciones de diafragma rígido referidas anteriormente.

Se hace necesario, pues, deducir las expresiones que contemplen estas circunstancias, por lo que en lo que sigue se plantean las herramientas del nuevo procedimiento para

desarrollar la matriz de rigidez de un sistema con barras embebidas en diafragmas rígidos, que, como se demostrará en los Capítulos 7 y 11, presenta notables ventajas.

5.1.1.- Ecuación matricial de Diafragma Rígido en coordenadas locales.- Puesto que ya se obtuvo la ecuación correspondiente a la hipótesis de inelongabilidad, será necesario añadir a ésta las condiciones necesarias para que, conjuntamente, describan la condición de barra embebida en un diafragma rígido. Para ello, considérense un par de nudos cualesquiera pertenecientes al plano rígido signados con los números de orden i-j, respectivamente, unidos por una barra real o, en su defecto, virtual. Sean X'Y'Z' los ejes locales y supongamos que los dos primeros definen el plano que satisface la condición de diafragma rígido. Las componentes de corrimiento de estos nodos deberán de cumplir las siguientes relaciones geométricas, de acuerdo con el dibujo representado en la Fig. 5.1

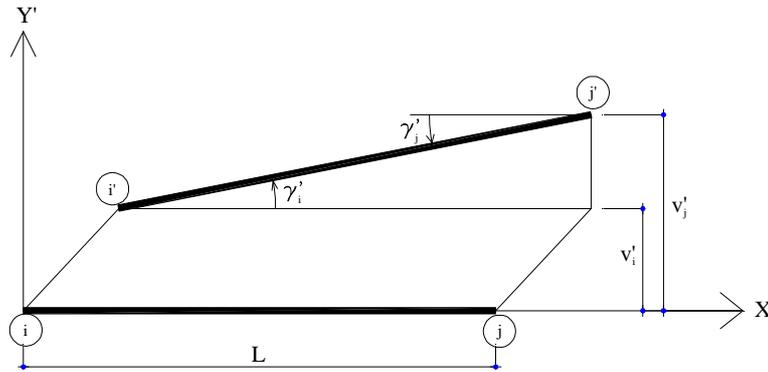


Figura 5.1

Debido a la inflexibilidad del extremo i:

$$\gamma'_i = \frac{v'_j - v'_i}{L}$$

es decir

$$v'_i + L\gamma'_i - v'_j = 0 \quad [5.2]$$

y por la misma razón en el otro extremo, se cumple:

$$\gamma'_i - \gamma'_{j'} = 0 \quad [5.3]$$

donde

v' es la componente de desplazamiento en el eje Y'.

γ' es la componente de giro según el eje Z'.

L es la longitud de la recta i-j.

La ecuación de inelongabilidad en locales [4.1], junto con las dos anteriores, se pueden escribir conjuntamente en la forma

$$\mathbf{D}'_{mi} \mathbf{c}'_{mi} + \mathbf{D}'_{ej} \mathbf{c}'_{ej} = \mathbf{0} \quad [5.4]$$

o, matricialmente

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{mi} & \mathbf{D}'_{ej} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}'_{mi} \\ \mathbf{c}'_{ej} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad [5.5]$$

que no es más que la ecuación matricial que describe las restricciones de una barra embebida en un diafragma rígido en coordenadas locales y en donde se han llamado

$$\mathbf{D}'_{mi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}'_{ej} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad [5.6]$$

y

$$\mathbf{c}'_{mi} = \begin{bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ \gamma'_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}'_{ej} = \begin{bmatrix} u'_j \\ v'_j \\ \gamma'_j \end{bmatrix} \quad [5.7]$$

donde con los subíndices \mathbf{m} y \mathbf{e} se quieren representar las componentes de corrimiento maestras y esclavas, respectivamente.

5.1.2.- Ecuación matricial de Diafragma Rígido en coordenadas globales.- Deduzcamos las ecuaciones [5.5] referidas al sistema global. Para ello, extrayendo de la matriz \mathbf{R}^T (transpuesta de la matriz de rotación \mathbf{R} , expresada en [3.4]) las filas 1ª, 2ª y 6ª, que corresponden a los corrimientos incluidos en los vectores anteriores (u' , v' , γ'), la matriz resultante, que signaremos con $\overline{\mathbf{R}}^T$, queda en la forma

$$\overline{\mathbf{R}}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad [5.8]$$

que relaciona las componentes de dichos vectores con las componentes de corrimiento referidas al sistema global. Así pues, puede escribirse

$$\mathbf{c}'_{mi} = \overline{\mathbf{R}}^T \mathbf{c}_i \quad \text{y} \quad \mathbf{c}'_{ej} = \overline{\mathbf{R}}^T \mathbf{c}_j \quad [5.9]$$

siendo, como ya se sabe,

$$\mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \frac{w_i}{\alpha_i} \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c}_j = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ \frac{w_j}{\alpha_j} \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{bmatrix} \quad [5.10]$$

Sustituyendo [5.9] en [5.4] se tendrá

$$\left[\mathbf{D}'_{mi} \overline{\mathbf{R}^T} \right] \mathbf{c}_i + \left[\mathbf{D}'_{ej} \overline{\mathbf{R}^T} \right] \mathbf{c}_j = \mathbf{0} \quad [5.11]$$

Llamando

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{D}'_{mi} \overline{\mathbf{R}^T} \quad \text{y} \quad \mathbf{D}_j = \mathbf{D}'_{ej} \overline{\mathbf{R}^T} \quad [5.12]$$

y sustituyendo aquí [5.6] y [5.8]

$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{D}_j = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad [5.13]$$

y operando

$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & L\mathbf{z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{D}_j = \begin{bmatrix} -\mathbf{x} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{z} \end{bmatrix} \quad [5.14]$$

con lo que [5.11] podrá escribirse en la forma

$$\mathbf{D}_i \mathbf{c}_i + \mathbf{D}_j \mathbf{c}_j = \mathbf{0} \quad [5.15]$$

o, matricialmente

$$\left[\mathbf{D}_i \quad \mathbf{D}_j \right] \begin{bmatrix} \mathbf{c}_i \\ \mathbf{c}_j \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad [5.16]$$

Puesto que [5.16] describe las condiciones de restricción de una barra perteneciente a un diafragma rígido, en adelante le llamaremos Ecuaciones de Restricción de Diafragma Rígido o, abreviadamente, Ecuación matricial de Diafragma Rígido.

Particionando los vectores de corrimiento [5.10] en dos bloques de forma que el primero describa las componentes de desplazamientos y el segundo las de giro, es decir

$$\mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c}_j = \begin{bmatrix} \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad [5.17]$$

con

$$\delta_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad \theta_i = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \delta_j = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix} \quad \theta_j = \begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{bmatrix} \quad [5.18]$$

pueden sustituirse las [5.14] y las [5.17] en [5.15] y la ecuación matricial de restricción quedará como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & \mathbf{Lz} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{x} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad [5.19]$$

bien entendido que los ceros indican vectores nulos congruentes. Operando en la anterior se tienen las tres ecuaciones de restricción de una barra embebida en un diafragma rígido en formato matricial referida a los ejes globales:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(\delta_i - \delta_j) \\ \mathbf{y}(\delta_i - \delta_j) + \mathbf{Lz} \theta_i \\ \mathbf{z}(\theta_i - \theta_j) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad [5.20]$$

Obsérvese que la primera de [5.20] no es más que la ecuación de inlongabilidad en coordenadas globales ya deducida en [4.19]

5.1.3.- Ecuaciones de Diafragma Rígido horizontal.- Como suele ser habitual, sobre todo en edificación, prácticamente la totalidad de los diafragmas rígidos son horizontales por lo que se hace conveniente particularizar las expresiones [5.14] para estos casos. Sustituyendo, pues, en [5.19] los vectores de cosenos directores dados por [3.5] e introduciendo en ellos los valores de sus componentes dados por [3.15], se tendrá

$$\begin{bmatrix} \cos XX' & \cos YX' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos XY' & \cos YY' & 0 & 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\cos XX' & -\cos YX' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos XY' & -\cos YY' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad [5.21]$$

pero según [4.51] y [4.52], la anterior se puede transformar en

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{L_x}{L} & \frac{L_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-L_y}{L} & \frac{L_x}{L} & 0 & 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{L_x}{L} & -\frac{L_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_y}{L} & -\frac{L_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad [5.22]$$

y extrayendo L factor común, queda

$$\frac{1}{L} \left[\begin{array}{ccc|ccc} L_x & L_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L_y & L_x & 0 & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L \end{array} \right] \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \end{bmatrix} + \frac{1}{L} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -L_x & -L_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_y & -L_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L \end{array} \right] \begin{bmatrix} \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad [5.23]$$

con lo que, multiplicando m.a.m. por L, finalmente se tendrá

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} L_x & L_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L_y & L_x & 0 & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L \end{array} \right] \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{ccc|ccc} -L_x & -L_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_y & -L_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L \end{array} \right] \begin{bmatrix} \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad [5.24]$$

y las matrices de diafragma rígido quedan en la forma más simplificada

$$\mathbf{D}_i = \left[\begin{array}{ccc|ccc} L_x & L_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L_y & L_x & 0 & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|ccc} (x_j - x_i) & (y_j - y_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(y_j - y_i) & (x_j - x_i) & 0 & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L \end{array} \right] \quad [5.25]$$

y

$$\mathbf{D}_j = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -L_x & -L_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_y & -L_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|ccc} -(x_j - x_i) & -(y_j - y_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (y_j - y_i) & -(x_j - x_i) & 0 & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L \end{array} \right] \quad [5.26]$$

donde L_x y L_y son las proyecciones de la línea $i-j^*$ sobre los ejes X e Y, respectivamente, mientras que x_i , x_j , y_i e y_j son las coordenadas de los nudos i y j, respectivamente.

Aunque las expresiones deducidas son más cómodas de manejar que las generales dadas en [5.14], aún se puede conseguir un mayor grado de simplicidad para ellas. En efecto, sustituyendo en [5.20] los vectores de corrimiento por sus valores dados en [5.18] y el valor de los vectores \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} , se tendrá

- para la primera ecuación

* Bien entendido que dichas proyecciones han de venir con su signo correspondiente, de acuerdo con la dirección $i-j$.

$$\begin{bmatrix} \cos XX' & \cos YX' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i - u_j \\ v_i - v_j \\ w_i - w_i \end{bmatrix} = 0 \quad [5.27]$$

- y para la segunda

$$\begin{bmatrix} \cos XY' & \cos YY' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i - u_j \\ v_i - v_j \\ w_i - w_i \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} = 0 \quad [5.28]$$

Despejando de [5.27] $v_i - v_j$, resulta

$$(v_i - v_j) = -\frac{\cos XX'}{\cos YX'}(u_i - u_j) \quad [5.29]$$

sustituyendo este valor en [5.28]

$$\cos XY'(u_i - u_j) - \cos YY' \frac{\cos XX'}{\cos YX'}(u_i - u_j) + L \gamma_i = 0 \quad [5.30]$$

y operando

$$(\cos YX' \cos XY' - \cos YY' \cos XX')(u_i - u_j) + L \cos YX' \gamma_i = 0 \quad [5.31]$$

Pero teniendo en cuenta nuevamente los valores dados en [4.51] y [4.52], la anterior se puede escribir en la forma

$$-(\cos^2 YX' + \cos^2 XX')(u_i - u_j) + L_y \gamma_i = 0 \quad [5.32]$$

donde L_y es la proyección de la recta i-j sobre el eje global OY. Por otra parte, puesto que según [4.49] el paréntesis vale la unidad, multiplicando m.a.m. la anterior por menos uno, queda

$$(u_i - u_j) - L_y \gamma_i = 0 \quad [5.33]$$

o, teniendo en cuenta que

$$L_y = y_j - y_i \quad [5.34]$$

donde y_i e y_j son las ordenadas de los nudos i y j, respectivamente, puede escribirse

$$(u_i - u_j) - (y_j - y_i) \gamma_i = 0 \quad [5.35]$$

De forma similar, despejando de [5.27] $u_i - u_j$, resulta

$$(u_i - u_j) = -\frac{\cos YX'}{\cos XX'}(v_i - v_j) \quad [5.36]$$

y sustituyendo este valor en [5.28]

$$-\cos XY' \frac{\cos YX'}{\cos XX'} (v_i - v_j) + \cos YY' (v_i - v_j) + L \gamma_i = 0 \quad [5.37]$$

operando

$$(-\cos YX' \cos XY' + \cos YY' \cos XX') (v_i - v_j) + L \cos XX' \gamma_i = 0 \quad [5.38]$$

y de aquí

$$(\cos^2 YX' + \cos^2 XX') (v_i - v_j) + L_x \gamma_i = 0 \quad [5.39]$$

donde L_x es la proyección de la recta i - j sobre el eje global OX . De forma análoga a lo anteriormente expuesto, se tendrá

$$(v_i - v_j) + L_x \gamma_i = 0 \quad [5.40]$$

o también

$$(v_i - v_j) + (x_j - x_i) \gamma_i = 0 \quad [5.41]$$

donde x_i y x_j son las abscisas de los nudos i , j , respectivamente.

Por último, la tercera ecuación de restricción del sistema [5.20] quedará reducida a

$$\gamma_i - \gamma_j = 0 \quad [5.42]$$

Las ecuaciones [5.33], [5.40] y [5.42] pueden expresarse matricialmente en la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -L_y \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & L_x \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ \frac{w_j}{L} \\ \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ \frac{w_j}{L} \\ \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad [5.43]$$

o más compactamente

$$[\mathbf{D}_i \quad \mathbf{D}_j] \begin{bmatrix} \mathbf{c}_i \\ \mathbf{c}_j \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad [5.44]$$

en donde las submatrices de diafragma rígido para el caso en que éste sea horizontal quedan, pues, reducidas a las sencillas expresiones

$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -L_y \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & L_x \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -(y_j - y_i) \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & (x_j - x_i) \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.45]$$

y

$$\mathbf{D}_j = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \quad [5.46]$$

Comparando estas últimas con sus equivalentes dadas en [5.25] y [5.26] se ve claramente que, no solamente presentan más simplicidad, sino que no será necesaria la determinación de la matriz \mathbf{D}_j para cada uno de los nudos esclavos j , ya que es la misma para todos ellos, como muestra la expresión [5.46]. Sin embargo, estas matrices presentan una diferencia respecto a las otras y es que, como se detallará en el siguiente capítulo, epígrafe 6.2.2, aquéllas permiten el cálculo directo de las solicitaciones –esto es, componentes referidas al sistema local de cada barra- asociadas a las restricciones impuestas, mientras que éstas devolverán dichas componentes, pero referidas al sistema global. No obstante, esto no es un inconveniente de importancia, pues el valor de dichas componentes carece, en general, de interés, ya que como se comentará en el epígrafe 5.3, corresponden a las componentes de sollicitación contenidas en el plano rígido (axil, cortante y momento flector de eje normal a dicho plano).

5.2.-Matriz de Rigidez de una barra embebida en un Diafragma Rígido de orientación arbitraria.- Procediendo de forma similar a lo expuesto en el epígrafe 4.2, y teniendo en cuenta que entre las solicitaciones de extremos y las componentes de corrimiento se cumplen las relaciones

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{R} \mathbf{K}'_{ii} \mathbf{R}^T \mathbf{c}_i + \mathbf{R} \mathbf{K}'_{ij} \mathbf{R}^T \mathbf{c}_j \quad \text{y} \quad \mathbf{s}_j = \mathbf{R} \mathbf{K}'_{ji} \mathbf{R}^T \mathbf{c}_i + \mathbf{R} \mathbf{K}'_{jj} \mathbf{R}^T \mathbf{c}_j \quad [5.47]$$

y llamando

$$\mathbf{K}_{ii} = \mathbf{R} \mathbf{K}'_{ii} \mathbf{R}^T \quad \mathbf{K}_{ij} = \mathbf{R} \mathbf{K}'_{ij} \mathbf{R}^T \quad \mathbf{K}_{ji} = \mathbf{R} \mathbf{K}'_{ji} \mathbf{R}^T \quad \mathbf{K}_{jj} = \mathbf{R} \mathbf{K}'_{jj} \mathbf{R}^T \quad [5.48]$$

las ecuaciones [5.47] se podrán expresar como

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{K}_{ii} \mathbf{c}_i + \mathbf{K}_{ij} \mathbf{c}_j \quad \text{y} \quad \mathbf{s}_j = \mathbf{K}_{ji} \mathbf{c}_i + \mathbf{K}_{jj} \mathbf{c}_j \quad [5.49]$$

donde los vectores \mathbf{s} describen las componentes de sollicitación de extremo en coordenadas globales. Particionemos las matrices y vectores involucrados en las anteriores ecuaciones de la siguiente forma para facilitar las operaciones:

1º.- Submatrices de rigidez:

$$\mathbf{K}'_{ii} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{z'}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{z'}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_{y'}}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_{y'}}{L^2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{x'}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_{y'}}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{y'}}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_{z'}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{z'}}{L} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{C}^T \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{F} \end{array} \right] \quad [5.50]$$

$$\mathbf{K}'_{ij} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_{z'}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{z'}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{-12EI_{y'}}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_{y'}}{L^2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{-GI_{x'}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_{y'}}{L^2} & 0 & \frac{2EI_{y'}}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-6EI_{z'}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{z'}}{L} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{-B} & \mathbf{C}^T \\ \hline \mathbf{-C} & \mathbf{H} \end{array} \right] \quad [5.51]$$

donde las líneas internas de las matrices describen claramente el valor de los respectivos bloques de la partición efectuada.

2°.- Transpuesta de la matriz de rotación: ésta tiene el desarrollo

$$\mathbf{R}^T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos XX' & \cos YX' & \cos ZX' & 0 & 0 & 0 \\ \cos XY' & \cos YY' & \cos ZY' & 0 & 0 & 0 \\ \cos XZ' & \cos YZ' & \cos ZZ' & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos XX' & \cos YX' & \cos ZX' \\ 0 & 0 & 0 & \cos XY' & \cos YY' & \cos ZY' \\ 0 & 0 & 0 & \cos XZ' & \cos YZ' & \cos ZZ' \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \overline{\mathbf{R}} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \overline{\mathbf{R}} \end{array} \right] \quad [5.52]$$

donde el cero en negrita representa la matriz nula de 3×3 y, dado que cada una de la filas de $\overline{\mathbf{R}}$ corresponde a los cosenos directores de los ejes locales, podrá escribirse

$$\overline{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \overline{\mathbf{R}}^T = [\mathbf{x}^T \quad \mathbf{y}^T \quad \mathbf{z}^T] \quad [5.53]$$

3°.-Vector de solicitaciones: el vector de solicitaciones se particiona en dos bloques, de forma que el primero describe las solicitaciones de fuerza y el segundo las de momentos, esto es

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{m}_i \end{bmatrix} \quad [5.54]$$

Sustituyendo en [5.47] los valores dados por [5.17] [5.52], [5.54] y se tendrá

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{m}_i \end{bmatrix} = \mathbf{R} \left\{ \mathbf{K}'_{ii} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \end{bmatrix} + \mathbf{K}'_{ij} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \right\} \quad [5.55]$$

Desarrollando los productos matriciales indicados e introduciendo los valores dados por [5.50], [5.51] y la transpuesta de [5.52] quedará

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{m}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{R}}^T \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}} \delta_i \\ \bar{\mathbf{R}} \theta_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{B} & \mathbf{C}^T \\ -\mathbf{C} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}} \delta_j \\ \bar{\mathbf{R}} \theta_j \end{bmatrix} \right\} \quad [5.56]$$

que constituye dos bloques de ecuaciones en las incógnitas de los vectores de corrimiento.

Desarrollemos cada una de las ecuaciones matriciales anteriores:

1°.- Ecuaciones de fuerza.-

$$\mathbf{f}_i = \bar{\mathbf{R}}^T (\mathbf{B} \bar{\mathbf{R}} \delta_i + \mathbf{C}^T \bar{\mathbf{R}} \theta_i - \mathbf{B} \bar{\mathbf{R}} \delta_j + \mathbf{C}^T \bar{\mathbf{R}} \theta_j) \quad [5.57]$$

y extrayendo factores comunes

$$\mathbf{f}_i = \bar{\mathbf{R}}^T [\mathbf{B} \bar{\mathbf{R}} (\delta_i - \delta_j) + \mathbf{C}^T \bar{\mathbf{R}} (\theta_i + \theta_j)]$$

Sustituyendo aquí el valor de $\bar{\mathbf{R}}$ dado por [5.53]

$$\mathbf{f}_i = \bar{\mathbf{R}}^T \left\{ \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} (\delta_i - \delta_j) + \mathbf{C}^T \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} (\theta_i + \theta_j) \right\} \quad [5.58]$$

operando

$$\mathbf{f}_i = \bar{\mathbf{R}}^T \left\{ \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\delta_i - \delta_j) \\ \mathbf{y}(\delta_i - \delta_j) \\ \mathbf{z}(\delta_i - \delta_j) \end{bmatrix} + \mathbf{C}^T \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\theta_i + \theta_j) \\ \mathbf{y}(\theta_i + \theta_j) \\ \mathbf{z}(\theta_i + \theta_j) \end{bmatrix} \right\} \quad [5.59]$$

pero de la ecuación matricial [5.20] se desprende que

$$\mathbf{x}(\delta_i - \delta_j) = 0 \quad \mathbf{y}(\delta_i - \delta_j) = -L \mathbf{z} \theta_i \quad \mathbf{z} \theta_j = \mathbf{z} \theta_i \quad [5.60]$$

por lo que, sustituyendo, la ecuación anterior quedará reducida a

$$\mathbf{f}_i = \overline{\mathbf{R}}^T \left\{ \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -L\mathbf{z}\boldsymbol{\theta}_i \\ \mathbf{z}(\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j) \end{bmatrix} + \mathbf{C}^T \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta}_j) \\ \mathbf{y}(\boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta}_j) \\ 2\mathbf{z}\boldsymbol{\theta}_i \end{bmatrix} \right\} \quad [5.61]$$

Sustituyendo las matrices \mathbf{B} y \mathbf{C}^T por sus expresiones respectivas dadas por [5.50]

$$\mathbf{f}_i = \overline{\mathbf{R}}^T \left\{ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{z'}}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_{y'}}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -L\mathbf{z}\boldsymbol{\theta}_i \\ \mathbf{z}(\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_{z'}}{L^2} \\ 0 & \frac{-6EI_{y'}}{L^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta}_j) \\ \mathbf{y}(\boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta}_j) \\ 2\mathbf{z}\boldsymbol{\theta}_i \end{bmatrix} \right\} \quad [5.62]$$

operando dentro de la llave

$$\mathbf{f}_i = \overline{\mathbf{R}}^T \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -L\frac{12EI_{z'}}{L^3}\mathbf{z}\boldsymbol{\theta}_i \\ \frac{12EI_{y'}}{L^3}\mathbf{z}(\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{12EI_{z'}}{L^2}\mathbf{z}\boldsymbol{\theta}_i \\ \frac{-6EI_{y'}}{L^2}\mathbf{y}(\boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta}_j) \end{bmatrix} \right\} \quad [5.63]$$

y sacando factor común el escalar

$$\mathbf{f}_i = \frac{2EI_{y'}}{L^3} \overline{\mathbf{R}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 6\mathbf{z}(\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j) - 3L\mathbf{y}(\boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta}_j) \end{bmatrix} \quad [5.64]$$

expresión en la que es de observar cómo, de forma similar a la desaparición de la rigidez axial EA que se produjo al introducir la condición de inelongabilidad en la deducción de la matriz de la barra inelongable, aquí desaparecen, simultáneamente, tanto ésta como la correspondiente a la rigidez a la flexión transversal $EI_{z'}$, como era de prever.

Reescribiendo la ecuación anterior y sustituyendo $\overline{\mathbf{R}}^T$ por su valor dado en [5.53]

$$\mathbf{f}_i = \frac{2EI_{y'}}{L^3} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{y}^T & \mathbf{z}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 6\mathbf{z} & -3L\mathbf{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j) \\ (\boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta}_j) \end{bmatrix} \quad [5.65]$$

operando

$$\mathbf{f}_i = \frac{2EI_{y'}}{L^3} \begin{bmatrix} 6\mathbf{z}^T\mathbf{z} & -3L\mathbf{z}^T\mathbf{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j) \\ (\boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta}_j) \end{bmatrix} \quad [5.66]$$

o también

$$\mathbf{f}_i = \frac{2EI_{y'}}{L^3} \begin{bmatrix} 6\mathbf{z}^T\mathbf{z} & -3L\mathbf{z}^T\mathbf{y} & -6\mathbf{z}^T\mathbf{z} & -3L\mathbf{z}^T\mathbf{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \\ \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad [5.67]$$

que es la ecuación matricial constitutiva que relaciona las componentes de fuerza del extremo i con los corrimientos bajo condiciones de diafragma rígido.

2°.- Ecuaciones de momentos.- Desarrollando la segunda ecuación de [5.56]

$$\mathbf{m}_i = \bar{\mathbf{R}}^T (\mathbf{C}\bar{\mathbf{R}}\delta_i + \mathbf{F}\bar{\mathbf{R}}\theta_i - \mathbf{C}\bar{\mathbf{R}}\delta_j + \mathbf{H}\bar{\mathbf{R}}\theta_j) \quad [5.68]$$

y extrayendo factores comunes

$$\mathbf{m}_i = \bar{\mathbf{R}}^T [\mathbf{C}\bar{\mathbf{R}}(\delta_i - \delta_j) + \mathbf{F}\bar{\mathbf{R}}\theta_i + \mathbf{H}\bar{\mathbf{R}}\theta_j] \quad [5.69]$$

Sustituyendo aquí el valor dado por [5.53]

$$\mathbf{m}_i = \bar{\mathbf{R}}^T \left\{ \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} (\delta_i - \delta_j) + \mathbf{F} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \theta_i + \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \theta_j \right\} \quad [5.70]$$

y teniendo en cuenta las dos primera expresiones de [5.60], se tendrá

$$\mathbf{m}_i = \bar{\mathbf{R}}^T \left\{ \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -L\mathbf{z}\theta_i \\ \mathbf{z}(\delta_i - \delta_j) \end{bmatrix} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \theta_i + \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \theta_j \right\} \quad [5.71]$$

Sustituyendo en la anterior las submatrices \mathbf{C} , \mathbf{F} y \mathbf{H} por sus respectivas expresiones dadas en [5.50] y [5.51]

$$\mathbf{m}_i = \bar{\mathbf{R}}^T \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_{y'}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{z'}}{L^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -L\mathbf{z}\theta_i \\ \mathbf{z}(\delta_i - \delta_j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{GI_{x'}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_{y'}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4EI_{z'}}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \theta_i + \begin{bmatrix} \frac{-GI_{x'}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI_{y'}}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2EI_{z'}}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \theta_j \right\} \quad [5.72]$$

operando dentro de la llave y teniendo en cuenta la tercera expresión de [5.60] se podrá escribir que

$$\mathbf{m}_i = \overline{\mathbf{R}}^{-T} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{6EI_{y'}}{L^2} \mathbf{z}(\delta_i - \delta_j) \\ -L \frac{6EI_{z'}}{L^2} \mathbf{z} \theta_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{GI_{x'}}{L} \mathbf{x} \theta_i \\ \frac{4EI_{y'}}{L} \mathbf{y} \theta_i \\ \frac{4EI_{z'}}{L} \mathbf{z} \theta_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-GI_{x'}}{L} \mathbf{x} \theta_j \\ \frac{2EI_{y'}}{L} \mathbf{y} \theta_j \\ \frac{2EI_{z'}}{L} \mathbf{z} \theta_j \end{bmatrix} \right\} \quad [5.73]$$

y recordando los cambios de variable expresados en [4.25] y [4.27] y sacando factores comunes, puede escribirse

$$\mathbf{m}_i = \frac{2EI_{y'}}{L^3} \overline{\mathbf{R}}^{-T} \begin{bmatrix} \frac{st}{2} L^2 \mathbf{x} (\theta_i - \theta_j) \\ -L \mathbf{z} (\delta_i - \delta_j) + L^2 \mathbf{y} (2\theta_i + \theta_j) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [5.74]$$

en la que, de la misma forma que en la ecuación de fuerzas, ha desaparecido el término de la rigidez a la flexión transversal $EI_{z'}$.

Devolviendo a la ecuación anterior su forma matricial y sustituyendo el primer factor matricial por el valor dado en [5.53] puede escribirse que

$$\mathbf{m}_i = \frac{2EI_{y'}}{L^3} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{y}^T & \mathbf{z}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{st}{2} L^2 \mathbf{x} & \mathbf{0} & \frac{-st}{2} L^2 \mathbf{x} \\ -L \mathbf{z} & 2L^2 \mathbf{y} & L \mathbf{z} & L^2 \mathbf{y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \\ \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad [5.75]$$

y operando

$$\mathbf{m}_i = \frac{2EI_{y'}}{L^3} \begin{bmatrix} -L \mathbf{y}^T \mathbf{z} & \frac{st}{2} L^2 \mathbf{x}^T \mathbf{x} + 2L^2 \mathbf{y}^T \mathbf{y} & L \mathbf{y}^T \mathbf{z} & \frac{-st}{2} L^2 \mathbf{x}^T \mathbf{x} + L^2 \mathbf{y}^T \mathbf{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \\ \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad [5.76]$$

que es la ecuación matricial constitutiva que relaciona los momentos del extremo i con los corrimientos de extremo de una barra bajo condiciones de diafragma rígido.

Finalmente, implementando ordenadamente la ecuación de fuerzas [5.67] y la de momentos [5.76]

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{m}_i \end{bmatrix} = \frac{2EI_{y'}}{L^3} \begin{bmatrix} 6\mathbf{z}^T\mathbf{z} & -3L\mathbf{z}^T\mathbf{y} \\ -L\mathbf{y}^T\mathbf{z} & \frac{st}{2}L^2\mathbf{x}^T\mathbf{x} + 2L^2\mathbf{y}^T\mathbf{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6\mathbf{z}^T\mathbf{z} & -3L\mathbf{z}^T\mathbf{y} \\ L\mathbf{y}^T\mathbf{z} & \frac{-st}{2}L^2\mathbf{x}^T\mathbf{x} + L^2\mathbf{y}^T\mathbf{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \\ \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad [5.77]$$

por lo que, de acuerdo con [5.49], las submatrices de rigidez de la barra bajo restricciones de diafragma rígido que relacionan las sollicitaciones del extremo i con los corrimientos serán

$$\mathbf{K}_{ii} = \frac{2EI_{y'}}{L^3} \begin{bmatrix} 6\mathbf{z}^T\mathbf{z} & -3L\mathbf{z}^T\mathbf{y} \\ -L\mathbf{y}^T\mathbf{z} & \frac{st}{2}L^2\mathbf{x}^T\mathbf{x} + 2L^2\mathbf{y}^T\mathbf{y} \end{bmatrix} \quad [5.78]$$

y

$$\mathbf{K}_{ij} = \frac{2EI_{y'}}{L^3} \begin{bmatrix} -6\mathbf{z}^T\mathbf{z} & -3L\mathbf{z}^T\mathbf{y} \\ L\mathbf{y}^T\mathbf{z} & \frac{-st}{2}L^2\mathbf{x}^T\mathbf{x} + L^2\mathbf{y}^T\mathbf{y} \end{bmatrix} \quad [5.79]$$

Para determinar las otras dos submatrices correspondientes al extremo j podrá procederse de igual forma y así, teniendo en cuenta que, de acuerdo con la nomenclatura utilizada en [5.50] y [5.51], se deberá escribir

$$\mathbf{K}'_{ji} = \mathbf{K}'_{ij}{}^T = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^T & -\mathbf{C}^T \\ [\mathbf{C}^T]^T & \mathbf{H}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B} & -\mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad [5.80]$$

y

$$\mathbf{K}'_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{C}^T \\ -\mathbf{C} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad [5.81]$$

Sustituyendo [5.52] en la segunda ecuación de [5.47] y llamando

$$\mathbf{s}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_j \\ \mathbf{m}_j \end{bmatrix} \quad [5.82]$$

se tendrá

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_j \\ \mathbf{m}_j \end{bmatrix} = \mathbf{R} \left\{ \mathbf{K}'_{ji} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{R}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \end{bmatrix} + \mathbf{K}'_{jj} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{R}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \right\} \quad [5.83]$$

y operando

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_j \\ \mathbf{m}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{R}}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{R}}^T \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -\mathbf{B} & -\mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{R}}\delta_i \\ \overline{\mathbf{R}}\theta_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{C}^T \\ -\mathbf{C} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{R}}\delta_i \\ \overline{\mathbf{R}}\theta_i \end{bmatrix} \right\} \quad [5.84]$$

pero debido a que no existen acciones aplicadas directamente sobre la barra, por equilibrio de fuerzas en sendas direcciones de los eje globales, se ha de cumplir que

$$\mathbf{f}_j = -\mathbf{f}_i \quad [5.85]$$

por lo tanto, para el objetivo que se persigue, bastará con operar exclusivamente en la segunda ecuación de [5.84]. Pero observando la correspondiente ecuación del extremo i ya calculada y dada por [5.56], bastará con intercambiar en ésta las submatrices \mathbf{H} y \mathbf{F} o, lo que igual, intercambiar los vectores de giro θ_i y θ_j . Entonces, directamente de [5.74] se tendrá

$$\mathbf{m}_j = \frac{2EI_{y'}}{L^3} \overline{\mathbf{R}}^T \begin{bmatrix} \frac{st}{2} L^2 \mathbf{x} (\theta_j - \theta_i) \\ -Lz(\delta_i - \delta_j) + L^2 \mathbf{y} (2\theta_j + \theta_i) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [5.86]$$

y en desarrollo matricial

$$\mathbf{m}_j = \frac{2EI_{y'}}{L^3} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{y}^T & \mathbf{z}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{-st}{2} L^2 \mathbf{x} & \mathbf{0} & \frac{st}{2} L^2 \mathbf{x} \\ -Lz & L^2 \mathbf{y} & Lz & 2L^2 \mathbf{y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \\ \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad [5.87]$$

y operando

$$\mathbf{m}_j = \frac{2EI_{y'}}{L^3} \begin{bmatrix} -L\mathbf{y}^T \mathbf{z} & \frac{-st}{2} L^2 \mathbf{x}^T \mathbf{x} + L^2 \mathbf{y}^T \mathbf{y} & \mathbf{0} & \frac{st}{2} L^2 \mathbf{x}^T \mathbf{x} + 2L^2 \mathbf{y}^T \mathbf{y} \\ L\mathbf{y}^T \mathbf{z} & \frac{st}{2} L^2 \mathbf{x}^T \mathbf{x} + 2L^2 \mathbf{y}^T \mathbf{y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \\ \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad [5.88]$$

Implementando, pues, las ecuaciones de fuerza [5.85] y la de momentos [5.88] del extremo j, se tiene

$$\mathbf{s}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_j \\ \mathbf{m}_j \end{bmatrix} = \frac{2EI_{y'}}{L^3} \begin{bmatrix} -6\mathbf{z}^T \mathbf{z} & 3L\mathbf{z}^T \mathbf{y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -L\mathbf{y}^T \mathbf{z} & \frac{-st}{2} L^2 \mathbf{x}^T \mathbf{x} + L^2 \mathbf{y}^T \mathbf{y} & L\mathbf{y}^T \mathbf{z} & \frac{st}{2} L^2 \mathbf{x}^T \mathbf{x} + 2L^2 \mathbf{y}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 6\mathbf{z}^T \mathbf{z} & 3L\mathbf{z}^T \mathbf{y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ L\mathbf{y}^T \mathbf{z} & \frac{st}{2} L^2 \mathbf{x}^T \mathbf{x} + 2L^2 \mathbf{y}^T \mathbf{y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \\ \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad [5.89]$$

con lo que las submatrices de rigidez de la barra bajo restricciones de diafragma rígido que relacionan las solicitaciones del extremo j con los corrimientos serán, pues

$$\mathbf{K}_{ji} = \frac{2EI_{y'}}{L^3} \begin{bmatrix} -6\mathbf{z}^T\mathbf{z} & 3L\mathbf{z}^T\mathbf{y} \\ -L\mathbf{y}^T\mathbf{z} & \frac{-st}{2}L^2\mathbf{x}^T\mathbf{x} + L^2\mathbf{y}^T\mathbf{y} \end{bmatrix} \quad [5.90]$$

y

$$\mathbf{K}_{ij} = \frac{2EI_{y'}}{L^3} \begin{bmatrix} 6\mathbf{z}^T\mathbf{z} & 3L\mathbf{z}^T\mathbf{y} \\ L\mathbf{y}^T\mathbf{z} & \frac{st}{2}L^2\mathbf{x}^T\mathbf{x} + 2L^2\mathbf{y}^T\mathbf{y} \end{bmatrix} \quad [5.91]$$

Por último, efectuando todos los productos vectoriales que aparecen en las submatrices [5.78], [5.79], [5.90] y [5.91] se tendrá, de acuerdo con los valores dados en [3.5]

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos XX' \\ \cos YX' \\ \cos ZX' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos XX' & \cos YX' & \cos ZX' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos XX'^2 & \cos XX'\cos YX' & \cos XX'\cos ZX' \\ \cos YX'\cos XX' & \cos YX'^2 & \cos YX'\cos ZX' \\ \cos ZX'\cos XX' & \cos ZX'\cos YX' & \cos ZX'^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \cos XY' \\ \cos YY' \\ \cos ZY' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos XY' & \cos YY' & \cos ZY' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos XY'^2 & \cos XY'\cos YY' & \cos XY'\cos ZY' \\ \cos YY'\cos XY' & \cos YY'^2 & \cos YY'\cos ZY' \\ \cos ZY'\cos XY' & \cos ZY'\cos YY' & \cos ZY'^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}^T\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \cos XZ' \\ \cos YZ' \\ \cos ZZ' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos XZ' & \cos YZ' & \cos ZZ' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos XZ'^2 & \cos XZ'\cos YZ' & \cos XZ'\cos ZZ' \\ \cos YZ'\cos XZ' & \cos YZ'^2 & \cos YZ'\cos ZZ' \\ \cos ZZ'\cos XZ' & \cos ZZ'\cos YZ' & \cos ZZ'^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}^T\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \cos XY' \\ \cos YY' \\ \cos ZY' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos XZ' & \cos YZ' & \cos ZZ' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos XY'\cos XZ' & \cos XY'\cos YZ' & \cos XY'\cos ZZ' \\ \cos YY'\cos XZ' & \cos YY'\cos YZ' & \cos YY'\cos ZZ' \\ \cos ZY'\cos XZ' & \cos ZY'\cos YZ' & \cos ZY'\cos ZZ' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}^T\mathbf{y} = [\mathbf{y}^T\mathbf{z}]^T = \begin{bmatrix} \cos XZ'\cos XY' & \cos XZ'\cos YY' & \cos XZ'\cos ZY' \\ \cos YZ'\cos XY' & \cos YZ'\cos YY' & \cos YZ'\cos ZY' \\ \cos ZZ'\cos XY' & \cos ZZ'\cos YY' & \cos ZZ'\cos ZY' \end{bmatrix}$$

[5.92]

y sustituyendo estos valores en las correspondientes submatrices, éstas quedarán en la forma

$$\mathbf{K}_{ii} = \frac{2r}{L^3} \begin{pmatrix} 6\cos XZ'^2 & 6\cos XZ'\cos YZ' & 6\cos XZ'\cos ZZ' & -3L\cos XZ'\cos XY' & -3L\cos XZ'\cos YY' & -3L\cos XZ'\cos ZY' \\ 6\cos YZ'\cos XZ' & 6\cos YZ'^2 & 6\cos YZ'\cos ZZ' & -3L\cos YZ'\cos XY' & -3L\cos YZ'\cos YY' & -3L\cos YZ'\cos ZY' \\ 6\cos ZZ'\cos XZ' & 6\cos ZZ'\cos YZ' & 6\cos ZZ'^2 & -3L\cos ZZ'\cos XY' & -3L\cos ZZ'\cos YY' & -3L\cos ZZ'\cos ZY' \\ -3L\cos XY'\cos XZ' & -3L\cos XY'\cos YZ' & -3L\cos XY'\cos ZZ' & \frac{st}{2}Lx^2 + 2L^2\cos XY'^2 & \frac{st}{2}LxLy + 2L^2\cos XY'\cos YY' & \frac{st}{2}LxLz + 2L^2\cos XY'\cos ZY' \\ -3L\cos YY'\cos XZ' & -3L\cos YY'\cos YZ' & -3L\cos YY'\cos ZZ' & \frac{st}{2}LxLy + 2L^2\cos YY'\cos XY' & \frac{st}{2}Ly^2 + 2L^2\cos YY'^2 & \frac{st}{2}LyLz + 2L^2\cos YY'\cos ZY' \\ -3L\cos ZY'\cos XZ' & -3L\cos ZY'\cos YZ' & -3L\cos ZY'\cos ZZ' & \frac{st}{2}LxLz + 2L^2\cos ZY'\cos XY' & \frac{st}{2}LyLz + 2L^2\cos ZY'\cos YY' & \frac{st}{2}Lz^2 + 2L^2\cos ZY'^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{ij} &= \frac{2r}{L^3} \begin{pmatrix} -6 \cos XZ^2 & -6 \cos XZ' \cos YZ' & -6 \cos XZ' \cos ZZ' & -3 L \cos XZ' \cos XY' & -3 L \cos XZ' \cos YY' & -3 L \cos XZ' \cos ZY' \\ -6 \cos YZ' \cos XZ' & -6 \cos YZ'^2 & -6 \cos YZ' \cos ZZ' & -3 L \cos YZ' \cos XY' & -3 L \cos YZ' \cos YY' & -3 L \cos YZ' \cos ZY' \\ -6 \cos ZZ' \cos XZ' & -6 \cos ZZ' \cos YZ' & -6 \cos ZZ'^2 & -3 L \cos ZZ' \cos XY' & -3 L \cos ZZ' \cos YY' & -3 L \cos ZZ' \cos ZY' \\ 3 L \cos XY' \cos XZ' & 3 L \cos XY' \cos YZ' & 3 L \cos XY' \cos ZZ' & -\frac{s1}{2} Lx^2 + L^2 \cos XY'^2 & -\frac{s1}{2} Lx Ly + L^2 \cos XY' \cos YY' & -\frac{s1}{2} Lx Lz + L^2 \cos XY' \cos ZY' \\ 3 L \cos YY' \cos XZ' & 3 L \cos YY' \cos YZ' & 3 L \cos YY' \cos ZZ' & -\frac{s1}{2} Lx Ly + L^2 \cos YY' \cos XY' & -\frac{s1}{2} Ly^2 + L^2 \cos YY'^2 & -\frac{s1}{2} Ly Lz + L^2 \cos YY' \cos ZY' \\ 3 L \cos ZY' \cos XZ' & 3 L \cos ZY' \cos YZ' & 3 L \cos ZY' \cos ZZ' & -\frac{s1}{2} Lx Lz + L^2 \cos ZY' \cos XY' & -\frac{s1}{2} Ly Lz + L^2 \cos ZY' \cos YY' & -\frac{s1}{2} Lz^2 + L^2 \cos ZY'^2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{K}_{ji} &= \frac{2r}{L^3} \begin{pmatrix} -6 \cos XZ^2 & -6 \cos XZ' \cos YZ' & -6 \cos XZ' \cos ZZ' & 3 L \cos XZ' \cos XY' & 3 L \cos XZ' \cos YY' & 3 L \cos XZ' \cos ZY' \\ -6 \cos YZ' \cos XZ' & -6 \cos YZ'^2 & -6 \cos YZ' \cos ZZ' & 3 L \cos YZ' \cos XY' & 3 L \cos YZ' \cos YY' & 3 L \cos YZ' \cos ZY' \\ -6 \cos ZZ' \cos XZ' & -6 \cos ZZ' \cos YZ' & -6 \cos ZZ'^2 & 3 L \cos ZZ' \cos XY' & 3 L \cos ZZ' \cos YY' & 3 L \cos ZZ' \cos ZY' \\ -3 L \cos XY' \cos XZ' & -3 L \cos XY' \cos YZ' & -3 L \cos XY' \cos ZZ' & -\frac{s1}{2} Lx^2 + L^2 \cos XY'^2 & -\frac{s1}{2} Lx Ly + L^2 \cos XY' \cos YY' & -\frac{s1}{2} Lx Lz + L^2 \cos XY' \cos ZY' \\ -3 L \cos YY' \cos XZ' & -3 L \cos YY' \cos YZ' & -3 L \cos YY' \cos ZZ' & -\frac{s1}{2} Lx Ly + L^2 \cos YY' \cos XY' & -\frac{s1}{2} Ly^2 + L^2 \cos YY'^2 & -\frac{s1}{2} Ly Lz + L^2 \cos YY' \cos ZY' \\ -3 L \cos ZY' \cos XZ' & -3 L \cos ZY' \cos YZ' & -3 L \cos ZY' \cos ZZ' & -\frac{s1}{2} Lx Lz + L^2 \cos ZY' \cos XY' & -\frac{s1}{2} Ly Lz + L^2 \cos ZY' \cos YY' & -\frac{s1}{2} Lz^2 + L^2 \cos ZY'^2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{K}_{jj} &= \frac{2r}{L^3} \begin{pmatrix} 6 \cos XZ^2 & 6 \cos XZ' \cos YZ' & 6 \cos XZ' \cos ZZ' & 3 L \cos XZ' \cos XY' & 3 L \cos XZ' \cos YY' & 3 L \cos XZ' \cos ZY' \\ 6 \cos YZ' \cos XZ' & 6 \cos YZ'^2 & 6 \cos YZ' \cos ZZ' & 3 L \cos YZ' \cos XY' & 3 L \cos YZ' \cos YY' & 3 L \cos YZ' \cos ZY' \\ 6 \cos ZZ' \cos XZ' & 6 \cos ZZ' \cos YZ' & 6 \cos ZZ'^2 & 3 L \cos ZZ' \cos XY' & 3 L \cos ZZ' \cos YY' & 3 L \cos ZZ' \cos ZY' \\ 3 L \cos XY' \cos XZ' & 3 L \cos XY' \cos YZ' & 3 L \cos XY' \cos ZZ' & \frac{s1}{2} Lx^2 + 2 L^2 \cos XY'^2 & \frac{s1}{2} Lx Ly + 2 L^2 \cos XY' \cos YY' & \frac{s1}{2} Lx Lz + 2 L^2 \cos XY' \cos ZY' \\ 3 L \cos YY' \cos XZ' & 3 L \cos YY' \cos YZ' & 3 L \cos YY' \cos ZZ' & \frac{s1}{2} Lx Ly + 2 L^2 \cos YY' \cos XY' & \frac{s1}{2} Ly^2 + 2 L^2 \cos YY'^2 & \frac{s1}{2} Ly Lz + 2 L^2 \cos YY' \cos ZY' \\ 3 L \cos ZY' \cos XZ' & 3 L \cos ZY' \cos YZ' & 3 L \cos ZY' \cos ZZ' & \frac{s1}{2} Lx Lz + 2 L^2 \cos ZY' \cos XY' & \frac{s1}{2} Ly Lz + 2 L^2 \cos ZY' \cos YY' & \frac{s1}{2} Lz^2 + 2 L^2 \cos ZY'^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

[5.93]

que son las cuatro submatrices de rigidez de una barra perteneciente a un diafragma rígido en coordenadas globales y orientación arbitraria. Obsérvese que la matriz obtenida conserva la simetría.

Comparando las anteriores submatrices con sus homólogas del método tradicional dadas en [3.12] es interesante resaltar que las submatrices del método propuesto presentan un mayor grado de simplificación. Además, en el cálculo de una estructura en la que existan diafragmas rígidos, las soluciones que se obtendrían en base a esta matrices serían más acordes con la estructura real que las que se obtendrían con las matrices tradicionales, toda vez que éstas no contemplan las condiciones especiales que se dan en dichas estructuras.

Por otra parte, es de resaltar que:

1º.- El sistema de ecuaciones obtenido por el método propuesto estará mejor condicionado que el que se obtiene con el procedimiento tradicional, lo que puede comprobarse en los cuadros de los capítulos 7 y 11.

2º. La forma tradicional de introducir las condiciones de diafragma rígido consiste en introducir las ecuaciones [5.16] en la matriz de rigidez del sistema y resolverlo por el método de los multiplicadores de Lagrange que, como se comentó en el Capítulo 1 es el más apropiado. Sin embargo, el condicionamiento de dicho sistema se deteriora de tal forma que se hacen alarmantemente dudosos los resultados que se obtienen (véanse últimas filas de los cuadros 7.4 y siguientes).

En estructuras de edificación, las cuales representan un altísimo porcentaje en la construcción, la matriz deducida en este apartado va a tener una presencia casi permanente, pues la mayor parte de las barras que las conforman suelen estar embebidas en planos a los que se les ha de considerar como diafragmas rígidos para que la modelización sea más adecuada. Pero, dentro de este tipo de estructuras, tales planos rígidos se darán sobre todo en forjados de piso, esto es, planos horizontales, por lo que se estima muy conveniente particularizar las matrices obtenidas para estos casos, lo que se desarrollará en el siguiente epígrafe.

5.2.1.- Matriz de Rigidez de una barra embebida en un Diafragma Rígido horizontal.

- Si la barra pertenece a un plano horizontal, el eje local Z' será paralelo al global Z, por lo tanto se habrán de cumplir los valores dados en [3.15] que habría que introducirlos en las submatrices anteriormente determinadas. Pero es más cómoda su deducción a partir de la matriz de barra inelongable horizontal ya calculada y expresada en [4.67] eliminando en ella los elementos afectados por el coeficiente de rigidez transversal i. Por lo tanto se tendrá que la matriz de rigidez buscada es:

$$\mathbf{K} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 6 & 3L_y & -3L_x & 0 & 0 & 0 & -6 & 3L_y & -3L_x & 0 \\
 0 & 0 & 3L_y & \frac{st}{2}L_x^2 + 2L_y^2 & \frac{st-4}{2}L_xL_y & 0 & 0 & 0 & -3L_y & -\frac{st}{2}L_x^2 + L_y^2 & -\frac{st+2}{2}L_xL_y & 0 \\
 0 & 0 & -3L_x & \frac{st-4}{2}L_xL_y & \frac{st}{2}L_y^2 + 2L_x^2 & 0 & 0 & 0 & -3L_x & -\frac{st+2}{2}L_xL_y & -\frac{st}{2}L_y^2 + L_x^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -6 & -3L_y & 3L_x & 0 & 0 & 0 & 6 & -3L_y & 3L_x & 0 \\
 0 & 0 & 3L_y & -\frac{st}{2}L_x^2 + L_y^2 & -\frac{st+2}{2}L_xL_y & 0 & 0 & 0 & -3L_y & \frac{st}{2}L_x^2 + 2L_y^2 & \frac{st-4}{2}L_xL_y & 0 \\
 0 & 0 & -3L_x & -\frac{st+2}{2}L_xL_y & -\frac{st}{2}L_y^2 + L_x^2 & 0 & 0 & 0 & 3L_x & \frac{st-4}{2}L_xL_y & \frac{st}{2}L_y^2 + 2L_x^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad [5.94]$$

Por último, si alguno de los extremos de la barra incide en un nudo perteneciente a un pilar con continuidad hasta cimentación, no habrá desplazamiento vertical en dicho extremo, por lo que debe hacerse nula la columna asociada. Si esta circunstancia, como suele ser habitual en forjados de edificación, se da en los dos extremos, la matriz quedará reducida, pues, a la expresión

$$\mathbf{K} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3L_y & -3L_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 3L_y & -3L_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{st}{2}L_x^2 + 2L_y^2 & \frac{st-4}{2}L_xL_y & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{st}{2}L_x^2 + L_y^2 & -\frac{st+2}{2}L_xL_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{st-4}{2}L_xL_y & \frac{st}{2}L_y^2 + 2L_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{st+2}{2}L_xL_y & -\frac{st}{2}L_y^2 + L_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3L_y & 3L_x & 0 & 0 & 0 & 0 & -3L_y & 3L_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{st}{2}L_x^2 + L_y^2 & -\frac{st+2}{2}L_xL_y & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{st}{2}L_x^2 + 2L_y^2 & \frac{st-4}{2}L_xL_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{st+2}{2}L_xL_y & -\frac{st}{2}L_y^2 + L_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{st-4}{2}L_xL_y & \frac{st}{2}L_y^2 + 2L_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [5.95]$$

en la que es de resaltar la extraordinaria simplificación y la comodidad en la introducción de datos para su correspondiente particularización, pues solamente aparecen cuatro variables: L_x , L_y , por una parte y, por otra, s y t , cuyos significados se expresaron en [4.24] y [4.26], respectivamente.

5.2.2.- Matriz de Rigidez de una barra perteneciente a un emparrillado.- De modo análogo a lo expuesto en el epígrafe 3.1.4, donde se dedujo para el Método Clásico la matriz de rigidez de un emparrillado a partir de la matriz de barra con un eje principal de inercia y directriz horizontales sin más que eliminar en dicha matriz las filas/columnas asociadas a los corrimientos nulos, así también, partiendo de la matriz de rigidez de una barra embebida en un diafragma rígido horizontal dada en [5.94] y eliminado en ella las filas/columnas 1, 2, 6, 7, 8 y 12, se obtendrá la matriz de rigidez

$$\mathbf{K} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L_y & -3L_x & -6 & 3L_y & -3L_x \\ 3L_y & \frac{st}{2}L_x^2 + 2L_y^2 & \frac{st-4}{2}L_xL_y & -3L_y & -\frac{st}{2}L_x^2 + L_y^2 & -\frac{st+2}{2}L_xL_y \\ -3L_x & \frac{st-4}{2}L_xL_y & \frac{st}{2}L_y^2 + 2L_x^2 & -3L_x & -\frac{st+2}{2}L_xL_y & -\frac{st}{2}L_y^2 + L_x^2 \\ \hline -6 & -3L_y & 3L_x & 6 & -3L_y & 3L_x \\ 3L_y & -\frac{st}{2}L_x^2 + L_y^2 & -\frac{st+2}{2}L_xL_y & -3L_y & \frac{st}{2}L_x^2 + 2L_y^2 & \frac{st-4}{2}L_xL_y \\ -3L_x & -\frac{st+2}{2}L_xL_y & -\frac{st}{2}L_y^2 + L_x^2 & 3L_x & \frac{st-4}{2}L_xL_y & \frac{st}{2}L_y^2 + 2L_x^2 \end{bmatrix} \quad [5.96]$$

correspondiente a una barra de emparrillado horizontal, disposición normal de este tipo de elementos estructurales. Si la orientación del emparrillado fuese genérica, bastaría con efectuar dicha eliminación de filas y columnas en la matriz de barra genérica dada por [5.93]

5.3.- Matriz de Conversión de una barra genérica embebida en un diafragma

rígido.- Para la determinación de las solicitaciones de extremo correspondientes a la barra embebida en un diafragma rígido será necesario determinar la correspondiente matriz de conversión. Para ello bastaría con premultiplicar la matriz de rigidez dada en [5.93] por la transpuesta de la matriz de rotación, pero es mucho más directo determinarla a partir de la matriz de conversión correspondiente a la barra inelongable de dirección arbitraria expresada en [4.80] sin más que eliminar en ella los términos afectados por el parámetro i , que, de acuerdo con [4.20], expresa la relación entre la rigidez a la flexión $I_{z'}$ y la correspondiente I_y . Procediendo a tal eliminación, se tiene

$$\mathbf{M}^{\text{conv}} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6\cos XZ' & 6\cos YZ' & 6\cos ZZ' & -3L\cos XY' & -3L\cos YY' & -3L\cos ZY' & -6\cos XZ' & -6\cos YZ' & -6\cos ZZ' & -3L\cos XY' & -3L\cos YY' & -3L\cos ZY' \\ 0 & 0 & 0 & \frac{s1}{2}L^2\cos XX' & \frac{s1}{2}L^2\cos YX' & \frac{s1}{2}L^2\cos ZX' & 0 & 0 & 0 & -\frac{s1}{2}L^2\cos XX' & -\frac{s1}{2}L^2\cos YX' & -\frac{s1}{2}L^2\cos ZX' \\ -3L\cos XZ' & -3L\cos YZ' & -3L\cos ZZ' & 2L^2\cos XY' & 2L^2\cos YY' & 2L^2\cos ZY' & 3L\cos XZ' & 3L\cos YZ' & 3L\cos ZZ' & L^2\cos XY' & L^2\cos YY' & L^2\cos ZY' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6\cos XZ' & -6\cos YZ' & -6\cos ZZ' & 3L\cos XY' & 3L\cos YY' & 3L\cos ZY' & 6\cos XZ' & 6\cos YZ' & 6\cos ZZ' & 3L\cos XY' & 3L\cos YY' & 3L\cos ZY' \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{s1}{2}L^2\cos XX' & -\frac{s1}{2}L^2\cos YX' & -\frac{s1}{2}L^2\cos ZX' & 0 & 0 & 0 & \frac{s1}{2}L^2\cos XX' & \frac{s1}{2}L^2\cos YX' & \frac{s1}{2}L^2\cos ZX' \\ -3L\cos XZ' & -3L\cos YZ' & -3L\cos ZZ' & L^2\cos XY' & L^2\cos YY' & L^2\cos ZY' & 3L\cos XZ' & 3L\cos YZ' & 3L\cos ZZ' & 2L^2\cos XY' & 2L^2\cos YY' & 2L^2\cos ZY' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [5.97]$$

en donde, como se observa, se hacen idénticamente nulas las filas 1ª, 2ª y 6ª, que corresponden, respectivamente, a las solicitaciones de fuerza en los ejes locales X' e Y' , esto es, al axil y al cortante contenido en el plano rígido y a la solicitación de momento respecto el eje local Z' , todo ello para el extremo i . Obviamente son así mismo nulas la 7ª, 8ª y 12ª correspondientes al extremo j . Deben, pues, eliminarse dichas filas con lo que la matriz de conversión para la barra genérica quedará en la forma

$$\mathbf{M}^{\text{conv}} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 6\cos XZ' & 6\cos YZ' & 6\cos ZZ' & -3L\cos XY' & -3L\cos YY' & -3L\cos ZY' & -6\cos XZ' & -6\cos YZ' & -6\cos ZZ' & -3L\cos XY' & -3L\cos YY' & -3L\cos ZY' \\ 0 & 0 & 0 & \frac{s1}{2}L^2\cos XX' & \frac{s1}{2}L^2\cos YX' & \frac{s1}{2}L^2\cos ZX' & 0 & 0 & 0 & -\frac{s1}{2}L^2\cos XX' & -\frac{s1}{2}L^2\cos YX' & -\frac{s1}{2}L^2\cos ZX' \\ -3L\cos XZ' & -3L\cos YZ' & -3L\cos ZZ' & 2L^2\cos XY' & 2L^2\cos YY' & 2L^2\cos ZY' & 3L\cos XZ' & 3L\cos YZ' & 3L\cos ZZ' & L^2\cos XY' & L^2\cos YY' & L^2\cos ZY' \\ -6\cos XZ' & -6\cos YZ' & -6\cos ZZ' & 3L\cos XY' & 3L\cos YY' & 3L\cos ZY' & 6\cos XZ' & 6\cos YZ' & 6\cos ZZ' & 3L\cos XY' & 3L\cos YY' & 3L\cos ZY' \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{s1}{2}L^2\cos XX' & -\frac{s1}{2}L^2\cos YX' & -\frac{s1}{2}L^2\cos ZX' & 0 & 0 & 0 & \frac{s1}{2}L^2\cos XX' & \frac{s1}{2}L^2\cos YX' & \frac{s1}{2}L^2\cos ZX' \\ -3L\cos XZ' & -3L\cos YZ' & -3L\cos ZZ' & L^2\cos XY' & L^2\cos YY' & L^2\cos ZY' & 3L\cos XZ' & 3L\cos YZ' & 3L\cos ZZ' & 2L^2\cos XY' & 2L^2\cos YY' & 2L^2\cos ZY' \end{bmatrix} \quad [5.98]$$

Obsérvese que este resultado es totalmente coherente con el obtenido para la barra inelongable, en donde se hacían nulas las filas 1ª y 7ª, correspondientes a los axiles de extremo, pues así como éstos no podían calcularse a partir de esta matriz de conversión como consecuencia de la hipótesis de inelongabilidad introducida*, tampoco aquí es posible el cálculo del cortante contenido en el plano rígido ni del momento flector de eje normal a él

* Véase epígrafe 4.3

como consecuencia de la hipótesis de inflexibilidad impuesta mediante la ecuación [5.2] asociada al cortante y la igualdad de giros descrita por [5.3], asociada al momento. Pero, contrariamente a lo que se afirmó en el epígrafe 4.3 respecto a la ineludible necesidad de conocer el valor de los axiles, aquí no será imprescindible el conocimiento de las solicitaciones cuyos valores nos niega la anterior matriz de conversión, pues en este caso, estos valores, que de todas formas nos devolverá la resolución del sistema de Lagrange a través de sus multiplicadores, pueden obviarse toda vez que dichas solicitaciones serán suficientemente resistidas por el propio diafragma en el que la barra está embebida y, por tanto, podrían eliminarse del sistema de Lagrange las incógnitas correspondientes a dichos multiplicadores, con lo que el sistema reduce de forma importante sus dimensiones ya que se eliminarán tres incógnitas por nudo, lo que se estudiará detalladamente en el Capítulo 11.

Si, como suele ser bastante habitual, la barra tiene impedidos en ambos extremos los desplazamientos verticales, quedará de la forma

$$\mathbf{M}^{\text{conv}} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 6\cos XZ' & 6\cos YZ' & 0 & -3L\cos XY' & -3L\cos YY' & -3L\cos ZY' & -6\cos XZ' & -6\cos YZ' & 0 & -3L\cos XY' & -3L\cos YY' & -3L\cos ZY' \\ 0 & 0 & 0 & \frac{st}{2}L^2\cos XX' & \frac{st}{2}L^2\cos YX' & \frac{st}{2}L^2\cos ZX' & 0 & 0 & 0 & -\frac{st}{2}L^2\cos XX' & -\frac{st}{2}L^2\cos YX' & -\frac{st}{2}L^2\cos ZX' \\ -3L\cos XZ' & -3L\cos YZ' & 0 & 2L^2\cos XY' & 2L^2\cos YY' & 2L^2\cos ZY' & 3L\cos XZ' & 3L\cos YZ' & 0 & L^2\cos XY' & L^2\cos YY' & L^2\cos ZY' \\ -6\cos XZ' & -6\cos YZ' & 0 & 3L\cos XY' & 3L\cos YY' & 3L\cos ZY' & 6\cos XZ' & 6\cos YZ' & 0 & 3L\cos XY' & 3L\cos YY' & 3L\cos ZY' \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{st}{2}L^2\cos XX' & -\frac{st}{2}L^2\cos YX' & -\frac{st}{2}L^2\cos ZX' & 0 & 0 & 0 & \frac{st}{2}L^2\cos XX' & \frac{st}{2}L^2\cos YX' & \frac{st}{2}L^2\cos ZX' \\ -3L\cos XZ' & -3L\cos YZ' & 0 & L^2\cos XY' & L^2\cos YY' & L^2\cos ZY' & 3L\cos XZ' & 3L\cos YZ' & 0 & 2L^2\cos XY' & 2L^2\cos YY' & 2L^2\cos ZY' \end{bmatrix} \quad [5.99]$$

Una simplificación más puede aún introducirse para reducir el cálculo de solicitaciones, pues es de observar que las dos primeras filas de las dos submatrices superiores son iguales en valor absoluto a las de las submatrices inferiores, ya que corresponden al cortante vertical y al torsor, respectivamente en sendos extremos y, como es lógico, cada una de ellas será igual y de sentido contrario a su homóloga del otro extremo por estar la barra descargada. Pueden, pues, determinarse dichas solicitaciones a partir de la sencilla expresión

$$\mathbf{M}^{\text{conv}} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 6\cos XZ' & 6\cos YZ' & 0 & -3L\cos XY' & -3L\cos YY' & -3L\cos ZY' & -6\cos XZ' & -6\cos YZ' & 0 & -3L\cos XY' & -3L\cos YY' & -3L\cos ZY' \\ 0 & 0 & 0 & \frac{st}{2}L^2\cos XX' & \frac{st}{2}L^2\cos YX' & \frac{st}{2}L^2\cos ZX' & 0 & 0 & 0 & -\frac{st}{2}L^2\cos XX' & -\frac{st}{2}L^2\cos YX' & -\frac{st}{2}L^2\cos ZX' \\ -3L\cos XZ' & -3L\cos YZ' & 0 & 2L^2\cos XY' & 2L^2\cos YY' & 2L^2\cos ZY' & 3L\cos XZ' & 3L\cos YZ' & 0 & L^2\cos XY' & L^2\cos YY' & L^2\cos ZY' \\ -3L\cos XZ' & -3L\cos YZ' & 0 & L^2\cos XY' & L^2\cos YY' & L^2\cos ZY' & 3L\cos XZ' & 3L\cos YZ' & 0 & 2L^2\cos XY' & 2L^2\cos YY' & 2L^2\cos ZY' \end{bmatrix} \quad [5.100]$$

en donde las tres primeras filas determinarán el valor de las solicitaciones del extremo i , mientras que la última determinará la solicitación de momento flector en el extremo j .

5.3.1.- Matriz de Conversión de una barra embebida en un diafragma rígido horizontal.- Para determinar la matriz de conversión correspondiente a la situación más frecuente en edificación en la que el plano rígido suele ser horizontal, bastará con introducir en [5.98] los valores de los cosenos directores del eje Z' , o bien eliminar el parámetro i en la matriz dada por [4.91]. Procediendo de esta última forma por ser más directo y eliminando las filas que, como consecuencia de dicha eliminación, se hacen idénticamente nulas, se obtiene

$$\mathbf{M}_{\text{horiz.}}^{\text{conv}} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & -3L \cos XY' & -3L \cos YY' & 0 & 0 & 0 & -6 & -3L \cos XY' & -3L \cos YY' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{st}{2} L^2 \cos XX' & \frac{st}{2} L^2 \cos YX' & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{st}{2} L^2 \cos XX' & -\frac{st}{2} L^2 \cos YX' & 0 \\ 0 & 0 & -3L & 2L^2 \cos XY' & 2L^2 \cos YY' & 0 & 0 & 0 & 3L & L^2 \cos XY' & L^2 \cos YY' & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3L \cos XY' & 3L \cos YY' & 0 & 0 & 0 & 6 & 3L \cos XY' & 3L \cos YY' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{st}{2} L^2 \cos XX' & -\frac{st}{2} L^2 \cos YX' & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{st}{2} L^2 \cos XX' & \frac{st}{2} L^2 \cos YX' & 0 \\ 0 & 0 & -3L & L^2 \cos XY' & L^2 \cos YY' & 0 & 0 & 0 & 3L & 2L^2 \cos XY' & 2L^2 \cos YY' & 0 \end{bmatrix} \quad [5.101]$$

la cual, como anteriormente se ha expuesto, puede simplificarse si se eliminan además las columnas nulas, con lo que se tendrá

$$\mathbf{M}_{\text{horiz.}}^{\text{conv}} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & -3L \cos XY' & -3L \cos YY' & -6 & -3L \cos XY' & -3L \cos YY' \\ 0 & \frac{st}{2} L^2 \cos XX' & \frac{st}{2} L^2 \cos YX' & 0 & -\frac{st}{2} L^2 \cos XX' & -\frac{st}{2} L^2 \cos YX' \\ -3L & 2L^2 \cos XY' & 2L^2 \cos YY' & 3L & L^2 \cos XY' & L^2 \cos YY' \\ -6 & 3L \cos XY' & 3L \cos YY' & 6 & 3L \cos XY' & 3L \cos YY' \\ 0 & -\frac{st}{2} L^2 \cos XX' & -\frac{st}{2} L^2 \cos YX' & 0 & \frac{st}{2} L^2 \cos XX' & \frac{st}{2} L^2 \cos YX' \\ -3L & L^2 \cos XY' & L^2 \cos YY' & 3L & 2L^2 \cos XY' & 2L^2 \cos YY' \end{bmatrix} \quad [5.102]$$

y si, por último, los extremos tienen impedidos sus desplazamientos verticales como consecuencia de la inelongabilidad de los pilares en los que entesta la barra, se obtiene, al eliminar las columnas asociadas a dichos corrimientos, la expresión

$$\mathbf{M}_{\text{horiz.}}^{\text{conv}} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} -3L \cos XY' & -3L \cos YY' & -3L \cos XY' & -3L \cos YY' \\ \frac{st}{2} L^2 \cos XX' & \frac{st}{2} L^2 \cos YX' & -\frac{st}{2} L^2 \cos XX' & -\frac{st}{2} L^2 \cos YX' \\ 2L^2 \cos XY' & 2L^2 \cos YY' & L^2 \cos XY' & L^2 \cos YY' \\ 3L \cos XY' & 3L \cos YY' & 3L \cos XY' & 3L \cos YY' \\ -\frac{st}{2} L^2 \cos XX' & -\frac{st}{2} L^2 \cos YX' & \frac{st}{2} L^2 \cos XX' & \frac{st}{2} L^2 \cos YX' \\ L^2 \cos XY' & L^2 \cos YY' & 2L^2 \cos XY' & 2L^2 \cos YY' \end{bmatrix} \quad [5.103]$$

o, más cómodamente, teniendo en cuenta los valores dados en [4.51] y [4.52], queda

$$\mathbf{M}_{\text{horiz.}}^{\text{conv}} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 3L_y & -3L_x & | & 3L_y & -3L_x \\ \frac{st}{2}L_x^2 & \frac{st}{2}L_y^2 & | & -\frac{st}{2}L_x^2 & -\frac{st}{2}L_y^2 \\ 2L_y^2 & 2L_x^2 & | & L_y^2 & L_x^2 \\ \hline -3L_y & 3L_x & | & -3L_y & 3L_x \\ -\frac{st}{2}L_x^2 & -\frac{st}{2}L_y^2 & | & \frac{st}{2}L_x^2 & \frac{st}{2}L_y^2 \\ L_y^2 & L_x^2 & | & 2L_y^2 & 2L_x^2 \end{bmatrix} \quad [5.104]$$

expresión que facilitará las solicitaciones en función exclusiva de las componentes de giro de sus extremos respecto a los ejes X e Y en coordenadas globales, es decir: de las doce componentes de sollicitación que mantienen en equilibrio a la barra aislada, sólo serán necesarias cuatro de ellas para su análisis mecánico y, además, para su cálculo sólo serán necesarios cuatro valores de corrimiento de los doce grados de libertad que la barra puede tener en el espacio tridimensional.

5.3.2.- Matriz de Conversión de una barra perteneciente a un emparrillado.-

Eliminando en la matriz dada por [5.101] las columnas nulas 1, 2, 6, 7, 8 y 12, y teniendo en cuenta nuevamente [4.51] y [4.52], se tiene

$$\mathbf{M}_{\text{emp.}}^{\text{conv}} = \frac{2r}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L_y & -3L_x & | & -6 & 3L_y & -3L_x \\ 0 & \frac{st}{2}L_x^2 & \frac{st}{2}L_y^2 & | & 0 & -\frac{st}{2}L_x^2 & -\frac{st}{2}L_y^2 \\ -3L & 2L_y^2 & 2L_x^2 & | & 3L & L_y^2 & L_x^2 \\ \hline -6 & -3L_y & 3L_x & | & -6 & -3L_y & 3L_x \\ 0 & -\frac{st}{2}L_x^2 & -\frac{st}{2}L_y^2 & | & 0 & \frac{st}{2}L_x^2 & \frac{st}{2}L_y^2 \\ -3L & L_y^2 & L_x^2 & | & 3L & 2L_y^2 & 2L_x^2 \end{bmatrix} \quad [5.105]$$

que es la matriz de conversión de una barra perteneciente a un emparrillado horizontal correspondiente al método propuesto.

CAPÍTULO 6

DESARROLLO DEL MÉTODO

OBJETIVO:

Este capítulo tiene por objeto mostrar el procedimiento a seguir para el cálculo de estructuras de barras utilizando las matrices de rigidez y de conversión propuestas, deducidas en los dos capítulos anteriores.

CONTENIDO:

Una vez realizado el ensamblaje de las matrices de barra deducidas anteriormente, ensamblaje que es del todo idéntico al utilizado para las matrices del Método Tradicional, se obtiene la Matriz de Rigidez a la Flexotorsión de la estructura en estudio que, naturalmente, será de las mismas dimensiones que las de aquel método. Pero la resolución del sistema lineal que se obtiene devolverá una solución que, en general, será incorrecta, toda vez que en este sistema no están contempladas las relaciones existentes entre las incógnitas de corrimiento como consecuencia de las condiciones de restricción cinemática introducida en las matrices de rigidez de cada uno de los elementos. De ahí que será necesario ampliar dicho sistema con otro -Sistema de Restricciones- cuya matriz de coeficientes –Matriz de Restricción- se consigue, asimismo, por ensamblaje directo, mostrándose a continuación los diferentes procedimientos para la resolución del sistema rectangular resultante.

6.1.- Matriz de Restricciones. Consideremos una estructura espacial formada por un número b de barras rectas de sección constante unidas rígidamente y cargada exclusivamente en sus nudos. Una vez numerados nudos y barras se procederá al ensamblaje de las matrices de barra en idéntica forma a como se procede en el Método Tradicional Directo de la Rigidez, utilizando para ello la matriz de la barra inelongable dada por [4.46] y siguientes, de acuerdo con sus particularidades, o, si la barra pertenece a un diafragma rígido, la expresada en [5.93] o siguientes, obteniéndose la matriz completa de la estructura. Introduciendo en esta matriz las pertinentes condiciones de contorno, sea \mathbf{M} la matriz reducida y \mathbf{p} el vector columna que designa las componentes de acciones actuantes sobre cada uno de los

g.d.l. de la estructura, ambas referidas al sistema global de coordenadas. El sistema obtenido se expresa matricialmente en la forma

$$\mathbf{M} \mathbf{c} = \mathbf{p} \quad [6.1]$$

donde, como se recordará, \mathbf{c} designa las n componentes de corrimiento, incógnitas del sistema. La matriz de coeficientes \mathbf{M} es una matriz cuadrada de dimensiones $n \times n$ -siendo n el número de g.d.l. de la estructura- y simétrica, pues simétricas son las matrices que la han generado. Además, el sistema [6.1] es compatible y determinado. Si utilizáramos las matrices de barra tradicionales, el sistema nos devolvería el valor de los corrimientos de los nudos obteniendo, en general, una solución aceptable; pero la hipótesis de inelongabilidad [4.11] introducida en las matrices de barra o las hipótesis de diafragma rígido [5.16] que en este trabajo se proponen hace que las incógnitas de [6.1] no sean independientes entre sí para el método propuesto: es necesario, pues, que se cumplan las relaciones dadas por [4.11] o las dadas por [5.16] entre dichos valores, por lo que si se resuelve el sistema [6.1] la solución será incorrecta. La explicación a esto es una consecuencia inmediata de lo ya indicado en el apartado 4.3. En efecto, tal y como allí se demostró, las matrices de rigidez de la barra inelongable utilizadas para el ensamblaje de \mathbf{K} solamente contienen los elementos correspondientes a las componentes de cortante y momentos, pero no a las de axiles y, puesto que las ecuaciones del sistema [6.1] no son más que ecuaciones de equilibrio de nudos y en ellas faltan las componentes de dichos axiles, estas ecuaciones son incompletas y, por tanto, incorrectas; de ahí que la solución también lo sea. De forma similar, de las matrices de rigidez de una barra perteneciente a un diafragma rígido, desaparecen, además de las componentes de axiles, las correspondientes al cortante contenido en dicho diafragma y al momento flector según el eje perpendicular al diafragma.

Es obligado, como se decía, imponer a las incógnitas de corrimiento el cumplimiento de tales relaciones de restricción. Como cada barra es inelongable y cada una de ellas conecta dos nudos de la estructura, existirán tantas relaciones-ecuaciones [4.11] entre las componentes de desplazamiento de sus nudos como barras tiene la estructura, mientras que en el caso de la barra perteneciente a un diafragma rígido existirán tres relaciones por barra, puesto que cada barra impone las tres ecuaciones incluidas en [5.16].

Particularizando, pues, para cada una de las b barras de la estructura la ecuación de inelongabilidad [4.11] o, en el caso de diafragma rígido, la [5.16] en las que, por condición de continuidad, los corrimientos de extremo de barra $u, v, w, \alpha, \beta, \gamma$ se sustituyen por los de los nudos que unen $u_i, v_i, w_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ con $i = 1, 2, \dots, N$, siendo N el número de nudos sus-

en donde el bloque de ecuaciones situado por encima de la línea de rayitas corresponde a las ecuaciones de equilibrio, el bloque por debajo de dicha línea corresponde a las ecuaciones de inelongabilidad, y los asteriscos simbolizan los elementos correspondientes a los demás nudos de la estructura distintos del i y j . En forma más compacta, el esquema anterior adquiere la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{I}_g \end{bmatrix} [\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [6.4]$$

Puesto que la matriz \mathbf{I}_g está formada por el conjunto de coeficientes de condiciones de inelongabilidad la llamaremos en adelante Matriz de Restricciones Inelongabilidad o, sencillamente, Matriz de Inelongabilidad.

6.1.2.- Ensamblaje directo de la Matriz de Diafragma Rígido.- De forma totalmente similar a lo expuesto anteriormente, si existen uno o varios conjuntos de barras, cada uno de ellos perteneciente a un mismo diafragma rígido, el subsistema que describe las relaciones entre las incógnitas de corrimiento como consecuencia de las condiciones de restricción debido a la indeformabilidad de dichos diafragmas, puede escribirse matricialmente en la forma

$$\mathbf{Dc} = \mathbf{0} \quad [6.5]$$

en donde \mathbf{D} es la matriz de coeficientes del sistema homogéneo rectangular de $3d$ ecuaciones y n incógnitas, siendo d el número total de barras pertenecientes a dichos diafragmas. Siguiendo el mismo razonamiento expuesto en el epígrafe anterior bastará con sustituir en el esquema [6.3] los vectores \mathbf{I}_i e \mathbf{I}_j dados en [4.5] y [4.8] por las matrices \mathbf{D}_i y \mathbf{D}_j dadas en [5.14]. De esta forma se tendrá el siguiente esquema matricial, análogo al anterior:

$$\mathbf{Rc} = \mathbf{0} \quad [6.8]$$

en donde

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_g \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad [6.9]$$

y, por tanto, se ha de escribir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} [\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [6.10]$$

sistema rectangular para el que se exponen a continuación diferentes métodos de resolución.*

6.2.1.- Método de las Transformaciones.- Como antes se ha indicado, el sistema [6.10] presenta más ecuaciones que incógnitas, por lo tanto, si e es el número de ecuaciones de restricción, del segundo bloque de la ecuación [6.10] pueden elegirse un conjunto e de incógnitas, que llamaremos dependientes o esclavas, y despejarlas en función de las m restantes ($m=n-e$), las cuales adquieren la categoría de independientes o maestras. Al sustituir estas e incógnitas en el primer bloque de [6.10], la matriz \mathbf{M} sufre una modificación consistente en unas determinadas combinaciones lineales de sus columnas y se transforma en otra rectangular, que llamaremos \mathbf{M}_c (donde, con el subíndice c , queremos indicar que la matriz ha sufrido una determinada combinación lineal de columnas). El sistema resultante tiene, pues, como incógnitas exclusivamente las m incógnitas maestras o independientes. Llamando \mathbf{c}_m al vector que describe las componentes maestras, el sistema [6.1] o, lo que es lo mismo, el primer bloque de [6.10], quedará en la forma

$$\mathbf{M}_c \mathbf{c}_m = \mathbf{p} \quad [6.11]$$

con el mismo número de ecuaciones (n) pero con menos incógnitas (m), con lo que la matriz de coeficientes ha dejado de ser cuadrada y, por tanto, simétrica.

Nuevamente sólo se podrá obtener solución de este sistema a partir de combinaciones lineales de las ecuaciones. Pero, como ya se ha apuntado, la solución ha de ser única y ésta ha de ser tal que el sistema definitivo recupere la simetría (principio de reciprocidad de Mawell-Betti). Para ello será necesario, pues, introducir en las ecuaciones del sistema resultante las mismas combinaciones lineales que han experimentado las columnas como consecuencia de la eliminación de incógnitas introducida. El sistema recupera entonces su simetría.

*Para este tipo de sistemas, además de los dos procedimientos que se exponen, existe un tercero -Método de la Penalización, ya comentado en el capítulo 1- que no aplicamos aquí por ser una práctica un tanto arbitraria y artificiosa que, para más abundamiento, produce un importante deterioro en el condicionamiento.

tría y sus dimensiones quedan reducidas a m ecuaciones con m incógnitas, indeterminación cinemática de la estructura. Desarrollemos este proceso matricialmente.

Elijamos en el segundo bloque de [6.10] un conjunto de e incógnitas, de tal forma que sean independientes entre sí** y sea \mathbf{c}_e el vector que las describe. De acuerdo con esto la ecuación matricial [6.8], particionada y reordenada convenientemente, puede ponerse en la forma

$$[\mathbf{R}_e \quad \mathbf{R}_m] \begin{bmatrix} \mathbf{c}_e \\ \mathbf{c}_m \end{bmatrix} = [\mathbf{0}] \quad [6.12]$$

donde \mathbf{R}_e es la submatriz cuadrada y no singular de dimensión $e \times e$ que contiene los coeficientes de las e incógnitas esclavas, \mathbf{R}_m la submatriz, en general rectangular, de dimensión $e \times m$ que contiene los coeficientes de las m incógnitas restantes, incógnitas maestras.

Desarrollando [6.12], se tendrá

$$\mathbf{R}_e \mathbf{c}_e + \mathbf{R}_m \mathbf{c}_m = \mathbf{0} \quad [6.13]$$

operando

$$\mathbf{R}_e \mathbf{c}_e = -\mathbf{R}_m \mathbf{c}_m \quad [6.14]$$

y, por ser \mathbf{R}_e no singular, premultiplicando ambos miembros por su inversa, se tendrá

$$\mathbf{c}_e = [-\mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{R}_m] \mathbf{c}_m$$

que puede reescribirse como

$$\mathbf{c}_e = \mathbf{R}_{em} \mathbf{c}_m \quad [6.15]$$

donde \mathbf{R}_{em} es una matriz de e filas y m columnas que se define como:

$$\mathbf{R}_{em} = [-\mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{R}_m] \quad [6.16]$$

Por otra parte, reordenemos y particionemos las incógnitas del sistema original [6.1] de forma tal que las e primeras sean las que se han elegido como esclavas. Reordenando y particionando congruentemente las ecuaciones, la matriz de coeficientes obtenida conserva

** En el Capítulo 7 se exponen los criterios de elección de tales incógnitas para que éstas sean independientes entre sí.

la simetría -por cuanto las submatrices de la diagonal principal son simétricas y las otras dos mutuamente transpuestas- con lo que dicho sistema adoptará la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ee} & \mathbf{M}_{em} \\ \mathbf{M}_{me} & \mathbf{M}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_e \\ \mathbf{c}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_e \\ \mathbf{p}_m \end{bmatrix} \quad [6.17]$$

en donde los subíndices indican la designación de esclavas-maestras y, simultáneamente, las dimensiones de las submatrices y vectores.

Desarrollando el primer bloque de ecuaciones de [6.17]

$$\mathbf{M}_{ee} \mathbf{c}_e + \mathbf{M}_{em} \mathbf{c}_m = \mathbf{p}_e \quad [6.18]$$

sustituyendo aquí el valor de \mathbf{c}_e dado por [6.15]

$$\mathbf{M}_{ee} \mathbf{R}_{em} \mathbf{c}_m + \mathbf{M}_{em} \mathbf{c}_m = \mathbf{p}_e \quad [6.19]$$

y sacando factores comunes se tendrá

$$[\mathbf{M}_{ee} \mathbf{R}_{em} + \mathbf{M}_{em}] \mathbf{c}_m = \mathbf{p}_e \quad [6.20]$$

Por otra parte, desarrollando, así mismo, el segundo bloque de [6.17]

$$\mathbf{M}_{me} \mathbf{c}_e + \mathbf{M}_{mm} \mathbf{c}_m = \mathbf{p}_m \quad [6.21]$$

sustituyendo el valor de \mathbf{c}_e dado por [6.15]

$$\mathbf{M}_{me} \mathbf{R}_{em} \mathbf{c}_m + \mathbf{M}_{mm} \mathbf{c}_m = \mathbf{p}_m \quad [6.22]$$

y extrayendo factor común

$$[\mathbf{M}_{me} \mathbf{R}_{em} + \mathbf{M}_{mm}] \mathbf{c}_m = \mathbf{p}_m \quad [6.23]$$

Los bloques de ecuaciones [6.20] y [6.23] forman el siguiente sistema, transformado del original

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{M}_{ee} \mathbf{R}_{em} + \mathbf{M}_{em}] \\ [\mathbf{M}_{me} \mathbf{R}_{em} + \mathbf{M}_{mm}] \end{bmatrix}_{n \times m} [\mathbf{c}_m]_{m \times 1} = \begin{bmatrix} [\mathbf{p}_e] \\ [\mathbf{p}_m] \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad [6.24]$$

y de forma más compacta,

$$\overline{\mathbf{M}}_c \mathbf{c}_m = \overline{\mathbf{p}} \quad [6.25]$$

donde

$$\bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_e \\ \mathbf{p}_m \end{bmatrix} \quad [6.26]$$

es decir, el vector reordenado de \mathbf{p} y

$$\bar{\mathbf{M}}_c = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}_{ee} \mathbf{R}_{em} + \mathbf{M}_{em}] \\ [\mathbf{M}_{me} \mathbf{R}_{em} + \mathbf{M}_{mm}] \end{bmatrix}_{n \times m} \quad [6.27]$$

es decir, la matriz \mathbf{M}_c reordenada.

Como ya se ha dicho, el sistema [6.25] es incompatible por ser $n > m$. La solución, como anteriormente se ha apuntado, habrá de buscarse a partir de una combinación lineal de los dos bloques de ecuaciones que lo conforman. Pero la única combinación válida ha de ser aquella que devuelva la simetría a la matriz de coeficientes (Mawell-Betti). Se demuestra a continuación que esta combinación se consigue sin más que sumar al segundo bloque el primero premultiplicado por \mathbf{R}_{em}^T , transpuesta de \mathbf{R}_{em} .

En efecto, premultiplicando la primera ecuación de [6.24] por dicha matriz

$$\mathbf{R}_{em}^T [\mathbf{M}_{ee} \mathbf{R}_{em} + \mathbf{M}_{em}] \mathbf{c}_m = \mathbf{R}_{em}^T \mathbf{p}_e \quad [6.28]$$

y sumando esta última con la segunda se obtendrá

$$[\mathbf{R}_{em}^T \mathbf{M}_{ee} \mathbf{R}_{em} + \mathbf{R}_{em}^T \mathbf{M}_{em} + \mathbf{M}_{me} \mathbf{R}_{em} + \mathbf{M}_{mm}] \mathbf{c}_m = \mathbf{R}_{em}^T \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_m \quad [6.29]$$

Llamando a la matriz de coeficientes \mathbf{M}_{fc} (matriz de rigidez con transformación de filas y columnas) y al vector de acciones resultante \mathbf{p}_f (vector con transformación de filas), es decir

$$\mathbf{M}_{fc} = [\mathbf{R}_{em}^T \mathbf{M}_{ee} \mathbf{R}_{em} + \mathbf{R}_{em}^T \mathbf{M}_{em} + \mathbf{M}_{me} \mathbf{R}_{em} + \mathbf{M}_{mm}] \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_f = \mathbf{R}_{em}^T \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_m \quad [6.30]$$

el sistema final [6.29] queda en la forma

$$\mathbf{M}_{fc} \mathbf{c}_m = \mathbf{p}_f \quad [6.31]$$

que es un sistema de m ecuaciones en las m incógnitas de corrimientos independientes o maestros. Falta por ver si esta matriz de coeficientes es, efectivamente, simétrica. Para ello demostraremos que cada uno de los sumandos del corchete de [6.29] son matrices simétricas: en efecto, el primer sumando es una matriz simétrica por ser simétrica la matriz \mathbf{M}_{ee} y

estar premultiplicada y postmultiplicada por sendas matrices mutuamente transpuestas; el último sumando es obvio que lo es, pues es una submatriz principal de la matriz simétrica del sistema [6.17]. Finalmente, teniendo en cuenta que \mathbf{M}_{em} y \mathbf{M}_{me} son mutuamente transpuestas, los dos sumandos centrales del corchete de [6.29] se podrán escribir en la forma

$$\mathbf{R}_{em}^T \mathbf{M}_{em} + \mathbf{M}_{me} \mathbf{R}_{em} = \mathbf{R}_{em}^T \mathbf{M}_{me}^T + \mathbf{M}_{me} \mathbf{R}_{em} \quad [6.32]$$

Pero de la teoría matricial se cumple que el producto de dos matrices transpuestas de otras dos es igual a la transpuesta del producto de éstas últimas (invirtiendo el orden de los factores). De acuerdo con esto, tendremos de lo anterior

$$\mathbf{R}_{em}^T \mathbf{M}_{me}^T + \mathbf{M}_{me} \mathbf{R}_{em} = [\mathbf{M}_{me} \mathbf{R}_{em}]^T + \mathbf{M}_{me} \mathbf{R}_{em} \quad [6.33]$$

y puesto que el segundo miembro es la adición de dos matrices mutuamente transpuestas, su suma será necesariamente una matriz simétrica. La matriz de coeficientes del sistema definitivo [6.31] es, pues, una matriz simétrica, c.s.q.d.

Una vez resuelto dicho sistema pueden calcularse las e incógnitas dependientes sustituyendo \mathbf{c}_m en [6.15] con lo que todas las componentes de corrimiento \mathbf{c} quedarían determinadas. Con el valor de los corrimientos de extremo para cada una de las barras y la matrices de conversión dadas por [4.80] o [5.97], según se trate de una barra inelongable o de una barra embebida en un diafragma rígido, respectivamente, se obtendrían las sollicitaciones de extremo en cada una de ellas; pero, como se demostró en el apartado 4.3, solamente se podrán calcular las sollicitaciones correspondientes a cortantes y momentos y no así las de axiles, para las primeras, mientras que para las segundas solo se podrán calcular -tal y como se mostró en el epígrafe 5.3- las componentes de momentos torsores, cortantes normales al diafragma rígido y momento flector respecto al eje principal de inercia contenido en dicho diafragma. Habría, pues, que echar mano a algún procedimiento para la determinación de dichas sollicitaciones, como pudiera ser el efectuar el equilibrio de fuerzas en cada uno de los nudos, previamente calculadas las componentes de cortantes. Pero este procedimiento solamente podrá ser aplicable para el cálculo de los axiles en aquellas estructuras en las que se introduzcan exclusivamente condiciones de inelongabilidad y que, además, presenten isostatismo interno, pero no así para las que se hayan adoptado restricciones de diafragma rígido. En efecto, considérese un nudo en el que confluyen sólo dos barras sometidas a las restricciones de diafragma rígido. De acuerdo con lo indicado anteriormente, si se aísla el nudo con objeto de calcular las componentes de sollicitación desconocidas, ocurre que de las

solicitaciones de extremo se desconocen seis componentes: dos de axiles, dos de cortantes en el plano del diafragma y dos de momentos flectores de ejes verticales; pero, puesto que solamente se dispone de tres ecuaciones de equilibrio que relacionen dichas componentes - equilibrio de fuerzas en eje X, equilibrio de fuerzas en el eje Y y equilibrio de momentos respecto al eje X- resulta que es imposible el cálculo de dichas sollicitaciones.

A este importante inconveniente del método se han de añadir dos más: uno es que es necesario elegir adecuadamente las incógnitas esclavas, lo cual es no sistemático; el otro es que se precisa la reordenación y particionado del sistema de restricciones [6.8], lo que puede conllevar un gran coste computacional. Estos inconvenientes se pueden evitar mediante el procedimiento matricial que se expone a continuación, que permite la determinación directa de dichas componentes.

6.2.2- Significado de los Multiplicadores de Lagrange.- Aplicando el método de los Multiplicadores de Lagrange, las matrices \mathbf{M} , \mathbf{R} , \mathbf{c} y \mathbf{p} se pueden relacionar mediante la siguiente expresión

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [6.34]$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$ es un vector de dimensión e que designa a los multiplicadores de Lagrange. Este sistema, que llamaremos en adelante Sistema de Lagrange, nos devolverá, no solamente las n incógnitas de corrimiento, sino, además, los valores de dichos multiplicadores, ordenados en la misma forma en que se introdujeron en la submatriz \mathbf{R} las condiciones de restricción. Estos multiplicadores de Lagrange representan las fuerzas generalizadas que es necesario aplicar para conseguir las restricciones deseadas –véanse referencias (38)- para cada una de las barras, tal y como se demuestra a continuación.

En efecto, suponiendo que la estructura en estudio contenga barras sometidas a ambos tipos de restricciones, sea la número s una barra bajo condición única de inelongabilidad con extremos en los nudos i - j y t otra barra contenida en un diafragma rígido con los extremos en los nudos j - k . El esquema matricial del sistema [6.34] para esta estructura será de la siguiente forma:

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{m}_i \end{bmatrix} \quad [6.38]$$

se podrá escribir, teniendo en cuenta el fraccionamiento de \mathbf{c}_i y \mathbf{c}_j dado en [4.4]

$$\sum \mathbf{M}_{ii} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \end{bmatrix} + \mathbf{M}_{ij} \begin{bmatrix} \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \lambda_s + \sum \begin{bmatrix} \text{otros terminos de fuerza} \\ \text{otros términos de momentos} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{m}_i \end{bmatrix} \quad [6.39]$$

Puesto que el primer bloque de [6.39] representa las ecuaciones de equilibrio de fuerzas incidentes en el nudo en sendas direcciones de los ejes globales X, Y y Z, y en cada una de ellas todos los sumandos son fuerzas en la dirección del eje respectivo, por condición de homogeneidad necesariamente el tercer sumando $\mathbf{x}_s^T \lambda_s$ también ha de ser otra fuerza, fuerza que, por venir multiplicada por los cosenos directores del eje X' (recuérdese [3.5]) ha de ser la componente de sollicitación en la dirección de dicho eje, es decir el axil de dicha barra.

El segundo bloque de ecuaciones de [6.39] corresponde al equilibrio de momentos y en ellas el axil no interviene por venir λ_s multiplicado por cero.

Desarrollando asimismo el bloque de ecuaciones correspondientes al nudo j, se tendrá

$$\mathbf{M}_{ji} \mathbf{c}_i + \sum \mathbf{M}_{jj} \mathbf{c}_j + \mathbf{M}_{jk} \mathbf{c}_k + \mathbf{I}_j^T \lambda_s + \mathbf{D}_j^T \lambda_t + \sum (\text{otros términos}) = \mathbf{p}_j \quad [6.40]$$

y teniendo en cuenta que de [5.14] se desprende que*

$$\mathbf{D}_j^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^T & \mathbf{y}_t^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Lz}_t^T & \mathbf{z}_t^T \end{bmatrix} \quad [6.41]$$

donde el subíndice t designa a la barra t, la ecuación [6.40] puede descomponerse en dos bloques en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ji} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \end{bmatrix} + \sum \mathbf{M}_{jj} \begin{bmatrix} \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} + \mathbf{M}_{jk} \begin{bmatrix} \delta_k \\ \theta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \lambda_s + \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^T & \mathbf{y}_t^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Lz}_t^T & \mathbf{z}_t^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{t,1} \\ \lambda_{t,2} \\ \lambda_{t,3} \end{bmatrix} + \\ + \sum \begin{bmatrix} \text{otros terminos de fuerza} \\ \text{otros términos de momentos} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_j \\ \mathbf{m}_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad [6.42]$$

en la que $\lambda_{t,1}$, $\lambda_{t,2}$ y $\lambda_{t,3}$ son las componentes del vector λ_t y

* Es necesario advertir que aquí \mathbf{D}_j corresponde al extremo inicial de la barra j-k, por lo que esta matriz es la primera de [5.14].

$$\mathbf{p}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_j \\ \mathbf{m}_j \end{bmatrix} \quad [6.43]$$

Evidentemente, la primera componente $\lambda_{t,1}$ corresponde al axil de la barra t, por lo anteriormente expuesto. La segunda componente $\lambda_{t,2}$ multiplica a \mathbf{y}_t^T , vector de cosenos directores del eje local Y' , por lo que, de forma similar a lo anterior, este multiplicador ha de ser una fuerza en la dirección de dicho eje local, esto es, el cortante de la barra t contenido en el diafragma rígido. La tercera componente $\lambda_{t,3}$ no aparece en el primer bloque por venir multiplicada por cero pues, como se verá a continuación, ésta corresponde a un momento flector. En efecto, el segundo bloque de ecuaciones representa las ecuaciones de equilibrio de momentos según los ejes globales, de ahí que, tanto el multiplicador λ_s correspondiente a la barra s, como el primer multiplicador de Lagrange $\lambda_{t,1}$ correspondiente a la t no intervenga en la ecuación por ser ambos componentes de fuerza; el segundo $\lambda_{t,2}$ viene multiplicado por una longitud y por el vector adimensional \mathbf{z}_t^T , por lo que el sumando es otra componente de momento, que no es más que el momento del cortante en el extremo k respecto al extremo j (extremo inicial de la barra t). Por último, el tercero $\lambda_{t,3}$ viene multiplicado por el mismo vector adimensional \mathbf{z}_t^T , cuyas componentes son los cosenos directores del eje local Z' , esto es, el momento flector del extremo j de la barra según la dirección de dicho eje local, es decir, el eje normal al diafragma rígido al que pertenece la barra t.

6.3.- Procedimientos de resolución del Sistema de Lagrange. Resolución directa.- El sistema expuesto en [6.34] puede resolverse de forma directa, pero su resolución presenta dos inconvenientes respecto al Método de las Transformaciones: el primero es el de presentar más incógnitas, muchas de ellas superfluas por no ser independientes; y el segundo, que su condicionamiento es algo peor*.

6.3.1.- Resolución por transformación de columnas.- Procediendo de idéntica forma que en el Método de las Transformaciones expuesto en el epígrafe 6.2.1, pueden despe-

* Como se mostrará en los capítulos 7 y 11, el empeoramiento del condicionamiento señalado utilizando las matrices de Rigidez que se proponen en esta Tesis no es relevante, mientras que si se utilizan las matrices de Rigidez Tradicionales, el deterioro de este condicionamiento es tal que se hace, si no prohibitiva, al menos desaconsejable la resolución directa del Sistema de Lagrange.

jarse e incógnitas^{*} -incógnitas esclavas- del segundo bloque del Sistema de Lagrange y sustituirlas en el primero obteniéndose un sistema modificado que adquiere la forma

$$[\mathbf{M}_c \quad \mathbf{R}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{c}_m \\ \lambda \end{bmatrix} = [\mathbf{p}] \quad [6.44]$$

que no es más que el expuesto en [6.11] ampliado. La matriz de rigidez a la flexotorsión \mathbf{M} se ha convertido en la \mathbf{M}_c como consecuencia de la combinación lineal que se ha introducido en sus columnas, perdiendo e de ellas, que corresponden a las incógnitas dependientes y, puesto que la submatriz \mathbf{R}^T tiene dimensión $n \times e$, el sistema resultante queda con dimensiones $n \times n$, es decir, las mismas que el sistema original [6.1], aunque no simétrico, y presenta una triple ventaja respecto a los procedimientos expuestos anteriormente: por una parte evita la combinación lineal de filas necesaria del Método de las Transformaciones y expuesta en el epígrafe 6.2.1, con lo que las filas de la matriz y el vector de acciones no han de sufrir reordenación alguna; por otra, el sistema nos devuelve las incógnitas estrictamente necesarias para el análisis y cálculo de las estructuras, que son los corrimientos independientes (indeterminación cinemática) y los axiles de la barras, así como los multiplicadores de Lagrange correspondientes a las condiciones de diafragma rígido; es decir, este sistema devuelve el mismo número de incógnitas que el del Método Clásico, pero, en vez de proporcionar las incógnitas de corrimiento dependientes nos suministra, a cambio, los axiles de todas las barras de la estructura, los cortantes de las barras contenidos en el diafragma rígido y los momentos flectores de eje normal a dicho diafragma, esfuerzos que, como se pudo ver en los apartados 4.3 y 5.3, no pueden determinarse a partir de la matriz de conversión. Por último, como se detalla en el Capítulo 11 el condicionamiento mejora ostensiblemente^{**}.

Este procedimiento adolece de los mismos inconvenientes que el de las Transformaciones en cuanto al incierto criterio para la elección de las incógnitas esclavas^{***}, pero nos proporciona de forma directa el valor de las solicitaciones que no puedan calcularse por ningún otro procedimiento, lo que supone una gran ventaja frente a él.

* Realmente, puede elegirse una o un conjunto cualquiera de incógnitas esclavas, cosa que no permite el Método de las Transformaciones en el que se han de elegir, necesariamente, tantas como condiciones de restricción se hayan impuesto. Todo esto se estudiará extensamente en el Capítulo 8.

** Consecuentemente con lo comentado en el pie de la página anterior, este procedimiento es imprescindible si se utilizan las matrices de Rigidez Tradicionales, mientras que con las herramientas del método propuesto es solamente opcional.

*** En el Capítulo 8 se exponen algunos procedimientos para paliar este inconveniente.

6.3.2. - Resolución por transformación de filas.- Una vez conocidas las transformaciones de columnas descritas en el apartado anterior, es decir, las combinaciones lineales que se han de introducir en las columnas de la matriz de rigidez \mathbf{M} para transformarla en la \mathbf{M}_c , puede optarse por introducir esta combinación, no en las columnas, sino en las ecuaciones del sistema. Como consecuencia de ello desaparecen las componentes del vector $\boldsymbol{\lambda}$ y, entonces, el Sistema de Lagrange [6.34] se transforma en este otro *

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_f \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} [\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_f \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [6.45]$$

donde \mathbf{M}_f y \mathbf{p}_f indican que la matriz de rigidez \mathbf{M} y el vector de acciones \mathbf{p} han sufrido sendas transformaciones en sus filas desapareciendo un número de ellas igual al número de ecuaciones de inelongabilidad englobadas en el subsistema de restricciones. De ahí que [6.45] también sea cuadrado, aunque no simétrico. Este sistema, de las mismas dimensiones, pues, que el [6.1] y el [6.44], nos devuelve todas las incógnitas de corrimiento y no presenta más interés que el especulativo, pues no nos proporciona el valor de los multiplicadores de Lagrange.

6.3.3.- Resolución por transformación de columnas y filas.- Por último, una vez obtenido el sistema debido a las transformaciones de columnas propuesto en el apartado 6.3.1 se puede aplicar el procedimiento descrito en el apartado anterior, esto es, transformación de filas, consiguiéndose el doble efecto de eliminación de incógnitas, tanto de corrimientos (transformación de columnas), como de Multiplicadores de Lagrange (transformación de filas), quedando reducido a

$$\mathbf{M}_{fc} \mathbf{c}_m = \mathbf{p}_f \quad [6.46]$$

sistema en las incógnitas independientes de corrimiento y, por tanto, de dimensión mínima, que, obviamente, no es más que el mismo que se obtiene por el Método de las Transformaciones expresado en [6.31].

Como ya se ha indicado, los tres últimos procedimientos requieren una manipulación de filas y columnas que puede resultar computacionalmente costosa, pero la sencillez de las ecuaciones de restricción, [4.11] para las de inelongabilidad y [5.16] para las de diafragma rígido, van a permitir que las transformaciones que han de sufrir las matrices del Sistema de Lagrange puedan conseguirse a partir productos matriciales sencillos, lo que se estudiará en los capítulos 8, 9 y 10.

* Véase su demostración en el epígrafe 8.5.2.

6.4.-Tratamiento de las condiciones de contorno.- Tal y como se ha detallado en el epígrafe 6.2.2, a cada ecuación de restricción le corresponde un multiplicador de Lagrange que, como se sabe, no es más que la fuerza generalizada necesaria para que se cumpla tal condición. Puesto que las condiciones de contorno son, asimismo, condiciones cinemáticas de restricción, podrán añadirse, pues, al subsistema **R** de restricciones las ecuaciones correspondientes a tales condiciones de contorno, las cuales se consiguen mediante un ensamblaje de forma totalmente idéntico a como se ha procedido con las condiciones de inelongsitud y de diafragma rígido. En efecto, consideremos un nudo i de una estructura, que por simplicidad para esta exposición supondremos de barras coplanarias, el cual está en contacto con un aparato de apoyo. Estudiemos los diversos dispositivos de apoyo para dicha estructura:

-a) Empotramiento perfecto.- Este aparato exige unas ecuaciones de contorno que describan que sus tres componentes de corrimiento u_i , v_i y γ_i sean nulas. Podrían, pues, eliminarse las tres filas y las tres columnas asociadas a tal nudo para obtener la matriz reducida de la estructura y, posteriormente, proceder al cálculo de las reacciones mediante el equilibrio del nudo aislado a partir de las sollicitaciones de extremo de las barras que concurren en él. Pero la determinación de tales reacciones puede hacerse de forma directa mediante el método de los Multiplicadores de Lagrange, pues bastará para ello con introducir las tres ecuaciones puntuales de restricción cinemática siguientes

$$u_i = 0 \quad [6.47]$$

$$v_i = 0 \quad [6.48]$$

$$\gamma_i = 0 \quad [6.49]$$

a las cuales les corresponderán sendos valores de los multiplicadores de Lagrange asociados a cada una de ellas que, como se ha visto en el epígrafe 6.2.2, no son más que las componentes de reacción que se buscan, esto es, la reacción horizontal, la vertical y el momento de empotramiento, respectivamente.

-b) Apoyo simple.- Este dispositivo de apoyo coacciona las dos componentes de desplazamiento, por tanto habría que introducir en el subsistema de restricciones las ecuaciones [6.47] y [6.48] a las cuales les corresponderán como multiplicadores de Lagrange la reacción horizontal y la reacción vertical, respectivamente.

-c) Apoyo móvil.- El apoyo móvil permite dos grados de libertad o, lo que es lo mismo, coacciona una sola componente de corrimiento, que corresponde al desplazamiento del nudo en la dirección perpendicular al plano de rodadura. Para introducir la ecuación que describe este comportamiento del nudo bastará con suponer que dicho nudo está conectado al apoyo a través de una barra ficticia inelongable de longitud infinita y normal a dicho plano de rodamiento. En efecto, dicha barra ficticia no introducirá colaboración alguna en la matriz de rigidez de la estructura, ya que su matriz de rigidez, tanto en las matrices tradicionales como en las del método que aquí se propone, será nula, como se desprende del hecho de que la longitud divide a todos los coeficientes de dichas matrices. Puesto que esta barra se considera inelongable, habrá de introducirse la correspondiente ecuación de restricción [4.12], con lo cual el nudo podrá girar libremente y podrá desplazarse perpendicularmente a dicha barra, es decir, paralelamente al plano de rodadura. La ecuación de restricción es, pues, una ecuación de restricción puntual a la cual, como se sabe, le corresponde un multiplicador de Lagrange que no es más que el axil de dicha barra ficticia o, lo que es igual, la reacción en el apoyo. Obsérvese que con este procedimiento el tratamiento es el mismo para apoyos concordantes o no, pues esta circunstancia de concordancia está reflejada por los valores de los cosenos directores de la barra ficticia introducida.

-d) Deslizadera.- Puesto que la deslizadera coacciona dos grados de libertad, que son el desplazamiento normal al plano de la deslizadera y el giro, bastará introducir dos ecuaciones de restricción que serán, por una parte, la ecuación [4.12] correspondiente a la del apoyo móvil, y por otra la ecuación [6.49], que describe la condición de giro nulo. A la primera ecuación le corresponde el multiplicador de Lagrange cuyo valor será la reacción normal al plano de rodadura, mientras que a la segunda le corresponde el multiplicador cuyo valor no es más que el momento de empotramiento en la deslizadera. De la misma forma que en el caso anterior, es indiferente que el plano de la deslizadera sea o no concordante con los ejes globales de la estructura en estudio.

CAPÍTULO 7

VALIDACIÓN NUMÉRICA (I)

OBJETIVO:

Es objeto de este capítulo mostrar la validez del método que en este trabajo se propone a partir de un estudio pormenorizado de la matriz de coeficientes del sistema a que da lugar este procedimiento.

CONTENIDO:

Para ello, partiendo de tres modelos de estructuras de barras coplanarias y cinco de estructuras espaciales, todas ellas de mediana o pequeña altura, se efectúan los cálculos de los atributos más significativos que caracterizan a las correspondientes matrices de coeficientes asociadas a cada uno de los sistemas de ecuaciones, cuales son las dimensiones, el valor absoluto máximo de sus coeficientes, su porcentaje de elementos no nulos y, quizá el más significativo, su número de condición, características con las que se confeccionan una serie de cuadros con objeto de comparar los valores correspondientes al Método Clásico con los que se obtienen con el método propuesto para la validación numérica de éste.

Se estudian también las características de dichas matrices para el cálculo de estructuras sometidas a condiciones cinemáticas de contorno no concordantes, por el Método de los Multiplicadores de Lagrange, tanto para el método propuesto como para el Método Clásico.

Por último se repiten estos cálculos para estructuras de gran altura utilizando un método mixto en el cual se utilizan para los pilares las matrices de barra tradicionales y, por ello elongables, mientras que para las demás barras de la estructura se utilizan las matrices de rigidez propuestas en este estudio.

7.1.- Introducción.- Con objeto de validar todo lo expuesto en los capítulos anteriores se hace necesario la comparación del método propuesto con el Método tradicional a partir del cálculo de una serie de modelos concretos de estructuras que permitan extraer las

pertinentes conclusiones. Se dividirán estos cálculos en dos grupos: estructuras de barras coplanarias y estructuras espaciales.

7.2.- Estructura plana: Modelo 1.- Se trata de un pórtico de cinco vanos y una planta, con las dimensiones que se expresan en la Figura 7.1, en donde todas las barras son de 0.30×0.30 ms. y cuyo material tiene un Módulo de Elasticidad de valor 2×10^7 kN/m², sometido a una única fuerza horizontal en su nudo izquierdo de 40 kN.

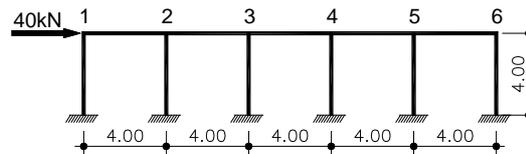


Figura 7.1

7.2.1- Condicionamiento del sistema por el Método Clásico sin restricciones.- El sistema que se obtiene para esta estructura utilizando las matrices de rigidez del Método Tradicional dadas por [3.21] es de la forma

$$\mathbf{K} \mathbf{c} = \mathbf{p} \quad [7.1]$$

que tiene unas dimensiones de 18×18 , grados de libertad de la estructura. Evaluando el condicionamiento de la matriz de rigidez \mathbf{K} a partir de la Norma 2*, el Número de Condición vale:

$$\text{Cond}(\mathbf{K}) = 876 \quad [7.2]$$

7.2.2- Condicionamiento del sistema por el Método Clásico con restricciones de inelongabilidad.- Aunque los resultados que se obtienen con el sistema [7.1] pueden ser considerados como válidos es indudable que, si el pórtico sustenta a un forjado, puede adoptarse la hipótesis de diafragma rígido de dicho forjado, lo que obligará por coherencia a considerar las jácenas como barras inelongables. Al sistema anterior sería necesario, entonces, añadir las ecuaciones de restricción cinemática [4.12] correspondientes a la inelongabilidad de dichas barras, por lo que, aplicando el método de los Multiplicadores de Lagrange expuesto en el epígrafe 6.2.2, el cual, de acuerdo con las valoraciones efectuadas en el Capítulo 1, se considera el más idóneo para la resolución de sistemas de ecuaciones bajo condiciones de restricción, el sistema [7.1] se transforma en el [6.34] y tendrá la forma

* Véase primera nota al pie de la página 2-16

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_v & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [7.3]$$

donde \mathbf{I}_v es la matriz de restricciones cinemáticas que describe las condiciones de inelongabilidad [6.12] correspondiente a las vigas, mientras que \mathbf{I}_v^T es su transpuesta. El sistema obtenido tiene dimensiones 23×23 , de las cuales corresponden 18 a las incógnitas de corrimiento y 5 a los multiplicadores de Lagrange, esto es, a los axiles de las 5 vigas del pórtico. Su resolución devuelve, pues, todos los corrimientos y el valor de los axiles de vigas.

Llamando a la matriz de coeficientes del sistema anterior

$$\mathbf{K}_{\text{Lagr.}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_v & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [7.4]$$

y evaluando su condicionamiento a partir de la norma 2, se obtiene

$$\text{Cond}(\mathbf{K}_{\text{Lagr.}}) = 7.68 \times 10^{11} \quad [7.5]$$

lo que supone, frente al anterior sistema, un aumento tan decisivo que desaconseja la utilización del método de los Multiplicadores de Lagrange para el cálculo de esta estructura por el Método Tradicional. La alternativa, pues, para contemplar la hipótesis de inelongabilidad de vigas sería la utilización del método de las Transformaciones, que presenta las desventajas apuntadas en los capítulos precedentes.

7.2.3- Condicionamiento del sistema por el método propuesto.- Procediendo al ensamblaje de las matrices de barra dadas por [4.78], se obtiene el sistema [6.1] al que es necesario añadir, como se especificó en el epígrafe 6.1, las ecuaciones de [6.2], con lo que el Sistema de Lagrange correspondiente tendrá la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_g^T \\ \mathbf{I}_g & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [7.6]$$

donde la submatriz \mathbf{I}_g es la matriz de restricciones de inelongabilidad de todas las barras de la estructura, e \mathbf{I}_g^T su transpuesta, por lo que el sistema constará de 29 ecuaciones con 29 incógnitas, esto es, 18 de corrimiento, 5 de axiles de jácenas y 6 de axiles de pilares, es decir, de mayor dimensión que los dos anteriores, pero con la ventaja de que el sistema devol-

verá el valor de los axiles de todas la barras de la estructura. Llamando a la matriz de coeficientes del sistema anterior

$$\mathbf{M}_{\text{Lagr.}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_g^T \\ \mathbf{I}_g & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [7.7]$$

y evaluando su condicionamiento a partir de la norma 2, se obtiene

$$\text{Cond}(\mathbf{M}_{\text{Lagr.}}) = 27 \quad [7.8]$$

valor que, no sólo es considerablemente menor que el dado por [7.5], sino que también supone una mejora importante frente al dado por [7.2], a pesar de que la dimensión de la matriz [7.7] es mayor que la de \mathbf{K}^* . Se muestran a continuación en el Cuadro 7.1 los resultados anteriores:

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ji} .	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método Clásico sin restricciones	\mathbf{K}	18×18	902531	28.40 %	876
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_g^T \\ \mathbf{I}_g & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	29×29	3	9.75 %	27
Método Clásico bajo condiciones de Inelongabilidad de vigas	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_v & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	23×23	902531	21.17 %	$7.68 \times 10^{11**}$

Cuadro 7.1: Atributos de las matrices correspondientes al Modelo 1

donde la primera columna incluye los distintos procedimientos para el cálculo de los corrimientos, la segunda la configuración de las matrices para cada caso, la tercera sus dimensiones, la cuarta el mayor de los coeficientes de las matrices en valor absoluto, la quinta expresa el porcentaje de elementos no nulos de la matrices y la última columna muestra el número de condición respecto a la Norma 2.

7.3.- Estructura plana: Modelo 2.- El modelo 2 está compuesto por barras de las mismas características que las del modelo anterior, el mismo número de vanos y de tres plantas de altura (Figura 7.2).

* En general, el número de condición de una matriz es mayor cuanto mayores sean las dimensiones de ésta.

** El programa Matemática, con el que se han obtenido estos valores, da el siguiente aviso a la hora de resolver el sistema de ecuaciones: LinearSolve::luc: "Result for LinearSolve of badly conditioned matrix {nombre de la matriz} may contain significant numerical errors. More..."

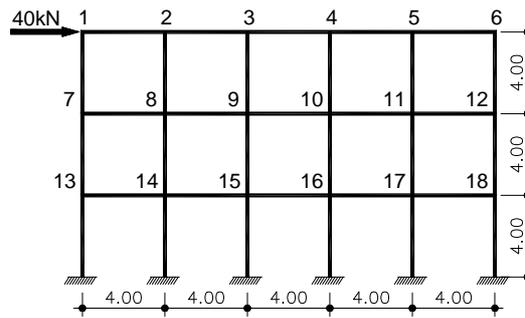


Figura 7.2

Procediendo de la misma forma para esta estructura, se obtiene el siguiente cuadro 7.2:

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij}	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método Clásico sin restricciones	K	54×54	905063	13.58 %	6113
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_g^T \\ \mathbf{I}_g & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	87×87	4	4.83 %	267
Método Clásico bajo condiciones de Inelongabilidad de vigas	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_v & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	69×69	905063	9.58 %	$8.04 \times 10^{11**}$

Cuadro 7.2: Atributos de las matrices correspondientes al Modelo 2

7.4.- Estructura plana: Modelo 3.- Las características del modelo 3 son las mismas que la de los anteriores, solo que éste tiene 5 plantas, de acuerdo con la Figura 7.3 siguiente:

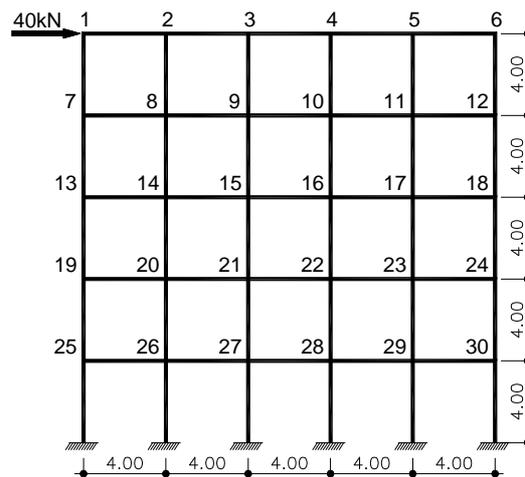


Figura 7.3

** Véase 2ª nota al pie de la página 7-4

con los siguientes resultados (Cuadro 7.3)

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij} .	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método Clásico sin restricciones	\mathbf{K}	90×90	905063	8.64 %	16401
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_g^T \\ \mathbf{I}_g & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	145×145	4	3.09 %	741
Método Clásico bajo condiciones de Inelongabilidad de vigas	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_v & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	115×115	905063	6.05 %	$8.15 \times 10^{11**}$

Cuadro 7.3: Atributos de las matrices correspondientes al Modelo 3

De forma estricta es necesario puntualizar que, de los tres procedimientos expuestos, es el último el que más se aproxima al comportamiento mecánico de la estructura real, puesto que las elongaciones de los pilares existirán en mayor o menor grado, dependiendo de la altura de la edificación, del tipo de acciones que la excitan, de las características elásticas del material, etc., mientras que las elongaciones que, de forma indudable, sufrirán las vigas serán de tan pequeña magnitud frente a las anteriores que pueden considerarse nulas, aparte del gran inconveniente que supondría estimar el valor de la influencia que el forjado aportaría a la deformación axial de las vigas si éstas se considerasen asimismo elongables con idea de conseguir una más precisa modelización*, pero como puede observarse en la tercera columna del cuadro, el número de condición es tan elevado que los resultados que se obtengan con la resolución de este sistema serán de dudosa fiabilidad**.

7.5.- Estructura espacial de pequeña o mediana altura: Modelo 4.- Corresponde este modelo a una estructura en el espacio 3D compuesta por tres pilares que soportan un forjado, de acuerdo con la Figura 7.4. El valor del Módulo de Elasticidad transversal es $G = 8 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$, siendo las demás características de las barras iguales a las de los modelos anteriores.

* Véase 1ª nota al pie de la página 2-2.

** Véase 2ª nota al pie de la página 7-4.

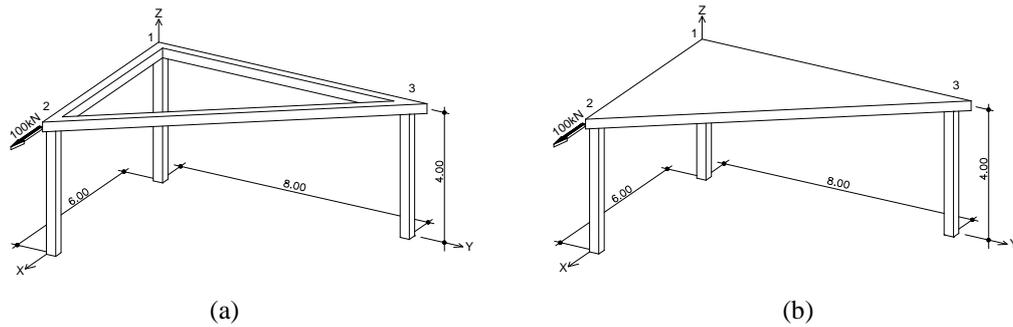


Figura 7.4

Mientras que en los casos correspondientes al espacio 2D las condiciones de restricciones cinemáticas eran exclusivamente las de inelongabilidad dadas por [4.12], en las estructuras espaciales en las que las vigas estén embebidas en un diafragma rígido, las condiciones de restricción que describen dicha condición vienen dadas por la ecuación matricial [5.44] y, procediendo al ensamblaje de \mathbf{D}_i y \mathbf{D}_j expresadas por [5.45] y [5.46] de acuerdo con el procedimiento expuesto en epígrafe 6.1.2, se obtendrá la matriz de restricciones \mathbf{D} .

Procediendo, pues, de la misma forma que en los anteriores casos, pero utilizando para el ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura la matriz de rigidez de barra dada por [3.12] o su equivalente más simple [3.14] para el Método Tradicional y las [4.69] y [5.95] para pilares y jácenas, respectivamente, para el método propuesto, se tienen los siguientes valores (cuadro 7.4) para las diferentes matrices de coeficientes, según el procedimiento de cálculo elegido:

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij} .	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método Clásico sin restricciones	\mathbf{K}	18×18	451066	42.59 %	642
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	27×27	8	13.03 %	129
Método Clásico bajo condiciones de Diafragma rígido	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	24×24	451066	28.82 %	$3.67 \times 10^{11}^{**}$

Cuadro 7.4: Atributos de las matrices correspondientes al Modelo 4

donde \mathbf{I}_p e \mathbf{I}_p^T son, respectivamente, la matriz de inelongabilidad y su transpuesta, correspondientes a los pilares, mientras que \mathbf{D} es la matriz de diafragma rígido y \mathbf{D}^T su transpuesta.

** Véase 2ª nota al pie de la página 7-4

ta. Es de señalar que la matriz **K** describe las propiedades resistentes correspondientes a la modelización grafiada en la Figura 7.4.a, pero no a la de la Figura 7.4.b, la cual se corresponde más acertadamente con el modelo real.

7.6.- Estructura espacial de pequeña o mediana altura: Modelo 5.- Tal y como muestra la Figura 7.5, se trata de un entramado espacial de un solo recuadro y una sola planta, formado por barras de las mismas características que las de los modelos anteriores.

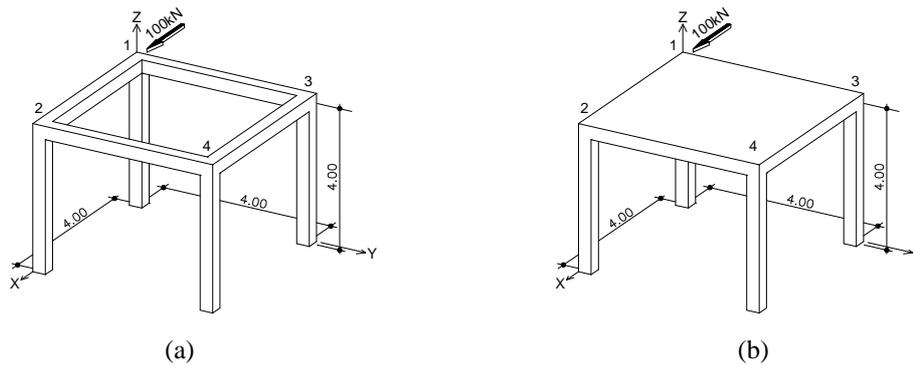


Figura 7.5

En el cuadro 7.5 siguiente se indican las características de cada uno de los sistemas para esta estructura:

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij} .	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método Clásico sin restricciones	K	24×24	455063	26.39 %	526
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	37×37	4	8.77 %	66
Método Clásico bajo condiciones de Diafragma rígido	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	33×33	455063	18.00 %	$8.21 \times 10^{11**}$

Cuadro 7.5: Atributos de las matrices correspondientes al Modelo 5

7.7.- Estructura espacial de pequeña o mediana altura: Modelo 6.- De forma similar al anterior, el modelo 6 corresponde a un entramado espacial de cuatro recuadros y una planta de altura, con las mismas características del material y de las secciones que en los modelos anteriores, según se grafía en la Figura 7.6 siguiente:

** Véase 2ª nota al pie de la página 7-4.

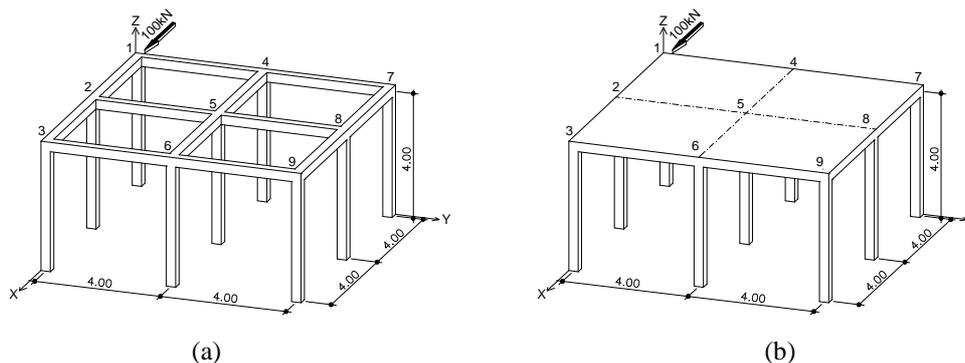


Figura 7.6

a la que le corresponde el siguiente cuadro de valores:

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij}	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método Clásico sin restricciones	K	54×54	907594	13.79 %	756
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	87×87	8	4.08 %	168
Método Clásico bajo condiciones de Diafragma rígido	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	78×78	907594	8.58 %	$1.85 \times 10^{12**}$

Cuadro 7.6: Atributos de las matrices correspondientes al Modelo 6

7.8.- Estructura espacial de pequeña o mediana altura: Modelo 7.- Este modelo es el mismo anterior, pero con dos plantas de altura (Figura 7.7):

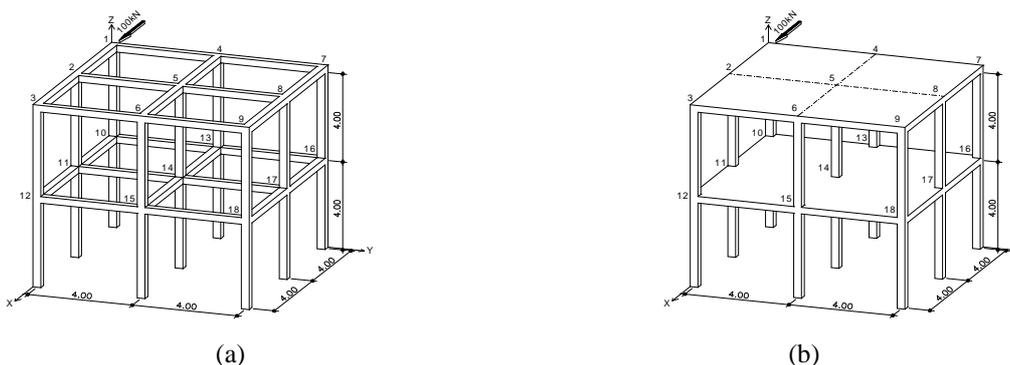


Figura 7.7

al que corresponden los valores dados por el cuadro 7.7 siguiente:

** Véase 2ª nota al pie de la página 7-4.

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij} .	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método Clásico sin restricciones	K	108×108	910125	8.44 %	2549
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	174×174	8	2.64 %	565
Método Clásico bajo condiciones de Diafragma rígido	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	156×156	910125	5.03 %	$1.86 \times 10^{12**}$

Cuadro 7.7: Atributos de las matrices correspondientes al Modelo 7

7.9.- Estructura espacial de mediana altura: Modelo 8.- Este último modelo corresponde a una estructura espacial de entramado de ocho plantas, según Figura 7.8 en donde el material y las secciones de las barras son los mismos que en todos los casos anteriores.

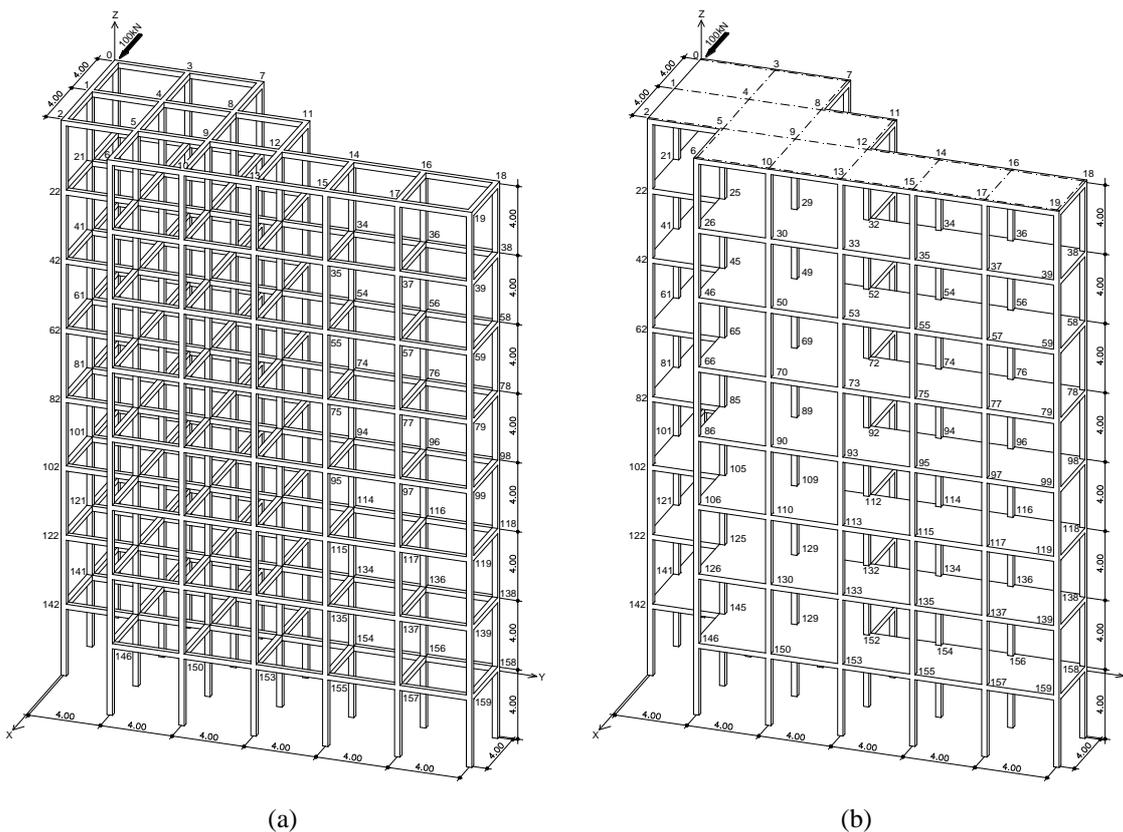


Figura 7.8

De acuerdo con todo lo anterior, en el cuadro 7.8 se muestran los valores siguientes

** Véase 2ª nota al pie de la página 7-4.

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij} .	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método Clásico sin restricciones	\mathbf{K}	960×960	910125	1.12 %	54512
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	1576×1576	24	0.35 %	26726
Método Clásico bajo condiciones de Diafragma rígido	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	1416×1416	910125	0.63 %	$3.03 \times 10^{12**}$

Cuadro 7.8: Atributos de las matrices correspondientes al Modelo 8

De forma análoga a lo comentado en el epígrafe 7.5, es de observar que en todos los casos de estructuras en el espacio 3D, la matriz de rigidez \mathbf{K} se corresponde más con los modelos grafiados en (a) que con los de (b), configuración esta última más cercana al modelo real que la primera. Además de esto, el análisis de este tipo de estructuras mediante el Método Clásico sin restricciones exigiría introducir, sobretudo para forjados unidireccionales, unos determinados elementos resistentes virtuales en las direcciones perpendiculares a los pórticos, elementos cuyas características mecánicas no serán, en general, fácilmente evaluables, por lo que, desde el punto de vista de la modelización, el procedimiento menos impreciso* respecto al comportamiento real de la estructura será el correspondiente al Método Clásico bajo restricciones de diafragma rígido (últimas líneas de todos los cuadros anteriores); pero su condicionamiento es tan elevado que el cálculo por este procedimiento introducirá un grado tal de incertidumbre respecto a la validez de los resultados que desaconseja su utilización, aún para los casos más simples de estructuras espaciales, como son el modelo 4 y 5 anteriormente estudiados. Teniendo en cuenta todo lo anterior, se hace poco menos que imprescindible adoptar el método propuesto (segunda línea de los cuadros anteriores) ya que no presenta riesgo alguno de un condicionamiento inadmisibile, aún para las estructuras más complejas, si bien es cierto que la hipótesis de inelongabilidad adoptada en este procedimiento para todos los pilares dejará de ser válida a partir de un determinado número de plantas, esto es, solamente podrá considerarse aceptable para estructuras de pequeña y mediana altura, es decir, para un máximo de quince plantas, aproximadamente.

7.10.- Tratamiento de las condiciones cinemáticas de contorno.- De acuerdo a lo expuesto en el epígrafe 6.4, los aparatos de apoyo tienen la misión de imponer una serie de

** Véase 2ª nota al pie de la página 7-4.

* Cualquier modelización conllevará algún grado de imprecisión respecto al modelo real.

restricciones cinemáticas en las estructuras de forma que éstas tengan imposibilitado el movimiento como sólido libre en el plano o en el espacio, según se trate de estructuras planas o espaciales, respectivamente. Estas restricciones puntuales de corrimientos obligan a hacer nulas* las incógnitas asociadas a ellas en el sistema de ecuaciones de equilibrio que se obtienen por el Método Directo de la Rigidez para estructuras de barras. Consecuentemente, la anulación de dichas componentes de corrimiento permite la eliminación de las ecuaciones de equilibrio asociadas a dichos movimientos, obteniéndose de esta forma un sistema cuadrado, compatible y determinado, cuya matriz de coeficientes es la matriz reducida de la estructura. Pero este procedimiento sólo será posible si el movimiento impedido coincide con alguno de los ejes de coordenadas globales de la estructura, esto es, cuando el corrimiento sea concordante con dichos ejes. Si no se dan estas circunstancias será necesario sustituir, a partir de la pertinente matriz de rotación, las componentes de incógnitas coaccionadas no concordantes, así como las ecuaciones de equilibrio correspondientes -sistema global- en función de las componentes referidas a un sistema local del nudo coaccionado, así como las direcciones de las ecuaciones de equilibrio (sistema nodal), elegido de tal forma que el corrimiento o corrimientos impedidos coincidan con dichos ejes, por lo que sus valores serán nulos, lo que permite, ahora sí, eliminar las columnas correspondientes a estos movimiento y las ecuaciones asociadas a ellos. La resolución del sistema resultante devolverá las componentes de corrimiento del nudo coaccionado referidas al sistema nodal elegido, por lo que, a partir de la transpuesta de la matriz de rotación antes citada, podrán calcularse las componentes referidas al sistema global, si es que estos valores son necesarios para alguna otra aplicación, como pudiera ser el cálculo de solicitaciones de la barra o barras que incidan en dicho nudo con ayuda de las correspondientes matrices de conversión. Además de este procedimiento para el tratamiento de las condiciones de contorno, existen otros basados en la funciones de penalización que tiene los inconvenientes ya comentados en el Capítulo 1**. Por ello, tal y como reiteradamente se ha ido señalando a lo largo de este trabajo, es nuevamente el procedimiento de los Multiplicadores de Lagrange el que presenta mayores ventajas respecto a todos los demás para el estudio de estas condiciones cinemáticas. Analicemos, pues, la estructura correspondiente al Modelo 1 anteriormente estudiado suponiendo que el mecanismo de apoyo del último pilar de la derecha es una articulación móvil

* Se está suponiendo el caso habitual de coacción absoluta, lo que dará lugar a una ecuación homogénea.

** El Método de la Penalización "...es rápido de aplicar (...) sin embargo presenta el inconveniente de que pueden aparecer problemas numéricos ("overflow") al operar con números muy grandes..." (47, apartado 55.2.1).

con plano de rodadura formando un ángulo α con la horizontal, siendo los demás aparatos de apoyo empotramientos perfectos, tal y como se detalla en la Figura 7.9 siguiente:

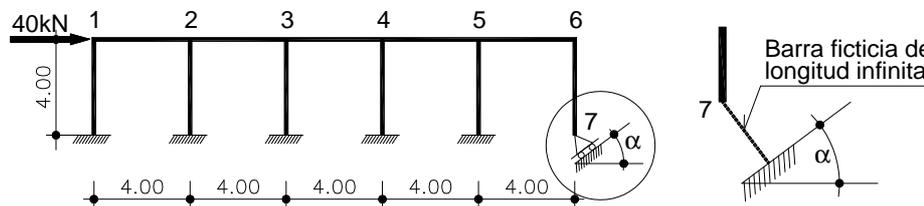


Figura 7.9

Para ello, siguiendo las indicaciones del apartado c) del epígrafe 6.4, se supondrá que existe una barra ficticia inelongable de longitud infinita* cuyo extremo j incide en el nudo 7 y su extremo i está perfectamente empotrado en el plano de rodamiento, siendo perpendicular a este plano. Esta barra no aporta rigidez alguna frente al giro del nudo 7 ni frente a su desplazamiento en la dirección normal a dicha barra ficticia, debido a que su longitud es infinita, pero sí impide totalmente el desplazamiento del nudo en la dirección axial, por considerar a la barra totalmente inelongable. La ecuación de restricción que describe esta circunstancia es, pues, la ecuación de inelongabilidad dada por [4.12], en donde el vector \mathbf{c}_i es nulo por estar la barra perfectamente empotrada en su extremo i. A los sistemas correspondientes a cada uno de los tres procedimientos reflejados en el Cuadro 7.1 habrá que añadir, pues, esta ecuación; pero, dado que el tercer procedimiento se ha de descartar por su mal condicionamiento, que para más abundancia se verá empeorado con esta nueva ecuación, utilizaremos para este cálculo sólo el primero y el segundo, por lo que, llamando \mathbf{r} a la matriz fila que designa a los coeficientes de dicha ecuación de restricción del apoyo inclinado, los Sistemas de Lagrange correspondientes quedan en la forma indicada en el Cuadro 7.9 siguiente, donde se indican los valores que toman los atributos de las matrices asociadas a dichos sistemas como consecuencia de la ecuación de restricción introducida correspondiente a la condición de contorno del nudo 7:

* El procedimiento tradicional consiste en suponer esta barra de sección transversal muy grande (33, apartado XIII.C.3) y (47, apartado 5.5.5.1).

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij} .	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método Clásico sin restricciones de inelongabilidad	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{r}^T \\ \mathbf{r} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	22×22	902531	21.28 %	1.53×10^9
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I}_g^T & \mathbf{r}^T \\ \mathbf{I}_g & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	33×33	3	12.58 %	480

Cuadro 7.9

Comparando estos valores con los reflejados en el Cuadro 7.1 se aprecia que, mientras que el condicionamiento en el método propuesto apenas sufre variación como consecuencia de la ecuación introducida, el número de condición correspondiente al cálculo con las matrices de barra tradicionales sufre un espectacular aumento que hace totalmente desaconsejable su utilización, aún para las estructuras más elementales, como es la estructura analizada.

Es de señalar que este procedimiento de introducción de condiciones de restricción cinemática debido a las condiciones de contorno es el mismo, tanto para apoyos concordantes como no concordantes, como se expresó en el epígrafe 6.4; por lo tanto, dado que el número de ecuaciones correspondientes a estas restricciones presenta sólo un pequeño porcentaje frente al total de ecuaciones del Sistema de Lagrange y que, como se ha visto, estas ecuaciones añadidas prácticamente no alteran el condicionamiento de la matriz asociada utilizando el procedimiento propuesto, es ventajoso proceder al ensamblaje de la Matriz Completa de la estructura, añadiendo las ecuaciones de restricción correspondientes al contorno, según lo expuesto en dicho epígrafe 6.4. De esta forma, no solamente se evita la manipulación matricial consistente en la eliminación de filas y columnas en la matriz de rigidez de la estructura para obtener la matriz reducida, sino que, de forma directa, la resolución del Sistema de Lagrange pertinente nos devolverá todas las componentes de reacción, independientemente de que exista concordancia o no, o de que en el nudo conectado al aparato de apoyo incidan una o más barras, lo que supone una ventaja añadida, pues si en dicho nudo inciden más de una barra será necesario utilizar un sistema auxiliar de ecuaciones de equilibrio de fuerzas del nudo aislado entre las solicitaciones de extremo de dichas barras - previamente calculadas a partir de las matrices de conversión- y las incógnitas de reacción, con objeto de determinar el valor de éstas.

7.11.- Estructuras de gran altura.- Puesto que el Modelo 8 estudiado en el epígrafe 7.9 puede considerarse de mediana altura, es posible el adoptar la hipótesis de inelongabilidad de los pilares en todas las plantas, pues ello conlleva una decisiva ventaja en cuanto al condicionamiento del sistema correspondiente; sin embargo, como se comentó en dicho epígrafe, para edificios de gran altura no será conveniente, en general, adoptar la hipótesis de inelongabilidad para los pilares, sobre todo para aquéllos situados en las primeras plantas*, ya que tal hipótesis no describirá de la forma más apropiada el comportamiento cinemático-resistente de la estructura. Para comprobar la influencia que puede tener la consideración o no de la hipótesis de inelongabilidad en todos los pilares utilizaremos el mismo Modelo 8 realizando el cálculo mediante un procedimiento mixto, consistente en emplear las matrices de barra tradicionales para todos los pilares, con lo que éstos serán elongables, y las matrices del método propuesto para los demás elementos lineales que componen la estructura, por lo que la matriz de rigidez \mathbf{M} se transformará en la matriz $\bar{\mathbf{M}}$, y la Matriz de Lagrange correspondiente al método propuesto estará formado por esta última más la matriz de diafragma rígido \mathbf{D} , anteriormente utilizada. Con objeto de tener una visión conjunta de los cuatro procedimientos, se repite el cuadro 7.8 incluyendo en él este último procedimiento mixto, resultando el siguiente Cuadro 7.10:

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij} .	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método Clásico sin restricciones	\mathbf{K}	960×960	910125	1.12 %	54512
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	1576×1576	24	0.35 %	26726
Método Clásico bajo condiciones de Diafragma rígido	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	1416×1416	910125	0.63 %	$3.03 \times 10^{12**}$
Método mixto	$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	1416×1416	910125	0.49 %	$1.83 \times 10^{10**}$

Cuadro 7.10: Atributos de las matrices correspondientes al Modelo 8

La matrices correspondientes a la tercera y cuarta fila del Cuadro 7.10 solo difieren en que, mientras la matriz \mathbf{K} procede, como ya se dijo en el epígrafe 7.5, del ensamblaje de las matrices de barra tradicionales ([3.12] o su equivalente [3.14]) para todas las barras de la

* Naturalmente nos referimos a un número determinado de plantas a partir de la sustentación.

** Véase 2ª nota al pie de la página 7-4.

estructura, la matriz $\overline{\mathbf{M}}$ se obtiene por ensamblaje de las matrices de barra anteriores para los pilares y, por ello, elongables, mientras que para las vigas se utilizan las matrices de rigidez de la barra bajo condiciones de diafragma rígido propuestas en este trabajo y dadas por [5.94]* sin parametrizar, esto es, con el valor del parámetro

$$r = EI_z, \quad [7.9]$$

para cada barra, ya que las submatrices utilizadas para los pilares no vienen parametrizadas y, puesto que unas y otras han de sumarse al ensamblar la matriz de rigidez de la estructura, se estarían sumando magnitudes heterogéneas si se mantiene dicha parametrización para las submatrices de las vigas.

Aunque las matrices \mathbf{K} y $\overline{\mathbf{M}}$ son diferentes, estos dos procedimientos darán unos resultados prácticamente iguales, dado que ambos parten de las mismas hipótesis de partida, esto es, hipótesis de diafragma rígido para las vigas y posibilidad de deformación axial de los pilares, por lo que las pequeñas diferencias que puedan existir entre los resultados de uno y otro procedimiento serán debidas, exclusivamente, a los errores de redondeo del computador durante el proceso de resolución del sistema de ecuaciones, las cuales diferencias serán mayores cuanto mayores sean las dimensiones de dichos sistemas y el mal condicionamiento de los mismos.

Como bien expresa el Cuadro 7.10, el método mixto, última línea de dicho cuadro, presenta una cierta mejora respecto a su equivalente (tercera línea) en cuanto al condicionamiento se refiere, pero el número de condición sigue siendo aún tan elevado que la utilización de este procedimiento puede conllevar el mismo grado de incertidumbre en cuanto a la validez de los resultados, de ahí que sea necesario para estructuras de gran altura algún tipo de proceso que evite o, al menos, minimice dicho inconveniente, proceso cuya deducción se abordará en los tres capítulos siguientes.

Por último es de señalar que, dentro de este procedimiento mixto, existe la alternativa de considerar inelongables solamente los pilares pertenecientes a las últimas plantas, es decir, por encima de la planta a partir de la cual la estructura pasa a la consideración de gran altura (normalmente, 12-15 plantas), pues ello redundará en un mejoramiento del número de condición del sistema de ecuaciones utilizando las matrices de barra propuestas en este trabajo.

* Obsérvese que ahora no es posible utilizar las matrices dadas por [5.95] por no ser nulos los desplazamientos verticales.

CAPÍTULO 8

MATRIZ DE TRANSFORMACION

OBJETIVO:

Uno de los procedimientos para la resolución del sistema rectangular que se obtiene, según lo expuesto en el Capítulo 6, al añadir al sistema de ecuaciones de equilibrio el sistema de restricciones, es el Método de las Transformaciones que, en esencia, consiste en la elección de un conjunto de incógnitas para proceder a su eliminación y transformar de esta forma dicho sistema rectangular en otro cuadrado, compatible y determinado. Como quiera que no existe una norma concreta para la elección de tales incógnitas, se pretende en este capítulo, no solamente establecer varios criterios susceptibles de ser implementados en un programa informático sino, además, lograr que esta transformación pueda conseguirse a partir de unas determinadas matrices, matrices de transformación, cuya determinación es el objetivo principal de este capítulo.

CONTENIDO:

Partiendo de un sistema de ecuaciones lineales genérico, sometido a un conjunto de condiciones de restricción, asimismo genéricas, se presenta en este capítulo dos procedimientos sistematizados con los que, mediante de un sencillo ensamblaje directo de los elementos que conforman la Matriz de Restricciones, se consigue una matriz, Matriz de Transformación, la cual tiene la propiedad de que, al premultiplicar o postmultiplicar a la matriz del sistema lineal, introduce en las filas y columnas de éste unas transformaciones tales que dicho sistema se transforma en otro compatible, determinado y de menor dimensión que el original.

Se estudia también la aplicación de estas matrices de transformación a los diversos procedimientos de resolución del Método de Lagrange que se expusieron en el Capítulo 6, epígrafe 6.3.

8.1.- Introducción.- Tal y como se comentó en el Capítulo 1, así como en el epígrafe 6.2.1, uno de los inconvenientes del Método de las Transformaciones para estructuras

sometidas a determinadas restricciones cinemáticas es el de fijar un criterio adecuado para la elección de las incógnitas esclavas, así como el de la necesidad de particionado y reordenación de las filas y columnas de la matriz de rigidez del sistema de ecuaciones que se obtiene con el Método Directo de la Rigidez. Una vez elegidas dichas incógnitas y terminado el procedimiento descrito en el epígrafe 6.2.1, dicho proceso da lugar, al fin y al cabo, a una matriz de rigidez \mathbf{M}_{fc} cuadrada, modificada de la original \mathbf{M} , cuyas dimensiones han quedado reducidas al grado de indeterminación cinemática de la estructura y el sistema viene dado exclusivamente, pues, en las incógnitas maestras \mathbf{c}_m , sistema [6.31]. El objetivo de este capítulo es fijar de forma precisa un criterio de elección de dichas incógnitas y, además, conseguir esta matriz sin necesidad de reordenación de filas y columnas, lo que supondrá un importante ahorro computacional. Aquí se exponen, primero, dos procedimientos para hacerlo: de forma sucesiva (apartado 8.2) o de forma simultánea (apartado 8.3). Por cualquiera de ellos se obtiene una matriz, Matriz de Transformación, tal que, dado un sistema de n ecuaciones y n incógnitas sujeto a r condiciones de restricción, dicha matriz permite expresar las n incógnitas del sistema en función exclusiva de un conjunto $m = n - r$ incógnitas independientes o maestras, es decir, si \mathbf{x} describe el vector de incógnitas de dimensión n y \mathbf{x}_m describe un vector de m incógnitas independientes, la matriz \mathbf{T} , de dimensiones $n \times m$, es tal que se cumple que

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{x}_m \quad [8.1]$$

8.2.- Elección de las incógnitas esclavas en forma sucesiva.- Sea, de forma genérica, un sistema de ecuaciones lineales compatible y determinado de n dimensiones

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{p} \quad [8.2]$$

sometido a otro subsistema (que supondremos homogéneo por ser el más habitual en la práctica del cálculo de estructuras*) de r restricciones ($r < n$) y sea \mathbf{R} la matriz de coeficientes** de este subsistema formada por los elementos escalares r_{ij} , es decir

$$\mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad [8.3]$$

* Para condiciones no homogéneas el procedimiento será análogo al aquí expuesto.

** Puesto que en este capítulo no se va a utilizar la matriz de rotación, signada normalmente con esta letra, no debe haber la posibilidad de confusión.

Como, en general, no será posible la elección simultánea y arbitraria de r incógnitas esclavas sin correr el riesgo de que no sean todas ellas independientes entre sí, una forma inmediata y sistemática para la eliminación de las incógnitas dependientes, que surgen como consecuencia de las r condiciones de restricción impuestas, consiste en aplicar el siguiente procedimiento: elíjase cualquier ecuación del sistema de restricciones [8.3], despéjese de ella cualquiera de las incógnitas y sustitúyase esta incógnita en las ecuaciones [8.2] y en el resto de ecuaciones de restricción del sistema [8.3]. Como consecuencia de esta sustitución, las matrices \mathbf{K} y \mathbf{R} sufren unas determinadas transformaciones, de forma que la primera se transforma en otra cuyas columnas no son más que una determinada combinación de las columnas de \mathbf{K} y, además, pierde una de ellas, y la segunda matriz se transforma, asimismo, en otra cuyas columnas son combinaciones de las columnas de \mathbf{R} pero que constará de una fila y una columna menos que ésta, puesto que desaparece la ecuación que se eligió para despejar la incógnita. Se obtiene, pues, un nuevo sistema de ecuaciones y otro de restricciones con una incógnita menos. Repitiendo reiteradamente el proceso r veces, se consigue eliminar del sistema original [8.2] las r incógnitas esclavas -que, naturalmente, serán independientes entre sí por la forma en que se han elegido- mientras que el sistema de restricciones se ve reducido a una igualdad idénticamente nula, como se demostrará en el epígrafe 8.4. De esta forma se llegará al sistema rectangular ya expuesto en [6.25]. En cada paso del proceso la matriz \mathbf{K} sufre una transformación, perdiendo una columna, esto es, del sistema se elimina una incógnita.

En lo que sigue vamos a desarrollar una nueva matriz, que al multiplicarla por \mathbf{K} realice esta transformación de forma directa. Naturalmente los elementos de esta nueva matriz deben de estar intrínsecamente definidos en la matriz del subsistema de restricciones, pues es éste el que fija las condiciones de transformación que ha de sufrir la matriz de coeficientes del sistema. Para desarrollar dicha matriz procederemos como sigue.

Por motivos de homogeneidad en la nomenclatura para el proceso que sigue, llamemos \mathbf{R}_1 a la matriz original del subsistema de restricciones, de forma que pueda escribirse

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad [8.4]$$

o también

$$r_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, n) \quad [8.5]$$

Hagamos un rastreo de los elementos de \mathbf{R}_1 y elijamos cualquiera de ellos no nulo, r_{ke} . Este r_{ke} corresponderá, pues, a la ecuación k del subsistema de restricciones y a la incógnita x_e . Dicha ecuación k puede escribirse así:

$$r_{kj} x_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad [8.6]$$

y despejando de ella dicha incógnita

$$x_e = \frac{-\mathbf{f}_{ke}^-}{r_{ke}} \mathbf{x}_e^- \quad [8.7]$$

donde, \mathbf{f}_{ke}^- es el vector fila que queda al eliminar de la fila k de la matriz \mathbf{R}_1 el elemento r_{ke} y \mathbf{x}_e^- es el vector columna resultante de eliminar del vector \mathbf{x} la incógnita x_e . Esta incógnita se ha convertido en la primera incógnita esclava, mientras que las demás siguen considerándose como “independientes”. El vector de incógnitas \mathbf{x} se puede expresar también así:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_e \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{r_{k1}}{r_{ke}} & -\frac{r_{k2}}{r_{ke}} & \cdots & -\frac{r_{kn}}{r_{ke}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{T}_1 \mathbf{x}_e^- \quad [8.8]$$

donde \mathbf{T}_1 es una matriz de dimensiones, pues, $n \times n-1$.

Sustituyendo [8.8] en [8.2] se tendrá

$$[\mathbf{K} \mathbf{T}_1] \mathbf{x}_e^- = \mathbf{p} \quad [8.9]$$

Llamando

$$\mathbf{K}_1 = [\mathbf{K} \mathbf{T}_1] \quad [8.10]$$

la ecuación [8.9] se podrá escribir como

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{x}_e^- = \mathbf{p} \quad [8.11]$$

sistema rectangular de n ecuaciones y n-1 incógnitas, pues se ha eliminado la primera incógnita esclava con ayuda de la matriz \mathbf{T}_1 , es decir, la postmultiplicación de \mathbf{K} por esta matriz tiene por efecto la eliminación de la primera incógnita esclava x_e . La transformación de \mathbf{K} en \mathbf{K}_1 se consigue a partir de la matriz \mathbf{T}_1 . Esta es, pues, la matriz que se buscaba y que, en adelante le llamaremos Matriz de Transformación. Sustituyendo, asimismo, [8.8] en [8.4]

$$[\mathbf{R}_1 \mathbf{T}_1] \mathbf{x}_e^- = \mathbf{0}$$

siendo $[\mathbf{R}_1\mathbf{T}_1]$ la matriz de coeficientes del nuevo subsistema de restricciones modificado del primitivo, de dimensiones $r \times n-1$. Esta matriz tendrá, pues, r filas y $n-1$ columnas, pero la fila k será idénticamente nula, pues corresponde a los coeficientes de una ecuación en la que se ha sustituido una incógnita que se despejó de esta misma ecuación. Llamando \mathbf{R}_2 a la matriz que resulta de eliminar de $[\mathbf{R}_1\mathbf{T}_1]$ la fila k nula, la matriz de coeficientes del nuevo subsistema de restricciones se puede re-escribir como sigue

$$\mathbf{R}_2 \mathbf{x}_e = \mathbf{0} \quad [8.12]$$

con lo cual se ha llegado a un nuevo sistema de ecuaciones [8.11] con una incógnita menos que el original y sometido a otro subsistema de restricciones [8.12] que tiene, asimismo, una ecuación y una incógnita menos que el anterior subsistema.

8.2.1.- Ensamblaje de las sucesivas matrices de transformación.- Para la obtención de la matriz \mathbf{T}_1 no será necesario realizar todo el proceso anteriormente descrito pues, de la observación de [8.8], se desprende que puede obtenerse de forma directa mediante ensamblaje. En efecto, puesto que las primeras $(e-1)$ ecuaciones de [8.8] son identidades en las primeras $(e-1)$ incógnitas, las primeras $(e-1)$ columnas/filas de \mathbf{T}_1 han de configurar un bloque identidad de dimensiones $(e-1)$, mientras que el resto de columnas correspondientes a dichas ecuaciones han de ser, necesariamente nulos y formarán, pues, otro bloque nulo de $(e-1)$ filas y $(n-e)$ columnas. Llamemos al primer bloque $\mathbf{I}_{(e-1)}$ y al segundo $\mathbf{N}_{(e-1)(n-e)}$, queriendo indicar con los subíndices las dimensiones de las respectivas matrices. Recíprocamente, las $(n-e)$ últimas filas de \mathbf{T}_1 , que corresponden a identidades de las últimas $(n-e)$ incógnitas, estarán formadas por los bloques $\mathbf{N}_{(n-e)(e-1)}$, (esto es $\mathbf{N}_{(e-1)(n-e)}^T$) e $\mathbf{I}_{(n-e)}$. Por último, la fila e está formada por el vector \mathbf{f}_{ke} más arriba definido. De acuerdo con esto, el ensamblaje de la Matriz de Transformación \mathbf{T}_1 se consigue en la forma

$$\mathbf{T}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{(e-1)} & \mathbf{N}_{(e-1)(n-e)} \\ \hline \mathbf{f}_{k(e-1)} & \mathbf{f}_{k(n-e)} \\ \hline \mathbf{N}_{(e-1)(n-e)}^T & \mathbf{I}_{(n-e)} \end{array} \right] \quad [8.13]$$

donde $\mathbf{f}_{k(e-1)}$ representa a los primeros $(e-1)$ elementos de la fila k y $\mathbf{f}_{k(n-e)}$ a los últimos $(n-e)$ de dicha fila.

Como se ha visto, la determinación de la matriz de transformación \mathbf{T}_1 que permite eliminar la primera incógnita esclava se consigue de forma directa mediante ensamblaje de unos determinados bloques de acuerdo con la configuración de la matriz de restricciones \mathbf{R}_1 . De forma reiterada se van ensamblando las siguientes matrices \mathbf{T}_i a partir de las sucesivas matrices \mathbf{R}_i ($i = 1, 2 \dots r$) con lo que, sucesivamente, se van obteniendo en cada paso una nueva matriz de transformación y un nuevo subsistema de restricciones, es decir

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{p} \\ \mathbf{R}_1 \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{l} [\mathbf{K} \mathbf{T}_1] \mathbf{x}_{e1} = \mathbf{p} \\ \mathbf{R}_2 \mathbf{x}_{e1} = \mathbf{0} \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{l} [\mathbf{K} \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2] \mathbf{x}_{e2} = \mathbf{p} \\ \mathbf{R}_3 \mathbf{x}_{e2} = \mathbf{0} \end{array} \right\} \dots [\mathbf{K} \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \dots \mathbf{T}_r] \mathbf{x}_{er} = \mathbf{p} \quad [8.14]$$

donde los subíndices de los vectores incógnita van indicando la incógnita esclava que en cada paso se elimina, es decir, el vector \mathbf{x}_{ej} indica todas las componentes de incógnitas que, en cada paso, existen en el sistema, excepto la j . Puesto que al final del proceso se habrán eliminado todas las incógnitas elegidas como esclavas, el sistema resultante solo contendrá las incógnitas maestras, por lo que, llamando al vector que las contiene \mathbf{x}_m y teniendo en cuenta la propiedad asociativa del producto matricial, la anterior expresión toma la forma compacta

$$[\mathbf{K} \mathbf{T}] \mathbf{x}_m = \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{K}_c \mathbf{x}_m = \mathbf{p} \quad [8.15]$$

o de forma más compacta

$$\mathbf{K}_c \mathbf{x}_m = \mathbf{p} \quad [8.16]$$

donde

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{K} \mathbf{T} \quad [8.17]$$

en donde, con el subíndice de la matriz de coeficientes, se indica que ésta procede de una cierta manipulación de sus columnas (combinación lineal) de la matriz originaria \mathbf{K} mientras que \mathbf{T} es la Matriz de Transformación buscada, que no es más que el producto matricial ordenado de las sucesivas matrices de transformación conseguidas mediante el ensamblaje antes descrito, es decir

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \dots \mathbf{T}_r \quad [8.18]$$

matriz que consigue eliminar las r incógnitas esclavas al postmultiplicar a \mathbf{K} . Para su consecución basta, pues, con ir ensamblando las sucesivas matrices \mathbf{T}_i y proceder luego al producto matricial ordenado expresado en [8.18].

8.3.- Elección simultánea de las incógnitas esclavas.- Como antes se ha indicado, las r incógnitas esclavas han de ser tales que el determinante formado por las columnas asociadas a ellas sea no nulo para asegurar que son independientes entre sí, esto es, dichas columnas han de ser linealmente independientes. Para ello puede procederse al cálculo sistemático de los diversos determinantes correspondientes a todas las submatrices de dimensiones $r \times r$ que pueden obtenerse mediante combinaciones sin repetición de las columnas de \mathbf{R} , hasta encontrar el primero no nulo*. Entonces, las incógnitas asociadas a las columnas correspondientes de dicha submatriz serán las incógnitas esclavas buscadas. Para encontrar de forma ordenada y sistemática r columnas que sean linealmente independientes, se realizará el siguiente proceso:

1º.- Desarrollese la matriz \mathbf{R} por columnas

$$\mathbf{R} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \mathbf{c}_n] \quad [8.19]$$

2º.- Elíjase la 1ª columna no nula. Sea ésta la \mathbf{c}_k .

3º.- Elíjase la siguiente columna no nula (\mathbf{c}_s) y resuélvase el siguiente sistema en los parámetros incógnita α_i

$$\mathbf{c}_k \alpha_1 + \mathbf{c}_s \alpha_2 = 0 \quad [8.20]$$

Si este sistema sólo tiene la solución trivial, las columnas serán linealmente independientes y las incógnitas x_k y x_s asociadas a esas dos columnas pueden elegirse como incógnitas esclavas, mientras que si tiene solución (además de la trivial) las columnas serán linealmente dependientes y habrá que elegir la siguiente no nula (sea ésta la \mathbf{c}_t) de forma que nuevo el sistema

$$\mathbf{c}_k \alpha_1 + \mathbf{c}_t \alpha_2 = 0 \quad [8.21]$$

solamente tenga la solución trivial y, entonces, las dos primeras incógnitas esclavas serán la x_k y x_t .

4º.- Una vez encontradas las dos primeras incógnitas esclavas, se elige la siguiente columna no nula (sea \mathbf{c}_v) y se resuelve el sistema

$$\mathbf{c}_k \alpha_1 + \mathbf{c}_t \alpha_2 + \mathbf{c}_v \alpha_3 = 0 \quad [8.22]$$

* Una forma de optimizar la elección de las incógnitas dependientes, con objeto de minimizar los errores de redondeo, es tomar el mayor de dichos determinantes (16, apartado 12.43), aunque ello supondrá una mayor carga computacional.

De forma idéntica a lo descrito en el paso 3º, si el sistema anterior sólo tiene la solución trivial, las columnas serán linealmente independientes y se habrá encontrado la tercera incógnita esclava (x_v), y si tiene solución (además de la trivial) las columnas serán linealmente dependientes y habrá que elegir la siguiente columna no nula para determinar la tercera incógnita esclava.

Procediendo de forma reiterada, se encontrarán las primeras r columnas linealmente independientes cuyas incógnitas asociadas serán las incógnitas esclavas que se buscan, con lo que el proceso de elección de dichas incógnita se da por concluido.

8.3.1.- Ensamblaje directo de la Matriz de Transformación.- Una vez determinadas las incógnitas esclavas, sólo resta encontrar la Matriz de Transformación. Por claridad, y sin que ello suponga menoscabo en la generalización del procedimiento, la exposición que sigue se hace para un sistema de 7 ecuaciones sometido a 3 ecuaciones homogéneas de restricción. Sea, pues, \mathbf{K} la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones compatible y determinado de dimensión 7×7 en las incógnitas x_i y \mathbf{R} la matriz de coeficientes del subsistema de restricciones homogéneo de dimensiones 3×7 . Los sistemas [8.2] y [8.3] pueden, pues, escribirse conjuntamente como sigue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} [\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [8.23]$$

donde \mathbf{x} es el vector columna que describe las incógnitas x_i . La matriz \mathbf{R} , desarrollada por columnas \mathbf{c}_i , tendrá la forma

$$\mathbf{R} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3 \quad \mathbf{c}_4 \quad \mathbf{c}_5 \quad \mathbf{c}_6 \quad \mathbf{c}_7]$$

con lo que el subsistema de restricciones puede escribirse en modo más compacto como

$$\sum_{i=1}^7 \mathbf{c}_i x_i = 0 \quad [8.24]$$

Puesto que se tienen tres ecuaciones de restricción, existirán tres incógnitas esclavas. Una vez precisadas éstas en la forma expuesta en el apartado anterior, sean éstas, p.e., la 2ª, la 3ª y la 6ª. Pasando al segundo miembro los términos correspondientes a las incógnitas independientes o maestras, el sistema anterior adopta la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_4 & \mathbf{c}_5 & \mathbf{c}_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad [8.25]$$

Aplicando la Regla de Cramer, y llamando al vector de incógnitas maestras

$$\mathbf{x}_m = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad [8.26]$$

la solución del sistema anterior en las incógnitas esclavas será

$$\begin{aligned} x_2 &= - \sum \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{c}_m & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_6 \\ \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_6 \end{vmatrix}} x_m = \sum \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_m & \mathbf{c}_6 \\ \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_6 \end{vmatrix}} x_m = - \sum \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_6 & \mathbf{c}_m \\ \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_6 \end{vmatrix}} x_m \\ x_3 &= - \sum \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_m & \mathbf{c}_6 \\ \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_6 \end{vmatrix}} x_m = \sum \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_6 & \mathbf{c}_m \\ \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_6 \end{vmatrix}} x_m \\ x_6 &= - \sum \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_m \\ \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_6 \end{vmatrix}} x_m \quad (m=1, 4, 5, 7) \end{aligned} \quad [8.27]$$

donde $\begin{vmatrix} \mathbf{c}_i & \mathbf{c}_j & \mathbf{c}_k \end{vmatrix}$ expresa el valor del determinante de la matriz formada por las columnas i, j, k.

Por simplicidad de expresión, en adelante adoptaremos la siguiente simbología:

$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_6 \end{vmatrix}$, que expresa el valor del determinante de la matriz formada por las columnas asociadas a las incógnitas esclavas.

$\Delta_{e,m}^-$ es el valor del determinante de la matriz formada por las columnas de Δ , excepto la correspondiente a la incógnita esclava e y sin permutación del orden, orlada por la derecha por la columna asociada a la incógnita maestra m.

De acuerdo con esto la solución del sistema [8.25] puede escribirse de forma más abreviada como

$$x_e = \pm \sum_{m=1,4,5,7} \frac{\Delta_{e,m}^-}{\Delta} x_m \quad (e=2, 3, 6) \quad [8.28]$$

donde el signo de la sumatoria será negativo para la 1ª, 3ª, 5ª... incógnitas si el número de ecuaciones de restricción es impar y positivo en caso contrario, mientras que para la 2ª, 4ª, etc. incógnitas esclavas el signo será el contrario, debido a las permutaciones de columnas efectuadas en las soluciones dadas por [8.27]; es decir, de forma general, el segundo miembro de [8.28] vendrá afectado del signo menos para las incógnitas impares cuando el número de ecuaciones de restricción sea impar y del signo más si es par. Inversamente ocurrirá para las incógnitas pares. Desarrollando [8.28] pueden escribirse todas las componentes del vector incógnita \mathbf{x} en función exclusiva de las incógnitas maestras \mathbf{m} en la forma

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta_{\bar{2},1} & -\Delta_{\bar{2},4} & -\Delta_{\bar{2},5} & -\Delta_{\bar{2},7} \\ \Delta_{\bar{3},1} & \Delta_{\bar{3},4} & \Delta_{\bar{3},5} & \Delta_{\bar{3},7} \\ 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & 0 \\ -\Delta_{\bar{6},1} & -\Delta_{\bar{6},4} & -\Delta_{\bar{6},5} & -\Delta_{\bar{6},7} \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad [8.29]$$

y en forma compacta

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{x}_m \quad [8.30]$$

donde \mathbf{T} es la Matriz de Transformación buscada y \mathbf{x}_m el vector que describe, exclusivamente, las incógnitas independientes o maestras. La expresión [8.30] es similar a la expuesta en [6.15], pero no es la misma, pues mientras que ésta última relaciona exclusivamente las incógnitas esclavas con las maestras, la [8.30] relaciona todas las incógnitas de corrimiento con las incógnitas esclavas, es decir, la matriz de transformación \mathbf{T} es, no solamente una reordenación de la matriz \mathbf{R}_{em} expresada en [6.16], sino que, además, está ampliada con tantas filas como incógnitas maestras, filas cuyos elementos son todos nulos, excepto el correspondiente al elemento que relaciona cada incógnita maestra con ella misma y, por tanto, dicho elemento es la unidad.*

Sustituyendo [8.30] en el primer bloque de [8.23] se obtendrá nuevamente el ya conocido sistema

* Contrariamente a la matriz \mathbf{R}_{em} que proviene de una reordenación de filas y columnas, la matriz \mathbf{T} conserva el orden original de las incógnitas, como se aprecia en [8.29].

$$\mathbf{K}_c \mathbf{x}_m = \mathbf{p} \quad [8.31]$$

donde

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{K} \mathbf{T} \quad [8.32]$$

Obsérvese que de [8.29] puede deducirse el procedimiento de ensamblaje de la matriz \mathbf{T} de la siguiente forma:

1°.- Se parte de un arreglo de n filas y tantas columnas como incógnitas independientes, esto es $n-r$, signadas con el n° de orden de las incógnitas maestras.

2°.- Cada fila correspondiente a una incógnita maestra será nula, excepto el elemento i,i que será el determinante Δ , anteriormente descrito.

3°.- Cada uno de los elementos de las filas correspondientes a las incógnitas esclavas (recuadradas en [8.29]) es el determinante $\Delta_{e,m}$, donde e es la numeración de la fila y m la de la columna respectiva.

4°.- Por último, si el número de ecuaciones de restricción es impar, habrá que afectar del signo menos a las filas asociadas a la 1ª, 3ª, 5ª, etc. incógnitas esclavas y, si es par, a las filas asociadas a la 2ª, 4ª, 6ª, etc. incógnitas esclavas.

El ensamblaje directo de la Matriz de Transformación buscada es, pues, de la forma:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 7 \\ \Delta & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta_{2,1} & -\Delta_{2,4} & -\Delta_{2,5} & -\Delta_{2,7} \\ \Delta_{3,1} & \Delta_{3,4} & \Delta_{3,5} & \Delta_{3,7} \\ 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & 0 \\ -\Delta_{6,1} & -\Delta_{6,4} & -\Delta_{6,5} & -\Delta_{6,7} \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \quad [8.33]$$

8.4.- Aplicación de la Matriz de Transformación al Método de las Transformaciones.- Sustituyendo el vector \mathbf{x} dado por [8.30] en la expresión [8.23] se tendrá, para el primer bloque

$$[\mathbf{K} \mathbf{T}] \mathbf{x}_m = \mathbf{p} \quad [8.34]$$

y, para el segundo

$$[\mathbf{R} \mathbf{T}] \mathbf{x}_m = \mathbf{0} \quad [8.35]$$

ecuación matricial esta última que no es más que la expresión de un sistema de ecuaciones todas ellas idénticamente nulas, pues las matrices \mathbf{R} y \mathbf{T} son matrices divisores de cero*, como se demuestra a continuación.

En efecto, llamando \mathbf{C}_e y \mathbf{C}_m a las matrices formadas por las columnas asociadas a las incógnitas esclavas y maestras, respectivamente, del sistema de restricciones y \mathbf{x}_e y \mathbf{x}_m a los vectores de incógnitas esclavas y maestras, respectivamente, es decir

$$\mathbf{C}_e = [\mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3 \quad \mathbf{c}_6] \quad \mathbf{C}_m = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_4 \quad \mathbf{c}_5 \quad \mathbf{c}_7] \quad [8.36]$$

y

$$\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_m = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad [8.37]$$

el sistema [8.25] puede escribirse en la forma

$$\mathbf{C}_e \mathbf{x}_e = -\mathbf{C}_m \mathbf{x}_m \quad [8.38]$$

y puesto que \mathbf{C}_e es no singular, multiplicando la anterior m.a.m. por su inversa, se tendrá

$$\mathbf{x}_e = -\mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{C}_m \mathbf{x}_m \quad [8.39]$$

Por otra parte, si \mathbf{I} es una matriz identidad de dimensión 4, es decir, de dimensión igual al número de incógnitas maestras, podrá escribirse, de acuerdo con la expresión anterior que

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{C}_m \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_m \quad [8.40]$$

donde $\bar{\mathbf{x}}$ es el vector de incógnitas reordenado. Se tiene, pues, que

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{C}_m \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_m \quad [8.41]$$

Llamando

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{C}_m \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad [8.42]$$

* Se dice que dos matrices son divisores de cero cuando, no siendo nula ninguna de ellas, su producto es una matriz nula (43, apartado 3.2).

la [8.41] se puede expresar como

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{T}} \mathbf{x}_m \quad [8.43]$$

que relaciona todas las incógnitas con las incógnitas esclavas, expresión equivalente, pues, a la [8.30], es decir, la matriz de [8.41] es la matriz de transformación antes deducida con otra ordenación de sus filas. De acuerdo con [8.36], la matriz \mathbf{R} reordenada, queda en la forma

$$\bar{\mathbf{R}} = [\mathbf{C}_e \quad \mathbf{C}_m] \quad [8.44]$$

y postmultiplicando la [8.44] por la [8.42], se tendrá

$$\bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{T}} = [\mathbf{C}_e \quad \mathbf{C}_m] \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{C}_m \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = -\mathbf{C}_m + \mathbf{C}_m = \mathbf{0} \quad [8.45]$$

c.s.q.d.

Tal y como se expuso en el epígrafe 6.2.1, el sistema [8.34] equivalente al [6.11], es rectangular con más ecuaciones que incógnitas, pues el producto matricial $\mathbf{K}\mathbf{T}$ tendrá n filas y $n-r$ columnas y, por tanto, será incompatible. Solo se podrán obtener soluciones a partir de combinaciones lineales de las ecuaciones que lo conforman, de modo que la matriz de coeficientes recupere su cuadratura. Pero si el sistema corresponde a las ecuaciones de equilibrio obtenidas mediante ensamblaje por el procedimiento del Método Directo de la Rigidez, solamente podrá existir una única solución (Teorema de Kirchoff), es decir, una sola combinación lineal y ésta no puede ser otra más que aquella que devuelva una matriz de coeficientes simétrica (Principio de Reciprocidad de Maxwell-Betti). Pero, puesto que la matriz \mathbf{T} , al postmultiplicar a \mathbf{K} , introduce en sus columnas una determinada transformación, la premultiplicación de la transpuesta de \mathbf{T} por la matriz \mathbf{K} introducirá en ésta la misma transformación en sus filas. Por lo tanto, premultiplicando m.a.m. [8.34] por la transpuesta de \mathbf{T} , se tendrá

$$[\mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}] \mathbf{x}_m = \mathbf{T}^T \mathbf{p} \quad [8.46]$$

y, llamando

$$\mathbf{K}_{fc} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_f = \mathbf{T}^T \mathbf{p} \quad [8.47]$$

se tendrá definitivamente

$$\mathbf{K}_{fc} \mathbf{x}_m = \mathbf{p}_f \quad [8.48]$$

sistema de $n-r$ ecuaciones en las $n-r$ incógnitas independientes o maestras y donde, con los subíndices, quiere indicarse que las matrices originales han sufrido modificación de filas (f) y columnas (c). El sistema [8.48] es, pues, equivalente al expuesto en [6.31].

Aunque con los dos procedimientos descritos se establecen, por una parte, unos criterios rigurosos y sistemáticos para la elección de las incógnitas esclavas y se solventa, por otra, el inconveniente de tener que reordenar y particionar las filas y columnas de la matriz del sistema y la de restricciones, así como del vector de términos independientes, el Método de las Transformaciones, que puede ayudarse de todo lo anterior, sigue presentando un grave inconveniente, cual es el de no permitir calcular las fuerzas asociadas a las restricciones impuestas que, como se mostró en 6.2.2, en el caso de restricción de inelongabilidad corresponde al axil de las barras y , en el caso de restricciones de diafragma rígido, corresponden al axil, al cortante contenido en el diafragma y al momento flector de eje normal al mismo diafragma.

Bien es cierto que, desde un punto de vista estrictamente teórico, estos valores pueden considerarse indiferentes, pues el mismo concepto intrínseco de restricción así lo establece, pero en la matemática aplicada el conocimiento de estos valores puede ser ineludible. Piénsese, por ejemplo, el caso de una restricción de corrimiento nulo en las condiciones de contorno de un determinado apoyo en una estructura o la condición de inelongabilidad impuesta a algunas de sus barras. La imposición de dichas restricciones significa, desde el punto de vista matemático, que el apoyo puede resistir cualquier valor de reacción y que la barra está capacitada para resistir un axil que, teóricamente, puede ser infinito. Naturalmente esto no es así y, como decíamos, es imprescindible determinar de alguna forma el valor de tales fuerzas, pues son necesarios tanto para comprobar que la barra está capacitada para resistir dicho axil como para el dimensionamiento del aparato de apoyo. Es necesario concluir que el Método de las transformaciones no será, pues, el más idóneo para el cálculo de estructuras de nudos rígidos, como reiteradamente se ha comentado en los capítulos precedentes.

8.5.- Aplicación de la Matriz de Transformación al Método de los Multiplicadores de Lagrange.- El problema apuntado anteriormente de calcular las fuerzas asociadas a las restricciones impuestas se solventa con el Método de los Multiplicadores de Lagrange, el más completo, elegante y directo para resolver sistemas sometidos a restricciones, como ya se especificó en el apartado 6.2.2 y en la referencia 54 (apartado 9.2.4), pues se consiguen de forma inmediata, tanto las incógnitas cinemáticas como los valores de dichas fuerzas si se resuelve dicho sistema según los procedimientos descritos en los epígrafes 6.3 o 6.3.1.

Pero, si para la implementación de la matriz de rigidez de la estructura se utilizan las matrices de rigidez de barra tradicionales, aparece un nuevo problema de no menor trascendencia: debido a las grandes diferencias en el orden de magnitud existentes entre los valores numéricos de la matriz de rigidez global y los correspondientes a la matriz de restricciones, el número de condición del Sistema de Lagrange se dispara de forma alarmante, como se mostró en los Cuadros del Capítulo 7. Es por ello que, entonces, sea poco menos que imprescindible adoptar los procedimientos alternativos descritos en los epígrafes 6.3.1, 6.3.2 y 6.3.3 con ayuda de las pertinentes matrices de transformación, que permitirá una enorme mejora del condicionamiento, como se expondrá en el Capítulo 11.

8.5.1.- Resolución del Sistema de Lagrange por transformación de columnas: eliminación de incógnitas de corrimiento.- Para un subsistema de restricción homogéneo de tipo genérico con r ecuaciones y matriz de coeficientes \mathbf{R} , el Sistema de Lagrange dado por [6.34] tendrá la forma genérica

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [8.49]$$

Una vez determinada la Matriz de Transformación \mathbf{T} en cualquiera de las formas descritas anteriormente, se tendrá la expresión [8.30] y, sustituyendo el valor del vector de incógnitas \mathbf{x} en los dos bloques de ecuaciones de [8.49], se habrá de escribir que, para el primero

$$[\mathbf{K} \ \mathbf{T}] \mathbf{x}_m + \mathbf{R}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{p} \quad [8.50]$$

o, de forma más compacta

$$\mathbf{K}_c \mathbf{x}_m + \mathbf{R}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{p} \quad [8.51]$$

donde, con $\mathbf{K}_c = \mathbf{K} \ \mathbf{T}$ se indica que la matriz \mathbf{K} ha sufrido una transformación por columnas al postmultiplicarla por \mathbf{T} , mientras que, para el segundo se obtendrá una expresión idénticamente nula, como se demostró en el epígrafe 8.4. El Sistema de Lagrange queda, pues, reducido al siguiente

$$[\mathbf{K}_c \ \mathbf{R}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = [\mathbf{p}] \quad [8.52]$$

cuya matriz de coeficientes es cuadrada -pues han desaparecido del sistema original [8.49] r ecuaciones y r incógnitas- de las misma dimensión que \mathbf{K} , compatible y determinado,

aunque no simétrico. Aunque la matriz de coeficientes del sistema obtenido ha dejado de ser definida positiva, tiene la ventaja de que su resolución nos devuelve los valores de las incógnitas independientes y los de los multiplicadores de Lagrange, imprescindibles en determinadas aplicaciones prácticas.

8.5.2.- Resolución del Sistema de Lagrange por transformación de filas: eliminación de Multiplicadores de Lagrange.- Si el primero de los bloques de ecuaciones matriciales dados por [8.49] se premultiplica m.a.m. por la matriz \mathbf{T}^T , transpuesta de la Matriz de Transformación \mathbf{T} , se tendrá,

$$[\mathbf{T}^T\mathbf{K}]\mathbf{x} + [\mathbf{T}^T\mathbf{R}^T]\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{T}^T\mathbf{p} \quad [8.53]$$

pero, puesto que, como se ha demostrado anteriormente, el producto matricial $[\mathbf{R}\mathbf{T}]$ es una matriz nula, puede escribirse que

$$[\mathbf{R}\mathbf{T}]^T = \mathbf{0} \quad [8.54]$$

y, consecuentemente

$$\mathbf{T}^T\mathbf{R}^T = \mathbf{0} \quad [8.55]$$

por lo tanto el segundo sumando del primer miembro de [8.53] se hace nulo, lo que trae como consecuencia la eliminación de las incógnitas correspondientes a los Multiplicadores de Lagrange y el sistema resultante adoptará, pues, la forma siguiente

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_f \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} [\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_f \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [8.56]$$

donde se ha hecho $[\mathbf{T}^T\mathbf{K}] = \mathbf{K}_f$ y $\mathbf{T}^T\mathbf{p} = \mathbf{p}_f$, queriendo indicar con los subíndices que la matriz de rigidez \mathbf{K} y el vector de acciones \mathbf{p} han sufrido una transformación debido a unas determinadas combinaciones lineales de sus filas, como consecuencia de las cuales desaparecen tantas ecuaciones como incógnitas se eliminan, quedando las dimensiones del sistema reducido a las mismas que las del sistema original [8.2].

8.5.3.- Resolución del Sistema de Lagrange por transformación de filas y columnas.- Naturalmente, si [8.52] se premultiplica m.a.m. por \mathbf{T}^T , transpuesta de \mathbf{T} , se ob-

tendrá el mismo sistema expresado en [8.46], pues \mathbf{T}^T y \mathbf{R}^T son divisores de cero, como ya ha quedado demostrado.

Obviamente, los procedimientos anteriormente expuestos para la resolución de sistemas con la ayuda de las matrices de transformación pueden aplicarse a cualquier sistema genérico de ecuaciones sometidas o no a restricciones, pues dicho sistema puede particionarse en dos bloques y, eligiendo cualquiera de ellos, ensamblar la matriz de transformación correspondiente en la forma antes expuesta y postmutiplicar la matriz del otro bloque por esta matriz de transformación, con lo que se obtendría un sistema cuadrado, compatible, determinado y de menor dimensión que el original. Además de la reducción de dimensiones, esta matriz de transformación hace el efecto de preconditionador por cuanto, en general, el número de condición disminuirá al disminuir las dimensiones de la matriz.

CAPÍTULO 9

MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN PARA **ENTRAMADOS PLANOS**

OBJETIVO.-

Aunque el procedimiento descrito en el capítulo anterior para la consecución de la Matriz de Transformación de un sistema lineal sometido a restricciones es, evidentemente, aplicable para el cálculo de todo tipo de estructuras sometidas a restricciones, las especiales características de perpendicularidad que se presentan entre los elementos que conforman los entramados planos hacen posible que dicha Matriz de Transformación pueda determinarse de forma mucho más directa y simple que con el procedimiento genérico. De ahí que este capítulo tenga por objetivo la determinación de dichas matrices aplicables a los sistemas lineales correspondientes a este tipo de estructuras.

CONTENIDO:

Partiendo de un modelo sencillo de entramado plano se realiza una reflexión y discusión pormenorizada de las relaciones existentes entre las incógnitas de desplazamiento como consecuencia de la hipótesis de inelongabilidad adoptada, relaciones que dan lugar a la matriz de transformación que se desea obtener. Esta discusión, un tanto laboriosa, no es en sí misma la pauta a seguir en su aplicación práctica, sino que sirve como vehículo para inferir cómo dicha matriz de transformación puede obtenerse de forma directa mediante ensamblaje de determinadas matrices elementales.

Una vez obtenida la Matriz de Transformación, se procede a su aplicación para los diversos procedimientos de resolución del Método de los Multiplicadores de Lagrange.

9.1.- Introducción.- Entendemos por entramado aquella estructura de barras conectadas rígidamente en la que todas ellas son, bien verticales o bien horizontales y, dentro de ellas, el entramado plano será aquella en la que todas las barras son coplanarias. Esta característica de perpendicularidad permite introducir importantes simplificaciones en su proceso de cálculo y, dado que, aún siendo un caso particular este tipo estructural es extraordinariamente abundante en la construcción, parece obligado dedicarle un estudio especial. Por sim-

plicidad y sin perjuicio de que las ideas que se exponen en este capítulo puedan extenderse a las estructuras espaciales, que se estudiarán en el siguiente capítulo, aquí nos limitaremos exclusivamente a los entramados planos.

El Sistema de Lagrange en el que las restricciones son exclusivamente de inelongabilidad

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_g^T \\ \mathbf{I}_g & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [9.1]$$

puede ser resuelto por el procedimiento expuesto en el apartado 6.3.1. que, como allí se especificó, consiste en elegir un conjunto de incógnitas esclavas \mathbf{c}_e del segundo bloque de ecuaciones, particionar convenientemente las submatrices del sistema, despejar aquéllas en función de la demás incógnitas \mathbf{c}_m y proceder a su sustitución en cada una de las ecuaciones del primer bloque, o, lo que es mucho más directo, a partir de la Matriz de Transformación, como se expuso en el Capítulo 7. Cualquiera de estos procedimientos no tiene más objetivo que la eliminación de las incógnitas esclavas, lo que conduce a unas determinadas transformaciones en las columnas de la matriz de rigidez \mathbf{M} o, lo que es lo mismo: unas determinadas combinaciones de estas líneas acarrea la eliminación de dichas incógnitas. Pero, como se decía, las especiales características que se dan en las estructuras que nos ocupan van a permitir que la Matriz de Transformación pueda obtenerse, nuevamente, por ensamblaje directo de determinadas matrices elementales sin necesidad de acudir a los métodos generales expuestos en el dicho Capítulo 8.

9.2.- Dedución de la Matriz de Transformación.- Se llama matriz elemental a aquélla que se obtienen a partir de una operación elemental sobre la matriz identidad*. El producto de esta matriz por otra es otra matriz cuyas filas o columnas son combinaciones lineales de la segunda, según venga premultiplicada o postmultiplicada, respectivamente, por la primera.

La matriz elemental que suma a la columna i la j multiplicada por un valor α en una matriz \mathbf{K} se obtiene a partir de la matriz identidad de las mismas dimensiones que las columnas de \mathbf{K} introduciendo el valor α en la posición (j,i) de dicha matriz identidad. La postmultiplicación de \mathbf{K} por la matriz elemental obtenida da como resultado otra matriz en la cual, a la columna i se le ha sumado la j multiplicada por dicho valor, quedando las demás columnas sin modificación alguna. Montemos, pues, esta matriz para el siguiente ejemplo.

* Véase referencia (43), apartado 3.4.

Sea, para precisar, el pórtico plano de la figura siguiente en donde los nudos se han numerado de forma arbitraria* y en la que se ha supuesto, por simplicidad, que todos los aparatos de apoyo son empotramientos perfectos, lo que no resta generalidad a la discusión que sigue por cuanto, si existen grados de libertad en dichos apoyos, aparecerán sendas incógnitas y, simultáneamente, sendas ecuaciones de equilibrio.

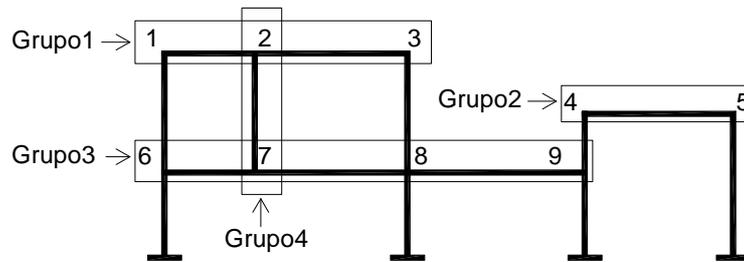


Figura 8.1

Siendo, pues, 9 los nudos susceptibles de movimiento, la matriz de rigidez \mathbf{M} reducida que se obtiene por el ensamblaje de las matrices de la barra inelongable obtenidas en el Capítulo 4, tendrá unas dimensiones de 27×27 .

Puesto que el sistema de ecuaciones de equilibrio correspondiente a esta estructura está afectado por un subsistema de restricciones correspondientes a la consideración de inelongabilidad de las barras, los desplazamientos de los nudos de cada grupo co-translacional en la dirección del movimiento permitido son iguales, condición que vendrá expresada por las ecuaciones de inelongabilidad correspondientes a las vigas, es decir:

$$\text{del grupo 1: } u_1 = u_2 = u_3$$

$$\text{del grupo 2: } u_4 = u_5$$

etc.

-donde u_i es la componente de desplazamiento horizontal- lo que supone que se han de sumar las siguientes columnas de la Matriz \mathbf{M} : Para los grupos horizontales, columnas $j = 3n - 2$, donde n va tomando cada uno de los valores de los números de nudo que forman el grupo.* Para los grupos verticales, columnas $j = 3n - 1$, con los mismos valores para n . De acuerdo con esto se tendrá

$$\text{- Grupo 1: horizontal (nudos 1, 2 y 3): columnas } 1+4+7.$$

* El mínimo ancho de banda se consigue numerando en la dirección en la que haya menos nudos (31, apartado 19.9), aunque en este caso, por generalizar, no se haya seguido este criterio.

* Si la numeración de cada nudo del grupo es correlativa, las columnas a sumar son los términos de una progresión aritmética de razón 3 y primer término igual a la numeración del primer nudo del grupo, que se constituye en nudo maestro.

- Grupo 2: horizontal (nudos 4 y 5): columnas 10+13.
- Grupo 3: horizontal (nudos 6, 7, 8 y 9): columnas 16+19+22+25.
- Grupo 4: vertical (nudos 2 y 7): columnas 5+20

Para el montaje directo de la Matriz de Transformación con la que se efectuarán las anteriores operaciones, se ha de introducir, pues, un 1 en las posiciones siguientes de la matriz identidad de dimensiones 27×27: para cada grupo horizontal en las columnas $j=3n-2$ y para cada grupo vertical en las columnas $j = 3n-1$ (donde n es el número del nudo elegido como maestro) y en las filas indicadas a continuación:

- Para el primer grupo en la columna 1 y filas 1, 4 y 7.
- Para el segundo, de forma idéntica, en la columna 10 y filas 10 y 13.
- Para el tercer grupo: columna 16 y filas 19, 22, 25.
- Para el cuarto grupo: columna 5 y fila 20.

De acuerdo con todo lo anterior, la matriz identidad de las mismas dimensiones que **M** quedará modificada en la forma

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

[9.2]

El siguiente paso será eliminar en esta matriz las columnas asociadas a las incógnitas esclavas, es decir las 4, 7, 13, 19, 20, 22 y 25. Mnemotécnicamente esta operación puede realizarse advirtiendo que dichas columnas corresponden a la numeración de filas en las que exista algún valor no nulo fuera de su diagonal principal, como fácilmente se observa en [9.2], pues el primer valor no nulo de dicha fila corresponderá a la columna asociada a la incógnita maestra, mientras que los demás valores no nulos de esta misma fila (que sólo podrán estar en la diagonal principal), están asociados a las respectivas incógnitas esclavas. De acuerdo con esto, la matriz anterior queda en la forma

$$\begin{matrix}
 & \boxed{4} & 2 & 3 & \boxed{5} & 6 & 8 & 9 & \boxed{10} & 11 & 12 & 14 & 15 & \boxed{16} & 17 & 18 & 21 & 23 & 24 & 26 & 27 \\
 \boxed{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 3 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \boxed{4} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 5 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \boxed{7} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \boxed{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \boxed{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \boxed{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \boxed{19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\
 \boxed{20} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\
 \boxed{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\
 23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
 \boxed{25} & 0 \\
 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1}
 \end{matrix} \tag{9.3}$$

Por otra parte, debido a las condiciones de inelongabilidad de pilares, los desplazamientos verticales de los nudos que pertenecientes a pilares que tienen continuidad hasta cimentación son nulos, por lo tanto, de la matriz anterior se han de eliminar las columnas 2, 8, 11, 14, 17, 23 y 26, que obedecen a la numeración $j = 3n-1$, siendo n el número de cada nudo. Efectuadas tales eliminaciones se tendrá, finalmente

$$\mathbf{T}_g = \begin{matrix} & \boxed{1} & 3 & \boxed{5} & 6 & 9 & \boxed{10} & 12 & 15 & \boxed{16} & 18 & 21 & 24 & 27 \\ \boxed{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{4} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{5} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{7} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{20} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \boxed{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \boxed{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{matrix} \tag{9.4}$$

que es la matriz de transformación buscada, de dimensiones 27×13 en la que se ha recuadrado la numeración de las columnas correspondientes a las incógnitas de desplazamiento de los grupos co-translacionales. El resto de columnas corresponden, evidentemente, a las incógnitas de giro. Pueden observarse las transformaciones que esta matriz introduce en la matriz **M** al postmultiplicarla:

- La 1ª columna de **T_g** (correspondiente a la incógnita nº 1, desplazamiento horizontal del nudo 1) suma las columnas 1+4+7 de la matriz **M**.
- La 2ª columna (correspondiente a la incógnita nº 3, giro del nudo 1) deja intacta la columna nº 3.
- La 3ª (correspondiente a la incógnita nº 5, desplazamiento vertical del nudo 2) suma las columnas 5+20.
- Etc.

Esta matriz es la que relaciona los valores de todas las incógnitas de corrimiento con las incógnitas maestras o independientes, de forma que puede escribirse que

$$\mathbf{c} = \mathbf{T}_g \mathbf{c}_m \tag{9.5}$$

donde, como se sabe, \mathbf{c}_m es el vector que describe las componentes maestras de los corrimientos. Sustituyendo \mathbf{c} en el primer bloque de ecuaciones de [9.1], se tiene

$$\mathbf{M} \mathbf{T}_g \mathbf{c}_m + \mathbf{I}_g^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{p} \quad [9.6]$$

y llamando

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{M} \mathbf{T}_g \quad [9.7]$$

[9.6] puede escribirse como

$$\mathbf{M}_c \mathbf{c}_m + \mathbf{I}_g^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{p} \quad [9.8]$$

La postmultiplicación, pues, de \mathbf{M} por esta matriz \mathbf{T}_g da como resultado otra matriz transformada a la que hemos denominado \mathbf{M}_c (matriz de rigidez transformada en columnas) de dimensiones 27×13 , por lo que, en formato matricial, el sistema [9.8] queda en la forma

$$[\mathbf{M}_c \quad \mathbf{I}_g^T] \begin{bmatrix} \mathbf{c}_m \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = [\mathbf{p}] \quad [9.9]$$

sistema que vuelve a ser cuadrado de 27×27 -pues la matriz \mathbf{M} ha perdido 14 columnas al convertirse en la \mathbf{M}_c e \mathbf{I}_g^T es de dimensión 27×14 - y cuyas incógnitas forman dos grupos: por una parte las incógnitas independientes de corrimiento, grado de indeterminación cinemática de la estructura, integrada por los desplazamientos de los grupo co-translacionales (4 grupos), más los giros de los nudos (9 giros), y, por otra, los valores de los multiplicadores de Lagrange que, como se demostró en el epígrafe 6.2.2, no son más que los axiles de las barras (14 multiplicadores); esto es, en total 27 incógnitas.

Aunque las operaciones anteriores se podrían realizar fácilmente con un adecuado programa de manipulación de matrices, el procedimiento descrito no deja de ser algo engorroso y sólo se expone a efectos de justificar la consecución y configuración de la Matriz de Transformación, pues como veremos a continuación ésta puede obtenerse de forma más inmediata, ya que la especial simplicidad de las ecuaciones de restricción que relacionan a las incógnitas de corrimiento permiten deducir esta Matriz de Transformación mediante el sencillo procedimiento de ensamblaje de submatrices, de forma similar al utilizado para la consecución de las matrices de rigidez de la estructura, de inelongabilidad [6.3] y de diafragma rígido [6.6].

9.3.- Matriz de Transformación por ensamblaje directo.- Sea, nuevamente, la estructura anteriormente expuesta que, por comodidad, se reproduce a continuación.

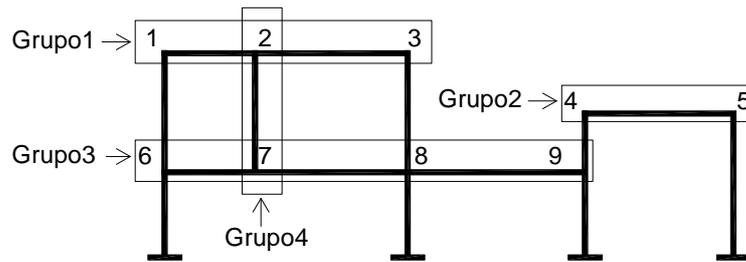


Figura 8.2

y sea \mathbf{M} la matriz de rigidez correspondiente a esta estructura, cuyo ensamblaje tendrá la forma

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{13} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{23} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{27} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{32} & \mathbf{M}_{33} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{38} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{44} & \mathbf{M}_{45} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{49} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{54} & \mathbf{M}_{55} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{61} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{66} & \mathbf{M}_{67} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{72} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{77} & \mathbf{M}_{78} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{83} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{87} & \mathbf{M}_{88} & \mathbf{M}_{89} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{94} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{98} & \mathbf{M}_{99} \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{matrix}$$

en donde, como se sabe, las submatrices \mathbf{M}_{ij} son de dimensiones 3×3 y los elementos nulos representan submatrices nulas de las mismas dimensiones. Consideremos el producto matricial siguiente

$$\mathbf{M}_{\mathbf{c}} = \mathbf{M} \mathbf{T}_{\mathbf{c}} = \begin{matrix} \begin{matrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{13} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{23} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{27} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{32} & \mathbf{M}_{33} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{38} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{44} & \mathbf{M}_{45} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{49} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{54} & \mathbf{M}_{55} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{61} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{66} & \mathbf{M}_{67} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{72} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{77} & \mathbf{M}_{78} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{83} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{87} & \mathbf{M}_{88} & \mathbf{M}_{89} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{94} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{98} & \mathbf{M}_{99} \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 \\ \mathbf{T}_4 \\ \mathbf{T}_5 \\ \mathbf{T}_6 \\ \mathbf{T}_7 \\ \mathbf{T}_8 \\ \mathbf{T}_9 \end{matrix} \end{matrix}$$

donde $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}$ es una matriz columna cuyos elementos \mathbf{T}_i , son submatrices elementales, que, lógicamente han de tener la mismas dimensiones que los elementos de \mathbf{M} . El resultado de este producto es otra matriz columna por bloques en la que cada fila i tiene la forma

$$\sum_{j=1}^{j=9} \mathbf{M}_{ij} \mathbf{T}_j$$

que no es más que una combinación lineal de las columnas de \mathbf{M} , combinación que viene descrita por las componentes de las matrices elementales \mathbf{T}_i . Añadiendo sucesivamente columnas en la Matriz de Transformación \mathbf{T}_c y tomando para las submatrices que la conforman los valores apropiados podremos “extraer” de la matriz de rigidez \mathbf{M} otra matriz modificada de acuerdo con los valores de la matriz \mathbf{T}_c , esto es, según la información descrita por las condiciones de restricción, con tantas filas como \mathbf{M} y tantas columnas como \mathbf{T}_c .

Creemos los tres vectores columna \mathbf{u} , \mathbf{v} y $\boldsymbol{\theta}$, cuyo ensamblaje forme la matriz identidad de tres dimensiones, signando a dicha matriz como $\mathbf{uv}\boldsymbol{\theta}$, y, además, creemos el vector columna nulo \mathbf{n} , es decir

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [9.10]$$

de las que se obtiene la matriz identidad

$$\mathbf{uv}\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [9.11]$$

Es evidente que el producto matricial de cualquier submatriz \mathbf{M}_{ij} por la matriz identidad $\mathbf{uv}\boldsymbol{\theta}$ no introducirá alteración alguna en los elementos de aquélla, por lo que, el producto matricial siguiente

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{M}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{27} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{38} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{44} & \mathbf{K}_{45} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{49} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{54} & \mathbf{K}_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{66} & \mathbf{K}_{67} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{77} & \mathbf{K}_{78} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{83} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{87} & \mathbf{K}_{88} & \mathbf{K}_{89} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{94} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{98} & \mathbf{K}_{99} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{uv}\boldsymbol{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{uv}\boldsymbol{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{uv}\boldsymbol{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{uv}\boldsymbol{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{uv}\boldsymbol{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{uv}\boldsymbol{\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{uv}\boldsymbol{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{uv}\boldsymbol{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{uv}\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \quad [9.12]$$

deja intacta la matriz \mathbf{M} , donde

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{uv}\boldsymbol{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{uv}\boldsymbol{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{uv}\boldsymbol{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{uv}\boldsymbol{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{uv}\boldsymbol{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{uv}\boldsymbol{\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{uv}\boldsymbol{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{uv}\boldsymbol{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{uv}\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \quad [9.13]$$

Sin embargo, si se introduce una modificación en alguna de las submatrices identidad $\mathbf{uv}\theta$, dicho producto matricial dará como resultado una transformación en los elementos de \mathbf{M}_{ij} al postmultiplicarla. Concretamente, si se elimina una columna en dicha submatriz, el producto trae como consecuencia la eliminación de la correspondiente columna de la matriz a la que postmultiplica. De acuerdo con esto y puesto que todos los nudos de la estructura en estudio, excepto el 2 y el 7, tienen desplazamientos verticales nulos, condiciones que vendrán expresadas en las ecuaciones de inelongabilidad de los pilares, se habrá de eliminar en las submatrices $\mathbf{uv}\theta$ correspondientes a dichos nudos el vector \mathbf{v} , descriptor de este corrimiento. Por otra parte, de acuerdo con las condiciones de inelongabilidad de vigas ya descritas en el epígrafe anterior, se habrán de sumar las componentes de desplazamiento de los nudos de cada grupo co-translacional en la dirección del grupo. Para ello, partiendo de la matriz identidad \mathbf{I} dada en [9.13], se procederá a introducir en ella las siguientes operaciones:

- 1º.- Eliminación de todos los vectores \mathbf{v} correspondientes a los extremos de pilares que tengan continuidad hasta cimentación, esto es, todos excepto el 2 y el 7, con lo que se obtiene la matriz de transformación \mathbf{T}_p que elimina los corrimientos debidos a la inelongabilidad de los pilares. (En el esquema siguiente se han recuadrado los elementos afectados)*.

$$\mathbf{T}_p = \begin{matrix} & \boxed{1} & 2 & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{6} & 7 & \boxed{8} & \boxed{9} \\ \begin{matrix} \boxed{1} \\ \mathbf{0} \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{u}\theta \\ \mathbf{0} \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{uv}\theta \\ \mathbf{0} \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{u}\theta \\ \mathbf{0} \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{u}\theta \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{u}\theta \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{u}\theta \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{uv}\theta \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}\theta \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}\theta \\ \mathbf{0} \end{matrix} \\ & \boxed{1} & 2 & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{6} & 7 & \boxed{8} & \boxed{9} \end{matrix} \quad [9.14]$$

donde los ceros indican matrices nulas congruentes con las matrices de su misma columna.

- 2º.- Una vez elegido un nudo maestro en cada grupo co-translacional, para los horizontales proceder al ensamblaje del vector \mathbf{u} , asociado al desplazamiento horizontal, y para los grupos verticales proceder de la misma forma al ensamblaje del vector \mathbf{v} , asociado al desplazamiento vertical. La ubicación de estos vecto-

* Obsérvese cómo los elementos de la diagonal principal describen los corrimientos permitidos en cada nudo.

res será la columna correspondiente al nudo maestro elegido y filas las de los demás nudos del grupo, nudos esclavos. Así, si para el ejemplo que nos ocupa se elige como nudo maestro en cada grupo el de menor numeración del grupo, para el grupo 1 el vector \mathbf{u} debe de introducirse en la columna 1 y filas correspondientes a los nudos 2 y 3, nudos esclavos de este grupo. Para el grupo 2, columna 4 y fila 5; para el grupo 3, columna 6 y filas 7, 8 y 9. Para el grupo co-translacional 4, grupo vertical, el vector \mathbf{v} vendrá ubicado en la columna 2, nudo maestro, y fila 7, nudo esclavo. Se tendrá, entonces

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 \boxed{1} & \boxed{2} & 3 & \boxed{4} & 5 & \boxed{6} & 7 & 8 & 9 & \\
 \mathbf{u}\theta & \mathbf{0} & \boxed{1} \\
 \mathbf{u} & \mathbf{uv}\theta & \mathbf{0} & \boxed{2} \\
 \mathbf{u} & \mathbf{0} & \mathbf{u}\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{3} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{u}\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{4} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{u} & \mathbf{u}\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{5} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{u}\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{6} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{v} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{u} & \mathbf{uv}\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{7} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{u} & \mathbf{0} & \mathbf{u}\theta & \mathbf{0} & \boxed{8} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{u} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{u}\theta & \boxed{9}
 \end{array} \quad [9.15]$$

- 3º.- Como consecuencia del anterior ensamblaje, la componente horizontal del nudo maestro de cada grupo co-translacional se ha constituido en incógnita independiente, mientras que las homónimas del resto de nudos del grupo pasan a ser incógnitas esclavas, por lo que habrán de eliminarse estas últimas. Para ello se eliminarán de la diagonal principal aquellos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} si éstos están repetidos en la misma fila, pues dichos desplazamientos de la diagonal principal serán incógnitas esclavas, mientras que los ubicados fuera de dicha diagonal serán los desplazamientos maestros, con lo que la anterior matriz quedará en la forma

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\
 \mathbf{u}\theta & \mathbf{0} & \boxed{1} \\
 \mathbf{u} & \mathbf{v}\theta & \mathbf{0} & \boxed{2} \\
 \mathbf{u} & \mathbf{0} & \mathbf{\theta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{3} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{u}\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{4} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{u} & \mathbf{\theta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{5} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{u}\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{6} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{v} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{u} & \mathbf{\theta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{7} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{u} & \mathbf{0} & \mathbf{\theta} & \mathbf{0} & \boxed{8} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{u} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\theta} & \boxed{9}
 \end{array} \quad [9.16]$$

en la que, nuevamente, se han recuadrado los elementos que han sufrido tal modificación.

- 4°.- Por último, puesto que las submatrices de cada columna han de constar de un mismo número de columnas, los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} ya introducidos habrán de orlarse por la derecha con el vector nulo \mathbf{n} más arriba descrito, mientras que, evidentemente, las submatrices nulas han de tener dimensiones compatibles con la columna a la que pertenecen. Por lo tanto, la Matriz de Transformación buscada quedará definitivamente en la forma*

$$\mathbf{T}_g = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{u}\theta \\ \boxed{\mathbf{un}} \\ \boxed{\mathbf{un}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}\theta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \theta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{u}\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{un}} & \theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{u}\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{vn}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{un}} & \theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{un}} & \mathbf{0} & \theta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{un}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \theta \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{matrix} \quad [9.17]$$

donde, de acuerdo con [9.10] las matrices elementales \mathbf{un} , \mathbf{vn} , $\mathbf{u}\theta$ y $\mathbf{v}\theta$ son, pues

$$\mathbf{un} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{vn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [9.18]$$

Sustituidas en [9.17] todas las submatrices que la conforman, se obtendrá la misma expresión dada en [9.4], Matriz de Transformación que se buscaba.

9.4.- Eliminación parcial de los Multiplicadores de Lagrange.- Con ayuda, pues, de la matriz de transformación deducida en el epígrafe anterior y siguiendo el proceso en expuesto en el epígrafe 8.5.2 se pueden eliminar todos los Multiplicadores de Lagrange involucrados en el sistema, pero puede ocurrir que el conocimiento del valor de algunos de ellos sea imprescindible, por lo que no convendrá, en general, proceder a su total eliminación. Para ello es necesario señalar que, además de los procedimientos descritos en el epígrafe 6.3, para resolver el sistema de Lagrange [9.1] existen otras múltiples formas de reso-

* Obsérvese cómo los elementos de la diagonal principal describen los corrimientos permitidos en cada nudo, cuya suma nos da el grado de indeterminación cinemática de la estructura.

lución. Piénsese que pueden elegirse una o varias cualesquiera ecuaciones de restricción, segundo bloque del sistema, (p.e. las correspondientes a vigas), despejar de éstas ecuaciones las correspondientes incógnitas dependientes en función de las demás y sustituirlas en las demás ecuaciones, con lo que desaparecen el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el sistema seguirá siendo compatible y determinado, pero de menor dimensión. Otra alternativa podría ser la eliminación de las incógnitas que, de antemano, se sabe que son nulas, como pueden ser los desplazamientos verticales de nudos pertenecientes a pilares que tienen continuidad hasta cimentación. Como quiera que fuese, estas eliminaciones se consiguen a partir de la Matriz de Transformación conseguida mediante el correspondiente ensamblaje, tal y como se ha expuesto en el epígrafe anterior. Dicha matriz elimina unas determinadas incógnitas al postmultiplicar a la matriz \mathbf{M} y, así mismo, elimina las correspondientes ecuaciones si se premultiplica m.a.m. la primera ecuación de [9.1] por la transpuesta de la Matriz de Transformación. Puesto que en las estructuras de edificación los axiles de barras horizontales suelen ser de muy poca importancia -excepto los debidos al viento*- puede ser interesante la eliminación de dichos axiles, con lo que el sistema a resolver será de menor dimensión. Para conseguir este objetivo, particionemos la matriz \mathbf{I}_g del ejemplo mostrado en la Figura 8.2 en dos submatrices, \mathbf{I}_p e \mathbf{I}_v correspondientes a la inelongabilidad de pilares y de vigas, respectivamente. El Sistema de Lagrange quedará, pues, en la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \lambda_p \\ \lambda_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [9.19]$$

Ensamblemos la Matriz de Transformación en dos fases: en la primera introduciremos en la matriz identidad \mathbf{I} solamente las modificaciones correspondientes a las condiciones de inelongabilidad de vigas y llamemos a esta matriz de transformación \mathbf{T}_v (matriz de transformación correspondiente a vigas). Procediendo en la forma expuesta en el epígrafe anterior, se tendrá:

* Aunque los efectos sísmicos sobre un entramado se suelen modelizar como fuerzas horizontales aplicadas sobre los nudos externos de cada planta, en realidad se trata de fuerzas másicas (inercia) y por lo tanto, estarán distribuidas a lo largo de éstas, por lo que los axiles a que se ven sometidas las vigas debido a estas fuerzas serán de secundaria importancia.

$$\mathbf{T}_v = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & \boxed{4} & 5 & \boxed{6} & 7 & 8 & 9 \\ \mathbf{uv}\theta & \mathbf{0} \\ \boxed{\text{unn}} & \mathbf{v}\theta & \mathbf{0} \\ \boxed{\text{unn}} & \mathbf{0} & \mathbf{v}\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{uv}\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\text{unn}} & \mathbf{v}\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{uv}\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\text{unn}} & \mathbf{v}\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\text{unn}} & \mathbf{0} & \mathbf{v}\theta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\text{unn}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{v}\theta \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \quad [9.20]$$

en la que los ceros representan submatrices nulas de tres filas, asumiendo que el número de columnas de cada uno de ellos será el correspondiente a la columna a la que pertenece, como ya se explicitó anteriormente.

Esta matriz elimina, exclusivamente, las incógnitas esclavas correspondientes a las condiciones de inelongabilidad de las vigas. La relación [9.5] ahora adquiere la forma

$$\mathbf{c} = \mathbf{T}_v \mathbf{c}_{m,v} \quad [9.21]$$

donde $\mathbf{c}_{m,v}$ es el vector columna que describe las componentes de incógnitas que adquieren la categoría de maestras como consecuencia de la inelongabilidad de las vigas.

En la segunda fase completaremos la Matriz de Transformación \mathbf{T}_v anterior introduciendo las modificaciones debidas a las condiciones de inelongabilidad descritas por las ecuaciones correspondientes a los pilares, con lo que la matriz \mathbf{T}_g que se consigue será la ya determinada y expresada en [9.17] que elimina todas las incógnitas esclavas de la estructura.

Sustituyendo en [9.19] el valor dado por [9.5] y teniendo en cuenta [9.7] se tendrá

$$\mathbf{M}_c \mathbf{c}_m + \mathbf{I}_p^T \lambda_p + \mathbf{I}_v^T \lambda_v = \mathbf{p} \quad [9.22]$$

habiendo desaparecido los dos últimos bloques de ecuaciones del sistema de Lagrange [9.19] ya que, como se sabe, por una parte las matrices \mathbf{I}_p y \mathbf{T}_g son divisores de cero y, por otra, las \mathbf{I}_v y \mathbf{T}_g .

Premultiplicando m.a.m. [9.22] por la matriz \mathbf{T}_v^T , transpuesta de \mathbf{T}_v se tiene

$$\mathbf{T}_v^T \mathbf{M}_c \mathbf{c}_m + \mathbf{T}_v^T \mathbf{I}_p^T \lambda_p + \mathbf{T}_v^T \mathbf{I}_v^T \lambda_v = \mathbf{T}_v^T \mathbf{p} \quad [9.23]$$

Pero el último sumando del primer miembro es idénticamente nulo, pues al ser \mathbf{I}_v y \mathbf{T}_v divisores de cero, de la igualdad

$$\mathbf{I}_v \mathbf{T}_v = \mathbf{0} \quad [9.24]$$

se desprende que

$$[\mathbf{I}_v \mathbf{T}_v]^T = \mathbf{0} \quad [9.25]$$

y por lo tanto

$$\mathbf{T}_v^T \mathbf{I}_v^T = \mathbf{0} \quad [9.26]$$

c.s.q.d*.

Así pues, el Sistema de Lagrange modificado queda definitivamente en la forma

$$\mathbf{T}_v^T \mathbf{M}_c \mathbf{c}_m + \mathbf{T}_v^T \mathbf{I}_p^T \lambda_p = \mathbf{T}_v^T \mathbf{p} \quad [9.27]$$

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_v^T \mathbf{M}_c \mathbf{T}_v & \mathbf{T}_v^T \mathbf{I}_p^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_m \\ \lambda_p \end{bmatrix} = \mathbf{T}_v^T \mathbf{p} \quad [9.28]$$

cuya resolución nos devolverá, además de las incógnitas independientes de corrimiento, los valores de los Multiplicadores de Lagrange λ_p correspondiente a los pilares, esto es, sus axiles y el sistema será, pues, de menor dimensión, que es el objetivo que se perseguía.

* La premultiplicación efectuada introduce en el sistema una combinación lineal de ecuaciones tal que hace desaparecer todas las incógnitas de axiles de vigas.

CAPÍTULO 10

MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN PARA ENTRAMADOS ESPACIALES

OBJETIVO.-

Es objeto de este capítulo la determinación de la Matriz de Transformación correspondiente a los entramados espaciales mediante ensamblaje directo, pues aunque, de forma análoga a lo expuesto en el capítulo anterior, la Matriz de Transformación puede obtenerse por los procedimientos de tipo general expuestos en el Capítulo 8, las especiales características de las ecuaciones que describen las condiciones de diafragma rígido aplicable a estos sistemas estructurales hacen prever que la Matriz de Transformación correspondiente pueda conseguirse de forma similar a las correspondientes a entramados planos.

CONTENIDO.-

En efecto, a partir de las ecuaciones matriciales de restricción que describen las condiciones de diafragma rígido expuestas en el Capítulo 5, se deduce, primero, la Matriz de Transformación correspondiente a un elemento genérico y, segundo, de la misma forma en que se obtiene la Matriz de Rigidez de una estructura a partir del ensamblaje de las matrices de barra, así también se consigue la Matriz de Transformación para toda la estructura mediante un adecuado ensamblaje de la Matriz de Transformación deducida para el elemento.

Por último se aplica dicha Matriz de Transformación a los diversos procedimientos de resolución del Método de los Multiplicadores de Lagrange.

10.1.- Matriz de Transformación del elemento para estructuras con diafragmas rígidos.- Como ya se expuso en el Capítulo 5, la ecuación matricial en coordenadas globales que describe la condición de diafragma rígido de una barra espacial genérica viene dada

por la expresión [5.16], que determina, de acuerdo con [5.20], primero, la inelongabilidad de la barra, segundo, la relación entre los desplazamientos de los extremos y el giro alrededor del eje normal al plano rígido y, tercero, la igualdad de giros de ambos extremos respecto a dicha normal de forma que, para cada barra se cumple la ecuación matricial [5.15] que por comodidad aquí se reproduce.

$$\mathbf{D}_i \mathbf{c}_i + \mathbf{D}_j \mathbf{c}_j = \mathbf{0} \quad [10.1]$$

con los valores de

$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & L\mathbf{z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{D}_j = - \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad [10.2]$$

cuyos desarrollos, sustituyendo los valores de los cosenos directores dados por [3.5] serán

$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \cos XX' & \cos YX' & \cos ZX' & 0 & 0 & 0 \\ \cos XY' & \cos YY' & \cos ZY' & L\cos XZ' & L\cos YZ' & L\cos ZZ' \\ 0 & 0 & 0 & \cos XZ' & \cos YZ' & \cos ZZ' \end{bmatrix} \quad [10.3]$$

y

$$\mathbf{D}_j = - \begin{bmatrix} \cos XX' & \cos YX' & \cos ZX' & 0 & 0 & 0 \\ \cos XY' & \cos YY' & \cos ZY' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos XZ' & \cos YZ' & \cos ZZ' \end{bmatrix} \quad [10.4]$$

Según los valores expuestos en [5.6] y [5.7], en el sistema [5.5] pueden elegirse como incógnitas esclavas en coordenadas locales tanto el vector \mathbf{c}'_{mi} como el \mathbf{c}'_{ej} , pues ninguna de la matriz de coeficientes respectiva en dicha ecuación de restricción [5.5] es singular. Veamos si estas mismas componentes referidas al sistema global pueden elegirse como tales incógnitas esclavas*. Para ello agrupemos las incógnitas de \mathbf{c}_j en dos bloques, de forma que en el primero, \mathbf{c}_{mj} , se contemplen las incógnitas independientes de este nodo y el segundo, \mathbf{c}_{ej} , las incógnitas esclavas del mismo, esto es

$$\mathbf{c}_{mj} = \begin{bmatrix} w_j \\ \alpha_j \\ \beta_j \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c}_{ej} = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ \gamma_j \end{bmatrix} \quad [10.5]$$

* Como fácilmente puede comprobarse a la vista de las ecuaciones de Diafragma Rígido dadas por [5.21], las incógnitas de corrimiento pueden dividirse en tres grupos: incógnitas totalmente independientes (que son las que no aparecen en dichas ecuaciones), incógnitas esclavas e incógnitas maestras.

Particionando \mathbf{D}_j coherentemente con el particionado efectuado en \mathbf{c}_j , la ecuación [10.1] podrá, entonces, escribirse como

$$\mathbf{D}_i \mathbf{c}_i + \mathbf{D}_{mj} \mathbf{c}_{mj} + \mathbf{D}_{ej} \mathbf{c}_{ej} = \mathbf{0} \quad [10.6]$$

o, matricialmente

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_i & \mathbf{D}_{mj} & \mathbf{D}_{ej} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_i \\ \mathbf{c}_{mj} \\ \mathbf{c}_{ej} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad [10.7]$$

que es el sistema de restricciones de diafragma rígido en coordenadas globales, en donde, a la vista de [10.4]

$$\mathbf{D}_{mj} = - \begin{bmatrix} \cos ZX' & 0 & 0 \\ \cos ZY' & 0 & 0 \\ 0 & \cos XZ' & \cos YZ' \end{bmatrix} \quad [10.8]$$

y

$$\mathbf{D}_{ej} = - \begin{bmatrix} \cos XX' & \cos YX' & 0 \\ \cos XY' & \cos YY' & 0 \\ 0 & 0 & \cos ZZ' \end{bmatrix} \quad [10.9]$$

La primera submatriz de la matriz de restricciones del sistema [10.7] es la submatriz de coeficientes de restricción asociada a las incógnitas de corrimiento del nudo i, la segunda la de las incógnitas maestras del nudo j y la tercera la correspondiente a las incógnitas de este último que se han elegido como esclavas; análogamente, los dos últimos subvectores del vector incógnita describen, respectivamente, las componentes maestras y esclavas del nudo j, de acuerdo con los subíndices adoptados.

A diferencia de lo que ocurría en la ecuación de restricciones referido al sistema local dado en [5.5], donde, como ya se ha indicado, puede elegirse cualesquiera de los dos subvectores de corrimiento \mathbf{c}'_{mi} o \mathbf{c}'_{ej} , en la ecuación referida al sistema global [10.7] sólo es posible escoger este último, ya que, como puede comprobarse, la submatriz de restricción asociada a él es no singular, según se observa en [10.9],* la segunda es singular, según [10.8], mientras que la primera no es cuadrada [10.3]. De acuerdo con esto, premultiplican-

* Solo podría ser singular en el caso de que el eje local Z' fuese perpendicular al global Z , pero por ser éste vertical el diafragma rígido sería vertical, esto es, una pantalla y, por tanto, su análisis habría de acometerse con los procedimientos específicos para tales elementos.

do m.a.m. [10.6] por \mathbf{D}_{ej}^{-1} , inversa de \mathbf{D}_{ej} , y despejando el vector de componentes esclavas, se tendrá

$$\mathbf{c}_{ej} = \left[-\mathbf{D}_{ej}^{-1} \mathbf{D}_i \right] \mathbf{c}_i + \left[-\mathbf{D}_{ej}^{-1} \mathbf{D}_{mj} \right] \mathbf{c}_{mj} \quad [10.10]$$

expresión que proporciona los valores de las componentes de corrimiento esclavas en función de las componentes maestras de ambos nudos para una barra perteneciente a un plano rígido de orientación cualquiera, excepto vertical. Sustituyendo en la anterior los valores de las matrices dados por [10.2], [10.8] y [10.9] y desarrollando los pertinentes productos matriciales, se obtiene

$$-\mathbf{D}_{ej}^{-1} \mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{x} \cos YY' - \mathbf{y} \cos YX'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{-L \mathbf{z} \cos YX'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} \\ \frac{-\mathbf{x} \cos XY' + \mathbf{y} \cos XX'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{L \mathbf{z} \cos XX'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} \\ 0 & \frac{\mathbf{z}}{\cos ZZ'} \end{bmatrix} \quad [10.11]$$

o, sustituyendo los vectores de cosenos directores y operando

$$-\mathbf{D}_{ej}^{-1} \mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\cos YY' \cos ZX' - \cos YX' \cos ZY'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{-L \cos XZ' \cos YX'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{-L \cos YZ' \cos YX'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{-L \cos ZZ' \cos YX'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} \\ 0 & 1 & \frac{\cos XX' \cos ZY' - \cos XY' \cos ZX'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{L \cos XX' \cos XZ'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{L \cos XX' \cos YZ'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{L \cos XX' \cos ZZ'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\cos XZ'}{\cos ZZ'} & \frac{\cos YZ'}{\cos ZZ'} & 1 \end{bmatrix} \quad [10.12]$$

y

$$-\mathbf{D}_{ej}^{-1} \mathbf{D}_{mj} = \begin{bmatrix} \frac{-\cos YY' \cos ZX' + \cos YX' \cos ZY'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & 0 & 0 \\ \frac{-\cos XX' \cos ZY' + \cos XY' \cos ZX'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\cos XZ'}{\cos ZZ'} & \frac{-\cos YZ'}{\cos ZZ'} \end{bmatrix} \quad [10.13]$$

Teniendo en cuenta las anteriores relaciones, se pueden expresar todas las componentes de corrimiento de los nudos i y j en función exclusiva de las componentes maestras \mathbf{c}_i del nudo maestro i y de las componentes maestras \mathbf{c}_{mj} del j, por lo que se podrá escribir la siguiente expresión matricial desarrollada:

$$\begin{array}{c} \mathbf{c}_i \\ \mathbf{c}_j \end{array} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & \frac{\cos YY' \cos ZX' - \cos YX' \cos ZY'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{-L \cos XZ' \cos YX'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{-L \cos YZ' \cos YX'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{-L \cos ZZ' \cos YX'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{-\cos YY' \cos ZX' + \cos YX' \cos ZY'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\cos XX' \cos ZY' - \cos XY' \cos ZX'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{L \cos XX' \cos XZ'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{L \cos XX' \cos YZ'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{L \cos XX' \cos ZZ'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{-\cos XX' \cos ZY' + \cos XY' \cos ZX'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\cos XZ'}{\cos ZZ'} & \frac{\cos YZ'}{\cos ZZ'} & 1 & 0 & \frac{-\cos XZ'}{\cos ZZ'} & \frac{-\cos YZ'}{\cos ZZ'} \end{bmatrix} \begin{array}{c} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \\ w_j \\ \alpha_j \\ \beta_j \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{c}_i \\ \mathbf{c}_{mj} \end{array}$$

[10.14]

10-5 y llamando \mathbf{T}_{ji} a la submatriz inferior izquierda de [10.14] y \mathbf{T}_{jj} a la inferior derecha, esto es

$$\mathbf{T}_{ji} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\cos YY' \cos ZX' - \cos YX' \cos ZY'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{-L \cos XZ' \cos YX'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{-L \cos YZ' \cos YX'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{-L \cos ZZ' \cos YX'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} \\ 0 & 1 & \frac{\cos XX' \cos ZY' - \cos XY' \cos ZX'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{L \cos XX' \cos XZ'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{L \cos XX' \cos YZ'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & \frac{L \cos XX' \cos ZZ'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\cos XZ'}{\cos ZZ'} & \frac{\cos YZ'}{\cos ZZ'} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_{jj} = \begin{bmatrix} \frac{-\cos YY' \cos ZX' + \cos YX' \cos ZY'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & 0 & 0 \\ \frac{-\cos XX' \cos ZY' + \cos XY' \cos ZX'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-\cos XZ'}{\cos ZZ'} & \frac{-\cos YZ'}{\cos ZZ'} \end{bmatrix}$$

[10.15]

[10.14] se podrá escribir como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_i \\ \mathbf{c}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ii} & \mathbf{T}_{ij} \\ \mathbf{T}_{ji} & \mathbf{T}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_i \\ \mathbf{c}_{mj} \end{bmatrix} \quad [10.16]$$

y haciendo

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ii} & \mathbf{T}_{ij} \\ \mathbf{T}_{ji} & \mathbf{T}_{jj} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_i \\ \mathbf{c}_{mj} \end{bmatrix} \quad [10.17]$$

la expresión [10.16] puede escribirse en forma más compacta como

$$\mathbf{c} = \mathbf{T} \mathbf{c}_m \quad [10.18]$$

relación equivalente a las expresadas en [8.30] donde \mathbf{c} es el vector columna que describe todas las componentes de corrimientos de los nudos i y j , mientras que \mathbf{c}_m describe sólo las componentes independientes o maestras de dichos nudos.

La matriz \mathbf{T} obtenida en [10.14] es la Matriz de Transformación correspondiente al elemento i - j cuyo cometido no es más que la eliminación de las incógnitas esclavas del nudo esclavo j y, como puede observarse, está integrada por cuatro submatrices: la superior izquierda relaciona las incógnitas maestras del nudo maestro i con ellas mismas, de ahí que \mathbf{T}_{ii} sea la matriz identidad; la superior derecha \mathbf{T}_{ij} relaciona las anteriores seis incógnitas con las tres incógnitas maestras del nudo j , que por no depender de ellas es una matriz nula de seis filas y tres columnas; la inferior izquierda relaciona las seis incógnitas del nudo j con las seis del nudo i , mientras que la última submatriz relaciona las seis incógnitas de j con las tres independientes de éste.

10.1.1.- Matriz de Transformación para diafragma rígido horizontal.- Aunque la matriz de transformación deducida en el epígrafe anterior es aplicable para cualquier orientación del plano rígido, se estima muy conveniente la particularización para el caso de horizontalidad de dicho plano, no ya porque en edificación, excepto algún que otro forjado de cubierta, sean horizontales prácticamente todos los diafragmas que conforman el sistema estructural, sino porque, sobre todo su expresión se manifiesta extraordinariamente simple. En efecto, introduciendo en [10.15] los valores de los cosenos directores que se especificaron en [3.13] y [3.15] para barra horizontal, \mathbf{T}_{ji} quedará reducida a

$$\mathbf{T}_{ji} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-L \cos YX'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{L \cos XX'}{\cos XX' \cos YY' - \cos XY' \cos YX'} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [10.19]$$

y de acuerdo con las relaciones [4.51] y [4.52] quedará

$$\mathbf{T}_{ji} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L_y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & L_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(y_j - y_i) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & (x_j - x_i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [10.20]$$

y

$$\mathbf{T}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [10.21]$$

donde L_x y L_y son las proyecciones de la barra i - j sobre los respectivos ejes globales OX y OY , x_i y x_j las abscisas de los puntos i y j , respectivamente, mientras que y_i e y_j son, respectivamente, las ordenadas de dichos puntos.

10.2.- Matriz de Transformación de la estructura por ensamblaje directo.- Como se acaba de exponer, es posible expresar las doce componentes de corrimiento de los extremos de una barra bajo condiciones de diafragma rígido en función exclusiva de las nueve incógnitas maestras -esto es, doce grados de libertad menos 3 ecuaciones de restricción- a partir de una matriz \mathbf{T} , matriz de transformación ya deducida, cuyos elementos son conocidos, pues dependen únicamente de los cosenos directores de la barra y de la longitud de ésta, y por tanto son datos. A la vista de la expresión [10.16] es sugestivo establecer un paralelismo entre ella y la ecuación constitutiva [3.2] o, mejor, con su expresión en ejes generales. En efecto, así como esta última permite el cálculo de las componentes de solicita-

ción de extremo en función de los corrimientos de dichos extremos, así también la [10.16] proporciona el valor de dichos corrimientos en función de unos otros que hemos llamados maestros o independientes; pero este paralelismo que se manifiesta a nivel de elemento ¿puede extenderse al nivel de una estructura completa? Es decir, ¿podrá encontrarse una matriz tal que proporcione todos los corrimientos de una estructura -en los que, dadas unas condiciones de restricción, existirán componentes dependientes- en función exclusiva de los corrimientos independientes, de la misma forma que existe una matriz, matriz de rigidez de la estructura, que relaciona las acciones a las que está sometida con las componentes de corrimiento de todos sus nudos? Y, además, ¿sería posible determinar dicha matriz de la misma forma que se determina la matriz de rigidez de la estructura, esto es, por ensamblaje directo de las submatrices del elemento? Veremos a continuación que esto es posible.

Sea una estructura genérica en el espacio tridimensional con N nudos susceptibles de corrimiento y en la que existen una serie de elementos sometidos a restricciones del tipo [10.1]. Para cada uno de estos elementos i-j se ha de cumplir, de acuerdo con el segundo bloque de [10.16]

$$\mathbf{c}_j = \mathbf{T}_{ji} \mathbf{c}_i + \mathbf{T}_{jj} \mathbf{c}_{mj} \quad [10.22]$$

y es claro que, si \mathbf{I} es una matriz identidad de las mismas dimensiones que la matriz de rigidez reducida \mathbf{M} de la estructura, se puede escribir la evidente igualdad

$$\mathbf{c} = \mathbf{I} \mathbf{c} \quad [10.23]$$

Por otra parte, si $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \dots \mathbf{c}_i \dots \mathbf{c}_j \dots \mathbf{c}_N$, son las componentes del vector de corrimientos \mathbf{c} , sustituyendo [10.22] en el segundo miembro de la anterior igualdad desarrollada, se podrá escribir el siguiente esquema matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{c}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{c}_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{c}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_d & \cdot & \cdot & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{I}_d & \cdot & \cdot & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{I}_d & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{I}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{c}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{T}_{ji} \mathbf{c}_i + \mathbf{T}_{jj} \mathbf{c}_{mj} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{c}_N \end{bmatrix} \quad [10.24]$$

donde \mathbf{I}_d es la matriz identidad de las mismas dimensiones que las submatrices de rigidez de la estructura, esto es, 6×6 y los ceros representan matrices nulas conformables con las anteriores.

Para cada una de las ecuaciones del sistema [10.24], excepto la j , se tiene

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{0}\mathbf{c}_1 + \mathbf{0}\mathbf{c}_2 + \dots + \mathbf{I}_d \mathbf{c}_i + \dots + \mathbf{0}(\mathbf{T}_{ji} \mathbf{c}_i + \mathbf{T}_{jj} \mathbf{c}_{mj}) + \dots + \mathbf{0}\mathbf{c}_N \quad (i=1,2,\dots,N; i \neq j) \quad [10.25]$$

pero el producto matricial $\mathbf{0}\mathbf{T}_{jj}$ es la matriz nula de dimensiones 6×3 , pues como ya se vio en [10.15], \mathbf{T}_{jj} es una matriz de sólo tres columnas. Llamando a ésta $\mathbf{N}_{6 \times 3}$ la anterior ecuación queda

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{0}\mathbf{c}_1 + \mathbf{0}\mathbf{c}_2 + \dots + \mathbf{I}_d \mathbf{c}_i + \dots + \mathbf{N}_{6 \times 3} \mathbf{c}_{mj} + \dots + \mathbf{0}\mathbf{c}_N \quad (i=1,2,\dots,N; i \neq j) \quad [10.26]$$

Por otra parte, para la ecuación j se tiene

$$\mathbf{c}_j = \mathbf{0}\mathbf{c}_1 + \mathbf{0}\mathbf{c}_2 + \dots + \mathbf{T}_{ji} \mathbf{c}_i + \dots + \mathbf{T}_{jj} \mathbf{c}_{mj} + \dots + \mathbf{0}\mathbf{c}_N \quad [10.27]$$

y, por tanto, [10.24] se transforma en

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{c}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{c}_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{c}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{N}_{6 \times 3} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_d & \cdot & \cdot & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{N}_{6 \times 3} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{I}_d & \cdot & \cdot & \mathbf{N}_{6 \times 3} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \boxed{\mathbf{T}_{ji}} & \cdot & \cdot & \boxed{\mathbf{T}_{ij}} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{N}_{6 \times 3} & \cdot & \cdot & \mathbf{I}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{c}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{c}_{jm} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{c}_N \end{bmatrix} \quad [10.28]$$

sistema que puede expresarse de forma más compacta como

$$\mathbf{c} = \mathbf{T}_D \mathbf{c}_m \quad [10.29]$$

donde el vector \mathbf{c}_m describe las componentes maestras de toda la estructura, mientras que \mathbf{T}_D no es más que la matriz buscada correspondiente a las condiciones de diafragma rígido de la estructura y cuyo desarrollo es, pues,

$$\mathbf{T}_D = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \cdot & \cdot & \boxed{i} & \cdot & \cdot & \boxed{j} & \cdot & \cdot & N \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{N}_{6 \times 3} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_d & \cdot & \cdot & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{N}_{6 \times 3} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{I}_d & \cdot & \cdot & \mathbf{N}_{6 \times 3} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \boxed{\mathbf{T}_{ji}} & \cdot & \cdot & \boxed{\mathbf{T}_{ij}} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{N}_{6 \times 3} & \cdot & \cdot & \mathbf{I}_d \end{bmatrix} & \end{matrix} \quad [10.30]$$

por lo tanto, para cada punto esclavo j del plano rígido se ubicarán las submatrices \mathbf{T}_{ji} y \mathbf{T}_{ij} dadas por [10.15] (o [10.20] y [10.21] para diafragma rígido horizontal) en los lugares que indican sus subíndices, mientras que en el resto de la columna j se ubicarán las submatrices $\mathbf{N}_{6 \times 3}$. Todas las submatrices \mathbf{T}_{ji} estarán ubicadas, pues, en la columna i correspondiente a la

numeración del nudo maestro, mientras que todas las submatrices $N_{6 \times 3}$ estarán ubicadas en las columnas correspondientes a la numeración de los nudos esclavos j . La matriz de transformación se puede conseguir, pues, de forma similar a como se implementa la de rigidez, pero, a diferencia de ésta, sólo será necesario el ensamble de dos submatrices por elemento.

Es importante insistir en que, por una parte, el procedimiento descrito no ha necesitado reordenación de filas y columnas y, por otra, que desaparece la incertidumbre en cuanto al criterio de selección de incógnitas independientes, pues esta elección no se efectúa en el sistema de ecuaciones de restricción [10.1], sino que ya vienen dadas por las condiciones particulares del elemento i - j mostradas en [10.7], en donde se manifestó el criterio único para la elección de las incógnitas esclavas. La disyuntiva recae, exclusivamente, en la elección del nudo maestro para cada plano que reúna las características de diafragma rígido, pero dicho nudo puede ser cualquiera de dicho plano.

10.3.- Simplificaciones del Sistema de Lagrange.- Tal y como se adelantó en los epígrafes 6.3 y siguientes, existen varias alternativas para proceder a la resolución del Sistema de Lagrange que permiten, no solamente reducir las dimensiones del sistema, sino que, lo más interesante, es que mejoran su condicionamiento. De las cuatro alternativas que allí se comentaron solo tres de ellas tienen algún interés práctico y, por tanto, nos ceñiremos a éstas para el caso que nos ocupa de diafragma rígido. La primera es, como se dijo, la resolución directa del sistema, que tiene el inconveniente frente a las otras alternativas de ser de mayores dimensiones, extremo que, debido al avance informático en cuanto a la capacidad de almacenamiento que en la actualidad existe, no puede considerarse un handicap de primordial importancia.

10.3.1- Eliminación de incógnitas de corrimiento esclavas.- Corresponde este procedimiento con el que en el epígrafe 6.3.1 llamábamos resolución por transformación de columnas. El objetivo es reducir el sistema por eliminación de las incógnitas de corrimiento esclavas. Esta reducción es fácilmente alcanzable a partir de la valiosa herramienta obtenida anteriormente y que hemos llamado Matriz de Transformación.

En efecto, sustituyendo [10.29] en el Sistema de Lagrange

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [10.31]$$

se tendrá

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_D \mathbf{c}_m \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [10.32]$$

y de aquí, operando, se tiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \mathbf{T}_D & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} \mathbf{T}_D & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_m \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [10.33]$$

Pero, como se tiene demostrado, el producto $\mathbf{D} \mathbf{T}_D$ es idénticamente nulo por ser \mathbf{D} y \mathbf{T}_D matrices divisores de cero y el segundo bloque de ecuaciones se convierte, pues, en una expresión idénticamente nula, por lo que [10.33] queda reducido a

$$[\mathbf{M} \mathbf{T}_D \quad \mathbf{D}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{c}_m \\ \lambda \end{bmatrix} = [\mathbf{p}] \quad [10.34]$$

o, de forma similar a [8.17], llamando

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{M} \mathbf{T}_D \quad [10.35]$$

queda

$$[\mathbf{M}_c \quad \mathbf{D}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{c}_m \\ \lambda \end{bmatrix} = [\mathbf{p}] \quad [10.36]$$

sistema similar al expresado en [9.9] y con las mismas dimensiones que el original $\mathbf{K} \mathbf{c} = \mathbf{p}$ correspondiente al método tradicional y, aunque ha dejado de ser simétrico, presenta la ventaja de estar mejor condicionado, como quedará ampliamente demostrado en el capítulo 11. Su resolución nos devuelve, no solamente las incógnitas independientes de corrimientos, sino además, los valores de los Multiplicadores de Lagrange, que son las fuerzas o momentos asociados a las condiciones de restricción impuestas.

10.3.2.- Eliminación de incógnitas esclavas y de Multiplicadores de Lagrange.-

Para el caso que nos ocupa de diafragma rígido, los valores de los multiplicadores de Lagrange que se obtienen por resolución directa o por el procedimiento expuesto en el apartado anterior, pueden carecer de interés práctico ya que corresponden a componentes de fuerza y de momentos flectores actuando dentro del plano rígido y, por tanto, se puede obviar su cálculo; para ello bastará con premultiplicar m.a.m. la ecuación [10.36] por \mathbf{T}_D^T , transpuesta de \mathbf{T}_D , obteniéndose

$$[\mathbf{T}_D^T \mathbf{M} \mathbf{T}_D][\mathbf{c}_m] = [\mathbf{T}_D^T \mathbf{p}] \quad [10.37]$$

o, de forma similar a [8.48]

$$\mathbf{M}_{fc} \mathbf{c}_m = \mathbf{p}_f \quad [10.38]$$

donde los subíndices f y c indican transformaciones de filas y columnas.

Como se puede apreciar, ha desaparecido la submatriz \mathbf{D}^T y, por tanto, las incógnitas correspondientes a los Multiplicadores de Lagrange pues, de la misma forma que, como ya se dijo, el producto $\mathbf{D} \mathbf{T}_D$ es nulo por ser estas matrices divisores de cero, el producto matricial $\mathbf{T}_D^T \mathbf{D}^T$ es, así mismo, idénticamente nulo. De esta forma, el sistema final [10.38], compatible y determinado, recupera su simetría, aunque, como se discutirá en el Capítulo 11, no mejora su condicionamiento. Su resolución nos devuelve, exclusivamente, las componentes de corrimiento independientes \mathbf{c}_m , indeterminación cinemática de la estructura.

Como ya se ha explicitado en otras ocasiones, el sistema conseguido no es más que el que se obtiene por el Método de las Transformaciones, pero del desarrollo efectuado a lo largo de esta exposición, se desprende que ha sido innecesaria la reordenación de filas y columnas por lo que la utilización de la Matriz de Transformación evita los inconvenientes de elección de incógnitas esclavas.

Una vez resuelto dicho sistema, se puede obtener un listado de todas las incógnitas de corrimiento (dependientes e independientes) de la estructura con ayuda de la propia matriz de transformación a partir de la expresión dada por [10.29].

CAPÍTULO 11

VALIDACIÓN NUMÉRICA (II)

OBJETIVO:

Después de lo estudiado en los tres capítulos anteriores, en los que se ha puesto de manifiesto las ventajas operativas que pueden introducirse en los sistemas lineales valiéndose de las Matrices de Transformación, se pretende en este capítulo mostrar la influencia que tales transformaciones tienen en las características de las matrices correspondientes a los sistemas lineales, sobre todo, en su condicionamiento.

CONTENIDO:

En este capítulo se estudia la influencia en el condicionamiento del sistema de unidades elegido para los cálculos, así como los redondeos introducidos durante el proceso de cálculo, mediante el análisis del mismo ejemplo numérico que se estudió en el Capítulo 2.

Como complemento al Capítulo 7, en el presente Capítulo se vuelven a estudiar los mismos modelos allí analizados, con un detallado razonamiento de la influencia que las rigideces relativas de las barras que componen la estructura puede tener en el condicionamiento de la matriz de coeficientes. Se estudian, además, todas las matrices expuestas en los cuadros del Capítulo 7, pero ahora introduciendo en ellas diversas modificaciones en filas y columnas con la ayuda de las Matrices de Transformación deducidas en el Capítulo 9 para entramados planos y en el 10 para espaciales, confeccionándose otra serie de cuadros que describen de forma numérica las características más significativas de las diversas matrices correspondientes al Método Clásico y al propuesto, con cuya comparación se pretende demostrar la validez de éste.

11.1.- Influencia de las unidades en el condicionamiento.- Tal y como se comentó en el primer epígrafe del Capítulo 2, las unidades a utilizar en los cálculos tienen una influencia decisiva en el condicionamiento de la matriz del sistema de ecuaciones, como se mostró en el epígrafe 2.5.1 estudiando el número de condición de las matrices dadas en

[2.49] y [2.50] del Método Clásico. También con las matrices de rigidez propuestas en este estudio ocurre lo mismo. En efecto, retomando el ejemplo desarrollado en epígrafe 2.5 y utilizando las matrices de rigidez dadas por [4.76], las matrices de rigidez a la flexión de cada una de las barras utilizando unidades de kilogramos y centímetros son las siguientes:

Barra a:

$$\mathbf{M}^a = \begin{pmatrix} 1.2 \times 10^{-8} & 0 & -3.6 \times 10^{-6} & -1.2 \times 10^{-8} & 0 & -3.6 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 4.8 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 4.8 \times 10^{-6} \\ -3.6 \times 10^{-6} & 0 & 0.004 & 3.6 \times 10^{-6} & 0 & 0.002 \\ -1.2 \times 10^{-8} & 0 & 3.6 \times 10^{-6} & 1.2 \times 10^{-8} & 0 & 3.6 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & -4.8 \times 10^{-6} & 0 & 0 & -4.8 \times 10^{-6} \\ -3.6 \times 10^{-6} & 0 & 0.002 & 3.6 \times 10^{-6} & 0 & 0.004 \end{pmatrix} \quad [11.1]$$

Barra b:

$$\mathbf{M}^b = \begin{pmatrix} 2.25 \times 10^{-7} & 0 & 0.000045 & -2.25 \times 10^{-7} & 0 & 0.000045 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.000045 & 0 & 0.012 & -0.000045 & 0 & 0.006 \\ -2.25 \times 10^{-7} & 0 & -0.000045 & 2.25 \times 10^{-7} & 0 & -0.000045 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.000045 & 0 & 0.006 & -0.000045 & 0 & 0.012 \end{pmatrix} \quad [11.2]$$

Barra c:

$$\mathbf{M}^c = \begin{pmatrix} 1.8 \times 10^{-8} & 0 & 9. \times 10^{-6} & -1.8 \times 10^{-8} & 0 & 9. \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9. \times 10^{-6} & 0 & 0.006 & -9. \times 10^{-6} & 0 & 0.003 \\ -1.8 \times 10^{-8} & 0 & -9. \times 10^{-6} & 1.8 \times 10^{-8} & 0 & -9. \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9. \times 10^{-6} & 0 & 0.003 & -9. \times 10^{-6} & 0 & 0.006 \end{pmatrix} \quad [11.3]$$

cuyo ensamblaje determina la matriz reducida \mathbf{M} que, junto con las condiciones de inelastibilidad \mathbf{I}_g y la transpuesta de ésta última \mathbf{I}_g^T , nos da la siguiente Matriz de Lagrange

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_g^T \\ \mathbf{I}_g & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [11.4]$$

cuyo desarrollo numérico tiene la forma

$$\mathbf{MLagrange} = \begin{pmatrix} 2.37 \times 10^{-7} & 0 & 0.0000414 & -1.2 \times 10^{-8} & 0 & -3.6 \times 10^{-6} & 0.000045 & -0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 4.8 \times 10^{-6} & 0 & -0.6 & 1 & 0 \\ 0.0000414 & 0 & 0.016 & 3.6 \times 10^{-6} & 0 & 0.002 & 0.006 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 \times 10^{-8} & 0 & 3.6 \times 10^{-6} & 3. \times 10^{-8} & 0 & 0.0000126 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.8 \times 10^{-6} & 0 & 0 & -4.8 \times 10^{-6} & 0 & 0.6 & 0 & 1 \\ -3.6 \times 10^{-6} & 0 & 0.002 & 0.0000126 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.000045 & 0 & 0.006 & 0 & 0 & 0 & 0.012 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & -0.6 & 0 & 0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [11.5]$$

matriz más difusa que las anteriormente mencionadas del Método Clásico, pero con un número de condición basado en la norma 2 de 9.8×10^7 , es decir, incluso más elevado que el de aquéllas. Pero si las unidades son Kilonewton y metro, las matrices de barra con precisión infinita vienen dadas por:

Barra a:

$$\mathbf{K}^a = \begin{pmatrix} 0.012 & 0 & -0.036 & -0.012 & 0 & -0.036 \\ 0 & 0 & 0.048 & 0 & 0 & 0.048 \\ -0.036 & 0 & 0.4 & 0.036 & 0 & 0.2 \\ -0.012 & 0 & 0.036 & 0.012 & 0 & 0.036 \\ 0 & 0 & -0.048 & 0 & 0 & -0.048 \\ -0.036 & 0 & 0.2 & 0.036 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

[11.6]

Barra b:

$$\mathbf{K}^b = \begin{pmatrix} 0.225 & 0 & 0.45 & -0.225 & 0 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.45 & 0 & 1.2 & -0.45 & 0 & 0.6 \\ -0.225 & 0 & -0.45 & 0.225 & 0 & -0.45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.45 & 0 & 0.6 & -0.45 & 0 & 1.2 \end{pmatrix}$$

[11.7]

Barra c:

$$\mathbf{K}^c = \begin{pmatrix} 0.018 & 0 & 0.09 & -0.018 & 0 & 0.09 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.09 & 0 & 0.6 & -0.09 & 0 & 0.3 \\ -0.018 & 0 & -0.09 & 0.018 & 0 & -0.09 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.09 & 0 & 0.3 & -0.09 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

[11.8]

con cuyo ensamblaje se obtiene la correspondiente Matriz de Lagrange que presenta el siguiente desarrollo con precisión infinita:

$$\mathbf{MLagrange} = \begin{pmatrix} 0.237 & 0 & 0.414 & -0.012 & 0 & -0.036 & 0.45 & -0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.048 & 0 & 0 & 0.048 & 0 & -0.6 & 1 & 0 \\ 0.414 & 0 & 1.6 & 0.036 & 0 & 0.2 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ -0.012 & 0 & 0.036 & 0.03 & 0 & 0.126 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.048 & 0 & 0 & -0.048 & 0 & 0.6 & 0 & 1 \\ -0.036 & 0 & 0.2 & 0.126 & 0 & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.45 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & -0.6 & 0 & 0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[11.9]

cuyo número de condición basado en la misma Norma 2 es de sólo 149.62, lo que supone una diferencia decisiva respecto a las anteriores.

11.2.- Influencia de los redondeos en la solución del sistema.- A la vista de la matriz dada en [11.5] se puede observar que adolece del mismo inconveniente que la expresada en [2.50], por cuanto necesita un número elevado de cifras decimales significativas para que no se pierda parte de la información numérica; sin embargo con la matriz expuesta en [11.9], los resultados con precisión infinita serán los mismos que si se utilizan solamente tres cifras decimales significativas; e, incluso utilizando sólo dos decimales, los resultados son equivalentes a los obtenidos por el Método Clásico con cuatro cifras decimales, como puede comprobarse comparando los valores del Cuadro 2.3 el siguiente Cuadro 11.1, en el que se indican los valores de los corrimientos que se obtienen utilizando dos cifras decimales en el método propuesto:

Nudo	u (cm)	v^* (cm)	γ (rad)
1	2.7111	0	-0.0041
2	2.7111	0	-0.0035
3	-0.0081	-	-

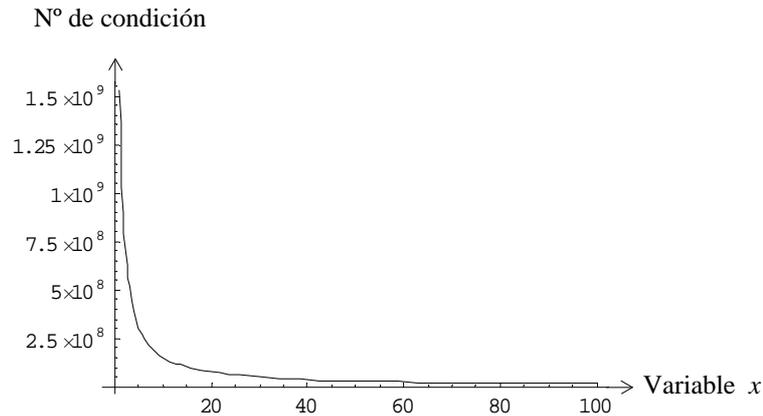
Cuadro 11.1

11.3.- Mejora del condicionamiento en los sistemas sometidos a condiciones cinemáticas de contorno.- Tal y como refleja la primera fila del Cuadro 7.9, al introducir la condición de contorno el número de condición de la Matriz de Lagrange correspondiente al Método Clásico ha sufrido un importante aumento como consecuencia de la gran diferencia existente entre los valores absolutos de los elementos de la matriz de rigidez \mathbf{K} y los de la matriz de restricción \mathbf{r} , donde en aquélla vale 902531.25 mientras que en ésta, por ser la ecuación de inelongabilidad [4.12], dichos valores serán inferiores a la unidad. Pero esta diferencia puede disminuirse de forma obvia si se multiplica la ecuación de restricción por una constante con un valor x apropiado, quedando el sistema en la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{r}^T \\ x\mathbf{r} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [11.10]$$

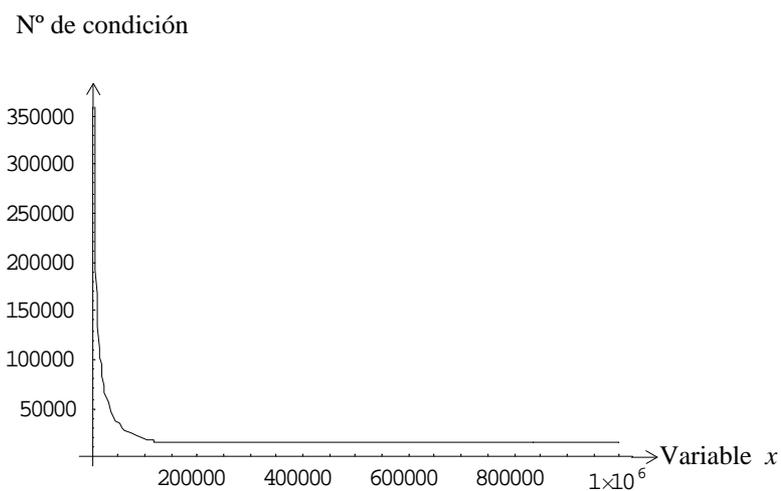
* La diferencia en los desplazamientos verticales se debe a la hipótesis de inelongabilidad adoptada en el método propuesto.

Para tener una primera idea de la influencia que tendrá dicha operación en el condicionamiento de la matriz, sea x en principio variable y hagamos una gráfica del número de condición en función de los valores que tome dicha variable, desde, p.e, $x = 1$ hasta 100. En la Gráfica 11.1, confeccionada con el programa Matemática, se muestra en el eje de abscisas los valores de la variable x y en el de ordenadas los valores correspondientes del número de condición calculado con la Norma 2.



Gráfica 11.1

Como puede observarse, el condicionamiento mejora sensiblemente al aumentar el valor de la constante multiplicadora x , por lo que procede a determinar el valor óptimo, aún de forma somera, toda vez que un estudio más preciso y optimizado escapa de los objetivos de este trabajo. Repitiendo, pues, los cálculos para un campo de valores más amplio, se muestra la siguiente Gráfica 11.2 variando x desde 1 hasta 10^6 , valor éste último muy próximo al mayor valor absoluto de los elementos de la matriz **K**:



Gráfica 11.2

donde puede advertirse que la curva es asintótica con la horizontal para valores próximos a dicho valor máximo de 902531.25, por lo que bastará con tomar dicho valor para conseguir

de forma rápida un condicionamiento suficientemente mejorado para que desaparezca la incertidumbre de la validez de los resultados que se obtienen al resolver el pertinente sistema de ecuaciones. Multiplicando, pues, dicha ecuación de restricción por el máximo valor absoluto de los elementos de la matriz de rigidez \mathbf{K} , se obtiene como número de condición el valor de 15523, con lo que el mal condicionamiento puede darse por excluido, quedando definitivamente el sistema del modo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{r}^T \\ 902531 \mathbf{r} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [11.11]$$

o, de forma general

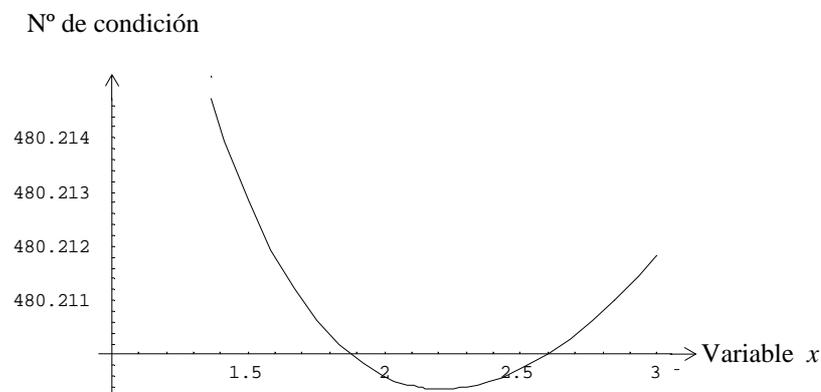
$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{r}^T \\ \text{máx}(\mathbf{K}) \times \mathbf{r} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [11.12]$$

donde $\text{máx}(\mathbf{K})$ indica el mayor de los elementos de \mathbf{K} en valor absoluto*.

Aunque no existen problemas de mal condicionamiento para el procedimiento propuesto, como bien se muestra en la segunda fila del Cuadro 7.9, intentemos mejorar su número de condición mediante la multiplicación de la matriz \mathbf{r} por una constante apropiada, tal y como se ha procedido anteriormente para el Método Clásico. El sistema correspondiente al método propuesto, quedará en la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I}_g^T & \mathbf{r}^T \\ \mathbf{I}_g & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ x\mathbf{r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \lambda_b \\ \lambda_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [11.13]$$

Puesto que el mayor valor absoluto de los elementos de la matriz \mathbf{M} es 3, confeccionemos la gráfica para el intervalo de la variable x entre 1 y 3, con lo que se tiene la siguiente Gráfica 11.3:



Gráfica 11.3

* La operación efectuada no es más que un caso particular de preconditionador.

que muestra cómo esta operación no mejora el número de condición y, por tanto, será innecesaria, pues el número de condición sigue valiendo 480 para todo valor del intervalo, ya que las cifras decimales del eje de ordenadas en absoluto son significativas para la evaluación del condicionamiento. La matriz correspondiente al método propuesto no necesita, pues, ningún tipo de preconditionador.

11.4.- Mejora del condicionamiento de un sistema bajo condiciones de restricción cinemática a partir de la Matriz de Transformación.- En los anteriores capítulos se ha mostrado cómo, a partir de la Matriz de Transformación, pueden eliminarse cualquier conjunto de incógnitas en los sistemas sometidos a restricciones cinemática, ya sean puntuales o multipunto, así como que es relativamente fácil la determinación de tales matrices a partir de un ensamblaje. Pero la disminución de las dimensiones del sistema que conllevan tales eliminaciones, con ser una evidente ventaja, no es la principal, máxime que con el avance actual de la informática cada día es menor el inconveniente del almacenamiento y proceso en los cálculos computacionales. Es por ello que la ventaja primordial que se manifiesta como consecuencia de las mutaciones que estas matrices introducen en el sistema es la gran mejora que se produce en su condicionamiento, tanto si se aplican a los sistemas ensamblados con las matrices tradicionales como a los sistemas del método propuesto, como se verá a continuación aplicando este proceso para los mismos modelos estudiados en el Capítulo 7.

Para ello, partiendo de las diferentes Matrices de Lagrange que se obtienen al imponer las correspondientes ecuaciones de inelongabilidad en los sistemas de barras coplanarias y las de inelongabilidad y de diafragma rígido en los sistemas espaciales, tanto para las matrices tradicionales como para las propuestas en este trabajo, estudiaremos las características más significativas de las diferentes matrices que se obtienen al modificar los Sistemas de Lagrange con ayuda de las pertinentes Matrices de Transformación estudiadas en los dos capítulos anteriores.

11.5.- Modelo 1: Sistema de Lagrange.- Sea, nuevamente, el entramado plano estudiado en el epígrafe 7.2, cuya geometría se repite por comodidad en la siguiente Figura 11.1:

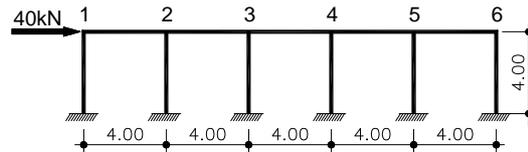


Figura 11.1

Las matrices de barras serán las siguientes:

- Para el Método Clásico, las dadas por [3.21]:

$$K_{ii} = E \begin{bmatrix} \frac{A \cos^2 XX' + 12I_z \cos^2 XY'}{L} + \frac{12I_z \cos XY' \cos YY'}{L^3} & \frac{A \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12I_z \cos XY' \cos YY'}{L^3} & \frac{6I_z \cos XY'}{L^2} \\ \frac{A \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12I_z \cos XY' \cos YY'}{L^3} & \frac{A \cos^2 YX' + 12I_z \cos^2 YY'}{L} + \frac{12I_z \cos XY' \cos YY'}{L^3} & \frac{6I_z \cos YY'}{L^2} \\ \frac{6I_z \cos XY'}{L^2} & \frac{6I_z \cos YY'}{L^2} & \frac{4I_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$K_{ij} = E \begin{bmatrix} -\frac{A \cos^2 XX'}{L} - \frac{12I_z \cos^2 XY'}{L^3} & -\frac{A \cos XX' \cos YX'}{L} - \frac{12I_z \cos XY' \cos YY'}{L^3} & \frac{6I_z \cos XY'}{L^2} \\ -\frac{A \cos XX' \cos YX'}{L} - \frac{12I_z \cos XY' \cos YY'}{L^3} & -\frac{A \cos^2 YX'}{L} - \frac{12I_z \cos^2 YY'}{L^3} & \frac{6I_z \cos YY'}{L^2} \\ -\frac{6I_z \cos XY'}{L^2} & \frac{6I_z \cos YY'}{L^2} & \frac{2I_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$K_{ji} = E \begin{bmatrix} -\frac{A \cos^2 XX'}{L} - \frac{12I_z \cos^2 XY'}{L^3} & -\frac{A \cos XX' \cos YX'}{L} - \frac{12I_z \cos XY' \cos YY'}{L^3} & -\frac{6I_z \cos XY'}{L^2} \\ -\frac{A \cos XX' \cos YX'}{L} - \frac{12I_z \cos XY' \cos YY'}{L^3} & -\frac{A \cos^2 YX'}{L} - \frac{12I_z \cos^2 YY'}{L^3} & -\frac{6I_z \cos YY'}{L^2} \\ \frac{6I_z \cos XY'}{L^2} & \frac{6I_z \cos YY'}{L^2} & \frac{2I_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$K_{jj} = E \begin{bmatrix} \frac{A \cos^2 XX' + 12I_z \cos^2 XY'}{L} + \frac{12I_z \cos XY' \cos YY'}{L^3} & \frac{A \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12I_z \cos XY' \cos YY'}{L^3} & -\frac{6I_z \cos XY'}{L^2} \\ \frac{A \cos XX' \cos YX'}{L} + \frac{12I_z \cos XY' \cos YY'}{L^3} & \frac{A \cos^2 YX' + 12I_z \cos^2 YY'}{L} + \frac{12I_z \cos XY' \cos YY'}{L^3} & -\frac{6I_z \cos YY'}{L^2} \\ -\frac{6I_z \cos XY'}{L^2} & -\frac{6I_z \cos YY'}{L^2} & \frac{4I_z}{L} \end{bmatrix}$$

- Para el método propuesto, las dadas por [4.78]:

$$M_{viga} = \frac{6r}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & \frac{2L^2}{3} & 0 & 0 & \frac{L^2}{3} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L & 0 & 0 & -L \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{3} & 0 & 0 & \frac{2L^2}{3} \end{bmatrix} \quad M_{pilar} = \frac{6r}{L^3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -L & -2 & 0 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L & 0 & \frac{2L^2}{3} & L & 0 & \frac{L^2}{3} \\ \hline -2 & 0 & L & 2 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L & 0 & \frac{L^2}{3} & L & 0 & \frac{2L^2}{3} \end{bmatrix}$$

Una vez que se ha procedido al ensamblaje de estas matrices se obtienen las respectivas matrices de rigidez reducidas \mathbf{K} y \mathbf{M} , cuyo proceso pormenorizado y ejecutado con el programa Mathematica puede consultarse en el Anexo A. Siguiendo las indicaciones expuestas en el epígrafe 9.4, se procederá a los ensamblajes de las matrices de inelongabilidad \mathbf{I}_p correspondiente a los pilares e \mathbf{I}_v correspondiente a las vigas, de acuerdo con el esquema [6.3] y cuyo detalle se expone en los epígrafes A.7 y A.8. Con estas cuatro submatrices y las transpuestas de las matrices de inelongabilidad \mathbf{I}_p^T y \mathbf{I}_v^T , se obtienen los siguientes Sistemas de Lagrange (epígrafe A.9):

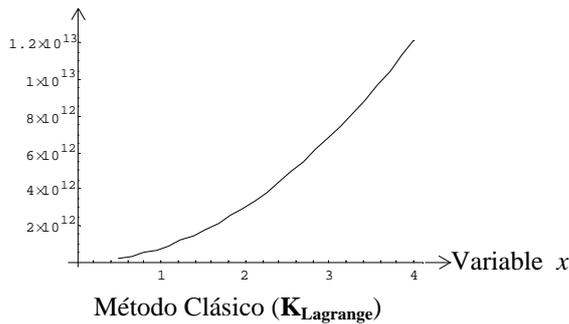
$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \lambda_p \\ \lambda_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \lambda_p \\ \lambda_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [11.14]$$

donde λ_p y λ_v son los Multiplicadores de Lagrange asociados a los vectores columna correspondientes a pilares y jácenas, que como se sabe, son los axiles de aquéllos y éstas, respectivamente, y \mathbf{p} el vector de acciones que excita a la estructura. Por comodidad, llamaremos a las matrices de coeficientes $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}$, y $\mathbf{M}_{\text{Lagrange}}$, esto es:

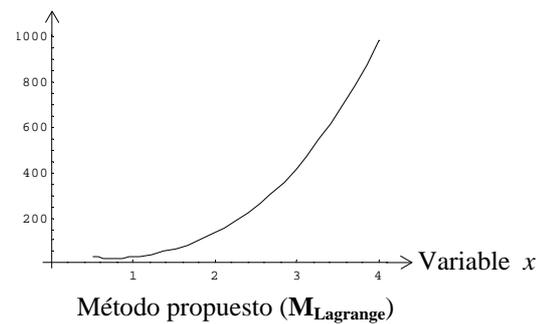
$$\mathbf{K}_{\text{Lagrange}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{M}_{\text{Lagrange}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [11.15]$$

11.5.1- Curvas de condicionamiento en función de las inercias relativas de las barras.- Puesto que en edificación las vigas suelen tener mayor inercia que los pilares, creemos una variable x de tal forma que el canto h_v de las vigas venga dado en función del canto h_p de los pilares de modo que se cumpla que $h_v = x h_p$. Introduciendo estos valores en las matrices y efectuando el pertinente ensamblaje, se tendrán las Matrices de Lagrange correspondientes a cada uno de los métodos expuestos en función de dicha variable. Haciendo variar ésta en el intervalo $0.5 \div 4$, se muestran a continuación las curvas que describen la influencia que tienen los valores relativos de las inercias de las barras en el condicionamiento de la matriz correspondiente, evaluado con la Norma 2.

Nº de condición



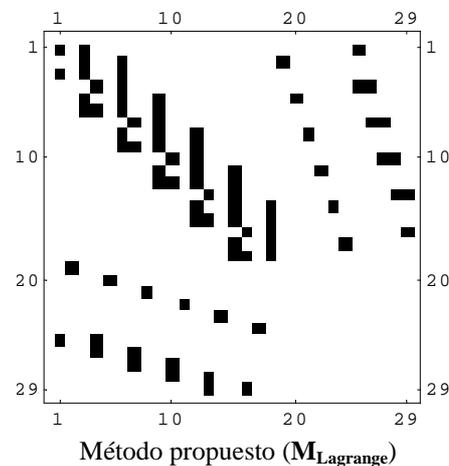
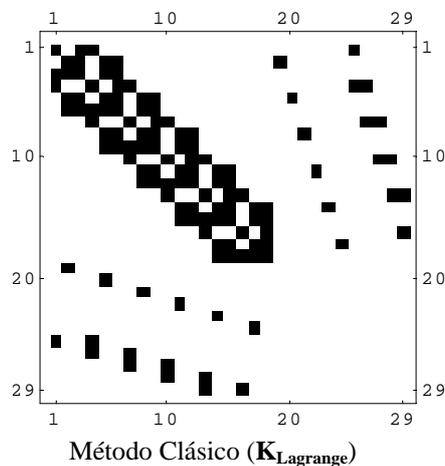
Nº de condición



Estos gráficos describen la sensibilidad del condicionamiento de la matriz frente a las diversas relaciones entre las inercias de vigas y pilares. Para $x = 1$ los números de condición de cada una de las matrices son los siguientes:

$$\text{Cond}(\mathbf{K}_{Lagrange}) = 7.71 \times 10^{11} \quad \text{y} \quad \text{Cond}(\mathbf{M}_{Lagrange}) = 27.33 \quad [11.16]$$

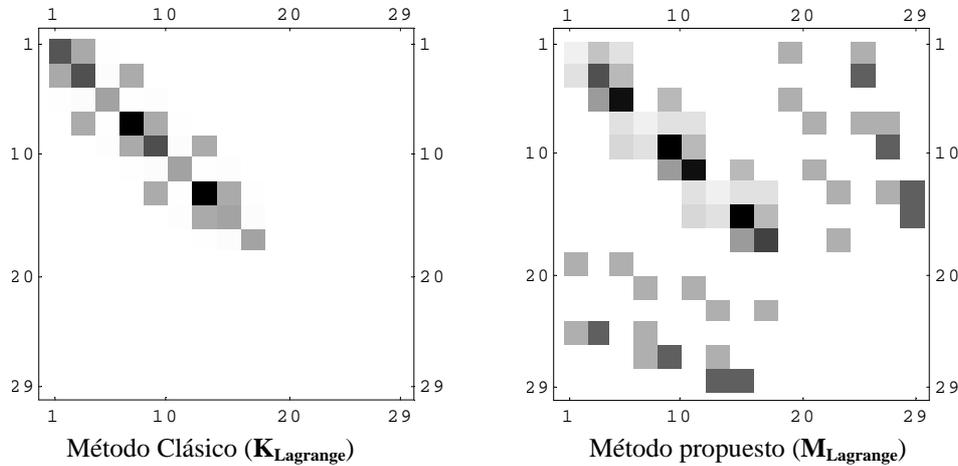
11.5.2- Esquema gráfico de la distribución de los elementos no nulos.-El siguiente esquema muestra de forma gráfica la distribución de los elementos no nulos de las respectivas matrices



en donde observa cómo la matriz del método propuesto es más difusa que la del Método Clásico, aunque no simétrica*, circunstancia que carece de importancia por cuanto, como se demostrará más adelante, la matriz que presenta un mejor condicionamiento no es simétrica.

* El hecho de que no sea simétrica se debe a que se ha utilizado la matriz no simétrica dadas por [4.78] para las jácenas, en vez de la genérica [4.73] o la [4.77], con las que se conseguiría la simetría.

11.5.3- Esquema gráfico de los elementos dominantes.-De forma similar, se muestra a continuación las gráficas que subrayan de forma esquemática la distribución de los elementos dominantes en cada una de las matrices:



Como puede comprobarse en el epígrafe A.9 del Anexo A, los valores máximos en valor absoluto de los elementos de cada una de las matrices anteriores son 902531 y 3, respectivamente, mientras que los valores mínimos en valor absoluto en cada una de ellas serán siempre menores que la unidad, ya que corresponden a los senos y cosenos de las condiciones de inelongabilidad incluidas en las submatrices de restricción. Comparando estos dos gráficos con los anteriores respectivos se observa que, debido a la gran diferencia entre el máximo y el mínimo valor absoluto, en el esquema correspondiente al Método Clásico desaparecen los elementos de menor magnitud, esto es, los correspondientes a las matrices de inelongabilidad y sus respectivas transpuestas, circunstancia que no se da en el esquema correspondiente al método propuesto por existir entre sus elementos una mayor uniformidad entre sus valores numéricos.

11.5.4. Eliminación del subsistema de inelongabilidad debido a las vigas. - De acuerdo con lo indicado en el epígrafe 9.4, la Matriz de Transformación debida a las condiciones de restricción de las vigas T_v , cuya obtención se detalla en A.10.1, tiene la propiedad de eliminar las incógnitas esclavas asociadas a dichas condiciones de inelongabilidad al postmultiplicar a la matriz de rigidez, esto es, elimina los desplazamientos horizontales de los nudos esclavos, en este caso los nudos del 2 al 6. Además, como quedó demostrado en el epígrafe 8.5, esta transformación implica la desaparición del subsistema correspondiente a las restricciones impuestas, en este caso, a las de inelongabilidad de las vigas. Como conse-

cuencia de todo ello, los Sistemas de Lagrange dados en [11.14] se transforman en los siguientes, perdiendo tantas incógnitas de corrimiento y ecuaciones como vigas tiene la estructura, es decir, cinco, pues como se sabe, las matrices \mathbf{I}_v y \mathbf{T}_v son divisores de cero:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}\mathbf{T}_v & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_p\mathbf{T}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_v \\ \lambda_p \\ \lambda_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{M}\mathbf{T}_v & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_p\mathbf{T}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \lambda_p \\ \lambda_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [11.17]$$

o, llamando \mathbf{K}_v y \mathbf{M}_v a las matrices resultantes, donde los subíndices indican que las matrices han sufrido ciertas transformaciones debidas a la Matriz de Transformación \mathbf{T}_v , los anteriores sistemas adquieren la forma más compacta

$$\mathbf{K}_v \bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{p}} \quad \text{y} \quad \mathbf{M}_v \bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{p}} \quad [11.18]$$

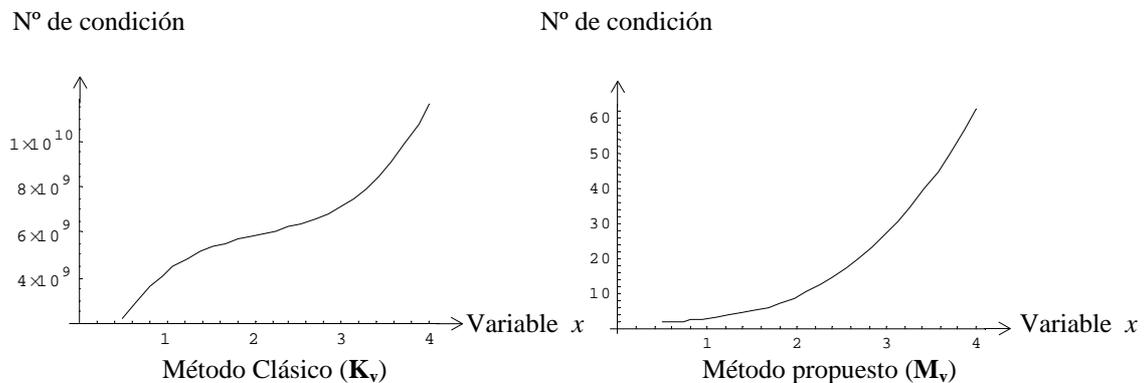
donde

$$\mathbf{K}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{K}\mathbf{T}_v & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_p\mathbf{T}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{M}\mathbf{T}_v & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_p\mathbf{T}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [11.19]$$

y

$$\bar{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_v \\ \lambda_p \\ \lambda_v \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [11.20]$$

11.5.4.1.- Curvas de condicionamiento en función de las inercias relativas de las barras.- La variación del número de condición en función de las relaciones de inercias para cada uno de los procedimientos viene dada por las respectivas gráficas siguientes

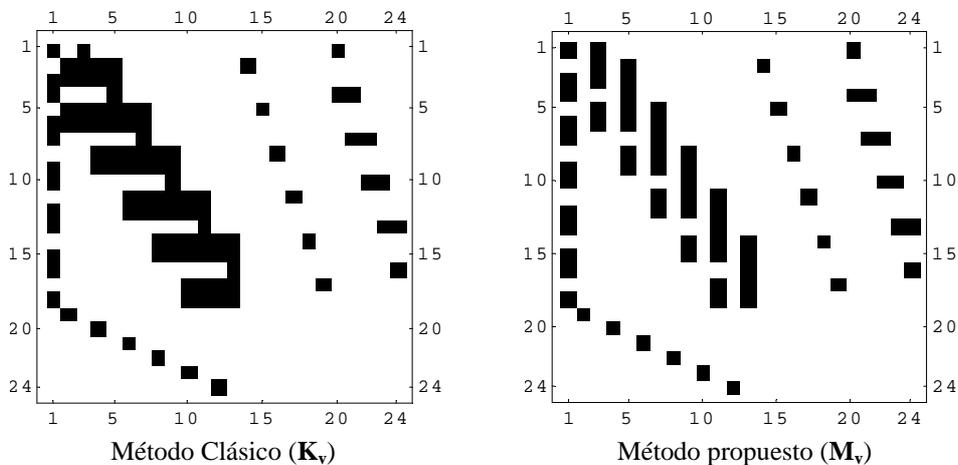


cuyos valores para $x = 1$, son

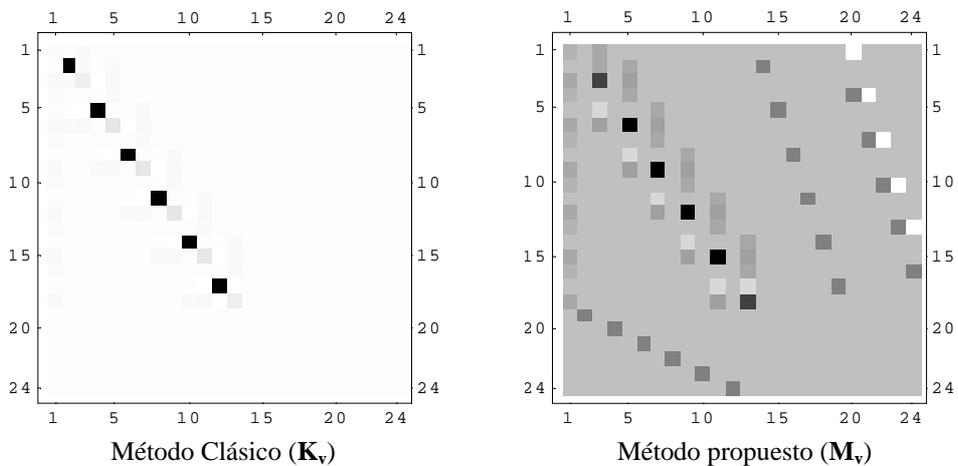
$$\text{Cond}(\mathbf{K}_v) = 4.27 \times 10^9 \quad \text{y} \quad \text{Cond}(\mathbf{M}_v) = 2.73 \quad [11.21]$$

que, como observarse, suponen sendas mejoras respecto a los anteriores dados por [11.16]

11.5.4.2.- Esquema gráfico de la distribución de los elementos no nulos.- A las anteriores matrices de coeficientes les corresponden los siguientes esquemas de distribución de elementos no nulos



11.5.4.3.- Esquema gráfico de los elementos dominantes.- De forma análoga, se muestra a continuación el esquema de elementos dominantes para ambas matrices:



11.5.5. Eliminación de los dos subsistemas de inelongabilidad.- Nuevamente, siguiendo el proceso que se detalló en el epígrafe 9.4, se determina la Matriz de Transforma-

ción con la que se eliminarán todas las ecuaciones de restricción impuestas, así como las incógnitas esclavas indicadas en el epígrafe anterior y las incógnitas de desplazamiento vertical de los nudos, correspondientes a las condiciones de restricción de los pilares. La modificación que se ha de introducir en la anterior Matriz de Transformación \mathbf{T}_v para determinar esta nueva matriz \mathbf{T}_{pv} puede consultarse en el epígrafe A.10.2 del Anexo A. Los Sistemas de Lagrange [11.14] se transforman, pues, en los siguientes,:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \mathbf{T}_{pv} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_m \\ \lambda_p \\ \lambda_v \end{bmatrix} = [\mathbf{p}] \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{M} \mathbf{T}_{pv} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_m \\ \lambda_p \\ \lambda_v \end{bmatrix} = [\mathbf{p}] \quad [11.22]$$

donde \mathbf{c}_m es el vector columna que describe, exclusivamente, las componentes maestras de corrimiento. Llamando

$$\mathbf{K}_{pv} = [\mathbf{K} \mathbf{T}_{pv} \quad \mathbf{I}_p^T \quad \mathbf{I}_v^T] \quad \text{y} \quad \mathbf{M}_{pv} = [\mathbf{M} \mathbf{T}_{pv} \quad \mathbf{I}_p^T \quad \mathbf{I}_v^T] \quad [11.23]$$

las expresiones [11.22] quedarán en la forma

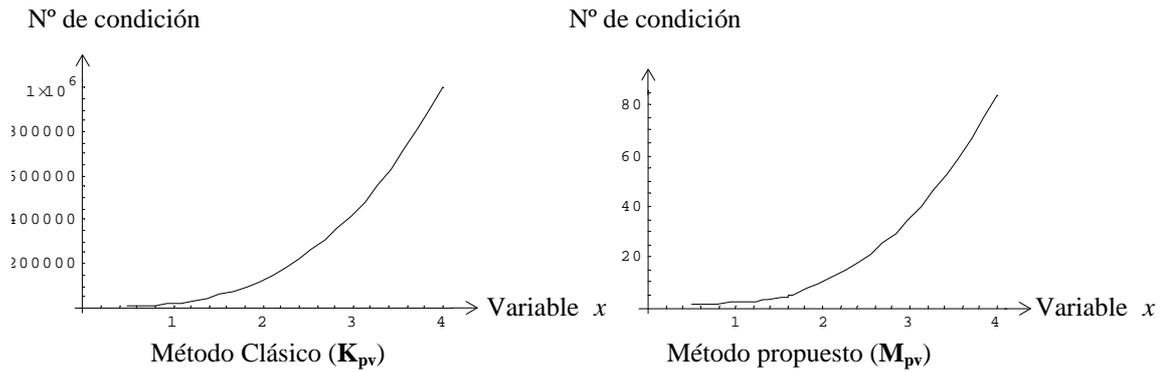
$$\mathbf{K}_{pv} \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{p} \quad \text{y} \quad \mathbf{M}_{pv} \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{p} \quad [11.24]$$

donde

$$\bar{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_m \\ \lambda_p \\ \lambda_v \end{bmatrix} \quad [11.25]$$

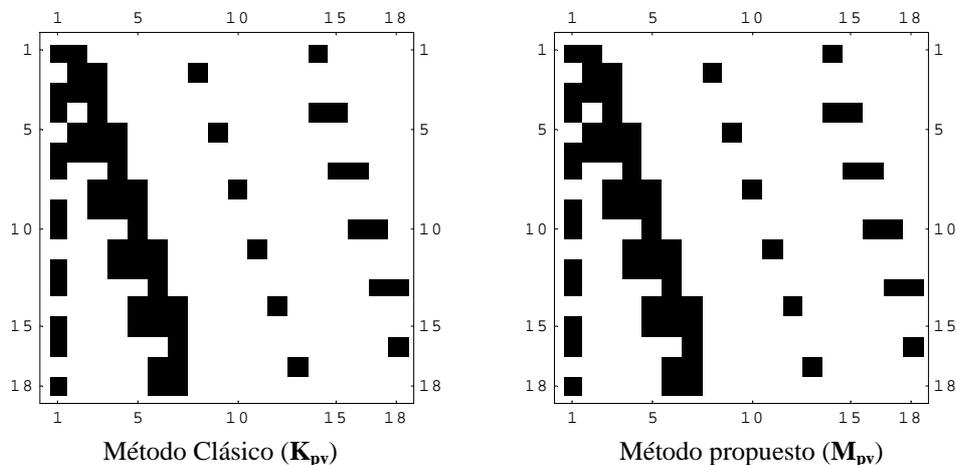
sistemas que presentan idénticas dimensiones que las correspondientes al sistema del Método Clásico sin condiciones de restricción alguna, esto es, tres por cada nudo susceptible de corrimientos, por lo que dichas dimensiones se reducen a 18, como se puede observar en los gráficos incluidos en el epígrafe siguiente.

11.5.5.1.- Curvas de condicionamiento en función de las inercias relativas de las barras.- Se muestran a continuación las gráficas que expresan las variaciones del condicionamiento en función de las rigideces relativas entre vigas y pilares para esta configuración de la matriz de coeficientes:



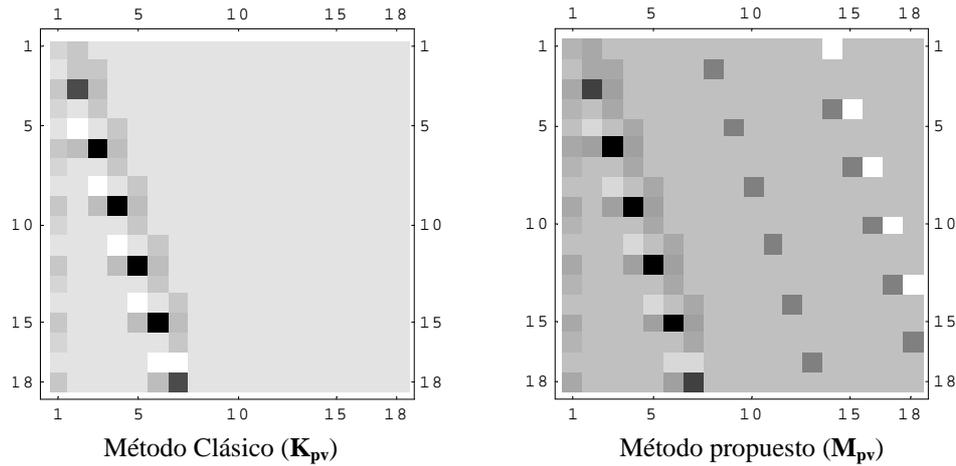
en la que se observa, comparando estas gráficas con las anteriores, cómo, a consecuencia de las modificaciones introducidas en la matrices se produce una gran mejora del condicionamiento para el Método Clásico y sin embargo deja prácticamente igual el correspondiente al método propuesto.

11.5.5.2.- Esquema gráfico de la distribución de los elementos no nulos.- Para la nueva matriz de coeficientes obtenida se tendrán las distribuciones de elementos no nulos siguientes



en donde se observa que ambas matrices tienen idéntica distribución.

11.5.5.3.- Esquema gráfico de los elementos dominantes.- Sin embargo, debido a que los valores máximos son diferentes en una y otra configuración, como puede comprobarse en el epígrafe A.10.2, los esquemas de elementos dominantes son muy diferentes, como muestran las gráficas siguientes:



en donde siguen desapareciendo los elementos correspondientes a las submatrices \mathbf{I}_p^T e \mathbf{I}_v^T

11.5.6. Eliminación de las incógnitas de axiles de jácenas.- En los anteriores epígrafes se han introducido en las matrices de coeficientes unas modificaciones con ayuda de las matrices de transformación, modificaciones que, en esencia, han consistido en combinaciones lineales de las columnas, lo que ha propiciado la eliminación de determinadas ecuaciones de restricción y, simultáneamente, incógnitas de corrimiento. Introduciremos estas mismas transformaciones, pero ahora en las filas-ecuaciones del sistema, con lo que se conseguirá la eliminación de incógnitas correspondientes a los multiplicadores de Lagrange, esto es, axiles de barras. Así pues, tal y como se expuso en los epígrafes 8.5.2 y 9.4, con ayuda de la transpuesta de la Matriz de Transformación puede conseguirse la eliminación de aquellos Multiplicadores de Lagrange cuyo valor se considere prescindible en cualquiera de los sistemas anteriormente estudiados. Eliminemos, pues, los multiplicadores de Lagrange λ_v correspondientes a los axiles de las vigas. Para ello, siguiendo el procedimiento descrito en el epígrafe 9.4, premultiplicando [11.24] por la matriz \mathbf{T}_v^T , transpuesta de \mathbf{T}_v se tendrá

$$\mathbf{T}_v^T \mathbf{K}_{pv} \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{T}_v^T \mathbf{p} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_v^T \mathbf{M}_{pv} \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{T}_v^T \mathbf{p} \quad [11.26]$$

y teniendo en cuenta [11.20] y [11.23], las anteriores podrán escribirse, sustituyendo, en la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_v^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{pv} & \mathbf{T}_v^T \mathbf{I}_p^T & \mathbf{T}_v^T \mathbf{I}_v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_m \\ \lambda_p \\ \lambda_v \end{bmatrix} = \mathbf{T}_v^T \mathbf{p} \quad [11.27]$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_v^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{pv} & \mathbf{T}_v^T \mathbf{I}_p^T & \mathbf{T}_v^T \mathbf{I}_v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_m \\ \lambda_p \\ \lambda_v \end{bmatrix} = \mathbf{T}_v^T \mathbf{p}$$

pero, de acuerdo con [9.26], los terceros bloques de las anteriores matrices de coeficientes, son nulos, por lo que quedarán

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_v^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{pv} & \mathbf{T}_v^T \mathbf{I}_p^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_m \\ \lambda_p \end{bmatrix} = \mathbf{T}_v^T \mathbf{p} \quad [11.28]$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_v^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{pv} & \mathbf{T}_v^T \mathbf{I}_p^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_m \\ \lambda_p \end{bmatrix} = \mathbf{T}_v^T \mathbf{p}$$

expresiones que muestran la eliminación de las incógnitas correspondientes a los axiles de la vigas, como se pretendía. Los sistemas anteriores pueden adquirir la forma más compacta

$$\overset{v}{\mathbf{K}}_{pv} \hat{\mathbf{c}} = \mathbf{p}_f \quad [11.29]$$

$$\overset{v}{\mathbf{K}}_{pv} \hat{\mathbf{c}} = \mathbf{p}_f$$

donde

$$\overset{v}{\mathbf{K}}_{pv} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_v^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{pv} & \mathbf{T}_v^T \mathbf{I}_p^T \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \overset{v}{\mathbf{M}}_{pv} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_v^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{pv} & \mathbf{T}_v^T \mathbf{I}_p^T \end{bmatrix} \quad [11.30]$$

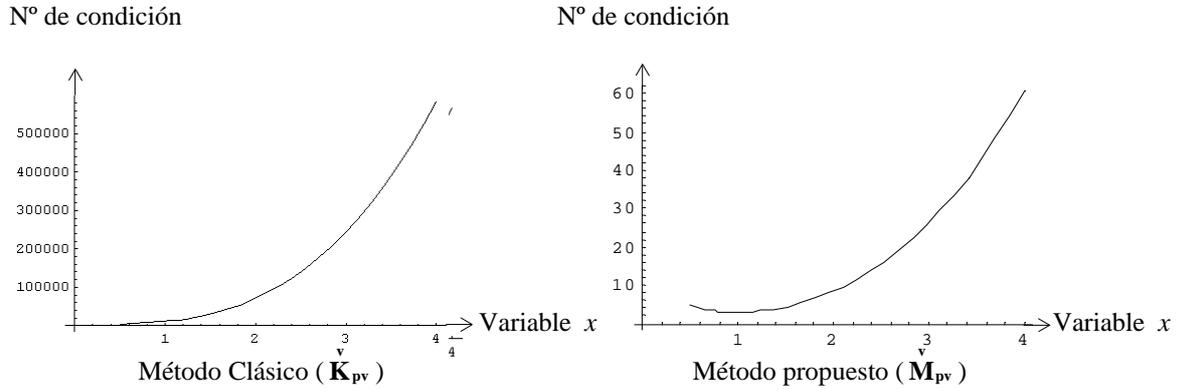
indicando con el superíndice v aplicado a las matrices que las filas de éstas han sufrido una combinación lineal debido a la inelongabilidad de las vigas

y

$$\hat{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_m \\ \lambda_p \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_f = \mathbf{T}_v^T \mathbf{p} \quad [11.31]$$

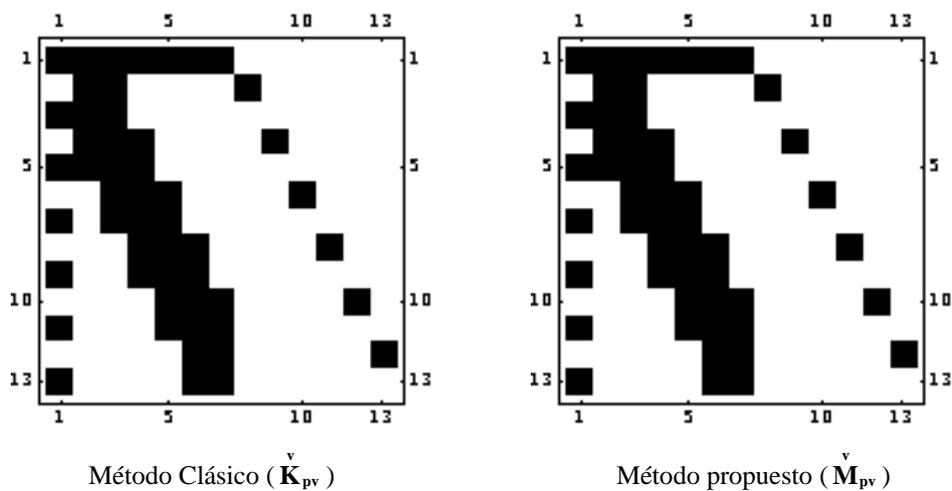
es decir, el vector incógnita $\hat{\mathbf{c}}$ contiene a las incógnitas maestras de corrimiento más los axiles de los pilares, mientras que el vector \mathbf{p}_f es una combinación lineal del vector de acciones \mathbf{p} de tal forma que describe, por una parte, las fuerzas verticales y momentos aplicados a todos los nudos y, por otra, la resultante de las fuerzas horizontales existentes en los nudos del grupo co-translacional formado por las vigas.

11.5.6.1.- Curvas de condicionamiento en función de las inercias relativas de las barras.- De forma análoga a los casos anteriores, se muestran las gráficas de variación del número de condición correspondiente a las matrices anteriores en función de los valores relativos de las inercias de vigas y pilares

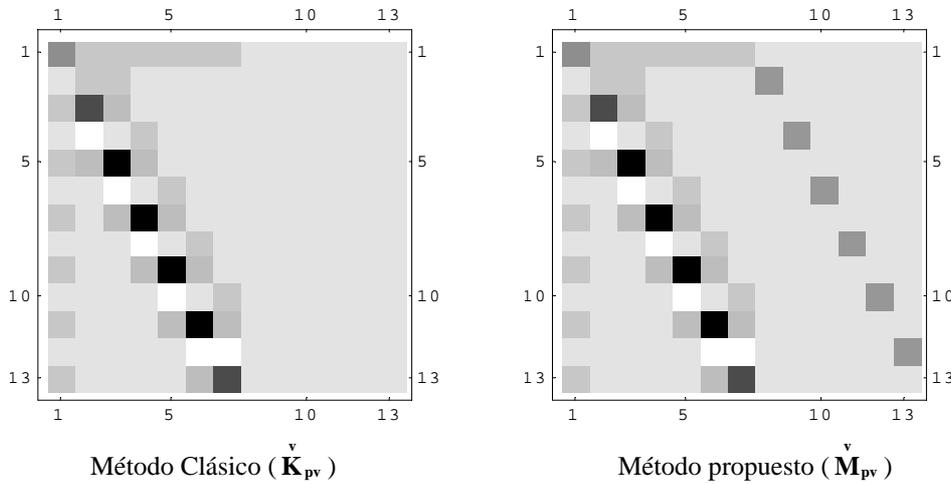


que muestran, nuevamente, la importante reducción del número de condición que sufre la matriz del Método Clásico como consecuencia de la transformación introducida y la poca influencia que tiene dicha transformación en el método propuesto.

11.5.6.2.- Esquema gráfico de la distribución de los elementos no nulos.- Para las anteriores matrices de coeficientes se tienen los siguientes gráficos de distribución de elementos no nulos.



11.5.6.3.- Esquema gráfico de los elementos dominantes.- La relación entre los elementos de mayor magnitud y el resto de ellos la describen los siguientes esquemas:



donde se observa que aún se pierden los elemento de menor magnitud en el esquema correspondiente al Método Clásico, mientras que se mantienen todos ellos en el método propuesto.

11.5.7. Eliminación de todas las incógnitas de axiles: Método de las Transformaciones.- De forma similar a lo expuesto en el epígrafe 11.5.5, pueden eliminarse todas las incógnitas correspondientes a los multiplicadores de Lagrange sin más que introducir en las ecuaciones de los sistemas [11.22] las mismas combinaciones lineales que se introdujeron en las columnas y expuestas en dicho epígrafe. Pero, puesto que estas operaciones se introdujeron a partir de la postmultiplicación de la primera columna de la Matriz de Lagrange por la Matriz de Transformación \mathbf{T}_{pv} , obteniéndose de esta forma los sistemas [11.24], premultiplicando estos últimos sistemas por la matriz \mathbf{T}_{pv}^T , transpuesta de \mathbf{T}_{pv} , se tendrá

$$\mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{K}_{pv} \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{p} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{M}_{pv} \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{p} \quad [11.32]$$

y teniendo en cuenta [11.23] y [11.25], al sustituir y operar podrá escribirse

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{pv} & \mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{I}_p^T & \mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{I}_v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_m \\ \lambda_p \\ \lambda_v \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{p} \quad [11.33]$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{pv} & \mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{I}_p^T & \mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{I}_v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_m \\ \lambda_p \\ \lambda_v \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{p}$$

pero al ser nulos los dos últimos bloques de las matrices de coeficientes, se deberá escribir, finalmente

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{pv} \end{bmatrix} \mathbf{c}_m &= \mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{p} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{pv} \end{bmatrix} \mathbf{c}_m &= \mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{p} \end{aligned} \quad [11.34]$$

o, de acuerdo con [11.31] y la notación empleada en [6.31], llamando

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{fc} &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{pv} \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_{fc} &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{pv} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad [11.35]$$

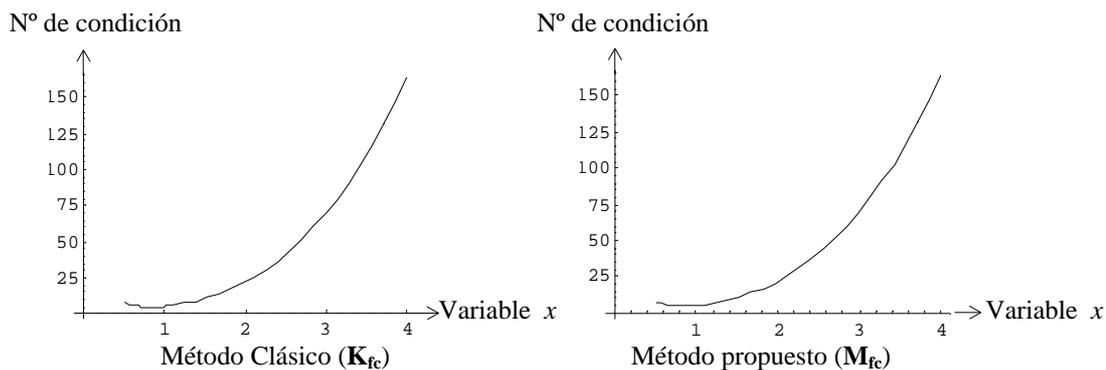
los sistemas dados en [11.34] quedan en la forma definitiva

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{fc} \mathbf{c}_m &= \mathbf{p}_f \\ \mathbf{M}_{fc} \mathbf{c}_m &= \mathbf{p}_f \end{aligned} \quad [11.36]$$

que, como ya se ha comentado en capítulos anteriores, no son más que los mismos sistemas que se obtendrían aplicando el Método de las Transformaciones. Los sistemas quedan reducidos, pues, a su mínima dimensión posible que es la correspondiente al grado de indeterminación cinemática de la estructura, esto es, seis giros de nudos y un desplazamiento del grupo co-translacional, en total 7 ecuaciones con 7 incógnitas.

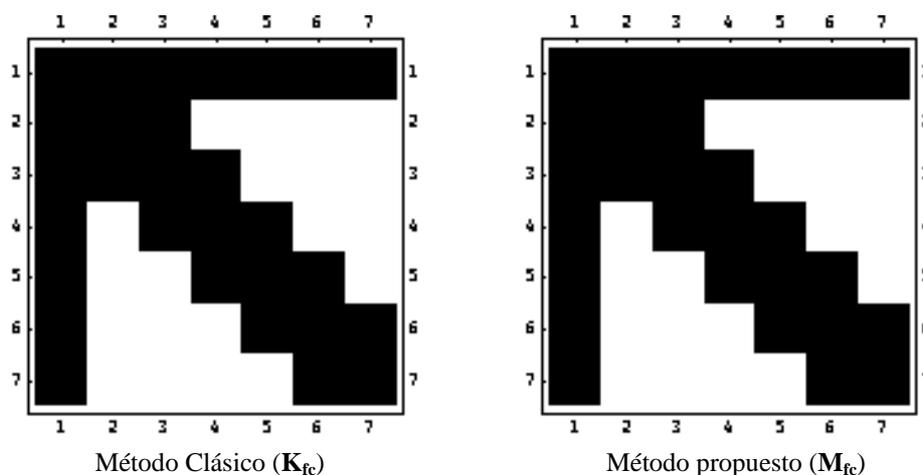
11.5.7.1.- Curvas de condicionamiento en función de las inercias relativas de las barras.- Por último se verá cómo las gráficas respectivas son, asimismo idénticas, pues las matrices tienen, obviamente^{*}, el mismo número de condición:

^{*} La matriz correspondiente al Método Clásico es igual a la matriz del método propuesto multiplicada por el parámetro $(EI_v)_0$ expresado en [4.30], por lo que sus números de condición son idénticos, de acuerdo con lo expuesto en el epígrafe 2.4.b).

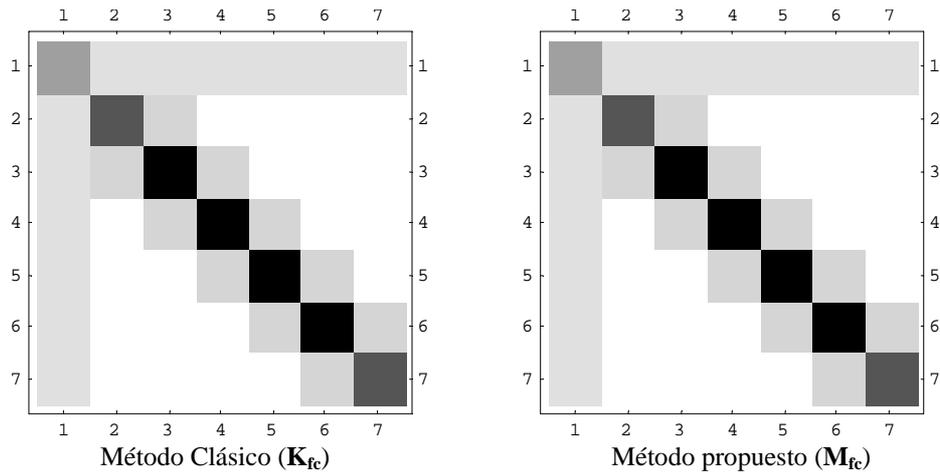


gráficas que expresan claramente cómo el condicionamiento de la matriz correspondiente al Método Clásico ha mejorado de forma drástica respecto a las anteriores configuraciones, mientras que la del método propuesto no solamente no ha mejorado, sino que, por el contrario, ha sufrido un cierto deterioro.

11.5.7.2.- Esquema gráfico de la distribución de los elementos no nulos.-

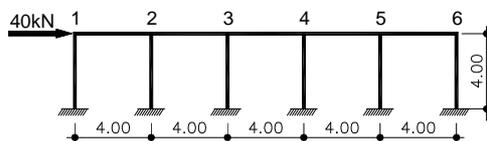


11.5.7.3.- Esquema gráfico de los elementos dominantes.- Aunque los valores de los elementos de estas dos matrices son diferentes, como puede comprobarse en A.10.4, las relaciones entre ellos dentro de la misma matriz son idénticas, de ahí que las respectivas gráficas también lo sean, como se observa en los esquemas siguientes:



En los siguientes cuadros se muestran de forma resumida las características más significativas de de cada una de las configuraciones de la matriz de coeficientes para los mismos modelos estudiados en el Capítulo 7, en cada uno de los cuales se introducen las diferentes transformaciones anteriormente descritas para el Modelo 1.

11.5.8 Cuadro resumen de las características de las matrices de coeficientes del Modelo 1.- Como síntesis de todo lo estudiado en los epígrafes anteriores, se confecciona el siguiente Cuadro 11.2 de atributos de las matrices de coeficientes referente al Modelo 1, ampliando el Cuadro 7.1 del Capítulo 7:



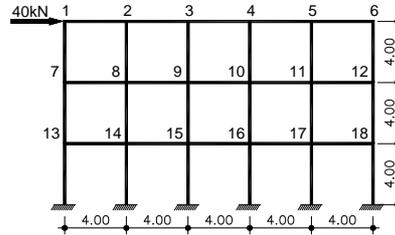
Método de cálculo		Matriz	Configuración de la Matriz	Dimensiones de la Matriz	Máx.Abs. k_{ij}	Elementos nulos (%)	Nº de condición *
Método Clásico sin restricciones		K	K	18×18	902531	28.40 %	876
Sistemas de Lagrange	Método Clásico	K_{Lagrange}	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	29×29	902531	14.74 %	$7.71 \times 10^{11**}$
	Método propuesto	M_{Lagrange}	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	“	3	9.75 %	27
Eliminación de I_v	Método Clásico	K_v	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{T}_v & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{T}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	24×24	455063	18.06 %	$4.27 \times 10^{9**}$
	Método propuesto	M_v	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{T}_v & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{T}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	“	3	12.50 %	3
Eliminación de I_p e I_v	Método Clásico	K_{pv}	$[\mathbf{K} \ \mathbf{T}_{pv} \ \mathbf{I}_p^T \ \mathbf{I}_v^T]$	18×18	40500	20.37 %	18707
	Método propuesto	M_{pv}	$[\mathbf{M} \ \mathbf{T}_{pv} \ \mathbf{I}_p^T \ \mathbf{I}_v^T]$	“	3	“	2
Eliminación de axiles de vigas (I_v^T)	Método Clásico	K_{pv}^v	$[\mathbf{T}_v^T \mathbf{K} \ \mathbf{T}_{pv} \ \mathbf{T}_v^T \mathbf{I}_p^T]$	13×13	40500	30.18 %	11218
	Método propuesto	M_{pv}^v	$[\mathbf{T}_v^T \mathbf{M} \ \mathbf{T}_{pv} \ \mathbf{T}_v^T \mathbf{I}_p^T]$	“	3	“	3
Eliminación de todos los axiles	Método Clásico	K_{fc}	$\mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{K} \ \mathbf{T}_{pv}$	7×7	40500	59.18 %	5
	Método propuesto	M_{fc}	$\mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{M} \ \mathbf{T}_{pv}$	“	3	“	“

Cuadro 11.2: Atributos de las diversas configuraciones de las matrices correspondientes al Modelo 1

* Los valores de los números de condición se han redondeado a números enteros.

** Véase 2ª nota al pie de la página 7-4.

11.6.- Cuadro resumen de las características de las matrices de coeficientes del Modelo 2.- El cuadro correspondiente al Modelo 2 (véase Capítulo 7, Figura 7.2), es el siguiente:



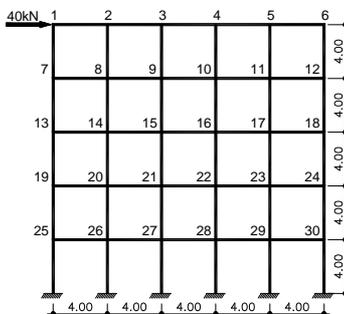
Método de cálculo	Matriz	Configuración de la Matriz	Dimensiones de la Matriz	Máx.Abs. k_{ij}	Elementos nulos (%)	Nº de condición*	
Método Clásico sin restricciones	\mathbf{K}	\mathbf{K}	54×54	905063	13.58 %	6113	
Sistemas de Lagrange	Método Clásico	$\mathbf{K}_{Lagrange}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	87×87	905063	6.82 %	8.33×10 ^{11**}
	Método propuesto	$\mathbf{M}_{Lagrange}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	“	4	4.84 %	267
Eliminación de \mathbf{I}_v	Método Clásico	\mathbf{K}_v	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \mathbf{T}_v & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_p \mathbf{T}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	72×72	905063	8.80 %	2.91×10 ^{9**}
	Método propuesto	\mathbf{M}_v	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \mathbf{T}_v & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_p \mathbf{T}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	“	4	6.48 %	10
Eliminación de \mathbf{I}_p e \mathbf{I}_v	Método Clásico	\mathbf{K}_{pv}	$[\mathbf{K} \mathbf{T}_{pv} \quad \mathbf{I}_p^T \quad \mathbf{I}_v^T]$	54×54	54000	10.49 %	24882
	Método propuesto	\mathbf{M}_{pv}	$[\mathbf{M} \mathbf{T}_{pv} \quad \mathbf{I}_p^T \quad \mathbf{I}_v^T]$	“	4	“	7
Eliminación de axiles de vigas (\mathbf{I}_v^T)	Método Clásico	\mathbf{K}_{pv}^v	$[\mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{pv} \quad \mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{I}_p^T]$	39×39	54000	15.84 %	14812
	Método propuesto	\mathbf{M}_{pv}^v	$[\mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{pv} \quad \mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{I}_p^T]$	“	4	“	12
Eliminación de todos los axiles	Método Clásico	\mathbf{K}_{fc}	$\mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{pv}$	21×21	54000	36.96 %	47
	Método propuesto	\mathbf{M}_{fc}	$\mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{pv}$	“	4	“	“

Cuadro 11.3: Atributos de las diversas configuraciones de las matrices correspondientes al Modelo 2

* Los valores de los números de condición se han redondeado a números enteros.

** Véase 2ª nota al pie de la página 7-4.

11.7.- Cuadro resumen de características de las matrices de coeficientes del Modelo 3.- El cuadro correspondiente al Modelo 3 (véase Capítulo 7, Figura 7.3), es el siguiente:



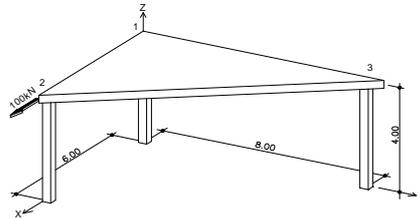
Método de cálculo	Matriz	Configuración de la Matriz	Dimensiones de la Matriz	Máx.Abs. k_{ij}	Elementos nulos (%)	Nº de condición*
Método Clásico sin restricciones	K	K	90×90	905063	8.64 %	16401
Sistemas de Lagrange	Método Clásico	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	145×145	905063	4.32 %	9.43×10 ^{11**}
	Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	“	4	3.09 %	741
Eliminación de \mathbf{I}_v	Método Clásico	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \mathbf{T}_v & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_p \mathbf{T}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	120×120	905063	5.61 %	3.16×10 ^{9**}
	Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \mathbf{T}_v & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_p \mathbf{T}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	“	4	4.17 %	22
Eliminación de \mathbf{I}_p e \mathbf{I}_v	Método Clásico	$[\mathbf{K} \mathbf{T}_{pv} \quad \mathbf{I}_p^T \quad \mathbf{I}_v^T]$	90×90	54000	6.74 %	26145
	Método propuesto	$[\mathbf{M} \mathbf{T}_{pv} \quad \mathbf{I}_p^T \quad \mathbf{I}_v^T]$	“	4	“	19
Eliminación de axiles de vigas (\mathbf{I}_v^T)	Método Clásico	$[\mathbf{T}_v^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{pv} \quad \mathbf{T}_v^T \mathbf{I}_p^T]$	65×65	54000	10.20 %	14996
	Método propuesto	$[\mathbf{T}_v^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{pv} \quad \mathbf{T}_v^T \mathbf{I}_p^T]$	“	4	“	24
Eliminación de todos los axiles	Método Clásico	$\mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{pv}$	35×35	54000	24.24 %	127
	Método propuesto	$\mathbf{T}_{pv}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{pv}$	“	4	“	“

Cuadro 11.4: Atributos de las diversas configuraciones de las matrices correspondientes al Modelo 3

* Los valores de los números de condición se han redondeado a números enteros.

** Véase 2ª nota al pie de la página 7-4.

11.8.- Cuadro resumen de las características de las matrices de coeficientes del Modelo 4.- El cuadro correspondiente al Modelo 4 (véase Capítulo 7, Figura 7.4), es el siguiente:



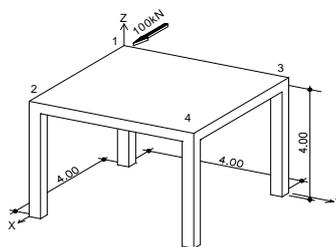
Método de cálculo		Matriz	Configuración de la Matriz	Dimensiones de la Matriz	Máx.Abs. k_{ij}	Elementos nulos (%)	Nº de condición *
Método Clásico sin restricciones		K	K	18×18	451066	42.59 %	642
Sistemas de Lagrange	Método Clásico	$\mathbf{K}_{Lagrange}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	27×27	451066	23.59 %	$3.67 \times 10^{11**}$
	Método propuesto	$\mathbf{M}_{Lagrange}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	“	8	13.03 %	129
Eliminación de D	Método Clásico	\mathbf{K}_D	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{T}_D & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{T}_D & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	21×21	450912	28.57 %	$2.48 \times 10^{8**}$
	Método propuesto	\mathbf{M}_D	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{T}_D & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{T}_D & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	“	8	19.73 %	20
Eliminación de \mathbf{I}_p y D	Método Clásico	\mathbf{K}_{pD}	$[\mathbf{K} \ \mathbf{T}_{pD} \ \mathbf{I}_p^T \ \mathbf{D}^T]$	18×18	40500	29.63 %	12107
	Método propuesto	\mathbf{M}_{pD}	$[\mathbf{M} \ \mathbf{T}_{pD} \ \mathbf{I}_p^T \ \mathbf{D}^T]$	“	8	25.31 %	10
Eliminación de \mathbf{D}^T	Método Clásico	\mathbf{K}_{pD}^D	$[\mathbf{T}_{pD}^T \ \mathbf{K} \ \mathbf{T}_{pD} \ \mathbf{T}_{pD}^T \ \mathbf{I}_p^T]$	12×12	261225	50.00 %	45606
	Método propuesto	\mathbf{M}_{pD}^D	$[\mathbf{T}_{pD}^T \ \mathbf{M} \ \mathbf{T}_{pD} \ \mathbf{T}_{pD}^T \ \mathbf{I}_p^T]$	“	19.35	48.61 %	15
Eliminación de \mathbf{I}_p^T y \mathbf{D}^T	Método Clásico	\mathbf{K}_{fc}	$\mathbf{T}_{pD}^T \ \mathbf{K} \ \mathbf{T}_{pD}$	9×9	261225	62.96 %	92
	Método propuesto	\mathbf{M}_{fc}	$\mathbf{T}_{pD}^T \ \mathbf{M} \ \mathbf{T}_{pD}$	“	19.35	60.49 %	“

Cuadro 11.5: Atributos de las diversas configuraciones de las matrices correspondientes al Modelo 4

* Los valores de los números de condición se han redondeado a números enteros.

** Véase 2ª nota al pie de la página 7-4.

11.9.- Cuadro resumen de las características de las matrices de coeficientes del Modelo 5.- El cuadro correspondiente al Modelo 5 (véase Capítulo 7, Figura 7.5), es el siguiente:



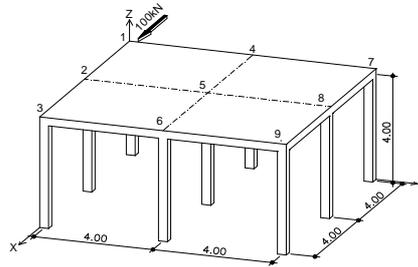
Método de cálculo	Matriz	Configuración de la Matriz	Dimensiones de la Matriz	Máx. Abs. k_{ij}	Elementos nulos (%)	Nº de condición*	
Método Clásico sin restricciones	K	K	24×24	455063	26.39 %	526	
Sistemas de Lagrange	Método Clásico	$\mathbf{K}_{Lagrange}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	37×37	455063	14.90 %	$8.21 \times 10^{11**}$
	Método propuesto	$\mathbf{M}_{Lagrange}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	“	4	8.77 %	66
Eliminación de D	Método Clásico	\mathbf{K}_D	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{T}_D & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{T}_D & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	28×28	455063	19.64 %	$2.74 \times 10^{8***}$
	Método propuesto	\mathbf{M}_D	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{T}_D & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{T}_D & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	“	4	13.90 %	9
Eliminación de I_p y D	Método Clásico	\mathbf{K}_{pD}	$[\mathbf{K} \ \mathbf{T}_{pD} \ \mathbf{I}_p^T \ \mathbf{D}^T]$	24×24	29700	19.79 %	16459
	Método propuesto	\mathbf{M}_{pD}	$[\mathbf{M} \ \mathbf{T}_{pD} \ \mathbf{I}_p^T \ \mathbf{D}^T]$	“	4	17.71 %	9
Eliminación de D^T	Método Clásico	\mathbf{K}_{pD}^D	$[\mathbf{T}_D^T \mathbf{K} \ \mathbf{T}_{pD} \ \mathbf{T}_D^T \mathbf{I}_p^T]$	15×15	172800	36.44 %	10187
	Método propuesto	\mathbf{M}_{pD}^D	$[\mathbf{T}_D^T \mathbf{M} \ \mathbf{T}_{pD} \ \mathbf{T}_D^T \mathbf{I}_p^T]$	“	12.80	“	14
Eliminación de I_p^T y D^T	Método Clásico	\mathbf{K}_{fc}	$\mathbf{T}_{pD}^T \mathbf{K} \ \mathbf{T}_{pD}$	11×11	172800	45.45 %	51
	Método propuesto	\mathbf{M}_{fc}	$\mathbf{T}_{pD}^T \mathbf{M} \ \mathbf{T}_{pD}$	“	12.80	“	“

Cuadro 11.6: Atributos de las diversas configuraciones de las matrices correspondientes al Modelo 5

* Los valores de los números de condición se han redondeado a números enteros.

** Véase 2ª nota al pie de la página 7-4.

11.10.- Cuadro resumen de las características de las matrices de coeficientes del Modelo 6.- El cuadro correspondiente al Modelo 6 (véase Capítulo 7, Figura 7.6), es el siguiente:



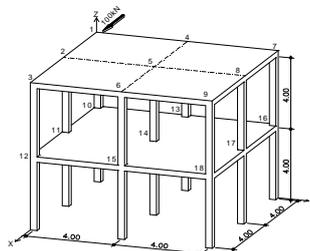
Método de cálculo		Matriz	Configuración de la Matriz	Dimensiones de la Matriz	Máx.Abs. k_{ij}	Elementos no nulos (%)	Nº de condición *
Método Clásico sin restricciones		K	K	54×54	907594	13.79 %	756
Sistemas de Lagrange	Método Clásico	K_{Lagrange}	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	87×87	907594	7.13 %	$1.85 \times 10^{12**}$
	Método propuesto	M_{Lagrange}	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	“	8	4.08 %	168
Eliminación de D	Método Clásico	K_D	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{T}_D & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{T}_D & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	63×63	460125	10.08 %	$3.18 \times 10^{8**}$
	Método propuesto	M_D	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{T}_D & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{T}_D & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	“	8	7.08 %	11
Eliminación de I_p y D	Método Clásico	K_{pD}	$[\mathbf{K} \ \mathbf{T}_{pD} \ \mathbf{I}_p^T \ \mathbf{D}^T]$	54×54	45900	9.88 %	19985
	Método propuesto	M_{pD}	$[\mathbf{M} \ \mathbf{T}_{pD} \ \mathbf{I}_p^T \ \mathbf{D}^T]$	“	8	9.05 %	8
Eliminación de D^T	Método Clásico	K_{pD}^D	$[\mathbf{T}_{pD}^T \ \mathbf{K} \ \mathbf{T}_{pD} \ \mathbf{T}_{pD}^T \ \mathbf{I}_p^T]$	30×30	1.24×10^6	22.89 %	67545
	Método propuesto	M_{pD}^D	$[\mathbf{T}_{pD}^T \ \mathbf{M} \ \mathbf{T}_{pD} \ \mathbf{T}_{pD}^T \ \mathbf{I}_p^T]$	“	91.80	“	11
Eliminación de I_p^T y D^T	Método Clásico	K_{fc}	$\mathbf{T}_{pD}^T \ \mathbf{K} \ \mathbf{T}_{pD}$	21×21	1.24×10^6	30.16 %	198
	Método propuesto	M_{fc}	$\mathbf{T}_{pD}^T \ \mathbf{M} \ \mathbf{T}_{pD}$	“	91.80	“	“

Cuadro 11.7: Atributos de las diversas configuraciones de las matrices correspondientes al Modelo 6

* Los valores de los números de condición se han redondeado a números enteros.

** Véase 2ª nota al pie de la página 7-4.

11.11.- Cuadro resumen de las características de las matrices de coeficientes del Modelo 7.- El cuadro correspondiente al Modelo 7 (véase Capítulo 7, Figura 7.7), es el siguiente:



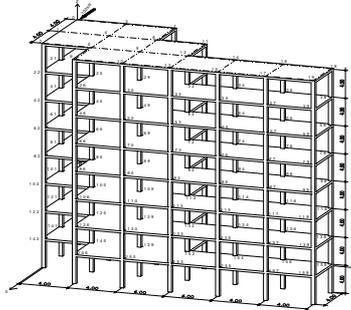
Método de cálculo		Matriz	Configuración de la Matriz	Dimensiones de la Matriz	Máx.Abs. k_{ij}	Elementos nulos (%)	Nº de condición *
Método Clásico sin restricciones		K	K	108×108	910125	8.44 %	2549
Sistemas de Lagrange	Método Clásico	K_{Lagrange}	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	174×174	910125	4.22 %	$1.86 \times 10^{12**}$
	Método propuesto	M_{Lagrange}	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	“	8	2.64 %	565
Eliminación de D	Método Clásico	K_D	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{T}_b & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{T}_b & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	126×126	910125	6.74 %	$1.17 \times 10^{8**}$
	Método propuesto	M_D	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{T}_b & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{T}_b & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	“	8	5.03 %	30
Eliminación de I_p y D	Método Clásico	K_{pd}	$[\mathbf{K} \ \mathbf{T}_{pb} \ \mathbf{I}_p^T \ \mathbf{D}^T]$	108×108	59400	6.82 %	18233
	Método propuesto	M_{pd}	$[\mathbf{M} \ \mathbf{T}_{pb} \ \mathbf{I}_p^T \ \mathbf{D}^T]$	“	8	6.40 %	20
Eliminación de D^T	Método Clásico	^DK_{pd}	$[\mathbf{T}_b^T \mathbf{K} \ \mathbf{T}_{pb} \ \mathbf{T}_b^T \mathbf{I}_p^T]$	60×60	2.48×10^6	16.64 %	59840
	Método propuesto	^DM_{pd}	$[\mathbf{T}_b^T \mathbf{M} \ \mathbf{T}_{pb} \ \mathbf{T}_b^T \mathbf{I}_p^T]$	“	183.60	“	26
Eliminación de I_p^T y D^T	Método Clásico	K_{fc}	$\mathbf{T}_{pb}^T \mathbf{K} \ \mathbf{T}_{pb}$	42×42	2.48×10^6	24.72 %	1630
	Método propuesto	M_{fc}	$\mathbf{T}_{pb}^T \mathbf{M} \ \mathbf{T}_{pb}$	“	183.60	“	“

Cuadro 11.8: Atributos de las diversas configuraciones de las matrices correspondientes al Modelo 7

* Los valores de los números de condición se han redondeado a números enteros.

** Véase 2ª nota al pie de la página 7-4.

11.12.- Cuadro resumen de características de las matrices de coeficientes del Modelo 8.- El cuadro correspondiente al Modelo 8 (véase Capítulo 7, Figura 7.8), es el siguiente:



Método de cálculo		Matriz	Configuración de la Matriz	Dimensiones de la Matriz	Máx.Abs. k_{ij}	Elementos no nulos (%)	Nº de condición *
Método Clásico sin restricciones		K	K	960×960	910125	1.12 %	54512
Sistemas de Lagrange	Método Clásico	K_{Lagrange}	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	1576×1576	910125	0.53 %	$3.03 \times 10^{12**}$
	Método propuesto	M_{Lagrange}	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	“	24	0.34 %	26726
Eliminación de D	Método Clásico	K_D	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{T}_D & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{T}_D & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	1120×1120	910125	0.96 %	$2.93 \times 10^{8***}$
	Método propuesto	M_D	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{T}_D & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{T}_D & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	“	24	0.74 %	186
Eliminación de I_p y D	Método Clásico	K_{pD}	$[\mathbf{K} \ \mathbf{T}_{pD} \ \mathbf{I}_p^T \ \mathbf{D}^T]$	960×960	121500	0.98 %	33038
	Método propuesto	M_{pD}	$[\mathbf{M} \ \mathbf{T}_{pD} \ \mathbf{I}_p^T \ \mathbf{D}^T]$	“	24	0.94 %	49
Eliminación de D^T	Método Clásico	\mathbf{D}^D K_{pD}	$[\mathbf{T}_D^T \ \mathbf{K} \ \mathbf{T}_{pD} \ \mathbf{T}_D^T \ \mathbf{I}_p^T]$	504×504	2.34×10^7	2.71 %	73523
	Método propuesto	\mathbf{D}^D M_{pD}	$[\mathbf{T}_D^T \ \mathbf{M} \ \mathbf{T}_{pD} \ \mathbf{T}_D^T \ \mathbf{I}_p^T]$	“	1730	“	287
Eliminación de I_p^T y D^T	Método Clásico	K_{fc}	$\mathbf{T}_{pD}^T \ \mathbf{K} \ \mathbf{T}_{pD}$	344×344	2.34×10^7	4.41 %	184003
	Método propuesto	M_{fc}	$\mathbf{T}_{pD}^T \ \mathbf{M} \ \mathbf{T}_{pD}$	“	1730	“	“

Cuadro 11.9: Atributos de las diversas configuraciones de las matrices correspondientes al Modelo 8

* Los valores de los números de condición se han redondeado a números enteros.

** Véase 2ª nota al pie de la página 7-4.

11.13.- Cuadro resumen de las características de las matrices de coeficientes del Modelo 8 considerado como edificio de gran altura.- En la última fila del Cuadro 7.10,

correspondiente al que se ha llamado Método Mixto, el cual se desarrolla detalladamente en el Anexo B, se vio cómo el número de condición, aún siendo inferior al obtenido por el Método Clásico, seguía teniendo en valor inaceptablemente elevado; pero, según los cuadros anteriormente expuestos, la eliminación del subsistema de restricciones introduce una mejora trascendental en el condicionamiento. Trataremos, pues, de mejorar dicho condicionamiento utilizando la Matriz de Transformación para las condiciones de diafragma rígido, expuesta en el epígrafe 10.2, cuyo ensamblaje se consigue de la siguiente forma:

Puesto que todas las plantas son iguales, crearemos la matriz de transformación \mathbf{T}_{tipo} , correspondiente a una planta*, mediante el pertinente ensamblaje de las matrices \mathbf{T}_{ji} y \mathbf{T}_{jj} dadas, respectivamente, por [10.20] y [10.21], partiendo de un arreglo de 20×20 , puesto que son veinte los nudos de cada planta. De acuerdo con [10.28], las matrices \mathbf{T}_{ji} se ubicarán en la columna correspondiente al número del nudo elegido como nudo maestro, en este caso el nudo signado con cero, según la Figura 7.8, y que corresponde a la primera columna del arreglo. A cada uno de los nudos j del plano rígido le corresponde, pues, la matriz

$$\mathbf{T}_{j,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(y_j - y_i) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & (x_j - x_i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [11.37]$$

que por ser nulas las coordenadas del nudo maestro i (nudo cero) se transforma en la expresión más simple

$$\mathbf{T}_{j,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_j \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, 19) \quad [11.38]$$

donde x_j e y_j son las coordenadas de cada uno de los nudos esclavos j . De esta forma el ensamblaje de la matriz de planta queda del modo siguiente:

* Véase epígrafe B.15 del Anexo B.

expuesta en la primera fila del cuadro antes citado, mientras que su número de condición disminuye drásticamente quedando con el valor de 449780, por lo que puede considerarse que desaparece el mal condicionamiento del sistema* y, por tanto, la inseguridad en la validez de la solución. Los diferentes atributos se detallan en el siguiente cuadro 11.10 en el cual las tres primeras filas corresponden a las filas 1ª, 3ª y 4ª del cuadro 7.10, quedando

Método de cálculo		Matriz	Configuración de la Matriz	Dimensiones de la Matriz	Máx.Abs. k_{ij}	Elementos nulos (%)	Nº de condición **
Método Clásico sin restricciones		K	K	960×960	910125	1.12 %	54512
Condiciones de Diafragma rígido	Método Clásico	$\mathbf{K}_{Lagrange}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	1416×1416	910125	0.63 %	$3.03 \times 10^{12***}$
	Método mixto	$\mathbf{M}_{Lagrange}$	$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{M}} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	1416×1416	910125	0.49 %	$1.83 \times 10^{10***}$
Eliminación de D	Método Clásico	\mathbf{K}_D	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{T}_D & \mathbf{D}^T \end{bmatrix}$	960×960	910125	1.20 %	449781
	Método mixto	\mathbf{M}_D	$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{M}} & \mathbf{T}_D & \mathbf{D}^T \end{bmatrix}$	“	“	1.16 %	449780
Eliminación de D^T	Método Clásico	$\begin{matrix} D \\ \mathbf{K}_D \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_D^T & \mathbf{K} & \mathbf{T}_{pD} \end{bmatrix}$	504×504	2.34×10^7	3.57 %	190913
	Método mixto	$\begin{matrix} D \\ \mathbf{M}_D \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_D^T & \mathbf{M} & \mathbf{T}_{pD} \end{bmatrix}$	“	“	“	187430

Cuadro 11.10: Atributos de las matrices correspondientes al Modelo 8 considerado de gran altura

y de cuya observación se desprende, por un aparte, que es imprescindible la eliminación de la matriz **D** en uno y otro procedimiento para hacer desaparecer el mal condicionamiento de las respectivas matrices (filas 4ª y 5ª) y, por otra, que quizá sea conveniente la eliminación de los Multiplicadores de Lagrange (dos últimas filas) ya que con ello, no solamente se consigue una nueva mejora del condicionamiento, sino que se disminuyen en gran medida las dimensiones de los sistemas, que quedan reducidos casi a la mitad respecto a los anteriores.

* El programa Matemática sólo da el aviso de posibles errores en la solución del sistema, como consecuencia del mal condicionamiento, a partir de un número de condición de 10^9 , aproximadamente.

** Los valores de los números de condición se han redondeado a números enteros.

*** Véase 2ª nota al pie de la página 7-4.

CAPÍTULO 12

CONCLUSIONES

OBJETIVO:

En base a todo lo expuesto en los capítulos anteriores, se hace necesario, como punto final de este trabajo, extraer una serie de conclusiones, pues en definitiva, éstas no son más que los motivos que justifican todo trabajo de investigación.

CONTENIDO:

A partir de un recorrido cronológico y pormenorizado de todos los capítulos anteriormente expuestos en esta Tesis Doctoral, se extraen un conjunto de conclusiones referentes, por una parte, al interés mostrado por anteriores autores por el cálculo de estructuras bajo determinadas hipótesis de restricción y la valoración de los trabajos existentes sobre el tema y, por otra, las conclusiones que pueden extraerse respecto al funcionamiento y validez del método aquí propuesto, así como las líneas de investigación futuras para las cuales se considere aconsejable la utilización del mismo.

12.1.- Modelización e hipótesis en el análisis y cálculo de estructuras.- Como todo fenómeno físico, el análisis y cálculo de estructuras necesita inexcusablemente la adopción de una serie de bases de partida -hipótesis- sin las cuales sería prácticamente inabordable su estudio mediante procesos matemáticos, toda vez que, por simple que fuere dicho fenómeno, la cantidad de variables que se necesitarían para su total descripción sería disparatada. En general, dichas hipótesis, que consiguen modelizar el fenómeno a partir de una eliminación y/o simplificación de la mayoría de dichas variables, deben de elegirse de forma que cumplan dos objetivos, los cuales pueden darse simultáneamente o por separado: uno de ellos será que, dentro de un conjunto de hipótesis equivalentes, la más acertada será aquella que describa el hecho físico de la forma más cercana al modelo real; el otro será que la hipótesis a elegir introduzca en el proceso de cálculo el máximo de simplificaciones, aunque la modelización no sea la más próxima a dicho modelo. Pero estos dos criterios de elec-

ción pueden ser unas veces contrapuestos y otras complementarios, es decir, puede ocurrir que una mejor hipótesis para la modelización conlleve un mayor grado de complejidad, algún problema de redondeo, de condicionamiento, etc.; que una más apropiada hipótesis desde el punto de vista simplificador describa de forma inaceptable al modelo; o que, por último, dicha hipótesis sea la más apropiada desde el punto de vista de los dos objetivos antes indicados. Si se dan los dos supuestos primeros, puede haber criterios dispares para la adopción o no de dicha hipótesis, mientras que si se da el tercero no cabrá duda alguna para su adopción.

El método que aquí se ha expuesto parte de las mismas hipótesis de cálculo que las del Método Matricial Clásico de la Rigidez para el análisis y cálculo de sistemas estructurales de barras rígidamente conectadas, excepto en las dos siguientes, que lo fundamentan: la de inelongabilidad de las barras y la hipótesis de diafragma rígido. Pero, tal y como se comentó en el epígrafe 2.1, a veces es determinante el orden de las operaciones durante el proceso de cálculo, de ahí que, en vez de introducir las condiciones de restricción solamente en el sistema lineal de ecuaciones proveniente del ensamblaje, en el método que aquí se propone dichas condiciones se introducen, primero, en las matrices de rigidez de los elementos - y esta es la clave del método- y después en dicho sistema, lo que tendrá como consecuencia una enorme mejora del condicionamiento de la matriz del sistema, como pudo comprobarse en los Capítulos 7 y 11.

12.2.- El cálculo matricial bajo condiciones de inelongabilidad.- Aunque el tratamiento de las condiciones de restricción a la hora del cálculo matricial de estructuras es universalmente conocido y empleado mediante las técnicas que se expusieron en el epígrafe 1.4, en las cuales tales condiciones se introducían a nivel de estructura, es indudable, como se desprende del epígrafe 1.2, que desde al menos mediados del siglo pasado, han sido numerosos los autores que, conscientes de la ventaja que supone toda simplificación, han mostrado en mayor o menor medida un interés por la inclusión de tales restricciones directamente en la matriz del elemento y, concretamente, la condición de inelongabilidad. Todos ellos obtenían dicha matriz ignorando simplemente la deformación axial o, lo que es igual, deduciendo dicha matriz a partir de la matriz tradicional de barra eliminando de ella las filas/columnas asociadas a la deformación axial, esto es, las filas/columnas primera y cuarta para la barra de sistemas coplanarios. Debido a esto, la matriz que resulta de esta operación es una matriz cuadrada de dimensiones 4×4 , es decir, para dos grados de libertad por extre-

mo de barra perteneciente a un sistema coplanario* y, puesto que en el plano son tres los grados de libertad, tal matriz es inoperativa si se quieren aprovechar las inmejorables ventajas que el Método Matricial Directo de la Rigidez presenta frente al resto de procedimientos de cálculo para la determinación del sistema lineal de este tipo de estructuras. Es por ello que todos los autores referidos se ven obligados a utilizar dicha matriz exclusivamente para estructuras intranslacionales -matriz de dimensiones 2×2 , deducida de la anterior- o para aquellas en las que exista linealidad de todas las barras, esto es, vigas continuas. Para los casos en los que todas las barras de la estructura se interceptan de forma ortogonal (entramado) se ha de deducir la matriz de rigidez de la estructura a partir de una serie de estados paramétricos y no por simple ensamblaje de la matriz del elemento**, mientras que si la estructura es del tipo genérico, esto es, existen barras con dirección arbitraria (excepción hecha de algunas situaciones en las que se den los casos muy particulares de simetrías y antimetrías), no puede aprovecharse tal matriz y se hace necesario renunciar a la hipótesis simplificativa de inelongabilidad para el cálculo de la estructura en estudio y utilizar, pues, la matriz de rigidez tradicional de la barra elongable.

Ignorar en la forma antes mencionada dichas componentes o tomar como nulos todos los elementos de dichas filas/columnas no es exactamente lo mismo que suponer nulas las elongaciones, pues de esta última premisa, partiendo de las ecuaciones constitutivas tradicionales en coordenadas locales en el espacio 2D, se tiene

$$\begin{bmatrix} X'_i \\ Y'_i \\ M'_i \\ X'_j \\ Y'_j \\ M'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ \gamma'_i \\ u'_j \\ v'_j \\ \gamma'_j \end{bmatrix} \quad [2.1]$$

* Es necesario puntualizar que, de toda la bibliografía consultada, no se ha encontrado ningún autor que extendiese este estudio para la matriz de barra en el espacio tridimensional.

** "En cuanto a las estructuras reticuladas translacionales, no se sigue, sin embargo, un planteamiento global que proporcione al mismo tiempo tanto los giros como los desplazamientos de los nudos, sino que, de un modo similar a la técnica seguida en el método de Cross, los desplazamientos se obtienen a través de estados paramétricos que se superponen a las cargas que soporta el entramado, de forma que en cada uno de los estados de cálculo éste se lleva a efecto en una estructura intranslacional." (46, apartado 7.3.2).

y desarrollando la primera -o la cuarta- de las ecuaciones, se desprende que, por considerar u'_i igual a u'_j , debe escribirse que

$$X'_i = \frac{EA}{L}(u'_i - u'_j) = 0 \quad [2.2]$$

pero para que se cumpla esta expresión será necesario que la sección transversal A de la barra sea infinitamente grande, por lo que, en el límite, la ecuación [2.2] se convierte en

$$X'_i = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{EA}{L}(u'_i - u'_j) \quad [2.3]$$

que no es más que una indeterminación del tipo $\infty \times 0^*$, indeterminación que se soslaya introduciendo la hipótesis adoptada, no en las ecuaciones constitutivas referidas al sistema local, sino a las referidas al sistema general, tal y como se expuso en el epígrafe 4.2 de esta Tesis Doctoral para la barra en el espacio 3D.

12.3.- El cálculo matricial bajo condiciones de diafragma rígido.- Aún siendo esta hipótesis de una aplicación prácticamente obligada, o, al menos, mucho más aconsejable para determinados tipos estructurales que la de inelongabilidad, cuales son, por ejemplo, las estructuras de edificación, no solamente por describir más acertadamente el modelo sino, además, por las ventajas simplificadoras y operativas que ello conlleva, no se ha encontrado en toda la bibliografía consultada la matriz del elemento bajo estas premisas ni siquiera para situaciones particulares, como ocurría con la matriz inelongable antes comentada y estudiada por numerosos autores, y sólo se han encontrado las cuatro referencias que figuran en el epígrafe 1.2 de este trabajo que deducen las ecuaciones descriptivas del comportamiento de diafragma rígido para el caso particular de horizontalidad,** ecuaciones que se habrán de añadir al sistema lineal que se obtendrá a partir del ensamblaje de la matriz de rigidez del elemento tradicional en el espacio 3D, es decir, a nivel de toda la estructura.

12.4.- Procedimientos de resolución de sistemas lineales bajo restricciones.- El método propuesto en esta investigación da lugar a un sistema lineal de ecuaciones de equilibrio ampliado con otro formado por las ecuaciones de restricción impuestas, por lo que, para la resolución del sistema superdeterminado resultante, es necesario utilizar algunos de los

* Véase referencia 15, pág. 94.

** Su expresión genérica en coordenadas globales está deducida en el epígrafe 5.1.2 de esta investigación.

procedimientos comentados en el epígrafe 1.4 del Capítulo 1. Como quedó suficientemente documentado allí, el Método de las Transformaciones adolece de un conjunto de desventajas que los diversos autores allí referenciados pusieron de manifiesto, a las que habría que añadir el importante inconveniente que supone el tener que deducir los valores de aquellas fuerzas que hacen que se cumplan tales hipótesis mediante un procedimiento auxiliar, valores que en muchas aplicaciones son imprescindibles conocer, como por ejemplo, los axiles de las barras que se hayan tomado como inelongables. Quizá la única ventaja del método frente a los demás sea el de obtener un sistema de menores dimensiones, aunque a cambio de un proceso de manipulación matricial más o menos engorroso; pero esa ventaja va teniendo cada vez menor incidencia debido al avance informático que continuamente se va produciendo.

En cuanto al Método de las Funciones de Penalización es necesario añadir que no deja de manifestarse un tanto contrario a la rigurosidad que ha de requerir todo proceso matemático, debido, precisamente, a su fundamento, que consiste en la elección un tanto arbitraria y no sistemática de una serie de valores muy elevados y que, entre otros inconvenientes, quizá los dos más determinante sean, por una parte, el de producir un deterioro inaceptable en el condicionamiento del sistema resultante (pues, como reiteradamente se ha observado en este trabajo, valores muy elevados en los coeficientes de la matriz, aún suponiendo que fueren óptimos, darán lugar a un mayor número de condición) y, por otra, que, de la misma forma que el método anterior, no proporciona los valores de las fuerzas de restricción.

Es, precisamente, esta circunstancia entre otras, la que hace que sea el Método de los Multiplicadores de Lagrange el que se manifieste como el más fiable, completo, exacto (salvedad hecha de los errores debidos al obligado redondeo del computador) y elegante de todos los procedimientos enumerados*. El único inconveniente que se le puede atribuir frente a los demás puede ser el de presentar un mayor número de incógnitas; pero, como ya se ha puesto de manifiesto, esta desventaja es cada día de menor importancia** y, además, puede ser solventada mediante las manipulaciones matriciales que se expusieron en el epígrafe 6.3, manipulaciones matriciales que suponen que el Sistema de Lagrange a que da lugar el método pueda ser resuelto con gran flexibilidad, teniendo en cuenta las diversas alternativas a

* “En general este método parece ser el más elegante para un programa de elementos finitos, minimizando conjeturas y elecciones para el usuario” (54) apartado 9.2.4.

** Aunque los autores de la referencia (16) en su apartado 15.3.3, comentando esta desventaja, aseguran que “...siempre que sea posible se evita utilizar el Método de los Multiplicadores de Lagrange...”, es necesario advertir que esta afirmación se hizo en 1982, cuando aún los ordenadores no tenían la potencia computacional que en la actualidad tienen, potencia que, es de esperar, aumente de forma continua en el futuro.

las que puede optarse para su resolución, las cuales permiten a voluntad, no solamente disminuir las dimensiones del sistema, sino, simultáneamente, mejorar el condicionamiento de la matriz asociada, como muestran todos los cuadros del Capítulo 11. Y, finalmente, el método permite eliminar las fuerzas de restricción no significativas para el calculista y, en cambio, puede devolver de forma directa aquellas otras que se consideren necesarias.

12.5.- Problemas numéricos en el Método Matricial Directo de la Rigidez.- Parece fuera de toda duda que sea lógico esperar que, a un pequeño cambio que se introduzca en los datos de cualquier tipo de operación matemática le corresponda una pequeña variación en el resultado, suponiendo, como es normal, que se dispone de la herramienta apropiada para dicha operación. Sin embargo, a la vista de los resultados que se obtuvieron en cálculo de la estructura incluida en el Capítulo 2, se puso de manifiesto cómo influye en ellos, tanto el redondeo introducido por el calculista, el propio redondeo que toma el procesador al operar con números máquina, el orden en las operaciones y el mal condicionamiento del sistema lineal de ecuaciones que allí se analizó. Pero, como se decía, es contrario a toda lógica que los resultados de un problema de matemática pura -y en ello se convierte cualquier problema de matemática aplicada, una vez adoptadas las hipótesis pertinentes- necesiten para su validez, por una parte, utilizar un mínimo número de cifras significativas, requerimiento que en absoluto se les exige a los datos, y, por otra, seguir un *determinado* orden en las operaciones, orden cuya elección no será en absoluto fácil de detectar. Se hace conveniente, pues, un estudio pormenorizado del origen de estos inconvenientes con objeto de eliminar o, al menos, minimizar en lo posible, las consecuencias negativas que todo ello conlleva.

12.6.- El problema de la Rigidez Axial (EA).- Como se mostró en el epígrafe 2.2, los elementos de la Matriz de Rigidez de barra del Método Clásico presentan grandes diferencias entre sus valores absolutos, diferencias que pueden verse acentuadas al ensamblar dichas matrices para obtener la matriz de rigidez de la estructura, pues puede ocurrir que confluyan en algún nudo varios elementos de gran rigidez, en otros converjan barras de diferentes rigideces^{*}, mientras que en otros, por el contrario, sólo converjan una o dos barras de pequeña rigidez. Esta heterogeneidad entre dichos elementos, causa, aunque no única, del mal condicionamiento del sistema de ecuaciones, proviene del hecho de que el término de

^{*} "... en pórticos es corriente que la rigidez axial sea mayor que la de flexión. Por tanto, para evitar problemas numéricos de mal condicionamiento de las ecuaciones matriciales de equilibrio se supone que los desplazamientos horizontales de los nodos del dintel son iguales" (30, apartado 15.4).

rigidez axial EA puede ser de un orden de magnitud muy superior a alguno de los demás términos de flexión contenidos en dicha matriz*. Coherentemente con ello, los órdenes de magnitud de las soluciones del sistema en las incógnitas de corrimiento presentarán, así mismo, diferencias similares; por lo tanto existirá una nube más o menos acotada de valores solución de un conjunto de incógnitas en el entorno de un punto del espacio en-dimensional, que con el sistema de unidades habitualmente utilizadas estará cerca del origen de coordenadas, mientras que existirán otras soluciones esparcidas, muy alejadas de dicho entorno, como gráficamente pone de manifiesto la sencilla Figura 1 del Capítulo 2, donde la componente de la solución en el eje OX está muy cercana al origen, mientras que la correspondiente a la otra incógnita puede estar más alejada en varios ordenes de magnitud, con lo que, dependiendo de la variación que puedan sufrir los coeficientes del sistema, puede ocurrir que dicha incógnita sufra una alteración inaceptable. En el caso que nos ocupa, esto es, cálculo de estructuras de barras, suelen darse esta disparidad en los resultados; p.e. los desplazamientos verticales de nudos pertenecientes a pilares con continuidad hasta cimentación serán mucho menores, en general, que los demás corrimientos, lo que puede acarrear el problema antes comentado mayor diferencia aún se presentarán entre los valores de los corrimientos y de los Multiplicadores de Lagrange, por ser estos valores de solicitaciones.**

En otro orden de cosas, en el Capítulo 3, donde se hace un exhaustivo estudio de la Matriz de Rigidez Tradicional del elemento barra, se ha deducido la configuración de dicha matriz referida a los ejes globales, toda vez que las submatrices que las componen son las unidades operativas del método, con lo que, de esta forma, se evitan los cuatro dobles productos matriciales [3.6] que serían necesarios efectuar para cada barra de la estructura por la necesidad ineludible de que tales matrices vengan referidas a dichos ejes. Además, puesto que la Matriz de Rotación puede expresarse de forma muy compacta en función de los vectores de cosenos directores de los ejes locales respecto a lo globales, y operando matricialmente, se consigue la expresión de tales unidades operativas de una forma mucho más compacta, como se pone de manifiesto al comparar las configuraciones de éstas dadas en [3.12] con las de sus equivalentes expuestas en [3.7], [3.8], [3.9] y [3.10], lo que facilitará su implementación computacional, la estrada de datos y, sobretodo, como ya se ha manifestado, la evitación de aquéllos dobles productos matriciales antes referidos.

* Véase nota al pie de la página 1-8.

** Esta es una de las causas del mal condicionamiento que presentan todos los Sistemas de Lagrange en el Método Clásico.

Por último se ha incluido en dicho capítulo varias configuraciones de Matrices de Rigidez del elemento, así como sus correspondientes Matrices de Conversión para los casos más habituales que normalmente suelen darse en las estructuras, como barras horizontales y verticales, o casos particulares como emparrillados o estructuras de barras co-planarias, las cuales se deducen de la configuración genérica y que es conveniente utilizar frente a ésta, dadas, por una parte, las simplificaciones que ello conlleva y, por otra, la elevada frecuencia con la que suelen aparecer.

12.7.- Condición cinemática de inelombilidad: eliminación de la Rigidez Axial.- Puesto que, como se dijo, una de las causas de los problemas antes comentados es la presencia en los cálculos de la Rigidez Axial de las barras que conforman las estructuras, parece lógico intentar prescindir de dicho factor y analizar las consecuencias que puede acarrear dicha eliminación. En un principio es suficiente motivo para adoptar esta medida el hecho de que con ella se simplifica el procedimiento de cálculo, toda vez que ello implica una anulación, y, por ello, eliminación, de un elevado porcentaje de incógnitas de corrimiento, aunque, como se indicó, esta hipótesis no describa de la mejor forma el comportamiento mecánico de la estructura en estudio. Pero aún así, se sabe que los resultados a obtener de esta forma son perfectamente válidos, pues esto está ampliamente sancionado por la práctica y la experimentación y es por ello que, en la mayoría de los métodos de cálculo de estructuras de barras, se adopte esta hipótesis simplificadora. Puesto que se trata de una hipótesis holónoma, la ecuación que la describe permite de forma fácil la eliminación de dicho factor de rigidez, obteniéndose una configuración de la Matriz de Rigidez del elemento que, primero, es mucho más simple, como se pudo ver en el Capítulo 4, y, segundo -y esto es lo más trascendental- que da lugar a una matriz de la estructura enormemente mejor condicionada, como pudo comprobarse en los Capítulos de validación numérica 7 y 11. En cuanto a la simplificación que se introduce con dicha eliminación, basta con comparar las matrices [3.16] del Método Clásico con sus homólogas [4.67] del método propuesto, las [3.21] con las [4.73] o las [3.3] y [3.23] con las [4.77] y [4.78]. De igual forma, las matrices de conversión adquieren una configuración mucho más simplificada bajo la condición de inelombilidad, como puede apreciarse comparando la [3.27] con la [4.88], la [3.30] con la [4.91], la [3.33] con la [4.93] o las [3.36] y [3.37] con las [4.94].

12.8.- Condición cinemática de diafragma rígido.- En las estructuras espaciales en las que sea posible la adopción de hipótesis de diafragma rígido, que suponen un altísimo

porcentaje de las estructuras, es, no ya opcional este punto de partida, sino prácticamente obligado desde el punto de vista de la modelización, si ello no origina algún otro inconveniente, como pudiera ser un mal condicionamiento del sistema de ecuaciones. Pero, muy por el contrario, esta hipótesis, no solamente no empeora dicho condicionamiento, sino que lo mejora de forma decisiva, como ha podido verse en los dos capítulos de validación antes mencionados.

Esta hipótesis no solamente incluye a la de inelongabilidad, sino, además, expresa la igualdad de giros de los nudos del plano rígido alrededor el eje normal a él y una relación entre dichos giros y los desplazamientos de los nudos en las dos direcciones contenidas en dicho plano, relación que expresa la condición de inflexibilidad de la barra en el plano rígido al que pertenece. Así pues, puesto que dicha hipótesis, de forma similar a la de inelongabilidad, es holónoma y, por tanto, expresable algebraicamente, pueden introducirse en las ecuaciones constitutivas de la barra espacial estas condiciones de restricción cinemática y obtener, de esta forma, otra configuración de la Matriz de Rigidez del elemento así mismo mucho más simplificada, sobre todo para los casos habituales, como son los diafragmas horizontales en edificación, casos particulares, aparte de otros, para los que se han determinado las correspondientes matrices de rigidez y de conversión mostradas en el Capítulo 5. Compárense, p.e. las matrices de rigidez [3.16] con la [5.94], la [3.19] con la [5.96] o las matrices de conversión [3.28] con [5.98], la [3.30] con [5.104], o la [3.32] con [5.105].

12.9.- Sistema lineal de ecuaciones bajo condiciones homogéneas de restricción cinemática. Las condiciones de restricción cinemática introducidas en las matrices de barra obligan a añadir al sistema de ecuaciones de equilibrio que se obtienen por el ensamblaje de éstas otro sistema que describe la relación lineal que existe entre determinadas componentes de corrimiento como consecuencia de tales restricciones, obteniéndose, pues, un sistema de ecuaciones bajo condiciones de restricción. Como quedó patente en el Capítulo 6, este subsistema de restricciones se obtiene fácilmente mediante el correspondiente ensamblaje de los Vectores de Inelongabilidad [4.5] y [4.8] y de las Matrices de Diafragma Rígido [5.14], ensamblaje que da lugar a una matriz, Matriz de Restricciones \mathbf{R} que, junto con la matriz de rigidez \mathbf{M} obtenida por el ensamblaje de las matrices de los elementos, conforma el Sistema de Lagrange [6.34], método más idóneo para la determinación de las incógnitas de corrimiento y de las fuerzas generalizadas que han sido necesarias introducir en la estructura para conseguir que se cumplan las restricciones impuestas, Multiplicadores de Lagrange.

Evidentemente el sistema obtenido es de mayores dimensiones que el que se obtiene por el Método Clásico, puesto que en éste no se incluye el subsistema de restricciones \mathbf{R} y ello puede suponer una desventaja operativa en el método propuesto, aunque el cada vez más rápido desarrollo de los instrumentos computacionales hacen que este inconveniente tenga cada vez menos trascendencia. Pero, aunque esto no fuese así, es tal el grado de mejora que la adopción de tales hipótesis introduce en el condicionamiento del sistema lineal de ecuaciones, que hace totalmente aconsejable proceder en la forma que en este trabajo se propone, como queda demostrado en el Capítulo 7 de validación numérica.

En efecto, comparando las filas primeras y segundas de los Cuadros del 7.1 al 7.8, correspondientes al Método Clásico y al propuesto, respectivamente, las cuales, por comodidad, se reproducen a continuación

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij} .	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método Clásico sin restricciones	\mathbf{K}	18×18	902531	28.40 %	876
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_g^T \\ \mathbf{I}_g & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	29×29	3	9.75 %	27

Cuadro correspondiente al Modelo 1

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij} .	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método Clásico sin restricciones	\mathbf{K}	54×54	905063	13.58 %	6113
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_g^T \\ \mathbf{I}_g & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	87×87	4	4.83 %	267

Cuadro correspondiente al Modelo 2

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij} .	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método Clásico sin restricciones	\mathbf{K}	90×90	905063	8.64 %	16401
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_g^T \\ \mathbf{I}_g & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	145×145	4	3.09 %	741

Cuadro correspondiente al Modelo 3

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij}	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método Clásico sin restricciones	K	18×18	451066	42.59 %	642
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	27×27	8	13.03 %	129

Cuadro correspondiente al Modelo 4

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij}	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método Clásico sin restricciones	K	24×24	455063	26.39 %	526
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	37×37	4	8.77 %	66

Cuadro correspondiente al Modelo 5

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij}	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método Clásico sin restricciones	K	54×54	907594	13.79 %	756
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	87×87	8	4.08 %	168

Cuadro correspondiente al Modelo 6

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij}	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método Clásico sin restricciones	K	108×108	910125	8.44 %	2549
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	174×174	8	2.64 %	565

Cuadro correspondiente al Modelo 7

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij}	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método Clásico sin restricciones	K	960×960	910125	1.12 %	54512
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	1576×1576	24	0.35 %	26726

Cuadro correspondiente al Modelo 8

se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Las dimensiones del método propuesto son mayores que las del Método Clásico sin restricciones, aunque su diferencia va disminuyendo al aumentar el número de nudos de la estructura.
- En todos los modelos los elementos dominantes -mayor valor absoluto- de las matrices correspondientes al Método Clásico presentan un grado de magnitud (cerca de 10^6) muy superior a los correspondientes del método propuesto (muy cerca de 6), lo que hace que la matriz de aquél sea extremadamente sensible frente a pequeños cambios en los valores de dichos coeficientes o en el vector de términos independientes.
- Independientemente del número de plantas y vanos del sistema estructural, dichos elementos dominantes mantienen prácticamente el mismo valor, por lo que el grado de magnitud se mantiene prácticamente constante para cualquier tipo de estructura.*
- En todos ellos el número de elementos no nulos es mucho menor para el método propuesto que para el Método Clásico -en proporción aproximada de 1:3-, lo que conlleva una menor cantidad de almacenaje en el computador.
- El número de condición es, en todos los casos, netamente menor para el método propuesto que para el Método Clásico sin restricciones.
- Los resultados que se obtengan por ambos métodos, aún siendo diferentes debido a las diferentes hipótesis de partida, serían igualmente aceptables, siempre que la estructura real se corresponda con la modelización que expresan las figuras correspondientes, esto es, si las vigas no reciben forjado alguno, -para las figuras correspondientes a las estructuras espaciales, modelos (a).

Si, por el contrario, estos modelos corresponden a estructuras de edificación y las vigas soportan algún tipo de forjado, las modelizaciones más acertadas no serían las representadas en las figuras 7.1, 7.2 y 7.3 de los modelos planos ni los modelos (a) de los espaciales, sino aquéllas que contemplasen la colaboración de dicho forjado frente a la deformación axial de tales vigas. Pero la valoración numérica “exacta” de esta influencia sería prácticamente imposible de determinar, por lo que una aproximación aceptable puede ser el considerar inelongables a tales elementos, lo que obliga a añadir a los sistemas obtenidos por el Método Clásico -primeras filas de los cuadros- los subsistemas de inelongabilidad pertinen-

* Este valor depende del número de barras que concurren en un mismo nudo (aparte de las rigideces de dichas barras, que en los modelos estudiados se han supuesto todas iguales).

tes, con lo que se obtiene la matriz de Lagrange expresada en las últimas filas de dichos cuadros -Método Clásico bajo condiciones de inelongabilidad de vigas. Comparemos, pues, las matrices indicadas en las filas segundas con las expuestas en las terceras de dichos cuadros, las cuales se reproducen a continuación

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij} .	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_g^T \\ \mathbf{I}_g & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	29×29	3	9.75 %	27
Método Clásico bajo condiciones de Inelongabilidad de vigas	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_v & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	23×23	902531	21.17 %	$7.68 \times 10^{11**}$

Cuadro correspondiente al Modelo 1

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij} .	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_g^T \\ \mathbf{I}_g & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	87×87	4	4.83 %	267
Método Clásico bajo condiciones de Inelongabilidad de vigas	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_v & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	69×69	905063	9.58 %	$8.04 \times 10^{11**}$

Cuadro correspondiente al Modelo 2

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij} .	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_g^T \\ \mathbf{I}_g & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	145×145	4	3.09 %	741
Método Clásico bajo condiciones de Inelongabilidad de vigas	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_v & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	115×115	905063	6.05 %	$8.15 \times 10^{11**}$

Cuadro correspondiente al Modelo 3

** Véase 2ª nota al pie de la página 7-4.

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij} .	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	27×27	8	13.03 %	129
Método Clásico bajo condiciones de Diafragma rígido	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	24×24	451066	28.82 %	$3.67 \times 10^{11**}$

Cuadro correspondiente al Modelo 4

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij} .	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	37×37	4	8.77 %	66
Método Clásico bajo condiciones de Diafragma rígido	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	33×33	455063	18.00 %	$8.21 \times 10^{11**}$

Cuadro correspondiente al Modelo 5

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij} .	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	87×87	8	4.08 %	168
Método Clásico bajo condiciones de Diafragma rígido	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	78×78	907594	8.58 %	$1.85 \times 10^{12**}$

Cuadro correspondiente al Modelo 6

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij} .	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	174×174	8	2.64 %	565
Método Clásico bajo condiciones de Diafragma rígido	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	156×156	910125	5.03 %	$1.86 \times 10^{12**}$

Cuadro correspondiente al Modelo 7

** Véase 2ª nota al pie de la página 7-4.

Método de cálculo	Matriz de coeficientes	Dimensiones del sistema	Máx.Abs. k_{ij} .	Elementos no nulos (%)	Nº de condición
Método propuesto	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I}_p^T & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	1576×1576	24	0.35 %	26726
Método Clásico bajo condiciones de Diafragma rígido	$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	1416×1416	910125	0.63 %	$3.03 \times 10^{12**}$

Cuadro correspondiente al Modelo 8

Del análisis detallado de los cuadros anteriores se desprenden las siguientes conclusiones:

- Las dimensiones de las matrices correspondientes a los modelos planos son las mismas para uno y otro método, mientras que para los modelos espaciales son algo mayores en el método propuesto que en el Clásico, puesto que en éste no existen ecuaciones de inelongabilidad debido a pilares.
- El orden de magnitud de los elementos dominantes* en el Método Clásico, tanto en estructuras planas como en las espaciales, está muy cerca de 6 y, puesto que los elementos correspondientes a la matriz de restricciones \mathbf{I}_v son magnitudes de orden menos uno -por corresponder a los cosenos directores- es decir, son magnitudes muy dispares, estas matrices serán muy sensibles ante cualquier alteración de sus elementos o de los términos independientes de los sistemas lineales correspondientes, como se comprobó en el epígrafe 2.3, de ahí el enorme deterioro que han sufrido sus respectivos condicionamientos. Sin embargo los números del sistema propuesto son muy parecidos.
- El número de elementos no nulos es inferior en el método propuesto que en el Clásico en la proporción aproximada de 1:2, lo que redundará en una menor cantidad de almacenaje en el computador.
- El número de condición de la matriz de coeficientes correspondiente al Método Clásico ha sufrido un aumento tan espectacular que hace prohibitiva la aceptación de los resultados que devuelva la resolución del sistema de ecuaciones, aún para las estructuras más simples, tanto planas como espaciales. Tan es así que, en todos los casos, el programa Matemática con el que se han analizado los modelos, emi-

* Este valor depende del número de barras que concurren en un mismo nudo (aparte de las rigideces de dichas barras, que en los modelos estudiados se han supuesto todas iguales).

te un mensaje advirtiendo que dichos resultados pueden contener importantes errores debido al mal condicionamiento de la matriz de coeficientes*.

12.10.- Condiciones cinemáticas de contorno.- Tal y como se ha comentado reiteradamente, la manera más sencilla y elegante para el tratamiento de las condiciones cinemáticas de contorno es el Método de los Multiplicadores de Lagrange; pero, como se mostró en el Cuadro 7.9, el Sistema de Lagrange que se obtiene utilizando las matrices de rigidez del Método Clásico tiene un número de condición tan elevado que hace prohibitivo el procedimiento, por lo que se hace necesaria una determinada manipulación de la Matriz de Lagrange, tal y como se expuso en el epígrafe 11.3, de tal forma que se obtenga otro sistema equivalente [11.12] con un condicionamiento aceptable; sin embargo el condicionamiento que presenta el mismo sistema, pero utilizando las matrices que en esta Tesis se proponen, es perfectamente aceptable y no precisa de manipulación alguna, como muestra la Gráfica 11.3.

12.11.- Estructuras de gran altura.- De la misma forma que, como se comentó anteriormente, no sería admisible la hipótesis de elongabilidad de una barra que esté embebida en un diafragma rígido, así tampoco debe ser aceptable la de inelongabilidad de los pilares pertenecientes a edificios independientemente de su altura. Como puede comprobarse en los cuadros anteriormente expuestos, la consideración de inelongabilidad de los pilares trae como consecuencia una indiscutible ventaja del método propuesto frente al Método Clásico desde el punto de vista del número de elementos no nulos de las matrices y, sobretodo, de su condicionamiento; pero es indudable que dicho procedimiento dejará de ser válido a partir de unos determinados valores de las deformaciones axiales de los soportes, es decir, a partir de un determinado número de plantas en estructuras de edificación. La postura generalmente admitida es que puede aceptarse dicha inelongabilidad para edificios de pequeña y mediana altura, esto es, para quince plantas como máximo. A partir de esta altura, la ventaja operativa mencionada se contrapone a la modelización y siempre quedará la duda de si tal ventaja compensa el error en el modelo, es decir, si los resultados que se obtengan pueden ser aceptables.

El modelo más acertado será, evidentemente, la consideración de elongabilidad de todos los pilares, pero no será éste el que proporcione un sistema mejor condicionado. En

* Véase nota al pie de la página 7-4.

efecto, como se mostró en la última fila del Cuadro 7.10, en donde la matriz de rigidez $\bar{\mathbf{M}}$ proviene del ensamblaje mixto de las matrices de rigidez de vigas propuestas en este estudio y los de pilares correspondientes a las matrices de rigidez tradicionales, el número de condición de la matriz del Sistema de Lagrange obtenida, aunque inferior en dos órdenes de magnitud al correspondiente al Método Clásico (tercera fila de dicho cuadro), es de un valor tan elevado que es totalmente inaceptable debido a que las soluciones del sistema pueden contener importantes errores. En buena lógica, una forma de mejorar este condicionamiento para estructuras calificadas como de gran altura sería considerar como inelongables sólo a los pilares pertenecientes a las últimas quince plantas, mientras que los pilares correspondientes al resto de las plantas inferiores considerarlos elongables, es decir, proceder al ensamblaje de la matriz de rigidez $\bar{\mathbf{M}}$ utilizando las matrices de pilares del método propuesto, matrices [4.68], [4.69] o [4.71], según los casos, para las quince plantas superiores y las del Método Clásico [3.18] para el resto de pilares. Aunque esto mejorará el número de condición, el condicionamiento del sistema resultante puede ser todavía inadmisibles, por lo que sería necesario algún procedimiento que solvente este inconveniente*, lo que se consigue mediante una determinada manipulación de la matriz del sistema a partir de las Matrices de Transformación que se estudiaron en los capítulos 8, 9 y 10 aplicadas a los Sistemas de Lagrange.

12.12.- Transformaciones en los Sistemas de Lagrange.- En el Capítulo 8 pudo comprobarse que existe una forma fácil de reducir las dimensiones de un sistema lineal de ecuaciones a partir de una matriz, Matriz de Transformación, que puede obtenerse cómodamente a partir de un determinado ensamblaje. Para ello, dado un sistema genérico de ecuaciones, pueden elegirse un conjunto cualquiera de ellas y, a partir de sus coeficientes, ensamblar la pertinente Matriz de Transformación en la forma indicada en el epígrafe 8.3.1.

A lo largo de toda esta investigación se ha visto que el mal condicionamiento proviene, entre otros motivos, de la disparidad existente entre los valores máximos y mínimos de los coeficientes de la matriz en valor absoluto; por lo tanto, si se elige el conjunto de ecuaciones que contengan los menores valores absolutos y, a partir de sus coeficientes, se ensambla dicha Matriz de Transformación, ésta conseguirá eliminar dichos valores mínimos en el sistema original, y, así, no solamente reducirá sus dimensiones, sino que, además, me-

* "...cuando se necesita resolver un sistema lineal $\mathbf{A}\mathbf{u}=\mathbf{b}$, siendo \mathbf{A} una matriz con un número de condición elevado, se hace necesario utilizar un **precondicionador**." (51, apartado 3.2).

jorará su condicionamiento*. Sin embargo, existe otro método más inmediato para conseguir la homogeneidad de los valores absolutos de los coeficientes, que no es más que la multiplicación de las ecuaciones con menores valores de sus coeficientes por un apropiado número, que puede ser el mayor de los coeficientes de las demás ecuaciones, como se comentó en el epígrafe 11.3, donde pudo comprobarse, por un lado, cómo es imprescindible este tipo de preconditionador para el Método Clásico y, por otro, que es totalmente innecesario para el método propuesto por cuanto en éste no existe riesgo alguno de mal condicionamiento. Este elemental procedimiento consigue mejorar el número de condición, pero no disminuye las dimensiones del sistema; por ello puede ser de aplicación cuando sea muy pequeño (frente al total de ecuaciones) el número de ellas cuyos elementos son muy dispares respecto al resto de elementos, circunstancia que suele darse para las condiciones cinemáticas de contorno. De esta forma tan trivial se consigue el objetivo propuesto sin necesidad del ensamblaje de la Matriz de Transformación que elimine las ecuaciones de restricción impuestas por el contorno. Pero, puesto que, en general, el condicionamiento de una matriz también depende de sus dimensiones, para las condiciones de inelongabilidad y de diafragma rígido que nos ocupan será mucho más conveniente la determinación de la Matriz de Transformación pertinente, la cual consigue alcanzar el doble objetivo de disminución de dimensiones y mejora del condicionamiento.

Como se pudo ver en los Capítulos 9 y 10, para aplicar este procedimiento en determinadas estructuras que presentan ciertas peculiaridades, como son los entramados, tanto planos como espaciales, existe una forma más simple de conseguir la Matriz de Transformación que la general expuesta en el epígrafe 8.3.1. Con estas matrices se consiguen determinar las diferentes configuraciones de las matrices de coeficientes que aparecen en las terceras columnas de los cuadros expuestos en el Capítulo 11. A la vista de ellos puede conjeturarse lo siguiente:

- Por simple que sea la estructura e independientemente de que se trate de un sistema plano o espacial, el orden de magnitud del número de condición de la Matriz de Lagrange correspondiente al Método Clásico, se mantiene en un valor muy cercano a 10^{12} , lo que hace inviable el Método de los Multiplicadores de Lagrange si se utilizan las tradicionales matrices de rigidez para proceder al ensamblaje de la matriz de rigidez **K**.

* Esto solamente será posible si, dentro del conjunto elegido, dichos coeficientes menores son de parecida magnitud, por lo que, en general, no será de aplicación para cualquier sistema de ecuaciones.

- En el método propuesto, para toda estructura, tanto plana como espacial, no existe riesgo alguno de mal condicionamiento de la Matriz de Lagrange.
- En todos los casos, tanto para el Método Clásico como para el propuesto, a medida que se van eliminando los subsistemas de restricción, además de ir disminuyendo las dimensiones éste y aumentando el número de elementos no nulos, va mejorando el condicionamiento de la matriz resultante, consiguiéndose el mejor condicionamiento al eliminar todas las ecuaciones de restricción del sistema original de Lagrange, aunque en todos los casos, el número de condición de la matriz del método propuesto es muy inferior al correspondiente al Método Clásico.
- Sin embargo, al proceder a la eliminación de las incógnitas correspondientes a los Multiplicadores de Lagrange, el condicionamiento en el método propuesto se va deteriorando para todos los modelos y este deterioro aumenta a medida que se van eliminando incógnitas, mientras que en el Método Propuesto no se mantiene esta pauta y su variación es fluctuante, según el modelo.
- Consecuentemente con lo anterior, la eliminación de todas las incógnitas de Multiplicadores de Lagrange que, como se sabe, no es más que el Método de las Transformaciones, dará lugar a un sistema de menores dimensiones pero peor condicionado en el método propuesto, a lo que hay que añadir la imposibilidad de calcular de forma directa los valores de los Multiplicadores de Lagrange, algunos de ellos imprescindibles para el análisis y cálculo de la estructura en estudio.
- En esta última configuración, que corresponde a las dos últimas filas de los cuadros del Capítulo 11, los números de condición de los dos procedimientos en estudio son idénticos, pues la matriz del Método Clásico no es más que la correspondiente a la del método propuesto multiplicada por el valor de la rigidez $(EI_y)_0$ de la barra de referencia elegida para la creación del parámetro r que se definió en [4.30], por lo que su número de condición será idéntico.

De los dos tipos de estructuras, es especialmente interesante la correspondiente a los sistemas estructurales espaciales por dos motivos: el primero y fundamental es que el análisis de estructuras de edificación es mucho más pertinente -desde el punto de vista de la modelización- acometerlo a partir del modelo espacial, que aunque dará lugar a unas mayores dimensiones de los sistemas de ecuaciones, tal inconveniente va teniendo cada vez menor incidencia, dados los importantes avances que continuamente se dan en la informática, y, segundo, que la Matriz de Transformación T_{pD} debida a las condiciones de inelongabilidad

de los pilares y a las condiciones de diafragma rígido eliminará un elevado porcentaje de ecuaciones e incógnitas independientes o esclavas, esto es, una por cada pilar y $3(N-1)$ por cada plano rígido, siendo N el número de nudos de cada uno dichos planos, como se puede observar en los cuadros incluidos en el Capítulo 11 correspondientes a este tipo estructural.

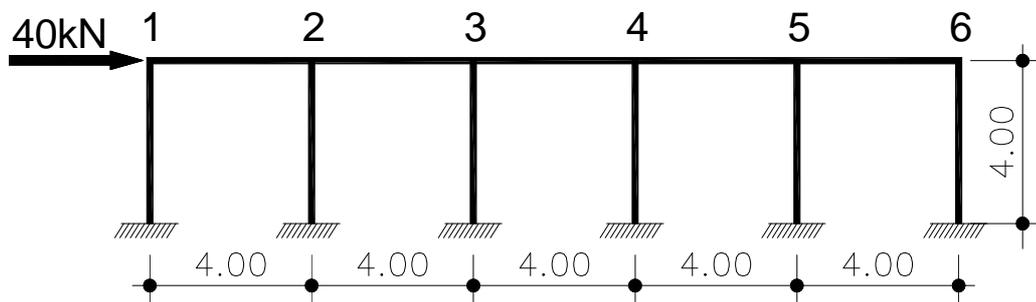
En definitiva puede afirmarse que, mientras en el Método Clásico es imprescindible la eliminación de las ecuaciones de restricción del Sistema de Lagrange con objeto de hacer desaparecer el mal condicionamiento de la matriz, en el propuesto esta eliminación es sólo opcional, excepción hecha para las estructuras de gran altura, para la cuales, al ser necesario utilizar las matrices de rigidez de barra tradicionales para los pilares, excepto en las últimas quince plantas, el condicionamiento es inadmisibile debido, precisamente, a dichas matrices; por lo tanto será imprescindible la eliminación de las ecuaciones pertinentes con objeto de conseguir un condicionamiento aceptable, como bien se expresa en la fila 5ª y 7ª del Cuadro 11.10.

12.13.- Conclusión.- Del análisis detallado de los cuadros de validación incluidos en los Capítulos 7 y 11, es inevitablemente obligado concluir que el método propuesto presenta unas incuestionables ventajas frente al Método Tradicional Directo de la Rigidez.

12.14.- Líneas de investigación.- Como se pudo comprobar en los análisis de la bibliografía consultada, diversos autores, en los casos en los que, debido a las particulares características geométricas de la estructura lo permitían, utilizaban la matriz de rigidez del elemento bajo condiciones de inelongabilidad para el análisis de Pandeo, cálculo dinámico y cálculo en fase plástica. Pero como quiera que dicha matriz contempla sólo dos grados de libertad por extremo del elemento y, por ello, no es válida para una estructura de tipo genérico ni, naturalmente, para aplicarla a sistemas estructurales espaciales, se cree muy conveniente aplicar las herramientas que sustentan el método propuesto en esta investigación -esto es, la matriz de la barra inelongable y la matriz de la barra perteneciente a un diafragma rígido- para el análisis del pandeo, cálculo dinámico y cálculo en fase plástica, extremo este último de gran interés en la actualidad, por cuanto que los resultados que se obtienen a partir de esta premisa suponen un aprovechamiento no desdeñable de las condiciones resistentes de los materiales estructurales.

FINIS CORONAT OPUS.

ANEXO A: Modelo 1



Pórtico de nudos rígidos formado por barras coplanarias de 5 vanos y 1 planta

MODELO 1

■ A.1 Nomenclatura y simbología. - Llamaremos

- E: módulo de Young
- L: longitud de la barra
- b: base de su sección transversal
- h_p : canto del pilar
- h_v : canto de la viga
- A: área de la sección transversal
- I_z' : momento de inercia de las sección transversal respecto al eje normal al plano de la estructura
- α : ángulo de la directriz de la barra, respecto al eje global OX, en radianes
- Para las matrices correspondientes al Método Clásico se utilizará la letra mayúscula **K**, mientras que para el método propuesto se utilizará la letra mayúscula **M**.
- Los subíndices y superíndices (p) y (v) hacen referencia a pilares y vigas, respectivamente.

■ A.2 Submatrices de rigidez de pilares correspondientes al Método Matricial Clásico. - Utilizaremos las matrices de barra dadas por [3.21] con el subíndice p indicando que corresponden a los pilares:

- **Datos de pilares:**(Kilonewton, metros y radianes)

$$E = 2 * 10^7; L = 4; b = .3; h_p = .3; A = b h_p; I_z' = \frac{b h_p^3}{12}; \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{K}_{ip} = E \begin{pmatrix} \frac{A L^2 \cos[\alpha]^2 + 12 I_z' \sin[\alpha]^2}{L^3} & \frac{(-12 I_z' + A L^2) \cos[\alpha] \sin[\alpha]}{L^3} & -\frac{6 I_z' \sin[\alpha]}{L^2} \\ \frac{(-12 I_z' + A L^2) \cos[\alpha] \sin[\alpha]}{L^3} & \frac{12 I_z' \cos[\alpha]^2 + A L^2 \sin[\alpha]^2}{L^3} & \frac{6 I_z' \cos[\alpha]}{L^2} \\ -\frac{6 I_z' \sin[\alpha]}{L^2} & \frac{6 I_z' \cos[\alpha]}{L^2} & \frac{4 I_z'}{L} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{jp} = E \begin{pmatrix} -\frac{A L^2 \cos[\alpha]^2 + 12 I_z' \sin[\alpha]^2}{L^3} & \frac{(12 I_z' - A L^2) \cos[\alpha] \sin[\alpha]}{L^3} & -\frac{6 I_z' \sin[\alpha]}{L^2} \\ \frac{(12 I_z' - A L^2) \cos[\alpha] \sin[\alpha]}{L^3} & -\frac{12 I_z' \cos[\alpha]^2 + A L^2 \sin[\alpha]^2}{L^3} & \frac{6 I_z' \cos[\alpha]}{L^2} \\ \frac{6 I_z' \sin[\alpha]}{L^2} & -\frac{6 I_z' \cos[\alpha]}{L^2} & \frac{2 I_z'}{L} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{jp} = E \begin{pmatrix} -\frac{A L^2 \cos[\alpha]^2 + 12 I_z' \sin[\alpha]^2}{L^3} & \frac{(12 I_z' - A L^2) \cos[\alpha] \sin[\alpha]}{L^3} & \frac{6 I_z' \sin[\alpha]}{L^2} \\ \frac{(12 I_z' - A L^2) \cos[\alpha] \sin[\alpha]}{L^3} & -\frac{12 I_z' \cos[\alpha]^2 + A L^2 \sin[\alpha]^2}{L^3} & -\frac{6 I_z' \cos[\alpha]}{L^2} \\ -\frac{6 I_z' \sin[\alpha]}{L^2} & \frac{6 I_z' \cos[\alpha]}{L^2} & \frac{2 I_z'}{L} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{jp} = E \begin{pmatrix} \frac{A L^2 \cos[\alpha]^2 + 12 I_z' \sin[\alpha]^2}{L^3} & \frac{(-12 I_z' + A L^2) \cos[\alpha] \sin[\alpha]}{L^3} & \frac{6 I_z' \sin[\alpha]}{L^2} \\ \frac{(-12 I_z' + A L^2) \cos[\alpha] \sin[\alpha]}{L^3} & \frac{12 I_z' \cos[\alpha]^2 + A L^2 \sin[\alpha]^2}{L^3} & -\frac{6 I_z' \cos[\alpha]}{L^2} \\ \frac{6 I_z' \sin[\alpha]}{L^2} & -\frac{6 I_z' \cos[\alpha]}{L^2} & \frac{4 I_z'}{L} \end{pmatrix}$$

■ A.3 Submatrices de rigidez de vigas correspondientes al Método Matricial Clásico. - Para los dinteles, de forma análoga se tendrá:

■ **Datos de vigas:** Los cantos de la vigas vienen en función de los cantos de los pilares a través de la variable x, que nos permitirá estudiar la variación del número de condición en función de esta variable.

$$L = 4; b = .3; h_v = x h_p; A = b h_v; I_z' = \frac{b h_v^3}{12}; \alpha = 0;$$

$$\mathbf{K}_{iiv} = E \begin{pmatrix} \frac{A L^2 \cos[\alpha]^2 + 12 I_z' \sin[\alpha]^2}{L^3} & \frac{(-12 I_z' + A L^2) \cos[\alpha] \sin[\alpha]}{L^3} & -\frac{6 I_z' \sin[\alpha]}{L^2} \\ \frac{(-12 I_z' + A L^2) \cos[\alpha] \sin[\alpha]}{L^3} & \frac{12 I_z' \cos[\alpha]^2 + A L^2 \sin[\alpha]^2}{L^3} & \frac{6 I_z' \cos[\alpha]}{L^2} \\ -\frac{6 I_z' \sin[\alpha]}{L^2} & \frac{6 I_z' \cos[\alpha]}{L^2} & \frac{4 I_z'}{L} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{ijv} = E \begin{pmatrix} -\frac{A L^2 \cos[\alpha]^2 + 12 I_z' \sin[\alpha]^2}{L^3} & \frac{(12 I_z' - A L^2) \cos[\alpha] \sin[\alpha]}{L^3} & -\frac{6 I_z' \sin[\alpha]}{L^2} \\ \frac{(12 I_z' - A L^2) \cos[\alpha] \sin[\alpha]}{L^3} & -\frac{12 I_z' \cos[\alpha]^2 + A L^2 \sin[\alpha]^2}{L^3} & \frac{6 I_z' \cos[\alpha]}{L^2} \\ \frac{6 I_z' \sin[\alpha]}{L^2} & -\frac{6 I_z' \cos[\alpha]}{L^2} & \frac{2 I_z'}{L} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{jiv} = E \begin{pmatrix} -\frac{A L^2 \cos[\alpha]^2 + 12 I_z' \sin[\alpha]^2}{L^3} & \frac{(12 I_z' - A L^2) \cos[\alpha] \sin[\alpha]}{L^3} & \frac{6 I_z' \sin[\alpha]}{L^2} \\ \frac{(12 I_z' - A L^2) \cos[\alpha] \sin[\alpha]}{L^3} & -\frac{12 I_z' \cos[\alpha]^2 + A L^2 \sin[\alpha]^2}{L^3} & -\frac{6 I_z' \cos[\alpha]}{L^2} \\ -\frac{6 I_z' \sin[\alpha]}{L^2} & \frac{6 I_z' \cos[\alpha]}{L^2} & \frac{2 I_z'}{L} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{jiv} = E \begin{pmatrix} \frac{A L^2 \cos[\alpha]^2 + 12 I_z' \sin[\alpha]^2}{L^3} & \frac{(-12 I_z' + A L^2) \cos[\alpha] \sin[\alpha]}{L^3} & \frac{6 I_z' \sin[\alpha]}{L^2} \\ \frac{(-12 I_z' + A L^2) \cos[\alpha] \sin[\alpha]}{L^3} & \frac{12 I_z' \cos[\alpha]^2 + A L^2 \sin[\alpha]^2}{L^3} & -\frac{6 I_z' \cos[\alpha]}{L^2} \\ \frac{6 I_z' \sin[\alpha]}{L^2} & -\frac{6 I_z' \cos[\alpha]}{L^2} & \frac{4 I_z'}{L} \end{pmatrix}$$

■ **A.4 Submatrices de rigidez de pilares correspondientes al método propuesto.-** Puesto que se trata de un entramado plano, pueden utilizarse cualesquiera de la matrices de rigidez expuestas en el epígrafe 4.2.7 esto es las [4.77] o las [4.78].

■ **Datos de pilares:** Se crea el parámetro r tomando el valor de la inercia de los pilares I_o como valor de referencia:

$$L = 4; b = .3; h_p = .3; I_o = I_z' = \frac{b h_p^3}{12}; r = \frac{I_z'}{I_o};$$

$$\mathbf{M}_{iip} = \frac{6r}{L^3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -L \\ 0 & 0 & 0 \\ -L & 0 & \frac{2L^2}{3} \end{pmatrix}; \mathbf{M}_{ijp} = \frac{6r}{L^3} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -L \\ 0 & 0 & 0 \\ L & 0 & \frac{L^2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{jip} = \frac{6r}{L^3} \begin{pmatrix} -2 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 \\ -L & 0 & \frac{L^2}{3} \end{pmatrix}; \mathbf{M}_{jip} = \frac{6r}{L^3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 \\ L & 0 & \frac{2L^2}{3} \end{pmatrix}$$

■ **Vectores de restricción cinemática debido a la inelongabilidad de pilares.-** Utilizando la expresión [4.5] para estructura de barras coplanarias, el vector de inelongabilidad correspondiente a los pilares será, llamando \mathbf{I}_p al vector correspondiente al extremo i, y \mathbf{F}_p al del extremo j:

$$\mathbf{I}_p = (0 \quad -1 \quad 0); \mathbf{F}_p = -\mathbf{I}_p$$

Obsérvese que, aunque el extremo i del pilar es su extremo inferior y, por tanto, $\cos YX'=1$, para el ensamblaje de la matriz de inelongabilidad viene afectado con el signo menos con objeto de que el Multiplicador de Lagrange asociado a esta restricción, que como se sabe es el axil, sea positivo si dicho axil es de tracción y negativo si es de compresión, como es costumbre en los signos de los axiles de barras.

■ **A.5. Submatrices de rigidez de vigas correspondientes al método propuesto.**- Aunque la matriz correspondiente a vigas dada por [4.78] no es simétrica, la utilizaremos, primero por ser más difusa y, segundo, porque, como se demostrará con este ejercicio y los que siguen, el sistema mejor condicionado no tiene por qué ser simétrico.

■ **Datos de vigas:**

$$L = 4; b = .3; h_v = x h_p; Iz' = \frac{b h_v^3}{12}; r = \frac{Iz'}{I_o}$$

$$\mathbf{M}_{iiv} = \frac{6r}{L^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & \frac{2L^2}{3} \end{pmatrix}; \mathbf{M}_{ijv} = \frac{6r}{L^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{jiv} = \frac{6r}{L^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{3} \end{pmatrix}; \mathbf{M}_{jjv} = \frac{6r}{L^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L \\ 0 & 0 & \frac{2L^2}{3} \end{pmatrix}$$

■ **Vectores de restricción cinemática debido a la inelongabilidad de vigas.**- De forma análoga

$$\mathbf{I}_v = (-1 \ 0 \ 0); \mathbf{F}_v = -\mathbf{I}_v$$

Puesto que se repiten nudos en los que las barras que confluyen en ellos tienen las mismas características, creamos las submatrices de Rigideces de nudos:

\mathbf{K}_{ei} : Esquina Izquierda, \mathbf{K}_{ed} : Esquina Derecha, \mathbf{K}_{ar} : Arriba

Las submatrices de rigidez de la estructura correspondientes a la diagonal principal estarán formadas, para el método tradicional, por :

$$\mathbf{K}_{ei} = \mathbf{K}_{jip} + \mathbf{K}_{iiv}; \mathbf{K}_{ed} = \mathbf{K}_{jip} + \mathbf{K}_{jiv}; \mathbf{K}_{ar} = \mathbf{K}_{jip} + \mathbf{K}_{jiv} + \mathbf{K}_{iiv}$$

$$\mathbf{N}_{3 \times 3} = \text{ZeroMatrix}[3];$$

en donde se ha creado la matrix nula $\mathbf{N}_{3 \times 3}$, de las mismas dimensiones que las demás para el adecuado ensamblaje. Para el método propuesto las submatrices de la diagonal principal de la matriz de rigidez de la estructura serán, de forma homóloga:

$$\mathbf{M}_{ei} = \mathbf{M}_{jip} + \mathbf{M}_{iiv}; \mathbf{M}_{ed} = \mathbf{M}_{jip} + \mathbf{M}_{jiv}; \mathbf{M}_{ar} = \mathbf{M}_{jip} + \mathbf{M}_{jiv} + \mathbf{M}_{iiv}$$

■ **A.6. Matrices de Rigidez de la estructura.**- Puesto que se tienen seis nudos, se ha de partir de un arreglo de 6x6 para el ensamblaje de las submatrices (los subíndices indican el número de nudos de la estructura):

■ **Método Clásico ($K_{6 \times 6}$).**-

$$K_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} K_{ei} & K_{ijv} & N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} \\ K_{jiv} & K_{ar} & K_{ijv} & N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} \\ N_{3 \times 3} & K_{jiv} & K_{ar} & K_{ijv} & N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} \\ N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} & K_{jiv} & K_{ar} & K_{ijv} & N_{3 \times 3} \\ N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} & K_{jiv} & K_{ar} & K_{ijv} \\ N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} & K_{jiv} & K_{ed} \end{pmatrix}$$

■ **Método propuesto ($M_{6 \times 6}$).**-

$$M_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} M_{ei} & M_{ijv} & N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} \\ M_{jiv} & M_{ar} & M_{ijv} & N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} \\ N_{3 \times 3} & M_{jiv} & M_{ar} & M_{ijv} & N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} \\ N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} & M_{jiv} & M_{ar} & M_{ijv} & N_{3 \times 3} \\ N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} & M_{jiv} & M_{ar} & M_{ijv} \\ N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} & M_{jiv} & M_{ed} \end{pmatrix}$$

Print[Dimensiones de $K_{6 \times 6}$ = Dimensiones de $K_{6 \times 6}$ = ,Dimensions[$K_{6 \times 6}$]]

Dimensiones de $K_{6 \times 6}$ =Dimensiones de $M_{6 \times 6}$ = { 18,18 }

en donde, con la última orden, se han pedido las dimensiones de la matriz de rigidez, para su utilización posterior.

■ **Elementos de las matrices.**- Con la orden siguiente el programa nos muestra el desarrollo de las matrices de rigidez de la estructura en función de la variable x. Para su comparación y, por motivos de espacio, se muestran solamente las 6 primeras columnas del Método Clásico y las 18 del Método propuesto.

■ **Método Clásico:**

MatrixForm[$K_{6 \times 6}$]

2531.25 + 450000. x	0	5062.5	-450000. x	0	0
0	450000. + 2531.25 x ³	5062.5 x ³	0	-2531.25 x ³	5062.5 x ³
5062.5	5062.5 x ³	13500. + 13500. x ³	0	-5062.5 x ³	6750. x ³
-450000. x	0	0	2531.25 + 900000. x	0	5062.5
0	-2531.25 x ³	-5062.5 x ³	0	450000. + 5062.5 x ³	0. x ³
0	5062.5 x ³	6750. x ³	5062.5	0. x ³	13500. + 27000. x ³
0	0	0	-450000. x	0	0
0	0	0	0	-2531.25 x ³	-5062.5 x ³
0	0	0	0	5062.5 x ³	6750. x ³
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

■ **Método propuesto:**

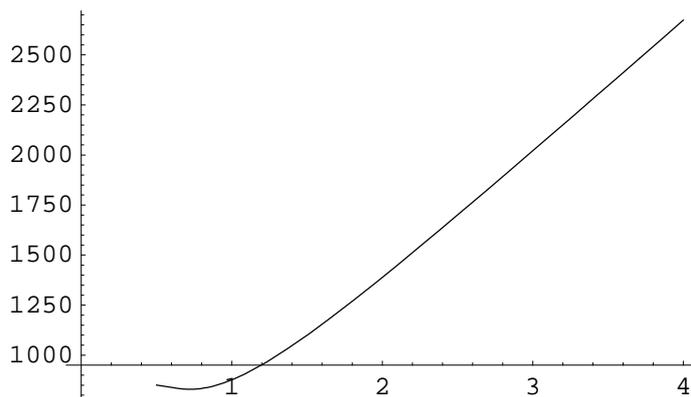
MatrixForm[$M_{6 \times 6}$]

0.1875	0	0.375	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$0.375x^3$	0	0	$0.375x^3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.375	0	$1. + 1. x^3$	0	0	$0.5x^3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.1875	0	0.375	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$-0.375x^3$	0	0	$0. x^3$	0	0	$0.375x^3$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$0.5x^3$	0.375	0	$1. + 2. x^3$	0	0	$0.5x^3$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.1875	0	0.375	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$-0.375x^3$	0	0	$0. x^3$	0	0	$0.375x^3$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$0.5x^3$	0.375	0	$1. + 2. x^3$	0	0	$0.5x^3$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1875	0	0.375	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$-0.375x^3$	0	0	$0. x^3$	0	0	$0.375x^3$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$0.5x^3$	0.375	0	$1. + 2. x^3$	0	0	$0.5x^3$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1875	0	0.375	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-0.375x^3$	0	0	$0. x^3$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$0.5x^3$	0.375	0	$1. + 2. x^3$	0	$0.5x^3$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1875	0	0.375
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-0.375x^3$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$0.5x^3$	0.375
														0.375	$0.1. + 1. x^3$

■ **Curva de condicionamiento.-** Se introduce la orden que nos devuelve la curva que muestra los valores (eje de ordenadas) del número de condición de la matriz correspondiente al Método Clásico en función de la variable x (eje de abscisas) cuando ésta varía de 0.5 hasta 4. Dichos valores están calculados según la norma matricial 2. Evidentemente la correspondiente a la del método propuesto no ha lugar, pues el sistema con esta matriz no tiene solución por ser singular la matriz (obsérvese que existen en ella algunas columnas nulas).

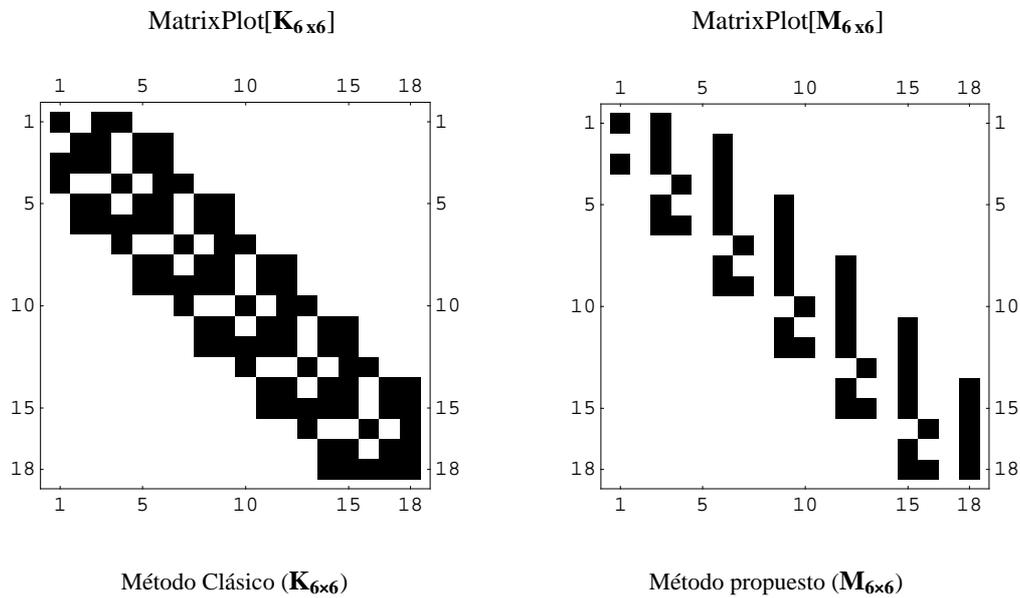
```

autovalores[lon_] := N[Eigenvalues[ $K_{6 \times 6} / . x \rightarrow lon$ ]]
ratio1[lon_] := Block[{a}, a = autovalores[lon] // Abs; Max[a]/Min[a]]
Plot[ratio1[xx], {xx, 0.5, 4}]
    
```



Para $x=1$, es decir, si todas las barras tienen la misma sección, se obtienen los siguientes gráficos, valores máximos de los elementos de las matrices, valores del número de condición, del determinante y elementos no nulos (%) de la Matriz

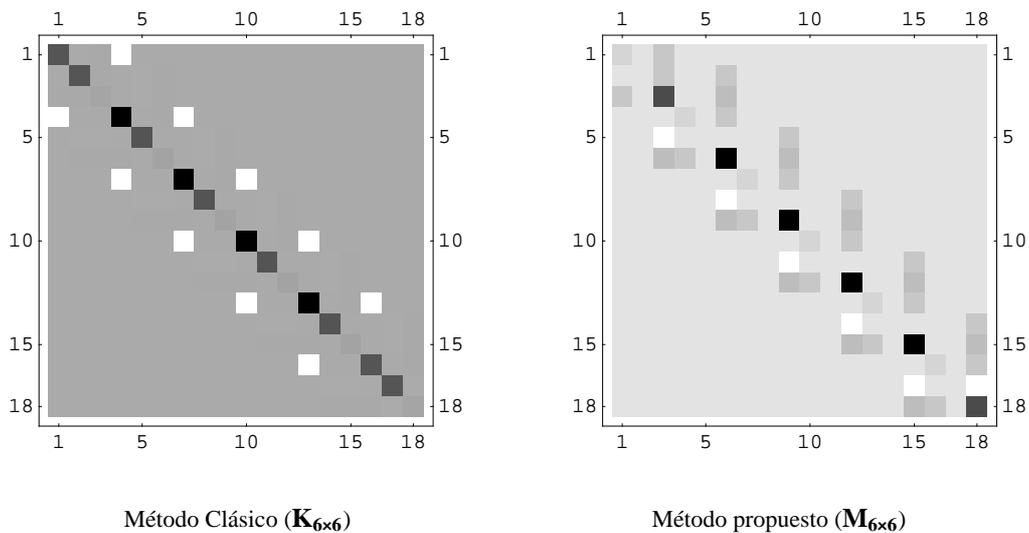
▪ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos no nulos.**- La siguiente orden nos muestra en esquema la distribución de los elementos no nulos de la matriz de rigidez de la estructura correspondiente a cada una de los métodos:



en donde puede observarse cómo ambas son matrices con el mismo ancho de banda y cómo la segunda es más difusa que la primera. Véase también cómo no existe simetría en la segunda matriz debido a las matrices de rigidez utilizada para las vigas.

▪ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos dominantes.**- La siguiente orden nos muestra la distribución de los elementos en función de sus valores numéricos, marcando con un recuadro negro los elementos dominante, en tono de grises los valores menores y en blanco los elementos negativos.

```
MatrixPlot[ $\mathbf{K}_{6 \times 6}$ , ColorFunction -> (GrayLevel[1 - #] &), ColorFunctionScaling -> True]
MatrixPlot[ $\mathbf{M}_{6 \times 6}$ , ColorFunction -> (GrayLevel[1 - #] &), ColorFunctionScaling -> True]
```



Si se comparan estas gráficas con las respectivas anteriores, puede observarse cómo en la correspondiente al Método Clásico existen elementos que desaparecen en esta última gráfica. Por ejemplo, para $x=1$, el

elemento 1,3 (y su simétrico), de valor 5062.5, no aparece representado debido a su pequeño valor relativo respecto al valor más elevado (elemento 4,4), cuyo valor es de 902531. Lo mismo ocurre si su signo es negativo. Véase también cómo los valores intermedios, correspondientes a los elementos (1,1), (2,2), (3,3)... cuyos valores pueden observarse en el desarrollo numérico de la Matriz abajo expuesto, están marcados con la tonalidad en función de sus valores.

452531.	0	5062.5	-450000.	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	452531.	5062.5	0	-2531.25	5062.5	0	0	0	0	0	0	0
5062.5	5062.5	27000.	0	-5062.5	6750.	0	0	0	0	0	0	0
-450000.	0	0	902531.	0	5062.5	-450000.	0	0	0	0	0	0
0	-2531.25	-5062.5	0	455063.	0.	0	-2531.25	5062.5	0	0	0	0
0	5062.5	6750.	5062.5	0.	40500.	0	-5062.5	6750.	0	0	0	0
0	0	0	-450000.	0	0	902531.	0	5062.5	-450000.	0	0	0
0	0	0	0	-2531.25	-5062.5	0	455063.	0.	0	-2531.25	5062.5	0
0	0	0	0	5062.5	6750.	5062.5	0.	40500.	0	-5062.5	6750.	0
0	0	0	0	0	0	-450000.	0	0	902531.	0	5062.5	0
0	0	0	0	0	0	0	-2531.25	-5062.5	0	455063.	0.	0
0	0	0	0	0	0	0	5062.5	6750.	5062.5	0.	40500.	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-450000.	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2531.25	-5062.5	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5062.5	6750.	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

En las gráficas correspondientes al método propuesto, se observa que se mantiene la representación de todos los valores debido a la homogeneidad en sus órdenes de magnitud, como puede observarse en el desarrollo de dicha Matriz expuesto a continuación:

0.1875	0	0.375	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.375	0	0	0.375	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.375	0	2.	0	0	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.1875	0	0.375	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-0.375	0	0	0.	0	0	0.375	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.5	0.375	0	3.	0	0	0.5	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.1875	0	0.375	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-0.375	0	0	0.	0	0	0.375	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.5	0.375	0	3.	0	0	0.5	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1875	0	0.375	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-0.375	0	0	0.	0	0	0.375	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.5	0.375	0	3.	0	0	0.5	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1875	0	0.375	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.375	0	0	0.	0	0	0.375
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	0.375	0	3.	0	0.5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1875	0.375
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.375	0	-0.375
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	0.375	0

■ **Valores máximos de los elementos de las matrices.**- Los valores de los elementos de mayor valor absoluto de cada una de las matrices se le pueden pedir al programa, y valen:

Max[Abs[K_{6x6}]] = 902531.
para la primera Matriz y

Max[Abs[M_{6x6}]] = 3.
para la segunda.

■ **Valores del número de condición, determinante y elementos no nulos (%) de la Matriz.-**

Las siguientes órdenes nos aportan los valores que solicitamos

```
Print[Número de condición de  $\mathbf{K}_{6 \times 6} = \frac{\text{Max}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{K}_{6 \times 6}]]}{\text{Min}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{K}_{6 \times 6}]]}]$ 
Print[Determinante de  $\mathbf{K}_{6 \times 6} = \text{Det}[\mathbf{K}_{6 \times 6}]$ 
Print[Elementos no nulos (%) de  $\mathbf{K}_{6 \times 6} = \frac{1}{18^2} (18^2 - (\text{Count}[\text{Flatten}[\mathbf{K}_{6 \times 6}], 0])) 100. \%$ ]
```

y que valen:

Número de condición de $\mathbf{K}_{6 \times 6} = 876.142$
 Determinante de $\mathbf{K}_{6 \times 6} = 3.13746 \times 10^{93}$
 Elementos no nulos (%) de $\mathbf{K}_{6 \times 6} = 28.3951 \%$

■ **Resolución del sistema correspondiente al Método Clásico.-** Con objeto de comparar resultados entre uno y otro método, se calculan los corrimientos suponiendo una carga P horizontal positiva aplicada en el nudo superior izquierdo de la estructura de 40 KN.

```
P18 = Table[0, {i, 18}, {j, 1}]; P18[[1]] = {40}; LinearSolve[ $\mathbf{K}_{6 \times 6}$ , P18]
```

Corrimientos (en metros y radianes) con la Matriz $\mathbf{K}_{6 \times 6}$:

Nudos	u_i	v_i	γ_i
1 →	{0.00355706},	{ 9.83828×10^{-6} },	{ -0.000598829 }
2 →	{0.00348145},	{ -2.9693×10^{-6} },	{ -0.000282089 }
3 →	{0.00342224},	{ 4.25468×10^{-7} },	{ -0.000326782 }
4 →	{0.00337861},	{ -5.82775×10^{-7} },	{ -0.00032211 }
5 →	{0.00335035},	{ 2.58994×10^{-6} },	{ -0.000272889 }
6 →	{0.00333788},	{ -9.30153×10^{-6} },	{ -0.000559859 }

Obsérvese que no existe antimetría en los corrimientos

■ **A.7. Matriz de inelongabilidad debido a los pilares.-** De acuerdo con lo expresado en el epígrafe 6.1.1 se procede al ensamblaje de la Matriz de Inelogabilidad correspondiente a los pilares, partiendo de un arreglo de tantas filas como pilares tenga la estructura (6) y tantas columnas como nudos (6):

$$\mathbf{I}_{p6 \times 6} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_p & \mathbf{n}_{1 \times 3} \\ \mathbf{n}_{1 \times 3} & \mathbf{F}_p & \mathbf{n}_{1 \times 3} & \mathbf{n}_{1 \times 3} & \mathbf{n}_{1 \times 3} & \mathbf{n}_{1 \times 3} \\ \mathbf{n}_{1 \times 3} & \mathbf{n}_{1 \times 3} & \mathbf{F}_p & \mathbf{n}_{1 \times 3} & \mathbf{n}_{1 \times 3} & \mathbf{n}_{1 \times 3} \\ \mathbf{n}_{1 \times 3} & \mathbf{n}_{1 \times 3} & \mathbf{n}_{1 \times 3} & \mathbf{F}_p & \mathbf{n}_{1 \times 3} & \mathbf{n}_{1 \times 3} \\ \mathbf{n}_{1 \times 3} & \mathbf{n}_{1 \times 3} & \mathbf{n}_{1 \times 3} & \mathbf{n}_{1 \times 3} & \mathbf{F}_p & \mathbf{n}_{1 \times 3} \\ \mathbf{n}_{1 \times 3} & \mathbf{F}_p \end{pmatrix}$$

$\mathbf{n}_{1 \times 3} = \text{ZeroMatrix}[1, 3]; \mathbf{I}_{p6 \times 6}^{\circ T} = \text{Transpose}[\mathbf{I}_{p6 \times 6}]$

```
Print[Dimensiones  $\mathbf{I}_{p6x6} = , Dimensions[\mathbf{I}_{p6x6}]$ 
Print[Dimensiones  $\mathbf{I}_{p6x6}^{\circ T} = , Dimensions[\mathbf{I}_{p6x6}^{\circ T}]$ 

Dimensiones  $\mathbf{I}_{p6x6} = \{6, 18\}$ 
Dimensiones  $\mathbf{I}_{p6x6}^{\circ T} = \{18, 6\}$ 
```

donde \mathbf{n}_{1x3} es el vector nulo de las mismas dimensiones que \mathbf{I}_p . También se ha calculado la transpuesta de \mathbf{I}_{p6x6} , que habrá que utilizarla posteriormente.

■ **A.8. Matriz de inelongabilidad debido a las vigas.-** De forma análoga, partiendo de un arreglo de tantas filas como vigas (5) y tantas columnas como nudos (6) se ensamblarán los vectores \mathbf{I}_v y \mathbf{F}_v que describen la condición de inelongabilidad de vigas:

$$\mathbf{I}_{v5x6} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_v & \mathbf{F}_v & \mathbf{n}_{1x3} & \mathbf{n}_{1x3} & \mathbf{n}_{1x3} & \mathbf{n}_{1x3} \\ \mathbf{n}_{1x3} & \mathbf{I}_v & \mathbf{F}_v & \mathbf{n}_{1x3} & \mathbf{n}_{1x3} & \mathbf{n}_{1x3} \\ \mathbf{n}_{1x3} & \mathbf{n}_{1x3} & \mathbf{I}_v & \mathbf{F}_v & \mathbf{n}_{1x3} & \mathbf{n}_{1x3} \\ \mathbf{n}_{1x3} & \mathbf{n}_{1x3} & \mathbf{n}_{1x3} & \mathbf{I}_v & \mathbf{F}_v & \mathbf{n}_{1x3} \\ \mathbf{n}_{1x3} & \mathbf{n}_{1x3} & \mathbf{n}_{1x3} & \mathbf{n}_{1x3} & \mathbf{I}_v & \mathbf{F}_v \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}_{v6x5} = \text{Transpose}[\mathbf{I}_{v5x6}]$$

```
Print[Dimensiones de  $\mathbf{I}_{v5x6} = , Dimensions[\mathbf{I}_{v5x6}]$ 
Print[Dimensiones de  $\mathbf{I}_{v6x5} = , Dimensions[\mathbf{I}_{v6x5}]$ 
```

```
Dimensiones  $\mathbf{I}_{v5x6} = \{5, 18\}$ 
Dimensiones  $\mathbf{I}_{v6x5} = \{18, 5\}$ 
```

■ **A.9. Sistemas de Lagrange.-** De acuerdo con el epígrafe 6.2.2 y disponiendo las matrices calculadas en la forma indicada por [9.19], se tiene, para cada método:

$$\mathbf{K}_{\text{Lagrange}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{6x6} & \mathbf{I}_{p6x6}^{\circ T} & \mathbf{I}_{v6x5} \\ \mathbf{I}_{p6x6} & \mathbf{N}_{6x6} & \mathbf{N}_{6x5} \\ \mathbf{I}_{v5x6} & \mathbf{N}_{5x6} & \mathbf{N}_{5x5} \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_{\text{Lagrange}} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{6x6} & \mathbf{I}_{p6x6}^{\circ T} & \mathbf{I}_{v6x5} \\ \mathbf{I}_{p6x6} & \mathbf{N}_{6x6} & \mathbf{N}_{6x5} \\ \mathbf{I}_{v5x6} & \mathbf{N}_{5x6} & \mathbf{N}_{5x5} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{6x6} = \text{ZeroMatrix}[6]; \mathbf{N}_{5x5} = \text{ZeroMatrix}[5]; \mathbf{N}_{5x6} = \text{ZeroMatrix}[5, 6]; \mathbf{N}_{6x5} = \text{ZeroMatrix}[6, 5]$$

```
Print[Dimensiones  $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}} = Dimensiones \mathbf{M}_{\text{Lagrange}} = , Dimensions[\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}]$ 
```

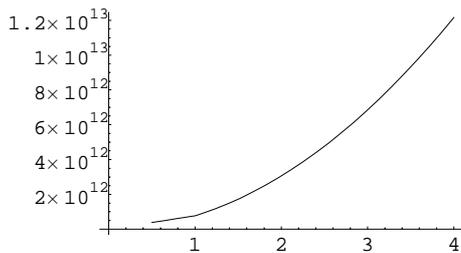
```
Dimensiones  $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}} = Dimensiones \mathbf{M}_{\text{Lagrange}} = \{29, 29\}$ 
```

■ **Elementos de las matrices.-** Se muestra a continuación sendas matrices de las que, por motivos de espacio, se incluyen sólo las primeras columnas:

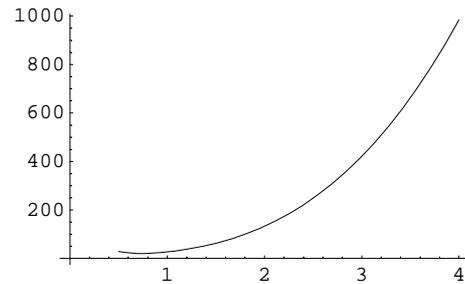
■ **Curvas de condicionamiento.-** Se introduce la orden que nos devuelve las curvas que muestra los valores (eje de ordenadas) del número de condición de la matrices correspondientes, calculados según la norma matricial 2.

```
autovalores[lon_] := N[Eigenvalues[KLagrange /. x → lon]] ratio1[lon_] := Block[{a},
a = autovalores[lon] // Abs; Max[a]/Min[a]] Plot[ratio1[xx], {xx, 0.5, 4}]
```

```
autovalores[lon_] := N[Eigenvalues[MLagrange /. x → lon]] ratio1[lon_] := Block[{a},
a = autovalores[lon] // Abs; Max[a]/Min[a]] Plot[ratio1[xx], {xx, 0.5, 4}]
```



Método Clásico ($K_{Lagrange}$)



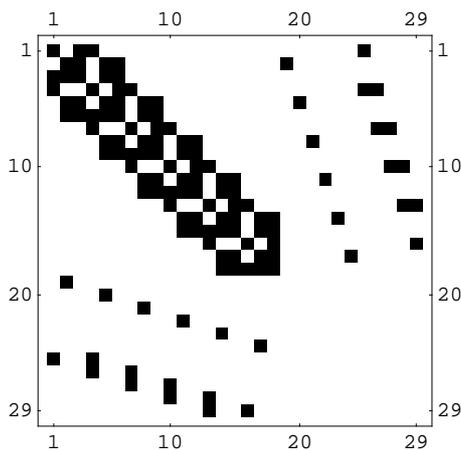
Método propuesto ($M_{Lagrange}$)

Obsérvese el espectacular aumento del número de condición que ha sufrido la Matriz de Lagrange correspondiente al Método Clásico, respecto a la Matriz anterior $K_{6 \times 6}$ sin condiciones de restricción.

Para $x=1$, es decir, si todas las barras tienen la misma sección, se obtienen los siguientes gráficos, valores máximos de los elementos de las matrices, valores del número de condición, del determinante y elementos no nulos (%) de la Matriz

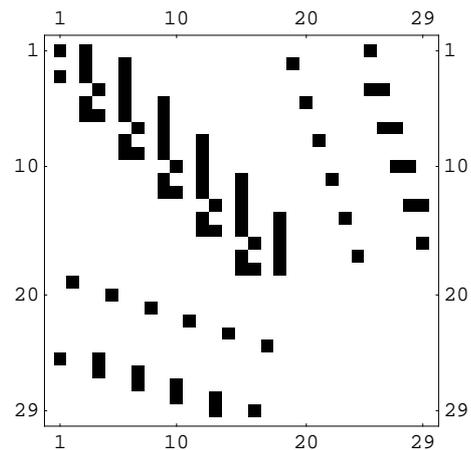
■ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos no nulos.-**

MatrixPlot[$K_{Lagrange}$]



Método Clásico ($K_{Lagrange}$)

MatrixPlot[$M_{Lagrange}$]



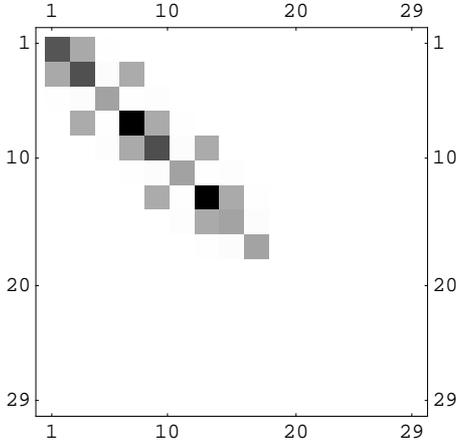
Método propuesto ($M_{Lagrange}$)

■ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos dominantes.-** Para el Método Clásico se tiene

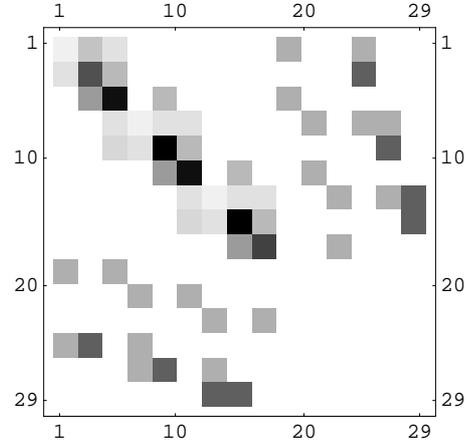
MatrixPlot[$\mathbf{K}_{Lagrange}$, ColorFunction \rightarrow (GrayLevel[1 - #] &), ColorFunctionScaling \rightarrow True]

y para el propuesto:

MatrixPlot[$\mathbf{M}_{Lagrange}$, ColorFunction \rightarrow (GrayLevel[1 - #] &), ColorFunctionScaling \rightarrow True]



Método Clásico ($\mathbf{K}_{Lagrange}$)



Método propuesto ($\mathbf{M}_{Lagrange}$)

donde puede observarse cómo, además de otros elementos, desaparecen totalmente los coeficientes de las matrices de restricción (y sus simétricos). Para el método propuesto se mantiene la representación de todos los elementos debido a la homogeneidad existente entre ellos.

■ **Valores máximos de los elementos de las matrices.**- Los valores de los elementos de mayor valor absoluto de cada una de las matrices se le pueden pedir al programa, que para $x=1$ tienen, lógicamente, los mismos que se calcularon anteriormente:

$$\text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{K}_{Lagrange}]] = 902531.$$

$$\text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{M}_{Lagrange}]] = 3.$$

■ **Valores del número de condición, determinante y elementos no nulos (%) de las Matrices.**- Con las siguientes órdenes obtenemos los valores que solicitamos:

$$\text{Print}[\text{Número de condición de } \mathbf{K}_{Lagrange} = , \frac{\text{Max}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{K}_{Lagrange}]]]}{\text{Min}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{K}_{Lagrange}]]]}]$$

$$\text{Print}[\text{Número de condición de } \mathbf{M}_{Lagrange} = , \frac{\text{Max}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{M}_{Lagrange}]]]}{\text{Min}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{M}_{Lagrange}]]]}]$$

$$\text{Print}[\text{Determinante de } \mathbf{K}_{Lagrange} = , \text{Det}[\mathbf{K}_{Lagrange}]]$$

$$\text{Print}[\text{Determinante de } \mathbf{M}_{Lagrange} = , \text{Det}[\mathbf{M}_{Lagrange}]]$$

$$\text{Print}[\text{Elementos no nulos (\%) de } \mathbf{K}_{Lagrange} = , \frac{1}{29^2} (29^2 - (\text{Count}[\text{Flatten}[\mathbf{K}_{Lagrange}], 0])) 100. \%]$$

$$\text{Print}[\text{Elementos no nulos (\%) de } \mathbf{M}_{Lagrange} = , \frac{1}{29^2} (29^2 - (\text{Count}[\text{Flatten}[\mathbf{M}_{Lagrange}], 0])) 100. \%]$$

y que valen:

Número de condición de $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}} = 7.71065 \times 10^{11}$

Número de condición de $\mathbf{M}_{\text{Lagrange}} = 27.3283$

Determinante de $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}} = -1.92938 \times 10^{31}$

Determinante de $\mathbf{M}_{\text{Lagrange}} = -236.092$

Elementos no nulos (%) de $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}} = 14.7444 \%$

Elementos no nulos (%) de $\mathbf{M}_{\text{Lagrange}} = 9.7503 \%$

■ **Resolución directa del Sistema Lagrange** .- Resolviendo cada uno de los Sistemas de Lagrange por el procedimiento expuesto en el epígrafe 6.3, es decir, por resolución directa, se tiene

$$P29 = \text{BlockMatrix}\left[\begin{pmatrix} P18 \\ N11 \end{pmatrix}\right]; N11 = \text{ZeroMatrix}[11, 1];$$

para el Método Clásico:

LinearSolve[$\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}$, P29]

LinearSolve::luc : Result for LinearSolve of badly conditioned matrix {<<1>>} may contain significant numerical errors. More...

El programa da un aviso indicando que los resultados pueden contener importantes errores debido al mal condicionamiento de la matriz.

Corrimientos (en metros y radianes) con $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}$:

Nudos	u_i	v_i	γ_i
1 →	{0.00341734}, {1.2401 × 10 ⁻²¹ },		{-0.00057137}
2 →	{0.00341734}, {-2.12439 × 10 ⁻²² },		{-0.000277523}
3 →	{0.00341734}, {-2.22501 × 10 ⁻²² },		{-0.000326497}
4 →	{0.00341734}, {1.91897 × 10 ⁻²² },		{-0.000326497}
5 →	{0.00341734}, {5.52843 × 10 ⁻²² },		{-0.000277523}
6 →	{0.00341734}, {-2.99581 × 10 ⁻²¹ },		{-0.00057137}

Obsérvese la antimetría de los corrimientos.

Axiles (en KN) con $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}$:

Pilares:

{4.29752}, {-1.23967}, {0.247934}, {-0.247934}, {1.23967}, {-4.29752}

Obsérvese la antimetría de los axiles de pilares

Vigas:

{-34.2424}, {-26.9972}, {-20.}, {-13.0028}, {-5.75758}

para el Método propuesto:

LinearSolve[$\mathbf{M}_{\text{Lagrange}}$, P29]

Corrimientos (en metros y radianes, multiplicados por EIo) con $\mathbf{M}_{\text{Lagrange}}$:

Nudos	u_i	v_i	γ_i
1 →	{46.1341}, {0}, {-7.7135}		
2 →	{46.1341}, {0}, {-3.74656}		
3 →	{46.1341}, {0}, {-4.40771}		
4 →	{46.1341}, {0}, {-4.40771}		
5 →	{46.1341}, {0}, {-3.74656}		
6 →	{46.1341}, {0}, {-7.7135}		

Obsérvese la antimetría de los corrimientos.

Axiles (en KN) con $\mathbf{M}_{\text{Lagrange}}$:

Pilares:

{4.29752}, {-1.23967}, {0.247934}, {-0.247934}, {1.23967}, {-4.29752}

Vigas:

{-34.2424}, {-26.9972}, {-20.}, {-13.0028}, {-5.75758}

donde, como se dijo, el signo positivo significa tracción y el negativo compresión. Obsérvese la antimetría de los axiles en los pilares.

Los resultados obtenidos para los corrimientos en el procedimiento propuesto, tal y como se advirtió en el pie de la página 4-7, vienen multiplicados por EI_o , por lo que, con objeto de compararlos con los del Método Clásico, se han de dividir por este valor, resultando

$$\text{LinearSolve}[\mathbf{M}_{\text{Lagrange}}, \text{P29}] \frac{1}{EI_o}$$

Corrimientos (en metros y radianes) :

Nudos	u_i	v_i	γ_i
1 →	{0.00341734}, {0}, {-0.00057137}		
2 →	{0.00341734}, {0}, {-0.000277523}		
3 →	{0.00341734}, {0}, {-0.000326497}		
4 →	{0.00341734}, {0}, {-0.000326497}		
5 →	{0.00341734}, {0}, {-0.000277523}		
6 →	{0.00341734}, {0}, {-0.00057137}		

donde se puede observar, pues, cómo se obtienen los mismos resultados por ambos procedimientos. Por otra parte, si se comparan los valores de los corrimientos con los obtenidos sin considerar hipótesis de inelongabilidad (Matriz $\mathbf{K}_{6 \times 6}$), se observan lógicas diferencias puesto que se parte de hipótesis distintas, diferencias perfectamente aceptables.

■ **A.9.1. Sistema de Lagrange con inelongabilidad de vigas en el Método Clásico.**- Si el pórtico sustenta a un forjado, puede adoptarse la hipótesis de diafragma rígido para dicho forjado, por lo tanto las vigas se han de considerar inelongables, lo que obliga a introducir las ecuaciones de restricción correspondientes en el Método Tradicional. Se tiene, para este método:

$$\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}^{\circ \text{vigas}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{6 \times 6} & \mathbf{I}_{6 \times 5} \\ \mathbf{I}_{5 \times 6} & \mathbf{N}_{5 \times 5} \end{pmatrix}$$

Print[Dimensiones $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}^{\text{vigas}}$, Dimensions[$\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}^{\text{vigas}}$]]

Dimensiones $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}^{\text{vigas}} = \{23, 23\}$

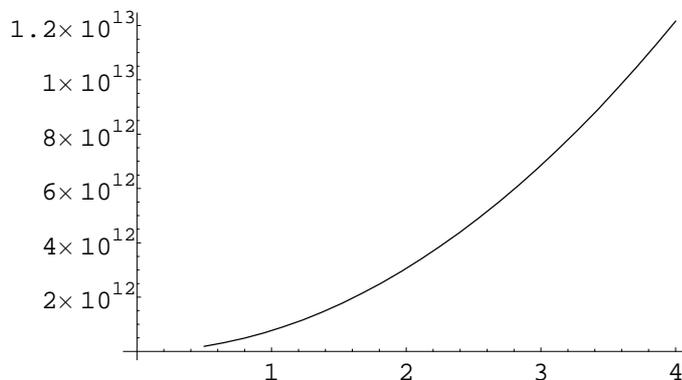
■ **Elementos de la Matriz.-** Se muestra a continuación la Matriz de la que, por motivos de espacio, se incluyen solo las primeras columnas:

MatrixForm[$\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}^{\text{vigas}}$]

2531.25 + 450000. x	0	5062.5	-450000. x	0	0	0
0	450000. + 2531.25 x ³	5062.5 x ³	0	-2531.25 x ³	5062.5 x ³	0
5062.5	5062.5 x ³	13500. + 13500. x ³	0	-5062.5 x ³	6750. x ³	0
-450000. x	0	0	2531.25 + 900000. x	0	5062.5	-450000. x
0	-2531.25 x ³	-5062.5 x ³	0	450000. + 5062.5 x ³	0. x ³	0
0	5062.5 x ³	6750. x ³	5062.5	0. x ³	13500. + 27000. x ³	0
0	0	0	-450000. x	0	0	2531.25 + 900000.
0	0	0	0	-2531.25 x ³	-5062.5 x ³	0
0	0	0	0	5062.5 x ³	6750. x ³	5062.5
0	0	0	0	0	0	-450000. x
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
-1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	-1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	-1
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

■ **Curvas de condicionamiento.-** Se introduce la orden que nos devuelve las curvas que muestra los valores (eje de ordenadas) del número de condición de la matriz correspondiente, calculados según la norma matricial 2.

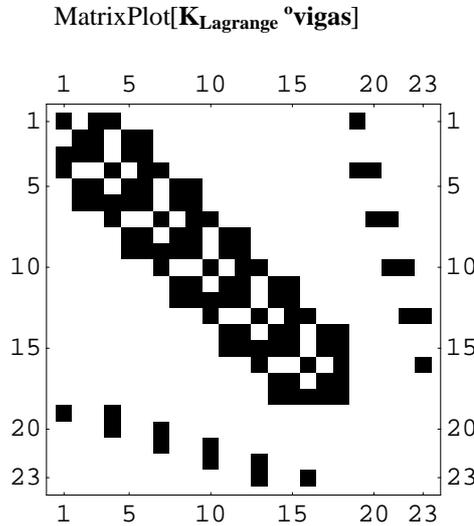
autovalores[lon_] := N[Eigenvalues[$\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}^{\text{vigas}}$ /. x → lon]] ratio1[lon_] := Block[{a},
a = autovalores[lon] // Abs; Max[a] / Min[a]] Plot[ratio1[xx], {xx, 0.5, 4}]



Método Clásico ($\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}^{\text{vigas}}$)

Para $x=1$, es decir, si todas las barras tienen la misma sección, se obtienen el siguiente gráfico, valores máximos de los elementos de la Matriz, valor del número de condición, del determinante y elementos no nulos (%) de la Matriz

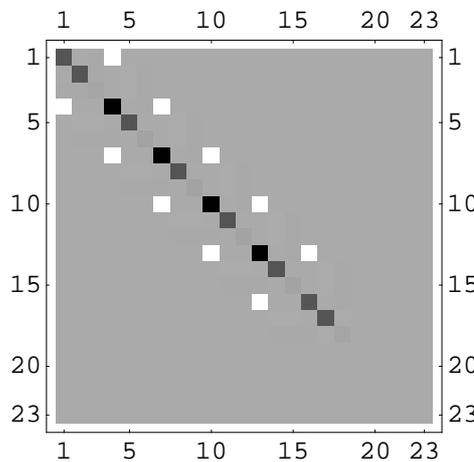
■ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos no nulos.-**



Método Clásico ($K_{Lagrange}^{o}vigas$)

■ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos dominantes.-**

MatrixPlot[$K_{Lagrange}^{o}vigas$, ColorFunction \rightarrow (GrayLevel[1 - #] &), ColorFunctionScaling \rightarrow True]



Método Clásico ($K_{Lagrange}^{o}vigas$)

■ **Valores máximos de los elementos de la Matriz.-** El valor de los elementos de mayor valor absoluto de la Matriz se le puede pedir al programa, que para $x=1$ tienen, lógicamente, el mismo que se calculó anteriormente:

$$\text{Max}[\text{Abs}[K_{Lagrange}^{o}vigas]] = 902531.$$

■ **Valores del número de condición, determinante y elementos no nulos (%) de la Matriz.-**

Con la siguiente órden obtenemos los valores que solicitamos:

$$\text{Print}[\text{Número de condición de } \mathbf{K}_{\text{Lagrange}}^{\circ \text{vigas}} = , \frac{\text{Max}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}^{\circ \text{vigas}}]]]}{\text{Min}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}^{\circ \text{vigas}}]]]}]$$

$$\text{Print}[\text{Determinante de } \mathbf{K}_{\text{Lagrange}}^{\circ \text{vigas}} = , \text{Det}[\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}^{\circ \text{vigas}}]]$$

$$\text{Print}[\text{Elementos no nulos (\%)} \text{ de } \mathbf{K}_{\text{Lagrange}}^{\circ \text{vigas}} = , \frac{1}{23^2} (23^2 - (\text{Count}[\text{Flatten}[\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}^{\circ \text{vigas}}, 0])) 100. \%]$$

y que valen:

$$\text{Número de condición de } \mathbf{K}_{\text{Lagrange}}^{\circ \text{vigas}} = 7.68373 \times 10^{11}$$

$$\text{Determinante de } \mathbf{K}_{\text{Lagrange}}^{\circ \text{vigas}} = -1.66161 \times 10^{65}$$

$$\text{Elementos no nulos (\%)} \text{ de } \mathbf{K}_{\text{Lagrange}}^{\circ \text{vigas}} = 21.172 \%$$

■ **A.10 Resolución del sistema de Lagrange por transformación de columnas .-** De acuerdo con lo expresado en el apartado 6.3.1, introduciremos en los Sistemas de Lagrange aquellas combinaciones lineales de sus columnas tales que se eliminen tantas incógnitas de corrimiento como ecuaciones de inelongabilidad se han introducido en el sistema. Pero, siguiendo las indicaciones expuestas en el apartado 9.4, lo haremos en dos fases. Primero las correspondientes a la Matriz de Inelongabilidad debido a las vigas y, segundo, la correspondiente a vigas y pilares. Como se puso de manifiesto en dicho epígrafe, estas tranformaciones se consiguen de forma inmediata a partir de las correspondentes Matrices de Transformacion.

■ **A.10.1 Matriz de Transformación debido a las restricciones de vigas (T_v).**- Según la expresión [9.13], partiendo de la Matriz identidad de dimensiones iguales al grado de libertad de la estructura:

1º: Se ensambla la submatriz identidad **uvθ**:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \left(\begin{matrix} \mathbf{uv}\theta & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \mathbf{uv}\theta & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \mathbf{uv}\theta & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \mathbf{uv}\theta & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \mathbf{uv}\theta & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \mathbf{uv}\theta \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

2º: Se borran las incógnitas esclavas (**u**).

3º: Se rellenan los vectores nulos **n** y las matrices nulas **N_{3x2}** :

$$\mathbf{T}_v = \begin{pmatrix} \mathbf{uv}\theta & \mathbf{N}_{3 \times 2} \\ \mathbf{unn} & \mathbf{v}\theta & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} \\ \mathbf{unn} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{v}\theta & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} \\ \mathbf{unn} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{v}\theta & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} \\ \mathbf{unn} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{v}\theta & \mathbf{N}_{3 \times 2} \\ \mathbf{unn} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{v}\theta \end{pmatrix}$$

siendo

$$\mathbf{uv}\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{unn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{N}_{3 \times 2} = \text{ZeroMatrix}[3, 2]$$

Print[Dimensiones de $\mathbf{T}_v =$, Dimensions[\mathbf{T}_v]]

Dimensiones de $\mathbf{T}_v = \{18, 13\}$

Y recordando que:

$$\mathbf{K}_{\text{Lagrange}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{6 \times 6} & \mathbf{I}_{p6 \times 6} \text{}^o\mathbf{T} & \mathbf{I}_{v6 \times 5} \\ \mathbf{I}_{p6 \times 6} & \mathbf{N}_{6 \times 6} & \mathbf{N}_{6 \times 5} \\ \mathbf{I}_{v5 \times 6} & \mathbf{N}_{5 \times 6} & \mathbf{N}_{5 \times 5} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{M}_{\text{Lagrange}} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{6 \times 6} & \mathbf{I}_{p6 \times 6} \text{}^o\mathbf{T} & \mathbf{I}_{v6 \times 5} \\ \mathbf{I}_{p6 \times 6} & \mathbf{N}_{6 \times 6} & \mathbf{N}_{6 \times 5} \\ \mathbf{I}_{v5 \times 6} & \mathbf{N}_{5 \times 6} & \mathbf{N}_{5 \times 5} \end{pmatrix}$$

de cada una de las cuales se perderá la última fila en los Sistemas de Lagrange, esto es, las ecuaciones de inelongabilidad correspondientes a la vigas, ya que las matrices $\mathbf{I}_{v5 \times 6}$ y \mathbf{T}_v son divisores de cero, como se demostró en el apartado 8.4. Para comprobar que la matriz producto siguiente es nula, le pedimos al programa el máximo valor absoluto de sus elementos:

$$\text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{I}_{v5 \times 6} \cdot \mathbf{T}_v]] = 0.$$

Postmultiplicando, pues, la primera columna de ambos sistemas por la Matriz de Transformación \mathbf{T}_v , se obtienen los sistemas transformados \mathbf{K}_v y \mathbf{M}_v siguientes, donde el subíndice v indica que la transformación es debida a la inelongabilidad de las vigas.

$$\mathbf{K}_v = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{6 \times 6} \cdot \mathbf{T}_v & \mathbf{I}_{p6 \times 6} \text{}^o\mathbf{T} & \mathbf{I}_{v6 \times 5} \\ \mathbf{I}_{p6 \times 6} \cdot \mathbf{T}_v & \mathbf{N}_{6 \times 6} & \mathbf{N}_{6 \times 5} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{M}_v = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{6 \times 6} \cdot \mathbf{T}_v & \mathbf{I}_{p6 \times 6} \text{}^o\mathbf{T} & \mathbf{I}_{v6 \times 5} \\ \mathbf{I}_{p6 \times 6} \cdot \mathbf{T}_v & \mathbf{N}_{6 \times 6} & \mathbf{N}_{6 \times 5} \end{pmatrix}$$

Print[Dimensiones $\mathbf{K}_v =$ Dimensiones $\mathbf{M}_v =$, Dimensions[\mathbf{K}_v]]

Dimensiones $\mathbf{K}_v =$ Dimensiones $\mathbf{M}_v = \{24, 24\}$

sistema de 24x24, es decir, se han eliminado del Sistema de Lagrange 5 incógnitas de corrimiento, una por cada viga de la estructura.

■ **Elementos de las matrices.**- Se muestran a continuación las primeras columnas para el Método Matricial Clásico y la Matriz completa para el Método propuesto con objeto de comparar los valores de

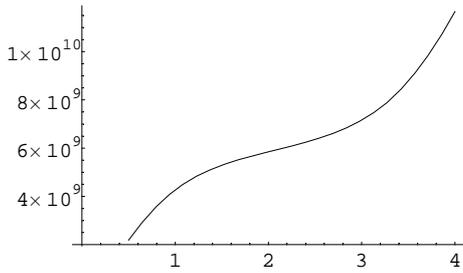
las siguientes gráficas con las correspondientes al Sistema de Lagrange sin modificar.

```

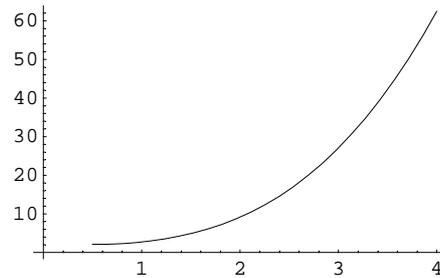
autovalores[lon_] := N[Eigenvalues[Kv /. x → lon]]
ratio1[lon_] := Block[{a}, a = autovalores[lon] // Abs; Max[a]/Min[a]]
Plot[ratio1[xx], {xx, 0.5, 4}]
    
```

```

autovalores[lon_] := N[Eigenvalues[Mv /. x → lon]]
ratio1[lon_] := Block[{a}, a = autovalores[lon] // Abs; Max[a]/Min[a]]
Plot[ratio1[xx], {xx, 0.5, 4}]
    
```



Método Clásico (K_v)

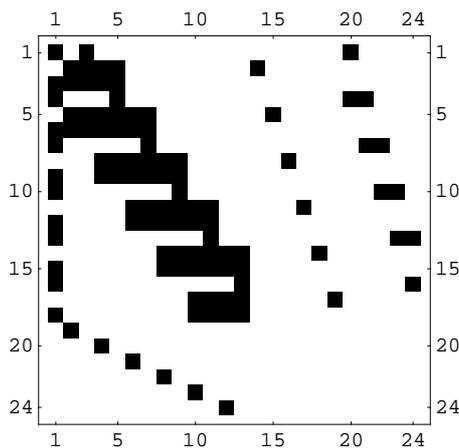


Método propuesto (M_v)

Para $x=1$, es decir, si todas las barras tienen la misma sección, se obtienen los siguientes gráficos, valores máximos de los elementos de las matrices, valores del número de condición, del determinante y elementos no nulos (%) de la Matriz

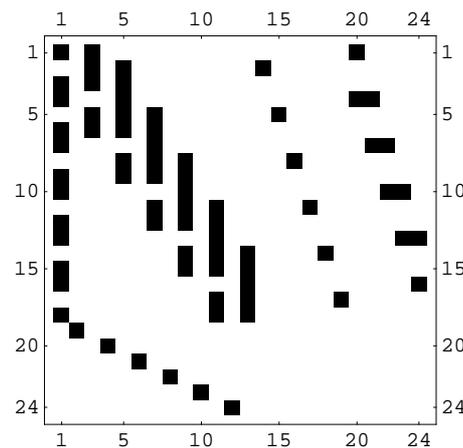
■ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos no nulos.-**

MatrixPlot[K_v]



Método Clásico (K_v)

MatrixPlot[M_v]

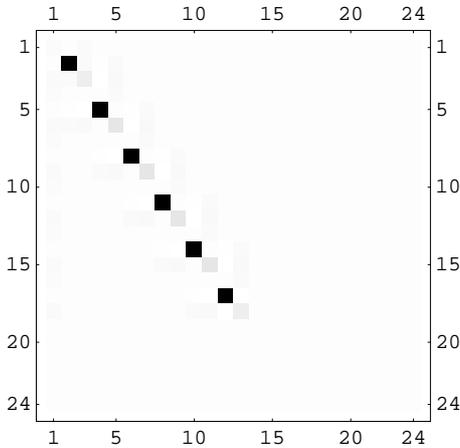


Método propuesto (M_v)

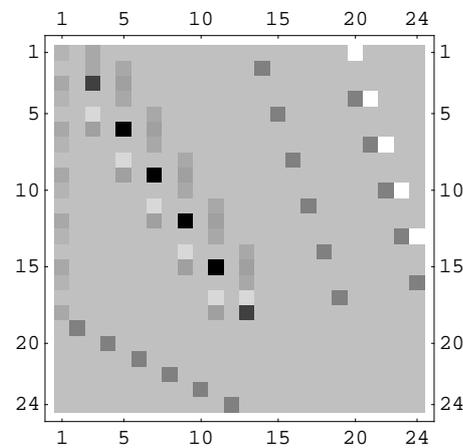
■ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos dominantes.-**

MatrixPlot[\mathbf{K}_v , ColorFunction \rightarrow (GrayLevel[1 - #] &), ColorFunctionScaling \rightarrow True]

MatrixPlot[\mathbf{M}_v , ColorFunction \rightarrow (GrayLevel[1 - #] &), ColorFunctionScaling \rightarrow True]



Método Clásico (\mathbf{K}_v)



Método propuesto (\mathbf{M}_v)

Las gráficas describen las ubicaciones de elementos dominantes en relación con los de menor valor (absoluto) dando una idea de la homogeneidad de sus elementos. Comparando estas gráficas con las anteriores, se observan los elementos que pierden entidad frente a los dominantes, debido a las diferencias en sus órdenes de magnitud.

■ **Valores máximos de los elementos de las matrices.-** Los valores de los elementos de mayor valor absoluto de cada una de las matrices son:

$$\text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{K}_v]] = 455063.$$

$$\text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{M}_v]] = 3.$$

■ **Valores del número de condición, determinante y elementos no nulos (%) de las Matrices.-** Con las siguientes órdenes obtenemos los valores que solicitamos:

$$\text{Print}[\text{Número de condición de } \mathbf{K}_v = , \frac{\text{Max}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{K}_v]]]}{\text{Min}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{K}_v]]]}]$$

$$\text{Print}[\text{Número de condición de } \mathbf{M}_v = , \frac{\text{Max}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{M}_v]]]}{\text{Min}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{M}_v]]]}]$$

$$\text{Print}[\text{Determinante de } \mathbf{K}_v = , \text{Det}[\mathbf{K}_v]]$$

$$\text{Print}[\text{Determinante de } \mathbf{M}_v = , \text{Det}[\mathbf{M}_v]]$$

$$\text{Print}[\text{Elementos no nulos (\%)} \text{ de } \mathbf{K}_v = , \frac{1}{24^2} (24^2 - (\text{Count}[\text{Flatten}[\mathbf{K}_v], 0])) 100. \%]$$

$$\text{Print}[\text{Elementos no nulos (\%)} \text{ de } \mathbf{M}_v = , \frac{1}{24^2} (24^2 - (\text{Count}[\text{Flatten}[\mathbf{M}_v], 0])) 100. \%]$$

y que valen:

Número de condición de $\mathbf{K}_v = 4.26951 \times 10^9$

Número de condición de $\mathbf{M}_v = 2.72825$

Determinante de $\mathbf{K}_v = 1.92938 \times 10^{31}$

Determinante de $\mathbf{M}_v = 236.092$

Elementos no nulos (%) de $\mathbf{K}_v = 18.0556 \%$

Elementos no nulos (%) de $\mathbf{M}_v = 12.5 \%$

■ **Resolución de los sistemas.-** Resolviendo cada uno de los sistemas con las matrices de coeficientes \mathbf{K}_v y \mathbf{M}_v se tendrá:

■ **Método Clásico.-** Para la matriz \mathbf{K}_v se tiene

$$P24 = \mathbf{P}_v = \text{BlockMatrix}\left[\begin{pmatrix} P18 \\ N6 \end{pmatrix}\right]; N6 = \text{ZeroMatrix}[6, 1]$$

LinearSolve[\mathbf{K}_v , \mathbf{P}_v]

LinearSolve::luc :

Result for LinearSolve of badly conditioned matrix {{2531.2499999999995`0.`5062.499999999999`
0.`,<<3>>,0.`0.`0.`,<<14>>},<<9>>,<<14>>} may contain significant numerical errors. More...

volviendo a advertir el programa de la posibilidad de errores importantes debido a que de la matriz sigue estando mal condicionada.

Corrimientos (en metros y radianes) con \mathbf{K}_v

Nudos	u_i	v_i	γ_i
1 →	{0.00341734},	{ -1.40675×10^{-17} },	{-0.00057137}
2 →		{ 1.84152×10^{-18} },	{-0.000277523}
3 →		{ -2.46353×10^{-18} },	{-0.000326497}
4 →		{ -2.25233×10^{-18} },	{-0.000326497}
5 →		{ -2.74693×10^{-18} },	{-0.000277523}
6 →		{ -8.91201×10^{-21} },	{-0.00057137}

Axiles (en KN) con \mathbf{K}_v :

Pilares:

{4.29752}, {-1.23967}, {0.247934}, {-0.247934}, {1.23967}, {-4.29752}

Obsérvese la antimetría de los axiles de pilares

Vigas:

{-34.2424}, {-26.9972}, {-20.}, {-13.0028}, {-5.75758}

■ **Método propuesto.**- Para la matriz \mathbf{M}_v se tiene

LinearSolve[\mathbf{M}_v , \mathbf{P}_v]

Corrimientos (en metros y radianes, multiplicados por EIo) con \mathbf{M}_v :

Nudos	u_i	v_i	γ_i
1 →	{46.1341},	{0},	{-7.7135}
2 →		{0},	{-3.74656}
3 →		{0},	{-4.40771}
4 →		{0},	{-4.40771}
5 →		{0},	{-3.74656}
6 →		{0},	{-7.7135}

Obsérvese la antimetría de los corrimientos.

Axiles (en KN) con \mathbf{M}_v :

Pilares:

{4.29752}, {-1.23967}, {0.247934}, {-0.247934}, {1.23967}, {-4.29752}

Vigas:

{-34.2424}, {-26.9972}, {-20.}, {-13.0028}, {-5.75758}

donde, como se dijo, el signo positivo significa tracción y el negativo compresión. Obsérvese la antimetría de los axiles en los pilares.

Los resultados obtenidos para los corrimientos en el procedimiento propuesto, tal y como se advirtió en el pie de la página 4-7, vienen multiplicados por EIo , por lo que, con objeto de compararlos con los del Método Clásico, se han de dividir por este valor, resultando

$$\text{LinearSolve}[\mathbf{M}_v, \mathbf{P}_v] \frac{1}{EIo}$$

Corrimientos (en metros y radianes) :

Nudos	u_i	v_i	γ_i
1 →	{0.00341734},	{0},	{-0.00057137}
2 →		{0},	{-0.000277523}
3 →		{0},	{-0.000326497}
4 →		{0},	{-0.000326497}
5 →		{0},	{-0.000277523}
6 →		{0},	{-0.00057137}

donde se puede observar, pues, cómo se obtienen los mismos resultados por ambos procedimientos.

■ **A.10.2 Matriz de Transformación debido a las restricciones de pilares y vigas (\mathbf{T}_{pv}).**-

Partiendo de la Matriz de Transformación \mathbf{T}_v anteriormente determinada

$$\mathbf{T}_v = \begin{pmatrix} \mathbf{uv}\theta & \mathbf{N}_{3 \times 2} \\ \mathbf{unn} & \mathbf{v}\theta & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} \\ \mathbf{unn} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{v}\theta & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} \\ \mathbf{unn} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{v}\theta & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} \\ \mathbf{unn} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{v}\theta & \mathbf{N}_{3 \times 2} \\ \mathbf{unn} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{N}_{3 \times 2} & \mathbf{v}\theta \end{pmatrix}$$

y eliminando en ella las columnas \mathbf{v} , que son las asociadas a los desplazamientos verticales de los nudos por ser corrimientos nulos, se obtendrá la Matriz de Transformación \mathbf{T}_{pv} siguiente que elimina tanto dichos corrimientos como las incógnitas dependientes

$$\mathbf{T}_{pv} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{un} & \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{un} & 0 & \theta & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{un} & 0 & 0 & \theta & 0 & 0 \\ \mathbf{un} & 0 & 0 & 0 & \theta & 0 \\ \mathbf{un} & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta \end{pmatrix}$$

donde

$$\mathbf{u}\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{un} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Print[Dimensiones \mathbf{T}_{pv} =, Dimensions[\mathbf{T}_{pv}]]

Dimensiones \mathbf{T}_{pv} = {18, 7}

Recordando que

$$\mathbf{K}_{Lagrange} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{6 \times 6} & \mathbf{I}_{p6 \times 6} {}^o\mathbf{T} & \mathbf{I}_{v6 \times 5} \\ \mathbf{I}_{p6 \times 6} & \mathbf{N}_{6 \times 6} & \mathbf{N}_{6 \times 5} \\ \mathbf{I}_{v5 \times 6} & \mathbf{N}_{5 \times 6} & \mathbf{N}_{5 \times 5} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{M}_{Lagrange} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{6 \times 6} & \mathbf{I}_{p6 \times 6} {}^o\mathbf{T} & \mathbf{I}_{v6 \times 5} \\ \mathbf{I}_{p6 \times 6} & \mathbf{N}_{6 \times 6} & \mathbf{N}_{6 \times 5} \\ \mathbf{I}_{v5 \times 6} & \mathbf{N}_{5 \times 6} & \mathbf{N}_{5 \times 5} \end{pmatrix}$$

de los que se perderán las dos últimas filas de cada uno de los Sistemas de Lagrange, esto es, las ecuaciones de inelongabilidad correspondientes a pilares y vigas, ya que las matrices $\mathbf{I}_{p6 \times 6}$ y \mathbf{T}_{pv} por una parte y las $\mathbf{I}_{v5 \times 6}$ y \mathbf{T}_{pv} , por otra, son respectivamente divisores de cero, y para comprobar que las matrices producto siguientes son nulas, le pedimos al programa el máximo valor absoluto de sus elementos:

$$\begin{aligned} \text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{I}_{p6 \times 6} \cdot \mathbf{T}_{pv}]] &= 0 \\ \text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{I}_{v5 \times 6} \cdot \mathbf{T}_{pv}]] &= 0 \end{aligned}$$

Postmultiplicando, pues, la primera columna de las matrices del Sistema de Lagrange por la Matriz de Transformación \mathbf{T}_{pv} antes ensamblada, se obtienen las siguientes matrices, transformadas de las de Lagrange

$$\mathbf{K}_{pv} = (\mathbf{K}_{6 \times 6} \cdot \mathbf{T}_{pv} \quad \mathbf{I}_{p6 \times 6} {}^o\mathbf{T} \quad \mathbf{I}_{v6 \times 5}) \quad \text{y} \quad \mathbf{M}_{pv} = (\mathbf{M}_{6 \times 6} \cdot \mathbf{T}_{pv} \quad \mathbf{I}_{p6 \times 6} {}^o\mathbf{T} \quad \mathbf{I}_{v6 \times 5})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{pv} &= \text{BlockMatrix}[(\mathbf{K}_{6 \times 6} \cdot \mathbf{T}_{pv} \quad \mathbf{I}_{p6 \times 6} {}^o\mathbf{T} \quad \mathbf{I}_{v6 \times 5})] \\ \mathbf{M}_{pv} &= \text{BlockMatrix}[(\mathbf{M}_{6 \times 6} \cdot \mathbf{T}_{pv} \quad \mathbf{I}_{p6 \times 6} {}^o\mathbf{T} \quad \mathbf{I}_{v6 \times 5})] \end{aligned}$$

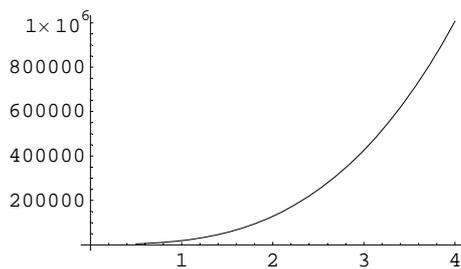
■ **Curvas de condicionamiento.**- Como consecuencia de la nueva transformación introducida en los sistemas, el número de condición correspondiente al Método Clásico sufre una espectacular disminución para todo valor de x , como puede observarse comparando las siguientes gráficas con las correspondientes al sistema anterior.

```

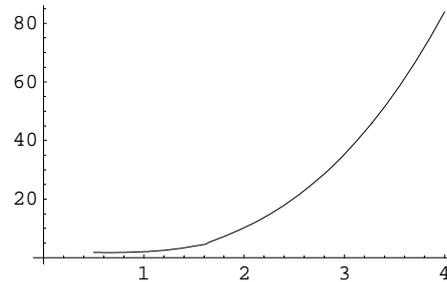
autovalores[lon_] := N[Eigenvalues[Kpv /. x → lon]]
ratio1[lon_] := Block[{a}, a = autovalores[lon] // Abs; Max[a]/Min[a]]
Plot[ratio1[xx], {xx, 0.5, 4}]
    
```

```

autovalores[lon_] := N[Eigenvalues[Mpv /. x → lon]]
ratio1[lon_] := Block[{a}, a = autovalores[lon] // Abs; Max[a]/Min[a]]
Plot[ratio1[xx], {xx, 0.5, 4}]
    
```



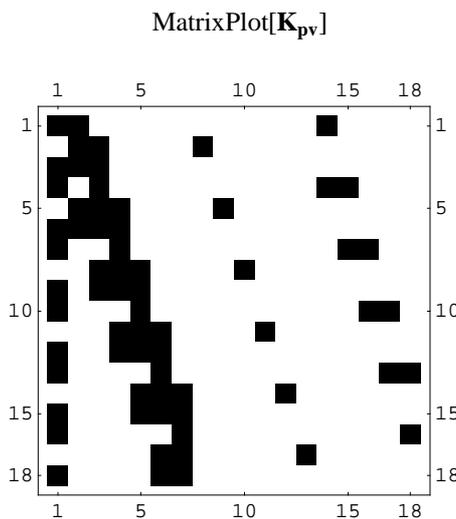
Método Clásico (K_{pv})



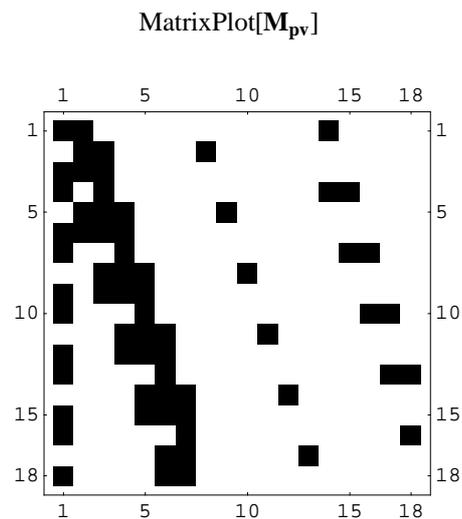
Método propuesto (M_{pv})

Para $x=1$, es decir, si todas las barras tienen la misma sección, se obtienen los siguientes gráficos, valores máximos de los elementos de las matrices, valores del número de condición, del determinante y elementos no nulos (%) de las Matrices.

■ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos no nulos.**-



Método Clásico (K_{pv})



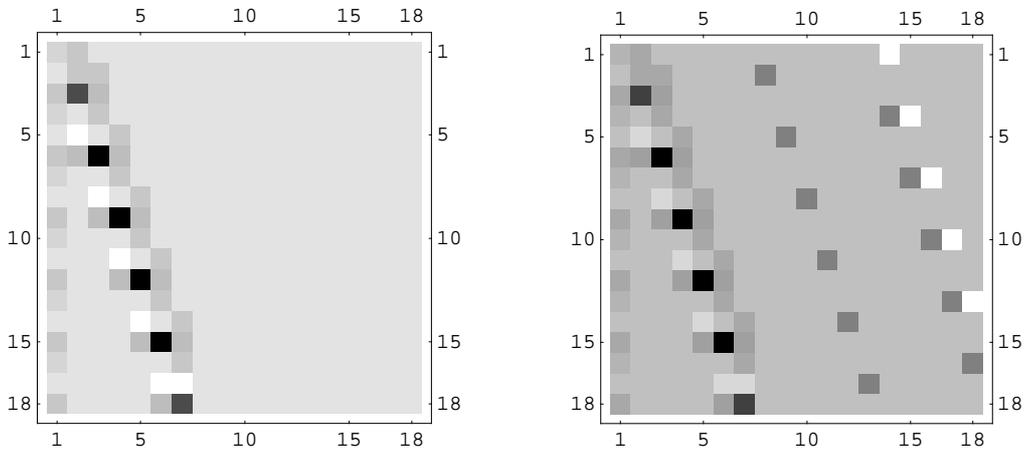
Método propuesto (M_{pv})

Obsérvese cómo ahora coincide en una y otra matriz las distribución de elementos no nulos.

■ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos dominantes.-** .

MatrixPlot[\mathbf{K}_{pv} , ColorFunction \rightarrow (GrayLevel[1 - #] &), ColorFunctionScaling \rightarrow True]

MatrixPlot[\mathbf{M}_{pv} , ColorFunction \rightarrow (GrayLevel[1 - #] &), ColorFunctionScaling \rightarrow True]



Método Clásico (\mathbf{K}_{pv})

Método propuesto (\mathbf{M}_{pv})

Aunque siguen desapareciendo los elementos correspondientes a la Matriz Transpuesta de la Matriz de Inelongsibilidad en el esquema del Método Clásico, obsérvese cómo ya están representados todos los valores correspondientes a la Matriz de Rigidez transformada (bloque izquierdo de la matriz), debido a una menor heterogeneidad de los valores de los elementos.

■ **Valores máximos de los elementos de las matrices.-** Los valores de los elementos de mayor valor absoluto de cada una de las matrices son

$$\text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{K}_{pv}]] = 40500.$$

$$\text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{M}_{pv}]] = 3.$$

en donde se ve la importante reducción que ha sufrido el elemento dominante respecto a las anteriores configuraciones en el Método Clásico. El elemento dominante del método propuesto sigue manteniendo el mismo valor en todas ellas.

■ **Valores del número de condición, determinante y elementos no nulos (%) de las Matrices.-** Con las siguientes órdenes obtenemos los valores que solicitamos:

$$\text{Print}[\text{Número de condición de } \mathbf{K}_{pv} = , \frac{\text{Max}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{K}_{pv}]]]}{\text{Min}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{K}_{pv}]]]}]$$

$$\text{Print}[\text{Número de condición de } \mathbf{M}_{pv} = , \frac{\text{Max}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{M}_{pv}]]]}{\text{Min}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{M}_{pv}]]]}]$$

$$\text{Print}[\text{Determinante de } \mathbf{K}_{pv} = , \text{Det}[\mathbf{K}_{pv}]]$$

$$\text{Print}[\text{Determinante de } \mathbf{M}_{pv} = , \text{Det}[\mathbf{M}_{pv}]]$$

$$\text{Print}[\text{Elementos no nulos (\%)} \text{ de } \mathbf{K}_{pv} = , \frac{1}{18^2} (18^2 - (\text{Count}[\text{Flatten}[\mathbf{K}_{pv}], 0])) 100. \%]$$

$$\text{Print}[\text{Elementos no nulos (\%)} \text{ de } \mathbf{M}_{pv} = , \frac{1}{18^2} (18^2 - (\text{Count}[\text{Flatten}[\mathbf{M}_{pv}], 0])) 100. \%]$$

y que valen:

$$\text{Número de condición de } \mathbf{K}_{pv} = 18706.8$$

$$\text{Número de condición de } \mathbf{M}_{pv} = 2.04546$$

$$\text{Determinante de } \mathbf{K}_{pv} = -1.92938 \times 10^{31}$$

$$\text{Determinante de } \mathbf{M}_{pv} = -236.092$$

$$\text{Elementos no nulos (\%)} \text{ de } \mathbf{K}_{pv} = 20.3704 \%$$

$$\text{Elementos no nulos (\%)} \text{ de } \mathbf{M}_{pv} = 20.3704 \%$$

en donde se observa, como ya se comentó, cómo coincide el número de elementos no nulos en ambas matrices.

■ **Resolución de los sistemas.-** Resolviendo cada uno de los sistemas con las matrices de coeficientes \mathbf{K}_{pv} y \mathbf{M}_{pv} se tendrá:

$$\mathbf{P}_{pv} = \text{P18}; \text{LinearSolve}[\mathbf{K}_{pv}, \mathbf{P}_{pv}]$$

Es de observar cómo en la resolución de este sistema el programa deja ya de emitir el aviso de posibles errores, debido a la enorme mejora que ha sufrido el condicionamiento de su matriz de coeficientes con la última transformación introducida en ellos.

■ **Método Clásico.-** Para la matriz \mathbf{K}_{pv} se tiene

Corrimientos (en metros y radianes):

Nudos	u_i	γ_i
1 →	{0.00341734},	{-0.00057137}
2 →		{-0.000277523}
3 →		{-0.000326497}
4 →		{-0.000326497}
5 →		{-0.000277523}
6 →		{-0.00057137}

Axiles (en KN) con \mathbf{K}_{pv} :

Pilares:

$$\{4.29752\}, \{-1.23967\}, \{0.247934\}, \{-0.247934\}, \{1.23967\}, \{-4.29752\}$$

Obsérvese la antimetría de los axiles de pilares

Vigas:

$$\{-34.2424\}, \{-26.9972\}, \{-20.\}, \{-13.0028\}, \{-5.75758\}$$

■ **Método propuesto.**- Para la matriz \mathbf{M}_{pv} se tiene

LinearSolve[\mathbf{M}_v , \mathbf{P}_v]

Corrimientos (en metros y radianes, multiplicados por EI_o) con \mathbf{M}_v :

Nudos	u_i	γ_i
1 →	{46.1341},	{-7.7135}
2 →		{-3.74656}
3 →		{-4.40771}
4 →		{-4.40771}
5 →		{-3.74656}
6 →		{-7.7135}

Obsérvese que se mantiene la antimetría de los corrimientos.

En cuanto a los valores de los axiles, siguen siendo los mismos anteriores, por lo que no se muestran.

Los resultados obtenidos para los corrimientos en el procedimiento propuesto, tal y como se advirtió en el pie de la página 4-7, vienen multiplicados por EI_o , por lo que, con objeto de compararlos con los del Método Clásico, se han de dividir por este valor, resultando

$$\text{LinearSolve}[\mathbf{M}_v, \mathbf{P}_v] \frac{1}{EI_o}$$

Corrimientos (en metros y radianes) :

Nudos	u_i	γ_i
1 →	{0.00341734},	{-0.00057137}
2 →		{-0.000277523}
3 →		{-0.000326497}
4 →		{-0.000326497}
5 →		{-0.000277523}
6 →		{-0.00057137}

donde se puede observar, cómo se siguen manteniendo los mismos resultados por ambos procedimientos.

■ **A.10.3 Eliminación de las incógnitas correspondientes a axiles de vigas.**- De acuerdo con lo establecido en el epígrafe 9.4, calculando la transpuesta de la Matriz de Transformación correspondiente a la viga \mathbf{T}_v y premultiplicando por ésta las matrices \mathbf{K}_{pv} y \mathbf{M}_{pv} , se obtendrá las matrices $\overset{v}{\mathbf{K}}_{pv}$ y $\overset{v}{\mathbf{M}}_{pv}$, donde el superíndice indica que dichas matrices han sufrido una transformación (combinación lineal en sus filas) debido a las condiciones de inelongabilidad de las vigas. Así, pues, se tiene

$$\mathbf{T}_v^o \mathbf{T} = \text{Transpose}[\mathbf{T}_v]$$

Print[Dimensiones de $\mathbf{T}_v^o \mathbf{T}$ = , Dimensions[$\mathbf{T}_v^o \mathbf{T}$]]

Dimensiones de $\mathbf{T}_v^o \mathbf{T}$ = {13, 18}

Recordando que la configuración de dichas matrices es

$$\mathbf{K}_{pv} = (\mathbf{K}_{6 \times 6} \cdot \mathbf{T}_{pv} \quad \mathbf{I}_{p6 \times 6} \cdot {}^o\mathbf{T} \quad \mathbf{I}_{v6 \times 5}) \quad \text{y} \quad \mathbf{M}_{pv} = (\mathbf{M}_{6 \times 6} \cdot \mathbf{T}_{pv} \quad \mathbf{I}_{p6 \times 6} \cdot {}^o\mathbf{T} \quad \mathbf{I}_{v6 \times 5})$$

de las que se perderán el último bloque $\mathbf{I}_{v6 \times 5}$ ya que las matrices $\mathbf{T}_v \cdot {}^o\mathbf{T}$ y $\mathbf{I}_{v6 \times 5}$ son divisores de cero y para comprobar que la matriz producto siguiente es nula, le pedimos al programa el máximo valor absoluto de sus elementos:

$$\text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{T}_v \cdot {}^o\mathbf{T} \cdot \mathbf{I}_{v6 \times 5}]] = 0.$$

Postmultiplicando, pues, la primera columna de las matrices anteriores por la Matriz de Transformación $\mathbf{T}_v \cdot {}^o\mathbf{T}$ antes ensamblada, se obtienen las siguientes matrices:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{pv}^v &= (\mathbf{T}_v \cdot {}^o\mathbf{T} \cdot \mathbf{K}_{6 \times 6} \cdot \mathbf{T}_{pv} \quad \mathbf{T}_v \cdot {}^o\mathbf{T} \cdot \mathbf{I}_{p6 \times 6} \cdot {}^o\mathbf{T}) \\ \mathbf{M}_{pv}^v &= (\mathbf{T}_v \cdot {}^o\mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_{6 \times 6} \cdot \mathbf{T}_{pv} \quad \mathbf{T}_v \cdot {}^o\mathbf{T} \cdot \mathbf{I}_{p6 \times 6} \cdot {}^o\mathbf{T}) \end{aligned}$$

$$\text{Print}[\text{Dimensiones } \mathbf{K}_{pv}^v = \text{Dimensiones } \mathbf{M}_{pv}^v = , \text{Dimensions}[\mathbf{K}_{pv}^v]]$$

$$\text{Dimensiones } \mathbf{K}_{pv}^v = \text{Dimensiones } \mathbf{M}_{pv}^v = " \{13, 13\}$$

que corresponden a las siete incógnitas cinemáticas independientes, más los seis axiles de los pilares.

■ **Elementos de las matrices.**- Se muestran a continuación las primeras columnas para el Método Matricial Clásico y la Matriz completa para el Método propuesto con objeto de comparar los valores de los elementos de ambas.

$$\text{MatrixForm}[\mathbf{K}_{pv}^v]$$

15187.5 + 0. x	5062.5	5062.5	5062.5	5062.5	5062.5	5062.5	0 0
0	5062.5 x ³	5062.5 x ³	0	0	0	0	1 0
5062.5	13500. + 13500. x ³	6750. x ³	0	0	0	0	0 0
0	-5062.5 x ³	0. x ³	5062.5 x ³	0	0	0	0 1
5062.5	6750. x ³	13500. + 27000. x ³	6750. x ³	0	0	0	0 0
0	0	-5062.5 x ³	0. x ³	5062.5 x ³	0	0	0 0
5062.5	0	6750. x ³	13500. + 27000. x ³	6750. x ³	0	0	0 0
0	0	0	-5062.5 x ³	0. x ³	5062.5 x ³	0	0 0
5062.5	0	0	6750. x ³	13500. + 27000. x ³	6750. x ³	0	0 0
0	0	0	0	-5062.5 x ³	0. x ³	5062.5 x ³	0 0
5062.5	0	0	0	6750. x ³	13500. + 27000. x ³	6750. x ³	0 0
0	0	0	0	0	-5062.5 x ³	-5062.5 x ³	0 0
5062.5	0	0	0	0	6750. x ³	13500. + 13500. x ³	0 0

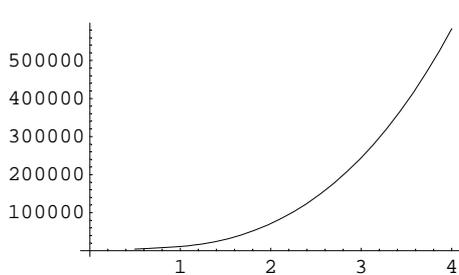
MatrixForm[$\overset{\mathbf{v}}{\mathbf{M}}_{\mathbf{pv}}$]

$$\begin{pmatrix} 1.125 & 0.375 & 0.375 & 0.375 & 0.375 & 0.375 & 0.375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.375 x^3 & 0.375 x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.375 & 1. + 1. x^3 & 0.5 x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.375 x^3 & 0. x^3 & 0.375 x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.375 & 0.5 x^3 & 1. + 2. x^3 & 0.5 x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.375 x^3 & 0. x^3 & 0.375 x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.375 & 0 & 0.5 x^3 & 1. + 2. x^3 & 0.5 x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.375 x^3 & 0. x^3 & 0.375 x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.375 & 0 & 0 & 0.5 x^3 & 1. + 2. x^3 & 0.5 x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.375 x^3 & 0. x^3 & 0.375 x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.375 & 0 & 0 & 0 & 0.5 x^3 & 1. + 2. x^3 & 0.5 x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.375 x^3 & -0.375 x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 x^3 & 1. + 2. x^3 & 0.5 x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.375 x^3 & -0.375 x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 x^3 & 1. + 1. x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

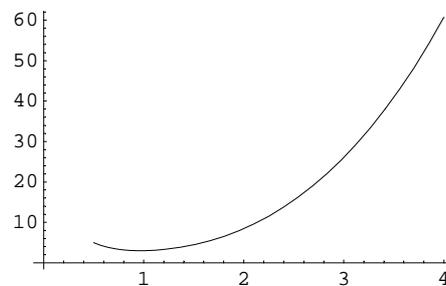
■ **Curvas de condicionamiento.**- Como consecuencia de la nueva transformación introducida en los sistemas, el número de condición correspondiente al Método Clásico sufre una espectacular disminución para todo valor de x, como puede observarse comparando las siguientes gráficas con las correspondientes al sistema anterior.

```
autovalores[lon_] := N[Eigenvalues[ $\overset{\mathbf{v}}{\mathbf{K}}_{\mathbf{pv}}$  /. x -> lon]]
ratio1[lon_] := Block[{a}, a = autovalores[lon] // Abs; Max[a]/Min[a]]
Plot[ratio1[xx], {xx, 0.5, 4}]
```

```
autovalores[lon_] := N[Eigenvalues[ $\overset{\mathbf{v}}{\mathbf{M}}_{\mathbf{pv}}$  /. x -> lon]]
ratio1[lon_] := Block[{a}, a = autovalores[lon] // Abs; Max[a]/Min[a]]
Plot[ratio1[xx], {xx, 0.5, 4}]
```



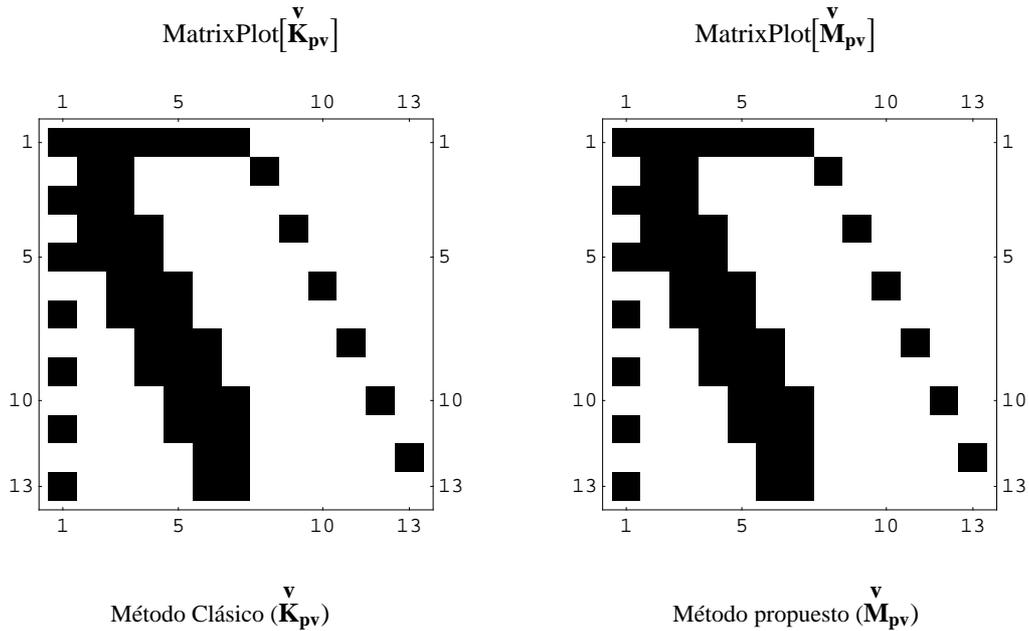
Método Clásico ($\overset{\mathbf{v}}{\mathbf{K}}_{\mathbf{pv}}$)



Método propuesto ($\overset{\mathbf{v}}{\mathbf{M}}_{\mathbf{pv}}$)

Para x=1, es decir, si todas las barras tienen la misma sección, se obtienen los siguientes gráficos, valores máximos de los elementos de las matrices, valores del número de condición, del determinante y elementos no nulos (%) de las Matrices.

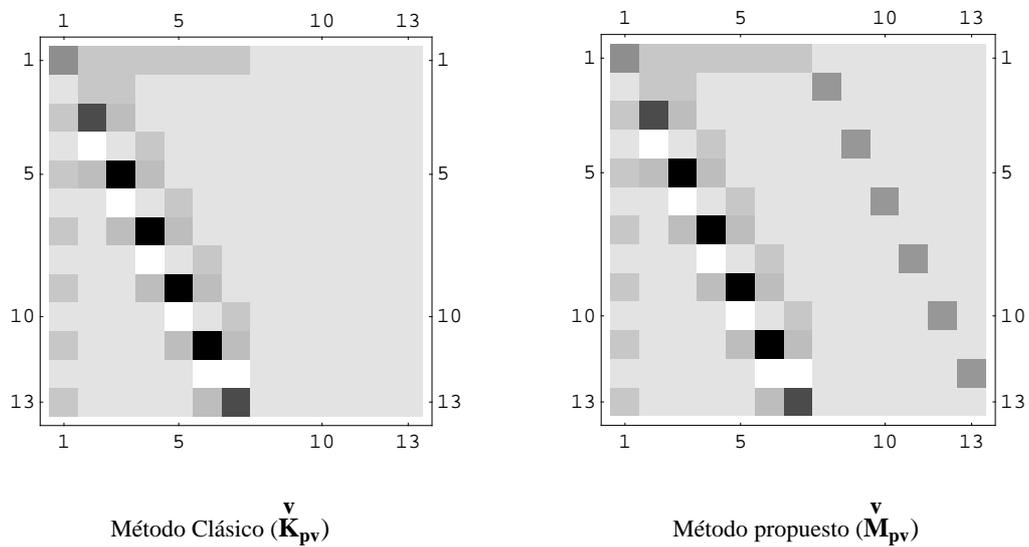
■ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos no nulos.-**



■ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos dominantes.- .**

MatrixPlot[\mathbf{K}_{pv}^v , ColorFunction -> (GrayLevel[1 - #] &), ColorFunctionScaling -> True]

MatrixPlot[\mathbf{M}_{pv}^v , ColorFunction -> (GrayLevel[1 - #] &), ColorFunctionScaling -> True]



Puede observarse que no aparecen en el gráfico de la izquierda los elementos correspondientes a la transpuesta de la Matriz de Inelongabilidad correspondiente a lo pilares.

■ **Valores máximos de los elementos de las matrices.-** Los valores de los elementos de mayor valor absoluto de cada una de las matrices son

$$\text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{K}_{pv}^v]] = 40500.$$

$$\text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{M}_{pv}^v]] = 3.$$

■ **Valores del número de condición, determinante y elementos no nulos (%) de las Matrices.**- Con las siguientes órdenes obtenemos los valores que solicitamos y que valen:

$$\text{Print}[\text{Número de condición de } \mathbf{K}_{pv}^v = , \frac{\text{Max}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{K}_{pv}^v]]]}{\text{Min}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{K}_{pv}^v]]]}]$$

$$\text{Print}[\text{Número de condición de } \mathbf{M}_{pv}^v = , \frac{\text{Max}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{M}_{pv}^v]]]}{\text{Min}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{M}_{pv}^v]]]}]$$

$$\text{Print}[\text{Determinante de } \mathbf{K}_{pv}^v = , \text{Det}[\mathbf{K}_{pv}^v]]$$

$$\text{Print}[\text{Determinante de } \mathbf{M}_{pv}^v = , \text{Det}[\mathbf{M}_{pv}^v]]$$

$$\text{Print}[\text{Elementos no nulos (\%)} \text{ de } \mathbf{K}_{pv}^v = , \frac{1}{13^2} (13^2 - (\text{Count}[\text{Flatten}[\mathbf{K}_{pv}^v], 0])) 100. \%]$$

$$\text{Print}[\text{Elementos no nulos (\%)} \text{ de } \mathbf{M}_{pv}^v = , \frac{1}{13^2} (13^2 - (\text{Count}[\text{Flatten}[\mathbf{M}_{pv}^v], 0])) 100. \%]$$

y que valen:

$$\text{Número de condición de } \mathbf{K}_{pv}^v = 11217.6$$

$$\text{Número de condición de } \mathbf{M}_{pv}^v = 3.00426$$

$$\text{Determinante de } \mathbf{K}_{pv}^v = -1.92938 \times 10^{31}$$

$$\text{Determinante de } \mathbf{M}_{pv}^v = -236.092$$

$$\text{Elementos no nulos (\%)} \text{ de } \mathbf{K}_{pv}^v = 30.1775 \%$$

$$\text{Elementos no nulos (\%)} \text{ de } \mathbf{M}_{pv}^v = 30.1775 \%$$

De los valores anteriores se desprende que, mientras que en el sistema correspondiente al Método Clásico se produce una leve reducción del valor del número de condición como consecuencia de la transformación introducida, en el Método propuesto aumenta dicho valor.

■ **Resolución de los sistemas.**- Resolviendo cada uno de los sistemas con las matrices de coeficientes \mathbf{K}_{pv}^v y \mathbf{M}_{pv}^v , teniendo en cuenta que la transformación introducida no es más que la consecuencia de una determinada combinación lineal del sistema de ecuaciones y, por tanto afecta también al término independiente, éste se habrá transformado en el vector de acciones \mathbf{P}_{pv}^v , que valdrá:

$$\mathbf{P}_{pv}^v = \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P18}$$

$$\text{LinearSolve}[\mathbf{K}_{pv}^v, \mathbf{P}_{pv}^v]$$

$$\text{LinearSolve}[\mathbf{M}_{pv}^v, \mathbf{P}_{pv}^v]$$

con lo que, resolviendo los sistemas se obtendrán las mismas soluciones anteriores, pero sin incluir los axiles correspondientes a las vigas.

■ **A.10.4 Eliminación de todas las incógnitas correspondientes a los Multiplicadores de Lagrange.-** premultiplicando por la matriz T_{pv}^oT , transpuesta de la T_{pv} :

$$T_{pv}^oT = \text{Transpose}[T_{pv}]$$

$$\text{Print}[\text{Dimensiones de } T_{pv}^oT = , \text{Dimensions}[T_{pv}^oT]]$$

$$\text{Dimensiones de } T_{pv}^oT = \{7, 18\}$$

las matrices K_{pv} y M_{pv} , que como recordaremos eran:

$$K_{pv} = (K_{6 \times 6} \cdot T_{pv} \quad I_{p6 \times 6}^oT \quad I_{v6 \times 5}) \quad \text{y} \quad M_{pv} = (M_{6 \times 6} \cdot T_{pv} \quad I_{p6 \times 6}^oT \quad I_{v6 \times 5})$$

y como ya es sabido, los productos matriciales $T_{pv}^oT \cdot I_{p6 \times 6}^oT$ y $T_{pv}^oT \cdot I_{v6 \times 5}$ son nulos, como se comprueba a continuación:

$$\text{Max}[\text{Abs}[T_{pv}^oT \cdot I_{p6 \times 6}^oT]] = 0.$$

$$\text{Max}[\text{Abs}[T_{pv}^oT \cdot I_{v6 \times 5}]] = 0.$$

se produce una última transformación de los sistemas, quedando éstos reducidos a otros cuyas matrices de coeficientes son

$$K_{pv}^{pv} = T_{pv}^oT \cdot K_{6 \times 6} \cdot T_{pv}; \quad \text{y} \quad M_{pv}^{pv} = T_{pv}^oT \cdot M_{6 \times 6} \cdot T_{pv}$$

Las dimensiones de las matrices del sistema quedan reducidas a su mínima expresión

$$\text{Print}[\text{Dimensiones } K_{pv}^{pv} = \text{Dimensiones } M_{pv}^{pv} = , \text{Dimensions}[K_{pv}^{pv}]]$$

$$\text{Dimensiones } K_{pv}^{pv} = \text{Dimensiones } M_{pv}^{pv} = \{7, 7\}$$

que no es más que el número de indeterminación cinemática de la estructura en estudio y que, como ya se ha comentado en otros capítulos de este trabajo, coincide con la matriz correspondiente al Método de las Transformaciones.

■ **Elementos de las matrices.-** Se muestran a continuación ambas matrices con objeto de comparar los valores de los elementos de ambas.

$$\text{MatrixForm}[K_{pv}^{pv}]$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 15187.5 + 0. x & 5062.5 & 5062.5 & 5062.5 & 5062.5 & 5062.5 & 5062.5 \\ 5062.5 & 13500. + 13500. x^3 & 6750. x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5062.5 & 6750. x^3 & 13500. + 27000. x^3 & 6750. x^3 & 0 & 0 & 0 \\ 5062.5 & 0 & 6750. x^3 & 13500. + 27000. x^3 & 6750. x^3 & 0 & 0 \\ 5062.5 & 0 & 0 & 6750. x^3 & 13500. + 27000. x^3 & 6750. x^3 & 0 \\ 5062.5 & 0 & 0 & 0 & 6750. x^3 & 13500. + 27000. x^3 & 6750. x^3 \\ 5062.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6750. x^3 & 13500. + 13500. x^3 \end{array} \right)$$

$$\text{MatrixForm}\left[\mathbf{M}_{pv}^{pv}\right]$$

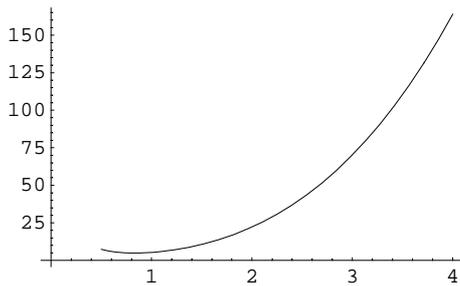
$$\begin{pmatrix} 1.125 & 0.375 & 0.375 & 0.375 & 0.375 & 0.375 & 0.375 \\ 0.375 & 1. + 1. x^3 & 0.5 x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.375 & 0.5 x^3 & 1. + 2. x^3 & 0.5 x^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.375 & 0 & 0.5 x^3 & 1. + 2. x^3 & 0.5 x^3 & 0 & 0 \\ 0.375 & 0 & 0 & 0.5 x^3 & 1. + 2. x^3 & 0.5 x^3 & 0 \\ 0.375 & 0 & 0 & 0 & 0.5 x^3 & 1. + 2. x^3 & 0.5 x^3 \\ 0.375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 x^3 & 1. + 1. x^3 \end{pmatrix}$$

las cuales están relacionada por la rigidez a la flexión EIo, ya que la segunda no es más que la primera dividida por dicha rigidez.

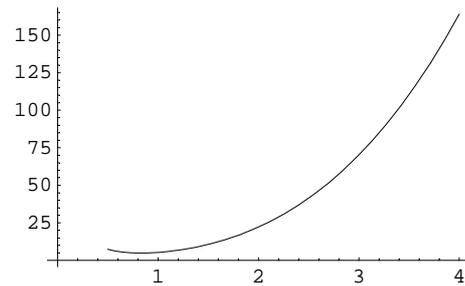
■ **Curvas de condicionamiento.**- las siguientes gráficas nos muestra estas curvas:

```
autovalores[lon_] := N[Eigenvalues[ $\mathbf{K}_{pv}^{pv}$  /. x -> lon]]
ratio1[lon_] := Block[{a}, a = autovalores[lon] // Abs; Max[a]/Min[a]]
Plot[ratio1[xx], {xx, 0.5, 4}]
```

```
autovalores[lon_] := N[Eigenvalues[ $\mathbf{M}_{pv}^{pv}$  /. x -> lon]]
ratio1[lon_] := Block[{a}, a = autovalores[lon] // Abs; Max[a]/Min[a]]
Plot[ratio1[xx], {xx, 0.5, 4}]
```



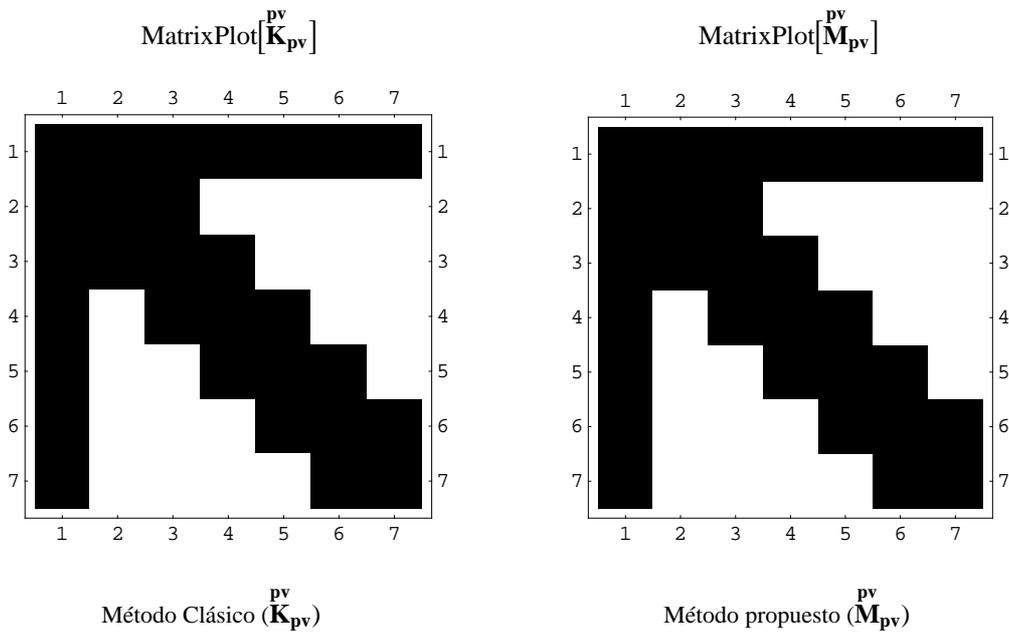
Método Clásico (\mathbf{K}_{pv}^{pv})



Método propuesto (\mathbf{M}_{pv}^{pv})

Evidentemente el condicionamiento de ambas matrices es el mismo, pues como ya se ha dicho, una es igual a la otra multiplicada por un escalar. Para $x = 1$, se tienen los siguientes valores:

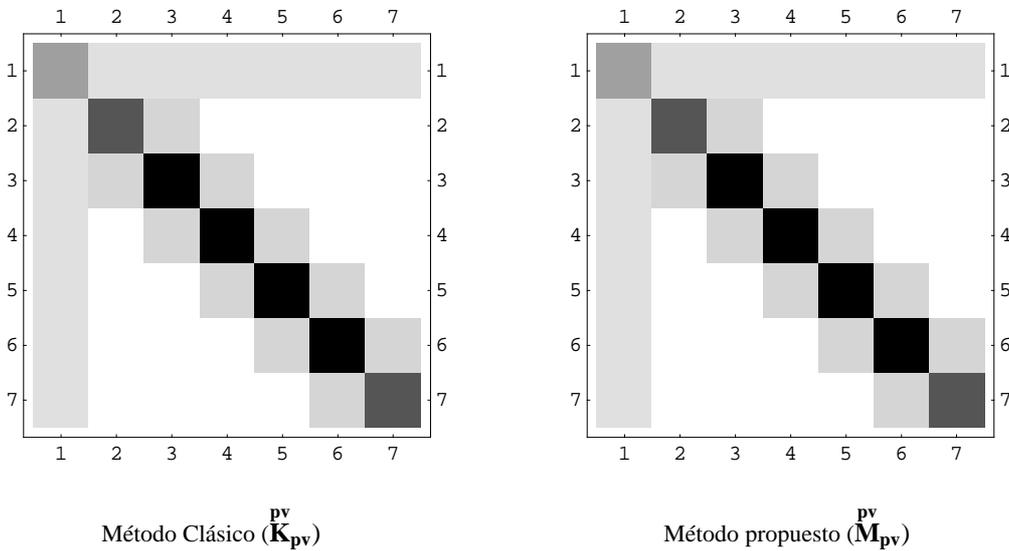
■ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos no nulos.-**



■ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos dominantes.-**

MatrixPlot[\mathbf{K}_{pv}^{pv} , ColorFunction -> (GrayLevel[1 - #] &), ColorFunctionScaling -> True]

MatrixPlot[\mathbf{M}_{pv}^{pv} , ColorFunction -> (GrayLevel[1 - #] &), ColorFunctionScaling -> True]



Las gráficas son idénticas, pues las relaciones entre el elemento dominante y los demás en cada un de ellas son las mismas en ambas matrices.

■ **Valores máximos de los elementos de las matrices.-** Los valores de los elementos de mayor valor absoluto de cada una de las matrices son

$$\text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{K}_{pv}^{pv}]] = 40500.$$

$$\text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{M}_{pv}^{pv}]] = 3.$$

■ **Valores del número de condición, determinante y elementos no nulos (%) de las Matrices.**- Con las siguientes órdenes obtenemos los valores que solicitamos:

$$\text{Print}[\text{Número de condición de } \mathbf{K}_{pv}^{pv} = , \frac{\text{Max}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{K}_{pv}^{pv}]]]}{\text{Min}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{K}_{pv}^{pv}]]]}]$$

$$\text{Print}[\text{Número de condición de } \mathbf{M}_{pv}^{pv} = , \frac{\text{Max}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{M}_{pv}^{pv}]]]}{\text{Min}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{M}_{pv}^{pv}]]]}]$$

$$\text{Print}[\text{Determinante de } \mathbf{K}_{pv}^{pv} = , \text{Det}[\mathbf{K}_{pv}^{pv}]]$$

$$\text{Print}[\text{Determinante de } \mathbf{M}_{pv}^{pv} = , \text{Det}[\mathbf{M}_{pv}^{pv}]]$$

$$\text{Print}[\text{Elementos no nulos (\%)} \text{ de } \mathbf{K}_{pv}^{pv} = , \frac{1}{7^2} (7^2 - (\text{Count}[\text{Flatten}[\mathbf{K}_{pv}^{pv}], 0])) 100. \%]$$

$$\text{Print}[\text{Elementos no nulos (\%)} \text{ de } \mathbf{M}_{pv}^{pv} = , \frac{1}{7^2} (7^2 - (\text{Count}[\text{Flatten}[\mathbf{M}_{pv}^{pv}], 0])) 100. \%]$$

y que valen:

$$\text{Número de condición de } \mathbf{K}_{pv}^{pv} = 5.30694$$

$$\text{Número de condición de } \mathbf{M}_{pv}^{pv} = 5.30694$$

$$\text{Determinante de } \mathbf{K}_{pv}^{pv} = 1.92938 \times 10^{31}$$

$$\text{Determinante de } \mathbf{M}_{pv}^{pv} = 236.092$$

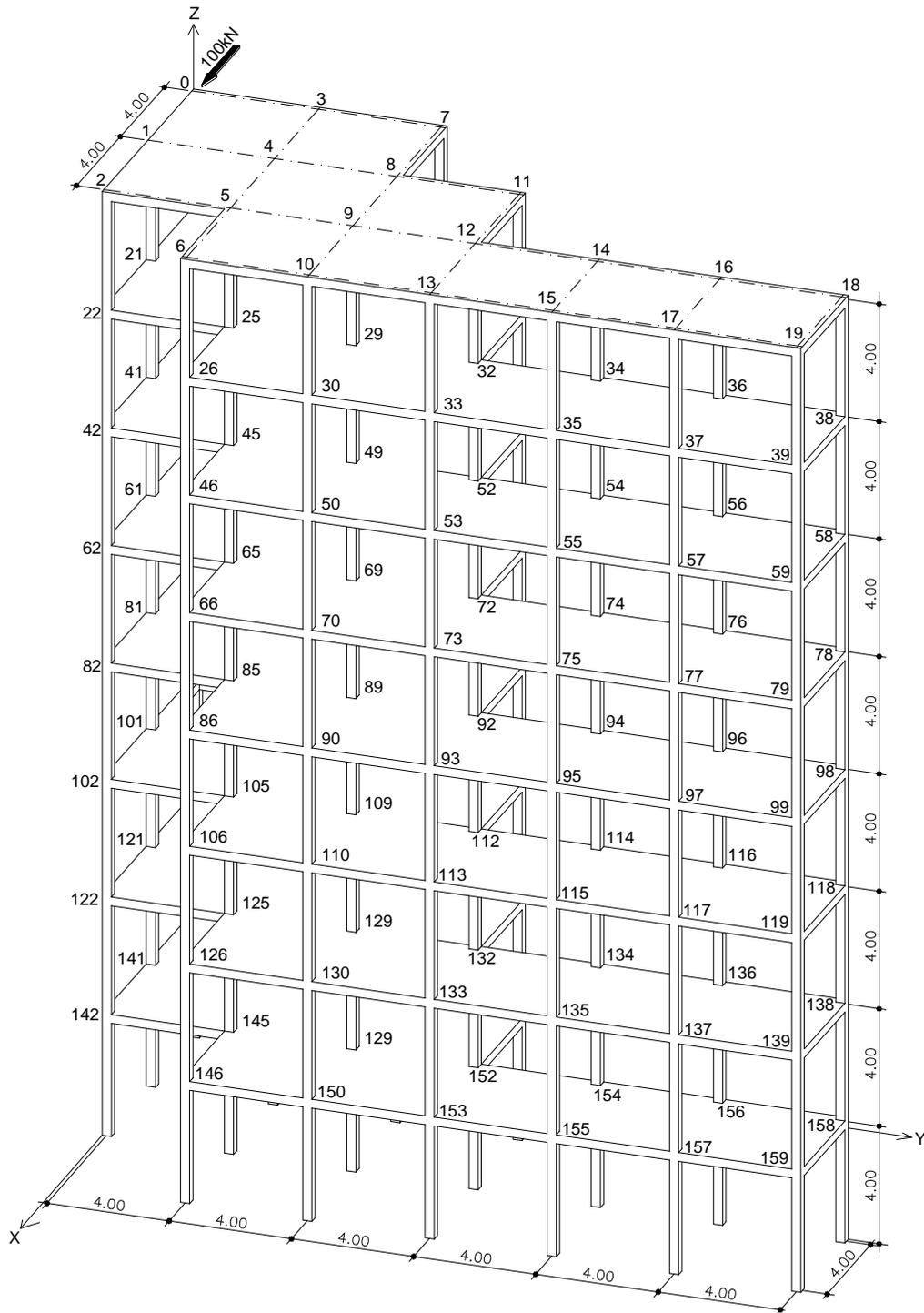
$$\text{Elementos no nulos (\%)} \text{ de } \mathbf{K}_{pv}^{pv} = 59.1837 \%$$

$$\text{Elementos no nulos (\%)} \text{ de } \mathbf{M}_{pv}^{pv} = 59.1837 \%$$

donde se puede observar que, mientras el condicionamiento de la matriz correspondiente al Método Clásico ha sufrido un importante mejoramiento respecto a la configuración anterior, el condicionamiento correspondiente al Método propuesto ha empeorado.

■ **Resolución de los sistemas.** -Resolviendo cada uno de los sistemas con las matrices de coeficientes \mathbf{K}_{pv}^{pv} y \mathbf{M}_{pv}^{pv} se obtienen los valores de los corrimientos independientes, esto es, una incógnita de desplazamiento horizontal, correspondiente al grupo cotranslacional, y seis incógnitas correspondientes al giro de cada uno de los nudos, que por coincidir con los cálculos anteriores, no se reproducen aquí.

ANEXO B: Modelo 8 Mixto



Estructura espacial de nudos rígidos de 8 plantas considerado como estructura de gran altura.

Se considera la hipótesis de diafragma rígido.

Se suponen los pilares deformables axialmente.

MODELO 8 MIXTO

La Matriz de Rigidez de la estructura se ensambla con las matrices clásicas para los pilares y con las matrices del método propuesto para las jácenas

■ B.1 Nomenclatura y simbología.- Llamaremos

- E: módulo de Young
- G: módulo de elasticidad transversal
- L: longitud de la barra
- b: base de su sección transversal
- h_p : canto del pilar
- h_v : canto de la viga
- A: área de la sección transversal
- I_x : momento polar de inercia de la sección recta
- I_y : momento de inercia de la sección recta respecto al eje local Y' (principal de inercia)
- I_z : momento de inercia de la sección recta respecto al eje local Z' (principal de inercia)
- I_0 : momento de inercia de la barra de referencia respecto al eje local Y'
- u_i : desplazamiento en la dirección OX
- v_i : desplazamiento en la dirección OY
- γ_i : desplazamiento en la dirección OZ
- α : ángulo de la directriz de la barra, respecto al eje global OX, en radianes
- β : ángulo de la directriz de la barra, respecto al eje global OY, en radianes
- γ : ángulo de la directriz de la barra, respecto al eje global OZ, en radianes
- XX' : ángulo que forman los ejes X y X'
- XY' : ángulo que forman los ejes X e Y'
- XZ' : ángulo que forman los ejes X y Z'
- YX' : ángulo que forman los ejes Y y X'
- YY' : ángulo que forman los ejes Y e Y'
- YZ' : ángulo que forman los ejes Y y Z'
- ZX' : ángulo que forman los ejes Z y X'
- ZY' : ángulo que forman los ejes Z e Y'
- ZZ' : ángulo que forman los ejes Z y Z'
- Para las matrices correspondientes al Método Clásico se utilizará la letra mayúscula K, mientras que para el método propuesto se utilizará la letra mayúscula M.
- Los subíndices y superíndices (p) y (v) hacen referencia a pilares y vigas, respectivamente.

■ B.2 Submatrices de rigidez de pilares correspondientes al Método Matricial Clásico.- Utilizaremos las matrices de barra dadas por [3.12] con el subíndice p indicando que corresponden a los pilares:

■ Datos de pilares: (Kilonewton, metros y radianes)

$$E = 2 * 10^7; G = 8 * 10^6; L = 4; b = .3; h_p = .3; A = b h_p; I_{y'} = (b h_p^3) / 12; I_{z'} = (h_p b^3) / 12;$$

$$I_x = I_{y'} + I_{z'}; XX' = 0; XY' = 0; XZ' = -1;$$

$$YX' = 0; YY' = 1; YZ' = 0; ZX' = 1; ZY' = 0; ZZ' = 0;$$

$$\mathbf{K}_{iip} = \left(\begin{array}{l} \text{Debido gran tamaño de la Matriz para poder} \\ \text{observarla en su desarrollo completo véase} \\ \text{la misma en el soporte informatico adjunto} \end{array} \right);$$

$$\mathbf{K}_{ijp} = \left(\begin{array}{l} \text{Debido gran tamaño de la Matriz para poder} \\ \text{observarla en su desarrollo completo véase} \\ \text{la misma en el soporte informatico adjunto} \end{array} \right);$$

$$\mathbf{K}_{jip} = \left(\begin{array}{l} \text{Debido gran tamaño de la Matriz para poder} \\ \text{observarla en su desarrollo completo véase} \\ \text{la misma en el soporte informatico adjunto} \end{array} \right);$$

$$\mathbf{K}_{jip} = \left(\begin{array}{l} \text{Debido gran tamaño de la Matriz para poder} \\ \text{observarla en su desarrollo completo véase} \\ \text{la misma en el soporte informatico adjunto} \end{array} \right);$$

■ B.3 Submatrices de rigidez de vigas en la dirección X correspondientes al Método Matricial

Clásico.- Con el subíndice X indicando que corresponden a las vigas en esa dirección y de forma análoga se tendrá:

■ **Datos de vigas en la dirección X:** (Kilonewton, metros y radianes) Los cantos de la vigas vienen en función de los cantos de los pilares a través de la variable x, que nos permitirá estudiar la variación del número de condición en función de esta variable.

$$L = 4; b = .3; h_v = x h_p; A = b h_v; I_{y'} = (b h_v^3) / 12; I_{z'} = (h_v b^3) / 12; I_{x'} = I_{y'} + I_{z'};$$

$$XX' = 1; XY' = 0; XZ' = 0; YX' = 0; YY' = 1; YZ' = 0; ZX' = 0; ZY' = 0; ZZ' = 1;$$

$$\mathbf{K}_{iix} = \left(\begin{array}{l} \text{Debido gran tamaño de la Matriz para poder} \\ \text{observarla en su desarrollo completo véase} \\ \text{la misma en el soporte informatico adjunto} \end{array} \right)$$

$$\mathbf{K}_{ijx} = \left(\begin{array}{l} \text{Debido gran tamaño de la Matriz para poder} \\ \text{observarla en su desarrollo completo véase} \\ \text{la misma en el soporte informatico adjunto} \end{array} \right)$$

$$\mathbf{K}_{jix} = \left(\begin{array}{l} \text{Debido gran tamaño de la Matriz para poder} \\ \text{observarla en su desarrollo completo véase} \\ \text{la misma en el soporte informatico adjunto} \end{array} \right)$$

$$\mathbf{K}_{jix} = \left(\begin{array}{l} \text{Debido gran tamaño de la Matriz para poder} \\ \text{observarla en su desarrollo completo véase} \\ \text{la misma en el soporte informatico adjunto} \end{array} \right)$$

■ B.4 Submatrices de rigidez de vigas en la dirección Y correspondientes al Método Matricial

Clásico.- Con el subíndice Y indicando que corresponden a las vigas en esa dirección Y de forma análoga se tendrá:

■ **Datos de vigas en dirección Y:** Análogamente a las viagas en direccion X.

$$L = 4; b = .3; h_v = x h_p; A = b h_v; I_{y'} = (b h_v^3) / 12; I_{z'} = (h_v b^3) / 12; I_{x'} = I_{y'} + I_{z'};$$

$$XX' = 0; XY' = -1; XZ' = 0; YX' = 1; YY' = 0; YZ' = 0; ZX' = 0; ZY' = 0; ZZ' = 1;$$

$$\mathbf{K}_{iiY} = \left(\begin{array}{l} \text{Debido gran tamaño de la Matriz para poder} \\ \text{observarla en su desarrollo completo véase} \\ \text{la misma en el soporte informatico adjunto} \end{array} \right)$$

$$\mathbf{K}_{ijY} = \left(\begin{array}{l} \text{Debido gran tamaño de la Matriz para poder} \\ \text{observarla en su desarrollo completo véase} \\ \text{la misma en el soporte informatico adjunto} \end{array} \right)$$

$$\mathbf{K}_{jiY} = \left(\begin{array}{l} \text{Debido gran tamaño de la Matriz para poder} \\ \text{observarla en su desarrollo completo véase} \\ \text{la misma en el soporte informatico adjunto} \end{array} \right)$$

$$\mathbf{K}_{jjY} = \left(\begin{array}{l} \text{Debido gran tamaño de la Matriz para poder} \\ \text{observarla en su desarrollo completo véase} \\ \text{la misma en el soporte informatico adjunto} \end{array} \right)$$

■ **B.5 Submatrices de rigidez de vigas en dirección X correspondientes al método propuesto.-** Puesto que se trata de un entramado espacial, pueden utilizarse cualesquiera de la matrices de rigidez expuestas en el epígrafe 5.2.1 esto es la [5.94].

■ **Datos de vigas en dirección X:**

$$L = 4; b = .3; h_p = .3; I_o = I_{y'} = (b h_p^3) / 12; L_x = 4; L_y = 0; b = .3; h_v = x h_p;$$

$$I_{y'} = (b h_v^3) / 12; I_{z'} = (h_v b^3) / 12; I_{x'} = I_{y'} + I_{z'}; r = I_{y'} / I_o; i = I_{z'} / I_{y'}; s = I_{x'} / I_{y'}; t = G / e;$$

$$\mathbf{M}_{iiX} = (2 E I_{z'}) / L^3 \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 L_y & -3 L_x & 0 \\ 0 & 0 & 3 L_y & \frac{st}{2} L_x^2 + 2 L_y^2 & \frac{st-4}{2} L_x L_y & 0 \\ 0 & 0 & -3 L_x & \frac{st-4}{2} L_x L_y & \frac{st}{2} L_y^2 + 2 L_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{M}_{ijX} = (2 E I_{z'}) / L^3 \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 L_y & -3 L_x & 0 \\ 0 & 0 & -3 L_y & -\frac{st}{2} L_x^2 + L_y^2 & -\frac{st+2}{2} L_x L_y & 0 \\ 0 & 0 & -3 L_x & -\frac{st+2}{2} L_x L_y & -\frac{st}{2} L_y^2 + L_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{M}_{jiX} = (2 E I_{z'}) / L^3 \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 L_y & 3 L_x & 0 \\ 0 & 0 & 3 L_y & -\frac{st}{2} L_x^2 + L_y^2 & -\frac{st+2}{2} L_x L_y & 0 \\ 0 & 0 & -3 L_x & -\frac{st+2}{2} L_x L_y & -\frac{st}{2} L_y^2 + L_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{M}_{jjx} = (2 E I_{z'})/L^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3L_y & 3L_x & 0 \\ 0 & 0 & -3L_y & \frac{st}{2} L_x^2 + 2L_y^2 & \frac{st-4}{2} L_x L_y & 0 \\ 0 & 0 & 3L_x & \frac{st-4}{2} L_x L_y & \frac{st}{2} L_y^2 + 2L_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que aquí estas matrices no pueden venir parametrizadas por utilizar las matrices tradicionales para los pilares.

■ **B.6 Submatrices de rigidez de vigas en la dirección Y correspondientes al método propuesto.-** Con el subíndice Y indicando que corresponden a las vigas en esa dirección Y de forma análoga se tendrá:

■ **Datos de vigas en dirección Y:** Análogamente a las viagas en direccion X.

$$L_x = 0; L = L_y = 4; b = .3; h_v = x h_p; I_{y'} = (b h_v^3)/12; I_{z'} = (h_v b^3)/12;$$

$$I_{x'} = I_{y'} + I_{z'}; r = I_{y'}/I_0; i = I_{z'}/I_{y'}; s = I_{x'}/I_{y'}; t = G/e;$$

$$\mathbf{M}_{iiy} = (2 E I_{z'})/L^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3L_y & -3L_x & 0 \\ 0 & 0 & 3L_y & \frac{st}{2} L_x^2 + 2L_y^2 & \frac{st-4}{2} L_x L_y & 0 \\ 0 & 0 & -3L_x & \frac{st-4}{2} L_x L_y & \frac{st}{2} L_y^2 + 2L_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{ijy} = (2 E I_{z'})/L^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3L_y & -3L_x & 0 \\ 0 & 0 & -3L_y & -\frac{st}{2} L_x^2 + L_y^2 & -\frac{st+2}{2} L_x L_y & 0 \\ 0 & 0 & -3L_x & -\frac{st+2}{2} L_x L_y & -\frac{st}{2} L_y^2 + L_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{jiy} = (2 E I_{z'})/L^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3L_y & 3L_x & 0 \\ 0 & 0 & 3L_y & -\frac{st}{2} L_x^2 + L_y^2 & -\frac{st+2}{2} L_x L_y & 0 \\ 0 & 0 & -3L_x & -\frac{st+2}{2} L_x L_y & -\frac{st}{2} L_y^2 + L_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{jyy} = (2 E I_{z'})/L^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3L_y & 3L_x & 0 \\ 0 & 0 & -3L_y & \frac{st}{2} L_x^2 + 2L_y^2 & \frac{st-4}{2} L_x L_y & 0 \\ 0 & 0 & 3L_x & \frac{st-4}{2} L_x L_y & \frac{st}{2} L_y^2 + 2L_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{160 \times 160} = \text{BlockMatrix} \left[\begin{array}{cccccccc} M_{1,1} & M_{\text{supe,inf}} & N_{120 \times 120} \\ M_{\text{inf,supe}} & M_{\text{TIPO}} & M_{\text{supe,inf}} & N_{120 \times 120} \\ N_{120 \times 120} & M_{\text{inf,supe}} & M_{\text{TIPO}} & M_{\text{supe,inf}} & N_{120 \times 120} & N_{120 \times 120} & N_{120 \times 120} & N_{120 \times 120} \\ N_{120 \times 120} & N_{120 \times 120} & M_{\text{inf,supe}} & M_{\text{TIPO}} & M_{\text{supe,inf}} & N_{120 \times 120} & N_{120 \times 120} & N_{120 \times 120} \\ N_{120 \times 120} & N_{120 \times 120} & N_{120 \times 120} & M_{\text{inf,supe}} & M_{\text{TIPO}} & M_{\text{supe,inf}} & N_{120 \times 120} & N_{120 \times 120} \\ N_{120 \times 120} & N_{120 \times 120} & N_{120 \times 120} & N_{120 \times 120} & M_{\text{inf,supe}} & M_{\text{TIPO}} & M_{\text{supe,inf}} & N_{120 \times 120} \\ N_{120 \times 120} & M_{\text{inf,supe}} & M_{\text{TIPO}} & M_{\text{supe,inf}} \\ N_{120 \times 120} & M_{\text{inf,supe}} & M_{\text{TIPO}} \end{array} \right]$$

$N_{120 \times 120} = \text{ZeroMatrix}[120]$

Print["Dimensiones de $M_{160 \times 160} =$ ", Dimensiones[$M_{160 \times 160}$]

Dimensiones de $M_{160 \times 160} = \{960,960\}$

■ **B.9 Elementos de las matrices.-** Debido a la gran dimensión de las matrices véanse en soporte informático adjunto los desarrollos completos (se presentan sólo los primeros elementos) de las correspondientes matrices que nos proporcionan las dos órdenes siguientes:

■ **Método Clásico :**

MatrixForm[$K_{160 \times 160}$]

2531.25 + 452531. x	0	0	0
0	2531.25 + 452531. x	0	5062.5
0	0	450000. + 5062.5 x ³	5062.5 x ³
0	5062.5	5062.5 x ³	13500. + 13500. x ³ + 2. × 10 ⁶ (0.000675 x + 0.000675.
-5062.5	0	-5062.5 x ³	0
-5062.5 x	5062.5 x	0	0
-450000. x	0	0	0
0	-2531.25 x	0	0
0	0	-2531.25 x ³	0
0	0	0	-2. × 10 ⁶ (0.000675 x + 0.000675 x ³)
0	0	-5062.5 x ³	0
0	5062.5 x	0	0
0	0	0	0

■ **Método propuesto :**

MatrixForm[$M_{160 \times 160}$]

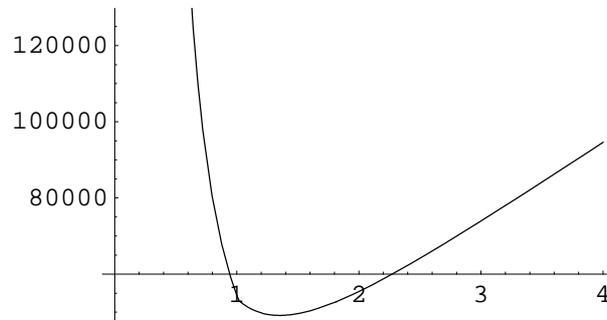
2531.25	0	0	0
0	2531.25	0	5062.5
0	0	450000. + 5062.5 x	5062.5 x
0	5062.5	5062.5 x	13500. + 13500. x + $\frac{2. \times 10^6 (0.000675 x + 0.000675 x^3)}{x^2}$
-5062.5	0	-5062.5 x	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	-2531.25 x	0
0	0	0	$-\frac{2. \times 10^6 (0.000675 x + 0.000675 x^3)}{x^2}$
0	0	-5062.5 x	0
0	0	0	0

■ **B.10 Curva de condicionamiento.-** Se introduce la orden que nos devuelve la curva que muestra los valores (eje de ordenadas) del número de condición de la matriz correspondiente al Método Clásico en función de la variable x (eje de abscisas) cuando ésta varía de 0.5 hasta 4. Dichos valores están calculados según la norma matricial 2. Evidentemente la correspondiente a la del método propuesto no ha lugar, pues

el sistema con esta matriz devolverá una solución incorrecta por faltar las ecuaciones de restricción de Diafragma Rígido.

```

autovalores[lon_]:=N[Eigenvalues[K160x160/.x→lon]]ratio1[lon_]:= Block[{a},
a=autovalores[lon_]/Abs; Max[a]/Min[a]]Plot[ratio1[xx],{xx,0.5,4}]
    
```



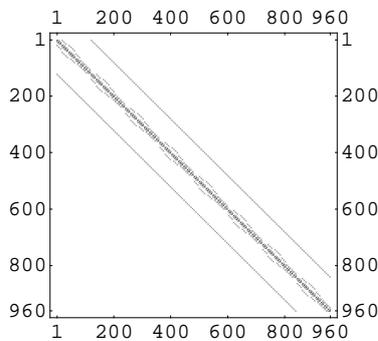
Para $x=1$, es decir, si todas las barras tienen la misma sección, se obtienen los siguientes gráficos, valores máximos de los elementos de las matrices, valores del número de condición, del determinante y elementos no nulos (%) de la Matriz

■ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos no nulos.**-La siguiente orden nos muestra en esquema la distribución de los elementos no nulos de la matriz de rigidez de la estructura correspondiente a cada una de los métodos:

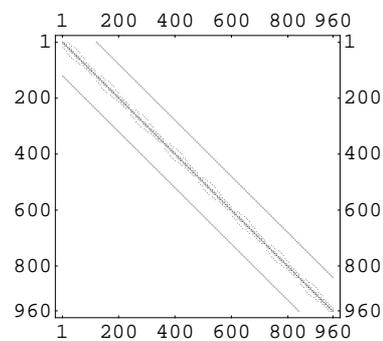
$x = 1;$

```

MatrixPlot[K160x160, MaxMatrixSize → 1000]     MatrixPlot[M160x160, MaxMatrixSize → 1000]
    
```



Método Clásico ($K_{160x160}$)



Método propuesto ($M_{160x160}$)

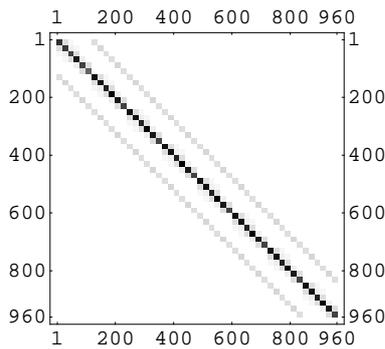
■ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos dominantes.**-La siguiente orden nos muestra la distribución de los elementos en función de sus valores numéricos, marcando con un recuadro negro los elementos dominantes, en tono de grises los valores menores y en blanco los elementos negativos.

```

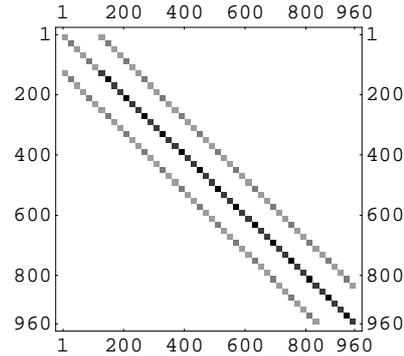
MatrixPlot[K160x160, MaxMatrixSize → 50,
ColorFunction → (GrayLevel[1 - #] &), ColorFunctionScaling → True]
    
```

```

MatrixPlot[M160x160, MaxMatrixSize → 50,
ColorFunction → (GrayLevel[1 - #] &), ColorFunctionScaling → True]
    
```



Método Clásico ($K_{160 \times 160}$)



Método propuesto ($M_{160 \times 160}$)

■ **Valores máximos de los elementos de las matrices.**- Los valores de los elementos de mayor valor absoluto de cada una de las matrices se le pueden pedir al programa, que para $x=1$ valen:

$$\text{Max}[\text{Abs}[K_{160 \times 160}]] = 910125.$$

$$\text{Max}[\text{Abs}[M_{160 \times 160}]] = 910125.$$

■ Para $x=1$, es decir, si todas las barras tienen la misma sección, se obtienen los siguientes valores del número de condición, del determinante y de los elementos no nulos (%) de la matriz

Print[Número de condición de $K_{160 \times 160} =$,
 $\text{Max}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[K_{160 \times 160}]]] / \text{Min}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[K_{160 \times 160}]]]$]

Print[Determinante de $K_{160 \times 160} =$, $\text{Det}[K_{160 \times 160}]$]

Print[Elementos no nulos (%) de $K_{160 \times 160} =$, $1 / 960^2 (960^2 - (\text{Count}[\text{Flatten}[K_{160 \times 160}], 0])) 100. \%$]

y que valen:

$$\text{Número de condición de } K_{160 \times 160} = 54511.9$$

$$\text{Determinante de } K_{160 \times 160} = 2.314549061776170 \times 10^{4817}$$

$$\text{Elementos no nulos (\%)} \text{ de } K_{160 \times 160} = 1.11979 \%$$

■ **B.11 Resolución del sistema correspondiente al Método Matricial Clásico.**- Con objeto de comparar resultados entre uno y otro método, se calculan los corrimientos suponiendo una carga P horizontal positiva aplicada en el nudo superior izquierdo de la estructura de 100 KN.

$$P960 = \text{Table}[0, \{i, 960\}, \{j, 1\}]; P960[[1]] = \{100\}; \text{LinearSolve}[K_{160 \times 160}, P960]$$

Los corrimientos de los seis primeros nudos (en metros y radianes) con la matriz $K_{160 \times 160}$ son:
 (El resto de los corrimientos pueden consultarse en el soporte informático adjunto -Modelo 8 Mixto-)

Nudos	u_i	v_i	w_i	α_i	β_i	γ_i
1 →	{0.10009},	{-0.0399416},	{0.00084607},	{0.000471868},	{0.00208154},	{0.00689839},
2 →	{0.0999282},	{-0.0171475},	{-0.000217434},	{0.000208488},	{0.00117805},	{0.00600237},
3 →	{0.0998585},	{0.00360602},	{-0.00120283},	{0.000112508},	{0.00200148},	{0.00666165},

$$\begin{aligned}
4 &\rightarrow \{0.0685789\}, \{-0.039933\}, \{0.000877912\}, \{0.000267899\}, \{0.00104553\}, \{0.0065692\}, \\
5 &\rightarrow \{0.0685616\}, \{-0.0171406\}, \{-0.0000259054\}, \{0.000119283\}, \{0.000583729\}, \{0.00623355\}, \\
6 &\rightarrow \{0.068531\}, \{0.00358433\}, \{-0.0000720708\}, \{0.0000669945\}, \{0.000615079\}, \{0.00588308\},
\end{aligned}$$

■ **B.12 Matriz de Diafragma Rígido para la planta tipo D_{TIPO}**:- (D57x20_{1,1}) N° de filas para el ensamblaje = N-1=19, N° de columnas = N (N° de nudos (20))→(19X20)

numero total de filas por planta = 3(N-1)=24, numero total de columnas 6xN=54

Coordenadas de los nudos de la planta 1 nudo maestro: 0; para la planta 2 : el 20; para la planta 3: el 40, etc...

■ **B.12.1 Matriz de Diafragma de los elementos**.- De acuerdo con lo expresado en el epígrafe 6.1.2 se procede al ensamblaje de las matrices de elemento de Diafragma Rígido dadas en [5.45] y [5.46].

$$\begin{aligned}
x_3 = x_7 = 0; & x_1 = x_4 = x_8 = x_{11} = 4; x_2 = x_5 = x_9 = x_{12} = x_{14} = x_{16} = x_{18} = 8; \\
x_6 = x_{10} = x_{13} = x_{15} = x_{17} = x_{19} = 12; \\
y_1 = y_2 = 0; & y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 4; y_7 = y_8 = y_9 = y_{10} = 8; \\
y_{11} = y_{12} = y_{13} = 12; & y_{14} = y_{15} = 16; y_{16} = y_{17} = 20; y_{18} = y_{19} = 24;
\end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_{0,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{D}_{0,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{D}_{0,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{0,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{D}_{0,5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{D}_{0,6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{0,7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{D}_{0,8} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{D}_{0,9} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{0,10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{10} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{D}_{0,11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{D}_{0,12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{0,13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{13} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{D}_{0,14} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{D}_{0,15} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{0,16} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{16} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{D}_{0,17} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{17} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{D}_{0,18} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{18} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{0,19} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{19} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{D}_j = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Print[Dimensiones $\mathbf{D}_{0,1}$ = , Dimensions[$\mathbf{D}_{0,1}$]]

Dimensiones $\mathbf{D}_{0,1}$ = {3, 6}

Dimensiones $\mathbf{K}_{Lagrange} = \text{Dimensiones } \mathbf{M}_{Lagrange^oMixto} = \{1416, 1416\}$

■ **Elementos de las matrices.-** Se muestra a continuación sendas matrices de las que, por motivos de espacio, se incluyen solo las primeras columnas: (véanse en soporte informático adjunto los desarrollos completos)

■ **Método Clásico :**

MatrixForm[$\mathbf{K}_{Lagrange}$]

2531.25 + 452531. x	0	0	0
0	2531.25 + 452531. x	0	5062.5
0	0	450000. + 5062.5 x ³	5062.5 x ³
0	5062.5	5062.5 x ³	13500. + 13500. x ³ + 2. × 10 ⁶ (0.000675 x + 0.000675 x ³)
-5062.5	0	-5062.5 x ³	0
-5062.5 x	5062.5 x	0	0
-450000. x	0	0	0
0	-2531.25 x	0	0
0	0	-2531.25 x ³	0
0	0	0	-2. × 10 ⁶ (0.000675 x + 0.000675 x ³)
0	0	-5062.5 x ³	0
0	5062.5 x	0	0
0	0	0	0

■ **Método propuesto :**

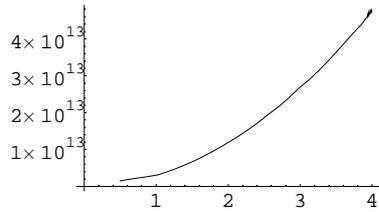
MatrixForm[$\mathbf{M}_{Lagrange^oMixto}$]

2531.25	0	0	0
0	2531.25	0	5062.5
0	0	450000. + 5062.5 x	5062.5 x
0	5062.5	5062.5 x	13500. + 13500. x + $\frac{2. \times 10^6 (0.000675 x + 0.000675 x^3)}{x^2}$
-5062.5	0	-5062.5 x	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	-2531.25 x	0
0	0	0	$-\frac{2. \times 10^6 (0.000675 x + 0.000675 x^3)}{x^2}$
0	0	-5062.5 x	0
0	0	0	0

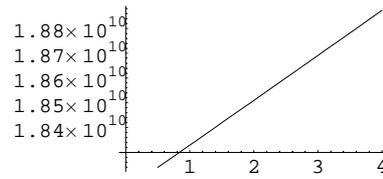
■ **Curvas de condicionamienot.-** Se introduce la orden que nos devuelve las curvas que muestra los valores (eje de ordenadas) del número de condición de la matrices correspondientes, calculados según la norma matricial 2

```
autovalores[lon_] := N[Eigenvalues[ $\mathbf{K}_{Lagrange} /. x \rightarrow lon$ ]] ratio1[lon_] := Block[{a},
a = autovalores[lon] // Abs; Max[a] / Min[a] Plot[ratio1[xx], {xx, 0.5, 4}]
```

```
autovalores[lon_] := N[Eigenvalues[ $\mathbf{M}_{Lagrange^oMixto} /. x \rightarrow lon$ ]] ratio1[lon_] := Block[{a},
a = autovalores[lon] // Abs; Max[a] / Min[a] Plot[ratio1[xx], {xx, 0.5, 4}]
```



Método Clásico ($K_{Lagrange}$)



Método propuesto ($M_{Lagrange}^{Mixto}$)

Obsérvese el espectacular aumento del número de condición que ha sufrido la Matriz de Lagrange correspondiente al Método Clásico, respecto a la matriz anterior $K_{20 \times 20}$ sin condiciones de restricción.

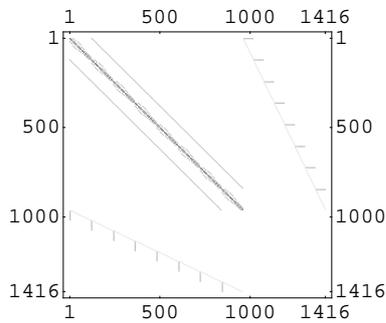
Para $x=1$, es decir, si todas las barras tienen la misma sección, se obtienen los siguientes gráficos, valores máximos de los elementos de las matrices, valores del número de condición, del determinante y elementos no nulos (%) de la Matriz

■ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos no nulos.**-La siguiente orden nos muestra en esquema la distribución de los elementos no nulos de la matriz de rigidez de la estructura correspondiente a cada una de los métodos:

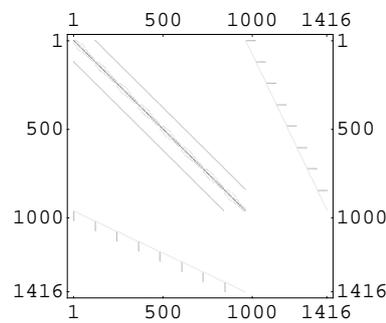
$x = 1$;

MatrixPlot[$K_{Lagrange}$, MaxMatrixSize \rightarrow 2000]

MatrixPlot[$M_{Lagrange}^{Mixto}$, MaxMatrixSize \rightarrow 2000]



Método Clásico ($K_{Lagrange}$)



Método propuesto ($M_{Lagrange}^{Mixto}$)

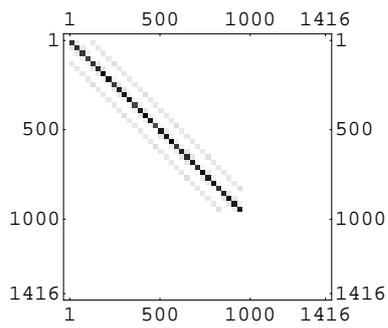
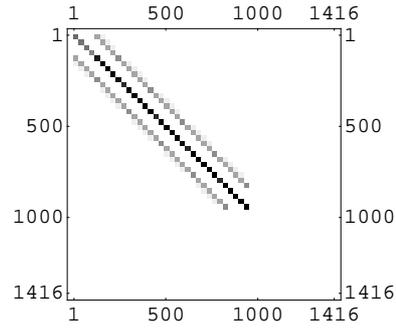
■ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos dominantes.**-La siguiente orden nos muestra la distribución de los elementos en función de sus valores numéricos, marcando con un recuadro negro los elementos dominantes, en tono de grises los valores menores y en blanco los elementos negativos.

MatrixPlot[$K_{Lagrange}$, MaxMatrixSize \rightarrow 50,

ColorFunction \rightarrow (GrayLevel[1 - #] &), ColorFunctionScaling \rightarrow True]

MatrixPlot[$M_{Lagrange}^{Mixto}$, MaxMatrixSize \rightarrow 50,

ColorFunction \rightarrow (GrayLevel[1 - #] &), ColorFunctionScaling \rightarrow True]

Método Clásico ($\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}$)Método propuesto ($\mathbf{M}_{\text{Lagrange}}^{\text{Mixto}}$)

Las gráficas describen las ubicaciones de elementos dominantes en relación con los de menor valor (absoluto) dando una idea de la homogeneidad de sus elementos. Comparando estas gráficas con las anteriores, se observan los elementos que pierden entidad frente a los dominantes, debido a las diferencias en sus números de orden.

■ **Valores máximos de los elementos de las matrices.**- Los valores de los elementos de mayor valor absoluto de cada una de las matrices se le pueden pedir al programa, que para $x=1$ valen:

$$\text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}]] = 910125.$$

$$\text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{M}_{\text{Lagrange}}^{\text{Mixto}}]] = 910125.$$

■ Para $x=1$, es decir, si todas las barras tienen la misma sección, se obtienen los siguientes valores del número de condición, del determinante y de los elementos no nulos (%) de la matriz

```
Print[Número de condición de  $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}$  = ,
Max[Abs[Eigenvalues[ $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}$ ]]] / Min[Abs[Eigenvalues[ $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}$ ]]]]
```

```
Print[Número de condición de  $\mathbf{M}_{\text{Lagrange}}^{\text{Mixto}}$  = ,
Max[Abs[Eigenvalues[ $\mathbf{M}_{\text{Lagrange}}^{\text{Mixto}}$ ]]] / Min[Abs[Eigenvalues[ $\mathbf{M}_{\text{Lagrange}}^{\text{Mixto}}$ ]]]]
```

```
Print[Determinante de  $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}$  = , Det[ $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}$ ]]
Print[Determinante de  $\mathbf{M}_{\text{Lagrange}}^{\text{Mixto}}$  = , Det[ $\mathbf{M}_{\text{Lagrange}}^{\text{Mixto}}$ ]]
```

```
Print[Elementos no nulos (%) de  $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}$  = , 1 / 9602 (9602 - (Count[Flatten[ $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}$ ], 0])) 100. %]
```

```
Print[Elementos no nulos (%) de  $\mathbf{M}_{\text{Lagrange}}^{\text{Mixto}}$  = , 1 / 9602 (9602 - (Count[Flatten[ $\mathbf{M}_{\text{Lagrange}}^{\text{Mixto}}$ ], 0])) 100. %]
```

y que valen:

Número de condición de $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}} = 3.02917 \times 10^{12}$

Número de condición de $\mathbf{M}_{\text{Lagrange}^{\circ}\text{Mixto}} = 1.83293 \times 10^{10}$

Determinante de $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}} = 8.846469371499191 \times 10^{2523}$

Determinante de $\mathbf{M}_{\text{Lagrange}^{\circ}\text{Mixto}} = 1.924631969263192 \times 10^{2524}$

Elementos no nulos (%) de $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}} = 0.6328 \%$

Elementos no nulos (%) de $\mathbf{M}_{\text{Lagrange}^{\circ}\text{Mixto}} = 0.485173 \%$

■ **Resolución directa del Sistema de Lagrange.**- Con objeto de comparar resultados entre uno y otro método, se calculan los corrimientos suponiendo una carga P horizontal positiva aplicada en el nudo superior izquierdo de la estructura de 100 KN.

P960 = Table[0, {i, 960}, {j, 1}]; P960[[1]] = {100};

P1416 = BlockMatrix[$\begin{pmatrix} \mathbf{P960} \\ \mathbf{N456} \end{pmatrix}$]; N456 = ZeroMatrix[456, 1];

■ **Método Clásico.**- Para la matriz $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}$ se tiene

LinearSolve[$\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}$, P1416]

LinearSolve::luc : Result for LinearSolve of badly conditioned matrix
 {{455063., 0., 0., 0., -5062.5, -5062.5, -450000., 0., 0., 0., <<1406>>}, <<9>>, <<1406>>}}
 may contain significant numerical errors. More... "

El programa da un aviso indicando que los resultados pueden contener importantes errores debido al mal condicionamiento de la matriz.

Los corrimientos de los seis primeros nudos (en metros y radianes) con la matriz $\mathbf{K}_{\text{Lagrange}}$ son:
 (El resto de los corrimientos pueden consultarse en el soporte informático adjunto -modelo 8-)

Nudos	u_i	v_i	w_i	α_i	β_i	γ_i
1 →	{0.0907501},	{-0.038952},	{0.000661517},	{0.000584695},	{0.00142038},	{0.00515865},
2 →	{0.0907501},	{-0.0183174},	{-0.000239808},	{0.000311858},	{0.00083235},	{0.00515865},
3 →	{0.0907501},	{0.00231718},	{-0.00104101},	{0.000134862},	{0.0013655},	{0.00515865},
4 →	{0.0701155},	{-0.038952},	{0.000894908},	{0.000331978},	{0.00114988},	{0.00515865},
5 →	{0.0701155},	{-0.0183174},	{-0.0000261721},	{0.000175641},	{0.000659677},	{0.00515865},
6 →	{0.0701155},	{0.00231718},	{-0.0000447687},	{0.0000649541},	{0.000663133},	{0.00515865},

■ **Método propuesto.**- Para la matriz $\mathbf{M}_{\text{Lagrange}^{\circ}\text{Mixto}}$ se tiene

LinearSolve[$\mathbf{M}_{\text{Lagrange}^{\circ}\text{Mixto}}$, P1416]

LinearSolve::luc : Result for LinearSolve of badly conditioned matrix
 {{2531.25, 0., 0., 0., -5062.5, 0., 0., 0., 0., 0., <<1406>>}, <<9>>, <<1406>>}}
 may contain significant numerical errors. More... "

El programa da un aviso indicando que los resultados pueden contener importantes errores debido al mal condicionamiento de la matriz.

Los corrimientos de los seis primeros nudos (en metros y radianes) con la matriz $\mathbf{M}_{\text{Lagrange}^{\circ}\text{Mixto}}$

son:

(El resto de los corrimientos pueden consultarse en el soporte informático adjunto -modelo 8-)

Nudos	u_i	v_i	w_i	α_i	β_i	γ_i
1 →	{0.0888359},	{-0.038182},	{0.000591333},	{0.000571839},	{0.00134136},	{0.005059},
2 →	{0.0888359},	{-0.017946},	{-0.00022591},	{0.000298738},	{0.000588594},	{0.005059},
3 →	{0.0888359},	{0.00228995},	{-0.000971861},	{0.00012627},	{0.0013509},	{0.005059},
4 →	{0.0685999},	{-0.038182},	{0.000861546},	{0.000326649},	{0.00109767},	{0.005059},
5 →	{0.0685999},	{-0.017946},	{-0.0000469187},	{0.00016721},	{0.000639203},	{0.005059},
6 →	{0.0685999},	{0.00228995},	{-0.0000367199},	{0.0000595196},	{0.000507273},	{0.005059},

■ **B.15 Resolución de los Sistemas de Lagrange por transformación de columnas.**- De acuerdo con lo expresado en el epígrafe 6.3.1, introduciremos en los Sistemas de Lagrange aquellas combinaciones lineales de sus columnas tales que se eliminen tantas incógnitas de corrimiento como ecuaciones de inelogabilidad se han introducido en el sistema.

■ **Ensamblaje directo de la Matriz de Transformación debido al Diafragma Rígido para la planta tipo (D_{TIP0}).**- Matriz de transformación de los elementos [10.20] y [10.21]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I_d} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{T_{0,1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{T_{0,2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \\
 \mathbf{T_{0,3}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{T_{0,4}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{T_{0,5}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \\
 \mathbf{T_{0,6}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{T_{0,7}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{T_{0,8}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \\
 \mathbf{T_{0,9}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{T_{0,10}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{T_{0,11}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_D = \text{BlockMatrix} \left[\begin{array}{cccccccc} \mathbf{T}_{TIPO} & \mathbf{N}_{120 \times 63} \\ \mathbf{N}_{120 \times 63} & \mathbf{T}_{TIPO} & \mathbf{N}_{120 \times 63} \\ \mathbf{N}_{120 \times 63} & \mathbf{N}_{120 \times 63} & \mathbf{T}_{TIPO} & \mathbf{N}_{120 \times 63} \\ \mathbf{N}_{120 \times 63} & \mathbf{N}_{120 \times 63} & \mathbf{N}_{120 \times 63} & \mathbf{T}_{TIPO} & \mathbf{N}_{120 \times 63} & \mathbf{N}_{120 \times 63} & \mathbf{N}_{120 \times 63} & \mathbf{N}_{120 \times 63} \\ \mathbf{N}_{120 \times 63} & \mathbf{N}_{120 \times 63} & \mathbf{N}_{120 \times 63} & \mathbf{N}_{120 \times 63} & \mathbf{T}_{TIPO} & \mathbf{N}_{120 \times 63} & \mathbf{N}_{120 \times 63} & \mathbf{N}_{120 \times 63} \\ \mathbf{N}_{120 \times 63} & \mathbf{T}_{TIPO} & \mathbf{N}_{120 \times 63} & \mathbf{N}_{120 \times 63} \\ \mathbf{N}_{120 \times 63} & \mathbf{T}_{TIPO} & \mathbf{N}_{120 \times 63} \\ \mathbf{N}_{120 \times 63} & \mathbf{T}_{TIPO} \end{array} \right];$$

$\mathbf{N}_{120 \times 63} = \text{ZeroMatrix}[120, 63];$

$\text{Print}[\text{Dimensiones } \mathbf{T}_D = , \text{Dimensions}[\mathbf{T}_D]]$

$\text{Dimensiones } \mathbf{T}_D = \{960, 504\}$

Y recordando que:

$$\mathbf{K}_{\text{Lagrange}} = \text{BlockMatrix} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{K}_{160 \times 160} & \mathbf{D}_{160 \times 456} \\ \mathbf{D}_{456 \times 160} & \mathbf{N}_{456 \times 456} \end{array} \right] \text{ y } \mathbf{M}_{\text{Lagrange}^{\circ}\text{Mixto}} = \text{BlockMatrix} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{M}_{160 \times 160} & \mathbf{D}_{160 \times 456} \\ \mathbf{D}_{456 \times 160} & \mathbf{N}_{456 \times 456} \end{array} \right]$$

de las cuales se perderá la última fila de los respectivos Sistemas de Lagrange, esto es, las ecuaciones de Diafragma Rígido, ya que las matrices $\mathbf{D}_{456 \times 160}$ y \mathbf{T}_D son divisores de cero, como se demostró en el apartado 8.4 y para comprobar que la matriz producto siguiente es nula, le pedimos al programa el máximo valor absoluto de sus elementos:

$$\text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{D}_{456 \times 160} \cdot \mathbf{T}_D]] = 0$$

Postmultiplicando, pues, la primera columna de ambos sistemas por la Matriz de Transformación \mathbf{T}_D , se obtienen los sistemas transformados \mathbf{K}_D y \mathbf{M}_D siguientes, donde el subíndice \mathbf{D} indica que la transformación es debida a las condiciones de Diafragma Rígido.

$\text{Clear}[x]$

$$\mathbf{K}_D = \text{BlockMatrix}[(\mathbf{K}_{160 \times 160} \cdot \mathbf{T}_D \quad \mathbf{D}_{160 \times 456})] \text{ y } \mathbf{M}_D = \text{BlockMatrix}[(\mathbf{M}_{160 \times 160} \cdot \mathbf{T}_D \quad \mathbf{D}_{160 \times 456})];$$

$\text{Print}[\text{Dimensiones de } \mathbf{K}_D = \text{Dimensiones de } \mathbf{M}_D , \text{Dimensions}[\mathbf{K}_D]]$

$\text{Dimensiones de } \mathbf{K}_D = \text{Dimensiones de } \mathbf{M}_D = \{960, 960\}$

■ **Elementos de las matrices.-** Se muestra a continuación sendas matrices de las que, por motivos de espacio, se incluyen solo las primeras columnas: (véanse en soporte informático adjunto los desarrollos completos)

■ **Método Clásico :**

$\text{MatrixForm}[\mathbf{K}_D]$

$$\begin{array}{cccc} 2531.25 + 0. x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2531.25 + 0. x & 0 & 5062.5 \\ 0 & 0 & 450000. + 0. x^3 & 5062.5 x^3 \\ 0 & 5062.5 & 0. x^3 & 13500. + 13500. x^3 + 2. \times 10^6 (0.000675 x + 0.000675 x^3) \\ -5062.5 & 0 & 0. x^3 & 0 \\ 0. x & 0. x & 0 & 0 \\ 2531.25 + 0. x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2531.25 + 0. x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 450000. + 0. x^3 & 0 \end{array}$$

0	5062.5	$0 \cdot x^3$	$-2 \cdot 10^6 (0.000675 x + 0.000675 x^3)$
-5062.5	0	$0 \cdot x^3$	0
$0 \cdot x$	$0 \cdot x$	0	0
$2531.25 + 0 \cdot x$	0	0	0

■ **Método propuesto :**

MatrixForm[M_D]

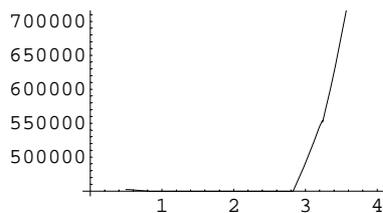
2531.25	0	0	0
0	2531.25	0	5062.5
0	0	$450000 \cdot + 0 \cdot x$	$5062.5 x$
0	5062.5	$0 \cdot x$	$13500 \cdot + 13500 \cdot x + \frac{2 \cdot 10^6 (0.000675 x + 0.000675 x^3)}{x^2}$
-5062.5	0	$-10125 \cdot x$	0
0	0	0	0
2531.25	0	0	0
0	2531.25	0	0
0	0	$450000 \cdot + 0 \cdot x$	0
0	5062.5	$0 \cdot x$	$-\frac{2 \cdot 10^6 (0.000675 x + 0.000675 x^3)}{x^2}$
-5062.5	0	$-10125 \cdot x$	0
0	0	0	0
2531.25	0	0	0

■ **Curvas de condicionamiento.-** Como consecuencia de la transformación introducida en los sistemas, los números de condición disminuyen para todo valor de x, como puede observarse comparando las siguientes gráficas con las correspondientes al Sistema de Lagrange sin modificar.

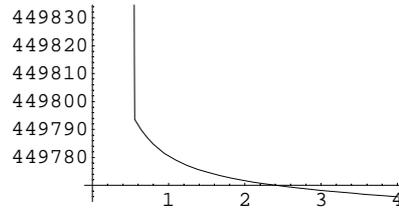
Se introduce la orden que nos devuelve las curvas que muestra los valores (eje de ordenadas) del número de condición de la matrices correspondientes, calculados según la norma matricial 2

```
autovalores[lon_] := N[Eigenvalues[K_D /. x -> lon]] ratio1[lon_] := Block[{a},
a = autovalores[lon] // Abs; Max[a] / Min[a]] Plot[ratio1[xx], {xx, 0.5, 4}]
```

```
autovalores[lon_] := N[Eigenvalues[M_D /. x -> lon]] ratio1[lon_] := Block[{a},
a = autovalores[lon] // Abs; Max[a] / Min[a]] Plot[ratio1[xx], {xx, 0.5, 4}]
```



Método Clásico (K_D)



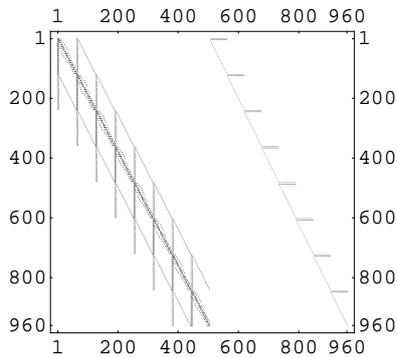
Método propuesto (M_D)

Para $x=1$, es decir, si todas las barras tienen la misma sección, se obtienen los siguientes gráficos, valores máximos de los elementos de las matrices, valores del número de condición, del determinante y elementos no nulos (%) de la Matriz

■ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos no nulos.-** La siguiente orden nos muestra en esquema la distribución de los elementos no nulos de la matriz de rigidez de la estructura correspondiente a cada una de los métodos:

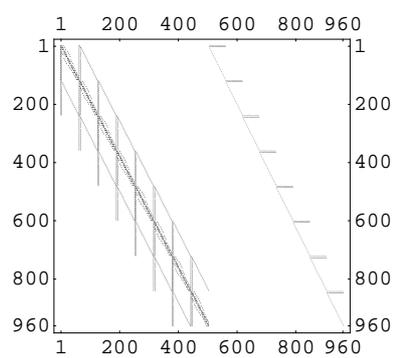
$x = 1;$

MatrixPlot[\mathbf{K}_D , MaxMatrixSize \rightarrow 2000]



Método Clásico (\mathbf{K}_D)

MatrixPlot[\mathbf{M}_D , MaxMatrixSize \rightarrow 2000]

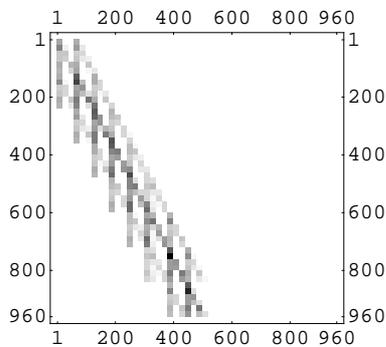


Método propuesto (\mathbf{M}_D)

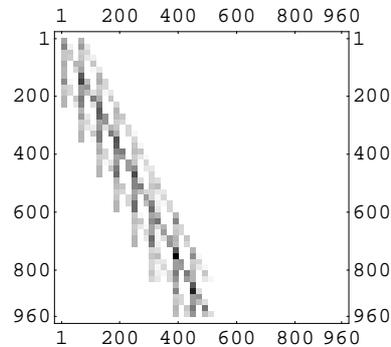
■ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos dominantes.**-La siguiente orden nos muestra la distribución de los elementos en función de sus valores numéricos, marcando con un recuadro negro los elementos dominantes, en tono de grises los valores menores y en blanco los elementos negativos.

```
MatrixPlot[ $\mathbf{K}_D$ , MaxMatrixSize  $\rightarrow$  50,
ColorFunction  $\rightarrow$  (GrayLevel[1 - #] &), ColorFunctionScaling  $\rightarrow$  True]
```

```
MatrixPlot[ $\mathbf{M}_D$ , MaxMatrixSize  $\rightarrow$  50,
ColorFunction  $\rightarrow$  (GrayLevel[1 - #] &), ColorFunctionScaling  $\rightarrow$  True]
```



Método Clásico (\mathbf{K}_D)



Método propuesto (\mathbf{M}_D)

Las gráficas describen las ubicaciones de elementos dominantes en relación con los de menor valor (absoluto) dando una idea de la homogeneidad de sus elementos. Comparando estas gráficas con las anteriores, se observan los elementos que pierden entidad frente a los dominanes, debido a las diferencias en sus órdenes de magnitud.

■ **Valores máximos de los elementos de las matrices.**- Los valores de los elementos de mayor valor absoluto de cada una de las matrices se le pueden pedir al programa, que para $x=1$ valen:

$$\text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{K}_D]] = 910125.$$

$$\text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{M}_D]] = 910125.$$

■ **Valores del número de condición, determinante y elementos no nulos (%) de las Matrices.**- Con las siguientes órdenes obtenemos los valores que solicitamos:

Print[Número de condición de $\mathbf{K}_D = , \text{Max}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{K}_D]]] / \text{Min}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{K}_D]]]$]

Print[Número de condición de $\mathbf{M}_D = , \text{Max}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{M}_D]]] / \text{Min}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{M}_D]]]$]

Print[Determinante de $\mathbf{K}_D = , \text{Det}[\mathbf{K}_D]$

Print[Determinante de $\mathbf{M}_D = , \text{Det}[\mathbf{M}_D]$

Print[Elementos no nulos (%) de $\mathbf{K}_D = , 1 / 960^2 (960^2 - (\text{Count}[\text{Flatten}[\mathbf{K}_D], 0])) 100. \%$]

Print[Elementos no nulos (%) de $\mathbf{M}_D = , 1 / 960^2 (960^2 - (\text{Count}[\text{Flatten}[\mathbf{M}_D], 0])) 100. \%$]

y que valen:

Número de condición de $\mathbf{K}_D = 449781.$

Número de condición de $\mathbf{M}_D = 449780.$

Determinante de $\mathbf{K}_D = 8.846469371687866 \times 10^{2523}$

Determinante de $\mathbf{M}_D = 1.924631969265490 \times 10^{2524}$

Elementos no nulos (%) de $\mathbf{K}_D = 1.20421 \%$

Elementos no nulos (%) de $\mathbf{M}_D = 1.16428 \%$

■ **Resolución de los sistemas.**- Resolviendo cada uno de los sistemas con las matrices de coeficientes \mathbf{K}_D y \mathbf{M}_D se tendrá:

$\mathbf{P}_D = P960;$

■ **Método Clásico.**- Para la matriz \mathbf{K}_D se tiene

LinearSolve[$\mathbf{K}_D, \mathbf{P}_D$]

Es de observar cómo en la resolución de este sistema el programa deja ya de emitir el aviso de posibles errores, debido a la enorme mejora que ha sufrido el condicionamiento de su matriz de coeficientes con la última transformación introducida en ellos.

Los corrimientos de los seis primeros nudos (en metros y radianes) con la matriz \mathbf{K}_D son:

(El resto de los corrimientos pueden consultarse en el soporte informático adjunto -Modelo 8 Mixto-)

Nudos	u_i	v_i	w_i	α_i	β_i	γ_i
0 →	{0.0907501},	{-0.038952},	{0.000661517},	{0.000584695},	{0.00142038},	{0.00515865},
1 →			{-0.000901325},	{0.000311858},	{0.00083235},	
2 →			{-0.00170253},	{0.000134862},	{0.0013655},	
3 →			{0.00023339},	{0.000331978},	{0.00114988},	
4 →			{-0.00068769},	{0.000175641},	{0.000659677},	
5 →			{-0.000706286},	{0.0000649541},	{0.000663133},	

■ **Método propuesto.**- Para la matriz \mathbf{M}_D se tiene

LinearSolve[$\mathbf{M}_D, \mathbf{P}_D$]

Es de observar cómo en la resolución de este sistema el programa deja ya de emitir el aviso de posibles errores, debido a la enorme mejora que ha sufrido el condicionamiento de su matriz de coeficientes con la última transformación introducida en ellos.

Los corrimientos de los seis primeros nudos (en metros y radianes) con la matriz \mathbf{M}_D son:
(El resto de los corrimientos pueden consultarse en el soporte informático adjunto -Modelo 8 Mixto-)

Nudos	u_i	v_i	w_i	α_i	β_i	γ_i
0 →	{0.0888359},	{-0.038182},	{0.000591333},	{0.000571839},	{0.00134136},	{0.005059},
1 →			{-0.000817243},	{0.000298738},	{0.000588594},	
2 →			{-0.00156319},	{0.00012627},	{0.0013509},	
3 →			{0.000270213},	{0.000326649},	{0.00109767},	
4 →			{-0.000638252},	{0.00016721},	{0.000639203},	
5 →			{-0.000628053},	{0.0000595196},	{0.000507273},	

donde las pequeñas diferencias son debidas a los redondeos del ordenador.

■ **B.16. Eliminación de las incógnitas correspondientes a los Multiplicadores de Lagrange.**- De acuerdo con lo establecido en el epígrafe 8.5.2, calculando la transpuesta de la Matriz de Transformación correspondiente a las vigas \mathbf{T}_D y premultiplicando por ésta las matrices \mathbf{K}_D y \mathbf{M}_D se obtendrán las matrices \mathbf{K}_D^D y \mathbf{M}_D^D donde el superíndice indica que dichas matrices han sufrido una transformación (combinación lineal en sus filas) debido a las condiciones de Diafragma Rígido. Así, pues, se tiene

$$\mathbf{T}_{D^*T} = \text{Transpose}[\mathbf{T}_D];$$

$$\text{Print}[\text{Dimensiones de } \mathbf{T}_{D^*T} = , \text{Dimensions}[\mathbf{T}_{D^*T}]]$$

$$\text{Dimensiones de } \mathbf{T}_{D^*T} = \{504, 960\}$$

Y recordando que:

$$\mathbf{K}_D = \text{BlockMatrix}[(\mathbf{K}_{160 \times 160} \cdot \mathbf{T}_D \quad \mathbf{D}_{160 \times 456})] \quad \text{y} \quad \mathbf{M}_D = \text{BlockMatrix}[(\mathbf{M}_{160 \times 160} \cdot \mathbf{T}_D \quad \mathbf{D}_{160 \times 456})];$$

perdiéndose el último bloque $\mathbf{D}_{160 \times 456}$ ya que las matrices \mathbf{T}_{D^*T} y $\mathbf{D}_{160 \times 456}$ son divisores de cero y para comprobar que la matriz producto siguiente es nula, le pedimos al programa el máximo valor absoluto de sus elementos:

$$\text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{T}_{D^*T} \cdot \mathbf{D}_{160 \times 456}]] = 0$$

Postmultiplicando, pues, la primera columna de las matrices anteriores por la Matriz de Transformación \mathbf{T}_{D^*T} antes ensamblada, se obtienen las siguientes matrices:

$$\text{Clear}[x]$$

$$\mathbf{K}_D^D = \mathbf{T}_{D^*T} \cdot \mathbf{K}_{160 \times 160} \cdot \mathbf{T}_D; \quad \mathbf{M}_D^D = \mathbf{T}_{D^*T} \cdot \mathbf{M}_{160 \times 160} \cdot \mathbf{T}_D;$$

$$\text{Print}[\text{Dimensiones } \mathbf{K}_D^D = \text{Dimensiones } \mathbf{M}_D^D = , \text{Dimensions}[\mathbf{K}_D^D]]$$

$$\text{Dimensiones de } \mathbf{K}_D^D = \text{Dimensiones } \mathbf{M}_D^D = \{504, 504\}$$

■ **Elementos de las matrices.-** Se muestra a continuación sendas matrices de las que, por motivos de espacio, se incluyen solo las primeras columnas: (véanse en soporte informático adjunto los desarrollos completos)

■ **Método Clásico :**

$$\text{MatrixForm}\left[\mathbf{K}_D^D\right]$$

50625. + 0. x	0
0	50625. + 0. x
0	0
0	5062.5
-5062.5	0
$1.08851 \times 10^8 x - 72 (2531.25 + 452531. x) - 96 (2531.25 + 455063. x) - 36 (2531.25 + 905063. x)$	$-1.08456 \times 10^8 x + 44 (2531.25 + 4525$
0	0
0	5062.5
-5062.5	0
0	0
0	5062.5
-5062.5	0
0	0
0	5062.5
-5062.5	0
0	0
0	5062.5
-5062.5	0

■ **Método propuesto :**

$$\text{MatrixForm}\left[\mathbf{M}_D^D\right]$$

50625.	0	0	0
0	50625.	0	5062.5
0	0	$9. \times 10^6 + 0. x$	$0. x$
0	5062.5	$0. x$	$13500. + 13500. x + \frac{2. \times 10^6 (0.000675 x + 0.000675 x^3)}{x^2}$
-5062.5	0	$-10125. x$	0
-516375.	364500.	0	0
0	0	$450000. + 0. x$	0
0	5062.5	$0. x$	$-\frac{2. \times 10^6 (0.000675 x + 0.000675 x^3)}{x^2}$
-5062.5	0	$-10125. x$	0
0	0	$450000. + 0. x$	0
0	5062.5	$0. x$	0
-5062.5	0	$0. x$	0
0	0	$450000. + 0. x$	$-5062.5 x$
0	5062.5	$0. x$	$6750. x$
-5062.5	0	$-10125. x$	0

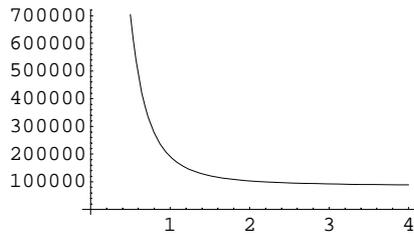
■ **Curvas de condicionamiento.-** Como consecuencia de la nueva transformación introducida en los sistemas, el número de condición correspondiente al Método Clásico sufre una espectacular disminución para todo valor de x, como puede observarse comparando las siguientes gráficas con las correspondientes al sistema anterior.

$$\text{autovalores}[\text{lon_}] := \text{N}[\text{Eigenvalues}\left[\mathbf{K}_D^D / . x \rightarrow \text{lon}\right]] \text{ratio1}[\text{lon_}] := \text{Block}[\{a},$$

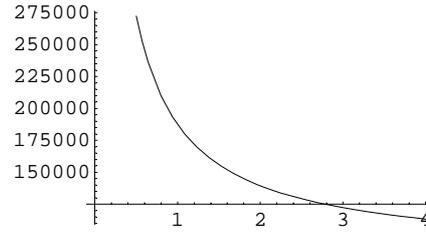
$$a = \text{autovalores}[\text{lon}] // \text{Abs}; \text{Max}[a] / \text{Min}[a]] \text{Plot}[\text{ratio1}[\text{xx}], \{\text{xx}, 0.5, 4\}]$$

$$\text{autovalores}[\text{lon_}] := \text{N}[\text{Eigenvalues}\left[\mathbf{M}_D^D / . x \rightarrow \text{lon}\right]] \text{ratio1}[\text{lon_}] := \text{Block}[\{a},$$

$$a = \text{autovalores}[\text{lon}] // \text{Abs}; \text{Max}[a] / \text{Min}[a]] \text{Plot}[\text{ratio1}[\text{xx}], \{\text{xx}, 0.5, 4\}]$$



Método Clásico $\left(\mathbf{K}_D^D \right)$



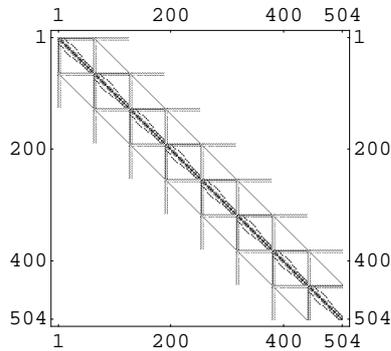
Método propuesto $\left(\mathbf{M}_D^D \right)$

Para $x=1$, es decir, si todas las barras tienen la misma sección, se obtienen los siguientes gráficos, valores máximos de los elementos de las matrices, valores del número de condición, del determinante y elementos no nulos (%) de las Matrices.

■ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos no nulos.**-La siguiente orden nos muestra en esquema la distribución de los elementos no nulos de la matriz de rigidez de la estructura correspondiente a cada una de los métodos:

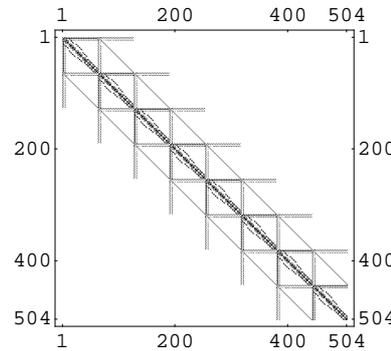
$x = 1$;

MatrixPlot $\left[\mathbf{K}_D^D, \text{MaxMatrixSize} \rightarrow 1000 \right]$



Método Clásico $\left(\mathbf{K}_D^D \right)$

MatrixPlot $\left[\mathbf{M}_D^D, \text{MaxMatrixSize} \rightarrow 1000 \right]$

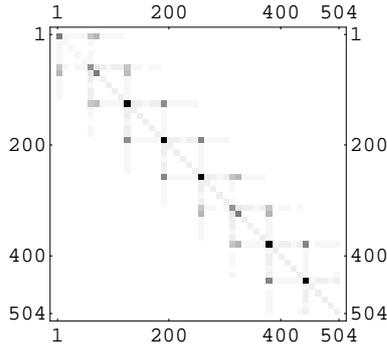
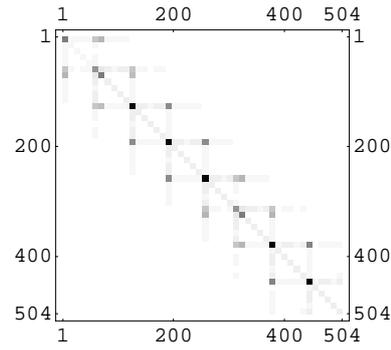


Método propuesto $\left(\mathbf{M}_D^D \right)$

■ **Esquema gráfico de la distribución de los elementos dominantes.**-La siguiente orden nos muestra la distribución de los elementos en función de sus valores numéricos, marcando con un recuadro negro los elementos dominantes, en tono de grises los valores menores y en blanco los elementos negativos.

MatrixPlot $\left[\mathbf{K}_D^D, \text{MaxMatrixSize} \rightarrow 50, \right.$
 ColorFunction $\rightarrow (\text{GrayLevel}[1 - \#] \&), \text{ColorFunctionScaling} \rightarrow \text{True} \left. \right]$

MatrixPlot $\left[\mathbf{M}_D^D, \text{MaxMatrixSize} \rightarrow 50, \right.$
 ColorFunction $\rightarrow (\text{GrayLevel}[1 - \#] \&), \text{ColorFunctionScaling} \rightarrow \text{True} \left. \right]$

Método Clásico $\left(\mathbf{K}_D^D\right)$ Método propuesto $\left(\mathbf{M}_D^D\right)$

■ **Valores máximos de los elementos de las matrices.-** Los valores de los elementos de mayor valor absoluto de cada una de las matrices se le pueden pedir al programa, que para $x=1$ valen:

$$\text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{K}_D^D]] = 2.3355 \times 10^7$$

$$\text{Max}[\text{Abs}[\mathbf{M}_D^D]] = 2.3355 \times 10^7$$

■ **Valores del número de condición, determinante y elementos no nulos (%) de las Matrices.-**

Con las siguientes órdenes obtenemos los valores que solicitamos y que valen:

$$\text{Print}[\text{Número de condición de } \mathbf{K}_D^D = , \\ \text{Max}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{K}_D^D]]] / \text{Min}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{K}_D^D]]]]$$

$$\text{Print}[\text{Número de condición de } \mathbf{M}_D^D = , \\ \text{Max}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{M}_D^D]]] / \text{Min}[\text{Abs}[\text{Eigenvalues}[\mathbf{M}_D^D]]]]$$

$$\text{Print}[\text{Determinante de } \mathbf{K}_D^D = , \text{Det}[\mathbf{K}_D^D]]$$

$$\text{Print}[\text{Determinante de } \mathbf{M}_D^D = , \text{Det}[\mathbf{M}_D^D]]$$

$$\text{Print}[\text{Elementos no nulos (\%)} \text{ de } \mathbf{K}_D^D = , 1/504^2 \left(504^2 - \left(\text{Count}[\text{Flatten}[\mathbf{K}_D^D], 0] \right) \right) 100. \%]$$

$$\text{Print}[\text{Elementos no nulos (\%)} \text{ de } \mathbf{M}_D^D = , 1/504^2 \left(504^2 - \left(\text{Count}[\text{Flatten}[\mathbf{M}_D^D], 0] \right) \right) 100. \%]$$

y que valen:

$$\text{Número de condición de } \mathbf{K}_D^D = 190913$$

$$\text{Número de condición de } \mathbf{M}_D^D = 187430$$

$$\text{Determinante de } \mathbf{K}_D^D = 8.846469371687820 \times 10^{2523}$$

$$\text{Determinante de } \mathbf{M}_D^D = 1.924631969264906 \times 10^{2524}$$

Elementos no nulos (%) de $\mathbf{K}_D^D = 3.57064 \%$

Elementos no nulos (%) de $\mathbf{M}_D^D = 3.57064 \%$

■ **Resolución de los sistemas.**- Resolviendo cada uno de los sistemas con las matrices de coeficientes \mathbf{K}_D^D y \mathbf{M}_D^D se tendrá:

$$\mathbf{P}_D^D = \mathbf{T}_{DT} \cdot \mathbf{P}_{960};$$

■ **Método Clásico.**- Para la matriz \mathbf{K}_D^D se tiene

$$\text{LinearSolve}[\mathbf{K}_D^D, \mathbf{P}_D^D]$$

con lo que, resolviendo los sistemas se obtendrán las mismas soluciones anteriores,

Los corrimientos de los seis primeros nudos (en metros y radianes) con la matriz \mathbf{K}_D^D son:

(El resto de los corrimientos pueden consultarse en el soporte informático adjunto -Modelo 8 Mixto-)

Nudos	u_i	v_i	w_i	α_i	β_i	γ_i
0 →	{0.0907501},	{-0.038952},	{0.000661517},	{0.000584695},	{0.00142038},	{0.00515865},
1 →			{-0.000901325},	{0.000311858},	{0.00083235},	
2 →			{-0.00170253},	{0.000134862},	{0.0013655},	
3 →			{0.00023339},	{0.000331978},	{0.00114988},	
4 →			{-0.00068769},	{0.000175641},	{0.000659677},	
5 →			{-0.000706286},	{0.0000649541},	{0.000663133},	

■ **Método propuesto.**- Para la matriz \mathbf{M}_D^D se tiene

$$\text{LinearSolve}[\mathbf{M}_D^D, \mathbf{P}_D^D]$$

Los corrimientos de los seis primeros nudos (en metros y radianes) con la matriz \mathbf{M}_D^D son:

(El resto de los corrimientos pueden consultarse en el soporte informático adjunto -Modelo 8 Mixto-)

Nudos	u_i	v_i	w_i	α_i	β_i	γ_i
0 →	{0.0888359},	{-0.038182},	{0.000591333},	{0.000571839},	{0.00134136},	{0.005059},
1 →			{-0.000817243},	{0.000298738},	{0.000588594},	
2 →			{-0.00156319},	{0.00012627},	{0.0013509},	
3 →			{0.000270213},	{0.000326649},	{0.00109767},	
4 →			{-0.000638252},	{0.00016721},	{0.000639203},	
5 →			{-0.000628053},	{0.0000595196},	{0.000507273},	

donde las pequeñas diferencias son debidas a los redondeos del ordenador.

BIBLIOGRAFIA

- (1) Timoshenko y Young: *Teoría de las Estructuras*
McGraw-Hill 1945
- (2) J. H. Argyris y S. Kelsey: *Energy Theorems And Structural Analysis*
Butterworths 1960
- (3) Grover L. Rogers y M. Lander Causey: *Engineering Structures*
John Wiley And Sons, Inc. 1962
- (4) Richard H. Gallagher, Ivan Rattinger y John S. Archer: *A Correlation Study of Methods of Matrix Structural Analysis*
Pergamon Press 1964
- (5) James M. Gere y William Weaver, Jr.: *Análisis of Framed Structures*
Van Nostrand Reinhold Company..... 1965
- (6) Harold C. Martin: *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis*
McGraw-Hill Book Company 1966
- (7) J. M. Shah : *Ill-conditioned stiffness matrices*
Journal of the Structural Division (ASCE)..... 1966
- (8) Moshe F. Rubinstein: *Matrix Computer Analysis of Structures*
Prentice-Hall, Inc..... 1966
- (9) Carlos Fernández Casado y José Luis Fernández Casado: *Cálculo de Estructuras Reti-
culares: Nudos Rígidos, 8 Edición Reformada*
Ediciones DOSSAT, S.A. 1967
- (10) J. L. Meek: *Matrix Structural Analysis*
McGraw-Hill Book Company 1971
- (11) K. I. Majid: *Optimum Design of Structures*
Newnes-Butterworths 1974
- (12) A. Kaveh, I. Ghaderi: *Conditioning of structural stiffness matrices*
Computers and Structures..... 1977
- (13) H. R. Grooms y J. Rowe: *Substructuring and conditioning*
Journal of Structural Division (ASCE) 1977
- (14) Carlos A. Felippa: *Iterative procedures for improving penalty function solutions of
algebraic systems*
International Journal for Numerical Methods in Engineering..... 1978

- (15) K. H. M. Bray, P. C. L. Croxton y L. H. Martin: *Análisis Matricial de Estructuras*
Paraninfo S.A. 1979
- (16) Charles Head Norris, John Benson Wilbur y Senol Utku: *Análisis Elemental de Estructuras, 2ª Edición en Español*
McGraw-Hill LATINOAMERICA S.A..... 1982
- (17) José-María Fornóns García: *El Método de los Elementos Finitos en la Ingeniería de Estructuras*
Universidad Politécnica de Barcelona ETS Ingenieros Industriales de Barcelona
con la colaboración de MARCOMBO de Boixareu Editores 1982
- (18) K. J. Bathe: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*
Prentice-Hall..... 1982
- (19) A. Ghali y A. Neville: *Análisis Estructural, un enfoque unificado Clásico y por matrices, 1ª Edición*
Editorial Diana S.A. 1983
- (20) O. C. Zienkiewicz y K. Morgan: *Finite Elements and Approximation*
Wiley 1983
- (21) Director: Juan Salvat: *Enciclopedia Salvat de Ciencia y Técnica*
Salvat Editores, S.A. 1984
- (22) Harold I. Laursen: *Structural Analysis*
McGraw-Hill Book Company 1988
- (23) O. C. Zienkiewicz y R. E. Taylor: *The Finite Element Method*
McGraw-Hill 1988
- (24) R. D. Cook, D. S. Malkus y M. E. Plesha: *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*
Wiley: Chichester, West Sussex..... 1989
- (25) Manuel Vázquez Fernández: *Cálculo Matricial de Estructuras, 1ª Edición*
Colegio de ITOP de Madrid 1992
- (26) P. C. L. Croxton y L. H. Martín: *Problemas Resueltos de Estructuras (Volumen 2), 1ª Edición*
Bellisco..... 1992
- (27) José Alberto Corchero Rubio: *Cálculo de Estructuras (Resolución práctica), 3ª Edición*
Servicio de Publicaciones, del Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos..... 1993

- (28) A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Laurentiev y Otros: *La Matemática: Su Contenido, Métodos y Significado (Tomo 3), 7ª Reimpresión*
Alianza Editorial S. A. 1994
- (29) A. Kaveh: *Structural Mechanics: Graph and Matriz Methods, 2ª Edición*
Research Studies Press LTD. 1995
- (30) Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra: *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos, Análisis estático lineal, 2ª Edición*
Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería..... 1995
- (31) Jack McCormac y Rudolf E. Elling: *Análisis de Estructuras: Métodos Clásico y Matricial*
Alfaomega grupo editor, S.A. de C.V. 1996
- (32) José M. Iglesias Rodríguez: *Análisis Matricial de Estructuras de Barras*
Edicions de la Universitat de Lleida..... 1996
- (33) Ramón Argüelles Álvarez y Ramón Argüelles Bustillo: *Análisis de Estructuras: Teoría, Problemas y Programas*
Fundación Conde del Valle de Salazar..... 1996
- (34) Alberto Carpinteri: *Structural Mechanics – A Unified Approach*
E & FN SPON. 1997
- (35) Jacques Heyman: *Análisis de Estructuras.- Un estudio histórico*
Traducción de Santiago Huerta. Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura, Madrid 1998
- (36) Enrique Nieto: *Estructuras Arquitectónicas e Industriales: Su Cálculo*
Tebar..... 1998
- (37) J. G. Badell: *Programa de Cálculo de Estructuras de Hormigón Armado, 1ª Edición*
Bellisco 1998
- (38) Juan Tomás Celigüeta: *Curso de Análisis estructural*
EUNSA..... 1998
- (39) Eugenio Abdilla Muedra: *Cálculo de Estructuras II – Curso 98-99*
Universidad Politecnica de Valencia..... 1998
- (40) I. García-Badell: *Curso de Cálculo de Estructuras: Teoría y Problemas, 1ª Edición*
Bellisco 1999
- (41) Ramón Argüelles Álvarez: *Cálculo de Estructuras (Tomo I y Tomo II) , 1ª Reimpresión*
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes..... 1999

- (42) G. T. Houlsby, G. Liu y C. E. Augarde: *A tying scheme for imposing displacement constraints in finite element analysis*
 Communications in Numerical Methods in Engineering..... 2000
- (43) Juan de Burgos Román: *Algebra Lineal y Geometría Cartesiana, 2ª Edición*
 McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A.U. 2000
- (44) Juan Miquel Canet: *Cálculo de Estructuras: Libro 1 Fundamentos y estudio de secciones, 1ª Edición*
 Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, S.L. 2000
- (45) Juan Miquel Canet: *Cálculo de Estructuras: Libro 2 Sistemas de Piezas Prismáticas, 1ª Edición*
 Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, S.L. 2000
- (46) José Ramón González de Cangas y Avelino Samartín Quiroga: *Cálculo de Estructuras*
 Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos..... 2001
- (47) Avelino Samartín Quiroga y José Ramón González de Cangas: *Cálculo Matricial de Estructuras, 1ª Edición*
 Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos..... 2001
- (48) Juan Antonio Pérez Álvarez y José Antonio Ballell Caballero: *Transformaciones de Coordenadas, 1ª Edición*
 Bellisco..... 2001
- (49) Victoriano Ramírez González, Domingo Barrera Rosillo, Miguel Pasadas Fernández y Pedro González Rodelas: *Cálculo numérico con Mathematica, 1ª Edición*
 Editorial Ariel, S.A. 2001
- (50) Manuel Vázquez y Eloisa López: *El Método de los Elementos Finitos aplicado al análisis estructural*
 Editorial Noela, Madrid..... 2001
- (51) Juan Antonio Infante del Río y José María Rey Cabezas: *Métodos Numéricos: Teoría, Problemas y Prácticas con MATLAB, 2ª Edición*
 Ediciones Pirámide..... 2002
- (52) Rafael Gallego Sevilla y Guillermo Rus Carlborg: *Cálculo de Estructuras de barras: Fundamentos*
 Rafael Gallego Sevilla y Guillermo Rus Carlborg..... 2002
- (53) Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra y Benjamín Suárez Arroyo: *Introducción al Análisis Matricial de Estructuras a distancia por Internet (Programa ED-Tridim)*
 CIMNE..... 2003

- (54) Carlos A. Felippa: *Introduction to Finite Element Methods, Last Updated*
Available from: [http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/IFEM.d/
Home.html](http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/IFEM.d/Home.html) 2004
- (55) B. S. Wu, Z. H. XU y Z. G. Li: *A note on imposing displacement boundary conditions
in finite element analysis*
Communications in Numerical Methods in Engineering 2007
- (56) R. Abascal García: *Cálculo Matricial de Estructuras*

