

SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE EN  
ESPACIOS HOMOGÉNEOS

JOSÉ MIGUEL MANZANO PREGO



Departamento de Geometría y Topología  
Universidad de Granada

TESIS DOCTORAL  
Granada – Junio 2012

José Miguel Manzano Prego. *Superficies de curvatura media constante en espacios homogéneos* © Junio 2012

DIRECTORES DE TESIS:

Joaquín Pérez Muñoz

M. Magdalena Rodríguez Pérez

*La ciencia se construye con verdades  
tal y como una casa se construye con piedras.  
Sin embargo, una colección de verdades tiene de ciencia  
lo que un cúmulo de piedras tiene de casa.*

— Henri Poincaré

A mis padres, que hicieron posible todo;  
a Ana, que siempre me dio fuerzas;  
a Paco, que me enseñó a hacer cuentas;  
a Joaquín y Magdalena, por su voluntad y dedicación.



SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE EN  
ESPACIOS HOMOGÉNEOS

Memoria presentada por el Licenciado José Miguel Manzano Prego,  
aspirante al grado de Doctor en Matemáticas, realizada en el Departamento  
de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, bajo la dirección  
de Joaquín Pérez Muñoz y María Magdalena Rodríguez Pérez.

Granada, 9 de mayo de 2012

Dr. D. Joaquín Pérez Muñoz  
Catedrático de Universidad  
Director de Tesis

Dra. M<sup>a</sup>. Magdalena Rodríguez Pérez  
Investigadora Ramón y Cajal  
Directora de Tesis

José Miguel Manzano Prego  
Licenciado en Matemáticas  
Aspirante al grado de Doctor.

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Editor: Editorial de la Universidad de Granada  
Autor: José Miguel Manzano Prego  
D.L.: GR 71-2013  
ISBN: 978-84-9028-269-4



## PUBLICACIONES

---

Las ideas desarrolladas en la presente memoria han dado lugar a las siguientes publicaciones científicas:

1. José M. Manzano. *On the classification of Killing submersions and their isometries*. Prepublicación, 2012.
2. José M. Manzano. *Estimates for constant mean curvature graphs in  $M \times \mathbb{R}$* . Prepublicación, 2010. Copia disponible en arXiv:1006.5683v1 [math.DG].
3. José M. Manzano y Francisco Torralbo. *New examples of constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  and  $S^2 \times \mathbb{R}$* . Prepublicación, 2011. Copia disponible en arXiv:1104.1259v3 [math.DG]
4. José M. Manzano y Magdalena Rodríguez. *On complete vertical multi-graphs in  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$* . Prepublicación, 2012.
5. José M. Manzano, Joaquín Pérez y Magdalena Rodríguez. *Parabolic stable surfaces with constant mean curvature*. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* **42**(1-2), pp. 137–152, 2011.

La numeración anterior coincide con los capítulos de la memoria en que se han desarrollado las ideas correspondientes.





# ÍNDICE GENERAL

---

INTRODUCCIÓN	1
<b>I PRELIMINARES</b>	<b>19</b>
<b>1 SUBMERSIONES DE KILLING</b>	<b>21</b>
1.1 Propiedades riemannianas básicas . . . . .	21
1.1.1 Resultados de estructura local . . . . .	24
1.1.2 Curvatura del espacio total una submersión de Killing . . . . .	28
1.2 Clasificación de las submersiones de Killing . . . . .	29
1.2.1 Levantamientos legendrianos . . . . .	30
1.2.2 Submersiones de Killing con cartas globales . . . . .	32
1.2.3 Submersiones de Killing sobre $S^2(\kappa)$ . . . . .	34
1.3 Geodésicas e isometrías . . . . .	38
1.4 Espacios homogéneos y submersiones de Killing . . . . .	45
1.4.1 Espacios producto . . . . .	47
1.4.2 El espacio de Heisenberg . . . . .	49
1.4.3 El grupo especial lineal . . . . .	50
1.4.4 Las esferas de Berger . . . . .	51
1.4.5 Simetrías respecto de rectas y planos . . . . .	52
1.5 Superficies en submersiones de Killing . . . . .	53
1.5.1 Cilindros verticales . . . . .	54
1.5.2 Grafos y multigrafos verticales . . . . .	55
1.5.3 Un teorema nodal para grafos verticales . . . . .	58
<b>II SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE</b>	<b>61</b>
<b>2 ESTIMACIONES PARA GRAFOS DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE EN <math>M \times \mathbb{R}</math></b>	<b>63</b>
2.1 Superficies invariantes en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $S^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	63
2.1.1 Superficies de rotación en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $S^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	64
2.1.2 Superficies de traslación hiperbólica en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	66
2.1.3 Superficies de traslación parabólica en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	70
2.2 Estimaciones de curvatura en la frontera . . . . .	71
2.2.1 Estimaciones generales . . . . .	73
2.2.2 Estimaciones con restricciones en la altura . . . . .	76
2.2.3 El caso no compacto . . . . .	80
2.3 Estimaciones de distancia al borde . . . . .	82

3	CONSTRUCCIONES DE PLATEAU CONJUGADAS	85
3.1	La correspondencia de Daniel	86
3.1.1	Correspondencia entre curvas	87
3.1.2	Correspondencia entre simetrías	90
3.2	Superficies hermanas de los helicoides esféricos	91
3.3	Resolución del problema de Plateau	95
3.4	Superficies de tipo unduloide en $S^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	100
3.4.1	Construcción de la pieza minimal	100
3.4.2	Propiedades de la superficie conjugada	104
3.5	Superficies de curvatura media $1/2$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	108
4	GRAFOS Y MULTIGRAFOS VERTICALES EN $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$	115
4.1	El caso $4H^2 + \kappa \geq 0$	116
4.2	El caso $4H^2 + \kappa < 0$	118
4.2.1	Comportamiento asintótico	119
4.2.2	El multigrafo es un grafo	122
	<b>III ESTABILIDAD</b>	129
5	ESTABILIDAD DE SUPERFICIES PARABÓLICAS CON CURVATURA MEDIA CONSTANTE	131
5.1	El operador $\Delta + q$	133
5.2	Superficies estables de curvatura media constante	137
5.3	Aplicación al estudio de grafos horizontales en $\text{Nil}_3$	141
	SUMMARY AND CONCLUSIONS	145
	BIBLIOGRAFÍA	161

## INTRODUCCIÓN

---

El estudio de las superficies minimales y de curvatura media constante en el espacio euclídeo es una rama de la geometría diferencial cuyos orígenes se remontan al siglo XVII, cuando L. Lagrange usó técnicas variacionales para buscar superficies en  $\mathbb{R}^3$  que minimizan el área de entre todas las superficies con una frontera prefijada. De esta forma, descubrió la ecuación de los grafos minimales y, desde entonces, muchos matemáticos de renombre han trabajado con este tipo de superficies y estudiado algunas de sus propiedades más profundas. No obstante, muchos problemas en esta teoría permanecen aún abiertos.

El concepto de superficie de curvatura media constante  $H \in \mathbb{R}$  (H-superficie en lo sucesivo) se extendió, como punto crítico del funcional Área  $- 2H \cdot$  Volumen, a cualquier 3-variedad riemanniana y ha sido objeto de un estudio intensivo durante los últimos tiempos. Sin embargo, resulta que cuanto más simétrica es la variedad ambiente, la teoría de superficies se vuelve más rica e interesante. Los espacios más simétricos son aquéllos cuyo grupo de isometrías actúa de forma transitiva sobre ellos y se conocen como *espacios homogéneos*. Observemos que, para cada  $\kappa \in \mathbb{R}$ , la 3-variedad simplemente conexa con curvatura seccional constante  $\kappa$ , que denotaremos por  $\mathbb{M}^3(\kappa)$ , se incluye entre ellos y su grupo de isometrías es de dimensión 6 (éste actúa de forma transitiva sobre el fibrado tangente). Si relajamos esta condición de isotropía y consideramos solamente homogeneidad, en el caso simplemente conexo estas variedades también están clasificadas: cualquiera de ellas es isométrica a un grupo de Lie de dimensión 3 dotado de una métrica invariante a izquierda, salvo los productos riemannianos  $S^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ , para  $\kappa > 0$ , que no admite tal estructura de grupo de Lie (cf. [MP11, Theorem 2.4]).

Dejando a un lado  $\mathbb{M}^3(\kappa)$  para  $\kappa \in \mathbb{R}$ , los espacios homogéneos simplemente conexos más simétricos son aquéllos cuyo grupo de isometrías tiene dimensión 4 y vienen dados en una familia 2-paramétrica  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , donde  $\kappa, \tau \in \mathbb{R}$  y  $\kappa \neq 4\tau^2$  (cf. [Dano7]). Éstos consisten en los productos riemannianos  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ , donde  $\mathbb{M}^2(\kappa)$  es la superficie simplemente conexa de curvatura de Gauss constante  $\kappa \in \mathbb{R}$ , el espacio de Heisenberg  $\text{Nil}_3$ , el recubridor universal del grupo especial lineal  $\text{Sl}_2(\mathbb{R})$  con una métrica invariante a izquierda especial y las esferas de Berger  $S_b^3$ . Es bien sabido que  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  admite una submersión riemanniana sobre  $\mathbb{M}^2(\kappa)$  con curvatura del fibrado constante  $\tau$  y cuyas fibras son las curvas integrales de un campo de Killing

unitario en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Las superficies de curvatura media constante en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  han sido un área de investigación muy activa durante la última década; por ejemplo, resaltamos el descubrimiento de una diferencial cuadrática holomorfa (cf. [AR04, AR05]) que llevó a la solución del problema de Hopf (es decir, la clasificación de las esferas de curvatura media constante) en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  (véase también [ER09]), o la correspondencia isométrica de tipo Lawson entre superficies de curvatura media constante pertenecientes a (posiblemente distintos) espacios  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  (cf. [Dan07, Theorem 5.2]). Para una recopilación de resultados en la teoría de superficies de curvatura media constante en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , el lector también puede seguir [DHMo9].

Las 3-variedades que admiten una submersión riemanniana  $\pi$  sobre una superficie de forma que las fibras son curvas integrales de un campo de Killing unitario (y completo) sobre el espacio total se conocen como *submersiones de Killing*. Este concepto son una generalización natural de los espacios  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  así como de los productos riemannianos  $M \times \mathbb{R}$ , donde  $M$  es una superficie cualquiera. El estudio de las superficies de curvatura media constante en submersiones de Killing es un tema cuyo interés ha crecido durante los últimos años (véase, por ejemplo, [DL07, DL08, EO10, LR09, RST09]). En esta memoria, obtendremos algunos resultados sobre superficies de curvatura media constante tanto en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  como en  $M \times \mathbb{R}$ . Por tanto, comenzaremos estudiando en detalle la geometría de una submersión de Killing.

#### SUBMERSIONES DE KILLING

Dada una submersión de Killing  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$ , donde  $\mathbb{E}$  es una 3-variedad riemanniana orientable y  $M$  una superficie riemanniana, tomemos  $\xi$  un campo de Killing unitario cuyas curvas integrales son las fibras de  $\pi$ . La *curvatura del fibrado* está definida como la única función  $\tau \in C^\infty(\mathbb{E})$  cumpliendo

$$\bar{\nabla}_X \xi = \tau X \wedge \xi,$$

(véase el lema 1.2) para cualquier  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{E})$ . La curvatura del fibrado es constante a lo largo de las fibras de la submersión, luego induce una función diferenciable  $\tau \in C^\infty(M)$ . Por otro lado, probaremos que todas las fibras son geodésicas y tienen la misma longitud (finita o infinita), siempre que la superficie  $M$  sea conexa (véase el lema 1.5). Estos resultados se siguen de forma sencilla usando el grupo uniparamétrico de isometrías generado por  $\xi$ , isometrías que llamaremos *traslaciones verticales* en lo que sigue.

En pos de un resultado de clasificación de submersiones de Killing, observamos que  $\tau$  determina localmente la geometría de la submersión (véase el lema 1.9), pero en el proceso de globalización aparecen dificultades to-

pológicas. Más explícitamente, debemos tratar con la posibilidad de que no existan secciones globales del fibrado y con el hecho de que el cociente riemanniano por ciertas translaciones verticales vuelve a ser una submersión de Killing sobre la misma superficie y la misma curvatura del fibrado. En el caso  $M = \mathbb{M}^2(\kappa)$  superaremos fácilmente estas dificultades y probaremos el siguiente resultado (véanse los teoremas 1.13 y 1.16). Notemos que un *isomorfismo* de submersiones de Killing es un par de isometrías, una entre las bases y otra entre los espacios totales, que conmutan con las proyecciones.

Dados  $\kappa \in \mathbb{R}$  y  $\tau \in C^\infty(\mathbb{M}^2(\kappa))$ , existe una submersión de Killing sobre  $\mathbb{M}^2(\kappa)$  con curvatura del fibrado  $\tau$ . Además, si  $\mathbb{E}$  es simplemente conexo, la submersión es única salvo isomorfismo.

- En el caso  $\kappa \leq 0$ , definamos  $\mathbb{D}(2/\sqrt{\kappa}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |\kappa|(x^2 + y^2) \leq 4\}$ . Entonces, la submersión de Killing es isomorfa a la proyección sobre el primer factor

$$\pi : (\mathbb{D}(2/\sqrt{\kappa}) \times \mathbb{R}, ds^2) \rightarrow (\mathbb{D}(2/\sqrt{\kappa}), ds_\kappa^2),$$

donde las métricas  $ds^2$  y  $ds_\kappa^2$  están dadas por

$$\begin{aligned} ds^2 &= \lambda(x, y)^2 (dx^2 + dy^2) + (dz + \eta(x, y)(y dx - x dy))^2, \\ ds_\kappa^2 &= \lambda_\kappa(x, y)^2 (dx^2 + dy^2), \end{aligned}$$

y las funciones  $\lambda, \eta \in C^\infty(\mathbb{D}(2/\sqrt{\kappa}))$  por

$$\begin{aligned} \lambda_\kappa(x, y) &= \left(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)\right)^{-1}, \\ \eta(x, y) &= 2 \int_0^1 s \cdot \tau(xs, ys) \cdot \lambda_\kappa(xs, ys)^2 ds. \end{aligned}$$

- En el caso  $\kappa > 0$ , consideremos  $T = \int_{S^2(\kappa)} \tau$  y distingamos dos subcasos.
  - Si  $T = 0$ , entonces la submersión de Killing es isomorfa a la proyección sobre el primer factor  $\pi : S^2(\kappa) \times \mathbb{R} \rightarrow S^2(\kappa)$ , donde tomamos el modelo

$$S^2 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

dotado de la restricción de la métrica riemanniana en  $\mathbb{R}^4$  dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + (dt - a dx - b dy - c dz)^2$$

para ciertas funciones  $a, b, c \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$  que no dependen de la cuarta variable  $t$ . En particular, las fibras tienen longitud infinita,  $\partial_t$  es el campo de Killing unitario y la curvatura del fibrado está dada por

$$\tau = \frac{\sqrt{\kappa}}{2} ((yc - zb)_x + (za - xc)_y + (xb - ya)_z).$$

- Si  $\tau \neq 0$ , entonces la submersión de Killing es isomorfa a la fibración de Hopf

$$\pi: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2(\kappa), \quad \pi(z, w) = \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \left( z\bar{w}, \frac{1}{2}(|z|^2 - |w|^2) \right),$$

para cierta métrica riemanniana en  $\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$  para la que el campo de Killing vertical está dado por  $\frac{\kappa}{4T}(iz, iw)$ . Además, las fibras tienen longitud  $|2T|$ .

En particular, caracterizaremos los espacios homogéneos  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  como las únicas 3-variedades simplemente conexas que admiten una estructura de submersión de Killing con curvatura del fibrado constante. También los caracterizaremos como los únicos espacios homogéneos 3-dimensionales que admiten una estructura de submersión de Killing. Notemos que los productos Riemannianos  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  se corresponden con la elección  $\tau = 0$ .

Es interesante observar lo bien que se relacionan las geometrías de  $M$  y  $\mathbb{E}$  en una submersión de Killing  $\pi: \mathbb{E} \rightarrow M$ , y las geodésicas e isometrías son ejemplos de esta buena relación. En lo que respecta a las geodésicas de  $\mathbb{E}$ , estas pueden dividirse en tres familias distintas; a saber, geodésicas verticales (fibras de la submersión), geodésicas horizontales (levantamiento horizontal de geodésicas de  $M$ ) y aquellas que no son verticales ni horizontales, que forman un ángulo constante con la dirección vertical y cuya proyección sobre  $M$  está determinada (véase la proposición 1.22). En lo que a las isometrías se refiere, obtendremos el siguiente resultado que clasifica completamente las isometrías de  $\mathbb{E}$  que preservan la dirección vertical y que llamaremos *isometrías de Killing* (véase el teorema 1.27).

Sea  $\pi: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$  una submersión de Killing con  $\mathbb{E}$  simplemente conexo y curvatura del fibrado  $\tau \in C^\infty(\mathbb{M}^2(\kappa))$ .

- a) Dada una isometría de Killing  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ , existe una única isometría  $h: \mathbb{M}^2(\kappa) \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$  tal que  $\pi \circ f = h \circ \pi$ . Además,  $\tau \circ h = \tau$  si  $f$  conserva la orientación de  $\mathbb{E}$  y  $\tau \circ h = -\tau$  si invierte dicha orientación.

En particular, si  $\tau$  es una constante no nula, no existen isometrías de  $\mathbb{E}$  que inviertan la orientación.

b) Sea  $h : \mathbb{M}^2(\kappa) \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$  una isometría y sean  $p_0, q_0 \in \mathbb{E}$  tales que  $h(\pi(p_0)) = \pi(q_0)$ .

- Si  $h \circ \tau = \tau$ , entonces existe una única isometría de Killing  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  que preserva la orientación de  $\mathbb{E}$  tal que  $\pi \circ f = h \circ \pi$  y  $f(p_0) = q_0$ .
- Si  $h \circ \tau = -\tau$ , entonces existe una única isometría de Killing  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  que invierte la orientación de  $\mathbb{E}$  tal que  $\pi \circ f = h \circ \pi$  y  $f(p_0) = q_0$ .

Esta construcción, que puede entenderse como levantamiento de isometrías, nos da un homomorfismo sobreyectivo entre el grupo de isometrías de Killing en  $\mathbb{E}$  y el grupo de isometrías de  $\mathbb{M}^2(\kappa)$  que conservan  $\tau$  o bien la llevan en  $-\tau$ . El núcleo de este homomorfismo es el subgrupo de isometrías de  $\mathbb{E}$  que dejan cada fibra invariante (esto es, el formado por las translaciones verticales y, en el caso  $\tau = 0$ , también por las simetrías respecto de secciones horizontales). Observemos que este resultado de una prueba alternativa del hecho de que el grupo de isometrías del espacio homogéneo  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  tiene dimensión 4.

Si nos centramos ahora en la teoría de superficies en una submersión de Killing  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$ , estudiaremos dos familias que jugarán un papel importante en el desarrollo del resto de esta memoria: los cilindros verticales, es decir, la preimagen por  $\pi$  de una curva  $\alpha$  en  $M$ , cuya geometría está totalmente determinada por la de la curva  $\alpha$  (véase el lema 1.34), y los multigrafos verticales. Éstos últimos se definen como superficies que son transversas al campo de Killing vertical  $\xi$  (equivalentemente, superficies cuya función ángulo  $\nu = \langle N, \xi \rangle$  no se anula, siendo  $N$  un vector normal unitario a la superficie) y pueden ser estudiadas localmente en forma paramétrica. Más explícitamente, dada una sección local diferenciable del fibrado,  $F_0 : V \subset M \rightarrow \mathbb{E}$  y una función suficientemente regular  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ , el grafo asociado a  $u$  respecto de  $F_0$  es la superficie parametrizada por

$$F_u : V \rightarrow \mathbb{E}, \quad F_u(p) = \phi_{u(p)}(F_0(p)),$$

donde  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  es el grupo uniparamétrico de translaciones verticales. Su curvatura media  $H(u)$  puede escribirse en forma de divergencia como

$$H(u) = \frac{1}{2} \operatorname{div}_M \left( \frac{Gu}{\sqrt{1 + \|Gu\|_M^2}} \right),$$



donde  $Gu = \nabla_M u - \pi_*(\nabla_{\mathbb{E}} d) \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $d : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  es la distancia vertical orientada (esto es, la longitud sobre la fibra) en  $\mathbb{E}$  a la sección inicial  $F_0$  y  $\nabla_{\mathbb{E}}$  es el gradiente en  $\mathbb{E}$  (véase también [LR09]). No es difícil ver que  $H$  es un operador cuasilineal elíptico de segundo orden y, en consecuencia, dos funciones  $u$  y  $v$  definidas sobre el mismo dominio con  $H(u) = H(v)$  satisfacen un principio del máximo y, de forma más general, un teorema nodal que describe localmente la intersección de los correspondientes grafos cerca de un punto de intersección (véase el teorema 1.39).

#### ESTIMACIONES DE CURVATURA DE LA FRONTERA EN $M \times \mathbb{R}$

El objeto principal de los capítulos 2, 3 y 4 es el estudio de multigrafos de curvatura media constante  $\Sigma$  en  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ . En el capítulo 2, nos centraremos en los grafos de curvatura media constante en los productos  $M \times \mathbb{R}$ , donde  $M$  es una superficie riemanniana arbitraria. Recordemos que la proyección sobre el primer factor es una submersión de Killing con curvatura del fibrado nula y que el campo de Killing unitario es  $\partial_t$ , donde  $t$  es la coordenada en el factor  $\mathbb{R}$  (éstos incluyen a los espacios homogéneos  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  y  $S^2 \times \mathbb{R}$ ). El estudio de superficies minimales y de curvatura media constante en  $M \times \mathbb{R}$  ha tenido bastante interés durante los últimos años (véanse, por ejemplo, [Ros02, MR04, MR05]).

Empezaremos estudiando grafos de curvatura media constante  $\Sigma \subset M \times \mathbb{R}^+$  cuya frontera  $\partial\Sigma$  está contenida en  $M \times \{0\}$ , con especial atención al caso en que la función ángulo  $\nu = \langle N, \partial_t \rangle$  es constante a lo largo de la frontera o, en otras palabras, cuando se cumple una condición de capilaridad. Escogeremos el campo normal  $N$  para el que la curvatura media  $H$  de  $\Sigma$  es positiva, con lo que la función ángulo es negativa. Bajo esta condición de capilaridad, se incluyen las superficies simétricas respecto de una sección horizontal y, por tanto, todas las  $H$ -superficies compactas y embebidas en  $M \times \mathbb{R}$  (que llamaremos  $H$ -bigrafos en lo sucesivo) en virtud de una aplicación del principio de reflexión de Alexandrov [Ale56]. En el caso homogéneo  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ , los  $H$ -bigrafos compactos están clasificados para  $\kappa \leq 0$ : existen si, y sólo si,  $4H^2 + \kappa > 0$ , en cuyo caso son esferas rotacionalmente invariantes. La situación cambia drásticamente para  $\kappa > 0$  ya que existen tanto esferas como toros de rotación que son  $H$ -bigrafos (véase la sección 2.1 para una clasificación completa de los  $H$ -bigrafos invariantes por un grupo uniparamétrico de isometrías del ambiente). Por otro lado, como consecuencia de la construcción que se llevará a cabo en la sección 3.4, deduciremos que también existen multitud de ejemplos compactos (aunque

posiblemente no embebidos), que son simétricos respecto de una sección horizontal e invariantes por un subgrupo discreto de isometrías horizontales.

Como hemos dicho, la clasificación de los H-bigrafos en  $M \times \mathbb{R}$  no se comprende bien todavía y en esta memoria expondremos resultados que relacionarán la máxima altura que tales bigrafos pueden alcanzar y cotas sobre la curvatura geodésica (sobre la sección horizontal) de la curva de simetría horizontal. También trataremos el caso no compacto en  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ , que no es tan sencillo incluso para  $\kappa \leq 0$ . El lector puede encontrar en los trabajos de Ritoré [Rit97] y Große-Brauckmann [GB93] algunos ejemplos contruidos para  $M = \mathbb{R}^2$ .

De vuelta al caso general de un grafo  $\Sigma \subset M \times \mathbb{R}$  de curvatura media constante  $H$ , si denotamos por  $c$  al ínfimo de la curvatura de Gauss del dominio  $\Omega \subset M$  sobre el que  $\Sigma$  es grafo, asumiremos la hipótesis  $4H^2 + c > 0$ . Como los grafos verticales en  $M \times \mathbb{R}$  son estables (su función ángulo no se anula y está en el núcleo del operador de estabilidad, véase el lema 5.2), es posible aplicar el teorema 2.8 en [MPRo8] para concluir que la función distancia intrínseca  $d(p, \partial\Sigma)$ ,  $p \in \Sigma$ , está acotada, lo que implica que la función altura  $h \in C^\infty(\Sigma)$ , dada por  $h(p, t) = t$ , también lo está. Para  $4H^2 + c \leq 0$ , esta propiedad no es cierta tal y como muestran los ejemplos invariantes en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  dados por Onnis [Onno8] y Sa Earp [SaEo8].

Aledo, Espinar y Gálvez consideraron en [AEGo8] el caso en que  $\Omega$  es compacto y el grafo se extiende como  $h = 0$  y  $v \leq v_0 < 0$  en  $\partial\Omega$ . Tomando  $c = \inf\{K_M(p) : p \in \Omega\}$  y suponiendo que  $4H^2 + c > 0$ , probaron que  $\Sigma$  puede alcanzar a lo sumo una altura  $\alpha(c, H, v_0)$ , donde el valor de  $\alpha(c, H, v_0)$  está dado por

$$\begin{cases} \frac{4H}{\sqrt{-4cH^2 - c^2}} \left( \arctan \left( \frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{c+4H^2}} \right) + \arctan \left( \frac{v_0\sqrt{-c}}{\sqrt{c+4H^2}} \right) \right) & \text{if } c < 0, \\ \frac{1+v_0}{H} & \text{if } c = 0, \\ \frac{4H}{\sqrt{4cH^2 + c^2}} \left( \operatorname{arctanh} \left( \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c+4H^2}} \right) + \operatorname{arctanh} \left( \frac{v_0\sqrt{c}}{\sqrt{c+4H^2}} \right) \right) & \text{if } c > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Ellos dieron esta estimación para  $v_0 = 0$ , pero su argumento se generaliza de forma directa. También probaron que esta cota es la mejor posible en términos de  $c$  y  $H$ , en el sentido de que si la igualdad se alcanza, entonces  $\Omega$  tiene curvatura de Gauss constante  $c$  y, si  $M = \mathbb{M}^2(c)$ , entonces la superficie es un casquete esférico (de una esfera de rotación de curvatura media  $H$ ) con ángulo constante  $v_0$  a lo largo de su frontera. Este resultado es una generalización de las ideas dadas por Serrin [Ser69] y es una consecuencia del principio del máximo para una elección adecuada de una función subarmónica combinando  $h$  y  $v$ .

Cuando nos restringimos al caso de capilaridad (es decir,  $\Sigma$  cumple  $v = v_0$  para algún  $-1 < v_0 \leq 0$  a lo largo de la frontera), probaremos la siguiente estimación para la curvatura geodésica de la frontera, aplicando el principio del máximo en la frontera en lugar de en el interior (véase el teorema 2.6).

Sea  $\Sigma \subseteq M \times \mathbb{R}^+$  un grafo de curvatura media constante  $H > 0$  sobre un dominio compacto y regular  $\Omega \subseteq M$  con valores cero en  $\partial\Omega$ . Supongamos que  $c = \inf\{K_M(p) : p \in \Omega\} > -4H^2$  y  $v = v_0$  en  $\partial\Omega$  para algún  $-1 < v_0 \leq 0$ . Entonces,

$$\kappa_g \geq \frac{-4H^2 + c(1 - v_0^2)}{4H\sqrt{1 - v_0^2}}, \quad (*)$$

donde  $\kappa_g$  es la curvatura geodésica de  $\partial\Omega$  en  $M$  con respecto al conormal unitario exterior a  $\Omega$ .

Además, si existe  $p \in \partial\Omega$  tal que la igualdad en (\*) se alcanza, entonces  $\Omega$  tiene curvatura de Gauss constante  $c$  y  $\Sigma$  tiene diferencial de Abresch-Rosenberg nula (véase la observación 2.5).

Este resultado tiene algunas consecuencias interesantes para H-bigrafos (véanse los corolarios 2.10 y 2.11) ya que, para  $v_0 = 0$ ,  $c > 0$  y  $0 < H < \frac{1}{2}\sqrt{c}$ , la cota anterior se convierte en  $\kappa_g \geq 0$ , esto es, nos dice que la frontera es convexa (respecto del conormal exterior).

El siguiente paso consiste en suponer restricciones adicionales sobre la altura máxima que el grafo puede alcanzar en  $M \times \mathbb{R}^+$ . Concretamente, supondremos que  $|h| \leq m \cdot \alpha(c, H, v_0)$  para alguna constante  $0 < m \leq \frac{1}{2}$  (esto es,  $m$  es la fracción de la altura máxima del correspondiente casquete esférico con la misma curvatura media y el mismo ángulo de capilaridad) y mejoraremos la cota anterior a la siguiente (véase el teorema 2.13).

Si existe  $0 < m \leq \frac{1}{2}$  tal que  $|h| \leq m \cdot \alpha(c, H, v_0)$ , entonces se cumple la siguiente cota de la curvatura geodésica de  $\partial\Omega$  en  $M$  con respecto al conormal unitario exterior a  $\Omega$ :

$$\kappa_g \geq \frac{(4 - 8m)H^2 + c(1 - v_0^2)}{4mH\sqrt{1 - v_0^2}}.$$

A semejanza del caso general, podemos dar aplicaciones al caso de H-bigrafos compactos (véanse los corolarios 2.14 y 2.15). Bajo las hipótesis de este último resultado, la caracterización de la igualdad se vuelve más sutil, para lo que desarrollaremos una técnica que puede usarse para probar que una H-superficie en la que la altura es una función del ángulo debe ser invariante por un grupo uniparamétrico de isometrías horizontales (véase el

lema 2.12). La demostración de este lema seguirá la línea de la demostración de Espinar y Rosenberg (cf. [ER09]) para superficies cuya diferencial de Abresch-Rosenberg se anula idénticamente.

En el caso  $M = \mathbb{M}^2(\kappa)$  podremos quitar la hipótesis de compacidad y probar el siguiente resultado (véase el teorema 2.16). La razón de restringirnos al caso homogéneo es que el argumento hace uso del hecho de poder trasladar cualquier punto a uno prefijado.

Sea  $\Sigma \subseteq \mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  un H-bigrafo propiamente embebido sobre un dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{M}^2(\kappa)$  con  $4H^2 + \kappa > 0$ , simétrico respecto de  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \{0\}$ , y supongamos que existe  $0 < m \leq \frac{1}{2}$  tal que  $|h| \leq m \cdot \alpha(\kappa, H, 0)$  en  $\Sigma$ . Entonces, tenemos la siguiente cota inferior para la curvatura geodésica de  $\partial\Omega$  en  $\mathbb{M}^2(\kappa)$  (respecto al conormal unitario exterior):

$$\kappa_g \geq \frac{(4 - 8m)H^2 + \kappa}{4mH}.$$

Si se alcanza la igualdad en algún punto  $p \in \partial\Omega$ , entonces

- i)  $\Sigma$  es un toro de rotación si  $\kappa > 0$ ,
- ii)  $\Sigma$  es un cilindro de traslación si  $\kappa = 0$ ,
- iii)  $\Sigma$  es un cilindro de traslación hiperbólica si  $\kappa < 0$ .

Este resultado se basa en las ideas dadas por Ros y Rosenberg in [RR10], aunque tiene su origen en un artículo de Payne y Phillipin [PP79]. Señalamos que el análisis de la igualdad llevada a cabo en el último resultado también se sigue del lema 2.12 y que los ejemplos invariantes caracterizados en el enunciado se describen en la sección 2.2.

Para cerrar este capítulo, daremos una aplicación de las técnicas usadas anteriormente para obtener cotas inferiores finas de la distancia de un punto del grafo  $\Sigma \subset M \times \mathbb{R}^+$  con valores frontera cero a la frontera  $\partial\Sigma$ . Más explícitamente, probaremos que tal distancia es mayor o igual que la distancia del casquete esférico con la misma condición de capilaridad y la misma curvatura media de una esfera rotacional en el correspondiente espacio homogéneo (véase el teorema 2.18).

#### CONSTRUCCIONES DE PLATEAU CONJUGADAS

En 1970, Lawson [Law70] estableció una correspondencia isométrica entre superficies minimales simplemente conexas en  $\mathbb{M}^3(\kappa)$  y superficies simplemente conexas de curvatura media constante  $H$  en  $\mathbb{M}^3(\kappa - H^2)$ . Además,

aplicó esta correspondencia para construir superficies doblemente periódicas de curvatura media uno en  $\mathbb{R}^3$ . La técnica que usó para construir dichos ejemplos se conoce como *construcción de Plateau conjugada* y se ha convertido en un método bastante fructífero para obtener superficies de curvatura media constante en 3-variedades de curvatura seccional constante (véase, por ejemplo, [KPS88, Kar89, GB93, Pol94]). Los pasos fundamentales de una construcción de Plateau conjugada son los siguientes:

1. Resolver el problema de Plateau en un polígono geodésico en  $\mathbb{M}^3(\kappa)$ .
2. Considerar la superficie *conjugada* en  $\mathbb{M}^3(\kappa - H^2)$  con curvatura media  $H$ , cuya frontera está contenida en ciertos planos de simetría si el polígono inicial está bordeado por geodésicas (cf. [Kar89, Section 1]).
3. Reflejar la pieza resultante respecto de dichos planos de simetría para conseguir una  $H$ -superficie completa (no necesariamente embebida) en  $\mathbb{M}^3(\kappa - H^2)$ .

El propósito del capítulo 3 de la presente memoria es definir rigurosamente todos los ingredientes necesarios para extender la construcción de Plateau conjugada al caso de los espacios  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  y aplicarla a la construcción de  $H$ -superficies completas en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  (para  $H \geq \frac{1}{2}$ ) y  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  (para  $H > 0$ ). Esta generalización fue introducida en primer lugar por Hauswirth, Sa Earp y Toubiana [HSTo8] en el caso de superficies minimales asociadas en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , aunque muchos otros trabajos han sido publicados en esta línea (véase, por ejemplo, [MR12, Rod, MRR]).

La primera herramienta que necesitaremos es un análogo a la correspondencia de Lawson en los ambientes  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , papel que jugará la correspondencia de Daniel. De forma sucinta, dados  $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  y  $\mathbb{E}^* = \mathbb{E}(\kappa^*, \tau^*)$  tales que  $\kappa - 4\tau^2 = \kappa^* - 4(\tau^*)^2$ , y dados  $\theta, H, H^* \in \mathbb{R}$  cumpliendo  $H + i\tau = e^{i\theta}(H^* + i\tau^*)$ , existe una correspondencia isométrica entre  $H$ -superficies simplemente conexas en  $\mathbb{E}$  y  $H^*$ -superficies simplemente conexas en  $\mathbb{E}^*$  (cf. [Dano7, Theorem 5.2] para una descripción más detallada). Además, las superficies correspondientes están determinadas salvo una isometría del ambiente y suelen llamarse *superficies hermanas*.

Aunque en la sección 3.1, haremos una descripción completa de todos los casos, aquí nos centraremos en la correspondencia entre una inmersión minimal  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$  y su  $H$ -superficie hermana  $\phi^* : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  para  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ . Es de especial importancia en lo que sigue que el parámetro  $\theta$  de la correspondencia sea igual a  $\frac{\pi}{2}$ , de donde deduciremos la siguiente correspondencia entre curvas en  $\Sigma$  (véase el lema 3.2):

Dada una curva diferenciable  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$ , si  $\phi(\alpha)$  es una geodésica horizontal (resp. vertical) en  $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ , entonces

$\phi^*(\alpha)$  está contenida en un plano vertical (resp. horizontal) en  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  que la inmersión  $\phi^*$  corta ortogonalmente.

También daremos una correspondencia entre isometrías (véase el lema 3.3):

Si  $\phi(\Sigma)$  es invariante por reflexiones respecto de una geodésica horizontal (resp. vertical)  $\phi(\alpha)$  en  $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ , entonces  $\phi^*(\Sigma)$  es invariante por una reflexión respecto a un plano vertical (resp. horizontal) en  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ .

Además, la curva de reflexión de la superficie original se corresponde con la curva de reflexión la superficie hermana.

Desafortunadamente, el control de los elementos que no son verticales ni horizontales es complicado y sólo seremos capaces de manejar polígonos geodésicos formados por geodésicas verticales y horizontales, siendo ésta una condición bastante rígida en  $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ . Por otro lado, debemos asegurarnos de que la superficie extendida por reflexión, respecto de geodésicas o planos, produce una superficie regular, aunque veremos que es consecuencia de resultados generales de eliminación de singularidades (véanse [DHW92, CS85] y la sección 3.1.2).

De cara a ilustrar los resultados previos, en la sección 3.2 aplicaremos la correspondencia de Daniel a los helicoides esféricos en las esferas de Berger, esto es, superficies minimales regladas por geodésicas horizontales e invariantes por un grupo uniparamétrico de movimientos helicoidales. Esta familia de superficies está caracterizada por ser las únicas superficies en la variedad  $S^3$  subyacente que son minimales para cualquier métrica de Berger (cf. [Tor10a, Proposition 1]). Demostraremos que las H-superficies hermanas en  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  son los ejemplos rotacionales descubiertos por Hsiang and Hsiang [HH89] y Pedrosa y Ritoré [PR99] en  $S^2 \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  (véase la proposición 3.5), junto con el toro de rotación en  $S^2 \times \mathbb{R}$  o el cilindro de traslación hiperbólica en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  (estos últimos casos excepcionales serán discutidos en la sección 3.4.2).

El segundo paso en la generalización consiste en garantizar la existencia de soluciones del problema de Plateau con frontera un cierto polígono geodésico. De hecho, seremos capaces de probar un resultado de existencia y unicidad para una familia más amplia de posibles contornos en una submersión de Killing general  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$ , basándonos para la unicidad en las ideas de Pinheiro [Pino7]. Para enunciar el resultado, necesitamos introducir el concepto de *contorno de Nitsche admisible*. Grosso modo, un contorno de Nitsche en  $\mathbb{E}$  es una curva diferenciable a trozos  $\Gamma \subset \mathbb{E}$  tal que (a) los arcos regulares de  $\Gamma$  son segmentos verticales o bien curvas que se proyectan biyectivamente por  $\pi$  sobre  $M$  y (b) la curva proyectada  $\pi(\Gamma)$  bordea un

dominio simplemente conexo y relativamente compacto  $\Omega \subset M$  (véase la definición 3.7). Si el cilindro sólido  $\pi^{-1}(\overline{\Omega})$  es una 3-variedad mean-convexa con frontera en el sentido de [MY82a], llamaremos a dicho contorno de Nitsche admisible (véase el lema 3.10). Enunciamos ya el mencionado resultado de existencia y unicidad (véase el teorema 3.11).

Sea  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  una submersión de Killing con fibras de longitud infinita y supongamos que  $\Gamma \subset \mathbb{E}$  es un contorno de Nitsche admisible con dominio asociado  $\Omega \subset M$ . Entonces, existe una única superficie minimal  $\Sigma \subset \pi^{-1}(\overline{\Omega})$  con frontera  $\Gamma$ . Más aún, el interior de la superficie  $\Sigma$  es un grafo vertical sobre  $\Omega$ .

La primera aplicación que daremos de estos resultados es la construcción de una familia uniparamétrica de H-superficies completas en  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  para  $4H^2 + \epsilon > 0$ ,  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ , que provienen de superficies minimales en las esferas de Berger  $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ . Las superficies resultantes en  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  son invariantes por un grupo uniparamétrico discreto de isometrías horizontales del ambiente, que consiste en rotaciones en  $S^2 \times \mathbb{R}$  o traslaciones hiperbólicas en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  (véase el teorema 3.18). Además, haremos un estudio preciso de la función ángulo de la pieza original en las esferas de Berger (véase la sección 3.4.1) que nos permitirá describir bastante fielmente la pieza hermana (véase la sección 3.4.2) y deducir que ha de tener una forma parecida a un unduloide horizontal.

Una de las propiedades más interesantes de estos ejemplos, y que los relaciona con los del capítulo precedente, es el hecho de que todos ellos son simétricos respecto de una sección horizontal (aunque no sabemos si son embebidos) y tienen altura acotada. De hecho, para cada  $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$ , la construcción nos da un único ejemplo cuya altura máxima sobre el plano horizontal de simetría es  $m \cdot \alpha(\epsilon, H, 0)$ , donde recordemos que  $\alpha(\epsilon, H, 0)$  denotaba la altura máxima de una esfera rotacional de curvatura media  $H$  y  $\frac{1}{2}\alpha(\epsilon, H, 0)$  es la altura máxima del toro rotacional (para  $\epsilon = 1$ ) o el cilindro de traslación hiperbólica (para  $\epsilon = -1$ ), ambos de curvatura media  $H$ . De hecho, esta construcción nos da una deformación continua entre estos dos ejemplos. Además, en el caso  $\epsilon = 1$ , mostraremos que, para cada  $H > 0$  aparecen ejemplos compactos con curvatura media  $H$ .

La segunda aplicación de la construcción de Plateau conjugada, a la que la sección 3.5 está dedicada, es la obtención de superficies de curvatura media  $1/2$  en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  con las simetrías de una teselación de  $\mathbb{H}^2$  por polígonos regulares (véase el teorema 3.24). Este es el análogo horizontal en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  de las superficies doblemente periódicas en  $\mathbb{R}^3$ , pero no produce superficies similares en  $S^2 \times \mathbb{R}$  (notemos que el valor  $H = 1/2$  en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  es crítico

como ya se ha mencionado antes. En este caso, las superficies provienen de superficies minimales en el espacio de Heisenberg  $\text{Nil}_3$ .

Usando estas últimas superficies, daremos algunas aplicaciones a la construcción de superficies compactas de curvatura media  $1/2$  en  $M \times \mathbb{R}$ , donde  $M$  es una superficie compacta con curvatura geodésica  $-1$  que puede realizarse mediante un *patrón regular de pegado* (véase el corolario 3.27) de los lados de un polígono regular en  $\mathbb{H}^2$  (esto es, una forma de pegar los lados del polígono que se extiende a toda la teselación regular y de forma que los vértices se identifican todos juntos). En particular, todas las clases de superficies topológicas con característica de Euler negativa pueden realizarse por este método.

#### MULTIGRAFOS COMPLETOS EN $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$

Como ya se ha puesto de manifiesto, los *multigrafos verticales* constituyen una familia natural de ejemplos a considerar en la teoría de superficies de curvatura media constante en una submersión de Killing (recordemos que un multigrafo vertical es una superficie transversa al campo de Killing vertical). No obstante, es interesante determinar si un multigrafo es embebido o no y, más aún, si es un grafo vertical (es decir, no corta más de una vez a cualquier fibra de la submersión). El capítulo 4 se centra en resolver esta cuestión para  $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , bajo la hipótesis adicional de que el multigrafo de curvatura media constante  $H \in \mathbb{R}$  es completo para  $4H^2 + \kappa < 0$  o bien  $4H^2 + \kappa > 0$ . Más explícitamente, probaremos que los únicos multigrafos completos de curvatura media  $H$  para  $4H^2 + \kappa > 0$  son las secciones horizontales en  $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  (véase la proposición 4.4), y que, para  $4H^2 + \kappa < 0$ , tal multigrafo es siempre un grafo vertical (véase la sección 4.2).

Hauswirth, Rosenberg y Spruck (cf. [HRS10, Theorem 1.2]) probaron un teorema de tipo semiespacio para superficies propiamente embebidas de curvatura media  $1/2$  en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  y dedujeron que un multigrafo vertical completo con curvatura media  $1/2$  en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  es un grafo vertical entero (es decir, está definido sobre todo  $\mathbb{H}^2$ ). Más adelante, Daniel y Hauswirth extendieron este resultado al espacio de Heisenberg  $\text{Nil}_3$  mediante otro teorema de tipo semiespacio para superficies minimales propiamente inmersas en  $\text{Nil}_3$ . Finalmente, Fernández y Mira (cf. [FM10, Theorem 6.10] para una referencia completa) extendieron estos resultados al caso de multigrafos verticales completos en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  con curvatura media constante  $H$  cumpliendo  $4H^2 + \kappa = 0$  y obtuvieron que han de ser grafos verticales enteros. Uniendo estos resultados a los presentados en esta memoria, obtenemos la siguiente descripción de los multigrafos completos en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .



Sea  $\Sigma$  un multigrafo vertical y completo de curvatura media constante  $H$  en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Entonces, se cumple una de las siguientes afirmaciones:

- a)  $\mathbb{E}(\kappa, \tau) = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  y  $\Sigma$  es una sección horizontal.
- b)  $4H^2 + \kappa \leq 0$  y  $\Sigma$  es un grafo vertical.

Además, si  $4H^2 + \kappa = 0$ , entonces  $\Sigma$  es un grafo minimal entero.

Notemos que, en el caso  $4H^2 + \kappa < 0$ , la fibración es sobre  $\mathbb{H}^2(\kappa)$  y, salvo una homotecia en la métrica, podemos suponer  $\kappa = -1$  y  $|H| < \frac{1}{2}$ . Bajo estas condiciones y basándonos en [HRS10, Theorem 1.2], probaremos que la frontera del dominio sobre el que el grafo está definido consiste en (posiblemente infinitas) curvas de curvatura geodésica constante  $2H$  ó  $-2H$  en  $\mathbb{H}^2$ , en las cuales el grafo toma valores frontera constantes  $+\infty$  ó  $-\infty$ . Además, el signo de la curvatura de la frontera está determinado por el signo del valor asintótico y la elección de orientaciones (véase la observación 4.8). Destacamos también que la condición  $|H| < \frac{1}{2}$  es equivalente al hecho de que una curva completa de curvatura geodésica constante  $2H$  en  $\mathbb{H}^2$  tiene longitud infinita, que será decisivo en la demostración de que el multigrafo es, en realidad, un grafo.

#### SUPERFICIES PARABÓLICAS Y ESTABLES

Como ya mencionamos al comienzo de esta introducción, las superficies de curvatura media  $H \in \mathbb{R}$  en una 3-variedad riemanniana  $\widetilde{M}$  constituyen un objeto natural de estudio ya que son puntos críticos del funcional  $\mathcal{J} = \text{Área} - 2H \cdot \text{Volumen}$ , para variaciones normales de soporte compacto (véase la proposición 5.1). En lo que sigue, nos restringiremos al caso en que la superficie tien dos lados (esto es,  $\Sigma$  admite un campo normal unitario y diferenciable  $N$ ), ya que el campo variacional de una tal variación está dado por una función en lugar de una sección del fibrado normal.

De entre todas las  $H$ -superficies completas en  $\widetilde{M}$ , aquéllas que son *estables* (es decir, las que cumplen que  $\mathcal{J}''(0) \geq 0$  para cualquier variación normal de soporte compacto) juegan un papel especial en la teoría. Esto se debe a que, por ejemplo, bajo ciertas condiciones naturales, los límites de  $H$ -superficies completas, producen  $H$ -superficies completas y estables, tal y como Meeks, Pérez y Ros probaron (cf. [MPR10]). Es necesario hacer hincapié en que esta noción de estabilidad es más fuerte que la estabilidad usual asociada al problema isoperimétrico, donde sólo se requiere que  $\mathcal{J}''(0) \geq 0$  para cualquier

variación normal dada por una función de soporte compacto de integral cero.

Más concretamente, dada una H-superficie  $\Sigma$  inmersa en  $\widetilde{M}$  con dos lados y una variación normal de  $\Sigma$  con campo variacional  $fN$  para  $f \in C_0^\infty(\Sigma)$ , podemos escribir

$$\mathcal{J}''(0) = Q(f, f) = - \int_{\Sigma} fLf,$$

donde  $L = \Delta + |A|^2 + \text{Ric}(N)$  y  $A$  es el operador forma de la inmersión. Esta formulación extrínseca motiva el interés en el estudio de un operador de Schrödinger puramente intrínseco  $L = \Delta + q$  sobre una  $n$ -variedad riemanniana abstracta  $(M, ds^2)$ , siendo  $\Delta$  el laplaciano respecto de  $ds^2$  y  $q \in C^\infty(M)$ , bajo la condición de que  $-\int_M fLf \geq 0$  para todo  $f \in C_0^\infty(M)$  (esta condición suele escribirse a menudo como  $-L \geq 0$ ).

Si suponemos que la estructura conforme subyacente a  $ds^2$  es *parabólica* (esto es, toda función superarmónica y positiva en  $M$  es constante), esta condición nos permite probar el siguiente resultado sobre el operador  $L$ :

Sea  $(M, ds^2)$  una  $n$ -variedad Riemanniana parabólica y consideremos un operador  $L = \Delta + q$ , para cierta  $q \in C^\infty(M)$ . Sean  $u, v \in C^\infty(M)$  tales que  $u$  está acotada,  $v > 0$  y  $uvLu \geq u^2Lv$  sobre  $M$ . Entonces,  $u/v$  es constante.

En otras palabras, el comportamiento de la primera función propia de  $L$  es similar al de un operador de Schrödinger sobre un subdominio compacto. Por ejemplo, si existe una solución acotada de  $Lu = 0$  en  $M$ , entonces o bien  $u$  se anula idénticamente, o bien no se anula en ningún punto, y el espacio vectorial  $\{u \in C^\infty(M) : Lu = 0, u \text{ acotada}\}$  tiene dimensión 1 (véase el teorema 5.5 y el corolario 5.6).

Dada una submersión de Killing  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  y una H-superficie  $\Sigma$  en  $\mathbb{E}$ , podemos aplicar el resultado anterior a la función ángulo, que es acotada y está en el núcleo del operador de estabilidad de  $\Sigma$ , para obtener condiciones bajo las que la superficie es un multigrafo vertical o incluso un grafo entero. El siguiente resultado se deduce fácilmente.

Sea  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  una submersión de Killing. Una H-superficie inmersa, parabólica y estable en  $\mathbb{E}$  es un multigrafo vertical o bien un cilindro vertical sobre una curva de curvatura geodésica constante  $2H$ .

En el caso de los espacios homogéneos  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , podemos mejorar este resultado usando la información sobre multigrafos completos que hemos mencionado en el teorema 4.1.

Sea  $\Sigma$  una H-superficie orientable, parabólica, completa e inmersa en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Una de las siguientes afirmaciones es cierta:

- a)  $\mathbb{E}(\kappa, \tau) = \mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ ,  $H = 0$  y  $\Sigma$  es una sección horizontal.
- b)  $4H^2 + \kappa \leq 0$  y  $\Sigma$  es o bien un grafo vertical o bien un cilindro vertical sobre una curva de curvatura geodésica  $2H$  en  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ . Si  $4H^2 + \kappa = 0$ , entonces dicho grafo es entero.

Rosenberg [Ros06] demostró que, si  $\Sigma$  es una H-superficie orientable, completa, estable e inmersa en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , entonces  $H^2 \leq \frac{1}{3}(\tau^2 - \kappa)$ , excepto para el caso especial de una sección horizontal en  $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ . Se conjetura que la cota superior óptima sobre  $H^2$  bajo estas hipótesis es  $-\frac{\kappa}{4}$  en lugar de  $\frac{1}{3}(\tau^2 - \kappa)$ . En esta línea, el último resultado mostrado arriba da respuesta positiva a esta conjetura bajo la condición adicional de parabolicidad. Sin embargo, seremos capaces de mejorar ligeramente la cota  $\frac{1}{3}(\tau^2 - \kappa)$  sin asumir parabolicidad (véase el corolario 5.10).

Sea  $\Sigma$  una H-superficie orientable, completa y estable inmersa en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  con  $\kappa < \tau^2$ . Entonces,  $H^2 < \frac{1}{3}(\tau^2 - \kappa) - \varepsilon$  para algún  $\varepsilon > 0$ .

Este resultado ya fue probado por Meeks, Pérez y Ros [MPR08] en el caso particular de  $H^2 \times \mathbb{R}$ , aunque puede verse que dicho caso implica el enunciado completo via la correspondencia de Daniel. Aun así, la demostración que daremos es independiente.

Para terminar el capítulo 5, introduciremos los grafos minimales *horizontales* en el espacio de Heisenberg  $\text{Nil}_3 = \mathbb{E}(0, \frac{1}{2}) \cong \mathbb{R}^3$  y estudiaremos el correspondiente problema de Bernstein. Un grafo horizontal sobre un dominio  $\Omega$  en el plano  $(y, z)$  es la superficie parametrizada en términos de una función  $u \in C^\infty(\Omega)$  mediante

$$F(y, z) = \left( u(y, z), y, z + \frac{y}{2}u(y, z) \right), \quad (y, z) \in \Omega, \quad (**)$$

Estos grafos se dicen horizontales puesto que son transversos a las curvas integrales del campo de Killing  $X = \partial_x + \frac{y}{2}\partial_z$ , que es horizontal en el origen (es fácil darse cuenta de que esta construcción no da especial relevancia a ninguna dirección horizontal concreta en  $\text{Nil}_3$ ). A pesar de que los grafos horizontales son estables, el campo  $X$  no está necesariamente acotado al restringirlo a  $\Sigma$ , aunque los argumentos para H-superficies parabólicas y estables que hemos dado en esta parte final, nos llevan al siguiente enunciado (véase el teorema 5.12). Señalemos que cualquier grafo horizontal *entero* en  $\text{Nil}_3$  (es decir, para el que el dominio de definición  $\Omega$  que aparece en (\*\*)) es todo el plano  $(y, z)$  es propio y, en consecuencia, completo.

Sea  $\Sigma$  un multigrafo minimal y horizontal en  $\text{Nil}_3$ . Si  $\Sigma$  es parabólico, entonces es un plano vertical y, en particular, es un grafo horizontal entero.



Parte I

PRELIMINARES



## SUBMERSIONES DE KILLING

---

Como se ha puesto de manifiesto en la introducción, las submersiones de Killing son una generalización natural tanto de los espacios homogéneos simplemente conexos  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , con grupo de isometrías de dimensión 4, como de las variedades producto  $M \times \mathbb{R}$ . El objetivo de este primer capítulo es estudiar la geometría de una submersión de Killing y dar un resultado de clasificación en el caso de que la base de la submersión sea una superficie simplemente conexa con curvatura constante. Además, estudiaremos las isometrías de las submersiones de Killing así clasificadas y particularizaremos los resultados a los espacios  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .

### 1.1 PROPIEDADES RIEMANNIANAS BÁSICAS

Sea  $(\mathbb{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  una variedad riemanniana de dimensión 3 que admite una submersión riemanniana  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  sobre una superficie  $(M, g)$ . Un vector  $v \in T\mathbb{E}$  se dice *vertical* si  $v \in \ker(d\pi)$  mientras que si  $v \in \ker(d\pi)^\perp$  diremos que es *horizontal*. Entonces, la condición de submersión riemanniana puede escribirse como

$$g_{\pi(q)}(d\pi_q(v), d\pi_q(w)) = \langle v, w \rangle_q,$$

para cualesquiera  $q \in \mathbb{E}$  y  $v, w \in T_q\mathbb{E}$  horizontales.

**Definición 1.1.** Diremos que  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  es una submersión de Killing cuando exista un campo de Killing unitario, vertical y completo.

Esta definición puede parafrasearse como que exista un campo de Killing unitario  $\xi$  cuyas curvas integrales estén definidas sobre toda la recta real y sean las fibras de la submersión. Notemos que las fibras de la submersión son, por definición, los conjuntos de la forma  $\pi^{-1}(p)$  para  $p \in M$  y, por tanto, son curvas embebidas en  $\mathbb{E}$ .

En lo que sigue supondremos que  $\mathbb{E}$  es orientable y fijaremos una orientación para la que tendremos definido globalmente un producto vectorial  $\wedge$ . El siguiente resultado da una expresión útil para trabajar con  $\bar{\nabla}$ , la conexión de Levi-Civita en  $\mathbb{E}$ .



**Lema 1.2.** Sea  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  una submersión de Killing. Entonces existe una función  $\tau \in C^\infty(\mathbb{E})$  tal que  $\bar{\nabla}_X \xi = \tau X \wedge \xi$ , para cualquier  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{E})$ .

*Demostración.* En primer lugar, observemos que  $\bar{\nabla}_\xi \xi = 0$  ya que  $\langle \bar{\nabla}_\xi \xi, \xi \rangle = 0$  por ser  $\xi$  unitario y, para cualquier  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{E})$  horizontal se cumple que  $\langle \bar{\nabla}_\xi \xi, X \rangle = -\langle \xi, \nabla_\xi X \rangle = 0$  puesto que  $\langle X, \xi \rangle = 0$  y  $\xi$  es de Killing.

Consideremos ahora  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{E})$  linealmente independiente con  $\xi$ . Está claro que  $\langle \bar{\nabla}_X \xi, X \rangle = 0$  ya que  $\xi$  es un campo de Killing y, por otro lado,  $\langle \bar{\nabla}_X \xi, \xi \rangle = 0$  ya que  $\xi$  es unitario. Por tanto, existirá una única función  $\tau_X \in C^\infty(\mathbb{E})$  tal que  $\bar{\nabla}_X \xi = \tau_X X \wedge \xi$ , y habremos terminado si probamos que  $\tau_X$  no depende de  $X$ . Ahora bien, es obvio que  $\tau_X$  sólo depende de la parte horizontal de  $X$  luego bastará comprobar que  $\tau_X = \tau_Y$  para cualesquiera  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{E})$  horizontales. En tal caso, usando que  $\xi$  es un campo de Killing, tenemos que

$$\tau_Y \langle Y \wedge \xi, X \rangle = \langle \bar{\nabla}_Y \xi, X \rangle = -\langle \bar{\nabla}_X \xi, Y \rangle = -\tau_X \langle X \wedge \xi, Y \rangle = \tau_X \langle Y \wedge \xi, X \rangle.$$

Deducimos que  $\tau_X = \tau_Y$  en los puntos en que  $X$  e  $Y$  sean independientes y, en el resto de puntos,  $\tau_X = \tau_Y$  se sigue de la linealidad de la conexión.  $\square$

A la función  $\tau$ , que claramente es única, se le llama *curvatura del fibrado*. Si invertimos la orientación en  $\mathbb{E}$ , ésta cambia de signo. Notemos además que la condición  $\bar{\nabla}_\xi \xi = 0$  nos dice que las fibras son geodésicas y las llamaremos *geodésicas verticales*.

Para dar más propiedades de la curvatura del fibrado, tomemos  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ , el grupo uniparamétrico de isometrías asociado al campo de Killing  $\xi$ , isometrías que llamaremos de aquí en adelante *traslaciones verticales*. El grupo uniparamétrico está definido para todo valor del parámetro por ser  $\xi$  completo. Además, cada isometría  $\phi_t$  conserva la orientación y cumple que  $(d\phi_t)_q(\xi_q) = \xi_{\phi_t(q)}$  para cualesquiera  $t \in \mathbb{R}$  y  $q \in \mathbb{E}$ . Aplicando  $d\phi_t$  a la igualdad del lema 1.2, se deduce el siguiente resultado.

**Lema 1.3.** La curvatura del fibrado es constante a lo largo de las fibras y, por tanto, induce una función diferenciable en  $M$ .

#### Ejemplos 1.4.

1. Consideremos una superficie riemanniana  $M$  y la variedad producto  $M \times \mathbb{R}$  con la métrica producto estándar. Entonces, la proyección canónica  $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  es una submersión de Killing con campo de Killing vertical unitario  $\partial_t$  y curvatura del fibrado  $\tau = 0$ .

2. Consideremos las esferas  $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$  y  $S^2(\kappa) = \{(z, t) : |z|^2 + t^2 = \frac{1}{\kappa}\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  para  $\kappa > 0$ . La aplicación

$$\begin{aligned} \pi : S^3 &\longrightarrow S^2(\kappa) \\ (z, w) &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{\kappa}}(2z\bar{w}, |z|^2 - |w|^2) \end{aligned} \quad (2)$$

se conoce como la *proyección de Hopf* entre estas dos esferas y es una submersión. Más aún, la fibra que pasa por un punto  $(z, w) \in S^3$  está dada por  $\{(e^{it}z, e^{it}w) : t \in \mathbb{R}\}$ . Tenemos que el grupo uniparamétrico de difeomorfismos  $\phi_t(z, w) = (e^{it}z, e^{it}w)$  para  $t \in \mathbb{R}$  define de forma natural una acción de  $S^1$  sobre  $S^3$  como  $(e^{it}, (z, w)) \mapsto \phi_t(z, w)$  cuyas órbitas  $\{\phi_t(z, w) : t \in \mathbb{R}\}$ ,  $(z, w) \in S^3$ , coinciden con la fibras de la submersión.

Al igual que en el caso del fibrado trivial del ejemplo anterior, dado un número natural  $n \in \mathbb{N}$ , podemos considerar el cociente de  $S^3$  por el grupo discreto de isometrías (traslaciones verticales) definido por  $G_n = \{\phi_{2\pi k/n} : k \in \{1, \dots, n\}\}$ , que es un grupo cíclico de orden  $n$ . Dicho cociente  $S^3/G_n$  no es otra cosa que el espacio lente denotado<sup>1</sup> clásicamente por  $L(n, 1)$ . El hecho de que  $\pi \circ \phi_t = \pi$  hace que  $\pi$  induzca una submersión riemanniana  $\pi_n : L(n, 1) \rightarrow S^2_\tau$ . Si dotamos a  $S^3$  de una métrica que hace de  $\pi$  una submersión de Killing, entonces está claro que  $\pi_n$  es una submersión de Killing con la métrica cociente y que la longitud de las fibras de  $\pi$  en  $S^3$  es  $n$  veces la longitud de las correspondientes fibras de  $\pi_n$  en  $L(n, 1)$ .

Por otro lado, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , el espacio lente  $L(n, 1)$  es orientable y su grupo fundamental es isomorfo al grupo cíclico de orden  $n$ , de donde se deduce que dos espacios lente  $L(n, 1)$  y  $L(m, 1)$  no son homeomorfos si  $m \neq n$  (véase [Sav12] para más información). Además, ninguna de estas submersiones admite secciones globales.

3. Los espacios homogéneos  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  son submersiones de Killing sobre  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ , la superficie completa y simplemente conexa de curvatura constante  $\kappa$ , con curvatura del fibrado constante  $\tau$ . Si  $\kappa > 0$ , la proyección es la fibrición de Hopf y las fibras son homeomorfas a  $S^1$  (a diferencia de los demás casos en que lo son a  $\mathbb{R}$ ). Una descripción completa de estos espacios puede encontrarse en [Dan07], aunque en las siguientes secciones los estudiaremos dentro de una construcción más general.

<sup>1</sup> En general, para  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $L(p, q)$  se define como el cociente de  $S^3$  por el grupo de difeomorfismos generado por  $(z, w) \mapsto (e^{2\pi i/p}z, e^{2q\pi i/p}w)$ . No obstante, la proyección de Hopf sólo induce una proyección de  $L(p, q)$  en  $S^2(\kappa)$  para  $q = 1$ .

Hemos visto así ejemplos donde la longitud de la fibra puede ser finita o infinita y esta disyuntiva será importante en los resultados de clasificación que daremos más adelante. Con las herramientas que tenemos, podemos dar ahora el siguiente resultado.

**Lema 1.5.** *Sea  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  una submersión de Killing, siendo  $M$  una superficie conexa, y supongamos que una de sus fibras tiene longitud finita. Entonces, todas las fibras tienen la misma longitud.*

*Demostración.* Supongamos que  $q \in M$  cumple que su fibra tiene longitud  $0 < \ell < \infty$ . La traslación vertical  $\phi_\ell$  deja fijos a todos los puntos de la fibra de  $q$ . Además, si  $U \subset M$  es un entorno abierto de  $q$  que admita una base ortonormal de campos  $\{e_1, e_2\} \subset \mathfrak{X}(U)$ . Podemos tomar entonces  $\{E_1, E_2, E_3\}$  una base ortonormal de  $\pi^{-1}(U)$  de forma que  $E_i$  sea el levantamiento horizontal de  $e_i$  para  $i \in \{1, 2\}$ . Es fácil ver que  $d\phi_\ell$  deja invariantes los campos de esta base en la fibra de  $q$  ( $E_1$  y  $E_2$  por ser levantamientos horizontales y  $E_3$  por ser el campo de Killing vertical), luego  $d\phi_\ell$  es la identidad a lo largo de esta fibra. En virtud del resultado de unicidad de las isometrías de una variedad riemanniana, deducimos que  $\phi_\ell = \text{id}_{\mathbb{E}}$  (para esto es fundamental que  $M$  sea conexa).

Así, hemos probado que la longitud de cada fibra es igual a un divisor entero de  $\ell$  pero, como el mismo razonamiento puede hacerse en cualquier punto, la longitud de la fibra ha de ser una función constante en  $M$ .  $\square$

### 1.1.1 Resultados de estructura local

El primer resultado que necesitamos se sigue de [Ste51, Theorem 12.2] y nos da la existencia de una trivialización de la submersión sobre aquellos abiertos en que ésta admite una sección<sup>2</sup> diferenciable. En lo sucesivo, denotaremos por  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  al grupo uniparamétrico de traslaciones verticales.

**Proposición 1.6.** *Sea  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  una submersión de Killing y supongamos que existe una sección diferenciable  $F_0 : U \rightarrow \mathbb{E}$  sobre un abierto  $U \subseteq M$ . Entonces,  $\Psi : U \times \mathbb{R} \rightarrow \pi^{-1}(U)$  dada por*

$$\Psi(p, t) = \phi_t(F_0(p))$$

*es un difeomorfismo local. Si las geodésicas verticales tienen longitud infinita, entonces  $\Psi$  es un difeomorfismo global.*

<sup>2</sup> Dado  $U \subseteq M$ , una sección sobre  $U$  es una aplicación  $F_0 : U \rightarrow \mathbb{E}$  tal que  $\pi \circ F_0 = \text{id}_M$ .

Supongamos que  $(U, \varphi)$  es una carta local en  $M$  donde existe una sección diferenciable  $F_0 : U \rightarrow \mathbb{E}$  y consideremos el difeomorfismo local

$$\begin{aligned} \Psi \circ (\varphi^{-1} \times \text{id}_{\mathbb{R}}) : \varphi(U) \times \mathbb{R} &\rightarrow \pi^{-1}(U) \\ (x, y, t) &\mapsto \phi_t(F_0(\varphi^{-1}(x, y))). \end{aligned} \quad (3)$$

Si tomamos en  $\varphi(U) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$  la métrica  $ds^2$  que convierte a esta aplicación una isometría local, entonces la proyección sobre el primer factor  $\pi_1 : \varphi(U) \times \mathbb{R} \rightarrow \varphi(U)$  es una submersión de Killing, donde estamos considerando en el abierto de llegada  $\varphi(U)$  la métrica inducida a través de  $\varphi$  de la métrica de  $M$ . En otras palabras, el siguiente diagrama conmutativo ofrece lo que podríamos llamar un *isomorfismo local* de submersiones de Killing:

$$\begin{array}{ccc} \varphi(U) \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\Psi \circ (\varphi^{-1} \times \text{id}_{\mathbb{R}})} & \pi^{-1}(U) \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ \varphi(U) & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & U \end{array}$$

Las flechas verticales representan submersiones y las horizontales isometrías (locales). Además, en la submersión de la izquierda, las traslaciones verticales son las aplicaciones de la forma  $(x, y, t) \rightarrow (x, y, t + a)$  para  $a \in \mathbb{R}$ , de donde se deduce que  $\partial_t$  es un campo de Killing vertical y unitario.

Vamos ahora a dar una expresión general de la métrica inducida en  $\varphi(U) \times \mathbb{R}$  y, para simplificar los cálculos, supondremos que  $(U, \varphi)$  es una carta isoterma con parámetro conforme  $\lambda \in C^\infty(\varphi(U))$ , esto es, la proyección

$$\pi_1 : (\varphi(U) \times \mathbb{R}, ds^2) \rightarrow (\varphi(U), \lambda^2(dx^2 + dy^2))$$

es una submersión de Killing. Si consideramos los campos diferenciables  $e_1 = \frac{1}{\lambda} \partial_x$  y  $e_2 = \frac{1}{\lambda} \partial_y$  en  $\varphi(U)$ , entonces  $\{e_1, e_2\}$  es una base ortonormal de  $T\varphi(U)$  y podemos definir, para cada  $i \in \{1, 2\}$ , el levantamiento horizontal  $E_i \in \mathfrak{X}(\varphi(U) \times \mathbb{R})$  de  $e_i$  y  $E_3 = \partial_t$ . Así, la terna  $\{E_1, E_2, E_3\}$  es una base ortonormal de  $\mathfrak{X}(\varphi(U) \times \mathbb{R})$ , que podemos suponer positivamente orientada (intercambiando  $e_1$  y  $e_2$  si es necesario).

Como  $\pi_1$  es la proyección sobre las dos primeras variables en  $\mathbb{R}^3$ , existirán funciones  $a, b \in C^\infty(\varphi(U))$  tales que dicha base puede escribirse como

$$\begin{cases} (E_1)_{(x,y,t)} = \frac{1}{\lambda(x,y)} \partial_x + a(x,y) \partial_t \\ (E_2)_{(x,y,t)} = \frac{1}{\lambda(x,y)} \partial_y + b(x,y) \partial_t \\ (E_3)_{(x,y,t)} = \partial_t \end{cases} \quad (4)$$

Notemos que  $a$  y  $b$  no dependen de la variable  $t$ . Ahora bien, el hecho de que  $\{E_1, E_2, E_3\}$  sea ortonormal respecto de  $ds^2$  nos permite escribir esta métrica de la siguiente forma compacta:

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (dt - \lambda(a dx + b dy))^2. \quad (5)$$

**Observación 1.7.** Independientemente de los valores de las funciones  $a$  y  $b$ , la expresión (5) define una métrica en  $\varphi(U) \times \mathbb{R}$  tal que la proyección  $\pi_1$  es una submersión riemanniana y  $\partial_t$  es un campo de Killing unitario, luego no hay restricción alguna sobre  $a$  y  $b$ .

Observemos ahora que de la expresión de la base dada en (4) se sigue fácilmente que  $[E_1, E_3] = [E_2, E_3] = 0$  y

$$[E_1, E_2] = \frac{\lambda_y}{\lambda^2} E_1 - \frac{\lambda_x}{\lambda^2} E_2 + \left( \frac{1}{\lambda^2}(b\lambda_x - a\lambda_y) + \frac{1}{\lambda}(b_x - a_y) \right) E_3.$$

Teniendo en cuenta el lema 1.2 y que la conexión de Levi-Civita paraleliza la métrica, podemos calcular la curvatura del fibrado  $\tau$ , que verifica

$$\begin{aligned} 2\tau &= \langle [E_1, E_2], E_3 \rangle = \frac{1}{\lambda^2}(b\lambda_x - a\lambda_y) + \frac{1}{\lambda}(b_x - a_y) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \operatorname{div}_0(\lambda b \partial_x - \lambda a \partial_y) = \operatorname{div}\left(\frac{b}{\lambda} \partial_x - \frac{a}{\lambda} \partial_y\right), \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $\operatorname{div}_0$  indica la divergencia respecto a la métrica llana  $dx^2 + dy^2$  y  $\operatorname{div}$  indica la divergencia respecto de la métrica  $\lambda^2(dx^2 + dy^2)$  en  $\varphi(U)$ .

La modelización de  $\pi^{-1}(U)$  que hemos realizado depende esencialmente de la sección inicial  $F_0 : U \rightarrow \mathbb{E}$  elegida. Para entender bien la dependencia de esta construcción respecto de dicha sección, supongamos que tenemos otra sección  $F_1 : U \rightarrow \mathbb{E}$  y escribamos las métricas  $ds_0^2$  y  $ds_1^2$  sobre  $\varphi(U) \times \mathbb{R}$  asociadas a  $F_0$  y  $F_1$  respectivamente como

$$ds_i^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (dt - \lambda(a_i dx + b_i dy))^2 \quad (7)$$

para ciertas funciones  $a_i, b_i \in C^\infty(\varphi(U))$  e  $i \in \{0, 1\}$ . Como  $F_0$  y  $F_1$  son secciones del mismo fibrado, existirá  $d \in C^\infty(\varphi(U))$  tal que  $F_1(\varphi^{-1}(x, y)) = \phi_{d(x, y)}(F_0(\varphi^{-1}(x, y)))$  para todo  $(x, y) \in U$ . Como quiera que la aplicación  $\Psi_i : \varphi(U) \times \mathbb{R} \rightarrow \pi^{-1}(U)$  dada por  $\Psi_i(x, y, t) = \phi_t(F_i(\varphi^{-1}(x, y)))$  es isometría local para  $i \in \{0, 1\}$ , también ha de serlo la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi_1^{-1} \circ \Psi_0 : (\varphi(U) \times \mathbb{R}, ds_0^2) &\longrightarrow (\varphi(U) \times \mathbb{R}, ds_1^2) \\ (x, y, t) &\longmapsto (x, y, t - d(x, y)). \end{aligned} \quad (8)$$

Imponiendo que esta aplicación sea una isometría, obtenemos las condiciones sobre las funciones  $a_i$  y  $b_i$  que se recogen en el siguiente resultado,

donde además se caracteriza cuándo dos métricas de la forma dada en (5) son isométricas. Para entender mejor el resultado, precisaremos de una definición previa.

**Definición 1.8.** Sean  $\pi_0 : \mathbb{E}_0 \rightarrow M$  y  $\pi_1 : \mathbb{E}_1 \rightarrow M$  submersiones de Killing sobre la misma superficie  $M$ . Un isomorfismo (resp. isomorfismo local) entre ambas submersiones de Killing es una isometría (resp. isometría local)  $L : \mathbb{E}_0 \rightarrow \mathbb{E}_1$  de forma que  $\pi_1 \circ L = \pi_0$ .

La condición  $\pi_1 \circ L = \pi_0$  nos dice que  $L$  intercambia las fibras de  $\pi_0$  y  $\pi_1$ , y que, dado el campo de Killing unitario y vertical  $\xi$ , entonces  $L_*\xi = \xi$  o bien  $L_*\xi = -\xi$ . Como estamos considerando un sentido determinado para las traslaciones verticales, surge de forma natural especificar el comportamiento de  $L$  sobre el campo de Killing, como hacemos a continuación.

**Lema 1.9.** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  un abierto. Dadas  $\lambda, a_0, a_1, b_0, b_1 \in C^\infty(\Omega)$ , con  $\lambda > 0$ , consideremos la métrica  $ds_i^2$  definida por (7) sobre  $\Omega \times \mathbb{R}$  para  $i \in \{0, 1\}$ . Entonces,

a) Para cada  $i \in \{0, 1\}$ ,  $\pi_i : (\Omega \times \mathbb{R}, ds_i^2) \rightarrow (\Omega, \lambda^2(dx^2 + dy^2))$  es una submersión de Killing con campo de Killing unitario  $\partial_t$ .

b) Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

i) Existe un isomorfismo entre ambas submersiones de Killing que conserva el campo  $\partial_t$  y la orientación.

ii) Existe una función  $d \in C^\infty(\Omega)$  tal que

$$a_1 - a_0 = \frac{d_x}{\lambda}, \quad b_1 - b_0 = \frac{d_y}{\lambda}. \quad (9)$$

iii) Las curvaturas de los fibrados  $\tau_0, \tau_1 \in C^\infty(\Omega)$  coinciden.

Notemos que la condición (ii) puede parafrasearse como que existe el isomorfismo entre ambas submersiones de Killing si, y sólo si, las métricas  $ds_0^2$  y  $ds_1^2$  son representaciones de la misma submersión de Killing para secciones iniciales distintas. La función  $d$  es, salvo una constante aditiva, la distancia medida sobre geodésicas verticales entre ambas secciones.

*Demostración.* El apartado (a) se ha mencionado antes y es de comprobación inmediata luego nos centraremos en (b). Si existe un isomorfismo en las condiciones del apartado (i), entonces es una isometría que conserva el campo de Killing vertical, la conexión y el producto vectorial, luego también

la curvatura del fibrado y hemos probado que (i  $\Rightarrow$  iii). Ahora bien, si suponemos que se cumple (iii), esto significa que  $\text{div}_0(\lambda b_0 \partial_x - \lambda a_0 \partial_y) = \text{div}_0(\lambda b_1 \partial_x - \lambda a_1 \partial_y)$  en vista de la ecuación (6). Esta condición se puede reescribir como

$$(\lambda(a_1 - a_0))_y = (\lambda(b_1 - b_0))_x,$$

que son las condiciones de integrabilidad de (9), luego existe una función  $d \in C^\infty(\Omega)$  cumpliendo (ii). Finalmente, para ver que (ii) implica (i), consideremos la aplicación  $L : (\Omega \times \mathbb{R}, ds_0^2) \rightarrow (\Omega \times \mathbb{R}, ds_1^2)$  dada por  $L(x, y, t) = (x, y, t - d(x, y))$ , inspirada en (8), que es un difeomorfismo. Es fácil ver que las ecuaciones dadas en (ii) equivalen a que  $L$  sea una isometría.  $\square$

### 1.1.2 Curvatura del espacio total una submersión de Killing

Estamos interesados en calcular el tensor de curvatura del espacio total  $\mathbb{E}$  de una submersión de Killing  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  en términos de la geometría de la base y la curvatura del fibrado. Para ello, trabajaremos localmente usando las parametrizaciones dadas en los epígrafes anteriores (otro enfoque distinto puede verse en [EO10]). Concretamente, dado un punto  $q \in M$  y una carta conforme sobre un entorno  $(U, \varphi)$  de  $q$  con factor conforme  $\lambda$ , podemos considerar la parametrización de  $\pi^{-1}(U)$  sobre  $\varphi(U) \times \mathbb{R}$  dada por 3 y existen  $a, b \in C^\infty(\varphi(U))$  tales que la base  $\{E_1, E_2, E_3\}$  definida en (4) es ortonormal. Usando la fórmula de Koszul y las identidades ya probadas para el corchete de Lie, es fácil deducir que

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} E_1 &= -\frac{\lambda_y}{\lambda^2} E_2, & \nabla_{E_1} E_2 &= \frac{\lambda_y}{\lambda^2} E_1 + \tau E_3, & \nabla_{E_1} E_3 &= -\tau E_2, \\ \nabla_{E_2} E_1 &= \frac{\lambda_x}{\lambda^2} E_2 - \tau E_3, & \nabla_{E_2} E_2 &= -\frac{\lambda_x}{\lambda^2} E_1, & \nabla_{E_2} E_3 &= \tau E_1, \\ \nabla_{E_3} E_1 &= -\tau E_2, & \nabla_{E_3} E_2 &= \tau E_1, & \nabla_{E_3} E_3 &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

donde  $\tau = \frac{1}{2} \langle [E_1, E_2], E_3 \rangle$  es la curvatura del fibrado. Usando que la curvatura de Gauss de  $M$  viene dada en términos del factor conforme como

$$K_M = \frac{\Delta_0(\log \lambda)}{\lambda^2} = \frac{\lambda_{xx} + \lambda_{yy}}{\lambda^3} - \frac{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}{\lambda^4},$$

pueden probarse las siguientes expresiones para el tensor de curvatura de cuatro variables de  $\mathbb{E}$ :

$$\begin{aligned} R(E_1, E_2, E_2, E_1) &= K_M - 3\tau^2, \\ R(E_1, E_3, E_3, E_1) &= R(E_2, E_3, E_3, E_2) = \tau^2. \end{aligned}$$

Dado  $q \in \mathbb{E}$ , diremos que un plano vectorial  $\Pi \subseteq T_q \mathbb{E}$  es *vertical* cuando  $\xi_q \in \Pi$  y diremos que es *horizontal* cuando  $\xi_q$  sea ortogonal a  $\Pi$ , siendo  $\xi$  el

campo de Killing vertical en  $\mathbb{E}$ . En nuestro modelo,  $\Pi$  es horizontal cuando está generado por  $E_1$  y  $E_2$  mientras que es vertical cuando está generado por  $E_3$  y una combinación lineal de  $E_1$  y  $E_2$  (notemos que, en este caso, su curvatura seccional es  $\tau^2$  independientemente de qué combinación se tome). De la expresión anterior de la curvatura es fácil deducir el siguiente resultado.

**Lema 1.10.** *Dado un plano vectorial  $\Pi \subseteq T_q\mathbb{E}$  con vector normal  $N \in T_q\mathbb{E}$ , su curvatura seccional viene dada por*

$$K(\Pi) = v^2(K_M(\pi(q)) - 3\tau(q)^2) + (1 - v^2)\tau(q)^2,$$

donde  $v = \langle N, \xi_q \rangle$  y  $K_M$  es la curvatura de Gauss de la superficie  $M$ .

En particular, la curvatura seccional está comprendida entre  $K_M - 3\tau^2$  y  $\tau^2$ . Además, podemos calcular otras curvaturas de  $\mathbb{E}$  de forma inmediata:

- la curvatura de Ricci verifica  $\text{Ric}(X) = K_M - 2\tau^2$  para cualquier  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{E})$  horizontal y unitario y  $\text{Ric}(\xi) = 2\tau^2$ ; y
- la curvatura escalar viene dada por  $\rho = 2(K_M - \tau^2)$ .

## 1.2 CLASIFICACIÓN DE LAS SUBMERSIONES DE KILLING

El lema 1.9 nos dice que la curvatura del fibrado  $\tau$  en una submersión de Killing  $\pi: \mathbb{E} \rightarrow M$  determina localmente la geometría de la submersión. Si buscamos una versión global del mismo resultado, la topología tiene mucho que decir. Para poner esto de manifiesto basta pensar en que cualquier producto  $M \times \mathbb{R}$  con la estructura estándar de submersión de Killing tiene exactamente la misma base y curvatura del fibrado que su cociente riemanniano por una traslación vertical  $M \times S^1$ . Por otro lado, sobre  $S^2$  existen submersiones riemannianas tan dispares como  $S^2 \times \mathbb{R}$  y  $S^2 \times S^1$  (ambas con  $\tau = 0$ ) o la esfera redonda  $S^3$  mediante la fibración de Hopf. Dos problemas fundamentales aparecen a la hora de globalizar:

- El primero de ellos es la existencia de secciones. Dicha existencia es equivalente a que el espacio total sea difeomorfo a un espacio producto (véase la proposición 1.6). En caso de que no existan, siempre podemos recubrir la superficie por abiertos donde sí las haya y donde haya cartas isotermas, aplicar el lema de estructura local y estudiar cómo se combinan dichas cartas. Éste será el caso de  $M = S^2(\kappa)$ .



- El otro problema consiste en que si tomamos una submersión de Killing cualquiera, podemos considerar el cociente por ciertas traslaciones verticales y obtendremos otra submersión de Killing no isomorfa (las fibras no tienen la misma longitud). En algunos casos, como el de la fibración de Hopf, cambia incluso la topología pues aparecen espacios lente (véanse los ejemplos 1.4). Esto lo solucionaremos tomando el recubridor universal del espacio total con que trabajemos.

La herramienta principal que usaremos en el proceso de globalización serán los levantamientos legendrianos u horizontales de curvas en la base del fibrado. Aunque con las mismas técnicas que aquí desarrollaremos se puede dar información sobre otros espacios, nuestro objetivo será clasificar las submersiones de Killing sobre superficies de curvatura constante.

### 1.2.1 Levantamientos legendrianos

Sea  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  una submersión de Killing y  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  una curva de clase  $C^1$ . Diremos que  $\tilde{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$  de clase  $C^1$  es un *levantamiento legendriano* u horizontal de  $\alpha$  cuando  $\tilde{\alpha}'$  sea horizontal y  $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$  en  $[a, b]$ .

Este concepto puede extenderse a curvas que sean regulares a trozos. Más explícitamente, si  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  es de clase  $C^1$  a trozos, es decir, existe una partición  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  de forma que  $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$  es de clase  $C^1$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , entonces un levantamiento legendriano de  $\alpha$  es una curva continua tal que  $\tilde{\alpha}|_{[t_{i-1}, t_i]}$  es un levantamiento legendriano de  $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Lema 1.11.** *Dados  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  de clase  $C^1$  a trozos y  $p_0 \in \mathbb{E}$  tal que  $\pi(p_0) = \alpha(a)$ , existe un único levantamiento legendriano  $\tilde{\alpha}$  de  $\alpha$  tal que  $\tilde{\alpha}(a) = p_0$ .*

*Demostración.* Consideremos una partición  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  de forma que  $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$  es de clase  $C^1$  y refinemos dicha partición para que  $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$  para cierta carta isoterma  $(U_i, \varphi_i)$  de  $M$ . Si probamos la existencia y unicidad de los levantamientos de cada uno de estos trozos, está claro que estará probado el enunciado.

Por tanto, podemos suponer sin perder generalidad que la propia  $\alpha$  tiene su imagen contenida en una carta isoterma  $(U, \varphi)$  con lo que  $\tilde{\alpha}$  estará contenida en  $\pi^{-1}(U)$  luego podemos trabajar en la carta sobre  $\varphi(U) \times \mathbb{R}$  dada en (3). Así, escribiendo en coordenadas  $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \varphi(U)$ , un levantamiento legendriano ha de ser de la forma  $\tilde{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

para cierta función  $z(t)$  y ser legendriano es equivalente a que  $\langle \tilde{\alpha}', \partial_t \rangle = 0$ , ecuación diferencial que se puede expresarse como

$$z' = \lambda(x, y) \cdot (a(x, y)x' + b(x, y)y'). \quad (11)$$

Dado que  $\pi(p_0) = \alpha(a)$ , tenemos que  $p_0 = (x(a), y(a), z_0)$  en esta parametrización para cierto  $z_0 \in \mathbb{R}$ . De (11), deducimos que existe una única función  $z(t)$  de clase  $C^1$  cumpliendo la ecuación (11) con la condición inicial  $z(a) = z_0$ , luego el levantamiento existe y es único.  $\square$

Tenemos todos los ingredientes para dar una interpretación geométrica de la curvatura del fibrado.

**Proposición 1.12.** *Sea  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  una submersión de Killing cuyas geodésicas verticales tienen longitud infinita. Dada una curva simple  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  a trozos que bordea un abierto relativamente compacto y orientable  $\Omega \subset M$ , consideremos  $\tilde{\alpha}$  un levantamiento legendriano de  $\alpha$  y llamemos  $d$  a la distancia de  $\tilde{\alpha}(b)$  a  $\tilde{\alpha}(a)$  sobre la geodésica vertical que contiene a ambos puntos. Entonces,*

$$d = 2 \left| \int_{\Omega} \tau \right|.$$

*Demostración.* Consideremos un atlas de  $M$  formado por parametrizaciones isotermas. Si la traza de  $\alpha$  no está contenida en una de las cartas del atlas, existe una triangulación del abierto  $\Omega$  con un número finito de triángulos con borde regular a trozos, de forma que cada uno de ellos está contenido en un abierto del atlas<sup>3</sup> y  $\alpha$  se puede expresar como suma finita de las fronteras de los triángulos recorridas con una orientación de forma que las partes comunes se recorran dos veces en sentido contrario. No entraremos en más detalles sobre esto, pero así podemos suponer sin perder generalidad que  $\Omega$  está contenida en una sola carta isoterma  $(U, \varphi)$  y trabajar con las parametrizaciones definidas en la sección 1.1.1 que, por ser las geodésicas verticales de longitud infinita, dan una isometría global entre  $\varphi(U) \times \mathbb{R}$  y  $\pi^{-1}(U)$  según la proposición 1.6.

En tal caso, la ecuación (6) nos permite expresar  $\tau$  como una divergencia calculada en la métrica de  $M$  inducida en  $\varphi(\Omega) \subset \varphi(U)$ . El teorema de la divergencia nos dice ahora que

$$\int_{\varphi(\Omega)} 2\tau = \int_{\varphi(\Omega)} \operatorname{div} \left( \frac{b}{\lambda} \partial_x - \frac{a}{\lambda} \partial_y \right) = \int_{\partial \varphi(\Omega)} \left\langle \frac{b}{\lambda} \partial_x - \frac{a}{\lambda} \partial_y, \eta \right\rangle$$

<sup>3</sup> Un argumento similar al de la demostración de [Jos02, Theorem 2.3.A.1] sirve para construir una tal triangulación.

donde  $\eta$  es el conormal exterior unitario a  $\partial\phi(\Omega)$ . Si escribimos  $\alpha = (x, y)$  y  $\tilde{\alpha} = (x, y, z)$  y suponemos que  $\alpha$  está parametrizada por la longitud de arco (es decir,  $(x')^2 + (y')^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ ), entonces  $\eta = -y'\partial_x + x'\partial_y$  salvo posiblemente el signo, que no es relevante pues podemos escribir

$$\left| \int_{\Omega} 2\tau \right| = \left| \int_a^b \lambda \cdot (\alpha x' + \beta y') \right| = \left| \int_a^b z' \right| = |z(b) - z(a)|,$$

donde hemos usado la ecuación (11). En este modelo, la distancia sobre la vertical viene dada por  $d = |z(b) - z(a)|$  y hemos terminado.  $\square$

El hecho de que las geodésicas verticales tengan longitud infinita sólo se utiliza para que la distancia vertical de dos puntos en la misma fibra esté bien definida. No obstante, el resultado puede usarse de forma mucho más general si la submersión admite una sección definida en el dominio  $\Omega$  bordeado por la curva ya que, en tal caso, podemos pasar al *recubridor universal vertical* (esto es, la aplicación  $\Psi$  dada en la proposición 1.6) y luego volver al correspondiente cociente de la misma por una traslación vertical.

### 1.2.2 Submersiones de Killing con cartas globales

Consideremos un abierto de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  estrellado respecto del origen con una métrica  $\lambda^2(dx^2 + dy^2)$  conforme a la usual y  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow \Omega$  una submersión de Killing con  $\mathbb{E}$  simplemente conexo. Una tal submersión siempre admite una sección global luego, de la proposición 1.6 y del lema 1.9, deducimos que  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow \Omega$  es isomorfa como submersión de Killing a la proyección sobre el primer factor  $\pi_1 : (\Omega \times \mathbb{R}, ds^2) \rightarrow (\Omega, dx^2 + dy^2)$ , donde

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (dt - \lambda(ax + by))^2,$$

para ciertas funciones  $a, b \in C^\infty(\Omega)$ . Además, el lema 1.9 también nos dice que la clase de isomorfismo está unívocamente determinada por la curvatura del fibrado, que cumple

$$2\tau = \frac{1}{\lambda^2} \operatorname{div}_{\mathbb{R}^2}(\lambda b \partial_x - \lambda a \partial_y).$$

Es obvio que cualquier función diferenciable en  $\mathbb{R}^2$  es divergencia de algún campo, lo que demuestra que esta construcción recorre todas las posibles curvaturas de fibrados sobre  $\Omega$ . A continuación, exponemos una forma muy simétrica de elegir  $a$  y  $b$  para conseguir cualquier  $\tau \in C^\infty(\Omega)$ .

**Teorema 1.13.** *Dado un abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  estrellado respecto del origen y  $\lambda, \tau \in C^\infty(\Omega)$  con  $\lambda > 0$ , existe una submersión de Killing  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow (\Omega, \lambda^2(dx^2 + dy^2))$  con curvatura del fibrado  $\tau$ . Si  $\mathbb{E}$  simplemente conexo, dicha submersión es isomorfa a  $\pi_1 : (\Omega \times \mathbb{R}, ds^2) \rightarrow (\Omega, \lambda^2(dx^2 + dy^2))$ ,  $\pi_1(x, y, z) = (x, y)$ , donde*

$$ds^2 = \lambda(x, y)^2(dx^2 + dy^2) + (dz + \eta(x, y)(y dx - x dy))^2$$

y la función  $\eta \in C^\infty(\Omega)$  está definida por

$$\eta(x, y) = 2 \int_0^1 s \cdot \tau(xs, ys) \cdot \lambda(xs, ys)^2 ds.$$

Este es un teorema de existencia y unicidad general pero, particularizándolo a los casos en que la base tiene curvatura constante, modelamos las submersiones de Killing sobre  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{H}^2(\kappa)$  (el caso de  $\mathbb{S}^2(\kappa)$  se tratará en la siguiente sección). Si  $\tau$  es también constante, tenemos los siguientes casos:

- Sobre  $\mathbb{R}^2$  con la métrica llana podemos tomar directamente la parametrización usual con  $\lambda = 1$ . Una elección interesante es tomar  $\tau$  constante, donde el teorema nos da  $b(x, y) = \tau x$  y  $a(x, y) = -\tau y$ . Obtenemos así  $\mathbb{R}^3$  con su métrica estándar (para  $\tau = 0$ ) y el grupo de Heisenberg (para  $\tau \neq 0$ ).
- En  $\mathbb{H}^2(\kappa)$ , donde  $\kappa < 0$ , podemos utilizar el modelo<sup>4</sup> del disco de Poincaré, dado por  $(\mathbb{D}(2/\sqrt{-\kappa}), \lambda^2(dx^2 + dy^2))$ , siendo

$$\lambda(x, y) = \left(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)\right)^{-1}.$$

En el caso de que  $\tau$  sea constante, recuperamos  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  para  $\tau = 0$  y, para  $\tau \neq 0$ , la métrica sobre  $\mathbb{D}(2/\sqrt{-\kappa}) \times \mathbb{R}$  queda

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (dz + \tau\lambda(y dx - x dy))^2,$$

que modela  $\tilde{\mathbb{S}}_2(\mathbb{R})$  como veremos en la sección 1.4.3.

**Observación 1.14.** Si  $\mathbb{E}$  no es simplemente conexo, entonces podemos pasar a su recubridor universal y puede probarse fácilmente que una submersión  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow \Omega$  es isomorfa a un cociente de  $(\Omega \times \mathbb{R}, ds^2)$  por una traslación vertical, en cuyo caso  $\mathbb{E}$  es homeomorfo a  $\Omega \times \mathbb{S}^1$ .

<sup>4</sup> Una discusión análoga a la que sigue puede hacerse para otros modelos como el del semiplano, que estudiaremos en la sección 1.4.3.

1.2.3 Submersiones de Killing sobre  $S^2(\kappa)$ 

**Lema 1.15.** Sea  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow S^2(\kappa)$  una submersión de Killing y tomemos  $T = \int_{S^2} \tau$ , donde  $\tau \in C^\infty(S^2(\kappa))$  es la curvatura del fibrado.

- a) Si  $T = 0$ , entonces el fibrado admite una sección global y, en consecuencia,  $\mathbb{E}$  es difeomorfo a  $S^2 \times \mathbb{R}$  ó  $S^2 \times S^1$ .
- b) Si  $T \neq 0$ , entonces existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathbb{E}$  es difeomorfo al espacio lente  $L(n, 1)$  y la longitud de las fibras de  $\pi$  es igual a  $|2T|/n$ .

*Demostración.* Sea  $\Gamma \subset S^2(\kappa)$  una geodésica y  $D^+, D^- \subset S^2(\kappa)$  los dos hemisferios cerrados en que  $\Gamma$  divide a  $S^2(\kappa)$ . Además, es claro que podemos elegir  $\Gamma$  de forma que  $\int_{D^+} \tau = \int_{D^-} \tau = \frac{1}{2}T$ . Consideremos  $\tilde{\Gamma} \subset \mathbb{E}$  un levantamiento legendriano de  $\Gamma$  y distingamos dos casos:

- a) Si  $T = 0$ , la condición  $\int_{D^+} \tau = 0$  nos dice que  $\tilde{\Gamma}$  es una curva cerrada (basta trabajar en el recubridor universal de  $\pi^{-1}(D^+)$  y aplicar la proposición 1.12). Ahora es claro que existen secciones  $F^\pm : D^\pm \rightarrow \mathbb{E}$  tales que  $F_{|\Gamma}^\pm(\Gamma) = \tilde{\Gamma}$ . La aplicación  $F : S^2(\kappa) \rightarrow \mathbb{E}$  tal que  $F = F^\pm$  en  $D^\pm$  está bien definida y es una sección continua global. Esto implica que el fibrado es trivial como se afirma en el enunciado.
- b) Si  $T \neq 0$ , parametricemos  $\Gamma$  por  $\gamma : [a, b] \rightarrow S^2(\kappa)$  y el levantamiento legendriano  $\tilde{\Gamma}$  por  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ . Fijemos un campo de Killing vertical para orientar las fibras y trabajemos en los recubridores universales  $\Omega^+$  y  $\Omega^-$  de los conjuntos  $\pi^{-1}(D^+)$  y  $\pi^{-1}(D^-)$ . Un análisis más profundo de la demostración de la proposición 1.12 junto con el hecho de que conormales exteriores a  $D^+$  y  $D^-$  a lo largo de sus respectivos bordes son opuestos implica que la diferencia de altura entre  $\tilde{\gamma}(b)$  y  $\tilde{\gamma}(a)$  es igual en valor absoluto a  $|T|$ , pero tiene signo opuesto cuando se considera en  $\Omega^+$  y en  $\Omega^-$  (véase la figura 1). Esto nos dice que si recorremos una distancia  $|T|$  verticalmente desde  $\tilde{\gamma}(a)$  llegamos a  $\tilde{\gamma}(b)$  y si recorremos una distancia  $|2T|$  volvemos a llegar a  $\tilde{\gamma}(a)$ . Por tanto, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que la longitud de la fibra es igual a  $|2T|/n$ . En particular,  $\pi^{-1}(D^+)$  y  $\pi^{-1}(D^-)$  son topológicamente toros sólidos.

De hecho, la curva  $\tilde{\Gamma}$  determina la forma en que han de pegarse estos toros y da  $n$  vueltas a la fibra en la dirección vertical luego podemos pasar al recubridor de  $n$  hojas de  $\mathbb{E}$  donde da una sola vuelta. Dicha forma de pegar ambos toros sólidos  $\pi^{-1}(D^\pm)$  produce un espacio homeomorfo a  $S^3$  y la fibración que se induce en él es la fibración de Hopf (véanse [Sav12] y los ejemplos 1.4). De hecho, el espacio  $\mathbb{E}$

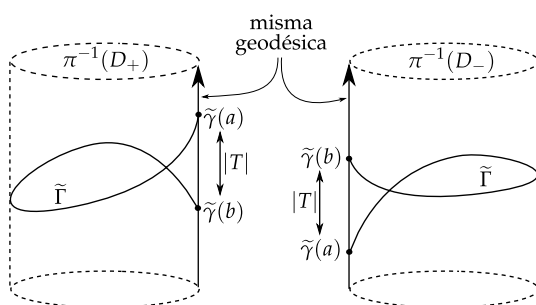


Figura 1: La curva  $\tilde{\Gamma}$  está representada sobre los dos cilindros  $\pi^{-1}(D^+)$  y  $\pi^{-1}(D^-)$  y tiene su borde sobre la geodésica vertical representada en línea continua. Al pegar isométricamente a lo largo de ésta, recorriéndola en el sentido de las flechas, vemos que su longitud ha de ser un divisor de  $|2T|$ .

puede recuperarse como el cociente de  $S^3$  por una traslación vertical y sabemos que dicho cociente es isomorfo a un espacio lente  $L(m, 1)$ .  $\square$

A partir de ahora nos centraremos en el caso simplemente conexo, es decir,  $S^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  y  $S^3$ , pues el resto de espacios se obtienen como cociente de éstos por traslaciones verticales.

**Teorema 1.16.** *Sea  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow S^2(\kappa)$  una submersión de Killing con  $\mathbb{E}$  simplemente conexo y sea  $T = \int_{S^2(\kappa)} \tau$ , donde  $\tau \in C^\infty(S^2(\kappa))$  es la curvatura del fibrado.*

- a) *Si  $T = 0$ , entonces la fibración es isomorfa (como submersión de Killing) a la proyección sobre el primer factor  $\pi : S^2(\kappa) \times \mathbb{R} \rightarrow S^2(\kappa)$  para cierta métrica en  $S^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  para la que  $\partial_t$  un campo de Killing unitario y vertical.*
- b) *Si  $T \neq 0$ , entonces es isomorfa (como submersión de Killing) a la proyección de Hopf  $\pi : S^3 \rightarrow S^2(\kappa)$  para cierta métrica en la esfera  $S^3 \subset \mathbb{C}^2$  para la que  $\xi_{(z,w)} = \frac{\kappa}{4T}(iz, iw)$  un campo de Killing unitario y vertical. La longitud de las fibras es igual a  $|2T|$ .*

Además, la función  $\tau \in C^\infty(S^2(\kappa))$  determina la submersión salvo isomorfismo.

*Demostración.* El apartado (a) se deduce de la demostración del lema 1.15 y de la proposición 1.6. Para el apartado (b), dado  $p \in S^2(\kappa)$ , consideremos los abiertos  $U_1 = S^2(\kappa) \setminus \{p\}$  y  $U_2 = S^2(\kappa) \setminus \{-p\}$ , esto es, quitamos dos puntos, uno en cada uno, que son antípodas. Denotemos por  $\hat{\pi} : S^3 \rightarrow S^2(\kappa)$  a la fibración de Hopf definida en (2). El lema 1.9 de clasificación local nos asegura que, para cada  $i \in \{1, 2\}$ , podemos inducir una métrica en

$\widehat{\pi}^{-1}(U_i)$  que haga a las submersiones  $\widehat{\pi} : \widehat{\pi}^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$  y  $\pi : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$  isomorfas como submersiones de Killing. Para ello, basta trabajar en el recubridor universal  $\widehat{\pi}^{-1}(U_i)$  y luego pasar a un cociente por una traslación vertical de longitud  $|2T|$ . La condición sobre la longitud de la fibra impone que podamos tomar como campo de Killing vertical unitario  $\xi = \frac{\kappa}{4T}(iz, iw)$ , que no es más que un múltiplo escalar del campo vertical estándar de la fibración de Hopf.

Queda por ver que las métricas inducidas en  $\widehat{\pi}^{-1}(U_1)$  y  $\widehat{\pi}^{-1}(U_2)$  coinciden sobre  $\widehat{\pi}^{-1}(U_1 \cap U_2)$  pero esto es consecuencia una vez más del lema 1.9 (notemos que  $U_1 \cap U_2$  admite una carta conforme global) ya que ambos fibrados tienen la misma curvatura del fibrado. Observemos que, con el mismo argumento de unicidad local y la clasificación topológica que se ha realizado, se deduce que la curvatura del fibrado determina la clase de isomorfismo de Killing de la submersión de Killing.  $\square$

El resto de esta sección está dedicado a obtener modelos explícitos de las métricas que hemos clasificado en el teorema anterior para  $T = 0$ . El método consistirá en inducir una métrica de  $\mathbb{R}^4$  en  $S^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ .

*El caso  $T = 0$*

Dadas ciertas funciones  $a, b, c \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , consideremos la proyección sobre las tres primeras coordenadas  $\pi : (\mathbb{R}^4, ds^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde en  $\mathbb{R}^3$  estamos considerando la métrica llana usual y

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + (dt - a dx - b dy - c dz)^2. \quad (12)$$

Esta fórmula está inspirada en la ecuación (5) y, de la misma forma, puede probarse que  $\pi$  define una submersión riemanniana cuyas fibras son las curvas integrales del campo de Killing unitario  $\partial_t$ .

Dada una superficie  $\Sigma$  inmersa en  $\mathbb{R}^3$ , podemos considerar la métrica inducida en  $\Sigma \times \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^4$  de  $ds^2$  y, claramente,  $\pi$  se restringe a una submersión de Killing  $\Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ . Esto nos da una forma muy general de obtener submersiones de Killing triviales sobre cualquier superficie inmersa en  $\mathbb{R}^3$ . Para calcular la curvatura del fibrado correctamente, necesitamos introducir un convenio para las orientaciones.

**Observación 1.17.** Si  $\Sigma$  es una superficie orientable inmersa en  $\mathbb{R}^3$ , entonces podemos inducir una orientación en  $\Sigma \times \mathbb{R}$  imponiendo que si una base local de campos  $\{e_1, e_2\}$  está positivamente orientada en  $\Sigma$ , entonces  $\{E_1, E_2, \partial_t\}$

está positivamente orientada en  $\Sigma \times \mathbb{R}$ , donde  $E_i$  es el levantamiento horizontal de  $e_i$  para  $i \in \{1, 2\}$ . Dicha condición define una orientación en  $\Sigma \times \mathbb{R}$  y es la que usaremos en el siguiente resultado.

**Proposición 1.18.** *Sea  $\Sigma$  una superficie orientable inmersa en  $\mathbb{R}^3$ . La curvatura del fibrado de la submersión  $\Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$  definida anteriormente viene dada por*

$$2\tau = \operatorname{div}_\Sigma(JT),$$

donde  $T = (\partial_t)^\top \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  es la parte tangente a  $\Sigma \equiv \Sigma \times \{0\} \subset \mathbb{R}^4$  del campo de Killing vertical respecto de la métrica  $ds^2$  y  $J : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$  un giro de ángulo  $\frac{\pi}{2}$  en el fibrado tangente.

*Demostración.* Sea  $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización local y conforme de  $\Sigma$  compatible con la orientación, esto es, existe  $\lambda \in C^\infty(\Omega)$  positiva tal que  $\{\frac{1}{\lambda}X_u, \frac{1}{\lambda}X_v\}$  es una base ortonormal positivamente orientada del tangente a la superficie inmersa. Podemos suponer que  $X$  es un embebimiento y tomar  $\{E_1, E_2\} \subset \mathfrak{X}(X(\Omega) \times \mathbb{R})$  un levantamiento horizontal de esa base que, junto con  $E_3 = \partial_t$  (restringido a  $\Sigma \times \mathbb{R}$ ) forma una base ortonormal de  $\mathfrak{X}(X(\Omega) \times \mathbb{R})$  positivamente orientada (véase la observación 1.17). Ahora podemos calcular la curvatura del fibrado como  $2\tau = \langle [E_1, E_2], E_3 \rangle$ .

La condición del levantamiento horizontal nos dice que podemos escribir  $E_1 = \frac{1}{\lambda}X_u + f\partial_t$  y  $E_2 = \frac{1}{\lambda}X_v + g\partial_t$  para ciertas funciones  $f, g \in C^\infty(X(\Omega))$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= [\frac{1}{\lambda}X_u, \frac{1}{\lambda}X_v] + [\frac{1}{\lambda}X_u, g\partial_t] + [f\partial_t, \frac{1}{\lambda}X_u + v] + [f\partial_t, g\partial_t] \\ &= \frac{1}{\lambda^2}(\lambda_v X_u - \lambda_u X_v) + \frac{1}{\lambda}(g_u - f_v)\partial_t, \end{aligned}$$

donde hemos usado las propiedades del corchete de Lie y que  $[X_u, X_v] = 0$  y  $[\partial_t, \partial_t] = 0$ . Ahora bien, como  $0 = \langle E_1, E_3 \rangle = \langle \frac{1}{\lambda}X_u + f\partial_t, \partial_t \rangle$ , deducimos que  $\langle X_u, \partial_t \rangle = -\lambda f$  y, de forma análoga, tenemos que  $\langle X_v, \partial_t \rangle = -\lambda g$ . Así, podemos calcular

$$2\tau = \langle [E_1, E_2], E_3 \rangle = \frac{1}{\lambda^2}((\lambda g)_u - (\lambda f)_v) = \operatorname{div}_\Sigma(Y),$$

siendo  $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  el pullback por la inmersión del campo  $g\frac{X_u}{\lambda} - f\frac{X_v}{\lambda}$ . Ahora bien, este último campo se puede escribir como  $-J(f\frac{X_u}{\lambda} + g\frac{X_v}{\lambda})$ . Si ahora tenemos en cuenta que  $f = -\langle \frac{X_u}{\lambda}, \partial_t \rangle$  y  $g = -\langle \frac{X_v}{\lambda}, \partial_t \rangle$ , entonces es fácil comprobar que  $Y = JT$  y tenemos probada la fórmula del enunciado sin más que tomar un atlas de parametrizaciones en estas condiciones.  $\square$

**Observación 1.19.** Si  $\Sigma$  es una superficie compacta y orientable, entonces  $\int_\Sigma \tau = \frac{1}{2} \int_\Sigma \operatorname{div}(JT) = 0$  en virtud del teorema de la divergencia, lo que nos



dice que esta construcción sólo produce submersiones de Killing cuya integral de la curvatura del fibrado es cero, concordando así con el teorema 1.16 en el caso de la esfera.

Si tenemos una carta local isoterma  $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de  $\Sigma$  compatible con la orientación y con factor conforme  $\lambda$ , hemos visto en la demostración de la proposición que podemos expresar sobre  $\Omega$

$$2\tau = \operatorname{div}_{\Sigma} \left( \frac{\langle X_u, \partial_t \rangle}{\lambda^2} X_v - \frac{\langle X_v, \partial_t \rangle}{\lambda^2} X_u \right) = \frac{1}{\lambda^2} (\langle X_u, \partial_t \rangle_v - \langle X_v, \partial_t \rangle_u).$$

En el caso de  $S^2(\kappa) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\kappa}\}$ , consideremos la proyección estereográfica  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2(\kappa) \setminus \{(0, 0, \frac{1}{\sqrt{\kappa}})\}$  dada por

$$X(u, v) = \left( \frac{2u}{\kappa(u^2 + v^2) + 1}, \frac{2v}{\kappa(u^2 + v^2) + 1}, \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \frac{\kappa(u^2 + v^2) - 1}{\kappa(u^2 + v^2) + 1} \right),$$

que es una carta isoterma con factor  $\lambda(u, v) = 2(\kappa(u^2 + v^2) + 1)^{-1}$ . Usando la fórmula anterior para la curvatura del fibrado, pasando a las coordenadas usuales  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  y extendiendo diferenciablemente al punto  $(0, 0, \frac{1}{\sqrt{\kappa}})$ , se llega a la expresión

$$2\tau = \sqrt{\kappa} ((yc - zb)_x + (za - xc)_y + (xb - ya)_z).$$

### 1.3 GEODÉSICAS E ISOMETRÍAS

Para seguir profundizando en la estructura de las submersiones de Killing, vamos a comenzar calculando sus geodésicas. Conocer las geodésicas ayuda mucho en la descripción de las isometrías ya que estas últimas conservan el carácter geodésico de una curva. Obtendremos así el teorema 1.27 que clasifica las isometrías que preservan la dirección vertical.

Dada una submersión de Killing  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  y una curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ , podemos considerar el levantamiento legendriano  $\tilde{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ , único si prefijamos el valor de  $\tilde{\alpha}(a)$  sobre la fibra de  $\alpha(a)$ . Dados dos campos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  y sus levantamientos horizontales  $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{E})$ , se cumple que

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} = \bar{\nabla}_X \bar{Y} + [\bar{X}, \bar{Y}]^v, \quad (13)$$

donde  $\nabla$  y  $\bar{\nabla}$  denotan las conexiones de Levi-Civita en  $M$  y  $\mathbb{E}$ , respectivamente,  $\bar{\nabla}_X \bar{Y}$  es el levantamiento horizontal de  $\nabla_X Y$  y  $[\bar{X}, \bar{Y}]^v$  es la parte vertical de  $[\bar{X}, \bar{Y}]$  (véase [Car92, pp.185-187]). Aplicando la fórmula (13) a

$\alpha'$  y su levantamiento horizontal  $\tilde{\alpha}'$ , resulta que  $\overline{\nabla}_{\tilde{\alpha}'}\tilde{\alpha}'$  es el levantamiento horizontal de  $\nabla_{\alpha'}\alpha'$ . Esto nos dice que los levantamientos horizontales de geodésicas son geodésicas pero, para obtener el resto de geodésicas que no son ni horizontales ni verticales, necesitamos una observación previa.

**Lema 1.20.** *Toda geodésica en  $\mathbb{E}$  forma un ángulo constante con el campo de Killing vertical.*

*Demostración.* Si  $\gamma$  es una geodésica en  $\mathbb{E}$  y denotamos por  $\xi$  al campo de Killing vertical, se tiene que

$$\frac{d}{dt}\langle \gamma'(t), \xi_{\gamma(t)} \rangle = \langle \overline{\nabla}_{\gamma'}\gamma', \xi \rangle + \langle \gamma', \overline{\nabla}_{\gamma'}\xi \rangle.$$

El primer sumando se anula por ser  $\gamma$  geodésica y el segundo también se anula por ser  $\overline{\nabla}_{\gamma'}\xi = \tau\gamma' \wedge \xi$ .  $\square$

Dado un número  $\mu \in \mathbb{R}$  y la curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ , podemos considerar la curva diferenciable

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}, \quad \gamma(t) = \phi_{\mu t}(\tilde{\alpha}(t)), \quad (14)$$

donde  $\{\phi_t\}$  es el grupo uniparamétrico de translaciones verticales asociado a  $\xi$ . Aplicando la regla de la cadena, la derivada de  $\gamma$  viene dada por

$$\gamma'(t) = \mu\xi_{\gamma(t)} + (d\phi_{\mu t})_{\tilde{\alpha}(t)}(\tilde{\alpha}'(t)),$$

lo que implica que  $\gamma$  forma un ángulo constante con el campo de Killing vertical  $\xi$  y será nuestro candidato a geodésica. Teniendo en cuenta que  $[\tilde{\alpha}', \xi] = 0$  ya que  $\tilde{\alpha}'$  se extiende a un campo en un entorno de  $\tilde{\alpha}$  que puede expresarse como levantamiento horizontal y usando la fórmula (13), tenemos que

$$\overline{\nabla}_{\gamma'}\gamma' = 2\mu\tau\tilde{\alpha}' \wedge \xi + \overline{\nabla}'_{\alpha'}\alpha'.$$

Ahora bien, si suponemos que  $\alpha$  está parametrizada por el arco y consideramos un giro  $J$  de ángulo  $\pm\frac{\pi}{2}$  en  $TM$  (el signo lo elegiremos más adelante), existe una función  $\kappa_g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla_{\alpha'}\alpha' = \kappa_g \cdot J\alpha'$ ; esta función es conocida como la *curvatura geodésica* de  $\alpha$  en  $M$  (respecto de la orientación inducida por  $J$ ). El levantamiento horizontal de  $J\alpha'$  es un campo horizontal y unitario a lo largo de  $\tilde{\alpha}$  y ortogonal a  $\tilde{\alpha}'$ , esto es, es igual a  $\pm\tilde{\alpha}' \wedge \xi$ , donde el signo depende de la orientación dada por  $J$  y por el campo de Killing vertical elegido luego, cambiando la orientación de  $J$ , podemos suponer que es negativo.

**Lema 1.21.** *Dados  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $p \in M$  y  $v \in T_p M$ , existen  $\varepsilon > 0$  y una única curva diferenciable  $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$  parametrizada por la longitud de arco de forma que  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = v$*

$$\kappa_g(t) = 2\mu \cdot \tau(\alpha(t)). \quad (15)$$

Si  $M$  es completa, entonces  $\alpha$  se extiende a toda la recta real.

*Demostración.* Tomemos una parametrización conforme  $(U, \varphi)$  en  $M$  compatible con la orientación que hemos elegido anteriormente, siendo  $U$  de un entorno de  $p$ , con factor conforme  $\lambda$ . Usando la relación entre las conexiones de dos métricas conformes, no es difícil calcular sobre  $M$

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_x} \partial_x &= \frac{\lambda_x}{\lambda} \partial_x - \frac{\lambda_y}{\lambda} \partial_y, & \nabla_{\partial_x} \partial_y &= \frac{\lambda_y}{\lambda} \partial_x + \frac{\lambda_x}{\lambda} \partial_y, \\ \nabla_{\partial_y} \partial_x &= \frac{\lambda_y}{\lambda} \partial_x + \frac{\lambda_x}{\lambda} \partial_y, & \nabla_{\partial_y} \partial_y &= -\frac{\lambda_x}{\lambda} \partial_x + \frac{\lambda_y}{\lambda} \partial_y. \end{aligned}$$

Expresando en coordenadas  $\alpha = (x, y)$ , tenemos que  $\alpha' = x' \partial_x + y' \partial_y$  luego

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha'} \alpha' &= \left( x'' - \frac{\lambda_x}{\lambda} (y')^2 + 2 \frac{\lambda_y}{\lambda} x' y' + \frac{\lambda_x}{\lambda} (x')^2 \right) \partial_x \\ &\quad + \left( y'' + \frac{\lambda_y}{\lambda} (y')^2 + 2 \frac{\lambda_x}{\lambda} x' y' - \frac{\lambda_y}{\lambda} (x')^2 \right) \partial_y. \end{aligned}$$

Como quiera que  $J\alpha' = -y' \partial_x + x' \partial_y$  e imponiendo que  $\alpha$  está parametrizada por el arco, esto es, existe una función  $\theta$  suficientemente regular tal que  $x' = \lambda^{-1} \cos \theta$  e  $y' = \lambda^{-1} \sin \theta$ , podemos calcular

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \lambda^2 \left( -x'' y' + y'' x' + \left( \frac{\lambda_x}{\lambda} y - \frac{\lambda_y}{\lambda} x' \right) \left( (x')^2 + (y')^2 \right) \right) \\ &= -\theta' + \frac{\lambda_x}{\lambda^2} \sin \theta - \frac{\lambda_y}{\lambda^2} \cos \theta \end{aligned}$$

Esto prueba que la ecuación del enunciado es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\lambda(x,y)} \cos \theta, \\ y' = \frac{1}{\lambda(x,y)} \sin \theta, \\ \theta' = \frac{\lambda_x(x,y)}{\lambda(x,y)^2} \sin \theta - \frac{\lambda_y(x,y)}{\lambda^2(x,y)} \cos \theta - 2\mu\tau(x,y). \end{cases} \quad (16)$$

La teoría general de ecuaciones diferenciales nos asegura que existe una solución en un entorno del origen, es única (notemos que las condiciones iniciales  $\alpha(0)$ ,  $\alpha'(0)$  son equivalentes a  $x(0)$ ,  $y(0)$  y  $\theta(0)$ ) y es diferenciable.

Como los términos que aparecen en el sistema (16) son diferenciables en todo  $U$ , la curva puede extenderse mientras esté contenida en  $U$ . Si  $M$  es completa y tomamos un atlas por parametrizaciones conformes compatibles con la orientación, es evidente que  $\alpha$  puede extenderse a toda la recta real.  $\square$

El lema 1.21 nos dice la ecuación que la curva  $\alpha$  debe satisfacer para que  $\gamma$  definida mediante (14) sea una geodésica de  $\mathbb{E}$ . Notemos que  $\gamma'$  así construida cumple  $\|\gamma'\|^2 = 1 + \mu^2$  luego, después de reparametrizarla por la longitud de arco, el producto  $\langle \gamma', \xi \rangle$  es igual a  $\mu/\sqrt{1 + \mu^2}$ , expresión que recorre el intervalo abierto  $] -1, 1[$  cuando  $\mu$  varía en  $\mathbb{R}$ , lo que nos dice que esta construcción recorre todas las geodésicas de  $\mathbb{E}$  (salvo la vertical) que pasan por  $p$ .

**Proposición 1.22.** *Dado  $p \in \mathbb{E}$ , las geodésicas que pasan por  $p$  son, salvo reparametrizaciones, de uno, y sólo uno, de los siguientes tipos:*

- a) *geodésicas verticales (esto es, las fibras de la submersión),*
- b) *levantamiento horizontal de geodésicas de  $M$  que pasan por  $\pi(p)$ ,*
- c) *de la forma  $\gamma(t) = \phi_{\mu t}(\tilde{\alpha}(t))$ , siendo  $\tilde{\alpha}$  un levantamiento horizontal de una curva  $\alpha$  en  $M$  cumpliendo  $\alpha(0) = \pi(p)$  y la ecuación (15) para  $\mu \neq 0$ .*

*Además, si  $M$  es completa, también lo es  $\mathbb{E}$ .*

Observemos que en el caso en que la curvatura del fibrado es constante, toda geodésica no vertical se proyecta sobre una curva de curvatura geodésica constante en la base de la submersión y la geodésica es horizontal si, y sólo si, dicha proyección es una geodésica. Una aplicación de este resultado puede verse en la sección 1.4.2.

Vamos ya a pasar a estudiar las isometrías de una submersión de Killing, para lo que nos centraremos en el caso simplemente conexo con base  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ . No obstante, nos vamos a quedar con un tipo especial<sup>5</sup> de isometrías, que definimos a continuación.

**Definición 1.23.** *Sea  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  una submersión de Killing y  $\xi$  un campo de Killing unitario y vertical en  $\mathbb{E}$ . Llamaremos isometría de Killing a toda isometría*

<sup>5</sup> Desde nuestro enfoque, no podemos pretender clasificar todas las isometrías puesto que algunas se comportan mal respecto de la estructura de submersión de Killing. Si se piensa en la submersión usual  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con campo de Killing  $\partial_z$ , una rotación respecto del eje  $y = z = 0$  es un ejemplo de este mal comportamiento.

$f$  del espacio total  $\mathbb{E}$  que cumpla que  $f_*\xi = \xi$  o bien  $f_*\xi = -\xi$ . En el primer caso, diremos que  $f$  conserva la orientación de las fibras y, en el segundo, que la invierte.

Notemos que la definición no depende de la elección del campo de Killing  $\xi$ . Por otro lado, una isometría de Killing conserva la distribución horizontal luego lleva geodésicas horizontales en geodésicas horizontales. Surge así de forma natural el siguiente concepto.

**Definición 1.24.** Sea  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  una submersión de Killing y  $p \in \mathbb{E}$ . Llamaremos paraguas horizontal centrado en  $p$  a la unión de todas las geodésicas horizontales que pasan por  $p$ .

Es claro que el paraguas horizontal es una superficie embebida en un entorno del punto en que está centrado y que una isometría de Killing  $f$  en  $\mathbb{E}$  transforma el paraguas centrado en  $p$  en el paraguas centrado en  $f(p)$  para todo  $p \in \mathbb{E}$ . Otras propiedades son las siguientes.

**Lema 1.25.** Sea  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  una submersión de Killing con curvatura del fibrado  $\tau$  y  $f$  es una isometría de Killing en  $\mathbb{E}$ . Entonces,

- a) existe una única isometría  $h$  en  $M$  tal que  $\pi \circ f = h \circ \pi$ ;
- b) si  $f$  conserva la orientación de  $\mathbb{E}$ , entonces  $\tau \circ h = \tau$ ;
- c) si  $f$  invierte la orientación de  $\mathbb{E}$ , entonces  $\tau \circ h = -\tau$ .

En particular, tenemos que

- Si  $\tau$  es constante y distinta de cero, entonces no existen isometrías de Killing en  $\mathbb{E}$  que inviertan la orientación de  $\mathbb{E}$ .
- Si  $\kappa > 0$  y  $\int_{\mathbb{M}^2(\kappa)} \tau \neq 0$ , entonces no existen isometrías de Killing de  $\mathbb{E}$  que inviertan la orientación de  $\mathbb{E}$ .

*Demostración.* El apartado (a) se deduce de que  $f$  conserva las fibras de la submersión y de que  $d(\pi \circ f)_p = d\pi_{f(p)} \circ df_p$ , ya que  $d\pi$  conserva la parte horizontal de la métrica. Para probar (b), tengamos en cuenta que  $(\bar{\nabla}_X \xi)_p = \tau(p)X_p \wedge \xi_p$  para cualesquiera  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{E})$  y  $p \in \mathbb{E}$ . Si  $f$  conserva la orientación, aplicando  $df_p$  a esta igualdad y usando que  $f$  es isometría, tenemos que  $df_p(\bar{\nabla}_X \xi)_p = (\bar{\nabla}_{f_*X} f_*\xi)_{f(p)} = \tau(p)(f_*X)_{f(p)} \wedge (f_*\xi)_{f(p)}$ . Por otro lado, lo anterior es igual a  $\tau(f(p))(f_*X)_{f(p)} \wedge (f_*\xi)_{f(p)}$  y, de la arbitrariedad

de  $f_*X$ , deducimos que  $\tau(p) = \tau(f(p))$ , quedando así probado (b). Si  $f$  invierte la orientación, entonces en la igualdad anterior el producto vectorial cambia de signo, con lo que  $\tau(p) = -\tau(f(p))$  y tenemos (c).  $\square$

Lo sorprendente es que, salvo una traslación vertical, la isometría  $h$  sobre la base permite reconstruir la isometría de Killing en el espacio total y la determina cuando se impone la condición necesaria  $\tau \circ h = \tau$  ó  $\tau \circ h = -\tau$ .

**Lema 1.26.** *Sea  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  una bola abierta y supongamos que  $g$  es una métrica riemanniana en  $B$  tal que  $(B, g)$  es totalmente normal<sup>6</sup>. Si  $\pi : (B \times \mathbb{R}, ds^2) \rightarrow (B, g)$  es una submersión de Killing para cierta métrica  $ds^2$ , entonces los paraguas horizontales son secciones globales del fibrado.*

*Demostración.* Dado  $p \in B \times \mathbb{R}$ , la condición de totalmente normal nos dice que existe un abierto  $G \subseteq T_{\pi(p)}B$  tal que la aplicación exponencial  $\exp_{\pi(p)}^B : G \rightarrow B$  es un difeomorfismo. Entonces, el paraguas horizontal centrado en  $p$  no es más que  $\exp_p^{B \times \mathbb{R}}(\tilde{G})$ , donde  $\tilde{G} \subseteq T_p^h(B \times \mathbb{R})$  es tal que  $d\pi_p(\tilde{G}) = G$  (estamos denotando por  $T^h$  a la parte horizontal del espacio tangente). Por ser totalmente normal,  $\exp_p^{B \times \mathbb{R}}$  es inyectiva al restringirla a  $\tilde{G}$  luego es una superficie diferenciable y una sección del fibrado.  $\square$

Estamos ya preparados para dar el teorema de clasificación.

**Teorema 1.27.** *Sea  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$  una submersión de Killing con  $\mathbb{E}$  simplemente conexo y curvatura del fibrado  $\tau \in C^\infty(\mathbb{M}^2(\kappa))$ . Supongamos que  $h : \mathbb{M}^2(\kappa) \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$  es una isometría y  $p_0, q_0 \in \mathbb{E}$  son tales que  $h(\pi(p_0)) = \pi(q_0)$ .*

- i) Si  $\tau \circ h = \tau$  en  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ , entonces existe una única isometría de Killing  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  que conserva la orientación de  $\mathbb{E}$  tal que  $\pi \circ f = h \circ \pi$  y  $f(p_0) = q_0$ .*
- ii) Si  $\tau \circ h = -\tau$  en  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ , entonces existe una única isometría de Killing  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  que invierte la orientación de  $\mathbb{E}$  tal que  $\pi \circ f = h \circ \pi$  y  $f(p_0) = q_0$ .*

*Demostración.* Comencemos analizando el caso  $\kappa \leq 0$ , donde toda la variedad  $\mathbb{M}^2(\kappa)$  es totalmente normal. En vista del lema 1.26, podemos considerar secciones globales  $F_1, F_2 : \mathbb{M}^2(\kappa) \rightarrow \mathbb{E}$  dadas por los paraguas centrados en  $p_0$  y  $q_0$ , respectivamente (que están embebidos). Considerando los modelos conocidos de  $\mathbb{M}^2(\kappa)$  para  $\kappa \leq 0$ , podemos tomar una carta conforme

<sup>6</sup> Una variedad riemanniana se dice totalmente normal cuando cualquier par de puntos se unen mediante una única geodésica.

global  $\varphi_1 : \mathbb{M}^2(\kappa) \rightarrow B$  para cierta bola abierta  $B \subset \mathbb{R}^2$  centrada en el origen (posiblemente  $B = \mathbb{R}^2$  para  $\kappa = 0$ ) cumpliendo  $\varphi_1(\pi(p_0)) = (0, 0)$ . Así, podemos construir otra carta conforme global  $\varphi_2 = \varphi_1 \circ h^{-1} : \mathbb{M}^2(\kappa) \rightarrow B$ , que cumple que  $\varphi_2(\pi(q_0)) = (0, 0)$ . Ahora bien, las secciones  $F_1$  y  $F_2$  nos permiten definir parametrizaciones globales  $R_1, R_2 : B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$  (véase la ecuación (3)) como  $R_i(p, t) = \phi_t(F_i(\varphi_i^{-1}(p)))$ , donde  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  es el grupo uniparamétrico de traslaciones verticales. Finalmente, denotaremos por  $ds_1^2$  y  $ds_2^2$  a las métricas en  $B \times \mathbb{R}$  que son pullback por  $R_1$  y  $R_2$ , respectivamente, de las métricas de  $\mathbb{E}$ .

En otras palabras, tenemos el diagrama dado en la figura 2, donde queremos definir  $f$  que lo haga conmutativo, pero vamos a ver que es más sencillo definir  $\hat{f}$  a través de las isometrías  $R_1$  y  $R_2$ . Observemos que la condición  $f(p_0) = q_0$  se traduce en  $\hat{f}(0) = 0$  en  $B \times \mathbb{R}$ . Además, las condiciones  $\tau \circ h = \tau$  (resp.  $\tau \circ h = -\tau$ ) y  $\varphi_2 = \varphi_1 \circ h^{-1}$  nos dicen que los fibrados  $\pi_1 : (B \times \mathbb{R}, ds_1^2) \rightarrow B$  tienen la misma curvatura (resp. opuesta) punto a punto, donde denotamos por  $\pi_1$  a la proyección sobre el primer factor. Si  $\tau \circ h = \tau$ , entonces definimos  $\hat{f} = \text{id}_{B \times \mathbb{R}}$  y, si  $\tau \circ h = -\tau$ , tomamos  $\hat{f}(p, t) = (p, -t)$  para todo  $(p, t) \in B \times \mathbb{R}$ . Notemos que, en cualquiera de los dos casos,  $\hat{f}$  conserva la dirección vertical y  $\hat{f}^*(ds_2^2)$  y  $ds_1^2$  son métricas en  $B \times \mathbb{R}$  que hacen de  $\pi_1$  una submersión de Killing, tienen la misma curvatura del fibrado punto a punto y para las que el paraguas horizontal centrado en 0 en  $B \times \mathbb{R}$  es  $B \times \{0\}$  (por haber tomado  $F_1$  y  $F_2$  como paraguas), luego es inmediato que  $ds_1^2 = \hat{f}^*(ds_2^2)$ , de donde  $\hat{f}$  es una isometría de Killing.

Notemos que, si  $\tau \circ h = \tau$  (resp.  $\tau \circ h = -\tau$ ), entonces  $f$  conserva (resp. invierte) la orientación. La unicidad se deduce de la unicidad de una isometría conocida la imagen y la diferencial en un punto (observemos que la parte vertical de  $df_{p_0}$  está determinada por la condición de isometría de Killing, mientras que la parte horizontal lo está por la condición  $\pi \circ f = h \circ \pi$ ).

Analicemos ahora el caso  $\kappa > 0$ . Notemos que la isometría  $h$  de  $S^2(\kappa)$  deja invariantes un par  $\{x, -x\}$  de puntos antípodas. En primer lugar, supongamos que  $\pi(p_0) \notin \{x, -x\}$ , de donde  $\pi(q_0) \notin \{x, -x\}$ . El razonamiento del párrafo anterior permite construir isometrías  $f_+$  en  $\pi^{-1}(S^2(\kappa) \setminus \{x\})$  y  $f_-$  en  $\pi^{-1}(S^2(\kappa) \setminus \{-x\})$  (se razona en el recubridor universal de estos conjuntos y se pasa después al cociente) tales que  $\pi \circ f_{\pm} = h \circ \pi$  y  $f_{\pm}(p_0) = q_0$ . Si probamos que éstas coinciden sobre  $U = \pi^{-1}(S^2(\kappa) \setminus \{x, -x\})$  habremos terminado. Como  $f_+(p_0) = f_-(p_0)$ , bastará ver que  $(df_+)_{p_0} = (df_-)_{p_0}$  para que  $f_+ = f_-$  en  $U$ . No obstante, dado  $v \in T_{p_0}M$ , si  $v$  es horizontal, entonces  $(df_+)_{p_0}(v) = (df_-)_{p_0}(v)$  por cumplirse  $\pi \circ f_{\pm} = h \circ \pi$ . El signo sobre la parte vertical también está determinado ya que ambas isometrías han de conservar la orientación simultáneamente (según el lema 1.25). Finalmente,

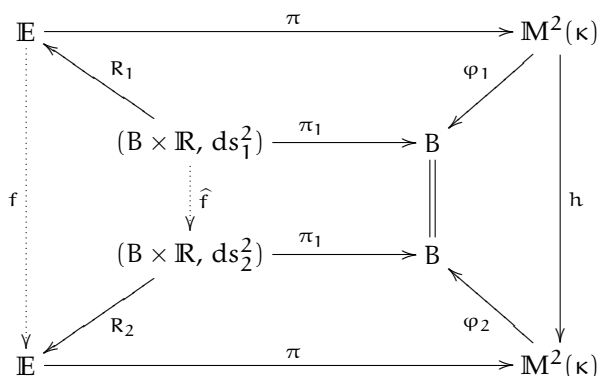


Figura 2: Un diagrama conmutativo de isometrías de Killing

en el caso en que  $\pi(p_0) = x$  (resp.  $\pi(p_0) = -x$ ), se puede determinar primero la isometría  $f_-$  (resp.  $f_+$ ) y luego se ajusta  $f_+$  (resp.  $f_-$ ) sobre los valores en  $U$  ya calculados.  $\square$

Veamos otra formulación de este resultado. La relación dada por el lema 1.25 nos da un homomorfismo del grupo de isometrías de Killing de  $\mathbb{E}$  en el grupo de isometrías de  $M^2(\kappa)$  que preservan  $\tau$  o la llevan en  $-\tau$  cuyo núcleo consiste en las isometrías que dejan invariante cada fibras vertical (esto es, las traslaciones verticales  $y$ , para  $\tau = 0$ , también las simetrías respecto de una sección horizontal del fibrado). El teorema anterior afirma que dicho homomorfismo es sobreyectivo.

1.4 ESPACIOS HOMOGÉNEOS Y SUBMERSIONES DE KILLING

Una variedad riemanniana se dice *homogénea* si su grupo de isometrías actúa de forma transitiva sobre ella, esto es, dados dos puntos de la variedad, existe una isometría que lleva uno en el otro. En el caso 3-dimensional, las variedades homogéneas simplemente conexas están completamente clasificadas: salvo  $S^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ , para  $\kappa > 0$ , toda 3-variedad homogénea simplemente conexa es isométrica a un grupo de Lie con una métrica invariante a izquierda<sup>7</sup> (véase [MP11, Theorem 2.4]). El siguiente lema nos da una condición necesaria para que una 3-variedad homogénea admita una estructura de submersión de Killing.

<sup>7</sup> Una métrica invariante a izquierda es aquella para la que las traslaciones a izquierda dentro de la estructura de grupo son isometrías.



**Lema 1.28.** *Sea  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  una submersión de Killing. Si  $\mathbb{E}$  es homogéneo, entonces la curvatura de Gauss de  $M$  y la curvatura del fibrado son constantes.*

*Demostración.* Denotemos por  $K_M$  a la curvatura de Gauss de  $M$  y por  $\tau$  a la curvatura del fibrado. Si  $\mathbb{E}$  es homogéneo, entonces la curvatura escalar  $\rho = 2(K_M - \tau^2)$  es constante y el máximo y mínimo de la curvatura seccional, que son  $K_M - 3\tau^2$  y  $\tau^2$  según el lema 1.10, son también constantes. De aquí deducimos que tanto  $K_M$  como  $\tau$  son constantes.  $\square$

Trabajando en el caso de que la base sea simplemente conexa, el lema reduce las posibilidades a submersiones sobre la superficie de curvatura constante  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ . Si imponemos también que el espacio total  $\mathbb{E}$  sea simplemente conexo, los teoremas 1.13 y 1.16 nos aseguran que la submersión es única salvo isomorfismo y denotaremos por comodidad  $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  en tal caso. Observemos que el teorema 1.27 nos dice que todos son homogéneos pues la base es homogénea y la curvatura del fibrado constante. Además, todas sus isometrías conservan la orientación, salvo para  $\tau = 0$ , y el grupo de isometrías tiene dimensión 4 ya que el grupo de isometrías de  $\mathbb{M}^2(\kappa)$  tiene dimensión 3. Tenemos las siguientes posibles geometrías:

- Si  $\tau = 0$ , entonces la submersión es isomorfa a la proyección sobre el primer factor  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$ , donde estamos considerando en  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  la métrica producto.
- Si  $\tau \neq 0$  y  $\kappa = 0$ , entonces la submersión es isomorfa a la proyección  $\pi : (\mathbb{R}^3, ds^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ , donde

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz + \tau(y dx - x dy))^2.$$

La variedad riemanniana  $(\mathbb{R}^3, ds^2)$  se conoce como *espacio de Heisenberg* y lo denotaremos por  $\text{Nil}_3(\tau) = \mathbb{E}(0, \tau)$ .

- Si  $\tau \neq 0$  y  $\kappa < 0$ , entonces la submersión es isomorfa a la proyección  $\pi : (\mathbb{D}(2/\sqrt{-\kappa}), ds^2) \times \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{D}(2/\sqrt{-\kappa}), \lambda^2(dx^2 + dy^2))$ , donde

$$\lambda(x, y) = \left(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)\right)^{-1}.$$

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (dz + \tau\lambda(y dx - x dy))^2.$$

Como veremos más adelante, esta métrica es isométrica a una métrica invariante a izquierda en  $\tilde{\text{Sl}}_2(\mathbb{R})$ , el recubridor universal del grupo especial lineal de orden 2 sobre  $\mathbb{R}$ .

- Si  $\tau \neq 0$  y  $\kappa > 0$ , entonces la submersión es isomorfa a la proyección de Hopf  $\pi: (\mathbb{S}^3, g) \rightarrow \mathbb{S}^2(\kappa)$  y la métrica en  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$  está dada por

$$g(X, Y) = \frac{4}{\kappa} \left[ \langle X, Y \rangle + \left( \frac{4\tau^2}{\kappa} - 1 \right) \langle X, V \rangle \langle Y, V \rangle \right], \quad (17)$$

siendo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto escalar usual de  $\mathbb{C}^2$  y  $V_{(z,w)} = (iz, iw)$ . Observemos que, para  $\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\kappa}$ , la métrica es homotética a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y  $(\mathbb{S}^3, g)$  es isométrica a la esfera redonda de cierto radio. Estas métricas se conocen como métricas de Berger en  $\mathbb{S}^3$  y denotaremos por  $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$  a  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  para  $\kappa > 0, \tau \neq 0$ .

A continuación, daremos una descripción más detallada de cada uno de los ejemplos, enfatizando en las propiedades que los distinguen y en las que nos serán de utilidad en los capítulos siguientes.

### 1.4.1 Espacios producto

Los ejemplos más sencillos de submersiones de Killing cuyo espacio total es homogéneo lo constituyen los productos riemannianos  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ . Notemos que, al trabajar con la métrica producto, las geodésicas de  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  son el producto de geodésicas de los factores y toda isometría  $f$  de  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  se descompone como  $f = (f_1 \times \text{id}_{\mathbb{R}}) \circ (\text{id}_{\mathbb{M}^2(\kappa)} \times f_2)$ , donde  $f_1$  es una isometría de  $\mathbb{M}^2(\kappa)$  y  $f_2$  es una isometría de  $\mathbb{R}$ .

Recogemos a continuación un breve resumen de las isometrías y de los grupos uniparamétricos de isometrías sobre el factor  $\mathbb{M}^2(\kappa)$  con  $\kappa \neq 0$ , que serán muy útiles más adelante.

- En el caso  $\kappa > 0$ , toda isometría de  $\mathbb{S}^2(\kappa) \subset \mathbb{R}^3$  es la restricción de una isometría de  $\mathbb{R}^3$  que fija el origen. Como toda isometría de  $\mathbb{R}^3$  que fija el origen deja una dirección invariante, las isometrías de  $\mathbb{S}^2(\kappa)$  dejan un par de puntos antípodos invariante. Si una isometría de  $\mathbb{S}^2(\kappa)$  conserva la orientación, entonces deja dos puntos antípodos fijos y es una rotación respecto de uno de ellos; si la invierte, entonces es la composición de la antípoda (o de una simetría respecto de una geodésica) con una rotación. Los únicos grupos uniparamétricos de isometrías que aparecen son los de rotaciones respecto algún punto de  $\mathbb{S}^2(\kappa)$ .
- Si  $\kappa < 0$  y consideramos el modelo del disco  $\mathbb{H}^2(\kappa) \equiv \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ , las isometrías de  $\mathbb{H}^2(\kappa)$  que conservan la orientación son transformaciones de Möbius que dejan invariante la frontera ideal  $\partial\mathbb{D}$  y de tres tipos esencialmente distintos: aparte de la identidad, si una tal isometría directa no deja puntos fijos en la frontera ideal, es una rotación

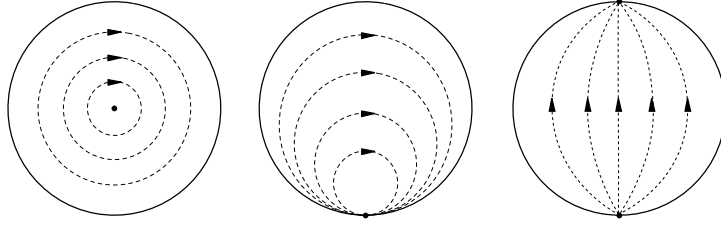


Figura 3: Esquema de las órbitas de los tres grupos uniparamétricos de isometrías de  $\mathbb{H}^2$  en el modelo del disco de Poincaré. De izquierda a derecha: rotaciones respecto de un punto, traslaciones parabólicas (o rotaciones respecto de un punto en el infinito) y traslaciones hiperbólicas.

(elíptica) respecto de un punto; si dejan un único punto fijo, tenemos traslaciones parabólicas y, si dejan dos puntos fijos, traslaciones hiperbólicas. Las isometrías que no conservan la orientación se obtienen al componer una de estas con una reflexión respecto de una geodésica.

En este caso, tenemos tres grupos uniparamétricos de isometrías de  $\mathbb{H}^2(\kappa)$  distintos, únicos salvo conjugación, que son los grupos de rotaciones respecto de un punto, traslaciones parabólicas y traslaciones hiperbólicas (en la figura 3 puede verse un diagrama).

Es de destacar que tanto los subconjuntos de la forma  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \{t_0\}$  como los de la forma  $\Gamma \times \mathbb{R}$ , donde  $\Gamma \subset \mathbb{M}^2(\kappa)$  es una geodésica, son superficies totalmente geodésicas en  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  pues pueden expresarse como conjuntos de puntos fijos de isometrías. De hecho, puede probarse que éstas son las únicas superficies totalmente geodésicas en este caso, y tenemos así una diferencia fundamental con los espacios  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  para  $\tau \neq 0$  como consecuencia del siguiente resultado de Souam y Toubiana [ST09, Theorem 1].

**Proposición 1.29.** *Si  $\tau \neq 0$  y  $\kappa \neq 4\tau^2$ , entonces  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  no admite superficies totalmente umbilicales.*

En el caso  $\kappa = 4\tau^2$ , el espacio  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  es isométrico a una 3-variedad de curvatura seccional constante no negativa. Es bien sabido que, para cada plano tangente en cualquier punto de ésta, existe una única superficie totalmente geodésica que pasa por el punto y es tangente a dicho plano.

## 1.4.2 El espacio de Heisenberg

El espacio  $\text{Nil}_3(\tau) = \mathbb{E}(0, \tau)$  admite una estructura de grupo de Lie

$$(x_1, y_1, z_1) \star (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \tau(x_1 y_2 - x_2 y_1)),$$

cuya álgebra de Lie consiste en las matrices triangulares superiores y nilpotentes de orden 3, de donde recibe su nombre. De hecho, podemos considerar la base de campos invariantes a izquierda que resulta al levantar horizontalmente los campos  $\partial_x$  y  $\partial_y$  de  $\mathbb{R}^2$  mediante la submersión  $\pi(x, y, z) = (x, y)$  y el campo de Killing unitario vertical  $\partial_z$ , dada por

$$E_1 = \partial_x - \tau y \partial_z, \quad E_2 = \partial_y + \tau x \partial_z, \quad E_3 = \partial_z,$$

y puede probarse que ésta es ortonormal respecto de la métrica  $ds^2$  de  $\text{Nil}_3(\tau)$  dada en las secciones anteriores.

Todas las geodésicas verticales y horizontales en  $\text{Nil}_3$  son rectas euclídeas como consecuencia de la proposición 1.22. Este resultado también nos permite integrar explícitamente las geodésicas que no son verticales: fijados  $\theta \in \mathbb{R}$  y  $\varphi \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ , la curva  $\gamma_{\varphi, \theta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\begin{aligned} \gamma_{\varphi, \theta}(t) = & \left( \frac{1}{2\tau} \operatorname{tg}(\varphi)(\cos(2\tau \cos(\varphi)t + \theta) - \cos(\theta)), \right. \\ & \left. \frac{1}{2\tau} \operatorname{tg}(\varphi)(\operatorname{sen}(2\tau \cos(\varphi)t + \theta) - \operatorname{sen}(\theta)), \right. \\ & \left. \left( \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(\varphi) - 1 \right) \cos(\varphi)t - \frac{1}{4\tau} \operatorname{tg}^2(\varphi) \operatorname{sen}(2\tau \cos(\varphi)t) \right) \end{aligned}$$

es una geodésica en  $\text{Nil}_3(\tau)$  cumpliendo  $\gamma_{\varphi, \theta}(0) = (0, 0, 0)$  y con velocidad inicial  $\gamma'_{\varphi, \theta}(0) = (-\operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), -\cos(\varphi))$ . Notemos que  $\|\gamma'(0)\| = 1$  (ya que en el origen la métrica  $ds^2$  es la euclídea) luego  $\gamma_{\varphi, \theta}$  está parametrizada por la longitud de arco.

Por otro lado, las isometrías de  $\text{Nil}_3$  son aplicaciones lineales. Más aún, todas ellas se obtienen como composición de una traslación a izquierda en la estructura de grupo de Lie y un elemento que fija al origen. Describimos a continuación estas dos familias de isometrías.

i) Dado  $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ , la aplicación  $f_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$f_p \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\tau y_0 & \tau x_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

es una isometría tal que  $f_p(0) = p$ .

- ii) El estabilizador del origen es  $\{h_\vartheta : \vartheta \in \mathbb{R}\} \cup \{\sigma \circ h_\vartheta : \vartheta \in \mathbb{R}\}$ , donde  $h_\vartheta$  es la rotación de ángulo  $\vartheta \in \mathbb{R}$  respecto de  $x = y = 0$  y  $\sigma$  la reflexión respecto del eje  $y = z = 0$  (ambas son isometrías euclídeas).

En particular, podemos considerar, para cada  $\theta \in \mathbb{R}$ , el grupo uniparamétrico de isometrías  $\{\phi_t^\theta\}_{t \in \mathbb{R}}$  dado por

$$\phi_t^\theta(x, y, z) = (x + t \cos \theta, y + t \sin \theta, z + \tau t(y \cos \theta - x \sin \theta)).$$

El campo  $X_\theta = \cos \theta(E_1 + 2\tau y E_3) + \sin \theta(E_2 - 2\tau x E_3)$  es el campo de Killing asociado a  $\{\phi_t^\theta\}$ . Obtenemos así una base de campos de Killing  $\{E_1 + 2\tau y E_3, E_2 - 2\tau x E_3, E_3\}$ , aunque esta base no es ortonormal. Un cuarto campo de Killing interesante es el asociado a las rotaciones, que está dado por  $yE_1 - xE_2 + \tau(x^2 + y^2)E_3$ .

#### 1.4.3 El grupo especial lineal

El grupo especial lineal  $Sl_2(\mathbb{R})$  es el conjunto de matrices de orden 2 con coeficientes reales y determinante 1, que tiene una estructura natural de grupo respecto del producto de matrices. El cociente suyo por el subgrupo  $\{I_2, -I_2\}$ , siendo  $I_2$  la matriz identidad, es isomorfo al grupo de isometrías de  $\mathbb{H}^2$  que preservan la orientación y es denotado por  $PSL_2(\mathbb{R})$ . Concretamente, tenemos que, a cada matriz  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2 \in Sl_2(\mathbb{R})$ , podemos asignarle la isometría  $\phi_A$  de  $\mathbb{H}^2(\kappa)$  en el modelo del semiplano superior, dada por

$$\phi_A(z) = \frac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}}.$$

Como quiera que  $\phi_A = \phi_{-A}$ , la aplicación  $A \mapsto \phi_A$  es un epimorfismo de grupos compatible con el cociente. Vamos a seguir el argumento que puede encontrarse, para  $\kappa = -1$  y  $\tau = -\frac{1}{2}$ , en los trabajos de Daniel [Dan07] y Younes [You10], para dar una métrica riemanniana sobre  $PSL_2(\mathbb{R})$ .

Si tomamos el conjunto  $\mathcal{U}(\kappa, \sigma) = \{(p, v) \in T\mathbb{H}^2(\kappa) : \|v\| = \sigma\}$  de vectores de norma  $\sigma$  en el fibrado tangente al plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2(\kappa)$ , podemos identificar  $PSL_2(\mathbb{R})$  con  $\mathcal{U}(\kappa, \sigma)$ , via la aplicación

$$A \mapsto (p, v) \iff \begin{cases} p = \phi_A(p_0) \\ v = (d\phi_A)_{p_0}(v_0) \end{cases} \quad (18)$$

para cierto  $(p_0, v_0) \in \mathcal{U}(\kappa, \sigma)$  prefijado. Tomamos en  $T\mathbb{H}^2(\kappa)$  la métrica cuya norma viene dada sobre un vector  $V$  tangente a  $\mathbb{H}^2(\kappa)$  por

$$\|V\| = \|d\pi(V)\|_{\mathbb{H}^2(\kappa)} + \left\| \frac{DV}{dt} \right\|_{\mathbb{H}^2(\kappa)},$$

donde  $\pi : \mathbb{T}\mathbb{H}^2(\kappa) \rightarrow \mathbb{H}^2(\kappa)$  es la proyección natural y  $\frac{DV}{dt}$  es la derivada covariante respecto de una curva en  $\mathbb{T}\mathbb{H}^2(\kappa)$  con velocidad inicial  $V$ . Esta métrica induce por restricción una métrica en  $\mathcal{U}(\kappa, \sigma)$ . Por otro lado, dada una parametrización conforme de  $\zeta : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2(\kappa)$  con factor conforme  $\lambda$ , se obtiene la parametrización del recubridor universal de  $\mathcal{U}(\kappa, \sigma)$

$$\begin{aligned} \Omega \times \mathbb{R} &\longrightarrow \tilde{\mathcal{U}}(\kappa, \sigma) \\ (x, y, t) &\longmapsto (\zeta(x, y), \frac{\sigma}{\lambda}(\cos(t)\partial_x + \sen(t)\partial_y)) \end{aligned}$$

A través de esta identificación, la métrica sobre  $\Omega \times \mathbb{R}$  es la dada por

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + \left(dt + \left(\frac{\lambda_x}{\lambda} dy - \frac{\lambda_y}{\lambda} dx\right)\right)^2.$$

A partir de esta expresión y de los resultados de la sección 1.1.1, es obvio que la proyección sobre el primer factor, que se corresponde con la proyección  $\pi : \mathbb{T}\mathbb{H}^2(\kappa) \rightarrow \mathbb{H}^2(\kappa)$ , es una submersión de Killing sobre  $\mathbb{H}^2(\kappa)$  con curvatura del fibrado  $\tau = -\sigma\kappa$ .

Un caso muy simple surge cuando tomamos la parametrización conforme  $\zeta$  dada por modelo del semiplano superior, que tiene factor conforme  $\lambda(x, y) = 1/(y\sqrt{-\kappa})$ . La métrica resultante sobre  $\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : y > 0\}$  es

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{-\kappa y^2} + \left(dt - \frac{2\tau}{\kappa y} dx\right)^2.$$

#### 1.4.4 Las esferas de Berger

La esfera  $S^3$  admite una estructura de grupo de Lie inducida por la siguiente identificación con  $SU(2) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : A\bar{A}^t = I_2, \det(A) = 1\}$ :

$$(z, w) \mapsto \begin{pmatrix} \bar{z} & w \\ -\bar{w} & z \end{pmatrix}.$$

Una base de campos invariantes a izquierda es  $\{E_1, E_2, V\}$ , donde

$$(E_1)_{(z,w)} = (-\bar{w}, \bar{z}), \quad (E_2)_{(z,w)} = (-i\bar{w}, i\bar{z}), \quad V_{(z,w)} = (iz, iw).$$

Puede demostrarse que la métrica de la esfera de Berger  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  para  $\kappa > 0$  y  $\tau \neq 0$  dada por (17) es invariante a izquierda para dicha estructura de grupo de Lie. Para esta métrica, la base anterior es ortogonal y se cumple que  $\|E_1\|^2 = \|E_2\|^2 = 4/\kappa$  y  $\|V\|^2 = 16\tau^2/\kappa$ . Además,  $V$  es vertical mientras que  $E_1$  y  $E_2$  son horizontales respecto de la fibración de Hopf (2). En consecuencia, un campo de Killing vertical y unitario es  $\xi = (\kappa/4\tau)V$ .

Es fácil probar que tanto las geodésicas horizontales como las verticales son círculos máximos (de hecho, son geodésicas para cualquier  $\kappa > 0$  y  $\tau \neq 0$ ). Señalemos además que la longitud de una geodésica vertical es, según el teorema 1.16, igual a

$$2 \int_{\mathbb{S}^2(\kappa)} |\tau| = 8\pi \frac{|\tau|}{\kappa},$$

mientras que la longitud de una geodésica horizontal es  $4\pi/\sqrt{\kappa}$ . Una descripción más detallada de estos espacios puede encontrarse en [Torioc, Sección 2.3] así como un embebimiento isométrico de  $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$  en los espacios proyectivo ( $\kappa - 4\tau^2 > 0$ ) e hiperbólico ( $\kappa - 4\tau^2 < 0$ ) complejos.

#### 1.4.5 Simetrías respecto de rectas y planos

A la vista de los modelos presentados en los epígrafes precedentes, es interesante señalar que, si  $\tau \neq 0$ , todas las isometrías de  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  preservan la orientación. En particular, no hay isometrías que pudieran calificarse como reflexiones respecto de superficies, mientras que si  $\tau = 0$ , tenemos reflexiones respecto de planos verticales y horizontales. No obstante, en todos los espacios  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  sí que hay giros de cualquier ángulo respecto de geodésicas verticales y simetrías respecto de geodésicas horizontales. Más rigurosamente, llamaremos simetría respecto de una geodésica horizontal a la isometría que se describe en el siguiente lema.

**Lema 1.30.** *Dada una geodésica horizontal  $\Gamma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , existe una única isometría de  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  que deja fijos a los puntos de  $\Gamma$  e invierte la orientación de las fibras.*

*Demostración.* La proyección  $\pi(\Gamma) \subset \mathbb{M}^2(\kappa)$  es una geodésica según la proposición 1.22. Si tomamos  $h : \mathbb{M}^2(\kappa) \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$  la reflexión respecto de  $\pi(\Gamma)$ , el teorema 1.27 nos asegura la existencia y unicidad de una isometría  $f$  en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  tal que  $\pi \circ f = h \circ \pi$ , con la condición inicial  $f(p_0) = p_0$  para cierto  $p_0 \in \Gamma$  (no depende del  $p_0$  elegido). Está claro que  $f$  deja invariante a  $\Gamma$  pues lleva geodésicas horizontales en geodésicas horizontales y su diferencial deja fija la dirección de  $\Gamma$  en  $p$ .  $\square$

Como consecuencia, cualquier paraguas horizontal  $\Lambda$  centrado en un punto  $p \in \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  es invariante por la simetría respecto de cualquier geodésica horizontal que pasa por  $p$  (que está contenida en  $\Lambda$  por definición de paraguas). De aquí es fácil deducir el siguiente resultado.

**Corolario 1.31.** *Todo paraguas horizontal en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  es una superficie minimal.*

En los espacios producto, los paraguas son trivialmente las secciones horizontales. En el modelo dado por el teorema 1.13 para  $\tau$  constante y  $\kappa \leq 0$ , el paraguas que pasa por  $(0, 0, 0)$  es el plano  $z = 0$ ; de hecho, puede probarse sin mucha dificultad que en el modelo usual sobre  $\mathbb{R}^3$  del grupo de Heisenberg, todo plano euclídeo (no vertical) es el paraguas horizontal centrado en cierto punto  $p_0$  y  $p_0$  está caracterizado por ser el único punto en donde el campo de Killing es ortogonal al plano<sup>8</sup>. En el caso de las esferas de Berger la situación es aún más interesante pues, como comentaremos en la observación 3.4, los paraguas horizontales son las únicas esferas minimales y no son secciones globales pues contienen una geodésica vertical.

1.5 SUPERFICIES EN SUBMERSIONES DE KILLING

A lo largo de esta sección consideraremos una submersión de Killing  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  y una inmersión isométrica de una superficie riemanniana  $\Sigma$  en  $\mathbb{E}$ . Para fijar notación, dado un campo unitario  $N$  normal a  $\Sigma$ , definimos la *función ángulo* asociada a  $N$  como  $\mathfrak{v} = \langle N, \xi \rangle$ . Asimismo, denotaremos por  $A : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$  al endomorfismo de Weingarten que está dado por  $AX = -\nabla_X N$  y tomaremos  $T = \xi - \mathfrak{v}N \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  la parte tangente a  $\Sigma$  del campo de Killing unitario  $\xi$ .

A continuación damos algunas propiedades que serán útiles más adelante.

**Lema 1.32.**

- a) *El jacobiano de la proyección  $\pi : \Sigma \rightarrow M$  cumple  $|\text{Jac}(\pi)| = |\mathfrak{v}|$ .*
- b)  $\nabla \mathfrak{v} = -AT + \tau T \wedge N$ .
- c) *La ecuación de Gauss se escribe como  $K = \det(A) + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\mathfrak{v}^2$ .*
- d)  $\text{Ric}(N) = (\kappa - 2\tau^2) - (\kappa - 4\tau^2)\mathfrak{v}^2$ .
- e)  $|A|^2 = 4H^2 - 2K + 2\tau^2 + 2(\kappa - 4\tau^2)\mathfrak{v}^2$ .

*Demostración.* Para probar el apartado (a), consideremos  $A = \{p \in \Sigma : \mathfrak{v}(p)^2 = 1\}$ . Sobre el interior de  $A$  la superficie es horizontal y, como  $\pi$  es una

<sup>8</sup> Esto da una correspondencia biunívoca interesante entre los puntos y los planos no verticales en  $\text{Nil}_3$ .



submersión riemanniana, trivialmente  $|\text{Jac}(\pi)| = 1$ . Para un punto  $p$  en el exterior topológico de  $A$ , podemos considerar  $e_1 = \frac{T}{\|T\|}$  y  $e_2 = \frac{T}{\|T\|} \wedge N$ , que forman una base ortonormal de  $T_p\Sigma$ . Entonces, como  $e_2$  es horizontal, tenemos que la base  $\{d\pi_p(e_1), d\pi_p(e_2)\}$  forma una base ortogonal de  $T_{\pi(p)}M$  y  $d\pi_p(e_2)$  es unitario mientras que  $\|d\pi_p(e_1)\| = |v|$  y de aquí se deduce la fórmula del jacobiano de  $\pi$  en  $p$ . Ahora es claro que dicha fórmula se extiende por continuidad a toda la superficie.

Dado  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , podemos calcular  $X(v) = \langle \nabla_X N, \xi \rangle + \langle N, \nabla_X \xi \rangle$ . Como  $\nabla_X N = -AX$  y  $\nabla_X \xi = \tau X \wedge \xi$ , tenemos que  $X(v) = -\langle AX, \xi \rangle + \tau \langle X, \xi \wedge N \rangle = \langle X, -AT + \tau T \wedge N \rangle$  y, de la arbitrariedad de  $X$ , deducimos (b).

La ecuación de Gauss y la fórmula para  $\text{Ric}(N)$  se siguen de forma directa del lema 1.10, mientras que la fórmula del apartado (e) puede obtenerse de la ecuación de Gauss junto con el hecho de que  $|A|^2 = 4H^2 - 2\det(A)$ .  $\square$

Como consecuencia directa, obtenemos una expresión para el operador de estabilidad de Jacobi de la superficie, definido por  $L = \Delta + |A|^2 + \text{Ric}(N)$ . En el capítulo 5 justificaremos rigurosamente el significado geométrico de este operador.

**Corolario 1.33.** *El operador de estabilidad de una superficie inmersa en  $\mathbb{E}$  de curvatura media constante  $H$  viene dado por*

$$L = \Delta - 2K + 4H^2 + \kappa + (\kappa - 4\tau^2)v^2.$$

### 1.5.1 Cilindros verticales

Dada una curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ , definimos el cilindro vertical sobre  $\gamma$  como  $C_\alpha = \pi^{-1}(\alpha)$ . Si parametrizamos  $\alpha$  por su longitud de arco, entonces una base ortonormal del fibrado tangente a  $C_\alpha$  es  $\{\alpha', \xi\}$  (estamos extendiendo  $\alpha'$  implícitamente al cilindro mediante su levantamiento horizontal). Tomaremos un campo  $N$  unitario y normal a  $C_\alpha$  de forma  $\{\alpha', \xi, N\}$  es un sistema ortonormal positivamente orientado. En lo que sigue, usaremos que el vector  $N$  induce un vector normal a  $\alpha'$  en  $M$  mediante  $d\pi$ , que también denotaremos por  $N$ .

**Lema 1.34.** *La curvatura media respecto de  $N$ , la curvatura de Gauss y la curvatura extrínseca de  $C_\alpha$  están dadas, respectivamente, por*

$$H = \frac{\kappa_g}{2}, \quad K = 0, \quad K_{\text{ext}} = -\tau^2,$$

donde  $\kappa_g$  es la curvatura geodésica de  $\alpha$  en  $M$ , respecto de  $N$ .

*Demostración.* Si denotamos por  $\sigma$  la segunda forma fundamental de  $C_\alpha$ , es un cálculo sencillo a partir del lema 1.2 comprobar que la matriz de  $\sigma$  en la base  $\{\alpha', \xi\}$  del tangente a  $C_\alpha$  está dada por

$$\sigma \equiv \begin{pmatrix} \langle \bar{\nabla}_{\alpha'} \alpha', N \rangle & \langle \bar{\nabla}_{\alpha'} \xi, N \rangle \\ \langle \bar{\nabla}_\xi \alpha', N \rangle & \langle \bar{\nabla}_\xi \xi, N \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_g & \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota la métrica en  $\mathbb{E}$ . De aquí deducimos las expresiones de  $H$  y  $K_{\text{ext}}$ , que no son otra cosa que un medio de la traza y el determinante de la matriz anterior, respectivamente. Que la curvatura de Gauss  $K$  se anula idénticamente se deduce de la ecuación de Gauss dada en el lema 1.32 y de que  $\det(A) = K_{\text{ext}} = -\tau^2$  y  $\mathfrak{v} = 0$  en  $C_\alpha$ .  $\square$

### 1.5.2 Grafos y multigrafos verticales

Una clase muy importante de superficies en submersiones de Killing las constituyen los multigrafos verticales, que definimos a continuación.

**Definición 1.35.** Sea  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  una submersión de Killing y  $\Sigma$  una superficie inmersa en  $\mathbb{E}$ .

- i) Diremos que  $\Sigma$  es un multigrafo cuando ocurra alguna de las siguientes afirmaciones equivalentes:
1.  $\Sigma$  es transversa al campo de Killing vertical,
  2. la función ángulo de  $\Sigma$  no se anula,
  3. la proyección  $\pi|_\Sigma$  es un difeomorfismo local.
- ii) Diremos que  $\Sigma$  es un grafo cuando  $\Sigma$  sea un multigrafo y corte a cada fibra vertical a lo sumo una vez.

Las condiciones 1 y 2 de la definición son trivialmente equivalentes y, para la número 3, basta fijarse en el lema 1.32. Notemos también que los multigrafos son siempre, localmente, grafos. Por tanto, en lo que sigue buscaremos parametrizar un grafo y calcular su curvatura media a partir de dicha parametrización. Para simplificar los enunciados, supondremos que las fibras de la submersión tienen longitud infinita; como las parametrizaciones son locales, esto no supone una pérdida muy grande de generalidad.

Dada una submersión de Killing  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  y un abierto  $\Omega \subseteq M$  que admita una sección diferenciable  $F_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ , todo grafo sobre  $\Omega$  puede parametrizarse mediante una función  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definiendo dicha parametrización como  $F_u : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$

$$F_u(p) = \Psi(p, u(p)) = \phi_{u(p)}(F_0(p)), \quad (20)$$

donde la aplicación  $\Psi$  está definida en la proposición 1.6. Esta notación es coherente con la anterior en el sentido de que la sección inicial  $F_0$  coincide con  $F_u$  para  $u \equiv 0$ .

Nuestro principal interés es hallar una fórmula para la curvatura media de la inmersión  $F_u$ , definida por (20) en términos de  $u \in C^2(\Omega)$ . Para ello, consideremos  $N$  un normal unitario a  $F_u$  con función ángulo  $\mathfrak{v} = \langle N, \xi \rangle < 0$  (cambiamos el signo de  $N$  si es necesario) y lo llamaremos normal unitario que *apunta hacia abajo*. Usando la identidad (véase [LR09, Lemma 2.1])

$$2H = \operatorname{div}_M(\pi_* N), \quad (21)$$

será suficiente calcular el vector  $\pi_* N$  para obtener una fórmula para  $H$ .

Extendamos la función  $u$  a  $\bar{u} \in C^2(\pi^{-1}(\Omega))$ , haciéndola constante a lo largo de las fibras verticales y consideremos la función  $d \in C^\infty(\mathbb{E})$  que mide la distancia (con signo) de un punto  $q \in \mathbb{E}$  a  $F_0(\pi(q))$  a lo largo de su fibra. Más explícitamente, está definida por la relación  $q = \phi_{d(q)}(F_0(\pi(q)))$ .

Ahora observemos que las hipersuperficies de nivel de la función  $\bar{u} - d \in C^2(\pi^{-1}(\Omega))$  no son otra cosa que  $F_u$  y sus trasladados verticales, y  $\langle \bar{\nabla}(\bar{u} - d), \xi \rangle = \xi(\bar{u}) - \xi(d) = -1$  luego el normal unitario  $\bar{\nabla}(\bar{u} - d) / \|\bar{\nabla}(\bar{u} - d)\|$  apunta hacia abajo. Para cualquier  $p \in \Omega$ , tomemos un entorno  $U \subseteq \Omega$  de  $p$  donde exista una referencia ortonormal  $\{E_1, E_2\} \subset \mathfrak{X}(U)$  y consideremos  $\bar{E}_i$  el levantamiento horizontal de  $E_i$  para  $i \in \{1, 2\}$ . Podemos escribir entonces el campo normal  $N$  localmente como

$$N = \frac{\bar{\nabla}(\bar{u} - d)}{\|\bar{\nabla}(\bar{u} - d)\|} = \frac{\sum_{i=1}^2 E_i(u) \bar{E}_i - \sum_{i=1}^2 \bar{E}_i(d) \bar{E}_i - \xi}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^2 (E_i(u) - \bar{E}_i(d))^2}}, \quad (22)$$

donde hemos usado que  $\{\bar{E}_1, \bar{E}_2, \xi\}$  es una referencia ortonormal en  $\pi^{-1}(U)$  y  $\bar{E}_i(\bar{u}) = E_i(u)$ . Teniendo en cuenta la ecuación (21) y las relaciones  $\pi_* \bar{E}_i = E_i$  y  $\pi_* \xi = 0$ , obtenemos finalmente la siguiente fórmula.

**Lema 1.36.** *En la situación anterior,*

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{div}_M \left( \frac{Gu}{\sqrt{1 + \|Gu\|^2}} \right), \quad (23)$$

donde  $G\mathbf{u} = \nabla\mathbf{u} + Z$  para toda  $\mathbf{u} \in C^2(\Omega)$  y  $Z \in \mathfrak{X}(\Omega)$  no depende de  $\mathbf{u}$ .

*Demostración.* Basta darse cuenta de que las funciones  $\bar{E}_i(d)$  son constantes a lo largo de las fibras  $y$ , por tanto, inducen funciones en  $M$ . Ahora podemos definir  $Z = -\sum_{i=1}^2 \bar{E}_i(d)E_i = -\pi_*(\bar{\nabla}d)$  que no depende de  $\mathbf{u}$  ni de la referencia ortonormal  $\{E_1, E_2\}$ .  $\square$

**Ejemplo 1.37.** Dado un abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  y funciones  $\lambda, \eta \in C^\infty(\Omega)$  con  $\lambda$  positiva, tomemos la submersión  $\pi : (\Omega \times \mathbb{R}, ds^2) \rightarrow (\Omega, \lambda^2(dx^2 + dy^2))$ , donde  $ds^2$  es la métrica dada en el teorema 1.13. Si consideramos la sección global  $F_0 : \Omega \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}$ ,  $F_0(x, y) = (x, y, 0)$ , el grafo de una función  $u \in C^2(\Omega)$  está parametrizado por  $F_u(x, y) = (x, y, u(x, y))$ . Como la distancia vertical está dada por la tercera coordenada, se calcula fácilmente  $Z = -\pi_*(\bar{\nabla}z) = \frac{\eta}{\lambda^2}y\partial_x - \frac{\eta}{\lambda^2}x\partial_y$ . Aplicando la fórmula dada en el lema 1.36 y haciendo el cambio conforme a la métrica llana, obtenemos

$$2H = \frac{1}{\lambda^2} \left[ \left( \frac{u_x + \eta y}{W} \right)_x + \left( \frac{u_y - \eta x}{W} \right)_y \right],$$

donde  $W = \lambda^{-1} \sqrt{\lambda^2 + (u_x + \eta y)^2 + (u_y - \eta x)^2}$ .

Por ejemplo, tomando  $\Omega = \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda = 1$  y  $\eta = \tau$  constante, deducimos la ecuación de la curvatura media de un grafo en el grupo de Heisenberg

$$2H = \frac{(1 + \beta^2)u_{xx} - 2\alpha\beta u_{xy} + (1 + \alpha^2)u_{yy}}{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^{3/2}},$$

siendo  $\alpha = u_x + \tau y$  y  $\beta = u_y - \tau x$ .

Es importante observar que  $G\mathbf{u} = \pi_*(\bar{\nabla}(\bar{\mathbf{u}} - d))$  no depende de  $F_0$  sino sólo de la superficie dada por  $F_u$ . Puede consultarse [LR09] para una aproximación distinta a esta fórmula, así como a la siguiente fórmula de factorización que será usada en la demostración de la proposición 3.8 pero conviene señalarla ahora. En lo que sigue, denotaremos  $W(\mathbf{u}) = \sqrt{1 + \|G\mathbf{u}\|^2}$ .

**Lema 1.38.** Para cualesquiera  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^1(M)$ , se cumple que

$$\left\langle \frac{G\mathbf{u}}{W(\mathbf{u})} - \frac{G\mathbf{v}}{W(\mathbf{v})}, \nabla\mathbf{u} - \nabla\mathbf{v} \right\rangle = \frac{1}{2}(W(\mathbf{u}) + W(\mathbf{v}))\|N_{\mathbf{u}} - N_{\mathbf{v}}\| \geq 0.$$

La igualdad se alcanza en  $\mathbf{p} \in M$  si, y sólo si,  $\nabla\mathbf{u}(\mathbf{p}) = \nabla\mathbf{v}(\mathbf{p})$ .

## 1.5.3 Un teorema nodal para grafos verticales

Sigamos trabajando en una submersión de Killing  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  cuyas fibras tienen longitud infinita y tomemos un abierto  $\Omega \subset M$  que admita una sección diferenciable  $F_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ . Dada una función  $u \in C^2(\Omega)$ , la curvatura media  $H(u) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  del grafo vertical  $F_u$  cumple la ecuación (23), que es de tipo divergencia. Dado  $p_0 \in \Omega$ , si trabajamos en un entorno  $U$  de  $p_0$  donde exista una referencia ortonormal  $\{E_1, E_2\}$ , podemos expresar

$$H(u)(p) = \frac{\langle \langle A(p, \nabla u(p)), \mathcal{H}(p) \rangle \rangle + b(p, \nabla u(p))}{2W(u)(p)^3} \quad (p \in U), \quad (24)$$

donde  $\mathcal{H}(p)$  representa la matriz del hessiano de  $u$  en  $p$  respecto de la base  $\{E_1(p), E_2(p)\}$ ,  $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$  es el producto usual de matrices<sup>9</sup>,  $b(p, \nabla u(p))$  es un término que sólo depende de  $p$  y de las primeras derivadas de  $u$  y

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \langle Gu, E_2 \rangle^2 & -\langle Gu, E_1 \rangle \langle Gu, E_2 \rangle \\ -\langle Gu, E_1 \rangle \langle Gu, E_2 \rangle & 1 + \langle Gu, E_1 \rangle^2 \end{pmatrix}$$

es definida positiva (con valores propios 1 y  $W(u)$ ). Estas condiciones implican que  $H : C^2(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$  es un operador cuasilineal elíptico. A la vista de [GT01, Theorem 10.1], si los grafos de dos funciones  $u, v \in C^2(\Omega)$  tienen la misma curvatura media (esto es,  $H(u) = H(v)$  en  $\Omega$ ), su diferencia  $w = u - v$  está en el núcleo de un operador lineal elíptico  $L$  en  $M$ .

Estamos interesados en estudiar la intersección de los grafos  $F_u$  y  $F_v$  para sendas funciones  $u, v \in C^\infty(M)$ . En este caso, siguiendo la técnica de Meeks y Yau en [MY82b, Lemma 2], un resultado de Bers [Ber55] nos permite entender el comportamiento local de el conjunto nodal  $\{w = 0\} = \{u = v\}$  en un entorno de un punto singular (es decir, un punto donde  $\nabla w$  se anula). Concretamente, podemos considerar el pullback de  $L$  y  $w$  con respecto a coordenadas conformes para obtener otro operador lineal elíptico  $L_0$  y otra función  $w_0$  en un entorno del origen de  $\mathbb{R}^2$  cumpliendo

$$L_0 w_0 = \langle \langle A_0(x), \nabla^2 w_0(x) \rangle \rangle + \langle b_0(x), \nabla w_0 \rangle = 0.$$

Notemos que todas las derivadas de la diferencia  $u - v$  no se anulan simultáneamente en ningún punto debido a los resultados de continuación analítica de Aronszajn [Aro57]. Por consiguiente, el resultado de Bers garantiza que el conjunto nodal de  $w_0$  es localmente difeomorfo (véase también [Kuo69]) al conjunto nodal de un polinomio homogéneo  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple la

<sup>9</sup> Más concretamente,  $\langle \langle A, B \rangle \rangle = \text{Traza}(A \cdot B^t)$  es la suma de los productos de las correspondientes componentes de  $A$  y  $B$ .

ecuación de coeficientes constantes  $\langle\langle A_0(0), \nabla^2 P \rangle\rangle = 0$ . Como  $A_0(0)$  es definida positiva, se sigue que el conjunto nodal consiste en un número finito de curvas que se cortan transversalmente en el origen. Señalamos que este conjunto de curvas no se corta necesariamente de forma equiangular en el origen ya que  $A_0(0)$  puede no ser un múltiplo de la matriz identidad.

**Teorema 1.39.** *En la situación anterior, si  $u, v \in C^\infty(\Omega)$  cumplen  $H(u) = H(v)$  en  $\Omega$ , entonces la intersección de los grafos dados por  $F_u$  y  $F_v$  consiste en una familia de curvas regulares que se cortan transversalmente en los puntos donde  $u = v$  y  $\nabla u = \nabla v$ . Además, en estos puntos singulares, que son aislados, sólo un número finito de curvas concurren.*

**Observación 1.40.** En el trabajo de Cheng [Che76, Theorem 2.5], se puede encontrar una aplicación similar de este resultado de Bers para un operador de la forma  $\Delta + q$ . En este caso se obtienen sistemas equianguulares de curvas ya que la ecuación que el polinomio homogéneo debe satisfacer es la ecuación de Laplace.



Parte II

SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA  
CONSTANTE





## ESTIMACIONES PARA GRAFOS DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE EN $M \times \mathbb{R}$

---

En este capítulo y en los dos siguientes abordaremos el estudio de superficies de curvatura media constante tanto en productos riemannianos  $M \times \mathbb{R}$  como en espacios  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Comenzaremos trabajando con grafos de curvatura media constante en  $M \times \mathbb{R}$  que se apoyen sobre una sección horizontal y obtendremos relaciones entre la altura máxima que alcanzan y la curvatura geodésica de la frontera sobre dicha sección. Además, pondremos especial atención sobre los H-bigrafos, esto es, superficies de curvatura media constante  $H$ , embebidas y formadas por dos grafos simétricos respecto de una sección horizontal (que, salvo una traslación vertical, puede suponerse que es  $M \times \{0\}$ ). Éste es el caso de las superficies de curvatura media constante compactas y embebidas en  $M \times \mathbb{R}$  (en virtud del principio de reflexión de Alexandrov), que forman un ángulo constante con el plano de reflexión y que jugarán un papel fundamental en este capítulo y en el siguiente.

### 2.1 SUPERFICIES INVARIANTES EN $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ Y $S^2 \times \mathbb{R}$

Comenzaremos estudiando y clasificando las superficies de curvatura media constante en  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  que son invariantes por un grupo uniparamétrico de isometrías que actúa de forma trivial sobre las geodésicas verticales o, en otras palabras, cuyos elementos preservan la función altura. Como cada isometría de  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  es el producto de una isometría de cada uno de los factores, estos grupos de isometrías pueden identificarse con los grupos uniparamétricos de isometrías de  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ . Por otro lado, haremos especial énfasis en aquellas que sean H-bigrafos bajo las restricciones naturales  $H > 0$  y  $4H^2 + \kappa > 0$ . Salvo una homotecia de la métrica, podemos suponer que  $\kappa \in \{-1, 0, 1\}$  sin perder generalidad.

En  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  existen tres tipos esencialmente distintos de isometrías; a saber, rotaciones respecto de un punto de  $\mathbb{H}^2$ , traslaciones parabólicas, que pueden entenderse como rotaciones respecto de un punto en el infinito, y traslaciones hiperbólicas. La familia de superficies rotacionalmente invariantes, es decir, invariantes por el primer tipo de isometrías, fue estudiada por

Hsiang and Hsiang [HH89] y las invariantes por las otras dos familias también fueron estudiadas por Sa Earp [SaEo8], pero fue Onnis [Onno8] quien finalmente dio una clasificación completa de todas las superficies invariantes en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , incluyendo aquéllas invariantes por movimientos helicoidales. El caso de  $S^2$  difiere sustancialmente del anterior puesto que los únicos grupos uniparamétricos de isometrías de  $S^2$  son rotaciones respecto de cierto punto y, salvo conjugación, se puede suponer que este punto es el polo norte; dichas superficies rotacionalmente invariantes fueron clasificadas por Pedrosa [Pedo4]. Finalmente, los únicos grupos uniparamétricos de isometrías de  $\mathbb{R}^2$  son las rotaciones respecto de un punto y las traslaciones; las primeras dan lugar en  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  a superficies de tipo Delaunay (entre las que destacan como H-bigrafos compactos las esferas de radio  $\frac{1}{H}$ ) mientras que las últimas producen cilindros de radio  $\frac{1}{2H}$ .

Más adelante necesitaremos parametrizaciones y fórmulas que derivaremos a continuación. Comenzaremos estudiando rotaciones tanto en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  como en  $S^2 \times \mathbb{R}$  y después pasaremos a traslaciones parabólicas e hiperbólicas en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Observemos que, tomando  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ , la condición  $4H^2 + \epsilon > 0$  no da ninguna información para  $\epsilon = 1$ , mientras que ésta implica que  $|H| > \frac{1}{2}$  para  $\epsilon = -1$ .

### 2.1.1 Superficies de rotación en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $S^2 \times \mathbb{R}$

Para empezar, consideremos el modelo del plano hiperbólico

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\}$$

provisto de la métrica  $dx^2 + dy^2 - dz^2 + dt^2$ . Del estudio de Hsiang y Hsiang [HH89] se deduce que, para cualquier  $H > \frac{1}{2}$ , los únicos H-bigrafos rotacionalmente invariantes son las esferas de rotación de curvatura media H. Si suponemos que el eje de rotación es  $\{(0, 0, 1)\} \times \mathbb{R}$ , la aplicación definida por  $X(r, u) = (\sinh r \cos u, \sinh r \sen u, \cosh r, h(r))$ , con

$$h(r) = \frac{4H}{\sqrt{4H^2 - 1}} \arcsen \sqrt{\frac{1 - (4H^2 - 1) \sinh^2 \frac{r}{2}}{4H^2}},$$

donde  $u \in \mathbb{R}$  y

$$r \in \left[0, 2 \operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{4H^2 - 1}}\right],$$

parametriza la mitad superior de dicha esfera (ver figura 4).

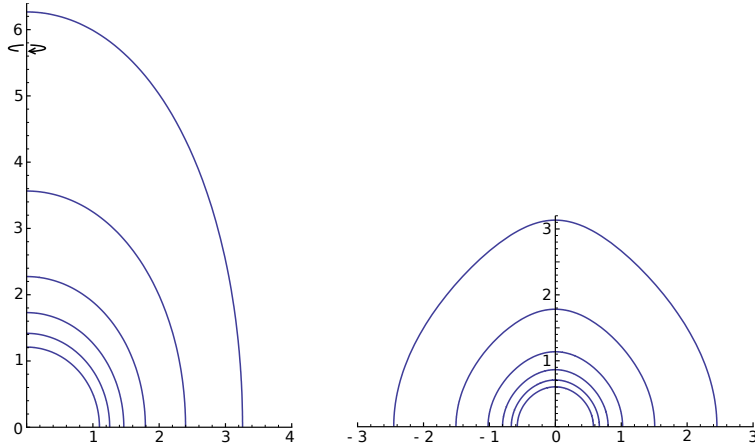


Figura 4: A la izquierda, el perfil de esferas rotacionales de curvatura media constante (el eje horizontal representa la distancia intrínseca en  $\mathbb{H}^2$  y el eje vertical es la recta real. A la derecha, cilindros de curvatura media constante invariantes bajo traslaciones hiperbólicas, donde vemos su intersección con el plano  $y = 1$  en el modelo del semiespacio. En ambos casos, los valores de  $H$  representados son 0,54, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9 y 1.

Por otro lado, consideremos el modelo estándar de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  como la hipersuperficie de  $\mathbb{R}^4$ , dada por

$$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

con la métrica riemanniana inducida por el producto escalar usual de  $\mathbb{R}^4$ . Como todo grupo unipárametrico de isometrías de  $\mathbb{S}^2$  consiste en rotaciones respecto de cierto punto, supondremos que dicho punto es el polo norte, es decir, supondremos que el eje de rotación es  $\{(0, 0, 1, t) : t \in \mathbb{R}\}$ . Por lo tanto, el espacio de órbitas puede identificarse con el plano vertical  $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} : x = 0\} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  y una curva generatriz de la superficie es

$$\gamma(t) = (0, \text{sen } r(t), \text{cos } r(t), h(t)),$$

para ciertas funciones  $r$  y  $h$  definidas en cierto intervalo de la recta real. Pedrosa [Pedo4] demostró que la superficie generada por  $\gamma$  tiene curvatura media constante  $H \in \mathbb{R}$  si, y sólo si, se satisface un cierto sistema de ecuaciones diferenciales y que, sobre los intervalos en que  $r$  es invertible y puede tomarse como parámetro de  $\gamma$ , dicho sistema se convierte en el siguiente:

$$\begin{cases} h'(r) = \cot(\sigma(r)), \\ \sigma'(r) = \frac{2H + \cot(r) \cos(\sigma(r))}{\text{sen}(\sigma(r))}, \end{cases} \quad (25)$$

donde  $\sigma$  es una función auxiliar. La segunda ecuación puede resolverse fácilmente ya que sólo depende de  $r$  y  $\sigma$  y obtenemos que

$$\sigma(r) = \arccos(2H(c_0 + \cos r) \csc r)$$

para algún  $c_0 \in \mathbb{R}$ , donde supondremos que  $r \in [a(c_0), b(c_0)] \subseteq [-\pi, \pi]$  es el intervalo maximal de definición de  $\sigma$ . Sustituyendo esta expresión en la primera ecuación de (25), llegamos a que

$$h(r) = \int_{a(c_0)}^r \frac{2H(c_0 + \cos s) \csc s}{\sqrt{1 - 4H^2(c_0 + \cos s)^2 \csc^2 s}} ds. \quad (26)$$

Los únicos dos casos en que un bigrafo aparece son los siguientes:

- Para  $c_0 = -1$ , obtenemos esferas de revolución. Más explícitamente,

$$h(r) = \frac{4H}{\sqrt{1 + 4H^2}} \operatorname{arccosh} \left( \frac{\sqrt{1 + 4H^2}}{2H} \cos \frac{r}{2} \right)$$

para  $r \in [-2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2H}, 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2H}]$ . Notemos que la altura máxima de dicha esfera se alcanza en el punto en que  $r = 0$ . Además, la esfera se extiende a un bigrafo sobre un dominio cuya frontera tiene curvatura geodésica constante en  $S^2$ . Cuando se calcula dicha curvatura respecto del conormal exterior al dominio, ésta es igual a  $-H + \frac{1}{4H}$ .

- Para  $c_0 = 0$ , obtenemos toros de revolución. En este caso,

$$h(r) = \frac{2H}{\sqrt{1 + 4H^2}} \operatorname{arccosh} \left( \frac{\sqrt{1 + 4H^2}}{2H} \operatorname{sen} r \right)$$

donde  $r \in [\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2H}, \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2H}]$ . La altura máxima se alcanza en los puntos donde  $r = \frac{\pi}{2}$  y la frontera del dominio sobre la que el toro es bigrafo vuelve a tener curvatura geodésica constante en  $S^2$  e igual a  $\frac{1}{2H}$ , con respecto al conormal exterior al dominio.

Estas dos familias uniparamétricas de soluciones están representadas en la figura 5. Es interesante observar que la altura máxima de un toro de curvatura media constante es exactamente la mitad que la de la correspondiente esfera de revolución de la misma curvatura media.

### 2.1.2 Superficies de traslación hiperbólica en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

A lo largo de este apartado, trabajaremos en el modelo del semiplano superior

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : y > 0\} \quad (27)$$

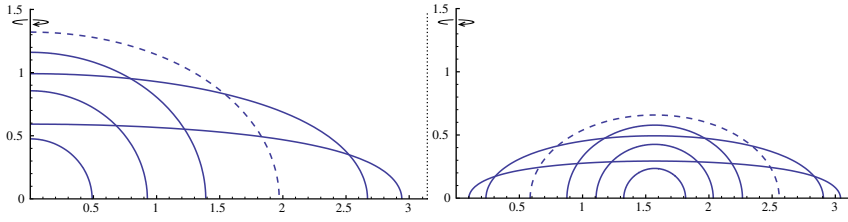


Figura 5: A la izquierda, los perfiles de esferas rotacionales de curvatura media constante  $y$ , y a la derecha, los de los toros rotacionales de curvatura media constante, en  $S^2 \times \mathbb{R}$ . En ambos casos, los valores representados de  $H$  son 0,05, 0,12, 0,331372, 0,6, 1 y 2. El eje horizontal mide la distancia intrínseca en  $S^2$  mientras que el eje vertical representa la recta real. La altura máxima se alcanza para  $H \approx 0,331372$ , que está dibujado en línea discontinua.

provisto de la métrica  $(dx^2 + dy^2)/y^2 + dt^2$ . Salvo conjugación por una isometría del espacio, el grupo uniparamétrico de traslaciones hiperbólicas que deja invariante a nuestra superficie puede suponerse que es  $\{\Phi_s^h\}_{s \in \mathbb{R}}$ , donde

$$\Phi_s^h : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \quad \Phi_s^h(x, y, t) = (xe^s, ye^s, t).$$

Antes de nada, observemos que como la órbita de cualquier punto es la recta horizontal que une el punto con otro del eje  $x = y = 0$ , podemos considerar el plano  $y = 1$  como espacio de órbitas para este grupo de transformaciones.

Tomemos, por tanto, una curva  $\gamma(t) = (x(t), 1, h(t))$  para ciertas funciones  $x$  y  $h$  de clase  $C^2$  sobre cierto intervalo de la recta real. En consecuencia, una superficie invariante por  $\{\Phi_s^h\}_{s \in \mathbb{R}}$  puede ser parametrizada como

$$X(u, t) = (x(t)e^u, e^u, h(t)). \quad (28)$$

Es un cálculo directo (aunque tedioso) comprobar que la curvatura media de esta parametrización está dada por

$$H = \frac{-x^3(h')^3 - xh'((h')^2 + 2(x')^2) + x^2(h'x'' - x'h'') - x'h'' + h'x''}{2((1+x^2)(h')^2 + (x')^2)^{3/2}}. \quad (29)$$

Para simplificar la ecuación, parametricemos la curva  $\gamma$  de forma que el denominador se simplifique para lo que supondremos que  $(h')^2 + (x')^2/(1+x^2) = 1$  luego existe una función  $\alpha$  de clase  $C^1$  tal que  $h' = \cos \alpha$  y  $x' = \sqrt{1+x^2} \sin \alpha$ . Ahora bien, podemos obtener expresiones para  $x''$  y  $h''$  sin más que derivar estas igualdades y, si las sustituimos en (29), llegamos a que

$$H = \frac{\sqrt{1+x^2}\alpha' - x \cos \alpha}{2\sqrt{1+x^2}}.$$

Ahora la demostración del siguiente resultado es inmediata.

**Lema 2.1.** *La superficie parametrizada definida por (28) tiene curvatura media constante  $H \in \mathbb{R}$  si, y sólo si, la terna  $(x, h, \alpha)$  satisface las ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} h' = \cos \alpha, \\ x' = \sqrt{1+x^2} \operatorname{sen} \alpha, \\ \alpha' = 2H + \frac{x \cos \alpha}{\sqrt{1+x^2}}. \end{cases} \quad (30)$$

Además, la expresión  $E = -2Hx - \sqrt{1+x^2} \cos \alpha$  es constante sobre las soluciones y la llamaremos función energía asociada a la solución.

Ya que la discusión de casos es larga, nos restringiremos al caso  $H > 1/2$ . Usando la expresión de la energía  $E$  sobre la segunda ecuación en (30), se llega sin dificultad a que

$$(x')^2 = (1 - E^2) + 4HEx + (1 - 4H^2)x^2.$$

Ahora bien, como  $H > \frac{1}{2}$ , el miembro de la derecha tiene dos raíces reales como polinomio en  $x$  y, si lo factorizamos, la ecuación puede expresarse, salvo un signo, como

$$\frac{x'}{\sqrt{(4H^2 + E^2 - 1) - ((4H^2 - 1)x - 2HE)^2}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{4H^2 - 1}},$$

de donde es fácil deducir que existe  $c_0 \in \mathbb{R}$  tal que

$$x(t) = \frac{2HE}{4H^2 - 1} + \frac{\sqrt{4H^2 + E^2 - 1}}{4H^2 - 1} \operatorname{sen} \left( \pm t \sqrt{4H^2 - 1} + c_0 \right). \quad (31)$$

Aplicando una traslación y una reflexión el parámetro  $t$  si es necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $c_0 = 0$  y que el signo  $\pm$  es positivo. Teniendo en cuenta la relación  $h' = \cos \alpha = (E + 2H)/\sqrt{1+x^2}$ , podemos integrar  $h$  y llegamos a que

$$h(t) = h(0) + \int_0^t \frac{\left[ (8H^2 - 1)E + 2H\sqrt{4H^2 + E^2 - 1} \operatorname{sen} \left( s\sqrt{4H^2 - 1} \right) \right] ds}{\sqrt{(1 - 4H^2)^2 + \left( \sqrt{4H^2 + E^2 - 1} \operatorname{sen}(s\sqrt{4H^2 - 1}) + 2HE \right)^2}}. \quad (32)$$

Ya podemos caracterizar las superficies que estábamos buscando. Para una descripción gráfica, véase la figura 4.

**Proposición 2.2.** Sea  $(x, h, \alpha)$  una solución de (30) con energía  $E \in \mathbb{R}$  para  $H > \frac{1}{2}$ . Entonces, la superficie invariante generada por esta terna puede extenderse a un  $H$ -bigrafo si, y sólo si,  $E = 0$ , en cuyo caso la curva puede ser reparametrizada, salvo una isometría de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , mediante

$$\left. \begin{aligned} x(r) &= \frac{1}{\sqrt{4H^2 - 1}} \operatorname{sen} r \\ h(r) &= \frac{2H}{\sqrt{4H^2 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{\cos r}{\sqrt{4H^2 - 1 + \operatorname{sen}^2 r}} \end{aligned} \right\}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

*Demostración.* Supongamos que  $h(0) = 0$  aplicando una traslación vertical si es necesario y escribamos  $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$  en la ecuación (32), separando los dos sumandos del numerador del integrando. El primero de dichos sumandos no se anula salvo que  $E = 0$  (luego  $h_1$  es monótona) y el segundo es una función impar y periódica de  $s$  que se anula exactamente en los puntos de la forma  $s = k\pi/\sqrt{4H^2 - 1}$  para  $k \in \mathbb{Z}$ . Por otro lado, si el intervalo de parametrización contiene a  $t = 0$ , de la ecuación (31) deducimos que  $|t| \leq \pi/(2\sqrt{4H^2 - 1})$ . Por tanto, la superficie es un grafo y, además, los puntos en los que su plano tangente es vertical son aquéllos en que  $x' = 0$ . En consecuencia, el intervalo de parametrización debe ser  $|t| \leq \pi/(2\sqrt{4H^2 - 1})$ . Ahora bien, como la integral de  $h_2'$  sobre  $[-\pi/(2\sqrt{4H^2 - 1}), \pi/(2\sqrt{4H^2 - 1})]$  se anula, obtenemos que

$$h\left(\frac{\pi}{2\sqrt{4H^2 - 1}}\right) - h\left(\frac{-\pi}{2\sqrt{4H^2 - 1}}\right) = h_1\left(\frac{\pi}{2\sqrt{4H^2 - 1}}\right) - h_1\left(\frac{-\pi}{2\sqrt{4H^2 - 1}}\right).$$

El miembro de la derecha se anula si, y sólo si,  $h_1$  es idénticamente nula (ya que es una función monótona) y  $h_1$  se anula si, y sólo si,  $E = 0$  lo que prueba la afirmación del enunciado. Finalmente, la parametrización buscada se sigue de un cálculo directo usando (31) y (32) para  $E = 0$  y de la sustitución  $r = t\sqrt{4H^2 - 1}$ . Notemos que no hay problema en considerar  $r \in \mathbb{R}$  ya que la parametrización genera el bigrafo completo.  $\square$

En la parametrización dada en el enunciado de la Proposición 2.2, observemos que la altura máxima se alcanza para  $r = 0$  y que la superficie es un bigrafo sobre un dominio cuya frontera consiste en dos curvas de  $\mathbb{H}^2 \equiv \mathbb{H}^2 \times \{0\}$  que tienen curvatura geodésica constante y dicha curvatura es igual a  $\frac{-1}{2H}$  cuando se calcula con respecto al conormal exterior al dominio. Además, igual que ocurría en el caso de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , la altura máxima es exactamente la mitad de la de la correspondiente esfera de revolución.



2.1.3 Superficies de traslación parabólica en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 

En este caso también consideraremos el modelo del semiplano superior de  $\mathbb{H}^2$  dado en (27), donde, salvo conjugación por isometrías de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , el grupo uniparamétrico de traslaciones parabólicas es  $\{\Phi_s^p\}_{s \in \mathbb{R}}$ , con

$$\Phi_s^p : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \quad \Phi_s^p(x, y, t) = (x + s, y, t).$$

Por tanto, la órbita de cualquier punto de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  es una recta euclídea horizontal, paralela al plano  $y = 0$  y el espacio de órbitas puede tomarse como el plano euclídeo  $x = 0$ . De aquí que la curva generatriz de nuestra candidata a superficie invariante pueda tomarse como  $\gamma(t) = (0, y(t), h(t))$  para ciertas funciones  $h$  e  $y$ , y dicha superficie invariante por  $\{\Phi_s^p\}_{s \in \mathbb{R}}$  se parametrice como

$$X(u, t) = (s, y(t), h(t)).$$

Se puede comprobar que la curvatura media de  $X$  está dada por

$$H = -\frac{y^2(-h''y' + h'y'' + y(h')^3)}{2(y^2(h')^2 + (y')^2)^{3/2}}. \quad (33)$$

No se pierde generalidad suponiendo que la curva  $\gamma$  está parametrizada por su longitud de arco, esto es,  $1 = \|\alpha'\|^2 = (y')^2/y^2 + (h')^2$ , luego podemos considerar una función auxiliar  $\alpha$ , determinada por  $y' = y \sin \alpha$  y  $h' = \cos \alpha$ , de forma que al sustituir estas igualdades en (33), la expresión de  $H$  se simplifica al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} y' = y \sin \alpha \\ h' = \cos \alpha \\ \alpha' = -2H - \cos \alpha. \end{cases} \quad (34)$$

Observemos que, si suponemos una condición inicial  $\alpha(0) = \alpha_0 \in [0, 2\pi]$ , la tercera ecuación tiene una solución única. Si nos centramos en el caso  $H > \frac{1}{2}$ , que es el más interesante para nuestro propósito, podemos integrar  $\alpha$  como

$$\alpha(t) = 2 \arctg \left( \frac{2H+1}{\sqrt{4H^2-1}} \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \sqrt{4H^2-1} (t - c_0) \right) \right) \quad (35)$$

para cierta constante  $c_0 \in \mathbb{R}$  que depende de  $\alpha_0$ . Es importante hacer hincapié en que esta fórmula define  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como un difeomorfismo estrictamente creciente cuando se consideran todas las ramas de la función  $\arctg$  y se pasa de una a otra por continuidad, luego la unicidad de solución garantiza que (35) refleja todas las soluciones de la tercera ecuación de (34).

Trasladando convenientemente el parámetro  $t$ , supondremos que  $c_0 = 0$ . Sustituyendo el valor anterior de  $\alpha$  en las dos primras ecuaciones de (35), podemos integrar  $h$  e  $y$  como

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 \left( \cos \left( t\sqrt{4H^2 - 1} \right) + 2H \right), \\ h(t) &= \alpha(t) + 2Ht + c_2, \end{aligned} \tag{36}$$

para ciertas constantes  $c_1 > 0$  y  $c_2 \in \mathbb{R}$ , que pueden suponerse que son  $c_1 = 1$  (después de una traslación hiperbólica de la superficie) y  $c_2 = 0$  (después de una traslación vertical). Esto nos permite abordar el siguiente resultado de no-existencia.

**Proposición 2.3.** *No existen  $H$ -bigrafos embebidos en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  para  $H > \frac{1}{2}$  que sean invariantes bajo un grupo uniparamétrico de traslaciones parabólicas.*

*Demostración.* Notemos que un tal grafo tiene que estar dado por una terna  $(y, h, \alpha)$  que satisfaga el sistema (34) luego también (35) y (36). Los valores de  $t \in \mathbb{R}$  para los que  $y'(t) = 0$  son  $t_k = k\pi/\sqrt{4H^2 + 1}$  para  $k \in \mathbb{Z}$  (corresponden a los puntos de la superficie con plano tangente vertical). De las ecuaciones (35) y (36), se deduce que, para todo  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $h(t_k) \neq h(t_{k+1})$ , lo que imposibilita que la superficie se extienda a un bigrafo.  $\square$

## 2.2 ESTIMACIONES DE CURVATURA EN LA FRONTERA

A lo largo de esta sección,  $M$  representará una superficie riemanniana arbitraria y consideraremos un grafo  $\Sigma \subseteq M \times \mathbb{R}$  de curvatura media constante  $H > 0$  sobre un dominio  $\Omega \subseteq M$ . Generalizando las ideas dadas en [AEGo8], para cualquier  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $c + 4H^2 > 0$  y cualquier  $m \in \mathbb{R}$ , consideraremos la función  $g_m : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  determinada por

$$g'_m(t) = \frac{4mH}{4H^2 + c(1 - t^2)}, \quad g(0) = 0, \tag{37}$$

que es estrictamente creciente y nos permite definir la función  $\psi_m = h + g_m(\nu) \in C^\infty(\Sigma)$ , donde  $h$  y  $\nu$  son las funciones altura y ángulo de  $\Sigma$ , respectivamente. La técnica que usaremos se basa en el principio del máximo (tanto en el interior como en la frontera) para ciertos operadores elípticos que se aplican sobre la función  $\psi_m$ . Por tanto, necesitaremos expresiones para  $\Delta\psi_m$ , donde el laplaciano se calcula sobre  $\Sigma$ , y para la derivada  $\frac{\partial\psi_m}{\partial\eta} = \langle \nabla\psi_m, \eta \rangle$ , siendo  $\eta$  algún campo conormal exterior a  $\Sigma$  a lo largo de su frontera (no necesariamente unitario).

Recogemos a continuación algunas fórmulas útiles a este efecto. En lo que sigue, denotaremos por  $K$  a la curvatura de Gauss de  $\Sigma$ ,  $A$  su endomorfismo de Weingarten  $T = \xi - \nu N$  (donde  $\xi = \partial_t$  es el campo de Killing vertical y  $N$  es la aplicación de Gauss) y  $K_M$  la curvatura de Gauss de  $M$ , función que podemos extender a  $M \times \mathbb{R}$  haciéndola constante a lo largo de las rectas verticales. El vector normal lo elegiremos siempre apuntando hacia abajo, esto es, de forma que la función ángulo sea negativa.

**Lema 2.4.** *En la situación anterior, se satisfacen las siguientes igualdades:*

- i)  $\nabla h = T$ ,
- ii)  $\Delta h = 2H\nu$ ,
- iii)  $\nabla \nu = -AT$ ,
- iv)  $\Delta \nu = (2K - 4H^2 - K_M(1 + \nu^2)) \nu$ .

*Demostración.* Las igualdades para el gradiente y el laplaciano de  $h$  se deducen de que  $h$  es la restricción a  $\Sigma$  de la función altura en  $M \times \mathbb{R}$  (véase [Rosoz, Lemma 3.1]). Por otro lado, la identidad para  $\nabla \nu$  se deduce del lema 1.32 y  $\Delta \nu$  puede calcularse a partir del corolario 1.33 utilizando que  $\nu$  es una función de Jacobi y, por tanto,  $Lu = 0$ .  $\square$

Como consecuencia, obtenemos de forma inmediata que

$$\nabla \psi_m = \nabla h + g'_m(\nu) \nabla \nu = T - g'_m(\nu) AT, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \Delta \psi_m &= \Delta h + g'_m(\nu) \Delta \nu + g''_m(\nu) \|\nabla \nu\|^2 \\ &= 2H\nu + g'_m(\nu) (2K - 4H^2 - K_M(1 + \nu^2)) \nu + g''_m(\nu) \|\nabla \nu\|^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Por otro lado, tomaremos el campo  $\eta = -T$ , que es un conormal exterior a  $\Sigma$  a lo largo de su frontera, para calcular  $\frac{\partial \psi_m}{\partial \eta}$  en  $\partial \Sigma$  (observemos que no importa qué conormal exterior se elija ya que la única información que nos proporcionará el principio del máximo en la frontera es el signo de la derivada respecto de dicho conormal). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \eta} &= \langle \nabla h, \eta \rangle = \langle T, -T \rangle = -\|T\|^2, \\ \frac{\partial \nu}{\partial \eta} &= \langle \nabla \nu, \eta \rangle = \langle -AT^\top, -T \rangle = \langle \bar{\nabla}_T T, N \rangle. \end{aligned}$$

Sin embargo, parametrizando  $\partial\Sigma$  por una curva  $\gamma$  con  $\|\gamma'\| = 1$ , una base ortonormal de  $T\Sigma$  a lo largo de  $\partial\Sigma$  es  $\{T/\|T\|, \gamma'\}$  y está claro que

$$2H = \left\langle \frac{1}{\|T\|^2} \bar{\nabla}_T T + \bar{\nabla}_{\gamma'} \gamma', N \right\rangle,$$

fórmula que nos permite escribir  $\frac{\partial v}{\partial \eta} = 2H\|T\|^2 + \|T\|^3 \kappa_g$ . Aquí,  $\kappa_g$  denota la curvatura geodésica de  $\partial\Omega = \partial\Sigma$  calculada sobre la superficie base  $M$  con respecto a  $-\|T\|^{-1}(N - vT)$ , que es el vector conormal unitario exterior a  $\partial\Omega$  sobre  $M$ . Finalmente, podemos escribir

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial \eta} = \frac{\partial h}{\partial \eta} + g'_m(v) \frac{\partial v}{\partial \eta} = \|T\|^2 (-1 + g'_m(v)(2H + \|T\| \kappa_g)). \quad (40)$$

### 2.2.1 Estimaciones generales para la curvatura geodésica y la altura

Vamos a concentrarnos primero en el caso más general en que no asumiremos ninguna hipótesis sobre la altura del grafo  $\Sigma$ . No olvidemos que buscamos una estimación de la curvatura geodésica de la frontera, para lo que utilizaremos el principio del máximo aplicado al operador laplaciano en el caso  $m = 1$ . En el siguiente apartado quedará claro el significado geométrico de la variable  $m$ .

Para transformar la expresión de  $\Delta\psi_m$  dada en (39) para  $m = 1$ , necesitamos una fórmula adecuada que elimine el término  $\|\nabla v\|^2$ , y esta fórmula proviene de introducir el módulo de la diferencial de Abresch-Rosenberg en  $\mathbb{M}^2(c) \times \mathbb{R}$ . Si tomamos una carta conforme  $(u, z)$  en  $\Sigma$ , consideraremos la expresión

$$Q = (2Hp - ch_z^2) dz^2,$$

que es una diferencial cuadrática globalmente definida (y holomorfa en el caso de que  $M$  tenga curvatura constante  $c$ , véase Fernández y Mira [FM09]), donde  $p dz^2 = \langle -\nabla_{\partial_z} N, \partial_z \rangle dz^2$  es la diferencial de Hopf y  $h_z = \frac{\partial h}{\partial z}$ . Esta diferencial nos permite definir la siguiente función que es independiente del parámetro conforme  $z$ :

$$\begin{aligned} q &= \frac{4}{\lambda^2} |Q|^2 = \frac{4}{\lambda^2} \left( 4H^2 |p|^2 + c^2 |h_z|^4 - 2cH(ph_z^2 + \bar{p}h_z^2) \right) \\ &= 4H^2(H^2 - \det(A)) + \frac{c^2}{4}(1 - v^2)^2 \\ &\quad - c(\|\nabla v\|^2 - (2H^2 - \det(A))(1 - v^2)), \end{aligned} \quad (41)$$

donde  $\lambda$  es el factor conforme de la métrica inducida en  $\Sigma$ . En otras palabras,  $q$  está bien definida y es diferenciable en toda la superficie  $\Sigma$ .

Teniendo ahora en cuenta la ecuaciones (39) y (41), llegamos a que

$$\Delta\psi_1 = \frac{-8Hqv}{(4H^2 + c(1 - v^2))^2} - \frac{4Hv(1 - v^2)(K_M - c)}{4H^2 + c(1 - v^2)}. \quad (42)$$

El quid de esta fórmula es que si  $K_M \geq c$ , el laplaciano anterior tiene signo. Como  $c$  había sido definido como cualquier constante tal que  $4H^2 + c > 0$ , la condición  $K_M \geq c$  será la condición natural para obtener cotas óptimas de la curvatura geodésica de la frontera del dominio de un  $H$ -bigrafo compacto con una condición de capilaridad en la frontera, y esta condición se satisfará trivialmente si definimos  $c = \inf\{K_M(p) : p \in \Omega\}$  e imponemos que  $c + 4H^2 > 0$ . Antes de enunciar el teorema, es interesante remarcar lo siguiente.

**Observación 2.5.** Recordemos que si  $\Sigma$  es una superficie de curvatura media constante en  $\mathbb{M}^2(c) \times \mathbb{R}$  tal que  $q = 0$ , entonces  $\Sigma$  es parte de una superficie invariante por un grupo uniparamétrico de isometrías de  $\mathbb{M}^2(c) \times \mathbb{R}$  que preservan la función altura (véase [ER09, Lemma 6.1]). Además, si reemplazamos  $\mathbb{M}^2(c)$  por otra superficie completa de curvatura constante  $c$ , podemos considerar el recubridor universal riemanniano (que es  $\mathbb{M}^2(c)$ ) y la superficie levantada  $\tilde{\Sigma}$  en  $\mathbb{M}^2(c) \times \mathbb{R}$  tiene diferencial de Abresch-Rosenberg nula si la original la tenía. Esto nos dice que, como el argumento es puramente local, no hay problemas con la topología o la completitud de  $M$ .

**Teorema 2.6.** *Sea  $\Sigma \subseteq M \times \mathbb{R}$  un grafo de curvatura media constante  $H > 0$  sobre un dominio compacto y regular  $\Omega \subseteq M$  y con valores cero en  $\partial\Omega$ . Supongamos que  $c = \inf\{K_M(p) : p \in \Omega\} > -4H^2$  y que  $v = v_0$  a lo largo de  $\partial\Omega$  para cierto  $-1 < v_0 \leq 0$ . Entonces,*

$$\kappa_g \geq \frac{-4H^2 + c(1 - v_0^2)}{4H\sqrt{1 - v_0^2}}, \quad (43)$$

donde  $\kappa_g$  es la curvatura geodésica de  $\partial\Omega$  en  $M$  respecto al conormal exterior a  $\Omega$ . Además, si la igualdad se alcanza en algún  $p \in \partial\Omega$ , entonces  $\Omega$  tiene curvatura constante y la diferencial de Abresch-Rosenberg de  $\Sigma$  se anula idénticamente.

*Demostración.* Consideremos la función  $\psi_1 = h + g_1(v)$ , definida por (37) para  $m = 1$ . Como  $v \leq 0$  y  $K_M \geq c$  en  $\Sigma$ , la ecuación (42) asegura que  $\Delta\psi_1 \geq 0$  en  $\Sigma$ . Por otro lado, dado que  $\Omega$  es compacto y  $\psi_1$  es constante en  $\partial\Omega$ , el principio del máximo en la frontera garantiza que  $\frac{\partial\psi_1}{\partial n} \geq 0$  a lo largo de  $\partial\Omega$ . Usando ahora la identidad (40), esta desigualdad es equivalente a (43). La igualdad se alcanza en algún punto de  $\partial\Omega$  si, y sólo si,  $\psi_1$  es

constante luego, de (42), deducimos que esto es equivalente a que  $q = 0$  y  $K_M = c$  en  $\Omega$ .  $\square$

En el caso  $M = \mathbb{M}^2(c)$ , puede comprobarse fácilmente que la igualdad se alcanza si, y sólo si,  $\Sigma$  es un casquete de una esfera rotacional de curvatura media constante  $H$ . Dejamos otras observaciones pertinentes antes de obtener consecuencias de este resultado.

**Observación 2.7.** La técnica usada por Aledo, Espinar y Gálvez en [AEGo8], basada en ideas previas de Serrin [Ser69] para el caso de  $\mathbb{R}^3$ , consiste en aplicar el principio del máximo en el interior a la función  $\psi_1$ , de donde se obtiene que su máximo se alcanza en la frontera, donde toma el valor constante  $g_1(v_0)$ , luego  $h \leq h + g_1(v) = \psi_1 \leq g_1(v_0)$ . Si llamamos  $\alpha(c, H, v_0)$  a este valor de  $g_1(v_0)$ , que depende de  $c$ , el supremo de la curvatura de la superficie base  $M$ , y de  $H$ , ésta es la cota superior óptima de la altura de un grafo compacto. Más explícitamente, el valor de  $\alpha(c, H, v_0)$  está dado por

$$\begin{cases} \frac{4H}{\sqrt{-4cH^2 - c^2}} \left( \arctg \left( \frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{c+4H^2}} \right) + \arctg \left( \frac{v_0\sqrt{-c}}{\sqrt{c+4H^2}} \right) \right) & \text{si } c < 0, \\ \frac{1+v_0}{H} & \text{si } c = 0, \\ \frac{4H}{\sqrt{4cH^2 + c^2}} \left( \operatorname{arcth} \left( \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c+4H^2}} \right) + \operatorname{arcth} \left( \frac{v_0\sqrt{c}}{\sqrt{c+4H^2}} \right) \right) & \text{si } c > 0. \end{cases}$$

La igualdad se alcanza en la misma situación que en el teorema 2.6.

**Observación 2.8.** Es curiosa la forma en que se relacionan las geometrías de  $\Sigma$  y  $M$  y el punto clave de esta relación es que la superficie se apoya sobre un plano horizontal ya que cualquier conormal exterior a  $\partial\Omega$  en  $M$  es una combinación lineal de  $N$  y  $E_3$ .

**Observación 2.9.** En la situación del enunciado del teorema 2.6, si hubiéramos supuesto que  $-1 < v \leq v_0$  en  $\partial\Omega$  para cierto  $v_0 \leq 0$  (en lugar de  $v = v_0$ ) y existiera  $p \in \partial\Omega$  tal que  $v(p) = v_0$  donde la igualdad en (43) se alcance, entonces se concluye también que  $K_M = c$  en  $\Omega$  y  $q = 0$  en  $\Sigma$ .

En el caso en que  $\Sigma \subseteq M \times \mathbb{R}$  sea una superficie compacta y embebida de curvatura media constante  $H > 0$ , podemos aplicar el principio de reflexión de Alexandrov respecto de planos horizontales y concluir que  $\Sigma$  es un bigrafo simétrico respecto de algún plano horizontal  $M \times \{t_0\}$  el cual, después de una conveniente traslación vertical, puede suponerse que es  $M \times \{0\}$ . En este contexto, es obvio que  $\Sigma$  corta ortogonalmente a dicho plano horizontal.

**Corolario 2.10.** *Sea  $H > 0$  y  $\Sigma \subseteq \mathbb{M} \times \mathbb{R}$  un  $H$ -bigrafo compacto y embebido sobre un dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{M}$ , simétrico respecto de  $\mathbb{M} \times \{0\}$ . Si  $c = \inf\{K_{\mathbb{M}}(p) : p \in \Omega\} > -4H^2$ , entonces  $\partial\Omega$  es una curva cuya curvatura geodésica  $\kappa_g$  en  $\mathbb{M}$  respecto del cornormal exterior a  $\Omega$  satisface*

$$\kappa_g \geq -H + \frac{c}{4H}.$$

*Además, si la igualdad se alcanza en algún punto de  $\partial\Omega$ , entonces  $\Omega$  tiene curvatura constante y  $\Sigma$  tiene diferencial de Abresch-Rosenberg nula.*

Si ahora ajustamos el valor de  $H$  para el que la cota inferior es exactamente cero, lo cual sólo tiene sentido en el caso  $c > 0$ , la estimación da lugar a una caracterización de las esferas de rotación en  $S^2(c) \times \mathbb{R}$ .

**Corolario 2.11.** *Sea  $\mathbb{M}$  una superficie orientable con  $K_{\mathbb{M}} \geq c > 0$ . Entonces, cualquier superficie compacta y embebida  $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$  de curvatura media  $0 < H < \frac{1}{2}\sqrt{c}$  es un  $H$ -bigrafo sobre un dominio conexo  $\Omega$  y  $\mathbb{M} \setminus \Omega$  es una unión finita de curvas de curvatura geodésica no negativa. Además, o bien*

- *su curvatura geodésica es estrictamente positiva, o bien*
- *$\mathbb{M} = S^2(c)$ ,  $\Omega$  es un hemisferio abierto y  $\Sigma$  es una esfera de rotación para  $H = \frac{1}{2}\sqrt{c}$  (en este caso  $\kappa_g$  se anula idénticamente).*

Notemos que, como  $\Omega$  es un dominio conexo con frontera regular y  $\mathbb{M}$  es topológicamente una 2-esfera bajo las hipótesis del corolario, las componentes conexas de  $\mathbb{M} \setminus \Omega$  son discos topológicos. En el caso  $\mathbb{M} = S^2(c)$ , cada uno de estos discos es geodésicamente convexo (es decir, cualquier geodésica minimizante uniendo un par de puntos de su frontera es interior a dicho disco) ya que está acotado por una curva cuya curvatura geodésica no cambia de signo. En particular, dicho disco tiene que estar contenido en un hemisferio de  $S^2(c)$ .

### 2.2.2 Estimaciones de curvatura con restricciones en la altura

En este apartado, mejoraremos las estimaciones de la curvatura geodésica obtenidas en la sección anterior asumiendo condiciones adicionales sobre la altura máxima que la superficie alcanza en  $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$ . Para conseguir esto, generalizaremos una técnica que tiene su origen en el artículo de Payne y Philippin [PP79], y que también ha sido usada por Ros y Rosenberg en [RR10] para el caso de  $\mathbb{R}^3$ .

Sea  $\Sigma \subseteq M \times \mathbb{R}$  un grafo de curvatura media constante  $H > 0$  sobre un dominio  $\Omega \subseteq M$  que toma valores cero en  $\partial\Omega$ . Para cualquier  $m > 0$  tenemos definida la función diferenciable  $g_m : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por (37). Esta función nos permite definir

$$X = \frac{2Hv(2m-1)}{m(1-v^2)} E_3^\top - \frac{2Hvg'_m(v)}{m(1-v^2)} A E_3^\top,$$

que es un campo diferenciable en  $\Sigma \setminus V$ , donde  $V = \{p \in \Sigma : v(p) = -1\}$  es el subconjunto de  $\Sigma$  cuyos puntos tienen plano tangente horizontal. Ahora podemos considerar el operador elíptico de segundo orden  $L$  sobre  $C^\infty(\Sigma \setminus V)$  dado por  $Lf = \Delta f + X(f)$  y aplicarlo a la función  $\psi_m = h + g_m(v) \in C^\infty(\Sigma)$ . Usando el lema 2.4 y la identidad  $A^2 = 2HA - \det(A) \cdot \text{id}$  en  $T\Sigma$ , obtenemos que

$$L\psi_m = -\frac{4H(m-1)(m-\frac{1}{2})v}{m} - \frac{4Hmv(1-v^2)(K_M - c)}{4H^2 + c(1-v^2)}. \quad (44)$$

Si suponemos que  $c = \inf\{K_M(p) : p \in \Sigma\} > -4H^2$ , el segundo sumando en el miembro de la derecha es positivo y, además, para  $m \geq 1$  o  $m \leq \frac{1}{2}$ , el primer sumando también es positivo, luego  $\psi_m$  cumple que  $L\psi_m \geq 0$  en  $\Sigma \setminus V$ . En consecuencia, podemos aplicar el principio del máximo al operador  $L$  en  $\Sigma \setminus V$ , que nos garantiza que  $\psi_m$  no puede alcanzar un máximo interior a  $\Sigma \setminus V$  a menos que sea constante. Analicemos, antes de nada, cuándo puede ser, bajo ciertas condiciones más generales, constante.

**Lema 2.12.** *Sea  $\Sigma \subseteq M \times \mathbb{R}$  un grafo de curvatura media constante  $H > 0$  sobre un dominio  $\Omega \subseteq M$  (no necesariamente compacto) y supongamos que  $c = \inf\{K_M(p) : p \in \Omega\} > -4H^2$ . Si  $\psi_m$  es constante en  $\Sigma$  para algún  $m \leq \frac{1}{2}$ , entonces*

- a)  $m = \frac{1}{2}$  en  $K_M = c$  en  $\Omega$ ,
- b)  $\Sigma$  es (localmente) invariante por un grupo uniparamétrico de isometrías que conservan la función altura.

Más concretamente, si  $c > 0$  y  $M = \mathbb{S}^2(c)$ , entonces  $\Sigma$  es parte de un toro de rotación y, si  $c \leq 0$  y  $M = \mathbb{H}^2(c)$ , entonces  $\Sigma$  es parte de un cilindro invariante por traslaciones hiperbólicas (ver sección 2.1 para una descripción más explícita de estos ejemplos).

*Demostración.* Si  $\psi_m$  es constante, entonces  $L\psi_m = 0$  luego de la ecuación (44) obtenemos que  $(m-1)(m-\frac{1}{2}) = 0$ , lo que únicamente es posible si  $m = \frac{1}{2}$ , y que  $K_M$  es constante en  $\Sigma \setminus V$ , luego es constante en todo  $\Sigma$  ya que  $K_M$  es continua y  $V$  tiene interior vacío.



De ahora en adelante, supondremos que  $\psi_{1/2}$  es constante. Por un lado, de la condición  $\nabla\psi_{1/2} = 0$  obtenemos que  $AE_3^\top = T/g'_{1/2}(v)$  luego  $T$  ha de ser una dirección principal con curvatura principal asociada  $1/g'_{1/2}(v)$ . De aquí deducimos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \frac{1}{g'_{1/2}(v)} \left( 2H - \frac{1}{g'_{1/2}(v)} \right), \\ \|\nabla v\|^2 &= \langle AE_3^\top, AE_3^\top \rangle = \frac{1-v^2}{g'_{1/2}(v)^2}. \end{aligned} \quad (45)$$

Si consideramos la función diferenciable  $f: ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  determinada por

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(4H^2 + c(1-t^2))}}, \quad f(0) = 0,$$

y tenemos en cuenta las igualdades en (45) y el lema 2.4, se comprueba que

$$\begin{aligned} \Delta(f(v)) &= f''(v)\|\nabla v\|^2 + f'(v)\Delta v \\ &= \frac{f''(v)}{g'_{1/2}(v)^2} (1-v^2) + f'(v)(2\det(A) - 4H^2 - c(1-v^2))v = 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $K_M$  es constante. Como  $f(v)$  es una función armónica y no constante sobre  $\Sigma \setminus V$ , podemos tomar, al menos localmente, un parámetro conforme  $z = x + iy$  sobre  $\Sigma \setminus V$  con  $x = f(v)$ . Ahora se pueden repetir los argumentos dados por Espinar y Rosenberg en [ER09, Lemma 6.1] para concluir que  $\Sigma$  es invariante por un grupo uniparamétrico de isometrías de  $\mathbb{M}^2(c) \times \mathbb{R}$ .

Como todos los datos fundamentales de  $\Sigma$  sólo dependen de  $x$  (véase la citada demostración de Espinar y Rosenberg), puede entenderse este grupo como traslaciones en la dirección del parámetro  $y$ . En consecuencia, si mostramos que  $h_y$ , la derivada de la función altura en la dirección de  $y$ , se anula, el grupo de isometrías conservará la función altura. Ahora bien, como el parámetro es conforme, se tiene que  $h_y = \langle \nabla h, \partial_y \rangle = -\langle JT, \partial_x \rangle$ , pero  $\partial_x$  tiene la misma dirección que  $\nabla v = -AT$  ya que  $x = f(v)$  y  $AT = T/g'_{1/2}(v)$  (esto último se deduce de que  $\nabla\psi_{1/2} = 0$ ), luego  $h_y = 0$ .

Por último, por comprobación directa sobre todas las superficies invariantes por un grupo uniparamétrico de isometrías que preservan la función altura (véase la sección 2.1), es fácil darse cuenta de que los únicos ejemplos para los que  $\psi_{1/2} = 0$  son los que se han mencionado en el enunciado.  $\square$

Ahora tenemos todos los ingredientes necesarios para demostrar la mejora de la estimación de la curvatura geodésica. Observemos que la variable  $m$ ,

que se moverá en el intervalo  $]0, \frac{1}{2}]$ , ahora puede interpretarse como la fracción de la altura máxima  $\alpha(c, H, v_0)$  que se permite al grafo alcanzar (véase la observación 2.7).

**Teorema 2.13.** *Sea  $\Sigma \subseteq M \times \mathbb{R}$  un grafo de curvatura media constante  $H > 0$  sobre un dominio compacto y regular  $\Omega$  con valor cero en  $\partial\Omega$  y supongamos que  $c = \inf\{K_M(p) : p \in \Omega\} > -4H^2$  y que  $v = v_0$  a lo largo de  $\partial\Omega$  para cierto  $-1 < v_0 \leq 0$ .*

*Si existe  $0 < m \leq \frac{1}{2}$  tal que  $|h| \leq m \cdot \alpha(c, H, v_0)$ , entonces tenemos la siguiente cota inferior para la curvatura geodésica de  $\partial\Omega$  en  $M$  (calculada respecto del conormal exterior a  $\Omega$ ):*

$$\kappa_g \geq \frac{(4 - 8m)H^2 + c(1 - v_0^2)}{4mH\sqrt{1 - v_0^2}}.$$

*Además, si la igualdad se alcanza en algún punto de  $\partial\Omega$ , entonces  $m = \frac{1}{2}$ ,  $K_M$  es constante, y  $\Sigma$  es localmente invariante por un grupo uniparamétrico de isometrías de  $M \times \mathbb{R}$  que preservan la función altura.*

*Demostración.* Consideremos la función  $\psi_m = h + g_m(v) \in C^\infty(\Sigma)$ , que verifica  $L\psi_m \geq 0$  en vista de (44). Como  $\Sigma$  es compacta, existe un punto  $p_0 \in \Sigma$  donde  $\psi_m$  alcanza su máximo. Distinguimos tres casos:

- Si  $p_0$  es un punto interior a  $\Sigma \setminus V$ , entonces  $\psi_m$  es constante en  $\Sigma$ , lo que implica que el máximo se alcanza en la frontera.
- Si  $p_0 \in \partial\Sigma$ , entonces el máximo se alcanza en toda la frontera  $\partial\Sigma$  dado que  $(\psi_m)|_{\partial\Sigma}$  es constante. Por lo tanto, el principio del máximo en la frontera para el operador  $L$  nos asegura que  $\frac{\partial\psi_m}{\partial\eta} \geq 0$  a lo largo de  $\partial\Sigma$ . Es fácil comprobar usando (40) que esta condición es equivalente a la desigualdad del enunciado.
- Si  $p_0 \in V$ , entonces  $v(p_0) = -1$ . En tal caso, tenemos que  $h \leq m \cdot \alpha(c, H, v_0) = -g_m(-1)$  so  $\psi_m \leq \psi_m(p_0) = h(p_0) + g_m(-1) = h(p_0) - m \cdot \alpha(c, H, v_0) + g_m(v_0) \leq g_m(v_0)$  y, como  $\psi_m$  es igual a  $g_m(v_0)$  sobre  $\partial\Sigma$ , hemos visto que el máximo se alcanza también en la frontera lo que reduce este caso al anterior.

Si la igualdad se alcanza, basta aplicar el lema 2.12 para concluir las condiciones del enunciado.  $\square$

De la misma forma que hicimos en el epígrafe anterior, ahora aplicamos el teorema al caso compacto y embebido (obsérvense las similitudes con el corolario 2.10).

**Corolario 2.14.** Sea  $\Sigma \subseteq M \times \mathbb{R}$  un  $H$ -bigrafo compacto y simétrico respecto de  $M \times \{0\}$  sobre un dominio  $\Omega \subseteq M$  y supongamos que  $c = \inf\{K_M(p) : p \in \Omega\} > -4H^2$ . Si existe  $0 < m \leq \frac{1}{2}$  tal que  $|h| \leq m \cdot \alpha(c, H, 0)$ , entonces se verifica la siguiente cota inferior para la curvatura geodésica de  $\partial\Omega$  en  $M$  (respecto del conormal exterior a  $\Omega$ ):

$$\kappa_g \geq \frac{(4 - 8m)H^2 + c}{4mH}.$$

Ahora ajustamos la constante  $0 < m \leq \frac{1}{2}$  para garantizar la convexidad de la frontera, tal y como hicimos en el corolario 2.11. No obstante, ahora tenemos la flexibilidad para mover  $m$ .

**Corolario 2.15.** Sea  $\Sigma \subseteq M \times \mathbb{R}$  un grafo de curvatura media constante  $H > 0$  sobre un dominio compacto y regular  $\Omega$  que toma el valor cero en  $\partial\Omega$ . Supongamos que  $c = \inf\{K_M(p) : p \in \Omega\} > -4H^2$  y  $v = v_0$  a lo largo de  $\partial\Omega$  para cierto  $-1 < v_0 \leq 0$ . En cualquiera de las siguientes situaciones:

i)  $c \geq 0$  y  $h \leq \frac{1}{2}\alpha(c, H, v_0)$  en  $\Sigma$ , o bien

ii)  $c < 0$  y  $h \leq \frac{4H^2 + c(1 - v_0)^2}{8H^2}\alpha(c, H, v_0)$  en  $\Sigma$ ,

la frontera  $\partial\Omega$  es convexa en  $M$  respecto del conormal exterior a  $\Omega$ .

### 2.2.3 Estimaciones de la curvatura geodésica en el caso no compacto

Es natural preguntarse si la hipótesis de compacidad sobre el dominio que ha aparecido a lo largo de toda esta sección puede eliminarse. Para conseguirlo, nos restringiremos al caso en que el espacio ambiente es  $\mathbb{M}^2(c) \times \mathbb{R}$  y  $v_0 = 0$ , es decir, cuando  $\Sigma$  se extiende a un  $H$ -bigrafo embebido. Aquí puede aplicarse una adaptación de las técnicas desarrolladas por Ros y Rosenberg en [RR10].

**Teorema 2.16.** Sea  $\Sigma \subseteq \mathbb{M}^2(c) \times \mathbb{R}$  un  $H$ -bigrafo propiamente embebido sobre un dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{M}^2(c)$  con  $4H^2 + c > 0$ , y simétrico respecto de  $\mathbb{M}^2(c) \times \{0\}$ . Supongamos que existe  $0 < m \leq \frac{1}{2}$  tal que  $|h| \leq m \cdot \alpha(c, H, 0)$  en  $\Sigma$ . Entonces, tenemos la siguiente cota inferior para la curvatura geodésica de  $\partial\Omega$  en  $M$  (respecto del conormal exterior a  $\Omega$ ):

$$\kappa_g \geq \frac{(4 - 8m)H^2 + c}{4mH}.$$

Además, si se alcanza la igualdad para algún  $p \in \partial\Omega$ , entonces

- i)  $\Sigma$  es un toro rotacionalmente invariante (véase la sección 2.1.1) si  $c > 0$ ,
- ii)  $\Sigma$  es un cilindro invariante por traslaciones horizontales si  $c = 0$ , y
- iii)  $\Sigma$  es un cilindro invariante por traslaciones hiperbólicas (véase la sección 2.2) si  $c < 0$ .

*Demostración.* Consideremos la función  $\psi_m \in C^\infty(\Sigma)$  como hemos venido haciendo. Si  $\psi_m$  alcanzara su máximo o bien  $\sup_\Sigma \psi_m \leq 0$ , podríamos razonar de la misma forma que hicimos en el caso compacto y la demostración habría terminado. En caso de que esto no sea así, consideremos una sucesión  $\{p_n\} \subseteq \Sigma_0 = \{p \in \Sigma : h(p) > 0\}$  de forma que  $\{\psi_m(p_n)\}$  converja a  $\sup \psi_m$ , y distingamos dos casos.

- Si  $\lim\{h(p_n)\} = 0$ , entonces  $\psi_m(p_n) = h(p_n) + g_m(v(p_n)) \leq h(p_n) \rightarrow 0$ , de donde  $\sup_\Sigma \psi_m \leq 0$  y hemos terminado.
- Si  $\{h(p_n)\}$  no converge a cero, podemos suponer sin perder generalidad que  $\{h(p_n)\} \rightarrow a > 0$  y  $h(p_n) > \frac{a}{2}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Dado  $0 < \epsilon < \frac{a}{2}$ , como  $\Sigma_0$  es estable y la distancia de  $p_n$  a  $\partial\Sigma_0$  está uniformemente separada de cero (por la condición  $h(p_n) > \frac{a}{2}$ ), la superficie  $\Sigma_\epsilon = \{p \in \Sigma : h(p) > \epsilon\}$  tiene segunda forma fundamental acotada (esto se deduce de la estabilidad de los grafos y de las estimaciones de curvatura de Schoen [Sch83]). Las isometrías de  $\mathbb{M}^2(c) \times \mathbb{R}$  nos permiten trasladar  $\Sigma_\epsilon$  horizontalmente de forma que  $p_n$  se proyecte sobre un punto prefijado  $q_0 \in \mathbb{M}^2(c)$  y mediante argumentos de convergencia estándares podemos asegurar la existencia de un grafo límite  $\Sigma_\infty(\epsilon)$  de curvatura media  $H$ , límite de la subsucesión de superficies trasladadas. La correspondiente función en  $\Sigma_\infty(\epsilon)$ , dada por  $\psi_{m,\infty} = h_\infty + g_m(v_\infty) \in C^\infty(\Sigma_\infty(\epsilon))$ , alcanza su máximo en el punto interior  $p_0 = (q_0, a) \in \Sigma_\infty(\epsilon)$  (notemos que hay convergencia en la topología  $C^m$  sobre compactos para todo  $m \in \mathbb{N}$ ). Ahora bien, como  $\psi_{m,\infty}$  es subarmónica en  $\Sigma_\infty(\epsilon)$ , se sigue que es constante por el principio del máximo y el lema 2.12 implica que  $\Sigma_\infty(\epsilon)$  puede extenderse a la mitad superior de uno de los  $H$ -bigrafos listados en el enunciado, salvo una traslación vertical. Denotaremos dicho bigrafo por  $\tilde{\Sigma}_\infty$  (observemos que  $\tilde{\Sigma}_\infty$  puede suponerse independiente de  $\epsilon$  mediante un argumento diagonal puesto que, cuando  $\epsilon$  decrece, el tamaño de las superficies involucradas en el límite crece). Como  $\tilde{\Sigma}_\infty$  es uno de los grafos conocidos, sabemos que  $\sup_\Sigma \psi_m$  se alcanza en toda la superficie y, en particular, en cierto  $\tilde{p} \in \partial\tilde{\Sigma}_\infty$  de altura máxima cumpliendo  $v_\infty(\tilde{p}) = 0$ .

Si probamos que  $h(\tilde{p}) \leq 0$  habremos terminado ya que  $\sup_{\Sigma} \psi_m = h(\tilde{p}) \leq 0$ . Razonando por contradicción, si  $h(\tilde{p}) > 0$ , podríamos tomar  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}h_{\infty}(\tilde{p})$  ya que tenemos cierta libertad al elegir  $\epsilon$  y, como la superficie límite extendida  $\tilde{\Sigma}_{\infty}$  no depende de  $\epsilon$ , seríamos capaces de encontrar una subsucesión de superficies trasladadas de  $\Sigma_{\epsilon}$  que convergiera al grafo extendido  $\tilde{\Sigma}_{\infty}$ . Por tanto,  $\tilde{\Sigma}_{\infty}$  contendría puntos de altura tan próxima a  $\epsilon$  como se deseara, contradiciendo el hecho de que ningún punto de  $\tilde{\Sigma}_{\infty}$  tiene altura mayor que  $\tilde{p}$  y  $\epsilon < \frac{1}{2}h_{\infty}(\tilde{p})$ .  $\square$

**Observación 2.17.** Si las alturas máximas de una sucesión  $\{\Sigma_n\}$  de H-bigrafos tienden a cero, entonces el teorema 2.16 asegura que las curvaturas geodésicas de las fronteras divergen uniformemente, en el sentido de que la cota inferior dada en el enunciado sólo depende de la altura a través del parámetro  $m$ . Por lo tanto, dado cualquier abierto  $U \subseteq \Omega$ , la sucesión de dominios  $\Omega_n \subseteq M$  sobre los que cada  $\Sigma_n$  es bigrafo tiene que intersectar a  $U$  a partir de un término en adelante. Esto se deduce de que, en caso contrario, podríamos tomar la mayor bola métrica contenida en  $U$  y la curvatura geodésica de esta bola sería una cota superior en algún punto de la curvatura geodésica de los bordes de los dominios, contradiciendo que sus curvaturas geodésicas divergen uniformemente.

### 2.3 ESTIMACIONES DE DISTANCIA AL BORDE

Para cerrar este capítulo, vamos a dar otra aplicación de las estimaciones de la sección anterior. Supongamos que  $\Sigma \subseteq M \times \mathbb{R}$  es un grafo de curvatura media constante  $H > 0$  sobre un dominio compacto  $\Omega \subseteq M$  que se extiende continuamente a  $\partial\Omega$  con valores cero. Bajo la restricción natural  $K_M \geq c > -4H^2$  en  $\Sigma$  para cierta constante  $c > 0$ , en la sección 2.2 demostramos que  $\psi_1 = h + g_1(v)$  es subarmónica en  $\Sigma$ , donde  $g_1$  está definida mediante (37) luego, si suponemos que  $v \leq v_0$  a lo largo de  $\partial\Sigma$ , entonces  $h + g_1(v) \leq g_1(v_0)$ , como consecuencia de que  $g_1$  es estrictamente creciente y de que  $h$  se anula en  $\partial\Sigma$ . Como  $g$  es también una función impar, deducimos que  $g(-v) \geq h - g(v_0)$ . Ahora podemos invertir la función  $g$  y elevar al cuadrado ambos miembros en la desigualdad anterior para obtener que

$$v^2 \geq \zeta(h, v_0) := \begin{cases} \frac{c+4H^2}{c} \tanh^2 \left( \frac{\sqrt{c^2+4H^2c}}{4H} (h - g(v_0)) \right) & \text{si } c < 0, \\ H^2(h - g(v_0))^2 & \text{si } c = 0, \\ \frac{c+4H^2}{-c} \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\sqrt{-c^2-4H^2c}}{4H} (h - g(v_0)) \right) & \text{si } c > 0. \end{cases} \quad (46)$$

Supongamos que  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Sigma$  es una curva regular parametrizada por su longitud de arco, y sea  $\eta$  un campo diferenciable a lo largo de  $\gamma$ , ortogonal a  $\gamma'$  y a  $N$ . Entonces,  $\{N, \gamma', \eta\}$  forma un sistema ortonormal de  $M \times \mathbb{R}$  y podemos escribir en coordenadas

$$E_3 = \langle N, E_3 \rangle E_3 + \langle \gamma', E_3 \rangle \gamma' + \langle \eta, E_3 \rangle \eta.$$

Como quiera que  $\langle N, E_3 \rangle = v$  y  $\langle \gamma', E_3 \rangle = h'(\gamma)$ , deducimos que  $1 = v^2 + h'(\gamma)^2 + \langle \eta, E_3 \rangle^2$  y, teniendo en cuenta que  $\langle \eta, E_3 \rangle^2 \geq 0$ , finalmente obtenemos la desigualdad  $|h'| \leq \sqrt{1 - v^2}$ . Usando la estimación dada en la ecuación (46), llegamos a que

$$\text{Long}(\gamma) \geq \int_0^a \frac{|h'|}{\sqrt{1 - v^2}} dt \geq \int_0^a \frac{-h'}{\sqrt{1 - \zeta(h, v_0)}} dt = \int_{h(a)}^{h(0)} \frac{ds}{\sqrt{1 - \zeta(s, v_0)}}. \tag{47}$$

Si ahora hacemos variar  $\gamma$  en la familia de curvas que unen  $p$  con la frontera  $\partial\Sigma$  (donde la altura se anula), obtenemos la siguiente cota inferior de la distancia al borde:

**Teorema 2.18.** *Sea  $\Sigma \subseteq M \times \mathbb{R}$  un grafo de curvatura media constante  $H > 0$  sobre un dominio compacto  $\Omega \subseteq M$  con valores cero en  $\partial\Omega$  y supongamos que  $c = \inf\{K_M(p) : p \in \Sigma\} > -4H^2$ . Si  $v \leq v_0$  en  $\partial\Omega$  para cierto  $-1 < v_0 \leq 0$ , entonces*

$$\text{dist}(p, \partial\Sigma) \geq \int_0^{h(p)} \frac{ds}{\sqrt{1 - \zeta(s, v_0)}}, \quad (p \in \Sigma).$$

*Además, si existe  $p \in \Sigma$  para el que la igualdad se alcanza, entonces  $\Omega$  tiene curvatura constante y  $\Sigma$  es un trozo de un casquete polar de una esfera de revolución.*

En otras palabras, el teorema 2.18 es un resultado de comparación que afirma que, cuando  $K_M \geq c$ , las esferas rotacionales en los correspondientes espacios homogéneos  $\mathbb{M}^2(c) \times \mathbb{R}$  minimizan la distancia de un punto a la frontera en términos de la altura de dicho punto.



En este capítulo vamos a introducir y aplicar de forma detallada una técnica que permite construir de forma simple y elegante superficies completas con curvatura media constante e isometrías prefijadas en los espacios homogéneos  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . La técnica, conocida como *construcción de Plateau conjugada*, tiene su origen en un artículo de Lawson [Law70], donde se prueba que existen inmersiones minimales de cualquier superficie compacta, distinta del plano proyectivo<sup>1</sup>, en  $S^3$  (de hecho, si la superficie es orientable puede conseguirse un embebimiento) y se construyen superficies doblemente periódicas de curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$ . A grandes rasgos, una construcción de Plateau conjugada consiste en resolver el problema de Plateau sobre un conveniente polígono geodésico, aplicar una correspondencia con superficies de curvatura media constante en otro espacio y luego completar dicha superficie mediante isometrías del ambiente.

En el caso de los espacios  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  con grupo de isometrías de dimensión 4 se pierde la isotropía con respecto al caso de curvatura seccional constante que trataba Lawson y sólo seremos capaces de controlar la correspondencia cuando la frontera de la solución del problema de Plateau está formada por geodésicas verticales u horizontales. En las siguientes secciones se tratarán dos construcciones; a saber, superficies de curvatura media constante  $H \in \mathbb{R}$  de tipo unduloide en  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  para  $4H^2 + \epsilon > 0$ ,  $\epsilon \in \{-1, 1\}$  y superficies de curvatura media  $\frac{1}{2}$  en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  con las simetrías de una teselación por polígonos regulares de  $\mathbb{H}^2$ . Listamos a continuación los dos problemas técnicos principales que surgen en la construcción:

- Entender la correspondencia entre superficies y cómo afecta ésta a geodésicas verticales y horizontales, así como a simetrías respecto de las mismas. Asimismo, garantizar que no aparecen singularidades al extender mediante tales simetrías. En la sección 3.1 llevaremos a cabo este estudio y lo ilustraremos con algunos ejemplos en la sección 3.2.
- Estudiar la existencia y unicidad de soluciones del problema de Plateau sobre ciertos contornos especiales en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Con un mínimo esfuerzo adicional, haremos este estudio en una submersión de Killing (véase el teorema 3.11).

<sup>1</sup> Existen obstrucciones topológicas para una inmersión de  $\mathbb{RP}^2$  en  $S^3$ .



## 3.1 LA CORRESPONDENCIA DE DANIEL

La correspondencia de Lawson es una herramienta clásica en el estudio de superficies de curvatura media constante en espacios de curvatura seccional constante, estableciendo una correspondencia localmente isométrica entre superficies de curvatura media constante en espacios de curvatura seccional constante (véase [Law70, Section 14]). En nuestro estudio de superficies de curvatura media constante en espacios homogéneos, utilizaremos la generalización de Daniel (véase [Dan07, Theorem 5.2]) de la correspondencia de Lawson al contexto de los espacios  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , introducidos en la sección 1.4.

Más explícitamente, dados  $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  y  $\mathbb{E}^* = \mathbb{E}(\kappa^*, \tau^*)$ , tales que  $\kappa - 4\tau^2 = \kappa^* - 4(\tau^*)^2$  y dados  $\theta, H, H^* \in \mathbb{R}$  verificando  $H + i\tau = e^{i\theta}(H^* + i\tau^*)$ , se cumple el siguiente enunciado:

*Dada una inmersión isométrica  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}$  de una superficie riemanniana orientable y simplemente conexa  $\Sigma$  con curvatura media constante  $H$ , existe una inmersión isométrica  $\phi^* : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}^*$  de curvatura media constante  $H^*$  tal que:*

- a)  $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}$ ,
- b)  $T^* = \text{Rot}_\theta(T)$ ,
- c)  $A^* = \text{Rot}_\theta \circ (A - H \cdot \text{id}) + H^* \cdot \text{id}$ .

*donde  $\text{Rot}_\theta$  es la rotación de ángulo  $\theta$  en  $T\Sigma$ ;  $\mathbf{v} = \langle \mathbf{N}, \xi \rangle$ ,  $T = \xi - \mathbf{v}\mathbf{N}$  y  $A$  son la función ángulo, la parte tangente del campo de Killing vertical y el operador de Weingarten de  $\phi$ , respectivamente. Los símbolos  $\mathbf{v}^*$ ,  $T^*$  y  $A^*$  representan los correspondientes elementos de  $\phi^*$ .*

*La inmersión  $\phi^*$ , que es única salvo una isometría de  $\mathbb{E}^*$ , suele llamarse inmersión hermana de  $\phi$ .*

Como se ha señalado anteriormente, estamos interesados en aplicar esta correspondencia entre superficies minimales en algún espacio  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  y una superficie de curvatura media constante  $H$  en  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R} = \mathbb{E}(\epsilon, 0)$ , luego el parámetro  $\theta$  ha de ser igual<sup>2</sup> a  $\frac{\pi}{2}$ . Este valor de  $\theta$  impone condiciones geométricas interesantes sobre la correspondencia (véase el lema 3.2 más abajo). Además, los parámetros  $\kappa$  y  $\tau$  están unívocamente determinados por  $\kappa = 4H^2 + \epsilon$  y que  $\tau = H$ . Finalmente, si denotamos  $J = \text{Rot}_{\pi/2}$ , obtenemos las relaciones

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}, \quad T^* = JT, \quad A^* = JA + H \cdot \text{id}, \quad (48)$$

<sup>2</sup> No se pierde generalidad en suponer que  $\theta$  es positivo ya que un cambio de signo en  $\theta$  conduce a un cambio en el signo de  $\tau$ , que se corresponde con un cambio de orientación en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .

	$\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ inicial	Superficies en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	Superficies en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$
$\kappa > 0$	$\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$	CMC $H > 1/2$	CMC $H > 0$
$\kappa = 0$	$\mathbb{E}(0, 1/2)$	CMC $H = 1/2$	-
$\kappa < 0$	$\mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$	CMC $0 < H < 1/2$	-

Figura 6: Tabla de configuraciones para obtener superficies de curvatura media constante en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ .

entre las superficies hermanas. En la figura 6, podemos encontrar un esquema de las diferentes superficies que se pueden alcanzar tomando una superficie minimal en el ambiente  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  inicial.

En la tabla hemos omitido, para  $H = \tau = 0$ , las familias de superficies minimales asociadas en  $\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  (notemos que  $\theta$  puede ser cualquiera en este caso) y la correspondencia entre superficies minimales en  $\mathbb{S}^3$  y de curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$ . Por otro lado, es interesante hacer referencia a que en este esquema aparece de forma natural la condición  $4H^2 + \epsilon > 0$ , que en la sección anterior habíamos utilizado tan a menudo, y ahora se explicita que hay un cambio esencial en la geometría de las superficies de curvatura media  $H$  en  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  según el signo de  $4H^2 + \epsilon$ .

### 3.1.1 Correspondencia entre curvas

En el resto de esta sección, nos encargaremos de estudiar cómo se comporta la correspondencia entre curvas contenidas en superficies hermanas. Para ello, dada una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Sigma$  regular y parametrizada por el arco y  $\Sigma$  es una superficie orientable dentro de una 3-variedad con aplicación de Gauss  $N$ , podemos considerar las siguientes tres cantidades:

$$\begin{aligned}
 \kappa_g &= \langle \overline{\nabla}_{\gamma'} \gamma', J\gamma' \rangle, \\
 \kappa_n &= \langle \gamma', A\gamma' \rangle = \langle \sigma(\gamma'\gamma'), N \rangle, \\
 \tau_n &= \langle J\gamma', A\gamma' \rangle = \langle \sigma(\gamma', J\gamma'), N \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

La primera de ellas es la conocida como curvatura geodésica de  $\gamma$  (respecto de  $J\gamma'$ ) en  $\Sigma$  y a las otras dos las llamaremos *curvatura normal* y *torsión normal* de  $\gamma$ , respectivamente. Observemos que al suponer que la superficie es orientable está definida la aplicación  $J : T\Sigma \rightarrow T\Sigma$  cumpliendo  $J^2 = -id$  y  $\{\gamma', J\gamma', N\}$  forma una base ortonormal de  $TM$  a lo largo de  $\gamma$ . Así, podemos

expresar los campos  $\gamma'' = \bar{\nabla}_{\gamma'}\gamma'$ ,  $(J\gamma')' = \bar{\nabla}_{\gamma'}J\gamma'$  y  $N' = \bar{\nabla}_{\gamma'}N$  en esta base en términos de  $\kappa_g$ ,  $\kappa_n$  y  $\tau_n$ . Es fácil comprobar, usando (49), que se obtienen las ecuaciones de Darboux:

$$\begin{cases} \gamma'' = & \kappa_g J\gamma' + \kappa_n N, \\ (J\gamma')' = & -\kappa_g \gamma' + \tau_n N, \\ N' = & -\kappa_n \gamma' - \tau_n J\gamma'. \end{cases} \quad (50)$$

Si  $\gamma$  es una curva en  $\Sigma$  y  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  es una inmersión isométrica de curvatura media constante  $H$ , con datos asociados  $\kappa_g$ ,  $\kappa_n$  y  $\tau_n$ , y tomamos la inmersión hermana  $\phi^* : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa^*, \tau^*)$  de curvatura media  $H^*$ , la curva  $\gamma$  tendrá unos nuevos datos,  $\kappa_g^*$ ,  $\kappa_n^*$  y  $\tau_n^*$ , para esta nueva inmersión. El siguiente resultado relaciona ambas ternas.

**Lema 3.1.** *En las condiciones anteriores, se satisfacen las siguientes identidades:*

- a)  $\kappa_g^* = \kappa_g$  (la curvatura geodésica es intrínseca a  $\Sigma$ ).
- b)  $\kappa_n^* = \kappa_n \cos \theta - \tau_n \sin \theta + H^* - H \cos \theta$ .
- c)  $\tau_n^* = \tau_n \cos \theta + \kappa_n \sin \theta - H \sin \theta$ .

*Demostración.* Es un cálculo directo usando las ecuaciones de la correspondencia (48) y las definiciones dadas en (49).  $\square$

Volviendo al caso de la correspondencia entre superficies minimales en  $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$  y superficies de curvatura constante  $H$  en  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ , donde se cumple que  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , las ecuaciones anteriores se leen como

$$\kappa_g^* = \kappa_g, \quad \kappa_n^* = H - \tau_n, \quad \tau_n^* = \kappa_n.$$

Además, cuando la curva  $\gamma$  es una geodésica de  $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ , un caso que aparecerá en repetidas ocasiones en lo sucesivo, entonces  $\kappa_g = 0$  y  $\kappa_n = 0$ , lo que se traduce en que  $\tau_n^* = 0$  y, como veremos a continuación, cuando  $\gamma$  es vertical u horizontal, esto conlleva que  $\phi^*(\gamma)$  caiga dentro de una superficie totalmente geodésica de  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ .

**Lema 3.2.** *Dados  $\epsilon \in \{-1, 1\}$  y  $H \geq 0$ , sea  $\phi : \Sigma \looparrowright \mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$  una inmersión isométrica minimal de una superficie riemanniana simplemente conexa  $\Sigma$  y consideremos  $\phi^* : \Sigma \looparrowright \mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  su inmersión hermana de curvatura media  $H$ . Dada una curva regular  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$ ,*

- a) si  $\phi(\alpha)$  es una geodésica horizontal de  $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ , entonces  $\phi^*(\alpha)$  está contenida en un plano vertical;
- b) si  $\phi(\alpha)$  es una geodésica vertical de  $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ , entonces  $\phi^*(\alpha)$  está contenida en un plano horizontal.

En ambos casos,  $\phi^*$  corta ortogonalmente a dichos planos a lo largo de  $\phi^*(\alpha)$ .

*Demostración.* La primera parte del lema fue probada por Torralbo (véase [Tor10a, Proposition 3]) pero incluimos aquí la demostración completa.

Siguiendo la notación previa al lema, tomaremos  $\gamma = \phi \circ \alpha$  y  $\gamma_* = \phi^* \circ \alpha = (\beta, h) \subset \mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  y supondremos que  $\alpha$  está parametrizada por el arco, luego también lo estarán  $\gamma$  y  $\gamma_*$ . Además, consideraremos  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  como hipersuperficie de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  para  $\epsilon = 1$  o como hipersuperficie espacial de  $\mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}$  si  $\epsilon = -1$ . En ambos casos, el normal unitario a esta hipersuperficie a lo largo de  $\gamma$  está dado por  $(\beta, 0)$ .

Para probar el apartado (a), afirmamos que  $J\gamma'_*$  es constante visto como una curva en  $\mathbb{R}^4$  o en  $\mathbb{R}_1^4$ . En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle (J\gamma'_*)', \gamma'_* \rangle &= -\kappa_g^* = 0, \\ \langle (J\gamma'_*)', J\gamma'_* \rangle &= \frac{d}{dt} \langle J\gamma'_*, J\gamma'_* \rangle = 0, \\ \langle (J\gamma'_*)', N^* \rangle &= -\langle J\gamma'_*, \nabla_{\gamma'_*} N^* \rangle = \langle J\gamma'_*, A^* \gamma'_* \rangle = \tau_n^* = 0, \end{aligned}$$

Por tanto, la parte tangente de  $(J\gamma'_*)'$  a  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  se anula, esto es,  $(J\gamma'_*)'$  es proporcional a  $(\beta, 0)$ . Por otro lado, como  $\gamma$  es una curva horizontal en  $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ , sabemos que  $\langle \gamma', \xi \rangle = \langle \gamma', \Gamma \rangle = 0$  luego  $\gamma'$  es proporcional a  $J\Gamma$  y, como tiene módulo uno y  $\|J\Gamma\|^2 = 1 - v^2$ , se tendrá que  $\gamma' = \pm J\Gamma / \sqrt{1 - v^2}$ . Por tanto,  $\Gamma^* = \gamma'_* \sqrt{1 - v^2}$  y  $(0, 1) = \Gamma^* + vN^* = \sqrt{1 - v^2} \gamma'_* + vN^*$ . Esta última relación implica que  $\langle J\gamma'_*, (0, 1) \rangle = 0$ , luego

$$\langle (J\gamma'_*)', (\beta, 0) \rangle = -\langle J\gamma'_*, (\beta', 0) \rangle = h' \langle J\gamma'_*, (0, 1) \rangle = 0,$$

donde hemos usado que  $0 = \langle J\gamma'_*, \gamma'_* \rangle = \langle J\gamma'_*, (\beta', 0) \rangle + \langle J\gamma'_*, h'(0, 1) \rangle$ .

De esto se deduce la afirmación y, más aún, hemos visto que  $J\gamma'_* = (w, 0)$  para cierto vector  $w \in T\mathbb{M}^2(\epsilon) \subset \mathbb{R}^3$ . A partir de aquí, tenemos que

$$\langle \gamma_*, (w, 0) \rangle' = \langle \gamma'_*, (w, 0) \rangle = \langle \gamma'_*, J\gamma'_* \rangle = 0,$$

lo que implica que  $\langle \gamma_*, (w, 0) \rangle$  es constante, pero  $\langle \gamma_*, (w, 0) \rangle = \langle \beta, w \rangle = 0$  ya que  $\beta$  es normal a  $\mathbb{M}^2(\epsilon)$  y  $w$  es tangente. Juntando toda esta información, hemos probado que  $\gamma^*$  está contenida en el plano vertical

$$P = \{(p, t) \in \mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R} : \langle p, v \rangle = 0\}$$

y la inmersión  $\phi_*$  es ortogonal a  $P$  dado que el plano tangente a  $\Sigma$  sobre un punto de  $\gamma$  está generado por  $\{\gamma'_*, J\gamma'_* = (v, 0)\}$ .

Para probar (b), notemos que si  $\gamma$  es una geodésica vertical, entonces  $v = 0$  a lo largo de ella, luego  $\xi^* = T^* + vN^* = T^*$  a lo largo de  $\gamma_*$ . Por tanto,

$$\langle \gamma'_*, \xi^* \rangle = \langle \gamma'_*, T^* \rangle = \langle \gamma', JT \rangle = 0.$$

La última igualdad se sigue de que  $\gamma'$  es vertical mientras que  $JT$  es horizontal ( $T$  es vertical a lo largo de  $\gamma$  porque  $v = 0$ ). Finalmente, tenemos que  $0 = \langle \gamma'_*, \xi^* \rangle = \langle (\beta', h'), (0, 1) \rangle = h'$ , luego  $h$  es constante a lo largo de  $\gamma_*$ , esto es,  $\gamma_*$  está contenida en un plano horizontal y, como  $v = 0$  a lo largo de  $\gamma_*$ , la inmersión corta a dicho plano ortogonalmente.  $\square$

### 3.1.2 Extensión de superficies y correspondencia entre simetrías

Supongamos que  $\Sigma$  es una superficie minimal inmersa en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  y que  $\gamma$ , una geodésica vertical u horizontal de  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ , está contenida en  $\partial\Sigma$ . Entonces, es posible extender  $\Sigma$  más allá de la frontera delimitada por  $\gamma$ , por reflexión respecto de esta geodésica (recordemos que en cualquier espacio  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , la reflexión respecto de geodésicas verticales u horizontales es una isometría, véase el lema 1.30). Una justificación de esta propiedad puede encontrarse en [DHKW92, Theorem 4].

Analizando los datos  $(v, T, A)$  de una superficie simétrica respecto de una geodésica vertical u horizontal y usando el lema 3.2, no es difícil probar el siguiente resultado, que establece el comportamiento de estas simetrías respecto de la correspondencia de Daniel.

**Lema 3.3.** *Sea  $\phi : \Sigma \looparrowright \mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$  una inmersión isométrica y minimal de una superficie riemanniana simplemente conexa y  $\phi^* : \Sigma \looparrowright \mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  es su inmersión hermana, entonces:*

- a) *Si  $\phi(\Sigma)$  es invariante por una reflexión respecto de una geodésica horizontal (resp. vertical), entonces  $\phi^*(\Sigma)$  es invariante por una reflexión respecto de un plano vertical (resp. horizontal)  $P$ .*
- b) *La geodésica que juega el papel de eje de reflexión se corresponde con la curva de la superficie hermana contenida en  $P$  respecto de la que se refleja.*

Otra situación que aparecerá en lo sucesivo será cuando exista un punto  $p$  en la frontera de la superficie  $\Sigma$  donde se intersequen dos geodésicas

contenidas en dicha frontera. Entonces, será posible reflejar respecto de ambas  $y$ , en cada reflexión, aparecerá una nueva geodésica que pasará por  $p$ . Si el ángulo que forman la geodésicas es  $\frac{\pi}{k}$  para cierto  $k \in \mathbb{N}$ , se formará una superficie después de reflejar  $2k$  veces, que será regular en todo punto según los resultados citados anteriormente salvo, eventualmente, en  $p$ . No obstante, que  $\Sigma$  es una superficie diferenciable en  $p$  es consecuencia de un teorema general de eliminación de singularidades aisladas siempre que la superficie reflejada sea localmente embebida en un entorno punteado dde  $p$  (véase [CS85, Proposition 1], hipótesis que en nuestra situación se satisface claramente).

### 3.2 SUPERFICIES HERMANAS DE LOS HELICOIDES ESFÉRICOS

En la sección anterior hemos estudiado con detenimiento las propiedades de la correspondencia de Daniel entre superficies en espacios homogéneos. Ahora ilustraremos cómo funciona la técnica de conjugación sobre los helicoides esféricos en las esferas de Berger. Los helicoides esféricos forman una familia uniparamétrica de inmersiones minimales en la esfera  $S^3$ , introducida por Lawson en [Law70], que está dada por

$$\begin{aligned} \Phi_c : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S^3 \subset \mathbb{C}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (\cos(x)e^{icy}, \sin(x)e^{iy}). \end{aligned}$$

Los elementos de esta familia, donde  $c$  varía en la recta real, son inmersiones minimales en  $S_b^3(\kappa, \tau)$ , para cualesquiera  $\kappa > 0$  y  $\tau \in \mathbb{R}$ . De hecho están caracterizadas por Torralbo en [Tor10a, Proposition 1] como las únicas superficies inmersas en  $S^3$  que son minimales para cualquier métrica de Berger. Veamos algunas propiedades remarcables de esta familia.

#### Observación 3.4.

1. No hay pérdida de generalidad en restringir el parámetro  $c$  al intervalo  $[-1, 1]$  ya que las superficies  $\Phi_c$  y  $\Phi_{1/c}$  son iguales salvo una isometría ambiente y una reparametrización. Más explícitamente,  $(S \circ \Phi_{1/c})(\frac{\pi}{2} - x, cy) = \Phi_c(x, y)$ , donde  $S(z, w) = (w, z)$  es una isometría en cualquier métrica de Berger.
2.  $\Phi_0([0, 2\pi[ \times [0, 2\pi[))$  es, salvo isometrías, la única esfera minimal en  $S_b^3(\kappa, \tau)$ ;  $\Phi_1([0, 2\pi[ \times [0, 2\pi[))$  es un toro de Clifford, y estos son los únicos ejemplos embebidos en la familia. Recordemos que un toro de

Clifford es el levantamiento por la proyección de Hopf de una geodésica de  $S^2(1/\sqrt{\kappa})$ .

3. Más interesante para nuestros propósitos es que, para cada  $c \in \mathbb{R}$ , la inmersión  $\Phi_c$  es invariante por el grupo uniparamétrico de isometrías<sup>3</sup>

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} e^{ict} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix}.$$

Además, la superficie  $\Phi_c$  es una superficie reglada ya que, para cualquier  $\theta \in \mathbb{R}$ , la curva  $t \mapsto \Phi_c(t, \theta)$  es una geodésica horizontal.

Siguiendo con la idea de la sección anterior, nos restringiremos al caso  $\kappa = 4H^2 + \epsilon > 0$  y  $\tau = H > 0$ . Dado  $c \in ]-1, 1]$ , vamos a considerar el siguiente polígono  $\Lambda_c$ , que será nuestro candidato a pieza fundamental bordeada por geodésicas verticales y horizontales y que generará todo el helicoide  $\Phi_c$  (el caso  $c = -1$  es de naturaleza distinta y será tratado más adelante). Explícitamente,  $\Lambda_c$  es el polígono formado por las siguientes cuatro curvas (ver figura 7):

$$\begin{aligned} h_0(t) &= (\cos(t), \sin(t)) = \Phi_c(t, 0), & t &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ h_1(t) &= (\cos(t)e^{\frac{i\pi c}{2(1+c)}}, \sin(t)e^{\frac{i\pi}{2(1+c)}}) = \Phi_c\left(t, \frac{\pi}{2(1+c)}\right), & t &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ v_0(t) &= (e^{ict}, 0) = \Phi_c(0, t), & t &\in \left[0, \frac{\pi}{2(1+c)}\right], \\ v_1(t) &= (0, e^{it}) = \Phi_c\left(\frac{\pi}{2}, t\right), & t &\in \left[0, \frac{\pi}{2(1+c)}\right]. \end{aligned}$$

A partir de la observación 3.4, es fácil ver que  $h_0$  y  $h_1$  son geodésicas horizontales, mientras que  $v_0, v_1$  son geodésicas verticales. Además, podemos recuperar toda la superficie  $\Phi_c(\mathbb{R}^2)$  mediante reflexión de la pieza  $\Phi_c([0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2(1+c)}])$  respecto de las geodésicas que forman  $\Lambda_c$ . Nos interesa, no obstante, observar que esta pieza está foliada por las curvas  $h_\theta$  para  $\theta \in [0, 1]$  definidas por

$$h_\theta(t) = \Phi_c\left(t, \frac{\theta\pi}{2(1+c)}\right).$$

Consideremos ahora la inmersión  $\Phi_c^* : [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2(1+c)}] \rightarrow \mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  (notemos que el dominio es simplemente conexo) y denotemos por  $h_\theta^*$  y  $v_j^*$ ,

<sup>3</sup> En la línea del teorema 1.27, éstas isometrías son composición de levantamientos de rotaciones respecto de un punto en  $S^2(\kappa)$  y traslaciones verticales, por lo que podemos referirnos a ellas como *movimientos helicoidales*.

para  $\theta \in [0, 1]$  y  $j \in \{0, 1\}$  las curvas correspondientes. En vista del lema 3.2, las curvas  $h_\theta^*$  están contenidas en planos verticales de simetría  $P_\theta$ , mientras que  $v_j^*$  está contenida en un plano horizontal  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \{t_j\}$ , para  $j \in \{0, 1\}$ .

Para profundizar en el comportamiento de estas curvas, podemos calcular explícitamente sus curvaturas como curvas en los planos verticales u horizontales en que están contenidas. Para hacerlo, observemos en primer lugar que las superficies hermanas intersectan estos planos ortogonalmente, luego las curvaturas de estas curvas están dadas por

$$\begin{aligned} \kappa_{v_j^*}^{\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \{t_j\}} &= \langle A^*(v_j^*)', (v_j^*)' \rangle = H - \langle Av_j', Jv_j' \rangle, \\ \kappa_{h_\theta^*}^{P_\theta} &= \langle A^*(h_\theta^*)', (h_\theta^*)' \rangle = H - \langle Ah_\theta', Jh_\theta' \rangle, \end{aligned} \tag{51}$$

donde  $A^*$  es el operador de Weingarten de la inmersión hermana  $\Phi_c^*$ . La segunda igualdad se sigue de que los operadores  $A$  y  $A^*$  están relacionados por  $S^* = JS + H \cdot \text{id}$  (véase (48)).

Finalmente, como el operador forma de  $\Phi_c$  se puede calcular de forma explícita a partir de la expresión de la inmersión, es un cálculo largo pero sencillo mostrar que las curvas  $v_j^*$  tienen curvatura constante en  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \{t_j\}$  para  $j \in \{0, 1\}$ . Por otro lado, todas las curvas  $h_\theta^*$  tienen la misma curvatura ya que la inmersión  $\Phi_c$  es invariante por un grupo uniparamétrico de movimientos helicoidales (ver observación 3.4) que actúa de forma transitiva sobre las curvas  $h_\theta$ . Así deducimos que la superficie  $\Phi_c^*(\mathbb{R}^2)$  ha de ser rotacionalmente invariante.

**Proposición 3.5.** *Dado  $c \in ]-1, 1]$ , la superficie hermana del helicoides esférico  $\Phi_c$  en  $S_b^3(4H^2 + \epsilon, H)$  es una superficie de rotación en  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ . Concretamente,*

- i) *la superficie hermana de  $\Phi_0$  es una esfera de curvatura media constante,*
- ii) *la superficie hermana de  $\Phi_1$  es un cilindro vertical<sup>4</sup>,*
- iii) *la superficie hermana de  $\Phi_c$  para  $0 < c < 1$  es un unduloide y*
- iv) *la superficie hermana de  $\Phi_c$  para  $-1 < c < 0$  es un nodoide.*

De esta forma, puede comprobarse que los helicoides esféricos barren todos los casos de superficies de rotación de curvatura media  $H$  en  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  (véase [PR99, Lemma 1.3], para una descripción más detallada de estas superficies). En la figura 7 se puede ver un esquema de la correspondencia.

<sup>4</sup> En este caso, el producto de una curva de curvatura constante  $2H$  en  $\mathbb{M}^2(\epsilon)$  y la recta real.



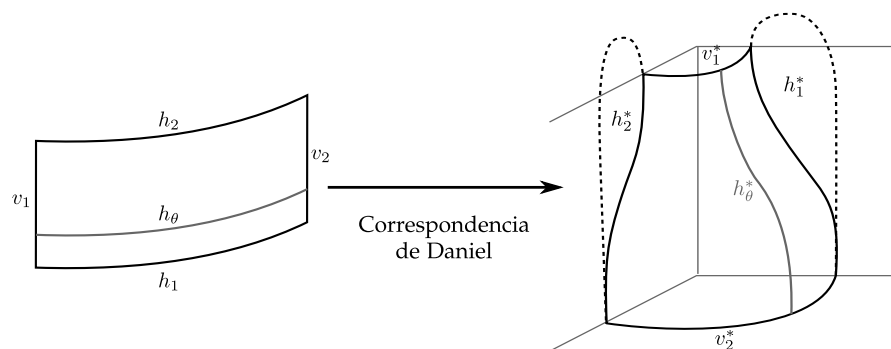


Figura 7: A la izquierda, el polígono  $\Lambda_c$  ( $c \neq -1$ ) en una esfera de Berger y, a la derecha, su correspondiente en  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  para  $c > 0$  (en línea continua) y  $c < 0$  (en línea discontinua).

*Demostración.* Por un lado, la superficie hermana de  $\Phi_0$  ha de ser una esfera ya que la esfera es simplemente conexa y puede aplicarse directamente la correspondencia a toda la superficie. Por otro lado, la hermana de  $\Phi_1$  ha de tener función ángulo nula ya que ésta la tiene y la función ángulo se conserva por la correspondencia luego tiene que ser un cilindro vertical sobre una curva de curvatura  $2H$  (véase el lema 1.34).

Quedan por probar los casos (iii) y (iv) donde sabemos que las superficies hermanas son de rotación. Es un cálculo largo comprobar a partir de la ecuación (51) que las curvas generatrices de los unduloides y los nodoides tienen la misma curvatura geodésica dentro de los planos verticales que las correspondientes  $h_\theta^*$ . Una pista para saber si son o no nodoides es que, para estos, existen curvas de puntos donde la función ángulo se anula.  $\square$

**Observación 3.6.** En el caso de la esfera redonda, es decir, para  $\kappa = 4\tau^2$ , las superficies hermanas de los helicoides esféricos, via la correspondencia de Lawson, son las superficies rotacionales de Delaunay en  $\mathbb{R}^3$ . Esto fue probado por Grosse-Brauckmann [GB93, Theorem 2.1].

Finalmente, mencionar que el argumento previo muestra de una forma explícita que cualquier superficie minimal reglada por geodésicas horizontales en  $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$  se convierte por la correspondencia de Daniel en una superficie invariante por un grupo uniparamétrico de isometrías que preservan la función altura. En nuestro caso concreto de helicoides esféricos para

$c \in ]-1, 1]$ , éste ha sido un grupo de rotaciones aunque, en el siguiente apartado, veremos que tendremos traslaciones hiperbólicas (para  $\epsilon = -1$ )

### 3.3 EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES DEL PROBLEMA DE PLATEAU SOBRE CONTORNOS DE NITSCHÉ

Estamos interesados en construir ciertas superficies minimales con frontera prefijada en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , para lo que resolveremos el problema de Plateau en dicha frontera. Sin mucho esfuerzo adicional, estudiaremos la existencia y unicidad del problema de Plateau para ciertas fronteras especiales en una submersión de Killing  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$ , de la que siempre supondremos que tiene fibras de longitud infinita. En primer lugar, definiremos rigurosamente el tipo de frontera que consideraremos: los contornos de Nitsche.

**Definición 3.7.** *Un contorno de Nitsche es un par  $(\Omega, \Gamma)$ , donde  $\Omega \subset M$  es un dominio relativamente compacto y simplemente conexo y  $\Gamma$  es una curva cerrada diferenciable a trozos en  $\mathbb{E}$  que admite una parametrización  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$  cumpliendo las siguientes condiciones:*

- a) *existe una partición  $a = t_1 < s_1 \leq t_2 < \dots \leq t_r < s_r \leq t_{r+1} = b$  tal que, para cualquier  $j \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\gamma|_{[t_j, s_j]}$  es una curva regular que se proyecta inyectivamente sobre  $M$  por  $\pi$  y cuyo tangente no es vertical en ningún punto, y  $\gamma|_{[s_j, t_{j+1}]}$  es un segmento vertical parametrizado inyectivamente;*
- b)  *$\pi \circ \gamma$  parametriza  $\partial\Omega$  y esta parametrización es inyectiva excepto en los intervalos  $[s_j, t_{j+1}]$ , para  $j \in \{1, \dots, r\}$ , donde es constante.*

A los puntos  $\pi(t_i)$  en la definición los llamaremos *esquinas* de  $\partial\Omega$ . Observemos que  $\partial\Omega$  es regular excepto quizá en sus esquinas, donde los segmentos verticales se han colocado (véase la figura 8). Como  $\Omega$  es simplemente conexo tenemos asegurada la existencia de una sección diferenciable del fibrado  $F_0 : \Omega \rightarrow M$ , que fijaremos a partir de ahora. Según la ecuación (20), esto nos permite definir el grafo  $F_u : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$  de cualquier función  $u \in C^1(\Omega)$ .

Siguiendo las ideas dadas por Pinheiro [Pino7], probaremos el siguiente resultado, que puede parafarsearse como que si dos grafos sobre un mismo dominio de  $\Omega \subset M$  y con la misma curvatura media tienen por frontera sendos contornos de Nitsche  $(\Omega, \Gamma)$  y  $(\Omega, \Gamma')$  y en la parte no vertical de éstos uno está por encima del otro, entonces la relación *estar por encima de* se hereda al interior.

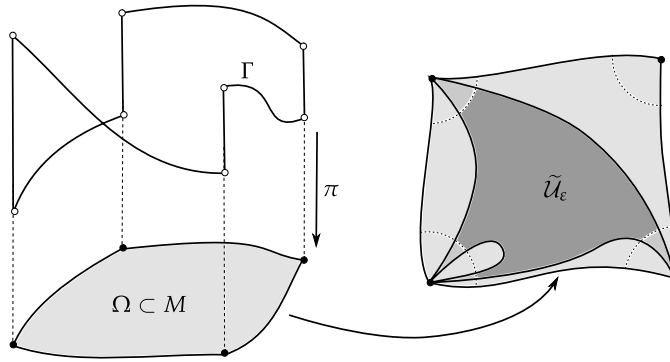


Figura 8: A la izquierda, representación esquemática de un par de Nitsche  $(\Omega, \Gamma)$ . A la derecha, el dominio  $\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon$  de la demostración de la proposición 3.8.

**Proposición 3.8.** Sean  $(\Omega, \Gamma)$  y  $(\Omega, \Gamma')$  dos contornos de Nitsche en  $\mathbb{E}$  con el mismo dominio asociado  $\Omega$  y el mismo conjunto de esquinas  $C \subset \partial\Omega$ . Sean  $F_u, F_v : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ , con  $u, v \in C^\infty(\Omega)$ , dos grafos satisfaciendo

- i)  $H(u) = H(v)$  en  $\Omega$ ,
- ii)  $u$  y  $v$  se extienden continuamente a  $\partial\Omega \setminus C$  dando lugar a sendas superficies con bordes  $\Gamma$  y  $\Gamma'$ , respectivamente.

Si  $u \leq v$  en  $\partial\Omega \setminus C$ , entonces  $u \leq v$  en  $\Omega$ .

*Demostración.* Razonando por reducción al absurdo, consideremos  $w = u - v$  y supongamos que  $\mathcal{U} = \{p \in \Omega : w(p) > 0\}$  no es vacío. Sumando una constante positiva suficientemente pequeña a la función  $v$  de forma que la condición  $\mathcal{U} \neq \emptyset$  se conserve, podemos suponer sin perder generalidad que  $\nabla w$  no se anula a lo largo de  $\partial\mathcal{U}$  y que  $u < v$  en  $\partial\Omega \setminus C$ . El teorema 1.39 nos dice que  $\partial\mathcal{U}$  puede descomponerse en una familia  $\{C_\alpha\}$  de curvas regulares que se cortan transversalmente en ciertos puntos pero, como  $\nabla w$  no se anula en  $\partial\mathcal{U}$ , dichos puntos de intersección no aparecen. Además, las condiciones  $u < v$  en  $\partial\Omega \setminus C$  y  $\nabla w \neq 0$  en  $\partial\mathcal{U}$  nos dicen que los puntos límite de  $\cup_\alpha C_\alpha$  están en el propio  $\cup_\alpha C_\alpha$  o en el conjunto de esquinas  $C \subset \partial\Omega$ . Más aún,  $\Omega \setminus \partial\mathcal{U}$  no puede tener componentes conexas relativamente compactas en el interior de  $\Omega$  debido al principio del máximo<sup>5</sup>.

Sea  $\tilde{\mathcal{U}}$  una componente conexa de  $\mathcal{U}$  y, dado  $\varepsilon > 0$ , denotaremos por  $\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon$  el conjunto de puntos de  $\tilde{\mathcal{U}}$  que distan al menos  $\varepsilon$  de cualquier esquina de

<sup>5</sup> Esta descripción detallada no asegura que haya un número finito de curvas  $C_\alpha$  pero, si las hubiera, tendrían acumularse cerca de las esquinas de  $\partial\Omega$ . Más adelante, quitaremos un entorno de cada esquina de  $\Omega$  lo que nos dirá que queda un número finito de curvas  $C_\alpha$ .

$\Omega$ . Por tanto, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, la discusión del párrafo anterior nos permite escribir  $\partial\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon = A_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ , donde  $A_\varepsilon$  consiste en una cantidad finita de curvas contenidas en  $\partial\tilde{\mathcal{U}}$  y  $B_\varepsilon$  contiene arcos de la frontera de bolas geodésicas centradas en los puntos de  $C$  (también un número finito). En la figura 8 puede verse una representación esquemática de  $\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon$ , donde la frontera  $A_\varepsilon$  está dibujada en línea continua y  $B_\varepsilon$  en discontinua.

Como las funciones  $u$  y  $v$  satisfacen  $H(u) = H(v)$  en  $\Omega$ , de la ecuación (23) deducimos que  $\operatorname{div} \frac{Gu}{W(u)} = \operatorname{div} \frac{Gv}{W(v)}$  en  $\Omega$ . Aplicando el teorema de la divergencia, obtenemos que

$$0 = \int_{\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon} \operatorname{div} \left( \frac{Gu}{W(u)} - \frac{Gv}{W(v)} \right) = \int_{\partial\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon} \left\langle \frac{Gu}{W(u)} - \frac{Gv}{W(v)}, \eta \right\rangle, \quad (52)$$

donde  $\eta$  es el conormal unitario exterior a  $\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon$  a lo largo de su frontera. Por otro lado, el lema 1.38 nos permite descomponer (en  $A_\varepsilon$ )

$$\left\langle \frac{Gu}{W(u)} - \frac{Gv}{W(v)}, \nabla w \right\rangle = \frac{1}{2}(W(u) + W(v)) \|N_u - N_v\| > 0, \quad (53)$$

donde  $N_u$  y  $N_v$  son los normales unitarios a las inmersiones  $F_u$  y  $F_v$ , respectivamente, que supondremos que apuntan hacia abajo. La última desigualdad estricta se sigue de que  $\nabla w \neq 0$  sobre  $A_\varepsilon$ . Sin embargo, como  $w = 0$  en  $A_\varepsilon$  y  $w > 0$  en  $\mathcal{U}_\varepsilon$ , el campo  $\nabla w$  es un múltiplo negativo de  $\eta$  en  $A_\varepsilon$ . En consecuencia, si consideramos las funciones

$$\alpha(\varepsilon) = \int_{A_\varepsilon} \left\langle \frac{Gu}{W(u)} - \frac{Gv}{W(v)}, \eta \right\rangle, \quad \beta(\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} \left\langle \frac{Gu}{W(u)} - \frac{Gv}{W(v)}, \eta \right\rangle,$$

y usamos la desigualdad (53), tenemos que  $\alpha(\varepsilon)$  es negativa y estrictamente decreciente en un cierto intervalo  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ , mientras que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta(\varepsilon) = 0$  (este límite puede calcularse fácilmente sin más que tener en cuenta que el integrando de  $\beta(\varepsilon)$  está acotado por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la longitud  $B_\varepsilon$  tiende a cero cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Todo esto conlleva que  $\alpha(\varepsilon) + \beta(\varepsilon) < 0$  para cierto  $\varepsilon$  pero, en vista de (52),  $\alpha(\varepsilon) + \beta(\varepsilon) = 0$  para cualquier  $\varepsilon$  y hemos obtenido la contradicción buscada.  $\square$

Como consecuencia directa, obtenemos el siguiente resultado de unicidad para el caso minimal.

**Corolario 3.9.** *Dado un contorno de Nitsche  $(\Omega, \Gamma)$  en una submersión de Killing  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$ , existe a lo sumo un grafo minimal sobre  $\Omega$  con frontera  $\Gamma$ .*

Es ahora el momento de analizar la existencia de tales grafos minimales, para lo que usaremos el teorema general de existencia de solución del problema de Plateau de Meeks y Yau [MY82a] y el siguiente lema.

**Lema 3.10.** *Sea  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  una submersión de Killing y  $\Omega \subseteq M$  un abierto cuya frontera es una curva cerrada diferenciable a trozos cumpliendo que*

- a) *cada componente regular de  $\partial\Omega$  es una curva con curvatura geodésica no negativa con respecto al conormal interior a  $\Omega$ , y*
- b) *el ángulo interior en cada vértice de la curva diferenciable a trozos es menor o igual que  $\pi$ .*

*Entonces,  $\pi^{-1}(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{E}$  es una 3-variedad con frontera mean-convexa en el sentido de [MY82a].*

*Demostración.* La demostración se deduce del lema 1.34: dada una componente regular  $\alpha$  de  $\partial\Omega$  con curvatura geodésica  $\kappa_g$  respecto del conormal interior a  $\Omega$ , el cilindro vertical  $\pi^{-1}(\alpha)$  tiene curvatura media  $\frac{1}{2}\kappa_g$  con respecto al normal unitario que apunta al interior de  $\pi^{-1}(\Omega)$ . Para la condición sobre los ángulos, es fácil darse cuenta de que si  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son componentes de  $\partial\Omega$  que forman un cierto ángulo menor o igual que  $\pi$  en su intersección, entonces los cilindros verticales  $\pi^{-1}(\alpha_1)$  y  $\pi^{-1}(\alpha_2)$  forman el mismo ángulo interior y, por tanto, no es superior a  $\pi$ .  $\square$

Diremos que un contorno de Nitsche  $(\Omega, \Gamma)$  es *admisibles* si  $\Omega$  satisface las hipótesis del lema 3.10. Observemos que, como  $\Omega$  es simplemente conexo y las fibras tienen longitud infinita, se deduce que  $\Gamma$  es una curva nulhomótopa en  $\pi^{-1}(\overline{\Omega})$ .

Aplicaremos los resultados citados para probar la existencia y unicidad de soluciones del problema de Plateau sobre contornos admisibles. Un resultado similar en el grupo de Heisenberg  $\text{Nil}_3$  ha sido probado por Alías, Dajczer y Rosenberg en [ADR07], aunque usando técnicas diferentes.

**Teorema 3.11.** *Sea  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  una submersión de Killing y supongamos que  $(\Omega, \Gamma)$  es un contorno de Nitsche admisible. Entonces, existe una única superficie minimal  $\Sigma$  contenida en  $\pi^{-1}(\overline{\Omega})$  con frontera  $\Gamma$ , y el interior de dicha superficie es un grafo sobre  $\Omega$ .*

*Demostración.* La existencia de una tal superficie está garantizada por los resultados en [MY82a]. Por tanto, es suficiente probar que cualquier super-

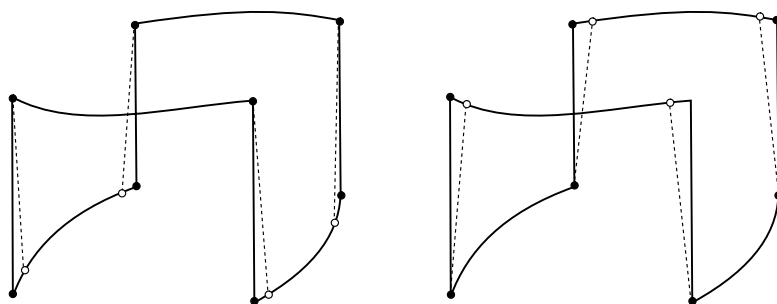


Figura 9: Dos deformaciones (en línea discontinua) de un mismo contorno de Nitsche (en línea continua). La de la izquierda se queda por encima del contorno original mientras que la de la derecha se queda por debajo.

ficie minimal  $\Sigma \subset \pi^{-1}(\Omega)$  con frontera  $\Gamma$  es un grafo, y entonces aplicar el corolario 3.9.

En caso de que el grafo de Nitsche no contenga segmentos verticales, (esto es, la proyección de  $\Gamma$  sobre  $\partial\Omega$  sea biyectiva), esta afirmación es inmediata mediante una aplicación clásica del principio del máximo. Si éste no fuera el caso, podríamos aplicar una pequeña deformación a las partes verticales de  $\Gamma$  de forma que la proyección de  $\partial\Omega$  sea biyectiva y la nueva frontera  $\Gamma'$  quede por encima  $\Gamma$ .

La única solución  $\Sigma'$  al problema de Plateau en  $\pi^{-1}(\Omega)$  con frontera  $\Gamma'$  debe quedar por encima de  $\Sigma$  por el principio del máximo. Ahora bien, podemos considerar una sucesión decreciente  $\{\Gamma_n\}$  de tales deformaciones (es decir,  $\Gamma_n$  está por encima de  $\Gamma_{n+1}$  para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ ) que converja al contorno de Nitsche original  $\Gamma$ . Las correspondientes soluciones  $\Sigma_n$  tienden a una solución  $\Sigma_+$  para la frontera  $\Gamma$  (notemos que los grafos verticales son estables luego sus geometrías están uniformemente acotadas (véase [RST09]), luego existen argumentos que garantizan la convergencia<sup>6</sup>). Como todas las superficies  $\Sigma_n$  están por encima de  $\Sigma$ , también lo estará  $\Sigma_+$ . Además,  $\Sigma_+$  es un grafo como límite monótono de grafos y función ángulo es menor o igual que cero, de donde, por la estabilidad de  $\Sigma_+$ , o bien es idénticamente cero o no se anula en ningún punto interior. La primera posibilidad no es factible (ya que llevaría a que  $\Sigma_+$  es vertical y su borde no lo es) luego  $\Sigma_+$  ha de ser un grafo en su interior.

<sup>6</sup> Además, en este caso, al ser la sucesión de grafos decreciente y trivialmente acotada inferiormente, la superficie límite (puntual) siempre existe sin tener que recurrir a resultados de convergencia.

Repitiendo los mismos argumentos, es posible deformar la curva  $\Gamma$  de forma que ahora la nueva curva quede debajo de ésta y se puede construir un grafo  $\Sigma_-$  con frontera  $\Gamma$  que quede por debajo de  $\Sigma$ , como límite de una sucesión de tales deformaciones. Finalmente, el corolario 3.9 nos dice que  $\Sigma_+ = \Sigma_-$ , luego  $\Sigma = \Sigma_+$  y, en particular, el interior de  $\Sigma$  es un grafo.  $\square$

El teorema 3.11 nos proporciona la única solución del problema de Plateau en  $\pi^{-1}(\overline{\Omega})$  con frontera  $\Gamma$  y esta superficie debe ser, además, un disco topológico. Como consecuencia inmediata de la unicidad, tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 3.12.** *Bajo las hipótesis del teorema, la superficie  $\Sigma$  es invariante por todas las isometrías de  $\mathbb{E}$  que conserven el contorno de Nitsche  $(\Omega, \Gamma)$ .*

### 3.4 SUPERFICIES DE TIPO UNDULOIDE EN $S^2 \times \mathbb{R}$ Y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

En esta sección, aplicaremos los conocimientos recopilados hasta ahora para construir una familia uniparamétrica de superficies minimales  $\Sigma_\lambda$  en las esferas de Berger  $S_b^3(4H^2 + \epsilon, H)$  resolviendo el problema de Plateau en un contorno adecuado  $\Gamma_\lambda$ , donde supondremos siempre que  $\epsilon \in \{-1, 1\}$  y  $4H^2 + \epsilon > 0$ . Una vez hayamos conseguido esto, estudiaremos las superficies hermanas  $\Sigma_\lambda^*$ .

#### 3.4.1 Construcción de la pieza minimal

Consideremos un parámetro real  $\lambda \in [0, \frac{\pi}{2}]$  y definamos de forma explícita el polígono geodésico  $\Gamma_\lambda$ , que tiene cuatro componentes parametrizadas por

$$\begin{aligned} h_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{it}, e^{-it}), & t \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ h_1(t) &= (\cos t, \sin t), & t \in [\frac{\lambda}{2}, \frac{\pi}{4}], \\ h_2(t) &= (i \cos t, i \sin t), & t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}], \\ v(t) &= \left( e^{it} \cos \frac{\lambda}{2}, e^{it} \sin \frac{\lambda}{2} \right), & t \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{aligned}$$

Observemos que  $h_0$ ,  $h_1$  y  $h_2$  son geodésicas horizontales que se proyectan mediante la fibración de Hopf sobre dos geodésicas de  $S^2(1 + 4H^2)$  (de hecho,  $h_1$  y  $h_2$  se proyectan sobre la misma circunferencia), mientras que  $v$  es una geodésica vertical. Ninguna de las cuatro geodésicas está parametrizada por su longitud de arco.

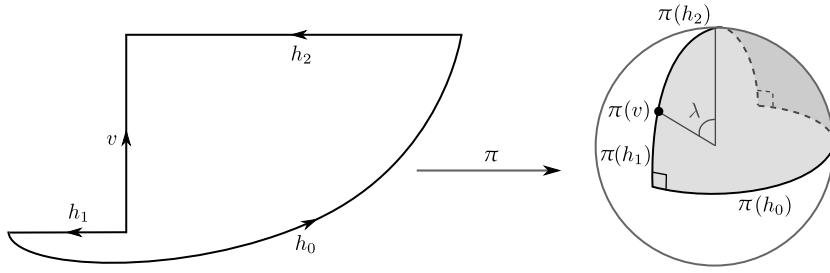


Figura 10: A la izquierda, el polígono  $\Gamma_\lambda$  en la esfera de Berger y, a la derecha, su proyección de Hopf  $\pi(\Gamma_\lambda)$ . El parámetro  $\lambda$  representa el ángulo indicado en el dibujo.

La dependencia de  $\lambda$  radica en qué punto elegimos para dividir el círculo máximo en la proyección y colocar sobre él el segmento vertical  $v$  (en la figura 10 queda más clara esta afirmación). Notemos además que dos curvas consecutivas del polígono siempre forman un ángulo de  $\frac{\pi}{2}$ .

Por otro lado, es claro que  $\Gamma_\lambda$  es un contorno de Nitsche admisible (véanse la definición 3.7 y el lema 3.10) junto con el cuadrante de esfera  $\Omega$  que delimita  $\pi(\Gamma_\lambda)$  en la proyección. Como  $\Omega$  es simplemente conexo pero las fibras de la proyección son compactas, trabajaremos en  $W$ , el recubridor universal riemanniano del toro  $\pi^{-1}(\overline{\Omega})$ . Si tomamos la aplicación recubridora  $\pi_1 : W \rightarrow \pi^{-1}(\overline{\Omega})$ , la aplicación  $\pi \circ \pi_1 : W \rightarrow \overline{\Omega}$  es una submersión de Killing<sup>7</sup>. El teorema 3.11 nos asegura la existencia (y unicidad) de una superficie  $\Sigma_\lambda \subset \pi^{-1}(\overline{\Omega})$  con borde  $\Gamma_\lambda$ . Además,  $\Sigma_\lambda$  tiene la topología de un disco y su interior es un grafo sobre  $\Omega$ .

**Observación 3.13.** Analicemos rápidamente el grupo  $G_\lambda$  de isometrías que nos permite extender la superficie  $\Sigma_\lambda$  para  $0 \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$ . Está generado por

$$\begin{aligned} (z, w) &\mapsto (z \cos \lambda + w \sin \lambda, z \sin \lambda - w \cos \lambda) && \text{(reflexión resp. de } v), \\ (z, w) &\mapsto (\bar{w}, \bar{z}) && \text{(reflexión resp. de } h_0), \\ (z, w) &\mapsto (\bar{z}, \bar{w}) && \text{(reflexión resp. de } h_1), \\ (z, w) &\mapsto (-\bar{z}, -\bar{w}) && \text{(reflexión resp. de } h_2). \end{aligned}$$

Si  $\lambda = 0$  ó  $\lambda = \frac{\pi}{2}$ , el grupo  $G_\lambda$  es finito luego  $\Sigma_\lambda$  produce una superficie compacta por reflexión respecto de su frontera (esta idea fue desarrollada por Lawson en [Law70] para la esfera redonda y después generalizada por

<sup>7</sup> De hecho se puede trabajar en un entorno simplemente conexo de  $\overline{\Omega}$  para que todo el razonamiento sea interior y no llegue al borde de la submersión, luego no hay pérdida de generalidad en trabajar bajo estas hipótesis.



Torralbo en [Tor10a] para el caso de las métricas de Berger). Si  $\lambda = 0$ , se deduce de la unicidad del problema de Plateau que obtenemos un trozo del helicoido esférico  $\Phi_{-1}$  (véase la sección 3.2). Si  $\lambda = 0$ , se puede probar fácilmente que la superficie compacta engendrada es orientable y tiene género cero<sup>8</sup>, luego no puede ser otra que la esfera minimal en  $S^3_{\mathbb{b}}(4H^2 + \epsilon, H)$ , única salvo isometrías del ambiente.

Los siguientes lemas analizan la función ángulo  $v_\lambda$  de la superficie  $\Sigma_\lambda$ , un análisis que será crucial en el estudio de la superficie hermana.

**Lema 3.14.** *Dado  $\lambda \in [0, \pi/2]$ ,*

- i)  $v_\lambda(p) = 0$  para cierto  $p \in \Gamma_\lambda$  si, y sólo si,  $p \in v([0, \frac{\pi}{2}])$ .*
- ii)  $v_\lambda$  no toma el valor  $-1$  en el interior de  $\Sigma_\lambda$ .*

*Demostración.* Si  $v_\lambda(p) = 0$  para algún  $p \in \Gamma_\lambda$  que no sea un punto de la geodésica vertical, entonces  $p$  tiene que estar en una curva horizontal  $h_i$  para algún  $i \in \{0, 1, 2\}$ . Además,  $p$  no puede ser uno de los extremos de dicha curva, ya que dichos extremos bien son puntos de  $v$ , bien la función ángulo toma el valor  $-1$ . Por tanto, en el punto  $p$  podemos colocar el toro de Clifford  $\pi^{-1}(\pi(h_i))$  que es tangente a  $\Sigma_\lambda$  en  $p$ , contradiciendo el principio del máximo en la frontera.

Probemos ahora (ii) por reducción al absurdo, suponiendo que existe un punto interior  $p \in \Sigma_\lambda$  tal que  $v_\lambda(p) = -1$  y consideremos el paraguas  $\Lambda$  centrado en  $p$  (véase la definición 1.24), que es tangente a  $\Sigma$  en  $p$ . Entonces, la intersección  $\Lambda \cap \Sigma_\lambda$  forma un sistema de curvas regulares que se intersectan transversamente en los puntos en que ambas superficies son tangentes (véase el teorema 1.39). Por tanto, al menos dos de estas curvas se encuentran en  $p$ , pero éstas no pueden encerrar una región compacta por el principio del máximo luego necesariamente terminan en  $\Gamma_\lambda = \partial\Sigma_\lambda$  (notemos que  $\Lambda$  es completa). Si probamos que  $\Lambda$  corta a  $\partial\Sigma_\lambda$  en dos puntos a lo sumo, tendremos la contradicción buscada. En efecto, es obvio que  $\Lambda$  no interseca dos veces la frontera vertical y, si  $\Lambda$  intersecara dos veces la frontera horizontal, como  $\Lambda$  está reglada por geodésicas horizontales partiendo de  $p$ , encontraríamos un polígono geodésico horizontal que se proyecta inyectivamente

<sup>8</sup> En efecto, basta usar el teorema de Gauss-Bonnet para ver que la curvatura total de  $\Sigma_\lambda$  es  $\frac{\pi}{2}$ ; ahora bien, hacen falta ocho piezas, simétricas de  $\Sigma_\lambda$ , para cerrar la superficie. Se obtiene así una superficie compacta y orientable de curvatura total  $4\pi$  y, por tanto, con la topología de una esfera.

por la fibración de Hopf. Esto contradice que la curvatura del fibrado es no nula.  $\square$

Nos centraremos ahora en la dependencia de  $\Sigma_\lambda$  respecto de  $\lambda$ . En primer lugar, observemos que  $h_0$  no depende de  $\lambda$  y que  $h_1$  y  $h_2$  están contenidos en geodésicas horizontales que difieren en una traslación vertical. Por tanto, trabajando en el recubridor universal  $W$  de  $\pi^{-1}(\bar{\Omega})$  y, dados  $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \frac{\pi}{2}$ , el principio del máximo aplicado a  $\Sigma_{\lambda_1}$  y  $\Sigma_{\lambda_2}$  nos asegura que no se intersecan salvo en su frontera común. En otras palabras, la familia  $\{\Sigma_\lambda : 0 \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}\}$  está verticalmente ordenada con respecto al parámetro  $\lambda$ .

Afirmamos que la familia  $\{\text{int}(\Sigma_\lambda) : 0 < \lambda < \frac{\pi}{2}\}$  define una foliación del abierto  $U \subset W$  acotado por la esfera  $\Sigma_{\pi/2}$ , el helicoide esférico  $\Sigma_0$  y un trozo del toro de Clifford  $\pi^{-1}(\pi(h_2))$ . Para probar esta afirmación, basta comprobar que  $U = \bigcup_{\lambda=0}^{\pi/2} \text{int}(\Sigma_\lambda)$  (ya que sabemos que esta unión es disjunta), así que probaremos que no existe ningún  $p_0 \in U$  que no esté contenido en algún  $\Sigma_\lambda$ . Si esta situación ocurriera, como la familia está ordenada verticalmente, podríamos definir  $\lambda_0$  tal que  $\Sigma_\lambda$  estuviera a un lado de  $p_0$  para  $\lambda > \lambda_0$  y al otro para  $\lambda < \lambda_0$ . No obstante, como las superficies involucradas son estables, podemos tomar límites con  $\lambda \nearrow \lambda_0$  y con  $\lambda \searrow \lambda_0$ . Las superficies límite son minimales y tienen por frontera a  $\Gamma_{\lambda_0}$  luego la unicidad del problema de Plateau nos dice que  $p_0 \in \Sigma_{\lambda_0}$ .

Dado un punto  $p$  en la parte horizontal de  $\Gamma_{\lambda_0}$ , existe un entorno<sup>9</sup> de  $\lambda_0$  tal que si  $\lambda$  está en ese entorno, entonces  $p$  está en la parte horizontal de  $\Gamma_\lambda$ , luego tiene sentido estudiar la función  $\lambda \mapsto v_\lambda(p)$  para  $\lambda$  en un intervalo apropiado.

**Lema 3.15.** *En la situación anterior,*

- i) si  $p \in h_0(]0, \frac{\pi}{2}[) \cup h_1(]0, \frac{\pi}{4}[)$ , la función  $\lambda \mapsto v_\lambda(p)$  es continua y estrictamente creciente;
- ii) si  $p \in h_2(]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[)$ , la función  $\lambda \mapsto v_\lambda(p)$  es continua y estrictamente decreciente.
- iii) Si  $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$ , entonces  $-1 < v_\lambda(p) < 0$  para cualquier  $p \in h_0(]0, \frac{\pi}{2}[) \cup h_1(]0, \frac{\pi}{4}[) \cup h_2(]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[)$ .

*Demostración.* Los apartados (i) y (ii) se deducen de que la familia  $\{\Sigma_\lambda : 0 \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}\}$  está verticalmente ordenada y folia el abierto  $U$ , tal y como hemos

<sup>9</sup> Dado  $p \in h_0(]0, \frac{\pi}{2}[) \cup h_1(]0, \frac{\pi}{4}[)$ , si  $p \in \Gamma_{\lambda_0}$  para cierto  $\lambda_0$ , entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $p \in \Gamma_\lambda$  para todo  $\lambda \in [0, \lambda_0 + \varepsilon[$ ; dado  $p \in h_2(]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[)$ , si  $p \in \Gamma_{\lambda_0}$  para cierto  $\lambda_0$ , entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $p \in \Gamma_\lambda$  para todo  $\lambda \in ]\lambda_0 - \varepsilon, \frac{\pi}{2}[$ .

demostrado anteriormente. El apartado (iii) se deduce de los anteriores y de que el comportamiento de la función ángulo en los casos extremos  $\Sigma_0$  y  $\Sigma_{\pi/2}$  es bien conocido. Para ser más preciso,

- si  $p \in h_2(\ ]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[ )$ , comparamos con  $\Sigma_{\pi/2}$ : dado que  $v_\lambda$  es estrictamente decreciente por el apartado (ii),  $v_\lambda(p) > v_{\pi/2}(p) > -1$ ;
- si  $p \in h_0(\ ]0, \frac{\pi}{2}[ ) \cup h_1(\ ]0, \frac{\pi}{4}[ )$ , comparamos con  $\Sigma_0$ : como  $v_\lambda$  es estrictamente creciente por el apartado (i),  $v_\lambda(p) > v_0(p) \geq -1$ .  $\square$

### 3.4.2 Propiedades de la superficie conjugada

En esta sección, consideraremos las superficies hermanas de  $\Sigma_\lambda$ , que tienen curvatura media constante  $H$  en  $S^2 \times \mathbb{R}$  (para  $H > 0$ ) y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  (para  $H > 1/2$ ). Como hemos dicho anteriormente, las denotaremos por  $\Sigma_\lambda^*$  por  $h_0^*$ ,  $h_1^*$ ,  $h_2^*$  y  $v^*$  a las correspondientes curvas de la frontera de  $\Sigma_\lambda^*$ .

**Observación 3.16.** La discusión hecha en la sección 3.1.2 nos dice que  $\Sigma_\lambda$  puede extenderse más allá de su frontera a una superficie simplemente conexa de forma que  $\bar{\Sigma}_\lambda$  esté en el interior de la nueva superficie. Entonces, la correspondencia de Daniel puede aplicarse a la superficie extendida y así obtenemos una isometría entre  $\bar{\Sigma}_\lambda$  y  $\bar{\Sigma}_\lambda^*$  por restricción de ésta. Esta propiedad asegura que las longitudes de las componentes de la frontera así como los ángulos que forman se preservan por la correspondencia.

Por otro lado, del lema 3.2 se sigue que las curvas  $h_j^*$ ,  $j \in \{0, 1, 2\}$ , están contenidas en planos verticales  $P_j$  que la superficie corta ortogonalmente. En consecuencia, el ángulo que forman  $P_i$  y  $P_j$  es el mismo que forman las curvas  $h_i^*$  y  $h_j^*$  que, a su vez, es el que forman  $h_i$  y  $h_j$ . En otras palabras,  $P_0$  es ortogonal a  $P_1$  y  $P_1$  es ortogonal a  $P_2$ .

La curva  $v^*$  está contenida en un plano horizontal que, a partir de ahora, supondremos que es  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \{0\}$  (basta aplicar una traslación vertical). De la observación anterior deducimos que la pieza  $\Sigma_\lambda^*$  puede extenderse por reflexión respecto de los planos verticales  $P_j$  y del plano horizontal  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \{0\}$  a una superficie completa de curvatura media  $H$  en  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ . Antes de proseguir con el caso general, entendamos qué ocurre para  $\lambda = 0$  y  $\lambda = \frac{\pi}{2}$ .

- Hemos visto que la superficie  $\Sigma_{\pi/2}$  es un trozo de esfera minimal en  $S^3_b(4H^2 + \epsilon, H)$ . Como las esferas son simplemente conexas, podemos aplicar la correspondencia de Daniel a toda la esfera, de donde  $\Sigma_{\pi/2}^*$  ha de ser parte de una esfera de rotación en  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ . Más aún,

como  $\Sigma_{\pi/2}$  es un octavo de la esfera minimal, puede verse fácilmente que su hermana es un octante de la esfera de curvatura media  $H$ .

- La superficie  $\Sigma_0$  cumple que  $\nu = 1$  sobre  $h_0$ . Por lo tanto,  $h_0^*$  tiene altura constante y está contenida en un plano horizontal luego debe ser una geodésica horizontal de  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ . Además,  $\Sigma_0$  puede ser foliada por geodésicas horizontales<sup>10</sup>, ortogonales a la curva  $\nu$ . Por lo tanto,  $\Sigma_0^*$  está foliada por curvas  $\gamma_t$  cumpliendo que
  - $\gamma_t$  conecta el punto  $h_0^*(t)$  a un punto de  $\nu^*$ ;
  - $\gamma_t$  está contenida en un plano vertical ortogonal a  $h_0^*$  y a  $\nu^*$ ; y
  - las curvas proyectadas  $\pi \circ \gamma_t$  satisfacen  $\|(\pi \circ \gamma_t)'\| = -\nu$ , luego todas ellas tienen la misma longitud.

Por tanto, la curva  $\nu^*$ , que está contenida en un plano horizontal, debe ser un paralelo respecto de la geodésica  $\pi \circ h_0^*$  en  $M^2(\epsilon)$ . En particular,  $\nu^*$  tiene curvatura geodésica constante en  $M^2(\epsilon)$ . De la parametrización de  $\Sigma_0$  dada en la sección 3.2 (véase también el lema 3.14), se deduce que dicha curvatura geodésica es igual a  $\kappa_g = \frac{\epsilon}{2H}$  y que la altura máxima de esta superficie es la mitad de la de la correspondiente esfera de revolución.

Podemos extender la superficie  $\Sigma_0^*$  y aplicar el teorema 2.16 para concluir que  $\Sigma_0^*$  es parte de un toro de rotación si  $\epsilon = 1$  o parte de un cilindro horizontal invariante por traslaciones hiperbólicas si  $\epsilon = -1$ .

**Observación 3.17.** En la demostración anterior hemos usado un hecho que merece la pena señalar. En general, si  $h$  es una geodésica horizontal en una superficie minimal que se corresponden con una curva  $h^*$  en una superficie de curvatura media constante  $H$  en  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ , podemos escribir en componentes  $h^* = (\beta, r)$ . Como  $h^*$  está contenida en un plano vertical que la superficie corta ortogonalmente, es fácil comprobar que  $|r'(t)|^2 = 1 - \nu(h^*(t))^2$  y  $\|\beta'(t)\| = -\nu(h^*(t))$ , donde  $\nu$  es la función ángulo de la superficie.

Antes de enunciar y probar el resultado general, recordemos que la altura máxima de un  $H$ -bigrafo compacto en  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  está dada por  $\alpha(\epsilon, H, 0)$

<sup>10</sup> Concretamente por las geodésicas  $t \mapsto (e^{i\theta} \cos t, e^{-i\theta} \sin t)$ ,  $\theta \in [0, \pi/2]$ .

(véase la observación 2.7). En la situación actual, denotaremos por comodidad  $\alpha(\epsilon, H) = \alpha(\epsilon, H, 0)$  y, por tanto,

$$\alpha(\epsilon, H) = \begin{cases} \frac{4H}{\sqrt{4H^2-1}} \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{1}{\sqrt{4H^2-1}} \right) & \text{si } \epsilon = -1, \\ \frac{4H}{\sqrt{4H^2+1}} \operatorname{arcth} \left( \frac{1}{\sqrt{4H^2+1}} \right) & \text{si } \epsilon = 1. \end{cases} \quad (54)$$

Notemos que las estimaciones sobre altura y curvatura geodésica de la frontera también son ciertas para el caso periódico pues la demostración puede hacerse de forma análoga a la del teorema 2.6, ya que el máximo de la función allí considerada siempre se alcanza debido a la periodicidad.

**Teorema 3.18.** *Dados  $\epsilon \in \{-1, 1\}$  y  $H > 0$  tales que  $4H^2 + \epsilon > 0$ , existe una familia uniparamétrica de bi-multigrafos completos de curvatura media constante  $H$  en  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ , invariantes por un grupo uniparamétrico de isometrías de  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  que preservan la función altura. Más precisamente,*

- i) si  $\epsilon = 1$ , es un grupo discreto de rotaciones y,
- ii) si  $\epsilon = -1$ , es un grupo discreto de traslaciones hiperbólicas.

Además, la altura máxima de los ejemplos de la familia varía continuamente en el intervalo  $[\frac{1}{2}\alpha(\epsilon, H), \alpha(\epsilon, H)]$ .

**Observación 3.19.** La familia, obtenida por completación de las piezas  $\Sigma_\lambda^*$ , está parametrizada por  $\lambda \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Es interesante definir  $\ell : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\ell(\lambda) = - \int_0^{\pi/2} v_\lambda(h_0(t)) dt,$$

es decir,  $\ell(\lambda)$  es la longitud de la curva  $\pi \circ h_0^*$ . Notemos que, para  $\epsilon = 1$ , el grupo uniparamétrico de isometrías está generado por una rotación de ángulo  $2\ell(\lambda)$ , mientras que para  $\epsilon = -1$ , está generado por una traslación hiperbólica de longitud  $2\ell(\lambda)$  (ver figura 11).

*Demostración.* El razonamiento previo nos asegura que podemos extender la pieza  $\Sigma_\lambda^*$  a una superficie completa en  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  de curvatura media  $H$  y es obvio que la superficie extendida es invariante por el grupo de isometrías dado en la observación 3.19, amén de otras reflexiones respecto de los planos que contienen a las curvas  $h_j^*$ .

Fijado  $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$ , será suficiente comprobar que la altura máxima se alcanza en  $h_0^*(\frac{\pi}{2})$ : observemos que la altura máxima ha de alcanzarse en

un punto en que  $v_\lambda = -1$  y los lemas 3.14 y 3.15 nos dicen que las únicas posibilidades son  $h_0^*(0)$  y  $h_0^*(\frac{\pi}{2})$ . Ahora bien, las alturas de  $h_0^*(0)$  y  $h_0^*(\frac{\pi}{2})$  están dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\mu_0(\lambda) &= \int_{\lambda/2}^{\pi/4} \sqrt{1 - v_\lambda(h_1^*(t))^2} dt, \\ \mu_{\pi/2}(\lambda) &= \int_{-\pi/4}^{\lambda/2} \sqrt{1 - v_\lambda(h_2^*(t))^2} dt,\end{aligned}$$

expresiones que se deducen de la observación 3.17. Estas cantidades varían de forma continua respecto de  $\lambda$  y, además, su diferencia es la diferencia de altura de los extremos de  $h_0$ , es decir,

$$|\mu_0(\lambda) - \mu_{\pi/2}(\lambda)| = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - v_\lambda(h_0^*(t))^2} dt > 0,$$

luego ambos puntos no están a la misma altura. En vista de la monotonía probada en el lema 3.15, si  $\lambda_1 < \lambda_2$ , entonces

$$\mu_0(\lambda_1) > \int_{\lambda_2/2}^{\pi/4} \sqrt{1 - v_{\lambda_1}(h_1^*(t))^2} > \int_{\lambda_1/2}^{\pi/4} \sqrt{1 - v_{\lambda_2}(h_1^*(t))^2} dt = \mu_0(\lambda_2).$$

Un argumento similar demuestra que  $\mu_{\pi/2}(\lambda_1) < \mu_{\pi/2}(\lambda_2)$ . Finalmente, en los casos extremos tenemos que  $\mu_0(\frac{\pi}{2}) = 0$  y  $\mu_0(0) = \frac{1}{2}\alpha(\epsilon, H)$ , luego  $\mu_0(\lambda)$  barre todo el intervalo  $[0, \frac{1}{2}\alpha(\epsilon, H)]$ . De la misma forma,  $\mu_{\pi/2}(\lambda)$  barre  $[\frac{1}{2}\alpha(\epsilon, H), \alpha(\epsilon, H)]$ , luego la altura máxima se alcanza en  $h_0^*(\frac{\pi}{2})$ .  $\square$

Estas propiedades nos permiten dar una representación bastante fidedigna del polígono  $\Gamma_\lambda^*$ , como puede verse en la figura 11 y analizar su dependencia de  $\lambda$ . Es importante observar que no hemos dado información alguna sobre la curva  $v^*$  salvo el hecho de que está contenida en un plano horizontal, luego la representación puede no ser exacta en lo que a ella se refiere.

Las superficies obtenidas en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  son superficies propiamente inmersas y, más aún, Alexandrov-embebidas. En el caso de  $S^2 \times \mathbb{R}$  pueden llegar a ser compactas y ese es el objeto del siguiente resultado. Concretamente, la superficie engendrada por la pieza  $\Sigma_\lambda^*$  será compacta cuando  $\ell(\lambda)$  sea un múltiplo racional de  $\pi$  (véase la observación 3.19).

**Corolario 3.20.** *Dado  $H > 0$ , consideremos  $\alpha(1, H)$  definido en (54). Entonces, la familia de  $H$ -bimultigrafos en  $S^2 \times \mathbb{R}$  da lugar a muchos ejemplos compactos cuyas alturas máximas son densas en  $[\frac{1}{2}\alpha(1, H), \alpha(1, H)]$ .*

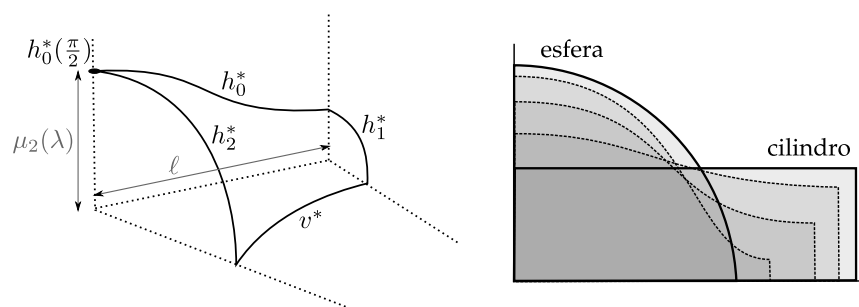


Figura 11: A la izquierda, una representación del polígono  $\Gamma_\lambda^*$ , donde las curvas punteadas representan geodésicas en  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ , y, a la derecha, un esquema de los perfiles de las proyecciones de  $\Sigma_\lambda^*$  sobre el plano vertical que contiene a  $h_0^*$  para distintos valores de  $\lambda$ .

*Demostración.* La función  $\ell : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  definida en la observación 3.19 es continua y estrictamente decreciente respecto de  $\lambda$ , según la monotonía probada en el lema 3.15. Como la superficie completada de  $\Sigma_\lambda^*$  es compacta si, y sólo si,  $\ell(\lambda)$  es un múltiplo racional de  $\pi$ , el corolario está probado.  $\square$

De hecho, un análisis más profundo de los argumentos de la demostración del corolario muestra que, para  $H \geq 1/2$ , es posible elegir el parámetro  $\lambda$  de forma que la superficie compacta resultante cierre a la primera vuelta. Más explícitamente, fijado  $H \geq \frac{1}{2}$ , existen valores de  $\lambda$  tales que  $\ell(\lambda) = \frac{\pi}{k}$  para algún entero  $k \geq 2$ .

**Observación 3.21.** En principio, no sabemos si las superficies construidas son o no embebidas, lo que equivale a probar que el polígono  $\Gamma_\lambda^*$  se proyecte de forma biyectiva por  $\pi$ , por una aplicación clásica del principio del máximo. Conjeturamos la pieza  $\Sigma_\lambda^*$  es embebida para todo valor de  $\lambda$  y que la superficie extendida es un bigrafo propiamente embebido en el caso de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . En el caso de  $S^2 \times \mathbb{R}$ , conjeturamos que, siempre que  $H \geq 1/2$ , podemos elegir  $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$  para obtener una superficie compacta y embebida.

### 3.5 SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA 1/2 EN $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ CON LAS SIMETRÍAS DE UNA TESELACIÓN REGULAR

Esta última sección está dedicada a aplicar un proceso similar al de la sección anterior para construir superficies de curvatura media constante 1/2 en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  que tengan las simetrías de una teselación de  $\mathbb{H}^2 \equiv \mathbb{H}^2 \times \{0\}$  por

polígonos regulares. Vamos a introducir cierta notación que nos permitirá estudiar más cómodamente el problema.

Dado  $m \in \mathbb{N}$ , entenderemos por *m-ágono regular* a cualquier región compacta de  $\mathbb{H}^2$  delimitada por una poligonal formada por  $m$  segmentos geodésicos de iguales longitudes formando ángulos iguales en cada vértice. Por extensión, llamaremos también *m-ágono* a su frontera que, obviamente, determina al polígono. A continuación, caracterizamos la existencia de unas teselaciones muy simétricas por *m-ágonos regulares*.

**Lema 3.22.** *Dados  $m, k \in \mathbb{N}$ , existe una teselación de  $\mathbb{H}^2$  por *m-ágonos regulares* de forma que en cada vértice coinciden  $k$  de ellos si, y sólo si,*

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}.$$

*Además, dicha teselación es única salvo isometrías de  $\mathbb{H}^2$  y diremos que es una  $(m, k)$ -teselación.*

El lema se demuestra fácilmente usando geometría hiperbólica. Para dar una idea del significado de la desigualdad del enunciado, supongamos que tenemos una  $(m, k)$ -teselación de  $\mathbb{M}^2(\epsilon)$  para  $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}$  y apliquemos el teorema de Gauss-Bonnet a uno de los *m-ágonos*, llamémoslo  $P$ , que tiene  $m$  vértices con ángulos interiores iguales a  $\frac{2\pi}{k}$  y cuyos lados son geodésicas. Como la curvatura del interior del polígono es constante  $\epsilon$ , tenemos que

$$\epsilon \cdot \text{Area}(P) = 2\pi \cdot \chi(P) - m \cdot \left(\pi - \frac{2\pi}{k}\right) = 2\pi m \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\right).$$

Aquí se ha usado que  $\chi(P)$ , la característica de Euler del polígono, es igual a 1. En el caso  $\epsilon = -1$ , llegamos a la desigualdad del lema; no obstante, si  $\epsilon = 0$  (el caso de  $\mathbb{R}^2$ ) ó  $\epsilon = 1$  (el caso de  $S^2$ ), tenemos otras condiciones que son las naturales para obtener teselaciones de  $\mathbb{R}^2$  y  $S^2$ , respectivamente.

Volviendo a nuestra construcción, observemos que cada polígono en una  $(m, k)$ -teselación puede ser descompuesto en  $2m$  triángulos cuyos ángulos son  $\frac{\pi}{k}$ ,  $\frac{\pi}{2}$  y  $\frac{\pi}{m}$ . Por lo tanto, construiremos una pieza de curvatura media 1/2 en el producto de uno de dichos triángulos y la recta real que corte ortogonalmente a los planos verticales que pasan por los lados del triángulo y al plano horizontal  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  (véase la figura 12). Bastará elegir un polígono geodésico apropiado en  $\text{Nil}_3$  y usar la construcción de Plateau conjugada.



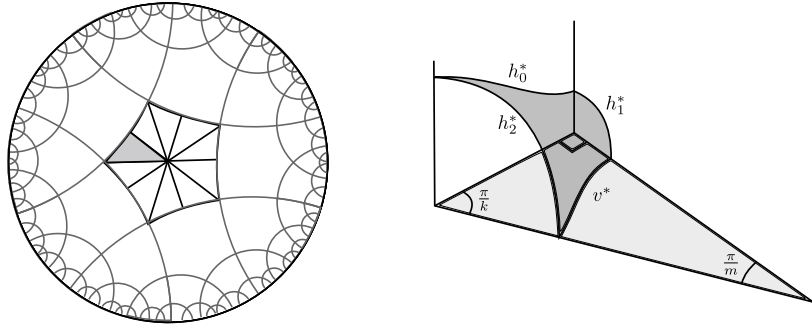


Figura 12: A la izquierda, una  $(m, k)$ -teselación de  $\mathbb{H}^2$  para  $m = 4$  y  $k = 5$ ; a la izquierda, la pieza fundamental de curvatura media  $1/2$  que encaja en el triángulo sombreado.

Concretamente, dados  $\ell > 0$  y  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , consideremos el polígono geodésico en  $\text{Nil}_3 = \mathbb{R}^3$  dado por

$$\begin{aligned} h_0(t) &= (\ell, t\ell \cot \alpha, \frac{1}{2}t\ell^2 \cot \alpha), & t \in [0, 1], \\ h_1(t) &= (t\ell, 0, 0), & t \in [0, 1], \\ h_2(t) &= (t\ell, t\ell \cot \alpha, \frac{1}{2}t\ell^2 \cot \alpha), & t \in [0, 1], \\ v(t) &= (0, 0, \frac{1}{2}t\ell^2 \cot \alpha), & t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Este polígono no es otra cosa que el levantamiento horizontal de un triángulo rectángulo euclídeo en  $\mathbb{R}^2$  cuyos ángulos son  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha$  y  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ , donde el segmento vertical  $v$  se ha colocado en el vértice con ángulo  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  y  $\ell$  es la longitud del cateto sobre el que se proyecta  $h_1$ , es decir, el opuesto al ángulo  $\alpha$ . La frontera del polígono está contenida en la frontera de un sólido mean-convexo, a saber, el delimitado por los tres planos verticales de  $\text{Nil}_3$  que contienen los lados del triángulo, que son minimales.

Siguiendo las ideas desarrolladas en la sección 3.3, como el contorno definido anteriormente es un contorno de Nitsche junto con el dominio dado por el triángulo, el problema de Plateau tiene una única solución que es un cuadrilátero minimal con borde este contorno y cuyo interior es un grafo sobre el mencionado triángulo rectángulo de  $\mathbb{R}^2$ . El ángulo formado por  $h_0$  y  $h_2$  es igual a  $\alpha$  mientras que los tres ángulos restantes del cuadrilátero son rectos. Si aplicamos la correspondencia de Daniel, este cuadrilátero da lugar a una superficie de curvatura media  $1/2$  en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  para la que las correspondientes curvas  $h_j^*$ , con  $j \in \{0, 1, 2\}$ , caen en planos verticales  $V_j$  de tal suerte que  $V_0$  y  $V_2$  se cortan en un ángulo  $\alpha$  y  $V_0$  y  $V_1$  son ortogonales.

No obstante, nos gustaría que los planos  $V_0, V_1$  y  $V_2$  se ajustaran al triángulo que proviene de la  $(m, k)$ -teselación de  $\mathbb{H}^2$  (el triángulo sombreado en la figura 12) para lo que elegimos  $\alpha = \frac{\pi}{k}$ . El último paso consistirá en probar que la longitud de la curva proyectada  $\pi \circ h_0^*$  en  $\mathbb{H}^2$  es arbitrariamente grande cuando variamos el parámetro  $\ell > 0$ . Notemos que dicha longitud no es más que la integral de la función ángulo de  $\Sigma^*$  a lo largo de  $h_0^*$  y la función ángulo se conserva por la correspondencia. La demostración es un claro ejemplo del uso de superficies barrera para estudiar propiedades que de otra forma no se saben controlar.

**Lema 3.23.** *En la construcción anterior, la longitud del segmento  $\pi \circ h_0^*$  en  $\mathbb{H}^2$  diverge cuando  $\ell \rightarrow \infty$  (para  $\alpha \in ]0, \pi/2[$  fijo).*

*Demostración.* Consideremos los planos  $H_1, H_2 \subset \text{Nil}_3$  de ecuaciones  $\ell y - 2z = 0, \ell x \cot \alpha - \ell y + 2z = \ell^2 \cot \alpha$ , respectivamente, en las coordenadas usuales  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , que son minimales<sup>11</sup>. El segmento  $h_0$  está contenido en  $H_1 \cap H_2 \cap \Sigma$  y el punto  $h_1(0)$  en la intersección  $H_1 \cap \Sigma$  mientras que  $h_2(0) \in H_2 \cap \Sigma$ . Por lo tanto, el principio del máximo nos asegura que  $\Sigma$  está contenida en un ángulo sólido delimitado por  $H_1$  y  $H_2$ . En consecuencia, podemos comparar las funciones ángulo de  $\Sigma, H_1$  y  $H_2$  a lo largo del segmento común  $h_0$ . Como  $H_1$  y  $H_2$  tienen funciones ángulo negativas  $v_1$  y  $v_2$ , respectivamente, concluimos que  $v \leq \max\{v_1, v_2\} < 0$  en el interior del segmento  $h_0$ . Además, la integral de la función ángulo de estos planos a lo largo de  $h_0$  puede ser calculada explícitamente y se demuestra que diverge cuando  $\ell \rightarrow \infty$ , lo que fuerza que la integral de  $v$  a lo largo de  $h_0$  también diverge como queríamos probar.  $\square$

Como la longitud de  $\pi \circ h_0^*$  en  $\mathbb{H}^2$  es una función continua de  $\ell$ , deducimos que puede tomar cualquier valor positivo. Esto nos asegura que, ajustando dicho parámetro  $\ell$ , podemos conseguir que el polígono se ciña al triángulo de la teselación. Hemos probado así el siguiente resultado.

**Teorema 3.24.** *Dados  $m, k \in \mathbb{N}$  en las condiciones del lema 3.22 y una  $(m, k)$ -teselación de  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ , existe un bi-multigrafo de curvatura media 1/2 en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  de altura acotada e invariante por cualquier isometría de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  que conserve la teselación.*

<sup>11</sup> El plano  $H_1$  no es más que el paraguas horizontal centrado en el punto  $(\ell, 0, 0)$  mientras que  $H_2$  es el paraguas horizontal centrado en el punto  $(\ell, \ell \cot \alpha, \frac{1}{2} \ell^2 \cot \alpha)$  y, por tanto, son superficies minimales.

**Observación 3.25.** Como en el caso del teorema 3.18, no sabemos si las superficies construidas son embebidas pero conjeturamos que son  $1/2$ -bigrafos propiamente embebidos.

Para terminar, aplicaremos este resultado para dar ejemplos de superficies de curvatura media  $1/2$  en algunos cocientes del plano hiperbólico. Consideremos un  $2m$ -ágono regular (con  $m \geq 2$ ) en el plano hiperbólico y supongamos que, al hacer ciertas identificaciones sobre sus lados obtenemos una superficie compacta de forma que existe un entero positivo  $k \geq 3$  de forma que los vértices del polígono original están identificados en subconjuntos de  $k$  elementos. A una identificación de este tipo la llamaremos *identificación regular*. Una tal identificación puede hacerse en una  $(2m, k)$ -teselación del plano hiperbólico (en el sentido del lema 3.22, observemos que  $\frac{1}{2m} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}$ ).

Esto demuestra que, sobre el cociente por una identificación regular, podemos inducir una métrica de curvatura constante  $-1$ , cuyo recubridor universal riemanniano es, obviamente, el plano hiperbólico (véase [Thu97, Section 1.3] para una descripción más detallada de esta construcción). La fórmula de Gauss-Bonnet implica que las superficies resultantes tienen característica de Euler negativa. Ilustremos esta situación con algunos ejemplos que muestran que así barreos todas las topologías con esta propiedad<sup>12</sup>:

- Dado  $g \geq 2$ , definamos un patrón de pegado sobre un  $4g$ -ágono como

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}.$$

Todos los vértices se identifican entre sí lo que lleva a una  $(4g, 4g)$ -teselación. La superficie obtenida es orientable y tiene género  $g$ , que tiene característica de Euler  $\chi = 2 - 2g$ .

- Para  $g \geq 3$ , consideremos ahora el patrón sobre un  $2g$ -ágono dado por

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_g a_g.$$

Otra vez están todos los vértices identificados entre sí, luego el patrón da lugar a una  $(2g, 2g)$ -teselación. El cociente es una superficie no orientable de género  $g$ , que tiene característica de Euler  $\chi = 2 - g$ .

**Observación 3.26.** Las condiciones sobre  $g$  no son más que las restricciones geométricas para que una superficie de género  $g$  tenga característica de Euler negativa. Otras identificaciones no tan regulares como las propuestas

<sup>12</sup> Las topologías de superficies compactas que no se realizan de esta forma son las de característica de Euler  $\chi$  no-negativa, a saber: la esfera ( $\chi = 2$ ), el plano proyectivo ( $\chi = 1$ ), el toro ( $\chi = 0$ ) y la botella de Klein ( $\chi = 0$ ).

dan lugar a las mismas superficies topológicas pero no son isométricas a éstas.

Supongamos ahora que tenemos una  $(2m, k)$ -teselación y una identificación regular sobre ella. Aplicando el teorema de Gauss-Bonnet a un polígono regular de  $2m$  lados  $P_{(2m,k)}$  en  $\mathbb{H}^2$  con ángulos interiores iguales a  $\frac{2\pi}{k}$ , obtenemos que

$$\int_{P_{(2m,k)}} K_{\mathbb{H}^2} = 2\pi \left( 1 + \frac{2m}{k} - m \right).$$

Deducimos que si una superficie compacta  $M$  se obtiene de  $P_{(2m,k)}$  mediante una identificación de algunos de sus lados, entonces tiene característica de Euler  $\chi(M) = 1 + \frac{2m}{k} - m$ .

Consideremos ahora la superficie  $\Sigma_{(2m,k)}^*$  dada en estas condiciones por el teorema 3.24. Como toda simetría de la teselación es también una simetría de la superficie, su frontera puede ser identificada de la misma forma que la frontera de  $P_{(2m,k)}$  cuando se construye  $M$  y esto da lugar a una superficie de curvatura media 1/2 en el espacio cociente  $M \times \mathbb{R}$ . Ahora bien, vamos a calcular la característica de Euler de la superficie cociente  $\hat{\Sigma}_{(2m,k)}^*$  en  $M \times \mathbb{R}$ . Como quiera que ésta consiste en  $8m$  piezas, cada una de las cuales proviene de la pieza  $\Sigma$  construida en  $\text{Nil}_3$ , que satisface  $\int_{\Sigma} K_{\Sigma} = \pi/k - \pi/2$  (notemos que  $\Sigma$  es un cuadrilátero de ángulos  $\pi/2, \pi/2, \pi/2$  y  $\pi/k$ ), obtenemos que

$$\int_{\hat{\Sigma}_{(2m,k)}^*} K_{\hat{\Sigma}_{(2m,k)}^*} = 4\pi \left( \frac{2m}{k} - m \right),$$

de donde  $\chi(\hat{\Sigma}_{(2m,k)}^*) = 2 \left( \frac{2m}{k} - m \right)$ .

Finalmente, observemos que el patrón de identificación en  $M$  induce otro patrón en  $\Sigma_{(2m,k)}^*$ , que puede ser interpretado como otro polígono cuyos lados se han identificado a pares y es fácil darse cuenta de que  $\hat{\Sigma}_{(2m,k)}^*$  es orientable si, y sólo si,  $M$  es orientable. Para superficies orientables, el género y la característica de Euler satisfacen la relación  $\chi = 2(1 - g)$ , como se ha apuntado anteriormente, mientras que en el caso no orientable la relación es  $\chi = 2 - g$ . Con esta información, la demostración del siguiente resultado es un cálculo directo.

**Corolario 3.27.** *Sea  $M$  una superficie riemanniana compacta con característica de Euler negativa y curvatura constante  $-1$ , que puede ser realizada mediante una identificación regular. Entonces, la construcción anterior induce un bi-multigrafo  $\hat{\Sigma}^*$  compacto de curvatura media 1/2 en  $M \times \mathbb{R}$  cumpliendo que*

- i)  $\hat{\Sigma}^*$  es orientable si, y sólo si,  $M$  es orientable y,*
- ii) si  $M$  tiene género  $g$ , entonces  $\hat{\Sigma}^*$  tiene género  $2g$ .*

Como se ha puesto de manifiesto en los capítulos precedentes, en la teoría de superficies de curvatura media constante en espacios homogéneos, aquéllos que son multigrafos constituyen una clase importante de ejemplos. Recordemos que un multigrafo es una superficie transversa al campo de Killing vertical, esto es, su función ángulo tiene signo. En particular, todo multigrafo es estable según un resultado de Fischer-Colbrie (véase el Lema 5.2). No obstante, surge de forma frecuente la necesidad de saber si un multigrafo es embebido o, más aún, si es un grafo. El objetivo de este capítulo es estudiar esta cuestión bajo la hipótesis adicional de que el multigrafo sea completo. Concretamente, probaremos el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.** *Sea  $\Sigma$  un multigrafo vertical completo de curvatura media constante  $H$  en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Entonces, estamos en alguna de las siguientes dos situaciones:*

- a)  $\mathbb{E}(\kappa, \tau) = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  y  $\Sigma$  es una sección horizontal, o bien
- b)  $4H^2 + \kappa \leq 0$  y  $\Sigma$  es un grafo vertical.

Además, si  $4H^2 + \kappa = 0$ , entonces  $\Sigma$  es un grafo vertical entero.

Hauswirth, Rosenberg y Spruck demostraron un teorema de tipo semiespacio<sup>1</sup> para superficies propiamente embebidas de curvatura media  $\frac{1}{2}$  en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  y obtuvieron como consecuencia que un multigrafo completo de curvatura media  $\frac{1}{2}$  en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  debe ser un grafo entero (véase [HRS10, Theorem 1.2]). Más tarde y mediante otro teorema de tipo semiespacio para superficies minimales propiamente inmersas en  $\text{Nil}_3$ , Daniel y Hauswirth [DH09, Theorem 3.1] demostraron el correspondiente resultado en este espacio. Finalmente, usando este teorema de Daniel y Hauswirth, el teorema de clasificación de Fernández y Mira en [FM09] y la correspondencia de Daniel [Dan07], se pueden extender estos resultados al caso de multigrafos completos en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  con curvatura media  $H$  cumpliendo  $4H^2 + \kappa = 0$ , obteniendo el resultado del enunciado del teorema 4.1 para este caso (véase [DHM09, Corollary 4.6.3] para una referencia completa).

<sup>1</sup> Un teorema de tipo semiespacio es un resultado de clasificación de superficies que estén contenidas en una de las componentes del complementario de un cilindro vertical.

4.1 EL CASO  $4H^2 + \kappa \geq 0$ 

Sea  $\Sigma$  un multigrafo de curvatura media constante  $H$  en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  y supongamos que  $4H^2 + \kappa \geq 0$ . Como acabamos de comentar, el caso  $4H^2 + \kappa = 0$  está resuelto por otros métodos y, por tanto, supondremos a partir de ahora que  $4H^2 + \kappa > 0$ .

El siguiente lema caracteriza la estabilidad de los cilindros verticales y, como no supone un esfuerzo adicional, lo enunciaremos y demostraremos para submersiones de Killing arbitrarias (véase la sección 1.5.1). En el capítulo 5 pueden consultarse algunas nociones básicas de estabilidad para superficies inmersas en cualquier 3-variedad. Aquí simplemente usaremos la expresión del operador de estabilidad dada en el corolario 1.33.

**Lema 4.2.** *Sea  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  una submersión de Killing y  $\alpha$  una curva en  $M$  con curvatura geodésica constante  $\kappa_g$ . El cilindro  $C_\alpha = \pi^{-1}(\alpha)$  es estable si, y sólo si,  $K_M + \kappa_g^2 \leq 0$  a lo largo de  $\alpha$ , siendo  $K_M$  la curvatura de Gauss de  $M$ .*

*Demostración.* En vista del corolario 1.33 y del lema 1.34, el operador de estabilidad de  $C_\gamma$  es  $L = \Delta + q$  con  $q = \kappa_g^2 + K_M$ .

Si  $q \leq 0$ , entonces podemos comparar  $L$  con el operador laplaciano y se cumple que, para el problema de Dirichlet con valores cero en la frontera,  $L$  tiene primer valor propio  $\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1^\Delta(\Omega)$  para cualquier dominio relativamente compacto  $\Omega \subset C_\alpha$ , siendo  $\lambda_1^\Delta(\Omega)$  el correspondiente valor propio para el problema de Dirichlet respecto del laplaciano. Como la métrica inducida en  $C_\alpha$  es llana (véase el lema 1.34), tenemos que  $\inf_\Omega \lambda_1(\Omega) \geq \inf_\Omega \lambda_1^\Delta(\Omega) = 0$ , de donde  $C_\alpha$  es estable.

Recíprocamente, supongamos que  $q > 0$  en algún punto de  $\alpha$ . Entonces, existe un abierto  $G \subset C_\alpha$  donde  $L = \Delta + q$ , con  $q > a$  para cierta constante  $a > 0$ . Comparando ahora con el operador  $\Delta + a$  tenemos que  $\lambda_1(\Omega) \leq \lambda_1^\Delta(\Omega) - a < 0$  para cualquier dominio relativamente compacto  $\Omega \subset G$ , luego  $G$  no es estable y, en consecuencia, tampoco lo es  $C_\alpha$ .  $\square$

**Observación 4.3.** El corolario anterior nos dice que todos los cilindros de curvatura media constante en  $\mathbb{E}$  son inestables cuando  $K_M > 0$  y, si  $K_M = 0$ , los únicos cilindros de curvatura media constante que son estables son los construidos sobre geodésicas, que son minimales.

**Proposición 4.4.** *Si  $4H^2 + \kappa > 0$ , entonces no existen multigrafos de curvatura media constante  $H$  en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  salvo los planos horizontales en  $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ , que son grafos enteros.*

*Demostración.* Supongamos que  $\Sigma$  es un multigrafo en tales condiciones y denotemos por  $N$  a un normal unitario a  $\Sigma$  para el que la función ángulo  $v$  es negativa. Si existe una constante  $c < 0$  tal que  $v \leq c$ , entonces la proyección vertical  $\pi$  se restringe a  $\Sigma$  como una proyección recubridora sobre la superficie simplemente conexa  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ , lo que demuestra que  $\Sigma$  es un grafo vertical entero, es decir, es una sección global del fibrado. En particular,  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  no es una esfera de Berger (la fibración de Hopf no admite secciones globales, aunque también puede deducirse de [MPRo8, Corollary 9.6]) y podemos considerar una esfera  $S_H \looparrowright \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  de curvatura media constante  $H$  (que existe por la condición  $4H^2 + \kappa > 0$ , véase la observación 4.5 más abajo). Además, las fibras verticales tienen longitud infinita, luego podemos trasladar verticalmente (hacia arriba o hacia abajo) la superficie  $S_H$  hasta que no corte a  $\Sigma$ . Si comenzamos a moverla verticalmente hasta que toque en un primer instante a  $\Sigma$ , entonces o bien al trasladarla desde abajo o bien al hacerlo desde arriba, podemos suponer que en el punto de contacto los vectores normales a ambas superficies coinciden. El principio del máximo para superficies de curvatura media constante nos dice que  $\Sigma$  es una trasladada vertical de  $S_H$ , lo cual sólo es posible para  $H = 0$  en  $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ , donde las esferas minimales son las secciones horizontales (que cumplen  $v \equiv -1$ ).

Supongamos entonces que existe una sucesión de puntos  $\{p_n\}_n$  en  $\Sigma$  tal que  $\lim\{v(p_n)\} = 0$ . En este caso, llegaremos a una contradicción y el enunciado estará probado. En efecto, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos una isometría  $\phi_n$  de  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  que lleve el punto  $p_n$  a un punto prefijado  $p_0$  y la superficie  $\Sigma_n = \phi_n(\Sigma)$ . Entonces, la sucesión  $\{\Sigma_n\}$  de superficies completas, estables y de la misma curvatura media constante tiene a  $p_0$  como punto de acumulación. Además, las superficies  $\Sigma_n$  tienen segundas formas fundamentales uniformemente acotadas (lo que se deduce de las estimaciones de curvatura para superficies estables de curvatura media constante, véase Schoen [Sch83]). Los argumentos estándar de convergencia de superficies aseguran que, después de pasar a una parcial que denotaremos igualmente por  $\{\Sigma_n\}_n$ , existen entornos  $U_n$  de  $p_0$  en  $\Sigma_n$  convergiendo uniformemente en la topología  $C^m$  sobre compactos, para todo  $m \in \mathbb{N}$ , a una superficie  $\Sigma_\infty$ , no necesariamente completa, de curvatura media constante  $H$  que contiene a  $p_0$ . Además, como la convergencia es suficientemente regular, la función ángulo  $v_\infty$  de  $\Sigma_\infty$  cumple que  $v_\infty \geq 0$  y  $v_\infty(p_0) = 0$ . Aplicando el principio del máximo para funciones de Jacobi (véase, por ejemplo, [MPRo8, Assertion 2.2]) a  $v_\infty$  concluimos que  $v_\infty$  es idénticamente cero en  $\Sigma_\infty$ , lue-



go  $\Sigma_\infty$  está contenida en un cilindro vertical  $C_\alpha$  para cierta curva completa  $\alpha \subset \mathbb{M}^2(\kappa)$  con curvatura geodésica constante  $2H$ .

Como las superficies  $\Sigma_n$  son completas y sin frontera y tienen segundas formas fundamentales uniformemente acotadas, un argumento de prolongación analítica asegura que la superficie límite maximal que contiene a  $\Sigma_\infty$  es el cilindro completo  $C_\alpha$ . En particular,  $C_\alpha$  ha de ser estable lo cual contradice el lema 4.2 y hemos terminado la demostración.  $\square$

**Observación 4.5.** En la demostración anterior, hemos usado la existencia de esferas inmersas de curvatura media constante  $S_H \looparrowright \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  para valores de  $H$  cumpliendo  $4H^2 + \kappa > 0$ . En los espacios producto  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ , dichas esferas son superficies de revolución (véase Hsiang y Hsiang [HH89], Pedrosa y Ritoré [PR99], y Abresch y Rosenberg [AR04]). Ahora bien, a partir de éstas, la correspondencia de Daniel nos da la existencia en todos los espacios  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  para  $4H^2 + \kappa > 0$  (véase [DHM09, Theorem 2.5.3] para un argumento completo). No obstante, éstas son embebidas en todos los espacios salvo en las esferas de Berger para ciertos valores de la curvatura media (véase Torralbo [Tor10b]). El argumento del principio del máximo en la demostración anterior hubiera fallado en este caso debido a que, en general, pueden no existir esferas que no intersequen al grafo global.

#### 4.2 EL CASO $4H^2 + \kappa < 0$

En lo que sigue, supondremos que  $\Sigma$  es un multigrafo completo de curvatura media constante  $H$  en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  con  $4H^2 + \kappa < 0$ . Nuestro objetivo será probar que  $\Sigma$  es, de hecho, un grafo. Comenzaremos analizando abiertos del multigrafo donde la restricción de  $\pi : \mathbb{E}(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$  es biyectiva.

Observemos que la condición  $4H^2 + \kappa < 0$  implica que  $\kappa < 0$ , luego  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  es una fibración sobre  $\mathbb{H}^2(\kappa)$ . Sin perder generalidad (podemos aplicar una conveniente homotecia), supondremos en lo sucesivo que  $\kappa = -1$ , lo que simplificará un poco la notación. Concretamente, en vista de la sección 1.2.2, consideraremos el modelo sobre  $\mathbb{D}(2) \times \mathbb{R}$  con la métrica

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (dz + \tau\lambda(y dx - x dy))^2,$$

siendo el factor conforme  $\lambda : \mathbb{D}(2) \rightarrow \mathbb{R}$  igual a

$$\lambda(x, y) = \left(1 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)\right)^{-1}.$$

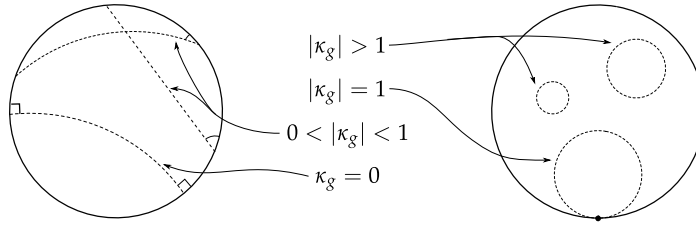


Figura 13: Curvas de curvatura geodésica constante  $\kappa_g$  en  $\mathbb{H}^2$  en el modelo del disco de Poincaré. Todas son rectas o arcos de circunferencia euclídeos: para  $|\kappa_g| > 1$ , son compactas e interiores al disco; para  $|\kappa_g| = 1$ , son interiores y tangentes al borde del disco; para  $|\kappa_g| < 1$  son transversas a dicho borde.

Asimismo, todos los grafos estarán definidos a partir de la sección global  $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$ , esto es, dada una función  $u : \Omega \subset \mathbb{D}(2) \rightarrow \mathbb{R}$ , será útil considerar  $F_u : \Omega \rightarrow \mathbb{D}(2) \times \mathbb{R}$  dada por  $F_u(x, y) = (x, y, u(x, y))$ .

Dado  $x_0 \in \mathbb{H}^2$  y  $R > 0$ , denotaremos por  $B(x_0, R)$  a la bola métrica de centro  $x_0$  y radio  $R$  en  $\mathbb{H}^2$ . Si  $p_0 \in \Sigma$ , entonces denotaremos por  $B_\Sigma(p_0, R)$  a la bola métrica intrínseca en  $\Sigma$  de centro  $p_0$  y radio  $R$ .

Para ver las diferencias con el caso  $4H^2 - 1 > 0$ , en la figura 13 tenemos un esquema de cómo son las curvas de curvatura geodésica constante  $\kappa_g$  para distintos valores de ésta, lo que nos dice cómo son los cilindros verticales sobre las mismas, que tienen curvatura media constante  $H = \frac{1}{2}\kappa_g$ . Observemos que, para  $4H^2 - 1 \leq 0$ , la curva en  $\mathbb{H}^2$  que genera el cilindro tiene longitud infinita.

#### 4.2.1 Comportamiento asintótico

Dado nuestro multigrafo completo  $\Sigma$ , supongamos que  $x_0 \in \mathbb{H}^2$  y  $R > 0$  son tales que existe una aplicación  $u \in C^\infty(B(x_0, R))$  tal que  $F_u(B(x_0, R)) \subset \Sigma$ , esto es,  $\Sigma$  es el grafo de  $u$  en esta bola geodésica. Los siguientes lemas son una generalización de las ideas desarrolladas por Hauswirth, Rosenberg y Spruck en [HRS10] (allí se trata el caso  $H = \frac{1}{2}$  mientras que nosotros lo enunciamos para  $0 \leq H \leq \frac{1}{2}$ ), por lo que no daremos todos los detalles de la demostración.

En lo que sigue supondremos que la función ángulo  $\nu = \langle N, \xi \rangle$  es negativa por coherencia con las secciones anteriores.

**Lema 4.6.** *En las condiciones anteriores, supongamos que  $\hat{x} \in \partial B(x_0, R)$  es tal que  $u$  no puede extenderse a ningún entorno de  $\hat{x}$  como grafo de CMC. Dada una sucesión  $\{x_n\} \subset B(x_0, R)$  convergiendo a  $\hat{x}$ , denotemos  $p_n = F_u(x_n)$ .*

- i)  $\lim\{v(p_n)\} = 0$ .
- ii)  $\lim\{u(x_n)\} = +\infty$  ó bien  $\lim\{u(x_n)\} = -\infty$ .
- iii) *Si consideramos la superficie  $\Sigma_n$  que surge al trasladar  $\Sigma$  verticalmente para que  $p_n$  tenga altura cero, la sucesión  $\{\Sigma_n\}$  converge localmente a un trozo de cilindro vertical sobre una curva de curvatura geodésica constante  $2H$  ó  $-2H$  en  $\mathbb{H}^2$ , tangente a  $\partial B(x_0, R)$  en  $\hat{x}$ .*

*Esquema de la demostración.* La estabilidad y la completitud de  $\Sigma$  nos aseguran que existe un radio uniforme  $\delta > 0$  tal que, para cada  $p \in \Sigma$ , la superficie se expresa localmente como grafo sobre el disco  $B(0, \delta) \subset T_p \Sigma$  en coordenadas exponenciales. Esto implica que, para cualquier sucesión  $\{x_n\}$  convergiendo a  $\hat{x}$ , se cumple que  $\lim\{v(F_u(x_n))\} = 0$  pues, en caso contrario, existiría una parcial, que seguimos denotando igual, tal que  $\lim\{v(F_u(x_n))\} = \alpha < 0$ . Esto conllevaría que se pueda extender el grafo a un entorno de  $\hat{x}$ , en contra de la hipótesis.

Ahora bien, la estabilidad nos proporciona estimaciones de la geometría del grafo que nos permiten desarrollar un argumento similar al de la demostración de la proposición 4.4. Concretamente, considerando la sucesión de superficies trasladadas  $\{\Sigma_n\}$ , una parcial converge en un entorno del punto de acumulación  $\hat{p} = F_u(\hat{x})$  a una superficie  $\Sigma_\infty$  en la topología  $C^m$  para cualquier  $m \geq 0$ . En particular, la superficie límite tiene curvatura media  $H$ , es estable y su función ángulo  $v_\infty$  satisface  $v_\infty \geq 0$ . Por el principio del máximo para funciones de Jacobi (véase [MPRo8, Assertion 2.2]), tenemos que  $v_\infty = 0$  idénticamente o bien  $v_\infty$  nunca se anula. Como  $\lim\{v(p_n)\} = 0$ , deducimos que  $v_\infty(\hat{p}) = 0$  y, en consecuencia,  $v_\infty = 0$ , luego  $\Sigma_\infty$  es un trozo de cilindro vertical. La superficie maximal de convergencia es un cilindro completo y, para cualquier parcial de  $\{p_n\}$ , el plano tangente de la superficie trasladada converge al plano vertical que es tangente al cilindro mencionado en el enunciado. En efecto, por un lado tenemos que  $\lim\{v(p_n)\} = 0$  luego, para cualquier parcial en que los planos tangentes convergen, éstos lo hacen a uno vertical. Por estimaciones del gradiente de  $u$  sobre compactos de  $B(x_0, R)$ , la única posibilidad es el plano tangente al cilindro sobre el borde de la bola. Así, todas las superficies  $\Sigma_n$  convergen al mismo cilindro vertical y queda probado (iii).

Finalmente, para demostrar (ii), razonemos por contradicción. Si  $\{u(x_n)\}$  tiene sendas parciales convergiendo a  $+\infty$  y  $-\infty$ , entonces el grafo haría

oscilaciones arbitrariamente grandes y podríamos encontrar una sucesión de puntos convergiendo a  $\hat{x}$  donde la función ángulo no converge a cero. Si, por el contrario,  $\{u(x_n)\}$  tiene una parcial convergiendo a cierto valor finito, entonces  $\{p_n\}$  tiene una parcial convergente a cierto punto  $p_\infty$  tal que  $\pi(p_\infty) = \hat{x}$  y podríamos encontrar una curva de longitud finita en  $\Sigma$  convergiendo a  $p_\infty$ , en cuyo caso  $p_\infty \in \Sigma$  ya que  $\Sigma$  es completa. En particular, la función ángulo se anularía en  $p_\infty \in \Sigma$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

Para dar el siguiente resultado, vamos a introducir algo de notación. Dada una curva  $\Gamma \subset \mathbb{H}^2$  de curvatura geodésica constante  $2H$  ó  $-2H$ , observemos que la condición  $4H^2 - 1 < 0$  nos dice que  $\Gamma$  es completa, embebida y no compacta. Dado  $\delta > 0$ , denotaremos por  $N_\delta(\Gamma)$  al entorno métrico abierto de  $\Gamma$  en  $\mathbb{H}^2$  de radio  $\delta$  que es una franja de  $\mathbb{H}^2$  delimitada por dos curvas de curvatura geodésica constante (dos curvas que equidistan de  $\Gamma$ ). Asimismo, dado  $x \in \mathbb{H}^2 \setminus \Gamma$ , denotaremos  $N_\delta(\Gamma, x) = N_\delta(\Gamma) \cap U$ , siendo  $U$  la componente conexa de  $\mathbb{H}^2 \setminus \Gamma$  que contiene a  $x$ . Por coherencia, denotaremos por  $N_\infty(\Gamma, x)$  al propio dominio  $U$ . De la demostración de [HRS10, Theorem 1.2], también deducimos el siguiente resultado.

**Lema 4.7.** *En las condiciones del lema 4.6, supongamos  $\hat{x} \in \partial B(x_0, R)$  es tal que  $u$  no puede extenderse a ningún entorno de  $\hat{x}$  como grafo de CMC. Entonces, existe una curva completa  $\Gamma \subset \mathbb{H}^2$  de curvatura geodésica  $2H$  ó  $-2H$ , tangente a  $\partial B(x_0, R)$  en  $\hat{x}$ , y existe  $\delta > 0$  tales que  $u$  se extiende a un grafo de CMC en  $B(x_0, R) \cup N_\delta(\Gamma, x_0)$  con valores frontera  $+\infty$  ó  $-\infty$  a lo largo de  $\Gamma$ .*

**Observación 4.8.** A lo largo de esta sección (y también de la siguiente) tenemos la dicotomía entre la curvatura geodésica  $+2H$  ó  $-2H$ , así como entre los valores frontera  $+\infty$  ó  $-\infty$ . Aunque los razonamientos no van a depender de los signos que se tomen, merece la pena hacer hincapié en que hay una relación entre ellos.

Concretamente, en la demostración del lema 4.6 hemos probado que el grafo converge uniformemente sobre compactos al cilindro vertical y estamos tomando el vector normal que apunta hacia abajo sobre el grafo. Mediante un análisis de los normales a  $\Gamma$  y al cilindro  $\pi^{-1}(\Gamma)$ , es fácil ver que si  $u$  tiende a  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) a lo largo de  $\Gamma$ , la curvatura geodésica de  $\Gamma$  será  $2H$  (resp.  $-2H$ ) respecto al *conormal exterior* al dominio del grafo a lo largo de  $\Gamma$ .

Este hecho ha sido probado para superficies minimales en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  por Nelli y Rosenberg [NR02], para superficies con  $0 < H \leq 1/2$  en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  por Hauswirth, Rosenberg y Spruck [HRS09] y para superficies minimales en  $\tilde{\text{Sl}}_2(\mathbb{R})$  por Younes [You10].

## 4.2.2 El multigrafo es un grafo

Sea  $\Sigma \looparrowright \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  un multigrafo vertical y completo con curvatura media  $H$  satisfaciendo  $4H^2 + \kappa < 0$ , lo que implica que  $\kappa < 0$ . Como ya hemos comentado, podemos suponer que  $\kappa = -1$  sin perder generalidad. La demostración del teorema será por reducción al absurdo, para lo que supondremos que existen dos puntos  $p, q \in \Sigma$ ,  $p \neq q$  que se proyectan sobre el mismo punto  $x_0 \in \mathbb{H}^2$  por la proyección  $\pi : \mathbb{E}(-1, \tau) \rightarrow \mathbb{H}^2$ . La siguiente definición nos ayudará en lo sucesivo.

**Definición 4.9.** En las condiciones anteriores, un abierto conexo  $\Omega \subset \mathbb{H}^2$  se dirá admisible si  $x_0 \in \Omega$  y existe una función diferenciable  $u : \Omega \rightarrow \Sigma$  cumpliendo  $F_u(x_0) = p$ .

Si  $\Omega \subset \mathbb{H}^2$  es admisible, entonces la función diferenciable  $u$  que nos da la definición es evidentemente única y nos referiremos a ella como la *función asociada* a  $\Omega$ . La contradicción que buscamos se seguirá del siguiente lema tomando  $R$  mayor que la distancia intrínseca a  $\Sigma$  entre  $p$  y  $q$ .

**Lema 4.10.** Dado  $R > 0$ , existe  $\Omega \subseteq \mathbb{H}^2$  admisible tal que la bola intrínseca  $B_\Sigma(p, R)$  está contenida en  $F_u(\Omega)$ , siendo  $u$  la función asociada a  $\Omega$ .

La técnica que usaremos para probar el lema 4.10 consiste en agrandar progresivamente un abierto admisible inicial de forma que acabe conteniendo a la proyección de cualquier bola intrínseca del grafo arbitrariamente grande. Observemos que, como la función ángulo es negativa, un entorno de  $p$  en  $\Sigma$  se puede escribir como el grafo de una función  $u$  definida en la bola  $B(x_0, \rho)$  de  $\mathbb{H}^2$  para cierto  $\rho > 0$  de forma que  $F_u(x_0) = p$ . Dicho de otra forma, existe  $\rho > 0$  tal que  $B(x_0, \rho)$  es admisible y, de hecho, podemos considerar

$$R_0 = \max\{\rho : B(x_0, \rho) \text{ es admisible}\} > 0, \quad (55)$$

esto es, tenemos una bola admisible maximal  $B(x_0, R_0)$  y de ella partiremos.

**Afirmación 4.11.** Sea  $\Omega$  un dominio admisible tal que  $\partial\Omega$  es una curva embebida de clase  $C^2$  a trozos. Supongamos que existe  $\hat{x}$  en un arco regular de  $\partial\Omega$  tal que la función asociada  $u$  no puede extenderse a ningún entorno de  $\hat{x}$  como grafo de CMC. Entonces,

- i) La curvatura geodésica de  $\partial\Omega$  en  $\hat{x}$  con respecto al conormal interior a  $\Omega$  es mayor o igual que  $-2H$ .
- ii) Existe una curva  $\Gamma$  de curvatura geodésica constante  $2H$  ó  $-2H$ , tangente a  $\partial\Omega$  en  $\hat{x}$ , y existen  $\delta > 0$  y un grafo  $v : N_\delta(\Gamma, y) \rightarrow \Sigma$  de CMC  $H$ , siendo  $y \in \Omega$  un punto suficientemente cercano a  $\hat{x}$ , cumpliendo:
- Los valores frontera de  $v$  son constantemente  $+\infty$  ó  $-\infty$  a lo largo de  $\Gamma$ .
  - $u = v$  en la intersección de un entorno de  $\hat{x}$  y  $\Omega$ .

*Demostración de la afirmación 4.11.* Consideremos una bola geodésica en  $\mathbb{H}^2$  suficientemente pequeña para que esté contenida en  $\Omega$  y sea tangente a  $\partial\Omega$  en  $\hat{x}$ . Notemos que su curvatura geodésica con respecto al conormal interior es mayor que 1 y, por tanto, mayor que  $2H$ . Entonces, el enunciado se deduce de los lemas 4.6 y 4.7 y de la unicidad de prolongación analítica del grafo definido sobre dicha bola geodésica.  $\square$

Probaremos más adelante (véase la afirmación 4.14, para  $R = R_0$  y  $\mathcal{C} = \emptyset$ ) que el conjunto de puntos de  $\partial B(x_0, R_0)$  tales que la función  $u$  no puede extenderse a un entorno de ellos es finito. Denotamos por  $\{x_1, \dots, x_r\} \subset \partial B(x_0, R_0)$  a estos puntos. La afirmación 4.11 que acabamos de probar nos dice que, para cada  $j \in \{1, \dots, r\}$ , existe una curva  $\Gamma_j \subset \mathbb{H}^2$  de curvatura constante  $2H$  ó  $-2H$ , tangente a  $\partial B(x_0, R_0)$  en  $x_j$ , para la cual podemos extender la función  $u$  a  $B(x_0, R_0) \cup N_{\delta_j}(\Gamma_j, x_0)$ . El siguiente paso de la demostración consiste en probar que las curvas  $\Gamma_j$  son todas disjuntas, por lo que, tomando cierto  $\delta < \min\{\delta_j : j = 1, \dots, r\}$ , podremos extender la bola inicial a un nuevo dominio admisible de la forma  $\Omega = B(x_0, R_0) \cup (\cup_{j=1}^r N_\delta(\Gamma_j, x_0))$ . Observemos que la función asociada a  $\Omega$  tiene valores frontera  $+\infty$  o  $-\infty$  sobre cada  $\Gamma_j$ . Por tanto, cuando en el siguiente paso de la demostración queramos ampliar  $\Omega$  a otro dominio admisible mayor lo tomaremos siempre contenido en  $\cap_{j=1}^r N_\infty(\Gamma_j, x_0)$ , es decir, lo ampliaremos en la dirección de  $\partial\Omega \cap \partial B(x_0, R_0)$ .

Como este proceso se reiterará, vamos a ponernos en una situación más general que será aplicable en cada uno de los pasos de la extensión.

**Definición 4.12.** Diremos que una familia finita  $\mathcal{C}$  de curvas en  $\mathbb{H}^2$ , cada una de ellas de curvatura geodésica constante  $2H$  ó  $-2H$ , está en posición general para cierto radio  $R > 0$  cuando

- cada curva  $\Gamma \in \mathcal{C}$  corta a la bola cerrada  $\bar{B}(x_0, R)$  y no pasa por  $x_0$ ;
- el conjunto  $\Omega_{\mathcal{C}} = B(x_0, R) \cap (\cap_{\Gamma \in \mathcal{C}} N_\infty(\Gamma, x_0))$  cumple que  $\partial\Omega_{\mathcal{C}} \cap \Gamma \neq \emptyset$  para cualquier  $\Gamma \in \mathcal{C}$ ;

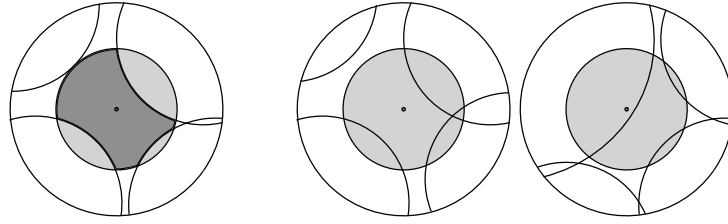


Figura 14: Tres familias de cuatro curvas de curvatura geodésica constante en  $\mathbb{H}^2$ . La de la izquierda está en posición general respecto de la bola sombreada (centrada en el punto indicado) y se ha sombreado de forma más intensa el dominio  $\Omega_{\mathcal{C}}$  asociado a dicha familia. Por el contrario, las otras dos no están en posición general: en la del centro, las condiciones (a) y (c) de la definición no se cumplen y, en la de la derecha, falla la condición (b).

c) los posibles puntos de intersección de dos curvas de  $\mathcal{C}$  no pertenecen a  $\overline{B}(x_0, R)$ .

Recordemos que  $N_\infty(\Gamma, x_0)$  representa la componente abierta de  $\mathbb{H}^2 \setminus \Gamma$  que contiene a  $x_0$ . Está claro entonces que la familia  $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_r\}$  de curvas construidas anteriormente forman una familia en posición general para el radio  $R_0$  y esta condición será preservada en sucesivas ampliaciones del dominio admisible. La siguiente afirmación nos proporciona información sobre la posición relativa de las curvas de una familia en posición general.

**Afirmación 4.13.** Sea  $\mathcal{C}$  una familia finita de curvas en posición general para un radio  $R > 0$ . Supongamos que  $\Omega_{\mathcal{C}}$  es un dominio admisible y que, para cada  $\Gamma \in \mathcal{C}$ , existe  $\delta > 0$  y un grafo  $\nu$  sobre  $N_\delta(\Gamma, x_0)$  de CMC con valores frontera constantes  $+\infty$  ó  $-\infty$  a lo largo de  $\Gamma$ , que coincide con la función  $u$  asociada a  $\Omega_{\mathcal{C}}$  en  $\Omega_{\mathcal{C}} \cap N_\delta(\Gamma, x_0)$ . Entonces,

- i) cualesquiera dos curvas de  $\mathcal{C}$  son disjuntas;
- ii) existe  $\delta' > 0$  tal que  $\Omega'_{\mathcal{C}} = \Omega_{\mathcal{C}} \cup (\cup_{\Gamma \in \mathcal{C}} N_{\delta'}(\Gamma, x_0))$  es admisible.

*Demostración de la afirmación 4.13.* Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existen  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{C}$  y  $\tilde{x} \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$ . La condición de que  $\mathcal{C}$  está en posición general nos dice que  $\tilde{x} \notin \overline{B}(x_0, R)$ . Tomemos una familia continua  $\{D_t\}_{t \in [0, \ell]}$  de discos geodésicos de  $\mathbb{H}^2$  cumpliendo las siguientes tres condiciones:

- a)  $D_0 \subset B(x_0, R)$ ;

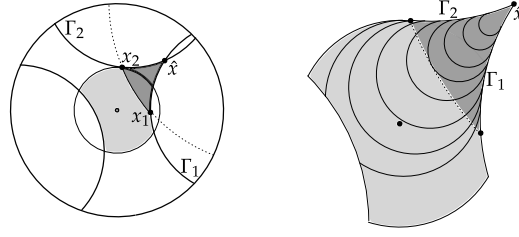


Figura 15: A la izquierda, está representada una familia de curvas en posición general, dos de las cuales se intersectan. El dominio  $\Omega_e$  y el triángulo  $T$  están sombreados (este último más oscuro). A la derecha, puede verse un detalle de la de la figura de la izquierda donde se ha representado la familia  $\Lambda_t$ , que barre todo el triángulo hasta el punto de intersección  $\tilde{x}$ .

- b)  $\partial D_t$  es tangente a  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  para todo  $t \in [0, \ell[$ ,
- c) el radio de  $D_t$  es estrictamente decreciente en  $t$  y  $D_t$  converge al punto de intersección  $\tilde{x}$  cuando  $t \rightarrow \ell$ .

Consideremos  $x_1$  y  $x_2$  los puntos de  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , respectivamente, más cercanos a  $x_0$  y denotemos por  $T$  al triángulo sólido que tiene por vértices  $\tilde{x}$ ,  $x_1$  y  $x_2$ , dos lados sobre  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  y el tercero la geodésica uniendo  $x_1$  y  $x_2$ . Denotaremos por  $\Lambda_t \subset \partial D_t$  a la intersección de  $\Omega_e \cup T$  con la mayor de las dos curvas en que  $\partial D_t$  queda dividida por los puntos de intersección con  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ . Entonces, las curvas  $\Lambda_t$  barren el triángulo  $T$  (véase la figura 15).

Sea  $r \in [0, \ell[$  el supremo de los valores de  $t \in [0, \ell[$  para los que la función  $u$  asociada a  $\Omega_e$  puede extenderse como grafo de CMC a un dominio que contiene a  $\cup_{s \in [0, t]} \Lambda_s$ . Notemos que  $r > 0$  ya que el grafo puede extenderse a  $\Omega_e \cup N_\varepsilon(\Gamma_i, x_0)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , para cierto  $\varepsilon > 0$  y, para pequeños valores de  $s$ , las curvas  $\Lambda_s$  están contenidas en la unión de ambos conjuntos. Más aún, se tiene que  $r = \ell$  ya que, en caso contrario, el grafo podría extenderse a  $\cup_{s \in [0, r[} \Lambda_s$  y existiría un punto interior al arco  $\Lambda_r$  tal que  $u$  no podría extenderse a un entorno suyo. Sin embargo,  $\Lambda_r$  tiene curvatura geodésica constante menor que  $-1 < -2H$  con respecto al conormal exterior a  $D_r$ , ya que  $D_r$  es un disco geodésico, contradiciendo el apartado (i) de la afirmación 4.11.

Hemos probado así que  $\Omega_1 = \Omega_e \cup T$  es admisible y la extensión  $u_1$  sobre este dominio tiene valores frontera no acotados en la parte que cae sobre  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Por otro lado, el grafo puede extenderse a  $u_2$  definido sobre  $\Omega_2 = \Omega_e \cup N_\varepsilon(\Gamma_1, x_0)$  y, por unicidad,  $u_1 = u_2$  en  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ . Esto es una contradicción ya que  $u_2$  tiene valores acotados en  $\Gamma_2 \cap N_\varepsilon(\Gamma_1, x_0) \subset \partial(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  mientras que  $u_1$  no los tiene.



El segundo apartado se deduce del razonamiento anterior.  $\square$

El último cabo que necesitamos atar consiste en garantizar que, quitando las curvas  $\Gamma$  sobre las que el grafo se va a  $\pm\infty$ , el número de puntos de la frontera del dominio admisible en los que no se puede extender el grafo es finito en cada paso del proceso.

**Afirmación 4.14.** *Sea  $\mathcal{C}$  una familia en posición general de curvas en  $\mathbb{H}^2$  para un radio  $R > 0$  y supongamos que  $\Omega_{\mathcal{C}}$  es admisible. Denotemos por  $A(R)$  al conjunto de puntos de  $\partial\Omega_{\mathcal{C}} \cap \partial B(x_0, R)$  a los que la función asociada a  $\Omega_{\mathcal{C}}$  no se puede extender como un grafo de CMC a ningún entorno suyo. Entonces,  $A(R)$  es finito.*

*Demostración de la afirmación 4.14.* Dado que  $\mathcal{C}$  es una familia finita,  $\partial\Omega_{\mathcal{C}} \cap \partial B(x_0, R)$  está formado por una cantidad finita de arcos. Sus extremos son puntos de  $A(R)$  pero, como son una cantidad finita y en un entorno de cada uno de ellos el grafo sí que admite extensión, estos puntos no presentarán problema. Todos los demás puntos de  $A(R)$  son aislados en virtud de la afirmación 4.11. Por otro lado, es fácil ver que es cerrado ya que si tomamos una sucesión  $\{x_n\}$  en  $A(R)$  que converge a cierto punto  $x_\infty \notin A(R)$  llegamos a una contradicción puesto que este punto ha de estar en  $\partial\Omega_{\mathcal{C}}$  por ser la frontera cerrada y hemos visto antes que tiene que ser interior a un arco regular de su borde. Entonces, los puntos de un entorno de  $x_\infty$  en  $\partial B(x_0, R)$  admiten extensión, lo que nos dice que el grafo se puede extender a un entorno de  $x_n$  para  $n$  suficientemente grande, mientras que  $x_n \in A(R)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Hemos probado así que  $A(R)$  es un conjunto cerrado de puntos aislados que está contenido en el compacto  $\partial B(x_0, R)$ , luego es finito.  $\square$

Con todos estos ingredientes, podemos probar el resultado que buscamos.

*Demostración del lema 4.10.* Definiendo  $x_0 \in \mathbb{H}^2$  tal que  $\pi(p) = x_0$  y repitiendo el razonamiento que lleva a la ecuación (55), podemos considerar la bola admisible maximal  $B(x_0, R_0)$ . La afirmación 4.14 asegura que existe una cantidad finita de puntos de  $\partial B(x_0, R_0)$  tales que el dominio no se puede extender de forma admisible a un entorno de ninguno de ellos. En consecuencia, existe una familia finita  $\mathcal{C}_0$  de curvas completas de curvatura geodésica constante  $2H$  ó  $-2H$  en  $\mathbb{H}^2$ , tangentes a  $\partial B(x_0, R_0)$  en dichos puntos en las condiciones de la afirmación 4.11. Es inmediato comprobar que dicha familia está en posición general. La afirmación 4.13 nos dice que estas curvas son disjuntas y que existe  $\delta > 0$  tal que el dominio  $\Omega' = \Omega_{\mathcal{C}_0} \cup (\cup_{\Gamma \in \mathcal{C}_0} N_\delta(\Gamma, x_0))$  es admisible.

Ahora está claro que el grafo se puede extender a un entorno de cualquier punto interior a  $\partial\Omega' \cap \partial B(x_0, R_0)$ . Tomemos el mayor  $R_1 > R_0$  de forma que  $\Omega_1 = B(x_0, R_1) \cap (\cap_{\Gamma \in \mathcal{C}_0} N_\infty(\Gamma, x_0))$  sea admisible. Ahora aparecen nuevos puntos interiores a  $\partial\Omega_1 \cap \partial B(x_0, R_1)$  tales que el dominio no se puede extender de forma admisible a ningún entorno suyo. Éstos son una cantidad finita según la afirmación 4.14 y podemos volver a aplicar la afirmación 4.11 obteniendo una familia  $\mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_0$  en posición general para el radio  $R_1$ . Notemos que,  $R_1 = +\infty$  o bien  $\mathcal{C}_1$  contiene de forma estricta a  $\mathcal{C}_0$ .

Todo el proceso puede repetirse para conseguir una sucesión estrictamente creciente (posiblemente finita) de radios  $\{R_n\}$  de forma que, para cada  $n$ , existe una familia  $\mathcal{C}_n$  de curvas en posición general para el radio  $R_n$ , con  $\mathcal{C}_{n-1} \subset \mathcal{C}_n$ . Además, este proceso muestra que el dominio  $\Omega_n \subset \mathbb{H}^2$  definido por

$$\Omega_n = B(x_0, R_n) \cap \left( \bigcap_{\Gamma \in \mathcal{C}_n} N_\infty(\Gamma, x_0) \right),$$

es admisible y su función asociada  $u_n$  es una extensión de  $u$ . Además,  $u_n$  se extiende como grafo de CMC a  $\Omega_n \cup (\cup_{\Gamma \in \mathcal{C}_n} N_{\delta_n}(\Gamma, x_0))$  para cierto  $\delta_n > 0$ .

En esta situación, caben dos posibilidades. La primera de ellas es que  $R_{n_0} = +\infty$  para cierto  $n_0 \in \mathbb{N}$ , es decir, en cierta iteración del proceso, podamos extender hasta un radio arbitrariamente grande. Si fuera éste el caso, es inmediato que la superficie completa  $\Sigma$  es un grafo y hemos terminado. La segunda posibilidad es que la sucesión  $\{R_n\}$  tenga infinitos términos y afirmamos que, en tal caso,  $\lim\{R_n\} = +\infty$ . En efecto, como los elementos de cada una de las familias  $\mathcal{C}_n$  son disjuntos según la afirmación 4.13 y cada  $\mathcal{C}_n$  contiene estrictamente a  $\mathcal{C}_{n-1}$ , si dicho límite fuera finito, tendríamos una cantidad infinita de curvas disjuntas de curvatura geodésica constante  $\pm 2H$  cortando a cierto compacto de  $\mathbb{H}^2$  de forma que, fijada una de ellas, todas las demás están en una de las dos componentes de su complementario (por la condición (b) de la definición 4.12), lo cual es imposible.

Finalmente, dado  $n \in \mathbb{N}$ , tomemos  $O_n = F_{u_n}(\Omega_n)$ , que es un abierto de  $\Sigma$  cuya frontera  $\partial O_n$  cumple que  $\pi(\partial O_n) \subset \partial B(x_0, R_n)$  ya que  $u_n$  tiene valores frontera  $\pm\infty$  sobre las curvas de  $\mathcal{C}_n$ . Dada cualquier curva diferenciable a trozos  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$  con  $\alpha(a) = p$  y  $\alpha(b) \in \partial O_n$ , como la proyección  $\pi : \mathbb{E}(-1, \tau) \rightarrow \mathbb{H}^2$  restringida a  $\Sigma$  tiene jacobiano  $|\text{Jac}(\pi)| = |\nu| < 1$ , puede probarse que reduce longitudes y, en particular, la longitud en  $\Sigma$  de  $\alpha$  es mayor o igual que la longitud en  $\mathbb{H}^2$  de  $\pi \circ \alpha$  que, a su vez, es mayor o igual que  $R_n$ . De aquí deducimos que  $B_\Sigma(x_0, R_n) \subset F_u(\Omega_n)$  y, como  $R_n$  puede ser arbitrariamente grande, la afirmación está probada.  $\square$



Parte III

ESTABILIDAD



ESTABILIDAD DE SUPERFICIES PARABÓLICAS CON  
CURVATURA MEDIA CONSTANTE

---

Sea  $\phi_0 : \Sigma \rightarrow \widetilde{M}$  una inmersión isométrica de una superficie riemanniana en una 3-variedad riemanniana  $\widetilde{M}$  y supongamos que tiene un normal unitario y diferenciable globalmente definido  $N$ . Esta última condición la parafrasearemos diciendo que la inmersión  $\phi_0$  *tiene dos caras*.

Desde un punto de vista variacional, dada una función  $f \in C_0^\infty(\Sigma)$  y un dominio compacto  $\Omega$  tal que  $\text{sop}(f) \subset \Omega$ , existe  $\varepsilon > 0$  y una aplicación  $\phi : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \times \Sigma \rightarrow \widetilde{M}$  de forma que  $p \mapsto \phi(t, p)$  es una inmersión para todo  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$  y

- a)  $\phi(0, p) = \phi_0(p)$  para todo  $p \in \Sigma$ ,
- b)  $\phi(t, p) = \phi_0(p)$  para todo  $(t, p) \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ \times (M \setminus \Omega)$ , y
- c)  $\frac{\partial \phi}{\partial t}(0, p) = f(p)N_p$  para todo  $p \in \Sigma$ .

En este sentido, se dice que  $\phi$  es una variación de  $\phi_0$  de soporte compacto con *campo variacional*  $fN$ . Además, podemos definir los funcionales área y volumen (con signo) asociados a  $f$  como

$\text{Area}(t) = \text{área de la superficie } \phi(\{t\} \times \Omega) \text{ en } \widetilde{M}$ ,

$$\text{Vol}(t) = \int_{[0, t] \times \Omega} \text{Jac}(\phi) dV.$$

El siguiente resultado, debido a Barbosa, Do Carmo y Eschenburg, caracteriza las inmersiones de curvatura media constante  $H \in \mathbb{R}$  como puntos críticos del funcional  $\mathcal{J} = \text{Area} - 2H \cdot \text{Vol}$  y calcula la segunda variación de este funcional en un punto crítico. Para una demostración del mismo, puede consultarse [BCE88].

**Proposición 5.1.** *En las condiciones anteriores,*

a)  $\phi_0$  *tiene curvatura media constante*  $H$  *si, y sólo si,*  $\mathcal{J}'(0) = 0$  *para toda variación de soporte compacto.*

b) *Si*  $\phi_0$  *tiene curvatura media constante*  $H$ , *entonces*

$$\mathcal{J}''(0) = - \int_{\Sigma} \left( \Delta f + (|A|^2 + \text{Ric}(N))f \right) f d\Sigma,$$

para cualquier variación con campo variacional  $fN$  y  $f \in C_0^\infty(\Sigma)$ , donde  $A$  es endomorfismo de Weingarten de la inmersión.

En particular, el valor de  $\mathcal{J}''(0)$  depende sólo de la función  $f$ .

Una inmersión  $\phi_0$  con dos caras y curvatura media constante  $H$  se dice estable si  $\mathcal{J}''(0) \geq 0$  para cualquier  $f \in C_0^\infty(\Sigma)$ . La fórmula de la segunda variación motiva la definición de  $L : C^\infty(\Sigma) \rightarrow C^\infty(\Sigma)$  dado por  $L = \Delta + |A|^2 + \text{Ric}(N)$ , que es conocido como *operador de estabilidad*. En consecuencia, la inmersión es estable si, y sólo si, la forma cuadrática  $Q(f) = -\int_\Sigma fLf \, d\Sigma$  es definida positiva sobre  $C_0^\infty(\Sigma)$ .

En lo que sigue, con el mismo trabajo, podemos trabajar sobre una variedad arbitraria  $M$  y con un operador de Schrödinger arbitrario  $L = \Delta + q$  para cierta  $q \in C^\infty(M)$  y los resultados se particularizarán a nuestro caso 2-dimensional con  $q = |A|^2 + \text{Ric}(N)$ . Notemos que este cambio de visión hace que los razonamientos sean intrínsecos a partir de ahora. El teorema de la divergencia nos asegura que  $-\int_\Sigma (\Delta f + qf)f = \int_M (|\nabla f|^2 - qf^2)$  para cualquier  $f \in C_0^\infty(M)$ . No obstante, esta última expresión tiene sentido imponiendo una regularidad mucho menor para  $f$ ; concretamente, tiene sentido si  $f$  pertenece al espacio de Sobolev<sup>1</sup>  $H_0^1(M)$ , luego podemos extender la forma cuadrática como

$$Q(f) = \int_M (|\nabla f|^2 - qf^2) \, dM, \quad f \in H_0^1(M). \tag{56}$$

En la teoría general de operadores elípticos se demuestra que las funciones en la nulidad<sup>2</sup> de  $Q$  son siempre diferenciables y las llamaremos *funciones de Jacobi*. Así, una función  $f \in C^\infty(M)$  es de Jacobi si, y sólo si,  $Lf = 0$ .

Fischer-Colbrie [Fis85] demostró la siguiente caracterización de la estabilidad en términos de la existencia de funciones de Jacobi positivas (véase también Meeks, Pérez y Ros [MPRo8, Lemma 2.1]). Aunque este resultado, tanto en [Fis85] como en [MPRo8], se enuncia para superficies, puede demostrarse de forma similar para variedades de dimensión superior.

**Lema 5.2.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i)  $Q(f) \geq 0$  para toda  $f \in C_0^\infty(M)$ ,
- ii) existe una función de Jacobi positiva en  $M$ ,

<sup>1</sup>  $H_0^1(M)$  se define como la clausura en la norma  $H^1(M)$  de  $C_0^\infty(M)$ .  
<sup>2</sup> Siguiendo la terminología de la teoría de formas cuadráticas, una función  $f \in H_0^1(M)$  se dice en la nulidad de  $Q$  si está en la nulidad de la forma bilineal asociada, esto es, si  $\int_M gLf = 0$  para toda  $g \in C_0^\infty(M)$ , lo que equivale trivialmente a que  $Lf = 0$ .

iii) existe una función positiva  $u \in C^\infty(M)$  tal que  $Lu \leq 0$ .

En lo que sigue, cuando se satisfaga alguna de estas condiciones equivalentes, escribiremos simplemente  $-L \geq 0$ . En el caso de que  $L$  sea el operador de estabilidad de una inmersión de curvatura media constante, la condición  $-L \geq 0$  equivale a que la inmersión sea estable.

## 5.1 EL OPERADOR $\Delta + q$

A lo largo de esta sección,  $(M, ds^2)$  denotará una variedad riemanniana de dimensión  $n$ , conexa y sin frontera. Dada una función  $q \in C^\infty(M)$ , consideraremos el operador de Schrödinger

$$L = \Delta + q,$$

donde  $\Delta$  es el laplaciano respecto de la métrica  $ds^2$ . Si  $M$  es compacta, se sabe que el primer valor propio del operador  $L$  es simple y las funciones en el correspondiente subespacio propio son idénticamente nulas o de signo constante. Nuestro objetivo será generalizar esto al caso en que  $M$  sea de tipo conforme parabólico y la forma cuadrática asociada  $Q$  cumpla las condiciones del lema 5.2. Para ello, vamos a introducir la definición y las propiedades de la parabolicidad que necesitaremos.

**Definición 5.3.** Una variedad riemanniana  $M$  sin borde se dice parabólica si toda función superarmónica no negativa es constante.

Las variedades compactas son automáticamente parabólicas según esta definición en virtud del principio del máximo para funciones superarmónicas. Para ilustrar este concepto con más ejemplos, destacamos un resultado de Collin, Kusner, Meeks y Rosenberg [CKMR04] que asegura que toda superficie minimal propiamente inmersa en un semiespacio de  $\mathbb{R}^3$  es automáticamente parabólica. No obstante, la propiedad que aquí necesitaremos es la siguiente, cuya demostración puede deducirse de [Tro99, Proposition 4.1].



**Lema 5.4.** Una variedad riemanniana  $(M, ds^2)$  es parabólica si, y sólo si, existe una sucesión de funciones  $\{\varphi_j\}_j \subset C_0^\infty(M)$  tales que  $0 \leq \varphi_j \leq 1$  en  $M$ ,  $\{\varphi_j^{-1}(1)\}_j$  forma una sucesión exhaustiva<sup>3</sup> de subconjuntos compactos de  $M$  y además

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_M |\nabla \varphi_j|^2 = 0.$$

Ya podemos enunciar y demostrar el resultado principal de este capítulo.

**Teorema 5.5.** Sea  $(M, ds^2)$  una variedad riemanniana parabólica y consideremos el operador  $L = \Delta + q$ , donde  $q \in C^\infty(M)$ . Dadas  $u, v \in C^\infty(M)$  tales que  $u$  está acotada,  $v > 0$  y  $uvLu \geq u^2Lv$  en  $M$ , la función  $u/v$  es constante.

La demostración está inspirada en las ideas dadas por Berestycki, Caffarelli y Nirenberg en [BCN97, Section 4] (véase también [AC00, Proposition 2.1]).

*Demostración.* Observemos en primer lugar que la condición  $uvLu \geq u^2Lv$  es equivalente a  $uv\Delta u \geq u^2\Delta v$ , luego supondremos sin perder generalidad que  $q = 0$  en lo sucesivo.

La función  $u/v \in C^\infty(M)$  tiene gradiente  $\nabla(u/v) = v^{-2}(v\nabla u - u\nabla v)$ , de donde es fácil deducir que

$$u \cdot \operatorname{div} \left( v^2 \nabla(u/v) \right) = uv\Delta u - u^2\Delta v \geq 0. \quad (57)$$

Consideremos una sucesión  $\{\varphi_j\}_j \subset C_0^\infty(M)$  como la que da el lema 5.4. Para cada  $j \in \mathbb{N}$ , aplicando el teorema de la divergencia al producto de la función  $\varphi_j^2 u/v \in C_0^\infty(M)$  y el campo  $v^2 \nabla(u/v)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \left\langle \nabla(\varphi_j^2 u/v), v^2 \nabla(u/v) \right\rangle + \int_M \frac{\varphi_j^2 u}{v} \operatorname{div} \left( v^2 \nabla(u/v) \right) \\ &= 2 \int_M \varphi_j u v \langle \nabla \varphi_j, \nabla(u/v) \rangle \\ &\quad + \int_M \varphi_j^2 v^2 |\nabla(u/v)|^2 + \int_M \frac{\varphi_j^2 u}{v} \operatorname{div} \left( v^2 \nabla(u/v) \right), \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Aquí entenderemos que una sucesión de compactos  $\{K_j\}_j$  es exhaustiva si es creciente para el orden dado por la inclusión y  $\cup_{j \in \mathbb{N}} K_j = M$ .

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota la métrica en  $M$ . Definimos  $\Omega_j = \varphi_j^{-1}(1)$ . La última igualdad junto con (57) nos llevan a que, escribiendo  $A_j = \text{sop}(\varphi_j) \setminus \Omega_j$ ,

$$\begin{aligned} \int_M \varphi_j^2 v^2 |\nabla(u/v)|^2 &\leq -2 \int_M \varphi_j uv \langle \nabla \varphi_j, \nabla(u/v) \rangle \\ &= -2 \int_{A_j} \varphi_j uv \langle \nabla \varphi_j, \nabla(u/v) \rangle \\ &\leq 2 \left| \int_{A_j} \varphi_j uv \langle \nabla \varphi_j, \nabla(u/v) \rangle \right| \\ &\leq 2 \left( \int_{A_j} \varphi_j^2 v^2 |\nabla(u/v)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{A_j} u^2 |\nabla \varphi_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (58) \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Como  $u$  está acotada y las funciones  $\varphi_j$  cumplen las condiciones del lema 5.4, tenemos que

$$\int_{A_j} u^2 |\nabla \varphi_j|^2 \leq C \cdot E(\varphi_j), \quad (59)$$

donde  $C > 0$  es independiente de  $j$  y la energía  $E(\varphi_j) = \int_M |\nabla \varphi_j|^2$  satisface  $\lim_{j \rightarrow \infty} E(\varphi_j) = 0$ . Usando esta información en (58) y dividiendo el miembro de la izquierda en dos integrales, una sobre  $\Omega_j$  y otra sobre  $A_j$  (estos dos conjuntos son disjuntos), tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_j} v^2 |\nabla(u/v)|^2 + \int_{A_j} \varphi_j^2 v^2 |\nabla(u/v)|^2 \\ \leq 2\sqrt{C E(\varphi_j)} \left( \int_{A_j} \varphi_j^2 v^2 |\nabla(u/v)|^2 \right)^{1/2}. \quad (60) \end{aligned}$$

Estimando inferiormente por cero el primer sumando en el miembro de la izquierda en (60) y simplificando, llegamos a que

$$\int_{A_j} \varphi_j^2 v^2 |\nabla(u/v)|^2 \leq 4C E(\varphi_j). \quad (61)$$

Si ahora estimamos inferiormente por cero el segundo sumando en (60) y usamos (61), obtenemos finalmente que, para cualquier  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{\Omega_j} v^2 |\nabla(u/v)|^2 \leq 2\sqrt{C E(\varphi_j)} \left( \int_{A_j} \varphi_j^2 v^2 |\nabla(u/v)|^2 \right)^{1/2} \leq 4C E(\varphi_j).$$

Tomando límite cuando  $j \rightarrow \infty$ , se sigue que  $\int_M v^2 |\nabla(u/v)|^2 = 0$ . Como  $v > 0$  por hipótesis, concluimos que  $u/v$  es constante, como se quería probar.  $\square$

Supongamos que  $(M, ds^2)$  es completa. Dado un punto  $p_0 \in M$ , podemos considerar la función distancia riemanniana  $d(\cdot, p_0)$  y, para cada  $r > 0$  la bola métrica  $B(p_0, r) = \{p \in M : d(p, p_0) < r\}$  de radio  $r$  centrada en  $p_0$ . Se dice que  $M$  tiene *crecimiento de volumen a lo sumo cuadrático* si la función  $r \mapsto r^{-2} \text{Vol}(B(p_0, r))$  está acotada. Esta condición es independiente del punto  $p_0 \in M$  y es bien sabido que si  $M$  tiene crecimiento de volumen a lo sumo cuadrático, entonces es parabólica (veáse [CY75] o bien [Gri99, Corollary 7.4]). Por otro lado, en [MPRo8, Theorem 2.11], Meeks, Pérez y Ros prueban que si  $M$  es una superficie simplemente conexa con crecimiento de área cuadrático (aunque sólo es necesaria la parabolicidad en su argumento) y la forma cuadrática  $Q$  dada en (56) es definida positiva, entonces cualquier función de Jacobi no cambia de signo en  $M$ . El siguiente corolario generaliza ligeramente este resultado.

**Corolario 5.6.** *Sea  $(M^n, ds^2)$  una variedad riemanniana parabólica y supongamos que  $L = \Delta + q$ , con  $q \in C^\infty(M)$ , cumple que  $-L \geq 0$  en  $M$ . Si  $u \in C^\infty(M)$  es una función acotada tal que  $uLu \geq 0$ , entonces  $Lu = 0$  y, o bien  $u = 0$ , o bien  $u$  no se anula en ningún punto.*

*Demostración.* Como  $-L \geq 0$  en  $M$ , el lema 5.2 nos dice que existe  $v \in C^\infty(M)$  tal que  $v > 0$  y  $Lv = 0$  sobre  $M$ . En vista del teorema 5.5,  $u$  debe ser un múltiplo de  $v$ , de donde se sigue el enunciado (será idénticamente cero cuando  $u = 0 \cdot v$  y, en otro caso,  $u$  no se anulará en ningún punto).  $\square$

Vamos a mostrar ahora otra aplicación directa de este resultado en el caso en que la función  $q$  no cambie de signo. Notemos que, dada una función  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , para cualquier  $u \in C^\infty(M)$  tal que  $Lu = 0$ , la función  $v = f(u) \in C^\infty(M)$  satisface

$$Lv = f''(u)|\nabla u|^2 + q(f(u) - f'(u)u). \quad (62)$$

**Corolario 5.7.** *Sea  $(M^n, ds^2)$  una variedad riemanniana parabólica y supongamos que  $L = \Delta + q$ , con  $q \in C^\infty(M)$ , cumple que  $-L \geq 0$  en  $M$ .*

- a) *Si  $q \geq 0$ , entonces  $q = 0$ . En particular, cualquier función de Jacobi acotada superior o inferiormente es constante.*
- b) *Si  $q \leq 0$ , entonces cualquier función de Jacobi acotada  $u \in C^\infty(M)$  es constante y, si  $q$  no es idénticamente nula, entonces  $u = 0$ .*

*Demostración.* Para probar el primer apartado, el lema 5.2 nos permite tomar una función positiva  $w$  tal que  $Lw = 0$ . Entonces,  $v = e^{-w} \in C^\infty(M)$  es una

función positiva y acotada. De hecho, mediante la ecuación (62) podemos calcular  $Lv = w(|\nabla w|^2 + q(1+w))$ . Como  $q \geq 0$  en  $M$  y  $w$  es positiva, deducimos que  $Lv \geq 0$  en  $M$ . El corolario 5.6 nos asegura que  $Lv = 0$  y, por tanto,  $\nabla w = 0$  y  $q = 0$ . Por tanto, para una función es equivalente ser de Jacobi o ser armónica; luego si  $u$  es una función de Jacobi acotada superior o inferiormente, la parabolicidad de  $M$  nos garantiza que es constante.

Para probar (b), si aplicamos (62) a la función acotada  $v = u^2$ , obtenemos que  $Lv = 2|\nabla u|^2 - qu^2 \geq 0$ . Del corolario 5.6, deducimos ahora que  $Lv = 0$  y, por tanto,  $\nabla u = 0$  y  $qu^2 = 0$ , de donde el enunciado se sigue.  $\square$

## 5.2 SUPERFICIES ESTABLES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE

Volvamos al estudio de la estabilidad de una superficie  $\Sigma$  inmersa en una 3-variedad  $\widetilde{M}$  con campo normal globalmente definido  $N$  y curvatura media constante  $H \in \mathbb{R}$ . Si  $A$  denota al operador de Weingarten de la inmersión, sabemos que la inmersión es estable si, y sólo si, existe una función  $u \in C^\infty(\Sigma)$  positiva tal que  $Lu = \Delta u + (|A|^2 + \text{Ric}(N))u = 0$ , esto es, una función de Jacobi positiva.

Si  $X$  es un campo de Killing en  $\widetilde{M}$ , entonces  $u = \langle X, N \rangle$  es automáticamente una función de Jacobi en  $\Sigma$  (véase [BCE88, Proposition 2.12]) y, si el campo  $X$  está acotado cuando se restringe a  $\Sigma$ , entonces  $u$  está acotada. Si  $\Sigma$  es estable, entonces admite una función de Jacobi positiva según el lema 5.2 y, bajo la hipótesis de parabolicidad, el teorema 5.5 nos dice que el espacio de las funciones de Jacobi acotadas coincide con el cono de las funciones de Jacobi con signo y ambos están generados por la misma función. Como consecuencia:

- Si  $\widetilde{M}$  admite un campo de Killing sin ceros que está acotado al restringirlo a  $\Sigma$ , entonces  $\Sigma$  es invariante por el grupo uniparamétrico de isometrías que genera o bien es transversa al campo en todo punto.
- Si  $\widetilde{M}$  admite dos campos de Killing independientes que están acotados al restringirlos a  $\Sigma$ , entonces  $\Sigma$  es invariante por el grupo uniparamétrico de isometrías que genera cierta combinación lineal de ellos.

En efecto, el teorema 5.5, nos dice que las funciones de Jacobi  $u_1, u_2$ , asociadas a estos dos campos de Killing  $X_1$  y  $X_2$ , respectivamente, son proporcionales, esto es, existen  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0$ . Por tanto, el normal unitario a  $\Sigma$  es ortogonal al campo de Killing  $X = a_1 X_1 + a_2 X_2$  y, por tanto,  $\Sigma$  es invariante por el grupo uniparamétrico asociado a  $X$ .

- Si  $\widetilde{M}$  admite tres campos de Killing independientes que están acotados al restringirlos a  $\Sigma$ , entonces  $\Sigma$  tiene curvatura de Gauss constante.

En efecto, como consecuencia del punto anterior podemos probar que, en esta situación, la superficie  $\Sigma$  es invariante por dos grupos uniparamétricos asociados a dos campos de Killing linealmente independientes. En particular, el grupo de isometrías de  $\widetilde{M}$  actúa transitivamente sobre  $\Sigma$  luego  $\Sigma$  tiene curvatura de Gauss constante.

En caso de un solo campo de Killing acotado están las submersiones de Killing que fueron introducidas en el capítulo 1 y que comentaremos más adelante. Observemos que en el caso de tres campos está, por ejemplo, cualquier grupo de Lie con una métrica bi-invariante; en el caso concreto de  $\mathbb{R}^3$  con la métrica usual concluimos que cualquier superficie completa, parabólica y estable en  $\mathbb{R}^3$  de curvatura media constante es un plano minimal.

Una consecuencia de la estimación intrínseca de la distancia a la frontera de una superficie estable de curvatura media constante dada por Rosenberg en [Roso6] es la no existencia de superficies inmersas estables en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  con curvatura media constante satisfaciendo  $H^2 > \frac{1}{3}(\tau^2 - \kappa)$ , salvo los planos horizontales  $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \{t\}$  en  $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ . Es de esperar que la condición pueda mejorarse a  $H^2 > \frac{\kappa}{4}$ . El teorema 5.8 prueba esta conjetura bajo la condición adicional de parabolicidad. Por otro lado, el corolario 5.10 mejora levemente la desigualdad  $H^2 > \frac{1}{3}(\tau^2 - \kappa)$  aunque no se imponga la parabolicidad.

En lo que sigue, denotaremos por  $\nu$  a la función ángulo de una superficie de curvatura media constante  $H$  inmersa  $\Sigma \looparrowright \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , esto es,  $\nu = \langle N, \xi \rangle$  donde  $N$  es un normal unitario global y  $\xi$ , el campo de Killing vertical. Entonces,  $\nu$  es una función de Jacobi acotada; la condición de que  $\nu$  no se anule es equivalente a que  $\Sigma$  sea un multigrafo, mientras que si es idénticamente cero se traduce en que  $\Sigma$  es un cilindro vertical sobre una curva en  $\mathbb{M}^2(\kappa)$  (véase la sección 1.5.1).

**Teorema 5.8.** *Sea  $\Sigma$  una superficie orientable, parabólica, completa y estable inmersa en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  con curvatura media constante  $H$ . Entonces, o bien*

- $\mathbb{E}(\kappa, \tau) = \mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  y  $\Sigma$  es un plano horizontal (minimal), o bien
- $4H^2 + \kappa \leq 0$  y  $\Sigma$  es un grafo vertical o un cilindro sobre una curva completa de curvatura geodésica  $2H$  en  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ .

Además, si  $4H^2 + \kappa = 0$  y  $\Sigma$  es un grafo vertical, entonces es un grafo entero.

*Demostración.* Como  $\nu$  es una función de Jacobi acotada y  $\Sigma$  es parabólica, el corolario 5.6 asegura que, o bien  $\nu$  es idénticamente cero o no se anula

nunca. En el primer caso,  $\Sigma$  es un cilindro vertical sobre una curva completa de curvatura geodésica  $2H$  según el lema 1.34. Ahora bien, como  $\Sigma$  es estable, el lema 4.2 nos dice que  $4H^2 + \kappa \leq 0$  lo que concluye la demostración en este caso. En el segundo caso,  $\nu$  no se anula en  $\Sigma$  (esto es,  $\Sigma$  es un multigrafo completo) luego basta aplicar el teorema 4.1 para concluir el resultado del enunciado.  $\square$

**Observación 5.9.** Los grafos minimales enteros en  $\text{Nil}_3$  han sido clasificados analíticamente por Fernández y Mira [FM09] en términos de su tipo conforme ( $\mathbb{C}$  ó  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ) y su diferencial cuadrática de Abresch-Rosenberg, cuya única restricción es no ser idénticamente cero cuando el tipo conforme es  $\mathbb{C}$ . A pesar de esta descripción analítica, muchos aspectos de la geometría de los grafos minimales enteros en  $\text{Nil}_3$  no se han comprendido todavía. Por ejemplo, todos los ejemplos sencillos de tales grafos tienen crecimiento de área estrictamente mayor que cuadrático. Conjeturamos que no existen grafos minimales en  $\text{Nil}_3$  con crecimiento de área cuadrático, lo que implicaría que las únicas superficies completas, inmersas y estables de curvatura media constante en  $\text{Nil}_3$  con crecimiento de área cuadrático son los planos verticales (que son llanos y minimales).

Usando la correspondencia de Daniel (véase la sección 3.1), concluimos que existen grafos verticales enteros de curvatura constante  $\frac{1}{2}$  en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  que son parabólicos. Es natural esperar que no existan grafos enteros de grafos verticales enteros en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  de curvatura media constante  $\frac{1}{2}$  y crecimiento de área cuadrático. En lo que respecta al caso  $0 \leq H < \frac{1}{2}$  en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , existen superficies completas y estables de curvatura media  $H$  que son grafos enteros de revolución (véase Nelli y Rosenberg [NR06]). Estos casos pueden estudiarse a través de la correspondencia de Daniel como superficies minimales en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  para  $\kappa < 0$ . Finalmente, mencionar que existen grafos minimales enteros en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  que son conformemente  $\mathbb{C}$  (véase Collin y Rosenberg [CR10]).

Como hemos mencionado anteriormente, si  $\Sigma$  es una superficie orientable, completa y estable inmersa en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  con curvatura media  $H$ , entonces  $H^2 \leq \frac{1}{3}(\tau^2 - \kappa)$ , excepto para el caso especial de  $S^2(\kappa) \times \{t\}$  en  $S^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  debido a los resultados en [Roso6], y ahora mejoraremos esta condición. Es preciso señalar que el corolario 5.10 ya fue enunciado en [MPRo8, Remark 9.11] para el caso particular de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  y, aunque este caso particular es el germen del caso general a través de la correspondencia de Daniel, aquí damos una demostración independiente del mismo, para lo que necesitare-

mos la siguiente expresión del operador de estabilidad de  $\Sigma$ , que se deduce del lema 1.32:

$$L = \Delta - K + \tilde{q}, \quad \tilde{q} = 3H^2 + \kappa - \tau^2 + (H^2 - \det(A)), \quad (63)$$

donde  $K$  denota la curvatura de Gauss de  $\Sigma$ .

Las superficies completas, orientables y estables inmersas en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  con curvatura media  $H$  están clasificadas para  $\kappa \geq \tau^2$ , es decir, (con la excepción de  $\mathbb{R}^3$ ) en el caso de  $S^2 \times \mathbb{R}$  o de las esferas de Berger con curvatura escalar no negativa; en el primer caso sólo tenemos los planos horizontales mientras que en el segundo se tiene un resultado de no existencia para ningún valor de  $H$  (véase Rosenberg [Roso6] y Meeks, Pérez y Ros [MPRo8]). Por lo tanto, no hay problema en asumir  $\kappa < \tau^2$ .

**Corolario 5.10.** *Sea  $M$  una superficie orientable, completa y estable, inmersa en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  con curvatura media constante  $H$  y con  $\kappa < \tau^2$ . Entonces, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $H^2 < \frac{1}{3}(\tau^2 - \kappa) - \varepsilon$ .*

*Demostración.* Comenzaremos probando que el caso  $H^2 = \frac{1}{3}(\tau^2 - \kappa)$  no puede ocurrir (recordemos que el caso  $H^2 > \frac{1}{3}(\tau^2 - \kappa)$  no es posible debido a [Roso6]). Como quiera que  $H^2 - \det(A) = \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2 \geq 0$ , donde  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  son las curvaturas principales de  $\Sigma$  con respecto a cualquier conormal unitario, la función  $\tilde{q}$  dada en la ecuación (63) cumple que  $\tilde{q} \geq 0$ . Ahora bien, en virtud de [MPRo8, Theorem 2.9]),  $\Sigma$  tiene crecimiento de área cuadrático y, en particular, es parabólica luego podemos aplicar el teorema 5.8, que implica que  $H^2 \leq \frac{\kappa}{4}$ , pero esto contradice que  $H^2 = \frac{1}{3}(\tau^2 - \kappa)$ .

Para probar la existencia de  $\varepsilon$  en las condiciones del enunciado, razonemos por reducción al absurdo suponiendo que, para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ , existe una superficie orientable, completa y estable  $\Sigma_n$  inmersa en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  con curvatura media constante  $H_n$  satisfaciendo  $H_n^2 \in [0, \frac{1}{3}(\tau^2 - \kappa)[$  y con  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n^2 = \frac{1}{3}(\tau^2 - \kappa)$ . Después de una conveniente traslación en  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  podemos suponer que las superficies  $\Sigma_n$  tienen un punto en común  $p_0$  y, como la sucesión de superficies  $\Sigma_n$  tiene segundas formas fundamentales uniformemente acotadas debido a la estabilidad, podemos extraer una parcial que converge a una superficie orientable, completa y estable con curvatura media  $H_\infty = \lim\{H_n\}$ . Esto es una contradicción con lo que se ha probado en el párrafo anterior, lo que concluye la demostración.  $\square$

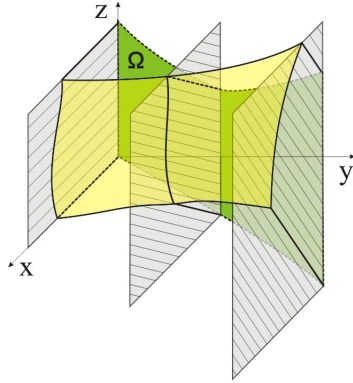


Figura 16: Un grafo horizontal en la dirección de  $X$  sobre un dominio  $\Omega$  del plano  $x = 0$ . Las líneas paralelas en los planos verticales (representados en gris) son las curvas integrales de  $X$ .

5.3 APLICACIÓN AL ESTUDIO DE GRAFOS HORIZONTALES EN  $\text{Nil}_3$

Consideremos el modelo del grupo de Heisenberg  $\text{Nil}_3 = \mathbb{E}(0, \frac{1}{2})$  dado por  $\mathbb{R}^3$  con la métrica riemanniana

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left( dz + \frac{1}{2}(y dx - x dy) \right)^2.$$

Como sabemos, la fibración riemanniana que lo convierte en submersión de Killing es la proyección sobre las dos primeras componentes  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ , y los vectores  $E_1 = \partial_x - \frac{y}{2}\partial_z$ ,  $E_2 = \partial_y + \frac{x}{2}\partial_z$  y  $E_3 = \partial_z$  forman una base ortonormal global. Consideremos el campo de Killing  $X = E_1 + yE_3$ , que no está acotado, y el grupo uniparamétrico de isometrías asociado, que está dado por

$$\phi_t(x, y, z) = \left( x + t, y, z + \frac{ty}{2} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dado un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \equiv \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$  y una función  $u \in C^2(\Omega)$ , definimos el *grafo horizontal*  $\Sigma_u$  asociado a  $u$  (en la dirección de  $X$ ) como la superficie de  $\text{Nil}_3$  parametrizada por

$$F(y, z) = \left( u(y, z), y, z + \frac{y}{2}u(y, z) \right), \quad (y, z) \in \Omega. \tag{64}$$

En la figura 16 puede verse una representación esquemática de este tipo de grafos (notemos que las curvas integrales del campo  $X$  son rectas euclídeas). Por otro lado, es importante mencionar que, dado que las rotaciones



respecto del eje  $x = y = 0$  son isometrías de  $\text{Nil}_3$ , esta construcción no da especial relevancia a ninguna dirección horizontal particular. Es un cálculo directo mostrar que el grafo  $\Sigma_u$  definido por  $u$  es minimal si, y sólo si,  $u$  satisface la siguiente ecuación cuasilineal elíptica de segundo orden:

$$0 = \left[1 + 2yu_z + (1 + y^2)u_z^2\right] u_{yy} - 2u_y \left[y + (1 + y^2)u_z\right] u_{yz} \\ + \left[1 + (1 + y^2)u_y^2\right] u_{zz} - u_y u_z (1 + yu_z).$$

Un grafo horizontal  $\Sigma_u$  se dice *entero* cuando su dominio de definición es  $\Omega = \mathbb{R}^2$ , esto es,  $\Sigma_u$  corta una única vez a cada curva integral de  $X$ .

**Ejemplo 5.11.** Ejemplos sencillos de grafos horizontales nos los dan las funciones lineales, como se comprueba de forma inmediata a partir de la ecuación anterior. Distingamos dos casos esencialmente distintos.

1. Para cualesquiera  $a, b \in \mathbb{R}$ , el plano vertical  $\Pi_{a,b} = \{x = ay + b\}$  es el grafo minimal entero  $\Sigma_u$  asociado a la función  $u(y, z) = ay + b$ . Además, la métrica inducida por  $ds^2$  en  $\Pi_{a,b}$  es llana, luego  $\Pi_{a,b}$  es una superficie parabólica.
2. Dados  $c, d \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$ , la función  $u(y, z) = cz + d$  describe un grafo minimal horizontal  $\Sigma_u$  que no es parabólico como consecuencia del teorema 5.12 que probaremos a continuación. En este caso,  $\Sigma_u$  también puede verse como el grafo *vertical* minimal entero parametrizado por

$$\tilde{F}(x, y) = \left(x, y, \frac{xy}{2} + \frac{x-d}{c}\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \equiv \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Si  $\Sigma \subset \text{Nil}_3$  es un grafo minimal horizontal y  $N$  denota a un campo unitario a  $\Sigma$ , entonces  $\langle X, N \rangle$  es una función de Jacobi que no se anula sobre  $\Sigma$  y, por tanto, el lema 5.2 nos asegura que  $\Sigma$  es estable. De hecho,  $\Sigma$  es área-minimizante de entre todas las superficies en el cilindro sólido  $C = \cup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(\Omega)$ , donde  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  es el grupo uniparamétrico de isometrías asociado a  $X$ , como consecuencia de un argumento estándar de calibraciones que resumimos a continuación.

En efecto, supongamos que  $u \in C^2(\Omega)$  es una función que define un grafo minimal horizontal sobre un dominio  $\Omega \subset \{(0, y, z) : (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$  y consideremos la 2-forma diferenciable  $\omega$  sobre  $C = \cup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(\Omega)$  dada por

$$\omega_{\phi_t(p)}(v_1, v_2) = \\ = dV_{F(p)} \left( \left( d\phi_{u(p)-t} \right)_{\phi_t(p)}(v_1), \left( d\phi_{u(p)-t} \right)_{\phi_t(p)}(v_2), N_{F(p)} \right),$$

para  $p \in \Omega$ ,  $t \in \mathbb{R}$  y  $v_1, v_2 \in T_{\phi_t(p)} \text{Nil}_3$ , donde  $dV$  es la forma de volumen para la métrica  $ds^2$  y  $F$  está dado por (64). Entonces,  $\omega$  es cerrada ya que  $\Sigma$  es minimal, tiene comasa unitaria y  $\Sigma$  es una superficie calibrada para  $\omega$ , esto es,  $\omega|_\Sigma$  es igual al elemento de área de  $\Sigma$ . Según el teorema fundamental de calibraciones (véase, por ejemplo, Morgan [Mor88, Theorem 6.4] o bien Harvey y Lawson [HL82]), cada subdominio  $\Sigma' \subset \Sigma_u$  minimiza el área de entre todas las superficies  $\tilde{\Sigma}' \subset C$  con  $\partial\tilde{\Sigma}' = \partial\Sigma'$ .

Una versión natural del problema de Bernstein en  $\text{Nil}_3$  surge al considerar grafos minimales horizontales enteros (o, de forma más general, con curvatura media constante  $H \in \mathbb{R}$ ) en el sentido que se ha definido más arriba. El problema de Bernstein en la dirección vertical fue resuelto por Fernández y Mira [FM09] en términos de diferenciales cuadráticas holomorfas. En el caso de curvatura media constante no nula, Figueroa, Mercuri y Pedrosa [FMP99, Theorem 4] probaron que no hay grafos enteros horizontales enteros en  $\text{Nil}_3$ . Su argumento se basa en aplicar el principio del máximo a esferas con el valor apropiado de la curvatura media y funciona sin problemas cuando cambiamos vertical por horizontal. Por lo tanto, para resolver el problema de Bernstein para grafos horizontales sólo tendremos que centrarnos en el caso minimal. Como aplicación de los resultados de este capítulo, caracterizaremos los planos verticales  $\Pi_{a,b}$  dados en el ejemplo 5.11 como las únicos grafos horizontales enteros y minimales con estructura conforme parabólica.

De hecho, podemos relajar un poco más las hipótesis hablando de multigrafos horizontales. Una superficie orientable  $\Sigma$  de  $\text{Nil}_3$  con normal unitario  $N$  se dice un *multigrafo horizontal* cuando  $\langle X, N \rangle$  no tiene ceros. En vista del lema 5.2, todo multigrafo horizontal es estable.

**Teorema 5.12.** *Sea  $\Sigma$  un multigrafo horizontal, completo y minimal, inmerso en  $\text{Nil}_3$ . Si  $\Sigma$  es parabólico, entonces es un plano vertical (que es entero).*

*Demostración.* Supongamos que  $\Sigma$  no es un plano vertical. Entonces, el teorema 5.8 nos dice que  $\Sigma$  es un grafo vertical entero. Consideremos las funciones de Jacobi  $u = \langle N, E_3 \rangle$  y  $v = \langle N, X \rangle$ , siendo  $N$  un campo normal unitario en  $\Sigma$ . Puesto que  $\Sigma$  es un multigrafo horizontal, salvo un cambio de orientación podemos suponer que  $v > 0$  luego el teorema 5.5 nos dice que  $u = \lambda v$  para cierta constante  $\lambda \neq 0$ , esto es,  $\langle N, \lambda X - E_3 \rangle = 0$  sobre  $\Sigma$ . Esto quiere decir que  $\lambda X - E_3$  se restringe a un campo tangente a  $\Sigma$  sin ceros ya que  $X$  y  $E_3$  son linealmente independientes. Como  $\lambda X - E_3$  es de Killing,  $\Sigma$  es invariante por el grupo uniparamétrico de isometrías generado por  $\lambda X - E_3$ . Por los

resultados de Figueroa, Mercuri y Pedrosa [FMP99],  $\Sigma$  debe ser congruente con el grafo vertical minimal y entero  $\Sigma_\theta$  dado por la ecuación

$$z = \frac{xy}{2} + \frac{\sinh(2\theta)}{2} \left[ y\sqrt{1+y^2} + \log \left( y + \sqrt{1+y^2} \right) \right], \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (65)$$

para cierto  $\theta \in \mathbb{R}$ . Como todas las isometrías de  $\text{Nil}_3$  preservan la distribución horizontal, será suficiente comprobar que cualquier superficie rotada de  $\Sigma_\theta$  no es un multigrafo horizontal para ningún valor de  $\theta \in \mathbb{R}$ . Esto será consecuencia de ver que la función  $\langle X_\alpha, N \rangle$  tiene un cero en  $\Sigma_\theta$  para cualquier valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$ , donde  $X_\alpha$  es el campo de Killing definido por

$$X_\alpha = (E_1 + yE_3) \cos \alpha + (E_2 - xE_3) \sin \alpha.$$

Por otro lado, los campos

$$T_1 = E_1 + yE_3, \quad T_2 = E_2 + \sinh(2\theta)\sqrt{1+y^2}E_3,$$

forman una base global del fibrado tangente de  $\Sigma_\theta$  y se cumple que

$$\det(T_1, T_2, X_\alpha) = -\sin \alpha \left( x + \sinh(2\theta)\sqrt{1+y^2} \right).$$

En consecuencia,  $X_\alpha$  es tangente a  $\Sigma_\theta$  (y, por tanto,  $\langle X_\alpha, N \rangle$  se anula) a lo largo de la curva  $x = -\sinh(2\theta)\sqrt{1+y^2}$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $\square$

## SUMMARY AND CONCLUSIONS

---

The study of minimal and constant mean curvature surfaces in Euclidean 3-space is a classical branch of Differential Geometry. Its origins date back to the seventeenth century, when L. Lagrange used a variational technique to find a surface in  $\mathbb{R}^3$  minimizing the area among all surfaces sharing a given boundary and found the minimal graph equation. Since then, plenty of mathematicians have dealt with this kind of surfaces and studied their properties in very deep detail, though many problems in this area still remain open.

The concept of constant mean curvature  $H \in \mathbb{R}$  surface (briefly, an  $H$ -surface) was extended, as a critical point of the functional  $\text{Area} - 2H \cdot \text{Volume}$ , to any Riemannian 3-manifold and has been extensively studied in recent times. Nevertheless, it turns out that the more symmetric the ambient manifold is, the more interesting the theory becomes. The most symmetric ambient spaces are those whose isometry group acts transitively on them and are called *homogeneous* manifolds. Observe that simply-connected 3-manifolds with constant sectional curvature  $\kappa \in \mathbb{R}$  are included in this class, which are often called *space forms* and denoted by  $\mathbb{M}^3(\kappa)$ ; and their isometry group has dimension 6 (this group acts transitively on the tangent bundle). If we relax the isotropy condition and consider merely homogeneity, then those simply-connected homogeneous 3-manifolds are also classified: they 3-dimensional Lie groups endowed with a left-invariant metric, except for the case of the Riemannian product  $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ ,  $\kappa > 0$ , which does not admit such a group structure (cf. [MP11, Theorem 2.4]).

Apart from the space forms, the most symmetric simply-connected homogeneous spaces are those whose isometry group has dimension 4, which are classified as a 2-parameter family  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ ,  $\kappa, \tau \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa \neq 4\tau^2$  (cf. [Dano7]). They consist of the Riemannian product manifolds  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ , where  $\mathbb{M}^2(\kappa)$  is the simply-connected surface with constant Gaussian curvature  $\kappa \in \mathbb{R}$ , the Heisenberg group  $\text{Nil}_3$ , the universal cover of the special linear group  $\text{Sl}_2(\mathbb{R})$  and the Berger spheres. It is well-known that  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  admits a Riemannian fibration over  $\mathbb{M}^2(\kappa)$  with constant bundle curvature equal to  $\tau$  and whose fibers are the integral curves of a unit Killing vector field defined on  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  have been object of study during the last decade; for instance, we highlight the existence of a quadratic holomorphic differential (cf. [AR04, AR05]), which led to the so-

lution of the Hopf problem (i.e., the classification of constant mean curvature spheres) in  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  (see also [ER09]), or the Lawson-type correspondence between certain constant mean curvature surfaces in different  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ -spaces (cf. [Dan07, Theorem 5.2]). For a detailed survey on the theory of constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , the reader may refer to [DHM09].

A 3-manifold which admits a Riemannian submersion  $\pi$  over a surface such that the fibers of  $\pi$  are the integral curves of a unit (complete) Killing vector field on the total space, is often called a *Killing submersion*. This concept is a natural generalization of the  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ -spaces as well as the Riemannian product 3-manifolds  $M \times \mathbb{R}$ ,  $M$  being a Riemannian surface. The study of constant mean curvature surfaces in Killing submersions is a topic of increasing interest nowadays and some papers have been released very recently (see, for instance, [DL07, DLo8, EO10, LR09, RST09]). In this monograph we will obtain some results concerning constant mean curvature surfaces on both  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  and  $M \times \mathbb{R}$ , and so, we will begin by studying in detail the geometry of a Killing submersion.

#### KILLING SUBMERSIONS

Given a Killing submersion  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$ , where  $\mathbb{E}$  is a orientable Riemannian 3-manifold and  $M$  is a Riemannian surface, let  $\xi$  be a unit Killing vector field whose integral curves are the fibers of  $\pi$ . The bundle curvature is defined as the unique function  $\tau \in C^\infty(\mathbb{E})$  satisfying

$$\bar{\nabla}_X \xi = \tau X \wedge \xi,$$

(see Lemma 1.2) for every  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{E})$ . The bundle curvature is constant along the fibers of the submersion so it can be seen as a function  $\tau \in C^\infty(M)$ . On the other hand, all fibers are proved to be geodesics of  $\mathbb{E}$  and they all share the same (finite or infinite) length, provided that  $M$  is connected (see Lemma 1.5). Those results are easily proved by using isometries in the 1-parameter group generated by  $\xi$ , which will be called *vertical translations* in the sequel.

Towards the classification result of these Killing submersions, it turns out that  $\tau$  determines locally the geometry of the submersion but some topological difficulties appear in the globalization of such a result. More specifically, we must deal with the possible non-existence of global sections of the fibration together with the fact that quotients by a vertical translation leave both the base curvatures and the bundle curvature invariant. In the case of  $M = \mathbb{M}^2(\kappa)$ , we easily overcome these issues and prove the following result (see Theorems 1.13 and 1.16). Recall that a *isomorphism* of Killing sub-

mersions is a pair of isometries, one in the base and one in the total space, which commute with the projections.

Given  $\tau \in C^\infty(\mathbb{M}^2(\kappa))$ , there exists a Killing submersion over  $\mathbb{M}^2(\kappa)$  with bundle curvature  $\tau$ . Moreover, such a submersion is unique, up to isomorphism, provided  $\mathbb{E}$  is simply-connected.

- In the case  $\kappa \leq 0$ , let us define  $\mathbb{D}(2/\sqrt{\kappa}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |\kappa|(x^2 + y^2) \leq 4\}$ . Then, the submersion is isomorphic to the projection over the first factor

$$\pi : (\mathbb{D}(2/\sqrt{\kappa}) \times \mathbb{R}, ds^2) \rightarrow (\mathbb{D}(2/\sqrt{\kappa}), ds_\kappa^2),$$

where the Riemannian metrics  $ds^2$  and  $ds_\kappa^2$  are given by

$$\begin{aligned} ds^2 &= \lambda(x, y)^2 (dx^2 + dy^2) + (dz + \eta(x, y)(y dx - x dy))^2, \\ ds_\kappa^2 &= \lambda_\kappa(x, y)^2 (dx^2 + dy^2), \end{aligned}$$

and the functions  $\lambda, \eta \in C^\infty(\mathbb{D}(2/\sqrt{\kappa}))$  by

$$\begin{aligned} \lambda_\kappa(x, y) &= \left(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)\right)^{-1}, \\ \eta(x, y) &= 2 \int_0^1 s \cdot \tau(xs, ys) \cdot \lambda_\kappa(xs, ys)^2 ds. \end{aligned}$$

- In the case  $\kappa > 0$ , let us take  $T = \int_{S^2(\kappa)} \tau$  and distinguish two subcases.
  - If  $T = 0$ , then the submersion is isomorphic to the projection over the first factor  $\pi : S^2(\kappa) \times \mathbb{R} \rightarrow S^2(\kappa)$ , where we consider the model

$$S^2 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

endowed with the restriction of the Riemannian metric in  $\mathbb{R}^4$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + (dt - a dx - b dy - c dz)^2$$

for certain functions  $a, b, c \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$  not depending on the fourth variable  $t$ . In particular, fibers have infinite length, the Killing vector field is  $\partial_t$  and the bundle curvature is given by

$$\tau = \frac{\sqrt{\kappa}}{2} ((yc - zb)_x + (za - xc)_y + (xb - ya)_z).$$

- If  $T \neq 0$ , then the submersion is isomorphic to the Hopf fibration

$$\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2(\kappa), \quad \pi(z, w) = \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \left( z\bar{w}, \frac{1}{2}(|z|^2 - |w|^2) \right),$$

for a certain Riemannian metric in  $\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$  and the Killing vector field is given by  $\frac{\kappa}{4T}(iz, iw)$ . Moreover, the fibers have length  $|2T|$ .

In particular, we characterize the homogeneous spaces  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  as the only simply-connected 3-dimensional spaces which admit a Killing submersion of constant bundle curvature  $\tau$  over the simply-connected surface of constant curvature  $\kappa$ . We also characterize them as the only simply-connected 3-dimensional homogeneous spaces admitting a Killing submersion structure (see Lemma 1.28). We also remark that the product spaces  $M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  are those with  $\tau = 0$ .

It is interesting to observe how well the geometries of  $M$  and  $\mathbb{E}$  of a Killing submersion  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  are related, and geodesics or isometries are samples of this good relation. In the case of geodesics of  $\mathbb{E}$ , they can be divided in three different types: vertical ones, horizontal ones (which are horizontal lifts of geodesics of  $M$ ) and those which are neither vertical nor horizontal, each of which make a constant angle with the vertical direction and whose projection is well understood (see Proposition 1.22). On the other hand, a beautiful classification result is obtained when we look for isometries of  $\mathbb{E}$  preserving the vertical direction, which will be called *Killing isometries* (see Theorem 1.27).

Let  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$  be a Killing submersion,  $\mathbb{E}$  simply-connected, with bundle curvature  $\tau \in C^\infty(\mathbb{M}^2(\kappa))$ .

- Given a Killing isometry  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ , there exists a unique isometry  $h : \mathbb{M}^2(\kappa) \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$  such that  $\pi \circ f = h \circ \pi$ . Moreover,  $\tau \circ h = \tau$  when  $f$  is orientation-preserving and  $\tau \circ h = -\tau$  when it is orientation-reversing.

In particular, if  $\tau$  is a non-zero constant, there do not exist orientation-reversing isometries.

- Given an isometry  $h : \mathbb{M}^2(\kappa) \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$  and  $p_0, q_0 \in \mathbb{E}$  satisfying  $h(\pi(p_0)) = \pi(q_0)$ , the following properties hold:
  - If  $h \circ \tau = \tau$ , then there exists a unique orientation-preserving Killing isometry  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  such that  $\pi \circ f = h \circ \pi$  and  $f(p_0) = q_0$ .

- If  $h \circ \tau = -\tau$ , then there exists a unique orientation-reversing Killing isometry  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  such that  $\pi \circ f = h \circ \pi$  and  $f(p_0) = q_0$ .

This construction provides a surjective group morphism from the group of Killing isometries of  $\mathbb{E}$  to the group of isometries of  $M$  which either preserve  $\tau$  or map it to  $-\tau$ . The kernel of this morphism is the subgroup of isometries of  $\mathbb{E}$  that leave the fibers invariant (i.e., the kernel consists of vertical translations, and it also contains the symmetries with respect to a slice in the case  $\tau = 0$ ). On the other hand, this gives an alternative proof of the fact that the isometry group of the homogenous space  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  has dimension 4.

Regarding the surface theory on a Killing submersion  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$ , we study two families of surfaces which will play an important role in the development of the rest of this monograph: vertical cylinders, i.e., the preimage through  $\pi$  of a curve  $\alpha$  in  $M$ , whose geometry is completely determined in terms of  $\alpha$  (see Lemma 1.34), and vertical multigraphs. The latter are defined as surfaces which are transverse to the vertical unit Killing field  $\xi$  (or, equivalently, whose angle function  $v = \langle N, \xi \rangle$  does not vanish, where  $N$  denotes a unit vector field normal to the surface) and they can be locally studied in parametric form. More explicitly, given a smooth local section of the fibration  $F_0 : V \subset M \rightarrow \mathbb{E}$  and a smooth function  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ , the graph associated to  $u$  with respect to  $F_0$  is the surface parametrized by

$$F_u : V \rightarrow \mathbb{E}, \quad F_u(p) = \phi_{u(p)}(F_0(p)),$$

where  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  stands for the 1-parameter group of vertical translations. The mean curvature  $H(u)$  of such a graph can be written in divergence form as

$$H(u) = \frac{1}{2} \operatorname{div}_M \left( \frac{Gu}{\sqrt{1 + \|Gu\|_M^2}} \right),$$

where  $Gu = \nabla_M u - \pi_*(\nabla_{\mathbb{E}} d) \in \mathfrak{X}(M)$  and  $d : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  is the oriented vertical distance in  $\mathbb{E}$  to the initial section  $F_0$  and  $\nabla_{\mathbb{E}}$  stands for the gradient in  $\mathbb{E}$  (see also [LR09]). It can be shown that  $H$  is a second-order quasilinear elliptic operator and, then, two functions  $u$  and  $v$  defined over the same domain with  $H(u) = H(v)$  satisfy a maximum principle and, more generally, a nodal theorem which describes the intersection of the corresponding graphs (see Theorem 1.39).



BOUNDARY CURVATURE ESTIMATES IN  $M \times \mathbb{R}$ 

The main objective of chapters 2, 3 and 4 is to understand constant mean curvature multigraphs  $\Sigma$  in  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ . In chapter 2, we will focus on the study of constant mean curvature graphs in the product  $M \times \mathbb{R}$ , where  $M$  is a Riemannian surface. Observe that the projection over the first factor is a Killing submersion with zero bundle curvature and Killing vector field  $\partial_t$ , where  $t$  denotes the parameter in the  $\mathbb{R}$ -factor (they include the homogeneous spaces  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ). The study of minimal and constant mean curvature surfaces in  $M \times \mathbb{R}$  has been extensive during the last decade; for some early references, the reader can check [Roso2, MR04, MR05].

We will begin by studying constant mean curvature graphs  $\Sigma \subset M \times \mathbb{R}^+$  whose boundary  $\partial\Sigma$  lies in  $M \times \{0\}$ , paying special attention to the case when the angle function  $\nu = \langle N, \partial_t \rangle$  is constant along the boundary or, in other words, when a capillarity condition is satisfied. Note that  $N$  is the unit normal vector field to  $\Sigma$  for which the mean curvature of  $\Sigma$  is  $H \geq 0$ . This last case contains the surfaces which are symmetric with respect to a horizontal slice and, hence, all the compact embedded surfaces of constant mean curvature  $H$  in  $M \times \mathbb{R}$  (called *H-bigraphs* in the sequel) by a classical application of the Alexandrov reflection principle [Ale56]. In the case of  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ , compact embedded surfaces with constant mean curvature are classified for  $\kappa \leq 0$ ; they exist if, and only if,  $4H^2 + \kappa > 0$ , and they are rotationally invariant spheres. Nevertheless, the case  $\kappa > 0$  is quite different; namely, there exist rotationally invariant embedded constant mean curvature tori (see Section 2.1 for a complete classification of the constant mean curvature *H-bigraphs* invariant by a 1-parameter group of ambient isometries). As a consequence of the construction carried out in Section 3.4, we will deduce that there also exist many compact (possibly non-embedded) periodic tori which are also symmetric with respect to some horizontal slice.

The classification of compact *H-bigraphs* in  $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  is not well understood yet, and we will give some results concerning the vertical maximum height that such a surface can reach, as well as bounds for the geodesic curvature of its curve of horizontal reflective symmetry. We will also treat the non-compact case in  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ , which is not so easy for  $\kappa \leq 0$ . We refer the reader to the work of Ritoré [Rit97] and Große-Brauckmann [GB93], where some examples are constructed for  $\kappa = 0$ .

Back into the general case  $\Sigma \subset M \times \mathbb{R}$ , if we denote by  $c$  the infimum of the Gaussian curvature of the domain of  $M$  over which  $\Sigma$  is a graph, we will assume the hypothesis  $4H^2 + c > 0$ . As constant mean curvature vertical graphs in  $M \times \mathbb{R}$  are stable (their angle function does not vanish

and lies in the kernel of the stability operator, see Lemma 5.2), it is possible to apply Theorem 2.8 in [MPRo8] to conclude that the intrinsic distance function  $d(p, \partial\Sigma)$ ,  $p \in \Sigma$ , is bounded, which implies the height function is also bounded. In the case  $4H^2 + c \leq 0$ , this property fails to hold as invariant examples in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  given by Onnis [Onno8] and Sa Earp [SaEo8] show. Let us also consider the height function  $h \in C^\infty(\Sigma)$  given by  $h(p, t) = t$  and the angle function  $v \in C^\infty(\Sigma)$ .

Aledo, Espinar and Gálvez considered in [AEGo8] an H-graph  $\Sigma \subseteq M \times \mathbb{R}$  over a compact open domain  $\Omega$  that extends to its boundary with  $h = 0$  and  $v = v_0$  in  $\partial\Omega$ . Taking  $c = \inf\{K_M(p) : p \in \Omega\}$  and supposing that  $4H^2 + c > 0$ , then they proved that  $\Sigma$  can reach at most height  $\alpha(c, H, v_0)$ , where the value of  $\alpha(c, H, v_0)$  is given by

$$\begin{cases} \frac{4H}{\sqrt{-4cH^2 - c^2}} \left( \arctan\left(\frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{c+4H^2}}\right) + \arctan\left(\frac{v_0\sqrt{-c}}{\sqrt{c+4H^2}}\right) \right) & \text{if } c < 0, \\ \frac{1+v_0}{H} & \text{if } c = 0, \\ \frac{4H}{\sqrt{4cH^2 + c^2}} \left( \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c+4H^2}}\right) + \operatorname{arctanh}\left(\frac{v_0\sqrt{c}}{\sqrt{c+4H^2}}\right) \right) & \text{if } c > 0. \end{cases} \quad (66)$$

Indeed, they gave above the estimate for the case  $v_0 = 0$  but their argument can be directly generalized. They also proved that this bound is sharp in terms of  $c$  and  $H$ , in the sense that if equality holds, then  $\Omega$  has constant Gaussian curvature  $c$  and, if  $M = \mathbb{M}^2(c)$ , then the surface is a spherical cap of a rotationally invariant sphere meeting the boundary with constant angle  $v_0$ . This result is a generalization of the ideas given by Serrin [Ser69] and is a consequence of the maximum principle for a clever choice of a geometric subharmonic function involving  $h$  and  $v$ .

When we restrict ourselves to the capillarity problem (i.e.,  $\Sigma$  satisfies  $v = v_0$  for some  $-1 < v_0 \leq 0$  along its boundary), we prove the following estimate for the geodesic curvature by applying the maximum principle at the boundary rather than in the interior (see Theorem 2.6).

Let  $\Sigma \subseteq M \times \mathbb{R}^+$  be a constant mean curvature  $H > 0$  graph over a compact regular domain  $\Omega \subseteq M$  with zero values in  $\partial\Omega$ . Suppose that  $c = \inf\{K_M(p) : p \in \Omega\} > -4H^2$  and  $v = v_0$  in  $\partial\Omega$  for some  $-1 < v_0 \leq 0$ . Then,

$$\kappa_g \geq \frac{-4H^2 + c(1 - v_0^2)}{4H\sqrt{1 - v_0^2}}, \quad (*)$$

where  $\kappa_g$  is the geodesic curvature of  $\partial\Omega$  in  $M$  with respect to the outer conormal vector field.

Furthermore, if there exists  $p \in \partial\Omega$  such that equality in  $(\star)$  holds, then  $\Omega$  has constant Gaussian curvature  $c$  and  $\Sigma$  has zero Abresch-Rosenberg differential (see Remark 2.5).

This result has some interesting consequences for compact H-bigraphs (see Corollaries 2.10 and 2.11) due to the fact that, for  $v_0 = 0$ ,  $c > 0$  and  $0 < H < \frac{1}{2}\sqrt{c}$ , the previous bound gives  $\kappa_g \geq 0$ , so the boundary is convex towards the outer conormal vector field.

The next step is to assume additional restrictions on the maximum height that the H-graph reaches in  $M \times \mathbb{R}^+$ . More specifically, we will suppose that  $|h| \leq m \cdot \alpha(c, H, v_0)$  for some constant  $0 < m \leq \frac{1}{2}$  (i.e.,  $m$  is the fraction of the maximum height of the spherical cap with the same mean curvature and capillarity angle) and improve the previous bound to the following one (see Theorem 2.13).

If there exists  $0 < m \leq \frac{1}{2}$  such that  $|h| \leq m \cdot \alpha(c, H, v_0)$ , then the following lower bound for the geodesic curvature of  $\partial\Omega$  in  $M$  (with respect to the outer conormal vector field) holds:

$$\kappa_g \geq \frac{(4 - 8m)H^2 + c(1 - v_0^2)}{4mH\sqrt{1 - v_0^2}}.$$

As we did in the general case, we can get some applications to compact H-bigraphs (see Corollaries 2.14 and 2.15). Under these assumptions, the characterization of equality becomes trickier, and we develop a technique which shows that a constant mean curvature surface whose height is a function of the angle must be invariant by a 1-parameter group of horizontal isometries (see Lemma 2.12). The proof is in the spirit of that of Espinar and Rosenberg (cf. [ER09]) for surfaces with vanishing Abresch-Rosenberg differential.

Finally, we remove the compactness condition in the case  $M = \mathbb{M}^2(\kappa)$  and prove the following result (see 2.16). The reason why we restrict to  $M = \mathbb{M}^2(\kappa)$  is that the argument requires that  $M \times \mathbb{R}$  is homogeneous.

Let  $\Sigma \subseteq \mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  be a properly embedded H-bigraph over a domain  $\Omega \subseteq \mathbb{M}^2(\kappa)$  with  $4H^2 + \kappa > 0$ , symmetric with respect to  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \{0\}$ , and suppose that there exists  $0 < m \leq \frac{1}{2}$  such that  $|h| \leq m \cdot \alpha(\kappa, H, 0)$  in  $\Sigma$ . Then, the following lower bound for the geodesic curvature of  $\partial\Omega$  in  $\mathbb{M}^2(\kappa)$  (with respect to the outer conormal vector field) holds:

$$\kappa_g \geq \frac{(4 - 8m)H^2 + \kappa}{4mH}.$$

Furthermore, if equality holds at some  $p \in \partial\Omega$ , then

- i)  $\Sigma$  is a rotationally invariant torus in the case  $\kappa > 0$ , or
- ii)  $\Sigma$  is a cylinder invariant under horizontal translations in the case  $\kappa = 0$ , or
- iii)  $\Sigma$  is a cylinder invariant under hyperbolic translations in the case  $\kappa < 0$ .

This result is based on ideas given by Ros and Rosenberg in [RR10]. We remark that the analysis of the equality carried out in the last result also follows from Lemma 2.12, and that the invariant examples characterized in the statement are all described in section 2.2.

To finish the chapter, we give an application of the above techniques to get a sharp lower bound for the distance from a point in  $\Sigma$  to  $\partial\Sigma$ . More explicitly, we prove that such a distance is bigger than or equal to the distance of the rotationally invariant spherical cap with the same mean curvature in the homogeneous case (see Theorem 2.18).

#### CONJUGATE PLATEAU CONSTRUCTIONS

In 1970, Lawson [Law70] established a celebrated correspondence between simply-connected minimal surfaces in a space form  $\mathbb{M}^3(\kappa)$  and constant mean curvature  $H$  surfaces in  $\mathbb{M}^3(\kappa - H^2)$ . He applied this correspondence to the construction of doubly-periodic mean curvature one surfaces in  $\mathbb{R}^3$ . The technique he used to construct such examples is known as the *conjugate Plateau construction* and it has become a fruitful method to obtain constant mean curvature surfaces in space forms (see, for example, [KPS88, Kar89, GB93, Pol94]). The main steps of this construction are the following:

1. Solve the Plateau problem in a geodesic polygon in  $\mathbb{M}^3(\kappa)$ .
2. Consider the *conjugate*  $H$ -surface in  $\mathbb{M}^3(\kappa - H^2)$  whose boundary lies on some planes of symmetry, since the initial surface is bounded by geodesic curves (cf. [Kar89, Section 1]).
3. Reflect the resulting surface across its edges to get a complete (not necessarily embedded)  $H$ -surface in  $\mathbb{M}^3(\kappa - H^2)$ .

The purpose of Chapter 3 is to define rigorously all the ingredients necessary to extend the conjugate Plateau construction to the case of  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , and to apply the method to construct constant mean curvature  $H$  surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  (for  $H \geq \frac{1}{2}$ ) and  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  (for  $H > 0$ ). This generalization was first introduced by Hauswirth, Sa Earp and Toubiana [HST08] in the case of the

associate minimal surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , but many other papers have appeared in this area (see, for example, [MR12, Rod, MRR]).

The first tool we will need is an analogous to the Lawson correspondence in the  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ -setting, a role which is played by the Daniel correspondence. Briefly, given  $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  and  $\mathbb{E}^* = \mathbb{E}(\kappa^*, \tau^*)$  such that  $\kappa - 4\tau^2 = \kappa^* - 4(\tau^*)^2$ , and given  $\theta, H, H^* \in \mathbb{R}$  satisfying  $H + i\tau = e^{i\theta}(H^* + i\tau^*)$ , there is a isometric correspondence between simply-connected  $H$ -surfaces immersed in  $\mathbb{E}$  and simply-connected  $H^*$ - surfaces immersed in  $\mathbb{E}^*$  (see [Dan07, Theorem 5.2] for a full description). Corresponding surfaces are determined up to an ambient isometry and they are often called *sister surfaces*.

Although a complete discussion is made in Section 3.1, we will restrict ourselves here to the case of the correspondence between a minimal immersion  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$  and its sister  $H$ -surface  $\phi^* : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  for  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ . Let us remark that it is instrumental in what follows the fact that the phase parameter  $\theta$  is equal to  $\frac{\pi}{2}$ . We will obtain the following correspondence between curves in  $\Sigma$  (see Lemma 3.2):

Given a smooth curve  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$ , if  $\phi(\alpha)$  is a horizontal geodesic (resp. vertical) in  $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ , then  $\phi^*(\alpha)$  is contained in a vertical (resp. horizontal) plane in  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ , which the immersion  $\phi^*$  meets orthogonally.

We will also get a correspondence between isometries (see Lemma 3.3):

If  $\phi(\Sigma)$  is invariant by a reflection across a horizontal (resp. vertical) geodesic  $\phi(\alpha)$  in  $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$  then  $\phi^*(\Sigma)$  is invariant by a reflection with respect to a vertical (resp. horizontal) plane in  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ .

Moreover, the curve  $\phi^*(\alpha)$  is the curve where  $\phi^*$  meets (orthogonally) the plane of reflection.

Unfortunately, the control of elements which are neither vertical nor horizontal seems to be difficult and we are only able to consider polygons made out of vertical and horizontal geodesics, which is a quite rigid condition in  $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ . On the other hand, we must ensure that the surface extended by reflection with respect to geodesics or planes produces a regular surface, but this is a consequence of some general results (cf. [DHKW92, CS85]), which are commented in Section 3.1.2.

In order to illustrate the previous results, in Section 3.2 we will apply the correspondence to the spherical helicoids in the Berger spheres, i.e., minimal surfaces which are ruled by horizontal geodesics and are invariant under a 1-parameter group of helicoidal motions in the Berger spheres. They are characterized as the only surfaces in the underlying  $\mathbb{S}^3$  which are minimal for

any Berger metric (cf. [Tor10a, Proposition 1]). We will show that their sister H-surfaces in  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  are the rotationally invariant ones constructed by Hsiang and Hsiang [HH89] and Pedrosa and Ritoré [PR99] in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  (see Proposition 3.5), and the rotationally invariant torus in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  or the cylinder invariant under hyperbolic translations in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  (these exceptional cases are discussed in Section 3.4.2).

The second step of the generalization is to guarantee the existence of solutions of the Plateau problem with boundary a certain geodesic polygon. In fact, we will be able to prove an existence and uniqueness result for a wider class of possible boundaries in a general Killing submersion  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$ , which is partially based on the ideas of Pinheiro [Pino7]. To state this result, we need to introduce the concept of an *admissible Nitsche contour*. Roughly speaking, a Nitsche contour is a piecewise-smooth closed curve  $\Gamma \subset \mathbb{E}$  such that (a)  $\Gamma$  is made out of regular segments which are either vertical segments or they project one-to-one by  $\pi$ , and (b) the  $\pi$ -projection of  $\Gamma$  bounds a relatively-compact simply-connected domain  $\Omega \subset M$  (see Definition 3.7). If the solid cylinder  $\pi^{-1}(\overline{\Omega})$  is a mean convex 3-manifold with boundary in the sense of [MY82a], we will call the Nitsche contour admissible (see Lemma 3.10). We now state the aforementioned existence and uniqueness result (see Theorem 3.11).

Let  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  be a Killing submersion whose fibers have infinite length and suppose that  $\Gamma \subset \mathbb{E}$  is an admissible Nitsche contour with associated domain  $\Omega \subset M$ . Then, there exists a unique minimal surface  $\Sigma \subset \pi^{-1}(\overline{\Omega})$  with boundary  $\Gamma$ . Moreover, the interior of the surface  $\Sigma$  is a vertical graph over  $\Omega$ .

The first application of these results is the construction of a 1-parameter family of complete singly-periodic H-surfaces in the product spaces  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  for  $4H^2 + \epsilon > 0$ ,  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ , which come from minimal surfaces in the Berger spheres  $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ . The resulting surfaces in  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  are invariant by a discrete 1-parameter group of ambient isometries, consisting of rotations in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  or hyperbolic translations in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  (see Theorem 3.18). Moreover, we make a quite precise study of the original piece in the Berger sphere (see Section 3.4.1) that allows us to depict quite faithfully its sister surface (see Section 3.4.2) and to deduce that it must have an unduloid-like shape.

One of the most interesting properties of these examples (and related to the results in the previous section) is the fact that they are all symmetric with respect to a horizontal slice (though not necessarily embedded) and have bounded height. Furthermore, for each  $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$ , the construction provides a unique example whose maximum height is exactly  $m \cdot \alpha(\epsilon, H, 0)$ ,

where we recall that  $\alpha(\epsilon, H, 0)$  is the maximum height of a rotationally invariant  $H$ -sphere in  $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  and  $\frac{1}{2}\alpha(\epsilon, H, 0)$  is the maximum height of the rotationally invariant  $H$ -torus (for  $\epsilon = 1$ ) or the  $H$ -cylinder invariant under hyperbolic translations (for  $\epsilon = -1$ ). In fact, this construction gives a continuous deformation between these two examples. In the case  $\epsilon = 1$ , we will show that they give rise to many compact examples for every value of  $H$ .

The second application of the conjugate Plateau construction, which Section 3.5 is devoted to, is to obtain  $1/2$ -surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  which have the symmetries of a tessellation of  $\mathbb{H}^2$  by regular polygons (cf. Theorem 3.24). This is the horizontal analog in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  of doubly-periodic minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$ , but it does not have a counterpart in  $S^2 \times \mathbb{R}$  (recall that the value  $H = 1/2$  is critical as it has been mentioned above). In this case, the correspondence comes from minimal surfaces in the Heisenberg group.

Furthermore, we will give some applications to the construction of compact  $1/2$ -surfaces in  $M \times \mathbb{R}$ , where  $M$  is a compact surface with constant Gaussian curvature  $-1$  that can be realized by a *regular gluing pattern* (i.e., a gluing pattern which can be carried out in a regular tessellation and such that the vertices of any polygon of the tessellation are all identified together) of the sides of a regular polygon in  $\mathbb{H}^2$  (see Corollary 3.27). In particular, all topological surfaces with negative Euler characteristic can be produced with this method.

#### COMPLETE MULTIGRAPHS IN $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$

It has been already mentioned that *vertical multigraphs* are natural examples to consider in the theory of constant mean curvature surfaces in a Killing submersion  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  (let us recall that a vertical multigraph is a surface which is transverse to the vertical Killing vector field). Nevertheless, it is interesting to determine whether a multigraph is embedded or not, or whether it is a vertical graph (i.e., it does not intersect twice any vertical fiber). Chapter 4 is devoted to solve these questions when the  $H$ -multigraph is assumed to be complete in  $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  for  $4H^2 + \kappa < 0$  or  $4H^2 + \kappa > 0$ . More specifically, we will prove that the only examples for  $4H^2 + \kappa > 0$  are horizontal slices in  $S^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  (see Proposition 4.4), and that every complete vertical  $H$ -multigraph with  $4H^2 + \kappa < 0$  is, in fact, a vertical graph (see Section 4.2).

Hauswirth, Rosenberg and Spruck (cf. [HRS10, Theorem 1.2]) proved a halfspace-type theorem for properly embedded  $1/2$ -surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  to deduce that a complete vertical multigraph with mean curvature  $1/2$  in

$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  is an entire vertical graph. Later on, Daniel and Hauswirth extended this result to the Heisenberg group  $\text{Nil}_3$  by proving another halfspace-type theorem for minimal surfaces properly immersed in  $\text{Nil}_3$ . Finally, Fernández and Mira (cf. [FM10, Theorem 6.10] for a full reference) extended those results to the case of complete vertical multigraphs in  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  with constant mean curvature  $H$  satisfying  $4H^2 + \kappa = 0$ , obtaining that they must be entire vertical graphs, too. Putting all the cases together, we have the following nice depiction of complete vertical multigraphs in  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .

Let  $\Sigma$  be a complete vertical multigraph with constant mean curvature  $H$  in  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Then, one of the following statements hold:

- a)  $\mathbb{E}(\kappa, \tau) = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\Sigma$  is a horizontal section.
- b)  $4H^2 + \kappa \leq 0$  and  $\Sigma$  is a vertical graph.

Furthermore, if  $4H^2 + \kappa = 0$ , then  $\Sigma$  is an entire minimal graph.

Note that, in the case  $4H^2 + \kappa < 0$ , the fibration is over  $\mathbb{H}^2(\kappa)$  and, up to an homothety in the metric, we can suppose  $\kappa = -1$  and  $|H| < \frac{1}{2}$ . Under these conditions, we will prove that the boundary of the domain  $\Omega \subset \mathbb{H}^2$  over which the graph is defined consists of (possibly infinitely many) curves of constant geodesic curvature  $2H$  or  $-2H$  in  $\mathbb{H}^2$ , where the graph takes constant values  $+\infty$  or  $-\infty$ . Moreover, the sign of the boundary curvature is determined by the sign of this asymptotic value and the choice of orientation. Let us also remark that the condition  $|H| < \frac{1}{2}$  is also equivalent to the fact that a complete curve of constant geodesic curvature  $2H$  in  $\mathbb{H}^2$  has infinite length.

#### PARABOLIC STABLE SURFACES

It has been pointed out that  $H$ -surfaces in a Riemannian three-manifold  $\widetilde{M}$  constitute a natural object of study since they are critical points of the functional  $\mathcal{J} = \text{Area} - 2H \cdot \text{Volume}$  for compactly supported normal variations (see Proposition 5.1). In what follows, we will restrict ourselves to the case of a 2-sided surface  $\Sigma$  so the variational vector field of such a variation is given by a function rather than by a section of the normal bundle of  $\Sigma$  (equivalently,  $\Sigma$  admits a globally defined normal vector field  $N$ ).

Among all complete  $H$ -surfaces in  $\widetilde{M}$ , the subclass of *stable*  $H$ -surfaces (i.e., those satisfying  $\mathcal{J}''(0) \geq 0$  for every compactly supported normal variation) play a special role in the theory. This is due, for instance, to the fact that, under some natural conditions, limits of complete  $H$ -surfaces produce complete stable  $H$ -surfaces as Meeks, Pérez and Ros proved (cf. [MPR10]). This



notion of stability is stronger than usual stability associated to isoperimetry, where  $\mathcal{J}''(0) \geq 0$  is required for every normal variation given by a compactly supported function whose integral vanishes.

More explicitly, for a given 2-sided immersed H-surface  $\Sigma$  in  $\widetilde{M}$  and a normal variation of  $\Sigma$  with variational field  $fN$ ,  $f \in C_0^\infty(\Sigma)$ , we can write

$$\mathcal{J}''(0) = Q(f, f) = - \int_{\Sigma} fLf,$$

where  $L = \Delta + |A|^2 + \text{Ric}(N)$  and  $A$  stands for the shape operator of the immersion. This extrinsic formulation motivates the interest of the study of a purely intrinsic Schrödinger-type operator  $L = \Delta + q$  on an abstract Riemannian  $n$ -manifold  $(M, ds^2)$ , where  $\Delta$  is the Laplacian with respect to  $ds^2$  and  $q \in C^\infty(M)$ , under the condition that  $-\int_M fLf \geq 0$  for all  $f \in C_0^\infty(M)$  (this condition is often written as  $-L \geq 0$ ).

If we assume that the underlying conformal structure of  $ds^2$  is *parabolic* (i.e., every positive superharmonic function on  $M$  is constant), this condition allows us to prove the following result on the operator  $L$ .

Let  $(M, ds^2)$  be a Riemannian parabolic  $n$ -manifold. Consider an operator  $L = \Delta + q$ , where  $q \in C^\infty(M)$ . Let  $u, v \in C^\infty(M)$  such that  $u$  is bounded,  $v > 0$  and  $uvLu \geq u^2Lv$  on  $M$ . Then,  $u/v$  is constant.

In other words, the behavior of the first eigenfunction of  $L$  is similar to that of a classical Schrödinger operator defined on a compact subdomain. For instance, if there exists a bounded solution of  $Lu = 0$  on  $M$ , then either  $u$  identically vanishes or it vanishes nowhere and the linear space  $\{u \in C^\infty(M) : Lu = 0, u \text{ is bounded}\}$  is 1-dimensional (see Theorem 5.5 and Corollary 5.6).

Given a Killing submersion  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  and an H-surface  $\Sigma$  immersed in  $\mathbb{E}$ , we can apply the above intrinsic result to the angle function, which is a bounded function in the kernel of the stability operator of  $\Sigma$ , to obtain conditions under which the surface is a (vertical) multigraph or even an entire graph. The following result follows easily.

Let  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$  be a Killing submersion. Any orientable, immersed, parabolic, stable H-surface in  $\mathbb{E}$  is either a vertical multigraph or a vertical cylinder over a curve of geodesic curvature  $2H$ .

In the case of the space  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , we can improve this result by using the information about multigraphs that we proved in Theorem 4.1.

Let  $\Sigma$  be an orientable, parabolic, complete, immersed stable H-surface in  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Then, one of the following statements hold:

- a)  $\mathbb{E}(\kappa, \tau) = \mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ ,  $H = 0$  and  $\Sigma$  is a horizontal slice.
- b)  $4H^2 + \kappa \leq 0$  and  $\Sigma$  is either a vertical graph or a vertical cylinder over a complete curve of geodesic curvature  $2H$  in  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ .

Rosenberg [Ros06] proved that, if  $\Sigma$  is an orientable, complete, immersed, stable H-surface in  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , then  $H^2 \leq \frac{1}{3}(\tau^2 - \kappa)$ , except for the special case of a horizontal slice in  $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ . It is conjectured that the optimal upper bound on  $H^2$  under these conditions is  $-\frac{\kappa}{4}$  rather than  $\frac{1}{3}(\tau^2 - \kappa)$ . In this line, the last result displayed above gives a positive answer to this conjecture under the additional assumption of parabolicity. Nevertheless, we will be able to improve slightly the bound  $\frac{1}{3}(\tau^2 - \kappa)$  without requiring parabolicity (see Corollary 5.10).

Let  $\Sigma$  be an orientable, complete, immersed, stable H-surface in  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  with  $\kappa < \tau^2$ . Then,  $H^2 < \frac{1}{3}(\tau^2 - \kappa) - \varepsilon$  for some  $\varepsilon > 0$ .

This result was already proved by Meeks, Pérez and Ros [MPRo8] in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  and this particular case turns out to imply the whole statement via the Daniel correspondence. Nevertheless, the proof supplied is independent.

To finish Chapter 5, we will introduce *horizontal* minimal graphs in the Heisenberg group  $\text{Nil}_3 = \mathbb{E}(0, \frac{1}{2}) \cong \mathbb{R}^3$  and study the corresponding Bernstein problem. A horizontal graph over a domain  $\Omega$  in the  $(y, z)$ -plane is the surface parametrized in terms of a function  $u \in C^\infty(\Omega)$  by

$$F(y, z) = \left( u(y, z), y, z + \frac{y}{2}u(y, z) \right), \quad (y, z) \in \Omega, \quad (**)$$

These graphs are called horizontal since they are transversal to integral curves of the Killing vector field  $X = \partial_x + \frac{y}{2}\partial_z$ , though this construction does not give special priority to any horizontal direction in  $\text{Nil}_3$ . In spite of the fact that every minimal horizontal graph is stable, the Killing vector field  $X$  fails to be bounded. Nonetheless, the arguments for stable H-surfaces in this chapter give the following result (see Theorem 5.12). Note that every *entire* horizontal graph in  $\text{Nil}_3$  (i.e. the domain  $\Omega$  appearing in (\*\*)) is the whole  $(y, z)$ -plane) is proper and, thus, complete.

Let  $\Sigma$  be a complete minimal horizontal multigraph in  $\text{Nil}_3$ . If  $\Sigma$  is parabolic, then it is a vertical plane and, in particular, it is an entire horizontal graph.



## BIBLIOGRAFÍA

---

- [AR04] U. Abresch and H. Rosenberg. A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in  $S^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Acta Math.*, 193(2):141–174, 2004.
- [AR05] U. Abresch and H. Rosenberg. Generalized Hopf differentials. *Mathematica Contemporânea*, 28:1–28, 2005.
- [ADR07] L. J. Alías, M. Dajczer and H. Rosenberg. The Dirichlet problem for constant mean curvature surfaces in Heisenberg space. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 30: 513–522, 2007.
- [Ale56] A.D. Alexandrov. Uniqueness theorems for surfaces in the large I. *Vestnik Leningrad Univ. Math* 11:5–17, 1956.
- [AEG08] Juan A. Aledo, José M. Espinar and José A. Gálvez. Height estimates for surfaces with positive constant mean curvature in  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ . *Illinois J. Math.* (1) 52:203–211, 2008.
- [AC00] L. Ambrosio and X. Cabré. Entire solutions of semilinear elliptic equations in  $\mathbb{R}^3$  and a conjecture of De Giorgi. *J. Amer. Math. Soc.*, 13(4):725–739, 2000.
- [Aro57] N. Aronszajn. A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order. *J. Math. Pures Appl.* (9) 36:235–249, 1957.
- [BCE88] J. L. Barbosa, M. do Carmo, and J. Eschenburg. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature in Riemannian manifolds. *Math. Z.*, 197:123–138, 1988.
- [BCN97] H. Berestycki, L. Caffarelli, and L. Nirenberg. Further qualitative properties for elliptic equations in unbounded domains. Dedicated to Ennio De Giorgi. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), 25(1-2):69–94, 1997.
- [Ber55] L. Bers. Local Behavior of Solutions of General Linear Elliptic Equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 8:473–496, 1955.
- [Car92] M. do Carmo. Riemannian Geometry. *Springer-Verlag*, 1992. ISBN: 0-8176-3490-8
- [Che76] S.-Y. Cheng. Eigenfunctions and Nodal Sets. *Comment. Math. Helv.* 51, 43–55 (1976).

- [CY75] S. Y. Cheng and S. T. Yau. Differential equations on riemannian manifolds and their geometric applications. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28:333–354, 1975.
- [CS85] H. Choi and R. Schoen. The space of minimal embeddings of a surface into a three-dimensional manifold of positive Ricci curvature. *Invent. Math.* (3) 81:387–394, 1985.
- [CKMR04] P. Collin, R. Kusner, W. Meeks and H. Rosenberg. The Topology, Geometry and Conformal Structure of Properly Embedded Minimal Surfaces. *J. Differential Geometry* (2) 67:377–393, 2004.
- [CR10] P. Collin and H. Rosenberg. Construction of harmonic diffeomorphisms and minimal graphs. *Annals of Math.*, 172:1879–1906, 2010.
- [DL07] M. Dajczer and J. H. de Lira. Killing graphs with prescribed mean curvature and Riemannian submersions. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 26(3):763–775, 2009.
- [DL08] M. Dajczer and J. H. de Lira. Conformal Killing graphs with prescribed mean curvature. Preprint, 2008. arXiv:0812.2642 [math.DG]
- [Dan07] B. Daniel. Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds. *Comment. Math. Helv.*, 82(1):87–131, 2007.
- [DHM09] B. Daniel, L. Hauswirth and P. Mira. Lecture notes on homogeneous 3-manifolds. Korea Institute for Advanced Study, Seoul, Korea. 4<sup>th</sup> KIAS workshop on Differential Geometry, 2009.
- [DH09] B. Daniel and L. Hauswirth. Half-space theorem, embedded minimal annuli and minimal graphs in the Heisenberg group. *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), 98(2):445–470, 2009.
- [DHM09] B. Daniel, L. Hauswirth, and P. Mira. Lectures notes on homogeneous 3-manifolds. *4th KIAS workshop on Differential Geometry*. Korea Institute for Advanced Study, Seoul, Korea, 2009
- [DHKW92] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, and O. Wohlrab. Minimal Surfaces II. *Springer-Verlag*. (1992).
- [EO10] J. M. Espinar and I. S. de Oliveira. Locally convex surfaces immersed in a Killing submersion. Preprint, 2010. arXiv:1002.1329v1 [math.DG]
- [ER09] J. M. Espinar and H. Rosenberg. Complete constant mean curvature surfaces in homogeneous spaces. To appear in *Comment. Math. Helv.*, 2009.
- [FM07] I. Fernandez and P. Mira. A characterization of constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds. *Diff. Geom. Appl.*, 25:281–289, 2007.

- [FM09] I. Fernandez and P. Mira. Holomorphic quadratic differentials and the Berstein problem in Heisenberg space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 361:5737–5752, 2009.
- [FM10] I. Fernandez and P. Mira. Constant mean curvature surfaces in 3-dimensional Thurston geometries. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Hyderabad, 2010.
- [FMP99] C. B. Figueroa, F. Mercuri, and R. Pedrosa. Invariant surfaces of the Heisenberg groups. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 177:173–194, 1999.
- [Fis85] D. Fischer-Colbrie. On complete minimal surfaces with finite Morse index in 3-manifolds. *Invent. Math.*, 82:121–132, 1985.
- [GB93] K. Große Brauckmann. New surfaces of constant mean curvature. *Math. Z.*, 214:527–565, 1993.
- [GT01] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. *Springer-Verlag*, 2001. ISBN: 978-354041160-7.
- [Gri99] A. Grigor’yan. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of Brownian motion on Riemannian manifolds. *Bull. of A.M.S.*, 36(2):135–249, 1999.
- [HL82] R. Harvey and B. Lawson. Calibrated geometries. *Acta Math.*, 148:47–157, 1982.
- [HRS09] L. Hauswirth, H. Rosenberg and J. Spruck, Infinite boundary value problems for constant mean curvature graphs in  $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ . *American Journal of Mathematics*, 131:195–226, 2009.
- [HRS10] L. Hauswirth, H. Rosenberg and J. Spruck. On complete mean curvature  $\frac{1}{2}$  surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Comm. Anal. Geom.*, 16(5):989–1005, 2008.
- [HST08] L. Hauswirth, R. Sa Earp and E. Toubiana. Associate and conjugate minimal immersions in  $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$ . *Tohoku Math. J. (2)* 60(2):267–286, 2008.
- [HH89] W. T. Hsiang and W. Y. Hsiang. On the uniqueness of isoperimetric solutions and imbedded soap bubbles in noncompact symmetric spaces. I. *Invent. Math.*, 98:39–58, 1989.
- [Jos02] J. Jost. Compact Riemann Surfaces: an introduction to contemporary mathematics. Second Edition. *Springer-Verlag*, 2002. ISBN: 3-540-43299-X
- [Kar89] H. Karcher. The triply periodic minimal surfaces of A. Schoen and their constant mean curvature companions. *Manuscr. Math.* 64:291–357, 1989.

- [KPS88] H. Karcher, U. Pinkall, and I. Sterling. New minimal surfaces in  $S^3$ . *J. Differential Geom.* **28**(2):169–185, 1988.
- [Kuo69] T.-C. Kuo. On  $C^0$ -sufficiency of jets of potential functions. *Topology* **8**:161–171, 1969.
- [Law70] H. Blaine Lawson, Jr. Complete minimal surfaces in  $S^3$ . *Ann. of Math.* **92**(2):335–374, 1970.
- [LR09] C. Leandro and H. Rosenberg. Removable singularities for sections of Riemannian submersions of prescribed mean curvature. *Bull. Sci. Math.* **133**:445–452, 2009.
- [LS10] G. Li and I. Salavessa. Bernstein-Heinz-Chern results in calibrated manifolds. *Rev. Mat. Iberoam.* **26**(2):651–692, 2010.
- [Man10] J. M. Manzano. Estimates for constant mean curvature graphs in  $M \times \mathbb{R}$ . Preprint, 2010. arXiv:1006.5683v1 [math.DG]
- [MaPR11] J. M. Manzano, J. Pérez and M. M. Rodríguez. Parabolic stable surfaces with constant mean curvature. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* **42**(1-2):137–152, 2011.
- [MT11] J. M. Manzano and F. Torralbo. New examples of constant mean curvature surfaces in  $S^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Preprint, 2011. arXiv:1104.1259v3 [math.DG].
- [MRR] L. Mazet, M. M. Rodríguez and H. Rosenberg. The Dirichlet problem for the minimal surface equation with possible infinite boundary data over domains in a Riemannian surface. *Proc. London Math. Soc.* **102**(3):985–1023, 2011.
- [MRR] L. Mazet, M. M. Rodríguez, and H. Rosenberg. Periodic constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Preprint, 2011. arXiv:1106.5900 [math.DG]
- [MR12] F. Morabito and M. M. Rodríguez. Saddle towers and minimal knoids in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *J. Inst. Math. Jussieu* **11**(2):333–349, 2012.
- [MP11] W. H. Meeks III and J. Pérez,. Constant mean curvature surfaces in metric Lie groups. To appear in *Contemporary Mathematics*.
- [MPRo8] W. H. Meeks III, J. Pérez, and A. Ros. Stable constant mean curvature surfaces. In *Handbook of Geometrical Analysis*, volume 1, pages 301–380. International Press, edited by Lizhen Ji, Peter Li, Richard Schoen and Leon Simon, ISBN: 978-1-57146-130-8, 2008.
- [MPR10] W. H. Meeks III, J. Pérez, and A. Ros. Limit leaves of a CMC lamination are stable. *J. Differential Geometry* **84**, 179–189 (2010).

- [MR04] W. H. Meeks III and H. Rosenberg. Stable minimal surfaces in  $M \times \mathbb{R}$ . *J. Differential Geometry* **68**, 515–534 (2004).
- [MR05] W. H. Meeks III and H. Rosenberg. The theory of minimal surfaces in  $M \times \mathbb{R}$ . *Comment. Math. Helv.* **80**, 515–534 (2005).
- [MY82a] W. H. Meeks III and S.-T. Yau. The Existence of Embedded Minimal Surfaces and the Problem of Uniqueness. *Math. Z.* **179**, 151–168 (1982).
- [MY82b] W. H. Meeks III and S.-T. Yau. The classical Plateau problem and the topology of three-dimensional manifolds. *Topology* **4**, 409–442 (1982).
- [Mor88] F. Morgan. *A Beginner's Guide to Geometric Measure Theory*. Academic Press, 1988. Zbl 0671.49043.
- [NR02] B. Nelli and H. Rosenberg. Minimal surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Bull. Braz. Math. Soc.* **33**(2), 263–292 (2002).
- [NR06] B. Nelli and H. Rosenberg. Global properties of constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Pacific J. Math.*, **226**(1):137–152, 2006.
- [Onno8] Irene I. Onnis. Invariant surfaces with constant mean curvature in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Ann. Mat. Pura Appl.*, **187**(4):667–682, 2008.
- [PP79] L. E. Payne and G. A. Philippin. Some maximum principles for nonlinear elliptic equations in divergence form with applications to capillary surfaces and to surfaces of constant mean curvature. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **3**(2):193–211, 1979.
- [Ped04] R. Pedrosa. The isoperimetric problem in spherical cylinders. *Annals of Global Analysis and Geometry*, **26**(4):333–354, 2004.
- [PR99] R. Pedrosa and M. Ritoré. Isoperimetric domains in the Riemannian product of a circle with a simply connected space form and applications to free boundary value problems. *Indiana Univ. Math. J.*, **48**:1357–1394, 1999. MR1757077, Zbl 0956.53049.
- [PR02] J. Pérez and A. Ros. Properly embedded minimal surfaces with finite total curvature. *The global theory of minimal surfaces in flat spaces (Martina Franca, 1999)*, 15–66, Lecture Notes in Math., 1775, Springer-Verlag, 2002. G. P. Pirola, editor. MR1901613, Zbl 1028.53005.
- [Pino7] A. L. Pinheiro. A Jenkins-Serrin theorem in  $M^2 \times \mathbb{R}$ . *Bull. Braz. Math. Soc.* **40**(1), 117–148 (2007).
- [Pol94] K. Polthier. Geometric a priori estimates for hyperbolic minimal surfaces. *Bonner Math. Schriften*, **263**, 1994.



- [Rit97] M. Ritoré. Examples of constant mean curvature surfaces obtained from harmonic maps to the two sphere. *Math. Z.*, 226:127–146, 1997.
- [Rod] M. M. Rodríguez. Minimal surfaces with limit ends in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . To appear in *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Available at arXiv:1009.3524 [math.DG].
- [RR10] A. Ros and H. Rosenberg. Properly embedded surfaces with constant mean curvature. *Amer. J. Math.* **132**(6):1429–1443, 2010.
- [Ros02] H. Rosenberg. Minimal surfaces in  $M^2 \times \mathbb{R}$ . *Illinois J. of Math.* **46**, 1177–1195 (2002).
- [Ros06] H. Rosenberg. Constant mean curvature surfaces in homogeneously regular 3-manifolds. *Bull. Austral. Math. Soc.*, **74**:227–238, 2006.
- [RST09] H. Rosenberg, R. Souam and E. Toubiana. General curvature estimates for stable H-surfaces in 3-manifolds and applications. Preprint, 2009. arXiv:0902.3572v2 [math.DG].
- [SaEo8] R. Sa Earp. Parabolic and hyperbolic screw motion surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *J. Aust. Math. Soc.*, **85**(1):113–143, 2008.
- [Sal89] I. Salavessa. Graphs with parallel mean curvature. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **107**(2):449–458, 1989.
- [Sav12] N. Saveliev. Lectures on the topology of 3-manifolds: an introduction to the Casson invariant. *De Gruyter*, 1983. ISBN: 978-3-11-025035-0.
- [Sch83] R. Schoen. *Estimates for Stable Minimal Surfaces in Three Dimensional Manifolds*, volume 103 of *Ann. of Math. Studies*. Princeton University Press, 1983.
- [Ser69] J. Serrin. On surfaces of constant mean curvature which span a given space curve. *Math. Z.*, **112**:77–88, 1969.
- [ST09] R. Souam and E. Toubiana. Totally umbilic surfaces in homogeneous 3-manifolds. *Comment. Math. Helv.* **84** (3): 673-704, 2009.
- [Ste51] N. Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles*. *Princeton Mathematical Series*, vol. 14. *Princeton University Press*, Princeton, N. J., 1951. ISBN: 978-069100548-5
- [Thu97] W. Thurston. *Three-Dimensional Geometry and Topology*. *Princeton Mathematical Series* **35**, 1997. ISBN: 0-691-08304-5.
- [Tor10a] F. Torralbo. Compact minimal surfaces in the Berger spheres. Preprint. arXiv:1007.1072v1 [math.DG]
- [Tor10b] F. Torralbo. Rotationally invariant constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds. To appear in *Differential Geom. Appl.*.

- [Tor10c] F. Torralbo. Superficies de curvatura media paralela en  $S^2 \times S^2$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  y superficies de curvatura media constante en espacios homogéneos. *Tesis doctoral*. Universidad de Granada, 2010.
- [Tro99] M. Troyanov. Parabolicity of manifolds. *Siberian Adv. Math.*, 9(4):125–150, 1999. MR1749853 (2001e:31013), Zbl 0991.31008.
- [You10] R. Younes. Minimal surfaces in  $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$ . *Illinois J. Math.*, 54(2):671–712, 2010.



#### COLOPHON

This document was typeset using the typographical look-and-feel `classicthesis` developed by André Miede, which is available for both  $\text{\LaTeX}$  and  $\text{\LyX}$ :

<http://code.google.com/p/classicthesis/>