

DEFINICIONES PERSONALES Y ASPECTOS ESTRUCTURALES DEL CONCEPTO DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

José Antonio Fernández-Plaza, Juan Francisco Ruiz-Hidalgo,
Luis Rico y Enrique Castro

Describimos e interpretamos las definiciones aportadas por un grupo de estudiantes de bachillerato sobre el concepto de límite finito de una función en un punto en términos de aspectos estructurales, compilados y sintetizados de investigaciones previas. Los aspectos estructurales son la interpretación como objeto o como proceso de la noción de límite, los algoritmos y las destrezas prácticas para su cálculo, su alcanzabilidad y su rebasabilidad. A partir de ellos, analizamos las definiciones recogidas. Entre los resultados, destacamos la riqueza de significado de estas definiciones por razón del carácter no alcanzable y no rebasable atribuido al límite y por su consideración dual como objeto o proceso.

Términos clave: Aspectos estructurales del concepto de límite; Concepciones personales; Dualidad objeto/proceso; Límite de una función en un punto; Límite finito

Personal Definitions and Structural Aspects of the Concept of Finite Limit of a Function at one Point

We describe and interpret the individual definitions of a group of non-compulsory secondary education students related to the concept of finite limit of a function at one point in terms of structural aspects compiled and synthesized from prior research. These aspects are the interpretation of the limit notion as an object or a process, its exact or approximate character, the algorithms and practical skills for its calculation, its reachability and its possibility of being exceeded. Among the results we point out the richness of meaning from these definitions by the not reachable and not exceedable attributed character of the limit, and also by the dual consideration of the limit as an object or process.

Keywords: Finite limit; Limit of a function at one point; Object/process duality; Personal conceptions; Structural aspects of the concept of limit

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. y Castro, E. (2013). Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto. *PNA*, 7(3), 117-130.

El inicio de esta investigación surge de la preocupación por la mejora de la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad de una función, que parte de una aproximación al tema mediante el diseño de una unidad didáctica sobre este tópico (Fernández-Plaza, 2010). Este trabajo se llevó a cabo siguiendo el procedimiento del análisis didáctico (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009; Rico, 1997). Posteriormente, realizamos otro trabajo centrado en la exploración de los significados y concepciones que un grupo de estudiantes de bachillerato proporcionaron acerca del concepto de límite finito de una función en un punto (Fernández-Plaza, 2011).

Es objeto general de este informe avanzar y profundizar en la interpretación de las concepciones de los estudiantes sobre el concepto de límite finito de una función en un punto. Las características estructurales que subyacen en las concepciones de los estudiantes acerca del concepto de límite están documentadas por diversos autores. Así es el caso de la dualidad objeto/proceso (Tall, 1980) y el carácter inalcanzable y/o irrebasable atribuido al valor del límite para una función en un punto (Cornu, 1991; Cottrill, Dubinsky, Schwingendorf, Thomas, Nichols y Vidakovic, 1996; Monaghan, 1991; Tall y Vinner, 1981).

Indagar sobre las relaciones entre las concepciones expresadas por los estudiantes y las características estructurales citadas ofrece la oportunidad de revisar, discutir y actualizar las interpretaciones hechas por los autores citados. El objetivo de este trabajo consiste en describir e interpretar cómo las características estructurales mencionadas forman parte de las definiciones personales de los estudiantes derivadas de los usos particulares del lenguaje.

ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

La riqueza y diversidad de procesos de paso al límite y de sus clasificaciones forma parte de la tradición del Análisis Matemático (Rey Pastor, 1952). Los procesos de paso al límite tienen una fundamentación métrica y otra topológica, más general. De entre ellos, el currículo para el primer curso de bachillerato especifica procesos discretos como la tendencia de sucesiones de números reales, y procesos continuos como la tendencia al límite, continuidad, la derivación y la integración de funciones reales de variable real (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007).

Tall (1980) documenta que, cuando a los estudiantes se les transmite una noción informal de límite y posteriormente la definición formal, la imagen conceptual se contamina con ciertas propiedades que no forman parte de la definición formal. Encontramos un ejemplo de esto en los estudiantes que conciben la noción de límite como proceso dinámico y no la identifican con un valor numérico. En contraste, Romero (1997) incide en la fuerte resistencia de los estudiantes a entender y aceptar la notación decimal periódica para un número cuando el pe-

riodo es nueve: “Por un lado, en cuanto a su existencia ya que no procede de una división; por otro lado en cuanto a su conversión en un decimal exacto” (p. 177).

Blázquez, Gatica y Ortega (2009) realizan una revisión crítica de definiciones de límite funcional procedentes de libros de texto. Estos autores, al resaltar en algunas de estas definiciones rasgos de subjetividad e imprecisión, justifican la pertinencia de proponer una definición alternativa que salve las debilidades encontradas. En particular, Blázquez (1999, 2000) enfatiza la necesidad de distinguir entre los términos “tender” y “aproximarse”, que es imperceptible para algunos estudiantes en un contexto matemático.

Concepciones y aspectos estructurales

Consideramos idealmente una *concepción personal* como la descripción que proporciona un sujeto de parte o toda su imagen conceptual asociada a un concepto dado, no necesariamente evocada o activada por una definición¹. En la práctica por concepción personal, entendemos la interpretación fundada de lo que el sujeto comunica sobre su imagen conceptual, independientemente de que el mensaje transmitido por el sujeto pueda ser incompleto o defectuoso. La triangulación entre investigadores a la hora de interpretar los enunciados proporciona confianza sobre la validez de las interpretaciones. Las definiciones que dan los estudiantes en contextos informales manifiestan sus concepciones personales. Empleamos el término *definiciones personales* en un sentido análogo al del término definición conceptual de Tall y Vinner (1981).

Llamamos aspectos estructurales a aquellas características, propiedades, nociones, términos, etc., documentados en la literatura. Son parte de la estructura conceptual del concepto o conceptos en consideración, pero no la saturan. Dada la complejidad del concepto de límite trabajamos aquí con tres de sus aspectos estructurales relevantes. Estos aspectos fueron elegidos porque permiten describir e interpretar las concepciones personales declaradas por los estudiantes de bachillerato sobre la noción de límite.

A partir de los trabajos sobre el modelo cognitivo imagen conceptual/definición conceptual de Tall y Vinner, “establecemos las siguientes premisas para estudiar las definiciones personales aportadas por los estudiantes para el concepto de límite finito de una función en un punto.

- ◆ Las definiciones recogidas tratan de sintetizar, resaltar aspectos relevantes o ampliar algunas concepciones particulares de los escolares provocadas por la instrucción previa y otras cuestiones.

¹ Se llama *imagen conceptual* de un concepto al conjunto de representaciones mentales del concepto y de las propiedades que el sujeto asigna a tales representaciones, en definitiva, la estructura cognitiva global asociada a tal concepto (Tall y Vinner, 1981). Nuestra noción de concepción personal extiende la noción empleada por estos autores de definición conceptual, como la explicación que el sujeto proporciona de la imagen conceptual evocada por una definición de referencia, tanto de manera rutinaria, como por reconstrucción subjetiva.

- ◆ El análisis aislado de estas definiciones no proporciona indicadores suficientes para describir dichas concepciones, dado que no logran abarcar toda la imagen conceptual subyacente, sobre todo cuando reproducen la definición dada por el profesor o el libro de texto.
- ◆ La consideración de las dos premisas anteriores requiere de una selección y descripción de los aspectos estructurales subyacentes, de manera que sirvan para interpretar toda la gama de matices que aparecen en las definiciones planteadas.

Para lograr el objetivo de este trabajo valoramos la pertinencia de los aspectos estructurales para describir e interpretar las definiciones personales declaradas por un grupo de estudiantes de bachillerato.

MÉTODO

El estudio se enmarca dentro de los estudios descriptivos basados en el método de encuesta con reactivos abiertos. Resumimos su diseño a continuación. Destacamos los sujetos y el instrumento y el procedimiento para la recogida de datos.

Sujetos

Seleccionamos, de manera intencional y por disponibilidad, a 36 estudiantes españoles de un grupo de primer curso de bachillerato, con edades comprendidas entre los 16 y 17 años, matriculados en la asignatura de Matemáticas de la modalidad de Ciencias y Tecnología. Estos estudiantes habían recibido instrucción previa por parte de su profesor sobre la aproximación numérica intuitiva y la interpretación gráfica del concepto de límite, salvo las técnicas específicas de cálculo. Como guía de ejercicios y referencia teórica, utilizamos el libro de texto *Matemáticas.1 Bachillerato (Ciencias y Tecnología)* (Vizmanos, Alcaide, Hernández, Moreno y Serrano, 2008) y los apuntes propios del profesor.

Instrumento y aplicación

El instrumento utilizado fue un cuestionario que se puede consultar en Fernández-Plaza (2011). De este, nos centramos en una pregunta abierta con el siguiente enunciado:

Escribe una definición personal, con tus propias palabras, para límite de una función en un punto.

La recogida de datos se llevó a cabo a mediados del curso académico 2010-2011. El cuestionario se aplicó durante una sesión ordinaria de trabajo en la clase de matemáticas.

Se elaboraron dos modelos de cuestionario, A y B, incluyendo con anterioridad a la pregunta citada, algunos reactivos específicos —adaptados y traducidos de Lauten, Graham y Ferrini-Mundi (1994)—, que a continuación se presentan.

El análisis de las respuestas a los mismos puede consultarse en Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico (2012). De los sujetos participantes, 18 respondieron al cuestionario A y 18 al cuestionario B. Nótese que los dos cuestionarios A y B no comparten una estructura común porque cada uno de ellos se centra en características diferentes del concepto de límite. Estas cuestiones se refieren a diferentes sentidos del uso de la noción de límite finito de una función en un punto.

Rodea la V o la F en cada uno de los siguientes enunciados, según sea verdadero o falso. Justifica en el recuadro tu elección.

(A.1) Un límite describe cómo se mueve una función $f(x)$ cuando x se mueve hacia cierto punto.

(A.2) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar.

(A.3) Un límite se determina probando con valores de x cada vez más cerca de un número dado hasta que el límite se alcanza.

(B.1) Un límite es un número o punto al que la función se acerca pero nunca alcanza.

(B.2) Un límite es una aproximación que puedes hacer tan precisa como se quiera.

(B.3) Un límite es un número al cual los valores de una función $f(x)$ pueden acercarse de manera arbitraria mediante restricciones de los valores de x .

En virtud de las premisas anteriormente consideradas, es necesario provocar las intuiciones básicas de los sujetos con el fin de controlar el fenómeno de reproducción de la definición de referencia.

RESULTADOS

En primer lugar, elaboramos un listado mediante volcado con las definiciones personales de los 36 sujetos. Para la interpretación fundada de las respuestas, buscamos aquellos aspectos estructurales que las discriminan, sin destacar errores o aciertos. A continuación, detallamos las categorías de análisis que han sido establecidas conforme a las premisas explicitadas en el apartado de antecedentes y marco teórico.

Selección y caracterización de los aspectos estructurales

Cada uno de los aspectos teóricos y sus variantes se identifica mediante un código que aparece entre paréntesis. Los ejemplos se muestran en la tabla 1. Los códigos sirven para identificar las variantes de los aspectos considerados.

Aspecto estructural objeto/proceso

Este aspecto identifica las consideraciones generales realizadas por los estudiantes sobre el concepto de límite como objeto, como proceso o bien, una interpretación dual (Cottrill et al., 1996; Sfard, 1991; Tall, 1980). Dentro de este aspecto estructural consideramos distintas variantes no excluyentes entre sí, que presentamos a continuación.

Tipo de objeto/proceso (OP). Se reconoce cuando los estudiantes establecen distintas referencias para el *objeto límite* (lugar del plano, conjunto de puntos, recta, etc.); en algunos casos, se destaca también su dualidad procesual (aproximación).

Vinculación entre límite e imagen (LI). Cuando el escolar asigna al límite un valor de imagen se observa una *Identificación* (de manera general), una *Conexión* (en casos particulares) o bien una *Independencia* entre dicho límite y el valor imagen de la función (Blázquez y Ortega, 1998).

Descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función (Desc). Los escolares sólo se refieren a la variable x (Blázquez y Ortega).

Referencia explícita a un sistema de representación distinto al numérico o simbólico (SR). Empleo de términos para el objeto/proceso límite relacionados con un sistema de representación diferente al numérico o simbólico.

Aspecto estructural destrezas prácticas de cálculo

Este aspecto está relacionado con los modos que tienen los escolares de interpretar los procesos infinitos formales mediante técnicas finitas de determinación del valor del límite, basadas en la continuidad y en las propiedades algebraicas del concepto de límite. Entre esas tres técnicas destacamos las siguientes.

Evaluación en el punto (sustitución directa) (Eval.). No necesariamente implica la vinculación entre límite e imagen.

Tabla de valores (TVal.). Los escolares expresan acciones similares a “dar valores a x ”.

Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC). Los escolares expresan que los procesos de cálculo del límite, bien por la izquierda o bien por la derecha, deben dar el mismo resultado.

Aspectos estructurales alcanzabilidad y rebasabilidad (Alcanz. y Reb.)

La posibilidad o no de alcanzar o rebasar el límite puede ser expresada por los escolares en sus definiciones (Cornu, 1991; Monaghan, 1991).

Reproducción de la definición de referencia (Ref.)

También hay que tener en cuenta aquellas definiciones que reproducen la dada bien por el profesor o por el libro de texto y no tienen otros elementos característicos.

Caracterización de las definiciones personales

Utilizamos los siguientes criterios para establecer y clasificar las definiciones personales.

Localización de aspectos estructurales subyacentes y sus relaciones

En el ejemplo “Es el conjunto de puntos...” de la primera fila de la tabla 1 hay presentes dos aspectos relacionados: un tipo de objeto (conjunto de puntos del plano) y referencia a un sistema de representación distinto al numérico y simbólico (la referencia puntos del plano alude implícitamente a un sistema de representación gráfico-geométrico). Estos dos aspectos estructurales dan nombre a la familia I (OP-SR).

Discriminación de definiciones dentro de una misma familia mediante aspectos estructurales no compartidos

El ejemplo “Es el lugar del plano...” pertenece a la familia I (OP-SR), pero añade dos matices, el carácter no alcanzable y el no rebasable del límite, determinando una subfamilia I.1 (No Alcanz.-No Reb.).

Agrupación de familias por aspectos estructurales comunes

En el ejemplo, la variante estructural OP define un grupo que incluye las familias I, II.

Obtenemos así 11 familias de definiciones organizadas en siete grupos, con sus correspondientes subfamilias, que se resumen en la tabla 1. Prescindimos del análisis estadístico descriptivo dado el pequeño tamaño de la muestra, fijándonos únicamente en la existencia de enunciados para las familias consideradas. Por cuestiones de espacio, sólo mostramos las definiciones más completas.

Tabla 1

Familias de definiciones según los aspectos estructurales resaltados y ejemplos representativos

Familias de definiciones Aspectos estructurales comunes	Subfamilias de definiciones Aspectos estructurales diferenciadores
I. OP-SR “Es el conjunto de puntos del plano a los que se aproxima una función cuando x tiende a un número...”	I.1. No Alcanz-No Reb. “Es el lugar del plano en el cual la función $f(x)$ no llega a tocar o pasar...”
II. OP-Desc.	II.1. Alcanz. “... todos aquellos valores que puede adquirir la incógnita x hasta llegar al punto dado”
III. Desc. “Es el número al que se va aproximando x ”	II.2. No Alcanz. “... todos aquellos números que se acercan a dicho punto pero sin llegar a alcanzarlo”
IV. Identidad LI	IV.1. No Alcanz. “Sería el valor que toma una función, al acercarse a un valor, pero nunca lo alcanza”
V. Conexión LI-Eval. “... es aquel punto al que tiende la función siendo sustituida en la función la x por un número dado”	
VI. Independencia LI-CLDC “... No hace falta que el límite tenga imagen. El límite por la derecha y por la izquierda tiene que ser el mismo número”	

Tabla 1

Familias de definiciones según los aspectos estructurales resaltados y ejemplos representativos

Familias de definiciones Aspectos estructurales comunes	Subfamilias de definiciones Aspectos estructurales diferenciadores
VII. SR-TVal. "... es un número situado en una gráfica al cual se pretende acercarse mediante valores de x "	
VIII. SR-No Alcanz. "... es aquel que no permite que la función se represente gráficamente"	
IX. No Alcanz.	IX.1. No Reb. "... es aquel punto donde la función no puede llegar nunca a sobrepasar o tocar, se puede aproximar pero nunca tocar o pasar..."
	IX.2. CLDC-Tval. "... En estos casos se haría una tabla de valores para ver qué números son los que se acercan por la izquierda y por la derecha"
X. No reb.	X.1. Alcanz. "... es el número límite al cual puede llegar la función"
XI. Ref. "... es el número al que se aproxima $f(x)$ cuando x se acerca a ese punto"	

La descripción general de cada familia y subfamilia se hace en términos de los aspectos estructurales que la determinan (ver apartado "Selección y caracterización de los aspectos estructurales"). En los siguientes resultados resumimos el alcance de las definiciones personales de los estudiantes en cuanto a las características estructurales se refiere:

- ◆ las atribuciones personales de objeto al límite —límite de la variable x (Blázquez y Ortega, 1998), recta, lugar del plano, conjunto infinito de puntos, etc.— corresponden a las familias I, II y III;
- ◆ las atribuciones personales de proceso al límite (aproximación) (Tall, 1980) corresponden a la familia II;

- ◆ la alcanzabilidad y la rebasabilidad como atribuciones personales al objeto en relación al proceso (Cornu, 1991; Monaghan, 1991) corresponden a las subfamilias de I, II, IV, IX y X y a las familias IX y X;
- ◆ la relación de identidad, conexión o independencia entre los objetos límite e imagen (Blázquez y Ortega, 1998; Sierra, González y López, 2000) corresponde a las familias IV, V y VI;
- ◆ las destrezas prácticas de cálculo (tabla de valores y evaluación) y condiciones de lateralidad y doble convergencia corresponden a las familias V, VI y VII;
- ◆ el proceso de definir con apoyo en el sistema de representación gráfico corresponde a las familias I, VII y VIII; y
- ◆ un 25% de las definiciones son reproducciones de la definición de referencia. Por lo tanto, creemos que el sesgo debido a la instrucción previa no es relevante.

Grado de coincidencia entre las respuestas a los reactivos específicos y las definiciones

Las premisas consideradas sostienen que puede haber cierto condicionamiento de las definiciones formuladas a las respuestas a los reactivos específicos propuestos previamente. Medimos ese condicionamiento en términos de los siguientes criterios.

Definición adaptada o textual

La definición incluye, entre otros matices, una adaptación o copia textual de la respuesta a uno o varios de los reactivos previos (ejemplos 1 y 2).

Ejemplo 1 (definición adaptada de las respuestas a los reactivos A1 y A3). “Límite de una función en un punto es aquel punto donde la función no puede llegar nunca a sobrepasar o tocar, se puede aproximarse pero nunca tocar o pasar. El límite describe a lo que tiende dicha función”. Los siguientes son sub-ejemplos de este ejemplo.

- ◆ “Verdadero. Describe a lo que tiende dicha función” (respuesta al reactivo A1).
- ◆ “Falso. El límite no se puede alcanzar, pero sí aproximar y a partir de esas aproximaciones sacar el límite” (respuesta al reactivo A3).

Ejemplo 2 (definición adaptada de la respuesta al reactivo A2). “El límite de una función en un punto es un número al cual la función se acerca pero nunca llega a tocar ese número”. El siguiente es un sub-ejemplo de este ejemplo como respuesta al reactivo A2: “Verdadero. Porque el límite es un número al cual la función se aproxima sin llegar al punto o al número”.

Definición-reactivo

La definición incluye, entre otros matices, una adaptación o copia textual del enunciado de uno o varios de los reactivos, no de su respuesta, que de hecho puede estar “en blanco” (ejemplo 3).

Ejemplo 3 (definición que incluye copias textuales de los reactivos B.2 y B.3). “Un límite es un número o punto al que la función alcanza, se puede hacer tan precisa como se quiera. Es un número al cual los valores de $f(x)$ pueden acercarse de manera arbitraria mediante los valores de x , es decir, dándole valores a la x .”

Definiciones originales

No existen indicios de coincidencia, bien porque expresa otras propiedades o porque ha dejado en blanco las respuestas a los reactivos específicos previos (ejemplo 4).

Ejemplo 4 (definición original sin coincidencia explícita con respuestas a los reactivos previos). “El límite de una función en un punto es el número o punto al que una función se aproxima en dicho punto, es decir, es el valor de y para un determinado x .”

Subejemplo 4.1 (respuesta al reactivo B1). “Verdadero. El límite de una función es el número o punto al que se acerca sin llegar a alcanzarlo.”

Subejemplo 4.2 (respuesta al reactivo B2). “Falso. Un límite es una aproximación que puedes hacer hasta cierto punto de precisión.”

Subejemplo 4.3 (respuesta al reactivo B3). “Falso. Un límite es un número al cual los valores de $f(x)$ pueden acercarse de manera creciente y arbitraria mediante restricciones de los valores de x .”

La tabla 2 resume el grado de coincidencia entre las respuestas de los sujetos a los reactivos específicos y sus definiciones personales, teniendo en cuenta que una definición puede ser adaptada de varios reactivos, e incluso pertenecer a varias categorías con reactivos diferentes.

Tabla 2

Medida del grado de coincidencia entre las respuestas a los reactivos específicos y las definiciones

Grado de coincidencia	Reactivos A				Reactivos B			
	A.1	A.2	A.3	Total	B.1	B.2	B.3	Total
Definición adaptada	7	4	2	11	8	3		9
Definición	1	2		3	3	1	2	4

Tabla 2
Medida del grado de coincidencia entre las respuestas a los reactivos específicos y las definiciones

Grado de coincidencia reactivo	Reactivos A				Reactivos B			
	A.1	A.2	A.3	Total	B.1	B.2	B.3	Total
Total/ reactivo	8	6	2	13	11	4	2	13
Definición Original				4				5
Sin respuesta				1				

Nota. Los totales no proceden de la suma de los elementos de la misma fila debido a que una definición puede ser a la vez adaptación y reactivo para diferentes cuestiones. Por ejemplo, la definición procedente del ejemplo 1 es “adaptada” de los reactivos A.1 y A.3 y “definición reactivo” del A.2. Por esta razón, la suma de los totales adaptados y definición reactivos (16) no coincide con el total de definiciones clasificadas entre las dos categorías (13).

Se observa que para cada uno de los cuestionarios A y B, 13 de 18 definiciones han incluido concepciones básicas en sus enunciados. Esto hace patente el condicionamiento de las definiciones a los reactivos específicos previos. Los reactivos más destacados del cuestionario A fueron A.1 y A.2, mientras que del cuestionario B fue el reactivo B.1. Esto nos conduce a que las definiciones de los sujetos contienen en su mayoría referencias a la alcanzabilidad (reactivo B.1), rebasabilidad (reactivo A.2) y a la naturaleza objeto/proceso del límite (reactivo A.1). Por otro lado percibimos que las definiciones originales —cuatro de 18 (cuestionario A) y cinco de 18 (cuestionario B)— reproducen la definición de referencia o añaden otras propiedades. Sostenemos que esto se debe a que no dan respuesta a los reactivos específicos o que no consideran las respuestas dadas como parte de su definición.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Extraemos conclusiones para dar continuidad al trabajo e implicaciones para la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite. En primer lugar, la riqueza de definiciones personales se debe al trabajo previo realizado con reactivos específicos. Es decir, ofrecer una gama de propiedades del concepto de límite a los estudiantes incentiva la generación de definiciones diferentes a la de referencia y más complejas.

Son relevantes los modos de “ver” un mismo concepto sutilmente distintos al modo intuitivo de introducirse en el aula. El registro gráfico constituye un apoyo alternativo para construirlas.

Los aspectos estructurales alcanzabilidad y rebasabilidad subyacen en la mayoría de las familias de definiciones obtenidas, enfatizando la importancia que los escolares les dan como propiedades del concepto de límite. Formulamos la conjetura de que los ejemplos gráficos empleados en la enseñanza pueden estar pronunciando la percepción intuitiva de los estudiantes sobre estas propiedades. La planificación y diseño de una propuesta didáctica debería incluir medidas de detección y tratamiento de estos aspectos.

De esta investigación emergen otras conjeturas. La identificación o conexión del límite con la imagen se debe a una comprensión insuficiente de la evaluación como destreza práctica de cálculo del límite; es decir, a la generalización de su uso practicado en un contexto continuo a otros que carecen de esa propiedad. Mientras que la identificación del límite como límite de la variable x , fruto de la descoordinación de los procesos en dominio y rango de la función, se debe a la resistencia a aceptar la no existencia de límite en contextos determinados. Esta conjetura fue contrastada por Blázquez y Ortega (1998) en el caso particular de funciones con límites laterales finitos y distintos.

De este modo se alcanza el objetivo al mostrar la pertinencia de los aspectos considerados para organizar las definiciones personales e interpretarlas según ideas claves o familias de definiciones basadas en los aspectos estructurales convenientemente afinados.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda y financiación de la beca FPU (AP2010-0906), (MEC-FEDER), del proyecto “Modelización y representaciones en educación matemática” (EDU2009-11337) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del grupo FQM-193 (Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico) del Tercer Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI).

REFERENCIAS

- Blázquez, S. (1999). Sobre la noción del límite en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. En T. Ortega (Ed.), *Investigación en Educación Matemática. Tercer simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 167-184). Valladolid, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Valladolid, España.
- Blázquez, S., Gatica, N. y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 12(1), 145-168.

- Blázquez, S. y Ortega, T. (1998). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula*, 10, 119-135.
- Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall, (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15(2), 167-192.
- Fernández-Plaza, J. A. (2010). *Unidad didáctica: límite y continuidad de funciones*. Documento no publicado. Granada, España: Universidad de Granada.
- Fernández-Plaza, J. A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Estudio exploratorio*. Trabajo de fin de master no publicado, Universidad de Granada, España.
- Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2012). The concept of finite limit of a function at one point as explained by students of non-compulsory secondary education. En T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 235-242). Taipei, Taiwan: PME.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Lauten, A. D., Graham, K. y Ferrini-Mundy, J. (1994). Students' understanding of basic calculus concepts: interaction with the graphics calculator. *The Journal of Mathematical Behavior*, 13(2), 225-237.
- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Ley Orgánica 1467/2007 de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. *BOE*, 266, 45381-45477.
- Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the Learning of Mathematics*, 11(3), 20-24.
- Rey Pastor, J. (1952). *Elementos de la teoría de funciones*. Madrid, España: Autor.
- Rico, L. (Ed.). (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid, España: Síntesis.
- Romero, I. (1997). *La introducción del número real en educación secundaria: una experiencia de investigación-acción*. Madrid, España: Comares.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies of Mathematics*, 22(1), 1-36.

- Sierra, M., González, M. T. y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(1), 71-75.
- Tall D. O. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. En R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 170-176). Berkeley, CA: PME.
- Tall, D. O. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
- Vizmanos, J. R., Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M. y Serrano, E. (2008). *Matemáticas.1 Bachillerato (Ciencias y Tecnología)*. Madrid, España: Editorial SM.

José Antonio Fernández-Plaza
Universidad de Granada
joseanfplaza@ugr.es

Juan Francisco Ruiz-Hidalgo
Universidad de Granada
jfruiz@ugr.es

Luis Rico
Universidad de Granada
lrico@ugr.es

Enrique Castro
Universidad de Granada
ecastro@ugr.es

Recibido: septiembre de 2012. Aceptado: octubre de 2012
Handle: **