Propiedades del punto de continuidad en espacios de Banach que no contienen ℓ_1

José Antonio Soler Arias
Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

V^o B^o del director

Fdo: Ginés López Pérez

El doctorando

Fdo: José Antonio Soler Arias

Granada, diciembre de 2011

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Abdul Jabar H. Jabur
D.L.: GR 2182-2012
ISBN: 978-84-9028-020-1

Propiedades del punto de continuidad en espacios de Banach que no contienen ℓ_1

José Antonio Soler Arias
E-mail: jasoler@ugr.es

Memoria realizada en el Departamento de Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, bajo la dirección del Dr. D. Ginés López Pérez, Profesor Titular de la Universidad de Granada, para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, por la Universidad de Granada.

A mi maestro D. Ginés López Pérez, por confiar en mi

Índice general

Introducción

La memoria que presentamos se enmarca dentro de la teoría de espacios de Banach. Más concretamente estudia dos propiedades isomórficas estrechamente relacionadas con la bien conocida propiedad de Radon-Nikodym en espacios de Banach. Por poner dos ejemplos concretos sobre la importancia de la propiedad de Radon-Nikodym, digamos que es la hipótesis sobre un espacio de Banach para que el teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue y el teorema de Cauchy, sobre existencia local de solución para un problema de valores iniciales, sigan siendo válidos en dicho espacio.

Recordamos que un espacio de Banach verifica la propiedad del punto de continuidad (PCP) si cada subconjunto cerrado, acotado y no vacío contiene un punto con una base entornos relativos común para la topología débil y norma. Se dice que un espacio de Banach verifica la propiedad del punto de continuidad convexa (CPCP) si exigimos que lo anterior se verifique para cada subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío.

Es conocido que la propiedad de Radon-Nikodym implica la PCP y ésta, a su vez, implica la CPCP. Sin embargo, los recíprocos son falsos.

Fue Bourgain quien introdujo estas propiedades para tratar de resolver el problema de la determinación por subespacios con base de la propiedad de Radon-Nikodym, problema que surge de forma natural al tratar de encontrar caracterizaciones secuenciales satisfactorias de dicha propiedad. Finalmente Bourgain consigue probar algo más débil que implica la determinación por subespacios separables de la propiedad de Radon-Nikodym. Para ello resulta crucial el uso de la PCP, o la CPCP. Se abre entonces el problema de si la CPCP, o la PCP, están determinadas por subespacios con base, quedando abierto el mismo problema sobre la propiedad de Radon-Nikodym.

Son muchos los autores que han abordado estos problemas, pero queremos destacar las dos aportaciones más recientes al estudio de la PCP.

Por un lado H.P. Rosenthal prueba que toda sucesión básica seminormalizada en un espacio de Banach con la PCP admite una subsucesión acotadamente completa, siendo falso el recíproco, aún para espacios de Banach sin copias de ℓ_1. Es conocido que los espacios duales separables verifican la PCP, mientras que c_0 o $L_1[0,1]$ no la verifican.

Por otro lado, V. Fonf demuestra que un espacio de Banach con dual separable verifica la PCP si, y sólo si, cada árbol w-nulo en la esfera unidad del espacio tiene alguna rama acotadamente completa.

Aunque era conocido que los espacios con la PCP contienen sucesiones acotadamente completas y, por tanto, subespacios duales, el resultado de Rosenthal es el primero que conocemos que, de alguna manera, dice algo sobre el número de sucesiones acotadamente completas que ha de contener un espacio de Banach con la PCP. Obsérvese además que de haber sido cierto el recíproco del resultado de Rosenthal, se habría resuelto afirmativamente el problema de la determinación por subespacios con base de la PCP. En definitiva, resultaría interesante disponer de caracterizaciones secuenciales, lo más generales posibles de la PCP.

El uso de árboles, en vez de sucesiones, es satisfactorio en el resultado de Fonf, aunque el ambiente de espacio con dual separable resulta restrictivo.

Tras un primer capítulo de carácter introductorio en el que contextualizamos los problemas tratados y presentamos los resultados conocidos que nos serán de utilidad para el desarrollo de las aportaciones de esta memoria, obtenemos en el segundo capítulo dos caracterizaciones de la PCP en términos de árboles.

La primera de ellas es en el ambiente de espacios sin subespacios isomorfos de ℓ_1, donde es sabido que la topología débil tiene un comportamiento metrizable. En este caso se prueba, con una demostración diferente, que el resultado de Fonf sigue siendo cierto sin ℓ_1-copias y, que, en el caso de espacio con dual separable, se puede precisar por qué un espacio falla la PCP.

> *Sea X un espacio de Banach sin copias de ℓ_1. Entonces X verifica la PCP si, y sólo si, cada árbol básico seminormalizado y w-nulo en X tiene alguna rama acotadamente completa. Además, en el caso de que X^* sea separable, existe un subconjunto cerrado, acotado y convexo en X cuyo cierre w^* en X^{**} es afínmente w^*-homeomorfo al símplex de Poulsen sobre el conjunto de Cantor, $M_1^+(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, el conjunto de medidas de probabilidad Borel regulares sobre el conjunto de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.*

Obsérvese que como consecuencia de la equivalencia anterior se obtiene que la PCP está determinada por subespacios con base en espacios sin copias de ℓ_1, un resultado de N. Ghoussoub y B. Maurey.

La segunda caracterización que se presenta en el capítulo segundo es en ambiente general. Para ello introducimos el concepto de árbol topológicamente w-nulo y se demuestra lo siguiente:

> *Sea X un espacio de Banach. Entonces X tiene la PCP si, y sólo si, cada árbol seminormalizado y topológicamente w-nulo en X tiene alguna rama acotadamente completa.*

Al hilo de este resultado planteamos la siguiente pregunta:

¿Contiene cada árbol seminormaizado y topológicamente w-nulo en un espacio de Banach un subárbol básico y topológicamente w-nulo de forma que cada rama del subárbol sea rama del árbol original?

Una respuesta afirmativa a esta pregunta resolvería, a tenor del resultado anterior, el problema de la determinación por subespacios con base de la PCP.

Si se quiere se puede trasladar la pregunta al ambiente de sucesiones:

Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión en la esfera unidad de un espacio de Banach X, de forma que $0 \in \overline{\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}}^{w}$. ¿Existe una subsucesión básica de forma que todavía 0 esté en su cierre débil? (Es conocido que siempre existe una subsucesión básica)

En el Capítulo 2 estudiamos la CPCP. Para ello definimos los $P_{\{v_n\}}$-conjuntos w-nulos, que son, de alguna manera, conjuntos que se pueden definir en cualquier espacio de Banach a partir del esquema seguido por Poulsen para definir el bien conocido símplex de Poulsen, universal entre los símplices con conjunto de extremos denso. El origen de esta definición se encuentra en un trabajo de S. Argyros, E. Odell y H.P. Rosenthal basado en el espacio c_0.

Encontramos entonces la siguiente caracterización de la CPCP.

Sea X un espacio de Banach sin subespacios isomorfos a ℓ_1. Entonces X falla la CPCP si, y sólo si, X contiene un subconjunto cerrado acotado y convexo K en X afínmente homeomorfo a un $P_{\{v_n\}}$-conjunto w-nulo. Además, en caso de que X^* es separable, $\overline{K}^{w^*}$ es w^*-afínmente homeomorfo al símplex de Poulsen.

Como consecuencia del resultado anterior se obtiene que la CPCP está determinada por subespacios con base en el ambiente de los espacios sin copias de ℓ_1, lo que constituye una nueva respuesta parcial al problema de la determinación por subespacios con base de la CPCP.

Por último, nos gustaría indicar que los resultados que aparecen en esta tesis aparecen en [25–28].

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento al director de esta tesis, D. Ginés López Pérez, por todo el apoyo y el ánimo que me ha dedicado durante los últimos años. También quiero agradecer la disposición que han mostrado en la escritura de esta memoria a D. José Antonio Soler Olmos y D. Eduardo Nieto Arco y, por supuesto, mi sincero agradecimiento a D. Jerónimo Alaminos Prats por todo el tiempo, interés y conocimiento que ha puesto en el resultado final de este trabajo.

CAPÍTULO 1

Propiedades del punto de continuidad en espacios de Banach

El objetivo de este capítulo es introducir las propiedades del punto de continuidad y punto de continuidad convexa en relación con la bien conocida propiedad de Radon-Nikodym en espacios de Banach. También ha de ser entendido como un capítulo introductorio en el que se recogerán los resultados conocidos necesarios para el posterior desarrollo de los siguientes capítulos.

Comenzamos dando las definiciones formales.

Definición 1.1. Sea C un subconjunto cerrado, acotado y no vacío de un espacio de Banach X.

i) Se dice que C tiene *la propiedad del punto de continuidad* (PCP) si cada subconjunto A cerrado y no vacío de C contiene un punto $x \in A$ que es de débil-norma continuidad, es decir, la aplicación identidad, de A con la topología débil en A con la topología de la norma, es continua en x.

ii) Sea ahora C un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de X. Se dice que C tiene la propiedad del punto de continuidad convexa (CPCP) si cada subconjunto cerrado, convexo y no vacío de C tiene algún punto de débil-norma continuidad.

iii) Diremos que X tiene la PCP (resp. CPCP) si la bola unidad cerrada de X, B_X, verifica la PCP (resp. CPCP).

Es claro de la definición que los espacios con la PCP verifican la CPCP, no siendo cierto el recíproco [1]. Por otro lado la bien conocida propiedad de Radon-Nikodym (RNP) implica la PCP, ya que la RNP se caracteriza mediante la abundancia de puntos dientes, puntos que son a la vez extremos y de débil-norma continuidad. El recíproco es otra vez falso [3].

Es bien conocida la importancia de la propiedad de Radon-Nikodym en la teoría de espacios de Banach. Como ejemplos de ello, digamos que el teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue, que afirma que toda función absolutamente continua es derivable casi por doquier y coincide con la integral de su derivada, es un enunciado equivalente al clásico teorema de Radon-Nikodym, y que, los espacios de Banach con la RNP son aquellos donde el teorema anterior sigue siendo válido. Por otro lado, la validez del teorema de Cauchy sobre la existencia de solución local de un problema de valores iniciales en el ambiente de espacios de Banach lleva usualmente la hipótesis de que el espacio verifique la RNP. Sin embargo, no conocemos caracterizaciones secuenciales satisfactorias de la RNP. Sabemos que la RNP es una propiedad isomórfica, depende en exclusiva de la topología de la norma, que pasa a subespacios. Bourgain se planteó el problema de si la RNP está determinada por subespacios con base Schauder, es decir, si un espacio de Banach es tal que cada subespacio con una base Schauder verifica la RNP, ¿podemos asegurar que el espacio verifica la RNP? Por poner un ejemplo, es conocido que la reflexividad está determinada por subespacios con base.

Bourgain no consiguió resolver el problema de la determinación por subespacios con base de la RNP, sin embargo consiguió probar que la RNP está determinada por subespacios con una descomposición finito dimensional [3], un concepto más general que el de base Schauder, lo que a su vez implica que la RNP está determinada por los subespacios separables. Para ello Bourgain introdujo la PCP en [3] y atacó la demostración primero para la PCP, es decir, empezó suponiendo un espacio de Banach sin PCP, lo que implica el fallo de la RNP, consiguiendo encontrar un subespacio con una descomposición finito dimensional sin PCP y, por tanto, sin RNP. Después se puso en el ambiente de un espacio sin RNP, pero verificando la PCP, para encontrar de nuevo un subespacio con una descomposición finito dimensional sin RNP. Estos resultados de Bourgain se consiguieron demostrar en [17] para la CPCP. Es entonces natural preguntarse, como el propio Bourgain hizo [3], si la PCP o la CPCP están determinadas por subespacios con base, lo que hoy en día es un problema abierto, ya que la respuesta a estos problemas abriría camino al problema de la RNP. Se sabe por ejemplo que la PCP está determinada por subespacios con base para espacios sin copias de ℓ_1 [12] y que la CPCP está determinada por subespacios con base para espacios de Asplund [22]. Sobre la RNP el único resultado positivo que conocemos es el dado por Bourgain [3], en el que demuestra que la RNP está determinada por subespacios con base en el ambiente de los espacios duales, donde otra vez juega un papel fundamental el uso de la CPCP, o de la PCP, si se quiere.

Durante la década de los 80 y parte de los 90 autores como Bourgain, Godefroy, Ghoussoub, James, Maurey, Rosenthal, Schachermayer, Talagrand, etc. dedicaron esfuerzos a tratar de estudiar en profundidad la RNP, PCP y CPCP, (ver [6,7,11,13–15,18,36,37]) en relación con los problemas planteados anteriormente, pero también en relación a otro problema donde otra vez la CPCP juega un papel fundamental. Es conocido que la RNP implica que cada subconjunto cerrado, acotado y convexo es la envolvente convexo-cerrada de sus puntos extremos [32]. Pues bien es un famoso problema abierto si el recíproco es cierto y de entre las respuestas parciales a este problema destaca la obtenida por Schachermayer, quien probó en [37] que en el ambiente de los espacios de Banach con la PCP, o la CPCP, la respuesta a dicho problema es afirmativa.

Desde nuestra humilde opinión, las propiedades del punto de continuidad PCP y CPCP responden a una aspiración bastante natural. Sabemos que no es posible que coincidan las topologías débil y norma en espacios de Banach de dimensión infinita, pero ¿qué es lo máximo que podemos esperar? Pensamos que una opción de respuesta para esta pregunta es precisamente una de las propiedades de continuidad que estamos tratando. La siguiente afirmación pone de manifiesto lo que queremos decir.

Proposición 1.2. *([11]) Sea X un espacio de Banach y C un subconjunto cerrado y acotado de X.*

i) C tiene la PCP si, y sólo si, cada subconjunto cerrado de C tiene un subconjunto débil denso de puntos de débil-norma continuidad.

ii) Supongamos además que C es convexo. Entonces C tiene la CPCP si, y sólo si, cada subconjunto cerrado y convexo de C tiene un subconjunto denso de puntos de débil-norma continuidad.

Aunque es cierto que la moda por estudiar la PCP o la CPCP quedó en el olvido hace tiempo, recientemente se han publicado algunos trabajos interesantes al respecto, como por ejemplo [2, 9, 35]. Precisamente los dos primeros han sido nuestro punto de partida para intentar aportar algo nuevo. Nuestra intención era entonces obtener caracterizaciones lo más generales posibles de la PCP y CPCP, para después intentar conseguir nuevas respuestas parciales al problema de la determinación por subespacios con base de la PCP o de la CPCP. Para ello el Capítulo 2 estará dedicado al estudio de la PCP y el Capítulo 3 al estudio de la CPCP. Respecto a la PCP, conseguimos en el Capítulo 2 obtener dos caracterizaciones de la PCP en términos de árboles, una en ambiente general, que extiende lo hecho en [9] para espacios con dual separable, y responde a las expectativas planteadas en [35] y otra en el ambiente de espacios sin copias de ℓ_1 que consigue cierto grado de precisión, encontrando un subconjunto denso en el símplex de Bauer sobre el Cantor, en cada espacio sin la PCP. El Capítulo 3 está dedicado a obtener una caracterización de la CPCP en ambiente de espacios sin copias de ℓ_1 y, como consecuencia, se consigue probar que la CPCP está determinada por subespacios con base, en el ambiente de los espacios de Banach sin copias de ℓ_1, lo que es una nueva respuesta parcial al problema de la determinación por subespacios con base de la CPCP.

Introducimos aquí dos sencillos lemas que caracterizan la PCP y la CPCP en términos de abiertos débiles relativos de diámetro pequeño.

Lema 1.3. *Sea X un espacio de Banach y sea $C \subset X$ un subconjunto cerrado, acotado y no vacío de X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *C tiene la PCP.*

ii) *Para cada subconjunto no vacío $A \subset C$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto $U \subset X$ w-abierto tal que $U \cap A \neq \emptyset$ y $\operatorname{diam}(U \cap A) \leq \varepsilon$.*

Demostración. i) $\Rightarrow$ ii) Sean $A \subset C$, $A \neq \emptyset$ y $\varepsilon > 0$. Como $\overline{A} \subset C$, por i) existe $x \in \overline{A}$ tal que x es punto de $(w - \|\cdot\|)$-continuidad de $\overline{A}$, luego existe $V \subset \overline{A}$, V w-abierto relativo de $\overline{A}$ con $x \in V$ y $\operatorname{diam}(V) \leq \varepsilon$. Así $V = U \cap \overline{A}$ siendo U un w-abierto de X y como $x \in U \cap \overline{A}$ se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$ y además $\operatorname{diam}(U \cap A) \leq \operatorname{diam}(U \cap \overline{A}) \leq \varepsilon$.

ii) $\Rightarrow$ i) Sea $A \subset C$, A cerrado, acotado y no vacío. Por ii) obtenemos $U_1 \subset X$, U_1 w-abierto en X tal que $U_1 \cap A \neq \emptyset$ y $\operatorname{diam}(U_1 \cap A) \leq 1$. Por iteración construimos una sucesión $\{U_n\}$ de subconjuntos w-abiertos de X tales que $U_1 \cap \ldots \cap U_n \cap A \neq \emptyset$ y $\operatorname{diam}(U_1 \cap \ldots \cap U_n \cap A) \leq 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Llamemos $V_n = U_1 \cap \ldots \cap U_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Podemos suponer que $\overline{V_n}^w \subset U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\left\{\operatorname{diam}(\overline{V_n}^w \cap A)\right\} \to 0$ y por el teorema de complitud de Cantor $\bigcap_{n=1}^{\infty}(\overline{V_n}^w \cap A) = \{a\}$. Pues bien, el punto a será un punto de $(w - \|\cdot\|)$-continuidad de A. En efecto: sea $\varepsilon > 0$, entonces sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$ para $n > m$, con lo que si $n > m$, $V_n \cap A$ es un w-abierto relativo en A con $a \in \overline{V_n}^w \cap A$ y $\operatorname{diam}(V_n \cap A) \leq 1/n < \varepsilon$. Por tanto C tiene la PCP. □

Después de ver el lema anterior resulta natural extender la PCP para conjuntos generales.

Definición 1.4. Sea X un espacio de Banach y C un subconjunto de X. Se dice que C tiene la PCP si cada subconjunto acotado de C tiene abiertos débiles relativos de diámetro arbitrariamente pequeño.

Obsérvese que decir que un conjunto cerrado y acotado tiene la PCP, según lo hemos definido, equivale a decir que cada subconjunto acotado tiene abiertos débiles relativos de diámetro arbitrariamente pequeño, con lo que esta nueva definición es realmente una extensión de la primera y no hay conflictos entre ellas. Hemos preferido hacerlo así para respetar la cronología histórica de las definiciones.

El siguiente lema es un resultado paralelo al anterior para la CPCP que se obtiene con la misma demostración.

Lema 1.5. *Sea X un espacio de Banach y sea $C \subset X$ un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *C tiene la CPCP.*

ii) *Para cada subconjunto no vacío y convexo $A \subset C$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto $U \subset X$ w-abierto tal que $U \cap A \neq \emptyset$ y $\operatorname{diam}(U \cap A) \leq \varepsilon$.*

Expondremos dos resultados conocidos sobre la estructura de la topología débil de un espacio de Banach, que nos serán de bastante utilidad y, en adelante utilizaremos sin previo aviso.

Proposición 1.6. *[5, 34] Sea X un espacio de Banach y A un subconjunto acotado en X que no contiene sucesiones equivalentes a la base usual de ℓ_1. Si $a \in \overline{A}^w$, entonces existe una sucesión $\{a_n\}$ en A que converge débilmente al punto a.*

El resultado anterior viene a decir que, aunque la topología débil de un espacio de Banach infinito-dimensional no es metrizable, se comporta, en cierto sentido, como si lo fuera.

Proposición 1.7. *Sea X un espacio de Banach y A un subconjunto acotado en X. Si $a \in \overline{A}^w$, entonces existe un subconjunto numerable B de A tal que $a \in \overline{B}^w$.*

El resultado anterior aparece en [3] y en [36] , aunque se le atribuye a Kaplansky en [10].

Ya hemos comentado que la PCP y la CPCP son separablemente determinadas, sin embargo necesitamos la determinación separable local, esto es, para subconjuntos, que es lo que se hace en los dos siguientes lemas, para concluir esta sección.

Lema 1.8. *Sea C un subconjunto cerrado y acotado de un espacio de Banach X. Si C no verifica la PCP, entonces existe un subconjunto cerrado y separable $D \subset C$ que no tiene la PCP.*

Demostración. Como C falla la PCP, entonces, por el Lema 1.3, existe un subconjunto $A \subset C$ y $\delta > 0$ tal que cada subconjunto débil abierto relativo de A tiene diámetro al menos 2δ. Entonces $a \in \overline{A \setminus B(a,\delta)}^{w}$ para cada $a \in A$, donde $B(a,\delta)$ denota la bola abierta de centro a y radio δ. Ahora, para cada $a \in A$ existe un subconjunto numerable $A_a \subset A \setminus B(a,\delta)$ tal que $a \in \overline{A_a}^{w}$. Elegimos $a_1 \in A$ y definimos $A_1 = A_{a_1} \cup \{a_1\}$ y $A_{n+1} = A_n \bigcup (\bigcup_{a \in A_n} A_a)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y veamos que B falla la PCP. Para esto, mostraremos que cada subconjunto débil abierto relativo de B tiene diámetro al menos δ. En efecto, sea U un subconjunto débil abierto relativo de B. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \cap U \neq \emptyset$. Elegimos $a \in A_n \cap U$. Ahora $a \in \overline{A_a}^{w}$ y, por tanto, existe algún $x \in A_a \cap U$. Entonces $x \in B \cap U$ y $\|x - a\| > \delta$ lo que muestra que U tiene diámetro al menos δ. Es ahora claro que haciendo $D = \overline{B}$ se tiene que D es un subconjunto cerrado y separable de C que falla la PCP. □

Lema 1.9. *Sea X un espacio de Banach y C un subconjunto cerrado, acotado y convexo de X que falla la CPCP, entonces existe un subconjunto de C cerrado, acotado, convexo y separable que falla la CPCP.*

Demostración. Supongamos que C falla la CPCP, entonces, por el Lema 1.5, existen $A \subset C$, A convexo y $\delta > 0$ tales que cada w-abierto relativo de A tiene diámetro mayor que δ.

Entonces $a \in \overline{A \setminus B(a, \delta/2)}^{w}$ para todo $a \in A$. Ahora tenemos que para cada $a \in A$ existe $C_a \subset A \setminus B(a, \delta/2)$, C_a numerable, tal que $a \in \overline{C_a}^{w}$.

Tomemos $a_0 \in A$ y definimos inductivamente

$$D_1 = \{a_0\} \bigcup \text{co}\,(C_{a_0})$$

$$D_{n+1} = D_n \bigcup \text{co}\left(\bigcup_{a \in D_n} C_a\right), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Ahora llamamos $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$.

Es claro que D_n es convexo $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y D es convexo por ser unión creciente de convexos, con lo que $\overline{D}$ es cerrado, acotado, convexo y separable.

Afirmamos ahora que cada w-abierto relativo de D tiene diámetro mayor o igual que $\frac{\delta}{2}$.

En efecto si U es un w-abierto relativo de D, existe $n \in \mathbb{N}$ y existe $x \in U \cap D_n$ con $x \in \overline{C_x}^{w}$. Por tanto, existe $y \in U \cap C_x$ con $C_x \subset A \setminus B(a, \delta/2)$. En consecuencia, $\|x - y\| \geq \delta/2$ y, como $x, y \in U$, se cumple que $\text{diam}(U) \geq \delta/2$.

Sea U un w-abierto relativo de $\overline{D} = \overline{D}^{w}$ pues D es convexo, $\Rightarrow U \cap D \neq \emptyset$ es un w-abierto relativo de D y, por tanto, $\text{diam}(U \cap D) \geq \delta/2$ con lo que $\text{diam}(U) \geq \delta/2$.

Por tanto $\overline{D} \subset C$ es un subconjunto de C cerrado, acotado, convexo y separable que falla la CPCP. $\square$

1.1. Bases de Schauder

Puesto que trataremos en esta memoria sobre problemas de determinación por subespacios con base, parece natural mostrar aquí los resultados que nos serán de utilidad en adelante, respecto a bases de Schauder en espacios de Banach. La mayoría de los conceptos y resultados de esta sección se pueden encontrar en [21].

Recordemos que si X es un espacio de Banach y $\{e_n\}$ es una sucesión en X, se dice que $\{e_n\}$ es una *base Schauder* de X, si todo elemento $x \in X$ tiene una única expresión del tipo:

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e_n,$$

donde $\lambda_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la serie converge en la topología de la norma en X.

Equivalentemente, $\{e_n\}$ es una base Schauder de X si el subespacio generado por $\{e_n\}$ es denso en X y existe una constante $K > 0$ de forma que

$$\left\| \sum_{n=1}^{p} \lambda_n e_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^{p+q} \lambda_n e_n \right\|,$$

para cualesquiera escalares λ_n y naturales p y q. A partir de este momento, cuando no haya problema de confusión, suprimiremos la palabra Schauder cuando hablemos de bases en espacios de Banach, entendiendo por ello el concepto que acabamos de recordar.

Asímismo, si $\{e_n\}$ es una sucesión de elementos de un espacio de Banach X, diremos que $\{e_n\}$ es una *sucesión básica* en X si es una base del subespacio cerrado de X que genera.

La mejor constante K en la desigualdad anterior se llama la constante de la base. Como $K \geq 1$, la mejor de todas las posibles constantes básicas es $K = 1$ y, en este caso, se dice que la base es *monótona*.

Diremos que la base es *normalizada* cuando $\|e_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y diremos que es *seminormalizada* si $0 < \operatorname{ínf}_n \|e_n\|$ y $\sup_n \|e_n\| < +\infty$.

Merece la pena observar que, en un espacio de Banach con base, siempre se puede conseguir que la base sea monótona, sin más que renormar equivalentemente el espacio. En efecto, si X es un espacio de Banach con base $\{e_n\}$ y denotamos $\|\cdot\|$ a su norma, basta definir

$$|||x||| = \sup\left\{\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\| : n \in \mathbb{N}\right\},$$

donde $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e_n$. Ahora X con la nueva norma $|||\cdot|||$ equivalente es un espacio de Banach con base monótona $\{e_n\}$.

Para mayor comodidad, y de forma canónica, se pueden definir los funcionales asociados a una base $\{e_n\}$ como la única sucesión de elementos de X^*, $\{f_n\}$, para los que se verifica que $f_n(e_m) = \delta_{n,m}$, donde $\delta_{n,m}$ es el delta de Kronecker. De esta forma, si x es un elemento de un espacio de Banach con base $\{e_n\}$, su expresión en función de la base es:

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) e_n.$$

En general, los funcionales asociados a una base de un espacio de Banach forman una nueva base del subespacio cerrado que generan, en el dual del espacio de partida, pero no siempre forman una base del dual entero. Obsérvese que el hecho de que un espacio de Banach tenga una base, fuerza la separabilidad del espacio y así, por ejemplo, el espacio de Banach clásico ℓ_1 (el espacio de las sucesiones de escalares, cuya serie es absolutamente convergente) posee bases, y ninguna de ellas hace que sus funcionales asociados sean base del dual, puesto que como es sabido, el dual de ℓ_1 se puede identificar isométricamente con ℓ_∞, y éste no es separable.

Esto da pie a la siguiente definición, para la cual, dicho sea de paso, no hemos encontrado una traducción adecuada en castellano que sustituya el término shrinking.

Definición 1.10. Sea X un espacio de Banach con una base $\{e_n\}$ y funcionales asociados $\{f_n\}$. Se dice que la base $\{e_n\}$ es *shrinking* si $\{f_n\}$ es una base de X^*.

Uno de los ejemplos más sencillos de base shrinking es la base usual de c_0, ésta es la formada por las sucesiones que tienen un solo término no nulo, e igual a 1.

Una caracterización sencilla de las bases shrinking es la siguiente:

Proposición 1.11. *Sea X un espacio de Banach con base $\{e_n\}$. Entonces la base es shrinking si, y sólo si,* $\lim_{n\to+\infty} \|x^*_{|E_n}\| = 0$ *para todo $x^* \in X^*$, donde E_n es el subespacio cerrado generado por $\{e_n, e_{n+1}, \ldots, \}$, y $x^*_{|E_n}$ denota la restricción del funcional x^* al subespacio E_n.*

Merece la pena observar que el bidual de un espacio de Banach con base shrinking puede ser perfectamente identificado, en general, como a continuación se verá.

Proposición 1.12. *Sea $\{e_n\}$ una base shrinking de un espacio de Banach X, con funcionales asociados $\{f_n\}$. Entonces X^{**} es isomorfo al espacio de las sucesiones de escalares $\{a_n\}$ verificando:*

$$\sup_n \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\| \right\} < +\infty.$$

El isomorfismo viene dado por la ley $x^{**} \mapsto (x^{**}(f_1), x^{**}(f_2), \ldots)$. La norma de X^{**} es equivalente (y en el caso de que la base sea monótona es igual) a la definida por la expresión $\sup_n \left\{\left\|\sum_{i=1}^n x^{**}(f_i) e_i\right\|\right\}$.

Otra noción importante en lo que concierne a bases, que es, en algún sentido, dual de la noción de shrinking, es la de acotadamente completa.

Definición 1.13. Una base $\{e_n\}$ de un espacio de Banach X se dice que es *acotadamente completa* si, para cada sucesión de escalares $\{\lambda_n\}$ tales que $\sup\{\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\| : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$, se verifica que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n e_n$ converge en la topología de la norma del espacio X.

Un típico ejemplo de base no acotadamente completa, es la base usual del espacio de Banach c_0. Sin embargo, la base usual de ℓ_p, con $1 \le p < +\infty$, sí es acotadamente completa.

Es fácilmente comprobable que los funcionales asociados a una base shrinking, en un espacio de Banach, forman una sucesión básica acotadamente completa. El recíproco también resulta ser cierto.

Proposición 1.14. *Un espacio de Banach X con una base acotadamente completa es isomorfo a un espacio de Banach dual. Más concretamente, X es isomorfo al dual del subespacio cerrado de X^* generado por los funcionales asociados a la base. De hecho, si la base es monótona, este isomorfismo es una isometría.*

Combinando las nociones de base shrinking y acotadamente completa se obtiene la siguiente caracterización de la reflexividad.

Teorema 1.15. *Sea X un espacio de Banach con base. Entonces, X es reflexivo si, y sólo si, la base es, a la vez, shrinking y acotadamente completa.*

Recordamos ahora un concepto bastante natural, el de bases equivalentes. No es más que introducir una relación de equivalencia en el conjunto de todas las bases de un espacio de Banach con base, considerando iguales espacios isomorfos, como es usual.

Definición 1.16. Sean X, Y dos espacios de Banach y $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ bases de X e Y, respectivamente. Se dice que dichas bases son *equivalentes* si para cualesquiera escalares $\{\lambda_n\}$ se verifica que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n v_n \text{ converge.}$$

El teorema de la gráfica cerrada nos da, ahora, una fácil caracterización de cuándo dos bases son equivalentes.

Proposición 1.17. *Sean X, Y dos espacios de Banach y $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ bases de X e Y, respectivamente. Entonces, dichas bases son equivalentes si, y sólo si, existe un isomorfismo $T : X \to Y$ tal que*

$$T(u_n) = v_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es conocido, y de gran utilidad, el siguiente resultado de tipo más técnico, que da una condición suficiente para que dos bases de un mismo espacio sean equivalentes.

Proposición 1.18. *Sea $\{v_n\}$ una sucesión básica en un espacio de Banach X con constante básica K, y $M > 0$ de forma que $\|v_n\| \geq M \ \forall n \in \mathbb{N}$. Si $\{u_n\}$ es una sucesión de elementos de X tales que:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n - v_n\| < \frac{M}{2K},$$

entonces $\{u_n\}$ es una sucesión básica de X equivalente a $\{v_n\}$.

Existe un tipo especial de sucesión básica, fundamental en el estudio de bases en espacios de Banach, que pasamos a definir.

Definición 1.19. Sea X un espacio de Banach con base $\{e_n\}$ y $\{v_n\}$ una sucesión en $X \setminus \{0\}$. Se dice que $\{v_n\}$ es un *bloque básico* de la base en X si existen una sucesión de enteros $m_0 = 0 < m_1 < \ldots < m_n < \ldots$ y una sucesión de escalares $\{\lambda_n\}$ tales que

$$v_n = \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} \lambda_k e_k, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es claro, que todo bloque básico es una sucesión básica.

1.2. Símplices de Choquet

El objetivo de esta sección es hacer un breve recordatorio del concepto de símplex de Choquet, que nos aparecerá en el resto de la memoria como, en cierto sentido, el culpable de que un espacio no tenga la PCP o la CPCP. Lo que aparece expuesto en esta sección se puede encontrar en [31]. Aunque la definición de símplex es algebraica, utilizamos sólo la caracterización de Choquet para el caso compacto, que tomaremos como definición.

Empezamos recordando que un *símplex* en $\mathbb{R}^n$ es la envolvente convexa de una cantidad finita de vectores afínmente independientes, que como mucho pueden ser $n + 1$. Así, un símplex en $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto compacto, en el que cada punto del símplex se representa de forma única como combinación convexa de los puntos afínmente independintes que definen al símplex, que no son más que los puntos extremos del símplex. Recordemos que un *punto extremo* de un conjunto K en un espacio vectorial es un punto de K que no es punto medio de ningún segmento no trivial contenido en K. Usaremos $\mathrm{Ext}(K)$ para denotar al conjunto de puntos extremos de K.

La generalización del concepto de símplex al contexto de espacio de dimensión infinita pasa por el bien conocido teorema de representación integral de Choquet que recordamos a continuación, en una versión que no es la más general, pero suficiente para nuestros propósitos.

Teorema 1.20. *Sea X un espacio localmente convexo y separado y sea K un subconjunto convexo, compacto y metrizable. Entonces para cada punto*

$k \in K$ existe μ una medida de probabilidad Borel regular sobre K, soportada sobre $\operatorname{Ext}(K)$*, es decir* $\mu(\operatorname{Ext}(K)) = 1$*, de forma que*

$$f(k) = \int_{\operatorname{Ext}(K)} f(w)\, d\mu(w)$$

para cada $f \in X^*$.

La expresión integral en el teorema anterior viene a sustituir el hecho de que cada punto de K se represente como combinación convexa del conjunto de puntos extremos de K, con lo que la definición de símplex en ambiente infinito-dimensional, que viene a extender a la conocida en ambiente finito-dimensional, parace ahora clara.

Definición 1.21. Sea K un subconjunto compacto, convexo y metrizable de un espacio localmente convexo y separado. Se dice que K es un *símplex de Choquet*, o simplemente símplex, si para cada punto $k \in K$ existe una única medida de probabilidad μ Borel regular sobre K, soportada sobre $\operatorname{Ext}(K)$, de forma que $f(k) = \int_{\operatorname{Ext}(K)} f(w)\, d\mu(w)$ para cada $f \in X^*$.

Teniendo clara la defininición de símplex en ambiente infinito dimensional, parece natural poder construir símplices en dimensión infinita a partir de una sucesión creciente de símplices finito dimensionales. Esto, y mucho más, es posible con el esquema de límite inverso que pasamos a describir.

Definición 1.22. Un *sistema inverso* o *proyectivo* es un par de sucesiones $(\{K_n\}, \{\pi_n\})$, donde $\{K_n\}$ es una sucesión de símplices finito dimensionales de forma que el número de puntos extremos de K_n crece de forma estricta con n y $\pi_n \colon K_{n+1} \to K_n$ es una aplicación afín y continua verificando que $\pi_n(k) = k$ para cada $k \in K_n$ y $\pi_n(K_{n+1}) = K_n$ para cada n.

Se define el *límite inverso del sistema* $(\{K_n\}, \{\pi_n\})$, y se denota por $\varprojlim (\{K_n\}, \{\pi_n\})$, como el subconjunto de $\Pi_n K_n$ formado por aquellas sucesiones $\{x_n\}$ con $x_n \in K_n$ para cada n, verificando $\pi_n(x_{n+1}) = x_n$ para cada n natural.

En [19] se demuestra que el límite inverso de un sistema inverso es un símplex (ver también [29]), considerando en el límite inverso la topología producto inducida y que todo símplex se puede escribir como límite inverso de cierto sistema inverso. De hecho, éste es el punto de inicio en este trabajo para establecer una relación biunívoca entre símplices y preduales isométricos de L_1, vía matrices representantes, sobre el que no entraremos en esta memoria.

Parece natural que si en dimensión finita un símplex viene dado por sus puntos extremos, en dimensión infinita las propiedades topológicas de los puntos extremos de un símplex deben decir bastante sobre el símplex. Esto es efectivamente así, hasta el punto de que en algunos casos las propiedades topológicas del conjunto de puntos extremos de un símplex determinan topológicamente al símplex. Mostramos ahora dos ejemplos que ilustran este comentario.

Definición 1.23. Un símplex C se dice un *símplex de Bauer* si el conjunto de puntos extremos de C es cerrado en C.

Se sabe que cualquier símplex de Bauer es de la forma $M_1^+(K)$, para algún espacio topológico compacto Haussdorff, donde $M_1^+(K)$ denota el conjunto de medidas de probabilidad Borel regulares sobre K o, si se quiere, la cara positiva de la esfera unidad del dual del espacio $C(K)$ de funciones continuas sobre K.

Existe un símplex P [33] en ℓ_2, llamado *símplex de Poulsen*, con la sorprendente propiedad de que el conjunto de sus puntos extremos es denso en P. Además todavía es más sorprendente que cualquier símplex con la propiedad de que su conjunto de puntos extremos sea denso en él, es afínmente homeomorfo al símplex de Poulsen (ver también [20]). Así, el símplex de Poulsen es universal para los símplices con puntos extremos densos.

1.3. Árboles

Dedicamos esta última sección al concepto de árbol en espacios de Banach, que nos será de gran utilidad en el siguiente capítulo, de hecho los resultados allí obtenidos se escribirán en términos de árboles. Referimos a [30] para este concepto, así como para su utilidad en el estudio de propiedades isomórficas de espacios de Banach.

Denotamos por $\mathbb{N}^{<\omega}$ el conjunto de sucesiones finitas ordenadas de números naturales junto con la sucesión vacía que será denotada por 0 como elemento de $\mathbb{N}^{<\omega}$.

Se define un orden parcial en $\mathbb{N}^{<\omega}$ mediante: $\alpha \leq \beta$ si $|\alpha| \leq |\beta|$ y $\alpha_i = \beta_i$ para $1 \leq i \leq |\alpha|$, para cualesquiera α, $\beta \in \mathbb{N}^{<\omega}$, donde para cada elemento $\alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $|\alpha|$ denota la longitud de la sucesión finita de enteros α.

Por supuesto, convenimos que $|0| = 0$ y que $0 \leq \alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma$. También hacemos $\alpha- = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ si $\alpha = ((\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{<\omega}$ y $\alpha- = 0$ si $|\alpha| = 1$.

Así $\mathbb{N}^{<\omega}$ es un conjunto infinito, numerable, parcialmente ordenado con elemento mínimo. En consecuencia, debe existir una aplicación biyectiva
$\phi\colon \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathbb{N}$ que conserva el orden recién definido en $\mathbb{N}^{<\omega}$. Para cons-

truir dicha aplicación, denotemos por $\{p_n\}$ la numeración estrictamente creciente de los enteros primos positivos y definamos $\phi_1 : \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathbb{N}$ mediante

$$\phi_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n} \; \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma, \; \phi_1(0) = 1.$$

Así ϕ_1 es una aplicación creciente e inyectiva y, como $\phi_1(\mathbb{N}^{<\omega})$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, existe una biyección creciente $\phi_2 : \phi_1(\mathbb{N}^{<\omega}) \to \mathbb{N}$.

Basta ahora definir $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$. Obsérvese que además $\phi(A, n) \leq \phi(A, m)$ si $n \leq m$ $\forall A \in \mathbb{N}^{<\omega}$.

Definición 1.24. Un *árbol* en un espacio de Banach X es una familia de vectores en X indizado en $\mathbb{N}$. Usaremos la misma notación que con las sucesiones $\{x_A\}_{A \in \mathbb{N}^{<\omega}}$.

El árbol se dirá *seminormalizado* si $0 < \inf_A \|x_A\| \leq \sup_A \|x_A\| < \infty$. Diremos que el árbol $\{x_A\}_{A \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ es *débilmente nulo* si la sucesión $\{x_{(A,n)}\}_n$ es débilmente nula para cada $A \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Una sucesión $\{x_{A_n}\}_{n \geq 0}$ es llamada una *rama* si $\{A_n\}$ es un subconjunto maximal totalmente ordenado de $\mathbb{N}^{<\omega}$, esto es, existe una sucesión $\{\alpha_n\}$ de números naturales tal que $A_n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ and $A_0 = \emptyset$. El árbol $\{x_A\}_{A \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ se dice *básico* si el conjunto numerable $\{x_A \colon A \in \mathbb{N}^{\omega}\}$ es una sucesión básica para alguna reordenación.

En definitiva un árbol no es más que una sucesión, si se quiere, indizada en $\mathbb{N}^{<\omega}$. La utilidad del uso de árboles, sustituyendo a las sucesiones, se pondrá de manifiesto en el siguiente capítulo, aunque se puede ver un ejemplo de dicha utilidad en [30]. Digamos que esta versatilidad en el uso de los árboles se debe a la complejidad descriptiva de algunas propiedades isomórficas en espacios de Banach. En nuestro caso, la PCP, esto se pone de manifiesto en [23], donde se demuestra que la familia de cerrados y acotados con la PCP de un espacio de Banach sin PCP es una familia no boreliana, para la estructura de Effros-Borel de la familia de cerrados y acotados en el espacio. Este tipo de complejidad estructural hace que la descripción de la PCP sea más cómoda con árboles que con sucesiones.

Por otro lado, conviene poner de manifiesto que dada una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio de Banach, se puede definir un árbol en el espacio mediante $y_A = x_{\text{máx}(A)}$ para cada $A \in \mathbb{N}^{<\omega}$. En tal caso, se tiene que cada subsucesión de $\{x_n\}$ corresponde a una rama del árbol $\{y_A\}_{A\in\mathbb{N}^{<\omega}}$. Esta simple observación permite ver que el uso de árboles permite tener un esquema más preciso para el estudio de las subsucesiones de una sucesión dada.

CAPÍTULO 2

Caracterizando la propiedad del punto de continuidad mediante árboles

El objetivo de este capítulo es obtener una caracterización de la PCP, que será de tipo secuencial en el ambiente de los espacios de Banach sin copias de ℓ_1, para luego obtener una caracterización en el ambiente de espacios de Banach generales.

Nuestro punto de partida es un reciente resultado de H.P. Rosenthal [35] en el que se prueba que toda sucesión básica en un espacio de Banach con la PCP admite una subsucesión básica acotadamente completa. Con anterioridad, ya era conocido que los espacios con la PCP contienen muchos subespacios duales y, por tanto, sucesiones básicas acotadamente completas en abundancia, por ejemplo como consecuencia del trabajo de Ghoussoub y Maurey [12] o de Bourgain [3], sin embargo, creemos que el resultado de Rosenthal es el primero conocido que, de forma secuencial, muestra cuántas sucesiones básicas acotadamente completas debe contener un espacio con la PCP. La pregunta natural, que el propio Rosenthal se hace ya en [35] , es si, recíprocamente, un espacio tiene la PCP siempre que toda sucesión básica admita una subsucesión acotadamente completa. De ser cierto, se obtendría una completa caracterización secuencial de la PCP en términos de subespacios con base, lo que respondería afirmativamente al problema de Bourgain sobre si la PCP está determinada por subespacios con base. Sin embargo, el propio Rosenthal muestra que la respuesta a su pregunta es negativa, dando un espacio sin la PCP y verificando que toda sucesión básica admite una subsucesión acotadamente completa. Además, deja abierto el problema para espacios de Banach sin copias de ℓ_1, es decir, ¿cada espacio sin copias de ℓ_1 verificando que toda sucesión básica admite una subsucesión acotadamente completa debe verificar la PCP? Otra vez la respuesta es negativa, como puede verse en [24]. Parece entonces que nos quedamos sin condición candidata a fin de encontrar una caracterización secuencial de la PCP.

Existen ya en la literatura ejemplos de cómo suplir las deficiencias de condiciones de tipo secuencial que parecen naturales a la hora de caracterizar propiedades isomórficas de espacios de Banach, pero que a la postre no funcionan. Un buen ejemplo de ello, y que creemos el primero, es el que aparece en un trabajo de Odell y Schlumprecht [30]. Aquí se quieren caracterizar los espacios que son isomorfos a subespacios de ℓ_p-sumas de espacios finito-dimensionales. Desde luego una condición natural, que no es difícil probar, es que cada sucesión w-nula y seminormalizada tenga subsucesiones equivalentes a la base usual de ℓ_p. Sin embargo esta condición no es suficiente, como se muestra en este trabajo, incluso para espacios reflexivos. La solución que se da a este problema consiste en sustituir la condición secuencial por una condición análoga, pero en términos de árboles, dando sentido preciso a lo que debemos entender por árbol w-nulo, así como trasladando el concepto de subsucesión de una sucesión al ambiente de árboles. De esta forma ellos consiguen una solución satisfactoria al problema planteado. La desventaja de esta estrategia es el moverse en el ambiente arbóreo, que en general resulta más complicado, sin embargo los árboles utilizados son conjuntos numerables, o sea sucesiones al fin y al cabo, con lo que el objetivo de obtener caracterizaciones secuenciales se cumple plenamente.

Intentaremos entonces seguir la vía expuesta en el párrafo anterior con el objetivo de obtener caracterizaciones secuenciales de la PCP.

2.1. PCP en espacios sin copias de ℓ_1

Parece claro que en el ambiente de los espacios de Banach sin copias de ℓ_1 el trabajo debe ser más asequible o al menos más satisfactorio, debido al comportamiento metrizable de la topología débil en este ambiente, por lo que resulta entonces apropiado empezar nuestra exposición de este capítulo en dicho marco.

No olvidemos que nuestro propósito es obtener una caracterización local de la PCP para subconjuntos de espacios de Banach sin sucesiones equivalentes a la base usual de ℓ_1 en términos de árboles y sucesiones acotadamente completas. En este sentido, existe ya un resultado reciente de Fonf [9] en el que se ha probado que un espacio de Banach con dual separable tiene la PCP, si, y solo si, cada árbol w-nulo en S_X tiene una rama acotadamente completa, equivalentemente, cada árbol seminormalizado y w-nulo en X tiene una rama acotadamente completa. Sin embargo la caracterización anterior no funciona para subconjuntos, como prueba el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1. Sea $\{e_n\}$ la base usual de c_0, el espacio de sucesiones de escalares nulas con la norma del máximo. Como $\{e_n\}$ es una sucesión w-nula, el conjunto $K = \{e_n\colon\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ es un subconjunto w-compacto en c_0 y, por tanto, K tiene la PCP. Pero K no tiene sucesiones básicas acotadamente completas, ya que c_0 no tiene subespacios duales de dimensión infinita.

El siguiente lema introduce una nueva condición en términos de árboles, para subconjuntos cerrados y acotados de un espacio de Banach que fuerza el fallo de la PCP. En cierta forma este hecho es el punto clave que nos va a permitir obtener la caracterización local, para subconjuntos, de la PCP.

Lema 2.2. *Sea X un espacio de Banach y sea C un subconjunto cerrado y acotado de X. Supongamos que X contiene un árbol seminormalizado y w-nulo $\{x_A\}_{A\in\mathbb{N}^{<\omega}}$ tal que el conjunto $\Gamma = \left\{\sum_{B\le A} x_B\colon\ A \in \mathbb{N}^{<\omega}\right\} \subset C$. Entonces C no tiene la PCP.*

Demostración. Veamos que $\overline{\Gamma}$ no verifica la condición ii) del Lema 1.3. Como $\{x_A\}_{A\in\mathbb{N}^{<\omega}}$ es seminormalizado, se tiene que $\delta = \inf\{\|x_A\|\colon\ A \in \mathbb{N}^{<\omega}\} > 0$. Sea $A \in \mathbb{N}^{<\omega}$, entonces $\sum_{B\le(A,i)} x_B = \sum_{B\le A} x_B + x_{(A,i)}$ y como el árbol es w-nulo se tiene que $\{x_{(A,i)}\}_i$ converge débilmente a cero, luego

$$\left\{\sum_{B\le(A,i)} x_B\right\} \text{ converge débilmente a } \sum_{B\le A} x_B$$

y además

$$\left\|\sum_{B\le(A,i)} x_B - \sum_{B\le A} x_B\right\| = \left\|x_{(A,i)}\right\| \ge \delta,\ \ \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

Sea ahora U, w-abierto de X con $U \cap \overline{\Gamma} \neq \emptyset$. Ahora $U \cap \Gamma \neq \emptyset$ y existe entonces $A \in \mathbb{N}^{<\omega}$ tal que $\sum_{B \le A} x_B \in U \cap \Gamma$ y $\{\sum_{B \le (A,i)} x_B\}_i$ converge débilmente a $\sum_{B \le A} x_B$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{B \le (A,i)} x_B \in U \cap \Gamma$ para cualquier $i > m$ y además

$$\left\| \sum_{B \le (A,i)} x_B - \sum_{B \le A} x_B \right\| \ge \delta,$$

luego para $i > m$

$$\operatorname{diam}(U \cap \Gamma) \ge \left\| \sum_{B \le (A,i)} x_B - \sum_{B \le A} x_B \right\| \ge \delta > \frac{\delta}{2}.$$

En resumen, tomando $\overline{\Gamma} \subset C$ y $\delta/2$ en lugar de A y ε respectivamente, no se cumple la condición ii) del Lema 1.3. □

Ponemos ahora nombre a la condición que nos acaba de aparecer en el lema anterior.

Definición 2.3. Diremos que un árbol $\{x_A\}_{A \in N^{<\omega}}$ en un espacio de Banach es *uniformemente de tipo P* si el conjunto $\Gamma = \{\sum_{B \le A} x_B \colon A \in N^{<\omega}\}$ es acotado. En el caso de que el conjunto $\{\sum_{i=1}^{n} x_{(p_1,\cdots,p_i)} \colon n \in \mathbb{N}\}$ esté acotado para cada sucesión $\{p_n\}$ de naturales, es decir, para cada rama de $\mathbb{N}^{<\omega}$, diremos que el árbol es *tipo P*.

Decir que un árbol es tipo P es decir que las sumas parciales de cada rama se mantienen acotadas, pero la cota puede depender de la rama, mientras que si el árbol es uniformemente tipo P la cota es independiente de la rama elegida. Obsérvese que un árbol seminormalizado con todas sus ramas de tipo P no tiene ramas acotadamente completas, según la anterior definición de tipo P.

Convendría decir que si bien creemos que esta definición no ha aparecido antes, la elección del nombre se debe a que es usado en [38] para nombrar a las sucesiones que son términos generales de series con sumas parciales acotadas.

Mostramos ahora uno de nuestros resultados principales, una caracterización de la PCP para subconjuntos sin sucesiones equivalentes a la base usual de ℓ_1, en términos de árboles.

Teorema 2.4. *Sea X un espacio de Banach y $C \subseteq X$ un subconjunto no vacío, cerrado y acotado de X. Supongamos que C no contiene sucesiones equivalentes a la base usual de ℓ_1. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) C no tiene la PCP.

ii) Existe un árbol seminormalizado y w-nulo $\{x_A\}_{A\in N^{<\omega}}$ en X tal que

$$\Gamma = \left\{ \sum_{B\leq A} x_B \colon\ A \in N^{<\omega} \right\} \subset C.$$

Además:

I) El árbol $\{x_A\}_{A\in N^{<\omega}}$ puede elegirse tal que sea una sucesión básica seminormalizada para cierta reordenación.

II) Si X^* es separable entonces $\overline{\Gamma}^{w^*}$, el cierre en la topología w^* de Γ en X^{**}, es w^*-homeomorfo al conjunto de Cantor.

III) Si X^* es separable y, además, C es convexo, entonces $\overline{\mathrm{co}}(\Gamma) \subset C$ y $\overline{\mathrm{co}}^{\omega^*}(\Gamma)$, el cierre w^* de $\mathrm{co}(\Gamma)$ en X^{**}, es afínmente w^*-homeomorfo al símplex de Bauer $M_1^+(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$.

Demostración. i) $\Rightarrow$ ii). Supongamos que C no tiene la PCP. Del Lema 1.8 podemos suponer que C es un subconjunto de X, cerrado, acotado y separable, que no tiene la PCP y que, por hipótesis, no contiene sucesiones equivalentes a la base usual de ℓ_1. Como la envolvente lineal cerrada de C es un subespacio separable de X, podemos suponer que X es separable. Así X se embebe isométricamente en un espacio de Banach Z con una base monótona, normalizada $\{e_n\}$ con funcionales asociados o biortogonales $\{f_n\}$. Tomemos por ejemplo $Z = C[0,1]$, el espacio de las funciones continuas en $[0,1]$ con la norma del supremo. Como C no tiene la PCP, por el Lema 1.3, existe $D \subseteq C$ y existe $\delta > 0$ tal que para cualquier U w-abierto de X con $U \cap D \neq \emptyset$ se tiene que $\operatorname{diam}(U \cap D) > 2\delta$, por lo que $a \in \overline{D \setminus B(a,\delta)}^{w}$, $\forall\, a \in D$.

Ahora fijamos para cada $a \in D$ una sucesión $\{y_j^a\} \subset D \setminus B(a,\delta)$ tal que $\{y_j^a\} \xrightarrow{w} a$, puesto que D no contiene sucesiones equivalentes a la base usual de ℓ_1. Fijamos también la biyección $\phi : \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathbb{N}$ presentada en la última sección del primer capítulo verificando que $\phi(A) \leq \phi(B)$ si $A \leq B$ y $\phi(A,n) \leq \phi(A,m)$ si $n \leq m$ $\forall A \in \mathbb{N}^{<\omega}$.

Construiremos a continuación inductivamente una sucesión $\{a_n\}$ con

$$\{a_n \colon n \in N\} \subset \left\{y_j^a \colon j \in \mathbb{N}, a \in D\right\}$$

y una sucesión básica $\{u_j\} \subset X$ equivalente a un bloque básico $\{v_n\}$ de la base $\{e_n\}$ en Z verificando:

a) $u_1 = a_1$, $u_j = a_j - a_{\phi(\phi^{-1}(j)-)}$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

b) Para cada $j \in \mathbb{N}$, $\|u_j\| > \delta/2$ y $\|u_j - v_j\| < \varepsilon_j := \delta 4^{-(j+1)}$ siendo $v_j \in \operatorname{lin}\{e_j \colon m_{j-1} < i \leq n_j\}$ donde $\{m_j\}$ es una sucesión de naturales con $m_1 < m_2 < \ldots < m_n < \ldots$.

c) Para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $a \in D$ y $j_n \in \mathbb{N}$ tales que $a_n = y_{j_n}^a$ y $\{j_n\}$ será una sucesión de naturales estrictamente creciente.

Como $\operatorname{diam}(D) > \delta$, se tiene que existe $a_0 \in D$ con $\|a_0\| > \delta/2$. Sea $\{y_j^{a_0}\} \subset D \setminus B(a_0,\delta)$ verificando $\{y_j^{a_0}\} \xrightarrow{w} a_0$ y elijamos entonces $y_{j_1}^{a_0}$ con

$\|y_{j_1}^{a_0}\| > (\delta/2)$. Definimos $a_1 = y_{j_1}^{a_0}$ y $u_1 = a_1$. Sabemos que existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|\sum_{i=m_1+1}^{\infty} f_i(u_1)e_i\right\| < \varepsilon_1/2$, así que definimos $v_1 = \sum_{i=1}^{m_1} f_i(u_1)e_i$ con lo cual $\|u_1\| > \delta/2$ y

$$\|u_1 - v_1\| = \left\|\sum_{i=m_1+1}^{\infty} f_i(u_1)e_i\right\| < \frac{\varepsilon_1}{2} < \varepsilon_1.$$

Supongamos ahora que $n \geq 1$ y ya hemos construido $a_1,..., a_n$, $m_1,...,$ m_n y $j_1,..., j_n$ verificando a), b) y c). Consideremos $i = \phi(\phi^{-1}(n+1)-)$, $\alpha = \phi^{-1}(n+1)-$ y $\beta = \phi^{-1}(n+1)$, entonces $\alpha < \beta$ y $\phi(\alpha) < \phi(\beta)$ es decir $i < n+1$, con lo que a_i ya ha sido construido.

Tenemos pues fijada una sucesión $\{y_j^{a_i}\} \subset D \setminus B(a_i, \delta)$ tal que $\{y_j^{a_i}\} \xrightarrow{w} a_i$. Llamemos $V_i = \{a \in D\colon\ |f_j(a - a_i)| < \varepsilon_{n+1}/3m_n \text{ si } i \leq j \leq m_n\}$.

Es claro que V_i es un w-abierto relativo de D con $a_i \in V_i$, luego podemos encontrar un $j_0 \in N$ tal que $y_j^{a_i} \in V_i\ \forall j > j_0$. Tomemos $j_{n+1} >$ máx $\{j_k\colon\ 0 \leq k \leq n\}$. Entonces $y_{j_{n+1}}^{a_i} \in V_i$ y definimos $a_{n+1} = y_{j_{n+1}}^{a_i}$. Se tiene entonces que

$$\|a_{n+1} - a_i\| = \left\|y_{j_{n+1}}^{a_i} - a_i\right\| \geq \delta > \frac{\delta}{2}$$

pues $y_{j_{n+1}}^{a_i} \in D \setminus B(a_i, \delta)$.

Definimos $u_{n+1} = a_{n+1} - a_i$ y elegimos $m_{n+1} > m_n$ tal que

$$\left\|\sum_{m_{n+1}+1}^{\infty} f_i(u_{n+1})e_i\right\| < \frac{\varepsilon_{n+1}}{3}.$$

Finalmente definimos $v_{n+1} = \sum_{i=m_n+1}^{m_{n+1}} f_i(u_{n+1})e_i$. Entonces $\|u_{n+1}\| > \delta/2$

y

$$\begin{aligned}\|u_{n+1} - v_{n+1}\| &= \left\| \sum_{i=1}^{m_n} f_i(u_{n+1})e_i + \sum_{i=m_{n+1}+1}^{\infty} f_i(u_{n+1})e_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m_n} |f_i(u_{n+1})| \, \|e_i\| + \frac{\varepsilon_{n+1}}{3} \\ &< \ m_n \, \frac{\varepsilon_{n+1}}{3m_n} + \frac{\varepsilon_{n+1}}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_{n+1}.\end{aligned}$$

En definitiva, hemos definido $u_{n+1} = a_{n+1} - a_i$ y $a_{n+1} = y_{j_{n+1}}^{a_i} \in V_i$ y esto completa la construcción inductiva.

Según lo hemos definido $\{v_n\}$ es un bloque básico de la base $\{e_n\}$ y como se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n - v_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta}{4^{n+1}} = \frac{\delta}{12} < \frac{\delta}{8}$$

deducimos de [21] que $\{u_n\}$ es una sucesión básica seminormalizada en X equivalente al bloque básico $\{v_n\}$.

Definimos $x_A = u_{\phi(A)}$ $\forall\, A \in \mathbb{N}^{<\omega}$, así $\{x_A\}$ es un árbol seminormalizado en X que cumple I).

Además por construcción $x_0 = u_{\phi(0)} = a_1$ y $x_A = u_{\phi(A)} = a_{\phi(A)} - a_{\phi(A-)}$, $\forall A \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $\forall A \neq 0$, entonces $\sum_{B \leq A} x_B = a_{\phi(A)} \in D \subset C$ para todo $A \in \mathbb{N}^{<\omega}$ con lo que $\Gamma \subseteq C$.

Finalmente para probar que el árbol $\{x_A\}$ es w-nulo, consideremos

$$x_{(A,i)} = u_{\phi(A,i)} = a_{\phi(A,i)} - a_{\phi(A)} = y_{j_{\phi(A,i)}}^{a_{\phi(A)}} - a_{\phi(A)} \forall A \in \mathbb{N}^{<\omega} \text{ y } \forall i \in \mathbb{N}$$

con lo que $\{x_{(A,i)}\}_i \xrightarrow{w} 0$ ya que $\{y_{j_{\phi(A,i)}}^{a_{\phi(A)}}\}_i \xrightarrow{w} a_{\phi(A)}$ $\forall A \in \mathbb{N}^{<\omega}$ pues por c) y las propiedades de ϕ sabemos que $\{y_{j_{\phi(A,i)}}^{\phi(A)}\}_i$ es una sucesión parcial de $\{y_j^{a_{\phi(A)}}\}_j$.

Esto completa la prueba de i) implica ii).

ii) implica i) es el Lema 2.2. □

I) ya ha sido probado en el transcurso de i) implica ii). Para probar II) y III) es conveniente ver el conjunto Γ de otra forma.

Para esto, como $\{v_n\}$ es un bloque básico equivalente a la sucesión básica $\{u_n\}$, existe un isomorfismo sobre, $T : [u_n] \to [v_n]$ con $T(u_n) = v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por comodidad en la notación hacemos $v_B = v_{\phi(B)}$ para cada $B \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Entonces

$$T\left(\sum_{B \leq A} x_B\right) = \sum_{B \leq A} T\left(u_{\phi(B)}\right) = \sum_{B \leq A} v_{\phi(B)} = \sum_{B \leq A} v_B \forall A \in \ \mathbb{N}^{<\omega}.$$

Llamando ahora $\Sigma = \left\{\sum_{B \leq A} v_B \colon A \in \mathbb{N}^{<\omega}\right\}$ tenemos que $T(\Gamma) = \Sigma$ y $T^{**}(\overline{\Gamma}^{w^*}) = \overline{\Sigma}^{w^*}$.

Así pues, para probar II) y III) para Γ es suficiente probar II) y III) para Σ.

Demostración de II). Definimos $h : \overline{\Sigma}^{w^*} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ como $h(x)(n) = v_n^*(x)$, para todo $x \in \overline{\Sigma}^{w^*}$ y para $n \in \mathbb{N}$ donde $\{v_n^*\}$ es la sucesión de funcionales asociados a $\{v_n\}$. Por tanto, se tiene que para cualquier $x \in \Sigma$, $v_n^*(x) \in \{0,1\}$, lo que hace que h sea una aplicación bien definida, ya que la convergencia w^* es la puntual sobre los elementos del dual. Además h es claramente continua para la topología w^* en $\overline{\Sigma}^{w^*}$ y la topología producto en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Como estamos suponiendo que X^* es separable, por [39], podemos ver a X como subespacio de un espacio de Banach Z con base shrinking, por tanto podemos considerar $\{v_n\}$ como una sucesión básica shrinking, pues es un bloque básico de la base de Z, según se vio en i) $\Rightarrow$ ii). Así pues $[v_n^*] = [v_n]^*$, lo que nos proporciona la inyectividad de h.

En resumen, h es un w^*-homeomorfismo sobre su imagen en la que consideramos siempre la topología producto. Así la imagen de h es totalmente disconexa por serlo $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, luego $\overline{\Sigma}^{w^*}$ es w^*-totalmente disconexo.

Al ser $\overline{\Sigma}^{w^*}$ w^*-compacto y w^*-totalmente disconexo, para probar que es w^*-homeomorfo al conjunto de Cantor, basta probar que es w^*- perfecto [8].

En la prueba de i) implica ii) hemos visto que por ser el árbol $\{x_A\}$ w-nulo se tiene para cada $A \in \mathbb{N}^{<\omega}$ que $\{\Sigma_{B\leq(A,i)}x_B\}_i \xrightarrow{w} \Sigma_{B\leq A}x_B$, y por ser dicho árbol seminormalizado

$$||\Sigma_{B\leq(A,i)}x_B - \Sigma_{B\leq A}x_B|| \geq \delta > 0,\ \forall A \in \mathbb{N}^{<\omega}.$$

Entonces cada punto de Γ es un punto de w^*-acumulación de $\overline{\Gamma}^{w^*}$ y, por tanto, cada punto de Σ es un punto de w^*-acumulación de $\overline{\Sigma}^{w^*}$, con lo que $\overline{\Sigma}^{w^*}$ es w^*-perfecto y $\overline{\Gamma}^{w^*}$ también lo es.

Así pues $\overline{\Sigma}^{w^*}$ es w^*-homeomorfo al conjunto de Cantor y $\overline{\Gamma}^{w^*}$ también lo es. $\square$

Demostración de III). Llamemos $D = \overline{\text{co}}^{w^*}(\Gamma)$ y $K = \text{Ext}(D)$, el conjunto de puntos extremos de D. Definimos:

$$g : M_1^+(K) \to \overline{\text{co}}^{w^*}(\Gamma)$$

como

$$g(\mu) = w^* - \int_K k\, d\mu,\ \forall \mu \in M_1^+(K)$$

es decir

$$g(\mu)(x^*) = \int_K x^*(\omega)\, d\mu(\omega),\ \forall \mu \in M_1^+(K),\ \forall x^* \in X^*.$$

Nótese que $M_1^+(K)$ denota el conjunto de las medidas de probabilidad Borel regulares sobre K o, si se quiere, la parte positiva de la esfera unidad del dual de $C(K)$, el espacio de funciones continuas sobre K.

Pues bien g es un w^*-homeomorfismo afín y sobreyectivo.

La inyectividad de g la dejamos para más tarde.

La sobreyectividad de g viene dada por el teorema de representación de Choquet y es claro que g es $(w^* - w^*)$-continua y afín.

Ahora veamos que K es w^*-homeomorfo al conjunto de Cantor o lo que es lo mismo, si llamamos $H = \operatorname{Ext}\left(\overline{\text{co}}^{w^*}(\Sigma)\right)$, probaremos que H es w^*-homeomorfo al conjunto de Cantor.

Para ello veamos que $H = \overline{\Sigma}^{w^*}$

En nuestro caso $\overline{\text{co}}^{w^*}(\Sigma)$ es w^*- compacto y entonces, por el teorema de Krein-Milman, $\operatorname{Ext}\left(\overline{\text{co}}^{w^*}(\Sigma)\right) \subset \overline{\Sigma}^{w^*}$ es decir, $H \subset \overline{\Sigma}^{w^*}$

Veamos que $\overline{\Sigma}^{w^*} \subset H$.

Sea $x \in \overline{\Sigma}^{w^*}$ y supongamos que $x = (y+z)/2$ para $y, z \in \overline{\text{co}}^{w^*}(\Sigma)$. Entonces tenemos que $v_n^*(x) \in \{0,1\}$ y $v_n^*(y), v_n^*(z) \in [0,1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, $v_n^*(x) = \left(v_n^*(y) + v_n^*(z)\right)/2$, así $x = y = z$ y $x \in \operatorname{Ext}\left(\overline{\text{co}}^{w^*}(\Sigma)\right) = H$.

Así pues, por II), H, y por tanto, K es w^*-homeomorfo al conjunto de Cantor.

Finalmente, para probar que g es inyectiva, basta probar, que lo es la aplicación:

$$\overline{g} : M_1^+(\overline{\Sigma}^{w^*}) \to \overline{\text{co}}^{w^*}(\Sigma)$$

dada por

$$\overline{g}(\mu)(x^*) = \int_{\overline{\Sigma}^{w^*}} x^*(\omega)\, d\mu(\omega),\ \forall \mu \in M_1^+\left(\overline{\Sigma}^{w^*}\right),\ \forall x^* \in X^*.$$

Para esto definimos:

$$U_\alpha = \left\{z \in \overline{\Sigma}^{w^*} :\ v_\alpha(z) = 1\right\}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Es claro que $\{U_\alpha \colon \alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$ es una familia de w^*-abiertos y w^*-cerrados relativos de $\overline{\Sigma}^{w^*}$.

Definimos ahora: U_α^n para $\alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ como $U_\alpha^0 = U_\alpha$ y $U_\alpha^n = U_\alpha \setminus \cup_{i=1}^n U_{(\alpha,i)}$ si $n \in \mathbb{N}$, y **afirmamos que:**

(2.1) la familia $\{U_\alpha^n \colon \alpha \in \mathbb{N}^{<\omega},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es una base de entornos w^*-abiertos en $\overline{\Sigma}^{w^*}$ y además $U_{(\alpha,i)} \subseteq U_\alpha$ y $U_{(\alpha,i)} \cap U_{(\alpha,j)} = \phi$ si $i \neq j$ $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}$.

Esta afirmación será consecuencia del siguiente

Lema 2.5. *Bajo las hipótesis de III), se tiene:*

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} x^{**}(v_{(\alpha,i)}^*) \leq x^{**}(v_\alpha^*)$, *para todo* $x^{**} \in \overline{\Sigma}^{w^*}$ *y para todo* $\alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}$.

ii) $\overline{\Sigma}^{w^*} = \Sigma \cup \Psi$ *donde*

$$\Psi = \left\{ \omega^* - \sum_{n=0}^{\infty} v_{(p_1,\ldots,p_n)} \colon \{p_n\} \subset \mathbb{N} \right\}$$

considerando que $(p_1, \ldots, p_n) = 0 \in \mathbb{N}^{<\omega}$ *si* $n = 0$.

Posponemos la prueba del lema y de la afirmación.

Probamos ahora que $\overline{g}$ es inyectiva. Sean $\mu \in M_1^+\left(\overline{\Sigma}^{w^*}\right)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\mu)(v_\alpha^*) &= \int_{\overline{\Sigma}^{\omega^*}} v_\alpha^*(\lambda)\, d\mu(\lambda) \\
&= \mu\left(\left\{ z \in \overline{\Sigma}^{\omega^*} \colon v_\alpha^*(z) = 1 \right\}\right) \\
&= \mu\left(U_\alpha\right)
\end{aligned}$$

pues $v_\alpha^*(\lambda) \in \{0, 1\}$ para todo $\lambda \in \overline{\Sigma}^{\omega^*}$.

Por otro lado

$$\mu\left(U_\alpha^n\right) = \mu\left(U_\alpha\right) - \sum_{i=1}^{n} \mu\left(U_{(\alpha,i)}\right) = \overline{g}(\mu)\left(v_\alpha^*\right) - \sum_{i=1}^{n} \overline{g}(\mu)\left(v_{(\alpha,i)}^*\right)$$

ya que, de la afirmación 2.1, $U_{(\alpha,i)} \subset U_\alpha$ y $U_{(\alpha,i)} \cap U_{(\alpha,j)} = \phi$ si $i \neq j$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}$.

Por tanto, en virtud de las igualdades anteriores, se tiene que $\overline{g}(\mu)$ está únicamente determinado por los valores de μ sobre la familia $\{U_\alpha^n\}$. Teniendo en cuenta la afirmación 2.1 que nos queda por demostrar y que la medida μ es regular, se obtiene la inyectividad de $\overline{g}$ y, por tanto, la de g.

Probamos ahora el Lema 2.5. Para ello empezamos con su primera afirmación:

i) $\sum_{i=1}^{\infty} x^{**}(v_{(\alpha,i)}^*) \leq x^{**}(v_\alpha^*)$ para todo $x^{**} \in \overline{\Sigma}^{w^*}$ y para todo $\alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}$.

Sean $x^{**} \in \Sigma$ y $\alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Entonces $x^{**} = \Sigma_{\gamma \leq \beta} v_\gamma$ para algún $\beta \in \mathbb{N}^{<\omega}$ y, por tanto,

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^{**}\left(v_{(\alpha,i)}^*\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } (\alpha,i) \leq \beta \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$x^{**}\left(v_\alpha^*\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha \leq \beta \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así, si $(\alpha, i) \leq \beta$ se tiene que $\alpha < \beta$ y entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^{**}(v_{(\alpha,i)}^*) = 1 = x^{**}(v_\alpha^*).$$

En otro caso

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^{**}\left(v_{(\alpha,i)}^*\right) = 0 \leq x^{**}(v_\alpha^*).$$

En definitiva, la afirmación i) es válida para elementos de Σ. Veamos ahora que sigue siendo cierta para elementos de $\overline{\Sigma}^{w^*}$.

Para ello, sean $x^{**} \in \overline{\Sigma}^{w^*}$ y $\alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Entonces existe $\{x_\lambda^{**}\} \subseteq \Sigma$ tal que $\{x_\lambda^{**}\}_\lambda \xrightarrow{\omega^*} x^{**}$ y, por lo que ya hemos demostrado para Σ,

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_\lambda^{**}(v^*_{(\alpha,i)}) \leq x_\lambda^{**}(v^*_\alpha), \quad \forall \lambda.$$

Si ahora tomamos $N \in \mathbb{N}$, teniendo en cuenta que $x_\lambda^{**}\left(v^*_{(\alpha,i)}\right) \geq 0$, y por tanto que $x^{**}\left(v^*_{(\alpha,i)}\right) \geq 0$, se obtiene que

$$\sum_{i=1}^{N} x_\lambda^{**}\left(v^*_{(\alpha,i)}\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} x_\lambda^{**}\left(v^*_{(\alpha,i)}\right),$$

y, en consecuencia,

$$\sum_{i=1}^{N} x_\lambda^{**}\left(v^*_{(\alpha,i)}\right) \leq x_\lambda^{**}\left(v^*_\alpha\right)$$

con lo que

$$\sum_{i=1}^{N} x^{**}\left(v^*_{(\alpha,i)}\right) \leq x^{**}\left(v^*_\alpha\right)$$

por la ω^*-convergencia en λ y por tanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^{**}\left(v^*_{(\alpha,i)}\right) \leq x^{**}\left(v^*_\alpha\right),$$

por la convergencia en N.

ii) Pasamos ahora a demostrar la segunda afirmación:

$$\overline{\Sigma}^{\omega^*} = \Sigma \cup \Psi$$

donde

$$\Psi = \left\{\omega^* - \sum_{n=0}^{\infty} v_{(p_1,\ldots,p_n)} \colon \{p_n\} \subseteq \mathbb{N}\right\}$$

considerando $(p_1, \cdots, p_n) = 0 \in \mathbb{N}^{<\omega}$ si $n = 0$.

Sea $x^{**} \in \overline{\Sigma}^{w^*}$ entonces $x^{**}(v_\alpha^*) \in \{0, 1\}$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}$.

Sea $\Delta = \{\alpha \in \mathbb{N}^{<\omega} \colon x^{**}(v_\alpha^*) = 1\}$. Entonces $\Delta \neq \emptyset$, pues $0 \in \Delta$. Además si $\alpha \in \Delta$ y $\gamma \leq \alpha$, por la afirmación i) del Lema 2.5, $1 \leq x^{**}(v_\gamma^*)$ luego $x^{**}(v_\gamma^*) = 1$ y, en consencuencia, $\gamma \in \Delta$.

Por otro lado, sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe a lo sumo un $\alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}$ con $|\alpha| = n$ y $\alpha \in \Delta$ pues si existien $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta$ con $|\alpha_1| = |\alpha_2| = n$ podemos encontrar un $\gamma \leq \alpha_1$ y $\gamma \leq \alpha_2$, y j_1, $j_2 \in \mathbb{N}$ con $x^{**}(v_{(\gamma, j_1)}) = 1$ y $x^{**}(v_{(\gamma, j_2)}) = 1$ por i) del Lema 2.5. y por este mismo resultado tenemos que $2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} x^{**}(v_{(\gamma,i)}^*) \leq x^{**}(v_\gamma^*)$ y esto contradice el que $x^{**}(v_\gamma^*) \in \{0, 1\}$.

De todo esto se sigue que Δ es linealmente ordenado, es decir, Δ corresponde a los subíndices de una rama. Entonces, o bien

$$\Delta = \{\gamma \in \mathbb{N}^{<\omega} \colon \gamma \leq \alpha\}$$

para un $\alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}$ y entonces $x^{**} \in \Sigma$, o bien Δ corresponde a una rama infinita, es decir existe un $\{p_n\}_n \subseteq \mathbb{N}$ tal que

$$\Delta = \{(p_1, \ldots, p_n) \colon n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

siendo $(p_1, \ldots, p_n) = 0 \in \mathbb{N}^{<\omega}$ si $n = 0$ con lo que

$$x^{**}\left(v_{(p_1,\ldots,p_n)}^*\right) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{1}$$

y $x^{**}(v_\alpha^*) = 0$ si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq (p_1, \ldots, p_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sólo falta ver, para este caso, que $x^{**} = \omega^* - \sum_{n=0}^{\infty} v_{(p_1,\ldots,p_n)}$.

Veamos que $x^{**}(v_\alpha^*) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v_\alpha^*(v_{(p_1,\cdots,p_n)})$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}$.

En efecto, si α y $(p_1, \cdots, p_n)$ están en la misma rama, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_\alpha^*\left(v_{(p_1,\ldots,p_n)}\right) = 1$$

y, por (1), $x^{**}(v_\alpha^*) = 1$ y en otro caso $x^{**}(v_\alpha^*) = 0$ y

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_\alpha^* \left(v_{(p_1,\dots,p_n)}\right) = 0$$

luego con esto y como $\{v_n\}$ es shrinking, concluimos que

$$x^{**} = \omega^* - \sum_{n=0}^{\infty} v_{(p_1,\dots,p_n)}.$$

Vamos a probar ahora la afirmación.

Primero veamos que $U_{(\alpha,i)} \subseteq U_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}$ y para todo $i \in \mathbb{N}$.

Sea $x \in U_{(\alpha,i)}$ entonces $x \in \overline{\Sigma}^{\omega^*}$ y $v_{(\alpha,i)}^*(x) = 1$ con lo que, por la afirmación i) del Lema 2.5, $v_\alpha^*(x) \geq 1$ y, en consecuencia, $v_\alpha^*(x) = 1$ con lo que $x \in U_\alpha$.

Para probar que $U_{(\alpha,i)} \cap U_{(\alpha,j)} = \emptyset$ si $i \neq j$, supongamos que existe $x \in U_{(\alpha,i)} \cap U_{(\alpha,j)}$ con $i \neq j$; entonces $v_{(\alpha,i)}^*(x) = 1 = v_{(\alpha,j)}^*(x)$ y, por i) del Lema 2.5, $v_\alpha^*(x) \geq 2$ lo que contradice el ya conocido hecho de que $v_\alpha^*(x) \in \{0,1\}$. Así pues $U_{(\alpha,i)} \cap U_{(\alpha,j)} = \emptyset$ si $i \neq j$.

Veamos ahora que

$$\{U_\alpha^n \colon \alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

es una base de w^*-abiertos en $\overline{\Sigma}^{w^*}$.

Tomemos $x^{**} \in \overline{\Sigma}^{w^*}$ y un w^*-abierto relativo U en $\overline{\Sigma}^{w^*}$ con $x^{**} \in U$. Sabemos que existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}^{<\omega}$ tales que

$$x^{**} \in V = \left\{y^{**} \in \overline{\Sigma}^{\omega^*} \colon |y^{**}\left(v_{\alpha_i}^*\right) - x^{**}\left(v_{\alpha_i}^*\right)| < \varepsilon,\ i = 1, \dots, n\right\} \subseteq U$$

para algún $\varepsilon > 0$ que podemos suponer $\varepsilon < 1$ y, como $y^{**}(v_{\alpha_i}^*), x^{**}(v_{\alpha_i}^*) \in \{0,1\}$, entonces

$$y^{**}\left(v_{\alpha_i}^*\right) = x^{**}\left(v_{\alpha_i}^*\right) \ \forall y^{**} \in V \text{ y } \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

luego existen $A, B \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$, A y B finitos con $A \cup B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ tales que

$$V = \left\{y^{**} \in \overline{\Sigma}^{\omega^*} : \ y^{**}\left(v_\alpha^*\right) = 1 \ \ \forall \alpha \in A \text{ y } y^{**}\left(v_\alpha^*\right) = 0 \ \forall \alpha \in B\right\}$$

Además $A \neq \emptyset$ pues $x^{**}(v_0^*) = 1$.

Por el Lema 2.5. sabemos que $x^{**} \in \Sigma \cup \Psi$.

Supongamos primero que $x^{**} = x \in \Sigma$. Entonces $x = \sum_{\gamma \leq \alpha_0} v_\gamma$ para algún $\alpha_0 \in \mathbb{N}^{<\omega}$ con lo que $A \subseteq \{\gamma \in \mathbb{N}^{<\omega} : \ \gamma \leq \alpha_0\}$.

Ahora como B es finito, tomamos

$$n = \text{máx}\left\{i \in \mathbb{N} : \ (\alpha_0, i) \leq b \text{ con } b \in B \text{ y } \alpha_0 < b\right\}$$

y $n = 0$ en caso de que no exista $b \in B$ con $\alpha_0 < b$. Por definición, $x \in U_{\alpha_0}^n$.

Probaremos que $U_{\alpha_0}^n \subset V$.

Sea $y^{**} \in U_{\alpha_0}^n$, como $y^{**}\left(v_{\alpha_0}^*\right) = 1$, por el Lema 2.5 tenemos que $y^{**}\left(v_\alpha^*\right) = 1$ para todo $\alpha \leq \alpha_0$, luego $y^{**}\left(v_\alpha^*\right) = 1$ para todo $\alpha \in A$.

También por el Lema 2.5 y, usando que $y^{**}\left(v_{\alpha_0}^*\right) = 1$, obtenemos que $y^{**}\left(v_\alpha^*\right) = 0$ para $\alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}$ incomparable con α_0.

Tenemos ahora dos casos. En primer lugar, si $b \in B$ y $\alpha_0 \nless b$ entonces α_0 y b son incomparables, pues si no es así, $\alpha_0 \geq b$ y por tanto $y^{**}\left(v_b^*\right) = 1$ en contra de que $x \in V$. Así pues $y^{**}\left(v_b^*\right) = 0$.

Por otro lado, si $b \in B$ y $\alpha_0 < b$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $(\alpha_0, i) \leq b$. Como $y^{**} \in U_{\alpha_0}^n$, entonces $y^{**}\left(v_{(\alpha_0,i)}^*\right) = 0$ y, por el Lema 2.5, $y^{**}\left(v_b^*\right) = 0$.

Hemos probado pues que

$$y^{**}\left(v_\alpha^*\right) = 1 \ \ \forall \alpha \in A \text{ y } y^{**}\left(v_\alpha^*\right) = 0 \ \ \forall \alpha \in B.$$

Luego $x \in U_{\alpha_0}^n \subset V$.

Ahora supongamos que $x^{**} \in \Psi$.

Hacemos $n = \text{máx}\{|\alpha|\colon \alpha \in A \cup B\}$ y tomemos $\alpha_0 \in \mathbb{N}^{<\omega}$ tal que $|\alpha_0| = n$ y $x^{**}\left(v^*_{\alpha_0}\right) = 1$. Recordemos que por ii) del Lema 2.5, $x^{**} = \omega^* - \sum_{n=0}^{\infty} v_{(p_1,\dots,p_n)}$ para alguna sucesión de números naturales $\{p_n\}$.

Entonces, por i) del Lema 2.5, $x^{**}\left(v^*_\gamma\right) = 1$ para todo $\gamma \le \alpha_0$ y $x^{**}\left(v^*_\gamma\right) = 0$ si $|\gamma| \le n$ y γ y α_0 son incomparables.

De aquí $A \subseteq \{\alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}\colon\ \alpha \le \alpha_0\}$ y

$$B \subseteq \left\{\alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}\colon\ |\alpha| \le n,\ \gamma \text{ y } \alpha_0 \text{ incomparables}\right\}$$

ya que $x^{**} \in V$.

Para probar que $U_{\alpha_0} \subseteq V$ tomamos $y^{**} \in U_{\alpha_0}$, entonces $y^{**}\left(v^*_{\alpha_0}\right) = 1$ y, por i) del Lema 2.5, $y^{**}\left(v^*_\alpha\right) = 1$ para todo $\alpha \le \alpha_0$ y $y^{**}\left(v^*_\gamma\right) = 0$ si $|\gamma| \le n$ y γ y α_0 son incomparables.

Esto prueba que $y^{**}\left(v^*_\alpha\right) = 1$ para todo $\alpha \in A$ y $y^{**}\left(v^*_\alpha\right) = 0$ para $\alpha \in B$ y, por tanto, $x^{**} \in U_{\alpha_0} \subseteq V$, terminando así la prueba de la afirmación. □

No sabemos si II) y III) son ciertas cuando el conjunto C no contiene sucesiones equivalentes a la base usual de ℓ_1 (Observemos, por ejemplo, que en II), el único punto donde usamos que X^* es separable, es para probar que h es inyectiva). Sin embargo, es posible obtener II) y III) para espacios de Asplund. Recordamos que un espacio de Asplund es un espacio de Banach verificando que todo subespacio separable tiene dual separable. Para probar las afirmaciones II) y III) del teorema anterior para espacios de Asplund, sea C un subconjunto cerrado y acotado de un espacio de Asplund X y supongamos que C falla la PCP; como la PCP es separadamente determinada para subconjuntos por el Lema 1.8, podemos suponer que C es separable y falla la PCP. Llamando Y al subespacio cerrado generado por

C, se tiene que Y^* es separable por ser X Asplund y entonces podemos aplicar II) y III) del teorema anterior a C como subconjunto de Y.

Como consecuencia inmediata del teorema anterior, concretamente de la equivalencia entre i) y ii) junto con I), se obtiene que la PCP está determinada por subespacios con base, en el ambiente de espacios de Banach sin copias de ℓ_1, resultado ya demostrado en [12] y que constituye la respuesta parcial más general conocida sobre el problema de la determinación por subespacios con base de la PCP.

Definición 2.6. Un subconjunto w-cerrado A de un espacio de Banach se llama *débilmente perfecto* (resp. *secuencialmente débilmente perfecto*) si cada punto $a \in A$ es límite débil de una red (resp. sucesión) de $A \setminus \{a\}$.

A se llama *separado en norma* si existe $\delta > 0$ tal que $\|a - b\| \geq \delta$ para todos $a, b \in A$ con $a \neq b$.

Es claro que un subconjunto acotado, separado en norma y (secuencialmente) débilmente perfecto de un espacio de Banach no tiene la PCP.

En el caso de un espacio de Banach que no contenga copias isomorfas de ℓ_1, la topología débil tiene un comportamiento metrizable y ésta es la razón de la siguiente caracterización.

Corolario 2.7. *Sea X un espacio de Banach y C un subconjunto cerrado y acotado de X, que no contiene sucesiones equivalentes a la base usual de ℓ_1. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) C no tiene la PCP,

ii) C contiene un subconjunto numerable A separado en norma y secuencialmente débilmente perfecto.

Además, si X^* es separable, entonces A se puede elegir tal que $\overline{A}^{w^*}$ en X^{**} es w^*-homeomorfo al conjunto de Cantor, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Demostración. ii) implica i) es claro.

Para i) implica ii) basta aplicar el teorema anterior tomando $A = \Gamma$ que, por la propia construcción, es un conjunto separado en norma y secuencialmente débilmente perfecto. □

Observación 2.8.

i) Suponiendo que X^* es separable, el conjunto A del corolario anterior se puede determinar de forma explícita. En efecto, consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$, el elemento $e_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dado por $e_n(m) = \delta_{n,m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y hacemos $e_\alpha = e_{\phi(\alpha)}$ para $\alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}$.

   Definimos $\Delta_0 = \left\{\sum_{\gamma \leq \alpha} e_\gamma \colon \alpha \in \mathbb{N}^{<\omega}\right\}$ que es un subconjunto del conjunto de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. El homomorfismo h de la prueba de II) en el Teorema 2.4 lleva Σ en Δ_0 (isomórficamente) y sabemos que Σ es w-homeomorfo a Γ. Entonces de las propiedades de Γ, Δ_0 es un subconjunto de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tal que cada punto $x \in \Delta_0$ es límite de una sucesión de $\Delta_0 \setminus \{x\}$ y cuya clausura $\overline{\Delta_0}^{w^*}$ es homeomorfa a $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, hechos que se pueden comprobar directamente.

   Deducimos entonces que el conjunto A del corolario anterior se puede elegir w-homeomorfo a Δ_0. Entonces si X^* es separable, la afirmación ii) del corolario anterior puede sustituirse por:

   «C contiene un subconjunto separado en norma y w-homeomorfo a Δ_0.»

   Nos parece interesante resaltar que el conjunto Δ_0 no depende para nada del espacio de Banach X ni del conjunto C de X elegido que falle la PCP.

No sabemos si lo mismo es verdad suponiendo que C no contiene sucesiones equivalentes a la base usual de ℓ_1, en vez de suponer que el dual es separable.

ii) No sabemos si i) implica ii) del corolario anterior es verdad para subconjuntos generales C eliminando el término secuencialmente.

Antes de ver el siguiente corolario, recordamos la noción de «skipped blocking descomposición».

Definición 2.9. Una Skipped Blocking descomposición finito dimensional acotadamente completa (BCSBFDD) en un espacio de Banach X es una sucesión $\{F_n\}$ de subespacios de X finito dimensionales tales que:

1) $X = [F_j \colon j \in \mathbb{N}]$,

2) $F_k \cap [F_j \colon j \neq k] = \{0\}$,

3) Para cada sucesión $\{n_j\}$ de enteros no negativos con $n_j + 1 < n_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y para cada $f \in \left[F_{(n_j,n_{j+1})} \colon j \in \mathbb{N}\right]$ existe una única sucesión $\{f_j\}$ con $f_j \in F_{(n_j,n_{j+1})}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ tal que $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$, y

4) Si $f_j \in F_{(n_j,n_{j+1})}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y $\sup_n \left\|\sum_{j=1}^{n} f_j\right\| < +\infty$, entonces $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ converge.

Aquí $[A]$ es la envolvente lineal cerrada en X del conjunto A y, dado algún intervalo no vacío I de enteros no negativos, denotamos por F_I a la envolvente lineal de los F_j para $j \in I$.

Una sucesión $\{x_n\}$ de X, tal que $x_j \in F_{(n_j,n_{j+1})}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ donde $\{n_j\}$ es una sucesión de enteros no negativos con $n_j + 1 < n_{j+1}$ $\forall j \in \mathbb{N}$ se llama una «skipped block» sucesión de $\{F_j\}$.

La siguiente consecuencia es una caracterización global de la PCP para espacios de Banach sin copias de ℓ_1 en términos de árboles y sucesiones acotadamente completas que extiende la obtenida en [9] por Fonf en el ambiente de espacios con dual separable, con una demostración completamente diferente y que ofrece nuevas condiciones equivalentes.

Corolario 2.10. *Sea X un espacio de Banach que no contiene subespacios isomorfos a ℓ_1. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) X no tiene la PCP.

ii) Existe un árbol w-nulo y seminormalizado en X uniformemente tipo P.

iii) Existe un árbol w-nulo y seminormalizado en X con todas sus ramas tipo P.

iv) Existe un árbol w-nulo y seminormalizado en X sin ramas acotadamente completas.

Demostración. i) $\Rightarrow$ ii). Si X falla la PCP, esto implica que B_X falla la PCP. Como B_X no contiene sucesiones equivalentes a la base usual de ℓ_1 por no contenerlas X, tomando $C = B_X$, en el Teorema 2.4, obtenemos que existe un árbol seminormalizado y w-nulo $\{x_A\}$ con $\{\sum_{B\leq A} x_B\colon A \in \mathbb{N}^{<\omega}\} \subset B_X$, luego $\{x_A\}$ es uniformemente tipo P.

ii) $\Rightarrow$ iii) Trivial.

iii) $\Rightarrow$ iv) Es claro de la definición de sucesión básica acotadamente completa.

iv) $\Rightarrow$ i) Podemos suponer sin pérdida de generalidad que X es separable, pues vamos a trabajar en $\overline{\mathrm{lin}}\{x_A\colon n \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$, que es un subespacio separable y que tendrá la PCP si la tiene X.

Vamos a probar que no i) $\Rightarrow$ no iv).

Sea pues X un espacio de Banach separable con la PCP. Entonces por [12] existe una BCSBFDD $\{F_j\}$ de X y existe también una constante $K > 0$ de forma que cualquier skipped block sucesión tiene constante básica a lo más K.

Tomemos un árbol seminormalizado y w-nulo $\{x_A\}_{A\in\mathbb{N}^{<\omega}}$ en X.

Construiremos por inducción una rama del árbol, que sea una sucesión básica acotadamente completa.

Para esto, fijamos una sucesión $\{\varepsilon_j\}$ de números reales positivos verificando que $\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon_j < 1/2K$, y construiremos una sucesión $\{n_j\}$ de números enteros positivos con $n_j + 1 < n_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, una sucesión $\{y_j\}$ en X con $y_j \in F_{(n_j,n_{j+1})}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, y una rama $\{x_{A_j}\}$ del árbol, tal que $\|x_{A_j} - y_j\| < \varepsilon_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Pongamos $n_0 = 0$. Por 1) de la definición de BCSBFDD, existen $n_1 \geq 2$ y $y_0 \in F_{(n_0,n_1)}$ tales que $\|x_{A_0} - y_0\| < \varepsilon_0$, donde $A_0 = 0 \in \mathbb{N}^{<\omega}$.

Como el árbol es ω-nulo, $\{x_{(A_0,j)}\}_j \xrightarrow{\omega} 0$ y, por un argumento de separación, sabemos que

$$\left\{\operatorname{dist}\left(x_{(A_0,j)}, F_{[n_1+1,+\infty)}\right)\right\}_j \to 0.$$

En consecuencia, para cada $\varepsilon > 0$, existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\operatorname{dist}\left(x_{(A_0,p)}, F_{[n_1+1,+\infty)}\right) < \varepsilon, \quad \forall p \geq p_0.$$

Por tanto, para cada $\varepsilon > 0$, existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{ínf}\left\{||x_{(A_0,p)} - f|| : f \in F_{[n_1+1,+\infty)}\right\} < \varepsilon \quad \forall p \geq p_0,$$

con lo que existe $y_1 \in F_{[n_1+1,+\infty)}$ tal que

$$||x_{(A_0,p_1)} - y_1|| < \varepsilon_1 \text{ para algún } p_1 \geq p_0.$$

Además $y_1 = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \lambda_i f_i$ y podemos tomar $n_2 > n_1 + 1$. Ahora llamamos $A_1 = (A_0, p_1)$ o, simplemente, $A_1 = (p_1)$.

Supongamos ya construidos $n_1, \dots, n_{j+1}, y_1, \dots, y_j, A_1, \dots, A_j$.

Pongamos $A_k = (p_1, \dots, p_k)$ para k con $1 \leq k \leq j$. Como el árbol es w-nulo, entonces $\{x_{(A_j,p)}\} \xrightarrow{\omega} 0$ y, por un argumento de separación,

$$\left\{\operatorname{dist}\left(x_{(A_j,p)}, F_{[n_{j+1}+1,+\infty)}\right)\right\}_p \to 0.$$

Entonces existen $p_{j+1} \in \mathbb{N}$, $n_{j+2} > n_{j+1} + 1$ y $y_{j+1} \in F_{(n_{j+1},n_{j+2})}$ tales que

$$\left\|x_{(A_j,p_{j+1})} - y_{j+1}\right\| < \varepsilon_{j+1}.$$

Llamemos $A_{j+1} = (A_j, p_{j+1})$ y esto finaliza la construcción inductiva de la rama $\left\{x_{A_j}\right\}$ satisfaciendo que $\|x_{A_j} - y_j\| < \varepsilon_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Finalmente obtenemos que $\sum_{j=0}^{\infty} \|x_{A_j} - y_j\| < 1/2K$, siendo $\{y_j\}$ una sucesión skipped block de $\{F_j\}$.

Entonces $\{x_{A_j}\}$ es una rama del árbol $\{x_A\}$ que es una sucesión básica equivalente a $\{y_j\}$ y por tanto acotadamente completa. $\square$

Parece interesante resaltar que como consecuencia del resultado anterior, en concreto de la equivalencia entre ii) y iii), se obtiene la equivalencia entre la acotación uniforme de las sumas parciales en ramas de un árbol w-nulo seminormalizado (árbol uniformemente tipo P) y la acotación separada de esas mismas sumas parciales (árbol tipo P).

Se podría pensar que quizá el Corolario 2.10 puede ser extendido a espacios de Banach generales, sin embargo, como puede verse en [7], hay ejemplos bien conocidos de espacios sin la PCP y verificando la propiedad de Schur, es decir, espacios donde la convergencia débil y norma coinciden para sucesiones. En este tipo de espacios es imposible obtener árboles seminormalizados w-nulos, con lo que el Corolario 2.10 deja de ser cierto. Así que, podemos decir que los resultados principales obtenidos en esta sección son exclusivos para espacios sin copias de ℓ_1, donde la topología débil tiene un comportamiento metrizable.

2.2. Caracterización general de la PCP

Nuestro objetivo ahora es una caracterización local de la PCP en términos de árboles, para subconjuntos de un espacio de Banach general X. Como ha quedado puesto de manifiesto en la sección anterior no es esperable que podamos extender los resultados ya obtenidos en ambiente general. Lo que haremos será trasladar la condición de árbol w-nulo, donde se exige la convergencia débil de sucesiones a cero, a una nueva condición también sobre árboles.

Un árbol $\{x_A\}_{A\in\mathbb{N}^{<\omega}}$ es *topológicamente* w*-nulo* cuando $0 \in \overline{\{x_{(A,n)} \colon n \in \mathbb{N}\}}^w$ para todo $A \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Es claro que el concepto de árbol topológicamente w-nulo, es una condición más débil que la condición de árbol w-nulo.

El comportamiento metrizable de la topología débil en espacios sin copias de ℓ_1 será sustituido entonces por el hecho, ya comentado en el primer capítulo, de que para cada subconjunto A de un espacio de Banach X y para cada $a \in \overline{A}^\omega$ existe un subconjunto numerable $F \subset A$ tal que $a \in \overline{F}^\omega$.

Con estos nuevos cambios nuestro objetivo es obtener resultados similares a los de la sección anterior sustituyendo árboles seminormalizados w-nulos por árboles seminormalizados topológicamente w-nulos

Como hemos dicho al comienzo de la sección anterior, cada sucesión básica seminormalizada en un espacio de Banach con la PCP tiene una sucesión parcial básica acotadamente completa [35] y ahora sabemos que cada árbol w-nulo en la esfera unidad de un espacio de Banach sin copias de ℓ_1 y con la PCP tiene una rama acotadamente completa. El recíproco del primer resultado es falso, aún para espacios de Banach que no contienen a ℓ_1 [24] y obsérvese que la tesis del segundo resultado es vacía de contenido si no suponemos que el espacio no contiene copias de ℓ_1, por ejemplo para espacios con la propiedad de Schur, como ya se comentó al final de la sección anterior.

El siguiente resultado es una caracterización local de la PCP para subconjuntos acotados en un espacio de Banach general.

Teorema 2.11. *Sea X un espacio de Banach y sea K un subconjunto cerrado y acotado de X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) K no tiene la PCP.

ii) Existe un árbol seminormalizado y topológicamente w-nulo $\{x_A\}_{A\in\mathbb{N}^{<\omega}}$ en X tal que

$$\left\{\sum_{C\leq A} x_C \colon A \in \mathbb{N}^{<\omega}\right\} \subset K$$

Demostración. i) $\Rightarrow$ ii).

Supongamos que K falla la PCP. Entonces por el Lema 1.8 existe $B \subset K$, B numerable tal que $\overline{B}$ falla la PCP y del Lema 1.3 existe un $\delta > 0$ tal que cada w-abierto relativo de B tiene diámetro mayor que 2δ.

Por tanto $b \in \overline{B \setminus B(b,\delta)}^{w}$ para todo $b \in B$.

Primero construimos un árbol $\{y_A\}_{A\in\mathbb{N}^{<\omega}}$ en B satisfaciendo:

a) $y_A \in \overline{B \setminus B(y_A,\delta)}^{\omega}$ para todo $A \in \mathbb{N}^{<\omega}$,

b) $||y_A - y_{(A,i)}|| > \delta$ para todo $A \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $i \in \mathbb{N}$, y

c) $y_A \in \overline{\{y_{(A,i)} \colon i \in \mathbb{N}\}}^w$ para todo $A \in \mathbb{N}^{<\omega}$.

Tomamos $y_0 \in B$. Como $y_0 \in \overline{B \setminus B(y_0, \delta)}^w$, entonces existe un conjunto numerable $F_{y_0} = \{y(i) \colon i \in \mathbb{N}\} \subset B \setminus B(y_0, \delta)$ tal que $y_0 \in \overline{F_0}^\omega$.

Tomando $y_{(0,i)} = y(i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$ tenemos que

a) $y_0 \in \overline{B \setminus B(y_0, \delta)}^w$,

b) $\|y_0 - y_{(0,i)}\| = \|y_0 - y(i)\| \geq \delta$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y

c) $y_0 \in \overline{F_{y_0}}^w = \overline{\{y_{(0,i)} \colon i \in \mathbb{N}\}}^w$.

De igual forma, si $A \in \mathbb{N}^{<\omega}$ y supuesto construido y_A verificando a), b) y c), tenemos que $y_A \in \overline{B \setminus B(y_A, \delta)}^w$ y existe $F_{y_A} = \{y_{(A,n)} \colon n \in \mathbb{N}\} \subset B \setminus B(y_A, \delta)$ tal que $y_A \in \overline{F_{y_A}}^w$ verificando a), b) y c).

Tenemos así un árbol $\{y_A\}_{A \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ cumpliendo a), b) y c).

Ahora definimos un nuevo árbol $\{x_A\}_{A \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ por $x_0 = y_0$ y $x_{(A,i)} = y_{(A,i)} - y_A$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y para todo $A \in \mathbb{N}^{<\omega}$.

Por b) y por ser K acotado obtenemos que $\{x_A\}_{A \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ es un árbol seminormalizado.

Por a) obtenemos que $\{x_A\}_{A \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ es topológicamente ω-nulo, pues si $y_A \in \overline{\{y_{(A,i)} \colon i \in \mathbb{N}\}}^w$ $\forall\, A \in \mathbb{N}^{<\omega}$, entonces $0 \in \overline{\{y_{(A,i)} - y_A \colon i \in \mathbb{N}\}}^w$ y, por tanto, $0 \in \overline{\{x_{(A,i)} \colon i \in \mathbb{N}\}}^w$.

Además por definición, $\sum_{C \leq A} x_C = y_A \in B$ para todo $A \in \mathbb{N}^{<\omega}$.

ii) $\Rightarrow$ i).

Sea $\{x_A\}_{A \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ un árbol seminormalizado y topológicamente w-nulo tal que $B = \{\sum_{C \leq A} x_C \colon A \in \mathbb{N}^{<\omega}\} \subset K$ y sea $\delta > 0$ tal que $\|x_A\| > \delta$ para todo $A \in \mathbb{N}^{<\omega}$.

Para cada $A \in \mathbb{N}^{<\omega}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\sum_{C \leq (A,n)} x_C = \sum_{C \leq A} x_C + x_{(A,n)}$$

y como $0 \in \overline{\{x_{(A,n)} \colon n \in \mathbb{N}\}}^{\omega}$ para todo $A \in \mathbb{N}^{<\omega}$, entonces

$$\sum_{C \leq A} x_C \in \overline{\left\{ \sum_{C \leq (A,n)} x_C \colon n \in \mathbb{N} \right\}}^{\omega} \quad \forall A \in \mathbb{N}^{<\omega} \tag{1}$$

y, además, $\left\| \sum_{C \leq (A,)} x_C - \sum_{C \leq A} x_C \right\| > \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto prueba que cada subconjunto w-abierto relativo de B tiene diámetro al menos δ, y por tanto $\overline{B} \subset K$ no tiene la PCP, por el Lema1.3, lo que nos dice que K no tiene la PCP. □

Mostramos ahora nuestra caracterización de la PCP en términos de sucesiones acotadamente completas en un ambiente general.

Teorema 2.12. *Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) X tiene la PCP.

ii) Cada árbol topológicamente w-nulo y seminormalizado en X no es uniformemente tipo P.

iii) Cada árbol topológicamente w-nulo y seminormalizado en X tiene una rama no tipo P.

iv) Cada árbol topológicamente w-nulo en S_X tiene una rama acotadamente completa.

Antes de demostrar este resultado necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.13. *Sea X un espacio de Banach y sea M un subespacio de X finito codimensional. Sea $\varepsilon > 0$ y $\{x_n\} \subset X$ tal que $0 \in \overline{\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}}^w$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que* $\operatorname{dist}(x_{n_0}, M) < \varepsilon$.

Demostración del lema. Sea $M < X$ finito codimensional, entonces existe un subespacio $N < X$ tal que $\dim(N) < +\infty$ y $X = M \oplus N$ (suma topológica directa). Consideremos la proyección lineal y continua $p : X \to N$ con núcleo $\ker(p) = M$ e imagen $\operatorname{Im}(P) = N$. Como $0 \in \overline{\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}}^w$ se tiene que $P(0) = 0 \in \overline{\{p\,(x_n) : n \in \mathbb{N}\}}^w$ y, como $\dim(N) < +\infty$, entonces $0 \in \overline{\{p(x_n) \colon n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}$ con lo que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $||p(x_{n_0})|| < \varepsilon$ entonces

$$\operatorname{dist}\left(x_{n_0}, M\right) = \|x_0 + M\| = ||p(x_{n_0}) + M|| \leq ||p(x_{n_0})|| < \varepsilon,$$

ya que $x_{n_0} - p(x_{n_0}) \in \ker(p) = M$. □

Demostración del teorema. iv) ⇒ iii)

Es consecuencia del hecho de que cada sucesión seminormalizada acotadamente completa no es de tipo P, comentado en la introducción.

iii) ⇒ ii)

Es trivial.

ii) ⇒ i)

Resulta de aplicar el Teorema 2.11 para $K = B_X$, suponiendo que X falla la PCP.

i) ⇒ iv)

Supongamos que X tiene la PCP.

Sea $\{x_A\}$ un árbol seminormalizado y topológicamente w-nulo en X. Como $[x_A]$ es separable podemos suponer que X lo es.

Ahora, de [12], podemos asegurar que X tiene una BCSBFDD, tal que cada sucesión skipped block tiene constante básica menor o igual que alguna constante $K > 0$.

Ahora construiremos una rama acotadamente completa del árbol $\{x_A\}$. Para esto, fijamos una sucesión $\{\varepsilon_j\}$ de números reales positivos con $\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j < 1/2K$.

Construimos una sucesión $\{n_j\}$ de números enteros positivos con $n_j + 1 < n_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, una sucesión $\{y_j\}$ en X con $y_j \in F_{(n_j, n_{j+1})}$ para todo $\forall j \in \mathbb{N}$ y una rama $\{x_{A_j}\}$ del árbol, tales que $\|x_{A_j} - y_j\| < \varepsilon_j$ para cualquier $j \in \mathbb{N}$.

Pongamos $n_0 = 0$. Por 1) de la definición de BCSBFDD existe $n_1 \geq 2$ y existe $y_0 \in F_{(n_0, n_1)}$ tal que $\|x_{A_0} - y_0\| < \varepsilon_0$ donde $A_0 = 0 \in \mathbb{N}^{<\omega}$.

Ahora supongamos que $n_1, \ldots, n_{j+1}, y_1, \ldots, y_j, A_1, \ldots, A_j$ han sido ya construidos. Pongamos $A_k = (p_1, \ldots, p_k)$ para $1 \leq k \leq j$. Como el árbol es topológicamente w-nulo tenemos que $0 \in \overline{\{x_{(A_j, p)} \colon p \in \mathbb{N}\}}^{\omega}$, entonces por el lema anterior, deducimos que existe $p_{j+1} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\operatorname{dist}\left(x_{(A_j, p_{j+1})}, F_{[n_{j+1}+1, +\infty)}\right) < \varepsilon_{j+1},$$

ya que $F_{[n_{j+1}+1, +\infty)}$ es un subespacio finito codimensional de X.

Entonces existe $n_{j+2} > n_{j+1} + 1$ y existe $y_{j+1} \in F_{(n_{j+1}, n_{j+2})}$ tales que $\|x_{A_{j+1}} - y_{j+1}\| < \varepsilon_{j+1}$ donde $A_{j+1} = (A_j, p_{j+1})$.

Esto finaliza la construcción inductiva de la rama $\{x_{A_j}\}$ satisfaciendo que $\|x_{A_j} - y_j\| < \varepsilon_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Finalmente obtenemos que $\sum_{j=0}^{\infty} \|x_{A_j} - y_j\| < 1/2K$, siendo $\{y_j\}$ una sucesión skipped block de $\{F_j\}$. Entonces $\{x_{A_j}\}$ es una rama del árbol $\{x_A\}$ la cual es equivalente a $\{y_j\}$ y por tanto acotadamente completa y esto termina la prueba del teorema. $\square$

Como ya hemos dicho es un problema abierto para espacios de Banach generales si la PCP está determinada por subespacios con base. En relación con este problema nos parece interesante la siguiente pregunta:

> ¿Tiene cada árbol seminormalizado y topológicamente w-nulo un subárbol lleno que sea básico y todavía topológicamente débil nulo?

Definición 2.14. Un subárbol se dice *lleno* cuando cada rama del subárbol, que es un nuevo árbol hecho con elementos del original, sigue siendo rama del árbol inicial y un árbol se dice básico si, visto como sucesión, es una sucesión básica para alguna reordenación.

Si X es un espacio de Banach sin la PCP, según el corolario anterior, se obtiene un árbol seminormalizado y topológicamente w-nulo sin ramas acotadamente completas. Ahora, supuesto que la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, se obtendría un subárbol básico seminormalizado topológicamente w-nulo que, de nuevo, carecería de ramas acotadamente completas, por ser lleno. En definitiva obtendríamos un árbol básico seminormalizado y topológicamente w-nulo sin ramas acotadamente completas, con lo que el subespacio generado por este árbol es un subespacio con base sin la PCP, por el anterior corolario. En definitiva, si la respuesta a nuestra pregunta es afirmativa, se obtendría respuesta afirmativa al problema de la determinación por subespacios con base de la PCP.

Si uno traslada esta pregunta al ambiente secuencial, dicha pregunta sería si cada sucesión w-nula y seminormalizada en un espacio de Banach contiene una subsucesión básica y w-nula, ya que el concepto lleno sería automático para sucesiones (la subsucesión de una subsucesión sigue siendo subsucesión de la sucesión original). Es sabido que la respuesta a esta nueva pregunta es afirmativa [21]. Sin embargo, siendo un poco más cuidadosos, la pregunta que realmente tendríamos que hacernos en ambiente secuencial sería si cada sucesión seminormalizada, o si se quiere, en la esfera, de forma que 0 esté en su cierre débil contiene una subsucesión básica verificando todavía que 0 esté en su cierre débil. El hecho de que cada sucesión seminormalizada de forma que 0 esté en su cierre débil contiene una subsucesión básica es un hecho bien conocido, pero lo que no sabemos es si esta subsucesión básica se puede obtener para que 0 siga estando en su cierre débil. Por tanto, la pregunta a la que nos gustaría responder es:

> ¿cada sucesión seminormalizada en un espacio de Banach de forma que 0 esté en su cierre débil admite una subsucesión básica verificando que 0 está todavía en su cierre débil?

Confiamos plenamente en que una respuesta afirmativa a esta pregunta daría respuesta afirmativa a la pregunta anterior planteada para árboles y, por tanto, resolvería afirmativamente el problema de la determinación por subespacios con base de la PCP, sin embargo no hemos sido capaces de responder a dicha pregunta.

CAPÍTULO 3

La propiedad de punto de continuidad convexa en espacios sin copias de ℓ_1

Dedicamos este capítulo a la propiedad del punto de continuidad convexa (CPCP). Como ya dijimos en el primer capítulo, también es un problema abierto si la CPCP está determinada por subespacios con base, aunque se sabe que está determinada por subespacios con una descomposición finito-dimensional [17], hecho que implica que la CPCP está determinada por subespacios separables. Nuestro primer objetivo es obtener una caracterización local, para subconjuntos, de la CPCP para espacios de Banach sin copias de ℓ_1 que nos conduzca a la determinación por subespacios con base de la CPCP en este ambiente, lo que será una nueva respuesta parcial al problema planteado.

Aunque podría pensarse que los resultados que podamos obtener para la CPCP son paralelos a los hechos para la PCP, la convexidad que impone el estudio de la CPCP va a hacer el trabajo bastante más difícil, ya que el lenguaje de árboles que se usó para el estudio de la PCP en el capítulo anterior, y que creemos deseable y aclarador, no nos ha sido posible implementarlo para el estudio de la CPCP. Esto va a hacer que los resultados fundamentales que expondremos en este capítulo tengan demostraciones bastante intrincadas y difíciles de escribir, a nuestro juicio.

Recordamos que un subconjunto C de un espacio de Banach X se dice que tiene la CPCP cuando cada subconjunto cerrado, acotado y convexo de C tiene un punto de $(w - \|\cdot\|)$-continuidad. Un espacio de Banach X tiene la CPCP si B_X tiene la CPCP.

3.1. Subconjuntos especiales del símplex de Poulsen: $P_{\{v_n\}}$-conjuntos

Como ya hemos dicho, nuestro primer objetivo es obtener una caracterización local de la CPCP para subconjuntos cerrados, acotados y convexos de un espacio de Banach que no contiene a ℓ_1, que va a ser una extensión de un resultado de [1], donde la CPCP está caracterizada para subconjuntos cerrados, acotados y convexos de c_0, usando subconjuntos en c_0 llamados P_0-símplices.

Hablando en sentido coloquial, en [1] se prueba que un subconjunto C cerrado, acotado y convexo de c_0 falla la CPCP si, y sólo si, C contiene isomórfica y afínmente un cierto subconjunto cerrado, acotado y convexo de c_0 llamado por los autores P_0-símplex. Además, este P_0-símplex tiene la propiedad de que su cierre w^* en ℓ_∞ es w^*-afínmente homeomorfo al símplex de Poulsen. Así el P_0-símplex construido en [1] puede verse como la c_0-parte de una copia del símplex de Poulsen en ℓ_∞. Realmente el P_0-símplex no es un símplex en el sentido de Choquet. El P_0-símplex fue construido en c_0, para dar un ejemplo de un conjunto fallando la CPCP y satisfaciendo la regularidad fuerte, una propiedad más débil que la CPCP, sobre la que no vamos a entrar.

El concepto de P_0-símplex fue generalizado en [22], llamado allí $P_{\{v_n\}}$-conjunto para espacios de Banach en general, y como consecuencia, fue probado en [22] que la CPCP está básicamente determinada para espacios de Asplund. Por tanto, nuestros resultados principales en este capítulo serán una extensión de lo hecho en [22].

Empezamos con alguna notación y preliminares:

Dada una sucesión básica $\{e_n\}$, para cada $x \in [e_n]$ y para cada intervalo de números enteros I, llamamos $x_{|I} = \sum_{n \in I} e_n^*(x) e_n$, siempre que esta suma exista.

El símplex de Poulsen, denotado por P es el conjunto en ℓ_2 construido en [33]. P es un símplex metrizable y compacto de Choquet y, salvo homeomorfismos afines, P es el único símplex, metrizable y compacto de Choquet satisfaciendo que $\overline{\text{Ext}(K)} = K$ [20]. Presentamos ahora brevemente el símplex de Poulsen.

Construimos símplices S_n en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, embebido en ℓ_2 de manera natural.

Sea $S_1 = [0, 1/2]$ y $S_2 = \text{co}\,(S_1 \cup (0, 1/2)) \subset \mathbb{R}^2$.

Ahora elegimos puntos $y_3, \ldots, y_k \in S_2$ formando una 2^{-2}-red para S_2, es decir, cada punto de S_2 dista de algún y_i menos de 2^{-2}.

Hacemos ahora $z_\ell = y_\ell + 2^{-\ell} e_\ell$ para cada $3 \le \ell \le k$, donde e_ℓ denota el ℓ-ésimo vector de la base usual de $\mathbb{R}^\ell$.

Definimos $S_\ell = \operatorname{co}(S_2 \cup \{z_3, \dots, z_\ell\}) \subset \mathbb{R}^\ell$ para $3 \leq \ell \leq k$. Ahora elegimos una 2^{-k}-red de S_k y definimos S_{k+1} por el mismo procedimiento.

Es claro que S_n es un símplex finito-dimensional de $\mathbb{R}^n$. Definimos finalmente el *símplex de Poulsen* como $P = \overline{\cup_n S_n}$

Empezamos con la definición de un $P_{\{v_n\}}$-conjunto. Cuando $\{v_n\}$ es la base usual de c_0, la familia de $P_{\{v_n\}}$-conjuntos coincide, topológicamente hablando, con el P_0-símplex construido en [1]. La idea de la definición, que difiere de la de P_0-símplex hecha en [1], es aislar las propiedades del símplex de Poulsen para que, con hipótesis adicionales, el nuevo conjunto falle la CPCP, como se verá más adelante.

Definición 3.1. Sea X un espacio de Banach. Fijamos:

i) Una sucesión nula $\{\varepsilon_n\}$ de números estrictamente positivos.

ii) Sucesiones $\{g_j\}_j$, $\{a_j\}_j$ de X con $g_1 = a_1$.

iii) Una sucesión estrictamente creciente $\{l_n\} \subset \mathbb{N}$ con $l_1 = 1$ y sea $l_0 = 0$.

Definimos:

- Una sucesión estrictamente creciente $\{m_n\}$ de números naturales por $m_1 = 1$ y $m_{n+1} = m_n + l_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y sea $m_0 = 0$.
- Una sucesión $\{v_j\} \subset X$ por $v_1 = a_1$ y $v_j = a_j - g_{j-m_{n-1}}$ para todo $j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, siendo n el único número natural tal que $m_{n-1} < j \leq m_n$.

Definimos ahora $K_n = \operatorname{co}\{a_j \colon 1 \leq j \leq m_n\}$ y $K = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n}$.

Nótese que $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots$.

Nótese también que:

a) $K = \overline{\mathrm{co}}\,\{a_j\colon\ j \in \mathbb{N}\}$.

b) K_n es cerrado y convexo para cada n.

c) K no es necesariamente acotado, en general.

Definimos un $P_{\{v_n\}}$-conjunto, como un tal conjunto K siempre que además para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifique:

d) $g_j \in K_n$ para todo j con $l_{n-1} < j \leq l_n$.

Obsérvese que al ser $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n$, tenemos que $g_j \in K_n$ para $1 \leq j \leq l_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

e) $\{g_j\}_{l_{n-1}<j\leq l_n}$ es una ε_n-red para K_n, es decir, $K_n \subset \bigcup_{i=l_{n-1}+1}^{l_n} B(g_i, \varepsilon_n)$.

Decimos que K es un $P_{\{v_n\}}$-conjunto débil nulo, siguiendo la definición anterior, cuando para cada $j \in \mathbb{N}$ se cumpla que $\{v_{m_n+j}\}_n \xrightarrow{w} 0$ (Obsérvese que dado j, el vector v_{m_n+j} está definido para n suficientemente grande).

Nótese que, siguiendo esta definición, se tiene:

f) $K_n \subset \mathrm{lin}\,\{v_k\colon\ 1 \leq k \leq m_n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo haremos por inducción sobre n.

i) $K_1 = \mathrm{co}\{a_1\} = \mathrm{co}\{v_1\} \subset \mathrm{lin}\{v_1\}$, ya que $m_1 = 1$

ii) Supongamos que $K_n \subset \mathrm{lin}\,\{v_k : 1 \leq k \leq m_n\}$. Por definición,

$$\begin{aligned} K_{n+1} &= \mathrm{co}\,\{a_k\colon\ 1 \leq k \leq m_{n+1}\} \\ &= \mathrm{co}\,\{\{a_j\colon\ 1 \leq j \leq m_n\} \cup \{a_j\colon\ m_n + 1 \leq j \leq m_{n+1}\}\} \\ &= \mathrm{co}\,\{K_n \cup \mathrm{co}\,\{a_j\colon\ m_n + 1 \leq j \leq m_{n+1}\}\}\,. \end{aligned}$$

Ahora bien, si $m_n + 1 \leq j \leq m_{n+1}$, entonces $a_j = v_j - g_{j-m_n}$, donde $v_j \in \operatorname{lin}\{v_k\colon 1 \leq k \leq m_{n+1}\}$ y $g_{j-m_n} \in K_n \subset \operatorname{lin}\{v_k\colon 1 \leq k \leq m_n\}$, pues $1 \leq j - m_n \leq l_n$. Es decir, $K_{n+1} \subset \operatorname{lin}\{a_k : 1 \leq k \leq m_{n+1}\}$.

g) $K = \overline{\{g_n\}}_{n \geq n_0}$ para todo $n_0 \in \mathbb{N}$.

h) Si K es acotado en norma, entonces $\sup_n \|v_n\| < +\infty$, pues $v_j = a_j - g_{j-m_n}$ para $m_n < j \leq m_{n+1}$ y $a_j, g_{j-m_n} \in K_{m_{n+1}}$.

Obsérvese también que:

$$\{a_j\}_{m_0 < j \leq m_1} = \{a_1\} = \{v_1\} = \{g_1\}$$
$$\{a_j\}_{m_1 < j \leq m_2} = \{a_2\} = \{v_1 + g_1\}$$

En general, si $n \geq 2$ el conjunto $\{a_j\}_{m_n < j \leq m_{n+1}}$ tiene l_n vectores, que son

$$\begin{aligned} a_{m_n+1} &= v_{m_n+1} + g_1, \\ a_{m_n+2} &= v_{m_n+2} + g_2, \\ &\dots \\ a_{m_n+l_n} &= a_{m_{n+1}} = v_{m_{n+1}} + g_{l_n}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

i) Supongamos por un momento que $\{v_n\}$ es una sucesión básica con sucesión de funcionales biortogonales $\{v_n^*\}$. Entonces $v_n^*(K) \geq 0$ para cada n y además $P_n(K_{n+1}) = K_n$, donde P_n denota la proyección n-ésima de la sucesión básica $\{v_n\}$.

Para ello, veamos que $v_i^*(K_n) \geq 0$ para cada i y para cada n. Eso es cierto si $n = 1$, ya que $K_1 = \{a_1\} = \{v_1\} = \{g_1\}$, por definición. Ahora, supuesto cierto para $p \leq n$, obsérvese que $v_i^*(g_j) \geq 0$ para cada i y para cada $1 \leq j \leq l_n$, ya que $\{g_j\}_{l_{p-1} < j \leq l_p}$ es una ε_p-red de K_p para cada p, por e). Además $v_i^*(a_j) \geq 0$ para cada i si $j \leq m_n$, ya que, por definición, $K_p = \operatorname{co}\{a_j\colon 1 \leq j \leq m_p\}$ para cada p.

Como, según se ha dicho en h), de (3.1) deducimos que $v_i^*(a_j) \geq 0$ para cada i si $j \leq m_{n+1}$ y, por tanto, que $v_i^*(K_{n+1}) \geq 0$. Esto demuestra que $v_n^*(K) \geq 0$ para cada n, por la definición de K.

Justificamos ahora que $P_n(K_{n+1}) = K_n$.

Un punto de K_{n+1} es, por definición, una combinación convexa de $\{a_i\}$ con $1 \leq i \leq a_{m_{n+1}}$, pero $a_{m_n+i} = v_{m_n+i} + g_i$ para $1 \leq i \leq l_n$ (recuérdese que $m_{n+1} = m_n + l_n$) y $g_i \in K_n$ si $1 \leq i \leq l_n$. Como $K_n = \mathrm{co}(a_1, \ldots, a_{m_n})$, se obtiene que $P_n(K_{n+1}) \in K_n$. Por otro lado, como $K_n \subset K_{n+1}$, llegamos a que $P_n(K_{n+1}) = K_n$.

En general, si K es un $P_{\{v_n\}}$-conjunto, la sucesión $\{v_n\}$ no es necesariamente una sucesión básica. Una de las claves de nuestro resultado principal será la construcción, bajo ciertas hipótesis, de un $P_{\{v_n\}}$-conjunto acotado, donde $\{v_n\}$ es una sucesión básica seminormalizada.

El próximo lema prueba que un $P_{\{v_n\}}$-conjunto con propiedades adicionales falla la CPCP.

Lema 3.2. *Si K es un $P_{\{v_n\}}$-conjunto acotado y débil nulo con $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|v_n\| > 0$, entonces K falla la CPCP.*

Demostración. Tomemos $j \in \mathbb{N}$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m_n + j < m_{n+1}$ para todo $n \geq n_0$, ya que $m_{n+1} = m_n + l_n$ y $\{l_n\}$ es estrictamente creciente. Además, por definición sabemos que $g_j + v_{m_n+j} = a_{m_n+j} \in K$ para todo $n \geq n_0$.

Como K es un $P_{\{v_n\}}$-conjunto débil nulo, entonces

$$\{a_{m_n+j}\} = \{g_j + v_{m_n+j}\} \xrightarrow{w} g_j \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Pero, por otro lado,

$$||a_{m_n+j} - g_j|| = ||v_{m_n+j}|| > \delta > 0 \quad \forall n \geq n_0.$$

Obsérvese que g_j no es punto de $(\omega - \|\cdot\|)$-continuidad y esto para cualquier $j \in \mathbb{N}$.

Sabemos que $K = \overline{\{g_j : j \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|} = \overline{\{g_j : j \in \mathbb{N}\}}^{w}$, por ser K convexo.

Por otro lado, como K es convexo, $\overline{K} = \overline{K}^w$ y, como K es cerrado, $K = \overline{K} = \overline{K}^w$, o sea, K es w-cerrado y al ser $g_j \in K \quad \forall j \in \mathbb{N}$, entonces $\overline{\{g_j : j \in \mathbb{N}\}}^{w} \subset K$. Luego $K = \overline{\{g_j : j \in \mathbb{N}\}}^{w}$.

Sea ahora U un ω-abierto relativo de K. Entonces existe $g_j \in U$ y existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{m_n+j} \in U$ para todo $n > n_1$ y $n \geq n_0$ y, como además $||a_{m_n+j} - g_j|| > \delta$, se tiene que $\mathrm{diam}(U) > \delta$ y, por tanto, K falla la CPCP. $\square$

3.2. Caracterización local de la CPCP sin copias de ℓ_1

Nuestro principal resultado es una caracterización local de la CPCP en términos de $P_{\{v_n\}}$-conjuntos.

En particular, empezando con un subconjunto C cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach X y suponiendo que C falla la CPCP y no contiene sucesiones equivalentes a la base usual de ℓ_1, se prueba que es posible construir un $P_{\{v_n\}}$-conjunto w-nulo en C, donde $\{v_n\}$ es una sucesión básica seminormalizada.

Esto también está probado en [22], suponiendo que X es un espacio Asplund, lo cual es una hipótesis más fuerte que suponer que C no contiene sucesiones equivalentes a la base usual de ℓ_1.

Además la hipótesis en [22] es global, esto es en X, y nuestra hipótesis es local, o sea en C.

La construcción en el siguiente teorema comparte el mismo esquema que la hecha en [22], pero hay una importante diferencia entre ambas, el $P_{\{v_n\}}$-conjunto construido en [22] se obtiene porque se supone un ambiente Asplund, siendo $\{v_n\}$ una sucesión básica seminormalizada shrinking y entonces $\{v_n\}$ es una sucesión w-nula.

Esta demostración no funciona si sólo se supone que el espacio de Banach no contiene copias de ℓ_1, ya que existen espacios de Banach sin copias de ℓ_1 que no tienen sucesiones básicas shrinking. De hecho, en [16] se construye un espacio de Banach G sin copias de ℓ_1 tal que cada subespacio infinito-dimensional separable tiene un dual no separable y entonces no hay sucesiones básicas shrinking en G. Recordemos que el subespacio generado por una sucesión básica shrinking tiene siempre dual separable.

Nosotros tomamos una condición más débil, que es la definición de $P_{\{v_n\}}$-conjunto w-nulo.

Probamos ahora la caracterización antes mencionada, donde se prueba también, hablando coloquialmente, que los espacios de Banach con dual separable que fallan la CPCP, contienen un símplex especial de Poulsen en su bidual. De hecho, lo que se consigue es un $P_{\{v_n\}}$-conjunto que es la X-parte de una copia del símplex de Poulsen en el bidual, extendiendo así lo que se hace en [1] para c_0.

Teorema 3.3. *Sea C un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach X. Supongamos que C no contiene sucesiones equivalentes a la base usual de ℓ_1. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes;*

i) C falla la CPCP.

ii) Existe una sucesión básica seminormalizada $\{v_n\}$ en X, tal que C contiene un $P_{\{v_n\}}$-conjunto w-nulo.

Además, si X^* es separable, entonces $\overline{P_{\{v_n\}}}^{w^*}$, el cierre en la topología w^* del $P_{\{v_n\}}$-conjunto en X^{**}, es afínmente w^*-homeomorfo al símplex de Poulsen.

Demostración. i) $\Rightarrow$ ii)

Supongamos que C falla la CPCP. Por el Lema 1.9 podemos suponer que C es cerrado, acotado, convexo y separable, que falla la CPCP y no contiene sucesiones equivalentes a la base usual de ℓ_1. Ahora bien, como la envolvente lineal cerrada de C es un subespacio separable de X, podemos suponer que X lo es.

Por tanto X se embebe isométricamente en un espacio de Banach Z con una base monótona normalizada $\{e_n\}$ con funcionales asociados $\{f_n\}$.

Tomemos por ejemplo $Z = C[0,1]$, el espacio de las funciones continuas en $[0,1]$ con la norma del supremo.

Como C falla la CPCP, podemos encontrar, por el Lema 1.5, un subconjunto convexo $A \subset C$ y un número $\delta > 0$ tales que cada w-abierto relativo de A tenga diámetro mayor que 2δ y, por tanto, $a \in \overline{A \setminus B(a,\delta)}^{w}$ $\forall a \in A$.

Ahora, para cada $a \in A$, fijamos una sucesión $\left\{y_j^a\right\} \subset A \setminus B(a,\delta)$ verificando que $\left\{y_j^a\right\} \xrightarrow{w} a$. Fijamos también una sucesión $\{\delta_j\}$ de números positivos, tal que $2\sum_{j=1}^{\infty}\delta_j < 1$, y sea $\{\varepsilon_n\}$ una sucesión nula decreciente de números positivos.

Fijada la sucesión $\{\varepsilon_n\}$ construimos un $P_{\{v_n\}}$-conjunto w-nulo contenido en C, para alguna sucesión básica seminormalizada $\{v_n\}$. Para esto construiremos inductivamente:

i) Una sucesión $\{l_n\}$ de enteros positivos, estrictamente creciente con $l_1 = 1$ y ponemos $l_0 = 0$.

ii) Conjuntos $\{r_j\}_{m_{n-1}<j\leq m_n}$ tales que $\{r_j\}$ es una sucesión de enteros, estrictamente creciente y ponemos $r_0 = 0$.

iii) Conjuntos $\{g_j\}_{m_{n-1}<j\leq m_n}$ tales que $\{g_j\}$ es una sucesión de A.

iv) Conjuntos $\{u_j\}_{m_{n-1}<j\leq m_n}$ tales que $\{u_j\}$ es una sucesión de Z.

v) Conjuntos $\{a_j\}_{m_{n-1}<j\leq m_n}$ tales que $\{a_j\}$ es una sucesión en A con $a_1 = g_1$.

Así siguiendo la Definición 3.1, definimos de i),iii) y v) las correspondientes

vi) sucesión estrictamente creciente de enteros $\{m_n\}$,

vii) subconjuntos $\{v_j\}_{m_{n-1}<j\leq m_n}$ en X,

viii) sucesión $\{K_n\}$ de subconjuntos de X.

Entonces tenemos que:

ix) $u_j \in [e_i : r_{j-1} < i \leq r_j]$

x) $||u_j - v_j|| < \delta_j$

xi) $||v_j|| > \delta/2$

xii) $g_j \in K_n$ para todo j con $l_{n-1} < j \leq l_n$

xiii) $\{g_j\}_{l_{n-1}<j\leq l_n}$ es una ε_n-red de K_n.

xiv) Para cada $j \in \mathbb{N}$ existe algún $g \in A$ y $p_j \in \mathbb{N}$ tales que $a_j = y^g_{p_j}$ y $\{p_j\}$ es estrictamente creciente.

- Comencemos la inducción con $n = 1$ y notemos $l_0 = 0 = m_0$ y $l_1 = 1 = m_1$. Es claro que $\operatorname{diam}(A) > 2\delta$ y, por tanto, existe $a_0 \in A$ con $\|a_0\| > \delta$.

  Ahora como $a_0 \in \overline{A \setminus B(a_0,\delta)}^{w}$, elegimos $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_{p_1}^{a_0}\| > \delta/2$, lo que es posible, ya que $\{y_j^{a_0}\} \xrightarrow{w} a_0$.

  Pongamos $v_1 = a_1 = g_1 = y_{p_1}^{a_0}$ y $K_1 = \{a_1\}$.

  Tomemos $r_1 > r_0 = 0$ tal que $\|v_{1|(r_1,+\infty)}\| < \delta_1$ y hagamos $u_1 = v_{1|[1,r_1]}$.

  Comprobamos que se verifican de ix) a xiv).

  ix) $u_1 = \sum_{j=1}^{r1} f_j(v_1)e_j \in [e_i : r_0 < i \leq r_1]$.

  x) $\|u_1 - v_1\| = \left\| \sum_{j>r_1} f_j(v_1)e_j \right\| = \|v_{1|(r_1,+\infty)}\| < \delta_1$.

  xi) $\|v_1\| = \|y_{p_1}^{a_0}\| > \delta/2$.

  xii) $l_0 = 0$, $l_1 = 1$, $l_0 < j \leq l_1 \;\Rightarrow j = 1$ $\{g_1\} = \{a_1\} = K_1$.

  xiii) $\{g_1\} = K_1$ es una ε_1-red para K_1.

  xiv) Sólo hemos definido p_1 con $a_1 = y_{p_1}^{a_0}$.

  Esto finaliza el primer paso de la construcción inductiva.

- Para $n = 2$ tenemos $m_2 = m_1 + l_1 = 2$ y si $m_1 < j \leq m_2$, entonces $1 < j \leq 2 \Rightarrow j = 2$.

  Definimos

$$V_j^n = V_2^2 = \bigcap_{k=1}^{r_1} \left\{ a \in A\colon\; f_k(a - g_1) < \frac{\delta_2}{2r_1} \right\}.$$

V_2^2 es un w-abierto relativo de A con $g_1 \in V_2^2$ y $\operatorname{diam}\left(V_2^2\right) > 2\delta$. Hemos fijado $\{y_j^{g_1}\} \subset A \setminus B(g_1, \delta)$ con $\{y_j^{g_1}\} \xrightarrow{w} g_1$. Entonces existe $p_2 > p_1$ tal que $y_{p_2}^{g_1} \in V_2^2 \subset A$. Pongamos $a_2 = y_{p_2}^{g_1}$ y $v_2 = a_2 - g_1$, entonces

$$\begin{aligned}
\|v_{2|[1,r_1]}\| &= \left\| \sum_{k=1}^{r_1} f_k(v_2) e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{r_1} |f_k(v_2)| \\
&= \sum_{k=1}^{r_1} |f_k(a_2 - g_1)| \\
&< \frac{r_1 \delta_2}{2r_1} = \frac{\delta_2}{2}.
\end{aligned}$$

Tomemos $r_2 > r_1$ tal que $\|v_{2|(r_2,+\infty)}\| < \delta_2/2$ y pongamos $u_2 = v_{2|(r_1,r_2]}$.

Definimos $K_2 = \operatorname{co}\{a_k \colon 1 \leq k \leq m_2\} = \operatorname{co}\{a_1, a_2\}$.

Por ser K_2 la envolvente convexa de un número finito de puntos, existen $l_2 > l_1$ y $\{g_j\}_{l_1 < j \leq l_2}$ en K_2 tales que $\{g_j\}_{l_1 < j \leq l_2}$ es una ε_2-red para K_2.

- Sea $n > 2$ y supongamos que hemos construido

$$\{l_j\}_{1 \leq j \leq n}, \{r_j\}_{1 \leq j \leq m_n}, \{p_j\}_{1 \leq j \leq m_n},$$
$$\{a_j\}_{1 \leq j \leq m_n}, \{u_j\}_{1 \leq j \leq m_n}, \{g_j\}_{1 \leq j \leq l_n}$$

De hecho, $m_{n+1} = 1 + \sum_{j=1}^{n} l_j$.

Ahora construiremos

$$\{r_j\}_{m_n < j \leq m_{n+1}}, \{p_j\}_{m_n < j \leq m_{n+1}}, \{u_j\}_{m_n < j \leq m_{n+1}}.$$

Tomemos $j \in \{m_n + 1, \ldots, m_{n+1}\}$.

Si $j = m_n + 1$, entonces r_{j-1} y p_{j-1} ya han sido construidos. Podemos suponer pues que, para $j \in \{m_n + 1, \ldots, m_{n+1}\}$, r_{j-1} y p_{j-1} ya han sido construidos.

Definimos

$$V_j^n = \bigcap_{k=1}^{r_{j-1}} \left\{ a \in A\colon\ f_k\left(a - g_{j-m_n}\right) < \frac{\delta_j}{2r_{j-1}} \right\}$$

Es claro que V_j^n es un w-abierto relativo de A que contiene a g_{j-m_n} y que diam $\left(V_j^n\right) > 2\delta$. Hemos fijado $\{y_p^{g_{j-m_n}}\} \subset A \setminus B(g_{j-m_n}, \delta)$ con $\{y_p^{g_{j-m_n}}\} \xrightarrow{w} g_{j-m_n}$, entonces existe $p_j > p_{j-1}$ tal que $y_{p_j}^{g_{j-m_n}} \in V_j^n \subset A$. Pongamos $a_j = y_{p_j}^{g_{j-m_n}}$ y $v_j = a_j - g_{j-m_n}$. Entonces

$$\begin{aligned}\left\|v_{j|[1,r_{j-1}]}\right\| &= \left\|\sum_{k=1}^{r_{j-1}} f_k\left(v_j\right)_k\right\| \le \left\|\sum_{k=1}^{r_{j-1}} \left|f_k\left(v_j\right)\right|\right\| \\ &= \sum_{k=1}^{r_{j-1}} \left|f_k\left(a_j - g_{j-m_n}\right)\right| < \frac{r_{j-1}\delta_j}{2r_{j-1}} = \frac{\delta_j}{2}.\end{aligned}$$

Tomemos $r_j > r_{j-1}$ tal que $\|v_{j|(r_j,+\infty)}\| < \delta_j/2$ y pongamos $u_j = v_{j|(r_{j-1},r_j]}$.

Esto completa la construcción de los conjuntos

$$\{r_j\}_{m_n<j\le m_{n+1}}, \{p_j\}_{m_n<j\le m_{n+1}}, \{u_j\}_{m_n<j\le m_{n+1}} \{a_j\}_{m_n<j\le_{n+1}}.$$

Definimos $K_{n+1} = \operatorname{co}\{a_k\colon\ 1 \le k \le m_{n+1}\}$. Entonces existen $l_{n+1} > l_n$ y $\{g_j\}_{l_n<j\le l_{n+1}}$ en K_{n+1} tales que $\{g_j\}_{l_n<j\le l_{n+1}}$ es una ε_{n+1}-red para K_{n+1}. Esto completa la construcción inductiva.

Ahora haciendo $K = \overline{\operatorname{co}}\{a_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$, es claro que K es un $P_{\{v_n\}}$-conjunto contenido en C, donde $\{v_n\}$ es una sucesión básica seminormalizada equivalente al bloque básico $\{u_n\}$ de la base $\{e_n\}$ por ix), x) y xi).

Nótese que

$$\|u_j - v_j\| = \left\|v_{j|[1,r_{j-1}]} + v_{j|(r_j+\infty)}\right\| \le \frac{\delta_j}{2} + \frac{\delta_j}{2} = \delta_j$$

y también

$$\|v_j\| = \|a_j - g_{j-m_n}\| = \left\|y_{p_j}^{g_{j-m_n}} - g_{j-m_n}\right\| \geq \delta > \frac{\delta}{2}$$

pues $y_{p_j}^{g_{j-m_n}} \in A \setminus B(g_{j-m_n}, \delta)$.

Veamos que K es un $P_{\{v_n\}}$-conjunto w-nulo. Tomemos $j \in \mathbb{N}$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m_n + j < m_{n+1}$ para todo $n \geq n_0$. Además, de la definición sabemos que $g_j + v_{m_n+j} = a_{m_n+j} \in K$ para cualquier $n \geq n_0$.

Por la construcción de $\{a_n\}$ es claro que $a_{m_n+j} = y_{p_{m_n+j}}^{g_j}$ para $n \geq n_0$ y que $\{y_{p_{m_n+j}}\} \xrightarrow{w} g_j$. Por tanto, $\{v_{m_nj}\} = \{a_{m_n+j} - g_j\} \xrightarrow{w} 0$ y esto para cualquier $j \in \mathbb{N}$. En consecuencia, K es un $P_{\{v_n\}}$-conjunto ω-nulo.

ii) $\Rightarrow$ i)

Si K es un $P_{\{v_n\}}$-conjunto w-nulo contenido en C siendo $\{v_n\}$ semi-normalizada, entonces $\text{ínf}_n \|v_n\| > 0$ y K es acotado. Entonces, por el Lema 3.2, K falla la CPCP y, por tanto, C falla la CPCP.

Demostramos ahora que $\overline{K}^{w^*}$ es afínmente homeomorfo al símplex de Poulsen, suponiendo que X^* es separable. Por la universalidad del símplex de Poulsen ya comentada, esto es equivalente a decir que $\overline{K}^{w^*}$ es un símplex de Choquet cuyos puntos extremos son w^*-densos.

Comencemos probando que $\overline{K}^{w^*}$ es un símplex de Choquet. Al ser X^* separable, la sucesión básica $\{v_n\}$ obtenida en la demostración anterior se puede suponer shrinking, ya que se ha obtenido como bloque básico de la base del espacio Z donde hemos embebido X, y en este caso, X^* es separable, la base de Z se puede suponer shrinking, por [39]. Como K es un $P_{\{v_n\}}$-conjunto, tenemos, siguiendo la definición, que $K = \overline{\cup_n K_n}$.

Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$ la proyección natural que denotamos $P_n : [v_n]^{**} \to [v_i \colon 1 \leq i \leq m_n]$ y que no es más que la doble adjunta de la correspondiente proyección básica de $[v_n]$ sobre las primeras m_n

coordenadas. Recordemos que la sucesión $\{m_n\}$ viene asociada a K, según la definición de $P_{\{v_n\}}$-conjunto.

Del apartado i) en la definición de $P_{\{v_n\}}$-símplex tenemos para $m > n$ que $P_n(K_m) = K_n$, de donde $P_n(K) = K_n$ para cada n. Llamemos π_n a la restricción de P_n a K_{n+1} y $\Omega = \varprojlim(\{K_n\},\{\pi_n\})$, el límite inverso del sistema (K_n, π_n). Es sabido que Ω es un símplex de Choquet, según se vio en la segunda sección del primer capítulo, y que Ω es el conjunto de sucesiones $\{w_n\}_n \in ([v_n]^{**}, w*)^{\mathbb{N}}$ con $w_n \in K_n$ y $w_n = \pi_n(w_{n+1})$ para cada n. En Ω se considera la topología producto de $([v_n]^{**}, w*)^{\mathbb{N}}$ inducida, con la que Ω es un subconjunto compacto y convexo.

Basta entonces comprobar que Ω y $\overline{K}^{w^*}$ son afínmente homeomorfos para deducir que $\overline{K}^{w^*}$ es un símplex de Choquet. Para esto definimos $f : \overline{K}^{w^*} \to \Omega$ mediante $f(x^{**}) = \{P_n\,(x^{**})\}_n$ para cada $x^{**} \in \overline{K}^{w^*}$. Claramente f está bien definida, es afín y continua.

Si $w = \{w_n\} \in \Omega$, como $P_n(w_m) = w_n$ si $m > n$, podemos definir $x^{**} = w^* - \text{lím}_n\, w_n$ y obtenemos que $x^{**} \in \overline{K}^{w^*}$ con $f(x^{**}) = w$. Por tanto f es sobreyectiva. La existencia del límite $w^* - \text{lím}_n\, w_n$ (ver 1.12) se debe al hecho de que la sucesión $\{w_n\}$ es una sucesión de sumas parciales de la forma $\{\sum_{i=1}^{m_n} \lambda_i v_i\}$, ya que $P_n(w_{n+1}) = w_n$ para cada n. Como $\{w_n\}$ es acotada, por ser $w_n \in K_n$, se obtiene la existencia del límite $\text{lím}_n\, w_n$ para la topología w^* del hecho de que $\{v_n\}$ es shrinking.

Para comprobar la inyectividad de f, tomemos x^{**}, $y^{**} \in \overline{K}^{w^*}$ con $f(x^{**}) = f(y^{**})$. Entonces $P_n(x^{**}) = P_n(y^{**})$ para cada n y deducimos que

$$x^{**} = w^* - \lim_n P_n\,(x^{**}) = w^* - \lim_n P_n\,(y^{**}) = y^{**},$$

gracias a que $\{v_n\}$ es shrinking, con lo que se demuestra la inyectividad de f y, por tanto, que $\overline{K}^{w^*}$ es un símplex de Choquet, al ser afínmente homeomorfo a Ω.

Vayamos finalmente ahora a probar que el conjunto de puntos extremos de $\overline{K}^{w^*}$ es w^*-denso.

Siguiendo la definición de $P_{\{v_n\}}$-conjunto, se tiene que $\{a_j\}_{1\leq j\leq m_n} \subset \mathrm{Ext}(K_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora veamos que K_n es una cara, subconjunto extremal, de $\overline{K}^{w^*}$ para cada n. Si $\alpha, \beta \in \overline{K}^{w^*}$ y $\frac{\alpha+\beta}{2} \in K_n$, entonces $v_i^*(\alpha) = v_i^*(\beta) = 0$ siempre que $m_n < i$. Teniendo en cuenta que $v_i^*\left(\overline{K}^{w^*}\right) \subset \mathbb{R}_0^+$, por ser $v_i^*(K) \subset \mathbb{R}_0^+$ para cada i (ver i) en la definición de $P_{\{v_n\}}$-conjunto), deducimos que $\alpha, \beta \in K_n$. Entonces $\{a_j\}_{1\leq j\leq m_n} \subset \mathrm{Ext}(K_n) \subset \mathrm{Ext}(\overline{K}^{w^*})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero K es $P_{\{v_n\}}$-conjunto débil nulo y, por tanto,

$$\{g_i\} \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ext}\,(K_n)}^{w^*} \subset \overline{\mathrm{Ext}\left(\overline{K}^{w^*}\right)}^{w^*}.$$

Como $\{g_i\}$ es denso en K, deducimos que el conjunto de puntos extremos de $\overline{K}^{w^*}$ es w^*-denso en $\overline{K}^{w^*}$, como se quería. Esto finaliza la demostración de que $\overline{K}^{w^*}$ es afínmente w^*-homeomorfo al símplex de Poulsen, si X^* es separable. □

Por supuesto, es posible demostrar que el conjunto $\overline{K}^{w^*}$ en el teorema anterior es afínmente w^*-homeomorfo al símplex de Poulsen, si X es un espacio de Asplund sin la CPCP. Para ello, recuérdese que la CPCP está separablemente determinada para subconjuntos, lema 1.9, y que el dual de un subespacio separable de un espacio de Asplund es separable. Sin embargo, no sabemos si esto se puede hacer también en el ambiente de los espacios de Banach sin copias de ℓ_1.

Finalizamos este capítulo con una nueva respuesta parcial al problema de la determinación por subespacios con base de la CPCP, consecuencia inmediata de lo hecho hasta ahora.

Corolario 3.4. *Sea X un espacio de Banach sin subespacios isomorfos a ℓ_1. Entonces X verifica la CPCP si, y sólo si, cada subespacio con base de X verifica la CPCP.*

Demostración. La condición necesaria es evidente. Para la suficiente, si X falla la CPCP, se tiene que B_X falla la CPCP y, aplicando el resultado anterior, se obtiene un $P_{\{v_n\}}$-conjunto w-nulo K en B_X, siendo $\{v_n\}$ una sucesión básica seminormalizada. Como K vive en el subespacio generado por $\{v_n\}$, que es un subespacio con base de X, y K falla la CPCP, también por el teorema anterior, se obtiene un subespacio con base de X sin CPCP. □

Índice alfabético

Bibliografía

[1] S. Argyros, E. Odell, H. Rosenthal. *On certain convex subsets of c_0*. Lecture Notes in Math. 1332. Functional Analysis. Berlin 1988, 80–111.

[2] S.F. Bellenot. *Skipped blocking and other decompositions in Banach spaces.* Internat. J. Math. 17 (2006), no. 2, 129-141.

[3] J. Bourgain. *La propriété de Radon-Nikodým.* Publications de l'Université Pierre et Marie Curie. No. 36 (1979).

[4] J. Bourgain. *Dentability and finite-dimensional decompositions.* Studia Math. 67 (1980), 135–148.

[5] J. Bourgain, D. Fremlin, M. Talagrand. *Pointwise compact sets of Baire-measurable functions.* Amer. J. Math. 100 (4), (1978), 845–886.

[6] J. Bourgain, H. P. Rosenthal. *Geometrical implications of certain finite dimensional decompositions.* Bull. Belg. Math. Soc. Simon Steven 32 (1980), 54–75.

[7] J. Bourgain, H. P. Rosenthal. *Martingales valued in certain subspaces of L^1.* Israel J. Math. 37 (1980), 54–75.

[8] J. Dugunji. *Topology.* Allyn and Bacon series in advances mathematics. Chicago 1981.

[9] S. Dutta, V. P. Fonf. *On tree characterizations of G_δ-embeddings and some Banach spaces.* Israel J. Math. 167 (2008), 27–48.

[10] K. Floret. *Weakly compact sets.* Lecture Notes in Math. 1980.

[11] N. Ghoussoub, G. Godefroy, B. Maurey and W. Schachermayer. *Some topological and geometrical structures in Banach spaces.* Memoirs of the Amer. Math. Soc. 1987.

[12] N. Ghoussoub, B. Maurey. *G_δ-embeddings in Hilbert spaces.* J. Funct. Anal. 61 (1985), 72–97.

[13] N. Ghoussoub and B. Maurey. *H_δ-embeddings in Hilbert space and optimization on G_δ-sets.* Mem. of the Amer. Math. Soc. Vol. 62, 349. 1986.

[14] N. Ghoussoub and B. Maurey. *G_δ-Embeddings in Hilbert spaces II.* J. Funct. Anal, 78. 1988, (271-305).

[15] N. Ghoussoub, B. Maurey and W. Schachermayer. *A counterexample to a problem on points of continuity in Banach spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. 99. 1987, (278-282).

[16] W. T. Gowers. *A Banach space not containing c_0, ℓ_1 or a reflexive subspace*. Trans. Amer. Math. Soc. 344, no. 1 (1994), 407–420.

[17] D. E. G. Hare. *An extension of a Structure Theorem of Bourgain.* J. Math. Anal. Appl. 147 (1990), 599–603.

[18] R. C. James. *Some interesting Banach spaces.* Rocky Mountain Journal of Math. 23, 3. 1993, (911-937).

[19] A. Lazar, J. Lindenstrauss. *Banach spaces whose duals are L_1 spaces and their representing matrices.* Acta Math. 120 (1971), 165–193.

[20] L. Lindenstrauss, G. Olson, Y. Sternfeld. *The Poulsen simplex.* Ann. Inst. Fourier. Grenoble 28 (1978), 91–114.

[21] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces I.* Springer Verlag. Berlin 1977.

[22] G. López. *The convex point of continuity property in Asplund spaces.* J. Math. Anal. Appl. 239 (1999), 264–271.

[23] G. López, B. Bossard. *The point of continuity property: descriptive complexity and ordinal index.* Serdica Math. J. 24 (1998), 199–214.

[24] G. López-Pérez. *Banach spaces with many boundedly complete basic sequences failing PCP.* J. Funct. Anal. 259 (2010), 2139–2146.

[25] G. López Pérez, J. Soler-Arias. *The convex point of continuity property in Banach spaces not containing ℓ_1,* J. Math. Anal. Appl., 378 (2) (2011), 734–740.

[26] G. López-Perez, J. Soler-Arias. *The point of continuity property in Banach spaces not containing ℓ_1.* Por aparecer en Israel J. Math.

[27] G. López-Pérez, J. Soler-Arias. *A tree characterization of the point of continuity property in general Banach spaces.* Por aparecer en Proc. Amer. Math. Soc.

[28] G. López-Pérez, J. Soler-Arias. *Trees and Point of Continuity Property in Banach spaces* Por aparecer en Extracta Mat.

[29] W. Lusky. *On separable Lindenstrauss spaces.* J. Funct. Anal. 26 (1977), 103–120.

[30] E. Odell, T. Schlumprecht. *Trees and branches in Banach spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. 354 (10) (2002), 4085–4108.

[31] R. R. Phelps. *Lectures of Choquet's theorem.* Lecture Notes in Mathematics, 1757. Springer-Verlag 2001.

[32] R. R. Phelps. *Dentability and extreme points in Banach spaces.* J. Functional Analysis 17 (1974), 78–90.

[33] E. T. Poulsen. *A simplex with dense extreme points.* Ann. Inst. Fourier. Grenoble, 11 (1961), 83–87.

[34] H. P. Rosenthal. *Pointwise compact subsets of the first Baire class.* Amer. J. Math. 99 (2) (1977), 362–378.

[35] H. P. Rosenthal. *Boundedly complete weak-Cauchy basic sequences in Banach spaces with PCP.* J. Funct. Anal. 253 (2007), 772–781.

[36] H. P. Rosenthal. *Weak* -Polish Banach Spaces.* J. Funct. Anal. 76 (1988), 267–316.

[37] W. Schachermayer. *The Radon-Nikodym property and the Krein-Milman property are equivalent for strongly regular sets.* Trans. of the Amer. Math. Soc. 303 (2) (1987), 673–687.

[38] I. Singer. *Bases in Banach spaces I.* Springer-Verlag. Berlin 1970.

[39] M. Zippin. *Banach spaces with separable duals.* Trans. Amer. Math. Soc. 310 (1) (1988), 371–379.