

# **TESIS DOCTORAL**

**Dominios de armado óptimo para secciones  
rectangulares solicitadas a flexo-compresión.  
Aplicación a la redistribución de esfuerzos.**

**PROGRAMA DE DOCTORADO:  
INGENIERIA DE ESTRUCTURAS**

**DEPARTAMENTO DE MECANICA DE ESTRUCTURAS E  
INGENIERIA HIDRAULICA**

**UNIVERSIDAD DE GRANADA**

**David López Martín**

**2012**

Editor: Editorial de la Universidad de Granada  
Autor: David López Martín  
D.L.: GR 73-2013  
ISBN: 978-84-9028-270-0







**TESIS DOCTORAL**

**Dominios de armado óptimo para secciones rectangulares solicitadas a flexo-compresión. Aplicación a la redistribución de esfuerzos.**

Alumno:

**David López Martín**

Directores de la Tesis:

**Dra. Luisa María Gil Martín.**

Programa de Doctorado:

**INGENIERIA DE ESTRUCTURAS**

Línea de investigación:

**ADAPTACION DEL MODELO DE TENSION DEFORMACION  
PROPUESTO POR EL EUROCODIGO 2A HORMIGON  
CONFINADO.**

Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica

Universidad de Granada



# **DOMINIOS DE ARMADO ÓPTIMO PARA SECCIONES RECTANGULARES SOLICITADAS A FLEXO-COMPRESIÓN. APLICACIÓN A LA REDISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS.**

## **INTRODUCCIÓN.**

El diseño en rotura de secciones de hormigón armado es un tema muy estudiado y su método se ha mejorando a lo largo de la historia del hormigón. En sus comienzos el cálculo de secciones de hormigón armado solicitadas a flexión adoptó los principios fundamentales de la resistencia de materiales. A saber:

- La ley de Hooke, por la cual el comportamiento de los materiales se supone elástico lineal.
- La hipótesis de Bernoulli o de la deformación plana de la sección transversal.
- El principio de superposición, consecuencia los anteriores.
- El principio de Saint- Venant, por el cual la sección puede calcularse bajo cualquier combinación de esfuerzos que sean mecánicamente equivalentes.

Aceptando estos principios, las secciones podía calcularse utilizando la técnica de la sección homogeneizada propia de la resistencia de materiales y el planteamiento en tensiones admisibles. Contribuía a ello el anclaje y la natural adherencia entre hormigón y acero, lo que aseguraba la hipótesis de que las armaduras de acero deformaban en la misma medida que el hormigón circundante a ellas. Esta hipótesis fundamental del cálculo, continúa teniendo validez. A la vez que se mejoraban las características mecánicas de hormigón y acero, también se trabajaba en la mejora de la adherencia dando lugar a las barras corrugadas con adherencia mejorada de que disponemos hoy día.

Para el cálculo de secciones en flexión la hipótesis de Bernoulli o de las secciones planas (HSP) sigue siendo perfectamente válida siempre que la relación canto-longitud del prima mecánico sea suficientemente pequeña. Esto suele ser así en vigas y pilares de edificación. La ventaja de aceptar la HSP es que conocida la deformación en dos fibras cualesquiera de la sección transversal es posible obtener la deformación en cualquier fibra o punto de la misma y a partir de ella la tensión actuante.

Es común que las dos variables que definen la deformación unitaria de toda la sección transversal sean la deformación unitaria en el centro de gravedad de la sección y la curvatura ( $\varepsilon_G, \varphi$ ). De esta forma la deformación de cualquier punto ya sea de hormigón o de acero situado a una distancia  $y$  del centro de gravedad (G) es:

$$\varepsilon(y, \varepsilon_G, \varphi) = \varepsilon_G + \varphi y$$

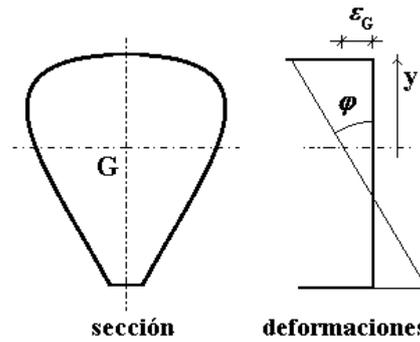


Figura 1. Distribución de deformaciones según la hipótesis de las secciones planas

Además, de este modo la relación entre la deformación en dos fibras distintas puede relacionarse mediante una ecuación de compatibilidad tan sencilla como establecer una semejanza de triángulos.

La ley de Hooke como ley de comportamiento para el hormigón, tuvo validez hasta bien entrado el siglo XX, a pesar de su incorrección. En efecto, admitir comportamiento elástico lineal en el hormigón es un aproximación grosera. Su comportamiento real difícilmente se puede considerar ajustado a la linealidad para tensiones superiores al 40% o 50% de su capacidad mecánica última a compresión. El resultado es que en los cálculos se dimensionaba con tensiones bajas en el hormigón para no salirse de este rango de cuasi-linealidad entre tensiones y deformaciones. Por tanto, el cálculo resultaba conservador y no se aprovechaba toda la capacidad del hormigón.

Coetáneamente con el cálculo basado en la ley de Hooke se propusieron leyes de comportamiento para el hormigón, como la ley Brandtzaeg [1] :

$$\sigma_c = f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cu}} \right)^n \right] \text{ con } n = 2 \text{ generalmente.}$$

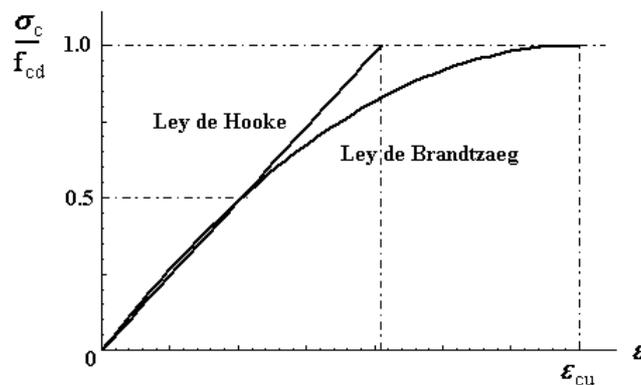


Figura 2. Comparación entre las leyes de comportamiento de Hooke y de Brandtzaeg para el hormigón. La ley de Hooke tiene por pendiente el módulo de deformación secante  $E_h$

correspondiente al punto de ordenada  $0.5 \sigma_c / f_{cd}$ . Es decir:  $E_h = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \frac{f_{cd}}{\varepsilon_{cu}}$

Así, se introducían en el cálculo la utilización de diagramas tensión-deformación no lineales, algo que hoy damos como habitual con el uso del conocido diagrama parábola-rectángulo propuesto por el CEB a partir de los trabajos de Rüschi. En todos los casos, los resultados que se obtienen con estos modelos de comportamiento no lineal mejoran los obtenidos con la ley de Hooke.

Otra cuestión a destacar es la baja resistencia a la tracción del hormigón, lo que hace que las fibras traccionadas se agoten y se fisuren cuando las tensiones en las fibras comprimidas aún son muy bajas. Como consecuencia, la fibra neutra de la sección se desplaza hacia la zona comprimida y cualquier cálculo basado en el modelo de sección homogeneizada (donde la fibra neutra es fija y coincide con un eje principal de la sección en flexión o queda siempre por debajo de éste en flexión compuesta) pierde validez.

Es por todo esto que el modelo que finalmente se adoptó y aun hoy utilizamos es el de plantear la sección en estado de rotura, que es un estado límite último (por agotamiento del hormigón en compresión, del acero o de ambos), según algún plano de deformación del que se conoce la posición de la fibra neutra y cuyo conjunto se subdivide en los llamados dominios de deformación definidos en la normativa.

## **EL PROBLEMA DE DISEÑO.**

Consecuencia de todo lo anterior, el problema de diseño de secciones solicitadas a flexo-compresión es complejo y no exento de dificultades. Las razones son fundamentalmente dos. La primera es que nos encontramos frente a un problema cuya solución es no lineal. La segunda es que en su primer planteamiento el problema es indeterminado, necesiéndose añadir al menos una condición adicional para dar solución al problema.

Dada la dificultad del problema Messenger et al [2] sostienen que : “A mano no se puede resolver el problema de dimensionamiento...lo que conduce a tanteos”. Sin embargo, en este trabajo se propondrá un método de cálculo manual y sin tanteos.

Otros, como Calavera [3], se limitan a proponer las ecuaciones que resuelven el problema según el dominio de agotamiento. Pero sin aclarar “a priori” cuáles se deben utilizar, lo que conduce a realizar tanteos. Además, tales ecuaciones se han deducido para la condición armaduras simétricas, lo cual es frecuentemente aplicable a pilares pero no a vigas.

En lo que sigue vamos a desarrollar un procedimiento de cálculo que especifique sin tanteos el modo de agotamiento de la sección y las ecuaciones a aplicar para obtener un valor exacto de las armaduras necesarias y no necesariamente iguales. Las ecuaciones serán ajustadas a lo establecido en la normativa europea: el eurocódigo EC-2 y su trasposición a la normativa española la Instrucción EHE-08.

### La rotura en las normas EC-2 y EHE-08.

La rotura o agotamiento de una sección es un estado límite último que considera el agotamiento de la sección por rotura a compresión del hormigón o a tracción del acero. Aunque la gran mayoría de las normas no consideran el agotamiento a tracción del acero.

En EC-2 y EHE-08 se propone una serie de infinitos posibles planos de rotura. Su representación es el diagrama de dominios de deformación. En cada dominio se agrupan los planos de rotura con igual deformación unitaria en una misma fibra (la que se agota). Por lo tanto, son planos de un mismo dominio en el diagrama los representados por rectas (ley de deformaciones en la sección) con un punto común o pivote.

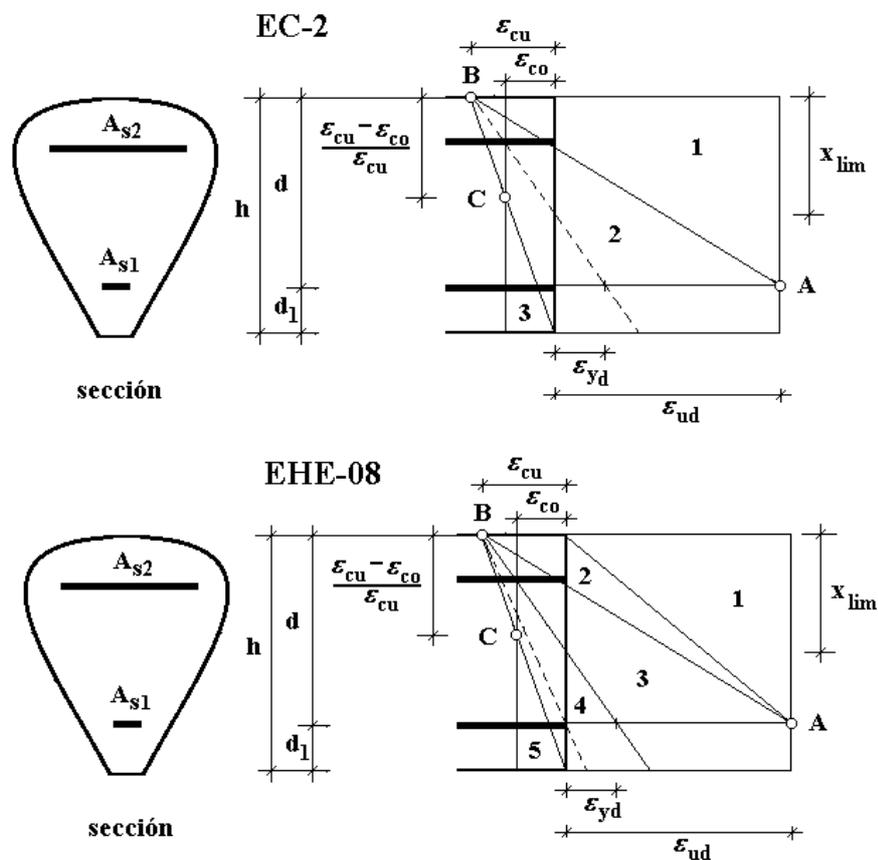


Figura 3. Dominios de deformación para EC-2 y EHE.

Estos planos vienen definidos porque o bien agota el acero a tracción (planos que pivotan en torno al punto A de la **Figura 3**), que constituyen el primer dominio o bien porque agota el hormigón a compresión (planos que pivotan en torno al punto B o C de la **Figura 3**), constituyendo los dominios 2 y 3 respectivamente. Las normas consideran que la deformación última de agotamiento del hormigón a compresión es diferente si está en fenómenos de flexo-compresión o en compresión pura. Debido a esta consideración aparece el plano de agotamiento a deformación constante  $\epsilon_{co}$ .

A diferencia del EC-2 que solamente define tres dominios de deformación, la EHE propone una clasificación más detallada de los planos de rotura y define hasta cinco (en realidad seis pues el cuarto se subdivide en 4 y 4a). En el EC-2 el valor de  $\varepsilon_{cu}$  y  $\varepsilon_{co}$  varía según se considere para el hormigón el modelo parábola-rectángulo o el modelo rectangular. En la EHE su valor no depende de esto y es:

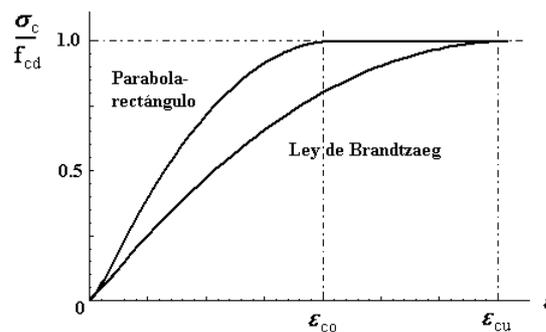
$$\varepsilon_{cu} = \begin{cases} 0.0035 & \text{si } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 0.0026 + 0.0144 \left[ \frac{(100 - f_{ck})}{100} \right]^4 & \text{si } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad \varepsilon_{co} = \begin{cases} 0.002 & \text{si } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 0.002 + 0.000085 \sqrt{f_{ck} - 20} & \text{si } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases}$$

El valor de la profundidad de la fibra neutra cuando en la armadura inferior la deformación vale  $\varepsilon_{yd}$ , se denomina  $x_{lim}$ .

### Leyes de comportamiento.

Conforme a lo dicho anteriormente para el hormigón se desprecia su contribución en tracción y se adopta un modelo de comportamiento no lineal a compresión mediante un diagrama simplificado conocido como parábola-rectángulo o su equivalente aún más sencillo, el diagrama rectangular. En la vigente Instrucción española EHE-08 y en el Eurocódigo EC-2 el diagrama parábola-rectángulo adopta la forma:

$$\sigma_c = \begin{cases} f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{co}} \right)^n \right] & \text{si } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{co} \\ f_{cd} & \text{si } \varepsilon_{co} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu} \end{cases} \quad \text{con:} \quad n = \begin{cases} 2 & \text{si } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 1.4 + 23.4 \left( \frac{90 - f_{ck}}{100} \right)^4 & \text{si } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases}$$



**Figura 4.** Comparación entre las leyes de comportamiento de Brandtzaeg y la más actual parábola-rectángulo.

El valor de la resistencia de cálculo para el hormigón ( $f_{cd}$ ) se obtiene a partir de su resistencia característica ( $f_{ck}$ ) y vale:

$$f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$$

donde:

$\gamma_c$  es un coeficiente de seguridad parcial o de minoración de resistencias.

$\alpha_{cc}$  es otro coeficiente que tiene en cuenta los efectos negativos de las cargas prolongadas en el tiempo (cansancio del hormigón) y de la forma de aplicar la carga. La EHE desarrolla el caso de que sea igual a 1 en consonancia con EC-2, aunque permite valores entre 0.85 y 1.

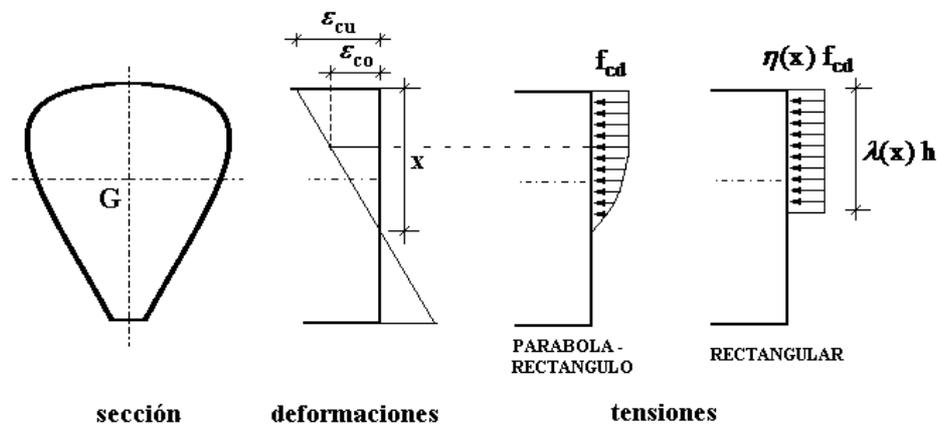
Las leyes no lineales son claramente más ajustadas la realidad del hormigón, si bien añaden laboriosidad al cálculo. Esta dificultad, pudo ser superada con la adopción del diagrama rectangular, mecánicamente equivalente al parábola rectángulo y con el que se simplifica notablemente el cálculo. Según EHE y EC-2:

$$\sigma_c = \eta(x) f_{cd} \quad \text{en} \quad \lambda(x) h$$

$$\eta(x) = \begin{cases} \eta & \text{si } 0 < x \leq h \\ 1 - (1 - \eta) \frac{h}{x} & \text{si } h \leq x < \infty \end{cases} \quad \eta = \begin{cases} 1 & \text{si } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 1 - \frac{f_{ck} - 50}{200} & \text{si } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\lambda(x) = \begin{cases} \lambda \frac{x}{h} & \text{si } 0 < x \leq h \\ 1 - (1 - \lambda) \frac{h}{x} & \text{si } h \leq x < \infty \end{cases} \quad \lambda = \begin{cases} 0.8 & \text{si } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 0.8 - \frac{f_{ck} - 50}{400} & \text{si } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases}$$

El diagrama rectangular no es una ley de comportamiento. Más bien, representa una distribución de tensiones sobre la sección de hormigón que genera una resultante de compresión equivalente a la que se produce al asumir la ley parábola-rectángulo para el hormigón.



**Figura 5.** Ejemplo para comparar las tensiones en la cabeza comprimida de hormigón según se adopte el diagrama parábola-rectángulo o el rectangular.

Para el acero, que se ajusta bastante bien a la ley de Hooke hasta su plastificación, resulta suficiente con adoptar un modelo de comportamiento elasto-plástico perfecto (sin endurecimiento por deformación), el conocido diagrama birectilíneo:

$$\sigma_s(\varepsilon_s) = \begin{cases} E_s \varepsilon_s & \text{para } \varepsilon_s \leq f_{yd} / E_s \\ f_{yd} & \text{para } \varepsilon_s \geq f_{yd} / E_s \end{cases}$$

El comportamiento del acero a compresión se considera idéntico al de tracción, por lo que el diagrama completo es simétrico. El valor de la resistencia de cálculo para el acero ( $f_{yd}$ ) se obtiene a partir de su resistencia característica ( $f_{yk}$ ) y vale:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \text{ donde: } \gamma_s \text{ es un coeficiente de seguridad parcial o de minoración de resistencias.}$$

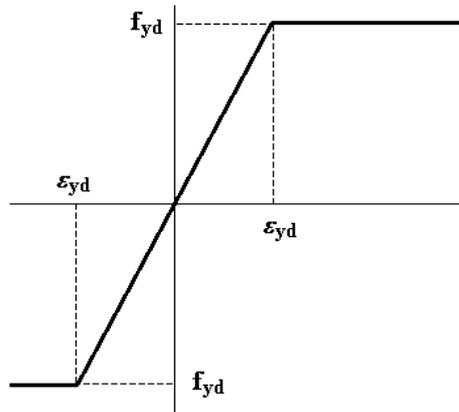


Figura 6. Diagrama tensión-deformación para el acero.

### Las ecuaciones de equilibrio.

Los esfuerzos no nulos en piezas solicitadas a flexión son el esfuerzo axial, el esfuerzo flector y el esfuerzo cortante. Los dos primeros se consideran solicitaciones normales, pues el mecanismo resistente que engendran en la sección transversal son tensiones normales, resistidas en el hormigón y las armaduras longitudinales. El esfuerzo cortante merece un estudio aparte, pues los mecanismos resistentes afectan a un trozo de la pieza solicitada y no a una sola sección transversal.

Para el dimensionado estricto de las armaduras necesarias en una sección solicitada a flexión podemos plantear dos ecuaciones que expresan que la suma de las tensiones normales actuantes en dicha sección generan los esfuerzos que la solicitan. Se trata de una suerte de ecuaciones de equilibrio en las que intervienen el esfuerzo flector y el esfuerzo axial como valores de diseño (para los ELU) o en valores característicos (para los ELS). Para una sección cualquiera serían:

$$\text{Equilibrio del flector} \quad M = \int_{A_c} \sigma_c \cdot y \cdot dA_c + \int_{A_{s2}} \sigma_{s2} \cdot y \cdot dA_{s2} + \int_{A_{s1}} \sigma_{s1} \cdot y \cdot dA_{s1} \quad \dots [\text{Ec.1}]$$

$$\text{Equilibrio del axial} \quad N = \int_{A_c} \sigma_c \cdot dA_c + \int_{A_{s2}} \sigma_{s2} \cdot dA_{s2} + \int_{A_{s1}} \sigma_{s1} \cdot dA_{s1} \quad \dots [\text{Ec.2}]$$

Los signos están implícitos y se consideran positivos los axiles y tensiones de compresión, y los flectores que alargan las fibras inferiores.

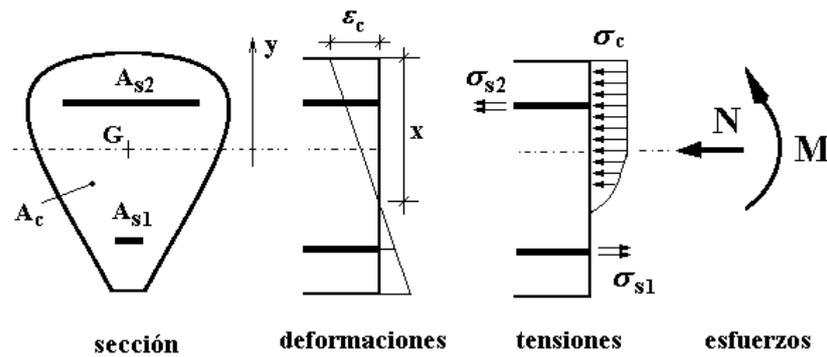


Figura 7. Sección genérica solicitada a flexo-compresión.

### DISEÑO DE SECCIONES RECTANGULARES.

Este trabajo se limita a proponer un método de cálculo manual de armado óptimo para secciones transversales rectangulares utilizando los modelos de comportamiento de acero y hormigón más simples. Las ecuaciones de equilibrio [Ec.1] y [Ec.2] se simplifican notablemente cuando se aplican a piezas de sección rectangular, con armaduras en una capa y tomando como modelo de comportamiento para el hormigón el diagrama rectangular (**Figura 8**). En el caso de plantear un ELU tendríamos:

$$\text{Equilibrio del flector} \quad M_d = U_C \left( \frac{h}{2} - 0.4x \right) + U_1 \left( \frac{h}{2} - d_1 \right) + U_2 \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) \quad \dots[\text{Ec.3}]$$

$$\text{Equilibrio del axil} \quad N_d = U_C + U_1 + U_2 \quad \dots[\text{Ec.4}]$$

siendo:

$U_C = f_{cd} \cdot 0.8 \cdot x \cdot b$  capacidad mecánica o resultante de las tensiones en el hormigón

$U_1 = \sigma_{s1} \cdot A_{s1}$  capacidad mecánica o resultante de las tensiones en la armadura inferior.

$U_2 = \sigma_{s2} \cdot A_{s2}$  capacidad mecánica o resultante de las tensiones en la armadura superior.

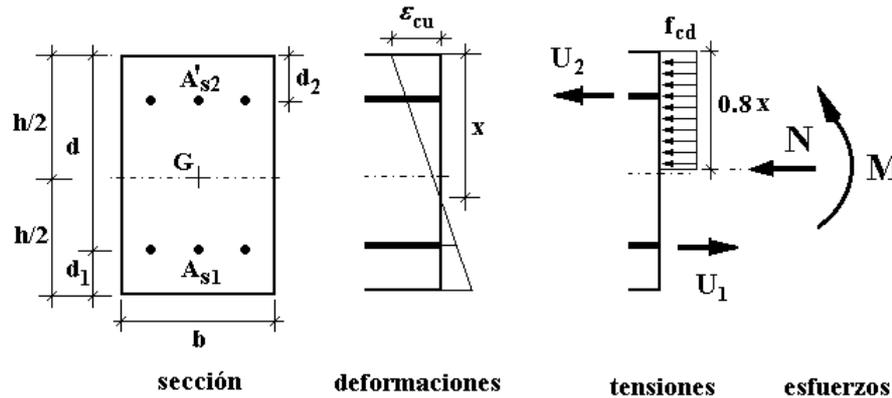
$\sigma_{s1}, \sigma_{s2}$  tensión en las armaduras inferior y superior respectivamente.

$A_{s1}, A_{s2}$  área transversal de las armaduras inferior y superior respectivamente.

$d_1, d_2$  recubrimiento de cálculo de las armaduras inferior y superior respectivamente.

En adelante, cuando se añada un apóstrofe ( $A'_s$ ) se estará explicitando que la armadura está comprimida.

Las áreas de las armaduras  $A_{s1}$  y  $A_{s2}$  son la solución del problema de dimensionado.



**Figura 8.** Sección rectangular solicitada a flexo-compresión. Tensiones en el hormigón según diagrama rectangular para  $f_{ck} \leq 50\text{MPa}$ .

### Secciones solicitadas a flexión pura y simple.

En el caso de flexión pura o simple las ecuaciones anteriores [Ec.3] y [Ec.4] adoptan la forma particular:

$$M_d = U_C \left( \frac{h}{2} - 0.4x \right) + U_1 \left( \frac{h}{2} - d_1 \right) + U_2 \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) \quad \dots[\text{Ec.5}]$$

$$0 = U_C - U_1 + U_2 \quad \dots[\text{Ec.6}]$$

Si el problema es de dimensionado se conocerán los datos geométricos de la sección y los esfuerzos de diseño. Son incógnitas la profundidad de la fibra neutra (que determina el modo o plano de agotamiento) y el área de las armaduras  $A_{s1}$  y  $A_{s2}$ .

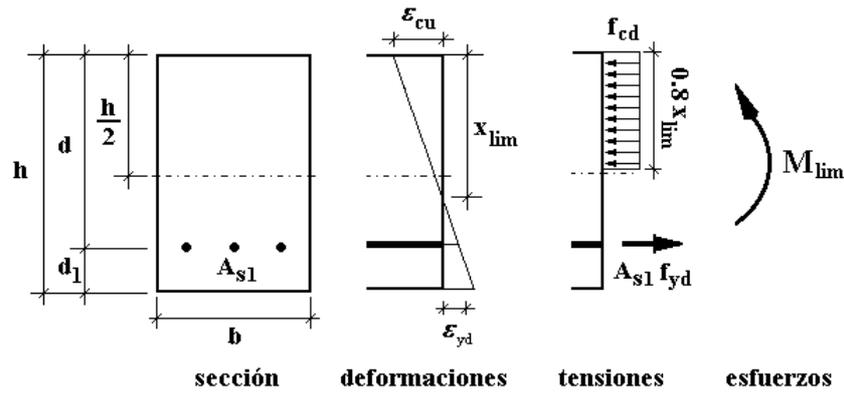
Aparentemente el problema está indeterminado, pues disponemos de dos ecuaciones (las de equilibrio) para tres incógnitas, pero no es así. Solamente se nos pueden dar dos situaciones, excluyentes entre si, y en cada una de ellas solo son dos las incógnitas:

- $x$  y  $A_{s1}$  con  $A_{s2} = 0$  cuando  $M_d \leq M_{lim}$ , por tanto con  $x \leq x_{lim}$
- $A_{s2}$  y  $A_{s1}$  con  $x = x_{lim}$  cuando  $M_d > M_{lim}$

$M_{lim}$  se conoce como momento límite y es el máximo momento flector que puede resistir la sección sin armadura de compresión con  $x = x_{lim}$ . Es decir, con aprovechamiento máximo de la armadura inferior. El valor de  $x_{lim}$ , depende de las dimensiones de la sección y del límite elástico del acero.

Por compatibilidad de deformaciones es fácil deducir que:

$$x_{lim} = \frac{d}{1 + \varepsilon_{yd} / \varepsilon_{cu}}$$



**Figura 9.** Sección rectangular solicitada a flexión pura o simple. Tensiones en el hormigón según diagrama rectangular.

Con este dato es fácil calcular el valor del momento límite. Planteamos la ecuación de equilibrio tomando momento en el baricentro de la armadura inferior y obtenemos:

$$M_{lim} = \sum M_1 = f_{cd} \cdot 0.8 x_{lim} \cdot b (d - 0.4 x_{lim})$$

Por tanto, si  $M_d \leq M_{lim}$ , entonces  $A_{s2} = 0$  y las ecuaciones de equilibrio [Ec.5] y [Ec.6] pasan a ser:

$$M_d = f_{cd} \cdot 0.8 x \cdot b (d - 0.4 x)$$

$$0 = f_{cd} \cdot 0.8 x \cdot b - U_1$$

De la primera obtenemos  $x$  y calculamos:

$$U_C = f_{cd} \cdot 0.8 x \cdot b$$

De la segunda despejamos  $U_1$ :

$$U_1 = U_C \quad \text{y entonces:} \quad A_{s1} = \frac{U_1}{f_{yd}}$$

Y si  $M_d > M_{lim}$ , entonces imponemos  $x = x_{lim}$  para aprovechar al máximo la armadura en tracción. En consecuencia  $U_C = f_{cd} \cdot 0.8 x_{lim} \cdot b$  y ahora las ecuaciones de equilibrio son:

$$M_d = M_{lim} + U_2 (d - d_2)$$

$$0 = U_C - U_1 + U_2$$

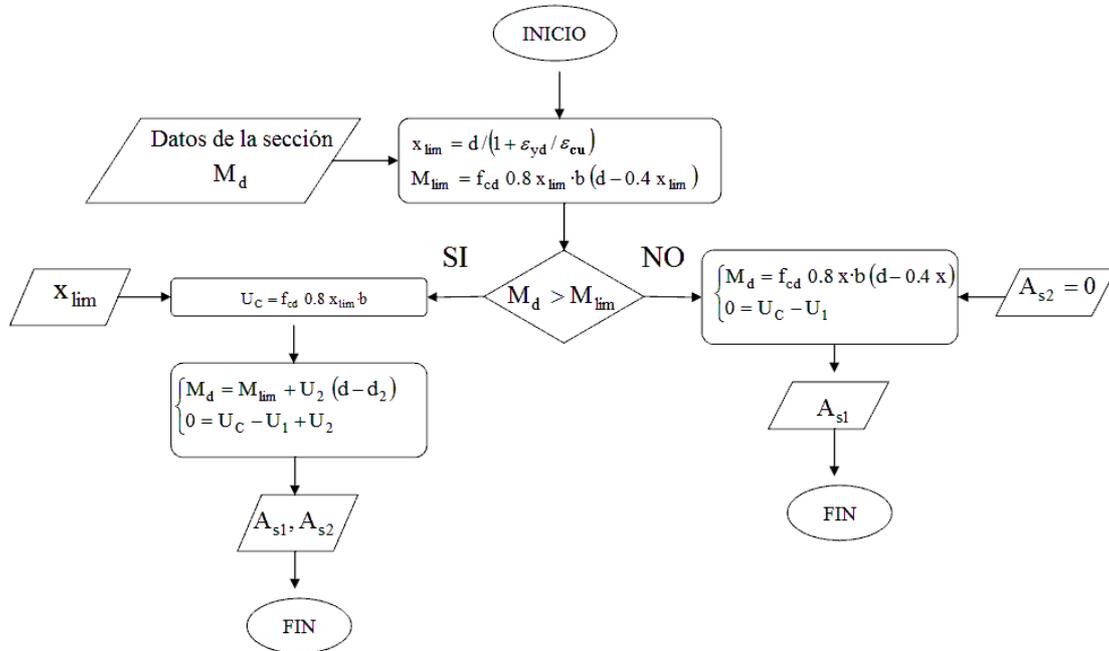
De la primera despejamos  $U_2$ :

$$U_2 = \sigma_{s2} \cdot A'_{s2} = \frac{M_d - M_{lim}}{d - d_2} \quad \text{y entonces} \quad A_{s2} = \frac{U_2}{\sigma_{s2}}$$

De la segunda despejamos  $U_1$ :

$$U_1 = U_C + U_2 \text{ y entonces: } A_{s1} = \frac{U_1}{f_{yd}}$$

Este proceso se esquematiza en con el diagrama de flujo de la **Figura 10** :



**Figura 10.** Diagrama de flujo. Proceso de dimensionado de secciones solicitadas a flexión pura y simple.

### Secciones solicitadas a flexo-compresión.

En el caso de que el esfuerzo axial no sea nulo, las ecuaciones de equilibrio son las generales [Ec.3] y [Ec.4] presentadas con anterioridad. Las incógnitas siguen siendo las mismas, pero ahora no es tan claro establecer a priori al valor de alguna de ellas. Por tanto, el problema es indeterminado, existiendo infinidad de soluciones de armado posible, aunque muchas de ellas lo son sin aprovechamiento máximo de las capacidades de la sección.

En un principio el problema se resolvía por aproximaciones. Se proponía un modo de agotamiento en flexión simple y se corregían los resultados obtenidos para las armaduras, aumentando la armadura comprimida y decrementando la armadura traccionada para pasar a flexión compuesta, pero conservando el máximo aprovechamiento de esta última. Si la cantidad de armadura traccionada resultaba muy pequeña o resultaba negativa, se reformulaba el problema planteando el agotamiento de la sección en compresión compuesta (toda la sección comprimida). Es decir, si no se conseguía dimensionar la sección con máximo aprovechamiento del acero, se rediseñaba para tener máximo aprovechamiento del hormigón.

Todo este proceder deriva de la naturaleza indeterminada del problema, que solamente se elimina añadiendo una condición adicional. Como se ha expuesto anteriormente son condiciones adicionales imponer el máximo aprovechamiento del acero o el del hormigón. Estas condiciones pueden plasmarse analíticamente de alguna de las siguientes maneras:

máximo aprovechamiento del acero en tracción.      máximo aprovechamiento del hormigón.

- |   |  |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>A_{s2} = 0</math></li> <li>• <math>x = x_{lim}</math></li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>A_{s1} = 0</math></li> <li>• <math>A_{s1} = A_{s2} = 0</math></li> <li>• <math>x = \infty</math></li> </ul> |
|---|--|

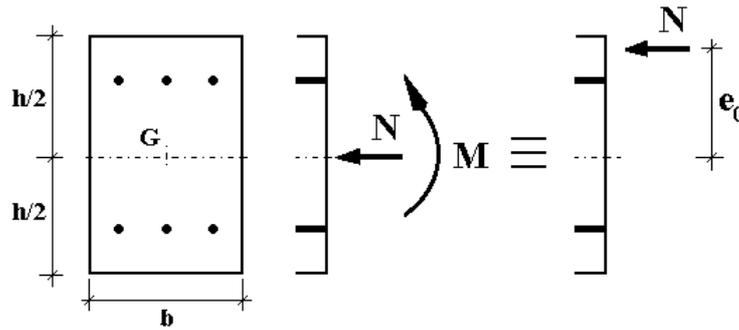
Con cualquiera de estas condiciones se pretende una solución para el armado óptima o muy próxima a la óptima. Hoy día sabemos, gracias al "Teorema del armado óptimo en la flexión" enunciado por Hernández-Gil-Pasadas [4], que efectivamente la solución de armado óptimo para secciones a flexo-compresión es aquella en la que se verifica alguna de las condiciones anteriores.

Sin embargo a la vista del par de esfuerzos  $(M_d, N_d)$  que solicitan la sección no es fácil de antemano saber cuál de estas condiciones se debe imponer. Se intuye que la solución de armado debe ser distinta según la proporción entre los esfuerzos  $(M_d, N_d)$ . Dicho de otro modo, si en el par de esfuerzos  $(M_d, N_d)$  el esfuerzo flector es dominante sobre el axil la sección estará solicitada a flexión compuesta y el problema debe plantearse en los dominios de agotamiento de la flexión, donde el aprovechamiento de la armadura traccionada es máximo. Por el contrario, si es el esfuerzo axil el dominante sobre el flector la sección estará solicitada a compresión-compuesta y el problema debe plantearse con agotamiento en su dominio correspondiente, donde el aprovechamiento del hormigón es máximo.

Claramente esto es insuficiente, pues necesitamos una frontera precisa entre las diferentes formas de plantear el problema. Comencemos proponiendo esta equivalencia: el problema de flexo-compresión  $(M_d, N_d)$  es equivalente a otro de axil excéntrico  $(e_o, N_d)$ , pues produce el mismo estado de tensiones en la sección. La excentricidad  $e_o = M_d / N_d$  se denomina excentricidad de cálculo equivalente.

Con las solicitaciones en forma de axil excéntrico Whitney [5] planteo el problema separadamente según el valor de la excentricidad. Así, quedó establecida la separación ya clásica entre grandes y pequeñas excentricidades, lo que supuso un importante avance. La pregunta que sigue es: ¿cuál es el valor de la excentricidad que es frontera entre ambos planteamientos?

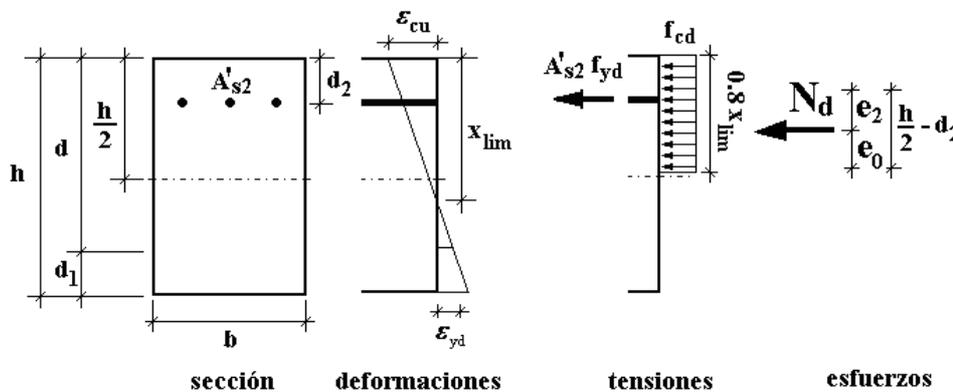
Lo cierto es que en la bibliografía más reciente esta información no se encuentra o es imprecisa. Así, para Meseguer et al [2] el problema de gran excentricidad se da cuando el centro de presiones del axil se sitúa fuera de la sección, lo cual es cierto, pero su contraria no como veremos más adelante. Otros ni mencionan la clasificación Whitney, seguramente debido al avance del cálculo con ordenador que sin esfuerzo aplica método de aproximación iterativa u otros métodos que se comentarán más adelante.



**Figura 11.** Flexo-compresión. El par  $(M_d, N_d)$  es equivalente al axil excéntrico  $(N_d)$  con excentricidad  $e_o = M_d / N_d$  respecto al centro de gravedad (G) de la sección.

Por otra parte, es costumbre plantear la relación de correspondencia gran excentricidad con flexión compuesta y pequeña excentricidad compresión compuesta. Veremos que esta relación de correspondencia tampoco es exacta, pues en algunos casos de pequeña excentricidad la sección aún agota en dominios de la flexión.

Paradójicamente, la separación que postuló Whitney entre grandes y pequeñas excentricidades, la establece la profundidad de la fibra neutra en el agotamiento ( $x$ ). Así, tendremos gran excentricidad cuando en el agotamiento  $x \leq x_{lim}$  (máximo aprovechamiento de la armadura traccionada) y pequeña excentricidad con  $x > x_{lim}$  (máximo aprovechamiento del hormigón).



**Figura 12.** Sección rectangular solicitada a flexión-compuesta con  $x = x_{lim}$  y sin armadura inferior  $A_{s1} = 0$ . Tensiones en el hormigón según diagrama rectangular.

Podemos traducir esta frontera expresada en términos de profundidad de la fibra neutra ( $x$ ) a otra expresada en términos de excentricidad ( $e_o$ ) con el estado de agotamiento mostrado en la **Figura 12** [6]. Se trata de una sección en agotamiento con  $x = x_{lim}$  y  $A_{s1} = 0$ , con la que se pretende el máximo aprovechamiento de la cabeza comprimida de hormigón sin perjuicio de la capacidad mecánica de la armadura inferior si la hubiera (flexión perfecta). En efecto, de ser  $A_{s1} \neq 0$ , como  $x = x_{lim}$  entonces  $\epsilon_{s1} = \epsilon_{yd}$  y en consecuencia  $\sigma_{s1} = f_{yd}$ .

Si planteamos el equilibrio en la sección, tomando momentos en el baricentro de la armadura superior, tenemos:

$$N_d \cdot e_2 = f_{cd} \cdot 0.8 x_{lim} \cdot b (0.4 x_{lim} - d_2)$$

Y teniendo en cuenta que:

$$e_2 = \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) - e_o \quad \rightarrow \quad N_d \cdot \left( \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) - e_o \right) = f_{cd} \cdot 0.8 x_{lim} \cdot b (0.4 x_{lim} - d_2)$$

Despejando:

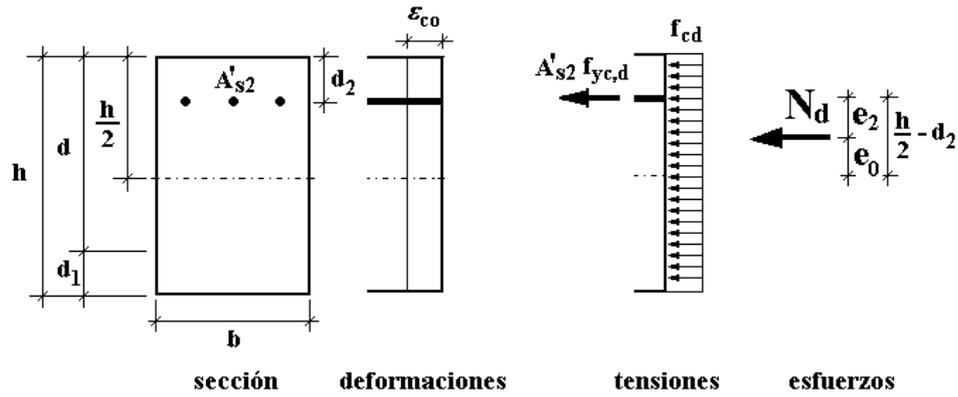
$$e_o = \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) - \frac{f_{cd} \cdot 0.8 x_{lim} \cdot b (0.4 x_{lim} - d_2)}{N_d} = e_{o\lim} \quad \dots \text{ [Ec.7]}$$

El valor de excentricidad que se obtienen de [Ec.7] lo denominamos  $e_{o\lim}$  y representa el valor de la excentricidad frontera tal que si  $e_o = M_d / N_d > e_{o\lim}$ , tendremos un problema de gran excentricidad. Entonces, para que exista equilibrio será necesaria armadura en posición inferior ( $A_{s1} \neq 0$ ) y estará solicitada a tracción con máximo aprovechamiento ( $x \leq x_{lim}$ ).

Por el contrario, si  $e_o = M_d / N_d \leq e_{o\lim}$ , tendremos un problema de pequeña excentricidad. Razonaríamos que, para que exista equilibrio, la armadura inferior debe estar en compresión lo cual es una contradicción, pues con  $x = x_{lim}$  esto es imposible. Se comprende que en esta situación el planteamiento debe ser diferente. La condición de flexión perfecta debe reemplazarse por la de máximo aprovechamiento de la sección de hormigón. Es decir, con  $0.8 x = h \rightarrow x \geq 1.25 h$ , con lo que el agotamiento se plantea en compresión compuesta.

Sin embargo, no siempre será necesario dimensionar con la sección completamente comprimida (compresión compuesta). Solamente cuando el axil  $N_d$  sea casi centrado será necesario proponer esta forma de agotamiento. Podemos plantear un nuevo agotamiento frontera, mostrado en la **Figura 13** [6].

En este caso, la combinación  $e_o - N_d$ , puede ser resistida con  $A_{s1} = 0$  y con toda la sección comprimida. Si planteamos el equilibrio en la sección, tomando momentos en el baricentro de la armadura superior, tenemos:



**Figura 13.** Sección rectangular solicitada a compresión-compuesta con  $x = \infty$  y sin armadura inferior  $A'_{s1} = 0$ .

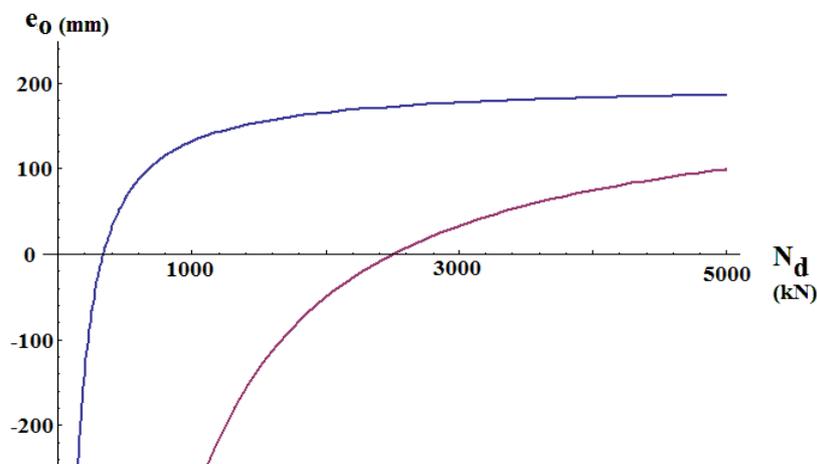
$$N_d \left( \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) - e_o \right) = f_{cd} \cdot h \cdot b \left( \frac{h}{2} - d_2 \right)$$

Despejando:

$$e_o = \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) - \frac{f_{cd} \cdot h \cdot b (h/2 - d_2)}{N_d} = e_{oh} \quad \dots \text{ [Ec.8]}$$

El valor de excentricidad que se obtienen de [Ec.8] lo denominamos  $e_{oh}$ . Veamos el significado de este nuevo valor frontera. Si el axil está muy centrado, tendremos  $e_o = M_d / N_d < e_{oh}$ , entonces será imposible establecer el equilibrio, a no ser que tengamos armadura inferior comprimida ( $A'_{s1} \neq 0$ ). Por el contrario, si  $e_o = M_d / N_d \geq e_{oh}$ , entonces la armadura inferior no será necesaria.

Antes de continuar, se debe destacar que los valores deducidos para  $e_{olim}$  y  $e_{oh}$  dependen de la geometría y las resistencia de los materiales y no de las cuantías de armado.



**Figura 14.** Valores de  $e_{olim}$  (línea superior) y  $e_{oh}$  para una sección de hormigón  $f_{ck}=25\text{MPa}$ , armada con acero B 500 y con  $h=500\text{mm}$ ,  $b=300\text{mm}$ ,  $d_1=d_2=h/10$ .

Es fácil comprobar que en todo momento  $e_{o\lim} > e_{oh}$ . Es decir, los diferentes planteamientos que se pueden dar al problema son excluyentes entre si. En la **Figura 14** podemos ver una representación de  $e_{o\lim}$  y  $e_{oh}$  para diferentes valores de  $N_d$  a modo de ejemplo. Ambas curvas son hipérbolas que tiende al valor asintótico  $-\infty$  en  $N_d = 0$ .

Vamos a buscar cual es el máximo valor de  $e_{o\lim}$ . Comenzamos por reescribir la [Ec.7]:

$$e_{o\lim} = \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) - \frac{f_{cd} \cdot 0.8 x_{\lim} \cdot b (0.4 x_{\lim} - d_2)}{N_d} = \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) - \frac{0.8 x_{\lim} (0.4 x_{\lim} - d_2)}{h} \frac{U_{CT}}{N_d}$$

donde:  $U_{CT} = f_{cd} \cdot h \cdot b$

Hacemos las siguientes consideraciones:

- El mínimo valor de  $f_{ck}$  es 25 MPa, que con el mayor coeficiente de minoración  $\gamma_c = 1.5$  proporciona un valor mínimo de  $f_{cd} = 16.67$  MPa.
- En cuanto a  $x_{\lim}$  su mínimo valor se da con acero B 500 y con  $\gamma_s = 1.0$  (situaciones de proyecto accidentales). Esto es:  $x_{\lim} = 0.554 h$
- Con las actuales Normas es difícil que los recubrimientos de cálculo sean menores de 0.05 h.
- Así mismo, debido a las limitaciones en la normativa a la cuantía de armado de la relación  $N_d / U_{CT}$ , no será mayor que 2.

Aplicando todo esto resulta:

$$\max\{e_{o\lim}\} = 0.411 h$$

Podremos decir, que siempre que  $e_o > \max\{e_{o\lim}\}$  tendremos un problema con gran excentricidad..

Véase que de valer  $N_d = \infty$ ,  $e_{o\lim}$  tomaría un valor asintótico de:

$$e_{o\lim} = \left( \frac{h}{2} - d_2 \right)$$

Por consiguiente, siempre que el axil esté aplicado fuera de la sección transversal, estaremos en una situación de gran excentricidad. Ahora se ve que la afirmación contraria no es cierta, como ya habíamos anticipado.

Por otra parte, es posible obtener de la aplicación de [Ec.7] un valor negativo para  $e_{o\lim}$ . Esto pudiera causar cierta perplejidad y sin embargo la interpretación es inmediata: un valor de  $e_{o\lim}$  negativo nos indica que el esfuerzo axil es tan débil que con independencia de su excentricidad podrá ser resistido en

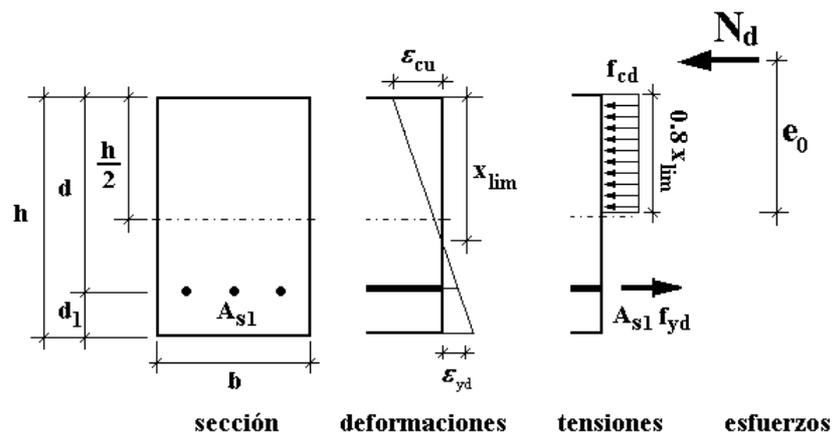
flexión compuesta y siempre en situación de gran excentricidad. Observando la **Figura 14** se comprenderá mejor esta afirmación.

Aún con el problema de gran excentricidad, si la condición impuesta era no superar  $x_{lim}$ , se nos pueden plantear dos situaciones.

Hemos visto que en la situación  $x = x_{lim}$ , el flector máximo que puede resistir la sección sin armadura superior es el llamado momento límite:

$$M_{lim} = f_{cd} \cdot 0.8 x_{lim} \cdot b (d - 0.4 x_{lim})$$

Pues bien, teniendo gran excentricidad si planteamos el equilibrio tomando momentos en el c.g.d. de la armadura de tracción puede ocurrir  $e_1 \cdot N_d = M_d < M_{lim}$ , en cuyo caso la sección se agotará con  $x < x_{lim}$ . O bien, puede ocurrir que  $e_1 \cdot N_d = M_d \geq M_{lim}$ , en cuyo caso impondremos la condición  $x = x_{lim}$  para no desaprovechar la armadura traccionada y será necesario disponer armadura superior ( $A_{s2} \neq 0$ ).



**Figura 15.** Sección rectangular solicitada a flexión-compuesta con  $x = x_{lim}$  y sin armadura superior  $A_{s2} = 0$ . Tensiones en el hormigón según diagrama rectangular.

Si escribimos:

$$e_1 \cdot N_d = M_{lim} = f_{cd} \cdot 0.8 x_{lim} \cdot b (d - 0.4 x_{lim})$$

Y teniendo en cuenta que (ver **Figura 15**):

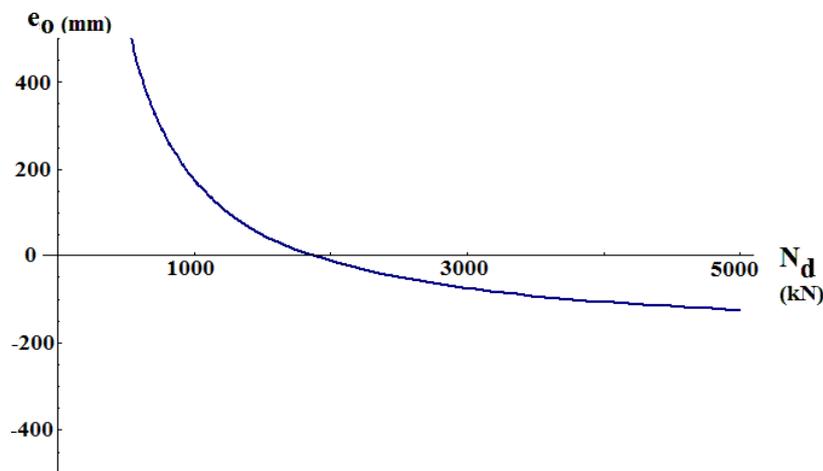
$$e_1 = e_o + \left( \frac{h}{2} - d_1 \right) \quad \rightarrow \quad \left( e_o + \left( \frac{h}{2} - d_1 \right) \right) N_d = M_{lim} = f_{cd} \cdot 0.8 x_{lim} \cdot b (d - 0.4 x_{lim})$$

Despejando:

$$e_o = -\left(\frac{h}{2} - d_1\right) + \frac{f_{cd} \cdot 0.8 x_{lim} \cdot b (d - 0.4 x_{lim})}{N_d} = e_{o2} \quad \dots [Ec.9]$$

El valor de excentricidad que se obtienen de [Ec.9] lo denominamos  $e_{o2}$ . Este será el valor de la excentricidad a partir del cual será necesaria la armadura superior y estará comprimida ( $A'_{s2} \neq 0$ ). En la **Figura 16** podemos ver una representación de  $e_{o2}$  para diferentes valores de  $N_d$  a modo de ejemplo. Se trata de una curva hipérbola que tiende al valor asintótico  $\infty$  para  $N_d = 0$ .

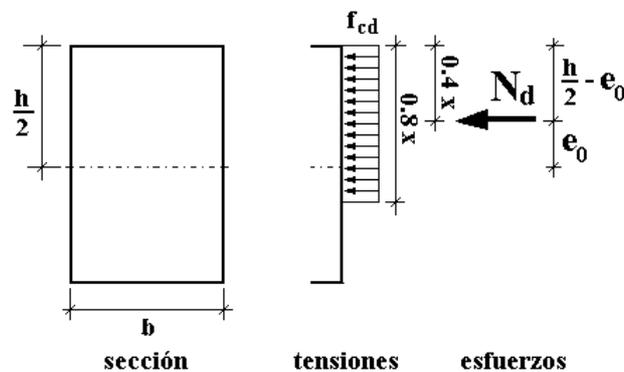
Es muy importante destacar que en flexo-compresión no siempre es posible dimensionar en agotamiento. En efecto, para cualquier valor de la excentricidad entre  $0 \leq e_o < h/2$ , siempre que sea  $N_d \leq f_{cd} \cdot 0.8 x \cdot b$  la sección de hormigón puede resistir sin armaduras y con una tensión en el hormigón  $\sigma_c \leq f_{cd}$ .



**Figura 16.** Valores de  $e_{o2}$  para una sección de hormigón  $f_{ck}=25\text{MPa}$ , armada con acero B 500 y con  $h=500\text{mm}$ ,  $b=300\text{mm}$ ,  $d_1=d_2=h/10$ .

Observando la **Figura 17**, vemos que en la situación límite  $\sigma_c = f_{cd}$  :

$$N_d = f_{cd} \cdot 0.8 x \cdot b \quad \text{y además:} \quad e_o = \frac{h}{2} - 0.4 x$$

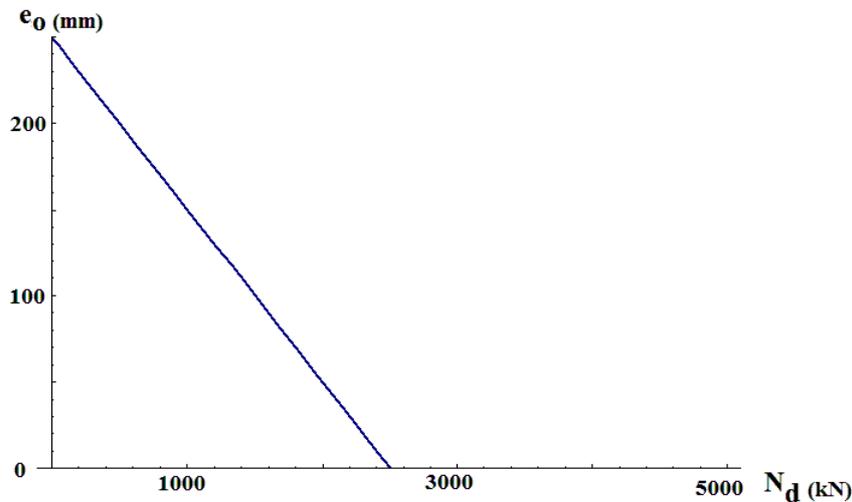


**Figura 17.** Sección rectangular solicitada a flexión-compuesta sin armaduras  $A_{s1} = A_{s2} = 0$ . Tensiones en el hormigón según diagrama rectangular.

Despejando  $x$  en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda llegamos a:

$$e_o = \frac{1}{2} \left( h - \frac{N_d}{f_{cd} \cdot b} \right) = e_{oC} \quad \dots[\text{Ec.10}]$$

El valor de excentricidad que se obtienen de [Ec.10] lo denominamos  $e_{oC}$ . Este será el valor de la excentricidad por debajo del cual no será necesaria ninguna armadura ( $A_{s1} = A_{s2} = 0$ ). En la **Figura 18** podemos ver una representación de  $e_{oC}$  para diferentes valores de  $N_d$  a modo de ejemplo.



**Figura 18.** Valores de  $e_{oC}$  para una sección de hormigón  $f_{ck}=25\text{MPa}$  y con  $h=500\text{mm}$ ,  $b=300\text{mm}$ .

De la observación de las expresiones para  $e_{oh}$  [Ec.8] y  $e_{oC}$  [Ec.10] concluimos que su valor es independiente del tipo de acero. Si reescribimos sus expresiones en función del axil adimensional, que es:

$$\nu_d = \frac{N_d}{f_{cd} \cdot h \cdot b}$$

Nos queda:

$$e_{oh} = \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) \left( 1 - \frac{1}{\nu_d} \right) \quad \text{y} \quad e_{oC} = \frac{h}{2} (1 - \nu_d)$$

Es decir, para ambos su valor se hace nulo (compresión pura) con  $\nu_d = 1$ , como era de esperar.

Por el contrario,  $e_{olim}$  [Ec.7] y  $e_{o2}$  [Ec.9] son función de  $x_{lim}$  y por lo tanto del límite elástico del acero utilizado para armar. Vamos a deducir otra interesante propiedad. Si reescribimos sus expresiones en función del axil adimensional nos queda:

$$e_{olim} = \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) - \frac{0.8 x_{lim} (0.4 x_{lim} - d_2)}{\nu_d \cdot h} \quad \text{y} \quad e_{o2} = - \left( \frac{h}{2} - d_1 \right) + \frac{0.8 x_{lim} (d - 0.4 x_{lim})}{\nu_d \cdot h}$$

Igualamos ambas expresiones y operando:

$$(h - d_1 - d_2) - \frac{0.8 x_{lim}}{\nu_d \cdot h} [(0.4 x_{lim} - d_2) + (d - 0.4 x_{lim})] = 0 \rightarrow (d - d_2) = \frac{0.8 x_{lim}}{\nu_d \cdot h} (d - d_2)$$

Finalmente, obtenemos el valor de  $\nu_d$  para el que ambas expresiones valen igual:

$$\nu_d = \frac{0.8 x_{lim}}{h}$$

Ahora, podemos hacer  $e_{olim} = e_{oC}$ , por ejemplo, y nos queda:

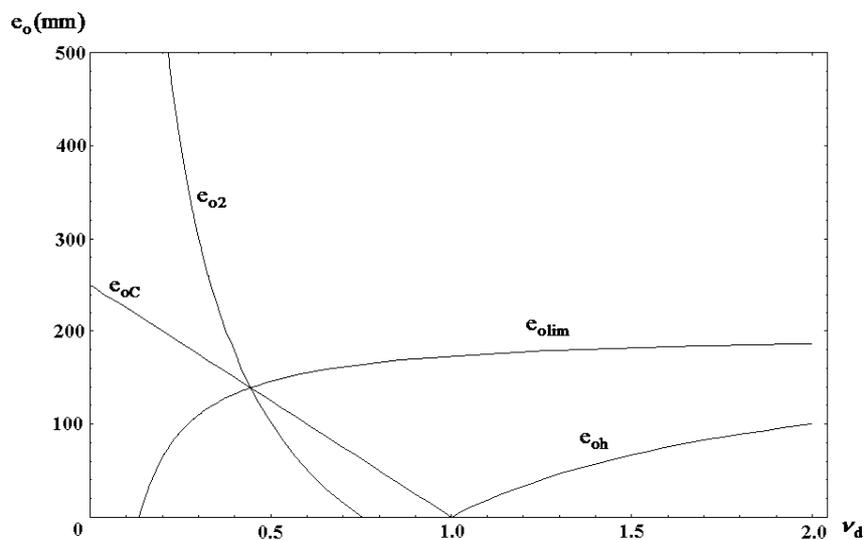
$$\left(\frac{h}{2} - d_2\right) - \frac{0.8 x_{lim}(0.4 x_{lim} - d_2)}{\nu_d \cdot h} = \frac{h}{2} (1 - \nu_d)$$

Operando llegamos a:

$$\frac{h}{2} \nu_d^2 - d_2 \nu_d + \frac{0.8 x_{lim} \cdot d_2 - 0.32 x_{lim}^2}{h} = 0$$

Para esta ecuación en  $\nu_d$  de segundo grado una de las soluciones es:

$$\nu_d = \frac{1 - \sqrt{d_2^2 - 1.6 d_2 x_{lim} + 0.64 x_{lim}^2}}{h}, \text{ esto es } \nu_d = \frac{1 - \sqrt{(d_2 - 0.8 x_{lim})^2}}{h} \rightarrow \nu_d = \frac{0.8 x_{lim}}{h}$$



**Figura 19.** Valores de las diferentes excentricidades frontera en función del axil reducido para una sección de hormigón  $f_{ck}=25\text{MPa}$ , armada con acero B 500 y con  $h=500\text{mm}$ ,  $d_1=d_2=h/10$ .

Es decir las tres curvas que representan a  $e_{olim}$ ,  $e_{o2}$  y  $e_{oC}$  son concurrentes en un mismo punto (**Figura 19**).

Tras todo lo dicho ya podemos recapitular y decir que para dimensionar una pieza de hormigón armado en flexo-compresión deberemos plantear el equilibrio de la sección de alguna de las cinco formas que se muestran en la **Figura 20**. La elección de uno u otro caso esta determinada exclusivamente por el valor de la excentricidad. Estudiémoslos en detalle.

**Caso 0.** ( $e_o \leq e_{oC}$ )

La condición adicional será: sin armaduras ( $A_{s1} = A_{s2} = 0$ ), pues la sección bruta no se agota.

Para el equilibrio de momentos será necesario:

$$0.4 x + e_o = \frac{h}{2} \quad \text{luego:} \quad x = 2.5 \left( \frac{h}{2} - e_o \right)$$

Y del equilibrio de fuerzas:

$$N_d = \sigma_c \cdot 0.8 x \cdot b$$

luego la tensión el hormigón valdrá:

$$\sigma_c = \frac{N_d}{0.8 x \cdot b} = 0.64 \frac{N_d}{b (h - 2 e_o)} \leq f_{cd}$$

Para los restantes casos será  $e_o > e_{oC}$ .

**Caso 1.** ( $e_o < e_{oh}$ )

La condición adicional será: toda la sección comprimida ( $x = \infty$ ). En consecuencia, serán necesarias ambas armaduras ( $A_{s1} \neq 0$  y  $A_{s2} \neq 0$ ).

Las compresiones en el hormigón serán máximas:  $U_{CT} = f_{cd} \cdot h \cdot b$

Planteamos el equilibrio, tomando momentos en el baricentro de la armadura superior:

$$e_2 \cdot N_d = U_{CT} (h/2 - d_2) + U_1 (d - d_2)$$

De esta ecuación lineal obtenemos  $U_1$ :

$$U_1 = \frac{e_2 \cdot N_d - U_{CT} (h/2 - d_2)}{(d - d_2)} \quad \text{y entonces: } A_{s'_1} = \frac{U_1}{f_{yc,d}}$$

Planteamos el equilibrio de fuerzas:

$$U_2 = N_d - (U_{CT} + U_1) \quad \text{y entonces: } A_{s'_2} = \frac{U_2}{f_{yc,d}}$$

En ambos casos,  $f_{yc,d}$  es la tensión que corresponde al acero para una deformación unitaria  $\varepsilon_s = \varepsilon_{co}$ .

**Caso 2.** ( $e_{oh} \leq e_o \leq e_{olim}$ )

La condición adicional será que no se necesita armadura inferior ( $A_{s1} = 0$ ). En consecuencia, la sección estará total o parcialmente comprimida ( $1.25 h \geq x > x_{lim}$ ).

Planteamos el equilibrio, tomando momentos en el baricentro de la armadura superior:

$$e_2 \cdot N_d = f_{cd} \cdot 0.8 x \cdot b \cdot (0.4 x - d_2) \quad \text{ecuación de segundo grado que proporciona } x.$$

Conocida  $x$  calculamos:

$$U_C = f_{cd} \cdot 0.8 x \cdot b$$

Y del equilibrio de fuerzas:

$$U_2 = N_d - U_C \quad \text{y entonces: } A_{s'_2} = \frac{U_2}{f_{yd}}$$

**Caso 3.** ( $e_o > e_{olim}$  y  $e_o > e_{o2}$ )

Ocurre que  $e_1 \cdot N_d = M_d > M_{lim}$ . Si queremos dimensionar con máximo aprovechamiento de la armadura traccionada, la condición adicional será:  $x = x_{lim}$ . En consecuencia, será necesaria armadura superior ( $A_{s2} \neq 0$ ).

Planteamos el equilibrio, tomando momentos en el baricentro de la armadura inferior:

$$e_1 \cdot N_d = f_{cd} \cdot 0.8 x_{lim} \cdot b (d - 0.4 x_{lim}) + U_2 (d - d_2) = M_{lim} + U_2 (d - d_2)$$

De esta ecuación lineal obtenemos  $U_2$ :

$$U_2 = \frac{e_1 \cdot N_d - M_{lim}}{(d - d_2)} \text{ y entonces: } A_{s'2} = \frac{U_2}{f_{yd}}$$

Planteamos el equilibrio de fuerzas:

$$U_1 = U_C + U_2 - N_d \text{ y entonces: } A_{s1} = \frac{U_1}{f_{yd}}$$

**Caso 4.** ( $e_{olim} < e_o \leq e_{o2}$ )

También estamos en situación de gran excentricidad, pero con  $e_1 \cdot N_d = M_d \leq M_{lim}$ . Por tanto, la condición adicional será que no se necesita armadura superior ( $A_{s2} = 0$ ). En consecuencia, la sección agotada con máximo aprovechamiento de la armadura traccionada ( $x \leq x_{lim}$ ).

Planteamos el equilibrio, tomando momentos en el baricentro de la armadura inferior:

$$e_1 \cdot N_d = f_{cd} \cdot 0.8 x \cdot b (d - 0.4 x) \text{ ecuación de segundo grado que proporciona } x.$$

Conocida  $x$  calculamos:

$$U_C = f_{cd} \cdot 0.8 x \cdot b$$

Y del equilibrio de fuerzas:

$$U_1 = U_C - N_d \text{ y entonces: } A_{s1} = \frac{U_1}{f_{yd}}$$

Resumiendo, la solución al armado se podrá calcular con alguno de los planeamientos que se han mostrado como Caso 0, 1, 2, 3 y 4. Dependiendo de en cuál nos encontremos, se plantearán las condiciones adicionales:

1.  $A_{s1} = A_{s2} = 0$
2.  $x = \infty$
3.  $A_{s1} = 0$
4.  $A_{s2} = 0$
5.  $x = x_{lim}$

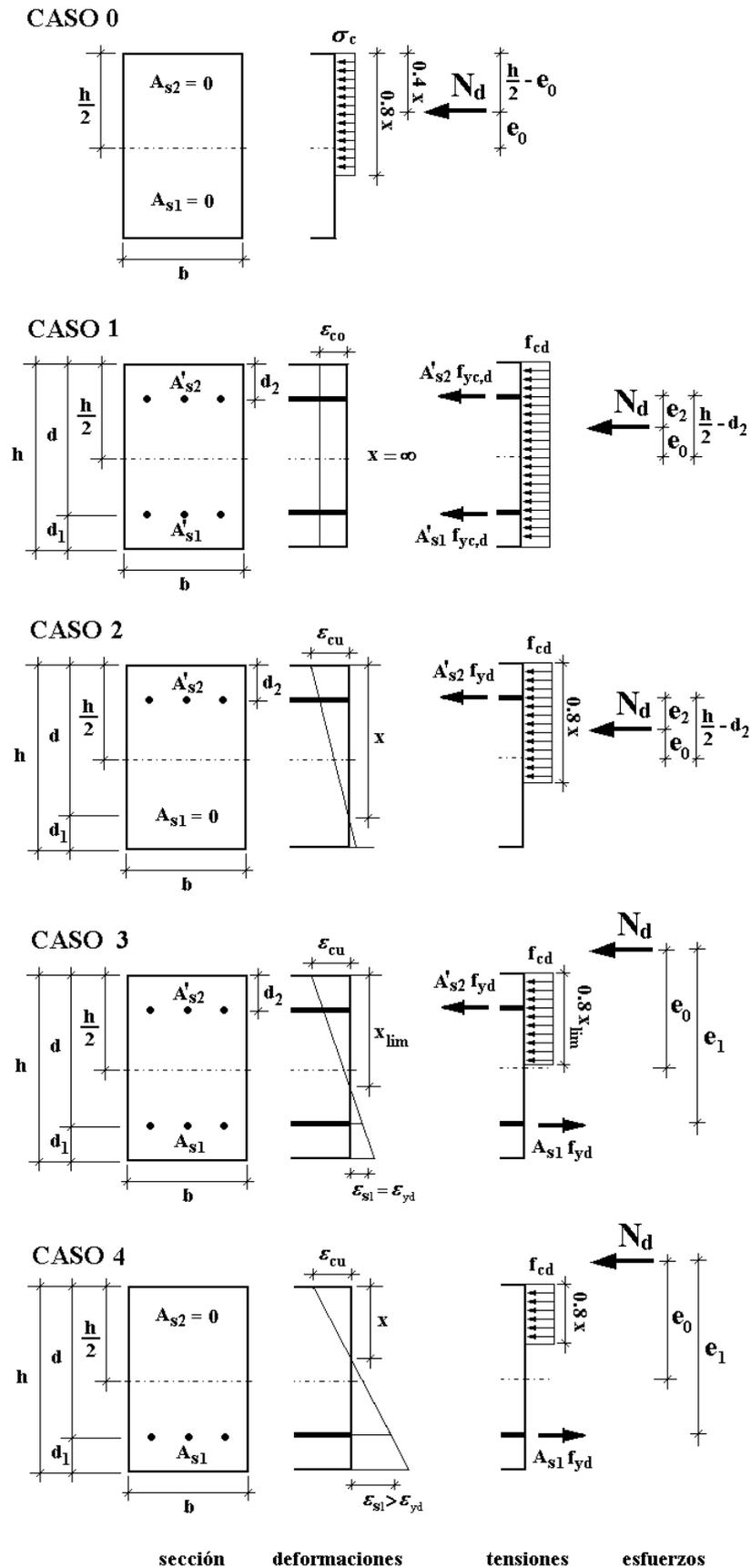
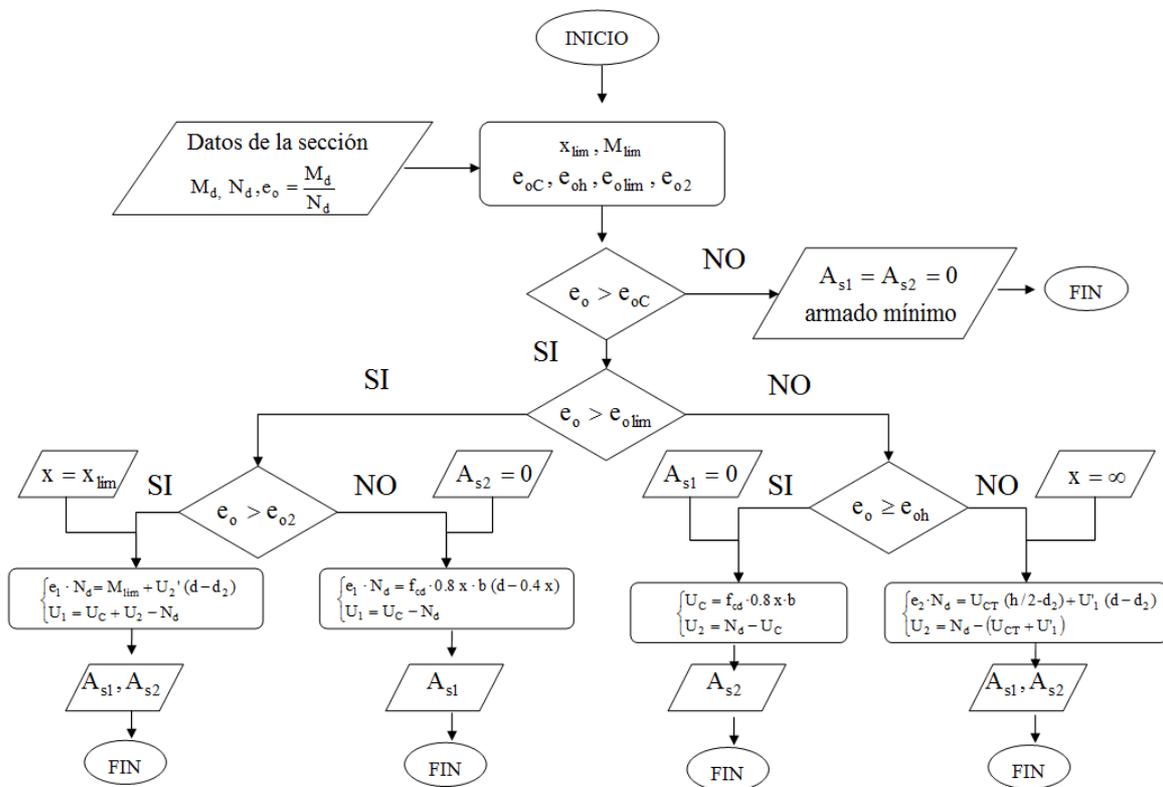


Figura 20. Esquemas de agotamiento con armado óptimo en secciones solicitadas a flexo-compresión.

Conociendo estos cinco casos es posible abordar el cálculo de las armaduras para cualquier combinación  $e_o - N_d - M_d$  y obtener el armado óptimo. Bastará comparar  $e_o$  con los valores de excentricidad frontera  $\{e_{oC}, e_{oh}, e_{olim}, e_{o2}\}$  para saber el caso de aplicación. Como, ya se ha dicho, el caso será único y la solución también. El proceso puede ser descrito mediante el diagrama de flujo mostrado en la **Figura 21**.

A partir de él es posible realizar el cálculo manualmente o desarrollar herramientas informáticas que realicen el cálculo. Pese a lo rutinario que puede llegar a ser este proceso, éste no deja de ser laborioso, pues antes de plantear las ecuaciones de equilibrio en la sección se debe discernir en cuál de los casos estamos y el hecho de utilizar diferentes ecuaciones dependiendo del caso puede dificultar la visión del problema en su conjunto.



**Figura 21.** Diagrama de flujo. Proceso de dimensionado de secciones solicitadas a flexo-compresión.

En el Anexo I se presenta un sencillo script en lenguaje Mathematica basado en el Diagrama de flujo de la **Figura 21**.

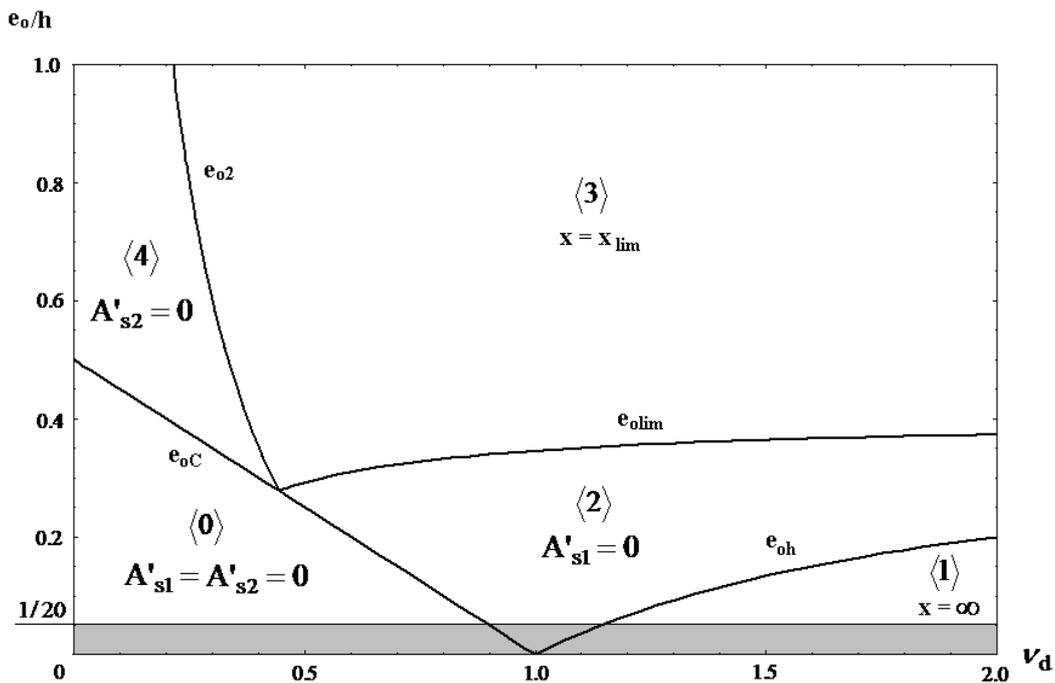
La flexión simple un caso particular de la flexión compuesta con  $N_d=0$ , lo que equivale a decir que tiene excentricidad infinita. Por tanto siempre será un problema de gran excentricidad y con solución en los Casos 3 o 4. Por tanto, el Diagrama de flujo debiera incluir al presentado en la **Figura 10** y en efecto, así es.

El script basado en el Diagrama de flujo de la **Figura 21** también permite calcular secciones a flexión simple. Para ello bastará introducir junto al esfuerzo flector de cálculo un esfuerzo axial infinitamente pequeño (por ejemplo  $10^{-10}$ ), pero nunca nulo para evitar las divisiones por cero.

### DIAGRAMA “AXIL – EXCENTRICIDAD” DE DOMINIOS DE ARMADO ÓPTIMO.

Una forma alternativa para conocer el caso de aplicación es consultar diagramas como el que se muestra en la **Figura 22**. Para crear este diagrama partimos de una representación como la de la **Figura 19**. Basándonos en los criterios de discriminación utilizados para establecer el caso de aplicación, es fácil saber que ramas de esas curvas son prescindibles y se eliminan.

El resultando es un gráfico compartimentado en cinco áreas:  $\langle 0 \rangle$ ,  $\langle 1 \rangle$ ,  $\langle 2 \rangle$ ,  $\langle 3 \rangle$  y  $\langle 4 \rangle$  separadas por las curvas de los valores frontera  $\{ e_{oC}, e_{oh}, e_{olim}, e_{o2} \}$ . Como consecuencia de la unicidad de la solución, dichas área no se solapan.



**Figura 22.** Diagrama  $v_d - e_o/h$ . Ejemplo para una sección de hormigón armada con acero B 500 y recubrimientos iguales  $d' = 0.10 h$ . Para cada caso se indica la condición adicional a utilizar

Llevando sobre este diagrama los valores de  $e_o - N_d$  transformados a valores adimensionales es inmediato conocer el caso de aplicación, la condición adicional a imponer y las ecuaciones que deben resolverse.

Se excluye del diagrama la franja horizontal donde  $e_o/h < 1/20$ , de conformidad con lo que prescriben las normas EC-2 y EHE en materia de excentricidad de cálculo mínima.

La observación del diagrama de dominios permite comprender mejor como se comportan las secciones solicitada a flexo-compresión. En el diagrama se aprecia que ninguna recta vertical que se trace atraviesa más de dos o tres áreas de las cinco que tiene el diagrama. Es decir, para un axil de diseño y un sección de hormigón dados, es imposible que se puedan dar las cinco formas de agotamiento descritas con anterioridad variando simplemente el valor de su excentricidad.

Si nos fijamos en la vertical 1 de la **Figura 23** podemos ver que partiendo de una situación de compresión centrada a medida que aumenta el valor de las excentricidad la sección pasa por agotamiento con  $x = \infty$  ( $a_1$ ), luego por agotamiento con  $A'_{s1} = 0$  ( $b_1$ ) y finalmente con  $x = x_{lim}$  ( $c_1$ ). Es decir, la profundidad de la fibra neutra decrece según aumenta la excentricidad  $e_o$ . Pero en todas se cumple que  $A'_{s2} \neq 0$ . Por tanto, para un valor de esfuerzo axil  $v_d > 1$  siempre será necesaria armadura superior con independencia de la excentricidad.

Observando las verticales 2, 3 y 4 de la **Figura 23** se aprecia que en principio se puede resistir cualquier axil  $v_d \leq 1$  sin armaduras hasta un cierto valor de excentricidad ( $a_2$ ,  $a_3$  y  $a_4$ ). En el caso de  $0.8 x_{lim}/h \geq v_d \geq 1$ , a partir de dicho valor de la excentricidad se necesita armadura superior, al menos, ( $b_2$  y  $c_2$ ) y de ser  $v_d < 0.8 x_{lim}/h$ , entonces el agotamiento siempre se produce con  $x \leq x_{lim}$  con ( $c_3$ ) o sin ( $b_3$  y  $b_4$ ) armadura superior.

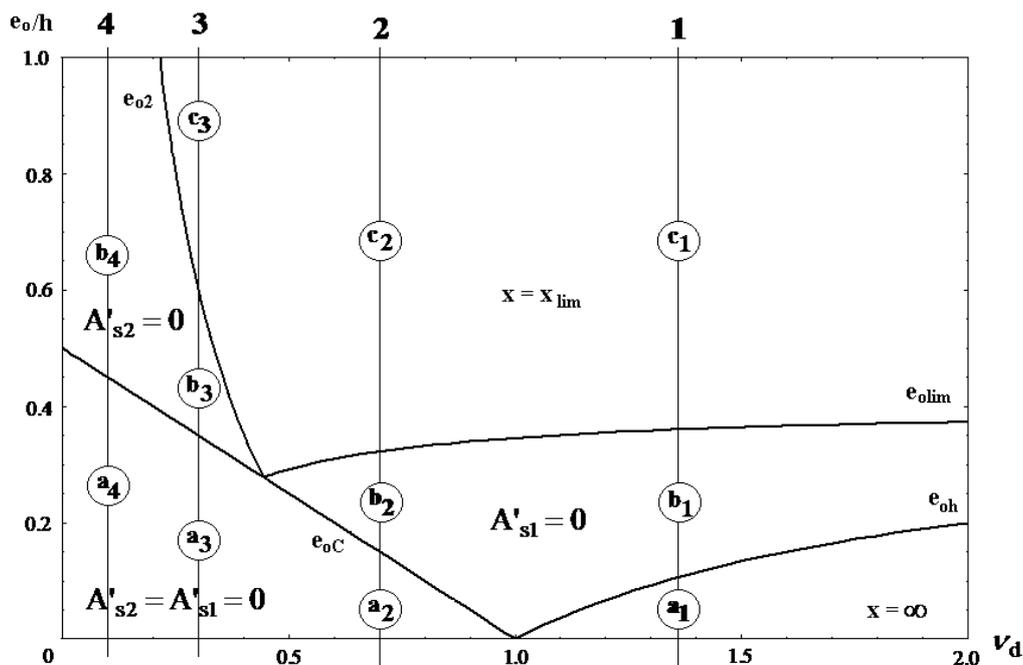
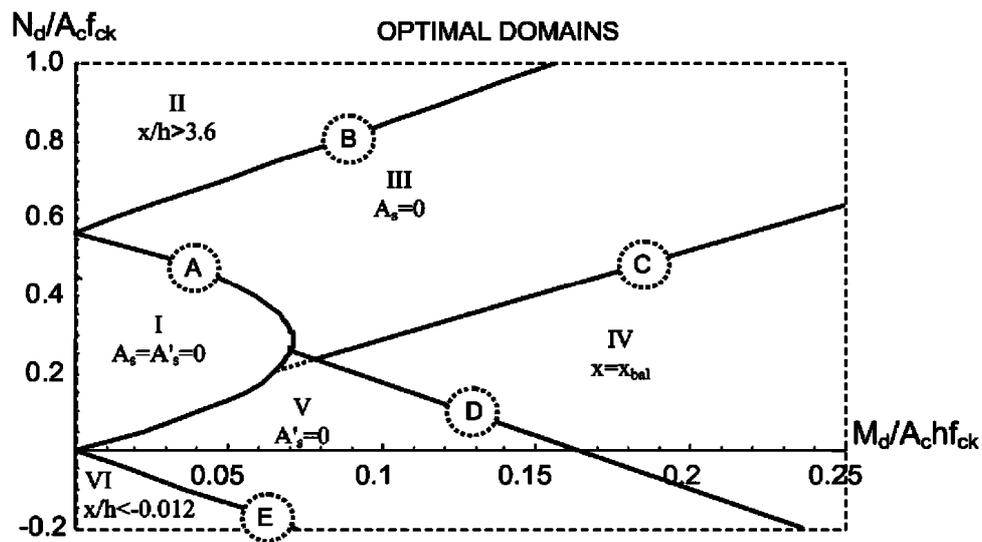


Figura 23. Diagrama  $v_d - e_o/h$ . Evolución del agotamiento con  $e_o$  para diferentes valores de  $v_d$ .

También se aprecia que trazando una recta horizontal por  $e_o/h = 0.50$ , el semi-espacio superior que resulta corresponde a los casos de gran excentricidad tal y como los definen Meseguer et al [2]. Sin embargo, vemos que no pocos caso que deben ser tratados como gran excentricidad quedan por debajo de dicha recta.

Un diagrama de dominios para iniciar el dimensionado en agotamiento con esfuerzos  $M_d - N_d$ , equivalente al de la **Figura 22**, ha sido propuesto recientemente por Aschmeim et al. [7] obtenido a partir de las expresiones analíticas [Ec.11] y [Ec.12] de los RSD (**Figura 24**).



**Figura 24.** Diagrama de dominios de armado óptimo propuesto por Aschmeim et al. Ejemplo.

Siendo la flexión simple un caso particular de la flexión compuesta con  $N_d = 0$ , podríamos decir que es un problema con excentricidad  $e_o = \infty$ . Por lo tanto, siempre en gran excentricidad y le son de aplicación los casos  $\langle 3 \rangle$  ó  $\langle 4 \rangle$  exclusivamente.

## OTROS MÉTODOS DE CALCULO.

A continuación, comentaremos los métodos que existen como alternativa al aquí propuesto. Comenzamos por los que admiten un tratamiento manual, que para que resulten sencillos o bien son métodos aproximados o bien se formulan solo para el caso particular de armaduras simétricas.

Suelen formularse en forma adimensional para ser más generales. Proponen las diferentes ecuaciones (de equilibrio y compatibilidad) sin aclarara “a priori” cuáles se deben utilizar. Por tanto, no resuelven la incertidumbre inicial sobre cual será el agotamiento óptimo de la sección, lo que conduce en no pocos casos a realizar tanteos.

**Teorema de Ehlers.**

En casos muy claros, como cuando la excentricidad es tan grande que el axil actúa fuera de la sección, es fácil concluir que el problema es de gran excentricidad y que la sección agota en flexión-compuesta. Un método para resolver el problema de armado a flexión compuesta que ha resultado muy fructífero es el que se desprende del conocido Teorema de Ehlers, conocido también como método de Wuczkowsky, que dice:

*“Todo problema de flexión compuesta puede reducirse a uno de flexión simple, sin más que tomar como momento el que produce el esfuerzo normal respecto a la armadura de tracción ...”* tomado de [ 2 ].

En efecto, comparando las ecuaciones de equilibrio de la flexión simple y la compuesta que hemos presentado anteriormente vemos que:

en el caso  $M_d \leq M_{lim}$

para la flexión simple:

$$M_d = f_{cd} \cdot 0.8 \cdot x \cdot b \cdot (d - 0.4 \cdot x)$$

$$U_1 = U_C$$

para la flexión compuesta, haciendo  $e_1 \cdot N_d = M_d^*$ :

$$M_d^* = f_{cd} \cdot 0.8 \cdot x \cdot b \cdot (d - 0.4 \cdot x)$$

$$U_1 = U_C - N_d$$

y en el caso  $M_d \leq M_{lim}$

para la flexión simple:

$$M_d = M_{lim} + U_2 \cdot (d - d_2)$$

$$U_1 = U_C + U_2$$

para la flexión compuesta:

$$M_d^* = M_{lim} + U_2 \cdot (d - d_2)$$

$$U_1 = U_C + U_2 - N_d$$

Es claro que las ecuaciones de equilibrio de momentos resultan idénticas simplemente cambiando  $M_d$  por  $M_d^*$ , mientras que las de equilibrio de fuerzas nos dicen que en flexión compuesta la capacidad mecánica de la armadura en tracción es la que resulta de restar el valor del axil  $N_d$  a la que se hubiera obtenido si el problema fuera de flexión simple con  $M_d^*$ . De hecho, esta formulación coincide plenamente con lo que hemos denominado Casos 3 y 4. Todo parece dar validez al teorema y sin embargo la afirmación “Todo problema de flexión compuesta ...” no es del todo cierta.

Para comprobarlo, basta observar las ecuaciones de lo que hemos denominado Caso 2, que son válidas para una sección que agota en flexión compuesta. Por lo tanto, el Teorema de Ehlers no es de aplicación a “Todo problema de flexión compuesta.”. Esto deriva del error que se comete al identificar categóricamente flexión compuesta con gran excentricidad y compresión compuesta con pequeña excentricidad.

En cuanto a los métodos que desde el inicio plantean como condición adicional armaduras simétricas, baste decir que consecuentemente su aplicabilidad es algo más limitada. Sobre estos métodos volveremos a tratar más adelante.

Especial atención merecen los métodos analítico-gráficos que se comentan a continuación.

### Los diagramas de interacción.

Sin duda se trata del método para comprobación y diseño más extendido. Son una herramienta óptima para la comprobación de secciones armadas. Conocidas las armaduras es posible establecer los pares de axil y flector que agotan la sección ( $M_u, N_u$ ), evaluando las ecuaciones de equilibrio para todo valor de  $x$ . La representación gráfica de estos pares es el diagrama de interacción.

También es posible utilizarlos para dimensionar. Ocurre que en este caso se debe probar con diferentes soluciones de armado hasta encontrar la que mejor se ajuste, con lo que volvemos a una resolución por tanteos. Una alternativa es utilizar ábacos en los que representan los diagramas de interacción para diferentes soluciones de armado en una misma sección. Presentan el inconveniente de que las diferentes soluciones difieren en cuantía pero mantienen la una misma proporción entre las áreas de armaduras (usualmente armado simétrico,  $A_{s1} = A_{s2} = 0$ ).

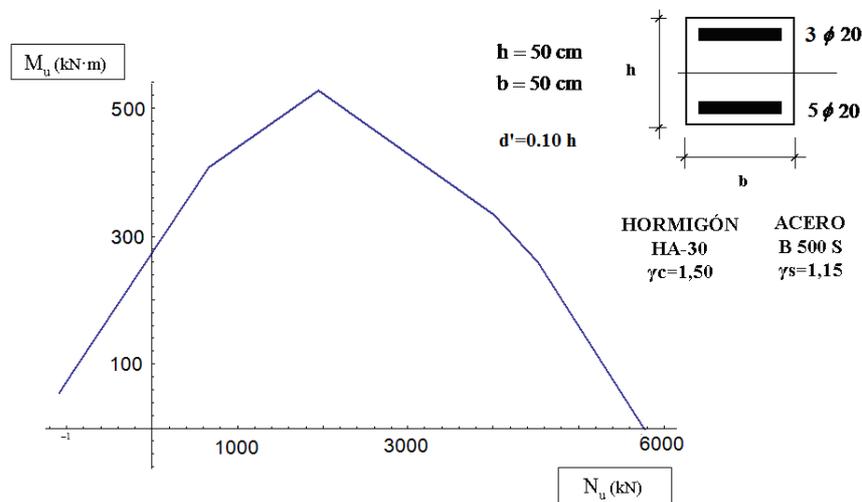


Figura 25. Diagrama de interacción M-N. Ejemplo.

Cada ábaco es válido para secciones con el mismo tipo de hormigón, de acero y valores geométricos iguales ( $h$ ,  $b$ ,  $d_1$  y  $d_2$ ). Aunque también se pueden construir ábacos adimensionales, lo que reduce el número de ellos que se necesita. Lo habitual no es construirse personalmente estos diagramas, pues su elaboración es compleja, sino utilizar las colecciones de ábacos que están disponibles en la bibliografía especializada. Es decir, si no se dispone de la colección de ábacos no se puede dimensionar nada.

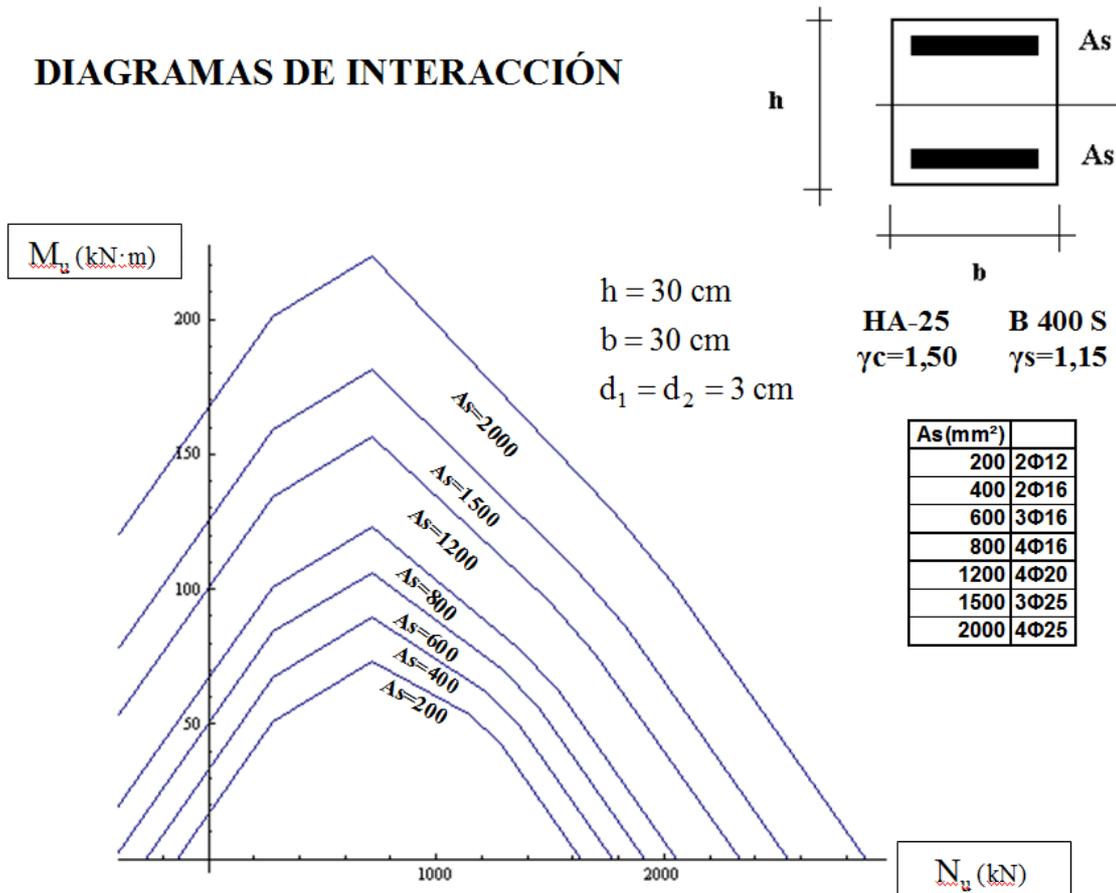


Figura 26. Ábaco de interacción M-N simplificado (aproximación poligonal). Ejemplo.

Como alternativa uno mismo se puede construir diagramas de interacción e incluso ábacos aproximados. Para ello se determinan los pares de agotamiento ( $M_u, N_u$ ) en una serie discreta de planos de agotamiento (preferiblemente los que son frontera entre dominios de deformación). Uniendo estos puntos se obtiene una línea poligonal que es aproximadamente el diagrama de interacción.

Los diagramas de interacción permite ver con claridad como evoluciona la capacidad resistente de una sección según varía su plano de agotamiento, es decir con  $x$ .

### Los diagramas RSD.

Hernández-Montes et al. [8] condensaron el problema de diseño en un único planteamiento que permitía calcular el valor exacto del armado óptimo utilizando dos ecuaciones válidas para cualquier caso, y que se derivan de las de equilibrio. Por simplicidad en este caso conviene plantear el equilibrio como suma de momentos en baricentro de la armadura superior y en el baricentro de la armadura inferior. De este modo las ecuaciones resultantes se presentan desacopladas en  $A_{s1}$  y  $A_{s2}$ . Si las expresamos como función de  $x$  nos quedan así:

$$A_{s2}(x) = \begin{cases} \frac{M_d + N_d (d - h/2) - U_C(x)(d_1 - 0.4x)}{\sigma_{s2}(x)(d - d_1)} & \text{si } 0.8x > h \\ \frac{M_d + (N_d - U_C(x)) (d - h/2)}{\sigma_{s2}(x)(d - d_1)} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \dots [\text{Ec.11}]$$

$$A_{s1}(x) = \begin{cases} \frac{M_d - N_d (h/2 - d_1) - U_C(x)(d_1 - 0.4x)}{\sigma_{s1}(x)(d - d_1)} & \text{si } 0.8x > h \\ \frac{M_d - (N_d - U_C(x)) (h/2 - d_1)}{\sigma_{s1}(x)(d - d_1)} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \dots [\text{Ec.12}]$$

La representación de  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$  y  $A_{s1} + A_{s2}$  como funciones de  $x$  son los denominados RSD (del inglés Reinforcement Sizing Diagrams). La representación RSD permite visualizar las infinitas soluciones de  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$  y  $A_{s1} + A_{s2}$  para que una sección transversal resista en rotura un par  $(M_d, N_d)$  :

Si alguna pega se le puede poner a este planteamiento es que las aparentemente sencillas expresiones [Ec.11] y [Ec.12] que proporcionan  $A_{s1}$  y  $A_{s2}$  no lo son. En efecto, la tensión de trabajo en las armaduras son funciones a trozos y a su vez son función de la deformación longitudinal de éstas, que son también funciones a trozos en  $x$ :

$$\sigma_{s1}(x) = \sigma_{s1} \circ \varepsilon_{s1}(x) = \sigma_{s1}(\varepsilon_{s1}(x)) \quad \sigma_{s2}(x) = \sigma_{s2} \circ \varepsilon_{s2}(x) = \sigma_{s2}(\varepsilon_{s2}(x))$$

con

$$\varepsilon_{s1}(x) = \begin{cases} -0.01 & \text{para } 0 \leq x \leq \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}} d \\ -\frac{d-x}{x} \varepsilon_{cu} & \text{para } \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}} d \leq x \leq d \\ \frac{x-d}{x} \varepsilon_{cu} & \text{para } d \leq x \leq h \\ \frac{d-x}{x} \varepsilon_c & \text{para } x \geq h \end{cases} \quad \varepsilon_{s2}(x) = \begin{cases} -\frac{d_2-x}{d-x} \varepsilon_{ud} & \text{para } 0 \leq x \leq d_2 \\ \frac{x-d_2}{d-x} \varepsilon_{ud} & \text{para } d_2 \leq x \leq \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}} d \\ \frac{x-d_2}{x} \varepsilon_{cu} & \text{para } \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}} d \leq x \leq h \\ \frac{x-d_2}{x} \varepsilon_c & \text{para } x \geq h \end{cases}$$

siendo:

$$\varepsilon_c = \frac{x}{x - \alpha h} \varepsilon_{co} \quad \text{con:} \quad \alpha = \frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{co}}{\varepsilon_{cu}}$$

En consecuencia, pese a que las funciones son continuas obtenerlas para todo valor de  $x$  es un proceso laborioso que requiere asistencia de ordenador o al menos de una calculadora programable y con opciones gráficas para poder representar el RSD.

Por ser un método específico para el diseño de secciones, los diagramas RSD permiten ver con claridad como evoluciona el valor de las armaduras necesarias en una sección dada para resistir un par  $(M_d, N_d)$  según varia su plano de agotamiento, es decir con  $x$ .

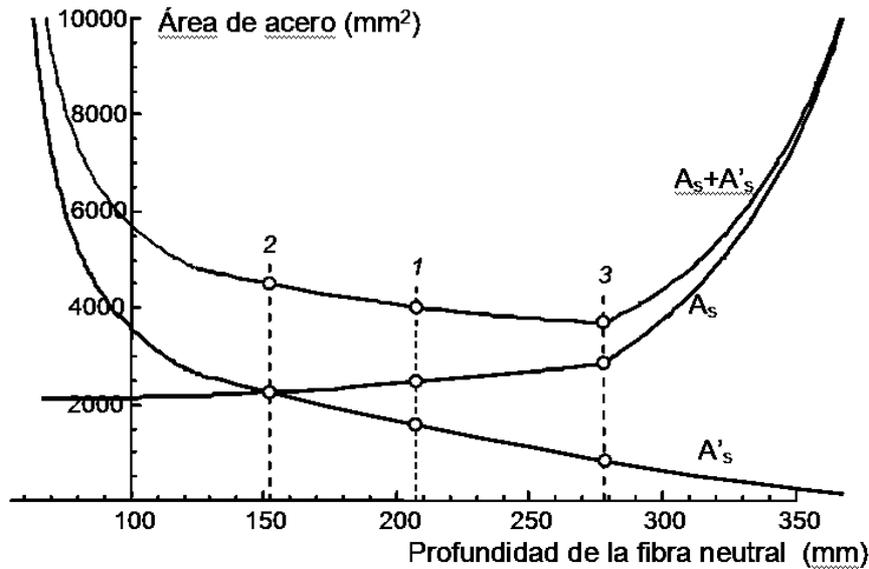


Figura 27. RSD. Ejemplo. Armadura necesaria en tracción ( $A_s$ ) y en compresión ( $A'_s$ )

### PIEZAS CON ARMADO SIMÉTRICO.

La condición de diseño  $A_{s1} = A_{s2}$ , es típica de pilares.

En efecto, en pilares de edificación el esfuerzo flector es en gran medida consecuencia de acciones horizontales sobre la estructura como el viento. Puesto que en el análisis de la esfuerzo las cargas de viento deben considerarse actuando alternamente desde ambos sentido, entonces las piezas deben diseñarse para resistir esfuerzos flectores de signo contrario aunque de igual o similar magnitud. En consecuencia, resulta necesario disponer armaduras iguales en la dirección que se resiste el esfuerzo flector.

Esta condición, como todas las anteriores deshace la indeterminación del problema de diseño permitiendo el cálculo de las armaduras. Disponemos de varias herramientas para resolver esta clase de armado.

Una vez que se establece una condición adicional como  $A_{s1} = A_{s2}$  formular el problema es posible a partir de ecuaciones de equilibrio y compatibilidad. Estos métodos, pensados para poder abordar el cálculo manualmente, habitualmente se formulan en parámetros adimensionales para que sean así más generales. Aun así el cálculo puede no resultar sencillo. El propio Calavera nos dice a cerca de su método: “Las expresiones anteriores hacen dificultosa la resolución si no se dispone de un ordenador.” [3].

Por otro lado tenemos los ya mencionados diagramas de interacción ( $M_d - N_d$ ). En los casos de armado simétrico, la colección de diagramas necesarios es de menor tamaño. Aun así, necesitaremos varios

diagramas por cada tipo de sección (h, b) que se desee armar y en el caso de que los diagramas sean adimensionales (independientes de h,  $f_{cd}$  y  $f_{yd}$ ) necesitaremos disponer de uno por cada valor de los recubrimientos  $d_1$  y  $d_2$  (ver **Figura 28**).

Los RSD concebidos específicamente para el diseño son una interesante opción a considerar, con los inconvenientes ya mencionados.

Como alternativa también disponemos de algunos métodos de cálculo aproximados, como el que propone la Instrucción española EHE-08 en su Anexo 7 y que brevemente describimos a continuación a modo de ejemplo.

Para secciones rectangulares en las que se cumpla:

$$f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}, \quad d'/d \leq 0.20, \quad d/h \leq 0.80$$

la capacidad mecánica en las armaduras (no las áreas) deberá ser:

$$U_{s1} = U_{s2} = \begin{cases} \frac{M_d}{d-d'} + \frac{N_d}{2} - \frac{N_d \cdot d}{d-d'} \left(1 - \frac{N_d}{2U_0}\right) & \text{si } 0 \leq N_d \leq U_0/2 \\ \frac{M_d}{d-d'} + \frac{N_d}{2} - \alpha \frac{U_0 \cdot d}{d-d'} & \text{si } N_d > U_0/2 \end{cases}$$

con:

$$d_1 = d_2 = d'$$

$$U_0 = f_{cd} \cdot d \cdot b$$

$$\alpha = \frac{0.480 m_1 - 0.375 m_2}{m_1 - m_2} \leq 0.5 \left(1 - \left(\frac{d'}{d}\right)^2\right)$$

$$m_1 = (N_d - 0.5 U_0) (d - d')$$

$$m_2 = 0.5 N_d (d - d') - M_d - 0.32 U_0 (d - 2.5 d')$$

Vemos que se trata de un procedimiento no exento de laboriosidad, pese a ser un método aproximado.

A continuación, se mostrará que con el procedimiento de cálculo basado en la excentricidad equivalente es muy sencillo calcular el armado simétrico cuando se trata de piezas solicitadas con pequeña excentricidad, que es la forma en que típicamente están solicitados los pilares. En tal caso bastará con calcular el área de la armadura más solicitada ( $A_2$ ) con el procedimiento ya descrito y disponer  $A_{s1} = A_{s2}$ .

Que el pilar esté solicitado con grandes excentricidades es poco frecuente. Aun así, vamos a mostrar como podemos determinar el armado con la formulación del método que estamos exponiendo. El proceso se complica un poco. Inicialmente existe incertidumbre sobre la tensión de trabajo en las armaduras, por lo que comenzamos suponiendo que ambas han alcanzado su límite elástico.

Con esta condición la ecuación de equilibrio de fuerzas queda:

$$N_d = f_{cd} \cdot 0.8 \cdot x \cdot b + A \cdot f_{yd} - A \cdot f_{yd} \quad \text{de donde despejamos:} \quad x = 1.25 \frac{N_d}{f_{cd} \cdot b}$$

Según el valor obtenido para  $x$  estaremos en alguno de los siguientes casos:

- $x \leq 0.259 d$  agotamiento en dominio 2
- $0.259 d < x \leq x_{lim}$  agotamiento en dominio 3
- $x > x_{lim}$  agotamiento en dominio 4 o 4ª

En el segundo caso, la hipótesis de partida es correcta y en tal caso bastará despejar la armadura ( $A$ ) de la segunda ecuación de equilibrio. Como  $d_1 = d_2 = d'$ :

$$e_0 \cdot N_d = f_{cd} \cdot 0.8 \cdot x \cdot b \cdot (h/2 - 0.4x) + 2 A \cdot f_{yd} \cdot (h/2 - d')$$

O bien, tomando momentos en la armadura inferior:

$$e_1 \cdot N_d = f_{cd} \cdot 0.8 \cdot x \cdot b \cdot (d - 0.4x) + A \cdot f_{yd} \cdot (d - d')$$

En cualquier otro caso la hipótesis de partida es errónea y debemos replantear el problema. Así, en el primero de los tres casos el agotamiento de la sección se alcanza sin que necesariamente la armadura superior alcance el límite elástico del acero. Su tensión de trabajo dependerá de su deformación, que puede obtenerse por compatibilidad de deformaciones:

$$\varepsilon_{s2} = \frac{x - d'}{d - x} \cdot 0.01 \quad \text{luego} \quad \sigma_{s2} = E_s \frac{x - d'}{d - x} \cdot 0.01 \leq f_{yd}$$

y sustituyendo en la ecuación de equilibrio de fuerzas, nos queda:

$$N_d = f_{cd} \cdot 0.8 \cdot x \cdot b + A \cdot \sigma_{s2} - A \cdot f_{yd} = f_{cd} \cdot 0.8 \cdot x \cdot b + A \left( E_s \frac{x - d'}{d - x} \cdot 0.01 - f_{yd} \right)$$

El equilibrio de momentos, por comodidad, lo planteamos en la armadura superior:

$$e_2 \cdot N_d = f_{cd} \cdot 0.8 \cdot x \cdot b \cdot (0.4x - d') + A \cdot f_{yd} \cdot (d - d')$$

De estas dos últimas ecuaciones es posible obtener  $x$  y  $A$ . Se procede desajando  $A$  y sustituyendo en la ecuación de fuerzas:

$$N_d = f_{cd} 0.8 x \cdot b + \frac{e_2 N_d - f_{cd} 0.8 x \cdot b (0.4 x - d')}{f_{yd} (d - d')} \left( E_s \frac{x - d'}{d - x} 0.01 - f_{yd} \right)$$

Se trata de una ecuación cúbica en x de la que obtenemos su valor como paso previa calcular A:

$$A = \frac{e_2 N_d - f_{cd} 0.8 x \cdot b (0.4 x - d')}{f_{yd} (d - d')}$$

Si se nos diera el tercer caso, el agotamiento se produce sin que la armadura inferior se alcance el límite elástico. Su tensión de trabajo dependerá de la deformación. De la ecuación de compatibilidad de deformaciones:

$$\varepsilon_{s1} = \frac{d - x}{x} 0.0035, \quad \text{luego} \quad \sigma_{s1} = E_s \frac{d - x}{x} 0.0035$$

Llevado a la ecuación de equilibrio de fuerzas:

$$N_d = f_{cd} 0.8 x \cdot b + A \cdot f_{yd} - A \cdot \sigma_{s1} = f_{cd} 0.8 x \cdot b + A \left( f_{yd} - E_s \frac{d - x}{x} 0.0035 \right)$$

Planteando el equilibrio de momentos en la armadura inferior:

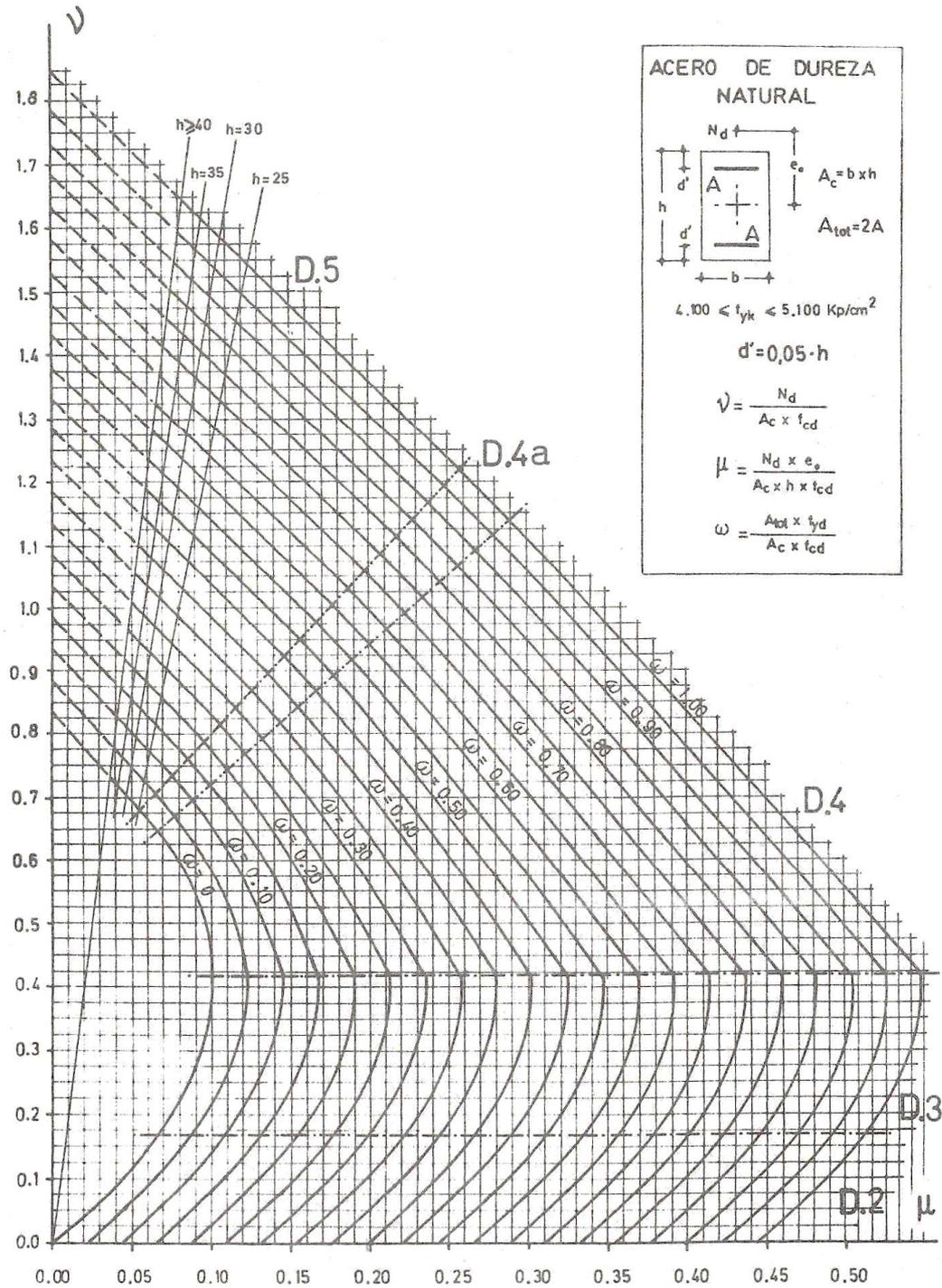
$$e_1 N_d = f_{cd} 0.8 x \cdot b (d - 0.4 x) + A \cdot f_{yd} (d - d')$$

Despajando A y sustituyendo en la ecuación de fuerzas:

$$N_d = f_{cd} 0.8 x \cdot b + \frac{e_1 N_d - f_{cd} 0.8 x \cdot b (d - 0.4 x)}{f_{yd} (d - d')} \left( f_{yd} - E_s \frac{d - x}{x} 0.0035 \right)$$

De nuevo, una ecuación cúbica en x de la que obtenemos su valor como paso previa calcular A:

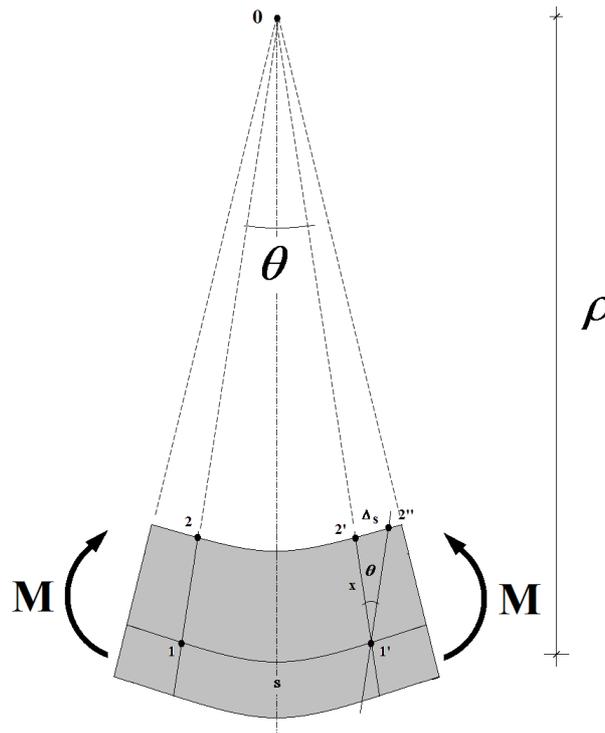
$$A = \frac{e_1 N_d - f_{cd} 0.8 x \cdot b (d - 0.4 x)}{f_{yd} (d - d')}$$



**Figura 28.** Ejemplo. Abaco adimensional para el cálculo de secciones a flexo-compresión. Armadura simétrica y recubrimientos iguales. Cortesía de D. Manuel Guzmán Castaños.

## CONSIDERACIONES SOBRE LA CURVATURA.

De acuerdo con la teoría de la flexión, un prisma recto experimenta una deformación bajo la acción del esfuerzo flector por la cual su línea media se transforma en arco de circunferencia [9]. En la **Figura 29** se muestra un porción de prisma recto curvado por la acción de un esfuerzo flector constante  $M$ . Todas las líneas paralelas a la directriz se transforman en arcos de circunferencia de diferente radio pero con centro común  $O$ .



**Figura 29.** Flexión y curvatura según la Teoría de Navier.

Siendo  $1-1'$  dos puntos de la línea media, en la deformada se mantienen a la misma distancia curvilínea por ser puntos a tensión nula (fibra neutra) **Figura 30**. Por el contrario, dos puntos de una línea cualquiera paralela a la directriz, no conservan su separación debido a que el prisma se curva y en consecuencia estará a tensión normal no nula. En particular, dos puntos como  $2-2'$  situados en el límite superior del prisma experimenta un cambio de separación  $\Delta s$  cuya magnitud podemos obtener trazando por  $1'$  una recta paralela a  $1-0$ . La intersección con el borde superior del prisma  $2''$  determina la posición que debiera ocupar  $2'$  para que se conservara la separación inicial  $2-2'$ . Por tanto, el segmento curvilíneo  $2'-2''$  es el  $\Delta s$  buscado y representa la deformación absoluta del segmento  $2-2'$  debido a la flexión.

Puesto que en la deformada  $s$  está medido sobre un arco de circunferencia, se verifica:

$$s = \rho \cdot \theta, \text{ de donde: } \rho = \frac{s}{\theta} \text{ que es el radio de curvatura.}$$

Se define la curvatura como la inversa del radio, esto es:  $C = \frac{1}{\rho} = \frac{\theta}{s}$

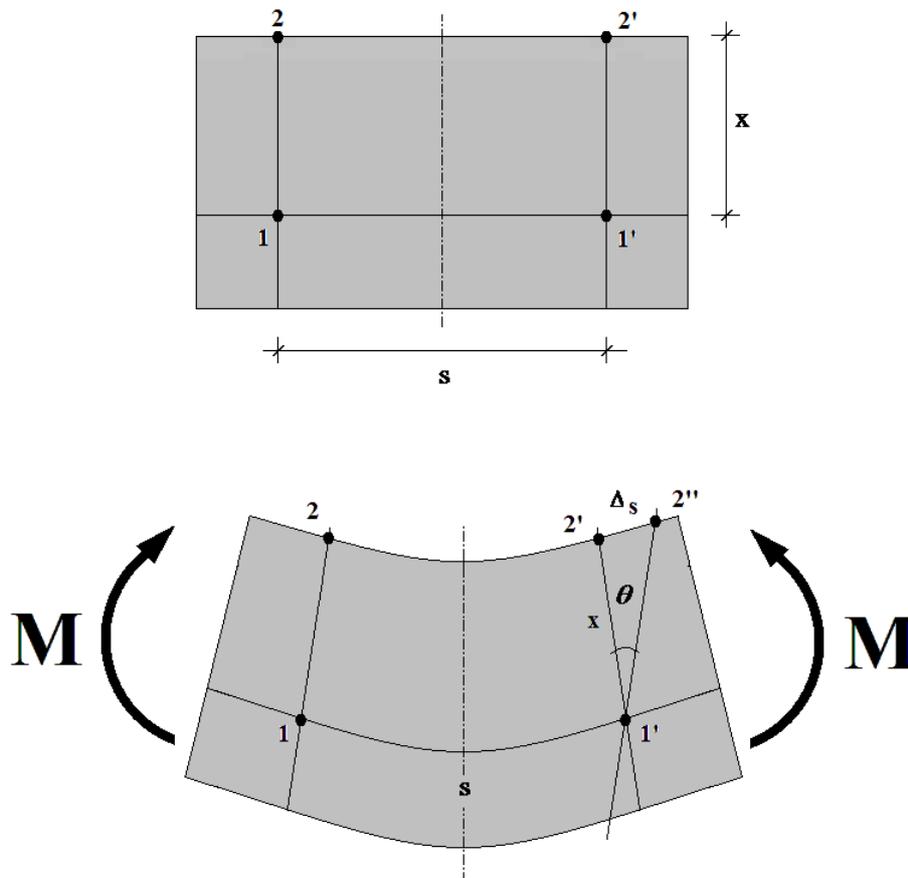


Figura 30. Flexión y curvatura según la Teoría de Navier.

Si  $\Delta s$  es la deformación absoluta del segmento  $s$  podemos calcular su deformación unitaria como:

$$\varepsilon = \frac{\Delta s}{s}, \text{ de donde: } \Delta s = s \cdot \varepsilon$$

Si aceptamos, por principio, que las deformaciones son pequeñas es posible decir a la vista de la **Figura 30**:

$$\theta = \frac{\Delta s}{x} = \frac{s \cdot \varepsilon}{x}, \text{ siendo } x \text{ lo que denominamos profundidad de la línea neutra.}$$

Entonces:

$$C = \frac{1}{\rho} = \frac{s \cdot \varepsilon}{x \cdot s} = \frac{\varepsilon}{x}$$

En la **Figura 31** se muestra un típico diagrama de agotamiento de una sección de hormigón armado. Según lo dicho, podemos calcular la curvatura de la sección agotada como:

$$C = \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_c}{x} = \text{tg } \theta \approx \theta$$

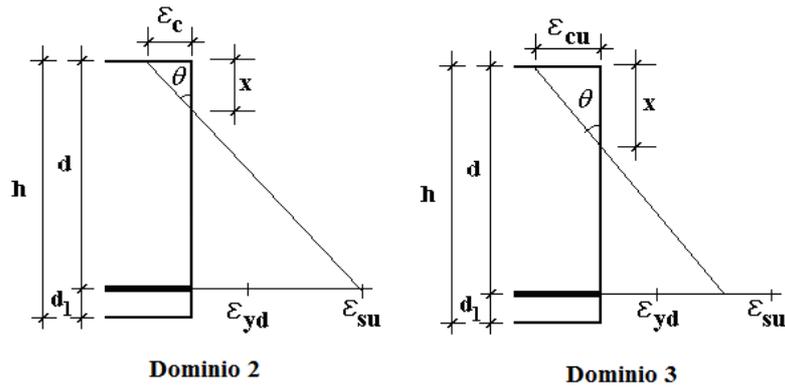


Figura 31. Ejemplos de agotamiento en Dominios de deformación 2 y 3 EHE.

Es decir, el diagrama de deformaciones unitaria de los ELU de la flexión son también una representación de la curvatura en el agotamiento.

Podemos definir la siguiente curvatura adimensional:

$$\phi = C \cdot d = \frac{\varepsilon_c}{x/d}$$

En los Dominio 3, 4 y 4a EHE,  $\varepsilon_c$  permanece constante  $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$ . Por lo tanto, esta curvatura adimensional ( $\phi$ ) de una sección en ELU es función de la profundidad de la fibra neutra en el agotamiento ( $x$ ), exclusivamente.

En cambio, en el Dominio 2 de deformación recordemos que conforme a las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones:

$$\varepsilon_{cu} = \frac{x}{d-x} 0.01, \quad \text{por tanto: } \phi = \frac{d}{d-x} 0.01$$

Es decir, que  $\phi$  alcanza su valor máximo en el plano de agotamiento frontera entre los Dominio 2 y 3. A partir de aquí es siempre decreciente incluso en el Dominio 5, compresión compuesta. En efecto, para este dominio la compatibilidad de deformaciones nos conduce a:

$$\varepsilon_c = \frac{-x}{(\kappa h - x)} \varepsilon_{co} \quad \text{con} \quad \kappa = \frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{co}}{\varepsilon_{cu}} \quad (\kappa = 3/7 \text{ en hormigones convencionales})$$

Según esto, a una sección dimensionada en agotamiento para resistir un esfuerzo flector dado le corresponde una curvatura mayor que la que le correspondería si la diseñáramos para agotar con un esfuerzo flector mayor. Esta relación inversa entre curvatura y flector puede resultar chocante, pues del estudio de la flexión por la teoría de Navier se desprende que a mayor esfuerzo flector mayor es la

curvatura producida, algo intuitivo y respaldado por la observación, según la relación que a continuación se muestra, más conocida en su forma de ecuación diferencial aproximada de la línea elástica:

$$C = \frac{M}{EI} = y''$$

La explicación sería que según la teoría que Navier desarrolló para vigas de material homogéneo y elástico, la posición de la línea neutra permanece invariante a la magnitud del esfuerzo flector, lo que ocurre, por ejemplo, en secciones de acero pero no en las de hormigón armado, debido a la fisuración.

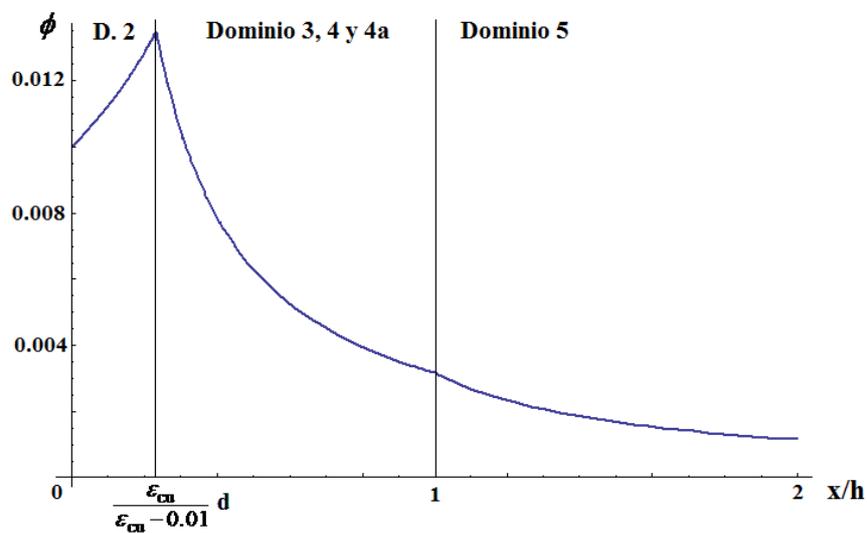


Figura 32. Variación de la curvatura adimensional  $\phi$  con la profundidad de la línea neutra  $x$ .

En cualquier caso, una sección armada para agotar con una determinada curvatura  $C_u$  la alcanzará cuando el esfuerzo flector llegue al valor de cálculo  $M_u$  para el que ha sido armada. La evolución de la curvatura en una sección desde el estado sin esfuerzo al de agotamiento es un proceso no lineal debido a las particularidades mecánicas del hormigón armado.

Así, partiendo de esfuerzo nulo la curvatura crece linealmente con el esfuerzo flector hasta alcanzar el valor  $M_{fis}$  (punto A en la **Figura 33**). Este primer comportamiento es analizable con la teoría clásica de Navier basada en la elasticidad lineal. Si la sección está débilmente armada a tracción, de modo que la resistencia a tracción de la armadura es menor que la del propio hormigón en tracción, se producirá una rotura frágil, rompiendo el acero inmediatamente después de que lo haga el hormigón.

En caso contrario, alcanzado  $M_{fis}$  la fisuración del hormigón moviliza las resistencias del acero. La fisuración, que se manifiesta en las fibras más exteriores de la zona traccionada, tiene como consecuencia que la sección experimenta un descenso de su rigidez. Este descenso es progresivo y el resultado es que ahora la curvatura crece con el flector de forma diferente y no necesariamente lineal.

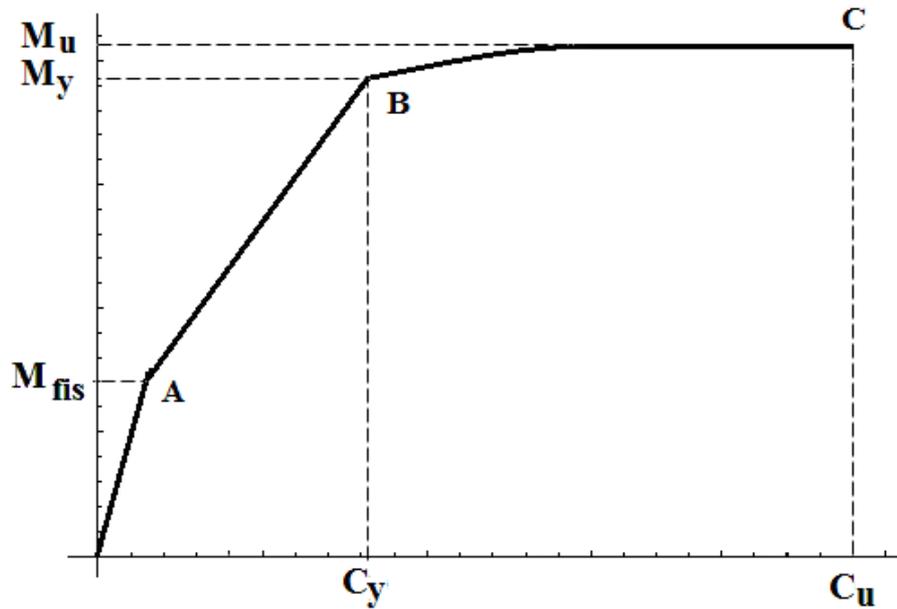


Figura 33. Variación de la curvatura con el esfuerzo flector.

Para un cierto valor del flector y su correspondiente curvatura (punto B en la **Figura 33**) se producirán alguna de las siguientes situaciones según esté armada la sección:

1. Que el acero en tracción haya alcanzado la deformación de su límite de fluencia y plastifique.
2. Que el hormigón alcance su deformación última.
3. Que ocurran ambas cosas a la vez.

En el tercer caso, agotamiento y plastificación son simultáneos con  $x = x_{lim}$ .

En el primer caso, la sección es dúctil y podrá resistir un esfuerzo flector algo mayor ( $M_u$ ) al de plastificación de su armadura ( $M_y$ ). Pero lo más destacable es que la curvatura continuará creciendo hasta alcanzar en el agotamiento un valor  $C_u$  mucho mayor que  $C_y$  (punto C en la **Figura 33**). Esto significa que una sección que acumula una importante de deformación plástica o curvatura antes del agotamiento poseerá una muy apreciada “capacidad de aviso” y se dice que es dúctil.

Además, la mayor parte de la deformación, que es plástica, se produce sin apenas variación en el esfuerzo flector resistido ( $M_y \approx M_u$ ) por lo que podemos decir que el esfuerzo que puede resistir la sección tiene un valor tope ( $M_y$ ).

Por último, en el segundo caso, la sección es frágil y se habrá producido el agotamiento antes de que el acero plastifique. Esto ocurre si la sección está excesivamente armada a tracción. De este modo puede ocurrir que la cabeza comprimida de hormigón agote sin que el acero de la armadura de tracción haya alcanzado si quiera su límite de fluencia. De acuerdo con esto, se debe entender que una misma sección de hormigón a igualdad de armadura comprimida, es más dúctil cuanto menos armada esté a tracción.

---

## **SOBRE LOS TIPOS DE ANALISIS ESTRUCTURAL.**

### **Análisis elástico-lineal.**

El análisis elástico-lineal de estructuras de hormigón armado, basado en las hipótesis clásicas de la Resistencia de materiales, sigue siendo ampliamente utilizado por su sencillez y por que conduce a resultados conservadores. Es decir, del lado de la seguridad.

En este tipo de análisis la relación momento curvatura de una sección sigue una ley lineal. La rigidez, calculada a partir de la geometría inicial de la estructura y sus secciones, se mantiene constante. Ocurre que los esfuerzos así obtenidos para barras y nudos difieren de los reales en la estructura. Una alternativa es sustituir esa rigidez bruta de las secciones (sin fisurar), por otra de menor valor para que se asemeje a la de las secciones una vez fisuradas.

### **Análisis no-lineal.**

Alternativamente, existen otros procedimientos de análisis tanto a nivel de sección como de toda la estructura que tienen en cuenta, de algún modo, las particularidades del hormigón armado, como son:

- La no linealidad tenso-deformacional del hormigón y del acero.
- La fisuración del hormigón y las consecuentes modificaciones de la rigidez .
- El presencia de armaduras longitudinales y transversales.

En estos métodos de análisis no lineal, la relación momento-curvatura de la sección solo coincide con la teoría clásica hasta alcanzar el valor de  $M_{fis}$ , a partir del cual la diferencia con el análisis lineal se hace notable. Por simplicidad, este comportamiento se puede suponer lineal con un nuevo valor de rigidez.

### **Análisis lineal con redistribución.**

La complejidad de realizar el cálculo de una estructura medianamente grande con un análisis no-lineal ha llevado al desarrollo de métodos a medio camino entre el análisis lineal y el no-lineal. El que vamos a comentar es el que se conoce como análisis lineal con redistribución limitada, que es aplicable a elementos lineales solicitados a flexión. Se trata de un cálculo en dos fases sencillas:

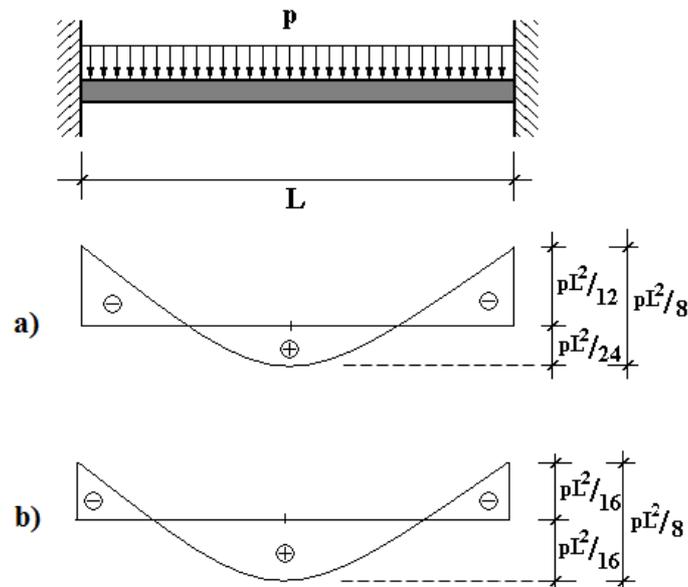
1. Análisis lineal de la estructura.

Calcular los esfuerzos en la estructura mediante algún método elástico lineal, como el método de equilibrio (slope-deflection) o el de Cross.

2. Redistribución de esfuerzo por elementos.

Reducir el valor del esfuerzo flector obtenido en determinadas secciones de un elemento . Una vez hechas estas modificaciones se recalculan los esfuerzos en el elemento por simple equilibrio.

Así por ejemplo, podemos reducir el valor del flector negativo en los extremos de una viga, a cambio de sobrecargar su centro o vano donde el flector positivo aumenta necesariamente por razón del equilibrio. Esto puede resultar muy conveniente en aquellas vigas para las que los fletores negativos son muy fuertes en comparación con el positivo del vano. Por ejemplo, para una viga biempotrada el esfuerzo flector resultante del cálculo lineal vale  $pL^2/12$  en los extremos y  $pL^2/24$  en el vano, que es exactamente el doble.



**Figura 34.** Ley de esfuerzo flector para una viga biempotrada: a) resultado del análisis lineal y b) resultado de una redistribución de esfuerzos.

Podemos hacer que en los extremos el esfuerzo flector no supere un cierto valor. Para ello, la sección debería plastificar antes del agotamiento. De este modo, el máximo esfuerzo que puede resistir la sección será prácticamente igual a  $M_y$ , según se ha explicado anteriormente. Alcanzado el valor  $M_y$  en los extremos, el esfuerzo flector sobrante deberá ser resistido por otras partes de la viga, es decir se redistribuye. Imponiendo las ecuaciones del equilibrio, es posible calcular la nueva ley de esfuerzo flector en la viga. Así, en el caso particular de que consiguiéramos hacer que la sección plastificará con  $M_y = pL^2/16$ , entonces el flector máximo en el vano pasaría a valer exactamente lo mismo. **Figura 34**

El cálculo con redistribución de esfuerzos puede proporcionar resultados más parecidos a los que realmente solicitarán la estructura. Pero además, igualar los valores máximos del flector negativo y del flector positivo conduce a soluciones de armado más económica para la pieza.

En resumen, las secciones donde se aplique la redistribución deben armarse para su esfuerzo flector reducido de modo que alcanzado tal valor se produzca la plastificación, poniendo límite al esfuerzo resistido. Dicho de otro modo, para poder realizar esta redistribución debemos garantizar que la sección es lo suficientemente dúctil.

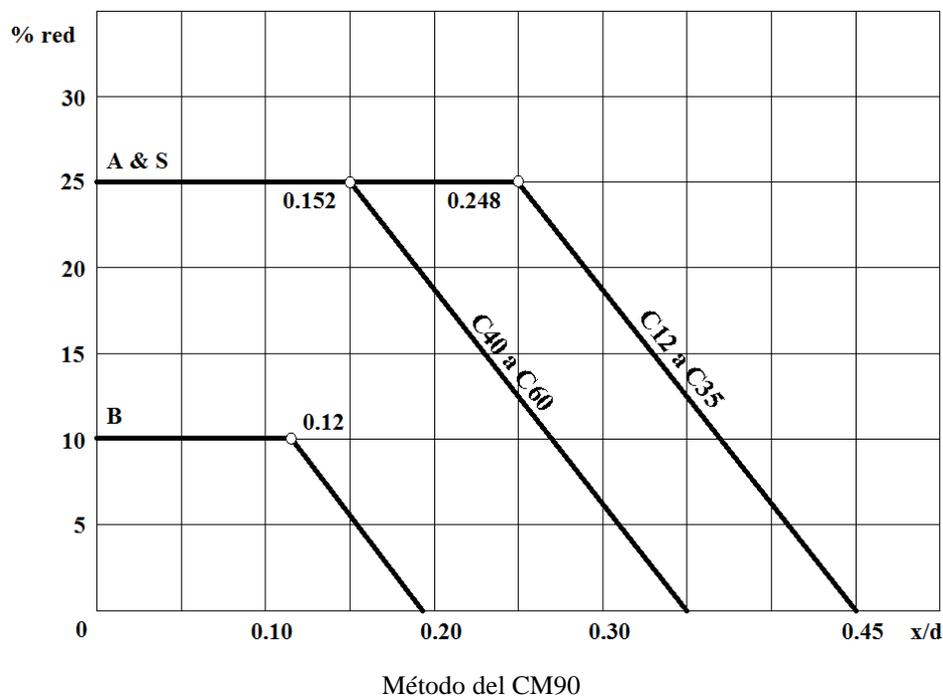
## LA REDISTRIBUCION DE ESFUERZOS EN LA NORMATIVA.

Cada Norma de hormigón (CM, EC2 y EHE) propone su propio procedimiento para la redistribución de esfuerzos en función de la ductilidad garantizada en la sección con su diseño. Todos estos métodos suponen que una sección tienen ductilidad suficiente si en el agotamiento su curvatura, que a su vez depende fundamentalmente de la profundidad de la fibra neutra, es suficientemente grande. Para ello se debe asegurar que la profundidad de la fibra neutra es tanto menor cuanto mayor sea la redistribución aplicada y en todo caso mucho menor que  $x_{lim}$ .

### Método del Código Modelo CM90 CEB-FIB (1993).

Cronológicamente el Código Modelo fue el primero en proponer un método para la redistribución de esfuerzos y en él se han inspirado normas más recientes como el Eurocódigo EC-2 y la Instrucción española EHE. Este método es de aplicación a piezas solicitadas a flexión y cuya esbeltez relativa sea menor de 15. La variables que considera son:

- Características del hormigón ( $f_{ck}$ )
- Ductilidad del acero
- Traslacionalidad o no de la estructura.



El momento flector reducido a partir del momento flector inicial es el resultado de de:

$$M_{red} = \delta \cdot M$$

con:

$$\delta \geq 0.44 + 1.25 \frac{x}{d} \quad \text{para } 12 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 35 \text{ MPa}$$

$$\delta \geq 0.56 + 1.25 \frac{x}{d} \quad \text{para } 40 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 60 \text{ MPa}$$

siendo x la profundidad de la fibra neutra y d el canto útil.

La máxima reducción de esfuerzo permitida es de hasta:

25% para aceros de ductilidad normal (S) y alta (A) en pórticos intraslacionales.

10 % para pórticos trasnacionales

### Método del Eurocódigo EC-2 (2002).

En su Artículo 5.5 propone un método de aplicación a los elementos sometidos a flexión, siendo de aplicación a vigas pero no a pilares, que deberán armarse con los esfuerzos obtenidos del análisis lineal.

La variables que considera son:

- Características del hormigón ( $f_{ck}$  y  $\epsilon_{cu}$ )
- Ductilidad del acero

El momento flector reducido a partir del momento flector inicial es el resultado de:

$$M_{red} = \delta \cdot M$$

con:

$$\delta \geq k_1 + k_2 \frac{x}{d} \geq \begin{cases} 0.80 \text{ acero de ductilidad normal (B)} \\ 0.70 \text{ acero de ductilidad alta (C)} \end{cases} \quad \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

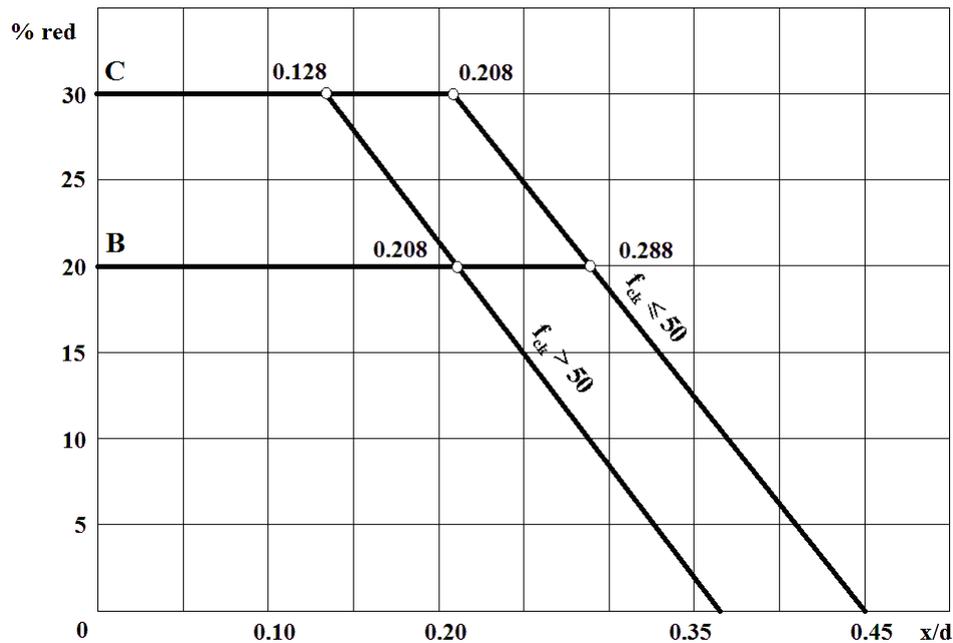
$$\delta \geq k_3 + k_4 \frac{x}{d} \geq \begin{cases} 0.80 \text{ acero de ductilidad normal (B)} \\ 0.70 \text{ acero de ductilidad alta (C)} \end{cases} \quad \text{para } f_{ck} > 50 \text{ MPa}$$

siendo x la profundidad de la fibra neutra y d el canto útil.

Los coeficientes dependen del acortamiento último del hormigón y puede tomar valores diferentes de un país a otro. Los propuestos por el EC-2 son:

$$k_1 = 0.44 \qquad k_3 = 0.54$$

$$k_2 = 1.25 \left( 0.6 + \frac{0.014}{\epsilon_{cu}} \right) \qquad k_4 = 1.25 \left( 0.6 + \frac{0.014}{\epsilon_{cu}} \right)$$



Método del EC-2

Por lo tanto, el máxima reducción de esfuerzo permitida es de hasta:

20% para aceros de ductilidad normal (B).

30% para aceros de ductilidad alta (C).

Este método es plenamente coincidente con el propuesto por el Código modelo CM90 CEB-FIB cuando  $\varepsilon_{cu} = 0.0035$

#### Método de la Instrucción EHE-08 (2008).

En el Artículo 21º “Estructuras reticulares planas, forjados y placas unidireccionales” la Instrucción española dice que para el cálculo de solicitaciones en estructuras reticulares planas podrá utilizarse cualquiera de los métodos indicados en el Artículo 19º, entre los que se incluye el análisis lineal con redistribución limitada, y que cuando éste se utilice, la magnitud de la redistribución dependerá del grado de ductilidad de las secciones críticas.

Pero es en sus comentarios y no en el articulado donde se propone un método de redistribución de esfuerzos para vigas, placas unidireccionales continuas y dinteles de estructuras sensiblemente intraslacionales (los pórticos de edificación suelen serlo).

La única variable que considera es la ductilidad del acero. La máxima reducción de esfuerzos permitida es función de la profundidad de la fibra neutra (x) según la fórmula siguiente, que es adaptación de otra tomada del Código modelo CM90 CEB-FIB:

$$r (\%) = 56 - 125 \frac{x}{d}$$

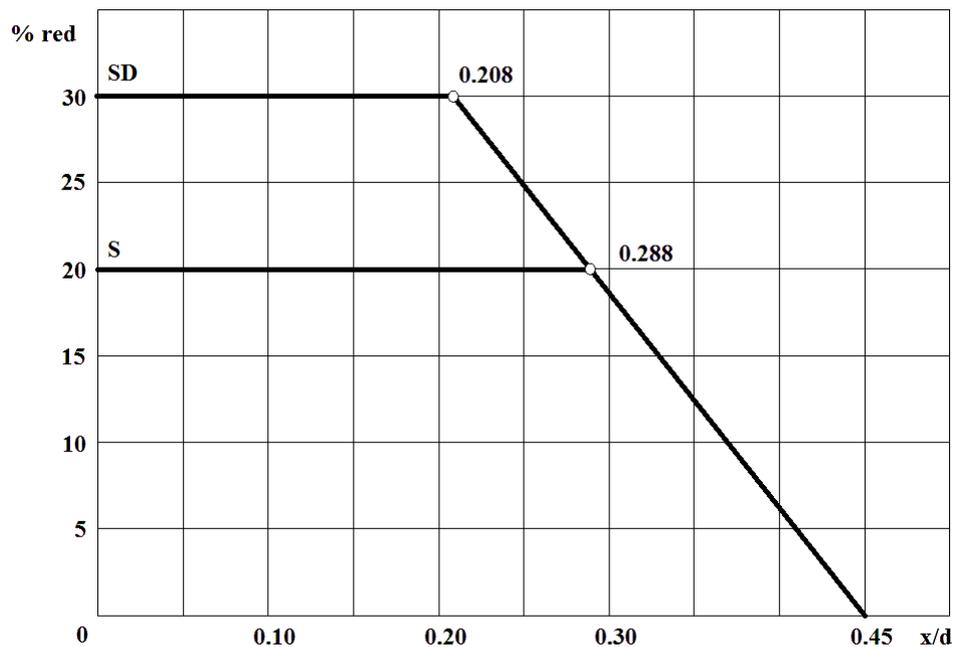
Pese a que el método propuesto no reproduce completamente el propuesto por el CM90, esto ha supuesto un importante cambio respecto de la Instrucción anterior EHE-98 que limitaba la redistribución a un 15% independientemente del valor  $x$ , que debía ser de menor o igual que  $0.45 d$ , lo que tenía poco sentido.

También y en armonía con la Norma europea EC-2 se limita el valor máximo de la redistribución a :

20% para aceros de ductilidad normal (S).

30% para aceros de ductilidad alta (SD).

La Instrucción deja claro que esta redistribución es aplicable sólo para las comprobaciones de E.L.U. y debe aplicarse sobre los resultados del cálculo de cada una de las hipótesis de cálculo por separado, para después combinarlas, y no sobre los resultados de una combinación de hipótesis.



Método de la EHE-08

Debe quedar claro que en todos estos métodos el valor máximo  $x/d$  exigido se aplica al armado de la sección diseñada para el esfuerzo flector ya reducido por la redistribución.

### ARMADO DE SECCIONES CON DUTILIDAD SUFICIENTE PARA LA REDISTRIBUCIÓN.

En el cálculo de secciones de hormigón armado solicitadas a flexión es bien sabido, y ya ha sido mencionado con anterioridad, que el máximo aprovechamiento de hormigón y armadura se consigue cuando el agotamiento se produce con  $x = x_{lim}$ . A tal situación se la ha denominado de “flexión perfecta” pues en ella se produce el agotamiento simultaneo de acero en tracción y de hormigón con el mayor volumen de compresiones movilizadas posible. El momento flector que la sección es capaz de resistir en estas condiciones es el conocido  $M_{lim}$  y representa el máximo esfuerzo flector que la sección es capaz de resistir estrictamente sin armaduras que colaboren a compresión.

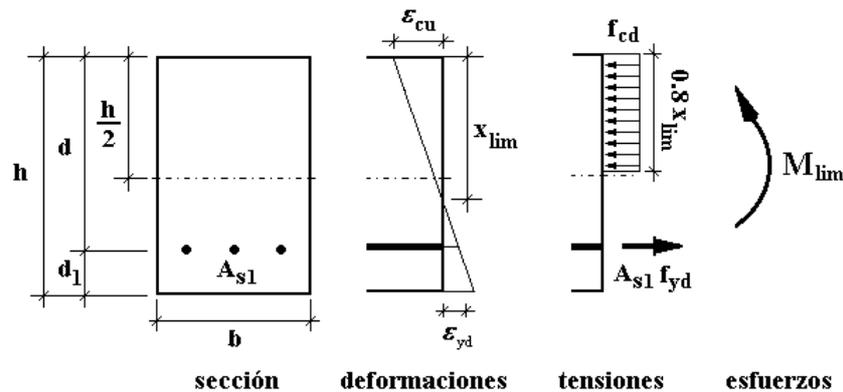


Figura 35. Esquema de cálculo para la obtención de  $M_{lim}$ .

En efecto, se trata del modo de armar una sección a flexión simple de la forma más económica. Sin embargo, según se ha explicado previamente, una sección que agota de este modo carecería de lo que las Normas entienden por ductilidad suficiente y en consecuencia no sería posible hacer ninguna redistribución de esfuerzos. Por tanto, para resistir un determinado esfuerzo flector la sección debe diseñarse bloqueado el valor de la profundidad de la fibra neutra más o menos dependiendo del valor de la redistribución que se le haya aplicado al esfuerzo flector de dicha sección. Pero siempre con un valor mucho menor que el de  $x_{lim}$ .

El valor de  $x_{lim}$  es diferente dependiendo del tipo de acero que se emplee. Recordemos que dicho valor se obtiene a partir de ecuaciones de compatibilidad de deformación que conducen a la fórmula:

$$x_{lim} = \frac{d}{1 + \varepsilon_{yd} / \varepsilon_{cu}}$$

Para hormigones convencionales ( $f_{ck} \leq 50$  MPa)  $\varepsilon_{cu} = 0.0035$  y  $x_{lim}$  puede tomar los siguientes valores dependiendo del tipo de acero y del coeficiente de minoración  $\gamma_s$ :

de 0.636 d a 0.668 d para acero B 400

de 0.583 d a 0.617 d para acero B500

En todo caso, son valores claramente superiores al de  $x=0.45d$ , a partir del cual se puede aplicar la redistribución de esfuerzos. En consecuencia, al bloquear la profundidad de la fibra neutra en valores inferiores al mencionado, podrá ser necesario complementar las compresiones en el hormigón con armadura incluso para resistir esfuerzos flectores inferiores a  $M_{lim}$ .

Dicho de otro modo, la armadura comprimida se hace necesaria por razones de ductilidad aun cuando no fuera necesaria por razón de resistencia.

De acuerdo con el método de EHE, para un esfuerzo flector reducido:

$$M_{red} = \delta \cdot M$$

$$\text{donde: } \delta = 1 - \frac{r(\%)}{100} \quad \text{con } r(\%) = 56 - 125 \frac{x}{d}$$

la fibra neutra se debe bloquear en:

$$x = \beta d \quad \text{con } \beta = \frac{56 - r(\%)}{125}$$

Por lo tanto, el máximo esfuerzo flector que se puede resistir sin armadura de compresión es:

$$M_{\beta} = f_{cd} 0.8 \beta d b (d - 0.4 \beta d) = 0.8 (\beta - 0.4 \beta^2) f_{cd} b d^2$$

La armadura de compresión será necesaria si  $M_{red} > M_{\beta}$  y su capacidad mecánica se calculara con:

$$U_2 = \frac{M_d - M_{\beta}}{d - d_2}$$

A modo de ejemplo, si se desea aplicar la máxima redistribución (no siempre será necesario o conveniente aplicar el máximo) conforme al método de la EHE deberemos diseñar la sección acuerdo con:

$$20 = 56 - 125 x / d \quad \text{para aceros S (ductilidad norma)}$$

$$30 = 56 - 125 x / d \quad \text{para aceros SD (ductilidad alta)}$$

El valor máximo de la profundidad  $x$  conforme a las formulas anteriores será:

$$x = 0.288 d \approx 0.29 d \quad \text{para aceros S}$$

$$x = 0.208 d \approx 0.21 d \quad \text{para aceros SD}$$

Luego, será necesaria armadura comprimida si el esfuerzo flector de diseño (el reducido) es mayor de:

$$M_{0.29} = f_{cd} \cdot 0.8 x b (d - 0.4x) = 0.205 f_{cd} b d^2 \text{ para aceros S}$$

$$M_{0.21} = f_{cd} \cdot 0.8 x b (d - 0.4 x) = 0.152 f_{cd} b d^2 \text{ para aceros SD}$$

La armadura necesaria en compresión se obtiene de forma análoga a como la obtenemos para resistir momentos superiores a  $M_{lim}$ . En primer lugar, se calcula la capacidad mecánica necesaria en la armadura comprimida. La capacidad mecánica en el hormigón es conocida, pues la profundidad  $x$  se ha fijado previamente, y la capacidad de la armadura mecánica se deduce del equilibrio en la sección.

$$\text{para } x = 0.29 d: U_2 = \frac{M_{red} - M_{0.29}}{d - d_2}, \quad U_C = 0.232 f_{cd} b d \text{ y } U_1 = U_C + U_2$$

$$\text{para } x = 0.21 d: U_2 = \frac{M_{red} - M_{0.21}}{d - d_2}, \quad U_C = 0.168 f_{cd} b d \text{ y } U_1 = U_C + U_2$$

En caso contrario la sección tendrá ductilidad suficiente pese a no disponer de armadura comprimida.

### LA REDISTRIBUCIÓN EN LOS DIAGRAMAS DE ARMADO ÓPTIMO.

Según se ha explicado con anterioridad, para una sección solicitada a flexión compuesta el valor excentricidad a partir del cual se dispone armadura comprimida por razones de economía es el que satisface:  $N_d e_1 = M_{lim}$ .

Sin embargo, si por alguna razón se desea dar un valor a la curvatura en agotamiento de la sección, como ocurre en la redistribución de esfuerzos, la expresión anterior cambia por la siguiente:

$$N_d e_1 = M_\beta = 0.8 (\beta - 0.4\beta^2) f_{cd} b d^2$$

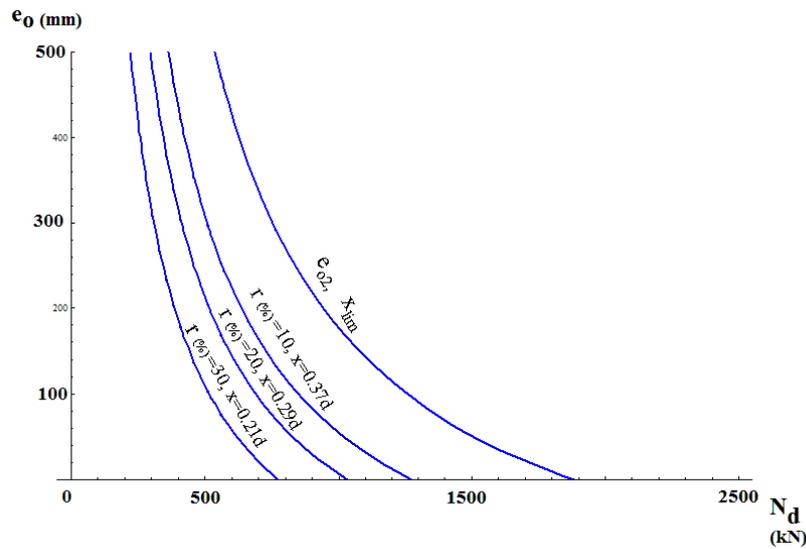
Que en términos de la excentricidad al baricentro de la sección es:

$$N_d e_1 = N_d \left( e_o + \left( \frac{h}{2} - d_1 \right) \right) = 0.8 (\beta - 0.4\beta^2) f_{cd} b d^2$$

Despejando:

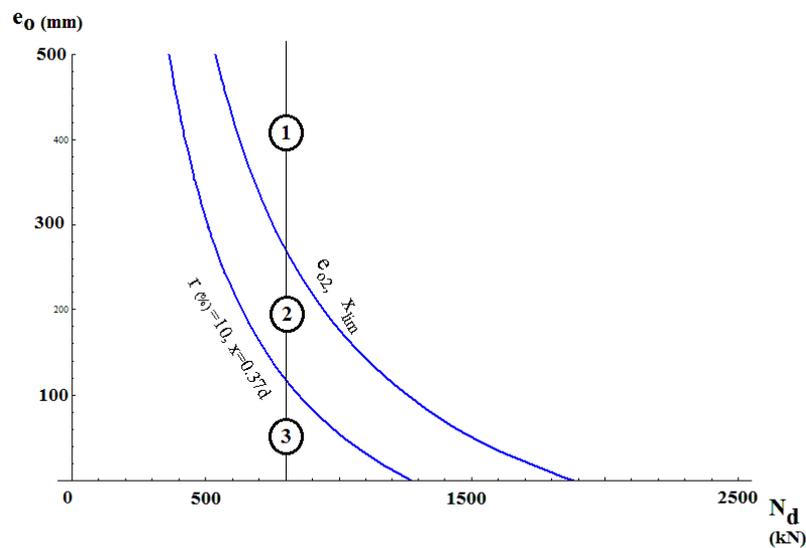
$$e_o = - \left( \frac{h}{2} - d_1 \right) + \frac{0.8 (\beta - 0.4\beta^2) f_{cd} b d^2}{N_d} = e_{o2\beta} \quad \dots \quad [\text{Ec.13}]$$

Una representación de  $e_{o2\beta}$  para diferentes valores de reducción de esfuerzos según el método de la EHE puede verse en la **Figura 36** a modo de ejemplo.



**Figura 36.** Curvas de variación de  $e_{o2\beta}$  para diferentes valores de redistribución de esfuerzos según EHE y comparación con  $e_{o2}$  para una sección de hormigón  $f_{ck}=25\text{MPa}$ , armada con acero B 500 y con  $h=500\text{mm}$ ,  $b=300\text{mm}$ ,  $d_1=d_2=h/10$ .

Recordemos que si en nuestro problema de armado  $e_o > e_{o2}$ , será necesario disponer armadura de compresión por razones de economía (situación (1) en la **Figura 37**).



**Figura 37.** Curva de variación de  $e_{o2\beta}$  con  $\beta = 0.37$  para una sección de hormigón  $f_{ck}=25\text{MPa}$ , armada con acero B 500 y con  $h=500\text{mm}$ ,  $b=300\text{mm}$ ,  $d_1=d_2=h/10$ .

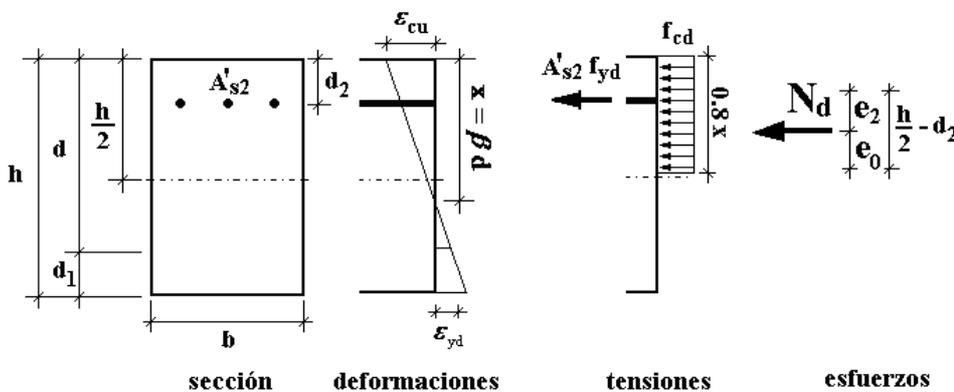
Si por el contrario,  $e_o < e_{o2}$  pero  $e_o > e_{o2\beta}$  (situación (2) en la figura **Figura 37**). entonces se nos plantean dos alternativas:

1. Dimensionar sin armadura de compresión. En cuyo caso la sección queda estrictamente armada, pero no se le puede aplicar redistribución alguna de esfuerzos.

2. Si lo que queremos es dimensionar la sección para un esfuerzo flector redistribuido  $M_{red} = \delta \cdot M_d$  deberemos bloquear la profundidad de la fibra neutra en  $x = \beta d$ , conforme a la normativa que se esté aplicando, y armar la sección en tales condiciones. Será necesario disponer armadura de compresión. En consecuencia, el armado de la sección resultará más caro, pero podemos conseguir un armado más económico en el conjunto de la pieza.

Finalmente si  $e_o < e_{o2\beta}$  (situación (3) en la figura **Figura 37**) la sección resultará con ductilidad suficiente sin necesidad de disponer armadura de compresión.

De modo similar a como razonamos en su momento para deducir el valor de  $e_{olim}$ , podemos plantear la situación frontera de la **Figura 38**.



**Figura 38.** Sección rectangular solicitada a flexión-compuesta con  $x = \beta d$  y sin armadura inferior  $A_{s1} = 0$ . Tensiones en el hormigón según diagrama rectangular.

En este caso queremos determinar el esfuerzo flector que podemos resistir sin armadura de tracción para una sección solicitada a flexión compuesta en la que se ha bloqueado la profundidad de la fibra neutra en  $x = \beta d$ . Si planteamos el equilibrio en la sección, tomando momentos en el baricentro de la armadura superior, tenemos:

$$N_d \cdot e_2 = f_{cd} \cdot 0.8 \beta \cdot d \cdot b \cdot (0.4 \beta \cdot d - d_2)$$

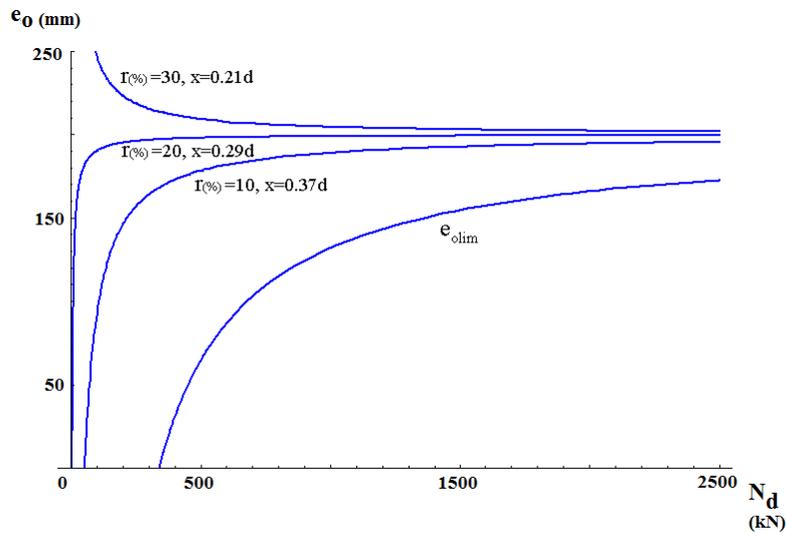
Y teniendo en cuenta que:

$$e_2 = \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) - e_o \quad \rightarrow \quad N_d \cdot \left( \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) - e_o \right) = f_{cd} \cdot 0.8 \beta \cdot d \cdot b \cdot (0.4 \beta \cdot d - d_2)$$

Despejando:

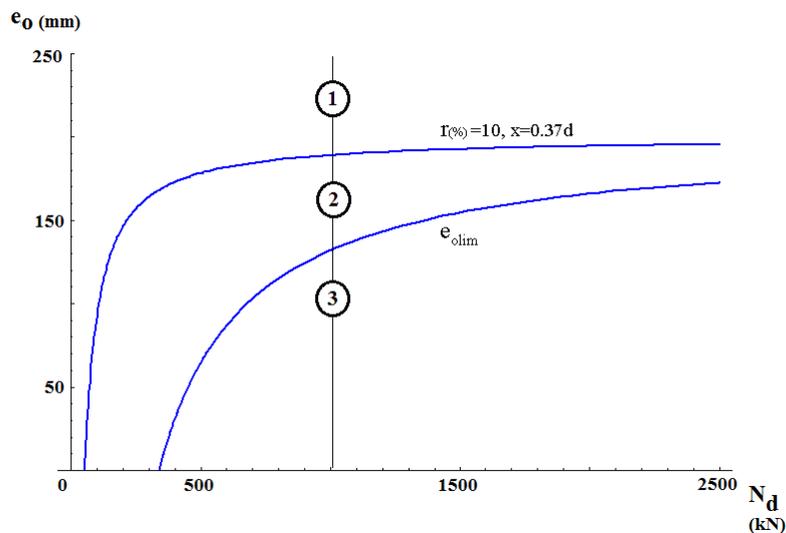
$$e_o = \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) - \frac{f_{cd} \cdot 0.8 \beta \cdot d \cdot b \cdot (0.4 \beta \cdot d - d_2)}{N_d} = e_{o\beta} \quad \dots [\text{Ec.14}]$$

Una representación de  $e_{o\beta}$  para diferentes valores de la reducción de esfuerzos según el método de la EHE puede verse en la **Figura 39** a modo de ejemplo.



**Figura 39.** Curvas de variación de  $e_{o\beta}$  para diferentes valores de redistribución de esfuerzos según EHE y comparación con  $e_{o\lim}$  para una sección de hormigón  $f_{ck}=25\text{MPa}$ , armada con acero B 500 y con  $h=500\text{mm}$ ,  $b=300\text{mm}$ ,  $d_1=d_2=h/10$ .

Recordemos que siempre que  $e_o > e_{o\lim}$ , tendremos un problema de gran excentricidad y por tanto de flexión compuesta. Si es  $e_o < e_{o\lim}$  el dimensionado es con  $x > x_{\lim}$  en el agotamiento, no siendo de aplicación los criterios de ductilidad asociados a una redistribución de esfuerzos (situación (3) en la **Figura 40**). Se recuerda que en las Normas presentadas la redistribución es de aplicación a vigas y dinteles, que en general están solicitados a flexión simple o compuesta, con valores de esfuerzo axial muy pequeño.



**Figura 40.** Curva de variación de  $e_{o\beta}$  con  $\beta = 0.37$  para una sección de hormigón  $f_{ck}=25\text{MPa}$ , armada con acero B 500 y con  $h=500\text{mm}$ ,  $b=300\text{mm}$ ,  $d_1=d_2=h/10$ .

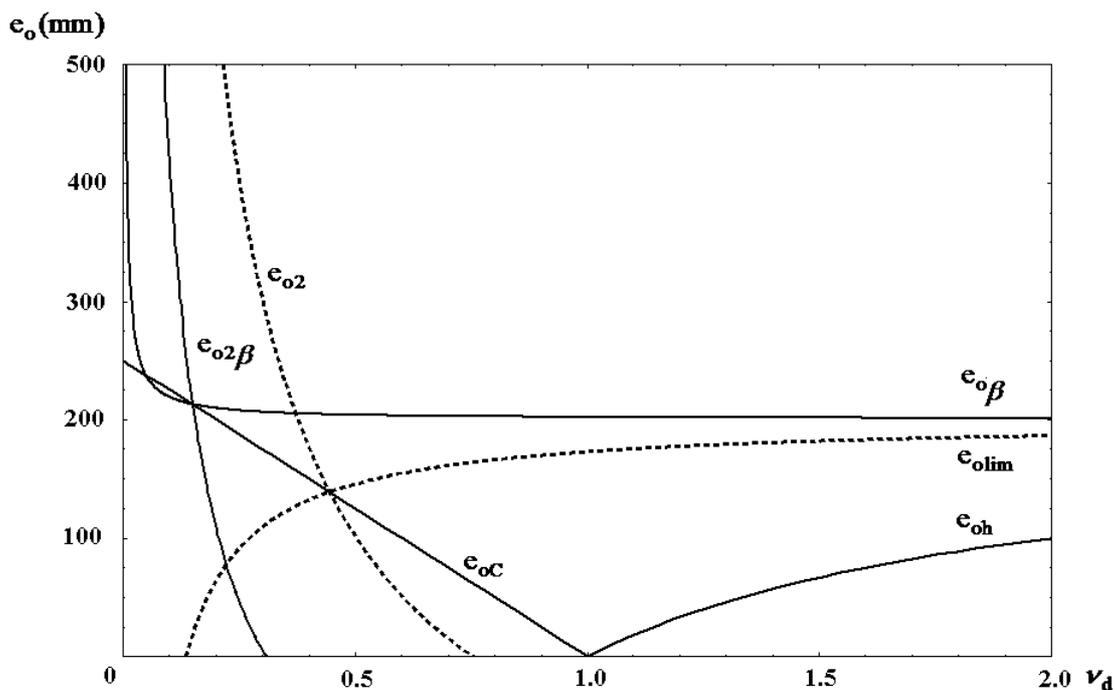
El valor de excentricidad que se obtienen de [Ec.14] lo denominamos  $e_{o\beta}$  y representa el valor de la excentricidad tal que si  $e_o < e_{o\beta}$ , la armadura inferior debe estar comprimida, lo que es una contradicción con la hipótesis de agotamiento y significa que la sección no puede armarse con  $x = \beta d$ . La redistribución no será posible.

Por lo tanto, nos quedan las siguientes situaciones:

1. Si  $e_o > e_{o\beta}$  (situación (1) en la **Figura 40**) entonces la sección se puede armar para el resistir el momento redistribuido imponiendo la condición  $x = \beta d$ .
2. Si  $e_o > e_{olim}$ , pero  $e_o < e_{o\beta}$  (situación (3) en la **Figura 40**), entonces la sección se puede armar con  $x = x_{lim}$ . Pero no es posible la redistribución.

#### DIAGRAMA “AXIL-EXCENTRICIDAD” DE DOMINIOS DE ARMADO ÓPTIMO. SECCIONES CON REDISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS.

Elegido un valor  $\delta$  para la redistribución y su correspondiente límite  $x = \beta d$  para la profundidad de la línea neutra obtendremos dos nuevas curvas de valor frontera  $e_{o\beta}$  y  $e_{o2\beta}$  para la excentricidad de cálculo. Si las combinamos con las ya presentadas  $e_{olim}$ ,  $e_{oh}$ ,  $e_{o2}$  y  $e_{oc}$  obtendremos una colección de curvas de excentricidades frontera como la que se muestra en la **Figura 41**.



**Figura 41.** Valores de las diferentes excentricidades frontera en función del axil reducido para una sección armada con acero B 500,  $d_1=d_2=h/10$  y  $r(\%) = 30 \Leftrightarrow \beta = 0.21 d$  según EHE.

Los nuevos valores frontera  $e_{o2\beta}$  y  $e_{o\beta}$  que se obtienen de las ecuaciones [Ec.13] y [Ec.14] respectivamente, pueden expresarse en función del axil reducido  $\nu_d$  :

$$e_{o2\beta} = -\left(\frac{h}{2} - d_1\right) + \frac{0.8(\beta - 0.4\beta^2)d}{\nu_d} \quad \dots[\text{Ec.15}]$$

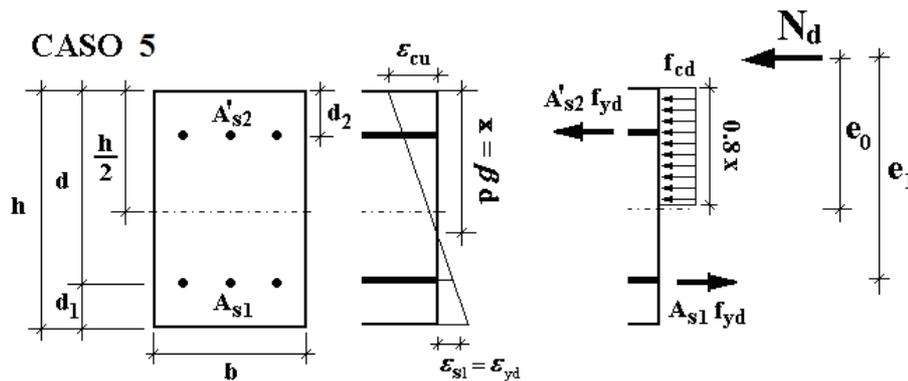
$$e_{o\beta} = \left(\frac{h}{2} - d_2\right) - \frac{0.8(0.4d\beta^2 - \beta d_2)}{\nu_d} \quad \dots[\text{Ec.16}]$$

A partir de la **Figura 41**, de acuerdo con los razonamientos anteriormente expuestos y una vez eliminadas las ramas innecesarias de esas curvas obtenemos un diagrama como el de la **Figura 43**.

Se trata de otro diagrama de armado óptimo en función de los valores adimensionales  $e_o/h - \nu_d$ . A las situaciones de agotamiento ya presentadas se debe añadir una más, que es la que corresponde a  $x = \beta d$  y se puede plantear cuando  $e_o > e_{o\beta}$  ó  $e_o > e_{o2\beta}$  según sea el valor del axil reducido  $\nu_d$ . Armando la sección de esta manera para el esfuerzo reducido se consigue la ductilidad suficiente para aplicar la redistribución deseada. Las ecuaciones deducidas del equilibrio de la sección que permiten calcular el armado son:

$$U_2 = \frac{N_d e_1 - M_\beta}{d - d_2} = A'_{s2} f_{yd} \quad \text{con } M_\beta = 0.8(\beta - 0.4\beta^2) f_{cd} b d^2$$

$$U_1 = U_C + U_2 - N_d = A_{s1} f_{yd} \quad \text{con } U_C = 0.8\beta f_{cd} b d$$



**Figura 42.** Esquemas de agotamiento con  $x = \beta d$  para armado óptimo en secciones solicitadas a flexo-compresión.

Armado la sección de esta manera se consigue la ductilidad suficiente para aplicar la redistribución de esfuerzos deseada. La zona del diagrama sin colorear representa las combinaciones de esfuerzos en las que no se dan las condiciones para la redistribución. Se destaca con un coloreado más oscuro la zona del diagrama en la que con  $A'_{s2} = 0$  se consigue en todo caso la ductilidad necesaria para la redistribución.

Si como ya dijimos, la flexión simple no es mas que un caso particular de la flexión compuesta con axil nulo y consecuencia excentricidad infinita, entonces la redistribución de esfuerzos siempre será posible tal y como se observa en el diagrama  $v_d - e_o/h$ .

Si igualamos las ecuaciones [Ec.15] y [Ec.16]:

$$-\left(\frac{h}{2} - d_1\right) + \frac{0.8(\beta - 0.4\beta^2)d}{v_d} = \left(\frac{h}{2} - d_2\right) - \frac{0.8(0.4d\beta^2 - \beta d_2)}{v_d}$$

Operando:

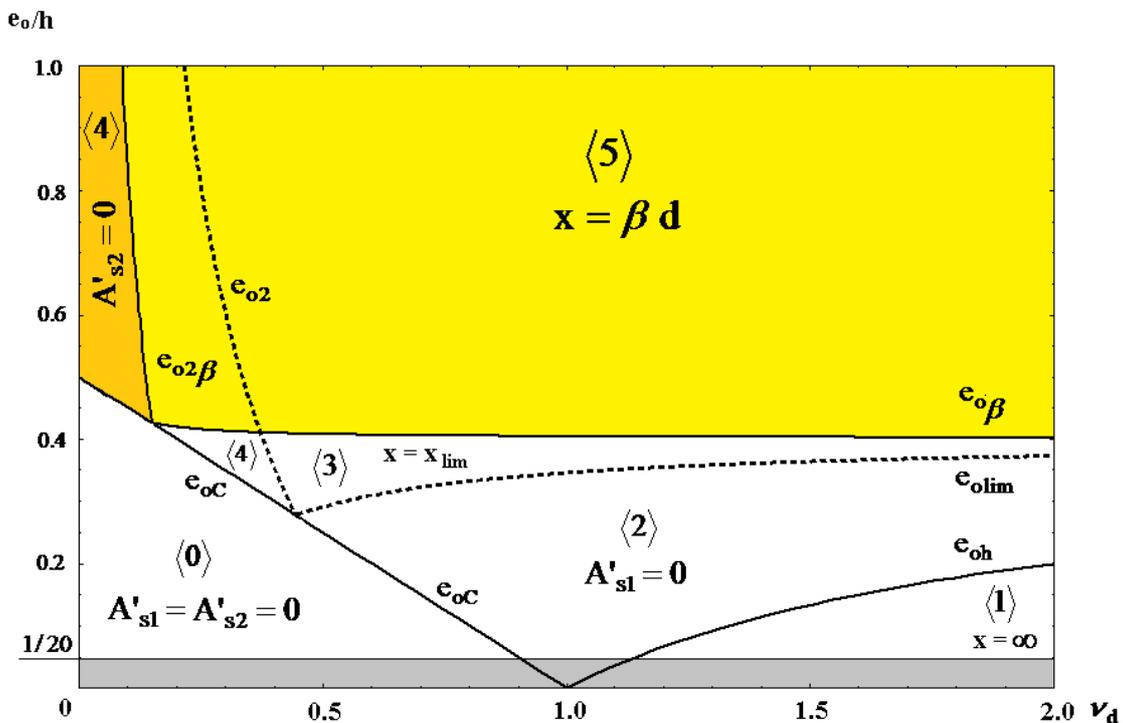
$$d_1 + d_2 - h + 0.8 \frac{\beta}{v_d} (d - d_2) = 0$$

Y teniendo en cuenta:

$$h = d + d_1 \quad \rightarrow (d - d_2) + 0.8 \frac{\beta}{v_d} (d - d_2) = 0$$

Despejando:  $v_d = 0.8 \beta$

Este es el valor del axil para el cual los valores de  $e_{o2\beta}$  y  $e_{o\beta}$  coinciden. Tal y como ocurría para  $e_{o2}$  y  $e_{olim}$  este punto esta sobre la recta de  $e_{oc}$ . Si la sección está solicitada a flexión compuesta con un axil reducido menor de ese valor, la redistribución siempre será posible, tal y como puede observarse en el diagrama de la **Figura 43**.



**Figura 43.** Diagrama  $v_d - e_o/h$ . Ejemplo para una sección de hormigón armada con acero B 500 y recubrimientos iguales  $d_1 = d_2 = h/10$  Para cada caso se indica la condición adicional a utilizar, incluso para el dimensionado en condiciones de ductilidad suficiente para  $r(\%) = 30 \Leftrightarrow \beta = 0.21 d$ .

En el Anexo II se presenta un sencillo script para Mathematica que, de acuerdo con lo expuesto en este trabajo, calcula el armado necesario a flexo-compresión, también en los casos en los que se haya hecho una redistribución de esfuerzos.

# CONCLUSIONES



---

## CONCLUSIONES

- Con el presente trabajo se ha pretendido recuperar un enfoque del problema de diseño a flexo-compresión basado en un concepto geométrico tan sencillo como una longitud, la excentricidad equivalente.
- Se ha recopilado y completado una formulación de valores de excentricidad frontera entre tipos diferentes de agotamiento como  $e_{oC}$  y  $e_{o2}$ , que se añaden a los ya conocido  $e_{o\lim}$  y  $e_{oh}$ . Se han estudiando las relaciones que existen entre los diferentes valores frontera.
- Se propone un método de cálculo completo, pues permite dar la solución de armado para cualquier par de esfuerzo ( $M_d$ ,  $N_d$ ) que puede resistir la sección.
- El método de cálculo que se propone utiliza la excentricidad equivalente como la variable suficiente para caracterizar el modo de agotamiento de la sección. Es decir, que permite elegir la condición adicional, de entre cinco posibles, que se debe imponer y las ecuaciones de equilibrio que resuelven el problema.
- El método no plantea aproximaciones o simplificaciones destacables más allá de la elección de leyes de comportamiento sencillas para acero y hormigón.
- El procedimiento conduce en todos los casos a una solución única que es la de armado óptimo para la combinación ( $M_d$  -  $N_d$ ) que se ha de resistir y es coherente con el enunciado del **Teorema del armado óptimo en la flexión** de Hernández-Gil-Pasadas.
- El método está formulado para cualquier valor de los recubrimientos, incluso para  $d_1 \neq d_2$ .
- Se presenta un diagrama adimensional de dominios de armado óptimo, referidos a la excentricidad  $e_o$ , como alternativa al tratamiento analítico de la excentricidad. Este diagrama es único y común para todas las secciones rectangulares con iguales recubrimientos y tipo acero utilizado para armar.
- Este diagrama también tiene valor pedagógico. Su observación y estudio permite entender mejor los complejos mecanismos que gobiernan la respuesta de una sección de hormigón armado cuando es solicitada a flexo-compresión.
- Por su estructura este proceso de cálculo es fácil de programar siguiendo las líneas del diagrama de flujo aquí presentado. En el Anexo I se presenta un sencillo sript en “Matemática” para el cálculo de secciones rectangulares.

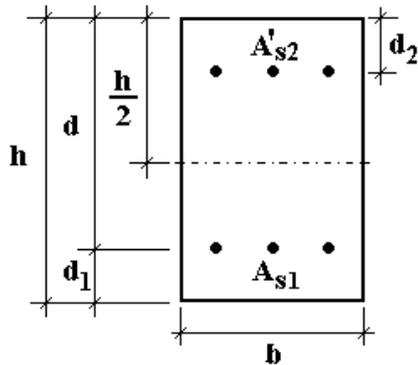
- En todo caso, la formulación es lo bastante sencilla como para no necesitar de la asistencia un ordenador, pudiéndose realizar el cálculo manualmente.
- Particularizar el procedimiento para armadura simetría, típica de pilares, es posible. El proceso de cálculo resulta más breve.
- Es posible adaptar el método a situaciones en las que se exigen ciertas condiciones de ductilidad a la sección y que pueden expresarse como un valor concreto de la curvatura de la sección en agotamiento. Tal es el caso de la “ductilidad suficiente” que exigen las normas para aplicar una redistribución de esfuerzos.
- También se presenta un diagrama de dominios de armado óptimo para tales situaciones de armado de secciones con esfuerzos redistribuidos.
- El valor pedagógico de estos diagramas permite entender que en flexión simple siempre será posible la redistribución, dentro de las capacidades de la sección.
- La redistribución también es siempre posible en elementos solicitados a flexión compuesta con débiles axiales ( $\nu_d = 0.8 \beta$ ), lo que es frecuente en vigas y dinteles. Precisamente los elementos en los que está permitida la redistribución por las Normas aquí comentadas.

# **ANEXO I**



## ANEXO I. Script en Mathematica para el cálculo de secciones solicitadas a flexo-compresión.

### Armado de sección rectangular en Flexio-compresión



#### Inicio

```

Clear["Global`*"]

Datos de los materiales (N/mm2)

fck = 25; γc = 1.50;
fyk = 500; γs = 1.15; Es = 200 000;

{fcd = fck / γc, fyd = fyk / γs, eyd = fyd / Es, fycd = Min[fyd, 400]}

Datos de la sección (mm)

h = 500; b = 300; d1 = 50; d2 = 50;

Calculos previos

{d = h - d1, h / 6., x2 = 0.259 * d, xlim = d / (1 + eyd / 0.0035), Ac = h b}

Mlim = (d - 0.4 xlim) * fcd * (0.8 xlim * b); Mlim / 106

Esfuerzos (N y mm)

Nd = 1 000 000;
Md = 170 000 000;

{eo = Md / Nd, e1 = eo + h / 2 - d1, e2 = h / 2 - d2 - eo} // N

Valores frontera

eoC =  $\frac{1}{2} \left( h - \frac{Nd}{fcd b} \right)$ ;

eoh =  $\left( \frac{h}{2} - d2 \right) - \frac{fcd * h * b * (0.5 * h - d2)}{Nd}$ ;

eolim =  $\left( \frac{h}{2} - d2 \right) - \frac{fcd * 0.8 * xlim * b * (0.4 * xlim - d2)}{Nd}$ ;

eo2 =  $-\left( \frac{h}{2} - d1 \right) + \frac{fcd * 0.8 * xlim * b * (d - 0.4 * xlim)}{Nd}$ ;

{eoC, eoh, eolim, eo2}

```

## Cálculo

```

If[ $eo \leq eoC$ , {CASO = 0, As1 = ARMADO MIMIMO, As2 = As1},
  If[ $eo > eolim$ , If[ $eo > eo2$ , {CASO = 4,
    UC =  $fcd \cdot 0.8 \cdot xlim \cdot b$ ,
    U2 =  $\frac{e1 \cdot Nd - Mlim}{(d - d2)}$ ,
    U1 =  $UC + U2 - Nd$ ,
    As1 =  $U1 / fyd$ , As2 =  $U2 / fyd$ },
    {CASO = 3,
    sol = Solve[ $e1 \cdot Nd == fcd \cdot 0.8 \cdot x \cdot b \cdot (d - 0.4 \cdot x)$ , x],
    x = x /. sol[[1]],
    UC =  $fcd \cdot 0.8 \cdot x \cdot b$ ,
    U1 =  $UC - Nd$ ,
    As1 =  $U1 / fyd$ , As2 = ARMADO MIMIMO}],
  If[ $eo < eoh$ , {CASO = 1,
    UCT =  $fcd \cdot b \cdot h$ ,
    U1 =  $\frac{e2 \cdot Nd - UCT \cdot (h / 2 - d2)}{d - d2}$ ,
    U2 =  $Nd - UCT - U1$ ,
    As1 =  $U1 / fycd$ , As2 =  $U2 / fycd$ },
    {CASO = 2,
    sol = Solve[ $e2 \cdot Nd == fcd \cdot 0.8 \cdot x \cdot b \cdot (0.4 \cdot x - d2)$ , x],
    x = x /. sol[[2]],
    UC = Min[ $fcd \cdot 0.8 \cdot x \cdot b$ ,  $fcd \cdot h \cdot b$ ],
    U2 =  $Nd - UC$ ,
    As1 = ARMADO MIMIMO, As2 =  $U2 / fyd$ }}]]];

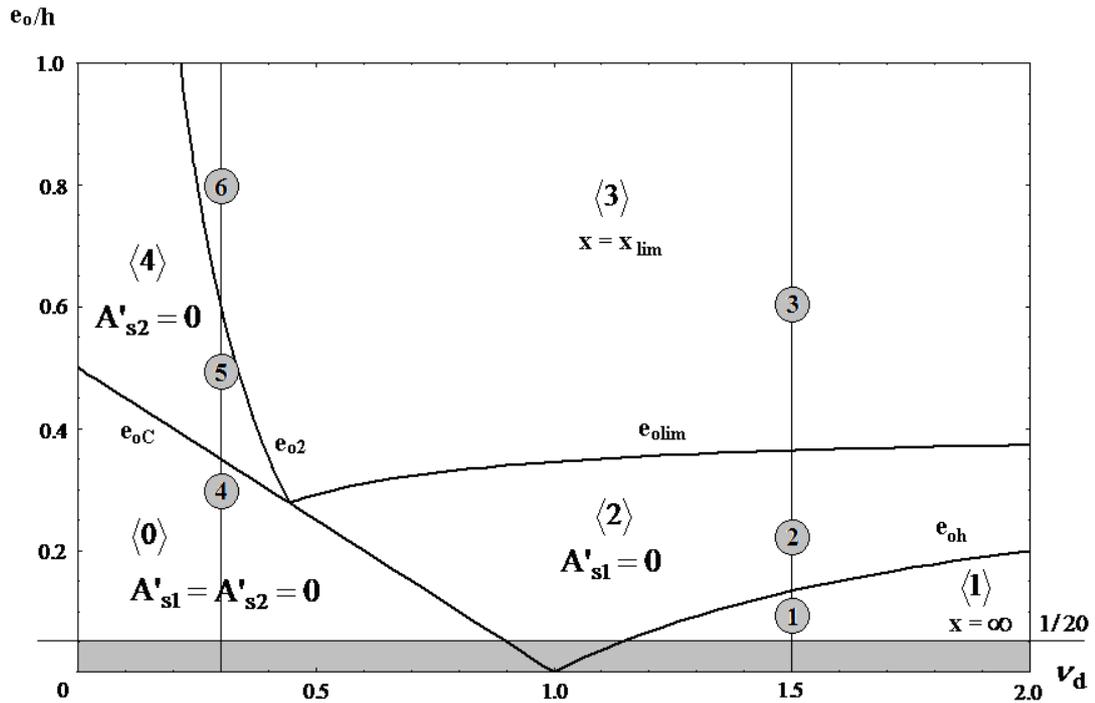
```

## Resultados

CASO

{As1, As2}

en mm<sup>2</sup>



Posición en el Diagrama  $e_o/h - v_d$  de las diferentes combinaciones de esfuerzos utilizadas para calcular el armado de una sección de hormigón HA-25 armada con acero B 500 y recubrimientos iguales  $d_1=d_2=50$  mm.

A continuación se muestran los resultados del cálculo realizado con este script para una sección de hormigón de  $500 \times 300 \text{ mm}^2$  armada con aceros B 500 y recubrimientos iguales  $d_1= d_2 = 50$  mm, para las seis diferentes combinaciones de esfuerzos que se destacan en el diagrama superior.

	$N_d$ (kN)	$v_d$	$M_d$ (kN·m)	$e_o$ (mm)	$e_o/h$	CASO	CONDICION	$As_1$ (mm <sup>2</sup> )	$As_2$ (mm <sup>2</sup> )
1	3375	1.5	168.8	50	0.1	1	$x = \infty$	39.1	2148.4
2	3375	1.5	337.5	100	0.2	2	$As_1=0$	mínimo	2923.2
3	3375	1.5	1012.5	300	0.6	3	$x=x_{lim}$	2330.3	7539.0
4	675	0.3	101.3	150	0.3	0	$As_1=As_2=0$	mínimo	mínimo
5	675	0.3	168.8	250	0.5	4	$As_2=0$	349.5	mínimo
6	675	0.3	270.0	400	0.8	3	$x=x_{lim}$	1165.9	164.6

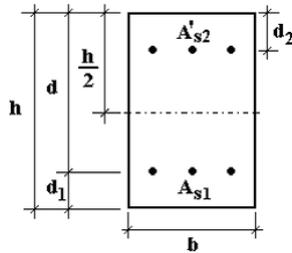


# **ANEXO II**



## ANEXO II. Script en Mathematica para el cálculo de secciones solicitadas a flexo-compresión con esfuerzos redistribuidos.

Armado de sección rectangular en Flexio-compresión



Inicio

```

Clear["Global`*"]

Datos de los materiales (N/mm2)

fck = 25; γc = 1.50;
fyk = 500; γs = 1.15; Es = 200 000;

{fcd = fck / γc, fyd = fyk / γs, eyd = fyd / Es, fycd = Min[fyd, 400]}

Datos de la sección (mm)

h = 500; b = 300; d1 = 30; d2 = 30;

Calculos previos

{d = h - d1, h / 6., x2 = 0.259 * d, xlim = d / (1 + eyd / 0.0035), Ac = h * b}

Mlim = (d - 0.4 * xlim) * fcd * (0.8 * xlim * b); Mlim / 10^6

Esfuerzos (N y mm)

Nd = 3 10^6;
Md = 1.5 10^6;

{eo = Md / Nd, e1 = eo + h / 2 - d1, e2 = h / 2 - d2 - eo} // N

Valores frontera

eoC = 1/2 * (h - Nd / (fcd * b));
eoh = (h/2 - d2) - (fcd * h * b * (0.5 * h - d2) / Nd);
eolim = (h/2 - d2) - (fcd * 0.8 * xlim * b * (0.4 * xlim - d2) / Nd);
eo2 = -(h/2 - d1) + (fcd * 0.8 * xlim * b * (d - 0.4 * xlim) / Nd);

{eoC, eoh, eolim, eo2}

Redistribución realizada

r = 20.; {β = 56 - r / 125, Mβ = 0.8 * (β - 0.4 * β^2) * fcd * b * d^2}

eoβ = (h/2 - d2) - (fcd * 0.8 * b * d * (0.4 * d * β^2 - β * d2) / Nd);
eo2β = -(h/2 - d1) + (0.8 * (β - 0.4 * β^2) * fcd * b * d^2 / Nd);

{eoβ, eo2β}

```

## Cálculo

```

If[ $eo \leq eoC$ , {CASO = 0, As1 = ARMADO MIMIMO, As2 = As1},
  If[ $eo > eoLim$ , If[ $eo > eo2$ , {If[r == 0, {CASO = 3,
    UC = fcd 0.8 xLim b,
    U2 =  $\frac{e1 Nd - M\beta}{(d - d2)}$ ,
    U1 = UC + U2 - Nd,
    As1 = U1 / fy d, As2 = U2 / fy d},
    {If[ $eo > eo\beta$ , {CASO = 5,
      UC = fcd 0.8 \beta d b,
      U2 =  $\frac{e1 Nd - M\beta}{(d - d2)}$ ,
      U1 = UC + U2 - Nd,
      As1 = U1 / fy d, As2 = U2 / fy d,
      Ductilidad = xLim / (\beta d)},
      {CASO = 31,
        UC = fcd 0.8 xLim b,
        U2 =  $\frac{e1 Nd - Mlim}{(d - d2)}$ ,
        U1 = UC + U2 - Nd,
        As1 = U1 / fy d, As2 = U2 / fy d,
        Ductilidad = 1}}}}},
    {If[r == 0, {CASO = 4,
      sol = Solve[e1 Nd == fcd 0.8 x b (d - 0.4 x), x],
      x = x /. sol[[1]],
      UC = fcd 0.8 x b, U1 = UC - Nd,
      As1 = U1 / fy d, As2 = ARMADO MIMIMO},
      {If[ $eo > eo2\beta$ , {If[ $eo > eo\beta$ , {CASO = 5,
        UC = fcd 0.8 \beta d b,
        U2 =  $\frac{e1 Nd - M\beta}{(d - d2)}$ ,
        U1 = UC + U2 - Nd,
        As1 = U1 / fy d, As2 = U2 / fy d,
        Ductilidad = xLim / (\beta d)},
        {CASO = 41,
          sol = Solve[e1 Nd == fcd 0.8 x b (d - 0.4 x), x],
          x = x /. sol[[1]], UC = fcd 0.8 x b,
          U1 = UC - Nd,
          As1 = U1 / fy d,
          As2 = ARMADO MIMIMO,
          Ductilidad = xLim / x}}}}},
      {CASO = 45,
        sol = Solve[e1 Nd == fcd 0.8 x b (d - 0.4 x), x],
        x = x /. sol[[1]],
        UC = fcd 0.8 x b,
        U1 = UC - Nd,
        As1 = U1 / fy d, As2 = ARMADO MIMIMO,
        Ductilidad = xLim / x}}}}}],
  If[ $eo < eoC$ , {CASO = 1,
    UCT = fcd b h,
    U1 =  $\frac{e2 Nd - UCT (h/2 - d2)}{d - d2}$ ,
    U2 = Nd - UCT - U1,
    As1 = U1 / fy cd, As2 = U2 / fy cd},
    {CASO = 2,
      sol = Solve[e2 Nd == fcd 0.8 x b (0.4 x - d2), x],
      x = x /. sol[[2]],
      UC = Min[fcd 0.8 x b, fcd h b],
      U2 = Nd - UC,
      As1 = ARMADO MIMIMO, As2 = U2 / fy d}}];

```

## Resultados

REDISTRIBUCION

r

Casos 0, 1, 2, 3 y 41 no es posible la redistribución

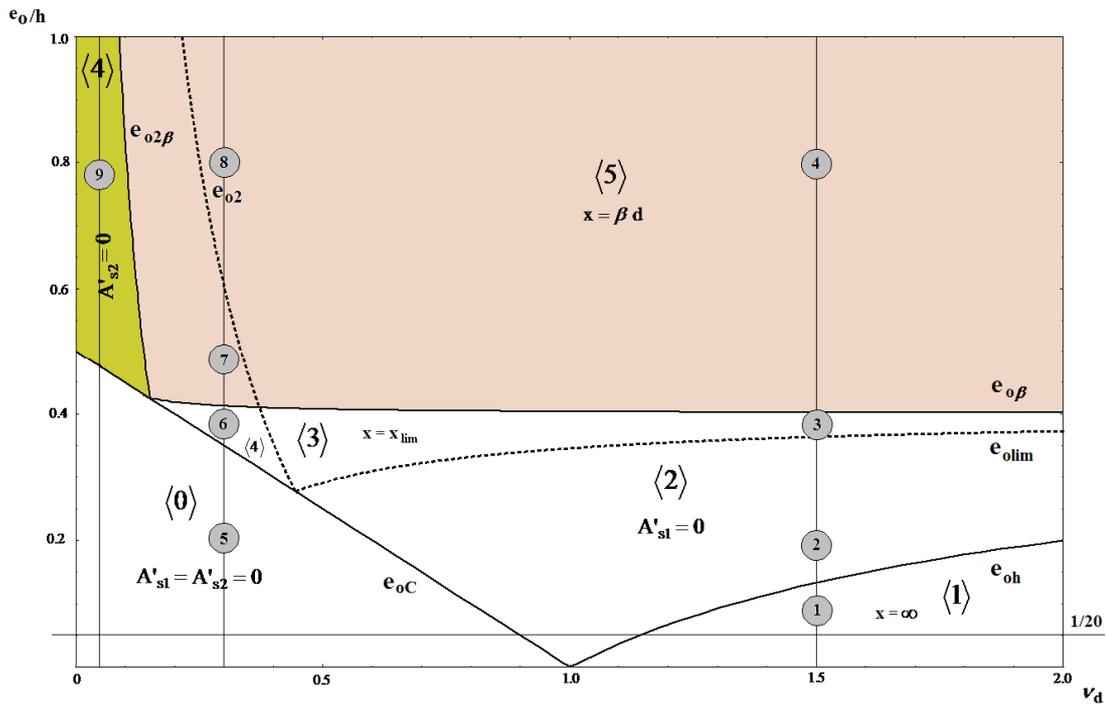
CASO

Casos 5 o 45 únicos con ductilidad suficiente.

Ductilidad

{As1, As2}

en mm<sup>2</sup>



Posición en el Diagrama  $e_o/h - \nu_d$  de las diferentes combinaciones de esfuerzos utilizadas para calcular el armado de una sección de hormigón HA-25 armada con acero B 500 y recubrimientos iguales  $d_1 = d_2 = 30$  mm. Condiciones de ductilidad  $r(\%) = 20 \Leftrightarrow \beta = 0.29 d$ .

A continuación se muestran los resultados del cálculo realizado con este script para una sección de hormigón de  $500 \times 300$  mm<sup>2</sup> armada con aceros B 500 y recubrimientos iguales  $d_1 = d_2 = 30$  mm, para las nueve diferentes combinaciones de esfuerzos que se destacan en el diagrama superior. Se indica en qué casos se ha podido armar con esfuerzo flector redistribuido  $r(\%) = 20 \Leftrightarrow \beta = 0.29 d$  y se compara con el armado de la sección para el esfuerzo sin redistribución.

	$N_d$ (kN)	$\nu_d$	$M_d$ (kN·m)	$e_o$ (mm)	$e_o/h$	$r$ (%)	CASO	$As_1$ (mm <sup>2</sup> )	$As_2$ (mm <sup>2</sup> )
1	3525	1.5	176.3	50	0.1	----	1	279.83	2282.7
2	3525	1.5	352.5	100	0.2	----	2	mínimo	3019.5
3	3525	1.5	705.0	200	0.4	----	31	152.6	5592.8
5	705	0.3	70.5	100	0.2	----	0	mínimo	mínimo
6	705	0.3	141.0	200	0.4	----	41	102.4	mínimo
4	3525	1.5	1410.0	400	0.8	20	5	3385.0	10247.2
			1762.5	500	1.0	----	3	5680.5	11120.7
7	705	0.3	176.3	250	0.5	20	5	178.8	555.1
			220.3	313	0.6	----	4	724.8	mínimo
8	705	0.3	282.0	400	0.8	20	5	731.7	1107.9
			352.5	500	1.0	----	3	1553.0	507.2
9	118	0.05	47.0	400	0.8	20	45	98.9	mínimo
			58.8	500	1.0	----	4	160.7	mínimo



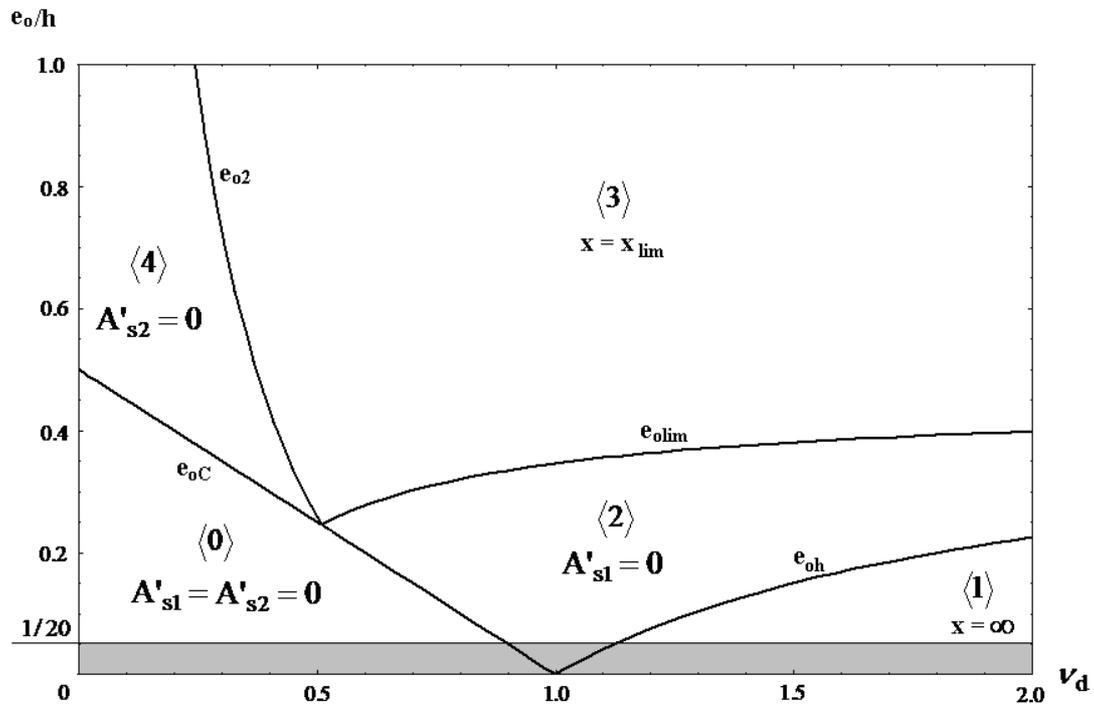
# **ANEXO III**



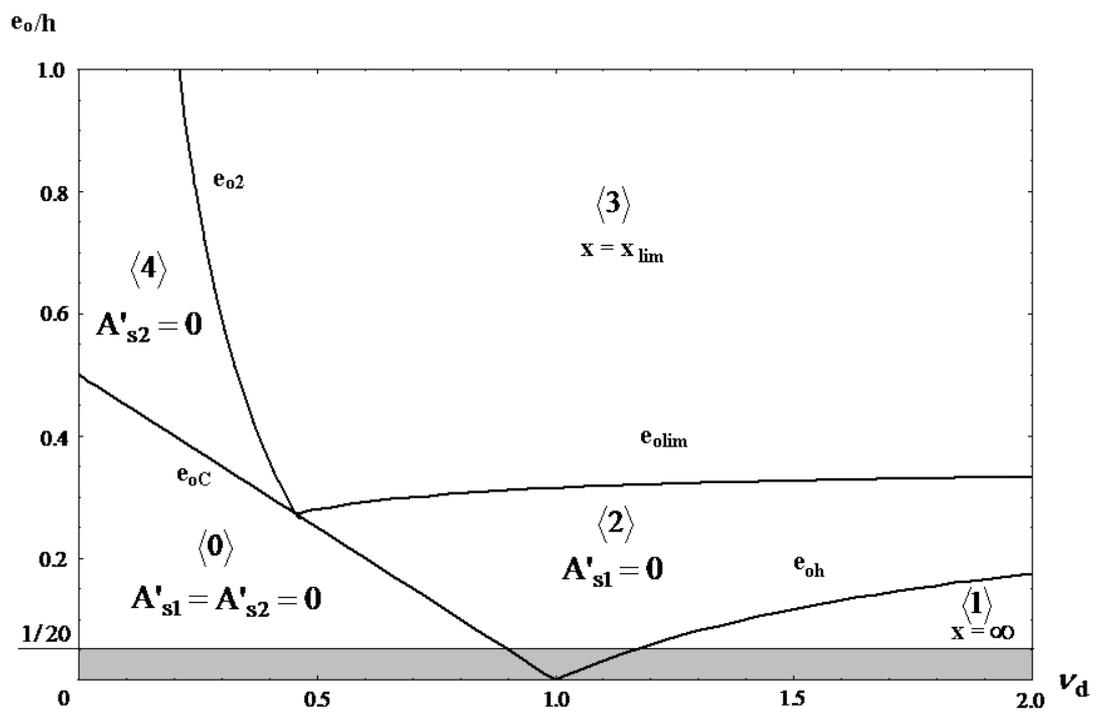
# DIAGRAMAS DE ARMADO OPTIMO

**Acero B 400**

$$\gamma_s = 1.15$$



$$d_1 = d_2 = 0.05d$$

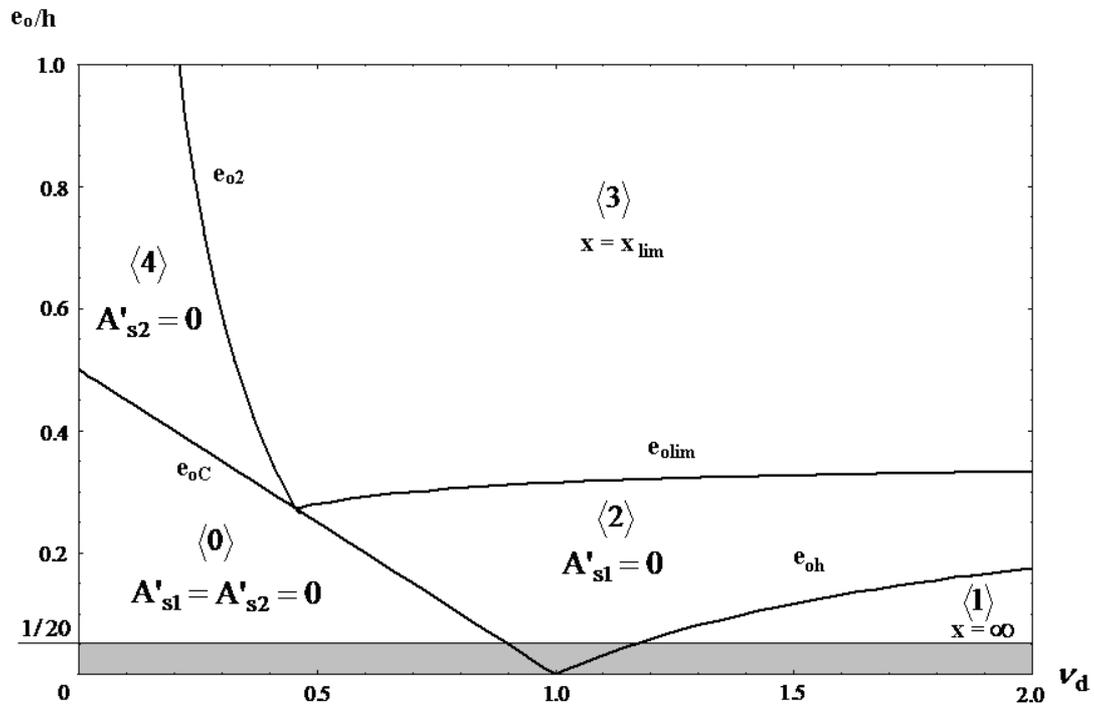


$$d_1 = d_2 = 0.10d$$

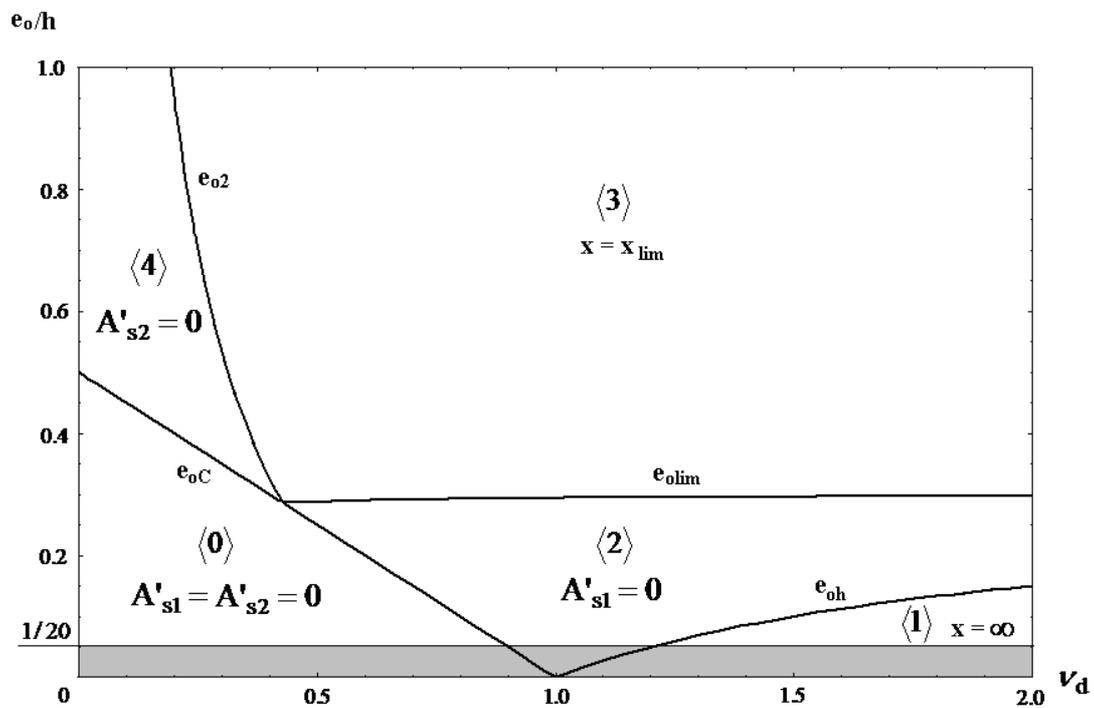
## DIAGRAMAS DE ARMADO OPTIMO

**Acero B 400**

$\gamma_s = 1.15$



$d_1 = d_2 = 0.15d$

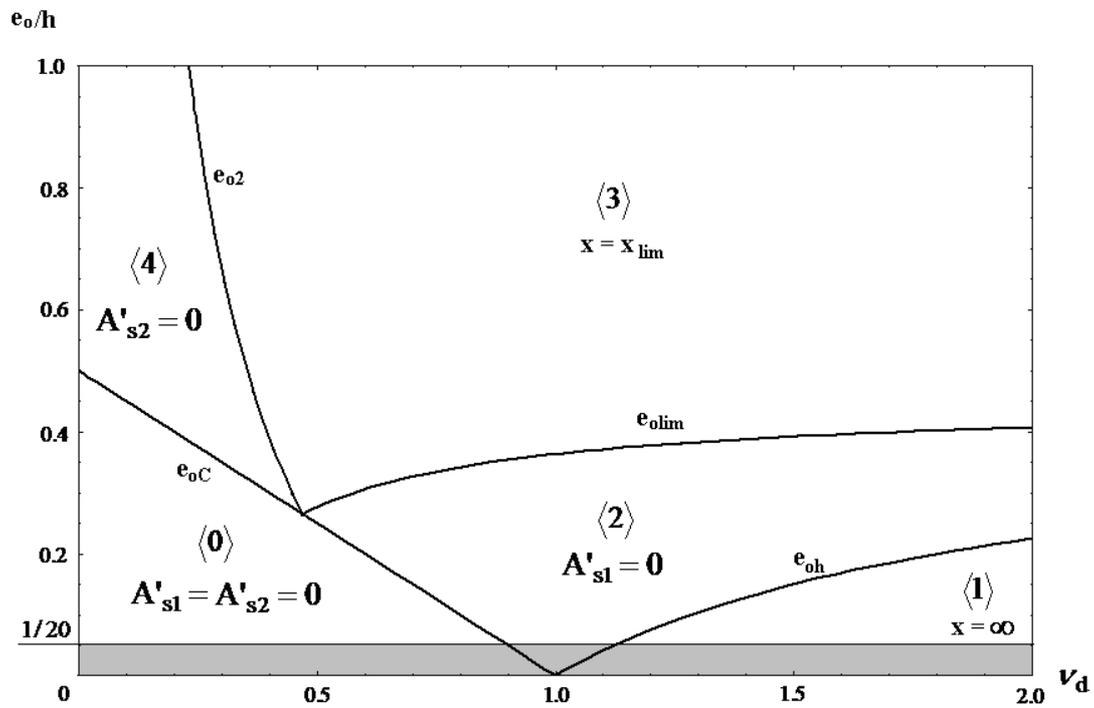


$d_1 = d_2 = 0.20d$

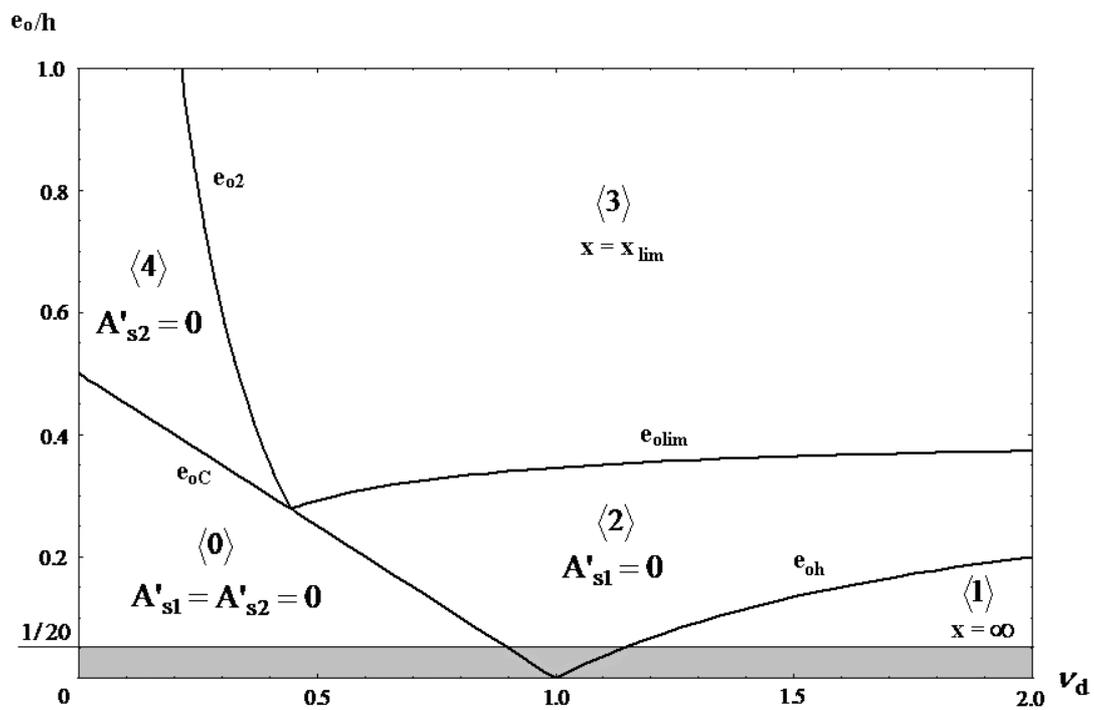
# DIAGRAMAS DE ARMADO OPTIMO

Acero B 500

$\gamma_s = 1.15$



$d_1 = d_2 = 0.05d$

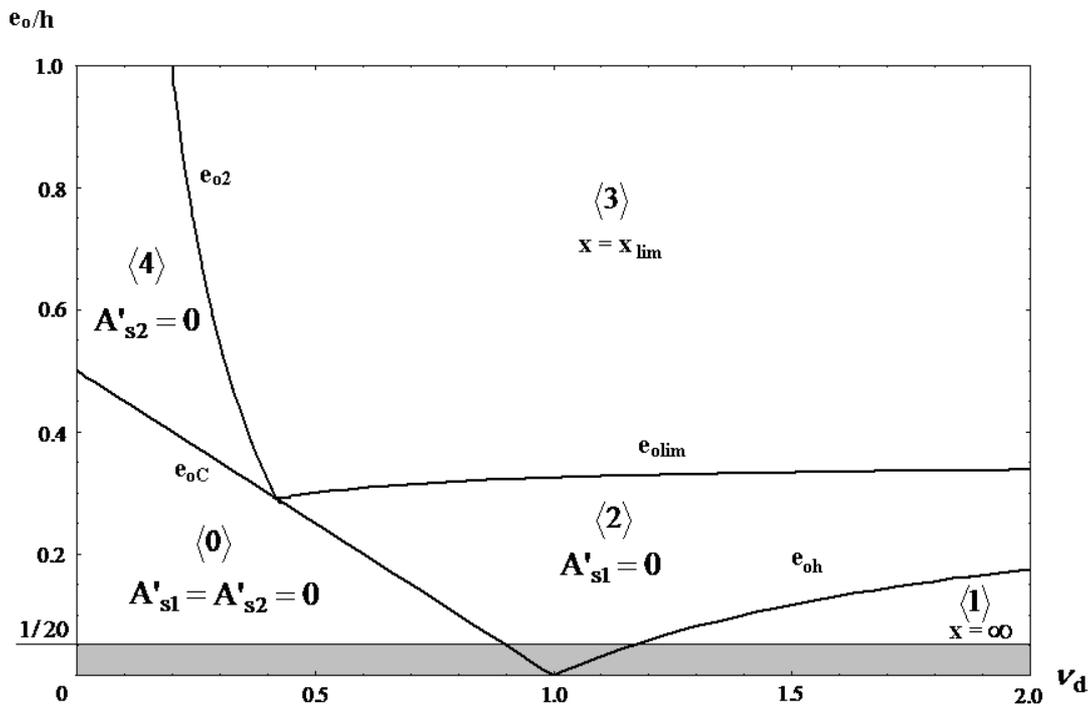


$d_1 = d_2 = 0.10d$

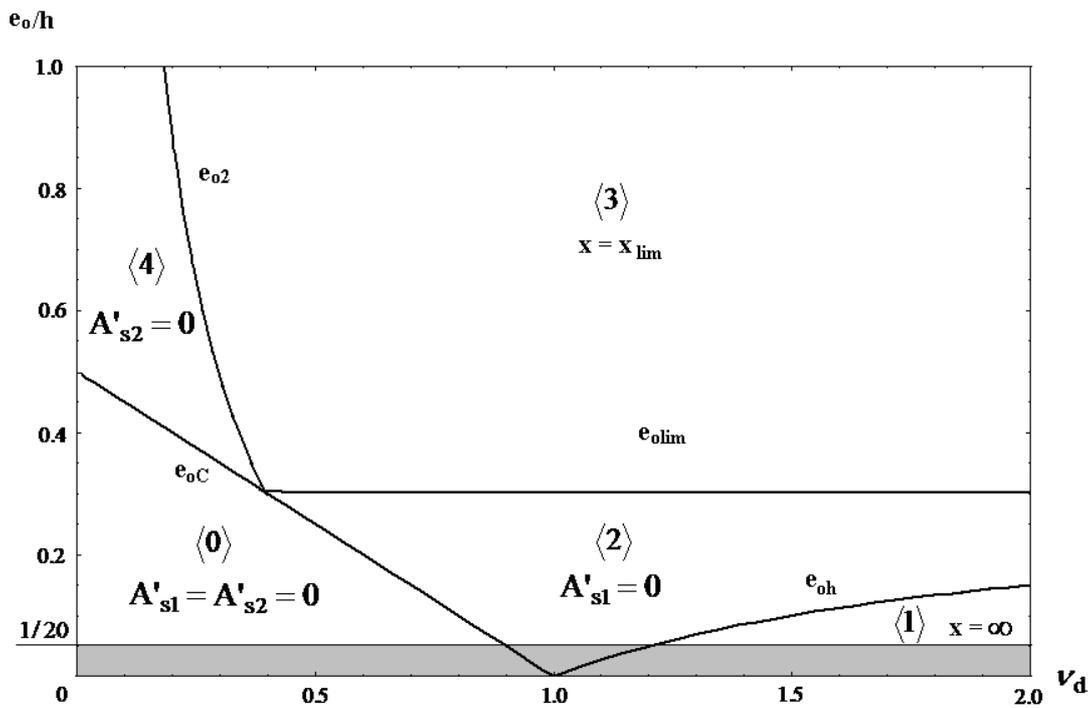
# DIAGRAMAS DE ARMADO OPTIMO

Acero B 500

$\gamma_s = 1.15$



$$d_1 = d_2 = 0.15d$$



$$d_1 = d_2 = 0.20d$$

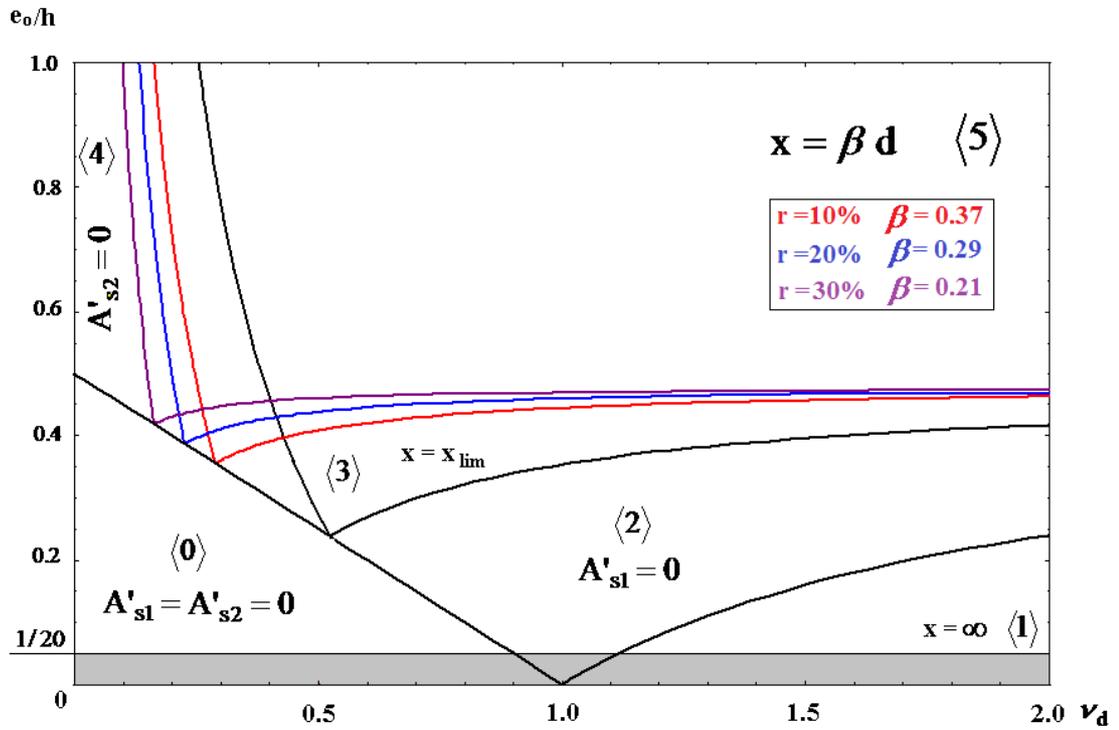
# **ANEXO IV**



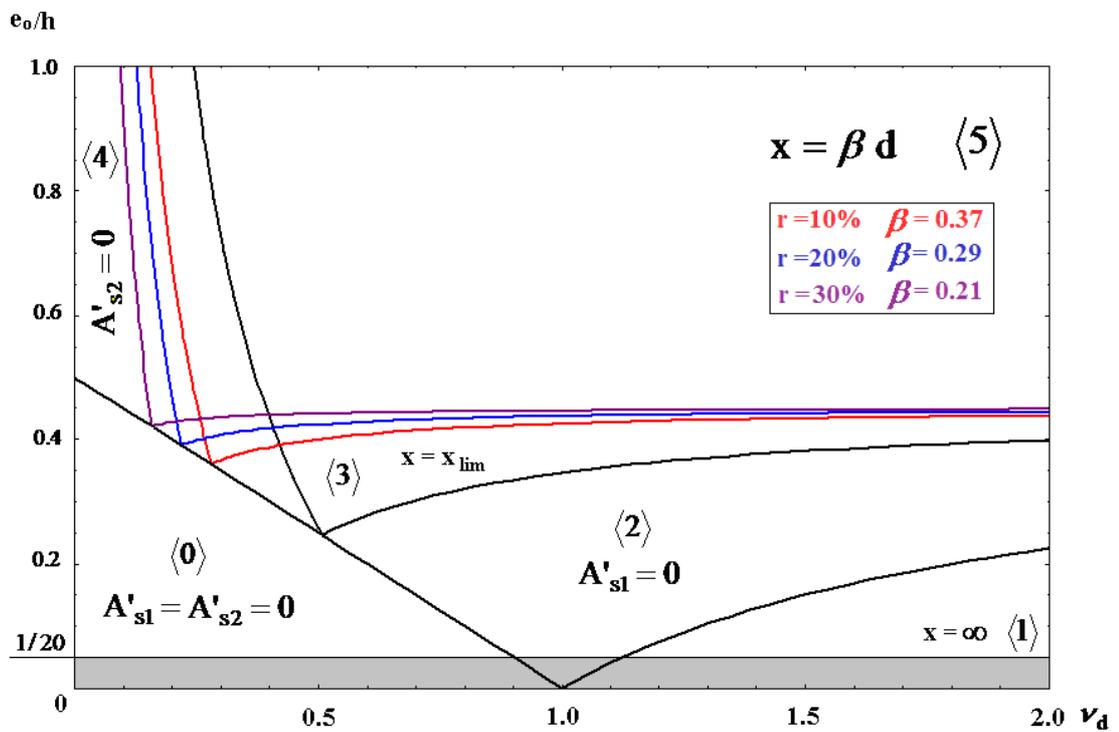
## DIAGRAMAS DE ARMADO OPTIMO CON REDISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS SEGÚN EHE

**Acero B 400**

$\gamma_s = 1.15$



$d_1 = d_2 = 0.025 d$

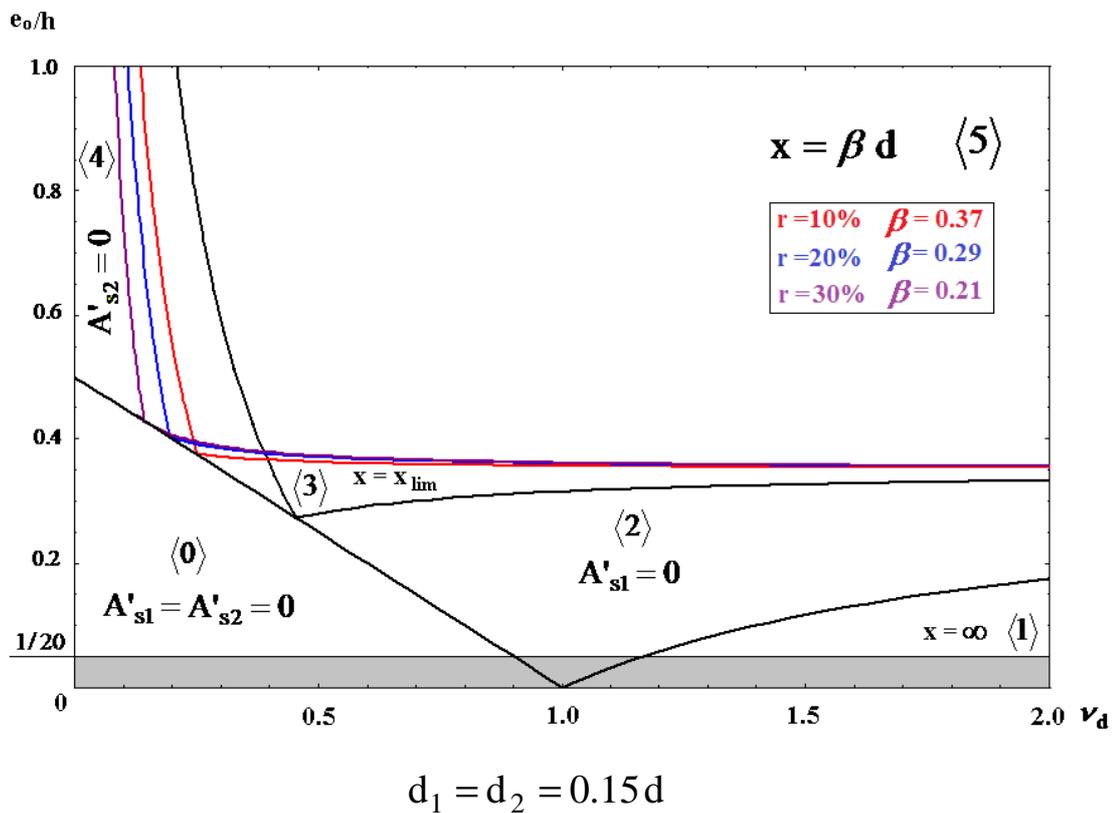
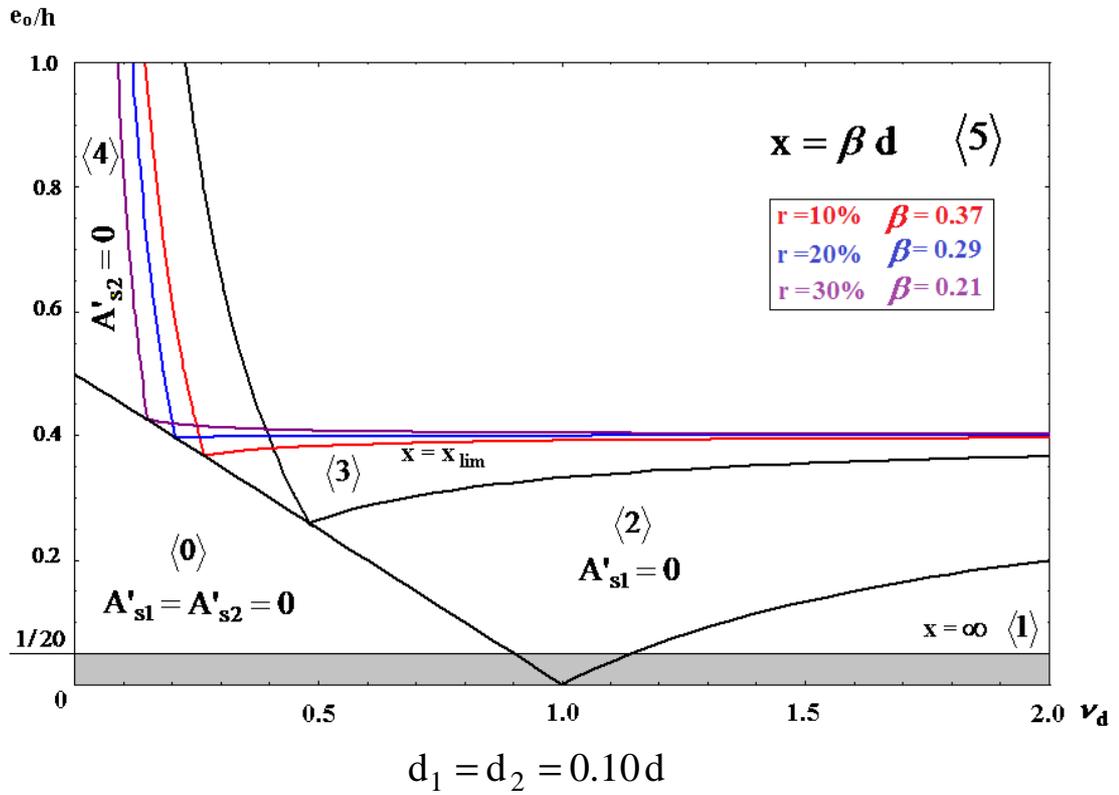


$d_1 = d_2 = 0.05 d$

## DIAGRAMAS DE ARMADO OPTIMO CON REDISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS SEGÚN EHE

**Acero B 400**

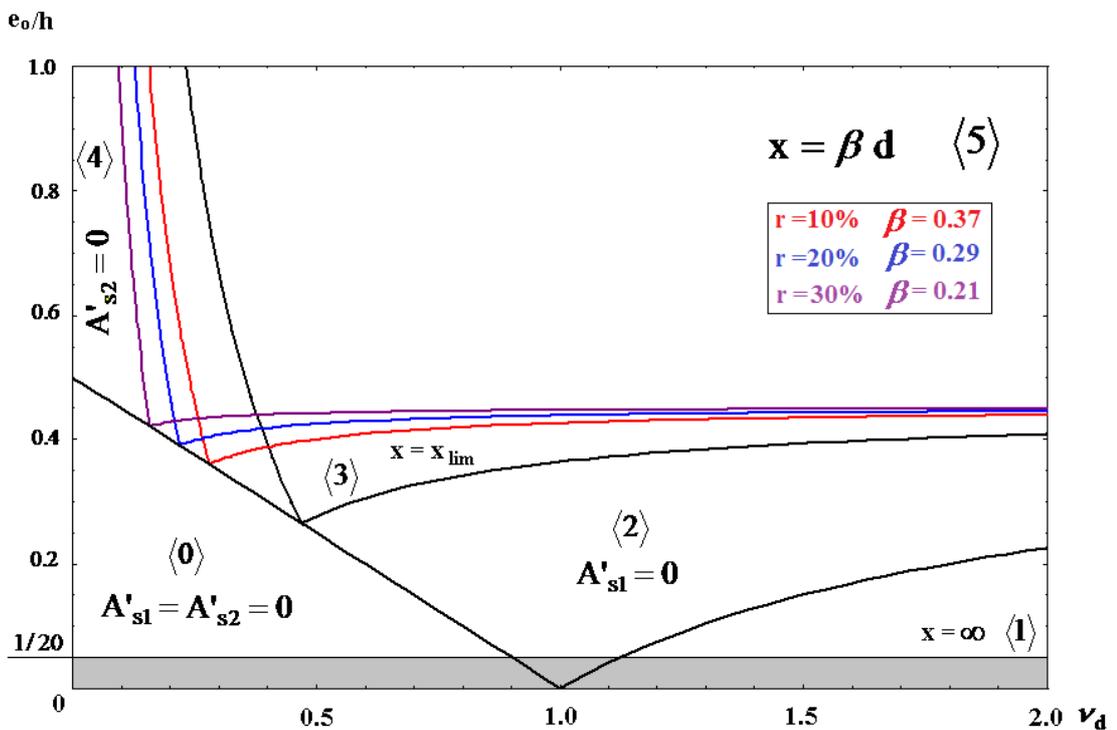
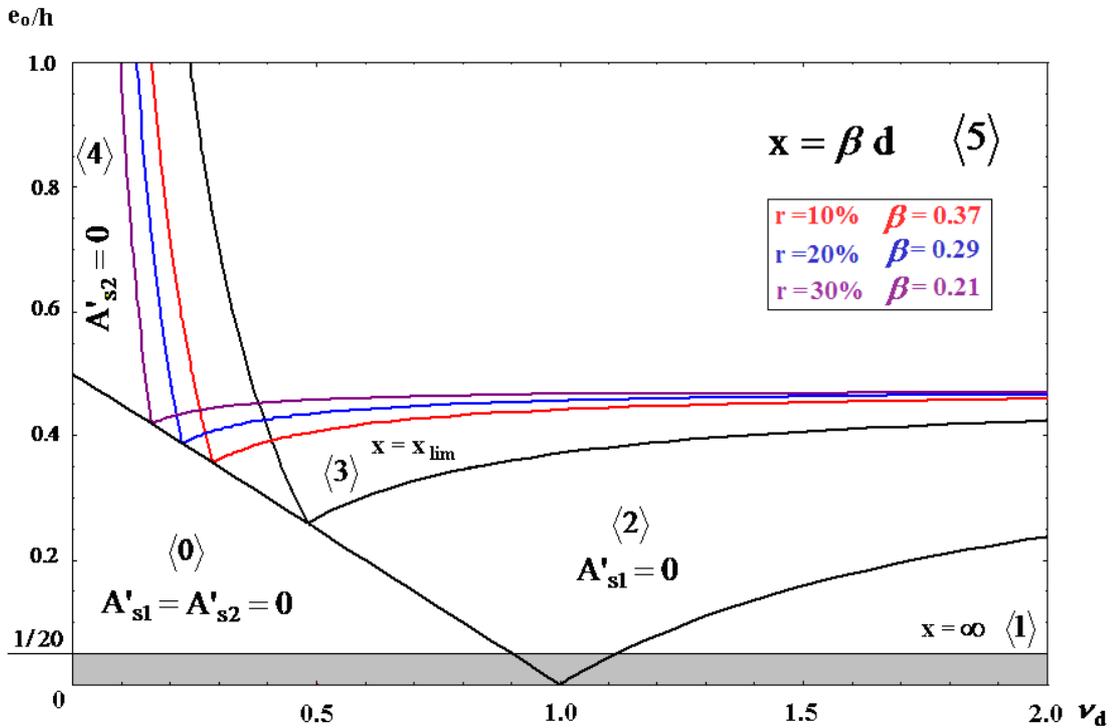
$\gamma_s = 1.15$



## DIAGRAMAS DE ARMADO OPTIMO CON REDISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS SEGÚN EHE

**Acero B 500**

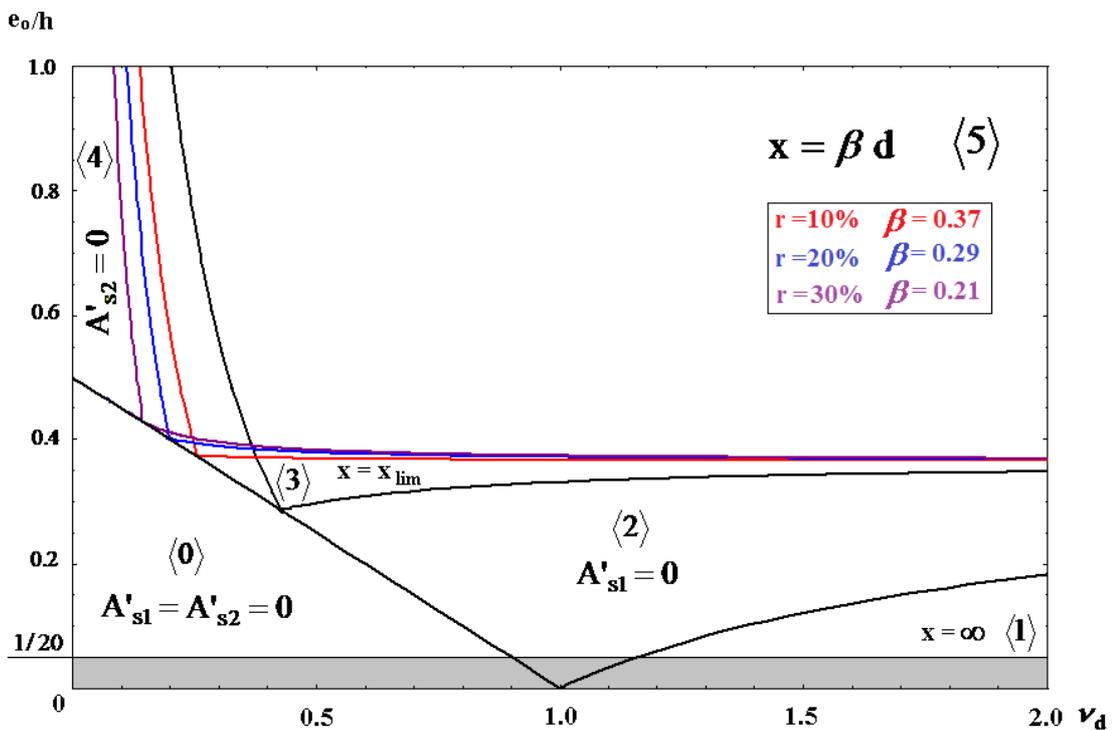
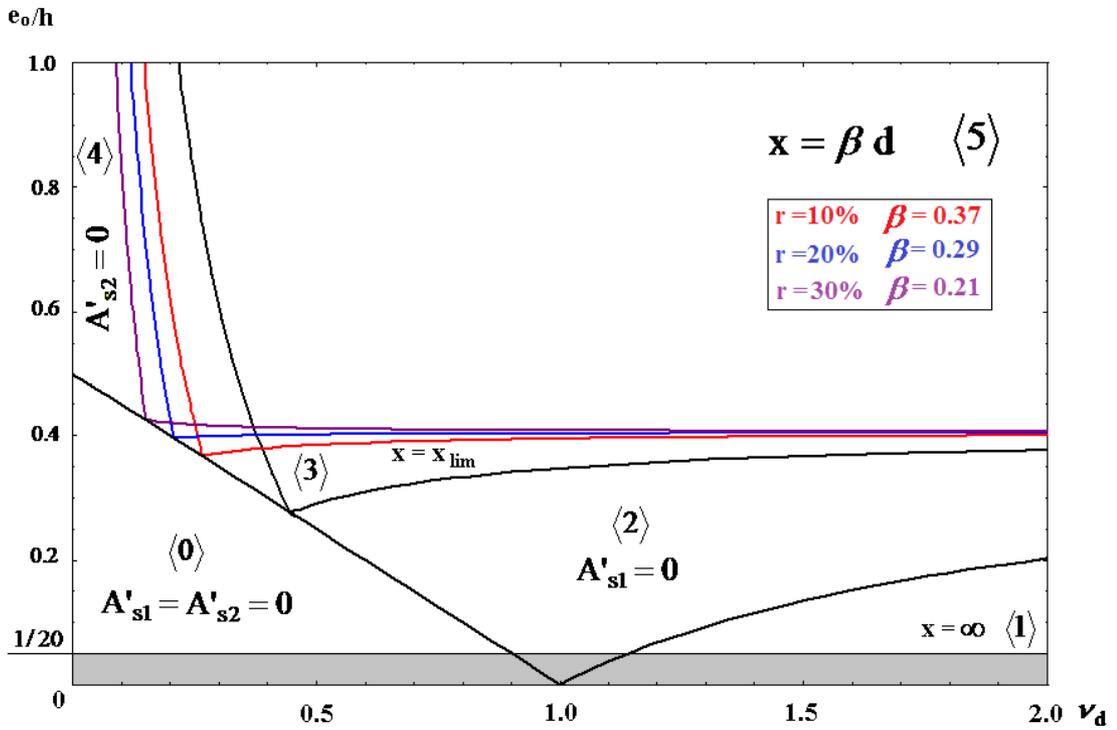
$\gamma_s = 1.15$



## DIAGRAMAS DE ARMADO OPTIMO CON REDISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS SEGÚN EHE

**Acero B 500**

$\gamma_s = 1.15$



# **ANEXO V**



---

**ANEXO V. Artículo en revisión enviado a Structural and Multidisciplinary Optimization (SMO).**

**Eccentricity-based procedure to optimize the strength design of RC cross-sections for combined compression and in-plane bending moment**

López-Martín D.

*University of Granada (UGR). Campus Universitario de Fuentenueva s/n. 18072 Granada (Spain)*

email: [dlopezm@ugr.es](mailto:dlopezm@ugr.es)

Carbonell-Márquez J.F.

*University of Granada (UGR). Campus Universitario de Fuentenueva s/n. 18072 Granada (Spain)*

email: [jfcarbonell@ugr.es](mailto:jfcarbonell@ugr.es)

Gil-Martín L.M.

*University of Granada (UGR). Campus Universitario de Fuentenueva s/n. 18072 Granada (Spain)*

email: [mlgil@ugr.es](mailto:mlgil@ugr.es)

Hernández-Montes E. (Corresponding author)

*University of Granada (UGR). Campus Universitario de Fuentenueva s/n. 18072 Granada (Spain)*

Phone: (+34) 958 249965

Fax: (+34) 958 249959

email: [emontes@ugr.es](mailto:emontes@ugr.es)

**Abstract.** The strength design of reinforced concrete rectangular sections for combined compression and in-plane bending with two levels of reinforcement is undetermined: three unknowns are to be solved with only two equilibrium equations; an additional condition is necessary in order to solve the problem. The additional conditions lead to the optimal solution for the reinforcement, which in this work is considered as the minimum area of steel. In this paper a new approach based on equivalent eccentricity of applied compressive load is proposed. Different domains are reported, each of them is associated with given values of eccentricity and axial load. Analytical expressions for the domain boundaries are established and a simple procedure is described in order to outline the conditions corresponding to the optimal reinforcement. The main advantage of this procedure is its simplicity, which allows for manual computations. Some examples employing reinforcement sizing diagrams illustrate the validity of the approach.

**Keywords.** Reinforced concrete; Optimal reinforcement; Strength design, Equivalent eccentricity

**Notation**

$A_c$	Concrete cross-section area
$A_{s1}$	Bottom reinforcement gross area
$A_{s2}$	Top reinforcement gross area
$E_s$	Steel elastic modulus
$M$	Externally applied in-plane bending moment
$M_b$	Maximum resisting moment of the section in simple bending without top reinforcement
$N$	Externally applied compressive axial load
$N_c$	Concrete compression block resultant
$N_{s1}$	Bottom steel reinforcement stress resultant
$N_{s2}$	Top steel reinforcement stress resultant
$b$	Cross-section width
$d$	Depth of center of gravity of bottom reinforcement, measured from top fiber
$d_1$	Distance between bottom fiber and center of gravity of bottom reinforcement
$d_2$	Depth of center of gravity of top reinforcement, measured from top fiber
$e_0$	Equivalent eccentricity
$e_{0c}$	Boundary eccentricity value for condition $A_{s1} = A_{s2} = 0$
$e_{0lim}$	Boundary eccentricity value for $x = x_b$
$e_{02}$	Boundary eccentricity value for $A_{s2} = 0$
$e_{0h}$	Boundary eccentricity value for $x = +\infty$
$f_{ck}$	Characteristic compressive strength of concrete (according to EC2)
$f_{cd}$	Design compressive strength of concrete (according to EC2)

---

$f_{yk}$	Characteristic yield strength of reinforcement (according to EC2)
$f_{yd}$	Design yield strength of reinforcement (according to EC2)
$h$	Cross-section depth
$x$	Neutral axis depth
$x_b$	Neutral axis depth corresponding to a tensile strain of $\epsilon_y$ at bottom reinforcement and a compressive strain of $\epsilon_{cu}$ at top fiber
$\sigma_c$	Concrete compression
$\sigma_{s1}$	Bottom reinforcement stress
$\sigma_{s2}$	Top reinforcement stress
$\epsilon_{cg}$	Strain at section center of gravity
$\epsilon_{cu2}$	Maximum concrete compressive strain employing parabolic and rectangular stress block (according to EC2)
$\epsilon_{cu3}$	Maximum concrete compressive strain employing rectangular stress block (according to EC2)
$\epsilon_{c2}$	Maximum concrete pure compression strain employing parabolic and rectangular stress block (according to EC2)
$\epsilon_{c3}$	Maximum concrete pure compression strain employing rectangular stress block (according to EC2)
$\epsilon_{s1}$	Bottom reinforcement center of gravity strain
$\epsilon_{s2}$	Top reinforcement center of gravity strain
$\epsilon_y$	Steel yield strain
$\epsilon_{ud}$	Steel tensile strain limit
$\phi$	Curvature of the cross-section
$\alpha_{cc}$	Coefficient considering long term effects on the compressive strength and unfavorable effects resulting from the way the load is applied (according to EC2)

---

$\gamma_s$	Partial safety factor for concrete (according to EC2)
$\lambda$	Depth of equivalent rectangular compressive stress block relative to the neutral axis depth (according to EC2)
$\eta$	Effective concrete strength factor
$\nu$	Reduced compression load

## Introduction

One of the most commonly studied topics in schools of engineering is the ultimate strength proportioning of a reinforced concrete (RC) rectangular cross-section subjected to combined axial compressive load and bending moment. The widespread use of concrete and reinforcing steel in the buildings from the last century meant that this problem was dealt with in many books as well as being included in every concrete design code.

Despite examining this problem, it is not of immediate resolution since equations are governed by numerous variables and, usually, the design becomes iterative. Therefore, the designer has to rely on his intuitive experience to fix some of these variables in order to obtain the most appropriate reinforcement. When experience is not enough, a wide range of existing literature also provides many simplified or trial and error procedures based on tables or abacuses which help in finding a solution for the design. Recent studies provide many different approaches to get the optimal solution for the reinforcement design. Some try to find the optimum based on the cost of every component of the section, i.e. concrete and steel. Thereby, Ceranic, and Fryer (2000) applies the Lagrangian Multiplier Method to the minimum cost design of both singly and doubly RC rectangular beams under limit state design conditions. M. H. F. M. Barros et al. (2005) investigates the cost optimization of rectangular RC sections using the non-linear MC90 equation. A. F. M. Barros et al. (2011) studies the minimal cost problem of a rectangular section in simple bending where the objective function is the cost of raw materials and the variables are the section depth and the steel reinforcement areas. Even artificial neural networks have been implemented in conjunction with genetic algorithms by Saini et al. (2007) to provide a minimum-cost design of singly and doubly RC beams with uniformly distributed and concentrated load, incorporating actual self-weight of beam, parabolic stress block, moment-equilibrium and serviceability constraint as well as other constraints.

Other approaches assume that the rectangular dimensions of the cross-section are given and the optimal solution for the reinforcement in ultimate strength design needs to be found. Thereby, a new design approach called Reinforcement Sizing Diagrams (RSD) was presented by Hernández-Montes et al. (2004 and 2005), which shows the infinite number of solutions for top and bottom reinforcement that provide the required ultimate strength for sections subject to combined axial load and moment. Since the infinite number of solutions is represented by RSD the optimal (or minimum) reinforcement may be identified. The employment of this RSD technique has also been applied to define optimal domains with respect to axial-bending load coordinates according to provisions of Eurocode 2 (EC2) (CEN, 2004) by Aschheim et al. (2007). Ultimately, the observation of the characteristics of optimal solutions has led to the development of the

Theorem of Optimal Section Reinforcement (TOSR) presented by Hernández-Montes et al. (2008). This work provides the additional conditions to be imposed in the equilibrium equations in order to achieve an optimal design of reinforcement.

Although the additional conditions to be implemented are described and proven by Hernández-Montes et al. (2008), each of them has its special suitability depending on the applied loads. As a corollary to the mentioned theorem, Hernández-Montes et al. (2008) proposes to check every condition in the problem in question and select the one which provides the optimal solution.

In this work, a procedure similar to the one exposed by Aschheim et al. (2007) is to be given according to EC2 specifications. Depending on the equivalent eccentricity of the applied compressive load, this approach will provide an additional condition to impose in order to obtain the optimal reinforcement. Some examples are presented in order to compare the results predicted by this approach with those obtained using the RSD technique. These examples test the validity of the procedure explained herein.

## Flexural analysis and strength design assumptions

### Bernoulli's Hypothesis

The compatibility conditions to be imposed within the problem make use of Bernoulli's hypothesis that plane sections remain plane after deformation and assume no slip of reinforcement at the critical section. Thus, the distribution of strain over the cross section may be defined by just two variables (Fig. 1): the strain at the centre of gravity ( $\varepsilon_{cg}$ ) of the gross section and the curvature ( $\varphi$ ) of the cross-section. Therefore, strain at any fiber of concrete or steel located a distance  $y$  from center of gravity of the section will be:

$$\varepsilon(y, \varepsilon_{cdg}, \varphi) = \varepsilon_{cdg} + \varphi y \quad (1)$$

The formulation given in Eq (1) considers the compression strain as positive and the curvature which produces tension in the bottom fiber.

## Section Ultimate Limit State according to EC2

Bending ultimate limit state is associated to failure of the section due to concrete compression strength or, in some cases, the steel tension limit stress.

EC2 defines a series of possible ranges of ultimate strain distributions (Fig. 2). Strain planes pivoting on point A are distributions in which steel fails in tension whereas the planes pivoting either on point B or C correspond to concrete failure in compression. EC2 concrete model considers that concrete ultimate compression strain in flexural compression is different from the case of pure compression; this is the reason for the ultimate constant strain distribution at  $\varepsilon_{c2}$  or  $\varepsilon_{c3}$  (depending on consideration of parabolic-rectangular or rectangular concrete stress distribution) in Fig. 2.

Considering a stress bilinear model without strain hardening for reinforcing steel, EC2 allows no limitation of the steel tensile strain, so point A in Fig. 2 disappears. See Fig. 3.

From the observation of the presented ultimate strain configurations in Fig. 2 and 3, it can be noticed that the ultimate strain for any fiber in the cross-section may be expressed by means of just one variable: neutral axis depth  $x$  (Eq. (2)). Considering the steel model without strain hardening condition,  $x$  takes values in the interval  $[0, \infty)$ .

$$\varepsilon(\xi, x) = \begin{cases} \varepsilon_{cu3} \frac{x - \xi}{x} & \text{if } 0 \leq x < h \\ \varepsilon_{c3} \frac{x - \xi}{x - \Xi} & \text{if } x \geq h \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{where } \Xi = h \left( 1 - \frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_{cu3}} \right)$$

### Concrete ultimate state model

Concrete is a material whose stress-strain behavior is non-linear and changes with age and loading duration, among other factors. Due to the importance of the ultimate strength design, simplified schemes have been adopted in order to capture the behaviour of concrete. EC2 considers three different concrete stress-strain models: rectangular, parabolic-rectangular, and bilinear.

Within this work the rectangular model has been adopted with  $\varepsilon_{c3} = 2\text{‰}$  and  $\varepsilon_{cu3} = 3.5\text{‰}$ . The resultant of compression in concrete,  $N_c$ , may be determined in the case of rectangular sections as a function of the neutral axis depth,  $x$ , as follows:

$$N_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ \eta f_{cd} b \lambda x & \text{if } 0 \leq x < h / \lambda \\ \eta f_{cd} b h & \text{if } x \geq h / \lambda \end{cases} \quad (3)$$

where  $f_{cd} = \alpha_{cc} f_{ck} / \gamma_c$  is the concrete design strength according to EC2;  $f_{ck}$  is the characteristic compressive cylinder strength of concrete at 28 days;  $\gamma_c$  is the partial safety factor for concrete (1.5 for persistent and transient design situations and 1.2 for accidental situations);  $\alpha_{cc}$  is the coefficient considering long term effects on the compressive strength and unfavorable effects resulting from the way the load is applied,

with a typical value of 0.85;  $h$  and  $b$  are depth and width of the rectangular cross-section, respectively. Values for  $\eta$  and  $\lambda$  are given by Eq. (4):

$$\lambda = \begin{cases} 0.8 & \text{for } f_{ck} \leq 50 \text{ Mpa} \\ 0.8 - (f_{ck} - 50) / 400 & \text{for } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ Mpa} \end{cases} \quad (4)$$

$$\eta = \begin{cases} 1.0 & \text{for } f_{ck} \leq 50 \text{ Mpa} \\ 1.0 - (f_{ck} - 50) / 200 & \text{for } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ Mpa} \end{cases}$$

## Reinforcing steel ultimate state model

The steel model used herein is bilinear, without considering strain hardening and symmetric (i.e. the same expression for tension and compression are employed). Nevertheless, other non-symmetric models are possible. For the sake of simplicity, Eq. (3) does not consider the presence of reinforcement inside concrete cross-section. However, in order to take this into account, the steel model is formulated as follows:

$$\sigma_s(\varepsilon) = \begin{cases} f_{yd} - \eta f_{cd} & \text{if } \varepsilon \geq \frac{f_{yd} - \eta f_{cd}}{E_s} \\ E_s \varepsilon & \text{if } -\frac{f_{yd}}{E_s} < \varepsilon < \frac{f_{yd} - \eta f_{cd}}{E_s} \\ f_{yd} & \text{if } \varepsilon \leq -\frac{f_{yd}}{E_s} \end{cases} \quad (5)$$

As mentioned above, strain  $\varepsilon$  may be perfectly defined by means of just one variable: neutral axis depth,  $x$ . Therefore, expression for steel stress given in Eq. (5) may be also given as a function of  $x$ .

In the common case of a concrete cross-section with two layers of steel,  $A_{s1}$  (bottom) and  $A_{s2}$  (top), with a mechanical covers of  $d_1$  and  $d_2$  respectively, ultimate strains and stresses in the reinforcements may be obtained from the composition of Eqs. (2) and (5) (Gil-Martín et al., 2012) as:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{s1}(x) &= \varepsilon(d_1, x) \\ \varepsilon_{s2}(x) &= \varepsilon(d_2, x) \\ \sigma_{s1}(x) &= \sigma_{s1}(\varepsilon_{s1}(x)) = (\sigma_{s1} \circ \varepsilon_{s1})(x) \\ \sigma_{s2}(x) &= \sigma_{s2}(\varepsilon_{s2}(x)) = (\sigma_{s2} \circ \varepsilon_{s2})(x) \end{aligned} \quad (6)$$

where  $\circ$  means composition of two mathematical functions.

## Equilibrium equations

The stress distribution over the cross-section has to equilibrate the externally applied loads that, in this case, are an in-plane bending moment  $M$  and a compressive axial load  $N$  (Fig. 1). Taking moment equilibrium at the centre of gravity of the cross-section, supposed rectangular with  $h$  height and  $b$  width, equilibrium equations may be presented as:

$$N = N_c(x) + A_{s1}\sigma_{s1}(x) + A_{s2}\sigma_{s2}(x)$$

$$M = N_c(x)\left(\frac{h}{2} - z_c(x)\right) - A_{s1}\sigma_{s1}(x)\left(\frac{h}{2} - d_1\right) + A_{s2}\sigma_{s2}(x)\left(\frac{h}{2} - d_2\right) \quad (7)$$

where  $z_c$  is lever arm corresponding to the resultant of concrete compressions relative to the top fiber, defined as (Fig. 4):

$$z_c(x) = \begin{cases} \frac{\lambda x}{2} & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{h}{\lambda} \\ \frac{h}{2} & \text{if } x \geq \frac{h}{\lambda} \end{cases} \quad (8)$$

## The problem of optimum reinforcement

When faced with the problem of design of RC rectangular sections, once the dimensions  $h$  and  $b$  are preliminary fixed, the engineer has to provide a solution to the two equilibrium equations presented in Eqs. (7). However, these equations have three unknowns: neutral axis depth,  $x$ , bottom,  $A_{s1}$ , and top,  $A_{s2}$ , reinforcing steel. Therefore, as the problem is undetermined, it may be solved with an infinite set of values for  $x$ ,  $A_{s1}$ , and  $A_{s2}$ .

As mentioned earlier, the RSD (Hernández-Montes et al., 2005) approach provides, in a graphical manner, all the possible combinations for  $x$ ,  $A_{s1}$ , and  $A_{s2}$ . Employing this method, Hernández-Montes et al., (2008) established the ‘‘Theorem of Optimal Section Reinforcement’’ (TOSR), where the authors stated that one of the following conditions imposed in Eqs. (7) yield the optimal result for the reinforcing steel under combined compressive load and in-plane bending moment:

- I.  $A_{s1} = 0$
- II.  $A_{s2} = 0$
- III.  $A_{s1} = A_{s2} = 0$
- IV.  $\varepsilon_s$  equal or slightly greater than  $-\varepsilon_y$
- V.  $\varepsilon = \varepsilon_{s1} = \varepsilon_{s2} = \varepsilon_{c3}$

Above, conditions II and IV make the maximum usage of the steel capacity while conditions I, III, and V take advantage of the maximum concrete capacity. A sixth condition is provided in TOSR but it is not considered herein since it is related to the yielding of both layers of reinforcement in tension.

Although the conditions that lead to an optimum design are given, the designer still does not know which condition is to be imposed; it is necessary to evaluate the five abovementioned conditions (I to V) until the optimum solution is reached.

## Eccentricity domains for optimal strength design

The externally applied compression load and bending moment,  $N$  and  $M$ , are equivalently expressed introducing the same compression load  $N$  acting at an eccentricity  $e_0$  with respect to the centre of gravity of the cross-section (Nawy, 2003), so that (Fig. 5):

$$e_0 = \frac{M}{N} \quad (9)$$

As will be shown, the former conditions for optimal proportioning of reinforcement in rectangular RC cross-sections may be explained in terms of the eccentricity  $e_0$  and compression load  $N$ . Setting out moment equilibrium at different points of the section in several cases (Fig. 6) different domain boundaries can be obtained. These domains and their boundaries will be deduced in the remainder of this section. The main advantage of these domains is that they may be graphically represented, which facilitates their application. Therefore, with only evaluation of pair  $e_0 - N$ , the designer will be able to identify the relevant domain and so, determine the optimal reinforcement for each loading case.

### Domains and its boundaries.

The pair of values  $e_0 - N$  for which concrete section is able to stand without any longitudinal reinforcement, that is,  $A_{s1} = A_{s2} = 0$  (called domain 0) may be determined from Fig. 6(a). For  $N \leq \eta f_{cd} \lambda x b$  and values of eccentricity in the range  $0 \leq e_0 < h/2$ , the concrete cross-section is able to resist with no reinforcement to the applied loads, being the compression stress in concrete  $\sigma_c = \eta f_{cd}$ . From Fig. 6(a) it can be noticed that, in the limit situation  $\sigma_c = \eta f_{cd}$ , the following conditions may be established:

$$N = \eta f_{cd} \lambda x b \quad (10)$$

$$e_0 = \frac{h}{2} - \frac{\lambda}{2} x \quad (11)$$

Combination of Eq. (10) and (11) leads to the eccentricity limit,  $e_{0c}$ , under which no reinforcement is necessary,  $A_{s1} = A_{s2} = 0$ . The value of  $e_{0c}$  is given by Eq. (12):

$$e_{0c} = \frac{1}{2} \left( h - \frac{N}{\eta f_{cd} b} \right) \quad (12)$$

Although the case above is theoretically possible, it is assumed that minimum reinforcement as prescribed in code provisions would be used, even for sections in domain 0.

Now, let us consider solutions in domain 1, where the condition of TOSR to be imposed is  $x = +\infty$ . In this domain, axial load  $N$  is applied with a low eccentricity value  $e_0$  so that full compression of the cross-section is involved. In some cases, equilibrium makes the existence of compressed bottom reinforcement necessary ( $A_{s1} \neq 0$ ). The boundary value of  $e_0 = e_{0h}$  which separates the cases of  $A_{s1} = 0$  and  $A_{s1} \neq 0$ , is deduced in Eq. (13).

Setting up moment equilibrium at the top reinforcement level in the situation presented in Fig. 6(b) (with  $A_{s1} = 0$ ), in the situation of full compression of the cross-section (i.e.  $\lambda x = h$ ):

$$e_{0h} = \left(\frac{h}{2} - d_2\right) - \frac{\eta f_{cd} h b \left(\frac{h}{2} - d_2\right)}{N} \quad (13)$$

For cases in domain 1, for which both top and bottom reinforcements are necessary (i.e.  $A_{s1} \neq 0$  and  $A_{s2} \neq 0$ ), the optimal reinforcement corresponds to the condition V of TOSR. Setting up moment equilibrium at the top reinforcement level and equilibrium of axial loads (Fig. 6 (b)), both bottom and top reinforcement areas  $A_{s1}$  and  $A_{s2}$  are given by Eqs. (14) and (15):

$$A_{s1} = \frac{\left(\frac{h}{2} - d_2 - e_0\right) N - \eta f_{cd} h b \left(\frac{h}{2} - d_2\right)}{(d - d_2) \sigma_{s1}(x = +\infty)} \quad (14)$$

$$A_{s2} = \frac{N - [\eta f_{cd} h b + A_{s1} \sigma_{s1}(x = +\infty)]}{\sigma_{s2}(x = +\infty)} \quad (15)$$

The eccentricity boundary  $e_{0h}$  separates domains 1 and 2. In domain 2 the additional condition to be imposed on Eq. (7) in order to get the optimal solution for reinforcement is  $A_{s1} = 0$ . In this domain, the section can be partially or fully compressed (i.e.  $x \leq h / \lambda$ ), and the area of top reinforcement is provided solving axial equilibrium in Fig. 6 (c):

$$A_{s2} = \frac{N - \eta f_{cd} \lambda x b}{f_{yd} - \eta f_{cd}} \quad (16)$$

In Eq. (16)  $f_{yd} - \eta f_{cd} = \sigma_{s2}(x)$  and the neutral fiber position,  $x$ , can be obtained from equilibrium of moment at the top reinforcement level (Fig. 6 (c)):

$$\left(\frac{h}{2} - d_2 - e_0\right) N = \eta f_{cd} \lambda x b \left(\frac{\lambda x}{2} - d_2\right) \quad (17)$$

The strain limit for domain 3 is represented in Fig. 6 (d). In this situation the optimal reinforcement corresponds to the condition IV of TOSR. Therefore, the optimal solution is located at balance point  $x = x_b$ , thus  $N_c = \eta f_{cd} \lambda x_b b$  being

$$x_b = \frac{d_{s1}}{1 + \frac{f_{yd}}{\epsilon_{cu3} E_s}} \quad (18)$$

The value of  $e_0 = e_{0\text{lim}}$  which separates domains 2 and 3 is deduced from Fig. 6(d) imposing that  $A_{s1} = 0$ . Equilibrium of the free body diagram is considered with  $A_{s1} = 0$  (domain 3) and  $x = x_b$  (domain 4), leading to a boundary value of  $e_0$  equals to:

$$e_{0\text{lim}} = \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) - \frac{\eta f_{cd} \lambda x_b b \left( \frac{\lambda x_b}{2} - d_2 \right)}{N} \quad (19)$$

The value of  $e_{0\text{lim}}$  marks the classical boundary between large and small eccentricity problems (Nawy, 2003).

In domain 3 both bottom and top reinforcements are necessary. Taking moment at the bottom reinforcement level and setting up equilibrium of axial loads (Fig. 6 (d)) result in Eqs. (20) and (21) which provide the required reinforcements:

$$A_{s2} = \frac{\left( e_0 + \frac{h}{2} - d_1 \right) N - \eta f_{cd} \lambda x_b b \left( d - \frac{\lambda x_b}{2} \right)}{\left( f_{yd} - \eta f_{cd} \right) (d - d_2)} \quad (20)$$

$$A_{s1} = \frac{\eta f_{cd} \lambda x_b b + A_{s2} (f_{yd} - \eta f_{cd}) - N}{f_{yd}} \quad (21)$$

The last domain to be considered is called domain 4 (Fig. 6(e)); in this situation the top reinforcement is not needed ( $A_{s2} = 0$ ). The boundary value of  $e_0 = e_{02}$  which separates domains 3 and 4 is deduced considering equilibrium of the free body diagram in Fig. 6(d) imposing  $A_{s2} = 0$  (i.e.  $A_{s2} = 0$  and  $x = x_b$ ):

$$e_{02} = - \left( \frac{h}{2} - d_1 \right) + \frac{\eta f_{cd} \lambda x_b b \left( d - \frac{\lambda x_b}{2} \right)}{N} \quad (22)$$

To obtain the required bottom reinforcement area in domain 4 it is necessary to know the value of the neutral axis depth  $x$ , which is computed setting up equilibrium of moments at the bottom reinforcement level (Eq. (23)). Once  $x$  is obtained, the equilibrium of axial loads provides bottom reinforcement area according to Eq. (24):

$$\left( e_0 + \frac{h}{2} - d_1 \right) N = \eta f_{cd} \lambda x b \left( d - \frac{\lambda x}{2} \right) \quad (23)$$

$$A_{s1} = \frac{\eta f_{cd} \lambda x b - N}{f_{yd}} \quad (24)$$

An alternative and easier way to represent the former boundaries and domain that allow the engineer to obtain the optimal reinforcement of a rectangular RC cross-section is using a chart as presented in Fig. 7. In this figure, the value of  $e_0 / h$  (i.e. ratio between eccentricity and the depth of the cross section) is represented in function of the non-dimensional parameter  $\nu = N / (\eta f_{cd} b h)$  for the studied section (i.e. the values of mechanical covers ( $d_1$  and  $d_2$ ) and design strength of steel,  $f_{yd}$  are known).

Since some boundary values of  $e_0$  depend on  $x_b$  (see Eqs. (19) and (22)) different charts will be obtained for different steel yield strain,  $\varepsilon_y = f_{yd} / E_s$ , being  $E_s$  the steel elasticity modulus ( $E_s = 200.000$  MPa ).

In Fig. 7 the horizontal band for which  $e_0 / h < 1/30$  has to be excluded according to prescriptions of EC2 § 6.1 (4) (CEN, 2004) relating minimum eccentricity concerns. The former procedure has been summarized in the flow chart represented in Fig. 8.

## Examples

In this section some examples are presented in order to prove the validity of the approach proposed above. Several values of eccentricity  $e_0$  and external compression load  $N$  have been considered and the additional condition to impose in order to get the optimal reinforcement is obtained from the chart presented in Fig. 7. Results are verified using RSD representations of the required reinforcement areas. Furthermore, the neutral axis depth  $x$  and the optimal reinforcement areas,  $A_{s1}$  and  $A_{s2}$ , have also be calculated. In the following examples, the concrete has a strength resistance of  $f_{ck} = 45$  MPa and the steel yield strength is  $f_{yk} = 500$  MPa . The modulus of elasticity of the reinforcement is  $E_s = 200000$  MPa . The dimensions of the studied cross section are summarized below (see Fig. 9):

- $h = 600$  mm
- $b = 300$  mm
- $d_1 = d_2 = \frac{h}{10} = 60$  mm
- $d = 540$  mm

In Fig. 10 the chart  $\nu \cdot e_0 / h$  for the section in Fig. 9 has been represented. For a high value of the axial load, like  $\nu = 1.5$  (vertical line 1 in Fig. 10) three domains are possible depending on the eccentricity  $e_0$ . For smaller values of  $e_0$ , i.e. for situations closer to centered compression, both top and bottom reinforcements are needed (segment a1 in domain 1 - Fig. 10 -). As  $e_0$  is increased, equilibrium may be set up without presence of bottom reinforcement (segment b1 in domain 2 - Fig. 10 -). However, if eccentricity keeps on increasing, the applied moment  $M$  becomes great enough to require the presence of both reinforcements (segment c1 in domain 3 - Fig. 10 -) and, in these circumstances, in order to take advantage of both concrete and bottom reinforcement the additional condition  $x = x_b$  must be imposed.

In Figs. 11 and 12 the RSD diagrams corresponding to  $e_0 / h = 0.1$  &  $\nu = 1.5$  (a point in segment a<sub>1</sub>) and  $e_0 / h = 0.8$  &  $\nu = 1.5$  (a point in segment c<sub>1</sub>) have been represented respectively. The optimal reinforcements obtained from the RSDs confirm the validity of the results given in the chart in Fig. 10.

If a smaller value of the axial load is considered,  $\nu = 0.7$  (vertical line 2 in Fig.10), for low values of eccentricity the section is able to stand the external loads without reinforcement (segment  $a_2$  in domain 0 - Fig. 10 -).

Fig. 13 shows the RSD diagram for  $\nu = 0.7$  and  $e_0/h=0.1$  (a point in segment  $a_2$  in Fig. 10); it is evident from Fig. 13 that the equilibrium cannot be reached with  $\sigma_c = \eta f_{cd}$ ,  $A_{s1} \neq 0$ , and  $A_{s2} \neq 0$  and hence, for this situation, the optimal reinforcement corresponds to  $\sigma_c < \eta f_{cd}$  and  $A_{s1} = A_{s2} = 0$ .

As in the previous case, if the value of axial load stays constant but the value of the eccentricity increases then reinforcement is required. As mentioned above for  $\nu = 1.5$ , equilibrium may be reached without presence of bottom reinforcement (segment  $b_2$  in domain 2 - Fig. 10 -). The RSD for  $e_0/h = 0.25$  &  $\nu = 0.7$  (a point in segment  $b_2$  in Fig. 10) represented in Fig. 14 confirms the results obtained from the proposed chart. A final case corresponding to the vertical line 3 in Fig. 10 has also been analyzed. For the adopted value of axial load,  $\nu = 0.3$ , the optimal reinforcement corresponds to domain 0, domain 4 or domain 3 (segments  $a_3$ ,  $b_3$  and  $c_3$  respectively in Fig. 10) as  $e_0$  increases. The RSD diagram for  $\nu = 0.3$  and  $e_0 = 0.45$  (a point in segment  $b_3$  in Fig. 10) represented in Fig. 15 confirms that the optimal reinforcement corresponds to  $A_{s2}=0$ , that is the condition in domain 4.

As in the former cases, as eccentricity increases -and hence the bending moment- both reinforcements are required and for the biggest values of  $e_0$  the optimal reinforcement is associated with  $x = x_b$ .

## Conclusions

The present work provides a geometric approach to optimum design of rectangular RC subject to combined compression  $N$  and in-plane bending moment  $M$ . The approach is said to be geometric since it is based on the evaluation of the resulting equivalent eccentricity of the pair of external loads,  $e_0 = M / N$ . A new formulation of boundary values for  $e_0$  is presented in order to let the designer know which condition of the TOSR must be imposed in order to get optimal reinforcement ( $A_{s1}$  and  $A_{s2}$ ). These conditions have been graphically represented in a non-dimensional chart  $e_0/h - \nu$  with  $\nu = N / \eta f_{cd} h b$ . The main advantage of this chart is that allow the engineer to easily choose the optimal reinforcement. Some examples have proved the validity and compactness of the process.

### Acknowledgements

Part of the present work was financed by the Spanish Ministry of Education. The second author is a Spanish Government PhD fellow (FPU grant AP 2010-3707). This support is gratefully acknowledged.

## References

- Aschheim, M., Hernández-Montes, E., and Gil-Martín, L. M. (2007). Optimal domains for strength design of rectangular sections for axial load and moment according to eurocode 2. *Engineering Structures*, 29(8), 1752-1760.
- Barros, A. F. M., Barros, M. H. F. M., and Ferreira, C. C. (2011). Optimal design of rectangular RC sections for ultimate bending strength. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, , 1-16.
- Barros, M. H. F. M., Martins, R. A. F., and Barros, A. F. M. (2005). Cost optimization of singly and doubly reinforced concrete beams with EC2-2001. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 30(3), 236-242.
- CEN. (2004). Eurocode 2: Design of concrete structures. *European Committee for Standardization*,
- Ceranic, B., and Fryer, C. (2000). Sensitivity analysis and optimum design curves for the minimum cost design of singly and doubly reinforced concrete beams. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 20(4), 260-268.
- Gil-Martín, L. M., López-Martín, D., Hernández-Montes, E., and Aschheim, M. (2012). Dimensionamiento en rotura a flexión de secciones de hormigón armado. Un planteamiento compacto. *Informes de la Construcción* (in press). doi 10.3989/ic.11050
- Hernández-Montes, E., Aschheim, M., and Gil-Martín, L. M. (2004). Impact of optimal longitudinal reinforcement on the curvature ductility capacity of reinforced concrete column sections. *Magazine of Concrete Research*, 56(9), 499-512.
- Hernández-Montes, E., Gil-Martín, L. M., and Aschheim, M. (2005). Design of concrete members subjected to uniaxial bending and compression using reinforcement sizing diagrams. *ACI Structural Journal*, 102(1), 150-158.
- Hernández-Montes, E., Gil-Martín, L. M., Pasadas-Fernández, M., and Aschheim, M. (2008). Theorem of optimal reinforcement for reinforced concrete cross sections. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 36(5), 509-521.
- López-Martín, D., Gil-Martín, L. M., Hernández-Montes, E., and Aschheim, M. (2011). Dominios de deformación referidos a la excentricidad de cálculo para el diseño óptimo de secciones rectangulares solicitadas a flexo-compresión. *I<sup>st</sup> International Congress on Mechanical Models in Structural Engineering*, Granada. 93-106.
- Nawy, E. G. (2003). *Reinforced concrete: A fundamental approach* (5th ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.
- Saini, B., Sehgal, V. K., and Gambhir, M. L. (2007). Least-cost design of singly and doubly reinforced concrete beam using genetic algorithm optimized artificial neural network based on levenberg-marquardt and quasi-newton backpropagation learning techniques. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 34(3), 243-260.

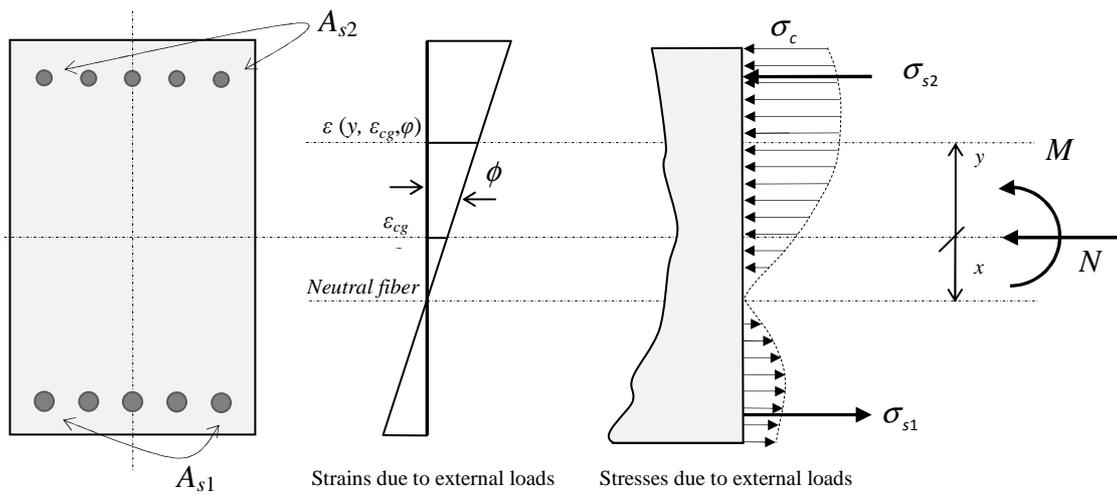


Fig. 1. Strains and stresses diagrams at cross-section level

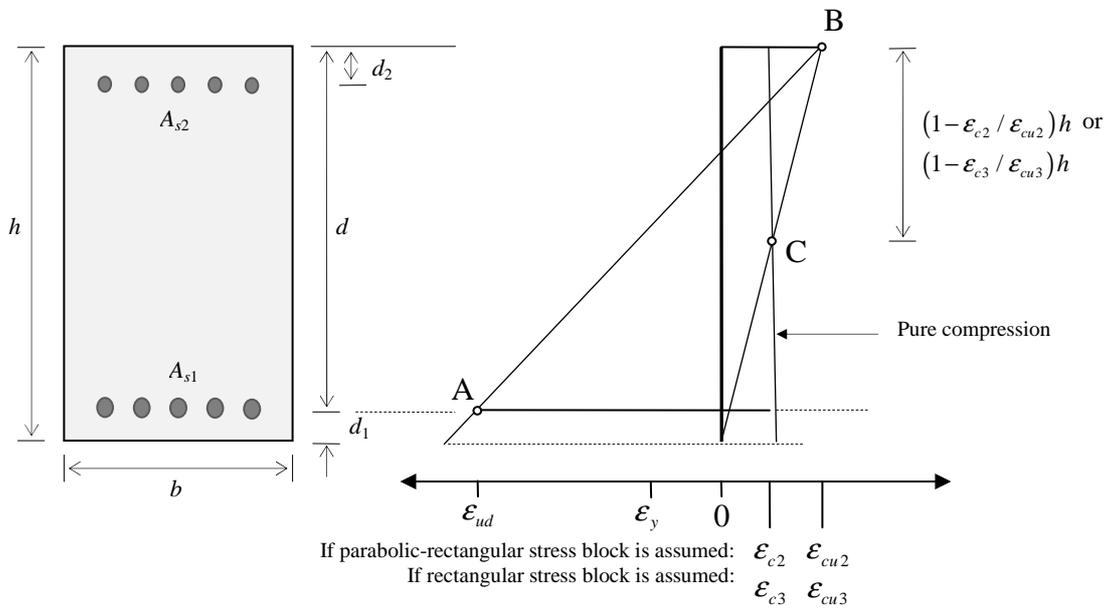


Fig. 2. Possible strain distributions in the ultimate limit state according to EC2

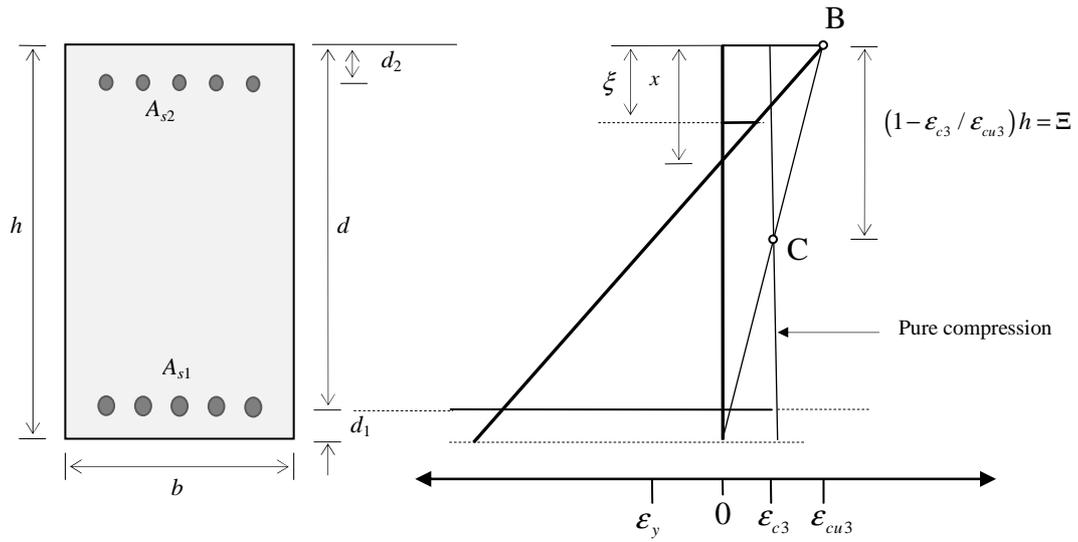


Fig. 3. Strain distributions in the ultimate limit state according to EC2 without steel strain hardening.

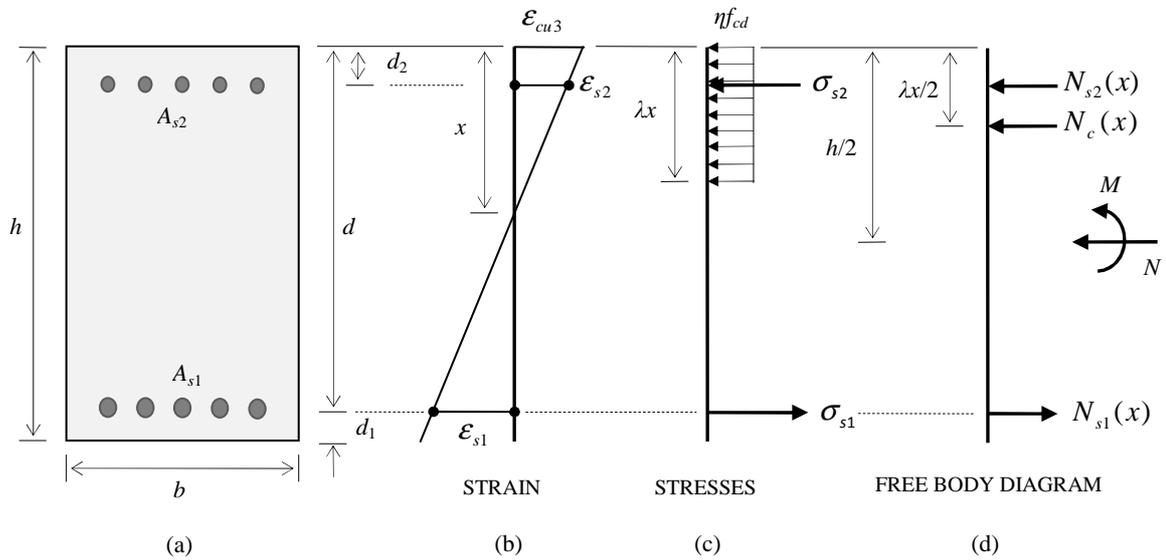


Fig. 4. Terms for ultimate strength analysis according to EC2

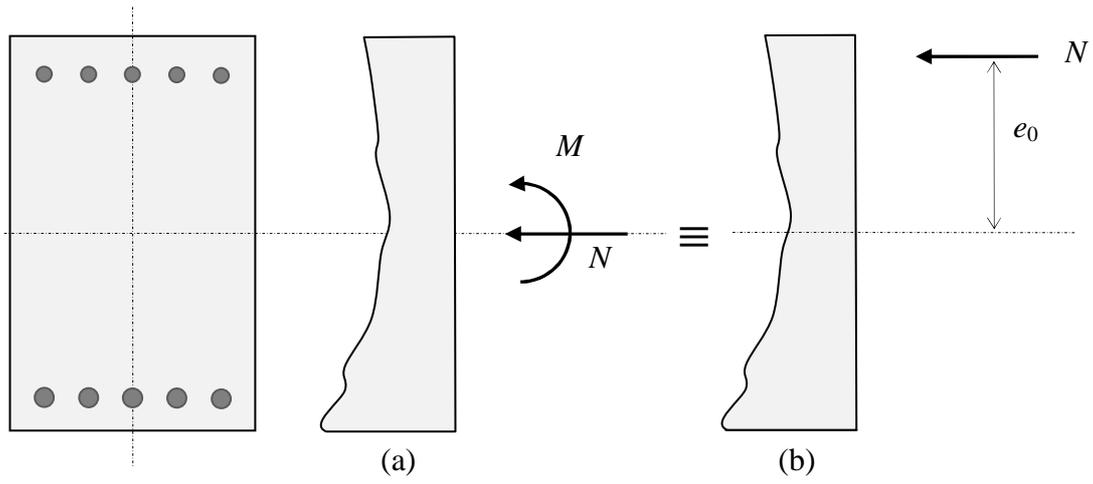


Fig. 5. Combined compression and in-plane flexion. Both systems, (a) and (b), are equivalent if  $e_0=M/N$

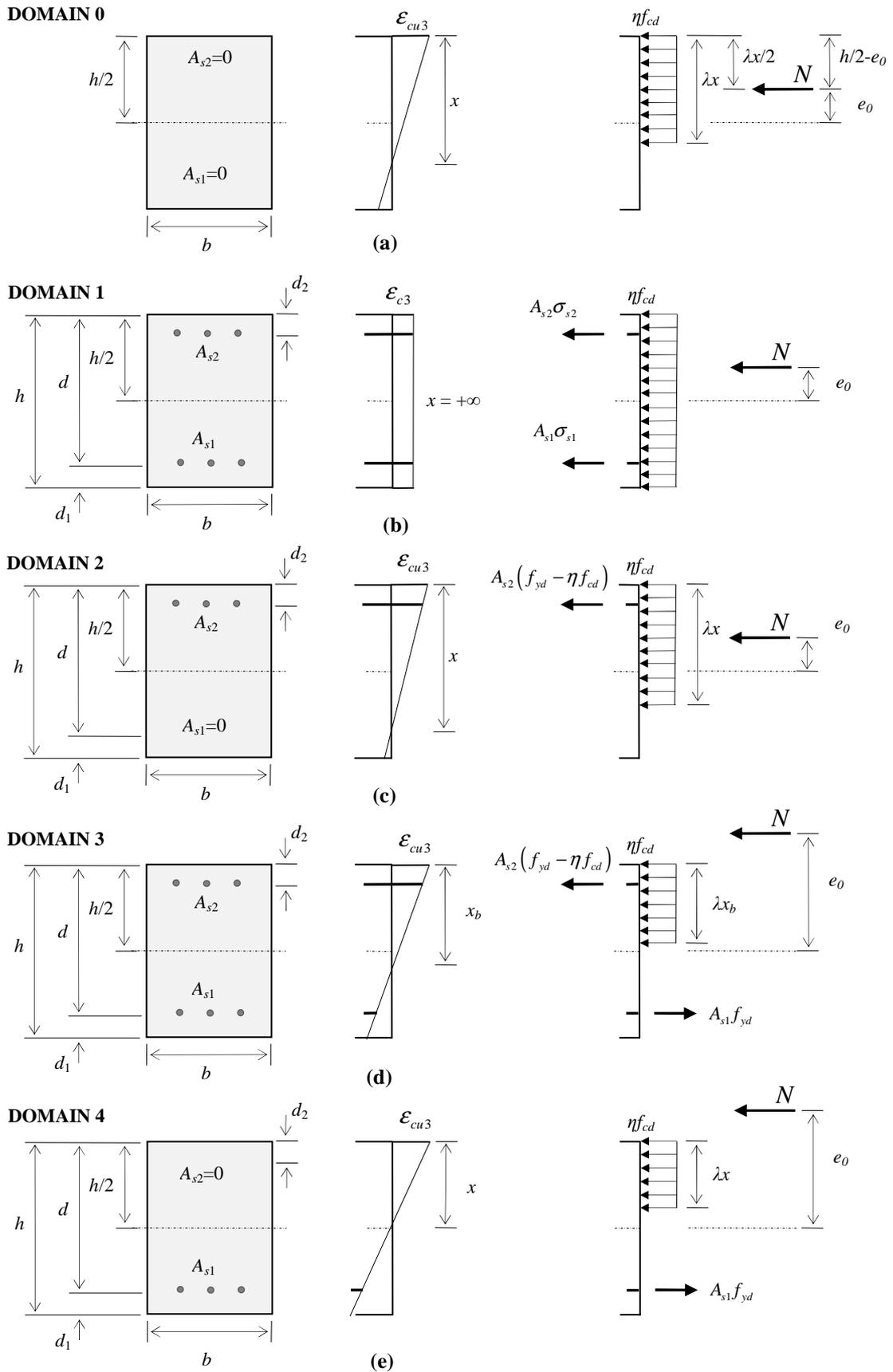


Fig. 6. Ultimate limit states with optimal reinforcement for rectangular RC cross-sections subject to combined compression and in-plane bending moment

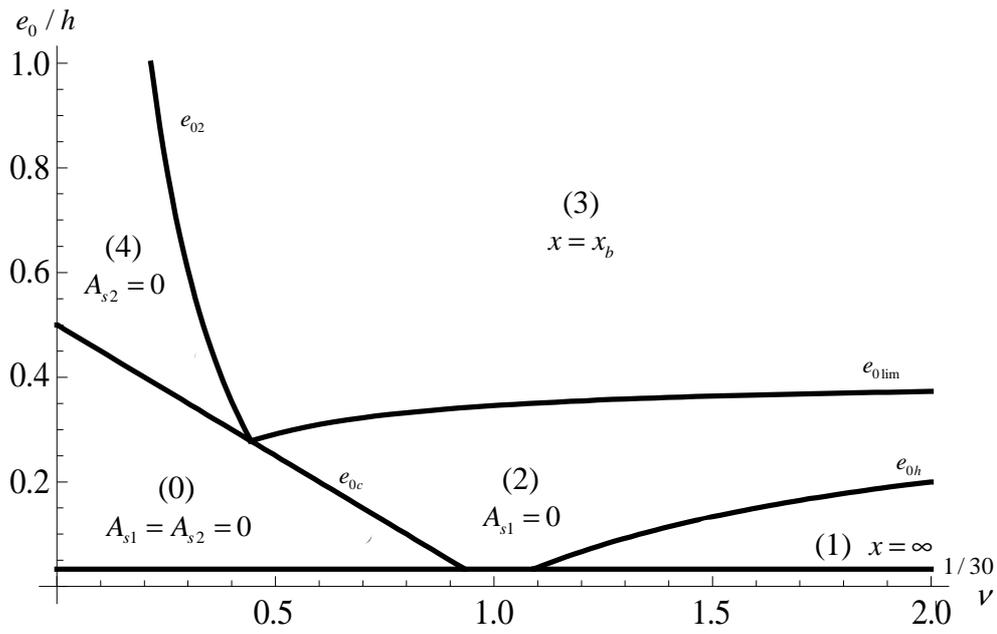


Fig. 7. Chart  $e_0/h - \nu$  with  $\nu = N/\eta f_{cd} h b$  corresponding to a rectangular RC cross section for steel B 500 S, and  $d_1 = d_2 = h/10$

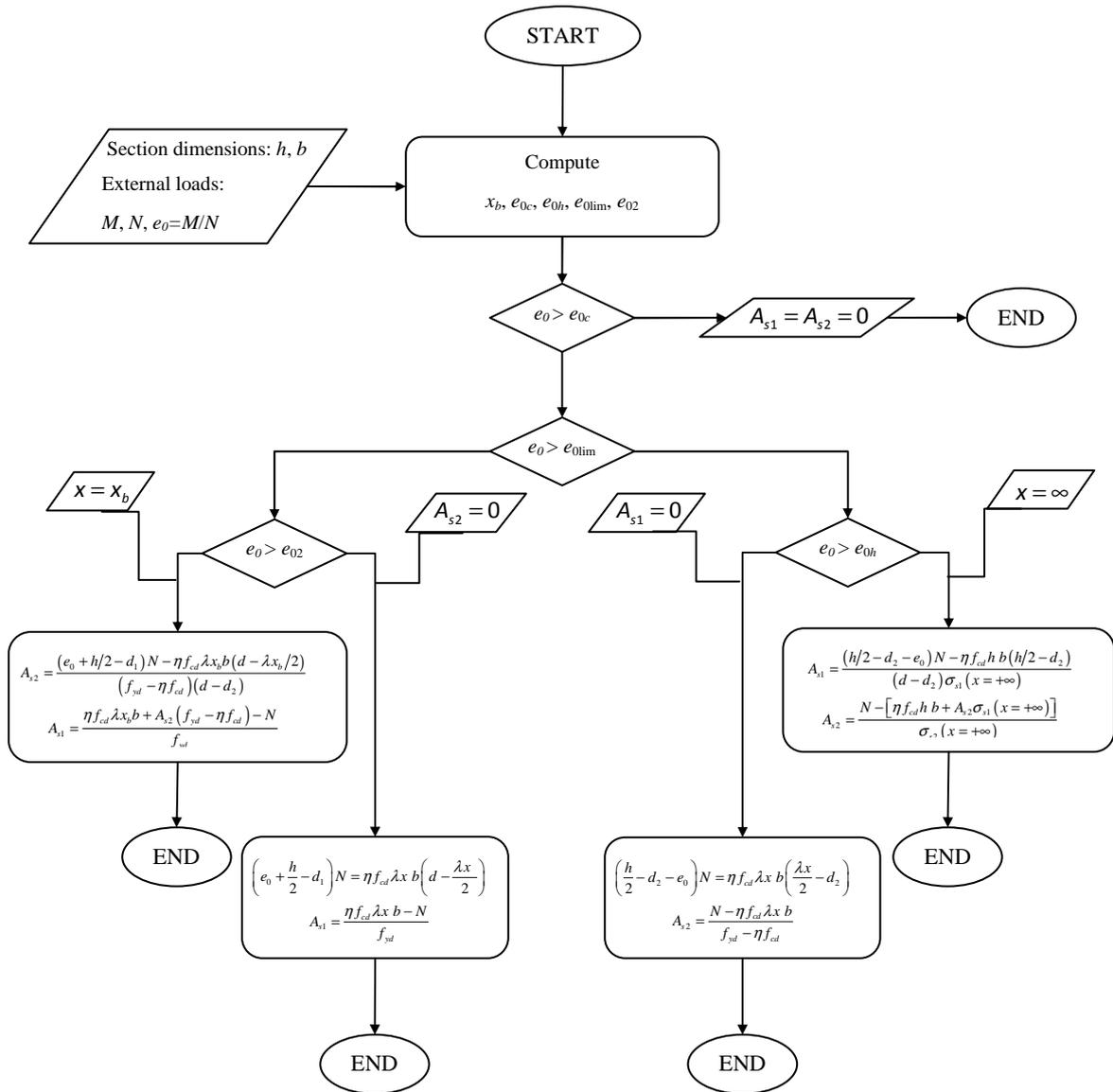


Fig. 8. Flow chart: eccentricity-based process to optimize rectangular RC cross-sections subject to combined compression and in-plane bending moment

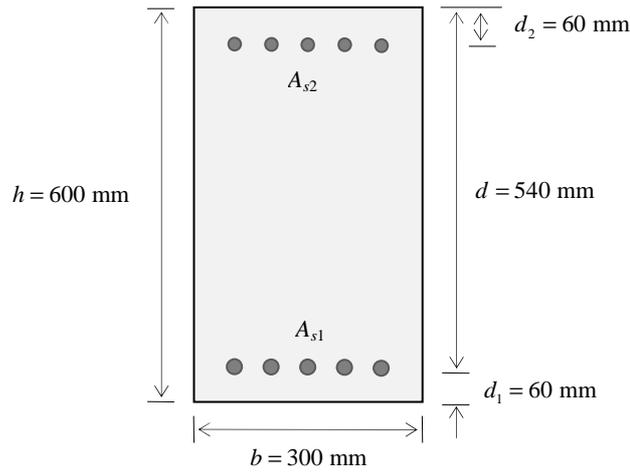


Fig. 9. Dimensions of the cross section.

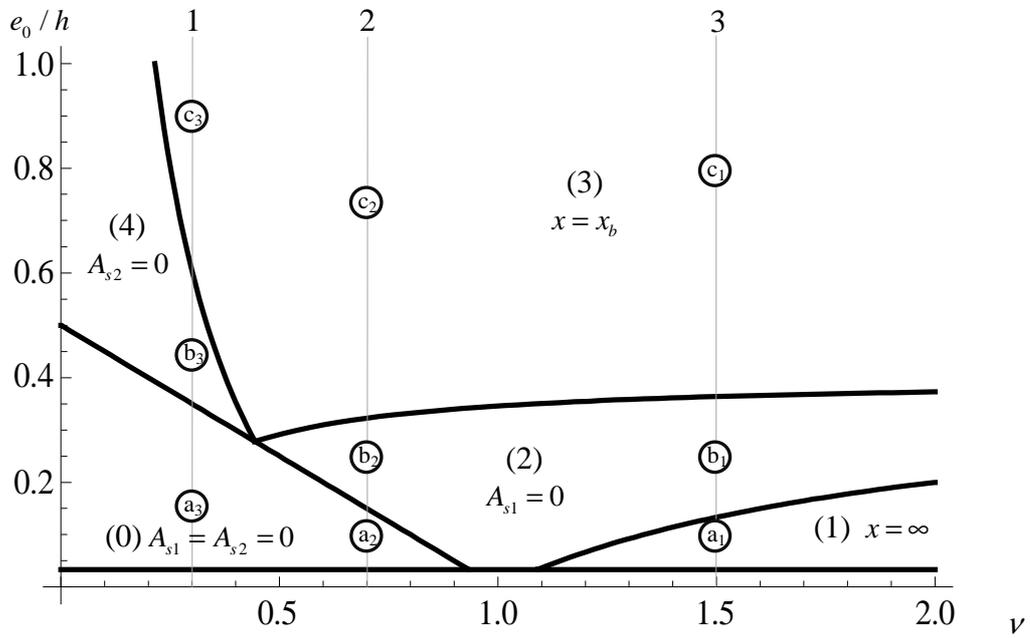


Fig. 10. Chart  $e_0/h - \nu$  with  $\nu = N/\eta f_{cd} h b$ , with B 500 S.

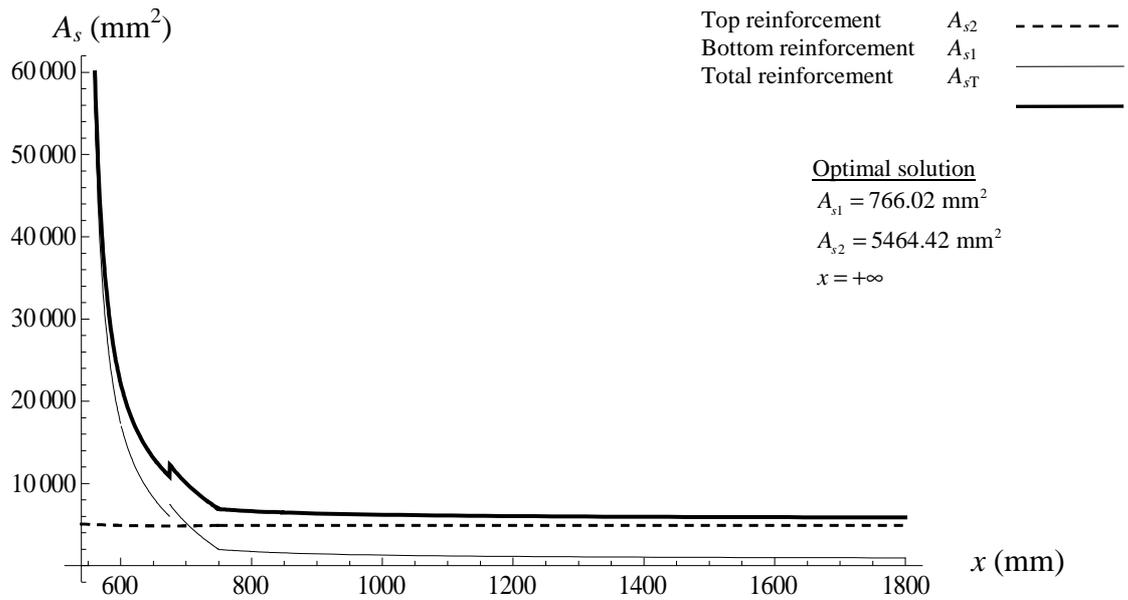


Fig. 11. RSD diagram for a point in segment  $a_1$  in Fig. 14:  $e_0 / h = 0.1$  &  $\nu = 1.5$ .

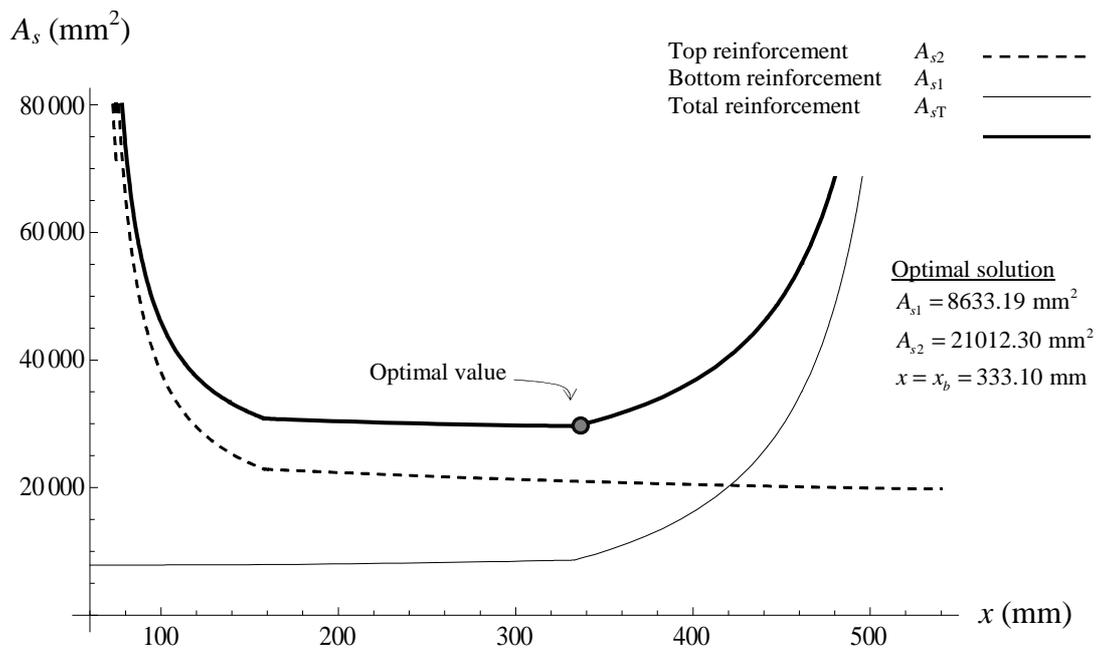


Fig. 12. RSD diagram for a point in segment  $c_1$  in Fig. 14:  $e_0 / h = 0.8$  &  $\nu = 1.5$ .

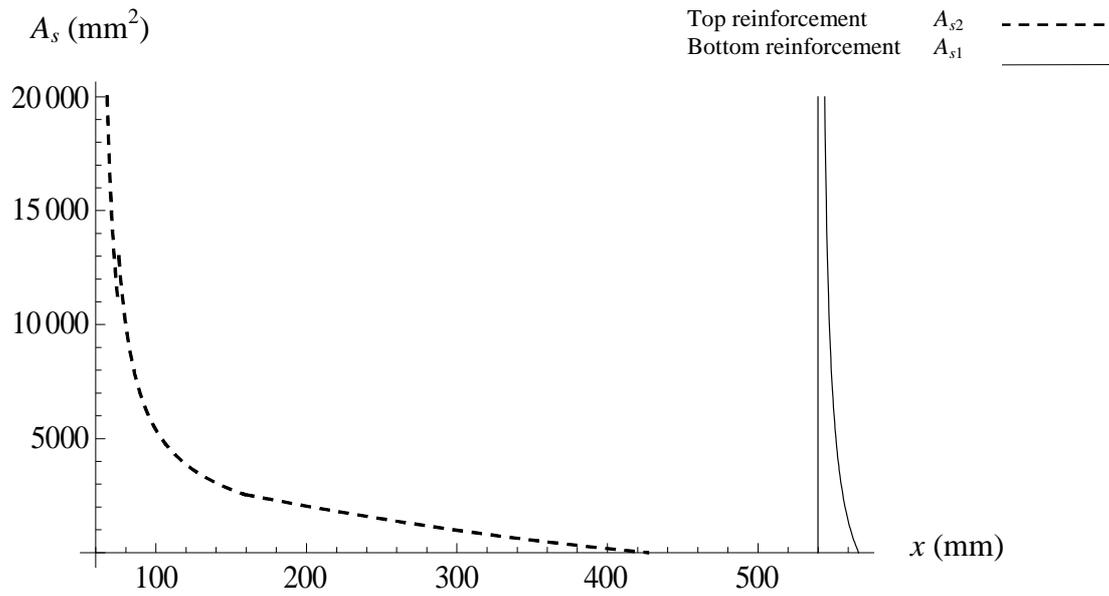


Fig. 13. RSD diagram for a point in segment  $a_2$  in Fig. 14:  $e_0 / h = 0.1$  &  $\nu = 0.7$ . Since either  $A_{s1}$  or  $A_{s2}$  are not positive for the same value of  $x$ , no solution is possible

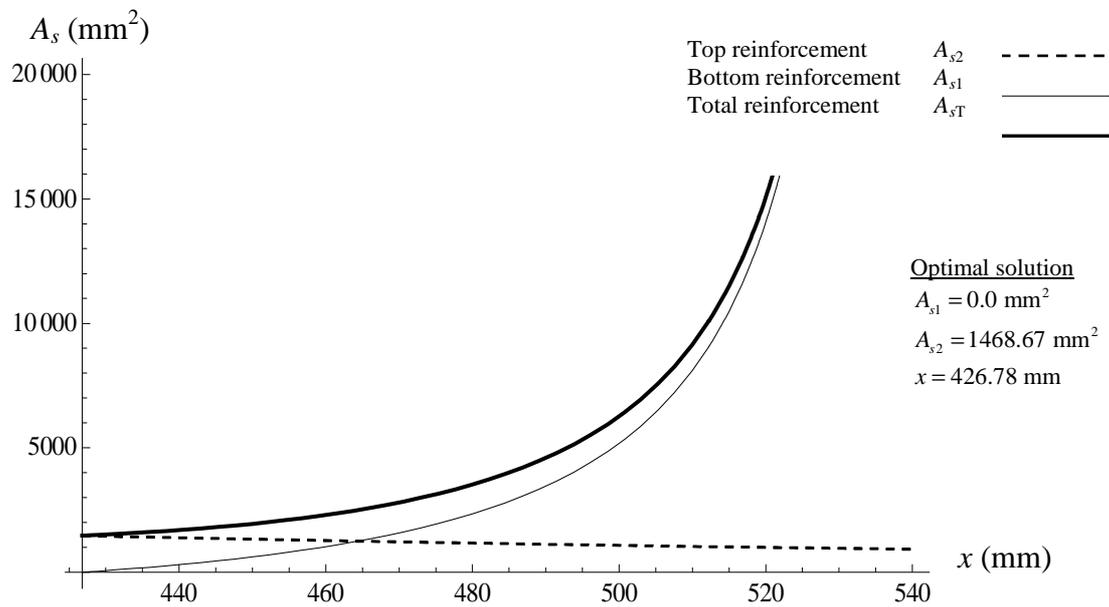


Fig. 14. RSD diagram for a point in segment  $b_2$  in Fig. 14:  $e_0 / h = 0.25$  &  $\nu = 0.7$

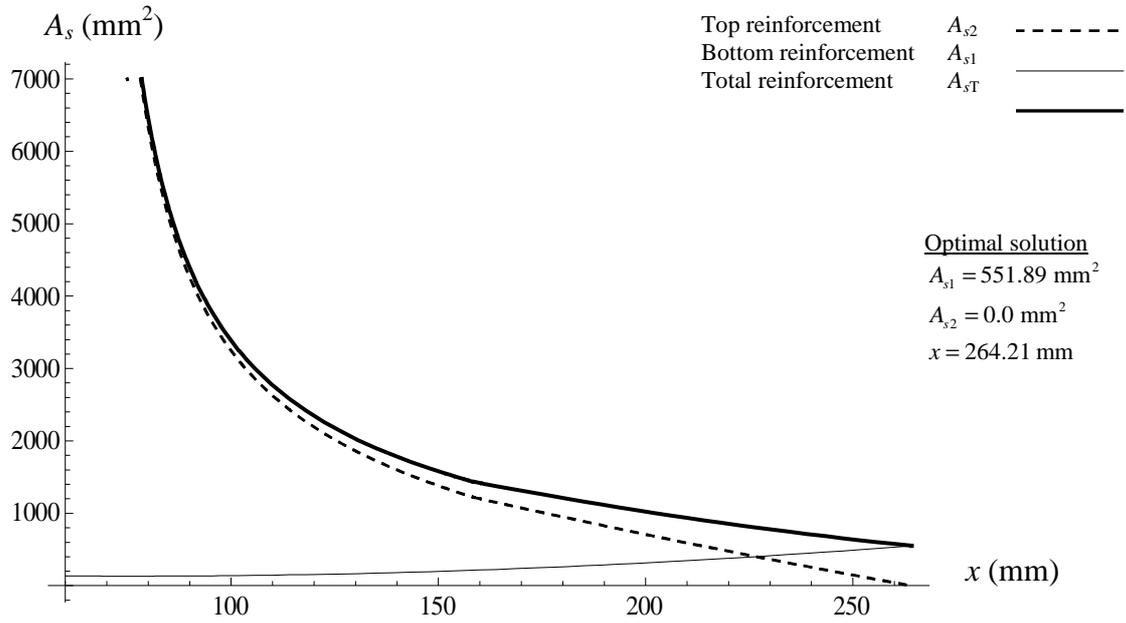


Fig. 15. RSD diagram for a point in segment  $b_3$  in Fig. 14:  $e_0 / h = 0.45$  &  $\nu = 0.3$

# **REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS**



---

**REFERENCIAS.**

- [1] García-Ortega M. (1959). Cálculo de secciones de hormigón armado. I.T.C. y C. Madrid.
- [2] García Meseguer A., Morán Cabré F. y Arroyo Portero (2009). Jiménez Montoya Hormigón Armado. Editorial Gustavo Gili. Barcelona.
- [3] Calavera J. (2008). Proyecto y cálculo de estructuras de hormigón en masa, armado y pretensado. Tomo 2. INTEMAC. Madrid.
- [4] Hernández-Montes, E., Gil-Martín L.M., Pasadas-Fernández M. y Aschheim M. (2008). "Theorem of optimal reinforcement for reinforced concrete sections". *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Vol 36. 509-521.
- [5] Whitney, C. S, y Cohen, E. (1956). "Guide for Ultimate Strength Design of Reinforced Concrete". *ACI Journal*, v. 28, No. 5, Nov. (Proceedings V.53), pp. 445-490.
- [6] Rodríguez Martín L.F. (1980). Curso de hormigón armado según la EH-80. C.O. de Arquitectos de Madrid. Servicio de publicaciones. Madrid.
- [7] Aschheim M, Hernández-Montes E. y Gil-Martín L. (2007). "Optimal domains for strength desing of rectangular sections for axial load and momento acoording Eurocode 2". *Engineering structures*, v. 29 pp. 1752-1760
- [8] Hernández-Montes, E., Gil-Martín L.M. y Aschheim M. (2005). "Design of concrete members subjected to uniaxial bending and compression using reinforcement sizing diagrams". *ACI Structural Journal*. Vol. Enero-Febrero. 150-158.
- [9] Ortiz Berrocal , L. (1991). "Resistencia de Materiales". Ed. McGraw-Hill

**NORMATIVA**

Instrucción de hormigón estructural (EHE-08). REAL DECRETO 1247/2008, de 18 de julio.

Eurocódigo 2 (EC-2): Proyecto de estructuras de hormigón EN 1992-1-1. Reglas generales y reglas para edificación

**OTRAS REFERENCIAS CONSULTADAS**

- Gil-Martín, L. M., López-Martín, D., Hernández-Montes, E., and Aschheim, M. (2012). Dimensionamiento en rotura a flexión de secciones de hormigón armado. Un planteamiento compacto. *Informes de la Construcción* (in press). doi 10.3989/ic.11050
- López-Martín, D., Gil-Martín, L. M., Hernández-Montes, E., and Aschheim, M. (2011). Dominios de deformación referidos a la excentricidad de cálculo para el diseño óptimo de secciones rectangulares solicitadas a flexo-compresión. *I<sup>st</sup> International Congress on Mechanical Models in Structural Engineering*, Granada. 93-106.
- Barros, A. F. M., Barros, M. H. F. M., and Ferreira, C. C. (2011). Optimal design of rectangular RC sections for ultimate bending strength. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, , 1-16.
- Gil-Martín y Hernández-Montes E. (2007). Hormigón Armado y Pretensado. Concreto reforzado y preesforzado. <http://www.ugr.es/~emontes/prensa/HormigonEstructural.pdf>
- Saini, B., Sehgal, V. K., and Gambhir, M. L. (2007). Least-cost design of singly and doubly reinforced concrete beam using genetic algorithm optimized artificial neural network based on levenberg-marquardt and quasi-newton backpropagation learning techniques. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 34(3), 243-260.
- Barros, M. H. F. M., Martins, R. A. F., and Barros, A. F. M. (2005). Cost optimization of singly and doubly reinforced concrete beams with EC2-2001. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 30(3), 236-242.
- Hernández-Montes, E., Aschheim, M., and Gil-Martín, L. M. (2004). Impact of optimal longitudinal reinforcement on the curvature ductility capacity of reinforced concrete column sections. *Magazine of Concrete Research*, 56(9), 499-512.
- Nawy, E. G. (2003). *Reinforced concrete: A fundamental approach* (5th ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.
- Ceranic, B., and Fryer, C. (2000). Sensitivity analysis and optimum design curves for the minimum cost design of singly and doubly reinforced concrete beams. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 20(4), 260-268.
- Guzmán-Castaños M. (1989). Cálculo de Hormigón armado.

# INDICE



# INDICE

## DOMINIOS DE ARMADO ÓPTIMO PARA SECCIONES RECTANGULARES SOLICITADAS A FLEXO-COMPRESIÓN. APLICACIÓN A LA REDISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS..

INTRODUCCIÓN.	1
EL PROBLEMA DE DISEÑO.	3
DISEÑO DE SECCIONES RECTANGULARES.	8
DIAGRAMA “AXIL – EXCENTRICIDAD” DE DOMINIOS DE ARMADO ÓPTIMO.	26
OTROS MÉTODOS DE CALCULO.	28
PIEZAS CON ARMADO SIMÉTRICO.	33
CONSIDERACIONES SOBRE LA CURVATURA.	38
SOBRE LOS TIPOS DE ANALISIS ESTRUCTURAL.	43
LA REDISTRIBUCION DE ESFUERZOS EN LA NORMATIVA.	45
ARMADO DE SECCIONES CON DUTILIDAD SUFICIENTE PARA LA REDISTRIBUCIÓN.	49
LA REDISTRIBUCIÓN EN LOS DIAGRAMAS DE ARMADO ÓPTIMO.	51
DIAGRAMA “AXIL–EXCENTRICIDAD” DE DOMINIOS DE ARMADO ÓPTIMO DE SECCIONES CON REDISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS.	55
CONCLUSIONES.	61
ANEXO I.	
Script en Mathematica para el cálculo de secciones solicitadas a flexo-compresión.	65
ANEXO II.	
Script en Mathematica para el cálculo de secciones solicitadas a flexo-compresión con esfuerzos redistribuidos.	71
ANEXO III.	
Diagramas de armado óptimo	77
ANEXO IV.	
Diagramas de armado óptimo para secciones con redistribución	83
ANEXO V.	
Artículo en revisión enviado a Structural and Multidisciplinary Optimization (SMO).	89